УДК 512.542

Н.С. Косенок

Конечные группы с заданными добавлениями к максимальным подгруппам силовских подгрупп

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Строение группы тесно связано со свойствами максимальных подгрупп ее силовских подгрупп. Так, в работе [1] было доказано, что группа сверхразрешима, если все такие ее подгруппы нормальны. В дальнейшем было доказано, что группа G сверхразрешима, если: либо каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из G c-нормальна в G [2], либо каждая такая подгруппа дополняема в G [3]. В работе [4] было установлено, что группа G нильпотентна (сверхразрешима), если каждая максимальная подгруппа любой ее силовской подгруппы обладает нильпотентным (соответственно, сверхразрешимым) добавлением в G. В данной работе мы даем аналогичные утверждения для других классов конечных групп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. И пусть H – подгруппа группы G. Тогда подгруппу T группы G назовем $\mathfrak{F}$-s-добавлением к H в G, если $HT = G$ и $T/T \cap H_G \in \mathfrak{F}$. В этом случае мы также говорим, что H является $\mathfrak{F}$-s-добавляемой в G. В частности, мы говорим, что H p-нильпотентно s-добавляема в G и p-сверхразрешимо s-добавляема в G, если $G = HT$ и $T/T \cap H_G$ p-сверхразрешимая (соответственно, p-нильпотентеная) группа.

Пример. Пусть A, B – два экземпляра группы кватернионов порядка 4. И пусть G – произведение этих групп с объединенным центром.

Тогда ясно, что подгруппа A не имеет в группе G абелевого добавления, но в то же время $G = AB$, где $B/B \cap A_G$ – абелева группа. Таким образом, подгруппа A абелево s-добавляма в G.

Основные свойства $\mathfrak{F}$-s-добавлений отражены в следующей лемме.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственный гомоморф, то есть гомоморф $\mathfrak{F}$ содержит каждую подгруппу каждой своей группы. И пусть H – подгруппа группы G. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Если T – $\mathfrak{F}$-s-добавление к H в G и $K \trianglelefteq G$, то TK/K – $\mathfrak{F}$-s-добавление к HK/K в G/K.*

(2) *Пусть $K \trianglelefteq G$ и $K \leq H$, T. Тогда подгруппа T является $\mathfrak{F}$-s-добавлением к H в G тогда и только тогда, когда T/K – $\mathfrak{F}$-s-добавление к H/K в G/K.*

(3) *Если $H \leq D \leq G$ и T – $\mathfrak{F}$-s-добавление к H в G, то H_G $(T \cap D)$ – $\mathfrak{F}$-s-добавление к H в D.*

Доказательство. (1) Пусть T – $\mathfrak{F}$-s-добавление к H в G. Тогда $TH = G$ и $T/T \cap H_G \in \mathfrak{F}$. Поскольку $T \cap H_G \leq T \cap KH_G$, то

$$(TK/K)(H_GK/K) / (H_GK/K) \simeq TKH_G/H_GK \simeq T/(T \cap KH_G) \in \mathfrak{F}.$$

Но $H_G K/K \leq (HK/K)_{G/K}$, следовательно,

$$(TK/K) / (TK/K) \cap (HK/K)_{G/K} \in \mathfrak{F}.$$

Ясно также, что $(TK/K)(HK/K) = G/K$.

(2) Мы должны доказать только необходимость, так как достаточность следует из (1). Пусть $(T/K)(H/K) = G/K$ и

$$(T/K) / (T/K) \cap (H/K)_{G/K} \in \mathfrak{F}.$$

Ясно, что $(H/K)_{G/K} = H_G/K$. Это ведет к

$$T/T \cap H_G \simeq (T/K) / (T/K) \cap (H_G/K) = (T/K) / (T \cap H_G) / K \in \mathfrak{F}.$$

Следовательно, T – $\mathfrak{F}$-s-добавление к H в G.

(3) Согласно (1), TH_G/H_G является $\mathfrak{F}$-s-добавлением к H/H_G в G/H_G. Следовательно, при $H_G \neq 1$ по индукции имеем, что

$$(H/H_G)_{G/H_G}((TH_G/H_G) \cap (D/H_G)) = H_G (T \cap D)/H_G$$

является $\mathfrak{F}$-s-добавлением к H/H_G в D/H_G. Применяя теперь (2) видим, что $H_G (T \cap D)$ является $\mathfrak{F}$-s-добавлением к H в D. Если же $H_G = 1$, то $H_G(T \cap D) = T \cap D$, $H(T \cap D) = HT \cap D = D$. Кроме того, в этом случае $(T \cap D) / (T \cap D) \cap H_D \in \mathfrak{F}$, поскольку $\mathfrak{F}$ – наследственный гомоморф. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть N – нeединичная p-разрешимая нормальная подгруппа группы G с p-сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N, p-сверхразрешимо s-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

Следствие 1 [4]. *Пусть N – неединичная разрешимая нормальная подгруппа группы G со сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N имеет сверхразрешимое s-добавление в G, то G сверхразрешима.*

Теорема 2. *Пусть N – неединичная разрешимая нормальная подгруппа группы G с p-сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $F(N)$, p-сверхразрешимо s-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

Следствие 2 [4]. *Пусть N – неединичная разрешимая нормальная подгруппа группы G со сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $F(N)$ имеет сверхразрешимое s-добавление в G, то G сверхразрешима.*

Группа G называется p-замкнутой, если ее силовская p-подгруппа нормальна.

Теорема 3. *Пусть G – группа, имеющая неединичную нормальную подгруппу N с p-замкнутой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N p-замкнуто s-добавляема в G, то G p-замкнута.*

Теорема 4. *Пусть G – группа, имеющая неединичную нормальную подгруппу N с p-нильпотентной факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N p-нильпотентно s-добавляема в G, то G p-нильпотентна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Srinivasan S.*** Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups. Israel J. Math, 35 (1990), 210-214.
2. ***Wang Y.*** c-normality of groups and its properties. J. Algebra, 180 (1996), 954-965.
3. ***Wang Y.*** Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented. J. Algebra, 224 (2000), 467-478.
4. ***Guo Wenbin, Shum K.P., Skiba A.N.*** G-Covering Subgroup Systems for the Classes of supersoluble and nilpotent Groups // Препринт ГГУ, № 21, Гомель, 2002.