

Волновые пакеты в цилиндрической оболочке с переменными параметрами, лежащей на неоднородном вязкоупругом основании

Введение. Рассматривается задача о распространении локализованных волн в длинной цилиндрической оболочке с переменными в продольном направлении толщиной, плотностью, модулем Юнга и коэффициентом Пуассона. Оболочка лежит на неоднородном винклеровском основании. Волновое движение описывается системой уравнений, в основу которых положены гипотезы Тимошенко [1].

Решение задачи строится в виде локализованных семейств изгибных волн, бегущих в продольном направлении. При построении решения используется метод, предложенный в работе [2]. В [3] решена аналогичная задача для оболочки, которая описывается уравнениями, основанными на гипотезе Кирхгофа-Лява. Целью настоящей работы является исследование бегущих в осевом направлении пакетов изгибных волн с учетом поперечных сдвигов. Осесимметричное решение задачи для случая оболочки типа Тимошенко с постоянными в продольном направлении толщиной, плотностью, модулем Юнга и коэффициентом Пуассона построено в статье [4].

1. Постановка задачи. Осесимметричное движение цилиндрической оболочки с переменными параметрами описывается уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} - \rho^* h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} = 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} - \frac{Q_2}{R} - \rho^* h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t_1^2} = 0, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} - \frac{T_2}{R} - C_\alpha^* u_3 - C_\gamma^* \frac{\partial u_3}{\partial t_1} - \rho^* h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t_1^2} = 0, \\ \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} - \frac{Q_2}{12} - \frac{\rho^* h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t_1^2} = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - \frac{Q_1}{12} - \frac{\rho^* h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} = 0, \quad S_1 - S_2 - \frac{H_2}{R} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь α – продольная координата, u_1, u_2, u_3 – проекции перемещений на орты до деформации, φ_1, φ_2 – углы поворота нормального волокна, t_1 – время, R – радиус оболочки, h – толщина оболочки, ρ^* – плотность, $C_\alpha^*(\alpha), C_\gamma^*(\alpha)$ – переменные коэффициенты постели и вязкости винклеровского неоднородного основания, на котором лежит оболочка.

Соотношения для тангенциальных усилий и моментов примем в виде

$$\begin{aligned} T_1 = K(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_2 = K(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad S_1 = Gh\Omega + H/R, \quad S_2 = Gh\Omega, \\ M_1 = D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_2 = D(\kappa_2 + \nu \kappa_1), \quad H_1 = H_2 = H = D(1 - \nu)\tau, \\ K = E^* h / (1 - \nu^2), \quad D = E^* h^3 / (12 - 12\nu^2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где E^*, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно.

Перерезывающие усилия в модели Тимошенко определяются по формулам

$$Q_1 = Gh(\varphi_1 - \gamma_1), \quad Q_2 = Gh(\varphi_2 - \gamma_2), \quad G = E^* / (2 + 2\nu). \quad (1.3)$$

Деформации изгиба и кручения вычисляются по формулам

$$\kappa_1 = \partial \varphi_1 / \partial \alpha; \kappa_2 = 0, \quad 2\tau = -\partial \varphi_2 / \partial \alpha + \omega_1 / R. \quad (1.4)$$

Величины $\Omega = \omega_1 + \omega_2$, ε_1 и ε_2 суть тангенциальные деформации, причем

$$\omega_1 = \partial u_2 / \partial \alpha, \quad \omega_2 = 0, \quad \varepsilon_1 = \partial u_1 / \partial \alpha, \quad \varepsilon_2 = -u_3 / R. \quad (1.5)$$

Углы поворота нормали γ_1 и γ_2 определяются соотношениями

$$\gamma_1 = -\partial u_3 / \partial \alpha, \quad \gamma_2 = -u_2 / R. \quad (1.6)$$

Подстановка формул (1.2)–(1.6) в (1.1) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\rho(1-v^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{(E'hv + Eh'v)(1-v^2) + E'hv'(1+v^2)}{Eh(1-v^2)} w + \\ + \frac{(E'h + Eh')(1-v^2) + 2E'hvv'}{Eh(1-v^2)} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2}{1-v} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - w - \frac{\rho(1-v^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \frac{E'hv' - Eh'v - E'h - Eh' - E'hv}{Eh(1+v)} \varphi - \\ - \frac{E'hv' - Eh'v - E'h - Eh' - E'hv}{Eh(1+v)} \frac{\partial w}{\partial x} - \tilde{C}_\alpha w - C_\gamma \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 6R^2 \frac{1-v}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) - \frac{\rho(1-v^2)}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{(E'h + 3Eh')(1-v^2) + 2E'hvv'}{Eh(1-v^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где безразмерные величины u, w, x, t, ρ, E введены следующим образом:

$$u_1 = Ru, \quad u_3 = \bar{\kappa}w, \quad \alpha = Rx, \quad t_1 = t_c t, \quad \rho^* = \rho_c \rho, \quad E^* = E_c E; \quad (1.8)$$

$$\rho_c = \rho^*(0), \quad E_c = E^*(0), \quad t_c = \sqrt{\rho_c R^2 / E_c}.$$

Здесь u, w – соответственно продольное и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки, $\varphi = \varphi_1$ – угол поворота нормали, характеризующий поперечные сдвиги, t_c – характерное время. При этом

$$\tilde{C}_\alpha = C_\alpha^* \frac{R^2}{E^* h}, \quad C_\gamma = C_\gamma^* \frac{R}{E^* h}. \quad (1.9)$$

Для удобства примем систему уравнений (1.7) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} + B_1(x) \frac{\partial w}{\partial x} + C_1(x) w + E_1(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_2(x) \varphi + B_2(x) \frac{\partial w}{\partial x} + C_2(x) \frac{\partial u}{\partial x} + D_2(x) w + E_2(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \tilde{C}_\alpha(x) w - C_\gamma(x) \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + A_3(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) + B_3(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_3(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{E'h[1-v^2] + E(h'[1-v^2] + 2hvv')}{Eh[1-v^2]}, \quad C_1 = -\frac{E'hv[1-v^2] + E(h'v[1-v^2] + hv'[1+v^2])}{Eh[1-v^2]}, \\ B_1 = -v, \quad E_1 = E_3 = -\frac{\rho(1-v^2)}{E}, \quad A_2 = B_2 = -\frac{E'hv' - Eh'v - E'h - Eh' - E'hv}{Eh[1+v]}, \quad D_2 = -\frac{2}{1-v}, \\ C_2 = \frac{2v}{1-v}, \quad E_2 = -\frac{2\rho(1+v)}{E}, \quad A_3 = -6R^2 \frac{1-v}{h^2}, \quad B_3 = \frac{E'h[1-v^2] + E(3h'[1-v^2] + 2hvv')}{Eh[1-v^2]}, \end{aligned}$$

а также введем обозначение

$$\mathbf{V} = [u, w, \varphi].$$

2. Построение асимптотического решения. Пусть в начальный момент времени на поверхности оболочки задан волновой пакет (ВП) с центром на параллели $x = 0$:

$$\begin{aligned} V|_{t=0} &= V^\circ(\zeta, \varepsilon) \exp\{i\varepsilon^{-1} S_0(x)\}, \\ \dot{V}|_{t=0} &= i\varepsilon \vartheta^\circ(\zeta, \varepsilon) \exp\{i\varepsilon^{-1} S_0(x)\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} S_0(x) &= a_0 x + \frac{1}{2} b_0 x^2, \quad \text{Im } b_0 > 0, \quad a_0 > 0, \\ V^\circ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} u_k^\circ(\zeta), \quad \vartheta^\circ = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \vartheta_k^\circ(\zeta), \quad \zeta = \varepsilon^{-1/2} x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $u_k^\circ(\zeta)$, $\vartheta_k^\circ(\zeta)$ – полиномы с комплексными коэффициентами, ε – малый параметр, характеризующий изменчивость волн в продольном направлении.

Будем изучать бегущие в продольном направлении изгибные волны. Асимптотический анализ системы (1.7) показывает, что для изгибных волн

$$u \sim \varepsilon, \quad w \sim 1, \quad \varphi \sim \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Положим

$$u = \varepsilon u_n, \quad w = w_n, \quad \varphi = \varepsilon \varphi_n, \quad u_n, w_n, \varphi_n \sim 1. \quad (2.4)$$

Решение системы (1.7) будем искать в виде волнового пакета с центром на параллели $x = q_n(t)$, которую в дальнейшем будем называть центром ВП.

Будем считать, что коэффициент постели $\tilde{C}_\alpha(x)$ достаточно велик, так что выполняются соотношения

$$\tilde{C}_\alpha = \varepsilon^{-2} C_\alpha, \quad C_\alpha, C_\gamma, \rho, E \sim 1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Перейдем к локальной системе координат, связанной с центром бегущего ВП:

$$x = q_n(t) + \varepsilon^{1/2} \xi_n. \quad (2.6)$$

Решение системы (1.7) будем строить в виде [2]:

$$\mathbf{V}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \mathbf{V}_{n,k} \exp\{i\varepsilon^{-1} S_n(\xi_n, t, \varepsilon)\}, \quad (2.7)$$

$$S_n = \int \omega_n(t) dt + \varepsilon^{1/2} p_n(t) \xi_n + \frac{1}{2} \varepsilon b_n(t) \xi_n^2, \quad \text{Im } b_n(t) > 0, \quad (2.8)$$

где $\omega_n(t)$ – мгновенная частота колебаний, $p_n(t)$ – волновое число, $\mathbf{V}_{n,k}(\xi, t)$ – полиномы аргумента ξ_n с коэффициентами, зависящими от t , а комплексная функция $b_n(t)$ характеризует ширину ВП.

Подстановка (2.7)–(2.8) в уравнения (1.7) приводит к последовательности уравнений в операторном виде

$$\sum_{j=0}^k \mathbf{L}_{n,j} \mathbf{V}_{n,k-j} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Элементы матрицы $\mathbf{L}_{n,0}$ имеют вид

$$\begin{aligned} l_{11} &= -E_1(\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2 - p_n^2, \quad l_{12} = i p_n B_1, \quad l_{22} = -E_2(\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2 - p_n^2 - C_\alpha, \\ l_{32} &= i p_n A_3, \quad l_{33} = -E_3(\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2 - p_n^2, \quad l_{13} = l_{21} = l_{23} = l_{31} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Операторы $\mathbf{L}_{n,1}$, $\mathbf{L}_{n,2}$ приведены в [4], элементы матрицы $\mathbf{N}_n$ имеют вид:

$$\begin{aligned} n_{11} &= -i(A_1 p_n - 2\dot{q}_n E_1'(\omega_n - \dot{q}_n p_n) + E_1(2(\dot{q}_n \dot{p}_n - \ddot{\omega}_n) + \ddot{q}_n p_n)), \quad n_{12} = -C_1, \\ n_{22} &= -i(\tilde{D}_2 \dot{p}_n - 2\dot{q}_n E_2'(\omega_n - \dot{q}_n p_n) - C_\gamma(\omega_n + \dot{q}_n p_n) + E_2(2(\dot{q}_n \dot{p}_n - \ddot{\omega}_n) + \ddot{q}_n p_n)), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$n_{33} = -i(B_3 p_n - 2\dot{q}_n E'_3 (\omega_n - \dot{q}_n p_n) + E_3(2(\dot{q}_n \dot{p}_n - \dot{\omega}_n) + \ddot{q}_n p_n)),$$

$$n_{13} = n_{21} = n_{23} = n_{31} = n_{32} = 0.$$

Из задачи в нулевом приближении следует соотношение

$$\omega_n = \dot{q}_n p_n - H_n^\pm(p_n, q_n). \quad (2.12)$$

Действительную функцию

$$H_n^\pm(p_n, q_n) = \mp \sqrt{\frac{p_n^2 + C_\alpha}{-E_2}} \quad (2.13)$$

называют функцией Гамильтона. Знаки $(\pm)$ говорят о наличии положительной и отрицательной ветвей решения.

Решая задачу в нулевом приближении, получаем

$$\mathbf{V}_{n,0} = \left[\frac{iB_1 p_n}{E_1(\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2 + p_n^2}, 1, \frac{iA_3 p_n}{E_3(\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2 + p_n^2} \right] \cdot P_{n,0}(\xi, t). \quad (2.14)$$

Полином $P_{n,0}$ в данном приближении остается неопределенным.

Из условия разрешимости неоднородной системы в первом приближении следует система Гамильтона [2, 3]

$$\dot{q}_n = \partial H_n / \partial p_n, \quad \dot{p}_n = -\partial H_n / \partial q_n. \quad (2.15)$$

Условие разрешимости системы во втором приближении дает уравнение Риккати [2, 3]

$$\dot{b}_n + \frac{\partial^2 H_n}{\partial p_n^2} b_n^2 + 2 \frac{\partial^2 H_n}{\partial p_n \partial q_n} b_n + \frac{\partial^2 H_n}{\partial q_n^2} = 0 \quad (2.16)$$

и амплитудное уравнение относительно $P_{n,0}$

$$\chi_{n,0}(t) \frac{\partial^2 P_{n,0}}{\partial \xi_n^2} + \chi_{n,1}(t) \xi_n \frac{\partial P_{n,0}}{\partial \xi_n} + \chi_{n,2} \frac{\partial P_{n,0}}{\partial t} + \chi_{n,3}(t) P_{n,0} = 0. \quad (2.17)$$

Коэффициенты уравнения (2.17) приведены в [2, 3]. Решение уравнения (2.17) может быть построено в виде полинома аргумента ξ_n [3].

3. Стационарный случай. Отдельный интерес представляет случай стационарного ВП, вытекающий из системы (2.15). Пусть выполняются условия

$$q_n(0) = 0, \quad p_n(0) = 0, \quad C'_\alpha(0) = 0, \quad E'(0) = 0. \quad (3.1)$$

Тогда для любых t справедливы соотношения

$$p_n(t) = 0, \quad q_n(t) \equiv 0. \quad (3.2)$$

Путь b_n – решение вырожденного уравнения Риккати

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial p_n^2} b_n^2 + 2 \frac{\partial^2 H_n}{\partial p_n \partial q_n} b_n + \frac{\partial^2 H_n}{\partial q_n^2} = 0. \quad (3.3)$$

Тогда собственная частота колебаний находится по формуле

$$\omega_n = \omega_{n,0} + \varepsilon \omega_{n,1} = -H_n^\pm(0,0) - \frac{i\varepsilon}{E_2(0)H_n(0,0)} \left[(M + \frac{1}{2})b_n + \frac{1}{2} C'_\gamma(0)H_n^\pm(0,0) \right]. \quad (3.4)$$

Здесь M – степень полинома P_0 . Второе слагаемое содержит декремент колебаний, вносящий поправку в собственную частоту.

4. Пример. Пусть стальная оболочка радиусом $R=1$ м и толщиной $h=0,01$ м лежит на основании, значение коэффициента постели которого увеличивается на промежутке $x = 0 \dots 1$ в 40 раз. В начале промежутка – глина влажная ($C_\alpha^*|_{x=0} = 5 \cdot 10^6$ Н/м³), в конце – глина твердая ($C_\alpha^*|_{x=1} = 200 \cdot 10^6$ Н/м³):

$$\begin{aligned} C_\alpha &= 39x + 1, C_\gamma = 0, E = 1, \\ p_n(0) &= 1.8, q_n(0) = 0, b_n(0) = 3/2i. \end{aligned} \quad (4.1)$$

На рис. показаны численное решение системы Гамильтона и уравнения Риккати. Можно заметить, что увеличение коэффициента постели влечет за собой отражение ВП от поперечного сечения оболочки. При этом характерное время $t_r = 0.0002$ с.

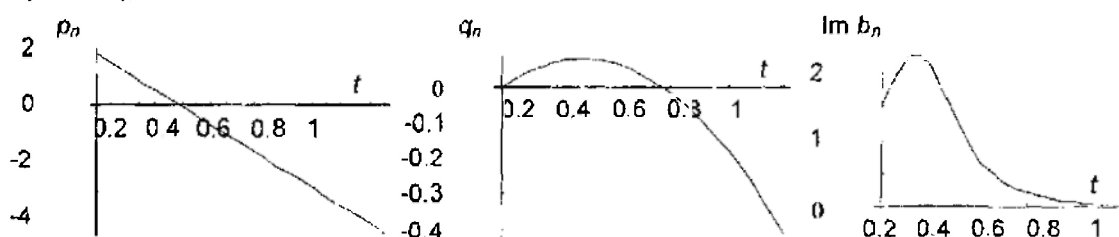


Рис. Численное решение задачи для случая (4.1).

5. Выводы. В статье построено формальное асимптотическое решение системы уравнений, описывающей волновое движение оболочки типа Тимошенко с переменными параметрами, лежащей на неоднородном винклеровском основании. Решение построено в виде семейств локализованных изгибных волн, бегущих в продольном направлении. Проведен численный анализ решения. Показано наличие эффекта отражения волнового пакета от поперечного сечения оболочки как следствие неоднородности коэффициента постели. Получены условия наличия стационарного решения, описывающего собственную форму колебаний оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольмир, А.С.** Оболочки в потоке жидкости и газа (задачи аэроупругости) / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1976. – 416 с.
2. **Михасев, Г.И.** О комплексном ВКБ-решении задачи Коши для уравнений движения тонкой цилиндрической оболочки / Г.И. Михасев // Доклады Академии наук Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 4, – С. 24–27.
3. **Михасев, Г.И.** О волновых формах движения бесконечной цилиндрической оболочки с переменными параметрами / Г.И. Михасев // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – Т. 60, № 6. – С. 129–137.
4. **Гладков, П.А.** Осесимметричные волновые пакеты в цилиндрической оболочке, лежащей на неоднородном вязкоупругом основании / П.А. Гладков // Теоретическая и прикладная механика. – 2007. – Вып. 22. – С. 102–106.

S U M M A R Y

By using the asymptotic approach the solution of the Timoshenko-like equations governing the wave processes in the infinitely long elastic cylindrical shell lying on the non-homogeneous visco-elastic foundation has been constructed in the form of the wave packets traveling in the longitudinal direction. The numerical analysis allows to reveal the effect of reflection of the traveling wave packets from some cross-sections as a consequence of heterogeneity of modulus of subgrade reaction.

Поступила в редакцию 26.04.2007