УДК 512.542

Н.Н. Воробьев, А.А. Царев

О свойствах разрешимых тотально локальных классов Фиттинга

Все рассматриваемые группы конечны и разрешимы.

Будем использовать стандартную терминологию, принятую в [1, 2]. Напомним, что неединичная группа G называется монолитической, если в ней имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа (монолит группы G). Символом $O_\pi(G)$ обозначается наибольшая нормальная π-подгруппа группы G. В частности, при $\pi = \{p\}$ вместо $O_\pi(G)$ пишут $O_p(G)$.

Функции вида

$$f : \mathbf{P} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называются функциями Хартли или, более коротко, H-функциями [1]. Если для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ имеет место

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \bigcap \left(\bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} f(p)\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'} \right),$$

где f – некоторая H-функция, то говорят, что $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга с H-функцией f и пишут $\mathfrak{F} = LR(f)$ [1]. Здесь $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathfrak{F}$, символы $\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$, $\mathfrak{S}_p$ и $\mathfrak{S}_{p'}$ обозначают класс всех $\pi(\mathfrak{F})$-групп, класс всех p-групп и класс всех p'-групп соответственно. В работе [1] впервые начали изучаться кратно локальные классы Фиттинга. Всякий класс Фиттинга считается 0-кратно локальным, а при $n \geq 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно локальным, если $\mathfrak{F} = LR(f)$, где все непустые значения H-функции f являются $(n-1)$-кратно локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга называется тотально локальным, если он n-кратно локален для всех натуральных n. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп. Тотально локальным классом Фиттинга, порожденным $\mathfrak{X}$ (обозначается символом $l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X})$), называется пересечение всех тотально локальных классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$.

В настоящей работе найдены новые свойства порожденных тотально локальных классов Фиттинга, связанные с произведениями тотально локальных классов Фиттинга. Специальным случаем основной теоремы является результат, полученный ранее Рейфершейд [3] для классов π_i-групп ($\pi_i \subseteq \mathbf{P}$).

Известно, что произведение двух любых локальных классов Фиттинга является локальным классом Фиттинга [4]. Используя этот факт, легко показать, что имеет место

Лемма 1. *Произведение двух любых тотально локальных классов Фиттинга является тотально локальным классом Фиттинга.*

В дальнейшем вместо символа $l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$ будем применять символ $l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$.

Лемма 2 [3, Утверждение 3.2]. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ – классы групп и $\mathfrak{Y}$ – нетривиальный тотально локальный класс Фиттинга. Тогда*

$$\mathfrak{Y} l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{M}, \mathfrak{H}) = l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{Y} \circ \mathfrak{M}, \mathfrak{Y} \circ \mathfrak{H}).$$

Символом $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ обозначается произведение классов групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, т.е.

$$\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = (G \mid G \text{ обладает нормальной подгруппой } N \in \mathfrak{M},\ G / N \in \mathfrak{H}).$$

Произведение классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ обозначается $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$, т.е.

$$\mathfrak{M}\mathfrak{H} = (G \mid G / G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}).$$

Лемма 3 (Н.Т. Воробьев). *Если σ и $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – множества всех различных простых делителей всех групп из классов Фиттинга $\mathfrak{F}_1 \ldots \mathfrak{F}_n$ и $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ соответственно, то $\sigma = \omega_1 \cup \ldots \cup \omega_n$.*

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_t, \mathfrak{Y}$ – тотально локальные классы Фиттинга таковы, что $\mathfrak{X}_1^2 = \mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1^2 = \mathfrak{Y}_1$. Тогда*

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно

$$\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \bigcup \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq l^{\infty}\mathrm{Fit}\,(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Тогда

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}). \qquad (1)$$

Аналогично

$$\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \bigcup \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Тогда, согласно лемме 1

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \subseteq l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y})) =$$
$$= \mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}). \qquad (3)$$

Рассуждая аналогично, получим

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}). \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Докажем обратное включение индукцией по $r + t$. Пусть $\pi_i = \pi(\mathfrak{X}_i)$ и $\sigma_j = \pi(\mathfrak{Y}_j)$ для всех $i \in \{1, \ldots, r\}$ и $j \in \{1, \ldots, t\}$.

Пусть $r + t = 2$. Покажем, что

$$\mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}) \subseteq l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}).$$

Пусть G – группа минимального порядка, для которой включение неверно. Тогда G – монолитическая группа с монолитом M, причем $M \in \mathfrak{S}_p$ для некоторого простого числа p. Так как $|G / M| < |G|$, то $G / M \in l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y})$. Следовательно,

$$(G / M) / (O_p(G) / M) \cong G / O_p(G) \in l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}).$$

Значит, $G \in \mathfrak{S}_p l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y})$.

Если $p \in \pi_1 \cap \sigma_1$, то по лемме 2

$$G \in \mathfrak{S}_p l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) = l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}).$$

Так как $\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{X}_1$, то $\mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1$. Поэтому $\mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}$. Аналогично $\mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}$. Следовательно,

$$\mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \bigcup \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \bigcup \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}.$$

Значит,

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) \subseteq l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}). \qquad (5)$$

С другой стороны, $\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}$. Отсюда

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \bigcup \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \bigcup \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}.$$

Следовательно,

$$l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) \subseteq l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}). \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем равенство $l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) = l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y})$. Итак, $G \in l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y})$. Противоречие.

Если $p \in \pi_1 \setminus \sigma_1$, то $O_{\sigma_1}(G) = 1$. Действительно, если $O_{\sigma_1}(G) \neq 1$, то ввиду $M \subseteq O_{\sigma_1}(G)$ имеем $p \in \sigma_1$, что противоречит выбору p.

Докажем, что $\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}$. Очевидно, $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}$. Покажем, что $\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}$. Пусть $K \in \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}$, тогда $K / K_{\mathfrak{Y}_1} \in \mathfrak{Y}$. Ввиду того, что $\mathfrak{Y}_1 \subseteq \mathfrak{S}_{\sigma_1}$, имеем $K_{\mathfrak{Y}_1} \subseteq O_{\sigma_1}(K) = 1$. Итак, $K / K_{\mathfrak{Y}_1} = K / 1 \cong K \in \mathfrak{Y}$. Поэтому $\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}$. Следовательно, $\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}$. Отсюда

$$G / O_p(G) \in l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) = l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}) = l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}.$$

Значит, $G \in \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \subseteq l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y})$. Противоречие.

Если $p \in \sigma_1 \setminus \pi_1$, то, рассуждая аналогично, $O_{\pi_1}(G) = 1$. Отсюда $G \in \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} \subseteq l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y})$. Противоречие.

Пусть $r + t > 2$. Покажем, что

$$\mathfrak{X}_1 l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{Y}_1 l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \subseteq l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Пусть G – группа минимального порядка, для которой включение неверно. Тогда G – монолитическая группа с монолитом M, причем $M \in \mathfrak{S}_p$ для некоторого простого числа p. Значит, $G \in \mathfrak{S}_p l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y})$.

Если $p \in \pi_1 \cap \sigma_1$, то по лемме 2, а также ввиду идемпотентности классов $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{Y}_1$, получаем

$$G \in \mathfrak{S}_p l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) = l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) = l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Противоречие.

Если $p \in \pi_1 \setminus (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_t)$, то $O_\sigma(G) = 1$ для $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_t$.

Докажем, что $\mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}$. Очевидно, $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}$. Покажем, что $\mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}$. Пусть $L \in \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} = (\mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t)\mathfrak{Y}$. Тогда $L / L_{\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_t} \in \mathfrak{Y}$. Согласно лемме 3 $\mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t)} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{Y}_1) \cup \ldots \cup \pi(\mathfrak{Y}_t)} = \mathfrak{S}_{\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_t} = \mathfrak{S}_\sigma$. Поэтому $L_{\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_t} \subseteq O_{\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_t}(L) = O_\sigma(L) = 1$. Значит, $L / L_{\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_t} = L / 1 \cong L \in \mathfrak{Y}$. Поэтому $\mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}$. Итак, $\mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}$. Отсюда

$$G / O_p(G) \in l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) = l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}) = l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}.$$

Значит,

$$G \in \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \subseteq l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Противоречие.

Если $p \in \sigma_1 \setminus (\pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_r)$, то $O_\pi(G) = 1$ для $\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_r$. Отсюда

$$G \in \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5 [5, Замечание 2.2.9]. *Пусть $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ – классы Фиттинга и $\mathfrak{Y}$ – фиттингова формация. Тогда*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i\right)\mathfrak{Y} = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathfrak{X}_i\mathfrak{Y}).$$

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_t, \mathfrak{Y}$ – тотально локальные классы Фиттинга таковы, что $\mathfrak{X}_1^2 = \mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1^2 = \mathfrak{Y}_1$. И пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r$ и $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t$. Тогда*

$$l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{F}_1\mathfrak{Y}, \mathfrak{F}_2\mathfrak{Y}) = l^\infty\mathrm{Fit}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)\mathfrak{Y}.$$

Доказательство. Докажем теорему индукцией по $r + t$.

Пусть $r + t = 2$. Покажем, что

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) = l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{Y}_1)\mathfrak{Y}.$$

Согласно лемме 4

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) \bigcap \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} \bigcap \mathfrak{Y}_1\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}.$$

По лемме 5

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} \bigcap \mathfrak{Y}_1\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} = (\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1 \bigcap \mathfrak{Y}_1\mathfrak{X}_1)\mathfrak{Y} = (\mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{Y}_1) \bigcap \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1))\mathfrak{Y}.$$

Снова применяя лемму 4, получаем

$$(\mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{Y}_1) \bigcap \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1))\mathfrak{Y} = l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{Y}_1)\mathfrak{Y}.$$

Пусть $r + t > 2$. Согласно лемме 4

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \bigcap \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Вместе с тем, по индукции

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) = l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2\ldots\mathfrak{X}_r,\ \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t)\mathfrak{Y},$$

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) = l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r,\ \mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_t)\mathfrak{Y}.$$

Таким образом, последовательно применяя леммы 5 и 4, получаем

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \bigcap \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) =$$

$$\mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2\ldots\mathfrak{X}_r,\ \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t)\mathfrak{Y} \bigcap \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r,\ \mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_t)\mathfrak{Y} =$$

$$(\mathfrak{X}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_2\ldots\mathfrak{X}_r,\ \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t) \bigcap \mathfrak{Y}_1 l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r,\ \mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_t))\mathfrak{Y} =$$

$$l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r,\ \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t)\mathfrak{Y} = l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2)\mathfrak{Y}.$$

Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – S-замкнутые классы Фиттинга. Тогда S-замкнутый класс Фиттинга, порожденный объединением классов $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, обозначается

$$S\mathrm{Fit}(\mathfrak{F} \bigcup \mathfrak{H}) = \bigcap \{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X} - S\text{-замкнутый класс Фиттинга, } \mathfrak{X} \supseteq \mathfrak{F} \bigcup \mathfrak{H}\}.$$

Следствие 1 [3, Лемма 3.10]. *Пусть $\pi_1, \ldots, \pi_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_t$ – нетривиальные множества простых чисел, $\mathfrak{Y}$ – некоторый S-замкнутый класс Фиттинга. И пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{S}_{\pi_1}\ldots\mathfrak{S}_{\pi_r}$ и $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{S}_{\sigma_1}\ldots\mathfrak{S}_{\sigma_t}$. Тогда*

$$S\mathrm{Fit}(\mathfrak{F}_1\mathfrak{Y},\ \mathfrak{F}_2\mathfrak{Y}) = S\mathrm{Fit}(\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2)\mathfrak{Y}.$$

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_t, \mathfrak{Y}$ – S-замкнутые классы Фиттинга таковы, что $\mathfrak{X}_1^2 = \mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1^2 = \mathfrak{Y}_1$. И пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r$ и $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t$. Тогда*

$$S\mathrm{Fit}(\mathfrak{F}_1\mathfrak{Y},\ \mathfrak{F}_2\mathfrak{Y}) = S\mathrm{Fit}(\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2)\mathfrak{Y}.$$

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – тотально локальные формации. Символом $l_{\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{F} \bigcup \mathfrak{H})$ обозначается [1] пересечение всех тех тотально локальных формаций, которые содержат формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_t, \mathfrak{Y}$ – тотально локальные формации таковы, что $\mathfrak{X}_1^2 = \mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1^2 = \mathfrak{Y}_1$. И пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{X}_1\ldots\mathfrak{X}_r$ и $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{Y}_1\ldots\mathfrak{Y}_t$. Тогда*

$$l_{\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1\mathfrak{Y} \bigcup \mathfrak{F}_2\mathfrak{Y}) = l_{\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \bigcup \mathfrak{F}_2)\mathfrak{Y}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Скиба А.Н., Шеметков Л.А.*** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды, 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
2. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble groups. – Berlin – N. Y., 1992 – 891 p.
3. ***Reifferscheid S.*** A note on subgroup-closed Fitting classes of finite soluble groups // J. Group Theory, 2003, v. 6. – P. 331 – 345.
4. ***Воробьев Н.Т.*** Локальные произведения классов Фиттинга // Весці АН БССР, сер. фіз.-матэм. навук, 1991, № 6. – С. 22–26.

5. ***Reifferscheid S.*** On the theory of Fitting classes of finite soluble groups// Dissertation der Mathematischen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität Tübingen zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften. – Tübingen, 2001. – 131 p.

S U M M A R Y

In this paper new properties of generated soluble totally local Fitting classes connected with products of soluble totally local Fitting classes are proved.

Поступила в редакцию 21.11.2005