УДК 517.938

И.Ю. Трубников

Обратимость функциональных операторов в пространстве L_p-сечений

Расслоением называется тройка вида $\xi=(E,M,p)$, где E и M – топологические пространства, а $p:E\to M$ – непрерывное отображение. Пространство E называется *тотальным пространством* расслоения ξ, пространство M – его *базой*, а отображение p – *проекцией*. Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x\in M$ называется *слоем* $\xi(x)$ расслоения ξ над точкой x.

Подрасслоением расслоения $\xi=(E,M,p)$ называется подпространство $E_1\subset E$, которое само является расслоением над M с проекцией p. Если слой $\xi(x)=p^{-1}(x)$ над каждой точкой $x\in M$ снабжен структурой конечномерного векторного пространства, то расслоение называется *векторным*. Размерностью векторного расслоения называется размерность слоя $\xi(x)$. В дальнейшем будут рассматриваться только векторные расслоения со слоем $\xi(x)=\mathrm{C}^n$, т.е. комплексные векторные расслоения.

Подмножество K расслоения ξ называется *векториальным*, если для любого x множество $K_x:=K\cap\xi(x)$ является векторным подпространством в слое $\xi(x)$. Векториальное множество, у которого подпространства K_x непрерывно зависят от точки x, является подрасслоением.

Говорят, что расслоение $\xi=(E,M,p)$ разлагается в *прямую сумму* (*сумму Уитни*) подрасслоений ξ_1 и ξ_2 (обозначается $\xi=\xi_1\oplus\xi_2$), если каждый вектор y из слоя $\xi(x)$ разлагается единственным образом в сумму $y=y_1+y_2$, где $y_1\in\xi_1(x), y_2\in\xi_2(x)$.

Пример 1. Примером векторного расслоения является расслоение-произведение $\xi=M\times\mathrm{C}^n$ с естественной проекцией $p(x,y)=x$.

Сечением расслоения $\xi=(E,M,p)$ называется такое непрерывное отображение $s:M\to E$, что $p\circ s=id_M$. Непрерывные сечения расслоения ξ образуют векторное пространство $\Gamma(\xi)$. Если в каждом слое $\xi(x)$ задана норма, то на $\Gamma(\xi)$ возникает естественная норма $\|u\|=\sup\|u(x)\|_x$, определенная на ограниченных сечениях.

Гомоморфизмом из $\xi_1=(E_1,M,p_1)$ в $\xi_2=(E_2,M,p_2)$ называется непрерывное отображение $\varphi:E_1\to E_2$ такое, что $p_1=p_2\circ\varphi$, т.е. слой

$\xi_1(x)$ переходит в слой $\xi_2(x)$ и порожденное отображение слоев $\varphi_x:\xi_1(x)\to\xi_2(x)$ линейно. Совокупность всех гомоморфизмов $\varphi:\xi\to\xi$ образует алгебру, обозначаемую $\mathrm{HOM}\xi$.

Если через $\mathrm{Hom}\xi$ обозначить n^2-мерное расслоение над M, слоем которого является пространство $\mathrm{Hom}\xi(x)$ линейных отображений векторного пространства $\xi(x)$ в себя, то алгебра $\mathrm{HOM}\xi$ изоморфна алгебре $\Gamma(\mathrm{Hom}\xi)$ непрерывных сечений расслоения $\mathrm{Hom}\xi$.

Гомоморфизм φ называется *изоморфизмом*, если для него существует обратный гомоморфизм. Изоморфизм $\varphi:\xi\to\xi$ называется *автоморфизмом*. Расслоение, изоморфное расслоению-произведению, называется *тривиальным*.

Пусть F – топологическое пространство. Расслоение $\xi=(E,M,p)$ называется *локально тривиальным* со слоем F, если для любой точки $x\in M$ существует такая окрестность U, что расслоение ξ над U тривиально. Это значит, что существует гомеоморфизм $\phi:\xi(U)\to U\times F$, коммутирующий с проектором p.

Пусть $\{U_j\}$ – такое открытое покрытие M, что ограничения расслоения ξ на U_j являются тривиальными, и пусть ϕ_j – соответствующие гомеоморфизмы. Тогда определены отображения $\phi_{j,i}=\phi_j\circ\phi_i^{-1}, \phi_{j,i}(x,\xi)=(x,g_x(\xi)), \xi\in F$, где g_x – гомеоморфизмы слоя F. Такой набор *функций склейки (перехода)* определяет векторное (и не только векторное) расслоение ξ с точностью до изоморфизма ([1]).

Обычно полагают, что гомеоморфизмы g_x не произвольны, а принадлежат некоторой топологической подгруппе G группы $\mathrm{Homeo}(F)$ всех гомеоморфизмов пространства F. Группа G называется *структурной группой* расслоения.

Рассмотрим локально тривиальное векторное расслоение ξ со слоем C^n и базой (M,α,μ), где M – некоторое компактное пространство, на котором группа целых чисел Z действует с помощью гомеоморфизма $\alpha:M\to M,\mu$ – мера на M, квазиинвариантная относительно α, причем $\mathrm{supp}\mu=M$. Квазиинвариантность меры μ означает, что существует производная Радона–Никодима $\gamma(x)=\dfrac{d\mu_\alpha}{d\mu}$ меры μ_α по мере μ, где мера μ_α определяется следующим образом: $\mu_\alpha(E):=\mu(\alpha^{-1}(E)), E\subset M$. Действие группы Z на M предполагается *топологически свободным*, т.е. множество непериодических точек гомеоморфизма α всюду плотно в пространстве M.

Непрерывное отображение $\beta:\xi\to\xi$ называется *линейным расширением* отображения $\alpha: M \to M$, если при отображении β слой $\xi(x)$ линейно отображается в слой $\xi(\alpha(x))$.

Пусть в каждом слое $\xi(x)$ задана норма, непрерывно зависящая от точки x. Пространство $L_p(\xi)$ определим как пополнение пространства $\Gamma(\xi)$ непрерывных сечений по норме

$$|u\| = \left(\int_M \| u(x) \|_x^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Пусть $A = \mathrm{HOM}\xi$ – алгебра гомоморфизмов расслоения ξ. Каждому элементу a алгебры A ставится в соответствие ограниченный оператор $a : L_p(\xi) \to L_p(\xi)$, являющийся умножением на a, т.е. переводящий сечение $u(x)$ в сечение $a(x)u(x)$, причем $\| a \| = \max_{x \in M} \| a(x) \|_x$.

Будем считать, что задано некоторое линейное расширение $\theta: \xi \to \xi$ отображения α, переводящее слой $\xi(x)$ в слой $\xi(\alpha(x))$ по правилу:

$$\theta : (x, y) \to (\alpha(x), \theta(x)y), \quad x \in M, \quad y \in \xi(x) = \mathrm{C}^n. \tag{1}$$

Оператор T представления группы Z в пространстве $L_p(\xi)$ задается на непрерывных сечениях формулой:

$$(Tu)(x) = \left(\frac{d\mu_\alpha}{d\mu} \right)^{\frac{1}{p}} \theta \circ u(\alpha^{-1}(x)). \tag{2}$$

Операторы, представленные с помощью конечных сумм вида $\sum a_k T^k, a_k \in A$, обычно называются *функциональными операторами*. Множество таких конечных сумм обозначим через B^0.

Если расслоение ξ тривиально, то действие на ξ можно задать формулой $\theta(x, y) = (\alpha(x), y), \quad x \in M, y \in \mathrm{C}^n$, и тогда оператор T есть оператор взвешенного сдвига в пространстве векторнозначных функций.

Нетрудно заметить, что для оператора T выполнено свойство $TaT^{-1} = \theta \circ a \circ \theta^{-1} \in A \, \forall a \in A$, т.е. отображение $\hat{T}(a) = TaT^{-1}$ есть автоморфизм алгебры A.

Линейное расширение β называется *гиперболическим*, если существуют инвариантные относительно β непрерывные подрасслоения ξ^s, ξ^u и постоянные $c_s, c_u > 0$ и $0 < \gamma_s, \gamma_u < 1$, такие, что $\xi = \xi^s \oplus \xi^u$ и

$$\| \beta^m(y) \| \leq c_s \gamma_s^m \| y \|, y \in \xi^s, m = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$\| \beta^m(y) \| \geq c_u \gamma_u^{-m} \| y \|, y \in \xi^u, m = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

ξ^s называют *сжимающимся*, ξ^u – *растягивающимся* подрасслоением.

Теорема 1. *Пусть* $A = \mathrm{HOM}\xi$ *– алгебра гомоморфизмов векторного расслоения* ξ, *группа* Z *действует на компактном пространстве* M *топологически свободно, а элемент* $a_0 \in A$ *обратим. Оператор* $b = a_0 + a_1 T$: $L_p(\xi) \to L_p(\xi)$ *обратим тогда и только тогда, когда ассоциированное с ним линейное расширение*

$$\beta(x, y) = (\alpha(x), a_0^{-1}(x) a_1(x) \theta(x, y)), x \in M, y \in \xi(x),$$

является гиперболическим.

Замечание. Случай, когда вместо пространства $L_p(\xi)$ рассматривается пространство $\Gamma(\xi)$ непрерывных или $L_\infty(\xi)$ ограниченных сечений, носит классический характер и исследован в [2, 3]. Рассмотрен также случай, когда в качестве пространства сечений берется $L_2(\xi)$, но его доказательство опирается на существенные результаты теории C^*-алгебр, в частности, на теорему об изоморфизме [4, 5]. Главная трудность заключается в том, что при $p \neq 2$ алгебра операторов в $L_p(\xi)$ не является C^*-алгеброй, и к ней нельзя применить стандартные конструкции этой теории.

Доказательство. *Достаточность.* Оператор b можно представить в виде $b = a_0(I + D)$, где $D = a_0^{-1} a_1 T$, поэтому достаточно установить обратимость оператора $I + D$. Пусть ξ^s и ξ^u – сжимающееся и растягивающееся подрасслоения расслоения ξ, а p_s – гомоморфизм ξ, действующий на слое $\xi(x)$ как проектор на $\xi^s(x)$ параллельно $\xi^u(x)$. Инвариантность подрасслоений относительно β означает, что $p_s \circ \beta = \beta \circ p_s$.

Оператор $P_s : L_p(\xi) \to L_p(\xi), (P_s u)(x) = p_s(u(x))$ является проектором и осуществляет разложение $L_p(\xi)$ в прямую сумму подпространств $L_p^s = L_p(\xi^s)$ и $L_p^u = L_p(\xi^u)$. Из равенства $p_s \circ \beta = \beta \circ p_s$ следует, что $P_s D = D P_s$ и D при разложении $L_p(\xi) = L_p^s \oplus L_p^u$ разлагается в прямую сумму операторов D_s и D_u: $D = D_s \oplus D_u$. Из условия (3) следует, что $\| D_s^m \| \le c_s \gamma_s^m, m = 1, 2, \ldots$, откуда спектральный радиус $r(D_s) < 1$ и оператор $I + D_s$ обратим. Аналогично $r(D_u^{-1}) < 1$ и $I + D_u$ обратим. Значит, обратимы операторы $I + D$ и $b = a_0(I + D)$.

Необходимость. Из обратимости оператора $b = a_0 + a_1 T$ следует обратимость оператора $I + D$.

Лемма 1. ([6]). *Пусть* λ *принадлежит спектру* $\sigma(D)$ *оператора* D, *а* $|\zeta| = 1$. *Тогда* $\zeta\lambda \in \sigma(D)$, *т.е. спектр оператора* D *инвариантен относительно вращений вокруг точки 0.*

Из леммы 1 следует, что определен оператор

$$P = \frac{1}{\pi i} \int_{|\lambda|-1} (\lambda I - D)^{-1} d\lambda, \qquad (5)$$

являющийся проектором и осуществляющий разложение Рисса оператора D в прямую сумму операторов D_s и D_u таких, что спектр $\sigma(D_s)$ лежит внутри окружности $|\lambda|=1$, а спектр $\sigma(D_u)$ вне этой окружности.

Лемма 2. *Если* $u \in L_p^h(\xi)$ *и* $\rho \in L_\infty(M,\mu)$, *то* $\rho u \in L_p^h(\xi), h = s, u.$

Доказательство. Если $u \in L_p^s(\xi)$, то $\| D^m u \| \to 0$ при $m \to \infty$. Если $u \in L_p^u(\xi)$, $u \neq 0$, то $\| D^m u \| \to \infty$ при $m \to \infty$. Поэтому $L_p^s(\xi) = \{u \in L_p(\xi) : D^m u \to \infty\}$. Если $\rho \in L_\infty(M,\mu)$, то $\| D^m \rho u \| = \| \hat{T}(\rho) D^m u \| \le \| \rho \| \cdot \| D^m u \| \to 0$, т.е. $\rho u \in L_p^s(\xi)$. Аналогично доказывается второе утверждение леммы. □

Будем считать, что пространство $L_p(\xi)$ сепарабельно, т.е. существует счетное, всюду плотное множество сечений $\{v_j\}_{j=1}^\infty$. В этом случае векториальные множества ξ^s и ξ^u определяются так:

$$\xi^s(x) = \overline{\{v_j^s(x), 1 \le j \le \infty\}}, \qquad \xi^u(x) = \overline{\{v_j^u(x), 1 \le j \le \infty\}}.$$

Лемма 3. $L_p(\xi^s) = L_p^s(\xi), L_p(\xi^u) = L_p^u(\xi)$.

Доказательство. Докажем включения: "$\supset$". Пусть $u \in L_p^s(\xi)$. Существует последовательность $v_{j_m} : \| u - v_{j_m} \|_{L_p} \to 0$. Из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $v_{j_{m_k}}$, сходящуюся к u для почти всех $x \in M$. Значит, $u(x) \in \xi^s(x)$ для почти всех x, т.е. $u \in L_p(\xi^s)$.

"$\subset$". Пусть $u \in L_p(\xi^s)$. Существует последовательность v_{i_m}, почти всюду сходящаяся к $u(x)$. Покажем, что $\| u - v_{i_m} \|_{L_p} \to 0$. По свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\int_E \| u(x) - v_{i_m}(x) \|^p d\mu < \frac{\varepsilon^p}{2}$, если $\mu(E) < \delta$. Воспользуемся теоремой Егорова: по $\delta > 0$ найдем множество $M_\delta \subset M$ такое, что $\mu(M \setminus M_\delta) < \delta$ и на M_δ последовательность v_{i_m} сходится равномерно. Выберем номер m_ε так, чтобы для $m > m_\varepsilon$ выполнялось

$\sup\limits_{x\in M_\delta} \| u(x)-v_{i_m}(x)\|_x < \dfrac{\varepsilon}{2\mu(M)}$. Тогда для $m > m_\varepsilon$ имеем

$$\left(\int\limits_M \| u(x)-v_{i_m}(x)\|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon. \qquad \square$$

Лемма 4. *Векторное расслоение ξ разлагается в прямую сумму $\xi=\xi^s\oplus\xi^u$ в том смысле, что $\xi(x)=\xi^s(x)\oplus\xi^u(x)$ для почти всех $x\in M$. Векториальные множества ξ^s и ξ^u инвариантны относительно линейного расширения β.*

Доказательство. Подпространства $\xi^s(x)$ и $\xi^u(x)$ порождают $\xi(x)$ для почти всех $x\in M$. Покажем, что $\xi^s\cap\xi^u=\{0\}$. Предположим, что это не так. Тогда существует сечение $u\ne 0$ такое, что $u\in L_p(\xi^s)$ и $u\in L_p(\xi^u)$. Но по лемме 3 $u\in L_p^s(\xi)$ и $u\in L_p^u(\xi)$. Так как $L_p^s(\xi)\cap L_p^u(\xi)=\{0\}$, то $u(x)=0$ почти всюду. Противоречие.

Инвариантность ξ^s и ξ^u относительно β следует из инвариантности $L_p^s(\xi)$ и $L_p^u(\xi)$ относительно оператора D. $\square$

Из того, что спектральный радиус $r(D_s)<1$ следует, что существует норма $\|\cdot\|_0$ в $L_p(\xi)$, эквивалентная исходной, причем $\| D_s \|_0<1$. Тогда

$$\| D^m v^s \| = \| D_s^m v^s \| \le \| D_s^m \| \| v^s \| \le c_s \| D_s^m \|_0 \| v^s \| \le c_s \| D_s \|_0^m \| v^s \| = c_s \gamma_s^m \| v^s \|,$$

где $\gamma_s = \| D_s \|_0 < 1$. Аналогично, $\| D^m v^u \| \ge c_u \gamma_u^{-m} \| v^u \|, 0<\gamma_u<1$.

Эти неравенства означают, в частности, выполнение условий (3) и (4) гиперболичности линейного расширения β.

Предположим, что подрасслоения ξ^s и ξ^u не являются непрерывными.

Лемма 5. *Пусть векториальное множество ξ^s разрывно в точке $x_0\in M$. Существуют такие $K_s>0, K_u>0$, что для любой окрестности U_{x_0} найдется сечение $v\in L_p(\xi), v\ne 0, supp v\subset U_{x_0}$, для которого справедливы следующие неравенства:* $\| v^s \| < K_s \| v^u \|$, $\| v^u \| > K_u \| v \|$.

Доказательство. Разрывность ξ^s в точке x_0 означает, что существует число $d>0$, что для любого $\varepsilon>0$ в любой окрестности U_{x_0} можно выделить два подмножества положительной меры V_1 и V_2, такие, что $\exists y_0\in\xi^s(x_0) : \forall x\in V_2 \quad \exists y_x\in\xi(x)$, что $\| y_0 \| = \| y_x \| = 1$ и

$$\| y_0 - y_x \|_x \le \varepsilon, \quad \| y_x - h \|_x > d, \forall h\in\xi^s(x). \qquad (6)$$

Если в качестве h взять y_x^s, то получим $\| y_x^u \|_x > d$. Определим сечение

$v(x)$ следующим образом: $v(x)=\begin{cases} y_x, & x\in V_2, \\ 0, & x\notin V_2. \end{cases}$ Имеем:

$$\|v\|=\left(\int_{V_2}\|v(x)\|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=[\mu(V_2)]^{\frac{1}{p}} \text{ и}$$

$$\|v^u\|>d\left[\mu(V_2)\right]^{\frac{1}{p}}=d\|v\|\geq d\,\|\,\|v^s\|-\|v^u\|\,\|\geq d(\|v^s\|-\|v^u\|),$$

откуда $\|v^s\|<\dfrac{d+1}{d}\|v^u\|$. Таким образом, $K_s=\dfrac{d+1}{d}, K_u=d$. Лемма доказана. □

Продолжим доказательство теоремы. Итак, пусть ξ^s разрывно в точке $x_0\in M$. Пусть $u(x)=\begin{cases} y_0, & x\in\{x_0\}\cup V_2 \\ 0, & x\notin\{x_0\}\cup V \end{cases}$, а $v(x)$ – сечение из леммы 5.

Фиксируем $\varepsilon>0$ и достаточно большое $m\in\mathrm{N}$, чтобы $\|\beta^m(y_0)\|_{\alpha^m(x)}\leq\varepsilon$.

Окрестность U_{x_0} можно выбрать настолько малой ($U_{x_0}=U_{x_0}(\varepsilon,m)$), что

$$\|[\gamma(\alpha^m(x))\cdot\ldots\cdot\gamma(\alpha(x))]^{-\frac{1}{p}}D^m v(\alpha^m(x))-[\gamma(\alpha^m(x))\cdot\ldots\cdot\gamma(\alpha(x))]^{-\frac{1}{p}}D^m u(\alpha^m(x))\|_{\alpha^m(x)}\leq\varepsilon$$

и

$$\|[\gamma(\alpha^m(x))\cdot\ldots\cdot\gamma(\alpha(x))]^{-\frac{1}{p}}D^m u(\alpha^m(x))-\beta^m(y_0)\|_{\alpha^m(x)}\leq\varepsilon.$$

Тогда

$$\|[\gamma(\alpha^m(x))\cdot\ldots\cdot\gamma(\alpha(x))]^{-\frac{1}{p}}D^m v(\alpha^m(x))\|_{\alpha^m(x)}\leq\|[\gamma(\alpha^m(x))\cdot\ldots\cdot\gamma(\alpha(x))]^{-\frac{1}{p}}D^m u(\alpha^m(x))\|_{\alpha^m(x)}+\varepsilon\leq$$

$$\leq\|\beta^m(y_0)\|_{\alpha^m(x)}+2\varepsilon\leq3\varepsilon.$$

Проинтегрируем полученное неравенство по V_2. Имеем

$$\|D^m v\|=\left(\int_{V_2}\|[\gamma(\alpha^m(x))\cdot\ldots\cdot\gamma(\alpha(x))]^{-\frac{1}{p}}D^m v(\alpha^m(x))\|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leq3\varepsilon[\mu(V_2)]^{\frac{1}{p}}=3\varepsilon\|v\|,$$

откуда

$$\|D^m v\|\leq3\varepsilon\|v\|. \qquad (7)$$

Используя неравенства $\|D^m v^s\|\leq c_s\gamma_s^m\|v^s\|, \|D^m v^u\|\geq c_u\gamma_u^{-m}\|v^u\|$ и лемму 5, получаем

$$\|D^m v\|\geq\|D^m v^u\|-\|D^m v^s\|\geq c_u\gamma_u^{-m}\|v^u\|-c_s\gamma_s^m\|v^s\|>$$

$$>\left(c_u\gamma_u^{-m}-c_s\gamma_s^m\frac{d+1}{d}\right)\|v^u\|>\left(c_u d\gamma_u^{-m}-c_s(d+1)\gamma_s^m\right)\|v\|. \qquad (8)$$

Сравним неравенства (7) и (8):

$$c_u d\gamma_u^{-m} - c_s(d+1)\gamma_s^m < 3\varepsilon. \qquad (9)$$

В последнем неравенстве константы c_s, c_u и d не зависят ни от ε, ни от m, поэтому при достаточно большом m и малом ε возникнет противоречие. Значит, векториальные множества ξ^s и ξ^u непрерывны и являются подрасслоениями. Теорема доказана. □

До сих пор в качестве функционального оператора b рассматривался только двучленный оператор $b = a_0 + a_1 T$. Покажем, что обратимость любого элемента $b = \sum a_k T^k$ из множества B^0 эквивалентна обратимости некоторого двучленного элемента из аналогичным образом устроенной алгебры $\overline{B}$, в которой соответствующее векторное расслоение имеет большую размерность.

Зафиксируем натуральное число $m \geq 2$. Будем считать, что алгебра B реализована как алгебра операторов в пространстве $L_p(\xi)$. Пусть $\overline{L_p(\xi)}$ – прямая сумма m экземпляров пространства $L_p(\xi)$. Оператору $b = \sum a_k T^k$ из B^0 поставим в соответствие оператор $\tilde{b}$ из $L(\overline{L_p(\xi)})$ вида $\tilde{b} = \sum d_l S^l$, где оператор S действует на вектор $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$ из $\overline{L_p(\xi)}$ по правилу $Sv = (T^m v_0, T^m v_1, \ldots, T^m v_{m-1})$, а оператор d_l задан матрицей из операторов

$$\left[d_l\right]_{ij} = \hat{T}^j (a_{lm+j-i}), i, j = 0, \ldots, m-1. \qquad (10)$$

Теорема 2. *Пусть $\overline{B}$ – алгебра операторов в $\overline{L_p(\xi)}$, порожденная операторами вида $\tilde{b} = \sum d_l S^l$. Элемент b обратим тогда и только тогда, когда обратим элемент $\tilde{b}$.*

Замечание. В случае $p = 2$ алгебры B и $\overline{B}$ являются C^*-алгебрами и в [4, 5, 7] с помощью теоремы об изоморфизме доказано, что алгебры B и $\overline{B}$ изоморфны, откуда следует одновременная обратимость операторов b и $\tilde{b}$.

В случае произвольного p доказать изоморфность алгебр B и $\overline{B}$ пока не представляется возможным, однако приведенное ниже доказательство одновременной обратимости операторов b и $\tilde{b}$ является достаточным для целей настоящей работы.

Доказательство. Построим такое отображение ψ, при котором алгебра A переходит в изоморфную ей подалгебру $\overline{A}$ в $\overline{B}$, состоящую из диагональных операторных матриц вида $\tilde{a} = \mathrm{diag}\left\{a, \hat{T}a, \ldots, \hat{T}^{m-1}a\right\}$. Элементу T ставится в соответствие оператор $\tilde{T}$ вида

$$\tilde{T}=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\.&.&.&\dots&.\\0&0&0&\dots&1\\0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}I+\begin{bmatrix}0&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\.&.&.&\dots&.\\0&0&0&\dots&0\\1&0&0&\dots&0\end{bmatrix}S. \qquad (11)$$

Непосредственным подсчетом проверяем равенства $\psi(TaT^{-1})=\tilde{T}\tilde{a}\tilde{T}^{-1}$, и в силу линейности отображения ψ получаем, что $\tilde{b}=\sum\tilde{a}_k\tilde{T}^k$.

Рассмотрим оператор U, действующий в пространстве $L_p(\bar{\xi})$ и заданный операторной матрицей

$$U=\begin{bmatrix}0&T^{-1}&0&\dots&0\\0&0&T^{-1}&\dots&0\\.&.&.&\dots&.\\0&0&0&\dots&T^{-1}\\T^{m-1}&0&0&\dots&0\end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Таким образом, $U=(T^{-1}\cdot I)\tilde{T}=\tilde{T}(T^{-1}\cdot I)$, где $I:L_p(\bar{\xi})\to L_p(\bar{\xi})$ – единичный оператор.

Лемма 6. *Оператор U задает представление конечной циклической группы Z_m в пространстве $L_p(\bar{\xi})$, причем оператор $\tilde{b}$ перестановочен с оператором U.*

Доказательство. Действительно, $U^m=I$, поэтому U есть представление группы Z_m. Нетрудно заметить, что $\tilde{a}\tilde{T}=T^{-1}\cdot\tilde{T}\tilde{a}\cdot T$, откуда следует, что $\tilde{a}\tilde{T}^{k+1}=\tilde{a}\tilde{T}\tilde{T}^k=T^{-1}\tilde{T}\tilde{a}T\tilde{T}^k$. В этом случае

$$\tilde{b}U=\left(\sum_{0\le k\le m}\tilde{a}_k\tilde{T}^k\right)(T^{-1}\tilde{T})=\sum_{0\le k\le m}\left(\tilde{a}_k\tilde{T}^k\tilde{T}T^{-1}\right)=\sum_{0\le k\le m}\left(T^{-1}\tilde{T}\tilde{a}_kT\tilde{T}^kT^{-1}\right)=$$

$$=(T^{-1}\tilde{T})\sum_{0\le k\le m}\left(\tilde{a}_kT\tilde{T}^kT^{-1}\right)=(T^{-1}\tilde{T})\sum_{0\le k\le m}\left(\tilde{a}_k\tilde{T}^k\right)=U\tilde{b}. \qquad \square$$

Конечная группа Z_m обладает конечным числом m неэквивалентных неприводимых представлений $R^j, j=1,\dots,m$. Каждое представление конечной группы Z_m разлагается в прямую сумму неприводимых представлений R^j. В частности, пространство $L_p(\bar{\xi})$ разлагается в прямую сумму m инвариантных относительно оператора U подпространств $L_p^j, j=1,\dots,m$, таких, что в L_p^j действует представление группы Z_m, кратное неприводимому представлению R^j. Подпространства L_p^j имеют следующий вид $L_p^j = \left\{ \lambda(u, e^{\frac{2\pi i(j-1)}{m}} Tu, e^{\frac{4\pi i(j-1)}{m}} T^2 u, \ldots, e^{\frac{2(m-1)\pi i(j-1)}{m}} T^{m-1} u), \lambda \in \mathrm{C}, u \in L_p(\xi) \right\}$.

При этом оператор $\tilde{b}$ разлагается в прямую сумму операторов $b_j, j = 1, \ldots, m$, действующих в подпространствах L_p^j соответственно.

Пусть F – отображение, переводящее оператор T в оператор $F(T) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k$. Оператор $S_1 : (u, Tu, T^2 u, \ldots, T^{m-1} u) \to u$ биективно отображает подпространство L_p^1, соответствующее единичному представлению группы Z_m, на пространство $L_p(\xi)$, и при этом изоморфизме оператор $b_1 = F(T)$ переходит в оператор b, т.е. эти операторы подобны. Оператор $S_j : (u, e^{\frac{2\pi i(j-1)}{m}} Tu, e^{\frac{4\pi i(j-1)}{m}} T^2 u, \ldots, e^{\frac{2(m-1)\pi i(j-1)}{m}} T^{m-1} u) \to u$, действующий из L_p^j в $L_p(\xi)$, также является изоморфизмом, причем прообразом оператора b в подпространстве L_p^j является оператор $b_j = \sum_{k=0}^{m-1} a_k (e^{\frac{2\pi i(j-1)}{m}} T)^k = F(e^{\frac{2\pi ij}{m}} T)$.

Из леммы 1 следует, что спектр оператора T совпадает со спектром оператора $e^{\frac{2\pi i(j-1)}{m}} T$. Доказательство того, что спектр $\sigma(F(T))$ оператора $F(T) = b_1$ совпадает со спектром $\sigma(F(e^{\frac{2\pi i(j-1)}{m}} T))$ оператора $F(e^{\frac{2\pi i(j-1)}{m}} T) = b_j$ практически полностью повторяет доказательство леммы 1. Поэтому операторы b_j либо одновременно обратимы, либо одновременно необратимы. Это, в свою очередь, означает, что оператор b обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\tilde{b}$. Теорема доказана. □

Пусть $\bar{\xi} = \xi \oplus \xi \oplus \ldots \oplus \xi$ – сумма m экземпляров векторного расслоения ξ, $\Gamma(\mathrm{Hom}\bar{\xi})$ – алгебра непрерывных сечений расслоения $\mathrm{Hom}\bar{\xi}$. Эта алгебра изоморфна алгебре матриц размерности $m \times m$ с элементами из A. Построенная выше алгебра $\bar{B}$ является частью алгебры B_1, порожденной всеми матрицами из $\Gamma(\mathrm{Hom}\bar{\xi})$ и оператором S. Алгебра B_1 устроена аналогично исходной алгебре B и является алгеброй типа $B(\mathrm{HOM}\bar{\xi}, S)$. Если оператор b имеет вид $a_0 + a_1 T + \ldots + a_p T^p$, то, выбрав $m = p$, получим, что $\tilde{b} = d_0 + d_1 S$. Оператор $\tilde{b}$ более удобен для исследования, так как в нем оператор сдвига содержится только в первой степени. Заметим, что если коэффициент a_0 у оператора b обратим, то обратим коэффициент d_0 у оператора $\tilde{b}$, так как операторная матрица d_0 треугольная и на ее диагонали стоят обратимые элементы $\hat{T}^j a_0$. Аналогично, если обратим коэффициент a_p у оператора b, то обратим коэффициент d_1 у оператора $\tilde{b}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Мищенко, А.С.*** Векторные расслоения и их применения / А.С. Мищенко. – М.: Наука, 1974. – 208 с.
2. ***Бронштейн, И.У.*** Неавтономные динамические системы / И.У. Бронштейн. – Кишинев: Издательство «Штиинца», 1984. – 290 с.
3. ***Нитецки, З.*** Введение в дифференциальную динамику / З. Нитецки. – М.: Мир, 1975. – 304 с.
4. ***Антоневич, А.Б.*** Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А.Б. Антоневич. – Мн.: Университетское, 1988. – 232 с.
5. ***Antonevich, A.*** Functional differential equations: I. C^*-theory / A. Antonevich, A. Lebedev. – Longman Scientific and Technical, Harlow, 1994.
6. ***Abramovich, Y.A.*** Banach $C(K)$ – modules and operators preserving disjointness / Y.A. Abramovich, E.L. Arenson, A.K. Kitover. – England, Longman Scientific and Technical, 1992. – 159 p.
7. ***Антоневич, А.Б.*** Нелокальные псевдодифференциальные операторы: индекс и числа Лефшеца / А.Б. Антоневич, А.В. Лебедев // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 6. – С. 795–799.

S U M M A R Y

Let $\xi = (E, M, p)$ be a complex vector bundle over M and let $\alpha : M \to M$ be a continuous mapping. Some conditions which provide the invertibility of the operator $b = a_0 + a_1 T$ in the space of $L_p(\xi)$-sections are obtained.

Поступила в редакцию 30.10.2006