6. *Зайцев, В.А.* Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова / В.А. Зайцев, Е.Л. Тонков // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 2(441). – С. 60–67.
7. *Попова, С.Н.* Об эквивалентности локальной достижимости и полной управляемости линейных систем / С.Н. Попова // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 6(481). – С. 50–53.
8. *Попова, С.Н.* Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 1627–1636.
9. *Козлов, А.А.* Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов, Е.К. Макаров // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
10. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М., 1967. – 576 с.
11. *Хорн, Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М., 1989. – 655 с.
12. *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М., 1998. – 480 с.

SUMMARY

Let the differential system $\dot{x}=(A(t)+B(t)U(t))x$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\geq 0$, *has bounded piecewise continuous square coefficient matrices* A *and* B *and let the control matrix* U *be of the same type. It is proved that this system is uniformly globally attainable if the matrix* B *is uniformly integrally nondegenerate.*

Поступила в редакцию 3.03.2007

УДК 512.53

Д.Ю. Гиряев, М.И. Наумик

О дискретно нормированной полугруппе

I. Приведем некоторые определения и сформулируем леммы, которые легко доказываются.

Пусть G – некоторая коммутативная мультипликативная группа.

Определение 1. Дискретным нормированием группы G называется гомоморфизм v группы G на $\mathbb{R}$, такой, что $v(xy)=v(x)+v(y)$.

Лемма 1. *Множество, состоящее из тех элементов* $x\in G$, *для которых* $v(x)\geq 0$, *образует полугруппу.*

Определение 2. Множество, состоящее из тех элементов x, для которых $v(x)\geq 0$ образует полугруппу, называемую полугруппой нормирования.

Определение 3. Коммутативная полугруппа A с сокращением называется дискретно нормированной, если существует такое дискретное нормирование v ее группы частных G, для которой A является полугруппой нормирования.

Определение 4. Идеал M полугруппы A называется максимальным, если $M\neq A$ и M не содержится ни в каком другом идеале, отличном от A.

Лемма 2. *1) Множество тех* $x\in G$, *для которых* $v(x)>0$, *образует максимальный идеал дискретно нормированной полугруппы* A. *Никаких других максимальных идеалов эта полугруппа не имеет;*

2) $v(x) = v(y) \Rightarrow xA = yA$;

3) *Любой идеал в* A *имеет вид* $M_k = \{x \mid x \in A;\ v(x) \geq k\}$;

4) $M = xA$, *где* $v(x) = 1$ *(такое* x *существует),* $M_k = x^k A$, *т.е. все идеалы в* A *главные;*

5) $M_k = M^k$, *т.е. каждый идеал – степень максимального.*

Определение 5. Полугруппа A называется нётеровой, если любая возрастающая цепочка ее идеалов стабилизируется или, иными словами, любое непустое подмножество идеалов содержит максимальный элемент.

Определение 6. Идеал I полугруппы A называется конечно-порожденным, если $I = x_1 A \cup x_2 A \cup \ldots \cup x_k A$.

Лемма 3. *Если полугруппа* A *нётерова, то любой идеал в* A *конечно порожден.*

Определение 7. Радикалом идеала I называется множество $r(I) = \{x \mid x \in A,\ x^n \in I \text{ для некоторого } n > 0\}$.

Лемма 4. *В нётеровой полугруппе* A *любой идеал* I *содержит некоторую степень своего радикала.*

Лемма 5. *Радикал идеала* I *совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих* I.

II. Сформулируем и докажем основную теорему, анонсированную в [1].

Теорема. *Пусть* A *– нётерова полугруппа с сокращением, с единицей, с единственным максимальным идеалом* M, *который является единственным простым идеалом. Тогда следующие утверждения равносильны:*

I) A *– дискретно нормированная полугруппа;*

II) M *– главный идеал;*

III) всякий ненулевой идеал является степенью M;

IV) существует такой элемент $x \in A$, *что всякий ненулевой идеал в* A *имеет вид* $x^k A$, $k \geq 0$.

Доказательство. I $\Rightarrow$ II – это установлено в лемме 2.

Покажем, что II $\Rightarrow$ III.

Для идеала $I \neq 0$ существует такое k, что $I \supset r^k(I) = M^k$, так как (по лемме 5) $r(I) = M$.

Итак, $I \subset M$, так как M – максимальный идеал, $r^k(I) = M^k \subset I$. Следовательно, $M^k \subset I \subset M$. Из этого следует, что если мы будем брать $M, M^2, \ldots, M^k$, то мы получим $M^s \supseteq I$ и $M^{s+1} \not\supseteq I$.

Поскольку $M = xA$ и $M^s \supseteq I$, а $M^s = x^s A$, то существует такое $y \in I$, что $y = x^s a$ и $y \notin x^{s+1}A$. Докажем, что $a \notin M$. Имеем $y = x^s a$ и $y \notin x^{s+1}A$. Отсюда $x^s A \notin x^s xA \Rightarrow a \notin xA \Rightarrow a \notin M$. Итак, получили, что aA – идеал, M – единственный максимальный идеал и $aA \not\subseteq M$. Следовательно, $aA = A$. Значит, для a в полугруппе A существует обратный элемент a^{-1}, т.е. $aa^{-1} = e$. Этим мы доказали, что $A - xA$ является группой.

Имеем $y = x^s a$, $y \in I$, $a^{-1} \in A \Rightarrow ya^{-1} \in I$, но $ya^{-1} = x^s$. Следовательно, $x^s \in I$. Итак, $M^s \subseteq I$. Мы получили, что $M^s \subseteq I$ и $M^s \supset I$. Следовательно, $M^s = I$.

Покажем, что III $\Rightarrow$ IV.

Пусть $M = M^2$, т.е. отсюда следует, что $M^3 = M^2 \cdot M = M^2 = M$, $M^4 = M^3 \cdot M = M^2 = M$, ... Мы имеем, что всякий ненулевой идеал в полугруппе A является степенью M и $M = M^2 = M^3 = M^4 = \ldots$ Следовательно, в полугруппе A существует единственный нетривиальный идеал (это M). Если $x \in M$, то множество xA является тоже идеалом. Докажем, что $xA \neq A$. Пусть $xA = A$. Отсюда следует, что в полугруппе A существует обратный элемент для x. Имеем, $x \in M$, $x^{-1} \in A \Rightarrow e \in M$ и $M = A$. Противоречие. Итак, $xA \neq A$. Так как M является единственным нетривиальным идеалом, то $M = xA$.

Пусть $M \neq M^2$. Докажем, что $M^2 \neq A$. Пусть $M^2 = A$, т.е. $e \in M^2$. Имеем, $e \in M^2 \Rightarrow x \in M$, $x^{-1} \in M \subset A \Rightarrow e \in M$. Если $e \in M \Rightarrow M = A$. Противоречие. Отсюда следует, что существует $x \in M$, $x \notin M^2$, т.е. $x \in M - M^2$. Рассмотрим множество xA. Оно содержит x и, таким образом, является простым идеалом полугруппы A. Так как M является единственным простым идеалом, то $M = xA$. Отсюда, $M^k = (xA)^k = x^k A^k = x^k A$. Итак, $M^k = x^k A$.

Покажем, что IV $\Rightarrow$ I. Очевидно, что $xA = M$. Покажем, что $x^k A \neq x^{k+1} A$. Если допустить противное, то $x^k = x^{k+1} a$ и, следовательно, $e = xa$. Отсюда $A = eA = xaA \subset xA = M \neq A$. Поэтому для любого $y \in A$ существует ровно одно значение k со свойством $ya = x^k A$. Положим $v(y) = k$.

Если z – элемент из группы частных G полугруппы A, то z можно представить в виде $z = ab^{-1}$, где $a, b \in A$. Положим $v(z) = v(a) - v(b)$. Это определение корректно, так как если $z = cd^{-1}$, то $ab^{-1} = cd^{-1} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow v(a) + v(d) = v(b) + v(c) \Rightarrow v(a) - v(b) = v(c) - v(d) \Rightarrow v(ab^{-1}) = v(cd^{-1})$.

Покажем, наконец, что A – полугруппа нормирования v. $v(ab^{-1}) \geq 0 \Rightarrow v(a) - v(b) \geq 0 \Rightarrow v(a) \geq v(b) \Rightarrow a \in bA \Rightarrow a = bu, u \in A$. Но тогда $ab^{-1} = bub^{-1} = U \in A$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Наумик, М.И.** Дискретно нормированные полугруппы / М.И. Наумик, Д.Ю. Гиряев // Ломоносовские чтения: материалы V Междунар. научн. конф., Севастополь, 3–5 мая 2006 г. / Черноморский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова; редкол.: В.А. Трифонова [и др.]. – Севастополь, 2006.

S U M M A R Y

In the article were is obtained some equivalent statements for discretely normalized semigroup.

Поступила в редакцию 30.08.2006