УДК 517.926+517.977

А.А. Козлов, Е.К. Макаров

О равномерной глобальной достижимости линейных управляемых систем в невырожденном случае

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \geq 0, \qquad (1)$$

с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами. Если управление u в системе (1) задано по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$, где $(m \times n)$-матрица U также предполагается ограниченной и кусочно-непрерывной, то система (1) переходит в однородную замкнутую систему с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0. \qquad (2)$$

В системе (2) матрица U (коэффициент обратной связи) может, в свою очередь, рассматриваться как новый управляющий параметр. Если найдется такое кусочно-непрерывное и ограниченное управление U, что система (2) с этим управлением будет асимптотически эквивалентна любой наперед заданной системе

$$\dot{z} = C(t)z,\ z \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0, \qquad (3)$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей C, т.е. будет существовать преобразование Ляпунова [1], связывающее системы (2) и (3), то говорят [2], что система (2) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости. Заметим при этом, что в таком случае все ляпуновские инварианты системы (2) с управлением U и системы (3) будут совпадать. Поэтому свойство глобальной ляпуновской приводимости также называют [3] свойством глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов.

Система (2) называется ***σ-равномерно глобально достижимой***, если для любого $r \geq 1$ существует число $d = d(r) > 0$ такое, что для всякой $(n \times n)$-матрицы H, удовлетворяющей неравенствам $\|H\| \leq r$ и $\det H \geq 1/r > 0$, и любого $t_0 \geq 0$ найдется такое кусочно-непрерывное и ограниченное на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ управление U, удовлетворяющее условию $\|U(t)\| \leq d$ для всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, при котором для матрицы Коши $X_U(t,s)$, $t, s \geq 0$, системы (2) с этим управлением обеспечивается равенство

$$X_U(t_0 + \sigma, t_0) = H. \qquad (4)$$

Из основных свойств ляпуновских преобразований [4] вытекает (см. например, теорему 2 [5]), что глобальная достижимость является достаточным условием для глобальной ляпуновской приводимости систем. Свойство глобальной достижимости, а также его локальный аналог фактически используются в работах [3, 5–8] для доказательства локальной и глобальной управляемости различных асимптотических инвариантов линейных дифференциальных систем. Сам же термин в контексте задачи локального управления ляпуновскими инвариантами введен в [6], а сформулированное выше определение равномерной глобальной достижимости дано в [5].

В работе [9] показано, что в случае $m = n \geq 2$ если найдутся такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что для матрицы B системы (1) при любом $t_0 \geq 0$ будет выполнено неравенство $\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} |\det B(\tau)|\, d\tau \geq \alpha$, то показатели Ляпунова системы (2) глобально управляемы. Оказывается, что при выполнении этих условий система (2) обладает также и свойством равномерной глобальной достижимости, а значит и свойством глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов. Доказательству этого факта и посвящена настоящая работа.

1. Построение легального маршрута. Будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирован канонический ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ и связанная с ним евклидова норма. Пусть M_n – пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной операторной нормой, т.е. нормой, индуцируемой на M_n евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$, $E \in M_n$ – единичная матрица. Для произвольных $i, j = \overline{1, n}$ обозначим через $E_{ij} \in M_n$ элементарную матрицу [10, с. 128] с единицей в i-ой строке и j-ом столбце, т.е. матрицу $E_{ij} := e_i e_j^T$.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_l$, $l \in N$, – последовательность векторов из $\mathbb{R}^n$, а ρ – некоторое положительное число. Последовательность матриц $P_0, \ldots, P_l \in M_n$ называется ***ρ-легальным маршрутом (относительно последовательности векторов*** ξ_i***)*** [8], соединяющим точки P_0 и P_l, если выполнены неравенства $\det P_i \geq \rho$, $i = \overline{0, l}$, и существуют такие векторы $u_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, l}$, что при каждом $i = \overline{1, l}$ имеют место соотношения $P_i - P_{i-1} = \xi_i u_i^T$. Число l при этом будем называть длиной легального маршрута.

Лемма 1. *Пусть* Γ *– ломаная в пространстве матриц* M_n*. Если вершины ломаной* Γ *образуют ρ-легальный маршрут, то для любой матрицы* G*, лежащей на* Γ*, выполняется неравенство* $\det G \geq \rho$.

Доказательство леммы почти дословно повторяет рассуждения, проводимые в работе [9] при получении формулы (12), в которых следует лишь заменить e_j на u_j и $e_j^T(H - E)$ на u_j^T и положить $\rho_1 = \rho$.

Замечание 1. Очевидно, что свойство ρ-легальности маршрута инвариантно относительно сопряжения, т.е. если последовательность матриц P_i, $i = \overline{0, l}$, составляет ρ-легальный маршрут относительно последовательности векторов ξ_i, $i = \overline{1, l}$, то для любой невырожденной матрицы $F \in M_n$ последовательность матриц $G_i := F^{-1} P_i F$, $i = \overline{0, l}$, образует ρ-легальный маршрут относительно последовательности векторов $\eta_i = F^{-1}\xi_i$, $i=\overline{1,l}$, причем $G_i - G_{i-1} = \eta_i v_i^T$, где $v_i = F^T u_i$, $i=\overline{1,l}$, а векторы u_i определяются исходным маршрутом. Заметим также, что если последовательности матриц P_i, $i=\overline{0,l}$, и R_j, $j=\overline{0,q}$, составляют ρ-легальные маршруты, соединяющие точки P_0 и P_l и R_0 и R_q соответственно, и при этом выполняется равенство $P_l = R_0$, то последовательность матриц $P_0,\dots,P_l,R_1,\dots,R_q$ образует ρ-легальный маршрут длины $l+q$, соединяющий точки P_0 и R_q.

Для любой матрицы $R\in M_n$ обозначим через $(R)_j \in M_j$ матрицу, составленную из первых j строк и столбцов матрицы R, а через $(R)^j \in M_j$ – матрицу, составленную из последних j строк и столбцов матрицы R.

Теорема 1. *При всяком $r > 1$ для любой $(n \times n)$-матрицы $\Lambda\in M_n$, удовлетворяющей неравенствам $\|\Lambda\|\le r$ и $\det\Lambda \ge 1/r$, существует ρ-легальный маршрут, где $\rho = r^{-3n^2}$, длины $l\le 2n$, соединяющий точки E и Λ При этом для всех $i=\overline{1,l}$ имеют место оценки*

$$\|u_i\|\le 5r(n+1), \quad \|\xi_i u_i^T\|\le 5r(n+1). \tag{5}$$

Доказательство. Возьмем произвольную матрицу $\Lambda\in M_n$, удовлетворяющую условиям теоремы. Пусть λ_i, $i=\overline{1,n}$, – ее собственные значения и $\lambda := \max\limits_{i=1\dots n} |\lambda_i|$, тогда для всех $i=\overline{1,n}$ имеют место неравенства $|\lambda|^{n-1}|\lambda_i|\ge|\det\Lambda|\ge 1/r$, из которых в силу оценки [11, с. 359] $|\lambda|\le\|\Lambda\|\le r$ следуют соотношения

$$|\lambda_i|\ge r^{-n} =: r_1, \quad i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Пользуясь теоремой Шура об ортогональной триангуляризации [11, с. 101], приведем матрицу $\Lambda\in M_n$ к вещественному блочно-верхнетреугольному виду, т.е. найдем такую ортогональную матрицу $O\in M_n$, что выполняются равенства $O\Lambda O^{-1} = O\Lambda O^T = H$, где H – блочная верхнетреугольная матрица, диагональные блоки которой упорядочены следующим образом: вначале располагаются (2×2)-блоки $A_s = \begin{pmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ -\beta_s & \alpha_s \end{pmatrix}$, где $\alpha_s \in \mathbb{R}$, $\beta_s > 0$, отвечающие невещественным парам комплексно-сопряженных собственных значений $\alpha_s \pm i\beta_s$ матрицы H, далее – (1×1)-блоки, отвечающие отрицательным собственным значениям матрицы H, и наконец, (1×1)-блоки, отвечающие положительным собственным значениям матрицы H. Обозначим число блоков каждого вида соответственно через k, g и w, тогда g четное в силу соотношений $\det\Lambda > 0$ и $\det A_s = \alpha_s^2 + \beta_s^2 > 0$, $s=\overline{1,k}$. Кроме того, ввиду неравенств (6), для диагональных блоков матрицы H выполняются оценки

$$\det A_s = \lambda_s\overline{\lambda}_s = |\lambda_s|^2 \ge r_1^2, \quad s=\overline{1,k}, \tag{7}$$

$$|h_{ss}|=|\lambda_s|\geq r_1, \quad s=\overline{2k+1,n}. \qquad (8)$$

Обозначим через H_1 матрицу, состоящую из $2q$ первых строк матрицы H и n–$2q$ последних строк матрицы E, где $q:=k+g/2$. Пусть $J(s):=E+\sum_{i=1}^{2s}E_{ii}(H-E)$, $s=\overline{1,q}$, – последовательность блочных верхне-треугольных матриц, составленных из $2s$ строк матрицы H и $n-2s$ строк матрицы E (здесь и далее сумма по пустому множеству индексов считается нулевой), в частности, $J(0)=E$, $J(q)=E+\sum_{i=1}^{2q}E_{ii}(H-E)=H_1$. Тогда, применяя формулы (7) и (8), для определителей матриц $J(s)$, $s=\overline{1,q}$, имеем оценки $\det J(0)=\det E=1$, $\det J(s)=\det(H)_{2s}\det(E)^{n-2s}=\prod_{i=1}^{s}\det A_i\geq$ $\geq r_1^{2s}\geq r_1^{2k}\geq r_1^{2n}$ при всех $1\leq s\leq k$ и $\det J(s)=\det(H)_{2s}\det(E)^{n-2s}\geq r_1^{2n}\cdot$ $\cdot\prod_{i=2k+1}^{2s}h_{ii}=r_1^{2n}\prod_{i=2k+1}^{2s}|h_{ii}|\geq r_1^{2n}r_1^{2(s-k)}\geq r_1^{2n}r_1^{g}\geq r_1^{3n}$ при всех $k<s\leq q$.

Пусть $h:=\max_{i=1\ldots2q}|h_{ii}|$. Положив $m_s:=\max\{1,h\}+h_{2s-12s}+1$ для всех $s=\overline{1,q}$, обозначим через H_2 матрицу, образованную из матрицы H_1 заменой диагональных элементов h_{ii}, $i=\overline{1,2q}$, нулями, а элементов h_{2s-12s} и h_{2s2s-1}, $s=\overline{1,q}$, числами m_s и $-m_s$ соответственно, т.е. матрицу $H_2:=H_1-\mathrm{diag}(h_{11},\ldots,h_{2q2q},0,\ldots,0)-\sum_{s=1}^{q}(E_{pd}(h_{pd}-m_s)+E_{dp}(m_s-h_{pd}))$, где $p=p(s):=2s-1$, $d=d(s):=2s$.

Зафиксируем произвольное $s\in\{1,\ldots,q\}$. Определим матрицы $R_i=R_i(s)$, $i=\overline{0,4}$, равенствами $R_0:=J(s-1)$, $R_1:=R_0+E_{pp}H_2$, $R_2:=R_1+$ $+E_{dd}(H_2+(h_{dd}-1)E)$, $R_3:=R_2+E_{pp}((h_{pp}-1)E+(h_{pd}-m_s)E_{pd})$, $R_4:=$ $:=R_3+(m_s-h_{pd})E_{dp}=\det J_1(s)$ при $1\leq s\leq k$ и $R_4:=R_3+m_sE_{dp}=\det J(s)$ при $k<s\leq q$. Поскольку матрица H_1 – блочно-верхнетреугольная, то, применяя формулу разложения определителя по столбцам, легко убедиться в справедливости соотношений $\det R_0=\det J(s-1)$, $\det R_1=\det J(s-1)$, $\det R_2=$ $=(h_{dd}+m_s^2)\det J(s-1)\geq\det J(s-1)$, $\det R_3=(h_{pp}h_{dd}+m_sh_{pd})\det J(s-1)\geq$ $\geq(h_{pp}h_{dd}+h_{pd}^2)\det J(s-1)\geq\det J(s)$, $\det R_4=(h_{pp}h_{dd}+h_{pd}^2)\det J(s-1)=$ $=\det J(s)$ при $1\leq s\leq k$ и $\det R_4=h_{pp}h_{dd}\det J(s-1)=\det J(s)$ при $k<s\leq q$.

Взяв $\rho:=\min\{r_1^{2n},r_1^{3n},1\}=r_1^{3n}>0$, получим оценку $\det R_i\geq\rho$, $i=\overline{0,4}$. Из нее и верных при всех $i=\overline{1,4}$ равенств $R_i(s)-R_{i-1}(s)=$

$=\xi_i(s)\,u_i^T(s)=\xi_i\,u_i^T$, где $\xi_{2j-1}:=e_{2s-1}$, $\xi_{2j}:=e_{2s}$, $j=\overline{1,2}$, $u_1:=H_2^Te_{2s-1}$, $u_2:=(H_2^T+(h_{2s2s}-1)E)e_{2s}$, $u_3:=((h_{2s-12s-1}-1)E+(h_{2s-12s}-m_s)E_{2s2s-1})e_{2s-1}$, $u_4:=(m_s-h_{2s-12s})e_{2s-1}$ при $1\le s\le k$ и $u_4:=m_se_{2s-1}$ при $k<s\le q$, следует, что для каждого $s=\overline{1,q}$ матрицы $R_i=R_i(s)$, $i=\overline{0,4}$, образуют ρ-легальный маршрут относительно векторов $\xi_i(s)$, $i=\overline{1,4}$, соединяющий точки $J(s-1)$ и $J(s)$. Тогда в силу замечания 1 последовательность матриц $R_0(1)=J(0)=E$, $R_1(1),\ldots,$ $R_4(1)=R_0(2)$, $R_1(2),\ldots,$ $R_3(q)$, $R_4(q)=H_1$ образует ρ-легальный маршрут, соединяющий точки E и H_1, длина которого равна $4q=2(2k+g)=2(n-w)$.

Для произвольного ненулевого вектора $z\in\mathbb{R}$ положим $y=(y_1,\ldots,y_n)^T:=(H-E)z$, тогда из определения матрицы H_1 получим соотношения $\|(H_1-E)z\|^2=\sum_{i=1}^{2q}y_i^2\le\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\|(H-E)z\|^2$, и, переходя к матричным нормам, а также учитывая ортогональность матрицы O, неравенства $\|H_1-E\|\le\|H-E\|$ и

$$\|H_1\|\le\|H\|+2=\|O\Lambda O^{-1}\|+2=\|\Lambda\|+2\le r+2\le 3r. \tag{9}$$

Поскольку модуль элемента матрицы не превосходит спектральной нормы этой матрицы [11, с. 378], имеют место оценки

$$|h_{ij}|\le\|H\|\le r,\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n}, \tag{10}$$

из которых вытекают верные при любых $s=\overline{1,q}$ соотношения $|\mp h_{2s-12s}\pm m_s|\le r+1\le 2r$. Используя последнее неравенство, формулы (9) и (10), соотношение между столбцевой и операторной нормами матрицы [11, с. 378], а также определение величины h, для матрицы H_2^T получим оценку

$$\|H_2^T\|=\|H_2\|\le\|H_1\|+\|\mathrm{diag}(h_{11},\ldots,h_{2q2q},0,\ldots,0)\|+$$
$$+\Big\|\sum_{s=1}^{q}(E_{pd}(h_{pd}-m_s)+E_{dp}(m_s-h_{pd}))\Big\|\le 3r+\sqrt{n}\,h+4qr\le$$
$$\le(3+4n)r+\sqrt{n}r\le(5n+3)r.$$

Отсюда с учетом соотношений (10) следуют неравенства $\|u_1(s)\|\le$ $\le\|H_2^T\|\,\|e_{2s-1}\|\le(5n+3)r$, $\|u_2(s)\|\le(\|H_2^T\|+|h_{2s2s}-1|\,\|E\|)\|e_{2s}\|\le 5(n+1)r$, $\|u_3(s)\|\le(|h_{2s-12s-1}-1|\,\|E\|+|h_{2s-12s}-m_s|\,\|E_{2s2s-1}\|)\,\|e_{2s-1}\|\le 4r$, $\|u_4(s)\|\le$ $\le|m_s-h_{2s-12s}|\,\|e_{2s-1}\|\le 2r$ при $1\le s\le k$ и $\|u_4(s)\|\le|m_s|\,\|e_{2s-1}\|\le|h_{2s-12s}|+$ $+|m_s-h_{2s-12s}|\le 3r$ при $k<s\le q$, т.е. при любых $i=\overline{1,4}$ и $s=\overline{1,q}$ имеют место оценки

$$\|u_i(s)\|\le 5(n+1)r, \tag{11}$$

$$\|\xi_i(s)u_i^T(s)\|\le\|\xi_i(s)\|\,\|u_i^T(s)\|=\|u_i^T(s)\|\le 5(n+1)r. \tag{12}$$

Рассмотрим матрицы $G_i := H_1 + \sum_{s=1}^{i} E_{2q+s\,2q+s}(H - E)$, $i = \overline{0,w}$, составленные из $2q + i$ первых строк матрицы H и последних $w - i$ строк матрицы E, в частности, $G_0 = H_1$, $G_w = H$. Очевидно, матрицы G_i являются блочно-верхнетреугольными с двумя блоками $(H)_{2q+i}$ и $(E)^{w-i}$ на диагонали. Тогда в силу формул (7) и (8) выполняются оценки $\det G_0 = \det H_1 \geq \rho$, $\det G_i = \det(H)_{2q+i} \det(E)^{w-i} = \prod_{s=1}^{k} \det A_s \prod_{s=2k+1}^{2q} h_{ss} \prod_{s=2q+1}^{2q+i} h_{ss} \geq r_1^{2n} \prod_{s=2k+1}^{2q} |h_{ss}| \prod_{s=2q+1}^{2q+i} |h_{ss}| \geq$ $\geq r_1^{2n} r_1^{2q+i-2k} \geq r_1^{2n} r_1^{n-2k} \geq \rho$, $i = \overline{1,w}$. По определению матриц G_i имеем соотношения $G_i - G_{i-1} = e_{2q+i} e_{2q+i}^T (H - E) = \xi_{4q+i} u_{4q+i}^T$, где $\xi_{4q+i} := e_{2q+i}$, $u_{4q+i} := (H^T - E) e_{2q+i}$, $i = \overline{1,w}$. Отсюда и из последних оценок следует, что матрицы G_i, $i = \overline{0,w}$, образуют ρ-легальный маршрут относительно последовательности векторов ξ_{4q+i}, $i = \overline{1,w}$, соединяющий точки H_1 и H. При этом для всех $i = \overline{1,w}$ выполняются неравенства

$$\|u_{4q+i}\| = \|(H^T - E) e_{2q+i}\| \leq \|H^T - E\| \leq \|H\| + 1 \leq 2r, \tag{13}$$

$$\|\xi_{4q+i} u_{4q+i}^T\| \leq \|e_{2q+i}\| (\|H\| + 1) \leq 2r. \tag{14}$$

Обозначим $l := 4q + w = 2(n - w) + w \leq 2n$, $P_{4q+i} := G_i$, $i = \overline{1,w}$. Тогда последовательность матриц $\{P_i\}_{i=0}^{l}$ образует ρ-легальный маршрут, соединяющий точки E и H. Отсюда следует, что и последовательность матриц $O^{-1} P_i O$, $i = \overline{0,l}$, образует ρ-легальный маршрут, соединяющий точки $O^{-1} E O = E$ и $O^{-1} H O = \Lambda$, в силу замечания 1, при этом из оценок (11), (12), (13) и (14) для всех $i = \overline{1,l}$ вытекают соотношения $\|v_i\| = \|O^T u_i\| = \quad = \|u_i\| \leq 5r(n+1)$, $\|\eta_i v_i^T\| = \|O^{-1} \xi_i (O^T u_i)^T\| \leq \|O^{-1}\| \|\xi_i u_i^T\| \|O\| \leq 5r(n+1)$. Теорема 1 доказана.

2. Теорема о глобальной достижимости. Пусть $X(t_0,t)$, $t_0, t \geq 0$, – матрица Коши системы (2) с нулевым управлением, тогда для любых $t_0, t, s \geq 0$ положим $Q(t_0,t) := X(t_0,t) B(t)$, $\varepsilon(t) := \operatorname{sign}(\det Q(t_0,t))$, $J(s,t) := \int_s^t |\det Q(t_0,\tau)|\, d\tau$ и обозначим через $Q^{\nabla}(t_0,t)$ присоединенную [11, с. 33] к матрице $Q(t_0,t)$ матрицу, т.е. матрицу, состоящую из алгебраических дополнений матрицы $Q(t_0,t)$.

Кусочно-непрерывную матричную функцию $B : [0,+\infty) \to M_n$ будем называть ***равномерно интегрально невырожденной***, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что для любого $t_0 \geq 0$ выполнено неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} |\det B(\tau)|\, d\tau \geq \alpha. \qquad (15)$$

Теорема 2. *Пусть $m = n$. Если матрица B системы (1) σ-равномерно интегрально невырождена, то соответствующая замкнутая система (2) является σ-равномерно глобально достижимой.*

Доказательство. Пусть для системы (1) выполняются условия теоремы 2. Возьмем любые число $r \geq 1$ и матрицу Λ, удовлетворяющую неравенствам $\|\Lambda\| \leq r$ и $\det \Lambda \geq r^{-1}$. Зафиксируем произвольное $t_0 \geq 0$ и рассмотрим на отрезке $I := [t_0, t_0+\sigma]$ матричную задачу управления

$$\dot{Y} = A(t)Y + B(t)V, \quad Y \in M_n, \qquad (16)$$

$$Y(t_0) = E, \quad Y(t_0+\sigma) = \Lambda. \qquad (17)$$

Используя подход, описанный в теореме 1 работы [9], будем искать такое кусочно-непрерывное управление $V(t)$, удовлетворяющее задаче (16), (17), чтобы матрица $Y(t)$ была обратимой при всех $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ и для некоторых положительных чисел γ_1, γ_2 при любом $t \in I$ были справедливы соотношения $\|Y^{-1}(t)\| \leq \gamma_1$ и $\|V(t)\| \leq \gamma_2$. Если управление V с такими свойствами построено, то для кусочно-непрерывной функции $U(t) := V(t)Y^{-1}(t)$ на отрез-ке $[t_0, t_0+\sigma]$ получим равномерную по t_0 оценку $\|U(t)\| \leq \|V(t)\|\,\|Y^{-1}(t)\| \leq$ $\leq \gamma_1\gamma_2$, означающую ограниченность $U(t)$ на этом отрезке, и выполнение равенства $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + B(t)V(t) = (A(t) + B(t)U(t))Y(t)$, из которого с учетом (17) будет вытекать тождество $Y(t) \equiv X_U(t, t_0)$ и обеспечиваться соотношение $X_U(t_0+\sigma, t_0) = \Lambda$, устанавливающие σ-равномерную глобальную достижимость системы (2). Покажем, что управление, обладающее всеми указанными свойствами, существует.

Поскольку элемент матрицы не превосходит спектральной нормы этой матрицы [11, с. 378], для всех $t \in [0, +\infty)$ выполняется неравенство $\mathrm{Sp}A(t) \leq na$, где $a := \sup\{\|A(t)\|, t \geq 0\}$. Тогда, полагая $\Lambda_1 := X(t_0, t_0+\sigma)\Lambda$, с учетом оценки $\|\Lambda_1\| \leq \|X(t_0, t_0+\sigma)\|\,\|\Lambda\| \leq r\exp(a\sigma) < r\exp(an\sigma) =: r_2$ и в силу формулы Лиувилля–Остроградского [12, с. 77] получим верные при всяком $t_0 \geq 0$ соотношения $\det\Lambda_1 = \det(X(t_0, t_0+\sigma)\Lambda) \geq r^{-1}\exp\left(\int_{t_0}^{t_0+\sigma} \mathrm{Sp}\,A(\tau)\, d\tau\right) \geq r_2^{-1}$, из которых следует, что матрица Λ_1 удовлетворяет условиям теоремы 1. В соответствии с этой теоремой для матрицы Λ_1 построим ρ-легальный маршрут $\{P_i\}_{i=0}^{l}$, соединяющий точки E и Λ_1 и векторы ξ_i и u_i, $i = \overline{1, l}$, его определяющие. При этом ввиду формул (5) будем иметь оценки

$$\|u_i\| \leq (5n+5)r_2 =: \beta_1(r) = \beta_1, \quad \|\xi_i u_i^T\| \leq \beta_1, \quad i = \overline{1, l}. \qquad (18)$$

Из доказательства теоремы 1 [9] следует, что в силу выполнения неравенства (15) найдутся такие число $\beta > 0$, зависящее от α, и точки $t_i \in [t_0, t_0+\sigma]$, $i = \overline{0, l}$, $t_l := t_0 + \sigma$, что для всех $i = \overline{1, l}$ имеют место соотношения $J(t_{i-1},t_i)\ge \beta/l$. Всюду далее будем считать точки $t_i \in I$, $i=\overline{1,l}$, фиксированными.

Очевидно, что матрица $Y(t)$ тогда и только тогда удовлетворяет уравнению (16), когда матрица $G(t)=X(t_0,t)Y(t)$ является решением уравнения

$$\dot G = Q(t_0,t)V, \quad t\in[t_0,t_0+\sigma], \tag{19}$$

в котором матричный коэффициент $Q(t_0,t)$ кусочно-непрерывен и удовлетворяет оценке $\|Q(t_0,t)\|=\|X(t_0,t)B(t)\|\le b\exp(a\sigma)$, где $b:=\sup\{\|B(t)\|, t\ge 0\}$, при этом между начальным и конечным значениями решений систем (16) и (19) будут иметь место равенства $Y(t_0)=G(t_0)$ и $Y(t_0+\sigma)= = X(t_0+\sigma,t_0)\,G(t_0+\sigma)$.

Определим при каждом $i=\overline{1,l}$ для всех $t\in[t_{i-1},t_i]$ управление V равенствами $V(t)=\varepsilon(t)J^{-1}(t_{i-1},t_i)Q^{\nabla}(t_0,t)\xi_i u_i^T$. Тогда из ограниченности и кусочной непрерывности матричного коэффициента Q, определения матрицы Q^{∇} и оценки (18) следует ограниченность и кусочная непрерывность выбранного управления V. Используя верное при любых $t_0,t\ge 0$ для присоединенной матрицы $Q^{\nabla}(t_0,t)$ равенство [11, с. 34] $Q(t_0,t)Q^{\nabla}(t_0,t)= =E\det Q(t_0,t)$, уравнение (19) с управлением $V=V(t)$ на всяком отрезке $[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,l}$, представим в виде

$$\dot G = J^{-1}(t_{i-1},t_i)\,|\det Q(t_0,t)|\,\xi_i u_i^T. \tag{20}$$

Так как при $t\in[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,l}$, для любого решения системы (20) выполняются соотношения $G(t)=G(t_{i-1})+\mu_i(t)\xi_i u_i^T$, где $\mu_i(t):= :=J^{-1}(t_{i-1},t_i)\int\limits_{t_{i-1}}^{t}|\det Q(t_0,\tau)|\,d\tau$, и при этом $\mu_i(t_i)=1$, то для решения системы (20) с начальным условием $G(t_0)=E$ будут справедливы равенства $G(t_i)=E+\sum\limits_{j=1}^{i}\xi_i u_i^T =: P_i$, $i=\overline{0,l}$. Отсюда следует, что решение системы (20) с указанным начальным условием имеет вид

$$G(t)=P_{i-1}+\mu_i(t)(P_i-P_{i-1}), \quad t\in[t_{i-1},t_i], \quad i=\overline{1,l}, \tag{21}$$

причем $G(t_0)=P_0=E$ и $G(t_0+\sigma)=G(t_l)=P_l=\Lambda_1$.

Легко заметить, что траектория решения $G(t)$ на отрезке $[t_0,t_0+\sigma]$ есть ломаная Γ с вершинами $P_0=E$, $P_1,\ldots$, $P_l=\Lambda_1$. Тогда, поскольку последовательность матриц P_i, $i=\overline{0,l}$, образует ρ-легальный маршрут, соединяющий точки E и Λ_1, где число $\rho=r_2^{-3n^2}$ в силу теоремы 1, из леммы 1 вытекает, что для произвольной матрицы $D\in\Gamma$ выполняется неравенство

$$\det D\ge\rho. \tag{22}$$

Так как всякая матрица D, лежащая на i-ом звене ломаной Γ, $i=\overline{1,l}$, имеет вид $D=E+\sum_{j=1}^{i-1}\xi_j u_j^T+s\xi_i u_i^T$ при некотором $s\in[0,1]$, то из соотношений (18) и неравенства $l\le 2n$, установленного теоремой 1, вытекает оценка $\|D\|=\|E+\sum_{j=1}^{i-1}\xi_j u_j^T+s\xi_i u_i^T\|\le 1+\sum_{i=1}^{l}\|\xi_i u_i^T\|\le l\beta_1+1\le 2n\beta_1+1$. Из нее и формулы (22) в силу замечания 1 работы [3] следуют неравенства $\|D^{-1}\|\le\|D\|^{n-1}|\det D|^{-1}\le(1+2n\beta_1)^{n-1}\rho^{-1}$. Поскольку при каждом $t\in[t_0,t_0+\sigma]$ матрица $G(t)$ совпадает с одной из матриц D, принадлежащих ломаной Γ, то $G(t)$ обратима для любого $t\in I$ и имеет место равномерная по t_0 оценка $G^{-1}(t)\le(1+2n\beta_1)^{n-1}\rho^{-1}$. Поэтому ввиду равенства $G(t)=X(t_0,t)Y(t)$ матрица $Y(t)$ обратима для всех $t\in[t_0,t_0+\sigma]$, и выполняются независящие от $t_0\ge 0$ неравенства $\|Y^{-1}(t)\|\le\|G^{-1}(t)\|\,\|X(t_0,t)\|\le$ $\le\exp(a\sigma)(1+2n\beta_1(r))^{n-1}\rho^{-1}(r)=:\gamma_1(r)$.

Кроме того, в силу соотношений (18) для любого $t_0\ge 0$ при всех $t\in[t_0,t_0+\sigma]$ управление V удовлетворяет неравенствам $\|V(t)\|\le$ $\le\max_{i=\overline{1,l}}\|J^{-1}(t_{i-1},t_i)Q^{\nabla}(t_0,t)\xi_i u_i^T\|\le l\beta^{-1}\|Q^{\nabla}(t_0,t)\|\,\|\xi_i u_i^T\|\le 2np\beta^{-1}\beta_1(r)=:\gamma_2(r)$, где $p>0$ – число, существующее в силу ограниченности матрицы Q^{∇} и обеспечивающее оценку $\|Q^{\nabla}(t_0,t)\|\le p$ на всей ее области определения.

Так как величины γ_1 и γ_2 зависят только r и справедливы равенства $Y(t_0)=G(t_0)=E$, $Y(t_0+\sigma)=X(t_0+\sigma,t_0)G(t_0+\sigma)=X(t_0+\sigma,t_0)\Lambda_1=$ $=X(t_0+\sigma,t_0)X(t_0,t_0+\sigma)\Lambda=\Lambda$, то выполняются все требуемые условия на матрицу управления V. Поэтому построенное управление $V(t)$ является искомым. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть $m=n$. Если матрица B системы (1) равномерно интегрально невырождена, то полная совокупность ляпуновских инвариантов системы (2) глобально управляема.*

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «*Математические модели*».

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Изобов, Н.А.*** Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.А. Изобов // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1974. – Т. 12. – С. 71–146.
2. ***Tonkov, E.L.*** Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system / E.L. Tonkov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2000. – Suppl. 1. – P. S228–S253.
3. ***Макаров, Е.К.*** О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 97–106.
4. ***Былов, Б.Ф.*** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов [и др.]. – М., 1966. – 576 с.
5. ***Зайцев, В.А.*** Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами / В.А. Зайцев // Вестник Удмуртск. ун-та. Серия «Математика». – 2003. – № 3. – С. 31–62.

6. *Зайцев, В.А.* Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова / В.А. Зайцев, Е.Л. Тонков // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 2(441). – С. 60–67.
7. *Попова, С.Н.* Об эквивалентности локальной достижимости и полной управляемости линейных систем / С.Н. Попова // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 6(481). – С. 50–53.
8. *Попова, С.Н.* Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 1627–1636.
9. *Козлов, А.А.* Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов, Е.К. Макаров // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.
10. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М., 1967. – 576 с.
11. *Хорн, Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М., 1989. – 655 с.
12. *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М., 1998. – 480 с.

S U M M A R Y

Let the differential system $\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, *has bounded piecewise continuous square coefficient matrices* A *and* B *and let the control matrix* U *be of the same type. It is proved that this system is uniformly globally attainable if the matrix* B *is uniformly integrally nondegenerate.*

Поступила в редакцию 3.03.2007

УДК 512.53

Д.Ю. Гиряев, М.И. Наумик

О дискретно нормированной полугруппе

I. Приведем некоторые определения и сформулируем леммы, которые легко доказываются.

Пусть G – некоторая коммутативная мультипликативная группа.

Определение 1. Дискретным нормированием группы G называется гомоморфизм v группы G на $\mathbb{R}$, такой, что $v(xy) = v(x) + v(y)$.

Лемма 1. *Множество, состоящее из тех элементов* $x \in G$, *для которых* $v(x) \geq 0$, *образует полугруппу.*

Определение 2. Множество, состоящее из тех элементов x, для которых $v(x) \geq 0$ образует полугруппу, называемую полугруппой нормирования.

Определение 3. Коммутативная полугруппа A с сокращением называется дискретно нормированной, если существует такое дискретное нормирование v ее группы частных G, для которой A является полугруппой нормирования.

Определение 4. Идеал M полугруппы A называется максимальным, если $M \neq A$ и M не содержится ни в каком другом идеале, отличном от A.

Лемма 2. *1) Множество тех* $x \in G$, *для которых* $v(x) > 0$, *образует максимальный идеал дискретно нормированной полугруппы* A. *Никаких других максимальных идеалов эта полугруппа не имеет;*