УДК 336.763.055.4

**О.Г. Казанцева**

# Об одной двумерной модели процентной ставки

Мы рассматриваем класс двухфакторных моделей процесса процентной ставки, в котором динамические движения переменных состояния описываются стохастическими дифференциальными уравнениями. Отношение между параметрами в этих моделях и, следовательно, специальное функциональное выражение переменных состояния, определяется, когда мы получаем формулы в аналитическом виде для цены облигаций, свободных от дефолта с нулевым купоном, используя фундаментальное дифференциальное уравнение в частных производных для цены облигаций.

**Определение двухфакторной модели**

Предположим, что процесс безрисковой краткосрочной процентной ставки $r(t)$ и другая переменная состояния $\phi(t)$ управляются стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} dr(t) = \mu_1(t,r,\phi)dt + \sigma_1(r,\phi,t)dw_1(t), \\ d\phi(t) = \mu_2(t,r,\phi)dt + \sigma_2(r,\phi,t)dw_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

где функции дрейфа и волатильности определены следующим образом:

$$\mu_1(t,r,\phi) = a_1(t) + b_1(t)r(t) + c_1(t)\phi(t), \quad \sigma_1^2(t,r,\phi) = d_1(t) + e_1(t)r(t) + f_1(t)\phi(t),$$
$$\mu_2(t,r,\phi) = a_2(t) + b_2(t)r(t) + c_2(t)\phi(t), \quad \sigma_2^2(t,r,\phi) = d_2(t) + e_2(t)r(t) + f_2(t)\phi(t),$$

$w_1(t)$, $w_2(t)$ – независимые стандартные одномерные броуновские движения по нейтральной к риску мере Q.

**Утверждение.** При выполнении условий:

1. а) для всех $r(t)$, $\phi(t)$ таких, что $\sigma_1(t,r,\phi) = 0$, выполняется

$$\frac{e_1^2(t) + f_1^2(t)}{2} < e_1(t)\mu_1(t,r,\phi) + f_1(t)\mu_2(t,r,\phi); \tag{2}$$

б) для всех $r(t)$, $\phi(t)$ таких, что $\sigma_2(t,r,\phi) = 0$, выполняется

$$\frac{e_2^2(t) + f_2^2(t)}{2} < e_2(t)\mu_1(t,r,\phi) + f_2(t)\mu_2(t,r,\phi). \tag{3}$$

2. а) если $f_1(t) \neq 0$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ $\sqrt{\varepsilon}\sigma_1(t,r,\phi) = \sigma_2(t,r,\phi)$, то есть

$$\varepsilon d_1(t) = d_2(t),\ \varepsilon e_1(t) = e_2(t),\ \varepsilon f_1(t) = f_2(t) \neq 0; \tag{4}$$

б) если $e_2(t) \neq 0$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ $\sqrt{\varepsilon}\sigma_1(t,r,\phi) = \sigma_2(t,r,\phi)$, то есть

$$\varepsilon d_1(t) = d_2(t),\ \varepsilon e_1(t) = e_2(t) \neq 0,\ \varepsilon f_1(t) = f_2(t), \qquad (5)$$

существует единственное (строгое) решение $(r(t),\phi(t))$ в области $\{D = (r(t),\phi(t)) \in R^2,\ \sigma_1^2(t,r,\phi) > 0,\ \sigma_2^2(t,r,\phi) > 0\}$ стохастического дифференциального уравнения (1). Кроме того, для этого решения $(r(t),\phi(t))$ мы имеем $\sigma_1^2(t,r,\phi) > 0, \sigma_2^2(t,r,\phi) > 0$ для всех $t$ почти наверное.

Доказательство: □ следует из теоремы о существовании решения [1, с. 388]■

Условия утверждения позволяют получить область определения процессов $r(t)$ и $\phi(t)$.

Если $d_1(t) + e_1(t) \cdot r(t) + f_1(t) \cdot \phi(t) = 0$, то для любого $t$, такого, что $f_1(t) \neq 0$, выразим из последнего уравнения $\phi(t) = -(d_1(t) + e_1(t) \cdot r(t))/f_1(t)$. Подставив это выражение в неравенство (2), получим:

$$r(t)\left(e_1(t)\left(b_1(t) - c_2(t) - \frac{c_1(t)e_1(t)}{f_1(t)}\right) + b_2(t)f_1(t)\right) >$$
$$> \frac{e_1^2(t) + f_1^2(t)}{2} + d_1(t)\left(c_2(t) + \frac{c_1(t)e_1(t)}{f_1(t)}\right) - a_1(t)e_1(t) - a_2(t)f_1(t).$$

Если $d_2(t) + e_2(t)r(t) + f_2(t)\phi(t) = 0$, то для любого $t$, такого, что $e_2(t) \neq 0$, имеем $r(t) = -(d_2(t) + f_2(t) \cdot \phi(t))/e_2(t)$. Подставив это выражение в неравенство (3), получим:

$$\phi(t)\left(c_1(t)e_2(t) + f_2(t)\left(c_2(t) - b_1(t) - \frac{b_2(t)f_2(t)}{e_2(t)}\right)\right) >$$
$$> \frac{e_2^2(t) + f_2^2(t)}{2} + d_2(t)\left(b_1(t) + \frac{b_2(t)f_2(t)}{e_2(t)}\right) - a_1(t)e_2(t) - a_2(t)f_2(t).$$

**Дифференциальное уравнение в частных производных для цены облигации**

Свободная от дефолта с нулевым купоном облигация с моментом погашения $T$ является ценной бумагой, по которой выплачивается 1 денежная единица в момент времени $T$. Обозначим цену такой облигации в момент $t < T$ через $P(t, T)$. Тогда в момент времени $T$ имеем $P(T, T)=1$.

Предположим, что цена $P(t, T)$ является функцией переменных состояния $r(t)$ и $\phi(t)$, которые определяются формулой (1). Тогда фундаментальное дифференциальное уравнение в частных производных для цены $P(t,T)$, свободной от дефолта с нулевым купоном облигации по нейтральной к риску мере Q, имеет вид [2, с. 7]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_1 \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + \mu_2 \cdot \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_1^2 \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \sigma_2^2 \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}\right) - r \cdot P = 0,\ P(T,T) = 1. \qquad (6)$$

Будем искать решение уравнения (6) в экспоненциально-аффинной форме:

$$P(t,T,r,\phi) = \exp(A(t,T) + B(t,T)r + C(t,T)\phi). \qquad (7)$$

Подставляя эту функциональную форму в уравнение (6), мы приходим к уравнению:

$$\begin{aligned}&\frac{dA}{dt}+B(t)a_1(t)+C(t)a_2(t)+\frac{1}{2}\left(B^2(t)d_1(t)+C^2(t)d_2(t)\right)+\\&+r\left[\frac{dB}{dt}+B(t)b_1(t)+C(t)b_2(t)+\frac{1}{2}\left(B^2(t)e_1(t)+C^2(t)e_2(t)\right)-1\right]+\\&+\phi\left[\frac{dC}{dt}+B(t)c_1(t)+C(t)c_2(t)+\frac{1}{2}\left(B^2(t)f_1(t)+C^2(t)f_2(t)\right)\right]=0.\end{aligned}\tag{8}$$

Поскольку $P(T,T)=1$, то мы имеем граничные условия: $A(T,T)=0$, $B(T,T)=0$, $C(T,T)=0$.

Полагаем, что $f_1(t)\neq 0$ и $e_2(t)\neq 0$. Тогда из второго условия утверждения $\sigma_2(t,r,\phi)=\sqrt{\varepsilon}\sigma_1(t,r,\phi)$ и выражение (8) примет вид:

$$\begin{aligned}&\frac{dA}{dt}+B(t)a_1(t)+C(t)a_2(t)+\frac{d_1(t)}{2}\left(B^2(t)+\varepsilon C^2(t)\right)+\\&+r\left[\frac{dB}{dt}+B(t)b_1(t)+C(t)b_2(t)+\frac{e_1(t)}{2}\left(B^2(t)+\varepsilon C^2(t)\right)-1\right]+\\&+\phi\left[\frac{dC}{dt}+B(t)c_1(t)+C(t)c_2(t)+\frac{f_1(t)}{2}\left(B^2(t)+\varepsilon C^2(t)\right)\right]=0.\end{aligned}\tag{9}$$

Для фиксированного $T$ сделаем замену переменных: $\tau=T-t$, $\tau>0$. Так как уравнение (8) справедливо для любых $r$ и $\phi$, то

$$\begin{cases}\dfrac{dA}{d\tau}=B(\tau)a_1(\tau)+C(\tau)a_2(\tau)+\dfrac{d_1(\tau)}{2}\left(B^2(\tau)+\varepsilon C^2(\tau)\right),\\ \dfrac{dB}{d\tau}=B(\tau)b_1(\tau)+C(\tau)b_2(\tau)+\dfrac{e_1(\tau)}{2}\left(B^2\tau)+\varepsilon C^2(\tau)\right)-1,\\ \dfrac{dC}{d\tau}=B(\tau)c_1(\tau)+C(\tau)c_2(\tau)+\dfrac{f_1(\tau)}{2}\left(B^2(\tau)+\varepsilon C^2(\tau)\right),\\ A(0)=B(0)=C(0)=0.\end{cases}\tag{10}$$

В общем случае система дифференциальных уравнений в квадратурах неразрешима. Поэтому рассмотрим случай решения системы (10), определяя особым образом отношения между параметрами в модели, чтобы получить формулы в аналитическом виде для цены облигаций.

Чтобы определить функциональную зависимость между $B(\tau)$ и $C(\tau)$, мы нашли решение второго и третьего уравнения системы (10) в виде ряда по $\tau$:

$$B(\tau)=-\tau-\frac{b_1(0)\tau^2}{2}+O(\tau^3),\quad C(\tau)=-\frac{c_1(0)\tau^2}{2}+O(\tau^3).$$

Поэтому предположим, что

$$C(\tau)=B(\tau)q_1\tau+q_2\tau^2,\tag{11}$$

где $q_1$, $q_2$ – некоторые постоянные. Тогда уравнения системы (10) примут вид:

$$\frac{dA}{d\tau}=B^2(\tau)\frac{d_1(\tau)}{2}\left(1+\varepsilon q_1^2\tau^2\right)+B(\tau)\left(a_1(\tau)+q_1a_2(\tau)\tau+q_1q_2\varepsilon d_1(\tau)\tau^3\right)+$$
$$+\frac{1}{2}q_2^2\varepsilon d_1(\tau)\tau^4+q_2a_2(\tau)\tau^2, \tag{12}$$

$$\frac{dB}{d\tau}=B^2(\tau)\frac{e_1(\tau)}{2}\left(1+\varepsilon q_1^2\tau^2\right)+B(\tau)\left(b_1(\tau)+q_1b_2(\tau)\tau+q_1q_2\varepsilon e_1(\tau)\tau^3\right)+$$
$$+\frac{1}{2}q_2^2\varepsilon e_1(\tau)\tau^4+q_2b_2(\tau)\tau^2-1, \tag{13}$$

$$\frac{dB}{d\tau}=B^2(\tau)\frac{f_1(\tau)}{2q_1\tau}\left(1+\varepsilon q_1^2\tau^2\right)+B(\tau)\left(\frac{c_1(\tau)-q_1}{q_1\tau}+c_2(\tau)+q_2\varepsilon f_1(\tau)\tau^2\right)+$$
$$+\frac{1}{2q_1}q_2^2\varepsilon f_1(\tau)\tau^3+\frac{q_2}{q_1}c_2(\tau)\tau-\frac{2q_2}{q_1}. \tag{14}$$

Чтобы система (10), с учетом наших предположений, была совместна, необходимо, чтобы соответствующие коэффициенты при степенях $B(\tau)$ в уравнениях (13) и (14) были равны, т.е.

$$\begin{cases}\dfrac{e_1(\tau)}{2}\left(1+\varepsilon q_1^2\tau^2\right)=\dfrac{f_1(\tau)}{2q_1\tau}\left(1+\varepsilon q_1^2\tau^2\right),\\ b_1(\tau)+q_1b_2(\tau)\tau+q_1q_2\varepsilon e_1(\tau)\tau^3=\dfrac{c_1(\tau)-q_1}{q_1\tau}+c_2(\tau)+q_2\varepsilon f_1(\tau)\tau^2,\\ \dfrac{1}{2}q_2^2\varepsilon e_1(\tau)\tau^4+q_2b_2(\tau)\tau^2-1=\dfrac{1}{2q_1}q_2^2\varepsilon f_1(\tau)\tau^3+\dfrac{q_2}{q_1}c_2(\tau)\tau-\dfrac{2q_2}{q_1}.\end{cases}$$

Выполнив необходимые преобразования, мы имеем:

$$f_1(\tau)=q_1e_1(\tau)\tau,\quad q_1=2q_2,\quad c_2(\tau)=q_1b_2(\tau)\tau,\quad c_1(\tau)=q_1\left(b_1(\tau)\tau+1\right).$$

Уравнение (13) имеет вид:

$$\frac{dB}{d\tau}=B^2(\tau)x_2(\tau)+B(\tau)x_1(\tau)+x_0(\tau),\ \text{где} \tag{13'}$$

$$x_2(\tau)=\frac{e_1(\tau)}{2}\left(1+\varepsilon q_1^2\tau^2\right),\quad x_1(\tau)=b_1(\tau)+q_1b_2(\tau)\tau+q_1q_2\varepsilon e_1(\tau)\tau^3, \tag{15}$$
$$x_0(\tau)=\frac{1}{2}q_2^2\varepsilon e_1(\tau)\tau^4+q_2b_2(\tau)\tau^2-1.$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение − уравнение Риккати. При произвольных функциях оно в квадратурах не интегрируется [3, с. 14].

Перейдем к новой переменной $z(\tau)$ [3, с. 16]: $z(\tau)=\exp\left(-\int x2(u)B(u)du\right)$.

Тогда уравнение (13') преобразуется к линейному однородному уравнению второго порядка:

$$x_2(\tau)\frac{d^2z}{d\tau^2}-\left(\frac{dx_2}{d\tau}+x_2(\tau)x_1(\tau)\right)\frac{dz}{d\tau}+x_2^2(\tau)x_0(\tau)z(\tau)=0. \tag{16}$$

Чтобы найти аналитическое решение уравнения (16), мы будем полагать, что $x_2(\tau)\equiv x_2$, $x_1(\tau)\equiv x_1$, $x_0(\tau)\equiv x_0$, то есть постоянные функции. В этом случае общее решение уравнения (13') имеет вид [3, с. 158]:

1) если $x_1^2-4x_2x_0>0$, то

$$z(\tau)=\exp\left(\frac{\tau}{2}x_1\right)\left(C_1\exp\left(\frac{\tau}{2}\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}\right)+C_2\exp\left(-\frac{\tau}{2}\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}\right)\right),$$

2) если $x_1^2-4x_2x_0<0$, то

$$z(\tau)=\exp\left(\frac{\tau}{2}x_1\right)\left(C_1\sin\left(\frac{\tau}{2}\sqrt{4x_2x_0-x_1^2}\right)+C_2\cos\left(\frac{\tau}{2}\sqrt{4x_2x_0-x_1^2}\right)\right),$$

3) если $x_1^2-4x_2x_0=0$, то $z(\tau)=\exp\left(\frac{\tau}{2}x_1\right)(C_1\tau+C_2)$,

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

Вернемся к функции $B(\tau)$: $B(\tau)=-\frac{1}{x_2(\tau)z(\tau)}\frac{dz}{d\tau}$. Учитывая начальное условие $B(0)=0$, получаем начальное условие для функции $z(\tau)$: $\frac{d}{d\tau}z(0)=0$. Это позволяет нам найти соотношение между $C_1$ и $C_2$:

1) если $x_1^2-4x_2x_0>0$, то $C_1\left(\frac{1}{2}\left(x_1+\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}\right)\right)=-C_2\left(\frac{1}{2}\left(x_1-\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}\right)\right)$,

2) если $x_1^2-4x_2x_0<0$, то $C_2x_1=-C_1\sqrt{4x_2x_0-x_1^2}$,

3) если $x_1^2-4x_2x_0=0$, то $C_2x_1=-2C_1$.

Подставив в выражение функции $B(\tau)$ соответствующую функцию $z(\tau)$ и учитывая соотношения между $C_1$ и $C_2$, получим, что решение уравнения (13') имеет вид:

1) если $x_1^2-4x_2x_0>0$, то

$$B(\tau)=\frac{2x_0\left(1-\exp\left(-\tau\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}\right)\right)}{x_1-\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}-\left(x_1+\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}\right)\exp\left(-\tau\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}\right)}. \qquad (17)$$

Свойства функции $B(\tau)$:

а) если $\frac{x_1+\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}}{x_1-\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}}>0$, то при $\tau^*=\frac{1}{\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}}\ln\left(\frac{x_1+\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}}{x_1-\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}}\right)$ функция $B(\tau)$ не определена;

б) $B(\tau)\xrightarrow{\tau\to\infty}=\frac{2x_0}{x_1-\sqrt{x_1^2-4x_2x_0}}$;

в) так как $\dfrac{dB}{d\tau} = \dfrac{-4x_0\left(x_1^2 - 4x_2x_0\right)\exp\left(-\tau\sqrt{x_1^2 - 4x_2x_0}\right)}{\left(x_1 - \sqrt{x_1^2 - 4x_2x_0} - \left(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 4x_2x_0}\right)\exp\left(-\tau\sqrt{x_1^2 - 4x_2x_0}\right)\right)^2}$, то при $x_0 > 0$ функция $B(\tau)$ убывает, при $x_0 < 0$ функция $B(\tau)$ возрастает на области определения;

2) если $x_1^2 - 4x_2x_0 < 0$, то

$$B(\tau) = \frac{2x_0}{x_1 + \sqrt{4x_2x_0 - x_1^2}\,ctg\left(\frac{t}{2}\sqrt{4x_2x_0 - x_1^2}\right)}. \qquad (17')$$

Свойства функции $B(\tau)$:

а) при $\tau^* = \dfrac{2}{\sqrt{4x_2x_0 - x_1^2}}\left(\pi k - arctg\left(\dfrac{\sqrt{4x_2x_0 - x_1^2}}{x_1}\right)\right)$, $k \in Z$ функция $B(\tau)$ не определена;

б) так как $\dfrac{dB}{d\tau} = \dfrac{-x_0\left(4x_2x_0 - x_1^2\right)\left(1 + tg^2\left(\frac{\tau}{2}\sqrt{4x_2x_0 - x_1^2}\right)\right)}{\left(x_1 + \sqrt{4x_2x_0 - x_1^2}\,ctg\left(\frac{\tau}{2}\sqrt{4x_2x_0 - x_1^2}\right)\right)^2 tg^2\left(\frac{\tau}{2}\sqrt{4x_2x_0 - x_1^2}\right)}$,

то при $x_0 > 0$ функция $B(\tau)$ убывает, при $x_0 < 0$ функция $B(\tau)$ возрастает на области определения;

3) если $x_1^2 - 4x_2x_0 = 0$, то $C_2x_1 = -2C_1$.

$$B(\tau) = \frac{2x_0\tau}{(2 - x_1\tau)}. \qquad (17'')$$

Свойства функции $B(\tau)$:

а) при $\tau^* = \dfrac{2}{x_1}$ функция $B(\tau)$ не определена;

б) $B(\tau) \xrightarrow{\tau\to\infty} = -\dfrac{2x_0}{x_1}$;

в) так как $\dfrac{dB}{d\tau} = \dfrac{4x_0}{(2 - x_1\tau)^2}$, то при $x_0 > 0$ функция $B(\tau)$ возрастает, а при $x_0 < 0$ функция $B(\tau)$ убывает на $(0, \tau^*) \cup (\tau^*, +\infty)$.

Следует отметить, что из экономических соображений подбирать параметры модели необходимо таким образом, чтобы функция $B(\tau)$ была отрицательна при всех $\tau > 0$, так как с увеличением процентной ставки цена облигации не должна увеличиваться. Анализ показывает, что только функция (17) при $x_0 > 0$, $x_2 < 0$, и любом $x_1$ удовлетворяет этим условиям.

Решение уравнения (12) имеет вид:

$$A(\tau)=\int_0^\tau B^2(u)\frac{d_1(u)}{2}\left(1+\varepsilon q_1^2u^2\right)du+\int_0^\tau B(u)\left(a_1(u)+q_1a_2(u)u+\frac{1}{2}q_1^2\varepsilon d_1(u)u^3\right)du$$
$$+\int_0^\tau\left(\frac{1}{8}q_1^2\varepsilon d_1(u)u^4+\frac{q_1}{2}a_2(u)u^2\right)du. \tag{18}$$

В силу того, что $x_2(\tau)$, $x_1(\tau)$, $x_0(\tau)$ – постоянные функции, то из (15) получим:

$$e_1(\tau)=\frac{2x_2}{1+\varepsilon q_1^2\tau^2},\quad b_2(\tau)=\frac{2(x_0+1)}{q_1\tau^2}-\frac{\varepsilon q_1}{4}e_1(\tau)\tau^2,$$
$$b_1(\tau)=x_1-q_1b_2(\tau)\tau-\frac{q_1^2\varepsilon e_1(\tau)\tau^3}{2}. \tag{19}$$

Таким образом, мы получили модель временной структуры, в которой цена свободной от дефолта дисконтной облигации определяется выражением:

$$P(t,T,r,\phi)=P(T-t,r,\phi)=P(\tau,r,\phi)=\exp\left(A(\tau)+B(\tau)r+C(\tau)\phi\right),$$

где функции $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ определяются формулами (18), (17), (11). При этом основные динамические движения краткосрочной ставки и другой переменной состояния управляются стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} dr(t)=\mu_1(t,r,\phi)dt+\sigma(r,\phi,t)dw_1(t),\\ d\phi(t)=\mu_2(t,r,\phi)dt+\sqrt{\varepsilon}\sigma(r,\phi,t)dw_2(t),\end{cases}$$

где $\mu_1(t,r,\phi)=a_1(t)+b_1(t)r(t)+q_1\left(b_1(t)t+1\right)\phi(t)$;

$\mu_2(t,r,\phi)=a_2(t)+b_2(t)r+q_1tb_2(t)\phi(t)$; $\sigma(t,r,\phi)=\sqrt{d_1(t)+e_1(t)r(t)+q_1te_1(t)\phi(t)}$;

$e_1(\tau)$, $b_2(\tau)$, $b_1(\tau)$ имеют вид, определяемый выражениями (19), где параметры $x_0$, $x_2$ удовлетворяют неравенствам $x_0>0$, $x_2<0$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. ***Duffie, D.A.*** Yield-factor model of interest rates / D.A. Duffie // Mathematical Finance. – 1996. – № 6. – P. 388.
2. ***Shiu, E.*** Implied factor models of term structure of interest rates / E. Shiu // Working paper. (Research report). – 1998. – 22 p.
3. ***Зайцев, В.Ф.*** Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1997. – 576 с.



*S U M M A R Y*

*The class of two-factor models of interest rate process is examined. Relationships among parameters in these models and, therefore, special functional form of the state variables are determined when we get formulas in an analytical kind for the price of default-free zero-coupon bond, using fundamental differential equalization in private derivatives for the cost of bonds.*



*Поступила в редакцию 25.09.2008*