УДК 512.542

Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич

Об одном обобщении подгруппы Фраттини в конечных разрешимых группах

Все рассматриваемые нами группы конечны. В обозначениях и определениях мы следуем монографии [1]. Исследование пересечений максимальных подгрупп восходит к работе Фраттини [2]. Полученные им результаты в дальнейшем развивались многочисленными авторами. В частности, В. Гашюцом [3] исследовалось пересечение $\Delta(G)$ всех абнормальных максимальных подгрупп группы G. В работе Д. Бейдлемана и Т. Сео [4] изучалось поведение нормальных подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях. В статье исследуется строение подгруппы, близкой по своим свойствам к подгруппе Гашюца $\Delta(G)$.

Заметим, что в разрешимой группе G существуют и сопряжены холловские p'-подгруппы, для любого $p \in \pi(G)$.

Определение. *Пусть G – разрешимая группа. Нормальную подгруппу H группы G назовем обобщенной подгруппой Фраттини, если $G = N_G(K)$ для каждой нормальной подгруппы L из G и каждой p'-холловой подгруппы K из L такой, что $G = HN_G(K)$.*

Напомним [5], что через $F_p(G)$ обозначают p-нильпотентный радикал группы G, то есть произведение всех нормальных p-нильпотентных подгрупп группы G.

Подгруппу H называют абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Лемма 1. *Пусть $K \lhd G$ и пусть в K существуют и сопряжены p'-холловы подгруппы. Тогда, если P – p'-холлова подгруппа из K и $N_G(P) \neq G$, то $N_G(P)$ – абнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть $x \in G$. По лемме Фраттини $G = KN_G(P)$. Тогда $x = kh$, где $k \in K$, $h \in N_G(P)$. Тогда $\langle N_G(P), (N_G(P))^{kh} \rangle =$
$= \langle N_G(P), (N_G(P))^k \rangle$. В силу того, что $N_K(P) \subseteq N_G(P)$ и $N_K(P)$ – абнормальна в K, получаем $k \in \langle N_K(P), (N_K(P))^k \rangle \subseteq \langle N_G(P), (N_G(P))^k \rangle$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть H – обобщенная подгруппа Фраттини группы G. Тогда*

1) H – нильпотентная подгруппа группы G;

2) любая нормальная подгруппа, содержащаяся в обобщенной подгруппе Фраттини, является обобщенной подгруппой Фраттини;

3) если $\Delta(G) \neq G$, то $\Delta(G)$ – обобщенная подгруппа Фраттини группы G;

4) $H\Phi(G)$ – обобщенная подгруппа Фраттини группы G;

5) $HZ(G)$ – обобщенная подгруппа Фраттини группы G.

Доказательство. Пусть $p \in \pi(H)$ и K – p'-холлова подгруппа подгруппы H. По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(K)H$. Так как H – обобщенная подгруппа Фраттини группы G, то $G = N_G(K)$. Итак, любая p'-холлова подгруппа из H нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа H p-нильпотентна для любого простого числа $p \in \pi(H)$, следовательно H – нильпотентная подгруппа группы G.

Пусть Q – нормальная подгруппа, содержащаяся в обобщенной подгруппе Фраттини H. Рассмотрим для каждой нормальной подгруппы L из G такие p'-холловы подгруппы K из L, что $G = QN_G(K)$. Из того, что $Q \subseteq H$, следует, что $G = HN_G(K)$ и $G = N_G(K)$. Следовательно, Q – обобщенная подгруппа Фраттини группы G.

Рассмотрим для каждой нормальной подгруппы L из G такие p'-холловы подгруппы K из L, что $G = \Delta(G)N_G(K)$. По лемме 1 $N_G(K)$ – абнормальная подгруппа группы G, следовательно, $N_G(K)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной подгруппе T. Тогда, так как $T \supseteq \Delta(G)$, то $G = T$. Из полученного противоречия получаем, что $G = N_G(K)$, а это означает, что $\Delta(G)$ – обобщенная подгруппа Фраттини группы G.

Следующие утверждения выполняются в силу того, что $\Phi(G)$ состоит из необразующих элементов, а $Z(G)$ содержится в нормализаторе каждой подгруппы группы G. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть K – обобщенная подгруппа Фраттини. Если N – нормальная подгруппа группы G и N/K – p-нильпотентна, то N p-нильпотентная подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную $S_{p'}$-подгруппу H/K. Так как K – обобщенная подгруппа Фраттини, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что S_p-подгруппа R из K является S_p-подгруппой в H. По теореме Шура–Цассенхауза H содержит $S_{p'}$-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(S)H$ с учетом того, что $H = SR$, получаем $G = N_G(S)R$. Тогда по свойству 2, R – обобщенная подгруппа Фраттини. Следовательно, $G = N_G(S)$, а значит, S нормальна в G.

Следствие 1. *Пусть K – обобщенная подгруппа Фраттини, тогда $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.*

Теорема 3. *Пусть F – локальная формация и K – обобщенная подгруппа Фраттини группы G. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap K \in F$, тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in F$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(F) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $D = N \cap K$, $\omega = \pi(F)$. Так как N/D является ω-группой, то по лемме 1 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – S_ω-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq K$, то $N/DN_1/D_1 \in F$, где $D_1 = N_1 \cap K$. Пусть $p \in \omega$. Так как $N_1/D_1 \in F$, то, используя леммы 1 и 2, получаем

$$(N_1/D_1)/F_p(N_1/D_1) = N_1/D_1/F_p(N_1)/D_1N_1/F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 4.5 из [5] подгруппа N_1 входит в F. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пусть F – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, K – обобщенная подгруппа Фраттини группы G. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap K \in F$, то $N \in F$.*

Следствие 3.2. *Пусть F – локальная формация. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in F$, тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in F$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(F) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 3.3. *Пусть F – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in F$, то $N \in F$.*

Если в качестве обобщенной подгруппы Фраттини взять подгруппу Фраттини $\Phi(G)$, то из теоремы 3 получаем известный результат из работы [5].

Теорема 4. *Пусть K – обобщенная подгруппа Фраттини и M – нормальная подгруппа группы G, содержащая K. Тогда M/K является обобщенной подгруппой Фраттини в G/K в том и только в том случае, когда M обобщенная подгруппа Фраттини группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что M – обобщенная подгруппа Фраттини группы G. Пусть L/K нормальная подгруппа из G/K и пусть H – p'-холлова подгруппа нормальной подгруппы L из G такая, что $G/K = (M/K)N_{G/K}(KH/K)$, тогда $G = MN_G(KH)$. Пусть $g = mx$, где $m \in M$ и $x \in N_G(KH)$, тогда $H^x \subseteq KH$. Так как L – нормальная подгруппа группы G, то H и H^x – p'-холловы подгруппы в подгруппе $L \cap KH$. Поэтому существует элемент y из $L \cap KH$ такой, что $H^{xy} = H$, следовательно, $xy \in N_G(H)$. Тогда $gy = m(xy)$ содержится в $MN_G(H)$. Так как $MN_G(H)$ содержит KH. Отсюда следует, что $y \in MN_G(H)$, следовательно, $g \in MN_G(H)$. Мы показали, что $G = MN_G(H)$. В силу того, что M – обобщенная подгруппа Фраттини группы G, следует, что $G = N_G(H)$. Отсюда заключаем, что M/K – обобщенная подгруппа Фраттини группы G/K.

Предположим, что M/K – обобщенная подгруппа Фраттини группы G/K. Пусть L – нормальная подгруппа группы G и пусть H – p'-холлова подгруппа нормальной подгруппы L из G такая, что $G = MN_G(H)$. Тогда $G/K = (M/K)N_{G/K}(KH/K)$, следовательно, так как KH/K – p'-холлова подгруппа нормальной подгруппы KL/K из G/K, то $G/K = N_{G/K}(KH/K)$. Отсюда получаем, что KH – нормальная подгруппа группы G. Пусть H_1 – p'-холлова подгруппа из KH, содержащая H. По обобщенной лемме Фраттини $G = KHN_G(H_1) = KN_G(H_1)$, следовательно, $G = N_G(H_1)$, а значит $H_1 \subseteq F_p(G)$.

Из теоремы 3 следует, что M – нильпотентная подгруппа группы G. Тогда MH – нильпотентная подгруппа. Из того, что $G = MN_G(H)$, следует, что MH – нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G.

Покажем, что $N_G(H)$ содержит MH. Пусть H_2 – p'-холлова подгруппа подгруппы MH. Тогда H_2 – нормальна в G, следовательно, $H \subseteq H_2$. Пусть H_3 – p'-холлова подгруппа группы G, содержащая H_2. Так как L – нормальная подгруппа группы G, $L \cap H_3 = H$ и $N_G(H_3) \subseteq N_G(H)$. Из этого следует, что $H_2 \subseteq N_G(H)$. Так как MH – нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G, то $MH \subseteq N_G(H)$. Мы показали, что $G = N_G(H)$, следовательно, M – обобщенная подгруппа группы G.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Селькин, М.В.*** Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
2. ***Frattini, G.*** Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
3. ***Gaschütz, W.*** Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.
4. ***Beidleman, J.C.*** Generalized Frattini subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, T.K. Seo // Pacific journal of mathematics. – 1967. – Vol. 23, № 3. – P. 441–450.
5. ***Шеметков, Л.А.*** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.

S U M M A R Y

The structure of generalized Frattini subgroup of finite soluble groups is investigated.

Поступила в редакцию 23.12.2007