

УДК 512.542

В.Н. Загурский

Функции Хартли с заданными свойствами подгрупп Холла

В теории классов конечных групп хорошо известны своими приложениями локальные спутники, определяемые посредством заданных свойств канонических подгрупп. Напомним, что локальным экраном или локальным спутником [1] называют всякое отображение $f: P \rightarrow \{ \text{формации} \}$, где P – множество всех простых чисел. В работе [2] описан наибольший локальный спутник h разрешимой формации \mathfrak{F} . Его значения для любого простого p определяются равенством $h(p) = \mathfrak{F} \uparrow \psi(p)$, где ψ – наибольший приведенный локальный спутник формации \mathfrak{F} и $\mathfrak{F} \uparrow \psi(p)$ класс всех групп, \mathfrak{F} -нормализаторы которых принадлежат $\psi(p)$. Кроме того, известно [3], что разрешимая формация \mathfrak{F} с полным приведенным локальным спутником f также определяется локальным спутником φ , значениями которого для каждого простого p является

$\mathfrak{F} \downarrow f(p)$ – класс всех тех групп, в которых \mathfrak{F} -проектор принадлежит $f(p)$. Заметим, что с помощью такого локального спутника φ получено описание всех главных факторов разрешимой группы, покрываемых \mathfrak{F} -проекторами (см., V.4.9[4]). Известно, что формации могут также определяться локально посредством свойств подгрупп Холла. В частности, Блессенолем [5] была построена формация $B_\pi(\mathfrak{F})$ всех тех групп, холловская π -подгруппа которых принадлежит формации \mathfrak{F} и доказано, что класс $B_\pi(\mathfrak{F})$ является локальным для любой локальной формации \mathfrak{F} и определяется локальным спутником в терминах класса $B_\pi(\mathfrak{F})$.

Вместе с тем задача построения локальных заданий классов Фиттинга посредством канонических подгрупп до настоящего времени не рассматривалась. Хотя хорошо известна своими приложениями для изучения строения инъекторов и внутренней структуры классов Фиттинга конструкция класса $L_\pi(\mathfrak{F})$ [6] всех тех групп, \mathfrak{F} -инъекторы которых содержат некоторую холловскую π -подгруппу этих групп, где \mathfrak{F} – класс Фиттинга (см., например, IX.1, IX.3-4, X.1 [4]). В настоящей работе посредством класса Фиттинга $L_\pi(\mathfrak{F})$ мы описываем серию новых локальных заданий произведения $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ разрешимого класса Фиттинга \mathfrak{F} и класса \mathfrak{N}_π всех нильпотентных π -групп.

Предварительные сведения. В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы.

Напомним, что если π – некоторое множество простых чисел, то через G_π обозначают холловскую π -подгруппу группы G – подгруппу, порядок которой есть π -число, а индекс π' -число.

Класс групп \mathfrak{F} называется классом Фиттинга, если \mathfrak{F} замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Из определения следует, что для любого непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} в любой группе G существует единственная \mathfrak{F} -максимальная нормальная подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G . Ее называют \mathfrak{F} -радикалом G . Через $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ обозначают произведение классов Фиттинга \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – класс всех тех групп G , для которых $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Заметим также, что для любого непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} класс \mathfrak{F}^* определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий \mathfrak{F} такой, что для любых групп G и H справедливо равенство: $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс

Фиттинга \mathfrak{F} называется классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [7]. Всякое отображение $f: P \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ называется локальной функцией Хартли или локальной H -функцией [8]. Через $Supp(f) = \{p \in P \mid f(p) \neq \emptyset\}$ обозначают носитель f .

Пусть $LR(f) = \mathfrak{S}_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$, где π – носитель H -функции f . Класс Фиттинга \mathfrak{F} называют локальным [8], если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H -функции f .

Локальную H -функцию f класса Фиттинга \mathfrak{F} называют [9]:

- 1) полной, если $f(p)\mathfrak{R}_p = f(p)$ для каждого простого p ;
- 2) приведенной, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех простых p ;
- 3) полной приведенной, если f одновременно полная и приведенная локальная H -функция.

Следуя Л.А. Шеметкову [1], любое непустое множество Ω – локальных H -функций класса Фиттинга \mathfrak{F} , будем считать частично упорядоченным с отношением \leq , которое задается следующим образом. Если $f, h \in \Omega$, то $f \leq h$ в том и только в том случае, когда $f(p) \subseteq h(p)$ для всех простых p .

Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [1,4].

Свойства H -функций. В настоящем разделе мы опишем некоторые свойства H -функций, которые будем использовать.

Лемма 1[9]. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой локальной H -функции f . Тогда $\mathfrak{F} = LR(g)$, где g – полная приведенная локальная H -функция такая, что $g(p) = (f(p) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{R}_p$ для всех простых p .

Лемма 2[10]. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой локальной H -функции f . Тогда $\mathfrak{F} = LR(f^*)$ для локальной H -функции f^* такой, что $f^*(p) = (f(p))^*$ для всех простых p . Если f – полная приведенная локальная H -функция, то f^* также является полной приведенной H -функцией.

Лемма 3. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR(f) = LR(h)$. Если f, h – полные приведенные локальные H -функции, то $(f(p))^* = (h(p))^*$ для каждого простого p .

Доказательство. Пусть $f^*(p) = (f(p))^*$ и $h^*(p) = (h(p))^*$ для всех простых p . Докажем включение $f^*(p) \subseteq h^*(p)$. Выберем группу G такую, что $G \in f^*(p) \setminus h^*(p)$ для некоторого простого p . Далее положим $X = G \setminus Z_p = [K]Z_p$, где K – база регулярного сплетения X . Так как $f^*(p)$ – класс Фиттинга, то $K \in f^*(p)$. Из свойств полупрямого произведения следует, что $X/K \cong Z_p \in \mathfrak{R}_p$. По лемме 2 f^*, h^* – полные приведенные H -функции класса Фиттинга \mathfrak{F} . Тогда $X \in f^*(p)\mathfrak{R}_p = f^*(p) \subseteq \mathfrak{F} = LR(h^*)$. Значит, $X \in h^*(p)\mathfrak{E}_{p'}$.

Поскольку $h^*(p)$ – класс Локетта и $G \notin h^*(p)$, то ввиду X. 2.1a [4] $X_{h^*(p)} = K_1$, где K_1 – база регулярного сплетения $X_1 = G_{h^*(p)} \setminus Z_p$. Ввиду свойств сплетений (см., например, A. 18.2d [4])

$$X / X_{h^*(p)} = X / K_1 \cong (G / G_{h^*(p)}) \setminus Z_p \notin \mathfrak{E}_{p'}$$

Следовательно, по определению произведения классов Фиттинга $X \notin h^*(p)\mathfrak{S}_{p'}$. Получили противоречие с тем, что $X \in h^*(p)\mathfrak{S}_{p'}$. Поэтому $f^*(p) \subseteq h^*(p)$ для всех простых p . Аналогично можно показать, что $h^*(p) \subseteq f^*(p)$ для любого простого p . Таким образом, $f^*(p) = h^*(p)$ для всех простых p . Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR(F)$, где F – наибольшая приведенная локальная H -функция, $\pi = \text{Supp}(F)$ и h – такая локальная H -функция, что $\text{Supp}(h) = \pi$. Тогда следующие условия равносильны:

$$1) \mathfrak{F} = LR(h);$$

$$2) ((h(p) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_p)^* = F(p) \text{ для всех простых } p.$$

Доказательство. Докажем вначале, что из 1) следует 2). Пусть $\mathfrak{F} = LR(h)$. Тогда по лемме 1 класс \mathfrak{F} определяется полной приведенной локальной H -функцией g такой, что $g(p) = (h(p) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_p$ для любого простого p . Поскольку наибольшая приведенная H -функция F класса \mathfrak{F} является полной, то по лемме 3 получаем $(g(p))^* = (F(p))^*$. Так как значениями H -функции F являются классы Локетта, то $(g(p))^* = F(p)$ для любого простого p и, значит, выполняется условие 2).

Покажем теперь, что из 2) следует 1). Пусть $\mathfrak{H} = LR(h)$.

Докажем включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда группа G комонолитична, и ее комонолит $G_{\mathfrak{H}}$. Поэтому $G/G_{\mathfrak{H}} \cong Z_q \in \mathfrak{N}_q$ и $q \in \pi$. Так как $G_{\mathfrak{H}} \in h(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для всех $p \in \pi$, то $G \in \mathfrak{S}_{\pi} \cap (\bigcap_{r \in \pi} h(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{S}_{r'})$. Учитывая $G \notin \mathfrak{H}$, получаем $G \notin h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$.

Далее из $G \in \mathfrak{F} = LR(F)$ вытекает, что $G \in F(q)\mathfrak{S}_{q'}$ и, значит, $G/G_{F(q)} \in \mathfrak{S}_{q'}$. Предположим, что $G \notin F(q)$. Поскольку $G_{\mathfrak{H}}$ – комонолит группы G , то $G_{F(q)} \triangleleft G_{\mathfrak{H}}$. Теперь из $G/G_{F(q)} \in \mathfrak{S}_{q'}$ и $G/G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_q$ ввиду изоморфизма $(G/G_{F(q)})/(G_{\mathfrak{H}}/G_{F(q)}) \cong G/G_{\mathfrak{H}}$ получаем $G/G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{S}_{q'} \cap \mathfrak{N}_q = (1)$. Тогда $G \in \mathfrak{H}$, что противоречит выбору G . Следовательно, $G \in F(q)$. Легко видеть, что класс Фиттинга $h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$ – локален и, значит, по лемме 5 [9] является классом Локетта. Тогда учитывая условие 2)

$$G \in F(q) = ((h(q) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_q)^* \subseteq (h(q)\mathfrak{N}_q)^* \subseteq (h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'})^* = h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}.$$

Получили противоречие с тем, что $G \notin h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Докажем обратное включение: $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа G комонолитична и ее комонолит $G_{\mathfrak{F}}$. Поэтому $G/G_{\mathfrak{F}} \cong Z_q \in \mathfrak{N}_q$, причем $q \in \pi$. Поскольку $G \in \mathfrak{H}$, то $G \in h(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$ и, значит, $G/G_{h(q)\mathfrak{N}_q} \in \mathfrak{S}_{q'}$. Предположим, что $G \notin h(q)\mathfrak{N}_q$. Так как $G_{\mathfrak{F}}$ – комонолит группы G , то $G_{h(q)\mathfrak{N}_q} \triangleleft G_{\mathfrak{F}}$. Теперь из $G/G_{h(q)\mathfrak{N}_q} \in \mathfrak{S}_{q'}$ и

$G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_q$ ввиду изоморфизма $(G/G_{h(q)\mathfrak{N}_q})/(G_{\mathfrak{F}}/G_{h(q)\mathfrak{N}_q}) \cong G/G_{\mathfrak{F}}$ получаем $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_q \cap \mathfrak{N}_q = (1)$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору G . Следовательно, $G \in h(q)\mathfrak{N}_q$ и $G/G_{h(q)} \in \mathfrak{N}_q$.

Предположим, что $G \notin h(q)$. Поскольку $G_{\mathfrak{F}}$ – комонолит группы G , то $G_{h(q)} \triangleleft G_{\mathfrak{F}}$ и $G_{h(q)} \in h(q) \cap \mathfrak{F}$. Но $G/G_{h(q)} \in \mathfrak{N}_q$ и поэтому

$$G \in (h(q) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_q \subseteq ((h(q) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_q)^* = F(q) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие выбору G . Следовательно, $G \in h(q)$. Это означает, что $G_{\mathfrak{F}} \in h(q) \cap \mathfrak{F} \subseteq (h(q) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_q \subseteq ((h(q) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{N}_q)^* = F(q)$. Так как $G \notin F(q)$ и $G_{\mathfrak{F}} \in F(q)$, то $G_{F(q)} = G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $G/G_{F(q)} = G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_q$ и $G \in F(q)\mathfrak{N}_q \subseteq F(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_q'$.

Далее учитывая $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_q$ и $G_{\mathfrak{F}} \in F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_p'$ для всех $p \in \pi$, получаем $G \in \mathfrak{S}_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_p')$. Кроме того, $G \in F(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_q'$ и поэтому

$G \in \mathfrak{S}_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_p')$. Получили противоречие с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ доказано. Это завершает доказательство того, что из 2) следует 1). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, π – непустое множество простых чисел и $\sigma = \pi \cup \pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} = \mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(h)$ для полной приведенной H -функции h такой, что $h(p) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для всех p из σ .

Доказательство. Докажем вначале, что из 1) следует 2). Пусть $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} = \mathfrak{F}$. Тогда, учитывая определение функции h , получаем

$$\begin{aligned} LR(h) &= \mathfrak{S}_\sigma \cap (\bigcap_{p \in \sigma} \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_p') = \mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}(\bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_p') \cap \mathfrak{F}(\bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_p') = \\ &= \mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_\pi' \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi}\mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi)'} = \mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_\pi' \cap \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi)'} \end{aligned}$$

Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}_\sigma$ и

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_\pi' \cap \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi)'} &= \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_\pi' \cap \mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi)'}') = \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_\pi') = \\ &= \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_\pi' = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{S}_\pi') = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(h)$. Легко видеть, что h – полная H -функция. Поскольку $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ для всех $p \in \pi$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} = \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi$, то h – приведенная локальная H -функция.

Покажем теперь, что из 2) следует 1). Очевидно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi}$. Поскольку $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N} = \bigcap_p \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_p'$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$, то $G \in \mathfrak{S}_\sigma \cap (\bigcap_{p \in \sigma} \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_p')$. Тогда, учитывая $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(h)$, имеем $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}(\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} \cap \mathfrak{N}_\pi) = \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, π – непустое множество простых чисел и $\sigma = \pi \cup \pi(\mathfrak{F})$. Если $\mathfrak{FR}_{\pi(\mathfrak{F})\backslash\pi} = \mathfrak{F}$ и f – локальная H -функция такая, что $\text{Supp}(f) = \sigma$ и $f(p) \cap \mathfrak{FR}_{\pi} = \mathfrak{FR}_p$ для всех $p \in \sigma$, то $\mathfrak{FR}_{\pi} = LR(f)$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{FR}_{\pi(\mathfrak{F})\backslash\pi} = \mathfrak{F}$, то по лемме 5 класс Фиттинга \mathfrak{FR}_{π} определяется полной приведенной H -функцией h такой, что $h(p) = \mathfrak{FR}_p$ для всех $p \in \sigma$. Тогда по лемме 2 получаем $\mathfrak{FR}_{\pi} = LR(g)$, где g – полная приведенная H -функция, причем $g(p) = (h(p))^*$ для всех $p \in \sigma$. Теперь из условия $f(p) \cap \mathfrak{FR}_{\pi} = \mathfrak{FR}_p$ следует, что $((f(p) \cap \mathfrak{FR}_{\pi})\mathfrak{R}_p)^* = (\mathfrak{FR}_p)^* = g(p)$ для любого простого p из σ . Таким образом по лемме 4 класс \mathfrak{FR}_{π} определяется локальной H -функцией f . Лемма доказана.

Напомним, что если \mathfrak{F} – класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то через $L_{\pi}(\mathfrak{F})$ обозначают класс всех тех групп, в которых индекс любого \mathfrak{F} -инъектора является π' -числом. Пусть V – \mathfrak{F} -инъектор группы G . Тогда $|G:V|$ является π' -числом в том и только в том случае, если существует холловская π -подгруппа G_{π} группы G такая, что $G_{\pi} \subseteq V$. Поэтому $L_{\pi}(\mathfrak{F}) = (G \in \mathfrak{C} : \text{каждый } \mathfrak{F}\text{-инъектор группы } G \text{ содержит некоторую холловскую } \pi\text{-подгруппу группы } G)$.

Если $\mathfrak{F} = \emptyset$, то положим $L_{\pi}(\mathfrak{F}) = \emptyset$. В случае когда $\pi = \emptyset$ или $\pi = P$, положим $L_{\emptyset}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{C}$ и $L_P(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$, соответственно.

Мы будем неоднократно использовать известные свойства класса $L_{\pi}(\mathfrak{F})$, которые представляет следующая

Лемма 7[2]. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел. Тогда:

- 1) $L_{\pi}(\mathfrak{F})$ – класс Фиттинга;
- 2) $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{C}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{C}_{\pi'} \subseteq L_{\pi}(\mathfrak{F}) = L_{\pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{C}_{\pi'}$.

Функции Хартли класса \mathfrak{FR}_{π} . Нам потребуются следующие свойства инъекторов, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 8[11]. Пусть \mathfrak{H} – разрешимый класс Фиттинга и G – конечная разрешимая группа. Если V^* есть \mathfrak{H}^* -инъектор группы G , то $(V^*)_{\mathfrak{H}}$ есть \mathfrak{H} -инъектор группы G .

Лемма 9[12]. Пусть \mathfrak{H} – разрешимый класс Фиттинга и G – разрешимая группа. Пусть T есть \mathfrak{H} -инъектор группы $G_{L_{\pi}(\mathfrak{H})}$ и G_{π} есть холловская π -подгруппа из G такая, что $G_{\pi} \subseteq N_G(T)$. Тогда $G_{\pi}T$ является $\mathfrak{H}\mathfrak{C}_{\pi}$ -инъектором группы G .

Локальные функции Хартли, определяющие класс \mathfrak{FR}_{π} , описывает

Теорема 10. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, π – непустое множество простых чисел, $\sigma = \pi \cup \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{FR}_{\pi(\mathfrak{F})\backslash\pi} = \mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\mathfrak{FR}_{\pi} = LR(f_1)$, где $f_1(p) = L_{p'}(\mathfrak{F})$ для любого $p \in \sigma$;

2) $\mathfrak{N}_\pi = LR(f_2)$, где $f_2(p) = L_{p'}(\mathfrak{N}_p)$ для любого $p \in \sigma$;

3) $\mathfrak{N}_\pi = LR(f_3)$, где $f_3(p) = L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$ для любого $p \in \sigma$;

4) $f_2 \leq f_1 \leq f_3$.

Доказательство. Чтобы установить справедливость 1) и 2), ввиду леммы 6 достаточно показать, что выполняется равенство $f_i(p) \cap \mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \pi$ ($i=1,2$).

Докажем первое утверждение леммы. Так как $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi} = \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_\pi$ для всех $p \in \sigma$. Тогда по лемме 7 $\mathfrak{N}_p \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F})$ и, значит, $\mathfrak{N}_p \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{N}_\pi$ для всех $p \in \sigma$. Обратно, пусть $G \in L_{p'}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{N}_\pi$ и $V \in \text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$. Тогда $V/G_{\mathfrak{F}} \leq G/G_{\mathfrak{F}}$ и $G/G_{\mathfrak{F}}$ является нильпотентной группой. Следовательно, V – субнормальная \mathfrak{F} -подгруппа группы G . Это означает, что $V = G_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G \in L_{p'}(\mathfrak{F})$, то $|G:V|$ является p -числом. Учитывая $V = G_{\mathfrak{F}}$, получаем, что $|G:G_{\mathfrak{F}}|$ является p -числом и поэтому $G \in \mathfrak{N}_p$. Значит, $L_{p'}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{N}_p$. Таким образом, справедливо равенство $L_{p'}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \sigma$ и по лемме 6 получаем $\mathfrak{N}_\pi = LR(f_1)$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Поскольку $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_\pi$ и по лемме 7 $\mathfrak{N}_p \subseteq L_{p'}(\mathfrak{N}_p)$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq L_{p'}(\mathfrak{N}_p) \cap \mathfrak{N}_\pi$ для всех $p \in \sigma$. Покажем обратное включение. Пусть $G \in L_{p'}(\mathfrak{N}_p) \cap \mathfrak{N}_\pi$. Аналогично как при доказательстве 1) можно показать, что $G_{\mathfrak{N}_p}$ является \mathfrak{N}_p -инъектором группы G . Следовательно, учитывая $G \in L_{p'}(\mathfrak{N}_p)$, имеем $G/G_{\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p$ и поэтому $G \in \mathfrak{N}_p$. Значит, $L_{p'}(\mathfrak{N}_p) \cap \mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{N}_p$. Отсюда вытекает, что $L_{p'}(\mathfrak{N}_p) \cap \mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \sigma$ и по лемме 6 получаем $\mathfrak{N}_\pi = LR(f_2)$. Утверждение 2) доказано.

Докажем утверждение 3). Так как \mathfrak{N}_π – насыщенная радикальная формация, то применяя лемму 3 из работы [13], получаем $\mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_\pi = (\mathfrak{N}_\pi)^*$. Поскольку класс \mathfrak{N}_π – локален, то по лемме 5 [13] выполняется $(\mathfrak{N}_\pi)^* = \mathfrak{N}_\pi$. Значит, $\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_\pi$. Теперь учитывая справедливость утверждения 1) имеем $\mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_\pi = LR(f_3)$. Но тогда $\mathfrak{N}_\pi = LR(f_3)$ и утверждение 3) доказано.

Докажем 4). Чтобы установить справедливость 4), достаточно показать, что $L_{p'}(\mathfrak{N}_p) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$ для всех простых p .

Покажем, что $L_{p'}(\mathfrak{F}) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$. Пусть $G \in L_{p'}(\mathfrak{F})$ и $V \in \text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$. Тогда по лемме 8 получаем $V_{\mathfrak{F}} \in \text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$. Поскольку $G \in L_{p'}(\mathfrak{F})$, то $G_{p'} \subseteq V_{\mathfrak{F}}$, где $G_{p'}$ – некоторая холловская p' -подгруппа группы G . Следовательно, $G_{p'} \subseteq V$ и поэтому $G \in L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$. Значит, $L_{p'}(\mathfrak{F}) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$.

Покажем, что $L_{p'}(\mathfrak{N}_p) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F})$. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in L_{p'}(\mathfrak{N}_p) \setminus L_{p'}(\mathfrak{F})$ для некоторого простого p . Тогда группа G комонолитична и ее комонолит $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$. Поэтому $G/G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} \cong Z_q$, где $q \in P$. Если $q = p$, то по лемме 7 $G \in L_{p'}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p = L_{p'}(\mathfrak{F})$, что противоречит выбору G . Значит, $q \neq p$.

Предположим, что $G \in L_p(\mathfrak{F})$. Тогда $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} \in L_{p'}(\mathfrak{F}) \cap L_p(\mathfrak{F})$. Это означает, что если $R \in \text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G_{L_{p'}(\mathfrak{F})})$, то $|G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} : R|$ является p -числом и p' -числом. Поэтому $|G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} : R| = 1$ и $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} = R \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{N}_p$. Пусть $V \in \text{Inj}_{\mathfrak{N}_p}(G)$. Тогда $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} \cap V$ является \mathfrak{N}_p -максимальной подгруппой в $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$. Но $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{N}_p$ и, значит, $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} \cap V = G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$. Отсюда вытекает, что $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} \subseteq V$. Рассмотрим равенство

$$|V : G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}| = \frac{|G : G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}|}{|G : V|} = \frac{q}{|G : V|}.$$

Тогда $|G : V| = q$ либо $|G : V| = 1$. Поскольку $G \in L_{p'}(\mathfrak{N}_p)$ и $V \in \text{Inj}_{\mathfrak{N}_p}(G)$, то $|G : V|$ является p -числом. Следовательно, $|G : V| = 1$ и, учитывая лемму 7, имеем $G = V \in \mathfrak{N}_p \subseteq G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$. Получили противоречие выбору G .

Остается принять следующий случай: $G \notin L_p(\mathfrak{F})$. Пусть $X = G_{L_p(\mathfrak{F})}$. Тогда $X \neq G$ и поскольку $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$ – комонолит группы G , то $X < G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$. Поэтому $X \in G_{L_{p'}(\mathfrak{F})} \cap G_{L_p(\mathfrak{F})}$. Это означает, что если $R \in \text{Inj}_{\mathfrak{F}}(X)$, то $|X : R|$ является p -числом и p' -числом. Следовательно, $|X : R| = 1$ и $X = R \in \mathfrak{F}$. Легко видеть, что X является \mathfrak{F} -инъектором группы $G_{L_{p'}(\mathfrak{F})}$ и $G_p \subseteq N_G(X) = G$, причем G_p – силовская p -подгруппа из G . Тогда по лемме 9 получаем, что XG_p является \mathfrak{N}_p -инъектором группы G . Рассмотрим равенство $|XG_p : G_p| = |G : G_p| / |G : XG_p|$. Поскольку $G \in L_{p'}(\mathfrak{N}_p)$ и $XG_p \in \text{Inj}_{\mathfrak{N}_p}(G)$, то $|G : XG_p|$ является p -числом. Если $|G : G_p| = 1$, то по лемме 7 имеем $G = G_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F})$, что противоречит выбору G . Значит, $|G : G_p| \neq 1$ и является p' -числом. Следовательно, $|G : XG_p| = 1$ и $G = XG_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F})$. Получили противоречие с выбором G . Это завершает доказательство того, что $L_{p'}(\mathfrak{N}_p) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{F}^*)$ для всех простых p . Теорема доказана.

Заметим, что обратное отношение $L_{p'}(\mathfrak{F}) \subseteq L_{p'}(\mathfrak{N}_p)$ в общем случае неверно. Это подтверждает следующий

Пример. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ и $p = 3$. Покажем, что $S_4 \in L_3(\mathfrak{N}) \setminus L_3(\mathfrak{N}\mathfrak{E}_3)$, где S_4 – симметрическая группа подстановок четвертой степени. Так как $|S_4| = 2^3 \cdot 3$ и \mathfrak{N} -инъекторами группы S_4 являются силовские 2-подгруппы из S_4 , то индекс любого \mathfrak{N} -инъектора группы S_4 есть 3-число и поэтому $S_4 \in L_3(\mathfrak{N})$. Кроме того, силовские 2-подгруппы из S_4 являются также \mathfrak{N} -проекторами группы S_4 и, следовательно, \mathfrak{N} -инъектор группы S_4 не является нормальной подгруппой в S_4 . Значит, $(S_4)_{\mathfrak{N}}$ – собственная подгруппа \mathfrak{N} -инъектора группы S_4 . Тогда $S_4 / (S_4)_{\mathfrak{N}} \notin \mathfrak{E}_3$ и по определению произведения классов Фиттинга $S_4 \notin \mathfrak{N}\mathfrak{E}_3$.

Заметим, что в A_4 – знакопеременной группе подстановок четвертой степени существует единственный \mathfrak{N} -инъектор V_4 – четверная группа, причем V_4 нормальна в A_4 . Поскольку $|A_4| = 2^2 \cdot 3$, то $A_4 / V_4 \in \mathfrak{E}_3$ и поэтому $A_4 \in \mathfrak{N}\mathfrak{E}_3$. Таким образом, учитывая $S_4 \notin \mathfrak{N}\mathfrak{E}_3$, $A_4 \in \mathfrak{N}\mathfrak{E}_3$, $|S_4 : A_4| = 2$, следует, что A_4 есть $\mathfrak{N}\mathfrak{E}_3$ -инъектор группы S_4 . Но тогда $S_4 \notin L_3(\mathfrak{N}\mathfrak{E}_3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. – М., 1978. – 278 с.
2. *Doerk K.* Die maximale lokale Erklärung einer gessättigten Formation // Math. Z., 1973. Bd. 133, № 2. – S. 133–135.
3. *Воробьев Н.Т.* Максимальные экраны локальных формаций // Алгебра и логика, 1979. – Т. 18, № 2. – С. 137–161.
4. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups // Walter de Gruyter. – New York – Berlin, 1992. – 891 p.
5. *Blessenohl D.* Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z., 1975. Bd. 142, № 3. – S. 299–300.
6. *Lockett P.* On the theory of Fitting classes // Math. Z., 1975. V. 131, № 3. – P. 103–115.
7. *Hartley B.* On Fisher's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc., 1969. V. 3, № 2. – P. 193–207.
8. *Воробьев Н.Т.* О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. ж., 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1296–1302.
9. *Воробьев Н.Т.* О локальных радикальных классах // Сб.: Вопросы алгебры. – Мн., 1986. Вып. 2. – С. 41–50.
10. *Воробьев Н.Т.* О максимальных и минимальных групповых функциях классов Фиттинга // Сб.: Вопросы алгебры. – Гомель, 1992. Вып. 7. – С. 60–69.
11. *Lockett F.P.* The Fitting class \mathfrak{F}^* // Math. Z., 1974. Bd. 137. – S. 131–136.
12. *Lockett F.P.* On the Theory of Fitting Classes of finite and soluble groups // Math. Z., 1973. V. 131. – S. 103–115.
13. *Воробьев Н.Т.* О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Мат. заметки, 1988. Т. 43, № 2. – С. 161–168.

S U M M A R Y

Let π be a set of primes and let \mathfrak{F} be a Fitting class of finite soluble groups. By $L_\pi(\mathfrak{F})$ denotes the class of all finite soluble groups whose \mathfrak{F} -injectors contain a Hall π -subgroup. In this paper we describe Hartley functions of product of Fitting classes in the form $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ with the help of class $L_\pi(\mathfrak{F})$, where \mathfrak{N}_π is the class of all nilpotent π -groups.

Поступила в редакцию 10.10.2005