УДК 512.542

В.В. Шпаков

Классы Фиттинга, определяемые полулокально

В теории нормальных классов Фиттинга хорошо известна своими приложениями для характеризации классов и изучения их структуры конструкция класса $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ всех конечных разрешимых групп G, в которых $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами, предложенная Хауком [1]. Заметим, что если $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{Y} = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – локальный класс Фиттинга всех конечных разрешимых групп. Хауком [1] исследовался также случай, когда $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ локальный класс Фиттинга, совпадающий с произведением некоторого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и класса Фиттинга $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп. Однако, как показано [1], класс групп $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ в общем случае не является локальным классом Фиттинга, а для $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$, класс $\mathfrak{Y}(\mathfrak{N})$ не является даже классом Фиттинга. В связи с этим возникает общая задача описания таких классов Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которых класс $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ является классом Фиттинга, определяемым локально или полулокально. Напомним, что функцией Хартли, или H-функцией, [2] называют всякое отображение множества всех простых чисел во множество классов Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется полулокально, если $\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{S}_{p'}$, для некоторой H-функции f, где $\pi = \mathrm{Supp}(f) = \{p \in \mathbf{P} : f(p) \neq \varnothing\}$ – носитель H-функции f.

Основной результат настоящей работы – характеризация класса $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ посредством свойства полулокальности. В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. При необходимости определения и обозначения, которые мы не приводим, можно найти в монографии [3].

1. Предварительные сведения. Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из того, что нормальные подгруппы M и N принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение MN принадлежит $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называется $\mathfrak{F}$-радикалом группы G, если она является максимальной из нормальных подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

Функцией Хартли, или H-функцией, [2] называют всякое отображение $f : P \to \{\text{классы Фиттинга}\}$.

Пусть f – Н-функция, $\pi = \mathrm{Supp}(f)$ и $\mathrm{SLR}(f) = \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{S}_{p'}$. Напомним, что класс $\mathfrak{F}$ определяется полулокально, если $\mathfrak{F} = \mathrm{SLR}(f)$, для некоторой H-функции f. Если $\pi = \varnothing$, то положим $\mathrm{SLR}(f) = \varnothing$.

Для доказательства основного результата мы будем использовать следующие три леммы, доказательство которых осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 1.1. *Если $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга и $\{\mathfrak{H}_i : i \in I\}$ – некоторое множество формаций Фиттинга, то справедливо равенство $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}\mathfrak{H}_i = \mathfrak{F}(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{H}_i)$.*

Лемма 1.2. *Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел.*

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется полулокально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi'} = \mathfrak{F}$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда через $\mathfrak{F}^{\pi}$ [3] обозначают класс всех групп G, $\mathfrak{F}$-инъекторы которых содержат холловы π-подгруппы группы G.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}^{\pi}$ в точности класс $\mathfrak{H}^{\pi}$ всех тех групп G, индекс $\mathfrak{F}$-инъекторов которых в G является π-числом.*

2. Полулокальность $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то согласно [1] $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ класс групп G, определяемых следующим образом:
$G \in \mathfrak{Y}(\mathfrak{F}) \Leftrightarrow \mathfrak{F}$-инъектор группы G является нормальной подгруппой группы G.

Характеризацию класса $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ посредством свойства полулокальности представляет следующая.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда класс групп $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ – определяется полулокально в точности тогда, когда $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, определяемый полулокально, такой, что $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_{p'} = \mathfrak{F}$ для некоторого простого p.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_{p'} = \mathfrak{F}$ для некоторого простого p, и множество $\pi = \{p\}' = p'$.

Тогда по лемме 1.2 $\mathfrak{F}$ определяется полулокально. Покажем, что в этом случае класс групп $\mathfrak{Y}\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга определяемым полулокально.

Для этого достаточно выяснить, что $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Пусть $G \in \mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ и $H/G_{\mathfrak{F}}$ – холлова p'-подгруппа группы $G / G_{\mathfrak{F}}$. Тогда по определению произведения классов групп $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{p'}$.

Но $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{F}$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Кроме того $G \in \mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$, и поэтому каждый $\mathfrak{F}$-инъектор группы G является нормальной подгруппой группы G. Следовательно, $V = G_{\mathfrak{F}}$. Но ввиду того, что $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{F}$, индекс $\mathfrak{F}$-инъектора в группе G является p-числом. Значит, по лемме 1.3 $V \supseteq H$. Следовательно, $H = G_{\mathfrak{F}}$ и H нормальная f подгруппа группы G.

Тогда ввиду того, что $G / H \in \mathfrak{N}_p$ и $H = G_{\mathfrak{F}}$, по определению произведения классов Фиттинга $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Итак, мы доказали, что $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$.

Докажем обратное включение. Пусть G группа из класса $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Тогда $G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{N}$. Но каждая подгруппа нильпотентной группы субнормальна в ней. Следовательно, из того, что $V = G_{\mathfrak{F}}$ субнормальна в группе $G / G_{\mathfrak{F}}$ для некоторого $\mathfrak{F}$-инъектора V группы G. Отсюда следует, что V субнормальная подгруппа группы G и поэтому $V = G_{\mathfrak{F}}$ по определению $\mathfrak{F}$-радикала.

Значит, $V = G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G$. Это означает, что $G \in \mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ и справедливо включение $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$. Таким образом $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Но тогда

$$\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p = (\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{Y}(\mathfrak{F}).$$

Следовательно, по лемме 1.2, $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ класс Фиттинга, определяемый полулокально.

Докажем обратное утверждение. Пусть класс групп $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F})$ определяется полулокально H-функцией f такой, что $f(p) = \mathfrak{F}$ для некоторого простого p и $f(q) = \mathfrak{S}$ для всех простых $q \neq p$. Тогда

$$\mathfrak{Y}(\mathfrak{F}) = \mathrm{SLR}(f) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \cap \left(\bigcap_{q \neq p} f(q)\mathfrak{G}_p \right) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p.$$

Покажем, что в этом случае $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, определяемый полулокально.

Очевидно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{p'}$. Пусть G – группа минимального порядка из класса $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_{p'} / \mathfrak{F}$. Тогда G имеет единственную максимальную нормальную подгруппу $K = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{p'}$, то $G / K \in \mathfrak{S}_{p'}$. Но G / K является циклической группой простого порядка. Следовательно, $G / K \in \mathfrak{N}_q$ для некоторого простого $q \neq p$.

Теперь, если V $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, то либо $V / G_{\mathfrak{F}} = G / G_{\mathfrak{F}}$, либо $V = G_{\mathfrak{F}}$.

В первом случае $V = G$ и $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G. Во втором – $\mathfrak{F}$-инъектор V группы G является нормальной подгруппой G. Следовательно, в этом случае $G \in \mathfrak{Y}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Но тогда $G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p$. Последнее противоречит тому, что $G / G_{\mathfrak{F}}$ является q-группой для $q \neq p$.

Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F}\mathfrak{Y}_{p'} = \mathfrak{F}$. Теперь ввиду леммы 1.2. заключаем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ полулокален.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hauck P.** Endliche auflösbare Gruppen mit normalen F-Injektor. Archiv der Mathematik. Vol. XXVIII, 1977, 117–129.
2. **Воробьев Н.Т.** О предположении Хаукса для радикальных классов // Сиб. матем. журнал, 1996, № 5. – Т. 37. – С. 1296–1302.
3. **Doerk K., Hawkes T.O.** Finite soluble groups // De Gruyter Exp. In Math. – Vol. 4. – Berlin – New York, 1992. – 891 p.

S U M M A R Y

Let $\mathfrak{F}$ be a Fitting class and $\mathfrak{X}(\mathfrak{F})$ is a class of groups G such that $\mathfrak{F}$-injectors of G are normal subgroups of G. Then $\mathfrak{X}(\mathfrak{F})$ is semilocal if and only if $\mathfrak{F}$ is semilocal.