УДК 512.542

В.Н. Семенчук

Об одной проблеме в теории формаций конечных групп

В теории конечных групп понятие субнормальной подгруппы играет большую роль. Построенная Виландтом теория субнормальных подгрупп оказала огромное влияние на развитие всей теории конечных групп.

В теории формации обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа K группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь*

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_n = K$$

такая, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

В монографии Л.А. Шеметкова [1] была поставлена задача о построении теории $\mathfrak{F}$-субнормальных подгупп аналогичной теории субнормальных подгрупп.

Им, в частности, в Коуровской тетради [2] была поставлена следующая проблема.

Проблема (Шеметков Л.А. [2]) классифицировать наследственные сверхрадикальные формации.

Напомним определение сверхрадикальной формации.

Определение 2. *Формация $\mathfrak{F}$ называется сверхрадикальной, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;

2) $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы.

В.Н. Семенчуком в работе [3] в классе конечных разрешимых групп получено решение проблемы Шеметкова.

В частности, оказалось, что разрешимые наследственные сверхрадикальные формации имеют следующее строение

$$\bigcap \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j} ,$$

где π_i, π_j – некоторые множества простых чисел, а $\mathfrak{S}_{\pi_i}$, $\mathfrak{S}_{\pi_j}$, соответственно, множества всех разрешимых π_i-групп, π_j-групп.

В настоящей работе приводится решение проблемы Шеметкова для наследственных формаций, критические группы которых разрешимы.

Напомним, что критической группой для некоторого класса групп $\mathfrak{F}$ называется группа, которая не принадлежит этому классу, а любая собственная подгруппа принадлежит. Такие группы также называют минимальными не $\mathfrak{F}$-группами, а их множество мы будем обозначать $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

При решении данной задачи важную роль сыграли формации Шеметкова.

Определение 2. *Формация $\mathfrak{F}$ называется формацией Шеметкова, если любая ее минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.*

Все рассматриваемые группы конечны. Необходимые определения и обозначения можно найти в [1].

Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная наследственная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – формация Шеметкова, когда:*

1) $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;

2) $\mathfrak{F} = \bigcap \mathfrak{H}_{\pi_i} \mathfrak{H}_{\pi_j}$.

Напомним, что через $\mathfrak{S}_\pi$ обозначают множество всех π-групп. Используя данную лемму, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локально наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$-сверхрадикальная формация и $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;*

2) $\mathfrak{F} = \bigcap \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$ *и* $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$.

Наряду с понятием $\mathfrak{F}$-субнормальности обобщением субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости.

Определение 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H называется $\mathfrak{F}$-достижимой, если существует цепь подгрупп*

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В следующих теоремах получены новые характеризации сверхрадикальных формаций.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локально формация, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}$ – сверхрадикальная формация;

2) любая группа $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$-достижимые $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$;

3) для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;

4) для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-достижима в G.

Непосредственно из теорем 1 и 2 можно получить следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная разрешимая локальная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}$ – сверхрадикальная формация;

2) любая группа G = AB, где A и B $\mathfrak{F}$-достижимые $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$;

3) для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;

4) для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-достижима в G;

5) $\mathfrak{F} = \cap \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$;

6) $\mathfrak{F}$ – формация Шеметкова.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Шеметков, Л.А.*** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. ***Коуровская тетрадь*** (нерешенные вопросы теории групп). – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1992. – 146 с.
3. ***Семенчук, В.Н.*** Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации / В.Н. Семенчук // Мат. заметки. – 1996. – Т. 59, № 2. – С. 261–266.

SUMMARY

In the paper the classification of hereditary formations $\mathfrak{F}(\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F})$ such that any group G = AB where A and B are $\mathfrak{F}$-subnormal $\mathfrak{F}$-subgroups belong to $\mathfrak{F}$, is obtained.

Поступила в редакцию 14.08.2006