

УДК 517.977+621.07.064

А.А. Агранович, Е.А. Барабанов, В.В. Жарский, С.Е. Карпович

Об одной задаче адаптивного управления мехатронной системой

При исследовании динамических процессов, описывающих поведение прецизионных электроприводов, используемых в автоматизированном оборудовании производства изделий микроэлектроники, возникает необходимость решения следующей задачи управления [1–3].

Система управления описывается линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \alpha x = u, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где коэффициенты α и β – заданные вещественные постоянные, а управление $u(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – кусочно-постоянная функция с постоянным и заданным шагом T участков постоянства (т.е. $u(t) \equiv u_k$ при $t \in [kT, (k+1)T)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $u_k \in \mathbb{R}$). Задано также положительное число δ (так называемый шаг нарезки). Требуется найти необходимые и достаточные условия на постоянные α и β , при которых можно так выбрать последовательность $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, значений функции управления $u(\cdot)$ на участках ее постоянства, чтобы для решения $x(\cdot)$ задачи Коши уравнения (1) с нулевыми при $t=0$ начальными данными (т.е. удовлетворяющей уравнению (1) дифференцируемой при всех $t \geq 0$ функции $x(t)$, для которой $x(0) = \dot{x}(0) = 0$) выполнялись следующие условия: $x(kT) = k\delta$, $k \in \mathbb{N}$, и модуль производной $|\dot{x}(kT)|$ был достаточно «мал» при всех $k \in \mathbb{N}$.

Дадим вначале полное решение этой задачи без учета последнего требования. Полученные формулы дадут возможность решить и общую задачу при любом понимании «малости» модуля производной $|\dot{x}(kT)|$. Обозначим: $x_k(t) \equiv x(t)$ при $kT \leq t \leq (k+1)T$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Легко видеть, что поставленная за-

дача формализуется следующим равносильным образом: найти необходимые и достаточные условия на постоянные α и β , при которых существует последовательность $(u_k)_{k \in Z_+}$ вещественных чисел, такая, что разрешима следующая последовательность переопределенных начально-краевых задач:

$$\begin{cases} \ddot{x}_k + \beta \dot{x}_k + \alpha x_k = u_k, & kT \leq t \leq (k+1)T, \\ x_k(kT) = k\delta, & x_k((k+1)T) = (k+1)\delta, \quad \dot{x}_k(kT) = \dot{x}_{k-1}(kT), \end{cases} \quad (2_k)$$

где $k \in Z_+$, и для единообразия записи положено $\dot{x}_{-1}(0) = 0$. Как видим, начальные и краевые условия каждой, начиная со второй, следующей из задач (2_k) определяются по решению предыдущей задачи (2_{k-1}) . Существование при каждом $k \in Z_+$ такого $u_k \in \mathbb{R}$, что последовательно при $k = 0, 1, 2, \dots$ разрешима каждая из задач (2_k) , является необходимым и достаточным условием существования указанного выше решения $x(\cdot)$ уравнения (1), и тогда это решение $x(t) \equiv x_k(t)$ при $t \in [kT, (k+1)T)$, $k \in Z_+$. Определенную так функцию $x(\cdot)$ назовем решением последовательности задач (2_k) .

Решение поставленной задачи дает

Теорема. Пусть $D = \beta^2 - 4\alpha$ – дискриминант характеристического уравнения $z^2 + \beta z + \alpha = 0$ для дифференциального уравнения (1).

Последовательности $(u_k)_{k \in Z_+}$, доставляющей решение последовательности задач (2_k) , не существует, если и только если выполнено одно из условий:

$$\alpha = 0 \text{ или } D < 0, \text{ а } 4e^{-\beta T/2} \sqrt{\alpha} \cos(T\sqrt{-D}/2 + \arccos(2^{-1}\sqrt{-D/\alpha})) = \sqrt{-D}.$$

Если же ни одно из этих двух условий не выполнено, то последовательность $(u_k)_{k \in Z_+}$ существует, единственна и задается формулой:

$u_k = \alpha \delta k + c + db(a-1)^{-1}(a^k - 1)$, $k \in Z_+$, где не зависящие от k постоянные a , b , c и d в зависимости от корней $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения равны:

$$1) \text{ если } D > 0, \text{ то } \lambda_{1,2} = (-\beta \pm \sqrt{D})/2, \text{ а}$$

$$a = -(\lambda_1 e^{\lambda_1 T} (e^{\lambda_2 T} - 1) - \lambda_2 e^{\lambda_2 T} (e^{\lambda_1 T} - 1)) / \Delta, \quad b = \delta \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}) / \Delta,$$

$$c = -\alpha \delta (\lambda_2 - \lambda_1) / \Delta, \quad d = -\alpha (e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}) / \Delta,$$

где $\Delta = \lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1 (e^{\lambda_2 T} - 1)$;

$$2) \text{ если } D < 0, \text{ то } \lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega, \text{ где } \mu = -\beta/2, \quad \omega = \sqrt{-D}/2, \text{ а}$$

$$a = -e^{\mu T} (\omega \cos(\omega T) + \mu \sin(\omega T) - \omega e^{\mu T}) / \Delta, \quad b = \delta (\mu^2 + \omega^2) e^{\mu T} \sin(\omega T) / \Delta,$$

$$c = -\alpha \delta \omega / \Delta, \quad d = \alpha e^{\mu T} \sin(\omega T) / \Delta,$$

где $\Delta = e^{\mu T} (\omega \cos(\omega T) - \mu \sin(\omega T)) - \omega$;

$$3) \text{ если } D = 0, \text{ то } \lambda_{1,2} = \lambda = -\beta/2, \text{ а}$$

$$a = -e^{\lambda T} (\lambda T + e^{\lambda T} - 1) / \Delta, \quad b = -\lambda^2 \delta T e^{\lambda T} / \Delta, \quad c = -\alpha \delta / \Delta, \quad d = \alpha e^{\lambda T} T / \Delta,$$

где $\Delta = e^{\lambda T} (1 - \lambda T) - 1$.

При этом величина скорости в моменты kT , $k \in Z_+$, решения $x(\cdot)$ последовательности задач (2_k) равна $\dot{x}(kT) = b(a-1)^{-1}(a^k - 1)$, $k \in Z_+$, где величины a и b (в зависимости от корней характеристического уравнения) определены выше в формулировке теоремы.

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим отдельно случаи вещественных различных, комплексно-сопряженных и вещественных совпадающих корней характеристического уравнения $z^2 + \beta z + \alpha = 0$. Поскольку эти рассмотрения идентичны, рассмотрим подробно только случай вещественных различных корней. Решим отдельно каждую задачу (т.е. при каждом $k \in Z_+$) последовательности (2_k) в общем виде, обозначив для удобства $\dot{x}(kT)$ через v_k ; позже из этих решений «склеим» решение $x(\cdot)$ всей последовательности задач (2_k) , $k \in Z_+$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, — корни характеристического уравнения ($D = \beta^2 - 4\alpha > 0$). Тогда общее решение дифференциального уравнения задачи (2_k) дается формулой:

$$x_k(t) = C_1^k e^{\lambda_1 t} + C_2^k e^{\lambda_2 t} + \alpha^{-1} u_k. \quad (3)$$

Поэтому в этом случае начально-краевые условия задачи (2_k) примут вид:

$$\begin{cases} C_1^k e^{\lambda_1 kT} + C_2^k e^{\lambda_2 kT} + \alpha^{-1} u_k = k\delta, \\ C_1^k e^{\lambda_1 (k+1)T} + C_2^k e^{\lambda_2 (k+1)T} + \alpha^{-1} u_k = (k+1)\delta, \\ C_1^k \lambda_1 e^{\lambda_1 kT} + C_2^k \lambda_2 e^{\lambda_2 kT} = v_k. \end{cases}$$

Почленно вычитая из второго уравнения этой системы ее первое уравнение, учитывая третье уравнение и обозначив для упрощения $D_1^k = C_1^k e^{\lambda_1 kT}$ и $D_2^k = C_2^k e^{\lambda_2 kT}$, придем к системе:

$$\begin{cases} D_1^k (e^{\lambda_1 T} - 1) + D_2^k (e^{\lambda_2 T} - 1) = \delta, \\ D_1^k \lambda_1 + D_2^k \lambda_2 = v_k. \end{cases} \quad (4)$$

Найдем решение этой линейной относительно D_1^k и D_2^k алгебраической системы. Ее определители равны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 T} - 1 & e^{\lambda_2 T} - 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1 (e^{\lambda_2 T} - 1),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \delta & e^{\lambda_2 T} - 1 \\ v_k & \lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \delta \lambda_2 - v_k (e^{\lambda_2 T} - 1), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 T} - 1 & \delta \\ \lambda_1 & v_k \end{vmatrix} = v_k (e^{\lambda_1 T} - 1) - \delta \lambda_1.$$

Прежде чем продолжить вычисления, выясним, при каких $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ система (4) разрешима. Если эта система неразрешима, то необходимо, чтобы $\Delta = 0$. Из формулы для Δ видно, что если хотя бы один из корней λ_1 или λ_2 нулевой, то $\Delta = 0$. Пусть для определенности $\lambda_1 = 0$. Тогда система (4) не имеет решений уже при $k = 0$. Действительно, при $k = 0$ (тогда $v_0 = 0$) из второго уравнения этой системы следует, что либо $D_2^k = 0$, либо $\lambda_2 = 0$. В любом случае, если $\lambda_1 = 0$, левая часть первого уравнения системы (4) при $k = 0$ равна 0, в то время как его правая часть, равная δ , отлична от нуля. Стало быть, если хотя бы один из корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения равен 0 (а это равносильно тому, что $\alpha = 0$), то система (4), а тогда и последовательность задач (2_k) , $k \in \mathbb{Z}_+$, неразрешимы.

Стандартными рассуждениями несложно показать, что если ни один из корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения не равен 0, то $\Delta \neq 0$, а значит, система (4) разрешима. Это условие ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$) считаем в дальнейшем выполненным. Тогда решением системы (4) являются $D_1^k = \Delta^{-1} \Delta_1$ и $D_2^k = \Delta^{-1} \Delta_2$, и, значит, согласно (3), решением $x_k(\cdot)$ задачи (2_k) будет:

$$x_k(t) = \Delta^{-1} \Delta_1 e^{\lambda_1(t-kT)} + \Delta^{-1} \Delta_2 e^{\lambda_2(t-kT)} + \alpha^{-1} u_k, \quad t \in [kT, (k+1)T). \quad (5)$$

Из формулы (5) находим, во-первых, значение скорости $\dot{x}((k+1)T)$ и, во-вторых, значение управления u_k . Вычислим $v_{k+1} = \dot{x}((k+1)T)$. Вследствие представления (5) имеем: $\dot{x}_k((k+1)T) = \Delta^{-1} \Delta_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 T} + \Delta^{-1} \Delta_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 T}$. Подставляя в это равенство выражения для Δ_1, Δ_2 и Δ , получаем:

$$v_{k+1} = \frac{\delta \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})}{\lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1 (e^{\lambda_2 T} - 1)} \cdot \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 T} (e^{\lambda_2 T} - 1) - \lambda_2 e^{\lambda_2 T} (e^{\lambda_1 T} - 1)}{\lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1 (e^{\lambda_2 T} - 1)} \cdot v_k. \quad (6)$$

Поэтому если обозначить не зависящие от k величины:

$$a = - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 T} (e^{\lambda_2 T} - 1) - \lambda_2 e^{\lambda_2 T} (e^{\lambda_1 T} - 1)}{\lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1 (e^{\lambda_2 T} - 1)} \quad \text{и} \quad b = \frac{\delta \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})}{\lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1 (e^{\lambda_2 T} - 1)},$$

то согласно (6) $v_{k+1} = a v_k + b$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что $a \neq 1$, поскольку в противном случае имели бы $\lambda_1 = \lambda_2$, а это не так в рассматриваемом случае. Поэтому из предыдущей рекуррентной формулы для v_{k+1} легко находим, что $v_{k+1} = a^{k+1} v_0 + b(a^k + a^{k-1} + \dots + 1) = a^{k+1} v_0 + b(a-1)^{-1}(a^{k+1} - 1)$, а так как в силу постановки задачи $v_0 = 0$, то $v_{k+1} = \dot{x}((k+1)T) = b(a-1)^{-1}(a^{k+1} - 1)$.

Вычислим теперь значение u_k управления. Из формулы (5) находим: $k\delta = x_k(kT) = \Delta^{-1}\Lambda_1 + \Delta^{-1}\Lambda_2 + \alpha^{-1}u_k$, откуда следует $u_k = \alpha \cdot (k\delta - \Delta^{-1}(\Lambda_1 + \Lambda_2))$, или, подставляя в это равенство выражения для Δ_1 , Δ_2 и Δ , получаем:

$$u_k = \alpha\delta k - \frac{\alpha\delta(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)} - \frac{\alpha(e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)} \cdot v_k. \quad (7)$$

Поэтому если обозначить не зависящие от k величины:

$$c = -\frac{\alpha\delta(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)} \quad \text{и} \quad d = -\frac{\alpha(e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)},$$

то $u_k = \alpha\delta k + c + dv_k$, и поэтому вследствие найденного выше выражения для v_k находим $u_k = \alpha\delta k + c + db(a-1)^{-1}(a^k - 1)$, т.е. u_k – сумма линейной $\alpha\delta k + c - db(a-1)^{-1}$ и показательной $db(a-1)^{-1}a^k$ функций, $k \in Z_+$.

Теорема в случае вещественных различных корней характеристического уравнения доказана. Случай вещественных совпадающих корней рассматривается точно так же. Случай же комплексно-сопряженных корней сводится к рассмотренному случаю вещественных различных корней с помощью следующего рассуждения. В случае комплексно-сопряженных корней общее комплекснозначное решение $x_k(\cdot)$ имеет тот же вид (3) с тем лишь отличием, что корни $\lambda_{1,2}$ – комплексные. Поэтому если $r_k(t) + iw_k(t) = x_k(t)$ – разложение на комплексную и мнимую части решения задачи Коши: $x_k(kT) = k\delta$, $\dot{x}_k(kT) = v_k$, – то поскольку $k\delta$, v_k и $\alpha^{-1}u_k$ – вещественные, мнимая часть $w_k(\cdot)$ является решением однородного уравнения $\ddot{w} + \beta\dot{w} + \alpha w = 0$ с нулевыми начальными условиями: $w(kT) = \dot{w}(kT) = 0$. Поэтому в силу единственности решения такой задачи $w(t) \equiv 0$ при $t \in [kT, (k+1)T)$. Следовательно, все вычисления, проведенные в случае вещественных различных корней, не только справедливы в случае комплексно-сопряженных корней, но и формула (5) дает вещественнозначное решение начально-краевой задачи (2_k) (хотя коэффициенты при экспонентах и сами экспоненты мнимые). В частности, формулы (6) и (7) дают значения скорости v_{k+1} и управления u_k (и они, вычисленные по этим формулам, будут вещественными). Нужно лишь найти, при каких μ и ω справедливо неравенство $\Delta \neq 0$, и переписать эти формулы в явном (через μ и ω) виде. Теорема доказана.

Используя доказанную теорему, легко получить решение полной задачи. Так как $\dot{x}(kT) = b(a-1)^{-1}(a^k - 1)$, $k \in Z_+$, то малость скорости $|\dot{x}(kT)|$ можно обеспечить лишь в случае, если $|a| < 1$, а $|b|$ достаточно (в нужном смысле) мал. На практике временной интервал движения $x(\cdot)$ всегда ограничен некоторым моментом времени $t = mT$, $m \in \mathbb{N}$; при этом необходимо, чтобы скорость $\dot{x}(mT)$ в этот момент была нулевой. Из формулы для скорости следует, что это возможно только, если $b = 0$ (и тогда в каждый момент вре-

мени kT , $k \leq m$, то скорость будет нулевой). В свою очередь, из формул для b вытекает, что равенство $b = 0$ возможно только в случае комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения и равносильно условию: $\omega = \pi l T^{-1}$, где $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, а μ – любое, если $l \equiv 1 \pmod{2}$, и μ – любое ненулевое, если $l \equiv 0 \pmod{2}$. Отметим также, что только в случае $b = 0$ функция управления имеет постоянный шаг и по оси u .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Луценко, В.Е.* Электропривод и автоматизация промышленных установок / В.Е. Луценко, В.П. Рубцов // Итоги науки и техники: Электропривод с шаговым двигателем. – М.: ВИНТИ, 1978. – 6 т.
2. *Аналитическая механика и мехатронные системы перемещений* / С.Е. Карпович [и др.]. – Мн.: Технопринт, 2004. – 187 с.
3. *Следящие приводы*: в 3 т. / под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 1999. – Т. 1: Теория и проектирование следящих приводов / Е.С. Блейз [и др.]. – 1999. – 904 с.

S U M M A R Y

The solution to the problem, appearing with synchronous stepper motor simulation, is described in the article.

Поступила в редакцию 07.02.2007