Матэматыка

УДК 512.542

Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залесская, Н.Н. Воробьев

О проблемах структуры классов Фиттинга

Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из того, что нормальные подгруппы A и B группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение AB принадлежит $\mathfrak{F}$.

В теории классов Фиттинга одной из наиболее важных задач является задача исследования общей структуры классов Фиттинга, которая в случае произвольного класса Фиттинга является очень трудной проблемой (см. [1]).

В [2] установлено, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедливы включения: $\mathfrak{F}_*\subseteq\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{F}_*\subseteq\mathfrak{F}^*\cap N(\mathfrak{F})\subseteq\mathfrak{F}^*$, где $N(\mathfrak{F})$ – нормальный класс Фиттинга, порожденный $\mathfrak{F}$.

Напомним, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$, а $\mathfrak{F}_*$ определяется как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. Непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным, если в любой группе G ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G. Напомним также, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^*$.

Локеттом [2] была сформулирована следующая общая проблема о структуре класса Фиттинга, которая в настоящее время известна как

Гипотеза Локетта. Каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ совпадает с пересечением $\mathfrak{F}^*\cap N(\mathfrak{F})$.

Брайсом и Косси [3] доказано, что указанная проблема равносильна тому, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедливо равенство $\mathfrak{F}_*=\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{S}_*$ – наименьший нормальный класс Фиттинга.

Учитывая результаты [2], легко видеть, что любой нормальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта. В последующем гипотеза Локетта была подтверждена для следующих семейств ненормальных классов Фиттинга: локальных наследственных (Брайс и Косси [3]), локальных вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ (Бейдлеман и Хаук [4]), произвольных локальных (Н.Т. Воробьев [5]). Кроме того, позднее было доказано, что произвольные локальные классы Фиттинга удовлетворяют обобщенной гипотезе Локетта (Галледжи [6]).

Обобщенный вариант гипотезы Локетта первоначально был предложен в монографии [7].

Обобщенная гипотеза Локетта. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{X}$, если справедливо равенство $\mathfrak{F}_*=\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{X}_*$.

Хотя в работе [8] Бергером и Косси доказано существование классов Локетта, которые не являются классами Фишера (в частности, нелокальны) и для которых гипотеза Локетта неверна, проблема описания классов Фиттинга, удовлетворяющих предположению Локетта, остается по-прежнему актуальной.

До настоящего времени вопрос о существовании ненормальных классов Фиттинга, которые не являются классами Локетта, удовлетворяющих гипотезе Локетта (см. проблему 2 [9]), а также вопрос о существовании ненормальных разрешимых частично локальных классов Фиттинга, не удовлетворяющих гипотезе Локетта, оставались открытыми.

В настоящей статье мы даем положительный ответ на указанные два вопроса, а также выделяем достаточно широкое семейство ω-локальных классов Фиттинга заданной характеристики, удовлетворяющих обобщенной гипотезе Локетта.

Для решения этих вопросов мы будем использовать идею частичной локализации Скибы–Шеметкова, предложенную в [10].

Пусть $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbf{P}$, где **P** – множество всех простых чисел.

Напомним, отображение $f\colon \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$ называется ω-локальной функцией Хартли или ω-локальной H-функцией.

Если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, то через $\mathrm{Fit}(\mathfrak{X})$ обозначают класс Фиттинга, порожденный $\mathfrak{X}$. В случае, когда $\mathfrak{X}=\{G\}$, будем обозначать $\mathrm{Fit}\{G\}$ через $\mathrm{Fit}G$. Пусть $F^p(G)=G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}}$ обозначает $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$-корадикал группы G. Тогда класс Фиттинга

$\mathfrak{X}(F^p)=\mathrm{Fit}(F^p(G) \mid G\in\mathfrak{X})$, если $p\in\pi(\mathfrak{X})$

и $\mathfrak{X}(F^p)=\varnothing$, если $p\notin\pi(\mathfrak{X})$,

где $\pi(\mathfrak{X})$ – множество всех простых делителей всех групп из $\mathfrak{X}$.

Пусть $LR_\omega(f)=\{G \mid G^{\omega d}\in f(\omega')$ и $F^p(G)\in f(p)$ для всех $p\in\omega\cap\pi(G)\}$, где $G^{\omega d}=G^{\mathfrak{E}_{\omega d}}$, $F^p(G)=G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}}$ и $\mathfrak{E}_{\omega d}$ – класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется ω-локальным [10], если существует некоторая ω-локальная H-функция f такая, что $\mathfrak{F}=LR_\omega(f)$.

Если $\mathfrak{F}=LR_\omega(f)$, где f – ω-локальная H-функция, то согласно результату А.Н. Скибы [10] $\mathfrak{F}$ определяется формулой:

$$\mathfrak{F}=\left(\bigcap\nolimits_{p\in\pi_2}\mathfrak{E}_{p'}\right)\cap\left(\bigcap\nolimits_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)\cap f(\omega')\mathfrak{E}_{\omega d}, \qquad (*)$$

где $\pi_1=\omega\cap\mathrm{Supp}(f)$, $\mathrm{Supp}(f)=\{a\in\omega\cup\omega' \mid f(a)\neq\varnothing\}$, $\pi_2=\omega\setminus\pi_1$.

Заметим, что в случае, когда $\omega=\{p\}$ – одноэлементное множество, класс Фиттинга называется p-локальным.

Используемая в дальнейшем терминология общепринята [7,10].

Рассматриваются только конечные группы.

Вначале приведем в качестве лемм некоторые вспомогательные результаты, которые мы использовали при доказательстве теорем.

Лемма 1. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – классы Фиттинга, то $(\mathfrak{X}_*\cap\mathfrak{F}_*)_*=(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{F})_*$.*

Лемма 2. *Пусть классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ таковы, что $\mathfrak{X}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, а $\mathfrak{Y}$ – насыщенная радикальная формация. Тогда если класс $\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, то и класс $\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y}$ удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Следующая теорема является ответом на вопрос о существовании ненормальных классов Фиттинга, которые не являются классами Локетта, удовлетворяющих гипотезе Локетта. Этот результат доказан в классе всех конечных разрешимых групп.

Теорема 1. *Для каждого простого p класс Фиттинга $(\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p$ является p-локальным, не является классом Локетта и удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Ввиду теоремы X.6.1 [8], получаем

Следствие 1. Существуют решетки секций Локетта, порожденных p-локальными классами Фиттинга, на которые сюръективно отображается решетка всех нормальных классов Фиттинга.

Кроме того, нами построен пример класса Фиттинга, который доказывает, что в общем случае p-локальные классы Фиттинга не удовлетворяют гипотезе Локетта.

Для построения примера мы использовали конструкцию класса Фиттинга, предложенную Бергером и Косси [8].

Пусть R – экстраспециальная группа порядка 27 и экспоненты 3, W – точный неприводимый R-модуль над полем GF(7) размерности 3 и Y = WR. Обозначим через A группу автоморфизмов группы R.

Пусть $B=C_A(Z(R))$, Q – подгруппа кватернионов группы B и X=Z(Q)Y.

Следуя [8], определим класс $\mathfrak{M}$ следующим образом:

$\mathfrak{M}=(G \mid O_2(G/O_{\{2,3\}}(G))\in S_n D_0(X))$, где $D_0(X)$ – класс всех конечных прямых произведений изоморфных копий группы X.

В работе [8] доказано, что класс $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{S}_7\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_2$ является классом Фиттинга. Кроме того, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ не удовлетворяет гипотезе Локетта (см., например, с. 773 [7]).

Тогда существует такое простое p, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, построенный Бергером и Косси [8], не удовлетворяет гипотезе Локетта.

Также доказана теорема, которая определяет достаточное условие для того, чтобы ω-локальные классы Фиттинга удовлетворяли обобщенной гипотезе Локетта. Этот результат доказан в классе всех конечных групп.

Напомним, что характеристикой класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется множество $\mathrm{Char}(\mathfrak{F})=\{p\in \mathbf{P} \mid Z_p\in\mathfrak{F}\}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга, причем $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$,* где *$\mathfrak{X}$ – некоторый класс Фиттинга. Если* $\mathrm{Char}(\mathfrak{F})\subseteq\omega$, *то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{X}$.*

В случае ω = **P**, ввиду примера [11], из теоремы вытекает результат Пилар Галледжи [6], который приведем в качестве следствия.

Следствие 2 [6]. Любой локальный класс Фиттинга удовлетворяет обобщенной гипотезе Локетта.

Следствие 3. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-локальные классы Фиттинга, такие, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{F})\subseteq\omega$ и $\mathrm{Char}(\mathfrak{H})\subseteq\omega$. Тогда $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})\cap\mathfrak{S}_*$.

Заметим, что следствие 3 дает утвердительный ответ на вопрос Лауша (вопрос 8.30 [12]) для случая ω-локальных классов Фиттинга, характеристика которых является подмножеством множества ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Cossey, J.*** Classes of finite soluble groups / J. Cossey // Proceeding of the Second Intern. Conf. on the Theory of Groups (Canberra 1973). Lecture Notes in Math. – Berlin–Heidelberg–New York, 1974. – № 372. – P. 226–237.
2. ***Lockett, P.*** The Fitting class $\mathfrak{X}^*$ / P. Lockett // Math. Z. – 1974. – V. 137, № 2. – P. 131–136.
3. ***Bryce, R.A.*** A problem in Theory of Normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – V. 141, № 2. – P. 99–110.
4. ***Beidleman, J.C.*** Uber Fittingklassen und die Lockett-Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – V. 167, № 2. – P. 161–167.
5. ***Воробьев, Н.Т.*** О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.
6. ***Gallego, M.P.*** Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra. – 1996. – V. 24, № 6. – P. 2011–2023.
7. ***Doerk, K.*** Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – New York–Berlin: Walter de Gruyter, 1992.
8. ***Berger, T.R.*** An example in the theory of normal Fitting classes / T.R. Berger, J. Cossey // Math. Z. – 1977. – V. 154. – P. 287–293.
9. ***Vorob'ev, N.T.*** On Lockett's conjecture for finite groups / N.T. Vorob'ev, A. Grytczuk // Tsukuba J. Math. – 1994. – Vol. 1, № 1. – P. 63–67.

10. ***Скиба, А.Н.*** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
11. ***Залесская, Е.Н.*** О нелокальных классах Локетта / Е.Н. Залесская // Веснік ВДУ. – 2002. – № 1 (23). – С. 84–88.
12. ***Коуровская тетрадь.*** Нерешенные вопросы теории групп // Институт математики. СОРАН. – 1999. – № 14. – С. 134.

S U M M A R Y

A Lockett conjecture about a structure of a Fitting class for ω-local Fitting classes with given characteristic is affirmed. The negative answer for the Lockett conjecture in the case of ω-local Fitting classes is obtained.

Поступила в редакцию 8.10.2006