УДК 521.1

Ю.В. Трубников, А.М. Воронов

Решение задачи трех тел в терминах временных рядов

Система уравнений для задачи трех тел, как известно [1], имеет следующий вид:

$$\ddot{x}_0 = fm_1 \frac{x_1 - x_0}{r_{01}^{3/2}} + fm_2 \frac{x_2 - x_0}{r_{02}^{3/2}} ;$$

$$\ddot{y}_0 = fm_1 \frac{y_1 - y_0}{r_{01}^{3/2}} + fm_2 \frac{y_2 - y_0}{r_{02}^{3/2}} ;$$

$$\ddot{z}_0 = fm_1 \frac{z_1 - z_0}{r_{01}^{3/2}} + fm_2 \frac{z_2 - z_0}{r_{02}^{3/2}};$$

$$\ddot{x}_1 = fm_0 \frac{x_0 - x_1}{r_{01}^{3/2}} + fm_2 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}^{3/2}};$$

$$\ddot{y}_1 = fm_0 \frac{y_0 - y_1}{r_{01}^{3/2}} + fm_2 \frac{y_2 - y_1}{r_{12}^{3/2}};$$

$$\ddot{z}_1 = fm_0 \frac{z_0 - z_1}{r_{01}^{3/2}} + fm_2 \frac{z_2 - z_1}{r_{12}^{3/2}};$$

$$\ddot{x}_2 = fm_0 \frac{x_0 - x_2}{r_{20}^{3/2}} + fm_1 \frac{x_1 - x_2}{r_{21}^{3/2}};$$

$$\ddot{y}_2 = fm_0 \frac{y_0 - y_2}{r_{20}^{3/2}} + fm_1 \frac{y_1 - y_2}{r_{21}^{3/2}};$$

$$\ddot{z}_2 = fm_0 \frac{z_0 - z_2}{r_{20}^{3/2}} + fm_1 \frac{z_1 - z_2}{r_{21}^{3/2}}.$$

Рассмотрим общую, или неограниченную, задачу трех тел, т.е. задачу о движении системы, состоящей из трех материальных точек с произвольными конечными массами, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. В некоторой абсолютной системе координат с неизменными направлениями осей дифференциальные уравнения движения в этой задаче имеют приведенный вид. Здесь

$$r_{ij} = \left(x_j(t)^2 - x_i(t)^2\right) + \left(y_j(t)^2 - y_i(t)^2\right) + \left(z_j(t)^2 - z_i(t)^2\right) \ (i, j = 0,1,2)$$

являются квадратами взаимных расстояний между точками M_i и M_j, обладающими массами m_i и $m_j \left(i, j = 0,1,2\right)$, а f – постоянная тяготения. Можно понизить порядок системы на шесть единиц, переходя от абсолютных координат к относительным. Пусть, например, за новое начало взята точка M_0, а новые оси параллельны абсолютным осям. Тогда в этой относительной системе координат уравнения движения точек M_1 и M_2 имеют следующий вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_1)x_1}{d_1^{3/2}} = fm_2 \left(\frac{x_2 - x_1}{d_{12}^{3/2}} - \frac{x_2}{d_2^{3/2}} \right),$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_1)y_1}{d_1^{3/2}} = fm_2 \left(\frac{y_2 - y_1}{d_{12}^{3/2}} - \frac{y_2}{d_2^{3/2}} \right),$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_1)z_1}{d_1^{3/2}} = fm_2 \left(\frac{z_2 - z_1}{d_{12}^{3/2}} - \frac{z_2}{d_2^{3/2}} \right),$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_2)x_2}{d_2^{3/2}} = fm_1 \left(\frac{x_1 - x_2}{d_{21}^{3/2}} - \frac{x_1}{d_1^{3/2}} \right),$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}+\frac{f\left(m_0+m_2\right)y_2}{d_2^{3/2}}=fm_1\left(\frac{y_1-y_2}{d_{21}^{3/2}}-\frac{y_1}{d_1^{3/2}}\right),$$

$$\frac{d^2z_2}{dt^2}+\frac{f\left(m_0+m_2\right)z_2}{d_2^{3/2}}=fm_1\left(\frac{z_1-z_2}{d_{21}^{3/2}}-\frac{z_1}{d_1^{3/2}}\right),$$

где

$$d_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\ d_2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,$$

$$d_{12}=d_{21}=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2.$$

Содержание предлагаемого метода приближенного интегрирования данной системы уравнений состоит в предварительной аппроксимации функций вида $\frac{1}{h^{3/2}}$, $h\in\left[a,b\right]$ по норме пространства $C_{[a,b]}$ (т.е. в предварительной чебышевской аппроксимации) и последующем нахождении коэффициентов ряда Тейлора по переменной t искомых функций $x_j\left(t\right),y_j\left(t\right),z_j\left(t\right)\left(j=1,2\right)$. Непосредственное нахождение коэффициентов рядов Тейлора затруднительно, так как связано с чрезвычайной громоздкостью производных по переменной t функций вида

$$\frac{1}{\left(x\left(t\right)^2+y\left(t\right)^2+z\left(t\right)^2\right)^{3/2}},$$

участвующих в системе.

Лемма. *Полиномом наилучшего чебышевского приближения первой степени для функции* $f\left(h\right)=\frac{1}{h^{3/2}}\left(h\in\left[a,b\right]\right)$ *является полином*

$$P(h)=\frac{1}{a^{3/2}}\frac{a\left(\frac{1}{b^{3/2}}\frac{1}{a^{3/2}}\right)}{b-a}\frac{\left(b^{3/2}-a^{3/2}\right)^{3/5}}{2(ab)^{9/10}(b-a)^{3/5}}\left(\frac{b^{5/2}-a^{5/2}}{(ab)^{3/5}\left(b^{3/2}-a^{3/2}\right)^{3/5}(b-a)^{2/5}}-\frac{5}{6}3^{2/5}2^{3/5}\right)+$$

$$+\frac{\frac{1}{b^{3/2}}-\frac{1}{a^{3/2}}}{b-a}h.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с алгоритмом, предложенным в монографии [2], найдем d из системы уравнений

$$\begin{cases} d+a_0+a_1h_1=\frac{1}{h_1^{3/2}}, \\ -d+a_0+a_1h_2=\frac{1}{h_2^{3/2}}, \\ d+a_0+a_1h_3=\frac{1}{h_3^{3/2}}, \end{cases} \qquad (1)$$

считая неизвестными величинами d, a_0, a_1. Применяя правило Крамера, получаем

$$d = \frac{h_3 - h_2}{2h_1^{3/2}(h_3 - h_1)} - \frac{1}{2h_2^{3/2}} + \frac{h_2 - h_1}{2h_3^{3/2}(h_3 - h_1)}.$$

Далее нам необходимо максимизировать величину уклонения $d = d(h_1, h_2, h_3)$. Для этого найдем частную производную

$$\frac{\partial d}{\partial h_1} = \frac{h_3 - h_2}{2(h_3 - h_1)}\left(-\frac{3}{2h_1^{5/2}} - \frac{\frac{1}{h_3^{3/2}} - \frac{1}{h_1^{3/2}}}{h_3 - h_1}\right)(a \le h_1 < h_2 < h_3 \le b). \quad (2)$$

Так как функция $f(h) = \frac{1}{h^{3/2}}(h \in [a, b])$ является выпуклой, то из выражения (2) видно, что производная $\frac{\partial d}{\partial h_1}$ отрицательна, т.е. при фиксированных h_2, h_3 максимальное значение d будет достигаться при $h_1 = a$. Аналогичное рассуждение приводит к тому, что $h_3 = b$. Остается распорядиться параметром h_2. Преобразуем выражение для d к виду

$$d = \frac{b^{5/2} - a^{5/2}}{2(ab)^{3/2}(b-a)} - \frac{b^{3/2} - a^{3/2}}{2(ab)^{3/2}(b-a)}h - \frac{1}{2h^{3/2}},$$

тогда, приравнивая к нулю производную

$$\frac{\partial d}{\partial h} = -\frac{b^{3/2} - a^{3/2}}{2(ab)^{3/2}(b-a)} + \frac{3}{4h^{5/2}},$$

получаем значение h_2, равное

$$h_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/5}(ab)^{3/5}\left(\frac{b-a}{b^{3/2} - a^{3/2}}\right)^{2/5}.$$

Требуемое изменение знака производной очевидным образом проверяется.

Таким образом, окончательное выражение для максимального уклонения d будет иметь вид

$$d = \frac{\left(b^{3/2} - a^{3/2}\right)^{3/5}}{2(ab)^{9/10}(b-a)^{3/5}}\left(\frac{b^{5/2} - a^{5/2}}{(ab)^{3/5}\left(b^{3/2} - a^{3/2}\right)^{3/5}(b-a)^{2/5}} - \frac{5}{6}\cdot 3^{2/5}\cdot 2^{3/5}\right). \quad (3)$$

Подставляя значение d в систему уравнений (1), очевидным образом находим значения коэффициентов a_0, a_1.

Лемма доказана.

Если положить $a = r_{\min}^2, b = r_{\max}^2$, где $r_{\min}$ и $r_{\max}$ означают минимальное и максимальное расстояние от Земли до Солнца, то полином наилучшего приближения будет иметь вид

$$P_z = 7.474604270455080\ 10^{-40} - 2.003864852\ 10^{-66}x_1^2 - 2.00864852\ 10^{-66}y_1^2 -$$
$$-2.003864851\ 10^{-66}z_1^2\ .$$

Аналогичные вычисления, проведенные для Юпитера, приводят к выражению

$$P_j = 5.342009939356607\ 10^{-42} - 5.285838302416863\ 10^{-70}x_2^2 -$$
$$-5.285838302416863\ 10^{-70}y_2^2$$
$$-5.285838302416863\ 10^{-70}z_2^2\ .$$

Функция взаимного расстояния аппроксимируется выражением

$$P_{zj} = 6.595646754540904\ 10^{-42} - 6.508076427957584\ 10^{-70}x_{1,2}^{\ 2} -$$
$$-6.508076427957584\ 10^{-70}y_{1,2}^{\ 2}$$
$$-6.508076427957584\ 10^{-70}z_{1,2}^{\ 2}\ .$$

Таким образом, система уравнений для задачи Солнце (m_0), Земля (m_1), Юпитер (m_2) приводится к виду:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + f\left(m_0 + m_1\right)x_1\left(7,47\cdot 10^{-40} - 2,00\cdot 10^{-66}\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right)\right) =$$
$$= fm_2\left(\left(x_2 - x_1\right)\cdot\left(6,60\cdot 10^{-42} - 6,51\cdot 10^{-70}\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right)\right)\right) -$$
$$-fm_2x_2\left(5,34\cdot 10^{-42} - 5,28\cdot 10^{-70}\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right)\right).$$

Остальные уравнения преобразуются аналогичным образом. Полученная система представляет собой систему дифференциальных уравнений с кубическими нелинейностями. Нахождение коэффициентов рядов Тейлора для таких систем представляет собой существенно более простую задачу.

Отметим, что вычисления велись в системе СИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Дубошин, Г.*** Небесная механика / ***Г. Дубошин.*** – М., 1975. – С. 426.
2. ***Трубников, Ю.В.*** Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / ***Ю.В. Трубников.*** – М., 2002. – С. 33.

S U M M A R Y

The article deals with the representation of the solution of the problem of three celestial bodies.

Поступила в редакцию 08.09.2006