УДК 517.977

С.В. Сергеенко, О.В. Храмцов

Проблема управления в случае неединственного решения задачи Коши в начальной точке

Пусть процесс описывается уравнением

$$\dot{x} = x^{\alpha}, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

$$x(t_*) = x^*, \tag{3}$$

где $x \in [0,\infty)$, $t \in [0,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$ такое, что область существования решения $x \geq 0$.

Следуя [1] можно установить, что задача Коши (1), (2) имеет неединственное решение, которое представимо в виде $x = x_i(t)$, $x_1(t) \equiv 0$, $t \in [0, t_1']$; $x_2(t) = ((t - t_1')(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $t \in [t_1', \infty)$. Поэтому неизвестно, по какому частному решению будет развиваться процесс. Теория управления [2] не рассматривает такие начальные условия. Задача работы: построить управляемую систему за счет введения вспомогательных функций-управлений, которая позволила бы решить расширенную задачу управления (1), (2), (3).

Для решения задачи предлагается следующая математическая модель:

$$\dot{x} = x^{\alpha}(1+u(t)) + \delta(t), \tag{4}$$

$$y = \operatorname{sgn} x(t), \tag{5}$$

где $u(t)$, $t \in [0,t_*]$ – управление, кусочно-непрерывная функция; игольчатое управление $\delta(t) = \delta_i(t)$; $\delta_1(t) = 0$, $t \in [0,t_2]$; $\delta_2(t) = \delta_0$, $t \in (t_2,t_1)$; $\delta_3(t) = 0$, $t \in [t_1,t_*]$ при $t_1 > t_2$ и $\delta(t) \equiv 0$ при $t_1 \le t_2$; δ_0 – некоторая положительная константа, y – наблюдаемая величина, sgn – знак числа. Предполагаем срабатывание наблюдателя при $x = h$, где h – некоторая положительная постоянная. Будем обозначать через t_1' – момент схода частного решения с тривиального решения $x_1(t) \equiv 0$, t_1 – момент включения управления u и выключения управления δ, то есть $u(t) = 0$, $t \in [0,t_1)$, определяемый срабатыванием наблюдателя; t_2 – время ожидания срабатывания наблюдателя.

Теорема 1. *Модель процесса (4), (5) является управляемой для начальной точки* $(0;0)$ *и произвольной конечной точки* (t_*,x^*), $t_* > 0$, $x^* > 0$.

Доказательство. Имеется несколько вариантов развития процесса.

1. В момент t_1' решение $x(t)$ самопроизвольно сходит с тривиального $x_1(t) \equiv 0$ и, кроме того, срабатывание наблюдателя происходит до включения управления δ. В этом случае развитие процесса после срабатывания наблюдения описывается с помощью задачи Коши:

$$\dot{x} = x^{\alpha}(1+u(t)),\ t \in [t_1,t_*], \tag{6}$$

$$x(t_1) = h. \tag{7}$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид:

$$\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t + U(t) + C,$$

где $U(t)$ – первообразная функции $u(t)$.

Из начального условия (7) находим значение постоянной $C = \dfrac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} - t_1 - U(t_1)$. Таким образом, задача Коши (6), (7) имеет решение, с учетом которого конечное условие (3) примет вид:

$$\frac{(x^*)^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int_{t_1}^{t_*}(1+u(s))ds. \tag{8}$$

Интегральное уравнение (8) имеет бесконечное множество решений относительно неизвестной функции $u(t)$ таких, что решение $x(t) \ge 0$ при $t \in [t_1,t_*]$. Таким образом, управление существует для любого $t_* > t_1$ и имеет вид $u = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1) \\ p(t), & t \in [t_1, t_*) \end{cases}$, где $u = p(t)$ удовлетворяет уравнению (8) и неравенству

$$\int_{t_1}^{t} (1 + u(s)) ds \ge -\frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ при } t \in [t_1, t_*]. \tag{9}$$

Т.е. процесс является управляемым.

Замечание 1. Управление $u = u(t)$ должно удовлетворять уравнению (8) и неравенству (9) независимо от того, как развивался процесс до момента срабатывания наблюдателя t_1.

Так как срабатывание наблюдателя произошло самопроизвольно (т.е. оно произошло до истечения времени ожидания срабатывания наблюдателя t_2 и $\delta(t) \equiv 0$), то $t_2 > t_1$. С другой стороны, самопроизвольное срабатывание наблюдателя произойдет в момент времени $t_1 = t_1' + \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. В силу того, что момент схода $t_1' \ge 0$, имеем ограничение на момент срабатывания наблюдателя

$$\frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le t_1 < t_2. \tag{10}$$

2. Во втором случае самопроизвольного схода частного решения с тривиального не происходит, и в момент времени t_2 происходит включение управления δ. Значит, процесс при $t \in [t_2, t_1]$ описывается соотношениями:

$$\dot{x} = x^{\alpha} + \delta_0, \tag{11}$$

$$x(t_2) = 0. \tag{12}$$

Решение задачи (11), (12) позволяет найти связь между моментом срабатывания наблюдателя t_1 ($x(t_1) = h$) и временем ожидания

$$t_1 = t_2 + \int_0^h \frac{ds}{s^{\alpha} + \delta_0}. \tag{13}$$

Рассматриваемый на промежутке $[t_1, t_*]$ процесс описывается теми же соотношениями (6), (7), что и в первом случае. Повторяя рассуждения предыдущего пункта получаем, что процесс также является управляемым и искомое управление u удовлетворяет равенству (8) и неравенству (9).

3. Последний вариант развития процесса заключается в том, что в момент времени t_1' произошел сход с тривиального решения, но до включения игольчатого управления срабатывание наблюдателя не происходит. Значит, процесс при $t \in [t_1', t_2]$ описывается функцией $x(t) = ((t - t_1')(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}$, а при $t \in [t_2, t_1]$ соотношениями

$$\dot{x} = x^{\alpha} + \delta_0, \tag{14}$$

$$x(t_2) = ((t_2 - t_1')(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}} = x^1. \tag{15}$$

Напомним, что в момент срабатывания наблюдателя

$$x(t_1) = h. \tag{16}$$

Решение задачи (14), (15) представимо в виде $\int\limits_{x^1}^{x} \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0} = t - t_2$. С учетом конечного условия (16) получаем выражение

$$t_1 = t_2 + \int\limits_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0} - \int\limits_0^{x^1} \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0}. \tag{17}$$

Так как $\frac{1}{s^\alpha + \delta_0} > 0$, то $\int\limits_0^{x^1} \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0} > 0$. Таким образом, из равенства (17) получаем оценку

$$t_1 < t_2 + \int\limits_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0}. \tag{18}$$

Проводя рассуждения аналогично первому случаю получаем, что процесс также является управляемым и искомое управление u удовлетворяет равенству (8) и неравенству (9).

Покажем, что для любого $t_* > 0$ существует игольчатое управление $\delta(t)$ такое, что момент t_1 срабатывания наблюдателя будет удовлетворять неравенству $t_1 < t_*$. Для этого достаточно показать, что для некоторого $\delta(t)$ выполняется неравенство

$$t_* > t_2 + \int\limits_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0}, \tag{19}$$

из которого следует неравенство $t_* > t_1$, так как выполнено хотя бы одно из соотношений (10), (13) или (18).

Найдем $\lim\limits_{\delta_0 \to \infty} \int\limits_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0}$. Заметим, что для любого $\delta_0 > 0$ $\int\limits_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0}$ – собственный интеграл. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда при $\delta_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ для любого $s \geq 0$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{s^\alpha + \delta_0}\right| \leq \left|\frac{1}{\delta_0}\right| < \varepsilon$.

Таким образом, подынтегральная функция $\frac{1}{s^\alpha + \delta_0}$ стремится к 0 равномерно относительно s при $\delta_0 \to \infty$. Откуда получаем, что $\lim\limits_{\delta_0 \to \infty} \int\limits_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0} = 0$, а это и означает, что для любого t_* существует такое δ_0, что выполняется неравенство (19). Значит, при выполнении неравенства $t_2 < t_*$ процесс является управляемым. Теорема 1 доказана.

Из доказательства теоремы 1 следует, что задача поиска управления u имеет бесконечное множество решений, а каждое это решение удовлетворяет интегральному уравнению (8).

Рассмотрим задачу оптимизации управления при критерии качества

$$I(u) = \|u\| = \left\{ \int_{t_1}^{t_*} u^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \to \min . \tag{20}$$

Теорема 2. *Оптимальное управление* u, *решающее задачу управления в смысле критерия качества (20) при фиксированном моменте срабатывания наблюдателя, имеет вид*

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1) \\ \dfrac{(x^*)^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(t_* - t_1)} - 1, & t \in [t_1, t_*] \end{cases} . \tag{21}$$

Доказательство. Легко проверить, что u_0 удовлетворяет условиям (8) и (9) и решает задачу управления. Представим произвольное управление u в виде $u = u_0 + v$. Так как управление должно являться решением интегрального уравнения (8), то рассмотрим $\int_{t_1}^{t_*} (1 + u_0 + v) = \frac{(x^*)^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, откуда получаем

$$\int_{t_1}^{t_*} v dt = 0 . \tag{22}$$

Рассмотрим норму произвольного управления

$$\|u\| = \left\{ \int_{t_1}^{t_*} (u_0 + v)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{t_1}^{t_*} u_0^2 dt + 2u_0 \int_{t_1}^{t_*} v dt + \int_{t_1}^{t_*} v^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} . \tag{23}$$

С учетом (22) выражение (23) примет вид $\|u\| = \left\{ \int_{t_1}^{t_*} u_0^2 dt + \int_{t_1}^{t_*} v^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \geq \|u_0\|$, а это означает, что (21) – оптимальное управление. Теорема 2 доказана.

Заметим, что оптимальное управление (21) зависит от момента срабатывания наблюдателя t_1. Выясним возможные моменты срабатывания t_1. В ходе доказательства теоремы 1 было показано, что $\min\left\{ \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \int_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0} \right\} \leq t_1 < t_*$, но $\frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \geq \int_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0}$, следовательно, t_1 принимает значения из $\left[\int_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0}, t_* \right)$. Рассмотрим задачу оптимизации управления u по критерию качества (20) в зависимости от момента t_1.

Теорема 3. *Пусть u_0 – управление вида (21), тогда наименьшее значение $\|u_0\|^2$ будет:*

1) при $t_1 = t_* - \frac{(x^*)^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, *если выполняются неравенства* $x^* > h$ *и* $t_* - \frac{(x^*)^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{1-\alpha} > \int_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0}$;

2) при $t_1 = t_*$, *если верно равенство* $x^* = h$;

3) при $t_1 = t_* - \frac{h^{1-\alpha} - (x^*)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, *если справедливы неравенства* $x^* < h$ *и* $t_* - \frac{h^{1-\alpha} - (x^*)^{1-\alpha}}{1-\alpha} > \int_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0}$.

Доказательство проводится путем исследования квадрата нормы управления u как функции от момента срабатывания t_1 методами математического анализа на наименьшее значение на промежутке $\left[\int_0^h \frac{ds}{s^\alpha + \delta_0}, t_*\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Матвеев Н.М.*** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Мн., 1974. – 766 с.
2. ***Ройтенберг Я.Н.*** Автоматическое управление. – М., 1971. – 395 с.

SUMMARY

The process is described by equation $\dot{x} = x^\alpha$. For this equation Cauchy problem with condition $x(0) = 0$ has no unique solution. A controlled model of such process was built. Consider optimization of control by criterion of quality $\|u\| = \left\{\int_{t_1}^{t_*} u^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}$ with fixed time moment of actuation. Such optimal control was found. Optimal value of t_1 in some conditions was found.

Поступила в редакцию 28.11.2006