



Ю.И. Кулаженко

n-Арные аналоги двух теорем аффинной геометрии и полуабелевость n-арных групп

Известно, что алгебра обогащает геометрию точными методами исследований, а геометрия придает алгебраическим результатам определенную наглядность. Поэтому весьма актуальной является задача, которую поставил и частично решил С.А. Русаков в [1], о построении элементов аффинной геометрии на n -арной группе (для любого $n \geq 2$). Следует отметить, что ранее Д. Вакарелов в [2] построил элементы аффинной геометрии на тернарной группе. Однако методы, которыми пользовались указанные авторы, совершенно различны.

Представленная работа примыкает к первому направлению исследований и по своему характеру соответствует формуле А.Ю. Ольшанского [3] «алгебра–геометрия–алгебра».

Все полученные результаты – критерии полуабелевости n -арной группы $G = \langle X, (\cdot)^{[-2]} \rangle$. В то же время теоремы 1, 2 являются, соответственно, n -арными аналогами следующих утверждений из аффинной геометрии:

1) если соответственные стороны двух треугольников параллельны, то один треугольник переводится в другой либо гомотетией, либо параллельным переносом;

2) если три диагонали шестиугольника (не обязательно выпуклого), соединяющие противоположные вершины, имеют общую середину, то всякие две его противоположные стороны параллельны.

В дальнейшем элементы n -арной группы G будем называть точками. Точку

$$S_a(b) = (ab^{[-2]} b a)$$

называют точкой, симметричной точке b относительно точки a . Последовательность k элементов из X – k -угольником G . Четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ n -арной группы G называют параллелограммом G , если

$$(ab^{[-2]} b c) = d.$$

n -Арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности $x_i^n \in X^n$ справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

Другие понятия и обозначения можно найти в [1, 2–5].

Изложим теперь полученные результаты.

Предложение 1. n -Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых $a, b, t, m \in X$ справедливо равенство

$$(ta^{[-2]^{2n-4}} a b) = (ma^{[-2]^{2n-4}} a bm^{[-2]^{2n-4}} m t). \quad (1)$$

Доказательство. 1. Пусть равенство (1) выполняется. Докажем, что G – полуабелева группа.

Очевидно, что для любого $m \in X$ последовательность $m^{[-2]^{2n-4}} m m$ является нейтральной $2(n-1)$ -последовательностью. Тогда

$$(ta^{[-2]^{2n-4}} a b) = (ta^{[-2]^{2n-4}} a bm^{[-2]^{2n-4}} m m)$$

и равенство (1) можно переписать в виде

$$(ta^{[-2]^{2n-4}} a bm^{[-2]^{2n-4}} m m) = (ma^{[-2]^{2n-4}} a bm^{[-2]^{2n-4}} m t). \quad (2)$$

Рассмотрим произвольную последовательность $x_1 \in X^n$ с учетом равенства (2) и того, что для любого $x \in X$ последовательности $x_1 x_1^{[-2]^{2n-4}} x_1$ и $x_n^{[-2]^{2n-4}} x_n x_n$ являются нейтральными $2(n-1)$ -последовательностями.

Имеем

$$\begin{aligned} (x_1^n) &= (x_1 x_1^{[-2]^{2n-4}} x_1 (x_1^n) x_n^{[-2]^{2n-4}} x_n x_n) = (x_n x_1^{[-2]^{2n-4}} x_1 (x_1^n) x_n^{[-2]^{2n-4}} x_n x_1) = \\ &= ((x_n x_1^{[-2]^{2n-4}} x_1 x_1) x_2^{n-1} (x_n x_n^{[-2]^{2n-4}} x_n x_1)) = (x_n x_2^{n-1} x_1). \end{aligned}$$

Следовательно, мы показали, что

$$(x_1^n) = (x_n x_2^{n-1} x_1),$$

а значит, на основании определения, заключаем, что G – полуабелева n -арная группа.

2. Пусть G – полуабелева n -арная группа. Рассмотрим правую часть равенства (1) с учетом предложения 4 из [4]. Имеем

$$\begin{aligned} (ma^{[-2]^{2n-4}} a bm^{[-2]^{2n-4}} m t) &= ((ma^{[-2]^{2n-4}} a b)m^{[-2]^{2n-4}} m t) = \\ &= ((ba^{[-2]^{2n-4}} a m)m^{[-2]^{2n-4}} m t) = (ba^{[-2]^{2n-4}} a (mm^{[-2]^{2n-4}} m t)) = (ba^{[-2]^{2n-4}} a t) = \\ &= (ta^{[-2]^{2n-4}} a b). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Теорема 1. Пусть a, b, c, t – произвольные точки из X , а точки $d, u, v \in X$ такие, что четырехугольники $\langle a, d, v, c \rangle$, $\langle a, d, u, b \rangle$, $\langle b, u, v, c \rangle$ – параллелограммы G . Если $m \in X$ – середина отрезка $[dS_t(a)]$, то справедливо равенство

$$S_m(S_t(a)) = d, \quad (3)$$

а равенства

$$S_m(S_t(b)) = u \quad (4)$$

и

$$S_m(S_t(c)) = v \quad (5)$$

выполняются тогда и только тогда, когда G – полуабелева n -арная группа.

Доказательство. 1. Установим справедливость равенства (3). Для этого рассмотрим левую часть равенства с учетом определения 4 из [1], равенства 3.28 из [5], предложения 1 из [6] и того, что m – середина отрезка $[dS_t(a)]$,

а значит, согласно определению 4 из [1], $S_t(a) = (md^{[-2]} d^{2n-4} m)$. Имеем

$$\begin{aligned}
 S_m(S_t(a)) &= (m(S_t(a))^{[-2]} S_t(a) \dots m) = \\
 &= (m(md^{[-2]} d^{2n-4} m)^{[-2]} (md^{[-2]} d^{2n-4} m) \dots m) = \\
 &= (mm^{[-2]} m^{2n-4} \underbrace{d^{[-2]} d^{2n-4} \dots d^{[-2]} d^{2n-4}}_{2n-4} (d^{[-2]}) \underbrace{d^{[-2]} \dots d^{[-2]}}_{2n-4} m^{[-2]} m \dots) \\
 &= \underbrace{(mm^{[-2]} m^{2n-4} d^{[-2]} d^{2n-4} \dots d^{[-2]} d^{2n-4} (d^{[-2]})^{[-2]} d^{[-2]} \dots d^{[-2]} m^{[-2]} m \dots)}_{2n-3} \\
 &= \underbrace{(md^{[-2]} d^{2n-4} m) \dots m}_{2n-4} = \\
 &= (mm^{[-2]} m^{2n-4} \underbrace{d^{[-2]} d^{2n-4} \dots d^{[-2]} d^{2n-4}}_{2n-4} (d^{[-2]})^{[-2]} \underbrace{d^{[-2]} \dots d^{[-2]}}_{2n-4} m^{[-2]} m m) = \\
 &= (mm^{[-2]} m^{2n-4} dm^{[-2]} m m) = d.
 \end{aligned}$$

Справедливость равенства (3) установлена.

2. Пусть G – полуабелева n -арная группа.

Докажем справедливость равенства (4). Для этого, при рассмотрении левой части равенства, будем учитывать то, что четырехугольник $\langle a, d, u, b \rangle$ – параллелограмм G , а значит справедливо равенство

$$(ad^{[-2]} d^{2n-4} u) = b,$$

группа G – полуабелева, а также определение 4 из [1], равенство 3.28 из [5] и предложение 1 из [6]. Имеем

$$\begin{aligned}
 S_m(S_t(b)) &= (m(S_t(b))^{[-2]} S_t(b) \dots m) = (m(tb^{[-2]} b^{2n-4} t)^{[-2]} (tb^{[-2]} b^{2n-4} t) \dots m) = \\
 &= (mt^{[-2]} t^{2n-4} \underbrace{b^{[-2]} b^{2n-4} \dots b^{[-2]} b^{2n-4}}_{2n-4} (b^{[-2]})^{[-2]} \underbrace{b^{[-2]} \dots b^{[-2]}}_{2n-4} t^{[-2]} t \dots) \\
 &= \underbrace{(tb^{[-2]} b^{2n-4} t) \dots (tb^{[-2]} b^{2n-4} t) m}_{2n-3} = \\
 &= (mt^{[-2]} t^{2n-4} \underbrace{b^{[-2]} b^{2n-4} \dots b^{[-2]} b^{2n-4}}_{2n-4} (b^{[-2]})^{[-2]} \underbrace{b^{[-2]} \dots b^{[-2]}}_{2n-4} t^{[-2]} t m) = \\
 &= (mt^{[-2]} t^{2n-4} bt^{[-2]} t m) = (mt^{[-2]} t^{2n-4} (ad^{[-2]} d^{2n-4} u) t^{[-2]} t m) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((mt^{[-2]}{}^{2n-4} t a)d^{[-2]}{}^{2n-4} d (ut^{[-2]}{}^{2n-4} t m)) = \\
&= ((at^{[-2]}{}^{2n-4} t m)d^{[-2]}{}^{2n-4} d (mt^{[-2]}{}^{2n-4} t u)) = \\
&= (at^{[-2]}{}^{2n-4} t (md^{[-2]}{}^{2n-4} d m)t^{[-2]}{}^{2n-4} t u) = (at^{[-2]}{}^{2n-4} t S_t(a)t^{[-2]}{}^{2n-4} t u) = \\
&= (at^{[-2]}{}^{2n-4} t (ta^{[-2]}{}^{2n-4} a t)t^{[-2]}{}^{2n-4} t u) = \\
&= ((at^{[-2]}{}^{2n-4} t t)a^{[-2]}{}^{2n-4} a (tt^{[-2]}{}^{2n-4} t u)) = (aa^{[-2]}{}^{2n-4} a u) = u
\end{aligned}$$

Равенство (4) установлено.

Рассмотрим левую часть равенства (5) с учетом того, что четырехугольник $\langle a, d, v, c \rangle$ – параллелограмм G , а значит справедливо равенство

$$(ad^{[-2]}{}^{2n-4} d v) = c.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
S_m(S_t(c)) &= (m(S_t(c))^{[-2]} S_t(c) \dots m) = (m(tc^{[-2]}{}^{2n-4} c t)^{[-2]} (tc^{[-2]}{}^{2n-4} c t) \dots m) = \\
&= (mt^{[-2]}{}^{2n-4} t \underbrace{c^{[-2]}{}^{2n-4} c \dots c^{[-2]}{}^{2n-4} c}_{2n-4} (c^{[-2]})^{[-2]} \underbrace{c^{[-2]} \dots t^{[-2]}{}^{2n-4}}_{2n-4} \dots) = \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2n-3} \\
&= (tc^{[-2]}{}^{2n-4} c t) \dots (tc^{[-2]}{}^{2n-4} c t) m) = \\
&= (mt^{[-2]}{}^{2n-4} t \underbrace{c^{[-2]}{}^{2n-4} c \dots c^{[-2]}{}^{2n-4} c}_{2n-4} (c^{[-2]})^{[-2]} \underbrace{c^{[-2]} t^{[-2]}{}^{2n-4}}_{2n-4} m) = \\
&= (mt^{[-2]}{}^{2n-4} t ct^{[-2]}{}^{2n-4} t m) = (mt^{[-2]}{}^{2n-4} t (ad^{[-2]}{}^{2n-4} d v)t^{[-2]}{}^{2n-4} t m) = \\
&= ((mt^{[-2]}{}^{2n-4} t a)d^{[-2]}{}^{2n-4} d (vt^{[-2]}{}^{2n-4} t m)) = \\
&= ((at^{[-2]}{}^{2n-4} t m)d^{[-2]}{}^{2n-4} d (mt^{[-2]}{}^{2n-4} t v)) = \\
&= (at^{[-2]}{}^{2n-4} t (md^{[-2]}{}^{2n-4} d m)t^{[-2]}{}^{2n-4} t v) = (at^{[-2]}{}^{2n-4} t S_t(a)t^{[-2]}{}^{2n-4} t v) = \\
&= (at^{[-2]}{}^{2n-4} t (ta^{[-2]}{}^{2n-4} a t)t^{[-2]}{}^{2n-4} t v) = (((at^{[-2]}{}^{2n-4} t t)a^{[-2]}{}^{2n-4} a (tt^{[-2]}{}^{2n-4} t v)) = \\
&= (aa^{[-2]}{}^{2n-4} a v) = v.
\end{aligned}$$

Таким образом, установлена справедливость равенства (5).

3. Пусть выполняется равенство (4). Покажем, что G – полуабелева n -арная группа.

По условию теоремы четырехугольник $\langle a, d, u, b \rangle$ – параллелограмм G , а значит выполняется равенство

$$(ad^{[-2]}{}^{2n-4} d u) = b.$$

Откуда

$$u = (da^{[-2]} a^{2n-4} b).$$

Равенство (4), с учетом определения 4 из [1], равенства 3.28 из [5], предложения 1 из [6], перепишем в виде

$$(m(S_t(b))^{[-2]}) \underbrace{S_t(b) \dots m}_{2n-4} = (da^{[-2]} a^{2n-4} b). \quad (6)$$

Рассмотрим левую часть равенства (6). Имеем

$$\begin{aligned} (m(S_t(b))^{[-2]}) \underbrace{S_t(b) \dots m}_{2n-4} &= (m(tb^{[-2]} b^{2n-4} t)^{[-2]} \underbrace{(tb^{[-2]} b^{2n-4} t) \dots m}_{2n-4}) = \\ &= \underbrace{(mt^{[-2]} t^{2n-4} b^{[-2]} b^{2n-4} \dots b^{[-2]} b^{2n-4})}_{2n-4} \underbrace{(b^{[-2]})^{[-2]} b^{[-2]} \dots b^{[-2]}}_{2n-4} t^{[-2]} t^{2n-4} \dots \\ &\quad \underbrace{(tb^{[-2]} b^{2n-4} t) \dots (tb^{[-2]} b^{2n-4} t) m}_{2n-3} = (mt^{[-2]} t^{2n-4} bt^{[-2]} t^{2n-4} m). \end{aligned}$$

Тогда равенство (6) перепишем в виде

$$(mt^{[-2]} t^{2n-4} bt^{[-2]} t^{2n-4} m) = (da^{[-2]} a^{2n-4} b)$$

или

$$(ad^{[-2]} d^{2n-4} mt^{[-2]} t^{2n-4} bt^{[-2]} t^{2n-4} m) = b. \quad (7)$$

Преобразуем левую часть равенства (7) с учетом того, что m – середина отрезка $[dS_t(a)]$, а следовательно,

$$S_t(a) = (md^{[-2]} d^{2n-4} m).$$

Имеем

$$\begin{aligned} (ad^{[-2]} d^{2n-4} mt^{[-2]} t^{2n-4} bt^{[-2]} t^{2n-4} m) &= (am^{[-2]} m^{2n-4} (md^{[-2]} d^{2n-4} m)t^{[-2]} t^{2n-4} bt^{[-2]} t^{2n-4} m) = \\ &= (am^{[-2]} m^{2n-4} S_t(a)t^{[-2]} t^{2n-4} bt^{[-2]} t^{2n-4} m) = (am^{[-2]} m^{2n-4} (ta^{[-2]} a^{2n-4} t)t^{[-2]} t^{2n-4} bt^{[-2]} t^{2n-4} m) = \\ &= (am^{[-2]} m^{2n-4} ta^{[-2]} a^{2n-4} (tt^{[-2]} t^{2n-4} b)t^{[-2]} t^{2n-4} m) = (am^{[-2]} m^{2n-4} ta^{[-2]} a^{2n-4} bt^{[-2]} t^{2n-4} m). \end{aligned}$$

Тогда равенство (9) перепишем в виде

$$(am^{[-2]} m^{2n-4} ta^{[-2]} a^{2n-4} bt^{[-2]} t^{2n-4} m) = b$$

или

$$(ta^{[-2]} a^{2n-4} b) = (ma^{[-2]} a^{2n-4} bm^{[-2]} m^{2n-4} t). \quad (8)$$

На основании равенства (8) и предложения 1 заключаем, что G – полуабелева n -арная группа.

Пусть выполняется равенство (5). Покажем, что G – полуабелева n -арная группа.

По условию теоремы четырехугольник $\langle a, d, v, c \rangle$ – параллелограмм G , а значит выполняется равенство

$$(ad^{[-2]} d^{2n-4} v) = c$$

или

$$v = (da^{[-2]} a^{2n-4} c).$$

В этом случае равенство (5) можно переписать в виде

$$S_m(S_t(c)) = (da^{[-2]} a^{2n-4} c). \quad (9)$$

Рассмотрим левую часть равенства (9) с учетом определения 4 из [1], равенства 3.28 из [5], предложения 1 из [6]. Имеем

$$\begin{aligned} S_m(S_t(c)) &= (m(S_t(c))^{[-2]} S_t(c) \dots m) = (m(tc^{[-2]} c^{2n-4} t)^{[-2]} (tc^{[-2]} c^{2n-4} t) \dots m) = \\ &= (mt^{[-2]} t^{2n-4} c^{[-2]} c^{2n-4} \dots c^{[-2]} c^{2n-4} (c^{[-2]})^{[-2]} c^{[-2]} \dots c^{[-2]} t^{[-2]} t^{2n-4} \dots \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2n-3} \\ &\quad \underbrace{(tc^{[-2]} c^{2n-4} t) \dots m}_{2n-4} = (mt^{[-2]} t^{2n-4} ct^{[-2]} t^{2n-4} m). \end{aligned}$$

Тогда равенство (10) имеет вид

$$(mt^{[-2]} t^{2n-4} ct^{[-2]} t^{2n-4} m) = (da^{[-2]} a^{2n-4} c)$$

или

$$(ad^{[-2]} d^{2n-4} mt^{[-2]} t^{2n-4} ct^{[-2]} t^{2n-4} m) = c. \quad (10)$$

Преобразуем левую часть равенства (1) с учетом того, что

$$(md^{[-2]} d^{2n-4} m) = S_t(a).$$

Имеем

$$\begin{aligned} &(ad^{[-2]} d^{2n-4} mt^{[-2]} t^{2n-4} ct^{[-2]} t^{2n-4} m) = \\ &= (am^{[-2]} m^{2n-4} md^{[-2]} d^{2n-4} mt^{[-2]} t^{2n-4} ct^{[-2]} t^{2n-4} m) = \\ &= (am^{[-2]} m^{2n-4} S_t(a) t^{[-2]} t^{2n-4} ct^{[-2]} t^{2n-4} m) = \\ &= (am^{[-2]} m^{2n-4} (ta^{[-2]} a^{2n-4} t) t^{[-2]} t^{2n-4} ct^{[-2]} t^{2n-4} m) = \\ &= (am^{[-2]} m^{2n-4} ta^{[-2]} a^{2n-4} (tt^{[-2]} t^{2n-4} c) t^{[-2]} t^{2n-4} m) = \\ &= (am^{[-2]} m^{2n-4} ta^{[-2]} a^{2n-4} ct^{[-2]} t^{2n-4} m). \end{aligned}$$

Тогда равенство (10) имеет вид

$$(am^{[-2]} m^{2n-4} ta^{[-2]} a^{2n-4} ct^{[-2]} t^{2n-4} m) = c$$

или

$$(ta^{[-2]} a^{2n-4} c) = (ma^{[-2]} a^{2n-4} cm^{[-2]} m^{2n-4} t). \quad (11)$$

На основании предложения 1 и равенства (11) заключаем, что G – полуабелева n -арная группа.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть a, b, c, d – произвольные точки из X и $\langle a, b, c, d \rangle$ – шестиугольник. n -арная группа G будет полуабелевой тогда, когда хотя бы один из четырехугольников $\langle a, b, S_d(a), S_d(b) \rangle$, $\langle b, c, S_d(b), S_d(c) \rangle$, $\langle c, S_d(a), S_d(c), a \rangle$ – параллелограмм G .

Доказательство. 1. Пусть четырехугольник $\langle a, b, S_d(a), S_d(b) \rangle$ – параллелограмм G . Покажем, что G – полуабелева n -арная группа.

На основании определения 2 из [1] имеем

$$(ab^{[-2]^{2n-4}} b S_d(a)) = S_d(b).$$

Откуда, с учетом определения 4 из [1],

$$(ab^{[-2]^{2n-4}} b (da^{[-2]^{2n-4}} a d)) = (db^{[-2]^{2n-4}} b d)$$

или

$$(ab^{[-2]^{2n-4}} b d) = (db^{[-2]^{2n-4}} b da^{[-2]^{2n-4}} a)$$

или

$$(ab^{[-2]^{2n-4}} b d) = (db^{[-2]^{2n-4}} b a). \quad (12)$$

Поскольку a, b, d – произвольные точки из X , то на основании предложения 4 из [4] и равенства (12), заключаем, что G – полуабелева n -арная группа.

Аналогично устанавливается полуабелевость n -арной группы G , если четырехугольник $\langle a, c, S_d(b), S_d(c) \rangle$ или $\langle c, S_d(a), S_d(c), a \rangle$ – параллелограмм G .

2. Пусть G – полуабелева n -арная группа. Справедливость того, что четырехугольники $\langle a, b, S_d(a), S_d(b) \rangle$, $\langle b, c, S_d(b), S_d(c) \rangle$, $\langle a, c, S_d(a), S_d(c) \rangle$ – параллелограммы G , вытекает из предложения 2 из [4].

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Русаков, С.А.** Некоторые приложения теории n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 182 с.
2. **Вакарелов, Д.** Тернарни групи / Д. Вакарелов; Годишник софийск. ун-т, математ. фак. 1966–1967, 1968. – Т. 61. – С. 71–105.
3. **Ольшанский, А.Ю.** Геометрия определяющих соотношений в группах / А.Ю. Ольшанский. – М.: Наука, 1989. – 448 с.
4. **Кулаженко, Ю.И.** Построение фигур аффинной геометрии на n -арной группе / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики: сб. науч. тр.; под ред. С.А. Русакова. – Гомель, 1995. – С. 65–82.
5. **Русаков, С.А.** Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1992. – 264 с.
6. **Кулаженко, Ю.И.** Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики: сб. науч. тр. / под ред. С.А. Русакова. – Гомель, 1995. – С. 47–64.

S U M M A R Y

New criteria of semiability of n -ary group G are established. N -ary analogs of famous Theorems of Affinian geometry are constructed.

Поступила в редакцию 21.10.2009