Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»

Репозиторий ВГУ

М.Н. Подоксёнов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Учебное пособие

*Допущено Министерством образования
Республики Беларусь в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по математическим специальностям*

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2016*

УДК 510(075.8)
ББК 22.11я73
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 24.12.2015 г.

Автор: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов**

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ;
профессор кафедры высшей математики УО «БГАТУ»,
доктор физико-математических наук *И.В. Белько*

Подоксёнов, М.Н.

П44 Аналитическая геометрия и преобразования плоскости : учебное пособие / М.Н. Подоксёнов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – 286 с.

ISBN 978-985-517-518-7.

Данное учебное пособие подготовлено в соответствии с типовой учебной программой по курсу «Аналитическая геометрия и преобразования плоскости» для студентов математического факультета, обучающихся по специальности «Математика и информатика». Излагаются теоретический материал и примеры решения задач.

УДК 510(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 978-985-517-518-7

© Подоксёнов М.Н., 2016
© ВГУ имени П.М. Машерова, 2016

Репозиторий ВГУ

СОДЕРЖАНИЕ

Репозиторий ВГУ

Репозиторий ВГУ

Репозиторий ВГУ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная информатика». Оно сочетает в себе конспект лекций по предмету «Аналитическая геометрия и преобразования плоскости» и примеры решения задач. Объём теоретического материала рассчитан с учётом учебного времени, реально выделяемого на предмет самостоятельной работы студентов. В приложении излагаются сведения из алгебры, необходимые для понимания теоретического материала.

Основной задачей аналитической геометрии является исследование свойств геометрических объектов (в основном, прямых на плоскости и в пространстве, плоскостей в пространстве, кривых и поверхностей второго порядка) с помощью координатного метода. На плоскости или в пространстве вводится система координат, и каждый геометрический объект задаётся с помощью некоторого уравнения. Затем мы можем исследовать расположение геометрических объектов (в том числе, взаимное расположение нескольких объектов), анализируя эти уравнения. При этом используются методы линейной алгебры (матрицы и определители), а в отдельных случаях применяются методы математического анализа.

Традиционно аналитическая геометрия включает в себя раздел «Векторная алгебра», в котором, в частности, изучаются способы вычисления различных геометрических величин с помощью операций над векторами.

С предметом аналитической геометрии тесно связана тема аффинных и точечных евклидовых пространств, которая даёт представление о многомерных пространствах, в том числе и о четырёхмерном пространстве Минковского, которое используется в специальной теории относительности.

Раздел «Квадратичные формы» находится на границе линейной алгебры и аналитической геометрии. В нём изучается метод приведения уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду. Также учебное пособие содержит раздел, посвящённый основным преобразованиям плоскости (движение, подобие, аффинное преобразование и инверсия) и их группам.

Формулы, рисунки и теоремы нумеруются в каждой главе отдельно. Например, формула (7.1) есть формула 1 из главы 7. Материал, набранный меньшим размером шрифта, является дополнительным.

Значок ■ в тексте означает завершение доказательства.

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. *Направленные отрезки. Понятие вектора*

Все определения, теоремы и свойства, которые изложены в § 1–6, в равной мере относятся как к векторам на плоскости, так и к векторам в пространстве.

***Определение* 1.1.** *Отрезок* AB называется *направленным*, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая концом. Если A – начало, а B – конец, то этот отрезок обозначаем $\overrightarrow{AB}$, а на чертеже он изображается со стрелочкой на конце (рис. 1.1).

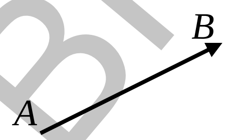


рис. 1.1

***Определение* 1.2.** Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

***Определение* 1.3.** Направленные *отрезки* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если лучи AB и A_1B_1 сонаправлены (противоположно направлены). Пишем соответственно $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{A_1B_1}$ ($\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{A_1B_1}$).

***Определение* 1.4.** Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются *эквивалентными*, или *равными*, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину (рис. 1.2). Пишем $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{A_1B_1}$.

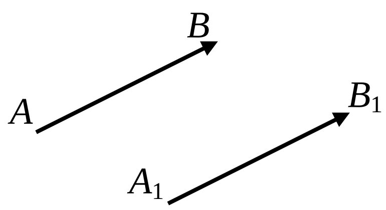


рис. 1.2

Легко проверить, что данное отношение, определённое на множестве всех направленных отрезков плоскости или пространства, обладает следующими свойствами:

1. $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{AB}$ (*рефлексивность*);

2. $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{A_1B_1}\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1B_1}\sim\overrightarrow{AB}$ (*симметричность*);

3. $(\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{A_1B_1}\ \&\ \overrightarrow{A_1B_1}\sim\overrightarrow{A_2B_2})\Rightarrow\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{A_2B_2}$ (*транзитивность*).

Таким образом, отношение, которое мы определили, действительно является отношением эквивалентности (см. приложение §1). Поэтому множество всех направленных отрезков распадается на непересекающиеся классы эквивалентных друг другу отрезков.

***Определение* 1.5.** *Вектором* называется класс эквивалентных между собой направленных отрезков. Другими словами, каждый направленный отрезок задаёт вектор, при этом эквивалентные отрезки задают один и тот

Репозиторий ВГУ

же вектор. Направление всех отрезков данного класса называется *направлением вектора*, а их длина – *длиной вектора*.

Длина вектора $\vec{\mathbf{a}}$ обозначается $|\vec{\mathbf{a}}|$. По аналогии длину отрезка AB мы будем обозначать $|AB|$.

Если вектор $\vec{\mathbf{a}}$ задаётся направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, то пишем $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{AB}$ и говорим, что $\overrightarrow{AB}$ это есть *вектор* $\vec{\mathbf{a}}$, *отложенный из точки* A.

Другими словами, у вектора нет определённых начала и конца. Если мы отложим вектор из некоторой точки, то получится направленный отрезок, у которого уже есть определённые начало и конец.

На чертеже вектор может изображаться любым из задающих его направленных отрезков.

***Пример* 1.1.** Пусть $ABCD$ – параллелограмм (рис. 1.3). Тогда $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{DC}$, и поэтому эти направленные отрезки задают один и тот же вектор. Аналогично $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ задают один и тот же вектор.

рис. 1.3

***Предложение* 1.1.** Пусть задан направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ и произвольная точка A_1. Тогда существует одна и только одна точка B_1, такая, что $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A_1B_1}$. Другими словами, данный вектор можно отложить из любой точки, и притом единственным образом.

Упражнение. Доказательство проведите самостоятельно. Используйте рисунок 1.4.

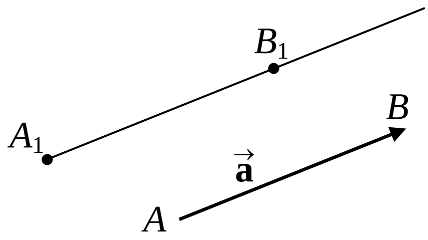


рис. 1.4

***Определение* 1.6.** Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* и обозначается $\vec{\mathbf{o}}$. Вектор, длина которого равна 1, называется единичным.

***Определение* 1.7.** Векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если задающие их направленные отрезки сонаправлены (противоположно направлены). Пишем $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}$ ($\vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}}$).

***Определение* 1.8.** Два вектора, направления которых совпадают или противоположны, называются *коллинеарными*. Пишем $\vec{\mathbf{a}} \parallel \vec{\mathbf{b}}$. Считается, что у нулевого вектора направление не определено, и он коллинеарен любому вектору.

***Определение* 1.9.** Три и более векторов, параллельных одной плоскости, называются *компланарными*.

Репозиторий ВГУ

§ 2. *Сложение и вычитание векторов*

***Определение* 1.10.** Пусть даны два произвольных вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$. Отложим вектор $\vec{\mathbf{a}}$ от некоторой точки O: $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA}$, а из точки A отложим вектор $\vec{\mathbf{b}}$: $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 1.5). Пусть $\vec{\mathbf{c}}$ – это вектор, который задаётся направленным отрезком $\overrightarrow{OB}$. Тогда $\vec{\mathbf{c}}$ называется *суммой векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$.

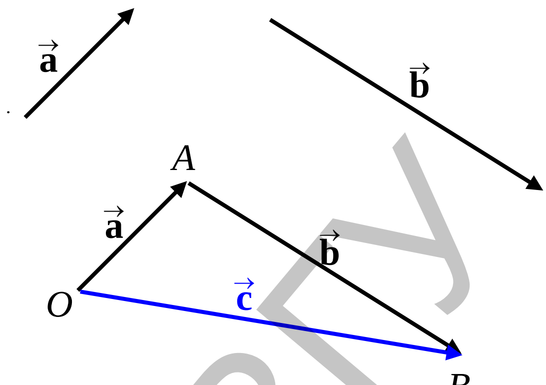


рис. 1.5

Пишем $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$.

Этот способ построения суммы двух векторов называется *правилом треугольника*. Его удобно запоминать в виде равенства $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

Однако в нашем определении использовалась точка O. Возникает вопрос: что если мы начнём точно такое же построение от другой точки O_1? Не получится ли другой вектор $\vec{\mathbf{c}}_1$ (рис. 1.6)? Другими словами, надо доказать, что наше определение корректно.

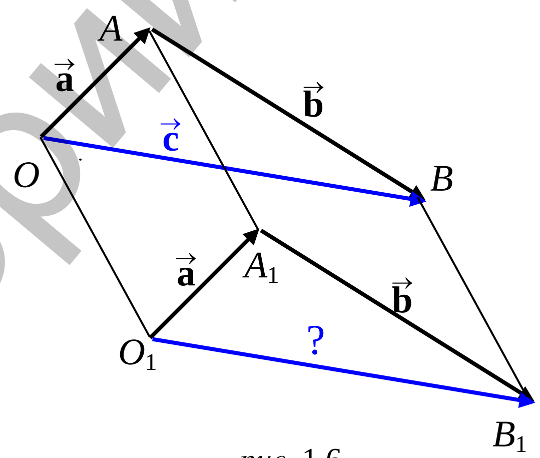


рис. 1.6

Направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{O_1A_1}$ задают один и тот же вектор $\vec{\mathbf{a}}$. Поэтому они эквивалентны, а значит, параллельны и равны. Согласно признаку параллелограмма четырёхугольник OAA_1O_1 является параллелограммом. Следовательно, стороны OO_1 и AA_1 тоже параллельны и равны. Аналогично получим, что отрезки AA_1 и BB_1 параллельны и равны. Поэтому четырёхугольник OBB_1O_1 является параллелограммом, а, значит, стороны OB и O_1B_1 тоже параллельны и равны. Итак, $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O_1B_1}$, и они задают один и тот же вектор.

Заметим, что данное доказательство остаётся верным и в случае, когда $\vec{\mathbf{a}} \,||\, \vec{\mathbf{b}}$.

***Свойства операции сложения векторов*:**

$\forall\ \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ имеют место следующие равенства

1. $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$ (*коммутативность*);

2. $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$ (*ассоциативность*);

3. $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{a}}$.

Репозиторий ВГУ

4. $\exists!\ \vec{\mathbf{x}}$ такой, что $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{o}}$. Этот вектор называется *противоположным вектором* к $\vec{\mathbf{a}}$ и обозначается $-\vec{\mathbf{a}}$.

Доказательство. **1.** Отложим векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ от одной точки O:

$$\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OA},\ \vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{OB}.$$

Достроим треугольник OAB до параллелограмма $OACB$ (рис. 1.7). Пусть $\vec{\mathbf{c}}=\overrightarrow{OC}$. Как мы уже отмечали в примере 1.1, $\overrightarrow{AC}\sim\overrightarrow{OB}$, т.е. $\overrightarrow{AC}$ задаёт тот же вектор $\vec{\mathbf{b}}$. Тогда по правилу треугольника

$$\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{OC}.$$

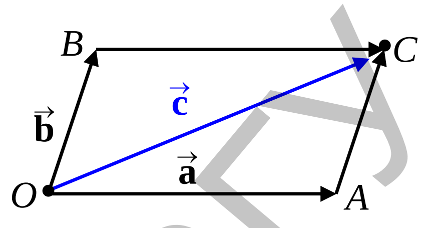


рис. 1.7

С другой стороны, $\overrightarrow{BC}\sim\overrightarrow{OA}$, и поэтому $\overrightarrow{BC}$ задаёт тот же вектор $\vec{\mathbf{a}}$. По правилу треугольника

$$\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OC}.$$

Итак, векторы $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}$ задаются одним и тем же направленным отрезком $\overrightarrow{OC}$, и поэтому они равны.

Описанный выше способ построения суммы векторов называется *правилом параллелограмма*. Мы также говорим, что параллелограмм $OACB$ (рис. 1.7) построен на векторах $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, отложенных из одной точки O.

2. Доказательство обозначено на чертеже (рис. 1.8). Здесь мы видим, что, с одной стороны, $(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})+\vec{\mathbf{c}}=\overrightarrow{OC}$, а, с другой стороны, $\vec{\mathbf{a}}+(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})=\overrightarrow{OC}$.

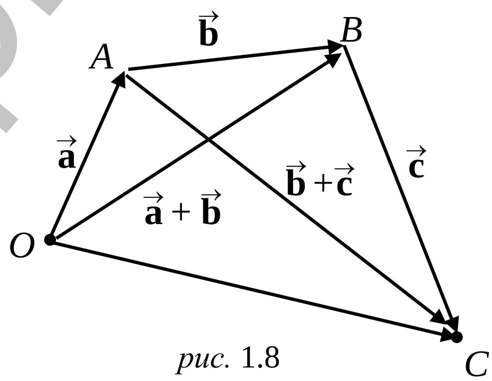


рис. 1.8

Свойство 2 позволяет использовать обозначение $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}$ без расстановки скобок.

3. Пусть $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OA}$, а нулевой вектор $\vec{\mathbf{o}}$ можем задать с помощью направленного отрезка $\overrightarrow{AA}$. Тогда по правилу треугольника $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{o}}=\overrightarrow{OA}$. Значит, $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{o}}=\vec{\mathbf{a}}$.

4. Пусть $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OA}$. Зададим $\vec{\mathbf{x}}=\overrightarrow{AO}$. Тогда по правилу треугольника $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{x}}=\overrightarrow{OO}$. Значит, $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{o}}$. Тем самым, мы доказали существование противоположного вектора. Докажем единственность.

Предположим, что существует ещё один вектор $\vec{\mathbf{x}}_1$ такой, что $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{x}}_1=\vec{\mathbf{o}}$. Прибавим к последнему равенству справа и слева вектор $\vec{\mathbf{x}}$:

$$(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{x}}_1)+\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{o}}+\vec{\mathbf{x}}.$$

Репозиторий ВГУ

Согласно свойствам 1 и 2 мы можем векторы переставить и сгруппировать в другом порядке:

$$(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{x}})+\vec{\mathbf{x}}_1=\vec{\mathbf{o}}+\vec{\mathbf{x}} \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{o}}+\vec{\mathbf{x}}_1=\vec{\mathbf{o}}+\vec{\mathbf{x}} \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{x}}_1=\vec{\mathbf{x}}. \quad \blacksquare$$

***Определение* 1.11.** *Разностью двух векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется такой вектор $\vec{\mathbf{d}}$, что $\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}$. Пишем $\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$.

Докажем, что разность векторов существует и определяется однозначно.

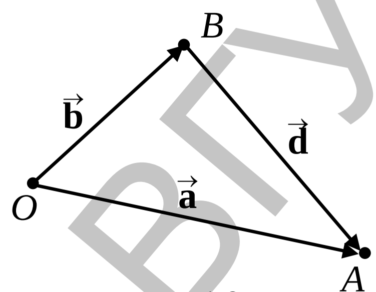


рис. 1.9

Отложим данные нам векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ из одной точки O: $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{OB}$, и пусть $\vec{\mathbf{d}}=\overrightarrow{BA}$ (рис. 1.9). Тогда по правилу треугольника

$$\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}. \tag{1.1}$$

Значит, разность двух векторов существует.

Докажем единственность. Прибавим справа и слева к равенству (1.1) вектор $-\vec{\mathbf{b}}$:

$$(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{d}})+(-\vec{\mathbf{b}})=\vec{\mathbf{a}}+(-\vec{\mathbf{b}}).$$

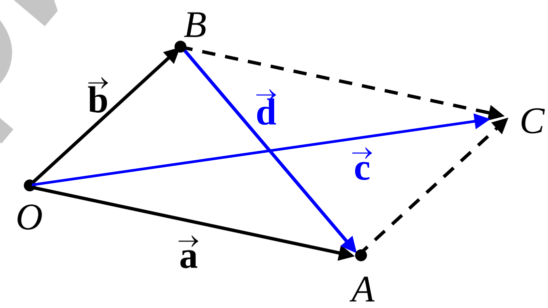


рис. 1.10

Используя свойства 1 и 2, мы переставим векторы и сгруппируем в другом порядке:

$$(\vec{\mathbf{b}}+(-\vec{\mathbf{b}}))+\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}+(-\vec{\mathbf{b}}),$$

$$\vec{\mathbf{d}}+\vec{\mathbf{o}}=\vec{\mathbf{a}}+(-\vec{\mathbf{b}}) \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}+(-\vec{\mathbf{b}}).$$

Тем самым, мы доказали, что

$$\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{a}}+(-\vec{\mathbf{b}}).$$

Поскольку единственность противоположного вектора уже доказана, то и разность определяется однозначно.

Кроме этого, мы увидели, как построить разность на чертеже. Если на двух данных векторах, отложенных из одной точки, построить параллелограмм, то одна диагональ будет задавать сумму векторов, а вторая – их разность (рис. 1.10).

§ 3. *Умножение вектора на число*

Для того чтобы определить вектор, зачастую не достаточно одного пункта: надо отдельно определить направление вектора и его длину.

***Определение* 1.12.** *Произведением вектора* $\vec{\mathbf{a}}$ *на число* λ называется такой вектор $\vec{\mathbf{b}}$, что

1. $\vec{\mathbf{a}}\uparrow\uparrow\vec{\mathbf{b}}$, если $\lambda>0$, и $\vec{\mathbf{a}}\uparrow\downarrow\vec{\mathbf{b}}$, если $\lambda<0$;

Репозиторий ВГУ

2. $|\vec{\mathbf{b}}| = |\lambda| \cdot |\vec{\mathbf{a}}|$.

Пишем $\vec{\mathbf{b}} = \lambda\vec{\mathbf{a}}$. (Часто еще добавляют **3.** если $\lambda = 0$, то $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{o}}$, но это следует из **2.**)

Другими словами, векторы $2\vec{\mathbf{a}}$ и $-2\vec{\mathbf{a}}$ имеют длину в 2 раза больше, чем $\vec{\mathbf{a}}$, но $2\vec{\mathbf{a}}$ имеет такое же направление, что и вектор $\vec{\mathbf{a}}$, а вектор $-2\vec{\mathbf{a}}$ имеет направление, противоположное к $\vec{\mathbf{a}}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число ещё называются *линейными операциями*.

***Пример* 1.2.** Пусть A_1B_1 – средняя линия в треугольнике ABC, параллельная к стороне AB, $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 1.11). Тогда $\vec{\mathbf{b}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}$, потому что эти векторы сонаправленные, а длина вектора $\vec{\mathbf{b}}$ в 2 раза меньше, чем длина вектора $\vec{\mathbf{a}}$.

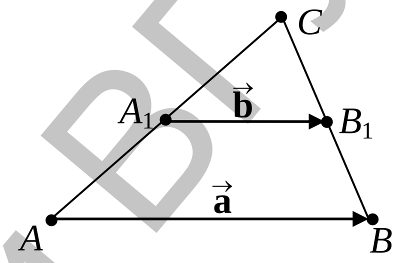


рис. 1.11

***Пример* 1.3.** Пусть AM – медиана в ΔABC и $\vec{\mathbf{c}} = \overrightarrow{AM}$. Достроим треугольник до параллелограмма $ABCD$ (рис. 1.12). Пусть M – точка пересечения диагоналей и пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{\mathbf{b}}$. Тогда $\overrightarrow{AD} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$, а $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Значит, вектор $\vec{\mathbf{c}}$, который задаётся медианой $\overrightarrow{AM}$, равен полусумме векторов, задаваемых сторонами треугольника $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\vec{\mathbf{c}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$.

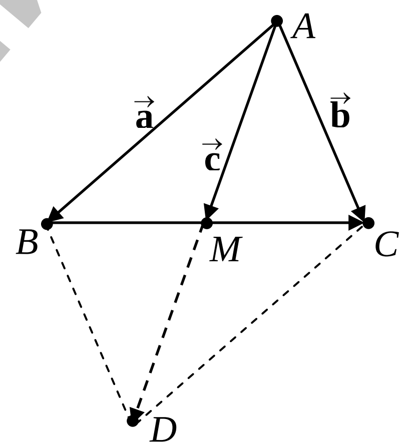


рис. 1.12

***Свойства операции умножения вектора на число*:**

$\forall\, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ и $\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ выполнено

1. $\lambda(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}}$;
2. $\lambda(\mu\vec{\mathbf{a}}) = (\lambda\mu)\vec{\mathbf{a}}$;
3. $(\lambda + \mu)\vec{\mathbf{a}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{a}}$;
4. $1 \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$.

***Доказательство.* 1.** Очевидно, что свойство выполнено, если $\lambda = 0$. Пусть $\lambda \neq 0$ и пусть

$$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA},\ \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{AB},\quad \lambda\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA_1},\ \lambda\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{A_1B_1}. \tag{1.2}$$

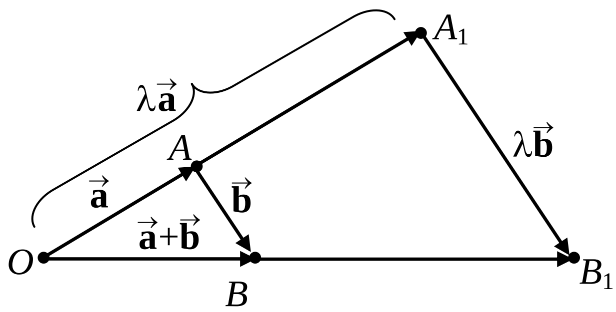


рис. 1.13

(на рисунке 1.13 показан случай $\lambda > 0$, а на рисунке 1.14 – случай $\lambda < 0$).

Репозиторий ВГУ

По правилу треугольника

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{OB},\ \lambda\vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{OB_1}.$$

Нам требуется доказать, что

$$\lambda(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \overrightarrow{OB_1}.$$

Из (1.2) вытекает подобие треугольников OAB и OA_1B_1 по двум сторонам и углу между ними. Поэтому

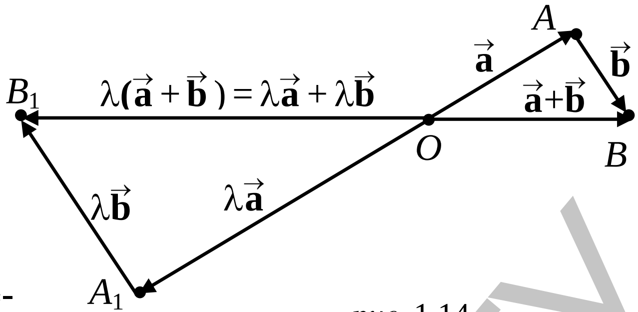


рис. 1.14

$$\overrightarrow{OB} \,||\, \overrightarrow{OB_1} \text{ и } |\overrightarrow{OB_1}| = \lambda|\overrightarrow{OB}|.$$

Отсюда $\overrightarrow{OB_1} = \lambda\overrightarrow{OB} = \lambda(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$. Итак, векторы $\lambda\vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}}$ и $\lambda(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$ задаются одним и тем же направленным отрезком. ■

Упражнение. Докажите самостоятельно свойства 2 – 4, а также покажите, что свойство 1 верно в случае коллинеарных векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$.

Теорема 1.1. (*первый признак коллинеарности векторов*). *Для того чтобы ненулевые векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ *были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число* λ, *что* $\vec{\mathbf{b}} = \lambda\vec{\mathbf{a}}$.

Доказательство. Достаточность вытекает непосредственно из определения произведения вектора на число: если $\vec{\mathbf{a}} = \lambda\vec{\mathbf{b}}$, то $\vec{\mathbf{a}} \,||\, \vec{\mathbf{b}}$.

Необходимость. Пусть $\vec{\mathbf{a}} \,||\, \vec{\mathbf{b}}$.

1 случай: $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}$. Пусть $\lambda = |\vec{\mathbf{b}}|/|\vec{\mathbf{a}}| > 0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{a}} \Rightarrow \lambda\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}, \\ &|\lambda\vec{\mathbf{a}}| = |\lambda||\vec{\mathbf{a}}| = \lambda|\vec{\mathbf{a}}| = \frac{|\vec{\mathbf{b}}|}{|\vec{\mathbf{a}}|}|\vec{\mathbf{a}}| = |\vec{\mathbf{b}}|. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}.$$

2 случай: $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}}$. Пусть $\lambda = -|\vec{\mathbf{b}}|/|\vec{\mathbf{a}}| < 0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{a}} \Rightarrow \lambda\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}, \\ &|\lambda\vec{\mathbf{a}}| = |\lambda||\vec{\mathbf{a}}| = -\lambda|\vec{\mathbf{a}}| = \frac{|\vec{\mathbf{b}}|}{|\vec{\mathbf{a}}|}|\vec{\mathbf{a}}| = |\vec{\mathbf{b}}|. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}.$$

Что и требовалось доказать. ■

В процессе доказательства мы показали, как решить следующую задачу: найти вектор $\vec{\mathbf{b}}$, сонаправленный с данным вектором $\vec{\mathbf{a}}$ и имеющий заданную длину β. Это будет вектор $\vec{\mathbf{b}} = \frac{\beta}{|\vec{\mathbf{a}}|}\vec{\mathbf{a}}$. В частности, единичный

Репозиторий ВГУ

вектор $\vec{\mathbf{e}}\uparrow\uparrow\vec{\mathbf{a}}$ находится так: $\vec{\mathbf{e}}=\frac{1}{|\vec{\mathbf{a}}|}\vec{\mathbf{a}}$. Такой вектор называется *ортом вектора* $\vec{\mathbf{a}}$.

§ 4. *Величина угла между векторами. Ориентация пары векторов на плоскости*

***Определение* 1.13.** Пусть $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ – два ненулевых вектора. Отложим их из одной точки O: $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{OB}$. Тогда *величиной угла между векторами* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется величина угла между лучами OA и OB. Пишем $\alpha=\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})$.

Если речь идет о векторах на плоскости, то можем ввести понятие *ориентированного угла между векторами*. Если кратчайший поворот от луча OA к лучу OB осуществляется против часовой стрелки, то считаем, что $\alpha>0$, а если по часовой – то $\alpha<0$. Таким образом, ориентированный угол между векторами изменяется в пределах $-\pi<\alpha\le\pi$. Если $\alpha>0$, то *пара векторов* $(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})$ называется *правой*, а если $\alpha<0$ – то *левой*.

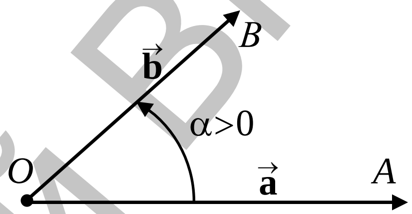


рис. 1.15

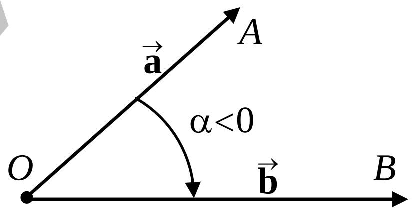


рис. 1.16

На рисунке 1.15 изображена правая пара векторов $(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})$, а на рисунке 1.16 – левая пара.

§ 5. *Проекция вектора на ось*

Пусть l – некоторая прямая в пространстве. Выберем точку $O\in l$ и единичный вектор $\vec{\mathbf{e}}\,||\,l$. Построим направленный отрезок $\overrightarrow{OE}=\vec{\mathbf{e}}$. Прямая l вместе с выбранным на ней отрезком $\overrightarrow{OE}$ называется *осью*. Иногда говорят, что ось – это прямая, на которой задано направление.

***Определение* 1.14.** Пусть $\vec{\mathbf{a}}$ – произвольный вектор, а $\overrightarrow{AB}$ – произвольный направленный отрезок, который представляет $\vec{\mathbf{a}}$. Опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 на прямую l. Пусть $\vec{\mathbf{a}}_1=\overrightarrow{A_1B_1}$. Тогда вектор $\vec{\mathbf{a}}_1$ (рис. 1.17) называется *векторной проекцией* вектора $\vec{\mathbf{a}}$ на ось l. Мы будем его обозначать $\pi_l\vec{\mathbf{a}}$.

Мы имеем $\vec{\mathbf{a}}_1\,||\,\vec{\mathbf{e}}$. Поэтому согласно теореме 1.1 существует такое число p,

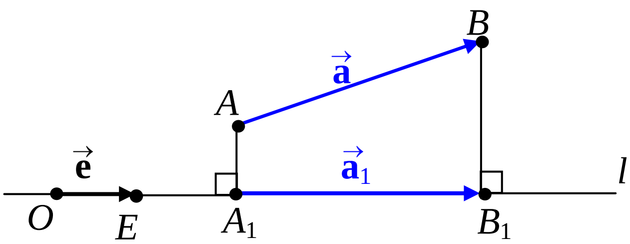


рис. 1.17

Репозиторий ВГУ

что $\vec{\mathbf{a}}_1 = p\vec{\mathbf{e}}$. Это число называется *скалярной проекцией* вектора $\vec{\mathbf{a}}$ на ось l. Поскольку $\vec{\mathbf{e}}$ – это единичный вектор, то p – это длина вектора $\vec{\mathbf{a}}_1$, если $\vec{\mathbf{a}}_1 \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{e}}$, и $p = -|\vec{\mathbf{a}}_1|$, если $\vec{\mathbf{e}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{a}}_1$. Будем обозначать скалярную проекцию так: $\Pi_l \vec{\mathbf{a}}$.

Зная скалярную проекцию вектора, мы можем найти его векторную проекцию:

$$\pi_l \vec{\mathbf{a}} = (\Pi_l \vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{e}}. \tag{1.3}$$

Если $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{e}}$, то, очевидно, $A_1 = B_1$ и $\Pi_l \vec{\mathbf{a}} = 0$.

Необходимо еще доказать, что определения скалярной и векторной проекции корректны, т.е. не зависят от выбора направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, который представляет вектор $\vec{\mathbf{a}}$. Другими словами, если мы отложим вектор $\vec{\mathbf{a}}$ от другой точки, то его скалярная и векторная проекции не изменятся, – и это надо доказать.

Проведём через точки A и B прямые m и n перпендикулярно l (рис. 1.18). Тогда $|p| = |\Pi_l \vec{\mathbf{a}}|$ есть расстояние между m и n. Выберем другой направленный отрезок $\overrightarrow{A'B'}$, представляющий $\vec{\mathbf{a}}$, и проведём через точки A', B' прямые m' и n' перпендикулярно l. Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ эквивалентны, а значит, они совмещаются параллельным переносом. При этом переносе прямая m совместится с m', а прямая n – с n'. Значит, расстояние между m' и n' равно расстоянию между m и n, и оно равно $|p|$. Поэтому $|p|$ не зависит от выбора направленного отрезка. Направление векторной проекции также не изменится при переносе, поэтому и знак p не изменится. Итак, скалярная проекция не зависит от выбора направленного отрезка, представляющего вектор $\vec{\mathbf{a}}$. В силу равенства (1.1) $\pi_l \vec{\mathbf{a}}$ также не зависит от выбора направленного отрезка.

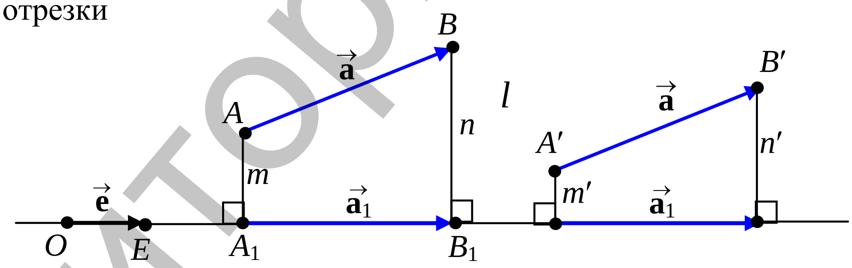


рис. 1.18

***Свойства скалярной проекции вектора на ось*:**

1. $\Pi_l \vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}| \cos\angle(\vec{\mathbf{e}}, \vec{\mathbf{a}})$;

2. $\Pi_l(\lambda\vec{\mathbf{a}}) = \lambda \Pi_l \vec{\mathbf{a}}$;

3. $\Pi_l(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \Pi_l \vec{\mathbf{a}} + \Pi_l \vec{\mathbf{b}}$.

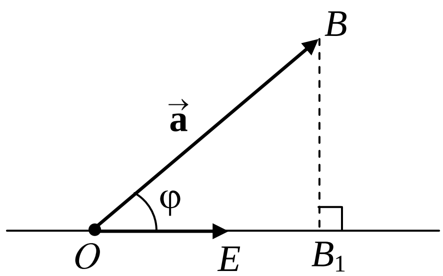


рис. 1.19

Доказательство. **1.** Поскольку определение проекции не зависит от выбора точки A, из которой отложен вектор $\vec{\mathbf{a}}$, мы можем отложить его из точки O.

Репозиторий ВГУ

Обозначим $\varphi = \angle(\vec{\mathbf{e}}, \vec{\mathbf{a}})$.

<u>*1 случай*</u>: $\varphi \le \pi/2$ (рис. 1.19). Тогда из ΔOBB_1 получим, что

$$p = |OB_1| = |OB| \cdot \cos\varphi = |\vec{\mathbf{a}}|\cos\varphi.$$

<u>*2 случай*</u>: $\varphi > \pi/2$ (рис. 1.20). Тогда из ΔOBB_1 получим, что

$$p = -|OB_1| = -|OB| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\vec{\mathbf{a}}|\cos\varphi.$$

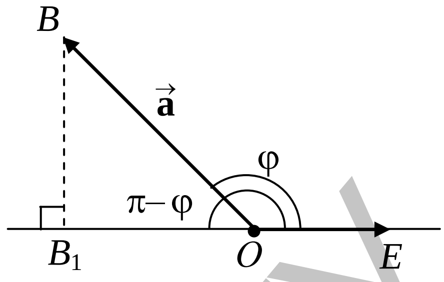


рис. 1.20

2. <u>*1 случай*</u>: $\lambda > 0$. Тогда $\lambda\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{a}}$ и $\angle(\vec{\mathbf{e}}, \lambda\vec{\mathbf{a}}) = \varphi$. Значит,

$$\Pi_l(\lambda\vec{\mathbf{a}}) = |\lambda\vec{\mathbf{a}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{e}},\lambda\vec{\mathbf{a}}) = $$
$$= \lambda|\vec{\mathbf{a}}|\cos\varphi = \lambda\Pi_l\,\vec{\mathbf{a}}.$$

<u>*2 случай*</u>: $\lambda < 0$. Тогда $\lambda\vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{a}}$, $\angle(\vec{\mathbf{e}}, \lambda\vec{\mathbf{a}}) = \pi - \varphi$ (рис. 1.21) и поэтому $\cos\angle(\vec{\mathbf{e}},\lambda\vec{\mathbf{a}}) = -\cos\varphi$. Тогда

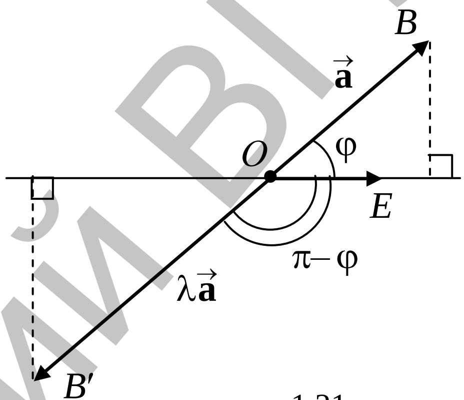


рис. 1.21

$$\Pi_l(\lambda\vec{\mathbf{a}}) = |\lambda\vec{\mathbf{a}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{e}},\lambda\vec{\mathbf{a}}) = -\lambda|\vec{\mathbf{a}}|\,(-\cos\varphi) =$$
$$= \lambda|\vec{\mathbf{a}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{e}},\vec{\mathbf{a}}) = \lambda\Pi_l\vec{\mathbf{a}}.$$

<u>*3 случай*</u>: $\lambda = 0$. Тогда равенство очевидно.

3. На рисунках 1.22 и 1.23 показано доказательство свойства

$$\pi_l(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \pi_l\vec{\mathbf{a}} + \pi_l\vec{\mathbf{b}}.$$

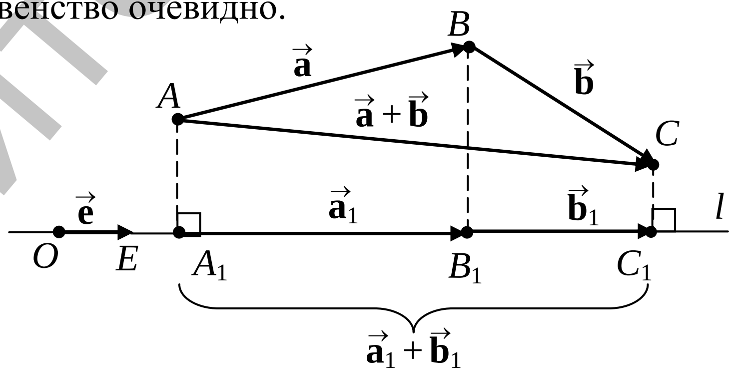


рис. 1.22

Для скалярных проекций равенство вытекает из равенства для векторных проекций. Например, в случае, изображенном на рисунке 1.23,

$$\Pi_l(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = |A_1C_1|,$$

$$\Pi_l\vec{\mathbf{a}} = |A_1B_1|,$$

$$\Pi_l\vec{\mathbf{b}} = -|B_1C_1|,$$

и мы видим, что

$|A_1C_1| = |A_1B_1| + (-|B_1C_1|)$. ■

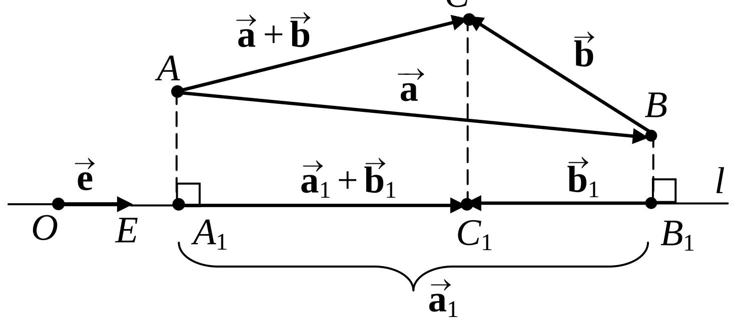


рис. 1.23

Репозиторий ВГУ

§ 6. *Скалярное произведение векторов*

***Определение* 1.15.** *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется *число*

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}). \qquad (1.4)$$

Если один из векторов нулевой, то $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=0$. Число $\vec{\mathbf{a}}^2=\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{\mathbf{a}}$.

Из определения получаем

$$\vec{\mathbf{a}}^2=|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{a}}|\cos 0^{\circ}=|\vec{\mathbf{a}}|^2 \quad\Rightarrow\quad |\vec{\mathbf{a}}|=\sqrt{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}}\,.$$

Также из определения очевидно, что равенство $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=0$ возможно только в следующих случаях: **1.** $|\vec{\mathbf{a}}|=0$, **2.** $|\vec{\mathbf{b}}|=0$, **3.** $\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})=\pi/2$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

***Теорема* 1.2.** **1.** *Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

2. *Для того чтобы ненулевые векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ *были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю* ($\vec{\mathbf{a}}\perp\vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=0$).

Согласно свойству 1 из §5 величина $|\vec{\mathbf{b}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})$ равна скалярной проекции вектора $\vec{\mathbf{b}}$ на ось, направление которой определяется вектором $\vec{\mathbf{a}}$. Обозначим эту величину $\Pi_{\vec{\mathbf{a}}}\vec{\mathbf{b}}$ (рис. 1.24). Тогда

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=|\vec{\mathbf{a}}|\cdot\Pi_{\vec{\mathbf{a}}}\vec{\mathbf{b}}=|\vec{\mathbf{b}}|\cdot\Pi_{\vec{\mathbf{b}}}\vec{\mathbf{a}}\,. \qquad (1.5)$$

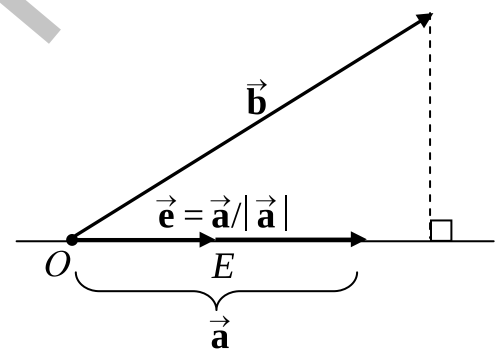


рис. 1.24

***Свойства скалярного произведения*:**

1. $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}}$ (*коммутативность*);

2. $(\lambda\vec{\mathbf{a}})\cdot\vec{\mathbf{b}}=\lambda(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})=\vec{\mathbf{a}}\cdot(\lambda\vec{\mathbf{b}})$;

3. $\left.\begin{aligned}&\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})=\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}},\\ &(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}};\end{aligned}\right\}$ (*линейность по каждому аргументу*)

4. $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}\geq 0$, и $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}=0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{o}}$ (*положительная определённость*).

***Доказательство*. 1.** Вытекает непосредственно из определения.

2. Согласно формуле (1.5) и свойствам скалярной проекции

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})\cdot\vec{\mathbf{b}}=|\vec{\mathbf{b}}|\Pi_{\vec{\mathbf{b}}}(\lambda\vec{\mathbf{a}})=|\vec{\mathbf{b}}|(\lambda\Pi_{\vec{\mathbf{b}}}\vec{\mathbf{a}})=\lambda(|\vec{\mathbf{b}}|\Pi_{\vec{\mathbf{b}}}\vec{\mathbf{a}})=\lambda(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}).$$

Репозиторий ВГУ

3. Согласно свойству 3 из §5 и формуле (1.5) имеем

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\Pi_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|(\Pi_{\vec{a}}\vec{b}+\Pi_{\vec{a}}\vec{c})=|\vec{a}|\Pi_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\Pi_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Вторые равенства в свойствах 2 и 3 доказываются аналогично.

4. Вытекает непосредственно из п. 1 теоремы 1.2. ■

Замечание. Если мы знаем, чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и их длины, то мы можем вычислить угол между ними:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{1.6}$$

Используется также следующее обозначение скалярного произведения: $(\vec{a},\vec{b})$.

§ 7. *Координаты вектора и точки на прямой*

***Определение* 1.16.** Пусть l – некоторая прямая. Рассмотрим множество всех векторов, параллельных l. Пусть вектор $\vec{a}\neq\vec{o}$ – один из них. Назовём его *базисным*. Пусть $\vec{b}\,||\,l$ – другой вектор (рис. 1.25). Тогда $\vec{b}\,||\,\vec{a}$, а значит, согласно теореме 1.1 найдётся такое число x, что $\vec{b}=x\vec{a}$. Число x называется *координатой вектора* $\vec{b}$ относительно базиса $\mathcal{B}=(\vec{a})$. Пишем $\vec{b}(x)_{\mathcal{B}}$.

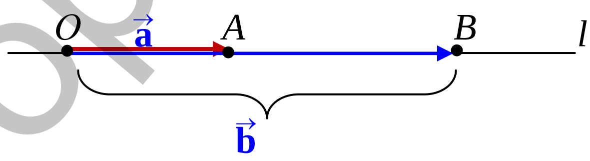


рис. 1.25

Если $\vec{c}=y\vec{a}$, то $\vec{b}+\vec{c}=(x+y)\vec{a}$, а если α – произвольное число, то $\alpha\vec{b}=(\alpha x)\vec{a}$. Таким образом, *при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*.

***Определение* 1.17.** Выберем теперь произвольную точку $O\in l$ и назовём её *началом координат*. Пару $\mathcal{R}=(O,\vec{a})$ назовём *репером*. Пусть B – произвольная точка на прямой, а $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ (рис. 1.22) и $\vec{b}(x)_{\mathcal{B}}$. Тогда x называется *координатой точки* B относительно репера $\mathcal{R}$, а вектор $\vec{b}$ – *радиус-вектором* точки B.

Другими словами, координатой точки называется координата её радиус-вектора.

Точка O делит прямую l на два луча. На одном из них точки имеют координату $x\geq 0$, а на втором – $x\leq 0$. Положительное направление принято изображать справа.

Репозиторий ВГУ

***Определение* 1.18.** Базис $\mathcal{B}$ и репер $\mathcal{R}$ называются *единичными*, если $|\vec{\mathbf{a}}| = 1$.

Очевидно, что в случае единичного репера $|OB| = |\vec{\mathbf{b}}| = |x||\vec{\mathbf{a}}| = |x|$.

Если A – такая точка, что $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA}$, то репером также называют упорядоченную пару точек (O, A).

§ 8. *Аффинная система координат на плоскости*

***Определение* 1.19.** Пусть на плоскости заданы два неколлинеарных вектора $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ и произвольная точка O. Упорядоченную пару $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$ назовём *базисом*, а тройку $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$ – *аффинным репером*. Точку O назовём *началом координат*.

Пусть $\vec{\mathbf{c}}$ – произвольный вектор. Отложим все векторы из точки O:

$$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA},\ \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{OB},\ \vec{\mathbf{c}} = \overrightarrow{OC}$$

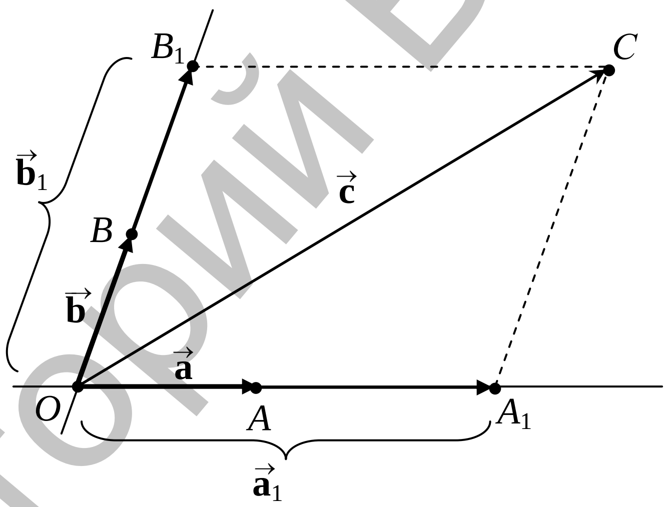


рис. 1.26

(рис. 1.26). Проведём прямые $l_1 = OA$, $l_2 = OB$. Построим параллелограмм, две стороны которого лежат на прямых l_1, l_2, так, чтобы C являлась его вершиной. Пусть A_1 и B_1 – это вершины параллелограмма, которые лежат на прямых l_1 и l_2 соответственно. Пусть $\vec{\mathbf{a}}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{\mathbf{b}}_1 = \overrightarrow{OB_1}$. Тогда по правилу параллелограмма $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}}_1 + \vec{\mathbf{b}}_1$. Поскольку $\vec{\mathbf{a}}_1 || \vec{\mathbf{a}}$, а $\vec{\mathbf{b}}_1 || \vec{\mathbf{b}}$, то существуют такие числа x_1, x_2, что $\vec{\mathbf{a}}_1 = x_1\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}_1 = x_2\vec{\mathbf{b}}$. В итоге получаем

$$\vec{\mathbf{c}} = x_1\vec{\mathbf{a}} + x_2\vec{\mathbf{b}}. \qquad (1.7)$$

***Определение* 1.20.** Равенство (1.7) называется *разложением вектора* $\vec{\mathbf{c}}$ *по базису* $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$. Числа x_1, x_2 называются *координатами вектора* $\vec{\mathbf{c}}$ *в данном базисе*. Они же называются *координатами точки* C *относительно репера* $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$. Пишем $\vec{\mathbf{c}}(x_1, x_2)_{\mathcal{B}}$, $C(x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$. Если заранее известно, о каком базисе или репере идет речь, то их обозначение к координатам не добавляют. Аффинным репером на плоскости также называют тройку точек $\{O, A, B\}$.

***Определение* 1.21.** Прямые l_1, l_2 вместе с выбранными на них направленными отрезками $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ называются *координатными осями*. Совокупность координатных осей и начала координат называется *аффинной*

Репозиторий ВГУ

системой координат (СК) на плоскости. Иногда *репером* называют также упорядоченную тройку точек (O, A, B), не лежащих на одной прямой.

***Определение* 1.22.** Вектор $\vec{\mathbf{c}}$ называется *радиус-вектором* точки C в данной СК или в данном репере.

Согласно определению 1.18 координаты точки определяются координатами её радиус-вектора.

Если мы выберем другое начало координат O_1 (рис. 1.27), то та же самая точка C будет задаваться другим радиус-вектором $\vec{\mathbf{c}}_1 = \overrightarrow{O_1C}$. Поэтому ее координаты изменятся. Координаты же вектора $\vec{\mathbf{c}}$ не зависят от выбора начала координат.

Действительно, пусть мы имеем ещё одно разложение вектора $\vec{\mathbf{c}}$ по базису:

$$\vec{\mathbf{c}} = y_1\vec{\mathbf{a}} + y_2\vec{\mathbf{b}}, \qquad (1.7')$$

где, например, $x_2 \neq y_2$. Вычтем (1.7′) из (1.7):

$$\vec{\mathbf{o}} = (x_1 - y_1)\vec{\mathbf{a}} + (x_2 - y_2)\vec{\mathbf{b}}.$$

Поскольку $x_2 - y_2 \neq 0$, то из этого равенства можем выразить

$$\vec{\mathbf{b}} = \frac{x_1 - y_1}{y_2 - x_2}\vec{\mathbf{a}}.$$

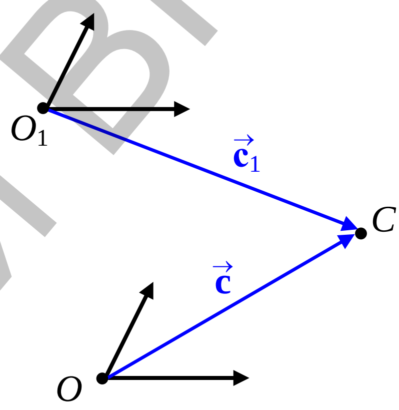


рис. 1.27

Мы получили, что $\vec{\mathbf{b}} \,||\, \vec{\mathbf{a}}$, но мы с самого начала предполагали, что векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ неколлинеарны. Противоречие. Значит, $x_2 = y_2$. Аналогично доказывается, что $x_1 = y_1$.

Пусть в аффинной СК известны координаты двух векторов: $\vec{\mathbf{c}}(x_1, x_2)$, $\vec{\mathbf{d}}(y_1, y_2)$. Тогда

$$\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{d}} = (x_1\vec{\mathbf{a}} + x_2\vec{\mathbf{b}}) + (y_1\vec{\mathbf{a}} + y_2\vec{\mathbf{b}}) = (x_1 + y_1)\vec{\mathbf{a}} + (x_2 + y_2)\vec{\mathbf{b}}.$$

$$\lambda\vec{\mathbf{c}} = \lambda(x_1\vec{\mathbf{a}} + x_2\vec{\mathbf{b}}) = (\lambda x_1)\vec{\mathbf{a}} + (\lambda x_2)\vec{\mathbf{b}}.$$

Значит, вектор $\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{d}}$ имеет координаты $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, а вектор $\lambda\vec{\mathbf{c}}$ имеет координаты $(\lambda x_1, \lambda x_2)$. Таким образом, *при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*. Также легко убедиться, что при вычитании векторов их координаты вычитаются.

Допустим, нам известны координаты двух точек $P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$, а $\vec{\mathbf{d}} = \overrightarrow{PQ}$. Выясним, как найти координаты этого вектора.

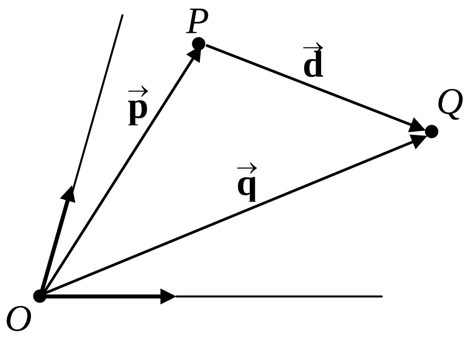


рис. 1.28

Репозиторий ВГУ

Пусть $\vec{\mathbf{p}} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{\mathbf{q}} = \overrightarrow{OQ}$ (рис. 1.28). Согласно определению координаты точки совпадают с координатами её радиус-вектора. Значит, $\vec{\mathbf{p}}(x_1, x_2)$, $\vec{\mathbf{q}}(y_1, \quad y_2)$. По правилу построения разности векторов $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{p}}$. Поэтому $\vec{\mathbf{d}}(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$.

Таким образом, *для того чтобы найти координаты вектора, надо от координат его конца вычесть координаты начала*.

***Теорема* 1.3** (*второй признак коллинеарности векторов*). *Ненулевые векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны*:

$$\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2) \| \vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \; (\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{o}}).$$

Доказательство. Согласно первому признаку коллинеарности векторов $\vec{\mathbf{a}} \| \vec{\mathbf{b}}$ тогда и только тогда, когда существует такое λ, что $\vec{\mathbf{a}} = \lambda \vec{\mathbf{b}}$. В координатах это равенство записывается так: $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, а это равносильно $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \lambda$. ■

§ 9. *Декартова система координат на плоскости*

***Определение* 1.23.** Базис $\mathcal{B}$ и репер $\mathcal{R}$ называются *ортонормированными*, если базисные векторы являются единичными и взаимно перпендикулярными ($|\vec{\mathbf{a}}| = |\vec{\mathbf{b}}| = 1$ и $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$). В этом случае СК тоже называется *ортонормированной*. Если к тому же пара $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$ является правой, то СК называется *декартовой*.

Тогда приняты следующие обозначения: координаты – (x, y), координатные оси – Ox, Oy, базисные векторы – $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, направленные отрезки на осях – $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$. Векторы $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ называются *базисными ортами*.

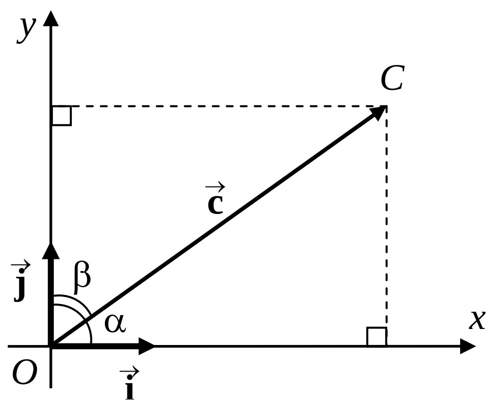


рис. 1.29

Пусть произвольный вектор $\vec{\mathbf{c}}$ в декартовой СК имеет координаты (x, y), т.е. $\vec{\mathbf{c}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}$. Домножим это равенство скалярно на вектор $\vec{\mathbf{i}}$:

$$\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = x(\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}}) + y(\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{i}}) = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x.$$

А с другой стороны,

$$\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = |\vec{\mathbf{c}}||\vec{\mathbf{i}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{i}}) = |\vec{\mathbf{c}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{c}}) = \Pi_{Ox}\vec{\mathbf{c}}.$$

Репозиторий ВГУ

Значит, $x = \Pi_{Ox}\vec{\mathbf{c}}$. Аналогично получаем $y = \Pi_{Oy}\vec{\mathbf{c}}$. Таким образом, *в декартовой СК координаты вектора совпадают с его скалярными проекциями на координатные оси*.

Пусть $\alpha = \angle(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{c}})$, $\beta = \angle(\vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{c}})$ (рис. 1.29). Тогда величины $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{\mathbf{c}}$. Мы выяснили, что, зная длину вектора и углы α, β, мы можем вычислить его координаты:

$$\begin{cases} x = |\vec{\mathbf{c}}|\cos\alpha, \\ y = |\vec{\mathbf{c}}|\cos\beta. \end{cases}$$

Поскольку $\beta = 90^{\circ} - \alpha$, то $\cos\beta = \cos(90^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha$. Окончательно получаем формулы

$$\begin{cases} x = |\vec{\mathbf{c}}|\cos\alpha, \\ y = |\vec{\mathbf{c}}|\sin\alpha. \end{cases} \tag{1.8}$$

§ 10. *Деление отрезка в данном отношении*

***Определение* 1.24.** Пусть точка C лежит на отрезке AB (рис. 1.30). Говорим, что C *делит отрезок* AB *в отношении* $\lambda_1{:}\lambda_2$, если

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

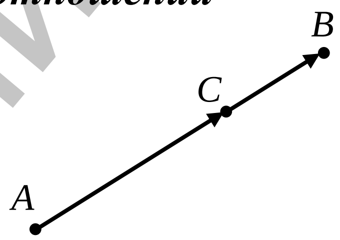


рис. 1.30

что равносильно $\lambda_2|AC| = \lambda_1|CB|$. Учитывая, что $\vec{AC} \uparrow\uparrow \vec{CB}$, последнее равенство можно переписать так:

$$\lambda_2\vec{AC} = \lambda_1\vec{CB}. \tag{1.9}$$

Теперь мы введём обобщение нашего определения и будем говорить, что точка C *делит отрезок* AB *в отношении* $\lambda_1{:}\lambda_2$, если выполнено (1.9). Такое определение предполагает, что C может лежать на прямой AB за пределами отрезка AB, если $\lambda_1{:}\lambda_2$ отрицательно (рис. 1.31). Число $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ ($\vec{AC} = \lambda\vec{CB}$) называется *простым отношением точек* A, B, C и обозначается (AB, C) или (ABC).

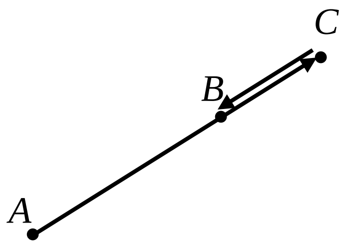


рис. 1.31

Пусть нам известны координаты концов отрезка: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, и нам требуется найти координаты точки $C(x, y)$, которая делит этот отрезок в отношении $\lambda_1{:}\lambda_2$.

Имеем $\vec{AC}(x - x_1, y - y_1)$, $\vec{CB}(x_2 - x, y_2 - y)$. Тогда из (1.9) следует

$$\lambda_2(x - x_1) = \lambda_1(x_2 - x), \quad \lambda_2(y - y_1) = \lambda_1(y_2 - y).$$

Репозиторий ВГУ

Упражнение. Самостоятельно выведите из этих равенств, что

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \; y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{1.10}$$

Если использовать одно число $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{1.10$'$}$$

В частности, если C делит отрезок AB пополам, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

т.е. координаты середины отрезка есть среднее арифметическое от координат его концов.

Заметим, что всё сказанное в этом параграфе верно и в пространстве, с той лишь разницей, что в формулах (1.10) и (1.10′) добавится координата z.

§ 11. *Формула для вычисления скалярного произведения в декартовых координатах и ее следствия*

Пусть в пространстве задана декартова СК, $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ – базисные орты. Пусть $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2)$. В соответствии со свойствами скалярного произведения мы можем при скалярном умножении векторов раскрывать скобки, как при умножении чисел. Поэтому

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = (a_1 \vec{\mathbf{i}} + a_2 \vec{\mathbf{j}}) \cdot (b_1 \vec{\mathbf{i}} + b_2 \vec{\mathbf{j}}) = a_1 b_1 \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}} + a_1 b_2 \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{j}} + a_2 b_1 \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{i}} + a_2 b_2 \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{j}}.$$

Нам известно, что векторы $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ – единичные и взаимно ортогональные, поэтому $\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = 1$, $\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = 0$. В итоге получаем

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \tag{1.11}$$

Из этой формулы следует:

$$\vec{\mathbf{a}}^2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = a_1^2 + a_2^2. \tag{1.12}$$

А значит, длина вектора вычисляется по формуле:

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \tag{1.13}$$

Далее, как следствие, получаем формулу для вычисления косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = \frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}. \tag{1.14}$$

Если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, а значит, длина вектора вычисляется по формуле

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.15}$$

Репозиторий ВГУ

Эта же величина называется *расстоянием между точками* A и B. Обозначим эту величину $\rho(A, B)$. Её можно рассматривать как функцию, которая сопоставляет двум точкам число, называемое расстоянием между ними. Отметим, что эта функция обладает следующими свойствами:

1. $\rho(A,B)=\rho(B,A)$;

2. $\rho(A,B)+\rho(B,C)\geq\rho(A,C)$ (неравенство треугольника);

3. $\rho(A,B)\geq 0$, и $\rho(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$.

Пусть нам известны координаты двух векторов, которые задаются направленными отрезками, лежащими на сторонах параллелограмма и исходящими из одной точки: $\vec{\mathbf{a}}(a_1,\ a_2)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1,\ b_2)$. Пусть α – угол между ними (рис. 1.32).

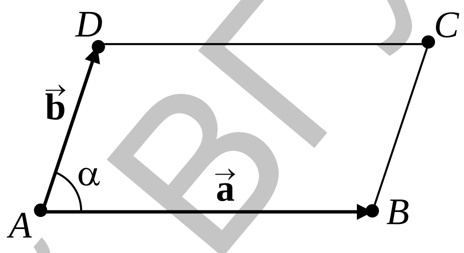


рис. 1.32

Тогда мы можем найти площадь параллелограмма:

$$S=|AB|\cdot|AD|\cdot\sin\alpha.$$

Квадрат площади:

$$S^2=|\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2\cdot\sin^2\alpha=|\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2\cdot(1-\cos^2\alpha)=|\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2-(|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\alpha)^2=$$

$$=|\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2-(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})^2;$$

в координатах та же величина:

$$S^2=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2.$$

Упражнение. Самостоятельно раскройте скобки, приведите подобные в последней формуле и убедитесь, что

$$S^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2.$$

Выражение в скобках представляет собой определитель, составленный из координат векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ (см. приложение 2). Тем самым, мы доказали следующую теорему.

***Теорема* 1.4.** *Пусть параллелограмм построен на направленных отрезках, представляющих векторы* $\vec{\mathbf{a}}(a_1,\ a_2)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1,\ b_2)$, *исходящие из одной точки. Тогда его площадь вычисляется по формуле*:

$$S=\operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (1.16)$$

Здесь mod означает модуль числа. Если на направленных отрезках, представляющих векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, построен треугольник, то для нахождения его площади к формуле (1.16) надо добавить множитель 1/2.

Предположим теперь, что нам известны координаты вершин параллелограмма: $A(x_o, y_o)$, $B(x_1, y_1)$, $D(x_2, x_2)$ (рис. 1.31). Тогда

$$\vec{\mathbf{a}}(x_1-x_o, y_1-y_o),\ \vec{\mathbf{b}}(x_2-x_o, y_2-y_o).$$

Репозиторий ВГУ

Подставим эти координаты в формулу (1.16):

$$S = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 - x_o & y_1 - y_o \\ x_2 - x_o & y_2 - y_o \end{vmatrix} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_o & y_o & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Докажем последнее равенство. Вычтем в последнем определителе из второй и третьей строк первую строку (это действие не меняет значение определителя) и получившийся определитель раскроем по первой строке:

$$\begin{vmatrix} x_o & y_o & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_o & y_o & 1 \\ x_1 - x_o & y_1 - y_o & 0 \\ x_2 - x_o & y_2 - y_o & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_o & y_1 - y_o \\ x_2 - x_o & y_2 - y_o \end{vmatrix}.$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

***Теорема* 1.5.** *Пусть даны координаты трёх вершин параллелограмма* $ABCD$: $A(x_o, y_o)$, $B(x_1, y_1)$, $D(x_2, x_2)$. *Тогда его площадь вычисляется по формуле*:

$$S = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_o & y_o & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1.17)$$

Следствие. *Пусть даны координаты вершин треугольника*: $A(x_o, y_o)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, x_2)$. *Тогда его площадь вычисляется по формуле*:

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_o & y_o & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1.18)$$

§ 12. *Полярная система координат на плоскости*

***Определение* 1.25.** Выберем на плоскости произвольные точку O, которую назовём *полюсом*, и луч OP, который назовём *полярной осью*. Пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим $r = OM$, а φ – ориентированный угол между лучами OP и OM (рис. 1.33). Тогда пара (r, φ) называется *полярными координатами точки* M. Совокупность точки O и оси OP называется *полярной системой координат на плоскости*.

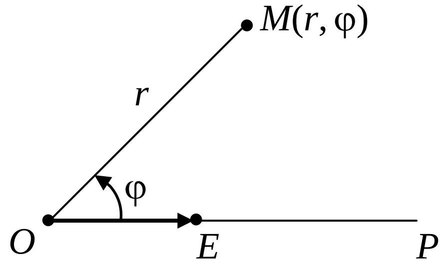


рис. 1.33

Если декартовы координаты могут принимать любое действительное значение, то для полярных есть ограничения. Очевидно, что $0 \le r < +\infty$, а для угла φ обычно договариваются, что $0 \le \varphi < 2\pi$ либо что $-\pi < \varphi \le \pi$. При этом, если $r = 0$, то φ считается неопределённым.

Репозиторий ВГУ

Найдём связь между декартовыми и полярными координатами точки M. Выберем декартову СК так, чтобы точка O была ее началом, а положительное направление оси Ox совпадало с направлением оси OP. Пусть M_1 и M_2 – проекции точки M на координатные оси Ox и Oy соответственно (рис. 1.34). Тогда из ΔOMM_1 и ΔOMM_2, с одной стороны, получаем формулы перехода от полярных координат к декартовым

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{1.19}$$

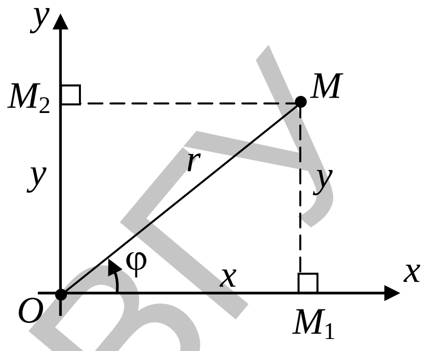


рис. 1.34

а с другой – формулы перехода от декартовых координат к полярным.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \tag{1.19′}$$

Подчеркнём, что знание синуса, косинуса или тангенса в отдельности не позволяет однозначно определить угол φ: два различных угла могут иметь одинаковый синус или одинаковый косинус. Поэтому угол φ следует находить сразу из двух равенств:

$$\cos\varphi = x/r,\ \ \sin\varphi = y/r$$

либо так: $\varphi = \arccos\dfrac{x}{r}$, если $y \geq 0$; $\varphi = -\arccos\dfrac{x}{r}$, если $y < 0$ (в предположении, что $-\pi < \varphi \leq \pi$). Использование арктангенса неудобно: надо оговаривать ещё случай $x = 0$, и поэтому приходится писать 4 равенства.

§ 13. *Преобразования декартовой системы координат*

Пусть на плоскости заданы две декартовы системы координат Oxy и $O'x'y'$, у которых направления координатных осей совпадают, но начальные точки O и O' разные. Говорим, что *вторая СК получена из первой переносом начала координат в точку* O' (рис. 1.35).

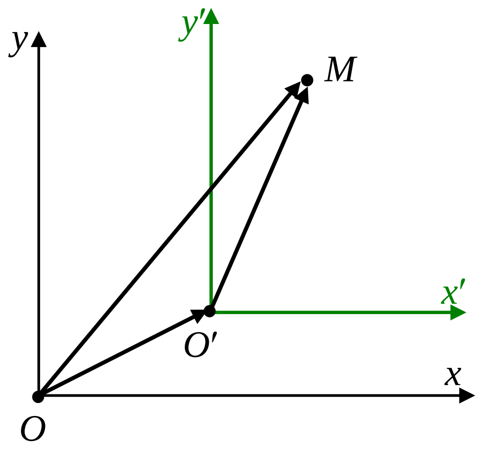


рис. 1.35

Будем также систему координат Oxy называть старой, а $O'x'y'$ – новой. Нам надо выяснить, как связаны координаты одной и той же точки в старой и новой СК.

Репозиторий ВГУ

Допустим, что нам известны координаты нового начала координат относительно старой СК: $O'(a,b)$. Пусть M – произвольная точка на плоскости, (x,y) – ее координаты относительно старой СК, (x',y') – относительно новой СК. По определению координаты точки совпадают с координатами её радиус-вектора. Поэтому

$$\overrightarrow{OO'}(a,b),\ \overrightarrow{OM}(x,y),\ \overrightarrow{O'M}(x',y').$$

По правилу треугольника сложения векторов

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}.$$

Отсюда получаем формулы перехода от старых координат к новым, и обратно:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases} \tag{1.20'}$$

Заметим, что все наши рассуждения справедливы и в случае переноса начала произвольной аффинной СК.

Пусть теперь на плоскости заданы две декартовы СК с общим началом: Oxy и $Ox'y'$. Пусть α – ориентированный угол между положительными направлениями осей Ox и Ox' (рис. 1.36). Тогда говорим, что *вторая СК получена из первой поворотом на угол* α. Будем систему координат Oxy называть старой, а $Ox'y'$ – новой.

Пусть M – произвольная точка на плоскости, (x, y) – её координаты относительно старой СК, (x', y') – относительно новой СК. Найдем связь между этими координатами. Пусть φ – ориентированный угол между положительным направлением оси Ox и лучом OM, а ψ – между Ox' и OM. Тогда $\varphi=\psi+\alpha$.

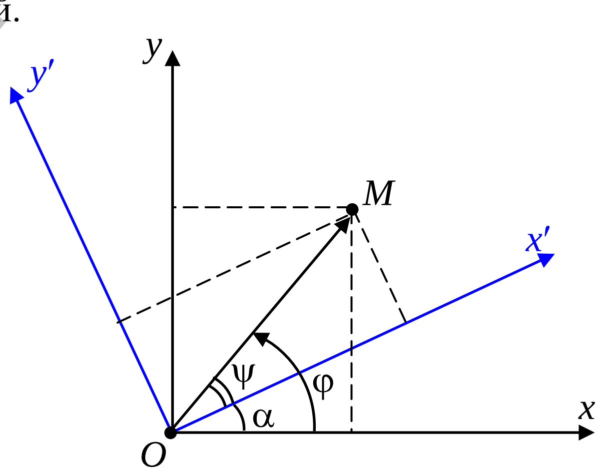


рис. 1.36

Обозначим $r=|OM|$. Тогда

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos\psi, \\ y' = r\sin\psi. \end{cases} \tag{1.21}$$

Подставим $\varphi=\psi+\alpha$ в (1.19):

$$\begin{cases} x = r\cos(\psi+\alpha) = r\cos\psi\cdot\cos\alpha - r\sin\psi\cdot\sin\alpha = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y = r\sin(\psi+\alpha) = r\cos\psi\cdot\sin\alpha + r\sin\psi\cdot\cos\alpha = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

Итак, старые координаты выражаются через новые по формулам

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha. \end{cases} \qquad (1.22)$$

Аналогично, подставляя $\psi = \varphi + \alpha$ в (1.21), получаем формулы, которые выражают новые координаты через старые:

$$\begin{cases} x' = \quad x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha, \\ y' = -x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha. \end{cases} \qquad (1.22')$$

Важно не путать поворот СК с поворотом плоскости. Пусть точка $M'(x', y')$ получается из точки $M(x, y)$ поворотом вокруг начала координат на угол α (рис. 1.37). Для того чтобы найти, как выражаются (x', y') через (x, y), мы представим ситуацию так: точка M остаётся на месте, а СК поворачивается в обратном направлении, т.е. на угол $-\alpha$. Подставим $-\alpha$ в (1.22′) и получим формулы, которые будут нам очень полезны в главе 8:

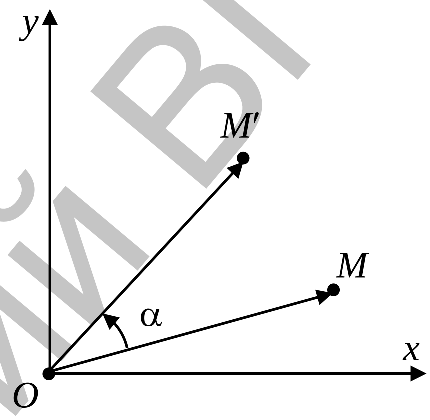


рис. 1.37

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha, \\ y' = y\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha. \end{cases} \qquad (1.23)$$

Пусть теперь на плоскости даны две совершенно произвольные декартовы СК Oxy и $O'x'y'$ (рис. 1.38). Тогда вторую СК можно получить из первой в результате двух преобразований: в первую очередь, мы совершим перенос начала координат в точку O' (получим промежуточную СК $O'x''y''$), а затем совершим поворот координатных осей. Формулы первого преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x = x'' + a, \\ y = y'' + b. \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = x - a, \\ y'' = y - b. \end{cases}$$

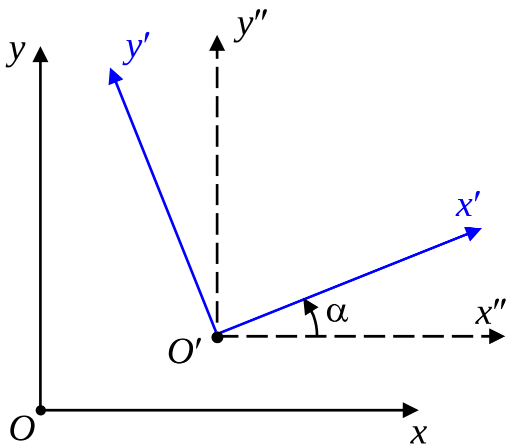


рис. 1.38

Формулы второго преобразования:

$$\begin{cases} x' = \quad x''\cdot\cos\alpha + y''\cdot\sin\alpha, \\ y' = -x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha. \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y'' = y'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

Подставляя x'' и y'' из второй системы в третью, получаем

$$\begin{cases} x' = \ (x-a)\cdot\cos\alpha + (y-b)\cdot\sin\alpha, \\ y' = -(x-a)\cdot\sin\alpha + (y-b)\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Упражнение. Самостоятельно выпишите формулы, по которым старые координаты (x, y) выражаются через новые (x', y').

§ 14. *Примеры решения задач*

Задача 1. *ABCD – параллелограмм, O – его центр, M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Векторы* $\vec{\mathbf{e}}_1 = \overrightarrow{OA}$ *и* $\vec{\mathbf{e}}_2 = \overrightarrow{OB}$ *выбраны в качестве базисных* (*рис. 1.39*). *Найти координаты вектора* $\overrightarrow{PB}$ *в базисе* $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2)$.

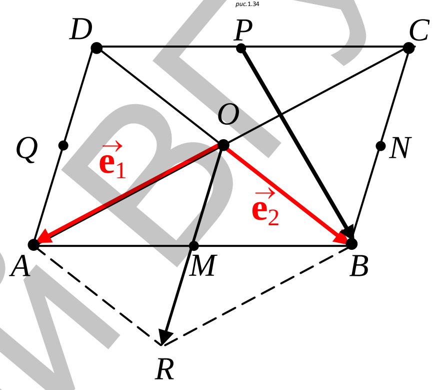


рис. 1.39

Решение. По правилу треугольника

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}.$$

Очевидно, что $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$, а по правилу параллелограмма сложения векторов

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2) + \vec{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{e}}_1 + \frac{3}{2}\vec{\mathbf{e}}_2.$$

Значит, $\overrightarrow{PB}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Ответ: $\overrightarrow{PB}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Задача 2. *Даны координаты векторов* $\vec{\mathbf{a}}(17, 0)$ *и* $\vec{\mathbf{b}}(-1, 1)$ *в ортонормированном базисе. Найти такое* λ, *при котором вектор* $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}}$ *имеет абсолютную величину* $|\vec{\mathbf{c}}| = 25$. *Найти единичный вектор, коллинеарный* $\vec{\mathbf{c}}$.

Решение. Вектор $\lambda\vec{\mathbf{b}}$ имеет координаты $(-\lambda, \lambda)$. Поэтому вектор $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}}$ имеет координаты $(17-\lambda, 0+\lambda)$. Находим его длину и приравниваем её к 25:

$$\sqrt{(17-\lambda)^2 + \lambda^2} = 25.$$

Получаем квадратное уравнение относительно неизвестного λ:

$$(17-\lambda)^2 + \lambda^2 = 625,$$

$$2\lambda^2 - 34\lambda + 289 = 625 \iff 2\lambda^2 - 34\lambda - 336 = 0,$$

$$\lambda^2 - 17\lambda - 168 = 0.$$

Решая его, находим $\lambda_1 = -7$; $\lambda_2 = 24$. Тем самым, задача имеет два решения.

Репозиторий ВГУ

Находим координаты двух векторов: $\vec{\mathbf{c}}_1(24,7)$ и $\vec{\mathbf{c}}_2(-7,24)$. Для того чтобы получить единичный вектор, коллинеарный $\vec{\mathbf{c}}$, мы делим координаты вектора $\vec{\mathbf{c}}$ на длину этого вектора, т.е. на 25:

$$\vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{24}{25},\frac{7}{25}\right),\ \vec{\mathbf{e}}_2\left(-\frac{7}{25},\frac{24}{25}\right).$$

Ответ: $\lambda_1=-7,\ \vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{24}{25},\frac{7}{25}\right),\ \lambda_2=24,\ \vec{\mathbf{e}}_2\left(-\frac{7}{25},\frac{24}{25}\right).$

***Задача* 3.** *Пусть ABCD – произвольный четырёхугольник, E, F – середины диагоналей AD и BC соответственно* (*рис. 1.40*). *Докажите, что*

$$\vec{EF}=\frac{1}{2}(\vec{AB}-\vec{DC}).$$

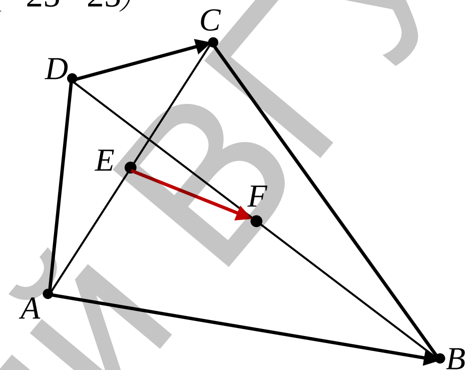


рис. 1.40

Решение. Согласно правилу сложения векторов, с одной стороны,

$$\vec{EF}=\vec{EC}+\vec{CD}+\vec{DF}$$

(для того чтобы попасть из E в F, мы можем пройти по ломаной $ECDF$). Аналогично, с другой стороны,

$$\vec{EF}=\vec{EA}+\vec{AB}+\vec{BF}.$$

Сложим два последних равенства и сгруппируем слагаемые так:

$$2\vec{EF}=(\vec{EC}+\vec{EA})+(\vec{CD}+\vec{AB})+(\vec{DF}+\vec{BF}).$$

Векторы $\vec{EC}$ и $\vec{EA}$ противоположные, и векторы $\vec{DF}$ и $\vec{BF}$ тоже противоположные. Значит, первая и третья скобки равны нулевому вектору:

$$2\vec{EF}=\vec{\mathbf{o}}+\vec{CD}+\vec{AB}+\vec{\mathbf{o}}=\vec{AB}-\vec{DC},$$

потому что $\vec{CD}=-\vec{DC}$. Остаётся только разделить последнее равенство на 2.

***Задача* 4.** *Известны координаты трёх вершин параллелограмма*: $A(-5,1)$, $B(1,3)$, $D(-4,5)$ (*рис. 1.41*).

а) *найти координаты четвёртой вершины* C;

б) *вычислить площадь параллелограмма*;

в) *найти его высоту, проведённую из вершины* D *к стороне* AB;

г) *найти координаты точки* O *пересечения диагоналей.*

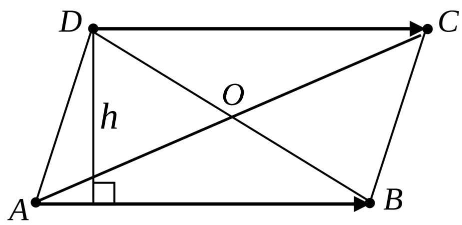


рис. 1.41

Решение. а) Найдём координаты вектора $\vec{AB}$. Для этого от координат точки B мы отнимаем координаты точки A:

$$\vec{AB}(1-(-5),3-1)\ \Leftrightarrow\ \vec{AB}(6,2).$$

Но $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, и поэтому $\overrightarrow{DC}(6, 2)$. Для того чтобы найти координаты точки C, мы к координатам точки D прибавляем координаты вектора $\overrightarrow{DC}$: $C(-4+6, 5+2)$; $C(2, 7)$.

б) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AD}$. Для этого из координат точки D вычитаем координаты точки A:

$$\overrightarrow{AD}(-4-(-5), 5-1) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AD}(1, 4).$$

Применяем формулу (1.16):

$$S_{ABCD} = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = |6\cdot 4 - 2\cdot 1| = 22.$$

в) Из школьной программы мы знаем формулу $S_{ABCD} = |AB|\cdot h$. Отсюда $h = \dfrac{S_{ABCD}}{|AB|}$. Находим длину стороны AB: $|AB| = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Тогда $h = \dfrac{22}{2\sqrt{10}} = \dfrac{11}{\sqrt{10}} = \dfrac{11\sqrt{10}}{10}$.

г) Координаты точки O вычисляем как среднее арифметическое от координат любых двух противоположных вершин: например, B и D.

$$O\left(\frac{1-4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; O(-1{,}5; 4).$$

Ответ: $C(2, 7)$; $S_{ABCD} = 22$; $h = \dfrac{11\sqrt{10}}{10}$; $O(-1{,}5; 4)$.

***Задача* 5.** *Вершины четырёхугольника находятся в точках* $A(1, 2)$, $B(7, -6)$, $C(11, -3)$, $D(8, 1)$. *Показать, что ABCD – трапеция. Найти длины оснований трапеции, ее площадь и* $\cos\angle DAB$.

Решение. Находим координаты векторов, которые определяются сторонами четырёхугольника. Для этого мы от координат конца вектора отнимаем координаты начала:

$$\overrightarrow{AB}(7-1, -6-2),\ \overrightarrow{BC}(11-7, -3-(-6)),$$

$$\overrightarrow{CD}(8-11, 1-(-3)),\ \overrightarrow{AD}(8-1, 1-2).$$

Получаем

$$\overrightarrow{AB}(6, -8),\ \overrightarrow{BC}(4, 3),\ \overrightarrow{CD}(-3, 4),\ \overrightarrow{AD}(7, -1).$$

Проверяем векторы, определяемые противоположными сторонами четырёхугольника, на коллинеарность:

$\dfrac{6}{-3} = \dfrac{-8}{4}$ – верно, значит $\overrightarrow{AB}$ коллинеарен $\overrightarrow{CD}$.

$\dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{-1}$ – неверно, значит $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарен $\overrightarrow{AD}$.

Репозиторий ВГУ

Таким образом, в четырёхугольнике две противоположные стороны коллинеарны, а две – нет. Значит, это трапеция, и основаниями являются AB и CD (рис. 1.42). Находим длины сторон:

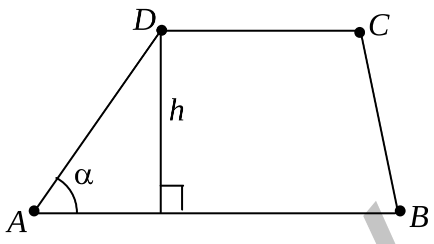


рис. 1.42

$$|\vec{AB}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

и аналогично вычисляем

$$|\vec{BC}| = 5;\ |\vec{CD}| = 5;\ |\vec{AD}| = 5\sqrt{2}.$$

Обозначим $\alpha = \angle BAD$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AD}|} = \frac{6\cdot 7 + (-8)\cdot(-1)}{10\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{42+8}{50\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

следовательно, $\angle BAD = 45^{\circ}$. Не всегда может получиться табличный угол, поэтому далее действуем так: зная $\cos\alpha$, находим

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда $h = |\vec{AD}| \cdot \sin\alpha = 5$. Зная высоту и длины оснований, находим площадь:

$$S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)\cdot h = \frac{1}{2}(10+5)\cdot 5 = \frac{75}{2}.$$

Ответ: $|\vec{AB}| = 10$, $|\vec{BC}| = 5$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $S_{ABCD} = \dfrac{75}{2}$.

***Задача* 6.** *Даны координаты вершин треугольника*: $A(-1, 3)$, $B(11, 0)$, $C(9, 9)$. *Вычислить площадь треугольника и его высоту, проведённую к стороне* AB (*рис. 1.43*).

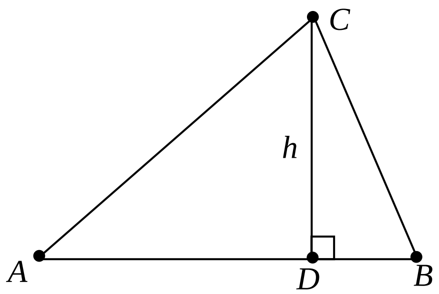


рис. 1.43

Решение. Находим координаты векторов $\vec{AB}(12,-3)$, $\vec{AC}(10, 6)$. Тогда длина основания и площадь треугольника:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{12^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{4^2 + 1^2} = 3\sqrt{17};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|12\cdot 6 - 10\cdot(-3)| =$$

$$= \frac{1}{2}|72+30| = \frac{1}{2}\cdot 102 = 51.$$

Репозиторий ВГУ

Из формулы площади треугольника $S = \frac{1}{2}|AB| \cdot h$ находим

$$h = \frac{2S_{ABC}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{102}{3\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}.$$

Ответ: $S_{ABC} = 51$, $h = 2\sqrt{17}$.

Задача 7. *Дано* $|\vec{\mathbf{m}}| = 10$, $|\vec{\mathbf{n}}| = 3$, $\alpha = \angle(\vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{n}}) = 30^\circ$. *На векторах* $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{m}} - 3\vec{\mathbf{n}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{m}} + 5\vec{\mathbf{n}}$, *отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти длину медианы треугольника, исходящей из этой же точки.*

Решение. Если $\vec{\mathbf{c}}$ – вектор, задающий медиану, то

$$\vec{\mathbf{c}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{m}} - 3\vec{\mathbf{n}} + \vec{\mathbf{m}} + 5\vec{\mathbf{n}}) = \vec{\mathbf{m}} + \vec{\mathbf{n}}.$$

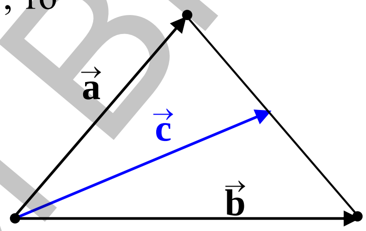


рис. 1.44

Нам требуется найти длину этого вектора (рис. 1.44).

Самое первое следствие из определения скалярного произведения: скалярный квадрат вектора $\vec{\mathbf{c}}^2 = \vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{c}}$ равен квадрату его длины $|\vec{\mathbf{c}}|^2$. Имеем

$$|\vec{\mathbf{c}}|^2 = \vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{c}} = (\vec{\mathbf{m}} + \vec{\mathbf{n}})^2 = \vec{\mathbf{m}}^2 + 2\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{n}} + \vec{\mathbf{n}}^2 = |\vec{\mathbf{m}}|^2 + 2|\vec{\mathbf{m}}| \cdot |\vec{\mathbf{n}}| \cdot \cos\alpha + |\vec{\mathbf{n}}|^2 =$$

$$= 100 + 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 9 = 109 + 30\sqrt{3}.$$

Значит, $|\vec{\mathbf{c}}| = \sqrt{109 + 30\sqrt{3}}$.

Ответ: длина медианы равна $\sqrt{109 + 30\sqrt{3}}$.

Задача 8. *Даны координаты вершин треугольника*: $A(1, 6)$, $B(5, -2)$, $C(9, 8)$. *Найти координаты точки пересечения медиан* (*рис. 1.45*).

Решение. <u>1 способ</u>. Пусть AM – медиана. Тогда M – середина отрезка CB. Находим её координаты: $M\left(\frac{5+9}{2}, \frac{8-2}{2}\right)$, $M(7, 3)$.

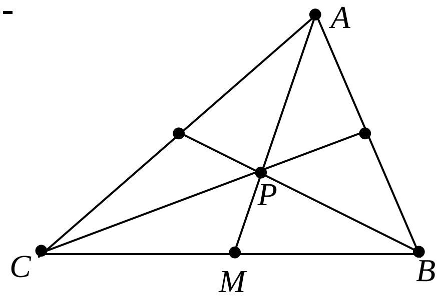


рис. 1.45

Точка P делит отрезок AM в отношении 2:1. Для нахождения её координат удобнее воспользоваться формулами (1.10′):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

потому что $\lambda = 2$ есть целое число:

$$x = \frac{1 + 2 \cdot 7}{1 + 2} = 5, \; y = \frac{6 + 2 \cdot 3}{1 + 2} = 4.$$

Ответ: $P(5, 4)$.

Репозиторий ВГУ

2 способ. Мы выведем общую формулу, по которой можно найти координаты точки пересечения медиан. Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Тогда координаты точки M:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Далее

$$x_P = \frac{x_1 + 2x_M}{1+2},\ y_P = \frac{y_1 + 2y_M}{1+2}.$$

Подставляя в эти формулы координаты точки M, получим:

$$x_P = \frac{x_1 + x_2 + x_2}{3},\ x_P = \frac{y_1 + y_2 + y_2}{3}. \qquad (1.24)$$

Таким образом, координаты точки пересечения медиан есть среднее арифметическое координат вершин треугольника. Подставляя в эти формулы координаты вершин, получим тот же результат.

***Задача* 9.** *Пусть* AD *– медиана треугольника* ABC. *Даны координаты вершин треугольника*: $A(-3, 2)$, $B(0, -1)$, $C(4, 3)$. *Найти координаты точки* D (*рис. 1.46*).

Решение. Отрезки BD и CD относятся так же, как и прилегающие к ним стороны треугольника:

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

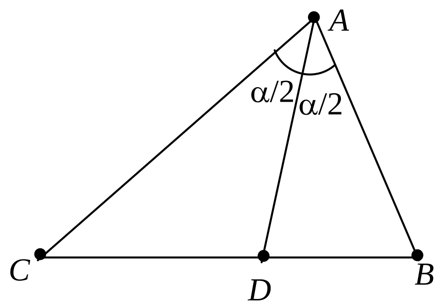


рис. 1.46

Вычислим длины сторон по формуле (1.15):

$$|AB| = \sqrt{(0-(-3))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

$$|AC| = \sqrt{(4-(-3))^2 + (3-2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Значит,

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5}.$$

Применяем формулы (1.10): $x = \dfrac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $y = \dfrac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

$$x_D = \frac{5x_B + 3x_C}{3+5} = \frac{5\cdot 0 + 3\cdot 4}{8} = \frac{3}{2},\ y_D = \frac{5y_B + 3y_C}{3+5} = \frac{5\cdot(-1) + 3\cdot 3}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Репозиторий ВГУ

***Задача* 10.** *Вершина* A *треугольника* ABC *находится в полюсе, а две другие имеют заданные полярные координаты*: $B(6, \frac{5\pi}{4})$, $C(4, \frac{7\pi}{12})$.

а) *Изобразите данный треугольник.*

б) *Вычислите площадь треугольника ABC.*

в) *Найдите длину BC.*

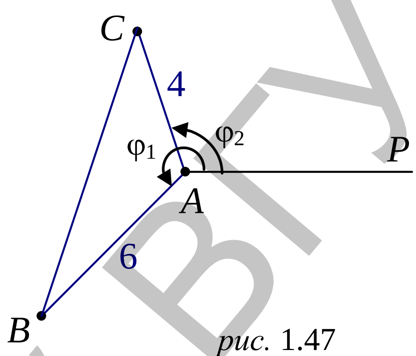


рис. 1.47

Решение. а) Нарисуем чертеж к задаче, построив точки B и C по их полярным координатам. Например, для построения точки C мы сначала от полярной оси OP откладываем против часовой стрелки угол

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$$

(т.е. на 15° больше, чем прямой угол). Затем на этом луче откладываем отрезок, равный 4 (рис. 1.47).

б) Для того чтобы найти $\angle BAC$ в треугольнике, мы от большего из углов, показанных на чертеже, отнимаем меньший. Удобнее использовать модуль с тем, чтобы не задумываться, какой из углов больше:

$$\angle BAC = |\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{5\pi}{4} - \frac{7\pi}{12} = \frac{15\pi - 7\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}.$$

Две стороны треугольника нам известны по условию: $|AB| = 6$, $|AC| = 4$. Площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

в) По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC = 36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = 76.$$

***Ответ*:** $S_{\Delta ABC} = 6\sqrt{3}$, $BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

***Задача* 11.** *Новая декартова СК получена из старой переносом начала в точку* $O'(2,-1)$ *и поворотом на угол* $\alpha = \arccos\frac{4}{5}$.

а) *Выпишите формулы, выражающие новые координаты через старые. Найдите новые координаты точки* A, *если известны её старые координаты*: $A(6, 2)$.

б) *Выпишите формулы, выражающие старые координаты через новые. Найдите старые координаты точки* B, *если известны её новые координаты*: $B(5, 5)$.

Репозиторий ВГУ

Решение. а) Новые координаты выражаются через старые по формулам

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cdot\cos\alpha + (y-b)\cdot\sin\alpha, \\ y' = -(x-a)\cdot\sin\alpha + (y-b)\cdot\cos\alpha, \end{cases}$$

где (a, b) – координаты точки O', α – угол поворота координатных осей. Зная $\cos\alpha$, находим $\sin\alpha$ и подставляем в формулы:

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}(x-2) + \frac{3}{5}(y+1), \\ y' = -\frac{3}{5}(x-2) + \frac{4}{5}(y+1). \end{cases}$$

Для точки $A(6, 2)_{Oxy}$ находим $x' = 5, y' = 0$. Значит, $A(5, 0)_{O'x'y'}$.

б) Старые координаты выражаются через новые по формулам

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha + a, \\ y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha + b. \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + 2, \\ y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' - 1. \end{cases}$$

Подставляя сюда координаты точки $B(5, 5)_{O'x'y'}$, находим $B(3, 6)_{Oxy}$.

Ответ: $A(5, 0)_{O'x'y'}$, $B(3, 6)_{Oxy}$.

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 2. ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. *Уравнение кривой на плоскости.*

***Определение* 2.1.** Пусть γ – некоторая кривая на плоскости, а $\varphi(x, y)$ – функция двух переменных. Говорим, что уравнение

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (2.1)$$

есть *уравнение кривой γ в неявном виде*, если координаты любой точки $M \in \gamma$ удовлетворяют (1), и обратно, каждая пара чисел (x, y), удовлетворяющих (1), задаёт точку $M(x, y)$ на кривой (рис. 2.1).

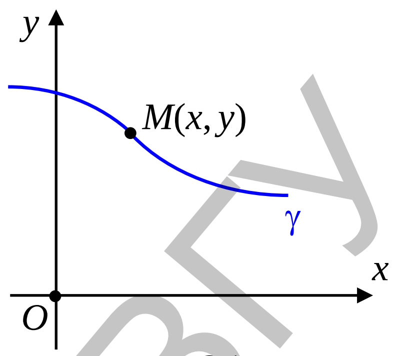


рис. 2.1

Подчеркнём, что при составлении уравнений следствие обязательно надо проверять в обе стороны.

***Пример* 2.1.** Уравнение

$$x^2 - 4 = 0 \qquad (2.2)$$

задаёт на плоскости пару прямых (рис. 2.2). Координаты любой точки $M(x, y) \in l_1$ удовлетворяют (2.2), но нельзя сказать, что (2.2) есть уравнение этой прямой, поскольку есть ещё точки, координаты которых удовлетворяют (2.2), но на l_1 эти точки не лежат.

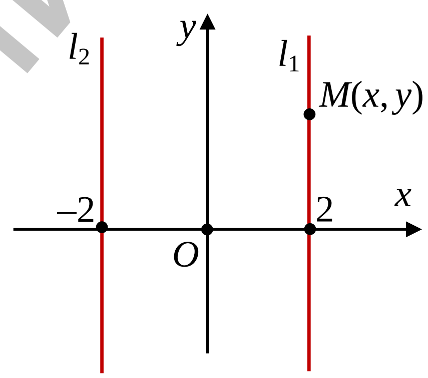


рис. 2.2

С другой стороны, каждая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$x - 2 = 0, \qquad (2.3)$$

лежит на фигуре $l_1 \cup l_2$, но нельзя сказать что (2.3) задает эту фигуру, поскольку есть ещё точки на $l_1 \cup l_2$, координаты которых (2.3) не удовлетворяют.

***Пример* 2.2.** Составим уравнение окружности γ радиуса R с центром в точке $O'(a, b)$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка окружности γ. Тогда

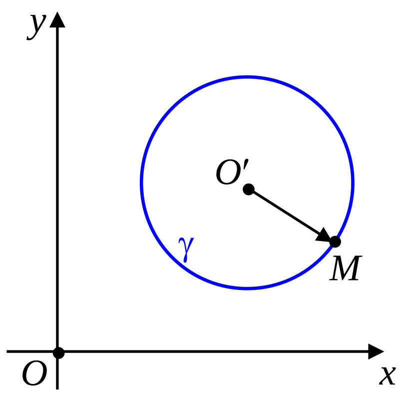


рис. 2.3

$$R = |O'M| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \iff$$

$$\iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (2.4)$$

Репозиторий ВГУ

Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (2.4), то $|O'M| = R$, а значит, $M \in \gamma$. Таким образом, (2.4) и есть уравнение окружности γ.

Если из уравнения (2.1) удаётся выразить одну координату через другую, то получим *уравнение в явном виде*:

$$y = f(x). \tag{2.5}$$

Не всегда удаётся привести неявное уравнение кривой к явному виду. В каком случае это возможно, гласит *теорема о неявной функции*, изучаемая в курсе математического анализа. Например, с уравнением окружности это сделать нельзя.

***Определение* 2.2.** Предположим, что точка движется по кривой. Тогда её координаты изменяются со временем:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{2.6}$$

При этом параметр t изменяется в определённых пределах: $t \in I$, где I – интервал числовой прямой. Говорим, что (2.6) есть *параметрические уравнения кривой* γ, если точка $M(x, y)$ лежит на кривой γ тогда и только тогда, когда найдётся такое $t \in I$, что будут выполнены оба равенства (2.6) одновременно. При этом обязательно к системе (2.4) надо добавлять интервал изменения параметра. Физический смысл параметра в (2.6) не всегда время.

***Пример* 2.3.** Параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат (рис. 2.4) имеют вид:

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\alpha, \\ y = R \cdot \cos\alpha, \ \alpha \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{2.7}$$

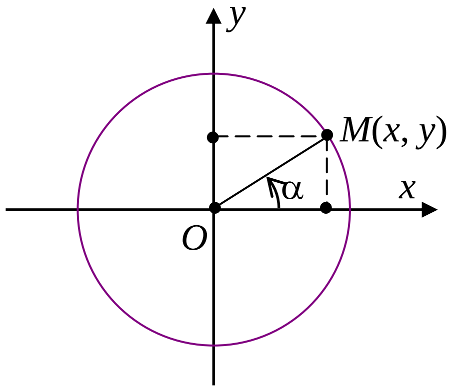


рис. 2.4

Не важно, что для одной и той же точки может найтись несколько (или даже бесконечно много) соответствующих ей значений параметра. Это не противоречит определению.

***Пример* 2.4.** Уравнения

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \ t \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{2.8}$$

задают кривую, которая называется «полукубическая парабола» (рис. 2.5). Уравнения

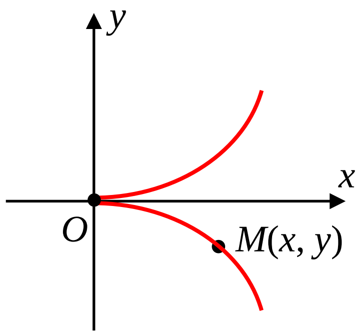


рис. 2.5

$$\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{2t}, \ t \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Репозиторий ВГУ

тоже задают полукубическую параболу, но не всю, а только ее верхнюю половину. Для точки M, лежащей ниже оси Ox, не найдётся такого t, для которого выполнено (2.9).

§ 2. *Уравнение прямой на плоскости*

Прямую l на плоскости можно задать

а) с помощью точки $M_o \in l$ и ненулевого вектора $\vec{\mathbf{a}} \| l$ (рис. 2.6); тогда можем написать, что

$$l = \{M \mid \overrightarrow{M_oM} \,\|\, \vec{\mathbf{a}}\} \qquad (*)$$

(эта запись читается так: «прямая l состоит из тех и только тех точек M, для которых $\overrightarrow{M_oM} \,\|\, \vec{\mathbf{a}}$»);

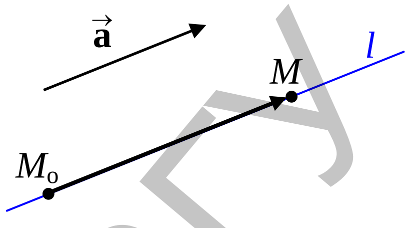


рис. 2.6

б) с помощью точки $M_o \in l$ и ненулевого вектора $\vec{\mathbf{n}} \perp l$ (рис. 2.7); тогда можем написать, что

$$l = \{M \mid \overrightarrow{M_oM} \perp \vec{\mathbf{n}}\}; \qquad (**)$$

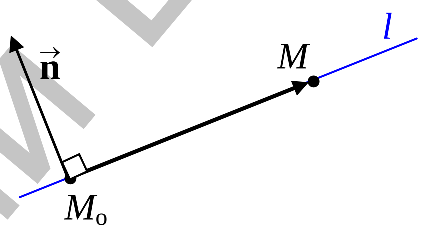


рис. 2.7

в) с помощью двух точек $M_o,\, M_1 \in l$.

***Определение* 2.3.** Вектор $\vec{\mathbf{a}} \| l$ называется *направляющим вектором прямой*, а вектор $\vec{\mathbf{n}} \perp l$ – *вектором нормали к прямой*.

***Теорема* 2.1. 1.** *Прямая l, проходящая через точку $M_o(x_o, y_o)$, и имеющая направляющий вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$, задаётся уравнением*

$$\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2}, \qquad (2.10)$$

которое называется каноническим уравнением прямой, или параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t,\ t \in \boldsymbol{R}, \end{cases} \qquad (2.11)$$

которые можно записать в векторном виде так:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_o + t\vec{\mathbf{a}},\ t \in \boldsymbol{R}, \qquad (2.12)$$

где $\vec{\mathbf{r}}_o = \overrightarrow{OM_o}$ – радиус-вектор точки M_o.

2. *Прямая, проходящая через точку $M_o(x_o, y_o)$ и имеющая вектор нормали $\vec{\mathbf{n}}(A, B)$, задаётся в декартовой СК уравнением*

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0 \qquad (2.13)$$

(*уравнение прямой с вектором нормали*).

Репозиторий ВГУ

Доказательство. **1.** Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой l. Тогда $\overrightarrow{M_oM}(x-x_o, y-y_o) \,||\, \vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$, а по второму признаку коллинеарности векторов (теорема 1.2) это равносильно (2.10).

Обратно, если для координат точки $M(x, y)$ выполнено (2.10), то по тому же признаку $\overrightarrow{M_oM} \,||\, \vec{\mathbf{a}}$, а значит, $M \in l$.

По первому признаку коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_oM} \,||\, \vec{\mathbf{a}} \;\Leftrightarrow\; \exists\, t \in \boldsymbol{R}$, такое, что $\overrightarrow{M_oM} = t\vec{\mathbf{a}}$. В координатах последнее равенство имеет вид

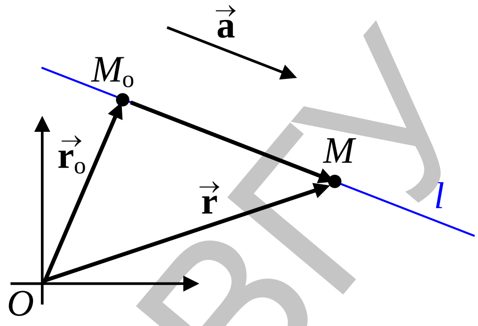


рис. 2.8

$$x - x_o = ta_1, \;\; y - y_o = ta_2.$$

Для того чтобы получить уравнение (2.11), осталось перенести x_o и y_o в другую часть равенства.

Пусть $\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор произвольной точки M на прямой. Радиус-вектор точки имеет такие же координаты, как и сама точка. Поэтому (рис. 2.8) $\vec{\mathbf{r}}_o(x_o, y_o)$, а $\vec{\mathbf{r}}(x, y)$ и (2.11) представляет собой уравнение (2.12), расписанное в координатах.

2. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой l. Тогда

$$\overrightarrow{M_oM}(x - x_o, y - y_o) \perp \vec{\mathbf{n}}(A, B) \;\;\Leftrightarrow\;\; \overrightarrow{M_oM} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0.$$

В координатах это условие как раз имеет вид (2.13). Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют (2.13), то $\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{\mathbf{n}}$, а значит, $M \in l$. ■

Заметим, что пункт 1 теоремы верен и в произвольной аффинной системе координат, а пункт 2 – только в декартовой.

Физический смысл параметрического уравнения прямой: оно задаёт прямолинейное и равномерное движение материальной точки из начального положения $M_o(x_o, y_o)$ с вектором скорости $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$.

Следствие **2.1.1.** *Прямая, проходящая через две точки* $M_o(x_o, y_o)$ *и* $M_1(x_1, y_1)$, *задаётся уравнением*

$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Если прямая проходит через две точки $M_o(x_o, y_o)$ и $M_1(x_1, y_1)$, то вектор $\overrightarrow{M_oM_1}(x_1 - x_o, y_1 - y_o)$ можно взять в качестве направляющего вектора прямой. Подставим его координаты в (2.10) вместо a_1, a_2 и получим (2.14). ■

Если прямая пересекает координатные оси в точках $A(a, 0)$ и $B(0, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ (рис. 2.9), то будем говорить, что она отсекает на координатных

Репозиторий ВГУ

осях отрезки a, b (эти числа могут быть отрицательными).

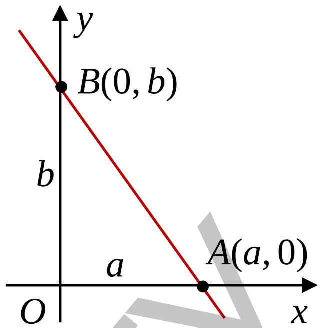


рис. 2.9

***Следствие* 2.1.2.** *Прямая, отсекающая на координатных осях отрезки* $a \neq 0$, $b \neq 0$, *задаётся уравнением*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2.15)$$

(*уравнение прямой в отрезках*).

Доказательство. Условие означает, что прямая проходит через точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ (рис. 2.9). Подставим их координаты в (2.14):

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}.$$

Последнее уравнение, очевидно, равносильно (2.15). ■

***Следствие* 2.1.3.** *Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида*

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2.16)$$

которое называется общим уравнением прямой. И обратно, любое уравнение вида (2.16), *где* $A^2 + B^2 \neq 0$, *на плоскости задаёт прямую; при этом геометрический смысл коэффициентов* A, B *в уравнении* (2.16) *– это координаты вектора нормали к прямой.*

Доказательство. Любую прямую на плоскости можно задать с помощью точки и вектора нормали. Тогда её уравнение в декартовой СК будет иметь вид (2.13). Раскроем скобки:

$$Ax + By - Ax_o - By_o = 0$$

и обозначим $C = -Ax_o - By_o = \text{const}$. Получим уравнение (2.16).

Обратно, пусть некоторое множество l определяется уравнением (2.16) и $M_o(x_o, y_o)$ – произвольная точка этого множества. Тогда ее координаты удовлетворяют (2.16):

$$Ax_o + By_o + C = 0.$$

Отсюда выражаем $C = -Ax_o - By_o$. Подставим это значение в (2.16) и получим (2.13). Это уравнение, как уже известно, определяет прямую, причём (A, B) – это координаты вектора нормали. Но в (2.16) A, B такие же, как и в (2.13). ■

Ещё раз подчеркнём, что *геометрический смысл коэффициентов* A *и* B *в общем уравнении прямой: это координаты вектора нормали к прямой*: $\vec{\mathbf{n}}(A, B)$. И этот факт чрезвычайно важен при исследовании положе-

Репозиторий ВГУ

ния прямой и при решении различных задач про прямую на плоскости. Однако этот факт верен только в случае декартовой СК.

Если СК на плоскости не является декартовой, то уравнение (2.16) можно получить из уравнения (2.11), раскрыв пропорцию и перенеся все слагаемые влево. В дальнейшем СК предполагается декартовой, если не оговорено противное.

§ 3. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой.

1. $C=0$. Уравнение имеет вид

$$Ax+By=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0,0)$, т.е. прямая проходит через начало координат (рис. 2.10).

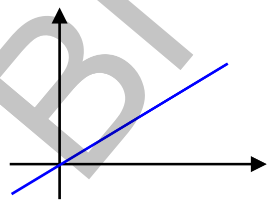


рис. 2.10

2. $A=0$. Уравнение имеет вид

$$By+C=0 \;\Leftrightarrow\; y=-C/B.$$

Прямая $l\,||\,Ox$ (рис. 2.11).

3. $B=0$. Уравнение имеет вид

$$Ax+C=0 \;\Leftrightarrow\; x=-C/A.$$

Прямая $l\,||\,Oy$ (рис. 2.12).

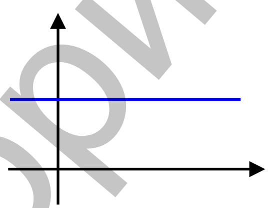


рис. 2.11

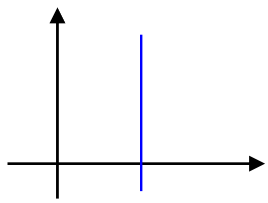


рис. 2.12

4. $B\neq 0$. Тогда (2.14) можно переписать так: $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$. Обозначим $k=-A/B,\ q=-C/B$ и получим уравнение

$$y=kx+q. \qquad (2.17)$$

Выясним геометрический смысл коэффициентов k и q в этом уравнении. Подставив в (2.17) $x=0$, получим $y=q$. Тем самым, q есть отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy (рис. 2.13).

Пусть $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ – две произвольные точки на прямой l, где $y_2\ge y_1$. Подставим их координаты в уравнение прямой:

$$y_1=kx_1+q,\;\; y_2=kx_2+q.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$

Поскольку мы исключили случай $l\,||\,Oy$, то $x_2\neq x_1$ и поэтому можем выразить

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (2.18)$$

Репозиторий ВГУ

***Определение* 2.4.** Направление на прямой l, соответствующее возрастанию ординаты y, называется *положительным*. Угол между положительным направлением оси Ox и положительным направлением прямой l называется *углом наклона прямой*.

Пусть α – это угол наклона прямой, а S – точка с координатами (x_2, y_1).

1 *случай*: $x_2 > x_1$ (рис. 2.13). Тогда $y_2 - y_1 = QS$, $x_2 - x_1 = PS$ и из ΔPQS находим, что

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{QS}{PS} = \operatorname{tg}\alpha.$$

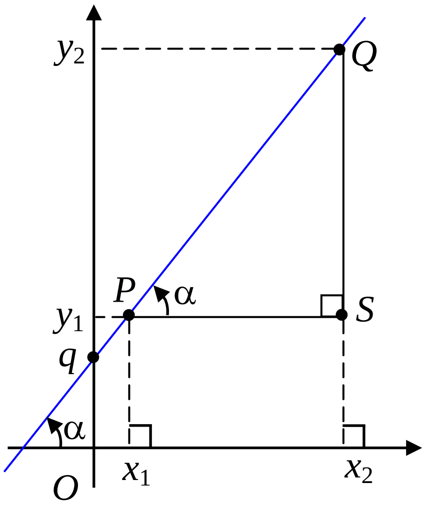


рис. 2.13

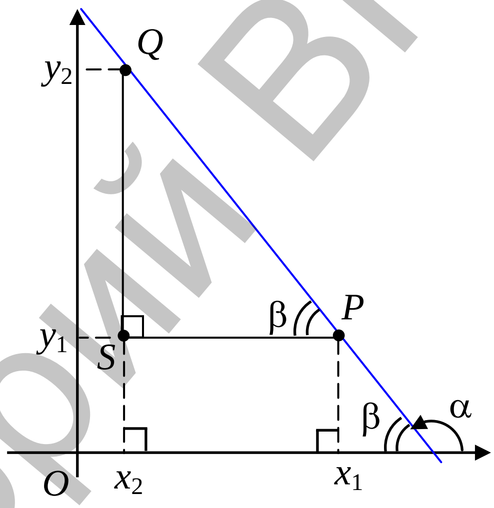


рис. 2.14

2 *случай*: $x_2 < x_1$ (рис. 2.14). Тогда $y_2 - y_1 = QS$, $x_2 - x_1 = -PS$ и из ΔPQS находим, что

$$k = -\frac{QS}{PS} = \operatorname{tg}\beta,$$

где $\beta = \angle QPS$. Но $\beta = \pi - \alpha$ и $\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha$. Значит, как и в первом случае, получаем $k = \operatorname{tg}\alpha$.

***Определение* 2.5.** Мы установили, что коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой. Поэтому он называется *угловым коэффициентом*, а уравнение (2.17) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Если нам даны две точки на прямой $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, то мы можем найти угловой коэффициент прямой по формуле (2.18) и составить уравнение прямой по формуле

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2.19}$$

Репозиторий ВГУ

§ 4. *Взаимное расположение двух прямых на плоскости*

Пусть две прямые на плоскости заданы общими уравнениями:

$$l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $\vec{\mathbf{n}}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{\mathbf{n}}_2(A_2, B_2)$ – это векторы нормали к l_1 и к l_2 (следствие 2.1.3).

***Теорема* 2.2. 1.** $l_1 || l_2 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;

2. $l_1 = l_2 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

3. прямые пересекаются $\Leftrightarrow\ \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2} \ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix} A_1 & B_2 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$;

4. $l_1 \perp l_2 \ \Leftrightarrow\ A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

5. *угол между* l_1 *и* l_2 *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2|}{|\vec{\mathbf{n}}_1||\vec{\mathbf{n}}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2.20}$$

Доказательство. **1, 2.** Очевидно, что если прямые параллельны или совпадают, то их векторы нормали коллинеарны, и наоборот, если $\vec{\mathbf{n}}_1 || \vec{\mathbf{n}}_2$, то $l_1 || l_2$ или $l_1 = l_2$ (рис. 2.15). По второму признаку коллинеарности векторов

$$\vec{\mathbf{n}}_1 || \vec{\mathbf{n}}_2 \ \Leftrightarrow\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

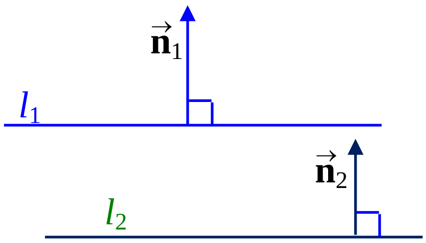


рис. 2.15

Обозначим общий коэффициент пропорциональности как λ:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda. \tag{2.21}$$

Пусть имеет место (2.21). Тогда прямые будут совпадать, если у них есть общая точка $M_o(x_o, y_o)$, т.е. если одновременно выполняются два равенства:

$$A_1x_o + B_1y_o + C_1 = 0,$$
$$A_2x_o + B_2y_o + C_2 = 0$$

для некоторых значений $(x_o,\ y_o)$. Вычтем из первого равенства второе, домноженное на λ:

$$(A_1 - \lambda A_2)x_o + (B_1 - \lambda B_2)y_o + C_1 - \lambda C_2 = 0.$$

Репозиторий ВГУ

В силу (2.21) выражения в скобках равны нулю. Остаётся $C_1 - \lambda C_2 = 0$, а поэтому

$$\frac{C_1}{C_2} = \lambda. \qquad (2.22)$$

Объединяя (2.21) и (2.22), получаем условие совпадения прямых, указанное в пункте 2 теоремы.

Обратно, если выполнено условие пункта 2, то уравнения прямых l_1 и l_2 пропорциональны, т.е., разделив первое уравнение на некоторое число λ, мы получим второе уравнение. Значит, эти уравнения равносильны и определяют на плоскости одно и то же множество.

Соответственно, если выполнено условие пункта 1 теоремы, то прямые не могут совпадать, а значит, они параллельны.

3. Прямые пересекаются если и только если не выполнены условия из пунктов 1 и 2, а это как раз и означает, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Это неравенство говорит о том, что строки в матрице $\begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$ не пропорциональны, т.е. её определитель не равен нулю.

4, 5. Прямые при пересечении образуют две пары вертикальных углов. Углом между прямыми называется величина меньшей из пар. Таким образом, угол между прямыми находится в пределах $0 \le \alpha \le \pi/2$ и $\cos\alpha \ge 0$.

Пусть $\beta = \angle(\vec{\mathbf{n}}_1, \vec{\mathbf{n}}_2)$ – угол между векторами нормали. Тогда $0 \le \beta \le \pi$. Очевидно, что β совпадает с величиной одной из двух пар вертикальных углов, которые образуют прямые при пересечении.

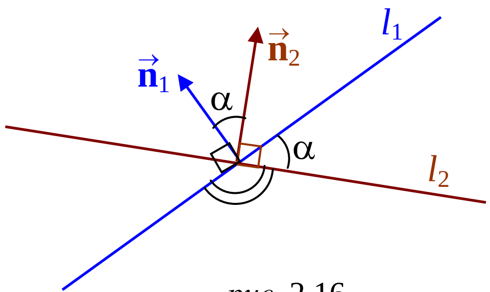


рис. 2.16

<u>*1 случай*</u>: $0 \le \beta \le \pi/2$. Тогда $\alpha = \beta$ (рис. 2.13) и

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2}{|\vec{\mathbf{n}}_1|\,|\vec{\mathbf{n}}_2|}.$$

<u>*2 случай*</u>: $\pi/2 < \beta \le \pi$. Тогда $\alpha = \pi - \beta$ (рис. 2.14) и $\cos\beta < 0$. Поэтому

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta =$$

$$= |\cos\beta| = \frac{|\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2|}{|\vec{\mathbf{n}}_1|\,|\vec{\mathbf{n}}_2|}.$$

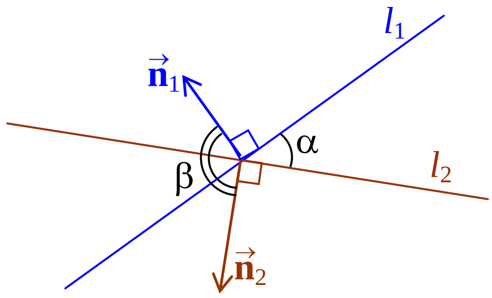


рис. 2.17

Эта формула подойдёт и к первому случаю. Последнее равенство в (2.20) – это та же формула, только расписанная в координатах.

В частности, $l_1 \perp l_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. ■

Репозиторий ВГУ

Упражнение. *Прямые на плоскости могут быть заданы не только общим уравнением. После изучения темы «Взаимное расположение прямой и плоскости» вы легко напишите условия параллельности и совпадения двух прямых, одна из которых задана каноническим или параметрическим уравнением, а вторая – общим уравнением.*

Теорема 2.3. *Пусть две прямые на плоскости заданы уравнениями с угловым коэффициентом*:

$$l_1\colon y = k_1x + q_1, \qquad l_2\colon y = k_2x + q_2.$$

Тогда

1. $l_1 || l_2 \iff k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$;

2. $l_1 = l_2 \iff k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$;

3. *угол между прямыми вычисляется по формуле*

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|k_2 - k_1|}{|1 + k_1k_2|}; \qquad (2.23)$$

4. $l_1 \perp l_2 \iff k_1 = -1/k_2$.

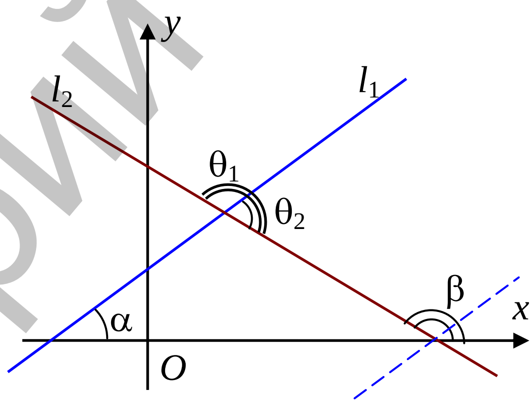


рис. 2.18

Доказательство. Пункты **1.** и **2.** очевидны в силу геометрического смысла коэффициентов k и q.

3. Пусть $k_1 = \operatorname{tg}\alpha$, $k_2 = \operatorname{tg}\beta$, а θ_1 и θ_2 – это углы, которые образуются при пересечении прямых (рис. 2.15). Тогда $\theta_1 = \beta - \alpha$, а $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Если $\theta_1 \leq \pi/2$, то он считается углом между прямыми l_1 и l_2. В этом случае $\operatorname{tg}\theta_1 \geq 0$. Находим:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Если $\theta_1 > \pi/2$, то углом между прямыми считается θ_2. Тогда

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \operatorname{tg}(\pi - \theta_1) = -\operatorname{tg}\theta_1 = |\operatorname{tg}\theta_1| = \frac{|k_2 - k_1|}{|1 + k_1k_2|}.$$

Эта формула подойдет и к первому случаю.

4. Перпендикулярность прямых означает, что $\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$, а это равенство равносильно $\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. ■

Заметим, что если в формуле (2.23) убрать модули, то получится формула, по которой можно вычислить *ориентированный угол от* l_1 до l_2, (отсчитываемый против часовой стрелки). Данный угол может находиться в пределах $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Репозиторий ВГУ

§ 5. *Уравнение прямой в нормальной форме. Расстояние от точки до прямой*

***Определение* 2.6.** Говорим, что *общее уравнение прямой*

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2.16)$$

имеет нормальную форму, если $A^2+B^2=1$. Это равносильно тому, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(A, B)$ – единичный.

Если уравнение (2.16) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на $\sqrt{A^2+B^2}$:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Действительно, тогда получится, что $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$. Например, если мы имеем уравнение $3x - 4y + 15 = 0$, то вычислим $\sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$ и разделим наше уравнение на 5:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3 = 0.$$

Получилось уравнение в нормальной форме.

***Теорема* 2.4.** *Пусть прямая l определяется уравнением* (2.14) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой вычисляется по формуле*

$$h = |Ax_1 + By_1 + C|. \qquad (2.24)$$

***Следствие* 2.4.1.** *Если прямая определяется произвольным уравнением вида* (2.14), *то*

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (2.24')$$

Доказательство. Пусть $\vec{\mathbf{n}}(A, B)$ – вектор нормали к l. Поскольку уравнение имеет нормальную форму, то $|\vec{\mathbf{n}}| = 1$. Пусть $M_o(x_o, y_o)$ – произвольная точка на прямой. Опустим перпендикуляр MN на прямую l. Обозначим

$$\alpha = \angle(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_oM}), \ \beta = \angle MM_oN.$$

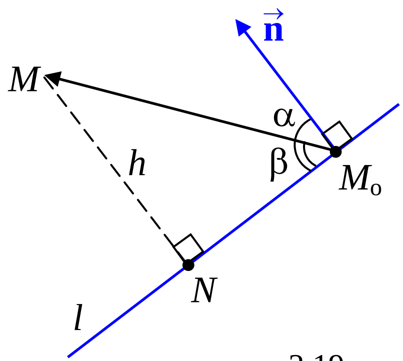


рис. 2.19

1 случай. Точка M и вектор $\vec{\mathbf{n}}$ оказались в одной полуплоскости относительно прямой l. Тогда

Репозиторий ВГУ

$$h = |MN| = |MM_o| \cdot \sin\beta = |\overrightarrow{M_oM}| \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$$

$$= |\overrightarrow{M_oM}| \cdot \cos\alpha \cdot |\vec{\mathbf{n}}| = \overrightarrow{M_oM} \cdot \vec{\mathbf{n}}$$

(мы домножили на $|\vec{\mathbf{n}}|$, поскольку эта величина равна единице). Находим, что $\overrightarrow{M_oM}(x_1 - x_o, y_1 - y_o) \Rightarrow$

$$h = A(x_1 - x_o) + B(y_1 - y_o) = Ax_1 + By_1 + C - (Ax_o + By_o + C)$$

(мы добавили и отняли C). Поскольку $M_o \in l$, то выражение в скобках равно нулю, и мы получаем

$$h = Ax_1 + By_1 + C.$$

<u>2 случай</u>. Точка M и вектор $\vec{\mathbf{n}}$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l (рис. 2.20). Тогда $\beta = \alpha - \pi/2$ и $\sin\beta = -\cos\alpha$ и те же самые вычисления дают

$$h = -\overrightarrow{M_oM} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -Ax_1 - By_1 - C.$$

Поскольку h – это расстояние, то $h \geq 0$. Это значит, что во втором случае $Ax_1 + By_1 + C < 0$ (равенство исключается, т.к. $M \notin l$). Поэтому

$$h = |Ax_1 + By_1 + C|.$$

Эта формула подойдёт и к первому случаю. ■

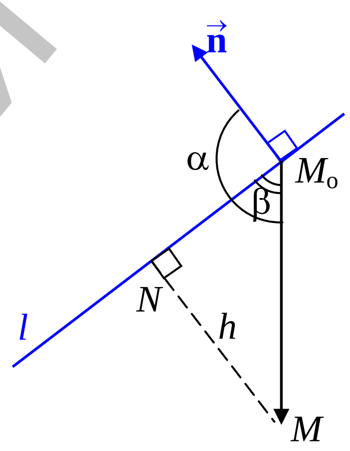


рис. 2.20

Попутно мы выяснили, что знак выражения $Ax_1 + By_1 + C$ зависит от того, в какой полуплоскости находится точка M. Для точек из одной полуплоскости выполнено $Ax_1 + By_1 + C > 0$, а для точек из другой полуплоскости выполнено $Ax_1 + By_1 + C < 0$. Это позволяет для двух данных точек M_1, M_2 выяснить, лежат ли они в одной полуплоскости относительно прямой l или в разных. Другими словами, мы можем выяснить, пересекает отрезок M_1M_2 прямую l или нет.

§ 6. *Уравнение прямой в полярных координатах*

Пусть на плоскости заданы прямая l и полярная система координат, OP – полярная ось. Опустим перпендикуляр ON из полюса на прямую l. Обозначим $p = |ON|$ – длина перпендикуляра, α – ориентированный угол между лучами OP и ON.

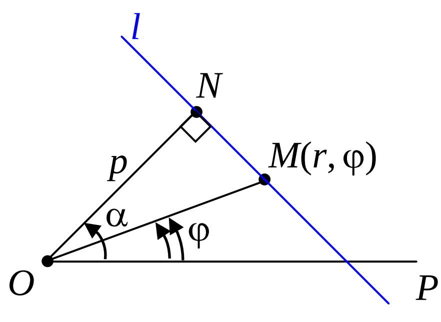


рис. 2.21

Пусть $M(r, \varphi)$ – произвольная точка прямой. Тогда из ΔOMN, в зависимости от расположения точек M и N, находим

Репозиторий ВГУ

$$p = r\cdot\cos(\alpha - \varphi) \qquad (2.25)$$

или

$$p = r\cdot\cos(\varphi - \alpha). \qquad (2.25')$$

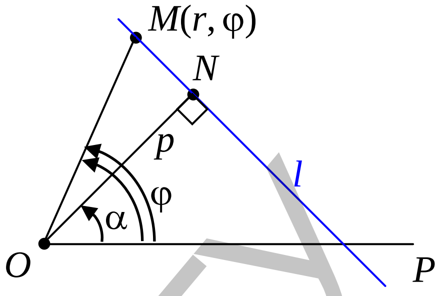


рис. 2.22

(рисунки 2.21 и 2.22). Поскольку косинус – чётная функция, то достаточно только уравнения (2.25).

Обратно, если координаты точки $M(r, \varphi)$ удовлетворяют (2.25), то ΔOMN – прямоугольный, и поэтому точка M лежит на прямой l.

Итак, (2.25) представляет собой *уравнение прямой в полярных координатах*.

Введём теперь декартову СК так, чтобы $Ox\uparrow\uparrow OP$. Используя формулу косинуса разности, уравнение (2.25) можно переписать так:

$$r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0.$$

Согласно формулам перехода $r\cdot\cos\varphi = x$, $r\cdot\sin\varphi = y$. В итоге наше уравнение принимает вид:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (2.26)$$

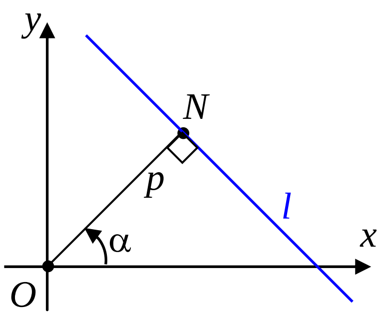


рис. 2.23

Это уравнение также называют *нормальным уравнением прямой*. Ещё раз отметим геометрический смысл используемых в этом уравнении параметров: p – это длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а α – ориентированный угол между осью Ox и этим перпендикуляром (рис. 2.23). Поскольку $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, то это уравнение имеет нормальную форму, как это было определено в предыдущем параграфе.

Упражнение. *Пусть две прямые заданы своими уравнениями в полярных координатах*: l_1: $p_1 = r\cdot\cos(\alpha_1 - \varphi)$, l_2: $p_2 = r\cdot\cos(\alpha_2 - \varphi)$. *Выпишите условия параллельности и совпадения этих прямых, а также найдите угол между ними. Найдите, чему равно расстояние между* l_1 *и* l_2, *если они параллельны.*

§ 7. *Пучок прямых*

Пусть две несовпадающие прямые на плоскости заданы своими общими уравнениями:

$$l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Репозиторий ВГУ

***Определение* 2.7.** Совокупность всех прямых, которые задаются различными уравнениями вида

$$(\lambda A_1+\mu A_2)\,x+(\lambda B_1+\mu B_2)\,y+\lambda C_1+\mu C_2=0, \tag{2.27}$$

где λ и μ – числа, не равные нулю одновременно ($\lambda^2+\mu^2\neq 0$), называется *пучком прямых*.

Очевидно, что при $\lambda=1$, $\mu=0$ мы получим уравнение прямой l_1, а при $\lambda=0$, $\mu=1$ получим уравнение прямой l_2. Таким образом, прямые l_1 и l_2 тоже входят в пучок.

***Теорема* 2.5. 1.** *Если прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке M_o, то определяемый ими пучок прямых состоит из всех прямых, проходящих через M_o.*

2. *Если $l_1 || l_2$, то определяемый этими прямыми пучок состоит из всех параллельных им прямых.*

***Доказательство.* 1.** Перепишем (2.27) в виде

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0. \tag{2.27′}$$

Пусть $M_o(x_o,\,y_o)=l_1\cap l_2$. Тогда её координаты удовлетворяют уравнениям обеих прямых. Подставим ее координаты в (2.23′):

$$\lambda(A_1x_o+B_1y_o+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

Поскольку обе скобки должны быть равны нулю, то мы получаем верное равенство независимо от λ и μ. Таким образом, все прямые пучка (2.23) проходят через M_o.

Покажем, что в пучок входят все прямые, проходящие через M_o. Пусть $M(x_1,y_1)$ – произвольная точка плоскости, отличная от M_o (рис. 2.24). Подставим ее координаты в (2.27′) и обозначим

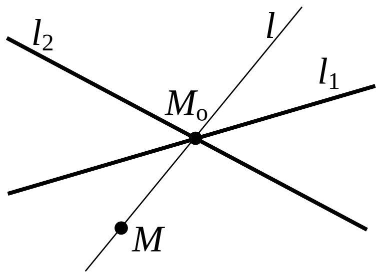


рис. 2.24

$$X=A_1x+B_1y+C_1,\quad Y=A_2x+B_2y+C_2.$$

Получим уравнение

$$\lambda X+\mu Y=0 \tag{2.28}$$

относительно неизвестных λ и μ. Это уравнение всегда имеет решение (λ_o,μ_o), отличное от $(0,0)$. При $\lambda=\lambda_o$ и $\mu=\mu_o$ уравнение (2.27) будет задавать прямую, проходящую через M.

2. Пусть $l_1 || l_2$ (рис. 2.25). Тогда выполнено

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=k\,.$$

Репозиторий ВГУ

Пусть l – произвольная прямая из пучка (2.27). Применим к ней признак параллельности с прямой l_2:

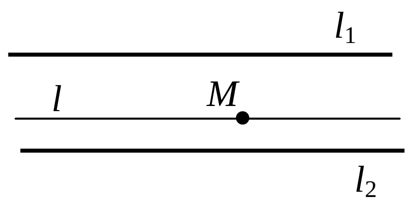


рис. 2.25

$$\frac{\lambda A_1+\mu A_2}{A_2}=\frac{\lambda B_1+\mu B_2}{B_2}.$$

Разделим числители почленно на знаменатели:

$$\lambda\frac{A_1}{A_2}+\mu\frac{A_2}{A_2}=\lambda\frac{B_1}{B_2}+\mu\frac{B_2}{B_2} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda k+\mu=\lambda k+\mu .$$

Имеем верное равенство. Значит $l \| l_2$. Поскольку l была произвольной прямой из пучка, то все прямые пучка параллельны l_1 и l_2.

Покажем, что в пучок входят все без исключения прямые, параллельные l_1 и l_2. Пусть $M(x_1, y_1)$ – произвольная точка плоскости, не лежащая ни на l_1, ни на l_2 (рис. 2.25). Подставив ее координаты в (2.27′), также получим уравнение (2.28) относительно неизвестных λ и μ, где коэффициенты X и Y оба ненулевые. При λ и μ, удовлетворяющих (2.28), уравнение (2.27) будет задавать прямую, проходящую через M. ■

Определение **2.8.** Если все прямые пучка пересекаются в точке M_0, то точка M_0 называется *центром пучка*, а *пучок прямых – собственным, или центральным*. Если все прямые пучка параллельны друг другу, то *пучок называется несобственным, или нецентральным*.

§ 8. *Примеры решения задач*

Задача **1.** *Даны координаты вершин* $A(1,-6)$, $B(-3, 0)$, $C(6, 9)$ *треугольника* ABC. *Составить уравнение окружности, описанной вокруг треугольника.*

Решение. Для того чтобы составить уравнение окружности, нам необходимо знать её радиус R и координаты центра $O(a, b)$. Тогда уравнение выглядит так:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 . \qquad (2.4)$$

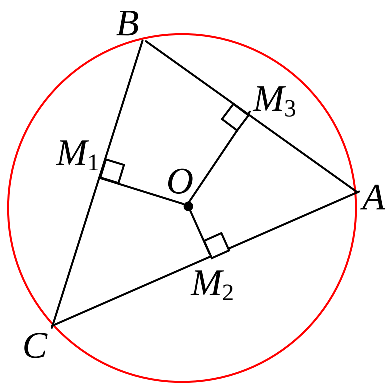


рис. 2.26

Центр окружности, описанной вокруг треугольника, находится на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника. Находим координаты середин $M_1(x_1, y_1)$ и $M_3(x_3, y_3)$ сторон BC и AB соответственно:

$$x_1=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{-3+6}{2}=\frac{3}{2},\ y_1=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{0+9}{2}=\frac{9}{2},\ M_1\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right).$$

Репозиторий ВГУ

Аналогично $M_3(-1,-3)$.

Пусть l_3 – прямая, являющаяся серединным перпендикуляром к AB, а l_1 – к BC. Тогда $\vec{\mathbf{n}}_3 = \overrightarrow{AB}\,(-4, 6) \perp l_3$ и l_3 проходит через M_3. Поэтому её уравнение:

$$-4(x+1)+6(y+3)=0\,.$$

Аналогично $\vec{\mathbf{n}}_1 = \overrightarrow{BC}\,(9,9) \perp l_3$. Поэтому уравнение l_1:

$$9\left(x-\frac{3}{2}\right)+9\left(y-\frac{9}{2}\right)=0\,,$$

$$x+y-6=0\,.$$

Имеем $O=l_1 \cap l_3$. Поэтому, чтобы найти координаты точки O, необходимо решить совместно уравнения l_1 и l_3. Объединяем их в одну систему:

$$\begin{cases} x+y-6=0\,, \\ -4x+6y+14=0. \end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению первое, умноженное на 4:

$$\begin{cases} x+y-6=0\,, \\ 10y-10=0. \end{cases}$$

Отсюда $y=1,\ x=5$, $O(5,1)$.

Радиус равен расстоянию от O до любой из вершин треугольника. Находим:

$$R=|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(1-5)^2+(-6-1)^2}=\sqrt{65}.$$

***Ответ*:** уравнение окружности: $(x-5)^2+(y-1)^2=65$.

***Задача* 2.** *Известны координаты вершин треугольника*: $A(-1, 3)$, $B(11, 0)$, $C(9, 9)$ (рис. 2.27).

а) *Составить уравнения с угловым коэффициентом стороны* AB, *высоты* CD *и найти координаты точки* D.

б) *Вычислить высоту в треугольнике по формуле расстояния от точки до прямой и как расстояние между точками* C *и* D. *Сравнить полученные результаты.*

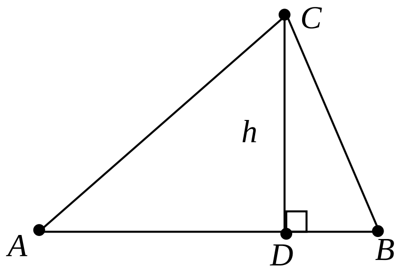


рис. 2.27

Решение. а) Находим угловой коэффициент прямой AB:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{11-(-1)}=-\frac{1}{4}\,.$$

Составляем уравнение прямой AB:

$$y-y_A=k_{AB}(x-x_A) \;\Leftrightarrow\; y-3=-\frac{1}{4}(x-(-1)) \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}\,.$$

Репозиторий ВГУ

Прямые AB и CD перпендикулярны. Поэтому $k_{CD} = -\dfrac{1}{k_{AB}} = 4$. Составляем уравнение прямой CD:

$$y - y_C = k_{CD}(x - x_C) \Leftrightarrow \quad y - 9 = 4(x - 9) \quad \Leftrightarrow \quad y = 4x - 27.$$

Точка D является общей точкой для прямых AB и CD. Значит, её координаты должны удовлетворять одновременно уравнениям этих двух прямых. Поэтому для нахождения координат точки D мы объединяем уравнения прямых AB и CD в одну систему и решаем эту систему.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{4}, \\ y = 4x - 27. \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x - 27 = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{4}, \\ y = 4x - 27. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 7, \\ y = 1. \end{cases} \Rightarrow D(7, 1).$$

б) Перепишем уравнение прямой AB в виде общего уравнения:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4y = -x + 11 \quad \Leftrightarrow \quad x + 4y - 11 = 0.$$

Применим формулу (2.24) к этому уравнению и к точке C:

$$h = \frac{|9 + 4 \cdot 9 - 11|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{|34|}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}.$$

Расстояние между точками C и D:

$$|CD| = \sqrt{(7-9)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{4 + 64} = 2\sqrt{17}.$$

Это совпадает с ранее полученным результатом.

***Ответ*:** а) AB: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{4}$, CD: $y = 4x - 27$; $D(7, 1)$; б) $h = 2\sqrt{17}$.

***Задача* 3.** *В ромбе* $KLMN$ *известны уравнение одной из диагоналей* $3x - 2y + 5 = 0$ *и координаты двух вершин:* $K(-3/2, -3)$, $L(-5, -5)$ (рис. 2.28). *Найти координаты остальных вершин и точки пересечения диагоналей.*

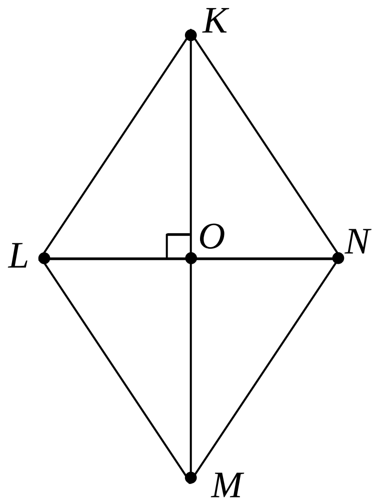


рис. 2.28

Решение. Выясним, уравнение какой именно диагонали нам дано. Для этого подставим координаты точек K и L в данное уравнение и убедимся, что подходят координаты точки L. Значит, нам дано уравнение диагонали LN.

Это уравнение имеет вид

$$Ax + By + C = 0,$$

т.е. это общее уравнение. В этом уравнении геометрический смысл коэффициентов A и B – это координаты вектора нормали $\vec{\mathbf{n}}(A, B)$. Поэтому $\vec{\mathbf{n}}(3, -2) \perp LN$.

Репозиторий ВГУ

Составим уравнение перпендикуляра $l = OK$ к прямой LN и найдём координаты точки O. Вектор $\vec{\mathbf{n}}$ будет параллелен OK, т.е. он является направляющим вектором этой прямой. Кроме этого, нам известны координаты точки K на этой прямой. Составляем параметрическое уравнение l:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} + 3t, \\ y = -3 - 2t. \end{cases} \tag{2.29}$$

Имеем $O = l \cap BC$. Поэтому, для того чтобы найти координаты этой точки, мы должны решить совместно уравнения l и LN. Подставляем x и y из уравнения (2.29) в уравнение BC:

$$3(-\frac{3}{2} + 3t) - 2(-3 - 2t) + 5 = 0,$$

$$-\frac{9}{2} + 9t + 6 + 4t + 5 = 0,$$

$$13t = -\frac{13}{2}, \;\; t_O = -\frac{1}{2}.$$

Мы так обозначили найденное значение параметра, потому что оно соответствует точке O. Подставляем это значение в уравнение (2.29) и находим координаты этой точки: $O(-3,-2)$.

Для того чтобы найти координаты M, вспомним физический смысл параметрического уравнения прямой: оно задает прямолинейное и равномерное движение. В нашем случае это движение из начальной точки O с вектором скорости $\vec{\mathbf{n}}$. Отрезок KO вдвое длиннее отрезка OM. Если за время $t_O = -\frac{1}{2}$ мы прошли путь от K до O, то путь от K до M мы пройдём за удвоенное время:

$$t_E = 2t_D = -1.$$

Подставим это значение параметра в (2.29) и найдём $M(-4{,}5;-1)$.

Точка O делит отрезок LN пополам. Поэтому

$$x_O = \frac{x_L + x_N}{2}, \quad y_O = \frac{y_L + y_N}{2}.$$

Отсюда находим

$$x_N = 2x_O - x_L = -1, \quad y_N = 2y_O - y_L = 1, \quad N(-1, 1).$$

***Ответ*:** $M(-4{,}5;-1)$, $N(-1, 1)$, $O(-3,-2)$.

Задача 4. *Даны координаты вершин $A(-4,-2)$, $B(9, 7)$, $C(2,-4)$ треугольника ABC. Составить общее уравнение биссектрисы AD* (рис. 2.29).

Решение. 1 способ. Действуем так же, как в задаче 9 из главы 1. Поэтому приводим только вычисления без пояснений:

Репозиторий ВГУ

$$\overrightarrow{AB}(13,9),\ \ \overrightarrow{AC}(6,–2);$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}\,,\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\,.$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = 2{,}5.$$

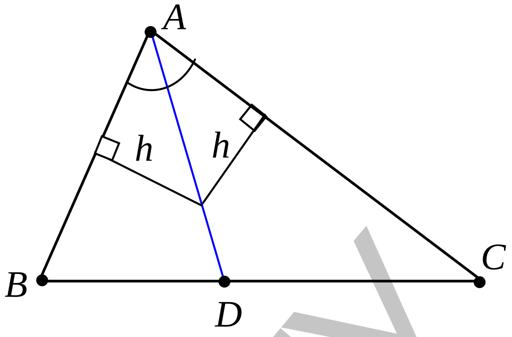


рис. 2.29

Далее, применяя формулы деления отрезка в заданном отношении (1.10′), находим:

$$x_D = \frac{x_B + 2{,}5x_C}{1 + 2{,}5} = \frac{9+2{,}5\cdot 2}{3{,}5} = 4,$$

$$y_D = \frac{x_B + 2{,}5x_C}{1 + 2{,}5} = \frac{7+2{,}5\cdot(-4)}{3{,}5} = -\frac{6}{7},\quad D(4,-\frac{6}{7}).$$

Составляем уравнение прямой, проходящей через точки A и D. Для неё вектор $\overrightarrow{AD}\left(8,\frac{8}{7}\right)$ является направляющим. Но в качестве направляющего мы можем взять любой вектор, коллинеарный $\overrightarrow{AD}$. Например, удобно будет взять $\vec{\mathbf{a}} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AD}$, $\vec{\mathbf{a}}(7,\,1)$. Составляем каноническое уравнение и преобразуем его к виду общего уравнения:

$$AD\text{:}\ \frac{x+4}{7} = \frac{y+2}{1} \iff x - 7y - 10 = 0\,.$$

<u>2 способ</u>. Если произвольная точка $M(x, y)$ лежит на биссектрисе AD, то расстояния от этой точки до сторон AB и AC равны. Составим уравнения сторон. Сначала находим направляющие векторы:

$$\overrightarrow{AB}(13,9),\ \ \overrightarrow{AC}(6,–2),$$

а затем составляем канонические уравнения и преобразуем их к виду общего уравнения:

$$AB\text{:}\ \frac{x+4}{13} = \frac{y+2}{9},\qquad AC\text{:}\ \frac{x+4}{6} = \frac{y+2}{-2};$$

$$9(x+4) = 13(y+2),\qquad -2(x+4) = 6(y+2);$$

$$9x - 13y + 10 = 0,\qquad x + 3y + 10 = 0\,.$$

С помощью формулы (2.24′) находим расстояния от произвольной точки $M(x,y)$ до сторон AB и AC и приравниваем их:

$$\frac{|9x - 13y + 10|}{\sqrt{9^2 + (-13)^2}} = \frac{|x + 3y + 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}};$$

$$\frac{|9x - 13y + 10|}{5\sqrt{10}} = \frac{|x + 3y + 10|}{\sqrt{10}};$$

$$|9x - 13y + 10| = 5|x + 3y + 10|\,.$$

Репозиторий ВГУ

Тут возникает вопрос: а с какими знаками следует раскрывать модули? Здесь мы применим утверждение из § 4 главы 2 о том, что знак выражения Ax_1+By_1+C зависит от того, в какой полуплоскости находится точка.

Точка D находится по ту же сторону от прямой AB, что и точка C, и точка D находится по ту же сторону от прямой AC, что и точка B. Поэтому следует в левую часть уравнения прямой AC подставить координаты точки B, а в левую часть уравнения прямой AB подставить координаты точки C и раскрыть соответствующие модули с теми знаками, которые получатся при подстановке. В нашем примере мы получим знак «+» в обоих случаях. Поэтому уравнение биссектрисы

$$9x-13y+10-5(x+3y+10)=0$$

$$4x-28y-40=0$$

$$x-7y-10=0.$$

3 способ. Векторы $|\overrightarrow{AC}|\cdot\overrightarrow{AB}$ и $|\overrightarrow{AB}|\cdot\overrightarrow{AC}$ направлены по сторонам треугольника и имеют равную длину. Если на этих векторах, отложенных из точки A, построить треугольник, то он будет равнобедренным и его медиана будет служить биссектрисой $\angle BAC$. Вектор, задающий медиану нового треугольника, – это вектор

$$\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|\cdot\overrightarrow{AC}). \qquad (2.30)$$

В качестве направляющего вектора биссектрисы можем взять любой вектор, коллинеарный вектору (2.30). Например, это может быть вектор

$$\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC},$$

где $\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}$. В нашем случае – это вектор $\overrightarrow{AB}+2{,}5\overrightarrow{AC}$. Его координаты

$(13+2{,}5\cdot 6,\ 9+2{,}5\cdot(-2))$, т.е. $(28, 4)$. Он коллинеарен вектору $\vec{\mathbf{a}}(7, 1)$. Дальнейшие действия описаны в 1 способе решения задачи.

Ответ: AD: $x-7y-10=0$.

***Задача* 5.** *Даны уравнения двух медиан* $x-y-3=0$, $5x+4y-9=0$ *треугольника* ABC *и координаты вершины* $A(-1, 2)$. *Составьте уравнение третьей медианы*.

Решение. Сначала мы убедимся, что точка A не принадлежит данным медианам. Медианы треугольника пересекаются в одной точке M. Поэтому они входят в пучок прямых, проходящих через M. Составим уравнение этого пучка:

$$\lambda(x-y-3)+\mu(5x+4y-9)=0.$$

Коэффициенты λ и μ определяются с точностью до пропорциональности; поэтому можем считать, что $\mu=1$ (если $\mu=0$, то уравнение пучка задаёт

Репозиторий ВГУ

только первую медиану, а искомая прямая не совпадает с ней). Получаем уравнение пучка:

$$(\lambda+5)\,x+(-\lambda+4)\,y-3\lambda-9=0.$$

Нам надо из этого пучка выбрать ту прямую, которая проходит через точку $A(-1,\,2)$. Подставим координаты точки A в уравнение пучка:

$$-(\lambda+5)+2(-\lambda+4)-3\lambda-9=0,$$

$$-6\lambda-6=0,\ \ \lambda=-1.$$

Найденное значение λ подставляем в уравнение пучка и получаем искомое уравнение медианы:

$$4x+5y-6=0.$$

***Ответ*:** $4x+5y-6=0.$

***Задача* 6.** *Окружность ω задана уравнением* $(x+2)^2+(y-5)^2=10.$ *Составить уравнения касательных, проведённых из точки* $P(0,9)$ *к этой окружности*.

Решение. Сначала выясним, имеет ли задача решение и какой способ следует применять при решении. Если точка P лежит внутри окружности, то решений нет. Если точка лежит на окружности, то задача решается очень просто: касательная будет перпендикулярна вектору $\overrightarrow{O'P}$, где O' – центр окружности.

Подставим координаты точки P в уравнение окружности. Если слева получится число меньшее 10, то точка лежит внутри окружности, если слева получится число большее 10, то точка лежит вне окружности.

$$(0+2)^2+(9-5)^2=16.$$

Получилось число большее 10. Точка лежит вне окружности.

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через P. Для этого нам надо иметь уравнения любых двух прямых, проходящих через P. Самый простой выбор: $x=0$ и $y-9=0$. Умножаем первое уравнение на параметр λ, а второе – на параметр μ. Затем эти уравнения складываем:

$$\lambda x+\mu y-9\mu=0. \tag{2.31}$$

Касательные к окружности выделяются из пучка тем свойством, что расстояние от центра окружности до этих прямых равно радиусу окружности, т.е. равно $\sqrt{10}$. Координаты центра окружности: $O'(-2,\,5)$. Находим расстояние от этой точки до прямой (2.31) и приравниваем к $\sqrt{10}$:

$$\frac{|-2\lambda+5\mu-9\mu|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}=\sqrt{10},$$

$$|-2\lambda-4\mu|=\sqrt{10}\,\sqrt{\lambda^2+\mu^2},$$

$$2\,|\lambda+2\mu|=\sqrt{10}\,\sqrt{\lambda^2+\mu^2}.$$

Репозиторий ВГУ

Возводим в квадрат:

$$4(\lambda^2+4\lambda\mu+4\mu^2)=10(\lambda^2+\mu^2),$$

$$-3\lambda^2+8\lambda\mu+3\mu^2=0.$$

Это однородное уравнение второй степени. Делим данное уравнение на $-\mu^2$ и получаем квадратное уравнение относительно переменной $t=\lambda/\mu$:

$$3t^2-8t-3=0,$$

$$t_1=3,\ t_2=-\frac{1}{3},$$

$$\frac{\lambda}{\mu}=3 \ \text{ или } \ \frac{\lambda}{\mu}=-\frac{1}{3},$$

$$\lambda=3\mu \ \text{ или } \ \lambda=-\frac{1}{3}\mu.$$

Нас устраивает любое частное решение. Например, $\lambda_1=3$, $\mu_1=1$; $\lambda_2=1$, $\mu_2=-3$. Подставляем найденные значения параметров в уравнение (2.31) и получаем уравнения двух прямых.

***Ответ*:** $3x+y-9=0$, $x-3y+27=0$.

Задача 7. *Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых* (*пересекаются, параллельны, совпадают*). *Если прямые пересекаются, то найдите угол между ними, если параллельны, то найдите расстояние между ними*.

а) l_1: $6x+y+5=0$, l_2: $5x+7y+11=0$.

Решение. Признак параллельности двух прямых, заданных общими уравнениями, содержится в теореме 2.2.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

Проверяем данные прямые на параллельность:

$$\frac{6}{5}\neq\frac{1}{7}\neq\frac{5}{11}.$$

Признак не выполнен. Значит, прямые пересекаются. Находим угол между ними по формуле (2.20):

$$\cos\alpha=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\frac{|6\cdot5+1\cdot7|}{\sqrt{6^2+1^2}\sqrt{5^2+7^2}}=$$

$$=\frac{|37|}{\sqrt{37}\sqrt{74}}=\frac{|37|}{\sqrt{37}\sqrt{37\cdot2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

***Ответ*:** прямые пересекаются, $\alpha=45^\circ$.

Репозиторий ВГУ

б) $l_1: \; 12x - 9y + 10 = 0$, $l_2: \; -8x + 6y + 5 = 0$.

Решение. Проверяем на параллельность:

$$\frac{12}{-8} = \frac{-9}{6} \neq \frac{10}{5} \text{ – верно.}$$

Значит, $l_1 \parallel l_2$. Найдём расстояние между ними.

<u>1 способ</u>. Приведём оба уравнения к нормальной форме. Для этого первое уравнение делим на $\sqrt{12^2 + (-9)^2} = 15$, а второе – на $\sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$. Однако нам надо получить одинаковые первые коэффициенты, поэтому мы ещё умножим первое уравнение на -1.

$$0{,}8x - 0{,}6y + \frac{2}{3} = 0, \;\; 0{,}8x - 0{,}6y + \frac{1}{2} = 0.$$

Примем без доказательства следующий факт. Если две прямые заданы уравнениями в нормальной форме с одинаковыми коэффициентами при x и y: $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$, то расстояние между ними равно $|C_2 - C_1|$. В нашем случае

$$\rho(l_1, l_2) = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}.$$

<u>2 способ</u>. Выберем на одной из прямых точку и вычислим расстояние от этой точки до второй прямой. Это расстояние и будет расстоянием между прямыми. Выбрать точку – означает подобрать две координаты, удовлетворяющие уравнению. Например, если выбрать $y = 0$, то из уравнения l_1 найдём $x = -\frac{5}{6}$, $M\left(-\frac{5}{6}, 0\right) \in l_1$. Применяем формулу (2.24′) к точке M и уравнению l_2:

$$h = \frac{\left|-8 \cdot (-\frac{5}{6}) + 6 \cdot 0 + 5\right|}{\sqrt{(-8)^2 + 6^2}} = \left|-\frac{20}{3} + 5\right| : 10 = \frac{1}{6}.$$

***Ответ*:** прямые параллельны, $\rho(l_1, l_2) = \frac{1}{6}$.

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. *Эллипс*

***Определение* 3.1.** *Эллипсом* называется множество точек γ на плоскости, обладающее следующим свойством: существуют такие точки F_1, F_2, называемые *фокусами*, что сумма расстояний от произвольной точки M эллипса до F_1 и от M до F_2 есть величина постоянная:

$$|MF_1|+|MF_2|=2a=\text{const}, \qquad (3.1)$$

т.е. независящая от выбора точки $M\in\gamma$, и $2a>|F_1F_2|$ (рис. 3.1).

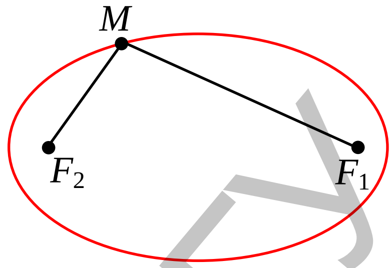


рис. 3.1

Составим уравнение эллипса в декартовых координатах. Для этого выберем декартову СК следующим образом: начало координат O поместим в середину отрезка F_1F_2 и направим $Ox\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF_1}$. Тогда ось Oy определится однозначно. Обозначим $|F_1F_2|=2c$. Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ (рис. 3.2).

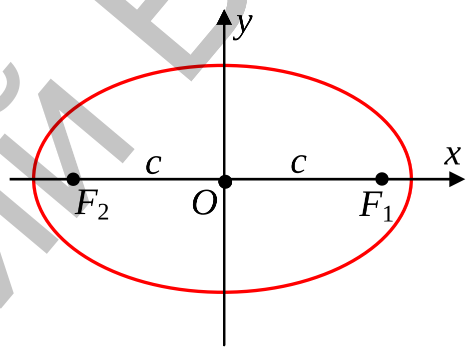


рис. 3.2

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда расстояния от этой точки до фокусов равны

$$|MF_1|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \qquad |MF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Согласно определению (3.1) имеем

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Возведём обе части равенства в квадрат и сократим одинаковые слагаемые:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2.$$

$$-4xc=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad\Leftrightarrow\quad a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc.$$

Еще раз возводим в квадрат, сокращаем и группируем:

$$a^2(x^2+2xc+c^2+y^2)=a^4+2a^2xc+x^2c^2,$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Согласно определению $a>c$; поэтому можем ввести обозначение $b^2=a^2-c^2$ и, разделив на a^2b^2, окончательно получаем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.2)$$

Репозиторий ВГУ

Мы доказали, что координаты произвольной точки эллипса удовлетворяют уравнению (3.2). Необходимо ещё доказать обратное: если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют (3.2), то выполнено (3.1).

Из (3.2) выразим $y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ и подставим в выражение для $|MF_1|$, учитывая при этом введённое обозначение $b^2 = a^2 - c^2$:

$$|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + (a^2 - c^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2 - 2xc + \frac{c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2} = \left|a - \frac{cx}{a}\right|.$$

Аналогично получаем, что $|MF_2| = \left|a + \frac{cx}{a}\right|$. Из (3.2) следует, что

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad\Rightarrow\quad x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \le a^2.$$

Следовательно, $|x| \le a$, и к тому же, по определению, $a > c$. Из этого следует, что

$$a - \frac{cx}{a} \ge 0 \quad \text{и} \quad a + \frac{cx}{a} \ge 0.$$

Поэтому мы можем модули вокруг этих выражений опустить. В итоге получаем

$$|MF_1| + |MF_2| = a - \frac{cx}{a} + a + \frac{cx}{a} = 2a. \qquad \blacksquare$$

***Определение* 3.2.** Уравнение (3.2) называется *канонического уравнением* эллипса.

Геометрические свойства эллипса.

1. Как мы уже отметили, из (3.2) следует, что $|x| \le a$, и аналогично получаем, что $|y| \le b$. Значит, эллипс целиком содержится в прямоугольнике, который определяется этими неравенствами.

Подчеркнём, что это и другие свойства выводятся только из уравнения эллипса, без ссылки на наглядность чертежа.

2. Ось Ox задаётся уравнением $y = 0$. Для того чтобы найти точки пересечения оси Ox с эллипсом, мы подставляем $y = 0$ в уравнение (3.2):

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 = a^2.$$

Имеем два решения: $x_1 = a$, $x_2 = -a$.

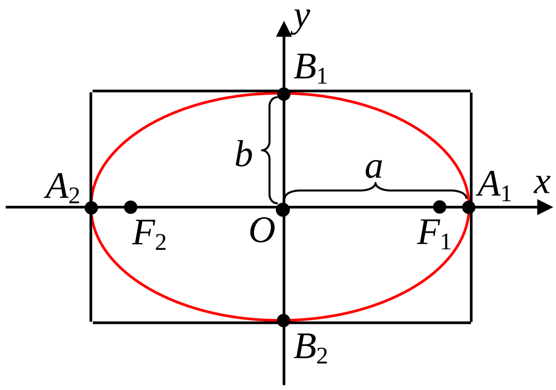


рис. 3.3

Репозиторий ВГУ

Тем самым, мы выяснили, что ось Ox пересекает эллипс в точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Аналогично доказывается, что ось Oy пересекает эллипс в точках $B_1(0, b)$, $B_2(0,-b)$.

***Определение* 3.3.** Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса*. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются *большим и малым диаметрами эллипса*, а вместе – *главными диаметрами*. Числа a и b называются *большой и малой полуосями*.

Продолжаем исследовать геометрические свойства эллипса.

3. Координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром симметрии.

Действительно, пусть $M(x, y)$ – произвольная точка. На рисунке 3.4 показано, какие координаты имеют точки, симметричные M относительно координатных осей и относительно начала координат. Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то пара (x, y) удовлетворяет уравнению (3.2). Тогда этому уравнению удовлетворяют также и координаты всех точек, показанных на рисунке 3.4. Следовательно, все эти точки тоже принадлежат эллипсу.

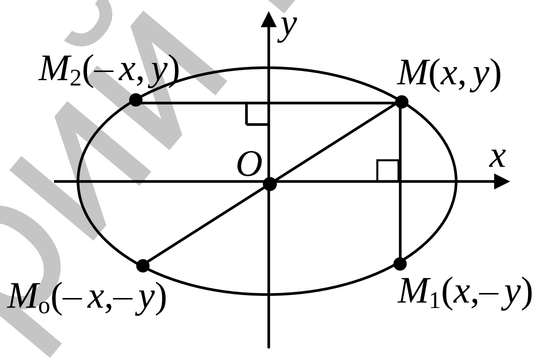


рис. 3.4

4. Эллипс может быть получен из окружности

$$\omega:\ X^2 + Y^2 = a^2 \tag{3.3}$$

в результате равномерного сжатия вдоль оси Oy с коэффициентом $k = a/b$. Действительно, при таком сжатии точка $M'(X, Y) \in \omega$ будет переходить в точку $M(x, y)$ (рис. 3.5), где

$$\begin{cases} x = X, \\ y = \dfrac{b}{a}Y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x, \\ Y = \dfrac{a}{b}y. \end{cases}$$

Подставим последние формулы в (3.3):

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2.$$

После преобразований получим, что для координат точки M выполнено (3.2), т.е. M принадлежит эллипсу.

Мы изучим подробно преобразование сжатия в главе 8.

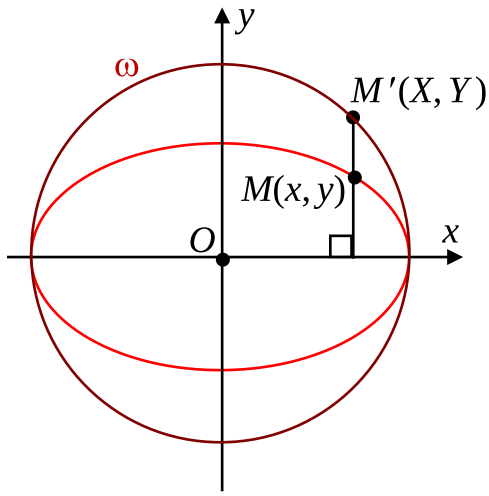


рис. 3.5

5. Эллипс может быть получен из окружности в результате проекции

Репозиторий ВГУ

окружности на плоскость σ, не параллельную плоскости окружности $\bar{\sigma}$. Действительно, при такой проекции (рис. 3.6) отрезки, параллельные линии пересечения плоскостей $l = \sigma \cap \bar{\sigma}$ сохраняют длину, а отрезки, перпендикулярные l, сжимаются в $1/\cos\alpha$ раз ($|OM|:|OM'| = \cos\alpha$), где α – угол между σ и $\bar{\sigma}$. Таким образом, окружность сжимается по одному направлению, и согласно свойству 4 из неё получается эллипс.

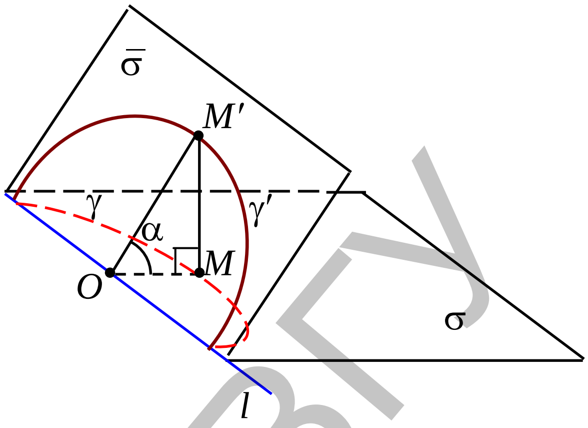


рис. 3.6

6. Самостоятельно убедитесь, что *параметрические уравнения эллипса* имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha, \\ y = b\sin\alpha,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{3.4}$$

§ 2. *Гипербола*

Определение **3.4.** *Гиперболой* называется множество точек γ на плоскости, обладающее следующим свойством: существуют такие точки F_1, F_2, называемые *фокусами*, что модуль разности расстояний от произвольной точки M гиперболы до F_1 и от M до F_2 есть величина постоянная:

$$\big|\,|MF_1| - |MF_2|\,\big| = 2a = \text{const}, \tag{3.5}$$

т.е. независящая от выбора точки $M \in \gamma$, и $2a < 2c = |F_1F_2|$.

Составим уравнение гиперболы в декартовых координатах. Выберем декартову СК следующим образом: начало координат O поместим в середину отрезка F_1F_2 и направим $Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF_1}$ (рис. 3.7). Тогда ось Oy определится однозначно.

Обозначим $|F_1F_2| = 2c$. Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы. Тогда

$$|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$|MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

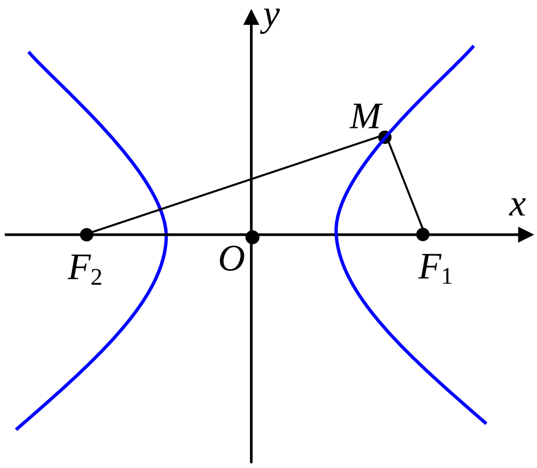


рис. 3.7

Репозиторий ВГУ

Согласно определению 3.4 имеем

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Далее совершаем дословно такие же преобразования, что и для эллипса. В результате получим уравнение

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

Упражнение. *Проделайте эти преобразования самостоятельно.*

По определению $a<c$, поэтому можем ввести обозначение $b^2=c^2-a^2$. Далее разделим уравнение на a^2b^2 и окончательно получим

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.6}$$

Мы доказали, что координаты произвольной точки гиперболы удовлетворяют (3.6). Необходимо ещё доказать обратное: если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют (3.6), то выполнено (3.5). Из (3.6) выразим

$$y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)$$

и подставим в выражение для $|MF_1|$, учитывая при этом обозначение $b^2=c^2-a^2$. Точно так же, как и для эллипса, получим

$$|MF_1|=\left|a-\frac{cx}{a}\right|, \qquad |MF_2|=\left|a+\frac{cx}{a}\right|. \tag{3.7}$$

Упражнение. *Проделайте это самостоятельно.*

Из (3.6) вытекает, что $x^2=a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow |x|\geq a$, и по определению также $c>a$. Значит, второе слагаемое в формулах (3.7) по модулю больше первого. Поэтому при $x\geq a$ получаем

$$|MF_1|=\frac{cx}{a}-a, \qquad |MF_2|=a+\frac{cx}{a},$$

а при $x\leq -a$ получаем

$$|MF_1|=a-\frac{cx}{a}, \qquad |MF_2|=-a-\frac{cx}{a}.$$

В обоих случаях выполняется (3.5). ■

***Определение* 3.5.** Уравнение (3.6) называется *<u>каноническим уравнением гиперболы</u>*.

<u>Геометрические свойства гиперболы.</u>

1. Мы уже отмечали, что для любой точки $M(x,y)$ на гиперболе выполнено

$$x^2=a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow |x|\geq a,$$

Репозиторий ВГУ

кроме того, из (3.5) следует

$$x^2 > \frac{a^2y^2}{b^2} \Leftrightarrow |x| > \frac{a}{b}|y|.$$

Значит, вся гипербола содержится в области, определяемой этими неравенствами. Она заштрихована на рисунке 3.8.

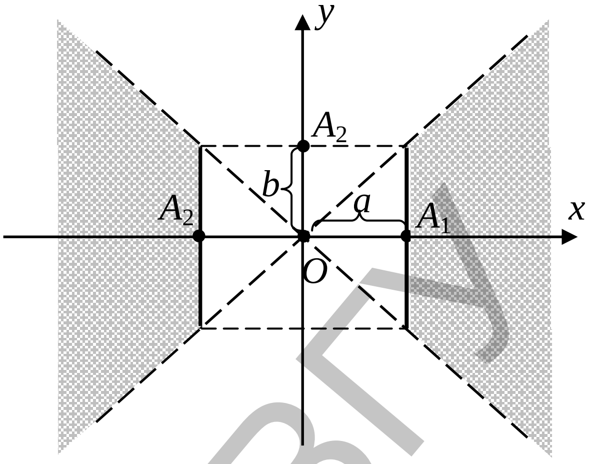


рис. 3.8

2. Точно так же, как и для эллипса, доказывается, что ось Ox пересекает гиперболу в точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Ось Oy гиперболу не пересекает.

***Определение* 3.6.** Точки $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ называются *вершинами гиперболы*. Числа a и b называются *полуосями гиперболы* – *действительной и мнимой*.

3. Дословно так же, как и для эллипса, доказывается, что координатные оси являются осями симметрии эллипса, а начало координат – центром симметрии.

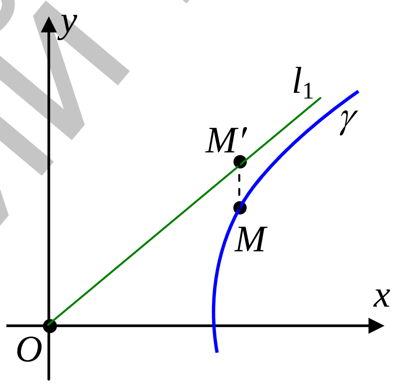


рис. 3.9

4. Прямые

$$l_1: y = \frac{b}{a}x \text{ и } l_2: y = -\frac{b}{a}x$$

называются *асимптотами гиперболы*. Гипербола неограниченно к ним приближается на бесконечности, но не пересекает.

Докажем это свойство для первой координатной четверти. Пусть $M(x, y)$ – точка на гиперболе, а $M'(x, y')$ – на соответствующей асимптоте l_1. Тогда расстояние от точки M до асимптоты меньше, чем $|MM'|$. При этом

$$|MM'| = y' - y,$$

$$(y')^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Из последних равенств вытекает, что при $x \to \infty$ будет $|y'| \to \infty$ и $|y| \to \infty$, а в первой четверти оба значения y и y' положительны. Кроме этого,

$$(y')^2 - y^2 = b^2$$

и поэтому

$$y' - y = \frac{b^2}{y' + y} \to 0 \text{ при } x \to \infty.$$

Заметим, что обе асимптоты можно задать вместе одним уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. Для его получения достаточно в правой части уравнения (3.6) заменить 1 на 0.

***Определение* 3.7.** Прямоугольник, который определяется неравенствами $|x|\le a,\ |y|\le b$, называется *фундаментальным, или основным, прямоугольником гиперболы*.

Асимптоты проходят через диагонали фундаментального прямоугольника. Для построения гиперболы рекомендуется сначала изобразить этот прямоугольник.

5. При $a=b$ гипербола называется *равнобокой*, или *равносторонней*. Её уравнение

$$x^2-y^2=a^2, \tag{3.8}$$

а асимптоты задаются уравнениями

$$l_1:\ y=x,\ \ l_2:\ y=-x.$$

Тем самым, l_1 и l_2 – это биссектрисы координатных углов и они перпендикулярны друг другу (рис. 3.10). Выберем их в качестве осей новой декартовой СК $Ox'y'$, которая получается из Oxy поворотом на угол -45°. Тогда формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'),\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y'). \end{cases}$$

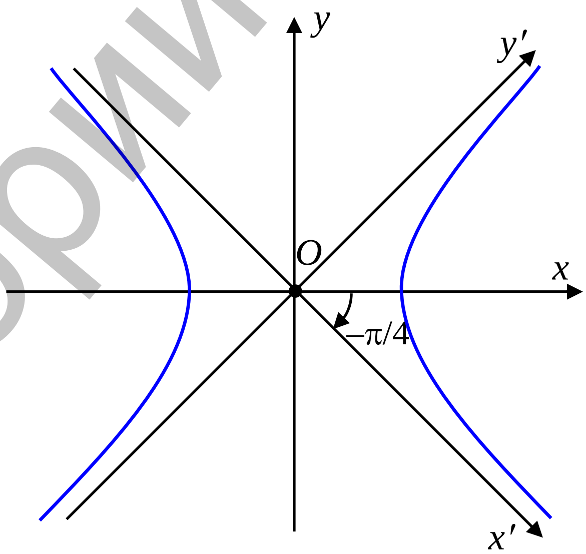


рис. 3.10

Подставим их в (3.8) и получим уравнение

$$2x'y'=a^2 \quad\Leftrightarrow\quad y'=\frac{k}{x'},$$

где $k=a^2/2$. Таким образом, равнобокая гипербола задаёт график обратной пропорциональности.

6. *Параметрические уравнения гиперболы* имеют вид:

$$\begin{cases} x=\pm a\,\mathrm{ch}\,t,\\ y=b\,\mathrm{sh}\,t,\ t\in\boldsymbol{R}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=a(t+\frac{1}{t}),\\ y=b(t-\frac{1}{t}),\ t\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty). \end{cases}$$

Знак «+» соответствует одной ветви гиперболы, а «–» – другой ветви. По поводу функций $y=\mathrm{sh}\,x$ и $y=\mathrm{ch}\,x$ см. приложение §2.

Упражнение. Проверьте это самостоятельно.

Репозиторий ВГУ

***Определение* 3.8.** Гипербола

$$\gamma': \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

называется *сопряжённой к гиперболе* γ, заданной уравнением (3.6).

7. Сопряжённая гипербола имеет тот же фундаментальный прямоугольник, те же асимптоты, только расположена в другой паре вертикальных углов, образованных этими асимптотами.

На рисунке 3.11 изображены вместе две гиперболы.

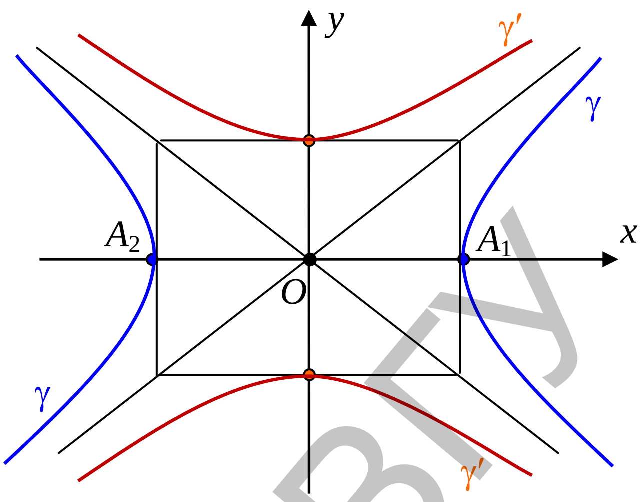


рис. 3.11

§ 3. *Конические сечения. Парабола*

***Определение* 3.9.** *Коническим сечением* (КС) называется кривая, по которой коническую поверхность пересекает плоскость, не проходящая через вершину этой поверхности.

В следующей главе мы покажем, что коническая поверхность выглядит именно так, как это изображено на рисунке 3.12, и убедимся, что коническими сечениями могут быть эллипс, гипербола и парабола. Причём парабола получается тогда и только тогда, когда секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса.

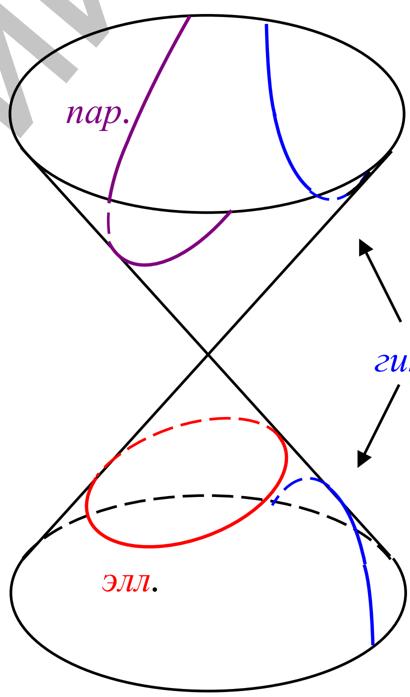


рис. 3.12

Следующие две теоремы примем без доказательства.

***Теорема* 3.1.** *Для всякого КС* γ, *кроме окружности, существуют точка* F, *называемая фокусом, и прямая* δ, *называемая директрисой, такие, что отношение расстояний от произвольной точки* $M \in \gamma$ *до* F *и от* M *до* δ *есть величина постоянная (т.е. независящая от выбора точки* $M \in \gamma$).

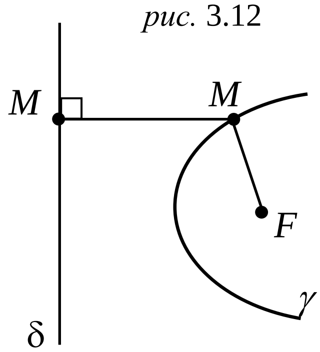


рис. 3.13

***Определение* 3.10.** Эта величина $\varepsilon = |MF|/|MM'|$ (рис. 3.12) называется *эксцентриситетом* конического сечения, а рас-

Репозиторий ВГУ

стояние $p = |FF'|$ от фокуса до директрисы называется его *параметром*.

Чем меньше ε, тем ближе кривая расположена к фокусу. При $0 < \varepsilon < 1$ кривая замкнута и представляет собой эллипс. Чем ближе ε к единице, тем более эллипс вытянут. При $\varepsilon = 1$ он как бы достигает бесконечной длины и происходит его разрыв: эллипс превращается в параболу (рис. 3.14).

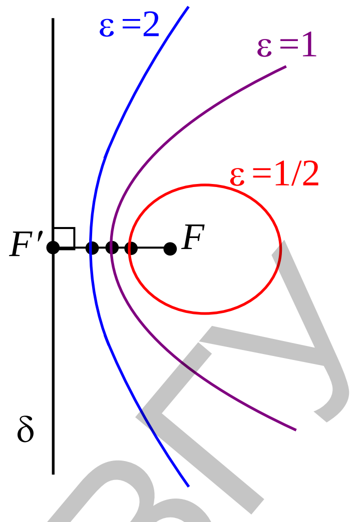


рис. 3.14

Чем больше ε, тем ближе кривая расположена к директрисе. При $1 < \varepsilon < \infty$ получается гипербола.

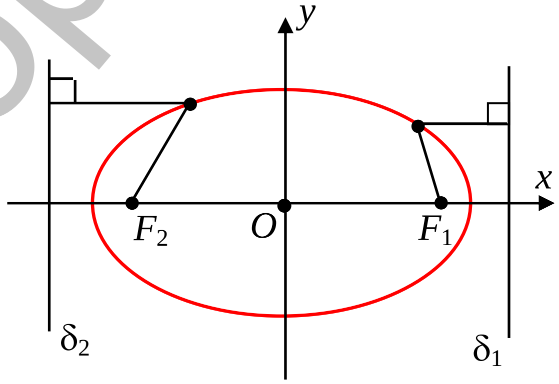
Очевидно, что эксцентриситет параметр $p = |FF'|$ однозначно определяют КС. Действительно, если два КС имеют одинаковое расстояние от фокуса до директрисы, то мы можем движением совместить их фокусы и директрисы. А если у них ещё одинаковое ε, то и сами КС совместятся. Если же два КС имеют одинаковое ε, но разное расстояние от F до δ, то они подобны. В частности, все параболы подобны друг другу.

***Теорема* 3.2.** *Эксцентриситет эллипса или гиперболы, заданных своими каноническими уравнениями* (3.2) *или* (3.6), *равен* c/a, *фокусы имеют координаты* $F_1(c,\ 0)$, $F_2(-c,\ 0)$, *а директрисы задаются уравнениями*

$$\delta_1 : x = \frac{a^2}{c}, \quad \delta_2 : x = \frac{a^2}{c}$$

(напомним, что $c^2 = a^2 - b^2$ для эллипса и $c^2 = a^2 + b^2$ для гиперболы).

Из этой теоремы следует, что фокусы эллипса или гиперболы, которые мы определили в §1 и 2, совпадают с фокусами, определёнными в этом параграфе. Кроме того, эллипс и гипербола имеют две пары «фокус–директриса» (рис. 3.15), и определить фигуру можно с помощью любой из пар.



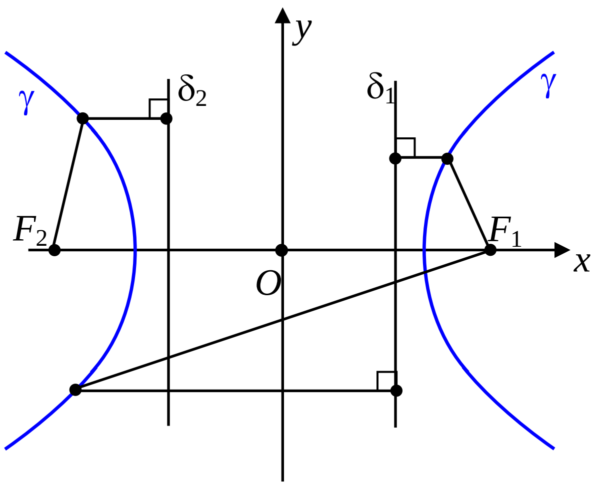


рис. 3.15

Репозиторий ВГУ

***Определение* 3.11.** Параболой называется КС, эксцентриситет которого равен единице.

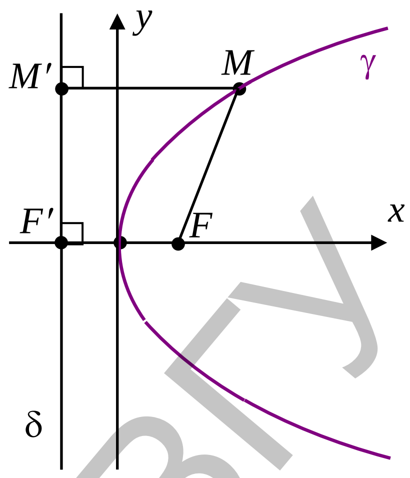


рис. 3.16

Составим уравнение параболы в декартовой СК. Мы уже ввели обозначение $p=|FF'|$ – расстояние от фокуса до директрисы. Начало координат поместим в середину отрезка FF' и направим $Ox\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF}$. Тогда ось Oy определится однозначно. Фокус будет иметь координаты $F(p/2,\,0)$, а директриса – уравнение $\delta\colon x=-p/2$ (рис. 3.16).

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка параболы. Тогда

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\,,\quad |MM'|=x+\frac{p}{2}.$$

Согласно определению 3.11

$$|MF|^2=|MM'|^2\ \Rightarrow\ \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}\ \Rightarrow$$

$$y^2=2px. \tag{3.9}$$

Обратно, если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют (3.9), то

$$|MF|^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px=x^2+px+\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=|MM'|^2. \ \blacksquare$$

***Определение* 3.12.** Уравнение (3.9) называется *каноническим уравнением параболы*.

Геометрические свойства параболы.

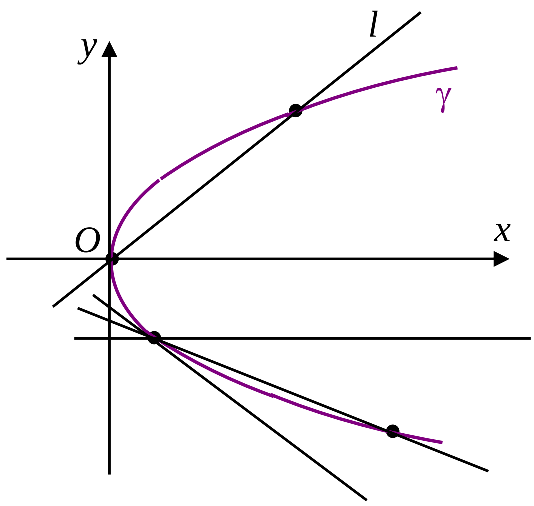


рис. 3.17

1. Все точки параболы принадлежат полуплоскости $x\geq 0$.

2. Если точка $M(x,\,y)$ принадлежит параболе, то пара $(x,\,y)$ удовлетворяет уравнению (3.9). Тогда этому уравнению удовлетворяет также и пара $(x,-y)$, которая задаёт точку, симметричную M относительно оси Ox. Поэтому Ox является осью симметрии параболы. Других симметрий у параболы нет.

3. Координатные оси пересекают параболу только в точке O, которая называется *вершиной параболы*. Любая другая прямая, проходящая через вершину, пересекает параболу ещё в одной точке.

Действительно, любую прямую l, проходящую через O, кроме оси Oy, можно задать уравнением $y = kx$. Для того чтобы найти её общие точки с параболой γ, решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2x^2 - 2px = 0, \\ y = kx. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(k^2x - 2p) = 0, \\ y = kx. \end{cases}$$

При $k \neq 0$ получаем два решения – $(0, 0)$ и $\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)^2$, а при $k = 0$ – только одно – $(0, 0)$. Значение $k = 0$ соответствует оси Ox.

Аналогично можно доказать, что любая прямая, параллельная оси параболы, пересекает её только в одной точке, а любая другая прямая, проходящая через эту точку, кроме касательной, обязательно пересечёт параболу ещё в одной точке.

Отметим ещё ряд интересных *оптических свойств* конических сечений.

Луч света, исходящий из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса, проходит через второй его фокус (рис. 3.18). Математически это означает, что для любой точки M на эллипсе отрезки MF_1 и MF_2 образуют с касательной к эллипсу в точке M равные углы.

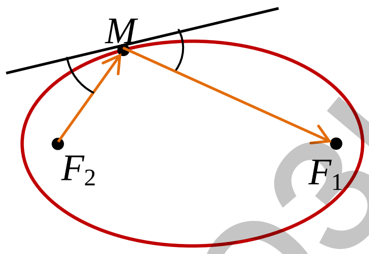


рис. 3.18

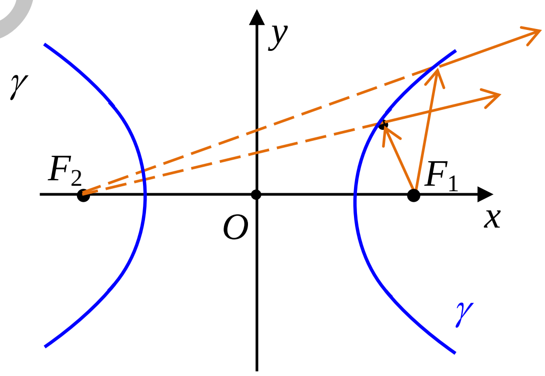


рис. 3.19

Луч света, исходящий из одного фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы, кажется исходящим из второго фокуса (рис. 3.19). Луч света, исходящий из фокуса параболы, после отражения от параболы, движется параллельно ее оси. И, наоборот, лучи, приходящие из бесконечности параллельно оси параболы, концентрируются в фокусе (рис. 3.20). На этом свойстве параболы основано действие параболических рефлекторов, параболических антенн и радаров.

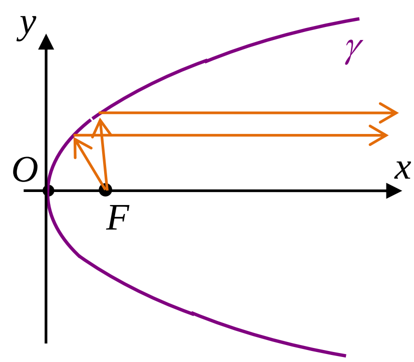


рис. 3.20

Репозиторий ВГУ

§ 4. *Касательные к коническим сечениям*

***Определение* 3.13.** Пусть γ – некоторая кривая, P – точка на ней. Выберем близкую к ней точку $Q\in\gamma$. Прямую PQ назовём секущей. Если при приближении Q к P секущая стремится занять определённое положение l, то прямая l называется *касательной к кривой* γ *в точке* P.

Математически более точным является следующее определение.

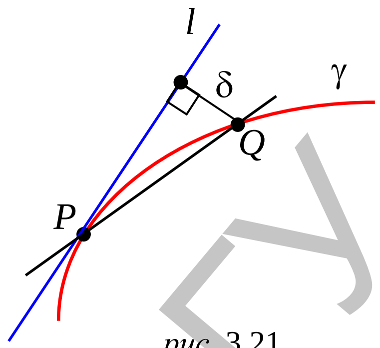


рис. 3.21

***Определение* 3.14.** Пусть γ – это кривая, P – точка на ней, а l – некоторая прямая, проходящая через P. Выберем близкую к P точку $Q\in\gamma$. Обозначим $d=|PQ|$, δ – расстояние от Q до l (рис. 3.21). Если $\lim\limits_{Q\to P}\dfrac{\delta}{d}=0$, то прямая l называется *касательной к кривой* γ *в точке* P.

Пусть кривая γ задана уравнением в неявном виде

$$\varphi(x,y)=0,$$

а $P(x_o, y_o)\in\gamma$. В курсе дифференциальной геометрии будет доказано, что вектором нормали касательной к кривой γ в точке P будет вектор градиента функции φ, вычисленный в точке P

$$\operatorname{grad}_P\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_P$$

(это вектор, составленный из частных производных функции φ). Поэтому уравнение касательной имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x-x_o)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y-y_o)=0.$$

Пусть наша кривая – это эллипс. Его уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Тогда $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{2x}{a^2}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{2y}{a^2}$. Но нам ещё нужно подставить в частные производные координаты точки $P(x_o,y_o)$. В итоге

$$\operatorname{grad}_P\varphi=\left(\frac{2x_o}{a^2},\frac{2y_o}{b^2}\right),$$

а уравнение касательной в точке P –

$$\frac{2x_o}{a^2}(x-x_o)+\frac{2y_o}{b^2}(y-y_o)=0.$$

Репозиторий ВГУ

Разделим уравнение на 2 и раскроем скобки:

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)=0.$$

Поскольку $P(x_0, y_0)\in\gamma$, то выражение в скобках равно 1, и мы окончательно получаем уравнение касательной к эллипсу:

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1. \qquad (3.10)$$

Аналогично получаем уравнение касательной к гиперболе, заданной каноническим уравнением (3.5):

$$\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1. \qquad (3.11)$$

Упражнение. *Пусть парабола задана каноническим уравнением* (3.9). *Докажите, что уравнение касательной к параболе в точке* $P(x_0, y_0)$ *имеет вид* $y_0y-p(x+x_0)=0$.

§ 5. *Диаметры конических сечений*

***Определение* 3.15.** *Диаметром эллипса или гиперболы* называется любая прямая, проходящая через их центр симметрии. *Диаметром параболы* называется любая прямая, параллельная её оси. Отрезок, два конца которого лежат на коническом сечении, называется *хордой*.

Мы уже знаем, что эллипс является проекцией окружности. Касательные к окружности или эллипсу можно характеризовать как прямые, имеющие с ней только одну общую точку.

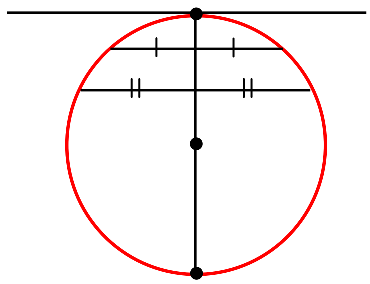


рис. 3.22

Поэтому проекцией касательной будет тоже касательная. Из школьной программы известно, что середины параллельных хорд окружности лежат на диаметре, при этом касательная к окружности в конце этого диаметра параллельна хордам (рис. 3.22).

При проецировании параллельные отрезки переходят в параллельные отрезки, а середина отрезка – в середину его проекции (рис. 3.23). Поэтому вышеупомянутые свойства окружности переносятся на эллипс (рис. 3.24). Более подробно это освещает предмет «Методы изображения фигур».

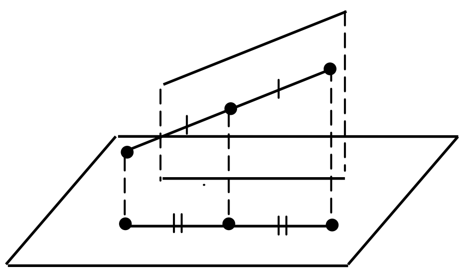


рис. 3.23

Оказывается, теми же свойствами обладают также гипербола и парабола (рис. 3.25 и 3.26). Единственное отличие от окружности в том, что диаметр, который делит хорды

Репозиторий ВГУ

пополам, не обязательно перпендикулярен хордам.

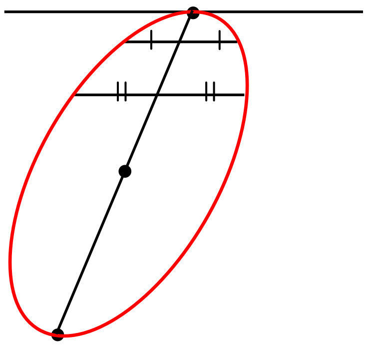


рис. 3.24

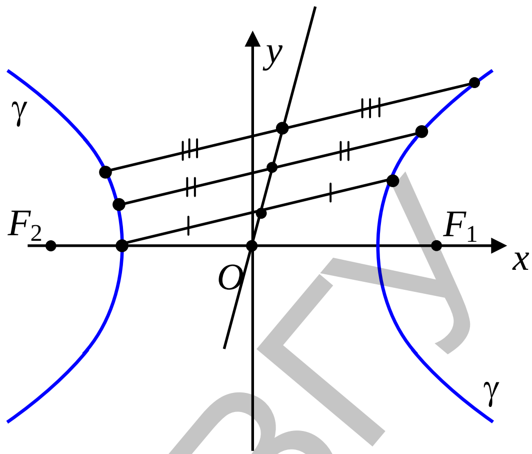


рис. 3.25

***Теорема* 3.3.** *Середины параллельных хорд конического сечения лежат на диаметре. Направление этого диаметра называется сопряжённым к направлению хорд*.

Доказательство. Пусть γ – эллипс или гипербола. Тогда ее уравнение можно записать в виде

$$\alpha x^2+\beta y^2-1=0.$$

Семейство параллельных хорд можно задать уравнениями $y=kx+b$, где k одинаково для всех хорд. Тогда координаты концов хорд удовлетворяют системе

$$\begin{cases}\alpha x^2+\beta y^2-1=0,\\ y=kx+b.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\alpha x^2+\beta(kx+b)^2-1=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta k^2)x^2+(2\beta kb)x+(\beta b^2-1)=0.$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестной координаты x. По теореме Виета

$$x_1+x_2=-\frac{2\beta kb}{\alpha+\beta k^2},$$

где x_1 соответствует одному концу хорды, а x_2 – второму. Если $C(x_o, y_o)$ – середина хорды, то

$$x_o=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{\beta kb}{\alpha+\beta k^2}.$$

Подставляя это x_o в уравнение хорды, получаем

$$y_o=k\left(-\frac{\beta kb}{\alpha+\beta k^2}\right)+b=\frac{\alpha b}{\alpha+\beta k^2}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{y_o}{x_o}=-\frac{\alpha}{\beta k}\quad\Leftrightarrow\quad y_o=-\frac{\alpha}{\beta k}x_o.$$

Значит, середины всех хорд лежат на одной прямой

$$y=-\frac{\alpha}{\beta k}x.$$

Репозиторий ВГУ

Эта прямая проходит через начало координат, т.е. через центр кривой; значит, она является диаметром. Её угловой коэффициент $k' = -\alpha/\beta k$, т.е. для эллипса $k' = -b^2/a^2k$, а для гиперболы – $k' = b^2/a^2k$.

Диаметры, имеющие уравнения $y = kx$ и $y = k'x$, называются *сопряжёнными*. Очевидно, что свойство диаметров быть сопряжёнными взаимно, поскольку $k = -\alpha/\beta k'$, т.е. k выражается через k' по той же формуле, что и k' через k.

Пусть теперь γ – парабола. Тогда координаты концов параллельных хорд находятся из системы

$$\begin{cases} y^2 - 2px = 0, \\ y = kx + b. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения x через y и подставим в первое уравнение:

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2pb}{k} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y_o = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k} = \text{const}.$$

Значит, все середины хорд лежат на прямой $y = p/k$, которая параллельна оси Ox. ■

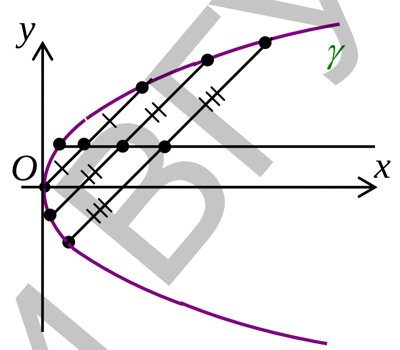


рис. 3.26

***Теорема* 3.4.** *Если диаметр пересекает коническое сечение, то касательные в точках пересечения параллельны сопряжённому диаметру.*

Доказательство. Пусть $Q(x_o, y_o)$ – точка пересечения диаметра $y = kx$ с эллипсом или гиперболой $\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0$. Уравнение касательной к кривой в точке Q:

$$(\alpha x_o)\,x + (\beta y_o)\,y - 1 = 0.$$

Отсюда

$$y = -\frac{\alpha x_o}{\beta y_o}x + \frac{1}{\beta y_o}.$$

Угловой коэффициент этой прямой $k' = -\dfrac{\alpha x_o}{\beta y_o}$. Т.к. точка $Q(x_o, y_o)$ лежит на диаметре, то $y_o = kx_o \Leftrightarrow x_o/y_o = 1/k$. Отсюда $k' = -\alpha/\beta k$, т.е. угловой координат касательной такой же, как и у сопряжённого диаметра. ■

§ 6. *Уравнения конических сечений в полярной системе координат*

Пусть γ – коническое сечение, ε – его эксцентриситет, F – фокус, FF' – перпендикуляр, опущенный на директрису δ. Выберем полярную СК так, чтобы полярная ось совпадала с лучом FF'. Обозначим $p = |FF'|$ – расстояние от фокуса до директрисы (рис. 3.27).

Пусть $M(r, \varphi)$ – произвольная точка кривой γ, MM' – перпендикуляр к δ, MM' – перпендикуляр к полярной оси. Тогда

$$|FM| = r, \ |MM'| = p - r\cdot\cos\varphi. \qquad (3.12)$$

Репозиторий ВГУ

Согласно определению $|FM|/|MM'| = \varepsilon$. Подставим в это равенство формулы (3.12):

$$\frac{r}{p - r\cdot\cos\varphi} = \varepsilon.$$

Для того чтобы получилось уравнение в явном виде, мы выразим из этого равенства r:

$$\varepsilon(p - r\cdot\cos\varphi) = r$$

$$\varepsilon p = r + \varepsilon r\cdot\cos\varphi$$

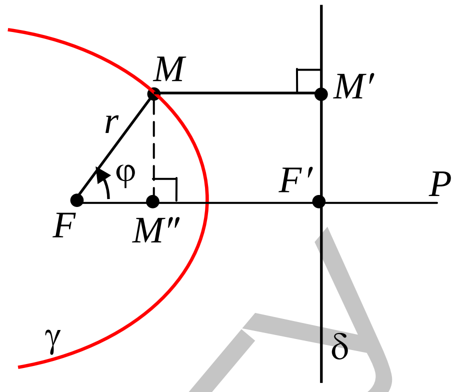


рис. 3.27

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon\cdot\cos\varphi}. \qquad (3.13)$$

Однако данное уравнение получается только в случае, изображённом на первом чертеже, т.е. когда кривая расположена по одну сторону от директрисы. Значит, оно верно для эллипса и параболы. Также (3.13) задаёт одну ветвь гиперболы. Гипербола имеет ещё одну ветвь, расположенную по другую сторону от δ (рис. 3.28). Если точка $M(r, \varphi)$ принадлежит этой ветви, то

$$|MM'| = |FM''| - |FF'| = r\cdot\cos\varphi - p.$$

Тогда точно также получим уравнение

$$r = \frac{-\varepsilon p}{1 - \varepsilon\cdot\cos\varphi}.$$

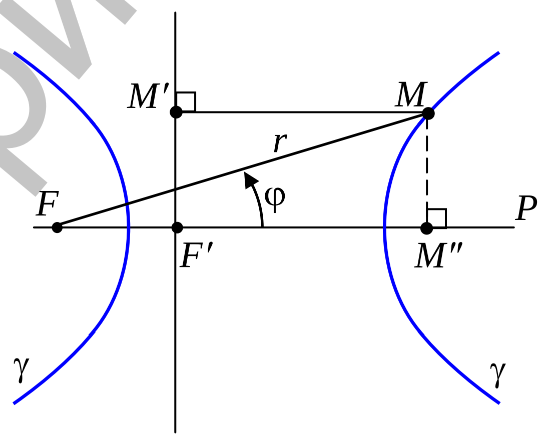


рис. 3.28

Окончательно имеем уравнение гиперболы

$$r = \frac{\pm\varepsilon p}{1 \pm \varepsilon\cdot\cos\varphi}. \qquad (3.13')$$

Итак, мы доказали, что эллипс и парабола задаются в полярной СК уравнением (3.13), а гипербола – уравнением (3.13′).

§ 7. *Общее уравнение кривой второго порядка. Центр кривой*

***Определение* 3.16.** *Кривой второго порядка* называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + c = 0 \qquad (3.14)$$

Репозиторий ВГУ

(*общее уравнение кривой второго порядка*), в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля. Выражение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

называется *квадратичной частью уравнения*, $2a_1x + 2a_2y$ – *линейной частью*, а c – *свободным членом*.

При переходе к новой СК $O'x'y'$ формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + b_1, \\ y = \gamma x' + \delta y' + b_2. \end{cases}$$

Если мы подставим эти выражения в (3.14), раскроем скобки, то снова получим уравнение такого же вида, содержащее x' и y' во второй и в первой степенях. Поэтому наше определение корректно, т.е. не зависит от выбора СК. В дальнейшем СК всегда предполагается декартовой.

***Определение* 3.17.** Точка O' называется *центром кривой второго порядка*, если она является её центром симметрии. Кривую, которая имеет единственный центр, будем называть *центральной*.

Предположим, что СК выбрана так, что её начало находится в центре кривой. Тогда одновременно с точкой $M(x, y)$ данной кривой будет принадлежать и точка $M'(-x,-y)$. Подставим её координаты в (3.9) и получим

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_1x - 2a_2y + c = 0. \tag{3.14′}$$

Сложим равенства (3.14) и (3.14′) и затем разделим на 2. Получим

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

И это должно выполняться для любой точки $M(x, y)$ на кривой. Поэтому если изначально начало координат не находится в центре O', то мы совершим параллельный перенос координатных осей в центр, и уравнение кривой в новой СК $O'x'y'$ примет вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + c' = 0. \tag{3.15}$$

Т.е. линейная часть уравнения исчезнет, и уравнение станет проще. При этом коэффициенты квадратичной части останутся прежними – это будет установлено в процессе доказательства следующей теоремы.

***Теорема* 3.5.** *Координаты* (x_0, y_0) *центра кривой, заданной уравнением* (3.14), *находятся из системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Репозиторий ВГУ

Доказательство. Введём новую декартову СК $O'x'y'$, которая получается из Oxy переносом начала в центр $O'(x_o, y_o)$ кривой. Тогда формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + x_o, \\ y = y' + y_o. \end{cases} \tag{3.17}$$

Подставим эти формулы в (3.14):

$$a_{11}(x'+x_o)^2 + 2a_{12}(x'+x_o)(y'+y_o) + a_{22}(y'+y_o)^2 +$$
$$+2a_1(x'+x_o) + 2a_2(y'+y_o) + c = 0.$$

После преобразований получаем

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2(a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_1)x' +$$
$$+2(a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_2)y' + c' = 0,$$

где $c' = \varphi(x_o, y_o)$ – значение левой части уравнения (3.14) в точке O'. Поскольку в новой СК коэффициенты при x' и y' должны быть равны нулю, то получаем (3.16).

Доказательство обратного утверждения о том, что точка, координаты которой удовлетворяют (3.16), является центром, – достаточно сложное, и мы его опустим. Данное доказательство можно найти в учебных пособиях [18] и [20]. ■

Заметим, что уравнение кривой в новой СК можно выписать, не совершая подстановки (3.17) и преобразований: коэффициенты квадратичной части не изменяются, и остаётся только вычислить c'.

Обозначим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} –$$

<u>матрица квадратичной части уравнения</u> (3.14) (она же является матрицей системы линейных уравнений (3.16)),

$$\delta = \det \mathbf{A}, \quad \delta_x = -\begin{vmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_y = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{vmatrix}. \tag{3.18}$$

<u>*1 случай.*</u> $\delta \neq 0$. Тогда по правилу Крамера система (3.16) имеет единственное решение

$$x_o = \delta_x/\delta, \quad y_o = \delta_y/\delta, \tag{3.19}$$

а кривая имеет единственный центр. Минусы были поставлены в (3.18) потому что a_1 и a_2 находятся в (3.16) не в правой части, а в левой.

<u>*2 случай.*</u> $\delta = 0$, $\delta_x \neq 0$ и $\delta_y \neq 0$ (заметим, что в случае $\delta = 0$, определители δ_x и δ_y будут равны или неравны нулю только одновременно).

Репозиторий ВГУ

В курсе алгебры доказывается, что в этом случае система (3.16) не имеет решений, а кривая не имеет центра.

<u>*3 случай.*</u> $\delta = 0$, $\delta_x = \delta_y = 0$. Тогда оба уравнения в (3.12) пропорциональны, а значит, эта система имеет бесконечное количество решений, а кривая – бесконечное количество центров.

Упростим ещё величину c':

$$c' = \varphi(x_o, y_o) = a_{11}x_o^2 + 2a_{12}x_o y_o + a_{22}y_o^2 + 2a_1 x_o + 2a_2 y_o + c =$$
$$= (a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_1)x_o + (a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_2)y_o + a_{12}x_o + a_{22}y_o + c.$$

В силу (3.16) выражения в скобках равны нулю, и мы имеем

$$c' = a_1 x_o + a_2 y_o + c. \tag{3.20}$$

Подставляя сюда (3.19), получаем

$$c' = a_1\frac{\delta_x}{\delta} + a_2\frac{\delta_y}{\delta} + c = \frac{1}{\delta}(a_1\delta_x + a_2\delta_y + c) = \frac{\Delta}{\delta}, \tag{3.21}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

В скобках в (3.21) как раз стоит разложение Δ по последней строке или последнему столбцу. Равенство (3.20) позволяет выписать упрощённый вид уравнения центральной кривой (3.15), не находя координат центра кривой. Но, если уже центр найден, то легче вычислить c' по формулам (3.20).

§ 8. *Классификация центральных кривых второго порядка*

Попробуем дальше упростить уравнение (3.15) так, чтобы в нём не было слагаемого, содержащего произведение координат. Если в (3.15) уже $a_{12} = 0$, то следующая процедура нам не нужна.

Пусть $a_{12} \neq 0$. Выберем новую декартову СК $O'x''y''$, которая получается из $O'x'y'$ поворотом координатных осей на некоторый угол α (рис. 3.29). Тогда формулы замены координат имеют вид:

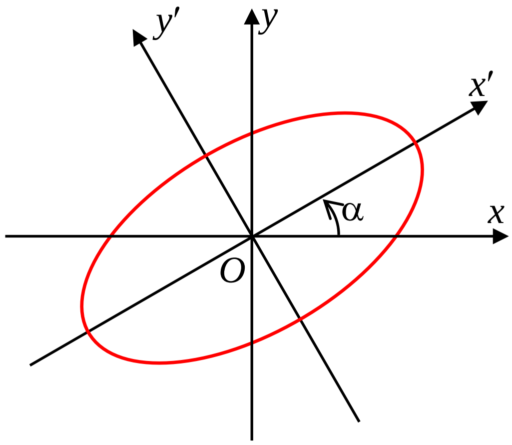


рис. 3.29

$$\begin{cases} x' = x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha, \\ y' = x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha. \end{cases} \tag{3.22}$$

Репозиторий ВГУ

Подставим эти формулы в (3.15):

$$a_{11}(x''\cdot\cos\alpha-y''\cdot\sin\alpha)^2+2a_{12}(x''\cdot\cos\alpha-y''\cdot\sin\alpha)(x''\cdot\sin\alpha+y''\cdot\cos\alpha)+$$
$$+a_{22}(x''\cdot\sin\alpha+y''\cdot\cos\alpha)^2+c'=0.$$

Раскроем скобки и приведём подобные при одинаковых координатах. Тогда коэффициент при $x''y''$ будет равен

$$-a_{12}\sin^2\alpha+(a_{22}-a_{11})\sin\alpha\cdot\cos\alpha+a_{12}\cos^2\alpha.$$

Приравняем это выражение к нулю. Получим однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Разделим его на $-\cos^2\alpha$:

$$a_{12}\operatorname{tg}^2\alpha+(a_{11}-a_{22})\operatorname{tg}\alpha+a_{12}=0. \qquad (3.23)$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестного $\operatorname{tg}\alpha$, его дискриминант

$$D=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}\geq 0.$$

Значит, (3.23) всегда имеет решение, т.е. всегда существует такой угол α, что в новой СК мы получим уравнение кривой без слагаемого, содержащего $x''y''$. В результате наше уравнение будет иметь вид

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \qquad (3.24)$$

Примем пока без доказательства, что коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0;$$

в развернутом виде:

$$\lambda^2-s\lambda+\delta=0, \qquad (3.25)$$

где $s=\operatorname{trace}\mathbf{A}=a_{11}+a_{22}$ – след матрицы $\mathbf{A}$, а δ – её определитель.

Определение **3.18.** Уравнение (3.25) называется *характеристическим уравнением кривой второго порядка*.

Согласно теореме Виета

$$\lambda_1+\lambda_2=s, \ \lambda_1\cdot\lambda_2=\delta.$$

Относительно новой СК $O'x''y''$ (для уравнения (3.24)) получаем

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}, \quad \delta'=\det\mathbf{A}'=\lambda_1\cdot\lambda_2=\delta, \quad s'=\operatorname{trace}\mathbf{A}'=\lambda_1+\lambda_2=s,$$

$$\Delta'=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta/\delta\end{vmatrix}=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot(\Delta/\delta)=\Delta.$$

Репозиторий ВГУ

Таким образом, $\delta'=\delta$, $s'=s$, $\Delta'=\Delta$, т.е. величины δ, s, Δ не изменяются при переходе к новой декартовой СК.

***Определение* 3.19.** Величины δ, s, Δ называются *инвариантами кривой второго порядка*.

1 *случай*. $\Delta\neq 0$. Если опустить штрихи, то уравнение (3.25) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-\Delta/\lambda_1\delta}+\frac{y^2}{-\Delta/\lambda_2\delta}=1. \tag{3.26}$$

Обозначим $a^2=|\Delta/\lambda_1\delta|$, $b^2=|\Delta/\lambda_2\delta|$.

а) $\delta>0$, $s\Delta<0$. Тогда $\lambda_1\lambda_2>0$, т.е. λ_1 и λ_2 одного знака, и $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\Delta<0$, т.е. знак Δ противоположен знаку λ_1 и λ_2. Поэтому оба знаменателя в (3.26) положительны, и это уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Тем самым, (3.26) задаёт эллипс:

б) $\delta>0$, $s\Delta>0$. Тогда оба знаменателя в (3.26) отрицательны, и уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Говорят, что оно задаёт *мнимый эллипс*. На действительной плоскости это пустое множество.

в) $\delta<0$, $\Delta\neq 0$. Тогда λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, и поэтому знаменатели в (3.26) имеют разные знаки. Получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

В любом случае это уравнение гиперболы.

2 *случай*. $\Delta=0$. В этом случае уравнение (3.24) принимает вид (штрихи опускаем):

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=0. \tag{3.27}$$

Обозначим $a^2=|\lambda_1|$, $b^2=|\lambda_2|$.

а) $\delta<0$. Тогда λ_1 и λ_2 разного знака и (3.27) можно переписать в виде

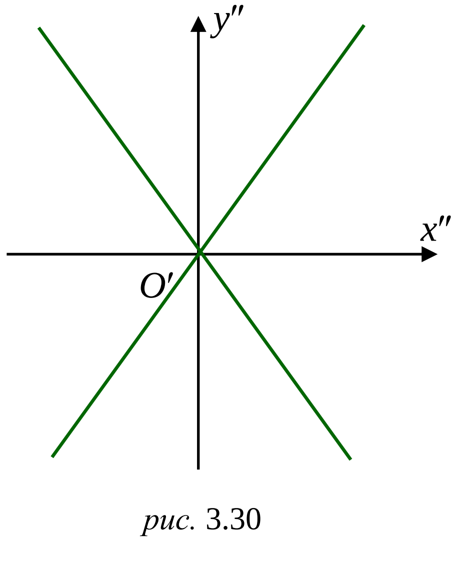


рис. 3.30

$$a^2x^2-b^2y^2=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (ax-by)\cdot(ax+by)=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют точки, для которых $ax - by = 0$, и точки для которых $ax + by = 0$. Поэтому оно определяет пару прямых, очевидно, пересекающихся в центре O' и симметричных относительно координатных осей $O'x''$ и $O'y''$ (рис. 3.30).

б) $\delta > 0$. Тогда λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки и (19) можно переписать в виде

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (ax - i\,by)\cdot(ax + iby) = 0\,.$$

(i – мнимая единица). Говорят, что это уравнение задаёт пару мнимых пересекающихся прямых. Но пересекаются они в действительной точке O' – центре кривой.

В случае $\delta = \Delta = 0$ у кривой тоже есть центр, но не единственный. Центров оказывается бесконечное количество, и мы этот случай рассмотрим в следующем параграфе.

§ 9. *Классификация нецентральных кривых второго порядка*

Пусть теперь $\delta = 0$. Тогда мы не можем использовать процедуру нахождения центра и сразу совершаем поворот координатных осей на угол, тангенс которого находится из уравнения (3.23). Получим новую декартову СК с тем же началом $Ox'y'$. Формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Здесь на один штрих с каждой стороны меньше, чем в (3.23), поскольку это первая замена координат. В этой СК уравнение кривой не будет включать слагаемое, содержащее произведение $x'y'$:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + c = 0\,, \tag{3.28}$$

Заметим, что коэффициент c останется прежним, а непосредственное вычисление показывает, что

$$b_1 = a_1\cdot\cos\alpha + a_2\cdot\sin\alpha\,, \qquad b_2 = a_1\cdot\sin\alpha + a_2\cdot\cos\alpha\,.$$

Числа λ_1 и λ_2 можно найти из уравнения (3.25). Так как $\delta = \lambda_1\cdot\lambda_2 = 0$, то один из корней будет равен нулю. Пусть это будет λ_1. Имеем уравнение

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + c = 0. \tag{3.29}$$

Для этого уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = -\lambda_2 b_1^2.$$

Репозиторий ВГУ

1 *случай*. $\Delta=0 \iff b_1=0$. Уравнение имеет вид $\lambda_2 y'^2+2b_2y'+c=0$. Выделим полный квадрат:

$$\lambda_2\left(y'^2+\frac{2b_2}{\lambda_2}y'+\frac{b_2^2}{\lambda_2^2}\right)-\frac{b_1^2}{\lambda_2}+c=0 \quad\iff\quad \lambda_2\left(y'+\frac{b_1}{\lambda_2}\right)^2-\frac{b_1^2}{\lambda_2}+c=0.$$

Мы разделим это уравнение на λ_2, перенесём свободные члены вправо и обозначим правую часть $c'=(b_1^2-\lambda_2 c)/\lambda_2^2$, и пусть $a^2=|c'|$. Совершим замену координат:

$$\begin{cases} x''=x', \\ y''=y'+\dfrac{b_1}{\lambda_2}, \end{cases}$$

Эта замена означает перенос начала координат в точку $O'(0,-\,b_1/\lambda_2)_{Ox'y'}$ (подчеркнём, что координаты указаны в промежуточной СК $Ox'y'$). Получим уравнение

$$(y'')^2=\pm a^2.$$

а) $c'>0$. Тогда имеем уравнение $(y'')^2=a^2 \iff y''=a$ или $y''=-a$. Наша кривая – это *пара параллельных прямых*.

б) $c'<0$. Тогда имеем уравнение $(y'')^2=-a^2 \iff y''=ia$ или $y''=-ia$. Говорят, что наше уравнение задаёт *пару мнимых параллельных прямых*. На действительной плоскости это пустое множество.

в) $c'=0$. Тогда имеем уравнение $(y'')^2=0$. Говорят, что это уравнение задаёт *пару совпадающих прямых*, или *двойную прямую*.

2 *случай*. $\Delta\neq 0 \iff b_1\neq 0$. Так же, как и в предыдущем случае, выделяем в (3.29) полный квадрат по y, но у нас будет ещё одно слагаемое $2b_1x'$:

$$\lambda_2\left(y'+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2-\frac{b_2^2}{\lambda_2}+2b_1x'+c=0.$$

Вынесем $2b_1$ за скобку:

$$\lambda_2\left(y'+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2+2b_1\left(x'-\frac{b_2^2-\lambda_2 c}{2b_1\lambda_2}\right)=0,$$

обозначим $c'=\dfrac{b_2^2-\lambda_2 c}{2b_1\lambda_2}$ и сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x''=x'-c', \\ y''=y'+\dfrac{b_2}{\lambda_2}. \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

Эта замена означает перенос начала координат в точку $O'\left(c', -\dfrac{b_1}{\lambda_2}\right)_{Ox'y'}$. Получим уравнение

$$\lambda_2 (y'')^2 + 2b_1 x'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y'')^2 = \pm 2px'',$$

где $p = |2b_1/\lambda_2|$. Независимо от знака «+» или «–», это уравнение задаёт параболу.

Итак, мы установили, что общее уравнение кривой второго порядка (3.14) задаёт одну из следующих кривых второго порядка ($\operatorname{sign} x$ означает знак числа x).

$\operatorname{sign}\delta$	$\operatorname{sign}(s\cdot\Delta)$	Кривая и её каноническое уравнение	Кол-во центров
+	–	Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	1
+	+	Мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$	
–	±	Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	
–	0	Пара пересекающихся прямых $a^2x^2-b^2y^2=0$	
+	0	Пара мнимых пересекающихся прямых $a^2x^2+b^2y^2=0$	
0	±	Парабола $y^2=2px$	**0**
0	0	Пара параллельных прямых $x^2=a^2$ Пара мнимых параллельных прямых $x^2=-a^2$ Пара совпадающих прямых $x^2=0$	∞

§ 10. *Примеры решения задач*

***Задача* 1.** *Дано уравнение гиперболы*: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$. *Найдите:*

а) ее полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет;
г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.
Изобразите гиперболу вместе с фокусами и директрисами.

Решение. а) Имеем $a^2=36$, $b^2=64$. Поэтому полуоси: $a=6$, $b=8$.

б) $c=\sqrt{a^2+b^2}=10$. Поэтому координаты фокусов: $F_1(10, 0)$, $F_1(-10, 0)$.

в) $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$.

Репозиторий ВГУ

г) Уравнения асимптот: $y=\pm\frac{c}{a}x$. Поэтому l_1: $y=\frac{4}{3}x$ и l_2: $y=-\frac{4}{3}x$.

д) Уравнения директрис: $x=\pm\frac{a^2}{c}$. Поэтому δ_1: $x=3{,}6$ и δ_2: $x=-3{,}6$.

Изображаем гиперболу.

1) Рисуем систему координат.

2) По оси Ox откладываем от начала координат вправо и влево отрезки OA_1 и OA_2, равные 6. По оси Oy откладываем от начала координат вверх и вниз отрезки OB_1 и OB_2, равные 8.

3) Через точки A_1, A_2, B_1, B_2 проводим прямые, параллельные координатным осям. Получится фундаментальный прямоугольник.

4) Проводим прямые, продолжающие диагонали этого прямоугольника.

5) Рисуем гиперболу: она должна касаться прямоугольника в точках A_1, A_2 и приближаться к асимптотам (рис. 3.29).

6) Отмечаем на оси абсцисс фокусы $F_1(10, 0)$, $F_1(-10, 0)$.

7) Через точки на оси абсцисс с координатами 3,6 и –3,6 проводим вертикальные прямые – директрисы.

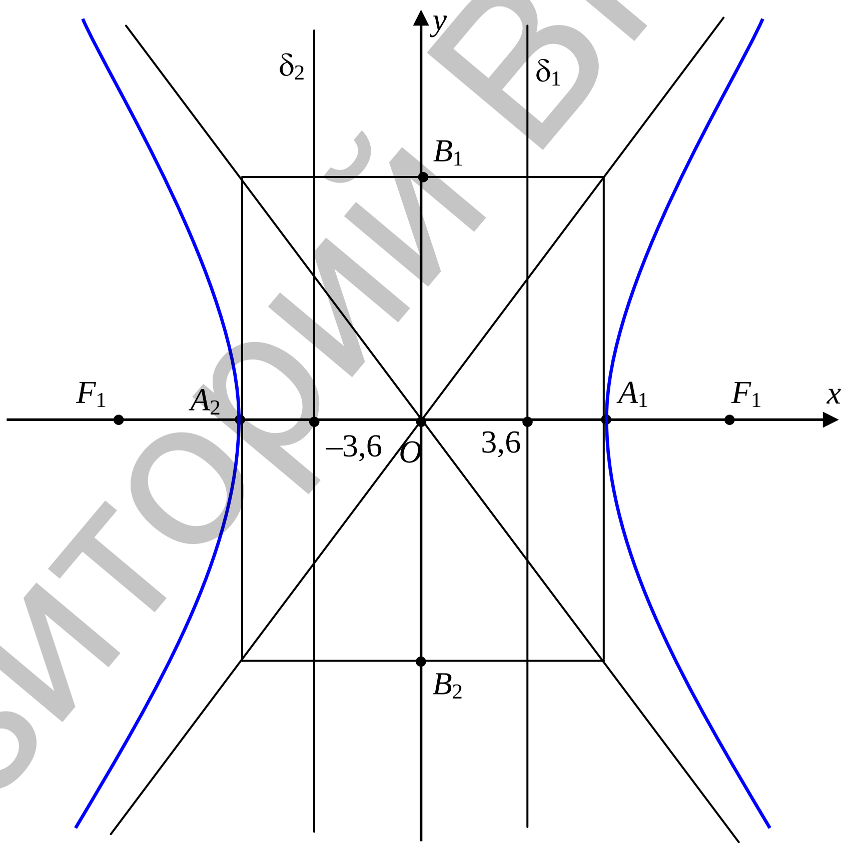


рис. 3.31

***Задача* 2.** *Составить уравнение кривой, каждая точка которой расположена вдвое дальше от точки* $F(3, 3)$, *чем от оси* Ox. *Определить тип кривой и изобразить её в декартовой системе координат.*

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка кривой, MM' – перпендикуляр, опущенный на Ox. Тогда расстояние от M до Ox равно $|MM'|=|y|$ (рис. 3.29), а $|MF|=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$. По условию задачи выполнено

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=2|y|.$$

Репозиторий ВГУ

Возведение в квадрат, вообще говоря, не является равносильным переходом, но в данном случае обе части равенства неотрицательны. Поэтому без всяких дополнительных ограничений возводим в квадрат:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4y^2.$$

Мы раскроем квадрат только во второй скобке, и после приведения подобных вновь соберём полный квадрат:

$$(x-3)^2+y^2-6y+9-4y^2=0,$$

$$(x-3)^2-3y^2-6y+9=0,$$

$$(x-3)^2-3(y^2+2y+1-4)=0,$$

$$(x-3)^2-3(y+1)^2=-12.$$

Делаем замену координат

$$\begin{cases} x'=x-3, \\ y'=y+1. \end{cases}$$

Она означает перенос начала координат в точку $O'(3,-1)$. Получившееся уравнение делим на -12:

$$\frac{x'^2}{12}-\frac{y'^2}{4}=-1.$$

Это уравнение задает гиперболу с полуосями

$$a=2\sqrt{3}\approx 3{,}4;\ b=2.$$

Центр гиперболы находится в точке $O'(3,-1)$ (рис. 3.32). Подробное описание построения приводится в решении задачи 1.

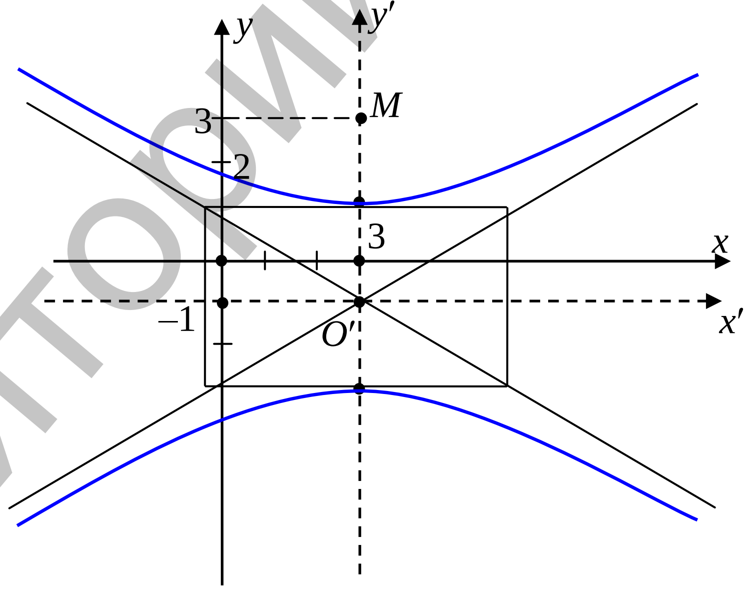


рис. 3.32

Задача 3. *С помощью переноса начала координат и поворота координатных осей привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Определить тип кривой и изобразить её в исходной системе координат*:

а) $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$.

Решение. Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости имеет вид:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+c=0. \qquad (3.14)$$

Репозиторий ВГУ

Если

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,$$

то кривая имеет центр $O'(x_{\text{o}}, y_{\text{o}})$, координаты которого можно найти из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{\text{o}}+a_{12}y_{\text{o}}+a_1=0, \\ a_{12}x_{\text{o}}+a_{22}y_{\text{o}}+a_2=0. \end{cases} \qquad (3.16)$$

Если мы совершим параллельный перенос начала координат в точку O', то уравнение кривой примет вид:

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+c'=0, \qquad (3.15)$$

где

$$c'=a_1x_{\text{o}}+a_2y_{\text{o}}+c. \qquad (3.20)$$

Вычисляем:

$$\delta=\begin{vmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 25 \end{vmatrix}=576\neq 0.$$

Значит, кривая имеет центр. Найдём координаты центра $(x_{\text{o}}, y_{\text{o}})$ из системы уравнений (3.16):

$$\begin{cases} 25x_{\text{o}}-7y_{\text{o}}+32=0, \\ -7x_{\text{o}}+25y_{\text{o}}-32=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x_{\text{o}}-7y_{\text{o}}=-32, \\ -7x_{\text{o}}+25y_{\text{o}}=32. \end{cases}$$

Для решения применим правило Крамера: $x_{\text{o}}=\dfrac{\delta_x}{\delta}$, $y_{\text{o}}=\dfrac{\delta_y}{\delta}$, где δ_x получается заменой первого столбца в δ на столбец свободных членов, а δ_y – заменой второго столбца:

$$\delta_x=\begin{vmatrix} -32 & -7 \\ 32 & 25 \end{vmatrix}=32\cdot\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 25 \end{vmatrix}=32\cdot(-18)=-576.$$

$$\delta_y=\begin{vmatrix} 25 & -32 \\ -7 & 32 \end{vmatrix}=32\cdot\begin{vmatrix} 25 & -1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}=32\cdot 18=576.$$

$$x_{\text{o}}=\frac{-576}{576}=-1, \quad y_{\text{o}}=\frac{576}{576}=1.$$

Значит, центр кривой находится в точке $O'(-1, 1)$. Совершим перенос начала координат в точку O' и получаем новую декартову систему координат $O'x'y'$. Формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x=x'+1, \\ y=y'-1. \end{cases}$$

Однако делать эту подстановку в исходное уравнение кривой не следует; мы заранее по теории знаем, что получится в результате данной подстановки: уравнение примет вид (3.15) (то есть линейная часть уравнения исчезнет, а коэффициенты квадратичной части не изменятся), где c' находится по формуле (3.20):

$$c' = 32\cdot(-1) - 32\cdot 1 - 224 = -288.$$

Уравнение данной кривой второго порядка в новой системе координат:

$$25x'^2 - 14x'y' + 25y'^2 = 288. \tag{3.30}$$

Далее совершаем поворот координатных осей на угол α, тангенс которого находится по формуле:

$$a_{12}\mathrm{tg}^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\cdot \mathrm{tg}\alpha - a_{12} = 0, \tag{3.23}$$

$$-7\mathrm{tg}^2\alpha + (25 - 25)\,\mathrm{tg}\alpha + 7 = 0,$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\,\alpha_1 = 1 \quad \text{или} \quad \mathrm{tg}\,\alpha_2 = -1.$$

Можем выбрать любое из них. Но, как правило, выбираем такое α, для которого $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$. Имеем: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Получим новую систему координат $O'x''y''$. Формулы замены координат имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha, \\ y' = x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha. \end{cases} \tag{3.22}$$

В нашем случае:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y''), \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y''). \end{cases}$$

Подставим эту замену в (3.30):

$$\frac{1}{2}[25(x'' - y'')^2 - 14(x'' - y'')\cdot(x'' + y'') + 25(x'' + y'')^2] = 288,$$

$$\frac{1}{2}[25x''^2 - 50x''y'' + 25y''^2 - 14x'' + 14y'' + 25x''^2 + 50x''y'' + 25y''^2] = 288.$$

Слагаемые, содержащие произведение $x''y''$, обязательно должны сократиться. Если этого не происходит, то следует искать ошибку выше.

$$\frac{1}{2}[36x''^2 + 64y''^2] = 288,$$

$$9x''^2 + 16y''^2 = 144,$$

$$\frac{x''^2}{16} + \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Это уравнение задаёт эллипс с полуосями $a = 4$, $b = 3$.

Строим эллипс. Сначала изображаем исходную систему координат Oxy, затем в этой системе находим точку O' и строим промежуточную систему координат $O'x'y'$, которая получается из Oxy переносом начала

Репозиторий ВГУ

в точку O'. Затем поворачиваем натные оси на выбранный нами ранее угол α и получаем окончательную систему координат $O'x''y''$. Именно на осях этой системы координат мы и откладываем полуоси эллипса (рис. 3.34).

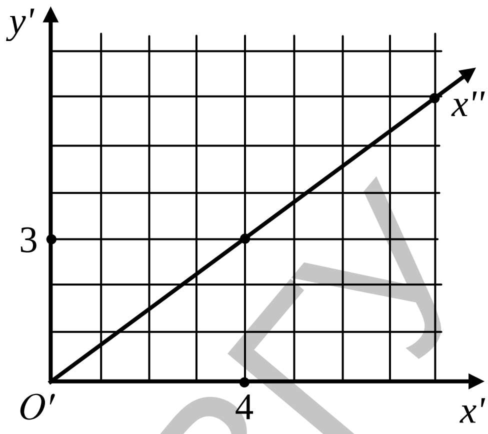


рис. 3.33

В нашем случае $\alpha = 45^{\circ}$, и поэтому повернутые оси легко построить. В более общем случае, если мы нашли, что $\operatorname{tg}\alpha = a/b$, мы этот угол очень легко можем построить на клетчатой бумаге: по оси $O'x'$ мы откладываем отрезок, равный b, а по оси $O'y'$ – отрезок, равный a. Например, на рисунке 3.33 построен угол, у которого $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$.

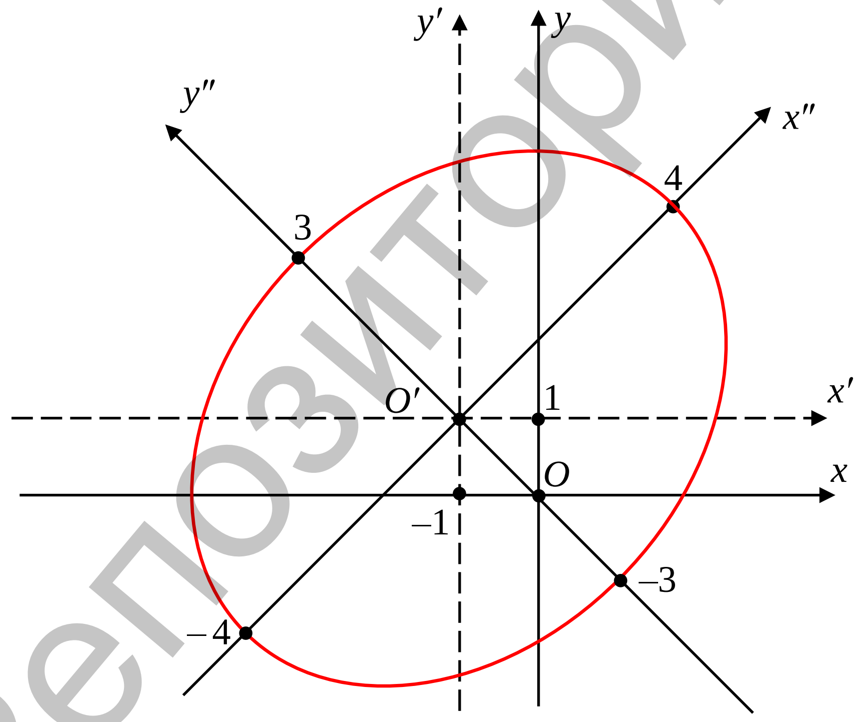


рис. 3.34

Репозиторий ВГУ

б) $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$.

Решение.

$$\delta=\begin{vmatrix}7 & 8\\ 8 & -23\end{vmatrix}=-161-64=-225\neq 0.$$

Значит, ищем координаты центра:

$$\begin{cases}7x_о+8y_о-7=0,\\ 8x_о-23y_о-8=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}7x_о+8y_о=7,\\ 8x_о-23y_о=8.\end{cases}$$

По правилу Крамера:

$$\delta_x=\begin{vmatrix}7 & 8\\ 8 & -23\end{vmatrix}=-161-64=-225\neq 0,\ \delta_y=\begin{vmatrix}7 & 8\\ 7 & 8\end{vmatrix}=0.$$

$$x_о=\frac{\delta_x}{\delta}=-1,\ y_о=\frac{\delta_y}{\delta}=0.$$

Значит, центр кривой находится в точке $O'(1,0)$. Совершаем перенос начала координат в точку O' и получаем новую декартову систему координат $O'x'y'$. Формулы замены координат:

$$\begin{cases}x=x'+1,\\ y=y'.\end{cases}$$

Находим $c'=-7x_о-8y_о+c=-7-218=-225$. Значит, в новой системе координат уравнение кривой примет вид:

$$7x'^2+16x'y'-23y'^2-225=0. \qquad (3.31)$$

Совершаем поворот координатных осей на угол α, тангенс которого находим из уравнения (3.25):

$$8\operatorname{tg}^2\alpha+30\operatorname{tg}\alpha-8=0,$$

$$4\operatorname{tg}^2\alpha+15\operatorname{tg}\alpha-4=0,$$

$$D=225+64=289,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{-15+17}{8}=\frac{1}{4},\ \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{-15-17}{8}=-4.$$

Выбираем положительный тангенс: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$. Находим

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

В уравнении (3.31) делаем замену:

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(4x'' - y''), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(x'' + 4y''). \end{cases}$$

$$\frac{1}{17}[7(4x''-y'')^2+16(4x''-y'')(x''+4y'')-23(x''+4y'')^2]=225,$$

$$\frac{1}{17}[112x''^2-\underline{56x''y''}+7y''^2+64x''^2+\underline{240x''y''}-64y''^2-$$
$$-23x''^2-\underline{184x''y''}-368y''^2]=225.$$

При приведении подобных, слагаемые, содержащие произведения $x''y''$ должны сократиться. Если этого не происходит, следует искать ошибку выше.

$$\frac{1}{17}[153x''^2-425y''^2]=225,$$

$$9x''^2-25y''^2=225,$$

$$\frac{x''^2}{25}-\frac{y''^2}{9}=1.$$

Получилось уравнение гиперболы с полуосями $a = 5$, $b = 3$.

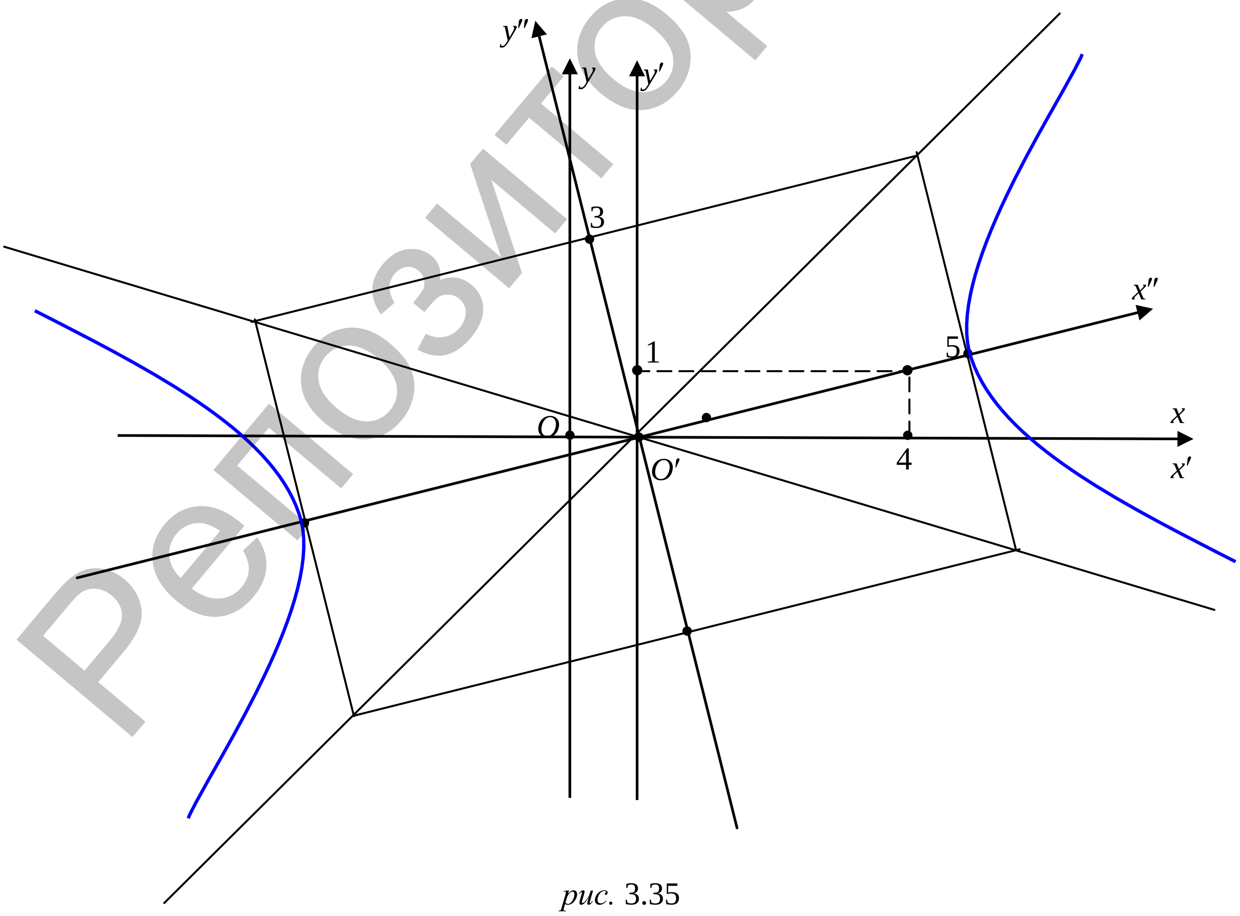


рис. 3.35

Репозиторий ВГУ

<u>*Описание построения*</u>:

1) $O'(1,\,0)$ – новое начало координат, $O'x' || Ox$, $O'y' || Oy$ – вспомогательные оси;
2) совершаем поворот координатных осей, зная, что $\operatorname{tg}\alpha = 1/4$; получаем новые координатные оси $O'x''$ и $O'y''$ (способ построения показан штриховой линией);
3) в новой системе координат $O'x''y''$ строим фундаментальный прямоугольник: $a = 5$, $b = 3$;
4) проводим диагонали фундаментального прямоугольника, они будут являться асимптотами гиперболы;
5) строим гиперболу: она касается фундаментального прямоугольника и стремится к асимптотам (рис. 3.35).

в) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

В данном случае не можем применить процедуру нахождения центра и сразу поворачиваем координатные оси:

$$-12\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 12 = 0,$$

$$D = 49 + 576 = 625,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{7-25}{-24} = \frac{3}{4},\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{7+25}{-24} = -\frac{4}{3}.$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5};\ \ \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(4x' - 3y'), \\ y = \frac{1}{5}(3x' + 4y'). \end{cases}$$

Поскольку это первая замена координат, то вид формул отличается от (3.22) количеством штрихов. Подставляем в первоначальное уравнение:

$$\frac{1}{25}[9(4x'-3y')^2 - 24(4x'-3y')(3x'+4y') + 16(3x'+4y')^2] -$$
$$-\frac{20}{5}(4x'-3y') + \frac{110}{5}(3x'+4y') - 50 = 0,$$

$$\frac{1}{25}[144x'^2 - 216x'y' + 81y'^2 - 288x'^2 - 168x'y' + 288y'^2 + 144x'^2 + 384x'y' + 296y'^2] -$$
$$-16x' + 12y' + 66x' + 88y' - 50 = 0.$$

Репозиторий ВГУ

Слагаемые, содержащие $x'y'$, должны сократиться. Кроме того, если $\delta = 0$, то одна из переменных в квадрате сокращается полностью:

$$25y'^2 + 50x' + 100y' - 50 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad y'^2 + 2x' + 4y' - 2 = 0. \quad (3.32)$$

Выделяем полный квадрат:

$$(y'^2 + 4y' + 4) - 4 + 2x' - 2 = 0,$$
$$(y' + 2)^2 + 2(x' - 3) = 0.$$

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x' - 3, \\ y'' = y' + 2. \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,-2)_{O'x'y'}$. Подчеркнём, что это координаты относительно второй системы координат $O'x'y'$. Окончательно получаем уравнение

$$y''^2 = -2x'',$$

которое задаёт параболу. Её параметр $p = 1$, а ось параболы – $O'x''$.

<u>*Описание построения*</u>:

1) совершаем поворот координатных осей, зная, что $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$, и получаем промежуточную систему координат $Ox'y'$ (рис. 3.36);
2) новое начало координат $O'(3,-2)$ в системе координат $Ox'y'$;
3) координатные оси $O'x''$ и $O'y''$;
4) для построения параболы любым способом находим дополнительную точку; например, подставим в уравнение (3.32) $y' = 0$, тогда $x' = 1$. Т.е. $A(1, 0)_{O'x'y'}$ – дополнительная точка (в системе $Ox'y'$).

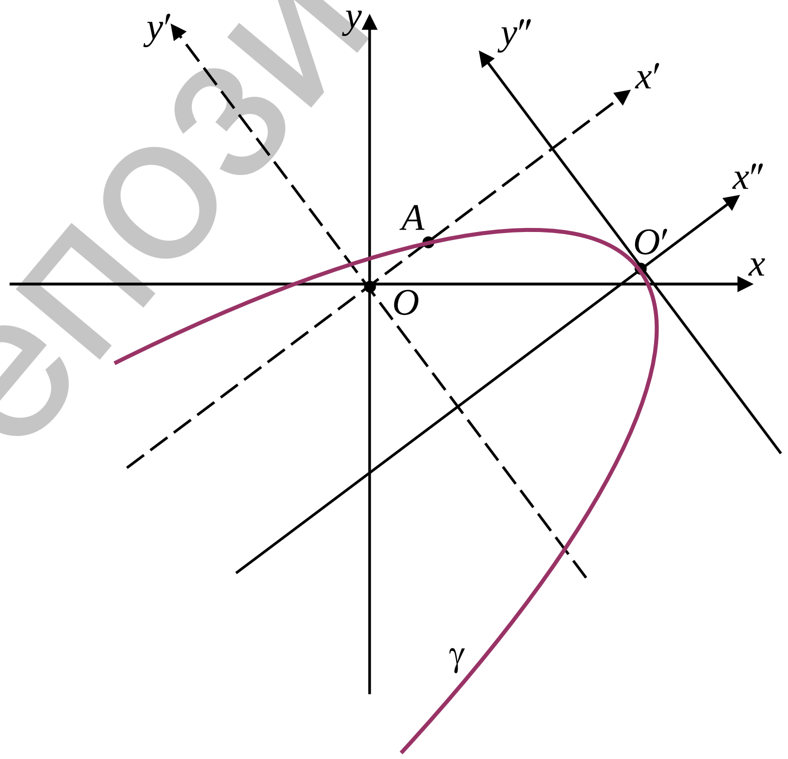


рис. 3.36

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 4. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. *Ориентация тройки векторов в пространстве*

Напомним, что на плоскости мы ввели понятие ориентированного угла между векторами. Отложим два данных вектора из одной точки O: $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{OB}$. Если кратчайший поворот от луча OA к лучу OB осуществляется против часовой стрелки, то считаем, что $\alpha>0$, а если по часовой – то $\alpha<0$. На рисунке 4.1 изображён угол $\alpha<0$.

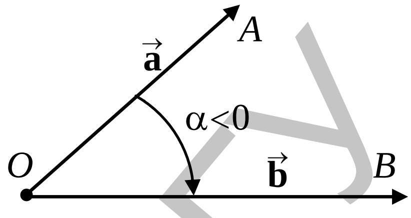


рис. 4.1

В пространстве понятие ориентированного угла не имеет смысла. Если посмотреть на плоскость, в которой лежат лучи OA и OB с одной стороны, то увидим, что кратчайший поворот от OA к OB осуществляется в одном направлении, а если посмотреть на плоскость с другой стороны, то мы увидим тот же поворот в другом направлении.

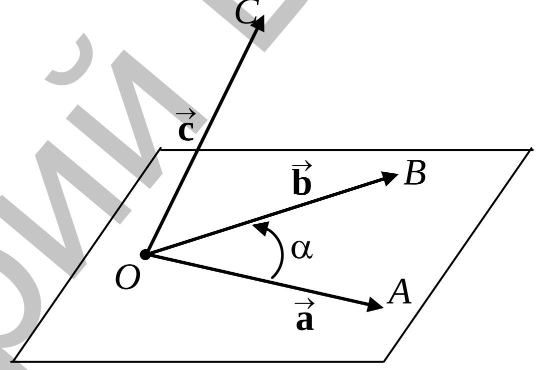


рис. 4.2

***Определение* 4.1.** Пусть в пространстве даны три некомпланарных вектора $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$. Отложим их из одной точки O: $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{\mathbf{c}}=\overrightarrow{OC}$. *Тройка векторов* $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ называется *правой*, если кратчайший поворот от луча OA к лучу OB, если смотреть из точки C, выглядит как осуществляющийся против часовой стрелки. Соответственно, если этот поворот выглядит как осуществляющийся по часовой стрелке, то *тройка векторов* $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ называется *левой*.

Тем самым возможны три варианта расположения трёх векторов в пространстве: либо они образуют правую тройку, либо они образуют левую тройку, либо эти векторы компланарны. В частности, если среди векторов есть хотя бы один нулевой, то векторы компланарны.

Заметим, что порядок векторов в тройке имеет значение: если переставить местами два вектора, то правая тройка станет левой, и наоборот. То же самое произойдёт, если мы изменим направление одного любого вектора в тройке.

На рисунке 4.2 изображена правая тройка векторов.

Репозиторий ВГУ

§ 2. *Проекция вектора на ось и скалярное произведение векторов в пространстве*

Все определения из главы 1, которые касались проекции вектора на ось и скалярного произведения, верны и в пространстве. Также остаются справедливыми и свойства проекции вектора на ось и скалярного произведения. Отличие будет только в рисунках. Например, чертёж к определению проекции вектора показан на рисунке 4.3.

Напомним, что вектор $\vec{\mathbf{a}}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 4.3) называется *векторной проекцией* вектора $\vec{\mathbf{a}}$ на ось l, а число p такое, что $\vec{\mathbf{a}}_1 = p\vec{\mathbf{e}}$, называется *скалярной проекцией* вектора $\vec{\mathbf{a}}$ на ось l, и мы её обозначили $\Pi_l\vec{\mathbf{a}}$.

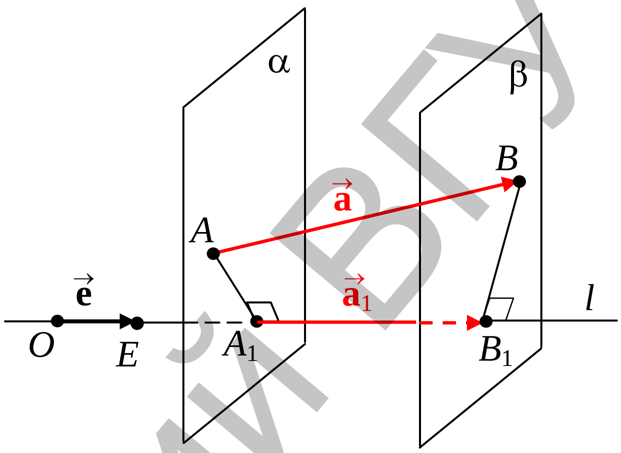


рис. 4.3

Скалярным произведением двух векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется число $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$. *Скалярным квадратом* вектора $\vec{\mathbf{a}}$ называется число $\vec{\mathbf{a}}^2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$.

Мы доказали теорему, которая гласит, что *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*, а также *ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю*.

Из свойств скалярной проекции вектора на ось для нас наиболее важным является следующее: $\Pi_l\,\vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}|\,\cos\angle(\vec{\mathbf{e}}, \vec{\mathbf{a}})$, где $\vec{\mathbf{e}}$ – единичный направляющий вектор оси.

§ 3. *Аффинная система координат в пространстве*

***Определение* 4.2.** Пусть в пространстве заданы три некомпланарных вектора $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$. Назовём их *базисными*, а упорядоченную тройку $\mathcal{B}=(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ – *базисом*. Пусть O – произвольная точка. Четвёрку $\mathcal{R}= (O, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ назовем *аффинным репером в пространстве*.

Пусть $\vec{\mathbf{d}}$ – произвольный вектор. Отложим все векторы из точки O (рис. 4.4):

$$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA},\ \ \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{OB},\ \ \vec{\mathbf{c}} = \overrightarrow{OC},\ \ \vec{\mathbf{d}} = \overrightarrow{OD}.$$

***Определение* 4.3.** Прямые $l_1 = OA$, $l_2 = OB$, $l_3 = OC$, вместе с выбранными на них направленными отрезками $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, называются координатными осями, точка O – началом координат, а совокупность координат-

Репозиторий ВГУ

ных осей и начала называется *аффинной системой координат* в пространстве.

Также *репером* называют четвёрку точек (O, A, B, C), не лежащих в одной плоскости.

Построим параллелепипед так, чтобы три его ребра лежали на этих прямых, а точка D была вершиной. Пусть A_1, B_1, C_1 – это те вершины параллелепипеда, которые лежат на прямых l_1, l_2, l_3, а D_1 – четвёртая вершина основания (рис. 4.4). Рассмотрим векторы

$$\vec{\mathbf{a}}_1 = \overrightarrow{OA_1},\ \ \vec{\mathbf{b}}_1 = \overrightarrow{OB_1},$$

$$\vec{\mathbf{c}}_1 = \overrightarrow{OC_1},\ \ \vec{\mathbf{d}}_1 = \overrightarrow{OD_1}.$$

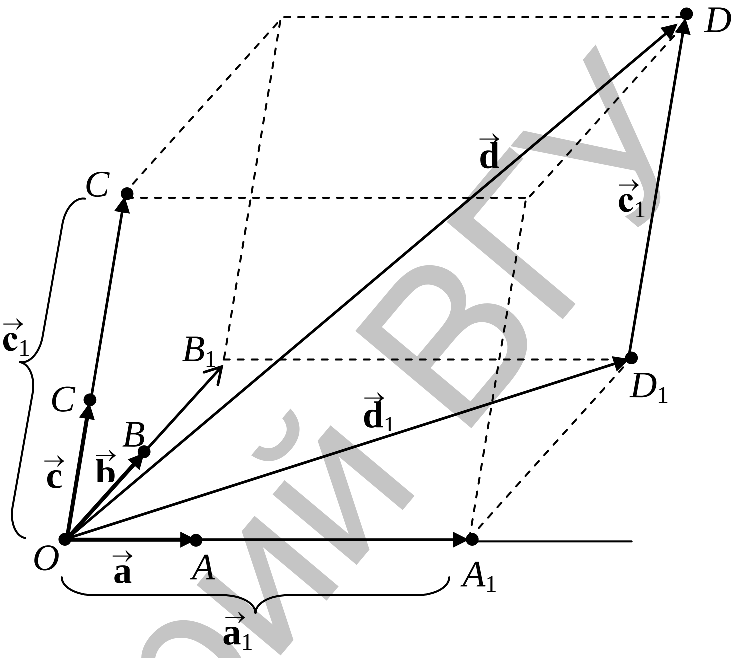


рис. 4.4

Тогда $\vec{\mathbf{c}}_1 = \overrightarrow{D_1D}$, и по правилу треугольника

$$\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{d}}_1 + \vec{\mathbf{c}}_1.$$

А по правилу параллелограмма

$$\vec{\mathbf{d}}_1 = \vec{\mathbf{a}}_1 + \vec{\mathbf{b}}_1.$$

Значит,

$$\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}}_1 + \vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{c}}_1.$$

При этом $\vec{\mathbf{a}}_1 \,||\, \vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}_1 \,||\, \vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}_1 \,||\, \vec{\mathbf{c}}$, и согласно первому признаку коллинеарности векторов (теорема 1.1) существуют такие числа x_1, x_2, x_3, что

$$\vec{\mathbf{a}}_1 = x_1\vec{\mathbf{a}},\quad \vec{\mathbf{b}}_1 = x_2\vec{\mathbf{b}},\quad \vec{\mathbf{c}}_1 = x_3\vec{\mathbf{c}}.$$

Окончательно получаем:

$$\vec{\mathbf{d}} = x_1\vec{\mathbf{a}} + x_2\vec{\mathbf{b}} + x_3\vec{\mathbf{c}}. \qquad (4.1)$$

***Определение* 4.4.** Равенство (4.1) называется *разложением вектора* $\vec{\mathbf{d}}$ *по базису* $\mathcal{B}$. Числа x_1, x_2, x_3 называются *координатами вектора* $\vec{\mathbf{d}}$ в этом базисе. Пишем $\vec{\mathbf{d}}(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$, $D(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{R}}$.

***Определение* 4.5.** Предположим теперь, что даны аффинная СК и точка D. Тогда вектор $\vec{\mathbf{d}} = \overrightarrow{OD}$ называется *радиус-вектором* точки D в данном репере. Если $\vec{\mathbf{d}}(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$, то мы пишем, что $D(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{R}}$. Други-

Репозиторий ВГУ

ми словами, *координаты точки в аффинной СК совпадают с координатами её радиус-вектора*.

Если мы выберем другое начало координат, то та же самая точка D будет задаваться другим радиус-вектором, и поэтому её координаты изменятся. Координаты же вектора $\vec{\mathbf{d}}$ не зависят от выбора начала координат. Действительно, пусть имеем ещё одно разложение

$$\vec{\mathbf{d}} = y_1\vec{\mathbf{a}} + y_2\vec{\mathbf{b}} + y_3\vec{\mathbf{c}}, \tag{4.1$'$}$$

где, например, $y_3 \neq x_3$. Вычтем (4.1′) из (4.1):

$$\vec{\mathbf{o}} = (x_1 - y_1)\vec{\mathbf{a}} + (x_2 - y_2)\vec{\mathbf{b}} + (x_3 - y_3)\vec{\mathbf{c}}.$$

Поскольку $x_3 - y_3 \neq 0$, то можем выразить вектор $\vec{\mathbf{c}}$:

$$\vec{\mathbf{c}} = \frac{x_1 - y_1}{y_3 - x_3}\vec{\mathbf{a}} + \frac{x_2 - y_2}{y_3 - x_3}\vec{\mathbf{b}}.$$

Значит, вектор $\vec{\mathbf{c}}$ лежит в одной плоскости с векторами $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$. А мы с самого начала предполагали, что векторы $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ некомпланарны. Противоречие. Значит, $y_3 = x_3$. Аналогично доказывается, что $y_2 = x_2$, $y_1 = x_1$. Тем самым, разложения (4.1) и (4.1′) совпадают. ■

Дословно так же, как и на плоскости, доказывается, что *при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*. А *для того чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца отнять координаты начала*.

Следующая теорема доказывается дословно так же, как и на плоскости.

***Теорема* 4.1** (*второй признак коллинеарности векторов*).

Ненулевые векторы $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны*:

$$\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \,||\, \vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

§ 4. *Декартова система координат в пространстве*

***Определение* 4.6.** Пусть в пространстве дана аффинная СК, которая определяется репером $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$. Если векторы $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ единичные и взаимно ортогональные, то базис $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ и репер $\mathcal{R}$ называются *ортонормированными*, и СК тоже называется *ортонормированной*. Если, к тому же, векторы $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ образуют правую тройку, то СК называется *декартовой*.

В случае декартовой СК приняты обозначения базисных векторов: $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$; координат – *x, y, z*; координатных осей – *Ox, Oy, Oz*; направленных отрезков на осях – OE_1, OE_2, OE_3 (рис. 4.5).

Репозиторий ВГУ

***Определение* 4.7.** Векторы $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ называются *базисными ортами*. Пусть $\vec{\mathbf{d}}$ – произвольный ненулевой вектор и $\alpha = \angle(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{d}})$, $\beta = \angle(\vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{d}})$, $\gamma = \angle(\mathbf{j}, \vec{\mathbf{d}})$ – углы, которые он образует с положительными направлениями координатных осей (рис. 4.5). Тогда величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{\mathbf{d}}$.

Направляющие косинусы обладают свойством:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Тем самым, вектор с координатами $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ является единичным, и он коллинеарен вектору $\vec{\mathbf{d}}$.

Так же, как и на плоскости, доказывается, что в декартовой СК координаты вектора совпадают с его скалярными проекциями на координатные оси, и поэтому верны формулы:

$$\begin{cases} x = |\vec{\mathbf{d}}|\cos\alpha, \\ y = |\vec{\mathbf{d}}|\cos\beta\,, \\ z = |\vec{\mathbf{d}}|\cos\gamma. \end{cases} \qquad (4.2)$$

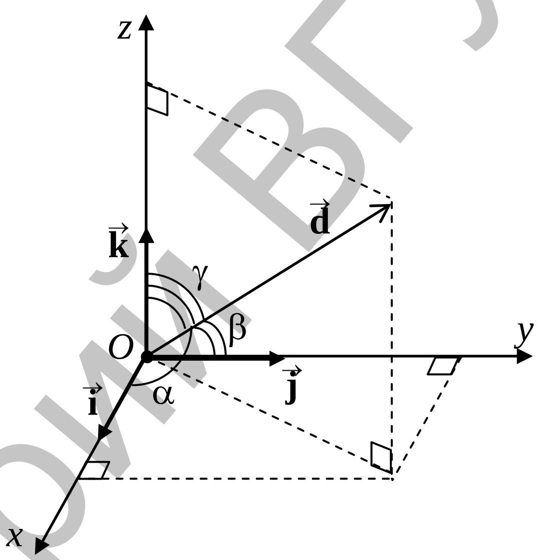


рис. 4.5

§ 5. *Векторное произведение*

***Определение* 4.8.** *Векторным произведением двух ненулевых векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется *вектор*, который обозначается $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ и который обладает следующими свойствами (рис. 4.6):

1. $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} \perp \vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} \perp \vec{\mathbf{b}}$;
2. тройка $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})$ – правая;
3. $|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$.

Если же среди векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ есть хотя бы один нулевой, то их векторным произведением является $\vec{\mathbf{o}}$.

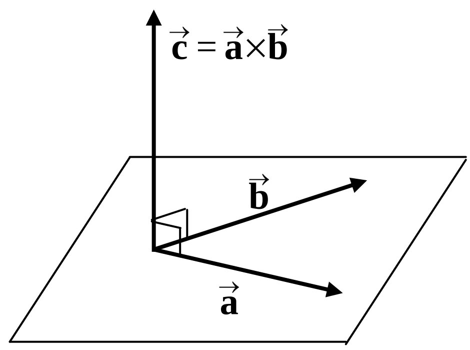


рис. 4.6

Другими словами, векторное произведение двух ненулевых векторов есть вектор, перпендикулярный сомножителям, образующий с ними правую тройку и имеющий длину $|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$. Используется также следующее обозначение для векторного произведения: $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$.

Репозиторий ВГУ

Чрезвычайно распространена на экзамене следующая ошибка. В ответе на вопрос: «Дайте определение векторного произведения» студенты пишут только пункт 3 определения, к тому же, зачастую, опуская модуль у $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$. Невозможно определить вектор, задав только его длину. Необходимо задать ещё его направление.

***Теорема* 4.2.** *Модуль векторного произведения двух векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ *численно равен площади параллелограмма, построенного на направленных отрезках* $\overrightarrow{OA}$ *и* $\overrightarrow{OB}$, *представляющих эти векторы, отложенные из одной точки (рис. 4.7).*

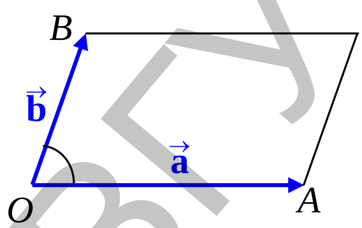


рис. 4.7

Доказательство. Площадь параллелограмма равна

$$S=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB=|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})=|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|. \quad \blacksquare$$

***Следствие* 4.2.1.** (*третий признак коллинеарности векторов*). *Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору*:

$$\vec{\mathbf{a}}\,||\,\vec{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{o}}.$$

В частности, для любого вектора $\vec{\mathbf{a}}$ *выполнено* $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{o}}$.

Действительно, $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{o}}$ тогда и только тогда, когда площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна нулю, а это означает, что либо стороны параллелограмма параллельны, либо длина одной из них равна нулю. Поскольку нулевой вектор считается коллинеарным любому, то это равносильно $\vec{\mathbf{a}}\,||\,\vec{\mathbf{b}}$.

***Свойства векторного произведения*:**

1. $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=-\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}$.
2. $(\lambda\vec{\mathbf{a}})\times\vec{\mathbf{b}}=\lambda(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})$.
3. $\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}}$.

Эти свойства можно доказать геометрически. Мы же докажем их алгебраически после того, как получим формулу для вычисления векторного произведения в декартовых координатах.

§ 6. *Формула для вычисления скалярного произведения в декартовых координатах и её следствия*

Пусть в пространстве задана декартова СК, $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ – базисные орты. Пусть $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$. В соответствии со свойствами скалярного произведения мы можем при скалярном умножении векторов раскрывать скобки, как при умножении чисел. Поэтому

Репозиторий ВГУ

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = (a_1\vec{\mathbf{i}} + a_2\vec{\mathbf{j}} + a_3\vec{\mathbf{k}}) \cdot (b_1\vec{\mathbf{i}} + b_2\vec{\mathbf{j}} + b_3\vec{\mathbf{k}}) =$$
$$= a_1b_1\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}} + a_1b_2\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{j}} + a_1b_3\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}} +$$
$$+ a_2b_1\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{i}} + a_2b_2\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{j}} + a_2b_3\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{k}} +$$
$$+ a_3b_1\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{i}} + a_3b_2\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{j}} + a_3b_3\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}}.$$

Нам известно, что $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ – единичные и взаимно ортогональные, поэтому

$$\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 1,\ \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 0,$$

и это же верно для произведений в другом порядке. В результате получаем формулы для вычисления скалярного произведения, скалярного квадрата и длины вектора:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,; \tag{4.3}$$

$$\vec{\mathbf{a}}^2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\,; \tag{4.4}$$

$$|\,\vec{\mathbf{a}}\,| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}^{\,2}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,. \tag{4.5}$$

Из них вытекает формула для вычисления косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = \frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}| \cdot |\vec{\mathbf{b}}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,. \tag{4.6}$$

Если $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{PQ}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Поэтому длина вектора вычисляется по формуле

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{4.7}$$

Расстоянием между точками P и Q называется длина отрезка PQ. Поэтому мы можем сказать, что по формуле (4.7) вычисляется также расстояние между точками в пространстве. Обозначим его $\rho(P, Q)$. Мы можем рассматривать эту величину как функцию, которая сопоставляет двум точкам число. Свойства этой функции приводятся в §11 главы 1.

§ 7. *Формула для вычисления векторного произведения в декартовых координатах*

***Теорема* 4.3.** *Векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами в декартовой СК*: $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, *вычисляется по формуле*:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{k}} =$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{\mathbf{i}} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{\mathbf{j}} + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\mathbf{k}}\,. \tag{4.8}$$

Репозиторий ВГУ

Доказательство. Обозначим $\vec{\mathbf{c}}$ – это вектор, который вычисляется по формуле (4.8). Мы докажем, что он удовлетворяет всем условиям в определении векторного произведения.

1. С одной стороны,

$$|\vec{\mathbf{c}}|^2 = (a_2b_1 - a_3b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2, \tag{4.9}$$

а с другой стороны,

$$(|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}))^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2\sin^2\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}) = |\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2(1-\cos^2\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})) =$$

$$= |\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2 - |\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2\cos^2\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}) = |\vec{\mathbf{a}}|^2|\vec{\mathbf{b}}|^2 - (\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})^2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2. \tag{4.10}$$

Самостоятельно раскройте скобки в (4.9) и (4.10) и убедитесь, что эти выражения совпадают. Значит,

$$|\vec{\mathbf{c}}|^2 = (|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}))^2 \;\Rightarrow\; |\vec{\mathbf{c}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}).$$

2.
$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}} = (a_1\vec{\mathbf{i}} + a_2\vec{\mathbf{j}} + a_3\vec{\mathbf{k}})\cdot\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}}\right) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

так как в определителе есть две одинаковые строки. Значит, $\vec{\mathbf{a}}\perp\vec{\mathbf{c}}$. Аналогично доказывается, что $\vec{\mathbf{b}}\perp\vec{\mathbf{c}}$.

3. Если $\vec{\mathbf{a}}\,||\,\vec{\mathbf{b}}$, то строки в определителе пропорциональны и наша формула даёт нулевой вектор.

Пусть $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ неколлинеарны. Выберем СК таким образом, чтобы $Ox\uparrow\uparrow\vec{\mathbf{a}}$, а Oy лежала в одной плоскости с $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, причём положительное её направление указывало в ту же полуплоскость, что и $\vec{\mathbf{b}}$ (рис. 4.8). Ось Oz после этого определяется однозначно.

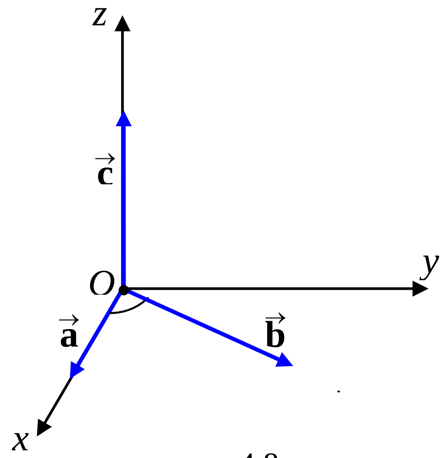


рис. 4.8

В выбранной СК $\vec{\mathbf{a}}(a_1, 0, 0)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, 0)$, причём $a_1 > 0$, $b_2 > 0$. Согласно формуле (4.8) получаем

$$\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1b_2\mathbf{k},$$

причём $a_1b_2 > 0$. Значит, $\vec{\mathbf{c}}\uparrow\uparrow Oz$, и из чертежа мы видим, что тройка векторов $(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}})$ – правая.

Репозиторий ВГУ

Если в пространстве задана произвольная декартова СК, то мы можем её превратить в выбранную нами СК с помощью непрерывного вращения координатных осей. При этом результат вычисления по формуле (4.8) тоже будет изменяться непрерывно. При этом мы доказали в пунктах 1 и 2, что формула даёт вектор определённой длины, параллельный определённой прямой. Поэтому данный вектор будет при непрерывном вращении координатных осей оставаться постоянным. Следовательно, результат вычисления по формуле (4.8) не зависит от выбора системы координат.

Итак, мы доказали, что вектор, который вычисляется по нашей формуле, удовлетворяет всем пунктам в определении векторного произведения. ■

***Следствие* 4.3.1.** $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=-\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}$.

Действительно, по свойству определителя, при перестановке двух строк изменяется знак:

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=-\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}.$$

***Следствие* 4.3.2.** $(\lambda\vec{\mathbf{a}})\times\vec{\mathbf{b}}=\lambda(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})$.

В самом деле, по свойству определителя, общий множитель элементов одной строки выносится за знак определителя:

$$(\lambda\vec{\mathbf{a}})\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\lambda(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}).\ ■$$

***Следствие* 4.3.3.** $\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}}$.

Действительно, по свойствам определителя

$$\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}}.\ ■$$

***Следствие* 4.3.4.** $\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}=\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{i}}=\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{i}}$.

Упражнение. Докажите это самостоятельно с помощью формулы (4.9).

Все эти равенства удобно запоминать с помощью диаграммы (рис. 4.7). Произведение двух ортов, взятых подряд по кругу, даёт третий орт, а в обратном направлении – третий со знаком «–».

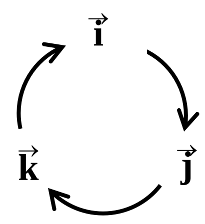


рис. 4.9

Репозиторий ВГУ

§ 8. *Смешанное произведение векторов*

***Определение* 4.9.** *Смешанным произведением трёх векторов* $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ называется число $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}}$. Позже мы выясним, что оно же равно $\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$. Это позволяет нам использовать обозначение $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}$ без расстановки скобок и знаков. В литературе встречается также такое обозначение: $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$.

***Теорема* 4.4.** *Модуль смешанного произведения трёх некомпланарных векторов* $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ *численно равен объёму параллелепипеда, построенного на направленных отрезках* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, *представляющих эти векторы, отложенные из одной точки.*

Доказательство. Пусть $h = OH$ – высота, опущенная из точки C на основание, которым служит параллелограмм, построенный на направленных отрезках $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Пусть α – угол между h и стороной OC (рис. 4.10). Тогда из ΔOCH находим

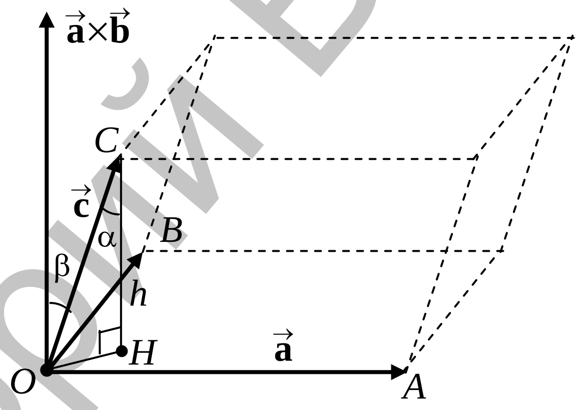


рис. 4.10

$$h = |OC|\cos\alpha, \; S_{\text{осн}} = |\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|.$$

Пусть $\beta = \angle(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$.

<u>*1 случай*</u>. Тройка $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ правая. Тогда $\beta = \alpha$. Поэтому

$$V = S_{\text{осн}}\cdot h = |\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}||OC|\cos\alpha =$$
$$= |\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}||\vec{\mathbf{c}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}) =$$
$$= (\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}}.$$

<u>*2 случай*</u>. Тройка $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ левая. Тогда $\beta = \pi - \alpha$ и $\cos\alpha = -\cos\beta$ (рис. 4.11). Поэтому

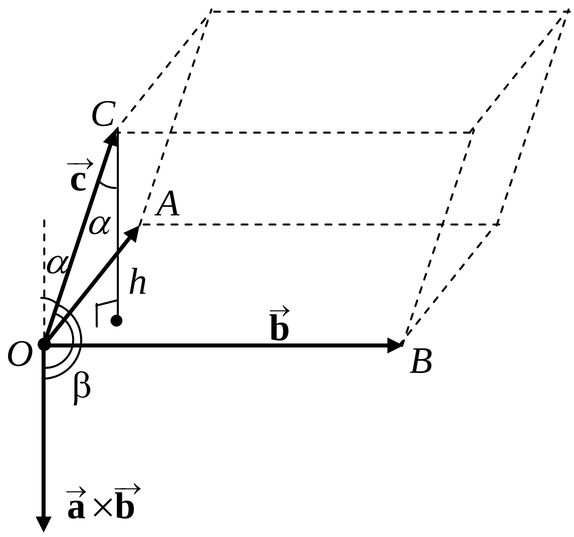


рис. 4.11

$$V = |\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}||OC|\cos\alpha =$$
$$= -|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}||\vec{\mathbf{c}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}) =$$
$$= -(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}}.$$

Но объём всегда неотрицателен. Поэтому во втором случае $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}} \le 0$, и мы имеем

$$V = |(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}}|.$$

Эта формула подойдёт и к первому случаю. ■

Репозиторий ВГУ

***Следствие* 4.4.1.**

1. $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ компланарны $\Leftrightarrow$ $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} = 0$;

2. тройка $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ правая $\Leftrightarrow$ $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} > 0$;

3. тройка $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ левая $\Leftrightarrow$ $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} < 0$.

Действительно, если векторы $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ компланарны, то $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\perp\vec{\mathbf{c}}$, и поэтому $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}} = 0$. Если же они образуют левую тройку, то мы уже доказали, что $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} \le 0$, а так как они в этом случае некомпланарны, то неравенство будет строгим. Аналогично, если тройка $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ правая, то $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} \ge 0$ и $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ некомпланарны; поэтому неравенство будет строгим. Поскольку каждый из случаев исключает другой случай, то все следствия верны и в обратную сторону. ■

***Свойства смешанного произведения*:**

1. *Смешанное произведение не зависит от группировки сомножителей*: $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$.

2. *Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке сомножителей*: $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{a}}$.

3. *При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак*: $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} = -\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{c}} = -\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{a}}$.

4. $(\lambda\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}}(\lambda\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}(\lambda\vec{\mathbf{c}}) = \lambda(\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}})$.

5. $(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{d}} + \vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{d}}$.

Доказательство. Используя свойства определителя, получаем

$$(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}} \right)\cdot(c_1\vec{\mathbf{i}} + c_2\vec{\mathbf{j}} + c_3\vec{\mathbf{k}}) =$$

$$= c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Данное выражение представляет собой разложение определителя по первой строке. Мы переставим в определителе первую строку на третье место:

$$(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\cdot\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

С другой стороны,

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}) = (a_1\vec{\mathbf{i}} + a_2\vec{\mathbf{j}} + a_3\vec{\mathbf{k}})\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}} \right) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \ ■$$

Репозиторий ВГУ

Именно это свойство позволяет использовать обозначение $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}$ без расстановки скобок. Попутно мы доказали формулу

$$\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{4.11}$$

Все остальные свойства смешанного произведения вытекают из аналогичных свойств определителя. ■

§ 9. *Двойное векторное произведение*

***Определение* 4.10.** *Двойным векторным произведением трёх векторов* $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ называется *вектор* $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\times\vec{\mathbf{c}}$.

Обозначим $\vec{\mathbf{d}} = (\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\times\vec{\mathbf{c}}$. Если $\vec{\mathbf{a}} \,||\, \vec{\mathbf{b}}$, то $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{o}}$, и тогда тоже $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{o}}$ Пусть теперь $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ неколлинеарны. Согласно определению векторное произведение перпендикулярно сомножителям. Поэтому

$$\vec{\mathbf{d}} \perp \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}},\quad \vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}},\quad \vec{\mathbf{b}} \perp \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}.$$

Итак, все три вектора $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{d}}$ перпендикулярны одному и тому же вектору $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$. Значит, вектор $\vec{\mathbf{d}}$ компланарен $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ (рис. 4.12), и мы можем разложить $\vec{\mathbf{d}}$ через $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$:

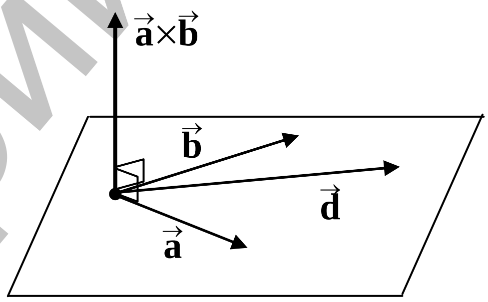


рис. 4.12

$$\vec{\mathbf{d}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}} \tag{4.12}$$

(это верно также и в случае $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{o}}$). Наша задача: вычислить коэффициенты этого разложения.

По определению векторного произведения $\vec{\mathbf{d}} \perp \vec{\mathbf{c}} \;\Leftrightarrow\; \vec{\mathbf{d}}\cdot\vec{\mathbf{c}} = 0$. Домножим обе части равенства (4.12) скалярно на вектор $\vec{\mathbf{c}}$:

$$0 = \lambda(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}) + \mu(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}}). \tag{4.13}$$

Очевидно, что уравнение $\lambda x + \mu y = 0$ относительно неизвестных λ и μ имеет общее решение $(-ky, kx)$, $k \in \boldsymbol{R}$. Поэтому (4.13) имеет общее решение $(-k(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}}), k(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}))$, $k \in \boldsymbol{R}$. Таким образом,

$$(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\times\vec{\mathbf{c}} = -k(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{a}} + k(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}}.$$

Для того чтобы вычислить неизвестный коэффициент k, мы вычислим обе части равенства в специально выбранной декартовой СК. Направим ось $Ox \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{a}}$, а ось Oy направим так, чтобы $\vec{\mathbf{b}}$ был параллелен плоскости Oxy (рис. 4.8). Тогда $\vec{\mathbf{a}}(a_1, 0, 0)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, 0)$, $\vec{\mathbf{c}}(c_1, c_2, c_3)$. Находим:

Репозиторий ВГУ

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \mathbf{k},$$

$$(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\times\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & a_1 b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\,a_1 b_2 c_2\,\mathbf{i} + a_1 b_2 c_2\,\mathbf{j}. \qquad (4.14)$$

С другой стороны:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}} = a_1 c_1, \qquad \vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}} = b_1 c_1 + b_2 c_2,$$

$$(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{a}} = (b_1 c_1 + b_2 c_2) a_1 \vec{\mathbf{i}}, \quad (\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}} = a_1 c_1 (b_1 \vec{\mathbf{i}} + b_2 \vec{\mathbf{j}}).$$

$$-k(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{a}} + k(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}} = k(-\,a_1 b_2 c_2 \vec{\mathbf{i}} + a_1 b_2 c_2 \vec{\mathbf{j}}).$$

Сравнивая последнее равенство с (4.14), получаем $k=1$. Итак,

$$(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\times\vec{\mathbf{c}} = -(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}}.$$

Из этой формулы следует, что

$$\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}) = -(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})\times\vec{\mathbf{a}} = (\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{c}} - (\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{b}}. \qquad (4.15)$$

Именно в таком виде принято запоминать формулу для вычисления двойного векторного произведения. Для этого ей дали название «*бац минус цаб*».

Упражнение. Самостоятельно проверьте с помощью формулы (4.15), что справедливо тождество Якоби:

$$\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}) + \vec{\mathbf{b}}\times(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{c}}\times(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}) \equiv \vec{\mathbf{o}}.$$

§ 10. *Сферическая и цилиндрическая системы координат в пространстве*

Пусть в пространстве задана декартова СК $Oxyz$ и пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка. Опустим перпендикуляр MM_o на плоскость Oxy. Тогда, очевидно, $|MM_o| = |z|$. Обозначим $\rho = |OM|$, $\psi = \angle M_oOM$; при этом считаем, что, $\psi > 0$, если $z > 0$, и $\psi < 0$, если $z < 0$. Пусть (r, φ) – полярные координаты точки M_o на плоскости (рис. 4.13).

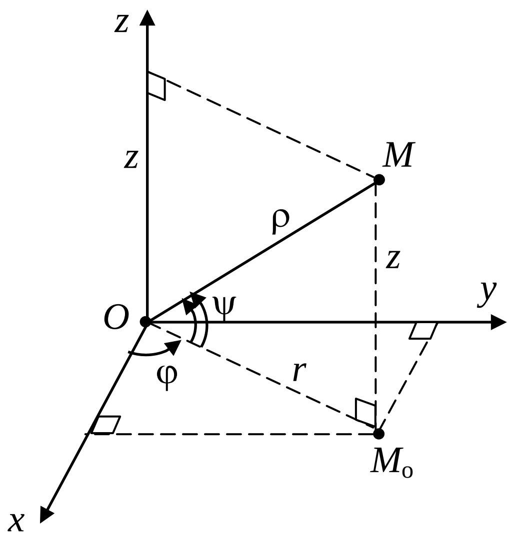


рис. 4.13

Определение 4.11. Тройка чисел (ρ, φ, ψ) называется *сферическими координатами точки* M, а тройка (r, φ, z) – её *цилиндрическими координатами* (рис. 4.13).

Репозиторий ВГУ

Очевидно, что $0 \le \rho < +\infty$, $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$. Если $\psi = \pm\,\pi/2$, то точка M лежит на оси Oz, тогда $M_0 = O$ и поэтому φ считается неопределённым.

Найдём формулы, которые связывают декартовы, сферические и цилиндрические координаты точки M. Из ΔOMM_0 находим, что

$$\begin{cases} r = \rho\cdot\cos\psi, \\ z = \rho\cdot\sin\psi. \end{cases} \qquad (4.16) \qquad\qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{r^2+z^2}, \\ \psi = \arcsin\dfrac{z}{\rho}. \end{cases} \qquad (4.16')$$

Эти формулы можно рассматривать, как переход от сферических координат к цилиндрическим и обратно; а φ у этих систем координат общее. Напомним, что полярные и декартовы координаты связаны между собой формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (1.19)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \qquad (1.19')$$

Данные формулы можно рассматривать, как переход от цилиндрических координат к декартовым, и обратно. Подставляя (4.16) в (1.19), получаем формулы перехода от сферических координат к декартовым, а подставляя (1.19′) в (4.10′), получаем формулы перехода от декартовых координат к сферическим:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cdot\cos\psi, \\ y = \rho\sin\varphi\cdot\cos\psi \\ z = \rho\sin\psi. \end{cases} \qquad (4.17) \qquad\qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \varphi = \pm\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \psi = \arcsin(z/\rho). \end{cases} \qquad (4.17')$$

Во второй формуле из (4.17′) знак выбирается в соответствии со знаком y либо следует использовать две формулы, как в (1.19′).

Сферические координаты можно использовать для введения внутренних координат на сфере. Если начало координат поместить в центр сферы радиуса ρ, то φ и ψ будут играть роль географических долготы и широты точки M, лежащей на сфере (рис. 4.14); пишем $M(\varphi, \psi)$. Точно также цилиндрические координаты позволяют ввести внутренние координаты на поверхности цилиндра. Если начало координат разместить на оси цилиндра радиуса r, то φ и z будут координатами точки M, лежащей на поверхности цилиндра (рис. 4.15); пишем $M(\varphi, z)$.

Ни в коем случае не следует путать сферические и цилиндрические координаты в пространстве с внутренними координатами на сфере и цилиндрической поверхности. Сферические и цилиндрические координаты определяются согласно рисунку 4.13.

Репозиторий ВГУ

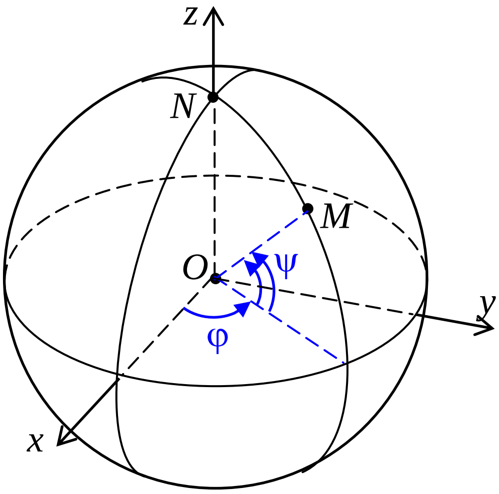


рис. 4.14

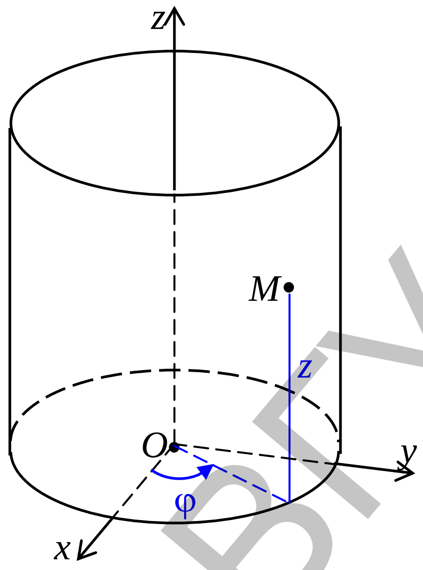


рис. 4.15

§ 11. *Преобразование координат в пространстве*

Пусть в пространстве заданы две декартовы системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, у которых направления координатных осей совпадают, но начальные точки O и O' разные (рис. 4.16). Говорим, что *вторая СК получена из первой переносом начала координат в точку* O'.

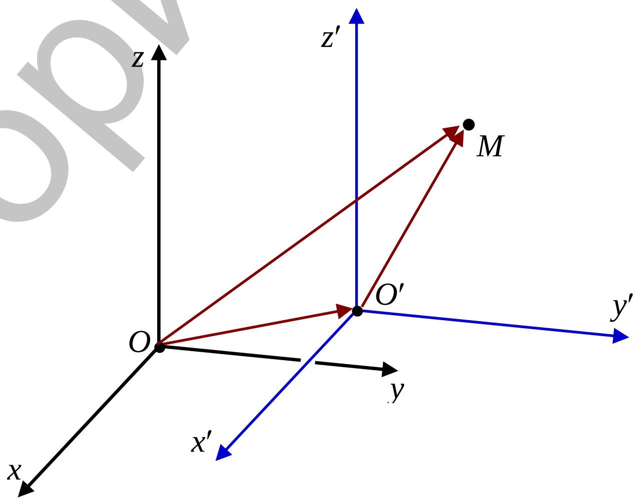


рис. 4.16

Пусть нам известны координаты точки O' относительно первой СК: $O'(a, b, c)$. Пусть M – произвольная точка, (x, y, z) – ее координаты относительно первой СК, (x', y', z') – относительно второй СК. Дословно также, как и в аналогичной ситуации на плоскости, доказывается, что эти координаты связаны между собой равенствами

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c. \end{cases} \qquad (4.18)$$

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b, \\ z' = z - c. \end{cases} \qquad (4.18')$$

Эти формулы справедливы и для случая аффинной СК.

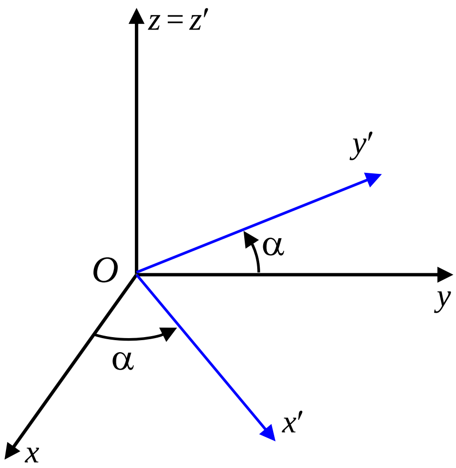


рис. 4.17

Также мы доказали, что если на плоскости новая декартова СК $Ox'y'$

Репозиторий БГУ

получается из старой Oxy поворотом на угол α, то координаты произвольной точки M пересчитываются по формулам (1.22) и (1.22′).

Если в пространстве совершается поворот СК вокруг оси Oz (рис. 4.17), то координата z точки M не изменится, а x и y изменяются по тем же формулам. В итоге имеем формулы преобразования координат

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha, \\ y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha \\ z = z'. \end{cases} \qquad (4.19)$$

$$\begin{cases} x' = \ \ x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha, \\ y' = -x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha \\ z' = z. \end{cases} \qquad (4.19')$$

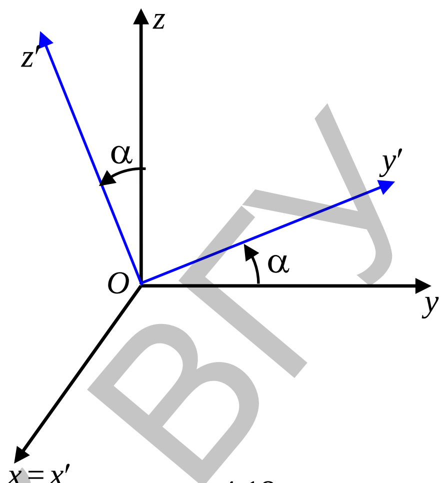


рис. 4.18

Упражнение. Самостоятельно выпишите формулы, по которым преобразуются координаты при повороте координатных осей вокруг оси Ox (рис. 4.18).

Случай преобразования координат при произвольном вращении координатных осей и произвольном преобразовании аффинной СК будет рассмотрен в главе 9.

§ 12. *Примеры решения задач*

***Задача* 1.** *Дано* $|\vec{\mathbf{m}}| = 10$, $|\vec{\mathbf{n}}| = 3$, $\alpha = \angle(\vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{n}}) = 30^{\circ}$. *Найти площадь треугольника, построенного на векторах* $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{m}} - 3\vec{\mathbf{n}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{m}} + 5\vec{\mathbf{n}}$, *отложенных из одной точки.*

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, численно равна модулю их векторного произведения. Площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна половине площади параллелограмма: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|$. Пользуясь свойствами и определением векторного произведения, находим

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (\vec{\mathbf{m}} - 3\vec{\mathbf{n}}) \times (\vec{\mathbf{m}} + 5\vec{\mathbf{n}}) = \vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{m}} + \vec{\mathbf{m}} \times 5\vec{\mathbf{n}} - 3\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{m}} - 15\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{n}} =$$
$$= \vec{\mathbf{o}} + 5\vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{n}} + 3\vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{n}} + 15\vec{\mathbf{o}} = 8|\vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{n}}|.$$

Мы приняли во внимание, что $\vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{o}}$ и что $-\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{n}}$.
Теперь находим модуль этого вектора:

$$|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = 8|\vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{n}}| = 8|\vec{\mathbf{m}}| \cdot |\vec{\mathbf{n}}| \cdot \sin\alpha = 8 \cdot 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 120.$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = 60.$$

***Ответ*:** $S_{\Delta} = 60$.

Репозиторий ВГУ

Подчеркнём, что ни в коем случае нельзя использовать обозначение $\vec{\mathbf{m}}^2$ вместо $\vec{\mathbf{m}}\times\vec{\mathbf{m}}$; запись $\vec{\mathbf{m}}^2$ означает $\vec{\mathbf{m}}\cdot\vec{\mathbf{m}}$.

***Задача* 2.** *Докажите, что векторы* $\vec{\mathbf{a}}(10, 11, 2)$ *и* $\vec{\mathbf{b}}(10,-10, 5)$ *отложенные из одной точки, можно взять в качестве рёбер куба, и найдите третье ребро куба, исходящее из этой же точки.*

Решение. Для того чтобы векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ могли служить рёбрами куба, они должны быть перпендикулярны друг другу и иметь одинаковую длину. Проверяем:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = 10\cdot 11 + 11\cdot(-10) + 2\cdot 5 = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{a}}\perp\vec{\mathbf{b}},$$

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{10^2 + 11^2 + 2^2} = 15, \quad |\vec{\mathbf{b}}| = \sqrt{10^2 + (-10)^2 + 5^2} = 15.$$

Значит, $|\vec{\mathbf{a}}| = |\vec{\mathbf{b}}|$.

Вектор $\vec{\mathbf{c}}$, задающий третье ребро куба, должен быть перпендикулярен $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, а также иметь одинаковую с ними длину. Согласно определению векторного произведения вектор $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ будет перпендикулярен $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$. Выясним, какую он будет иметь длину:

$$|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}|\cdot|\vec{\mathbf{b}}|\cdot\sin\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}) = 15\cdot 15\cdot\sin 90^{\circ} = 225.$$

Искомый вектор $\vec{\mathbf{c}}$ должен иметь длину 15.

Следовательно, $\vec{\mathbf{c}} = \dfrac{1}{15}\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$. Находим

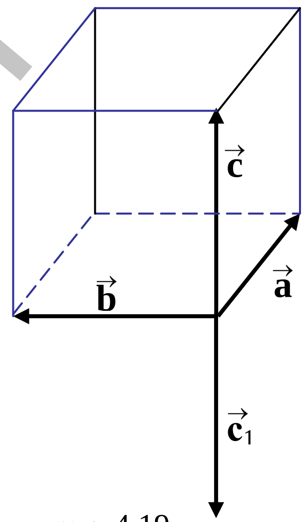


рис. 4.19

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 11 & 10 & 2 \\ 10 & -10 & 5 \end{vmatrix} = 75\vec{\mathbf{i}} - 30\vec{\mathbf{j}} - 210\vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{c}}(5, -2, -14).$$

Очевидно, что вектор $\vec{\mathbf{c}}_1 = -\vec{\mathbf{c}}$ (рис. 4.19) тоже удовлетворяет условиям задачи.

***Ответ*:** $\vec{\mathbf{c}}(5, -2, -14)$, $\vec{\mathbf{c}}_1(-5, 2, 14)$.

***Задача* 3.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды SABC:* $A(4, 0, 1)$, $B(5,-1, 1)$, $C(4, 7,-5)$, $S(7, 5, 2)$. *Найти объём пирамиды, площадь основания ABC и высоту* (*с помощью векторного и смешанного произведений*). *Найти* $\angle BAC$. *Изобразить данную пирамиду в декартовой системе координат.*

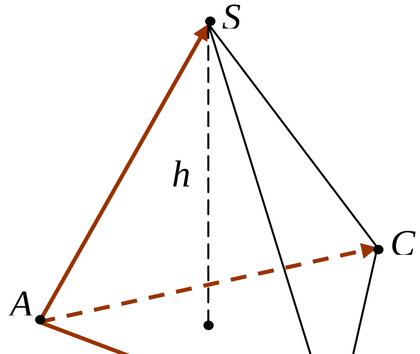


рис. 4.20

Репозиторий ВГУ

Решение. Находим координаты трёх векторов, лежащих на рёбрах пирамиды и исходящих из одной вершины:

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,0),\ \overrightarrow{AC}(0,7,-6),\ \overrightarrow{AS}(3,5,1).$$

Модуль смешанного произведения этих векторов равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах. Объём же пирамиды составляет 1/6 от объёма параллелепипеда: $V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AS}|$.

Смешанное произведение можно вычислить, как определитель, составленный из координат векторов:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AS}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 7 & -6\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix}.$$

Но можно поступить рациональнее. Для вычисления площади основания нам понадобится векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Поэтому можем воспользоваться определением смешанного произведения:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AS}=(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AS}.$$

При этом вероятность арифметической ошибки будет намного меньше. Рекомендуем для проверки правильности вычислений использовать оба способа.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 7 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 7 & -6\end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 7\end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}}=6\vec{\mathbf{i}}+6\vec{\mathbf{j}}+7\vec{\mathbf{k}}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{36+36+49}=\frac{11}{2}.$$

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AS}=6\cdot3+6\cdot5+7\cdot1=55.\qquad V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AS}|=\frac{55}{6}.$$

С другой стороны, $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h$. Отсюда

$$h=\frac{3V}{S_{\Delta ABC}}=\frac{55}{2}:\frac{11}{2}=5.$$

Угол между векторами $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$ вычисляется по формуле

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})=\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|\cdot|\vec{\mathbf{b}}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (4.6)$$

Угол BAC – это есть угол между векторами $\overrightarrow{AB}(1,-1,0)$ и $\overrightarrow{AC}(0,7,-6)$. Поэтому

Репозиторий ВГУ

$$\cos\angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{1\cdot 0 + (-1)\cdot 7 + 0\cdot(-6)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\,\sqrt{0^2+7^2+(-6)^2}} = \frac{-7}{\sqrt{2}\,\sqrt{85}}.$$

$$\angle BAC = \arccos\frac{-7}{\sqrt{170}} = \pi - \arccos\frac{7}{\sqrt{170}}.$$

Построение изображения пирамиды в декартовой системе координат $Oxyz$ показано на рисунке 4.21. Например, для построения изображения точки $S(7,5,2)$ мы по оси Ox откладываем 5 единиц, по оси Oy – 7 единиц, затем строим параллелограмм, вершинами которого являются найденные точки на осях и две стороны которого лежат на Ox и Oy. Из вершины параллелограмма, не лежащей на координатных осях, мы проводим вверх (т.е. параллельно Oz) отрезок длиною 2 единицы.

Ответ: $V = \frac{55}{6}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{11}{2}$, $h = 5$, $\frac{-7}{\sqrt{170}} = \pi - \arccos\frac{7}{\sqrt{170}}$.

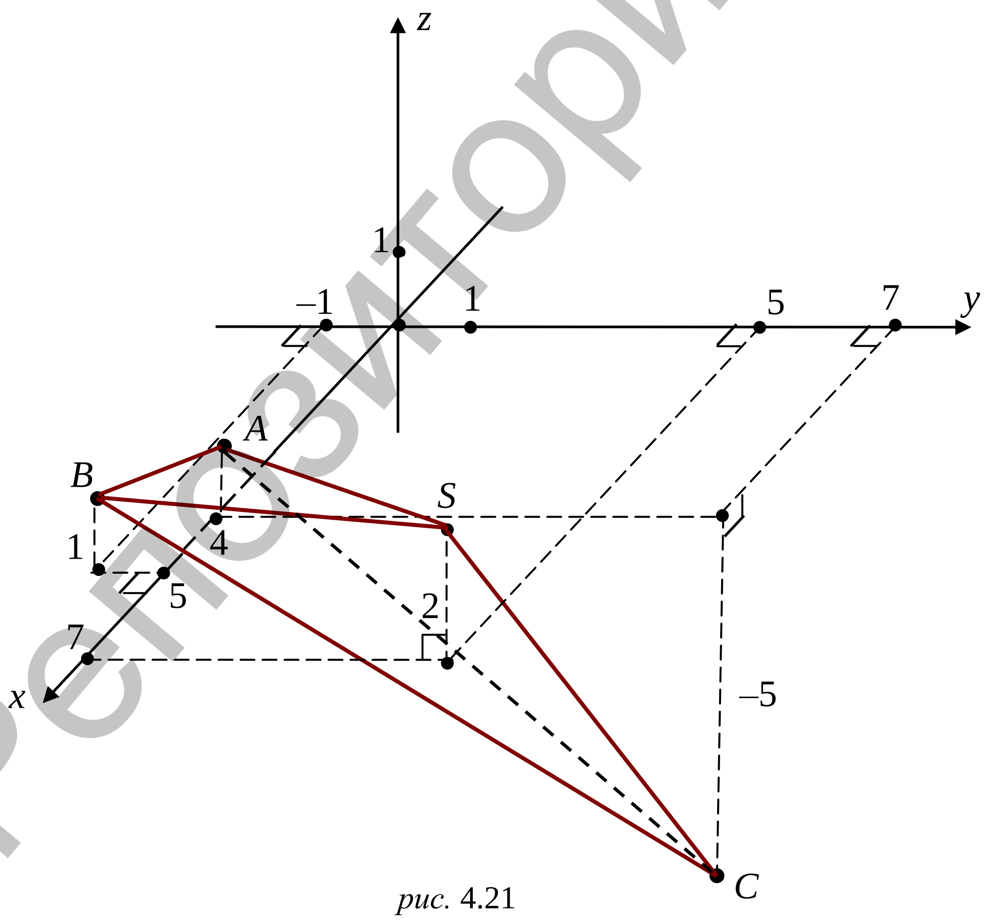


рис. 4.21

Репозиторий ВГУ

Задача 4. а) *Даны сферические координаты точки* $M(8, 120^\circ, -45^\circ)$. *Найти её декартовы координаты.*

б) *Даны декартовы координаты точки* $N(9, -6, 4)$. *Найти её сферические и цилиндрические координаты.*

Решение. а) Переход от сферических координат к декартовым осуществляется по формулам (4.17):

$$\begin{cases} x = 8 \cdot \cos 120^\circ \cdot \cos(-45^\circ) = 8 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}, \\ y = 8 \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos(-45^\circ) = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}, \\ z = 8 \cdot \sin(-45^\circ) = 8 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}. \end{cases}$$

б) Переход от декартовых координат к сферическим осуществляется по формулам (4.17′):

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{9^2 + (-6)^2 + 4^2} = 11, \\ \varphi = -\arccos \dfrac{9}{\sqrt{(-6)^2 + 4^2}} = -\arccos \dfrac{9}{52}, \\ \psi = \arcsin(4/11). \end{cases}$$

Ответ: а) $M(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{6}, -4\sqrt{2})$; б) $N\left(11, -\arccos\dfrac{9}{52}, \arcsin\dfrac{4}{11}\right)$.

Задача 5. *Даны сферические координаты вершин треугольника:* $A(3, 2, 6)$, $B(-4, 4, 0)$, $C(-3, 2, 3)$. *Найдите любой вектор, параллельный его высоте* AD.

Решение. Обозначим $\vec{\mathbf{h}}$ – вектор, параллельный высоте AD, $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{CA}$.

Тогда $\vec{\mathbf{h}} \perp \vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{h}} \perp \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$, потому что вектор $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежит треугольник. Следовательно, $\vec{\mathbf{h}} \,||\, \vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$ (рис. 4.22).

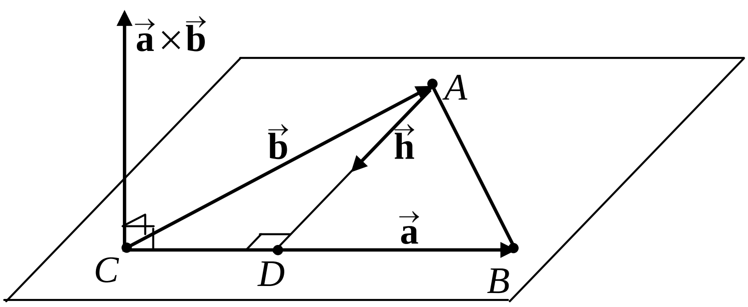


рис. 4.22

Репозиторий ВГУ

Этот вектор проще всего вычислить с помощью формулы

$$\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})=(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{c}}-(\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{b}}. \qquad (4.15)$$

Из этой формулы получаем

$$\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})=(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{b}}-(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{a}}.$$

Находим координаты векторов и их скалярные произведения:

$$\vec{\mathbf{a}}(6,0,3),\ \vec{\mathbf{b}}(-1,2,-3),$$

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}=36+0+9=45,\ \vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}}=-6+0-9=-15.$$

Значит,

$$\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})=45\vec{\mathbf{b}}+15\vec{\mathbf{a}}$$

и $\vec{\mathbf{h}}$ коллинеарен вектору $\vec{\mathbf{a}}+3\vec{\mathbf{b}}$. Находим его координаты: (3, 6,–6). Очевидно, что в качестве $\vec{\mathbf{h}}$ можем взять $\frac{1}{3}(\vec{\mathbf{a}}+3\vec{\mathbf{b}})$, который имеет координаты $(1,2,-2)$.

Ответ: $\vec{\mathbf{h}}(1,2,-2)$.

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 5. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. *Уравнение кривой и поверхности*

***Определение* 5.1.** Пусть Φ – некоторая поверхность в пространстве, а $F(x,y,z)$ – функция трёх переменных. Говорим, что

$$F(x,y,z)=0 \qquad (5.1)$$

есть *уравнение поверхности Φ в неявном виде*, если координаты любой точки $M\in\Phi$ удовлетворяют (5.1), и обратно, каждая тройка (x, y, z) чисел, удовлетворяющих (5.1), задаёт точку $M(x, y, z)$ на поверхности.

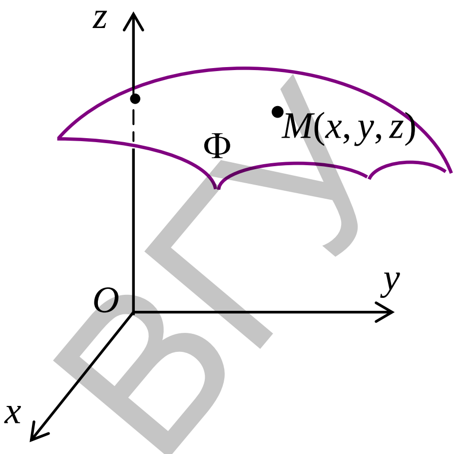


рис. 5.1

При составлении уравнения поверхности необходимо проверять следствие в обе стороны.

Упражнение. Самостоятельно докажите, что сфера радиуса R с центром в точке $O'(a,b,c)$ задаётся уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (5.2)$$

***Определение* 5.2.** Если из уравнения (5.1) удаётся выразить одну переменную через две другие, то получим уравнение поверхности *в явном виде*:

$$z=f(x,y).$$

Вопрос, когда это возможно сделать, изучается в курсе математического анализа. Уравнение сферы (5.2) невозможно переписать в явном виде.

Кривая в пространстве одним уравнением, как правило, не задаётся. Бывают исключительные случаи: так, например, уравнение $x^2+y^2=0$ задаёт прямую – ось Oz. Кривая в пространстве обычно задаётся системой из двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \qquad (5.3)$$

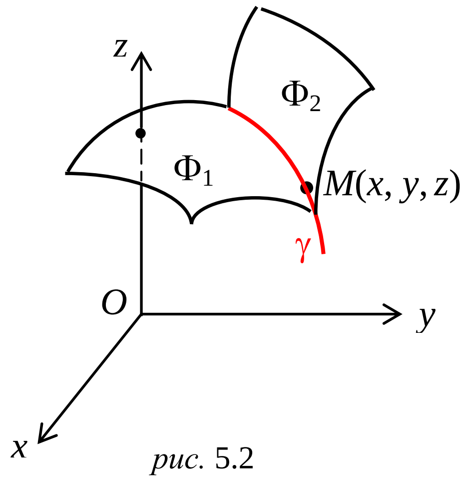


рис. 5.2

Каждое из уравнений в отдельности задаёт поверхность. Если координаты точки M удовлетворяют системе, то она лежит на двух поверхностях одновременно, т.е. $M\in\Phi_1\cap\Phi_2$. Таким образом, система (5.3) задаёт линию пересечения двух поверхностей (хотя заметим, что не всегда это пересечение будет кривой). Аналогично, *если мы хотим*

Репозиторий ВГУ

найти точки пересечения любых двух множеств, заданных своими уравнениями, мы должны объединить данные уравнения в одну систему.

Пример 5.1. Система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=0. \end{cases} \qquad (5.4)$$

задаёт окружность в плоскости Oxy. Первое уравнение системы задаёт сферу с центром в начале координат, а второе – плоскость Oxy. Их пересечение есть окружность γ (рис. 5.3). Если подставить $z=0$ в первое уравнение, то получим

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (5.5)$$

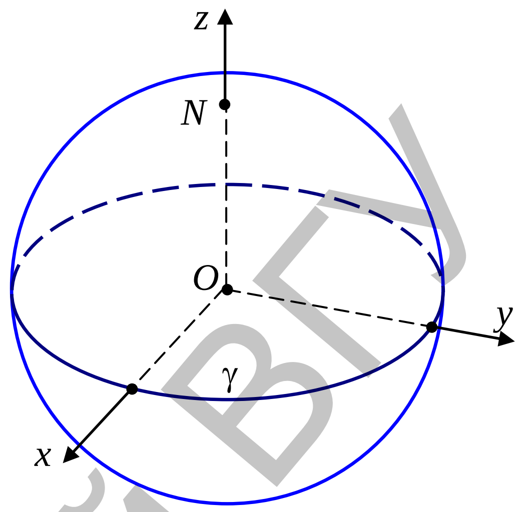


рис. 5.3

Казалось бы, можно сказать, что это и есть уравнение окружности γ. Но это не так. Уравнение (5.5) задаёт цилиндрическую поверхность (см. параграф «Цилиндрические поверхности»). Дело в том, что, подставляя $z=0$ в первое уравнение системы, нельзя отбрасывать при этом само уравнение $z=0$.

Также кривая в пространстве может быть задана *параметрическими уравнениями* вида

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\sigma(t), \ t\in I, \end{cases} \qquad (5.6)$$

где I – интервал числовой прямой. Поверхности с помощью параметрических уравнений изучаются в предмете «Дифференциальная геометрия».

Обозначим $\vec{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор произвольной точки $M(x,y,z)$ на кривой, т.е. вектор с координатами, составленными из неизвестных (x,y,z), а $\overrightarrow{f(t)}$ – вектор с координатами $(\varphi(t), \psi(t), \sigma(t))$. Тогда параметрические уравнения кривой можно переписать в виде одного векторного уравнения

$$\vec{\mathbf{r}}=\overrightarrow{f(t)}, \ t\in I. \qquad (5.6')$$

§ 2. *Уравнение плоскости в пространстве*

Плоскость π в пространстве можно задать:

а) с помощью точки $M_0\in\pi$ и ненулевого вектора $\vec{\mathbf{n}}\perp\pi$ (рис. 5.4); тогда можем написать, что

$$\pi=\{M \mid \overrightarrow{M_0M}\perp\vec{\mathbf{n}}\}; \qquad (5.7)$$

б) с помощью точки $M_o \in \pi$ и двух неколлинеарных векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, параллельных π (рис. 5.4);

в) с помощью трёх точек M_o, M_1, M_2 принадлежащих π и не лежащих на одной прямой.

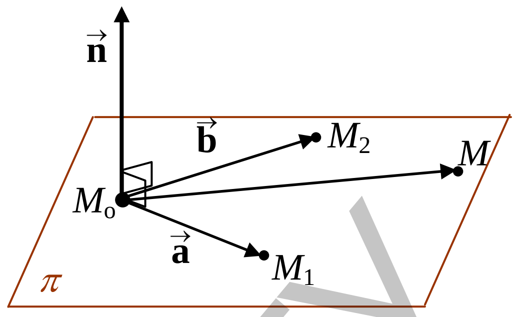


рис. 5.4

***Теорема* 5.1. 1.** *Плоскость π, проходящая через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$, перпендикулярно вектору $\vec{\mathbf{n}}(A, B, C)$, задаётся в декартовой СК уравнением*

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0. \tag{5.8}$$

2. *Плоскость π, проходящая через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, задаётся уравнением*

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0. \tag{5.9}$$

***Доказательство.* 1.** Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости (рис. 5.4). Тогда вектор $\overrightarrow{M_oM}$ имеет координаты $(x-x_o, y-y_o, z-z_o)$ и согласно (5.7) $\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{\mathbf{n}}$, что равносильно $\overrightarrow{M_oM} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$. Последнее равенство в координатах как раз имеет вид (5.8).

Обратно, если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (5.8), то $\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{\mathbf{n}}$, а значит $M \in \pi$.

2. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда $\overrightarrow{M_oM}(x-x_o, y-y_o, z-z_o)$ компланарен векторам $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, а это равносильно тому, что смешанное произведение этих трёх векторов равно нулю:

$$\overrightarrow{M_oM}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = 0.$$

В координатах последнее равенство как раз имеет вид (5.9).

Обратно, если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (5.9), то $\overrightarrow{M_oM}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = 0$, что означает компланарность векторов $\overrightarrow{M_oM}$, $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, а значит, $M \in \pi$.

***Следствие* 5.1.1.** *Плоскость π, проходящая через три точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой, задаётся уравнением*

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x_1-x_o & y_1-y_o & z_1-z_o \\ x_2-x_o & y_2-y_o & z_2-z_o \end{vmatrix}=0. \tag{5.10}$$

Репозиторий ВГУ

Доказательство. Если плоскость проходит через три точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой, то векторы

$$\overrightarrow{M_oM_1}(x_1 - x_o, y_1 - y_o, z_1 - z_o),\ \ \overrightarrow{M_oM_2}(x_2 - x_o, y_2 - y_o, z_2 - z_o)$$

не коллинеарны друг другу и параллельны плоскости π. Подставим их координаты в (5.9) вместо координат векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ и получим (5.10).

***Следствие* 5.1.2.** *Плоскость π, отсекающая на координатных осях ненулевые отрезки a, b, c, задаётся уравнением*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (5.11)$$

(*предполагается, что a, b, c могут быть отрицательными*).

Доказательство. Условие означает, что плоскость проходит через точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ (рис. 5.5). Подставим их координаты в уравнение (5.10):

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Упражнение. Самостоятельно раскройте определитель и приведите получившееся уравнение к виду (5.11). ■

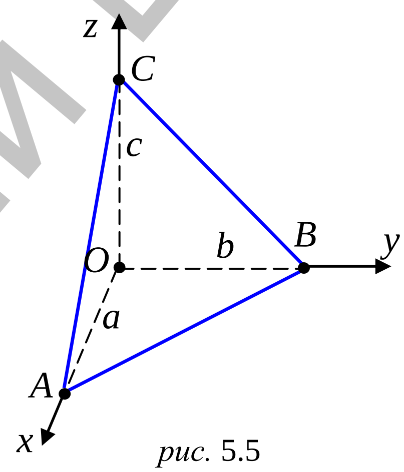


рис. 5.5

***Определение* 5.3.** Уравнение (5.8) называется *уравнением плоскости с вектором нормали*. Уравнение (5.11) называется *уравнением плоскости в отрезках*.

***Следствие* 5.1.3.** *Любая плоскость определяется уравнением вида*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (5.12)$$

которое называется общим уравнением плоскости. И обратно, всякое уравнение вида (5.12), *где* $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, *определяет плоскость. При этом геометрический смысл коэффициентов* (A, B, C) *в этом уравнении – это координаты вектора нормали к плоскости.*

Доказательство. Любая плоскость может быть задана с помощью точки и вектора нормали, а значит, её можно задать уравнением вида (5.8). Раскроем скобки и обозначим $D = -Ax_o - By_o - Cz_o = \text{const}$. Получим уравнение (5.12).

Обратно, пусть некоторое множество π определяется уравнением (5.12). Пусть $M_o(x_o, y_o, z_o)$ – произвольная точка этого множества. Тогда её координаты удовлетворяют (5.12):

$$Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0.$$

Репозиторий ВГУ

Отсюда $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, и, подставляя это значение в (5.12), получим (5.8). А это уравнение, как уже известно, задаёт плоскость. Причём коэффициенты A, B, C в уравнениях (5.8) и (5.12) одни и те же. Поэтому и в уравнении (5.12) эти коэффициенты являются координатами вектора нормали к плоскости. ■

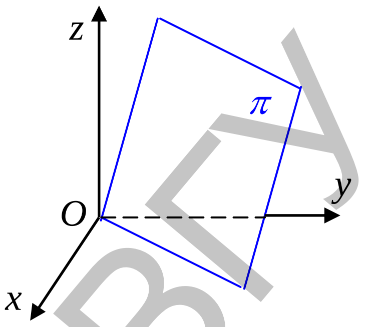


рис. 5.6

Рассмотрим различные частные случаи расположения плоскостей, задаваемых общими уравнениями.

1. $D = 0$. Тогда уравнению

$$Ax + By + Cz = 0$$

удовлетворяют координаты точки $O(0,0,0)$. Плоскость проходит через начало координат (рис. 5.6).

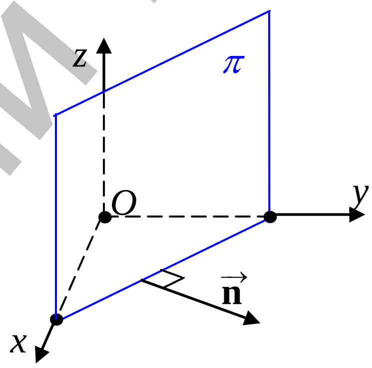


рис. 5.7

2. $C = 0$. Имеем уравнение

$$Ax + By + D = 0.$$

Тогда вектор нормали к плоскости – $\vec{\mathbf{n}}(A, B, 0)$. Он параллелен координатной плоскости Oxy и $\vec{\mathbf{n}} \perp Oz$, а значит, $\pi || Oz$ (рис. 5.7).

Аналогично, при $B = 0$ получим $\pi || Oy$, а при $A = 0$ получим $\pi || Ox$.

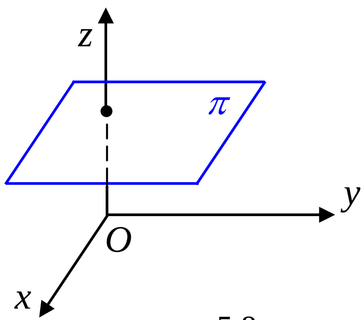


рис. 5.8

3. $A = B = 0$. Имеем уравнение

$$Cz + D = 0,$$

которое равносильно $z = -C/D$. Тогда $\pi \perp Oz$ (рис. 5.8).

Аналогично, при $A = C = 0$ будет $\pi \perp Oy$, а при $B = C = 0$ – $\pi \perp Ox$.

§ 3. *Уравнение плоскости в нормальной форме. Расстояние от точки до плоскости*

Определение **5.4.** Говорим, что *общее уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5.12)$$

имеет нормальную форму, если $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Это равносильно тому, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(A, B, C)$ – единичный.

Репозиторий ВГУ

Если уравнение (5.12) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на $\mu = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Тогда будет выполнено $(A/\mu)^2+(B/\mu)^2+(C/\mu)^2=1$.

***Теорема* 5.2.** *Пусть плоскость* π *определяется уравнением* (5.12) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки* $M(x_1, y_1, z_1)$ *до плоскости вычисляется по формуле*

$$h = |Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|. \tag{5.13}$$

***Следствие* 5.2.1.** *Если плоскость определяется произвольным уравнением вида* (5.12), *то*

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{5.13′}$$

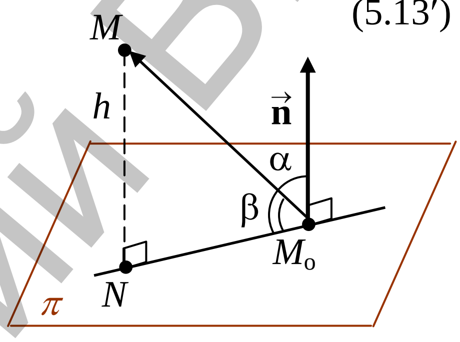


рис. 5.9

Доказательство. Пусть $\vec{\mathbf{n}}(A, B, C)$ – вектор нормали к π. Согласно условию уравнение плоскости имеет нормальную форму, значит, $|\vec{\mathbf{n}}| = 1$. Пусть $M_o(x_o, y_o, z_o)$ – произвольная точка плоскости. Опустим перпендикуляр MN на плоскость π. Пусть $\alpha = \angle(\vec{\mathbf{n}}, \overrightarrow{M_oM})$, $\beta = \angle MM_oN$.

<u>1 *случай*</u>. Точка M и вектор $\vec{\mathbf{n}}$, отложенный из точки M_o, лежат в одном полупространстве относительно плоскости π (рис. 5.9). Тогда

$$h = |MN| = |MM_o| \cdot \sin\beta = |\overrightarrow{M_oM}| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = |\overrightarrow{M_oM}| \cdot \cos\alpha \cdot |\vec{\mathbf{n}}|$$

(мы домножили на $|\vec{\mathbf{n}}|$, поскольку он равен 1). Получилось в точности определение скалярного произведения:

$$h = \overrightarrow{M_oM} \cdot \vec{\mathbf{n}}$$

Находим, что

$$\overrightarrow{M_oM}(x_1 - x_o, y_1 - y_o, z_1 - z_o).$$

Вычисляем:

$$h = \overrightarrow{M_oM} \cdot \vec{\mathbf{n}} = A(x_1 - x_o) + B(y_1 - y_o) + C(z_1 - z_o) =$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - (Ax_o + By_o + Cz_o + D)$$

(мы добавили и отняли D). Поскольку $M_o \in \pi$, то выражение в скобках равно нулю, и мы получаем

$$h = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

Репозиторий ВГУ

2 *случай*. Точка M и вектор $\vec{\mathbf{n}}$ лежат в разных полупространствах относительно плоскости π. Тогда так же, как и в случае прямой на плоскости, $\beta=\alpha-\pi/2 \Rightarrow \sin\beta=-\cos\alpha$ и те же самые вычисления дают

$$h=-\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{\mathbf{n}}=-Ax_1-By_1-Cz_1-D.$$

Поскольку h – это расстояние, то $h\geq 0$. Это означает, что во втором случае $Ax_1+By_1+Cz_1+D<0$ (равенство исключается, т.к. $M\notin\pi$). Поэтому $h=|Ax_1+By_1+Cz_1+D|$. Эта формула подойдёт и к первому случаю. ■

Попутно мы выяснили, что знак выражения $Ax_1+By_1+Cz_1+D$ зависит от того, в каком полупространстве находится точка M. Это позволяет для двух данных точек M_1, M_2 выяснить, лежат ли они в одном полупространстве относительно плоскости π или в разных. Другими словами, мы можем выяснить: пересекает отрезок M_1M_2 плоскость π или не пересекает.

Упражнение. *Нарисуйте чертёж ко второму пункту в доказательстве теоремы и покажите, что в этом случае* $\beta=\alpha-\pi/2$.

§ 4. *Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве*

Определение **5.5.** Пусть дан двугранный угол. Его образуют две полуплоскости с общей границей l. Выберем на l произвольную точку M и проведём два перпендикуляра (луча) к l, лежащих в первой и второй полуплоскостях. Мы получим между этими лучами плоский угол (рис. 5.10), который называется <u>*линейным углом двугранного угла*</u>. Величина этого линейного угла и называется <u>*величиной двугранного угла*</u>.

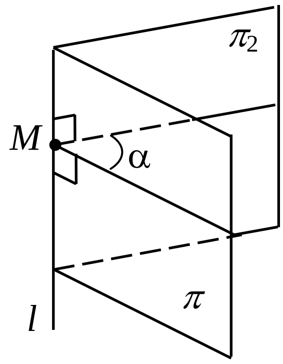


рис. 5.10

Определение **5.6.** Две плоскости образуют при пересечении две пары вертикальных двугранных углов. <u>*Углом между двумя плоскостями*</u> называется величина меньшей пары вертикальных двугранных углов (рис. 5.11).

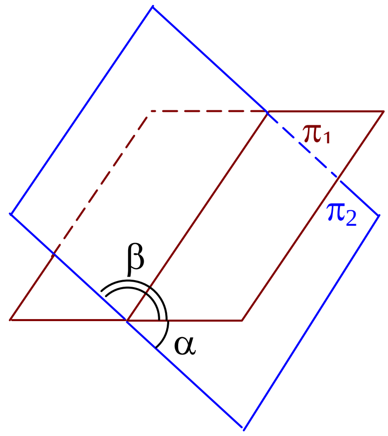


рис. 5.11

Таким образом, угол α между плоскостями находится в пределах $0\leq\alpha\leq\pi/2$ и $\cos\alpha\geq 0$.

Пусть две плоскости в пространстве заданы общими уравнениями:

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $\vec{\mathbf{n}}_1(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{\mathbf{n}}_2(A_2,B_2,C_2)$ – это векторы нормали к π_1 и π_2.

Репозиторий ВГУ

***Теорема* 5.3.** **1.** $\pi_1 || \pi_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$.

2. $\pi_1 = \pi_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

3. $\pi_1 \perp \pi_2 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

4. *угол между* π_1 и π_2 *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2|}{|\vec{\mathbf{n}}_1||\vec{\mathbf{n}}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_1^2}}. \qquad (5.14)$$

Доказательство. **1, 2.** Очевидно, что плоскости π_1 и π_2 параллельны либо совпадают тогда и только тогда, когда их векторы нормали $\vec{\mathbf{n}}_1$ и $\vec{\mathbf{n}}_2$ коллинеарны (рис. 5.12). По второму признаку коллинеарности векторов это равносильно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

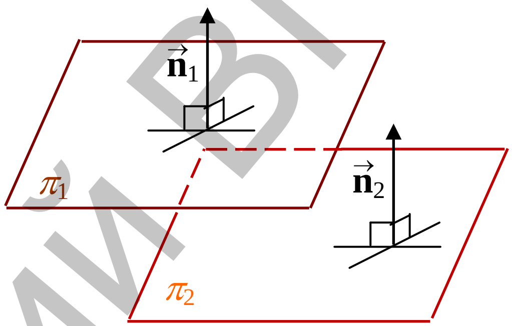


рис. 5.12

Обозначим λ – общий коэффициент пропорциональности. Тогда

$$A_1 = \lambda A_2,\;\; B_1 = \lambda B_2,\;\; C_1 = \lambda C_2. \qquad (5.15)$$

При этом прямые будут совпадать, если у них есть общая точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$, т.е. если одновременно выполняются два равенства

$$A_1x_o + B_1y_o + C_1z_o + D_1 = 0,$$
$$A_2x_o + B_2y_o + C_2z_o + D_2 = 0.$$

Вычтем из первого равенства второе, домноженное на λ:

$$(A_1 - \lambda A_2)x_o + (B_1 - \lambda B_2)y_o + (C_1 - \lambda C_2)z_o + D_1 - \lambda D_2 = 0.$$

В силу (5.15) все скобки равны нулю $\Rightarrow$

$$D_1 - \lambda D_2 = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; D_1/D_2 = \lambda. \qquad (5.16)$$

Тем самым, выполнены все равенства из пункта 2. Соответственно, если (5.16) не имеет места, то плоскости не имеют общей точки, а значит, они параллельны.

3, 4. Мы уже отметили, что угол α между плоскостями находится в пределах $0 \le \alpha \le \pi/2$ и $\cos\alpha \ge 0$. Пусть β – это угол между их векторами нормали $\vec{\mathbf{n}}_1$ и $\vec{\mathbf{n}}_2$. Тогда, очевидно, что β, либо равен α, либо является смежным с ним (на рисунке 5.13 изображён второй случай).

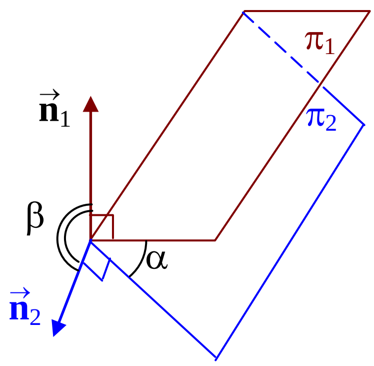


рис. 5.13

Репозиторий ВГУ

В первом случае

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2}{|\vec{\mathbf{n}}_1||\vec{\mathbf{n}}_2|},$$

а во втором –

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = |\cos\beta| = \frac{|\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2|}{|\vec{\mathbf{n}}_1||\vec{\mathbf{n}}_2|}.$$

Последняя формула подойдёт и к первому случаю. ■

§ 5. *Уравнение прямой в пространстве*

Прямую в пространстве можно задать:

а) с помощью точки $M_o \in l$ и ненулевого вектора $\vec{\mathbf{a}} \,||\, l$, который называется *направляющим вектором прямой* (рис. 5.14); тогда можем написать, что

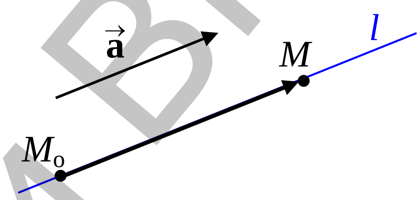


рис. 5.14

$$l = \{M \,|\, \overrightarrow{M_oM} \,||\, \vec{\mathbf{a}}\}; \qquad (5.17)$$

б) как пересечение двух плоскостей: $l = \pi_1 \cap \pi_2$; в этом случае l будет задаваться системой из двух уравнений вида (5.3); это равносильно заданию точки $M_o \in l$ и двух векторов, перпендикулярных прямой (рис. 5.15).

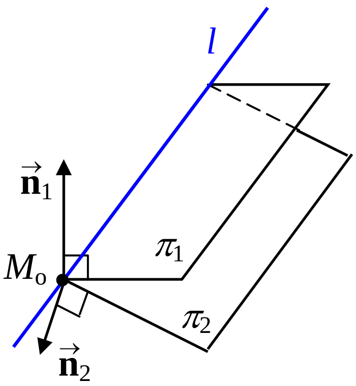


рис. 5.15

Задать прямую в пространстве с помощью одного вектора нормали нельзя: через данную точку перпендикулярно данному вектору проходит бесконечно много прямых.

***Теорема* 5.4. 1.** *Прямая l, проходящая через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$, параллельно вектору $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, задаётся уравнением*

$$\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2} = \frac{z - z_o}{a_3} \qquad (5.18)$$

(*каноническое уравнение*), *или параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t, \\ z = z_o + a_3 t,\ t \in \boldsymbol{R}, \end{cases} \qquad (5.19)$$

которые можно записать в векторном виде:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_o + t\vec{\mathbf{a}},\ t \in \boldsymbol{R}, \qquad (5.19')$$

где $\vec{\mathbf{r}}_o = \overrightarrow{OM}_o$ *– радиус-вектор точки* M_o.

Репозиторий ВГУ

2. *Прямая, проходящая через точку* $M_o(x_o, y_o, z_o)$, *перпендикулярно двум векторам нормали* $\vec{\mathbf{n}}_1(A_1, B_1, C_1)$ *и* $\vec{\mathbf{n}}_2(A_2, B_2, C_2)$, *задаётся в декартовой СК системой уравнений*

$$\begin{cases} A_1(x-x_o)+B_1(y-y_o)+C_1(z-z_o)=0\,, \\ A_2(x-x_o)+B_2(y-y_o)+C_2(z-z_o)=0\,. \end{cases} \tag{5.20}$$

Доказательство. **1.** Доказательство этого пункта дословно повторяет доказательство пункта 1 теоремы 2.1 с той лишь разницей, что у всех точек и векторов добавляется ещё третья координата.

2. Первое из уравнений системы (5.17) задаёт плоскость π_1, проходящую через точку M_o, перпендикулярно вектору $\vec{\mathbf{n}}_1$, а второе уравнение задаёт плоскость π_2, проходящую через точку M_o, перпендикулярно вектору $\vec{\mathbf{n}}_2$. Пересечение этих плоскостей и задаёт нашу прямую. ■

В дальнейшем к параметрическому уравнению прямой не будем добавлять $t \in \boldsymbol{R}$. Это подразумевается «по умолчанию».

***Следствие* 5.4.1.** *Прямая, проходящая через две точки* $M_o(x_o, y_o, z_o)$ *и* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, *задаётся уравнением*

$$\frac{x-x_o}{x_1-x_o}=\frac{y-y_o}{y_1-y_o}=\frac{z-z_o}{z_1-z_o} \tag{5.21}$$

Доказательство дословно повторяет доказательство следствия 2.1.1 с той лишь разницей, что у всех точек и векторов добавляется ещё третья координата.

§ 6. *Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве*

Прямая в пространстве может иметь с плоскостью:

а) одну общую точку, и тогда говорят, что она пересекает плоскость;
б) ни одной общей точки, и тогда говорят, что она параллельна плоскости;
в) более чем одну общую точку, и тогда она лежит в этой плоскости.

***Определение* 5.7.** Пусть прямая l пересекает плоскость и B – точка пересечения. Выберем на прямой любую другую точку A и опустим перпендикуляр AA_o на плоскость. Тогда прямая $l'=A_oB$ (рис. 5.16) называется *проекцией прямой l на плоскость*. *Углом между прямой и плоскостью* называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

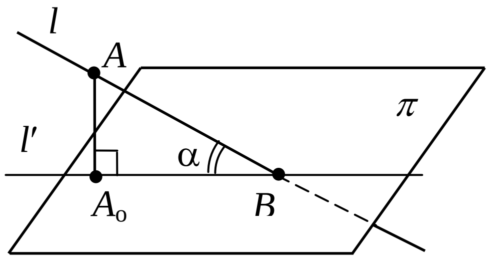


рис. 5.16

Репозиторий ВГУ

Пусть плоскость π задана общим уравнением, а прямая l – канонических уравнением:

$$\pi:\ Ax + By + Cz + D = 0, \qquad l: \frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2} = \frac{z - z_o}{a_3}.$$

Тогда сразу можем отметить, что $\vec{\mathbf{n}}(A, B, C)$ – это вектор нормали к плоскости π, $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор прямой l и точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$ лежит на прямой.

Теорема **5.5.** **1.** $l \in \pi \iff \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, & (5.22.1) \\ Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0, & (5.22.2) \end{cases}$

2. $l \| \pi \iff \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, & (5.23.1) \\ Ax_o + By_o + Cz_o + D \neq 0, & (5.23.2) \end{cases}$

3. $l \perp \pi \iff \dfrac{A}{a_1} = \dfrac{B}{a_2} = \dfrac{C}{a_3};$ (5.24)

4. *угол между* l *и* π *вычисляется по формуле*

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{a}}|}{|\vec{\mathbf{n}}||\vec{\mathbf{a}}|} = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \tag{5.25}$$

Доказательство. **1, 2.** Очевидно, что прямая лежит в плоскости или параллельна ей тогда и только тогда, когда векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{n}}$ перпендикулярны (рис. 5.17), а это равносильно тому, что $\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = 0$. Именно это и означает равенство (5.22.1). Если при этом выполнено (5.22.2), то $M_o(x_o, y_o, z_o) \in \pi$, а значит, и вся прямая лежит в плоскости. Если выполнено (5.23.2), то $M_o \notin \pi$, а значит, $l \notin \pi$.

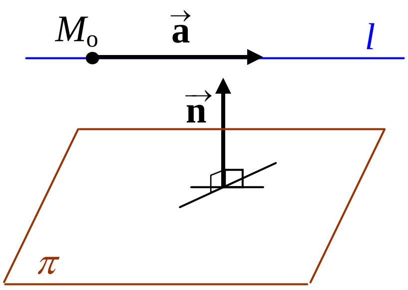


рис. 5.17

3. Очевидно, что $l \perp \pi \iff \vec{\mathbf{a}} \| \vec{\mathbf{n}}$ (рис. 5.18), а равенства (5.24) как раз представляют собой условие коллинеарности этих векторов.

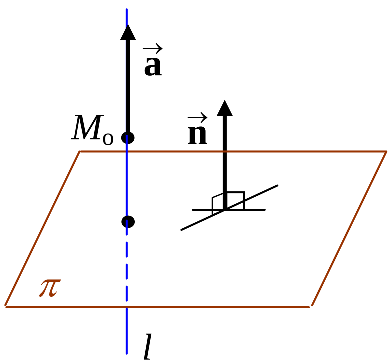


рис. 5.18

4. Если α – угол между l и π, то $0 \le \alpha \le \pi/2$ и $\sin\alpha \ge 0$. Обозначим $\beta = \angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{n}})$. Тогда возможны два случая: $\alpha = \pi/2 - \beta$ или $\alpha = \beta - \pi/2$. Оба случая изображены на рисунках 5.19 и 5.20.

В первом случае имеем

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{n}}||\vec{\mathbf{a}}|},$$

а во втором –

$$\sin\alpha = -\cos\beta = |\cos\beta| = \frac{|\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{a}}|}{|\vec{\mathbf{n}}||\vec{\mathbf{a}}|}.$$

Репозиторий ВГУ

Эта формула подойдёт и к первому случаю. ■

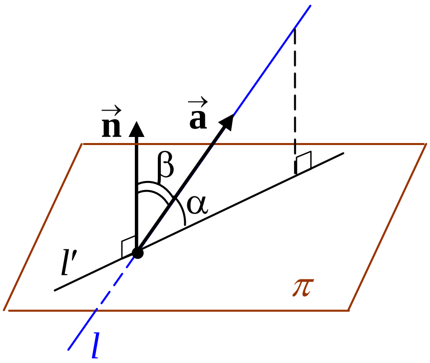


рис. 5.19

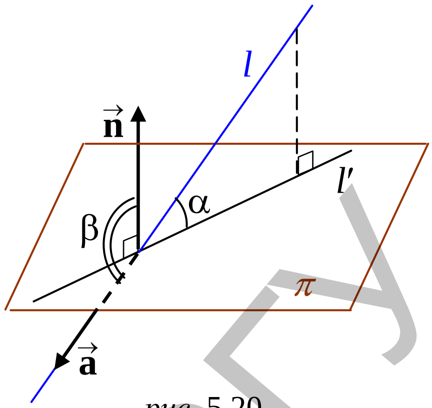


рис. 5.20

Если плоскость задана тем же общим уравнением, а прямая – параметрическими уравнениями (5.22), то для определения их взаимного положения можем поступить проще. Мы подставим выражения для x, y, z из параметрического уравнения прямой в уравнение плоскости и приведём подобные. Если получится, что уравнение имеет одно решение $t = t_o$, то прямая пересекает плоскость. Если получится, что уравнение не имеет решений, то прямая параллельна плоскости. Если же получится тождество $0 = 0$, то прямая лежит в плоскости. Примеры будут разобраны в §10.

§ 7. *Взаимное расположение двух прямых в пространстве*

***Определение* 5.8.** *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку. Другими словами, если прямые l_o и l_1 скрещиваются, то мы должны совершить параллельный перенос прямой l_o так, чтобы получилась прямая l_o', пересекающаяся с l_1 (рис. 5.21) , и измерить угол между l_o' и l_1.

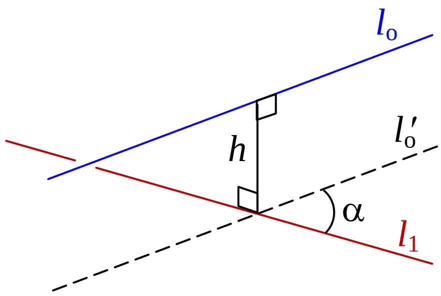


рис. 5.21

Пусть две прямые в пространстве заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_o\colon\ \frac{x-x_o}{a_1}=\frac{y-y_o}{a_2}=\frac{z-z_o}{a_3}, \qquad l_1\colon\ \frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}. \qquad (5.26)$$

Тогда сразу можем сделать вывод, что $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) \| l_o$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3) \| l_1$, $M_o(x_o, y_o, z_o) \in l_o$, $M_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_oM_1}$. Его координаты: $(x_1 - x_o, y_1 - y_o, z_1 - z_o)$. Из координат векторов $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ и $\overrightarrow{M_oM_1}$ составим матрицу

Репозиторий ВГУ

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} x_1-x_{\mathrm{o}} & y_1-y_{\mathrm{o}} & z_1-z_{\mathrm{o}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

и пусть $\Delta=\det\mathbf{A}$.

***Теорема* 5.6. 1.** *Угол между* l_1 *и* l_2 *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha=\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{5.27}$$

2. *Прямые* l_{o} *и* l_1 *скрещиваются* $\Leftrightarrow$ $\Delta\neq 0$.

3. *Прямые* l_{o} и l_1 *пересекаются* $\Leftrightarrow$ $\Delta=0$ и $\vec{\mathbf{a}}\nparallel\vec{\mathbf{b}}$.

4. $l_{\mathrm{o}}||l_1 \Leftrightarrow$ $\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}$ и $\overrightarrow{M_{\mathrm{o}}M_1}\nparallel\vec{\mathbf{a}}$.

5. $l_{\mathrm{o}}=l_1 \Leftrightarrow$ $\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}||\overrightarrow{M_{\mathrm{o}}M_1}$.

***Доказательство.* 1.** Угол α между прямыми l_{o} и l_1 может быть равен углу β между их направляющими векторами $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ (рис. 5.22), а может быть смежным с ним (рис. 5.23). В первом случае

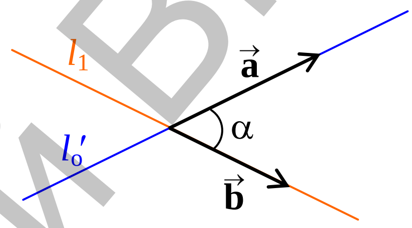


рис. 5.22

$$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|},$$

а во втором –

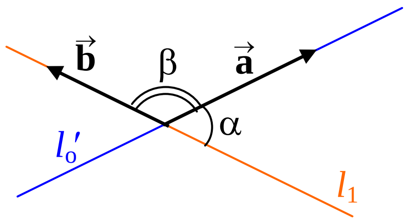


рис. 5.23

$$\cos\alpha=-\cos\beta=|\cos\beta|=\frac{|\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}|}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}.$$

Эта формула подойдёт и к первому случаю. Обратите внимание, что на обоих чертежах изображена не прямая l_{o}, а параллельная ей прямая l_{o}'.

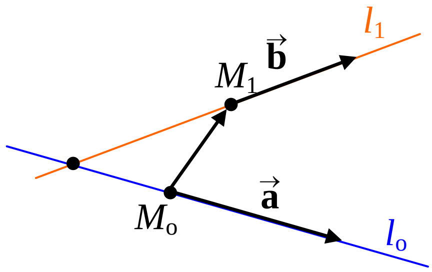


рис. 5.24

2, 3. Очевидно, что прямые l_{o} и l_1 не параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ не коллинеарны. При этом прямые лежат в одной плоскости и пересекаются если и только если векторы $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{M_{\mathrm{o}}M_1}$ компланарны (рис. 5.24), т.е. их смешанное произведение равно нулю: $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\overrightarrow{M_{\mathrm{o}}M_1}=0$. А в координатах это произведение точности равно Δ.

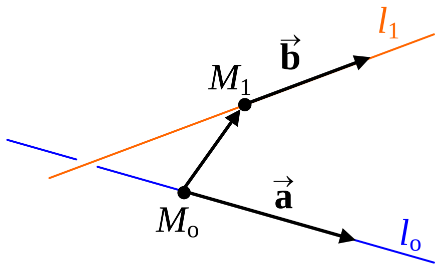


рис. 5.25

Репозиторий ВГУ

Соответственно, если $\Delta \neq 0$, то векторы $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{M_oM_1}$ не компланарны (рис. 5.25), прямые l_o и l_1 не лежат в одной плоскости, а значит, они скрещиваются.

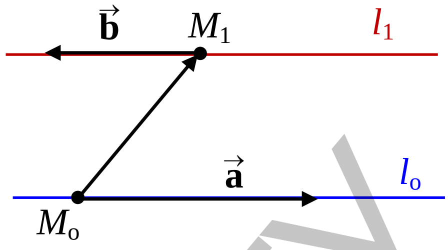


рис. 5.26

4, 5. В обоих случаях, когда $l_o || l_1$ и когда $l_o = l_1$, выполнено $\vec{\mathbf{a}} || \vec{\mathbf{b}}$, и обратно, если $\vec{\mathbf{a}} || \vec{\mathbf{b}}$, то прямые либо параллельны, либо совпадают. Мы можем различить эти случаи так.

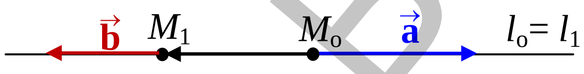


рис. 5.27

В первом случае вектор $\overrightarrow{M_oM_1}$ неколлинеарен $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ (рис. 5.26). Это можно определить по матрице **A**: в ней первая строка должна быть не пропорциональна второй (или третьей) строке. Во втором случае все три вектора $\overrightarrow{M_oM_1}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ коллинеарны (рис. 5.27), и поэтому все строки в матрице **A** пропорциональны.

И обратно, если все три вектора $\overrightarrow{M_oM_1}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ коллинеарны друг другу, то $l_o = l_1$, а если $\vec{\mathbf{a}} || \vec{\mathbf{b}}$ и $\overrightarrow{M_oM_1} \nparallel \vec{\mathbf{a}}$, то прямые параллельны. ■

§ 8. *Расстояние между прямыми в пространстве. Расстояние от точки до прямой*

***Определение* 5.9.** Две параллельные прямые имеют бесконечное число общих перпендикуляров, и все они имеют одинаковую длину (рис. 5.28). Длина этих перпендикуляров и называется *расстоянием между прямыми*. Две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр (рис. 5.29). Его длина называется *расстоянием между прямыми*.

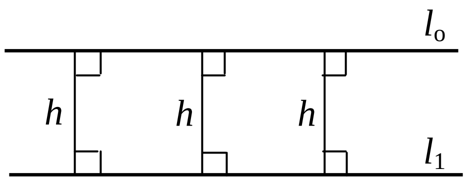


рис. 5.28

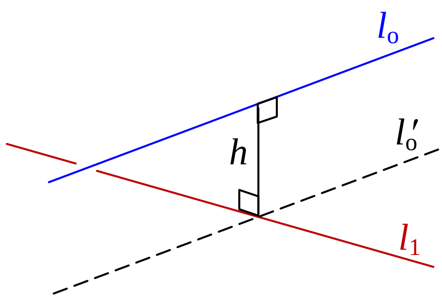


рис. 5.29

***Теорема* 5.7.** *Пусть две прямые l_o и l_1 в пространстве заданы своими каноническими уравнениями* (5.29). *Тогда*

1. *если $l_o || l_1$, то расстояние между l_o и l_1 вычисляется по формуле*

$$h = \frac{|\overrightarrow{M_oM_1} \times \vec{\mathbf{a}}|}{|\vec{\mathbf{a}}|}, \qquad (5.28)$$

Репозиторий ВГУ

2. *если* l_o *и* l_1 *скрещиваются, то расстояние между ними находится по формуле*

$$h = \frac{|\overrightarrow{M_oM_1}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,|}{|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\,|}\,. \tag{5.29}$$

Доказательство. **1.** Пусть $l_o || l_1$. Отложим вектор $\vec{\mathbf{a}}$ от точки M_o, и на векторах $\vec{\mathbf{a}}$ и $\overrightarrow{M_oM_1}$ построим параллелограмм (рис. 5.30). Тогда его высота h будет расстоянием между l_o и l_1. Площадь этого параллелограмма равна: $S = |\overrightarrow{M_oM_1}\times\vec{\mathbf{a}}\,|$, а основание равно $|\vec{\mathbf{a}}\,|$. Поэтому

$$h = \frac{S}{|\vec{\mathbf{a}}\,|} = \frac{|\overrightarrow{M_oM_1}\times\vec{\mathbf{a}}\,|}{|\vec{\mathbf{a}}\,|}\,.$$

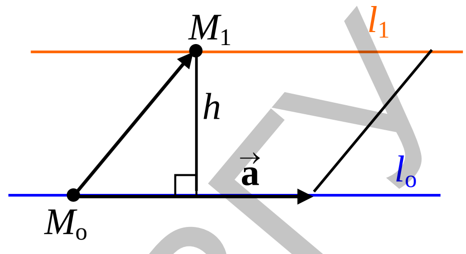


рис. 5.30

2. Пусть l_o и l_1 скрещиваются. Проведём через прямую l_o плоскость $\pi_o || l_1$, а через прямую l_1 – плоскость $\pi_1 || l_o$. Тогда общий перпендикуляр к l_o и l_1 также будет общим перпендикуляром к π_o и π_1. Отложим векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ из точки M_o. На получившихся направленных отрезках

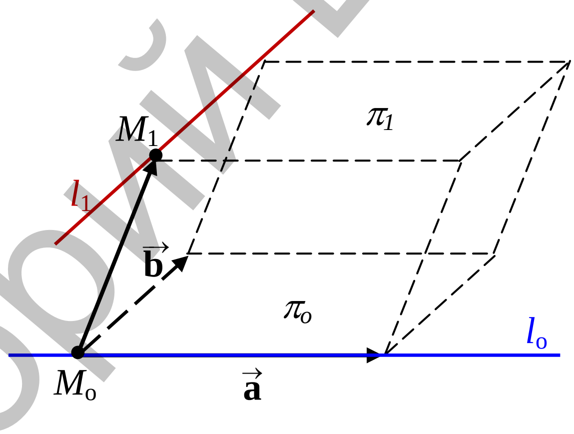


рис. 5.31

и на $\overrightarrow{M_oM_1}$ построим параллелепипед (рис. 5.31). Тогда его нижнее основание лежит в плоскости π_o, а верхнее – в плоскости π_1. Поэтому высота параллелепипеда будет общим перпендикуляром к π_o и π_1, а её величина h будет расстоянием между l_o и l_1. Объём параллелепипеда равен $|\overrightarrow{M_oM_1}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,|$, а площадь основания равна $|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\,|$ $\Rightarrow$

$$h = \frac{V}{S_{осн}} = \frac{|\overrightarrow{M_oM_1}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,|}{|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\,|}\,. \qquad \blacksquare$$

Следствие 5.7.1. *Расстояние от точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *до прямой* l, *заданной уравнением*

$$l\colon\ \frac{x-x_o}{a_1} = \frac{y-y_o}{a_2} = \frac{z-z_o}{a_3}\,,$$

вычисляется по формуле (5.28).

Репозиторий ВГУ

§ 9. *Взаимное расположение трёх плоскостей в пространстве*

Перед изучением этого параграфа следует ознакомиться с понятием ранга матрицы (§5 приложения).

Пусть три плоскости π_1, π_2, π_3 в пространстве заданы своими общими уравнениями. Запишем их в виде системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases} \qquad (5.30)$$

Составим матрицу и расширенную матрицу этой системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A^*} = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{array}\right).$$

Обозначим $\Delta = \det \mathbf{A}$.

Отметим, что матрица $\mathbf{A^*}$ содержит в себе матрицу $\mathbf{A}$, и поэтому выполнено $\operatorname{rank}\mathbf{A} \le \operatorname{rank}\mathbf{A^*}$.

<u>*1 случай*</u>. $\Delta \ne 0$. Тогда согласно правилу Крамера система (5.33) имеет единственное решение. Это значит, что все плоскости пересекаются в одной точке (рис. 5.32).

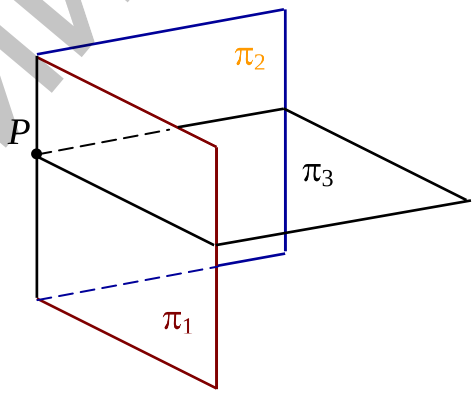


рис. 5.32

<u>*2 случай*</u>. $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 2$, $\operatorname{rank}\mathbf{A^*} = 3$. Согласно теореме Кронекера–Капелли система (5.33) не имеет решения, а значит, не существует точки, которая принадлежит всем трём плоскостям одновременно. При этом все три плоскости не могут быть параллельны друг другу, иначе все строки в матрице $\mathbf{A}$ были бы пропорциональны и её ранг был бы равен 1.

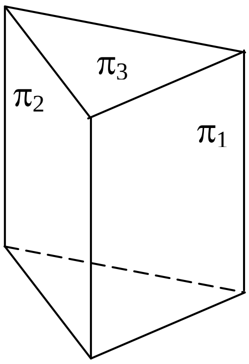


рис. 5.33

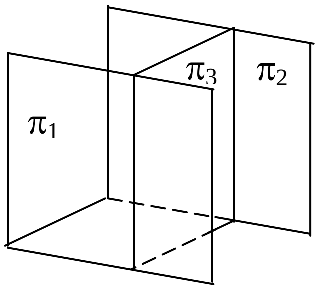


рис. 5.34

Однако возможен случай, когда две плоскости параллельны, а третья им не параллельна. Два возможных варианта расположения плоскостей изображены на рисунках 5.33 и 5.34.

<u>*3 случай*</u>. $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A^*} = 2$. Согласно теореме Кронекера–Капелли система (5.33) имеет решение. Примем без доказательства, что решений

Репозиторий ВГУ

в данном случае будет бесконечное количество. Два возможных варианта расположения плоскостей изображены на рисунках 5.35 и 5.36.

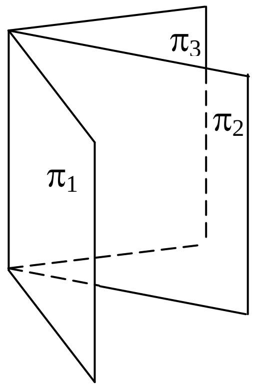


рис. 5.35

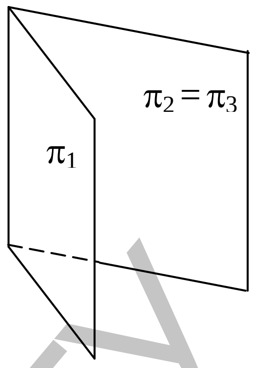


рис. 5.36

<u>*4 случай*</u>. $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 1$, $\operatorname{rank}\mathbf{A^*} = 2$. Согласно теореме Кронекера–Капелли система (5.33) не имеет решения. Все строки в матрице **A** пропорциональны, а это значит, что либо все плоскости параллельны, либо среди них есть совпадающие. Два возможных варианта расположения плоскостей изображены на рисунках 5.37 и 5.38.

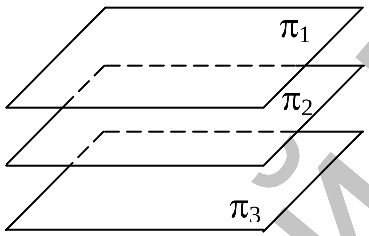


рис. 5.37

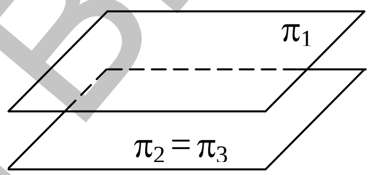


рис. 5.38

<u>*5 случай*</u>. $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A^*} = 1$. Согласно теореме Кронекера–Капелли система (5.33) имеет решения. Все строки в матрице **A*** пропорциональны, а это значит, что все плоскости совпадают.

§ 10. *Примеры решения задач*

***Задача* 1.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды SABC*: $A(-3,\ 7,\ 1)$, $B(-1, 9, 2)$, $C(-3, 6, 6)$, $S(6, -5, -2)$.

а) *Составить уравнение плоскости основания ABC*.

б) *Составить уравнение высоты SH*.

в) *Найти координаты точки H и точки D, симметричной S относительно плоскости основания* (рис. 5.39).

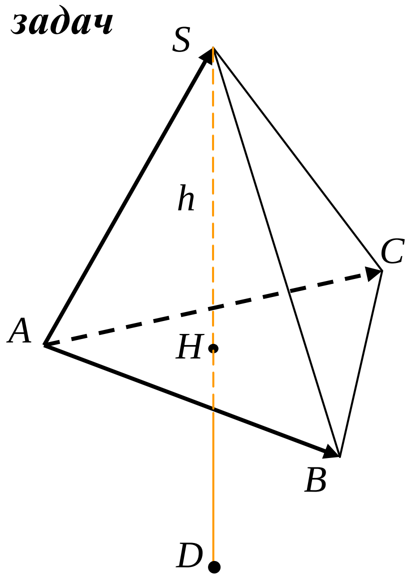


рис. 5.39

Решение. **а)** Найдём координаты двух векторов, параллельных плоскости основания $\pi = ABC$:

$$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}(2,\ 1,\ 1),\ \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{AC}(0, -1,\ 5).$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, имеет вид

Репозиторий ВГУ

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.9}$$

Подставляем в это уравнение наши данные:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-7 & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель по первой строке:

$$11(x-3)-10(y-7)-2(z-1)=0,$$

$$11x-10y-2z+105=0.$$

Вычисляем высоту, как расстояние от точки S до плоскости основания по формуле (5.13′):

$$h=\frac{|11\cdot 6-10\cdot(-5)-2\cdot(-5)+105|}{\sqrt{11^2+(-10)^2+(-2)^2}}=15.$$

б) Из уравнения плоскости находим, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(11,-10,-2)$ является вектором нормали к плоскости. Этот же вектор будет направляющим для прямой SH. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ с направляющим вектором $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, имеет вид

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t, \\ z = z_o + a_3 t. \end{cases}$$

В нашем случае получаем уравнение:

$$SH:\ \begin{cases} x = \ 6 + 11t, \\ y = -5 - 10t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases} \tag{5.31}$$

в) Найдём основание перпендикуляра. Это точка пересечения прямой SH с плоскостью π. Для этого мы должны решить совместно уравнения SH и π. Подставляем x, y, z из уравнения l в уравнение π:

$$11(6+11t)-10(-5-10t)-2(-2-2t)+105=0,$$

$$66+121t+50+100t+4+4t+105=0,$$

$$225y=-225, \quad t_H=-1.$$

Мы именно так обозначили найденное значение параметра, потому что оно соответствует точке H. Это значение подставляем в уравнение (5.31) и находим координаты $H(-5, 5, 0)$.

Вспомним физический смысл параметрического уравнения прямой: оно задает прямолинейное и равномерное движение. В нашем случае начальная точка – это S, вектор скорости – это $\vec{\mathbf{n}}$. Отрезок SD вдвое длин-

Репозиторий ВГУ

нее отрезка SH и на его прохождение понадобится вдвое больше времени. Если за время $t_H = -1$ мы прошли путь от S до H, то путь от S до D мы пройдём за время $t_D = 2t_H = -2$. Подставляя это значение в (5.31), находим $D(-16, 15, 2)$.

Вычисляем длину отрезка CH:

$$|CH| = \sqrt{(-5-6)^2 + (5-(-5))^2 + (0-(-2))^2} = 15.$$

Это совпадает с ранее полученным результатом.

Ответ: ABC: $11x - 10y - 2z + 105 = 0$, $H(-5, 5, 0)$, $D(-16, 15; 2)$, SH: $\begin{cases} x = 6 + 11t, \\ y = -5 - 10t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$

Задача 2. *Даны уравнения прямой l и плоскости π:*

$$l: \ x - 6 = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad \pi: \ 5x - 2y + 4z + 7 = 0.$$

Убедиться, что l и π пересекаются и составить уравнение проекции l' прямой l на плоскость. Найти угол между l и π.

Решение. <u>1 способ.</u> Из уравнения прямой находим её направляющий вектор: $\vec{\mathbf{a}}(1,-1, 2)$ и точку на этой прямой: $M(6, 0, 2)$, а из уравнения плоскости – вектор нормали к плоскости: $\vec{\mathbf{n}}(5,-2, 4)$. Как мы уже обсуждали в §6, в тех случаях, когда $l \| \pi$ или $l \in \pi$, выполнено $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{n}}$, т.е. $\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = 0$ (рис. 5.14). Проверим:

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 15 \neq 0.$$

Значит, l пересекает π. Угол между l и π находим по формуле:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{a}}|}{|\vec{\mathbf{n}}| \cdot |\vec{\mathbf{a}}|};$$

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \ |\vec{\mathbf{n}}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

$$\sin\alpha = \frac{15}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Пусть M_o – проекция точки M на плоскость, а $N = l \cap \pi$ (рис. 5.40). Тогда $l' = M_oN$ – это проекция прямой l. Найдём сначала координаты точки M. Для этого перепишем уравнение прямой l в параметрическом виде:

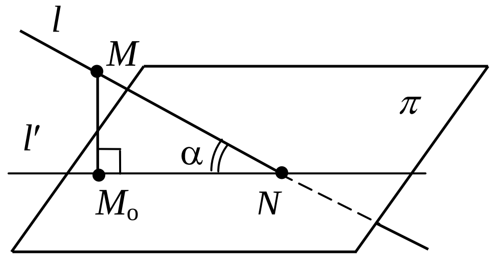


рис. 5.40

$$l: \ \begin{cases} x = 6 + t, \\ y = -t, \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

и решим его совместно с уравнением плоскости π. Подставляем x, y, z из уравнения l в уравнение π:

$$5(6+t)-2(-t)+4(2+2t)+7=0,$$
$$30+5t+2t+8+8t+7=0,$$
$$15t=-45, \quad t=-3.$$

Подставляя это t в уравнение l, находим координаты $N(3, 3,-4)$. Составим уравнение перпендикуляра MM_o. Для прямой MM_o вектор $\vec{\mathbf{n}}$ служит направляющим. Поэтому MM_o задаётся уравнением

$$MM_o: \begin{cases} x=6+5t, \\ y=-2t, \\ z=2+4t, \end{cases}$$

Решаем его совместно с уравнением плоскости π, чтобы найти координаты точки M_o:

$$5(6+5t)-2(-2t)+4(2+4t)+7=0,$$
$$30+25t+4t+8+16t+7=0,$$
$$45t=-45, \quad t=-1.$$

Подставляем это t в уравнение прямой MM_o и находим $M_o(1, 2,-2)$. Находим направляющий вектор прямой l': $\overrightarrow{M_oN}(2, 1,-2)$ и получаем её уравнение.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-2}.$$

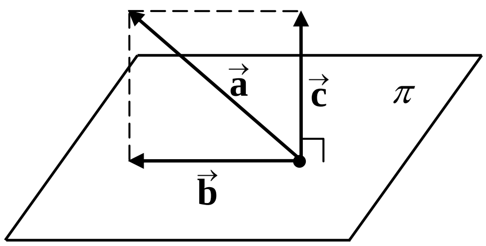


рис. 5.41

<u>2 способ.</u> Направляющий вектор прямой можно разложить на две составляющие: параллельную плоскости π и нормальную: $\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}$ (рис. 5.41). Тогда вектор $\vec{\mathbf{b}}$ будет направляющим для прямой l'.

Нормальная составляющая должна иметь длину, равную скалярной проекции вектора $\vec{\mathbf{a}}$ на ось, параллельную вектору $\vec{\mathbf{n}}$, т.е.

$$|\vec{\mathbf{c}}|=|\vec{\mathbf{a}}|\cdot\cos\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{n}})=|\vec{\mathbf{a}}|\cdot\frac{\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{n}}|\cdot|\vec{\mathbf{a}}|}=\frac{\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{n}}|}.$$

Мы уже нашли $\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{a}}=15$, $|\vec{\mathbf{n}}|=3\sqrt{5}$. Отсюда $|\vec{\mathbf{c}}|=\sqrt{5}$. Таким образом, нам надо получить вектор, коллинеарный $\vec{\mathbf{n}}$ и имеющий длину $\sqrt{5}$. Поэтому

$$\vec{\mathbf{c}}=\frac{\sqrt{5}}{|\vec{\mathbf{n}}|}\cdot\vec{\mathbf{n}}=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}\vec{\mathbf{n}}=\frac{1}{3}\vec{\mathbf{n}}.$$

Репозиторий ВГУ

$$\vec{\mathbf{c}}\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right).$$

$$\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{c}},\quad \vec{\mathbf{b}}\left(1-\frac{5}{3},\,-1+\frac{2}{3},\,2-\frac{4}{3}\right),\ \vec{\mathbf{b}}\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).$$

В качестве направляющего, можно взять вектор $-3\vec{\mathbf{b}}(2,1,-2)$. Начальную точку $N(3,3,4)$ мы найдём так же, как и при первом способе решения задачи. Получаем такое же каноническое уравнение.

Ответ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

***Задача* 3.** *Прямая l в пространстве задана системой уравнений*

$$\begin{cases} 2x+2y-z-1=0, \\ 4x-8y+z-5=0, \end{cases}$$

и даны координаты точки $A(-5,6,1)$. Найти координаты точки B, симметричной A относительно прямой l.

Решение. Пусть P – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l (рис. 5.42). Сначала мы найдём координаты точки P. Для этого мы составим уравнение плоскости π, проходящей через точку A перпендикулярно плоскостям π_1 и π_2. Находим векторы нормали к этим плоскостям: $\vec{\mathbf{n}}_1(2,2,-1)$, $\vec{\mathbf{n}}_2(4,-8,1)$. Для плоскости π они будут направляющими. Поэтому уравнение этой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y-6 & z-1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

$$-6(x+5)-6(y-6)-24(z-1)=0.$$

Прежде чем раскрывать скобки обязательно сначала делим всё уравнение на -6:

$$x+5+y-6+4(z-1)=0,$$

$$x+y+4z-5=0.$$

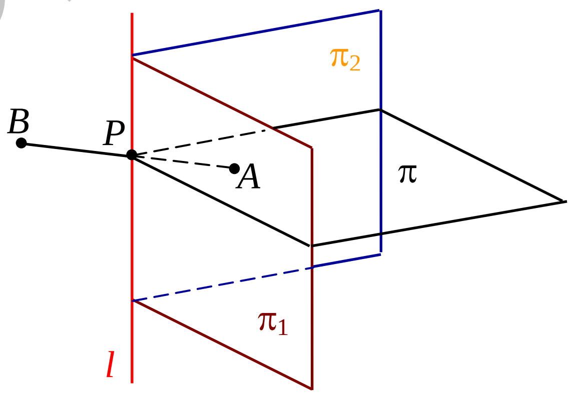


рис. 5.42

Теперь P – это точка пересечения плоскостей π, π_1 и π_2. Для того чтобы найти её координаты, мы должны решить систему, составленную из уравнений этих плоскостей:

$$\begin{cases} x+y+4z-5=0, \\ 2x+2y-z-1=0, \\ 4x-8y+z-5=0. \end{cases}$$

Решая её по методу Гаусса, находим $P(1,0,1)$. Точка P – это середина AB. Поэтому

Репозиторий ВГУ

$$x_P=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_P=\frac{y_A+y_B}{2},\ z_P=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

Отсюда

$$x_B=2x_P-x_A=7,\ y_B=2y_P-y_A=-6,\ z_B=2z_P-z_A=1.$$

Ответ: $B(7,-6,1)$.

Точку P можно найти другим способом, как ближайшую к A точку прямой l. Для этого необходимо составить параметрическое уравнение этой прямой. Этот способ разобран в задаче **4**.

***Задача* 4.** *В* ΔABC *с вершинами* $A(9, 5, 1)$, $B(-3, 8, 4)$, $C(9,-13,-8)$ *проведена высота* AD. *Найти координаты точки* D, *составить уравнение прямой* AD, *вычислить* $h=|AD|$ *и проверить правильность нахождения* h, *вычислив* $S_{\Delta ABC}$ *с помощью векторного произведения*.

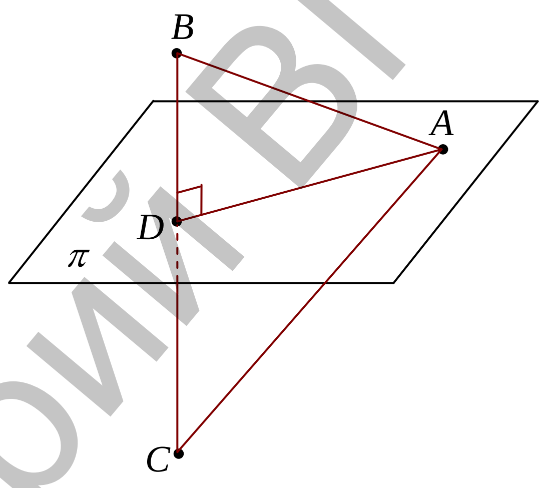


рис. 5.43

Решение. <u>1 способ</u>. Пусть π – это плоскость, которая проходит через точку A, перпендикулярно стороне BC. Тогда этой плоскости принадлежит высота AD (рис. 5.43). Поэтому точку D можно найти так: $D=\pi\cap BC$.

Для плоскости π вектор $\overrightarrow{BC}$ служит вектором нормали. Находим $\overrightarrow{BC}(12,-21,-12)$. Координаты этого вектора нацело делятся на 3. Поэтому в качестве вектора нормали к π можем взять $\vec{\mathbf{n}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\vec{\mathbf{n}}(4,-7,-4)$. Уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ перпендикулярно вектору $\vec{\mathbf{n}}(a, b, c)$, имеет вид:

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0. \qquad (5.8)$$

В нашем случае:

$$4(x-9)-7(y-5)-4(z-1)=0,$$

$$4x-7y-4z+3=0.$$

Составим уравнение прямой BC. Для нее вектор $\vec{\mathbf{n}}$ будет направляющим:

$$BC:\begin{cases} x=-3+4t,\\ y=\ 8-7t,\\ z=\ 4-4t, \end{cases} \qquad (5.32)$$

Поскольку $D = \pi \bigcap BC$, для нахождения координат точки D нужно решить совместно уравнения π и BC. Подставляем x, y, z из уравнения BC в уравнение π:

$$4(-3+4t)-7(8-7t)-4(4-4t)+3=0,$$
$$-12+16t-56+49t-16+16t+3=0,$$
$$81t=81, \quad t=1.$$

Подставляем это t в уравнение прямой BC и находим $D(1, 1, 0)$. Далее вычисляем $h=|AD|$ по формуле расстояния между точками:

$$h=\sqrt{(1-9)^2+(1-5)^2+(0-1)^2}=9.$$

Затем мы применяем формулу $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$; сначала находим сам вектор $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, а потом его модуль.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -12 & 3 & 3 \\ 0 & -18 & -9 \end{vmatrix}=-27\cdot\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-27(-\vec{\mathbf{i}}+4\vec{\mathbf{j}}-8\vec{\mathbf{k}}).$$

(В процессе вычисления мы воспользовались свойством определителя: общий множитель элементов одной строки можно выносить за знак определителя.)

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 27\sqrt{(-1)^2+4^2+(-8)^2}=\frac{243}{2}.$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|\cdot h$. Отсюда $h=\frac{2S_{\Delta ABC}}{|BC|}$. Находим

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{12^2+(-21)^2+(-12)^2}=3\sqrt{4^2+7^2+4^2}=27.$$

Поэтому $h=9$. Это совпадает с ранее найденным ответом.

<u>2 способ</u>. Точку D можно найти, как ближайшую к A точку прямой BC, используя методы дифференциального исчисления. Пусть $M(t)$ – произвольная точка прямой BC; её координаты определяются системой (5.32):

$$M(-3+4t,\ 8-7t,\ 4-4t).$$

Находим квадрат расстояния от точки A до $M(t)$:

$$h^2(t)=(9+3-4t)^2+(5-8+7t)^2+(1-4+4t)^2=$$
$$=(12-4t)^2+(-3+7t)^2+(-3+4t)^2=$$
$$=144-96t+16t^2+9-42t+49t^2+9-24t+16t^2=$$
$$=81t^2-162t+162.$$

Найдём наименьшее значение функции $h^2(t)$ с помощью производной:

$$\frac{d}{dt}h^2(t) = 162t - 162\,; \quad \frac{d}{dt}h^2(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 1\,.$$

Подставляем это значение t в уравнение прямой BC и находим, что $D(1,\,1,\,0)$ является ближайшей к A точкой на прямой BC.

***Ответ*:** $D(1,\,1,\,0)$, $h = 9$.

***Задача* 5.** *Исследовать взаимное расположение следующих пар плоскостей* (*пересекаются, параллельны, совпадают*). *Если плоскости пересекаются, то найти угол между ними, если параллельны, найти расстояние между ними*.

а) π_1: $2y + z + 5 = 0$, π_2: $5x + 4y - 2z + 11 = 0$.

Решение. Условие параллельности двух плоскостей π_1 и π_2, заданных общими уравнениями, приводится в теореме 5.3. Применяем его к данным плоскостям:

$$\frac{0}{5} \neq \frac{2}{4} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{5}{11}\,.$$

Условие не выполнено. Поэтому плоскости не параллельны и не совпадают. Значит, они пересекаются. Угол между плоскостями вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2|}{|\vec{\mathbf{n}}_1||\vec{\mathbf{n}}_2|},$$

где $\vec{\mathbf{n}}_1$ и $\vec{\mathbf{n}}_2$ – векторы нормали к этим плоскостям. В нашем случае

$$\vec{\mathbf{n}}_1(0, 2, 1),\ \vec{\mathbf{n}}_2(5, 4, -2),\quad \vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2 = 0\cdot 5 + 2\cdot 4 + 1\cdot(-2);$$

$$|\vec{\mathbf{n}}_1| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\,,\ |\vec{\mathbf{n}}_2| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2^2} = 3\sqrt{5}\,.$$

Значит, $\cos\alpha = \dfrac{|6|}{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}$.

***Ответ*:** $\alpha = \arccos\dfrac{2}{5}$.

б) π_1: $\sqrt{2}x - y + 2\sqrt{2}z + 8 = 0$,
π_2: $2x - \sqrt{2}y + 4z - 15 = 0$.

Решение. Проверяем на параллельность или совпадение:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-2}{-2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} \neq \frac{8}{-15}\,.$$

Значит, $\pi_1 || \pi_2$.

Существует несколько способов нахождения расстояния между параллельными плоскостями. Самый очевидный: выбрать точку на одной из плоскостей и найти расстояние от неё до другой плоскости (рис. 5.44).

Расстояние от точки $M(x, y, z)$ до плоскости, заданной общим уравнением, вычисляется по формуле

Репозиторий ВГУ

$$h=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (5.13')$$

Выберем точку $M\in\pi_1$. Для этого надо подобрать любые три координаты, удовлетворяющие уравнению π_1. Самый простой выбор: любые две координаты взять равными нулю и найти третью координату из уравнения плоскости. Например, подходит $M(0,8,0)$.

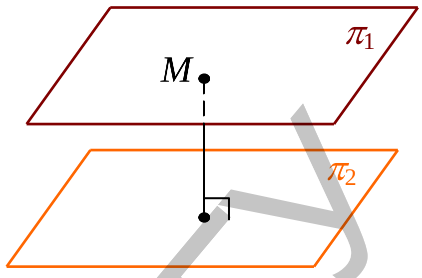


рис. 5.44

$$h=\frac{|2\cdot 0-\sqrt{2}\cdot 8+4\cdot 0-12|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2+4^2}}=\frac{4(2\sqrt{2}-3)}{\sqrt{22}}.$$

Ответ: $h=4(2\sqrt{2}-3)/\sqrt{22}$.

***Задача* 6.** **а)** *Составить уравнение плоскости* π, *которая делит пополам тот из двугранных углов между плоскостями*

$$\pi_1:\ 2x-y+2=0,\qquad \pi_2:\ 5x+4y-2z-14=0,$$

который содержит данную точку $A(0,3,-2)$;

б) *составить параметрические уравнения прямой* $l=\pi_1\cap\pi_2$.

Решение. **а)** Если точка $M(x,y,z)$ лежит на плоскости π, которая делит двугранный угол пополам, то расстояния h_1 и h_2 от этой точки до π_1 и π_2 равны (рис. 5.45). Находим эти расстояния и приравниваем их:

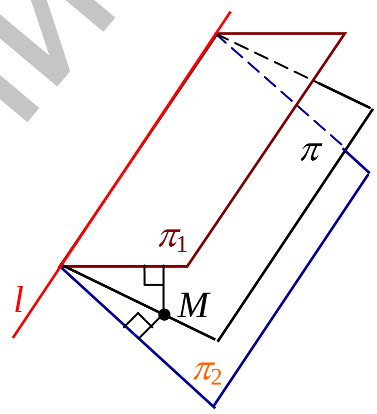


рис. 5.45

$$\frac{|2x-y+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|5x+4y-2z-14|}{\sqrt{5^2+4^2+2^2}}.$$

Модули мы можем раскрывать с одинаковыми или с разными знаками. Поэтому можем получить 2 ответа, т.к. π_1 и π_2 образуют два двугранных угла. Но в условии требуется найти уравнение именно той плоскости, которая делит пополам двугранный угол, в котором находится точка A. Значит, координаты точки M при подстановке в левые части уравнений данных плоскостей π_1 и π_2 должны иметь такие же знаки, что и координаты точки A. Можно устно проверить, что это знаки «–» для π_1 и «+» для π_2. Поэтому мы раскрываем первый модуль со знаком «–», а второй – со знаком «+» :

$$\frac{-2x+y-2}{\sqrt{5}}=\frac{5x+4y-2z-14}{3\sqrt{5}},$$

$$3(-2x+y-2)=5x+4y-2z-14,$$

$$\pi:\ 11x+y-2z-14=0.$$

Репозиторий ВГУ

б) 1 способ. Для того чтобы составить уравнение прямой l, нам нужно найти направляющий вектор этой прямой и точку на ней.

Из уравнений π_1 и π_2 находим координаты векторов нормали к этим плоскостям: $\vec{\mathbf{n}}_1(2,-1,0)$, $\vec{\mathbf{n}}_2(5,4,-2)$. Направляющий вектор $\vec{\mathbf{a}}$ прямой l перпендикулярен $\vec{\mathbf{n}}_1$ и $\vec{\mathbf{n}}_2$ (рис. 5.46). Такой $\vec{\mathbf{a}}$ можно найти с помощью векторного произведения:

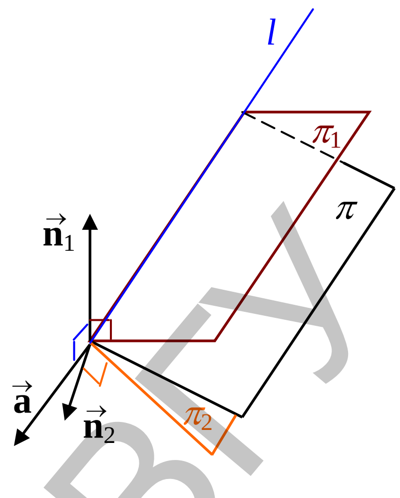


рис. 5.46

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{n}}_1 \times \vec{\mathbf{n}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{j}} + 13\vec{\mathbf{k}}.$$

Для того чтобы найти координаты одной точки на прямой, мы должны найти частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ 5x + 4y - 2z - 14 = 0. \end{cases} \qquad (5.33)$$

Поскольку уравнений два, а неизвестных три, то система имеет бесконечное количество решений. Нам достаточно подобрать одно. Проще всего подставить $x = 0$ и найти неизвестные y и z:

$$\begin{cases} y = 2 \\ 8 - 2z - 14 = 0. \end{cases} \Rightarrow z = -3. \;\; B(0, 2, -3) \in l.$$

Составляем параметрические уравнения:

$$l\colon \begin{cases} x = 2t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = -3 - 13t. \end{cases}$$

2 способ. Мы найдём общее решение системы линейных уравнений (5.33). Одной из неизвестных (она называется параметрической) мы можем придать значение произвольного параметра и перенести её вправо вместе со свободными членами. Удобнее выбрать именно ту неизвестную, при которой наиболее большие по модулю коэффициенты.

$$\begin{cases} x = t, \\ -y + 2 = -2t, \\ 4y - 2z = 14 - 5t. \end{cases}$$

Из получившейся системы мы найдём значения остальных неизвестных (они называются базисными). Есть одна тонкость: выбирать параметрическую неизвестную следует так, чтобы у оставшихся неизвестных коэффициенты образовывали матрицу с ненулевым определителем. У нас это соблюдено. Получаем ответ, который отличается от предыдущего, но тоже является правильным.

Репозиторий ВГУ

$$l:\ \begin{cases} x = t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -3 - 6{,}5t. \end{cases}$$

Следует отметить, что существуют задачи, в которых ответ не является однозначным.

Ответ: π: $11x + y - 2z - 14 = 0$, $l:\ \begin{cases} x = 2t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = -3 - 13t. \end{cases}$

Задача 7 . *Даны уравнения двух прямых в пространстве*:

$$l_1:\ \begin{cases} x = -1 - t, \\ y = 6 + 2t, \\ z = 5 + 2t, \end{cases} \qquad l_2:\ \begin{cases} x = -3 + 2t', \\ y = -2 - 3t', \\ z = 3 - 2t'. \end{cases}$$

Доказать, что данные прямые скрещиваются, и составить уравнение их общего перпендикуляра.

Решение. ***Первый способ решения.*** Из уравнений прямых находим координаты их направляющих векторов $\vec{\mathbf{a}}(-1,\ 2,\ 2)$, $\vec{\mathbf{b}}(2,-3,-2)$ и точек $M(-1, 6, 5) \in l_1$, $N(-3,-2, 3) \in l_2$. Проверяем $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ на коллинеарность:

$$\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-3} \neq \frac{2}{-2}.$$

Значит, $\vec{\mathbf{a}} \nparallel \vec{\mathbf{b}}$ и $l_1 \nparallel l_2$. Следовательно, прямые l_1 и l_2 либо скрещиваются, либо пересекаются. Мы найдём расстояние между ними, и если оно не равно нулю, то прямые скрещиваются.

Расстояние вычисляется по формуле

$$d = \frac{\overrightarrow{AB}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|}.$$

Находим

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}; \qquad |\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

$$\overrightarrow{AB}(-2,-8,-2), \quad \overrightarrow{AB}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = -2\cdot 2 - 8\cdot 2 - 2\cdot(-1) = -18, \quad d = \frac{|-18|}{3} = 6.$$

Вектор $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ перпендикулярен $\vec{\mathbf{a}}$ и перпендикулярен $\vec{\mathbf{b}}$. Следовательно, $\vec{\mathbf{n}} \perp l_1$ и $\vec{\mathbf{n}} \perp l_2$, а значит, $\vec{\mathbf{n}}$ является направляющим вектором общего перпендикуляра h к этим прямым. Мы уже нашли его координаты: $\vec{\mathbf{n}}(2, 2,-1)$. Для того чтобы составить уравнение

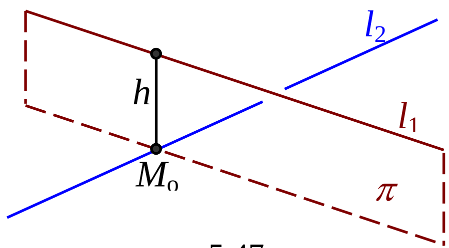


рис. 5.47

Репозиторий ВГУ

прямой h, нам нужно найти координаты одной точки M_0 на данной прямой. Для этого мы составим уравнение плоскости π, проходящей через l_1 и h (рис. 5.47). Для нее векторы $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{n}}$ будут направляющими, и $M_0 \in \pi$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$-6(x-1)+3(y-2)-6(z-1)=0.$$

$$-2(x-1)+(y-2)-2(z-1)=0.$$

$$\pi:\ -2x+y-2z+2=0.$$

Находим точку пересечения l_2 и π. Для этого x, y, z из уравнения l_2 подставляем в уравнение π:

$$-2(-3+2t')-2+3t'-2(3-2t')+2=0,$$

$$6-4t'-2-3t'-6-4t'+2=0,$$

$$-7t'=0, \quad t'=0.$$

Подставляем найденное t' в уравнение l_2 и находим, что $M_0(-3,-2, 3)$ и есть общая точка l_2 и π. Имея точку на h и направляющий вектор этой прямой, составляем её уравнение:

$$h:\ \frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}.$$

Заметим, что прямую h можно задать как пересечение двух плоскостей: рассмотренной выше плоскости π и плоскости π_1, проходящей через прямую l_2 с направляющим вектором $\vec{\mathbf{n}}$. Этот способ решения также допускается, и он несколько короче.

<u>Второй способ решения</u> этой задачи использует методы дифференциального исчисления. Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым – это кратчайший из отрезков, соединяющих две точки на этих прямых. Находим квадрат расстояния от произвольной точки прямой l_1 до произвольной точки прямой l_2:

$$h^2(t, t')=(-3+2t'+1+t)^2+(-2-3t'-6-2t)^2+(3-2t'-5-2t)^2=$$
$$=(t+2t'-2)^2+(8+2t+3t')^2+(2+2t+2t')^2.$$

Найдём точку минимума функции $h^2(t, t')$. Для этого вычисляем частные производные и приравниваем их к нулю:

$$\frac{d}{dt}h^2(t, t')=2(t+2t'-2)+4(8+2t+3t')+4(2+2t+2t')=2(9t+12t'+18);$$

$$\frac{d}{dt'}h^2(t, t')=4(t+2t'-2)+6(8+2t+3t')+4(2+2t+2t')=2(12t+17t'+24);$$

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} 9t+12t'+18=0 \\ 12t+17t'+24=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t'=0. \end{cases}$$

Подставляем эти значения t и t' в уравнения l_1 и l_2 соответственно и находим, что $C(1, 2, 1)$ и $B(-3,-2, 3)$ являются концами общего перпендикуляра. Остаётся составить уравнение прямой, проходящей через две точки B и C.

***Задача* 8.** *В треугольной пирамиде ABCD известны уравнения плоскостей, в которых лежат две боковые грани ACD и BCD:*

$$2x+y-3z+7=0,\ x-2y+z+1=0,$$

и известны координаты середины ребра AB: E(–1, 1, 1) (*рис. 5.48*). *Составить уравнение плоскости ECD.*

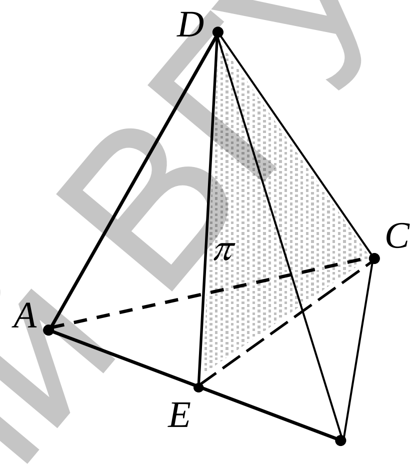


рис. 5.48

Решение. Нам надо составить уравнение плоскости, которая проходит через ребро CD и точку E. Составляем уравнение пучка плоскостей, которые проходят через ребро CD. Для этого мы уравнение первой плоскости умножаем на произвольный параметр λ, а уравнение второй плоскости умножаем на произвольный параметр μ и складываем:

$$\lambda(2x+y-3z+7)+\mu(x-2y+z+1)=0;$$

$$(2\lambda+\mu)x+(\lambda-2\mu)y+(-3\lambda+\mu)z+(7\lambda+\mu)=0. \qquad (5.34)$$

Подставляем в уравнение пучка координаты точки E:

$$-1\cdot(2\lambda+\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)+1\cdot(-3\lambda+\mu)+(7\lambda+\mu)=0;$$

$$3\lambda-\mu=0.$$

Мы можем выбрать любые значения λ и μ, которые удовлетворяют этому уравнению, кроме $(0,0)$. Например, подходят $\lambda=1$, $\mu=3$. Подставляем эти значения в уравнение пучка плоскостей (5.34):

$$5x-5y+10=0.$$

Мы можем разделить это уравнение на 5.

***Ответ*:** *ECD*: $x-y+10=0$.

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 6. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. *Цилиндрические поверхности*

***Определение* 6.1.** *Линейчатой* называется поверхность, через каждую точку которой проходит хотя бы одна прямая, принадлежащая поверхности.

***Определение* 6.2.** *Цилиндрической* называется поверхность, которую образует множество параллельных прямых, проходящих через каждую точку некоторой кривой γ. Эти прямые называются *образующими*, а кривая γ – *направляющей*.

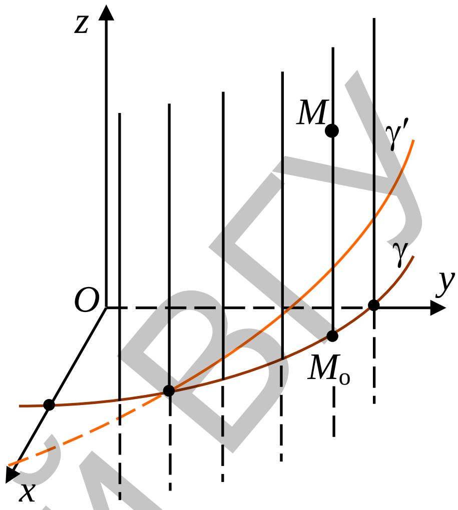


рис. 6.1

Пусть Φ – цилиндрическая поверхность. Выберем декартову СК так, чтобы ось Oz была параллельна образующим (рис. 6.1). Если при этом направляющая γ' не лежит в плоскости Oxy, то мы её спроецируем в эту плоскость и получим некоторую кривую γ. Если теперь мы возьмём γ в качестве направляющей, то получим ту же поверхность Φ. Поэтому будем с самого начала считать, что направляющей служит кривая γ, лежащая в плоскости Oxy.

Пусть

$$\varphi(x, y) = 0 \quad – \tag{6.1}$$

уравнение направляющей γ в плоскости Oxy (в пространстве она задаётся системой из двух уравнений: $\varphi(x, y) = 0$ и $z = 0$). Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности Φ. Тогда её проекцией на плоскость Oxy будет точка $M_0(x, y, 0)$; и эта точка должна принадлежать кривой γ. Поэтому её координаты удовлетворяют (6.1). Но тогда этому уравнению удовлетворяют и координаты точки M: ведь координаты x и y у этих точек одинаковы, а z в уравнение не входит.

Обратно, пусть координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (6.1). Тогда этому же уравнению удовлетворяют и координаты точки $M_0(x, y, 0)$, а т.к. $M_0 \in Oxy$, то $M_0 \in \gamma$. При этом M и M_0 лежат на одной прямой, параллельной оси Oz. Следовательно, $M \in \Phi$.

Итак, мы установили, что (6.1) – это и есть уравнение поверхности Φ. Тем самым, *уравнение цилиндрической поверхности в пространстве совпадает с уравнением её направляющей кривой* γ *в плоскости* Oxy, *если образующие параллельны оси* Oz.

Репозиторий ВГУ

Аналогично, если образующие цилиндрической поверхности параллельны Oy, то её уравнение в пространстве совпадает с уравнением направляющей кривой в плоскости Oxz.

Обратно, если в уравнении поверхности отсутствует, например, координата x, то сразу можем сделать вывод, что эта поверхность цилиндрическая, а её образующие параллельны Ox.

***Пример* 6.1.** Пусть поверхность задана уравнением $y^2=2z$. Тогда эта поверхность является цилиндрической, и её образующие параллельны Ox, а направляющей служит парабола

$$\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0. \end{cases}$$

Такая поверхность называется «*параболический цилиндр*».

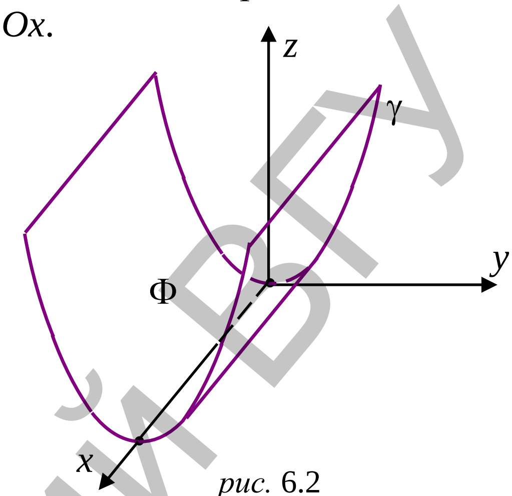


рис. 6.2

Мы выяснили, что уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением направляющей кривой, поэтому список цилиндрических поверхностей второго порядка совпадает со списком их направляющих кривых второго порядка.

1. Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Мнимый эллиптический цилиндр ($\varnothing$)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
3. Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
4. Параболический цилиндр	$y^2=2px$
5. Пара пересекающихся плоскостей	$a^2x^2-b^2y^2=0$
6. Пара мнимых плоскостей, которые пересекаются по действительной прямой	$a^2x^2+b^2y^2=0$
7. Пара параллельных плоскостей	$x^2=a^2$
8. Пара совпадающих плоскостей	$x^2=0$
9. Пара мнимых параллельных плоскостей ($\varnothing$)	$x^2=-a^2$

Упражнение. Самостоятельно определите, какая поверхность изображена на каждом из следующих рисунков.

Репозиторий ВГУ

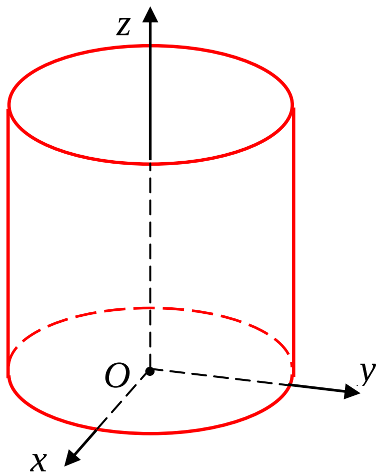


рис. 6.3

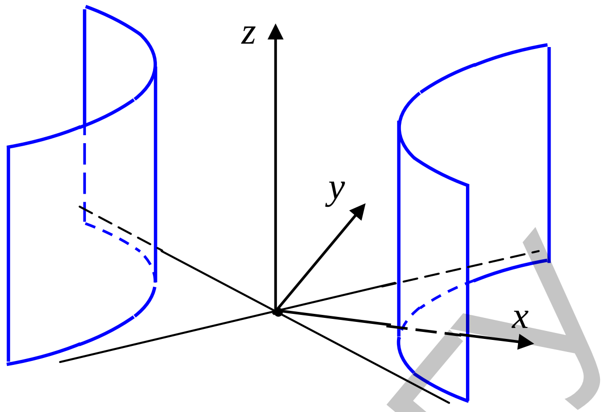


рис. 6.4

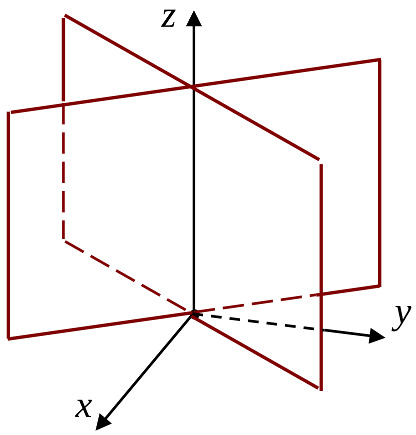


рис. 6.5

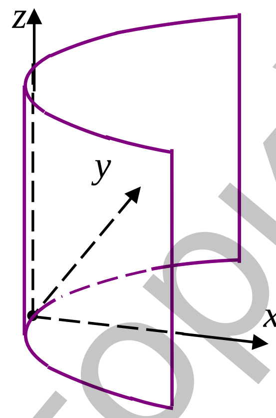


рис. 6.6

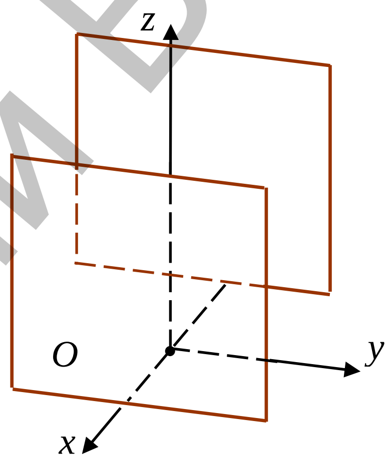


рис. 6.7

§ 2. *Конические поверхности*

***Определение* 6.3.** *Конической* называется поверхность, которую образует множество всех прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку O в пространстве и через каждую точку некоторой кривой γ. Прямые называются *образующими*, кривая γ – *направляющей*, а точка O – *вершиной* конической поверхности.

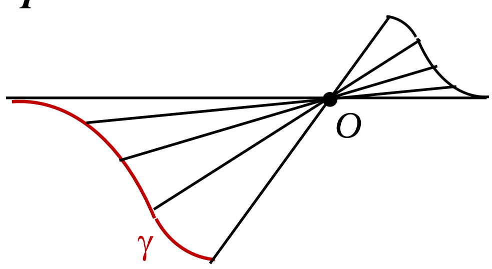


рис. 6.8

Выберем декартову СК так, чтобы начало координат совпадало с вершиной конической поверхности Φ. Пусть $F(x, y, z) = 0$ – уравнение поверхности Φ в этой СК и пусть

$$\varphi(x, y) = F(x, y, c),\ c = \text{const}.$$

Репозиторий ВГУ

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ z = c. \end{cases}$$

будет задавать сечение поверхности Φ плоскостью $z = c$. Рассмотрим несколько частных случаев.

Предположим сначала, что направляющая – эллипс (рис. 6.9), который задаётся системой уравнений

$$\gamma: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \\ z = c. \end{cases} \tag{6.2}$$

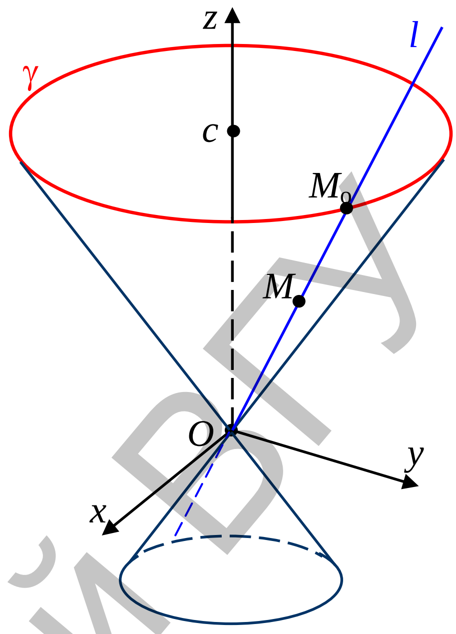


рис. 6.9

Пусть $M(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка поверхности Φ. Тогда вся прямая OM должна лежать на поверхности. Её параметрическое уравнение:

$$OM: \begin{cases} x = x_1 t, \\ y = y_1 t, \\ z = z_1 t. \end{cases} \tag{6.3}$$

(действительно, в качестве начальной точки мы берём $O(0, 0, 0)$, а в качестве направляющего вектора берём $\overrightarrow{OM}(x_1, y_1, z_1)$). Пусть прямая OM пересекает направляющую кривую γ в точке $M_o(x_o, y_o, c)$. Тогда ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой OM. Подставляем в (6.3):

$$\begin{cases} x_o = x_1 t, \\ y_o = y_1 t, \\ c = z_1 t. \end{cases}$$

Из последнего уравнения выразим t и подставим в первое и второе уравнения:

$$\begin{cases} x_o = x_1 c/z_1, \\ y_o = y_1 c/z_1, \\ t = c/z_1. \end{cases}$$

А теперь подставим найденные выражения для x_o и y_o в уравнение эллипса (6.2):

$$\frac{(x_1 c/z_1)^2}{a^2} + \frac{(y_1 c/z_1)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Домножим это уравнение на $(z_1/c)^2$ и получим

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = 0. \tag{6.4}$$

Репозиторий БГУ

Обратно, пусть координаты точки $M(x_1, y_1, z_1)$ удовлетворяют уравнению (6.4). Тогда этому уравнению удовлетворяют и координаты любой точки прямой OM. Действительно, подставим x, y, z из (6.3) в (6.4):

$$\frac{(x_1t)^2}{a^2}+\frac{(y_1t)^2}{b^2}-\frac{(z_1t)^2}{c^2}=0;$$

$$t^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}\right)=0; \qquad t^2\cdot 0=0.$$

Получили верное равенство. К тому же, если подставим $z=c$ в (6.4), то получим уравнение эллипса (6.2). Значит, (6.4) и есть уравнение конической поверхности. Опуская индексы, окончательно получаем каноническое уравнение конической поверхности.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (6.4)$$

Аналогично, если направляющая кривая – это гипербола

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0,\\ z=c.\end{cases}$$

получим уравнение конической поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \iff$$

$$\iff -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

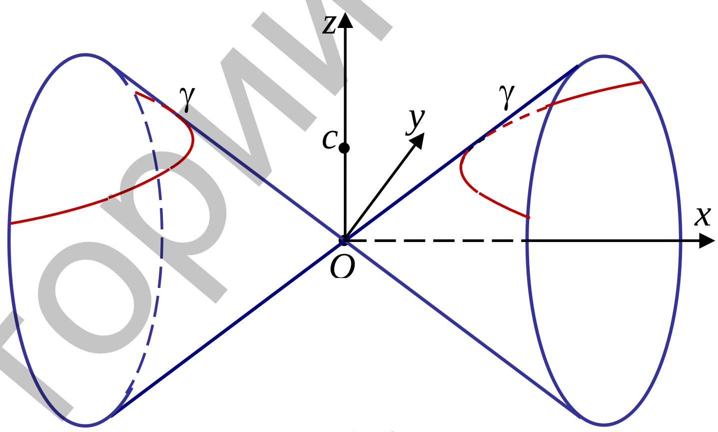


рис. 6.10

Это такой же «эллиптический» конус, только ось его будет не Oz, а Ox (рис. 6.10).

Пусть теперь направляющая γ – это парабола

$$\begin{cases}x^2=2py,\\ z=c.\end{cases}$$

Тогда тем же способом получим уравнение

$$x^2=\frac{2p}{c}yz. \qquad (6.5)$$

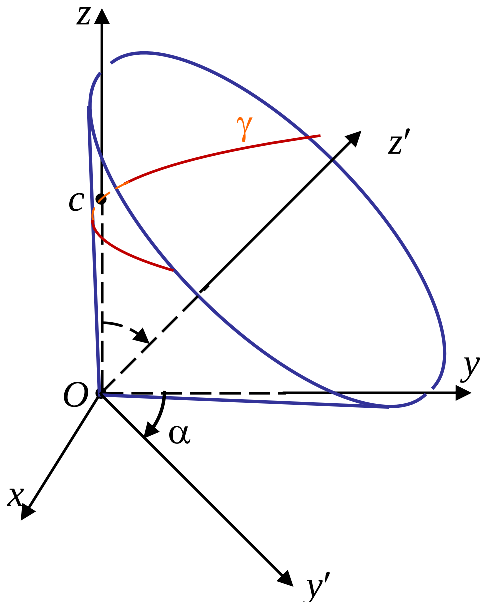


рис. 6.11

Повернём СК на –45° вокруг оси Ox (направление поворота будем определять, наблюдая с положительного направления оси Ox).

Репозиторий ВГУ

Тогда формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x = x', \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y' + z'), \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-y' + z'). \end{cases}$$

Подставим эти формулы в (6.5):

$$x^2 = \frac{2p}{c} \cdot \frac{1}{2}(y' + z')(-y' + z').$$

Обозначим $a^2 = p/c$ и получим

$$x^2 = a^2(-y'^2 + z'^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + y'^2 - z'^2 = 0.$$

Таким образом, уравнение (6.5) тоже определяет конус, ось которого является биссектрисой угла yOz (рис. 6.11). При этом оси Oy и Oz принадлежат конусу. Поэтому плоскость, в которой лежит направляющая γ, параллельна образующей.

Мы уже говорили в предыдущей главе, что эллипс, гипербола и парабола – это конические сечения. Теперь мы в этом убедились.

Если направляющей служит пара прямых, то коническая поверхность представляет собой *пару плоскостей*, обязательно пересекающихся или совпадающих, т.к. обе плоскости должны проходить через начало координат (рис. 6.12 и 6.13). Эти поверхности относятся также к цилиндрическим и они были рассмотрены в предыдущем параграфе.

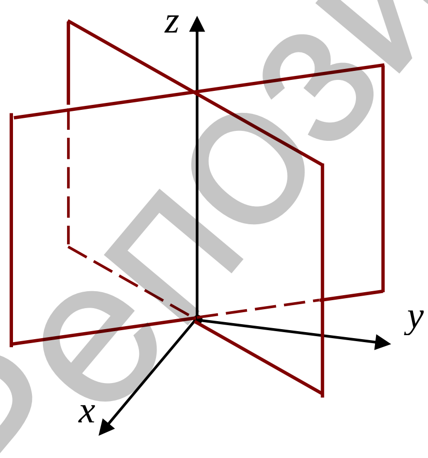


рис. 6.12

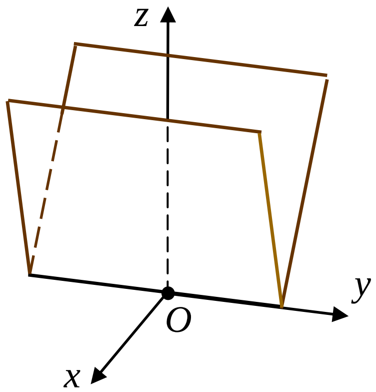


рис. 6.13

Итак, мы установили, что существуют 4 типа конических поверхностей 2 порядка:

1. Конус $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

2. Пара пересекающихся плоскостей $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

Репозиторий ВГУ

3. Пара мнимых пересекающихся плоскостей $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$.

4. Пара совпадающих плоскостей $x^2 = 0$.

Тот факт, что данный список является исчерпывающим, мы пока оставляем без доказательства.

§ 3. *Поверхность вращения*

Пусть некоторая кривая γ расположена в плоскости Oyz. Будем вращать её вокруг оси Oz. Получим некоторую поверхность Φ, которая называется *поверхностью вращения*. Каждая точка кривой γ описывает окружность – *параллель*, центр которой лежит на оси Oz (рис. 6.14).

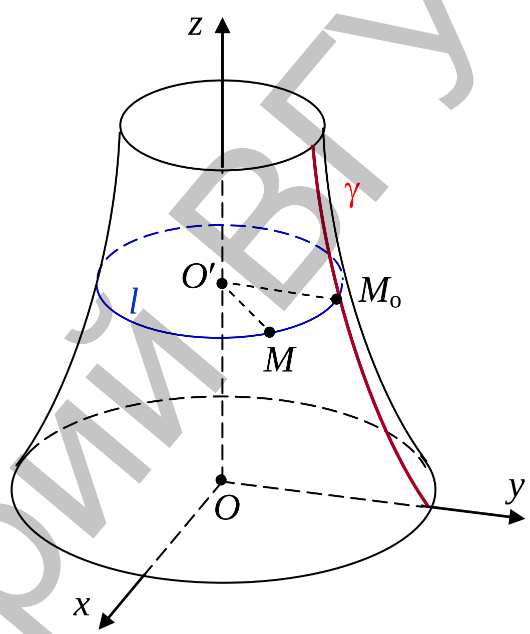


рис. 6.14

Пусть

$$\varphi(y, z) = 0 \quad – \qquad (6.6)$$

уравнение кривой γ в плоскости Oyz. Тогда в пространстве она задаётся системой

$$\begin{cases} \varphi(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности Φ. Тогда она лежит на одной из таких параллелей l и может быть получена поворотом точки $M_0(0, y_0, z)$, лежащей на пересечении l и γ. Очевидно, что центр O' параллели l имеет координаты $O'(0, 0, z)$ и

$$|O'M| = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ |O'M_0| = y_0.$$

При этом $|O'M| = |O'M_0|$. Значит,

$$y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \qquad (6.7)$$

Координаты точки M_0 должны удовлетворять уравнению (6.6), потому что она лежит на кривой γ: $\varphi(y_0, z) = 0$. Подставим сюда (6.7):

$$\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \qquad (6.8)$$

Получается, что координаты произвольной точки на поверхности должны удовлетворять этому уравнению.

Обратно, пусть координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют (6.8), а M_0 – точка с координатами $(0, y_0, z)$, где $y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда получается, что $\varphi(y_0, z) = 0$, т.е. точка $M_0(0, y_0, z)$ лежит на кривой γ. К тому же, в силу того, что имеет место (6.7), точка M_0 лежит на одной параллели с M. Сле-

Репозиторий ВГУ

довательно, M может быть получена поворотом точки M_0 вокруг оси Oz. Поэтому $M \in \Phi$.

Итак, мы доказали, что (6.8) есть уравнение поверхности вращения Φ. Таким образом, мы имеем правило: *для того чтобы из уравнения кривой* γ *получить уравнение поверхности вращения* Φ*, мы в уравнении кривой оставляем без изменения координату z, а y заменяем*: $y \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$.

Обратно, если в уравнении поверхности можно выделить $\sqrt{x^2+y^2}$, и при этом, координаты x и y нигде более в уравнение не входят, то мы сразу можем сделать вывод, что наша поверхность есть поверхность вращения вокруг Oz.

Замечание. На рисунке 6.14 кривая расположена в полуплоскости $y \geq 0$. В общем случае, это может быть не так. В сечении поверхности вращения вокруг оси Oz плоскостью Oyz получается симметричная относительно Oz кривая (которая может состоять из двух отдельных кривых). Мы можем взять только ту часть кривой, которая лежит в полуплоскости $y \geq 0$. При её вращении вокруг Oz получится та же поверхность. Поэтому мы можем с самого начала считать, что вращалась вокруг Oz именно кривая, лежащая в полуплоскости $y \geq 0$. Однако по условию задачи может быть дана кривая, не лежащая в положительной полуплоскости, но при этом выражение $\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$. Поэтому правильно делать такую замену: $y \mapsto \pm\sqrt{x^2+y^2}$.

***Пример* 6.2.** Пусть γ – окружность в плоскости Oyz радиуса b с центром в точке $A(0, a, 0)$, лежащей на оси Oy, и $a > b$. Будем вращать её вокруг Oz. Получим поверхность, которая называется *тором* (рис. 6.15). Уравнение окружности в плоскости Oyz имеет вид:

$$(y-a)^2 + z^2 = b^2.$$

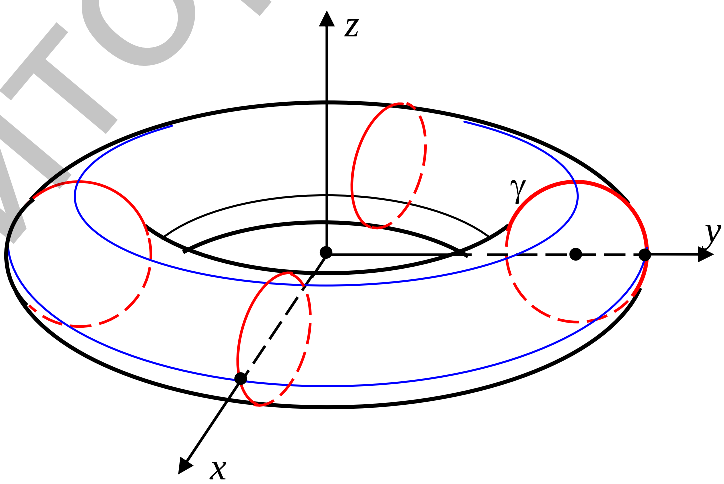


рис. 6.15

Вращаем вокруг Oz. Поэтому z оставляем без изменений, а y заменяем $y \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ (в данном случае $y > 0$):

$$(\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 = b^2. \tag{6.9}$$

Получили уравнение тора. Заметим, что тор не относится к поверхностям второго порядка.

***Пример* 6.3.** Пусть поверхность Φ задаётся уравнением

Репозиторий ВГУ

$$x^2 + z^2 = 2y.$$

Мы можем переписать его так:

$$(\sqrt{x^2 + z^2})^2 = 2y.$$

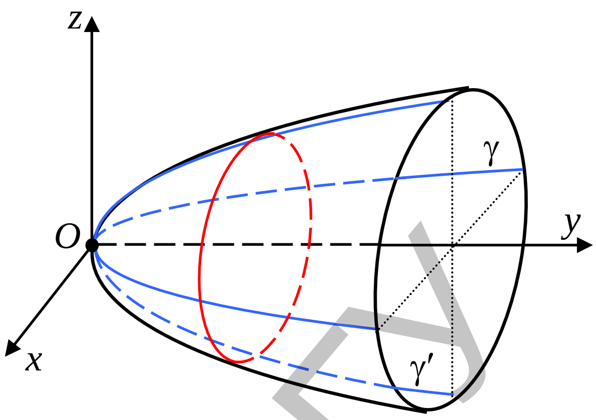


рис. 6.16

Координаты x и z входят в уравнение только в выражении $\sqrt{x^2 + z^2}$. Значит, наша поверхность – это поверхность вращения вокруг Oy. Для того чтобы получить уравнение кривой, которая вращается, мы заменяем $\sqrt{x^2 + z^2}$ на x и получаем уравнение кривой γ в плоскости Oxy: $x^2 = 2y$. Это парабола. В пространстве эта парабола задаётся системой

$$\begin{cases} x^2 = 2y, \\ z = 0. \end{cases}$$

Точно так же мы можем заменить $\sqrt{x^2 + z^2}$ на z и получить уравнение кривой γ' в плоскости Oyz: $z^2 = 2y$. Вращая вокруг Oy первую или вторую кривую, мы получим одну и ту же поверхность. Она называется «эллиптический параболоид вращения» (рис. 6.16).

§ 4. *Эллипсоид*

***Определение* 6.4.** *Эллипсоидом* называется поверхность Φ, имеющая каноническое уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{6.10}$$

Одним из важнейших методов изучения формы поверхности является *метод параллельных сечений*. Мы «нарезаем» поверхность параллельными плоскостями и смотрим, какие кривые получаются в сечениях.

Покажем этот метод на примере эллипсоида. Плоскости, параллельные Oxy, задаются уравнениями $z = h$ ($h = \text{const}$). Для того чтобы узнать, какая кривая получится в сечении, мы подставляем $z = h$ в уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \tag{6.11}$$

Если $|h| \neq c$, то обозначим $a'^2 = a^2 \left|1 - \frac{h^2}{c^2}\right|$, $b'^2 = b^2 \left|1 - \frac{h^2}{c^2}\right|$.

1 случай: $|h| < c$. Тогда правая часть в (6.11) положительна. Мы делим уравнение на правую часть. Получаем уравнения эллипсов

Репозиторий ВГУ

$\dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}=1$, полуоси которых a' и b' достигают максимального значения a и b при $h=0$.

<u>*2 случай*</u>: $|h|>c$. Тогда правая часть в (6.11) отрицательна. В сечении получаем мнимые эллипсы $\dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}=-1$ (пустое множество).

<u>*3 случай*</u>: $h=\pm c$. Тогда (6.11) имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$. Это уравнение задаёт только одну из точек $C_1(0,0,c)$ или $C_2(0,0,-c)$.

Аналогично в сечениях эллипсоида плоскостями $x=h$ (параллельными Oyz) или $y=h$ (параллельными Oxz) в случае $|h|<a$, или $|h|<b$, получаем только эллипсы, полуоси которых достигают максимальных значений при $h=0$. При $h=\pm a$ или $h=\pm b$ получаем одну точку.

Для того чтобы сделать чертёж эллипсоида, полученной информации ещё мало.

<u>*Прочие геометрические свойства эллипсоида*</u>.

1. Из уравнения (6.10) получаем, что $x^2=a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}\right)\le a^2$. Отсюда $|x|\le a$. Аналогично получаем, что $|y|\le b, |z|\le c$. Значит, весь эллипсоид содержится в прямоугольном параллелепипеде, который определяется этими неравенствами.

2. Координатная ось Ox определяется равенствами

$$y=z=0.$$

Подставим эти равенства в уравнение эллипсоида и найдём, что $x=\pm a$. Тем самым, мы установили, что ось Ox пересекает эллипсоид в точках

$$A_1(a,0,0),\ A_2(-a,0,0).$$

Аналогично получаем, что координатные оси Oy и Oz пересекают эллипсоид в точках $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$ (рис. 6.17).

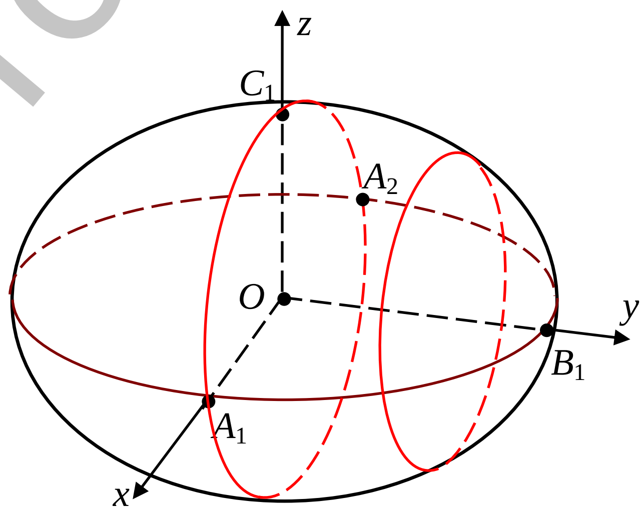


рис. 6.17

***Определение* 6.5.** Точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ называются <u>*вершинами эллипсоида*</u>. Числа a, b, c называются <u>*полуосями*</u>.

Репозиторий ВГУ

3. Координатные оси являются осями симметрии эллипсоида, координатные плоскости – плоскостями симметрии, начало координат O – центром симметрии. Докажем это.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка в пространстве. На рисунке 6.18 показано, что при симметрии относительно координатной оси Oz она переходит в точку $M_2(-x,-y, z)$, при симметрии относительно координатной плоскости Oxy переходит в точку $M_1(x, y,- z)$, а при симметрии относительно начала координат – в точку $M_o(-x,-y,-z)$.

Аналогично при симметриях относительно других координатных плоскостей и координатных осей одна или две координаты меняют знак.

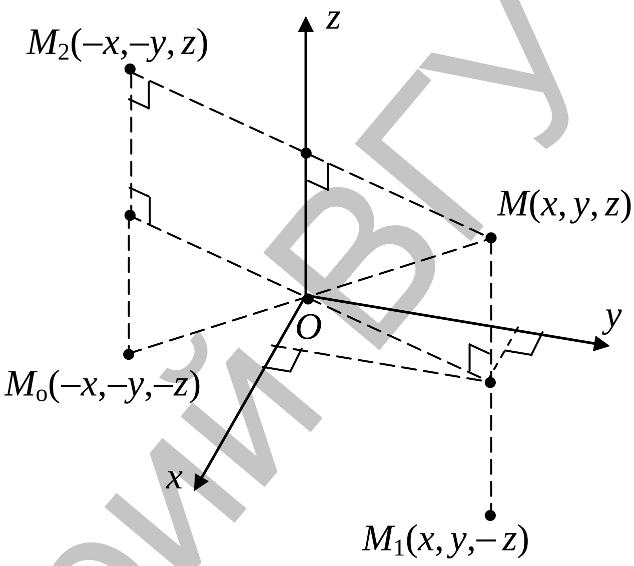


рис. 6.18

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка на эллипсоиде. Это значит, что её координаты (x, y, z) удовлетворяют уравнению (6.10). Но тогда этому уравнению удовлетворяют также все тройки чисел вида $(\pm x, \pm y, \pm z)$. Следовательно, точки, симметричные точке M, относительно всех координатных плоскостей, относительно всех координатных осей и относительно начала координат тоже принадлежат эллипсоиду.

4. При $a=b$ эллипсоид будет поверхностью вращения вокруг Oz. Действительно, в этом случае его уравнение можно переписать так:

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

Аналогично при $a=c$ эллипсоид будет поверхностью вращения вокруг Oy, а при $b=c$ – вокруг Ox.

При $a=b=c$ эллипсоид будет сферой:

$$x^2+y^2+z^2=a^2. \tag{6.12}$$

Произвольный эллипсоид может быть получен из сферы (6.12) в результате равномерного сжатия (растяжения) по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Действительно, если в уравнении (6.12) сделать замену координат $x=x'$, $y=\frac{a}{b}y'$, $z=\frac{a}{c}\,z'$, то получим уравнение (6.10), только со штрихами.

Репозиторий ВГУ

§ 5. *Однополостный и двуполостный гиперболоиды*

***Определение* 6.6.** *Однополостным и двуполостным гиперболоидами* называются поверхности, имеющие канонические уравнения соответственно вида

$$\Phi_1:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (6.13) \qquad\qquad \Phi_2:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (6.14)$$

Исследуем форму этих поверхностей методом параллельных сечений. Для того чтобы узнать, какие кривые получаются в сечениях плоскостями, параллельными Oxy, мы подставим $z=h$ в (6.13) и в (6.14). Соответственно, получим уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \qquad\Big|\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{h^2}{c^2} \qquad (6.15)$$

Обозначим соответственно

$$a'^2=a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right),\ b'^2=b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right); \qquad\Big|\qquad a'^2=a^2\left|\frac{h^2}{c^2}-1\right|,\ b'^2=b^2\left|\frac{h^2}{c^2}-1\right|,\ h\neq\pm c$$

при любом h получаем эллипсы | при $|h|>c$ получаем эллипсы

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

полуоси которых a' и b' неограниченно возрастают при возрастании $|h|$ и достигают наименьших значений a и b при $h=0$.

полуоси которых a' и b' неограниченно возрастают при возрастании $|h|$; при $|h|<c$ получаем мнимые эллипсы

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=-1$$

($\varnothing$), а при $h=\pm c$ (6.14) превращается в

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Это уравнение задаёт одну из точек $C_1(0,0,c)$ или $C_2(0,0,-c)$.

В сечениях плоскостями $y=h$ получаем соответственно кривые

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}. \qquad (6.16) \qquad\Big|\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{h^2}{c^2}.$$

Обозначим соответственно

$$a'^2=a^2\left|1-\frac{h^2}{c^2}\right|,\ c'^2=c^2\left|1-\frac{h^2}{c^2}\right| \qquad\Big|\qquad a'^2=a^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right),\ c'^2=c^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right).$$

и при $h\neq\pm b$ получаем гиперболы,

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=\pm1,$$

При любом h получаем гиперболы

$$-\frac{x^2}{a'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Репозиторий ВГУ

а при $h=\pm b$ (6.15) превращается в уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, которое задаёт пару пересекающихся прямых.

Аналогично в сечениях Φ_2 плоскостями $y=h$ получаем только гиперболы, а в сечениях Φ_1 – гиперболы или пары прямых при $h=\pm a$.

Прочие геометрические свойства гиперболоидов.

1. Из уравнения (6.14) получаем, что $|z|\geq c$, т.е. в пространственном слое $-c<z<c$ нет точек Φ_2.

2. Точно так же, как и для эллипсоида, доказывается, что координатные оси Ox и Oy пересекают Φ_1 в точках $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$, $B_1(0,-b, 0)$, $B_2(0, b, 0)$, которые называются его *вершинами*. Ось Oz его не пересекает.

Ось Oz пересекает Φ_2 в точках $C_1(0, 0, c)$, $C_2(0, 0,-c)$, которые называются его *вершинами*. Оси Ox и Oy не пересекают Φ_2.

3. Точно так же, как и для эллипсоида, доказывается, что координатные оси являются осями симметрии гиперболоидов, координатные плоскости – плоскостями симметрии, а точка O – центром симметрии.

4. При $a=b$ гиперболоиды будут поверхностями вращения, потому что мы можем представить их уравнения в виде

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

При $a=c$ гиперболы в сечениях плоскостями $y=h$ будут равнобокими. При $b=c$ равнобокими будут гиперболы в сечениях плоскостями $x=h$.

5. Пусть Φ_o – конус, заданный уравнением

$$\Phi_o\colon\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Пусть $M_o(x,y,z_o)\in\Phi_o$, $M_1(x,y,z_1)\in\Phi_1$, $M_2(x,y,z_2)\in\Phi_2$ – три точки с одинаковыми координатами x и y, лежащие на конусе и на гиперболоидах. Тогда

$$z_o^2=c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),\quad z_1^2=c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),\quad z_2^2=c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1\right).$$

Отсюда получаем, что $|z_1^2|<|z_o^2|<|z_2^2|$. Значит, Φ_1 лежит снаружи конуса Φ_o, а Φ_2 – внутри. Кроме того, из тех же равенств следует

$$z_o^2-z_1^2=z_2^2-z_o^2=c^2\ \Rightarrow$$

$$|M_oM_1|=|z_o-z_1|=\frac{1}{|z_o+z_1|}\to 0\ \text{ и }\ |M_2M_o|=|z_2-z_o|=\frac{1}{|z_2+z_o|}\to 0,$$

Репозиторий ВГУ

когда точки M_o, M_1, M_2 уходят на бесконечность (необходимо при этом заметить, что все три величины z_o, z_1 и z_2 стремятся к бесконечности при $x \to \infty$ и $y \to \infty$). Значит, оба гиперболоида асимптотически приближаются к конусу.

На рисунках 6.19 и 6.20 конус изображён штриховой линией.

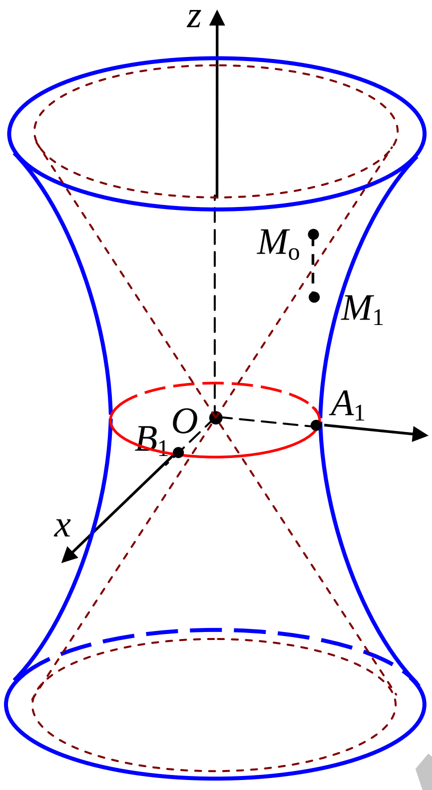


рис. 6.19

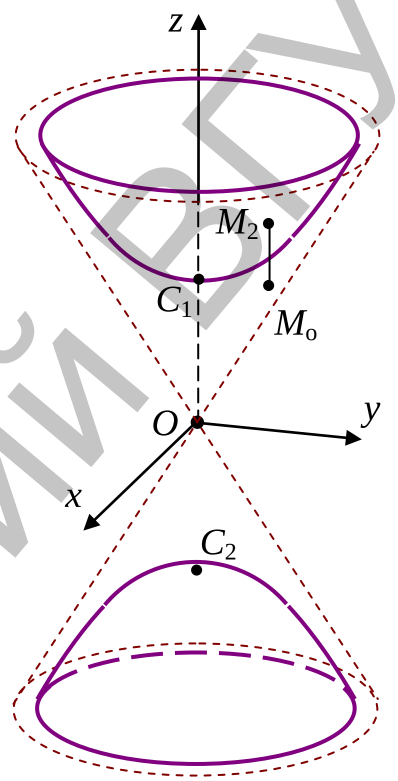


рис. 6.20

6. Мы уже видели, что в сечениях Φ_1 плоскостями может получаться пара прямых. Примем без доказательства, что однополостный гиперболоид является линейчатой поверхностью и через каждую его точку проходит пара прямых, лежащих на поверхности.

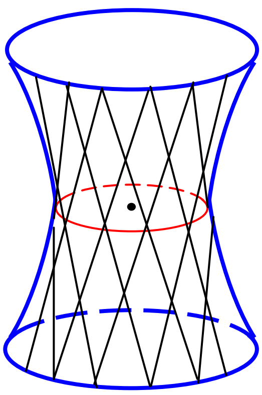


рис. 6.21

Репозиторий ВГУ

§ 6. *Эллиптический и гиперболический параболоиды*

Определение 6.7. *Эллиптическим и гиперболическим параболоидами* называются поверхности, имеющие канонические уравнения соответственно вида

$$\Phi_3:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (6.17) \qquad\qquad \Phi_4:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z. \qquad (6.18)$$

Исследуем их форму методом параллельных сечений. Подставим $z=h$ в (6.17) и в (6.18). Соответственно получим уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2h \qquad (6.19)$$

Обозначим $a'^2=2|h|\,a^2$, $b'^2=2|h|\,b^2$.

При $h>0$ получаем эллипсы

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

полуоси которых возрастают при возрастании h, а при $h>0$ получаем мнимые эллипсы

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=-1.$$

При $h\neq 0$ получаем гиперболы

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=\pm 1,$$

(см. γ_4 на рисунке 6.23), а при $h=0$ из (6.19) получаем уравнение, которое задаёт пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=0.$$

В сечениях плоскостями $y=h$ получаем для обеих поверхностей параболы

$$x^2=2a^2\left(z-\frac{h^2}{2b^2}\right). \qquad\qquad x^2=2a^2\left(z+\frac{h^2}{2b^2}\right).$$

Причём параметр этих парабол одинаков для обеих поверхностей и не зависит от h: $p=a^2$. Таким образом, все параболы в сечениях равны друг другу и получаются одна из другой параллельным переносом. Вершины этих парабол имеют координаты

$$\left(0,h,\frac{h^2}{2b^2}\right). \qquad\qquad \left(0,h,-\frac{h^2}{2b^2}\right).$$

Тем самым, вершины при перемещении парабол описывают кривую в плоскости Oyz

$$\gamma_2:\ z=\frac{y^2}{2b^2}\ \Leftrightarrow\ y^2=2b^2z, \qquad\qquad \gamma_2:\ z=-\frac{y^2}{2b^2}\ \Leftrightarrow\ y^2=-2b^2z,$$

т.е. параболу. Поэтому можем сказать, что оба параболоида получаются движением параболы γ_1, когда её вершина скользит по параболе γ_2 (см. рисунки 6.22 и 6.23).

Репозиторий ВГУ

Аналогично в сечениях параболоидов плоскостями $x=h$ получаем равные друг другу параболы, причём γ_2 тоже будет среди них; а вершины этих парабол описывают параболу γ_1: $x^2=\pm 2b^2 z$ в плоскости Oxz («+» для Φ_3, «–» для Φ_4).

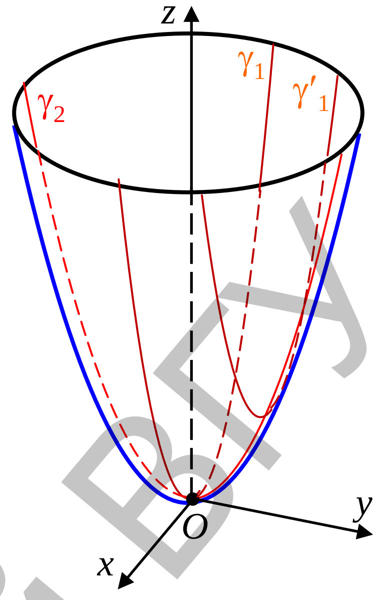


рис. 6.22

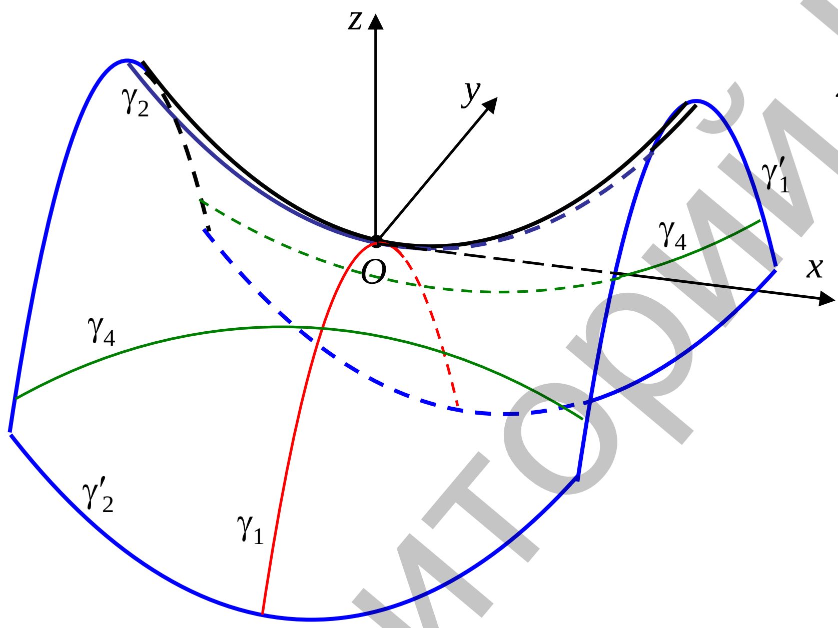


рис. 6.23

<u>*Прочие геометрические свойства гиперболоидов*</u>:

1. Из уравнения (6.17) получаем, что $z\geq 0$, т.е. Φ_3 целиком находится в полупространстве, которое определяется этим неравенством.

2. Координатные оси пересекают оба параболоида только в точке $O(0,0,0)$, которая называется вершиной.

3. Ось Oz является осью симметрии параболоидов, а координатные плоскости Oxz и Oyz – плоскостями симметрии. Других симметрий у параболоидов нет.

4. При $a=b$ Φ_3 будет поверхностью вращения, а гиперболы в сечениях Φ_4 плоскостями $z=h$ будут равнобокими.

5. Мы уже видели, что в сечениях Φ_4 плоскостями $z=h$ может получаться пара прямых. Примем без доказательства, что Φ_1 является линейчатой поверхностью и через каждую его точку проходит пара прямых, лежащих на поверхности.

§ 7. *Классификация поверхностей второго порядка*

Определение 6.8. *Поверхностью второго порядка* называется геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xy+2a_{23}yz+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+c=0, \qquad (6.20)$$

где среди коэффициентов a_{ij}, $i, \ j=1,2,3$ есть хотя бы один ненулевой. Выражение в первой строке называется *квадратичной частью уравнения*, c –*свободным членом*, всё остальное называется *линейной частью*.

Квадратичная часть уравнения (6.19) представляет собой квадратичную форму. Её коэффициенты образуют матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В главе 10 мы докажем, что матрицу любой квадратичной формы с помощью поворота координатных осей декартовой СК можно привести к диагональному виду

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда в новой декартовой СК $Ox'y'z'$ с тем же началом квадратичная часть уравнения (6.20) примет вид

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2, \qquad (6.21)$$

который тоже называется диагональным. При этом числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ не зависят от выбора новой декартовой СК $Ox'y'z'$. Т.е. если ещё в одной декартовой СК квадратичная часть уравнения имеет вид (6.21), то набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ будет тем же (может измениться только их порядок). При переходе к новым координатам линейная часть уравнения тоже изменится, а c – нет. Уравнение примет вид

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+2b_1x'+2b_2y'+2b_3z'+c=0 \qquad (6.22)$$

Далее мы выделим полные квадраты и после ещё одной замены координат сможем избавиться от переменной в первой степени, если присутствует эта переменная в квадрате (т.е. если соответствующее $\lambda_i \neq 0$). Как именно это делается, можно увидеть на примерах в следующем параграфе, а более подробно мы изучим этот процесс в главе 10.

В результате в уравнении останется каждая переменная x'', y'' или z'' ровно один раз: в первой степени или в квадрате. При этом если есть переменная в первой степени, мы можем избавиться от свободного члена.

Репозиторий ВГУ

При необходимости мы можем умножить уравнение на –1, с тем чтобы число положительных коэффициентов при квадратах было не меньше числа отрицательных, и поменять обозначения переменных в любом порядке, с тем чтобы привести уравнение именно к каноническому виду (если у нас осталась только одна переменная в квадрате, то это именно x'', а если остались две переменные в квадрате – то это x'' и y'', если в уравнении полностью отсутствует одна переменная, то это именно z'').

В конечном итоге, если опустить штрихи, получим одно из следующих уравнений.

Поверхность	Её каноническое уравнение	Инварианты
1. Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\delta>0,\ \Delta<0$
2. Мнимый эллипсоид (Ø)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\delta>0,\ \Delta>0$
3. Мнимый конус (точка)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	$\delta>0,\ \Delta=0$
4. Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\delta<0,\ \Delta<0$
5. Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\delta<0,\ \Delta>0$
6. Конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$\delta<0,\ \Delta=0$
7. Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	$\delta=0,\ \Delta<0$
8. Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	$\delta=0,\ \Delta>0$
9. Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\delta=\Delta=0,\ I_2>0,$ $I_1 \cdot I_4<0$
10. Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	$\delta=\Delta=0,\ I_2>0,$ $I_1 \cdot I_4>0$
11. Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	$\delta=\Delta=0,\ I_2>0$, $I_4=0$
12. Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\delta=\Delta=0,\ I_2<0,$ $I_4\neq 0$
13. Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$\delta=\Delta=0,\ I_2<0,$ $I_4=0$

Репозиторий ВГУ

14. Параболический цилиндр	$x^2 = 2py$	$\delta = \Delta = 0,\ \mathrm{I}_2 = 0,$ $\mathrm{I}_4 \neq 0$
15. Пара параллельных плоскостей	$x^2 = a^2$	$\delta = \Delta = 0,$ $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_4 = 0,\ \mathrm{I}_3 > 0$
16. Пара совпадающих плоскостей	$x^2 = 0$	$\delta = \Delta = 0,$ $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_4 = 0,\ \mathrm{I}_3 = 0$
17. Пара мнимых параллельных плоскостей	$x^2 = -a^2$	$\delta = \Delta = 0,$ $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_4 = 0,\ \mathrm{I}_3 < 0$

В третьей колонке приведены значения величин, которые называются *инвариантами поверхности 2 порядка*:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & c \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{I}_1 = \operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\mathrm{I}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ – сумма диагональных миноров второго порядка в δ

$$\mathrm{I}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & c \end{vmatrix}$$ – сумма диагональных миноров второго порядка из Δ, не входящих в δ

$$\mathrm{I}_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_1 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & c \end{vmatrix} -$$

сумма диагональных миноров третьего порядка в Δ, кроме δ.

***Теорема* 6.1.** *Величины* $\delta, \Delta, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$ *не изменяются при любых преобразованиях декартовой* СК, I_3, I_4 *не изменяются при повороте координатных осей, но меняются при переносе начала координат* (без доказательства).

Вычислив эти инварианты, мы можем определить тип поверхности, не упрощая её уравнения. Однако так мы не сможем определить положение поверхности в пространстве и величины её полуосей.

Репозиторий ВГУ

§ 8. *Примеры решения задач*

***Задача* 1.** *С помощью переноса начала координат привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Определить тип кривой и изобразить её в исходной системе координат*:

$$4x^2 + z^2 - 24x + 8y + 2z + 5 = 0\,.$$

Решение. Выделим в уравнении полные квадраты:

$$4(x^2 - 6x + 9) - 36 + (z^2 + 2z + 1) - 1 + 8y + 5 = 0\,,$$

$$4(x-3)^2 + (z+1)^2 + 8y - 32 = 0\,,$$

$$4(x-3)^2 + (z+1)^2 = -8(y-4).$$

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y - 4, \\ z' = z + 1. \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,\ 4,-1)$. После замены получаем уравнение

$$4x'^2 + z'^2 = -8y', \quad \Leftrightarrow \quad (x')^2 + \frac{(z')^2}{4} = -2y'.$$

Это уравнение задаёт эллиптический параболоид, ось которого будет $O'y'$. В сечении плоскостью $y' = -8$ получится эллипс $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(z')^2}{64} = 1$ с полуосями 4 и 8. Это следует учесть при изображении (рис. 6.24).

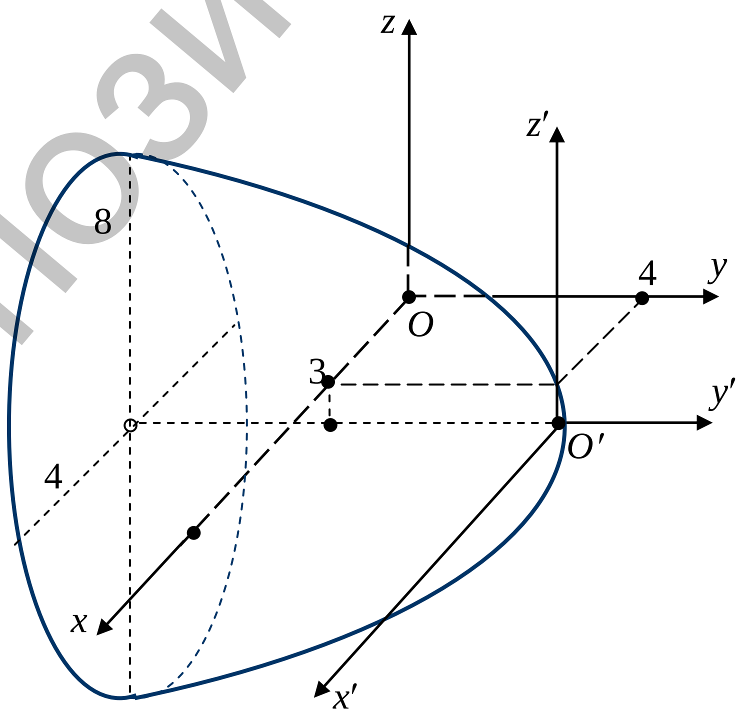


рис. 6.24

Репозиторий ВГУ

Задача 2. *Определите, какое множество задаётся в декартовой системе координат неравенством*

$$(x-3)^2-4(y+4)^2 \ge 0.$$

Изобразите это множество.

Решение. Определим сначала, какое множество задаётся уравнением $(x-3)^2-4(y+4)^2=0$. Делаем замену координат

$$\begin{cases} x' = x-3, \\ y' = y+4, \\ z' = z. \end{cases}$$

Она равносильна переносу начала координат в точку $O'(3,-4,\ 0)$. В новой системе координат $O'x'y'z'$ получаем, что поверхность задается уравнением

$$(x')^2-4(y')^2=0. \qquad (6.23)$$

Поскольку в уравнении отсутствует координата z', то мы сразу делаем вывод, что наша поверхность является цилиндрической и её образующие параллельны оси $O'z'$. На плоскости $O'x'y'$ уравнение (6.23) задаёт пару пересекающихся прямых

$$(x'-2y')(x'+2y')=0.$$

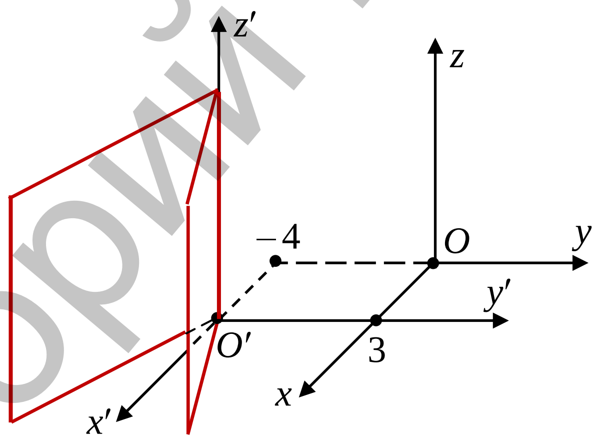


рис. 6.25

Эта кривая 2 порядка будет направляющей для нашей поверхности. Значит, поверхность – это пара пересекающихся плоскостей. На рисунке 6.25 изображена только небольшая часть этой поверхности. Поскольку изначально у нас было неравенство, то искомое множество – это внутренность одной из двух пар вертикальных углов, образуемых этими плоскостями. Надо определить, какой именно.

Возьмём любую точку на оси $O'x'$: $A(a,0,0)_{O'x'y'z'}$ и убедимся, что её координаты удовлетворяют неравенству $(x')^2-4(y')^2 \ge 0$. Значит, ось $O'x'$ лежит в нашем множестве. Таким образом, исходное неравенство задаёт внутренность изображенного двугранного угла и угла, вертикального с ним. А так как неравенство нестрогое, то и сами плоскости тоже принадлежат множеству.

Репозиторий ВГУ

***Задача* 3.** *Даны уравнения сферы* S:

$$x^2+y^2+z^2+12x-10y-4z-176=0$$

и плоскости π:

$$11x-10y-2z+105=0.$$

Найти координаты центра и радиус окружности, по которой эта плоскость пересекает сферу S.

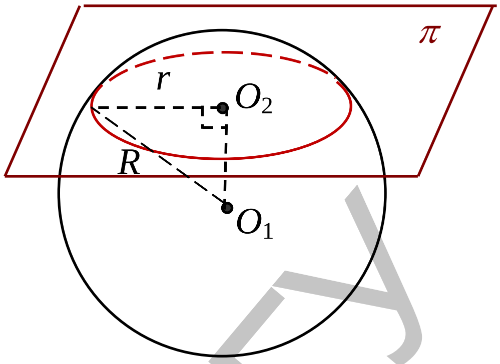


рис. 6.26

Решение. Найдём координаты центра O' и радиус R сферы. Для этого в её уравнении выделим полные квадраты:

$$(x^2-12x+36)-36+(y^2+10y+25)+(z^2+4z+4)-4-176=0,$$

$$(x-6)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=241.$$

Значит, $O'(6,-5,-2)$, $R=\sqrt{241}$.

Центр окружности, получающейся в сечении сферы плоскостью, является основанием перпендикуляра l, опущенного из центра сферы на плоскость (рис. 6.26). Из уравнения плоскости находим, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(11,-10,-2)$ является вектором нормали к плоскости. Этот же вектор будет направляющим для прямой l. Напомним, что параметрическое уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ с направляющим вектором $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ имеет вид

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t, \\ z = z_o + a_3 t. \end{cases}$$

В нашем случае получаем уравнение:

$$l: \begin{cases} x = 6+11t, \\ y = -5-10t, \\ z = -2-2t. \end{cases}$$

Основание перпендикуляра – это точка пересечения прямой l с плоскостью π. Для этого мы должны решить совместно уравнения l и π. Подставляем x, y, z_o из уравнения l в уравнение π:

$$11(6+11t)-10(-5-10t)-2(-2-2t)+105=0,$$

$$66+121t+50+100t+4+4t+105=0,$$

$$225t=-225, \quad t=-1.$$

Найденное t подставляем в уравнение l и находим координаты центра окружности: $O''(-5, 5, 0)$. Находим длину отрезка $O'O''$ как расстояние между точками:

$$|O'O''| = \sqrt{(-5+6)^2+(5-5)^2+(0+2)^2} = 15.$$

По теореме Пифагора

$$r^2 = R^2 - |O'O''|^2 = 241 - 225 = 16.$$

Значит, $r = 4$ – радиус окружности.

Ответ: $r = 4,\ O''(-5, 5, 0)$.

***Задача* 4.** *Составить уравнение поверхности, полученной вращением кривой*

$$\begin{cases} z = 2y - 2, \\ x = 0. \end{cases}$$

вокруг оси а) Oz, б) Oy. *Определить тип поверхности и изобразить её в системе координат.*

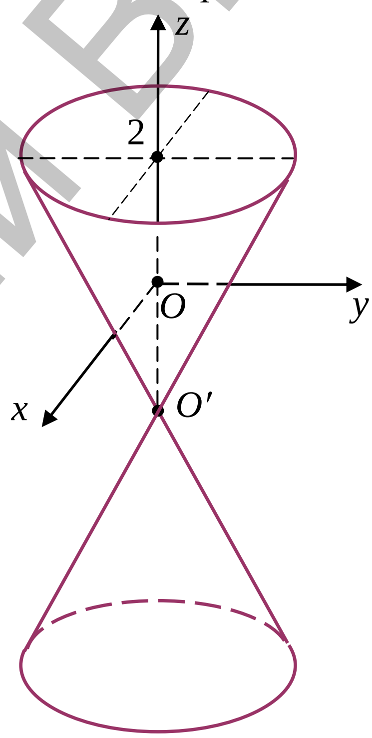


рис. 6.27

Решение. Данная система уравнений задаёт прямую l, лежащую в плоскости Oyz. Первое из уравнений – это уравнение l в данной плоскости. Для того чтобы составить уравнение поверхности Ф, получающейся вращением l вокруг Oz, мы должны в уравнении l оставить z без изменения, а y заменить на квадратный корень из суммы квадратов оставшихся координат со знаком $\pm$: $y \mapsto \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Получаем уравнение

$$z = \pm 2\sqrt{x^2+y^2} - 2, \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - \frac{(z+2)^2}{4} = 0. \qquad (6.24)$$

Данное уравнение определяет конус, ось которого – Oz, а вершина находится в точке $O'(0, 0, -2)$.

Заметим, что, согласно правилам решения иррациональных уравнений, в случае замены $y \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ (без знака $\pm$) мы, при возведении в квадрат, должны были бы добавить к (6.24) $z \geq 0$ и получили бы только половину конуса.

<u>Строим изображение конуса</u>.

1) Подставив в уравнение конуса $z = 2$, получим $x^2 + y^2 = 4$. Значит, в сечении плоскостью $z = 2$ получается окружность радиуса 2. Проводим через точку $z = 2$ на оси Oz вспомогательные линии, параллельно осям Ox и Oy; откладываем на них от данной точки отрезки длиною 2 и через получившиеся точки проводим эллипс, изображающий окружность (рис. 6.27). При этом масштаб по оси Ox выбираем в два раза меньше, чем по осям Oy и Oz.

Репозиторий ВГУ

2) Строим эллипс, равный данному, с центром в точке $z = -6$ на оси Oz.

3) Проводим касательные к эллипсам через вершину конуса $O'(0, 0, -2)$. <u>*Подчеркнём, что точки касания ни в коем случае не совпадают с вершинами эллипса*</u>.

4) Часть нижнего эллипса, заключённую между точками касания, изображаем пунктиром.

Аналогично, для того чтобы получить уравнение поверхности вращения вокруг Oy, мы в уравнении l оставляем y без изменения, а z заменяем: $z \mapsto \pm\sqrt{x^2+z^2}$. Получаем уравнение

$$x^2 - 4(y-1)^2 + z^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{4} - (y-1)^2 + \frac{z^2}{4} = 0.$$

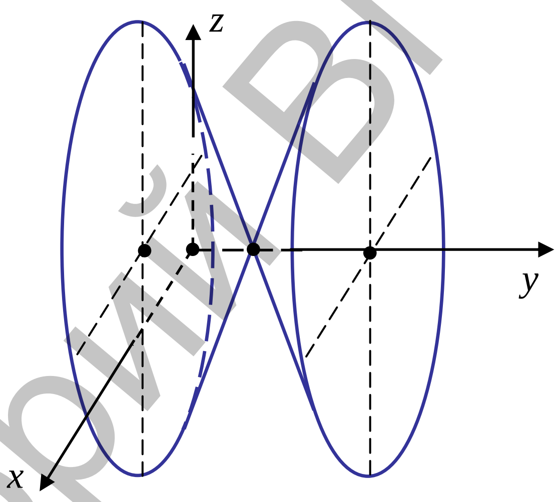


рис. 6.28

Оно задаёт конус, вершина которого находится в точке $O'(0, 1, 0)$, а ось конуса – Oy. Эту поверхность тоже следует изобразить. При этом учитываем, что в сечении плоскостью $y = 3$ получается окружность радиуса 4 (рис. 6.27).

***Задача* 5.** *Является ли поверхность, заданная уравнением*

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

поверхностью вращения? Если да, то вращением какой кривой (написать уравнение) вокруг какой оси она получена? Изобразите её.

Решение. Данная поверхность – это однополостный гиперболоид. В уравнении поверхности можно выделить выражение $\sqrt{y^2+z^2}$:

$$-x^2 + \frac{(\sqrt{y^2+z^2})^2}{4} = 1,$$

и больше нигде в уравнении x и z не встречаются. Поэтому сразу делаем вывод, что это уравнение задаёт поверхность вращения вокруг Ox. Для того чтобы определить, какая кривая γ вращается, мы $\sqrt{y^2+z^2}$ заменяем на y и получаем уравнение $-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ кривой, которая лежит в плоскости $z = 0$. Для того чтобы задать эту кривую в пространстве, мы должны написать систему уравнений

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} -x^2+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

Можем заменить $\sqrt{y^2+z^2}$ на z и тогда получим уравнение кривой γ', лежащей в плоскости $y=0$:

$$\begin{cases} -x^2+\dfrac{z^2}{4}=1\,, \\ y=0\,. \end{cases}$$

***Задача* 6.** *Составьте уравнение поверхности, каждая точка которой равноудалена от плоскости* $x=-a$ *и от точки* $F(a,0,0)$.

Решение. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка поверхности. Тогда

$$|MF|=\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2},$$

а расстояние от M до плоскости согласно формуле $(5.13')$ равно $|x+a|$. По условию

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}=|x+a|.$$

Возводим это равенство в квадрат:

$$x^2-2ax+a^2+y^2+z^2=x^2+2ax+a^2$$

$$y^2+z^2=4ax \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2a}+\frac{z^2}{2a}=2x.$$

Это уравнение задаёт эллиптический параболоид, осью которого является Ox.

***Задача* 7.** *Найдите точки пересечения эллипсоида* $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{81}=1$ *и прямой* $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+6}{12}$.

Решение. Перепишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=1+t, \\ y=4-6t, \\ z=-6+12t. \end{cases}$$

Подставим эти равенства в уравнение эллипсоида:

$$\frac{(1+t)^2}{9}+\frac{4(2-3t)^2}{36}+\frac{9(-2+4t)^2}{81}=1\,,$$

$$1+2t+t^2+4-12t+9t^2+4-16t+16t^2=9\,,$$

$$26t^2-26t=0 \quad \Leftrightarrow \quad 26t(t-1)=0\,.$$

Имеем два решения: $t_1=0$, $t_2=1$. Подставим их в уравнение прямой и найдём две точки $M_1(1,4,-6)$, $M_2(2,-2,6)$.

***Ответ*:** $M_1(1,4,-6)$, $M_2(2,-2,6)$.

Репозиторий ВГУ

***Задача* 8.** *Определить, какая кривая получается в сечении поверхности* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ *плоскостью* **а)** $y=2z$; **б)** $y=2z+2$.

Решение. **а)** Данная поверхность – это однополостный гиперболоид. Подставим $y=2z$ в уравнение поверхности:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(2z)^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=9.$$

Это уравнение проекции данной кривой на координатную плоскость Oxz. Оно задаёт пару параллельных прямых. Следовательно, наша кривая – это тоже пара параллельных прямых.

б) Подставим $y=2z+2$ в уравнение поверхности:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(2z+2)^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9}+\frac{z^2+4z+4-z^2}{4}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=9z.$$

Это уравнение проекции данной кривой на координатную плоскость Oxz. Оно задаёт параболу. Следовательно, наша кривая – это тоже парабола.

***Задача* 9.** *Относительно декартовой системы координат* $Oxyz$ *в пространстве поверхность определяется уравнением*

$$4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+6x-6y=0.$$

Определите тип данной поверхности.

Решение. Найдём инварианты Δ и δ:

$$\delta=\begin{vmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 0=0.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -2 & -3\\ 2 & -2 & 3 & 0\\ 3 & -3 & 0 & 0\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & -3 & 0\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}4 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & -3 & 0\end{vmatrix}=3\cdot 18-3\cdot 36=-54.$$

Согласно таблице наша поверхность – это эллиптический параболоид.

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 7. АФФИННОЕ И ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Что такое геометрическое трёхмерное пространство, мы можем себе представить наглядно. Что такое четырёхмерное пространство, представить себе трудно: в окружающей нас повседневной реальности его не существует. Цель данной главы: дать аксиоматическое определение пространства произвольной размерности. Также мы рассмотрим обзорно некоторые факты из геометрии четырёхмерного пространства.

§ 1. *Векторное пространство. Линейная зависимость векторов*

***Определение* 7.1.** Пусть L – произвольное множество, для элементов которого заданы две операции: сложение элементов и умножение элемента на действительное число, так что $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ и $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$ выполнено $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in L$, $\lambda\mathbf{x} \in L$ (т.е. операции не выводят за пределы L), и при этом имеют место следующие аксиомы (которые выполняются $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in L$ и $\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$).

A1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (коммутативность сложения);
A2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (ассоциативность сложения);
A3. $\exists\ \mathbf{o} \in L$ такой, что $\mathbf{x}+\mathbf{o}=\mathbf{x}$ (существование нулевого элемента);
A4. $\exists\ (-\mathbf{x}) \in L$ такой, что $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{o}$ (существование противоположного элемента);

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{A5.} & \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y} \\ \textbf{A6.} & (\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}\end{array}\right\}\ \text{дистрибутивность;}$$

A7. $(\lambda\mu)\mathbf{x}=\lambda(\mu\mathbf{x})$;
A8. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

Тогда L вместе с данными операциями называется *линейным, или векторным, пространством*. Элементы этого пространства будем называть *векторами*.

***Пример* 7.1.** Пространство V^2, состоящее из всех геометрических векторов на плоскости, или V^3, состоящее из всех векторов в пространстве. Тогда **A1**–**A8** представляют собой свойства операций над векторами, которые мы доказывали в главе 1.

***Пример* 7.2.** *Арифметическое пространство* $\boldsymbol{R}^3$, элементами которого являются тройки действительных чисел, которые могут быть записаны в виде строки или столбца. Мы будем записывать эти тройки в виде столбца:

$$\boldsymbol{R}^3=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\ \middle|\ x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}\right\}.$$

Репозиторий ВГУ

Операции в $\boldsymbol{R}^3$ определяются следующим образом. Если

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

то

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо проверить, что в данном пространстве выполняются аксиомы **А1**–**А8**. Проверим, например, **А5**.

$$\lambda(X+Y) = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ \lambda x_2 + \lambda y_2 \\ \lambda x_3 + \lambda y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \\ \lambda y_3 \end{pmatrix} = \lambda X + \lambda Y.$$

Роль нулевого элемента и элемента, противоположного к X, очевидно, играют столбцы

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad -X = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix},$$

т.е. выполнены **А3** и **А4**.

Упражнение. Проверьте самостоятельно, что выполняются остальные аксиомы.

Аналогично определяется арифметическое пространство $\boldsymbol{R}$, состоящее из столбцов высоты n.

***Пример* 7.3.** Пространство P_n, которое состоит из всех многочленов с действительными коэффициентами, степени, не превосходящей n:

$$P_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}\}$$

с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число.

***Пример* 7.4.** Пространство $C^{\mathrm{o}}([0,1])$, которое состоит из всех функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$.

Можно привести ещё массу примеров. Главное – уяснить, что векторное пространство может состоять из совершенно любых математических объектов, которые можно складывать и умножать на число, если выполняются **А1**–**А8**. При изучении дальнейшего материала, для простоты восприятия, можно представлять себе, что речь идёт о геометрических векторах. Но, в отличие от геометрических векторов, элементы векторного пространства мы будем обозначать без стрелочки.

Репозиторий ВГУ

Из аксиом **A1**–**A8** можно вывести следующие следствия:

1) единственность нулевого элемента;
2) единственность противоположного элемента;
3) $0\cdot\mathbf{x}=\mathbf{o}$;
4) $-1\cdot\mathbf{x}=-\mathbf{x}$;
5) $\lambda\cdot\mathbf{o}=\mathbf{o}\ \ \forall\mathbf{x}\in L$ и $\forall\lambda\in\boldsymbol{R}$.

***Определение* 7.2.** Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2,\ldots, \mathbf{x}_n\in L$ – произвольные векторы, а $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ – произвольные числа. Тогда выражение

$$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n \tag{7.1}$$

называется *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2,\ldots, \mathbf{x}_n$. Числа $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ называются *коэффициентами линейной комбинации*. Линейная комбинация (1) называется *тривиальной*, если все её коэффициенты равны нулю: $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. Соответственно, линейная комбинация (1) называется *нетривиальной*, если среди её коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ есть хотя бы одно ненулевое число.

***Определение* 7.3.** Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2,\ldots, \mathbf{x}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n=\mathbf{o}\,. \tag{7.2}$$

Соответственно, векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2,\ldots, \mathbf{x}_n$ называются *линейно независимыми*, если равенство (2) возможно только для тривиальной комбинации, т.е. когда $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

***Пример* 7.5.** Векторы $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ в пространстве V^3 линейно независимы, а векторы $\vec{\mathbf{a}}_1=\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{a}}_2=\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}+\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{a}}_3=\vec{\mathbf{k}}$ линейно зависимы, т.к. $1\cdot\vec{\mathbf{a}}_1+(-1)\cdot\vec{\mathbf{a}}_2+1\cdot\vec{\mathbf{a}}_3=\mathbf{o}$.

***Пример* 7.6.** В пространстве $\boldsymbol{R}^3$ столбцы

$$E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad E_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

линейно независимы. Действительно, составим линейную комбинацию этих столбцов и приравняем к нулевому столбцу:

$$\lambda_1E_1+\lambda_2E_2+\lambda_3E_3=O\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0\,,$$

т.е. только тривиальная комбинация столбцов E_1, E_2, E_3 может быть равна нулевому столбцу. Если к столбцам E_1, E_2, E_3 добавить произвольный

Репозиторий ВГУ

четвёртый столбец $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, то получим линейно зависимую систему столбцов $\{E_1, E_2, E_3, X\}$, т.к.

$$x_1 \cdot E_1 + x_2 \cdot E_2 + x_3 \cdot E_3 + (-1) \cdot X = O.$$

***Пример* 7.7.** В пространстве P_n многочлены $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы. Если к ним добавить любой многочлен $f(t)$ степени n, то получим линейно зависимую систему.

Упражнение. Самостоятельно покажите, что функции $f(t) \equiv 1$, $g(t) = \cos 2t$, $h(t) = \sin^2 t$ в пространстве $C^{\mathrm{o}}([0,1])$ линейно зависимы.

***Предложение* 7.1.** *Векторы* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, $k>1$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных.*

Действительно, пусть векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно зависимы, и

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{o},$$

где, например, $\lambda_k \neq 0$. Тогда

$$\mathbf{x}_k = \frac{\lambda_1}{\lambda_k}\mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\mathbf{x}_2 + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\mathbf{x}_{k-1},$$

т.е. $\mathbf{x}_k$ является линейной комбинацией $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$.

Обратно, если $\mathbf{x}_k = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}$, то

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + (-1)\mathbf{x}_k = \mathbf{o},$$

и комбинация нетривиальная, т.к. $-1 \neq 0$. ■

***Предложение* 7.2.** *Если среди векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ *есть нулевой, то эти векторы линейно зависимы.*

Действительно, если, например, $\mathbf{x}_k = \mathbf{o}$, то

$$0 \cdot \mathbf{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{x}_{k-1} + 1 \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{o},$$

и комбинация нетривиальная, т.к. $1 \neq 0$. ■

§ 2. *Базис и координаты в векторном пространстве*

***Определение* 7.4.** Пусть в векторном пространстве L выполнены еще две аксиомы:

A9. Существуют n линейно независимых векторов;

A10. Любые $n+1$ векторов линейно зависимы.

Тогда говорим, что *векторное пространство* L *имеет размерность* n и пишем $\dim L = n$. Для векторного пространства размерности n используется обозначение L^n.

Репозиторий ВГУ

***Определение* 7.5.** *Базисом* в L^n называется любая система, состоящая из n линейно независимых векторов. Векторы, входящие в базис, называются *базисными*.

Пусть $\mathcal{B}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n)$ – базис в L^n, а $\mathbf{x}\in L^n$ – любой вектор. Тогда система $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n)$ состоит из $n+1$ векторов, а значит, эти векторы линейно зависимы. Пусть выполнено

$$\lambda_o\mathbf{x}+\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{e}_n=\mathbf{o}\,, \tag{7.3}$$

и комбинация нетривиальная. Тогда обязательно $\lambda_o\neq 0$. Действительно, предположим противное: $\lambda_o=0$. Тогда среди $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ есть хотя бы одно ненулевое число, и мы получаем условие линейной зависимости базисных векторов:

$$\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{e}_n=\mathbf{o}\,.$$

Но эти векторы по определению линейно независимы. Противоречие.

Поэтому $\lambda_o\neq 0$. Тогда из (7.3) получаем

$$\mathbf{x}=\frac{\lambda_1}{\lambda_o}\mathbf{e}_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_o}\mathbf{e}_2+\ldots+\frac{\lambda_n}{\lambda_o}\mathbf{e}_n\,.$$

Обозначим $x_i=-\lambda_i/\lambda_o$, $i=1,\ldots,n$ и получим, что

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n\,. \tag{7.4}$$

***Определение* 7.6.** Выражение (7.4) называется *разложением вектора* $\mathbf{x}$ *по базису* $\mathcal{B}$. Числа $x_1, x_2,\ldots, x_n$ называются *координатами вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* $\mathcal{B}$. Пишем: $\mathbf{x}(x_1, x_2,\ldots x_n)_{\mathcal{B}}$.

Если $\mathbf{x}=y_1\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+\ldots+y_n\mathbf{e}_n$, то

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1)\mathbf{e}_1+(x_2+y_2)\mathbf{e}_2+\ldots+(x_n+y_n)\mathbf{e}_n\,,$$

$$\lambda\mathbf{x}=\lambda x_1\mathbf{e}_1+\lambda x_2\mathbf{e}_2+\ldots+\lambda x_n\mathbf{e}_n\,.$$

Таким образом, *при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*.

Сопоставим каждому вектору $\mathbf{x}(x_1, x_2,\ldots x_n)$ столбец, составленный из его координат:

$$\mathbf{x}(x_1, x_2,\ldots x_n)\;\leftrightarrow\; X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad \mathbf{y}(y_1, y_2,\ldots y_n)\;\leftrightarrow\; Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

Репозиторий ВГУ

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} \;\leftrightarrow\; X+Y=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda\mathbf{x} \;\leftrightarrow\; \lambda X=\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что операциям над векторами соответствуют точно такие же операции над их координатными столбцами. Поэтому с точки зрения линейной алгебры произвольное векторное пространство L^n устроено точно так же, как и $\boldsymbol{R}^n$. Говорят, что L^n *изоморфно* $\boldsymbol{R}^n$ или что $\boldsymbol{R}^n$ *является моделью пространства* L^n.

Замечание. Более точное определение изоморфизма векторных и евклидовых пространств изучается в курсе алгебры. Рекомендуется также ознакомиться с темой, как изменяются координаты вектора при замене базиса.

§ 3. *Евклидово векторное пространство*

***Определение* 7.7.** Пусть в векторном пространстве L задана ещё одна операция, сопоставляющая двум векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ число $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, так, что выполнены следующие аксиомы: $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ и $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$

A11. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$;
A12. $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$;
A13. $(\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$;
A14. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\geq 0$ и $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{o}$.

Тогда данная операция называется *скалярным произведением* векторов, а пространство L вместе с этой операцией называется *евклидовым пространством*. Число $\mathbf{x}^2=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ называется *скалярным квадратом вектора* $\mathbf{x}$.

Евклидово пространство размерности n обозначим E^n.

Если вместо **A14** выполнена другая аксиома:

A14′. $\forall\, \mathbf{x}\in L\ \exists\, \mathbf{y}\in L$ такой, что $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\neq 0$,

то пространство L вместе с такой операцией называется *псевдоевклидовым пространством*.

***Определение* 7.8.** *Длиной вектора* $\mathbf{x}$ в евклидовом пространстве называется число $|\mathbf{x}|=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$. *Углом между векторами* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называется такое число α, что $\cos\alpha=\dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}$. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются *коллинеарными*, если $\exists\,\lambda\in\boldsymbol{R}$ такое, что $\mathbf{y}=\lambda\mathbf{x}$.

В силу **A14** $|\mathbf{x}|$ – действительное число, и равенство $|\mathbf{x}|=0$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}=\mathbf{o}$. Мы знаем, что $|\cos\alpha|\leq 1$. Поэтому,

Репозиторий ВГУ

для того чтобы имело смысл определение угла между векторами, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad |\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}| \quad\Leftrightarrow\quad (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2\le|\mathbf{x}|^2\cdot|\mathbf{y}|^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\qquad (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2\le(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}). \tag{7.5}$$

Это неравенство называется *неравенством Коши–Буняковского*. Докажем его.

1 *случай*. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ не коллинеарны. Тогда $\forall\lambda\in\boldsymbol{R}$ $\mathbf{y}\ne\lambda\mathbf{x}$, т.е. $\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}\ne\mathbf{o}$. Тогда согласно **A14** $\forall\lambda\in\boldsymbol{R}$

$$(\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y})>0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})+2\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}>0.$$

Выражение в левой части неравенства представляет собой квадратный трёхчлен относительно переменной λ. Поскольку это выражение строго больше нуля, то его дискриминант должен быть меньше нуля:

$$\frac{D}{4}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2<0.$$

Значит, имеет место (7.5) со строгим неравенством.

2 *случай*. $\mathbf{x}\,||\,\mathbf{y}$. Тогда $\exists\lambda\in\boldsymbol{R}$ такое, что $\mathbf{y}=\lambda\mathbf{x}$. Подставим это равенство в (3):

$$(\mathbf{x}\cdot\lambda\mathbf{x})^2\le(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\lambda\mathbf{x}\cdot\lambda\mathbf{x}) \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^2\le\lambda^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^2.$$

Таким образом, имеет место (7.5) со знаком равенства. ■

Попутно мы выяснили, что равенство в (7.5) достигается тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}\,||\,\mathbf{y}$.

Для векторов в геометрическом пространстве имеет место *неравенство треугольника*

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|. \tag{7.6}$$

Докажем его для произвольного евклидова пространства. Используя неравенство (7.5) в виде $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2\le|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2$, получаем

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{x}^2+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}^2\le$$

$$\le|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|^2=(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2.$$

Остаётся извлечь корень из обеих частей неравенства. При этом равенство в (7.6) имеет место тогда и только тогда, когда равенство имеет место в (7.5), т.е. когда $\mathbf{x}\,||\,\mathbf{y}$.

***Определение* 7.9.** Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются *ортогональными*, если $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$.

Репозиторий ВГУ

Заметим, что только нулевой вектор ортогонален каждому вектору. Действительно, если $\forall \mathbf{y}\in E^n$ $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$, то это должно быть выполнено и для $\mathbf{y}=\mathbf{x}$, т.е. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0$. В силу **A14** это равносильно $\mathbf{x}=\mathbf{o}$.

***Определение* 7.10.** Система векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_k)\in E^n$ называется ортонормированной, если все векторы единичные и взаимно ортогональные, т.е. $\forall i, j=1\ldots k$ выполнено $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, \text{ при } i=j,\\ 0, \text{ при } i\neq j\end{cases}$ (δ_{ij} называется символом Кронекера).

***Предложение* 7.3.** *Ортонормированная система векторов линейно независима.*

Действительно, пусть выполнено

$$\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{e}_n=\mathbf{o}.$$

Домножим обе части этого равенства скалярно на $\mathbf{e}_1$:

$$(\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{e}_k)\cdot\mathbf{e}_1=\mathbf{o}\cdot\mathbf{e}_1 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1+\ldots+\lambda_k\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_1=0.$$

Отсюда

$$\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot 0+\ldots+\lambda_k\cdot 0=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda_1=0.$$

Аналогично, домножая на $\mathbf{e}_2$, получим $\lambda_2=0$ и т.д. Итак, выполнено $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$. ■

В курсе алгебры доказывается следующая теорема.

***Теорема* 7.1.** *В E^n существует ортонормированный базис (ОНБ), т.е. ортонормированная система, состоящая из n векторов.*

Пусть $\mathcal{B}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n)$ – ОНБ в E^n, $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in E^n$ – произвольные векторы. Пусть $\mathbf{x}(x_1, x_2,\ldots x_n)_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{y}(y_1, y_2,\ldots y_n)_{\mathcal{B}}$. Тогда

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n}y_j\mathbf{e}_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j\delta_{ij}.$$

Получается, что в этой сумме равны нулю все слагаемые, у которых $i\neq j$, т.е. остаются только слагаемые, у которых индексы i и j одинаковые. Итак,

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n, \tag{7.7}$$

т.е. формула для вычисления скалярного произведения в ОНБ такая же, как и в обычном геометрическом пространстве, если координаты заданы в декартовой СК.

Из этой формулы следует, что

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}. \tag{7.8}$$

Репозиторий ВГУ

Пример **7.8.** Пространство V^3 с обычным скалярным произведением векторов: $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})$ представляет собой евклидово пространство. Аксиомы **A11**–**A14** в точности совпадают со свойствами этого произведения. Базис $\mathcal{B} = (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ представляет собой ОНБ.

Пример **7.9.** В пространстве $\boldsymbol{R}^n$ для столбцов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

определим

$$X\cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\,. \tag{7.9}$$

Упражнение. Проверьте самостоятельно, что при таком определении выполняются **A11**–**A14**.

Таким образом, $\boldsymbol{R}^n$ со скалярным произведением (7.9) представляет собой евклидово векторное пространство. Легко проверить, что столбцы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

составляют ОНБ.

Мы уже отмечали, что для любого векторного пространства L^n векторное пространство $\boldsymbol{R}^n$ может служить его моделью. Для этого надо в L^n выбрать базис $\mathcal{B}$ и каждому вектору $\mathbf{x}(x_1, x_2,\ldots x_n)_{\mathcal{B}}$ сопоставить столбец X, составленный из его координат. Тогда линейным операциям над векторами будут соответствовать точно такие же операции над их координатными столбцами. Выберем теперь в евклидовом векторном пространстве E^n ОНБ $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n)$ и по тому же принципу сопоставим каждому вектору его координатный столбец:

$$\mathbf{x}(x_1, x_2,\ldots x_n)_{\mathcal{B}} \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(y_1, y_2,\ldots y_n)_{\mathcal{B}} \leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = X\cdot Y$. Таким образом, это соответствие сохраняет не только линейные операции над векторами, но и их скалярное произведение. Поэтому говорят, что E^n <u>*изоморфно евклидову векторному пространству*</u> $\boldsymbol{R}^n$ или что <u>*евклидово векторное пространство*</u> $\boldsymbol{R}^n$ <u>*является моделью пространства*</u> E^n.

Репозиторий ВГУ

Пусть теперь базис $\mathcal{B} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ в E^n не является ортонормированным. Как вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots x_n)_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{y}(y_1, y_2, \ldots y_n)_{\mathcal{B}}$? Обозначим $g_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и из этих чисел составим матрицу

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Она называется матрицей Грама базиса $\mathcal{B}$. Эта матрица, очевидно, является симметрической: $g_{ji} = \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = g_{ij}$. Тогда

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j \,. \tag{7.10}$$

Если использовать координатные столбцы X и Y векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то (7.10) можно переписать в матричном виде:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = X^T \mathbf{\Gamma} Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{7.10$'$}$$

Например, в двумерном евклидовом пространстве эта формула выглядит так:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = g_{11} x_1 y_1 + g_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + g_{22} x_2 y_2.$$

Если базис ортонормированный, то $g_{ij} = \delta_{ij}$ и $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{E}$ (единичной матрице). Отметим ещё, что для любого базиса $\det \mathbf{\Gamma} > 0$.

§ 4. *Преобразование координат в векторном пространстве*

Всё сказанное в этом параграфе верно для векторного пространства L^n произвольной размерности. Но для облегчения восприятия этого материала мы ограничимся случаем $n = 3$.

Пусть в векторном пространстве L^3 выбраны два произвольных базиса $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$. Пусть один и тот же вектор $\mathbf{x}$ в первом и втором базисах имеет соответственно координаты $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$ и $\mathbf{x}(x_1', x_2', x_3')_{\mathcal{B}'}$. Требуется найти связь между этими координатами. Мы будем называть первый базис и первые координаты (без штриха) старыми, а второй базис и вторые координаты (со штрихом) новыми.

Репозиторий ВГУ

Для решения поставленной задачи нам должно быть известно, как векторы нового базиса раскладываются по старому базису:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2 + c_{31}\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{e}_2' = c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2 + c_{32}\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{e}_3' = c_{13}\mathbf{e}_1 + c_{23}\mathbf{e}_2 + c_{33}\mathbf{e}_3\,. \end{cases} \qquad (7.11)$$

Из коэффициентов этого разложения мы составляем матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \qquad (7.12)$$

которая называется *матрицей перехода от первого базиса ко второму*. Пишем так: $\mathcal{B} \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathcal{B}'$. При составлении этой матрицы мы коэффициенты из каждой строчки в (7.11) записывали в соответствующий по номеру столбец. В связи с тем, что базисные векторы линейно независимы, то и столбцы в матрице $\mathbf{C}$ тоже линейно независимы, а это значит, что $\det\mathbf{C} \neq 0$. В соответствии с определением, что такое координаты, мы можем записать разложения вектора $\mathbf{x}$ по старому и новому базисам:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \qquad (7.13)$$

$$\mathbf{x} = x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2' + x_3'\mathbf{e}_3'\,. \qquad (7.14)$$

Подставим в последнее равенство разложения (7.11):

$$\mathbf{x} = x_1'(c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2 + c_{31}\mathbf{e}_3) + x_2'(c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2 + c_{32}\mathbf{e}_3) + x_3'(c_{13}\mathbf{e}_1 + c_{23}\mathbf{e}_2 + c_{33}\mathbf{e}_3)\,.$$

Раскроем скобки и сгруппируем коэффициенты при одинаковых векторах:

$$\mathbf{x} = (c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3')\mathbf{e}_1 + (c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3')\mathbf{e}_2 + (c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3')\mathbf{e}_3\,.$$

Сравним это выражение с (7.13). В силу единственности разложения вектора по базису, получаем

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3'\,, \\ x_2 = c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3'\,, \\ x_3 = c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3'\,. \end{cases} \qquad (7.15)$$

Если использовать столбцы, составленные из координат

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

то систему (7.15) можно переписать в виде одного матричного равенства:

$$X = \mathbf{C}X'. \qquad (7.15')$$

Репозиторий ВГУ

Эти формулы позволяют найти координаты вектора в старом базисе, если известны его координаты в новом, т.е. они выражают «обратную связь». Для того чтобы найти прямую связь, мы из (7.15′) выражаем

$$X' = \mathbf{C}^{-1}X, \tag{7.16′}$$

где $\mathbf{C}^{-1}$ – обратная матрица к $\mathbf{C}$. Мы уже отмечали, что $\det\mathbf{C} \neq 0$, поэтому обратная матрица существует. Итак, новые координаты выражаются через старые по формулам

$$\begin{cases} x_1' = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3', \\ x_2' = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3', \\ x_3' = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3', \end{cases} \tag{7.16}$$

где $B = C^{-1}$, т.е. коэффициенты b_{ij} берутся из матрицы, обратной к матрице перехода. Вместо того чтобы искать обратную матрицу, можно решить систему уравнений (7.15) относительно неизвестных x_1', x_2', x_3', и мы получим те же формулы (7.16).

Предположим теперь, что оба базиса $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ являются ортонормированными. Тогда должно выполняться

$$\mathbf{e}_1'^2 = (c_{11})^2 + (c_{21})^2 + (c_{31})^2 = 1,$$
$$\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2' = c_{11} \cdot c_{12} + c_{21} \cdot c_{22} + c_{31} \cdot c_{23} = 0.$$

И аналогично сумма квадратов элементов каждого столбца матрицы C равна 1, а сумма произведений элементов одного столбца матрицы C на соответствующие элементы другого столбца равна нулю. Матрица, обладающая такими свойствами, является ортогональной, т.е. для неё выполнено $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ (это изучается в курсе алгебры). Другими словами, для ортогональной матрицы обратная матрица совпадает с транспонированной. *Переход от одного ОНБ к другому осуществляется с помощью ортогональной матрицы*.

§ 5. *Аффинное и евклидово точечное пространство*

Пока мы определили пространство, состоящее только из векторов. В этом параграфе у нас появятся точки, и будет установлена связь между точками и векторами.

***Определение* 7.11.** Пусть дано некоторое множество $\mathcal{A}$, элементы которого будем называть точками и обозначать большими буквами $A, B, C\ldots$ и некоторое векторное пространство L^n. Пусть каждой упорядоченной паре точек A, B сопоставлен вектор $\mathbf{x}$ (пишем $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$) так, что выполнены следующие аксиомы:

Репозиторий ВГУ

А15. $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall \mathbf{x} \in L^n$ $\exists!$ $B \in \mathcal{A}$ такая, что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$ (аксиома откладывания вектора от точки).

А16. Если $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{y}$, то $\overrightarrow{AC} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ (правило треугольника сложения векторов).

Тогда множество точек $\mathcal{A}$, связанное с L^n, называется *n-мерным аффинным пространством* и обозначается $\mathcal{A}^n$.

Из аксиом **А15** и **А16** вытекают следующие следствия.

1. Каждой паре одинаковых точек сопоставляется нулевой вектор: $\overrightarrow{AA} = \mathbf{o}$.

Действительно, пусть $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$ – любой вектор, а $\mathbf{y} = \overrightarrow{AA}$. Тогда согласно **А16** $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{y} = \mathbf{o}$. ■

2. Если $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$, то $\overrightarrow{BA} = -\mathbf{x}$.

Действительно, если $\overrightarrow{BA} = \mathbf{y}$, то согласно **А16** $\overrightarrow{AA} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{o}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$. ■

***Определение* 7.12.** Пусть $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ – базис в L^n, а $O \in \mathcal{A}^n$ – произвольная точка. Тогда набор $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ назовём *аффинным репером*, а точку O – *началом координат*. Иногда аффинный репер называют также *аффинной системой координат*.

Пусть $P \in \mathcal{A}^n$ – тоже произвольная точка. Тогда вектор $\overrightarrow{OP}$ называется *радиус-вектором точки* P. Разложим этот вектор по базису:

$$\overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n .$$

Тогда набор чисел $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называется координатами точки P в данном репере. Пишем $P(x_1, x_2, \ldots x_n)_{\mathcal{R}}$. Пусть $Q(y_1, y_2, \ldots y_n)_{\mathcal{R}}$ – другая точка, тогда

$$\overrightarrow{OQ} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n .$$

Отсюда

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (y_1 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - x_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (y_n - x_n)\mathbf{e}_n .$$

Значит,

$$\overrightarrow{PQ}\,(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n). \qquad (7.17)$$

Таким образом, *для того чтобы найти координаты вектора надо из координат его конца вычесть координаты начала*.

***Определение* 7.13.** Аффинное пространство $\mathcal{A}^n$, связанное с евклидовым векторным пространством E^n, называется *точечным евклидовым пространством*. Будем обозначать его $\mathcal{E}^n$.

Репозиторий ВГУ

***Определение* 7.14.** Система аксиом **А1–А16** называется *системой аксиом Вейля n-мерного точечного евклидова пространства*.

***Определение* 7.15.** Система координат в точечном евклидовом пространстве называется *ортонормированной*, если задающий её базис $\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ является ортонормированным.

***Определение* 7.16.** *Расстоянием между точками* P и Q в точечном евклидовом пространстве называется длина вектора $\overrightarrow{PQ}$. Это расстояние обозначим $\rho(P,Q)$.

Пусть в E^n задана ортонормированная система координат, относительно которой $P(x_1, x_2,\ldots x_n)$, $Q(y_1, y_2,\ldots y_n)$. Тогда из формул (7.8) и (7.16) следует, что расстояние между этими точками вычисляется по формуле

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}. \qquad (7.17)$$

Можно сказать, что ρ есть функция, которая сопоставляет двум точкам $P,\ Q\in\mathcal{E}^n$ число $\rho(P,Q)$. Отметим, что эта функция обладает следующими свойствами:

1. $\rho(P,Q)=\rho(Q,P)$;

2. $\rho(P,Q)+\rho(Q,R)\geq\rho(P,R)$ (неравенство треугольника);

3. $\rho(P,Q)\geq 0$, и $\rho(P,Q)=0 \Leftrightarrow P=Q$.

§ 6. *Краткий обзор геометрии пространства* $\mathcal{A}^4$

***Определение* 7.17.** Пусть даны точка A и вектор $\mathbf{a}$. *Прямой проходящей через точку* A *в направлении вектора* $\mathbf{a}$ называется множество точек

$$l=\{M|\ \overrightarrow{AM}=t\mathbf{a},\ t\in\boldsymbol{R}\}. \qquad (7.18)$$

Будем говорить, что прямая l задаётся уравнением $\overrightarrow{AM}=t\mathbf{a}$.

***Определение* 7.18.** Пусть даны точка A и два неколлинеарных вектора $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$. *Плоскостью, проходящей через точку* A *в направлении векторов* $\mathbf{c}$ *и* $\mathbf{d}$, называется множество точек

$$\pi=\{M|\ \overrightarrow{AM}=u\mathbf{c}+v\mathbf{d},\ u,v\in\boldsymbol{R}\}. \qquad (7.19)$$

Будем говорить, что плоскость π задаётся уравнением $\overrightarrow{AM}=u\mathbf{c}+v\mathbf{d}$, и обозначать её так: $\pi=(A,\mathbf{c},\mathbf{d})$.

***Определение* 7.19.** Пусть даны точка A и три линейно независимых вектора $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$. Тогда множество точек

$$\Pi=\{M|\ \overrightarrow{AM}=\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g}+\nu\mathbf{h},\ \lambda,\mu,\nu\in\boldsymbol{R}\} \qquad (7.20)$$

Репозиторий ВГУ

называется *гиперплоскостью, проходящей через точку* A *в направлении векторов* $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$. Будем говорить, что гиперплоскость задаётся уравнением $\overrightarrow{AM} = \lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g} + \nu\mathbf{h}$, и обозначать её так: $\Pi = (A, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})$.

Заметим, что каждую прямую можно рассматривать, как одномерное аффинное пространство, плоскость – как двумерное, гиперплоскость – как трёхмерное. Например, пусть $M_1, M_2 \in \Pi$, т.е.

$$\overrightarrow{AM_1} = \lambda_1\mathbf{f} + \mu_1\mathbf{g} + \nu_1\mathbf{h}, \qquad \overrightarrow{AM_2} = \lambda_2\mathbf{f} + \mu_2\mathbf{g} + \nu_2\mathbf{h}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AM_2} - \overrightarrow{AM_1} = (\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{f} + (\mu_2 - \mu_1)\mathbf{g} + (\nu_2 - \nu_1)\mathbf{h}.$$

Таким образом, каждой паре точек $M_1, M_2 \in \Pi$ соответствует вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. И этот вектор однозначно раскладывается по трём линейно независимым векторам $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$. Значит, $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ образуют базис $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}\}$ в аффинном пространстве Π, и $\overrightarrow{M_1M_2}(\lambda_2 - \lambda_1,\ \mu_2 - \mu_1,\ \nu_2 - \nu_1)$ в этом базисе. Четвёрка $\mathcal{R} = \{A, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}\}$ образует репер и, например, $M_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)_{\mathcal{R}}$.

***Предложение* 7.4.** *Каковы бы ни были две различные точки* A, B, *существует, и притом единственная, прямая* l, *проходящая через эти точки*.

Действительно, это будет прямая, которая проходит через A в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$: $l = \{M \mid \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \boldsymbol{R}\}$. При $t = 0$ получим точку A, а при $t = 1$ получим точку B. Будем писать $l = AB$. Доказательство единственности опустим. Подробно это доказательство излагается в предмете «Основания геометрии».

В дальнейшем координаты точек, в отличие от координат векторов, будем обозначать большими буквами.

Если $A(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2, \overset{\circ}{X}_3, \overset{\circ}{X}_4)$, $\mathbf{a}(a_1, a_1, a_1, a_4)$, $\mathbf{b}(b_1, b_1, b_1, b_4)$, то прямая (7.18) задаётся в координатах каноническим уравнением

$$\frac{X_1 - \overset{\circ}{X}_1}{a_1} = \frac{X_2 - \overset{\circ}{X}_2}{a_2} = \frac{X_3 - \overset{\circ}{X}_3}{a_3} = \frac{X_4 - \overset{\circ}{X}_4}{a_4}$$

или параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} X_1 = \overset{\circ}{X}_1 + a_1 t, \\ X_2 = \overset{\circ}{X}_2 + a_2 t, \\ X_3 = \overset{\circ}{X}_3 + a_3 t \\ X_4 = \overset{\circ}{X}_4 + a_4 t. \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

Плоскость (7.19) задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} X_1 = \overset{\circ}{X_1} + uc_1 + vd_1, \\ X_2 = \overset{\circ}{X_2} + uc_2 + vd_2, \\ X_3 = \overset{\circ}{X_3} + uc_3 + vd_3 \\ X_4 = \overset{\circ}{X_4} + uc_4 + vd_4. \end{cases}$$

***Предложение* 7.5.** *Каковы бы ни были три различные точки* A, B, C, *существует, и притом единственная, плоскость* π, *проходящая через эти точки.*

Действительно, это будет плоскость, которая проходит через A в направлении векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т.е. задающаяся уравнением

$$\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}.$$

Очевидно, что при $u=1$, $v=0$ получим точку A, а при $u=0$, $v=1$ получим точку B. Доказательство единственности достаточно длинное, и мы его опустим.

***Предложение* 7.6.** *Каковы бы ни были четыре различные точки* A, B, C, *существует, и притом единственная, гиперплоскость* π, *проходящая через эти точки*.

Упражнение. Докажите самостоятельно существование такой гиперплоскости.

***Предложение* 7.7.** *Если две различные точки* A *и* B *принадлежат плоскости* π, *то все точки прямой* AB *принадлежат* π.

Действительно, зададим плоскость уравнением $\overrightarrow{AM} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$, где $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Тогда все точки прямой AB задаются тем же условием при переменном u и $v=0$, и поэтому все они принадлежат плоскости.

***Предложение* 7.8.** *Если две различные плоскости* α и β *имеют две различные общие точки* A *и* B, *то все общие точки этих плоскостей лежат на прямой* AB.

Действительно, если бы нашлась общая точка C этих плоскостей, не лежащая на прямой AB, то согласно предложению 7.7, эти плоскости должны были бы совпасть.

***Предложение* 7.9.** *Если три точки* A, B, C, *не лежащие на одной прямой, принадлежат некоторой гиперплоскости* Π, *то и вся плоскость* $\pi = ABC$ *принадлежит* Π.

Доказательство аналогично доказательству предложения 7.7.

***Предложение* 7.10.** *Если две различные гиперплоскости* Π_1 *и* Π_2 *имеют общую точку* A, *то они пересекаются по плоскости (без доказательства).*

Репозиторий ВГУ

***Предложение* 7.11.** *Если плоскость π имеет общую точку с гиперплоскостью Π, то либо $\pi \subset \Pi$, либо они пересекаются по прямой (без доказательства).*

***Определение* 7.20.** Пусть прямая l задаётся уравнением $\overrightarrow{AM} = t\mathbf{a}$. Пусть M_1, M_2, M_3 – три точки на прямой l и $\overrightarrow{AM_1} = t_1\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AM_2} = t_2\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AM_3} = t_3\mathbf{a}$. Говорим, что точка M_2 *лежит между точками* M_1 *и* M_3, если $t_1 < t_2 < t_3$ либо $t_3 < t_2 < t_1$.

После этого можно определить, что такое отрезок, луч, треугольник. Можно доказать, что прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

***Определение* 7.21.** Пусть прямые l_1 и l_2 задаются соответственно уравнениями $\overrightarrow{A_1M} = t\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{A_2M} = \tau\mathbf{b}$. Тогда говорим, что $l_1 || l_2$, если $\mathbf{a} || \mathbf{b}$, и при этом прямые, как множества точек, не совпадают.

***Определение* 7.22.** Пусть прямая l задаётся уравнением $\overrightarrow{A_1M} = t\mathbf{a}$, а плоскость π задаётся уравнением $\overrightarrow{BM} = u\mathbf{c} + v\mathbf{d}$. Тогда говорим, что $l || \pi$, если вектор $\mathbf{a}$ раскладывается через $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ (т.е. $\mathbf{a} = u_1\mathbf{c} + v_1\mathbf{d}$), и при этом прямая l не содержится в плоскости π.

Аналогично определяется параллельность прямой и гиперплоскости.

***Определение* 7.23.** Пусть плоскость π задана уравнением $\overrightarrow{BM} = u\mathbf{c} + v\mathbf{d}$, а гиперплоскость Π – уравнением $\overrightarrow{CM} = \lambda\mathbf{c} + \mu\mathbf{d} + \nu\mathbf{f}$. Тогда говорим, что $\pi || \Pi$, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ раскладываются по базису $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}\}$, и при этом $\pi \not\subset \Pi$.

Аналогично определяется параллельность двух гиперплоскостей. Можно доказать следующие утверждения.

***Предложение* 7.12.** *Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда они лежат в одной плоскости и не пересекаются.*

***Предложение* 7.13.** *Прямая и плоскость параллельны тогда и только тогда, когда они лежат в одной плоскости и не пересекаются.*

***Предложение* 7.14.** *Прямая параллельна гиперплоскости тогда и только тогда, когда она её не пересекает. Плоскость параллельна гиперплоскости тогда и только тогда, когда она её не пересекает. Две гиперплоскости параллельны тогда и только тогда, когда они не пересекаются.*

Если нам известны координаты точки $A(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2, \overset{\circ}{X}_3, \overset{\circ}{X}_4)$ на гиперплоскости и координаты трёх векторов $\mathbf{f}(f_1, f_1, f_1, f_4)$, $\mathbf{g}(g_1, g_1, g_1, g_4)$, $\mathbf{h}(h_1, h_1, h_1, h_4)$, параллельных ей, то гиперплоскость (7.20) задаётся уравнением

Репозиторий ВГУ

$$\begin{vmatrix} X_1-\overset{o}{X}_1 & X_2-\overset{o}{X}_2 & X_3-\overset{o}{X}_3 & X_4-\overset{o}{X}_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель, то получим уравнение вида

$$AX_1 + BX_2 + CX_3 + DX_4 + E = 0. \qquad (7.21)$$

Если система координат является ортонормированной, то можно утверждать, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(A, B, C, D)$ является вектором нормали к гиперплоскости. Также, если нам известны координаты вектора нормали и координаты точки, принадлежащей гиперплоскости, то мы можем составить уравнение этой гиперплоскости по формуле

$$A(X_1-\overset{o}{X}_1)+B(X_2-\overset{o}{X}_2)+C(X_3-\overset{o}{X}_3)+D(X_4-\overset{o}{X}_4)=0.$$

Расстояние от точки $M(\overset{1}{X}_1, \overset{1}{X}_2, \overset{1}{X}_3, \overset{1}{X}_4)$ до гиперплоскости, заданной уравнением (7.21), вычисляется по формуле

$$h = \frac{\left|A\overset{1}{X}_1 + B\overset{1}{X}_2 + C\overset{1}{X}_3 + D\overset{1}{X}_4 + E\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}}. \qquad (7.22)$$

В аффинном пространстве можно рассматривать гиперповерхности второго порядка. Их классификация очень похожа на классификацию поверхностей второго порядка. Отметим только два примера.

Уравнение $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 1$ задаёт трёхмерную сферу. Её сечение любой из координатных гиперплоскостей представляет собой обычную двумерную сферу. Уравнение $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 = 0$ задаёт трёхмерный конус. Его сечение гиперплоскостью $OX_1X_2X_3$ представляет собой точку (мнимый конус), а сечения остальными координатными гиперплоскостями представляют собой двумерный конус. Сечения гиперплоскостями, параллельными $OX_1X_2X_3$, представляют собой двумерную сферу.

§ 7. *Пространство Минковского* $\mathcal{M}^4$

В этом параграфе мы вернёмся к обозначению векторов как геометрических объектов со стрелочкой.

***Определение* 7.24.** Пусть в четырёхмерном аффинном пространстве существует репер $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2, E_3, E_4)$, относительно которого скалярное произведение векторов $\vec{\mathbf{x}}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{\mathbf{y}}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ вычисляется по формуле

$$\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4.$$

Тогда это пространство называется *пространством Минковского*. Будем обозначать его $\mathcal{M}^4$.

Репозиторий ВГУ

Скалярный квадрат вектора вычисляется по формуле

$$\vec{\mathbf{x}}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 .$$

Из этой формулы следует, что существуют ненулевые векторы, скалярный квадрат которых отрицателен или равен нулю.

***Определение* 7.25.** Ненулевой вектор $\vec{\mathbf{x}}$ называется *пространственноподобным*, если $\vec{\mathbf{x}}^2 > 0$, *времениподобным*, если $\vec{\mathbf{x}}^2 < 0$, и *изотропным*, если $\vec{\mathbf{x}}^2 = 0$.

Условие изотропности вектора $\vec{\mathbf{x}}$ имеет вид $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$. Если отложить все изотропные векторы от начала координат, то их концы лежат на конусе K, который задаётся уравнением

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 = 0.$$

***Определение* 7.26.** Этот конус называется *конусом изотропных векторов* или *изотропным* конусом. Если времениподобный (пространственноподобный) вектор отложить от начала координат, то представляющий его направленный отрезок будет находиться внутри (снаружи) конуса K.

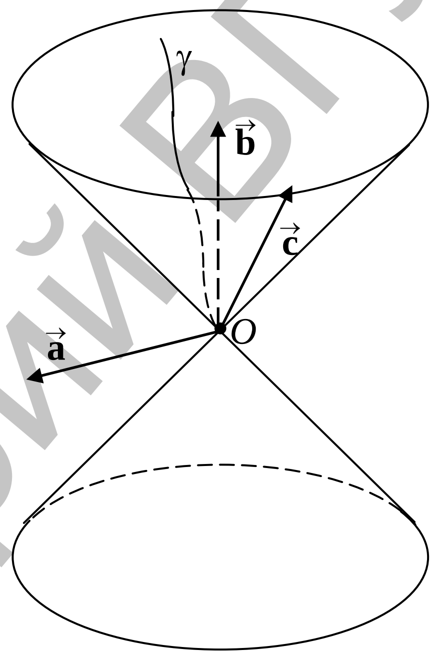


рис. 7.1

На рисунке 7.1 $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ – соответственно пространственноподобный, времениподобный и изотропный векторы.

В специальной теории относительности (СТО) используется пространство $\mathcal{M}^4$, в котором каждая точка $M(X_1, X_2, X_3, X_4)$ называется *событием*. (X_1, X_2, X_3) трактуются как координаты точки в трёхмерном пространстве, а $X_4 = ct$, где c – скорость света, а t – время. Иными словами, «событие» – это единство пространства и времени. В таких обозначениях уравнение изотропного конуса:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - (ct)^2 = 0.$$

Пусть $(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ – траектория движения материальной точки в трёхмерном пространстве. Тогда ей соответствует траектория

$$(X_1(t), X_2(t), X_3(t), t)$$

в пространстве $\mathcal{M}^4$.

***Определение* 7.27.** Эта траектория называется *мировой линией*. Луч света, исходящий из начала координат, движется по прямой, которая лежит на изотропном конусе. Поэтому этот конус ещё называют *световым конусом*.

Репозиторий ВГУ

Мировая линия для материальной точки, проходящая через начало координат, всегда лежит внутри светового конуса (потому что скорость движения материальной точки меньше скорости света). Более того, касательный вектор к мировой линии в любой её точке всегда времениподобный. На рисунке мировая линия подписана буквой γ.

Изотропный конус, вместе со своей внутренностью, обозначим $\bar{K}$. Он делится на *конус будущего* $K^{+} = \{Q(X_1, X_2, X_3, X_4) \in \bar{K} \mid X_4 > 0\}$ и *конус прошлого* $K^{-} = \{Q(X_1, X_2, X_3, X_4) \in \bar{K} \mid X_4 < 0\}$. K^{+} состоит из тех точек, в которые можно попасть из начала координат; K^{-} состоит из тех точек, из которых можно попасть в начало координат. Если точка лежит вне $\bar{K}$, то между ней и началом координат не может быть никакой связи.

§ 8. *Примеры решения задач*

***Задача* 1.** *Докажите, что следующие векторы*

$$\mathbf{a}_1 = (2, 1, 3), \quad \mathbf{a}_2 = (3, -1, 5), \quad \mathbf{a}_3 = (4, 7, 5)$$

в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ *линейно зависимы и найдите их нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору.*

Решение. Необходимо пояснить: то, что нам дано по условию задачи, – это не координаты вектора. Набор из трёх чисел – это и есть сам вектор из пространства $\boldsymbol{R}^3$, и записывать этот набор можно как в виде строки, так и в виде столбца.

Составляем линейную комбинацию данных векторов и приравниваем её к нулевому вектору:

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{o},$$

$$\lambda_1(2, 1, 3) + \lambda_2(3, -1, 5) + \lambda_3(4, 7, 5) = (0, 0, 0),$$

$$(2\lambda_1, \lambda_1, 3\lambda_1) + (3\lambda_2, -\lambda_2, 5\lambda_2) + (4\lambda_3, 7\lambda_3, 5\lambda_3) = (0, 0, 0),$$

$$(2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3, 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 5\lambda_3) = (0, 0, 0).$$

Получаем систему линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов λ_1, λ_2, λ_3. Методы решения подобных систем линейных уравнений изучаются в курсе алгебры, но для полноты изложения мы решим данную систему подробно методом Гаусса. На первое место поставим второе уравнение. Затем ко второму уравнению прибавим первое, домноженное на –2, а к третьему уравнению прибавим первое, домноженное на –3:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0. \end{cases} \; -2 \;\; -3 \qquad \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0, \\ 5\lambda_2 - 10\lambda_3 = 0, \\ 8\lambda_2 - 16\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

Разделим второе уравнение на 5, а третье – на 8. Мы получим два одинаковых уравнения. Тогда одно из них мы можем вычеркнуть. Получили два уравнения с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0\,, \\ \qquad \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0\,, \\ \cancel{\qquad \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0\,.} \end{cases}$$

Коэффициенты, стоящие около λ_1 и λ_2, образуют треугольную матрицу и определитель этой матрицы не равен нулю. Поэтому неизвестные λ_1 и λ_2 можем оставить в левой части уравнения (они называются базисными), а λ_3 переносим вправо (она называется параметрической неизвестной):

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = -7\lambda_3\,, \\ \qquad \lambda_2 = 2\lambda_3\,. \end{cases}$$

Нас не интересует общее решение системы. Нам достаточно найти одно частное нетривиальное решение. Поэтому мы можем придать λ_3 произвольное ненулевое значение. Удобнее всего выбрать $\lambda_3 = 1$. Затем находим $\lambda_2 = 2$, $\lambda_1 = -5$. Согласно условию ответом должна служить линейная комбинация:

$$-5\cdot\mathbf{a}_1 + 2\cdot\mathbf{a}_2 + 1\cdot\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}\,.$$

Так как мы нашли эту комбинацию, то мы доказали, что данные векторы линейно зависимы.

***Ответ*:** $-5\cdot\mathbf{a}_1 + 2\cdot\mathbf{a}_2 + 1\cdot\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$.

***Задача* 2.** *Докажите, что следующие векторы*

$$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{a}_3 = (0, 0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

в пространстве $\boldsymbol{R}^4$ *образуют базис, и найдите координаты вектора* $\mathbf{x} = (7, 5, 8, 9)$ *в этом базисе.*

Решение. Поскольку размерность пространства $\boldsymbol{R}^4$ равна 4, то базис должен состоять из четырёх линейно независимых векторов. Нам даны по условию 4 вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$. Необходимо доказать их линейную независимость.

Составляем линейную комбинацию данных векторов и приравниваем её к нулевому вектору:

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \lambda_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{o}\,, \tag{7.23}$$

$$\lambda_1(1, 1, 1, 1) + \lambda_2(0, 1, 1, 1) + \lambda_3(0, 0, 1, 1) + \lambda_4(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)\,,$$

$$(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = (0, 0, 0, 0).$$

Репозиторий ВГУ

Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Значит, комбинация (7.23) может быть только тривиальной и векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ линейно независимы. Поэтому они образуют базис: $\mathcal{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$. Разложение вектора $\mathbf{x}$ по базису имеет вид:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4,$$

$$(7, 5, 8, 9) = x_1(1, 1, 1, 1) + x_2(0, 1, 1, 1) + x_3(0, 0, 1, 1) + x_4(0, 0, 0, 1).$$

Так же, как и выше, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 7, \\ x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

Решая её, находим, что $x_1 = 7,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 1$.

***Ответ*:** $\mathbf{x}(7, -2, 3, 1)_{\mathcal{B}}$.

***Задача* 3.** *Найдите угол между векторами, заданными своими координатами в ортонормированном базисе*: $\mathbf{x}(-5, 5, 4, 3)$, $\mathbf{y}(-5, 5, 1, 7)$.

Решение. Если векторы заданы координатами в ортонормированном базисе, то формулы для вычисления скалярного произведения, длины вектора, угла между векторами такие же, как и для геометрических векторов в пространстве относительно декартовой системы координат. Отличие лишь в том, что количество координат на одну больше.

$$\cos\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}} =$$

$$= \frac{-5\cdot(-5) + 5\cdot 5 + 4\cdot 1 + 3\cdot 7}{\sqrt{5^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2}\,\sqrt{5^2 + 5^2 + 1^2 + 7^2}} = \frac{75}{\sqrt{75}\,\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

***Ответ*:** $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 30°$.

***Задача* 4.** *Докажите, что следующие векторы в пространстве* $\boldsymbol{R}^4$ *являются единичными и взаимно ортогональными, и дополните пару этих векторов до ОНБ*:

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right),\ \ \mathbf{a}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Репозиторий ВГУ

Решение. Находим $|\mathbf{a}_1| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = 1$, $|\mathbf{a}_2| = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1$,

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Значит, векторы единичные и взаимно ортогональные. Данное пространство является четырёхмерным. Поэтому ОНБ должен состоять из четырёх векторов. Построим сначала ортогональный базис, а затем его нормируем. Вместо $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ можем для удобства взять коллинеарные им векторы $\mathbf{a}_1'(1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2'(0, 1, 1, 1)$. Пусть $\mathbf{a}_3' = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – третий базисный вектор. Тогда он должен удовлетворять двум условиям:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_3' \cdot \mathbf{a}_1' = 0, \\ \mathbf{a}_3' \cdot \mathbf{a}_2' = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система из двух уравнений с четырьмя неизвестными. Поэтому двум неизвестным можем придать произвольные значения, не равные оба нулю; при этом коэффициенты около оставшихся неизвестных должны образовывать определитель, не равный нулю. Например, пусть $x_2 = 1$, $x_4 = 0$. Переносим эти значения в другую часть равенства и находим, что $x_1 = -2$, $x_3 = -1$. Итак, $\mathbf{a}_3' = (-2, 1, -1, 0)$.

Пусть $\mathbf{a}_4' = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – четвёртый базисный вектор. Тогда он должен удовлетворять трём условиям:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_4' \cdot \mathbf{a}_1' = 0, \\ \mathbf{a}_4' \cdot \mathbf{a}_2' = 0, \\ \mathbf{a}_4' \cdot \mathbf{a}_3' = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Придадим x_2 значение 1. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = -2, \\ x_3 + x_4 = -1, \\ -2x_1 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Отсюда $\mathbf{a}_4'(3, 1, 4, -5)$. Теперь находим, что $|\mathbf{a}_3'| = \sqrt{6}$, $|\mathbf{a}_4'| = \sqrt{51}$, и делим соответствующие векторы на их длину.

***Ответ*:** Данную пару векторов следует дополнить векторами

$$\mathbf{a}_3 = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, 0\right), \ \mathbf{a}_4 = \left(\frac{3}{\sqrt{51}}, \frac{1}{\sqrt{51}}, \frac{4}{\sqrt{51}}, \frac{-5}{\sqrt{51}}\right).$$

Заметим, что ответ в последней задаче является неоднозначным.

***Задача* 5.** *Даны координаты вершин треугольника относительно ортонормированной системы координат в точечном евклидовом пространстве* $\mathcal{E}^4$: $A(-3,-3, 2,-3)$, $B(5, 0, 4,-1)$, $C(2, 4,-3,-4)$.

а) *Докажите, что* ΔABC *равнобедренный.*

Репозиторий ВГУ

б) *Найдите величину угла при вершине и площадь треугольника.*

в) *Составьте каноническое уравнение его высоты.*

г) *Составьте параметрическое уравнение плоскости* $\pi = ABC$.

Решение. **а)** Найдём координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}(8,3,2,2),\quad \overrightarrow{AC}(5,7,-5,-1),\quad \overrightarrow{BC}(-3,4,-7,-3).$$

Находим длины сторон:

$$|AB| = \sqrt{8^2+3^2+2^2+2^2} = 9,\quad |AC| = \sqrt{5^2+7^2+5^2+1^2} = 10,$$

$$|BC| = \sqrt{3^2+4^2+7^2+3^2} = 9.$$

Значит, $|AB| = |BC|$. Следовательно ΔABC равнобедренный и B является его вершиной.

б) Так же, как и в предыдущей задаче, находим угол при вершине, как угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\cos\angle B = \frac{-8\cdot(-3)-3\cdot 4-2\cdot(-7)-2\cdot(-3)}{9\cdot 9} = \frac{24-12+14+6}{81} = \frac{32}{81}.$$

$$\angle B = \arccos\frac{32}{81}.$$

Пусть D – середина основания AC. Тогда $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$. Находим координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ и его длину:

$$\overrightarrow{BD}\left(-\frac{11}{2},\frac{1}{2},-\frac{9}{2},-\frac{5}{2}\right),\ |\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}\sqrt{228} = \sqrt{57}.$$

Значит, высота треугольника $h = \sqrt{57}$, его площадь: $S = \frac{1}{2}|AC|\cdot h = 5\sqrt{57}$.

в) Направляющим вектором для высоты является $\overrightarrow{BD}$. Можно в качестве направляющего взять $\mathbf{a} = -2\overrightarrow{BD}$, $\mathbf{a}(11,-1,9,5)$. В качестве начальной точки берём B. Тогда уравнение прямой BD:

$$\frac{X_1-5}{11} = \frac{X_2-4}{-1} = \frac{X_3}{9} = \frac{X_4+1}{5}.$$

г) Для плоскости $\pi = ABC$ направляющими векторами являются, например, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. В качестве начальной точки берём A (можно и любую другую вершину). Тогда параметрическое уравнение плоскости:

$$\begin{cases} X_1 = -3+8u+5v, \\ X_2 = -3+3u+7v, \\ X_3 = \ \ 2+2u-5v, \\ X_4 = -3+2u-v. \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

Ответ: $\angle B = \arccos\dfrac{32}{81}$, $S = 5\sqrt{57}$,

$$AD\colon \frac{X_1+3}{11} = \frac{X_2+3}{-1} = \frac{X_3-2}{9} = \frac{X_4+3}{5}. \qquad \pi\colon \begin{cases} X_1 = -3+8u+5v, \\ X_2 = -3+3u+7v, \\ X_3 = \ \ 2+2u-5v, \\ X_4 = -3+2u-v. \end{cases}$$

***Задача* 6.** *Даны уравнения прямой* l *и гиперплоскости* Π *в точечном евклидовом пространстве* $\mathcal{E}^4$:

$$l\colon \frac{X_1-1}{4} = \frac{X_2-2}{3} = \frac{X_3+1}{3} = \frac{X_4}{3}, \qquad \Pi\colon 3X_1+2X_2+2X_3-8X_4-5=0.$$

Докажите, что они параллельны и найдите расстояние между ними.

Решение. Из уравнения прямой мы находим её направляющий вектор: $\mathbf{a}(4, 3, 3, 3)$. Из уравнения гиперплоскости находим её вектор нормали: $\mathbf{n}(3, 2, 2, -8)$. Прямая будет параллельна гиперплоскости или будет лежать в ней, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ ортогональны. Проверяем:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 4\cdot 3+3\cdot 2+3\cdot 2+3\cdot(-8) = 0.$$

Это выполнено. Из уравнения прямой мы знаем координаты точки на ней: $M_o(1, 2, -1, 0)$. Прямая будет лежать в гиперплоскости, если $M_o \in \Pi$. Подставляем координаты M_o в уравнение гиперплоскости:

$$3\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot(-1)-8\cdot 0-14 \neq 0.$$

Значит, $M_o \notin \Pi \;\Rightarrow\; l \not\in \Pi$.

Расстояние от прямой до гиперплоскости равно расстоянию от точки M_o до Π. Это расстояние вычисляется по такой же формуле, как расстояние от точки до плоскости в трёхмерном геометрическом пространстве, с той лишь разницей, что мы имеем на одну координату больше (формула (7.22)).

$$h = \frac{|3\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot(-1)-8\cdot 0-14|}{\sqrt{3^2+2^2+2^2+8^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{81}} = 1.$$

Ответ: $h = 1$.

***Задача* 7.** *Прямая* l *и плоскость* π *в пространстве* $\mathcal{A}^4$ *заданы параметрическими уравнениями*:

$$l\colon \begin{cases} X_1 = t \\ X_2 = 2+5t, \\ X_3 = 5+10t, \\ X_4 = -4+3t. \end{cases} \qquad \pi\colon \begin{cases} X_1 = \ \ 1+2u+v, \\ X_2 = \ \ 2+7u+3v, \\ X_3 = \ \ 5+11u+4v, \\ X_4 = -4+3u+v. \end{cases}$$

Докажите, что они параллельны.

Решение. Из уравнений прямой мы находим её направляющий вектор $\mathbf{a}(1, 5, 10, 3)$ и точку $M_o(0, 2, 5, -4) \in l$. Из уравнений плоскости находим два её направляющих вектора: $\mathbf{b}(2, 7, 11, 3)$, $\mathbf{c}(1, 3, 4, 1)$. Прямая параллельна плоскости или принадлежит ей, если вектор **a** является линейной комбинацией векторов **b** и **c**, т.е. если существуют такие числа λ и μ, что

$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}.$$

В координатах это равенство имеет вид:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda + 1\mu, \\ 5 = 7\lambda + 3\mu, \\ 10 = 11\lambda + 4\mu, \\ 3 = 3\lambda + 1\mu. \end{cases}$$

Вычитая из четвёртого уравнения первое, мы находим, что $\lambda = 2$. Подставляя это значение в первое или четвёртое уравнение, находим, что $\mu = -3$. Необходимо ещё обязательно проверить, что найденные значения удовлетворяют тем уравнениям, которые не были задействованы в вычислениях (т.е. второму и третьему): $5 = 7\cdot 2 + 3\cdot(-3)$, $10 = 11\cdot 2 + 4\cdot(-3)$. Значит,

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}.$$

Теперь проверим, принадлежит ли точка M_o плоскости π:

$$\begin{cases} 0 = 1 + 2u + v, \\ 2 = 2 + 7u + 3v, \\ 5 = 5 + 11u + 4v, \\ -4 = -4 + 3u + v. \end{cases}$$

Если вычесть из четвёртого уравнения второе, мы найдём, что $u = 1$. Подставим это значение в первое уравнение и найдём, что $v = -3$. При этих значениях первое и четвёртое уравнения будут верными равенствами, но найденные значения не удовлетворяют второму и третьему уравнениям. Значит, $M_0 \notin \pi$, и поэтому прямая l не принадлежит плоскости π.

***Задача* 8.** *Плоскости* π_1 и π_2 *в пространстве* $\mathcal{A}^5$ *заданы параметрическими уравнениями*:

$$\pi_1\colon \begin{cases} X_1 = 2u, \\ X_2 = 2 + v, \\ X_3 = 0, \\ X_4 = 0, \\ X_5 = -1. \end{cases} \qquad \pi_2\colon \begin{cases} X_1 = s, \\ X_2 = 0, \\ X_3 = s + t, \\ X_4 = t, \\ X_5 = 1 + s. \end{cases}$$

Выясните их взаимное расположение.

Решение. Найдём направляющие векторы этих плоскостей (их координаты – это коэффициенты около параметров):

$\mathbf{a}(2, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{b}(0, 1, 0, 0, 0)$ – для π_1;

$\mathbf{c}(1, 0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{d}(0, 0, 1, 1, 0)$ – для π_2.

Репозиторий ВГУ

По определению $\pi_1 || \pi_2$, если оба вектора **c** и **d** раскладываются в линейную комбинацию векторов **a** и **b**, и при этом эти плоскости не имеют общих точек. Если равенство $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ расписать по координатам, то третье уравнение будет иметь вид $1 = 0\lambda + 0\mu$. Оно не имеет решений. Значит, данные плоскости не параллельны. Но только в трёхмерном пространстве можно после этого утверждать, что данные плоскости пересекаются по прямой.

Выясним, имеют ли данные плоскости общие точки. Для этого мы должны решить совместно уравнения плоскостей. Приравниваем выражения для соответствующих координат:

$$2u = s,\ \ 2 + v = 0,\ \ 0 = s + t,\ \ 0 = t,\ \ -1 = 1 + s. \tag{7.24}$$

Из третьего и четвёртого уравнений находим, что $s = t = 0$. Тогда пятое уравнение принимает вид $-1 = 1$. Значит, система уравнений (7.22) решений не имеет. Поэтому плоскости π_1 и π_2 общих точек не имеют.

***Ответ*:** Плоскости π_1 и π_2 не параллельны и не пересекаются.

***Задача* 9.** *В геометрическом пространстве вместо базиса* $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ *выбран новый базис* $\mathcal{B}' = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$, *где*

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{e}}_1 = \ \ \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \\ \vec{\mathbf{e}}_2 = -4\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}, \\ \vec{\mathbf{e}}_3 = \ \ 2\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}. \end{cases}$$

а) *Записать формулы перехода от старых координат* (x, y, z) *к новым координатам* (x', y', z') *и обратно.*

б) *Найти новые координаты вектора* $\vec{\mathbf{a}}(\ ,\ ,\ )_{\mathcal{B}'}$, *если известны его старые координаты* $\vec{\mathbf{a}}(-7, -2, 5)_{\mathcal{B}}$.

в) *Составить матрицу Грама базиса* $\mathcal{B}'$.

г) *С помощью этой матрицы вычислить скалярное произведение двух векторов* $\vec{\mathbf{c}}(-4, -4, -5)$ *и* $\vec{\mathbf{d}}(9, 4, 6)$, *заданных своими координатами в новом базисе* $\mathcal{B}'$.

Решение. **а)** Составим матрицу перехода к новому базису. Её столбцы – это координатные столбцы векторов $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ в базисе $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$. Затем находим обратную к ней матрицу:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 10 \\ 7 & -4 & 9 \\ 11 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

Репозиторий ВГУ

(как составляется обратная матрица, изучается в курсе алгебры, это также можно найти в приложении). Формулы замены координат выглядят так:

$$\begin{cases} x = x' - 4y' + 2z', \\ y = 4x' - 3y' - z', \\ z = x' + 2y' - 2z', \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 4x - 2y + 5z, \\ y' = \dfrac{7}{2}x - 2y + \dfrac{9}{2}z, \\ z' = \dfrac{11}{2}x - 3y + \dfrac{13}{2}z. \end{cases}$$

При составлении первых мы использовали матрицу **C**, а при составлении вторых – матрицу $\mathbf{C}^{-1}$.

б) Подставляя коэффициенты вектора $\vec{\mathbf{a}}$ во вторые формулы, находим его координаты в новом базисе: $\vec{\mathbf{a}}(1, 2, 0)_{\mathcal{B}'}$.

в) Матрица Грама базиса $\mathcal{B}'$ состоит из попарных скалярных произведений $g_{ij} = \vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j$, $i, j = 1, 2, 3$. Находим

$$\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 = 1 + 16 + 1 = 18, \quad \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 = -4 - 12 + 2 = -14,$$

и так далее.

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 18 & -14 & -4 \\ -14 & 29 & -9 \\ -4 & -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

г) Если векторы $\vec{\mathbf{c}}$ и $\vec{\mathbf{d}}$ заданы своими координатами в новом базисе, то их скалярное произведение находится по формуле

$$\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} c_i d_j.$$

В матричном виде её можно записать так:

$$\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = \mathrm{C}^T \mathbf{\Gamma} \mathrm{D},$$

где C и D – координатные столбцы векторов $\vec{\mathbf{c}}$ и $\vec{\mathbf{d}}$ в новом базисе.
В нашем случае находим

$$\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & -14 & -4 \\ -14 & 29 & -9 \\ -4 & -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 0.$$

(как умножаются матрицы, изучается в курсе алгебры, но для удобства читателя это изложено в приложении).

***Ответ*: а)**
$$\begin{cases} x = x' - 4y' + 2z', \\ y = 4x' - 3y' - z', \\ z = x' + 2y' - 2z', \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 4x - 2y + 5z, \\ y' = \dfrac{7}{2}x - 2y + \dfrac{9}{2}z, \\ z' = \dfrac{11}{2}x - 3y + \dfrac{13}{2}z. \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

б) $\vec{\mathbf{a}}(1, 2, 0)_{\mathscr{B}'}$; **в)** $\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} 18 & -14 & -4 \\ -14 & 29 & -9 \\ -4 & -9 & 9 \end{pmatrix}$; **г)** $\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = 0$.

***Задача* 10.** *В евклидовом пространстве* $\boldsymbol{E}^2$ *относительно некоторого базиса скалярное произведение задаётся формулой*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 - 2(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 6 x_2 y_2 .$$

Вычислить угол между векторами $\mathbf{x}(1, 2)$ *и* $\mathbf{y}(2,-1)$, *заданными своими координатами в том же базисе.*

Решение. Если бы базис был ортонормированным, то данные векторы, очевидно, оказались бы ортогональными. Находим скалярное произведение согласно заданной формуле:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \cdot 2 - 2(1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2) + 6 \cdot 2 \cdot (-1) = 2 - 6 + 12 = 8 .$$

В соответствии с заданной формулой скалярный квадрат вектора вычисляется так:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 - 4 x_1 x_2 + 6 x_2^2 .$$

Находим

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 = 1 - 8 + 24 = 17 , \qquad |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{17},$$

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 + 6 \cdot 1^2 = 4 + 8 + 6 = 18 , \qquad |\mathbf{y}| = \sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} = 3\sqrt{2} .$$

$$\cos\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{8}{3\sqrt{34}} , \quad \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos \frac{8}{3\sqrt{34}} .$$

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 8. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

В этой главе мы изучим основные преобразования плоскости: движения, подобия, аффинные преобразования, инверсию, а также свойства перечисленных преобразований. Данные знания будут необходимы при изучении темы «Геометрические построения на плоскости», а также при изучении предмета «Методы изображения фигур».

§ 1. *Преобразование множества*

***Определение* 8.1.** Пусть даны произвольные непустые множества X и Y. Предположим, что *каждому* элементу $x \in X$ в силу некоторого закона поставлен в соответствие только один элемент $y \in Y$. Тогда говорят, что *дано отображение множества* X *во множество* Y. Множество X называется *областью определения отображения* f и обозначается $D(f)$.

В этой главе мы рассматриваем только множества, состоящие из точек плоскости. Поэтому в дальнейшем вместо «элемент множества» используем «точка».

***Определение* 8.2.** Если точка $M \in X$ отображается в точку $M' \in Y$, то пишем $M' = f(M)$. Тогда M' называется *образом точки* M, а M называется *прообразом точки* M'. Множество $\{y \in Y | \exists x \in X: \ y = f(x)\}$, состоящее из всех точек, имеющих прообраз, обозначается $E(f)$ или $f(X)$.

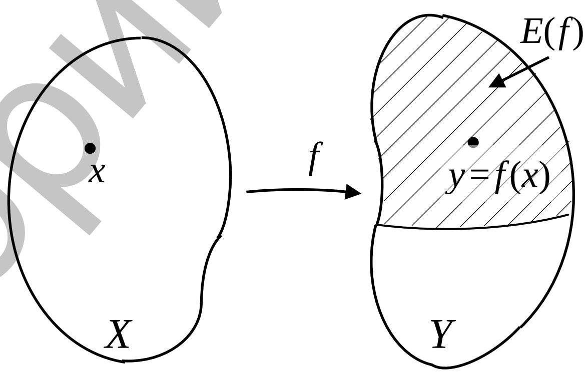


рис. 8.1

В определении не говорится о том, что $E(f)$ обязательно совпадает со всем Y (рис. 8.1).

***Пример* 8.1.** Пусть γ – окружность, AB – её диаметр, а l – прямая, на которой он лежит. Каждой точке P окружности поставим в соответствие её ортогональную проекцию P' на прямую l. Получим отображение $f: \gamma \to l$ (рис. 8.2). В данном случае $E(f)$ есть отрезок AB и не совпадает со всей прямой l.

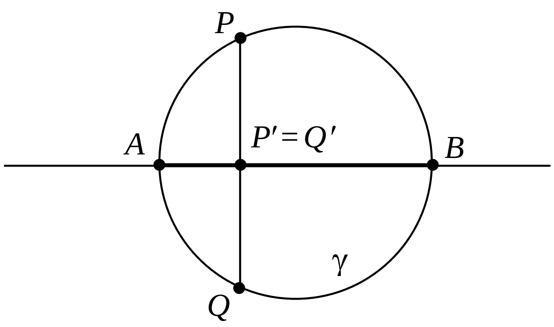


рис. 8.2

***Определение* 8.3.** Если множество значений $f(X)$ совпадает со всем множеством Y, то отображение $f: X \to Y$ называется *сюръективным*, или *отображением множества* X *«на» множество* Y (или *«на всё» множество* Y). Другими словами, f называется сюръективным, если каждая точка множества Y имеет хотя бы один прообраз во множестве X.

В последнем примере точки за пределами отрезка AB не имеют прообразов. Поэтому отображение f не является сюръективным. Точки же из отрезка AB (кроме самих A и B) имеют не один прообраз, а два.

***Определение* 8.4.** Отображение $f\colon X \to Y$ называется *инъективным*, если каждая точка $M' \in Y$ имеет не более одного прообраза во множестве X. Другими словами, отображение $f\colon X \to Y$ называется *инъективным*, если для двух различных точек $A, B \in X$ выполнено $f(A) \neq f(B)$.

Можно ещё выразить это так: отображение $f\colon X \to Y$ является *инъективным*, если не допускается, чтобы две различные точки из X отображались в одну точку из Y. Отображение из примера 1 не является инъективным.

***Пример* 8.2.** Пусть $X = ABC$ – это правильный треугольник, вписанный в окружность ω. Каждой точке $M \in X$ поставим в соответствие её проекцию M' на окружность из центра окружности (рис. 8.3). Получим отображение $g\colon X \to \omega$. Оно является одновременно инъективным и сюръективным.

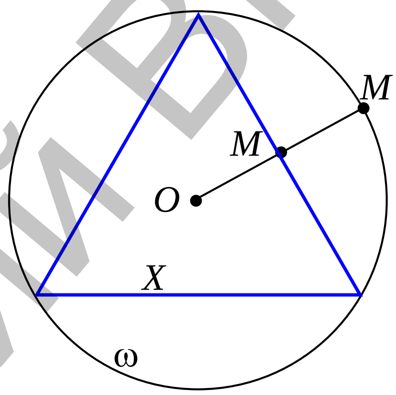


рис. 8.3

***Определение* 8.5.** Если отображение $f\colon X \to Y$ является одновременно инъективным и сюръективным, то оно называется *Биективным*, или *взаимно однозначным*, отображением множества X на множество Y, или коротко *биекцией*.

Если отображение является биективным, то каждая точка $M' \in Y$ имеет ровно один прообраз $M \in X$.

Пусть $f\colon X \to Y$ – биективное отображение. Тогда мы можем построить отображение $f^{-1}\colon Y \to X$, которое действует по следующему правилу. Если $M' = f(M)$, то $M = f^{-1}(M')$. Отображение f^{-1} называется обратным к отображению f; оно тоже будет биективным. Биективность – это необходимое и достаточное условие существования обратного отображения. Более подробно об этом говорится в курсе алгебры.

***Определение* 8.6.** *Преобразованием множества* X называется биективное отображение $f\colon X \to X$ множества X на себя.

***Пример* 8.3.** Пусть $X = ABC$ – это правильный треугольник, O – его ортоцентр. Каждой точке $M \in X$ поставим в соответствие точку M', получающуюся в результате поворота на угол 120º вокруг ортоцентра (рис. 8.4). Получившееся отображение

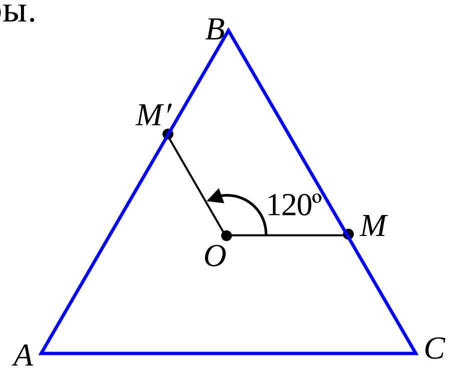


рис. 8.4

Репозиторий БГУ

$h: X \to X$ является преобразованием множества X. При повороте треугольник совместится сам с собой и в каждую точку $M' \in X$ переходит только одна точка $M \in X$.

***Определение* 8.7.** Пусть $f: X \to X$ и $g: X \to X$ – два преобразования одного и того же множества. Тогда их последовательное выполнение в определённом порядке тоже будет преобразованием, и оно называется композицией преобразований f и g. Оно обозначается так: $g \circ f: X \to X$ и действует по правилу $(g \circ f)(M) = g(f(M))$ (т.е. если $M' = f(M)$, $M'' = g(M')$, то $M'' = (g \circ f)(M)$).

Композицию преобразований можно проиллюстрировать с помощью диаграммы (рис. 8.5).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & X \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

рис. 8.5

***Определение* 8.8.** Если результат последовательного выполнения двух преобразований не зависит от порядка выполнения этих преобразований, т.е. $g \circ f = f \circ g$, то говорят, что эти преобразования *коммутируют* между собой.

§ 2. *Основные движения плоскости*

Обозначим π – это плоскость, а $f: \pi \to \pi$ – её преобразование. Пусть на плоскости задана система координат (не обязательно декартова), в которой координаты обозначаются (x, y). Говорим, что формулы

$$\begin{cases} x' = \varphi_1(x, y), \\ y' = \varphi_2(x, y), \end{cases} \tag{8.1}$$

являются формулами преобразования f, если каждая точка $A(x, y)$ переходит под действием этого преобразования в точку $A'(x', y')$, координаты которой вычисляются по данным формулам.

***Определение* 8.9.** *Движением плоскости* называется её преобразование, сохраняющее расстояния между точками. Это значит, что преобразование $f: \pi \to \pi$ является движением, если для любых точек A, B и их образов $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$ выполнено $|A'B'| = |AB|$.

Из определения непосредственно вытекает, что преобразование f^{-1}, обратное к движению f, тоже является движением.

***Пример* 8.4.** Простейшим примером движения является *тождественное преобразование* плоскости $id: \pi \to \pi$. Оно каждую точку плоскости оставляет на месте.

Репозиторий ВГУ

***Пример* 8.5.** *Параллельный перенос плоскости* $p:\pi\to\pi$ задаётся вектором $\vec{\mathbf{a}}$. При этом переносе каждая точка A переходит в такую точку $A'=p(A)$, что $\overrightarrow{AA'}=\vec{\mathbf{a}}$ (рис. 8.6).

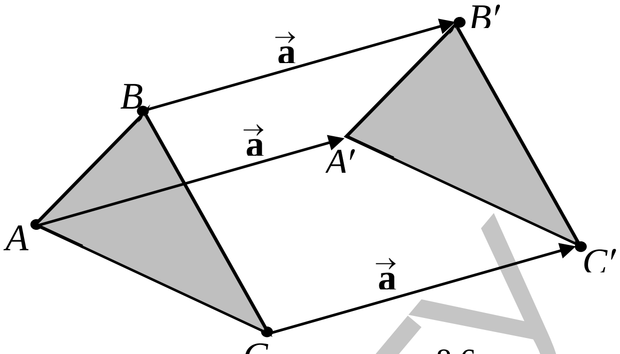


рис. 8.6

Пусть $B'=p(B)$. Тогда в четырёхугольнике $AA'B'B$ стороны AA' и BB' параллельны и равны. Следовательно, этот четырёхугольник есть параллелограмм. Поэтому стороны AB и $A'B'$ тоже параллельны и равны. Это означает, что p является движением.

Если $A(x, y)$ и $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$, то $A'(x+a_1, y+a_2)$. Это значит, что формулы параллельного переноса на вектор $\vec{\mathbf{a}}$ имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x + a_1, \\ y' = y + a_2. \end{cases} \tag{8.2}$$

Если использовать координатные столбцы

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

то формулы (8.2) можно переписать в виде одного матричного равенства

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{A}. \tag{8.2′}$$

Обратное преобразование $p^{-1}:\pi\to\pi$, очевидно, является параллельным переносом, который задаётся вектором $-\vec{\mathbf{a}}$. Тождественное преобразование плоскости тоже представляет собой параллельный перенос, который задаётся нулевым вектором.

Пусть p_1 есть параллельный перенос на вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$, а p_2 есть параллельный перенос на вектор $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2)$. Пусть $A'=p_1(A)$ и $A''=p_2(A')$, $A''(x'', y'')$. Тогда p_1 действует по формулам (8.2), а p_2 по формулам

$$\begin{cases} x'' = x' + b_1, \\ y'' = y' + b_2. \end{cases}$$

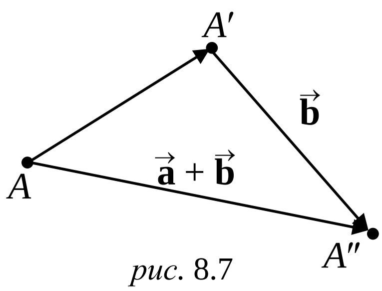


рис. 8.7

Отсюда получаем, что

$$\begin{cases} x'' = x' + (a_1 + b_1), \\ y'' = y' + (a_2 + b_2). \end{cases}$$

Значит, композиция (т.е. последовательное выполнение) $p_2\circ p_1:\pi\to\pi$ задаётся вектором $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ (рис. 8.7). В силу этого, очевидно, что результат

Репозиторий ВГУ

выполнения двух параллельных переносов не зависит от порядка их выполнения: $p_2\circ p_1 = p_1\circ p_2$, т.е. имеет место $p_2(p_1(A)) = p_1(p_2(A))$ для любой точки A на плоскости. Тем самым, параллельные переносы p_1 и p_2 *коммутируют* между собой.

***Пример* 8.6.** Поворот на угол α вокруг начала координат (рис. 8.8) $h_\alpha : \pi \to \pi$ действует по формулам

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha, \\ y' = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha. \end{cases} \tag{8.3}$$

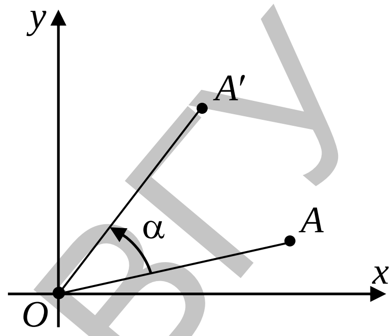


рис. 8.8

Мы доказали это в §13 главы 1. Формулы (8.3) можно переписать в матричном виде:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{H}_\alpha \mathbf{X}, \tag{8.3′}$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ такие же, как в (8.2′), а

$$\mathbf{H}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} -$$

матрица, которую будем называть *матрицей поворота*. Если $h_\beta : \pi \to \pi$ – поворот на угол β, то очевидно, что $h_\beta\circ h_\alpha = h_\alpha\circ h_\beta = h_{\alpha+\beta}$.

Упражнение. Самостоятельно убедитесь, что для матриц поворотов выполнено $\mathbf{H}_{\alpha+\beta} = \mathbf{H}_\alpha\cdot\mathbf{H}_\beta = \mathbf{H}_\beta\cdot\mathbf{H}_\alpha$.

Таким образом, *при последовательном выполнении поворотов их матрицы перемножаются*. Мы также видим, что любые два поворота вокруг начала координат коммутируют между собой, и их матрицы тоже коммутируют. А вот поворот и параллельный перенос не коммутируют, т.е. результат их последовательного выполнения зависит от порядка выполнения.

Если $\alpha = 0$, то поворот представляет собой тождественное преобразование, и его матрица является единичной:

$$\mathbf{H}_\alpha = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что обратный поворот – это поворот на угол $-\alpha$: $(h_\alpha)^{-1} = h_{-\alpha}$. Он задаётся матрицей

$$\mathbf{H}_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Упражнение. Самостоятельно убедитесь, что $\mathbf{H}_{-\alpha}\cdot\mathbf{H}_\alpha = \mathbf{E}$, т.е. $\mathbf{H}_{-\alpha} = (\mathbf{H}_\alpha)^{-1}$. Это значит, что обратный поворот задаётся обратной матрицей. Мы видим, что операциям над преобразованиями соответствуют точно такие же преобразования над их матрицами.

Репозиторий ВГУ

***Пример* 8.7.** *Осевая симметрия* относительно прямой l задается следующим образом. Для того чтобы построить точку A', симметричную точке A, мы проводим перпендикуляр AA_o к прямой l и продолжаем его ещё на такое же расстояние (рис. 8.9). Другими словами, $\overrightarrow{A_oA'} = -\overrightarrow{A_oA}$.

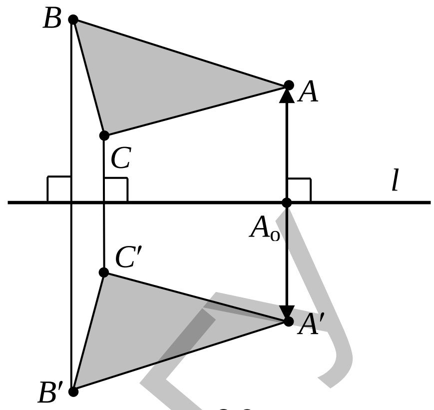


рис. 8.9

При симметрии относительно координатной оси Ox точка $A(x, y)$ переходит в точку $A'(x,-y)$ (рис. 8.10). Поэтому эта симметрия s_1 задаётся формулами

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases} \tag{8.4}$$

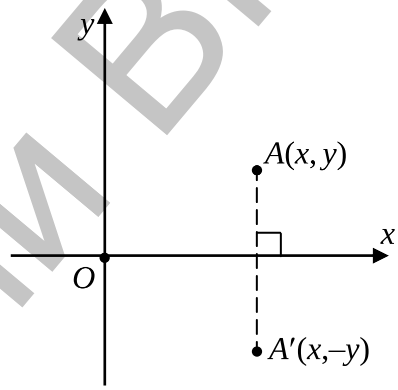


рис. 8.10

Обозначим это преобразование s_1. В матричном виде (8.4) можно записать так:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{S}_1\mathbf{X}, \tag{8.4′}$$

где

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично симметрия относительно Oy задаётся матрицей

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из школьной программы читатель должен знать, что *любое движение плоскости является композицией параллельного переноса, поворота и, возможно, ещё осевой симметрии*.

***Пример* 8.8.** Центральная симметрия s_o относительно произвольной точки M_o определяется следующим образом. Точка A переходит в такую точку A', что $\overrightarrow{M_oA'} = -\overrightarrow{M_oA}$ (рис. 8.11).

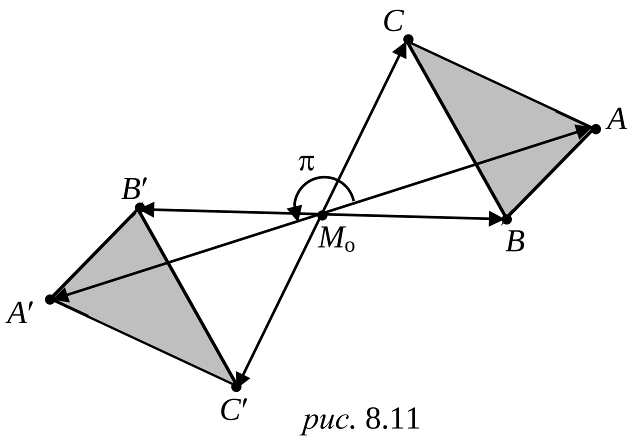


рис. 8.11

В §1 главы 3 мы показали, что при симметрии относительно начала координат точка $A(x, y)$ переходит в точку $A'(-x,-y)$. Тем самым центральная симметрия относительно начала координат задаётся формулами

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases} \tag{8.5}$$

Репозиторий ВГУ

Очевидно, что центральная симметрия – это поворот на угол 180º, и мы не будем рассматривать её, как отдельное преобразование. Заметим, что при подстановке в (8.3) $\alpha = \pi$ мы как раз получим формулы (8.5).

§ 3. *Группа движений плоскости и её подгруппы*

***Определение* 8.10.** Пусть G – некоторое множество преобразований плоскости (не обязательно всех). Введём на этом множестве операцию умножения преобразований – их композицию: $f \cdot g = f \circ g$. Если относительно этой операции G образует группу, то G называется *группой преобразований плоскости*.

Понятие группы изучается в курсе алгебры. Напомним определение.

***Определение* 8.11.** Пусть G – произвольное непустое множество, на котором задана операция «$\cdot$», сопоставляющая каждым двум элементам $f, g \in G$ третий элемент из этого же множества. Говорим, что множество G, с операцией «$\cdot$» *образует группу*, если выполнены следующие аксиомы:

$\forall\, f, g, h \in G$

1. $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ – ассоциативность умножения;

2. $\exists\, e \in G$ такой, что $e \cdot f = f \cdot e = f$ – существование единичного (нейтрального) элемента;

3. $\exists\, f^{-1} \in G$ такой, что $f \cdot f^{-1} = e$ – существование обратного элемента.

Обозначаем группу так: $\langle G, \cdot \rangle$.

***Определение* 8.12.** Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ – группа, а $H \subset G$ – некоторое подмножество. Тогда H называется *подгруппой группы* G, если относительно операции «$\cdot$» сама H является группой.

Пусть G – это совокупность всех преобразований плоскости. Тогда G образует группу. Действительно, произведение двух преобразований тоже является преобразованием, множество G включает в себя тождественное преобразование, и для каждого преобразования $f \in G$ найдётся $f^{-1} \in G$. Проверим ассоциативность. Пусть A – произвольная точка плоскости. Тогда

$$((f \cdot g) \cdot h)(A) = (f \cdot g)(h(A)) = f(g(h(A))) = f((g \cdot h)(A)) = (f \cdot (g \cdot h))(A),$$

т.е. действие преобразований $(f \cdot g) \cdot h$ и $f \cdot (g \cdot h)$ на произвольную точку A одинаково. Значит, эти преобразования совпадают.

Пусть G – группа всех преобразований плоскости, а H – подмножество в G. Для того чтобы проверить, что H является подгруппой в G, достаточно убедиться в следующем:

1) замкнутость относительно H групповой операции;

2) тождественное преобразование $id : \pi \to \pi$ принадлежит H;

3) $\forall\, f \in H$ обратное преобразование f^{-1} тоже принадлежит H.

Репозиторий ВГУ

Ассоциативность будет выполняться автоматически, т.к. H – это подмножество в группе G.

В примерах 2 и 3 из §2 мы показали, что совокупность всех параллельных переносов плоскости и совокупность всех поворотов плоскости удовлетворяют этим условиям, т.е. образуют группы. Обозначим $SO(2)$ – группа поворотов вокруг начала координат, $P(2)$ – группа параллельных переносов, $E(2)$ – группа всех движений плоскости. Тогда $SO(2)$, $P(2)$ – подгруппы в $E(2)$. Поскольку $s_1 \cdot s_1 = id$, то симметрия s_1 плоскости относительно Ox вместе с тождественным преобразованием образует группу $S(2)$, состоящую из двух элементов. Она также является подгруппой в $E(2)$.

Обозначим $O(2)$ – группа, которую образуют все повороты с центром в начале координат, симметрии относительно Ox и их композиции.

***Определение* 8.13.** $O(2)$ называется *ортогональной группой*, а $SO(2)$ – *специальной ортогональной группой*.

Замечание. Когда мы говорим о группе $S(2)$, речь не идёт о группе, которая включает в себя симметрии относительно всех прямых. Можно доказать, что любое движение плоскости можно разложить в композицию не более чем трёх симметрий. Тем самым, группа, которая включает в себя все симметрии, содержит и все движения плоскости.

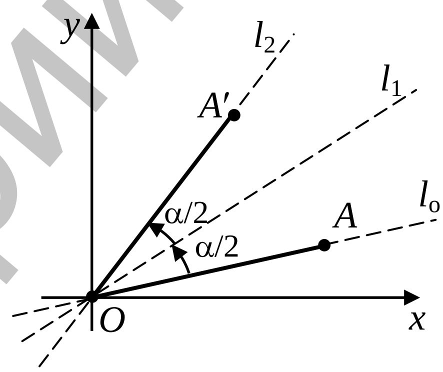


рис. 8.12

На рисунке 8.12 показано, что поворот на угол α можно получить в результате последовательного выполнения двух симметрий относительно прямых l_1 и l_2, где l_1 – это биссектриса угла $\angle AOA'$, а $l_2 = OA'$. Можно также сначала выполнить симметрию относительно прямой $l_0 = OA$, а затем относительно l_1. Получим тот же поворот.

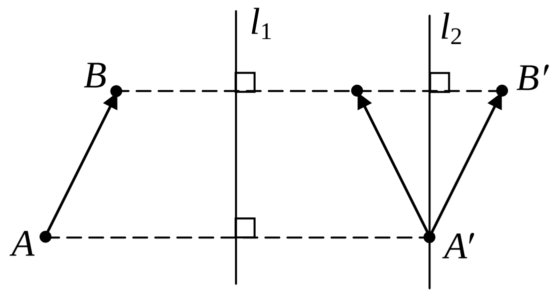


рис. 8.13

На рисунке 8.13 показано, что параллельный перенос есть результат выполнения двух осевых симметрий относительно прямых l_1 и l_2.

§ 4. *Свойства движений плоскости*

Напомним, что репером (аффинным репером) на плоскости называется упорядоченная тройка точек $\mathcal{R} = (O, A_1, A_2)$, не лежащих на одной прямой.

Репозиторий ВГУ

Репер определяет на плоскости аффинную систему координат следующим образом. Пусть

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \ \vec{\mathbf{e}}_2 = \overrightarrow{OA_2},$$

а $\vec{\mathbf{x}}$ – произвольный вектор (рис. 8.14). Тогда мы можем разложить $\vec{\mathbf{x}}$ по базису $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2)$:

$$\vec{\mathbf{x}} = x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2;$$

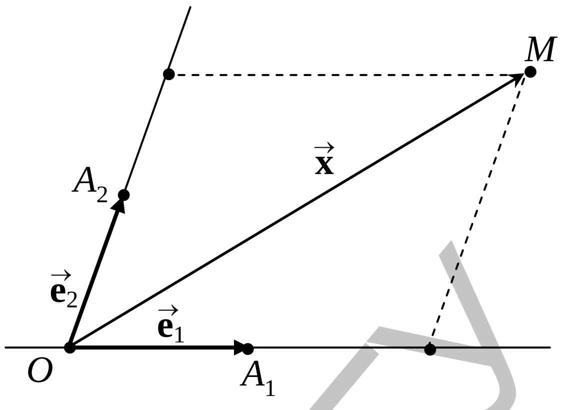


рис. 8.14

коэффициенты этого разложения называются *координатами вектора* $\vec{\mathbf{x}}$ в данном базисе. Пишем $\vec{\mathbf{x}}(x_1, x_2)_{\mathcal{B}}$. Если M – произвольная точка плоскости, то вектор $\vec{\mathbf{x}} = \overrightarrow{OM}$ называется её *радиус-вектором*. *Координатами точки* M относительно репера $\mathcal{R}$ называются координаты её радиус-вектора, т.е. $\vec{\mathbf{x}}(x_1, x_2)_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow M(x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$.

Репер $\mathcal{R}$ и базис $\mathcal{B}$ называются *ортонормированными*, если $\angle A_1OA_2 = \pi/2$, $|OA_1| = |OA_2| = 1$. Систему координат, которую определяет ортонормированный репер, тоже называют ортонормированной. В этой СК координаты точки обозначаем (x, y).

***Лемма* 8.1.** *При любом движении репер переходит в репер, в частности, ортонормированный репер – в ортонормированный репер.*

Доказательство. Пусть f – движение плоскости, $\mathcal{R} = (O, A_1, A_2)$ – репер, и $O' = f(O)$, $A_1' = f(A_1)$, $A_2' = f(A_2)$. Нам требуется доказать, что $\mathcal{R}' = (O', A_1', A_2')$ – тоже репер. Предположим противное, что O', A_1', A_2' лежат на одной прямой. Тогда одна из них лежит между двумя другими. Пусть это будет точка O'. Тогда

$$|O'A_1'| + |O'A_2'| = |A_1'A_2'|.$$

Поскольку преобразование f сохраняет расстояния между точками, то будет выполняться

$$|OA_1| + |OA_2| = |A_1A_2|;$$

а это возможно только в случае, когда O, A_1, A_2 лежат на одной прямой. Противоречие. Точно так же получается противоречие в случае, когда A_1' лежит между O' и A_2' либо A_2' лежит между O' и A_1'. Значит, O', A_1', A_2' не лежат на одной прямой, т.е. образуют репер.

Если репер $\mathcal{R}$ ортонормированный, то $|OA_1| = |OA_2| = 1$, $|A_1A_2| = \sqrt{2}$. Но тогда $|O'A_1'| = |O'A_2'| = 1$, $|A_1'A_2'| = \sqrt{2}$. Значит, $\mathcal{R}'$ – тоже ортонормированный. ■

Репозиторий ВГУ

***Теорема* 8.1.** *Пусть* $\mathcal{R}=(O, A_1, A_2)$ *и* $\mathcal{R}'=(O', A_1', A_2')$ *– произвольные ортонормированные реперы плоскости* π. *Тогда существует одно и только одно движение плоскости, которое переводит репер* $\mathcal{R}$ *в репер* $\mathcal{R}'$. *При этом движении точка* M *с данными координатами в репере* $\mathcal{R}$ *переходит в точку* M' *с такими же координатами в репере* $\mathcal{R}'$.

Доказательство. Определим отображение $f:\pi\to\pi$ по следующему правилу. Точке $M(x,y)_{\mathcal{R}}$ сопоставляется точка $M'(x,y)_{\mathcal{R}'}$, т.е. имеющая точно такие же координаты только во втором репере. Мы имеем

$$O(0,0)_{\mathcal{R}},\ O'(0,0)_{\mathcal{R}'};$$
$$A_1(1,0)_{\mathcal{R}},\ A_1'(1,0)_{\mathcal{R}'};$$
$$A_2(0,1)_{\mathcal{R}},\ A_2'(0,1)_{\mathcal{R}'}.$$

Поэтому $O'=f(O)$, $A_1'=f(A_1)$, $A_2'=f(A_2)$.

Очевидно, что отображение f является взаимно однозначным. Докажем, что оно сохраняет расстояния. Пусть $M_1(x_1, y_1)_{\mathcal{R}}$, $M_2(x_2, y_2)_{\mathcal{R}}$ – произвольные точки, а $M_1'(x_1,y_1)_{\mathcal{R}'}$, $M_2'(x_2,y_2)_{\mathcal{R}'}$ – их образы при отображении f. Тогда расстояния $|M_1M_2|$ и $|M_1'M_2'|$ вычисляются по одной и той же формуле: $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, т.е. $|M_1M_2|=|M_1'M_2'|$. Значит, отображение f является движением.

Докажем единственность. Предположим, что существует ещё одно движение g, такое, что $g(\mathcal{R})=\mathcal{R}'$. Тот факт, что преобразования g и f не совпадают, означает, что существует такая точка M, что точки $M'=f(M)$ и $M''=g(M)$ не совпадают. Тогда $|O'M'|=|OM|=|O'M''|$, т.е. точка O' равноудалена от точек M' и M''. Значит, O' лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $M'M''$. Точно так же получаем, что точки A_1' и A_2' лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $M'M''$. Значит, все точки репера $\mathcal{R}'$ лежат на одной прямой. Полученное противоречие доказывает, что преобразования g и f совпадают. ■

В дальнейшем ортонормированный репер, в отличие от произвольного аффинного, записываем так: $\mathcal{R}=(O, E_1, E_2)$.

Напомним определение из раздела «Векторная алгебра».

***Определение* 8.14.** Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой. Число λ называется *простым отношением трёх точек* A, B, C, если $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$.

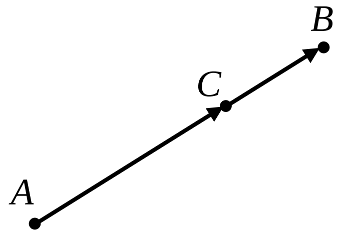


рис. 8.15

Это равносильно тому, что точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda>0$, если C лежит между A и B (рис. 8.15). Если же

Репозиторий ВГУ

C лежит за пределами отрезка AB, то $\lambda<0$ (рис. 8.16). Пишем $\lambda=(AB,C)$ или $\lambda=(ABC)$. Хотя не существует операции деления одного вектора на другой, мы будем писать $\lambda=\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB}$, но только в случае $\overrightarrow{AC}\,||\,\overrightarrow{CB}$.

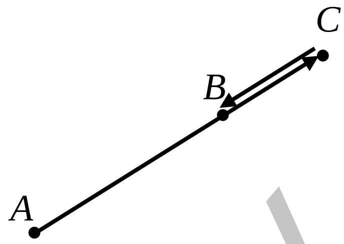


рис. 8.16

Свойства движений.

Везде обозначаем $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$, где f – движение.

1. *Движение переводит прямую в прямую, а параллельные прямые – в параллельные прямые.*

2. *Движение f переводит полуплоскость с границей l в полуплоскость с границей $l'=f(l)$.*

3. *Движение сохраняет отношение «лежать между».*

4. *Движение переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$. При этом середина отрезка AB переходит в середину отрезка $A'B'$.*

5. *Движение сохраняет простое отношение трёх точек прямой*: $(ABC)=(A'B'C')$.

6. *Движение переводит луч в луч, а угол – в равный ему угол.*

7. *Движение переводит взаимно перпендикулярные прямые во взаимно перпендикулярные прямые.*

Доказательство. **1.** Пусть f – движение, а l – произвольная прямая. Выберем ортонормированный репер $\mathcal{R}$, и пусть $f(\mathcal{R})=\mathcal{R}'$. Тогда прямая l в репере $\mathcal{R}$ задаётся уравнением вида $Ax+By+C=0$. Значит, её образ $l'=f(l)$ будет задаваться тем же уравнением, только в репере $\mathcal{R}'$. Поэтому l' – тоже прямая.

Если две прямые l_1 и l_2 задаются уравнениями

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0, \quad l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

относительно репера $\mathcal{R}$, то их образы l_1' и l_2' будут иметь такие же уравнения, только относительно репера $\mathcal{R}'$. Поэтому если признак параллельности прямых $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ выполняется для l_1 и l_2, то он выполняется также для l_1' и l_2'.

2. Если прямая l, являющаяся границей полуплоскости α, имеет уравнение $Ax+By+C=0$ в репере $\mathcal{R}$, то полуплоскость вместе с границей задаётся неравенством $Ax+By+C\geq 0$ или $Ax+By+C\leq 0$. Тогда образ полуплоскости $\alpha'=f(\alpha)$ задаётся тем же неравенством, только в репере $\mathcal{R}'=f(\mathcal{R})$. Следовательно, α' тоже является полуплоскостью.

3. Точка C лежит между точками A и B тогда и только тогда, когда выполняется равенство $|AC|+|CB|=|AB|$. Но тогда и для образов этих точек выполняется $|A'C'|+|C'B'|=|A'B'|$. Значит, C' лежит между A' и B'.

4. Отрезок AB состоит из точек, которые лежат между A и B. Образы этих точек лежат между A' и B', т.е. на отрезке $A'B'$. Тем самым, мы доказали только то, что $f(AB)\subseteq A'B'$. Поэтому следует ещё доказать, что образом отрезка AB будет весь отрезок $A'B'$, а не его часть. Преобразование f^{-1} тоже является движением. Поэтому если $C'\in A'B'$, то $C=f^{-1}(C')\in AB$, т.е. каждая точка отрезка $A'B'$ имеет прообраз, что и требовалось доказать. Утверждение про середину отрезка вытекает из пункта 5.

5. Если три произвольные точки прямой имеют координаты $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x, y)$ в репере $\mathcal{R}$, и $\lambda=(ABC)$, то

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{8.6}$$

Образы данных точек имеют координаты $A'(x_1, y_1)$, $B'(x_2, y_2)$, $C'(x, y)$ в репере $\mathcal{R}'$, поэтому для них имеют место те же равенства (8.6). Значит, $(A'B'C')=\lambda$.

6. и **7.** оставим без доказательства.

§ 5. *Аналитическое выражение движений плоскости*

Напомним, что пара векторов $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$ на плоскости называется правой, если кратчайший поворот от вектора $\vec{\mathbf{a}}$ к вектору $\vec{\mathbf{b}}$ осуществляется против часовой стрелки, если данные векторы отложены от одной точки.

***Определение* 8.15.** Пусть $\mathcal{R}=(O, A_1, A_2)$ – аффинный репер на плоскости, $\mathcal{B}=(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2)$ – соответствующий векторный базис. Говорим, что базис $\mathcal{B}$ и репер $\mathcal{R}$ имеют *правую ориентацию*, если пара векторов $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2)$ – правая; аналогично, базис $\mathcal{B}$ и репер $\mathcal{R}$ имеют *левую ориентацию*, если пара векторов $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2)$ левая.

***Определение* 8.16.** Говорим, что движение плоскости *сохраняет ориентацию* плоскости, если любой репер $\mathcal{R}$ и его образ $\mathcal{R}'$ одинаково ориентированы. Говорим, что движение плоскости *меняет ориентацию* плоскости, если любой репер $\mathcal{R}$ и его образ $\mathcal{R}'$ противоположно ориентированы.

Если два ортонормированных базиса $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ одинаково ориентированы, то $\mathcal{B}'$ получается из $\mathcal{B}$ поворотом, если все векторы отложить из одной точки.

Репозиторий ВГУ

Пусть f – движение плоскости, $\mathcal{R} = (O,\ E_1,\ E_2)$ – произвольный ортонормированный репер. Пусть репер $\mathcal{R}' = f(\mathcal{R}) = (O',\ E_1',\ E_2')$ одинаково ориентирован с $\mathcal{R}$. Рассмотрим параллельный перенос p плоскости на вектор $\overrightarrow{OO'}$. Пусть $p(\mathcal{R}) = \mathcal{R}''$. Промежуточный репер $\mathcal{R}'' = (O',\ E_1'',\ E_2'')$ задаёт тот же векторный базис $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2)$, что и репер $\mathcal{R}$, только имеет другое начало координат O'. Тогда $\mathcal{R}'$ будет получаться из $\mathcal{R}''$ в результате поворота h_α (рис. 8.17). Пусть $f_1 = h_\alpha \circ p$. Тогда f_1, так же, как и f, переводит репер $\mathcal{R}$ в репер $\mathcal{R}'$. Согласно теореме 1 $f_1 = f$. Тем самым, мы доказали, что f раскладывается в композицию параллельного переноса и поворота. Из этого следует, что и любой другой репер плоскости будет переходить в одинаково ориентированный с ним репер, т.е. f сохраняет ориентацию плоскости.

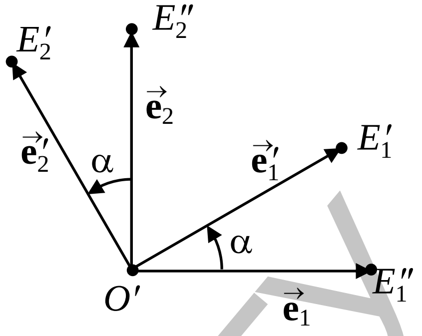


рис. 8.17

Пусть теперь $\mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}$ противоположно ориентированы. Тогда репер $\mathcal{R}'$ получается из $\mathcal{R}'' = (O',\ E_1'',\ E_2'')$ в результате симметрии s относительно оси $O'E_1''$ и поворота h_α (рис. 8.18). Преобразование $h_\alpha \circ s \circ p$ является движением и переводит репер $\mathcal{R}$ в репер $\mathcal{R}'$. Согласно теореме 1 это преобразование совпадает с f. Значит, f раскладывается в композицию параллельного переноса, поворота и симметрии. Из этого следует, что и любой другой репер плоскости будет переходить в противоположно ориентированный с ним репер, т.е. f меняет ориентацию плоскости.

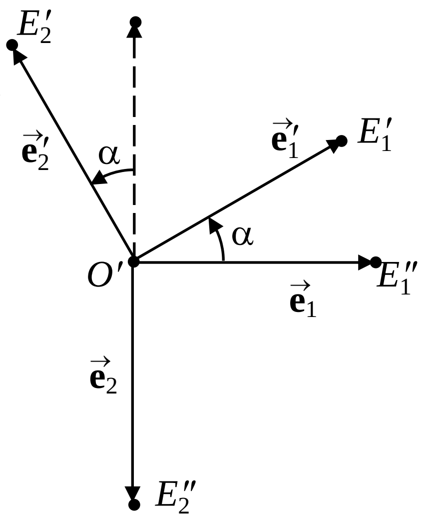


рис. 8.18

***Определение* 8.17.** Мы доказали, что все движения плоскости подразделяются на два вида: движения, не меняющие ориентацию плоскости, и движения, меняющие ориентацию плоскости. Они называются соответственно *движениями первого и второго рода*.

Пусть f – движение первого рода $f = h_\alpha \circ p$ – его разложение в композицию параллельного переноса и поворота. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости и $M'(x', y') = f(M)$, а $M''(x'', y'')$ – промежуточная точка, получающаяся из M в результате параллельного переноса: $M'' = p(M)$. Тогда $M' = h_\alpha(M'')$. Пусть $p(a_1, a_2)$ – вектор, задающий перенос. Тогда

Репозиторий БГУ

$$\begin{cases} x'' = x + a_1, \\ y'' = y + a_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha, \\ y = x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Отсюда получаем формулы, задающие движение:

$$\begin{cases} x' = (x + a_1)\cdot\cos\alpha - (y + a_2)\cdot\sin\alpha, \\ y' = (x + a_1)\cdot\sin\alpha + (y + a_2)\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Если раскрыть скобки и обозначить

$$x_{\text{о}} = a_1\cdot\cos\alpha - a_2\cdot\sin\alpha, \quad y_{\text{о}} = a_1\cdot\sin\alpha + a_2\cdot\cos\alpha,$$

то получим формулы:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha + x_{\text{о}}, \\ y' = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha + y_{\text{о}}. \end{cases} \qquad (8.7)$$

В матричном виде:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{H}_\alpha\mathbf{X} + \mathbf{X}_{\text{о}}. \qquad (8.7')$$

Пусть f – движение второго рода. Тогда параллельный перенос задаётся теми же формулами, а преобразование $h_\alpha \circ s$ задаётся матрицей

$$\mathbf{H}'_\alpha = \mathbf{H}_\alpha\,\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем формулы, задающие движение:

$$\begin{cases} x' = (x + a_1)\cdot\cos\alpha + (y + a_2)\cdot\sin\alpha, \\ y' = (x + a_1)\cdot\sin\alpha - (y + a_2)\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Если раскрыть скобки и обозначить

$$x_{\text{о}} = a_1\cdot\cos\alpha + a_2\cdot\sin\alpha, \quad y_{\text{о}} = a_1\cdot\sin\alpha - a_2\cdot\cos\alpha,$$

то получим формулы:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha + x_{\text{о}}, \\ y' = x\cdot\sin\alpha - y\cdot\cos\alpha + y_{\text{о}}. \end{cases} \qquad (8.8)$$

Замечание. Разложение движения $f = h_\alpha \circ p$ или $f = h_\alpha \circ s \circ p$ не является единственным и зависит от выбора репера $\mathcal{R}$ и от порядка, в каком мы производим разложение. Например, преобразование, изображённое на рисунке 8.18, можно осуществить и другим способом: сначала поворот, а затем симметрия относительно $O'E'_1$. Можно совершить поворот на угол $\pi + \alpha$, а затем симметрию относительно $O'E'_2$ (рис. 8.19).

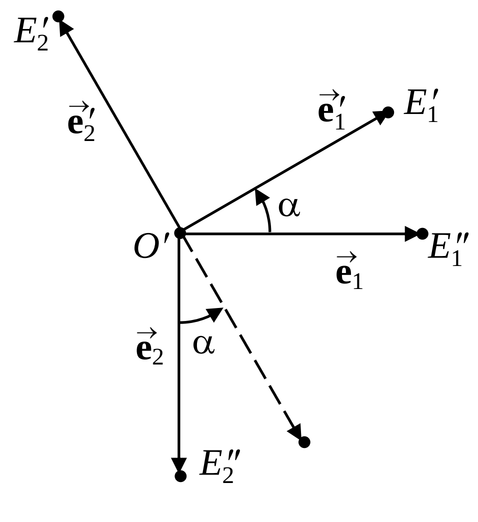


рис. 8.19

Репозиторий ВГУ

Напомним (из курса алгебры), что квадратная матрица $\mathbf{Q}$ называется ортогональной, если $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}$, т.е. транспонированная матрица является обратной. Определитель ортогональной матрицы равен 1 или -1. Также сумма квадратов элементов любой строки или столбца равна 1, а произведение одной строки матрицы на другую (или одного столбца на другой) равно 0. Для матрицы второго порядка эти свойства записываются так:

$$q_{11}^2+q_{12}^2=1,\quad q_{21}^2+q_{22}^2=1,\quad q_{11}q_{21}+q_{12}q_{22}=0\quad \text{(для строк)};$$

$$q_{11}^2+q_{21}^2=1,\quad q_{12}^2+q_{22}^2=1,\quad q_{11}q_{12}+q_{21}q_{22}=0\quad \text{(для столбцов)}.$$

Упражнение. Проверьте, что следующие матрицы являются ортогональными:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} \tag{8.9}$$

и убедитесь, что их определители равны 1 и -1 соответственно.

Мы доказали следующую теорему.

***Теорема* 8.2.** *Любое движение плоскости относительно ортонормированного репера задаётся формулами вида*

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+x_{\mathrm{o}},\\ y'=a_{21}x+a_{22}y+y_{\mathrm{o}}. \end{cases}$$

где матрица $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ *является ортогональной. При этом для движений первого рода* $\Delta=\det\mathbf{A}=1$, *а для движений второго рода* $\Delta=-1$.

Оказывается, имеет место и обратная теорема.

***Теорема* 8.2′.** *Если отображение* f *плоскости на себя относительно ортонормированного репера* $\mathcal{R}=(O,E_1,E_2)$ *задаётся формулами вида* (8.9), *где матрица* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ *является ортогональной, то* f *является движением.*

Доказательство. Пусть $M'(x',y')$ – произвольная точка плоскости. Подставим её координаты в (8.8). Получим систему линейных уравнений, относительно неизвестных (x,y). Так как матрица $\mathbf{A}$ является ортогональной, то $\Delta=\det\mathbf{A}\neq 0$. Согласно правилу Крамера эта система имеет единственное решение. Это значит, что каждая точка $M'(x',y')$ плоскости имеет, и притом единственный, прообраз $M(x,y)$. Значит, f – взаимно однозначное отображение плоскости на себя, т.е. f – преобразование.

Пусть $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$ – произвольные точки, а $M'(x_1',y_1')$, $N'(x_2',y_2')$ – их образы. По формулам (8.9) находим, что

$$x_1'-x_2'=a_{11}(x_1-x_2)+a_{12}(y_1-y_2),\quad y_1'-y_2'=a_{21}(x_1-x_2)+a_{22}(y_1-y_2),$$

Репозиторий ВГУ

$$|M_1'M_2'|^2 = (x_1'-x_2')^2 + (y_1'-y_2')^2 =$$
$$= (a_{11}(x_1-x_2)+a_{12}(y_1-y_2))^2 + (a_{21}(x_1-x_2)+a_{22}(y_1-y_2))^2 =$$
$$= (a_{11}^2 + a_{21}^2)(x_1-x_2)^2 + 2(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})(x_1-x_2)(y_1-y_2) +$$
$$+ (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_1-y_2)^2 .$$

Далее используем тот факт, что матрица $\mathbf{A}$ является ортогональной:

$$|M_1'M_2'|^2 = 1\cdot(x_1-x_2)^2 + 0\cdot(x_1-x_2)(y_1-y_2) + 1\cdot(y_1-y_2)^2 =$$
$$= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = |M_1M_2|^2.$$

Значит, f является движением. ■

§ 6. *Классификация движений плоскости*

***Определение* 8.18.** Точка M плоскости называется *неподвижной точкой преобразования* $f:\pi\to\pi$, если $f(M)=M$. Прямая l называется *инвариантной относительно преобразования* f, если каждая точка этой прямой переходит под действием преобразования в точку этой же прямой: $N\in l \Rightarrow f(N)\in l$. Если каждая точка прямой l является неподвижной точкой преобразования f, то и вся прямая l тоже называется *неподвижной прямой*.

***Лемма* 8.2.** *Если движение f не имеет ни одной неподвижной точки, то оно имеет хотя бы одну инвариантную прямую.*

Мы оставим эту лемму без доказательства, но поясним, какая именно прямая будет инвариантной.

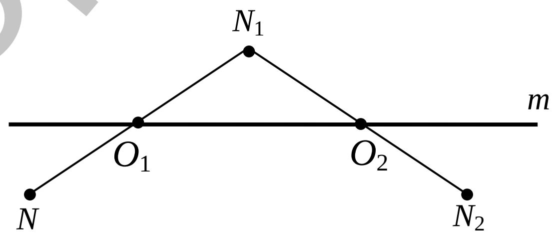


рис. 8.20

Пусть N – произвольная точка плоскости, $N_1=f(N)$, $N_2=f(N_1)$.

Согласно условию леммы $N_1\neq N$, $N_2\neq N_1$, и преобразование f переводит отрезок NN_1 в отрезок N_1N_2. Пусть O_1 и O_2 – середины отрезков NN_1 и N_1N_2 соответственно. Тогда прямая $m=O_1O_2$ (рис. 8.20) и будет инвариантной под действием преобразования f. В частности, если N, N_1, N_2 лежат на одной прямой, то $m=NN_1$.

***Лемма* 8.3.** *Если движение f переводит луч r в себя, то f является либо тождественным преобразованием, либо симметрией относительно прямой, содержащей луч r.*

Доказательство. Построим ортонормированный репер $\mathcal{R}=(O, E_1, E_2)$ так, чтобы точка O была началом луча r, а $E_1\in r$ (рис. 8.21). Так как луч r переходит в себя, то точки O и E_1 являются неподвижными.

Репозиторий ВГУ

Репер $\mathcal{R}$ должен перейти в ортонормированный репер. Поэтому точка E_2 может перейти только в себя или в точку E_2', симметричную к E_2 относительно прямой l, содержащей луч r. В первом случае имеем $f(\mathcal{R})=\mathcal{R}$, а значит, f – это тождественное преобразование. Во втором случае, в силу теоремы 8.1, f совпадает с симметрией относительно прямой l, т.к. именно эта симметрия переводит репер $\mathcal{R}$ в репер (O, E_1, E_2'). ■

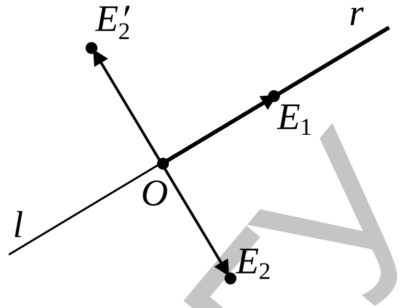


рис. 8.21

I. ***Классификация движений первого рода.***

1. *Движение f имеет более чем одну неподвижную точку.* Пусть O и A – две неподвижные точки. Тогда луч OA переходит в себя; согласно лемме 8.3 f – тождественное преобразование (симметрия относится к движениям второго рода).

2. *Движение f имеет ровно одну неподвижную точку.* Пусть O – неподвижная точка. Выберем ортонормированный репер $\mathcal{R}=(O, E_1, E_2)$ с началом O. Тогда в этом репере f задаётся формулами (8.7), где $x_o = y_o = 0$, т.е. f – поворот на угол $\alpha \neq 0$.

2.1. $\alpha \neq \pi$ и $\alpha \neq -\pi$. Тогда f не имеет инвариантных прямых.

2.2. $\alpha = \pm\pi$. Тогда f имеет бесконечное множество инвариантных прямых. Инвариантными будут все прямые, которые проходят через точку O и только они.

3. *Движение f не имеет неподвижных точек.* Согласно лемме 1 существует хотя бы одна инвариантная прямая l. Пусть O – произвольная точка этой прямой, $O_1 = f(O)$, $O_2 = f(O_1)$. Тогда все эти точки лежат на прямой l и $O_1 \neq O$, $O_2 \neq O_1$, т.к. f не имеет неподвижных точек. Отрезок OO_1 переходит в отрезок O_1O_2, и, в частности, середина первого отрезка переходит в середину второго.

Предположим, что $O_2 = O$. Тогда отрезки OO_1 и O_1O_2 совпадают, и середина отрезка OO_1 остаётся на месте. Это противоречит нашему предположению. Следовательно, все точки O, O_1, O_2 являются различными. Выберем ортонормированный репер $\mathcal{R}=(O, E_1, E_2)$ так, чтобы $E_1 \in l$ (рис. 8.22). Тогда в этом репере $O(0, 0)$, $O_1(a, 0)$, $O_2(2a, 0)$, т.к. $|OO_1| = |O_1O_2|$. Подставим координаты этих точек в (8.7):

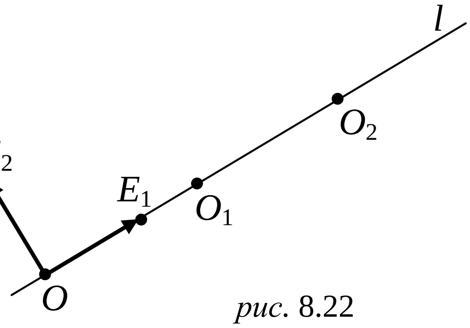


рис. 8.22

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} a = 0\cdot\cos\alpha - 0\cdot\sin\alpha + x_o, \\ 0 = 0\cdot\sin\alpha + 0\cdot\cos\alpha + y_o, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a = a\cdot\cos\alpha - 0\cdot\sin\alpha + x_o, \\ 0 = a\cdot\sin\,\alpha + 0\cdot\cos\alpha + y_o. \end{cases}$$

Тогда из первой системы находим, что $x_o = a$, $y_o = 0$, а из второй: $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$. Поэтому формулы (8.7) принимают вид: $x' = x + a$, $y' = y$. Значит, f – это параллельный перенос на вектор $\vec{\mathbf{p}}(a, 0)$. Следовательно, инвариантными будут все прямые, параллельные прямой l и только они.

II. ***Классификация движений второго рода.***

Пусть $M(x, y)$ – неподвижная точка преобразования f: $M = f(M)$. Подставляя справа и слева координаты (x, y) в (8.8), получаем уравнение для нахождения неподвижной точки:

$$\begin{cases} x = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha + x_o, \\ y = x\cdot\sin\alpha - y\cdot\cos\alpha + y_o. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\cos\alpha - 1)x + (\sin\alpha)y = -x_o, \\ (\sin\alpha)x + (-\cos\alpha - 1)y = -y_o. \end{cases} \tag{8.10}$$

Найдём определитель этой системы.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{vmatrix} = -(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1) - \sin^2\alpha =$$
$$= -\cos^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha = 0\,.$$

Значит, эта система (8.10) либо не имеет решений, либо имеет бесконечное количество решений, которые зависят от одного параметра. Следовательно, преобразование f либо не имеет неподвижных точек, либо имеет прямую, состоящую из неподвижных точек.

1. *Движение f имеет прямую, состоящую из неподвижных точек.* Пусть r – произвольный луч этой прямой. Тогда движение f переводит луч r в себя, и, согласно лемме 2, f – осевая симметрия (тождественное преобразование относится к движениям первого рода).

2. *Движение f не имеет неподвижных точек.* Согласно лемме 8.2 существует хотя бы одна инвариантная прямая l. Выберем репер $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2)$ так же, как и в случае **3.** движений первого рода, и пусть $O_1 = f(O)$, $O_2 = f(O_1)$. Точно так же получаем, что $O(0, 0)$, $O_1(a, 0)$, $O_2(2a, 0)$. Самостоятельно подставьте координаты этих точек в (8.8) и убедитесь, что $x_o = a$, $y_o = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$. Поэтому формулы преобразования имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x + a\,, \\ y' = -y. \end{cases}$$

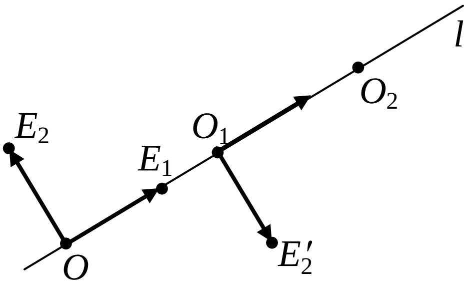


рис. 8.23

Репозиторий ВГУ

Очевидно, что такое преобразование можно представить в виде композиции $f = s \circ p$ параллельного переноса на вектор $\vec{\mathbf{p}}(a, 0)$ и симметрии относительно прямой l в любом порядке:

$$p: \begin{cases} x'' = x + a, \\ y'' = y, \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x' = x'', \\ y' = -y''. \end{cases}$$

Такое преобразование называется скользящей симметрией. Оно не имеет инвариантных точек и имеет ровно одну инвариантную прямую. Его действие на репер $\mathcal{R}$ показано на рисунке 8.23.

Итак, мы установили, что существуют следующие виды движений.

Название движения	Инвариантные точки	Инвариантные прямые
1. Тождественное преобразование	все точки плоскости	все прямые плоскости
2.1. Поворот на угол $\alpha \neq \pm\pi$, $\alpha \neq 0$	центр поворота	нет
2.2. Центральная симметрия ($\alpha = \pm\pi$)	центр симметрии O	любая прямая, проходящая через O
3. Параллельный перенос на вектор $\vec{\mathbf{p}} \neq \vec{\mathbf{o}}$	нет	любая прямая, параллельная вектору $\vec{\mathbf{p}}$
4. Осевая симметрия	все точки оси l	ось симметрии и любая прямая $a \perp l$
5. Скользящая симметрия	нет	ось l

Заметим, что тождественное преобразование тоже можно отнести и к поворотам (при $\alpha = 0$), и к параллельным переносам (при $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{o}}$), но его следует выделять особо, поскольку оно играет роль единичного элемента в любой группе преобразований.

Очевидно, что композиция двух движений первого рода есть движение первого рода, и движение, обратное к движению первого рода, тоже является движением первого рода. Также тождественное преобразование относится к первому роду. Тем самым, все движения первого рода образуют группу, которую обозначим $SE(2)$.

Композиция двух движений второго рода есть движение первого рода. Поэтому все движения второго рода не образуют группы. К тому же, тождественное преобразование не является движением второго рода, тем самым, совокупность движений 2 рода не содержит единичного элемента.

Репозиторий ВГУ

§ 7. *Группа симметрий геометрической фигуры*

Пусть F – некоторая фигура на плоскости. Обозначим G_F – множество всех движений плоскости, переводящих фигуру F в себя. Очевидно, что $\mathrm{id}\in G_F$, и если $f, g\in G_F$, то $g\circ f\in G_F$, и $f^{-1}\in G_F$. Следовательно, G_F – это группа, которая является подгруппой в группе $E(2)$.

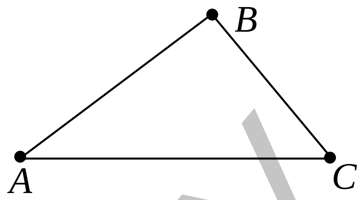


рис. 8.24

Пример 8.9. Пусть F – это треугольник, который не является равнобедренным (рис. 8.24). Тогда группа G_F содержит только тождественный элемент.

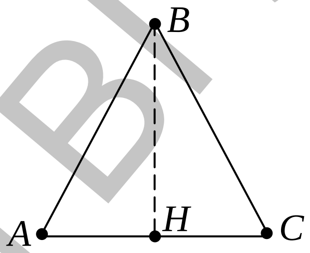


рис. 8.25

Пример 8.10. Пусть F – это равнобедренный треугольник (рис. 8.25). Тогда группа G_F состоит из двух элементов: тождественного преобразования и симметрии относительно высоты, проведённой к основанию.

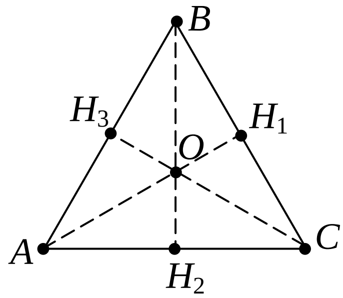


рис. 8.26

Пример 8.11. Пусть F – это равносторонний треугольник (рис. 8.26). Тогда группа G_F состоит из шести элементов: тождественного преобразования, симметрий относительно всех высот треугольника и поворотов на 120° и 240° вокруг центра O треугольника. Каждая из симметрий является преобразованием второго рода, а композиция любых двух симметрий является преобразованием первого рода, т.е. поворотом.

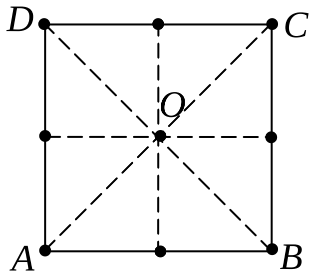


рис. 8.27

Пример 8.12. Пусть F – это квадрат. Тогда G_F состоит из восьми элементов: тождественного преобразования, четырёх симметрий относительно диагоналей и прямых, соединяющих середины противоположных сторон, а также из поворотов на 90°, 180° и 270° вокруг центра O (рис. 8.27).

Упражнение. Самостоятельно определите, из каких элементов состоят группы G_F для произвольных прямоугольника, ромба, эллипса, а также для правильного шестиугольника.

Пример 8.13. Пусть F – это окружность. Тогда G_F содержит бесконечное число элементов. Эта группа включает в себя все повороты вокруг центра окружности и симметрии относительно всех прямых, проходящих через центр.

***Пример* 8.14.** Пусть F состоит из двух параллельных прямых l_1 и l_2 (рис. 8.28). Тогда G_F тоже состоит из бесконечного числа элементов. Она включает в себя параллельные переносы на любой вектор, параллельный прямым, симметрию относительно прямой h, равноудалённой от l_1 и l_2, а также симметрии относительно всех прямых, перпендикулярных l_1 и l_2. Те же самые симметрии имеет фигура, состоящая из l_1, l_2 и всех точек, лежащих между ними (полоса).

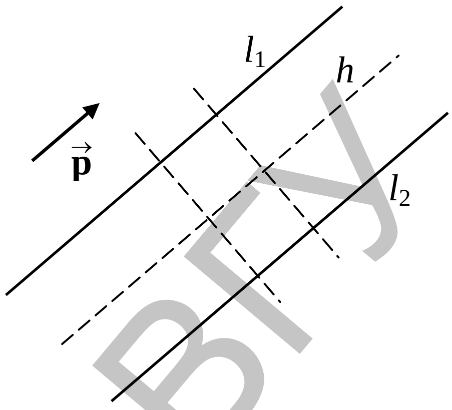


рис. 8.28

***Определение* 8.19.** Фигура F называется ограниченной, если её можно поместить в круг достаточно большого радиуса (т.е. $\exists$ число R и точка O, такие, что $F \subseteq B(O, R)$, где $B(O, R) = \{M \mid |OM| \le R\}$).

Свойства группы G_F *для ограниченной фигуры* F (без доказательства).

1. *G_F не содержит параллельных переносов (кроме переноса на $\vec{\mathbf{o}}$) и скользящих симметрий.*

2. *F имеет не более чем один центр симметрии.*

3. *Если F имеет центр симметрии O, то все оси симметрии (если они существуют) проходят через O.*

4. *Если F имеет более чем одну ось симметрии, то все оси симметрии проходят через одну точку.*

***Определение* 8.20.** Группа G_F для ограниченной фигуры F называется *группой симметрий* фигуры F.

§ 8. *Преобразование подобия*

***Определение* 8.21.** Преобразование $g : \pi \to \pi$ называется *подобием*, если для любых точек $A, B \in \pi$ и их образов $A' = g(A)$, $B' = g(B)$ выполнено $|A'B'| = k|AB|$, где $k = \mathrm{const} > 0$. Тогда k называется *коэффициентом подобия*.

***Определение* 8.22.** *Гомотетией с центром в точке* A называется преобразование плоскости, которое каждой точке M плоскости сопоставляет точку M' так, что

$$\overrightarrow{AM'} = t\overrightarrow{AM}, \qquad (8.11)$$

где $t \ne 0$. Число t называется *коэффициентом гомотетии*.

Репозиторий ВГУ

На рисунках 8.29 и 8.30 показано, как строится $\Delta A'B'C'$, гомотетичный данному ΔABC с коэффициентами 2 и –2, если центр гомотетии находится в начале координат.

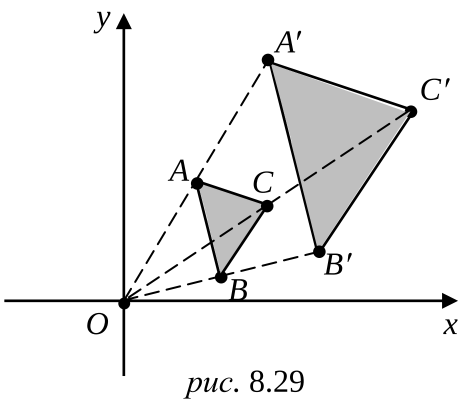


рис. 8.29

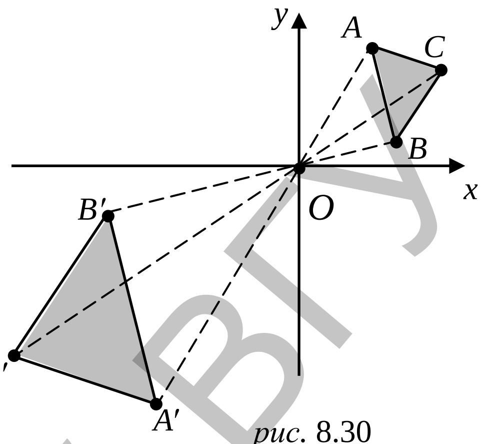


рис. 8.30

Докажем, что гомотетия является подобием. Пусть M_1, M_2 – произвольные точки, а M_1', M_2' – их образы, A – центр гомотетии. Тогда

$$\overrightarrow{M_1'M_2'} = \overrightarrow{AM_2'} - \overrightarrow{AM_1'} = t\overrightarrow{AM_2} - t\overrightarrow{AM_1} = t(\overrightarrow{AM_2} - \overrightarrow{AM_1}) = t\overrightarrow{M_1M_2}.$$

Согласно определению произведения вектора на число $|M_1'M_2'| = |t||M_1M_2|$. Значит, гомотетия является подобием с коэффициентом $k = |t|$.

При $k = 1$ подобие будет движением. При $t = 1$ гомотетия будет тождественным преобразованием, а при $t = -1$ гомотетия будет центральной симметрией.

Пусть $g_t : \pi \to \pi$ – гомотетия. Выберем ортонормированный репер $\mathcal{R} = \{O, E_1, E_2\}$ так, чтобы точка O являлась центром гомотетии. Пусть в этом репере $M(x, y)$, $M'(x', y')$. Тогда $\overrightarrow{OM}(x, y)$, $\overrightarrow{OM'}(x', y')$, и из определения (8.11) получаем формулы, по которым действует g:

$$\begin{cases} x' = tx, \\ y' = ty. \end{cases} \tag{8.12}$$

Произвольное подобие является композицией гомотетии и движения. Формулы (8.12) можно записать в матричном виде так:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{\Gamma}_t \mathbf{X}, \tag{8.12′}$$

где

$$\mathbf{\Gamma}_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $g_k \circ g_t = g_t \circ g_k = g_{tk}$ и $\mathbf{\Gamma}_k \mathbf{\Gamma}_t = \mathbf{\Gamma}_t \mathbf{\Gamma}_k = \mathbf{\Gamma}_{tk}$, т.е. две гомотетии с центром в начале координат коммутируют, и композиции гомотетий соответствует произведение их матриц. При этом коэффициенты гомотетий тоже перемножаются.

Репозиторий ВГУ

Тождественное преобразование представляет собой гомотетию с коэффициентом $t = 1$. Преобразованием, обратным к g_k, является $g_{1/k}$.

Свойства гомотетии (без доказательства).

1. *Гомотетия (отличная от тождественного преобразования) переводит прямую, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную ей прямую, а прямую, проходящую через центр гомотетии, – в себя.*

2. *Гомотетия сохраняет ориентацию плоскости.*

3. *Гомотетия обладает всеми свойствами движений* **1**–**7** *из* §4.

***Теорема* 8.3.** *Пусть f – преобразование подобия с коэффициентом k, а g – гомотетия с тем же коэффициентом и центром в произвольной точке M_0. Тогда существует одно и только одно движение h, такое, что $f = h \circ g$.*

Доказательство. Рассмотрим преобразование $h = f \circ g^{-1}$. Это композиция двух подобий с коэффициентами k и $1/k$. Поэтому это тоже подобие и его коэффициент равен $k \cdot (1/k) = 1$. Следовательно, h – движение и при этом $f = h \circ g$.

Предположим, что существует ещё одно движение h_1, такое, что $f = h_1 \circ g$. Тогда $h_1 = f \circ g^{-1} = h$, т.е. искомое движение единственно. ■

Из этой теоремы и свойств гомотетии следует, что *подобие тоже обладает всеми свойствами движений* **1**–**7** *из* §3.

Упражнение. Выпишите эти свойства ещё раз, переформулировав для подобия.

Пусть f – подобие и $f = h \circ g$ – его разложение в соответствии с теоремой 8.3. Гомотетия g сохраняет ориентацию плоскости. Движение h либо сохраняет ориентацию плоскости, либо меняет её. В соответствии с этим, подобие либо сохраняет ориентацию плоскости, либо меняет её.

***Определение* 8.23.** Если подобие сохраняет ориентацию плоскости, то оно называется *преобразованием подобия первого рода*. Если подобие меняет ориентацию плоскости, то оно называется *преобразованием подобия второго рода*.

Пусть f – подобие первого рода с коэффициентом k, а g – гомотетия с тем же коэффициентом и центром в начале координат. Пусть h – движение, такое, что $f = h \circ g$. Тогда f действует по формулам:

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{H}_\alpha \mathbf{\Gamma}_k)\mathbf{X} + \mathbf{X}_0.$$

Найдём произведение матриц:

$$\mathbf{H}_\alpha \mathbf{\Gamma}_k = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix} = k\mathbf{H}_\alpha.$$

В итоге, действие f в матричном виде записывается так:

$$\mathbf{X}' = k\mathbf{H}_\alpha \mathbf{X} + \mathbf{X}_1, \qquad (8.13')$$

Репозиторий ВГУ

а в развернутом виде:

$$\begin{cases} x' = kx\cdot\cos\alpha - ky\cdot\sin\alpha + x_1, \\ y' = kx\cdot\sin\alpha + ky\cdot\cos\alpha + y_1. \end{cases} \tag{8.13}$$

Аналогично подобие второго рода задаётся формулами:

$$\begin{cases} x' = kx\cdot\cos\alpha + ky\cdot\sin\alpha + x_1, \\ y' = kx\cdot\sin\alpha - ky\cdot\cos\alpha + y_1. \end{cases} \tag{8.14}$$

***Теорема* 8.4.** *Преобразование подобия, отличное от движения, имеет неподвижную точку и притом только одну.*

Доказательство. Пусть f – подобие первого рода с коэффициентом k, а $M(x, y)$ – его неподвижная точка. Тогда согласно (8.13) должно выполняться

$$\begin{cases} x = kx\cdot\cos\alpha - ky\cdot\sin\alpha + x_1, \\ y = kx\cdot\sin\alpha + ky\cdot\cos\alpha + y_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(k\cdot\cos\alpha - 1) - ky\cdot\sin\alpha = -x_1, \\ kx\cdot\sin\alpha + y(k\cdot\cos\alpha - 1) = -y_1. \end{cases} \tag{8.15}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = (k\cdot\cos\alpha - 1)^2 + (k\cdot\sin\alpha)^2 = k^2 - 2k\cdot\cos\alpha + 1 \geq 0$$

(самостоятельно разберитесь, почему). При этом, $\Delta = 0$ возможно только тогда, когда одновременно $k = 1$ и $\alpha = 0$, что соответствует тождественному преобразованию. Значит, по правилу Крамера система (8.15) имеет решение, и притом единственное.

Аналогично, если f – подобие второго рода с коэффициентом k, получаем систему

$$\begin{cases} x(k\cdot\cos\alpha - 1) + ky\cdot\sin\alpha = -x_1, \\ kx\cdot\sin\alpha - y(k\cdot\cos\alpha + 1) = -y_1. \end{cases}$$

Её определитель:

$$\Delta = -k^2\cos^2\alpha + 1 - k^2\sin^2\alpha = 1 - k^2 \neq 0,$$

при $k \neq 1$. Значит, эта система тоже имеет единственное решение. ■

***Следствие* 8.4.1.** *Если преобразование подобия не имеет неподвижных точек или имеет более одной неподвижной точки, то оно является движением.*

Классификация преобразований подобия (без доказательства).

I. *Подобия первого рода.*

1. Гомотетия.
2. Центрально-подобное вращение (композиция гомотетии и поворота).
3. Параллельный перенос.

II. *Подобия второго рода.*

1. Осевая симметрия.

Репозиторий ВГУ

2. Центрально-подобная симметрия (композиция гомотетии и симметрии).

3. Скользящая симметрия.

§ 9. *Аффинное преобразование*

***Определение* 8.24.** Преобразование плоскости $f:\pi\to\pi$ называется *аффинным*, если оно действует по формулам вида

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_1, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_2. \end{cases} \qquad (8.16)$$

и при этом $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ (последнее условие, на самом деле, можно доказать: если $\Delta=0$, то f не будет биекцией, а значит, и преобразованием).

В матричном виде формулы (8.16) можно переписать так:

$$\mathbf{X}'=\mathbf{AX}+\mathbf{C}, \qquad (8.16')$$

где

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (8.16), можно доказать, что:

1. *Определение аффинного преобразования не зависит от выбора СК, т.е. при выборе другой СК* (*даже если она не будет декартовой или будет иметь другое начало координат*) *преобразование будет задаваться формулами вида* (8.16).

2. *Последовательное выполнение двух аффинных преобразований есть аффинное преобразование*.

3. *Преобразование, обратное к аффинному, тоже является аффинным*.

4. *Тождественное преобразование является аффинным*.

5. (Основное свойство аффинных преобразований.) *Аффинное преобразование переводит прямые в прямые*. *При этом параллельные прямые переходят в параллельные прямые.*

6. *Аффинное преобразование однозначно определяется заданием трёх точек, не лежащих на одной прямой и их образов*: $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$.

7. *Аффинное преобразование с* $\Delta>0$ *сохраняет ориентацию плоскости; аффинное преобразование с* $\Delta<0$ *меняет ориентацию плоскости*.

8. *Аффинное преобразование сохраняет простое отношение трёх точек.*

Докажем только некоторые пункты.

Репозиторий ВГУ

2. Пусть преобразование f_1 действует по формулам (8.16′), а аффинное преобразование f_2 – по формулам

$$\mathbf{X}'' = \mathbf{B}\mathbf{X}' + \mathbf{D}.$$

Подставим (8.16′) в последнюю формулу:

$$\mathbf{X}'' = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{C}) + \mathbf{D} = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{X} + (\mathbf{B}\mathbf{C} + \mathbf{D}).$$

Обозначим $\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{A}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}\mathbf{C} + \mathbf{D}$. Получим формулы, по которым действует композиция преобразований $f_2 \circ f_1$:

$$\mathbf{X}'' = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}.$$

Это формулы такого же вида, как (8.16′), и $\det\mathbf{F} = \det\mathbf{B} \cdot \det\mathbf{A} \neq 0$. Поэтому $f_2 \circ f_1$ тоже является аффинным.

3. Решим систему уравнений (8.16) относительно неизвестных x и y. Получим формулы

$$\begin{cases} x = b_{11}(x' - a_1) + b_{12}(y' - a_2), \\ y = b_{21}(x' - a_1) + b_{22}(y' - a_2), \end{cases}$$

где $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}$. Раскроем скобки и обозначим $b_1 = -b_{11}a_1 - b_{12}\,a_2$, $b_2 = -b_{21}a_1 - b_{22}\,a_2$. В результате получим

$$\begin{cases} x = b_{11}x' + b_{12}\,y' + b_1\,, \\ y = b_{21}x' + b_{22}\,y' + b_2 \end{cases} \qquad (8.17)$$

Это формулы такого же вида, что и (8.16). Они задают обратное преобразование f^{-1}.

5. Пусть l – прямая на плоскости. Её уравнение можно записать в общем виде как $Ax + By + C = 0$. Подставим в это уравнение вместо x, y их выражения из (8.17):

$$A(b_{11}x' + b_{12}\,y' + b_1) + B(b_{21}x' + b_{22}\,y' + b_2) + C = 0.$$

После преобразований получим уравнение

$$(Ab_{11} + Bb_{21})x' + (Ab_{12} + Bb_{22})y' + (Ab_1 + Bb_2 + C) = 0. \qquad (8.18)$$

Это уравнение вида

$$A'x + B'y + C' = 0. \qquad (8.19)$$

Значит, $l' = f(l)$ – тоже прямая, которая задаётся уравнением (8.19).

Пусть $l_1 || l$. Тогда уравнение прямой можно записать в виде

$$\lambda ax + \lambda by + c_1 = 0.$$

Так же, как и выше, находим, что её образ l_1' задаётся уравнением

$$(\lambda Ab_{11} + \lambda Bb_{21})x' + (\lambda Ab_{12} + \lambda Bb_{22})y' + (\lambda Ab_1 + \lambda Bb_2 + C_1) = 0,$$

Репозиторий ВГУ

которое равносильно

$$\lambda(Ab_{11}+Bb_{21})x'+\lambda(Ab_{12}+Bb_{22})y'+(\lambda Ab_1+\lambda Bb_2+C_1)=0\,.$$

Сравнивая это уравнение с (8.17), мы видим, что $l_1' \,||\, l'$.

Утверждение про параллельность можно доказать иначе. Если предположить, что $l_1' \cap l' = A$, то под действием преобразования f^{-1} точка A должна перейти в две точки, лежащие на различных прямых, что невозможно.

Замечание. Часто аффинное преобразование определяют как переводящее прямые в прямые, и потом доказывают, что оно определяется уравнениями вида (8.15). Аффинные преобразования используются в дисциплине «Методы изображения фигур» и свойство 6 стоит доказать в рамках этой дисциплины.

***Пример* 8.15.** Преобразование, которое действует по формулам

$$\begin{cases} x'=x\,, \\ y'=ky\,,\ \ k>0\,, \end{cases}$$

представляет собой *равномерное сжатие* (при $k<1$) или *растяжение* (при $k>1$) вдоль оси Oy. Это преобразование является аффинным, но не является подобием. Его действие показано на рисунке 8.31. В §1 главы 3 мы изучали, что под действием такого преобразования окружность переходит в эллипс.

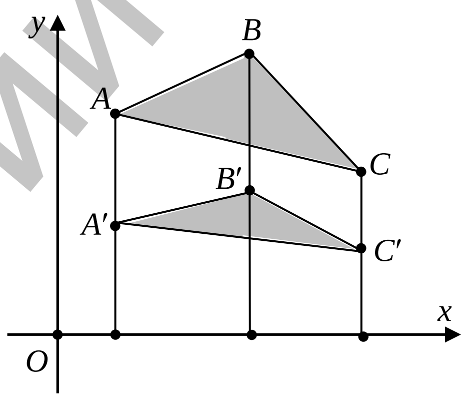


рис. 8.31

Преобразование вида (8.15) можно представить в виде композиции двух преобразований $f=p\circ f_1$, где f_1 оставляет неподвижным начало координат и действует по формулам

$$\begin{cases} x''=a_{11}x+a_{12}y\,, \\ y''=a_{21}x+a_{22}y\,. \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{X}''=\mathbf{AX},$$

а p – это параллельный перенос:

$$\begin{cases} x'=x''+a_1\,, \\ y'=y''+a_2\,. \end{cases}$$

Примем без доказательства, что преобразование f_1 можно представить в виде композиции подобия, оставляющего неподвижным начало координат, и равномерного сжатия по одному из направлений.

Пусть $f:\pi\to\pi$ – аффинное преобразование плоскости. Тогда оно переводит эквивалентные направленные отрезки в эквивалентные направ-

Репозиторий ВГУ

ленные отрезки, и мы можем определить действие этого преобразования на векторы.

***Определение* 8.25.** Пусть $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $\vec{\mathbf{a}}' = \overrightarrow{A'B'}$. Тогда пишем, что $\vec{\mathbf{a}}' = f(\vec{\mathbf{a}})$.

Выясним, по каким формулам аффинное преобразование действует на векторы. Пусть преобразование $f: \pi \to \pi$ действует по формулам (8.16). Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\mathbf{a}}' = \overrightarrow{A'B'}$. Тогда $\vec{\mathbf{a}}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и

$$A'(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_1\,,\, a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_2),$$

$$B'(a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_1\,,\, a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_2),$$

$$\vec{\mathbf{a}}'(a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1)\,,\, a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1)).$$

Тем самым, координатный столбец вектора $\overrightarrow{A'B'}$ получается умножением координатного столбца вектора $\overrightarrow{AB}$ на матрицу **A**, т.е. координаты векторов преобразуются по закону

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y\,, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y\,. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X}' = \mathbf{AX},$$

где **X** и **X**′ – координатные столбцы векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{a}}'$.

***Определение* 8.26.** Аффинное преобразование называется *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение векторов, т.е. если для любых векторов $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и их образов $\vec{\mathbf{a}}' = f(\vec{\mathbf{a}})$, $\vec{\mathbf{b}}' = f(\vec{\mathbf{b}})$ выполнено $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}' \cdot \vec{\mathbf{b}}'$.

Любое движение сохраняет длины векторов и углы между ними, поэтому любое движение сохраняет скалярное произведение.

Обратно, пусть преобразование плоскости $f:\pi \to \pi$ сохраняет скалярное произведение векторов. Тогда оно сохраняет также и скалярный квадрат вектора. Следовательно, оно сохраняет длину любого отрезка, т.е. сохраняет расстояние между точками. Итак, мы доказали следующую теорему.

***Теорема* 8.5.** *Аффинное преобразование плоскости является движением тогда и только тогда, когда оно является ортогональным.*

Из свойств аффинного преобразования следует, что оно переводит n-угольник Φ в n-угольник Φ′. Оказывается, при этом площади многоугольников связаны равенством $S(\Phi') = |\Delta| \cdot S(\Phi')$ (что такое Δ см. определение 8.24). Мы принимаем этот факт без доказательства. Более того, данное равенство верно не только для многоугольников, но и для любых фигур на плоскости. В случае движения выполнено $|\Delta| = 1$, и движения сохраняют площади фигур. В случае подобия с коэффициентом k выпол-

Репозиторий ВГУ

нено $|\Delta| = k^2$, тем самым, при увеличении линейных размеров в k раз площадь плоской фигуры возрастает в k^2 раз.

Совокупность аффинных преобразований образует группу, которую обозначим $A(2)$. Все рассмотренные в §2 группы движений являются подгруппами в $A(2)$. Обозначим $\Pi(2)$ – группа подобий. Тогда $\Pi(2)$ – это подгруппа в $A(2)$, а все группы движений являются подгруппами в $\Pi(2)$. Кроме того, все гомотетии с фиксированным центром образуют подгруппу в $\Pi(2)$, а значит, и подгруппу в $A(2)$.

§ 10. *Перспективно-аффинное преобразование*

***Определение* 8.27.** Аффинное преобразование $f:\pi\to\pi$ называется *перспективно-аффинным*, если оно имеет по крайней мере две неподвижные точки и при этом не является тождественным. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется *осью* перспективно-аффинного преобразования.

Найдём формулы, по которым действует такое преобразование. Выберем аффинный репер $\mathcal{R}=(O, E_1, E_2)$ так, чтобы неподвижными были точки O и E_1. Мы имеем $O(0,0)$, $E_1(1,0)$. Подставляем эти координаты в (8.16):

$$\begin{cases} 0 = a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_1, \\ 0 = a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 + a_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + a_1, \\ 0 = a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 + a_2, \end{cases}$$

Из первой системы получаем $a_1 = a_2 = 0$, а затем из второй системы находим $a_{11} = 1,\ a_{21} = 0$. Значит, формулы перспективно-аффинного преобразования в данном репере имеют вид

$$\begin{cases} x' = x + a_{12}y, \\ y' = a_{22}y. \end{cases} \tag{8.20}$$

Из этой системы находим, что точка $E_2(0,1)$ переходит в точку $E_2'(a_{12}, a_{22})$.

Свойства перспективно-аффинного преобразования.

1. *Любая точка оси перспективно-аффинного преобразования является неподвижной под действием этого преобразования.*

2. *Если A, B – произвольные точки плоскости, не лежащие на оси, A', B' – их образы под действием перспективно-аффинного преобразования, то прямые AA' и BB' параллельны или совпадают.*

3. *Если прямая l пересекает ось перспективно-аффинного преобразования в точке A, то её образ l' тоже проходит через точку A. Если l параллельна оси, то её образ l' тоже параллелен оси.*

4. *Перспективно-аффинное преобразование однозначно определяется заданием оси a и двух соответственных точек B и B' $(B \notin a)$.*

Репозиторий ВГУ

Доказательство. **1.** В выбранном выше репере осью является прямая $a = OE_1$. Если $A \in a$, то её координаты $A(x, 0)$. Из формул (8.20) находим, что её образ имеет такие же координаты.

2. Пусть $A(x, y)$ – произвольная точка, не лежащая на оси. Тогда $y \neq 0$. Из формул (8.19) находим её образ $A'(x + a_{12}y, a_{22}y)$. Тогда

$$\overrightarrow{AA'}(a_{12}y, (a_{22}-1)y), \quad \overrightarrow{E_2E_2'}(a_{12}, a_{22}-1).$$

Мы видим, что координаты этих векторов пропорциональны с коэффициентом $y \neq 0$. Следовательно, эти векторы коллинеарны, а поэтому прямая AA' параллельна прямой E_2E_2' или эти прямые совпадают. Аналогично получим, что прямая BB' тоже будет параллельна E_2E_2' или будет совпадать с ней.

3. Первое утверждение очевидно, так как точка A является неподвижной. Второе утверждение вытекает из свойства 5 аффинных преобразований (параллельные прямые переходят в параллельные прямые), т.к. ось перспективно-аффинного преобразования переходит в себя.

4. Пусть даны ось a и соответственные точки B *и* B' $(B \notin a)$. Пусть M – произвольная точка плоскости. Покажем, что мы можем однозначно построить её образ M'.

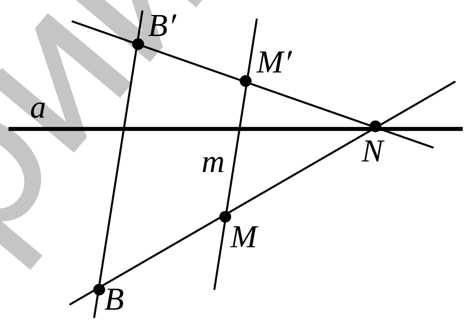


рис. 8.32

Построим прямую $m \| BB'$, проходящую через M (рис. 8.32 и 8.33). Согласно свойству 3 образ M' точки M лежит на этой прямой. Пусть $N = BM \cap a$. Тогда согласно свойству 3 прямая BN переходит в прямую $B'N$. Значит, $M' \in B'N$. Итак, $M' = m \cap B'N$.

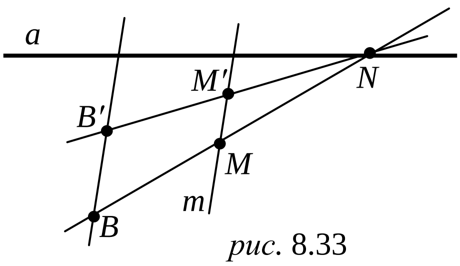


рис. 8.33

Заметим, что в этом построении не имеет значения, лежат ли точки M и M' по одну сторону от оси преобразования или же они лежат по разные стороны.

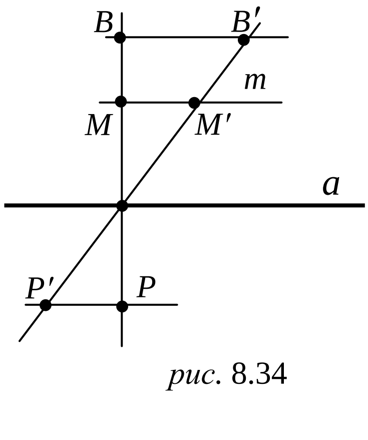


рис. 8.34

Когда $BB' \| a$, ход построения не меняется (рис. 8.34). Мы показали построение двух соответственных точек, лежащих по разные стороны от оси: из M получается M', из P получается P'.

Ход построения немного меняется, если окажется, что $BM \| a$. Тогда прямая $B'M'$ тоже должна быть параллельной к a (рис. 8.35). Поэтому про-

Репозиторий ВГУ

водим прямую $n \| BM$ через точку B'. Тогда $M' = m \cap n$. ■

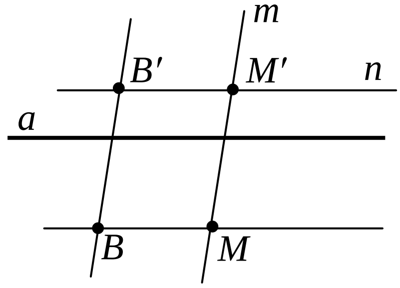


рис. 8.35

Мы видим, что перспективно-аффинное преобразование может действовать по-разному: точка может смещаться по прямой, пересекающей ось, а может смещаться параллельно оси.

***Определение* 8.28.** Если соответственные точки перспективно-аффинного преобразования лежат на прямых, не параллельных оси, то преобразование называется *косым сжатием плоскости*, а направление прямых, соединяющих соответственные точки, – *направлением сжатия*. Если соответственные точки перспективно-аффинного преобразования лежат на прямых, параллельных оси, то преобразование называется *сдвигом плоскости*.

Пусть $f : \pi \to \pi$ – сдвиг плоскости. Выберем ортонормированный репер $\mathcal{R} = \{O, E_1, E_2\}$ так, чтобы $\{O, E_1\} \in a$. Тогда $\overrightarrow{E_2 E_2'} \| a$ (рис. 8.36). Поэтому $E_2'(a_{12}, 1)$, и формулы преобразования принимают вид:

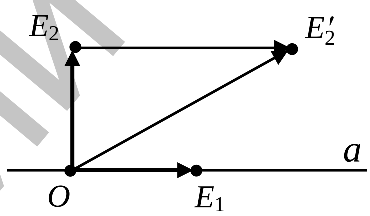


рис. 8.36

$$\begin{cases} x' = x + a_{12} y, \\ y' = y. \end{cases} \qquad (8.21)$$

Пусть $f : \pi \to \pi$ – косое сжатие, a – его ось. Тогда в таком же ортонормированном репере преобразование будет задаваться формулами (8.20) при $a_{22} \neq 1$.

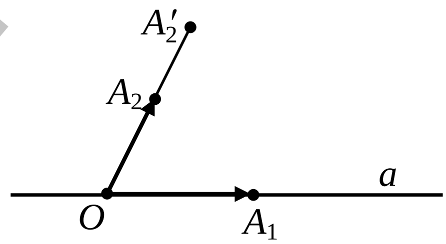


рис. 8.37

Если же допустить, что репер $\mathcal{R} = (O, A_1, A_2)$ может быть аффинным (не ортонормированным), то мы можем выбрать его следующим образом. Сначала выбираем $A_2 \notin a$, затем получаем $O = A_2 A_2' \cap a$, и после этого выбираем $A_1 \in a$, $A_1 \neq O$ (рис. 8.37). В таком случае $A_2'(0, k)$. Поэтому формулы (8.20) принимают вид

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases} \qquad (8.22)$$

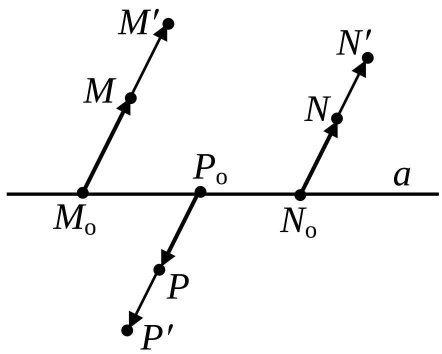


рис. 8.38

Так как f не является тождественным, то $k \neq 1$. Число k называется *коэффициентом сжатия* (при $|k| > 1$ мы будем иметь растяжение). Заметим, что k может быть отрицательным.

Репозиторий ВГУ

Пусть M – произвольная точка плоскости, M' – её образ, а $M_o = MM' \cap a$ (рис. 8.38). Тогда f действует по правилу: $\overrightarrow{M_oM'} = k\overrightarrow{M_oM}$. Действительно, если в выбранном репере $M(x, y)$, то $M'(x, ky)$, $M_o(x, 0)$. Поэтому $\overrightarrow{M_oM}\,(0, y)$, $\overrightarrow{M_oM'}(0, ky)$. Тем самым, каждая точка становится в $|k|$ раз дальше от оси, при этом все точки смещаются по параллельным прямым. При отрицательном k точка переходит в другую полуплоскость относительно оси.

***Определение* 8.29.** Если $k = -1$, то косое сжатие плоскости называется *косой симметрией*. Если направление сжатия перпендикулярно оси a, то косое сжатие плоскости называется *сжатием к прямой* a, или *сжатием вдоль прямой* $l \perp a$.

Формулы сжатия к прямой имеют вид (8.21) в ортонормированном репере.

§ 11. *Приложение преобразований плоскости к решению задач на доказательство*

***Задача* 1.** *Даны прямая a и две точки A, B, лежащие по одну сторону от этой прямой. Доказать, что существует единственная точка $M_o \in a$, такая, что*

$$|AM_o| + |BM_o| < |AM| + |BM| \qquad (8.23)$$

для любой другой точки $M \in a$.

Решение. Пусть s – симметрия относительно прямой a, $B' = s(B)$. Тогда для любой точки $M \in a$ выполнено

$$|AM| + |BM| = |AM| + |B'M|.$$

(рис. 8.39). Пусть $M_o = AB \cap a$. Тогда для любой точки $M \in a$ выполнено

$$AM_o + B'M_o < AM + B'M,$$

а значит, имеет место (8.23).

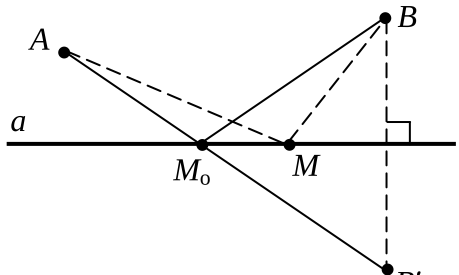


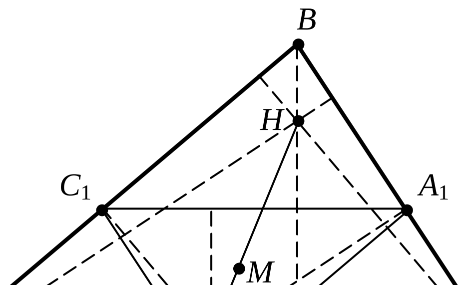
рис. 8.39

***Задача* 2.** *Пусть ΔABC не является равнобедренным, M – точка пересечения медиан, H – точка пересечения высот, O – центр описанной окружности. Доказать, что M делит отрезок OH в отношении* $1:2$.

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника ABC (рис. 8.40). Тогда $\Delta A_1B_1C_1$ состоит из средних линий треугольника ABC. Пусть g – гомотетия с центром M и коэффициентом –1/2. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 делятся точкой M в отношении 2:1. Поэтому

$g(A) = A_1, g(B) = B_1, \quad g(C) = C_1$,

т.е. $g(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$.



Репозиторий ВГУ

Гомотетия сохраняет углы между прямыми. Поэтому высоты треугольника ABC переходят в высоты $\Delta A_1B_1C_1$, а эти высоты служат серединными перпендикулярами для ΔABC. Значит, точка H пересечения высот переходит в точку пересечения серединных перпендикуляров, т.е. в точку O.

Согласно определению гомотетии $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}$, а это и означает, что точка M делит отрезок OH в отношении $1:2$. ■

Следствие. *Точки H, M, O лежат на одной прямой, которая называется прямой Эйлера.*

***Задача* 3.** *Точка B лежит на отрезке AC. По одну сторону от прямой AC построены правильные треугольники ABD и BCE. Точка M – середина отрезка AE, N – середина DC. Докажите, что ΔBMN – правильный* (рис. 8.41).

Решение. Рассмотрим поворот h на угол $60°$ вокруг точки B. Тогда точка A переходит в D, а точка E – в точку C. Значит, отрезок AE переходит в отрезок DC, а точка M – в точку N. Поэтому при повороте отрезок BM переходит в отрезок BN, т.е. эти отрезки равны и угол между ними равен $60°$.

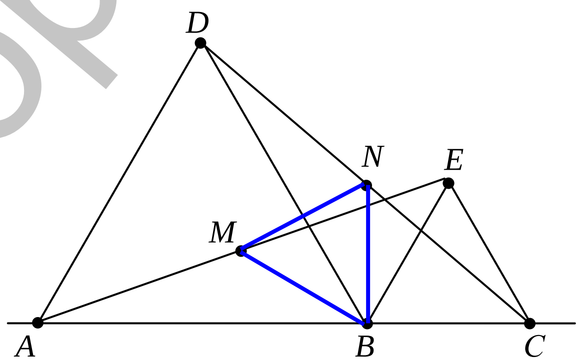


рис. 8.41

***Задача* 4.** *Пусть $ABCD$ – произвольная трапеция, S – точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, M – точка пересечения диагоналей, E и F – середины оснований. Докажите, что точки S, M, E, F лежат на одной прямой.*

Решение. Рассмотрим косое сжатие плоскости с осью ES, при котором точка A переходит в точку D. Поскольку E – середина отрезка AB, то коэффициент сжатия равен -1, т.е. f – косая симметрия. Точка S остаётся неподвижной, поэтому прямая AS переходит в прямую DS, а точка B переходит в точку C (согласно

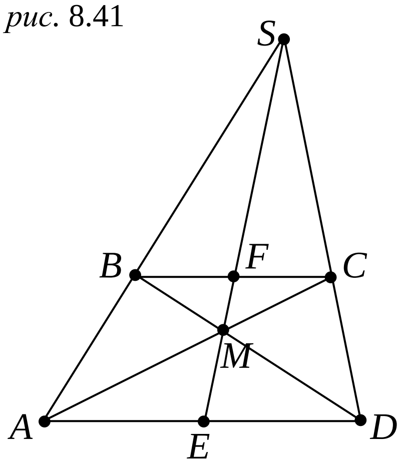


рис. 8.42

Репозиторий ВГУ

свойству 2 перспективно-аффинного преобразования). Так как f – косая симметрия, то $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FC}$, и также $f(C) = B$. Значит, прямая AC переходит в прямую DB, а следовательно, точка M их пересечения лежит на оси преобразования.

§ 12. *Группа движений плоскости Минковского*

В §6 главы 7 мы уже приводили определение четырёхмерного пространства Минковского. В этом параграфе мы рассмотрим группу движений двумерного пространства Минковского.

***Определение* 8.30.** Пусть в некотором базисе $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2)$ на плоскости скалярное произведение векторов $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2)$ задаётся формулой

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 - a_2 b_2. \tag{8.24}$$

Тогда плоскость вместе с таким скалярным произведением векторов называется *плоскостью Минковского*.

Заметим, что по этой формуле $\vec{\mathbf{e}}_1^{\,2} = 1$, а $\vec{\mathbf{e}}_2^{\,2} = -1$, а для вектора $\vec{\mathbf{x}}(1, 1)$ выполнено $\vec{\mathbf{x}}^2 = 0$. Таким образом, на плоскости Минковского существуют ненулевые векторы, квадрат которых отрицателен или равен нулю.

Напомним, что вектор $\vec{\mathbf{x}}$ называется *пространственноподобным*, если $\vec{\mathbf{x}}^2 > 0$, *времениподобным*, если $\vec{\mathbf{x}}^2 < 0$, и *изотропным*, если $\vec{\mathbf{x}}^2 = 0$.

Условие изотропности вектора $\vec{\mathbf{x}}(x_1, x_2)$ имеет вид:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Пусть l_1 и l_2 – прямые, которые задаются уравнениями

$$l_1:\ \ x_1 - x_2 = 0, \qquad l_2:\ \ x_1 + x_2 = 0.$$

(рис. 8.43). Тогда все изотропные векторы коллинеарны этим прямым; а если отложить изотропный вектор из начала координат, то он будет лежать на одной из этих прямых. Прямые l_1 и l_2 образуют две пары вертикальных углов. В одной из этих пар будут лежать времениподобные векторы (если отложить их от начала координат), а в другой – пространственноподобные.

Ортогональность векторов понимается так же, как и в евклидовом пространстве: $\vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{y}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = 0$.

***Определение* 8.31.** *Движением плоскости Минковского* называется её преобразование, сохраняющее скалярное произведение векторов.

Очевидно, что параллельные переносы и симметрии относительно координатных осей будут движениями плоскости Минковского.

***Определение* 8.32.** Преобразование, действующее по формуле

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cdot \operatorname{ch} t + x_2 \cdot \operatorname{sh} t, \\ x_2' = x_1 \cdot \operatorname{sh} t + x_2 \cdot \operatorname{ch} t, \quad t \in \boldsymbol{R}, \end{cases} \tag{8.25}$$

называется *гиперболическим поворотом*. Пусть вектор $\vec{\mathbf{y}}(x_1', x_2')$ получен гиперболическим поворотом вектора $\vec{\mathbf{x}}(x_1, x_2)$. Тогда

$$\vec{\mathbf{y}}^2 = (x_1 \cdot \operatorname{ch} t + x_2 \cdot \operatorname{sh} t)^2 - (x_1 \cdot \operatorname{sh} t + x_2 \cdot \operatorname{ch} t)^2 =$$
$$= x_1^2(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t) - x_2^2(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t) = x_1^2 - x_2^2 = \vec{\mathbf{x}}^2.$$

Таким образом, гиперболический поворот сохраняет скалярный квадрат вектора. Скалярное произведение векторов можно выразить через скалярный квадрат:

$$\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}} = \frac{1}{2}((\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}})^2 - \vec{\mathbf{x}}^2 - \vec{\mathbf{y}}^2).$$

Поэтому гиперболический поворот сохраняет скалярное произведение т.е. является движением плоскости Минковского.

Примем без доказательства, что *произвольное движение плоскости Минковского является композицией гиперболического поворота, параллельного переноса и, возможно, симметрии относительно одной из координатных осей.*

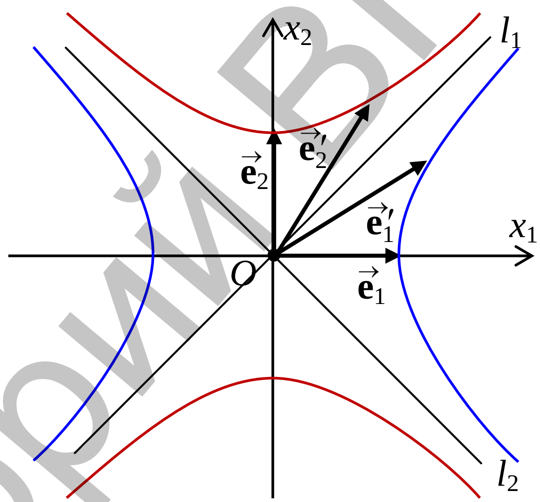


рис. 8.43

Из (8.25) следует, что при гиперболическом повороте базисные векторы $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ переходят в векторы $\vec{\mathbf{e}}_1'(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)_{\mathcal{B}}, \vec{\mathbf{e}}_2'(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)_{\mathcal{B}}$. Если отложить $\vec{\mathbf{e}}_1'$ от начала координат и начать изменять t, то его конец опишет одну ветвь гиперболы (рис. 8.43). Аналогично $\vec{\mathbf{e}}_2'$ опишет одну ветвь сопряженной гиперболы. Прямые l_1 и l_2 являются общими асимптотами этих гипербол.

Определение **8.33.** Все движения плоскости Минковского образуют группу, которая называется *группой преобразований Лоренца*. Один из вариантов её обозначения: $E(1,1)$.

§ 13. *Инверсия*

Определение **8.34.** Пусть $\omega = (O, r)$ – некоторая окружность на плоскости. Обозначим $X = \boldsymbol{R}^2 \setminus \{O\}$ – плоскость без точки O. Пусть $M \in X$ – любая точка. Сопоставим ей точку M' на луче OM, такую, что

$$|OM| \cdot |OM'| = r^2. \tag{8.26}$$

Репозиторий ВГУ

Получим преобразование $i: X \to X$ множества X, которое называется *инверсией относительно* ω. Точка O называется *центром инверсии*, число r^2 – *степенью инверсии*.

Из определения (8.26) непосредственно вытекает *свойство взаимности для инверсии*: если $M' = i(M)$, то $M = i(M')$. По другому это означает, что $i^{-1} = i$, т.е. инверсия является сама к себе обратным преобразованием. По аналогии все преобразования плоскости, которые обладают свойством, называются *инверсными*. Примерами инверсных преобразований являются центральная и осевая симметрии.

Покажем, как на чертеже построить инверсию данной точки.

1 *случай*. Точка M лежит вне окружности ω. Построим касательные MN и MP к ω. Тогда $M' = PQ \cap OM$.

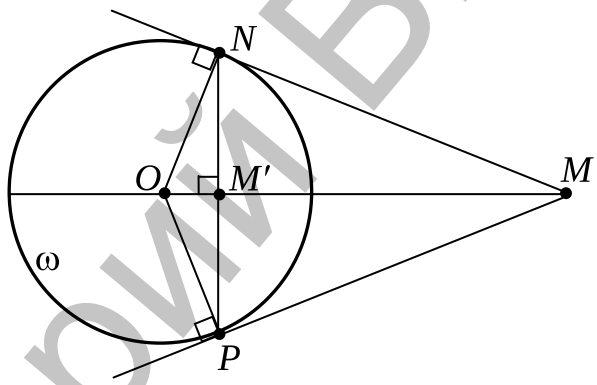


рис. 8.44

Действительно, треугольник OMN является прямоугольным, а NM' – высота, проведённая к гипотенузе. По свойству высоты треугольники $OM'N$ и OMN подобны. Отсюда получаем, что

$$|OM'|:|OP| = |OP|:|OM| \iff |OM| \cdot |OM'| = OP^2 = r^2.$$

2 *случай*. Точка M лежит внутри ω. Построим хорду NP, проходящую через M, перпендикулярно к OM, затем касательные l_1 и l_2 к окружности, проходящие через N и P. Тогда $M' = l_1 \cap l_2$. Можно построить только одну касательную l_1. Тогда $M' = l_1 \cap OM$.

Найдём формулы, по которым действует инверсия. Для этого зададим на плоскости декартову СК Oxy, у которой начало координат совпадает с центром окружности. Пусть $M(x, y)$, $M'(x', y') = i(M)$. Тогда согласно определению $\overrightarrow{OM}(x, y) || \overrightarrow{OM'}(x', y')$. По первому признаку коллинеарности векторов это значит, что выполнено $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$ для некоторого числа λ. В координатах имеем

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y.$$

Вычислим значение λ. Поскольку $\overrightarrow{OM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OM'}$, то $\lambda > 0$ и

$$\lambda = \frac{|OM'|}{|OM|} = \frac{r^2}{|OM|} : |OM| = \frac{r^2}{|OM|^2} = \frac{r^2}{x^2 + y^2}.$$

Окончательно получаем

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2+y^2}. \tag{8.27}$$

Из свойства взаимности инверсии немедленно получаем обратные формулы:

$$x = \frac{r^2 x'}{x'^2+y'^2}, \quad y = \frac{r^2 y'}{x'^2+y'^2}. \tag{8.28}$$

В дальнейшем везде O – центр инверсии, и предполагается, что все прямые и окружности, проходящие через O, не включают в себя саму точку O.

***Теорема* 8.6. а)** *При инверсии прямая, проходящая через O, переходит в себя*;

б) *прямая, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O.*

Доказательство. **а)** Это утверждение вытекает сразу из определения инверсии.

б) Пусть l – прямая, не проходящая через O. Тогда она задаётся общим уравнением $Ax+By+C=0$, где $C \neq 0$. Разделим это уравнение на C и получим уравнение вида

$$ax+by+1=0.$$

Подставим сюда замену (8.28) и умножим на $x'^2+y'^2$:

$$x'^2+y'^2+(Ar^2)x'+(Br^2)y'=0. \tag{8.29}$$

С помощью выделения полных квадратов легко убедиться, что это уравнение задаёт окружность γ. Этому уравнению удовлетворяют координаты $(0,0)$, и поэтому окружность γ проходит через O. ■

Если прямая l имеет с ω непустое пересечение, то построить её образ γ на чертеже очень просто.

Пусть $\{N,P\}=\omega \cap l$. Тогда γ – это окружность, проходящая через три точки N, P, O (рис. 8.45). Отметим сразу, что центр C окружности γ лежит на продолжении перпендикуляра, опущенного из O на прямую l.

Пусть l касается ω в одной точке P. Тогда центр C окружности γ лежит на середине отрезка OP, а её радиус равен $r/2$ (рис. 8.46).

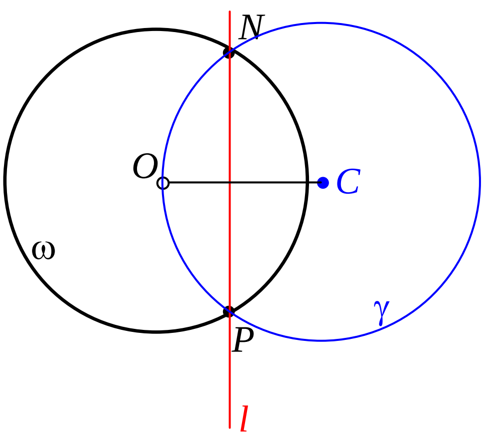


рис. 8.45

Репозиторий ВГУ

Пусть l не пересекает ω. Тогда мы опустим перпендикуляр OD на прямую l, найдём инверсию точки D: $F=i(D)$. Тогда C – середина OF и $\gamma=(C, CO)$ (рис. 8.47). Но тут мы неявно использовали пока ещё недоказанное утверждение, что C лежит на перпендикуляре OD.

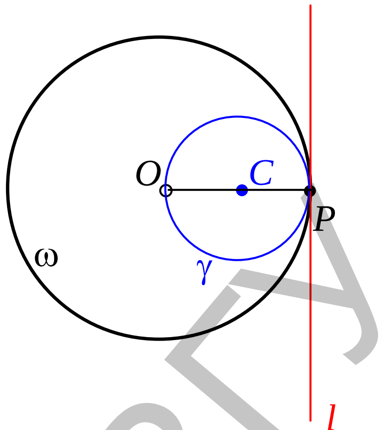


рис. 8.46

Во-первых, это утверждение вытекает из соображений симметрии: при симметрии относительно прямой OD прямая l и окружность ω переходят в себя, значит и γ тоже должна переходить в себя.

Во-вторых, мы можем найти из уравнения (8.29) координаты центра $C(-Ar^2/2, -Br^2/2)$. Тогда вектор $\vec{CO}$ $(Ar^2/2,\ Br^2/2)$ коллинеарен вектору нормали $\vec{\mathbf{n}}(A, B)$ к прямой l.

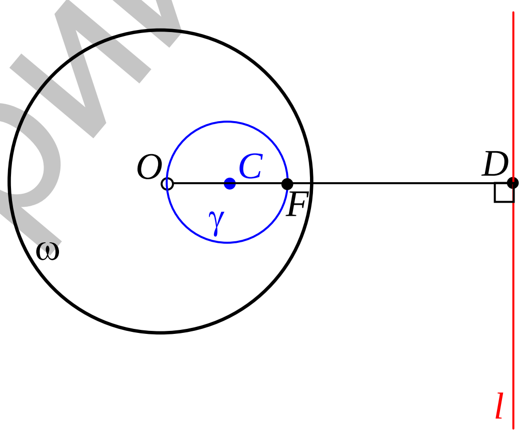


рис. 8.47

***Теорема* 8.7.** **а)** *При инверсии окружность, проходящая через O, переходит в прямую, не проходящую через O;*

б) *Окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O; при этом O лежит на одной прямой вместе с центрами этих окружностей.*

Доказательство. **а)** Это утверждение вытекает сразу из теоремы 8.6 и свойства взаимности для инверсии.

Пусть γ – окружность, не проходящая через O, и

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \text{ –} \tag{8.30}$$

её уравнение. Тогда $C\neq 0$. Сделаем в этом уравнении подстановку (8.28):

$$\left(\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2+\left(\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2+A\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}+B\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}+C=0.$$

Умножим это уравнение на $x'^2+y'^2$:

$$\frac{r^4x'^2+r^4y'^2}{x'^2+y'^2}+Ar^2x'+Br^2y'+C(x'^2+y'^2)=0.$$

Репозиторий ВГУ

Поскольку $C\neq 0$ мы можем разделить уравнение на C:

$$x'^2+y'^2+\frac{Ar^2}{C}x'+\frac{Br^2}{C}y'+\frac{r^4}{C}=0.$$

Это уравнение задаёт окружность γ' с центром в точке $\left(-\frac{Ar^2}{2C},-\frac{Br^2}{2C}\right)$. Окружность γ имеет центр $(-A/2,-B/2)$. Обе эти точки лежат на прямой $Bx-Ay=0$, которая проходит через O. ■

***Теорема* 8.8.** *Пусть* γ_1 *– окружность или прямая,* γ_2 *– окружность;* $\gamma'_1=i(\gamma_1)$, $\gamma'_2=i(\gamma_2)$ *– их образы. Если* γ_1 *и* γ_2 *касаются друг друга в точке* $M\neq O$, *то* γ'_1 *и* γ'_2 *тоже касаются друг друга в точке* $M'=i(M)$.

Доказательство. Если γ_1 и γ_2 касаются друг друга в точке M, то M – это их единственная общая точка. Значит, M' – это единственная общая точка для γ'_1 и γ'_2. ■

***Определение* 8.35.** *Углом между двумя кривыми* называется угол между касательными к ним в точке пересечения.

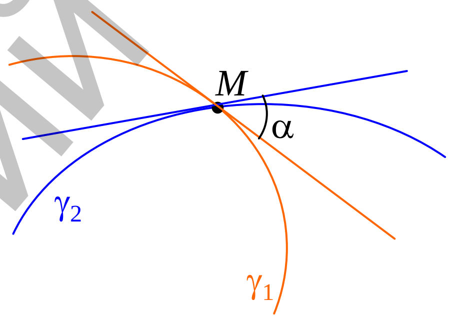


рис. 8.48

***Определение* 8.36.** Пусть $f:\pi\to\pi$ – преобразование плоскости. Если для любых кривых γ_1 и γ_2 угол между ними в точке $M=\gamma_1\cap\gamma_2$ равен углу между их образами $\gamma'_1=f(\gamma_1)$, $\gamma'_2=f(\gamma_2)$ в точке $M'=\gamma'_1\cap\gamma'_2$, то говорят, что преобразование f *сохраняет углы между кривыми*. Такое преобразование называется *конформным*.

***Теорема* 8.9.** *Инверсия является конформным преобразованием* (без доказательства).

Замечание. Преобразование множества $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ (комплексной плоскости с выколотой точкой 0), действующее по формуле $f(z)=r^2/\bar{z}$ в точности совпадает с инверсией относительно окружности, задаваемой уравнением $|z|=r$.

§ 14. *Примеры решения задач*

***Задача* 1.** *Найдите образы точки* $A(10,9)$:

а) *при симметрии относительно прямой* $l: x+3y-17=0$;

б) *при повороте на угол* $\alpha<\pi$, *тангенс которого равен* 4/3 *вокруг точки* $O'(2,3)$;

в) *при последовательном выполнении этих двух преобразований.*

Репозиторий ВГУ

Решение. **а)** ***Первый способ решения*** мы уже разбирали в задаче 3 главы 2. Геометрический смысл коэффициентов A и B в общем уравнении прямой $Ax+By+C=0$ – это координаты вектора нормали к прямой: $\vec{\mathbf{n}}$ (A, B). В нашем случае мы делаем вывод, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(1,3)$ перпендикулярен прямой l. Пусть h – это прямая, перпендикулярная к l. Тогда для неё вектор $\vec{\mathbf{n}}(1,3)$ будет направляющим. Поэтому уравнение прямой h:

$$\begin{cases} x = 10 + t, \\ y = 9 + 3t. \end{cases}$$

Находим координаты точки D пересечения прямых l и h:

$$10 + t + 3(9+3t) - 17 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10t + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_D = -2.$$

Подставляем это t в уравнение прямой h и находим координаты точки $D(8, 3)$. Пусть B – точка, симметричная точке A относительно l. Тогда $t_B = 2t_D = -4$. Поэтому $B(6,–3)$.

б) Пусть $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{O'A}$. Тогда его координаты будут при повороте преобразовываться так же, как и координаты точки при повороте на тот же угол вокруг начала координат. Находим $\sin\alpha = 4/5$, $\sin\alpha = 3/5$. Формулы преобразования координат при повороте на угол α вокруг начала координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}(3x - 4y), \\ y = \dfrac{1}{5}(4x + 3y). \end{cases} \tag{8.31}$$

Находим координаты вектора $\vec{\mathbf{a}}(8, 6)$ и подставляем в эти формулы. Находим результат поворота: $\vec{\mathbf{c}}(0,10)$. Если точка C получена поворотом точки A вокруг O', то $\overrightarrow{O'C} = \vec{\mathbf{c}}$. Поэтому $C(2,13)$.

в) После выполнения первого преобразования мы получаем точку $B(6,–3)$. Находим координаты вектора $\vec{\mathbf{b}}(4,-6)$ и подставляем в формулы (8.25). Находим результат поворота: $\vec{\mathbf{f}}(7{,}2; -0{,}8)$. Если точка F получена поворотом точки A вокруг O', то $\overrightarrow{O'F} = \vec{\mathbf{f}}$. Поэтому $F(9{,}2; 2{,}2)$.

Ответ: $B(6,–3)$, $C(2,13)$, $F(9{,}2; 2{,}2)$.

Второй способ решения пункта **а):** находим длину вектора нормали: $|\vec{\mathbf{n}}| = \sqrt{10}$. Находим расстояние от точки A до прямой l, при этом в числителе формулы убираем модуль (получившуюся величину иногда называют отклонением точки от прямой):

$$h = \frac{10 + 3\cdot 9 - 17}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} = 2|\vec{\mathbf{n}}|.$$

Репозиторий ВГУ

Следовательно, если D – проекция точки A на прямую l (рис. 8.49), то $\overrightarrow{DA} = 2\vec{\mathbf{n}}$, а если B – симметричная к A точка, то

$$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{DA} = 4\vec{\mathbf{n}}.$$

Значит, $\overrightarrow{BA}(4,\ 12)$. Вычитая эти координаты из координат точки A, находим $B(6,–3)$.

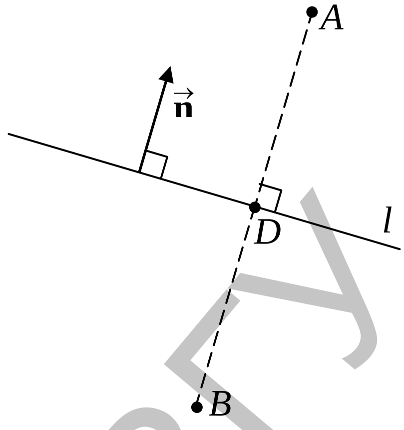


рис. 8.49

Третий способ решения пункта **а)** заключается в том, что мы сначала составляем формулы симметрии относительно данной прямой l, а затем подставляем координаты точки A в эти формулы.

Каким образом составляются формулы осевой симметрии, будет показано в следующей задаче.

***Задача* 2.** *Составить формулы, по которым действуют*:

а) *симметрия относительно прямой* $l: x + 2y - 3 = 0$;

б) *скользящая симметрия, которая определяется осью* l *и вектором* $\vec{\mathbf{p}}(4,–2)$.

Решение. **а)** Осевая симметрия – это преобразование второго рода. Оно действует по формулам

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha + x_o, \\ y' = x\cdot\sin\alpha - y\cdot\cos\alpha + y_o. \end{cases} \tag{8.8}$$

Выберем на прямой l две точки: $A(1,1)$, $B(3,0)$. Симметрия относительно прямой l оставляет эти точки на месте. Подставляем их координаты в (8.8) вместо (x, y) и вместо (x', y'):

$$\begin{cases} 1 = \cos\alpha + \sin\alpha + x_o, \\ 1 = \sin\alpha - \cos\alpha + y_o, \\ 3 = 3\cdot\cos\alpha + x_o, \\ 0 = 3\cdot\sin\alpha + y_o. \end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения третье, а из второго – четвёртое:

$$\begin{cases} -2 = -2\cdot\cos\alpha + \sin\alpha, \\ \ \ 1 = -2\cdot\sin\alpha - \cos\alpha. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $\sin\alpha = -0{,}8$, $\cos\alpha = 0{,}6$. Подставим эти значения в третье и четвёртое уравнения. Получаем $x_o = 1{,}2$; $y_o = 2{,}4$. Найденные значения подставляем в (8.7):

$$\begin{cases} x' = \ \ 0{,}6x - 0{,}8y + 1{,}2, \\ y' = -0{,}8x - 0{,}6y + 2{,}4. \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

б) Для того чтобы получить уравнение скользящей симметрии, мы добавим в последнюю систему координаты вектора $\vec{\mathbf{p}}$:

$$\begin{cases} x' = 0{,}6x - 0{,}8y + 5{,}2\,, \\ y' = -0{,}8x - 0{,}6y + 0{,}4\,. \end{cases}$$

В качестве ответа следует привести две последние системы.

***Задача* 3.** *Докажите, что преобразование, которое задаётся формулами*

$$f\colon \begin{cases} x' = 15x + 8y + 2\,, \\ y' = -8x + 15y + 36, \end{cases}$$

является подобием. В композицию каких двух основных преобразований оно раскладывается?

Решение. Составим матрицу данного преобразования:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу $\mathbf{A}$ на транспонированную матрицу:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 289 & 0 \\ 0 & 289 \end{pmatrix} = 17^2\mathbf{E}.$$

Значит, матрица пропорциональна ортогональной матрице с коэффициентом 17. Следовательно, f – подобие с коэффициентом $k = 17$. Поскольку $\det\mathbf{A} > 0$, то f – подобие первого рода. Следовательно, f действует по формулам

$$\begin{cases} x' = kx\cdot\cos\alpha - ky\cdot\sin\alpha + x_1, \\ y' = kx\cdot\sin\alpha + ky\cdot\cos\alpha + y_1. \end{cases} \tag{8.13}$$

Сравнивая с формулами, данными по условию задачи, находим, что

$$k\cdot\cos\alpha = 15,\ -k\cdot\sin\alpha = 8 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{15}{17},\ \sin\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Значит, α – угол из IV четверти, т.е. $\alpha = -\arcsin\dfrac{8}{17}$.

Любое подобие имеет единственную неподвижную точку. Найдём её координаты. Для этого в формулах преобразования заменим x', y' на x, y и решим получившуюся систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x = 15x + 8y + 2\,, \\ y = -8x + 15y + 36. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 8y = -2\,, \\ -8x + 14y = -36. \end{cases}$$

Решаем эту систему любым способом и находим, что $x = 1$, $y = -2$. Мы выяснили, что $M_o(1,-2)$ – неподвижная точка.

Репозиторий ВГУ

Ответ: Преобразование f является подобием 1 рода и раскладывается в композицию гомотетии с центром $M_o(1,-2)$ и коэффициентом 17, а также поворота с центром M_o на угол $\alpha = -\arcsin\dfrac{8}{17}$.

Задача 4. *Аффинное преобразование плоскости переводит точки* $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(1,\ 1)$ *соответственно в точки* $A'(-4,\ 14)$, $B'(5,\ 15)$, $C'(3, 16)$. *Составить формулы, по которым действует данное преобразование.*

Решение. Общие формулы аффинного преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2. \end{cases} \tag{8.16}$$

Подставляем в эти формулы попарно координаты точек A и A', B и B', C и C', получаем систему, состоящую из 6 линейных уравнений.

$$\begin{cases} -4 = 2a_{11} + 0a_{12} + a_1, \\ 14 = 2a_{21} + 0a_{22} + a_2 \\ 5 = 0a_{11} + 1a_{12} + a_1, \\ 15 = 0a_{21} + 1a_{22} + a_2, \\ 3 = 1a_{11} + 1a_{12} + a_1, \\ 16 = 1a_{21} + 1a_{22} + a_2. \end{cases} \tag{8.32}$$

В качестве неизвестных здесь выступают 6 коэффициентов из системы (8.16). При этом в первом, третьем и пятом уравнениях будут одни неизвестные, а во втором, четвёртом и шестом – другие. Тем самым, система (8.26) распадается на две отдельные системы, в каждой из которых будет по три уравнения и три неизвестных.

$$\begin{cases} 2a_{11} \quad + a_1 = -4, \\ \quad a_{12} + a_1 = 5, \\ a_{11} + a_{12} + a_1 = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_{12} \quad + a_2 = 14, \\ \quad a_{22} + a_2 = 15, \\ a_{21} + a_{22} + a_2 = 16. \end{cases}$$

Методы решения таких систем изучаются в курсе алгебры. Поэтому приводим сразу ответ.

Ответ: $\begin{cases} x' = -2x + 5y, \\ y' = x + 3y + 12. \end{cases}$

Задача 5. *Даны два аффинных преобразования, действующие по формулам*

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 7, \\ y' = 5x + 3y - 12. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \quad 3x + 8, \\ y' = -4x + 3y - 9. \end{cases}$$

а) *Найдите формулы, по которым действуют преобразования* $f \circ g$ *и* $g \circ f$.

б) *Найдите формулы преобразования* f^{-1}.

Репозиторий ВГУ

Решение. **а)** Запишем данные преобразования в матричном виде:

$$f:\ \mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}, \qquad g:\ \mathbf{X}' = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},\quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Запись $f \circ g$ означает, что первым действует преобразование g. Поэтому мы должны формулу преобразования g подставить в формулу преобразования f. Для того чтобы подстановка стала более понятной, мы в формуле того преобразования, которое действует позже, добавляем по одному штриху: $f: \mathbf{X}'' = \mathbf{A}\mathbf{X}' + \mathbf{B}$. Тогда матричная запись преобразования

$$f \circ g:\quad \mathbf{X}'' = \mathbf{A}(\mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}) + \mathbf{B} = (\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{X} + (\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{B}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В развёрнутом виде, опуская лишний штрих слева, получаем:

$$f \circ g:\ \begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 3x + 9y + 1. \end{cases}$$

Формулы преобразования $g \circ f$ составим с помощью непосредственной подстановки, без использования матриц. Поскольку вторым действует преобразование g, мы в его формуле добавим по одному штриху ко всем координатам.

$$g:\begin{cases} x'' = \ \ 3x' + 8, \\ y'' = -4x' + 3y' - 9. \end{cases}$$

Теперь подставляем в эти формулы выражения для x' и y' из формул преобразования f.

$$g \circ f:\ \begin{cases} x'' = 3(2x + y - 7) + 8 = 6x + 3y - 13, \\ y'' = -4(2x + y - 7) + 3(5x + 3y - 12) - 9 = -7x + 5y - 17. \end{cases}$$

Для получения окончательного ответа остаётся опустить по одному штриху слева.

б) Из матричной записи преобразования f находим, что

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}' - \mathbf{B}). \tag{8.33}$$

Находим обратную матрицу.

$$A_{11} = 3,\quad A_{12} = -5,$$

$$A_{21} = -1,\ A_{22} = 2;$$

$$\det \mathbf{A} = 1;$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Репозиторий ВГУ

Подставляем её в формулу (8.27):

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' + 7 \\ y' + 12 \end{pmatrix}.$$

В развёрнутом виде:

$$\begin{cases} x = \ 3(x' + 7) - (y' + 12) = 3x' - y' - 9\,, \\ y = -5(x' + 7) + 3(y' + 12) = -5x' + 3y' + 1\,. \end{cases}$$

***Ответ*:**

$$f \circ g: \begin{cases} x' = 2x + 3y\,, \\ y' = 3x + 9y + 1. \end{cases} \quad g \circ f: \begin{cases} x' = x + 3y - 13\,, \\ y' = -7x + 5y - 17\,. \end{cases} \quad f^{-1}: \begin{cases} x = 3x' - y' - 9\,, \\ y = -5x' + 3y' + 1\,. \end{cases}$$

***Задача* 6.** *Докажите, что аффинное преобразование*

$$f: \begin{cases} x' = 2{,}5x - y + 4\,, \\ y' = -x + y\,, \end{cases}$$

имеет инвариантную прямую и найдите её уравнение.

Решение.* 1 *способ. Пусть $Ax + By + C = 0$ – уравнение искомой прямой l. Заменим в нём (x, y) на (x', y') и подставим вместо них выражения из формул преобразования:

$$A(2{,}5x - y + 4) + B(-x + y) + C = 0\,,$$

$$(2{,}5A - B)x + (-A + B)y + (4A + C) = 0\,. \qquad (8.34)$$

Получившееся уравнение задаёт множество, которое должно перейти в прямую l под действием преобразования f. Но это множество и есть прямая l, т.е. уравнение (8.28) должно тоже задавать прямую l. Согласно признаку совпадения прямых (теорема 2.2) имеем

$$\frac{2{,}5x - y + 4}{A} = \frac{-A + B}{B} = \frac{4A + C}{C} \quad \Leftrightarrow \quad 2{,}5 - \frac{B}{A} = -\frac{A}{B} + 1 = 4\frac{A}{C} + 1\,. \qquad (8.35)$$

Обозначим $t = A/B$ и из первого равенства находим:

$$2{,}5 - \frac{1}{t} = -t + 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 + 1{,}5t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -2,\ t_2 = 0{,}5.$$

Так как коэффициенты в уравнении прямой определяются с точностью до пропорциональности, мы можем взять любые A и B, удовлетворяющие данным условиям: $A_1 = 2$, $B_1 = -1$; $A_2 = 1$, $B_2 = 2$. Тогда из второго равенства в (8.29) находим:

$$3 = 4\frac{2}{C} + 1 \qquad \text{или} \qquad 0{,}5 = 4\frac{1}{C} + 1$$

$$C_1 = 4,\ C_2 = -8\,.$$

***Ответ*:** Данное аффинное преобразование имеет две инвариантные прямые: $l_1: 2x - y + 4 = 0$, $l_2: x + 2y - 8 = 0$.

<u>2 способ</u>. Найдём сначала неподвижную точку данного преобразования:

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} x = 2{,}5x - y + 4, \\ y = -x + y, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1{,}5x - y = -4, \\ -x = 0, \end{cases}$$

Значит, $M_0(0, 4)$ – неподвижная точка. Найдём собственные векторы данного преобразования. Для этого составим сначала его матрицу $\mathbf{A}$, затем матрицу $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$. После чего составим характеристическое уравнение и найдём его корни.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2{,}5-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (2{,}5 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 3{,}5\lambda + 1{,}5.$$

$$\lambda^2 - 3{,}5\lambda + 1{,}5 = 0.$$

Из этого уравнения находим собственные числа преобразования: $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 3$. Затем находим соответствующие собственные векторы.

$$\mathbf{A} - 0{,}5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} 2x - y = 0, \\ -x + 0{,}5y = 0, \end{cases} \qquad \vec{\mathbf{a}}(1, 2);$$

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} 0{,}5x + y = 0, \\ x + y = 0, \end{cases} \qquad \vec{\mathbf{b}}(2, -1).$$

При составлении второй системы уравнений мы сразу поменяли знаки. Инвариантные прямые проходят через точку $M_0(0, 4)$, а векторы $\vec{\mathbf{a}}(1, 2)$ и $\vec{\mathbf{b}}(2, -1)$ являются для них направляющими. Поэтому их канонические уравнения имеют вид:

$$l_1: \ \frac{x}{1} = \frac{y-4}{2}, \qquad l_2: \ \frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1}.$$

Преобразуя эти уравнения к общему виду, получим тот же ответ.

***Задача* 6′.** *Найдите все инвариантные прямые преобразования*

$$f: \begin{cases} x' = 2x - 3y + 3, \\ y' = -2x + 7y - 6, \end{cases}$$

К какому типу аффинных преобразований оно относится?

Решение. Находим неподвижные точки данного преобразования:

$$\begin{cases} x = 2x - 3y + 3, \\ y = -2x + 7y - 6, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 3y = -3, \\ -2x + 6y = 6, \end{cases}$$

Мы видим, что уравнения пропорциональны, т.е. система имеет бесконечное количество решений. Координаты всех неподвижных точек удовлетворяют уравнению $x - 3y = -3$, т.е. все неподвижные точки образуют прямую

$$l_1: \ x - 3y + 3 = 0.$$

Репозиторий ВГУ

Мы уже можем сказать, что f – перспективно аффинное преобразование с осью l_1, и мы видим, что вектор нормали к l_1 есть $\vec{\mathbf{n}}_1(1,-3)$. Найдём собственные числа данного преобразования:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -2 & 7-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=(2-\lambda)(7-\lambda)-6=\lambda^2-9\lambda+8.$$

$$\lambda^2-9\lambda+8=0.$$

Из этого уравнения находим собственные числа преобразования: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=8$. Затем находим соответствующие собственные векторы.

$$\mathbf{A}-1\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x-3y=0, \\ -2x+6y=0. \end{cases} \qquad \vec{\mathbf{a}}(3,1);$$

$$\mathbf{A}-8\mathbf{E}=\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} 6x+3y=0, \\ 2x+y=0. \end{cases} \qquad \vec{\mathbf{b}}(1,-2).$$

Очевидно, что найденный вектор $\vec{\mathbf{a}}$ перпендикулярен вектору $\vec{\mathbf{n}}_1$, т.е. $\vec{\mathbf{a}}$ является направляющим вектором прямой l_1. Любая прямая, параллельная вектору $\vec{\mathbf{b}}$, будет инвариантной для преобразования f. Три такие прямые изображены на чертеже (рис. 8.50). Нам надо составить их уравнения. Вектор $\vec{\mathbf{n}}_2(2,1)$ перпендикулярен $\vec{\mathbf{b}}$, и поэтому он является вектором нормали ко всем этим прямым.

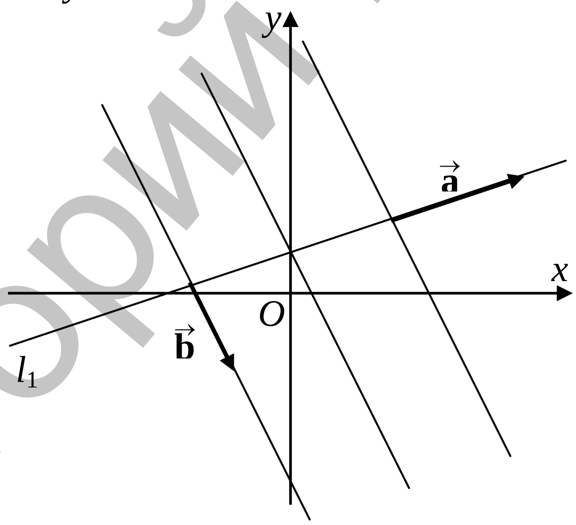


рис. 8.50

Следовательно, уравнение семейства прямых:

$$2x+y+C=0,\ C\in\boldsymbol{R}.$$

Поскольку $\lambda_2=8$, то $f(\vec{\mathbf{b}})=8\vec{\mathbf{b}}$. Поэтому f есть косое сжатие (растяжение) к оси l_1 с коэффициентом $k=8$.

***Ответ*:** Данное аффинное преобразование имеет инвариантную прямую l_1: $x-3y+3=0$ и семейство инвариантных прямых $2x+y+C=0$, $C\in\boldsymbol{R}$. Оно является косым сжатием к оси l_1 с коэффициентом $k=8$.

***Задача* 7.** *Перспективно-аффинное преобразование с осью* l: $x+y=0$ *переводит точку* $A(-3,0)$ *в точку* $A'(3,3)$.

а) *Дать характеристику* (*название*) *данному преобразованию.*

б) *Построить на чертеже образ* B' *точки* $B(-5{,}5;\ 1{,}5)$ *при этом преобразовании.*

в) *Составить формулы, по которым действует данное преобразование. С их помощью проверить правильность построения* B'.

Репозиторий ВГУ

Решение. **а)**, **б)** Изобразим на чертеже ось l и точки A, A'. Пусть $C = AA' \cap l$. Мы видим по чертежу, что $C(-1,\ 1)$ и $\overrightarrow{CA'} = -2\overrightarrow{AC}$. Значит, данное преобразование есть косое сжатие с коэффициентом -2. Проведём прямую $m = AB$. Пусть $D = m \cap l$. Согласно свойству перспективно-аффинного преобразования образ m' прямой m проходит тоже через D. Значит, $m' = CA'$. По свойству перспективно-аффинного преобразования прямые, соединяющие

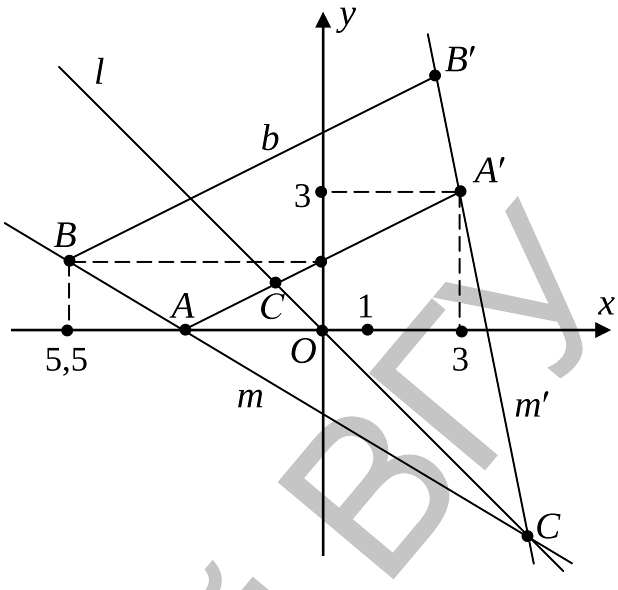


рис. 8.51

соответственные точки перспективно-аффинного преобразования, параллельны. Поэтому строим $b \,||\, AA'$, $B' = m' \cap b$.

в) Любая точка оси перспективно-аффинного преобразования является неподвижной. Поэтому точки $O(0,0)$ и $C(-1,\ 1)$ переходят в себя. Общие формулы аффинного преобразования имеют вид (8.16). Подставляем справа и слева в них по очереди координаты точек O и C, а затем справа координаты A, слева координаты A'. Получаем систему из 6 уравнений, для нахождения неизвестных коэффициентов $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_1, a_2$:

$$\begin{cases} 0 = \ 0a_{11} + 0a_{12} + a_1, \\ 0 = \ 0a_{21} + 0a_{22} + a_2, \\ -1 = -1a_{11} + 1a_{12} + a_1, \\ 1 = -1a_{21} + 1a_{22} + a_2 \\ 3 = -3a_{11} + 0a_{12} + a_1 \\ 3 = -3a_{21} + 0a_{22} + a_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ -a_{11} + a_{12} = -1, \\ -a_{21} + a_{22} = 1 \\ -3a_{11} = 3 \\ -3a_{21} = 3. \end{cases}$$

Отсюда получаем $a_{11} = -1$, $a_{21} = -1$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = 0$. Окончательно формулы данного преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Подставляя сюда координаты $B(-5{,}5;\ 1{,}5)$, находим $B'(2{,}5;\ 5{,}5)$. Это соответствует чертежу.

Ответ: **а)** Данное аффинное преобразование является косым сжатием с коэффициентом $k = -2$; **б)** $B'(2{,}5;\ 5{,}5)$; **в)** $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = -x. \end{cases}$

Репозиторий ВГУ

ГЛАВА 9. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Цель данной главы: изожить метод упрощения уравнений кривых и поверхностей второго порядка путём приведения к диагональному виду квадратичной части уравнения. Для этого нам понадобятся понятия «квадратичная форма» и «самосопряжённый оператор». Понятие оператора, действующего в векторном пространстве, приводится в приложении.

§ 1. *Самосопряжённый оператор*

***Определение* 9.1.** Пусть E^3 – евклидово векторное пространство. Оператор $\mathcal{B}: E^3 \to E^3$ называется *сопряжённым к оператору* $\mathcal{A}: E^3 \to E^3$, если для любых векторов $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in V^3$ выполнено

$$(\mathcal{A}\vec{\mathbf{u}})\cdot\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}\cdot(\mathcal{B}\vec{\mathbf{v}})$$

(точка обозначает скалярное произведение векторов). Тогда обозначаем $\mathcal{B}=\mathcal{A}^*$. Оператор $\mathcal{A}$ *называется самосопряжённым*, если $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$.

Если $\mathbf{A}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ относительно ортонормированного базиса $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$, то матрицей оператора $\mathcal{A}^*$ относительно того же базиса будет $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Поэтому для матрицы самосопряжённого оператора относительно ортонормированного базиса должно быть выполнено $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$. Значит, *матрица самосопряжённого оператора является симметрической* (относительно ОНБ).

Оказывается, что *собственные числа самосопряжённого оператора являются действительными, а собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны друг другу*. Поэтому характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (9.1)$$

для самосопряжённого оператора (т.е. для симметрической матрицы) всегда имеет три действительных корня. Если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. При этом мы в любом случае можем найти 3 линейно независимых собственных вектора оператора $\mathcal{A}$ (это будет показано на примере). Это означает, что существует базис пространства V^3, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Пусть $(\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3)$ – базис в V^3, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – соответствующие собственные числа. Тогда имеем

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} \mathcal{A}\vec{\mathbf{u}}_1 = \lambda_1\vec{\mathbf{u}}_1 \\ \mathcal{A}\vec{\mathbf{u}}_2 = \qquad \lambda_2\vec{\mathbf{u}}_2 \\ \mathcal{A}\vec{\mathbf{u}}_3 = \qquad\qquad \lambda_3\vec{\mathbf{u}}_3 \end{cases}$$

Это означает, что относительно базиса $(\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_3)$ оператор $\mathcal{A}$ имеет диагональную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Поскольку векторы $k\vec{\mathbf{u}}_1$, $l\vec{\mathbf{u}}_2$, $m\vec{\mathbf{u}}_3$ тоже будут собственными для любых ненулевых $k, l, m \in \boldsymbol{R}$, мы можем в качестве базисных выбрать единичные векторы

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \frac{\vec{\mathbf{u}}_1}{|\vec{\mathbf{u}}_1|},\ \vec{\mathbf{e}}_2 = \frac{\vec{\mathbf{u}}_2}{|\vec{\mathbf{u}}_2|},\ \vec{\mathbf{e}}_3 = \frac{\vec{\mathbf{u}}_3}{|\vec{\mathbf{u}}_3|}.$$

Тогда базис $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ будет ортонормированным.

***Пример* 9.1.** *Самосопряжённый оператор* $\mathcal{A}: V^3 \to V^3$ *действует по формулам*:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{i} = \qquad 2\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}, \\ \mathcal{A}\vec{\mathbf{j}} = 2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}, \\ \mathcal{A}\vec{\mathbf{k}} = -\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}}. \end{cases}$$

Путём выбора нового ортонормированного базиса в пространстве V^3 *привести матрицу оператора* $\mathcal{A}$ *к диагональному виду*.

Решение. 1 шаг. Составим матрицу $\mathbf{A}$ оператора $\mathcal{A}$ относительно базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ и матрицу $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

(матрица оператора выписывается по принципу: строчка – в столбец; но в нашем случае матрица симметрическая). Определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ можно вычислить непосредственно, но зачастую это приводит к очень длительным вычислениям. Поэтому удобнее использовать следующую формулу:

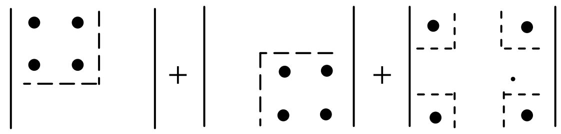
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3 + (\operatorname{tr}\mathbf{A})\lambda^2 - \mathrm{I}_2(\mathbf{A})\lambda + \det\mathbf{A}. \tag{9.3}$$

Здесь $\operatorname{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ – след матрицы $\mathbf{A}$ (т.е. сумма её диагональных элементов), а

$$\mathrm{I}_2(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

Репозиторий ВГУ

сумма диагональных миноров второго порядка матрицы **A**. Схематично последнюю формулу можно изобразить так:

$\mathrm{I}_2(\mathbf{A}) =$ 

В нашем случае находим $\operatorname{tr}\mathbf{A}=0+3+0=3$, $\det\mathbf{A}=5$,

$$\mathrm{I}_2(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

Получаем характеристическое уравнение

$$-\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3-3\lambda^2-9\lambda-5=0. \qquad (9.4)$$

Один из корней мы можем найти подбором: $\lambda_1=-1$. Затем делим характеристический многочлен на $\lambda-\lambda_1$:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3-3\lambda^2-9\lambda-5 & \lambda+1 \\ \cline{2-2} -\ \lambda^3+\lambda^2 \qquad\qquad & \lambda^2-4\lambda-5 \\ \cline{1-1} -4\lambda^2-9\lambda \quad\ & \\ -\ -4\lambda^2-4\lambda \quad\ & \\ \cline{1-1} -5\lambda-5 & \\ -\ -5\lambda-5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Значит, уравнение (9.4) эквивалентно следующему:

$$(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda-5)=0.$$

Теперь находим оставшиеся корни: $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=5$. Мы видим, что у нас есть кратный корень: $\lambda_1=\lambda_2=-1$.

2 шаг. Найдём собственный вектор $\vec{\mathbf{u}}_3$, соответствующий собственному числу $\lambda_3=5$. Для этого составляем матрицу $\mathbf{A}-5\mathbf{E}$ и по ней составляем систему линейных однородных уравнений:

$$\mathbf{A}-5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} -5x+2y-z=0, \\ 2x-2y-2z=0, \\ -x-2y-5z=0. \end{cases}$$

В данном конкретном случае удобно избавиться от неизвестного y, для чего следует второе уравнение прибавить к первому и вычесть его же из третьего уравнения:

$$\begin{cases} -3x-3z=0, \\ 2x-2y-2z=0, \\ -3x-3z=0. \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

Первое и третье уравнения получились одинаковыми, поэтому третье уравнение можем вычеркнуть, первое разделить на –3, а второе разделить на 2:

$$\begin{cases} x+z=0\,, \\ x-y-z=0\,. \end{cases}$$

Мы уже обсуждали пути решения таких систем (см. систему (5.33)). Одну из неизвестных мы можем перенести вправо и придать ей произвольное ненулевое значение (пусть это будет $z=-1$). Затем найдём значения оставшихся неизвестных:

$$\begin{cases} x=1\,, \\ x-y=-1\,, \\ z=-1\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1\,, \\ y=2\,, \\ z=-1\,. \end{cases}$$

Итак, мы нашли $\vec{\mathbf{u}}_3(1,2,-1)$.

3 шаг. Найдём собственные векторы для $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Наша задача: найти для каждого из чисел λ_1 и λ_2 в отдельности свой собственный вектор $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$, так, чтобы эти векторы были перпендикулярны друг другу.

$$\mathbf{A}-(-1)\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x+2y-z=0, \\ 2x+4y-2z=0, \\ -x-2y+z=0. \end{cases}$$

Получившаяся система уравнений имеет ранг 1, т.е. все уравнения системы пропорциональны, поэтому второе и третье уравнения можем вычеркнуть. *В случае самосопряжённого оператора система уравнений, соответствующая двукратному корню, всегда имеет ранг* 1. Итак, у нас есть только одно уравнение:

$$x+2y-z=0\,, \tag{9.5}$$

Подбором мы можем найти $\vec{\mathbf{u}}_1(1,0,1)$, $\vec{\mathbf{u}}_2(0,1,2)$. Тогда общий вид всех собственных векторов, соответствующих $\lambda_1=\lambda_2=-1$, будет

$$\vec{\mathbf{u}}=k\vec{\mathbf{u}}_1+l\vec{\mathbf{u}}_2=(k,\,l,\,k+2l),\ k,l\in\boldsymbol{R}. \tag{9.6}$$

Если бы задача формулировалась так же, как в примере 1 из §10 приложения, то на этом следовало бы закончить. Но для самосопряжённого оператора требуется ещё найти ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов. Поэтому повторимся ещё раз: нам надо найти для каждого из чисел λ_1 и λ_2 в отдельности свой собственный вектор, при этом $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$ должны быть перпендикулярны друг другу. Поэтому мы поступаем так. Только вектор $\vec{\mathbf{u}}_1(1,0,1)$ мы находим подбором. Неизвестный вектор $\vec{\mathbf{u}}_2(x,y,z)$ должен удовлетворять условию (9.6), но *дополнительно должно выполняться условие ортогональности*:

$$\vec{\mathbf{u}}_1(1,0,1)\cdot\vec{\mathbf{u}}_2(x,y,z)=0\,.$$

Репозиторий ВГУ

Итак, $\vec{\mathbf{u}}_2(x, y, z)$ мы находим из системы

$$\begin{cases} x+2y-z=0, \\ \vec{\mathbf{u}}_1(1, 0, 1)\cdot \vec{\mathbf{u}}_2(x, y, z)=0. \end{cases} \tag{9.7}$$

Второе условие в координатах имеет вид $x+z=0$. Поэтому мы имеем систему для нахождения $\vec{\mathbf{u}}_2$:

$$\begin{cases} x+2y-z=0, \\ x \quad + \quad z=0. \end{cases}$$

Находим $y=-x$, $z=-x$. Поэтому можем взять $\vec{\mathbf{u}}_2(1,-1,-1)$.

Теперь нормируем найденные векторы, т.е. мы найдём единичные векторы, коллинеарные найденным собственным векторам:

$$|\vec{\mathbf{u}}_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}, \qquad \vec{\mathbf{e}}_1=\frac{\vec{\mathbf{u}}_1}{|\vec{\mathbf{u}}_1|} \qquad \vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$|\vec{\mathbf{u}}_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}, \qquad \vec{\mathbf{e}}_2=\frac{\vec{\mathbf{u}}_2}{|\vec{\mathbf{u}}_2|} \qquad \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$|\vec{\mathbf{u}}_3|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}, \qquad \vec{\mathbf{e}}_3=\frac{\vec{\mathbf{u}}_3}{|\vec{\mathbf{u}}_3|} \qquad \vec{\mathbf{e}}_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

Ответ**:** Относительно нового базиса, составленного из векторов

$$\vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right), \ \vec{\mathbf{e}}_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right),$$

матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

§ 2. *Билинейная функция и квадратичная форма*

***Определение* 9.2.** Пусть L – векторное пространство. *Билинейной функцией, определённой на* L, называется отображение $f: L\times L\to \boldsymbol{R}$, сопоставляющее каждой паре векторов $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ число $f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$, и при этом линейное по обоим аргументам; т.е. должны выполняться свойства

1. $f(\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})=f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}})+f(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$; $f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}+\vec{\mathbf{z}})=f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})+f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}})$;

2. $f(\lambda\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})=\lambda f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})=f(\vec{\mathbf{x}}, \lambda\vec{\mathbf{y}})$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$.

Билинейная функция называется *симметрической*, если $f(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}})=$ $=f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ $\forall\, \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\in L$.

Репозиторий ВГУ

Пусть L^3 – трёхмерное векторное пространство, $\mathcal{B}=\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ – базис в нём. Пусть $\vec{\mathbf{x}}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{\mathbf{y}}(y_1, y_2, y_3)$ – произвольные векторы. Тогда по свойствам линейности

$$f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = f(x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3\vec{\mathbf{e}}_3,\ y_1\vec{\mathbf{e}}_1 + y_2\vec{\mathbf{e}}_2 + y_3\vec{\mathbf{e}}_3) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j\, f(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j).$$

***Определение* 9.3.** Обозначим $a_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $i, j = 1, 2, 3$. Это числа, которые не зависят от координат векторов $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$, а зависят только от выбора базиса. Они называются *коэффициентами билинейной функции в данном базисе*.

Тогда билинейная функция выглядит так:

$$f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i y_j = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 +$$
$$+ a_{23}x_2y_3 + a_{31}x_3y_1 + a_{32}x_3y_2 + a_{33}x_3y_3.$$

Из коэффициентов билинейной функции составляется матрица, которая называется *матрицей этой билинейной функции в данном базисе*. Если билинейная функция является симметрической, то

$$a_{ji} = f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ij},\ i, j = 1, 2, 3.$$

Это означает, что матрица симметрической билинейной функции является симметрической матрицей. Симметрическая билинейная функция в трёхмерном пространстве выглядит так:

$$f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 +$$
$$+ a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2). \qquad (9.8)$$

В двумерном пространстве:

$$f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1).$$

***Определение* 9.4.** Пусть $f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ – симметрическая билинейная функция. Тогда функция одного векторного аргумента $k: L \to \boldsymbol{R}$, которая определяется формулой $k(\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}})$, называется *квадратичной формой*. При этом билинейная функция $f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ называется *полярной к квадратичной форме* $k(\mathbf{x})$. *Матрицей квадратичной формы* называется матрица полярной ей симметрической билинейной функции.

Для того чтобы узнать, как выглядит квадратичная форма в L^3, надо в (9.8) подставить $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}}$:

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \qquad (9.9)$$

Если квадратичная форма задана в пространстве V^3, где координаты обозначаются (x, y, z), то

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz. \qquad (9.10)$$

Репозиторий ВГУ

Обратим особое внимание на то, что при составлении матрицы квадратичной формы коэффициенты при xy, xz, yz следует делить пополам и каждое из полученных чисел записывается в матрицу дважды. Например, коэффициент a_{12} записывается также и на место с номерами 2, 1:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В матричном виде квадратичную форму (9.9) можно записать так:

$$k(\vec{\mathbf{x}})=X^{\mathrm{T}}\mathbf{A}X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

§ 3. *Приведение квадратичной формы к диагональному виду*

***Определение* 9.5.** Пусть в евклидовом векторном пространстве V^3 выбран ортонормированный базис, (x, y, z) – координаты, $k(\vec{\mathbf{x}})$ – квадратичная форма, имеющая вид (12), $\mathbf{A}$ – её матрица.

Если в пространстве выбрать другой ОНБ, то тем же векторам будут соответствовать другие координаты, а значение функции для этих векторов должно остаться прежним. Поэтому выражение (9.10) должно иметь другой вид. Пусть $\mathbf{C}$ – матрица перехода к новому базису, (x', y', z') – новые координаты (см. §4 главы 7), а $\mathbf{A}'$ – матрица квадратичной формы $k(\vec{\mathbf{x}})$ относительно новых координат. Тогда матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ связаны между собой формулой

$$\mathbf{A}'=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{C} \tag{9.11}$$

(принимаем это без доказательства). Если новые координаты тоже являются декартовыми, то $\mathbf{C}$ – ортогональная матрица, т.е. $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}=\mathbf{C}^{-1}$; в этом случае $\mathbf{A}'=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$. Именно по этому закону изменяется матрица линейного оператора при переходе к новому базису. Поэтому мы можем сопоставить квадратичной форме (9.10) оператор $\mathcal{A}: V^3 \to V^3$, определяемый матрицей $\mathbf{A}$ относительно системы координат (x, y, z). Тогда в любой декартовой системе координат квадратичная форма $k(\vec{\mathbf{x}})$ и поставленный ей в соответствие оператор будут иметь одинаковые матрицы (т.к. законы преобразования матриц одинаковы). Поскольку матрица $\mathbf{A}$ является симметрической, то оператор $\mathcal{A}$ будет самосопряжённым.

Матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ можно привести к диагональному виду (9.2) с помощью выбора подходящего ортонормированного базиса $\mathcal{B}'=\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$. Если сохранить прежнее начало координат, то этот базис определит в пространстве новую систему координат (x', y', z'), относительно которой матрица квадратичной формы будет иметь такой же диаго-

Репозиторий ВГУ

нальный вид, а, значит, сама квадратичная форма *будет иметь диагональный вид*

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2. \tag{9.12}$$

В задачах на приведение квадратичной формы к каноническому виду обязательно нужно выписать формулы перехода от старых координат (x, y, z) к новым (x', y', z'):

$$X' = \mathbf{C}^{-1} X \tag{9.13$'$}$$

или формулы перехода от новых координат к старым:

$$X = \mathbf{C} X', \tag{9.14$'$}$$

где $\mathbf{C}$ – матрица перехода, а X и X' – координатные столбцы:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Напомним, если переход от одного аффинного базиса $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ к другому аффинному базису $\mathcal{B}' = (\vec{\mathbf{e}}_1', \vec{\mathbf{e}}_2', \vec{\mathbf{e}}_3')$ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{e}}_1' = c_{11}\vec{\mathbf{e}}_1 + c_{21}\vec{\mathbf{e}}_2 + c_{31}\vec{\mathbf{e}}_3, \\ \vec{\mathbf{e}}_2' = c_{12}\vec{\mathbf{e}}_1 + c_{22}\vec{\mathbf{e}}_2 + c_{32}\vec{\mathbf{e}}_3, \\ \vec{\mathbf{e}}_3' = c_{13}\vec{\mathbf{e}}_1 + c_{23}\vec{\mathbf{e}}_2 + c_{33}\vec{\mathbf{e}}_3, \end{cases} \tag{9.15}$$

то матрица С составляется следующим образом:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \tag{9.16}$$

Тогда в развернутом виде формулы (9.14′) имеют вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y = c_{12}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'. \end{cases} \tag{9.14}$$

Предположим, что старая и новая системы координат являются декартовыми. Тогда, как уже отмечалось, матрица $\mathbf{C}$ перехода от старой системы координат к новой будет ортогональной, т.е. $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{-1}$. Поэтому формулы (9.13) принимают вид $X' = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} X$ и составляются особенно просто:

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{21}y + c_{31}z, \\ y' = c_{12}x + c_{22}y + c_{32}z, \\ z' = c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z. \end{cases} \tag{9.13}$$

Репозиторий ВГУ

Для решения задач, связанных с приведением уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду, нам понадобятся именно формулы (9.14), выражающие старые координаты через новые.

***Пример* 9.2.** В пространстве V^3 квадратичная форма $k(\vec{\mathbf{x}})$ определяется относительно декартовой системы координат (x, y, z) формулой

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = 3y^2 + 4xy - 2xz - 4yz\,.$$

С помощью выбора новой системы координат (x', y', z') привести $k(\vec{\mathbf{x}})$ к диагональному виду.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы $k(\vec{\mathbf{x}})$ относительно системы координат (x, y, z). Имеем $3 = a_{22}$, $4 = 2a_{12}$, $-2 = 2a_{13}$, $-4 = 2a_{23}$, а т.к. x^2 и y^2 отсутствуют, то $a_{11} = a_{33} = 0$. Итак,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что матрица $\mathbf{A}$ совпадает с матрицей из примера 9.1. Находим собственные числа и соответствующие им собственные векторы

$$\lambda_1 = -1, \quad \vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\lambda_2 = -1, \quad \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\lambda_3 = 5, \quad \vec{\mathbf{e}}_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right).$$

Тогда если выбрать новую систему координат (x', y', z') с тем же началом, но определяемую базисом $\mathcal{B}' = (\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$, то квадратичная форма $k(\vec{\mathbf{x}})$ примет диагональный вид

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = -x'^2 - y'^2 + 5z'^2\,.$$

Новые координаты выражаются через старые по формулам:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}z, \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}y - \dfrac{1}{\sqrt{3}}z, \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}x + \dfrac{2}{\sqrt{6}}y - \dfrac{1}{\sqrt{6}}z, \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

Старые координаты выражаются через новые по формулам:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z', \\ y = \qquad\quad -\dfrac{1}{\sqrt{3}}y' + \dfrac{2}{\sqrt{6}}z', \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{3}}y' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}z'. \end{cases} \tag{9.17}$$

§ 4. *Приведение уравнений кривой и поверхности второго порядка к каноническому виду*

***Определение* 9.6.** *Общее уравнение поверхности второго порядка* имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + c = 0. \tag{9.18}$$

Выражение, записанное в первой строке, называется *квадратичной частью уравнения*, выражение $2a_1x + 2a_2y + 2a_3z$ – *линейной частью уравнения*, а c – *свободным членом*.

Квадратичная часть уравнения (9.18) представляет собой квадратичную форму. Обозначим её $k(\vec{\mathbf{x}})$. Найдём новую систему координат (x', y', z'), относительно которой квадратичная форма $k(\vec{\mathbf{x}})$ имеет диагональный вид (9.12). Для того чтобы узнать, какой при этом вид примет линейная часть уравнения, необходимо найти формулы вида (9.14), выражающие старые координаты x, y, z через новые x', y', z', и подставить их в линейную часть. Обратите внимание на то, что *подстановку нужно делать только в линейную часть уравнения*; какой вид примет квадратичная часть при такой подстановке мы можем написать сразу – это вид (9.12). В итоге мы получим выражение вида

$$\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + \lambda_3z'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + 2b_3z' + c' = 0.$$

Теперь применим преобразование, которое называется *методом выделения полных квадратов*, или *методом Лагранжа.* Предположим, что ни одна из величин $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, b_1, b_2, b_3$ не равна нулю. Тогда последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\lambda_1\left(x'^2 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x' + \frac{b_1^2}{\lambda_1^2}\right) - \frac{b_1^2}{\lambda_1} + \lambda_2\left(y'^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}y' + \frac{b_2^2}{\lambda_2^2}\right) - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + \\ + \lambda_3\left(z'^2 + 2\frac{b_3}{\lambda_3}z' + \frac{b_3^2}{\lambda_3^2}\right) - \frac{b_3^2}{\lambda_3} + c' = 0.$$

Репозиторий ВГУ

Если «свернуть» полные квадраты и обозначить свободный член

$$d = c' - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} - \frac{b_3^2}{\lambda_3},$$

то получим уравнение

$$\lambda_1\left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z' + \frac{b_3}{\lambda_3}\right)^2 + d = 0.$$

Сделаем теперь замену координат

$$\begin{cases} x'' = x' + b_1/\lambda_1, \\ y'' = y' + b_2/\lambda_2, \\ z'' = z' + b_3/\lambda_3. \end{cases}$$

Эта замена эквивалентна переносу начала координат (параллельному переносу координатных осей) в точку $O'(-b_1/\lambda_1, -b_2/\lambda_2, -b_3/\lambda_3)_{Ox'y'z'}$. Подчеркнём, что координаты точки O' указаны относительно системы $Ox'y'z'$. Теперь наше уравнение принимает вид

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 + d = 0. \tag{9.19}$$

Проведённые нами преобразования справедливы и в том случае, когда какая-либо из величин b_1, b_2, b_3 равна нулю; например, при $b_1 = 0$ получим $x'' = x'$. Если $\lambda_1 = 0$, то избавиться в уравнении от слагаемого $2b_1x'$ нам не удастся. Тогда мы пока оставляем координату x' без изменения. Аналогично при $\lambda_2 = 0$ оставляем пока без изменения координату y', при $\lambda_3 = 0$ – координату z'.

Предположим теперь, что только одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ равно нулю. Тогда мы можем считать, что именно $\lambda_3 = 0$ (если это не так, мы поменяем порядок обозначения переменных). После выделения полных квадратов получим уравнение вида

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + 2b_3z' + d = 0, \tag{9.20}$$

где $d = c' - b_1^2/\lambda_1 - b_2^2/\lambda_2$. Затем мы вынесем $2b_3$ за скобки из двух последних слагаемых:

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + 2b_3(z' + d/2b_3) = 0$$

и совершим замену координат $z'' = z' + d/2b_3$. Обратите внимание на то, что ***делать замену*** $z'' = 2b_3z' + d$ ***нельзя***, т.к. это не будет эквивалентно переходу к новой декартовой системе координат. После замены получим уравнение вида

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 = -2b_3z''. \tag{9.21}$$

Репозиторий ВГУ

При этом мы выписываем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x' + b_1/\lambda_1, \\ y'' = y' + b_2/\lambda_2, \\ z'' = z' + d/2b_3. \end{cases}$$

Эта замена означает перенос начала координат в точку $O'(-b_1/\lambda_1, -b_2/\lambda_2, -d/2b_3)_{Ox'y'z'}$.

Предположим, что среди чисел λ_1, λ_2, λ_3 только одно отлично от нуля. Тогда мы можем считать, что именно $\lambda_1 \neq 0$. После выделения полных квадратов может получиться уравнение вида

$$\lambda_1 (x'')^2 + 2b_2 y' + 2b_3 z' + d = 0. \tag{9.22}$$

Это наиболее сложный случай. Здесь необходимо сделать такую замену, чтобы вместо двух переменных y' и z' осталась одна переменная y''. При этом искомая замена переменных должна осуществляться с помощью ортогональной матрицы. Этим требованиям удовлетворяет замена

$$\begin{aligned} y'' &= (b_2/k)y' + (b_3/k)z', \\ z'' &= -(b_2/k)y' - (b_3/k)z', \end{aligned}$$

где $k = \sqrt{(b_2)^2 + (b_3)^2}$. Осуществив её, получим уравнение

$$\lambda_1 (x'')^2 + 2ky'' + d = 0. \tag{9.23}$$

Подобное уравнение может получиться и сразу после выделения полных квадратов. В примере 6 мы разберём, какую именно следует совершить замену координат с тем, чтобы получить сразу уравнение (9.23) вместо (9.22). Затем мы избавляемся от свободного члена, так же как и в уравнении (9.20), и получаем уравнение вида

$$\lambda_1 (x'')^2 = -2ky''. \tag{9.24}$$

Итак, любое уравнение кривой второго порядка может быть приведено путем перехода к новой декартовой системе координат к уравнению типа (9.19), (9.21) или (9.24). Если вернуться к исходным обозначениям для координат, эти уравнения примут соответственно вид

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0;$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -2b_3 z;$$

$$\lambda_1 x^2 = -2ky.$$

Далее, в зависимости от знаков величин λ_1, λ_2, λ_3, b_3, d, эти уравнения могут быть легко преобразованы к одному из канонических уравнений поверхностей второго порядка.

Этот же метод можно применить и для приведения к каноническому виду уравнения кривой второго порядка. Как это можно сделать, показывает следующий пример.

Репозиторий ВГУ

***Пример* 9.3.** *Относительно декартовой системы координат Оху на плоскости кривая определяется уравнением*

$$3y^2-4xy+4x+2y-1=0\,. \tag{9.25}$$

Путём перехода к новой декартовой системе координат привести уравнение кривой к каноническому виду и определить тип кривой. Изобразить кривую в системе координат Оху.

Решение. Пусть

$$k(\vec{\mathbf{x}})=3y^2-4xy$$

есть квадратичная часть уравнения кривой. Составим матрицу $\mathbf{A}$ квадратичной формы $k(\vec{\mathbf{x}})$ и матрицу $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}-\lambda & -2\\ -2 & 3-\lambda\end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение можно составить, раскрыв определитель $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$ и приравняв его к нулю. Но можно воспользоваться также следующей формулой для характеристического уравнения:

$$\lambda^2-(\operatorname{tr}\mathbf{A})\lambda+\det\mathbf{A}=0\,.$$

В нашем случае получаем уравнение

$$\lambda^2-3\lambda-4=0\,.$$

Оно имеет корни $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1$. Составим матрицы $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}$ и $\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A}-4\mathbf{E}=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}+\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

По этим матрицам составляем системы уравнений для нахождения собственных векторов $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$:

$$\begin{cases}-4x-2y=0,\\ -2x-y=0.\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x-2y=0,\\ -2x+4y=0.\end{cases}$$

Им удовлетворяют соответственно векторы $\vec{\mathbf{u}}_1(1,-2)$, $\vec{\mathbf{u}}_2(2,\,1)$. Затем находим $|\vec{\mathbf{u}}_1|=\sqrt{5}$, $|\vec{\mathbf{u}}_2|=\sqrt{5}$. Поэтому в качестве новых базисных векторов берём

$$\vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

Матрица перехода к новому базису $(\vec{\mathbf{e}}_1,\vec{\mathbf{e}}_2)$ имеет вид

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}.$$

Репозиторий ВГУ

Отсюда получаем формулы, связывающие старые и новые координаты:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y', \end{cases} \quad (9.26) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y', \end{cases} \quad (9.26')$$

Относительно новых координат квадратичная форма $k(\vec{\mathbf{x}})$ принимает вид

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 4x'^2 - y'^2.$$

Для того чтобы выяснить, как преобразуется линейная часть уравнения, мы в линейную часть уравнения (9.25) подставим выражения (9.26). Получаем уравнение

$$4x'^2 - y'^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 1 = 0.$$

Раскрываем скобки, приводим подобные:

$$4x'^2 - y'^2 + 2\sqrt{5}y' - 1 = 0.$$

Выделим полный квадрат по y':

$$4x'^2 - \left(y'^2 - 2\sqrt{5}y' + (\sqrt{5})^2\right) + \left(\sqrt{5}\right)^2 - 1 = 0.$$

$$4x'^2 - \left(y' - \sqrt{5}\right)^2 + 5 - 1 = 0.$$

Теперь делаем замену переменных:

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' - \sqrt{5}, \end{cases}$$

которая означает перенос начала координат в точку $O'(0, \sqrt{5})_{Ox'y'}$. Получаем уравнение

$$4(x'')^2 - (y'')^2 = -4.$$

Его можно преобразовать к каноническому виду

$$-(x'')^2 + \frac{(y'')^2}{4} = 1. \qquad (9.27)$$

Данное уравнение определяет гиперболу, действительная ось которой направлена вдоль оси $O'y''$, а полуоси равны 1 и 2.

Для того чтобы изобразить кривую в исходной системе координат, сперва необходимо изобразить оси новой системы координат. С помощью формул (9.26) находим координаты точки O' в системе Oxy:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 2, \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1.$$

Репозиторий ВГУ

Итак $O'(2,1)_{Oxy}$. Направление координатных осей $O'x''$ и $O'y''$ задаётся соответственно векторами $\vec{\mathbf{u}}_1(1,-2)$ и $\vec{\mathbf{u}}_2(2,1)$. Мы откладываем эти векторы от точки O' и затем проводим оси.

Напомним, что для изображения гиперболы сперва необходимо нарисовать фундаментальный прямоугольник (который ограничен линиями $|x''|=1$, $|y''|=2$) и провести асимптоты, которые проходят через диагонали этого прямоугольника. Теперь мы вписываем обе ветви гиперболы в усечённые углы, образованные асимптотами и сторонами прямоугольника. Поскольку действительная ось гиперболы направлена вдоль $O'y''$, мы выбираем ту пару углов, которая расположена вдоль этой оси.

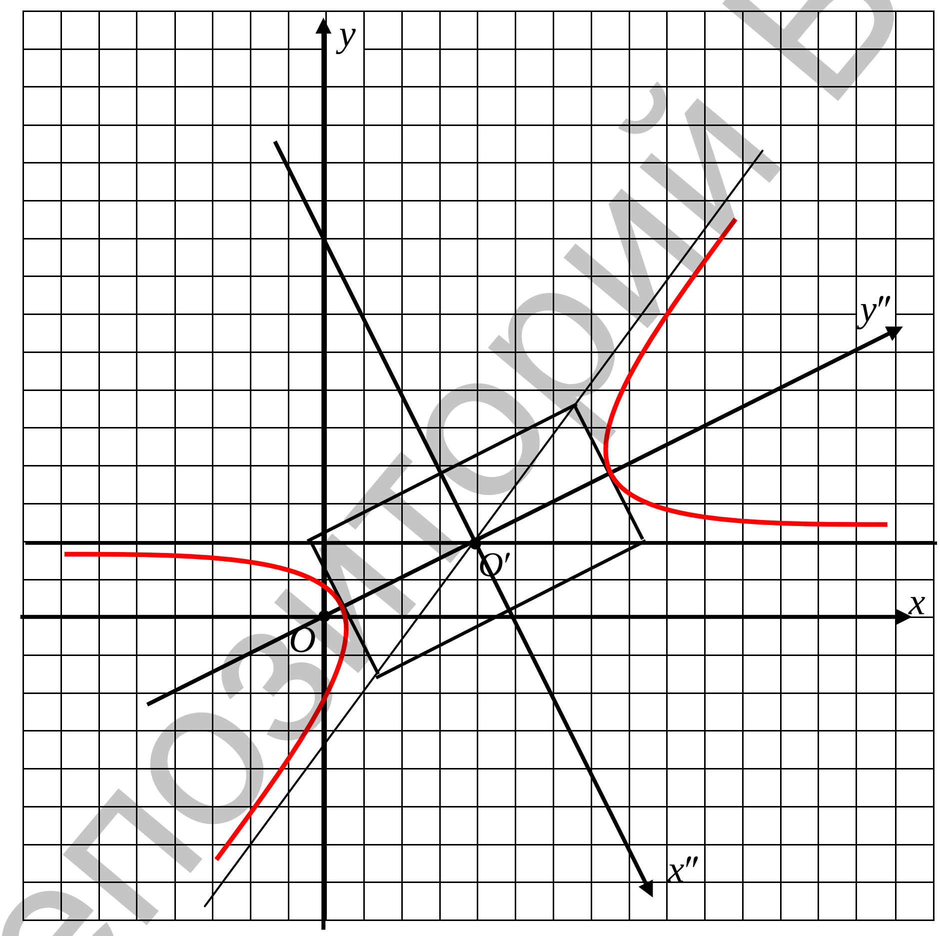


рис. 9.1

***Пример* 9.4.** *Относительно декартовой системы координат Oxyz в пространстве поверхность определяется уравнением*

$$3y^2+4xy-2xz-4yz+2x+4y=0.$$

С помощью выбора новой декартовой системы координат привести уравнение поверхности к каноническому виду.

Репозиторий ВГУ

Решение. Квадратичная часть уравнения совпадает с квадратичной формой из примера 9.2: $k(\vec{\mathbf{x}}) = 3y^2 + 4xy - 2xz - 4yz$. Мы уже выяснили, что с помощью выбора нового ОНБ в пространстве мы можем привести эту квадратичную форму к виду

$$k(\vec{\mathbf{x}}) = -x'^2 - y'^2 + 5z'^2,$$

и при этом формулы замены координат имеют вид (9.17). Подставляем эту замену в линейную часть уравнения $2x + 4y$, а квадратичную часть пишем сразу в новых координатах:

$$-x'^2 - y'^2 + 5z'^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'\right) + 14\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z'\right) = 0.$$

Раскрываем скобки, приводим подобные:

$$-x'^2 - y'^2 + 5z'^2 + \sqrt{2}x' - 4\sqrt{3}y' + 5\sqrt{6}z' = 0.$$

Выделяем полные квадраты:

$$-\left(x'^2 - \sqrt{2}x' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{2} - \left(y'^2 + 4\sqrt{3}y' + (2\sqrt{3})^2\right) + 12 +$$
$$+ 5\left(z'^2 + \sqrt{6}z' + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\right) - \frac{15}{2} = 0.$$

$$-\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(y' + 2\sqrt{3}\right)^2 + 5\left(z' + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 5 = 0.$$

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x' - \sqrt{2}/2, \\ y'' = y' + 2\sqrt{3}, \\ z'' = z' + \sqrt{6}/2. \end{cases}$$

Она означает перенос начала координат в точку $O'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)_{Ox'y'z'}$. После замены получаем уравнение

$$-(x'')^2 - (y'')^2 + 5(z'')^2 = -5.$$

Делим его на -5 и окончательно получаем каноническое уравнение

$$\frac{(x'')^2}{5} + \frac{(y'')^2}{5} - (z'')^2 = 1.$$

Это уравнение задаёт однополостный гиперболоид. Дополнительно можем найти координаты точки O' в исходной СК. Для этого подставим найденные выше её координаты в (9.17). Получим $O'(-2, 1, 3)_{Oxyz}$.

В следующем примере мы рассмотрим случай, когда все числа λ_1, λ_2, λ_3 различные. Это самый простой случай.

Репозиторий ВГУ

***Пример* 9.5.** Относительно декартовой системы координат $Oxyz$ в пространстве поверхность определяется уравнением

$$4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+6x-6y=0\,.$$

С помощью выбора новой декартовой системы координат привести уравнение поверхности к каноническому виду.

Решение. Составляем матрицу $\mathbf{A}$ квадратичной части уравнения и матрицу $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&2&-2\\2&-2&3\end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}4-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&-2\\2&-2&3-\lambda\end{pmatrix}.$$

Находим коэффициенты характеристического многочлена:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}=4+2+3=9\,,$$

$$\mathrm{I}_2(\mathbf{A})=\begin{vmatrix}4&0\\0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&-2\\-2&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&2\\2&3\end{vmatrix}=8+2+8=18\,,$$

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}4&0&2\\0&2&-2\\2&0&1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}4&2\\2&1\end{vmatrix}=2\cdot0=0$$

(мы прибавили к третьей строке вторую, а затем раскрыли определитель по второму столбцу). Составляем характеристическое уравнение в соответствии с формулой (9.3):

$$-\lambda^3+9\lambda^2-18\lambda+0=0\qquad\Leftrightarrow\qquad\lambda(\lambda^2-9\lambda+18)=0\,.$$

Отсюда $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.

$$\mathbf{A}-0\mathbf{E}=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&2&-2\\2&-2&3\end{pmatrix},\qquad \begin{cases}4x\quad+\quad2z=0\,,\\ \qquad 2y-2z=0\,,\\ 2x-2y+3z=0\,.\end{cases}$$

Для данной системы наиболее удобным является следующий способ решения: из первого и второго уравнений выразить x и y через z, а потом подставить в третье уравнение для проверки.

$$\begin{cases}x=-0{,}5z\,,\\ y=z\,,\\ -z-2z+3z=0\,.\end{cases}$$

Затем придаём z произвольное ненулевое значение, например, $z=2$, и находим $x=-1$, $y=2$] $\vec{\mathbf{u}}_1(-1,2,2)$.

$$\mathbf{A}-3\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&-2\\2&-2&0\end{pmatrix},\qquad \begin{cases}x\quad+\quad2z=0,\\ \quad -y-2z=0,\\ 2x-2y\qquad=0.\end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

$$\mathbf{A}-6\mathbf{E}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & -4 & -2\\ 2 & -2 & -3\end{pmatrix}. \qquad \begin{cases}-2x \quad + \quad 2z=0,\\ \quad -4y-2z=0,\\ 2x-2y-3z=0.\end{cases}$$

Данные системы решаются таким же способом (проделайте это самостоятельно). Мы находим $\vec{\mathbf{u}}_2(2, 2,-1)$, $\vec{\mathbf{u}}_3(2,-1, 2)$. Теперь нормируем найденные собственные векторы, и результат оформляем следующим образом, указывая каждому из собственных чисел соответствующий ему собственный вектор.

$$\lambda_1 = 0, \quad \vec{\mathbf{u}}_1(-1, 2, 2), \quad \vec{\mathbf{e}}_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\lambda_2 = 3, \quad \vec{\mathbf{u}}_2(2, 2,-1), \quad \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\lambda_3 = 6, \quad \vec{\mathbf{u}}_3(2,-1, 2), \quad \vec{\mathbf{e}}_3\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Это является обязательным требованием к оформлению решения в контрольной работе. Составляем матрицу перехода, выписывая координаты новых базисных векторов в столбцы.

$$\mathbf{C}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Данная матрица получилась симметрической. Поэтому она является сама к себе обратной: $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{E}$. По этой же причине формулы прямой и обратной замены координат выглядят одинаково:

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(-x+2y+2z),\\ y'=\frac{1}{3}(2x+2y-z),\\ z'=\frac{1}{3}(2x-y+2z).\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{1}{3}(-x'+2y'+2z'),\\ y=\frac{1}{3}(2x'+2y'-z'),\\ z=\frac{1}{3}(2x'-y'+2z').\end{cases}$$

Квадратичную часть уравнения в новых координатах мы выписываем сразу, а в линейную часть необходимо сделать подстановку.

$$0x'^2+3y'^2+6z'^2+\frac{6}{3}(-x'+2y'+2z')-\frac{6}{3}(2x'+2y'-z')=0,$$

$$3y'^2+6z'^2-6x'+6z'=0.$$

Делим данное уравнение на 3 и выделяем полный квадрат по z'; коэффициент при x' выносим за скобку.

$$y'^2+2\left(z'^2+z'+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{4}-2x'=0,$$

$$y'^2+2\left(z'+\frac{1}{2}\right)^2=2\left(x'+\frac{1}{4}\right).$$

Репозиторий ВГУ

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x' + 1/4, \\ y'' = y', \\ z'' = z' + 1/2. \end{cases}$$

Она означает перенос начала координат в точку $O'(-1/4, 0, -1/2)_{Ox'y'z'}$. После замены получаем уравнение

$$(y'')^2 + 2(z'')^2 = 2x'' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(y'')^2}{2} + (z'')^2 = x''.$$

Мы получили каноническое уравнение *эллиптического параболоида*, осью которого является $O'x''$.

В следующем заключительном примере мы рассмотрим самый сложный случай, когда ноль является собственным числом кратности 2.

***Пример* 9.6.** Относительно декартовой системы координат $Oxyz$ поверхность определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 8x + 4y - 5 = 0\,.$$

С помощью перехода к новой декартовой системе координат привести уравнение поверхности к каноническому виду и определить тип поверхности.

Решение. Пусть $k(\vec{\mathbf{x}}) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$ – квадратичная часть уравнения поверхности. Составим матрицу квадратичной формы $k(\vec{\mathbf{x}})$ и матрицу $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Находим коэффициенты характеристического многочлена:

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = 1 + 1 + 4 = 6\,,$$

а поскольку, очевидно, $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 1$ (т.к. все строки в $\mathbf{A}$ пропорциональны), то $\mathrm{I}_2(\mathbf{A}) = 0$ и $\det\mathbf{A} = 0$. Составляем характеристическое уравнение в соответствии с формулой (9.3):

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 6) = 0\,.$$

Значит, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$. Для собственного числа $\lambda_3 = 6$ обычным образом находим собственный вектор $\vec{\mathbf{u}}_3(1, 1, 2)$.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ система уравнений для нахождения собственных векторов имеет ранг 1:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0\,, \\ x + y + 2z = 0\,, \\ 2x + 2y + 4z = 0\,. \end{cases}$$

Поэтому так же, как и в примере 1, оставляем первое уравнение

$$x + y + 2z = 0\,, \tag{9.28}$$

а остальные уравнения отбрасываем. Этому уравнению удовлетворяет, например, вектор $\vec{\mathbf{u}}_1(1,-1,0)$. Если мы воспользуемся таким вектором $\vec{\mathbf{u}}_1$, то получим после замены уравнение вида (9.22). После этого потребуется решать проблему дополнительной замены координат. Наша цель: совершить замену координат так, чтобы после замены в уравнении не осталось координаты x' или координаты y' (поскольку в квадрате у нас будет только одна координата z'). Если координаты вектора $\vec{\mathbf{u}}_1(x,y,z)$ будут удовлетворять дополнительному условию $a_1x + a_2y + a_3z = 0$, то после замены в уравнении не останется x', а если этому условию будут удовлетворять координаты $\vec{\mathbf{u}}_2$, то после замены не останется y'. В нашем случае данное условие выглядит так: $4x + 2y = 0$. Поэтому координаты вектора будем искать из системы

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0\,, \\ 4x + 2y \qquad = 0\,. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2z\,, \\ y = -2x\,. \end{cases}$$

Подходит вектор $\vec{\mathbf{u}}_1(2,-4,1)$. Вектор $\vec{\mathbf{u}}_2(x,y,z)$ тоже должен удовлетворять условию (9.28), но дополнительно он должен быть ортогонален $\vec{\mathbf{u}}_1$, т.е. должно выполняться $\vec{\mathbf{u}}_2(x,y,z)\cdot\vec{\mathbf{u}}_1(2,-4,1) = 0$. Итак, координаты $\vec{\mathbf{u}}_2(x,y,z)$ мы ищем из системы

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0\,, \\ 2x - 4y + z = 0\,. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0\,, \\ -6y - 3z = 0\,. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3y, \\ z = -2y\,. \end{cases}$$

Подходит вектор $\vec{\mathbf{u}}_2(3,1,-2)$. Теперь нормируем найденные собственные векторы и результат оформляем следующим образом.

$$\lambda_1 = 0, \quad \vec{\mathbf{u}}_1(2,-4,1), \quad \vec{\mathbf{e}}_1\left(\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}\right),$$

$$\lambda_2 = 0, \quad \vec{\mathbf{u}}_2(3,1,-2), \quad \vec{\mathbf{e}}_2\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\right),$$

$$\lambda_3 = 6, \quad \vec{\mathbf{u}}_3(1,1,2), \quad \vec{\mathbf{e}}_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Выражение старых координат через новые мы можем выписать сразу, не составляя матрицы перехода.

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{21}}x' + \dfrac{3}{\sqrt{14}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z', \\ y = -\dfrac{4}{\sqrt{21}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{14}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z', \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{21}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{14}}y' + \dfrac{2}{\sqrt{6}}z'. \end{cases}$$

Квадратичную часть уравнения в новых координатах мы выписываем сразу, а в линейную часть необходимо сделать подстановку.

$$6z'^2 + 8\left(\frac{2}{\sqrt{21}}x' + \frac{3}{\sqrt{14}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'\right) + 4\left(-\frac{4}{\sqrt{21}}x' + \frac{1}{\sqrt{14}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'\right) - 5 = 0,$$

$$6z'^2 + \frac{28}{\sqrt{14}}y' + \frac{12}{\sqrt{6}}z' - 5 = 0,$$

$$3z'^2 + \sqrt{14}y' + \sqrt{6}z' - 2{,}5 = 0.$$

Выделим по z' полный квадрат:

$$3\left(z'^2 + \frac{\sqrt{6}}{3}z' + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2} + \sqrt{14}y' - 2{,}5 = 0,$$

$$3\left(z' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{14}y' - 2{,}5 = 0,$$

$$3\left(z' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \sqrt{14}\left(y' - \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = 0.$$

Делаем замену координат:

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' - \dfrac{3}{\sqrt{14}}, \\ z'' = z' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \end{cases}$$

которая означает перенос начала координат в точку $O'\left(0, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)_{Ox'y'z'}$.

В результате получаем уравнение

$$3(z'')^2 = -\sqrt{14}y''.$$

Его можно преобразовать к каноническому виду $(z'')^2 = -2py''$, где $p = \frac{\sqrt{14}}{6}$.

Это уравнение определяет параболический цилиндр, ось которого направлена вдоль отрицательного направления координатной оси $O'y''$, а образующие параллельны оси $O'x''$.

Репозиторий ВГУ

§ 5. *Задания для самостоятельного решения*

I. Кривые второго порядка

С помощью перехода к новой декартовой СК на плоскости привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду (при этом обязательно выписать замену координат) и изобразить кривую в исходной СК.

1. $5x^2+4xy+8y^2+32x+56y+80=0$.
2. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.
3. $-2x^2+8xy+4y^2+8x-4y+7=0$.
4. $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$.
5. $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$.
6. $x^2-2xy+y^2+2x-2y-7=0$.

II. Поверхности второго порядка

С помощью перехода к новой декартовой СК в пространстве привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду (при этом обязательно выписать замену координат).

Задачи без кратных собственных чисел.

1. $5x^2+3y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz+4x+8y+12z-4=0$.
2. $2xz+4x-6y+8z-2=0$.
3. $4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+8x-4y+8z=0$.
4. $x^2+2y^2+z^2-2xz+2x-4y+2z=0$.
5. $2x^2-3y^2+2z^2-8xz+4x-6y+8z-\dfrac{35}{3}=0$.
6. $x^2-z^2+4xy-4xz+6x+3y=0$.

Задачи с кратными собственными числами.

7. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz+8x+4y-5=0$.
8. $3x^2+3z^2-4xy+2xz+4yz+8y+8z-6=0$.
9. $3y^2-4xy-2xz+4yz+4x+2y=0$.
10. $-x^2+2y^2-z^2-4xy+2xz-4yz+4y+8z+4=0$.
11. $x^2+y^2+9z^2+2xy+6xz-6yz+22x+33z=0$.
12. $x^2+9y^2+z^2-6xy+2xz-6yz-33y+22z=0$.

Репозиторий ВГУ

ПРИЛОЖЕНИЕ

§ 1. *Отношение эквивалентности*

***Определение* 1.** Пусть A – некоторое множество. Предположим, что некоторые элементы этого множества могут находиться попарно в отношении, которое обозначается так: $a{\sim}b$, причём выполнены следующие свойства:

1) $a{\sim}a$ (рефлексивность);
2) $a{\sim}b \;\Leftrightarrow\; a{\sim}b$ (симметричность);
3) $(a{\sim}b$ и $b{\sim}c) \Rightarrow a{\sim}c$ (транзитивность).

Тогда данное отношение называется *отношением эквивалентности*.

Примеры отношений эквивалентности:

1) быть равными на множестве всех треугольников;
2) быть равными на множестве всех действительных чисел;
3) быть в одной учебной группе на множестве всех студентов факультета.

***Определение* 2.** Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности и $a \in A$ – произвольный элемент. Множество

$$A_a = \{b \in A \mid b{\sim}a\},$$

состоящее их всех элементов эквивалентных a, называется *классом эквивалентности элемента* a.

Теорема. *Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности. Тогда множество A распадается на непересекающиеся классы эквивалентности.*

***Определение* 3.** Множество всех классов эквивалентности множества A по рассматриваемому отношению эквивалентности называется *фактор-множеством* и обозначается $A/{\sim}$. Каждый класс эквивалентности определяется любым одним своим элементом, который называется *представителем данного класса*.

***Примеры*. 1.** Отношение «быть студентом одной группы» разбивает множество всех студентов факультета на классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности – это учебная группа, а множество всех учебных групп образует фактор-множество. Представителем каждого класса эквивалентности может быть любой студент из данной группы.

2. Отношение «иметь одинаковый остаток при делении на 3» разбивает множество всех натуральных чисел на три класса:

а) совокупность чисел, которые имеют при делении на 3 остаток 1;
б) –"– 2;
в) –"– 0 (делятся на 3).

Фактор-множество состоит из этих трёх классов. Представителями этих классов могут служить числа 1, 2 и 3.

Самостоятельно проверьте, что последнее отношение действительно является отношением эквивалентности.

§ 2. *Гиперболические функции*

Определение. *Гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом* называются функции, которые задаются формулами

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Репозиторий ВГУ

Они обладают свойствами, очень похожими на свойства тригонометрических синуса и косинуса. Сравните:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\quad \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$;

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, $\quad \mathrm{sh}\, 2x = 2\mathrm{sh} x \cdot \mathrm{ch}\, x$;

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$;

$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\quad \mathrm{sh}\, 0 = 0$, $\mathrm{ch}\, 0 = 1$.

$\sin x$ и $\mathrm{sh}\, x$ – нечётные функции;

$\cos x$ и $\mathrm{ch}\, x$ – чётные функции.

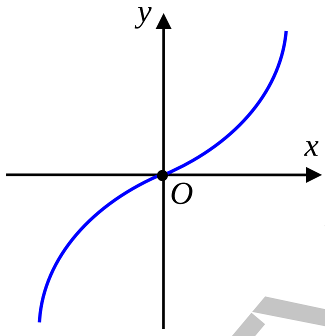


рис. 1

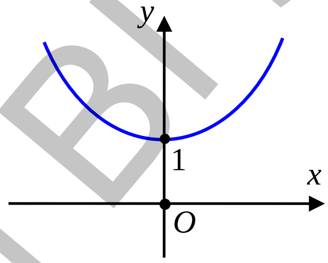


рис. 2

График гиперболического синуса показан на рисунке 1. График гиперболического косинуса отдалённо напоминает параболу (рис. 2). Эта кривая ещё называется цепной линией. Именно форму такой кривой принимает цепь или верёвка, когда она провисает под действием только своего собственного веса.

§ 3. *Матрицы и определители*

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Матрицу принято обозначать большой буквой латинского алфавита, а её элементы – такой же маленькой буквой с двумя индексами, первый (или верхний) из которых обозначает номер строки, а второй (или нижний) – номер столбца, в которых находится данный элемент. Например,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Это матрица, состоящая из 2 строк и 4 столбцов. Говорим, что она имеет размер 2×4. В ней $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, а $a_{21} = 5$. Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной* матрицей порядка n.

Элементы квадратной матрицы, у которых номера строки и столбца совпадают, образуют *главную диагональ*. Если все элементы, стоящие вне диагонали, равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, называется *единичной* и обозначается буквой $\boldsymbol{E}$. Например, единичная матрица порядка 3 имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если все элементы матрицы, стоящие ниже (выше) главной диагонали, равны нулю, то матрица называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*).

Понятие *определитель* вводится только для квадратных матриц. Определитель матрицы A обозначается $\det \boldsymbol{A}$. Если вместо круглых скобок вокруг матрицы мы поставим прямые палочки, то это тоже означает определитель матрицы. Определитель матрицы порядка 2 вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Репозиторий ВГУ

Обозначим M_{ij} – это определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. Он называется *минором, дополнительным к элементу* a_{ij}. Тогда определитель матрицы порядка 3 можно вычислить с помощью разложения по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2\cdot(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3\cdot(4\cdot 8 - 5\cdot 7) =$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0.$$

***Свойства определителя*:**

1. Если одна строка или столбец определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

2. Если определитель содержит две одинаковые или пропорциональные строки (два одинаковых или пропорциональных столбца), то он равен нулю.

3. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак.

4. Общий множитель элементов одной строки (столбца) выносится за знак определителя.

В предыдущем примере все элементы третьего столбца кратны трём. Поэтому мы можем вынести множитель 3 за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Если к элементам одной строки (столбца) матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), домноженные на некоторое число, то определитель матрицы не изменится.

Вычтем в нашем примере из второй и третьей строк первую строку (сама первая строка при этом остаётся на своём месте без изменений):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

Мы получили две пропорциональные строки, следовательно, определитель равен нулю.

6. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 9 = -27.$$

Диагональная матрица является частным случаем треугольной. Поэтому её определитель тоже равен произведению диагональных элементов.

Репозиторий ВГУ

§ 4. *Правило Крамера*

Пусть дана система линейных уравнений, в которой количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Мы ограничимся случаем, когда это число равно 3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а числа b_1, b_2, b_3 – *свободными членами*. Коэффициенты системы образуют матрицу **A**, а свободные члены – столбец **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta = \det\boldsymbol{A}$, а Δ_i – определитель матрицы, которая получается из $\boldsymbol{A}$ заменой i-го столбца на столбец $\boldsymbol{B}$. Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

***Теорема* (*Правило Крамера*).** *Если* $\Delta \neq 0$, *то система линейных уравнений* (1) *имеет единственное решение. Его можно найти по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Эта теорема верна для систем, состоящих из произвольного числа n уравнений и содержащих n неизвестных.

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 9y = 3, \\ 3x + 5y = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{-2} = -3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

***Ответ*:** (–3, 2).

§ 5. *Ранг матрицы*

Ранг матрицы **A** обозначается $\operatorname{rank}\mathbf{A}$ или $\operatorname{rk}\mathbf{A}$. Мы не будем приводить полное понятие ранга матрицы. Достаточно знать, что ранг матрицы равен рангу системы её строк, и мы ограничимся квадратными матрицами порядка 3.

При умножении строки матрицы на число каждый её элемент умножается на это число. При сложении строк складываются их элементы, стоящие на одинаковых местах. Пусть $a_1 = (a_{11} \ \ a_{12} \ \ a_{13})$, $a_2 = (a_{21} \ \ a_{22} \ \ a_{23})$. Тогда

$$a_1 + 2a_2 = (a_{11} + 2a_{21} \quad a_{12} + 2a_{22} \quad a_{13} + 2a_{23}).$$

***Определение* 1.** Пусть a_1, a_2, a_3 – строки из одной матрицы, а λ_1, λ_2, λ_3 – некоторые числа. Выражение

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$$

Репозиторий ВГУ

называется *линейной комбинацией строк* a_1, a_2, a_3, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются *коэффициентами линейной комбинации*. Эта комбинация называется *тривиальной*, если все её коэффициенты равны нулю. Соответственно, если среди $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ есть хотя бы одно ненулевое число, то линейная комбинация называется *нетривиальной*.

***Определение* 2.** Строки a_1, a_2, a_3 называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевой строке:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0\,. \tag{2}$$

Например, строки единичной матрицы (1 0 0), (0 1 0), (0 0 1) линейно независимы. Линейно зависимыми являются строки в матрице **B** (см. (3) ниже).

Предположим, что строки a_1, a_2, a_3 линейно зависимы, т.е. выполнено равенство (1), где, например, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда мы можем выразить

$$a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} a_3,$$

т.е. строка a_1 равна линейной комбинации строк a_2, a_3. Обратно, пусть a_1 равна линейной комбинации строк a_2, a_3:

$$a_1 = \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3\,.$$

Тогда выполнено

$$-1 \cdot a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0\,,$$

т.е. мы имеем нетривиальную (т.к. $-1 \neq 0$) линейную комбинацию строк a_1, a_2, a_3, равную нулевому столбцу, а значит, по определению эти строки линейно зависимы. Тем самым, мы доказали следующее утверждение.

Предложение. *Строки a_1, a_2, a_3 линейно зависимы тогда и только тогда, когда одна из них равна линейной комбинации остальных строк.*

***Определение* 3.** *Рангом системы строк матрицы* называется максимальное количество её линейно независимых строк.

Т.е. если в матрице все строки состоят только из нулей, то её ранг равен нулю. Если в матрице все строки пропорциональны, то её ранг равен 1. Если в матрице все строки линейно независимы, то её ранг равен 3, и это равносильно тому, что её *определитель отличен от нуля*.

Наиболее сложный случай – когда ранг равен 2. Это может означать, что в матрице есть две одинаковые или пропорциональные строки (матрица **A** ниже). Это может означать, что одна из строк равна линейной комбинации двух других строк, и при этом эти две строки друг другу не пропорциональны. Например, в матрице **B** вторая строка равна сумме первой строки и утроенной третьей строки.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 9 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

§ 6. *Теорема Кронекера–Капелли*

Мы ограничимся случаем системы линейных уравнений с тремя неизвестными, состоящей из трёх уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{4}$$

Репозиторий ВГУ

Рассмотрим матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A^*} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

Они называются соответственно *матрицей* и *расширенной матрицей* системы линейных уравнений (4). Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Теорема Кронекера–Капелли. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

§ 7. *Умножение матриц*

Пусть A – строка, а B – столбец, состоящие из одинакового количества элементов:

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда их произведением называется число

$$A{\cdot}B = a_1b^1 + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n.$$

Пусть **A** и **B** – две матрицы, причём длина строк матрицы **A** равна высоте столбцов матрицы **B**; другими словами, количество столбцов в **A** совпадает с количеством строк в **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, размер матриц равен соответственно $m \times n$ и $n \times k$. Обозначим

$$c_{ij} = A_iB_j = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{n_j} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{n_j} -$$

произведение i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда элементы c_{ij} образуют матрицу C размера $m \times k$, которая называется произведением матриц A и B. Например, произведением матриц A и B размера 2×3 и 3×5 соответственно будет матрица C размера 2×5, и в ней элемент c_{13} получается в результате произведения первой строки матрицы A и третьего столбца матрицы B.

***Пример* 1.** В результате произведения матрицы **A** размера 3×3 и столбца **X** высоты 3 (т.е. матрицы размера 3×1) получается матрица размера 3×1, т.е. столбец

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}.$$

Если $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ -24 \end{pmatrix}$, то запись $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ означает

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-6, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=-15, \\ 7x_1+8x_2+9x_3=-24, \end{cases}$$

т.е. матричное равенство $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ в развёрнутом виде представляет собой систему линейных уравнений.

Пример 2. $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6\cdot 2+4\cdot 3 & -6\cdot 6+4\cdot 9 \\ 3\cdot 2-2\cdot 3 & 3\cdot 6-2\cdot 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Мы видим, что в результате произведения двух ненулевых матриц может получиться нулевая матрица.

***Свойства умножения матриц*:**

1. Если определено $\mathbf{AB}$, то произведение $\mathbf{BA}$ может быть вообще не определено. Даже если определены оба произведения $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$, то они могут иметь разный размер и их нельзя приравнивать. Если $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ имеют одинаковый размер, то может быть, что $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$. Для матриц из примера 2 имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Если выполнено $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, то говорят, что матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ коммутируют.

2. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$.

3. $(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}=\lambda(\mathbf{AB})$.

4. $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=(\mathbf{BC})$.

Этот список свойств не является полным. Мы отметили лишь часть свойств.

§ 8. *Обратная матрица*

Определение. Матрица $\mathbf{X}$ называется *обратной к матрице* $\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{AX}=\mathbf{XA}=\mathbf{E}. \tag{5}$$

Тогда пишем, что $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}$. Матрица $\mathbf{A}$ называется *обратимой*, если существует обратная к ней матрица $\mathbf{A}^{-1}$.

Из определения сразу же следует, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{X}$ – квадратные матрицы одинакового размера и $\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{X}=\det\mathbf{E}=1$. Поэтому *необходимым условием существования обратной к матрице* $\mathbf{A}$ является $\det\mathbf{A}\neq 0$. Примем без доказательства, что *это условие является также и достаточным*.

***Способы нахождения обратной матрицы*:**

1. ***С помощью алгебраических дополнений.*** Мы ограничимся квадратными матрицами порядка 3.

Мы уже ввели в §3 обозначение M_{ij} – минор, дополнительный к элементу a_{ij}. Это есть определитель матрицы, которая получается из матрицы $\mathbf{A}$ в результате вычёркивания i-ой строки и j-го столбца. Добавим теперь к этому минору знак «–», если сумма $i+j$ нечётна:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Получившаяся величина называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ij}. Тогда

Репозиторий ВГУ

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы получить обратную матрицу, мы в матрице $\mathbf{A}$ на место каждого элемента ставим его алгебраическое дополнение, получившуюся матрицу транспонируем и умножаем на $(\det \mathbf{A})^{-1}$.

***Пример* 1.**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составляем и вычисляем алгебраические дополнения; при этом размещаем их на бумаге в виде матрицы, так, чтобы каждое алгебраическое дополнение оказалось на месте соответствующего ему элемента:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -18.$$

Например, при составлении A_{21} мы вычёркивали вторую строку и первый столбец; затем мы приписали знак «–», потому что $2+1$ нечётно.

Теперь найдём определитель $\det \mathbf{A}$. Он равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) матрицы на их алгебраические дополнения. Возьмём вторую строку, т.к. в ней есть ноль:

$$\det \mathbf{A} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 2\cdot(-2) + (-2)\cdot(-1) + 0\cdot(-7) = -2.$$

При составлении $\mathbf{A}^{-1}$ не забываем, что алгебраические дополнения выписываются по принципу «строчка – в столбец»:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 4 \\ 8 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0{,}5 & -2 \\ -4 & -3{,}5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Обязательно следует сделать проверку $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0{,}5 & -2 \\ -4 & -3{,}5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4-8 & 5+2-7 & -10-8+18 \\ 2-2+0 & 2-1+0 & -4+4+0 \\ 3+1-4 & 3+0{,}5-3{,}5 & -6-2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *С помощью элементарных преобразований строк матрицы*

Этот способ является более эффективным, чем предыдущий, только если числа в матрице являются достаточно небольшими по модулю. Мы выписываем рядом с матрицей $\mathbf{A}$ единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Репозиторий ВГУ

Затем мы совершаем элементарные преобразования строк этой матрицы с целью привести её левую часть к виду единичной матрицы. Тогда на месте правой части получится матрица $\mathbf{A}^{-1}$.

***Пример* 2.** Найти матрицу, обратную к матрице

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$$

Решение. Сначала мы пытаемся занулить все элементы в левой части, стоящие ниже диагонали. Затем зануляем элементы, стоящие выше диагонали. Предполагается, что читатели уже знакомы с подобными действиями и использовали эти действия при решении систем линейных уравнений или при вычислении определителей. В отличие от последнего случая, мы можем ещё умножать строку на любое число, не равное нулю.

$$-1\;\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&4&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\2&0&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\;+1\;\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&4&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&-1&-2&-1&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$+4\;\;+1\;\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&4&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&-1&-1&1&1\end{array}\right)\sim\;-1\;\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&-3&4&4\\0&1&0&-1&2&1\\0&0&-1&-1&1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\\times(-1)\end{array}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&-2&2&3\\0&1&0&-1&2&1\\0&0&1&1&-1&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\times 1/2\\\\\\\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&1{,}5\\0&1&0&-1&2&1\\0&0&1&1&-1&-1\end{array}\right).$$

В итоге мы получили, что

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1{,}5\\-1&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix}2&1&4\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1{,}5\\-1&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-1+4&2+2-4&3+1-4\\0-1+1&0+2-1&0+1-1\\-2-0+2&2+2-4&3+0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

§ 9. *Линейный оператор. Его матрица*

Линейный оператор может действовать из одного векторного пространства в другое. Мы ограничимся определением линейного оператора, действующего в одном векторном пространстве.

Определение. Пусть L – векторное пространство. Отображение $\mathcal{A}: L\to L'$ называется *линейным отображением*, или *линейным оператором, действующим в* L, если $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in L$ и $\forall\lambda\in\boldsymbol{R}$ выполнено

1. $\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathcal{A}\mathbf{x}+\mathcal{A}\mathbf{y}$; 2. $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x})=\lambda(\mathcal{A}\mathbf{x})$.

Запись $\mathcal{A}\mathbf{x}$ читается так: «оператор $\mathcal{A}$ действует на вектор $\mathbf{x}$».

Из определения сразу следует, что линейный оператор переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию их образов с теми же коэффициентами:

$$\mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{x}_k)=\lambda_1\mathcal{A}\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathcal{A}\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_k\mathcal{A}\mathbf{x}_k.$$

Репозиторий ВГУ

Примеры. **1.** Тождественный оператор $\mathcal{J}: L \longrightarrow L$ действует по правилу: $\mathcal{J}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ $\forall \mathbf{x} \in L$.

2. Нулевой оператор $\mathcal{O}: L \longrightarrow L$ сопоставляет каждому вектору $\mathbf{x} \in L$ нулевой вектор из этого же пространства.

3. Сопоставим каждому геометрическому вектору на плоскости результат его поворота на фиксированный угол α. Получившееся отображение $\mathcal{H}_\alpha: V^2 \longrightarrow V^2$ является линейным оператором. Действительно, если мы оба вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ повернём на угол α, то их сумма тоже повернётся на тот же угол; если мы умножим вектор $\vec{\mathbf{a}}$ на число λ, то результат его поворота тоже умножится на это число (рис. 3).

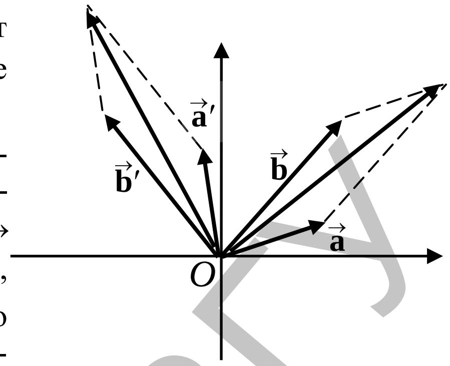


рис. 3

В дальнейшем будем вести речь о трёхмерном пространстве, хотя всё сказанное верно в пространстве любой размерности. Пусть в векторном пространстве L^3 выбран базис $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Тогда каждый из векторов $\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \mathcal{A}\mathbf{e}_2, \mathcal{A}\mathbf{e}_3$ можно разложить по базису:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathcal{A}\mathbf{e}_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3. \end{cases} \tag{6}$$

Коротко эти равенства можно записать так:

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}\mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6′}$$

Числа a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ образуют матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

которая называется матрицей оператора $\mathcal{A}$ в данном базисе. Эта матрица полностью определяет действие оператора на любой вектор $\mathbf{x} \in L$.

Действительно, пусть $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, и мы знаем координаты вектора $\mathbf{x}$ в данном базисе: $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$. Тогда координаты вектора $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{B}}$ можно найти так:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases} \tag{6}$$

Коротко эти формулы имеют вид:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6′}$$

Если использовать координатные столбцы

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \; –$$

то формулы (6) можно записать в виде одного матричного равенства:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX}. \tag{6″}$$

Репозиторий ВГУ

§ 10. *Собственные числа и собственные векторы линейного оператора*

Определение. Пусть L – векторное пространство, а $\mathcal{A}: L \to L$ – линейный оператор, действующий в нём. Число λ называется *собственным числом, или собственным значением оператора* $\mathcal{A}$, если существует ненулевой вектор $\vec{\mathbf{u}}$, такой, что

$$\mathcal{A}\vec{\mathbf{u}} = \lambda\vec{\mathbf{u}}. \tag{7}$$

В этом случае $\vec{\mathbf{u}}$ называется *собственным вектором оператора* $\mathcal{A}$, *соответствующим числу* λ.

Пусть $\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ – ортонормированный базис пространства V^3. Матрицу оператора $\mathcal{A}$ относительно этого базиса обозначим $\mathbf{A}$. Пусть (x, y, z) – координаты вектора $\vec{\mathbf{u}}$ относительно данного базиса. Тогда равенство (7) можно переписать в координатах:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Если перемножить матрицы и перенести все члены в левую часть, получим систему однородных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + (a_{22}-\lambda)y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}-\lambda)z = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Если её определитель неравен нулю, то согласно правилу Крамера эта система имеет единственное решение. Тогда это будет решение $(0, 0, 0)$. Но нас интересуют только ненулевые решения. Они существуют тогда и только тогда, когда её определитель системы (8) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Раскрывая определитель, мы получим кубическое (а в двумерном пространстве – квадратное) уравнение относительно λ, которое *называется характеристическим уравнением оператора* $\mathcal{A}$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни этого уравнения.

Подставим λ_1 в систему (2) и найдём ненулевое решение (x_1, y_1, z_1). Тогда $\vec{\mathbf{u}}_1(x_1, y_1, z_1)$ есть собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, соответствующий числу λ_1. Затем, подставляя по очереди λ_2 и λ_3, находим соответствующие им собственные векторы $\vec{\mathbf{u}}_2(x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{\mathbf{u}}_3(x_3, y_3, z_3)$. При этом каждый из векторов определяется с точностью до умножения на ненулевую постоянную, т.е. вектор $k\vec{\mathbf{u}}_i\,(x_i, y_i, z_i)$ будет решением системы (8) для $\lambda = \lambda_i$ при любом $k \neq 0$. Но нам достаточно иметь хотя бы одно решение для каждого из собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Кубическое уравнение (3) обязательно имеет хотя бы одно действительное решение, λ_1, а λ_2 и λ_3 могут быть комплексными (при этом они обязательно будут комплексно сопряжены друг к другу: $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$). В этом случае оператор $\mathcal{A}$ будет иметь только один действительный собственный вектор $\vec{\mathbf{u}}_1(x_1, y_1, z_1)$.

Репозиторий ВГУ

Если a, b, c – корни кубического уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

то его можно преобразовать к виду

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0.$$

Если же кубическое уравнение имеет только два действительных корня a и b, то его можно преобразовать к виду

$$(x-a)(x-b)^2 = 0 \qquad (\text{или } (x-a)^2(x-b) = 0).$$

В этом случае говорят, что корень b (или a) имеет кратность 2. Если кубическое уравнение имеет только один корень a, то его можно преобразовать к виду

$$(x-a)^3 = 0.$$

Тогда говорят, что корень a имеет кратность 3.

Уравнение (3) тоже может иметь кратные корни. Пусть, например, корень λ_1 имеет кратность 1, а корень λ_2 – кратность 2. При подстановке λ_2 в (2) может получиться система уравнений, имеющая ранг 2. Тогда у оператора $\mathcal{A}$ будет только два линейно независимых собственных вектора $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$. При подстановке λ_2 в (8) может получиться система линейных уравнений, в которой все уравнения пропорциональны. Тогда говорят, что она имеет ранг 1. В этом случае мы можем найти два неколлинеарных собственных вектора $\vec{\mathbf{u}}_2$ и $\vec{\mathbf{u}}_3$, координаты которых удовлетворяют этой системе. Тогда любой вектор $\vec{\mathbf{u}}$, компланарный с $\vec{\mathbf{u}}_2$ и $\vec{\mathbf{u}}_3$, будет собственным вектором для оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному числу λ_2. Мы можем записать, что оператор $\mathcal{A}$ имеет собственные векторы

$$\vec{\mathbf{u}}_1(x_1, y_1, z_1),$$

$$\vec{\mathbf{u}} = k\vec{\mathbf{u}}_2 + l\vec{\mathbf{u}}_3 = (kx_2 + lx_3,\ ky_2 + ly_3,\ kz_2 + lz_3),\ \ k, l \in \boldsymbol{R}$$

Пусть уравнение (9) имеет один трёхкратный корень λ_1. Тогда при подстановке его в (8) можем получить систему уравнений ранга 2, 1 или 0. В первом случае оператор будет иметь один собственный вектор $\vec{\mathbf{u}}_1$, а во втором – бесконечно много собственных векторов, и все они будут иметь вид

$$\vec{\mathbf{u}} = k\vec{\mathbf{u}}_2 + l\vec{\mathbf{u}}_3,\ \ k, l \in \boldsymbol{R}.$$

где $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$ – два произвольных неколлинеарных вектора, координаты которых удовлетворяют системе (8). Случай, когда при подстановке трёхкратного корня система (8) будет иметь ранг 0 (т.е. все коэффициенты равны нулю), возможен лишь тогда, когда матрица $\mathbf{A}$ пропорциональна единичной: $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{E}$. Тогда любой вектор для оператора $\mathcal{A}$ будет собственным.

Найденные собственные числа и собственные векторы для оператора $\mathcal{A}$ называются также собственными числами и собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$. Однако, когда речь идёт об операторе, надо помнить, что его матрица зависит от выбора базиса в пространстве V^3 и, соответственно, собственные векторы относительно другого базиса будут иметь другие координаты. Собственные числа оператора не зависят от выбора базиса, и поэтому коэффициенты характеристического многочлена тоже не зависят от этого.

Репозиторий ВГУ

Пример. *Найти собственные числа и собственные векторы оператора* $\mathcal{A}: V^3 \to V^3$, *если относительно заданного в пространстве* V^3 *базиса он определяется матрицей*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1 шаг. Составим матрицу $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Найдём собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ из уравнения $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=0$. Вычислив определитель, получим уравнение

$$(-8-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)=0.$$

Отсюда находим корни $\lambda_1=-8$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=-1$.

2 шаг. Подставим в матрицу (4) значение $\lambda_1=-8$:

$$\mathbf{A}+8\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Составим однородную систему уравнений по этой матрице:

$$\begin{cases} 9y+3z=0, \\ 2y+10z=0. \end{cases}$$

Отсюда находим единственное решение $y=z=0$. Получается, что в качестве вектора $\vec{\mathbf{u}}_1$ нужно взять нулевой? Нет! У нас отсутствует какое-либо ограничение на переменную x. Поэтому можем взять $\vec{\mathbf{u}}_1(1, 0, 0)$.

3 шаг. Подставим в матрицу (4) значение $\lambda_2=4$ и по получившейся матрице составим однородную систему линейных уравнений:

$$\mathbf{A}-4\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} -12x = 0, \\ -3y+3z=0, \\ 2y-2z=0. \end{cases}$$

Второе и третье уравнения пропорциональны. Поэтому одно из них можем вычеркнуть. Из оставшихся уравнений находим, что $x=0$, $y=z$. Поэтому в качестве второго собственного вектора можем взять $\vec{\mathbf{u}}_2(0, 1, 1)$.

4 шаг. Для $\lambda_3=-1$ аналогично находим $\vec{\mathbf{u}}_3(0, 1, 1)$.

***Ответ*:** $\lambda_1=-8$, $\vec{\mathbf{u}}_1(1, 0, 0)$;
$\lambda_2=4$, $\vec{\mathbf{u}}_2(0, 1, 1)$;
$\lambda_3=-1$, $\vec{\mathbf{u}}_3(0, -3, 2)$.

В главе 9 был разобран ещё один пример решения подобной задачи, причём в этом примере одно из собственных чисел будет иметь кратность 2.

Репозиторий ВГУ

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

КС – коническое сечение
СК – система координат
ОНБ – ортонормированный базис
СЛУ – система линейных уравнений

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Репозиторий ВГУ

Репозиторий ВГУ

Репозиторий ВГУ

Репозиторий ВГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов, А.В. Аналитическая геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1978.
2. Погорелов, А.В. Геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1984.
3. Атанасян, Л.С. Геометрия / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1986. – Ч. I.
4. Базылев, В.Т. Геометрия / В.Т. Базылев [и др.]. – М.: Просвещение, 1974. – Ч. I.
5. Атанасян, Л.С. Геометрия / Л.С. Атанасян. – М.: Просвещение, 1973. – Ч. I.
6. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1981.
7. Постников, М.М. Аналитическая геометрия / М.М. Постников. – М.: Наука, 1973.
8. Постников, М.М. Лекции по геометрии. Семестр I: Аналитическая геометрия / М.М. Постников. – М.: Наука, 1986.
9. Александров, А.Д. Геометрия / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – М.: Наука, 1990.
10. Дадаян, А.А. Алгебра и геометрия / А.А. Дадаян, В.А. Дударенко. – Минск: Выш. шк., 1989.
11. Базылев, В.Т. Сборник задач по геометрии / В.Т. Базылев [и др.]. – М.: Просвещение, 1980.
12. Атанасян, Л.С. Сборник задач по геометрии / Л.С. Атанасян, В.А. Атанасян. – М.: Просвещение, 1973. – Ч. 1.
13. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / под ред. А.С. Феденко. – Минск: Изд-во Университетское, 1989, 1999.
14. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1987.
15. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. – М.: Наука, 1965.
16. Кострикин, А.И. Линейная алгебра и геометрия / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. – М.: Наука, 1986.
17. Тышкевич, Р.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – Минск: Выш. шк., 1976.
18. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия: учеб. пособие: в 2 ч. / М.В. Милованов [и др.]. – Минск: Выш. шк., 1987.
19. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. – М.: Изд-во МГУ, 1969.
20. Кононов, С.Г. Аналитическая геометрия: учеб. пособие / С.Г. Кононов. – Минск, БГУ, 2014.
21. Берёзкина, Л.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие / Л.Л. Берёзкина. – Минск: РИВШ, 2012.

Репозиторий ВГУ

Учебное издание

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Учебное пособие

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Корректор *Л.В. Моложавая*
Компьютерный дизайн *Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать 25.01.2016. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 16,62. Уч.-изд. л. 18,02. Тираж 120 экз. Заказ 3.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.

Репозиторий ВГУ