УДК 530.1:51

А.М. Воронов

Метод собственного времени в задаче двух тел

Введение. Система дифференциальных уравнений, описывающая кеплеровское движение двух тел в прямоугольных декартовых координатах с центром в точке с массой m_0, имеет следующий вид [1, с. 434]:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3}, \tag{1}$$

где $\mu = f\left(m_0 + m_1\right)$, m_0, m_1 – массы гравитирующих тел, f – гравитационная постоянная, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Основные классические методы аналитического интегрирования системы (1) – это метод Клеро–Лапласа и метод Бине. Метод Клеро–Лапласа состоит в переходе к цилиндрической системе координат, что приводит к системе уравнений [1, с. 430]

$$\begin{cases} u''_{\lambda\lambda} + u = \dfrac{\mu}{c^2}\left(1 + s^2\right)^{-\frac{3}{2}}, \\ s''_{\lambda\lambda} + s = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $u = \dfrac{1}{\rho}$, $s = \dfrac{z}{\rho}$, c – некоторая постоянная.

Система (2) представляет собой систему из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями u и s, после интегрирования которой и время t определяется квадратурой в зависимости от долготы λ.

В методе Бине [1, с. 464] в качестве параметра берется величина

$$\omega = \omega_0 + c\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^2}.$$

Такой подход приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} + u = \frac{\mu}{c^2},$$

где $u = \dfrac{1}{r}$, c – некоторая постоянная.

Однако (и в этом цель настоящей статьи) можно получить более удобное параметрическое представление решений системы (1), если в качестве параметра выбрать параметр τ следующим образом:

$$\frac{dt}{d\tau} = r\left[t\left(\tau\right)\right]. \tag{3}$$

Замена времени в задаче двух тел с произвольным потенциалом. Рассмотрим задачу движения двух тел с массами m_0 и m_1 в силовом поле с потенциалом $U(r)$, $r=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$, зависящим лишь от расстояния между телами в абсолютной декартовой системе координат.

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение, в абсолютных декартовых координатах будет иметь вид:

$$m_0\ddot{x}_0=\frac{\partial U(r)}{\partial x_0}=\frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_0}=-\frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{1}{r}\cdot(x_1-x_0),$$

$$m_1\ddot{x}_1=\frac{\partial U(r)}{\partial x_1}=\frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_1}=\frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{1}{r}\cdot(x_1-x_0).$$

Аналогичные уравнения получаются и для переменных y_0, y_1, z_0, z_1. Тогда

$$\ddot{x}_1-\ddot{x}_0=\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_0}\right)\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot(x_1-x_0).$$

Это уравнение дает возможность перейти к относительной системе координат; положив $x=x_1-x_0$, $y=y_1-y_0$, $z=z_1-z_0$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\ddot{x}=\dfrac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{dU(r)}{dr}\cdot x, & (4.1)\\[2ex] \ddot{y}=\dfrac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{dU(r)}{dr}\cdot y, & (4.2)\\[2ex] \ddot{z}=\dfrac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{dU(r)}{dr}\cdot z. & (4.3)\end{cases}$$

Заметим, что квадратичная аппроксимация потенциала $U(r)$ приводит систему (4.1–4.3) к системе линейных дифференциальных уравнений, но это направление исследований отражено в работе [2].

Теорема 1. Подстановка (3) приводит уравнение для радиальной составляющей к виду

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=hr+\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{d}{dr}\cdot\left[r^2U(r)\right], \tag{5}$$

в котором постоянная энергии h определяется равенством

$$h=\dot{x}^2(0)+\dot{y}^2(0)+\dot{z}^2(0)-\frac{2(m_0+m_1)}{m_0m_1}\cdot U\left[r(0)\right].$$

При этом уравнения для координат будут иметь вид:

$$r(\tau)x''(\tau)-r'(\tau)x'(\tau)-\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot r^2(\tau)\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot x(\tau)=0; \tag{6.1}$$

$$r(\tau)y''(\tau)-r'(\tau)y'(\tau)-\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot r^2(\tau)\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot y(\tau)=0; \tag{6.2}$$

$$r(\tau)z''(\tau)-r'(\tau)z'(\tau)-\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot r^2(\tau)\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot z(\tau)=0. \tag{6.3}$$

Штрихом здесь обозначена производная по параметру τ.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (4.1) на $\dot{x}$ (соответственно (4.2) на $\dot{y}$, (4.3) на $\dot{z}$) и сложим полученные равенства, тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)=\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}=\frac{1}{r}\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\frac{dU(r)}{dr}\left(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}\right)=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\frac{dU\left[r(t)\right]}{dt}.$$

Таким образом, интеграл энергии будет иметь вид

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\frac{2\left(m_0+m_1\right)}{m_0m_1}\cdot U\left[r(t)\right]+h. \tag{7}$$

В терминах параметра τ данное равенство запишется в виде

$$\frac{1}{r^2(\tau)}\cdot\left[x'^2(\tau)+y'^2(\tau)+z'^2(\tau)\right]=\frac{2\left(m_0+m_1\right)}{m_0m_1}\cdot U\left[r(\tau)\right]+h.$$

Далее из системы (4.1–4.3) получаем

$$x\ddot{x}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot x^2;\quad y\ddot{y}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot y^2;\quad z\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot z^2.$$

Сложим эти три уравнения, тогда

$$x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot r\cdot\frac{dU(r)}{dr}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) получаем следующее уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(r^2\right)=\frac{d}{dt}\left(2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}\right)=\frac{2\left(m_0+m_1\right)}{m_0m_1}\left[r\frac{dU}{dr}+2U(r)\right]+2h. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(r^2\right)=2\left(\dot{r}\right)^2+2r\ddot{r}. \tag{10}$$

Приравнивая правые части равенств (9) и (10) найдем, что

$$\left(\dot{r}\right)^2+r\ddot{r}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\left[r\frac{dU(r)}{dr}+2U(r)\right]+h. \tag{11}$$

Далее заметим, что

$$r'(\tau)=\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=\dot{r}r,\qquad \frac{d^2r}{d\tau^2}=\ddot{r}r^2+\left(\dot{r}\right)^2r=r\left[\ddot{r}r+\left(\dot{r}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Из равенств (11) и (12) получаем:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=hr+\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\left[r^2\cdot\frac{dU(r)}{dr}+2rU(r)\right]=hr+\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{d}{dr}\left[r^2\cdot U(r)\right],$$

т.е. имеет место уравнение (5). Для вывода уравнения (6.1) заметим, что

$$\frac{dx\left[t(\tau)\right]}{d\tau}=\frac{dx\left[t(\tau)\right]}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=\dot{x}r(\tau),$$

$$\frac{d^2x\left[t(\tau)\right]}{d\tau^2}=\ddot{x}r^2(\tau)+\dot{x}r'(\tau)=r(\tau)\cdot\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot x(\tau)+\frac{x'(\tau)r'(\tau)}{r(\tau)}.$$

Умножив обе части последнего уравнения на $r(\tau)$, получим уравнение (6.1).

Аналогично выводятся уравнения (6.2) и (6.3).

Теорема доказана.

Следствие 1. Если $U(r)=\frac{fm_0m_1}{r}$, то уравнение (5) приводится к виду

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=hr+f\left(m_0+m_1\right). \tag{13}$$

При этом уравнения для координат преобразуются следующим образом:

$$r(\tau)x''(\tau)-r'(\tau)x'(\tau)+\mu x(\tau)=0, \quad (14.1)$$

$$r(\tau)y''(\tau)-r'(\tau)y'(\tau)+\mu y(\tau)=0, \quad (14.2)$$

$$r(\tau)z''(\tau)-r'(\tau)z'(\tau)+\mu z(\tau)=0. \quad (14.3)$$

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=hr+\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{d}{dr}\cdot\left[r^2\cdot\frac{fm_0m_1}{r}\right]=hr+f\left(m_0+m_1\right).$$

Далее из (6.1)

$$rx''-r'x'-\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot r^2\left(-\frac{fm_0m_1}{r^2}\right)\cdot x=rx''-r'x'+f\left(m_0+m_1\right)\cdot x=0.$$

Уравнения (14.1)–(14.3) представляют собой линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Следствие доказано.

Случай эллиптического движения. Решение двухточечных краевых задач. Рассмотрим краевую задачу для уравнения (13).

Лемма 1. Пусть $r(\tau_0)=r_0,\quad r(\tau_1)=r_1,\quad \sin\omega(\tau_1-\tau_0)\neq 0,$ тогда решение $r(\tau)$ двухточечной краевой задачи для уравнения (13) будет иметь вид

$$r(\tau)=a\sin(\omega\tau+\alpha)+\frac{\mu}{\omega^2}, \quad (15)$$

где

$$a\cos\alpha=-\frac{1}{\sin\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot(\rho_0\cos\omega\tau_1-\rho_1\cos\omega\tau_0), \quad (16)$$

$$a\cos\alpha=\frac{1}{\sin\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot(\rho_0\sin\omega\tau_1-\rho_1\sin\omega\tau_0), \quad (17)$$

$$a^2=\frac{1}{\sin^2\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[\rho_0^2+\rho_1^2-2\rho_0\rho_1\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right], \quad (18)$$

$$\rho_0=r_0-\frac{\mu}{\omega^2},\quad \rho_1=r_1-\frac{\mu}{\omega^2},\quad \omega^2=-h.$$

Доказательство. Функция

$$r(\tau)=a\sin(\omega\tau+\alpha)+\frac{\mu}{\omega^2}$$

является решением уравнения (13), остается найти неизвестные $a\cos\alpha,\quad a\sin\alpha$ из системы алгебраических линейных уравнений

$$\begin{cases}\sin\omega\tau_0 a\cos\alpha+\cos\omega\tau_0 a\sin\alpha=\rho_0,\\ \sin\omega\tau_1 a\cos\alpha+\cos\omega\tau_1 a\sin\alpha=\rho_{1.}\end{cases} \quad (19)$$

Решая систему (19) по правилу Крамера, получаем требуемый результат.

Теорема 2. Решение краевой задачи $x(\tau)\quad \left(x(\tau_0)=x_0,\quad x(\tau_1)=x_1\right)$ для уравнения (14.1) имеет вид:

$$x(\tau)=b\sin(\omega\tau+\beta)+c, \quad (20)$$

где

$$b\cos\beta=-\frac{1}{\sin\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[(x_0-c)\cos\omega\tau_1-(x_1-c)\cos\omega\tau_0\right], \quad (21)$$

$$b\sin\beta=\frac{1}{\sin\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[(x_0-c)\sin\omega\tau_1-(x_1-c)\sin\omega\tau_0\right], \tag{22}$$

$$c=\frac{\omega^2\left[\rho_0x_0+\rho_1x_1-(\rho_0x_1+\rho_1x_0)\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right]}{2\left[\sin^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\right]\left[2\mu\cos^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}+\omega^2(\rho_0+\rho_1)\right]}, \tag{23}$$

$$\rho_0=r_0-\frac{\mu}{\omega^2},\quad \rho_1=r_1-\frac{\mu}{\omega^2},\quad \omega^2=-h.$$

Доказательство. Будем искать функцию $x(\tau)$ в виде

$$x(\tau)=b\sin(\omega\tau+\beta)+c, \tag{24}$$

где b,c,β – некоторые постоянные. Подставив выражение (24) и соответствующие производные в уравнение (14.1), получим

$$\left[a\sin(\omega\tau+\alpha)+\frac{\mu}{\omega^2}\right]\left[-b\omega^2\sin(\omega\tau+\beta)\right]-\left[a\omega\cos(\omega\tau+\alpha)\right]\left[b\omega\cos(\omega\tau+\beta)\right]+$$
$$+\mu b\sin(\omega\tau+\beta)+\mu c=-ab\omega^2\cos(\alpha-\beta)+\mu c=0.$$

В результате по отношению к переменным b,c,β мы имеем систему из трех уравнений

$$\begin{cases}-ab\omega^2\cos(\alpha-\beta)+\mu c=0, & (25.1)\\ b\sin(\omega\tau_0+\beta)+c=x_0, & (25.2)\\ b\sin(\omega\tau_1+\beta)+c=x_1. & (25.3)\end{cases}$$

Выразим из уравнений (25.2)–(25.3) величины $b\cos\beta, b\sin\beta$:

$$b\cos\beta=-\frac{1}{\sin\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[(x_0-c)\cos\omega\tau_1-(x_1-c)\cos\omega\tau_0\right], \tag{26}$$

$$b\sin\beta=\frac{1}{\sin\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[(x_0-c)\sin\omega\tau_1-(x_1-c)\sin\omega\tau_0\right]. \tag{27}$$

Сделав следующие обозначения $s=\sin\omega(\tau_1-\tau_0)$, $s_0=\cos\omega\tau_0$, $s_1=\cos\omega\tau_1$, $t_0=\sin\omega\tau_0$, $t_1=\sin\omega\tau_1$, подставим выражения (26) и (27) в уравнение (25.1), тогда с учетом равенств (16) и (17) получим

$$-\omega^2(a\cos\alpha\cdot b\cos\beta+a\sin\alpha\cdot b\sin\beta)+\mu c=-\frac{\omega^2}{s^2}\left[(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(x_0s_1-x_1s_0)+\right.$$
$$\left.+(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(s_0-s_1)c+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(x_0t_1-x_1t_0)+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(t_0-t_1)c\right]+\mu c=0,$$

$$\left\{\mu-\frac{\omega^2}{s^2}\left[(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(s_0-s_1)+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(t_0-t_1)\right]\right\}c=$$

$$=\frac{\omega^2}{s^2}\left[(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(x_0s_1-x_1s_0)+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(x_0t_1-x_1t_0)\right]. \tag{28}$$

Упростим каждое из выражений

$$\left(\rho_0 s_1-\rho_1 s_0\right)\left(s_0-s_1\right)+\left(\rho_0 t_1-\rho_1 t_0\right)\left(t_0-t_1\right);$$
$$\left(\rho_0 s_1-\rho_1 s_0\right)\left(x_0 s_1-x_1 s_0\right)+\left(\rho_0 t_1-\rho_1 t_0\right)\left(x_0 t_1-x_1 t_0\right).$$

Раскрывая скобки и группируя нужным образом, получаем

$$\left(\rho_0 s_1-\rho_1 s_0\right)\left(s_0-s_1\right)+\left(\rho_0 t_1-\rho_1 t_0\right)\left(t_0-t_1\right)=-2\left(\rho_0+\rho_1\right)\sin^2\frac{\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)}{2}; \qquad (29)$$

$$\left(\rho_0 s_1-\rho_1 s_0\right)\left(x_0 s_1-x_1 s_0\right)+\left(\rho_0 t_1-\rho_1 t_0\right)\left(x_0 t_1-x_1 t_0\right)=\rho_0 x_0 s_1^2-\rho_0 x_1 s_0 s_1-\rho_1 x_0 s_0 s_1+\rho_1 x_1 s_0^2+$$
$$+\rho_0 x_0 t_1^2-\rho_0 x_1 t_0 t_1-\rho_1 x_0 t_0 t_1+\rho_1 x_1 t_0^2=\rho_0 x_0+\rho_1 x_1-\left(\rho_0 x_1+\rho_1 x_0\right)\cos\omega\left(\tau_1-\tau_0\right). \qquad (30)$$

Подставляя выражения (29)–(30) в уравнение (28), найдем выражение для c:

$$c=\frac{\dfrac{\omega^2}{s^2}\left[\rho_0 x_0+\rho_1 x_1-\left(\rho_0 x_1+\rho_1 x_0\right)\cos\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right]}{\mu+\dfrac{2\omega^2\left(\rho_0+\rho_1\right)\sin^2\dfrac{\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)}{2}}{4\sin^2\dfrac{\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)}{2}\cos^2\dfrac{\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)}{2}}}=$$

$$=\frac{2\omega^2\left[\rho_0 x_0+\rho_1 x_1-\left(\rho_0 x_1+\rho_1 x_0\right)\cos\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right]\cos^2\dfrac{\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)}{2}}{4\sin^2\dfrac{\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)}{2}\cos^2\dfrac{\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)}{2}\left[2\mu\cos^2\dfrac{\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)}{2}+\omega^2\left(\rho_0+\rho_1\right)\right]}=$$

$$=\frac{\omega^2\left[\rho_0 x_0+\rho_1 x_1-\left(\rho_0 x_1+\rho_1 x_0\right)\cos\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right]}{2\sin^2\dfrac{\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)}{2}\left[2\mu\cos^2\dfrac{\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)}{2}+\omega^2\left(\rho_0+\rho_1\right)\right]}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что формулы (15), (18), (20)–(23) позволяют по двум наблюдениям находить $r_{\max}, r_{\min}, x_{\max}, x_{\min}$ (аналогично $y_{\max}, y_{\min}, z_{\max}, z_{\min}$).

Следствие 2. Справедливы равенства

$$r_{\max}=\frac{\mu}{\omega^2}+\frac{1}{\left|\sin\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right|}\cdot\left[\rho_0^2+\rho_1^2-2\rho_0\rho_1\cos\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (31)$$

$$r_{\min}=\frac{\mu}{\omega^2}-\frac{1}{\left|\sin\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right|}\cdot\left[\rho_0^2+\rho_1^2-2\rho_0\rho_1\cos\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (32)$$

$$x_{\max}=c+\frac{1}{\left|\sin\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right|}\cdot\left[\left(x_0-c\right)^2+\left(x_1-c\right)^2-2\left(x_0-c\right)\left(x_1-c\right)\cos\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (33)$$

$$x_{\min}=c-\frac{1}{\left|\sin\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right|}\cdot\left[\left(x_0-c\right)^2+\left(x_1-c\right)^2-2\left(x_0-c\right)\left(x_1-c\right)\cos\omega\left(\tau_1-\tau_0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (34)$$

где c определяется равенством (23).

Доказательство. Равенства (31)–(32) непосредственно вытекают из вида радиальной составляющей (15). Для доказательства равенств (33)–(34) заметим, что

$$b^2=b^2\cos^2\beta+b^2\sin^2\beta=\frac{1}{s^2}\left\{\left[\left(x_0-c\right)s_1-\left(x_1-c\right)s_0\right]^2+\left[\left(x_0-c\right)t_1-\left(x_1-c\right)t_0\right]^2\right\}=$$

$$= \frac{1}{s^2} \cdot \left[(x_0 - c)^2 + (x_1 - c)^2 - 2(x_0 - c)(x_1 - c)\cos\omega(\tau_1 - \tau_0) \right].$$

Следствие доказано.

Точно так же проводятся все расчеты для параболического и гиперболического случаев.

Заключение. Данная статья посвящена построению алгоритма замены времени особым параметром в задаче двух тел с произвольным потенциалом, приводящего в случае ньютоновского потенциала к явной параметрической зависимости как радиальной составляющей, так и декартовых координат движущихся тел в случае эллиптического, параболического и гиперболического движений. Этот метод будет полезен в космологии, квантовой и небесной механике для развития теории движения ИСЗ, теории строения вещества и т.д.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. ***Дубошин, Г.Н.*** Небесная механика. Основные задачи и методы: монография / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука, 1975. – 703 с.
2. ***Трубников, Ю.В.*** Метод чебышевской аппроксимации потенциала в задаче многих тел: монография / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2009. – 187 с.

S U M M A R Y

In the given article the parametrical representation of the solutions of two bodies problem in terms of parametre which it is natural to name own time of the given dynamic system is received. The found representations allow to find a radial component and the Cartesian coordinates of two bodies in analytical form.

Поступила в редакцию 14.09.2009