



УДК 537.8

В.А. Жизневский

Алгоритмизация моделирования и исследования волновых процессов неоднородной электродинамики с использованием процедуры разделения переменных

Актуальность разработки новых эффективных аналитических методов решения уравнений Максвелла для моделирования процессов распространения электромагнитных волн в неоднородных средах не вызывает сомнений. С точки зрения использования вычислительного эксперимента и математического моделирования в процессе разработки радиосистем различного назначения и решения задач оптимизации их конструкций эффективность модели определяется возможностями ее исследования. Обобщенный метод Фурье разделения переменных (ОМФ) для дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), отличительной чертой которого является представление искомой волновой функции в виде суммы произведений функций отдельных переменных, является основой рассматриваемого способа моделирования электромагнитных волн. Целью исследований, о результатах которых идет речь в данной статье, была алгоритмизация и программная реализация этого способа моделирования.

Обобщая результаты проведенных исследований по развитию теории ОМФ [1] и учитывая опыт применения данного метода при решении ряда задач прикладной электродинамики [2–4], можно сделать следующие выводы:

- для построения решения исходного ДУЧП достаточно найти решение одной системы разделенных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с учетом того, что решения, полученные при рассмотрении других систем, будут аналогичны по сути (следует из теоремы о существовании и единственности решения);
- количество постоянных разделения в рассматриваемой системе разделенных ОДУ можно уменьшать с целью снятия переопределенности системы, исходя из возможности нахождения нетривиального решения.

Алгоритмизация. С учетом основной теоремы, сформулированной в [1], обобщенный метод Фурье представляет собой метод, алгоритмизируемый, а следовательно и программно реализуемый, что немаловажно для создания инженерного проблемно ориентированного программного обеспечения. Объединяя формирование скалярных волновых уравнений [5], с процедурой разделения переменных ОМФ для построения аналитических решений, пригодных для всестороннего исследования [1], можно выделить следующие этапы, с учетом последовательности их выполнения, для моделирования электро-

динамических волновых процессов в средах с пространственно-временными изменениями электромагнитных параметров:

1. Формирование математической модели среды распространения через задание функциональных зависимостей электромагнитных параметров от пространственно-временных переменных ($\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, t)$, $\mu = \mu(\mathbf{r}, t)$, $\sigma = \sigma(\mathbf{r}, t)$).

2. Построение волновых уравнений для полевых векторов с учетом модели среды распространения.

3. Выбор одной из ортогональных систем координат, исходя из пространственной геометрии рассматриваемой задачи для формирования скалярных волновых уравнений.

4. Переход к скалярным волновым уравнениям для компонентов полевых векторов в выбранной системе координат.

5. Анализ скалярных волновых уравнений на предмет необходимости преобразования переменных с целью их последующего разделения.

6. Преобразование координат (замена переменных) в скалярных волновых уравнениях (при необходимости приведения к разделяемому виду коэффициентов).

7. Выбор порядка ОМФ (количество слагаемых в представлении искомых функций), исходя из пространственно-временной геометрии исходной задачи и граничных условий.

8. Формирование билинейных функциональных уравнений при подстановке выбранного вида искомых функций в скалярные волновые уравнения.

9. Выбор подмножества базисных функций на множестве функций билинейных уравнений.

10. Построение системы разделенных ОДУ для выбранного базиса.

11. Преобразование матрицы коэффициентов разделения с целью снятия переопределенности системы разделенных уравнений.

12. Построение общего решения системы разделенных уравнений путем поиска явного вида зависимостей для искомых функций, удовлетворяющих этой системе.

13. Возврат к первоначальным координатам (обратная замена переменных) для последующего анализа полученных решений (при необходимости).

14. Уточнение полученных решений (определение свободных членов общего решения) с целью удовлетворения граничным условиям (при их наличии).

15. Анализ полученных решений и определение сопутствующих характеристик волнового процесса или параметров проектируемой технической системы.

Программная реализация. При рассмотрении данной последовательности этапов как алгоритма вырисовываются требования к программной среде для его реализации. В первую очередь стоит упомянуть, что помимо традиционных арифметико-логических процедур необходимо выполнение достаточно большого объема сложных символьных (аналитических) вычислений. Это явилось основным аргументом при выборе в качестве программной оболочки для реализации системы компьютерной алгебры MAPLE. Стоит упомянуть, что в MAPLE имеется полный набор инструментов для работы с соответствующими математическими объектами. Использование MAPLE представляет собой программную задачу, сочетающую использование стандартных инструментов пакета с реализацией необходимых дополнительных алгоритмов. При этом программные средства MAPLE дают возможность построения формализма решения в традиционных терминах и обозначениях известных классических подходов [6] к решениям такого рода задач. Это важно не только с методической точки зрения, но и по ряду существенных моментов, включающих апробацию рассматриваемого метода построения решений, его интерпретацию и применение.

Объемные символьные вычисления необходимы на всех этапах предлагаемого способа математического моделирования и исследования электродинамических волновых процессов. На этапах формирования скалярных волновых уравнений удобно использование стандартного пакета Linalg системы MAPLE, который позволяет проводить дифференциальные операции над функциями полевых векторов. При дополнении системы уравнений Максвелла материальными уравнениями учитываются особенности среды распространения при конкретизации вида зависимостей ее параметров $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, t)$, $\mu = \mu(\mathbf{r}, t)$, $\sigma = \sigma(\mathbf{r}, t)$. Получаемая векторная форма волновых уравнений стандартными средствами MAPLE легко преобразуется к скалярному виду для всех известных ортогональных криволинейных систем координат, что позволяет учитывать геометрическую специфику задачи распространения волны. На этом же этапе возможны упрощения вида уравнений, обусловленные особенностями среды распространения в конкретной задаче за счет использования стандартных действий над полиномами. С целью удовлетворения требования разделимости по переменным в функциональных коэффициентах сформированных волновых уравнений используется разработанная процедура преобразования переменных для ДУЧП второго порядка. Проверяется невырожденность такого преобразования ввиду необходимости проведения обратного перехода на заключительных этапах с целью анализа полученных решений. На этапах поиска аналитических решений скалярных волновых уравнений используется написанный на входном языке программирования MAPLE SHARE-пакет, реализующий алгоритм обобщенного метода Фурье разделения переменных с учетом его адаптации к практическому применению. На этапе формирования систем разделенных уравнений и дальнейших их преобразований удобным оказалась матричная форма их записи. В дополнение к стандартным операциям над матрицами средствами MAPLE для рационализации вида уравнений используются разработанные процедуры выбора, группировки и подстановки коэффициентов при компонентах искомых функций. При поиске решений системы разделенных ОДУ помимо стандартного оператора dsolve возможно использование графической интерпретации решения средствами библиотеки DEtools с целью определения асимптотического поведения определяемых функций. Разработана процедура формирования общего решения исходного ДУЧП из решений системы разделенных ОДУ с учетом необходимости возврата к первоначальным переменным. Определение произвольных констант общего решения происходит из системы уравнений сформированных при наложении граничных условий рассматриваемой задачи распространения. В зависимости от типа этих условий и, как следствие, типа получаемых уравнений используются соответствующие средства MAPLE нахождения корней. На заключительных этапах моделирования используются развитые стандартные графические средства системы MAPLE для визуализации с целью анализа и интерпретации результатов.

Заключение. Безусловно, при решении конкретной задачи распространения данный пакет программ требует дополнения с учетом специфики параметров радиосистемы, подлежащих исследованию. В целом же можно говорить о создании основы инженерного программного обеспечения для проведения математического моделирования и вычислительного эксперимента при радиотехническом проектировании систем различного назначения. Описанный комплекс программ апробирован при решении ряда модельных задач прикладной электродинамики [2–4].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андрушкевич, И.Е.** Новые возможности применения метода разделения переменных в электродинамике неоднородных и нестационарных сред / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Вестник БГУ. Серия «Физика. Математика. Информатика». – 2006. – № 2. – С. 47–53.
2. **Жизневский, В.А.** Применение обобщенного метода Фурье в задаче полого волновода треугольного сечения / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Веснік ВДУ. – 2002. – № 2(24). – С. 124–128.
3. **Андрушкевич, И.Е.** Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца в прямоугольной области / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Веснік ВДУ. – 2002. – № 3(25). – С. 113–118.
4. **Жизневский, В.А.** Взаимодействие электромагнитной волны со средой особой проводимости / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Веснік ВДУ. – 2003. – № 1(27). – С. 116–120.
5. **Жизневский, В.А.** О классификации сред с точки зрения разделимости уравнений Максвелла / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский, Ю.В. Шиенок // Веснік ВДУ. – 2005. – № 1(35). – С. 112–118.
6. **Тихонов, А.Н.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977.

S U M M A R Y

As a result of the researches generalization of Fure's method has got the completed kind, suitable for the decision of applied problems of electrodynamics. The offered procedure of division of variables is sold in systems of computer algebra for realization of engineering calculations. By virtue of sufficient universality of a considered method, it is possible to approve the expansion of a circle of analytically solved problems tasks of applied physics.

Поступила в редакцию 19.09.2008