УДК 517.9

С.А. Шлапаков

О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций

Дробные интегралы и производные целого порядка – это обычные интегралы и производные. Однако в случае дробного порядка данные понятия имеют своеобразную специфику, которая проявляется в том, что для них в разных ситуациях совершенно естественно возникают их различные модификации [1].

Определение 1. *Пусть* $\varphi(x) \in L_1(a,b)$. *Интегралы*

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(x)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt,\ x > a, \tag{1}$$

$$\left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(x)}{(t-x)^{1-\alpha}}\, dt,\ x < b, \tag{2}$$

где $\alpha > 0,$ $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ *– гамма-функция, называются интегралами дробного порядка* α. *Первый из них левосторонний, а второй – правосторонний. Операторы* I_{a+}^{α}, I_{b-}^{α} *называются операторами дробного интегрирования.*

Интегралы (1) и (2) также являются дробными интегралами Римана–Лиувилля.

Дробное дифференцирование вводится как операция, обратная дробному интегрированию.

Определение 2. *Для функции* $f(x)$, *заданной на отрезке* $[a,b]$, *каждое из выражений*

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}},$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}$$

называется дробной производной Римана–Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$, *соответственно левосторонней и правосторонней.*

Для порядка $\alpha \geq 1$ дробные производные Римана–Лиувилля определяются выражениями

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}},\quad n=[\alpha]+1,$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{x}^{b}\frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}},\quad n=[\alpha]+1.$$

Дробное интегродифференцирование Ж. Адамара является дробной степенью $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$ оператора $x\frac{d}{dx}$.

На конечном отрезке $[a,b]$ действительной полуоси рассмотрим интегральный оператор

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t},\quad \alpha>0,\quad 0<a<x \tag{3}$$

в пространстве суммируемых функций

$$X_{c}^{p}=\left\{f(t)\,\middle|\,\int_{a}^{b}\left|t^{c}f(t)\right|^{p}\frac{dt}{t}<+\infty,\quad c\in R,\quad 1\le p<\infty\right\} \tag{4}$$

с нормой

$$\|f\|_{X_{c}^{p}}=\left(\int_{a}^{b}\left|t^{c}f(t)\right|^{p}\frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

Пространство X_{c}^{p} является банаховым ввиду изометрии $\|f\|_{X_{c}^{p}}=\left\|t^{c-\frac{1}{p}}f\right\|_{L_{p}}$ и в нем оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема. *Интегральный оператор* $\Im_{a+}^{\alpha}$, *определяемый выражением (3), ограниченно действует в пространстве (4), причем* $\left\|\Im_{a+}^{\alpha}f\right\|_{X_{c}^{p}}\le A_{\alpha}\|f\|_{X_{c}^{p}}$, *где* $A_{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{b/a}t^{c-1}\left(\ln t\right)^{\alpha-1}dt.$ *При этом, если постоянная* $A_{\alpha}<1$, *то оператор* $T=I-\Im_{a+}^{\alpha}$, *где* I – *тождественный оператор в* X_{c}^{p}, *является обратимым.*

Доказательство.

Будем оценивать норму $\left\|\Im_{a+}^{\alpha}f\right\|_{X_{c}^{p}}$, используя при этом простые замены переменных и обобщенное неравенство Минковского [1]:

$$\left\{\int_{\Omega_1}dx\left|\int_{\Omega_2}f(x,y)\,dy\right|^{p}\right\}^{1/p}\le\int_{\Omega_2}dy\left(\int_{\Omega_1}\left|f(x,y)^{p}\right|dx\right)^{1/p}.$$

$$\left\|\Im_{a+}^{\alpha} f\right\|_{X_c^p}=\left(\int_a^b\left|t^c\left(\Im_{a+}^{\alpha} f\right)(t)\right|^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p}=\left(\int_a^b\left|t^c\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(\tau)\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}\right|^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^b dt\left|\int_a^t t^{c-\frac{1}{p}} f(\tau)\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}\right|^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^b dt\left|\int_1^{t/a} t^{c-\frac{1}{p}} f\left(\frac{t}{u}\right)(\ln u)^{\alpha-1}\frac{du}{u}\right|^p\right)^{1/p}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t/a}(\ln u)^{\alpha-1}\frac{du}{u}\left(\int_a^b\left|t^{c-\frac{1}{p}} f\left(\frac{t}{u}\right)\right|^p dt\right)^{1/p}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t/a}u^c(\ln u)^{\alpha-1}\frac{du}{u}\left(\int_{a/u}^{b/u}\left|u^{c-\frac{1}{p}}x^{c-\frac{1}{p}}f(x)\right|^p\frac{dx}{x}\right)^{1/p}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{b/a}u^{c-1}(\ln u)^{\alpha-1}du\left(\int_a^b\left|x^c f(x)\right|^p\frac{dx}{x}\right)^{1/p}=A_\alpha\left\|f\right\|_{X_c^p},\quad \text{где}$$

$$A_\alpha=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{b/a}u^{c-1}(\ln u)^{\alpha-1}du.$$

Из полученной оценки следует, что $\left\|\Im_{a+}^{\alpha}\right\|\leq A_\alpha$. А поскольку в теореме требуется выполнение условия $A_\alpha<1$, то обратимость оператора $T=I-\Im_{a+}^{\alpha}$ следует из соответствующей теоремы функционального анализа [2]. Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет решать интегральные уравнения с оператором $T=I-\Im_{a+}^{\alpha}$ в пространстве (4), применяя принцип сжатых отображений. Решение уравнения

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{x(\tau)}{\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{1-\alpha}}\frac{d\tau}{\tau}+y(t) \qquad (5)$$

при фиксированной функции $y(t)$ является неподвижной точкой отображения, определяемого правой частью (5). Если взять нулевое приближение $x_0(t) = 0$, то последовательные приближения будут иметь вид

$$x_n(t) = \left(\left(I + \Im_{a+}^{\alpha} + \left(\Im_{a+}^{\alpha} \right)^2 + \ldots + \left(\Im_{a+}^{\alpha} \right)^n \right) y \right)(t) \cdot \qquad (6)$$

Для любой функции $y(t) \in X_c^p$ последовательность (6) будет сходиться к точному решению $x(t) \in X_c^p$ уравнения (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Самко, С.Г.*** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. ***Антоневич, А.Б.*** Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебник / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 430 с.

S U M M A R Y

A Hadamard integral operator in the weight space of summable functions is considered in the article. An application of such operator to research the solubility of the integral equation was found.

Поступила в редакцию 16.10.2008