УДК 512.542

Н.Т. Воробьев, М.Г. Семенов

Локальные функции классов Фиттинга

Все рассматриваемые группы конечны. В определениях и обозначениях мы следуем [1].

В изучении структуры классов Фиттинга широко используется функциональный метод. Этот метод связан с изучением отображений f : {простые числа} $\rightarrow$ {классы Фиттинга}. Такие отображения называются функциями Хартли или *H*-функциями [2].

Пусть $\mathrm{LR}(f)=\mathsf{E}_{\pi}\cap(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'})$, где $\pi=\mathrm{Supp}(f)=\{p\in\mathbf{P}: f(p)\neq\varnothing\}$ – носитель *H*-функции *f*. Если существует такая *H*-функция *f*, что $\mathrm{LR}(f)=\mathfrak{F}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным.

Одной из задач исследования *H*-функций класса $\mathfrak{F}$ является задача описания наибольших *H*-функций. Заметим, что Н.Т. Воробьевым [3] была описана наибольшая приведенная *H*-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Такой функцией является *H*-функция F такая, что все непустые значения F являются классами Локетта и $F(p)=F(p)\mathsf{N}_p\subseteq\mathfrak{F}$ для каждого простого p.

В работе [4] дается естественное расширение понятия локального класса Фиттинга в смысле следующего определения.

Определение [4]. *Отображение f множества **P** всех простых чисел во множество классов групп называется квазилокальной H-функцией или H_Q-функцией. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется квазилокальным, если существует квазилокальная функция f такая, что* $\mathrm{LR}_Q(f)=\mathfrak{F}$*, где* $\mathrm{LR}_Q(f)=\mathsf{E}_{\pi}\cap(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'})$ *и* $\pi=\mathrm{Supp}(f)=\{p\in\mathbf{P}: f(p)\neq\varnothing\}$ *– носитель H_Q-функции f.*

Очевидно, что всякий локальный класс Фиттинга является квазилокальным, хотя обратное в общем случае неверно.

Пусть Ω – множество всех H_Q-функций квазилокального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Определим на этом множестве отношение порядка $\leq$ следующим образом: $f\leq h$ тогда и только тогда, когда $f(p)\subseteq h(p)$ для любого простого p. Если f является наибольшим элементом множества Ω, то f называют наибольшей H_Q-функцией класса $\mathfrak{F}$.

В работе [4] построена наибольшая среди $\langle S_n, D_0\rangle$-замкнутых H_Q-функций, определяющих класс Фиттинга $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп. В последующем нами [5] было установлено, что требование D_0-замкнутости H_Q-функции класса Фиттинга $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп, которое использовалось при доказательстве основного результата в работе [4], избыточно.

В настоящей работе посредством радикалов групп найдено новое локальное задание произвольного локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют: S_n-замкнутым, если из $G\in\mathfrak{F}$ и $N\triangleleft G$, всегда следует $N\in\mathfrak{F}$; N_0-замкнутым, если из условия $G=NM$, где $N\triangleleft G$, $M\triangleleft G$ и $N\in\mathfrak{F}$, $M\in\mathfrak{F}$, следует $G\in\mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он одновременно S_n-замкнут и N_0-замкнут. Подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$

группы G называют $\mathfrak{F}$-радикалом G, если она является наибольшей из нормальных подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

Определение. *Пусть X – класс Фиттинга, $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Определим класс групп F_X следующим образом: $G \in F_X$ тогда и только тогда, когда $G_F \in X$. Если $X = \varnothing$, то положим $F_X = \varnothing$.*

Мы будем использовать следующее известное свойство $\mathfrak{F}$-радикалов групп.

Лемма [1]. *Если N – субнормальная подгруппа группы G и $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то $N_F \cap G = G_F$.*

Основной результат работы представляет

Теорема. *Любой локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется нормально-наследственной H_Q-функцией x такой, что*

$$x(p)N_p = x(p) = \begin{cases} F_{F(p)}, & \text{если } p \in \pi \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi' \end{cases},$$

где F – наибольшая приведенная H-функция класса $\mathfrak{F}$ и $\pi = \mathrm{Supp}(F)$.

Доказательство. Покажем, что x – нормально-наследственная функция, то есть $x(p) = S_n x(p)$ для всех простых p. Пусть $G \in S_n x(p)$, где $p \in \mathrm{Supp}(x)$. Тогда найдется группа $K \in x(p)$ такая, что $G \lhd K$. Заметим, что $K_F \lhd K$ и $G_F \lhd G$. Так как $G \lhd K$, то по лемме $K_F \cap G = G_F$ и тогда $G_F \subseteq K_F$. Но $K \in x(p)$, и поэтому $K_F \in F(p)$. Тогда из $G_F \subseteq K_F$ следует, что $G_F \in F(p)$ и поэтому, по заданию функции $x(p)$, получаем $G \in x(p)$. Следовательно, $S_n x(p) \subseteq x(p)$. Справедливость обратного включения очевидна. Итак, $x(p) = S_n x(p)$.

Покажем теперь, что $LR_Q(x) = F$. Пусть $G \in F(p)$, где $p \in \pi = \mathrm{Supp}(x)$. Тогда, в силу S_n-замкнутости H-функции $F(p)$, следует $G_F \in F(p)$. Отсюда имеем, $G \in x(p)$. Таким образом, $F(p) \subseteq x(p)$, и поэтому $F(p)N_pE_{p'} \subseteq x(p)N_pE_{p'}$. Заметим, что $F(p)=\varnothing$ в точности тогда, когда $x(p)=\varnothing$, и поэтому $\mathrm{Supp}(x)=\mathrm{Supp}(F)=\pi$. Значит, $E_\pi \cap (\bigcap_{p\in\pi} F(p)N_pE_{p'}) \subseteq E_\pi \cap (\bigcap_{p\in\pi} x(p)N_pE_{p'})$. Следовательно, $LR(F) \subseteq LR_Q(x)$. Но $F = LR(F)$. Поэтому $F \subseteq LR_Q(x)$.

Покажем теперь, что $LR_Q(x) \subseteq F$. Выберем из класса $LR_Q(x) \setminus F$ группу G минимального порядка. Тогда группа G комонолитична и ее комонолит $G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in x(p)N_pE_{p'}$ для $p \in \mathrm{Supp}(x)$, то существует $N \lhd G$ такая, что $N \in x(p)$ и $G/N \in N_pE_{p'}$. Так как $N \lhd G$, то по лемме имеем $G_F \cap N = N_F$. Но из комонолитичности $G_{\mathfrak{F}}$ следует $G_F \cap N = N$. Итак, $N = G_F \cap N = N_F$. Так как $N \in x(p)$, то $N_F \in F(p)$. Следовательно, $N \in F(p)$. Но тогда из $G/N \in N_pE_{p'}$ и $N \in F(p)$ следует, что $G \in F(p)N_pE_{p'}$ для любого p из $\mathrm{Supp}(x)=\mathrm{Supp}(F)$. Значит, $G \in \bigcap_{p\in\pi} F(p)N_pE_{p'}$, где $\pi=\mathrm{Supp}(F)$. Так как $G \in LR_Q(x)$, то $G \in E_\pi$. Следовательно, $G \in E_\pi \cap (\bigcap_{p\in\pi} F(p)N_pE_{p'}) = LR(F)$. Но так как $F = LR(F)$, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы G. Следовательно, $LR_Q(x) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $LR_Q(x) = \mathfrak{F}$.

Остается показать, что $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для всех простых p. Пусть $G \in x(p)\mathfrak{N}_p$. Тогда существует $K \triangleleft G$ такая, что $K \in x(p)$ и $G/K \in \mathfrak{N}_p$. Так как $K \triangleleft G$, то по лемме имеем $G_{\mathfrak{F}} \cap K = K_{\mathfrak{F}}$. В силу изоморфизма $G_{\mathfrak{F}}K/K \cong G_{\mathfrak{F}}/(G_{\mathfrak{F}} \cap K)$ и с учетом $G_{\mathfrak{F}} \cap K = K_{\mathfrak{F}}$ получаем $G_{\mathfrak{F}}K/K \cong G_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{F}}$. Так как $G_{\mathfrak{F}}K/K$ – подгруппа группы G/K, то с учетом $G/K \in \mathfrak{N}_p$ имеем $G_{\mathfrak{F}}K/K$ – p-группа. Тогда из $G_{\mathfrak{F}}K/K \cong G_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{F}}$ следует, что $G_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p$. Заметим, что $K_{\mathfrak{F}} \in F(p)$ ввиду $K \in x(p)$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}} \in F(p)\mathfrak{N}_p$, но $F(p)\mathfrak{N}_p = F(p)$, и поэтому $G \in x(p)$. Тогда $x(p)\mathfrak{N}_p \subseteq x(p)$. Справедливость обратного включения очевидна. Таким образом, $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для каждого простого p. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \boldsymbol{P}$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп определяется нормально-наследственной H_Q-функцией x такой, что

$$x(p)\mathfrak{N}_p = x(p) = \begin{cases} (G : G_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_p), & \text{если } p \in \pi \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi' \end{cases}$$

В случае $\pi = \boldsymbol{P}$ получаем

Следствие 2. Класс Фиттинга $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп определяется нормально-наследственной H_Q-функцией x такой, что

$x(p)\mathfrak{N}_p = x(p) = (G : G_{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}_p)$ для всех простых p.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Doerk, K.*** Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. ***Воробьев, Н.Т.*** О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сибирский математический журнал. – 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1296–1302.
3. ***Воробьев, Н.Т.*** О наибольшей приведенной функции Хартли / Н.Т. Воробьев // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 1999. – № 1(15). – С. 8–13.
4. ***Загурский, В.Н.*** О новых заданиях классов Фиттинга / В.Н. Загурский, Н.Т. Воробьев // Веснiк ВДУ. – 2003. – № 2. – С. 100–104.
5. ***Семенов, М.Г.*** О наибольших локальных функциях нильпотентных классов Фиттинга / М.Г. Семенов, Н.В. Савельева // X(55) региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета: сб. ст. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008. – С. 21–23.

S U M M A R Y

The new local function of Fitting class $\mathfrak{F}$ is described, where $\mathfrak{F}$ is a local Fitting class.

Поступила в редакцию 6.03.2009