

С.А. Ермоченко

Расчет напряженно-деформированного состояния кольцевой пластины с эксцентрическим вырезом методом конечных разностей

Задача о расчете напряженно-деформированного состояния круглой пластины с эксцентрическим вырезом возникает при исследованиях реконструированного среднего уха человека. Реконструкции могут подвергаться цепь косточек, замещаемая искусственными протезами, и барабанная перепонка, заменяемая искусственной мембраной (изготовленной, например, из хрящевой ткани) [1]. Для фиксации протеза до естественного срачивания с живыми тканями его размеры выбираются так, чтобы возникли начальные деформации искусственной мембраны, а также связок, удерживающих стремя. Возникают напряжения во всей колебательной системе восстановленного уха. Большие значения данных напряжений могут приводить к нежелательным последствиям в послеоперационный период – значительному смещению спектра собственных частот всей колебательной системы среднего уха [2] и релаксации стремениной мышцы. Для предотвращения таких последствий производится расчет напряженно-деформированного состояния всей системы.

Целью данной работы является расчет статического напряженно-деформированного состояния мембраны, моделирующей барабанную перепонку. Так как круглое основание протеза склеивается с пластиной, последнюю можно считать круглой пластиной с круглым вырезом и с заданными граничными условиями на внешнем и внутреннем контуре.

Такие исследования уже проводились для случаев кольцевой concentрической пластины (с использованием точного аналитического метода [3]) или для кольцевой эксцентрической пластины в случае малого эксцентриситета (с применением асимптотического метода [4]). Здесь предлагается математическая модель для случаев произвольного эксцентриситета, построенная с использованием метода конечных разностей.

Восстановленная мембрана моделируется тонкой круглой упругой пластиной толщиной h , радиуса a , с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона σ . Введем глобальную систему координат $Oxyz$, связанную с центром пластины (рис. 1). Внутренний вырез имеет радиус b . Центр этого выреза – точка $(x_p, y_p, 0)$ (в глобальной декартовой системе координат $Oxyz$) или точка $(\delta_p, \varphi_p, 0)$ (в цилиндрической системе координат, связанной с $Oxyz$). Напряженно-деформированное состояние пластины будет определяться нормальным прогибом пластины в каждой ее точке. Так как протез прогибает реконструированную барабанную перепонку, то его основание (внутренний контур пластины) перемещается вдоль оси Oz на величину w_p и поворачивается вокруг некоторой оси $O'O''$, проходящей через центр выреза, на угол θ_p . Угол φ_p определяет положение этой оси относительно системы координат $Oxyz$.

Введем вторую систему координат $O_p x' y' z'$, связанную с центром выреза так, чтобы оси $O'O''$ и $O_p y'$ совпадали.

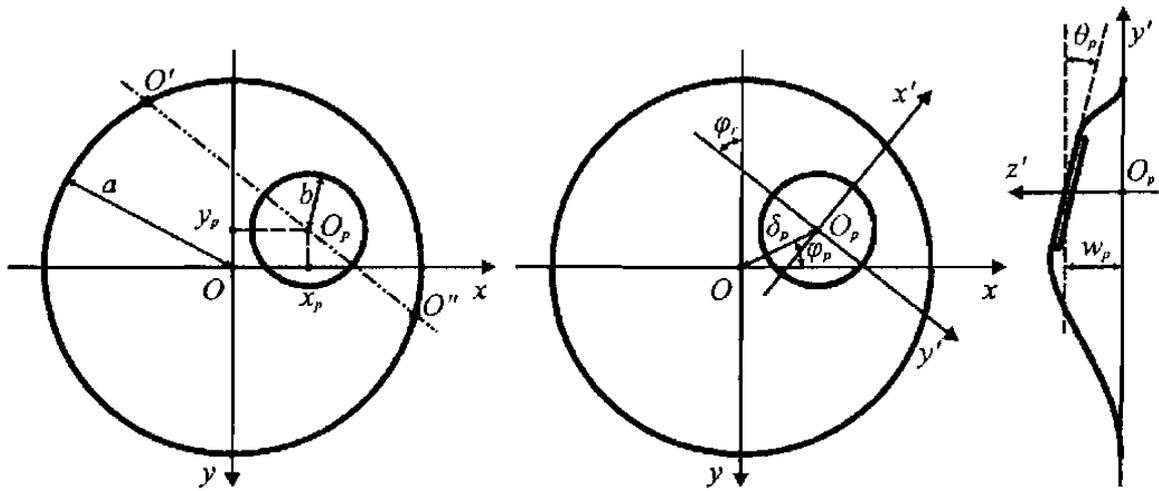


Рис. 1. Схематическое изображение реконструированной барабанной перепонки.

Далее необходимо определить прогиб пластины. Введем цилиндрическую систему координат $O_p r \varphi z'$, связанную с системой координат $O_p x' y' z'$. В этой системе координат введем прогиб пластины $w(r, \varphi)$ в направлении оси $O_p z'$, который будет удовлетворять уравнению:

$$\Delta^2 w(r, \varphi) = 0. \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат.

Рассмотрим граничные условия для этого уравнения. На внутреннем контуре примем условие жесткой заделки:

$$w|_{r=b} = w_p + b \cos \varphi \operatorname{tg} \theta_p, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=b} = \cos \varphi \operatorname{tg} \theta_p. \quad (2)$$

На внешнем контуре заданы условия упругой заделки [5]:

$$k_{st} w|_{r=\Gamma} = Q_l|_{r=\Gamma}, \quad k_{st} \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=\Gamma} = M_l|_{r=\Gamma}, \quad (3)$$

где

$$Q_l = D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad M_l = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sigma}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \quad (4)$$

– перерезывающая сила и изгибающий момент пластины, приходящиеся на единицу длины дуги, $D = E h^3 / [12(1 - \sigma^2)]$ – цилиндрическая жесткость пластины, значение коэффициентов k_{st} и k_{sl} могут варьироваться в зависимости от угла φ . В данной работе, для простоты, рассмотрены усредненные значения $k_{st} = 6,5 \cdot 10^{-5}$ Н, $k_{sl} = 7,5 \cdot 10^4$ Н · м⁻² [5].

Здесь $\Gamma = \sqrt{a^2 - \delta_p^2 \sin^2(\varphi + \varphi_r - \varphi_p)} - \delta_p \cos(\varphi + \varphi_r - \varphi_p)$ – внешняя граница пластины в системе координат $O_p x' y' z'$.

Решение уравнения (1) с граничными условиями (2)–(3) находится численным методом. Строится сетка по координатам r и φ , неравномерная по r и равномерная по φ (рис. 2а).

Вводится сеточная функция $u_{ij}(r_{ij}, \varphi_j)$ в узлах сетки. Уравнения (1)–(3) приближаются конечноразностными соотношениями, для чего составляется разностная схема по тринадцатичточечному шаблону (рис. 2б). Тогда конечноразностное приближение уравнения (1) примет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u|_{i,j} = & \frac{1}{r_{i,j}^4 (\Delta\varphi)^4} u_{i,j-2} + \left(\frac{2c_{i,j-1}^{<3>}}{r_{i,j}^2 (\Delta\varphi)^2} + \frac{2c_{i,j-1}^{<0>}}{r_{i,j} (\Delta\varphi)^2} \right) u_{i-1,j-1} - \\
& - \left(\frac{2c_{i,j-1}^{<2>}}{r_{i,j}^2 (\Delta\varphi)^2} + \frac{2c_{i,j-1}^{<0>}}{r_{i,j} (\Delta\varphi)^2} + \frac{4}{r_{i,j}^4 (\Delta\varphi)^4} - \frac{4}{r_{i,j}^4 (\Delta\varphi)^2} \right) u_{i,j-1} + \\
& + \frac{2c_{i,j-1}^{<1>}}{r_{i,j}^2 (\Delta\varphi)^2} u_{i+1,j-1} + \left(c_{i,j}^{<12>} - \frac{2c_{i,j}^{<7>}}{r_{i,j}} \right) u_{i-2,j} - \\
& - \left(c_{i,j}^{<11>} - \frac{2c_{i,j}^{<6>}}{r_{i,j}} + \frac{c_{i,j}^{<3>}}{r_{i,j}^2} + \frac{c_{i,j}^{<0>}}{r_{i,j}^3} + \frac{4c_{i,j}^{<3>}}{r_{i,j}^2 (\Delta\varphi)^2} + \frac{4c_{i,j}^{<0>}}{r_{i,j} (\Delta\varphi)^2} \right) u_{i,j} + \\
& + \left(c_{i,j}^{<10>} - \frac{2c_{i,j}^{<5>}}{r_{i,j}} + \frac{c_{i,j}^{<2>}}{r_{i,j}^2} + \frac{c_{i,j}^{<0>}}{r_{i,j}^3} + \frac{4c_{i,j}^{<2>}}{r_{i,j}^2 (\Delta\varphi)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{4c_{i,j}^{<0>}}{r_{i,j} (\Delta\varphi)^2} + \frac{6}{r_{i,j}^4 (\Delta\varphi)^4} - \frac{8}{r_{i,j}^4 (\Delta\varphi)^2} \right) u_{i,j} - \\
& - \left(c_{i,j}^{<9>} - \frac{2c_{i,j}^{<4>}}{r_{i,j}} + \frac{c_{i,j}^{<1>}}{r_{i,j}^2} + \frac{4c_{i,j}^{<1>}}{r_{i,j}^2 (\Delta\varphi)^2} \right) u_{i+1,j} + c_{i,j}^{<8>} u_{i+2,j} + \\
& + \left(\frac{2c_{i,j+1}^{<3>}}{r_{i,j}^2 (\Delta\varphi)^2} + \frac{2c_{i,j+1}^{<0>}}{r_{i,j} (\Delta\varphi)^2} \right) u_{i-1,j+1} - \\
& - \left(\frac{2c_{i,j+1}^{<2>}}{r_{i,j}^2 (\Delta\varphi)^2} + \frac{2c_{i,j+1}^{<0>}}{r_{i,j} (\Delta\varphi)^2} + \frac{4}{r_{i,j}^4 (\Delta\varphi)^4} - \frac{4}{r_{i,j}^4 (\Delta\varphi)^2} \right) u_{i,j+1} + \\
& + \frac{2c_{i,j+1}^{<1>}}{r_{i,j}^2 (\Delta\varphi)^2} u_{i+1,j+1} + \frac{1}{r_{i,j}^4 (\Delta\varphi)^4} u_{i,j+2} = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $i = \overline{2..n-2}$, $j = \overline{0..m-1}$, n – количество узлов сетки по координате r , m – количество узлов сетки по координате φ , $\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_{j-1}$.

Значения коэффициентов из (5) имеют вид:

$$\begin{aligned}
c_{i,j}^{<0>} &= \frac{1}{r_{i,j} - r_{i-1,j}} & c_{i,j}^{<1>} &= \frac{c_{i+1,j}^{<0>}}{r_{i+1,j} - r_{i,j}} & c_{i,j}^{<2>} &= \frac{c_{i,j}^{<0>} + c_{i+1,j}^{<0>}}{r_{i+1,j} - r_{i,j}} \\
c_{i,j}^{<3>} &= \frac{c_{i,j}^{<0>}}{r_{i-1,j} - r_{i,j}} & c_{i,j}^{<4>} &= \frac{c_{i,j}^{<1>}}{r_{i,j} - r_{i-1,j}} & c_{i,j}^{<5>} &= \frac{c_{i-1,j}^{<1>} + c_{i,j}^{<2>}}{r_{i,j} - r_{i-1,j}} \\
c_{i,j}^{<6>} &= \frac{c_{i-1,j}^{<2>} + c_{i,j}^{<3>}}{r_{i,j} - r_{i-1,j}} & c_{i,j}^{<7>} &= \frac{c_{i,j}^{<3>}}{r_{i,j} - r_{i-1,j}} & c_{i,j}^{<8>} &= \frac{c_{i+1,j}^{<4>}}{r_{i+1,j} - r_{i,j}} \\
c_{i,j}^{<9>} &= \frac{c_{i,j}^{<4>} + c_{i+1,j}^{<5>}}{r_{i+1,j} - r_{i,j}} & c_{i,j}^{<10>} &= \frac{c_{i,j}^{<5>} + c_{i+1,j}^{<6>}}{r_{i-1,j} - r_{i,j}} & c_{i,j}^{<11>} &= \frac{c_{i,j}^{<6>} + c_{i+1,j}^{<7>}}{r_{i+1,j} - r_{i,j}} \\
c_{i,j}^{<12>} &= - \frac{c_{i,j}^{<7>}}{r_{i+1,j} - r_{i,j}}
\end{aligned} \tag{6}$$

Так как $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ – один и тот же угол, для сеточной функции соблюдаются следующие соотношения:

$$u_{j,m} = u_{j,0}, \quad u_{i,m+1} = u_{i,1}, \quad u_{i,m+2} = u_{i,2}, \quad u_{i,-2} = u_{i,m-2}, \quad u_{i,-1} = u_{i,m-1}. \tag{7}$$

Аналогичные соотношения выполняются и для коэффициентов $c_{i,j}^{<k>}$.

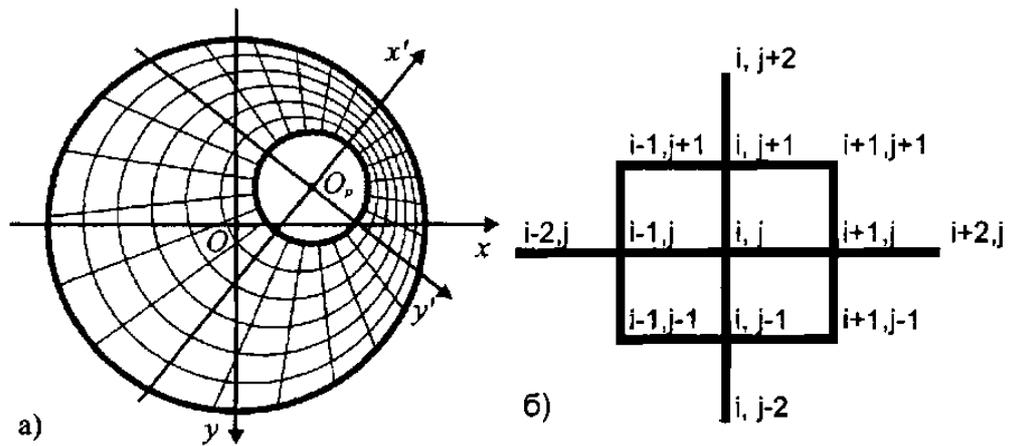


Рис. 2. Схематическое изображение неравномерной сетки по координатам r, φ . (а) и шаблона для конечноразностных соотношений (б).

На внутреннем контуре (2) конечноразностные соотношения (5) имеют вид:

$$\begin{aligned} u|_{0,j} &= c_{0,j} u_{0,j} = w_p + b \cos \varphi_j \operatorname{tg} \theta; \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{1,j} &= c_{1,j} u_{1,j} + c_{0,j} u_{0,j} = \cos \varphi_j \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты $c_{0,j}$ и $c_{1,j}$ вычисляются при приближении конечноразностными соотношениями граничных условий на внутреннем контуре (2) аналогично коэффициентам (6).

На внешнем контуре (3) конечноразностные соотношения (5) принимают вид:

$$\begin{aligned} u|_{n-1,j} &= c_{n-1,j+2} u_{n-1,j+2} + c_{n-2,j+1} u_{n-1,j+1} + c_{n-1,j+1} u_{n-1,j+1} + c_{n,j+1} u_{n,j+1} + \\ &+ c_{n-3,j} u_{n-3,j} + c_{n-2,j} u_{n-2,j} + c_{n-1,j} u_{n-1,j} + c_{n,j} u_{n,j} + \\ &+ c_{n-2,j-1} u_{n-2,j-1} + c_{n-1,j-1} u_{n-1,j-1} + c_{n,j-1} u_{n,j-1} + c_{n-1,j-2} u_{n-1,j-2} = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{n,j} &= c_{n,j+2} u_{n,j+2} + c_{n-1,j+1} u_{n-1,j+1} + c_{n,j+1} u_{n,j+1} + c_{n-2,j} u_{n-2,j} + \\ &+ c_{n-1,j} u_{n-1,j} + c_{n,j} u_{n,j} + c_{n-1,j-1} u_{n-1,j-1} + c_{n,j-1} u_{n,j-1} + c_{n,j-2} u_{n,j-2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты $c_{n-1,j}$ и $c_{n,j}$ вычисляются при приближении конечноразностными соотношениями граничных условий на внешнем контуре (3) аналогично коэффициентам (6).

Полученная система уравнений (5), (8), (9) относительно значений сеточной функции u_{ij} является линейной. Численное решение таких систем может быть найдено достаточно быстро, что делает применение метода конечных разностей удобным для нахождения напряженно-деформированного состояния реконструированной барабанной перепонки. Но следует заметить, что для достаточного уровня точности необходимо строить очень мелкую сетку, что существенно замедляет скорость решения составленной системы уравнений. Кроме того, для дальнейшего применения результатов необходимо рассчитывать перерезывающие силы и изгибающие моменты на внутреннем контуре пластины, что приведет к накоплению ошибки вычислений и потере точности.

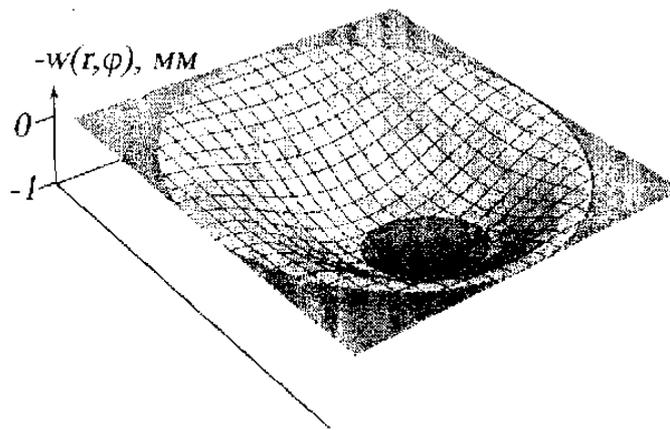


Рис. 3. Прогиб пластины $w(r, \varphi)$, полученный численным методом.

Для примера была рассчитана функция прогиба численным методом конечных разностей (рис. 3). Расчеты выполнялись при следующих значениях параметров: $a = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $b = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 0,15 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma = 0,4$, $E = 3,3 \cdot 10^7$ Н/м, $k_{st} = 7,55 \cdot 10^4$ Н/м², $k_{st} = 6,5 \cdot 10^{-5}$ Н, $x_p = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $y_p = 0$ м.

Сравнение численного и асимптотического методов показало, что при большом эксцентриситете выреза асимптотический метод не дает приемлемых результатов. Однако следует заметить, что время расчета компьютерной конечноразностной модели значительно превышает (более чем в 11 раз) время расчета асимптотической модели. Кроме того, асимптотический метод дает аналитические выражения для неизвестных параметров, что облегчает анализ полученных данных. Поэтому последний метод более целесообразно применять для случая малых эксцентриситетов выреза пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sitnikov, V.P.** Ossiculoplasty in patients with chronic purulent otitis media / V. P. Sitnikov, A. Kaushic // Proc. Int. Otorhinolaryng. Congress. – Bratislava, 1998. – P. 84.
2. **Mikhasev, G.** Modeling of the dynamic behavior of the reconstructed middle ear taking into account its initial strain-stress state / G. Mikhasev, M. Firsov, S. Yermochenko, V. Sitnikov // Book of Abstracts of the Annual Scientific Conference GAMM 2004, Technische Universität Dresden. – Dresden, 2004. – P. 25.
3. **Muxacev, Г.И.** О простейшей модели расчета напряженно-деформированного состояния колебательной системы реконструированного среднего уха / Г.И. Михасев, С.А. Ермоchenko, В.П. Ситников // Веснік ВДУ. – 2004. – № 4(34). – С. 97–102.
4. **Mikhasev, G.** Calculation of the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis / G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Journal of Biomechanics, Abstracts of the 5th World Congress of Biomechanics, Munich, Germany, 29 Jul. – 4 Aug. 2006. – 2006. – Vol. 39, Suppl. 1. – P. S389.
5. **Wada, H.** Three-Dimensional Finite-Element Method Analysis of the Human Middle Ear / H. Wada, T. Koite, T. Kobayashi // Middle Ear Mechanics in Research and Otorhinology / Dept. of Oto-Rhino-Laryngology of Univ. of Technology; ed. by K.-B. Huttenbrink. – Dresden, 1997. – P. 76–81.

S U M M A R Y

In this article calculation of a strain-stress state of a thin round plate with the circular cut executed by a finite-differences method is described. Such method has been chosen because of the presence of considerable eccentricity of a plate and circular cut which does not allow applying analytical methods. This problem is applied in otorhinolaryngology at eardrum reconstruction.

Поступила в редакцию 21.12.2007