



Е.А. Корчевская

Оптимальное проектирование слоистых композитных оболочек типа «сэндвич», содержащих вязкоупругие слои

Введение. Тонкие слоистые композитные оболочки широко используются в различных областях современной техники. Образованные из слоистых оболочек конструкции сочетают в себе легкость с высокой прочностью, что объясняет широкое применение оболочек в судостроении, авиа- и ракетостроении, в промышленном строительстве и других областях. Существуют большие перспективы практического использования оболочек. Реализация этих возможностей происходит в результате расширения области применения оболочек, совершенствования методов их расчетов и более основательного рассмотрения их свойств. Применение полимерных материалов в современном производстве вызывает необходимость учитывать вязкоупругие свойства при изучении низкочастотных колебаний оболочек. Стремление получить наименьшую материалоемкость изделий при требуемой прочности и жесткости, а также возможность варьирования свойств материала, привело к необходимости использования композитных балок, пластин и оболочек слоистой структуры в качестве составляющих элементов тонкостенных инженерных сооружений в различных отраслях народного хозяйства (в машино-, тракторо- и судостроении, в авиационной и ракетно-космической технике и т.п.). Вместе с тем, тонкостенные элементы, составляющие реальную инженерную конструкцию, имеют сложную конфигурацию. При их расчете следует принимать во внимание наличие косых краев, непостоянство кривизн, толщины оболочки. Перечисленные и другие факторы приводят к сильной неоднородности напряженно-деформированного состояния тонкостенной конструкции, которая может быть причиной появления на поверхности оболочки «наиболее слабых» областей, которые приводят к сильной локализации собственных форм колебаний.

В ряде случаев при проектировании тонкостенных конструкций, испытывающих заданные периодические низкочастотные силовые воздействия, с целью предотвращения явления резонанса ставится задача об изменении спектра собственных частот в сторону его увеличения. При проектировании композитных слоистых оболочек данная задача может быть решена путем подбора материала и толщины слоев, составляющих весь пакет оболочки, при выполнении некоторых условий. Таким условием может быть постоянство массы оболочки.

Представляются актуальными исследования колебаний вязкоупругих слоистых композитных оболочек сложной конфигурации, а также разработка методов оптимального проектирования слоистых тонкостенных конструкций путем оптимального распределения (с учетом наличия слабых мест) толщин межслойных заполнителей.

1. Постановка задачи. Рассмотрим слоистую оболочку. Будем считать, что оболочка пологая и составлена из N изотропных вязкоупругих слоев, характеризующихся толщиной h_k , модулем Юнга E_k , плотностью ρ_k , коэффициентом Пуассона ν_k , модулем поперечного сдвига G_k . В общем случае оболочка может быть некруговой с радиусом кривизны $R_2(\alpha_2)$.

В работе [1], используя гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [2], выведены уравнения колебаний слоистых композитных оболочек, которые учитывают поперечные сдвиги слоев, а также интегральные характеристики вязких межслойных заполнителей. В предположении об образовании большого количества волн малой длины в окружном или осевом направлении данные уравнения в безразмерной форме принимают вид:

$$\begin{cases} \varepsilon^4 (1 - \varepsilon^3 \tau \Delta) \Delta^2 \chi + k(\varphi) \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \lambda (\chi - \varepsilon^2 \kappa \Delta \chi) = 0, \\ \varepsilon^4 \Delta^2 F - k(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\chi - \varepsilon^2 \kappa \Delta \chi) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$\varepsilon^8 = h^2 \eta_3 / [12R^2(1-\nu^2)]$ – малый параметр, характеризующий тонкостенность оболочки, Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат $\varphi = \alpha_2/R$ и $s = \alpha_1/R$, $F = F^* / (\varepsilon^4 E h R^2)$, $\chi = \chi^* / R$ – безразмерные функции напряжений и перемещений соответственно, $\lambda = (\rho R^2) / (E \varepsilon^4) \Omega^2$ – искомый частотный параметр, ρ , ν , E – осредненные плотность, коэффициент Пуассона и модуль Юнга, $k(\varphi)$ – переменная кривизна, h – толщина оболочки, R – радиус цилиндра исходной поверхности, $\Omega = \omega + i\alpha$, $i = \sqrt{-1}$, ω – фундаментальная частота свободных колебаний, α – декремент колебаний.

Параметры τ , κ характеризуют поперечные сдвиги и вводятся следующим образом:

$$K/\pi^2 = \varepsilon^2 \kappa, \quad K\theta/\pi^2 = \varepsilon^3 \tau, \quad \kappa, \tau \sim 1 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Здесь $K = \pi^2 h^2 / (b R^2)$, а коэффициенты b , θ , η_3 введены в монографии [2]. Заметим, что параметры K и θ являются функциями неизвестных ω и α .

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания:

$$F = \Delta F = \chi = \Delta \chi = \Delta^2 \chi = 0, \text{ при } s=0, l, \quad l = L/R. \quad (2)$$

Задача состоит в определении параметра λ , для которого краевая задача (1), (2) имеет ненулевое решение.

2. Асимптотическое решение. Считаем, что локализация собственных колебаний происходит в окрестности некоторой «слабой» образующей $\varphi = \varphi_0$. Введем растяжение масштаба в окрестности этой образующей:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2} \xi.$$

Согласно [3] решение будем искать в виде:

$$\chi = \chi_m(\varphi) \sin(m\pi s/l), \quad F = \Phi_m(\varphi) \sin(m\pi s/l), \quad m=1,2,\dots, \quad (3)$$

где

$$\{\chi_m, \Phi_m\} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \{\chi_{mj}(\xi), f_{mj}(\xi)\} \exp\left\{i\left(\varepsilon^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2\right)\right\}, \quad \text{Im } a > 0, \quad (4)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots \quad (5)$$

В выражении (4) параметр q характеризует изменяемость решения в окружном направлении и должно быть вещественным, а мнимая часть числа a , характеризующего скорость затухания амплитуды волн при удалении от линии $\varphi = \varphi_0$, должна быть положительной. Функции χ_{mj} , f_{mj} являются полиномами по переменной ξ .

Разложим функцию $k(\varphi)$ в ряд в окрестности этой образующей:

$$k(\varphi) = k(\varphi_0) + \varepsilon^{1/2} k'(\varphi_0) \xi + \frac{1}{2} \varepsilon k''(\varphi_0) \xi^2 + \dots \quad (6)$$

Подставляя (3)–(6) в (1), (2), получим последовательность алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^j \mathbf{A}_k \mathbf{X}_{j-k} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

относительно вектор-функции $\mathbf{X}_j = (\chi_{mj}, f_{mj})^T$.

Элементы матрицы \mathbf{A}_0 задаются соотношениями:

$$A_0^{(11)} = q^4 - \lambda_0(1 + \kappa q^2), \quad A_0^{(12)} = -k(\varphi_0) (\pi m/l)^2, \\ A_0^{(21)} = k(\varphi_0) (\pi m/l)^2 (1 + \kappa q^2), \quad A_0^{(22)} = q^4,$$

а элементы матрицы \mathbf{A}_j при $j \geq 1$ выражаются через производные по q и φ_0 j -го порядка элементов матрицы \mathbf{A}_0 [3].

Из условия существования нетривиального решения системы (7) при $j = 0$, находим формулу для частотного параметра нулевого приближения:

$$\lambda_0(q, \varphi_0, m) = \frac{q^4}{1 + \kappa q^2} + \frac{k^2(\varphi_0) (\pi m/l)^4}{q^4}. \quad (8)$$

Минимизируя $\lambda_0(q, \varphi_0, m)$ по q и φ_0 , из условий

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} = 0, \quad (9)$$

находим число q^0 и «наиболее слабую» образующую φ_0^0 .

Однородная задача в нулевом приближении имеет решение в виде:

$$X_0(\xi) = P_0(\xi)Y^0,$$

где $P_0(\xi)$ – неизвестный полином, а $Y^0 = (1, -A_0^{(11)}/A_0^{(12)})$ – двумерный вектор.

При $j=1$ система уравнений (7) является неоднородной. Принимая во внимание условия (8), (9) она обращается в систему тождеств.

Условие совместности системы (7) при $j=2$ приводит к соотношению для вычисления параметра a :

$$a = i(\lambda_{\varphi\varphi}^0 / \lambda_{qq}^0)^{1/2},$$

а также к уравнению относительно $P_0(\xi)$:

$$\frac{d^2 P_0}{d\xi^2} + ia \left[2\xi \frac{dP_0}{d\xi} + P_0 \right] + \frac{2\lambda_1}{\lambda_{qq}^0} P_0 + \frac{2\pi q^6}{\lambda_{qq}^0 (1 + \kappa q^2)} P_0 = 0, \quad (10)$$

где $\lambda_{\varphi\varphi}^0$ и λ_{qq}^0 – вторые производные частотного параметра нулевого приближения по соответствующим параметрам при $\varphi = \varphi_0^0$ и $q = q^0$.

При

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(n)} = \left(\frac{1}{2} + n \right) \sqrt{\lambda_{qq}^0 \lambda_{\varphi\varphi}^0} + \frac{\pi q^6}{1 + \kappa q^2} \quad (11)$$

уравнение (10) имеет решение в виде полинома Эрмита степени n :

$$P_0(\xi) = H_n(\vartheta), \quad \vartheta = \sqrt{c}\xi, \quad \tilde{n} = -ia.$$

Отделяя в (8), (11) вещественную и мнимую части, находим собственную частоту колебаний $\omega = \text{Re}\Omega$ и соответствующий ей декремент $\alpha = \text{Im}\Omega$.

3. Пример. В качестве примера рассмотрим тонкую некруговую трехслойную цилиндрическую оболочку эллиптического сечения с полуосями $b=0,03$ м, $a=0,015$ м ($a < b$), постоянной длины $L=0,45$ м. В данном случае «наиболее слабыми» будут две образующие, проходящие через точки А и В (рис. 1).

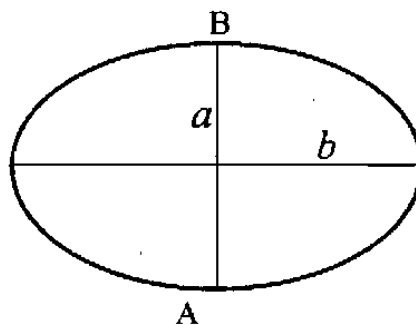


Рис. 1. Сечение эллиптического цилиндра.

Слои оболочки расположены симметрично относительно средней линии.

Первый и третий слои изготовлены из керамики с модулем Юнга $E_1 = E_3 = 1,52 \cdot 10^{12}$ Па, плотностью $\rho_1 = \rho_3 = 2510$ кг/м³ и числом Пуассона $\nu_1 = \nu_3 = 0,3$. Межслойный наполнитель изготовлен из фторопласта с $E_2 = 2,34 \cdot 10^8$ Па, $\rho_2 = 2150$ кг/м³, $\nu_2 = 0,3$.

Кроме этого, пусть выполняется условие:

$$h_1 = h_3 = h_1^0 - \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2, \quad (12)$$

где $h_1^0 = 0,0005$ м, $0 \leq h_2 \leq 2h_1^0 \frac{\rho_1}{\rho_2} = \tilde{h}_1$. Тогда для любых $h_1 = h_3$, удовлетворяющих

(12), масса оболочки будет постоянной. Будем считать здесь, что первый и третий слои подчиняются закону упругих деформаций, а межслойный наполнитель – закону вязкоупругих деформаций. Тогда ядро скорости релаксации напряжений для керамических слоев $R_1 = R_3 = 0$, а для фторопласта [4]

$$R_2 = 0,02366 e^{-3,33 \cdot 10^{-4} t} t^{-0,95}.$$

Поставим минимаксную задачу:

$$\omega^* = \omega(h_1^*, h_2^*, h_3^*, m^*) = \max_{0 \leq h_2 \leq \tilde{h}_1} \left\{ \min_m \omega(h_2, m) \right\}. \quad (13)$$

На рис. 2 показан график функции $\omega_F = \min_m \omega(h_2, m)$, позволяющий определить оптимальную толщину h_2^* наполнителя, при которой решается поставленная задача (13). Кривая на рис. 3 показывает зависимость соответствующего логарифмического декремента $D_L = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}$ от параметра h_2 .

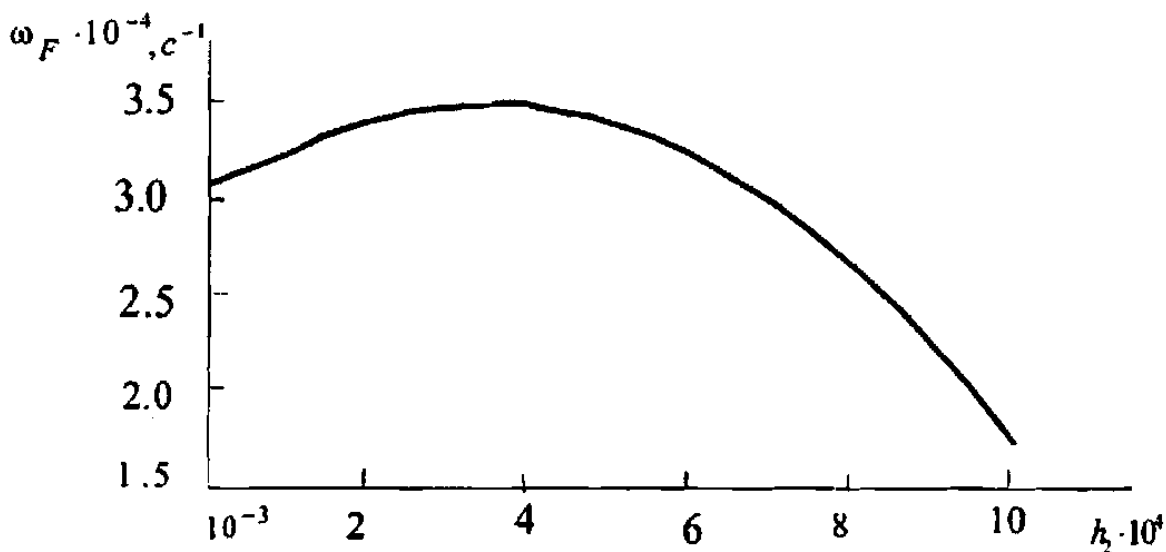


Рис. 2. Собственная частота колебаний.

Видно, что для рассматриваемых параметров задачи $h_2^* \approx 4 \cdot 10^{-4}$ м, для которой $\omega^* \approx 3,4 \cdot 10^4$ с⁻¹.

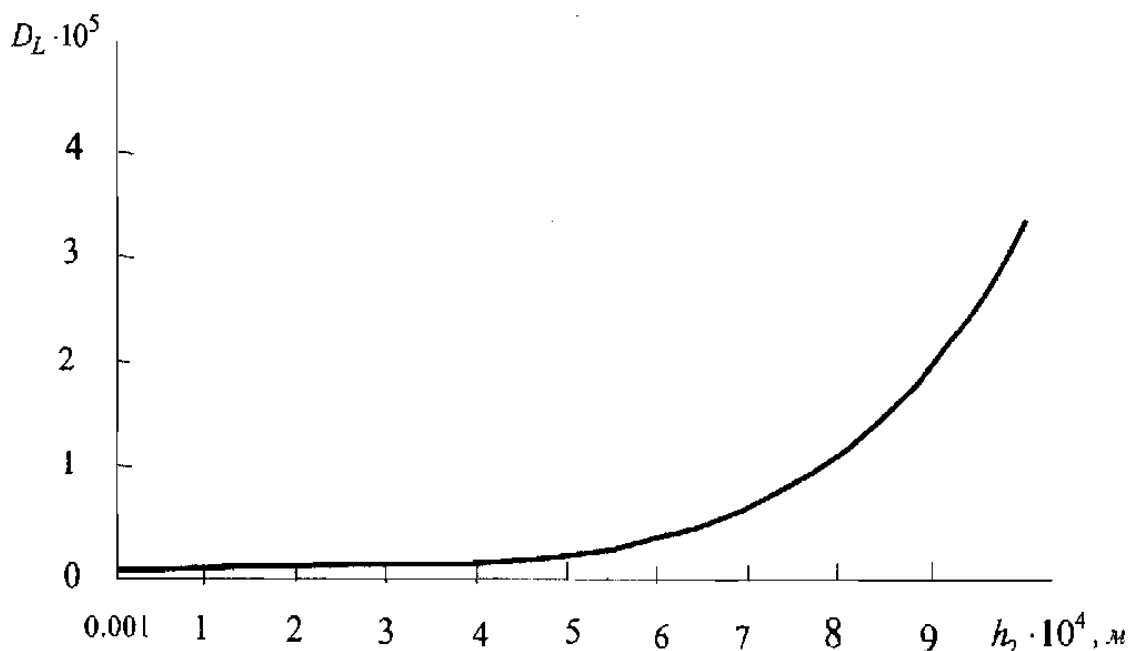


Рис. 3. Логарифмический декремент колебаний.

4. Выводы. Как и ожидалось, увеличение толщины заполнителя приводит к росту логарифмического декремента колебаний.

Полученные результаты позволяют решать задачу оптимального проектирования многослойной оболочки с вязкоупругим заполнителем по наилучшему гашению низкочастотных колебаний путем варьирования толщины межслойных заполнителей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ботогова, М.Г.** Свободные колебания слоистых вязкоупругих цилиндрических оболочек / М.Г. Ботогова, Г.И. Михасев, Е.А. Корчевская // Вестн. ПГУ. Сер. С, Фунд. науки. Механика. – 2006. – № 10. – С. 125–133.
2. **Григолюк, Э.И.** Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
3. **Товстик, П.Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука; Физматлит, 1995. – 320 с.
4. **Старовойтов, Э.И.** Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.

S U M M A R Y

Using the asymptotic complex WKB-method free vibrations of the laminated composite non-circular cylindrical shell is investigated. The problem of optimal design of the fixed mass laminated shell with viscoelastic filler aiming to increase the lowest frequencies and the vibration decrement has been set and solved.

Поступила в редакцию 11.01.2008