УДК 378.016:004

А.И. Бочкин, А.В. Осипов

Эстетичные алгоритмы приближенного вычисления функций

Понимание, оценка и умение создавать красивое в информатике – одна из важных целей обучения. Но красота в информатике часто остается побочным продуктом деятельности, который отмечается лишь между прочим, когда красота настолько очевидна, что не заметить ее уже просто невозможно.

Есть большая трудность – выработка объективных критериев наличия такой красоты. Ведь важен субъективный момент: красота, очевидная для одного, невидима для другого.

И все же попытаемся показать возможности создавать красивое в информатике на примере темы – приближенное вычисление функций.

Вычисление функций на ЭВМ – важная и сложная тема. Эти алгоритмы обычно хорошо «спрятаны» в программном обеспечении математического сопроцессора. И может быть потому, что они обычно просто некрасивы. Один из таких алгоритмов – вычисление тангенса:

$$\frac{tg(x)}{x} = 1 + A_2x^2 + A_4x^4 + E(x),$$

$$A_2 = 0.31755$$

$$A_4 = -0.20330$$

$$|E(x)| < 0.0001$$

Не так просто формулировать, что здесь не так, проще привести изящный контрпример:

$$tg(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ldots}}}$$

Эта формула тем точнее, чем длиннее дробь.

Попытаемся сформулировать критерии красоты для приближенных формул. Эти критерии могут быть противоречивы, и тогда нужен компромисс между ними. Не компромисс вынужденных взаимных уступок, а созидающий синтез–компромисс. Не «борьба» (по К. Марксу) противоположностей до полного уничтожения одной из них, а их единство, даже тождество (по Ф. Гегелю). Нами предлагаются следующие критерии красоты.

Краткость. В красивой формуле не должно быть «длинных» коэффициентов. С этим критерием связан следующий.

Рациональность коэффициентов. Коэффициенты должны быть рациональными числами. Вещественные коэффициенты появляются при «силовой» равномерной подгонке формулы на некотором промежутке.

Симметрия. Хорошая формула должна учитывать и автоматически соблюдать свойства функции в виде тождеств для двойных аргументов, четности-нечетности и т.п. С этим связан и следующий критерий.

Эффективность или экономия средств. Если в формуле учитываются свойства симметрии функции, она применима на большем промежутке и ее точность автоматически выше.

Приведем примеры. Методика вывода конкретных формул в данной статье не обсуждается, т.к. это во многом искусство лавирования между указанными критериями. Многие эффектные и эффективные формулы получаются из цепных дробей, их аппроксимаций радикалами, рациональных приближений Паде, квадратичных приближений плюс интуиция подбора удачной исходной структуры формулы.

1. Классическая приближенная формула для корня:

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{x-1}{2} + O((x-1)^{\frac{1}{4}})$$

есть результат победы краткости над точностью плюс стремление избежать делений на вещественные числа (это, кстати, основная причина применения формул типа рядов Тейлора и интерполяционных многочленов). Если ослабить требование краткости и не избегать делений, получаем гораздо более точную формулу:

$$\sqrt{x} \approx \frac{3x+1}{x+3} + O((x-1)^{\frac{3}{70}}).$$

Эта формула согласуется со свойством, которое обеспечивает ее повышенную точность:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

2. Экспонента.

Общеизвестен ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(\frac{x^3}{6}).$$

По определенным нами критериям ряд снова уступает дроби:

$$e^x = \frac{2+x}{2-x} + O(\frac{x^3}{12}).$$

Дробь согласуется со свойством:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Если еще пренебречь краткостью в пользу точности, получим формулу:

$$e^x = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} + O(\frac{x^5}{720}).$$

Эта формула в 6 раз более точная, чем ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(\frac{x^5}{120}).$$

3. Показательная функция

$$2^x = \frac{3+x}{3-x} + O(0{,}014)\cdot$$

Формула примечательна тем, что она точна при x = 0, x = –1, x = 1. Фактически это интерполяция дробью (цепной). Погрешность между узлами интерполяции – 0,014. Если ослабить требование краткости, получим формулу более точную в 36 раз:

$$2^x = \frac{26+9x+x^2}{26-9x+x^2} + O(0{,}00034)\cdot$$

Обе формулы согласуются со свойством

$$2^x = \frac{1}{2^{-x}}.$$

4. Тангенс.

Классический ряд выглядит так:

$$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + O(\frac{2x^5}{15})\cdot$$

Дробь здесь не только точнее в окрестности нуля:

$$tg(x) = \frac{x}{1-\frac{x^2}{3}} + O(\frac{x^5}{45})\cdot$$

Она учитывает, хотя и со смещением в точку $\sqrt{3}$, наличие особенности (обращение в бесконечность) у функции. Следующее приближение замечательно:

$$tg(x) = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5}}}} + O(\frac{x^7}{1575})\cdot$$

5. Арктангенс.

Ряд начинается так:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + O(\frac{x^5}{5}).$$

Дробь приближает точнее:

$$\arctan(x) = \frac{x}{1-\frac{x^2}{3}} + O(\frac{4x^5}{45})\cdot$$

Большого выигрыша нет, так как дробь, как и ряд, совсем не похожа на функцию вдали от нуля. Гораздо лучшие результаты дают приближения, передающие асимптотическое поведение функции при больших x при помощи функции $\sqrt{a+bx^2}$ в знаменателе

$$\arctan(x) = \frac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}} + O(\frac{x^5}{180})$$

и особенно

$$\arctan(x) = \frac{8x}{3+5\sqrt{1+\frac{16}{15}x^2}} + O(\frac{4x^7}{4725}),$$

но эта формула уже близка к слишком большой с позиций эстетики длине. Впрочем, она приближается к функции при любом x.

Подводя итог, хочется сказать главное. Как нередко бывает, более красивое оказывается и более полезным. Современные алгоритмы вычисления функций в средах типа Maple с гибкой, настраиваемой точностью используют прием рекуррентного приведения аргумента в окрестность точки ноль (для логарифма единица), где и применяется та или иная приближенная формула. Здесь для скорости счета нужно, чтобы эта приближенная формула давала хорошую точность уже для не слишком малых значений аргумента, что на порядок уменьшает число итераций с аргументом [1–2].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Амелькин, В.В.*** Математические модели и дифференциальные уравнения / В.В. Амелькин, А.П. Садовский. – Минск: Высш. шк., 1982. – 172 с.
2. ***Косневски, Ч.*** Занимательная математика и персональный компьютер / Ч. Косневски. – М.: Мир, 1987. – 112 с.

SUMMARY

In above named clause attempt to pay attention to ordinary things in computer science, such as the function evaluation was made. The review of the algorithms of calculation of often used functions and ways of improvement of aesthetic properties of these algorithms is resulted. In clause the emphasis that «understanding, an estimation and skill to create beautiful in computer science – one of the important purposes of training» was done.

Поступила в редакцию 24.01.2008