УДК 517.926+517.977

А.А. Козлов

О частном случае глобальной ляпуновской приводимости двумерных систем

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными [1] матрицами коэффициентов A и B. Наряду с этой системой рассмотрим произвольную фиксированную систему

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей C. Если существует управление $u = U(t)x$, в котором $(m \times n)$-матрица $U(t)$ является измеримой и ограниченной при всех $t \geqslant 0$, такое, что система

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

замкнутая этим управлением, будет асимптотически эквивалентна системе

(2), т.е. будет существовать преобразование Ляпунова [2], связывающее системы (2) и (3), то говорят [3], что система (3) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости. Так как при этом все ляпуновские инварианты системы (3) с управлением U и системы (2) совпадут, свойство глобальной ляпуновской приводимости иногда также называют [4] свойством глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов.

Вопрос о наличии свойства глобальной ляпуновской приводимости у систем (3) решается, как правило, в предположении равномерной полной управляемости исходной системы (1). Напомним, что система (1) называется равномерно вполне управляемой [5], если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление u, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\| u(t) \| \leqslant \gamma \| x_0 \|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке. В работе [4] доказана глобальная управляемость полной совокупности асимптотических инвариантов двумерной системы (3) с кусочно равномерно непрерывной матрицей B при условии равномерной полной управляемости соответствующей системы (1). На основании этих результатов в статье [6] показано, что для ω-периодических систем (1) равномерная полная управляемость является необходимым и достаточным условием глобальной ляпуновской приводимости системы (3). Следует однако отметить, что применение подхода, предложенного в этих работах, к системам, у которых матрица B не является кусочно равномерно непрерывной, даже если все коэффициенты систем являются кусочно непрерывными, может приводить к неограниченному росту нормы искомого управления U на положительной полуоси, что, исходя из постановки задачи, является недопустимым. Таким образом, возникает задача обобщения результатов работы [4] на более широкие классы систем (1). В работе [7] эту задачу удалось решить в том случае, когда матрицы A и B кусочно непрерывны, и, кроме того, матрица B – квадратная и удовлетворяет условию равномерной интегральной невырожденности (введенному в этой работе) – более сильному, чем условие равномерной полной управляемости. В общем же случае для равномерно вполне управляемых систем (1) вопрос остается открытым.

В настоящей работе доказана глобальная управляемость полной совокупности асимптотических инвариантов двумерной системы

$$\dot{x} = B(t)U(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

с локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей B в случае равномерной полной управляемости соответствующей системы (1). Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть $A(t) \equiv 0$ для всех $t \geqslant 0$. Если система (1), где $n = 2$, $m \in \{1, 2\}$, равномерно вполне управляема, то система (4) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Прежде чем формулировать вспомогательные утверждения, на основании которых доказывается эта теорема, введем ряд необходимых определений и обозначений. В соответствии с формулировкой теоремы всюду в дальнейшем полагаем $n = 2$ и $A(t) \equiv 0$ для всех $t \geqslant 0$. Здесь же отметим, что в силу замечания 1 статьи [8] для доказательства этой теоремы достаточно рассмотреть случай, когда $m=2$. Далее будем считать, что для системы (1) числа σ и γ из определения равномерной полной управляемости зафиксированы. В силу интегральной ограниченности [1, с. 252] матрицы B найдется такое число $b\geqslant 1$, что для всех $t\geqslant 0$ выполняется оценка $\int\limits_t^{t+\sigma}\|B(\tau)\|d\tau\leqslant b<+\infty$. Это число b также зафиксируем. Обозначим через $\mathbb{R}_+$ множество положительных действительных чисел, т.е. $\mathbb{R}_+:=\{y\in\mathbb{R}:y>0\}$, через e_i, $i=1,2$, – векторы канонического ортонормированного базиса в пространстве $\mathbb{R}^2$, а через M_2 – пространство вещественных матриц размерности 2×2 со спектральной операторной нормой, т.е. нормой, индуцируемой на M_2 евклидовой нормой в $\mathbb{R}^2$. Пусть $E=[e_1,e_2]\in\mathrm{M}_2$ – единичная матрица, $X_U(t,s)$, $t,s\geqslant 0$, – матрица Коши системы (4) с управлением U. Всюду ниже под углом мы будем понимать угол в обычном смысле, т.е. как геометрическую фигуру, с вершиной в нуле. Заметим, что при таком определении угол является выпуклым конусом [9]. Для произвольного угла $\Phi\subset\mathbb{R}^2$ через $K(\Phi)$ обозначим конус [1, с. 481], соответствующий этому углу, т.е. $K(\Phi):=\Phi\cup-\Phi$. Для любых непустых множеств векторов $W_1,W_2\subset\mathbb{R}^2$ мерой угла между этими множествами будем называть величину $\sphericalangle(W_1,W_2):=\inf\limits_{\xi_1\in W_1,\,\xi_2\in W_2}\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)$.

Всюду далее векторное управление u будем считать допустимым, если оно является измеримой и ограниченной на положительной полуоси функцией со значениями в $\mathbb{R}^2$. Матричное управление U будем называть допустимым, если все столбцы матрицы U являются допустимыми векторными управлениями.

Возьмем произвольное число $s\geqslant 0$ и рассмотрим отрезок $[s,s+\sigma]$. При любом фиксированном натуральном $p\geqslant 2$ разделим этот отрезок точками $t_i:=s+i\sigma/p$, $i=\overline{1,p-1}$, на p равных частей и для всякого допустимого управления $u(t)$, $t\in[s,s+\sigma]$, положим $w_i(s,u):=\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}B(\tau)u(\tau)d\tau$, $i=\overline{1,p}$, где $t_0:=s$, $t_p:=s+\sigma$. Заметим, что эти интегралы существуют ввиду локальной интегрируемости функции B. Обозначим $\gamma_1:=\max\{\gamma,\sqrt{2}\}$, $\ell=\ell(\varphi):=$ $:=\min\{\varphi/(2\pi\gamma_1),\,3\varphi/(8\pi)\}$. Положим также $\theta:=\arcsin(4\gamma_1 b)^{-1}$. Поскольку $4\gamma_1 b\geqslant 4\sqrt{2}>1$, величина θ определена корректно.

Лемма 1. *Если система (1) σ-равномерно вполне управляема, то для любых $t_0\geqslant 0$, $0<\varphi\leqslant\theta/8$ и натурального $p\geqslant 2$ найдутся углы $\Phi_1\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ и $\Phi_2\subset\mathbb{R}^2$, допустимые управления $u_i(t)$, $t\in[t_0,t_0+\sigma]$ и* *множества* $M_i \subset \{1,\dots,p\}$, $i=1,2$, *такие, что:*

1) мера углов Φ_i, $i=1,2$, *не превосходит* φ;

2) верно соотношение $\sphericalangle(K(\Phi_1),K(\Phi_2)) \geqslant 7\theta/16$;

3) для всех $t\in[t_0,t_0+\sigma]$ *выполняется оценка* $\| u_i(t)\| \leqslant \gamma_1$;

4) при каждом $j\in M_i$, $i=1,2$, *справедливо включение* $w_j(t_0,u_i)\in\Phi_i$;

5) для векторов $\zeta_i := \sum\limits_{j\in M_i} w_j(t_0,u_i)\in\Phi_i$, $i=1,2$, *имеют место неравенства* $\|\zeta_i\| \geqslant \ell(\varphi)$.

Заметим, что для любых угла $\Phi\subset\mathbb{R}^2$ и точки $\psi\in\mathbb{R}^2$ сумма $\psi+\Phi\subset\mathbb{R}^2$ определяет угол Φ с вершиной в точке ψ. Для произвольных элементов $\psi_1,\psi_2\in\mathbb{R}^2$, $\psi_1\neq\psi_2$, числа $\varphi\in(0,\pi)$ и угла $\Phi\subset\mathbb{R}^2$ меры φ, биссектриса которого содержит вектор $\psi_2-\psi_1$, обозначим через $R(\psi_1,\psi_2,\Phi)$ множество $(\psi_1+\Phi)\cap(\psi_2-\Phi)\subset\mathbb{R}^2$, т.е. ромб, образованный пересечением углов Φ и $-\Phi$ с вершинами соответственно в точках ψ_1 и ψ_2. Под ε-окрестностью ромба $R(\psi_1,\psi_2,\Phi)$ будем понимать множество $\mathrm{U}_\varepsilon(R(\psi_1,\psi_2,\Phi)) := R(\psi_1,\psi_2,\Phi)+{}$ $+\mathrm{U}_\varepsilon(0)$, где $\mathrm{U}_\varepsilon(0) := \{y\in\mathbb{R}^2 : \|y\|\leqslant\varepsilon\}$ – ε-окрестность нуля.

Лемма 2. *Для произвольных чисел* $k\in\mathbb{N}$, $\alpha>0$ *и* $0<\varphi<\pi/4$, *угла* $\Phi\subset\mathbb{R}^2$ *меры* φ *и векторов* ψ_1, ψ_2, $v_i\in\mathbb{R}^2$, $i=\overline{1,k}$, *таких, что* $v_i\in\Phi$, $i=\overline{1,k}$, $\psi_1\neq\psi_2$ *и* $\psi_1+\alpha\sum\limits_{i=1}^{k}v_i=\psi_2$, *при каждом* $j=\overline{1,k}$ *выполняется включение* $\psi_1+\alpha\sum\limits_{i=1}^{j}v_i\in R(\psi_1,\psi_2,\Phi')$, *где* Φ' – *угол меры* 2φ, *на биссектрисе которого лежит вектор* $\psi_2-\psi_1$.

Лемма 3. *Пусть* $\xi\in\mathbb{R}^2$ – *произвольный вектор единичной длины, а векторы* $\psi_1,\psi_2\in\mathbb{R}^2$, $\psi_1\neq\psi_2$, *таковы, что справедливо неравенство* $\varepsilon_1 := \min\limits_{i=1,2}\xi^T\psi_i>0$, *тогда для всякого числа* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1/3$, *угла* Φ *меры* φ, *биссектриса которого содержит вектор* $\psi_2-\psi_1$, *и любого элемента* $\eta\in\mathrm{U}_\varepsilon(R(\psi_1,\psi_2,\Phi))$ *выполнение оценки* $\varphi\leqslant 2\operatorname{arctg}(2\varepsilon/\|\psi_2-\psi_1\|)$ *влечет за собой неравенство* $\xi^T\eta\geqslant\varepsilon$.

Замечание 1. Если вектор-функция $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^2$ локально интегрируема, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное p, что для произвольного $t_0\geqslant 0$ при всех $i=\overline{1,p}$ и $t\in[t_{i-1},t_i]\subset[t_0,t_0+\sigma]$ выполняется включение $\int\limits_{t_{i-1}}^{t}\omega(\tau)d\tau\in\mathrm{U}_\varepsilon(0)$.

Замечание 2. Формулировки и доказательства лемм 2 и 3, а также замечания 1 содержатся в работе [8]. Доказательство леммы 1 вытекает из доказательств лемм 1 и 2 этой же работы, если положить $A(t) \equiv 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Определим функцию $f:(0,\pi/2) \to \mathbb{N}$ равенством $f(\phi) := [3\pi/\phi]$, в котором скобки $[\cdot]$ означают целую часть числа. Любой паре векторов ψ_1, $\psi_2 \in \mathbb{R}^2$ поставим в соответствие числа $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\psi_1,\psi_2) := \max\{\|\psi_1\|,\|\psi_2\|\}$ и $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i(\psi_1,\psi_2) := \min\{e_i^T\psi_1, e_i^T\psi_2\}$, $i = 1,2$. Тогда, исходя из чисто геометрических соображений, с использованием принципа Дирихле несложно доказать следующую лемму.

Лемма 4. *При всяком* $0 < \theta_1 \leqslant 7\theta/16$ *для величины* $f := f(\theta_1) \in \mathbb{N}$ *и произвольных векторов* $h_1, h_2, v_i \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ $(h_1, h_2, v_i \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, $i = \overline{1,f}$, *удовлетворяющих неравенствам* $h_1 \neq h_2$ *и* $\sphericalangle(v_{2i-1}, v_{2i}) \geqslant \theta_1$, $i = \overline{1,f}$, *найдутся такие числа* $k,l \in \{1,\ldots,2f\}$, $k < l$, $(k,l) \notin \{(1,2),(3,4),\ldots,(2f-1,2f)\}$, *для которых справедливы соотношения* $e_1^T(h_1 + \alpha v_k) \geqslant \mathfrak{p}_1(h_1,h_2)$ $(e_2^T(h_1 + \alpha v_k) \geqslant \mathfrak{p}_2(h_1,h_2))$ *и* $h_2 - h_1 = \alpha v_k + \beta v_l$, *причем*

$$|\alpha| \leqslant 2\mathfrak{n}(h_1,h_2)/(\|v_l\|\sin(\theta_1/4)), \quad |\beta| \leqslant 2\mathfrak{n}(h_1,h_2)/(\|v_k\|\sin(\theta_1/4)).$$

Положим $\theta_1 := 7\theta/16$, $N := f(\theta_1) = [3\pi/\theta_1]$ и $T = T(\sigma) := N\sigma$. Для $i = 1,2$ определим функции $\delta_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, равенствами $\delta_i(\psi_1,\psi_2) := \gamma_1$, если $\psi_1 = \psi_2$, и $\delta_i(\psi_1,\psi_2) := 2\gamma_1\mathfrak{n}(\psi_1,\psi_2)/(\ell(\varphi_i(\psi_1,\psi_2))\sin(\theta_1/4))$, где $\varphi_i(\psi_1,\psi_2) :=$ arctg $(\mathfrak{p}_i(\psi_1,\psi_2)\sin(\theta_1/4)/3\mathfrak{n}(\psi_1,\psi_2))$, если $\psi_1 \neq \psi_2$.

Лемма 5. *Пусть* h_1 *и* h_2 *– произвольные векторы из* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *(или же* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$*). Если система (1)* σ*-равномерно вполне управляема, то для любого* $t_0 \geqslant 0$ *на отрезке* $[t_0, t_0 + T]$ *существует такое допустимое управление* u, $\|u(t)\| \leqslant \delta_1(h_1,h_2)$ *(соответственно* $\|u(t)\| \leqslant \delta_2(h_1,h_2)$*),* $t \in [t_0, t_0 + T]$, *что для решения системы (1) с этим управлением и начальным условием* $x(t_0) = h_1$ *выполняются соотношение* $e_1^T x(t) \geqslant \mathfrak{p}_1(h_1,h_2)/3$ *(соответственно* $e_2^T x(t) \geqslant \mathfrak{p}_2(h_1,h_2)/3$*),* $t \in [t_0, t_0 + T]$, *и равенство* $x(t_0 + T) = h_2$.

Доказательство леммы 5 основывается на леммах 1–4 с применением замечания 1.

Используя векторные управления, определяемые в лемме 5, нетрудно найти решение матричной задачи управления, необходимое нам в дальнейшем для доказательства глобальной ляпуновской приводимости системы (4), т.е. доказать следующую лемму.

Лемма 6. *Если система (1)* σ*-равномерно вполне управляема, то для* *любого $r > 1$ существует такое $\Theta = \Theta(r) > 0$, что при всяком $t_0 \geqslant 0$ для произвольной верхнетреугольной матрицы $H \in M_2$ с положительными диагональными элементами, удовлетворяющей условиям $\det H \geqslant 1/r$, $\| H \| \leqslant r+1$, найдется измеримое и ограниченное матричное управление U, $\| U(t) \| \leqslant \Theta$, $t \in [t_0, t_0 + 2T(\sigma)]$, обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, системы (4) с этим управлением равенство $X_U(t_0+2T,t_0)=H$.*

Доказательство теоремы, сформулированной в начале статьи, аналогично доказательству теоремы работы [7] с тем отличием, что вместо теоремы 1 статьи [10] здесь используется лемма 6 данной работы.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели».

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Былов, Б.Ф.*** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов [и др.]. – М., 1966. – С. 252.
2. ***Демидович, Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М., 1998. – С. 153–154.
3. ***Tonkov, E.L.*** Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system / E.L. Tonkov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl.1. 2000. – P. S228–S253.
4. ***Макаров, Е.К.*** О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 97–106.
5. ***Тонков, Е.Л.*** О равномерной стабилизируемости реккурентных систем / Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 10. – С. 1804–1813.
6. ***Попова, С.Н.*** Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 1627–1636.
7. ***Козлов, А.А.*** Об управлении полной совокупностью ляпуновских инвариантов линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов // Труды Института математики НАН. – 2007. – Т. 15, № 2. – С. 33–37.
8. ***Козлов, А.А.*** Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
9. ***Иоффе, А.Д.*** Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М., 1974. – С. 56.
10. ***Козлов, А.А.*** Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае / А.А. Козлов, Е.К. Макаров // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 621–627.

SUMMARY

We prove that if the linear control system $\dot{x} = B(t)u$, $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^m$, $m \in \{1,2\}$, $t \geqslant 0$, with local integrate and integral bounded coefficient matrix B, which is private case of system $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^m$, $m \in \{1,2\}$, $t \geqslant 0$, is uniformly globally controllable then respective closed system $\dot{x} = B(t)U(t)x$, $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geqslant 0$, to have property of Lyapunov's globally reducibility.

Поступила в редакцию 23.08.2007