УДК 512.542

П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов

О $\mathfrak{L}$-композиционных формациях, имеющих заданные подрешетки с дополнениями

1. ВВЕДЕНИЕ. Изучение формаций с дополняемыми подформациями было начато А.Н. Скибой в работе [1]. В совместной статье А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [2] исследовались формации универсальных алгебр с системами дополняемых подформаций. Изучению формаций различных типов, имеющих заданные подрешетки с дополнениями, а также булевы подрешетки, посвящены работы А.Н. Скибы [3, 4], В.А. Ведерникова [5], В.Г. Сафонова [6, 7], Го Вэньбиня [8], Го Вэньбиня и К.П. Шама [9], В.В. Аниськова [10], Н.Г. Жевновой [11–13], И.П. Шабалиной [14], Ю.А. Скачковой [15] и др. В 2000 году А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым поставлена задача описания таких n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций $\mathfrak{F}$, для которых решетка $\mathfrak{F}/_n^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ является решеткой с дополнениями (проблема 5). В настоящей статье мы даем ответ на данный вопрос при $n=1$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ. Все рассматриваемые группы конечны. Необходимую терминологию можно найти в [16]. Напомним лишь некоторые определения и обозначения. Пусть $\mathfrak{L}$ – произвольный непустой класс простых групп. Тогда любую функцию вида

$$f : \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\} \to \{\text{формации групп}\},$$

принимающую одинаковые значения на изоморфных группах, называют $\mathfrak{L}$-композиционным спутником. Для произвольного $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f полагают:

$$CF_{\mathfrak{L}}(f) = \{G \mid G/G_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}') \text{ и } G/C^A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G) \cap \mathfrak{L}\}.$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$ для некоторого $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f, то говорят, что она $\mathfrak{L}$-композиционна, а f – $\mathfrak{L}$-композиционный спутник этой формации.

Для произвольного набора $\{f_i \mid i \in I\}$ $\mathfrak{L}$-композиционных спутников f_i через $\bigcap_{i \in I} f_i$ обозначается такой спутник, что $(\bigcap_{i \in I} f_i)(A) = \bigcap_{i \in I} f_i(A)$ для всех $A \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\}$. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ набор всех $\mathfrak{L}$-композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда спутник $\bigcap_{i \in I} f_i$ называется минимальным $\mathfrak{L}$-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$. Для произвольной совокупности $\mathfrak{L}$-композиционных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают:

$$\vee_{c^{\mathfrak{L}}} (\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i).$$

В частности, $\mathfrak{M} \vee_{c^{\mathfrak{L}}} \mathfrak{H} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Вместо символа $\vee_{c^{\mathfrak{L}}}$ обычно пишут $\vee^{\mathfrak{L}}$. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – некоторая система $\mathfrak{L}$-композиционных спутников. Тогда через $\vee(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой спутник f, что $f(A) = \mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(A))$. В частности, $(f_1 \vee f_2)(A) = \mathrm{form}(f_1(A) \cup f_2(A))$, если, по крайней мере, одна из формаций $f_i(A) \neq \varnothing$. Если же $f_i(A) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагают $f(A) = \varnothing$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольный класс групп. Тогда $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_{c^{\mathfrak{L}}}$-критической [17] или иначе минимальной $\mathfrak{L}$-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией [18], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной $\mathfrak{L}$-композиционной подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. В частности, если $\mathfrak{L}$-композиционная формация $\mathfrak{F}$ ненильпотентна, но нильпотентна каждая ее собственная $\mathfrak{L}$-композиционная подформация, то $\mathfrak{F}$ называют минимальной $\mathfrak{L}$-композиционной ненильпотентной формацией.

Символом $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, которые содержат класс групп $\mathfrak{X}$. Пересечение всех $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, содержащих данную группу G, снова является $\mathfrak{L}$-композиционной формацией. Такую формацию называют однопорожденной $c^{\mathfrak{L}}$-формацией или однопорожденной $\mathfrak{L}$-композиционной формацией, и обозначают $c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}G$.

Напомним, что решетка называется модулярной, если для любых элементов x, y, z решетки из $x \le z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Пусть L – решетка с нулем 0 и единицей 1, и пусть $a \in L$. Элемент b называется дополнением элемента a в L, если $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Решетка L с нулем 0 и единицей 1 называется:

– решеткой с дополнениями, если каждый ее элемент имеет дополнение;

– решеткой с относительными дополнениями, если каждый ее интервал $[a, b]$ является решеткой с дополнениями.

Атом решетки – это ее наименьший ненулевой элемент, т.е. если $0 < a$, то в L не существует x такого, что $0 < x < a$. Булевой решеткой называется любая дистрибутивная решетка с дополнениями.

Напомним, что для любой формации $\mathfrak{F}$ символом $\mathfrak{F}_0$ обозначают пересечение $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация. Тогда символом $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ обозначается такая подрешетка решетки $c^{\mathfrak{L}}$, которая состоит из всех $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}$.

3. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1 [19, 20]. *В том и только том случае $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет нильпотентную максимальную $\mathfrak{L}$-композиционную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – $\mathfrak{L}$-композиционная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая $\mathfrak{L}$-композиционная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ имеет вид: $\mathfrak{H} \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Лемма 2 [20]. *Пусть $\Omega = \{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ – некоторый набор минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных формаций. $\mathfrak{M}$ – $\mathfrak{L}$-композиционная нильпотентная формация. Тогда, если $\mathfrak{H}$ – некоторая минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{M} \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i,\ i \in I)$, то $\mathfrak{H} \in \Omega$.*

Лемма 3 [16]. *Для любого непустого множества простых групп $\mathfrak{L}$ и любого целого неотрицательного n решетка $c_n^{\mathfrak{L}}$ алгебраична и модулярна.*

Лемма 4 [21, с. 27]. *Подрешетка модулярной решетки модулярна.*

Лемма 5 [21, с. 101]. *Пусть L – модулярная решетка и a, $b \in L$. Тогда отображение $\varphi : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$, где $x \to x \wedge b$ является изоморфизмом.*

Лемма 6 [21, с. 31]. *Любая модулярная решетка M с дополнениями является решеткой с относительными дополнениями.*

Лемма 7 [22]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – однопорожденная $\mathfrak{L}$-композиционная формация и $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ – решетка с дополнениями. Тогда каждый элемент решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ представим в виде $\mathfrak{M} = \vee^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i,\ i \in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ – набор всех минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$.*

Лемма 8 [23]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-композиционные формации и одна из формаций $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ разрешима. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная ω-композиционная не $\mathfrak{H}$-подформация.*

Лемма 9 [22]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная $\mathfrak{L}$-композиционная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{M}$ – атом решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$, когда $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ – некоторая минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$.*

Лемма 10 [24, с. 50]. *Следующие равенства истинны на произвольной решетке:*

1) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \le x \wedge (y \vee z)$;

2) $x \vee (y \wedge z) \le (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

3) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \le (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$;

4) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \le x \wedge (y \vee (x \wedge z))$.

1)–3) называются неравенствами дистрибутивности, 4) – неравенством модулярности.

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая $\mathfrak{L}$-композиционная формация и пусть $\Omega = \{\mathfrak{F}_i \mid \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}, i \in I\}$ – некоторый набор $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций $\mathfrak{F}_i$ из $\mathfrak{F}$, у которых $\mathfrak{F}_0$ – максимальная $\mathfrak{L}$-композиционная подформация. Пусть $\mathfrak{R} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$, где $\mathfrak{F}_i \in \Omega$. Тогда, если $\mathfrak{M}$ – произвольная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{R}$ с максимальной подформацией $\mathfrak{F}_0$, то $\mathfrak{M} \in \Omega$.*

Доказательство. По лемме 1 для каждого $i \in I$ формация $\mathfrak{F}_i \in \Omega$ имеет вид $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i$, где $\mathfrak{H}_i$ – минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация. Следовательно, формация $\mathfrak{R}$ имеет вид

$$\mathfrak{R} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}(\mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i)) =$$
$$= c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{F}_0 \bigcup_{i\in I}(\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \mid i \in I)) = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \;\; i \in I).$$

Ввиду леммы 1 формация $\mathfrak{M}$ имеет вид $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ – минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация. Следовательно, по лемме 2 имеет место $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$, т.е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i$ для некоторого $i \in I$. Значит, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H} \in \{\mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \mid i \in I\} = \Omega$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{L}$-композиционные формации. Если $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в решетке $\mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}_0$.*

Доказательство. По условию $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{M}_1 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Значит, ввиду лемм 3 и 4 имеем $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{M}_1 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}) = \mathfrak{M}_1 \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Покажем, что $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_0$. Действительно,

$$(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_0 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_0 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{M}_0.$$

Итак, получили, что $\mathfrak{M}_1 \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{M}_0$. Это означает, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в решетке $\mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}_0$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ – $\mathfrak{L}$-композиционные формации и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда, если $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ – решетка с дополнениями, то $\mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}_0$ также является решеткой с дополнениями.*

Доказательство. Ввиду лемм 3 и 4 решетка $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ модулярна. По лемме 5 имеет место решеточный изоморфизм

$$(\mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{M})/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0 \simeq \mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_0) = \mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}_0.$$

Но $(\mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{M})/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ – подрешетка решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$. Значит, из леммы 12 получаем, что $(\mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{M})/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ – решетка с дополнениями. Следовательно, $\mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}_0$ также является решеткой с дополнениями. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ненильпотентная $\mathfrak{L}$-композиционная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ – решетка с дополнениями;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ – множество всех минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций из $\mathfrak{F}$.

3) $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ – булева решетка.

Доказательство. Проведем доказательство теоремы по следующей схеме: $2) \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow 3)$. Предположим, что выполняется условие 1). Покажем, что выполняется условие 2). Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторая однопорожденная $\mathfrak{L}$-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$. Ввиду лемм 3 и 4 решетка $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ является модулярной решеткой с дополнениями. По лемме 6 $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ – решетка с относительными дополнениями. Используя лемму 5, имеем:

$$\mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} \simeq \mathfrak{M} \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{N}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{N}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0.$$

Значит, $\mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}_0$ – решетка с дополнениями как подрешетка модулярной решетки с относительными дополнениями. Из леммы 7 получаем:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_j \mid j \in J),$$

где $\{\mathfrak{H}_j \mid j \in J \subseteq I\}$ – набор всех минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$. Очевидно, что любая $\mathfrak{L}$-композиционная формация есть объединение (в решетке $c^{\mathfrak{L}}$) своих однопорожденных $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций. Значит,

$$\mathfrak{F} = \vee^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I) = \vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{M}_i)_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_j \mid j \in J) \mid i \in I) =$$

$$= \vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{M}_i)_0 \mid i \in I) \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \mid i \in I).$$

Покажем, что $\vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{M}_i)_0 \mid i \in I) = \mathfrak{F}_0$. Так как $(\mathfrak{M}_i \mid i \in I) \subseteq \mathfrak{F}$, то $((\mathfrak{M}_i)_0 \mid i \in I) \subseteq \mathfrak{F}_0$. Значит, $\vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{M}_i)_0 \mid i \in I) \subseteq \mathfrak{F}_0$. Пусть теперь

$$\mathfrak{F}_0 \not\subseteq \vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{M}_i)_0 \mid i \in I) \quad \text{и} \quad G \in \mathfrak{F}_0 \setminus \vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{M}_i)_0 \mid i \in I).$$

Ввиду того, что $G \in \mathfrak{F}_0$, получаем $(c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}G)_0 \subseteq \vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{M}_i)_0 \mid i \in I)$. Но $(c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}G)_0 = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}G$. Значит, $G \in \vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{M}_i)_0 \mid i \in I)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}_0 \subseteq \vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{M}_i)_0 \mid i \in I)$, т.е. $\mathfrak{F}_0 = \vee^{\mathfrak{L}}((\mathfrak{M}_i)_0 \mid i \in I)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \mid i \in I)$, т.е. выполняется условие 2).

Предположим теперь, что выполняется условие 2). Покажем, что выполняется условие 1). Пусть $\psi = \{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ – множество всех минимальных

$\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций из $\mathfrak{F}$. Покажем, что каждый элемент решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ представим в виде объединения атомов, содержащихся в нем. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная $\mathfrak{L}$-композиционная формация из решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$. Пусть $\mathfrak{R}_1$ – $\mathfrak{L}$-композиционная формация, порожденная множеством ψ_1 всех минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$, а $\mathfrak{R}_2$ – $\mathfrak{L}$-композиционная формация, порожденная множеством ψ_2, где ψ_2 – дополнение к ψ_1 в ψ. Ввиду модулярности решетки $c^{\mathfrak{L}}$ имеют место равенства:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H} \mid i \in I)) = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{M} \cap (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \mid i \in I)) =$$
$$= \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{R}_1 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{R}_2)) = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{R}_1 \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_2).$$

Допустим, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_2 \not\subseteq \mathfrak{F}_0$. Тогда по лемме 8 в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_2$ имеется минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация $\mathfrak{H}_i$ для некоторого $i \in I$. Следовательно, по лемме 2 $\mathfrak{H}_i \in \psi_1 \cap \psi_2 = \varnothing$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{F}_0$. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{R}_1$. Значит, ввиду леммы 9 и произвольности выбора формации $\mathfrak{M}$ каждый элемент решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ представим в виде объединения атомов, содержащихся в нем.

Покажем теперь, что в решетке $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ дополняема каждая $\mathfrak{L}$-композиционная формация. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная $\mathfrak{L}$-композиционная формация из $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, то дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ является формация $\mathfrak{F}_0$. Итак, можно считать, что $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}$. Обозначим через Σ множество всех атомов решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$, а через Ω_1 – множество всех атомов решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$, содержащихся в $\mathfrak{M}$. Тогда $\Sigma \neq \Omega_1$, иначе ввиду доказанного выше, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \mid i \in I) = \mathfrak{F}$. Пусть Ω_2 – дополнение к Ω_1 в Σ и $\mathfrak{H} = c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\Omega_2)$. Докажем, что $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$. Так как по условию $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \mid i \in I)$, то ввиду леммы 9 имеет место равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ – некоторая минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{R} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ являются элементами решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$, то $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{R}$. Допустим, что $\mathfrak{R} \not\subseteq \mathfrak{F}_0$. Тогда по лемме 8 в $\mathfrak{R}$ имеется минимальная $\mathfrak{L}$-композиционная ненильпотентная формация $\mathfrak{H}_i$ для некоторого $i \in I$. Следовательно, $\mathfrak{R}$ содержит формацию $\mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i$. По лемме 1 формация $\mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i$ содержит нильпотентную максимальную $\mathfrak{L}$-композиционную подформацию. Применяя лемму 9 и результат, полученный в предыдущем абзаце, имеем $\mathfrak{F}_0 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \in \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}_0$. Таким образом, формация $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$. Значит, решетка $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ – решетка с дополнениями.

Импликация $3) \Rightarrow 1)$ очевидна по определению булевой решетки.

Предположим теперь, что выполняется условие 1). Покажем, что выполняется условие 3). Для этого достаточно показать, что выполняется равенство:

$$\mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{M}_2 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{M}_3) = (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3). \qquad (*)$$

По лемме 10 на любой решетке выполняется неравенство дистрибутивности:

$$(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3) \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{M}_2 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{M}_3).$$

Покажем, что выполняется и обратное включение. Поскольку $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ – решетка с дополнениями, то ввиду леммы 13 у каждой формации $\mathfrak{M}$ из решетки $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$, решетка $\mathfrak{M}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}_0$ является решеткой с дополнениями. Это означает, что

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \vee^{\mathfrak{L}} (\vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}_i \mid i \in I),$$

где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ – множество всех минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций из $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{M}_2 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{M}_3)$. Покажем, что

$$\mathfrak{H} \subseteq (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3).$$

Понятно, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1$. Пусть ψ_j – набор всех минимальных $\mathfrak{L}$-композиционных ненильпотентных подформаций из $\mathfrak{M}_j$, $j = 1,2,3$. Тогда

$$\mathfrak{H} \subseteq ((\mathfrak{M}_2)_0 \vee^{\mathfrak{L}} (c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \psi_2} \mathfrak{H}_i))) \vee^{\mathfrak{L}} ((\mathfrak{M}_3)_0 \vee^{\mathfrak{L}} (c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \psi_3} \mathfrak{H}_i))) =$$

$$= (\mathfrak{M}_2 \vee^{\mathfrak{L}} \mathfrak{M}_3)_0 \vee^{\mathfrak{L}} (c^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \psi_2 \cup \psi_3} \mathfrak{H}_i)).$$

Применяя лемму 11, находим, что $\mathfrak{H} \in \psi_2 \cup \psi_3$. Значит, либо $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, либо $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3$. Следовательно,

$$\mathfrak{H} \subseteq (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3),$$

т.е. верно равенство $(*)$. Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}$ – множество всех простых групп, получаем следствие для композиционных формаций.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ненильпотентная композиционная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F}/_c\mathfrak{F}_0$ – решетка с дополнениями;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \vee_c (\vee_c \mathfrak{H}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ – множество всех минимальных композиционных ненильпотентных подформаций из $\mathfrak{F}$.

3) $\mathfrak{F}/_c\mathfrak{F}_0$ – булева решетка.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Скиба, А.Н.*** О формациях с заданными системами подформаций. Подгрупповое строение конечных групп / А.Н. Скиба. – Минск, 1981. – С. 155–180.
2. ***Скиба, А.Н.*** Формации алгебр с дополняемыми подформациями / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Укр. мат. журнал. – 1991. – Т. 43, № 7–8. – С. 1008–1012.
3. ***Скиба, А.Н.*** О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Изв. вузов. Математика. – 1994, № 10. – С. 75–80.
4. ***Скиба, А.Н.*** О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Гомель, 1996. – Вып. 9. – С. 55–62.
5. ***Ведерников, В.А.*** Формации конечных групп с дополняемыми подформациями длины 3 / В.А. Ведерников // Вопросы алгебры. – Минск, 1992. – Вып. 6. – С. 16–21.
6. ***Сафонов, В.Г.*** О кратно локальных формациях с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – Гомель, 1996. – Вып. 9. – С. 112–127.

7. ***Сафонов, В.Г.*** О двух задачах теории тотально насыщенных формаций / В.Г. Сафонов // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 5. – С. 16–20.
8. ***Вэньбинь, Го.*** Об одном вопросе теории кратно локальных формаций / Го Вэньбинь // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 6.
9. ***Guo, W.*** On totally local formations of groups / W. Guo, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2002. – V. 30, № 5. – P. 2117–2131.
10. ***Аниськов, В.В.*** О локальных формациях с дополняемыми не p-разложимыми локальными подформациями / В.В. Аниськов // Вопросы алгебры. – Гомель, 1996. – Вып. 10. – С. 3–13.
11. ***Жевнова, Н.Г.*** ω-локальные формации с булевой решеткой ω-локальных подформаций / Н.Г. Жевнова // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 5. – С. 15–19.
12. ***Жевнова, Н.Г.*** p-насыщенные формации с дополняемыми p-насыщенными подформациями / Н.Г. Жевнова, А.Н. Скиба // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 1–7.
13. ***Жевнова, Н.Г.*** О π-локальных формациях с $\mathfrak{N}_p$-дополняемыми π-локальными подформациями / Н.Г. Жевнова // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 10. – С. 55–70.
14. ***Шабалина, И.П.*** О τ-замкнутых ω-локальных формациях $\mathfrak{F}$, у которых решетка $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}_0$ является решеткой с дополнениями / И.П. Шабалина. – Препринт Учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины». – 2003. – № 40. – 10 с.
15. ***Скачкова, Ю.А.*** Булевы решетки кратно Ω-расслоенных формаций / Ю.А. Скачкова // Дискрет. матем. – 2002, 14:3. – С. 42–46.
16. ***Скиба, А.Н.*** Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Укр. мат. журнал. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
17. ***Скиба, А.Н.*** О критических формациях / А.Н. Скиба // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
18. ***Шеметков, Л.А.*** Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. – Киев, 1980. – С. 37–50.
19. ***Zhiznevsky, P.A.*** On $\mathfrak{L}$-composition non-nilpotent formations with maximal nilpotent subformation / P.A. Zhiznevsky, V.G. Safonov // 6th International Algebraic Conference in Ukraine July 1–7, 2007. – Kamyanets-Podilsky, 2007. – C. 179–180.
20. ***Жизневский, П.А.*** Формации групп с максимальной $\mathfrak{L}$-композиционной нильпотентной подформацией / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Вестник ПГУ. Серия С, Фундаментальные науки. – 2007. – № 9. – С. 30–36.
21. ***Биркгоф, Г.*** Теория решеток / Г. Биркгоф. – М., 1984. – 568 с.
22. ***Жизневский П.А.*** О свойствах ненильпотентной однопорожденной $\mathfrak{L}$-композиционной формации / П.А. Жизневский // Международная алгебраическая конференция, посвященная 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова «Классы групп, алгебр и их приложения», Гомель, 9–11 июля 2007 г. – Гомель, 2007. – С. 70–71.
23. ***Близнец, И.В.*** Об одном классе $\mathfrak{L}$-композиционных формаций / И.В. Близнец // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 1999. – № 1(15). – С. 116–120.
24. ***Гретцер, Г.*** Общая теория решеток / Г. Гретцер; пер. с англ.; под ред. Д.М. Смирнова. – М., 1981. – 465 с.

S U M M A R Y

Let $\mathfrak{F}$ be some $\mathfrak{L}$-composition formation, $\mathfrak{N}$ be the formation of all nilpotent groups. Then $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ denotes the lattice of all $\mathfrak{L}$-composition formations $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. In this paper we obtained description of $\mathfrak{L}$-composition formations $\mathfrak{F}$ such that the lattice $\mathfrak{F}/^{\mathfrak{L}}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ is Boolean.

Поступила в редакцию 8.04.2008