УДК 539.3

Л.В. Маркова, Г.И. Михасев, М.С. Костенко

Поиск численного решения для математической модели гемодинамики

Процессы гемодинамики, снабжение тканей метаболитами и кислородом непосредственно связаны с ритмической работой сердечно-сосудистой системы. Известно, что при передаче и использовании энергии в живых биосистемах потери на тепловое рассеяние будут минимальными только в режиме резонанса. Следовательно, можно предположить, что любое внешнее возмущение, в том числе и энергия ультразвукового воздействия как физиотерапевтического фактора, может найти свое отображение в изменении сложной структуры различных процессов организма. Целесообразность создания способа воздействия ультразвуком в режиме периодической деятельности сердечно-сосудистой системы была обоснована некоторыми наблюдениями [1] и тем самым показана необходимость создания математической модели функционирования кровеносных сосудов на основе интегрированных колебательных процессов.

Для описания функционирования кровеносных сосудов при ультразвуковом воздействии предлагается модель, основанная на теории тонких оболочек типа Тимошенко [1]. Основу предлагаемой модели составляет система из пяти дифференциальных уравнений в усилиях и моментах. Последние в общем случае предполагаются неоднородными и зависящими от продольной и окружной координат. Кроме слагаемых, учитывающих действие окружающей ткани и протекающей жидкости, эти уравнения содержат слагаемые с начальными мембранными усилиями, вызванными предварительным растяжением сосуда, и по своей структуре напоминают известные уравнения Флюгге [2]. Их отличие от классических уравнений Флюгге состоит в том, что в четвертом и пятом уравнениях вместо углов поворота нормали к срединной поверхности в инерционных слагаемых взяты углы поворота нормального волокна.

Движение крови в сосуде моделируем уравнениями, описывающими плоское течение несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости – это два уравнения количества движения (уравнения Навье–Стокса) и уравнение неразрывности [3]. Построенная таким образом модель в общем случае является многомерной и нелинейной, из-за чего аналитическое решение задачи становится по существу нереальным. Поэтому вполне естественно для поиска решения применить численные методы.

Искать численное решение будем методом конечных разностей [4]. Суть метода состоит в том, что на первом этапе нужно провести дискретизацию исходной задачи – заменить область непрерывного изменения аргумента дискретным множеством точек (сеткой) с некоторым шагом. На этом дискретном множестве точек нужно выбрать способ аппроксимации искомой функции, ее производных и построить разностную схему, т.е. заменить дифференциальные уравнения разностными, в том числе краевые и начальные условия.

Характерной особенностью разностной аппроксимации является ее многовариантность. Многообразие видов аппроксимирующих соотношений приводит к различным по своим особенностям разностным схемам и делает необходимым предварительную оценку этих построенных схем. На практике обычно проверку на наиболее фундаментальные свойства схем – сходимость и устойчивость исследуют путем проведения серии расчетов с измельчением параметров. Однако исследование качества построенной разностной схемы для исходной нелинейной и многомерной модели, вообще говоря, представляет собой достаточно сложную математическую проблему. Поэтому прежде чем строить численное решение, немного упростим исходную постановку задачи.

Будем рассматривать осесимметричное движение системы «сосуд-кровь». В этом случае составляющая скорости u_2=0 и угол поворота φ_2=0, а также все входящие в уравнения производные функции по окружной координате φ следует положить равными нулю. После преобразований количество уравнений в усилиях и моментах, входящих в исходную систему, сокращается с пяти до трех и будет выглядеть следующим образом.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \nu \cdot \dfrac{\partial u_3}{\partial x} + \dfrac{R}{K} \cdot p_1 \\ \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \dfrac{K_\delta}{K} \cdot \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - u_3 + \nu \cdot \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{K_\delta}{K} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \dfrac{R}{K} \cdot p_3 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \cdot \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \dfrac{12R^2}{h^2} \cdot \dfrac{K_\delta}{K} \cdot \left(\varphi_1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x} \right) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Данная система уравнений записана в безразмерном виде и является системой уравнений относительно перемещений точек срединной поверхности оболочки-сосуда u_1, u_3 и угла поворота нормального волокна φ_1, которые описывают движение стенок сосуда. Здесь x – продольная координата, R – характерный радиус сосуда, h – толщина кровеносного сосуда, ν – коэффициент Пуассона материала сосуда, К – жесткость оболочки-сосуда, $K_\delta = \dfrac{5}{6} hG$, где G – модуль сдвига материала сосуда, p_1, p_3 – силы, действующие на сосуд со стороны крови.

Уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности в безразмерных переменных записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{\partial w}{\partial r} - \dfrac{w}{r^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{w}{r} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Здесь u, w – составляющие скорости движения крови в сосуде, p – гидродинамическое давление, Re – безразмерный параметр, характеризующий свойства движущейся вязкой жидкости, называемый числом Рейнольдса,

$\mathrm{Re} = \dfrac{U_0 L}{\nu}$. Здесь L – длина сосуда, U_0 – средняя скорость течения крови, ν – кинематический коэффициент вязкости крови.

Особенность реализации численного решения этой системы состоит в том, что система уравнений Навье–Стокса содержит оператор Лапласа от проекций скорости. Это определяет постановку граничных условий для скорости. Дополнительная проблема заключается в присутствии в уравнениях движения еще одной неизвестной функции – гидродинамического давления. В отличие от задач о течении сжимаемой жидкости, давление в нашем случае не может быть выражено через какие-либо другие физические переменные. Так как в системе нет частной производной от давления по времени, то для него нельзя сформулировать задачу с начальными условиями и непосредственно применить метод установления. Чтобы найти значение гидродинамического давления, поступим следующим образом. Умножим первое уравнение системы (2) на r и продифференцируем его по r, а второе уравнение этой системы умножим на r и продифференцируем по x. Результаты сложим, получаем одно уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(r\cdot w)}{\partial r}+\frac{\partial(r\cdot u)}{\partial x}\right)=-\left(r\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right)$$

Учтем уравнение неразрывности, проведем некоторые преобразования и окончательно получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}=0 \qquad (3)$$

Таким образом, мы имеем уравнение (3), которое является уравнением Пуассона относительно функции давления. Добавим к этому уравнению условия второго рода (граничные условия Неймана), применим метод конечных разностей и найдем численное значение гидродинамического давления.

Упростим систему (2), чтобы исключить давление из уравнений количества движения в переменных (u, w, p) при помощи перекрестного дифференцирования. Для этого дифференцируем первое уравнение системы (2) по x, а второе по r, получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)=\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\right)\right)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{w}{r}=0\end{cases}$$

Окончательно получаем систему уравнений, описывающих движение системы «сосуд-кровь» в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \nu \cdot \dfrac{\partial u_3}{\partial x} + \dfrac{R}{K} \cdot \rho \cdot U_0^2 \cdot p_1 \\ \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \dfrac{K_\delta}{K} \cdot \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - u_3 + \nu \cdot \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{K_\delta}{K} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \dfrac{R}{K} \cdot \rho \cdot U_0^2 \cdot p_3 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \cdot \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \dfrac{12R^2}{h^2} \cdot \dfrac{K_\delta}{K} \cdot \left(\varphi_1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x} \right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) = \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r} \cdot \left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{w}{r} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

При этом $p_1 = -\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \right)\Bigg|_{r=\frac{R}{L}}$, $p_3 = \left(p - \dfrac{2}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial w}{\partial r} \right)\Bigg|_{r=\frac{R}{L}}$.

Система уравнений (4) является замкнутой относительно неизвестных функций *u1,u3,φ1,u,w,p*. Запишем необходимые начальные и граничные условия для всех неизвестных функций системы.

Для функции *u(x,r,t)*:

$$\left.\frac{\partial u(x,r,t)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, u(x,\frac{R}{L},0) = V_1^0(x), u(0,r,t) =$$

$$= V_U^0(r,t), u(1,r,t) = V_U^1(r,t), u(x,r,0) = V_U(r,t)$$

Для функции *w(x,r,t)*:

$$w(x,0,t) = 0, w(x,\frac{R}{L},0) = V_3^0(x), w(0,r,t) =$$

$$= V_w^0(r,t), w(1,r,t) = V_w^1(r,t), w(x,r,0) = V_w(r,t).$$

И так аналогично для функций *u1(x,r,t), u3(x,r,t), φ1*(x,r,t)

$$\begin{array}{lll} u_3(x,0) = U_3^0(x) & u_1(x,0) = U_1^0(x) & \varphi_1(x,0) = f(x) \\ \dot{u}_3(x,0) = V_3^0(x) & \dot{u}_1(x,0) = V_1^0(x) & \varphi_1(0,t) = 0 \\ u_3(0,t) = 0 & u_1(0,t) = 0 & \varphi_1(l,t) = 0 \\ u_3(l,t) = 0 & u_1(l,t) = 0 & \end{array}.$$

В число граничных условий входит условие сопряжения на границе контакта крови и сосуда, которое представляет собой равенство составляющих скоростей крови и точек срединной поверхности сосудов, и в безразмерном виде записывается:

$$
u(r,x,t)\,\Big|_{r=\frac{R}{L}} = \frac{1}{U_0}\sqrt{\frac{K}{\rho h}}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial t},
$$

$$
w(r,x,t)\,\Big|_{r=\frac{R}{L}} = \frac{1}{U_0}\sqrt{\frac{K}{\rho h}}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial t}.
$$

Построим для задачи (4) явную разностную схему на основе 5-точечного шаблона. Координаты узлов пространственно-временной сетки записываются через параметры *i,j,k*. Получим систему уравнений в конечных разностях:

$$
\begin{cases}
u1_j^{k+1} = \left(2-\dfrac{2\tau^2}{h^2}\right)\cdot u1_j^k + \dfrac{\tau^2}{h^2}\left(u1_{j-1}^k + u1_{j+1}^k\right) - u1_j^{k-1} - \dfrac{\nu\tau^2}{h}\left(u3_{j+1}^k - u3_j^k\right) - \\
-\dfrac{\tau^2}{h}\cdot\dfrac{R\cdot\rho\cdot U_0^2}{K\cdot\mathrm{Re}}\cdot\left(u_{j,n}^k - u_{j,n-1}^k + w_{j+1,n}^k - w_{j,n}^k\right) \\
\\
u3_j^{k+1} = \dfrac{\tau^2}{h^2}\dfrac{K_\delta}{K}\cdot\left(u3_{j-1}^k + u3_{j+1}^k\right) + \left(2-\dfrac{2\tau^2}{h^2}\dfrac{K_\delta}{K} - \tau^2\right)\cdot u3_j^k - u3_j^{k-1} + \dfrac{\nu\tau^2}{h}\cdot\left(u1_{j+1}^k - u1_j^k\right) + \\
+\dfrac{\tau^2}{h}\dfrac{K_\delta}{K}\cdot\left(\varphi1_{j+1}^k - \varphi1_j^k\right) + \tau^2\cdot\dfrac{R\cdot\rho\cdot U_0^2}{K}\cdot\left(p_{j,n}^k - \dfrac{2}{h\cdot\mathrm{Re}}\cdot\left(w_{j,n}^k - w_{j,n-1}^k\right)\right) \\
\\
\varphi1_j^{k+1} = \left(2+\dfrac{2\tau^2}{h^2} + \tau^2\dfrac{12R^2}{h_i^2}\dfrac{K_\delta}{K}\right)\cdot\varphi1_j^k - \dfrac{\tau^2}{h^2}\left(\varphi1_{j-1}^k + \varphi1_{j+1}^k\right) - \varphi1_j^{k-1} + \dfrac{\tau^2}{h}\dfrac{12R^2}{h_i^2}\dfrac{K_\delta}{K}\cdot\left(u3_{j+1}^k - u3_j^k\right) \\
\xi_{j,i}^k = \dfrac{1}{h}\cdot\left(u_{j,i+1}^k - u_{j,i}^k - w_{j+1,i}^k + w_{j,i}^k\right) \\
\xi_{j,i}^{k+1} = \xi_{j,i}^k + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\tau}{h^2}\cdot\left(\dfrac{i+1}{i}\cdot\xi_{j,i+1}^k - \left(4+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}\right)\cdot\xi_{j,i}^k + \xi_{j,i-1}^k + \xi_{j+1,i}^k + \xi_{j-1,i}^k\right) \\
u_{j+1,i}^k - u_{j,i}^k + w_{j,i+1}^k - w_{j,i}^k + \dfrac{1}{i}\cdot w_{j,i}^k = 0
\end{cases}
$$

К этой системе дописываем разностную аппроксимацию начальных и граничных условий, тем самым завершив построение численного решения. Разностная схема является условно устойчивой, необходимым и достаточным условием сходимости схемы является следующее: квадрат отношения шагов пространственно-временной сетки не должен превышать 1.

Анализируя численное решение, отмечаем, что определение сеточной функции скорости на каждом временном слое по значению этой скорости на предыдущем шаге нужно проводить по явной схеме с весьма усложненным алгоритмом. Для сокращения объема вычислений можно провести дальнейшее усовершенствование алгоритма, применив так называемую схему физического расщепления.

Таким образом, для созданной математической модели функционирования кровеносных сосудов на основе интегрированных колебательных процессов построена дискретная конечно-разностная модель, которая позволит найти численное решение исходной задачи. Реализация дискретной модели, а также усложнение исходной задачи и соответствующей ей модели позволит применять полученные результаты для описания условий оптимизации функционирования кровеносной системы посредством внешнего воздействия, сопряженного с эндогенными колебательными процессами.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Чиркин, А.А.*** Биоуправление – путь к оптимизации ультразвуковой терапии / А.А. Чиркин, Г.И. Михасев, Л.В. Маркова // Ученые записки УО «ВГУ им. П.М. Машерова». – 2006. – Т. 5. – С. 201–222.
2. ***Товстик, П.Е.*** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. – М.: Наука; Физматлит, 1995. – С. 16–36.
3. ***Лойцянский Л.Г.*** Механика жидкости и газа: учеб. пособие для вузов. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
4. ***Тихонов, А.Н.*** Уравнения математической физики: учеб. для студ. физ.-мат. спец. ун-тов / МГУ им. М.В. Ломоносова. – 7-е изд. – М.: Издательство МГУ; Наука, 2004. – 798 с.

S U M M A R Y

The finite – difference model of the vessel – blood system based on the integrated oscillatory processes is proposed in the paper.

Поступила в редакцию 23.02.2008