УДК 521.1

Ю.В. Трубников, А.М. Воронов

Аппроксимативный метод решения задачи многих тел

В работе предлагается алгоритм приближенного аналитического решения задачи многих тел, основанный на квадратичной аппроксимации силовой функции.

Силовая функция задачи n+1-го тела, рассматриваемой в системе абсолютных прямоугольных координат, имеет вид

$$U_1 = \frac{1}{2} f \sum_{\substack{i,j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \tag{1}$$

где f – гравитационная постоянная

$$[f] = \frac{l^3}{mt^2},$$

m_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ – массы гравитирующих тел,

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \; -$$

взаимные расстояния между точками M_i и M_j.

Опишем прежде всего шаг аппроксимации. Множитель $\frac{1}{r}$ можно представить как

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r^2}} = \varphi(r^2)$$

и, следовательно, если мы найдем коэффициенты a_0, a_1

$$\varphi(r^2) \approx a_1 r^2 + a_0, \tag{2}$$

то замена

$$\frac{1}{r_{ij}} = a_1(i,j) r_{ij}^2 + a_0(i,j) \quad (i,j = 0,1,\ldots,n, i \neq j) \tag{3}$$

приводит силовую функцию к сумме квадратичных функций, а систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$m_j \ddot{x}_j = \frac{\partial U_1}{\partial x_j}, \; m_j \ddot{y}_j = \frac{\partial U_1}{\partial y_j}, \; m_j \ddot{z}_j = \frac{\partial U_1}{\partial z_j} \quad (j = 0,1,\ldots,n) \tag{4}$$

к соответствующей линейной системе с постоянными коэффициентами.

В качестве способа аппроксимации применим наилучшее приближение в чебышевской метрике [1, 2].

Лемма 1. Пусть $a > 0,\ 0 < e < 1,$

$$a^2(1-e)^2 \le s \le a^2(1+e)^2,$$

тогда полином наилучшего приближения для функции

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

является полином

$$\mathrm{P}(s) = a_1 s + a_0, \tag{5}$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2a^3\left(1-e^2\right)},\ a_0 = \frac{1}{4a\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{3+e^2}{\left(1-e^2\right)^{\frac{2}{3}}} + 3\right]. \tag{6}$$

При этом оценка погрешности $h_{\max}$ имеет следующий вид:

$$h_{\max} = \frac{1}{4a\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{3+e^2}{\left(1-e^2\right)^{\frac{2}{3}}} - 3\right]. \tag{7}$$

Приведем числовой пример. В астрономической системе единиц (среднее расстояние Земли от Солнца, масса Солнца=1, средние солнечные сутки) оценка погрешности δ силовой функции для системы тел: Солнце, Земля+Луна, Юпитер – составляет

$$\delta = 9{,}9051 \cdot 10^{-11},\ [\delta] = \frac{(1a.e.)^2 \cdot (1массы)}{сут.^2}.$$

Далее в качестве силовой функции берется функция

$$\widetilde{U} = \frac{1}{2} f \sum_{\substack{i,j \\ i \ne j}} m_i m_j \left[a_1(i,j) r_{ij}^2 + a_0(i,j)\right]\ (i,j = 0,1,\ldots,n), \tag{8}$$

а соответствующая система дифференциальных уравнений [3] приводится к виду:

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x_k},\ m_k \ddot{y}_k = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial y_k},\ m_k \ddot{z}_k = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial z_k}\ \ (k = 0,1,\ldots,n). \tag{9}$$

В развернутой форме получаем, что

$$\ddot{x}_k = 2f\left(\sum_{j \ne k} m_j b_{kj}\right) x_k - 2f \sum_{j \ne k} m_j b_{kj} x_j, \tag{10.1}$$

$$\ddot{y}_k = 2f\left(\sum_{j \ne k} m_j b_{kj}\right) y_k - 2f \sum_{j \ne k} m_j b_{kj} y_j, \tag{10.2}$$

$$\ddot{x}_k = 2f\left(\sum_{j \ne k} m_j b_{kj}\right) z_k - 2f \sum_{j \ne k} m_j b_{kj} z_j. \tag{10.3}$$

Таким образом, система нелинейных дифференциальных уравнений (4)

после аппроксимации распадается на 3 подсистемы (10.1)–(10.3), каждая из которых имеет одну и ту же матрицу коэффициентов D, где

$$(D)_{kk} = b_{kk} = -f\sum_{j\neq k}\frac{m_j}{a_{kj}^3\left(1-e_{kj}^2\right)}; \tag{11}$$

$$(D)_{kj} = b_{kj} = f\frac{m_j}{a_{kj}^3\left(1-e_{kj}^2\right)} \quad (j \neq k). \tag{12}$$

Здесь

$$a_{kj} = \frac{1}{2}\left(r_{kj\,\max} + r_{kj\,\min}\right) - \tag{13}$$

среднее расстояние между телом M_k и телом M_j,

$$e_{kj} = \frac{r_{kj\,\max} - r_{kj\,\min}}{r_{kj\,\max} + r_{kj\,\min}} - \tag{14}$$

величина, которая играет роль взаимного эксцентриситета между телами M_k и M_j.

Сделаем следующие обозначения: $(\bullet,\bullet)$ – скалярное произведение векторов; $[\bullet,\bullet]$ – векторное произведение векторов;

$$\vec{r}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \quad k = (0,1,\ldots,n).$$

Справедлива теорема о первых интегралах системы (10.1)–(10.3).

Теорема 1. *Имеют место следующие равенства*

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n} m_k\ddot{\vec{r}}_k = 0,\ m = \sum_{k=0}^{n} m_k, \tag{15}$$

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n} m_k\dot{\vec{r}}_k = \frac{1}{m}\vec{a}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n} m_k\vec{r}_k = \frac{1}{m}\vec{a}t + \frac{1}{m}\vec{b}, \tag{17}$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *– векторные константы.*

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x_k\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial x_k} + y_k\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial y_k} + z_k\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial z_k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\vec{r}_k, m_k\ddot{\vec{r}}_k\right) = 2\widetilde{U}, \tag{18}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\vec{r}_k, m_k\dot{\vec{r}}_k\right] = \vec{\varsigma}, \tag{19}$$

где $\vec{\varsigma}$ *– постоянный вектор,*

$$\mathrm{T} \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} m_k\left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2\right) = \widetilde{U} + c, \tag{20}$$

где c *– постоянная.*

Обозначив

$$\vec{r}_x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \vec{r}_y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \ \vec{r}_z = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix},$$

запишем основную систему дифференциальных уравнений в векторном виде:

$$\ddot{\vec{r}}_x = D\vec{r}_x \, ; \ \ddot{\vec{r}}_y = D\vec{r}_y \, ; \ \ddot{\vec{r}}_z = D\vec{r}_z \, . \qquad (21)$$

К системе (21) можно применять как численные, так и аналитические методы решения и анализа поведения решений задачи Коши или краевых задач.

В относительной прямоугольной системе координат с центром в точке M_0 система дифференциальных уравнений (21) будет иметь вид:

$$\ddot{x}_k = 2f\left\{\left[(m_0 + m_k)b_{0k} + \sum_{\substack{j\neq 0,\\ j\neq k}} m_j b_{kj}\right]x_k + \sum_{\substack{j\neq 0,\\ j\neq k}} m_j\left(b_{0j} - b_{kj}\right)x_j\right\}, \qquad (22.1)$$

$$\ddot{y}_k = 2f\left\{\left[(m_0 + m_k)b_{0k} + \sum_{\substack{j\neq 0,\\ j\neq k}} m_j b_{kj}\right]y_k + \sum_{\substack{j\neq 0,\\ j\neq k}} m_j\left(b_{0j} - b_{kj}\right)y_j\right\}, \qquad (22.2)$$

$$\ddot{z}_k = 2f\left\{\left[(m_0 + m_k)b_{0k} + \sum_{\substack{j\neq 0,\\ j\neq k}} m_j b_{kj}\right]z_k + \sum_{\substack{j\neq 0,\\ j\neq k}} m_j\left(b_{0j} - b_{kj}\right)z_j\right\}, \qquad (22.3)$$

$$(k = 1,2,\ldots,n)$$

где

$$b_{kj} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{kj}^3\left(1 - e_{kj}^2\right)}. \qquad (23)$$

Например, для Солнечной системы уравнение (22.1) будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{x}_1 = -7.1318\ 10^{-13}\ x1(t) + 1.3827\ 10^{-19}\ x2(t) + 3.0000\ 10^{-19}\ x3(t) + 1.2263\ 10^{-23}\ x4(t)$$
$$- 1.1778\ 10^{-20}\ x5(t) - 8.5332\ 10^{-22}\ x6(t) - 1.4071\ 10^{-23}\ x7(t) - 9.6970\ 10^{-25}\ x8(t)$$
$$- 6.8036\ 10^{-26}\ x9(t)$$

$$\ddot{x}_2 = -1.0469\ 10^{-13}\ x2(t) - 7.8898\ 10^{-20}\ x1(t) + 1.2865\ 10^{-18}\ x3(t) + 6.0620\ 10^{-22}\ x4(t)$$
$$- 8.9954\ 10^{-22}\ x6(t) - 2.9882\ 10^{-23}\ x7(t) - 1.1716\ 10^{-24}\ x_8(t) - 3.2028\ 10^{-26}\ x9(t)$$
$$- 1.2031\ 10^{-20}\ x5(t)$$

$$\ddot{x}_3 = -3.9632\,10^{-14}\,x3(t) - 9.4806\,10^{-20}\,x1(t) - 5.5608\,10^{-20}\,x2(t) + 2.2516\,10^{-21}\,x4(t) - 8.0026\,10^{-22}\,x6(t) - 1.4175\,10^{-23}\,x7(t) - 1.0837\,10^{-24}\,x8(t) - 6.7646\,10^{-26}\,x9(t) - 6.0788\,10^{-21}\,x5(t)$$

$$\ddot{x}_4 = -1.1299\,10^{-14}\,x4(t) - 1.0026\,10^{-19}\,x1(t) - 2.2512\,10^{-19}\,x2(t) - 6.4746\,10^{-19}\,x3(t) - 3.9256\,10^{-22}\,x6(t) - 1.1136\,10^{-23}\,x7(t) - 5.3978\,10^{-25}\,x8(t) - 6.6418\,10^{-26}\,x9(t) + 1.6616\,10^{-20}\,x5(t)$$

$$\ddot{x}_5 = -2.8206\,10^{-16}\,x5(t) - 1.0184\,10^{-19}\,x1(t) - 2.5688\,10^{-19}\,x2(t) - 1.1925\,10^{-18}\,x3(t) + 4.7888\,10^{-21}\,x6(t) + 8.8508\,10^{-24}\,x7(t) - 1.3460\,10^{-24}\,x8(t) - 1.0284\,10^{-26}\,x9(t) - 3.5556\,10^{-21}\,x4(t)$$

$$\ddot{x}_6 = -4.5246\,10^{-17}\,x6(t) - 1.0187\,10^{-19}\,x1(t) - 2.5744\,10^{-19}\,x2(t) - 1.1996\,10^{-18}\,x3(t) - 2.0988\,10^{-19}\,x5(t) + 7.3962\,10^{-23}\,x7(t) + 9.0870\,10^{-24}\,x8(t) - 4.6938\,10^{-26}\,x9(t) - 3.6382\,10^{-21}\,x4(t)$$

$$\ddot{x}_7 = -5.5910\,10^{-18}\,x7(t) - 1.0188\,10^{-19}\,x1(t) - 2.5752\,10^{-19}\,x2(t) - 1.2007\,10^{-18}\,x3(t) - 2.6350\,10^{-19}\,x5(t) - 1.0826\,10^{-20}\,x6(t) + 5.4032\,10^{-23}\,x8(t) + 9.7888\,10^{-27}\,x9(t) - 3.6506\,10^{-21}\,x4(t)$$

$$\ddot{x}_8 = -1.4544\,10^{-18}\,x8(t) - 1.0188\,10^{-19}\,x1(t) - 2.5752\,10^{-19}\,x2(t) - 1.2008\,10^{-18}\,x3(t) - 2.6764\,10^{-19}\,x5(t) - 1.2439\,10^{-20}\,x6(t) - 1.3497\,10^{-22}\,x7(t) + 2.5460\,10^{-25}\,x9(t) - 3.6518\,10^{-21}\,x4(t)$$

$$\ddot{x}_9 = -6.9710\,10^{-19}\,x9(t) - 1.0188\,10^{-19}\,x1(t) - 2.5754\,10^{-19}\,x2(t) - 1.2009\,10^{-18}\,x3(t) - 2.6838\,10^{-19}\,x5(t) - 1.2746\,10^{-20}\,x6(t) - 2.1240\,10^{-22}\,x7(t) + 3.9008\,10^{-25}\,x8(t) - 3.6522\,10^{-21}\,x4(t) \qquad (24)$$

Коэффициенты получены в системе единиц CGS.

Систему дифференциальных уравнений (24) можно решать и исследовать различными методами. Один из методов состоит в нахождении собственных чисел и собственных векторов матрицы M коэффициентов системы (24).

Если обозначить собственные значения матрицы M в порядке их возрастания через λ_k, то обозначив

$$\omega_k = (-\lambda_k)^{\frac{1}{2}} \quad (k = 1,2,\ldots,9)$$

получаем

$\omega_1 := 8.4449\,10^{-7}$ $\omega_2 := 3.2356\,10^{-7}$ $\omega_3 := 1.9908\,10^{-7}$ $\omega_4 := 1.0630\,10^{-7}$ $\omega_5 := 1.6794\,10^{-8}$

$\omega_6 := 6.7266\,10^{-9}$ $\omega_7 := 1.2060\,10^{-9}$ $\omega_8 := 2.3645\,10^{-9}$ $\omega_9 := 8.3492\,10^{-10}$

Для нахождения решения двухточечной краевой задачи необходимо найти коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_n$; $d_1, d_2, ..., d_n$ из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}\left[h_{jk}c_k\cos(\omega_k t_0)+h_{jk}d_k\sin(\omega_k t_0)\right]=x_j(t_0),\\ &\sum_{k=1}^{n}\left[h_{jk}c_k\cos(\omega_k t_1)+h_{jk}d_k\sin(\omega_k t_1)\right]=x_j(t_1), \end{aligned} \tag{25}$$

где h_{jk} $(j=1,2,\ldots,n; k=1,2,\ldots,n)$ – j-я координата k-го собственного вектора.

Матрицу коэффициентов системы (25) можно представить в виде произведения двух матриц HB, где матрицы H и B имеют вид:

$$H=\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{12} & 0 & h_{13} & \cdots & h_{1n} & 0\\ h_{21} & 0 & h_{22} & 0 & h_{23} & \cdots & h_{2n} & 0\\ h_{31} & 0 & h_{32} & 0 & h_{33} & \cdots & h_{3n} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ h_{n1} & 0 & h_{n2} & 0 & h_{n3} & \cdots & h_{nn} & 0\\ 0 & h_{11} & 0 & h_{12} & 0 & \cdots & 0 & h_{1n}\\ 0 & h_{21} & 0 & h_{22} & 0 & \cdots & 0 & h_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & h_{n1} & 0 & h_{n2} & 0 & \cdots & 0 & h_{nn} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t_0) & \sin(\omega_1 t_0) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cos(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 t_0) & \sin(\omega_2 t_0) & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 t_0) & \sin(\omega_2 t_0) & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos(\omega_n t_0) & \sin(\omega_n t_0)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos(\omega_n t_1) & \sin(\omega_n t_1) \end{bmatrix}.$$

Например, для Солнечной системы такая матрица имеет вид:

B18 := [[0.65594, -.75481, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[-0.045632, 0.99896, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, -.22368, -.97466, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0.012481, 0.99992, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, -.92830, 0.37184, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0.11208, -.99370, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.096546, 0.99533, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, -.84438, 0.53575, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.97301, 0.23078, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.91831, 0.39586, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.99565, 0.093143, 0, 0, 0, 0, 0, 0],

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.98674, 0.16230, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.99986, 0.016723, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.99957, 0.029223, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.99946, 0.032783, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.99836, 0.057273, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.99993, 0.011578],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.99980, 0.020233]]

Вектор неизвестных находится по формуле

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \\ c_2 \\ d_2 \\ \vdots \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = B^{-1}H^{-1}\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \\ x_1(t_1) \\ \vdots \\ x_n(t_1) \end{bmatrix}. \qquad (26)$$

Матрицы H и B легко обратимы и, таким образом, получаются условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи.

Теорема 2. *Пусть*

$$\sin(\omega_k t_1)\cos(\omega_k t_0) - \cos(\omega_k t_1)\sin(\omega_k t_0) \equiv \sin[\omega_k(t_1 - t_0)] \neq 0 (k = 1,2,...,n), \qquad (27)$$

тогда двухточечная краевая задача

$$x_j(t_0) = x_{j0}, x_j(t_1) = x_{j1} (j = 1,2,...,n) \qquad (28)$$

однозначно разрешима при любом наборе значений (28).

Решением такой краевой задачи являются функции

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^{n}\left[h_{jk}c_k \cos(\omega_k t) + h_{jk}d_k \sin(\omega_k t)\right] \quad (j = 1,2,...,n).$$

Аналогичный вид имеют функции

$$y_j(t), z_j(t) \qquad (j = 1,2,...,n).$$

Например, для Солнечной системы координата $x_3(t) \equiv x3t$ – это координата x для барицентра Земля+Луна.

$$\begin{aligned} x3t := {} & -9.7948\,10^{-8}\cos(8.4449\,10^{-7}t - 6.2832\,floor(1.3440\,10^{-7}t)) \\ & - 1.0096\,10^{-8}\sin(8.4449\,10^{-7}t - 6.2832\,floor(1.3440\,10^{-7}t)) \\ & + 0.0000014688\cos(3.2356\,10^{-7}t - 6.2832\,floor(5.1496\,10^{-8}t)) \\ & - 5.7769\,10^{-7}\sin(3.2356\,10^{-7}t - 6.2832\,floor(5.1496\,10^{-8}t)) \\ & + 0.73456\cos(1.9908\,10^{-7}t - 6.2832\,floor(3.1685\,10^{-8}t)) \\ & + 0.65786\sin(1.9908\,10^{-7}t - 6.2832\,floor(3.1685\,10^{-8}t)) \\ & - 1.2070\,10^{-7}\cos(1.0630\,10^{-7}t - 6.2832\,floor(1.6918\,10^{-8}t)) \\ & + 8.2534\,10^{-9}\sin(1.0630\,10^{-7}t - 6.2832\,floor(1.6918\,10^{-8}t)) \end{aligned}$$

$$- 5.2679\ 10^{-7} \cos(1.6794\ 10^{-8}\ t - 6.2832\ floor(2.6728\ 10^{-9}\ t))$$
$$+ 6.0506\ 10^{-7} \sin(1.6794\ 10^{-8}\ t - 6.2832\ floor(2.6728\ 10^{-9}\ t))$$
$$+ 1.0999\ 10^{-7} \cos(6.7266\ 10^{-9}\ t - 6.2832\ floor(1.0706\ 10^{-9}\ t))$$
$$+ 1.6399\ 10^{-7} \sin(6.7266\ 10^{-9}\ t - 6.2832\ floor(1.0706\ 10^{-9}\ t))$$
$$+ 5.3619\ 10^{-9} \cos(1.2060\ 10^{-9}\ t - 6.2832\ floor(1.9194\ 10^{-10}\ t))$$
$$- 8.2286\ 10^{-9} \sin(1.2060\ 10^{-9}\ t - 6.2832\ floor(1.9194\ 10^{-10}\ t))$$
$$+ 2.4724\ 10^{-10} \cos(2.3645\ 10^{-9}\ t - 6.2832\ floor(3.7631\ 10^{-10}\ t))$$
$$- 3.9054\ 10^{-10} \sin(2.3645\ 10^{-9}\ t - 6.2832\ floor(3.7631\ 10^{-10}\ t))$$
$$+ 4.9088\ 10^{-11} \cos(8.3492\ 10^{-10}\ t - 6.2832\ floor(1.3288\ 10^{-10}\ t))$$
$$- 2.5396\ 10^{-11} \sin(8.3492\ 10^{-10}\ t - 6.2832\ floor(1.3288\ 10^{-10}\ t))$$

Здесь были использованы данные:

$t0 := 1.3867\ 10^{7}$ $t1 := 2.4235\ 10^{7}$ $f := 6.6720\ 10^{-8}$ $m_0 := 1.9880\ 10^{33}$ $m_1 := 2.8401\ 10^{26}$

$m_2 := 4.8905\ 10^{27}$ $m_3 := 6.0242\ 10^{28}$ $m_4 := 6.4264\ 10^{26}$ $m_5 := 1.8981\ 10^{30}$

$m_6 := 5.6791\ 10^{29}$ $m_7 := 8.6929\ 10^{28}$ $m_8 := 1.0293\ 10^{29}$ $m_9 := 6.6266\ 10^{26}$

$a_1 := 1.4960\ 10^{13}$ $x1(1.3867\ 10^{7}) := -5.1791\ 10^{12}$ $x2(1.3867\ 10^{7}) := 4.1207\ 10^{12}$

$x3(1.3867\ 10^{7}) := -6.5417\ 10^{12}$ $x4(1.3867\ 10^{7}) := -6.4822\ 10^{11}$

$x5(1.3867\ 10^{7}) := 3.6383\ 10^{13}$ $x6(1.3867\ 10^{7}) := -9.2225\ 10^{13}$

$x7(1.3867\ 10^{7}) := -2.1848\ 10^{14}$ $x8(1.3867\ 10^{7}) := -1.2817\ 10^{14}$

$x9(1.3867\ 10^{7}) := -4.2730\ 10^{14}$ $x1(2.4235\ 10^{7}) := -5.1356\ 10^{11}$

$x2(2.4235\ 10^{7}) := -9.8278\ 10^{12}$ $x3(2.4235\ 10^{7}) := -8.5478\ 10^{12}$

$x4(2.4235\ 10^{7}) := 2.0048\ 10^{13}$ $x5(2.4235\ 10^{7}) := 2.3827\ 10^{13}$

$x6(2.4235\ 10^{7}) := -9.9903\ 10^{13}$ $x7(2.4235\ 10^{7}) := -2.1412\ 10^{14}$

$x8(2.4235\ 10^{7}) := -1.2280\ 10^{14}$ $x9(2.4235\ 10^{7}) := -4.2533\ 10^{14}$

Можно привести значения координаты x в гелиоцентрической системе координат для планеты Плутон для некоторых дат 1960 года и сравнить их с табличными

$x9160 := -28.565$	$x9180 := -28.543$	$x9200 := -28.521$	$x9240 := -28.477$
$x9280 := -28.432$	$x9300 := -28.411$	$x9320 := -28.388$	$x9340 := -28.366$
$x9360 := -28.343$	-17.680	-17.641	

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Дзядык, В.*** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. Дзядык. – М., 1977. – С. 512.
2. ***Дубошин, Г.*** Небесная механика / Г. Дубошин. – М., 1975. – С. 426.

3. ***Трубников, Ю.В.*** Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М., 2002. – С. 33.

S U M M A R Y

The article represents the solution to the problem of three and many celestial bodies (many-body problem).

Поступила в редакцию 1.10.2007