УДК 512.542

Н.Т. Воробьев, Е.А. Витько, Н.В. Иванова

О свойствах радикалов холловых подгрупп π-разрешимых групп

В теории конечных разрешимых групп многие результаты (см., например, работы Бризона [1–2], Дёрка, Порты [3], Локетта [4], Галледжи [5] и др.) связаны с приложениями классов групп, определяемых холловыми подгруппами. Один из известных результатов в этом направлении исследований был получен Бризоном [1], который описал радикал холловой подгруппы группы в терминах класса всех групп, холловы подгруппы которых принадлежат некоторому классу Фиттинга. Примечателен тот факт, что указанный результат был доказан лишь для случая, когда группа является разрешимой. Однако хорошо известно, что холловы π-подгруппы существуют и сопряжены и в случае π-разрешимой группы (известная теорема С.А. Чунихина [6]). В связи с этим естественна задача о расширении теоремы Бризона на случай конечных π-разрешимых групп. Ее решение – основной результат настоящей работы.

Нами получено описание строения радикала группы для класса Фиттинга всех π-разрешимых групп, холловы π-подгруппы которых принадлежат некоторому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$, посредством π'-радикала факторгруппы этой группы по оболочке $\mathfrak{F}$-радикала ее холловой π-подгруппы. Все рассматриваемые группы конечны и π-разрешимы. В терминологии и обозначениях мы следуем [7].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для доказательства основного результата напомним некоторые основные понятия и приведем в качестве лемм те известные утверждения, которые мы будем использовать.

В дальнейшем через $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}^\pi$) будем обозначать класс всех конечных разрешимых (π-разрешимых) групп.

Определение 1.1 [7]. *Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если выполняются следующие требования:*

(1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

(2) из того, что нормальные подгруппы M и N принадлежат классу Фиттинга $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение MN принадлежит $\mathfrak{F}$.

Определение 1.2 [7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G называется $\mathfrak{F}$-радикалом группы G и обозначается через $G_\mathfrak{F}$.*

Таким образом,

$$G_\mathfrak{F} = \prod_{N \lhd G, N \in \mathrm{F}} N$$

Лемма 1.3 [6]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) каждая подгруппа и факторгруппа π-разрешимой группы π-разрешима;

2) класс $\mathfrak{S}^\pi$ замкнут относительно произведений нормальных подгрупп, то есть если $N_i \trianglelefteq G$ и $N_i \in \mathfrak{S}^\pi$ ($i = 1,2$), то $N_1N_2 \in \mathfrak{S}^\pi$.

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел, т.е. $\pi \subseteq \mathrm{P}$. Дополнение к π во множестве P обозначим через π', т.е. $\pi' = \mathrm{P} \setminus \pi$. Наряду с множеством π будем использовать функцию $\pi(m)$ – множество всех простых чисел, делящих натуральное число m. Зафиксируем множество простых чисел π. Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то число m называется π-числом.

Определение 1.4 [6]. *Подгруппа H называется холловой π-подгруппой, если $|H|$ есть π-число, а индекс $|G : H|$ есть π'-число.*

Далее холлову π-подгруппу группы G будем обозначать через G_π.

Лемма 1.5 [6]. *Пусть $G \in \mathfrak{S}^\pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) холловы π-подгруппы в группе G существуют;

2) любые две холловы π-подгруппы группы G сопряжены между собой;

3) каждая π-подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π-подгруппе G.

Лемма 1.6 [6]. *Пусть $G \in \mathrm{S}^\pi$ и G_π – холлова π-подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $N \trianglelefteq G$, то $N_\pi = N \cap G_\pi$ и $(G/N)_\pi = G_\pi N/N$;

2) если $N_1 \trianglelefteq G$ и $N_2 \trianglelefteq G$, то $G_\pi \cap N_1N_2 = (G_\pi \cap N_1)(G_\pi \cap N_2)$.

Лемма 1.7 [8]. *Пусть $G \in \mathfrak{S}^\pi$ и $\mathfrak{N}^\pi$ – класс Фиттинга всех π-нильпотентных групп, тогда для π-нильпотентного радикала группы G справедливо включение:*

$$C_G(G_{\mathfrak{N}^\pi}) \subseteq G_{\mathfrak{N}^\pi}.$$

Заметим, что π-нильпотентный радикал обозначают также через $F_\pi(G)$.

2. КЛАСС $K_\pi(\mathfrak{F})$

Определение 2.1. *Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то через $K_\pi(\mathfrak{F})$ обозначим класс всех тех π-разрешимых групп G, в которых холлова π-подгруппа является $\mathfrak{F}$-группой, т.е.*

$$K_\pi(\mathfrak{F}) = \left(G \in \mathfrak{S}^\pi : G_\pi \in \mathfrak{F}\right).$$

Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то положим $K_\pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$. В случае, когда $\pi = \varnothing$ и $\pi = \mathbb{P}$, положим $K_\pi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}^\pi$ и $K_\pi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ соответственно.

Лемма 2.2. *Для любого множества простых чисел π и любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $K_\pi(\mathfrak{F})$ является классом Фиттинга.*

Доказательство.

Пусть $G \in K_\pi(\mathfrak{F})$, т.е.

$$G \in \mathfrak{S}^\pi \text{ и } G_\pi \in \mathfrak{F}.$$

Если N – нормальная подгруппа группы G, то по утверждению 1) леммы 1.3 $N \in \mathfrak{S}^\pi$. Следовательно, по утверждению 1) леммы 1.6, подгруппа $G_\pi \cap N$ является холловой π-подгруппой группы N. Кроме того, $G_\pi \cap N$ – нормальная подгруппа группы G_π, но $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и G_π является $\mathfrak{F}$-группой, следовательно, $G_\pi \cap N \in \mathfrak{F}$.

Итак, $N \in K_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть N_1, N_2 – нормальные подгруппы группы G такие, что $G = N_1N_2$ и N_1, $N_2 \in K_\pi(\mathfrak{F})$.

Тогда по определению класса $K_\pi(\mathfrak{F})$, получаем что холловы π-подгруппы $(N_1)_\pi$ и $(N_2)_\pi$ являются $\mathfrak{F}$-группами. Но по утверждению 1) леммы 1.6 $(N_1)_\pi = G_\pi \cap N_1$ и $(N_2)_\pi = G_\pi \cap N_2$, где G_π – холлова π-подгруппа группы G. Кроме того, заметим, что $G_\pi \cap N_1 \trianglelefteq G_\pi$ и $G_\pi \cap N_2 \trianglelefteq G_\pi$. Следовательно, ввиду того, что $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, произведение $(G_\pi \cap N_1)(G_\pi \cap N_2) \in \mathfrak{F}$. Но тогда по утверждению 2) леммы 1.6

$$(G_\pi \cap N_1)(G_\pi \cap N_2) = G_\pi \cap N_1N_2 = G_\pi \in \mathfrak{F}.$$

Это означает, что $G \in K_\pi(\mathfrak{F})$.

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел. Тогда*

$$K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'} = K_\pi(\mathfrak{F}).$$

Доказательство.

Учитывая свойства произведения классов Фиттинга, получаем

$$K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'} \supseteq K_\pi(\mathfrak{F}).$$

Докажем обратное включение.

Пусть $G \in K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'}$. Обозначим через H холлову π-подгруппу группы $G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$. Так как $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \in K_\pi(\mathfrak{F})$, то $H \in \mathfrak{F}$. По определению холловой π-подгруппы порядок подгруппы H есть π-число. Так как $G/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$, то индекс

$$|G:H| = \left|G:G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\right| \cdot \left|G_{K_\pi(\mathfrak{F})}:H\right|$$

является π'-числом. Таким образом, H – холлова π-подгруппа группы G и $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in K_\pi(\mathfrak{F})$.

Таким образом,

$$K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq K_\pi(\mathfrak{F}).$$

Лемма доказана.

3. РАДИКАЛЫ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

Напомним, что нормальным замыканием или оболочкой подгруппы H в группе G называется наименьшая из нормальных подгрупп группы G, содержащая подгруппу H. Оболочку подгруппы H в группе G обозначают через H^G.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, G – π-разрешимая группа, H – ее холлова π-подгруппа, $<(H_\mathfrak{F})^G>$ – подгруппа группы G, порожденная оболочкой $\mathfrak{F}$-радикала холловой π-подгруппы, тогда*

$$G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/<(H_\mathfrak{F})^G> = (G/<(H_\mathfrak{F})^G>)_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$$

Доказательство.

Пусть $K = G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$. Докажем вначале, что справедливо равенство

$$K \cap H = H_\mathfrak{F} \qquad (1)$$

Т.к. K – нормальная подгруппа группы G, то $H \cap K$ является холловой π-подгруппой группы K. Следовательно, $H \cap K$ является $\mathfrak{F}$-группой, т.к. $K \in K_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда из того, что $H \cap K \trianglelefteq H$, следует $H \cap K \subseteq H_\mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение.

Пусть $F/K = F_\pi(G/K)$ – π-нильпотентный радикал группы G/K. Тогда $F/K \in \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$.

Следовательно, по лемме 2.3 $F \in K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi = K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_\pi$, и поэтому

$$F/K \in \mathfrak{N}_\pi.$$

Значит, F/K является π-группой.

Тогда по лемме 1.5 F/K является подгруппой холловой π-подгруппы HK/K группы G/K для некоторой холловой π-подгруппы H группы G. Следовательно, $F \leq HK$, и любой элемент f группы F можно представить в виде:

$$f = hk,$$

где $h \in H$, $k \in K$.

Из того, что

$$(H_\mathfrak{F})^k K = H_\mathfrak{F}K,$$

получаем

$$fH_\mathfrak{F}K = hkH_\mathfrak{F}K = hk(H_\mathfrak{F})^kK = hkk^{-1}H_\mathfrak{F}kK = hH_\mathfrak{F}kK = H_\mathfrak{F}hkK = H_\mathfrak{F}fK = H_\mathfrak{F}Kf.$$

Следовательно,

$$F \subseteq N_G(H_\mathfrak{F}K).$$

Так как H – холлова π-подгруппа группы G, то порядок ее подгруппы $H_\mathfrak{F}$ является π-числом.

С другой стороны, индекс

$$|H_\mathfrak{F}K : H_\mathfrak{F}| = \frac{|H_\mathfrak{F}K|}{|H_\mathfrak{F}|} = \frac{|H_\mathfrak{F}|\cdot|K|}{|H_\mathfrak{F} \cap K|\cdot|H_\mathfrak{F}|} = \frac{|K|}{|H_\mathfrak{F} \cap K|} = \frac{|K|}{|H_\mathfrak{F} \cap H \cap K|} = \frac{|K|}{|H \cap K|}.$$

Так как по утверждению 1 леммы 1.6 $K \cap H$ холлова π-подгруппа группы K, то индекс $|H_\mathfrak{F}K : H_\mathfrak{F}| = |K : H \cap K|$ является π'-числом.

Следовательно, по определению холловой π-подгруппы, $H_\mathfrak{F}$ – холлова π-подгруппа группы $H_\mathfrak{F}K$.

Но тогда из того, что $H_\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$, следует $H_\mathfrak{F}K \in K_\pi(\mathfrak{F})$.

Так как $F \bigcap H_{\mathfrak{F}}K$ – нормальная подгруппа группы $H_{\mathfrak{F}}K$ и $H_{\mathfrak{F}}K \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$, то $F \bigcap H_{\mathfrak{F}}K \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$.

Используя тот факт, что подгруппа F содержится в нормализаторе подгруппы $H_{\mathfrak{F}}K$ в группе G, получаем

$$(F \bigcap H_{\mathfrak{F}}K)^f = F^f \bigcap (H_{\mathfrak{F}}K)^f = F \bigcap H_{\mathfrak{F}}K,$$

где $f \in F$.

Тогда $F \bigcap H_{\mathfrak{F}}K \trianglelefteq F \trianglelefteq G$, т.е. $F \bigcap H_{\mathfrak{F}}K \lhd\lhd G$. Следовательно,

$$F \bigcap H_{\mathfrak{F}}K \leq G_{K_{\pi}(\mathfrak{F})} = K.$$

Рассмотрим элемент взаимного коммутанта групп F и $H_{\mathfrak{F}}K$:

$$x = f^{-1}(hk)^{-1}fhk,$$

где $f \in F$, $h \in H_{\mathfrak{F}}$, $k \in K$. Из того, что $f \in N_G(H_{\mathfrak{F}}K)$, следует, что $f^{-1}(hk)^{-1}f \in H_{\mathfrak{F}}K$ и $x \in H_{\mathfrak{F}}K$. Но $F \trianglelefteq G$ и поэтому $(hk)^{-1}fhk \in F$. Значит, $x \in F$. Таким образом,

$$[F,H_{\mathfrak{F}}K] \leq F \bigcap H_{\mathfrak{F}}K.$$

Следовательно, $H_{\mathfrak{F}}K \leq C_G(F/K)$ и по лемме 1.7 $C_G(F/K) \subseteq F$, и поэтому

$$H_{\mathfrak{F}} \leq H \bigcap H_{\mathfrak{F}}K \bigcap F \leq H \bigcap K.$$

Таким образом, мы доказали равенство $K \cap H = H_{\mathfrak{F}}$.

Теперь в силу (1) индекс $| K : H_{\mathfrak{F}}|$ есть π'-число. Обозначим через M подгруппу $<(H_{\mathfrak{F}})^G>$. Ясно, что $M \leq K$, и что $K/M \leq (G/M)_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$. С другой стороны, положив

$$L/M = (G/M)_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$$

и из того, что $M \trianglelefteq K$, следует, что $M \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$. Следовательно,

$$L \in K_{\pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'}.$$

Отсюда $L \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$, т.е. $L \leq K$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Brison, O.J.** Hall operators for Fitting classes / O.J. Brison // Arch. Math. (Basel). – 1979. – Vol. 33. – Z. 1–9.
2. **Brison, O.J.** Hall-closure and product of fitting classes / O.J. Brison // J. Austral. Math. Soc. (Series A). – 1982. – Vol. 32. – P. 145–164.
3. **Doerk, K.** Über Vertauschbarkeit, normale Einbettung und Dominanz bei Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen / K. Doerk, M. Porta // Arch. Math. – 1980. – Vol. 35. – Z. 319–327.
4. **Lockett, F.P.** On the Theory of Fitting classes of finite soluble groups / F.P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Vol. 131. – P. 103–115.
5. **Gallego, M.** A note on Hall operators for Fitting classes / M. Gallego // Bull. London Math. Soc. – 1985. – Vol. 17. – P. 248–252.
6. **Чунихин, С.А.** Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 168 с.
7. **Doerk K.** Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. **Шеметков, Л.А.** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.

SUMMARY

The description of Hall π-subgroup of finite group of π-soluble group for any Fitting class is received.

Поступила в редакцию 6.03.2008