УДК 512.542

В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова

О τ-замкнутых ω-насыщенных формациях разрешимого l_τ^ω-дефекта 1

1. ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Мы используем определения и обозначения, принятые в работах [1].

Идея изучения структурного строения насыщенной формации, базируясь на свойствах достаточно хорошо изученной ее части (подформации), принадлежит А.Н. Скибе и Е.А. Таргонскому [2]. Такой подход основывается на введенном ими понятии $\mathfrak{H}$-дефекта насыщенной формации. Авторами работы [3] были изучены основные свойства насыщенных формаций, имеющих конечный $\mathfrak{H}$-дефект, а также дана классификация насыщенных формаций нильпотентного дефекта ≤ 2. В дальнейшем этот подход широко использовался при исследовании структурного строения как насыщенных, так и n-кратно и тотально насыщенных формаций. При этом, в качестве $\mathfrak{H}$ рассматривалась не только формация всех нильпотентных групп, но и другие достаточно хорошо известные классы (π-разложимых, π-нильпотентных, разрешимых, сверхразрешимых групп и др.), а также исследовались аналогичные решетки формаций большей длины (А.Н. Скиба, 1991 г.; В.В. Аниськов, 1995–2003 гг.; В.Г. Сафонов, 1996–2007 гг.).

В теории ω-насыщенных формаций данный подход был использован Дж. Джехадом (1996 г.) и Н.Г. Жевновой (1997 г.) при изучении p-насыщенных и ω-насыщенных формаций с нильпотентным l^ω-дефектом 1, а авторами при классификации неразрешимых ω-насыщенных формаций, имеющих разрешимую максимальную ω-насыщенную подформацию [4]. В работах [5] изучено решеточное строение не π-нильпотентных (не π-специальных, не π-разложимых) ω-насыщенных формаций с π-нильпотентным (π-специальным, π-разложимым) l^ω-дефектом 1.

В данной работе, развивая наблюдения [6], нами получено описание τ-замкнутых ω-насыщенных формаций с разрешимой максимальной τ-замкнутой ω-насыщенной подформацией.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть ω – непустое множество простых чисел. Символом $G_{\omega d}$ обозначается наибольшая нормальная в G подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является ωd-группой (если таких подгрупп в G нет, то полагают $G_{\omega d}=1$). Всякую функцию вида $f:\omega\cup\{\omega'\}\to$ формации называют ω-локальным спутником. Через $LF_\omega(f)$ обозначают класс всех таких групп G, что $G/G_{\omega d}\in f(\omega')$ и $G/F_p(G)\in f(p)$ для любого $p\in\omega\cap\pi(G)$. Если форма-

ция $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, то говорят, что $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией, а f – ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G с $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq O_{\omega}(G) \cap \Phi(G)$. Как было показано в [3, 9], формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной тогда и только тогда, когда она ω-локальна.

Пусть всякой группе G сопоставлена такая система ее подгрупп $\tau(G)$, что $G \in \tau(G)$. Тогда τ называют подгрупповым функтором [7], если для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место: $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Тогда через $l_{\tau}^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают τ-замкнутую ω-насыщенную формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. При этом, если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то формацию $l_{\tau}^{\omega}\mathrm{form}G$ называют однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формацией. Множество l_{τ}^{ω} всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций относительно включения $\subseteq$ образует полную модулярную решетку [10]. Понятно, что в этой решетке $\vee_{\tau}^{\omega}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_{\tau}^{\omega}\mathrm{form}(\cup_{i \in I}\mathfrak{F}_i)$ и $\cap_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ являются, соответственно, точной верхней и точной нижней гранями для подмножества $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из l_{τ}^{ω}.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая τ-замкнутая ω-насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ – произвольный класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией ($\mathfrak{H}_{\tau}^{\omega}$-критической формацией), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные τ-замкнутые ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая ω-насыщенная формация, то $\mathfrak{H}_{\tau}^{\omega}$-дефектом τ-замкнутой ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ называют длину решетки $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, и обозначают через $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_{\tau}^{\omega}$. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$ – формация всех разрешимых групп, то $\mathfrak{S}_{\tau}^{\omega}$-дефект τ-замкнутой ω-насыщенной формации называют ее разрешимым l_{τ}^{ω}-дефектом.

τ-Замкнутую ω-насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют l_{τ}^{ω}-неприводимой, если $\mathfrak{F} \neq l_{\tau}^{\omega}\mathrm{form}(\cup_{i \in I}\mathfrak{X}_i) = \vee_{\tau}^{\omega}(\mathfrak{X}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – набор всех собственных τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$. В противном случае формацию $\mathfrak{F}$ называют l_{τ}^{ω}-приводимой.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для доказательства основного результата нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

3.1. Лемма [11]. *Пусть $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ – насыщенная формация классического типа. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация.*

Следующие леммы являются частными случаями лемм 5.2.7 и 5.2.8 [8].

3.2. Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутые ω-насыщенные формации, причем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда, если m и n – $\mathfrak{H}_\tau^\omega$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, то $m \le n$.*

3.3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутые ω-насыщенные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\tau^\omega \mathfrak{X}$. Тогда, если m, r и t – $\mathfrak{H}_\tau^\omega$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, то $t \le m + r$.*

3.4. Лемма [10]. *Решетка всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций является модулярной.*

Частным случаем теоремы 1 работы [9] является

3.5. Лемма. *В том и только в том случае $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной неразрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\tau^\omega \mathrm{form} G$, где G – монолитическая τ-минимальная неразрешимая группа с таким неабелевым монолитом P, что группа G/P разрешима.*

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

4.1. Лемма. *Пусть A – монолитическая группа с неабелевым монолитом, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}$ – некоторые τ-замкнутые ω-насыщенные формации. Тогда, если $A \in \mathfrak{M} \vee_\tau^\omega \mathfrak{X}$, то $A \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть A – группа из условия леммы. Поскольку всякая насыщенная формация является ω-насыщенной при любом непустом множестве простых чисел ω, то имеет место включение

$$\mathfrak{M} \vee_\tau^\omega \mathfrak{X} = l_\tau^\omega \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{X}) \subseteq l^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{X}).$$

Поэтому $A \in l^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{X})$. Применяя теперь лемму 2.1.6 [10], получим $A \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{X}$. Лемма доказана.

4.2. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – неразрешимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l_τ^ω-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\tau^\omega \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – разрешимая τ-замкнутая ω-насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная неразрешимая формация, при этом:*

1) всякая разрешимая τ-замкнутая ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_\tau^\omega (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{S})$;

2) всякая неразрешимая τ-замкнутая ω-насыщенная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_\tau^\omega (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{S})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-насыщенная формация с разрешимым l_τ^ω-дефектом 1. Так как $\mathfrak{F}$ неразрешимая формация, то по лемме 3.1 в $\mathfrak{F}$ содержится некоторая минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная неразрешимая формация $\mathfrak{H}$. По условию теоремы $\mathfrak{X} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ – максимальная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_\tau^\omega \mathfrak{X}$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_\tau^\omega \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная неразрешимая формация, а $\mathfrak{X}$ – разрешимая

τ-замкнутая ω-насыщенная формация. Тогда ввиду леммы 3.3 $\mathfrak{S}_\tau^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ не превосходит 1. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $|\mathfrak{H}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega = 1$, то по лемме 3.2 имеем $|\mathfrak{F}:\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}|_\tau^\omega \geq 1$. Поэтому $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-насыщенная формация разрешимого l_τ^ω-дефекта 1.

Установим теперь справедливость второй части теоремы. Так как $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S}$ – максимальная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}$, то в силу леммы 3.4 имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathfrak{F}/_\tau^\omega(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S})\vee_\tau^\omega \mathfrak{X} = ((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S})\vee_\tau^\omega \mathfrak{X})\vee_\tau^\omega \mathfrak{H}/_\tau^\omega(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S})\vee_\tau^\omega \mathfrak{X} \simeq$$
$$\sim \mathfrak{H}/_\tau^\omega\mathfrak{H}\cap((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S})\vee_\tau^\omega \mathfrak{X}) = \mathfrak{H}/_\tau^\omega\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S}.$$

Так как $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S}$ – максимальная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{H}$, то $(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S})\vee_\tau^\omega \mathfrak{X}$ является максимальной τ-замкнутой ω-насыщенной подформацией в $\mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$, то любая разрешимая τ-замкнутая ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S})\vee_\tau^\omega \mathfrak{X}$. Следовательно, справедливо условие 1) теоремы.

Допустим теперь, что в $\mathfrak{F}$ имеется такая минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная неразрешимая подформация $\mathfrak{H}_1$, что $\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 3.5 имеем $\mathfrak{H}_1 = l_\tau^\omega \mathrm{form} G$, где G – монолитическая τ-минимальная неразрешимая группа с таким неабелевым монолитом P, что группа G/P разрешима.

Поскольку $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{H}\vee_\tau^\omega \mathfrak{X}$, то в силу леммы 4.1 $G \in \mathfrak{H}\cup\mathfrak{X}$. Так как G неразрешимая группа, то $G \in \mathfrak{H}$ и, следовательно, $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{H}_1 \not\subseteq \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая ω-насыщенная формация, то $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$. Противоречие. Таким образом, в формации $\mathfrak{F}$ нет минимальных τ-замкнутых ω-насыщенных неразрешимых подформаций, отличных от $\mathfrak{H}$.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ – произвольная неразрешимая τ-замкнутая ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда, согласно доказанному выше и лемме 3.1, имеем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Поэтому, применяя лемму 3.4, получим

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\cap\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\cap(\mathfrak{H}\vee_\tau^\omega \mathfrak{X}) = \mathfrak{H}\vee_\tau^\omega (\mathfrak{M}\cap\mathfrak{X}) =$$
$$= \mathfrak{H}\vee_\tau^\omega (\mathfrak{M}\cap(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S})) = \mathfrak{H}\vee_\tau^\omega (\mathfrak{M}\cap\mathfrak{S}).$$

Таким образом, имеет место условие 2) теоремы. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия доказанной теоремы.

В случае, когда $\omega = \{p\}$ из теоремы 4.2, получаем

4.3. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ – неразрешимая τ-замкнутая p-насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l_τ^p-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\vee_\tau^p \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – разрешимая τ-замкнутая p-насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая p-насыщенная неразрешимая формация, при этом:*

1) всякая разрешимая τ-замкнутая p-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee_\tau^p (\mathfrak{H}\cap\mathfrak{S})$;

2) всякая неразрешимая τ-замкнутая p-насыщенная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_\tau^p (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{S})$.

Если ω – множество всех простых чисел, из теоремы 4.2 вытекает

4.4. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ – неразрешимая τ-замкнутая насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l^τ-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l^\tau \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – разрешимая τ-замкнутая насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая насыщенная неразрешимая формация, при этом:*

1) всякая разрешимая τ-замкнутая насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_l^\tau (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{S})$;

2) всякая неразрешимая τ-замкнутая насыщенная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_l^\tau (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{S})$.

Пусть τ – тривиальный подгрупповой функтор, т.е. $\tau(G) = \{G\}$ для любой группы G. Тогда из теоремы 4.2 вытекает

4.5. Следствие [5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – неразрешимая ω-насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый l^ω-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – разрешимая ω-насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная ω-насыщенная неразрешимая формация, при этом:*

1) всякая разрешимая ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^\omega (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{S})$;

2) всякая неразрешимая ω-насыщенная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee^\omega (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{S})$.

Если, кроме того, ω – множество всех простых чисел, то из теоремы 4.2 получаем

4.6. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ – неразрешимая насыщенная формация. Тогда и только тогда разрешимый дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – разрешимая насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная насыщенная неразрешимая формация, при этом:*

1) всякая разрешимая насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{S})$;

2) всякая неразрешимая насыщенная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{S})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Шеметков, Л.А.*** Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
2. ***Скиба, А.Н.*** Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Бел. наука, 1997. – 240 с.
3. ***Скиба, А.Н.*** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. ***Скиба, А.Н.*** Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41, вып. 4. – С. 490–499.
5. ***Сафонов, В.Г.*** О приводимых ω-насыщенных формациях с разрешимым дефектом ≤ 2 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2005, № 5. – С. 162–165.

6. ***Сафонов, В.Г.*** Частично насыщенные формации с π-нильпотентным дефектом 1 / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Вестник Мозырского государственного педагогического университета. – 2005. – № 2(13). – С. 16–20.
7. ***Рябченко, А.И.*** Частично насыщенные формации с π-специальным дефектом 1 // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 5. – С. 59–68.
8. ***Сафонов, В.Г.*** О ω-насыщенных формациях с π-разложимым дефектом 1 / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага універсітэта імя А.А. Куляшова. – 2006. – № 4(25). – С. 205–211.
9. **Скиба, А.Н.** О частично локальных формациях / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Доклады АН Беларуси. – 1995. – Т. 39, № 3. – С. 9–11.
10. ***Шабалина, И.П.*** О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп / И.П. Шабалина // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. наук. – 2003. – № 1. – С. 28–30.
11. ***Селькин, В.М.*** Об одной проблеме теории ω-локальных формаций / В.М. Селькин // Докл. НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 5. – С. 9–11.

S U M M A R Y

Let $\mathfrak{F}$ be some τ-closed ω-saturated formation, $\mathfrak{S}$ be the formation of all soluble groups. Then $\mathfrak{F}/^{\omega}_{\tau}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}$ denotes the lattice of all τ-closed ω-saturated formations $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. A length of the lattice $\mathfrak{F}/^{\omega}_{\tau}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}$ is called a soluble l^{ω}_{τ}-defect of the τ-closed ω-saturated formation $\mathfrak{F}$. In this paper we obtained the exact description of τ-closed ω-saturated formations with soluble l^{ω}_{τ}-defect 1.

Поступила в редакцию 19.02.2008