УДК 512.542

**Н.В. Савельева**

# Инъекторы и максимальные подклассы Фиттинга

**Введение.** Класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ называется максимальным (по включению) подклассом класса Фиттинга $\mathfrak{Y}$ (обозначают $\mathfrak{X} <\cdot \mathfrak{Y}$), если $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ и из того, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$. Напомним, что подгруппа $M$ группы $G$ называется $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой $G$, если для любой подгруппы $H \in \mathfrak{X}$ такой, что $M \subseteq H \subset G$, следует, что $H \in \{M, G\}$. Подгруппу $V$ группы $G$ называют $\mathfrak{X}$-инъектором $G$, если $V \cap N$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой группы $N$ для каждой субнормальной подгруппы $N$ группы $G$. Согласно известной теореме Гашюца–Фишера–Хартли [1], для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в любой конечной разрешимой группе $\mathfrak{X}$-инъекторы существуют и сопряжены.

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга и $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$. В классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп известен результат Брайса–Косси [2] о том, что если существует такое простое число $p$, что для каждой группы $G \in \mathfrak{Y}$ индекс ее $\mathfrak{X}$-инъектора в $G$ равен 1 или $p$, то $\mathfrak{X} <\cdot \mathfrak{Y}$.

Основополагающий результат в теории частично разрешимых групп был получен В.Г. Сементовским [3], который доказал, что любая группа $G$ такая, что факторгруппа $G$ по ее $\mathfrak{X}$-радикалу разрешима, обладает $\mathfrak{X}$-инъекторами и любые два из них сопряжены.

В связи с этим актуальна задача расширения указанного результата на случай частично разрешимых групп. Ее решение – основной результат настоящей работы.

В работе рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем [4].

**1. Предварительные сведения.** Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга. Подгруппа $G_{\mathfrak{X}}$ группы $G$ называется *$\mathfrak{X}$-радикалом* группы $G$, если она является максимальной среди нормальных подгрупп группы $G$, принадлежащих $\mathfrak{X}$.

**Лемма 1.1 (теорема IX.1.1 (а) [4]).** *Если $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и $N$ – нормальная подгруппа группы $G$, то $N_{\mathfrak{X}}=N\cap G_{\mathfrak{X}}$.*

**Лемма 1.2 [3].** *В любой группе $G$ такой, что факторгруппа $G$ по ее $\mathfrak{X}$-радикалу разрешима, существуют $\mathfrak{X}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга, то их произведение – это класс групп $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}=(G : G/G_{\mathfrak{X}}\in\mathfrak{Y})$. В частности, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ – класс всех тех групп, факторгруппы по $\mathfrak{X}$-радикалу которых разрешимы.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом*, если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что справедлива следующая

**Лемма 1.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*1) если класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ непуст, то $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$;*

*2) если $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, являющийся гомоморфом, и $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$.*

Напомним, что неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ называется нормальным в классе Фиттинга $\mathfrak{Y}$ (или $\mathfrak{Y}$-нормальным), если для любой группы $G$ ее $\mathfrak{X}$-инъектор является нормальной подгруппой $G$. Отсюда легко следует, что для любой группы $G$ ее $\mathfrak{X}$-радикал является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой группы $G$.

**2. Основной результат.** С учетом результата В.Г. Сементовского [3] о существовании $\mathfrak{X}$-инъекторов и сопряженности в группах из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$, справедлива

**Теорема 2.1.** *Если классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ таковы, что $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}$,* то справедливы следующие утверждения:

1) *если для некоторого простого $p$ в каждой группе $G\in\mathfrak{Y}$ ее $\mathfrak{X}$-инъектор имеет индекс* 1 *или $p$, то $\mathfrak{X}$ нормален и максимален в $\mathfrak{Y}$;*
2) *если $\mathfrak{X}$ максимален в $\mathfrak{Y}$, то существует такое простое число $p$, что $G/G_{\mathfrak{X}}$ является $p$-группой для любой группы $G\in\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. 1) Докажем первое утверждение. Предположим, что $\mathfrak{X}$ не нормален в $\mathfrak{Y}$. Тогда класс $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{X}$ непуст, и в нем существуют группы, в которых $\mathfrak{X}$-радикал не является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой, т.е. $\mathfrak{X}$-инъектор не нормален в $G$. Выберем среди таких групп группу $G$ минимального порядка. Тогда $G/G_{\mathfrak{X}}$ разрешима. В силу леммы 1.2 $\mathfrak{X}$-инъектор в группе $G$ существует. Пусть $V$ – $\mathfrak{X}$-инъектор группы $G$.

Покажем вначале, что в $G$ существует единственная максимальная нормальная подгруппа $M=G_{\mathfrak{X}}$. Докажем это методом от противного. Предположим, что в группе $G$ есть две максимальные нормальные подгруппы $M_1$ и $M_2$. Тогда по определению класса Фиттинга $M_1\in\mathfrak{Y}$ и $M_2\in\mathfrak{Y}$. Следовательно, ввиду того, что $|M_1|<|G|$ и $|M_2|<|G|$, выполняется условие индукции. Значит, по индукции $M_1 \in \mathfrak{X}$ и $M_2 \in \mathfrak{X}$. Но тогда по определению класса Фиттинга $M_1M_2 \in \mathfrak{X}$. Так как $M_1$ и $M_2$ – максимальные нормальные подгруппы и их произведение – нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа, то, ввиду максимальности, $G=M_1M_2 \in \mathfrak{X}$. Получаем противоречие. Следовательно, существует единственная максимальная нормальная подгруппа $M_1=M_2=M \in \mathfrak{X}$. Но тогда по определению $\mathfrak{X}$-радикала $M=G_{\mathfrak{X}}$.

Заметим, что $G_{\mathfrak{X}}<V<G$, где $V$ не нормален в $G$. По условию теоремы $|G:V|=p$ (если $|G:V|=1$, то $G=V \in \mathfrak{X}$ – противоречие с выбором группы $G$). Так как $G_{\mathfrak{X}}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа в $G$, то $G/G_{\mathfrak{X}}$ – композиционный фактор группы $G$. Но простая группа является циклической простого порядка, т.е. имеем $G/G_{\mathfrak{X}} \cong Z_q$, т.е. $|G/G_{\mathfrak{X}}|=q$. Заметим, что

$$\frac{|G:G_{\mathfrak{X}}|}{|V:G_{\mathfrak{X}}|}=|G:V|=p.$$

Следовательно, $q=p$ и $V=G_{\mathfrak{X}}$ – противоречие с тем, что $\mathfrak{X}$-инъекторы группы $G$ не нормальны в $G$.

Следовательно, $\mathfrak{X} \lhd \mathfrak{Y}$.

Так как $\mathfrak{X} \lhd \mathfrak{Y}$, то $\mathfrak{X}$-инъектор любой группы совпадает с ее $\mathfrak{X}$-радикалом. Поэтому $V=G_{\mathfrak{X}}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{X} \lessdot \mathfrak{Y}$.

Предположим, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ не максимален в $\mathfrak{Y}$. Тогда существует такой класс Фиттинга $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{Y}$.

Пусть $G$ и $H$ – группы из классов $\mathfrak{M} \backslash \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y} \backslash \mathfrak{M}$ соответственно. Так как по условию для любой $\mathfrak{Y}$-группы ее индекс по $\mathfrak{X}$-радикалу равен простому числу $p$, то $|G/G_{\mathfrak{X}}|=|H/H_{\mathfrak{X}}|=p$. Но $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{M}$. Значит, $H_{\mathfrak{X}} \le H_{\mathfrak{M}}$.

Из того, что $|H/H_{\mathfrak{X}}|=p$, следует, что $H_{\mathfrak{X}}$ – максимальная нормальная подгруппа группы $H$. Следовательно, ввиду $H_{\mathfrak{X}} \le H_{\mathfrak{M}}$, получаем, что либо $H_{\mathfrak{M}}=H$, либо $H_{\mathfrak{X}}=H_{\mathfrak{M}}$. Случай, когда $H_{\mathfrak{M}}=H$ невозможен ввиду того, что тогда $H \in \mathfrak{M}$ и получаем противоречие с выбором $H$.

Следовательно, справедливо равенство

$$H_{\mathfrak{X}}=H_{\mathfrak{M}}. \tag{2.1}$$

Пусть $T=G \times H$. Если предположить, что $T \in \mathfrak{M}$, то из того, что $H \lhd T$, следует, что $H \in \mathfrak{M}$. Последнее невозможно ввиду выбора $H$. Значит, $T_{\mathfrak{M}}<T$.

Так как $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{M}$, то по лемме 1.1 получаем $(T_{\mathfrak{M}})_{\mathfrak{X}}=T_{\mathfrak{M}} \cap T_{\mathfrak{X}}=T_{\mathfrak{X}}$.

Покажем, что $T_{\mathfrak{M}}=G \times H_{\mathfrak{M}}$. Так как $|H/H_{\mathfrak{X}}|=p$ и с учетом равенства (2.1) имеем $|H|=|H_{\mathfrak{M}}| \cdot p$. Так как $G \in \mathfrak{M}$ и $H_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$, то $G \times H_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$. Кроме того, $G \times H_{\mathfrak{M}} \lhd T$ в силу $G \lhd T$ и $H_{\mathfrak{M}} \lhd T$. Заметим также, что $|T|=|G| \cdot |H|$ и $|G \times H_{\mathfrak{M}}|=|G| \cdot |H_{\mathfrak{M}}|$. Отсюда $|T:(G \times H_{\mathfrak{M}})|=p$. Значит, $G \times H_{\mathfrak{M}}$ – максимальная подгруппа, которая является нормальной в $T$. Более того, $T \notin \mathfrak{M}$, что влечет $T_{\mathfrak{M}} \neq T$, т.е. $T_{\mathfrak{M}} \subset T$. Тогда $\mathfrak{M}$-радикалом группы $T$ может быть только $T_{\mathfrak{M}}$. Остается единственная возможность, что $T_{\mathfrak{M}}=G \times H_{\mathfrak{M}}$.

Если $T_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{X}$, то ввиду $G \lhd T_{\mathfrak{M}}$ получаем $G \in \mathfrak{X}$. Последнее противоречит выбору группы $G$.

Следовательно, $T_{\mathfrak{M}} \notin \mathfrak{X}$ и

$$(T_{\mathfrak{M}})_{\mathfrak{X}} = T_{\mathfrak{X}} < T_{\mathfrak{M}} \tag{2.2}$$

Теперь, ввиду $H \in \mathfrak{Y}$, по условию имеем $|H/H_{\mathfrak{X}}| = p$. Значит, $H_{\mathfrak{X}}$ – максимальная нормальная подгруппа группы $H$. Но в силу равенства (2.1) получаем $|H/H_{\mathfrak{M}}| = p$. Так как $T = G \times H$ и $T_{\mathfrak{M}} = G \times H_{\mathfrak{M}}$, то

$$|T/T_{\mathfrak{M}}| = \frac{|G \times H|}{|G \times H_{\mathfrak{M}}|} = \frac{|G| \cdot |H|}{|G| \cdot |H_{\mathfrak{M}}|} = \frac{|H|}{|H_{\mathfrak{M}}|} = |H/H_{\mathfrak{M}}| = p.$$

Это означает, что $T_{\mathfrak{M}} \triangleleft \cdot T$. Теперь, ввиду $T \in \mathfrak{Y}$ и $T \notin \mathfrak{X}$ (в противном случае, если $T \in \mathfrak{X}$, то возможно $|T/T_{\mathfrak{X}}| = 1$), из условия теоремы $|T/T_{\mathfrak{X}}| = p$. Следовательно, $T_{\mathfrak{X}} \triangleleft \cdot T$. Таким образом, $T_{\mathfrak{X}}$ и $T_{\mathfrak{M}}$ являются максимальными нормальными подгруппами в $T$, причем $T_{\mathfrak{X}} \leq T_{\mathfrak{M}}$. Следовательно, $T_{\mathfrak{X}} = T_{\mathfrak{M}}$ – противоречие с неравенством (2.2). Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{X} < \cdot \mathfrak{Y}$.

Первое утверждение теоремы доказано.

2) Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть $\mathfrak{X}$ максимален в $\mathfrak{Y}$ и $G$ – группа минимального порядка из класса $\mathfrak{Y} \backslash \mathfrak{X}$. Заметим, что, так как $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, то класс $\mathfrak{Y} \backslash \mathfrak{X}$ непуст. Аналогично, как и в доказательстве первого утверждения теоремы, можно показать, что в $G$ существует единственная максимальная нормальная подгруппа $M = G_{\mathfrak{X}}$.

Но тогда существует простое число $p$ такое, что $|G/G_{\mathfrak{X}}| = p$. Отсюда по определению произведения классов Фиттинга $G \in \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$. Следовательно, $G \in (\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{Y}) \backslash \mathfrak{X}$ и класс $(\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{Y})$ непуст и $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{Y}$. Но по условию $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ и ввиду утверждения 1) леммы 1.3 получаем $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$. Поэтому $\mathfrak{X} \subsetneq \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{Y}$.

Пусть теперь существует группа $H$ с тем свойством, что $H/H_{\mathfrak{X}}$ не является $p$-группой. Тогда по определению произведения классов Фиттинга, $H \notin \mathfrak{N}_p$. Следовательно, ввиду $H \notin \mathfrak{X}$ получаем $H \in \mathfrak{Y} \backslash (\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{Y})$.

Таким образом, $\mathfrak{X} \subset (\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{Y} \neq \varnothing$. Противоречие с максимальностью класса $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. Следовательно, $H/H_{\mathfrak{X}}$ является $p$-группой для всех простых чисел $p$.

Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$, из теоремы 2.1 вытекает

**Следствие 2.2 (Брайс, Косси [2]).** *Пусть разрешимые классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ таковы, что $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если для всех групп $G \in \mathfrak{Y}$ и некоторого простого числа $p$ $\mathfrak{X}$-инъекторы группы $G$ имеют индекс 1 или $p$, то $\mathfrak{X}$ нормален и максимален в $\mathfrak{Y}$;*
2) *если $\mathfrak{X} < \cdot \mathfrak{Y}$, то существует такое простое число $p$, что $G/G_{\mathfrak{X}}$ является $p$-группой для любой группы $G \in \mathfrak{Y}$.*

В заключение приведем примеры, которые подтверждают, что первое условие следствия 2.2 не является необходимым, а второе условие этого следствия не является достаточным для максимальности $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$.

**Пример 2.3.** Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{Y} = \mathfrak{N}_{\{p,\, q\}}$, где $\mathfrak{N}_p$ – класс Фиттинга всех $p$-групп и $\mathfrak{N}_{\{p,\, q\}}$ – класс Фиттинга всех нильпотентных $\{p,\, q\}$-групп. Тогда $\mathfrak{X}$ является максимальным подклассом $\mathfrak{Y}$. Но в этом случае существуют такие подгруппы $G$, для которых факторгруппа $G/G_{\mathfrak{X}}$ является $q$-группой.

Пусть $V$ – $\mathfrak{X}$-инъектор группы $G$. Так как по определению $\mathfrak{X}$-инъектора $V \supseteq G_{\mathfrak{X}}$, то индекс $|G:V|$ является $q$-числом.

Таким образом, существует группа $G \in \mathfrak{Y}$ такая, что индекс $|G:V| \not\in p$. Следовательно, условие максимальности $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$ в утверждении 1) теоремы 2.1 не является необходимым.

**Пример 2.4.** Пусть $\mathfrak{X}=\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{Y}=\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$, где $\mathfrak{N}_p$ – класс Фиттинга всех $p$-групп и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ – произведение классов Фиттинга всех $p$-групп и всех $q$-групп.

В этом случае мы имеем, что для любой группы $G \in \mathfrak{Y}$ факторгруппа $G/G_{\mathfrak{X}}$ является $q$-группой. Легко видеть, что справедливы следующие строгие включения: $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{N}_{\{p,\, q\}} \subset \mathfrak{Y}$.

Следовательно, класс $\mathfrak{X}$ не является максимальным в $\mathfrak{Y}$. Поэтому в утверждении 2) теоремы 2.1 условие максимальности $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$ не является достаточным.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. ***Fischer, B.*** Injectoren endlicher auflosbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. – № 5. – S. 337–339.
2. ***Bryce, R.A.*** Maximal Fitting classes of finite soluble groups / R.A. Bryce, J. Cossey // Bull. Austral. Math. Soc. – 1974. – Vol. 10. – P. 169–175.
3. ***Сементовский, В.Г.*** Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 166–170.
4. ***Doerk, K.*** Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.



*S U M M A R Y*

*Let $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ be Fitting classes with the property $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$. Two conditions, one necessary and the other sufficient, for $\mathfrak{X}$ to be maximal in $\mathfrak{Y}$ are given.*



*Поступила в редакцию 17.10.2007*