УДК 517.52

А.Л. Гладков, А.Б. Соколова

Об одном признаке сходимости числовых рядов

Введение. В 1837 г. Куммером была предложена общая схема исследования сходимости рядов с положительными членами. Эта схема была сформулирована им в виде общего признака сходимости, из которого как частные случаи выводятся признаки Даламбера, Раабе и некоторые другие.

Признак сходимости Куммера заключается в следующем:

Пусть дан расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ с положительными членами. Если

$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n\cdot\frac{u_n}{u_{n+1}}-c_{n+1})>0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а если

$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n\cdot\frac{u_n}{u_{n+1}}-c_{n+1})<0$, то расходится.

Описанный признак сходимости Куммера является общим признаком: выбирая различным образом расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$, мы будем получать различные конкретные признаки сходимости.

В книге Н.Н. Воробьева [1] говорится о том, что можно продолжить последовательность признаков сходимости, начинающуюся с признаков Даламбера, Раабе и Бертрана, беря в качестве стандартных рядов ряды с общими членами

$\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}, \frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\ln\ln\ln n}$ и так далее.

Однако, общий признак сходимости числовых рядов в [1] не формулируется.

Целью настоящей работы является вывод нового признака сходимости числовых рядов, непосредственно не вытекающего из схемы Куммера. Частный случай этого признака сходимости формулируется в похожей на признак Бертрана форме.

Для $n\in N$ введем следующее обозначение:

$$\ln_n k=\overbrace{\ln\ln\ln\ldots\ln}^{n} k.$$

Например, $\ln_2 k = \ln\ln k$. Положим $I_1(k) = \ln k\left[k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)-1\right]$.

Для $n \in N, n \geq 2$ определим

$$I_n(k) = \ln_n k\left[I_{n-1}(k)-1\right].$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $n \in N$. Если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} I_n(k) = \alpha, \tag{1}$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$.

Доказательство признака сходимости числовых рядов.

Разберем отдельно случаи α<1 и α>1.

1) Пусть α<1.

В силу соотношения (1) для $q \in (\alpha, 1)$ найдется такое значение $N_1 > 0$, что $\forall k > N_1$ выполняется неравенство $I_n(k) < q$.

Отсюда следует, что $\ln_n k\left[I_{n-1}(k)-1\right] < q$, или

$$I_{n-1}(k) < \frac{q}{\ln_n k} + 1. \tag{2}$$

Здесь и далее предполагаем, что $\ln_n k > 0$.

Очевидно, что (2) равносильно соотношению

$$I_{n-2}(k) < \left(\frac{q}{\ln_n k}+1\right)\frac{1}{\ln_{n-1} k} + 1. \tag{3}$$

Проведя далее аналогичную цепочку преобразований, приходим к следующему неравенству

$$I_1(k) < \left(\ldots\left(\left(\left(\frac{q}{\ln_n k}+1\right)\frac{1}{\ln_{n-1} k}+1\right)\frac{1}{\ln_{n-2} k}+1\right)\ldots+1\right)\frac{1}{\ln\ln k}+1.$$

Отсюда следует, что

$$k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right) < \left(\ldots\left(\left(\left(\frac{q}{\ln_n k}+1\right)\frac{1}{\ln_{n-1} k}+1\right)\frac{1}{\ln_{n-2} k}+1\right)\ldots+1\right)\frac{1}{\ln k}+1. \tag{4}$$

Преобразовав (4), получим

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k\ln k} - \frac{1}{k\ln\ln k} - \ldots - \frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1} k} - \frac{q}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}. \tag{5}$$

Первая часть теоремы будет доказана, если

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > \frac{(k-1)\ln(k-1)\ln\ln(k-1)\ldots\ln_n(k-1)}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k} \tag{6}$$

для достаточно больших значений k. Действительно, (6) можно переписать в следующем виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > \frac{\dfrac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}}{\dfrac{1}{(k-1)\ln(k-1)\ln\ln(k-1)\ln_n(k-1)}}.$$

Так как по интегральному признаку Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\ln_n k}$ расходится, то по признаку сравнения [2, стр. 418] ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ также расходится.

Следовательно, учитывая (5) и (6), достаточно установить, что для достаточно больших значений k верно неравенство

$$\frac{(k-1)\ln(k-1)\ln\ln(k-1)\ldots\ln_n(k-1)}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k} < 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k\ln k} - \\ - \frac{1}{k\ln\ln k} - \ldots - \frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1} k} - \frac{q}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}. \tag{7}$$

Несложно заметить, что (7) равносильно следующему неравенству

$$\frac{k-1}{k}\cdot\frac{\ln(k-1)}{\ln k}\cdot\frac{\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln_n(k-1)}{\ln_n k} < 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k\ln k} - \\ - \frac{1}{k\ln k\ln\ln k} - \ldots - \frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1} k} - \frac{q}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}. \tag{8}$$

Преобразуем левую часть (8). Очевидно,

$$\frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}. \tag{9}$$

Кроме этого, воспользовавшись разложением функции $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора $\ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots$, которое справедливо для $x \in (-1,1]$, имеем

$$\frac{\ln(k-1)}{\ln k} = \frac{\ln k - \ln k + \ln(k-1)}{\ln k} = 1 + \frac{\ln\frac{k-1}{k}}{\ln k} = 1 - \frac{\ln\frac{k}{k-1}}{\ln k} = \\ = 1 - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)}{\ln k} = 1 - \frac{1}{(k-1)\ln k} + \bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\frac{1}{\ln k} = 1 - \frac{1}{k\ln k} + \bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{10}$$

И в общем случае, получим

$$\frac{\ln_n(k-1)}{\ln_n k} = 1 - \frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k} + \bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{11}$$

Докажем формулу (11), используя метод математической индукции.

Она верна для $n=1$, так как тогда выполняется (10). Предположим, что формула верна для n=m, то есть

$$\frac{\ln_m(k-1)}{\ln_m k}=1-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_m k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Тогда

$$\frac{\ln_{m+1}(k-1)}{\ln_{m+1}k}=\frac{\ln_{m+1}k-\ln_{m+1}k+\ln_{m+1}(k-1)}{\ln_{m+1}k}=1+\frac{\ln\dfrac{\ln_m(k-1)}{\ln_m k}}{\ln_{m+1}k}=$$

$$=1+\frac{\ln\left(1-\dfrac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_m k}+\bar{\bar{0}}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\right)}{\ln_{m+1}k}=1-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{m+1}k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Следовательно, формула (11) верна для всех натуральных n.

Учитывая приведенные преобразования, неравенство (8) можно записать в следующем виде

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k\ln k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)<1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k\ln k}-\tag{12}$$

$$-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}-\ldots-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1}k}-\frac{q}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}.$$

Преобразуя (12), получим

$$1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k\ln k}-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}-\ldots-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)<$$

$$<1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k\ln k}-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}-\ldots-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1}k}-\tag{13}$$

$$-\frac{q}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}.$$

Справедливость (13) для достаточно больших значений k очевидна. Первая часть теоремы доказана.

2) Пусть $\alpha > 1$.

В силу соотношения (1) для $q_1\in(1,\alpha)$ найдется такое значение $K_1>0$, что $\forall\, k>K_1$ выполняется неравенство

$$I_n(k)>q_1.\tag{14}$$

Аналогично пункту 1 теоремы доказываем, что для достаточно больших значений k

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}<1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k\ln k}-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}-\ldots-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1}k}-$$

$$-\frac{q_1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}.$$

Теорема будет доказана, если для достаточно больших значений k

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < \frac{(k-1)\ln(k-1)\ln\ln(k-1)\cdot\ldots\cdot\ln_{n-1}(k-1)\left(\ln_n(k-1)\right)^{q_2}}{k\ln k\ln\ln k\cdot\ldots\cdot\ln_{n-1}k\left(\ln_n k\right)^{q_2}}, \tag{15}$$

где $1 < q_2 < q_1$.

Действительно, (15) эквивалентно неравенству

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < \frac{\dfrac{1}{k\ln k\ln\ln k\cdot\ldots\cdot\ln_{n-1}k(\ln_n k)^{q_2}}}{\dfrac{1}{(k-1)\ln(k-1)\ln\ln(k-1)\cdot\ldots\cdot\ln_{n-1}(k-1)(\ln_n(k-1))^{q_2}}}.$$

Так как по интегральному признаку Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(\ln k)\ldots(\ln_n k)^{q_2}}$ $\quad (q_2 > 1)$

сходится, то по признаку сравнения [2, стр. 418] ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ также сходится.

Следовательно, достаточно установить, что для достаточно больших значений k

$$\frac{k-1}{k}\cdot\frac{\ln(k-1)}{\ln k}\cdot\frac{\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln_{n-1}(k-1)}{\ln_{n-1}k}\cdot\left(\frac{\ln_n(k-1)}{\ln_n k}\right)^{q_2} >$$

$$> 1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k\ln k}-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}-\ldots-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1}k}- \tag{16}$$

$$-\frac{q_1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}.$$

Введем следующее обозначение

$$\frac{\ln_n(k-1)}{\ln_n k} = A_n(k).$$

Преобразуем левую часть неравенства (16):

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{\ln(k-1)}{\ln k}\cdot\frac{\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln_{n-1}(k-1)}{\ln_{n-1}k}\cdot\left[A_n(k)\right]^{q_2} =$$

$$=\left[1-\frac{1}{k}+(1-\frac{1}{k})\{\left[A_n(k)\right]^{q_2}-1\}\right]\cdot\frac{\ln(k-1)}{\ln k}\cdot\frac{\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k}\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\frac{\ln_{n-1}(k-1)}{\ln_{n-1}k} = \left[1-\frac{1}{k}-(1-\frac{1}{k})\{1-\left[A_n(k)\right]^{q_2}\}\right]\cdot\frac{\ln(k-1)}{\ln k}\cdot \tag{17}$$

$$\cdot\frac{\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln_{n-1}(k-1)}{\ln_{n-1}k}.$$

Применяя теорему Лагранжа к функции *f(x)*= $x^{q_2}-1$, приходим к соотношению

$$1-\left[A_n(k)\right]^{q_2} = q_2\cdot C^{q_2-1}\left[1-A_n(k)\right] < q_2\left[1-A_n(k)\right],$$

где $0 < C < 1$. Тогда правая часть (17) оценивается следующим образом

$$\left[1-\frac{1}{k}-(1-\frac{1}{k})\{1-[A_n(k)]^{q_2}\}\right]\cdot\frac{\ln(k-1)}{\ln k}\cdot\frac{\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k}\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\frac{\ln_{n-1}(k-1)}{\ln_{n-1}k}>\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-q_2\left(1-A_n(k)\right)\right)\cdot\frac{\ln(k-1)}{\ln k}\cdot\frac{\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k}\cdot\ldots\cdot \qquad (18)$$

$$\cdot\frac{\ln_{n-1}(k-1)}{\ln_{n-1}k}.$$

Учитывая (17) и (18), получаем

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{\ln(k-1)}{\ln k}\cdot\frac{\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln_{n-1}(k-1)}{\ln_{n-1}k}\cdot[A_n(k)]^{q_2}>$$

$$>\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-q_2\left(1-A_n(k)\right)\right)\cdot\frac{\ln(k-1)}{\ln k}\cdot\frac{\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln_{n-1}(k-1)}{\ln_{n-1}k}. \qquad (19)$$

Аналогично пункту 1 теоремы преобразуем правую часть (19):

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{\ln(k-1)}{\ln k}\cdot\frac{\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln_{n-1}(k-1)}{\ln_{n-1}k}\cdot\left(1-q_2\left(1-A_n(k)\right)\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k\ln k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\ldots\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1}k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{q_2}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right).$$

Учитывая приведенные преобразования, неравенство (16) можно записать в следующем виде

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k\ln k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\ldots\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1}k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{q_2}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)>$$

$$>1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k\ln k}-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}-\ldots-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1}k}-\frac{q_1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}.$$

После несложных преобразований получим

$$1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k\ln k}-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}-\ldots-\frac{q_2}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}+\bar{\bar{0}}\left(\frac{1}{k^2}\right)>$$

$$>1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k\ln k}-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k}-\ldots-\frac{1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_{n-1}k}-\frac{q_1}{k\ln k\ln\ln k\ldots\ln_n k}.$$

Следовательно, справедливость (16) для достаточно больших значений k установлена. Теорема доказана.

Замечание. При $n=1$ из (1) получаем следующее соотношение $\lim\limits_{k\to\infty}\ln k\cdot\left[k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)-1\right]=\alpha$.

Отметим, что в признаке Бертрана аналогичное равенство выглядит следующим образом:

$$\lim_{k\to\infty} \ln k \cdot \left[k\left(\frac{p_k}{p_{k+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \alpha .$$

Заключение. В данной работе приведены и доказаны признаки сходимости числовых рядов без использования конструкции, предложенной Куммером.

Установленные признаки могут быть использованы при исследовании вопроса сходимости числовых рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Воробьев, Н.Н.*** Теория рядов / Н.Н. Воробьев. – СПб.: Издательство «Лань», 2002.
2. ***Ильин, В.А.*** Основы математического анализа. Часть 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: «Наука», 1982.

S U M M A R Y

We prove a criterion of convergence series of numbers without using Kummer's scheme.

Поступила в редакцию 17.10.2007