УДК 521.1

А.Ю. Трубникова, Ю.В. Трубников

Аппроксимативный метод в теории невозмущенного кеплеровского движения

В данной работе разработан аппроксимативный метод исследования дифференциального уравнения для радиальной составляющей невозмущенного кеплеровского движения, основанный на аппроксимации в равномерной метрике функций r^{-2}, r^{-3}, присутствующих в этом уравнении.

Как известно [1], дифференциальное уравнение для радиальной составляющей $r(t)$ невозмущенного кеплеровского движения имеет вид

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2 \cos^2\varphi = -\frac{\mu}{r^2}, \tag{1}$$

где (r, λ, φ) – сферические координаты движущейся точки, μ – некоторая постоянная. Если воспользоваться законом сохранения площадей

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \dot{\lambda} \cos^2\varphi\right) = 0 \tag{2}$$

и за плоскость вращения принять плоскость Oxy, то $\varphi = 0$, т.е. $\cos\varphi = 1$ и система уравнений (1)–(2) примет следующий вид

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\lambda}^2 = -\dfrac{\mu}{r^2}, \\ r^2\dot{\lambda} = q, \end{cases} \tag{3}$$

где $q = const$. Выражая $\dot{\lambda}$ из второго уравнения системы (3) и подставляя в первое уравнение, получаем

$$\ddot{r} - r\left(\frac{q}{r^2}\right)^2 = -\frac{\mu}{r^2} \tag{4}$$

и, таким образом, уравнение (4) приводится к виду

$$\ddot{r} = \frac{q^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}. \tag{5}$$

Классический метод исследования [2] уравнения (5) состоит в получении зависимости $t = t(r)$ и последующего изучения свойств этой зависимости. Функцию $r = r(t)$ получают приближенно, используя приближенное решение уравнения Кеплера, выражающего соотношение между временем t и эксцентрической аномалией $E = E(t)$ [3]:

$$E(t) = \frac{180^0}{\pi} e \sin E(t) + 360^0 \cdot \frac{t-t_0}{T}, \tag{6}$$

где e – эксцентриситет эллиптической орбиты, T – период обращения по орбите.

В данной статье предлагается метод получения зависимости $r = r(t)$, основанный на аппроксимации функций r^{-2}, r^{-3} в равномерной метрике на отрезке $r \in [r_1, r_2]$. Для этого прежде всего получим соответствующие выражения для многочленов наилучшего приближения.

Лемма 1. Многочленом наилучшего приближения первой степени в равномерной (чебышевской) метрике для функции $g(r) = r^{-2}$, определенной на отрезке $[r_1, r_2]$ $(0 < r_1 < r_2)$, является многочлен

$$P_1(r) = -\frac{r_1 + r_2}{(r_1 r_2)^2} \cdot r + \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{2(r_1 r_2)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{1/3}(r_1 + r_2)^{2/3}}{(r_1 r_2)^{4/3}}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся алгоритмом, приведенным в монографии [4]. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} d + a_0 + a_1 r_3 = r_3^{-2}, \\ d + a_0 + a_1 r_4 = r_4^{-2}, \\ d + a_0 + a_1 r_5 = r_5^{-2}, \quad r_1 \le r_3 < r_4 < r_5 \le r_2. \end{cases} \tag{8}$$

Считая d, a_0 и a_1 неизвестными, выразим d (а это после максимизации по переменным r_3, r_4, r_5 будет величина максимального уклонения, т.е.

$$d = \max_{r \in [r_1, r_2]} \left| \frac{1}{r^2} - a_0 - a_1 r \right|)$$

через r_3, r_4, r_5:

$$d = \frac{r_5 - r_4}{2r_3^2(r_5 - r_3)} - \frac{1}{2r_4^2} + \frac{r_4 - r_3}{2r_5^2(r_5 - r_3)}. \tag{9}$$

Далее найдем частную производную

$$\frac{\partial d}{\partial r_3} = -\frac{r_5 - r_4}{2(r_3 r_5)^2}\left(1 + \frac{2r_5}{r_3}\right) < 0. \tag{10}$$

Неравенство (10) означает, что максимальное значение d по переменной r_3 при фиксированных r_4 и r_5 достигается при $r_3 = r_1$. Аналогично, максимальное значение d по переменной r_5 достигается при $r_5 = r_2$.

Подставим в правую часть равенства (9) $r_3 = r_1$, $r_5 = r_2$ и найдем производную по переменной r_4:

$$\frac{\partial d}{\partial r_4} = \frac{1}{2(r_1 r_2 r_4)^2}\left[\frac{2(r_1 r_2)^2}{r_4} - (r_1 + r_2) r_4^2\right]. \tag{11}$$

Приравнивая правую часть равенства (13) к нулю, получаем, что

$$r_4=\left(\frac{2\left(r_1r_2\right)^2}{r_1+r_2}\right)^{1/3}. \tag{12}$$

В этой точке правая часть равенства (11) меняет знак с «+» на «–», т.е. величина d достигает на множестве $r_1\le r_3<r_4<r_5\le r_2$ своего абсолютного максимума.

Подставляя найденное значение r_4 в выражение (9), получаем

$$d_{\max}=\frac{r_2-r_4}{2r_1^2\left(r_2-r_1\right)}+\frac{r_4-r_1}{2r_2^2\left(r_2-r_1\right)}-\frac{1}{2r_4^2}=$$

$$=\frac{r_2}{2r_1^2\left(r_2-r_1\right)}-\frac{r_1}{2r_2^2\left(r_2-r_1\right)}+r_4\left[\frac{1}{2r_2^2\left(r_2-r_1\right)}-\frac{1}{2r_1^2\left(r_2-r_1\right)}\right]-\frac{1}{2r_4^2}=$$

$$=\frac{1}{2\left(r_2-r_1\right)}\cdot\frac{\left(r_2-r_1\right)\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)}{\left(r_1r_2\right)^2}+\frac{2^{1/3}\left(r_1r_2\right)^{2/3}}{\left(r_1+r_2\right)^{1/3}}\cdot\frac{\left(r_1-r_2\right)\left(r_1+r_2\right)}{2\left(r_1r_2\right)^2\left(r_2-r\right)}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(r_1+r_2\right)^{2/3}}{2^{2/3}\left(r_1r_2\right)^{4/3}}=\frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{2\left(r_1r_2\right)^2}-\frac{2^{1/3}\left(r_1+r_2\right)^{2/3}}{2\left(r_1r_2\right)^{4/3}}-\frac{2^{1/3}\left(r_1+r_2\right)^{2/3}}{4\left(r_1r_2\right)^{4/3}}=$$

$$=\frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{2\left(r_1r_2\right)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2^{1/3}\left(r_1+r_2\right)^{2/3}}{\left(r_1r_2\right)^{4/3}}. \tag{13}$$

Подставляя найденное значение $d_{\max}$ в систему (8), получаем

$$a_1=\frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)=\frac{1}{r_2-r_1}\cdot\frac{\left(r_1-r_2\right)\left(r_1+r_2\right)}{\left(r_1r_2\right)^2}; \tag{14}$$

$$a_0=\frac{1}{r_1^2}+\frac{r_1\left(r_1+r_2\right)}{\left(r_1r_2\right)^2}-\frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{2\left(r_1r_2\right)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2^{1/3}\left(r_1+r_2\right)^{2/3}}{\left(r_1r_2\right)^{4/3}}=$$

$$=\frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{\left(r_1r_2\right)^2}-\frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{2\left(r_1r_2\right)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2^{1/3}\left(r_1+r_2\right)^{2/3}}{\left(r_1r_2\right)^{4/3}}=$$

$$=\frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{2\left(r_1r_2\right)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2^{1/3}\left(r_1+r_2\right)^{2/3}}{\left(r_1r_2\right)^{4/3}}. \tag{15}$$

Лемма доказана.

Приведем выражения (13)–(15) к более удобному виду. Пусть

$$r_1=a\left(1-e\right),\quad r_2=a\left(1+e\right),$$

где $e\in\left(0,1\right)$, тогда

$$d_{\max}=\frac{a^2\left[\left(1-e\right)^2+1-e^2+\left(1+e\right)^2\right]}{2a^4\left(1-e^2\right)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2^{1/3}a^{2/3}2^{2/3}}{a^{8/3}\left(1-e^2\right)^{4/3}}=$$

$$= \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{3+e^2}{\left(1-e^2\right)^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{a^2\left(1-e^2\right)^{4/3}} =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{\left(1-e^2\right)^{4/3}}\left[\frac{3+e^2}{\left(1-e^2\right)^{2/3}} - 3\right]. \qquad (16)$$

Далее

$$a_1 = -\frac{a\left(1-e+1+e\right)}{a^4\left(1-e^2\right)^2} = -\frac{2}{a^3\left(1-e^2\right)^2}; \qquad (17)$$

$$a_0 = \frac{a^2\left(3+e^2\right)}{2a^4\left(1-e^2\right)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{a^2\left(1-e^2\right)^{4/3}} = \frac{1}{2a^2\left(1-e^2\right)^{4/3}}\left[\frac{3+e^2}{\left(1-e^2\right)^{2/3}} + 3\right]. \qquad (18)$$

Приведем следующий пример: если в выражении (16) положить

$$a = 149,59787\cdot 10^6 \text{ км}, \; e = 0,016709,$$

т.е. взять в качестве a одну астрономическую единицу и в качестве e – эксцентриситет эллиптической орбиты Земли, то

$$d_{\max} = 1,872392387\cdot 10^{-20} \left(\frac{1}{км^2}\right).$$

Лемма 2. Многочленом наилучшего приближения первой степени в равномерной (чебышевской) метрике для функции $g(r) = r^{-3}$ на отрезке $[r_1, r_2]$ $(0 < r_1 < r_2)$ является многочлен

$$Q_1(r) = -\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{\left(r_1 r_2\right)^3}\cdot r + \frac{\left(r_1 + r_2\right)\left(r_1^2 + r_2^2\right)}{2\left(r_1 r_2\right)^3} +$$

$$+ \frac{2}{3}\cdot\frac{3^{1/4}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)^{3/4}}{\left(r_1 r_2\right)^{9/4}}, \qquad (19)$$

причем максимальное уклонение $d_{\max}$ имеет вид

$$d_{\max} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(r_1 + r_2\right)\left(r_1^2 + r_2^2\right)}{\left(r_1 r_2\right)^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3^{1/4}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)^{3/4}}{\left(r_1 r_2\right)^{9/4}}. \qquad (20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству леммы 1.

Приведем правую часть равенства (19) к более удобному виду, считая, что $r_1 = a(1-e)$, $r_2 = a(1+e)$. Тогда

$$a_1 = -\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{\left(r_1 r_2\right)^3} = -\frac{3+e^2}{a^4\left(1-e^2\right)^3}; \qquad (21)$$

$$a_0 = \frac{2a^3\left[\left(1-e\right)^2+\left(1+e\right)^2\right]}{2a^6\left(1-e^2\right)^3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3^{1/4}a^{3/2}\left(3+e^2\right)^{3/4}}{a^{9/2}\left(1-e^2\right)^{9/4}} =$$

$$= \frac{1}{a^3}\cdot\frac{2\left(1+e^2\right)}{\left(1-e^2\right)^3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3^{1/4}\left(3+e^2\right)^{3/4}}{a^3\left(1-e^2\right)^{9/4}}. \quad (22)$$

Аналогично

$$d_{\max} = \frac{2}{a^3\left(1-e^2\right)^{9/4}}\left[\frac{1+e^2}{\left(1-e^2\right)^{3/4}} - \frac{3^{1/4}\left(3+e^2\right)^{3/4}}{3}\right]. \quad (23)$$

Вернемся теперь к уравнению (5). В этом уравнении $q-$ удвоенная секториальная скорость, т.е. $q^2 = pk^2\left(1+m\right) = a\left(1-e^2\right)k^2\left(1+m\right)$, где $p-$ орбитальный параметр [4], который связан [5] с секториальной скоростью c равенством

$$p = \frac{c^2}{k^2\left(1+m\right)}, \quad (24)$$

$k^2 = 2{,}959122083\cdot10^{-4} -$ квадрат гауссовой гравитационной постоянной, $m-$ масса тела (планеты или кометы) в долях солнечной массы, $\mu = k^2\left(1+m\right)$.

Тогда уравнение, аппроксимирующее уравнение (5), примет вид

$$\ddot{r} = -\frac{k^2\left(1+m\right)\left(1+e^2\right)}{a^3\left(1-e^2\right)^2}\cdot r + \frac{k^2(1+m)}{a^2}\times$$

$$\times\left[\frac{1+3e^2}{2\left(1-e^2\right)^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3^{1/4}\left(3+e^2\right)^{3/4}}{\left(1-e^2\right)^{5/4}} - \frac{3}{2\left(1-e^2\right)^{4/3}}\right]. \quad (25)$$

Таким образом, уравнение (25) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{r}\left(t\right) + \omega^2 r\left(t\right) = b, \quad (26)$$

в котором
$$\omega^2 = \frac{k^2\left(1+m\right)\left(1+e^2\right)}{a^3\left(1-e^2\right)^2},$$

$$b = \frac{k^2\left(1+m\right)}{a^2}\left[\frac{1+3e^2}{2\left(1-e^2\right)^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3^{1/4}\left(3+e^2\right)^{3/4}}{\left(1-e^2\right)^{5/4}} - \frac{3}{2\left(1-e^2\right)^{4/3}}\right]. \quad (27)$$

Общее решение такого уравнения имеет вид

$$r\left(t\right) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t + \frac{b}{\omega^2}, \quad (28)$$

где c_1 и c_2- постоянные, определяемые начальными или краевыми условиями.

Далее найдем решение следующей краевой задачи:

$$c_1 \cos \omega t_0 + c_2 \sin \omega t_0 = r(t_0) - \frac{b}{\omega^2}, \tag{29}$$

$$c_1 \cos \omega t_1 + c_2 \sin \omega t_1 = r(t_1) - \frac{b}{\omega^2}. \tag{30}$$

Применяя правило Крамера, получаем

$$c_1 = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega t_1}{\sin \omega (t_1 - t_0)} - \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega t_0}{\sin \omega (t_1 - t_0)}; \tag{31}$$

$$c_2 = \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\cos \omega t_0}{\sin \omega (t_1 - t_0)} - \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\cos \omega t_1}{\sin \omega (t_1 - t_0)}. \tag{32}$$

Теперь из равенства (28) получим решение краевой задачи (29)–(30):

$$r(t) = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega t_1}{\sin \omega (t_1 - t_0)} \cdot \cos \omega t - \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega t_0}{\sin \omega (t_1 - t_0)} \cdot \cos \omega t +$$

$$+ \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\cos \omega t_0}{\sin \omega (t_1 - t_0)} \cdot \sin \omega t - \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\cos \omega t_1}{\sin \omega (t_1 - t_0)} \cdot \sin \omega t + \frac{b}{\omega^2} =$$

$$= \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega t_1 \cos \omega t - \cos \omega t_1 \sin \omega t}{\sin \omega (t_1 - t_0)} + \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\cos \omega t_0 \sin \omega t - \sin \omega t_0 \cos \omega t}{\sin \omega (t_1 - t_0)} +$$

$$+ \frac{b}{\omega^2} = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega (t_1 - t)}{\sin \omega (t_1 - t_0)} + \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega (t - t_0)}{\sin \omega (t_1 - t_0)} + \frac{b}{\omega^2}. \tag{33}$$

Таким образом, основной результат статьи заключается в следующем.

Теорема. Пусть тело массы m, выраженной в долях солнечной массы, обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите с большой полуосью a, тогда зависимость $r(t)$ расстояния тела до Солнца, полученная по результатам двух наблюдений $r(t_0)$ и $r(t_1)$, имеет вид:

$$r(t) = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega (t_1 - t)}{\sin \omega (t_1 - t_0)} + \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2} \right] \frac{\sin \omega (t - t_0)}{\sin \omega (t_1 - t_0)} + \frac{b}{\omega^2}, \tag{34}$$

где

$$\frac{b}{\omega^2} = a \left[\frac{1 + 3e^2}{2(1 + e^2)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4} (3 + e^2)^{3/4} (1 - e^2)^{3/4}}{1 + e^2} - \frac{3(1 - e^2)^{2/3}}{2(1 + e^2)} \right],$$

e – эксцентриситет эллиптической орбиты,

$$\omega^2 = \frac{k^2 (1 + m)(1 + e^2)}{a^3 (1 - e^2)^2},$$

$k^2 = 2{,}959122083 \cdot 10^{-4} \ (1 а.е.)^3 \ сут.^{-2}$; t – время, выраженное в сутках.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Дубошин, Г.*** Небесная механика / Г. Дубошин. – М., 1975. – С. 429.

2. ***Ландау, Л.Д.*** Краткий курс теоретической физики / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М., 1969. – Кн. 1. – С. 43.
3. ***Монтенбрук, О.*** Астрономия на персональном компьютере / О. Монтенбрук, Т. Пфлегер. – СПб., 2002. – С. 73.
4. ***Трубников, Ю.*** Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю. Трубников. – М., 2002. – С. 33.
5. ***Дубяго, А.Д.*** Определение орбит / А.Д. Дубяго. – М.–Л., 1949. – С. 36.

S U M M A R Y

The article deals with the representation of the solution of the problem of two celestial bodies.

Поступила в редакцию 26.03.2007