УДК 512.542

В.В. Шпаков

Классы Фиттинга, определяемые произведениями холловых подгрупп и радикалов

1. Постановка задачи. В теории конечных разрешимых групп многие задачи исследования структуры классов групп и канонических подгрупп связаны с применением операторов “*” и “$_*$”, которые были определены Локеттом [1]. Напомним, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$ и $\mathfrak{F}_*$ – пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^*$.

Исследуя общую структуру классов Фиттинга, Брайс и Косси [2] предложили понятие Локетта пары классов Фиттинга. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ классы Фиттинга, то пару $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$, следуя 5.2 [2], назовем Локетта парой или $\mathfrak{L}$-парой, если $\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{H}_*=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*$. Заметим, что если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$ и $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет обобщенной гипотезе Локетта (гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$), которая была сформулирована Дерком и Хоуксом в X.1.19 [3]. В частности, в универсуме $\mathfrak{S}$ пара $(\mathfrak{F},\mathfrak{S})$ является Локетта парой в точности тогда, когда для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедлива гипотеза Локетта, то есть определяется как пересечение $\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга.

Поиск общих закономерностей в этом направлении исследований приводит к следующей проблеме.

Проблема. *Каковы классы Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$, *для которых пара* $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$ *является* $\mathfrak{L}$*-парой?*

До настоящего времени указанная проблема решена лишь для некоторых значений классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$: Брайсом, Косси [2] для случая, когда $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ локальные наследственные классы, Н.Т. Воробьевым [4] для случая, когда $\mathfrak{F}$ – разрешимый локальный класс Фиттинга и $\mathfrak{H}$ – F-инъекторно замкнутый класс Фиттинга; Галледжи [5] для случая, когда $\mathfrak{F}$ локален и $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, замкнутый относительно произведений вида PN, где P – силовская подгруппа группы G и N – нормальная подгруппа группы G, Бризоном [6] для $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{H}\supseteq\mathfrak{S}_\pi$ ($\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех конечных разрешимых π-групп).

В настоящей работе выявлены новые общие закономерности построения Локетта пар. В частности, установлено, что пара $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$ является $\mathfrak{L}$-парой в случае, когда $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга, а $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, замкнутый относительно произведений холловых подгрупп группы на их радикалы.

С учетом известной теоремы С.А. Чунихина [7] о том, что холловы π-подгруппы существуют и сопряжены в любой конечной π-разрешимой группе, основной результат верен в классе S^{π} – всех конечных разрешимых групп, хотя результаты являются новыми и в классе S всех конечных разрешимых групп.

В терминологии и обозначениях мы следуем [3].

2. Предварительные сведения. Класс групп F называется классом Фиттинга [3], если F замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения нормальных F-подгрупп. Если F – непустой класс Фиттинга, подгруппа G_{F} группы G называется F-радикалом группы G [3], если она является наибольшей из нормальных подгрупп G, принадлежащих F. Произведением классов Фиттинга [3] F и H называют класс всех тех групп G, факторгруппы по F-радикалу которых являются H-подгруппами. Хорошо известно, что произведение двух классов Фиттинга снова является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см, например IX.1.12, [3]).

Приведем в качестве следующей леммы известные свойства операторов Локетта "*" и "$_*$", которые мы будем использовать

Лемма 2.1 [1]. *Для любого непустого класса Фиттинга* F *справедливы следующие соотношения:* $\mathsf{F}_* = (\mathsf{F}_*)_* = (\mathsf{F}^*)_* \subseteq \mathsf{F} \subseteq \mathsf{F}^* = (\mathsf{F}_*)^* = (\mathsf{F}^*)^* \subseteq \mathsf{FA}$, *где* A *– класс всех абелевых групп.*

Напомним, что если G и H – некоторые группы, то через $Snemb(S \to G)$ обозначают множество всех субнормальных вложений G в H (мономорфизм $\alpha : G \to H$ такой, что $G\alpha$ субнормальна в G, называют субнормальным вложением G в H).

Мы будем использовать также подгруппу $N(G)$, которая была определена в работе [7]. Напомним, что если G – некоторая группа, то подгруппа $N(G)$ определяется следующим образом:

$$N(G) = \left\langle x^{-1}x^{\alpha} : x \in S \lhd\lhd G, \alpha \in Snemb(S \to G) \right\rangle.$$

Приведем теперь в качестве лемм необходимые в дальнейшем свойства подгруппы $N(G)$.

Лемма 2.2 (3.1 [5]). *Для любой группы* G *справедливы следующие утверждения:*

1) $G' \subseteq [G, AutG] \subseteq N(G)$;

2) если X *– непустой класс Фиттинга и* $G \in \mathsf{X}$, *то* $N(G) \subseteq G_{\mathsf{X}_*}$.

Лемма 2.3 (4.1 [5]). *Пусть* F, H *и* Y *– классы Фиттинга, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathsf{F}_* \cap \mathsf{H} \subseteq \mathsf{Y}$;

2) $N(G) \cap G_{\mathsf{H}} \subseteq G_{\mathsf{Y}}$ *для всех* $G \in \mathsf{F}$.

Лемма 2.4 (3.5 [5]). *Пусть* X *– класс Фиттинга. Группа* $G \in \mathsf{X}_*$ *тогда и только тогда, когда существует группа* $H \in \mathsf{X}$ *и* $\alpha \in Snemb(G \to H)$ *такое, что* $G^{\alpha} \subseteq N(H)$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Напомним, что подгруппа H группы G называется холловой π-подгруппой, если порядок H является π-числом, а индекс H в G – π'-число.

Обозначим, через $Hall_{\pi}(G)$ – множество всех холловых π-подгрупп группы G. Мы будем использовать следующие известные свойства холловых π-подгрупп.

Лемма 2.5 (I.3.2 [3]). *Пусть $G_{\pi} \in Hall_{\pi}(G)$, M и N – нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G_{\pi} \cap N \in Hall_{\pi}(N)$;

2) $G_{\pi} \cap MN = (G_{\pi} \cap M)(G_{\pi} \cap N) \in Hall_{\pi}(MN)$;

3) $G_{\pi}N/N \in Hall_{\pi}(G/N)$.

Напомним хорошо известное тождество Дедекинда, которое представляет

Лемма 2.6 (A.1.3 [3]). *Пусть U, V и W – подгруппы группы G, причем $V \subseteq U$, тогда $U \cap VW = V(U \cap W)$.*

Если M – подгруппа группы G, то фокальной подгруппой M в G называется подгруппа, которая обозначается как $F_G(M)$ и определяется следующим образом: $F_G(M) = \langle [m,g] : m \in M, g \in G \, u \, [m,g] \in M \rangle$. Мы также будем использовать известную теорему о фокальной подгруппе, которую представляет следующая

Лемма 2.7 (A.17.5 [3], см. также 21.3 [8]). *Пусть H – холлова подгруппа группы G, тогда $G' \cap H = F_G(H)$.*

Напомним, что отображение $f : P \Rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ называют функцией Хартли или H-функцией [9]. Пусть $LR(f) = \mathfrak{S}_{\pi} \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \right)$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [9], если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f. При этом $\pi = Supp(f)$ – носитель H-функции f и $\pi = \{p \in P : f(p) \neq \varnothing\}$

H-Функцию класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют [4]:

1) приведенной, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in P$;

2) полной, если $f(p)\mathfrak{N}_p = f(p)$ для каждого $p \in P$;

3) полной приведенной, если f является одновременно приведенной и полной.

Все рассматриваемые нами группы конечны и разрешимы. В терминологии и обозначениях мы следуем монографии Дерка, Хоукса [3].

3. π-HR-замкнутые классы Фиттинга. Приведем необходимые нам в дальнейшем свойства подгруппы $N(G)$, определяемые посредством холловых π-подгрупп, доказательство которых осуществляется аналогично доказательству Галледжи [5] с учетом лемм 2.5–2.7.

Лемма 3.1. *Если $G_{\pi} \in Hall_{\pi}(G)$ и $\varnothing \neq \pi \subseteq P$, то*

$$G_{\pi} \cap N(G) = \left\langle x^{-1}x^{\alpha} : x \in S \lhd\lhd G, \alpha \in Snemb(S \to G) \text{ и } x, x^{\alpha} \in G_{\pi} \right\rangle.$$

Лемма 3.2. *Пусть $G_{\pi} \in Hall_{\pi}(G)$, где $\varnothing \neq \pi \subseteq P$ и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга. Тогда $G_{\pi} \cap N(G) \subseteq N(G_{\pi}G_{\mathfrak{X}})$.*

Определение 3.3. *Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел. Подгруппу T группы G назовем π-HR-подгруппой, если T является произведением холловой π-подгруппы G_π и $\mathfrak{X}$-радикала группы G, для некоторого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$.*

Определение 3.4. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем π-HR-наследственным, если он замкнут относительно π-HR-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ является π-HR-наследственным для любого непустого множества π, то $\mathfrak{F}$ назовем HR-наследственным.*

Приведем примеры HR-наследственных классов:

Пример 3.5.

1) Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственный класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ – HR-наследственный класс Фиттинга для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$.

2) Пусть класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых подгрупп. Тогда $\mathfrak{F}$ – π-HR-наследственный класс Фиттинга, для класса Фиттинга $\mathfrak{X}=(1)$.

3) Пусть $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга. Ввиду результата Брайса и Косси [2] $\mathfrak{S}_*$ – замкнут относительно холловых подгрупп. Значит, $\mathfrak{S}_*$ – HR-наследственный класс Фиттинга, для класса Фиттинга $\mathfrak{X}=(1)$.

4) Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга такой, что если $G\in\mathfrak{F}$, то $G_\pi N\in\mathfrak{F}$, где $N\triangleleft G$, а G_π – холлова π-подгруппа группы G, тогда $\mathfrak{F}$ – π-HR-наследственный класс Фиттинга для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$.

Заметим, что если $\mathfrak{F}$ –HR-наследственный класс Фиттинга, то и $\mathfrak{F}^*$ – HR-наследственный класс Фиттинга, это подтверждает следующая

Теорема 3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – π-HR-наследственный класс Фиттинга для некоторого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{F}_*$ – π-HR-наследственный класс Фиттинга.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G_1\in\mathfrak{F}$ и пусть $(G_1)_\pi$ – холловская π-подгруппа группы G_1. По лемме 2.4 существует группа $G_2\in\mathfrak{F}$ и отображение $\alpha\in Snemb(G_1\to G_2)$ такое, что $G_1^\alpha\subseteq N(G_2)$. Пусть $(G_2)_\pi$ – холловская π-подгруппа группы G_2 такая, что $(G_1)_\pi^\alpha\subseteq(G_2)_\pi$. Из леммы 2.2 следует, что $(G_1)_\pi^\alpha\subseteq(G_2)_\pi\cap N(G_2)\subseteq N((G_2)_\pi(G_2)_\mathfrak{X})$. По условию $(G_2)_\pi(G_2)_\mathfrak{X}\in\mathfrak{F}$ и тогда по лемме 2.2 $N((G_2)_\pi(G_2)_\mathfrak{X})\subseteq((G_2)_\pi(G_2)_\mathfrak{X})_{\mathfrak{F}_*}$. Значит, $(G_1)_\pi^\alpha\subseteq((G_2)_\pi(G_2)_\mathfrak{X})_{\mathfrak{F}_*}$. С другой стороны, $((G_2)_\pi(G_2)_\mathfrak{X})^\alpha=(G_1)_\pi^\alpha(G_1)_\mathfrak{X}^\alpha$ и $(G_1)_\pi^\alpha(G_1)_\mathfrak{X}^\alpha=G_1\cap(G_1)_\pi^\alpha(G_2)_\mathfrak{X}$. Заметим, что $G_1^\alpha\cap(G_1)_\pi^\alpha(G_1)_\mathfrak{X}$ субнормальна в $(G_2)_\pi(G_2)_\mathfrak{X}$. Следовательно, $((G_1)_\pi(G_1)_\mathfrak{X}^\alpha)_{\mathfrak{F}_*}=((G_1)_\pi(G_1)_\mathfrak{X})^\alpha\cap((G_2)_\pi(G_2)_\mathfrak{X})_{\mathfrak{F}_*}\subseteq(G_1)_\pi^\alpha$. Так как $G_1\in\mathfrak{F}_*$, то $(G_1)_\mathfrak{X}^\alpha\subseteq((G_1)_\pi(G_1)_\mathfrak{X})_{\mathfrak{F}_*}^\alpha$. Получаем $(G_1)_\pi(G_1)_\mathfrak{X}\cong((G_1)_\pi(G_1)_\mathfrak{X})^\alpha\in\mathfrak{F}_*$. Теорема доказана.

Следствие 3.7. *Класс Фиттинга $\mathfrak{S}_*$ является HR-наследственным для любого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}$. Так как $\mathfrak{S}$ – наследственный класс Фиттинга, значит

$\mathfrak{F}$ – π-HR-наследственный класс Фиттинга для любого непустого множества $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и любого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$. По теореме 3.6 $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{S}_*$ также π-HR-наследственный класс Фиттинга для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$.

Следствие 3.8 [2]. *Класс Фиттинга $\mathfrak{S}_*$ замкнут относительно холловых π-подгрупп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_*$. Тогда $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга замкнутый относительно холловых подгрупп, то есть $\mathfrak{F}$ – π-HR-наследственный класс Фиттинга для $\mathfrak{X} = (1)$. Следовательно, по теореме 3.6 $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{S}_*$ – замкнут относительно холловых подгрупп.

4. HR-классы и гипотеза Локетта. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп, если $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$. Дерком и Хоуксом (см. X.1.19 [3]) была предложена задача описания классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта в произвольном классе Фиттинга $\mathfrak{H}$, которую представляет

$\mathbf{L}$-гипотеза. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Каковы классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, для которых $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_*$.*

Следуя Брайсу и Косси [2], мы будем рассматривать общий вариант этой гипотезы.

Определение 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Пару $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ назовем парой Локетта или $\mathbf{L}$-парой, если $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_*$.*

Заметим, что если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ – $\mathbf{L}$-пара, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет $\mathbf{L}_{\mathfrak{H}}$-гипотезе.

В частности, если $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathbf{L}$-парой, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе, предложенной Локеттом [1].

Следуя Галледжи [5], определим класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ со следующими свойствами.

Определение 4.2. *Пусть π – непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда:*

(а) $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_π), если существует класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ такой, что $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$;

(б) $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_Π), если $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_π) для любого $\pi \subseteq Char(\mathfrak{F})$.

Напомним, понятие ω-локального класса Фиттинга, которое было предложено Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой [10].

Всякую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \Rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$, где $\omega \subseteq \mathbb{P}$, называют ω-локальной функцией Хартли или ω-локальной Н-функцией. Для всякой ω-локальной Н-функции f полагаем $Supp(f) = \{a \in \omega \cup \omega' \mid f(a) \neq \varnothing\}$.

Пусть f – произвольная ω-локальная Н-функция, $\pi_1 = Supp(f) \cap \omega$ и $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют ω-локальным, если $\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{S}_{p'} \right) \cap \left(\bigcap_{p \in \pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \right) \cap f(\omega')\mathfrak{S}_{\omega d}$.

Обширность семейства классов со свойствами (g_π) и (g_Π) подтверждает

Пример 4.3. Пусть F – ω-локальный класс Фиттинга с $Char(\mathsf{F}) \subseteq \omega$. Тогда ввиду результата [12] F обладает наибольшей приведенной H-функцией F такой, что $F(p) = F(p)\mathsf{N}_p \subseteq \mathsf{F} \subseteq F(p)\mathsf{N}_p\mathsf{S}_{p'}$ для всех $p \in Char(\mathsf{F})$. Следовательно, F является классом Фиттинга со свойством (g_{Π}). В частности, любой локальный класс Фиттинга F обладает свойством (g_{Π}).

Докажем основной результат работы – теорему, определяющую условия, при которых пары классов Фиттинга являются $\mathbf{L}$-парами.

Теорема 4.4. *Пусть* F *– класс Фиттинга и* H *– HR-наследственный класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если F *обладает свойством* (g_{π}), *то* $\mathsf{F} \cap \mathsf{H}_* \subseteq (\mathsf{F} \cap \mathsf{H})_*\mathsf{S}_{\pi'}$;

2) если F *обладает свойством* (g_{Π}), *то пара* (F, H) *является* $\mathbf{L}$*-парой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Покажем вначале, что $N(G) \cap G_{\mathsf{F}} \in (\mathsf{F} \cap \mathsf{H})_*\mathsf{S}_{\pi'}$ для всех групп $G \in \mathsf{F}$. Пусть $G \in \mathsf{F}$ и $G_{\pi} \in Hall_{\pi}(G)$. По условию F обладает свойством (g_{π}) и поэтому $\mathsf{X}\mathsf{S}_{\pi} \subseteq \mathsf{F} \subseteq \mathsf{X}\mathsf{S}_{\pi}\mathsf{S}_{\pi'}$ для некоторого класса Фиттинга X. Так как $(G_{\pi}G_{\mathsf{X}})_{\mathsf{X}} = G_{\pi}G_{\mathsf{X}} \cap G_{\mathsf{X}}$, то $G_{\pi}G_{\mathsf{X}}/(G_{\pi}G_{\mathsf{X}})_{\mathsf{X}} = G_{\pi}G_{\mathsf{X}}/G_{\pi}G_{\mathsf{X}} \cap G_{\mathsf{X}} = G_{\pi}G_{\mathsf{X}}/G_{\mathsf{X}}$. По утверждению 3 леммы 2.5 $G_{\pi}G_{\mathsf{X}}/G_{\mathsf{X}} \in \mathsf{S}_{\pi}$. Значит, $G_{\pi}G_{\mathsf{X}}/(G_{\pi}G_{\mathsf{X}})_{\mathsf{X}} \in \mathsf{S}_{\pi}$ и по определению произведения классов Фиттинга $G_{\pi}G_{\mathsf{X}} \in \mathsf{X}\mathsf{S}_{\pi}$. Заметим, что $G_{\pi}G_{\mathsf{X}} \in \mathsf{F}$ и $G_{\mathsf{F}} \in \mathsf{X}\mathsf{S}_{\pi}\mathsf{S}_{\pi'}$, отсюда

$$(G_{\pi}G_{\mathsf{X}})_{\mathsf{F}} = (G_{\pi} \cap G_{\mathsf{F}})(G_{\mathsf{F}})_{\mathsf{X}} = (G_{\mathsf{F}})_{\mathsf{S}_{\pi}}(G_{\mathsf{F}})_{\mathsf{X}} \subseteq (G_{\mathsf{F}})_{\mathsf{X}\mathsf{S}_{\pi}}.$$

Так как H – HR-наследственный класс Фиттинга, то $G_{\pi}G_{\mathsf{X}} \in \mathsf{H}$ и тогда $G_{\pi}G_{\mathsf{X}} \in \mathsf{F} \cap \mathsf{H}$. По лемме 3.2 $G_{\pi} \cap N(G) \cap G_{\mathsf{F}} \subseteq N(G_{\pi}G_{\mathsf{X}}) \cap G_{\mathsf{F}}$. Следовательно, по утверждению 2 леммы 2.2 $N(G_{\pi}G_{\mathsf{X}}) \cap G_{\mathsf{F}} \subseteq (G_{\pi}G_{\mathsf{X}} \cap G_{\mathsf{F}})_{(\mathsf{F}\cap\mathsf{H})_*}$. Получим $G_{\pi} \cap N(G) \cap G_{\mathsf{F}} \subseteq G_{(\mathsf{F}\cap\mathsf{H})_*}$. Следовательно, $G_{\pi} \cap N(G) \cap G_{\mathsf{F}} \subseteq (N(G) \cap G_{\mathsf{F}})_{(\mathsf{F}\cap\mathsf{H})_*}$. Это означает, что $G_{\pi} \cap N(G) \cap G_{\mathsf{F}}$ содержится в $(\mathsf{F} \cap \mathsf{H})_*$-радикале группы $N(G) \cap G_{\mathsf{F}}$. Отсюда вытекает, что $N(G) \cap G_{\mathsf{F}} \in (\mathsf{F} \cap \mathsf{H})_*\mathsf{S}_{\pi'}$. Тогда по лемме 2.3 справедливо включение $\mathsf{F} \cap \mathsf{H}_* \subseteq (\mathsf{F} \cap \mathsf{H})_*\mathsf{S}_{\pi'}$.

Докажем второе утверждение. Ввиду утверждения 1) покажем, что если $\mathsf{F} \cap \mathsf{H}_* \subseteq (\mathsf{F} \cap \mathsf{H})_*\mathsf{S}_{\pi'}$ для любого $\pi \subseteq Char(\mathsf{F})$, то $\mathsf{F} \cap \mathsf{H}_* = (\mathsf{F} \cap \mathsf{H})_*$. Ввиду леммы 2.1, справедливо включение $(\mathsf{F} \cap \mathsf{H})_* \subseteq \mathsf{F} \cap \mathsf{H}_*$. Пусть $G \in \mathsf{F} \cap \mathsf{H}_*$ и G – группа минимального порядка из класса $(\mathsf{F} \cap \mathsf{H}_*) \setminus (\mathsf{F} \cap \mathsf{H})_*$. Тогда G имеет единственную максимальную нормальную подгруппу $M = G_{(\mathsf{F}\cap\mathsf{H})_*}$. Так как $G \in \mathsf{F} \cap \mathsf{H}_*$ и по лемме 2.1 $\mathsf{F} \cap \mathsf{H}_* \subseteq \mathsf{F} \cap \mathsf{H}$, то $G \in \mathsf{F} \cap \mathsf{H}$. Ввиду того, что $G \in \mathsf{F} \cap \mathsf{H}$, по лемме 2.1 $G/M \in \mathsf{A}$. Так как M – максимальная нормальная подгруппа группы G, то G/M – композиционный фактор группы G порядка p. Следовательно, $G/M \in \mathsf{N}_p$ и $G/M \cong Z_p$. Таким образом, $p \mid |G|$ и $G \in \mathsf{F} \cap \mathsf{H}_*$. Но по лемме 2.1 $\mathsf{F} \cap \mathsf{H}_* \subseteq \mathsf{F} \cap \mathsf{H}$. Следовательно, $Z_p \in \mathsf{F} \cap \mathsf{H}$ и поэтому $p \in Char(\mathsf{F} \cap \mathsf{H})$. Отсюда следует, что существует π такое, что $p \in \pi \subseteq Char(\mathsf{F} \cap \mathsf{H})$. Значит, $G/M \in \mathsf{S}_{\pi}$.

С другой стороны, по условию для $\pi \subseteq Char(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})$ справедливо включение $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\pi'}$. Значит, $G/M \in \mathfrak{S}_{\pi'}$. Следовательно, $G/M \in \mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{S}_{\pi} = (1)$ и $G = M \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$.

Для завершения доказательства второго утверждения теоремы достаточно показать, что $\mathfrak{F}$ – класс Локетта. По условию $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_{Π}) и поэтому $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$ для некоторого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ и любого $\pi \subseteq Char(\mathfrak{F})$. По лемме 2.1 $\mathfrak{F}^* \subseteq (\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'})^*$. Ввиду следствия 3 [4] $(\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'})^* = \mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$ и поэтому $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$. Тогда $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi'}$ для любого $\pi \subseteq Char(\mathfrak{F}) = Char(\mathfrak{F}^*)$ (см. X.1.20 [3]). Теперь, следуя доказательству равенства $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$ по индукции заключаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ и поэтому $\mathfrak{F}$ является классом Локетта. Итак, пара классов Фиттинга $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является $\mathbf{L}$-парой. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что существуют классы Фиттинга, обладающие свойством (g_{Π}), которые нелокальны.

Пример 4.5. *Пусть* $\mathfrak{X} = Fit A_5$ *– класс Фиттинга, порожденный знакопеременной группой из пяти символов,* $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$ *и* $\omega = \{p\}$*, где* p *– простое число. Покажем, что* $\mathfrak{F}$ *обладает свойством* (g_{Π}) *и не является локальным.*

Пусть $F(F^p) = \begin{cases} Fit\left(G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}} : G \in \mathfrak{F}\right), если\ p \in \pi(\mathfrak{F}) \\ \varnothing, если\ p \notin \pi(\mathfrak{F}) \end{cases}$. Так как $F(F^p) \subseteq \mathfrak{X}$, и, следовательно, $F(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}$, то по теореме 9 [10] $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга для $\omega = \{p\}$ и $\mathfrak{F}$ обладает свойством (g_{Π}).

Покажем, что $Char(\mathfrak{F}) = \{p\}$, где p – некоторое простое число. Так как $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$, то $Char(\mathfrak{N}_p) \subseteq Char(\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p)$. Но $Char(\mathfrak{N}_p) = \{p\}$. Следовательно, $p \in Char(\mathfrak{X}\mathfrak{N}_p)$. Предположим, что $q \in Char(\mathfrak{F})$ и $q \neq p$. Тогда $Z_q \in \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$. Следовательно, $Z_q/(Z_q)_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}_p$.

Тогда возможны два случая: $Z_q = (Z_q)_{\mathfrak{X}}$ и $(Z_q)_{\mathfrak{X}} = (1)$.

Если $Z_q = (Z_q)_{\mathfrak{X}}$, то $Z_q \in \mathfrak{X}$ и $q \in Char(\mathfrak{X})$. Но $Char(\mathfrak{X}) = \varnothing$, так как согласно примеру II.2.13 [3] $\mathfrak{X} = Fit A_5 = Form A_5 = D_0(A_5)$. Значит, в данном случае $Char(\mathfrak{F}) = \{p\}$.

Пусть теперь $(Z_q)_{\mathfrak{X}} = (1)$. Тогда $Z_q \in \mathfrak{N}_p$ и $q \in Char(\mathfrak{N}_p)$. Следовательно, $q = p$ и $Char(\mathfrak{F}) = \{p\}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{F}$ нелокален. Предположим, что $\mathfrak{F} = LR(f)$, где f – полная приведенная H-функция. Тогда по утверждению 4.9 (b) [5] $Char(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$. Так как в данном случае $Char(\mathfrak{F}) = \{p\}$, а $|\pi(\mathfrak{F})| > 1$, то получаем противоречие с тем, что $Char(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ не является локальным классом Фиттинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Lockett, P.*** Fitting class F^{*} / P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S.131–136.
2. ***Bryce, R.A.*** A problem in theory of normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, № 2. – S. 99–110.
3. ***Doerk, K.*** Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
4. ***Воробьев, Н.Т.*** О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–167.
5. ***Gallego M.P.*** Fitting pairs from direct limits and the lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra. – 1996. – 24(6). – P. 2011-–2023.
6. ***Brison, O.J.*** Hall operators for Fitting classes / O.J. Brison // Arch. Math. – 1979. – Bd. 33. – S. 1–9.
7. ***Чунихин, С.А.*** Подгруппы конечных подгрупп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 168 с.
8. ***Белоногов, В.А.*** Задачник по теории групп / В.А. Белоногов. – Москва: Наука, 2000.
9. ***Воробьев, Н.Т.*** О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журнал. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 1296–1302.
10. ***Шеметков, Л.А.*** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

SUMMARY

It is proved, that if F *is a* ω*-local Fitting class and* H *is a HR-closed Fitting class, then pair* (F,H) *is a* L*-pair.*

Поступила в редакцию 6.03.2008