Матэматыка

УДК 512.542

В.Н. Княгина, В.С. Монахов

О существовании π-холловых подгрупп в конечных группах

Рассматриваются только конечные группы. Если π – некоторое множество простых чисел, то π' – дополнение к π во множестве всех простых чисел. Подгруппа, порядок которой делится только на простые числа из π, а ее индекс в группе – только на простые числа из π', называют π-холловой. Хорошо известно, что в разрешимых группах π-холловы подгруппы существуют для любого множества π простых чисел, см., например, [1], теорема 4.35. В неразрешимых группах это свойство нарушается. Например, в знакопеременной группе порядка 60 нет {2,5}-холловых и {3,5}-холловых подгрупп.

Одним из фундаментальных результатов теории конечных групп является теорема Шура–Цассенхауза: *если в конечной группе имеется нормальная π-холлова подгруппа, то в группе существует и π'-холлова подгруппа*, см., например, [1], теорема 4.32. Условие нормальности π-холловой подгруппы в этой теореме удалить нельзя, т.е. для существования π'-холловой подгруппы недостаточно только существования π-холловой подгруппы. Например, в любой группе существует силовская p-подгруппа для каждого простого p, но существование p'-холловой подгруппы для каждого простого p равносильно разрешимости группы, [1], следствие теоремы 4.36.

В настоящей работе условие нормальности π-холловой подгруппы в теореме Шура–Цассенхауза ослаблено до требования перестановочности этой подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта. Прежде чем сформулировать нашу теорему, приведем необходимые определения и обозначения.

Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Эти группы впервые рассматривались О.Ю. Шмидтом [2], который доказал их бипримарность, нормальность одной силовской подгруппы и цикличность другой. Подробный обзор о строении групп Шмидта и их приложениях в теории конечных групп имеется в [3].

Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой. Пусть p и q – различные простые числа. Условимся называть $S_{<p,q>}$-группой группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и циклической силовской q-подгруппой.

Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть H – π-холлова подгруппа группы G. Предположим, что в группе G существует подгруппа K такая, что G=HK и H перестановочна со всеми $S_{<p,q>}$-подгруппами из K для каждого $p \in \pi$. Тогда в группе G существует π'-холлова подгруппа.*

Поскольку нормальная подгруппа перестановочна с каждой подгруппой группы, то сформулированная теорема охватывает теорему Шура–Цассенхауза. Кроме того, в случае, когда подгруппа H перестановочна со всеми подгруппами из K, из нашей теоремы вытекает теорема 4 работы [4].

Нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1 ([3], теорема 2.1). *Если в группе G нет p-замкнутых подгрупп Шмидта, то G p-нильпотентна.*

Лемма 2 ([5], лемма 2). *Если K и D – подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D – $S_{<p,q>}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

1) L – p-замкнутая $\{p,q\}$-подгруппа;

2) все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;

3) L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L=([P]Q)^L=Q^L$.

Лемма 3 ([6], лемма 5). *Пусть подгруппа A группы G перестановочна с подгруппами $B_1, B_2,\dots,B_n$. Тогда A перестановочна с подгруппой $\langle B_1, B_2,\dots,B_n\rangle$, порожденной ими.*

Лемма 4. *Если π-холлова подгруппа H группы G перестановочна с подгруппой K, то $H\cap K$ является π-холловой подгруппой в K.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $HK = KH$. Так как $|HK|=|H||K|/|H\cap K|$, то $|HK : H| = |K : H\cap K|$. Из леммы об индексах вытекает, что

$$|G : H| = |G : HK||HK : H|,$$

откуда следует, что $|HK : H|$ есть π'-число. Теперь $H\cap K$ является π-подгруппой и ее индекс в K есть π'-число. Поэтому $H\cap K$ – π-холлова подгруппа группы K. Лемма доказана.

Подгруппа A называется *$S_{<p,q>}$-полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и либо подгруппа B нильпотентна, либо подгруппа A перестановочна со всеми $S_{<p,q>}$-подгруппами из B. В этой ситуации подгруппу B назовем *$S_{<p,q>}$-добавлением* к подгруппе A.

Минимальным $S_{<p,q>}$-добавлением назовем такое $S_{<p,q>}$-добавление K к $S_{<p,q>}$-полунормальной подгруппе H, для которого $HK_1\neq G$ для каждой собственной подгруппы K_1 из K.

Лемма 5. *Пусть H – $S_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа группы G и K – ее $S_{<p,q>}$-добавление. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $H\le T\le G$, то H – $S_{<p,q>}$-полунормальна в T и $T\cap K$ является $S_{<p,q>}$-добавлением к H в T;

2) если L – $S_{<p,q>}$-подгруппа из K, то H перестановочна со всеми сопряженными с L подгруппами группы G;

3) для любого $x\in G$ подгруппа K^x является $S_{<p,q>}$-добавлением к подгруппе H в группе G;

4) подгруппа H^x является $S_{<p,q>}$-полунормальной в G, а подгруппа K^y – ее $S_{<p,q>}$-добавление для всех x и y из G;

5) если $N\lhd G$, то HN/N – $S_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа группы G/N, а KN/N – ее $S_{<p,q>}$-добавление.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению $S_{<p,q>}$-полунормальной подгруппы подгруппа K либо нильпотентна, либо ненильпотентна. Если она нильпотентна, то все свойства очевидны. Поэтому в дальнейшем считаем, что K ненильпотентна.

1. По тождеству Дедекинда $T = T \cap HK = H(T \cap K)$. Так как H – $S_{<p,q>}$-полунормальна в G и K – ее $S_{<p,q>}$-добавление, то H перестановочна со всеми $S_{<p,q>}$-подгруппами из пересечения $T \cap K$.

2. Пусть $g = ab$, $a \in K$, $b \in H$ и L – $S_{<p,q>}$-подгруппа из K. Тогда $S_{<p,q>}$-подгруппа L^a содержится в K, поэтому подгруппы H и L^a перестановочны. Из равенства

$$HL^g = HL^{ab} = (HL^a)^b = (L^a H)^b = L^{ab} H = L^g H$$

следует, что H перестановочна со всеми сопряженными с L в группе G подгруппами.

3. По лемме 1.43 [1] группа $G = HK^x$ для любого $x \in G$. Пусть S – $S_{<p,q>}$-подгруппа из K^x. Тогда $S^{x^{-1}}$ является $S_{<p,q>}$-подгруппой в K. Поэтому подгруппы H и $S^{x^{-1}}$ перестановочны. По п. 2 подгруппы H и S перестановочны. Следовательно, K^x – $S_{<p,q>}$-добавление к H в G.

4. Пусть x и y – произвольные элементы группы G. По лемме 1.43 [1] группа $G = H^x K^y$. Пусть S – $S_{<p,q>}$-подгруппа из K^y. По п. 3 подгруппа K^y является $S_{<p,q>}$-добавлением к подгруппе H. Применяя утверждение из п. 2, получаем, что подгруппы H и $S^{x^{-1}}$ перестановочны: $HS^{x^{-1}} = S^{x^{-1}}H$. Из последнего равенства следует, что $H^x S = SH^x$. Это означает, что H^x – $S_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа в группе G и K^y – ее $S_{<p,q>}$-добавление в G.

5. Ясно, что $G/N = (HN/N)(KN/N)$. Пусть KN/N ненильпотентна и A/N – $S_{<p,q>}$-подгруппа из KN/N. Тогда $A \subseteq KN$ и $A = (A \cap K)N$. Пусть L – минимальное добавление к подгруппе N в A такое, что $L \subseteq A \cap K$. Тогда L обладает свойствами 1–3 из леммы 2. В частности, L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппа $[P]Q$ такую, что Q не содержится в N и $L = ([P]Q)^L = Q^L$. Так как $[P]Q \subseteq L \subseteq A \cap K$, то подгруппа H перестановочна с $[P]Q$. По пункту 2 подгруппа H перестановочна с $([P]Q)^l$ для всех $l \in L$. По лемме 3 подгруппа H перестановочна с $([P]Q)^L = L$. Так как $A = LN$, то подгруппа H перестановочна с подгруппой A. Отсюда следует, что HN/N перестановочна с подгруппой A/N, т.е. HN/N – $S_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа в G/N. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ущерба для доказательства можно считать, что K – минимальное добавление. Если $H \cap K = 1$, то из равенства $|G| = |H||K|$ следует, что K – π'-холлова подгруппа в G. Поэтому будем считать, что $D = H \cap K \neq 1$. Зафиксируем простое число $p \in \pi(D) \subseteq \pi$. Если подгруппа K p-нильпотентна, то $G = HK_1$, где K_1 – π'-холлова подгруппа из K, противоречие с минимальностью K. Поэтому K не p-нильпотентна и по лемме 1 в ней существует $S_{<p,q>}$-подгруппа $S = [P]Q$ для некоторого простого q. По условию подгруппа H перестановочна с S. По утв. 2 леммы 5 подгруппа H перестановочна с S^g для любого $g \in G$. Тогда по лемме 4 $H \cap S^g$ – π'-холлова в S^g и так как S^g – группа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P^g, $p \in \pi$, то $P^g \subseteq H \cap S^g$ и $N = P^G \subseteq H$. Теперь N – π-подгруппа группы G.

Рассмотрим фактор-группу G/N. Подгруппа H/N является π-холловой подгруппой и $G/N = (H/N)(KN/N)$. Из утв. 5 леммы 5 следует, что подгруппа H/N перестановочна со всеми $S_{<p,q>}$-подгруппами из KN/N для каждого $p \in \pi$. Поэтому к фактор-группе G/N применима индукция. По индукции в G/N существует π'-холлова подгруппа B/N. Так как $(|N|,|B/N|)=1$, то по теореме Шура–Цассенхауза ([1], теорема 4.32) в подгруппе B имеется π'-холлова подгруппа B_1. По лемме об индексах

$$|G : B_1| = |G : B||B : B_1|,$$

поэтому $|G : B_1|$ – π-число. Следовательно, B_1 – π'-холлова подгруппа группы G. Теорема доказана.

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 – собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B. Очевидно, что подгруппа простого индекса всегда полунормальна. Квазинормальная подгруппа (т.е. подгруппа, перестановочная со всеми подгруппами группы) будет полунормальной. В простой группе $PSL(2,5)$ подгруппа A, изоморфная знакопеременной группе степени 4, является полунормальной подгруппой Шмидта, но A не квазинормальна и не субнормальна.

Ясно, что если подгруппа H является π-холловой полунормальной подгруппой, то выполняются требования теоремы. Поэтому из теоремы вытекает следующее утверждение, которое доказано в [4].

Следствие. *Пусть A – полунормальная холлова π-подгруппа группы G. Тогда в группе G существует π'-холлова подгруппа.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Монахов, В.С.*** Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.
2. ***Шмидт, О.Ю.*** Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Математический сборник, 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
3. ***Монахов, В.С.*** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса. – Киев: Институт математики, 2002. – С. 81–90.
4. ***Foguel, T.*** On seminormal subgroups / T. Foguel // Journal of Algebra. – 1994. – № 165. – P. 633–635.
5. ***Княгина, В.Н.*** О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский матем. журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.
6. ***Княгина, В.Н.*** Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.

SUMMARY

The existence of π'-Hall subgroup in finite group provided that its π-Hall subgroup permutable with some Schmidt's subgroups is proved.

Поступила в редакцию 26.08.2008