159

Е. ТРЕФФЦ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ОНТИ • ГТТИ • 1934

МЕХАНИКА УПРУГОГО ТЕЛА
Выпуск I

Е. ТРЕФФЦ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Перевод с немецкого, под редакцией
проф. А. И. Лурье

Издание второе
исправленное

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1934 МОСКВА

HANDBUCH DER PHYSIK

BAND VI

MECHANIK DER ELASTISCHEN KÖRPER

Bearbeitet von

G. Angenheister, A. Busemann, O. Föppl, J. W. Geckeler,
A. Nádai, F. Pfeiffer, Th. Pöschl, P. Riekert, E. Trefftz

Redigiert von R. CRAMMEL

Berlin 1928

Ответственный редактор *Н. В. Булатов.* Технический редактор *Р. В. Эмдина.*
Сдана в набор 11/VI 1934 г. Подписана к печати 29/IX 1934 г.
Формат 82 × 110. Изд. № 245. Бум. листов $2^{11}/_{16}$. Тип. зн. в 1 бум. л. 169.900.
Ленгорлит № 22956. Тираж 5.000—авт. л. $11^{1}/_{2}$. Заказ № 2917.

2-я тип. ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящий выпуск посвящен основаниям математической теории упругости и является первым выпуском в серии книг „Механика упругого тела", состоящей из трех выпусков (изданных ГТТИ), из которых два последние, содержащие перевод глав, написанных I. W. Geckeler'ом и F. Pfeiffter'ом, посвященные статике и динамике упругого тела, уже вышли в этом году.

Перевод на русский язык в такой области, как теория упругости, при отсутствии у нас специальной терминологии, представляет ряд значительных трудностей; поэтому во многих случаях нам пришлось, не придерживаясь буквально подлинного текста и видоизменяя его в соответствии с требованиями русского языка, переводить ряд коротких немецких терминов иногда целыми фразами. В ряде мест даны более подробные разъяснения, исправлены некоторые неточности и проведен ход вычислений там, где автор его лишь намечает или не дает вовсе. Все такие дополнения, отсутствующие в немецком тексте и принадлежащие редактору русского перевода, выделены из текста звездочками.

В конце книги приложен указатель литературы, составленный редактором перевода. Этот указатель совершенно не претендует на полноту.

В настоящем издании устранены опечатки и погрешности первого издания.

А. Лурье.

Ленинград, август 1934 г.

I. ВВЕДЕНИЕ.

1. Постановка вопроса. Из опыта известно, что твердые тела под влиянием внешних сил претерпевают некоторые изменения формы, исчезающие при постепенном прекращении действия сил; внезапное же прекращение действия сил вызывает колебательные движения. Задачей математической теории упругости является точный количественный учет возникших таким путем изменений геометрической формы и механического состояния тела. Пред нами стоит, таким образом, вопрос об определении деформаций и напряженного состояния твердого тела, если известны как действующие на него внешние силы, так и те условия закрепления, которым оно подчинено. Метод, которым мы руководствуемся, приступая к решению этих задач, есть обычный метод математической физики. В первую очередь определяются механические величины, характеризующие физическую картину напряженного состояния материала; затем, геометрические величины, определяющие деформацию тела. Зависимость между механическими и геометрическими величинами определяется из опыта; их математическая формулировка приводит нас к так называемым основным уравнениям теории упругости, иными словами, к уравнениям с частными производными, интегрирование которых отвечает в каждом отдельном случае на поставленные выше вопросы. Кроме составления этих основных уравнений, главным содержанием математической теории упругости является еще теория их интегрирования.

Классическая теория ставит себе при этом двоякие ограничения: в соответствии с важнейшими практическими проблемами рассматриваются исключительно деформации, столь малые, что произведениями упругих перемещений и их производных можно пренебречь по сравнению с выражениями, в которые эти величины входят линейно; далее рассматриваются только нагрузки, столь малые, что мы можем считать деформации пропорциональными тем силам, которыми они вызваны.

2. Обозначения. Сперва установим важнейшие обозначения.

$x, y, z; \xi, \eta, \zeta$ — прямоугольные (декартовы) координаты;

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы в направлении осей;

t — время;

$d\omega$ — элемент объема;

do — элемент поверхности;

u, v, w — проекции вектора упругого перемещения $\mathbf{u}$;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z; \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ — составляющие тензора деформации;

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ — относительные удлинения в направлении осей;

$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ — изменения углов между осями (сдвиги);

$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \omega_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ — составляющие вихря вектора перемещения;

$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{u}$ — объемное расширение (изменение объема единицы объема);

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные удлинения;

$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ — составляющие напряжения для элемента поверхности $x = \text{const}$;

$\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}$ — составляющие напряжения для элемента поверхности $y = \text{const}$;

$\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$ — составляющие напряжения для элемента поверхности $z = \text{const}$;

$\mathbf{t}^{(x)} = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}$ — вектор напряжения для элемента $x = \text{const}$;

$\mathbf{t}^{(y)} = \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}$ — вектор напряжения для элемента $y = \text{const}$;

$\mathbf{t}^{(z)} = \tau_{zx}\,\mathbf{i} + \tau_{zy}\,\mathbf{j} + \sigma_z\,\mathbf{k}$ — вектор напряжения для элемента $z = \text{const}$;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения;

$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ — сумма главных напряжений;

X, Y, Z — проекции вектора массовой силы **K**, отнесенной к единице объема;

$\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}$ — проекции поверхностной силы **P**, отнесенной к единице поверхности упругого тела;

A — работа деформации, отнесенная к единице объема.

Скалярное произведение двух вектов **A** и **B**: (**AB**). Векторное произведение их [**AB**].

Для постоянных упругости мы будем применять принятые в технике обозначения:

E — модуль упругости Юнга;

G — модуль сдвига;

m — коэфициент поперечного сжатия — число Пуассона (отношение продольного растяжения к поперечному сжатию); в технике часто употребляется вместо m также и правильная дробь $\nu = \frac{1}{m}$.

Между этими тремя модулями существуют следующие вытекающие друг из друга зависимости [ср. § 11, ур-ние (11)]:

$$E = \frac{2G(m+1)}{m}, \quad G = \frac{Em}{2(m+1)}, \quad m = \frac{2G}{E-2G}. \tag{1}$$

В научной литературе часто применяются вместо этих другие постоянные; важнейшие из них следующие (выражаем их через E, G и m):

а) постоянные Ламе:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{mE}{(m+1)(m-2)} = \frac{2G}{m-2} = \frac{G(E-2G)}{3G-E} \\ \mu &= G; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

б) постоянные Кирхгоффа:

$$\left.\begin{aligned} K &= G \\ \Theta &= \frac{1}{m-2} = \frac{E-2G}{2(3G-E)} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

в) модуль объемного сжатия (ср. § 40):

$$k=\frac{Em}{3\,(m-2)}\,. \tag{4}$$

II. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЯ.

3. Составляющие тензора напряжения. Упругое состояние материала в деформированном теле характеризуется так называемыми напряжениями. Простейший пример упругого состояния мы получим, подвешивая стержень за верхний конец и нагружая его на нижнем конце грузом G. Проведя мысленно горизонтальное поперечное сечение, мы разделим им стержень на две части — верхнюю и нижнюю; тогда действие нагрузки передастся от нижней части к верхней через это поперечное сечение. Принимая равномерное распределение сил по всему поперечному сечению F, мы называем напряжением силу, передаваемую через каждую единицу поверхности:

$$\sigma=\frac{G}{F}\,. \tag{1}$$

Общее понятие о напряжении можно получить, сделав следующее обобщение. Рассмотрим в какой-либо точке (x, y, z) упруго деформированного тела произвольно ориентированную элементарную площадку df; задавшись положительным направлением нормали ν к площадке, мы будем сокращенно говорить о „положительной“ и „отрицательной“ стороне этой площадки df. Пусть через элементарную площадку df передается сила. Если сила, являющаяся результатом воздействия материала с положительной стороны площадки df на материал с ее отрицательной стороны, равна $d\mathbf{K}$, то вектор напряжения на элементарной площадке df будет:

$$\mathfrak{t}^{(\nu)}=\frac{d\mathbf{K}}{df}\,. \tag{2}$$

Составляющие этого вектора по направлению нормали и лежащие в касательной плоскости к площадке называются соответственно *нормальным и касательным* напряжением.

Отметим следующие предложения, важные для дальнейшего развития теории:

а) Пусть элементы объема *1* и *2* примыкают друг к другу по элементарной площадке df; сила действия элемента *1* на элемент 2 равна по величине и противоположна по направлению силе противодействия элемента 2 на элемент 1.

b) Поскольку речь идет о бесконечно-малой элементарной площадке, мы можем принять, что вектор напряжения проходит через ее центр тяжести.

c) Вырежем мысленно из упругого тела произвольную часть объема, не изменяя при этом формы тела; напряжения на поверхности вырезанного объема и внешние силы, действующие на внутреннюю часть (или на участки поверхности) его, находятся в равновесии.

d) Напряжения являются кусочно непрерывными функциями положения точки.

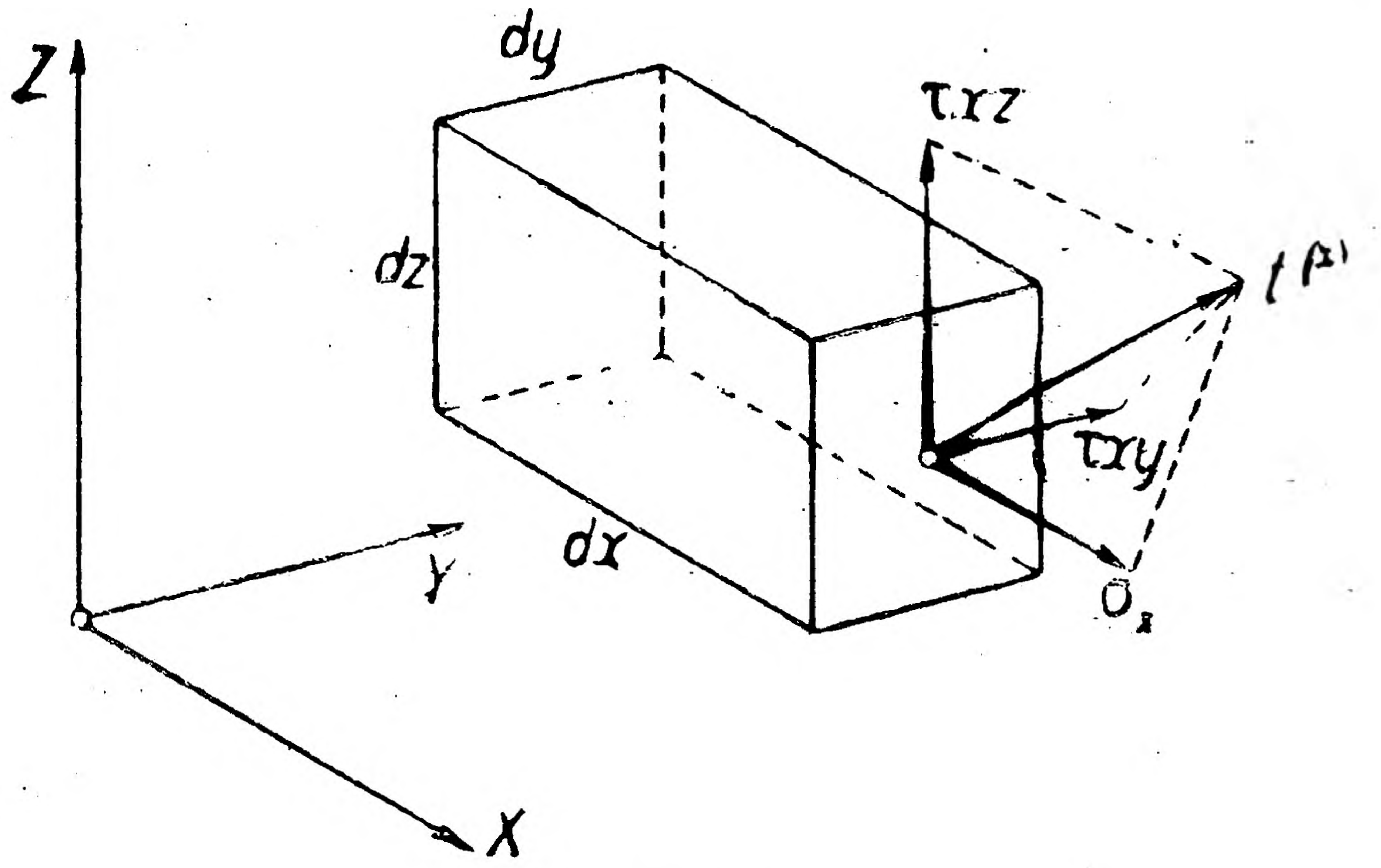
Пусть x, y, z — координаты какой-либо точки упруго деформированного тела. Чтобы характеризовать упругое состояние, построим в рассматриваемой точке три элементарных площадки, перпендикулярные к осям (положительное направление нормали к этим площадкам совпадает с координатными осями); напряжения, относящиеся к этим площадкам, обозначим соответственно через:

$\mathbf{t}^{(x)}$ — вектор напряжения для элемента $x = \text{const}$
$\mathbf{t}^{(y)}$ » » » » $y = \text{const}$
$\mathbf{t}^{(z)}$ » » » » $z = \text{const}$

Пусть проекции этих векторов на оси координат будут:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(x)} &: \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \\ \mathbf{t}^{(y)} &: \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz} \\ \mathbf{t}^{(z)} &: \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z \end{aligned} \qquad (3)$$

Упругое состояние тела вполне определяется заданием этих девяти величин, которые называются составляющими *тензора напряжений*; σ_x, σ_y, σ_z будут нормальными напряжениями, τ_{xy}, τ_{xz} и т. д. — касательными напряжениями. Рассмотрим бесконечно-малый параллелепипед с ребрами dx, dy, dz, параллельными координатным осям. Составляющие тензора напряжений считаются положительными, если они действуют в направлениях координатных осей на площадку, внешняя (по отношению к параллелепипеду) нормаль к которой имеет направление соответствующей координатной оси; если же рассматривается площадка, внешняя нормаль к которой имеет направление, противоположное оси координат, то положительные составляющие тензора напряжений действуют на эту площадку в направлениях, противоположных координатным осям. Поэтому, если ось X обращена вправо, ось Y назад, а ось Z вверх (правая система координат) и составляющие тензора напряжений положительны, то (рис. 1) на правую грань параллелепипеда напряжение σ_x действует вправо, напряжение τ_{xy} назад, напряжение τ_{xz} вверх; следовательно, действующие на площадку силы (равные произведению напряжения на площадь) будут: $\sigma_x dydz$, направленная вправо, $\tau_{xy} dydz$ — назад, $\tau_{xz} dydz$ — вверх; соответственным образом определяется и направление сил для остальных граней. * Например, на левую грань действуют силы: $\sigma_x dydz$ —



Напряжения.

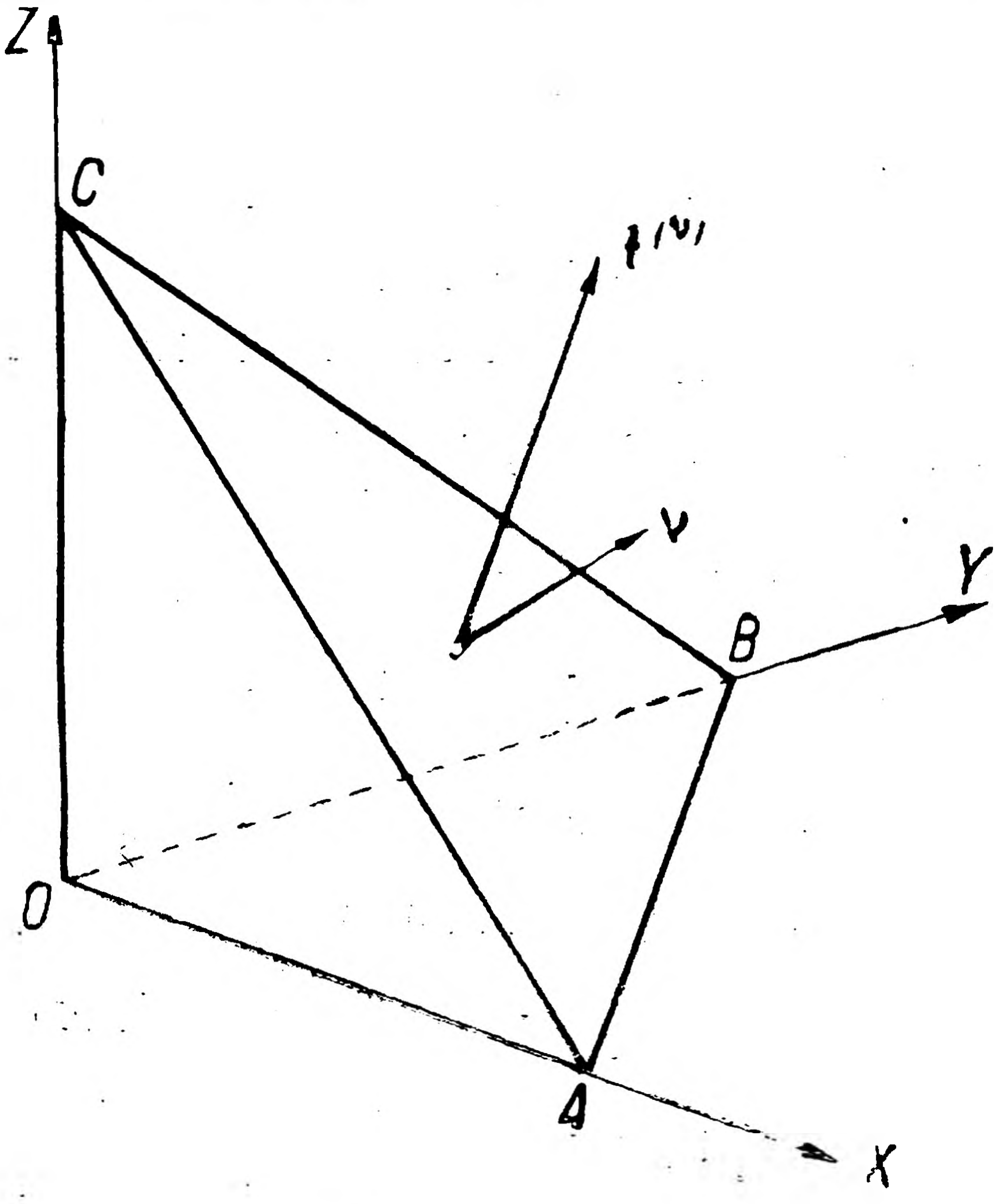
Рис. 1.

влево, $\tau_{xy} dydz$ — вперед, $\tau_{xz} dydz$ — вниз (σ_x, τ_{x_j}, τ_{xz} считаются при этом положительными) *.

Согласно сказанному растягивающие нормальные напряжения σ_x, σ_y, σ_z считаются положительными, а сжимающие — отрицательными.

Напряжение $t^{(\nu)}$ на произвольно ориентированной площадке может быть выражено через три вектора напряжения $t^{(x)}, t^{(y)}$, $t^{(z)}$ на площадках, перпендикулярных координатным осям; для этого представим себе (рис. 2) тетраэдр $OABC$, бесконечно малые стороны которого OA, OB и OC параллельны координатным осям X, Y, Z. Направление нормали к грани ABC задано косинусами $\cos(\nu, x)$, $\cos(\nu, y)$, $\cos(\nu, z)$. Пусть площадь этой грани будет df, относящийся к ней вектор напряжения $t^{(\nu)}$; тогда на df действует сила (напряжение, помноженное на площадь) $\mathbf{t}^{(\nu)}df$. Эта сила уравновешивается силами, действующими на боковые поверхности OBC, OCA и OAB (массовые силы, например вес или силы инерции, можно отбросить, так как они пропорциональны кубу линейных размеров элементарного тетраэдра, в то время как вызванные напряжениями поверхностные силы пропорциональны квадрату его линейных размеров). Эти боковые поверхности, как проекции основания df на координатные плоскости, имеют следующие площади:

$$OBC = df \cos(\nu, x),$$
$$OCA = df \cos(\nu, y),$$
$$OAB = df \cos(\nu, z);$$



Вектор напряжения $\mathbf{t}^{(\nu)}$.
Рис. 2.

следовательно, действующие на них силы будут:

$$-\mathbf{t}^{(x)}df \cos(\nu, x), -\mathbf{t}^{(y)}df \cos(\nu, y), -\mathbf{t}^{(z)}df \cos(\nu, z).$$

Условие равновесия тетраэдра в принятых выше обозначениях будет:

$$\mathbf{t}^{(\nu)} = \mathbf{t}^{(x)} \cos(\nu, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cos(\nu, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cos(\nu, z). \qquad (4)$$

4. Преобразование составляющих напряжения при повороте системы координат. Составляющие напряжения в координатной системе X, Y, Z обозначим через σ_x, τ_{xy} и т. д.; возьмем далее координатную систему Ξ, H, Z, направление осей которой задается таблицей косинусов:

$$\begin{array}{lll}
\cos(\xi, x); & \cos(\xi, y); & \cos(\xi, z) \\
\cos(\eta, x); & \cos(\eta, y); & \cos(\eta, z) \\
\cos(\zeta, x); & \cos(\zeta, y); & \cos(\zeta, z)
\end{array}$$

Составляющие тензора напряжения в этой системе обозначим через σ_ξ, $\tau_{\xi\eta}$ и т. д. Ур-ние (4) § 3 дает возможность выразить новые составляющие напряжения через старые. Направим нормаль ν по оси Ξ; тогда вектор напряжения $\mathbf{t}^{(\xi)}$ для элементарной площадки $\xi = \mathrm{const}$ будет:

$$t^{(\xi)} = \mathbf{t}^{(x)} \cos(\xi, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cos(\xi, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cos(\xi, z). \quad (1)$$

Разложим вектор на его составляющие в направлениях Ξ, H, Z, причем для упрощения вместо σ_x, σ_y, σ_z будем писать τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz}. Обозначая через $t_x^{(\xi)}$ составляющую по оси X вектора $\mathbf{t}^{(\xi)}$ и т. д., имеем:

$$\tau_{\xi\xi} = t_x^{(\xi)} \cos(\xi, x) + t_y^{(\xi)} \cos(\xi, y) + t_z^{(\xi)} \cos(\xi, z);$$

но на основании (1):

$$t_x^{(\xi)} = \tau_{xx} \cos(\xi, x) + \tau_{yx} \cos(\xi, z) + \tau_{zx} \cos(\xi, z)$$

и т. д.; подстановка в предыдущее уравнение дает:

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\xi} = \tau_{xx} \cos(\xi, x) \cos(\xi, x) + \tau_{yx} \cos(\xi, y) \cos(\xi, x) + \\ + \tau_{zx} \cos(\xi, z) \cos(\xi, x) + \\ + \tau_{xy} \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) + \tau_{yy} \cos(\xi, y) \cos(\xi, y) + \\ + \tau_{zy} \cos(\xi, z) \cos(\xi, y) + \\ + \tau_{xz} \cos(\xi, x) \cos(\xi, z) + \tau_{yz} \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) + \\ + \tau_{zz} \cos(\xi, z) \cos(\xi, z),\end{aligned}$$

равным образом

$$\tau_{\xi\eta} = t_x^{(\xi)} \cos(\eta, x) + t_y^{(\xi)} \cos(\eta, y) + t_z^{(\xi)} \cos(\eta, z), \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\eta} = \tau_{xx} \cos(\xi, x) \cos(\eta, x) + \tau_{yx} \cos(\xi, y) \cos(\eta, x) + \\ + \tau_{zx} \cos(\xi, z) \cos(\eta, x) + \\ + \tau_{xy} \cos(\xi, x) \cos(\eta, y) + \tau_{yy} \cos(\xi, z) \cos(\eta, y) + \\ + \tau_{zy} \cos(\xi, z) \cos(\eta, y) + \\ + \tau_{xz} \cos(\xi, x) \cos(\eta, z) + \tau_{yz} \cos(\xi, y) \cos(\eta, z) + \\ + \tau_{zz} \cos(\xi, z) \cos(\eta, z)\end{aligned}$$

и т. д. Отсюда мы можем вывести общее правило, имеющее силу и для других координатных осей.

Чтобы найти составляющие тензора напряжения в новой координатной системе, нужно умножить каждое из составляющих его в старой системе на два соответствующих направляющих косинуса и сложить полученные произведения между собой. Из двух индексов каждого из этих косинусов (ξ и x, ξ и y и т. д.) первый всегда тождествен с одним из индексов искомого напряжения, второй — с одним из индексов того напряжения, на которое мы в рассматриваемом случае умножаем. Составляющие с одинаковыми индексами, но расположенными в обратном порядке, мы рассматриваем при этом как различные; ниже мы докажем, что они равны друг другу.

5. Главные оси напряжения; инварианты. Чтобы получить картину упругого состояния, независимую от выбора той или иной системы координат, поставим вопрос об определении направления площадок, касательные напряжения на которых равны нулю. Пусть ν будет нормаль к такой площадке; напряжение на ней обозначим через σ; по условию это напряжение имеет направление ν. Тогда проекции напряжения на оси X, Y и Z будут соответственно равны $\sigma \cos(\nu, x)$, $\sigma \cos(\nu, y)$, и $\sigma \cos(\nu, z)$; проектируя же на оси векторное равенство (4) § 3, получим:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{yx} \cos(\nu, y) + \tau_{zx} \cos(\nu, z) &= \sigma \cos(\nu, x)\\ \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) + \tau_{zy} \cos(\nu, z) &= \sigma \cos(\nu, y)\\ \tau_{xz} \cos(\nu, x) + \tau_{yz} \cos(\nu, y) + \sigma_z \cos(\nu, z) &= \sigma \cos(\nu, z)\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

К этим трем уравнениям присоединяется соотношение между неизвестными направляющими косинусами:

$$\cos^2(\nu, x) + \cos^2(\nu, y) + \cos^2(\nu, z) = 1. \qquad (2)$$

Всего имеем 4 уравнения для трех неизвестных направляющих косинусов и для величины σ нормального напряжения. Исключив косинусы, получим из трех уравнений уравнение для определения σ в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma, & \tau_{yx}, & \tau_{zx}\\ \tau_{xy}, & \sigma_y - \sigma, & \tau_{zy}\\ \tau_{xz}, & \tau_{yz}, & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Корни этого уравнения в порядке их величины обозначим через $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Подставляя последовательно эти значения вместо σ в уравнения (1), получим три системы уравнений первой степени для определения направляющих косинусов нормалей к площадкам, касательные напряжения на которых равны нулю. Решая их, найдем для:

$$\begin{array}{ll} \sigma = \sigma_1: & \cos(\nu_1, x),\ \cos(\nu_1, y),\ \cos(\nu_1, z) \\ \sigma = \sigma_2: & \cos(\nu_2, x),\ \cos(\nu_2, y),\ \cos(\nu_2, z) \\ \sigma = \sigma_3: & \cos(\nu_3, x),\ \cos(\nu_3, y),\ \cos(\nu_3, z) \end{array} \qquad (4)$$

Касательные напряжения на площадках, направления нормалей к которым определяются этой таблицей косинусов, равны нулю.

Как мы увидим ниже, тензор напряжения симметричен, т. е. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и т. д.; при таких условиях, как доказывается в высшей алгебре, все три корня σ_1, σ_2 и σ_3 ур-ния (3) вещественны, а три направления ν_1, ν_2, ν_3 взаимно перпендикулярны. σ_1, σ_2, σ_3, называются *главными напряжениями*; σ_1 и σ_2 являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями для нормальных напряжений, имеющих место при какой бы то ни было ориентации элементарной площадки в данной точке (см. § 6).

Направления ν_1, ν_2, ν_3 называются *главными направлениями напряженного состояния.*

* Подобно тому как сила (или любой иной вектор) может быть задана или ее величиной и направлением или же ее тремя проекциями на оси, так и тензор напряжений (или любой другой симметричный тензор второго ранга) можно определить или (вне зависимости от какой бы то ни было координатной системы) его тремя главными направлениями и тремя главными напряжениями или его составляющими σ_x, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и т. д.

Если два корня уравнения (3) друг другу равны, то за направления соответствующих главных осей могут быть приняты два любых взаимно перпендикулярных направления, лежащих в плоскости, перпендикулярной третьей главной оси. При равенстве друг другу всех трех корней уравнения (3) три любых взаимно перпендикулярных направления будут главными, и касательные напряжения отсутствуют (случай гидростатического давления). *

Если мы развернем для определения главных напряжений определитель (3), то получим уравнение:

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,\sigma^2 + (\sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2 + \sigma_z\sigma_x - \\ - \tau_{zx}^2 + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)\,\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \\ - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \qquad (5)$$

Так как главные напряжения не зависят от выбранной координатной системы, то и коэфициенты этого уравнения должны при повороте координатной системы остаться неизменными (инвариантными). Поэтому их называют **инвариантами тензора напряжений**. Приведя координатную систему к совпадению с главными осями, найдем значение этих инвариантов:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \qquad (6)$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x, & \tau_{yx}, & \tau_{zx} \\ \tau_{xy}, & \sigma_y, & \tau_{zy} \\ \tau_{xz}, & \tau_{yz}, & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3,$$

иными словами, инварианты являются элементарными симметрическими функциями главных напряжений.

Формулы преобразования составляющих тензора напряжения (§ 4) сильно упрощаются, если, считая главные напряжения и главные направления известными, выразить через них составляющие напряжения σ_x, τ_{xy} и т. д. Если направляющие косинусы главных осей будут:

$$\cos(x,\ 1),\ \cos(y,\ 1),\ \cos(z,\ 1)$$

и т. д., то, согласно правилу, данному в формуле (2) § 4, получим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sum \sigma_n \cos^2(x,\ n), & \tau_{xy} &= \sum \sigma_n \cos(x,\ n)\cos(y, n) \\ \sigma_y &= \sum \sigma_n \cos^2(y,\ n), & \tau_{yz} &= \sum \sigma_n \cos(y,\ n)\cos(z, n) \\ \sigma_z &= \sum \sigma_n \cos^2(z,\ n), & \tau_{zx} &= \sum \sigma_n \cos(z,\ n)\cos(x, n) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

причем суммирование по n делается от 1 до 3, т. е. по всем трем главным направлениям.

6. Круги Мора. Чтобы получить картину напряжений в какой-либо точке, построим диаграмму $\sigma\tau$, нанося на ней для всевозможных ориентаций площадок: как абсциссу — нормальную составляющую σ, а как ординату — касательную составляющую τ соответствующего вектора напряжения $\mathbf{t}$. Отложим по оси абсцисс три главных напряжения σ_1, σ_2 и σ_3. Назовем далее единичные векторы главных направлений $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$; соответствующие им векторы напряжений будут:

$$\sigma_1\mathbf{e}_1,\ \sigma_2\mathbf{e}_2,\ \sigma_3\mathbf{e}_3;$$

на основании формулы (4) § 2 для площадки, имеющей направление нормали ν, вектор напряжения будет:

$$\mathbf{t}^{(\nu)} = \sigma_1 \cos(\nu, 1)\,\mathbf{e}_1 + \sigma_2 \cos(\nu, 2)\,\mathbf{e}_2 + \sigma_3 \cos(\nu, 3)\,\mathbf{e}_3. \quad (1)$$

Если σ — нормальная, а τ — касательная составляющие вектора напряжения $\mathbf{t}^{(\nu)}$, то, согласно (1), получим:

$$[t^{(\nu)}]^2 = \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 \cos^2(\nu, 1) + \sigma_2^2 \cos^2(\nu, 2) + \\ + \sigma_3^2 \cos^2(\nu, 3). \quad (2)$$

Но нормальная составляющая согласно формулам (7) § 5 равна:

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2(\nu, 1) + \sigma_2 \cos^2(\nu, 2) + \sigma_3 \cos^2(\nu, 3). \quad (3)$$

Сверх того, имеем:

$$1 = \cos^2(\nu, 1) + \cos^2(\nu, 2) + \cos^2(\nu, 3). \quad (4)$$

Эти три уравнения дают нам возможность по данным главным напряжениям определить направляющие косинусы нормали к площадке, для которой заранее заданы соответствующие ей σ и τ. Вычтем ур-ние (3), помноженное на $\sigma_2 + \sigma_3$, из ур-ния (2) и прибавим к результату ур-ние (4), помноженное на $\sigma_2\sigma_3$.

Получим

$$\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma + \sigma_2\sigma_3 = \{\sigma_1^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma_1 + \\ + \sigma_2\sigma_3\} \cos^2(\nu, 1) \quad (5)$$

или

$$\left.\begin{aligned} \cos^2(\nu, 1) &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ \cos^2(\nu, 2) &= \frac{\tau^2 - (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ \cos^2(\nu, 3) &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

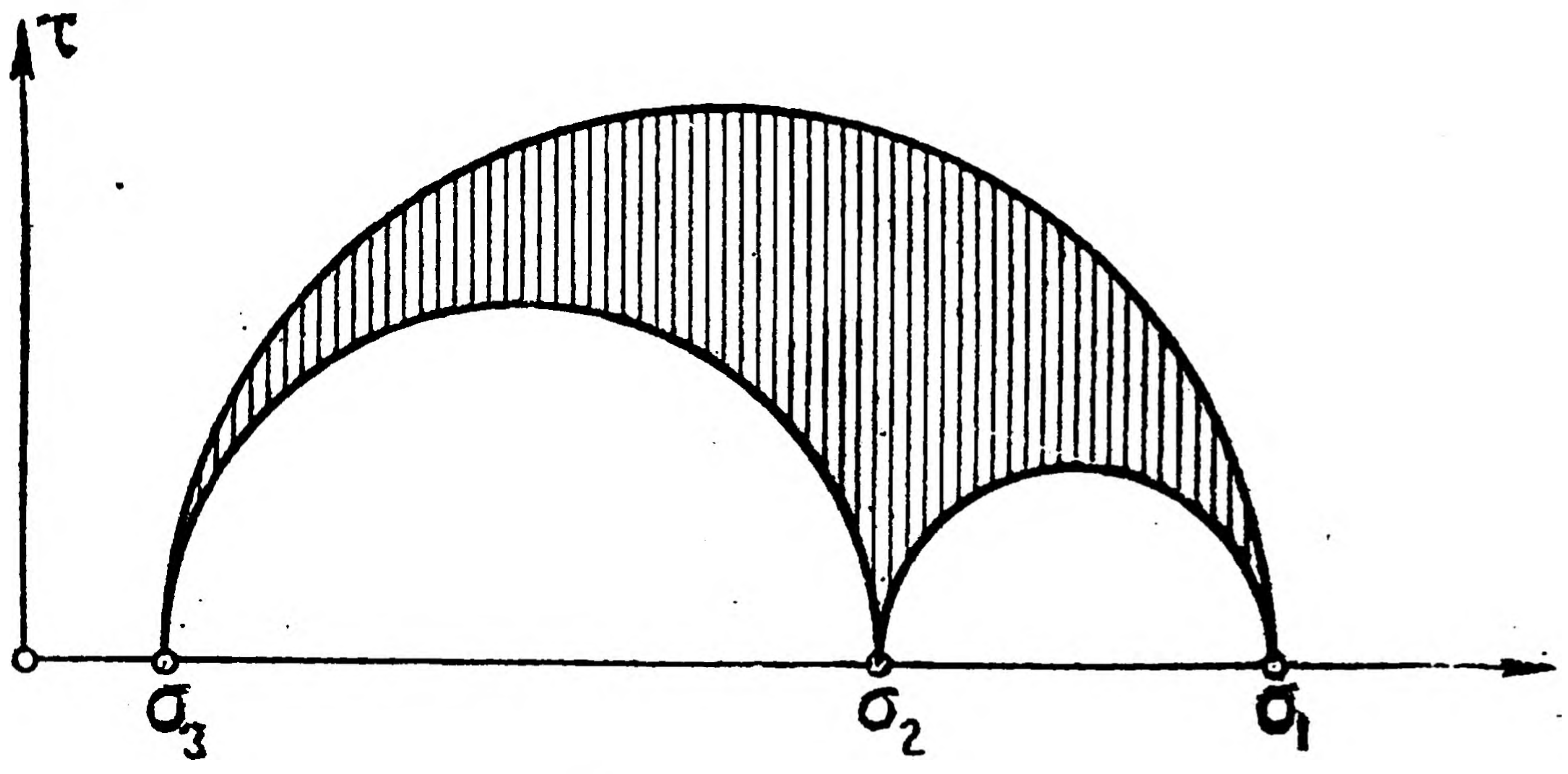
Эти формулы дают возможность непосредственно охватить все разнообразие фактически существующих комбинаций σ и τ. Фактически существуют те из них, для которых направляющие косинусы вещественны и по величине меньше единицы; эти условия выполняются, если правые части ур-ний (6) положительны. Например, в формуле для $\cos^2(\nu, 1)$ по условию $\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \sigma_3$; следовательно, знаменатель заведомо положителен; значит, необходимо, чтобы и числитель был положительным:

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geqq 0. \qquad (7)$$

Но уравнение

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0 \qquad (7a)$$

изобразится на диаграмме в виде окружности, диаметром которой служит отрезок $\sigma_2 \to \sigma_3$ оси σ. Следовательно, точка $\sigma\tau$ должна лежать вне полуокружности, описанной на отрезке $\sigma_2 \to \sigma_3$ как на диаметре (для точек, лежащих внутри этой окружности $\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) < 0$). Аналогичным образом доказывается, что эта точка должна лежать вне полуокружности, описанной на отрезке $\sigma_2 \to \sigma_1$, как на диаметре, и внутри полуокружности, описанной на $\sigma_1 \to \sigma_3$, как на диаметре. Значит, все фактически существующие комбинации $\sigma\tau$ лежат внутри ограниченной тремя полуокружностями заштрихованной на рис. 3 области. Сами же по себе эти окружности дают изображение нормальных и касательных напряжений тех элементарных площадок, которые проходят через одну из главных осей. * Например, для окружности (7a) $\cos(\nu, 1) = 0$ (см. ур-ние 6) и, следовательно, соответствующая площадка проходит через первую главную ось. * Из рисунка можно констатировать, что σ_1 и σ_3 — максимальное и минимальное из вообще существующих нормальных напряжений; выше это было принято без доказательства. * Точно так же достаточно одного взгляда на круги Мора, чтобы убедиться в том, что максимальное касательное напря-



Круги Мора.
Рис. 3.

жение в данной точке $\tau_{\max}$ равно $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, т. е. полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений; чтобы определить ориентацию площадок, на которых имеет место это максимальное касательное напряжение, очевидно достаточно в формулы (6) подставить, вместо τ, $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, а вместо σ его значение $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$. Получим $\cos(\nu, 1) = 0$, $\cos^2(\nu, 2) = \cos^2(\nu, 3) = \frac{1}{2}$, т. е. искомые площадки проходят через первую главную ось и наклонены под углом 45° к двум остальным осям. *

7. Условия равновесия. а) Равновесие внутри тела Обозначим через X, Y, Z — проекции на оси внешней массовой силы, отнесенной к единице объема. Тогда проекции на оси внешней силы, действующей на объем $d\omega$, будут:

$$Xd\omega,\ Yd\omega,\ Zd\omega.$$

Выделенный мысленно из тела произвольный объем должен оставаться в равновесии под действием массовых сил и напряжений на его поверхности. Иными словами, сумма проекций всех этих сил на каждую из координатных осей, а также сумма моментов их относительно каждой из осей должна равняться нулю. Если $\mathbf{t}^{(\nu)}$ — вектор напряжения для элементарной площадки df на поверхности выделенного объема, то на df действует сила $\mathbf{t}^{(\nu)}df$; проекция ее на ось X будет $t_x^{(\nu)}df$; уравнение равновесия по оси X примет, таким образом, вид:

$$\int\int\int Xd\omega + \int\int t_x^{(\nu)}df = 0. \tag{1}$$

Согласно ур-нию (4) § 3

$$\mathbf{t}^{(\nu)} = \mathbf{t}^{(x)}\cos(\nu, x) + \mathbf{t}^{(y)}\cos(\nu, y) + \mathbf{t}^{(z)}\cos(\nu, z), \tag{2}$$

следовательно,

$$t_x^{(\nu)} = \sigma_x\cos(\nu, x) + \tau_{yx}\cos(\nu, y) + \tau_{zx}\cos(\nu, z). \tag{3}$$

Обозначим через $\bar{\mathbf{t}}^{(x)}$ вектор с проекциями σ_x τ_{yx}, τ_{zx} тогда нормальная составляющая $\bar{t}_\nu^{(x)}$ этого вектора, согласно (3), будет:

$$\bar{t}_\nu^{(x)} = t_x^{(\nu)} \tag{4}$$

и условие равновесия получит вид:

$$\int\int\int X d\omega + \int\int \overline{t}^{(x)}_{\nu} df = 0; \qquad (5)$$

по формуле преобразования Гаусса:

$$\int\int \overline{t}^{(x)}_{\nu} df = \int\int\int \operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(x)} d\omega,$$

и мы получаем:

$$\int\int\int (X + \operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(x)})\, d\omega = 0. \qquad (6)$$

Чтобы это уравнение имело силу независимо от величины и формы выделенного объема внутри упругого тела, выражение, стоящее под знаком интеграла, должно быть равным нулю, т. е. (после аналогичных выкладок для осей Y и Z)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(x)} + X &= 0 \\ \operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(y)} + Y &= 0 \\ \operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(z)} + Z &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

или, выражая дивергенц вектора через его проекции:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Составим теперь уравнение моментов относительно оси Z. Получим:

$$\begin{aligned} M_z = \int\int\int \{Xy - Yx\}\, d\omega + \\ + \int\int \{ t_x^{(\nu)} y - t_y^{(\nu)} x \} df = \\ = \int\int\int \{Xy - Yx\}\, d\omega + \\ + \int\int \{ \overline{t}^{(x)}_{\nu} y - \overline{t}^{(y)}_{\nu} \}\, df = 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

---

* По известной формуле векторного анализа

$$\operatorname{div} y \overline{\mathbf{t}}^{(x)} = y \operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(x)} + (\overline{\mathbf{t}}^{(x)}, \operatorname{grad} y).$$

Но

$$\operatorname{grad} y = \mathbf{j},$$

где $\mathbf{j}$ — единичный вектор направления оси Y; следовательно

$$(\overline{\mathbf{t}}^{(x)}, \operatorname{grad} y) = (\overline{\mathbf{t}}^{(x)}, \mathbf{j}) = \overline{t}_y^{(x)} = \tau_{yx}^{*}$$

и мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} y\overline{\mathbf{t}}^{(x)} &= y \operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(x)} + \overline{t}_y^{(x)} = y \operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(x)} + \tau_{y}, \\ \operatorname{div} x\overline{\mathbf{t}}^{(y)} &= x \operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(y)} + \overline{t}_x^{(y)} = x \operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(y)} + \tau_{xy} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

откуда:

$$M_z = \int\int\int \left\{ y(\operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(x)} + X) - x(\operatorname{div} \overline{\mathbf{t}}^{(y)} + Y) \right\} d\omega + \\ + \int\int\int (\tau_{yx} - \tau_{xy})\, d\omega = 0. \qquad (11)$$

Согласно формуле (7) первый интеграл отпадает; остается:

$$\int\int\int (\tau_{yx} - \tau_{xy})\, d\omega = 0. \qquad (12)$$

Так как левая сторона должна обращаться в нуль независимо от величины и формы выделенного объема, то выражение, стоящее под знаком интеграла, должно равняться нулю; получаем:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};$$

равным образом, и

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \qquad (13)$$

Эти уравнения доказывают *симметричность тензора напряжений*. Теперь имеем:

$$\mathbf{t}^{(x)} = \overline{\mathbf{t}}^{(x)}, \quad \mathbf{t}^{(y)} = \overline{\mathbf{t}}^{(y)}, \quad \mathbf{t}^{(z)} = \overline{\mathbf{t}}^{(z)},$$

так что ур-ния (7) могут быть написаны и в более простом виде:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{t}^{(x)} + X &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{t}^{(y)} + Y &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{t}^{(z)} + Z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

б) Равновесие на поверхности тела. Пусть на элемент поверхности do действует сила $\mathbf{P}\, do$, где $\mathbf{P}$ — поверхностная сила, отнесенная к единице площади; проекции ее на оси обозначим через Ξ, H, Z. Тогда, идя тем же путем, который привел нас к ур-нию (4) § 3, получим, как условие равновесия элемента объема, граничащего с поверхностью, векторное уравнение:

$$\mathbf{t}^{(\nu)} = \mathbf{P}; \tag{15}$$

спроектировав это уравнение на оси, получим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{yx} \cos(\nu, y) + \tau_{zx} \cos(\nu, z) &= \Xi \\ \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) + \tau_{zy} \cos(\nu, z) &= H \\ \tau_{xz} \cos(\nu, x) + \tau_{yz} \cos(\nu, y) + \sigma_z \cos(\nu, z) &= Z \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

III. ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИИ.

8. Деформации. Координаты какой-либо точки упругого тела в ненапряженном состоянии обозначим через x, y и z. Под влиянием внешних сил эта точка получит некоторое перемещение, проекции которого на направления осей обозначим через u, v и w. Тогда в деформированном состоянии координаты точки будут:

$$\xi = x + u, \qquad \eta = y + v, \qquad \zeta = z + w. \tag{1}$$

Из всех возможных перемещений мы исключаем прежде всего те, при которых тело поворачивается или перемещается целиком, не претерпевая никаких внутренних измерений. Упругой деформацией мы будем называть только такие перемещения отдельных точек, при которых длина линейных элементов (расстояние между бесконечно близкими друг к другу точками) подвергается изменению.

Рассмотрим две точки с координатами

$$x,\ y,\ z \text{ и } x + dx,\ y + dy,\ z + dz$$

до деформации, и с координатами

$$\xi,\ \eta,\ \zeta \text{ и } \xi + d\xi,\ \eta + d\eta,\ \zeta + d\zeta$$

после деформации. При этом, так как $\xi = u + x$ и т. д., то

$$d\xi = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + dx \quad . \qquad \text{и т. д.}$$

Квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими друг к другу точками равен:

до деформации

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{2}$$

после деформации

$$d\lambda^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2, \tag{3}$$

или

$$\begin{aligned} d\lambda^2 = (1+\gamma_{xx})\,dx^2 + (1+\gamma_{yy})\,dy^2 + (1+\gamma_{zz})\,dz^2 + \\ + 2\gamma_{xy}dxdy + 2\gamma_{yz}dydz + 2\gamma_{zx}dzdx, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{xx} &= 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
\gamma_{yy} &= 2\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\
\gamma_{zz} &= 2\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Величины γ_{xx}, γ_{xy} и т. д. дают картину деформированного состояния тела. Если эти величины равны нулю, то $dl = d\lambda$ и перемещение не сопровождается деформацией.

* Геометрическое значение величин γ можно определить следующим образом. Рассмотрим точку O и три другие бесконечно близкие точки:

P — отстоящую на dx в направлении оси X;
Q — отстоящую на dy в направлении оси Y;
S — в вершине прямоугольника $OPSQ$.

Если эти точки после деформации переместились в O', P', Q', S', то для длин $\overline{O'P'}$, $\overline{O'Q'}$ и $\overline{O'S'}$ на основании (4) получаем выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{O'P'} &= \sqrt{1+\gamma_{xx}}\,dx \\
\overline{O'Q'} &= \sqrt{1+\gamma_{yy}}\,dy \\
\overline{O'S'} &= \sqrt{(1+\gamma_{xx})\,dx^2 + 2\gamma_{xy}dxdy + (1+\gamma_{yy})\,dy^2}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Таким образом, отношение длин участка, первоначально параллельного оси X, до и после деформации равно $\sqrt{1+\gamma_{xx}}$;

поэтому, если относительное удлинение элемента длины, параллельного в недеформированном состоянии оси X, обозначать через ε_x, то

$$\varepsilon_x = \frac{\sqrt{1+\gamma_{xx}}dx - dx}{dx} = \sqrt{1+\gamma_{xx}} - 1, \qquad (7)$$

равным образом для элементов в направлении осей Y и Z

$$\varepsilon_y = \sqrt{1+\gamma_{yz}} - 1, \; \varepsilon_z = \sqrt{1+\gamma_{zz}} - 1.$$

Угол $Q'O'P' = \vartheta_{xy}$ в параллелограмме $O'P'S'Q'$, т. е. угол, образуемый после деформации двумя отрезками, первоначально параллельными осями X и Y, определяется из уравнения

$$\cos\vartheta_{xy} = \frac{\overline{O'S'^2} - \overline{O'P'^2} - \overline{O'Q'^2}}{2\overline{O'P'}\cdot\overline{O'Q'}} = \frac{\gamma_{xy}}{\sqrt{1+\gamma_{xx}}\sqrt{1+\gamma_{yy}}}; \qquad (8)$$

γ с одинаковыми значками характеризуют, таким образом, *относительные удлинения*, γ с различными значками характеризуют (в связи с первыми) угловые изменения или сдвиги. Вместо „относительные удлинения“ в дальнейшем будем говорить просто „удлинения“. *

9. Поворот системы координат; главные оси и инварианты. При повороте координатной системы γ преобразуется следующим образом.

Обозначим координаты точки в той и другой системе координат: до деформации через x, y, z и x', y', z'; после деформации через ξ, η, ζ и ξ', η', ζ'.

Проекции перемещений обозначим через u, v, w или соответственно u', v', w'.

Длина некоторого отрезка после деформации выражается в старых координатах формулой:

$$\begin{aligned} d\lambda^2 = {} & (1+\gamma_{xx})\,dx^2 + (1+\gamma_{yy})\,dy^2 + (1+\gamma_{zz})\,dz^2 + \\ & + 2\gamma_{xy}\,dxdy + 2\gamma_{yz}dydz + 2\gamma_{zx}dzdx, \end{aligned} \qquad (1)$$

а в новых (после поворота системы):

$$\begin{aligned} d\lambda^2 = {} & (1+\gamma'_{x'x'})\,dx'^2 + (1+\gamma'_{y'y'})\,dy'^2 + \\ & + (1+\gamma'_{z'z'})\,dz'^2 + 2\gamma'_{x'y'}dx'dy' + \\ & 2\gamma'_{y'z'}dy'dz' + 2\gamma'_{z'x'}dz'dx'. \end{aligned} \qquad (2)$$

Направляющие косинусы углов между новыми осями и старыми обозначим соответственно через $\cos(x, x')$, $\cos(x, y')$, $\cos(x, z')$ и т. д.; в таком случае:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \cos(x, x')\,dx' + \cos(x, y')\,dy' + \cos(x, z')\,dz' \\ dy &= \cos(y, x')\,dx' + \cos(y, y')\,dy' + \cos(y, z')\,dz' \\ dz &= \cos(z, x')\,dx' + \cos(z, y')\,dy' + \cos(z, z')\,dz'. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Подставим эти выражения в (1) и соберем коэфициенты при dx'^2 и т. д. до $dz'dx'$. * Так как формулы (1) и (2) выражают, независимо от выбора той или иной системы координат, одну и ту же длину, то правые части (1) и (2) должны быть тождественно (т. е. при любых dx', dy', dz') равны друг другу; иными словами, коэфициенты при квадратах и произведениях dx', dy', dz' в (1) и (2) должны быть также друг другу равны. * Таким путем получим следующие формулы преобразования величин γ:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{x'x'} = {} & \gamma_{xx}\cos(x', x)\cos(x', x) + \gamma_{xy}\cos(x', x)\cos(x', y) + \\ & + \gamma_{xz}\cos(x', x)\cos(x', z) + \\ & + \gamma_{yx}\cos(x', y)\cos(x', x) + \gamma_{yy}\cos(x', y)\cos(x', y) + \\ & + \gamma_{yz}\cos(x', y)\cos(x', z) + \\ & + \gamma_{zx}\cos(x', z)\cos(x', x) + \gamma_{zy}\cos(x', z)\cos(x', y) + \\ & + \gamma_{zz}\cos(x', z)\cos(x', z), \\ \gamma_{x'y'} = {} & \gamma_{xx}\cos(x', x)\cos(y', x) + \gamma_{xy}\cos(x', x)\cos(y', y) + \\ & + \gamma_{xz}\cos(x', x)\cos(y', z) + \\ & + \gamma_{yx}\cos(x', y)\cos(y', x) + \gamma_{yy}\cos(x', y)\cos(y', y) + \\ & + \gamma_{yz}\cos(x', y)\cos(y', z) + \\ & + \gamma_{zx}\cos(x', z)\cos(y', x) + \gamma_{zy}\cos(x', z)\cos(y', y) + \\ & + \gamma_{zz}\cos(x', z)\cos(y', z), \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Эти формулы имеют ту же структуру, что и формулы преобразования (§§ 4 и 5) составляющих тензора напряжения; иными словами, чтобы получить в системе со штрихом γ', все γ системы без штриха умножаются на два косинуса. Первые значки (в косинусах) равны значкам того γ', который мы ищем; вторые — значкам умноженного γ; γ_{xy} и γ_{yx} при этом следует рассматривать как различные выражения. Мы можем теперь перенести сюда все полученные для напряжений результаты. Тогда мы придем к такому выводу: в каждой точке существует три перпендикулярных друг другу направления, для которых γ с различными значками превращаются в нуль; эти три направления образуют *главные оси деформации*. Соответственные γ с одинаковыми значками обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и назовем их *главными деформациями*. Их можно вычислить как корни уравнения:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{xx}-\gamma, & \gamma_{xy}, & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx}, & \gamma_{yy}-\gamma, & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx}, & \gamma_{zy}, & \gamma_{zz}-\gamma \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Направления ν_1, ν_2, ν_3 трех перпендикулярных друг другу главных осей получаются при значениях $\gamma = \gamma_1$ (или соответственно $\gamma = \gamma_2$, $\gamma = \gamma_3$) из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2(\nu,x) + \cos^2(\nu,y) + \cos^2(\nu,z) &= 1 \\ (\gamma_{xx}-\gamma)\cos(\nu,x) + \gamma_{xy}\cos(\nu,y) + \gamma_{xz}\cos(\nu,z) &= 0 \\ \gamma_{xy}\cos(\nu,x) + (\gamma_{yy}-\gamma)\cos(\nu,y) + \gamma_{yz}\cos(\nu,z) &= 0 \\ \gamma_{xz}\cos(\nu,x) + \gamma_{yz}\cos(\nu,y) + (\gamma_{zz}-\gamma)\cos(\nu,z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Коэфициенты ур-ния (5) называются *инвариантами деформированного состояния*, так как они, как функции главных деформаций, очевидно, не зависят от выбора системы координат (см. аналогичные замечания относительно тензора напряжения; § 5). Мы получим, таким образом, следующие инварианты:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \\ &\gamma_{xx}\gamma_{yy} + \gamma_{yy}\gamma_{zz} + \gamma_{zz}\gamma_{xx} - \gamma_{xy}{}^2 - \gamma_{yz}{}^2 - \gamma_{zx}{}^2 = \gamma_1\gamma_2 + \\ &\qquad + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 \\ &\begin{vmatrix} \gamma_{xx}, & \gamma_{xy}, & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx}, & \gamma_{yy}, & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx}, & \gamma_{zy}, & \gamma_{zz} \end{vmatrix} = \gamma_1\gamma_2\gamma_3. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Интерпретируя геометрически эти аналитические операции, приходим к выводу, что пространство в окрестностях каждой точки подвергается при деформации аффинному преобразованию. Бесконечно малый шар превращается при этом в эллипсоид; три главные оси этого эллипсоида возникли из трех перпендикулярных друг другу диаметров шара, направления которых совпадают с направлениями главных осей деформации.

* Совокупность шести величин

$$\begin{array}{l} \gamma_{xx},\ \gamma_{xy},\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy}=\gamma_{yx},\ \gamma_{yy},\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx}=\gamma_{xz},\ \gamma_{zy}=\gamma_{yz},\ \gamma_{zz} \end{array}$$

образует тензор деформации. Этот тензор, очевидно, симметричен, подобно тензору напряжений. *

10. Малые деформации; удлинения, изменения углов, дилатация.

Теория упругости ограничивается рассмотрением деформаций столь малых, что производными перемещений по сравнению с единицей и произведениями двух перемещений или их производных по сравнению с линейными комбинациями этих величин можно пренебречь. Таким образом, выражения для составляющих тензора деформации упрощаются, и мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xx}&=2\varepsilon_x=2\frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yy}&=2\varepsilon_y=2\frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz}&=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zz}&=2\varepsilon_z=2\frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx}&=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти выражения имеют следующее геометрическое значение. Удлинения (относительные) линейных элементов в направлениях осей суть:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (2)$$

Далее, согласно ур-нию (8) § 8, имеем при малых γ:

$$\cos\vartheta_{xy}=\gamma_{xy}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_{xy}\right)\approx\frac{\pi}{2}-\vartheta_{xy}.$$

Таким образом, γ с различными значками (сдвиги) суть изменения прямых до деформации углов между линейными элементами, первоначально лежавшими в направлениях осей:

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (3)$$

Особенно важное значение имеет первый инвариант тензора деформации:

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{u}. \tag{4}$$

Рассмотрим параллелепипед, имевший до деформации ребра, равные dx, dy и dz. После деформации длины этих ребер соответственно будут $dx(1+\varepsilon_x)$, $dy(1+\varepsilon_y)$, $dz(1+\varepsilon_z)$. Таким образом объем $dv = dxdydz$ после деформации имеет величину $dv' = dxdydz\ (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$; следовательно, опуская малые величины высшего порядка, можно написать:

$$dv' = dxdydz\,(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

Отсюда мы получаем:

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{dv' - dv}{dv}, \tag{5}$$

т. е. Θ есть относительное изменение объема в исследуемой точке, или так называемое объемное расширение.

IV. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

11. Закон Гука (Hooke). Рассмотрим однородное изотропное тело, т. е. тело, упругие свойства которого одинаковы во всех точках и у которого в отношении упругих свойств ни одно направление не отличается чем-либо от других. Картину напряженного состояния дают составляющие тензора напряжения:

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z;\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx};$$

картину же деформации, поскольку мы ограничиваемся малыми деформациями, дают составляющие тензора деформации:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Поставим теперь вопрос, какие напряжения имеют место в некоторой точке, если тензор деформации в этой точке задан; иными словами, какова зависимость между составляющими тензора напряжения и тензора деформации. Этот „закон упругости“ мы можем вывести, разумеется, только из опыта.

Прежде всего из самого допущения изотропности тела следует, что главные оси напряжения должны совпадать с главными осями деформации; действительно в изотропном теле растяжение или сжатие в направлении главных осей не может, очевидно, вызвать какого-либо изменения углов между этими осями. Отсюда следует, что закон упругости должен выражать зависимость между главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3 и главными удлинениями ε_1, ε_2, ε_3. Из опыта мы устанавливаем следующий факт (закон Гука): при малых деформациях напряжение σ_1 вызывает удлинение ε_1, пропорциональное σ_1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1. \tag{2}$$

Коэфициент пропорциональности E называют *модулем упругости.* В то же время напряжение σ_1 вызывает в перпендикулярных к нему главных направлениях 2 и 3 поперечное сжатие (отрицательное удлинение), которое в свою очередь пропорционально σ_1; имеем:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_1}{m}, \tag{3}$$

причем второй коэфициент пропорциональности m называется *коэфициентом поперечного сжатия* (постоянная Пуассона, равная линейному удлинению, разделенному на поперечное сжатие). При одновременном действии напряжений в различных направлениях вызванные ими удлинения накладываются друг на друга. Таким образом, если в трех главных направлениях 1, 2 и 3 действуют главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3, то выражения для удлинений получат следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_1 - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{m}\right\} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_2 - \frac{\sigma_3+\sigma_1}{m}\right\} \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_3 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{m}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Чтобы получить теперь зависимость между составляющими тензора напряжения и тензора деформации остается еще преобразовать формулы (4) к произвольно выбранной системе координат. Обозначим направляющие косинусы углов главных осей с координатными осями через $\cos(1,x)$, $\cos(1,y)$, $\cos(1,z)$ и т. д. Тогда уравнения для преобразования составляющих тензора напряжения и тензора деформации получат простую форму:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \sum_1^3 \sigma_h \cos^2(h,x),\\ \varepsilon_x &= \sum_1^3 \varepsilon_h \cos^2(h,x),\\ \tau_{xy} &= \sum_1^3 \sigma_h \cos(h,x)\cos(h,y),\\ \gamma_{xy} &= 2\sum_1^3 \varepsilon_h \cos(h,x)\cos(h,y)\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

и т. д. [см. § 5, ур-ние (7), и § 9, ур-ние (4)]. Подставим теперь в ур-ния (4)

$$s = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (6)$$

и

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (7)$$

тогда эти уравнения примут вид:

$$\varepsilon_h = \frac{1}{E}\left\{\frac{m+1}{m}\sigma_h - \frac{s}{m}\right\} = \frac{m+1}{Em}\left\{\sigma_h - \frac{s}{m+1}\right\}. \quad (8)$$

Помножим их на $\cos^2(h,x)$; тогда суммированием по h получим:

$$\varepsilon_x = \frac{m+1}{Em}\left\{\sigma_x - \frac{s}{m+1}\right\}$$

и аналогичным образом

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{m+1}{Em}\left\{\sigma_y - \frac{s}{m+1}\right\}\\ \varepsilon_z &= \frac{m+1}{Em}\left\{\sigma_z - \frac{s}{m+1}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

далее умножая на $2\cos(h,x)\cos(h,y)$ и суммируя, найдем:

$$\gamma_{xy} = \frac{2(m+1)}{Em}\tau_{xy}$$

и аналогичным образом

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \frac{2(m+1)}{Em}\tau_{yz}\\ \tau_{zx} &= \frac{2(m+1)}{Em}\tau_{zx}\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

[следует принять при этом во внимание, что $\sum\limits_{h}\cos^2(h, x) = 1$, $\sum\limits_{h}\cos(h, x),\ \cos(h, y) = 0$].

Для сокращения введем обозначение:

$$G = \frac{Em}{2(m+1)}. \qquad (11)$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2G}\left\{\sigma_x - \frac{s}{m+1}\right\}; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G}\left\{\sigma_y - \frac{s}{m+1}\right\}; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G}\left\{\sigma_z - \frac{s}{m+1}\right\}; & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Складывая между собою три уравнения, написанные слева, получаем зависимость между инвариантами Θ и s:

$$\Theta = \frac{1}{2G}\,\frac{m-2}{m+1}\,s. \qquad (13)$$

При помощи этого уравнения теперь легко непосредственно написать решение ур-ний (12) относительно напряжений. Получим:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\left\{\varepsilon_x + \frac{\Theta}{m-2}\right\}; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\\ \sigma_y &= 2G\left\{\varepsilon_y + \frac{\Theta}{m-2}\right\}; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\\ \sigma_z &= 2G\left\{\varepsilon_z + \frac{\Theta}{m-2}\right\}; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Величина G, определяющая зависимость между касательным напряжением и соответствующим ему сдвигом, называется *модулем сдвига*.

12. Определение перемещений по напряжениям. Если известны напряжения, то непосредственно мы можем получить только составляющие тензора деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Чтобы получить самые перемещения u, v, w, определим все их частные производные второго порядка по x, y, z. Легко проверить, что

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}, \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \dfrac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}, \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \dfrac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}, \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \dfrac{1}{2}\left\{ -\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right\}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial \varepsilon_x}{\partial z}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Такие же формулы получим для v и w. Двукратным интегрированием находим теперь по этим частным производным второго порядка перемещения u, v, w. Они получаются при этом с точностью до линейных выражений вида:

$$\left.\begin{array}{l} u = u_0 + \beta z - \gamma y \\ v = v_0 + \gamma x - \alpha z \\ w = w_0 + \alpha y - \beta x \end{array}\right\} \quad (2)$$

где u_0, v_0, w_0, α, β, γ — произвольные постоянные; иными словами, остаются неопределенными параллельный перенос u_0, v_0, w_0 в направлении осей X, Y, Z и повороты на малые углы α, β, γ вокруг этих осей. Это вполне естественно, так как не сопровождающиеся деформацией перемещение и вращение всего тела при данных поверхностных силах всегда возможно; из кинематики же известно, что формулы (2) как раз и представляют (при малых α, β, γ) указанное перемещение твердого тела.

13. Уравнения равновесия упругого тела в перемещениях. Только-что выведенные уравнения, связывающие тензор напряжения и тензор деформации [§ 11, ур-ния (12) и (14)] совместно с условиями равновесия:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0\\
\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0\\
\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

[см. § 7, ур-ние (8)] образуют полную систему уравнений с частными производными теории упругости. Строго говоря, при этом следует в уравнениях, связывающих напряжения и деформации, производить диференцирование по координатам состояния, предшествовавшего деформации, а в уравнениях равновесия — по координатам состояния, наступившего после деформации. Однако это различие не имеет значения, если мы ограничиваемся малыми перемещениями; в самом деле, те и другие частные производные отличаются друг от друга только малыми величинами, которыми, по условию, мы пренебрегаем.

Если массовые силы X, Y, Z и поверхностные силы Ξ, H, Z не зависят от времени, то уравнения с частными производными, дающие условия равновесия, мы получим, исключая из девяти уравнений (1) и (12) § 11 или (1) и (14) § 11 либо перемещения, либо напряжения. Подставляя значения составляющих тензора напряжения из ур-ний (14) § 11 в условия равновесия (1) и пользуясь при этом уравнением (7) § 11, получим *уравнения равновесия в перемещениях*:

$$\left.\begin{aligned}
G\left\{\Delta u+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right\}+X=0\\
G\left\{\Delta v+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right\}+Y=0\\
G\left\{\Delta w+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right\}+Z=0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

или в векторной форме

$$G\left(\Delta\mathbf{u}+\frac{m}{m-2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right)+\mathbf{K}=0. \qquad (2a)$$

Из ур-ний (2), диференцируя их соответственно по x, y и z и складывая результаты, т. е. беря дивергенц левой части ур-ния (2a) (напомним, что $\Theta=\mathrm{div}\,\mathbf{u}$), получим:

$$2G=\frac{m-1}{m-2}\,\Delta\Theta+\mathrm{div}\,\mathbf{K}=0, \qquad (3)$$

откуда при помощи ур-ния (13) § 11 найдем также

$$\frac{m-1}{m+1}\,\Delta s+\mathrm{div}\,\mathbf{K}=0. \qquad (4)$$

К этим уравнениям с частными производными надо присоединить еще граничные условия: именно необходимо задать на поверхности тела либо перемещения (например $u=v=w=0$ в неподвижных точках), либо распределенные по ней силы; в последнем случае, выражая в ур-нии (16) § 7.

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{xy}\cos(\nu,y)+\tau_{xz}\cos(\nu,z)&=\Xi\\
\tau_{xy}\cos(\nu,x)+\sigma_y\cos(\nu,y)+\tau_{yz}\cos(\nu,z)&=\mathrm{H}\\
\tau_{xz}\cos(\nu,x)+\tau_{yz}\cos(\nu,y)+\sigma_z\cos(\nu,z)&=\mathrm{Z}
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

напряжения через деформации, получаем граничные условия для перемещений.

14. Диференциальные уравнения равновесия в напряжениях. Исключая перемещения из уравнений, связывающих напряжения и деформации, мы получим диференциальные уравнения равновесия, выраженные в напряжениях. Для этого отметим, что составляющие тензора деформации удовлетворяют следующим тождествам:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y},\quad 2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right\}\\
\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z},\quad 2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right\}\\
\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial x\partial y},\quad 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти так называемые *уравнения совместимости* Сен-Венана получаются из ур-ний (1) § 12; вывод их основывается на возможности менять порядок диференцирования при вычислении частных производных, например:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Ур-ния (1) выражают, что в деформированном теле имеет место геометрия Эвклида. Составляющие тензора кривизны Риманна-Кристоффеля должны при этом обратиться в нуль; это условие равносильно уравнениям совместимости, если ограничиться малыми перемещениями.[1] Из ур-ний (1) получаем диференциальные уравнения равновесия в напряжениях в виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2}-\frac{1}{m+1}\left\{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right\}&=2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}\\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z}-\frac{1}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z}&=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

и т. д. путем циклических перестановок.

Этим уравнениям напряжения можно придать более простой вид, если связать их с условиями равновесия. Проще однако обратиться к ур-ниям (12) § 11 и уравнениям равновесия в перемещениях [§ 13, ур-ние (2)].

Из уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x=\frac{1}{2G}\left\{\sigma_x-\frac{s}{m+1}\right\}, \quad (3)$$

беря оператор Лапласа от обеих частей, получаем:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x}=\frac{1}{2G}\left\{\Delta\sigma_x-\frac{\Delta s}{m+1}\right\}; \quad (4)$$

равным образом из ур-ния (2) § 13, диференцируя по x, найдем:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x}=-\frac{m}{m-2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x}-\frac{1}{G}\frac{\partial X}{\partial x}. \quad (5)$$

---

[1] Это замечание не будет понято читателем, не знакомым с тензорным исчислением. Для понимания последующего никакого значения оно иметь не будет. *Прим. ред.*

Приравнивая друг другу оба значения, найдем:

$$\Delta\sigma_x + \frac{2Gm}{m-2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_2} = -2\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\Delta s}{m+1} \tag{6}$$

или выражая Θ через s из ур-ния (13) § 11

$$\Delta\sigma_x + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -2\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\Delta s}{m+1}, \tag{7}$$

или, наконец, приняв во внимание ур-ние (4) § 13:

$$\Delta\sigma_x + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -2\frac{\partial X}{\partial x} - \\ - \frac{1}{m-1}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right\}. \tag{8}$$

Таким же образом получим и уравнения:

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = -\left\{\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right\}, \tag{9}$$

а также уравнения, получающиеся отсюда путем циклических перестановок.

Наиболее важное значение имеет случай постоянных массовых сил (например силы тяжести). Уравнения, получающиеся для этого случая, мы выпишем полностью:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\sigma_x + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0; \quad &&\Delta\tau_{xy} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = 0 \\ &\Delta\sigma_y + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 0; \quad &&\Delta\tau_{yz} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} = 0 \\ &\Delta\sigma_z + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0; \quad &&\Delta\tau_{zx} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial z \partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Складывая уравнения, написанные слева, получаем:

$$\Delta s = 0; \tag{11}$$

применяя теперь оператор Лапласа к ур-ниям (10) найдем:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\Delta\sigma_x = 0; \quad &&\Delta\Delta\tau_{xy} = 0 \\ &\Delta\Delta\sigma_y = 0; \quad &&\Delta\Delta\tau_{yz} = 0 \\ &\Delta\Delta\sigma_z = 0; \quad &&\Delta\Delta\tau_{zx} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

К этим уравнениям равновесия в напряжениях надо еще присоединить условия равновесия. Уравнения равновесия в напряжениях особенно удобны для применений в том случае, если на границе заданы поверхностные силы; если Ξ, H и Z — проекции этих сил, отнесенных к единице площади, то:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y) + \tau_{xz} \cos(\nu, z) &= \Xi \\ \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y, + \tau_{yz} \cos(\nu, z) &= \mathrm{H} \\ \tau_{xz} \cos(\nu, x) + \tau_{yz} \cos(\nu, y) + \sigma_z \cos(\nu, z) &= \mathrm{Z}.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

К случаю, когда заданы перемещения, мы вернемся ниже, когда будем разбирать отдельные задачи; граничные условия для уравнений (10) не могут быть здесь выражены в простой форме.

Необходимо отметить, что для шести составляющих тензора напряжения мы получаем в этом случае девять уравнений с частными производными, из которых шесть второго, а три первого порядка. Последние в известной степени заменяют недостающие граничные условия, так как при шести уравнениях второго порядка с частными производными мы могли бы ожидать, вообще говоря, не трех, как здесь, а шести граничных условий.

15. Уравнения движения упругого тела. Для получения уравнений движения упругого тела мы должны по принципу Даламбера прибавить к массовым силам силы инерции; проекции этих сил, отнесенные к единице объема, суть:

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, -\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, -\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \qquad (1)$$

где ρ — плотность (масса единицы объема).

Уравнения движения получат вид:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{t}^{(x)} + X \equiv \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \operatorname{div}\mathbf{t}^{(y)} + Y \equiv \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + Y &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \operatorname{div}\mathbf{t}^{(z)} = Z \equiv \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z &= \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

к ним надо еще присоединить уравнения, связывающие напряжения и деформации. Исключив из этих уравнений напряжения, мы получим основные уравнения движения в наиболее часто встречающемся в приложениях виде:

$$\left.\begin{aligned} G\left\{\Delta u+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right\}+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ G\left\{\Delta v+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right\}+Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ G\left\{\Delta w+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right\}+Z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

или в векторном виде

$$G\left\{\Delta \mathbf{u}+\frac{m}{m-2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}\right\}+\mathbf{K}=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}. \qquad (3a)$$

Чтобы ввести уравнения для напряжений, обратим прежде всего внимание на то, что ур-ния (2) § 14, выведенные из условий совместимости, остаются без изменений. К ним присоединяются еще уравнения, которые мы получаем, исключая при помощи диференцирования из ур-ний (2) этого параграфа составляющие перемещения. Так как эти уравнения до сих пор не нашли еще применения в специальных задачах, то мы не будем их выписывать здесь подробно, а удовольствуемся этим указанием.

V. ЭНЕРГИЯ УПРУГОГО ТЕЛА. [1]

16. Работа деформации. Как перемещения, испытываемые телом при упругой деформации, так и сопровождающие ее напряжения характеризуются определенными минимальными свойствами, связанными с понятием работы деформации. Работой деформации называется работа, которая должна быть затрачена для того, чтобы привести тело в состояние деформации; при уменьшении нагрузки ее можно получить обратно в виде работы же, или она превращается в кинетическую энергию возникающего движения. Чтобы вычислить работу деформации, выделим мысленно в каком-нибудь месте тела параллелепипед, ребра которого a, b, c параллельны главным осям напряжения, так что на грани этого параллелепипеда

---

[1] *Kirchhoff*, Vorlesungen über mathematische Physik, Bd 1, Vorlesung, 11, Leipzig, 1897.

действуют только нормальные напряжения σ_1, σ_2, σ_3. Если мы примем (изменив соответственно напряжения), что изменилось только главное удлинение ε_1 в направлении a и что оно возросло с ε_1 до $\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_1$, то работа, производимая главным напряжением на перпендикулярной этому напряжению грани, будет равна

$$\delta A = \sigma_1 bca\, \delta\varepsilon_1 = \sigma_1 \cdot \delta\varepsilon_1 \cdot abc. \tag{1}$$

Оба других главных удлинения ε_2 и ε_3 остаются при этом постоянными.

Поэтому

$$\frac{\partial A}{d\varepsilon_1} = abc\, \sigma_1 \tag{2}$$

и соответственно

$$\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_2} = abc\, \sigma_2; \quad \frac{\partial A}{\partial\varepsilon_3} = abc\, \sigma_3. \tag{3}$$

Подставляя для напряжений их значения из уравнений, связывающих напряжения и деформации [§ 11, ур-ние (14)] и интегрируя, получим (после деления на объем abc) работу $A(\varepsilon, \gamma)$ деформации, отнесенную к единице объема:

$$A(\varepsilon, \gamma) = G\left\{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2\right\}. \tag{4}$$

Чтобы, исходя из главных напряжений и главных удлинений, получить $A(\varepsilon, \gamma)$ через составляющие тензора деформации, отнесенные к произвольным осям X, Y и Z, вспомним, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ и $\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$ суть инварианты тензора деформации [§ 9, ур-ние (7)]:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \Theta$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2), \tag{5}$$

следовательно,

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \Theta^2 - 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1) = \Theta^2 - 2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x) + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2).$$

Таким образом, ур-ние (4) получит вид:

$$A(\varepsilon, \gamma) = G\left\{\frac{m-1}{m-2}\Theta^2 - 2\left(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)\right\}. \qquad (6)$$

Мы пишем здесь $A(\varepsilon, \gamma)$, чтобы обозначить, что работа деформации выражена через составляющие тензора деформации. Отметим далее, что производные работы деформации по составляющим деформации дают соответствующие составляющие тензора напряжения.[1]

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left\{\varepsilon_x + \frac{\Theta}{m-2}\right\} = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_x}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xy} = \frac{\partial A}{\partial \gamma_{xy}} \\ \sigma_y &= 2G\left\{\varepsilon_y + \frac{\Theta}{m-2}\right\} = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_y}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \frac{\partial A}{\partial \gamma_{yz}} \\ \sigma_z &= 2G\left\{\varepsilon_z + \frac{\Theta}{m-2}\right\} = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_z}; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} = \frac{\partial A}{\partial \gamma_{zx}}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Переходя теперь к вычислению работы деформации через составляющие тензора напряжения, заметим, что A, как однородная квадратичная форма составляющих тензора деформации, может быть по теореме **Эйлера** представлена в виде

$$A = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_x}\varepsilon_x + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_y}\varepsilon_y + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_z}\varepsilon_z + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{xy}}\gamma_{xy} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{yz}}\gamma_{yz} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{zx}}\gamma_{zx}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_y\sigma_y + \varepsilon_z\sigma_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \gamma_{yz}\tau_{yz} + \gamma_{zx}\gamma_{zx}\right\} \qquad (8)$$

Если подставить сюда для ε и γ их значения [по ур-нию (12) § 11], то A, выраженное через напряжения, получит вид

$$A(\sigma, \tau) = \frac{1}{4G}\left\{\frac{m}{m+1}s^2 - 2\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2\right)\right\} \qquad (9)$$

$$(s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z);$$

---

[1] Эти формулы были впервые установлены *Грином* (Math. Papers, London, 1871, стр. 243 ff.).

при этом аналогично тому, что мы имели выше [ур-ние (7)], производные по напряжениям дают соответствующие составляющие тензора деформации:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G}\left\{\sigma_x - \frac{s}{m+1}\right\} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \sigma_x}, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \tau_{xy}} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G}\left\{\sigma_y - \frac{s}{m+1}\right\} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \sigma_y}, & \gamma_{z} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \tau_{yz}} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G}\left\{\sigma_z - \frac{s}{m+1}\right\} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \sigma_z}, & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \tau_{zx}}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Так как энергия деформации всегда положительна, то из формулы (4) следует, что коэфициент поперечного сжатия m должен быть положительным и быть больше 2:

$$2 \leqslant m \leqslant \infty, \qquad (11)$$

а G очевидно должно быть положительным.

17. Основная формула энергии. Обратимся теперь к выводу весьма важной формулы, лежащей в основе всех базирующихся на рассмотрении энергии методов решения задач теории упругости; мы получим эту формулу, если в определенный момент, независимо от того, идет ли речь о равновесии или о движении, сравним работу деформации в том действительном состоянии движения или равновесия, которое установилось при данных условиях, с работой некоторого измененного состояния, близкого к действительному. Обозначим действительно имеющие место перемещения через u, v, w, а соответственные напряжения через σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}; эти напряжения находятся в равновесии внутри тела с массовыми силами X, Y, Z, а на поверхности его с поверхностными силами Ξ, H, Z. Работу деформации обозначим через

$$A(\varepsilon, \gamma) = \int\int\int \mathrm{A}(\varepsilon, \gamma)\, d\omega. \qquad (1)$$

Придадим теперь перемещениям вариации (изменения) δu, δv, δw; составляющие тензора деформации изменятся при этом на

$$\left.\begin{aligned} \delta\varepsilon_x &= \frac{\partial \delta u}{\partial x}, & \delta\gamma_{xy} &= \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \\ \delta\varepsilon_y &= \frac{\partial \delta v}{\partial y}, & \delta\gamma_{yz} &= \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \\ \delta\varepsilon_z &= \frac{\partial \delta w}{\partial z}, & \delta\gamma_{zx} &= \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и работа деформации измененного состояния получит выражение:

$$A(\varepsilon+\delta\varepsilon, \gamma+\delta\gamma) = \int\int\int \mathrm{A}(\varepsilon+\delta\varepsilon, \gamma+\delta\gamma)\, d\omega. \tag{3}$$

Если мы подставим в выражение работы деформации $\mathrm{A}(\varepsilon, \gamma)$, отнесенной к единице объема, вместо ε_x, ε_y и т. д. их измененные значения, то, разлагая в ряд Тэйлора, получим:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\varepsilon+\delta\varepsilon, \gamma+\delta\gamma) &= \mathrm{A}(\varepsilon, \gamma) + \\ &+ \left\{ \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \varepsilon_x}\delta\varepsilon_x + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \varepsilon_y}\delta\varepsilon_y + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \varepsilon_z}\delta\varepsilon_z + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \gamma_{xy}}\delta\gamma_{xy} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \gamma_{yz}}\delta\gamma_{yz} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \gamma_{zx}}\delta\gamma_{zx} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial \varepsilon_x^2}\delta\varepsilon_x^2 + 2\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y}\delta\varepsilon_x\delta\varepsilon_y + \ldots + \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial \gamma_{zx}^2}\delta\gamma_{zx}^2 . \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

При этом первый член есть значение работы деформации в неизмененном состоянии; последний же член приводится к виду:

$$\begin{aligned} G&\left\{ \frac{m-1}{m-2}(\delta\varepsilon_x+\delta\varepsilon_y+\delta\varepsilon_z)^2 - 2(\delta\varepsilon_x\delta\varepsilon_y+\delta\varepsilon_y\delta\varepsilon_z+ \right. \\ &+ \left. \delta\varepsilon_z\delta\varepsilon_x) + \frac{1}{2}(\delta\gamma_{xy}^2+\delta\gamma_{yz}^2+\delta\gamma_{zx}^2) \right\} = \mathrm{A}(\delta\varepsilon, \delta\gamma), \end{aligned} \tag{5}$$

иными словами, он равен той отнесенной к единице объема работе деформации, которая имела бы место, если бы тело подверглось только перемещениям δu, δv, δw. Существенным является то, что это выражение всегда положительно.

Если воспользоваться ур-нием (7) § 16 $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x$ и т. д., то средний член получит вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} &= \\ = \sigma_x\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \tau_{xy}\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \tau_{xz}\frac{\partial\delta u}{\partial z} &+ \\ + \tau_{yx}\frac{\partial\delta v}{\partial x} + \sigma_y\frac{\partial\delta v}{\partial y} + \tau_{yz}\frac{\partial\delta v}{\partial z} &+ \\ + \tau_{zx}\frac{\partial\delta w}{\partial x} + \tau_{zy}\frac{\partial\delta w}{\partial y} + \sigma_z\frac{\partial\delta w}{\partial z}&, \end{aligned} \tag{6}$$

или в векторном виде с векторами напряжения $\mathbf{t}^{(x)}$, $\mathbf{t}^{(y)}$, $\mathbf{t}^{(z)}$

$$= (\mathbf{t}^{(x)}, \operatorname{grad} \delta u) + (\mathbf{t}^{(y)}, \operatorname{grad} \delta v) + (\mathbf{t}^{(z)}, \operatorname{grad} \delta w). \qquad (7)$$

Тогда получим:

$$A(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma) = A(\varepsilon, \gamma) + \int\int\int \{ (\mathbf{t}^{(x)} \operatorname{grad} \delta u) + (\mathbf{t}^{(y)}, \operatorname{grad} \delta v) + (\mathbf{t}^{(z)}, \operatorname{grad} \delta w) \} d\omega + \int\int\int \mathrm{A}(\delta\varepsilon, \delta\gamma)\, d\omega. \qquad (8)$$

Преобразуем теперь средний интеграл, применяя теорему Гаусса; имеем:

$$\operatorname{div} \delta u\, \mathbf{t}^{(x)} = \delta u \operatorname{div} \mathbf{t}^{(x)} + (\mathbf{t}^{(x)}, \operatorname{grad} \delta u), \qquad (9)$$

откуда

$$\int\int\int (\mathbf{t}^{(x)}, \operatorname{grad} \delta u)\, d\omega = \int\int \delta u\, t_\nu^{(x)}\, do - \int\int\int \delta u \operatorname{div} \mathbf{t}^{(x)}\, d\omega. \qquad (10)$$

Далее, из условий равновесия имеем [§ 7, ур-ние (15)] на поверхности:

$$t_\nu^{(x)} = \Xi, \quad t_\nu^{(y)} = \mathrm{H}, \quad t_\nu^{(z)} = \mathrm{Z}, \qquad (11)$$

а внутри тела [§ 15, ур-ние (2)]:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{t}^{(x)} = -X + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \operatorname{div} \mathbf{t}^{(y)} = -Y + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \operatorname{div} \mathbf{t}^{(z)} = -Z + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

откуда, сделав аналогичные преобразования интегралов $\int\int\int (\mathbf{t}^{(y)}, \operatorname{grad} \delta v)\, d\omega$ и $\int\int\int (\mathbf{t}^{(z)}, \operatorname{grad} \delta w)\, d\omega$, получим

$$\int\int\int \{ (\mathbf{t}^{(x)}, \operatorname{grad} \delta u) + (\mathbf{t}^{(y)}, \operatorname{grad} \delta v) + (\mathbf{t}^{(z)}, \operatorname{grad} \delta w) \}\, d\omega = \int\int\int \left\{ \left(X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u + \left(Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v + \left(Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \right\} \delta\omega + \int\int (\Xi \delta u + \mathrm{H} \delta v + \mathrm{Z} \delta w)\, do, \qquad (13)$$

а следовательно

$$A(\varepsilon+\delta\varepsilon,\ \gamma+\delta\gamma)=A(\varepsilon,\ \gamma)+$$
$$+\int\int\int\left\{\left(X-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta u+\left(Y-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\delta v+\right.$$
$$\left.+\left(Z-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)dw\right\}d\omega+\int\int\left\{\Xi\delta u+\mathrm{H}\delta u+\right.$$
$$\left.+\mathrm{Z}\delta w\right\}do+A(\delta\varepsilon,\ \delta\gamma). \qquad (14)$$

Если мы ограничимся бесконечно малыми вариациями δu, δv, δw, то последний член будет высшего порядка малости; формула, выражающая приращение работы деформации, получит вид:

$$\delta A=A(\varepsilon+\delta\varepsilon,\ \gamma+\delta\gamma)-A(\varepsilon,\ \gamma)=$$
$$=\int\int\int\left\{\left(X-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta u+\left(Y-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\delta v+\right.$$
$$\left.+\left(Z-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\delta w\right\}d\omega+\int\int\{\Xi\delta u+\mathrm{H}\delta v+$$
$$+Z\delta w\}\,do+\text{полож. члены 2-го порядка.} \qquad (15)$$

Различные теоремы, вытекающие из этой формулы, можно получить, делая те или иные предположения относительно вариаций δu, δv, δw. Прежде чем перейти к этому, найдем также вариацию работы деформации в том случае, когда для сравнения привлекается не смежное состояние перемещения, как мы это делали в предыдущем случае, а смежное состояние напряжения. При этом мы заранее ограничимся случаем равновесия. Иными словами, мы рассматриваем состояние равновесия, для которого перемещения u, v, w, и соответственные напряжения σ_x, τ_{xy} и т. д. заданы; в связи с этим мы ставим вопрос, как изменяется работа деформации:

$$A(\sigma,\ \tau)=\int\int\int \mathrm{A}(\sigma,\ \tau)\,d\omega,$$

если мы переходим к смежному состоянию напряжения

$$\sigma_x+\delta\sigma_x,\ \sigma_y+\delta\sigma_y,\ldots,\ \tau_{yz}+\delta\tau_{yz}$$

и соответственно

$$\mathbf{t}^{(x)}+\delta\mathbf{t}^{x},\ \mathbf{t}^{(y)}+\delta\mathbf{t}^{(y)},\ \mathbf{t}^{(z)}+\delta\mathbf{t}^{(z)}.$$

При этом напряжения в измененном состоянии также должны внутри тела находиться в равновесии с массовыми силами X, Y, Z, как и напряжения, фактически имеющие место. Иными словами, не только:

$$\operatorname{div}\mathbf{t}^{(x)}+X=0,\ \operatorname{div}\mathbf{t}^{(y)}+Y=0,\ \operatorname{div}\mathbf{t}^{(z)}+Z=0, \tag{16}$$

но и

$$\operatorname{div}(\mathbf{t}^{(x)}+\delta\mathbf{t}^{(x)})+X=0,\ \operatorname{div}(\mathbf{t}^{(y)}+\delta\mathbf{t}^{(y)})+Y=0,$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{t}^{(z)}+\delta\mathbf{t}^{(z)})+Z=0, \tag{17}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{div}\delta\mathbf{t}^{(x)}=0,\ \operatorname{div}\delta\mathbf{t}^{(y)}=0,\ \operatorname{div}\delta\mathbf{t}^{(z)}=0. \tag{18}$$

Перейдем к выводу выражения работы деформации для измененного состояния; разлагая в ряд Тэйлора, получим:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}(\sigma+\delta\sigma,\ \tau+\delta\tau)=\mathrm{A}(\sigma,\ \tau)+\\
&+\left\{\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\sigma_x}\delta\sigma_x+\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\sigma_y}\delta\sigma_y+\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\sigma_z}\delta\sigma_z+\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\tau_{x}}\delta\tau_{xy}+\right.\\
&\left.+\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\tau_{yz}}\delta\tau_{yz}+\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\tau_{zx}}\delta\tau_{zx}\right\}+\\
&+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\mathrm{A}}{\partial\sigma_x^2}\delta\sigma_x^2+\ldots+2\frac{\partial^2\mathrm{A}}{\partial\sigma_x\partial\sigma_y}\delta\sigma_x\delta\sigma_y+\ldots\right.\\
&\left.+\frac{\partial^2\mathrm{A}}{\partial\tau_{zx}^2}\delta\tau_{xz}^2\right\}.
\end{aligned}\tag{19}$$

Последний член этого выражения представляет работу деформации $\mathrm{A}(\delta\sigma,\ \delta\tau)$ под действием только вариаций напряжения $\delta\sigma$, $\delta\tau$; пользуясь далее соотношениями $\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial\sigma_x}=\varepsilon_x$ и т. д. [§ 16, уравнение (10)], преобразуем средний член:

$$\left\{\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \sigma_x}\delta\sigma_x + \ldots + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \tau_{zx}}\delta\tau_{zx}\right\} = \{\varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y +$$

$$+ \varepsilon_z\delta\sigma_z + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy} + \gamma_{yz}\delta\tau_{yz} + \gamma_{zx}\delta\tau_{zx}\} =$$

$$= \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\delta\sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta\tau_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z}\delta\tau_{xz} + \frac{\partial v}{\partial x}\delta\tau_{yx} + \frac{\partial v}{\partial y}\delta\sigma_y +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial v}{\partial z}\delta\tau_{yz} + \frac{\partial w}{\partial x}\delta\tau_{zx} + \frac{\partial w}{\partial y}\delta\tau_{zy} + \frac{\partial w}{\partial z}\delta\sigma_z\right\} =$$

$$= \{(\delta\mathbf{t}^{(x)},\ \mathrm{grad}\, u) + (\delta\mathbf{t}^{(y)},\ \mathrm{grad}\, v) + (\delta\mathbf{t}^{(z)},\ \mathrm{grad}\, w)\} =$$

$$= \mathrm{div}\,(u\delta\mathbf{t}^{(x)} + v\delta\mathbf{t}^{(y)} + w\delta\mathbf{t}^{(z)}) - \{u\ \mathrm{div}\,\delta\mathbf{t}^{(x)} +$$

$$+ v\ \mathrm{div}\,\delta\mathbf{t}^{(y)} + w\ \mathrm{div}\,\delta\mathbf{t}^{(z)}\}. \qquad (20)$$

Слагаемое, заключенное в последние скобки, превращается в нуль в силу ур-ния (18). Для работы деформации при измененном состоянии получим:

$$A(\sigma + \delta\sigma,\ \tau + \delta\tau) = \int\int\int \mathrm{A}(\sigma + \delta\sigma,\ \tau + \delta\tau)\, d\omega =$$

$$= \int\int\int \mathrm{A}(\sigma,\ \tau)\, d\omega + \int\int\{u\delta t_\nu^{(x)} + v\delta t_\nu^{(y)} +$$

$$+ w\delta t_\nu^{(z)}\}\, do + \int\int\int \mathrm{A}(\delta\sigma,\ \delta\tau)\, d\omega. \qquad (21)$$

В этом выражении первый интеграл — работа деформации в первоначальном состоянии, третий интеграл — существенно положительная работа деформации, которая имела бы место при напряжениях $\delta\sigma_x$, $\delta\tau_{xy}$ и т. д., если бы действовали только они; подставим во второй член

$$\delta t_\nu^{(x)} = \delta\Xi \quad \delta t_\nu^{(y)} = \delta\mathrm{H}, \quad \delta t_\nu^{(z)} = \delta\mathrm{Z}, \qquad (22)$$

где $\delta\Xi$, $\delta\mathrm{H}$, $\delta\mathrm{Z}$ — вариации поверхностных сил, которые необходимо приложить, чтобы уравновесить измененные напряжения.

Тогда

$$A(\sigma + \delta\sigma,\ \tau + \delta\tau) = A(\sigma,\ \tau) + \int\int\{u\delta\Xi + v\delta\mathrm{H} +$$

$$+ w\delta\mathrm{Z}\}\, do + A(\delta\sigma,\ \delta\tau), \qquad (23)$$

и для бесконечно малых вариаций:

$$\delta A = A(\sigma + \delta\sigma,\ \tau + \delta\tau) - A(\sigma,\ \tau) = \int\int \{ u\delta\Xi + v\delta \mathrm{H} + w\delta \mathrm{Z} \}\, do, \tag{24}$$

причем опущенный член второго порядка, так называемая вторая вариация, как уже указано выше, существенно положителен.

18. Принцип минимума потенциальной энергии (принцип возможных перемещений). Состояние упруго-деформированного тела характеризуется определенными *минимальными свойствами*, тесно связанными с понятием работы деформации. Прежде всего рассмотрим *состояние равновесия*.

Согласно принципу возможных перемещений, малое и допускаемое связями перемещение системы из состояния равновесия может быть произведено без затраты работы. Применим этот принцип к телу, находящемуся в состоянии упругого равновесия; придадим точкам тела малые перемещения δu, δv, δw, выводящие его из состояния равновесия; работа, произведенная при этом *внешними* силами (массовыми и поверхностными), должна вызвать увеличение энергии деформации. Это как раз выражается ур-нием (15) § 17, если в нем для случая равновесия принять составляющие ускорения равными нулю:

$$\delta A = \int\int\int \{ X\delta u + Y\delta v + Z\delta w \}\, d\omega + \int\int \{ \Xi\delta u + \mathrm{H}\delta v + \mathrm{Z}\delta w \}\, do. \tag{1}$$

Если на поверхности упругого тела, находящегося в состоянии равновесия, заданы частью перемещения, частью же поверхностные силы, то *возможными*, с точки зрения принципа возможных перемещений, будут только такие перемещения, которые принимают на поверхности заданные значения u, v, w; иными словами, вариации δu, δv, δw должны быть приняты равными нулю на тех участках поверхности, на которых перемещения заданы, и в интеграле $\int\int \{ \Xi\delta u + \mathrm{H}\delta v + \mathrm{Z}\delta w \}\, do$ исключаются все те участки поверхности, на которых поверхностные силы неизвестны. Для остальных частей поверхности силы Ξ, H, Z заданы и остаются в измененном состоянии теми же, что и раньше; то же относится и к объемным силам; поэтому можно вынести знак вариации за знак интеграла; получаем:

$$\delta A = \delta \left\{ \int\int\int (Xu + Yv + Zw)\, d\omega + \right.$$
$$\left. + \int\int (\Xi u + \mathrm{H} v + \mathrm{Z} w)\, do \right\} \tag{2}$$

или

$$\delta \left\{ A - \int\int\int (Xu + Yv + Zw)\, d\omega - \right.$$
$$\left. - \int\int (\Xi u + \mathrm{H} v + \mathrm{Z} w)\, do \right\} = 0, \tag{3}$$

причем интегрирование по поверхности распространяется только на те части поверхности, на которых заданы силы. Выражение

$$\Pi = A - \int\int\int (Xu + Yv + Zw)\, d\omega -$$
$$- \int\int (\Xi u + \mathrm{H} v + \mathrm{Z} w)\, do \tag{4}$$

называют *потенциальной энергией* системы.

Ур-ние (3) примет вид

$$\delta \Pi = 0 \text{ или } \Pi = \min, \tag{5}$$

т. е. *из всех мыслимых систем перемещений, принимающих заданные значения на поверхности, перемещения, действительно имеющие место, сообщают потенциальной энергии минимальное значение.*

19. Принцип Кастильяно.[1] В то время как принцип наименьшей потенциальной энергии выражает минимальное свойство упругих перемещений, принцип Кастильяно дает формулировку минимального свойства напряжений. Рассмотрим вместе с действительно имеющим место состоянием напряжения смежное состояние, также удовлетворяющее условиям равновесия. Тогда согласно формуле (24) § 17 вариация работы деформации выразится формулой:

$$\delta A = \int\int (u\delta\Xi + v\delta\mathrm{H} + w\delta\mathrm{Z})\, do. \tag{1}$$

---

[1] *A. Castiliano,* Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, гл. 2, стр. 45. Турин, 1887.

Если мы предъявим к измененному состоянию требование, чтобы напряжения на тех участках, на которых заданы поверхностные силы, были с ними в равновесии, то вариации $\delta\Xi$, $\delta\mathrm{H}$, $\delta\mathrm{Z}$ превратятся на этих участках в нуль; интеграл по поверхности придется распространить только на те части поверхности, для которых перемещения заданы. Для этих участков мы в праве вынести знак вариации за знак интеграла, и ур-ние (1) примет вид

$$\delta\left\{A - \int\int (u\Xi + v\mathrm{H} + w\mathrm{Z})\,do\right\} = 0. \tag{2}$$

Выражение

$$A^* = A - \int\int (u\Xi + v\mathrm{H} + w\mathrm{Z})\,do \tag{3}$$

называют дополнительной работой (Ergänzungsarbeit). Получим

$$\delta A^* = 0 \text{ или } A^* = \min.$$

Отсюда мы приходим к выводу: *из всех систем напряжений, которые внутри упругого тела находятся в равновесии с заданными массовыми силами, а на поверхности его — с поверхностными силами, поскольку последние заданы, только та система имеет место в действительности, для которой дополнительная работа имеет минимум.*

Что мы здесь действительно имеем дело с минимумом, ясно из замечания в конце § 17, согласно которому вторая вариация существенно положительна.

20. Принцип Гамильтона. Пользуясь основной формулой (15) § 17, выведем теперь минимальное свойство перемещений в *подвижной упругой системе*; сравним для этого перемещения u, v, w, имеющие место в действительности, со смежной системой перемещений $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$; относительно последних будем предполагать, что для двух заданных моментов времени t_0 и t_1 они совпадают с действительными перемещениями, иными словами, для $t = t_0$ и $t = t_1$ вариации δu, δv, δw превращаются в нуль. Кроме того, на тех участках поверхности, на которых заданы перемещения, измененные перемещения принимают эти заранее заданные значения, так что и здесь вариации превратятся в нуль; в интегралах основной формулы останутся только *заданные* массовые и поверхностные силы. Вводя обозначение:

$$\delta W = \int\int\int (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, d\omega +$$
$$+ \int\int (\Xi\delta u + \mathrm{H}\delta v + \mathrm{Z}\delta w)\, do, \tag{1}$$

придадим указанной основной формуле вид:

$$\delta A = \delta W - \int\int\int \left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right) d\omega. \tag{2}$$

Отсюда, интегрируя по времени от t_0 до t_1, получим принцип Гамильтона:

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta A dt = \int_{t_0}^{t_1}\delta W dt - \int_{t_0}^{t_1}\int\int\int\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \right.$$
$$\left. + \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right) d\omega\, dt. \tag{3}$$

Преобразуем второй интеграл правой части, интегрируя по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int\int\int \rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right) dt\, d\omega =$$
$$= \left[\int\int\int \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta u + \frac{\partial v}{\partial t}\delta v + \frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right) d\omega\right]_{t_0}^{t_1} -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1}\int\int\int \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial\delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\delta w}{\partial t}\right) d\omega\, dt. \tag{4}$$

Первый объемный интеграл в правой части, зависящий только от границ t_0 и t_1, превращается в нуль, так как для t_0 и t_1 вариации δu, δv, δw превращаются в нуль. Второй интеграл — не что иное как интеграл по времени вариации кинетической энергии. Действительно, кинетическая энергия равна

$$T = \int\int\int \frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\} d\omega, \tag{5}$$

а, следовательно, ее вариация будет:

$$\delta T = \int\int\int \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) d\omega. \quad (6)$$

Получаем:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int^{t} \int\int\int \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right\} d\omega dt. \quad (7)$$

Ур-ние (3) получит теперь вид:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta (A - T) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt. \quad (8)$$

В левой части мы можем знак вариации вынести из-под знака интеграла; если кроме того перенести все члены в левую часть уравнения, то получим:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - A) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0. \quad (9)$$

Во втором интеграле мы можем знак вариации вынести из-под знака интеграла только в том случае, если внешние силы имеют потенциал: в самом деле, только при условии существования потенциала существует некоторая функция координат и перемещений W, вариация которой тождественна с δW. Тогда принцип Гамильтона получит форму:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - A + W) dt = 0. \quad (10)$$

Если мы, как и выше, назовем выражение $A - W$ полной *потенциальной* энергией П системы, то получим уравнение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) dt = 0; \quad (11)$$

иными словами, *интеграл* $\int\limits_{t_0}^{t_1}(T-\Pi)\,dt$ *принимает экстремальное значение в действительном движении системы в промежутке времени* (t_0 и t_1).

21. Теорема энергии. Чтобы получить теорему энергии, сравним перемещения в какой-нибудь момент времени с теми перемещениями, которые в тех же точках тела имеют место в действительности по истечении элемента времени dt. Сообразно этому заменим в основной формуле (15) § 17 вариации:

$$\delta u \text{ на } \frac{\partial u}{\partial t}\,dt,\ \delta v \text{ на } \frac{\partial v}{\partial t}\,dt,\ \delta w \text{ на } \frac{\partial w}{\partial t}\,dt. \tag{1}$$

Тогда в основной формуле

$$\begin{aligned}\delta A = \int\int\int (X\delta u + Ydv + Zdw)\,d\omega +\\ + \int\int (\Xi\,\delta u + \mathrm{H}\,\delta v + \mathrm{Z}\,\delta w)\,do -\\ - \int\int\int \rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\delta w\right)d\omega\end{aligned} \tag{2}$$

δA будет не что иное как $\frac{\partial A}{\partial t}\,dt$. Последний интеграл правой части есть приращение кинетической энергии T; в самом деле мы имеем:

$$T = \int\int\int \frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\}d\omega,$$

и, следовательно, на основании (1)

$$\begin{aligned}dT = \int\int\int \rho\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dt + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,dt +\right.\\ \left. + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,dt\right\}d\omega = \int\int\int \rho\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v +\right.\\ \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\delta w\right\}d\omega.\end{aligned} \tag{3}$$

Перенеся интеграл в левую часть, получим:

$$dA + dT = \int\int\int\left(X\frac{\partial u}{\partial t}dt + Y\frac{\partial v}{\partial t}dt + Z\frac{\partial w}{\partial t}dt\right)d\omega$$
$$+\int\int\left(\Xi\frac{\partial u}{\partial t}dt + \mathrm{H}\frac{\partial v}{\partial t}dt + \mathrm{Z}\frac{\partial w}{\partial t}dt\right)do, \qquad (4)$$

иными словами: приращение за промежуток времени dt работы деформации, сложенное с приращением кинетической энергии, равно работе, произведенной внешними силами за этот промежуток времени.

Это и есть теорема энергии для движущихся упругих систем.

22. Однозначность состояния равновесия. В заключение главы об энергии дадим доказательство следующего положения: если основные уравнения теории упругости имеют решение, то такое решение является единственным (вопросы *существования* решений освещены далее в § 50).

Исследуем сперва случай *равновесия*. Задано упругое тело, нагруженное массовыми и поверхностными силами; на поверхности тела известны либо силы, либо перемещения. Если существуют две системы решений u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 с соответствующими векторами напряжения $\mathfrak{t}_1^{(x)}$, $\mathfrak{t}_1^{(y)}$, $\mathfrak{t}_1^{(z)}$ и $\mathfrak{t}_2^{(x)}$, $\mathfrak{t}_2^{(y)}$, $\mathfrak{t}_2^{(z)}$, то оба эти решения должны удовлетворять уравнениям равновесия [§ 7, формула (14)]. Мы получили бы в таком случае:

$$\operatorname{div}\mathfrak{t}_1^{(x)} + X = 0,\ \operatorname{div}\mathfrak{t}_1^{(y)} + Y = 0,\ \operatorname{div}\mathfrak{t}_1^{(z)} + Z = 0 \qquad (1)$$

и

$$\operatorname{div}\mathfrak{t}_2^{(x)} + X = 0,\ \operatorname{div}\mathfrak{t}_2^{(y)} + Y = 0,\ \operatorname{div}\mathfrak{t}_2^{(z)} + Z = 0. \qquad (2)$$

Составив разности между обоими решениями и соответствующими им векторами напряжения

$$u = u_2 - u_1,\ v = v_2 - v_1,\ w = w_2 - w_1 \qquad (3)$$

$$\mathfrak{t}^{(x)} = \mathfrak{t}_2^{(x)} - \mathfrak{t}_1^{(x)},\ \mathfrak{t}^{(y)} = \mathfrak{t}_2^{(y)} - \mathfrak{t}_1^{(y)},\ \mathfrak{t}^{(z)} = \mathfrak{t}_2^{(z)} - \mathfrak{t}_1^{(z)}, \qquad (4)$$

мы убедимся, вычитая (1) из (2), что они удовлетворяют условиям равновесия при отсутствии массовых сил

$$\operatorname{div}\mathfrak{t}^{(x)} = 0,\ \operatorname{div}\mathfrak{t}^{(y)} = 0,\ \operatorname{div}\mathfrak{t}^{(z)} = 0. \qquad (5)$$

Точно так же из условий на поверхности, которым удовлетворяют эти решения:

$$t^{(x)}_{1\nu} = \Xi, \quad t^{(y)}_{1\nu} = \mathrm{H}, \quad t^{(z)}_{1\nu} = \mathrm{Z}, \tag{6}$$

$$t^{(x)}_{2\nu} = \Xi, \quad t^{(y)}_{2\nu} = \mathrm{H}, \quad t^{(z)}_{2\nu} = \mathrm{Z}, \tag{7}$$

получим вычитанием:

$$t^{(x)}_{\nu} = 0, \quad t^{(y)}_{\nu} = 0, \quad t^{(z)}_{\nu} = 0. \tag{8}$$

Это имеет место в тех точках поверхности, в которых заданы силы. Для точек, в которых заданы перемещения, имеем

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2, \tag{9}$$

откуда следует, что

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \tag{10}$$

Итак, u, v, w есть система перемещений, для которой массовые силы превращаются в нуль внутри тела; на поверхности же его превращаются в нуль либо поверхностные силы, либо перемещения. Докажем теперь, что и все составляющие тензора деформации превращаются при этом в нуль. В этом легко убедиться, если предварительно доказать, что работа деформации при этих условиях превращается в нуль. Согласно формуле (8) § 16 удельная работа деформации (отнесенная к единице объема) имеет вид:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\left\{ \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} \right\} \tag{11}$$

или в векторных обозначениях

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\left\{ (\mathbf{t}^{(x)}, \operatorname{grad} u) + (\mathbf{t}^{(y)}, \operatorname{grad} v) + (\mathbf{t}^{(z)}, \operatorname{grad} w) \right\} \tag{12}$$

или соответственно

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} = \frac{1}{2}\Big\{ &\operatorname{div}(u\mathbf{t}^{(x)} + v\mathbf{t}^{(y)} + w\mathbf{t}^{(z)}) - (u \operatorname{div}\mathbf{t}^{(x)} + \\ &+ v \operatorname{div}\mathbf{t}^{(y)} + w \operatorname{div}\mathbf{t}^{(z)}) \Big\} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Но согласно (5)

$$\operatorname{div}\mathbf{t}^{(x)} = \operatorname{div}\mathbf{t}^{(y)} = \operatorname{div}\mathbf{t}^{(z)} = 0,$$

и мы получаем:

$$A = \int\int\int \mathrm{A}\, d\omega = \frac{1}{2}\int\int\int \operatorname{div}\left(u\mathrm{t}^{(x)} + \right.$$

$$\left. + v\mathrm{t}^{(y)} + w\mathrm{t}^{(z)}\right) d\omega, \tag{14}$$

проинтегрировав по теореме Гаусса, найдем:

$$A = \frac{1}{2}\int\int \left(ut_{\nu}^{(x)} + vt_{\nu}^{(y)} + wt_{\nu}^{(z)}\right) do. \tag{15}$$

Но на поверхности превращаются в нуль либо перемещения u, v, w, либо поверхностные напряжения, т. е. $t_{\nu}^{(x)}$, $t_{\nu}^{(y)}$, $t_{\nu}^{(z)}$; окончательно найдем:

$$A = \int\int\int \mathrm{A} d\omega = 0.$$

Удельная работа деформации Α есть положительно-определенная квадратичная форма ее аргументов; это значит, что она может принимать только положительные значения при каких бы то ни было вещественных значениях аргументов. Если должен превратиться в нуль интеграл (15), то и интегрируемая величина должна стать тождественно равной нулю, а это, как только-что отмечено, возможно только в том случае, когда все составляющие тензора деформации превращаются в нуль. Перемещения u, v, w представляют в таком случае движение тела, не сопровождающееся деформацией; при таком движении линейные элементы сохраняют свою длину; это есть не что иное как вращение твердого тела, связанное с поступательным перемещением. Если кроме того для некоторых точек поверхности перемещения заданы заранее, то $u = v = w = 0$, так как движение тела, как твердого, не может иметь места, и следовательно равенство $u = v = w = 0$ должно иметь силу для всех точек; иными словами:

$$u_1 = u_2;\ v_1 = v_2;\ w_1 = w_2. \tag{16}$$

Если заранее заданы *только* поверхностные силы, то после деформации возможно только движение тела как твердого. С этой понятной оговоркой получим и для этого случая

$$u_1 = u_2,\ v_1 = v_2,\ w_1 = w_2,$$

иными словами, в действительности может существовать только одно решение основных уравнений теории упругости.

23. Однозначность процесса движения. Это доказательство примет еще более простой вид в случае *движения*. Оно является прямым выводом из теоремы энергии. Если упругое тело приходит в движение в момент времени $t=0$ из заданного начального положения

$$t=0,\ u=U,\ v=V,\ w=W \tag{1}$$

с заданной скоростью

$$t=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}=U',\ \frac{\partial v}{\partial t}=V',\ \frac{\partial w}{\partial t}=W'. \tag{2}$$

под действием заданных массовых X, Y, Z и поверхностных сил Ξ, H, Z, то разность двух решений u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w

$$u=u_2-u_1,\ v=v_2-v_1,\ w=w_2-w_1 \tag{3}$$

является решением диференциальных уравнений, если в них опустить массовые силы. Равным образом, для этого движения должны исчезнуть и поверхностные силы, поскольку они были заранее заданы; на участках же поверхности, на которых заранее заданы перемещения, имеет место равенство $u=v=$ $=w=0$. Написав теорему энергии

$$\frac{dA}{dt}+\frac{dT}{dt}=\int\int\int\left(X\frac{\partial u}{\partial t}+Y\frac{\partial u}{\partial t}+Z\frac{\partial w}{\partial t}\right)d\omega+ \\ +\int\int\left(\Xi\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{H}\frac{\partial v}{\partial t}+\mathrm{Z}\frac{\partial w}{\partial t}\right)do, \tag{4}$$

увидим, что правая часть уравнения превращается в нуль, потому что в объемном интеграле превращаются в нуль силы, а в поверхностном либо силы, либо частные производные перемещений. Таким образом

$$\frac{dA}{dt}+\frac{dT}{dt}=0, \tag{5}$$

или

$$A+T=\mathrm{const}. \tag{6}$$

Эта постоянная равна нулю, так как в момент времени $t=0$

$$u=v=w=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0,$$

откуда следует, что и

$$A+T=0. \tag{7}$$

Но ни работа деформации, ни кинетическая энергия не могут принимать отрицательных значений. Если их сумма должна равняться нулю, то и каждая из них в отдельности должна превратиться в нуль. Но кинетическая энергия

$$T=\int\int\int\frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\}d\omega$$

может, очевидно, превратиться в нуль только в том случае, если в любой момент и на любом участке

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0,\ \frac{\partial v}{\partial t}=0,\ \frac{\partial w}{\partial t}=0, \tag{8}$$

а отсюда следует, что

$$u=0,\ v=0,\ w=0, \tag{9}$$

так как при

$$t=0 \text{ и } u=v=w=0.$$

Получаем, таким образом

$$u_2=u_1,\ v_2=v_1,\ w_2=w_1. \tag{10}$$

Итак, возможно существование только одного решения уравнений движения теории упругости.

VI. ПРИМЕНЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПРИНЦИПОВ К СОСТАВЛЕНИЮ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ.

24. Криволинейные координаты. Во многих случаях является целесообразным заменить декартовы координаты криволинейными; например, при наличии осевой и шаровой симметрии — цилиндрические и сферические координаты являются наиболее подходящими при решении задач. Чтобы провести наиболее простым образом преобразование основных уравнений, выразим сначала составляющие тензора деформации непосредственно в криволинейных координатах (ограничиваясь случаем ортогональности их); далее, при помощи минимальных принципов сформулируем условия равновесия.

Пусть положение некоторой точки задается параметрами (криволинейными координатами) α_1, α_2, α_3. Если поверхности $\alpha_1=\mathrm{const}$, $\alpha_2=\mathrm{const}$, $\alpha_3=\mathrm{const}$ взаимно ортогональны, то, выражая линейный элемент в криволинейных координатах, получим:

$$dl^2 = \sum g_{hh} d\alpha_h^2. \tag{1}$$

Обозначим координаты какой-либо точки после деформации через

$$\alpha_1 + \varphi_1,\quad \alpha_2 + \varphi_2,\quad \alpha_3 + \varphi_3; \tag{2}$$

если ограничиться случаем малых перемещений, то перемещения в направлении трех координатных кривых будут

$$u_1 = \sqrt{g_{11}}\varphi_1,\quad u_2 = \sqrt{g_{22}}\varphi_2,\quad u_3 = \sqrt{g_{33}}\varphi_3. \tag{3}$$

Тензор деформации определяется теми изменениями, которые получают при деформации коэфициенты линейного элемента. Если две соседних точки до деформации имеют координатные разности $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, $d\alpha_3$, а после деформации $d\alpha_1 + d\varphi_1$, $d\alpha_2 + d\varphi_2$, $d\alpha_3 + d\varphi_3$, то квадрат линейного элемента после деформации будет равен:

$$d\lambda^2 = \sum g_{hh}(\alpha_1 + \varphi_1;\ \alpha_2 + \varphi_2;\ \alpha_3 + \varphi_3)(d\alpha_h + d\varphi_h)^2. \tag{4}$$

Ограничиваясь малыми деформациями, подставим сюда

$$g_{hh}(\alpha_1 + \varphi_1;\ \alpha_2 + \varphi_2;\ \alpha_3 + \varphi_3) = g_{hh} + \sum_\rho \frac{\partial g_{hh}}{\partial \alpha_\rho}\varphi_\rho \tag{5}$$

и

$$(d\alpha_h + d\varphi_h)^2 = \left(d\alpha_h + \sum_k \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_k} d\alpha_k\right)^2 =$$

$$= d\alpha_h^2 + 2\sum_k \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_k} d\alpha_k d\alpha_h. \tag{6}$$

Тогда для коэфициентов линейного элемента после деформации получим:

$$d\lambda^2 = \sum_h \sum_k G_{hk} d\alpha_h d\alpha_k, \tag{7}$$

где для сокращения письма введено обозначение:
для $h = k$:

$$G_{hk} = g_{hh} + \sum_\rho \frac{\partial g_{hh}}{\partial \alpha_\rho}\varphi_\rho + 2g_{hh}\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_h}, \tag{8}$$

для $h \neq k$:

$$G_{hk} = g_{hh} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_k} + g_{kk} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha_h}.$$

Теперь по G_{hk} и g_{hk} легко вычислить удлинения и изменения углов для малых деформаций. Линейный элемент $\overline{OP}$ в направлении возрастания α_1 имеет до деформации длину $\sqrt{g_{11}} d\alpha_1$, после деформации длину

$$\sqrt{G_{11}} d\alpha_1 = \sqrt{g_{11} + (G_{11} - g_{11})}\, d\alpha_1.$$

Следовательно, относительное удлинение ε_1 этого элемента будет:

$$\frac{\sqrt{g_{11} + (G_{11} - g_{11})} - \sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{11}}} \approx \frac{1}{2} \frac{G_{11} - g_{11}}{g_{11}}. \qquad (9)$$

Рассматривая далее, кроме линейного элемента $\overline{OP}$, еще второй элемент $\overline{OQ}$, взятый в направлении возрастающей координаты α_2, и применяя к прямоугольнику $OPQS$ (§ 8) теорему косинусов, получим для (первоначально прямого) угла ϑ_{12} между координатными направлениями 1 и 2 выражение:

$$\cos \vartheta_{12} = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11} G_{22}}} \approx \frac{G_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{12}}}. \qquad (10)$$

Если через γ_{12} обозначить сдвиг, т. е. весьма малое изменение угла между координатными линиями, то $\cos \vartheta_{12} = \cos (90^\circ - \gamma_{12}) = \sin \gamma_{12} \approx \gamma_{12}$. Подставляя в (9) и (10) значения (8), получим для удлинений и сдвигов следующие формулы:

$$\varepsilon_h = \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_h} + \frac{1}{2 g_{hh}} \sum_{\rho} \frac{\partial g_{hh}}{\partial \alpha_\rho} \varphi_\rho, \qquad (11)$$

$$\gamma_{hk} = \frac{1}{\sqrt{g_{hh} g_{kk}}} \left\{ g_{hh} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_k} + g_{kk} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha_h} \right\}. \qquad (12)$$

Напряжения в случае криволинейных координат определяются так же, как и для декартовых, а именно путем задания составляющих напряжения (сил, отнесенных к единице поверхности), действующих на площадки $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$, $\alpha_3 = \text{const}$; при этом, как и раньше, мы руководствуемся правилом, что напряжения положительны, если, будучи отнесены к малому параллелепипеду, они действуют в направлении возрастающих координат на грань, внешняя нормаль к которой также совпадает с направлением возрастания соответствующей координаты. Уравнения, связывающие напряжения и деформации, будут те же, что и выше, а именно[1] [(см. § 11, ур-ния (12) и (14)]:

$$\varepsilon_h = \frac{1}{2G}\left\{\sigma_h - \frac{s}{m+1}\right\}; \quad \gamma_{hk} = \frac{1}{G}\tau_{hk} \tag{13}$$

или, разрешив относительно напряжений:

$$\sigma_h = 2G\left\{\varepsilon_h + \frac{\Theta}{m-2}\right\}; \quad \tau_{hk} = G\gamma_{hk}, \tag{14}$$

причем, как и выше,

$$\left.\begin{array}{ll} s = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 & \text{сумма нормальных напряжений} \\ \Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 & \quad \text{»} \quad \text{удлинений.} \end{array}\right\} \tag{15}$$

Остается еще вывести условия равновесия; воспользуемся для этого принципом минимума потенциальной энергии.

Пусть $A(\varepsilon, \gamma)$ — удельная работа деформации; она выражается в составляющих деформации так же, как и в случае декартовых [§ 16, формула (6)]:

$$A(\varepsilon, \gamma) = G\left\{\frac{m-1}{m-2}\Theta^2 - 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2)\right\}; \tag{16}$$

напряжения являются производными от A по соответствующим составляющим деформации:

$$\sigma_h = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_h}, \quad \tau_{hk} = \frac{\partial A}{\partial \gamma_{hk}}; \tag{17}$$

Если, далее, в направлении координатных линий действуют заданные массовые силы X_1, X_2, X_3 (отнесенные к единице объема), то потенциальная энергия состоит из работы дефор-

---

[1] σ_1, σ_2, σ_3 обозначают здесь не главные напряжения, а составляющие напряжения на площадках $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$, $\alpha_3 = \text{const}$; равным образом ε_1, ε_2, ε_3 — не главные удлинения, а удлинения вдоль координатных линий.

мации и отрицательной работы сил X_1, X_2, X_3 при перемещениях $u_1=\sqrt{g_{11}}\varphi_1$, $u_2=\sqrt{g_{22}}\varphi_2$, $u_3=\sqrt{g_{33}}\varphi_3$. Элемент объема имеет выражение

$$d\omega=\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3. \tag{18}$$

Выражение для потенциальной энергии получит вид

$$\Pi=\int\int\int\left\{A-\sum_h X_h\varphi_h\sqrt{g_{hh}}\right\}\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \tag{19}$$

Если на поверхности заданы заранее перемещения, то П имеет минимальное значение, т. е. вариация этого интеграла должна превратиться в нуль при условии, что все вариации перемещений, или, что то же самое, изменения координат $\delta\varphi_h$, превращаются на поверхности в нуль. Вариация $\delta\Pi$ получит вид:

$$\delta\Pi=\int\int\int\left\{\delta A-\sum_h X_h\sqrt{g_{hh}}\delta\varphi_h\right\}\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \tag{20}$$

В этой формуле вариация δA удельной работы деформации будет:

$$\delta A=\sum_\nu\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_\nu}\delta\varepsilon_\nu+\frac{1}{2}\sum_\mu\sum_\nu\frac{\partial A}{\partial\gamma_{\mu\nu}}\delta\gamma_{\mu\nu} \tag{21}$$

или, согласно (17):

$$\delta A=\sum_\nu\sigma_\nu\delta\varepsilon_\nu+\frac{1}{2}\sum_\mu\sum_\nu\tau_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}, \tag{22}$$

где коэфициент $\frac{1}{2}$ перед двойной суммой $\sum\sum\tau_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}$ поставлен потому, что в ней каждый член повторяется дважды. Получим:

$$\delta\Pi=\int\int\int\left\{\sum_\nu\sigma_\nu\delta\varepsilon_\nu+\frac{1}{2}\sum_\mu\sum_\nu\tau_{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu}-\right.$$
$$\left.-\sum_h X_h\sqrt{g_{hh}}\delta\varphi_h\right\}\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \tag{23}$$

Подставляя сюда для составляющих деформации и их вариаций выражения (11) и (12), получим:

$$\delta\Pi=\int\int\int\Bigg\{\sum_{\nu}\sigma_{\nu}\frac{\partial\delta\varphi_{\nu}}{\partial\alpha_{\nu}}+\frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\sigma_{\nu}}{g_{\nu\nu}}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial\alpha_{\mu}}\delta\varphi_{\mu}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\tau_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}}}\left(g_{\mu\mu}\frac{\partial\delta\varphi_{\mu}}{\partial\alpha_{\nu}}+g_{\nu\nu}\frac{\partial\delta\varphi_{\nu}}{\partial\alpha_{\mu}}\right)-$$

$$-\sum_{h}X_{h}\sqrt{g_{hh}}\,\delta\varphi_{h}\Bigg\}\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,d\alpha_{1}d\alpha_{2}d\alpha_{3}. \qquad (24)$$

Это выражение можно упростить, если обратить внимание, что

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\tau_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}}}g_{\mu\mu}\frac{\partial\delta\varphi_{\mu}}{\partial\sigma_{\nu}}=\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\tau_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}}}g_{\nu\nu}\frac{\partial\delta\varphi_{\nu}}{\partial\alpha_{\mu}}, \qquad (25)$$

так как обе суммы при замене значков суммирования переходят одна в другую. Итак:

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\tau_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}}}\left\{g_{\mu\mu}\frac{\partial\delta\varphi_{\mu}}{\partial\alpha_{\nu}}+g_{\nu\nu}\frac{\partial\delta\varphi_{\nu}}{\partial\alpha_{\mu}}\right\}=$$

$$=\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\tau_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}gg_{\nu\nu}}}g_{\mu\mu}\frac{\partial\delta\varphi_{\mu}}{\partial\alpha_{\nu}}. \qquad (26)$$

Обозначим далее для сокращения $\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}$ через Δ и произведем почленное умножение на это выражение. Наконец, напишем в первой сумме h вместо ν, в двойных суммах h вместо μ. Тогда ур-ние (24) примет вид:

$$\delta\Pi=\int\int\int\Bigg\{\sum_{h}\sigma_{h}\Delta\frac{\partial\delta\varphi_{h}}{\partial\alpha_{h}}+\frac{1}{2}\sum_{h}\sum_{\nu}\frac{\sigma_{\nu}\Delta}{g_{\nu\nu}}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial\alpha_{h}}\delta\varphi_{h}+$$

$$+\sum_{\nu}\sum_{h}\frac{\tau_{\nu h}\Delta g_{hh}}{\sqrt{g_{\nu\nu}g_{hh}}}\frac{\partial\delta\varphi_{h}}{\partial\alpha_{\nu}}-$$

$$-\sum_{h}X_{h}\Delta\sqrt{g_{hh}}\,\delta\varphi_{h}\Bigg\}d\alpha_{1}d\alpha_{2}d\alpha_{3}. \qquad (27)$$

Интегрируя по частям члены, содержащие частные производные вариаций $\delta\varphi_{h}$, мы освободимся от этих частных производных. Поверхностные интегралы при этом обратятся в нуль, так как вариации $\delta\varphi_h$ на поверхности равны нулю. Остается:

$$\delta\Pi=\int\int\int\Big\{-\sum_h\delta\varphi_h\frac{\partial\sigma_h\Delta}{\partial\alpha_h}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_h\sum_\nu\frac{\sigma_\nu\Delta}{g_{\nu\nu}}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial\alpha_h}\delta\varphi_h-\sum_h\sum_\nu\delta\varphi_h\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left(\frac{\tau_{\nu h}\Delta g_{hh}}{\sqrt{g_{\nu\nu}g_{hh}}}\right)-$$

$$-\sum_h\delta\varphi_h X_h\Delta\sqrt{g_{hh}}\Big\}d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \tag{28}$$

Вынося за скобки $-\delta\varphi_h$, получим:

$$\delta\Pi=-\int\int\int\sum_h\delta\varphi_h\Big\{\frac{\partial\sigma_h\Delta}{\partial\alpha_h}-\frac{1}{2}\sum_\nu\frac{\sigma_\nu\Delta}{g_{\nu\nu}}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial\alpha_h}+$$

$$+\sum_\nu\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left(\frac{\tau_{\nu h}\Delta g_{hh}}{\sqrt{g_{\nu\nu}g_{hh}}}\right)+X_h\Delta\sqrt{g_{hh}}\Big\}d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \tag{29}$$

Чтобы это выражение для любого $\delta\varphi_h$ превратилось в нуль подинтегральная функция должна обращаться в нуль при любом h:

$$\frac{\partial\sigma_h\Delta}{\partial\alpha_h}-\frac{1}{2}\sum_\nu\frac{\sigma_\nu\Delta}{g_{\nu\nu}}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial\alpha_h}+$$

$$+\sum_\nu\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left(\frac{\tau_{\nu h}\Delta g_{hh}}{\sqrt{g_{\nu\nu}g_{hh}}}\right)+X_h\Delta\sqrt{g_{hh}}=0. \tag{30}$$

Это и будут искомые условия равновесия.

25. Примеры. Цилиндрические и полярные координаты.

В качестве примеров рассмотрим цилиндрические и полярные координаты.

Возьмем цилиндрические координаты r, ϑ, z и обозначим перемещения в направлении возрастающих координат r, ϑ, z через u, v, w. В этом случае

$$\alpha_1=r,\ \alpha_2=\vartheta,\ \alpha_3=z. \tag{1}$$

Линейный элемент имеет вид:

$$dl^2=dr^2+r^2d\vartheta^2+dz^2, \tag{2}$$

откуда

$$g_{11}=1,\ g_{22}=r,\ g_{33}=1,\ \Delta=r. \tag{3}$$

Выражая изменения координат через перемещения [§ 24, ур-ния (3)], получим:

$$\varphi_1 = u,\ \varphi_2 = \frac{v}{r},\ \varphi_3 = w; \tag{4}$$

в силу ур-ний (11) и (12) предыдущего параграфа составляющие тензора деформации будут:

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r}, & \gamma_{r\vartheta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} \\ \varepsilon_\vartheta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \vartheta} + \dfrac{u}{r}, & \gamma_{\vartheta z} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \vartheta} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zr} = \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{array}\right\} \tag{5}$$

Условия равновесия, согласно ур-нию (30) § 24, получат вид

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + X_r = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial \tau_z}{\partial z} + \dfrac{2\tau_{r\vartheta}}{r} + X_\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} + X_z = 0. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Возьмем теперь *полярные координаты в пространстве* r (радиус), λ (географическая долгота), ϑ (полюсное расстояние, отсчитываемое от южного полюса; имеем:

$$\alpha_1 = r,\quad \alpha_2 = \lambda,\quad \alpha_3 = \vartheta. \tag{7}$$

Линейный элемент получит вид:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\lambda^2 + r^2 d\vartheta^2. \tag{8}$$

Следовательно

$$g_{11} = 1,\quad g_{22} = r^2 \sin^2\vartheta,\quad g_{33} = r^2,\quad \Delta = r^2 \sin \vartheta, \tag{9}$$

и изменения координат примут вид:

$$\varphi_1 = u,\quad \varphi_2 = \frac{v}{r \sin \vartheta},\quad \varphi_3 = \frac{w}{r}. \tag{10}$$

Отсюда получаем составляющие тензора деформации

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\
\varepsilon_\lambda &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{u}{r} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{w}{r} \\
\varepsilon_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\vartheta} + \frac{u}{r} \\
\gamma_{r\lambda} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\
\gamma_{\lambda\vartheta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\vartheta} - \frac{v}{r}\operatorname{ctg}\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial w}{\partial\lambda} \\
\gamma_{\vartheta r} &= \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

и условия равновесия будут:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\tau_{r\lambda}}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial\vartheta} + \\
&+ \frac{2\sigma_r - \sigma_\lambda - \sigma_\vartheta + \tau_{r\vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta}{r} + X_r = 0 \\
&\frac{\partial\tau_{\lambda r}}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\lambda\vartheta}}{\partial\vartheta} + \\
&+ \frac{3\tau_{r\lambda} + 2\tau_{\lambda\vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta}{r} + X_\lambda = 0 \\
&\frac{\partial\tau_{\vartheta r}}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\tau_{\vartheta\lambda}}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial\vartheta} + \\
&+ \frac{(\sigma_r - \sigma_\lambda)\operatorname{ctg}\vartheta + 3\tau_{\vartheta r}}{r} + X_\vartheta = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

26. Принцип составления приближенных уравнений прикладной теории упругости. Для таких упругих тел, размеры которых в одном или двух измерениях значительно превосходят другие, например для струны, балки, мембраны, пластинки или оболочки, в прикладной теории упругости [1]

---

[1] См. например *А. и L. Fёppl*, Drang und Zwang, 2 тома, München. 1924. 1928, первый том этого труда имеется в русском переводе (*А. и Л. Феппль*, Сила и деформация. ГТТИ, 1933); *С. П. Тимошенко и Дж. Лессельс*, Прикладная теория упругости. Ленинград, ГНТИ.

выработан ряд особых приемов составления уравнений равновесия и движения, благодаря которым в силу специальных допущений эти уравнения принимают упрощенную форму. Все эти приемы могут быть рассматриваемы с одной и той же точки зрения, если исходить из минимальных принципов. Вышеупомянутые вспомогательные допущения представляют собою в этом случае не что иное как упрощенную формулировку выражения, к которому приводится работа деформации, в величинах, определяющих геометрическую форму деформированного тела; в каждом отдельном случае основные уравнения получаются при этом подстановкой в формулировку принципа минимума упрощенного выражения для работы деформации. С этой точки зрения мы и подвергаем здесь разбору важнейшие относящиеся сюда случаи.

27. Равновесие и колебания струны. Струна — это нитевидное упругое тело, длина которого настолько превышает поперечные размеры, что это тело оказывает сколько-нибудь заметное сопротивление только изменению его длины. Пусть длина струны l. Струна натянута приложенной к ней силой S и закреплена в начале и в конце. Примем за ось X прямую линию, с которой совпадает натянутая, не имеющая никаких других нагрузок струна, и поместим начало координат в одном из ее концов. Вычислим работу, необходимую для того, чтобы сообщить струне поперечное отклонение. Результатом этой работы должно быть удлинение отдельных элементов (ds) струны. Элемент ds находится под действием продольного натяжения S; если длину этого элемента после деформации обозначим через ds', то работа силы S будет:

$$S(ds' - ds).$$

Следует отметить, что дополнительная сила, вызывающая удлинение, производит также некоторую работу; но этой работой можно по сравнению с работой силы S пренебречь; иными словами, дополнительное натяжение является незначительным по сравнению с начальным. Таким образом, работа деформации для малых поперечных отклонений после интегрирования по всей длине струны получит простой вид;

$$A = S\ (l' - l), \qquad (1)$$

где l — длина натянутой струны в недеформированном состоянии, l' — ее длина в деформированном состоянии. Если обозначить поперечные отклонения через v и w, причем оси Y

и Z перпендикулярны к оси X и имеют произвольное направление, то

$$l' = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}\, dx, \tag{2}$$

и следовательно, ограничиваясь малыми отклонениями:

$$A = S(l' - l) = \frac{S}{2} \int_0^l \{ v'^2 + w'^2 \}\, dx. \tag{3}$$

Допустим теперь, что силы, действующие на струну в поперечном направлении, будучи отнесены к единице длины струны, равны p *кг/см* в направлении Y, q *кг/см* в направлении Z. Пусть отклонения под действием этих сил будут $v(x)$ и $w(x)$. Из принципа возможных перемещений следует, что при бесконечно малом отклонении δv и δw от указанного положения вариация работы деформации должна равняться работе, произведенной силами p и q; но вариация работы деформации равна:

$$\delta A = S \int_0^l \{ v'\delta v' + w'\delta w' \}\, dx, \tag{4}$$

а работа внешних сил:

$$\int_0^l \{ p\delta v + q\delta w \}\, dx. \tag{5}$$

Согласно принципу возможных перемещений для произвольных δv и δw имеем:

$$S \int_0^l \{ v'\delta v' + w'\delta w' \}\, dx = \int_0^l [p\delta v + q\delta w]\, dx. \tag{6}$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^l [v'\delta v' + w'\delta w']\, dx = [v'\delta v + w'\delta w]_0^l -$$

$$- \int_0^l [v''\delta v + w''\delta w]\, dx \tag{7}$$

Первый член обращается в нуль, так как струна закреплена в обоих концах, вследствие чего δv и δw нужно принять равными нулю при $x=0$ и при $x=l$. Как выражение принципа возможных перемещений получим:

$$-S\int_0^l \{v''\delta v + w''\delta w\}\,dx = \int_0^l \{p\delta v + q\delta w\}\,dx. \qquad (8)$$

Чтобы это имело место при любых δv и δw, должны иметь место равенства:

$$Sv'' = -p, \qquad Sw'' = -q. \qquad (9)$$

К этим диференциальным уравнениям равновесия струны надо присоединить еще граничные условия:

$$v(0) = , \quad v(l) = 0; \quad w(0) = 0, \quad w(l) = 0. \qquad (10)$$

Таким образом, уравнения для направлений Y и Z совершенно независимы друг от друга; силы в направлении Y вызывают деформации только в этом направлении; так же обстоит и с направлением Z.

Уравнения движения можно было бы вывести из принципа Гамильтона, но значительно проще будет воспользоваться так называемым принципом Даламбера, согласно которому для получения уравнений движения нужно к внешним силам присоединить силы инерции. Если ρ — масса струны, отнесенная к единице длины, то силы инерции, отнесенные к единице длины струны, будут

$$-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad -\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (11)$$

и уравнения движения получат вид:

$$S\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -p + \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -q + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (12)$$

28. Уравнение равновесия и колебания мембраны.

Мембраной называется тело, имеющее форму пластинки, толщина которой столь мала по сравнению с прочими размерами, что сопротивляемостью этого тела изгибу можно пренебречь по сравнению с сопротивляемостью силам, действующим в плоскости мембраны. Представим себе, что мембрана натянута одинаковой во всех направлениях силой S *кг/см*; это значит, что, вырезав из мембраны произвольную ее часть, мы должны будем, чтобы сохранить равновесие, распределить по контуру выреза в направлении нормали к нему силы S *кг/см*. При деформации закрепленной по краям мембраны поперечными силами все элементы площади ее получают некоторые приращения. Элемент дуги ds любого замкнутого контура, проведенного в плоскости мембраны, получит при этом некоторое перемещение δv в направленим нормали к контуру. Работа, совершаемая при этом натяжением S, будет очевидна равна

$$\int S\delta v\, ds = S\int \delta v\, ds. \tag{1}$$

Работой дополнительных напряжений, вызывающих увеличение поверхности, можно, как и в случае струны, пренебречь, поскольку это малая высшего порядка, чем работа напряжения S. Но $\int \delta v\, ds$ — есть увеличение поверхности вырезанной площадки. Таким образом, для каждой площадки работа деформации равна произведению напряжения на увеличение поверхности; следовательно, для всей поверхности в целом

$$A = S(F' - F), \tag{2}$$

где F — натянутая поверхность мембраны до деформации, F' — та же поверхность после деформации.

Расположим оси X и Y в первоначальной плоскости недеформированной мембраны; через w обозначим перемещение в направлении Z; тогда

$$F' = \int\int\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}\, dxdy; \tag{3}$$

ограничиваясь бесконечно малыми прогибами, получим:

$$A = S(F' - F) = \frac{S}{2}\int\int\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}dxdy. \tag{4}$$

Пусть прогибы $w(x, y)$ вызваны нагрузкой p *кг/см*^{2}; работа $\int\int p\delta w\, dxdy$ при вариации δw будет равна вариации работы деформации:

$$\delta A = S\int\int\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right\}dxdy =$$

$$= \int\int p\delta w dxdy. \tag{5}$$

Выражение для вариации работы деформации имеет вид:

$$\int\int\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right\}dxdy=$$
$$=\int\int(\text{grad } w,\ \text{grad } \delta w)\,dxdy; \tag{6}$$

пользуясь тождеством

$$\text{div }(\delta w,\ \text{grad } w)=\delta w\Delta w+(\text{grad } w,\ \text{grad } \delta w)$$
$$\left(\Delta=\text{div grad}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{7}$$

и применяя теорему Гаусса, получим:

$$\int\delta w\frac{\partial w}{\partial \nu}\,ds=$$
$$=\int\int\delta w\Delta w dxdy+\int\int(\text{grad } w,\ \text{grad } \delta w)\,dxdy, \tag{8}$$

где ν — внешняя нормаль области, занимаемой мембраной в плоскости XY. Контурный интеграл $\int\delta w\frac{\partial w}{\partial \nu}\,ds$ пропадает, так как мембрана должна быть закреплена по контуру либо в ее первоначальной плоскости, либо в заданном заранее положении деформированного контура. Как выражение принципа возможных перемещений, получаем уравнение:

$$\delta A\equiv S\int\int(\text{grad } w,\ \text{grad } \delta w)\,dxdy\equiv$$
$$\equiv-S\int\int\Delta w\delta w dvdy=\int\int p\delta w dxdy, \tag{9}$$

которое может иметь место при любом δw только в том случае если

$$\Delta w=-\frac{p}{S}. \tag{10}$$

Это и есть диференциальное уравнение равновесия мембраны.

Уравнение движения мы получим, присоединяя к нагрузке p силу инерции, отнесенную к единице поверхности $-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, где ρ — масса, отнесенная к единице поверхности. Получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{p}{S}+\frac{\rho}{S}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{11}$$

29. Балка (техническая теория изгиба балок). Балкой (стержнем) мы называем цилиндрическое тело, длина которого вдоль оси велика по сравнению с поперечными измерениями. Прямую, соединяющую центры тяжести поперечных сечений, примем за ось X; начало координат поместим в одном из концов балки. Оси Y и Z расположим так, чтобы они совпали с главными осями инерции поперечных сечений (ось Y имеет направление назад, ось Z вверх); таким образом интеграл по поперечному сечению:

$$\int\int yzdydz = 0 \qquad (1)$$

превращается в нуль. Так как оси Y и Z проходят через центры тяжести, то превращаются в нуль и интегралы

$$\int\int ydydz = 0; \qquad \int\int zdydz = 0. \qquad (2)$$

Нашей задачей является найти выражение для энергии деформации балки. Техническая теория изгиба балок основывается на представлении, что деформация балки, если пренебречь очень малыми величинами, определяется деформацией ее средней линии ($y = z = 0$). К выражению для работы деформации можно притти, либо делая специальные допущения относительно деформации, например, что поперечные сечения балки, перпендикулярные к средней линии, остаются и при изгибе к ней перпендикулярными и плоскими, либо выбирая строго интегрируемый случай, и распространяя получающееся из него выражение для работы деформации на общий случай изгиба. Мы остановимся на последнем методе и для простоты будем рассматривать перемещения средней линии только в направлении оси Z; общий случай получается отсюда наложением друг на друга напряжений и деформаций.

* Простейшее и пригодное в данном случае решение мы получим, полагая, что все составляющие тензора напряжения, кроме σ_x, равны нулю. Этим мы удовлетворим условию отсутствия сил на боковой поверхности балки. Условия равновесия (1) § 13 удовлетворяются, если положить, что σ_x *не зависит от* x. Далее согласно формулам (9) и (10) § 11 получим:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\sigma_x}{Em}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \qquad (a)$$

Составим теперь, пользуясь формулами (1) § 12, все вторые производные искомых перемещений. Найдем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{E}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{1}{E}\frac{\partial\sigma_x}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0 \qquad (6)$$

и т. д.

Перемещения u, v, w, а также σ_x определятся из этих уравнений путем двукратного интегрирования, не представляющего никаких принципиальных затруднений; с точностью до линейных выражений, соответствующих перемещению, не сопровождающемуся деформацией, найдем:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{c}{E}zx,\quad v=\frac{c}{Em}zy,\\ w&=\frac{c}{2Em}(mx^2-y^2+z^2), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где c — постоянная, которая будет определена ниже. *

Напряжение σ_x при этом будет:

$$\sigma_x=-cz; \qquad (4)$$

все остальные напряжения равны нулю. Выделим двумя поперечными сечениями участок балки. Чтобы равновесие не было при этом нарушено, надо представить себе, что на концевых поперечных сечениях распределена система внешних сил, эквивалентная напряжениям (4). Равнодействующая (главный вектор) этой системы сил равна нулю, так как, согласно (2), имеем:

$$\int\int\sigma_x dydz=-c\int\int zdydz=0. \qquad (5)$$

Остается еще главный момент относительно оси Y. Имеем:

$$M=-\int\int\sigma_x zdydz=c\int\int z^2dydz=cJ. \qquad (6)$$

Этот момент мы считаем положительным, если он изгибает балку так, что вогнутая сторона обращена к положительной оси Z. Интеграл $J=\int\int z^2dydz$ есть момент инерции поперечного сечения относительно оси Y. Итак, рассматриваемая задача соответствует случаю изгиба балки парами, приложенными к его торцам. Из напряжения σ_x мы получим работу деформации на единицу объема по формуле (9) § 16:

$$\mathrm{A} = \frac{\sigma_x^2}{2E}. \tag{7}$$

Интегрируя это выражение по поперечному сечению, найдем работу деформации, отнесенную к единице длины балки:

$$\bar{\mathrm{A}} = \frac{1}{2E}\int\int \sigma_x^2\, dydz = \frac{c^2}{2E}J. \tag{8}$$

Но согласно (3):

$$c = E\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \tag{9}$$

где значок нуль обозначает, что речь идет о средней линии балки; для работы деформации, отнесенной к единице длины, можем написать:

$$\bar{\mathrm{A}} = \frac{EJ}{2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)^2, \tag{10}$$

и соответственно для всей работы деформации:

$$A = \int_2^l \bar{\mathrm{A}}\, dx = \frac{1}{2}\int EJw''^2 dx, \tag{11}$$

где для упрощения письма значок нуль опущен.

Это и есть искомое выражение. Если мы перенесем его на общий случай, то с механической точки зрения это будет выражать, что деформация балки в каком-либо определенном месте, главным образом, определяется искривляющим действием, вызываемым моментами расположенных в отдалении сил,—приближение, тем более удовлетворительное, чем дальше рассматриваемое место от точки приложения действующих на балку сил, в частности от точки приложения опорной реакции [принцип Сен-Венана (Saint-Venant)].

Из формулы для работы деформации мы можем вывести теорию изгиба балок и в этом случае, как и выше, при помощи принципа возможных перемещений. Например, допустим, что балка оперта в начале ($x = 0$) и в конце ($x = l$); очевидно, что на опорах $w = 0$, а равным образом и возможное перемещение $\delta w = 0$. Пусть балка нагружена на каждую единицу своей длины нагрузкой q *кг/см*, действующей в направлении Z; вызванный этой нагрузкой прогиб назовем через $w(x)$. Если изменить w в $w+\delta w$, то приращение работы деформации должно быть при этом равно работе, производимой нагрузкой q, т. е.

$$\delta A=\int_0^l EJw''\delta w''dx=\int_0^l q\delta w dx. \tag{12}$$

Интегрируя два раза по частям, получим:

$$\int_0^l EJw''\delta w''dx=\Big[EJw''\delta w'\Big]_0^l-\Big[\frac{d}{dx}(EJw'')\delta w\Big]_0^l+$$
$$+\int_0^l \frac{d^2}{dx^2}(EJw'')\delta w dx. \tag{13}$$

Принимая во внимание, что $\delta w(0)=\delta w(l)=0$, найдем отсюда:

$$\int_0^l\left\{\frac{d^2}{dx^2}(EJw'')-q\right\}\delta w dx+\Big[EJw''\delta w'\Big]_0^l=0. \tag{14}$$

Чтобы это уравнение было верно, каково бы ни было δw, должно имет место равенство:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2w}{dx^2}\right)=q, \tag{15}$$

а также

$$w''(0)=0, \quad w''(l)=0. \tag{16}$$

Разбивая формулу (15) на два уравнения второго порядка

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-q, \qquad EJ\frac{d^2w}{dx^2}=-M, \tag{17}$$

получим диференциальные уравнения теории изгиба балок в их обычной форме. При этом M есть момент в поперечном сечении x, создаваемый силами, приложенными слева от этого поперечного сечения и стремящимися повернуть левую часть балки по отношению к правой. К ур-ниям (17) присоединяются еще условия на концах:

$$M(0)=0, \quad M(l)=0, \quad w(0)=0, \quad w(l)=0 \tag{18}$$

и формула для напряжения

$$\sigma_x = -cz = -Ew''z = -\frac{Mz}{J}, \tag{19}$$

которая также переносится из решения для разобранного выше простого случая на общий случай изгиба.

Техническая теория изгиба балок переносит эти формулы, т. е. формулу для работы деформации, выводом из которой являются указанные диференциальные уравнения, и формулу напряжений, также и на случай, когда поперечные сечения изменяются по длине балки. Верность приближенной теории доказывается чисто эмпирическим путем; эти формулы дают несколько грубое приближение, но достаточное для того, чтобы судить о прочности.

30. Изгиб тонкой пластинки. Теория изгиба пластинок[1] построена аналогично теории балок. Толщину пластинки обозначим через h. Плоскость XY расположим в средней плоскости пластинки так, что плоскость $z = +\frac{h}{2}$ будет верхней, $z = -\frac{h}{2}$ нижней стороной пластинки. Пусть далее пластинка нагружена силами, действующими к ним перпендикулярно, т. е. в направлении оси Z, и равными p *кг* на каждую единицу поверхности. И в этом случае мы примем, что деформация пластинки на определенном участке вызывается главным образом не местным действием нагрузки на этом участке, а изгибающими и крутящими моментами, распределенными по сечениям $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Соответственно этому мы заимствуем выражение для работы деформации из простого частного случая пластинки, находящейся только под действием этих изгибающих и крутящих моментов.

* Решение основных уравнений равновесия теории упругости, соответствующих этому простому частному случаю, будем искать, руководствуясь результатами, полученными в случае балки, в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_{11}x^2 + u_{22}y^2 + u_{33}z^2 + 2u_{12}xy + \\ &\quad + 2u_{23}yz + 2u_{31}zx \\ v &= v_{11}x^2 + v_{22}y^2 + v_{33}z^2 + 2v_{12}xy + \\ &\quad + 2v_{23}yz + 2v_{31}zx \\ w &= w_{11}x^2 + w_{22}y^2 + w_{33}z^2 + 2w_{12}xy + \\ &\quad + 2w_{23}yz + 2w_{31}zx \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

---

[1] *G. Kirchhoff.* Crelles Journ. Bd. 40, стр 51, 1850.

т. е. в виде однородных квадратичных функций координат с постоянными коэфициентами.

Можно, руководствуясь результатами для балки, принять горизонтальные перемещения u и v в средней плоскости $z=0$ равными нулю. Это условие дает:

$$u_{11}=u_{12}=u_{22}=v_{11}=v_{12}=v_{22}=0. \tag{б}$$

Так как напряжения на нижней и верхней стороне $\left(z=\pm\frac{h}{2}\right)$ пластинки по условию отсутствуют, то $\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ при $z=\pm\frac{h}{2}$. Согласно формулам (7) § 16 имеем:

$$\sigma_z=2G\left\{\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\Theta}{m-2}\right\}=4G\left\{w_{33}z+w_{23}y+w_{31}x+\right.$$
$$\left.+\frac{u_{31}z+v_{23}z+w_{33}z+w_{23}y+w_{31}x}{m-2}\right\}.$$

Так как σ_z должно при $z=\pm\frac{h}{2}$ обращаться в нуль, каковы бы ни были x и y, то

$$w_{23}=w_{31}=0 \tag{в}$$

и как следствие этого получим:

$$(m-1)\,w_{33}+u_{31}+v_{23}=0, \tag{г}$$

т. е. σ_z будет равно нулю по всему объему пластинки.

Переходим к составленю τ_{yz}, τ_{zx}. Имеем:

$$\tau_{yz}=G\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=2G\,(w_{22}y+w_{12}x+$$
$$v_{33}z+v_{23}y+v_{31}x),$$
$$\tau_{zx}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=2G\,(w_{11}x+w_{12}y+$$
$$u_{33}z+u_{23}y+u_{31}x).$$

Отсюда следует:

$$\left.\begin{aligned} &w_{22}=-v_{23},\; w_{12}=-v_{31}=-u_{23},\\ &w_{11}=-u_{31},\; v_{33}=u_{33}=0 \end{aligned}\right\} \tag{д}$$

и касательные напряжения τ_{yz}, τ_{zx} обращаются в нуль по всему объему пластинки.

Теперь пользуясь результатами (б), (в), (г) и (д), можем (изменив обозначения) переписать (а) в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= -(c_{11}x + c_{12}y)z, \quad v = -(c_{12}x + c_{22}y)z \\ w &= \frac{1}{2}(c_{11}\,{}^{2} + 2c_{12}xy + c_{22}y^2) + \frac{(c_{11}+c_{22})z^2}{m-1} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

и легко проверить, что уравнения равновесия в перемещениях [§ 13, ур-ния (2)] удовлетворяются. *

Составляющие тензора деформации будут:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial v}{\partial x} = -c_{11}z, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2c_{12}z, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -c_{22}z, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(c_{11}+c_{22})z}{m-1}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{m-2}{m-1}(c_{11}+c_{22})z,$$

а напряжения

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -2Gz\left(c_{11} + \frac{c_{11}+c_{22}}{m-1}\right), & \tau_{xy} &= -2Gzc_{12} \\ \sigma_y &= -2Gz\left(c_{22} + \frac{c_{11}+c_{22}}{m-1}\right), & \tau_{yz} &= 0 \\ \sigma_z &= 0 & \tau_{zx} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Чтобы разобраться в характере напряженного состояния пластинки, выделим прямоугольный участок с краями, параллельными осям. и подсчитаем изгибающие и крутящие моменты, действующие на единицу длины сечения (равнодействующие обратятся в нуль, так как напряжения — нечетные функции z). В сечении $x = \text{const}$ на единицу длины действует изгибающий момент:

$$M_x = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = \frac{Gh^3}{6}\left(c_{11} + \frac{c_{11}+c_{22}}{m-1}\right), \quad (4)$$

мы считаем его положительным, если он изгибает пластинку, обращая ее вогнутой стороной в сторону положительного направления оси Z. Далее, действует еще крутящий момент:

$$T = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z\tau_{xy} dz = \frac{Gh^3}{6} c_{12}, \tag{5}$$

принимаемый за положительный, когда он стремится приподнять вверх первую четверть пластинки ($x > 0$, $y > 0$). Приняв аналогичное правило знаков для сечения $y = \text{const}$, мы убедимся, что на него действует изгибающий момент:

$$M_y = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dy = \frac{Gh^3}{6}\left(c_{22} + \frac{c_{11} + c_{22}}{m - 1}\right) \tag{6}$$

и крутящий момент:

$$T = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z\tau_{xy} dz = \frac{Gh^3}{6} c_{12}. \tag{7}$$

Работа деформации, отнесенная к единице объема, получит вид

$$A = G\left\{\frac{m-1}{m-2}\Theta^2 - 2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right\}$$

или

$$A = G\left\{\frac{m-2}{m-1}(c_{11} + c_{22})^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{m-1}(c_{11} + c_{22})^2 - 2c_{11}c_{22} + 2c_{12}^2\right\} z^2. \tag{8}$$

Проинтегрировав по z от $z = -\frac{h}{2}$ до $z = +\frac{h}{2}$, получим работу деформации, отнесенную к единице площади пластинки:

$$\bar{A}=\frac{Gh^3}{12}\left\{\frac{m}{m-1}(c_{11}+c_{22})^2-2(c_{11}c_{22}-c_{12}^2)\right\} \tag{9}$$

Эту же работу мы можем выразить через деформацию средней плоскости, которую и для $z=0$ обозначим просто через w. Так как

$$c_{11}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad c_{12}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\quad c_{22}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{10}$$

то

$$\bar{A}=\frac{Gh^3}{12}\left\{\frac{m}{m-1}(\Delta w)^2-2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}. \tag{11}$$

Интегрируя на всей области, занимаемой недеформированной пластинкой на плоскости XY, получим для всей работы деформации:

$$\left.\begin{aligned}A=\frac{Gh^3}{12}\frac{m}{m-1}\int\int(\Delta w)^2dxdy-\\-\frac{Gh^3}{6}\int\int\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dxdy.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Эта формула для работы деформации переносится и на общий случай изгиба пластинок. Мы рассмотрим случай пластинки, заделанной по краям; тогда на контуре должны удовлетворяться условия:

$$w=\frac{\partial w}{\partial \nu}=0 \tag{13}$$

(ν есть внешняя нормаль к контуру); следовательно, для вариации δw нужно принять:

$$\delta w=\frac{\partial \delta w}{\partial \nu}=0. \tag{14}$$

Если под действием нагрузки в p *кг/см*^{2} пластинка получит прогиб $w(x, y)$, то при возможном перемещении δw приращение работы деформации должно быть равно работе нагрузки p, иными словами:

$$\delta A=\int\int p\delta w dxdy. \tag{15}$$

Чтобы найти вариацию работы деформации, исследуем по отдельности вариации интегралов:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \int\int (\Delta w)^2\, dxdy, \\ J_2 &= \int\int \left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{dxdy}\right)^2\right\} dxdy. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Интеграл J_2 может быть выражен через интеграл по контуру. Пусть

$$f = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad g = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad (17)$$

тогда J_2, как интеграл от функционального определителя $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$ равен взятому по всему контуру интегралу:

$$J_2 = \int f dg = \int \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) ds. \qquad (18)$$

* Но на границе w и $\frac{\partial w}{\partial \nu}$ равны нулю. Иными словами:

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cos(\nu,\ x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(\nu,\ x) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial w}{\partial x}\cos(\nu,\ y) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(\nu,\ x) = 0,$$

где $\frac{\partial w}{\partial s}$ есть производная по дуге контура. Следовательно, $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ также равны нулю *. Отсюда следует, что $J_2 = 0$, а также $\delta J_2 = 0$. Для вычисления вариации интеграла J_1 обратимся к тождествам:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\,(\delta w\, \mathrm{grad}\, \Delta w) &= \delta w \Delta\Delta w + (\mathrm{grad}\, \delta w, \mathrm{grad}\, \Delta w) \\ \mathrm{div}\,(\Delta w\, \mathrm{grad}\, \delta w) &= \Delta w \Delta \delta w + (\mathrm{grad}\, \delta w, \mathrm{grad}\, \Delta w), \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

вычитая, получим:

$$\int\int \Delta w \Delta \delta w dxdy = \int\int \delta w \Delta\Delta w dxdy +$$

$$+ \int \Delta w \frac{\partial \delta w}{\partial \nu} ds - \int \delta w \frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} ds \qquad (20)$$

и в силу (14) контурные интегралы пропадают. Отсюда следует, что:

$$\delta J_1 = 2\int\int \Delta w \Delta \delta w dxdy = 2\int\int \delta w \Delta\Delta w dxdy, \qquad (21)$$

и вариация работы деформации получит вид:

$$\delta A = \frac{Gh^3}{12}\frac{m}{m-1}\delta J_1 = \frac{Gh^3}{6}\frac{m}{m-1}\int\int \delta w \Delta\Delta w dxdy. \qquad (22)$$

Из ур-ния (15) следует, таким образом, что

$$\int\int\left\{\frac{Gh^3}{6}\frac{m}{m-1}\Delta\Delta w - p\right\}\delta w dxdy = 0. \qquad (23)$$

Для того чтобы это уравнение имело место для любого δw, подинтегральное выражение должно обращаться в нуль:

$$\frac{Gh^3}{6}\frac{m}{m-1}\Delta\Delta w = p. \qquad (24)$$

Это и есть диференциальное уравнение равновесия изогнутой пластинки.

Если мы к нагрузке p присоединим силы инерции, отнесенные к единице поверхности $-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ (ρ = массе пластинки, отнесенной к единице поверхности), то получим *уравнение движения*.

VII. ПРОСТЕЙШИЕ РАЗРЕШИМЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ.

31. Построение частных решений. [1] В этом отделе мы займемся изучением важнейших частных решений основных уравнений теории упругости, поскольку они не будут подвергнуты подробному исследованию в следующих выпусках этой книги. При этом мы ограничимся случаем отсутствия массовых сил, так как первый же разбираемый нами пример (действие сосредоточенной силы в неограниченной среде) дает возможность свести общий случай наличия массовых сил к этому специальному случаю.

---

[1] *I. Boussinesq*, Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Paris, 1889.

Итак, мы ставим задачу отыскания решений ур-ний (2) § 13

$$\left.\begin{aligned}\Delta u+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}=0\\ \Delta v+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial y}=0\\ \Delta w+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

причем на поверхности изучаемого тела либо заданы сами перемещения u, v, w, либо заданы поверхностные силы Ξ, H, Z; в этом последнем случае к ур-ниям (1) присоединяются граничные условия (5) § 13

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x\cos(\nu,\ x)+\tau_{xy}\cos(\nu,\ y)+\tau_{xz}\cos(\nu,\ z)=\Xi\\ \tau_{xy}\cos(\nu,\ x)+\sigma_y\cos(\nu,\ y)+\tau_{yz}\cos(\nu,\ z)=\mathrm{H}\\ \tau_{xz}\cos(\nu,\ x)+\tau_{yz}\cos(\nu,\ y)+\sigma_z\cos(\nu,\ z)=Z,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

в которых напряжения должны быть выражены через производные перемещений u, v, w при помощи уравнений, связывающих напряжения и деформации.

Прежде всего важно, независимо от граничных условий, заняться разысканием частных решений ур-ний (1). Во-первых, таким путем мы получим непосредственно некоторые из важнейших решений; во-вторых, построение частных решений особенно важно и потому, что, имея последовательность частных решений u_ν, v_ν, w_ν, мы можем снова получить новые решения в форме конечного или бесконечного ряда:

$$u=\sum c_\nu u_\nu,\quad v=\sum c_\nu v_\nu,\quad w=\sum c_\nu w_\nu$$

(или же в форме определенных интегралов), которые при любых коэфициентах c_ν удовлетворяют диференциальным уравнениям, так как последние линейны и однородны относительно u, v, w. Удовлетворение граничным условиям сводится в этом случае к определению коэфициентов c_ν.

Из ур-ний (1) диференцированием по x, по y и по z и сложением результатов получим:

$$\Delta\Theta=0.\qquad(3)$$

Таким образом $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ является потенциальной функцией. Вторичное применение операции Δ к ур-нию (1) приводит к уравнениям

$$\Delta\Delta u = 0,\ \Delta\Delta v = 0,\ \Delta\Delta w = 0. \tag{4}$$

От этих уравнений (так называемого бигармонического типа) мы и будем отправляться, разыскивая частные решения ур-ний (1); идея метода заключается в том, что построение решений ур-ний (4) (бигармонических функций) делается весьма просто при помощи обыкновенных потенциальных функций. В самом деле, не трудно убедиться, что всякая функция одного из следующих видов:

$$\varphi + x\chi,\ \varphi + y\chi,\ \varphi + z\chi,\ \varphi + r^2\chi, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta\Delta u = 0$, если φ и χ — потенциальные функции; точно так же легко показать, что каждое из решений бигармонического уравнения может быть представлено в любом из указанных выше видов. Поэтому сам собой напрашивается такой ход действия: приняв $u = \varphi_1 + x\chi_1$, $v = \varphi_2 + x\chi_2$, $w = \varphi_3 + x\chi_3$, ввести эти выражения в ур-ния (1) и установить, каковы должны быть зависимости между потенциальными функциями φ и χ, чтобы мы действительно получили решения основных ур-ний (1). Не давая здесь шаг за шагом всех соответствующих вычислений, удовольствуемся тем, что непосредственно выпишем два важнейших типа решения.

Принимая

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1 + x\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ v &= \varphi_2 + x\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ w &= \varphi_3 + x\frac{\partial\psi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

мы удовлетворим основным ур-ниям (1) при условии, что φ_1 φ_2, φ_3, ψ представляют собой потенциальные функции и

$$2\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{m}{m-2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0, \tag{6}$$

иными словами:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{m}{3m-4}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Задаваясь произвольными потенциальными функциями φ_1, φ_2, φ_3, из последнего уравнения найдем ψ, а вместе с тем и искомое частное решение.

Подстановка

$$\left.\begin{aligned} u&=\varphi_1+(r^2-a^2)\frac{\partial\psi}{\partial x}\\ v&=\varphi_2+(r^2-a^2)\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ w&=\varphi_3+(r^2-a^2)\frac{\partial\psi}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где φ_1, φ_2, φ_3, ψ — потенциальные функции и a — произвольная постоянная, дает

$$\Theta=\Theta_0+2\chi, \tag{9}$$

где

$$\Theta_0=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} \text{ и } \chi=x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}+z\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{10}$$

Внося эти значения в основные ур-ния (1), получим:

$$\Delta u+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}=2\frac{\partial\psi}{\partial x}+4\frac{\partial\chi}{\partial x}+ \\ +\frac{m}{m-2}\frac{\partial}{\partial x}(\Theta_0+2\chi)=0 \tag{11}$$

и аналогичные уравнения для v, w. Ур-ния (1) удовлетворяются, если

$$2\psi+4\chi+\frac{m}{m-2}(\Theta_0+2\chi)=\text{const}. \tag{12}$$

χ есть скалярное произведение grad ψ и радиуса-вектора r, т. е. произведение значения r на радиальную составляющую grad ψ, или

$$\chi=r\frac{d\psi}{dr}. \tag{13}$$

Поэтому ур-ние (12), принимая, что несущественная постоянная интегрирования равна нулю, приводится к виду:

$$r\frac{d\psi}{\partial r}+\frac{m-2}{3m-4}\psi=-\frac{m}{3m-4}\frac{\Theta_0}{2}. \qquad (14)$$

Интегрируя по r, получаем:

$$\psi=\frac{-m}{6m-8}r^{-\nu}\int r^{\nu-1}\Theta_0 dr+Cr^{-\nu}\left(\nu=\frac{m-2}{3m-4}\right), \qquad (15)$$

в котором зависящая от направления радиуса постоянная интегрирования C должна быть определена таким образом, чтобы ψ действительно было потенциальной функцией.

Если начало $x=y=z=0$ расположено в области интегрирования и не является особенной точкой, то, беря за нижний предел интегрирования 0, получим $C=0$.

При помощи указанных подстановок можно найти любое число частных решений, а из них разложением в ряды или придавая им вид определенных интегралов получить новые решения; в некоторых случаях таким путем можно удовлетворить граничным условиям или свести задачу к известным краевым задачам теории потенциала.

32. Сосредоточенная сила в неограниченной среде. Главная трудность задачи интегрирования, заключающаяся в нахождении решений, удовлетворяющих на поверхности тела определенным граничным условиям, отпадает в случае бесконечно протяженного тела, на которое действуют только массовые силы. Сперва примем, что на тело действует только единичная сила, в точке приложения которой выберем начало координат, направив ось X по линии действия силы. Действие этой единичной силы мы представляем себе так: в области начала координат вырезан чрезвычайно малый („бесконечно малый“) шар, на поверхности которого распределены силы, равнодействующая которых равна заданной силе; сообразно этому будем искать частное решение, удовлетворяющее повсюду, кроме нулевой точки, основным ур-ниям (1) § 31 (надо иметь в виду, что за исключением нулевой точки к телу нигде других сил не приложено) и имеющее в нулевой точке *особенности*, соответствующие данной силе. Чтобы решение было однозначным, нужно еще поставить условие, чтобы перемещения и их производные превращались в нуль на бесконечности. Для отыскания частного решения используем вторую из указанных выше подстановок в ее упрощенном виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1 + r^2 \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ v &= \varphi_2 + r^2 \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ w &= \varphi_3 + r^2 \frac{\partial\psi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где φ_1, φ_2, φ_3, ψ — потенциальные функции; ψ может быть вычислено из ур-ния (15) § 31 в виде

$$\psi = -\frac{m}{6m-8} r^{-\nu} \int\limits_{\infty}^{r} r^{\nu-1} \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} \right) dr \quad \left(\nu = \frac{m-2}{3m-4} \right) \tag{2}$$

Напряжения на поверхности бесконечно малого шара, окружающего нулевую точку, и на любой части этой поверхности должны иметь конечную равнодействующую. Поэтому напряжения в нулевой точке должны быть бесконечно малыми не высшего порядка, чем $\frac{1}{r^2}$, а, следовательно, перемещения, производными которых являются напряжения, должны быть бесконечно малыми не высшего порядка, чем $\frac{1}{r}$. Отсюда мы заключаем, что потенциальные функции φ_1, φ_2, φ_3 должны быть до постоянного множителя тождественны с $\frac{1}{r}$. Так как направление X, как направление силы, отлично от прочих направлений, то примем:

$$\varphi_1 = \frac{A}{r}, \quad \varphi_2 = \varphi_3 = 0. \tag{3}$$

На основании (2) вычисляем теперь ψ; получаем:

$$\psi = \frac{Am}{6m-8} r^{-\nu} \int\limits_{\infty}^{r} \frac{r^{\nu-1} x}{r^3} dr = \frac{Am}{(6m-8)} \frac{1}{(\nu-2)} \frac{x}{r^3} =$$

$$= -\frac{Am}{2(5m-6)} \frac{x}{r^3}, \tag{4}$$

так как при интегрировании вдоль радиуса, $\frac{x}{r}$ есть постоянная величина; для перемещений получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
u &= A\left\{\frac{1}{r} - \frac{mr^2}{2(5m-6)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)\right\}\\
v &= A\left\{-\frac{mr^2}{2(5m-6)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)\right\}\\
w &= A\left\{-\frac{mr^2}{2(5m-6)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)\right\}\\
\Theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{3A(m-2)}{5m-6}\frac{x}{r^3}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Соответствующие составляющие напряжения [§ 11, ур-ния (14)] равны:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -3GA\frac{m-2}{5m-6}\left\{\frac{x}{r^3} + \frac{3m}{m-2}\frac{x^3}{r^5}\right\}\\
\sigma_y &= -3GA\frac{m-2}{5m-6}\left\{-\frac{x}{r^3} + \frac{3m}{m-2}\frac{xy^2}{r^5}\right\}\\
\sigma_z &= -3GA\frac{m-2}{5m-6}\left\{-\frac{x}{r^3} + \frac{3m}{m-2}\frac{xz^2}{r^5}\right\}\\
\tau_{xy} &= -3GA\frac{m-2}{5m-6}\left\{\frac{y}{r^3} + \frac{3m}{m-2}\frac{x^2y}{r^5}\right\}\\
\tau_{yz} &= -3GA\frac{m-2}{5m-6}\left\{+\frac{3m}{m-2}\frac{xyz}{r^5}\right\}\\
\tau_{zx} &= -3GA\frac{m-2}{5m-6}\left\{\frac{z}{r^3} + \frac{3m}{m-2}\frac{x^2z}{r^5}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Вырежем вокруг нулевой точки малый шар; для сохранения равновесия нужно будет распределить по поверхности шара поверхностные силы

$$\Xi = \sigma_x\cos(\nu, x) + \tau_{xy}\cos(\nu, y) + \tau_{xz}\cos(\nu, z) \tag{7}$$

и т. д.; так как внешняя нормаль к поверхности оставшегося тела обращена внутрь шара, то

$$\cos(\nu, x) = -\frac{x}{r},\ \cos(\nu, y) = -\frac{y}{r},\ \cos(\nu, z) = -\frac{z}{r} \tag{8}$$

Равнодействующая этих сил направлена по оси X и равна:

$$P_x = \frac{3GA(m-2)}{5m-6}\left\{\int \frac{do}{r^2} + \frac{3m}{m-2}\int \frac{x^2 do}{r^4}\right\} = \\ = \frac{24GA(m-1)\pi}{5m-6}. \tag{9}$$

Распорядимся постоянной A так, чтобы F равнялось 1, и перенесем точку приложения силы в точку с координатами ξ, η, ζ; тогда перемещения под действием приложенной в этой точке по направлению оси X силы 1 будут:

$$\left.\begin{aligned} &U_1(x,\ y,\ z;\ \ \xi,\ \eta,\ \zeta) = \\ &= \frac{1}{24\pi G}\left\{\frac{5m-6}{(m-1)}\frac{1}{r} + \frac{mr^2}{2(m-1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}, \\ &V_1(x,\ y,\ z;\ \ \xi,\ \eta,\ \zeta) = \\ &= \frac{1}{24\pi G}\left\{\qquad\qquad + \frac{mr^2}{2(m-1)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}, \\ &W_1(x,\ y,\ z;\ \ \xi,\ \eta,\ \zeta) = \\ &= \frac{1}{24\pi G}\left\{\qquad\qquad + \frac{mr^2}{2(m-1)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$.

При помощи циклической перестановки мы получим отсюда перемещения, вызванные единичными силами, направленными по осям Y и Z. Обозначим их через

$$\left.\begin{aligned} &U_2(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta),\quad V_2(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta), \\ &\qquad W_2(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta) \\ &U_3(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta),\quad V_3(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta), \\ &\qquad W_3(x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Если, вместо единичной силы, мы имеем произвольное распределение массовых сил X, Y, Z, отнесенных к единице объема, то сила, действующая в точке ξ, η, ζ

$$X(\xi,\ \eta,\ \zeta)\, d\xi d\eta d\zeta,\quad Y(\xi,\ \eta,\ \zeta)\, d\xi d\eta d\zeta,\quad Z(\xi,\ \eta,\ \zeta)\, d\xi d\eta d\zeta,$$

вызовет перемещения

$$\left.\begin{aligned} u &= \{X(\xi, \eta, \zeta)\, U_1 + Y(\xi, \eta, \zeta)\, U_2 + \\ &\quad + Z(\xi, \eta, \zeta)\, U_3\} d\xi d\eta d\zeta \\ v &= \{X(\xi, \eta, \zeta)\, V_1 + Y(\xi, \eta, \zeta)\, V_2 + \\ &\quad + Z(\xi, \eta, \zeta)\, V_3\}\, d\xi d\eta d\zeta \\ w &= \{X(\xi, \eta, \zeta)\, W_1 + Y(\xi, \eta, \zeta)\, W_2 + \\ &\quad + Z(\xi, \eta, \zeta)\, W_3\}\, d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Суммируя перемещения, вызванные всеми частицами объема, как результат совместного действия всех сил получим:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int\int\int \{XU_1 + YU_2 + ZU_3\}\, d\xi d\eta d\zeta \\ v(x, y, z) &= \int\int\int \{XV_1 + YV_2 + ZV_3\}\, d\xi d\eta d\zeta \\ w(x, y, z) &= \int\int\int \{XW_1 + YW_2 + ZW_3\}\, d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

То, что U, V, W как функция от x, y, z, действительно удовлетворяют основным уравнениям теории упругости при наличии массовых сил, нуждается в особом доказательстве, которого мы здесь давать не будем.

33. Полупространство: а) на границе заданы перемещения. Мы будем говорить о полупространстве $x \leqslant 0$ и прежде всего поставим вопрос, какие перемещения имеют место внутри полупространства, если перемещения на границе его (плоскости $x = 0$) заданы:

$$u = U(\eta, \zeta), \quad v = V(\eta, \zeta), \quad w = W(\eta, \zeta), \qquad (1)$$

причем буквами η, ζ обозначены координаты точки на плоскости $x = 0$. Иными словами, мы должны решить основные ур-ния (1) § 31 при граничных условиях (1). Для решения применим подстановку:

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1 + x\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ v &= \varphi_2 + x\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ w &= \varphi_3 + x\frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эта подстановка дает нам решение основных уравнений, если согласно формуле (7) § 31

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{m}{3m-4}\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right\}, \tag{3}$$

где функции φ_1, φ_2, φ_3, ψ являются потенциальными. Если u, v, w удовлетворяют граничным условиям (1), то при $x = 0$ мы должны иметь

$$\varphi_1 = U, \quad \varphi_2 = V, \quad \varphi_3 = W. \tag{4}$$

Наша задача сводится таким образом к известной задаче **Дирихле**, т. е. к разысканию потенциальной функции по заданным ее значениям на границе. Определив φ_1, φ_2, φ_3, выразим далее ψ при помощи формулы (3), что и решает задачу окончательно.

Задача определения φ_1, φ_2, φ_3 по заданным условиям (4) может быть решена следующим образом: выражаем функции φ_1, φ_2, φ_3 в виде определенных интегралов, например:

$$\varphi_1(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int g_1(\beta, \gamma)\, e^{\alpha x + i\beta y + i\gamma z} d\beta d\gamma. \tag{5}$$

Чтобы интеграл, как функция x, y, z, действительно был потенциальной функцией, должно иметь место равенство

$$\alpha = -\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}. \tag{6}$$

Так как при $x = 0$ φ_1 должно равняться $U(\eta, \zeta)$, то $g_1(\beta, \gamma)$ должно иметь значение:

$$g_1(\beta, \gamma) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int U(\lambda, \mu)\, e^{-i(\beta\lambda + \tau\mu)} d\lambda d\mu. \tag{7}$$

В таком случае при $x = 0$ получаем:

$$\varphi_1(0, \eta, \zeta) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int d\beta d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int U(\lambda, \mu)\, e^{i\beta(\eta - \lambda) + i\gamma(\zeta - \mu)} d\lambda d\mu, \tag{8}$$

а это выражение, согласно теореме Фурье, как раз равно $U(\eta, \zeta)$, что и требовалось.

Равным образом

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int g_2(\beta, \gamma)\, e^{\alpha x + i\beta y + i\gamma z}\, d\beta d\gamma \\ \varphi_3(x, y, z) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int g_3(\beta, \gamma)\, e^{\alpha x + i\beta y + i\gamma z}\, d\beta d\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

причем

$$\left.\begin{aligned} g_2(\beta, \gamma) &= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int V(\lambda, \mu)\, e^{-i(\beta\lambda + \gamma\mu)}\, d\lambda d\mu \\ g_3(\beta, \gamma) &= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int W(\lambda, \mu)\, e^{-i(\beta\lambda + \gamma\mu)}\, d\lambda d\mu. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Согласно (3) определяем теперь ψ; имеем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{m}{3m-4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \{\alpha g_1 + i\beta g_2 + + i\gamma g_3\}\, e^{\alpha x + i\beta y + i\gamma z}\, d\beta d\gamma, \qquad (11)$$

откуда

$$\psi = -\frac{m}{3m-4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\alpha g_1 + i\beta g_2 + i\gamma\beta_3}{\alpha}\, e^{\alpha x + i\beta y + i\gamma z}\, d\beta d\gamma. \qquad (12)$$

Окончательно находим теперь

$$\left.\begin{aligned} u &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left\{ g_1(\beta, \gamma) - \frac{mx}{3m-4}(\alpha g_1 + i\beta g_2 + + i\gamma g_3) \right\} e^{\alpha x + i\beta y + i\gamma z}\, d\beta d\gamma, \\ v &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left\{ g_2(\beta, \gamma) - \frac{mx}{3m-4}\frac{i\beta}{\alpha}(\alpha g_1 + i\beta g_2 + + i\gamma g_3) \right\} e^{\alpha x + i\beta y + i\gamma z}\, d\beta d\gamma, \\ w &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left\{ g_3(\beta, \gamma) - \frac{mx}{3m-4}\frac{i\gamma}{\alpha}(\alpha g_1 + i\beta g_2 + + i\gamma g_3) \right\} e^{\alpha x + i\beta y + i\gamma z}\, d\beta d\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

34. Полупространство: б) случай заданных напряжений на границе. Рассматривая то же полупространство $x \leqslant 0$, поставим теперь вопрос, какие перемещения имеют место, если на его границе $x = 0$ действуют заданные силы Ξ, H, Z, отнесенные к единице поверхности. Массовые силы мы предполагаем отсутствующими. Координаты на плоскости $x = 0$ обозначим буквами η, ζ. Таким образом, перед нами стоит задача интегрирования основных ур-ний (1) § 31 при заданных на плоскости $x = 0$ напряжениях:

$$\sigma_x = \Xi, \quad \tau_{xy} = \mathrm{H}, \quad \tau_{xz} = \mathrm{Z}. \tag{1}$$

На бесконечном расстоянии от границы перемещения и напряжения должны обратиться в нуль; чтобы это имело место, надо принять, что равнодействующая всех поверхностных сил остается конечной.

Прибегнем и в этом случае к той же подстановке:

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1 + x\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ v &= \varphi_2 + x\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ w &= \varphi_3 + x\frac{\partial\psi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$ — потенциальные функции. Согласно ур-нию (7) § 31, основные уравнения удовлетворяются, если

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{m}{3m-4}\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right\}. \tag{3}$$

Отсюда для объемного расширения Θ получаем следующую формулу:

$$\Theta = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = -2\,\frac{m-2}{m}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{4}$$

Но на поверхности $x = 0$ должны иметь место равенства:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Theta}{m-2}\right) = \Xi \\ \tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \mathrm{H} \\ \tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \mathrm{Z}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Обозначим теперь через ω_1, ω_2, ω_3 три потенциальных функции, удовлетворяющие на границе $x=0$ полупространства условиям:

$$G\omega_1=\Xi,\ G\omega_2=\mathrm{H},\ G\omega_3=\mathrm{Z}. \tag{6}$$

Если подставить теперь в (5) вместо частных производных перемещений их значения, получающиеся из (2), то при $x=0$ эти ур-ния (5) получат вид:

$$\left.\begin{aligned}
&2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{4}{m}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\omega_1\\
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=\omega_2\\
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}=\omega_3.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Эти уравнения доказаны пока только для плоскости $x=0$. Но так как обе части уравнений представляют собою потенциальные функции, то они верны во всем полупространстве; в самом деле, если две потенциальные функции тождественны на поверхности какой-либо области, то они тождественны и вообще. Для определения ψ продиференцируем первое уравнение по x, второе по y, третье по z и сложим результаты. Приняв во внимание, что $\Delta\varphi_1=\Delta\varphi_2=\Delta\varphi_3=\Delta\psi=0$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)+\frac{m-4}{m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z} \tag{8}$$

или, согласно (3):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right\}. \tag{9}$$

Отсюда путем двухкратного интегрирования получаем ψ. Постоянные интегрирования исчезают, если интегрирование начинается от $-\infty$, так как в бесконечности ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ превращаются в нуль. Определив таким образом ψ, получим из ур-ний (7) путем интегрирования также и φ_1, φ_2, φ_3.

Решение нашей задачи опять-таки сводится, таким образом, в основном очевидно к решению задачи Дирихле для функций ω_1, ω_2, ω_3 . Искомые функции могут быть представлены посредством определенных интегралов так же, как и в разобранном выше случае заданных перемещений на поверхности. Мы однако не будем здесь на этом останавливаться, а обратимся к изучению другого способа, отправляющегося от частного случая сосредоточенной силы, приложенной в некоторой точке границы полупространства.

35. Полупространство: в) действие сосредоточенной силы. В случае того же полупространства $x \leqslant 0$ поставим теперь вопрос об определении перемещений и напряжений, вызываемых сосредоточенной силой, приложенной в начале координат к граничной плоскости $x = 0$ по направлению оси X. Согласно выводам предыдущего параграфа, мы должны при заданных поверхностных силах определить три потенциальных функции, граничные значения которых на поверхности $x = 0$, исключая постоянный множитель $\frac{1}{G}$, совпадают с заданными составляющими поверхностной силы. Так как в нашем случае в направлении Y и Z никаких сил не приложено, то $\omega_2 = \omega_3 = 0$. Потенциальная функция ω_1, граничные значения которой определяются проекцией силы по направлению оси X, должна поэтому также, исключая начало координат, во всей плоскости $x = 0$ обращаться в нуль. В начале координат она должна иметь особенность, соответствующую заданной единичной силе, а именно обращаться в бесконечность порядка $\frac{1}{r^2}$. Действительно, если мы вокруг начала координат вырежем из полупространства полушарие бесконечно малого радиуса, то напряжения, действующие по поверхности этого полушария, должны приводиться к равнодействующей, равной заданной сосредоточенной силе; чтобы эта равнодействующая была конечной и не равной нулю, нужно принять, что напряжения, а вместе с ними и функция ω_1, являющаяся величиной того же порядка, что и напряжения, обращаются в бесконечность как $\frac{1}{r^2}$. Потенциальная функция, удовлетворяющая этим условиям, будет:

$$\omega_1 = \frac{Ax}{r^3}. \tag{1}$$

Множитель A послужит для определения величины сосредоточенной силы. Пользуясь полученной, таким образом, функцией ω_1, можно в решении

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1 + x\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ v &= \varphi_2 + x\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ w &= \varphi_3 + x\frac{\partial\psi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

определить сперва функцию ψ на основании ур-ния (9) § 34. Получим:

$$\psi = \frac{A}{2}\frac{1}{r}. \tag{3}$$

Затем из ур-ния (7) § 34 получим:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\omega_1}{1} - \frac{m-2}{m}\frac{\partial\psi}{\partial x} = A\frac{m-1}{m}\frac{x}{r^3}, \tag{4}$$

и следовательно:

$$\varphi_1 = -\frac{A(m-1)}{m}\frac{1}{r}; \tag{5}$$

далее

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = -\frac{\partial(\varphi_1+\psi)}{\partial y} = -\frac{A}{2}\frac{m-2}{m}\frac{y}{r^3}, \tag{6}$$

откуда

$$\varphi_2 = -\frac{A}{2}\frac{m-2}{m}\frac{y}{r(r-x)}; \tag{7}$$

и равным же образом

$$\varphi_3 = -\frac{A}{2}\frac{m-2}{m}\frac{z}{r(r-x)}. \tag{8}$$

Поэтому перемещения будут

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{A}{2}\left\{-\frac{2(m-1)}{m}\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right\} \\ v &= \frac{A}{2}\left\{-\frac{m-2}{m}\frac{y}{r(r-x)} - \frac{xy}{r^3}\right\} \\ w &= \frac{A}{2}\left\{-\frac{m-2}{m}\frac{z}{r(r-x)} - \frac{xz}{r^3}\right\} \\ \Theta &= A\frac{m-2}{m}\frac{x}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

По этим уравнениям вычислим составляющие напряжения; получим:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 3GA\frac{x^3}{r^5}\\
\sigma_y &= 3GA\left\{\frac{xy^2}{r^5}-\frac{m-2}{3m}\left[\frac{r^2+rx-x^2}{r^3(r-x)}-\frac{y^2(2r-x)}{r^3(r-x)^2}\right]\right\}\\
\sigma_z &= 3GA\left\{\frac{xz^2}{r^5}-\frac{m-2}{3m}\left[\frac{r^2+rx-x^2}{r^3(r-x)}-\frac{z^2(2r-x)}{r^3(r-x)^2}\right]\right\}\\
\tau_{xy} &= 3GA\frac{x^2y}{r^5}\\
\tau_{yz} &= 3GA\left\{\frac{xyz}{r^5}+\frac{m-2}{3m}\,\frac{zy(2r-x)}{r^3(r-x)^2}\right\}\\
\tau_{xz} &= 3GA\frac{x^2z}{r^5}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Составляющие напряжения σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} при $x=0$ превращаются, как это и требуется, в нуль; начало координат представляет собою особенную точку. Если мы вырежем ее полусферой из полупространства, то действующие по поверхности полусферы напряжения имеют равнодействующую, направленную по оси X и равную:

$$P_x=\int\int\{\sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{xy}\cos(\nu,y)+\tau_{xz}\cos(\nu,z)\}\,do, \quad (11)$$

откуда, принимая во внимание, что:

$$\cos(\nu,x)=-\frac{x}{r},\quad \cos(\nu,y)=-\frac{y}{r},\quad \cos(\nu,z)=-\frac{z}{r}, \quad (12)$$

найдем

$$P_x=-3GA\int\int\frac{x^4+x^2y^2+x^2z^2}{r^6}\,do=-2\pi GA. \quad (13)$$

Выбирая A равным $-\frac{1}{2\pi G}$, получим результат действия сосредоточенной силы, равной 1 и приложенной в начале координат в направлении X.

Таким же образом мы можем вычислить действие сосредоточенной силы, направленной по оси Y или Z, т. е. в касательном направлении к границе полупространства. В этом случае нужно сделать подстановку $\frac{Ax}{r^3}$ не для потенциальной функции ω_1, а для ω_2 или ω_3, а затем вести расчет таким же образом, как и выше.

Из полученного решения мы можем посредством наложения найти точное решение для любых заданных поверхностных сил, тем же путем, что и в случае бесконечного пространства. К этим же решениям можно притти, решая задачу об определении вспомогательных потенциальных функций ω_1, ω_2, ω_3 по заданным значениям на границе при помощи *функции Грина* для полупространства.

36. Шаровые функции.

[1] Задача определения напряженного состояния шара при заданных поверхностных перемещениях или при заданных поверхностных силах сводится также к обычным задачам определения потенциальной функции по заданным условиям на границе.

Прежде всего покажем вкратце, каким образом решается для шара задача Дирихле, т. е. задача об определении функции φ, удовлетворяющей внутри шара уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и принимающей заданные значения на поверхности шара.

Частные, линейно независимые решения уравнения Лапласа, имеющие вид целых рациональных полиномов (т. е. не имеющие особенностей в области начала координат) будут: для полинома первой степени:

$$x, \ y, \ z,$$

для второй степени

$$z^2 - x^2, \ z^2 - y^2, \quad xy, \ yz, \ zx.$$

Число различных линейно независимых полиномов степени n, удовлетворяющих уравнению Лапласа, равно $2n+1$ (не останавливаемся на доказательстве). Если перейти от декартовых координат x, y, z к полярным (r — радиус, λ — географическая долгота, ϑ — расстояние от северного полюса):

$$x = r\cos\lambda\sin\vartheta, \quad y = r\sin\lambda\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta,$$

то в каждый полином n-ой степени войдет множитель r^n, и все $(2n+1)$ частных решений степени n могут быть записаны в виде:

$$r^n\cos\rho\lambda q_{n,\rho}(\vartheta), \quad r^n\sin\rho\lambda q_{n,\rho}(\vartheta), \quad (\rho = 0, 1, \ldots, n).$$

---

[1] См. *Р. Курант* и *Д. Гильберт*, Методы математической физики, стр. 485.

*Здесь $q_{n,\rho}(\vartheta)$ есть так называемая присоединенная к полиному Лежандра n-ой степени $(q_{n,o})$ функция порядка ρ. Если обозначить $\cos\vartheta = x$, то:

$$q_{n,o}(\vartheta) = P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{n!}\Big\{x^n -$$

$$-\frac{n(n-1}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\Big\}.$$

При $n = 1, 2, 3$ и т. д. получим:

$$P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{1}\right),\ P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Для присоединенной функции порядка ρ имеем:

$$q_{n,\rho} = (1-x^2)^{\frac{\rho}{2}}\frac{d^\rho}{dx^\rho}P_n(x) * \qquad (a)$$

Выражения (a) называются шаровыми функциями. Для последующего важно напомнить свойство ортогональности этих функций. Так, если p и p' — две различные шаровые функции, то взятый по поверхности любого шара интеграл

$$\int\int pp'\,do = 0. \qquad (1)$$

Для двух шаровых функций, принадлежащих различным n, это вытекает непосредственно из известной формулы теории потенциала

$$\int\int\int\Big\{p\Delta p' - p'\Delta p\Big\}d\omega = \int\int\Big\{p\frac{\partial p'}{\partial\nu} - p'\frac{\partial p}{\partial\nu}\Big\}do, \qquad (2)$$

откуда, так как $\Delta p = \Delta p' = 0$

$$\int\int p\frac{\partial p'}{\partial\nu}do = \int\int p'\frac{\partial p}{\partial\nu}do, \qquad (3)$$

где ν — нормаль к поверхности изучаемой области, совпадающая по направлению в случае шара с радиусом. Таким образом

$$\int\int p\frac{\partial p'}{\partial r}do = \int\int p'\frac{\partial p}{\partial r}do, \qquad (4)$$

и так как p и p' содержат радиус r только как множитель r^n и $r^{n'}$, так что

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{np}{r}, \quad \frac{\partial p'}{\partial r}=\frac{n'p'}{r}, \tag{5}$$

то отсюда следует

$$\frac{n'}{r}\int\int pp'do=\frac{n}{r}\int\int pp'do; \tag{6}$$

а это при $n \neq n'$ возможно только в том случае, когда

$$\int\int pp'do=0, \tag{7}$$

что и требовалось доказать. Для двух шаровых функций, принадлежащих к одному и тому же n, но к различным ρ

$$p=r^n \cos\delta\lambda\cdot q_{n,\rho}(\vartheta), \quad p'=r^n \cos\rho\lambda\cdot q_{n,\rho'}(\vartheta); \tag{8}$$

наше уравнение есть непосредственное следствие из известного ортогонального свойства тригонометрических функций.

Шаровые функции мы будем обозначать через $p_0(r, \lambda, \vartheta)$, $p_1(r, \lambda, \vartheta)$ и т. д., располагая их по n, а для каждого n — по ρ. Если нужно решить задачу об определении потенциальной функции φ, принимающей на поверхности шара радиуса a заданные значения $f(o)$, то выражая φ в виде ряда:

$$\varphi=\sum_0^\infty c_n p_n(r, \lambda, \vartheta), \tag{9}$$

определяем коэфициенты C_n умножая выражение

$$f(o)=\sum_0^\infty c_n p_n(a, \lambda, \vartheta), \tag{10}$$

являющееся условием для φ на поверхности $r=a$, на p_h справа и слева и интегрируя его по поверхности. Тогда в правой части уравнения, вследствие условия ортогональности (1), остается только член с коэфициентом c_h; получаем:

$$c_h=\frac{\int\int f(o)\,p_h(\alpha, \lambda, \vartheta)\,do}{\int\int p_h^2(\alpha, \lambda, \vartheta)\,do}. \tag{11}$$

37. Равновесие шара: а) случай заданных перемещений на поверхности.

Если на поверхности заданы перемещения

$$u=U,\ v=V,\ w+W,$$

то для решения основных уравнений равновесия теории упругости примем для перемещений u, v, w выражения

$$\left.\begin{aligned} u&=\varphi_1+(r^2-a^2)\frac{\partial\psi}{\partial x}\\ v&=\varphi_2+(r^2-a^2)\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ w&=\varphi_3+(r^2-a^2)\frac{\partial\psi}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Эта подстановка дает решение основных уравнений в том случае, когда φ_1, φ_2, φ_3 и ψ — потенциальные функции, причем ψ определяется из уравнения [§ 31, ур. (15)]:

$$\psi=-\frac{m}{2(3m-4)}r^{-\nu}\int\limits_0^r r^{\nu-1}\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right\}dr,\qquad(2)$$

где

$$\nu=\frac{m-2}{3m-4}.$$

На поверхности шара $r=a$ перемещения равны потенциальным функциям φ_1, φ_2, φ_3. Поэтому мы определим эти функции согласно § 36 так, чтобы они принимали на поверхности значения U, V, W; затем из (2) определяется ψ, что и дает искомое решение.

38. Равновесие шара: б) случай заданных на поверхности напряжений.[1]

Если для шара радиуса a заданы приложенные по его поверхности силы Ξ, H, Z (отнесенные к единице площади), то к основным уравнениям присоединяются граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{xy}\cos(\nu,y)+\tau_{xz}\cos(\nu,z)&=\Xi\\ \tau_{xy}\cos(\nu,x)+\sigma_y\cos(\nu,y)+\tau_{yz}\cos(\nu,z)&=\mathrm{H}\\ \tau_{xz}\cos(\nu,x)+\tau_{yz}\cos(\nu,y)+\sigma_z\cos(\nu,z)&=\mathrm{Z},\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

---

[1] Более подробное приложение см. *Love*, The mathematical theory of elasticity, Cambridge, 1927 (4-е издание).

которые при

$$\cos(\nu, x) = \frac{x}{a}, \quad \cos(\nu, y) = \frac{y}{a}, \quad \cos(\nu, z) = \frac{z}{a} \tag{2}$$

можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} x\sigma_x + y\tau_{xy} + z\tau_{xz} &= \Xi a \\ x\tau_{xy} + y\sigma_y + z\tau_{yz} &= \mathrm{H} a \\ x\tau_{xz} + y\tau_{yz} + z\sigma_z &= \mathrm{Z} a. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Получившаяся задача и в этом случае может быть сведена к задаче Дирихле; именно будем искать потенциальные функции ω_1, ω_2, ω_3, принимающие на поверхности шара значения:

$$\omega_1 = \frac{a}{G}\Xi, \quad \omega_2 = \frac{a}{G}\mathrm{H}, \quad \omega_3 = \frac{a}{G}\mathrm{Z}. \tag{4}$$

Эти функции, как указано выше, можно получить в виде ряда, расположенного по шаровым функциям; для определения u, v, w применим и в этом случае формулы (1) § 37:

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1 + (r^2 - a^2)\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ v &= \varphi_2 + (r^2 - a^2)\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ w &= \varphi_3 + (r^2 - a^2)\frac{\partial\psi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 ψ — потенциальные функции, причем ψ определяется из уравнений

$$r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{m-2}{3m-4}\psi = -\frac{m}{2(3m-4}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right), \tag{6}$$

$$\psi = \frac{-m}{6m-8} r^{-\nu} \int_0^r r^{\nu-1}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right) dr, \tag{7}$$

где $\nu = \dfrac{m-2}{3m-4}$.

Если составляющие напряжения мы выразим через φ и ψ, то граничные условия (3) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
&x\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+z\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}+x\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\\
&\quad+2\,xr\frac{\partial\psi}{\partial r}+2r^2\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{2x\Theta}{m-2}=\omega_1,\\
&x\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+y\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}+x\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\\
&\quad+2yr\frac{\partial\psi}{\partial r}+2r^2\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{2y\Theta}{m-2}=\omega_2,\\
&x\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+y\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+z\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}+x\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}+\\
&\quad+2zr\frac{\partial\psi}{\partial r}+2r^2\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{2z\Theta}{m-2}+\omega_3.
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

В правой части мы подставили вместо $\frac{a}{G}\Xi$, $\frac{a}{G}H$, $\frac{a}{G}Z$ равные им граничные значения потенциальных функций ω_1, ω_2, ω_3. На первый взгляд эти уравнения верны только на поверхности. Но, так как левые части уравнений суть потенциальные функции, в чем можно убедиться диференцированием, то уравнения верны повсюду внутри шара; в самом деле, если две потенциальные функции имеют одинаковые значения на поверхности, то они и вообще тождественны. Диференцируя теперь первое уравнение (8) по x, второе по y, третье по z, складываем их между собой; вводя при этом для сокращения обозначения:

$$\Theta_0=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\qquad(9)$$

и замечая, что

$$\Theta=\Theta_0+2r\frac{\partial\psi}{\partial r}\qquad(10)$$

и

$$x\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}+y\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}+z\frac{\partial\Theta_0}{\partial z}=r\frac{\partial\Theta_0}{\partial r},\qquad(11)$$

получаем:

$$2\Theta_0 + r\frac{\partial\Theta_0}{\partial r} + 6r\frac{\partial\psi}{\partial r} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + 4r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2r}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{6\Theta}{m-2} = \frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\omega_3}{\partial z}. \qquad (12)$$

Согласно ур-нию (6)

$$\Theta_0 = -2\left\{\frac{m-2}{m}\psi + \frac{3m-4}{m}r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right\} \qquad (13)$$

и

$$\Theta = \Theta_0 + 2r\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{2(m-2)}{m}\left\{\psi + 2r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right\}. \qquad (14)$$

Подставив это в ур-ние (12), получим уравнение для определения ψ:

$$r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2(m+1)}{m}r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{m+1}{m}\psi = -\frac{1}{4}\left\{\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right\}. \qquad (15)$$

Здесь правая часть также потенциальная функция, которую мы можем представить разложенной по шаровым функциям. Если

$$-\frac{1}{4}\left\{\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right\} = \sum r^n f_n(\lambda, \vartheta), \qquad (16)$$

то, полагая

$$\psi = \sum c_n r^n f_n(\lambda, \vartheta), \qquad (17)$$

сравнением коэфициентов получим следующее выражение:

$$c_n = \frac{m}{mn^2 + (m+2)n + m + 1}. \qquad (18)$$

Определив ψ таким образом, мы узнаем также и Θ. Функции φ_1, φ_2, φ_3 теперь можно получить следующим образом, Диференцируем первое ур-ние (8) по y, второе по x и вычитаем:

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)+z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)+$$
$$+2\left\{x\frac{\partial}{\partial y}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-y\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right\}-4\left\{x\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}+$$
$$+\frac{2}{m-2}\left(x\frac{\partial\Theta}{\partial y}-y\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)=\frac{\partial\omega_1}{\partial x}-\frac{\partial\omega_2}{\partial y}. \tag{19}$$

Если в полученном выражении примем

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=q_3$$

и обратим внимание на то, что

$$x\frac{\partial q_3}{\partial x}+y\frac{\partial q_3}{\partial y}+z\frac{\partial q_3}{\partial z}=r\frac{\partial q_3}{\partial r},$$

то ур-ние (19) получит вид:

$$r\frac{\partial q_3}{\partial r}=\text{известной функции.} \tag{20}$$

q_3 можно получить отсюда интегрированием; то же относится и к

$$q_1=\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\quad\text{и}\quad q_2=\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}.$$

Если q_1, q_2, q_3 определены, то φ_1 мы получим из первого ур-ния (8), которое при

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-q_3,\qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+q_2$$

примет вид

$$x\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\text{известной функции,} \tag{21}$$

откуда получаем φ_1 и соответственно φ_2 и φ_3 из прочих уравнений.

Следует еще заметить, что q_1, q_2, q_3 и φ_1, φ_2, φ_3 определены только до постоянной интегрирования; это соответствует тому, что u, v, w определяются через поверхностные силы только до перемещения шара, как твердого тела.

VIII. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В НАПРЯЖЕНИЯХ.

39. Сводная таблица уравнений равновесия в напряжениях. Перейдем теперь к выводу некоторых частных решений основных уравнений теории упругости, пользуясь диференциальными уравнениями в напряжениях. Эти диференциальные уравнения можно для случая отсутствия внешних сил, которым мы и на этот раз ограничимся, написать в следующем виде [§ 14, ур-ния (10)]:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\sigma_x+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=0, && \Delta\tau_{xy}+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}=0\\ &\Delta\sigma_y+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}=0, && \Delta\tau_{yz}+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y\partial z}=0\\ &\Delta\sigma_z+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=0, && \Delta\tau_{zx}+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial z\partial x}=0 \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

сюда присоединяются еще условия равновесия [§ 7, ур-ния (8)]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0\\ &\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0\\ &\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

и граничные условия на поверхности в случае заданных напряжений [§ 7, ур-ния (16)]

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x\cos(\nu,\ x)+\tau_{xy}\cos(\nu,\ y)+\tau_{xz}\cos(\nu,\ z)=\Xi\\ &\tau_{xy}\cos(\nu,\ x)+\sigma_y\cos(\nu,\ y)+\tau_{yz}\cos(\nu,\ z)=\mathrm{H}\\ &\tau_{xz}\cos(\nu,\ x)+\tau_{yz}\cos(\nu,\ y)+\sigma_z\cos(\nu,\ z)=\mathrm{Z}. \end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

40. Простейшие случаи. Ур-ния (1) § 39 показывают прежде всего, что возможно любое линейное распределение напряжений, лишь бы только оно удовлетворяло условиям равновесия (2); в случае же постоянных напряжений эти условия заведомо удовлетворяются. Из постоянных распределений напряжения мы упомянем здесь, кроме случая равномерного растяжения цилиндра (это тот основной взятый из опыта факт и привел нас к составлению уравнений, связывающих напряжения и деформации), еще случай равномерного сжатия, для которого

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Поверхностные силы, вызывающие это напряженное состояние, суть:

$$\Xi = -p\cos(\nu, x),\ \mathrm{H} = -p\cos(\nu, y),\ Z = -p\cos(\nu, z); \quad (2)$$

таким образом, на каждую единицу поверхности действует нормальное давление p. Составляющие деформации получат вид

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{p\,(m-2)}{Em} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

откуда непосредственно получаются перемещения

$$u = -\frac{p\,(m-2)}{Em}x,\ v = -\frac{p\,(m-2)}{Em}y,\ w = -\frac{p\,(m-2)}{Em}z. \qquad (4)$$

Уменьшение объема, отнесенное к единице объема, будет:

$$-\Theta = \frac{3\,(m-2)}{Em}p, \qquad (5)$$

Величину $\frac{Em}{3\,(m-2)}$ называют **модулем сжатия**.

Линейные распределения напряжений приводят к уже упомянутым выше случаям чистого изгиба стержня и пластинки (§ 29 и 30).

41. Распределение напряжений, зависящее только от двух координат; функции напряжения. Более общий вид напряженного состояния можно получить, допуская, что это состояние не изменяется в направлении одной из координат, скажем в направлении оси Z. Тогда из уравнений исчезнут частные производные по z и условия равновесия получат вид (опять-таки при допущении, что отсутствуют массовые силы):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сперва находим полный интеграл этих уравнений; затем подставляем выражения, полученные для напряжений, в ур-ния (1) § 39.

Ур-ния (1) этого параграфа очевидно удовлетворяются, если положить:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2F}{\partial y^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}, \qquad (2)$$

$$\tau_{xz}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \tau_{yz}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad (3)$$

где $F(x, y)$, $\psi(x, y)$ — неизвестные пока „функции напряжений“, определяемые из ур-ний (1) § 39. Подставляя (2) и (3) в эти уравнения, получим сначала из уравнений для τ_{zx} и τ_{zy}

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}=0, \qquad (4)$$

откуда

$$\Delta\psi=c=\text{const.} \qquad (5)$$

Чтобы получить диференциальное уравнение для F, так называемой *функции напряжения Эри* (Airy), перепишем сначала ур-ния (1) § 39 в несколько измененном виде: буквой s мы обозначим уже не сумму всех трех напряжений, а только сумму

$$s=\sigma_x+\sigma_y. \qquad (6)$$

Вместе с тем в ур-ниях (1), в виду исчезновения частных производных по z, оператор $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, и ур-ния (1) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\sigma_x+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}=0\\
&\Delta\sigma_y+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}=0\\
&\Delta\sigma_z\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\;=0\\
&\Delta\tau_{xy}+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}+\frac{m}{m+1}\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x\partial y}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Так как $\Delta(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=0$, то из третьего ур-ния (7) следует, что

$$\Delta s=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0,\qquad(8)$$

или, подставляя (2):

$$\Delta\Delta F=0.\qquad(9)$$

Теперь мы можем найти и σ_z. Из первого, второго и четвертого ур-ний (7), применяя (8) и (9), получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}&=-\frac{\partial^2 s}{\partial x}-\frac{m+1}{m}\frac{\partial^2\Delta F}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{m+1}{m}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\\
\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x\partial y}&=\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;=-\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}+\frac{m+1}{m}\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}\\
\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}&=\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;=-\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{m+1}{m}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Путем интегрирования приходим к уравнению

$$\sigma_z=\frac{1}{m}(\sigma_x+\sigma_y)+\alpha x+\beta y+\gamma.\qquad(11)$$

Величины α, β, γ — постоянные интегрирования, соответствуют случаям равномерного растяжения и чистого изгиба, которые мы исследовали в §§ 29 и 30. С самого начала было очевидно, что такие состояния могут быть наложены на любое напряженное состояние искомого типа (не зависящее от z); отбрасывая эти напряжения, приведем ур-ние (11) [ср. § 11, ур-ние (9)] к виду:

$$\sigma_z-\frac{1}{m}(\sigma_x+\sigma_y)=E\varepsilon_z=0,\qquad(12)$$

но это означает, что удлинение ε_z в направлении Z превращается в нуль. Итак, если $\psi = 0$, то мы имеем так называемое плоское деформированное состояние, при котором каждая точка имеет перемещения в плоскости $z = \text{const}$, в которой она находилась до деформации.

42. Кручение стержня. Наиболее простое решение только-что приведенных уравнений мы получим, приняв $F = 0$. Соответствующее распределение напряжений имеет место при кручении стержня моментами, приложенными по торцам. Если мы представим себе цилиндрический стержень, закрепленный на нижнем конце и закрученный парой на верхнем конце, то из условий равновесия любой выделенной части стержня следует, что через каждое поперечное сечение должно передаваться одинаковое напряжение, т. е. напряжения не зависят от z. Пусть при этом ось Z проходит через центры тяжести поперечных сечений стержня, а оси X и Y лежат на нижнем торце. Согласно ур-ниям (2) и (3) § 41 все напряжения превращаются в нуль, исключая

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Граничное условие, которому должна удовлетворять функция ψ на контуре поперечного сечения, мы получим, выразив, что на боковой поверхности отсутствуют напряжения:

$$\tau_{zx}\cos(\nu,\ x) + \tau_{zy}\cos(\nu,\ y) = 0 \tag{2}$$

или, если обозначить через dx и dy проекции элемента дуги dl контура, то

$$\tau_{zx}\frac{dy}{dl} - \tau_{zy}\frac{dx}{dl} = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dl} = 0$$

или $\psi = \text{const}$. Постоянную мы можем принять равной нулю, так как она не имеет значения при определении напряжений. Поэтому условие на контуре принимает вид:

$$\psi = 0. \tag{3}$$

Наша задача сводится таким образом к решению ур-ния (5) § 41 $\Delta\psi = c$ для области, ограниченной в плоскости XY поперечным сечением стержня при условии на границе $\psi = 0$.

Геометрическое значение постоянной c можно получить, рассматривая перемещения. Имея в виду, что σ_x, σ_y, τ_{xy} обращаются в нуль, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0; \tag{4}$$

сверх того:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{5}$$

Три ур-ния (4) означают, что линейные элементы, лежащие в плоскости XY, не меняют своей длины. Перемещение, перпендикулярное оси Z, состоит таким образом в чистом вращении поперечных сечений, которое при малых деформациях, если угол поворота обозначить через ϑ, выражается в виде:

$$u=\vartheta y, \qquad v=-\vartheta x. \tag{6}$$

Угол ϑ может зависеть еще и от z, но только линейно: в самом деле, если напряжения должны быть независимы от z, то перемещения могут быть только линейными функциями z. Так как поперечное сечение на нижнем торце $z=0$ закреплено, то

$$\vartheta=z\omega, \tag{7}$$

где ω — угол, на который поворачиваются два поперечных сечения, находящиеся друг от друга на расстоянии 1; поэтому

$$u=\omega zy, \qquad v=\omega zx. \tag{8}$$

Из ур-ния (5) вытекает, что w может быть функцией только x и y.

$$w=\varphi(x, y). \tag{9}$$

Выразим теперь напряжения τ_{zx} и τ_{zy} через перемещения, а затем через функцию напряжения ψ; получим:

$$\begin{aligned} \tau_{zx}&=G\left\{\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right\}=G\left\{\omega y+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\}=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \tau_{zy}&=G\left\{\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right\}=G\left\{-\omega x+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right\}=-\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{10}$$

Исключим далее φ, диференцируя первое уравнение по y, а второе по x и произведя вычитание; найдем:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=2G\omega, \tag{11}$$

откуда, сопоставляя с $\Delta\psi=c$, получим:

$$c=2G\omega, \qquad \Delta\psi=2G\omega.$$

Крутящий момент, передаваемый через любое поперечное сечение стержня, равен

$$M=-\int\int(\tau_{zx}y-\tau_{zy}x)\,dxdy=-\int\int\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy;$$

интегрируя по частям, причем интеграл по контуру отпадает в силу граничного условия $\psi=0$, получим:

$$M=2\int\int\psi dxdy. \tag{12}$$

* Система внешних сил, приложенная к торцам и создающая крутящий момент M, строго говоря, должна быть распределена в точности по тому же закону, что и касательные напряжения τ_{yz}, τ_{zx}, как они получаются из решения для ψ. Фактически это условие не может быть соблюдено, и решения, получаемые по методу этого параграфа, можно применять к конкретным случаям кручения, пользуясь уже упомянутым в параграфе об изгибе балки *принципом Сен-Венана*; согласно этому принципу, способ распределения сил по торцам оказывает влияние на распределение напряжений только в сечениях весьма близких к торцам. По мере удаления от торцов влияние его быстро ослабевает и практически с ним можно не считаться *.

43. Плоское деформированное состояние. [1] Если цилиндрическое тело по всей своей длине загружено одинаковым образом (например прямая стена под давлением воды), то можно принять, что упругие перемещения имеют место только в плоскостях, перпендикулярных оси тела; мы имеем в этом случае дело с плоской деформацией (§ 41). Так как

---

[1] См. *G. B. Airy*, Phil. Trans. том 53, стр. 49, 1863.

крутящие моменты отсутствуют, то напряжения, согласно § 41, будут:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где функция напряжения F удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta F = 0. \tag{2}$$

Выясним теперь, какой вид имеют граничные условия, которым должна удовлетворять функция F на контуре поперечного сечения плоскости XY. Примем, что на контуре заданы напряжения, и условимся говорить о цилиндрическом слое толщиной в 1. Тогда, будучи отнесены к единице длины контура, эти напряжения будут в направлении X равны Ξ *кг/см*, в направлении Y — H *кг/см*. Граничные условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y) &= \Xi \\ \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) &= \mathrm{H}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

если dx и dy — проекции элемента длины dl контура, то $\cos(\nu, x) = \frac{dy}{dl}$, $\cos(\nu, y) = -\frac{dx}{dl}$, и ур-ния (3) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dl} &= \Xi \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{dx}{dl} &= -\mathrm{H}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Интегрируя, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \int \Xi\, dl = P(l) \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= -\int \mathrm{H}\, dl = -Q(l), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где P и Q — проекции равнодействующей всех сил, распределенных по контуру от точки, соответствующей произвольному нижнему пределу интеграла, до точки, соответствующей переменному верхнему пределу.

Интегрируя еще раз, получаем:

$$F=\int^{l}\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy\right)=\int^{l}(Pdy-Qdx). \qquad (6)$$

Интегрирование по частям обнаруживает механическое значение F: значение F на контуре есть взятый относительно конечной точки момент всех сил, действующих между начальной и конечной точкой интегрирования.

Граничное условие (5) можно еще написать в ином виде. Если мы обозначим элемент длины, взятый вдоль внешней нормали к контуру, через dn, то

$$\frac{dx}{dn}=\frac{dy}{dl}, \qquad \frac{dy}{dn}=-\frac{dx}{dl},$$

и из формул (5) получаем:

$$\frac{dF}{dn}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dn}=-\left(Q\frac{dy}{dl}+P\frac{dx}{dl}\right). \qquad (7)$$

Задача, к которой мы пришли, может быть формулирована теперь так: требуется определить функцию F, удовлетворяющую бигармоническому уравнению $\Delta\Delta F=0$; на границе F и ее нормальная производная принимают заданные значения $F=f(l), \frac{dF}{dn}=g(l)$.

Систематический путь вычисления перемещений состоит в следующем: сперва вычисляем из уравнений, связывающих напряжения и деформации, составляющие деформации; затем получаем из них диференцированием все вторые производные от u, v, w по x, y, z. Двукратное интегрирование дает нам перемещения; * однако проще вести вычисления следующим путем: по формулам (12) § 41 и (12) § 11 имеем ($s=\sigma_x+\sigma_y$):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{2G}\left\{\sigma_x-\frac{s}{m}\right\}=\frac{1}{2G}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\frac{\Delta F}{m}\right\}=\\
&=\frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}\Delta F-\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right\}\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{1}{2G}\left\{\sigma_y-\frac{s}{m}\right\}=\frac{1}{2G}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}-\frac{\Delta F}{m}\right\}=\\
&=\frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}\Delta F-\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right\};\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{G}\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}.
\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Заметим теперь, что $s=\Delta F$ есть потенциальная функция; вводя сопряженную ей потенциальную функцию t, составим комплексный интеграл $S+iT$ от аналитической функции $s+it$:

$$S+iT=\int(s+it)\,(dx+idy), \tag{8}$$

причем

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial y}=s=\Delta F,\qquad -\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial x}=t.$$

Подстановка в формулы (а) дает:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right\},\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

и после интегрирования в связи с последней формулой (а) получим: *

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}S-\frac{\partial F}{\partial x}\right\}-\gamma y+u_0\\ v&=\frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}T-\frac{\partial F}{\partial y}\right\}+\gamma x+v_0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Правильность этих результатов можно проверить непосредственно. Так, например:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}s-\sigma_y\right\}=\frac{1}{2G}\left\{\sigma_x-\frac{s}{m}\right\}\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}s-\sigma_x\right\}=\frac{1}{2G}\left\{\sigma_y-\frac{s}{m}\right\}\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}(t-t)-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\right\}=\frac{1}{G}\tau_{xy}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

что согласуется с уравнениями, связывающими напряжения и деформации.

Постоянные интегрирования u_0 и v_0 соответствуют параллельному переносу; γ, которое должно быть малым, соответствует вращению, не сопровождающемуся деформацией. Составляя вихрь вектора перемещения, определим геометрическое значение функции t. Не принимая во внимание не имеющей значения постоянной интегрирования γ, получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{G}\,\frac{m-1}{m}\,t. \tag{11}$$

Таким образом, t с точностью до постоянного множителя равно вихрю вектора перемещения, т. е. среднему повороту линейных элементов.

Формулы перемещений приобретают важное значение, когда изучаемая область не является односвязной (например в случае полой трубки, находящейся под действием внутренних и внешних сил). Граничные значения F и $\frac{\partial F}{\partial n}$ содержат три произвольных постоянных интегрирования. В случае односвязной области эта неопределенность несущественна; различные решения при различном выборе этих постоянных отличаются друг от друга только линейными функциями x и y; при диференцированиях, необходимых для определения напряжений, эти линейные члены отпадут. Если же речь идет о многосвязной области (область с отверстиями), то на каждой границе мы имеем три неопределенных постоянных, и только три постоянных могут быть произвольными; остальные определяются из требования, чтобы не только напряжения, но и перемещения были однозначными функциями x и y. Для этого прежде всего необходимо, чтобы средний поворот линейных элементов, т. е. функция t, была однозначным.

Но

$$t = \int\left\{\frac{\partial s}{\partial x}\,dy - \frac{\partial s}{\partial y}\,dx\right\} = \int \frac{\partial s}{\partial n}\,dl. \tag{12}$$

Поэтому, чтобы t после обхода вокруг отверстия вернулось к своему первоначальному значению, интеграл по всему контуру отверстия должен равняться нулю:

$$\int \frac{\partial s}{\partial n}\,dl = 0. \tag{13}$$

Так как сверх того требуется, чтобы u и v были однозначны, то выражения

$$\frac{m-1}{m}\,S - \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{m-1}{m}\,T - \frac{\partial F}{\partial y} \tag{14}$$

должны после обхода вокруг отверстия также вернуться к своему первоначальному значению.

Но

$$S = \int (sdx - tdy), \quad T = (tdx + sdy). \tag{15}$$

Если при обходе по контуру отверстия внешняя нормаль к области, занимаемой телом, направлена вправо по отношению к поступательному движению вдоль контура, то, как мы видели выше, разности значений $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $-\frac{\partial F}{\partial x}$ между какими-либо двумя точками будут равны проекциям равнодействующей сил, приложенных между этими двумя точками на ось X или соответственно на ось Y. Если мы обойдем таким образом все отверстие, то $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $-\frac{\partial F}{\partial x}$ увеличиваются на P^* и на Q^*, причем P^* и Q^* обозначают сумму X-овых и Y-овых составляющих всех сил, приложенных к границе отверстия. Так как

$$u = -\frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}S - \frac{\partial F}{\partial x}\right\} \text{ и } v = \frac{1}{2G}\left\{\frac{m-1}{m}T - \frac{\partial F}{\partial y}\right\}$$

после обхода вокруг отверстия должны вернуться к своим первоначальным значениям, то $\frac{m-1}{m}S$ и $\frac{m-1}{m}T$ должны возрасти на ту же величину, что и $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$; поэтому интегралы, взятые вокруг отверстия в заданном направлении, должны быть равны

$$\left.\begin{aligned} \int\left\{tdx + sdy\right\} &= \frac{m}{m-1}P^* \\ \int\left\{tdy - sdx\right\} &= \frac{m}{m-1}Q^*. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

На внешней границе оставим постоянные интегрирования неопределенными; для каждого же внутреннего отверстия определим их условиями (13) и (16). Задача интегрирования естественно затрудняется тем, что функция F и ее первые производные в этом случае не будут уже однозначными функциями координат.

44. Плоское напряженное состояние.[1] Такую же математическую задачу, как для плоского деформированного состояния, мы получим в случае так называемого плоского напряженного состояния; однако следует отметить, что здесь мы имеем только приближенное решение основных уравнений теории упругости. Пусть мы имеем плоскую тонкую пластинку; расположим координатную систему так, чтобы средняя плоскость пластинки совпадала с координатной плоскостью $z=0$, так что $z=+\frac{h}{2}$ соответствует верхней стороне, а $z=-\frac{h}{2}$ нижней стороне пластинки; если пластинка находится только под действием сил, приложенных в плоскости пластинки к ее обводу, тогда как верхняя и нижняя ее стороны не нагружены, то средними значениями составляющих напряжений τ_{xz}, τ_{yz}, σ_z, взятыми по толщине пластинки, можно пренебречь. Составляя среднее значение по толщине пластинки $\left(\text{интегрирование от } z=-\frac{h}{2} \text{ до } z=+\frac{k}{2}\right)$, получим для средних значений напряжений условия равновесия в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}&=0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(причем средние значения обозначены теми же буквами, как выше сами напряжения); выражения, связывающие их со средними значениями перемещений, будут:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{2G}\left\{\sigma_x-\frac{s}{m+1}\right\} \\ \frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{1}{2G}\left\{\sigma_y-\frac{s}{m+1}\right\} \qquad (s=\sigma_x+\sigma_y). \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

---

[1] См. *А. Clebsch*, Theorie der Elastizität fester Körper, § 39, Leipzig, 1862.

Условиям равновесия и в этом случае можно удовлетворить, принимая

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{3}$$

Для функции напряжения F получаем исключением u и v из ур-ний (2) и в этом случае:

$$\Delta\Delta F = 0. \tag{4}$$

Дальнейший ход рассуждения тот же, что и выше; в частности граничные условия для F и для $\frac{\partial F}{\partial n}$ — те же, что и в случае плоской деформации. Только в формулах, выражающих средние значения перемещений, множитель $\frac{m-1}{m}$ заменяется на $\frac{m}{m+1}$, так что эти формулы получат вид:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2G}\left[\frac{m}{m+1} S - \frac{\partial F}{\partial x}\right] \\ v &= \frac{1}{2G}\left[\frac{m}{m+1} T - \frac{\partial F}{\partial y}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Как отмечено уже выше, методы, развитые здесь для простейшего случая, могут быть углублены в направлении разыскания распределения напряжений линейных или квадратичных и т. д. относительно z. Таким путем можно получить, задаваясь линейным относительно z распределением напряжений по оси z, напряженное состояние стержня, закрепленного на одном конце и изгибаемого силой на свободном конце; из квадратичного распределения напряжения относительно z получается напряженное состояние стержня при изгибе под действием его собственного веса. Эти задачи удобнее решать, исходя из напряжений, а не из перемещений, так как в последнем случае степень зависимости от z повышается на единицу.

Развитый здесь метод функций напряжения для плоского случая может быть применен также и для пространственных задач. При этом существенно то, что уравнения равновесия для составляющих напряжения

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

и т. д. интегрируются (разумеется и на этот раз мы ограничиваемся случаем отсутствия массовых сил), например посредством функций напряжения F, G, H при помощи подстановки:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x=\frac{\partial^2H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2G}{\partial z^2},\ \sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial z^2}+\frac{\partial^2H}{\partial x^2},\ \sigma_z=\frac{\partial^2G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2},\\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2H}{\partial x\partial y},\ \tau_{yz}=-\frac{\partial^2F}{\partial y\partial z},\ \tau_{zx}=-\frac{\partial^2G}{\partial z\partial x}.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Для F, G, H мы получим в этом случае из уравнений в напряжениях [§ 14, ур-ние (2)] шесть, правда, не совсем не зависимых друг от друга диференциальных уравнений четвертого порядка. К конкретным вычислениям в отдельных задачах этот способ до сих пор еще не был применен.

IX. КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ.

45. Колебания, вызываемые сосредоточенной силой в безграничной упругой среде. Так как вопросы упругих колебаний подробно разбираются в третьем выпуске этой книги, то мы ограничимся здесь разбором случая, имеющего особое принципиальное значение, именно случаем сосредоточенной силы $P(t)$, изменяющейся со временем и приложенной в некоторой точке безграничной упругой среды. Результатами решения этой задачи мы воспользуемся в дальнейшем для доказательства, что и проблемы упругих колебаний могут быть всегда сведены к случаю отсутствия массовых сил. Так как для бесконечного пространства граничные условия отсутствуют (они заменяются требованием, чтобы в бесконечности перемещения и напряжения обращались в нуль), то нам нужно найти только правильное во всех точках, кроме начала координат, в котором приложена сила $P(t)$, решение диференциальных уравнений движения [§ 15, ур-ние (3)]:

$$\left.\begin{aligned}\Delta u+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\\ \Delta v+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial y}=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\\ \Delta w+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial z}=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2w}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Характер особенности мы можем, как в соответствующем статическом случае (§ 32), определить заранее. По условию в начале координат действует сила $P(t)$, изменяющаяся в зависимости от времени; направление силы мы сделаем направлением оси X. Если вырезать вокруг начала координат малый шар, то по поверхности этого шара должны быть распределены напряжения, равнодействующая которых как раз равна $P(t)$ и имеет направление оси X. Если мы хотим, чтобы напряжения имели конечную и не равную нулю равнодействующую, то они должны с уменьшением радиуса шара обращаться в бесконечность порядка $\frac{1}{r^2}$; перемещения, производными которых являются напряжения, должны обращаться в бесконечность как $\frac{1}{r}$. Для нахождения решений ур-ний (1), имеющих особенность этого рода, мы сперва составим диференциальные уравнения для объемного расширения (диверренца) Θ и для вихря вектора перемещений; затем определим вектор перемещения по его дивергенцу и вихрю.

Продиференцировав ур-ния (1) по x, y, z и складывая их, получим для Θ уравнение:

$$\Delta\Theta = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}, \tag{2}$$

причем

$$a^2 = \frac{(2m-2)G}{(m-2)\rho}. \tag{3}$$

То же уравнение, только с другим коэфициентом, можно получить для составляющих вихря:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right); \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

если например продиференцировать третье уравнение по y, второе по z и вычесть его из третьего, то получим

$$\Delta\omega_x = \frac{1}{b^2}\frac{\partial\omega_x}{\partial t^2}$$

и аналогично

$$\left.\begin{aligned}\Delta\omega_y &= \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\omega_y}{\partial t^2}\\ \Delta\omega_z &= \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\omega_z}{\partial t^2},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$b^2 = \frac{G}{\rho}. \tag{6}$$

Во всех случаях мы получаем таким образом уравнения одного и того же типа:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{7}$$

Построим сперва решение этого уравнения, зависящее, помимо t, только от r; для нахождения других частных решений достаточно заметить, что все частные производные первого решения по x, y, z в свою очередь являются решениями нашего уравнения.

Если решение ур-ния (7) зависит только от t и r, то это уравнение может быть в пространственных полярных координатах представлено в виде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Общее решение этого уравнения будет:

$$\varphi = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}F\left(t + \frac{r}{c}\right); \tag{9}$$

здесь f и F суть произвольные функции стоящих в скобках аргументов. Эти решения представляют собою так называемые шаровые волны; в частности функции вида $f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ суть волны, расходящиеся от начала координат во все стороны, а функции вида $F\left(t + \frac{r}{c}\right)$ — волны, сходящиеся со всех сторон к началу координат. Представим себе, что действие силы началось в некоторый момент времени, когда все пространство находилось в состоянии покоя; возмущение, направленное извне к началу координат, в этом случае не имеет места, и единственное существующее возмущение покоя имеет причиной данную силу и распространяется изнутри наружу. Пэтому нам нужно только исследовать решения вида

$$\frac{1}{r} f\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Далее вопрос о различных возможностях при нашем допущении еще более упростится, если мы примем во внимание, что сила, действующая в направлении оси X, во всяком случае вызовет только такое движение, при котором каждая точка будет двигаться в плоскости, проходящей через эту точку и ось X. Таким образом, x-овая составляющая вихря превращается в нуль. Из тождества:

$$\operatorname{div} \omega=\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}=\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+\frac{d w_z}{d z}=0 \qquad (10)$$

следует в этом случае, что ω_y и ω_z могут быть представлены в виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \varphi_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned}\right. \qquad (11)$$

Приняв

$$\left.\begin{aligned} \omega_y &= \beta \frac{\partial}{d z}\left\{\frac{f\left(t-\frac{r}{b}\right)}{r}\right\} \\ \omega_z &= -\beta \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{f\left(t-\frac{r}{b}\right)}{r}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

мы удовлетворим диференциальному уравнению для φ, получим в начале координат нужную нам особенность и учтем требуемые условия симметрии. Постоянную β мы определим ниже. Присоединим сюда еще формулу для объемного расширения, также удовлетворяющую требованиям симметрии и имеющую нужную нам особенность:

$$\Theta = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} \right\}. \tag{13}$$

Чтобы получить из этих выражений самые перемещения, разложим вектор перемещения u, v, w на свободный от вихрей вектор u_1, v_1, w_1, дивергенц которого имеет нужное нам значение, и на соленоидальный (не имеющий источников) вектор u_2, v_2, w_2, вихрь которого имеет заданное значение.

Относительно u_1, v_1, w_1 положим:

$$u_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad v_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad w_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \tag{14}$$

тогда ур-ние (13) удовлетворится, если φ определить из уравнения:

$$\Delta \varphi = \alpha \frac{f\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r}. \tag{15}$$

Так как правая часть уравнения зависит только от r и t, то мы можем определить φ таким образом, чтобы оно также зависело только от этих переменных. Тогда ур-ние (15) получит вид:

$$\Delta \varphi = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = \alpha \frac{f\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r}, \tag{16}$$

откуда, интегрируя, найдем;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2} \int_{\infty}^{r} r f\left(t - \frac{r}{a}\right) dr.$$

Самое φ нам не понадобится. Постоянная интегрирования, которая также могла бы зависеть от t, должна быть опущена, так как на достаточно большом расстоянии перемещения в любой момент времени превращаются в нуль, если принять, что действие силы началось в момент времени $t = 0$.

Если мы заменим переменную интегрирования r через $a\tau$, то:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\alpha a^2}{r^2} \int_{\infty}^{r/a} \tau f(t - \tau)\, dt. \tag{17}$$

Для соленоидального вектора u_2, v_2, w_2 примем:

$$u_2=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},\quad v_2=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},\quad w_2=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}. \tag{18}$$

Эта подстановка удовлетворяет ур-ниям (4) и (12) для составляющих вихря, если:

$$\Delta\psi=2\beta\frac{f\left(t-\frac{r}{b}\right)}{r}. \tag{19}$$

Поступая так же, как и выше, мы получаем отсюда $\frac{\partial\psi}{\partial r}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{2\beta b^2}{r^2}\int\limits_{\infty}^{r/b}\tau f(t-\tau)\,dt. \tag{20}$$

Если наложить друг на друга векторы u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 и подсчитать соответствующие напряжения, то равнодействующая напряжений, распределенных по поверхности малого шара с радиусом ρ, стремящимся к нулю, будет равна $4\pi\rho f(t)$, если принять постоянные α и β равными

$$\alpha=\frac{1}{a^2}\quad\text{и}\quad 2\beta=\frac{1}{b^2}. \tag{21}$$

Для перемещений окончательно получим такие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
4\pi\rho u&=\frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial x^2}\int\limits_{r/a}^{r/b}\tau P(t-\tau)\,d\tau+\\
&+\frac{x^2}{r^3}\left\{\frac{1}{a^2}P\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{b^2}P\left(t-\frac{r}{b}\right)\right\}+\frac{1}{b^2r}P\left(t-\frac{r}{b}\right);\\
4\pi\rho v&=\frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial x\partial y}\int\limits_{r/a}^{r/b}\tau P(t-\tau)\,d\tau+\\
&+\frac{xy}{r^3}\left\{\frac{1}{a^2}P\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{b^2}P\left(t-\frac{r}{b}\right)\right\};\\
4\pi\rho w&=\frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial x\partial z}\int\limits_{r/a}^{r/b}\tau P(t-\tau)\,d\tau+\\
&+\frac{xz}{r^3}\left\{\frac{1}{a^2}P\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{b^2}P\left(t-\frac{r}{b}\right)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

46. Сведение общей задачи к случаю отсутствия массовых сил. Найденное в предыдущем параграфе частное решение, дающее картину действия силы, сосредоточенной в некоторой точке упругой среды, можно использовать для того, чтобы свести рассмотрение общего случая движения упругой среды при наличии массовых сил к случаю отсутствия их. Для этого мы прежде всего заметим, что как для случая равновесия, так и для движения решение диференциальных уравнений:

$$G\left\{\Delta u+\frac{1}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right\}+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ и т. д.} \tag{1}$$

всегда, в виду линейности уравнений, может быть составлено из двух решений: из любого частного решения неоднородных уравнений (т. е. уравнений, содержащих массовые силы) и из решения однородных уравнений (т. е. не содержащих массовых сил). Таким образом, дело сводится прежде всего к тому, чтобы найти какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения. Для этой цели можно воспользоваться упомянутыми выше частными решениями, в связи с принципом наложения, заключающимся в том, что при сложении различных систем внешних сил вызванные ими напряжения и перемещения также попросту складываются друг с другом.

Пусть на исследуемое упругое тело (декартовы координаты мы обозначаем через x, y, z или ξ, η, ζ) действуют в точках ξ, η, ζ массовые силы $X(\xi, \eta, \zeta; t)$, $Y(\xi, \eta, \zeta; t)$, $Z(\xi, \eta, \zeta; t)$, отнесенные к единице объема. Обозначим перемещения, вызываемые в безграничной упругой среде силой $X(\xi, \eta, \zeta; t)$, действующей в точке ξ, η, ζ в направлении оси X, через:

$$\left.\begin{array}{c} U^{(x)}(\xi, \eta, \zeta, x, y, z),\ V^{(x)}(\xi, \eta, \zeta, t, x, y, z), \\ W^{(x)}(\xi, \eta, \zeta, t, x, y, z) \end{array}\right\} \tag{2}$$

[формулы (22) § 15]. Тогда сила $X(\xi, \eta, \zeta; t)d\omega$, действующая в этой точке на элемент объема $d\omega$, вызовет в безграничной упругой среде перемещения:

$$U^{(x)}\,d\omega, \quad V^{(x)}\,d\omega, \quad W^{(x)}\,d\omega.$$

Суммируя действия всех сил X, распределенных по объему, и распространяя те же рассуждения и на силы, действующие в направлении Y и Z, получим:

$$\left.\begin{aligned} u^* &= \int\int\int \{ U^{(x)} + U^{(y)} + U^{(z)} \} d\omega \\ v^* &= \int\int\int \{ V^{(x)} + V^{(y)} + V^{(z)} \} d\omega \\ w^* &= \int\int\int \{ W^{(x)} + W^{(y)} + W^{(z)} \} d\omega \\ & d\omega = d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Эти интегралы представляют собою упругие перемещения, которые были бы вызваны действующими на упругое тело массовыми силами, если бы это тело было безгранично. Если же оно ограничено, то выражаемые этими уравнениями функции u^*, v^*, w^*, представляющие частное решение неоднородных уравнений, не удовлетворяют условиям на поверхности тела (для перемещений или сил).

Если принять теперь

$$u = u^* + u', \quad v = v^* + v', \quad w = w^* + w',$$

то u', v', w' должны удовлетворять однородным уравнениям и должны быть определены так, чтобы условия на поверхности и начальные условия для u, v, w удовлетворялись. Так как при заданных массовых силах u^*, v^*, w^* могут рассматриваться как известные, то задача разыскания u', v', w' является вполне определенной.

Необходимо еще отметить, что в большинстве случаев, имеющих практическое значение, для нахождения частного решения неоднородных уравнений большей частью не приходится прибегать к формуле (3); для наиболее часто встречающихся сил — силы тяжести и центробежной силы — можно обычно непосредственно дать частное решение.

X. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

47. Формулы Бетти (Betti) и Максвелла. [1] Энергетические соображения § 17 дают возможность вывести теорему взаимности, которую, по имени ее автора, называют теоремой Бетти. Дадим сначала наглядное с механической точки зрения

---

[1] *E. Betti*, Cim. (2) том 7—10, 1872—73.

доказательство этой теоремы. Представим себе для этого упругое тело, находящееся в равновесии под действием массовых и поверхностных сил, причем величина этих сил изменяется постепенно и увеличивающиеся силы вызывают постепенное увеличение деформаций; производимая при этом работа равна очевидно не произведению сил на перемещения (или соответственно сумме таких произведений), а только половине его; это объясняется тем, что силы линейно возрастают вместе с перемещениями, так что для определения работы надо принять в расчет только среднее значение сил за весь промежуток времени, равное половине конечного значения силы. Иными словами, если обозначить через X, Y, Z массовые силы, отнесенные к единице объема, Ξ, H, Z—поверхностные силы, отнесенные к единице поверхности, u, v, w—вызванные ими перемещения, то работа, произведенная внешними силами при деформации и накопленная в упругом теле в виде энергии деформации, будет:

$$A_{11}=\frac{1}{2}\int\int\int\{Xu+Yv+Zw\}\,d\omega+$$
$$+\frac{1}{2}\int\int\{\Xi u+\mathrm{H}v+\mathrm{Z}w\}\,do. \qquad (1)$$

Наложим на первую деформацию другую систему перемещений u', v', w', производимую массовыми силами X', Y', Z', и поверхностными силами Ξ', H', Z'; силы первой системы, имеющие при этой второй деформации уже полную свою величину, производят работу:

$$A_{12}=\int\int\int\{Xu'+Yv'+Zw'\}\,d\omega+$$
$$+\int\int\{\Xi u'+\mathrm{H}v'+\mathrm{Z}w'\}\,do. \qquad (2)$$

Кроме того, силы второй системы, постепенно вступая в действие, производят так же, как силы первой системы в предшествующем случае, работу:

$$A_{22}=\frac{1}{2}\int\int\int\{X'u'+Y'v'+Z'w'\}\,d\omega+$$
$$+\frac{1}{2}\int\int\{\Xi'u'+\mathrm{H}'v'+\mathrm{Z}'w'\}\,do. \qquad (3)$$

Таким образом, вся содержащаяся в теле после вступления в действие обеих систем сил работа будет:

$$A = A_{11} + A_{22} + \int\int\int \{Xu' + Yv' + Zw'\}\, d\omega + \\ + \int\int \{\Xi u' + \mathrm{H} v' + \mathrm{Z} w'\}\, do. \qquad (4)$$

Но это выражение не зависит от того порядка, в котором силы вступают в действие; иными словами, перемещая между собой величины со штрихом и величины без штриха, можем написать A также в виде:

$$A = A_{22} + A_{11} + \int\int\int \{X'u + Y'v + Z'w\} + \\ + \int\int \{\Xi' u + \mathrm{H}' v + \mathrm{Z}' w\}\, do, \qquad (5)$$

откуда, сравнивая с (4), получаем теорему Бетти:

$$\int\int\int \{Xu' + Yv' + Zw'\}\, d\omega + \\ + \int\int \{\Xi u' + \mathrm{H} v' + \mathrm{Z} w'\}\, do = \\ = \int\int\int \{X'u + Y'v + Z'w\}\, d\omega + \\ + \int\int \{\Xi' u + \mathrm{H}' v + \mathrm{Z}' w\}\, do. \qquad (6)$$

Иными словами: если на упругое тело действуют две системы сил, вызывающие две системы перемещений, то работа, произведенная силами первой системы при перемещениях второй системы, равна работе, производимой силами второй системы при перемещениях первой системы.

Математическое доказательство этой теоремы основано на тождестве

$$(\mathbf{t}^{(x)}, \operatorname{grad} u') + (\mathbf{t}^{(y)}, \operatorname{grad} v') + (\mathbf{t}^{(z)}, \operatorname{grad} w') = \\ = (\mathbf{t}^{(x)'}, \operatorname{grad} u) + (\mathbf{t}^{(y)'}, \operatorname{grad} v) + (\mathbf{t}^{(z)'}, \operatorname{grad} w), \qquad (7)$$

в котором u, v, w; u', v', w' и $\mathbf{t}^{(x)}$, $\mathbf{t}^{(y)}$, $\mathbf{t}^{(z)}$; $\mathbf{t}^{(x)'}$, $\mathbf{t}^{(y)'}$, $\mathbf{t}^{(z)}$ обозначают перемещения и векторы напряжений обеих систем; $(\mathbf{t}^{(x)}, \operatorname{grad} u')$ обозначает скалярное произведение $\sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u'}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u'}{\partial x}$ векторов $\mathbf{t}^{(x)}$ и $\operatorname{grad} u'$. В правильности этого тождества можно убедиться, заменяя составляющие векторов напряжения их выражениями через составляющие тензора деформации. При этом правая и левая части будут равны:

$$2G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial z}+\frac{\Theta\Theta'}{m-2}\right)+$$
$$+G\left(\gamma_{xy}\gamma'_{xy}+\gamma_{yz}\gamma'_{yz}+\gamma_{zx}\gamma'_{zx}\right). \qquad (8)$$

Интегрируя векторное тождество:

$$(\mathbf{t}^{(x)},\ \operatorname{grad} u')+(\mathbf{t}^{(y)},\ \operatorname{grad} v')+(\mathbf{t}^{(z)},\ \operatorname{grad} w')=$$
$$=\operatorname{div}(u'\mathbf{t}^{(x)}+v'\mathbf{t}^{(y)}+w'\mathbf{t}^{(z)})-(u'\operatorname{div}\mathbf{t}^{(x)}+$$
$$+v'\operatorname{div}\mathbf{t}^{(y)}+w'\operatorname{div}\mathbf{t}^{(z)})=\operatorname{div}(u'\mathbf{t}^{(x)}+$$
$$+v'\mathbf{t}^{(y)}+w'\mathbf{t}^{(z)})+Xu'+Yv'+Zw' \qquad (9)$$

по объему тела, применяя теорему Гаусса и пользуясь условиями на поверхности $t_{\nu}^{(x)}=\Xi$ и т. д., получим:

$$\iiint\{(\mathbf{t}^{(x)},\ \operatorname{grad} u')+(\mathbf{t}^{(y)},\ \operatorname{grad} v')+$$
$$+(\mathbf{t}^{(z)},\ \operatorname{grad} w')\}\,d\omega=$$
$$=\iiint\{Xu'+Yv'+Zw'\}\,d\omega+$$
$$+\iint\{\Xi u'+\mathrm{H}v'+\mathrm{Z}w'\}\,do; \qquad (10)$$

заменяя теперь друг другом величины со штрихом и без штриха, найдем:

$$\iiint\{(\mathbf{t}'^{(x)},\ \operatorname{grad} u)+(\mathbf{t}'^{(y)},\ \operatorname{grad} v)+(\mathbf{t}'^{(z)},\ \operatorname{grad} w)\}=$$
$$=\iiint\{X'u+Y'v+Z'w)\}\,d\omega+$$
$$+\iint\{\Xi'u+\mathrm{H}'v+\mathrm{Z}'w\}\,do, \qquad (11)$$

откуда, в силу тождества (7), либо непосредственно получаем теорему Бетти в выведенном выше виде:

$$\begin{aligned}&\int\int\int \{Xu' + Yv' + Zw'\}\, d\omega + \\ &+ \int\int \{\Xi u' + \mathrm{H} v' + \mathrm{Z} w'\}\, do = \\ &= \int\int\int \{X'u + Y'v + Z'w\}\, d\omega + \\ &+ \int\int \{\Xi' u + \mathrm{H}' v + \mathrm{Z}' w\}\, do, \qquad (12)\end{aligned}$$

либо, если мы используем только одну строку, в виде:

$$\begin{aligned}&\int\int\int \{\mathbf{t}'^{(x)}, \operatorname{grad} u) + (\mathbf{t}'^{(y)}, \operatorname{grad} v) + \\ &+ (\mathbf{t}'^{(z)}, \operatorname{grad} w)\}\, d\omega = \int\int\int \{\sigma'_x \varepsilon_x + \sigma'_y \varepsilon_y + \\ &+ \sigma'_z \varepsilon_z + \tau'_{xy}\gamma_{xy} + \tau'_{yz}\gamma_{yz} + \tau'_{zx}\gamma_{zx}\}\, d\omega = \\ &= \int\int\int \{X'u + Y'v + Z'w\}\, d\omega + \\ &+ \int\int \{\Xi' u + \mathrm{H}' v + \mathrm{Z}' w\}\, do. \qquad (13)\end{aligned}$$

Поясним значение этой теоремы на нескольких примерах.

а) Даны массовые силы X, Y, Z и поверхностные силы Ξ, H, Z; требуется найти изменение объема тела, находящегося под действием этих сил. Возьмем для этого в формуле Бетти в качестве второй системы перемещений перемещение, при котором тело остается геометрически себе подобным; для этого по поверхности тела распределим нормальные к ней напряжения постоянной величины 1. Иными словами, примем:

$$\left.\begin{aligned}&\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = 1, \quad \tau'_{xy} = \tau'_{yz} = \tau'_{zx} = 0 \\ &u' = \frac{m-2}{Em}x, \quad v' = \frac{m-2}{Em}y, \quad w' = \frac{m-2}{Em}z\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

и

$$X' = Y' = Z' = 0$$

$$\Xi' = \cos(\nu, x), \quad \mathrm{H}' = \cos(\nu, y), \quad \mathrm{Z}' = \cos(\nu, z). \qquad (15)$$

Подставляя эти значения в формулу Бетти, получим:

$$\int\int\int \{Xu'+Yv'+Zw'\}\,d\omega+$$
$$+\int\int \{\Xi' u+\mathrm{H}' v+\mathrm{Z}' w\}\,do=$$
$$=\int\int \{u\cos(\nu,\ x)+v\cos(\nu,\ y)+w\cos(\nu,\ z\}\,do. \qquad (16)$$

Выражение, стоящее в правой части под знаком интеграла, есть перемещение точек на поверхности тела в направлении нормали к этой поверхности; иными словами, этот интеграл представляет не что иное как изменение объема ΔV. Получаем:

$$\Delta V=\int\int\int \{Xu'+Yv'+Zw'\}\,d\omega+$$
$$+\int\int \{\Xi u'+\mathrm{H}v'+\mathrm{Z}w'\}\,do. \qquad (17)$$

Подставляя сюда вместо u', v', w' их значения, получим:

$$\Delta V=\frac{1}{3k}\Big\{\int\int\int (Xx+Yy+Zz)\,d\omega+$$
$$+\int\int (\Xi x+\mathrm{H}y+\mathrm{Z}z)\Big\}\,do, \qquad (17a)$$

где k — модуль объемного сжатия [§ 40 и § 2, формула (4)].

б) Чтобы при заданных поверхностных и массовых силах найти средние значения составляющих деформации, применим теорему Бетти во втором виде [формула (13)]; за вторую систему перемещений возьмем ту, которая соответствует равномерному растяжению в направлениях оси X:

$$u'=\frac{x}{E},\ v'=-\frac{y}{Em},\ w'=-\frac{z}{Em}; \qquad (18)$$

тогда все напряжения, исключая

$$\sigma_z'=1, \qquad (19)$$

превратятся в нуль и из ур-ния (13) получим:

$$V\bar{e}_{xx}=\int\int\int \frac{\partial u}{\partial x}\,d\omega=$$
$$=\frac{1}{Em}\int\int\int (mXx-Yy-Zz)\,d\omega+$$
$$+\frac{1}{Em}\int\int \{\Xi xm-\mathrm{H}y-\mathrm{Z}z\}\,do. \qquad (20)$$

Аналогичным путем определяются средние значения удлинений $\overline{e}_{yy}$, $\overline{e}_{zz}$ и сдвигов $\overline{\gamma}_{yz}$, $\overline{\gamma}_{zx}$, $\overline{\gamma}_{xy}$. * Найдем:

$$V\overline{\gamma}_{yz} = \int\int\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2Gm}\int\int\int(Yz+Zy)\,d\omega +$$

$$+\frac{1}{2Gm}\int\int(\mathrm{H}z+\mathrm{Z}y)\,do \text{ и т. д.} \qquad (20a)$$

Применим эти формулы к следующим конкретным примерам:

1. Представим себе цилиндр произвольного поперечного сечения Ω, поставленный на горизонтальную плоскость; вес цилиндра обозначим через Q; определим уменьшение Δl длины и ΔV объема цилиндра, обусловленное действием его веса.

Принимая плоскость нижнего основания (торца) за плоскость XY, имеем в формуле (20) $Z = -\gamma$ (вес единицы объема), $X = Y = 0$, интегралы по поверхности в формуле (17) и (18) пропадают, так как на верхнем торце и боковой поверхности $\Xi = \mathrm{H} = \mathrm{Z} = 0$; на нижнем торце $z = 0$, $\mathrm{H} = \Xi = 0$.

Получаем:

$$\Delta l = l\overline{e}_{zz} = -\frac{l\gamma}{EV}\int\int\int z\,d\omega = -\frac{l\gamma\Omega l^2}{2EV} = -\frac{Ql}{2E\Omega}, \qquad (a)$$

$$\Delta V = -\frac{1}{3k}\gamma\int\int\int z\,d\omega = -\frac{1}{3k}\gamma\Omega\int_0^l z\,dz =$$

$$= -\frac{1}{6k}\gamma\Omega l^2 = -\frac{Ql}{6k}. \qquad (б)$$

2. Если тот же цилиндр положен на горизонтальную плоскость (плоскость XY) своей образующей, то, направив ось X по образующей, ось Z вертикально вверх, будем иметь:

$$X = Y = 0,\ Z = -\gamma,\ d\omega = l\,dy\,dz$$

$$\Delta l = l\overline{e}_{xx} = \frac{l}{mEV}\gamma l\int\int z\,dy\,dz = +\frac{Qh}{E\Omega m}, \qquad (в)$$

где h — высота центра тяжести цилиндра. Далее получим

$$\Delta V = -\frac{Qh}{3k}.$$

Знак минус в этой формуле указывает, что объем уменьшается; длина же цилиндра очевидно увеличивается.

3. Сосуд произвольной формы подвержен внешнему давлению p_1 и внутреннему p_0. Имеем:

$$X=Y=Z=0,\ \Xi=p_0\cos(\nu,\ x),\ \mathrm{H}=p_0\cos(\nu,\ y),$$
$$\mathrm{Z}=p_0\cos(\nu,\ z)$$

на внутренней поверхности и

$$\Xi=-p_1\cos(\nu_1,\ x),\ \mathrm{H}=-p_1\cos(\nu_1,\ y),$$
$$\mathrm{Z}=-p_1\cos(\nu_1,\ z)$$

на внешней поверхности. Получаем:

$$\Delta V=\frac{1}{3k}\Big\{-p_1\int\int[x\cos(\nu_1,\ x)+y\cos(\nu_1,\ y)+$$
$$+z\cos(\nu_1,\ z)]\,do+p_0\int\int[x\cos(\nu,\ x)+$$
$$+y\cos(\nu,\ y)+z\cos(\nu,\ z)]\,do\Big\}.$$

Преобразуя по формуле Гаусса, получаем:

$$\Delta V=\frac{p_0V_0-p_1V_1}{k}.\ *$$

На основе формулы Бетти в ее втором виде (13) можно в случае, когда даны массовые и поверхностные силы, развить метод приближенного интегрирования уравнений равновесия. Выражаем для этого перемещения u, v, w в виде целых рациональных полиномов от x, y, z с неопределенными коэфициентами. Для определения последних подставляем в (13) вместо u', v', w' поочередно выражения вида x^λ, y^μ, z^ρ $(0\leq\lambda+\mu+\rho\leq h)$. Таким образом, получаем ряд уравнений, число которых как раз равно числу определяемых коэфициентов. Неопределенной остается лишь группа коэфициентов, соответствующая перемещению тела, как твердого; чтобы последнее не имело места, необходимо, чтобы действующие на тело силы удовлетворяли шести условиям равновесия. Указанный способ тождественен с так называемым методом Ритца (Ritz'а), к которому мы позже еще вернемся (§ 54). Поэтому не входим здесь в дальнейшие подробности.

Если ход рассуждений, который привел нас к формулам Бетти, применить к системам, находящимся под действием сосредоточенных сил (ферма, балка, плита), то мы получим теорему взаимности Максвелла. Рассмотрим, например, на балке, подвергшейся изгибу под действием перпендикулярных к ее оси сил, две точки x_1 и x_2. Если через α_{11} обозначить прогиб в точке x_1, вызванный единичной силой, приложенной в этой точке x_1, а через α_{12} — прогиб в точке x_2, вызванный единичной силой, приложенной также в точке x_1 и т. д., то по теореме взаимности $\alpha_{12} = \alpha_{21}$. Действительно, если приложить в точке x_1 силу P, а в x_2 силу Q, то эти силы вызовут прогибы в точке x_1:

$$y_1 = \alpha_{11}P + \alpha_{21}Q, \tag{21}$$

в точке x_2:

$$y_2 = \alpha_{12}P + \alpha_{22}Q. \tag{21'}$$

Если мы теперь изменим P на δP, то прогибы изменятся на:

$$\delta y_1 = \alpha_{11}\delta P, \quad \delta y_2 = \alpha_{12}\delta P,$$

работа деформации возрастет на

$$\delta A = P\delta y_1 + Q\delta y_2 = \delta P(\alpha_{11}P + \alpha_{12}Q).$$

Поэтому:

$$\frac{\partial A}{\partial P} = \alpha_{11}P + \alpha_{12}Q; \tag{22}$$

откуда, диференцируя, получаем:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial P \partial Q} = \alpha_{12}. \tag{23}$$

Таким же путем получили бы $\dfrac{\partial^2 A}{\partial Q \partial P} = \alpha_{21}$, откуда следует, что

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}.$$

Обобщая этот результат, можно получить теорему взаимности в ее общем виде; ее формулировка ничем не отличается от приведенной выше применительно к формуле (6) формулировки теоремы Бетти.

48. Формулы Сомильяна [1] (Somigliana). Эти формулы мы получим, подставив в формулу Бетти [формула (6) § 47] вместо u', v', w' перемещения, вызываемые приложенной в точке ξ, η, ζ сосредоточенной силой, действующей в напра-

---

[1] *G. Somigliana*, Cim. t. 17—20, 1885—86.

влении одной из осей координат. Возьмем, например [§ 32, формула (10)] систему перемещений:

$$\left.\begin{aligned} u' &= C\left[\frac{5m-6}{m-1}\frac{1}{r}+\frac{mr^2}{2(m-1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ v' &= C\left[\qquad\qquad +\frac{mr^2}{2(m-1)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ w' &= C\left[\qquad\qquad +\frac{mr^2}{2(m-1)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$r^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2,$$

вызываемую единичной сосредоточенной силой, приложенной в точке ξ, η, ζ по направлению оси X; обозначим далее через Ξ', H', Z' поверхностные силы, которые должны быть приложены на поверхности тела для сохранения равновесия. Пусть u, v, w — перемещения в исследуемом упругом состоянии, вызванные заданными массовыми силами X, Y, Z и поверхностными силами Ξ, H, Z. Тогда работа сил, отмеченных штрихом, при перемещениях, не отмеченных штрихом, состоит из работы $u(\xi, \eta, \zeta)$, производимой единичной силой, действующей в точке ξ, η, ζ в направлении X, и из работы поверхностных сил $\int\int(\Xi'u+\mathrm{H}'v+\mathrm{Z}'w)\,do$. Работа сил X, Y, Z, Ξ, H, Z, не отмеченных штрихом, при отмеченных штрихом перемещениях u', v', w' состоит из работы массовых сил $\int\int\int\{Xu'+Yv'+Zw'\}\,d\omega$ и из работы поверхностных сил $\int\int(\Xi u'+\mathrm{H}v'+\mathrm{Z}w')\,d\omega$.

* В объемном интеграле подинтегральная функция (перемещения u', v', w') обращается в бесконечность в точке ξ, η, ζ. Тем не менее интеграл по объему весьма малого шара с центром в этой точке стремится к нулю вместе с радиусом шара. В этом легко убедиться, замечая, что X, Y, Z остаются конечными во всем теле; перемещения же u', v', w' обращаются в центре шара в бесконечность порядка $\frac{1}{r}$, в то время как элемент объема будет бесконечно малой величиной порядка r^2. *

Замечая, что по теореме Бетти обе работы равны друг другу по величине, получим:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \int\int\int \{Xu' + Yv' + Zw'\} d\omega + \\ + \int\int \{\Xi u' + \mathrm{H} v' + \mathrm{Z} w'\} do - \\ - \int\int \{\Xi' u + \mathrm{H}' v + \mathrm{Z}' w\} do \qquad (2)$$

и соответствующие уравнения для $v(\xi, \eta, \zeta)$ и $w(\xi, \eta, \zeta)$.

Эти формулы определяют перемещения в любой точке тела через действующие на него силы и через перемещения на поверхности.

Особо следует отметить, что в случае отсутствия массовых сил и следовательно исчезновения из ур-ний (2) несобственного объемного интеграла функции $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$, $w(\xi, \eta, \zeta)$ имеют какое угодно число частных производных по ξ, η, ζ (предполагая, что точка ξ, η, ζ находится внутри тела). Отсюда следует, что решения основных уравнений теории упругости при отсутствии массовых сил представляют собою аналитические функции координат; иными словами, в окрестности каждой точки эти решения могут быть представлены в виде рядов, расположенных по степеням координат.

49. Функции Грина (Green). Выводы последнего параграфа можно развить далее по способу [1], аналогичному тому, который применяется в теории потенциала; именно на перемещения u', v', w' не только накладывается требование, чтобы они соответствовали в особенной точке ξ, η, ζ действию сосредоточенной силы, но сверх того для них задаются определенные граничные условия.

Пусть на поверхности исследуемого тела заданы перемещения u, v, w; в формулы Бетти подставим для u', v', w' решения однородных основных уравнений теории упругости (при отсутствии массовых сил), обращающиеся в нуль на поверхности тела и соответствующие действию сосредоточенной силы в точке ξ, η, ζ. Примем далее, что величина этой сосредоточенной силы равна 1, а ее направление совпадает с осью X.

---

[1] *V. Volterra* и *G. Lauricella,* Pisa, Ann. sc. norm. Bd. 7, S. 1, 1895.

Чтобы построить систему решений u', v', w', представим ее в виде суммы двух перемещений: перемещения, вызываемого сосредоточенной силой в безграничном пространстве, и перемещения u'', v'', w'', непрерывного и конечного во всех точках тела и обращающего на поверхности его в нуль систему u', v', w'. Иными словами, в нашем случае сосредоточенной единичной силы, действующей вдоль оси X, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} u' &= c\left\{\frac{5m-6}{m-1}\,\frac{1}{r}+\frac{mr^2}{2(m-1)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}+u'', \\ v' &= c\left\{\qquad\qquad\quad +\frac{mr^2}{2(m-1)}\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}+v'', \\ w' &= c\left\{\qquad\qquad\quad +\frac{mr^2}{2(m-1)}\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}+w'', \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где добавочные перемещения u'', v'', w'' удовлетворяют основным уравнениям теории упругости (не содержащим массовых сил), а на поверхности равны по величине и противоположны по знаку выражениям, стоящим в скобках. Эти функции соответствуют, таким образом, некоторой специальной задаче теории упругости и определяются исключительно геометрической формой тела.

Возвращаясь теперь к формуле Бетти, имеем:

$$Y' = 0,\ Z' = 0,\ \int X' u\, d\omega = u(\xi,\ \eta,\ \zeta),$$

так как работа силы 1, сосредоточенной в точке ξ, η, ζ при перемещении u, v, w равна u (ξ, η, ζ). Поверхностные силы системы Ξ', H', Z' вычисляются по перемещениям u', v', w', согласно формулам:

$$\Xi = \sigma'_x \cos(\nu,\ x) + \tau'_{xy} \cos(\nu,\ y) + \tau'_{xz} \cos(\nu,\ z) \text{ и т. д.} \quad (2)$$

Работа, производимая этими силами, будет:

$$\int\!\!\int \{\Xi' u + \mathrm{H}' v = \mathrm{Z}' w\}\, do, \quad (3)$$

причем по условию u, v, w заданы на поверхности тела.

Из сил, вызывающих интересующие нас перемещения u, v, w, производят работу только массовые силы; поверхностные же силы Ξ, H, Z в формулу Бетти не войдут, так как на поверхности u', v', w' превращаются в нуль. Уравнение Бетти получает поэтому вид:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \int\int\int \{Xu' + Yv' + Zw'\}\, d\omega -$$
$$- \int\int \{\Xi' u + \mathrm{H}' v + \mathrm{Z}' w\}\, do. \tag{4}$$

Аналогичные формулы для $v(\xi, \eta, \zeta)$ и $w(\xi, \eta, \zeta)$ можно получить, предполагая, что сосредоточенная сила в точке ξ, η, ζ имеет направление оси Y или Z. В правой части (4) содержатся только известные массовые силы и заданные поверхностные перемещения. Поэтому если при любом положении точки ξ, η, ζ найдены функции u', v', w', которые мы назовем функциями Грина, то решение основных уравнений при заданных массовых силах и поверхностных перемещениях можно получить в квадратурах по формуле (4). Общая задача определения решения уравнений теории упругости при заданных на поверхности перемещениях сводится таким образом к специальной задаче построения функций Грина.

Соответственная задача при заданных поверхностных напряжениях Ξ, H, Z более сложна. Нам следовало бы искать систему перемещений u, v, w, являющуюся результатом действия сосредоточенной в точке ξ, η, ζ силы, причем на поверхности обращаются в нуль Ξ', H', Z'. Но такой системы не существует, так как в этом случае сосредоточенная сила не была бы ничем уравновешена. Чтобы уравновесить ее, заметим, что при заданных массовых и поверхностных силах u, v, w являются определенными только до перемещения тела как твердого; поэтому можно поставить условие, чтобы начало координат не испытывало ни перемещений, ни поворота, т. е. чтобы в начале координат составляющие перемещения равнялись нулю:

$$u,\ v,\ w = 0 \tag{5}$$

и чтобы составляющие вихря, определяющие средний поворот

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z};\quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x};\quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

также обращались в нуль. Строим теперь решение u', v', w', не содержащих массовых сил основных уравнений, которое является результатом действия силы, приложенной к точке ξ, η, ζ и имеющей направление оси X и величину 1, причем, эта сила уравновешивается сосредоточенной в начале координат силой, приложенной в направлении, противоположном оси X, и сосредоточенным моментом, имеющим приложение также в начале координат. Пусть эти перемещения u', v', w' вместе с их средним поворотом также превратятся в нуль в начале координат, чего можно достигнуть, присоединяя к ним надлежащее перемещение твердого тела. Далее потребуем, чтобы вызываемые системой u', v', w' напряжения на поверхности тела превращались в нуль. В уравнение Бетти сила и момент, приложенные в начале координат, не войдут, так как в начале координат u, v, w, а также поворот равны нулю. Из сил системы u, v, w массовые силы производят при перемещениях u', v', w' работу $\int\int\int (Xu' + Yv' + Zw')\, do$, а поверхностные — работу $\int\int (\Xi u' + \mathrm{H} v' + \mathrm{Z} w')\, do$.

По формуле Бетти получаем:

$$u\,(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \int\int\int \{Xu' + Yv' + Zw'\}\, d\omega + \\ + \int\int \{\Xi u' + \mathrm{H} v' + \mathrm{Z} w'\}\, do. \qquad (7)$$

Правая часть этого уравнения содержит, кроме перемещений u', v', w', которые мы приняли за известные, только заданные массовые и поверхностные силы, так что наша общая задача свелась к специальной задаче построения u', v', w'.

При смешанных граничных задачах, когда на поверхности тела заданы частью поверхностные напряжения, частью перемещения, указанная выше трудность не имеет места. Чтобы получить в этом случае решение, выраженное через функции Грина, необходимо определить перемещения u', v', w', вызванные сосредоточенной в точке ξ, η, ζ силой, превращающиеся в нуль на той части поверхности, на которой заданы перемещения, и определяющие равные нулю напряжения на части поверхности, на которой заданы силы.

Выражение для перемещения через заданные на поверхности тела величины будет в таком случае:

$$u\,(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \int\int\int \{Xu' + Yv' + Zw'\}\, d\omega + \\ + \int\int \{\Xi u' + \mathrm{H} v' + \mathrm{Z} w'\}\, do - \\ - \int\int \{\Xi' u + \mathrm{H}' v + \mathrm{Z}' w\}\, do, \qquad (8)$$

где в интегралах по поверхности, согласно сказанному выше, сохраняются только те части, в которых заданы u, v, w или соответственно напряжения Ξ, H, Z.

50. Теоремы существования. До сих пор основой всех наших рассуждений служила предпосылка, что основные уравнения теории упругости в действительности имеют решения для различных возможных граничных условий. Вопрос о существовании решений — самый трудный вопрос теории упругости; для своего решения он требует применения серьезных математических вспомогательных приемов. Поэтому здесь речь может итти только о том, чтобы кратко охарактеризовать ход рассуждений в доказательствах существования, например при заданных перемещениях на поверхности; что же касается дальнейших подробностей вопроса, то мы принуждены отослать читателя к специальной литературе. Мы вкратце изложим два доказательства существования. Во-первых, доказательство Корна, которое заслуживает внимания как по своему методу, так и в силу исторических соображений: Корн был первый, которому принадлежит последовательное рассмотрение интересующего нас вопроса существования. Во-вторых, доказательство Лихтенштейна, отличающееся особенно простым ходом рассуждений.

Оба доказательства даны здесь для случая отсутствия массовых сил, — случая, к которому всегда может быть сведен общий случай.

а) Доказательство существования, данное Корном.[1] Корн исходит из решений основных уравнений теории упругости, взятых в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1 + \frac{m}{m-2}\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right) \\ v &= \varphi_2 + \frac{m}{m-2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right) \\ w &= \varphi_3 + \frac{m}{m-2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Чтобы эти формулы удовлетворяли уравнениям теории упругости, функции φ_1, φ_2, φ_3 должны быть потен-

---

[1] *Korn*, Mathematische Annalen, Bd. 75, стр. 497, 1914.

циальными, а ψ_1, ψ_2, ψ_3 должны быть определены из уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\psi_1 &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} = q_1\\
\Delta\psi_2 &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = q_2\\
\Delta\psi_3 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = q_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Решая эти уравнения в виде:

$$\psi_1 = -\frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{q_1(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2, \qquad (3)$$

известном из теории потенциала, получим выражение для перемещений u, v, w через потенциальные функции φ_1, φ_2, φ_3:

$$\left.\begin{aligned}
u = \varphi_1 - \frac{m}{4\pi(m-2)}\Bigg\{&\frac{\partial}{\partial y}\int\int\int\frac{q_3(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\omega -\\
&-\frac{\partial}{\partial z}\int\int\int\frac{q_2(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\omega\Bigg\},\\
v = \varphi_2 - \frac{m}{4\pi(m-2)}\Bigg\{&\frac{\partial}{\partial z}\int\int\int\frac{q_1(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\omega -\\
&-\frac{\partial}{\partial x}\int\int\int\frac{q_3(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\omega\Bigg\},\\
w = \varphi_3 - \frac{m}{4\pi(m-2)}\Bigg\{&\frac{\partial}{\partial x}\int\int\int\frac{q_2(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\omega -\\
&-\frac{\partial}{\partial y}\int\int\int\frac{q_1(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\omega\Bigg\},
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$(d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta).$$

На поверхности тела (в точке p) заданы:

$$u = U, \quad v = V, \quad w = W, \qquad (5)$$

и формулы (4) дают уравнения для значений потенциальных функций φ_1, φ_2, φ_3 на поверхности:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1(p) &= U(p) + \frac{m}{4\pi(m-2)}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int\int\int\frac{q_3 d\omega}{r} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial z}\int\int\int\frac{q_2 d\omega}{r}\right\}, \\
\varphi_2(p) &= V(p) + \frac{m}{4\pi(m-2)}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\int\int\int\frac{q_1 d\omega}{r} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial x}\int\int\int\frac{q_3 d\omega}{r}\right\}, \\
\varphi_3(p) &= W(p) + \frac{m}{4\pi(m-2)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int\int\int\frac{q_2 d\omega}{r} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial y}\int\int\int\frac{q_1 d\omega}{r}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Чтобы определить из этих уравнений эти потенциальные функции φ_1, φ_2, φ_3, подставим сперва:

$$\frac{m}{m-2} = \frac{2\lambda}{1+\lambda}. \tag{7}$$

Вследствие этого уравнения (6) получают вид:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(p) &= (1+\lambda)U(p) + \lambda\left\{-\varphi_1 + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\int\int\frac{q_3 d\omega}{r} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\int\int\frac{q_2 d\omega}{r}\right\}
\end{aligned} \tag{8}$$

и т. д.

Применяя к этим уравнениям метод последовательных приближений, Корн прежде всего делает заключение о существовании потенциальных функций φ_1, φ_2, φ_3 при малых значениях параметра λ. Первое приближение получим, опуская в (8) все члены, содержащие λ. Таким путем находится поверхностное условие для первых приближений:

$$\varphi_1^{(1)} = U, \quad \varphi_2^{(1)} = V, \quad \varphi_3^{(1)} = W, \tag{9}$$

т. е. первыми приближениями являются те потенциальные функции, граничные значения которых совпадают с заданными значениями *u*, *v*, *w*. Для нахождения второго приближения подставляем эти уже найденные приближенные значения в правую часть уравнения, в члены, содержащие λ; таким образом, получаем поверхностные значения для вторых приближений. Эта же процедура продолжается дальше: каждое полученное приближенное значение снова подставляется в правую часть, — в члены, содержащие λ; таким путем мы получаем поверхностные значения для следующего приближения, которое затем и находим, решая задачу Дирихле, т. е. определяя потенциальные функции по их значениям на поверхности; искомое решение представляется рядом, расположенным по степеням параметра λ. Главная трудность — это доказать сходимость полученного разложения; этого удается достигнуть с помощью ряда вспомогательных выводов и теорем о потенциальных функциях. Этим путем и доказывается существование решений для достаточно малых значений λ. Доказательство существования для любых значений λ ведется путем, который стал уже классическим в теории линейных интегральных уравнений. Надо доказать, что для каждого λ (за исключением дискретного ряда значений λ — характеристических чисел, которые мы, расположив их по их абсолютной величине, назовем λ_1, λ_2, ... и т. д.) безусловно существует система решений ур-ний (8). Характеристические числа λ_i, для которых не существует решений, не имеют никакого физического значения, так как они оказываются лежащими в области значений m, лежащих вне физически возможных границ для m $(2 \leqslant m \leqslant \infty)$.

Таким путем устанавливается существование решения. Этот способ можно распространить на случай заданных поверхностных сил, а также на случай смешанных граничных условий.

Выбор параметра λ, на первый взгляд кажущийся произвольным, обусловлен тем, что точка сгущения характеристических чисел λ, для которых не существует решений, оказывается лежащей в бесконечности, т. е. в каждом конечном интервале может встретиться только конечное число характеристических чисел.

б) Доказательство существования, данное Лихтенштейном.[1] Лихтенштейн чрезвычайно изящным

---

[1] *L. Lichtenstein*, Mathem. Zeitschrift, т. 20, стр. 21. 1924. * Эта статья заключает в себе ошибку, указанную *Grudeli*, Math. Zeitschrift, 1925. *

образом применил теорию линейных интегральных уравнений. Он исходил из того, что основные уравнения теории упругости в перемещениях:

$$\Delta u + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

и т. д., в силу существования зависимости

$$\Delta\Theta = 0 \tag{11}$$

могут быть написаны в виде:

$$\Delta\left(u + \frac{1}{2}\frac{m}{m-2}x\Theta\right) = 0\,. \tag{12}$$

Поэтому функции:

$$u + \frac{m}{m-2}\frac{x\Theta}{2}, \quad v + \frac{m}{m-2}\frac{y\Theta}{2}, \quad w + \frac{m}{m-2}\frac{z\Theta}{2} \tag{13}$$

являются потенциальными. Если мы прежде всего примем, что, кроме граничных значений перемещений u, v, w, которые мы и в этом случае обозначим через U, V, W, заданы также граничные значения Θ, то мы можем при помощи функции Грина для области, занятой телом, выразить потенциальные функции (13) через их граничные значения. Если x, y, z — точка, в которой мы находим указанные выше функции, и если обозначить координаты какой-либо точки на поверхности через ξ, η, ζ, а функцию Грина через $G\,(x, y, z;\, \xi, \eta, \zeta)$, то:

$$u\,(x, y, z) + \varkappa x\Theta\,(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\int\frac{\partial G}{\partial\nu}\Big\{u\,(\xi,\eta,\zeta) +$$

$$+ \varkappa\xi\Theta\,(\xi,\eta,\zeta)\Big\}\,do; \quad \left(\varkappa = \frac{1}{2}\frac{m}{m-2}\right). \tag{14}$$

Аналогичные уравнения можно составить для v и w. Таким же способом мы можем выразить и функцию Θ, так как и она есть потенциальная функция. Умножая на $\varkappa x$, получим:

$$\varkappa x\Theta\,(x, y, z) = \frac{\varkappa}{4\pi}\int\int\frac{\partial G}{\partial\nu}\,x\Theta\,(\xi, \eta, \zeta)\,do\,. \tag{15}$$

Вычитая (15) из (14) и приняв в соображение, что

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{\partial G}{\partial\nu}\,u\,(\xi, \eta, \zeta)\,do = U\,(x, y, z) \tag{16}$$

представляет собой значение в точке x, y, z той потенциальной функции, которая на поверхности принимает значения U [мы обозначим ее через $U(x, y, z)$], получим:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= U(x,y,z) + \frac{\varkappa}{4\pi}\int\int\frac{\partial G}{\partial\nu}(\xi-x)\,\Theta(\xi,\eta,\zeta)\,do \\ &\text{и равным образом} \\ v(x,y,z) &= V(x,y,z) + \frac{\varkappa}{4\pi}\int\int\frac{\partial G}{\partial\nu}(\eta-y)\,\Theta(\xi\eta,\zeta)\,do \\ w(x,y,z) &= W(x,y,z) + \frac{\varkappa}{4\pi}\int\int\frac{\partial G}{\partial\nu}(\zeta-z)\,\Theta(\xi,\eta,\zeta)\,do. \end{aligned}\right\} (17)$$

Чтобы получить уравнение, в которое бы входило только Θ, диференцируем ур-ния (17): первое по x, второе по y, третье по z и складываем результаты. Принимаемую за известную величину функцию $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$ обозначим через Θ^*; получаем таким образом:

$$\begin{aligned} \Theta(x,y,z) &= \Theta^*(x,y,z) + \\ &+ \frac{\varkappa}{4\pi}\int\int\left\{(\xi-x)\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial\nu} + (\eta-y)\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial\nu} + \right. \\ &\left. + (\zeta-z)\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\nu}\right\}\Theta(\xi,\eta,\zeta)\,do - \\ &- \frac{3\varkappa}{4\pi}\int\int\frac{\partial G}{\partial\nu}\Theta(\xi,\eta,\zeta)\,do. \end{aligned} \qquad (18)$$

Последний интеграл есть очевидно не что иное как $3\varkappa\Theta(x, y, z)$, поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \Theta(x,y,z)(1+3\varkappa) &= \Theta^*(x,y.z) + \\ &+ \frac{\varkappa}{4\pi}\int\int\left\{(\xi-x)\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial\nu} + (\eta-y)\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial\nu} + \right. \\ &\left. + (\zeta-z)\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\nu}\right\}\Theta(\xi,\eta,\zeta)\,do. \end{aligned} \qquad (19$$

Это выражение можно еще более упростить, введя в рассмотрение радиус-вектор ρ, идущий из точки x, y, z к одной из точек поверхности:

$$\rho^2 = (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 \qquad (20)$$

и приняв в соображение, что

$$(\xi - x)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial}{\partial z} = -\rho\frac{\partial}{\partial \rho}. \qquad (21)$$

Ур-ние (19) получит вид:

$$(1 + 3\varkappa)\,\Theta(x, y, z) = \Theta^*(x, y, z) - \\ - \frac{\varkappa}{4\pi}\int\int \rho\frac{\partial^2 G}{\partial\rho\partial\nu}\,\Theta(\xi, \eta, \zeta)\,do. \qquad (22)$$

Если теперь переместить точку x, y, z в одну из точек поверхности, то получится интегральное уравнение для поверхностных значений Θ.[1] Для этого требуется более точное изучение поведения функции Грина при таком переходе. Результат этого изучения, которое не может здесь быть изложено подробно, заключается в следующем: пусть p — та точка поверхности, куда мы передвигаем точку x, y, z; вырежем p вместе с маленьким участком поверхности F из остальной поверхности; этот малый участок F (который мы представляем себе уменьшающимся до произвольно малой величины) увеличивает величину интеграла в ур-нии (22) на $-8\pi\Theta(p)$. Если мы эту часть напишем отдельно и распространим интеграл только по поверхности, из которой исключен участок F или, выражаясь несколько иначе, если мы будем интегрировать по всей поверхности „за исключением точки p“, то ур-ние (22) получит вид:

$$\Theta(p)(1 + 3\varkappa) = \Theta^*(p) + \frac{\varkappa}{4\pi}\left\{8\pi\,\Theta(p) - \right. \\ \left. - \int\int \rho\frac{\partial^2 G}{\partial\rho\partial\nu}\,\Theta(o)\,do\right\}$$

или

$$\Theta(p) = \frac{1}{1 + \varkappa}\left\{\Theta^*(p) - \frac{\varkappa}{4\pi}\int\int \rho\frac{\partial^2 G}{\partial\rho\partial\nu}\,\Theta(o)\,do\right\}. \qquad (23)$$

Это линейное интегральное уравнение типа **Фредгольма** (Fredholm). Так как ядро $\rho\frac{\partial^2 G}{\partial\rho\partial\nu}$, как это вытекает из исследований **Леви** (Levy), в точке p обращается в бесконеч-

---

[1] При этом предполагается, что поверхность тела есть замкнутая, не имеющая особенных точек, аналитическая поверхность.

ность как $\frac{1}{\rho}$, то это интегральное уравнение относится к числу разрешимых по методу Фредгольма. Оно безусловно разрешимо, так как в противном случае однородное уравнение, получающееся при $\Theta^* = 0$, имело бы решение. Но это означало бы, что задача теории упругости имела бы решение, отличное от нуля при u, v, w, равных на поверхности нулю, что невозможно.

Этим путем дается в основных чертах доказательство существования решения.

51. Функция Cosserat. Изучение вопросов существования решения мы закончим, упомянув еще о своеобразном методе, обязанном своим существованием E. и F. Cosserat.[1]

Основные уравнения напишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u + k\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0 \\ &\Delta v + k\frac{\partial\Theta}{\partial y} = 0 \quad \left(k = \frac{m}{m-2}\right) \\ &\Delta w + k\frac{\partial\Theta}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и будем прежде всего искать такие значения параметра k, при которых эти уравнения имеют отличные от нуля решения, превращающиеся в нуль на поверхности изучаемого тела. Эти значения k образуют дискретный ряд характеристических чисел k_1, k_2, k_3, и т. д.; соответствующие значения m, а именно m_1, m_2, m_3 и т. д. лежат за границами интересующей нас с физической точки зрения области $2 \leqslant m \leqslant \infty$. Пусть этим значениям k соответствуют перемещения (фундаментальные функции)

$$u_1,\ v_1,\ w_1;\quad u_2,\ v_2,\ w_2;\quad \text{и т. д.}$$

Объемные расширения, относящиеся к этим перемещениям, обозначим через Θ_1, Θ_2, Θ_3 и т. д.

Эти величины имеют следующее свойство ортогональности. Если перемещения u_μ, v_μ, w_μ, u_ρ, v_ρ, w_ρ, равно как и объемные расширения Θ_μ и Θ_ρ соответствуют отличным

---

[1] *E.* и *F. Cosserat*, Comptes Rendus, т. 126, стр. 1089, 1898; т. 127, стр. 415, 1898; т. 193, стр. 145, 271, 236, 361, 382, 1901.

друг от друга значениям k_μ и k_ρ, то интеграл по объему тела

$$\int\int\int \Theta_\mu \Theta_\rho d\omega = 0. \tag{2}$$

Это положение есть непосредственное следствие известного тождества теории потенциала:

$$\int\int\int \left\{u_\mu \Delta u_\rho - u_\rho u_\mu\right\} d\omega = \int\int \left\{u_\mu \frac{\partial u_\rho}{\partial n} - u_\rho \frac{\partial u_\mu}{\partial n}\right\} do. \tag{3}$$

Поверхностный интеграл в правой части уравнения исчезает, так как u, v, w на границе обращаются в нуль. Если в левой части поставить, согласно (1)

$$\Delta u_\rho = -k_\rho \frac{\partial \Theta_\rho}{\partial x}, \quad \Delta u_\mu = -k_\mu \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x},$$

то получим:

$$k_\rho \int\int\int u_\mu \frac{\partial \Theta_\rho}{\partial x} d\omega = k_\mu \int\int\int u_\rho \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x} d\omega. \tag{4}$$

Проинтегрировав по частям и приняв снова в соображение граничные условия, найдем:

$$\int\int\int u_\mu \frac{\partial \Theta_\rho}{\partial x} d\omega = -\int\int\int \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \Theta_\rho d\omega, \tag{5}$$

откуда

$$k_\rho \int\int\int \Theta_\rho \frac{\partial u_\mu}{\partial x} d\omega = k_\mu \int\int\int \Theta_\mu \frac{\partial u_\rho}{\partial x} d\omega. \tag{6}$$

Подобным же образом получим для v и w:

$$k_\rho \int\int\int \Theta_\rho \frac{\partial v_\mu}{\partial y} d\omega = k_\mu \int\int\int \Theta_\mu \frac{\partial v_\rho}{\partial y} d\omega, \tag{7}$$

$$k_\rho \int\int\int \Theta_\rho \frac{\partial w_\mu}{\partial z} d\omega = k_\mu \int\int\int \Theta_\mu \frac{\partial w_\rho}{\partial y} d\omega. \tag{8}$$

Складывая, получаем:

$$k_\rho \int\int\int \Theta_\rho \Theta_\mu d\omega = k_\mu \int\int\int \Theta_\mu \Theta_\rho d\omega, \tag{9}$$

а это при k_μ, не равном k_ρ, возможно только в том случае, если

$$\int\int\int \Theta_\rho \Theta_\mu d\omega = 0, \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

Предположим далее, что фундаментальные функции, т. е. перемещения u_ρ, v_ρ, w_ρ, соответствующие нашим характеристическим числам k_ρ, нормированы таким образом, что

$$\int\int\int \Theta_\rho^2 d\omega = 1, \tag{11}$$

В случае, когда одному и тому же k соответствует несколько решений — таких решений, линейно независимых друг от друга, может быть только конечное число, эти решения могут быть выбраны так, что и здесь для двух различных решений выполняется условие ортогональности [ур-ния (10)] и имеет место нормирование согласно ур-нию (11). Этого можно всегда достичь, образуя линейные аггрегаты из линейно независимых решений, которые во всяком случае также являются решениями, и определяя коэфициенты этих аггрегатов так, чтобы ур-ние (10) и ур-ние (11) имели место.

Из совокупности всех этих функций составляем решения основных уравнений в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= U(x, y, z) - k\sum_\rho \frac{A_\rho u_\rho}{k - k_\rho} \\ v &= V(x, y, z) - k\sum_\rho \frac{A_\rho v_\rho}{k - k_\rho} \\ w &= W(x, y, z) - k\sum_\rho \frac{A_\rho w_\rho}{k - k_\rho} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где U, V, W — три потенциальные функции, которые на поверхности тела принимают заданные значения перемещений. Граничные условия здесь выполняются; чтобы удовлетворялись и диференциальные уравнения, должно иметь место равенство:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \Theta * (x, y, z) = \sum A_\rho \Theta_\rho, \tag{13}$$

для чего необходимо подобрать надлежащим образом коэфициенты. Для этого обе части последнего уравнения помножим на Θ_h и проинтегрируем по объему тела; в правой части [см. (10)] останется только член $A_h \int\int \Theta_h^2 d\omega$, который, согласно ур-нию (11), будет равен A_h. Получаем:

$$A_h = \int\int\int \Theta^* \Theta_h d\omega. \tag{14}$$

Чтобы закончить доказательство существования, необходимо еще доказать, что ряд для Θ^*, составленный указанным образом — сходящийся и что он действительно выражает Θ^*. Мы не будем здесь подробнее останавливаться на относящихся сюда выводах; для практического вычисления указанный метод, вообще говоря, не применялся, однако отдельные задачи, которые могут быть решены и другими способами, были при помощи его разобраны.

52. Метод Ритца (Ritz). Минимальные свойства решений основных уравнений теории упругости применяются в так называемом методе Ритца, [1] дающем численное представление этих решений. Согласно § 18 [ур-ние (5)] перемещения, которые действительно имеют место в случае равновесия, отличаются от всех других геометрически возможных, соответствующих условиям закрепления тела перемещений тем, что для них потенциальная энергия системы является минимумом. Если на поверхности тела заданы частью перемещения, частью поверхностные силы (пусть на части поверхности O_1 заданы перемещения, на части O_2 — силы), то под потенциальной энергией придется понимать выражение:

$$\Pi = A - \int\int\int \{Xu + Yv + Zw\}\, d\omega - \\ - \int\limits_{O_2}\int \{\Xi u + \mathrm{H} v + Zw\}\, do, \tag{1}$$

в котором согласно ур-нию (6) § 16:

$$A = G\int\int\int\left\{ \frac{m-1}{m-2}\Theta^2 - 2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right\} d\omega \tag{2}$$

выражает энергию деформации. Поверхностный интеграл в ур-нии (1) надо брать только по O_2, т. е. по той части по-

---

[1] *W. Ritz*, Annalen der Physik, т 28, стр. 737, 1909.

верхности, на которой заданы поверхностные силы Ξ, H, Z, отнесенные к единице поверхности. X, Y, Z, как и выше, представляют проекции на оси массовых сил, отнесенные к единице объема. Согласно Ритцу, решение нашей вариационной задачи ищется в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= U_0(x, y, z) + \sum_1^n a_\nu U_\nu(x, y, z) \\ v_n &= V_0(x, y, z) + \sum_1^n b_\nu V_\nu(x, y, z) \\ w_n &= W_0(x,y,z) + \sum_1^n c_\nu W_\nu(x, y, z), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где U_0, V_0, W_0 — функции, которые на части поверхности O_1 принимают заданные здесь значения перемещений, тогда как на остальные функции U_ν, V_ν, W_ν накладывается требование, чтобы на этой же части поверхности они превращались в нуль. Таким образом решения в форме (3) удовлетворяют при любых коэфициентах a_ν, b_ν, c_ν поверхностным условиям для перемещений, — функции u_n, v_n, w_n принадлежат, таким образом, к классу допустимых функций в нашей вариационной задаче. Относительно аппроксимирующих функций U_ν, V_ν, W_ν при этом необходимо допустить, что они выбраны в столь общем виде, чтобы при достаточно большом n всякая удовлетворяющая граничным условиям задачи система перемещений с ее первыми частными производными могла быть приближенно представлена в виде (3), и следовательно как сами значения этой системы перемещений, так и значение потенциальной энергии могли быть найдены с любым приближением. Это будет, например, иметь место, если принимать для U_ν, V_ν, W_ν $(\nu \geqslant 1)$ поочередно все выражения вида $x^\lambda y^\mu z^\rho$, умноженные на функцию, которая превращается в нуль на части поверхности O_1 и больше нигде.

* Итак будем считать аппроксимирующие функции так или иначе выбранными. Если подставить теперь в выражение потенциальной энергии вместо перемещений их приближенные выражения (3), состоящие из *конечного* числа членов, то полученный после интегрирования результат будет

содержать как члены квадратные относительно a_ν, b_ν, c_ν (восходящие к A), так и линейные [получающиеся при вычислении интегралов $\int\int\int (Xu_n + Yv_n + Zw_n)\,d\omega$ и $\int\int \Xi u + \mathrm{H} v + \mathrm{Z} w)\,do$].

Коэфициенты a_ν, b_ν, c_ν определяются теперь так, чтобы выражение Π_n для потенциальной энергии было минимальным. Для этого приравниваем нулю все частные производные $\frac{\partial \Pi_n}{\partial a_\nu}$, $\frac{\partial \Pi_n}{\partial b_\nu}$, $\frac{\partial \Pi_n}{\partial c_\nu}$, что дает систему *линейных* уравнений (ибо Π_n — квадратичная относительно a_ν, b_ν, c_ν функция) для определения коэфициентов. Число уравнений будет при этом как раз равно числу искомых коэфициентов. *

Таким путем мы получим приближенное решение нашей вариационной задачи. Необходимо только выяснить, сходятся ли при возрастании n приближенные решения u_n, v_n, w_n, к истинному решению. На основании предыдущего можно только сказать, что при достаточной общности системы аппроксимирующих функций выражение для потенциальной энергии должно во всяком случае все более приближаться к искомому минимальному значению. Но отсюда еще не следует, что и последовательность функций u_n, v_n, w_n сама по себе будет сходящейся.

53. Доказательство сходимости для одного частного случая. Здесь мы дадим доказательство сходимости только для одного частного случая, принимая существование решения доказанным. Этим частным случаем будет задача об изгибе заделанной по краям пластинки. Пусть средняя плоскость пластинки занимает область G плоскости XY; если пластинка закреплена по краю и несет перпендикулярную ее плоскости нагрузку $p(x, y)$ *кг/см*², то [§ 30, ур-ние (24)] прогиб w определяется решением диференциального уравнения

$$\lambda\Delta\Delta w = p(x, y), \tag{1}$$

обращающимся вместе со своей нормальной производной в нуль на контуре пластинки, т. е.

$$w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad (\nu \text{ — нормаль}) \tag{2}$$

на контуре R области G. При этом так называемый коэфициент цилиндрической жесткости пластинки λ будет:

$$\lambda = \frac{Gh^3}{6} \cdot \frac{m}{m-1} \tag{3}$$

(h — толщина пластинки, G — модуль сдвига, m — модуль поперечного сжатия). Чтобы преобразовать нашу задачу в задачу вариационного исчисления, будем искать функцию w, отличающуюся тем свойством, что она при граничных условиях (2) сообщает потенциальной энергии

$$\Pi = A - \int\int p(x, y)\, w(x, y)\, dxdy \tag{4}$$

минимальное значение. При этом работа деформации A [§ 30, ур-ния (12) и (18)] будет:

$$A = \frac{\lambda}{2}\int\int (\Delta w)^2 dxdy. \tag{5}$$

Функции, принадлежащие к классу допустимых в нашей вариационной задаче, должны, кроме выполнения граничных условий, иметь непрерывные частные производные первого порядка; частные же производные второго порядка, если они и не будут конечными, должны быть таковы, чтобы интеграл работы деформации (5) имел конечное значение.

Следуя Ритцу, мы, выбрав соответствующие аппроксимирующие функции, ищем приближение w_n к искомому решению w в виде:

$$w_n(x, y) = \sum_1^n c_\rho W_\rho(x, y), \tag{6}$$

причем все W_ρ удовлетворяют граничным условиям (2); далее определяем коэфициенты c_ρ таким образом, чтобы потенциальная энергия была минимальной. Покажем теперь, что для какой-либо заданной точки ξ, η приближения $w_n(\xi, \eta)$ при возрастании n будут сходится к истинному решению.

* Для этого доказательства мы будем пользоваться двумя соображениями: во-первых, отметим, что при достаточной общности системы аппроксимирующих функций та величина, которая в нашей вариационной задаче должна быть приведена к минимуму (потенциальная энергия), *действительно сходится* к своему истинному минимальному значению —

мы будем называть его „минимальным значением вариационной задачи“ (это утверждение эквивалентно предположению о существовании решения уравнений равновесия пластинки); во-вторых, нашей целью будет представить искомое значение функции $w(\xi, \eta)$ в виде минимального значения некоторой „побочной“ вариационной задачи (употребляя выражение „минимальное значение“ в указанном только-что смысле).

Если такую „побочную“ задачу [минимальным значением которой служило бы $w(\xi, \eta)$] нам действительно удастся составить, то цель будет достигнута, ибо согласно нашему первому утверждению последовательные приближения в вариационной задаче сходятся к своему минимальному значению.

Переходя к доказательству, отметим сначала, что минимум потенциальной энергии пластинки, который имеет место при равновесии ее, равен работе деформации, взятой со знаком минус. В самом деле, как сейчас будет доказано, работа деформации при равновесии пластинки определяется формулой:

$$A=\frac{1}{2}\int\int p\cdot w\cdot dxdy, \tag{7}$$

и формула (4) дает $\Pi = -A$. Сказанное надо понимать в том смысле, что, выбирая $w(x,y)$ любым образом, мы сообщаем выражению (4) некоторое значение, большее, чем $-A$; если же w удовлетворяет диференциальному уравнению равновесия (1) и пограничным условиям (2), то выражение (4) принимаст свое минимальное значение, равное $-A$; если же, наконец, принять для w приближение w_n вида (6), удовлетворяющее граничным условиям (2), но не диференциальному уравнению равновесия (1), определяя коэфициенты c_r так, чтобы результат Π_n подстановки в (4) был возможно меньшим, то последовательность чисел $-\Pi_n$ при достаточно большом n будет все ближе и ближе приближаться к $-A$, так что $-A$ будет пределом этой последовательности при $n\to\infty$.

Теперь установим правильность формулы (7), которой мы только-что воспользовались. Дадим сначала чисто формальное ее доказательство. Отметим для этого тождество:

$$(\Delta w)^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\Delta w\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\Delta w\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial \Delta w}{\partial x}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial \Delta w}{\partial y}\right)+w\Delta\Delta w, \tag{a}$$

которое читатель проверит непосредственным диференцированием.

Пользуясь этим тождеством и преобразуя выражение (5) для работы деформации, получим:

$$A=\frac{\lambda}{2}\int\int(\Delta w^2)\,dxdy=\frac{\lambda}{2}\int\Delta w\frac{\partial w}{\partial\nu}\,dl-$$
$$-\frac{\lambda}{2}\int w\frac{\partial\Delta w}{\partial\nu}\,\partial l+\frac{\lambda}{2}\int\int w\Delta\Delta w dxdy; \qquad (6)$$

интегралы по контуру пропадают в силу граничных условий; с другой стороны, при *равновесии* имеет место также диференциальное ур-ние (1); воспользовавшись им, получим формулу (7). К этой же формуле можно прийти из простых механических соображений: энергия деформации A, накопленная в пластинке, равна работе внешней нагрузки. Наличие множителя $\frac{1}{2}$ перед интегралом объясняется тем, что внешняя нагрузка $p\,(x,y)$ с самого начала, когда пластинка не деформирована, равна нулю и постепенно достигает своего конечного значения, так что в любой момент времени имеет место равновесие между внешней нагрузкой и реакциями упругодеформированной пластинки; при вычислении работы надо взять поэтому среднее значение нагрузки, которое вследствие пропорциональности сил и деформации, равно половине ее конечного значения.

Таким образом, доказано, что „минимальным значением“ в нашей вариационной задаче является взятая со знаком минус работа деформации. Согласно вышесказанному, теперь нужно представить и минимизирующую функцию, т. е. прогиб $w\,(\xi,\,\eta)$ пластинки в некоторой ее точке в виде „минимального значения некоторой „побочной“ вариационной задачи. * Чтобы составить последнюю, представим себе, что наряду с нагрузкой $p\,(x,\,y)$ мы прилагаем в точке $(\xi,\,\eta)$ дополнительную сосредоточенную силу ε. Новое положение равновесия под действием p и ε также может быть определено помощью вариационной задачи. Для составления последней очевидно достаточно внести в выражение (4) для потенциальной энергии член $\varepsilon w\,(\xi,\,\eta)$, обусловленный наличием сосредоточенной силы; при тех же условиях (2) на границе, мы должны теперь определить функцию $w(\xi, \eta)$ минимизирующую выражение:

$$\Pi^* = A - \int\int pw\,dxdy - \varepsilon w(\xi, \eta). \qquad (8)$$

Вариационную задачу (8) будем называть „побочной“ для нашей задачи (4). Предполагая, что решение, т. е. минимизирующая функция $w(x, y)$, найдено, определим минимальное значение этой побочной задачи. Оно равно, как мы знаем, взятой со знаком минус работе деформации, которую можно определить довольно простым образом. В самом деле, представим себе, что пластинку сперва нагружают дополнительной сосредоточенной нагрузкой ε; эта нагрузка вызовет в точке ξ, η прогиб, который мы обозначим через $\varepsilon G(\xi, \eta)$; израсходованная при этом работа деформации будет равна:

$$A_1 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon G(\xi, \eta) = \frac{\varepsilon^2}{2} G(\xi, \eta). \qquad (9)$$

Теперь присоединим сюда основную нагрузку $p(x, y)$; она вызовет прогиб $w(x, y)$, разыскание которого представляет нашу конечную цель, и при этом произведет работу:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int\int pw\,dxdy. \qquad (10)$$

Но добавочная сила ε произведет сверх того работу:

$$A_3 = \varepsilon w(\xi, \eta), \qquad (11)$$

так как точка приложения ее опускается на величину $w(\xi, \eta)$. Здесь отсутствует множитель $\frac{1}{2}$, так как при этой второй деформации сила ε с самого начала действует целиком. Вся работа деформации будет равна:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{\varepsilon^2}{2} G(\xi, \eta) + \varepsilon w(\xi, \eta) + \\ + \frac{1}{2}\int\int pw\,dxdy, \qquad (12)$$

а следовательно, ее значение с отрицательным знаком (минимальное значение в побочной задаче), которое мы обозначим через $N(\xi, \eta, \varepsilon)$, равно:

$$N(\xi, \eta, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{2} G(\xi, \eta) - \varepsilon w(\xi\eta) - \frac{1}{2}\int\int pw dxdy. \qquad (13)$$

Если мы приравняем ε один раз — 1, и другой раз $+1$

$$\varepsilon = -1,\ \varepsilon = +1$$

и определим для обоих случаев минимальные значения в побочной задаче, то получим:

$$\left.\begin{aligned} N(\xi, \eta, +1) &= -\frac{1}{2}G(\xi, \eta) - w(\xi, \eta) - \\ &-\frac{1}{2}\int\int pwdxdy, \\ N(\xi, \eta, -1) &= -\frac{1}{2}G(\xi, \eta) + w(\xi, \eta) - \\ &-\frac{1}{2}\int\int pwdxdy, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

откуда

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left\{N(\xi, \eta, -1) - N(\xi, \eta, +1)\right\}. \quad (15)$$

Таким образом наша цель — выразить искомую функцию $w(\xi, \eta)$ через минимальные значения соответственной „побочной задачи“—достигнута. Существенным в нашем результате является то, что „побочная задача“ действительно имеет решение, т. е. что функция $G(\xi, \eta)$ остается конечной, так как в случае пластинки сосредоточенная сила в точке ее приложения производит конечный прогиб. С математической точки зрения это означает, что относящаяся к нашей задаче с граничными условиями функция Грина остается конечной в ее особенной точке, — функция Грина есть не что иное как деформация, произведенная сосредоточенной силой.

Приведенные соображения и результаты относятся к истинному решению нашей вариационной задачи; теперь применим их к приближенному решению, определяемому по методу Ритца. При этом целесообразно исходить из того, что найденное по методу Ритца приближенное решение n-го порядка (т. е. с n аппроксимирующими функциями) дает строгое решение той вариационной задачи, которая получается из нашей задачи, если ограничить класс допустимых функций функциями (6) с неопределенными коэффициентами, Итак предположим, что мы остановились на выборе определенного класса аппроксимирующих функций $W_\rho(x, y)$. Если мы затем для какой-либо деформации вида

$$w_n(x,y)+\sum_1^n c_\rho W_\rho(x,y)$$

составим выражение потенциальной энергии, то оно будет состоять из квадратичной относительно коэфициентов c_ρ формы:

$$A_n=\frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n a_{ik}c_ic_k, \qquad (16)$$

являющейся результатом подстановки (6) в выражение работы деформации, и линейной формы, дающей работу внешних сил:

$$L_n=\sum_1^n l_ic_i \qquad (17)$$

Коэфициенты a_{ik} и l_i обеих при этом являются известными величинами, так как при заданных функциях $w_\rho(x,y)$ их можно вычислить при помощи определенных интегралов, взятых по этим функциям и их частным производным. Определяя теперь коэфициенты c_ρ таким образом, чтобы потенциальная энергия приняла минимальное значение, получим систему уравнений:

$$\frac{\partial\Pi_n}{\partial c_i}=\sum_{k=1}^n a_{ik}c_k-l_i. \qquad (18)$$

Умножая на c_i и суммируя, получим:

$$\sum_1^n\sum_1^n a_{ik}c_ic_k=\sum c_il_i, \qquad (19)$$

откуда следует, что в случае минимума выражение потенциальной энергии получает вид:

$$\Pi_n=A_n-L_n=\frac{1}{2}\sum\sum a_{ik}c_ic_k-\sum c_il_i=-A_n, \qquad (20)$$

т. е. потенциальная энергия в приближении n-го порядка равна отрицательной работе деформации в том же приближении.

Исследуем теперь „побочную задачу“, получающуюся при прибавлении сосредоточенной нагрузки ε в точке ξ, η. Тогда выражение, которое должно получить минимальное значение, будет:

$$\Pi^*_n = A_n - L_n - \varepsilon w^*_n(\xi, \eta) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum\sum a_{ik}C_iC_k - \sum l_iC_i - \varepsilon\sum C_iW_i(\xi, \eta), \qquad (21)$$

и коэфициенты, которые мы теперь обозначаем большими буквами, должны удовлетворять уравнениям:

$$\sum_k a_{ik}C_k = l_i + \varepsilon W_i(\xi, \eta). \qquad (22)$$

Если мы подставим

$$C_i = c_i + \varepsilon\delta_i \qquad (23)$$

то значения δ_i, удовлетворяют уравнениям:

$$\sum_k a_{ik}\delta_k = W_i(\xi, \eta). \qquad (24)$$

Минимальное значение побочной задачи, равное, согласно сказанному выше, отрицательному значению квадратичной формы $\frac{1}{2}\sum\sum a_{ik}C_iC_k$, будет

$$N_n(\xi, \eta, \varepsilon) = -\frac{1}{2}\sum\sum a_{ik}C_iC_k =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum\sum a_{ik}(c_i + \varepsilon\delta_i)(c_k + \varepsilon\delta_k) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum\sum a_{ik}c_ic_k -$$

$$- \varepsilon\sum\sum a_{ik}c_i\delta_k - \frac{\varepsilon^2}{2}\sum\sum a_{ik}\delta_i\delta_k. \qquad (25)$$

Здесь в средней сумме правой части

$$\sum a_{ik}\delta_k = W_i(\xi, \eta),$$

и следовательно:

$$\sum\sum a_{ik} c_i \delta_k = \sum c_i W_i(\xi, \eta) = w_n(\xi, \eta). \tag{26}$$

Получаем равенство:

$$N_n(\xi, \eta, \varepsilon) = -\frac{1}{2}\sum\sum a_{ik} c_i c_k - \varepsilon w_n(\xi, \eta) - \\ -\frac{\varepsilon^2}{2}\sum\sum a_{ik} \delta_i \delta_k. \tag{27}$$

Теперь примем тот же ход рассуждения, что и выше. Решим побочную задачу один раз для $\varepsilon = +1$, другой — для $\varepsilon = -1$; отмечая значком n тот факт, что речь идет о приближениях Ритца n-ого порядка, получим:

$$w_n(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left\{N_n(\xi, \eta, -1) - N_n(\xi, \eta, +1)\right\}. \tag{28}$$

Выражение значений функции через минимальные значения побочной задачи имеет одинаковый вид в приближенном и в истинном решении. Но мы знаем, что последовательность минимальных значений вариационной задачи сходится, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n=\infty} N_n(\xi, \eta, -1) &= N(\xi, \eta, -1) \\ \lim_{n=\infty} N_n(\xi, \eta, +1) &= N(\xi, \eta, +1); \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

а следовательно:

$$\lim_{n=\infty} w_n(\xi, \eta) = w(\xi, \eta). \tag{30}$$

Таким образом, приближения, получаемые по методу Ритца, оказываются действительно сходящимися к истинному решению.

Можно пойти в своих выводах еще дальше, а именно, мы можем утверждать, что сходимость будет равномерной. В самом деле, сходимость последовательности приближенных значений $N_n(\xi, \eta, \varepsilon)$ минимального значения $N(\xi, \eta, \varepsilon)$ побочной задачи монотонна, т. е. приближенные значения с каждым шагом становятся все ближе к истинному значению. Кроме того они являются непрерывными функциями ξ и η. Но из теоремы Дини (Dini) мы знаем, что сходящаяся последовательность непрерывных функций всегда будет равномерно сходящейся, если она монотонно приближается к непрерывной функции. Отсюда следует прежде всего, что $N_n(\xi, \eta, +1)$ и $N_n(\xi, \eta, -1)$, при возрастании n будут равномерно для обоих переменных ξ, η сходиться к $N(\xi, \eta, 1)$ и $N(\xi, \eta, -1)$, а отсюда следствием является и равномерная сходимость $w_n(\xi, \eta)$ к $w(\xi, \eta)$.

54. Доказательство сходимости в общем случае. Перенесение доказательства сходимости предыдущего параграфа на общий случай основных уравнений теории упругости затрудняется тем, что в этом общем случае побочная задача не имеет решений. Побочная задача составляется всегда путем присоединения к заданной нагрузке в исследуемой точке сосредоточенной силы. Но сосредоточенная сила, приложенная в какой-либо точке, вызовет в ней бесконечную деформацию, как это следует из формул (5) § 32. Итак, побочная задача в этом случае решений не имеет, и выводы из предшествующего доказательства сходимости не могут быть перенесены на этот случай. Однако, следуя данному выше методу, мы можем доказать, что *средние значения* перемещений на любом участке поверхности F будут сходящимися. Покажем это, например, для перемещения u; рассмотрим дли этого побочную задачу определения деформации, когда к заданным нагрузкам прибавляется еще дополнительная нагрузка, равномерно распределенная по поверхности F, действующая в направлении X и имеющая величину ε. Рассуждая таким же образом, как выше, мы получим в качестве минимального значения для этой побочной задачи отрицательное значение работы деформации. Эта работа составляется из работы, производимой добавочными силами, вызывающими деформацию $\varepsilon\bar{u}$, $\varepsilon\bar{v}$, $\varepsilon\bar{w}$.

$$A_1 = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_F \int \bar{u} dF, \tag{31}$$

из работы, которую добавочные силы производят при деформации благодаря основной нагрузке

$$.A_2 = \varepsilon \int_F \int u dF, \tag{32}$$

и из работы A_3, производимой основной нагрузкой при деформации, вызываемой ею самой и уже не зависящей от ε. В сумме получаем:

$$A = A_3 + \varepsilon \int \int u dF + \frac{\varepsilon^2}{2} \int \int \bar{u} dF. \tag{33}$$

Таким образом, мы получаем среднее значение $\int\int udF$, решая побочную задачу один раз при $\varepsilon = +1$, другой раз при $\varepsilon = -1$ и составляя полуразность соответствующих минимальных значений:

$$\int\int udF = \frac{1}{2}\{N(F, -1) - N(F, +1)\}. \qquad (34)$$

Таким образом определение искомого среднего значения сводится к определению минимальных значений побочной задачи: следствием этого является и в этом случае, точь-в-точь как и в предыдущем, сходимость. Равным образом можно показать, что любой интеграл вида $\int\int u\varphi(x, y, z)dF$ будет сходящимся (то же имеет место, конечно, для v и w). Это дает метод, позволяющий построить решение для всех случаев. Именно, представим себе, что из упругого тела вырезан шар и что для приближений Ритца в каждом случае внутри этого шара определены функции, принимающие на поверхности шара те же значения u_n, v_n, w_n, что получаются и по методу Ритца, но удовлетворяющие в точности внутри шара основным уравнениям теории упругости. При этих условиях мы получим внутри шара так называемые „сглаженные“ аппроксимирующие функции, которые можно, исходя из значений на поверхности шара, выразить в поверхностных интегралах. Поэтому они во всяком случае будут сходящимися к истинным значениям, так как (это доказано выше) поверхностные интегралы действительно сходятся к их истинным значениям. Эти выводы можно преобразовать в доказательство существования, но на этом вопросе мы здесь не будем останавливаться.

Известная трудность в методе Ритца заключается всегда в построении функций, которые принимали бы на поверхности тела заданные значения. Так обстоит дело во всех тех случаях, когда заданы перемещения. Но если заданы поверхностные напряжения, то эта трудность отпадает, так как в вариационной задаче граничные условия отпадают. Необходимо только при известных условиях относительно существования производных сделать потенциальную энергию минимальной. Класс допускаемых аппроксимирующих функций не ограничен уже условиями на поверхности: если решать *диференциальные* уравнения равновесия в перемещениях [(2) § 13] при заданных напряжениях, то условия равновесия на поверхности [(5) § 13] должны быть выражены через производные перемещений. Наоборот, в *вариационной* задаче эти поверхностные условия сами по себе удовлетворяются решением задачи. Делая в этом случае подстановку:

$$u=\sum a_\rho U_\rho, \quad v=\sum b_\rho V_\rho, \quad w=\sum c_\rho W_\rho \tag{35}$$

и выражая U_ρ, V_ρ, W_ρ в виде полиномов от x, y, z, получим для коэфициентов a_ρ, b_ρ, c_ρ уравнения, тождественные с теми, которые получаются по формуле Бетти (§ 47).

55. Разложение по частным решениям на основе метода Ритца. Старейшим историческим способом решения граничных задач теории упругости является метод разложения по частным решениям. Для особенно важного случая, случая шара, мы применили его уже выше; метод имеет однако более широкое применение для целого ряда специальных задач (цилиндр, эллипсоид, конус, тело вращения — тор и т. д.). Мы удовольствуемся здесь только несколькими замечаниями принципиального характера относительно этого метода, не останавливаясь подробно на перечисленных частных случаях. При этом ограничимся двумя специальными типами граничных условий: случаем, когда заданы поверхностные силы, и случаем, когда заданы поверхностные перемещения. Проще всего начать со случая заданных поверхностных сил, так как его можно непосредственно связать с выводами, сделанными нами из рассмотрения метода Ритца.

Пусть на поверхности тела в направлении трех координатных осей действуют отнесенные к единице поверхности силы Ξ, H, Z. Массовые силы мы в расчет принимать не будем. Перемещения будем искать в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_n=\sum_1^n c_\rho U_\rho(x,y,z),\quad v_n=\sum_1^n c_\rho V_\rho(x,y,z),\\ w_n=\sum_1^n c_\rho W_\rho(x,y,z), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем система аппроксимирующих функций U_ρ, V_ρ, W_ρ представляет собой частное решение основных уравнений равновесия теории упругости при любом ρ. Далее предположим, что любое решение уравнений теории упругости может быть представлено через функции U_ρ, V_ρ, W_ρ при достаточно большом n с наперед заданной степенью точности. В случае односвязного тела за систему аппроксимирующих функций могут быть выбраны, например, однородные полиномы от x, y, z (это можно показать, пользуясь известными свойствами потенциальных функций, через которые выражаются наши решения).

Коэфициенты разложения (1) определяются из требования, чтобы потенциальная энергия

$$\Pi_n = A_n - \int\int \{ \Xi u_n + \mathrm{H} v_n + \mathrm{Z} w_n \} \, do, \tag{2}$$

где A_n — работа деформации — имела минимальное значение. Далее применяем метод Ритца с той лишь разницей, что в качестве аппроксимирующих функций берем функции, удовлетворяющие диференциальным уравнениям равновесия в перемещениях. Условия минимума

$$\frac{\partial \Pi_n}{\partial c_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots n), \tag{3}$$

где значок n обозначает, что соответствующая величина образована из системы u_n, v_n, w_n, могут быть приведены к виду [§ 17, ур-ние (8)]:

$$\int\int\int \{ (\mathbf{t}_n^{(x)}, \operatorname{grad} U_h) + (\mathbf{t}_n^{(y)}, \operatorname{grad} V_h) +$$
$$+ (\mathbf{t}_n^{(z)}, \operatorname{grad} W_h) \} \, d\omega = \int\int \{ \Xi U_h + \mathrm{H} V_h + \mathrm{Z} W_h) \, do. \tag{4}$$

Преобразуя объемный интеграл согласно формулам, примененным в § 17, получим:

$$\int\int\int \{ (\mathbf{t}_n^{(x)}, \operatorname{grad} U_h) + (\mathbf{t}_n^{(y)}, \operatorname{grad} V_h) +$$
$$+ (\mathbf{t}_n^{(z)}, \operatorname{grad} W_h \} \, d\omega = \int\int \{ \Xi_n U_h + \mathrm{H}_h V_h + \tag{5}$$
$$+ \mathrm{Z}_n W_h \} \, do,$$

и условия минимума получат вид

$$\int\int \{ \Xi_n U_h + \mathrm{H}_n W_h + \mathrm{Z}_n W_h \} \, do =$$
$$= \int\int \{ \Xi U_h + \mathrm{H} V_h + \mathrm{Z} W_h \} \, do. \tag{6}$$

Придавая h все последовательные значения от 1 до n, получим n линейных уравнений для искомых коэфициентов от c_1 до c_n.

Если вместо поверхностных сил заданы поверхностные перемещения, то решение задачи ищется в том же виде (1); формулы для определения коэфициентов остаются в принципе теми же. Необходимо только принять во внимание то, что, согласно теореме взаимности Бетти, имеем:

$$\int\int\{\Xi U_h+\mathrm{H}V_h+\mathrm{Z}W_h\}\,do=$$
$$=\int\int\{\Xi_h U+\mathrm{H}_h V+\mathrm{Z}_h W\}\,do, \qquad (7)$$

где U, V, W — заданные поверхностные перемещения. Делая подстановку в формулы (6), служащие для определения коэфициентов, получим систему уравнений, в которые неизвестные в этом случае поверхностные силы не будут уже входить, а заменятся заданными поверхностными перемещениями. Поэтому уравнения получат вид:

$$\int\int\{\Xi_n U_h+\mathrm{H}_n V_h+\mathrm{Z}_n W_h\}\,do=$$
$$=\int\int\{\Xi_h U+\mathrm{H}_h V+\mathrm{Z}_h W\}\,do. \qquad (8)$$

Классические разложения в ряды благодаря ортогональным свойствам отличаются той особенностью, что для двух различных функций системы аппроксимирующих функций U_ν, V_ν, W_ν и U_μ, V_μ, W_μ с поверхностными силами Ξ_ν, H_ν, Z_ν и Ξ_μ, H_μ, Z_μ или имеет место равенство

$$\int\int\{\Xi_\mu U_\nu+\mathrm{H}_\mu V_\nu+\mathrm{Z}_\mu W_\nu\}\,do=0, \qquad (9)$$

или же функции этой системы могут быть по крайней мере разделены на группы, каждая из которых будет содержать конечное количество функций таким образом, что эта ортогональная связь имеет место между любыми двумя функциями различных групп.

Если число аппроксимирующих функций увеличивается до бесконечности, то приближенное решение будет сходиться, стремясь к истинному решению, и притом равномерно в каждой из областей, лежащих целиком внутри заданного тела. Если принять как предпосылку существование решения, то можно дать сравнительно простое доказательство этого положения, руководясь методами, изложенными в предыдущих параграфах.

XI. ПЕРСПЕКТИВЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НА НЕ-ГУКОВ ЗАКОН УПРУГОСТИ И НА КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ.

56. Функция энергии деформации. Если мы не будем пользоваться обоими ограничениями классической теории — ограничением малых деформаций и ограничением закона Гука, то мы уже не будем в состоянии дать картину напряженного состояния в модулях деформации, выраженных в их простейшем виде:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

и т. п.; придется вернуться к общему виду, т. е. к ур-ниям (5) § 8.

В этом случае проще всего было бы вывести диференциальные уравнения в перемещениях с помощью минимальных принципов, а следовательно, для случая равновесия, которым мы здесь ограничимся, с помощью принципа минимума потенциальной энергии (принципа возможных перемещений), который во всяком случае остается в силе.

Прежде всего необходимо выяснить вопрос о существовании энергии деформаций как определенной функции состояния упругого тела, т. е. вопрос, накопляется ли в упругом теле при определенной деформации всегда одинаковая работа деформации, независимо от порядка, в котором включаются те или иные различные нагрузки.

Для двух предельных случаев — для случая очень быстрых и для случая очень медленных процессов нагрузки — на этот вопрос можно ответить утвердительно на основании термодинамических соображений. [1] Очень быстрым мы называем адиабатический процесс; он происходит настолько быстро, что между соседними элементами объема не происходит никакого теплообмена. В другом предельном случае процесс происходит настолько медленно, что в каждый момент существует термическое равновесие, так что мы имеем *изотермический* процесс при постоянной температуре T. При этом допускается, что процессы нагрузки и разгрузки являются обратимыми термодинамическими процессами.

Приведем упругое тело в деформированное состояние Z и допустим, что работа, требуемая для деформации, имеет

---

[1] *W. Thomson,* On the thermoelastic and thermomagnetic properties of matter. Quarterly Journ. of. Math., т. 1, стр. 57, 1857.

значение A (I), когда мы производим деформацию способом I, и значение A (II), когда мы производим деформацию способом II; предположим теперь, что нагрузка производится способом I, а разгрузка — способом II. Работа при нагрузке будет A (I), при разгрузке A (II); разность A (I) — A (II) превращается в теплоту. Если мы обозначим количество теплоты, выделяемое при безконечно малом изменении состояния через δQ, то на основании первого основного закона термодинамики имеем:

$$\int \delta Q + A\ (\mathrm{I}) - A\ (\mathrm{II}) = 0, \tag{1}$$

где интегрирование распространяется по всему круговому процессу.

Необходимо показать, что этот интеграл превращается в нуль. Для адиабатического процесса это ясно само по себе, так как в этом случае вообще $\delta Q = 0$. Для изотермического процесса это следствие второго основного закона термодинамики, согласно которому при обратимом круговом процессе $\int \frac{\delta Q}{T} = 0$, а следовательно при постоянной температуре T и $\int \delta Q = 0$, Итак в обоих случаях

$$A\ (\mathrm{I}) = A\ (\mathrm{II}). \tag{2}$$

Таким образом, доказано существование энергии деформации как функции, зависящей только от состояния деформации; применение принципа минимума потенциальной энергии является в этих случаях вполне закономерным. Выражение энергии деформации через составляющие тензора деформации может быть найдено разумеется только из данных эксперимента.

57. Задача интегрирования. Пусть x, y, z — прямоугольные координаты какой-либо точки тела в недеформированном состоянии, $d\omega$ — элемент объема, do — элемент поверхности, также и в недеформированном состоянии; $A(\gamma_{xz} \ldots \gamma_{yz})\, d\omega$ — количество энергии, содержащейся в $d\omega$ в деформированном состоянии, далее $X d\omega$, $Y do$, $Z do$ и Ξdo, $\mathrm{H} do$, $\mathrm{Z} do$ пусть будут внешние силы, приложенные к элементу объема и к элементу поверхности; силы будем считать заданными, т. е. не подлежащими изменению в процессе вариирования; согласно принципу минимума потенциальной энергии, выражение

$$\Pi = \int\int\int \mathrm{A}\delta\omega - \int\int\int \{ Xu + Yv + Zw \} \, d\omega -$$
$$- \int\int \{ \Xi u + \mathrm{H} v + \mathrm{Z} w \} \, do \qquad (1)$$

должно быть минимумом. Если для этой вариационной задачи составить диференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа, то для составляющих перемещения u, v, w получатся три нелинейных диференциальных уравнения с частными производными второго порядка.

Для интегрирования этих диференциальных уравнений можно встать на следующий путь. Нагрузим тело вместо сил X, Y, Z, Ξ, H, Z силами λX, λY, λZ, $\lambda\Xi$, $\lambda\mathrm{H}$, $\lambda\mathrm{Z}$, где λ — множитель, который мы представляем себе возрастающим от нуля до непосредственно нужного нам значения 1; перемещения будем искать в виде ряда, расположенного по степеням параметра λ:

$$u = \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \ldots \qquad (2)$$

и т. д. Подставляя это значение в диференциальные уравнения и ставя условием, чтобы члены с одной и той же степенью λ в сумме превращались в нуль, мы получим для членов u_1, u_2, $u_3 \ldots$, v_1, v_2, $v_3 \ldots$, w_1, w_2, $w_3, \ldots$, содержащихся в разложении (2) рекуррентный ряд линейных диференциальных уравнений с частными производными типа классических основных уравнений.

Таким образом, мы получим формальный метод интегрирования уравнений помощью рядов типа (2); вопрос о сходимости этих рядов, а также вопрос о том, удовлетворяют ли они диференциальным уравнениям, подлежит конечно особому рассмотрению. Сам собой напрашивается также вопрос об однозначности решений типа (2); можно определенно утверждать, что для достаточно малых значений λ однозначность имеет место. В общем виде ее заведомо не существует, как это видно из простого примера, который в то же время поясняет физическое значение случаев наличия в решениях точки разветвления. Мы знаем, что прямолинейный стержень, сжатый некоторой силой в продольном направлении, при достаточной нагрузке, т. е. при достаточно большом λ, претерпевает изгиб, т. е. наряду с неустойчивой прямолинейной формой равновесия имеет устойчивую изогнутую форму равновесия. С математической точки зрения то значение λ, при котором наступает это явление продольного изгиба, представляет собой точку разветвления решений. Вопрос о продольном изгибе совпадает потому с вопросом о точках разветвления решений.

Отсюда следует, что известная из элементарной теории изгиба балок теория продольного изгиба без всяких натяжек вливается в классическую теорию упругости, если не вводить упрощающих предпосылок о малости деформаций.

Специальных вычислений для отдельных случаев в этом направлении пока не сделано.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

Общие руководства.

Love A. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambrige, 1927 (4 издание); немецкий перевод A. Timpe, Leipzig, 1907.

Clebsch A. Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig, 1862, французский перевод этого сочинения, сделанный B. de Saint-Venant и A. Flamant, содержит многочисленные дополнения.

Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik; Leipzig, 1897 (4 издание).

Poincaré H. Leçons sur la théorie de l'élasticité; Paris, 1892.

Lecornu L. Théorie mathématique de l'élasticité, Mémorial des Sciences mathematiques, fasc. XXXV, Paris, 1929.

Appell P. Cours de mécanique rationelle, т. III; Paris, 1921 (3 издание).

Планк М. Введение в механику деформируемых тел, Москва—Ленинград, 1929.

Тимошенко С. П. Курс теории упругости. 2 тома. Ленинград, 1914, 1916.

Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости, Изд. Ак. наук СССР, 1933.

Специальные вопросы

К §§ 31—38

Галеркин Б. Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле; Докл. Ак. наук СССР, 1930 или Comptes Rendus, 190, p., 1047, 1930; более подробное изложение и применения к конкретным задачам: Вестник механики и прикладной математики, вып. 2, Ленинград, 1931.

Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла уравнений теории упругости через гармонические функции, Изв. Ак. наук СССР, 1932..

К §§ 39—44

Мусхелишвили Н. И. Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique; Тифлис, 1922. (Применения к плоской задаче теории упругости); из других многочисленных работ этого же автора по плоской задаче и задаче о кручении укажем статьи в Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1929 (кручение) Mathematische Zeitschrift, Bd 26, 1927 (плоская задача), Известия Электротехн. института, т. XIII, 1916 (тепловые напряжения в плоской задаче).

Recherches sur les problèmes aux limites rélatifs à l'équation biharmonique, Mathem. Annalen. **107**, 1932; Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene, Zeitschrift für angew. Math. und Mech., **13**, 1933.

Колосов Г. В. Приложение комплексного переменного к плоской задаче теории упругости (Юрьев, 1909). Готовится новое издание.

Malkin J. Über einige neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Elastizitätstheorie Zeitsch. für angew. Math. und Mechanik 10, стр. 182—195, 1930 (изложение работ Н. И. Мусхелишвили).

К §§ 47—55

Bergmann, St. Ueber Bestimmung der elastischen Spannungen und Verchiebungen in einem konvexen Körper; Mathematische Annalen, том 98, 1927 (содержание работы передано в статье Malkin'a, указанной выше).

СОДЕРЖАНИЕ