С. П. ВИНОГРАДОВ

ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ДЕТЕРМИНАНТОВ

Издание четвертое

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕД. ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
МОСКВА—1935—ЛЕНИНГРАД

Редакция С. Ф. Струпинского. Оформление С. Л. Дыман.
Корректура И. П. Загрядскова. Выпускающий А. В. Малов.
Сдано в производство 15/XI 1934 г. Подписано к печати 19/III 1935 г.
Листов 6½. Тираж 10.000. Формат 82×110¹/₃₂. Печ. зн. в л. 38304.
Заказ № 1116. ГТТИ № 189. Уполн. Главлита № В 15490

Набрано в типографии треста „Полиграфкнига“. Трехпрудный, 9.
Отпечатано в типографии „Дер Эмес“, Москва, Покровка, 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I.

ИНВЕРСИИ. ТИПЫ ПЕРЕСТАНОВОК. ТРАНСПОЗИЦИИ.

§ 1. Инверсии. Типы перестановок. Для теории детерминантов необходимо прежде всего дополнить те сведения о перестановках, которые даются в элементарном курсе алгебры.

Из n различных между собой элементов можно составить $P_n = 1 \cdot 2 \ldots n = n!$ различных перестановок. Порядок элементов в одной из них, выбранной произвольно, принимается за нормальный, а самая перестановка называется главной. Если элементы обозначаются одной буквой с индексами, то нормальным порядком элементов считается тот, в котором индексы идут в порядке натуральных чисел. Во всех перестановках, кроме главной, нормальный порядок элементов нарушен.

Сохранение нормального порядка двух элементов, независимо от того, стоят ли эти два элемента рядом, или отделены друг от друга другими элементами, называется порядком, а нарушение — инверсией. Например, в перестановке $a_2a_1a_5a_3a_4$ элементы a_1 и a_3, a_1 и a_4 образуют инверсии, если за главную взята перестановка $a_1a_2a_3a_4a_5$.

Перестановка без инверсий (т. е. главная) или с четным числом инверсий называется перестановкой четного типа или просто четной, а перестановка с нечетным числом инверсий — перестановкой нечетного типа или нечетной. Для того чтобы сосчитать число инверсий в данной перестановке, можно поступать следующим образом: найти число элементов, стоящих в данной перестановке перед тем элементом, который в главной занимает первое место; затем, выбросив этот элемент, найти число элементов, стоящих в полученной перестановке перед тем, который в главной занимает второе место, и т. д. до тех пор, пока не будут исчерпаны все элементы; сумма найденных таким образом чисел представляет число инверсий в данной перстеановке.

Пример 1. Найти число инверсий в перестановке 436152 (главная перестановка 123456).

Перед 1 стоят 3 элемента, составляющие 3 инверсии с элементом 1, в перестановке 43652 перед 2 стоят 4 элемента, составляющие 4 инверсии с элементом 2; в перестановке 4365 перед 3 стоит 1 элемент, составляющий 1 инверсию с элементом 3; в перестановке 465 перед 4 нет элементов, т. е. нет инверсий с элементом 4; в перетановке 65 перед 5 стоит один элемент, составляющий 1 инверсию с 5.

Число всех инверсий в данной перестановке равно $3+4+1+$ $+1=9$.

Данная перестановка нечетного типа.

Пример 2. Найти число инверсий в перестановке *eacbd* (главная перестановка *abcde*).

eacbd	1 инверсия относительно *a*;
ecbd	2 инверсии относительно *b*;
ecd	1 инверсия относительно *c*;
ed	1 инверсия относительно *d*;

искомое число равно $1+2+1+1=5$; данная перестановка нечетного типа.

Пример 3. Найти число инверсий в перестановке $n(n-1)\ldots 2\ 1$, где n есть натуральное число [главная перестановка $1\ 2\ldots(n-1)\,n$]

$n(n-1)\ldots 2\ 1$	$(n-1)$ инверсий относительно 1;
$n(n-1)\ldots 2$	$(n-2)$ инверсий относительно 2;
. . . .	. . . .
$n(n-1)$	1 инверсия относительно $n-1$;

число инверсий равно: $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{1}{2}n(n-1)$.

Нетрудно видеть, что найденное число представляет наибольшее число инверсий в перестановках из n элементов.

Пример 4. Перестановки из элементов 1, 2, 3 распределить на типы.

Перестановки из данных элементов таковы: 123, 231, 312, 321, 213, 132. В первой из них инверсий нет; во второй и третьей по 2 инверсии, в четвертой 3 инверсии, в пятой и шестой по одной инверсии. Перестановки четного типа суть 123, 231 и 312; перестановки нечетного типа суть 321, 213 и 132.

§ 2. Транспозиции. Взаимное перемещение двух элементов, входящих в данную перестановку, называется транспозицией. Транспозиция есть частный случай операции, которая называется подстановкой и заключается в замене элементов a, b, c, ... соответственно через a', b', c', ... Такая подстановка обозначается символом

$$\begin{pmatrix} a\ b\ c\ \ldots \\ a'b'c'\ \ldots \end{pmatrix}.$$

§ 2. ТРАНСПОЗИЦИИ

Подстановка

$$\begin{pmatrix} abc\ldots kl \\ bc\ \ \ldots la \end{pmatrix},$$

в которой каждый элемент заменяется следующим за ним, а последний первым, называется **круговой** или **циклической**; совокупность элементов ее, взятых в указанном порядке, называется **циклом**. Если n данных элементов поместить в вершинах правильного n-угольника, вписанного в некоторый круг, то указанную круговую подстановку можно осуществить вращением этого многоугольника в определенном направлении на угол $\frac{2\pi}{n}$.

Круговая подстановка обозначается символом $(abc\ldots kl)$.

Транспозиция элементов a и b есть не что иное, как круговая подстановка (ab) с циклом из двух элементов.

Всякую перестановку из произвольного числа элементов можно получить из данной перестановки, совершив ряд круговых подстановок.

Чтобы убедиться в справедливости этого предложения, рассмотрим пример, посредством которого можно перейти от перестановки $abcde$ из 5 элементов к перестановке $cabed$.

Этот переход осуществляется при помощи подстановки:

$$\begin{pmatrix} abcde \\ cabed \end{pmatrix},$$

которую можно заменить двумя подстановками: первая из них заключается в замене a через c, c через b и b через a, т. е. представляет круговую подстановку (acb); вторая заключается в замене d через e и e через d, т. е. представляет круговую подстановку (de). Равносильность рассматриваемой подстановки и двух круговых изображается символическим равенством:

$$\begin{pmatrix} abcde \\ cabed \end{pmatrix} = (acb)(de).$$

Приведем еще два примера подобных преобразований:

1) $\begin{pmatrix} 315642 \\ 426153 \end{pmatrix} = (123456);$

2) $\begin{pmatrix} abcd \\ dacb \end{pmatrix} = (adb)(c)$; подстановка (c) указывает, что элемент c сохраняет свое место при выполнении данной подстановки.

В описанном примере выделения цикла из элементов данной подстановки играет существенную роль возвращение к тому элементу, с которого начинается это выделение. Но это возвращение является необходимостью, так как число элементов, входящих в подстановку, предполагается конечным. Поэтому высказанную теорему нужно считать доказанной для произвольной подстановки с произвольным конечным числом элементов.

Всякую круговую подстановку можно заменить рядом транспозиций.

Действительно,

$$(abc \ldots kl) = (ab)(ac) \ldots (ak)(al).$$

Из двух указанных предложений следует, что переход от данной перестановки к новой можно совершить путем нескольких транспозиций.

Например, чтобы от перестановки 12345 перейти к перестановке 52134, можно сделать ряд следующих транспозиций: (15), (31) и (43). Тот же самый переход можно сделать также рядом других транспозиций, например (14), (45), (31) или (13), (35) и (43).

Одна транспозиция, произведенная в данной перестановке, изменяет (увеличивает или уменьшает) число инверсий в ней на нечетное число и, следовательно, изменяет тип перестановки (§ 1).

Пусть k и l — транспонируемые элементы перестановки. Если они стоят рядом, то перестановку можно представить символом $AklB$, разумея под A группу элементов, предшествующих kl, а под B группу элементов, следующих за ними.

После транспозиции элементов k и l получится перестановка $AlkB$. Рассматривая инверсии, образуемые элементом k с элементами группы A или группы B, легко видеть, что число их одинаково как в перестановке $AklB$, так и в перестановке $AlkB$, так как относительное положение элемента k с каждым из элементов групп A и B не изменилось. То же самое справедливо и относительно элемента l. Изменение в относительном расположении элементов k и l вызывает либо появление инверсии (если kl не содержит инверсии), либо потерю инверсии (если kl содержит инверсию). Следовательно, в этом случае происходит изменение числа инверсий на ± 1, т. е. на нечетное число. Например, в перестановке $cbda$, при нормальном порядке $abcd$, имеются 4 инверсии; в перестановке $cdba$, получившейся из данной через транспозицию элементов b и d, 5 инверсий; в перестановке $cbad$, полученной из первой через транспозицию элементов d и a, 3 инверсии; в первом случае число инверсий увеличилось на 1, а во втором уменьшилось на 1.

Рассмотрим теперь тот случай, когда транспонируемые элементы k и l отделены группой элементов. Перестановку в этом случае можно представить символом $AkBlC$, где A, B и C обозначают соответственно группы элементов, предшествующих k и l, стоящих между ними и следующих за ними. После транспозиции получим перестановку $AlBkC$. Относительное положение элементов k и l и групп A и C одинаково в той и другой перестановке. Поэтому изменений в числе инверсий относительно этих групп при транспозиции k и l не произойдет. Относительное положение элементов группы B с каждым из транспонируемых элементов различно в первой и второй перестановках. Пусть p' и q' суть числа соответственно порядков и инверсий элемента k с элементами групп B, а p'' и q'' — числа соответственно порядков и инверсий элемента l с элементами той же группы B в перестановке $AkBlC$. Легко видеть, что $p' + q' = p'' + q''$.

Для перестановки $AlBkC$ буквы p' и q' будут обозначать соответственно числа инверсий и порядков элемента k с элементами групп B, а p'' и q'' — числа инверсий и порядков элемента l с элементами группы B. Поэтому число инверсий транспонируемых элементов относительно группы B изменится на $p' + p'' - (q' + q'')$.

Кроме того, одна инверсия прибавится или убавится от перемены взаимного положения элементов k и l. Таким образом число инверсий изменится на $(p' + p'') - (q' + q'') \pm 1$.

Но из соотношения $p' + q' = p'' + q''$ следует, что $q'' = p' + q' - p''$.

Поэтому

$$(p' + p'') - (q' + q'') \pm 1 = p' + p'' - q' - p' - q' + \\ + p'' \pm 1 = 2(p'' - q') \pm 1.$$

Так как p'' и q' суть натуральные числа или нули, то число $2(p'' - q') \pm 1$ есть нечетное положительное или отрицательное число. Теорема таким образом доказана.

Пример. Сделав в перестановке 315642, содержащей 7 инверсий, транспозицию элементов 1 и 4, получим перестановку 345612, содержащую 8 инверсий; число инверсий увеличилось на 1. Сделав в перестановке 315642 транспозицию элементов 5 и 2, получим перестановку 312645, содержащую 4 инверсии; число инверсий уменьшилось на 3.

Из доказанной теоремы следует, что **число перестановок четного и нечетного типов из данного числа элементов одинаково.** Действительно, составив все перестановки из данных элементов и сделав в каждой из них одну и ту же транспозицию, мы получим снова все перестановки, но перестановки четного типа перейдут в перестановки нечетного типа, и наоборот.

Например, перестановки из трех элементов 1, 2, 3 суть

$$123,\ 231,\ 312,\ 321,\ 213,\ 132;$$

первые три — четного типа, последние три — нечетного. Сделав в каждой из них транспозицию элементов 1 и 2, получим перестановки: 213, 132, 321, 312, 123, 231, из которых первые три нечетного типа, а последние три — четного.

ГЛАВА II.

ДЕТЕРМИНАНТЫ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ.

§ 3. Детерминант 2-го порядка. При решении системы n линейных уравнений с n неизвестными выражениями неизвестных представляются в форме дробей, числители и знаменатели которых являются некоторыми целыми и рациональными функциями коэфициентов данной системы уравнений. Эти функции получили название **детерминантов или определителей.**

Рассмотрим сначала систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Коэфициенты написанных уравнений обозначены буквой a с двумя индексами, из которых первый указывает номер уравнения, в которое входит коэфициент, а второй— номер неизвестного, при котором он стоит. Члены, не содержащие неизвестных, обозначаются буквой b с индексами, указывающими номер уравнения системы. Решение системы (1) представляется формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Знаменатель этих двух дробей один и тот же. Он составлен из коэфициентов при неизвестных. Способ составления можно представить в следующем виде: расположим коэфициенты a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} в таблицу

$$\begin{matrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{matrix},$$

имеющую форму квадрата; составим произведения коэфициентов, расположенных по одной и той же диагонали, т. е. $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$, и возьмем алгебраическую сумму этих произведений, приписав первому из них знак $+$, а второму $-$. Полученное выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется детерминантом или определителем из четырех элементов a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}.

Элементы a_{11} и a_{12}, a_{21} и a_{22} представляют строки или горизонтальные ряды детерминанта, а элементы a_{11} и a_{21}, a_{12} и a_{22}—столбцы или вертикальные ряды детерминанта. Диагональ квадрата, на которой расположены элементы a_{11} и a_{22}, называется главной, а диагональ, на которой лежат элементы a_{12} и a_{21}, называется побочной. Число строк и столбцов детерминанта одинаково, равно 2 и называется порядком детерминанта. Рассматриваемый детерминант 2-го порядка обозначается знаком:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что числители вторых частей формул (2) получаются из этого детерминанта через замену в первой формуле элементов первого столбца, а во второй элементов второго столбца соответственно через b_1 и b_2, так что формулы (2) могут быть представлены в следующем виде:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Пример 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 2\cdot 3 = 1.$

Пример 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = 1\cdot b - 1\cdot a = b - a.$

Пример 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 2 = 0.$

Пример 4. Для системы $3x_1 + 4x_2 = 10$, $7x_1 - 8x_2 = 6$ находим следующие значения x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-104}{-52} = 2; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-52}{-52} = 1.$$

§ 4. Детерминант 3-го порядка. Определение детерминанта 3-го порядка можно получить из рассмотрения решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Пусть дана система трех линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3. Для обозначения постоянных, входящих в уравнения, удержан способ § 3.

Нетрудно убедиться, что, умножив первое, второе и третье уравнения соответственно на

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32}, \quad a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$$

и сложив результаты, мы получим уравнение, в которое входит только одно неизвестное, а именно x_1.

Точно так же сложение первого, второго и третьего уравнений, умноженных соответственно на

$$-a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31}, \quad a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}, \quad -a_{11}a_{23}+a_{13}a_{21},$$

приводит к уравнению, содержащему только x_2, а сложение первого, второго и третьего уравнений, умноженных соответственно на

$$a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}, \quad -a_{11}a_{32}+a_{12}a_{31}, \quad a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

приводит к уравнению, содержащему только x_3.

Решая каждое из этих уравнений с одним неизвестным, получим решение системы (3) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}b_3-a_{12}b_2a_{33}+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}},\\
x_2 &= \frac{a_{11}b_2a_{33}-a_{11}a_{23}b_3+b_1a_{23}a_{31}-b_1a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}},\\
x_3 &= \frac{a_{11}a_{22}b_3-a_{11}b_2a_{32}+a_{12}b_2a_{31}-a_{12}a_{21}b_3+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

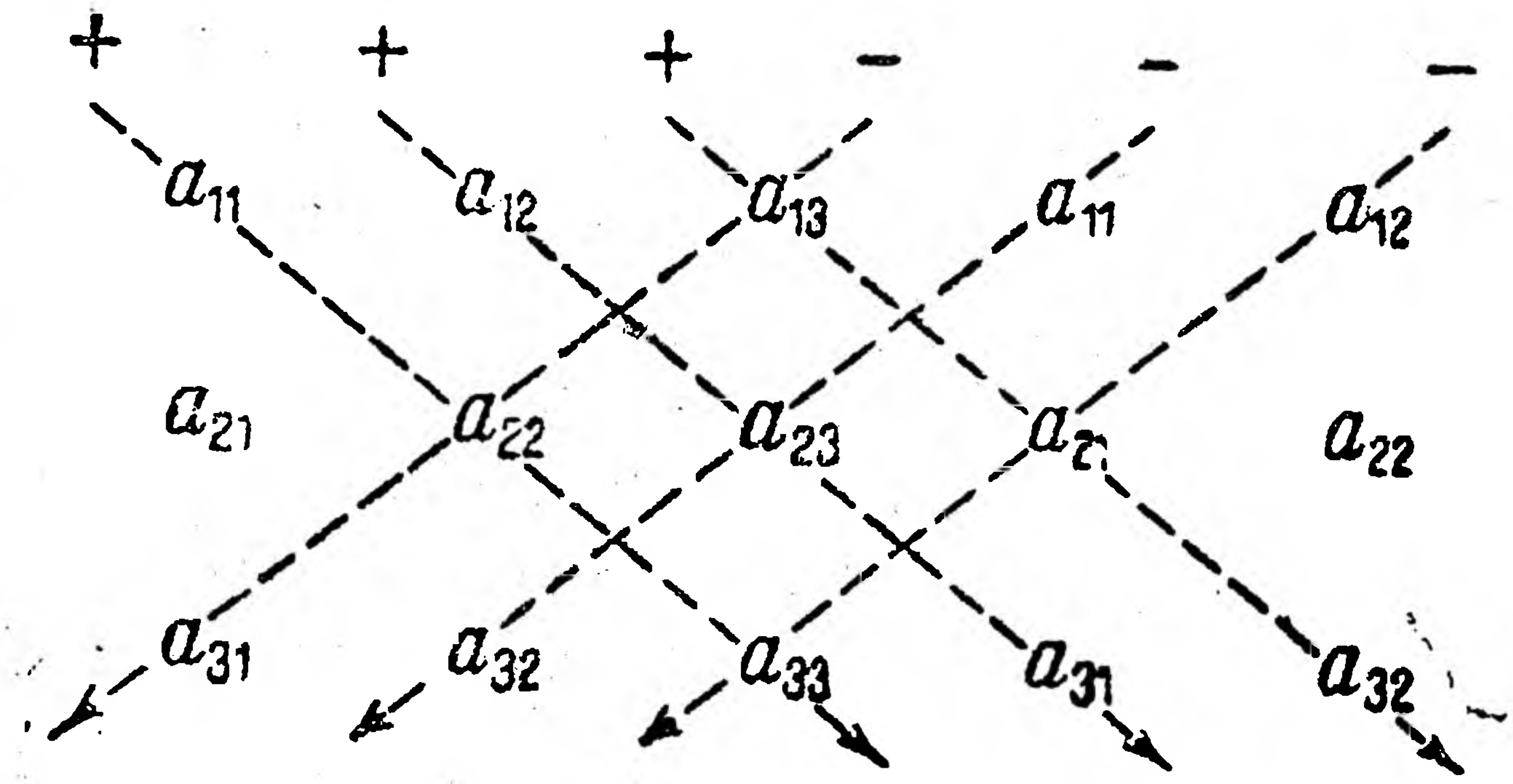
Знаменатель дробей, стоящих во вторых частях этих формул, называется **детерминантом** или **определителем 3-го порядка** и обозначается символом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В него входят 9 элементов, распределяющихся в строки и столбцы. Номер строки, в которой находится элемент, указывается первым индексом буквы a, а номер столбца—вторым. Например, элемент a_{23} находится во второй строке и третьем столбце. Элементы a_{11}, a_{22} и a_{33} расположены по **главной** диагонали, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31}—по **побочной**.

Для составления детерминанта 3-го порядка Саррюс (Sarrus) указал простой прием, известный под названием **правила Саррюса**. Он состоит в следующем. Написав данные 9 элементов в том порядке, в каком они расположены в детерминанте, припишем справа два первых столбца и отметим направления главной и побочной диагонали. Получим следующую схему:

Составим затем произведения трех элементов главной диагонали и каждых трех, расположенных параллельно ей; то же



самое сделаем с элементами, расположенными по побочной диагонали и параллельно ей. Получим шесть произведений:

$$a_{11}a_{22}a_{33}, \quad a_{12}a_{23}a_{31}, \quad a_{13}a_{21}a_{32};$$
$$a_{13}a_{22}a_{31}, \quad a_{11}a_{23}a_{32}, \quad a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Наконец, составим алгебраическую сумму этих произведений, приписав первым трем произведениям знак $+$, а последним трем знак $-$.

Эта сумма есть детерминант в раскрытом виде, так что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Нетрудно видеть, что числители дробей, находящихся во вторых частях формул (4), суть не что иное, как следующие детерминанты 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot4 + 2\cdot6\cdot2 + 3\cdot4\cdot3 - 3\cdot5\cdot2 - 1\cdot6\cdot3 - 2\cdot4\cdot4 = \\ = 20 + 24 + 36 - 30 - 18 - 32 = 0.$

Пример 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 1\cdot a\cdot b^2 + 1\cdot b\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot a^2 - 1\cdot a\cdot 1 - 1\cdot b\cdot a^2 - \\ - 1\cdot 1\cdot b^2 = ab^2 - a^2b + a^2 - b^2 - a + b = \\ = (b-a)(ab-b-a+1) = (b-a)(b-1)(a-1).$

Пример 3. Решение системы уравнений

$$x + y + z = 3, \quad x - y + 3z = 7, \quad 2x + 3y - z = 0$$

дается формулами:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}.$$

Вычисляя детерминанты, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1)(-1) + 1\cdot3\cdot2 + 1\cdot1\cdot3 - 1(-1)2 - 1\cdot3\cdot3 - 1\cdot1(-1) = 1 + 6 + 3 + 2 - 9 + 1 = 4;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1)(-1) + 1\cdot3\cdot0 + 1\cdot7\cdot3 - 1(-1)0 - 3\cdot3\cdot3 - 1\cdot7\cdot(-1) = 3 + 21 - 27 + 7 = 4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot7\cdot(-1) + 3\cdot3\cdot2 + 1\cdot1\cdot0 - 1\cdot7\cdot2 - 1\cdot3\cdot0 - 3\cdot1\cdot(-1) = -7 + 18 - 14 + 3 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot0 + 1\cdot7\cdot2 + 3\cdot1\cdot3 - 3\cdot(-1)\cdot2 - 1\cdot7\cdot3 - 1\cdot1\cdot0 = 14 + 9 + 6 - 21 = 8.$$

Отсюда находим: $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$.

§ 5. Закон составления детерминантов 2-го и 3-го порядков. Для выяснения закона, по которому составлены детерминанты 2-го и 3-го порядков, рассмотрим подробнее то выражение из 9 элементов, которому в § 4 дано название детерминанта 3-го порядка.

По определению (§ 4) имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Члены многочлена, стоящего во второй части этого равенства, называются *членами детерминанта*.

Рассматривая индексы элементов, входящих в состав *члена детерминанта*, мы видим, что в каждом члене первые индексы различны между собою и расположены в натуральном порядке (123); вторые индексы в каждом члене также различны между собою, но порядок их различен во всех членах детерминанта: 123, 231, 312, 321, 213, 132. Соединения вторых индексов представляют все возможные **перестановки** из 3 элементов. Число их равно $1\cdot 2\cdot 3=6$.

Перестановки 123, 231, 312 — четного типа, а перестановки 321, 213 и 132 — нечетного типа (§ 1); те произведения элементов детерминанта, в которых при приведении первых индексов в нормальный порядок вторые образуют перестановку четного типа, входят в состав детерминанта со знаком $+$, а те произведения элементов, в которых по приведении первых индексов в нормальный порядок вторые индексы образуют перестановку нечетного типа, входят в состав детерминанта со знаком $-$.

Из сказанного вытекают следующие заключения о законе составления детерминанта 3-го порядка:

1) число членов детерминанта равно числу перестановок из 3 различных элементов;

2) каждый член детерминанта, независимо от его знака, представляет произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца;

3) знак каждого члена детерминанта определяется типом перестановки, образуемой вторыми индексами, причем множители произведения написаны так, что их первые индексы расположены в нормальном порядке; перестановкам четного типа соответствует знак $+$, а перестановкам нечетного типа соответствует знак $-$. Рассматривая выражение из 4 элементов, названное в § 3 детерминантом 2-го порядка, легко убедиться, что указанный выше закон имеет место и при составлении детерминанта 2-го порядка.

§ 6. Некоторые свойства детерминантов 2-го и 3-го порядков. 1) Сравним два детерминанта 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

отличающиеся только тем, что строки первого из них являются соответственными столбцами второго, и наоборот. Раскрывая каждый из них (§ 3), находим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

т. е. рассматриваемые детерминанты равны.

Сравним два детерминанта 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

отличающиеся друг от друга только тем, что строки первого являются соответственными столбцами второго и наоборот. Раскрывая тот и другой (§ 4), находим для них соответственно следующие выражения:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Эти выражения тождественны; следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Обнаруженное свойство детерминантов 2-го и 3-го порядков заключается в равноправности строк и столбцов детерминанта.

2) Рассмотрим детерминанты

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

в которых элементы двух столбцов одинаковы. Раскрывая их, получим:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_2b_3 + b_1b_2a_3 + b_1a_2b_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 = 0.$$

Из этого мы заключаем, что детерминант 2-го или 3-го порядка обращается в нуль, если два его столбца одинаковы. А так как, по-предыдущему, строки и столбцы детерминанта равноправны, то детерминанты 2-го или 3-го порядка, имеющие две одинаковых строки, равны нулю.

3) Рассмотрим два детерминанта 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix},$$

из которых второй получился из первого взаимной перестановкой двух столбцов. Первый из них равен $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, а второй равен $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$, так что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Сравнивая детерминанты 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

и

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{33},$$

находим, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Из этого вытекает заключение, что детерминанты 2-го и 3-го порядков изменяют знак при взаимной перестановке двух столбцов, а следовательно, и при взаимной перестановке двух строк.

4) Рассмотрим детерминанты

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Первый из них равен $ka_1b_2 - b_1ka_2 = k(a_1b_2 - a_2b_1)$; второй равен $ka_1b_2c_3 + b_1c_2ka_3 + c_1ka_2b_3 - c_1b_2ka_3 - ka_1c_2b_3 - b_1ka_2c_3 = k(a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3)$. Из этого следует, что

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство детерминантов 2-го и 3-го порядков, выражаемое этими равенствами, можно формулировать следующим образом: **умножение элементов столбца (строки) детерминанта на некоторое число равносильно умножению детерминанта на это число.**

На основании этого свойства можно выносить за знак детерминанта общие множители элементов столбца или строки.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & a^2 & ab \\ b & ab & b^2 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a & b \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 0.$$

ГЛАВА III.

ДЕТЕРМИНАНТ n-го ПОРЯДКА.

§ 7. Детерминант n-го порядка. Детерминанты 2-го и 3-го порядков содержат, как мы видели в предыдущей главе, соответственно 4 и 9 элементов. Детерминант n-го порядка содержит n^2 элементов. Обозначим их через a_{ik}, где i и k принимают значения $1, 2, 3, \ldots, n$, и расположим их в следующей квадратной таблице:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

Составим из этих элементов все возможные произведения по n множителей в каждом, взяв по одному элементу из каждой строки и столбца этой таблицы. Расположив множители каждого произведения так, чтобы первые индексы буквы a шли в нормальном порядке, мы получим произведения вида: $a_{1\alpha}a_{2\beta}, \ldots, a_{n\nu}$, где $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ суть числа $1, 2, \ldots, n$, расположенные в каком-нибудь порядке.

Таких произведений можно составить столько, сколько можно сделать перестановок из n элементов, т. е. $n! = 1, 2, \ldots, n$. Составим, наконец, алгебраическую сумму всех этих произведений, приписав каждому из них знак $+$ или знак $-$, смотря по тому, представляет ли перестановка $\alpha\beta \ldots \nu$, образованная вторыми индексами, перестановку четного или нечетного типа (§ 1).

Полученная сумма называется детерминантом n-го порядка.

n^2 элементов, из которых образован детерминант, называются его элементами, а члены указанной выше алгебраической суммы — членами детерминанта.

Элементы детерминанта расположены в строках и столбцах. В общем обозначении номера строк и столбцов указываются соответственно первым и вторым индексами при букве, которой обозначены элементы.

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ суть элементы первой или главной диагонали, $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n1}$ — элементы второй или побочной диагонали.

Детерминант n-го порядка обозначается символом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

этот символ заменяют иногда следующим, более коротким:

$$|a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Кроме этих символов, употребляется еще символ

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn},$$

в котором $\sum$ обозначает суммирование, а под знаком $\sum$ стоит так называемый главный член детерминанта, дающий через перестановки вторых индексов все остальные члены его; знак $\pm$ напоминает о необходимости приписать тот или другой знак произведению n элементов детерминанта.

§ 8. Равноправность строк и столбцов детерминанта. Сравним два детерминанта:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

отличающиеся только тем, что строки первого служат столбцами второго, и наоборот.

Один из членов первого детерминанта есть

$$(-1)^i a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\nu},$$

где i обозначает число инверсий в перестановке $\alpha\beta \ldots \nu$ (§ 7, 1). Так как произведение $a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\nu}$, содержит n множителей по одному из каждой строки и каждого столбца детерминанта D', то в состав этого последнего входит член

$$\pm a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\nu}.$$

Чтобы определить его знак, достаточно расположить его множители так, чтобы индексы его строк шли в нормальном порядке, и определить тип перестановки из индексов, соответствующих столбцам (§ 7). Но в детерминанте D' индексами строк являются вторые индексы, которые и нужно расположить в нормальном порядке. Сделав это, получим рассматриваемый член детерминанта D' в виде: $\pm a_{\alpha' 1} a_{\beta' 2} \ldots a_{\nu' n}$. Знак его определяется типом перестановки $\alpha' \beta' \ldots \nu'$ или числом инверсий в ней. Пусть это число равно i'. Тогда этот член представится произведением

$$(-1)^{i'} a_{\alpha' 1} a_{\beta' 2} \ldots a_{\nu' n}.$$

Докажем, что числа i и i' или оба четные, или оба нечетные и что, следовательно, $(-1)^i = (-1)^{i'}$.

Перестановка $\alpha' \beta' \ldots \nu'$ получается из перестановки $12 \ldots n$ посредством некоторого числа транспозиций (§ 2). Но при транспозиции элементов детерминанта происходит транспозиция не только первых индексов, но и вторых. Первоначальное расположение вторых индексов было $\alpha\beta \ldots \nu$ и содержало, по предположению, i инверсий, а последнее представляет нормальный порядок, т. е. инверсий не содержит. Произошло уменьшение числа инверсий на i. Так как каждая транспозиция изменяет число инверсий на нечетное число, то при i четном число транспозиций четно, а при i нечетном оно нечетно. Переходя от транспозиций вторых индексов к транспозициям первых и обращая внимание на то, что число тех и других одно и то же, заключаем, что i' четно или нечетно в зависимости от того, четно или нечетно число i. Поэтому $(-1)^i = (-1)^{i'}$.

Итак, каждый член детерминанта D есть вместе с тем и член детерминанта D', а так как число членов в том и другом одинаково (§ 7), то $D = D'$, т. е. **детерминант не изменяется от замены строк соответственными столбцами, и наоборот.**

§ 9. Перестановка двух параллельных рядов детерминанта. Положим, что в детерминанте

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\lambda} & \ldots & a_{1\mu} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\lambda} & \ldots & a_{2\mu} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\lambda} & \ldots & a_{n\mu} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

переставлены столбцы с номерами λ и μ. Сравним полученный таким образом детерминант

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\mu} & \ldots & a_{1\lambda} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\mu} & \ldots & a_{2\lambda} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\mu} & \ldots & a_{n\lambda} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

с детерминантом D. Один из членов детерминанта D есть $(-1)^i a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{l\lambda} \ldots a_{m\mu} \ldots a_{n\nu}$, где i есть число инверсий в перестановке $\alpha\beta \ldots \lambda \ldots \mu \ldots \nu$. Так как элементы детерминантов D и D' одинаковы, то произведение $a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots$ $\ldots a_{l\lambda} \ldots a_{m\mu} \ldots a_{n\nu}$ входит в состав одного из членов детерминанта D'. Знак этого члена определяется числом инверсий в перестановке $\alpha\beta \ldots \mu \ldots \lambda \ldots \nu$, потому что элемент $a_{l\lambda}$ в детерминанте D' стоит в строке l и столбце μ, а элемент $a_{m\mu}$ детерминанта D' находится в строке m и столбце λ. Но перестановки $\alpha\beta \ldots \lambda \ldots \mu \ldots \nu$ и $\alpha\beta \ldots$ $\ldots \mu \ldots \lambda \ldots \nu$ получаются одна из другой посредством транспозиции элементов λ и μ и, следовательно, принадлежат к разным типам (§ 2). Поэтому члены детерминанта D' получаются из членов детерминанта D лишь переменою их знака; следовательно, $D = -D'$, т. е. перестановка двух столбцов детерминанта не изменяет его абсолютного значения и изменяет его знак.

Принимая во внимание равноправность строк и столбцов детерминанта, можно формулировать это свойство детерминанта следующим образом:

Перестановка двух параллельных рядов детерминанта изменяет его знак, не изменяя абсолютного значения.

Укажем некоторые следствия этого предложения.

Следствие 1. Детерминант, в котором элементы двух параллельных рядов одинаковы, равен нулю.

Пусть D есть детерминант, содержащий два одинаковых параллельных ряда. Переставив их, мы получим, по доказанному, детерминант $-D$. Но, с другой стороны, перестановка двух одинаковых параллельных рядов, очевидно, не изменяет детерминанта. Следовательно, $D=-D$, откуда находим, что $D=0$.

Следствие 2. Если в каком-нибудь детерминанте D переставим взаимно k пар столбцов и k' пар строк, то получим детерминант, равный $(-1)^{k+k'}D$.

Следствие 3. Если в детерминанте D n-го порядка сделаем круговую перестановку столбцов или строк, то получим детерминант $(-1)^{n-1}D$.

Например,

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & a_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & a_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

§ 10. Умножение детерминанта на число. Если все элементы одного ряда детерминанта умножим на некоторое число, то получим новый детерминант, равный данному, умноженному на это число.

Действительно, каждый член детерминанта содержит множителем один элемент каждого ряда; умножая каждый элемент некоторого ряда на какое-нибудь число, мы вводим это число множителем во все члены детерминанта, т. е. умножаем данный детерминант на это число.

Следствие 1. Можно вынести за знак детерминанта множитель, общий всем членам строки или столбца детерминанта.

Следствие 2. Детерминант, в котором соответственные элементы двух параллельных рядов пропорциональны, равен нулю.

Пусть имеем детерминант

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nm} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором элементы m-го столбца пропорциональны элементам l-го столбца, т. е.

$$a_{1m} = pa_{1l}; \quad a_{2m} = pa_{2l}; \quad \dots ; \quad a_{nm} = pa_{nl},$$

где p есть коэфициент пропорциональности.

По следствию 1 теоремы настоящего параграфа и следствию 1 теоремы § 9 имеем:

$$D = p \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

§ 11. Детерминанты, в которых элементы ряда представляют суммы. Рассмотрим детерминант

$$D = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} + a''_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором элементы первого столбца представляют суммы двух слагаемых.

В каждый член детерминанта входит множителем один элемент первого столбца, а так как он представляет сумму двух слагаемых, то каждый член детерминанта можно разложить на два слагаемых вида $\pm a'_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\nu}$ и $\pm a''_{1\alpha} a_{2\beta} \dots \dots a_{n\nu}$, причем знак слагаемого определяется типом перестановки $\alpha\beta \ldots \nu$. Но сумма членов вида $\pm a'_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\nu}$ есть не что иное, как детерминант

$$D' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а сумма членов вида $\pm a''_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\nu}$ — детерминант

$$D'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a''_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a''_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $D = D' + D''$.

Указанное свойство детерминантов можно формулировать следующим образом: разлагая каждый элемент одного ряда детерминанта на p слагаемых, можно самый детерминант представить в виде суммы p детерминантов, отличающихся только элементами одного ряда.

Следствие. Детерминант не изменяется, если к элементам одного ряда прибавим соответственные элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.

Действительно, по доказанной теореме,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1i} + pa_{1k} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2i} + pa_{2k} \ldots a_{2k} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{ni} + pa_{nk} \ldots a_{nk} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1i} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2i} \ldots a_{2k} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{ni} \ldots a_{nk} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ p \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1k} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2k} \ldots a_{2k} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nk} \ldots a_{nk} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Но второй детерминант второй части равенства равен нулю (§ 9); следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1i} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2i} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{ni} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1i} + pa_{1k} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2i} + pa_{2k} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{ni} + pa_{nk} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

§ 12. Разложение детерминанта по элементам ряда. Адъюнкта. Детерминант D n-го порядка, образованный из элементов $a_{ik}(i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$, представляет, по определению (§ 7), сумму членов вида $\pm a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\nu}$, где вторые индексы все между собою различны и принимают значения $1,\ 2,\ \dots,\ n$. Собирая те члены детерминанта, которые содержат первый, второй и т. д. элементы первой строки, можно представить D в следующем виде:

$$D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}.$$

Эта форма дает *разложение детерминанта по элементам первой строки.*

Каждый член второй части представляет произведение элемента первой строки на некоторый множитель, называемый *адъюнктой* этого элемента.

С целью выяснить состав адъюнкты, рассмотрим первый член второй части написанной формулы, т. е. $a_{11} A_{11}$. Так как $D = \sum \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu}$, то для получения $a_{11} A_{11}$ нужно из второй части взять те члены, для которых $\alpha = 1$. Сделав это, найдем, что $a_{11} A_{11} = \sum \pm a_{11} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu}$ или $A_{11} = \sum \pm a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu} (\beta,\ \gamma,\ \dots,\ \nu = 2,\ \dots,\ n)$.

Группы вторых индексов элементов, входящих множителями в члены суммы A_{11}, представляют не что иное, как все перестановки из $n-1$ элементов: $2,\ 3,\ \dots,\ n$. Знак каждого члена суммы A_{11} определяется типом перестановки $1\beta\gamma \dots \nu$ или числом инверсий в ней; но число инверсий в этой перестановке равно числу инверсий в перестановке $\beta\gamma \dots \nu$, так как элемент 1 не составляет инверсии ни с одним из последующих элементов. Поэтому знак члена суммы A_{11} определяется типом перестановки из $n-1$ элементов $2,\ 3,\ \dots,\ n$. Из этого следует (§ 7), что A_{11} есть детерминант $n-1$ порядка. Элементы этого детерминанта суть a_{ik}, где $i,\ k = 2,\ 3,\ \dots,\ n$; они располагаются в строки и столбцы так же, как в детерминанте D.

Чтобы получить детерминант A_{11}, достаточно вычеркнуть в детерминанте D первую строку и первый столбец и из остальных элементов составить детерминант, сохраняя расположение элементов, так что

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для определения адъюнкты A_{1k} преобразуем детерминант D так, чтобы элемент a_{1k} занимал первое место в первой строке детерминанта D, а элементы всех строк, кроме первой, и всех столбцов, кроме первого, сохранили свое относительное расположение. Для этого достаточно постепенно передвигать k-й столбец влево на один столбец до тех пор, пока он не сделается первым. Принимая во внимание, что перестановка двух столбцов детерминанта изменяет его знак (§ 9), получим:

$$D = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,k-1} & a_{1,\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,k-1} & a_{2,\,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nk} & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,\,k-1} & a_{n,\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Адъюнкта элемента a_{1k} детерминанта, стоящего во второй части этого тождества, представляется по-предыдущему детерминантом:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,k-1} & a_{2,\,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3,\,k-1} & a_{3,\,k+1} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,\,k-1} & a_{n,\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Но из последнего тождества видно, что адъюнкта того же элемента a_{1k} детерминанта D отличается от написанного детерминанта только множителем $(-1)^{k-1}$.

Заменив этот множитель равным ему множителем $(-1)^{k+1}$, получим:

$$A_{1k} = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Детерминант, стоящий во второй части этого равенства, получается из детерминанта D вычеркиванием первой строки и k-го столбца, т. е. тех двух рядов детерминанта, на пересечении которых стоит элемент a_{1k}.

Множитель $(-1)^{k+1}$ есть степень -1, показатель которой равен сумме индексов элемента a_{1k}.

Если в детерминанте D собрать те члены, которые содержат первый, второй и т. д. элементы i-й строки, то получим формулу:

$$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{ik} A_{ik} + \ldots + a_{in} A_{in},$$

представляющую разложение детерминанта D по элементам i-й строки. A_{ik} называется адъюнктой элемента a_{ik}. Преобразовав детерминант D так, чтобы элемент a_{ik} был первым в первой строке, а остальные элементы сохранили свое относительное расположение, получим (§ 9):

$$D = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \ldots & a_{in} \\ a_{1k} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nk} & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Отсюда, повторяя приведенные выше рассуждения, легко найти выражение адъюнкты A_{ik} элемента a_{ik} в форме детерминанта $(n-1)$-го порядка:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Детерминант, стоящий в правой части этого равенства, получается из детерминанта D, если в последнем вычеркнем i-ю строку и k-й столбец, т. е. те два ряда, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}, и из оставшихся $(n-1)^2$ элементов, не изменяя их относительного расположения, составим детерминант. Для получения адъюнкты элемента a_{ik} этот детерминант умножается на степень -1 с показателем, равным сумме указателей строки и столбца, в которых находится элемент a_{ik}.

Так как строки и столбцы детерминанта равноправны, то приведенные в этом параграфе рассуждения и заключения относятся и к разложению детерминанта по элементам столбца.

Все сказанное о разложении детерминанта по элементам строки или столбца можно резюмировать следующим образом: если $D = |a_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots + a_{in}A_{in}, \qquad \text{(I)}$$

$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots + a_{nk}A_{nk}, \qquad \text{(II)}$$

причем

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \ldots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \ldots a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad \text{(III)}$$

§ 13. Некоторые следствия формул (I), (II) и (III).

1) Заменив во второй части формулы (I) элементы i-й строки соответственными элементами s-й $(s \neq i)$ строки, получим сумму, равную нулю, так что

$$a_{s1}A_{i1} + a_{s2}A_{i2} + \ldots + a_{sk}A_{ik} + \ldots + a_{sn}A_{in} = 0 \quad (i \neq s).$$

Это следует из того, что указанная сумма есть не что иное, как разложение детерминанта, в котором i-я и s-я строки одинаковы (§ 9).

Точно так же получаем тождество:

$$a_{1s}A_{1k} + a_{2s}A_{2k} + \ldots + a_{is}A_{ik} + \ldots + a_{ns}A_{nk} = 0 \quad (k \neq s).$$

2) Детерминант, в котором все элементы строки или столбца, за исключением одного, равны нулю, равен произведению элемента, не равного нулю, на его адъюнкту.

Действительно, если $a_{i1} = a_{i2} = \ldots = a_{i,k-1} = a_{i,k+1} = \ldots$ $\ldots = 0$ и $a_{ik} \neq 0$, то по по формуле (I) имеем равенство:

$$D = a_{ik}A_{ik}.$$

Предположение, что все элементы k-го столбца, кроме a_{ik}, равны нулю, приводит к этому же равенству [см. формулу (II)].

Из этого предложения следует, что адъюнкту A_{ik} элемента a_{ik} можно представить в форме детерминанта n-го порядка. Для этого достаточно в детерминанте D вместо a_{ik} поставить 1, а все остальные элементы i-й строки или k-го столбца заменить нулями. Таким образом получим следующее выражение адъюнкты A_{ik}:

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \ldots a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \ldots a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Действительно, разложение детерминанта, стоящего в правой части этого равенства, по элементам i-й строки приводит к равенству (III).

3) Если все элементы детерминанта, находящиеся по одну сторону главной диагонали, равны нулю, то детерминант равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n3} & a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}.$$

§ 14. Свойство адъюнкт элементов детерминанта, равного нулю. Если детерминант $D = |a_{ik}|$ $(i,\ k = 1,\ 2, \ldots, n)$ равен нулю, то адъюнкты соответственных элементов двух параллельных рядов пропорциональны.

Дано $D = |a_{ik}| = 0$; требуется доказать, что

$$\frac{A_{i1}}{A_{s1}} = \frac{A_{i2}}{A_{s2}} = \ldots = \frac{A_{in}}{A_{sn}}, \tag{α}$$

где $i,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и

$$\frac{A_{1k}}{A_{1s}} = \frac{A_{2k}}{A_{2s}} = \ldots = , \tag{β}$$

где $k,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Для доказательства этого предложения возьмем адъюнкту A_{i1} элемента a_{i1} в форме детерминанта n-го порядка (§ 13);

$$A_{i1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,k} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 1 & 0 & & 0 & & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,k} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Умножив k-й столбец написанного детерминанта на адъюнкту A_{sk} элемента a_{sk}, мы получим выражение произведения $A_{i1}A_{sk}$ в форме детерминанта:

$$A_{i1}A_{sk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k}A_{sk} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k}A_{sk} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,k}A_{sk} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 1 & 0 & & 0 & & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,k}A_{sk} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk}A_{sk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Преобразуем детерминант, стоящий во второй части этого равенства следующим образом: к элементам k-го столбца прибавим элементы первого столбца, умноженные на A_{s1}, элементы второго столбца, умноженные на $A_{s2}, \ldots$, и элементы n-го столбца, на A_{sn}. В полученном таким образом детерминанте i-й элемент k-го столбца равен A_{s1}, а все остальные элементы этого столбца представляются суммами вида:

$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \ldots + a_{rn}A_{sn},$$

где

$$r = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n.$$

Для $r \neq s$ эти суммы равны нулю (§ 13), а для $r = s$ сумма равна детерминанту D, который, по условию, также равен нулю. Следовательно,

$$A_{i1}A_{sk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & 0 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & 0 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,k-1} & 0 & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & A_{s1} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,k-1} & 0 & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая написанный детерминант по элементам k-го столбца, получим:

$$A_{i1}A_{sk} = A_{s1}A_{ik}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{A_{i1}}{A_{s1}} = \frac{A_{ik}}{A_{sk}}.$$

Полагая в этой формуле $k = 2, 3, \ldots, n$, получим равенства (α). Для получения равенства (β) достаточно заметить, что строки и столбцы детерминанта равноправны.

§ 15. Вычисление детерминантов. Число членов детерминанта n-го порядка равно произведению $1 \cdot 2 \ldots n$ (§ 7). При возрастании числа n это произведение возрастает весьма быстро. Для $n = 2, 3, 4, 5$ оно равно соответственно 2, 6, 24, 120. При вычислении детерминанта 4-го порядка путем составления каждого его члена пришлось бы иметь дело с 24 членами, а при вычислении детерминанта 5-го порядка —

с 120 членами. Эта утомительная работа сокращается, если воспользоваться элементарными свойствами детерминантов, указанными в § 9—13.

Для ознакомления с приемами упрощений приведем несколько примеров на вычисление детерминантов.

Пример 1. Требуется вычислить детерминант

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 5 & 8 & 11 & 16 & 16 \\ 8 & 18 & 27 & 49 & 41 \\ 1 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь следствием теоремы § 11, можно заменить данный детерминант таким, в котором все элементы первой строки, кроме первого, суть нули. Для этого из элементов второго столбца вычтем соответственные элементы первого, умноженные на 2, а из элементов 3-го, 4-го и 5-го столбцов вычтем элементы первого столбца, умноженные соответственно на 3, 4 и 5. Получим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 5 & -2 & -4 & -4 & -9 \\ 8 & 2 & 3 & 17 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот детерминант по элементам первой строки, находим (§ 13, следствие 2):

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & -4 & -9 \\ 2 & 3 & 17 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix},$$

или (§ 10)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 17 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Преобразуя последний детерминант тем же способом, которым был преобразован данный, получим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 11 & -7 \\ 5 & -4 & -8 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 11 & -7 \\ -4 & -8 & -12 \end{vmatrix}.$$

Так как элементы последней строки имеют общий множитель —4, то (§ 10)

$$D = -4\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 11 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавив к элементам второй строки соответственные элементы третьей, найдем, что

$$D = -4\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложение по элементам первого столбца приводит к равенству

$$D = -4 \cdot (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 13 & -4 \end{vmatrix},$$

из которого находим, что $D = -4 \cdot (8 - 13) = 20$.

Пример 2. Вычислить детерминант:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

Вычитая элементы каждой строки из элементов следующей, находим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот детерминант по элементам первого столбца, получим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}.$$

Вычитая элементы каждой строки из элементов следующей и разлагая полученный таким образом детерминант по элементам первого столбца, найдем, что

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1.$$

Пример 3. Вычислить детерминант:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}.$$

Вычитая элементы первой строки из элементов последней и элементы третьей из элементов второй, получим:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 12 & -12 & -12 & 12 \end{vmatrix} = 4\cdot 12\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 4. В детерминанте:

$$D=\begin{vmatrix} 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{vmatrix}$$

сумма элементов каждой строки и сумма элементов каждого столбца равны 65. Прибавив к элементам первой строки соответственные элементы всех остальных строк, мы получим детерминант, в котором все элементы первой строки равны 65. Дальнейшие упрощения легко усмотреть из следующих преобразований:

$$D=\begin{vmatrix} 65 & 65 & 65 & 65 & 65 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{vmatrix} = 65\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$=65\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 13 & -17 & 8 \\ 23 & -17 & 13 & -17 & 13 \\ 17 & -12 & 8 & 8 & -12 \\ 11 & 13 & -17 & 13 & -17 \end{vmatrix} = 65\begin{vmatrix} 8 & 13 & -17 & 8 \\ -17 & 13 & -17 & 13 \\ -12 & 8 & 8 & -12 \\ 13 & -17 & 13 & -17 \end{vmatrix} =$$

$$=65\begin{vmatrix} 0 & 30 & -9 & 8 \\ -30 & 30 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 30 & -30 & -4 & -17 \end{vmatrix} = -65\cdot 30\cdot 30\cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 & 8 \\ -1 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 & -17 \end{vmatrix} =$$

$$=-65\cdot 3600\begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 & -17 \end{vmatrix} = +65\cdot 3600\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = +65\cdot 3600\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$=-65\cdot 3600\cdot 20=-4\,680\,000.$$

Пример 5.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ b+a+d+c & a & d & c \\ c+d+a+b & d & a & b \\ d+c+b+a & c & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-a & a-d & b-c \\ 0 & c-d & b-a & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-a & a-d & b-c \\ c-d & b-a & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & 0 & c-d \\ d-a & a-d+b-c & b-c \\ c-d & 0 & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)(a+b-c-d)\begin{vmatrix} a-b & c-d \\ c-d & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)(a+b-c-d)\,[(a-b)^2-(c-d)^2] =$$

$$= (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

Пример 6.

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma.$$

Пример 7.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3-x_1^2 & x_4^2-x_1^2 \\ x_1^3 & x_2^3-x_1^3 & x_3^3-x_1^3 & x_4^3-x_1^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 & x_4^2-x_1^2 \\ x_2^3-x_1^3 & x_3^3-x_1^3 & x_4^3-x_1^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2+x_1 & x_3+x_1 & x_4+x_1 \\ x_2^2+x_2x_1+x_1^2, & x_3^2+x_3x_1+x_1^2, & x_4^2+x_4x_1+x_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2+x_1 & x_3-x_2 & x_4-x_2 \\ x_2^2+x_2x_1+x_1^2, & x_3^2-x_2^2+x_1(x_3-x_2), & x_4^2-x_2^2+x_1(x_4-x_2) \end{vmatrix} =$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix} x_3-x_2 & x_4-x_2 \\ (x_3-x_2)(x_3+x_2+x_1), & (x_4-x_2)(x_4+x_2+x_1) \end{vmatrix} =$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_3+x_2+x_1, & x_4+x_2+x_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3).$$

Укажем еще другой способ вычисления детерминанта D. Из определения детерминанта (§ 7) следует, что D есть сумма членов вида $\pm x_\alpha^0 x_\beta^1 x_\gamma^2 x_\delta^3$, где индексы α, β, γ и δ все между собою различны и принимают значения 1, 2, 3 и 4, т. е. представляет целую однородную функцию переменных x_1, x_2, x_3, x_4 шестой степени, так как сумма показателей в каждом члене равна сумме $0+1+2+3=6$. Эта функция обращается в нуль при замене переменного x_α переменным x_β, где α и β суть два различных числа из ряда: 1, 2, 3, 4. Действительно, при такой замене мы получаем детерминант с двумя одинаковыми строками (§ 9). Из этого следует, что детерминант D делится на каждую из 6 разностей:

$$x_2-x_1,\ x_3-x_1,\ x_4-x_1,\ x_3-x_2,\ x_4-x_2,\ x_3-x_2$$

и на их произведение. А так как это произведение в раскрытой форме представляет целую однородную функцию переменных x_1, x_2, x_3, x_4 шестой степени, то оно может отличаться от детерминанта D только постоянным множителем. Обозначив этот последний буквой λ, получим тождество:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \lambda(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3).$$

Для определения λ достаточно сравнить члены с одинаковыми степенями в обеих частях тождества. В первой части есть член $x_2\, x_3^2\, x_4^3$ (главный член детерминанта); во второй части член, содержащий те же степени переменных, получается от умножения λ на произведение уменьшаемых всех разностей, входящих во вторую часть; он равен $\lambda x_2\, x_3^2\, x_4^3$. Сравнивая коэфициенты этих членов, находим, что $\lambda = 1$.

Рассмотренный детерминант D есть частный случай детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Этот детерминант называется степенным детерминантом или детерминантом Вандермонда (Vandermonde). Для вычисления его можно воспользоваться вторым из указанных выше способов.

Δ есть целая однородная функция переменных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$. Степень ее равна сумме

$$0+1+2+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

Эта функция делится на каждую из разностей $x_\alpha - x_\beta$, где $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$ $(\alpha \neq \beta)$. Следовательно, она делится на произведение всех различных между собою разностей, которые можно составить из входящих в функцию переменных. Обозначим указанное произведение знаком

$$\Pi(x_\alpha - x_\beta), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n, \ \alpha > \beta.$$

Произведение Π представляет целую однородную функцию переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Степень ее равна числу множителей произведения. Чтобы найти это число, заметим, что число тех разностей, в которых $\beta = 1$, есть $n-1$; число разностей, в которых $\beta = 2$, есть $n-2$ и т. д. Число всех различных между собою разностей, т. е. число множителей произведения Π, выражается суммой

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1+0=\frac{1}{2}n(n-1).$$

Таким образом оказывается, что функция Δ и ее делитель Π суть однородные функции одной и той же степени. Поэтому они могут отличаться друг от друга только постоянным множителем. Обозначая его буквой λ, получим тождество:

$$\Delta = \lambda \Pi.$$

Для определения λ сравним коэфициенты трех членов правой и левой части, которые содержат одинаковые степени переменных. Возьмем, например, в левой части главный член детерминанта: $x_2 x_3^2 \ldots x_n^{n-1}$. В правой части член, содержащий те же степени переменных, есть $\lambda x_2 x_3^2 \ldots x_n^{n-1}$.

Сравнение их коэфициентов показывает, что $\lambda = 1$. Итак,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Pi\,(x_\alpha - x_\beta); \quad \begin{matrix} \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n; \\ \alpha > \beta. \end{matrix}$$

Упражнения.

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 10 & 12 \\ 5 & 8 & 12 \end{vmatrix} = -14.$$

2. $$\begin{vmatrix} 15 & 23 & 4 \\ 27 & 26 & 5 \\ 17 & 12 & 3 \end{vmatrix} = -110.$$

3. $$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 360.$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 10 \\ 7 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 6.$$

5. $$\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = 2a^3.$$

6. Если ω есть одно из комплексных значений $\sqrt[3]{1}$, то

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

7. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

8. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

9. $$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

10. $$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

11. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{sun}\ \alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = -4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{1}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

12. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 2(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\beta-\cos\gamma)(\cos\gamma-\cos\alpha),$$

13. $$\begin{vmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \cos(\beta-\gamma) & \cos(\gamma-\alpha) \\ \cos(\alpha+\beta) & \cos(\beta+\gamma) & \cos(\gamma+\alpha) \\ \sin(\alpha+\beta) & \sin(\beta+\gamma) & \sin(\gamma+\alpha) \end{vmatrix} =$$
$$= -2\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha).$$

14. $$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin 2\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin 2\gamma \end{vmatrix} = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \begin{vmatrix} \mathrm{tg}\,\alpha & 1 & \sin\alpha \\ \mathrm{tg}\,\beta & 1 & \sin\beta \\ \mathrm{tg}\,\gamma & 1 & \sin\gamma \end{vmatrix} =$$
$$= 4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)].$$

15. $$\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\sigma\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= 4\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma),$$
где $2\sigma = \alpha+\beta+\gamma$.

16. $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma \end{vmatrix} =$$
$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma \begin{vmatrix} \mathrm{tg}^2\alpha & 1 & \mathrm{tg}\,\alpha \\ \mathrm{tg}^2\beta & 1 & \mathrm{tg}\,\beta \\ \mathrm{tg}^2\gamma & 1 & \mathrm{tg}\,\gamma \end{vmatrix} = \sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta).$$

17. **Решить уравнение:**
$$\begin{vmatrix} 3+2x & 10 & 7 \\ 27-x & 17 & 3 \\ 7x-40 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ. $x = 7$.

18. **Решить уравнение:**
$$\begin{vmatrix} x & a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ. $x = a$, $x = b$.

19. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ (a+x)^3 & (b+x)^3 & (c+x)^3 \\ (2a+x)^3 & (2b+x)^3 & (2c+x)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ, Уравнение приводится к следующему:

$$3(b-a)(c-a)(c-b)x^3\left\{(a+b+c)x^2+3(ab+bc+ca)x+6\,abc\right\}=0.$$

20. $$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \\ 4 & 10 & 6 & 7 \\ 2 & 15 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 65.$$

21. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 16 \\ 1 & 9 & 0 & 25 \\ 1 & 16 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -576.$$

22. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

23. $$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 8 & 9 \\ 14 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

24. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = (x^2-3^2)(x^2-1^2).$$

25. $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = adcd+abc+abd+acd+bcd.$$

26. $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

27. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & m & n \\ -a & -b & c & p \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 2^3abcd.$$

28. $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

29. $$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -y & -c & 0 & a \\ -z & -b & -a & 0 \end{vmatrix} = (ax-by+cz)^2.$$

30. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+c & a & a \\ 1 & b & c+a & b \\ 1 & c & c & a+b \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca.$$

31. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d).$$

32. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(abc+abd+acd+bcd).$$

33. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^5 & b^5 & c^5 & d^5 \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\left\{\sum a^2 + \sum ab\right\},$$
где $\sum a^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$, $\sum ab = ab+ac+ad+bc+bd+cd$.

34. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = ax^3+bx^2+cx+d.$$

35. $$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_{m-1} & p_m \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x \end{vmatrix} =$$
$$= p_0x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}x + p_m.$$

36. Определить значения x из уравнения:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ. $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$; $x_4 = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

37. Определить значения x из уравнения:

$$\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ. Уравнение приводится к следующему:

$$(a-b)^2\,[(a+b)^2-4x^2] = 0.$$

38. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ 1 & \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ 1 & \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = -16\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

39. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 16.$$

40. $$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & y \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & x \end{vmatrix} = x^5 + y^5.$$

41. $$\begin{vmatrix} -1 & x & x & \dots & x \\ x & -1 & x & \dots & x \\ x & x & -1 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(x+1)^{n-1}\,[(n-1)\,x-1],$$

где n обозначает порядок детерминанта.

42. $$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 1 & n & n-1 & \dots & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 5 & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 & n \end{vmatrix} = \frac{n^{n-1}(n+1)}{2},$$

43.
$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix} =$$
$$= a_1b_n(a_2b_1 - a_1b_2)(a_3b_2 - a_2b_3)\dots(a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n).$$

44. Дан детерминант n-го порядка:
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix};$$
показать, что $D_n = D_{n-1} = D_2 = 1$.

45. Дан детерминант n-го порядка:
$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix};$$
показать, что 1) $D_n = -D_{n-1} + 1$ и 2) $D_{2k} = 1$, $D_{2k+1} = 0$.

46.
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = (a + n - 1)(a - 1)^{n-1},$$
где n обозначает порядок детерминанта.

47.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\dots a_n.$$

48.
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} =$$
$$= a_1a_2a_3\dots a_n\left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$
(Ср. упражнение 25.)

49.
$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} =$$
$$= (a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x) \dots (a_n - x)\left\{1 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x}{a_i - x}\right\}.$$

50. Показать, что детерминант:
$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$
n-го порядка равен $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$.

ГЛАВА IV.

МИНОРЫ. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОБ АДЪЮНКТЕ. ПОНЯТИЕ О МАТРИЦЕ. РАЗЛОЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА ПО МИНОРАМ (ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА). УМНОЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТОВ. ДЕТЕРМИНАНТ, СОПРЯЖЕННЫЙ ДАННОМУ. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ.

§ 16. Миноры. Если в детерминанте n-го порядка вычеркнуть m ($m<n$) строк и m столбцов, то останется $(n-m)^2$ элементов, из которых, сохраняя их взаимное расположение, можно составить детерминант $(n-m)$-го порядка. Этот детерминант называется *минором* $(n-m)$-го порядка по отношению к детерминанту n-го порядка, а последний по отношению к своему минору называется *старшим*.

Миноры называются также *субдетерминантами* и *младшими* детерминантами.

Вычеркивая из старшего детерминанта те $(n-m)$ строк и $(n-m)$ столбцов, из элементов которых составлен минор $(n-m)$-го порядка, и составляя из остальных m^2 элементов детерминант, мы получим минор m-го порядка.

Два минора, составленные указанным способом, называются *взаимно дополнительными*.

Например, детерминанты

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{41} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

суть взаимно дополнительные миноры детерминанта 5-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Число m вычеркиваемых строк и столбцов может быть равно $1, 2, \ldots, n-1$, причем для $m=1$ мы получаем только один элемент старшего детерминанта и рассматриваем этот элемент, как детерминант 1-го порядка.

Миноры, в которых элементами главной диагонали служат элементы главной диагонали старшего детерминанта, называются **главными**.

Например, для детерминанта:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

главные миноры второго порядка таковы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

§ 17. Число миноров. Сосчитаем число миноров $(n-m)$-го порядка детерминанта n-го порядка.

Вычеркнуть m строк из n можно C_n^m способами, где C_n^m обозначает число сочетаний из n элементов по m.

Точно так же вычеркнуть m столбцов из n можно C_n^m способами. Число всех комбинаций, возможных при вычеркивании m строк и m столбцов, равно произведению $C_n^m \cdot C_n^m$ или $(C_n^m)^2$. Так как каждой из этих комбинаций соответствует один минор $(n-m)$-го порядка. то число миноров $(n-m)$-го порядка равно $(C_n^m)^2$.

Число всех миноров детерминанта n-го порядка равно сумме:

$$(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^{n-1})^2 = \frac{1 \cdot 2 \ldots (2n-1) \cdot 2n}{(1 \cdot 2 \ldots n)^2} - 2^1.$$

§ 18. Расширение понятия об адъюнкте. В § 12 при изучении вопроса о разложении детерминанта по элементам строки или столбца было введено понятие об адъюнкте элемента детерминанта.

Пользуясь понятием о минорах, можно формулировать определение адъюнкты (§ 12) следующим образом: **адъюнктою элемента детерминанта n-го порядка называется его минор $(n-1)$-го порядка, полученный через вычеркивание строки и столбца, на пересечении которых стоит рассматриваемый элемент, и умноженный на $(-1)^\sigma$, где σ есть сумма указателей вычеркнутых строки и столбца.**

Самое разложение детерминанта по элементам строки и столбца можно назвать разложением его по минорам $(n-1)$-го порядка или по минорам 1-го порядка.

Естественно возникает вопрос о возможности разложения детерминанта по минорам других порядков.

Решение его требует расширения понятия об адъюнкте.

Рассмотрим сначала частный случай, а именно детерминант 5-го порядка. Пусть дан детерминант:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

---

[1] Из тождества $(1+x)^n (x+1)^n \equiv (1+x)^{2n}$ находим:

$$(1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n)(x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^n) \equiv$$
$$\equiv 1 + C_{2n}^1 x + \ldots + C_{2n}^n x^n + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Выполняя в левой части умножение и сравнивая затем коэфициенты при x^n в обеих частях тождества, получим:

$$1 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n = \frac{1 \cdot 2 \ldots (2n-1)2n}{(1 \cdot 2 \ldots n)^2}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $C_n^n = 1$, получим приведенную в тексте формулу.

Напишем те члены этого детерминанта, которые содержат произведения: $a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}$, где α, β, $\gamma = 1$ 2, 3:

$$\begin{array}{l}
+a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}\ a_{55}-a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{45}\ a_{54}-\\
-a_{11}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{44}\ a_{55}+a_{11}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{45}\ a_{54}+\\
+a_{12}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{44}\ a_{55}-a_{12}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{45}\ a_{54}-\\
-a_{12}\ a_{21}\ a_{33}\ a_{44}\ a_{55}+a_{12}\ a_{21}\ a_{33}\ a_{45}\ a_{54}+\\
+a_{13}\ a_{21}\ a_{32}\ a_{44}\ a_{55}-a_{13}\ a_{21}\ a_{32}\ a_{45}\ a_{54}-\\
-a_{13}\ a_{22}\ a_{31}\ a_{44}\ a_{55}+a_{13}\ a_{22}\ a_{31}\ a_{45}\ a_{54}.
\end{array}$$

Суммируя эти члены, мы получаем произведение

$$(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31})\times$$
$$\times(a_{44}a_{55}-a_{45}a_{54}),$$

множители которого суть не что иное, как взаимно дополнительные (§ 16) миноры 3-го и 2-го порядков данного детерминанта. Полагая

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{44} & a_{45}\\ a_{54} & a_{55}\end{vmatrix},$$

мы заключаем, что в состав детерминанта D входит произведение $\Delta_3\cdot\Delta_2$. Минор Δ_2 называется **адъюнктой** минора Δ_3.

Таким образом мы имеем определение адъюнкты минора, составленного из элементов трех *первых* строк и трех *первых* столбцов детерминанта D.

Чтобы найти адъюнкту минора, составленного из элементов трех каких-нибудь строк и трех каких-нибудь столбцов, достаточно преобразовать детерминант так, чтобы эти строки и столбцы являлись первыми.

Образуем, например, адъюнкту минора, составленного из элементов 2-й, 4-й и 5-й строк и 1-го, 3-го и 4-го столбцов, т. е. минора

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ a_{41} & a_{43} & a_{44}\\ a_{51} & a_{53} & a_{54}\end{vmatrix}.$$

Для этого переставим строки и столбцы детерминанта D так, чтобы элемент a_{21} оказался на первом месте. Принимая во внимание изменение знака детерминанта, сопровождающее перестановку параллельных рядов, получим (§ 9):

$$D=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

В детерминанте правой части посредством перестановки параллельных рядов переведем элемент a_{43} на второе место главной диагонали. Получим (§ 9):

$$D=(-1)^{2+1}(-1)^{(4-1)+(3-1)}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{51} & a_{53} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Наконец, в последнем детерминанте переведем элемент a_{54} на третье место главной диагонали.

Найдем:

$$D=(-1)^{2+1}\cdot(-1)^{(4-1)+(3-1)}\cdot(-1)^{(5-2)+(4-2)}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{52} & a_{55} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} & a_{35} \end{vmatrix},$$

или

$$D=(-1)^{(2+4+5)+(1+3+4)}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{52} & a_{55} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}.$$

В состав детерминанта, стоящего в правой части этого равенства, входит, по-предыдущему, произведение $\Delta_3'\cdot\Delta_2'$, где

$$\Delta_3'=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2'=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, в состав детерминанта D входит произведение:

$$\Delta_3' \cdot (-1)^{(2+4+5)+(1+3+4)} \Delta_2'.$$

Произведение $(-1)^{(2+4+5)+(1+3+4)} \Delta_2'$ называется адъюнктой минора Δ_3'.

Легко видеть, что показатель степени числа -1 равен сумме указателей трех строк и столбцов детерминанта D, из элементов которых составлен минор Δ_3'.

Итак, адъюнкта минора Δ_3' есть $-\Delta_2'$. Нетрудно убедиться, что адъюнкта минора Δ_2' есть $-\Delta_3'$.

Обратимся теперь к общему случаю.

Пусть дан детерминант D n-го порядка:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через Δ_n и Δ_{n-m} $(m < n)$ два взаимно дополнительные минора, из которых первый составлен из элементов m первых строк и m первых столбцов детерминанта D, а второй из элементов $n-m$ остальных строк и столбцов, так что

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{n-m} = \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & \dots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & \dots & a_{m+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

и покажем, что произведение $\Delta_m \cdot \Delta_{n-m}$ входит в состав детерминанта D.

Действительно, в детерминанте D есть член

$$a_{11}a_{22} \dots a_{mm} \cdot a_{m+1,\,m+1}\, a_{m+2,\,m+2} \dots a_{nn}.$$

Из определения детерминанта (§ 7) следует, что в детерминанте D содержатся члены, получаемые из написанного через перестановки вторых индексов у множителей произведения $a_{11}a_{22} \dots a_{mm}$, причем знаки этих членов определяются типом перестановки, образуемой вторыми индексами. Сумма всех членов, получаемых таким образом, есть по определению детерминанта

$$\Delta_m \cdot a_{m+1,\, m+1}\, a_{m+2,\, m+2} \cdots a_{nn}.$$

Легко видеть, что в состав детерминанта D входит также произведение $\Delta_m \cdot a_{m+1,\alpha}\, a_{m+2,\beta} \ldots a_{n,\nu}$, где $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ представляет одну из перестановок индексов $m+1, m+2, \ldots, n$; при этом знак произведения $a_{m+1,\alpha}\, a_{m+2,\beta} \ldots a_{n,\nu}$ определяется типом указанной перестановки. Сумма членов вида

$$\Delta_m \cdot (\pm\, a_{m+1,\alpha}\, a_{m+2,\beta} \cdots a_{n,\nu}),$$

распространенная на все возможные перестановки чисел $m+1, m+2, \ldots, n$, по определению детерминанта (§ 7), равна $\Delta_m \cdot \Delta_{n-m}$.

Итак, в состав детерминанта D входит произведение двух взаимно дополнительных миноров Δ_m и Δ_{n-m}; Δ_{n-m} называется **адъюнктой минора** Δ_m.

Чтобы составить адъюнкту минора Δ_m', образованного из элементов строк с индексами $i_1, i_2, \ldots, i_m$ и столбцов с индексами $k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $i_1, i_2, \ldots, i_m, k_1, k_2, \ldots, k_m$ суть какие-нибудь числа из ряда $1, 2, \ldots, n$, достаточно преобразовать детерминант D в детерминант D', в котором указанные строки и указанные столбцы являются первыми строками и столбцами, взять в детерминанте D' дополнительный минор Δ_{n-m}' минора Δ_m' и приписать ему тот знак, который появляется у детерминанта D при преобразовании его в D'.

Так как

$$\Delta_m' = \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \ldots & a_{i_1k_m} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \ldots & a_{i_2k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_mk_1} & a_{i_mk_2} & \ldots & a_{i_mk_m} \end{vmatrix},$$

то преобразование детерминанта D имеет целью представить его в форме такого детерминанта, в котором первые m элементов главной диагонали суть соответственно $a_{i_1k_1}$, $a_{i_2k_2}, \ldots, a_{i_mk_m}$. При той перестановке рядов детерминанта D, которая переносит элемент $a_{i_1k_1}$ на первое место главной диагонали, детерминант D приобретает множитель $(-1)^{i_1+k_1}$ (§ 9). При второй перестановке рядов, приводящей полученный детерминант к такому, в котором элемент $a_{i_2k_2}$ занимает второе место на главной диагонали, детерминант D приобретает еще множитель $(-1)^{(i_2-1)+(k_2-1)}$ или $(-1)^{i_2+k_2}$ (§ 9); следующая перестановка параллельных рядов, переводящая на третье место главной диагонали элемент $a_{i_3k_3}$, вводит множитель $(-1)^{(i_3-2)+(k_3-2)}$ или $(-1)^{k_3+i_3}$ и т. д.

Таким образом мы получим соотношение:

$$D = (-1)^{(i_1+k_1)+(i_2+k_2)+\ldots+(i_m+k_m)} D'.$$

Но, по-предыдущему, в состав детерминанта D' входит произведение $\Delta'_m \cdot \Delta'_{n-m}$; следовательно, в состав детерминанта D входит произведение $\Delta'_m \cdot (-1)^\sigma \Delta_{n-m}$, где $\sigma = (i_1 + i_2 + \ldots + i_m) + (k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$.

Адъюнктою минора m-го порядка называется дополнительный минор $(n-m)$-го порядка, умноженный на $(-1)^\sigma$, где σ есть сумма указателей строк и столбцов, из элементов которых образован минор Δ'_m.

По этому определению адъюнктою минора Δ'_{n-m} служит минор Δ'_m, умноженный на $(-1)^{\sigma'}$, где σ' есть сумма указателей строк и столбцов, из элементов которых образован детерминант Δ'_{n-m}. Легко видеть, что $(-1)^\sigma = (-1)^{\sigma'}$.

Действительно, из определения взаимно дополнительных миноров следует, что $\sigma + \sigma'$ есть сумма указателей всех строк и всех столбцов детерминанта D, т. е.

$$\sigma + \sigma' = (1 + 2 + \ldots + n) + (1 + 2 + \ldots + n) = \\ = 2(1 + 2 + \ldots + n).$$

Так как вторая часть этого равенства есть четное число, то числа σ и σ' либо оба четные, либо оба нечетные. Поэтому $(-1)^\sigma = (-1)^{\sigma'}$.

§ 19. Понятие о матрице. Система mn элементов, расположенных в форме прямоугольника, который имеет m строк и n столбцов, называется матрицей. Для обозначения матрицы из элементов a_{ik}, где $i = 1, 2, \ldots, m$ и $k = 1, 2, \ldots, n$, употребляется символ

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Если $m = n$, то матрица называется квадратной.

Для полного определения матрицы необходимо знать не только ее элементы, но и распределение их по строкам и столбцам. Так, например, две матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} b_1 & d_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & d_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & d_3 & a_3 & c_3 \end{Vmatrix},$$

элементы которых одинаковы, но различным образом размещены, различны между собою.

Из элементов квадратной матрицы, содержащей n^2 элементов, можно образовать один детерминант n-го порядка (§ 7) и детерминанты низших порядков (§ 16).

Имея прямоугольную матрицу из mn элементов и полагая $m < n$, можно из нее различными способами выделить квадратную матрицу с μ^2 элементами, причем $\mu \leqslant m$. Из элементов каждой из этих матриц можно составить детерминант порядка μ.

Сосчитаем число всех детерминантов различных порядков, которые можно составить из mn элементов данной прямоугольной матрицы, предполагая, что $m < n$.

Число детерминантов 1-го порядка (§ 16) равно mn.

Для составления детерминанта 2-го порядка нужно взять из матрицы две строки и два столбца; сделать это можно $C_m^2 \cdot C_n^2$ способами, где C_m^2 есть число сочетаний из m элементов по 2. Поэтому число детерминантов 2-го порядка равно $C_m^2 \cdot C_n^2$.

Точно так же находим, что число детерминантов 3-го порядка равно $C_m^3 \cdot C_n^3$ и т. д. Наконец, число детерминантов m-го порядка равно $C_m^m \cdot C_n^m$.

Число всех детерминантов, которое можно образовать из элементов матрицы, равно сумме:

$$C_m^1 C_n^1 + C_m^2 C_n^2 + \ldots + C_m^m C_n^m = C_{m+n}^m - 1 = C_{m+n}^n - 1^{1)}.$$

[1]) Из тождества $(x+1)^m (1+x)^n \equiv (1+x)^{m+n}$ или

$$(x^m + C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} + \ldots + C_m^m)\quad (1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n) \equiv$$
$$\equiv 1 + C_{m+n}^1 x + \ldots + C_{m+n}^m x^m + \ldots + x^{m+n},$$

через сравнение коэфициентов при x^m в левой и правой частях, находим:

$$1 + C_m^1 C_n^1 + C_m^2 C_n^2 + \ldots + C_m^m C_n^m = C_{m+n}^m;$$

отсюда получим, что

$$C_m^1 C_n^1 + C_m^2 C_n^2 + \ldots + C_m^m C_n^m = C_{m+n}^m - 1.$$

§ 20. Разложение детерминанта по минорам (теорема Лапласа). Пусть дан детерминант n-го порядка:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

покажем, что его можно разложить по минорам m-го порядка $(m < n)$, образованным из элементов m каких-либо строк детерминанта D.

Для этого возьмем матрицу, составленную из элементов этих строк:

$$\left\| \begin{matrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \dots & a_{i_2 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m 1} & a_{i_m 2} & \dots & a_{i_m n} \end{matrix} \right\|,$$

где $i_1, i_2, \dots, i_m$ суть номера строк, из элементов которых составляются миноры детерминанта D.

Из элементов этой матрицы образуем все детерминанты m-го порядка.

Обозначим их через $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\nu$ где $\nu = C_n^m$ (§ 19).

Составим адъюнкты этих миноров (§ 18) и обозначим их соответственно через

$$(-1)^{\sigma_1} \Delta_1', \ (-1)^{\sigma_2} \Delta_2', \ \dots, \ (-1)^{\sigma_\nu} \Delta_\nu',$$

где σ_k обозначает сумму указателей строк и столбцов, взятых для составления минора Δ_k.

Все миноры Δ_k в раскрытой форме не имеют подобных членов, так как отличаются друг от друга, по крайней мере, одним столбцом. Тем же свойством обладают и их дополнительные миноры Δ_k'. Поэтому, раскрывая произведения $(-1)^{\sigma_k} \Delta_k \Delta_k'$ $(k = 1, 2, \dots, \nu)$, входящие в состав суммы

$$(-1)^{\sigma_1} \Delta_1 \Delta_1' + (-1)^{\sigma_2} \Delta_2 \Delta_2' + \dots + (-1)^{\sigma_\nu} \Delta_\nu \Delta_\nu', \qquad (\alpha)$$

мы получим многочлен, не имеющий подобных членов.

Но, по доказанному в § 18, каждый из членов суммы (α) входит в состав детерминанта D; следовательно, и вся сумма (α) входит в его состав.

Сосчитаем число членов многочлена, который получится по раскрытии в сумме (α) всех произведений $\Delta_k \Delta_k'$.

Так как Δ_k и Δ_k' суть детерминанты соответственно порядков m и $n-m$, то произведение $(-1)^{\sigma_k}\Delta_k\Delta_k'$ содержит $m!(n-m)!$ членов (§ 7).

В сумму (α) входят в качестве слагаемых ν таких произведений. Поэтому, по раскрытии этих произведений сумма (α) преобразуется в многочлен, содержащий

$$\nu! m!\,(n-m)! = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,m!\,(n-m)! = n!$$

членов, среди которых, как уже было сказано, подобных нет. Но детерминант D в раскрытой форме содержит также $n!$ членов (§ 7). Отсюда заключаем, что сумма (α) есть не что иное, как детерминант D, так что

$$D = (-1)^{\sigma_1}\Delta_1\Delta_1' + (-1)^{\sigma_2}\Delta_2\Delta_2' + \ldots + (-1)^{\sigma_\nu}\Delta_\nu\Delta_\nu'$$
$$\nu = C_n^m.$$

Эта формула дает разложение детерминанта n-го порядка по минорам m-го порядка и представляет выражение теоремы Лапласа.

Разложение детерминанта по элементам ряда (§ 12) есть частный случай этой формулы, соответствующей $m = 1$.

Приведем для примера разложение детерминанта

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

по минорам третьего порядка, образованным из элементов первых трех строк, т. е. из элементов матрицы:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{Vmatrix}.$$

Составим эти миноры и их адъюнкты:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1' = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2' = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} a_{43} & a_{45} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3' = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+5)} \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} \\ a_{53} & a_{54} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}; \quad \Delta_4' = (-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)} \begin{vmatrix} a_{42} & a_{45} \\ a_{52} & a_{55} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}; \quad \Delta_5' = (-1)^{(1+2+3)+(1+3+5)} \begin{vmatrix} a_{42} & a_{44} \\ a_{52} & a_{54} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix}; \quad \Delta_6' = (-1)^{(1+2+3)+(1+4+5)} \begin{vmatrix} a_{42} & a_{43} \\ a_{52} & a_{53} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}; \quad \Delta_7' = (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)} \begin{vmatrix} a_{41} & a_{45} \\ a_{51} & a_{55} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_8 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}; \quad \Delta_8' = (-1)^{(1+2+3)+(2+3+5)} \begin{vmatrix} a_{41} & a_{44} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_9 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix}; \quad \Delta_9' = (-1)^{(1+2+3)+(2+4+5)} \begin{vmatrix} a_{41} & a_{43} \\ a_{51} & a_{53} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{10} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{10}' = (-1)^{(1+2+3)+(3+4+5)} \begin{vmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{vmatrix}.$$

Умножая миноры на их адъюнкты и составляя сумму этих произведений, мы получим разложение детерминанта D по минорам 3-го порядка:

$$D = \Delta_1\Delta_1' - \Delta_2\Delta_2' + \Delta_3\Delta_3' + \Delta_4\Delta_4' - \Delta_5\Delta_5' + \Delta_6\Delta_6' - \Delta_7\Delta_7' + \Delta_8\Delta_8 - \\ - \Delta_9\Delta_9' + \Delta_{10}\Delta_{10}'.$$

§ 21. Произведение двух детерминантов. При помощи доказанной в предыдущем параграфе теоремы Лапласа легко решается задача об умножении двух детерминантов.

Эта задача заключается в следующем: даны детерминанты A_m m-го порядка и B_n n-го порядка:

$$A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix};$$

требуется представить их произведение $A_m B_n$ в форме детерминанта.

По теореме Лапласа произведение $A_m B_n$ входит в состав всякого детерминанта, для которого A_m и B_n служат взаимными адъюнктами. Порядок этого детерминанта есть $m+n$.

Указанным условиям удовлетворяет детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором $2mn$ элементов, обозначенных буквами α и β с индексами, совершенно произвольны.

Полагая в этом детерминанте все β равными нулю, мы получим детерминант

$$C_{m+n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{mn} & b_{n1} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

который равен произведению $A_m B_n$. Действительно, при разложении C_{m+n} по минорам m-го порядка из элементов m первых строк нужно составить все детерминанты m-го порядка из элементов матрицы:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Один из них есть A_m, а все остальные равны нулю, так как имеют, по крайней мере, один столбец, все элементы которого равны нулю.

Поэтому детерминант C_{m+n} выражается произведением A_m на его адъюнкту, которая равна $(-1)^{(1+2+\dots+m)+(1+2+\dots m)} B_n$ или B_n. Следовательно,

$$C_{m+n} = A_m B_n.$$

Аналогичным образом легко убедиться, что произведение $A_m B_n$ можно представить также в виде детерминанта:

$$C_{m+n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

§ 22. Произведение двух детерминантов одинакового порядка. По предыдущему параграфу произведение двух детерминантов n-го порядка можно представить в виде детерминанта $2n$-го порядка, причем в этом детерминанте остаются произвольными n^2 элементов. Покажем, что произволом в выборе указанных элементов можно воспользоваться для понижения порядка детерминанта, выражающего произведение двух данных детерминантов.

Пусть даны два детерминанта n-го порядка:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

В детерминанте C_{m+n} предыдущего параграфа положим $m=n, \alpha_{ik}=0$ для $i \neq k$ и $\alpha_{ii}=-1$, а в детерминанте B сделаем строки столбцами и столбцы строками.

Получим детерминант:

$$C_{2n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

равный произведению AB.

Детерминант C_{2n} можно преобразовать так, чтобы места элементов b заняли нули. Для этого к элементам $(n+1)$-го столбца прибавим элементы 1-го, 2-го, ..., n-го столбцов, умножив их соответственно на $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}$; к элементам $(n+2)$-го столбца прибавим элементы первых n столбцов, умножив их соответственно на $b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}$, и аналогичным образом преобразуем $(n+3)$, $(n+4)$, ..., $2n$-й столбцы.

Полагая

$$a_{i1}b_{k1}+a_{i2}b_{k2}+\dots+a_{in}b_{kn}=c_{ik},$$

получим:

$$C_{2n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

По теореме Лапласа имеем:

$$C_{2n}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}\cdot(-1)^{\sigma}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix},$$

где $\sigma=(1+2+\dots+n)+(n+1)+(n+2)+\dots+2n=$
$=n(2n+1)$.

Так как

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^n \text{ и } (-1)^{\sigma}=(-1)^{n(2n+1)}=(-1)^n,$$

то

$$C_{2n}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначая детерминант второй части этого равенства через C, получим:

$$AB=C.$$

Это равенство показывает, что произведение двух детерминантов одинакового порядка может быть выражено в виде детерминанта того же порядка.

Элементы c_{ik} этого детерминанта представляют суммы произведений элементов i-й строки детерминанта A на соответственные элементы k-й строки детерминанта B.

Составление элементов c_{ik} из элементов детерминантов A и B будем называть **комбинированием строк одного детерминанта со строками другого**.

Так как строки и столбцы детерминанта равноправны, то очевидно, что для составления детерминанта n-го порядка, представляющего произведение двух детерминантов n-го порядка, можно комбинировать также столбцы со столбцами и строки одного со столбцами другого.

Для примера напишем различные формы произведения двух детерминантов 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21} & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22} & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

§ 23. Умножение детерминантов различных порядков. Выводы предыдущего параграфа можно распространить и на тот случай, рассмотренный в § 21, когда перемножаемые детерминанты различных порядков.

Пусть даны детерминанты A_m и B_n (см. § 21); предположим, что $m < n$. Так как, по теореме Лапласа:

$$A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & d_{2m} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = A_n',$$

то умножение A_m на B_n приводится к умножению двух детерминантов A_n' и B_n порядка n, и произведение A_mB_n представится в форме детерминанта n-го порядка, причем элементы этого детерминанта получаются комбинированием рядов детерминанта A_n' с рядами детерминанта B_n.

Пример.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} & a_{13} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{31}b_{21} + a_{22}b_{22} & a_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} & a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

§ 24. Детерминант, сопряженный с данным. Детерминантом, сопряженным с данным, называется

детерминант, получаемый из данного через замену его элементов их адъюнктами.

Пользуясь правилом умножения детерминантов одинакового порядка (§ 22), легко обнаружить связь между данным детерминантом и сопряженным с ним.

Пусть дан детерминант

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

сопряженный с ним детерминант есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix};$$

где A_{ik} обозначает адъюнкту элемента a_{ik}.

Составим произведение детерминантов D и Δ посредством комбинирования строк. Получим детерминант, элементы которого имеют вид:

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \dots + a_{in} A_{kn},$$

где i и k принимают значения $1, 2, \dots, n$.

Одно из чисел i и k служит указателем строки детерминанта, выражающего произведение $D \cdot \Delta$, а другое — указателем его столбца. Элементы, для которых $i = k$, суть элементы главной диагонали. Так как (§ 12, 13)

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \dots + a_{in} A_{kn} = 0 \quad \text{для } i \neq k$$

и

$$a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = D \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n,$$

то

$$D \cdot \Delta = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D \end{vmatrix} = D^n.$$

Отсюда находим, что $\Delta = D^{n-1}$, т. е. детерминант, сопряженный с данным детерминантом n-го порядка, равен $(n-1)$-й степени его.

§ 25. Умножение матриц. Пусть мы имеем две матрицы

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad \|B\| = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix},$$

из которых каждая содержит mn элементов, расположенных в m строках и n столбцах. Комбинируя строки первой матрицы со строками второй (§ 22), мы получаем m^2 чисел вида:

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + \dots + a_{in} b_{kn},$$

где $i, k = 1, 2, \dots, m$.

Детерминант

$$|c_{ik}| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

называется **п р о и з в е д е н и е м** матриц $\|A\|$ и $\|B\|$, составленным через комбинирование их строк[1]).

Если $m = n$, то обе данные матрицы квадратные, и произведение их есть не что иное, как произведение двух детерминантов m-го порядка, составленных из элементов соответственно первой и второй матрицы.

Рассмотрим тот случай, когда $m \gtrless n$.

Пусть $m > n$. Если в каждой из данных матриц припишем $m - n$ столбцов, все элементы которых суть нули, то комбинирование строк полученных таким образом квадратных матриц приведет к прежним числам c_{ik}. Поэтому детерминант $|c_{ik}|$ является произведением двух таких детерминантов m-го порядка, в которых все элементы $m - n$ столб-

---

[1]) В более широком смысле произведением двух указанных матриц называют м а т р и ц у, элементами которой служат числа c_{ik}, прич м i есть указатель ее строки, а k — указатель столбца.

цов равны нулю. Так как эти детерминанты равны нулю, то и произведение их равно нулю.

Таким образом мы получаем следующее предложение: произведение двух матриц из mn элементов, составленное через комбинирование строк, равно нулю, если в них число строк более числа столбцов.

Рассмотрим теперь случай $m<n$.

Детерминант $|c_{ik}|$, элементами которого служат суммы n слагаемых, можно представить в следующем виде (§ 11):

$$|c_{ik}| = \sum \begin{vmatrix} a_{1k_1} b_{1k_1} & a_{1k_2} b_{2k_2} & \ldots & a_{1k_m} b_{mk_m} \\ a_{2k_1} b_{1k_1} & a_{2k_2} b_{2k_2} & \ldots & a_{2k_m} b_{mk_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mk_1} b_{1k_1} & a_{mk_2} b_{2k_2} & \ldots & a_{mk_m} b_{mk_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum b_{1k_1} b_{2k_2} \ldots b_{mk_m} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \ldots & a_{1k_m} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \ldots & a_{2k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mk_1} & a_{mk_2} & \ldots & a_{mk_m} \end{vmatrix},$$

причем сумма распространяется на все значения чисел k_1, $k_2, \ldots, k_m$, из которых каждое может быть равно $1, 2, \ldots n$, или, иначе, на все размещения с повторениями из n элементов по m. Число членов ее равно n^m.

Но если два или более из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$ между собою равны, то детерминант, стоящий под знаком суммы, обращается в нуль, как имеющий два одинаковых столбца (§ 9). Следовательно, достаточно распространить рассматриваемую сумму на все размещения без повторений из n элементов по m; таким образом число ее членов оказывается равным $n(n-1)\ldots(n-m+1)$.

Между этими членами имеются такие, в которых значения индексов $k_1, k_2, \ldots, k_m$ представляют один и тот же ряд m чисел, расположенных в различном порядке. Число таких членов равно числу $m!$ перестановок из m элементов. Собирая их в одну группу, мы получим C_n^m групп по $m!$ членов в каждой.

В членах одной группы множители, изображаемые детерминантами, отличаются друг от друга только порядком столбцов, что, как известно (в § 9), может влиять только на знак детерминанта. Поэтому сумму членов одной группы можно представить в виде произведения:

$$\begin{vmatrix} a_{1k_1} a_{1k_2} \dots a_{1k_m} \\ a_{2k_1} a_{2k_2} \dots a_{2k_m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{mk_1} a_{mk_2} \dots a_{mk_m} \end{vmatrix} \cdot \sum \mp b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{mk_m},$$

причем порядок указателей $k_1, k_2, \dots, k_m$ в детерминанте может быть выбран произвольно, а сумма распространяется на все перестановки из m элементов $k_1, k_2, \dots, k_m$.

Пусть $k_1 < k_2 < \dots < k_m$. В таком случае один из членов рассматриваемой суммы представляется произведением:

$$\begin{vmatrix} a_{1k_1} a_{1k_2} \dots a_{1k_m} \\ a_{2k_1} a_{2k_2} \dots a_{2k_m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{mk_1} a_{mk_2} \dots a_{mk_m} \end{vmatrix} \cdot b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{mk_m}.$$

Этот член входит в сумму со знаком $+$. Все остальные члены суммы можно получить из этого члена, делая транспозиции вторых индексов при множителях произведения $b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{mk_m}$, причем каждая транспозиция изменяет знак произведения. Принимая во внимание связь между числом транспозиций и числом инверсий (§ 2), можно сказать, что знак членов суммы $\Sigma \mp b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{mk_m}$ определяется числом инверсий в перестановке вторых индексов его множителей, если за главную перестановку принята перестановка $k_1, k_2, \dots, k_m$.

Отсюда следует (§ 7), что

$$\sum \mp b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{mk_m} = \begin{vmatrix} b_{1k_1} b_{1k_2} \dots b_{1k_m} \\ b_{2k_1} b_{2k_2} \dots b_{2k_m} \\ \dots\dots\dots \\ b_{mk_1} b_{mk_2} \dots b_{mk_m} \end{vmatrix}.$$

Обращаясь к детерминанту $|c_{ik}|$, мы видим, что он представляется суммою произведений вида:

$$\begin{vmatrix} a_{1k_1} a_{1k_2} \dots a_{1k_m} \\ a_{2k_1} a_{2k_2} \dots a_{2k_m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{mk_1} a_{mk_2} \dots a_{mk_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1k_1} b_{1k_2} \dots b_{1k_m} \\ b_{2k_1} b_{2k_2} \dots b_{2k_m} \\ \dots\dots\dots \\ b_{mk_1} b_{mk_2} \dots b_{mk_m} \end{vmatrix}.$$

Чтобы получить все члены этой суммы, нужно составить из элементов m строк матрицы $\|A\|$ все миноры m-го порядка и каждый из них умножить на минор m-го порядка, составленный из элементов соответственных строк и столбцов матрицы $\|B\|$.

Называя таким образом составленные миноры двух матриц **подобными**, можно формулировать полученный вывод следующим образом:

Произведение двух матриц с m строками и n столбцами, образованное через комбинирование строк, в случае $m<n$ равно сумме произведений подобных миноров m-го порядка, составленных из элементов этих матриц.

Комбинирование столбцов матрицы $\|A\|$ со столбцами матрицы $\|B\|$ приводит к n^2 числам вида:

$$c'_{ik}=a_{1i}\,b_{1k}+a_{2i}\,b_{2k}+\ldots+a_{ni}\,b_{nk} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Детерминант $|c'_{ik}|$ называется произведением данных матриц, образованным посредством комбинирования столбцов. Нетрудно видеть, что детерминант $|c'_{ik}|$ обладает теми же свойствами, что и детерминант $|c_{ik}|$, рассмотренный выше, так как его можно рассматривать как произведение через комбинирование строк двух матриц, получаемых из $\|A\|$ и $\|B\|$ посредством замены в них строк столбцами, и обратно.

Возможно также образование произведения двух матриц через комбинирование строк одной со столбцами другой при условии, что число строк одной матрицы равно числу столбцов другой.

Частным случаем произведения двух матриц является произведение двух тождественных матриц, называемое **квадратом** матрицы.

Пример 1. Составим произведения матриц:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Vmatrix}$$

через комбинирование a) строк и b) столбцов.

a) Комбинирование строк:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1, & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1, & \alpha_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

b) Комбинирование столбцов:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 & c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 \\ a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 2. Образуем квадрат матрицы:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\|.$$

Удерживая обычное обозначение квадрата, находим через комбинирование строк:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\|^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2.$$

Через комбинирование столбцов получим следующий результат:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\|^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 & a_1c_1 + a_2c_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 & b_1^2 + b_2^2 & b_1c_1 + b_2c_2 \\ a_1c_1 + a_2c_2 & b_1c_1 + b_2c_2 & c_1^2 + c_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Упражнения.

1. Вычислить детерминант

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 8 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

разлагая его по минорам 2-го порядка, составленным из элементов матрицы:

$$\left\|\begin{matrix} 4 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Ответ —16.

2. Показать, что

$$\begin{vmatrix} a & b & c & c' & b' & a' \\ d & e & f & f' & e' & d' \\ g & h & i & i' & h' & g' \\ g' & h' & i' & i & h & g \\ d' & e' & f' & f & e & d \\ a' & b' & c' & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \\ g+g' & h+h' & i+i' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a-a' & b-b' & c-c' \\ d-d' & e-e' & f-f' \\ g-g' & h-h' & i-i' \end{vmatrix}.$$

3. Посредством разложения на слагаемые (§ 11) показать, что детерминант

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_2\alpha_1+b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

есть произведение детерминантов

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

4. Посредством разложения на слагаемые (§ 11) показать, что детерминант

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

есть произведение детерминантов

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

5. Представить в виде детерминантов квадраты следующих детерминантов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Показать, что

$$\begin{vmatrix} a^2+\lambda^2 & ab+c\lambda & ca-b\lambda \\ ab-c\lambda & b^2+\lambda^2 & bc+a\lambda \\ ca+b\lambda & bc-a\lambda & c^2+\lambda^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & c & -b \\ -c & \lambda & a \\ b & -a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda^2+a^2+b^2+c^2)^3.$$

7. Через умножение детерминантов:

$$\begin{vmatrix} a & ib \\ ib & a \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} c & id \\ id & c \end{vmatrix},$$

где $i=\sqrt{-1}$, показать, что произведение двух выражений, из которых каждое представляет сумму двух квадратов, есть также сумма двух квадратов.

8. Через умножение детерминантов:

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a'+ib' & c'+id' \\ -c'+id' & a'-ib' \end{vmatrix},$$

где $i=\sqrt{-1}$, показать, что произведение двух выражений, из которых каждое представляет сумму четырех квадратов, есть также сумма четырех квадратов.

9. Если ω есть один из комплексных кубических корней из 1, то

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -27.$$

10. Вычислить детерминант, сопряженный с детерминантом

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ответ. — 27.

ГЛАВА V.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ДЕТЕРМИНАНТЫ.

§ 26. Симметрический, косой симметрический и косой детерминанты. Детерминант

$$D = |a_{ik}| \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

называется симметрическим, если $a_{ik} = a_{ki}$. Элементы a_{ik} и a_{ki} называются сопряженными.

Детерминант D называется косым симметрическим, если $a_{ik} = -a_{ki}$. Из этого определения следует, что $a_{ii} = 0$, т. е. элементы его главной диагонали суть нули.

Если $a_{ik} = -a_{ki}$ для $i \neq k$ и не все элементы главной диагонали равны нулю, то детерминант D называется косым.

Из детерминантов

$$\begin{vmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & x & y \\ -x & b & z \\ -y & -z & c \end{vmatrix}$$

первый есть симметрический детерминант, второй — косой симметрический и третий — косой.

§ 27. Свойство адъюнкт элементов симметрического детерминанта. Адъюнкты сопряженных элементов симметрического детерминанта равны, т. е. если $a_{ik}=a_{ki}$, то $A_{ik}=A_{ki}$.

Действительно (§ 12, формула III, § 8),

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i-1,2} & a_{i+1,2} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,k-1} & a_{2,k-1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i+1,k-1} & \dots & a_{n,k-1} \\ a_{1,k+1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{i-1,k+1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{n,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{i-1,n} & a_{i+1,n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

так как $a_{ik}=a_{ki}$, то из написанного равенства имеем:

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,i-1} & a_{k-1,i+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,i-1} & a_{k+1,i+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Но вторая часть этого равенства есть не что иное, как A_{ki}; следовательно, $A_{ik}=A_{ki}$.

Из доказанного предложения следует, что детерминант, сопряженный с симметрическим, есть также симметрический.

§ 28. Свойства косого симметрического детерминанта. 1. Косой симметрический детерминант нечетного порядка равен нулю.

Пусть дан детерминант

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

в котором $a_{ik} = -a_{ki}$. Умножив каждую строку его на -1, получим равенство:

$$(-1)^n D = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

отсюда, заменив $-a_{ik}$ через a_{ki}, находим (§ 8):

$$(-1)^n D = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{vmatrix} = D.$$

Итак, $(-1)^n D = D$. Это равенство показывает, что $D = 0$, если n есть нечетное число.

2. Адъюнкты сопряженных элементов косого симметрического детерминанта равны, если данный детерминант нечетного порядка, и отличаются только знаком, если он четного порядка.

Пусть $D = |a_{ik}|$, $a_{ik} = -a_{ki}$, $a_{ii} = 0$ $i, k = 1, 2, \dots, n$. Докажем, что $A_{ik} = (-1)^{n-1} A_{ki}$.

Преобразуем детерминант $(n-1)$-го порядка, выражающий адъюнкту A_{ki}, умножив каждый элемент его на -1, и в полученном детерминанте заменим $-a_{ik}$ через a_{ki}:

$$(-1)^{n-1}A_{ki}=(-1)^{k+i}\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1,i-1} & -a_{1,i+1} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2,i-1} & -a_{2,i+1} & \dots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{k-1,1} & -a_{k-1,2} & \dots & -a_{k-1,i-1} & -a_{k-1,i+1} & \dots & -a_{k-1,n} \\ -a_{k+1,1} & -a_{k+1,2} & \dots & -a_{k+1,i-1} & -a_{k+1,i-1} & \dots & -a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{n,i-1} & -a_{n,i+1} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \dots & a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \dots & a_{i-1,2} & a_{i+1,2} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,k-1} & a_{2,k-1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i+1,k-1} & \dots & a_{n,k-1} \\ a_{1,k+1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{i-1,k+1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{n,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{i-1,n} & a_{i+1,n} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Сделав в последнем детерминанте строки столбцами, и наоборот, мы получим во второй части написанного равенства адъюнкту A_{ik} элемента a_{ik}.

Следовательно,

$$A_{ik}=(-1)^{n-1}A_{ki}.$$

Отсюда для n нечетного имеем $A_{ik}=A_{ki}$, а для n четного $A_{ik}=-A_{ki}$.

3. В косом симметрическом детерминанте нечетного порядка адъюнкты его элементов связаны соотношением

$$A_{ii}A_{kk}=A_{ik}^2. \qquad (\alpha)$$

Так как по теореме 1 настоящего параграфа, косой симметрический детерминант нечетного порядка равен нулю, то (§ 14)

$$\frac{A_{i1}}{A_{k1}}=\frac{A_{i2}}{A_{k2}}=\dots=\frac{A_{ii}}{A_{ki}}=\dots=\frac{A_{ik}}{A_{kk}}=\dots=\frac{A_{in}}{A_{kn}}.$$

Отсюда находим, что $A_{ii}\cdot A_{kk}=A_{ik}\cdot A_{ki}$. Но, по теореме 2, $A_{ik}=A_{ik}$; следовательно,

$$A_{ii}A_{kk}=A_{ik}^2.$$

Написанный выше ряд равных отношений можно, пользуясь последним соотношением, заменить следующим:

$$\frac{A_{i1}}{\sqrt{A_{11}}}=\frac{A_{i2}}{\sqrt{A_{22}}}=\ldots=\frac{A_{ii}}{\sqrt{A_{ii}}}=\ldots=\frac{A_{in}}{\sqrt{A_{nn}}}=\sqrt{A_{ii}}.$$

При выводе соотношения (α) играли роль только два свойства косого симметрического детерминанта нечетного порядка, а именно: равенство его нулю и равенство адъюнкт A_{ik} и A_{ki}. Поэтому доказанную теорему можно расширить следующим образом: если какой-нибудь детерминант $D=|a_{ik}|$ равен нулю, а сопряженный с ним есть детерминант симметрический, то между адъюнктами его элементов существует соотношение (α).

4. Главные миноры (§ 16) косого симметрического детерминанта суть косые симметрические детерминанты.

Это предложение следует из того, что для получения главных миноров из данного детерминанта вычеркиваются строки и столбцы, пересекающиеся на элементах главной диагонали, а остающиеся элементы сохраняют свое положение относительно главной диагонали.

5. Косой симметрический детерминант четного порядка есть квадрат целой рациональной функции его элементов. Для детерминанта 2-го порядка справедливость этой теоремы обнаруживается непосредственным вычислением:

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}=a^2.$$

Для доказательства ее справедливости в общем случае, т. е. для детерминанта n-го порядка (n — четное число), допустим, что теорема верна для детерминанта $(n-2)$-го порядка, и докажем, что в таком случае она верна и для детерминанта n-го порядка.

Пусть дан детерминант:

$$D = |a_{ik}|, \qquad i,\ k = 1, \ldots, n,$$

причем $a_{ik} = -a_{ki}$ $a_{ii} = 0$, и n есть четное число.

Составим адъюнкту A_{11} элемента a_{11}:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Так как D есть детерминант четного порядка, то A_{11} есть косой симметрический детерминант нечетного порядка и, следовательно, равен нулю. Обозначая через α_{ik} (i, $k = 2, 3, \ldots, n$) адъюнкту элемента a_{ik} в детерминанте A_{11}, имеем следующие равенства (§ 12, 13):

$$\left.\begin{array}{l} a_{22}\alpha_{22} + a_{23}\alpha_{23} + \ldots + a_{2n}\alpha_{2n} = A_{11} = 0, \\ a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{23} + \ldots + a_{3n}\alpha_{2n} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n2}\alpha_{22} + a_{n3}\alpha_{23} + \ldots + a_{nn}\alpha_{2n} = 0. \end{array}\right\} \qquad (\beta)$$

Умножив второй столбец детерминанта D на α_{22}, получим:

$$\alpha_{22}D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\alpha_{22} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\alpha_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32}\alpha_{22} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\alpha_{22} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Преобразуем детерминант, стоящий во второй части этого равенства, прибавив к элементам второго столбца элементы третьего, умноженные на α_{23}, элементы четвертого, умноженные на α_{24}, ..., и элементы последнего столбца, умноженные на α_{2n}. При помощи равенств (β) найдем, что

$$\alpha_{22}D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{23} + \ldots + a_{1n}\alpha_{2n}, & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

или, через разложение детерминанта по элементам второго столбца,

$$\alpha_{22}D = -(a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{23} + \ldots + a_{1n}\alpha_{2n}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (\gamma)$$

Сравнивая детерминант второй части с детерминантом A_{11}, легко видеть, что адъюнкты элементов его первого столбца суть $\alpha_{22}, \alpha_{32}, \ldots, \alpha_{n2}$. Поэтому этот детерминант равен сумме

$$-a_{21}\alpha_{22} + a_{31}\alpha_{32} + \ldots + a_{n1}\alpha_{n2}.$$

Но, по условию, $a_{21} = -a_{12}$, $a_{31} = -a_{13}$, $\ldots$ $a_{n1} = -a_{1n}$; кроме того, $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, как адъюнкты сопряженных элементов косого симметрического детерминанта нечетного порядка (теорема 2, § 28). Поэтому рассматриваемая сумма равна сумме

$$-(a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{23} + \ldots + a_{1n}\alpha_{2n}).$$

Вставляя эту сумму вместо детерминанта второй части равенства (γ), получим:

$$\alpha_{22}D = (a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{23} + \ldots + a_{1n}\alpha_{2n})^2,$$

или, разделив обе части на α_{22},

$$D = \left(a_{12}\sqrt{\alpha_{22}} + a_{13}\frac{\alpha_{23}}{\sqrt{\alpha_{22}}} + \ldots + a_{1n}\frac{\alpha_{2n}}{\sqrt{\alpha_{22}}}\right)^2. \quad (\delta)$$

Но, по теореме 3 настоящего параграфа, α_{2k}, как адъюнкты элементов косого симметрического детерминанта A_{11} нечетного порядка связаны соотношениями:

$$\frac{\alpha_{2k}}{\sqrt{\alpha_{22}}} = \sqrt{\alpha_{kk}}, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \quad (\varepsilon)$$

При помощи этих соотношений равенство (δ) преобразуется в следующее:

$$D = (a_{12}\sqrt{\alpha_{22}} + a_{13}\sqrt{\alpha_{33}} + \ldots + a_{1n}\sqrt{\alpha_{nn}})^2. \quad (\zeta)$$

Каждый из детерминантов $\alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{nn}$ есть косой симметрический детерминант (теорема 4 § 28) $(n-2)$-го порядка. По предположению, такой детерминант представляет квадрат целой рациональной функции его элементов. Следовательно, $\sqrt{\alpha_{22}}, \sqrt{\alpha_{33}}, \ldots, \sqrt{\alpha_{nn}}$ суть целые рациональные функции элементов детерминанта A_{11}, а детерминант D есть квадрат целой рациональной функции его элементов. Таким образом доказано, что если рассматриваемая теорема верна для детерминанта $(n-2)$-го порядка, то она верна и для детерминанта n-го порядка (n — число четное). Но, как мы видели, она верна для детерминанта 2-го порядка. Следовательно, она верна для детерминанта 4-го, 6-го, ... и, вообще, всякого четного порядка.

В формулу (ζ) входят квадратные корни из $\alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{nn}$. При одном из них можно взять произвольный знак, знаки же остальных корней определяются формулой (ε).

Определим число членов той целой рациональной функции элементов косого симметрического детерминанта D четного порядка, квадрату которой он равняется. Обозначим его через K_n, где n есть четное число, обозначающее порядок детерминанта. Так как α_{ii} $(i=2, 3, \ldots n)$ есть косой симметрический детерминант $(n-2)$-го порядка, то $\sqrt{\alpha_{ii}}$ есть целая рациональная функция его элементов, содержащая K_{n-2} членов. Из формулы (ζ) мы видим, что $\sqrt{D}$ содержит $(n-1)K_{n-2}$ членов; поэтому

$$K_n = (n-1)K_{n-2}.$$

Полагая в этой формуле $n = 2, 4, \ldots, n$ и замечая, что $K_2 = 1$, найдем ряд равенств:

$$\begin{aligned} K_2 &= 1 \\ K_4 &= 3K_2 \\ K_6 &= 5K_4 \\ &\cdots\cdots \\ K_n &= (n-1)K_{n-2}. \end{aligned}$$

Перемножив почленно эти равенства и упростив результат, получим:

$$K_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1).$$

ГЛАВА VI.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 29. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными. Пусть дана система n линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$; a_{ik} и b_i $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $k = 1, 2, \ldots, n)$ обозначают известные числа и называются коэфициентами системы.

Для определения неизвестных составим детерминант из коэфициентов при неизвестных и обозначим его через D:

$$D = |a_{ik}|, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Умножив первое уравнение системы на адъюнкту A_{11} элемента a_{11}, второе — на адъюнкту A_{21} элемента $a_{21}, \ldots,$ последнее — на адъюнкту A_{n1} элемента a_{n1} и сложив почленно все уравнения, получим:

$$\begin{gathered} (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1})\,x_1 + \\ + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1})\,x_2 + \ldots \\ \ldots + (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{n1})\,x_n + = \\ = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \end{gathered}$$

Так как (§ 12)

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = D,$$

$$a_{1k}A_{11} + a_{2k}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{n1} = 0 \text{ для } k = 2, 3, \ldots, n,$$

то последнее уравнение приводится к следующему:

$$Dx_1 = D_1,$$

где

$$D_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Сказанное преобразование ведет к *исключению* из системы (1) всех неизвестных, кроме x_1.

Нетрудно видеть, что, умножив первое уравнение системы (1) на адъюнкту A_{1k} элемента a_{1k}, второе — на адъюнкту A_{2k} элемента a_{2k}, ..., последнее — на адъюнкту A_{nk} элемента a_{nk} и складывая почленно результаты, мы получим уравнение:

$$Dx_k = D_k,$$

где D_k обозначает детерминант, получаемый из D через замену в нем элементов k-го столбца вторыми частями соответственных уравнений.

Таким образом мы приходим к следующей системе уравнений:

$$Dx_1 = D_1;\ Dx_2 = D_2;\ \ldots;\ Dx_n = D_n. \tag{3}$$

В общем случае детерминант D отличен от нуля, и уравнения (3) дают единственное решение системы (1) в следующем виде:

$$x_1 = \frac{D_1}{D};\ \ x_2 = \frac{D_2}{D};\ \ldots;\ x_n = \frac{D_n}{D}. \tag{4}$$

Случай $D = 0$ требует особого исследования, для которого удобно воспользоваться понятием о ранге прямоугольной матрицы.

§ 30. Ранг матрицы. В § 19 было дано определение прямоугольной матрицы и указаны способ составления из ее элементов детерминантов различных порядков и число их.

Эти детерминанты будем называть принадлежащими матрице.

Возьмем матрицу из mn элементов, расположенных в m строках и n столбцах:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Пусть $m > n$. Наивысший порядок детерминантов, принадлежащих матрице (5), есть n.

Если по крайней мере один из детерминантов n-го порядка, принадлежащих матрице, отличен от нуля, то число n называется рангом (или характеристикой) матрицы.

Если все детерминанты n-го порядка, принадлежащие матрице, равны нулю, но, по крайней мере, один из детерминантов $(n-1)$-го порядка не равен нулю, то ранг матрицы есть число $n-1$.

Вообще, если все принадлежащие матрице детерминанты порядков $n, n-1, \ldots, p+1$ равны нулю, но, по крайней мере, один из детерминантов порядка p отличен от нуля, то рангом матрицы называется число p.

Матрицей нулевого ранга называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Пример 1. Матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

имеет ранг 3, потому что ей принадлежит детерминант

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Пример 2. Матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 7 & 11 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$$

имеет ранг 2, потому что

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Пример 3. Матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{Vmatrix}$$

имеет ранг 1, потому что все принадлежащие ей детерминанты 3-го и 2-го порядка равны нулю.

§ 31. Преобразования матрицы, не изменяющие ее ранга. Из определения ранга матрицы (§ 30) следует, что две матрицы имеют одинаковый ранг, если принадлежащие им детерминанты одинаковы или отличаются постоянным множителем.

Это замечание дает возможность указать некоторые простые преобразования матрицы, не изменяющие ее ранга.

1) Матрица, получаемая из данной через перестановку параллельных рядов ее, имеет ранг, одинаковый с рангом данной.

2) Матрица, получаемая из данной через умножение элементов какого-либо ряда ее на некоторое число ($\neq 0$), имеет ранг, одинаковый с рангом данной.

3) Матрица, получаемая из данной через замену ее строк столбцами и столбцов строками, имеет ранг, одинаковый с рангом данной.

Две матрицы, элементы которых одни и те же, но расположены так, что строки одной являются столбцами другой, называются транспонированными (или сопряженными). Предложение 3) можно формулировать так: транспонированные матрицы имеют одинаковый ранг.

Рассмотрим еще одно преобразование матрицы, не изменяющее ее ранга.

Пусть дана матрица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Умножим элементы k-го столбца этой матрицы на число λ и прибавим полученные произведения к соответственным элементам i-го столбца. Таким образом получим новую матрицу:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}+\lambda a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}+\lambda a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi}+\lambda a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Матрицы (5) и (6) имеют одинаковый ранг.

Действительно, если p есть ранг матрицы (5), то, по определению ранга матрицы (§ 30), все принадлежащие ей детерминанты порядков $p+1$, $p+2$, ..., n равны нулю. Обозначим через s какое-нибудь из чисел $p+1$, $p+2$, ..., n и рассмотрим детерминанты s-го порядка, принадлежащие матрице (6). Если в состав такого детермината не входят элементы i-го столбца матрицы, то он равен соответственному детерминанту матрицы (5), т. е. равен нулю. Если же в состав принадлежащего матрице (6) детерминанта s-го порядка входят элементы i-го столбца, то этот детерминант выражается суммой вида: $D+\lambda D'$, где D и D' суть принадлежащие матрице (5) детерминанты s-го порядка (§ 11). Следовательно, и такой детерминант равен нулю.

Отсюда вытекает заключение, что ранг матрицы (5) не меньше ранга матрицы (6).

С другой стороны, матрицу (5) можно представить в виде:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & (a_{1i}+\lambda a_{1k})-\lambda a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & (a_{2i}+\lambda a_{2k})-\lambda a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & (a_{mi}+\lambda a_{mk})-\lambda a_{mk} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \qquad (5')$$

и рассматривать ее как получаемую из матрицы (6) прибавлением к элементам i-го столбца соответственных элементов k-го столбца, умноженных на $-\lambda$.

Предыдущие рассуждения показывают, что ранг матрицы (6) не меньше ранга матрицы (5′) или (5).

Следовательно, матрицы (5) и (6) имеют одинаковый ранг.

§ 32. Главные и характеристические детерминанты системы линейных уравнений. При решении вопроса, намеченного в конце § 29, о совместности данной системы линейных уравнений придется иметь дело с некоторыми детерминантами, составленными из коэфициентов системы. Для удобства изложения основной теоремы о совместности уравнений системы мы рассмотрим сначала эти детерминанты.

Возьмем систему m линейных уравнений

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\,, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\,, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{matrix}\right\} \qquad (7)$$

с n неизвестными. Число m уравнений можно считать большим числа n неизвестных, так как в противном случае можно присоединить к данной системе нужное число уравнений, в которых все коэфициенты и свободные члены равны нулю. Что же касается коэфициентов a_{ik} в данных уравнениях, то будем предполагать, что между ними есть отличные от нуля. Если бы все a_{ik} $(i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n)$ были равны нулю, то система (7) была бы **неопределенной** при $b_i=0\,(i=1, 2, \ldots, m)$ и несовместной, если, по крайней мере, одно из чисел b_i отлично от нуля.

Матрицей системы (7) называется матрица, составленная из коэфициентов при неизвестных, т. е. матрица:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad (m>n). \tag{8}$$

Ранг ее обозначим через p, причем $p \leqslant n$. Из определения ранга (§ 30) следует, что матрице (8) принадлежит, по крайней мере, один детерминант p-го порядка, не равный нулю. Такие детерминанты называются **главными** детерминантами системы (7).

Заметив, что ранг матрицы не изменяется при перестановке ее строк, а порядок уравнений системы (7) совершенно произволен, можно принять за один из главных детерминантов системы (7) детерминант

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

составленный из коэфициентов при p первых неизвестных в p первых уравнениях системы (7).

Присоединяя к строкам этого детерминанта новую строку, состоящую из коэфициентов при тех же неизвестных в r-м уравнении системы (7), и новый столбец, элементами которого служат вторые части взятых уравнений, получим m детерминантов

$$\delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rp} & b_r \end{vmatrix}, \qquad r = 1, 2, \dots, m,$$

называемых характеристическими детерминантами системы (7). Легко видеть, что $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_p = 0$ (§ 9, следствие 1).

Преобразуем уравнения системы (7), перенеся в каждом из них во вторую часть члены с $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$. Получим систему:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1p} x_p = b_1', \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2p} x_p = b_2', \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mp} x_p = b_m', \end{array}\right\} \tag{10}$$

где

$$b_i' = b_i - a_{i,p+1} x_{p+1} - a_{i,p+2} x_{p+2} - \dots - a_{i,n} x_n = b_i - \sum_{s=p+1}^{s=n} a_{is} x_s \tag{11}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Один из главных детерминантов системы (10) есть, очевидно, детерминант δ (формула 9).

Характеристические детерминанты δ_r' системы (10) даются формулой

$$\delta_r' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1' \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & b_p' \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rp} & b_r' \end{vmatrix}, \qquad r = 1, 2, \dots, m.$$

Нетрудно показать, что $\delta_r' = \delta_r$. Действительно, принимая во внимание формулу (11) и представляя детерминант δ_r' в виде суммы детерминантов (§ 11), находим:

$$\delta_r' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rp} & b_r \end{vmatrix} - \sum_{s=p+1}^{s=n} x_s \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & a_{ps} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rp} & a_{rs} \end{vmatrix}.$$

Первый член правой части этого равенства есть δ_r, а в сумме, представляющей второй член правой части, коэфициентом при x_s служит принадлежащий матрице (8) детерминант $p+1$ порядка. Так как ранг матрицы есть p, то этот детерминант равен нулю. Следовательно:

$$\delta_r' = \delta_r.$$

§ 33. Соотношение между δ и δ_r'. Рассматривая детерминант δ_r' (§ 32), мы видим, что он получается из детерминанта δ посредством прибавления $(p+1)$-й строки и $(p+1)$-го столбца. Такой процесс образования нового детерминанта из данного можно назвать о к а й м л е н и е м данного детерминанта.

Выясним связь между данным детерминантом δ и окаймленным детерминантом δ_r'.

Разлагая δ_r' по элементам последнего столбца, мы замечаем, что один из членов разложения есть $b_r'\delta$, а все остальные члены содержат множителями произведения вида $b_i' a_{rk}$, где i, k суть числа из ряда $1, 2, \dots, p$.

Чтобы определить тот член разложения, в который входит множителем произведение $b_i' a_{rk}$, заметим, что это произведение входит в состав следующего минора 2-го порядка детерминанта δ_r':

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & b_i' \\ a_{rk} & b_r' \end{vmatrix} = a_{ik} b_r' - b_i' a_{rk}.$$

Известно, что при разложении детерминанта по минорам мы получаем сумму произведений миноров на их адъюнкты (§ 20). Поэтому в состав детерминанта δ_r' входит произведение $-b_i' a_{rk}$ на адъюнкту написанного выше минора 2-го порядка. По известному правилу составления адъюнкт (§ 18) она равна

$$(-1)^{(i+p+1)+(k+p+1)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,p} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{p,k-1} & a_{p,k+1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}.$$

Так как $(-1)^{(i+p+1)+(k+p+1)}=(-1)^{i+k}$, то написанное выражение есть не что иное, как адъюнкта элемента a_{ik} детерминанта δ (§ 12). Обозначая ее через A_{ik}, находим, что в рассматриваемое нами разложение детерминанта δ_r' входит член — $b_i' a_{rk} A_{ik}$.

Суммируя все члены этого вида, мы получаем детерминант δ_r' в следующем виде:

$$\delta_r' = b_r'\delta - \sum_{i=1}^{i=p} b_i' \sum_{k=1}^{k=p} a_{rk} A_{ik}. \tag{12}$$

Эта формула выражает связь между детерминантами δ и δ_r'.

§ 34. Условия совместности системы линейных уравнений. Установив понятие о матрице системы линейных уравнений и ее главных и характеристических детерминантах, перейдем к выяснению условий, при которых уравнения системы оказываются совместными [1]).

Пусть дана система (7) m линейных уравнений с n неизвестными ($m > n$). Требуется указать те условия, которым должны удовлетворять коэфициенты системы для того, чтобы ее уравнения были совместны.

Ранг матрицы системы обозначим через p ($p \leqslant n$).

Перенеся члены с неизвестными $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ во вторые части уравнений, мы получим систему (10). Из нее возьмем p первых уравнений и еще r-е, причем r обозна-

---

[1]) В последующем изложении удержаны обозначения, указанные в § 32 и 33.

чает одно из чисел $p+1$, $p+2$, ..., m. Таким образом мы получим систему $p+1$ линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b'_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pp}x_p = b'_p, \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rp}x_p = b'_r. \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Умножив первое уравнение этой системы на

$$-(a_{r1}A_{11} + a_{r2}A_{12} + \ldots + a_{rp}A_{1p}) = -\sum_{k=1}^{k=p} a_{rk}A_{1k},$$

второе на

$$-(a_{r1}A_{21} + a_{r2}A_{22} + \ldots + a_{rp}A_{2p}) = -\sum_{k=1}^{k=p} a_{rk}A_{2k},$$

и т. д., p-е уравнение на

$$-(a_{r1}A_{p1} + a_{r2}A_{p2} + \ldots + a_{rp}A_{pp}) = -\sum_{k=1}^{k=p} a_{rk}A_{pk},$$

а последнее на δ (§ 32, формула 9) и сложив почленно, получим следующее уравнение:

$$\left[a_{r1}\delta - \sum_{i=1}^{i=p}\left(a_{i1}\sum_{k=1}^{k=p} a_{rk}A_{ik}\right)\right]x_1 +$$
$$+\left[a_{r2}\delta - \sum_{i=1}^{i=p}\left(a_{i2}\sum_{k=1}^{k=p} a_{rk}A_{ik}\right)\right]x_2 + \ldots$$
$$\ldots + \left[a_{rp}\delta - \sum_{i=1}^{i=p}\left(a_{ip}\sum_{k=1}^{k=p} a_{rk}A_{ik}\right)\right]x_p = b'_r\delta - \sum_{i=1}^{i=p}\left(b'_i\sum_{k=1}^{k=p} a_{rk}A_{ik}\right).$$

По формуле (12) § 33 вторая часть этого уравнения есть δ'_r. Коэфициент при x_s в первой части уравнения представляется суммою:

$$a_{rs}\delta - \sum_{i=1}^{i=p}\left(a_{is}\sum_{k=1}^{k=p} a_{rk}A_{ik}\right),$$

которая отличается от второй части формулы (12) тем, что вместо b'_i стоит a_{is} $(i = 1, 2, \ldots, p)$, а вместо b'_r стоит a_{rs}.

Из этого, на основании формулы (12), следует, что рассматриваемый коэфициент равен тому детерминанту, который получается из δ'_r указанными заменами элементов последнего столбца, т. е. детерминанту

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & a_{ps} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rp} & a_{rs} \end{vmatrix}.$$

Но при $s = 1, 2, \dots, p$ этот детерминант обращается в нуль, как имеющий два одинаковых столбца. Следовательно, указанное преобразование системы (13) приводит к уравнению:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_p = \delta'_r.$$

Если $\delta'_r \neq 0$, то этому уравнению нельзя удовлетворить никакими значениями неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Заметив, что $\delta'_r = \delta_r$, можно формулировать это заключение в следующей форме: если хотя один из характеристических детерминантов системы (7) отличен от нуля, то система несовместна.

Обратимся теперь к случаю, когда все характеристические детерминанты δ_r системы (7) равны нулю. В этом случае, по формуле (12), имеем равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \left(b'_i \sum_{k=1}^{k=p} a_{rk} A_{ik} \right) = b'_r \delta,$$

которое можно написать в следующем виде:

$$a_{r1} \sum_{i=1}^{i=p} b'_i A_{i1} + a_{r2} \sum_{i=1}^{i=p} b'_i A_{i2} + \dots + a_{rp} \sum_{i=1}^{i=p} b'_i A_{ip} = b'_r \delta.$$

Отсюда, так как $\delta \neq 0$, находим:

$$a_{r1} \cdot \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{i=p} b'_i A_{i1} + a_{r2} \cdot \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{i=p} b'_i A_{i2} + \dots + a_{rp} \cdot \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{i=p} b'_i A_{ip} = b'_r.$$

Сравнивая это равенство с последним уравнением системы (13), мы видим, что это уравнение удовлетворяется следующими значениями неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_p$:

$$x_s = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{i=p} b'_i A_{is} \qquad s = 1, 2, \dots, p. \tag{14}$$

Но эти значения $x_1, x_2, \ldots, x_p$ получаются при решении системы, состоящей из p первых уравнений системы (7). Так как детерминант δ этой системы p уравнений отличен от нуля, то система имеет единственное решение, даваемое формулами (14) (§ 29). Поэтому не существует других значений $x_1, x_2, \ldots, x_p$, удовлетворяющих всем уравнениям данной системы.

Во вторую часть формулы (14) входят выражения b_i', $(i=1, 2, \ldots, p)$, содержащие при $n>p$ неизвестные $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, значения которых остаются совершенно произвольными. Бесконечное множество значений каждого из них может сочетаться с бесконечным множеством значений каждого из остальных, а каждому сочетанию значений неизвестных $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, по формуле (14), соответствует одна определенная система значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Поэтому число решений системы (7) бесконечно, и система (7) оказывается, в случае $n>p$, неопределенной.

Число ее решений можно обозначить символом ∞^{n-p}, в котором показатель $n-p$ указывает, что неопределенность системы зависит от возможности дать совершенно произвольные значения $n-p$ неизвестным.

Если $p=n$, то $b_i'=b_i$ не содержат неизвестных, и формулы (14) дают единственное решение системы (7).

Резюмируя сказанное о решении системы (7), мы приходим к следующей теореме: система m линейных уравнений с n неизвестными $(m>n)$ не имеет решений, если не все характеристические детерминанты ее обращаются в нули; если же все характеристические детерминанты системы равны нулю, то при ранге ее матрицы, меньшем n, она имеет бесконечное множество решений, а при ранге матрицы, равном n, одно решение.

Следствие. Если система линейных уравнений имеет решение, то ранг ее матрицы указывает наименьшее число уравнений, которые нужно выделить из системы для получения ее решения.

§ 35. Другая форма условия совместности системы линейных уравнений. Присоединяя к матрице (8) новый столбец, элементами которого служат вторые части уравнений (7), получаем матрицу:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

которую можно назвать **расширенной** матрицей системы.

Все детерминанты матрицы (8) принадлежат и матрице (15). Поэтому ранг p' матрицы (15) не может быть меньше ранга p матрицы (8).

Детерминанты $(p+2)$-го и высших порядков матрицы (15) либо составлены из элементов первых n столбцов ее, либо содержат элементы b последнего столбца.

В первом случае они равны нулю, как принадлежащие матрице (8), которой ранг есть p. Во втором случае они также равны нулю, потому что адъюнкты элементов b выражаются детерминантами $(p+1)$-го и высших порядков, принадлежащими матрице (8). Поэтому ранг p' матрицы (15) меньше $p+2$. Следовательно, p' может быть равно p и $p+1$.

Если ранг матрицы (15) есть p, то все характеристические детерминанты системы (7) равны нулю, как детерминанты $(p+1)$-го порядка, принадлежащие матрице (15) ранга p. По доказанной в предыдущем параграфе теореме система (7) совместна.

Если ранг матрицы (15) есть $p+1$, то в числе принадлежащих ей детерминантов $(p+1)$-го порядка должны быть отличные от нуля. Но детерминанты $(p+1)$-го порядка распадаются на две группы: к одной принадлежат те, которые не содержат элементов b последнего столбца матрицы (15), к другой — те, которые содержат эти элементы. Детерминанты первой группы суть нули как принадлежащие матрице (8) ранга p. Следовательно, отличные от нуля детерминанты порядка $p+1$ должны содержаться во второй группе. Для системы (7) они являются характеристическими детерминантами.

По теореме § 34 система (7) в этом случае несовместна. Итак, условие совместности системы линейных уравнений можно выразить так: **если матрица системы не изменяет ранга от присоединения к ней столбца, элементами которого служат известные** члены уравнений, то система совместна; в противном случае система несовместна.

§ 36. Система n линейных уравнений с n неизвестными. Приложим теорему § 34 к системе (1) n линейных уравнений с n неизвестными (см. § 29).

За матрицу ее возьмем следующую:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Если ранг матрицы есть n, то главный детерминант есть $D = |a_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, и $D \neq 0$.

Характеристические детерминанты системы либо имеют две одинаковые строки, либо одну строку, все элементы которой суть нули. Следовательно, все они равны нулю.

По теореме § 34 система (1) имеет в этом случае единственное решение. Оно выражается формулами (4) § 29.

Если ранг матрицы меньше n, то система (1), по теореме § 34, либо несовместна, либо неопределенна. Но в этом случае $D = 0$, как детерминант n-го порядка, принадлежащий матрице, ранг которой меньше n. Отсюда вытекает заключение, что отличие от нуля детерминанта D является не только достаточным, как это было показано в § 29, но и необходимым условием того, что система (1) имеет единственное решение.

§ 37. Система $n+1$ линейных уравнений с n неизвестными. Посредством теоремы § 34 легко вывести условие совместности $n+1$ линейных уравнений с n неизвестными.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 &+ a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \\ a_{n+1,1}x_1 &+ a_{n+1,2}x_2 + \dots + a_{n+1,n}x_n = b_{n+1}. \end{aligned}$$

Для того чтобы уравнения этой системы были совместны, по § 35, необходимо и достаточно, чтобы ранг матриц

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} \end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{matrix}\right\|$$

был одинаков. Ранг первой из них не может быть больше n. Поэтому детерминанты $(n+1)$-го порядка, принадлежащие второй матрице, должны обращаться в нуль. Но второй матрице принадлежит только один детерминант $(n+1)$-го порядка, а именно:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, условие совместности $n+1$ линейных уравнений с n неизвестными заключается в обращении в нуль детерминанта D', составленного из коэфициентов при неизвестных и известных членах системы.

§ 38. Система линейных однородных уравнений. Линейное уравнение называется однородным, если известный член его есть нуль. Например, уравнения $ax + by = 0$, $ax + by + cz = 0$ суть линейные однородные уравнения, первое с двумя, а второе с тремя неизвестными.

Пусть дана система m линейных уравнений:

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (16)$$

с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Очевидно, что

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0 \qquad (17)$$

представляет решение системы (16).

Но в некоторых случаях система (16) удовлетворяется еще и отличными от нуля значениями неизвестных. Для выяснения условий, при которых система (16) имеет решения, состоящие из отличных от нуля значений неизвестных, воспользуемся теоремой § 34.

Так как все характеристические детерминанты системы (§ 32) равны нулю, то, по этой теореме, система (17) всегда совместна.

Если ранг p ее матрицы равен числу n неизвестных, то она имеет единственное решение. Но система (17) представляет решение системы (16) во всех случаях, следовательно, при $p=n$ система (16) не удовлетворяется значениями неизвестных, отличными от нуля.

Если $p<n$, то система (16) имеет бесчисленное множество решений; следовательно, она имеет решения, отличные от системы (17), т. е. удовлетворяется значениями неизвестных, отличными от нуля.

Итак, для того чтобы система (16) удовлетворялась такими системами значений неизвестных, в состав которых входят значения, отличные от нуля, необходимо, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных.

Это предложение справедливо как для $m>n$, так и для $m \leqslant n$. В случае $m<n$ ранг матрицы системы не больше m и, следовательно, меньше n. Поэтому система линейных однородных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, всегда имеет решения, состоящие не из одних нулей.

В случае $m=n$ имеем систему:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Для того чтобы система (18) удовлетворялась значениями неизвестных, среди которых есть отличные от нуля, необходимо, чтобы ранг ее матрицы был меньше n. Но система имеет квадратную матрицу, содержащую n строк и n столбцов. Единственный детерминант n-го порядка, ей принадлежащий, есть

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Для того чтобы ранг матрицы был меньше n, необходимо, чтобы $D = 0$.

Итак, **обращение в нуль детерминанта, составленного из коэфициентов при неизвестных в системе (18), есть условие существования решений, в состав которых входят значения неизвестных, отличные от нуля.**

Рассмотрим тот случай, когда ранг матрицы системы (18) равен $n-1$. В этом случае один, по крайней мере, из миноров $(n-1)$-го порядка детерминанта D отличен от нуля. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решим систему первых $n-1$ уравнений системы (18) относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Так как $\Delta \neq 0$, то мы получим единственную систему значений этих неизвестных (§ 29)

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1,i-1} & -a_{1n} & a_{1,i+1} & \dots a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2,i-1} & -a_{2n} & a_{2,i+1} & \dots a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots a_{n-1,i-1} & -a_{n-1,n} & a_{n-1,i+1} & \dots a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Нетрудно показать, что детерминант, стоящий во второй части этого равенства, есть не что иное, как адъюнкта A_{ni} элемента a_{ni} детерминанта D. Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,i-1} & -a_{1n} & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,i-1} & -a_{2n} & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,i-1} & -a_{n-1,n} & a_{n-1,i+1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+n-1-i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,i-1} & a_{n-1,i+1} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Так как $(-1)^{1+n-1-i} = (-1)^{n-i} = (-1)^{n-i+2i} = (-1)^{n+i}$, то вторая часть этого равенства есть A_{ni} (§ 12). Кроме того, легко видеть, что $\Delta = A_{nn}$. Поэтому

$$x_i = \frac{A_{ni} x_n}{A_{nn}}.$$

Полагая в этой формуле $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и сравнивая результаты, находим, что

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_{n1} : A_{n2} : \ldots A_{nn}. \qquad (20)$$

Заметим, что по свойству адъюнкт детерминанта, равного нулю (§ 14), имеют место соотношения:

$$A_{i1} : A_{i2} : \ldots : A_{in} = A_{n1} : A_{n2} : \ldots : A_{nn} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Поэтому из формулы (20) следует, что в рассматриваемом нами случае система (18) удовлетворяется значениями неизвестных, пропорциональными адъюнктам элементов строки детерминанта D.

§ 39. Примеры. 1. Рассмотрим решение системы двух линейных уравнений

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \quad a_2 x + b_2 y = c_2$$

с двумя неизвестными x и y.

Матрица этой системы и расширенная матрица соответственно таковы:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix}.$$

Если ранг первой из них есть 2, то и ранг второй есть 2. В этом случае система имеет единственное решение, выражаемое формулами:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

(Ср. § 3 и 29).

b) Если ранг первой матрицы есть 1, а ранг второй 2, то система решений не имеет. В этом случае

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

а из детерминантов

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1 c_2 - b_2 c_1,$$

по крайней мере, один отличен от нуля.

Из этого следует, что $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 \neq kc_1$.

Второе уравнение системы приводится к уравнению

$$k(a_1 x + b_1 y) = c_2,$$

которое, по неравенству: $c_2 \neq kc_1$, несовместно с первым.

c) Если ранг той и другой матрицы есть 1, то данная система имеет бесчисленное множество решений.

В этом случае

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим, что $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$.

Второе уравнение системы приводится к уравнению

$$ka_1 x + kb_1 y = kc_1,$$

которое равносильно первому. Для получения одного из решений системы достаточно дать одному из неизвестных произвольное значение, а соответственное значение другого вычислить из первого уравнения.

Если x и y обозначают прямолинейные координаты точки на плоскости, то каждое из уравнений рассматриваемой системы представляет уравнение прямой. Решение систем дает координаты общей точки этих прямых, т. е. точки их пересечения.

В случае a) прямые не параллельны и имеют одну общую точку.

В случае b) они параллельны и общих точек не имеют.

В случае c) они параллельны и сливаются в одну прямую, так что за точку их пересечения можно взять любую точку этой прямой.

2. Рассмотрим систему трех линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= d_1,\\
a_2x + b_2y + c_2z &= d_2,\\
a_3x + b_3y + c_3z &= d_3
\end{aligned}
$$

с тремя неизвестными x, y, z.

Матрица и расширенная матрица системы суть соответственно

$$
\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix} \quad (\alpha) \qquad \text{и} \qquad \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix}. \quad (\beta)
$$

a) Если ранг матрицы (α) есть 3, то и ранг матрицы (β) есть 3. В этом случае система имеет единственное решение, выражаемое формулами (ср. § 4 и 29):

$$
x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad z = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},
$$

где

$$
D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.
$$

b) Если ранг матрицы (α) есть 2, а ранг матрицы (β) есть 3, то система не имеет решений. В этом случае детерминант $D = 0$. Разлагая его по элементам первого, второго и третьего столбцов, получаем равенства:

$$
\left.\begin{aligned}
a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 &= 0,\\
b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 &= 0,\\
c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)
$$

где A_i, B_i и C_i суть адъюнкты соответственно элементов a_i, b_i и c_i ($i=1, 2, 3$). Так как, по предположению, ранг матрицы (α) равен 2, то, по крайней мере, один из детерминантов A_i, B_i и C_i отличен от нуля (§ 30). Пусть $A_1 \neq 0$.

По свойству детерминанта, равного нулю, имеем ряд следующих отношений (§ 14):

$$A_1 : A_2 : A_3 = B_1 : B_2 : B_3 = C_1 : C_2 : C_3 = k : l : m,$$

где k, l и m суть постоянные числа, причем $k \neq 0$, так как, по предположению, $A_1 \neq 0$.

Отсюда находим, что

$$A_2 = \frac{lA_1}{k}, \quad B_2 = \frac{lB_1}{k}, \quad C_2 = \frac{lC_1}{k},$$

$$A_3 = \frac{mA_1}{k}, \quad B_3 = \frac{mB_1}{k}, \quad C_3 = \frac{mC_1}{k}.$$

Подставив эти значения A_2, B_2, C_2, A_3, B_3 и C_3 в равенства (γ), сократив их соответственно на A_1, B_1 и C_1 и положив

$$\frac{l}{k} = -\lambda, \quad \frac{m}{k} = -\mu,$$

получим:

$$a_1 = \lambda a_2 + \mu a_3, \quad b_1 = \lambda b_2 + \mu b_3, \quad c_1 = \lambda c_2 + \mu c_3. \qquad (\delta)$$

Эти соотношения показывают, что элементы первой строки детерминанта D представляют одинаковые линейные функции соответственных элементов второй и третьей строк.

Из равенств (δ) вытекает следующее соотношение между первыми частями уравнений рассматриваемой системы:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = \lambda (a_2 x + b_2 y + c_2 z) + \mu (a_3 x + b_3 y + c_3 z).$$

Докажем, что $d_1 \neq \lambda d_2 + \mu d_3$, т. е. что между вторыми частями этих уравнений аналогичного соотношения не существует, если ранг матрицы (β) есть 3.

Ранг матрицы (β), по § 31, одинаков с рангом матрицы:

$$\begin{Vmatrix} a_1 - \lambda a_2 - \mu a_3 & b_1 - \lambda b_2 - \mu b_3 & c_1 - \lambda c_2 - \mu c_3 & d_1 - \lambda d_2 - \mu d_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix}.$$

Если бы $d_1 = \lambda d_2 + \mu d_3$, то все элементы первой строки этой матрицы обратились бы в нуль по формуле (δ). Поэтому ее ранг, а следовательно, и ранг матрицы (β), не мог бы равняться 3, что противоречит предложению. Итак, $d_1 \neq \lambda d_2 + \mu d_3$.

Умножая второе уравнение системы на λ и третье на μ, складывая их почленно и принимая во внимание равенства (δ), мы получаем уравнение

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = \lambda d_2 + \mu d_3,$$

противоречащее первому уравнению системы.

c) Если ранг каждой из матриц (α) и (β) равен 2, то система имеет бесчисленное множество (∞^1) решений.

Из рассуждений, приведенных при рассмотрении случая *b*), видно, что в настоящем случае $d_1 = \lambda d_2 + \mu d_3$, и первое уравнение системы есть следствие двух остальных; оно получается через почленное сложение второго и третьего уравнений, умноженных соответственно на λ и μ.

Таким образом мы имеем в системе лишь два независимых уравнения; из них можно определить значения двух неизвестных в функции третьего, значения которого остаются произвольными.

d) Если ранг матрицы (α) равен 1, а ранг матрицы (β) есть 2, система решений не имеет.

Так как в этом случае все миноры 2-го порядка детерминанта D равны нулю, то коэфициенты уравнений системы пропорциональны:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \lambda a_1, & b_2 &= \lambda b_1, & c_2 &= \lambda c_1, \\ a_3 &= \mu a_1, & b_3 &= \mu b_1, & c_3 &= \mu c_1. \end{aligned}\right\} \tag{ε}$$

Если бы при этом удовлетворялись равенства

$$d_2 = \lambda d_1, \quad d_3 = \mu d_1, \tag{ζ}$$

то матрицу (β) можно было бы переписать в следующем виде:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 & \lambda d_1 \\ \mu a_1 & \mu b_1 & \mu c_1 & \mu d_1 \end{matrix} \right\|.$$

Но легко видеть, что ранг этой матрицы есть 1, а не 2, что противоречит предположению. Следовательно, существует, по крайней мере, одно из неравенств:

$$d_2 \neq \lambda d_1, \quad d_3 \neq \mu d_1.$$

Умножение первого уравнения системы на λ и на μ приводит в этом случае, по крайней мере, к одному уравнению, которое противоречит одному из остальных уравнений системы.

e) Если ранг каждой из матриц (α) и (β) равен 1, система имеет бесчисленное множество (∞^2) решений.

В этом случае удовлетворяются равенства (ε) и (ζ), и система содержит только одно независимое уравнение. Из него можно определить значение одного из неизвестных через два другие, значения которых остаются совершенно произвольными.

Если x, y, z обозначают прямолинейные координаты точки в пространстве, то каждое из уравнений системы есть уравнение плоскости. С геометрической точки зрения решение рассматриваемой системы есть не что иное, как определение точки пересечения трех плоскостей.

В случае *a*) данные плоскости не параллельны и имеют одну общую точку.

В случае *b*) две плоскости не параллельны, а третья параллельна прямой их пересечения. Три плоскости общих точек не имеют.

В случае *c*) две плоскости не параллельны, а третья проходит через прямую их пересечения. Все точки этой прямой являются общими точками всех трех плоскостей.

В случае *d*) три плоскости параллельны и общих точек нет.

Наконец, в случае *e*) три плоскости параллельны и совпадают в одну. Каждая точка этой плоскости является общей точкой трех данных плоскостей.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 4, \\ 3x + 4y - 2z &= 5, \\ 4x + 5y + 6z &= 15, \\ 7x - 2y - 3z &= 2. \end{aligned}$$

Так как детерминант

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

равен нулю, то данная система имеет решение (§ 37).

Ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & -3 \end{matrix} \right\|$$

есть 3, потому что детерминант

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 141 \neq 0.$$

Система имеет только одно решение (§ 34). Для нахождения его достаточно решить систему, составленную из первых трех уравнений данной системы. Сделав это, получим: $x=1$, $y=1$, $z=1$.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 4, \\ 3x + 4y - 2z &= 5, \\ 13x + 6y + 4z &= 23, \\ 10x + 19y - 13z &= 16. \end{aligned}$$

Система имеет решения, так как детерминант

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \\ 13 & 6 & 4 & 23 \\ 10 & 19 & -13 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг матрицы $\left\| \begin{matrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 13 & 6 & 4 \\ 10 & 19 & -13 \end{matrix} \right\|$

равен 2, потому что

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 13 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 10 & 19 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 13 & 6 & 4 \\ 10 & 19 & -13 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17 \neq 0.$$

Поэтому в системе лишь два независимых уравнения, а два других являются следствиями первых. Решая два уравнения системы, мы найдем выражения двух неизвестных через третье, значение которого остается произвольным. Система имеет бесчисленное множество (∞^1) решений.

5. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z&=0,\\ x-2y+5z&=0,\\ 3x+y-2z&=0. \end{aligned}$$

Так как детерминант $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 77 \neq 0,$

то система имеет единственное решение: $x=y=z=0$.

6. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z&=0,\\ x-2y+5z&=0,\\ 3x+8y+3z&=0. \end{aligned}$$

Так как детерминант $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0,$ то, кроме решения $x=y=z=0$, система имеет решения, доставляемые соотношениями:

$$x:y:z=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 23:-6:-7.$$

Упражнения.

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ ax+by+cz&=k,\\ a^2x+b^2y+c^2z&=k^2, \end{aligned}$$

где a, b и c обозначают неравные между собою числа.

Ответ. $x=\dfrac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}$, $y=\dfrac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)}$, $z=\dfrac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}$.

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x+y+z&=a+b+c,\\ bx+cy+az&=bc+ca+ab,\\ cx+ay+bz&=bc+ca+ab. \end{aligned}$$

Ответ. $x=a$, $y=b$, $z=c$.

3. Решить систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
ax + by + cz &= a + b + c,\\
a^2x + b^2y + c^2z &= (a + b + c)^2,\\
bcx + cay + abz &= 0,
\end{aligned}
$$

где a, b и c суть различные между собою числа.

Ответ. $x = a\dfrac{a+b+c}{(b-a)(c-a)}$; $y = b\dfrac{a+b+c}{(a-b)(c-b)}$; $z = c\dfrac{a+b+c}{(a-c)(b-c)}$.

4. Решить систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
\lambda x + y + z &= 1,\\
x + \lambda y + z &= \lambda,\\
x + y + \lambda z &= \lambda^2,
\end{aligned}
$$

где λ есть переменное число. Исследовать решение при различных значениях λ.

Ответ. При $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$ решение системы одно:

$$x = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2};\quad y = \frac{1}{\lambda+2};\quad z = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

При $\lambda = 1$ система имеет ∞^2 решений; при $\lambda = -2$ не имеет решений.

5. Решить систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 6,\\
4x + 5y + 6z &= -2,\\
7x + 8y + 9z &= 9.
\end{aligned}
$$

Ответ. Система не имеет решений.

6. Решить систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
x + y + z + t &= 1,\\
ax + by + cz + dt &= k,\\
a^2x + b^2y + c^2z + d^2t &= k^2,\\
a^3x + b^3y + c^3z + d^3t &= k^3,
\end{aligned}
$$

где a, b, c и d суть различные между собою числа.

Ответ. $x = \dfrac{(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$.

7. Решить систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 2,\\
3x + 2y - z &= 0,\\
5x - 3y + 3z &= 22,\\
x + 5y + 7z &= 6.
\end{aligned}
$$

Ответ. $x = 2$, $y = -2$, $z = 2$.

8. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ 4x - y + 3z &= 0, \\ 2x + 7y + 9z &= 0, \\ 2x + 3y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

Ответ. Система не имеет решений.

9. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} 7x + 13y + 10z + 6t &= 0, \\ 5x + 9y + 7z + 4t &= 0, \\ 8x + 12y + 11z + 7t &= 0, \\ 4x + 10y + 6z + 3t &= 0. \end{aligned}$$

Ответ. $x : y : z : t = 5 : 1 : -6 : 2$.

10. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a_1, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= a_2, \\ x_3 + x_4 + x_5 &= a_3, \\ x_4 + x_5 + x_1 &= a_4, \\ x_5 + x_1 + x_2 &= a_5. \end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = a_1 + a_4 - \frac{1}{3}\sum a$; $x_2 = a_2 + a_5 - \frac{1}{3}\sum a$; $x_3 = a_3 + a_1 - \frac{1}{3}\sum a$; $x_4 = a_4 + a_2 - \frac{1}{3}\sum a$; $x_5 = a_5 + a_3 - \frac{1}{3}\sum a$.