А. А. ВОЛКОВЪ и А. П. ПОЛЯКОВЪ.

ЛЕКЦІИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКѢ,

читанныя въ Московскомъ Высшемъ Техническомъ Училищѣ
и Московскомъ Институтѣ Инженеровъ Путей Сообщенія.

ВЫПУСКЪ I.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Издана подъ редакціей
С. П. ФИНИКОВА.

Изданіе Ѳ. В. Гусева,
Москва, 1918.

МОСКВА.
Типографія Русскаго Товарищества Печатнаго и Издательскаго дѣла.
Чистые пруды, Мыльниковъ пер., соб. д. Тел. 18-35.

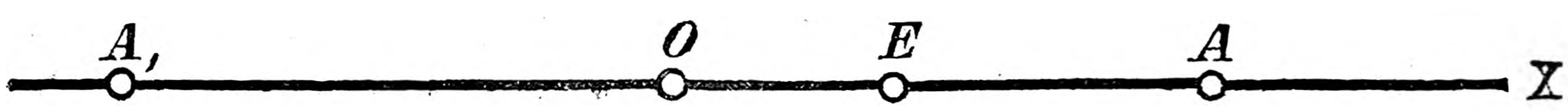
ВВЕДЕНІЕ.

Къ 1637 году относится появленіе въ свѣтъ „Геометріи" Декарта. Трудно указать другую книгу, которая имѣла бы такое громадное вліяніе на дальнѣйшее развитіе математики, какъ отмѣченное сочиненіе. Въ этой книгѣ Декартъ послѣдовательно примѣняетъ такъ называемый методъ координатъ, устанавливающій однозначное соотвѣтствіе между точками, расположенными на какомъ-нибудь протяженіи, напр., на плоскости, и группами чиселъ (взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ)—координатами точки. Установленіе такого соотвѣтствія связываетъ анализъ съ геометріей и даетъ возможность примѣнять методы анализа къ изученію геометрическихъ образовъ. Установленіе при помощи метода координатъ тѣсной связи между анализомъ и геометріей дало сильный толчокъ къ дальнѣйшему развитію математики, и вся такъ называемая „высшая математика" построена на томъ фундаментѣ, который былъ заложенъ Декартомъ.

ГЛАВА I.

Аналитическая геометрія на прямой.

§ 1. Методъ координатъ на прямой. Возьмемъ произвольную прямую и на ней отмѣтимъ нѣкоторую точку O (см. фиг. 1), относительно которой условимся опредѣлять положеніе остальныхъ точекъ прямой. Точку O будемъ называть началомъ отсчета или началомъ координатъ, самую же прямую—осью OX или осью X, а также осью абсциссъ.



Фиг. 1.

Тогда каждой точкѣ A оси X будетъ соотвѣтствовать опредѣленный отрѣзокъ OA. Найдя отношеніе его къ другому отрѣзку OE, принятому за единицу длины, мы получимъ нѣкоторое число x, которое назовемъ абсциссой точки A или координатой ея. Это число будетъ раціональнымъ, если OA соизмѣримо съ OE, и ирраціональнымъ, если OA и OE несоизмѣримы.

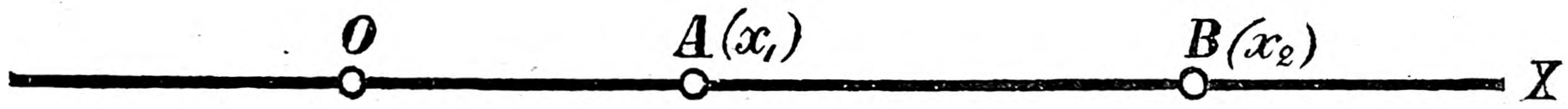
Изъ самаго пріема полученія абсциссы видно, что каждой точкѣ A оси X соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная абсцисса. Разъ даны единица мѣры и начало координатъ, легко показать, что при тѣхъ же самыхъ условіяхъ обратное утвержденіе не вѣрно. Въ самомъ дѣлѣ, одной и той же абсциссѣ x соотвѣтствуетъ не одна точка A, а еще, кромѣ того, точка A_1, находящаяся на томъ же разстояніи отъ начала координатъ, что и первая. Для того, чтобы каждому числу соотвѣтствовала единственная вполнѣ опредѣленная точка, будемъ различать отрѣзки не только по величинѣ, но и по направленію.

Слѣдуя Декарту, условимся считать направленіе вправо положительнымъ, направленіе влѣво—отрицательнымъ [1]). При этомъ условіи точки, расположенныя вправо отъ начала координатъ, будутъ обладать положительными абсциссами, точки, лежащія влѣво,—отрицательными. Такимъ образомъ, *каждой точкѣ на прямой соотвѣтствуетъ единствен-*

[1]) Вообще, осью мы будемъ называть прямую съ опредѣленнымъ положительнымъ направленіемъ.

ное (положительное или отрицательное) *число* и обратно — *каждому числу соотвѣтствуетъ единственная точка на прямой* [1]). Этимъ свойствомъ обладаютъ всѣ точки прямой, если принять, что абсцисса начала координатъ равна нулю. Такимъ образомъ, въ дальнѣйшемъ выраженіе „дана точка на оси" будетъ для насъ имѣть смыслъ „дано число, представляющее координату точки". Всякую точку на оси, напр. A съ ея абсциссой a, мы будемъ поэтому обозначать такимъ образомъ: $A(a)$.

§ 2. Задачи. 1. Найти разстояніе между двумя точками. Пусть намъ даны двѣ точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$ (см. фиг. 2). Опре-



Фиг. 2.

дѣлимъ разстояніе между ними, т.-е. выразимъ его черезъ данныя абсциссы.

Такъ какъ A лежитъ между O и B, то $OB=OA+AB$, или $AB=OB-OA$ или (переходя отъ отрѣзковъ къ соотвѣтствующимъ абсциссамъ [2]) и обозначая буквой d искомое разстояніе):

$$d=x_2-x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Выраженіе $d=x_2-x_1$ мы получили, принявъ за начало отрѣзка точку A, а за конецъ B; если мы примемъ за начало B, а за конецъ A, то выраженіе разстоянія приметъ видъ $d'=x_1-x_2$, т.-е. перемѣнитъ знакъ. Отсюда видимъ, что разстояніе между точками можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ въ зависимости отъ того, какую точку отрѣзка примемъ за начало, какую за конецъ. Если при этомъ выборѣ *направленіе* отрѣзка совпадетъ съ направленіемъ оси, то d положительное, если оно будетъ противоположно направленію оси, то d будетъ отрицательнымъ.

Если опредѣлять разстояніе между двумя точками не только по абсолютному значенію, то ясно, что

$$AB=-BA \text{ или } AB+BA=0.$$

Нетрудно показать также, что въ этомъ случаѣ $AB+BC=AC$ будетъ справедливо независимо отъ того, будетъ ли точка B лежать между A и C. Въ самомъ дѣлѣ, пусть A,B и C имѣютъ расположеніе, какъ на фиг. 3.

Фиг. 3.

Тогда $BA+AC=BC$; но $BA=-AB$, откуда

$$AC=BC-BA=BC+AB=AB+BC.$$

---

[1]) Указанное положеніе мы считаемъ *очевиднымъ*; оно представляетъ такъ называемую аксіому Кантора-Дедекинда.

[2]) Для краткости нерѣдко абсциссой называютъ самый отрѣзокъ, отношеніе котораго къ единицѣ длины и представляетъ собою собственно абсциссу.

Тотъ же результатъ получимъ и при расположенiи C между A и B.

2. Раздѣлить отрѣзокъ въ данномъ отношенiи.

Пусть данъ отрѣзокъ M_1M_2 (см. фиг. 4), абсциссами концовъ котораго служатъ соотвѣтственно x_1 и x_2. Положимъ, что точка $M(x)$ дѣлитъ отрѣзокъ M_1M_2 въ данномъ отношенiи l, т.-е.

$$\frac{M_1M}{MM_2}=l.$$

Фиг. 4.

Найдемъ ея абсциссу x. Пользуясь результатами предыдущей задачи, мы можемъ полученное соотношенiе представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=l,$$

откуда

$$x=\frac{x_1+lx_2}{1+l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Въ этой формулѣ мы считаемъ l положительнымъ числомъ: посмотримъ, нельзя ли дать геометрическое истолкованiе и тому случаю, когда l отрицательно. Для этого необходимо, чтобы въ соотношенiи (1) отрѣзки M_1M и MM_2 были противоположно направлены, а это будетъ тогда, когда точка M лежитъ на продолженiи отрѣзка M_1M_2. Въ первомъ случаѣ говорятъ, что точка M дѣлитъ отрѣзокъ M_1M_2 *внутреннимъ* образомъ, во второмъ, что она дѣлитъ его *внѣшнимъ* образомъ.

Разсмотримъ частный *случай*, когда $l=-1$;

тогда

$$x=\frac{x_1-x_2}{0}$$

и такъ какъ, вообще говоря, $x_1\neq x_2$, то выраженiе x въ этомъ случаѣ не имѣетъ смысла; но если разсматривать выраженiе вида $\frac{a}{0}$, какъ предѣлъ выраженiя $\frac{a}{\alpha}$ при α—неограниченно приближающемся къ 0, то дробь $\frac{a}{\alpha}$ при неограниченно убывающемъ α неограниченно возрастаетъ, по абсолютной величинѣ; эту мысль обычно выражаютъ словами $\frac{a}{0}$ равно безконечности и обозначаютъ $\frac{a}{0}=\infty$. Такимъ образомъ область чиселъ, разсматриваемыхъ въ алгебрѣ, пополняется новымъ числомъ ∞, и такъ какъ мы приняли за аксiому, что каждому числу на оси соотвѣтствуетъ точка, то мы должны ввести понятiе о точкѣ, абсцисса которой $=\infty$. Такую точку мы будемъ называть безконечно удаленной точкой прямой.

Благодаря введенію понятія о безконечно удаленной точкѣ, параллельныя прямыя могутъ быть опредѣлены, какъ пересѣкающіяся въ безконечности (имѣющія общую безконечно удаленную точку); такимъ образомъ оказывается возможнымъ утверждать, что любыя двѣ прямыя всегда имѣютъ одну общую точку; чтобы послѣднее утвержденіе могло быть высказано въ указанной формѣ, необходимо признать на каждой прямой существованіе *одной* безконечно удаленной точки и только одной.

При такомъ взглядѣ на прямую послѣдняя является линіей, которая замыкается безконечно удаленной точкой.

§ **3. Геометрическое значеніе уравненій.** Абсцисса точки можетъ быть дана не непосредственно, а опредѣлена при помощи уравненія. Если это уравненіе первой степени, то оно всегда можетъ быть приведено къ виду $x=a$, дающему значеніе абсциссы. Если уравненіе, опредѣляющее x, есть уравненіе второй степени $ax^2+bx+c=0$, то, такъ какъ такое уравненіе имѣетъ два корня: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, то уравненіе опредѣляетъ пару точекъ, абсциссами которыхъ являются значенія x_1 и x_2. Если x_1 и x_2 имѣютъ значенія дѣйствительныя и различныя, то говорятъ, что квадратное уравненіе опредѣляетъ двѣ различныхъ точки, если $x_1=x_2$, то говорятъ, что уравненіе опредѣляетъ двѣ слившихся точки, если x_1 и x_2 имѣютъ мнимыя значенія, то говорятъ, что соотвѣтствующее уравненіе опредѣляетъ пару мнимыхъ точекъ. Замѣчательно то, что середина отрѣзка ограниченнаго точками съ абсциссами x_1 и x_2 (при дѣйствительныхъ a, b и c) всегда дѣйствительна, такъ какъ $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$, хотя бы концы отрѣзка и были мнимы.

Если уравненіе, опредѣляющее x, будетъ n-ой степени, то оно опредѣлитъ группу n точекъ (дѣйствительныхъ, сливающихся или мнимыхъ). Уравненіе вида

$$\sin(\pi x)=0$$

опредѣлитъ безчисленное множество точекъ, абсциссами которыхъ служатъ любыя цѣлыя числа.

Обозначая выраженіе, содержащее абсциссу x, символомъ $F(x)$, мы приходимъ къ выводу, что вообще уравненіе

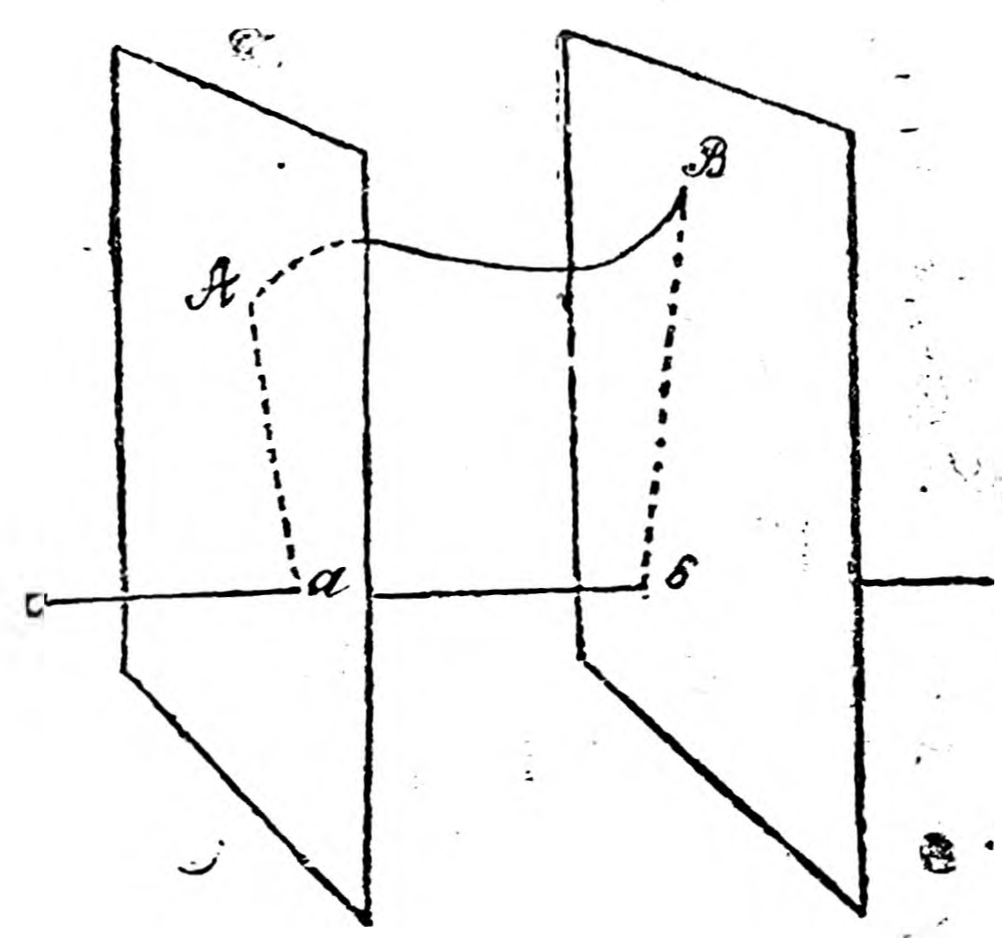
$$F(x)=0$$

опредѣляетъ группу точекъ, раздѣльно расположенныхъ на прямой.

ГЛАВА II.

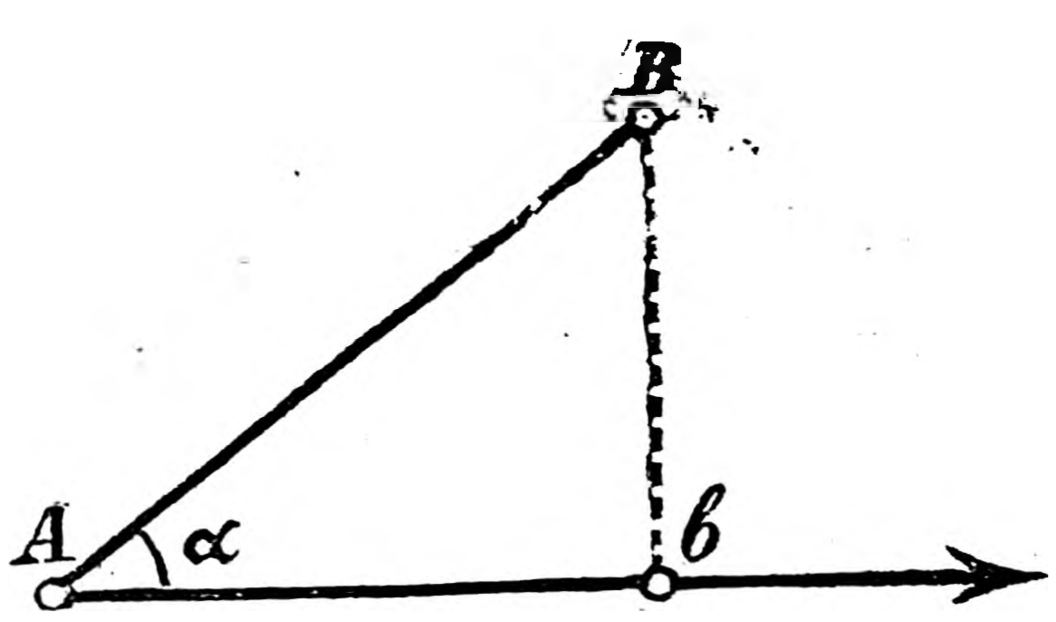
Теорія проекцій.

§ 1. **Проекція точки и отрѣзка.** Проекціей точки на прямую называется основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на прямую. Проекціей отрѣзка (прямолинейнаго или криволинейнаго) на прямую называется отрѣзокъ, опредѣляемый проекціями концовъ даннаго отрѣзка. Если на прямой, на которую проектируютъ, выбрано положительное направленіе (прямая есть ось), то проекція отрѣзка можетъ быть положительной или отрицательной. Если проектируемый отрѣзокъ и ось проекцій не располагаются въ одной плоскости, то для построенія проекціи удобно черезъ концы проектируемаго отрѣзка провести плоскости, перпендикулярныя оси проекцій (см. фиг. 5). Если проектируемый отрѣзокъ и ось проекцій лежатъ въ одной плоскости, то для построенія проекціи отрѣзка достаточно въ этой плоскости изъ концовъ отрѣзка опустить перпендикуляры на ось.



Фиг. 5.

Теорема 1. *Проекція отрѣзка на ось, проходящую черезъ его начало, равна проектируемому отрѣзку, умноженному на косинусъ угла между нимъ и осью проекцій.* Если проектируемый отрѣзокъ AB (см. фиг. 6) принять за подвижной радіусъ тригонометрическаго круга, а ось проекцій за первый его радіусъ, то по опредѣленію косинуса имѣемъ:

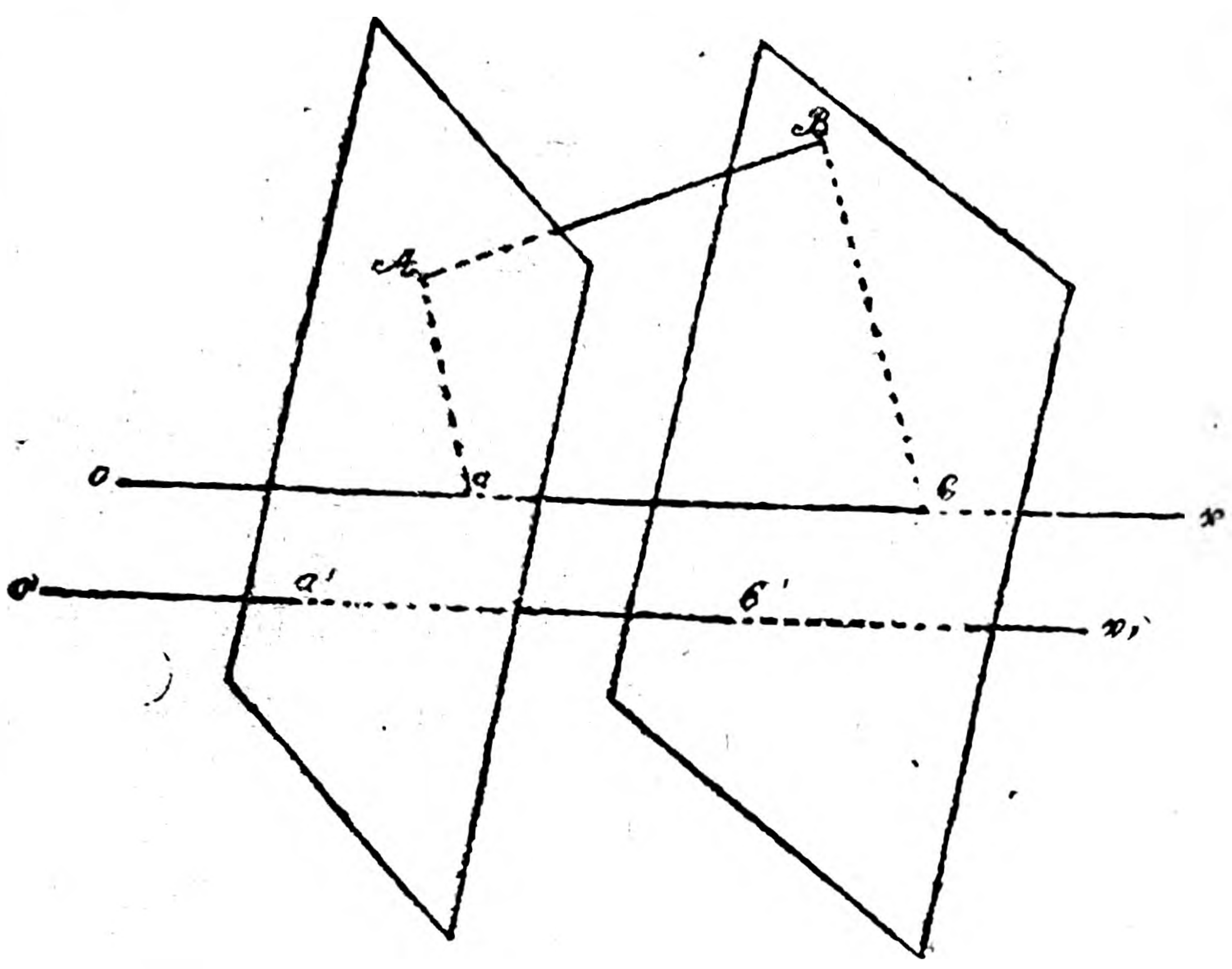


Фиг. 6.

$$\cos\alpha = \frac{Ab}{AB}, \text{ или } Ab = AB\cos\alpha,$$

при чемъ функція $\cos\alpha$ опредѣлена такъ, что $\cos\alpha$ положителенъ, если линія косинуса Ab имѣетъ положительное значеніе (имѣетъ направленіе, совпадающее съ направленіемъ оси), а если Ab имѣетъ отрицательное значеніе (направленіе Ab противоположно направленію оси), то $\cos\alpha$ отрицательно. Отсюда слѣдуетъ, что формула $Ab = AB\cos\alpha$ опредѣляетъ проекцію отрѣзка и по абсолютному значенію и по знаку.

Теорема 2. *Проекціи одного и того же отрѣзка на параллельныя оси, имѣющія одно и то же направленіе, равны.* Пусть имѣемъ (см. фиг. 7) отрѣзокъ AB и двѣ параллельныя оси OX и $O'X'$, имѣющія одно и то же направленіе. Проводя черезъ концы отрѣзка AB плоскости перпендикулярныя къ одной изъ осей (онѣ будутъ перпендикулярны и къ другой) получимъ на осяхъ пару отрѣзковъ ab и $a'b'$, которые будутъ равны другъ другу и по величинѣ и по направленію (какъ отрѣзки параллельныхъ прямыхъ между параллельными плоскостями).



Фиг. 7.

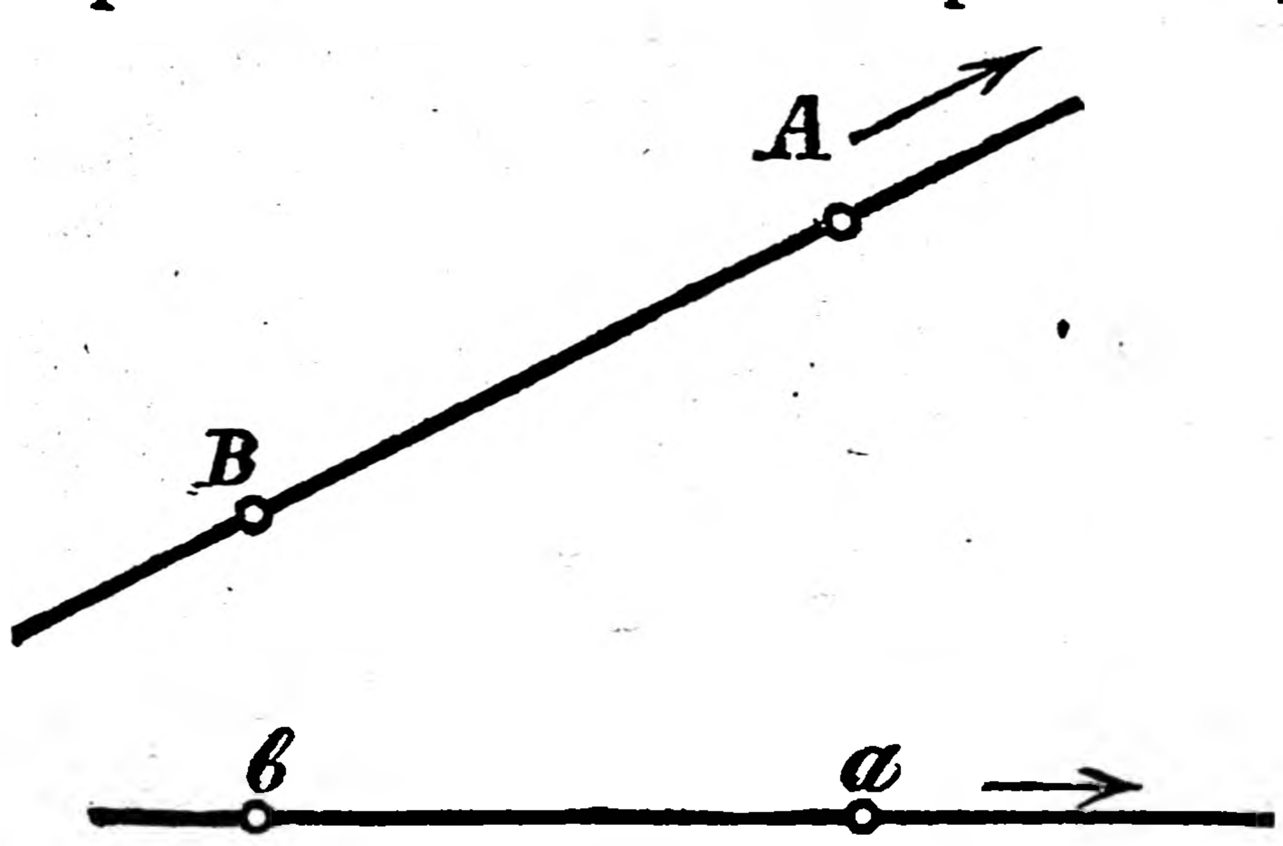
Теорема 3. *Проекція отрѣзка на любую ось равна проектируемому отрѣзку, умноженному на косинусъ угла между нимъ и осью проекцій.* Если данъ отрѣзокъ AB и требуется найти его проекцію на произвольную ось OX, то проводимъ черезъ начало отрѣзка ось, параллельную оси OX и имѣющую съ ней одно и то же направленіе.

Тогда на основаніи теоремы 1-й проекція на новую ось будетъ равна $AB \cos \alpha$, а по теоремѣ 3-ей то же значеніе будетъ имѣть и проекція на ось OX.

Проектируемый отрѣзокъ можетъ также самъ лежать на нѣкоторой оси и поэтому имѣть положительное или отрицательное значеніе. Въ послѣднемъ случаѣ теорема о проекціи отрѣзка принимаетъ такой видъ:

Проекція отрѣзка, лежащаго на оси, на другую ось равна относительному значенію отрѣзка, умноженному на косинусъ угла между осями.

Справедливость этой теоремы очевидна для того случая, когда отрѣзокъ имѣетъ направленіе, совпадающее съ направленіемъ оси.



Фиг. 8.

Поэтому ее остается доказать для случая, когда направленіе отрѣзка противоположно направленію оси, и, слѣдовательно, проектируемый отрѣзокъ имѣетъ отрицательное значеніе.

Пусть отрѣзокъ AB (см. фиг. 8) имѣетъ направленіе, противоположное направленію оси, на которой онъ лежитъ, тогда отрѣзокъ BA имѣетъ направленіе, совпадающее съ направленіемъ оси и, слѣдовательно, положительное значеніе. Имѣемъ $ba = BA \cos \alpha$ (гдѣ α уголъ между осями); но $ba = -ab$, $BA = -AB$, откуда

$$-ab = -AB \cos\alpha, \text{ или}$$
$$ab = AB \cos \alpha.$$

Теорема. *Проекція ломаной равна суммѣ проекцій ея звеньевъ.* Пусть $ABCDEF$ ломаная (см. фиг. 9); согласно опредѣленію ея проекція равна af.

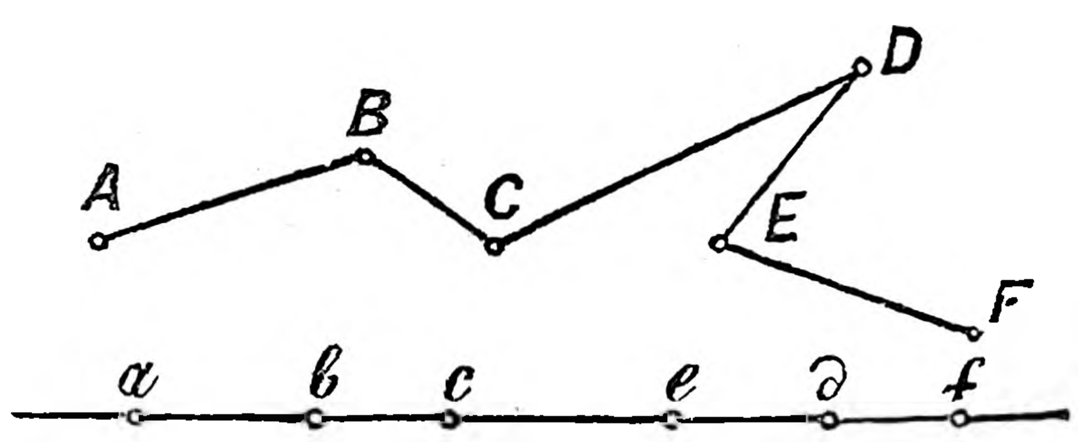
Имѣемъ

Пр. $(ABCDEF) = af = ae + ef = ad + de + ef = ac + cd + de + ef = ab + bc + cd + de + ef$ (на основаніи теоремы: если на прямой есть три точки A, B, C, то

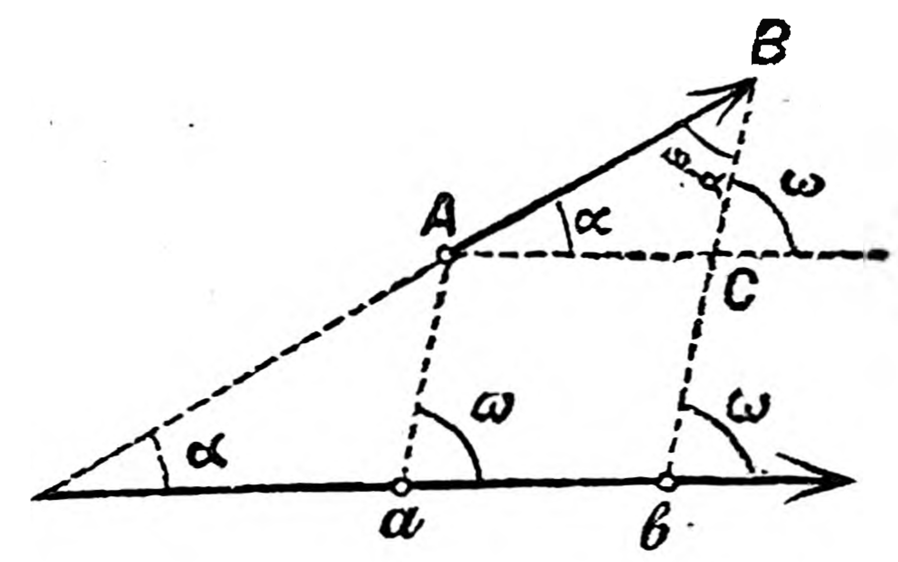
$AB+BC=AC$—при любомъ расположенiи этихъ точекъ на прямой); но $ab=$пр. (AB); $bc=$пр. (BC) и т. д., откуда

$$\text{пр. }(ABCDEF)=\text{пр. }(AB)+\text{пр. }(BC)+\text{пр. }(CD)+\text{пр. }(DE)+\text{пр. }(EF).$$

Если проектируемый отрѣзокъ и ось проекцiй лежатъ въ одной плоскости (см. фиг. 10), то понятiе проектированiя можетъ быть расширено въ томъ смыслѣ, что вмѣсто проектированiя при помощи построенiя перпендикуляровъ (ортогональнаго проектированiя), мы можемъ называть проекцiей даннаго отрѣзка на ось отрѣзокъ, опредѣ-



Фиг. 9.



Фиг. 10.

ляемый точками пересѣченiя оси съ двумя прямыми, проходящими черезъ концы отрѣзка параллельно опредѣленному заранѣе заданному *направленiю*. Уголъ, образуемый этимъ направленiемъ съ осью проекцiй, называется угломъ проектированiя. Формула проекцiи принимаетъ въ этомъ случаѣ видъ

$$ab=AB\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, спроектируемъ отрѣзокъ AB на ось X.

Обозначимъ черезъ α уголъ между проектируемымъ отрѣзкомъ и осью, а черезъ ω уголъ проектированiя и проведемъ прямую AC параллельно оси. Изъ треугольника ABC получаемъ:

$$ab=AC=AB\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Если проекцiя прямоугольная, т.-е. если $\omega=\frac{\pi}{2}$, получаемъ прежнюю формулу:

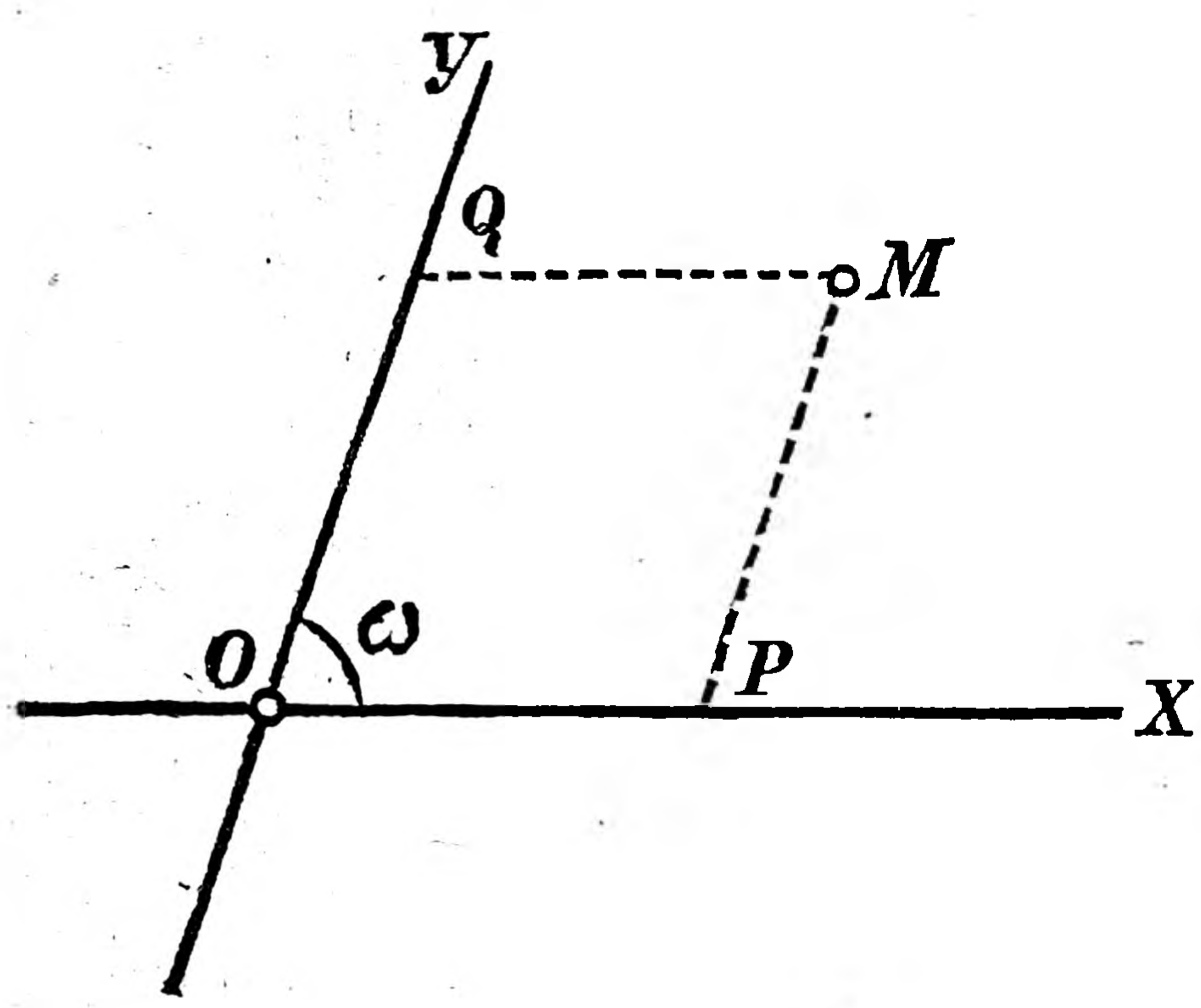
$$ab=AB\cos\alpha. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1')$$

ГЛАВА III.

Опредѣленiе положенiя точки на плоскости.

§ 1. **Методъ координатъ къ плоскости.** Возьмемъ двѣ пересѣкающiяся подъ угломъ ω прямыя OX и OY (см. фиг. 11). Если на этой плоскости взять точку M, то, проведя черезъ M прямыя параллельныя

OX и OY, получимъ на OX и OY двѣ точки P и Q, которыя можно разсматривать, какъ проекціи точки M: P на OX, Q на OY при углѣ проектированія ω. По самому построенію точки P и Q опредѣляются единственнымъ образомъ. Если OX и OY принять за оси, то точкамъ P и Q на этихъ осяхъ будутъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленныя координаты; назовемъ координату точки P буквой x, координату точки Q буквой y. Если будутъ даны значенія x и y, то первому будетъ соотвѣтствовать единственная точка P на оси X, а второму единственная точка Q на оси Y. Проводя черезъ P и Q прямыя параллельныя осямъ OY и OX, получимъ въ пересѣченіи этихъ параллелей единственную точку M. Т. о. задавая точку M, мы единственнымъ образомъ опредѣляемъ нѣкоторую пару чиселъ x и y; обратно, задавая значенія x и y мы единственнымъ образомъ опредѣляемъ на плоскости положеніе точки M.



Фиг. 11.

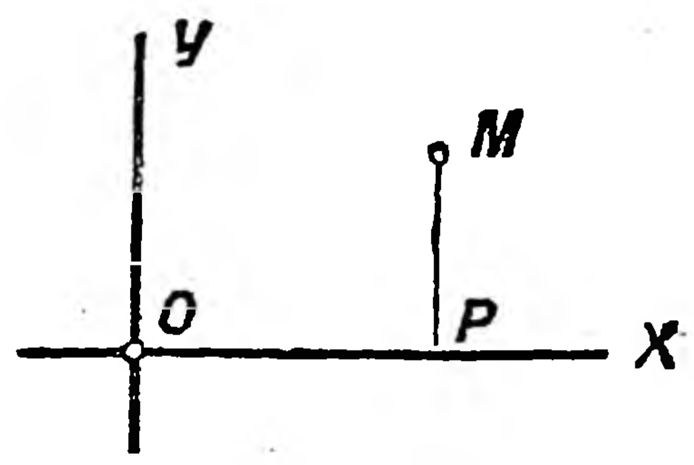
Поэтому x и y можно назвать координатами точки M. Прямыя OX и OY назовемъ осями координатъ; точку O назовемъ началомъ координатъ: ось OX называется также осью абсциссъ, а координата x—абсциссой точки M; ось OY назовемъ осью ординатъ, а координату y—ординатой точки M. Самую плоскость, отнесенную къ осямъ OX и OY, будемъ называть плоскостью xy.

Чтобы точки, лежащія на осяхъ, также имѣли двѣ координаты, примемъ, что ординаты всѣхъ точекъ, лежащихъ на оси OX, равны 0 и что абсциссы всѣхъ точекъ, лежащихъ на оси OY, равны 0. Начало координатъ будетъ имѣть поэтому координаты 0 и 0. Такимъ образомъ каждой точкѣ будетъ соотвѣтствовать пара чиселъ, и каждой парѣ чиселъ, заданныхъ въ опредѣленномъ порядкѣ, опредѣленная точка плоскости, и положеніе точки будетъ опредѣляться заданіемъ ея координатъ. Поэтому въ аналитической геометріи „задать точку" значитъ дать ея координаты.

Для построенія отрѣзковъ, имѣющихъ своими значеніями координаты точки M, или, какъ говорятъ короче, для построенія координатъ точки M достаточно провести либо одну прямую PM, либо одну прямую QM. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи свойства противоположныхъ сторонъ параллелограмма въ первомъ случаѣ: $OP=x$, $PM=y$, а во второмъ $OQ=y$; $QM=x$.

Обратно, если даны x и y, то достаточно либо: 1) отложить на оси X отрѣзокъ OP, имѣющій своимъ значеніемъ x, черезъ точку P провести прямую параллельную оси Y, и на ней отложить $PM=y$, либо 2) на оси Y отложить отрѣзокъ $OQ=y$, черезъ точку Q провести прямую, параллельную оси X, и на ней отложить $QM=x$.

Мы разсматривали до сихъ поръ *косоугольную* систему координатъ, т.-е. такую, у которой оси пересѣкаются подъ произвольнымъ угломъ. Въ частности, если координатный уголъ прямой (см. фиг. 12), система координатъ называется *прямоугольной*; въ послѣднемъ случаѣ проведеніе прямой, параллельной одной изъ осей, можно замѣнить опусканіемъ перпендикуляра на другую ось.

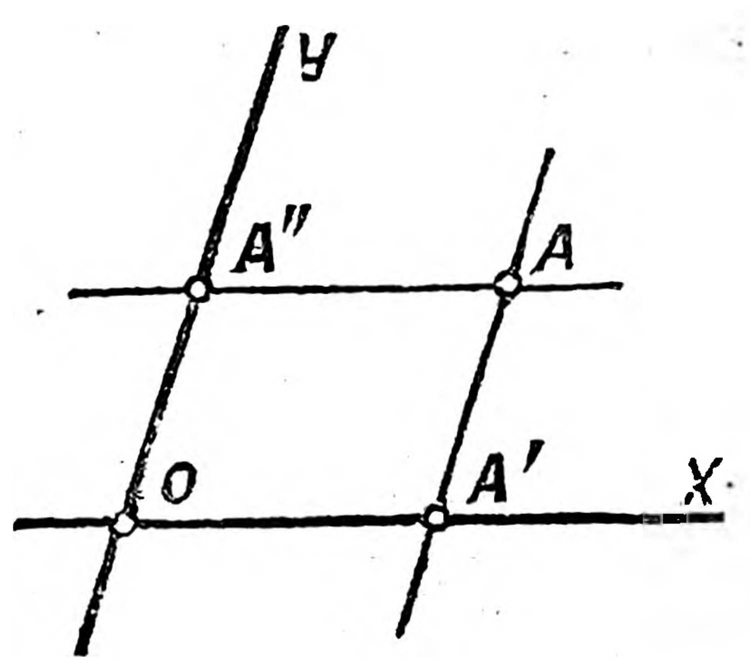


Фиг. 12.

Какъ та, такъ и другая система называется *декартовой*, а также *прямолинейной*.

Мы увидимъ впослѣдствіи, что положеніе точекъ на плоскости можно опредѣлить не только при помощи прямолинейныхъ координатъ. (см. § 4).

Такъ какъ точка A (см. фиг. 13) вполнѣ опредѣлена, если даны ея двѣ координаты: абсцисса a и ордината b, то отсюда слѣдуетъ, что системѣ уравненій $x=a$ (1) и $y=b$ (2) соотвѣтствуетъ на плоскости одна вполнѣ опредѣленная точка. Посмотримъ, какой геометрическій смыслъ имѣетъ одно уравненіе этой системы. Уравненію (1) соотвѣтствуетъ безчисленное множество точекъ, абсциссы которыхъ равны одному и тому же числу a; всѣ эти точки расположены на прямой AA', параллельной оси Y. Поэтому можно сказать, что уравненіе $x=a$ опредѣляетъ нѣкоторую прямую, параллельную оси Y, какъ *геометрическое мѣсто* точекъ, абсциссы которыхъ равны a. Аналогично уравненію (2) соотвѣтствуетъ прямая, параллельная оси X; въ частности, уравненіе $x=0$ опредѣляетъ ось Y, а $y=0$—ось X.



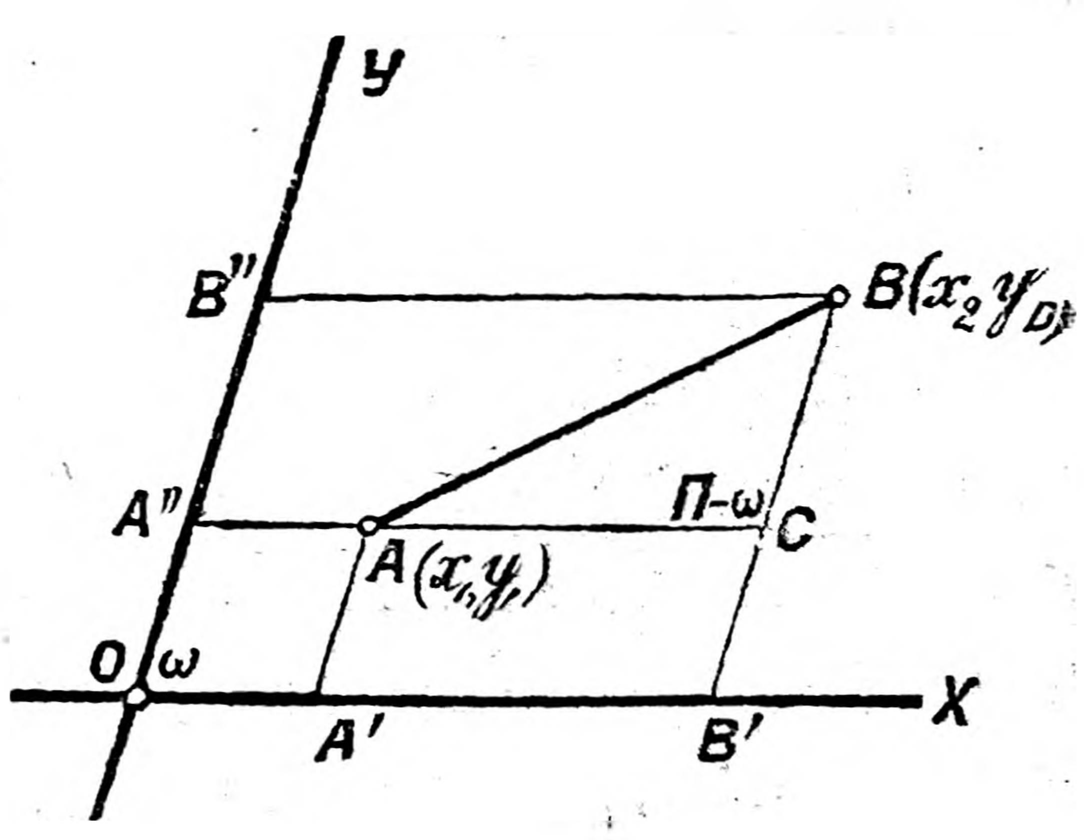
Фиг. 13.

Отсюда слѣдуетъ, что оба уравненія (1) и (2) опредѣляютъ точку, лежащую одновременно на двухъ соотвѣтственныхъ прямыхъ, т.-е. точку ихъ пересѣченія, какъ это мы уже видѣли раньше изъ другихъ соображеній.

Наконецъ уравненія $F(x)=0$ и $F(y)=0$ [1]) опредѣляютъ собою первая: одну или нѣсколько прямыхъ, параллельныхъ оси Y, а второе—одну или нѣсколько прямыхъ, параллельныхъ оси X.

§ **2. Задачи.** 1. Найти разстояніе между двумя точками.

Пусть даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ [2]) (см. фиг. 14).



Фиг. 14.

Выразимъ разстояніе между ними черезъ ихъ координаты, для этого построимъ послѣднія, проведя прямыя $A''C$ и $B''B$, $A'A$ и $B'B$, параллельныя осямъ X и Y.

[1]) Смотр. Глава I, § 3.

[2]) На чертежѣ ошибочно стоитъ $B(x_2\, y_D)$.

Обозначимъ длины сторонъ получившагося треугольника AB, AC и CB соотвѣтственно d, d_1 и d_2.

Такъ какъ $$AC=A'B' \text{ и } CB=A''B'',$$
то $$d_1=x_2-x_1,\ d_2=y_2-y_1 \text{ [1]}$$

Такъ какъ $A''C \parallel OX$ и $B''B \parallel OY$, то уголъ C равенъ $\pi-\omega$. На основанiи теоремы о квадратѣ стороны треугольника:

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos(\pi-\omega),$$
или $$d=\pm\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega} \quad \ldots\ldots (1)$$

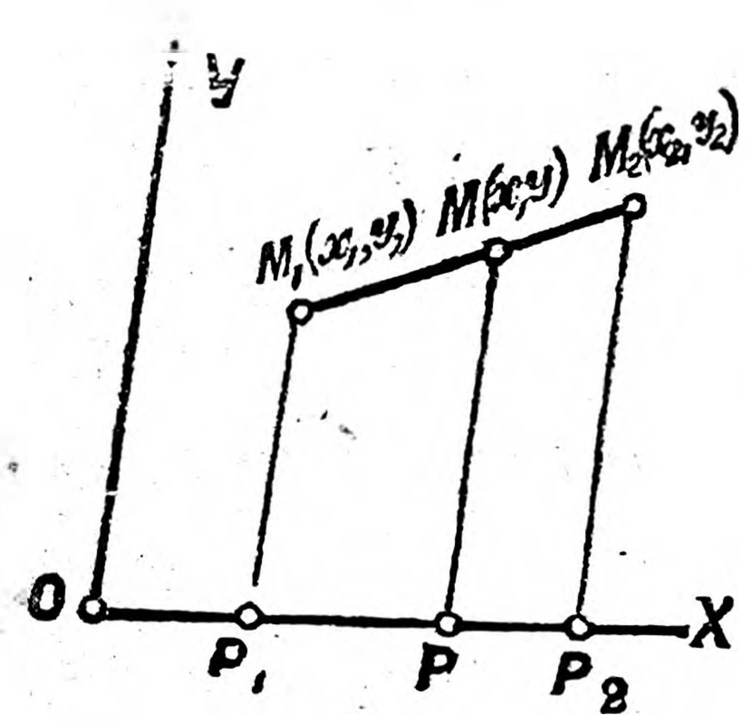
Два знака при радикалѣ указываютъ на то, что выраженiе разстоянiя AB между двумя точками будетъ положительнымъ или отрицательнымъ въ зависимости отъ того, какое изъ направленiй на прямой AB принять за положительное: отъ A къ B или отъ B къ A. Обычно разсматривается только абсолютное значенiе радикала.

Если система координатъ прямоугольная, то формула (1) принимаетъ болѣе простой видъ:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \quad \ldots\ldots (1').$$

2. Раздѣлить отрѣзокъ въ данномъ отношенiи.

Пусть данъ отрѣзокъ M_1M_2 (см. фиг. 15), координатами концовъ котораго служатъ соотвѣтственно x_1, y_1 и x_2, y_2. Положимъ, что точка $M(x,y)$ дѣлитъ отрѣзокъ M_1M_2 въ данномъ отношенiи l такъ, что $\frac{M_1M}{MM_2}=l$. Чтобы опредѣлить абсциссу этой точки, проведемъ прямыя P_1M_1, PM и P_2M_2 параллельно оси Y.



Фиг. 15.

Тогда $\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2}$ и, слѣдовательно, $\frac{P_1P}{PP_2}=l$.

Абсцисса точки P та же, что и у точки M, и она опредѣляется такой формулой: (Глава I, § 2, з. 2)

$$x=\frac{x_1+lx_2}{1+l} \quad \ldots\ldots (2).$$

Въ этой формулѣ мы можемъ считать l также отрицательнымъ числомъ; тогда точка P' будетъ лежать внѣ отрѣзка P_1P_2, и, слѣдовательно, точка M внѣ отрѣзка M_1M_2. Такимъ образомъ, всѣ результаты, полученные при рѣшенiи этой задачи въ Аналитической Геометрiи на прямой, примѣнимы и къ настоящему случаю.

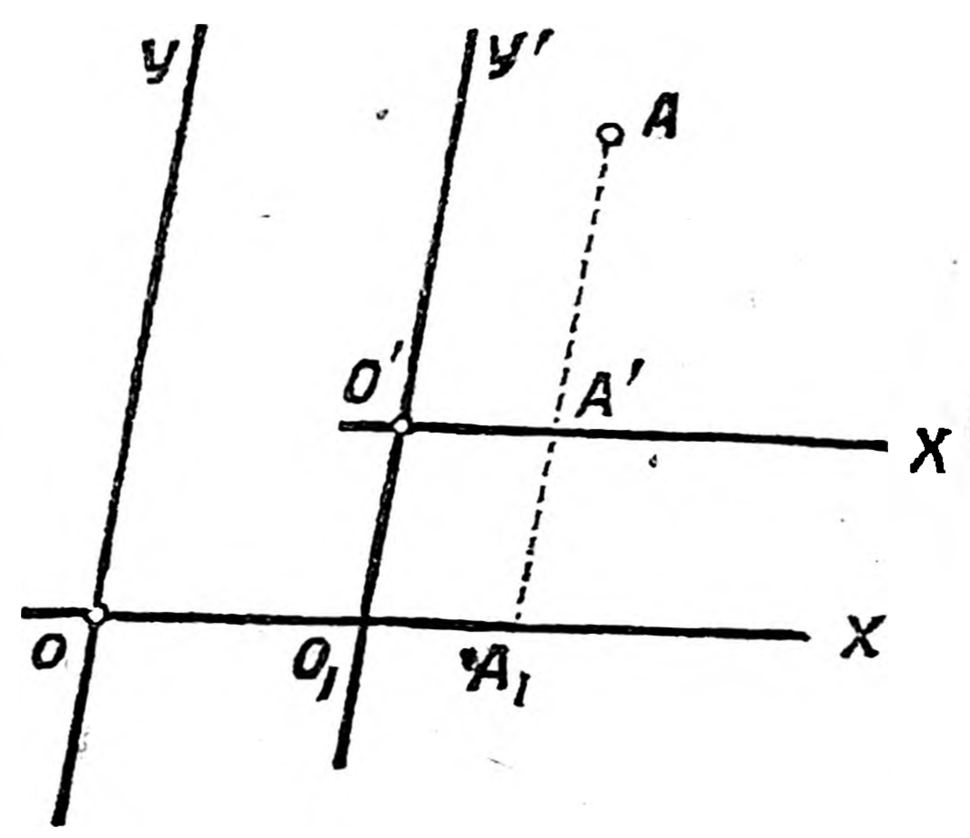
Такъ какъ координаты x и y равноправны, то мы можемъ написать по аналогiи съ формулой (2):

$$y=\frac{y_1+ly_2}{1+l} \quad \ldots\ldots (2').$$

[1]) Глава I, § 2, зад. 1.

Легко сообразить, что выраженія (2) и (2') не зависятъ отъ размѣровъ координатнаго угла.

§ **3. Преобразованіе координатъ.** Если вмѣсто прежней системы координатъ возьмемъ другую, то, вообще говоря, координаты каждой точки измѣнятся. Формулы, по которымъ можно найти координаты точки при одной системѣ координатъ, если онѣ извѣстны при другой системѣ, называются *формулами преобразованія координатъ*. Эти формулы, обыкновенно, выражаютъ старыя координаты черезъ новыя, а не наоборотъ, такъ какъ въ Аналитической Геометріи чаще всего приходится разсматривать уравненія, которымъ удовлетворяютъ координаты точки. Подставляя въ такое уравненіе вмѣсто старыхъ координатъ ихъ выраженія черезъ новыя, мы непосредственно получаемъ преобразованное уравненіе для новой системы координатъ.



Фиг. 16.

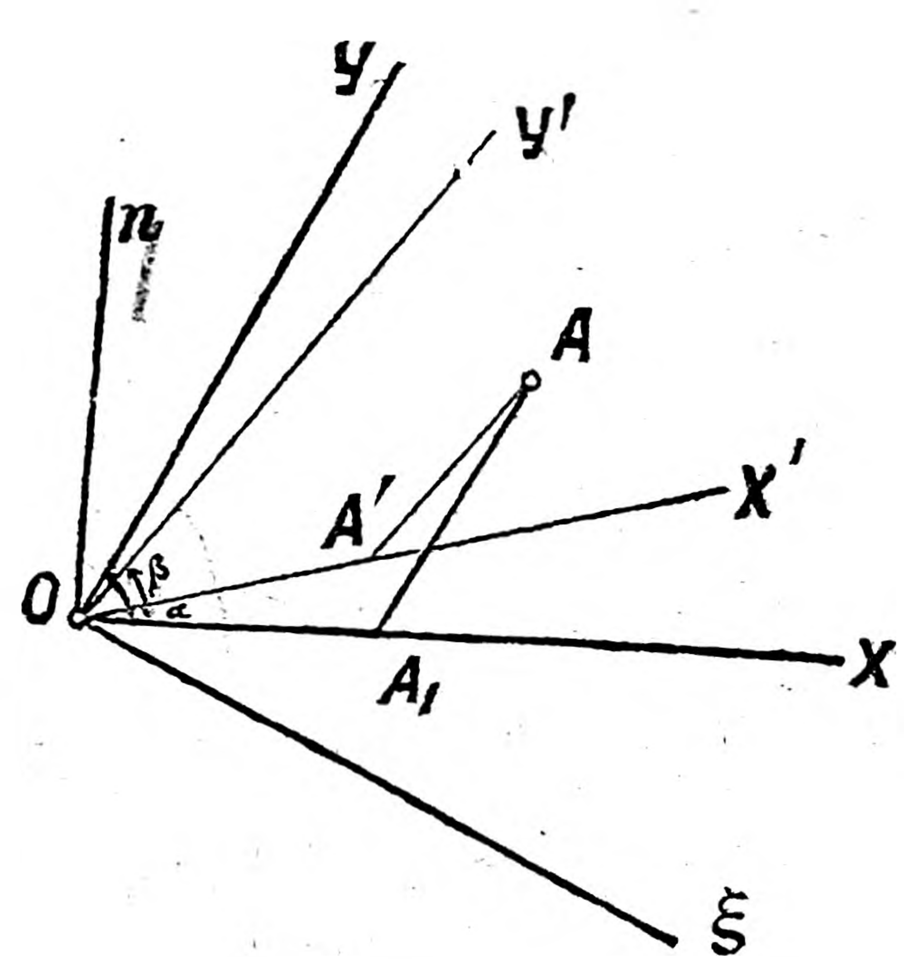
Разсмотримъ сначала два частныхъ случая: 1) перенесеніе начала координатъ съ сохраненіемъ направленія осей и 2) измѣненіе направленія осей съ неподвижнымъ началомъ координатъ.

1) Преобразованіе начала. Положимъ, что вся система перенеслась съ сохраненіемъ направленія осей, т.-е. новыя оси $O'X' \parallel OX$ и $O'Y' \parallel OY$ (см. фиг. 16). Обозначимъ черезъ x, y и x', y' координаты точки A соотвѣтственно при старыхъ и новыхъ осяхъ, черезъ x_0, y_0 координаты новаго начала относительно старой системы координатъ. Изъ чертежа видимъ, что абсциссы точекъ O_1 и A_1 тѣ же, что соотвѣтственно у точекъ O' и A, т.-е. x_0 и x; при всякомъ расположеніи трехъ точекъ O, O_1, A_1 на прямой $OA_1 = O_1A_1 + OO_1$; слѣдовательно

$$x = x' + x_0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

а такъ какъ оси координатъ равноправны, то

$$y = y' + y_0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$



Фиг. 17.

2. Преобразованіе направленій осей. Положимъ, что оси координатъ повернуты такъ, что съ прежней осью X образуютъ соотвѣтственно углы α и β (см. фиг. 17); координатный уголъ старой системы XOY обозначимъ черезъ ω.

Построимъ старыя (x, y) и новыя (x', y') координаты точки A, проведемъ ось $O\xi$ перпендикулярно къ OY и спроектируемъ на $O\xi$ замкнутую ломаную $OA'AA_1O$.

$$пр_\xi OA' + пр_\xi A'A + пр_\xi AA_1 + пр_\xi A_1O = 0$$

или

$$пр_\xi OA_1 + пр_\xi A_1A = пр_\xi OA' + пр_\xi A'A.$$

Если примемъ во вниманіе, что $A_1A \parallel OY$ и $A'A \parallel OY'$, то получимъ на основаніи теоремы 3 (гл. II § 1).

$$np_\xi OA_1 = x\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=x\sin\omega,\quad np_\xi A_1A=y\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$np_\xi OA'=x'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega+\alpha\right)=x'\sin(\omega-\alpha),\quad np_\xi A'A=y'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega+\beta\right)=$$
$$=y'\sin(\omega-\beta),$$

слѣдовательно, $$x=\frac{x'\sin(\omega-\alpha)+y'\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

Проектируемъ ту же ломаную на ось $O\eta$ [1]), перпендикулярную къ OX.

$$np_\eta OA_1=x\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad np_\eta A_1A=y\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=y\sin\omega,$$

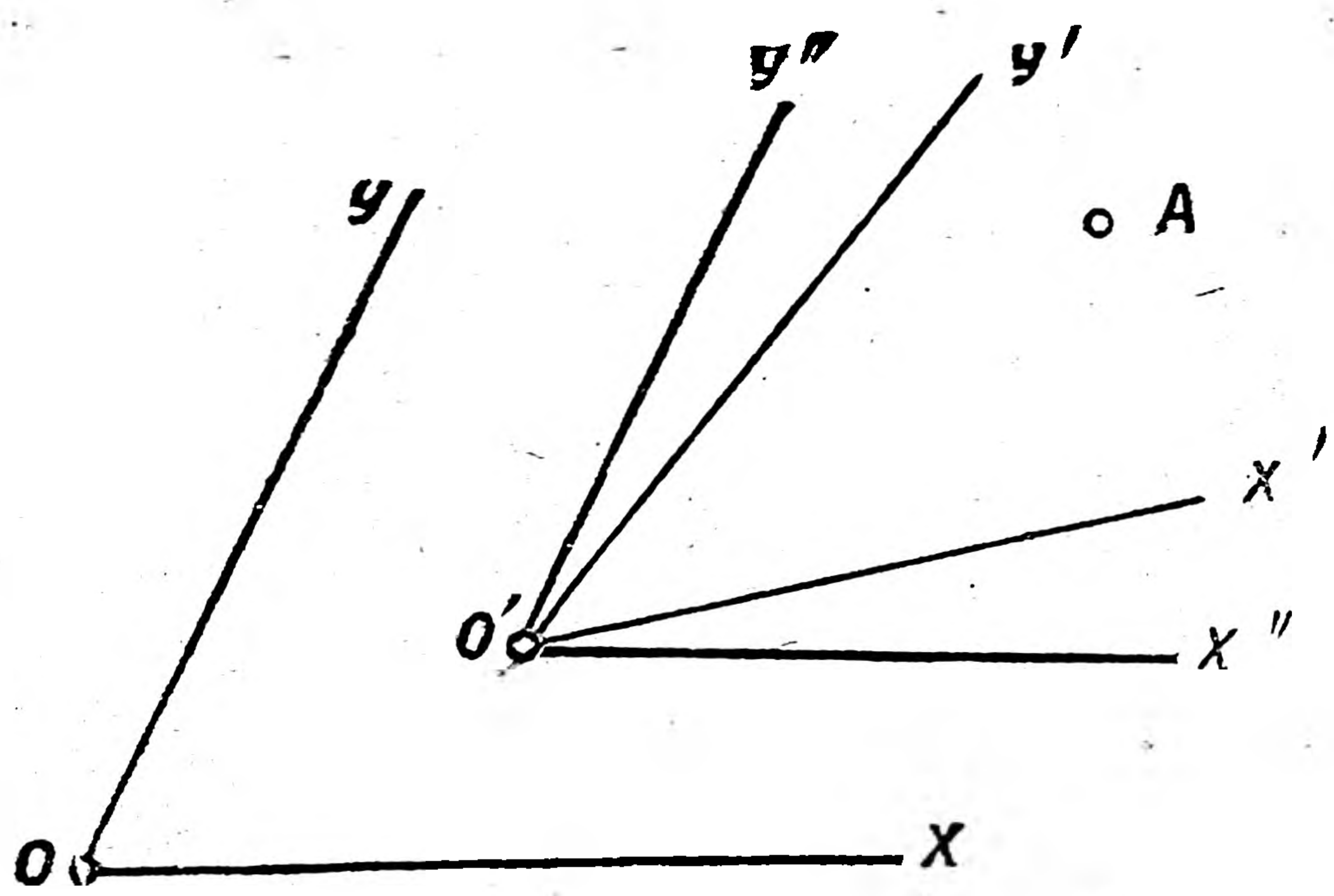
$$np_\eta OA'=x'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=x'\sin\alpha,\quad np_\eta A'A=y'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=y'\sin\beta$$

$$y=\frac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\omega},\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

Въ томъ случаѣ, если совершается преобразованіе прямоугольныхъ осей въ прямоугольныя же, слѣдуетъ въ формулахъ (3) и (4) положить: $$\omega=\frac{\pi}{2}\text{ и }\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}.$$

Тогда формулы (3) и (4) принимаютъ видъ:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\quad\ldots\ldots\quad(5)$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\quad\ldots\ldots\quad(6)$$



Фиг. 18.

Общее преобразованіе координатъ слагается изъ перенесенія начала и измѣненія направленія осей. Проведемъ (см. фиг. 18). черезъ новое начало $O'(x_0, y_0)$ вспомогательныя оси $O'X''$ и $O'Y''$, параллельныя старымъ осямъ OX и OY. Обозначая черезъ x и y, x' и y', x'' и y'' координаты точки A при старыхъ и новыхъ осяхъ, получимъ

$$\begin{aligned}x&=x''+x_0,\\ y&=y''+y_0,\end{aligned}\quad\ldots\ (7)\qquad \begin{aligned}x''&=ax'+by',\\ y''&=cx'+dy',\end{aligned}\quad\ldots\ldots\ (8)$$

гдѣ $$a=\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega},\quad b=\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega},\quad c=\frac{\sin\alpha}{\sin\omega},\quad d=\frac{\sin\beta}{\sin\omega}.$$

Исключая изъ отношеній (7) и (8) x'' и y'', получимъ

$$\begin{aligned}x&=ax'+by'+x_0,\\ y&=cx'+dy'+y_0.\end{aligned}\quad\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

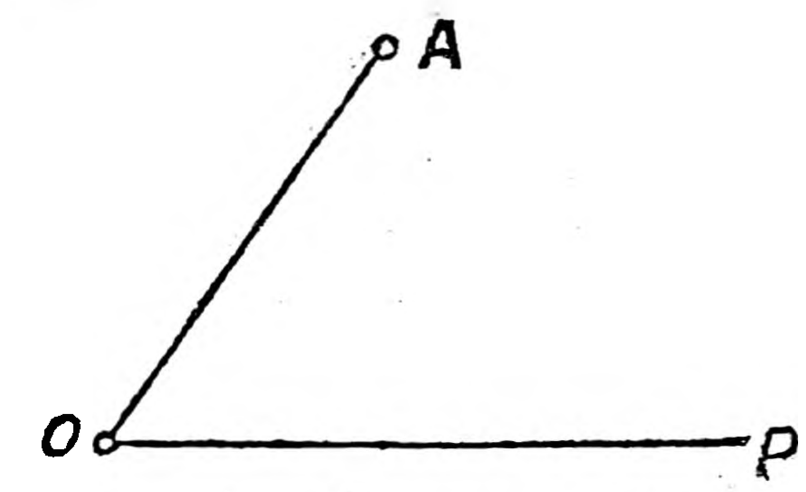
---

[1]) На фиг. 17 вмѣсто η ошибочно поставлено n.

Слѣдуетъ замѣтить, что въ эти формулы, какъ старыя, такъ и новыя координаты входятъ *линейно*, т.-е. въ первой степени.

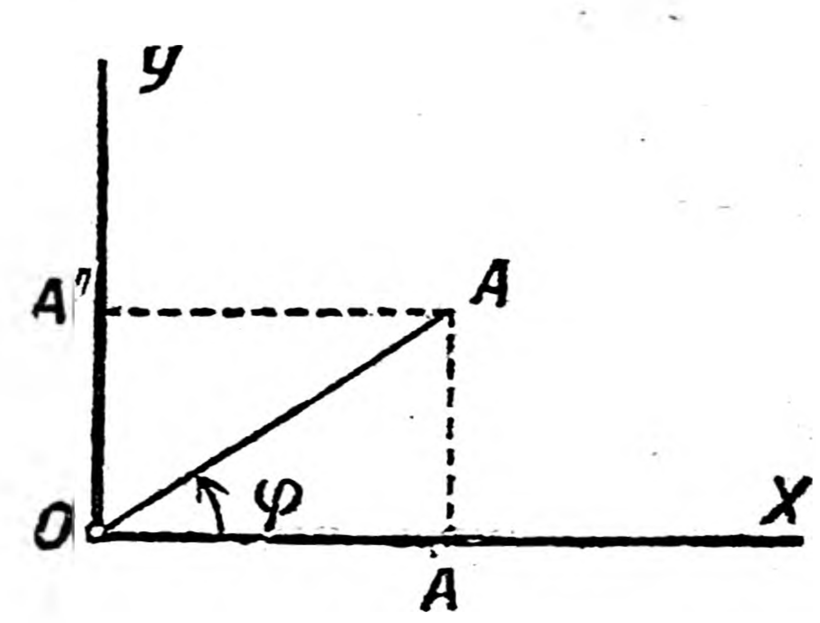
§ **4. Полярныя координаты.** Кромѣ декартовыхъ возможны и другія системы координатъ. Мы разсмотримъ еще такъ называемыя полярныя.

Для опредѣленія положенія какой-нибудь точки A плоскости возьмемъ (см. фиг. 19) *полупрямую* OP, т.-е. прямую, ограниченную съ одной стороны точкой O. Эту точку назовемъ *полюсомъ* полярной системы, а полупрямую—*полярной осью*. Соединимъ точку A съ полюсомъ; отрѣзокъ OA, представляющій разстояніе точки A до полюса, называется *радіусомъ-векторомъ* точки A, а уголъ, который образуетъ этотъ послѣдній съ полярной осью, называется *амплитудой*. Обозначимъ длину радіуса-вектора черезъ ϱ, а величину амплитуды черезъ φ. Предѣлами измѣненія [1]) радіуса-вектора и амплитуды служатъ соотвѣтственно $0 < \varrho < +\infty$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leqq +\pi$, и въ этихъ предѣлахъ они вполнѣ опредѣлены, если дана точка. Обратно, если даны эти двѣ координаты (ихъ называютъ полярными координатами), то мы можемъ построить единственную вполнѣ опредѣленную соотвѣтствующую имъ точку: она представляетъ собою пересѣченіе полупрямой, выходящей изъ полюса и наклоненной къ полярной оси подъ угломъ φ, съ окружностью радіуса ϱ, описанной изъ полюса, какъ изъ центра.



Фиг. 19.

Формулы преобразованія декартовыхъ координатъ въ полярныя достаточно вывести только для прямоугольной системы, притомъ для того случая, когда полярная ось совпадаетъ съ осью X, а полюсъ—съ началомъ координатъ, такъ какъ преобразованіе декартовыхъ координатъ въ декартовыя уже разсмотрѣно.



Фиг. 20.

Пусть дана точка A (см. фиг. 20) съ декартовыми координатами x, y и полярными ϱ, φ. Спроектировавъ радіусъ-векторъ этой точки сперва на ось X, а затѣмъ на ось Y, получимъ:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Для обратнаго перехода отъ полярныхъ координатъ къ декартовымъ прямоугольнымъ служатъ формулы:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\,\varphi = \frac{y}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или
$$\varphi = arc\,tg\,\frac{y}{x}.$$

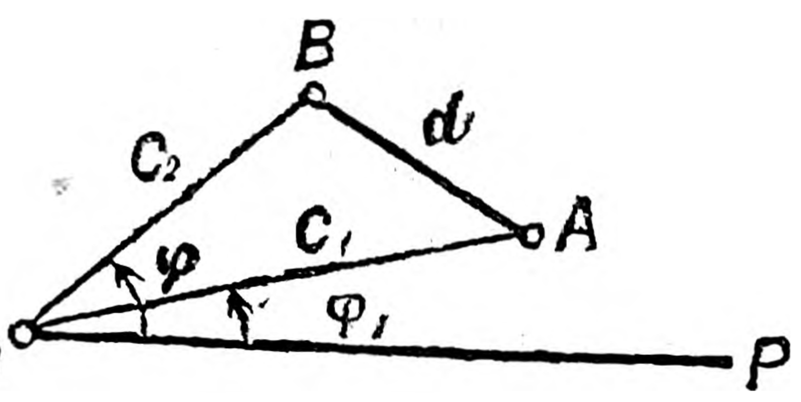
---

[1]) Иногда удобнѣе бываетъ разсматривать радіусъ-векторъ, какъ величину относительную, и не налагать никакихъ ограниченій на измѣненіе амплитуды.

Для опредѣленія той четверти, въ которой лежитъ уголъ φ, нужно установить знакъ $\sin\varphi$ (или $\cos\varphi$) изъ формулъ

$$\sin\varphi = \frac{y}{\varrho}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\varrho}.$$

Въ полярныхъ координатахъ можно рѣшать тѣ же задачи, которыя рѣшены въ декартовыхъ координатахъ. Такъ легко, напримѣръ, показать (см. фиг. 21), что разстояніе между двумя точками $A(\varrho_1, \varphi_1)$ и $B(\varrho_2, \varphi_2)$ выразится при помощи такой формулы



Фиг. 21. [1])

$$d = \sqrt{\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

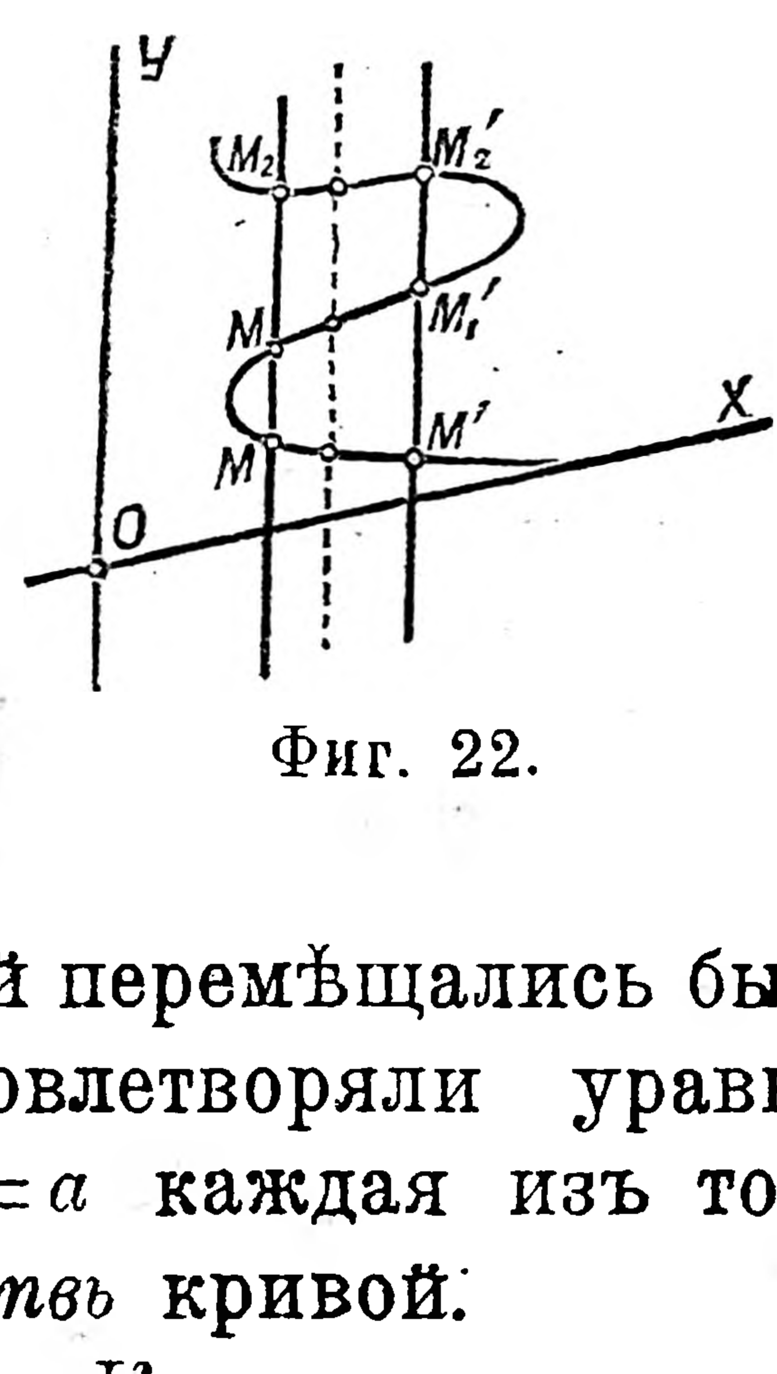
§ 5. Геометрическое значеніе уравненій.

Одно уравненіе между координатами[2]) *опредѣляетъ въ аналитической геометріи на плоскости линію.*

Одно уравненіе между двумя координатами

$$F(x,y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

оставляетъ эти неизвѣстныя неопредѣленными. Мы можемъ произвольно дать значеніе одной координатѣ, напримѣръ, абсциссѣ $x = a$; тогда изъ уравненія (1) найдемъ одно или нѣсколько значеній $y = b$, b_1, b_2... Каждая пара значеній $x = a$, $y = b$ опредѣляетъ на плоскости точку. Слѣдовательно, мы получимъ одну или нѣсколько точекъ M, M_1,.. (см. фиг. 22). Всѣ эти точки лежатъ на прямой $x = a$, параллельной оси Y. Давая другое значеніе $x = a'$, получимъ новую прямую параллельную оси Y и на ней новую группу точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію $F(x,y) = 0$. Если бы мы осуществили такой механизмъ, что при перемѣщеніи прямой $x = a$ (параллельно оси y) точки M, M_1,... на этой прямой перемѣщались бы на ней такъ, чтобы ихъ координаты все время удовлетворяли уравненію $F(x,y) = 0$, то при перемѣщеніи прямой $x = a$ каждая изъ точекъ M, M_1,... описала бы нѣкоторую линію, т. н. *вѣтвь* кривой.



Фиг. 22.

Координаты, входящія въ уравненіе, представляютъ собою координаты любой точки соотвѣтствующей кривой и называются *текущими координатами.*

Если точка $A(x_1, y_1)$ лежитъ на кривой, то ея координаты x_1, y_1 удовлетворяютъ уравненію (1).

Если даны два уравненія $F_1(x,y) = o$ и $F_2(x,y) = 0$, то совокупность этихъ уравненій опредѣляетъ нѣкоторую группу раздѣльно ле-

---

[1]) Вмѣсто C_1 и C_2 надо читать ϱ_1 и ϱ_2.

[2]) Теорема эта вѣрна и для полярныхъ координатъ.

жащихъ точекъ—точекъ, одновременно лежащихъ на кривыхъ $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, т.-е. точекъ ихъ пересѣченія.

Простѣйшій случай подобной системы уравненій ($x=a$, $y=b$) мы уже имѣли, когда устанавливали способъ опредѣленія точки на плоскости (§ 1).

Классификація кривыхъ. Кривыя, сообразно виду ихъ уравненій въ декартовыхъ координатахъ, распадаются на два обширныхъ класса: на *алгебраическія* кривыя и на *трансцендентныя.*

Если уравненіе кривой можетъ быть представлено, по освобожденіи отъ радикаловъ и дробей, содержащихъ текущія координаты, въ видѣ равенства нулю многочлена относительно этихъ координатъ, то кривая называется алгебраической.

Всѣ остальныя кривыя называются *трансцендентными. Степень уравненія алгебраической кривой называется порядкомъ ея.*

Въ основу классификацій кривыхъ полагаютъ ихъ уравненія *въ декартовыхъ* координатахъ потому, что въ этомъ случаѣ *характеръ уравненія не мѣняется при преобразованіи координатъ,* т.-е. трансцендентное уравненіе остается трансцендентнымъ, алгебраическое—алгебраическимъ, послѣднее сохраняя при этомъ свою степень.

Степень алгебраическаго уравненія не можетъ повышаться при преобразованіи декартовыхъ координатъ.

Дѣйствительно, какой-нибудь членъ уравненія кривой Ax^my^n послѣ преобразованія приметъ видъ

$$A(ax'+by'+x_0)^m(cx'+dy'+y_0)^n.$$

По раскрытіи скобокъ не найдется ни одного члена, степень котораго была бы выше $m+n$.

При преобразованіи декартовыхъ координатъ степень алгебраическаго уравненія не можетъ понизиться. Иначе, совершая обратный переходъ отъ новой системы къ старой, мы получили бы повышеніе степени, что невозможно. Слѣдовательно, при преобразованіи декартовыхъ координатъ порядокъ алгебраической кривой не мѣняется. Такъ же доказывается, что алгебраическая кривая не можетъ стать трансцендентной.

Слѣдствіе. *Прямая выражается уравненіемъ первой степени.*

Дѣйствительно, уравненіе оси абсциссъ $y=0$ первой степени, а преобразованіемъ системы координатъ всякую прямую можно сдѣлать осью абсциссъ, при чемъ порядокъ ея не измѣнится.

Геометрическое значеніе порядка кривой дается теоремой: *Кривая n-го порядка пересѣкается съ произвольной прямой въ n точкахъ.*

Произвольная прямая можетъ быть сдѣлана съ помощью преобразованія координатъ осью абсциссъ. Подставляя $y=0$ въ уравненіе кривой, мы получимъ уравненіе

$$F(x,o)=0$$

n-й степени относительно x, и n корней этого уравненія опредѣлятъ n точекъ пересѣченія кривой съ осью абсциссъ. Среди этихъ точекъ могутъ быть и мнимыя.

Пучекъ кривыхъ. Если, имѣя уравненія двухъ кривыхъ $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, мы составимъ уравненіе $F_1(x,y)+m\ F_2(x,y)=0$, гдѣ m произвольный множитель, то оно опредѣлитъ нѣкоторую кривую и притомъ такую, которая проходитъ черезъ точки пересѣченія первыхъ двухъ кривыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x=a$, $y=b$ координаты одной изъ точекъ пересѣченія данныхъ намъ кривыхъ. Тогда $F_1(a,b)=0$ и $F_2(a,b)=0$, а слѣдовательно, и $F_1(a,b)+m\ F_2(a,b)=0$ при всякомъ значеніи m. Значитъ точка (a,b) лежитъ и на всякой кривой $F_1\ (x,y)+m\ F_2\ (x,y)=0$. Мѣняя m, мы будемъ мѣнять видъ этой кривой. Для разныхъ значеній m получимъ разныя кривыя, но всѣ онѣ будутъ проходить черезъ точки пересѣченія первыхъ двухъ кривыхъ. Поэтому говорятъ, что уравненіе $F_1(x,y)+m\ F_2(x,y)=0$ опредѣляетъ *пучекъ* кривыхъ.

Если лѣвая часть уравненія алгебраической кривой распадается на множители

$$\varphi(x,\ y)\cdot\psi(x,\ y)=0, \qquad (2)$$

то сама кривая распадается на двѣ простѣйшія кривыя, уравненія которыхъ будутъ

$$\varphi(x,\ y)=0 \qquad (3)$$

и

$$\psi(x,\ y)=0 \qquad (4)$$

Произведеніе равняется нулю, когда одинъ изъ сомножителей равенъ нулю. Слѣдовательно, координаты какой-нибудь точки только тогда удовлетворяютъ уравненію (2), когда онѣ удовлетворяютъ уравненію (3) или (4). Геометрически это обозначаетъ, что точка только тогда лежитъ на кривой (2), когда она расположена на одной изъ кривыхъ (3) или (4); каждая точка одной кривой обязательно служитъ точкой или второй или третьей кривой, т.-е. первая кривая представляетъ собою совокупность второй и третьей кривыхъ.

Примѣчаніе. Слѣдуетъ помнить, что всѣ разсужденія справедливы только для того случая, когда всѣ члены уравненія перенесены въ одну часть его.

Если дано уравненіе кривой, то, задавая абсциссѣ произвольныя значенія и подсчитывая соотвѣтствующія значенія ординаты, мы можемъ найти сколько угодно точекъ этой линіи. Обратно, если кривая задана, какъ геометрическое мѣсто точекъ, подчиненныхъ тому или иному условію, то можно составить ея уравненіе. Разсмотримъ, напримѣръ, задачу:

Найти уравненіе окружности, какъ геометрическаго мѣста точекъ, отстоящихъ на разстояніи r отъ данной точки $C(x_1,\ y_1)$.

Обозначимъ черезъ (x, y) координаты какой-нибудь точки окружности M. Опредѣляя разстояніе MC, мы можемъ написать (§ 2):

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+2(x-x_1)(y-y_1)\cos\omega}=r$$

или $$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+2(x-x_1)(y-y_1)\cos\omega=r^2.$$

Таково уравненіе окружности, которая представляетъ, слѣдовательно, кривую 2-го порядка. Въ случаѣ прямоугольныхъ координатъ уравненіе этой кривой принимаетъ такой видъ:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2,$$

а если, кромѣ того, центръ расположенъ въ началѣ координатъ, то получаемъ:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Если центръ окружности совпадаетъ съ полюсомъ, то уравненіе ея въ полярныхъ координатахъ: $\varrho=r$, а если координаты центра ϱ_1 и φ_1, то (§ 4):

$$\varrho^2+\varrho_1{}^2-2\varrho\varrho_1\cos(\varphi-\varphi_1)=r^2.$$

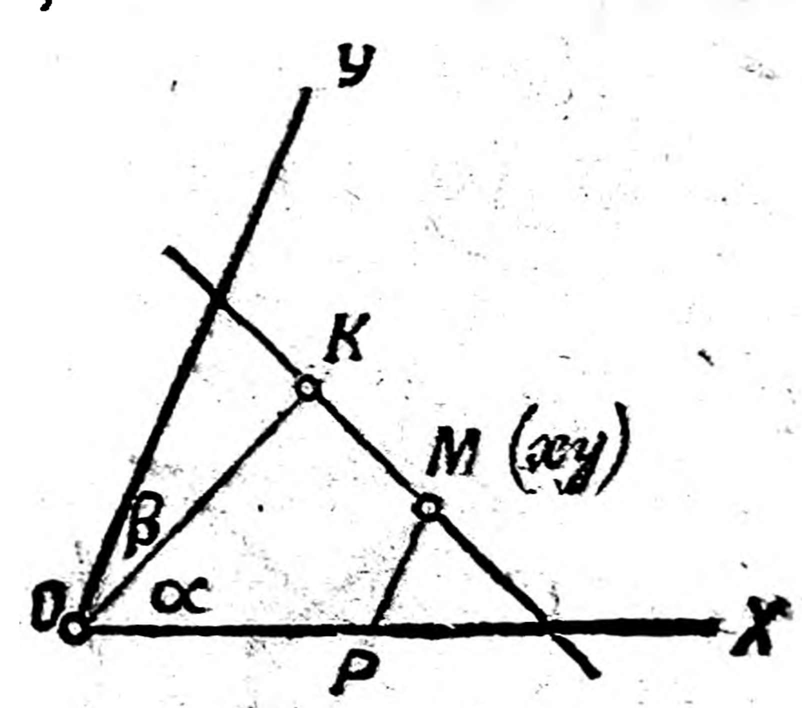
Отсюда видно, что классификація кривыхъ въ полярныхъ координатахъ невозможна, такъ какъ одна и та же кривая, въ зависимости отъ положенія полюса и полярной оси, можетъ оказаться и алгебраической и трансцендентной.

ГЛАВА IV.

Прямая.

§ 1. **Линія перваго порядка.** Теорема. *Прямая есть линія 1-го порядка.*

Мы уже доказали эту теорему, преобразуя систему координатъ такъ, чтобы данная прямая стала осью абсциссъ, но можно и непосредственно составить уравненіе прямой. Положеніе прямой мы будемъ опредѣлять (см. фиг. 23) длиной перпендикуляра $OK=p$, опущеннаго изъ начала на прямую, и угломъ α, образованнымъ этимъ перпендикуляромъ съ осью абсциссъ. Введемъ еще уголъ $\beta=\omega-\alpha$, образованный имъ съ осью ординатъ.



Фиг. 23.

Возьмемъ на прямой произвольную точку $M(x,y)$ и спроектируемъ ломаную $OPMKO$ на линію OK

$$пр\ OP+пр\ PM+пр\ MK=OK.$$

Помня, что $PM \parallel OY$ и $MK \perp OK$, мы получимъ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta=p$$

или $$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Это уравненіе называется *нормальнымъ* уравненіемъ прямой. Оно первой степени. Въ случаѣ прямоугольной системы координатъ

$$\omega=\frac{\pi}{2},\ \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

нормальное уравненіе прямой принимаетъ видъ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

Обратная теорема. *Линія 1-го порядка есть прямая.*

Возьмемъ *общее* уравненіе линіи перваго порядка; оно имѣетъ видъ [1]):

$$Ax+By+C=0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

гдѣ A, B, C—произвольныя данныя числа. Разсмотримъ сначала прямоугольную систему координатъ. Намъ надо показать, что уравненіе (3) *всегда* можетъ быть приведено къ (2); другими словами, что *всегда* существуетъ такое число M, по умноженіи на которое обѣихъ частей уравненія (3) получается уравненіе (2), т.-е. что

$$MA=\cos\alpha. \quad \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

$$MB=\sin\alpha. \quad \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

$$MC=-p \quad \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

Число M называется *нормирующимъ множителемъ* уравненія (3). Для опредѣленія его возвысимъ обѣ части уравненій (4) и (5) въ квадратъ и сложимъ $M^2(A^2+B^2)=1$

и слѣд., $$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}; \quad \dots \dots \dots \dots \quad (7)$$

знакъ нормирующаго множителя надо выбрать такъ, чтобы уравненіе (6) давало для p положительное число; слѣдовательно, онъ противоположенъ знаку свободнаго члена C уравненія (3). Если M опредѣлено, то изъ уравненій (4), (5) и (6) найдемъ α и p, т.-е. найдемъ прямую, опредѣляемую уравненіемъ (3).

Такъ какъ съ преобразованіемъ координатъ порядокъ линіи не мѣняется, то и въ случаѣ косоугольной системы уравненіе (3) опредѣляетъ на плоскости прямую, и, слѣдовательно, существуетъ нормирующій множитель M, приводящій это уравненіе къ виду (1).

§ **2. Различные виды уравненія прямой.** Кромѣ *общаго и нормальнаго* уравненій, разсмотримъ еще двѣ другія формы уравненія прямой: уравненіе *относительно отрѣзковъ* и уравненіе *съ угловымъ коэффиціентомъ*.

Пусть прямая $$Ax+By+C=0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

отсѣкаетъ на координатныхъ осяхъ соотвѣтственно отрѣзки a и b; тогда координаты точекъ P и Q пересѣченія ея съ осями будутъ соотвѣт-

---

1) Такъ какъ уравненіе вполнѣ опредѣляется, если дано отношеніе его коэффиціентовъ къ одному изъ нихъ, то линія перваго порядка вполнѣ опредѣлится *двумя* условіями.

ственно: a, o и o, b. Напишемъ теперь условія прохожденія этой прямой черезъ точки P и Q.

$$Aa+C=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1')$$
$$Bb+C=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1'')$$

откуда $$A=-\frac{C}{a} \text{ и } B=-\frac{C}{b}.$$

Поставивъ эти выраженія A и B въ уравненіе (1), имѣемъ

$$-x\frac{C}{a}-y\frac{C}{b}+C=0 \ .$$

или, по сокращеніи на $-C$,

получимъ $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Это и есть такъ называемое *уравненіе прямой относительно отрѣзковъ.*

Рѣшимъ уравненіе (1) относительно y:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B};$$

$-\frac{C}{B}=b$, обозначимъ еще $k=-\frac{A}{B}$. Тогда уравненіе прямой приметъ видъ: $$y=kx+b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Выяснимъ геометрическій смыслъ параметра k. Если M нормирующій множитель, то $k=-\frac{MA}{MB}=-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$

Обозначимъ черезъ φ уголъ, образуемый прямой съ осью X; тогда $$\alpha=\varphi-\frac{\pi}{2} \text{ и } \beta=\omega-\varphi+\frac{\pi}{2}.$$

Слѣдовательно, $\cos\alpha=\sin\varphi$ и $\cos\beta=-\sin(\omega-\varphi)$ и

$$k=\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что параметръ k зависитъ только отъ угла, образуемаго прямой съ осью X; онъ называется *угловымъ коэффиціентомъ* прямой, а уравненіе (3)—*уравненіемъ съ угловымъ коэффиціентомъ.*

Въ случаѣ *прямоугольной* системы координатъ, угловой коэффиціентъ получаетъ очень простое значеніе:

$$k=\operatorname{tang}\varphi,$$

т.-е. *угловой коэффиціентъ есть тангенсъ угла прямой съ осью* X.

Примѣръ. $\left(\text{Если } \omega=\frac{\pi}{2}\right)$.

Общее уравненіе $2x-2y+5=0$.

Нормальное уравненіе $\frac{2x-2y+5}{-2\sqrt{2}}=0.$

Уравненіе относительно отрѣзковъ $\frac{x}{-2,5}+\frac{y}{2,5}=1.$

Уравненіе съ угловымъ коэффиціентомъ $y=x+2,5$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\alpha=\frac{3\pi}{4}\right);\ p=\frac{5}{4}\sqrt{2},\ a=-2,5,\ b=2,5;\ k=1,\left(\varphi=\frac{\pi}{4}\right).$$

§ 3. **Изслѣдованіе уравненія прямой.** Разсмотримъ теперь *частные случаи* уравненія прямой

$$Ax+By+C=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

когда одинъ или нѣсколько коэффиціентовъ его обращаются въ нуль.

1) Пусть $C=0$. Уравненіе (1) принимаетъ тогда видъ:

$$Ax+By=0,$$

и можетъ быть удовлетворено значеніями: $x=0$, $y=0$; слѣдовательно *прямая проходитъ черезъ начало координатъ.*

2) Если $A=0$, то уравненіе (1) принимаетъ такой видъ:

$$By+C=0, \text{ или } y=b, \text{ гдѣ } b=-\frac{C}{B}.$$

и, слѣдовательно, опредѣляетъ прямую, параллельную оси X. По аналогіи мы можемъ заключить, что при $B=0$ уравненію (1) соотвѣтствуетъ прямая, параллельная оси Y. Такимъ образомъ, *если въ уравненіи прямой отсутствуетъ какая-либо координата, то прямая параллельна соотвѣтствующей оси.*

3) Если $A=0$ и $C=0$, то уравненіе (1) получаетъ видъ: $By=0$, или $y=0$, т.-е. оно опредѣляетъ ось X.

Аналогично въ случаѣ $B=0$, $C=0$, уравненію (1) соотвѣтствуетъ ось y.

4) Разсмотримъ теперь случай, когда оба коэффиціента при текущихъ координатахъ равны нулю: $A=0, B=0$, а $C\neq0$. Тогда уравненіе (1) принимаетъ такой видъ: $C=0$ или, по сокращеніи на C, $1=0$.

Въ этомъ случаѣ нормирующій множитель равенъ ∞, въ виду чего и $p=\infty$ (см. § 1). Слѣдовательно, если мы хотимъ дать геометрическій смыслъ и этому уравненію, то мы должны допустить, что оно опредѣляетъ прямую, находящуюся на безконечно большомъ разстояніи отъ начала.

Мы приняли, что на каждой прямой есть одна безконечно удаленная точка. Геометрическое мѣсто такихъ точекъ есть линія 1-го порядка, такъ какъ съ произвольной прямой она имѣетъ только одну общую точку. Мы назовемъ эту линію—*безконечно удаленной прямой.* Слѣдовательно уравненіе $1=0$ опредѣляетъ безконечно удаленную прямую.

5) Если $A=0$, $B=0$, $C=0$, то уравненіе (1) представляетъ собою тождество, и ему удовлетворяютъ координаты любой точки плоскости.

§ 4. **Детерминанты 2-го и 3-го порядка**. При рѣшеніи системы двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

получаются выраженія

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

числители и знаменатель которыхъ составлены изъ коэффиціентовъ уравненій (1) по одному и тому же правилу. Именно, чтобы получить знаменатель, надо расположить коэффиціенты a_1, b_1, a_2, b_2 въ таблицу въ формѣ квадрата

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

и взять произведеніе элементовъ, расположенныхъ по главной діагонали, a_1b_2 съ ихъ знакомъ и прибавить произведеніе элементовъ, расположенныхъ на побочной діагонали, a_2b_1 съ обратнымъ знакомъ. Числители выраженій (2) получаются такимъ же образомъ, только коэффиціенты при опредѣляемой неизвѣстной замѣнены извѣстными членами c_1 и c_2. Выраженія такого рода называются *детерминантами* или *опредѣлителями 2-го порядка*; для нихъ принято обозначеніе (3). Въ этомъ обозначеніи формулы (2) получать такой видъ

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2')$$

Детерминантомъ 3-го порядка называется выраженіе, составленное изъ 9-ти элементовъ такимъ образомъ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Здѣсь каждый элементъ перваго столбца умножается на детерминантъ 2-го порядка, полученный изъ основного детерминанта вычеркиваніемъ того столбца и той строки, къ которымъ принадлежитъ этотъ элементъ; такой детерминантъ называется *миноромъ*, соотвѣтствующимъ этому элементу; полученныя произведенія берутся по очереди съ ихъ знакомъ или съ обратнымъ знакомъ. Правая часть равенства (4) называется *разложеніемъ детерминанта по элементамъ перваго столбца*.

Если детерминанты 2-го порядка въ формулѣ (4) напишемъ въ раскрытой формѣ, то получимъ для детерминанта Δ слѣдующее выраженіе

$$\Delta=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1. \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

Его не трудно написать, воспользовавшись такимъ пріемомъ (онъ носитъ названіе *правила Саррюса)*. Припишемъ подъ детерминантомъ Δ еще разъ его первую и вторую строки

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$
$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

И возьмемъ произведенія по три элемента на главной діагонали $a_1b_2c_3$ и на линіяхъ параллельныхъ ей съ ихъ знакомъ и произведенія трехъ элементовъ на побочной діагонали $a_3b_2c_1$ и на линіяхъ, ей параллельныхъ, съ обратнымъ знакомъ.

Теорема 1. *Детерминантъ не мѣняется отъ замѣны строкъ соотвѣтствующими столбцами.*

Для детерминанта 2-го порядка это очевидно. Выраженіе же (5) можно преобразовать, вынося за скобки a_1, b_1 и c_1, такъ

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \ldots$$

Теорема 2. *При перестановкѣ двухъ строкъ или двухъ столбцовъ детерминантъ мѣняетъ знакъ, сохраняя абсолютную величину.*

Въ виду теоремы 1 достаточно показать это только для строкъ. Переставимъ, напримѣръ, вторую и третью строки; мѣняя мѣстами указатели 2 и 3 въ разложеніи (4), мы замѣтимъ, что первый членъ измѣнитъ знакъ, такъ какъ въ детерминантѣ 2-го порядка произойдетъ перестановка строкъ, а два другіе члена помѣняются мѣстами и тоже перемѣнятъ знаки.

Слѣдствіе 1. *Детерминантъ можно разлагать по элементамъ любой строки или любого столбца;* такъ какъ всякій столбецъ можно привести одной или нѣсколькими перестановками сосѣднихъ столбцовъ на первое мѣсто.

Знакъ, съ которымъ входитъ произведеніе перваго элемента строки или столбца на соотвѣтствующій миноръ, зависитъ отъ числа перестановокъ; остальныя произведенія по очереди имѣютъ положительный или отрицательный знакъ.

Слѣдствіе 2. *Детерминантъ съ двумя одинаковыми рядами или столбцами равенъ нулю.*

Дѣйствительно, послѣ перестановки этихъ строкъ детерминантъ долженъ измѣнить знакъ; слѣдовательно. $\Delta = -\Delta'$ и вмѣстѣ съ тѣмъ $\Delta = \Delta'$, откуда $\Delta = 0$.

Теорема 4. *Общій множитель всѣхъ элементовъ одного столбца или одной строки можно вынести за знакъ детерминанта.*

Теорему эту достаточно доказать для элементовъ перваго столбца, такъ какъ всякую строку или столбецъ можно поставить на его мѣсто. Разлагая по элементамъ перваго столбца, получимъ

$$\begin{vmatrix} la_1 & b_1 & c_1 \\ la_2 & b_2 & c_2 \\ la_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = la_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - la_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + la_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = l \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 5. *Детерминантъ не измѣнится, если къ элементамъ одной строки* (или столбца) *прибавимъ соотвѣтственные элементы другой строки* (или столбца), *умноженные на одно и то же число.*

Теорему эту достаточно доказать для перваго столбца. Разлагая по элементамъ этого столбца, мы получимъ

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+kb_1) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - (a_2+kb_2) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (a_3+kb_3) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + k \left[b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Второй детерминантъ равенъ нулю, такъ какъ имѣетъ два одинаковые столбца.

Этими теоремами пользуются при вычисленіи детерминанта.

Примѣръ. Вычислить детерминантъ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Здѣсь мы вычитаемъ изъ элементовъ второго столбца и третьяго соотвѣтствующіе элементы перваго, умноживъ ихъ на 2 и на 3; разлагаемъ затѣмъ по элементамъ первой строки, мѣняемъ знаки и выносимъ общаго множителя 2.

Послѣдній детерминантъ равенъ нулю, ибо у него одинаковые столбцы.

Рѣшеніе системы 3 линейныхъ уравненій съ 3 неизвѣстными. Пусть имѣемъ систему

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3. \end{aligned} \qquad (8)$$

Умножимъ эти уравненія соотвѣтственно на

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

и сложимъ. Коэффиціентомъ при x будетъ стоять

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Коэффиціенты при y или z получаются замѣной a на b или на c слѣдовательно, равны нулю, какъ детерминанты съ одинаковыми столбцами. Т. о. мы получимъ

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда находимъ x; формулы для y и z напишутся по аналогіи

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad \ldots\ldots (9)$$

Система 3 однородныхъ уравненій съ 3 неизвѣстными. Если $d_1=d_2=d_3=0$, то всѣ числители въ выраженіяхъ (9) равны нулю, такъ какъ въ детерминантахъ всѣ элементы одного столбца равны нулю. Мы получаемъ очевидныя рѣшенія

$$x=0,\ y=0,\ z=0.$$

Система однородныхъ уравненій допускаетъ рѣшенія, кромѣ нулевыхъ, если и знаменатель въ формулахъ (9) равенъ нулю, т.-е. если детерминантъ системы равенъ нулю $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.\ \ldots\ldots (10)$

т. к. въ этомъ случаѣ выраженія корней принимаютъ видъ $\frac{0}{0}\cdot$ Одно изъ уравненій системы тогда будетъ слѣдствіемъ двухъ остальныхъ, и слѣдовательно, одному изъ неизвѣстныхъ можно дать произвольное значеніе.

Давая одному изъ неизвѣстныхъ значеніе $z=1$, мы получимъ *условную систему* 3 уравненій съ 2 неизвѣстными.

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0 \\ a_2x+b_2y+c_2&=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11) \\ a_3x+b_3y+c_3&=0 \end{aligned}$$

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что условная система имѣетъ рѣшеніе при выполненіи условія (10).

§ 5. **Точка пересѣченія двухъ прямыхъ.** Даны двѣ прямыя

$$Ax+By+C=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$A'x+B'y+C=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Точка ихъ пересѣченія лежитъ одновременно на обѣихъ прямыхъ и, слѣдовательно, координаты ея должны удовлетворять обоимъ уравненіямъ (1) и (2). Чтобы найти эти значенія x и y, удовлетворяющія одновременно уравненіямъ (1) и (2), надо ихъ совмѣстно рѣшить и тогда получимъ (§ 4):

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-C & B\\ -C' & B'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & B\\ A' & B'\end{vmatrix}} \quad\ldots\ldots (3),\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}A & -C\\ A' & -C'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & B\\ A' & B'\end{vmatrix}} \quad\ldots\ldots (4)$$

1. Если
$$\begin{vmatrix}A & B\\ A' & B'\end{vmatrix}\neq 0,$$

то x и y будутъ имѣть конечныя значенія, и мы получимъ одну вполнѣ опредѣленную точку пересѣченія съ координатами (3) и (4).

2. Если знаменатель
$$\begin{vmatrix}A & B\\ A' & B'\end{vmatrix}=0, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

но числители въ выраженіяхъ (3) и (4) не равны нулю, то $x=\infty$, $y=\infty$, соотвѣтствующая точка (гл. I. § 2) безконечно удаленная. Прямыя (1) и (2) параллельны, такъ какъ на конечномъ разстояніи не пересѣкаются. Съ другой стороны условіе (5) въ раскрытомъ видѣ будетъ: $AB'-B'A=0$, откуда $-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}\cdot$ Угловые коэффиціенты, слѣдовательно, равны, и прямыя наклонены подъ одинаковымъ угломъ къ оси абсциссъ. Условіе параллельности (5) можно еще переписать въ такомъ видѣ.

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\,. \qquad (5')$$

т.-е. *двѣ прямыя параллельны, если коэффиціенты при соотвѣтственныхъ текущихъ координатахъ въ ихъ уравненіяхъ пропорціональны.*

3. Положимъ теперь, что, кромѣ знаменателя одинъ изъ числителей равенъ нулю,

например̃ъ,
$$\begin{vmatrix}-C & B\\ -C' & B'\end{vmatrix}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

или въ раскрытомъ видѣ, $-CB'+C'B=0$,

откуда
$$\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\cdot \qquad (6')$$

Сравнивая уравненія (5') и (6'), получимъ

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}. \qquad (7)$$

Тогда и второй числитель равенъ нулю и обѣ координаты точки пересѣченія получаютъ неопредѣленныя значенія:

$$x=\frac{0}{0} \text{ и } y=\frac{0}{0}\cdot$$

Обозначимъ знаменатель отношеній (7) черезъ q; тогда

$$A=A'q,\ B=B'q,\ C=C'q;$$

подставляя эти выраженія A, B и C въ уравненіе (1), получаемъ

$$A'qx+B'qy+C'q=0,$$

или

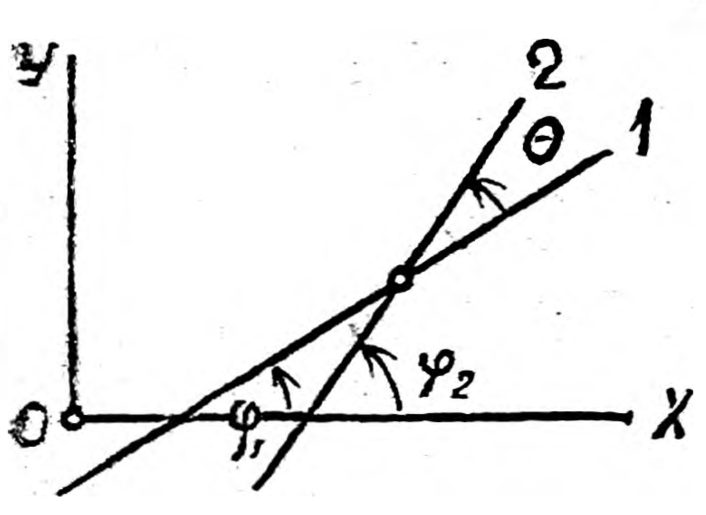
$$A'x+B'y+C'=0,$$

т.-е. уравненіе (2) является простымъ слѣдствіемъ (1); такимъ образомъ, всякая пара значеній x и y изъ безконечнаго числа ихъ, удовлетворяющихъ уравненію (1), удовлетворяетъ и уравненію (2); геометрически это обозначаетъ, что всѣ точки, лежащія на прямой (1), расположены и на прямой (2), т.-е. обѣ прямыя слились въ одну.

Такимъ образомъ, *двѣ прямыя сливаются, если три коэффиціента уравненія одной изъ нихъ соотвѣтственно пропорціональны коэффиціентамъ уравненія другой.*

Равенство (6) нельзя представить въ видѣ (6′), если $B'=0$. Тогда и $B=0$, и прямыя параллельны оси X. Координаты точки пересѣченія $x=\frac{0}{0}$, $y=\infty$. По аналогіи $x=\infty$, $y=\frac{0}{0}$, если прямыя параллельны оси Y.

§ **6. Уголъ между двумя прямыми.** Условимся считать на прямой положительнымъ направленіе въ сторону возрастанія ординаты. Подъ угломъ двухъ прямыхъ



Фиг. 24.

$$y=k_1x+b_1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$y=k_2x+b_2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

мы будемъ разумѣть уголъ между положительными направленіями ихъ отъ первой прямой ко второй противъ движенія часовой стрѣлки.

Легко видѣть, что этотъ уголъ $\theta=\varphi_2-\varphi_1$, гдѣ φ_1 уголъ наклоненія къ оси X первой прямой и φ_2 второй, (см. фиг. 24)

откуда

$$tg\,\theta=\frac{tg\,\varphi_2-tg\,\varphi_1}{1+tg\,\varphi_2\,tg\,\varphi_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Если система координатъ прямоугольная, то

$$tg\,\varphi_1=k_1,\ tg\,\varphi_2=k_2$$

$$tg\ \theta=tg\,(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Если прямыя даны общими уравненіями

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

то, такъ какъ $k_1=-\frac{A_1}{B_1}$ и $k_2=-\frac{A_2}{B_2}$, формула (4) принимаетъ видъ

$$tg\,\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Прямыя параллельны, если $tg\,\theta=0$;

тогда $k_1=k_2$: или
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Слѣдовательно, двѣ прямыя параллельны, если ихъ угловые коэффиціенты равны или, если коэффиціенты при текущихъ координатахъ соотвѣтственно пропорціональны.

Если данныя прямыя *перпендикулярны* между собой, то $tg\,\varphi=\infty$; тогда
$$AA'+BB'=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$
или $\frac{A}{B'}=-\frac{B}{A'}$. Угловые коэффиціенты связаны соотношеніемъ
$$1+k_1k_2=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7')$$
или
$$k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Эти формулы вѣрны только для прямоугольной системы координатъ.

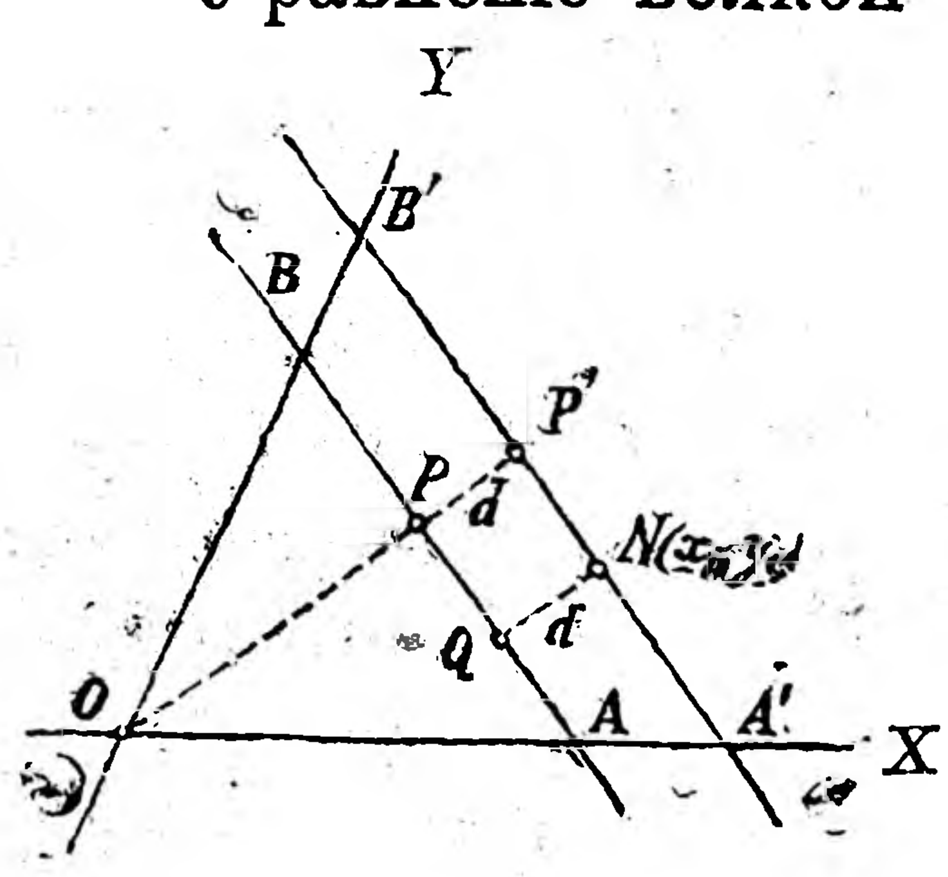
Задача 1. *Найти прямую, проходящую черезъ точку (2, 1) параллельно прямой*
$$5x-6y-17=0.$$

Уравненіе всякой прямой параллельной данной можно написать такъ
$$5x-6y+C=0;$$
такъ какъ искомая прямая проходитъ черезъ точку (2, 1), то
$$5\cdot2-6\cdot1+C=0.$$

Слѣдовательно, $C=-4$ и искомое уравненіе
$$5x-6y-4=0.$$

Задача 2. *Найти прямую, проходящую черезъ точку (2, 1) перпендикулярно прямой*
$$5x-6y-17=0 \qquad \left(\omega=\frac{\pi}{2}\right).$$

Уравненіе всякой прямой перпендикулярной данной будетъ
$$6x+5y+C=0;$$
слѣдовательно, уравненіе искомой прямой
$$6x+5y-17=0.$$



Фиг. 25.

§ 7. Разстояніе точки до прямой. Дана прямая AB (см. фиг. 25) своимъ уравненіемъ въ нормальномъ видѣ
$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$
и точка $N(x_1, y_1)$. Чтобы опредѣлить разстояніе $d=NQ$, проведемъ черезъ точку N прямую $A'B' \parallel AB$. Ея уравненіе отличается отъ уравненія (1) только свободнымъ членомъ
$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p_1=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Мы найдемъ его, подставивъ въ это уравненіе координаты точки N

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta - p_1 = 0,$$

откуда $$p_1 = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta.$$

Не трудно замѣтить $d = p_1 - p$;

слѣдовательно, $$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta - p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Разстояніе точки отъ прямой равно лѣвой части нормальнаго уравненія прямой съ замѣной текущихъ координатъ координатами этой точки.

Полагая $x_1=0$, $y_1=0$, найдемъ разстояніе начала координатъ отъ прямой $d = -p$.

Такъ какъ выраженіе (3) перемѣняетъ знакъ только, обращаясь въ нуль, а нулю оно равняется только для точекъ, лежащихъ на прямой, то отсюда слѣдуетъ, что для точекъ, расположенныхъ по одну сторону отъ прямой съ началомъ координатъ, разстояніе d отъ этой прямой отрицательно, для точекъ же, находящихся по другую сторону прямой, d положительно.

§ 8. **Понятіе о пучкѣ прямыхъ.** Пусть намъ даны двѣ прямыя

$$Ax + By + C = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$A'x + B'y + C' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

разсмотримъ уравненіе

$$Ax + By + C + q(A'x + B'y + C') = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ q—произвольный множитель. Это уравненіе первой степени, слѣдовательно, опредѣляетъ прямую. Значенія x и y, удовлетворяющія одновременно уравненіямъ (1) и (2), обращаютъ въ нуль и лѣвую часть уравненія (3). Слѣдовательно, прямая (3) проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ (1) и (2). Давая параметру q *всѣ* значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, мы получимъ *всѣ* прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія прямыхъ (1) и (2). Совокупность всѣхъ этихъ прямыхъ называется *пучкомъ прямыхъ* (сравни гл. II § 5), а общая точка пересѣченія ихъ носитъ названіе *центра пучка.* Уравненіе (3) представляетъ уравненіе пучка, если разсматривать множитель q, какъ перемѣнный параметръ.

Положивъ въ уравненіи (3) $q=0$, мы получимъ уравненіе (1). Раздѣливъ же предварительно обѣ части уравненія (3) на q и положивъ затѣмъ $q=\infty$, мы получимъ уравненіе (2). Такимъ образомъ, основнымъ прямымъ (1) и (2) пучка (3) соотвѣтствуютъ значенія $q=0$ и $q=\infty$.

Если прямыя (1) и (2) параллельны, то уравненіе (3) попрежнему опредѣляетъ пучокъ прямыхъ, но центръ пучка лежитъ въ безконечности. Всѣ прямыя пучка параллельны. Дѣйствительно, въ разсматриваемомъ случаѣ коэффиціенты при x и y въ уравненіяхъ (1) и (2) пропорціональны. Внося

$$A' = Al,\; B' = Bl$$

въ уравненіе (3), мы получимъ

$$A(1+lq)x+B(1+lq)y+C+C'q=0$$

или

$$Ax+By+\frac{C+C'q}{1+lq}=0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Коэффиціенты при текущихъ координатахъ не содержатъ перемѣннаго параметра q; слѣдовательно, всѣ прямыя одного направленія.

Возьмемъ прямыя (1) и (2) параллельно осямъ координатъ

$$x=x_1, \quad y=y_1,$$

тогда уравненіе

$$y-y_1+q(x-x_1)=0$$

опредѣляетъ пучокъ прямыхъ съ центромъ въ точкѣ (x_1, y_1).

Въ этомъ случаѣ (и только въ этомъ) параметръ q получаетъ простой геометрическій смыслъ. Именно, $-q=k$ есть угловой коэффиціентъ прямой пучка. Само уравненіе (3) принимаетъ видъ

$$y-y_1=k(x-x_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Съ помощью теоріи пучка рѣшается очень просто много задачъ, которыя при другомъ способѣ рѣшенія ихъ требуютъ сложныхъ выкладокъ.

Примѣръ 1. Найти прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$3x-4y-26=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$9x-17y-7=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

и черезъ точку (1, —1).

Пишемъ уравненіе пучка, основными прямыми котораго служатъ прямыя (6) и (7):

$$3x-4y-26+q(9x-17y-7)=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Выберемъ изъ пучка такую прямую, которая проходила бы черезъ точку (1, —1); другими словами, дадимъ параметру q такое значеніе, чтобы $x=1$, $y=-1$ удовлетворяли уравненію (8)

$$3+4-26+q(9+17-7)=0,$$

откуда $q=1$, и уравненіе искомой прямой:

$$12x-21y-33=0 \text{ или } 4x-7y-11=0.$$

Примѣръ 2. Найти прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ (6) и (7) и перпендикулярную къ прямой

$$4x+2y-5=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9) \qquad \left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$$

Въ уравненіи (8) выбираемъ параметръ q такъ, чтобы прямая пучка (8) была перпендикулярна къ прямой (9). Пишемъ условія перпендикулярности:

$$(3+9q)4+(-4-17q)2=0;$$

рѣшая это уравненіе относительно q, получаемъ

$$q=-2;$$

слѣдовательно, уравненіе прямой пучка (8), перпендикулярной къ прямой (9), будетъ такое:

$$-15x+30y-12=0,$$

или

$$5x-10y+4=0.$$

§ **9. Условіе пересѣченія трехъ прямыхъ въ одной точкѣ.** Пусть даны три прямыя:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0;$$

координаты x, y общей точки ихъ пересѣченія удовлетворяютъ этимъ тремъ уравненіямъ. Слѣдовательно, уравненія эти совмѣстны, т.-е. (§ 4)

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

§ **10. Условіе расположенія трехъ точекъ на одной прямой.** Пусть даны три точки (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2); координаты ихъ удовлетворяютъ уравненію прямой, на которой онѣ расположены:

$$Ax+By+C=0,$$
$$Ax_1+By_1+C=0,$$
$$Ax_2+By_2+C=0;$$

слѣдовательно, эти три однородныхъ уравненія относительно неизвѣстныхъ A, B, C должны быть совмѣстны, т.-е. (§ 4)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

То же условіе расположенія трехъ точекъ на одной прямой можно представить въ такой формѣ: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ . . . . (2)

Въ самомъ дѣлѣ, вычитая почленно второе уравненіе изъ перваго и послѣдняго, имѣемъ:

$$A(x-x_1)=-B(y-y_1)$$
$$A(x_2-x_1)=-B(y_2-y_1),$$

откуда соотношеніе (2) получается почленнымъ дѣленіемъ 1-го равенства на 2-ое.

Если координаты точки (x, y) въ равенствѣ (1) будемъ разсматривать, какъ перемѣнныя, то точка (x, y) будетъ перемѣщаться, оставаясь на прямой, проходящей черезъ точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), т.-е. соотношенія (1) или (2) представляютъ собою уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки (x_1, y_1) (x_2, y_2), если координаты x, y разсматривать, какъ текущія координаты.

§ **11. Площадь треугольника по даннымъ его вершинамъ.** Пусть вершинами треугольника служатъ точки: (x, y), (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Обозначимъ черезъ h высоту треугольника, проведенную изъ 1-ой вершины; тогда, такъ какъ h есть разстояніе точки (x,y) отъ прямой проходящей черезъ (x_1,y_1) и (x_2,y_2),

$$h=M\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \qquad (\S\ 10, \S\ 7),$$

гдѣ M нормирующій множитель; разлагая детерминантъ по элементамъ первой строки получаемъ:

$$h=M\left[x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right]$$

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}} \qquad (\S\ 1).$$

Обозначая черезъ d основаніе треугольника, получимъ:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \qquad (\text{гл. III } \S\ 2)$$

откуда
$$M=\pm\frac{1}{d}.$$

Такимъ образомъ, площадь треугольника

$$\varDelta=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

такъ какъ $\varDelta=\frac{dh}{2}$.

Пользуясь полученной формулой площади треугольника, мы могли бы прямо прійти къ результатамъ § 10.

ГЛАВА V.

Общая теорія кривыхъ 2-го порядка.

§ **1. Основныя понятія.** Общій видъ уравненія кривой 2-го порядка такой $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ . . . . (1)

Такъ какъ уравненіе (1) вполнѣ опредѣлится, если даны будутъ отношенія всѣхъ его коэффиціентовъ къ одному изъ нихъ, и такъ какъ изъ шести коэффиціентовъ этого уравненія можно составить пять такихъ отношеній,—то *кривая второго порядка опредѣляется пятью условіями.*

Напримѣръ, кривая 2-го порядка вполнѣ опредѣлена, если заданы 5 точекъ, черезъ которыя она проходитъ.

§ 2. Методъ изслѣдованія кривой 2-го порядка. Изслѣдованіе кривой 2-го порядка мы будемъ производить, отыскивая точки пересѣченія кривой съ произвольной прямой на плоскости. Особенно удобно будетъ производить такое изслѣдованіе, если указанную произвольную прямую считать принадлежащей къ нѣкоторому пучку; центръ пучка мы будемъ выбирать сообразно съ условіями задачи, а для упрощенія вычисленій будемъ считать начало координатъ перенесеннымъ въ центръ пучка.

Въ такомъ случаѣ относительно новой системы координатъ уравненіе пучка прямыхъ и уравненіе кривой (1) будутъ имѣть видъ

$$y'=kx', \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\overline{A}x'^2+2\,\overline{B}x'y'+\overline{C}y'^2+2\overline{D}x'+2\,\overline{E}y'+\overline{F}=0. \quad \ldots \ldots \quad (1')$$

Чтобы опредѣлить коэффиціенты этого уравненія, воспользуемся формулами переноса начала координатъ

$$x=x'+x_0,\quad y=y'+y_0,$$

гдѣ x' y', новыя текущія координаты, а x_0, y_0—координаты новаго начала относительно старыхъ осей. Подставляемъ выраженія x и y въ уравненіе (1)

$$A(x'+x_0)^2+2\,B(x'+x_0)\,(y'+y_0)+C\,(y'+y_0)^2+2\,D\,(x'+x_0)+2\,E(y'+y_0)+F=0.$$

Собираемъ члены по степенямъ новыхъ координатъ x', y'

$$Ax'^2+2\,Bx'y'+Cy'^2+2\,x'(Ax_0+By_0+D)+2\,y'(Bx_0+Cy_0+E)+$$
$$+Ax_0{}^2+2\,Bx_0y_0+Cy_0{}^2+2\,Dx_0+2\,Ey_0+F=0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *старшіе члены уравненія кривой 2-го порядка не измѣняются при переносѣ начала координатъ.*

$$\overline{A}=A,\ \overline{B}=B,\ \overline{C}=C.$$

Коэффиціенты при членахъ первой степени имѣютъ видъ

$$\overline{D}=Ax_0+By_0+D,\quad \overline{E}=Bx_0+Cy_0+E, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

и свободный членъ $\overline{F}$ равенъ всей лѣвой части уравненія (1) съ замѣной текущихъ координатъ координатами новаго начала x_0, y_0 [1].

Для того, чтобы найти точку пересѣченія какой-нибудь прямой пучка (2) съ кривой (1'), рѣшаемъ совмѣстно эти уравненія; замѣняя y' черезъ kx', имѣемъ:

$$(A+2\,Bk+Ck^2)\,x'^2+2\,(\overline{D}+\overline{E}k)x'+\overline{F}=0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Это уравненіе даетъ абсциссы *двухъ* точекъ пересѣченія нашей кривой съ прямой пучка, такъ какъ оно квадратное. Этого и слѣдовало ожидать, такъ какъ число точекъ пересѣченія кривой съ произвольной

---

[1]) Обозначая лѣвую часть уравненія черезъ $f\,(x,y)$, а частныя производныя лѣвой части уравненія (1) по x и по y черезъ f'_x и f'_y, мы можемъ записать кратко

$$\overline{D}=\tfrac{1}{2}f'_x(x_0,\ y_0),\ \overline{E}=\tfrac{1}{2}f'_y(x_0,\ y_0),\ \overline{F}=f(x_0\ y_0).$$

прямой равно порядку этой кривой, т.-е. въ данномъ случаѣ двумъ. Корни уравненія (4) могутъ быть дѣйствительными, мнимыми или равными. Въ первомъ случаѣ прямая пучка (2) пересѣкаетъ кривую въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ; во второмъ случаѣ точки пересѣченія мнимы и, слѣдовательно, прямая не встрѣчаетъ кривой; въ третьемъ случаѣ точки пересѣченія сливаются.

Назовемъ *касательной въ данной точкѣ кривой прямую, положеніе которой представляетъ предѣльное положеніе сѣкущей, проходящей черезъ данную точку и черезъ другую точку кривой, неограниченно приближающуюся къ первой.* Слѣдовательно, въ случаѣ равенства корней уравненія (4) прямая пучка (2) касается кривой.

§ **3. Классификація кривыхъ 2-го порядка.** Если коэффиціентъ при x'^2 въ уравненіи (4) равенъ нулю

$$A+2Bk+Ck^2=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

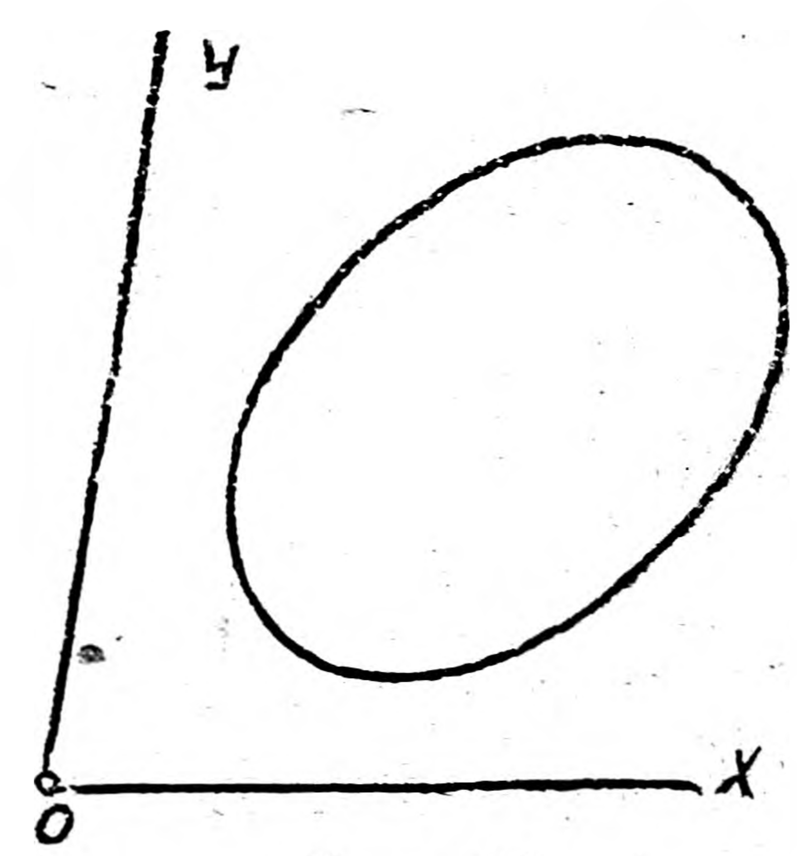
то абсцисса одной точки пересѣченія равна безконечности [1]). Уравненіе (5) опредѣляетъ два значенія углового коэффиціента

$$k_1=\frac{-B+\sqrt{-\delta}}{C}, \quad k_2=\frac{-B-\sqrt{-\delta}}{C},$$

гдѣ

$$\delta=AC-B^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

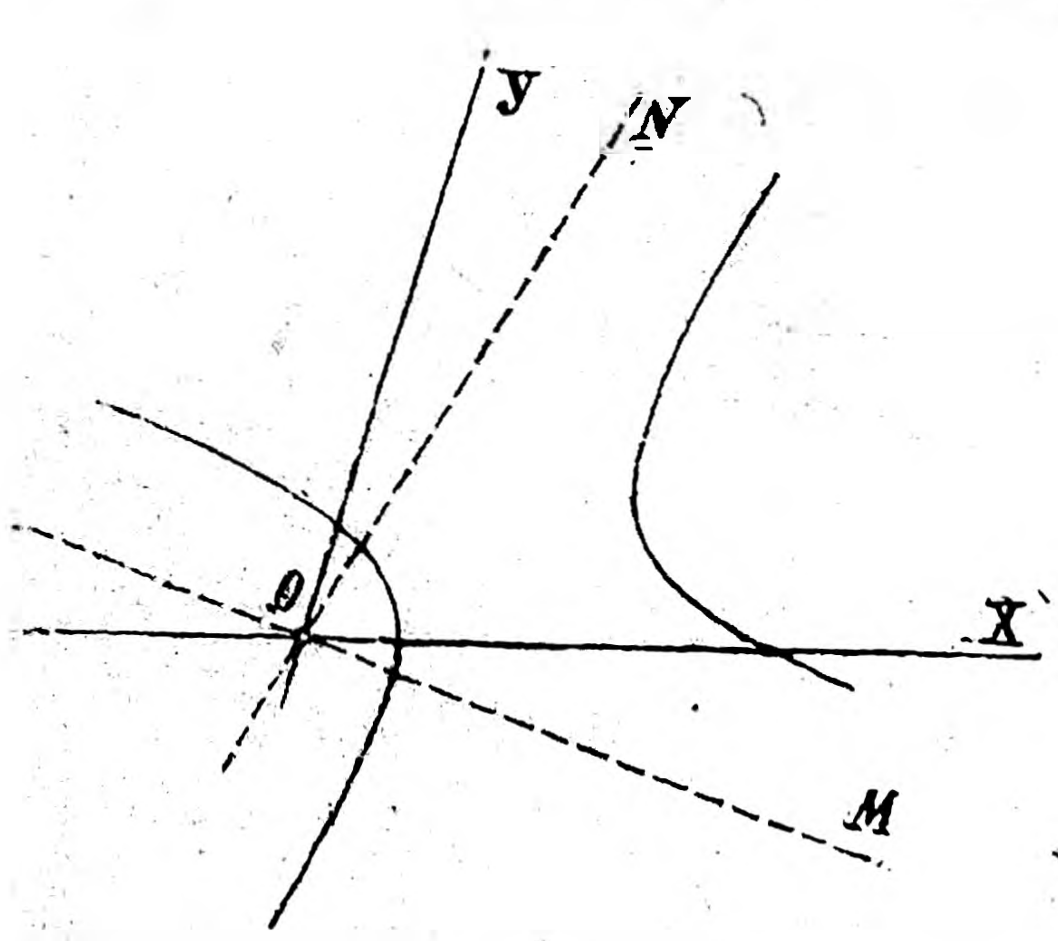
Слѣдовательно, существуетъ, вообще говоря, два направленія, по которымъ прямыя пучка (2) пересѣкаютъ нашу кривую въ безконечноудаленной точкѣ. *Кривая 2-го порядка имѣетъ двѣ безконечноудаленныхъ точки.*



Фиг. 26.

1) Если $\delta>0$,

то корни уравненія (5) мнимы. Кривая имѣетъ двѣ мнимыя безконечноудаленныя точки и, слѣдовательно, вся расположена въ конечной части плоскости. Такая кривая называется *эллипсомъ. Эллипсъ — замкнутая кривая* (см. фиг. 26).



Фиг. 27.

2) Если $\delta<0$,

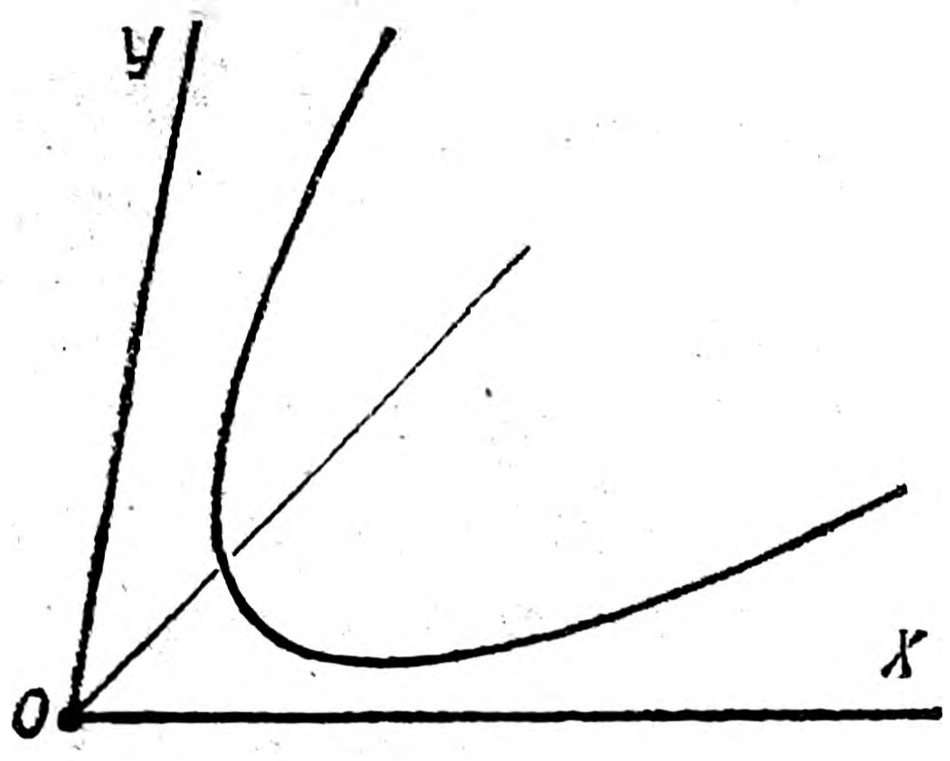
то въ пучкѣ (2) есть двѣ прямыя, встрѣчающія кривую въ безконечности. Кривая имѣетъ двѣ дѣйствительныя безконечно-удаленныя точки. Такая кривая называется *гиперболой.* Двѣ вѣтви гиперболы уходятъ въ безконечность (см. фиг. 27).

3) Если $\delta=0$,

---

1) Подставляя $x=\frac{1}{z}$ въ уравненіе $ax^2+bx+c=0$, мы получимъ $a+bz+cz^2=0$. Если $a=0$, то одинъ корень $z_1=0$ и слѣдовательно $x_1=\infty$.

то оба корня k_1 и k_2 равны. Безконечно-удаленныя точки кривой сливаются. Эта кривая называется *параболой* (см. фиг. 28).



Фиг. 28.

Величина δ, отъ которой зависитъ характеръ кривой, называется *дискриминантомъ* старшихъ членовъ.

§ **4. Распаденіе кривой 2-го порядка.** Если въ уравненіи (4) обращается въ нуль свободный членъ $\overline{F}$, то координаты одной точки пересѣченія всякой прямой пучка (2) и кривой равны нулю. Съ другой стороны

$$\overline{F}=f(x_0, y_0)=0$$

есть дѣйствительно условіе того, что кривая (1) проходитъ черезъ новое начало (x_0, y_0).

Если еще коэффиціентъ при x' равенъ нулю

$$\overline{D}+\overline{E}k=0, \qquad \qquad (7)$$

то и второй корень уравненія (4) равенъ нулю. Обѣ точки пересѣченія прямой пучка (2) съ кривой совпадаютъ въ новомъ началѣ координатъ. Слѣдовательно, прямая касается кривой. Уравненіе (7) опредѣляетъ угловой коэффиціентъ этой касательной

$$k=-\frac{\overline{D}}{\overline{E}} \qquad \qquad (7')$$

Направленіе касательной становится неопредѣленнымъ въ той точкѣ кривой, гдѣ $\overline{D}$ и $\overline{E}$ оба обращаются въ нуль. Тогда уравненіе (4) имѣетъ видъ

$$(A+2Bk+Ck^2)x'^2=0. \qquad \qquad (4')$$

Всякая прямая пучка (2) пересѣкаетъ кривую въ двухъ слившихся точкахъ. Исключеніе составляютъ тѣ прямыя, для которыхъ

$$A+2Bk+Ck^2=0. \qquad \qquad (5)$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (4) обращается въ тождество, точка пересѣченія становится неопредѣленной, т.-е. всякая точка такой прямой принадлежитъ данной кривой. Уравненіе (5) опредѣляетъ вообще два значенія k_1 и k_2 углового коэффиціента. Слѣдовательно, кривая въ такомъ случаѣ распадается на пару прямыхъ.

Очевидно, не всякая кривая распадается. Это будетъ, если существуетъ точка, координаты которой удовлетворяютъ 3 уравненіямъ

$$\overline{D}=0, \ \overline{E}=0, \ \overline{F}=0. \qquad \qquad (8)$$

Такъ какъ $\overline{F}=x(Ax+By+D)+y(Bx+Cy+E)+Dx+Ey+F, \qquad (9)$

то система (8) равносильна такой

$$\begin{aligned} &Ax+By+D=0,\\ &Bx+Cy+E=0, \qquad \qquad (8')\\ &Dx+Ey+F=0. \end{aligned}$$

Эти уравненія имѣютъ общее рѣшеніе, если

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0.$$

Это—*условіе распаденія кривой на пару прямыхъ.* Если при томъ $\delta>0$ (§ 3), то уравненіе (5) имѣетъ мнимые корни, и прямыя мнимы. Слѣдовательно, *эллипсъ распадается на пару мнимыхъ прямыхъ.* Единственная дѣйствительная точка такого эллипса (x_0, y_0). Если $\delta<0$, то прямыя дѣйствительны. *Гипербола распадается на пару дѣйствительныхъ пересѣкающихся прямыхъ.* Случай $\delta=0$ мы разсмотримъ позднѣе [1]).

§ **5. Центръ кривой 2-го порядка.** Если въ уравненіи (4) обращается въ нуль только коэффиціентъ при x'

$$\overline{D}+\overline{E}k=0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

то на основаніи свойствъ корней квадратнаго уравненія сумма абсциссъ двухъ точекъ пересѣченія

$$x'_1+x'_2=0.$$

Назовемъ *хордой* кривой 2-го порядка прямую, соединяющую какія-нибудь двѣ ея точки. Абсцисса средины хорды

$$x'=\frac{x'_1+x'_2}{2}=0$$

а, слѣдовательно, и ордината равны нулю. Уравненіе (7) опредѣляетъ угловой коэффиціентъ этой хорды

$$k=-\frac{\overline{D}}{\overline{E}}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7')$$

Такимъ образомъ, *черезъ всякую точку плоскости проходитъ одна и только одна хорда, дѣлящаяся въ этой точкѣ пополамъ.*

Направленіе хорды становится неопредѣленнымъ, если $\overline{D}$ и $\overline{E}$ оба нули, т.-е. если

$$\begin{aligned} &Ax_0+By_0+D=0,\\ &Bx_0+Cy_0+E=0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)\end{aligned}$$

Назовемъ *центромъ кривой 2-го порядка точку, въ которой дѣлится пополамъ всякая проходящая черезъ нее хорда.*

Уравненія (10) опредѣляютъ вообще единственный центръ (x_0, y_0).

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \quad y_0=\frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Не трудно замѣтить, что знаменателемъ въ этихъ выраженіяхъ служитъ дискриминантъ старшихъ членовъ δ. Если дискриминантъ

---

[1]) Смотри § 5.

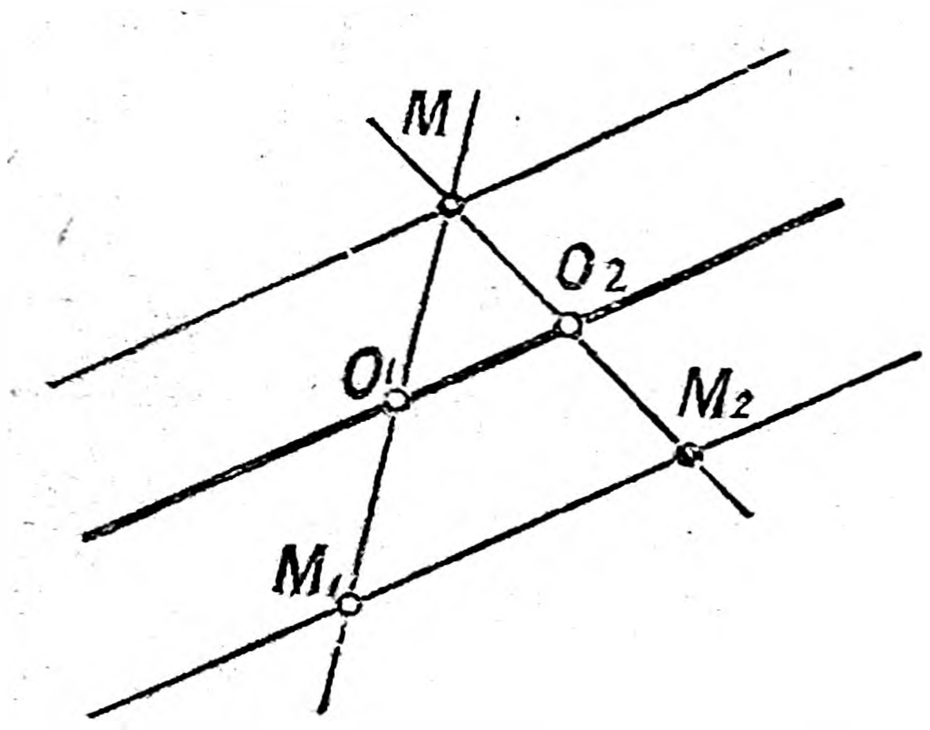
не нуль, то кривая имѣетъ опредѣленный центръ съ конечными координатами. Поэтому *эллипсъ и гипербола называются центральными кривыми.* Въ случаѣ распаденія кривой на пару прямыхъ центромъ служитъ точка ихъ пересѣченія.

Если $\delta=0$ и хотя одинъ числитель въ выраженіяхъ (11) не нуль, то $x_0=\infty$ или $y_0=\infty$. Слѣдовательно, *центръ параболы лежитъ въ безконечности.*

Если $\delta=0$ и оба числителя равны нулю, то центръ становится неопредѣленнымъ. Уравненія (10) опредѣляютъ одну и ту же прямую— линію центровъ.

Теорема. *Кривая съ неопредѣленнымъ центромъ распадается на пару параллельныхъ прямыхъ.*

Если кривая распадается на пару параллельныхъ прямыхъ, то, очевидно, всякая точка прямой параллельной даннымъ и лежащей между ними на равномъ разстояніи отъ нихъ обладаетъ свойствомъ центра. Обратно, если MM_1 и MM_2 хорды, дѣлящіяся въ точкахъ O_1 и O_2 пополамъ, то въ треугольникѣ $M\,M_1\,M_2$ (см. фиг. 29) $M_1\,M_2 \parallel O_1\,O_2$. Слѣдовательно, точки кривой расположены на прямой параллельной линіи центровъ.



Фиг. 29.

Детерминантъ Δ въ этомъ случаѣ равенъ нулю, такъ какъ обѣ прямыя (10) совпадаютъ и, слѣдовательно, 3 уравненія (8′) имѣютъ общее рѣшеніе. Обратно, если $\Delta=0$ и $\delta=0$, то прямыя (10) параллельны, а такъ какъ три прямыя (8′) имѣютъ общую точку, то онѣ всѣ параллельны; но изъ того, что третья прямая параллельна каждой изъ двухъ остальныхъ, слѣдуетъ что и числители выраженій (11) равны нулю. Такимъ образомъ *парабола распадается на пару параллельныхъ прямыхъ;* въ частности прямыя эти могутъ сливаться.

§ 6. **Діаметры кривой 2-го порядка**. *Геометрическое мѣсто срединъ параллельныхъ между собою хордъ называется діаметромъ, сопряженнымъ этимъ хордамъ.*

Пусть угловой коэффиціентъ хордъ k. Координаты средины любой изъ параллельныхъ хордъ, т.-е. любой точки сопряженнаго имъ діаметра, связаны уравненіемъ (7). Въ раскрытой формѣ уравненіе діаметра будетъ

$$Ax+By+D+k\,(Bx+Cy+E)=0 \quad \dots\dots\dots \quad (12)$$

Уравненіе это первой степени; слѣдовательно, *діаметръ—прямая линія.* Всѣ діаметры проходятъ черезъ центръ, такъ какъ въ центрѣ дѣлятся пополамъ хорды всякаго направленія. Уравненіе (12) есть уравненіе пучка діаметровъ, если разсматривать k, какъ перемѣнный параметръ.

Изъ уравненія (12) опредѣляемъ угловой коэффиціентъ діаметра k'.

$$k'=-\frac{A+kB}{B+kC}.$$

Отсюда
$$A+B\,(k+k')+Ckk'=0 \quad \dots\dots\dots \quad (13)$$

Лѣвая часть этого равенства симметрична относительно угловыхъ коэффиціентовъ k и k' т.-е. не мѣняетъ своего вида при замѣнѣ k черезъ k' и k' черезъ k. Слѣдовательно, если діаметръ съ угловымъ коэффиціентомъ k' сопряженъ хордамъ съ угловымъ коэффиціентомъ k, то обратно діаметръ съ угловымъ коэффиціентомъ k сопряженъ хордамъ съ угловымъ коэффиціентомъ k'.

Парой *сопряженныхъ діаметровъ* называются такіе два діаметра изъ которыхъ каждый дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому. Уравненіе (13) связываетъ угловые коэффиціенты сопряженныхъ діаметровъ.

Въ случаѣ параболы $AC=B^2$, слѣдовательно,

$$k'=-\frac{A+kB}{B+kC}=-\frac{A(A+kB)}{A(B+kC)}=-\frac{A(A+kB)}{AB+kB^2}=-\frac{A(A+kB)}{B(A+kB)}=-\frac{A}{B}.$$

Всѣ діаметры параболы параллельны; они пересѣкаются въ ея безконечно удаленномъ центрѣ. Уравненіе сопряженнаго діаметра

$$Ax+By+D-\frac{A}{B}Bx-\frac{B}{C}Cy-\frac{A}{B}E=0,$$

$\left(\text{такъ какъ } \frac{A}{B}=\frac{B}{C}\right)$ или по сокращеніи, $1=0$. *Діаметры параболы сопряжены безконечно-удаленной прямой.*

§ 7. **Оси кривой 2-го порядка.** Осью кривой 2-го порядка называется *діаметръ перпендикулярный къ сопряженнымъ ему хордамъ* [1]. *Направленіе, перпендикулярное къ сопряженному, называется главнымъ направленіемъ.*

Выберемъ прямоугольную систему координатъ. Тогда угловые коэффиціенты осей K и K' опредѣляются условіями сопряженности и перпендикулярности:

$$A+B(K+K')+CKK'=0 \qquad KK'=-1,$$

откуда

$$K+K'=-\frac{A-C}{B}.$$

Слѣдовательно, K и K' служатъ корнями квадратнаго уравненія:

$$K^2+\frac{A-C}{B}K-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Корни этого уравненія дѣйствительны, такъ какъ свободный членъ отрицателенъ. Слѣдовательно, *у всякой кривой 2-го порядка всегда существуютъ два главныхъ направленія.*

Если $B=0$ и $A=C$, то уравненіе (14) обращается въ тождество и, слѣдовательно, каждый діаметръ кривой является вмѣстѣ съ тѣмъ и осью ея; кривая эта окружность [2]).

---

[1]) Точки кривой симметрично расположены относительно ея оси; слѣдовательно, ось служитъ осью ея симметріи.

[2]) См. гл. III § 5 стр. 21.

У параболы всѣ діаметры сопряжены безконечно удаленной прямой. Слѣдовательно, у параболы два главныхъ направленія, но только одна ось въ конечной части плоскости, а другая ось безконечно удаленная прямая.

§ 8. Асимптоты кривой 2-го порядка. Въ § 3 мы изслѣдовали тотъ случай, когда одинъ корень уравненія (4) обращается въ безконечность. Оба корня этого уравненія обращаются въ безконечность, если

$$A+2Bk+Ck^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\overline{D}+k\overline{E}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Тогда лучъ пучка (2) пересѣкаетъ кривую въ безконечно удаленной точкѣ дважды; слѣдовательно, касается ея въ этой точкѣ.

Касательная къ кривой въ безконечно-удаленной точкѣ называется асимптотой. Изъ уравненія (5) мы найдемъ угловые коэффиціенты асимптотъ, и въ такомъ случаѣ уравненіе (7) показываетъ, какому условію должны удовлетворять координаты новаго начала (x_0, y_0), чтобы эта точка лежала на асимптотѣ. Другими словами, уравненіе (7) есть уравненіе асимптоты, если x_0 и y_0 разсматривать, какъ текущія координаты.

Обозначивъ эти координаты, какъ обычно, черезъ x и y, мы получимъ это уравненіе въ видѣ

$$Ax+Bx+D+k\,(Bx+Cy+E)=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

гдѣ k одинъ изъ корней уравненія (5), т.-е. *асимптота кривой 2-го порядка есть діаметръ, проходящій черезъ безконечно-удаленную точку кривой.*

Уравненіе (5) получимъ, если въ условіи сопряженности двухъ діаметровъ

$$A+B\,(k+k')+Ckk'=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

положимъ $k=k'$. Слѣдовательно, асимптота есть *діаметръ самъ себѣ сопряженный.*

Въ случаѣ эллипса $\delta>0$, корни уравненія (5) мнимы, и *обѣ асимптоты эллипса мнимы.*

Для параболы $\delta=0$, корни уравненія (5) k_1 и k_2 равны между собою:

$$k_1=k_2=-\frac{B}{C}=-\frac{A}{B};$$

уравненіе (13) принимаетъ видъ:

$$Ax+By+D-\frac{A}{B}Bx-\frac{B}{C}Cy-\frac{A}{B}E=0,$$

или по сокращеніи $1=0$, т.-е. *обѣ асимптоты параболы сливаются съ безконечно-удаленной прямой.*

Въ случаѣ гиперболы оба корня дѣйствительны, и, слѣдовательно, *у гиперболы двѣ асимптоты.*

§ **9. Касательныя и нормали кривой 2-го порядка.** Въ § 4 мы нашли угловой коэффиціентъ касательной, проходящей черезъ точку (x_0, y_0) кривой

$$k=-\frac{\overline{D}}{\overline{E}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7')$$

Отсюда уравненіе касательной $\quad y-y_0=-\frac{\overline{D}}{\overline{E}}(x-x_0)$

или $\qquad \overline{D}x+\overline{E}y=\overline{D}x_0+\overline{E}y_0$, или

$x(Ax_0+By_0+D)+y(Bx_0+Cy_0+E)=x_0(Ax_0+By_0+D)+y_0(Bx_0+Cy_0+E)$,

а такъ какъ x_0, y_0 удовлетворяютъ уравненію кривой

$$x_0(Ax_0+By_0+D)+y_0(Bx_0+Cy_0+E)+Dx_0+Ey_0+F=0, \quad . \; . \quad (9)$$

то окончательно уравненіе касательной будетъ

$$(Ax_0+By_0+D)x+(Bx_0+Cy_0+E)y+Dx_0+Ey_0+F=0 \quad . \; . \; . \quad (15)$$

То же выраженіе углового коэффиціента найдемъ, если будемъ искать направленіе хордъ, сопряженныхъ діаметру, проходящему черезъ точку (x_0, y_0). Дѣйствительно, угловой коэффиціентъ хорды, дѣлящейся въ точкѣ (x_0, y_0) пополамъ, какъ мы видѣли,

$$k=-\frac{\overline{D}}{\overline{E}},$$

и всѣ хорды, параллельныя ей, сопряжены одному діаметру.

Слѣдовательно, *касательная къ кривой 2-го порядка сопряжена діаметру, проходящему черезъ точку касанія.*

Нормалью къ кривой называется перпендикуляръ къ касательной въ точкѣ касанія. Слѣдовательно, уравненіе нормали будетъ

$$y-y_0=\frac{\overline{E}}{\overline{D}}(x-x_0)$$

§ **10. Полюсы и поляры кривой 2-го порядка.** Чтобы найти уравненіе касательной, когда дана, вообще, какая-нибудь ея точка (x_0, y_0), надо опредѣлить координаты точки касанія. Обозначая ихъ черезъ x и y, напишемъ условіе того, что искомая касательная проходитъ черезъ точку (x_0, y_0):

$$(Ax+By+D)x_0+(Bx+Cy+E)y_0+(Dx+Ey+F)=0 \quad . \; . \quad (15')$$

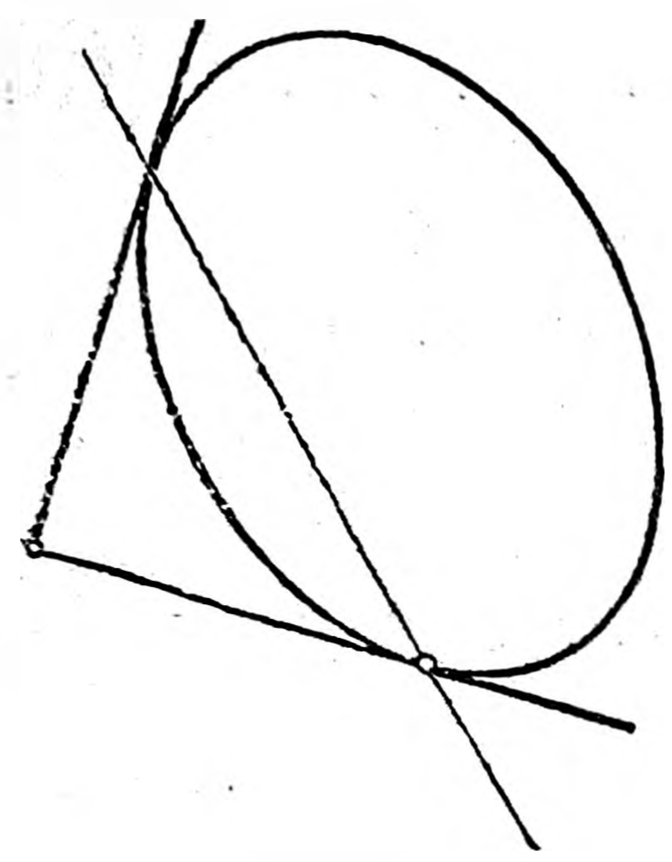
Точка (x, y) касанія лежитъ на кривой (1). Слѣдовательно,

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Рѣшая эту систему уравненій, мы опредѣлимъ координаты точки касанія. Такъ какъ уравненіе (1) 2-й степени, то точекъ касанія д в ѣ. Слѣдовательно, изъ произвольной точки (x_0, y_0) плоскости можно провести д в ѣ [1]) касательныхъ къ кривой 2-го порядка; если эти каса-

[1]) **Такая кривая называется кривой 2-го класса.**

тельныя дѣйствительны, точка (x_0, y_0) называется *внѣшней* относительно кривой; если—мнимы, точка (x_0, y_0) называется *внутренней*. Наконецъ, обѣ касательныя сливаются въ одну, если точка (x_0, y_0) лежитъ на кривой.



Фиг. 30.

Уравненіе (15′) первой степени; слѣдовательно, если разсматривать въ немъ координаты x, y, какъ текущія, оно опредѣляетъ прямую, проходящую черезъ точки прикосновенія касательныхъ, пересѣкающихся въ точкѣ (x_0, y_0). Прямая эта называется полярой точки (x_0, y_0), сама же точка—*полюсомъ* этой прямой (см. фиг. 30).

Уравненіе поляры симметрично относительно координатъ x и x_0, y и y_0

$$Axx_0+Bx_0y+Bxy_0+Cyy_0+Dx+Dx_0+Ey+Ey_0+F=0 \quad . \; . \; . \quad (16)$$

слѣдовательно, если точка (x, y) лежитъ на полярѣ точки (x_0, y_0), то, обратно, точка (x_0, y_0) лежитъ на полярѣ точки (x, y). Эти два полюса называются сопряженными относительной кривой; точно также сопряженными называются соотвѣтствующія имъ поляры.

Вслѣдствіе симметріи уравненіе поляры можно написать

$$(Ax_0+By_0+D)\,x+(Bx_0+Cy_0+E)\,y+(Dx_0+Ey_0+F)=0. \quad . \; . \quad (17)$$

Сравнивая уравненія (17) и (15), мы видимъ, что *полярой точки кривой служитъ касательная къ послѣдней въ этой точкѣ.*

Наконецъ, полярой центра служитъ безконечно-удаленная прямая и, обратно, полюсами діаметровъ служатъ безконечно-удаленныя точки.

ГЛАВА VI.

Изученіе кривыхъ 2-го порядка по ихъ каноническимъ уравненіямъ.

§ 1. **Каноническія уравненія центральныхъ кривыхъ.**

Теорема. *Если кривая отнесена къ центру, то коэффиціенты при первыхъ степеняхъ текущихъ координатъ x и y въ уравненіи кривой обращаются въ нуль.*

Координаты центра опредѣляются уравненіями

$$Ax_0+By_0+D=o$$
$$By_0+Cy_0+F=o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Слѣдовательно, послѣ перенесенія начала координатъ въ центръ кривой $\overline{D}$ и $\overline{E}$ равны нулю.

Свободный членъ $\overline{F}$ въ преобразованномъ уравненіи можно представить такъ

$$\overline{F}=\overline{D}x_0+\overline{E}y_0+Dx_0+Ey_0+F,$$

или, подставляя x_0 и y_0 изъ уравненій (1)

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\delta},\quad y_0=-\frac{\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\delta},$$

гдѣ δ дискриминантъ старшихъ членовъ,

$$\bar{F}=\frac{D\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}-E\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}+F\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{\delta}=\frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{\delta}=\frac{\Delta}{\delta}\quad . \; . \; . \quad (2)$$

Теорема. *Если кривая отнесена къ двумъ сопряженнымъ направленіямъ, то уравненіе не содержитъ члена съ произведеніемъ текущихъ координатъ.*

Въ этомъ случаѣ мы должны положить въ условіи сопряженности $k=o$ и $k'=\infty$.

$$\frac{A}{k'}+B\left(\frac{k}{k'}+1\right)+Ck=O,$$

откуда и получаемъ $B=O$.

Возьмемъ начало координатъ въ центрѣ кривой и примемъ за оси два сопряженныхъ діаметра. Тогда уравненіе кривой получитъ видъ [1])

$$Ax^2+Cy^2+F=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Если хоть одинъ изъ коэффиціентовъ A, C, F уравненія (3) равенъ нулю, то кривая распадается, такъ какъ $\Delta=O$.

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & O & O \\ O & C & O \\ O & O & F \end{vmatrix}=ACF=O.$$

Если $F=O$, то кривая распадается на пару дѣйствительныхъ или мнимыхъ пересѣкающихся прямыхъ

$$Ax^2+Cy^2=O$$

или $$(\sqrt{A}x+\sqrt{-C}y)\,(\sqrt{A}x-\sqrt{-C}y)=O;$$

если $A=O$ (или $C=O$), то кривая распадается на пару параллельныхъ прямыхъ $$Cy^2+F=O$$

или $$(\sqrt{C}y+\sqrt{-F})\,(\sqrt{C}y-\sqrt{-F})=O.$$

Положимъ, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ A, C, F не нуль.

Составимъ дискриминантъ старшихъ членовъ δ:

$$\delta=\begin{vmatrix} A & O \\ O & C \end{vmatrix}=AC.$$

Если $AC>O$, то уравненіе (3) есть уравненіе эллипса; если $AC<O$, то мы имѣемъ гиперболу (гл. V, § 3).

[1]) Для простоты значки у текущихъ координатъ и коэффиціентовъ отброшены.

A можно считать положительнымъ; иначе мы перемѣнили бы знаки у всѣхъ членовъ.

Слѣдовательно, въ случаѣ эллипса A и C положительно. Если и $F>0$, то уравненіе (3) опредѣляетъ мнимый эллипсъ; оно не можетъ быть удовлетворено дѣйствительными значеніями x и y, такъ какъ выражаетъ требованіе, чтобы сумма трехъ положительныхъ чиселъ Ax^2+Cy^2+F равнялась нулю.

Если F отрицательно, то мы можемъ раздѣлить обѣ части уравненія на $-F$:

$$\frac{x^2}{-\frac{F}{A}}+\frac{y^2}{-\frac{F}{C}}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Такъ какъ $F<0$, $A>0$ и $C>0$, то обѣ дроби $-\frac{F}{A}$ и $-\frac{F}{C}$ положительны. Обозначимъ ихъ соотвѣтственно черезъ a'^2 и b'^2; тогда уравненіе (4) приметъ *каноническій* видъ:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Къ этому виду можно привести уравненіе (3) безконечнымъ числомъ способовъ, такъ какъ сопряженныхъ діаметровъ у эллипса безчисленное множество. Если за оси координатъ приняты оси эллипса, то система координатъ прямоугольная. Въ этомъ случаѣ каноническое уравненіе эллипса пишется въ такомъ видѣ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Въ случаѣ гиперболы C отрицательно. Если F тоже отрицательно, то въ уравненіи (4) $-\frac{F}{A}$ положительно, а $-\frac{F}{C}<0$, и, слѣдовательно, мы можемъ положить $-\frac{F}{A}=a'^2$, $\frac{F}{C}=b'^2$.

Такимъ образомъ, получаемъ каноническое уравненіе гиперболы:

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Въ случаѣ $F>0$, мы положимъ $\frac{F}{A}=a'^2$, $-\frac{F}{C}=b'^2$, и уравненіе (4) приметъ такой видъ:

$$-\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Оба уравненія (7) и (8) изображаютъ гиперболы, которыя называются *сопряженными*, если a' и b' въ обоихъ уравненіяхъ имѣютъ одинаковыя значенія.

Если примемъ за оси координатъ оси гиперболъ, то уравненія ихъ напишутся соотвѣтственно такимъ образомъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Уравненія (7) и (8), какъ и у эллипса, можно получить безчисленнымъ множествомъ способовъ.

§ 2. **Форма эллипса.** Уравненіе эллипса, отнесеннаго къ осямъ, имѣетъ такой видъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)\ (\S\ 1)$$

или

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6')$$

Мы имѣемъ сумму двухъ существенно положительныхъ величинъ, равную 1; слѣдовательно, каждая изъ нихъ въ отдѣльности меньше или, въ крайнемъ случаѣ, равна 1:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2\leqslant 1,\ \left(\frac{y}{b}\right)^2\leqslant 1,$$

откуда

$$x^2\leqslant a^2,\ y^2\leqslant b^2$$

или [1])

$$|\,x\,|\leqslant a,\ |\,y\,|\leqslant b.$$

Слѣдовательно, если на оси X въ положительномъ и отрицательномъ направленіяхъ отложимъ отъ начала координатъ отрѣзки въ a единицъ длины и въ концахъ этихъ отрѣзковъ возставимъ перпендикуляры къ оси X, то всѣ точки эллипса будутъ лежать между этими параллельными линіями. То же справедливо и для оси Y; только надо отложить отрѣзки въ b единицъ длины. Эллипсъ расположенъ внутри прямоугольника со сторонами въ $2a$ и $2b$ единицъ длины. Слѣдовательно, эллипсъ замкнутая кривая (ср. гл. V, § 3).

Съ возрастаніемъ абсолютной величины x абсолютная величина y убываетъ. Полагая въ уравненіи (6) $y=0$, мы получаемъ наибольшія по абсолютной величинѣ значенія абсциссы $x=\pm a$ точекъ пересѣченія эллипса съ осью X.

Слѣдовательно, длина отрѣзка оси X, заключеннаго внутри эллипса, т.-е. длина оси его [2]) равна $|\,a\,|+|\,-a\,|=2a$.

Полагая въ уравненіи (6) $x=0$, мы получимъ, что длина другой оси равна $2b$. *Вершиной* кривой 2-го порядка называется точка пересѣченія ея съ осью; слѣдовательно, у эллипса 4 вершины.

Обычно принято полагать $a>b$, т.-е. за ось X брать большую ось эллипса. Въ случаѣ $a=b$ получаемъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ или } x^2+y^2=a^2,$$

т.-е. уравненіе окружности; слѣдовательно, *окружность есть частный случай эллипса,* когда оси эллипса равны между собою.

Эллипсъ расположенъ симметрично относительно своихъ осей,

---

[1]) Числа a и b условимся считать положительными.

[2]) Подобнымъ же образомъ параметры a' и b' (см. § 1) представляютъ собою полудіаметры эллипса.

такъ какъ ось перпендикулярна къ тѣмъ хордамъ, которыя она дѣлитъ пополамъ; очертаніе его дано на фиг. 31.

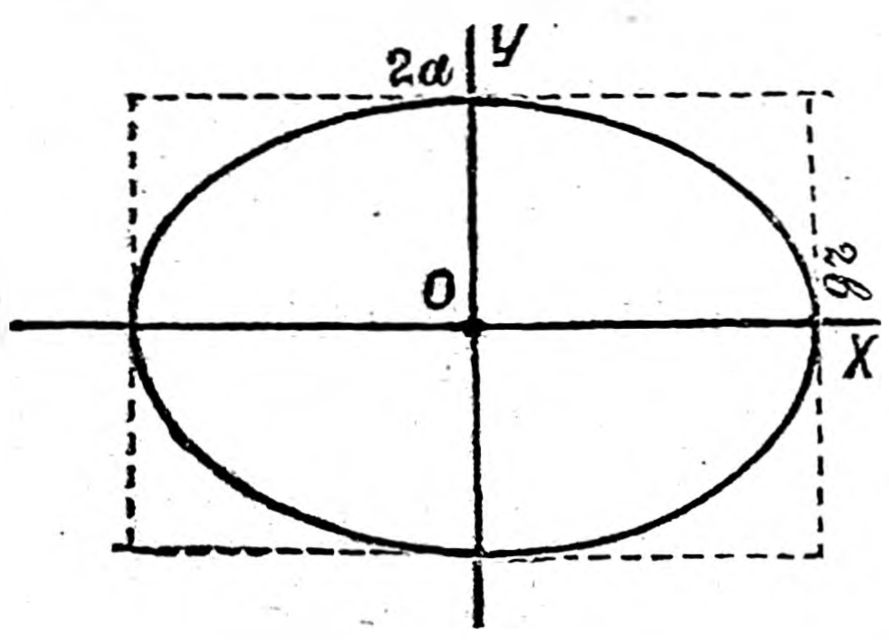
Напишемъ уравненіе пучка діаметровъ эллипса (6) (см. гл. V § 6):

$$\frac{x}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=0.$$

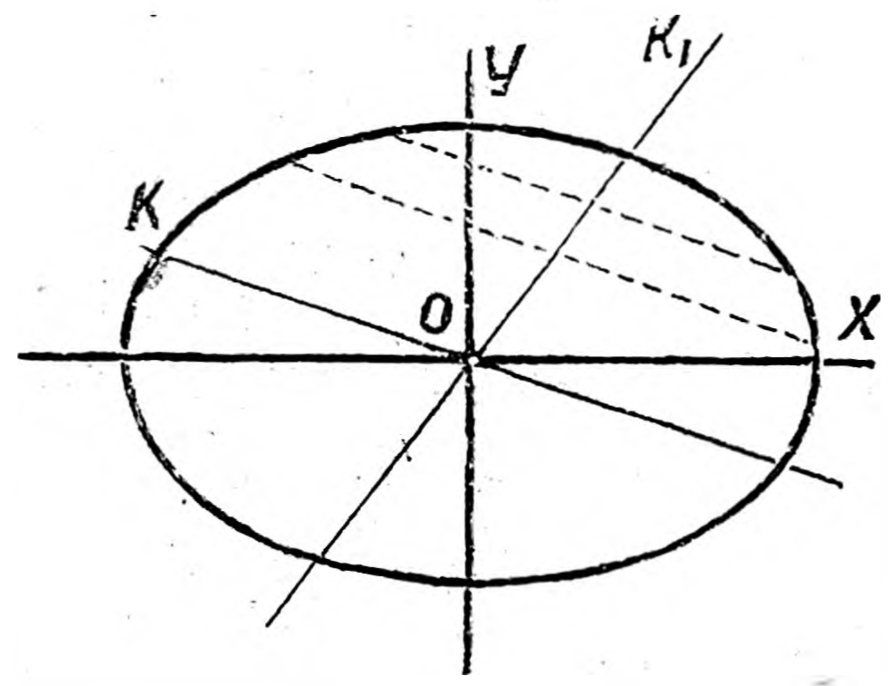
Угловые коэффиціенты k и k' двухъ сопряженныхъ діаметровъ связаны соотношеніемъ $$kk'=-\frac{b^2}{a^2},$$

или $$tg\psi\,.\,tg\psi'=-\frac{b^2}{a^2},$$

гдѣ ψ и ψ' соотвѣтственно углы этихъ діаметровъ съ большой осью. Слѣдовательно, *сопряженные діаметры эллипса лежатъ въ смежныхъ углахъ, образуемыхъ его осями* (см. фиг. 32).



Фиг. 31.



Фиг. 32.

Уравненіе поляры и, въ частности, касательной будетъ (см. гл. V, § 9 и § 10): $$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1,$$

а уравненіе нормали $$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

§ 3. **Форма гиперболы.** Возьмемъ уравненіе гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)\ (\text{см. § 1})$$

Здѣсь разность двухъ положительныхъ величинъ равна 1. А это можетъ быть только тогда, когда уменьшаемое $\left(\frac{x}{a}\right)^2\geqq 1$; отсюда $|x|\geqq a$.

Слѣдовательно, между двумя параллельными линіями $x=a$ и $x=-a$ точекъ кривой не будетъ.

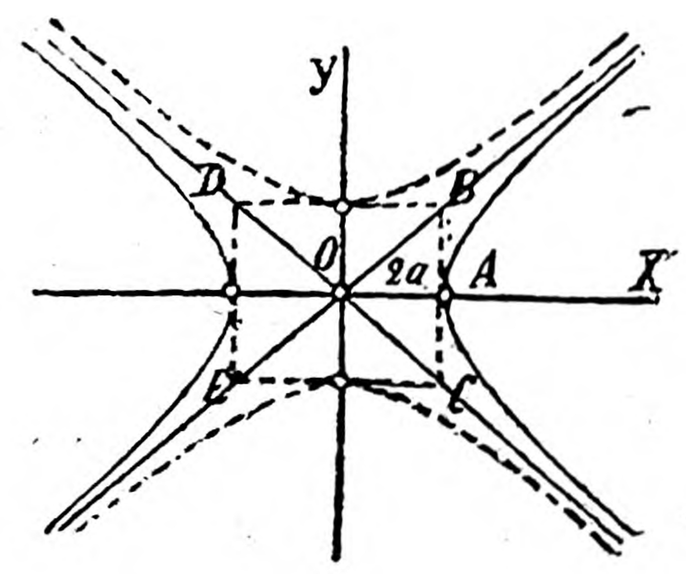
Съ другой стороны, очевидно $\frac{y^2}{b^2}<\frac{x^2}{a^2}$

или $$|y|<\frac{b}{a}|x|.$$

Слѣдовательно, гипербола состоитъ изъ двухъ вѣтвей, расположенныхъ въ вертикальныхъ углахъ образуемыхъ ея асимптотами

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Полагая въ уравненіи (9) $y=0$, имѣемъ $x=\pm a$; слѣдовательно длина оси равна $2a$; она называется *дѣйствительной осью гиперболы*. Ось y не встрѣчаетъ кривую. Полагая въ уравненіи (9) $x=0$, получимъ: $y=\pm bi$; на второй оси, гипербола отсѣкаетъ мнимый отрѣзокъ; онъ носитъ названіе *мнимой оси*. Слѣдовательно, у гиперболы 2 дѣйствительныхъ и 2 мнимыхъ вершины.



Фиг. 33.

Гипербола расположена симметрично относительно осей. Съ неограниченнымъ возрастаніемъ $|x|$ неограниченно возрастаетъ и $|y|$. Очертаніе гиперболы дано на фиг. 33.

Уравненіе сопряженной гиперболы

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

получается изъ уравненія (9) простой перестановкой буквъ x и y a и b. Она нанесена на чертежѣ 33 пунктиромъ.

Гипербола называется *равносторонней*, если $a=b$; уравненіе ея

$$x^2-y^2=a.$$

Уравненіе пучка діаметровъ гиперболъ (9) и (10)

$$\frac{x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=0;$$

слѣдовательно, *у обѣихъ сопряженныхъ гиперболъ всѣ пары сопряженныхъ діаметровъ однѣ и тѣ же.*

Угловые коэффиціенты k и k' двухъ сопряженныхъ діаметровъ связаны соотношеніемъ $$kk'=\frac{b^2}{a^2},$$

т.-е. *сопряженные діаметры гиперболы лежатъ въ однихъ и тѣхъ же вертикальныхъ углахъ, образуемыхъ его осями.* Когда они совпадаютъ: $k=k'$, то мы имѣемъ асимптоту $k=\pm\frac{b}{a}$. Угловые коэффиціенты асимптотъ отличаются только знакомъ; слѣдовательно, *оси гиперболы служатъ биссектрисами угловъ, образуемыхъ асимптотами.*

Уравненіе поляры и, въ частности, касательной будетъ

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1,$$

а уравненіе нормали $$y-y_1=-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

§ 4. Уравненіе гиперболы, отнесенной къ асимптотамъ. Помѣстимъ начало координатъ въ центрѣ гиперболы и примемъ за оси координатъ асимптоты. Угловые коэффиціенты асимптотъ $k=0$ и $k'=\infty$ удовлетворяютъ уравненію $A'+2B'k+C'k^2=0$ (гл. V, § 8).

Такъ какъ одинъ корень нуль, то $A'=0$, такъ какъ другой корень ∞, то $C'=0$. Кромѣ того, $D'=E'=0$, такъ какъ начало координатъ перенесено въ центръ.

Такимъ образомъ уравненіе кривой принимаетъ такой видъ:

$$2B'x'y'+F=0,$$

полагая $-\dfrac{F}{2B'}=m$, мы получаемъ уравненіе гиперболы, отнесенной къ асимптотамъ:

$$x'y'=m, \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

гдѣ m считаемъ положительнымъ числомъ, иначе мы перемѣнили бы направленіе одной изъ координатныхъ осей на противоположное.

Уравненіе сопряженной гиперболы будетъ [1]):

$$x'y'=-m \ldots\ldots \quad (12).$$

Сопоставляя уравненія (11) и (12), мы видимъ, что *сопряженныя гиперболы отдѣлены другъ отъ друга ихъ общими асимптотами.*

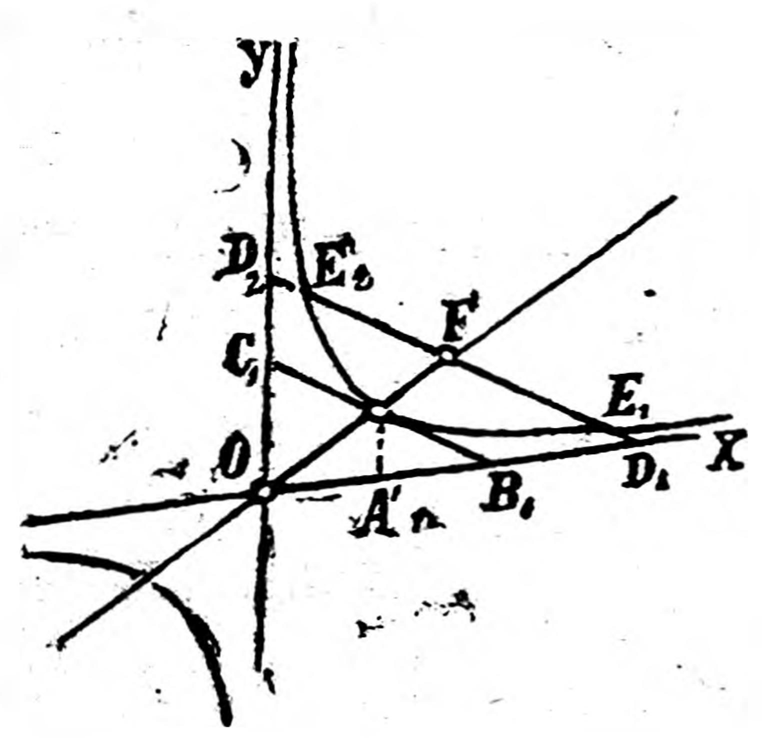
Уравненіе касательной будетъ:

$$\frac{1}{2}xy_1+\frac{1}{2}yx_1=m$$

или въ виду того, что $x_1y_1=m$,

$$\frac{x}{2x_1}+\frac{y}{2y_1}=1.$$

Уравненіе это показываетъ, что отрѣзки OB_1 и OC_1, (см. фиг. 34) отсѣкаемые касательной на асимптотахъ, вдвое болѣе соотвѣтственно OA_1' и $A_1'A_1$[2]), т.-е. абсциссы и ординаты точки касанія $A_1(x_1,\ y_1)$; отсюда слѣдуетъ, что $B_1A_1=A_1C_1$, т.-е. *отрѣзокъ касательной къ гиперболѣ между асимптомами дѣлится точкой касанія пополамъ.*



Фиг. 34.

Площадь треугольника OB_1C_1 представится такимъ образомъ:

$$2xy\,.\sin\omega=2m\sin\omega,$$

т.-е. площадь эта величина постоянная для

---

[1]) Чтобы перейти отъ каноническихъ уравненій сопряженныхъ гиперболъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ldots\ldots \quad (9)$$

и

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \ldots\ldots \quad (10)$$

къ уравненіямъ (11) и (12), необходимо воспользоваться формулами преобразованія направленій осей, но эти формулы однородны и свободнаго члена въ уравненіи кривой не измѣняютъ; если уравненіе (9) преобразуется въ

$$\frac{x'y'}{m}=1 \ldots\ldots \quad (11)$$

то уравненіе (10) должно перейти въ $\dfrac{x'y'}{m}=-1 \ldots\ldots \quad (12)$

---

[2]) На фиг. 34 точка A пропущена.

данной гиперболы. Чтобы выразить ее черезъ полуоси, мы можемъ взять частный случай, когда точка A_1 находится въ вершинѣ A гиперболы (см. черт. 33). Площадь треугольника OBC равна $\frac{a.2b}{2}$ или ab[1]), т.-е. *треугольникъ, образованный асимптотами и любой касательной къ гиперболѣ, равновеликъ прямоугольнику, построенному на полуосяхъ.*

Проведемъ сѣкущую D_1D_2 параллельно касательной B_1C_1 и сопряженный имъ діаметръ OF (см. фиг. 34). Тогда $E_1F=E_2F$; съ другой стороны, по свойству параллельныхъ линій

$$\frac{D_1F}{B_1A_1}=\frac{D_2F}{C_1A_1}.$$

Отсюда, $D_1F=D_2F$ и $D_1E_1=D_2E_2$. Слѣдовательно, *отрѣзки сѣкущей, заключенные между гиперболой и ея асимптотами, равны между собой.*

§ 5. **Уравненіе кривой 2-го порядка, отнесенной къ вершинѣ. Каноническое уравненіе параболы.**

Примемъ за оси координатъ касательную и діаметръ, проходящій черезъ точку касанія. Эти направленія сопряжены; слѣдовательно, $B=0$. Напишемъ уравненіе касательной въ началѣ координатъ $Dx+Ey+F=0$. Если эту касательную примемъ за ось y, то $E=F=0$ и уравненіе кривой принимаетъ такой видъ:

$$Ax^2+Cy^2+2Dx=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Уравненіе (13) изображаетъ параболу, если $\delta=AC=0$. Такимъ образомъ, или $A=0$, или $C=0$; если $C=0$, то уравненіе (13) не содержитъ y и, слѣдовательно, опредѣляетъ пару прямыхъ параллельныхъ оси y.

Слѣдовательно, $A=0$, и уравненіе (13) принимаетъ такой видъ:

$$Cy^2+2Dx=0;$$

полагая

$$-\frac{D}{C}=p',$$

мы получаемъ каноническое уравненіе параболы:

$$y^2=2p'x; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

коэффиціентъ p' считаемъ положительнымъ, такъ какъ иначе можемъ перемѣнить направленіе оси X.

Если осью X служитъ ось параболы и, слѣдовательно, начало координатъ помѣщено въ вершинѣ кривой, то уравненіе ея пишется такимъ образомъ:

$$y^2=2px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

---

[1]) Отсюда слѣдуетъ, что $m=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$, такъ какъ $m=\frac{ab}{2\sin\omega}$,

и

$$\sin\omega=\frac{2\,tg\frac{\omega}{2}}{1+tg^2\frac{\omega}{2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2},$$

Точно такимъ же образомъ можемъ преобразовать уравненіе (13) и въ случаѣ центральной кривой, относя ее къ вершинѣ:

$$y^2 = 2px + qx^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

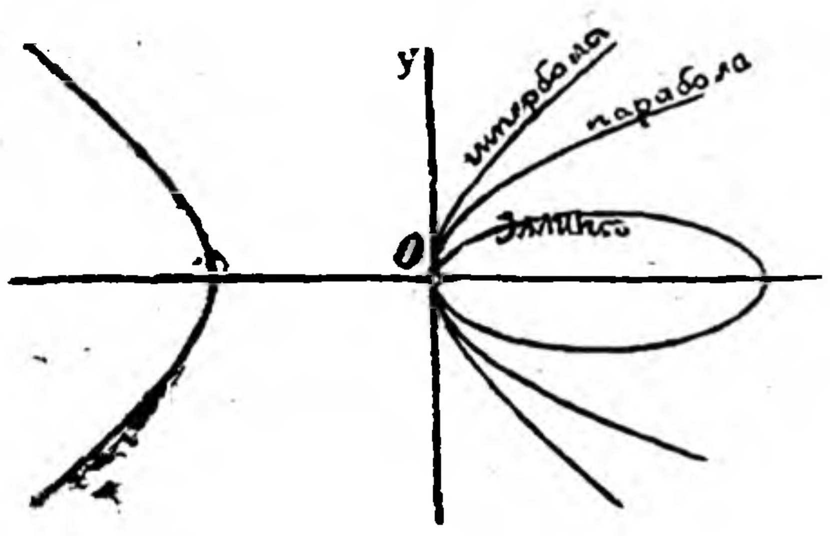
гдѣ
$$p = -\frac{D}{C},\ q = -\frac{A}{C}.$$

Для эллипса $q < 0$, такъ какъ $\delta = -q$; для гиперболы $q > 0$; для параболы $q = 0$.

Такимъ образомъ:

для эллипса . . . . $y^2 < 2px$
для гиперболы . . . . $y^2 > 2px$
для параболы . . . . $y^2 = 2px$

т.-е. при одномъ и томъ же значеніи коэффиціента p [1]) и для одной и той же абсциссы x, ордината въ случаѣ эллипса будетъ наименьшая, а въ случаѣ гиперболы—наибольшая (см. фиг. 35).



Фиг. 35.

y^2 можно разсматривать, какъ площадь квадрата, построеннаго на ординатѣ, а $2px$, какъ площадь прямоугольника, построеннаго на удвоенномъ параметрѣ, т.-е. $2p$, и абсциссѣ. Слѣдовательно, въ случаѣ эллипса площадь квадрата *меньше* площади прямоугольника, въ случаѣ параболы первая площадь *равна* второй и въ случаѣ гиперболы первая площадь *больше* второй. Этимъ объясняются названія кривыхъ: эллипсъ отъ ἔλλειψις (недостатокъ), парабола отъ παραβολή (равенство) и гипербола отъ ὑπερβολή (избытокъ).

Преобразуемъ каноническое уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

къ виду (16). Если перенесемъ начало въ лѣвую вершину, то формулы преобразованія координатъ будутъ $x = x' - a$, $y = y'$, и уравненіе эллипса принимаетъ такой видъ: $\dfrac{(x'-a)^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$,

или
$$y'^2 = 2\frac{b^2}{a}\cdot x' - \frac{b^2}{a^2}x'^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16')$$

Слѣдовательно, въ случаѣ эллипса параметръ

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ и } q = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Аналогично, перенося начало въ правую вершину гиперболы, получаемъ
$$p = \frac{b^2}{a},\ q = \frac{b^2}{a^2}.$$

---

[1]) Коэффиціентъ p называется *параметромъ* кривой второго порядка.

§ 6. **Форма параболы.** Уравненіе параболы

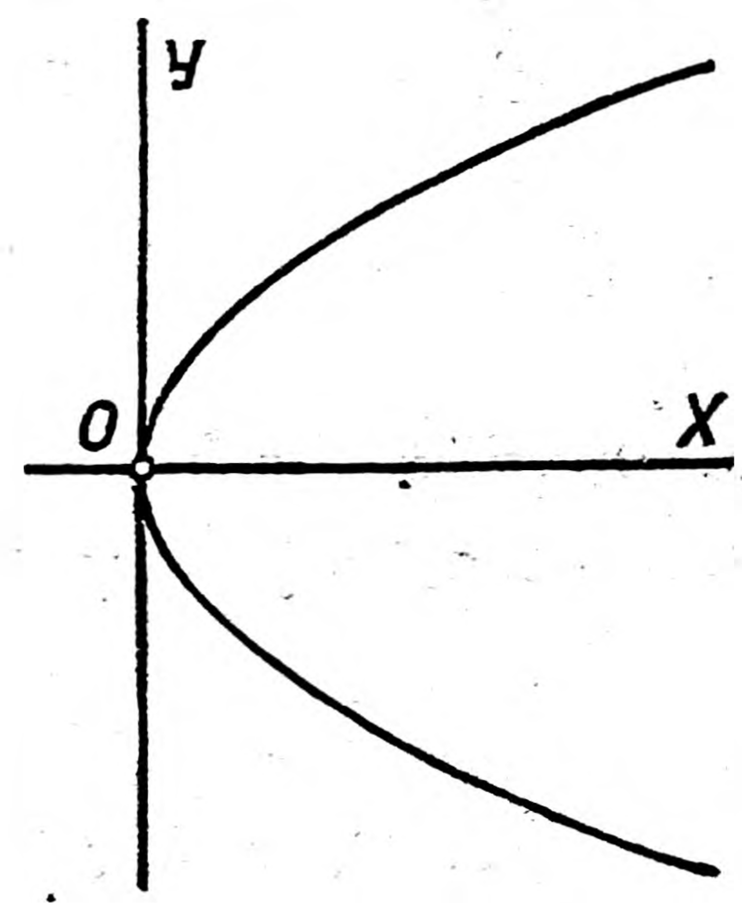
$$y^2=2px \quad (15)$$

показываетъ, что всѣ точки этой кривой лежатъ по одну сторону оси y, такъ какъ y имѣетъ только тогда дѣйствительныя значенія, когда $x>0$. При $x=0$ и $y=0$; при неограниченномъ же возрастаніи $|x|$, и $|y|$ неограниченно растетъ; слѣдовательно, парабола имѣетъ безконечно удаленную точку.

Такъ какъ для каждаго значенія x, y имѣетъ два значенія:

$$y_1=\sqrt{2px},\quad y_2=-\sqrt{2px},$$

равныхъ по абсолютной величинѣ и противоположныхъ по знаку, то отсюда видно, что парабола расположена симметрично относительно своей оси (срав. гл. V, § 7). Такъ какъ другая ось есть безконечно удаленная прямая, которая касается параболы, то изъ четырехъ вершинъ этой кривой три совпадаютъ съ безконечно удаленной точкой касанія второй оси. Очертаніе параболы дано на фиг. 36.



Фиг. 36.

Уравненіе пучка діаметровъ параболы:

$$y=\frac{p}{k},$$

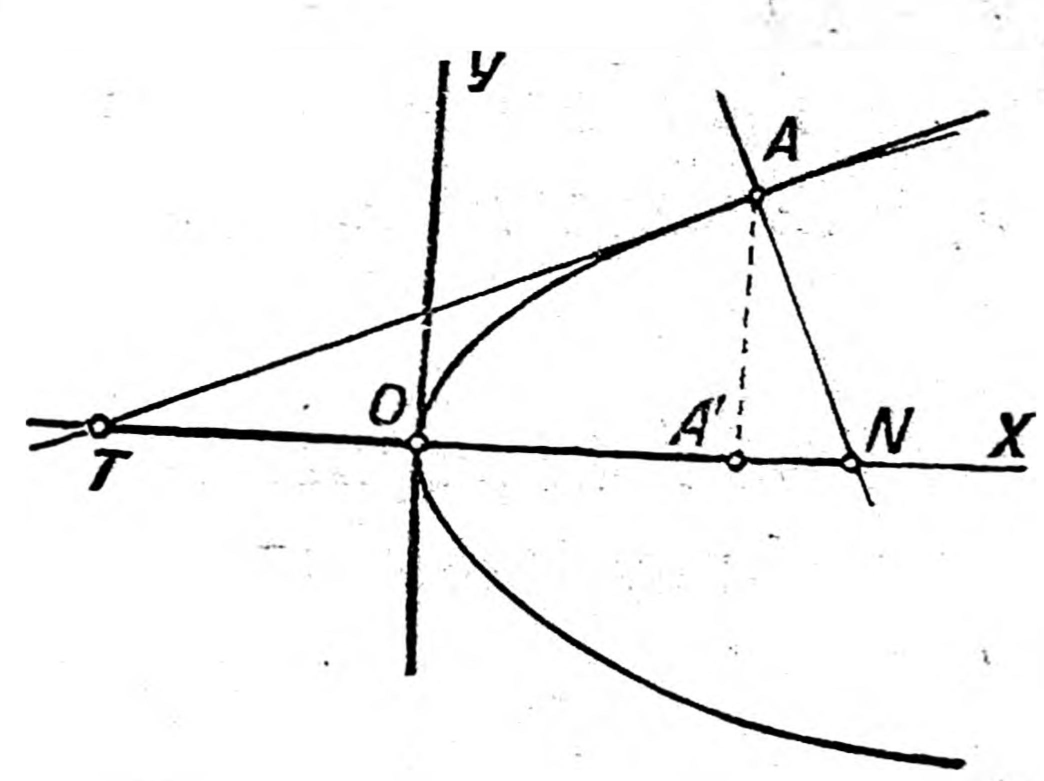
т.-е. *всѣ діаметры параболы параллельны между собой.*

Уравненіе поляры и, въ частности, касательной будетъ

$$yy_1=p\,(x+x_1),$$

уравненіе же нормали: $y-y_1=-\frac{y_1}{p}\cdot(x-x_1)$.

Проекція на ось X отрѣзка [1]) касательной къ кривой, отъ точки касанія до этой оси, называется *субтангенсомъ* или *подкасательной;* проекція на ось X такого же отрѣзка [2]) нормали называются *субнормалью.*



Фиг. 37.

Отрѣзокъ, отсѣкаемый касательной на оси X, равенъ $-x_1$, т.-е. *субтангенсъ параболы дѣлится въ вершинѣ ея пополамъ.*

Такъ какъ треугольникъ TAN (см. фиг. 37) прямоугольный, то

$$A'N=\frac{A'A^2}{TA'},\ \text{или}\ A'N=\frac{y^2}{2x_1},$$

откуда

$$A'N=p,$$

т.-е. *субнормаль параболы равна ея параметру.*

---

[1]) Этотъ отрѣзокъ касательной обычно называется просто *касательной.*

[2]) Этотъ отрѣзокъ нормали обычно называется просто *нормалью.*

ГЛАВА VII.

Фокальныя свойства кривыхъ 2-го порядка.

§ **1. Эллипсъ.** *Фокусами* эллипса называются двѣ точки, расположенныя на большой оси по обѣ стороны отъ центра на разстояніи

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Такъ какъ $c<a$, то фокусы лежатъ внутри эллипса; они служатъ точками пересѣченія большой оси его и окружности, описанной изъ конца малой оси радіусомъ, равнымъ a.

Величина c называется *линейнымъ эксцентриситетомъ*, отношеніе ея къ большей полуоси $$e=\frac{c}{a}$$ *эксцентриситетомъ эллипса. Эксцентриситетъ эллипса меньше единицы.*

Возьмемъ каноническое уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

и опредѣлимъ разстояніе r какой-либо точки (x, y) эллипса отъ фокуса (c, O). Это разстояніе носитъ названіе *радіуса-вектора*.

$$r=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Исключая y^2 съ помощью уравненія (2) и пользуясь соотношеніемъ (1), получимъ

$$r=\sqrt{x^2-2\,cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2cx+a^2},$$

откуда $$r=a-ex; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

знакъ корня выбранъ такъ, чтобы r было положительно, такъ какъ $|x|<a$ и $e<1$, въ силу чего $|ex|<a$.

Разстояніе отъ лѣваго фокуса получается перемѣной знака у c и, слѣдовательно, у e

$$r'=a+ex. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

Обѣ формулы раціональны относительно x.

Складывая почленно равенства (3) и (3'), получимъ

$$r+r'=2\,a. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

т.-е. *сумма радіусовъ-векторовъ каждой точки эллипса равна его большой оси.* Это свойство можетъ служить опредѣленіемъ эллипса.

Поляра фокуса называется *директрисой* эллипса.

Слѣдовательно, эллипсъ имѣетъ двѣ директрисы

$$x=\pm\frac{a}{e}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Директрисы эллипса перпендикулярны къ большой оси и расположены внѣ эллипса симметрично относительно центра.

Разстояніе какой-нибудь точки эллипса (x, y) отъ директрисъ

$$x=\frac{a}{e} \text{ и } x=-\frac{a}{e}$$

будутъ $$d=\frac{a}{e}+x,\ d'=\frac{a}{e}-x. \qquad (6)$$

Слѣдовательно, $$r:d=e, \text{ и } r':d'=e \qquad (7)$$

т.-е. *отношеніе между разстояніями произвольной точки эллипса отъ фокуса и отъ соотвѣтствующей директрисы равно эксцентриситету.*

§ **2. Гипербола.** Каноническое уравненіе гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

отличается отъ уравненія эллипса только знакомъ у второго члена, поэтому въ случаѣ гиперболы въ формулахъ предыдущаго параграфа надо измѣнить знакъ у b^2.

Такъ, *фокусами* гиперболы мы назовемъ точки $(-c, 0)$, и $(c, 0)$ гдѣ линейный эксцентриситетъ $$c=\sqrt{a^2+b^2} \qquad (2)$$

Слѣдовательно, *эксцентриситетъ гиперболы* $e=\frac{c}{a}$ больше единицы.

Такъ какъ $c>a$, то *фокусы гиперболы лежатъ на дѣйствительной оси ея дальше отъ центра, чѣмъ вершины,* т.-е. внутри гиперболы.

Они служатъ точками пересѣченія дѣйствительной оси и окружности, описанной изъ центра гиперболы радіусомъ, равнымъ отрѣзку асимптоты отъ центра до точки пересѣченія ея съ касательной въ вершинѣ.

Директрисами гиперболы называются поляры фокусовъ

$$x=\pm\frac{a}{e}; \qquad (3)$$

Онѣ перпендикулярны къ дѣйствительной оси, расположены внѣ гиперболы симметрично относительно центра, при чемъ онѣ ближе къ центру, чѣмъ вершины.

Выраженія радіусовъ-векторовъ точки (x, y) гиперболы черезъ ея абсциссу выводятся такъ же, какъ для эллипса (см. § 1).

Для правой вѣтви гиперболы $r=ex-a,\ r'=ex+a. \qquad (3')$

и для лѣвой $r=-ex+a,\ r'=-ex-a; \qquad (4')$

всѣ эти двучлены положительны потому, что $|x|\geq a$, $e>1$ и слѣдовательно $|ex|>a$.

Теорема. *Абсолютная величина разности радіусовъ-векторовъ каждой точки гиперболы равна ея дѣйствительной оси.* Дѣйствительно, почленно вычитая, напримѣръ, два равенства (3'), получимъ

$$|r-r'|=|ex-a-ex-a|=2a.$$

Это свойство можетъ служить опредѣленіемъ гиперболы.

Теорема. *Отношеніе между разстояніями произвольной точки гиперболы отъ фокуса и отъ соотвѣтствующей директрисы равно эксцентриситету.*

Доказательство такое же, какъ въ случаѣ эллипса (§ 1).

§ **3. Парабола.** Фокусомъ параболы

$$y^2=2px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

называется точка $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ а директрисой поляра ея $x=-\frac{p}{2}$.

Слѣдовательно, фокусъ лежитъ на оси внутри параболы, а директриса проходитъ перпендикулярно къ оси внѣ параболы на такомъ же разстояніи отъ вершины, какъ и фокусъ.

Радіусъ-векторъ точки (x, y) параболы выражается черезъ абсциссу ея такъ

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\left(\frac{p}{2}\right)^2+2px}=x+\frac{p}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Разстояніе той же точки отъ директрисы

$$d=x+\frac{p}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Слѣдовательно, *произвольная точка параболы находится на равномъ разстояніи отъ фокуса и отъ директрисы.* Это свойство можетъ служить опредѣленіемъ параболы.

Отношеніе $r:d$ для точекъ эллипса и гиперболы равно эксцентриситету. Если мы хотимъ сохранить это равенство и въ случаѣ параболы, то мы должны положить *эксцентриситетъ параболы равнымъ единицѣ.* Тогда для всякой кривой 2-го порядка *отношеніе между разстояніями произвольной точки отъ фокуса и отъ соотвѣтствующей директрисы равно эксцентриситету этой кривой;* при чемъ для эллипса $e<1$, для гиперболы $e>1$ и для параболы $e=1$.

Если кривая 2-го порядка отнесена къ вершинѣ

$$y^2=2px+qx^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

то координаты фокусовъ получимъ, примѣняя формулы преобразованія координатъ въ случаѣ эллипса $x=x'-a$, $y=y'$ въ случай гиперболы $x=x'+a$, $y=y'$. Такимъ образомъ, для обѣихъ кривыхъ имѣемъ:

фокусы $$\left(\frac{p}{1+e}, 0\right), \left(\frac{p}{1-e}, 0\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

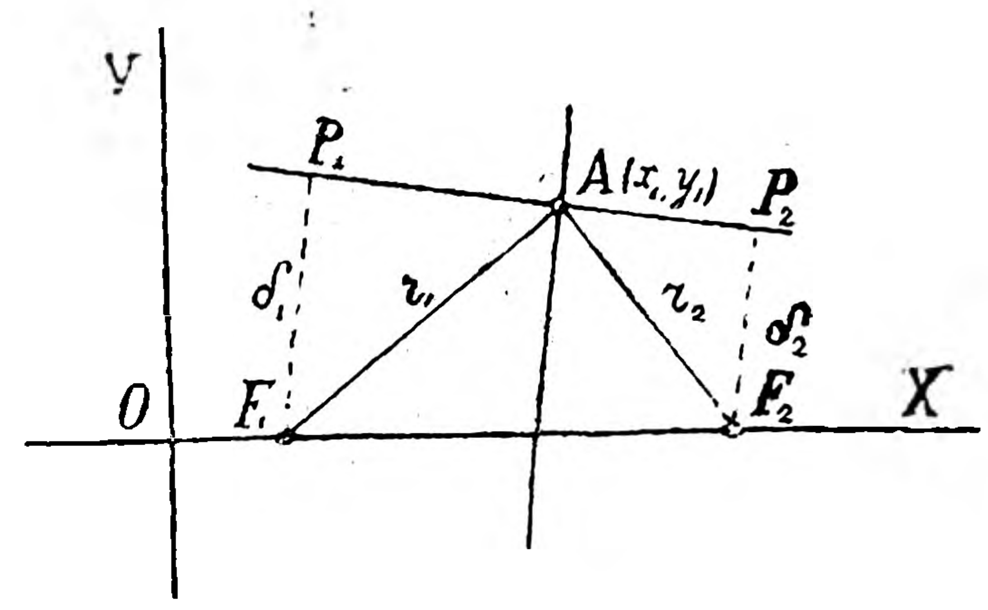
директрисы $$x=-\frac{p}{e(e+1)}, \quad x=-\frac{p}{e(e-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Полагая здѣсь $e=1$, мы получимъ для параболы одинъ фокусъ въ точкѣ $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а другой въ безконечности; одну директрису конечную $x=-\frac{p}{2}$, а другую безконечно удаленную.

§ 4. **Фокусы и касательныя.** Теорема. *Какъ касательная, такъ и нормаль кривой 2-го порядка образуютъ равные углы съ радіусами-векторами точки прикосновенія.*

Возьмемъ на кривой (4) точку $A(x_1, y_1)$ (см. фиг. 38) и проведемъ ея радіусы-векторы F_1A и F_2A, а также касательную къ кривой въ этой точкѣ ея (гл. V, § 9)

$$yy_1=(p+qx_1)x+px_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$



Фиг. 38.

Докажемъ, что углы F_1AP_1 и F_2AP_2 равны между собой. Изъ фокусовъ F_1 и F_2 опустимъ на касательную перпендикуляры F_1P_1 и F_2P_2. Для опредѣленія ихъ длинъ δ_1 и δ_2, приведемъ уравненіе касательной (7) къ нормальному виду:

$$M[(p+qx_1)x-y_1y+px_1]=0,$$

гдѣ M нормирующій множитель, и подставимъ въ это уравненіе вмѣсто текущихъ координатъ координаты фокусовъ (5)

$$\delta_1=M\left[(p+qx_1)\frac{p}{1+e}+px_1\right],\quad \delta_2=M\left[(p+qx_1)\frac{p}{1-e}+px_1\right].$$

Или
$$\delta_1=Mp\left[\frac{p}{e+1}+ex_1\right],\quad \delta_2=Mp\left[\frac{p}{e-1}+ex_1\right],$$

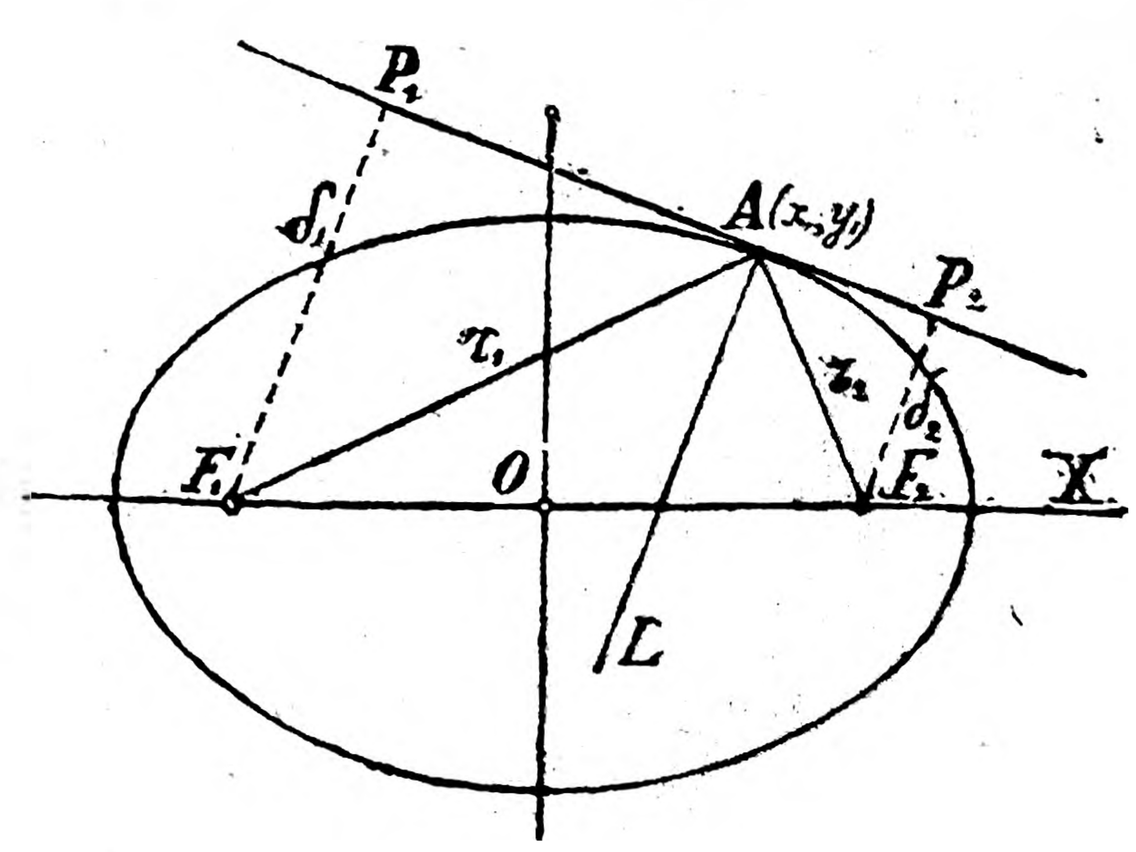
такъ какъ
$$q=e^2-1.$$

Съ другой стороны, радіусы-векторы r_1 и r_2 точки (x_1, y_1) соотвѣтственно равны: (см. § 1 и 2)

$$r_1=\left|ex_1+\frac{p}{e+1}\right|,\quad r_2=\left|ex_1+\frac{p}{e-1}\right|.$$

Слѣдовательно, $\frac{\delta_1}{\delta_2}=\frac{r_1}{r_2}$, или $\frac{F_1P_1}{F_2P_2}=\frac{F_1A}{F_2A}$, треугольники AF_1P_1 и AF_2P_2 подобны, и углы F_1AP_1 и F_2AP_2 равны между собой.

Нормаль AL образуетъ съ радіусами-векторами точки A равные углы F_1AL и F_2AL, такъ какъ эти послѣдніе дополняютъ до прямого углы F_1AP_1 и F_2AP_2.



Фиг. 39.

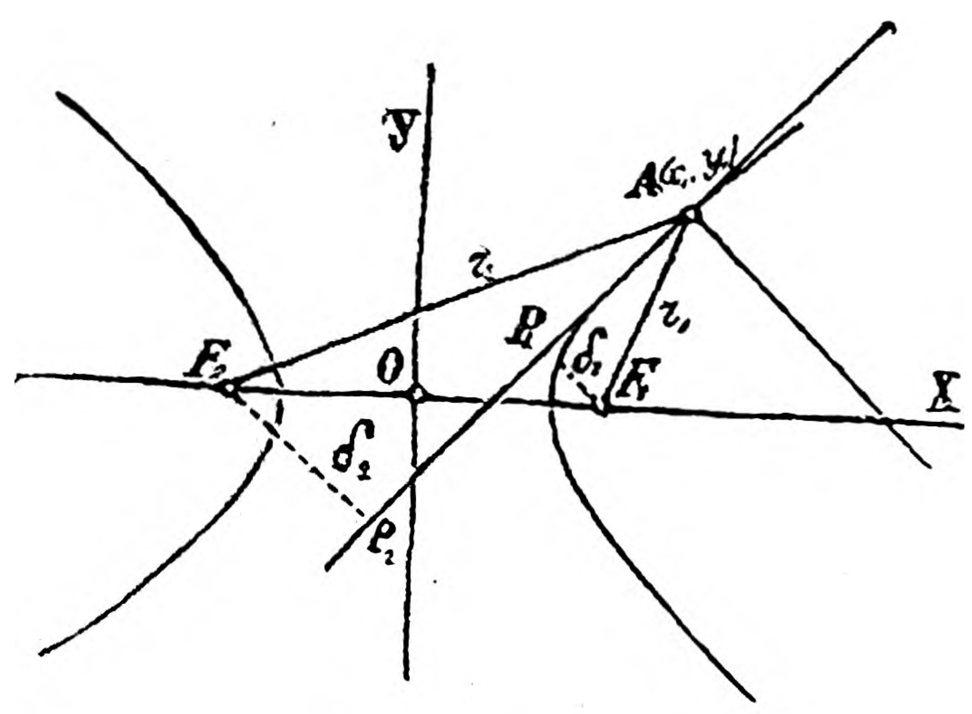
Въ случаѣ *эллипса* касательная есть внѣшняя равнодѣлящая[1]) угла между радіусами-векторами, а нормаль— внутренняя (см. фиг. 39).

---

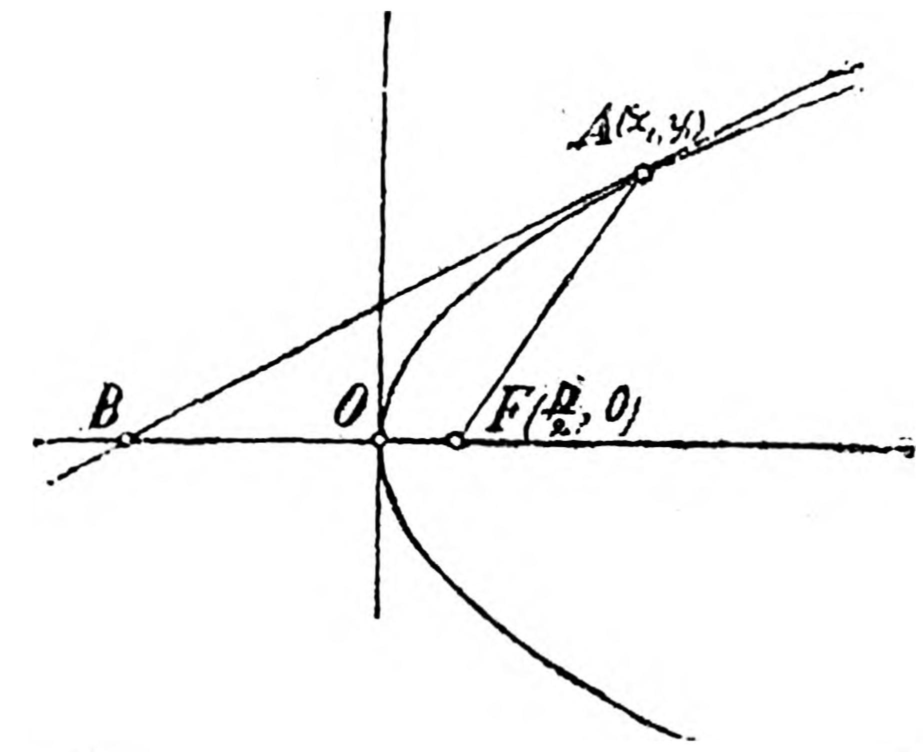
[1]) Прямая называется *внѣшней* равнодѣлящей угла, если она дѣлитъ пополамъ уголъ, смежный съ нимъ.

Въ случаѣ *гиперболы* касательная есть внутренняя равнодѣлящая угла между радіусами-векторами, а нормаль—внѣшняя (см. фиг. 40).

Въ случаѣ *параболы* въ $\triangle ABF$ (см. фиг. 41). стороны $AF=BF$,



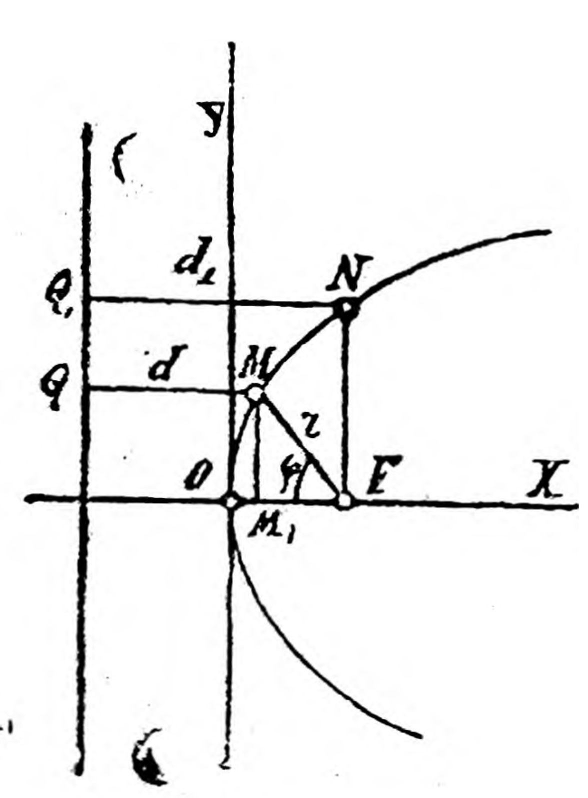
Фиг. 40.



Фиг. 41.

такъ какъ $AF=x_1+\frac{p}{2}$, какъ радіусъ векторъ точки A (x_1, y_1), а $BF=BO+OF$, гдѣ отрѣзки BO и OF равны соотвѣтственно x_1 и $\frac{p}{2}$, первый по свойству субтангенса параболы (гл. VI § 6), второй, какъ абсцисса фокуса. Слѣдовательно, $\triangle ABF$ равнобедренный и $\angle ABF=$ $=\angle BAF$, т.-е *касательная къ параболѣ образуетъ равные углы съ радіусомъ-векторомъ точки касанія и осью этой кривой.*

§ 5. **Полярное уравненіе кривой 2-го порядка.** Полярную ось примемъ совпадающей съ осью кривой и за направленіе ея примемъ направленіе отъ фокуса къ ближайшей вершинѣ. Возьмемъ на кривой второго порядка $y^2=2px+qx^2$ какую-нибудь точку M и построимъ ея разстоянія r и d отъ фокуса и директрисы; $\frac{r}{d}=e$,— откуда $d=\frac{r}{e}$; изъ чертежа (см. фиг. 42) видно, что $r\cos\varphi=d_1-d$, гдѣ d_1 есть разстояніе отъ директрисы точки кривой, лежащей на перпендикулярѣ, возставленномъ къ оси въ фокусѣ; чтобы найти d_1, опредѣлимъ r_1—въ данномъ случаѣ ординату названной точки. Для этого подставляемъ въ уравненіе $y^2=2px+qx^2$ или $y^2=2px+(e^2-1)x^2$ абсциссу фокуса $\frac{p}{1+e}$;



Фиг. 42.

$$y^2=\frac{2p^2}{1+e}+\frac{(e^2-1)\ p^2}{(1+e)^2}=\frac{2p^2}{1+e}+\frac{e-1}{1+e}p^2=\frac{2p^2+ep^2-p^2}{1+e}=\frac{p^2(1+e)}{1+e}=p^2;$$

т. е. $r_1=p$ и $d_1=\frac{p}{e}$. Подставляя значенія d и d_1 въ уравненіе $r\cos\varphi=d_1-d$, имѣемъ $\frac{p-r}{e}=r\cos\varphi$, откуда $p-r=er\cos\varphi$ или $r(1+e\cos\varphi)=p$,

или
$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

При помощи этого уравненія можно было бы изслѣдовать форму кривой 2-го порядка.

ГЛАВА VIII.

Построеніе кривыхъ 2-го порядка.

§ 1. **Эллипсъ.** 1. Построеніе эллипса по точкамъ.

Напишемъ уравненія эллипса, отнесеннаго къ осямъ, и окружности съ общимъ центромъ и радіусомъ, равнымъ большей полуоси,

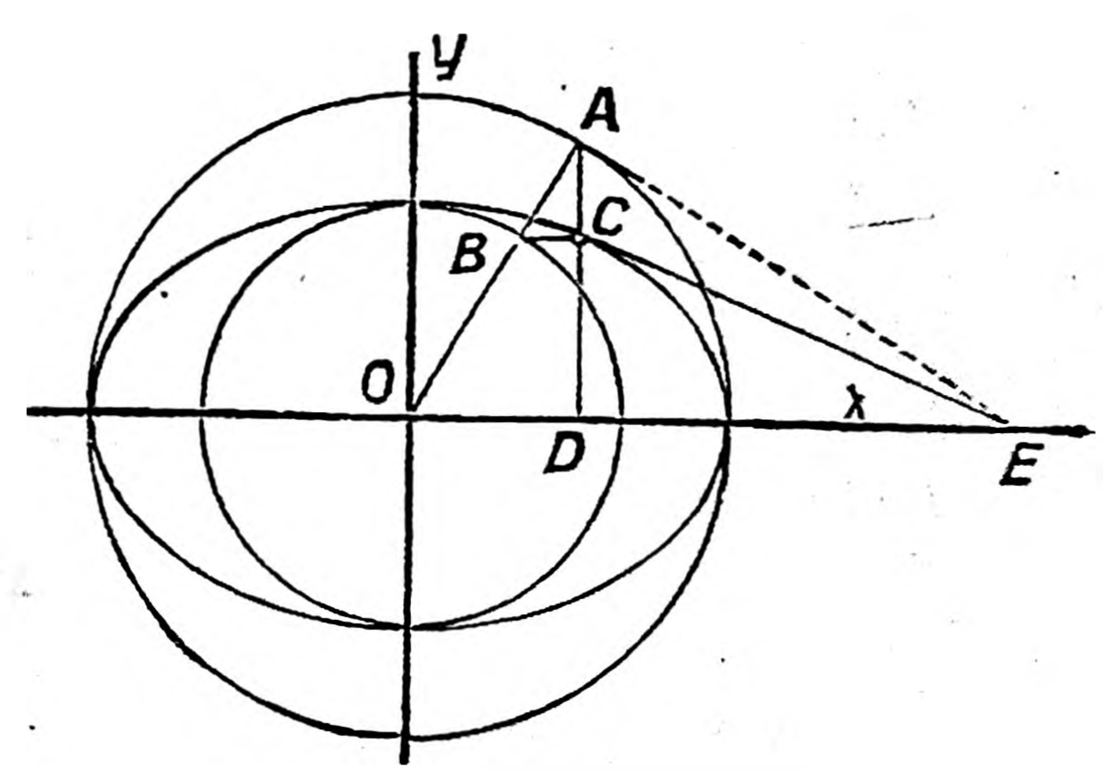
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ x^2+y^2=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

откуда $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ для эллипса и $y=\sqrt{a^2-x^2}$ для круга.

Слѣдовательно $$\frac{y}{y_1}=\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ y и y_1 ординаты точекъ эллипса и окружности, которыя соотвѣтствуютъ одному и тому же значенію абсциссы x.

Отсюда слѣдуетъ такой способъ построенія эллипса по точкамъ. Опишемъ изъ начала координатъ двѣ окружности радіусами, равными a и b (см. фиг. 43). Проведемъ черезъ начало произвольную прямую которая пересѣчетъ одну окружность въ точкѣ A, а другую въ точкѣ B. Опустимъ изъ точки A перпендикуляръ AD на ось X, а изъ точки B—перпендикуляръ BC на прямую AD. Пересѣченіе этихъ двухъ перпендикуляровъ—точка C—лежитъ на эллипсѣ (1). Въ самомъ дѣлѣ,

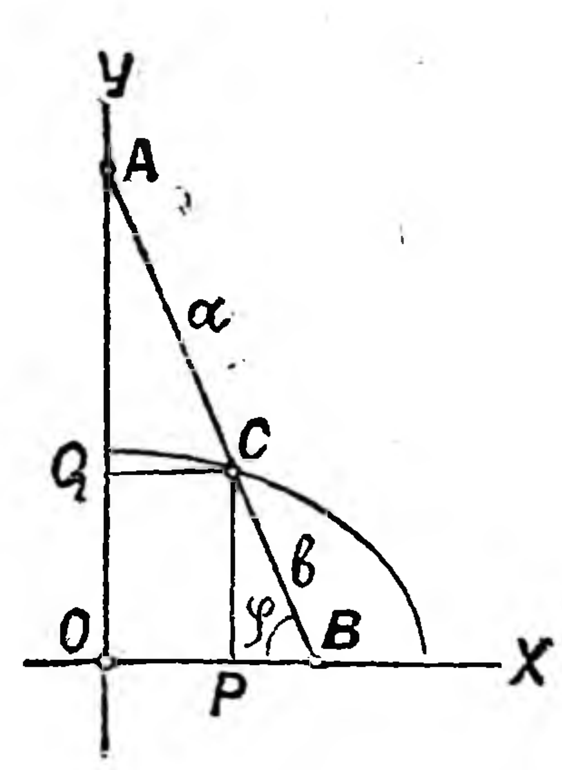


Фиг. 43.

$$\frac{DC}{DA}=\frac{OB}{OA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Сравнивая соотношеніе (3) съ (2), мы видимъ, что, дѣйствительно, точка C принадлежитъ эллипсу (1).

2. Эллиптическій циркуль Рона. Если отрѣзокъ постоянной длины AB (см. фиг. 44) перемѣщается такъ, что концы его A и B движутся соотвѣтственно по взаимно перпендикулярнымъ осямъ Y и X то точка C, лежащая на этомъ отрѣзѣ AB, опишетъ эллипсъ.

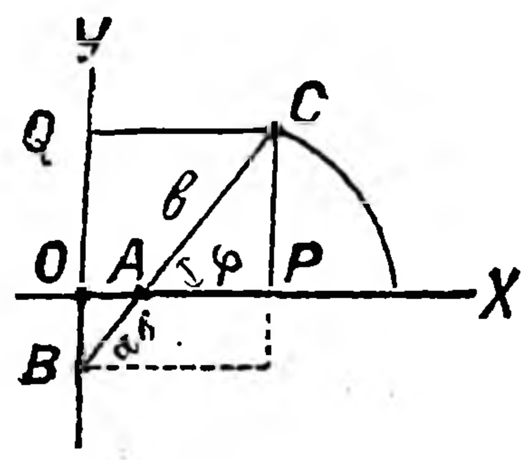


Фиг. 44.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ абсиссу QC и ординату PC точки C; изъ треугольниковъ ACQ и BCP получаемъ: если $AC=a$, $BC=b$ и $\varphi=\angle ABO$, то $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, откуда $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi,\ \text{или}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

На этомъ принципѣ построенъ *эллиптическій циркуль Рона.*

Замѣтимъ, что точка C опишетъ эллипсъ не только въ томъ случаѣ, когда C лежитъ между A и B, но и въ томъ случаѣ, когда C лежитъ на продолженіи AB. Послѣднее свойство использовано въ эллиптическомъ циркулѣ Рифлера (см. фиг. 45).



Фиг. 45.

§ 2. **Гипербола.** 1. Построеніе гиперболы по точкамъ.

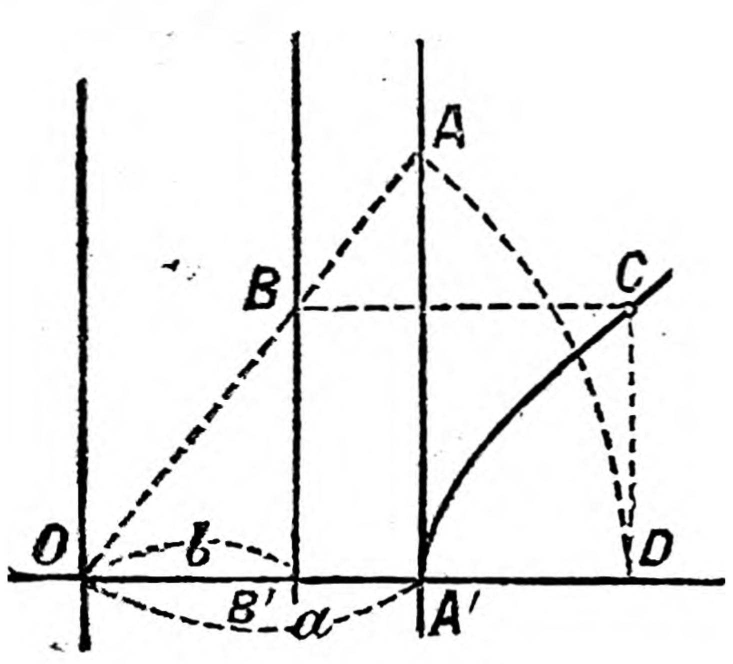
Изъ каноническаго уравненія гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

имѣемъ

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

Отсюда такое построеніе (см. фиг. 46). Строимъ двѣ прямыя $x=a$, $x=b$ и описываемъ изъ начала координатъ окружность радіусомъ, равнымъ абсциссѣ OD той точки, которую нужно построить. Пусть эта окружность пересѣкаетъ первую прямую въ точкѣ A; проведемъ радіусъ OA и продолжимъ его до пересѣченія со второй прямой. Возставляемъ въ точкахъ B и D перпендикуляры соотвѣтственно къ прямой $x=b$ и къ оси X. Точка C пересѣченія этихъ перпендикуляровъ лежитъ на гиперболѣ (1).



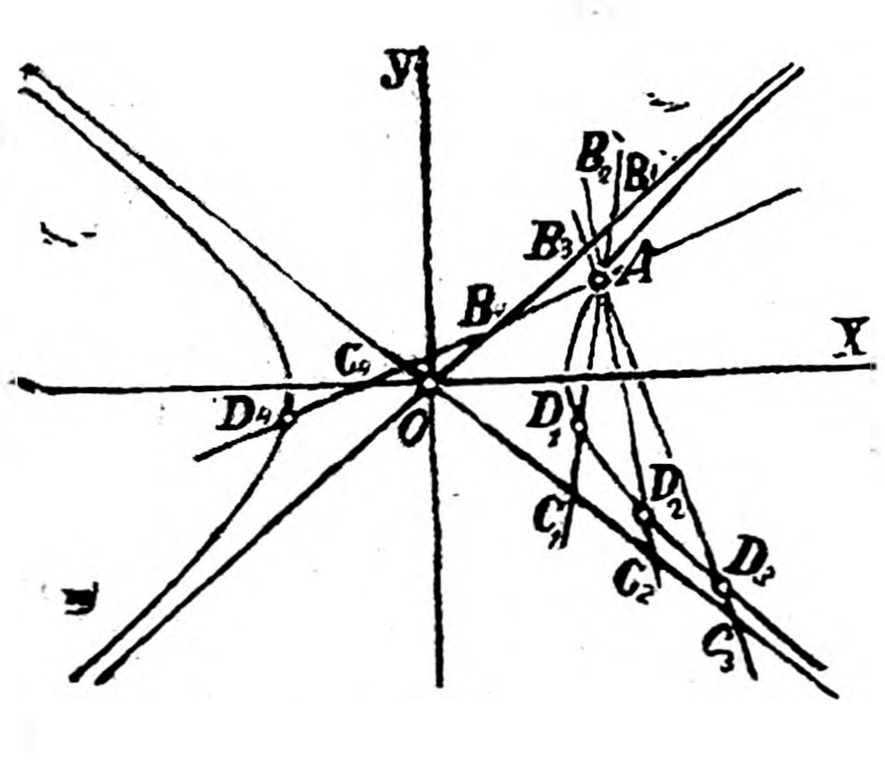
Фиг. 46.

Въ самомъ дѣлѣ $DC=B'B$, $\dfrac{B'B}{A'A}=\dfrac{OB'}{OA'}$ и $A'A=\sqrt{OA^2-OA'^2}$,

откуда
$$DC=\frac{OB'}{OA'}\sqrt{OA^2-OA'^2}.$$

Сравнивая это соотношеніе съ (1'), мы видимъ, что, дѣйствительно, точка C принадлежитъ гиперболѣ (1).

2. Построеніе гиперболы по асимптотамъ и точкѣ ея. Пусть точка A (см. фиг. 47) принадлежитъ гиперболѣ. Проведемъ черезъ нее произвольныя прямыя AB_1, AB_2, AB_3..., гдѣ B_1, B_2, B_3... точки пересѣченія A симптоты OB съ этими прямыми, и отложимъ на послѣднихъ отъ второй асимптоты OC соотвѣтственно отрѣзки $C_1D_1=AB_1$, $C_2D_2=AB_2$, $C_3D_3=AB_3$... Точки D_1, D_2, D_3... лежатъ на гиперболѣ (гл. II, § 4).

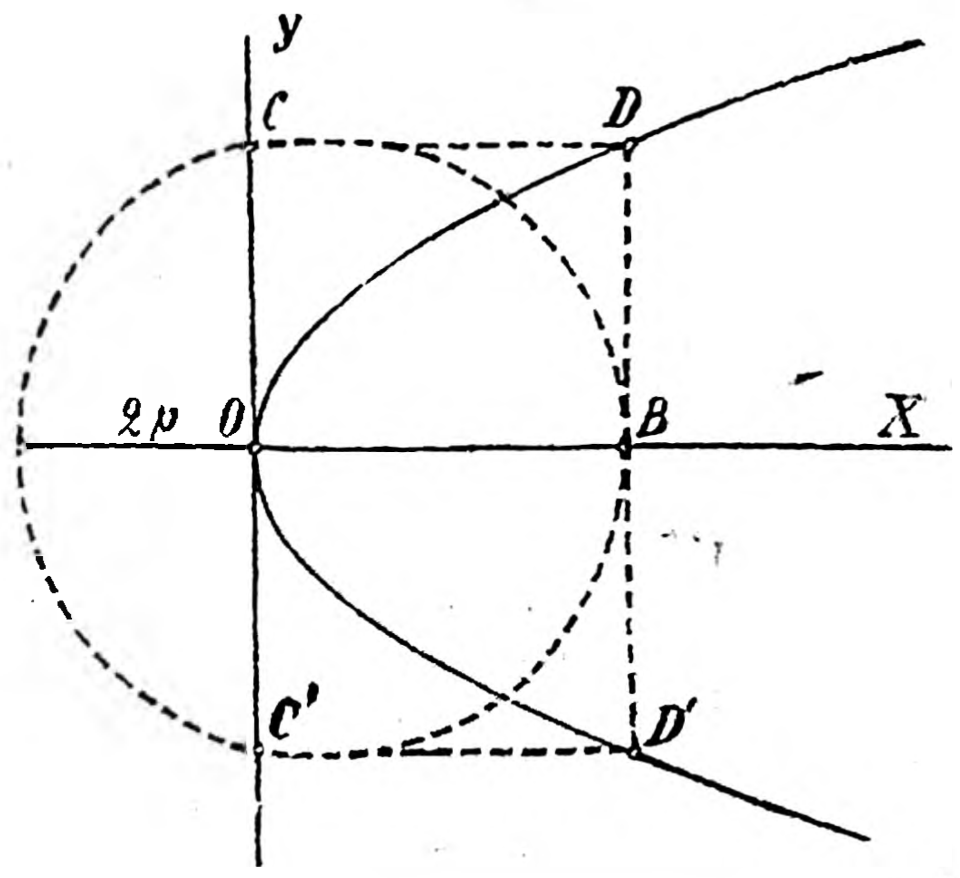


Фиг. 47.

§ 3. **Парабола**. Построеніе параболы по точкамъ. Каноническое уравненіе параболы

$$y^2=2px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

показываетъ, что y, ордината какой-либо точки этой кривой, есть средняя пропорціональная между абсциссой x той же самой точки и удвоеннымъ параметромъ параболы $2p$. Отсюда такое построеніе ея (см. фиг. 48). Отмѣтимъ точку $A(-2p, 0)$ и проведемъ черезъ нее окружность, которая имѣла бы центръ на оси X и пересѣкала ось Y. Возставимъ въ точкахъ B и C пересѣченія окружности съ осями X и Y перпендикуляры къ соотвѣтственнымъ осямъ. Точка D пересѣченія этихъ перпендикуляровъ и будетъ принадлежать параболѣ (1). Въ самомъ дѣлѣ, $BD^2=AO.OB$, или, если обозначить черезъ x и y координаты точки D, то $y^2=2px$.



Фиг. 48.

§ 4. **Построеніе касательныхъ къ кривымъ 2-го порядка.** Касательная къ эллипсу дѣлитъ внѣшнимъ образомъ уголъ между радіусами-векторами точки прикосновенія пополамъ (гл. VII, § 4). Слѣдовательно, для построенія *касательной* въ данной точкѣ *эллипса* нужно провести радіусы-векторы этой точки и затѣмъ построить биссектрису угла, образованнаго однимъ изъ этихъ радіусовъ-векторовъ и продолженіемъ другого. Эта биссектриса и будетъ служить искомой касательной.

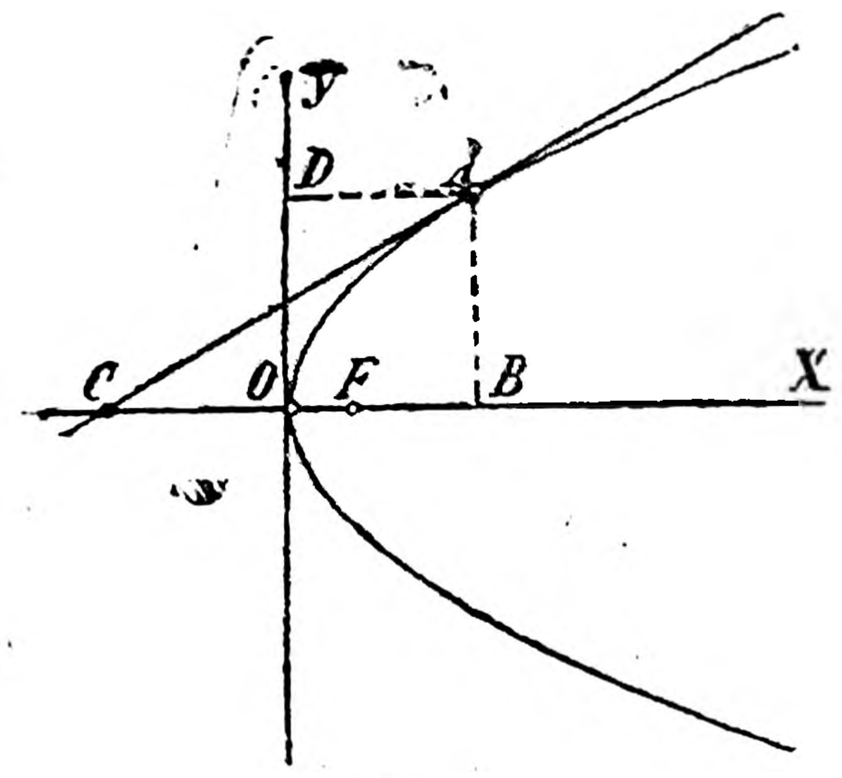
Для построенія касательной къ *гиперболѣ* надо провести биссектрису угла, образованнаго радіусами-векторами точки прикосновенія (гл. VII, § 4).

Для проведенія касательныхъ къ кривымъ 2-го порядка вовсе не нужно строить предварительно кривыя. Въ случаѣ центральныхъ кривыхъ достаточно, кромѣ, конечно, точки прикосновенія проводимой касательной, дать оба фокуса; въ случаѣ же параболы — фокусъ и вершину ея (см. ниже).

Построеніе касательной въ данной точкѣ кривой второго порядка можно также произвести, отыскивая еще одну точку, черезъ которую проходитъ касательная. Особенно просто построеніе получается, если эту точку взять на оси x.

Эллипсъ. Полагая въ уравненіяхъ касательной къ эллипсу $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ и кругу радіуса $xx_1+yy_1=a^2$ (см. § 1) $y=o$, видимъ, что $xx_1=a^2$ и для эллипса и для круга абсцисса точки пересѣченія касательныхъ съ осью X одна и та же, т.-е. что обѣ касательныхъ пересѣкаютъ ось X въ одной и той же точкѣ. Отсюда получаемъ такое построеніе касательной къ эллипсу: построивъ кругъ, касающійся эллипса въ концахъ большой оси, проводимъ черезъ данную точку эллипса перпендикуляръ къ этой оси, въ точкѣ пересѣченія послѣдняго съ кругомъ проводимъ касательную и соединяемъ точку пересѣченія этой касательной и большой оси съ данной точкой на эллипсѣ. Точку на большой оси, черезъ которую проходитъ касательная можно построить также, принимая во вниманіе пропорцію $\frac{x}{a}=\frac{a}{x_1}$.

Гипербола. Полагая въ уравненіи касательной къ гиперболѣ $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ $y=o$, имѣемъ $xx_1=a^2$, или $\frac{x}{a} = \frac{a}{x_1}$. Абсцисса точки, въ которой касательная встрѣчаетъ ось X, можетъ быть поэтому построена на основаніи теоремы: «хорда, проведенная изъ конца діаметра круга есть средняя пропорціональная между діаметромъ и прилежащимъ отрѣзкомъ», принимая абсциссу данной точки за діаметръ круга и откладывая полуось a, какъ хорду, на этомъ кругѣ отъ центра гиперболы; проектируя второй конецъ этой хорды на ось гиперболы получимъ точку, черезъ которую проходитъ касательная.



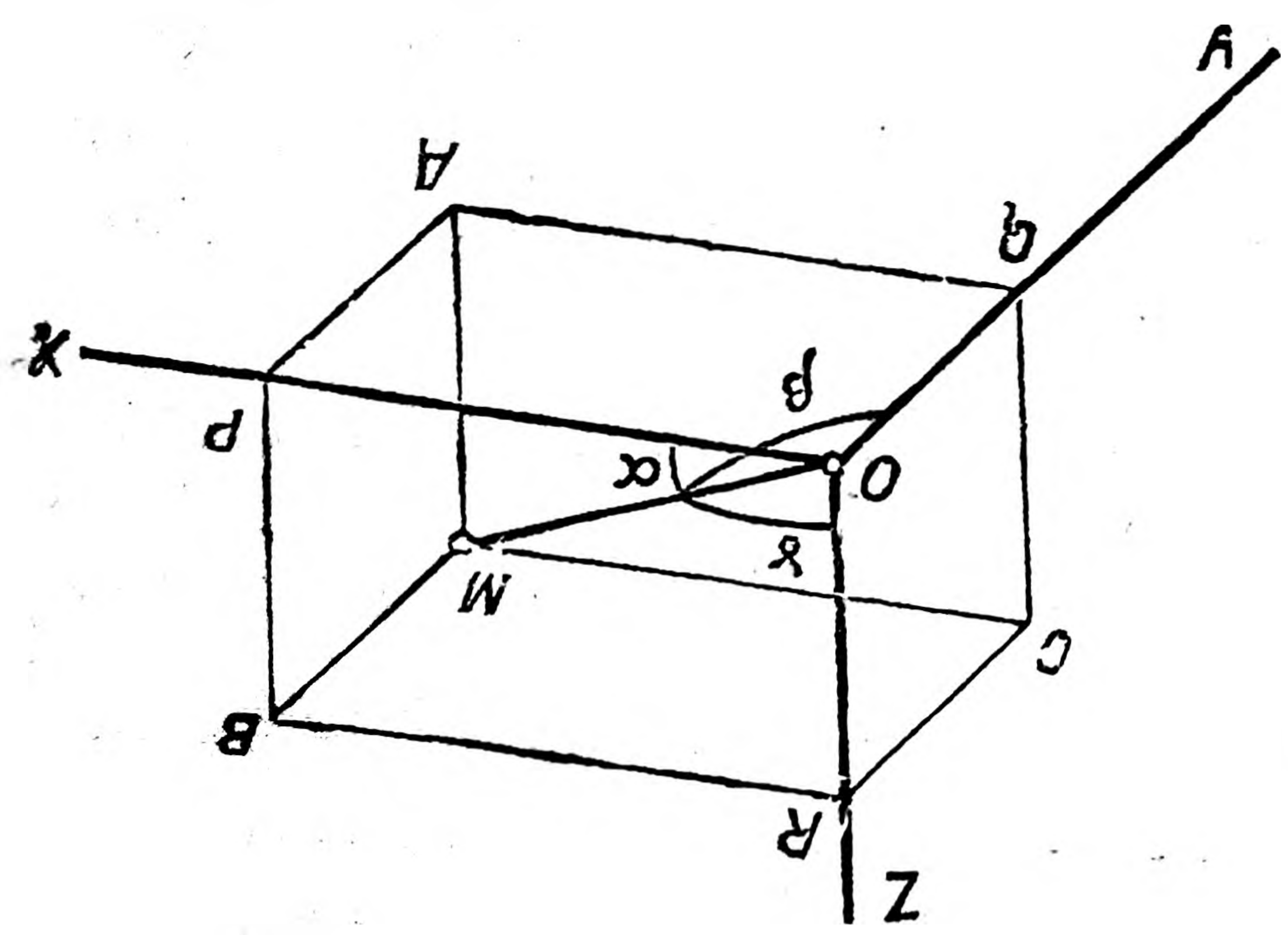
Фиг. 49.

Для построенія касательной къ *параболѣ* нужно отложить отъ вершины O (см. фиг. 49) на оси этой кривой въ направленіи, противоположномъ фокусу, отрѣзокъ CO, равный разстоянію DA данной точки прикосновенія отъ касательной въ вершинѣ параболы. Прямая CA, соединяющая точку прикосновенія A съ концомъ C отрѣзка CO, и представляетъ собою искомую касательную (гл. VI, § 6).

ГЛАВА IX.

Методъ координатъ въ пространствѣ.

§ 1. **Прямолинейная система координатъ.** Возьмемъ три исходящія изъ одной точки взаимноперпендикулярныя прямыя OX, OY и OZ (см. фиг. 50).



Фиг. 50.

Пусть дана произвольная точка M; проведя черезъ M плоскости перпендикулярныя къ OX, OY и OZ мы получимъ на нихъ проекціи точки M—три точки P, Q и R. По самому построенію точки P, Q и R опредѣляются единственнымъ образомъ. Если OX, OY и OZ принять за оси [1]), то точкамъ P, Q и R будутъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленныя координаты, которыя мы будемъ обозначать буквами x, y, z. Обратно, задавая значенія x, y, z, мы опредѣляемъ на осяхъ X, Y, Z точки P, Q и R единственнымъ образомъ;

[1]) Положительное направленіе оси X считается вправо, оси Y впередъ, оси Z вверхъ; въ виду этого въ Аналитической Геометріи пространства направленіе угловъ считается положительнымъ по движенію часовой стрѣлки.

проведя черезъ точки P, Q и R плоскости, перпендикулярныя къ соотвѣтствующимъ осямъ, мы получимъ, какъ точку пересѣченія, единственную точку M.

Поэтому числа x, y, z можно назвать координатами точки M; числа x и y по аналогіи съ геометріей на плоскости называются абсциссой и ординатой, координату z мы будемъ называть *аппликатой* точки M. Точку O мы назовемъ началомъ координатъ, прямыя OX, OY, OZ—осями координатъ, плоскости, проходящія черезъ каждую пару осей,—соотвѣтственно координатными плоскостями XY, XZ или YZ. Для всѣхъ точекъ, лежащихъ на плоскости XY, аппликата равна 0; такъ же для точекъ, лежащихъ на плоскости XZ или YZ, равны нулю y и x. Для точекъ, расположенныхъ на оси, двѣ другія координаты равны 0. Начало имѣетъ координаты 0, 0, 0.

Для построенія координатъ точки M достаточно опустить перпендикуляръ на одну изъ координатныхъ плоскостей, напр. MA, и изъ точки A—перпендикуляръ на одну изъ осей, расположенныхъ на этой плоскости, напр. AP.

Дѣйствительно, плоскости, проектирующія точку M на оси координатъ, вмѣстѣ съ координатными плоскостями опредѣляютъ прямоугольный параллелепипедъ $OPAQRBMC$. Слѣдовательно, въ виду равенства противоположныхъ сторонъ параллелепипеда $OP=x$, $PA=y$, $AM=z$. Точки A, B и C можно разсматривать, какъ проекціи точекъ M на координатныя плоскости; координаты ихъ будутъ соотвѣтственно (x, y, o), (x, o, z) и (o, y, z).

Разсматриваемая система координатъ называется *прямолинейной прямоугольной* или *декартовой*.

Точка M вполнѣ опредѣлена, если даны ея три координаты: абсцисса a, ордината b и аппликата c; слѣдовательно, системѣ ур-ній

$$x=a \;.\;.\;.\;.\;(1)\qquad y=b\;.\;.\;.\;.\;(2)\qquad z=c\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

въ пространствѣ соотвѣтствуетъ одна вполнѣ опредѣленная точка. Посмотримъ, какой геометрическій образъ опредѣлитъ одно ур-ніе этой системы. Уравненію (1) соотвѣтствуетъ безчисленное множество точекъ, абсциссы которыхъ равны одному и тому же числу a; всѣ эти точки расположены на плоскости $AMBP$, параллельной плоскости YZ и отстоящей отъ нея на разстояніи a единицъ длины. Аналогично ур-нію (2) или ур-нію (3) соотвѣтствуютъ плоскости $AMCQ$ или $BMCR$, параллельныя координатнымъ плоскостямъ ZX или XY и отстоящія отъ нихъ на b или на c единицъ длины [1]). Система двухъ уравненій, напримѣръ (1) и (2), опредѣляетъ точки, лежащія одновременно на плоскостяхъ $AMBP$ и $AMCQ$, т.-е. на прямой AM ихъ пересѣченія, которая параллельна оси Z; точно такъ же системы ур-ній (2) и (3)

---

[1]) Въ частности уравненіе $x=0$ опредѣляетъ координатную плоскость YZ, $y=0$—ZX, $z=0$—XY.

или (3) и (1) опредѣляютъ прямыя CM или BM, соотвѣтственно параллельныя осямъ X и Y [2]). Наконецъ, всѣ три ур-нія (1), (2) и (3) опредѣляютъ точку, лежащую одновременно на трехъ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ, т.-е. точку ихъ пересѣченія M.

Уравненіе, не содержащее одной изъ трехъ координатъ, напр., z:

$$F(x, y)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

опредѣляетъ на плоскости нѣкоторую кривую, но, очевидно, уравненію (4) будутъ удовлетворять координаты всѣхъ точекъ, лежащихъ на прямыхъ, параллельныхъ оси Z, и проходящихъ черезъ эту кривую; такимъ образомъ въ пространствѣ уравненіе (4) опредѣляетъ цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна оси Z. Напримѣръ, ур-ія

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y^2=2px$$

опредѣляютъ соотвѣтственно эллиптическій, гиперболическій и параболическій цилиндры; уравненіе $Ax+By+C=0$—плоскость, параллельную оси Z. Аналогично уравненія $F(y, z)=0$ или $\Phi(x, z)=0$ опредѣляютъ цилиндрическія поверхности, образующія которыхъ параллельны соотвѣтственно оси X и оси Y.

§ 2. **Опредѣленіе направленія прямой въ пространствѣ.** Направленіе прямой въ пространствѣ опредѣляется тремя углами α, β, γ этой прямой съ осями координатъ X, Y, Z.

Тѣ же углы образуютъ всѣ прямыя, ей параллельныя, въ частности, прямая, проходящая черезъ начало координатъ. Косинусы этихъ угловъ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ будемъ называть *направляющими косинусами прямой.* Изъ нихъ только 2 произвольны.

Возьмемъ отрѣзокъ $OM=r$ этой прямой (см. фиг. 50) и проектируемъ его на оси координатъ

$$x=r\cos\alpha, \quad y=r\cos\beta, \quad z=r\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Возводя въ квадратъ и складывая почленно, получимъ

$$x^2+y^2+z^2=r^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

или,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

такъ какъ по свойству діагонали прямоугольнаго параллелепипеда $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Уголъ между двумя прямыми. Пусть α, β, γ и α', β', γ',— углы, образуемые двумя прямыми съ осями координатъ. Чтобы найти уголъ φ между ними, проведемъ черезъ начало координатъ прямыя OA и OD, параллельныя имъ (см. фиг. 51). Построимъ координаты

---

[2]) Системы уравненій: $y=0$ и $z=0$, $z=0$ и $x=0$, $x=0$ и $y=0$ опредѣляютъ оси X, Y и Z.

какой-нибудь точки, напр. A, одной изъ этихъ прямыхъ OA и спроектируемъ на другую прямую OD получившуюся замкнутую ломаную $OCBAO$:

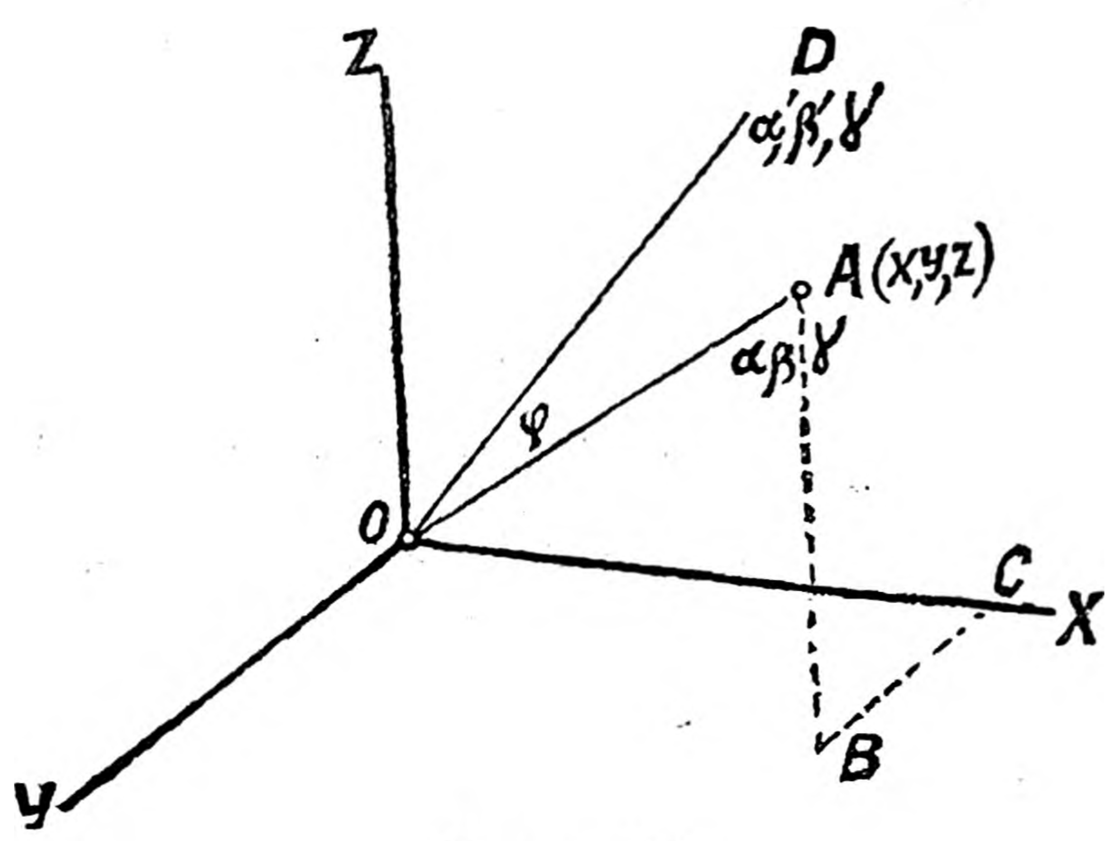
$$np_{OD}OCBAO = np_{OD}OC + np_{OD}CB + np_{OD}BA + np_{OD}AO = 0 \text{ (гл. II)},$$

$$\text{или } np_{OD}OA = np_{OD}OC + np_{OD}CB + np_{OD}BA.$$

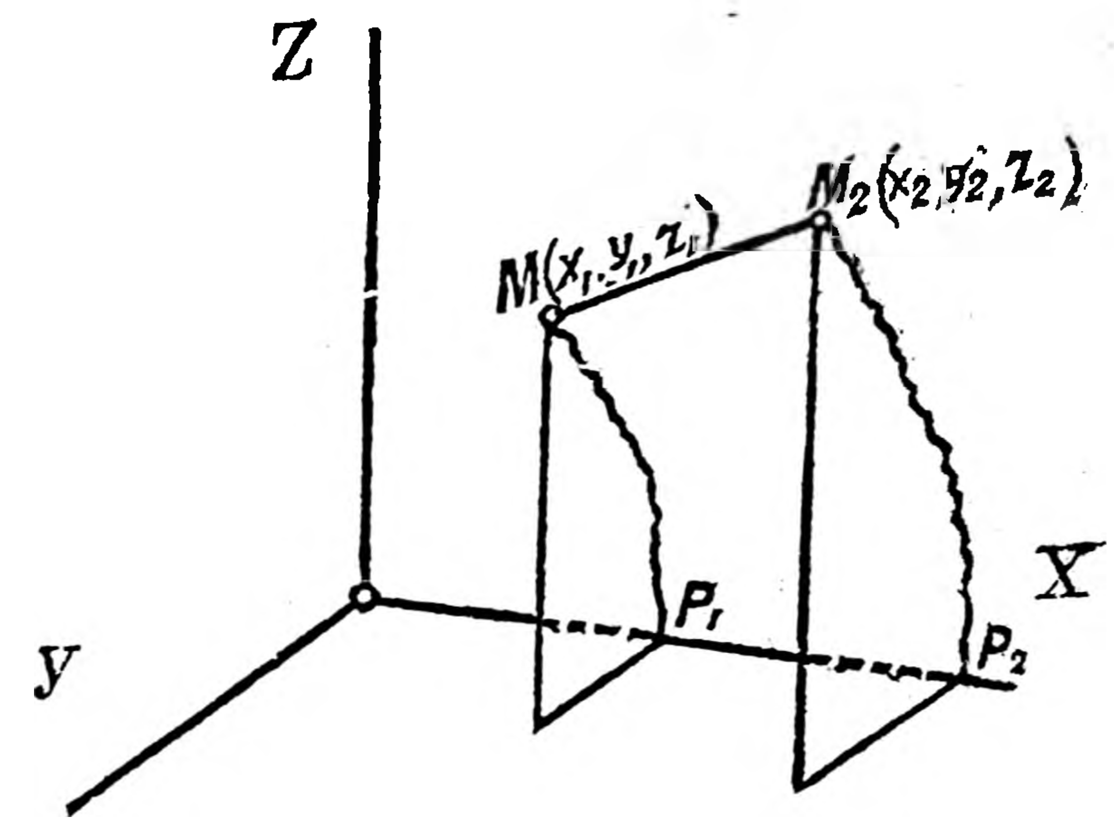
Если $OA = r$, то $np_{OD}OA = r\cos\varphi$ и $r\cos\varphi = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'$ или на основаніи равенствъ (1)

$$r\cos\varphi = r\cos\alpha\cos\alpha' + r\cos\beta\cos\beta' + r\cos\gamma\cos\gamma',$$

и по сокращеніи на r, $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$ . . . (3)



Фиг. 51.



Фиг. 52.

Если прямыя OA и OD взаимно перпендикулярны, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\cos\varphi = 0$. Слѣдовательно, условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ представится въ такомъ видѣ:

$$\cos\alpha\ \cos\alpha' + \cos\beta\ \cos\beta' + \cos\gamma\ \cos\gamma' = 0 \quad . . . . . . (4)$$

§ 3. **Задачи.** 1. Найти разстояніе между двумя точками. Чтобы найти разстояніе между двумя точками, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (см. фиг. 52), спроектируемъ отрѣзокъ $M_1M_2 = d$ на оси координатъ: $np_x M_1M_2 = P_1P_2 = d\cos\alpha$, но $P_1P_2 = x_2 - x_1$

слѣдовательно $x_2 - x_1 = d\cos\alpha$ . . . . (1)

и также $y_2 - y_1 = d\cos\beta$, $z_2 - z_1 = d\cos\gamma$, ... (1′)

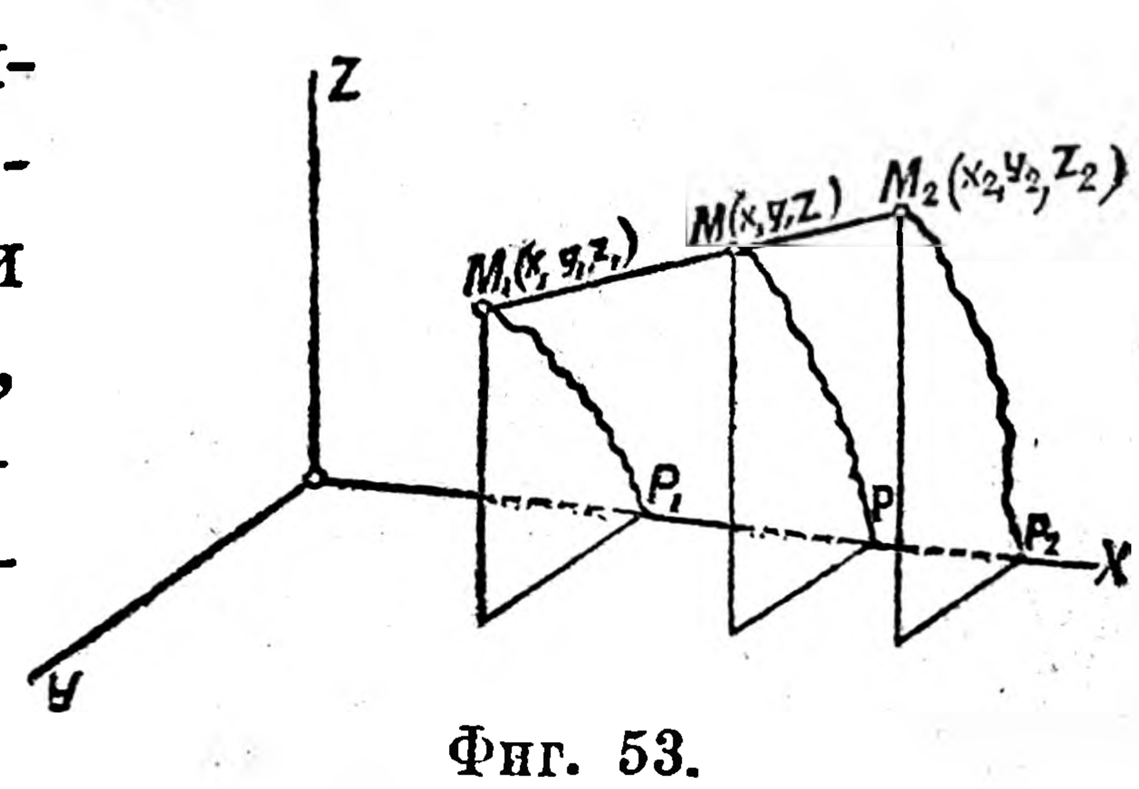
гдѣ α, β, γ—углы, образованные прямой M_1M_2 съ осями координатъ. Возведемъ почленно въ квадратъ и сложимъ 3 равенства (1) и (1′)

$$(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 = d^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

или [§ 2] $d^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$

и $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$ . . . . (2)

2. Раздѣлить отрѣзокъ въ данномъ отношеніи. Пусть данъ отрѣзокъ M_1M_2 (см. фиг. 53), координатами концовъ котораго служатъ: x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Положимъ, что точка $M(x, y, z)$ дѣлитъ отрѣзокъ M_1M_2 въ данномъ отношеніи l, т.-е. $\frac{M_1M}{MM_2} = l$.



Фиг. 53.

Проектируемъ три точки M_1, M и M_2 на ось X; въ силу теоремы объ отрѣзкахъ прямыхъ между параллельными плоскостями

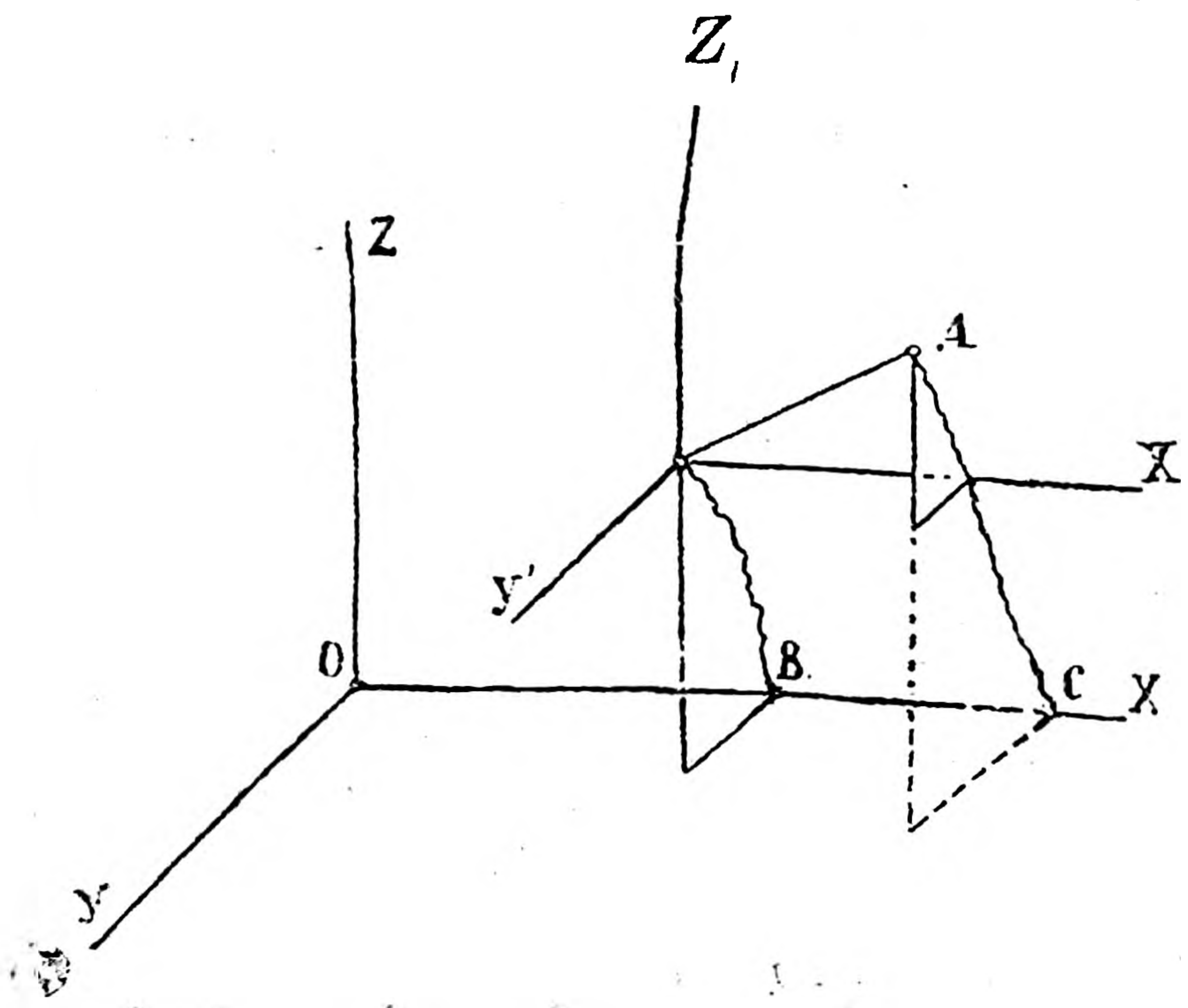
$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=l,$$

откуда (см. зад. 2 § 2 гл. I) $x=\dfrac{x_1+lx_2}{1+l}$,

аналогично $\quad y=\dfrac{y_1+ly_2}{1+l},\quad z=\dfrac{z_1+lz_2}{1+l}$.

Въ случаѣ внутренняго дѣленія точка M лежитъ на отрѣзкѣ M_1M_2 и $l>0$. Если же точка дѣленія M_1 лежитъ на продолженіи отрѣзка M_1M_2, то отрѣзки M_1M и MM_2 направлены въ противоположныя стороны, и $l<0$.

§ 4. **Преобразованіе координатъ.** Разсмотримъ сначала два частныхъ случая: 1) преобразованіе начала и 2) преобразованіе направленій осей.



Фиг. 54.

1. Преобразованіе начала. Пусть двѣ системы координатъ имѣютъ разныя начала, а направленія соотвѣтственныхъ осей у нихъ одинаковы (см. фиг. 54). Обозначимъ черезъ x, y, z и x', y', z' старыя и новыя координаты точки A, черезъ x_0, y_0, z_0 координаты новаго начала O' [1]) относительно старыхъ осей.

Спроектируемъ отрѣзокъ $O'A$ на старую ось OX и на новую $O'X'$. Въ виду параллельности осей проекціи равны; слѣдовательно, $x-x_0=x'$; отсюда

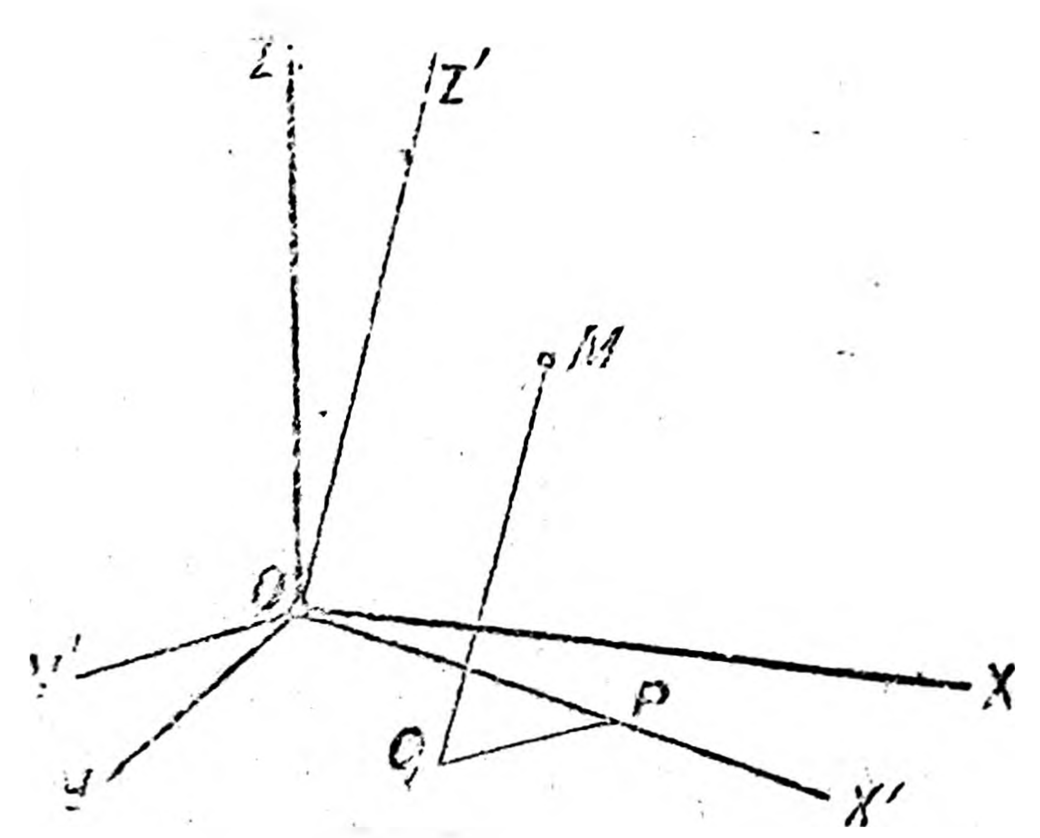
$$x=x'+x_0,$$

и такъ же

$$y=y'+y_0, \qquad (1)$$

$$z=z'+z_0.$$

2. Преобразованіе направленія осей. Положимъ, что оси координатъ повернуты такъ, что новая ось OX' (см. фиг. 55) образуетъ, со старыми осями OX, OY, OZ углы α_1, β_1, γ_1 и т. д., какъ показываетъ таблица:



Фиг. 55.

оси	X'	Y'	Z'
X	α_1	α_2	α_3
Y	β_1	β_2	β_3
Z	γ_1	γ_2	γ_3

[1]) Точка O' на фиг. 54 пропущена.

Построимъ новыя координаты (x', y', z') точки M и спроектируемъ ломаную $OPQM$ на ось OX

$$np_x OM = np_x OP + np_x PQ + np_x QM.$$

Отсюда на основанiи теоремы 3 главы II, если x, y, z старыя координаты точки M

$$x = x' \cos\alpha_1 + y' \cos\alpha_2 + z' \cos\alpha_3,$$

и аналогично

$$y = x' \cos\beta_1 + y' \cos\beta_2 + z' \cos\beta_3, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$z = x' \cos\gamma_1 + y' \cos\gamma_2 + z' \cos\gamma_3.$$

Для обратнаго перехода отъ новыхъ координатъ къ старымъ можно было бы написать такiя же формулы, напр.

$$x' = x \cos\alpha_1 + y \cos\beta_1 + z \cos\gamma_1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

3. Общее преобразованiе. Если новая система координатъ отличается отъ старой и началомъ и направленiями осей, то мы построимъ вспомогательную систему координатъ, имѣющую начало въ точкѣ O', и координатныя оси $O'X''$, $O'Y''$ и $O'Z''$, параллельныя осямъ старой системы. На основанiи формулъ (1) мы можемъ написать

$$x = x'' + x_0, \ldots\ldots y = y'' + y_0, \ldots\ldots z = z'' + z_0.$$

Основываясь же на формулахъ (2), мы имѣемъ

$$x'' = x' \cos\alpha_1 + y' \cos\alpha_2 + z' \cos\alpha_3$$
$$y'' = x' \cos\beta_1 + y' \cos\beta_2 + z' \cos\beta_3$$
$$z'' = x' \cos\gamma_1 + y' \cos\gamma_2 + z' \cos\gamma_3.$$

Исключая x'', y'' и z'' изъ этихъ уравненiй, мы получимъ окончательно общiя формулы преобразованiя координатъ:

$$x = x' \cos\alpha_1 + y' \cos\alpha_2 + z' \cos\alpha_3 + x_0$$
$$y = x' \cos\beta_1 + y' \cos\beta_2 + z' \cos\beta_3 + y_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$z = x' \cos\gamma_1 + y' \cos\gamma_2 + z' \cos\gamma_3 + z_0$$

4. Формулы Эйлера. Изъ 9 угловъ, входящихъ въ формулы (2) или (3), только 3 произвольны. Въ самомъ дѣлѣ между этими *девятью* углами существуетъ 6 соотношенiй

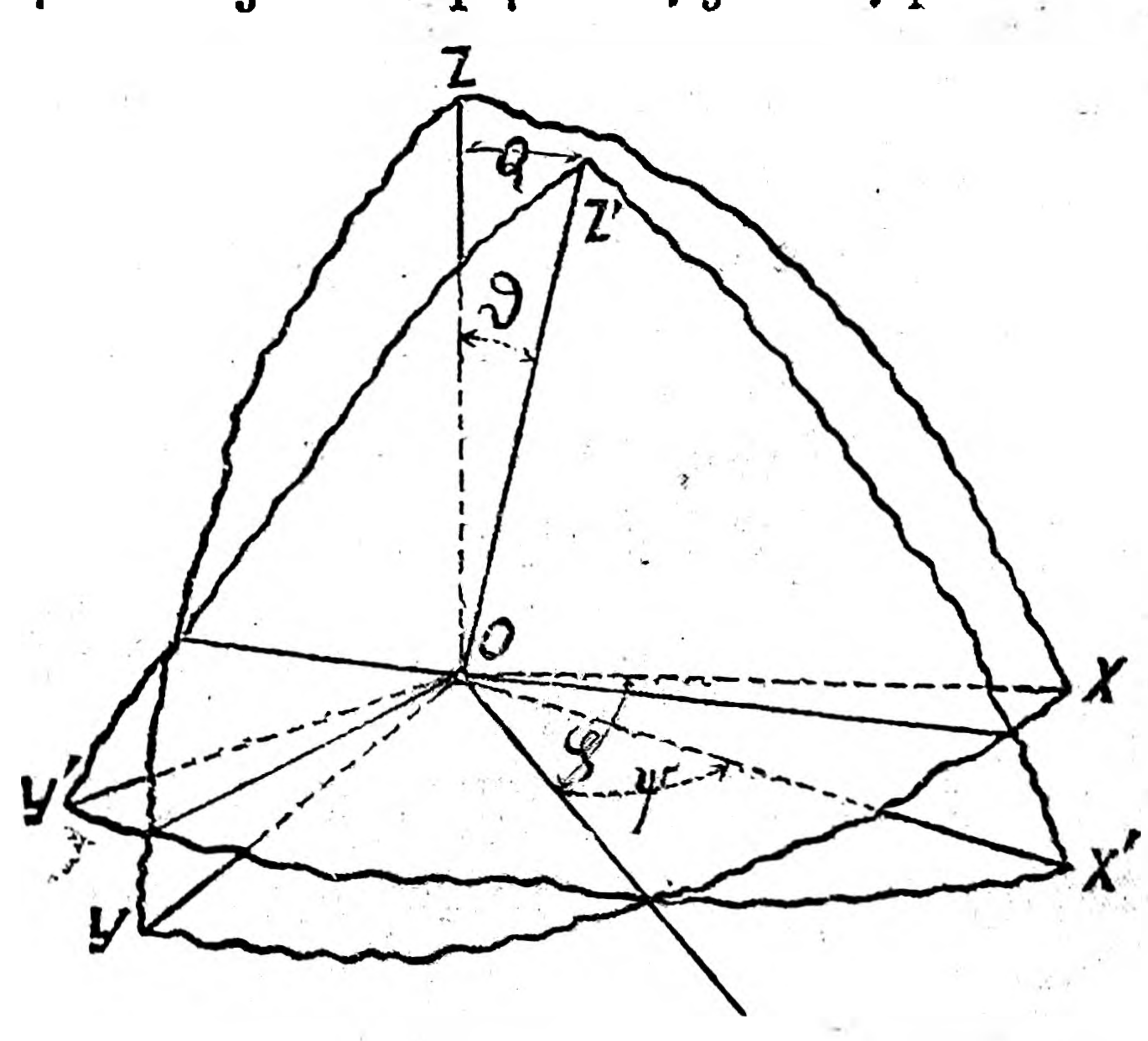
$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1, \quad \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0,$$
$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1, \quad \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \cos\beta_2 \cos\beta_3 + \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 = 0,$$
$$\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1, \quad \cos\alpha_3 \cos\alpha_1 + \cos\beta_3 \cos\beta_1 + \cos\gamma_3 \cos\gamma_1 = 0,$$

такъ какъ углы $X'OY'$, $Y'OZ'$ и $Z'OX'$ прямые.

Въ виду этого Эйлеръ принялъ за независимые три угла; именно (см. фиг. 56): углы φ и ψ, образуемые осями X и X' съ прямой OW пересѣченiя плоскостей XOY и $X'OY'$, называемой узловой линiей, и уголъ ϑ между осями Z и Z'.

Возьмемъ систему координатъ такую, чтобы ось X_1 совпала съ узловой линiей OW, а ось Z_1 съ осью Z

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi$$
$$y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi \ldots (4)$$
$$z = z_1$$



Фиг. 56.

Строимъ теперь такую систему координатъ, чтобы ось X_2 совпала съ X_1, а Z_2 съ Z

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2 \cos\vartheta-z_2 \sin\vartheta,\ z_1=y_2 \sin\vartheta+z_2 \cos\vartheta \quad \ldots\ldots (5)$$

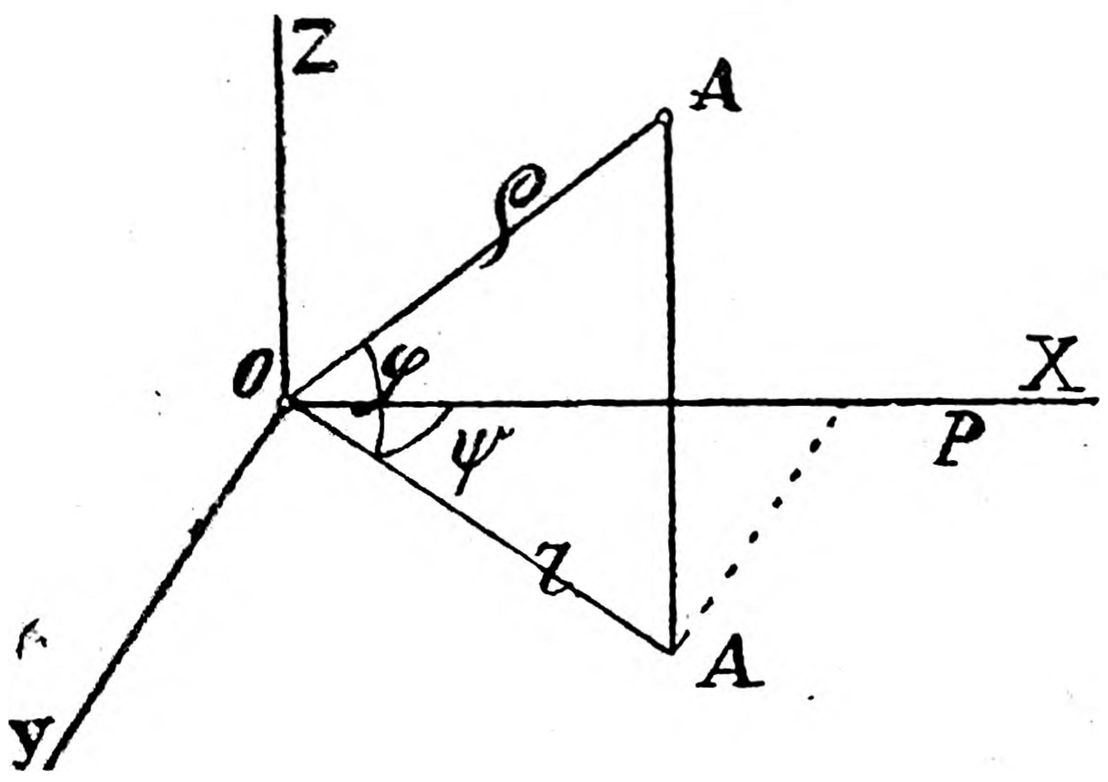
Перейдемъ наконецъ къ новой системѣ координатъ

$$x_2=x' \cos\psi-y' \sin\psi,\ y_2=x' \sin\psi+y' \cos\psi,\ z_2=z' \quad \ldots\ldots (6)$$

Исключая вспомогательныя координаты, получимъ *формулы Эйлера*

$$\begin{aligned} x&=x'(\cos\varphi \cos\psi-\sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta)-y'(\cos\varphi \sin\psi+\sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta)+z' \sin\varphi \sin\vartheta,\\ y&=x'(\sin\varphi \cos\psi+\cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta)-y'(\sin\varphi \sin\psi-\cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta)-z' \cos\varphi \sin\vartheta, \quad \ldots (7)\\ z&=x' \sin\psi \sin\vartheta+y' \cos\psi \sin\vartheta+z' \cos\vartheta. \end{aligned}$$

§ 5. **Полярныя координаты**. Цилиндрическія координаты. Для опредѣленія положенія какой-либо точки A пространства (см. фиг. 57) примемъ какую-нибудь плоскость за *полярную* и въ ней возьмемъ *полюсъ* O и *полярную ось* OP. Опустимъ на эту плоскость перпендикуляръ AA' [1]) и соединимъ точку A' съ полюсомъ. Три числа $z=A'A$, $r=OA'$ и $\psi=\angle\ POA'$ называются *цилиндрическими* координатами точки A, такъ какъ точка A опредѣляется, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей $z=a$, $\psi=c$ и цилиндра $r=b$. Двѣ послѣднія координаты r и ψ очевидно представляютъ полярныя координаты точки A' въ полярной плоскости. Поэтому для перехода отъ декартовыхъ координатъ къ цилиндрическимъ, если полюсъ находится въ началѣ, полярная ось совпадаетъ съ осью X и полярная плоскость съ плоскостью XY, можно пользоваться формулами § 4 гл. III



Фиг. 57.

$$x=r \cos\psi,\ y=r \sin\psi,\ z=z \quad \ldots\ldots (1)$$

Полярныя координаты. Возьмемъ по прежнему полярную плоскость, полюсъ и полярную ось и соединимъ точку A съ полюсомъ. *Радіусъ-векторъ* $\varrho=OA$, *широта*—уголъ радіуса-вектора съ полярной плоскостью $\varphi=\angle\ A'OA$ и *долгота*, уголъ между полярной осью и проекціей радіуса-вектора на полярную плоскость $\psi=\angle\ POA'$ называются полярными координатами.

Радіусъ-векторъ ϱ принято считать величиной положительной; долгота положительна въ сторону вращенія часовой стрѣлки и предѣлами измѣненія ея будетъ по-прежнему, $0\leqq\psi<2\pi$; широта φ положительна въ направленіи вверхъ отъ полярной плоскости; она мѣняется въ предѣлахъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Полярныя координаты вполнѣ опредѣляютъ положеніе точки; это слѣдуетъ, напримѣръ, изъ формулъ преобразованія прямоугольныхъ декартовыхъ координатъ въ полярныя, такъ какъ они вполнѣ опредѣляютъ декартовы координаты точки. Пусть опять полярная плоскость совпадаетъ съ плоскостью XY, полярная ось съ осью X, и полюсъ—съ началомъ координатъ. Изъ прямоугольнаго $\triangle\ AOA'$ получимъ $z=\varrho \sin\varphi$, $r=\varrho \cos\varphi$.

Отсюда съ помощью уравненій (1)

$$x=\varrho \cos\varphi \cos\psi,\ y=\varrho \cos\varphi \sin\psi,\ z=\varrho \sin\varphi \quad \ldots\ldots (2)$$

Обратныя формулы выведемъ, принявъ во вниманіе, что $\varrho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, и $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Мы получимъ

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ tg\,\varphi=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ tg\,\psi=\frac{y}{x} \quad \ldots\ldots (3)$$

§ **6. Геометрическое значеніе уравненій**. Пусть мы имѣемъ нѣкоторое уравненіе между координатами:

$$F(x,\ y,\ z)=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

---

[1]) Вмѣсто A' на фиг. 57 стоитъ A.

Дадимъ какой-нибудь координатѣ, напр., аппликатѣ опредѣленное значеніе $z=h$. Система уравненій

$$z=h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$F(x,\ y,\ h)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

опредѣляетъ точки, лежащія одновременно на плоскости параллельной координатной плоскости XY, и на цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси Z, т.-е. линію пересѣченія этихъ двухъ поверхностей. Если будемъ мѣнять параметръ h, то плоскость станетъ перемѣщаться, цилиндръ деформироваться и соотвѣтственно этому станетъ перемѣщаться и деформироваться опредѣляемая совокупностью уравненій (2) и (3) кривая; при этомъ она описываетъ нѣкоторую поверхность. Такимъ образомъ *одно уравненіе между координатами опредѣляетъ въ аналитической геометріи пространства поверхность.*

Пусть намъ даны два уравненія

$$F(x,\ y,\ z)=0 \ \ldots\ (1),\quad f(x, y, z)=0 \ \ldots\ldots \ (4)$$

Совокупность ихъ опредѣляетъ геометрическое мѣсто точекъ, расположенныхъ одновременно на обѣихъ поверхностяхъ (1) и (4), т.-е. на линіи ихъ пересѣченія. Такимъ образомъ *совокупность двухъ уравненій между координатами опредѣляетъ въ аналитической геометріи пространства линію.*

Наконецъ, *совокупность трехъ уравненій между координатами опредѣляетъ въ аналитической геометріи пространства одну или нѣсколько отдѣльныхъ точекъ* — точекъ пересѣченія 3 поверхностей, опредѣляемыхъ этими уравненіями.

Простѣйшій случай такой системы уравненій $x=a$, $y=b$, $z=c$ мы уже имѣли, когда устанавливали способъ опредѣленія положенія точки въ пространствѣ (§ 1). Двѣ послѣднія теоремы имѣютъ, конечно, мѣсто при томъ условіи, что ни одно изъ уравненій не является слѣдствіемъ другихъ.

Классификація поверхностей. *Если уравненіе поверхности можетъ быть представлено, по освобожденіи отъ радикаловъ и дробей, содержащихъ текущія координаты, въ видѣ равенства нулю многочлена относительно этихъ координатъ, то поверхность называется алгебраической.* Всѣ остальныя поверхности называются *трансцендентными* поверхностями. Степень уравненія алгебраической поверхности называется *порядкомъ* ея.

Въ основу классификаціи поверхностей полагаютъ ихъ уравненія *въ декартовыхъ* координатахъ потому, что въ этомъ случаѣ *характеръ уравненія не мѣняется при преобразованіи координатъ*, т.-е. алгебраическое уравненія остается алгебраическимъ, и сохраняетъ свою степень (см. гл. III § 5).

Слѣдствіе. *Плоскость выражается уравненіемъ первой степени*, такъ какъ уравненіе плоскости XY $z=0$ первой степени, и преобразованіемъ координатъ всякую плоскость можно сдѣлать плоскостью XY.

Прямая, какъ линія пересѣченія плоскостей, опредѣляется двумя уравненіями первой степени.

Геометрическое значеніе порядка. *Поверхность n-го порядка пересѣкается съ произвольной прямой въ n точкахъ.*

Дѣйствительно, произвольная прямая можетъ быть сдѣлана посредствомъ преобразованія координатъ осью абциссъ. Подставляя $y=0$, $z=0$ въ уравненіе поверхности, мы получимъ $F(x, 0\ 0)=0$ уравненіе n-й степени. Корни его опредѣлятъ n точекъ пересѣченія поверхности съ осью абциссъ.

Если лѣвая часть уравненія алгебраической поверхности, распадается на множители $\varphi(x, y,z) . \psi(x, y,z)=0$,
то сама поверхность распадается на двѣ простѣйшія поверхности, уравненія которыхъ будутъ $\varphi(x, y,z)=0$
и $\psi(x, y,z)=0$.

Доказательство вполнѣ аналогично такой же теоремы въ геометріи на плоскости (гл. III § 5).

Пусть намъ даны двѣ поверхности

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0; \quad \dots\dots\dots (5)$$

уравненіе

$$F_1(x,y,z)+qF_2(x,y,z)=0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

опредѣляетъ при всякомъ значеніи параметра q поверхность, проходящую черезъ линію пересѣченія поверхностей (5), такъ какъ координаты всякой точки, лежащей одновременно на обѣихъ поверхностяхъ (5), обратятъ въ нуль и лѣвую часть уравненія (6). Совокупность поверхностей, опредѣляемыхъ уравненіемъ (6), называется *пучкомъ поверхностей.*

Если даны 3 поверхности

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0,\ F_3(x,y,z)=0, \quad \dots\dots\dots (7)$$

то уравненіе

$$F_1(x,y,z)+pF_2(x,y,z)+qF_3(x,y,z)=0. \quad \dots\dots\dots (8)$$

опредѣляетъ при перемѣнныхъ параметрахъ p и q безконечное можество поверхностей, каждая изъ которыхъ проходитъ черезъ всѣ общія точки поверхностей (7). Совокупность поверхностей (8) называется *связкой поверхностей.*

Уравненіе геометрическаго мѣста точекъ. *Примѣръ.* Найти уравненіе геометрическаго мѣста точекъ, равноотстоящихъ отъ данной точки x_1, y_1, z_1. Обозначимъ черезъ x, y, z координаты какой-нибудь точки ея, а черезъ r радіусъ. Тогда мы можемъ написать:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=r \quad \dots\dots\dots (\S\ 3),$$

или

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2.$$

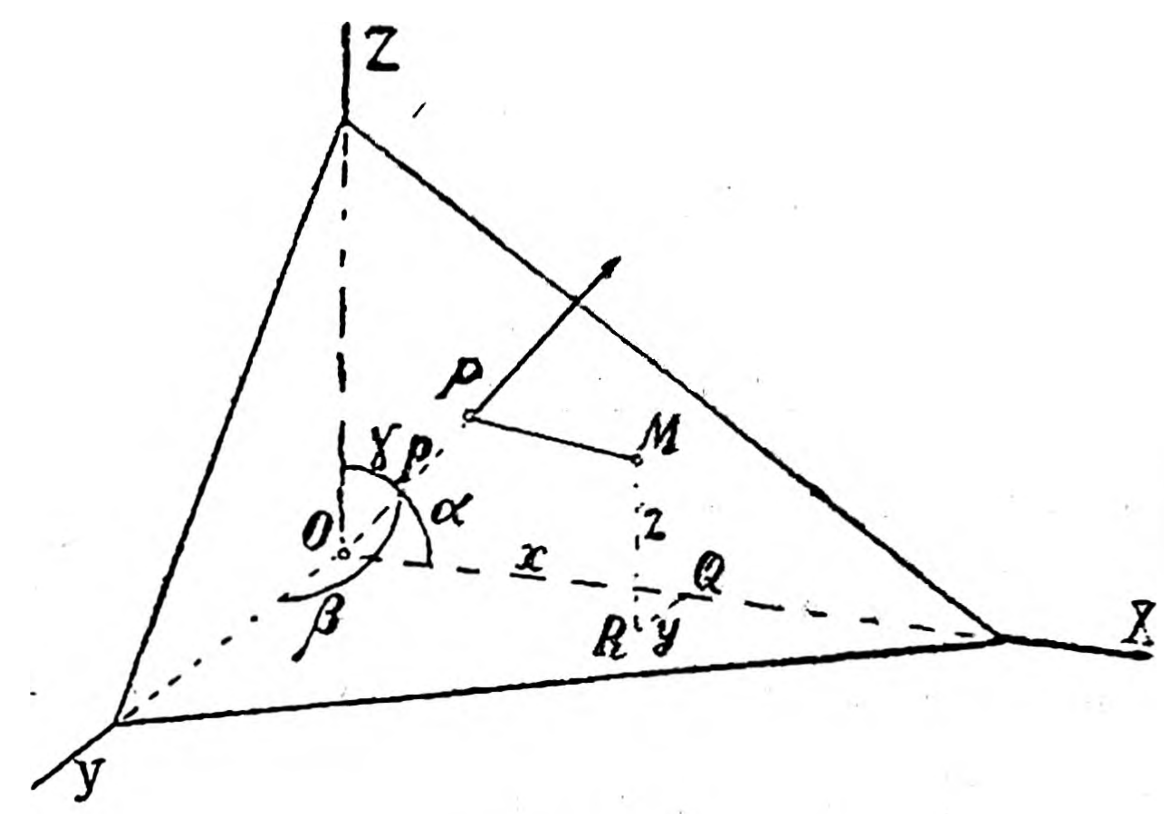
Таково, слѣдовательно, уравненіе сферы.

Раскрывая скобки, мы замѣтимъ, что *оно не содержитъ членовъ съ произведеніемъ текущихъ координатъ, а коэффиціенты при квадратахъ x, y, z равны между собой.*

ГЛАВА X.

Плоскость.

§ 1. **Поверхность перваго порядка.** Теорема. *Плоскость есть поверхность 1-го порядка.* Докажемъ эту теорему непосредственно. Положеніе произвольно взятой плоскости ABC [1]) (см. фиг. 58) опредѣлимъ длиной перпендикуляра, $p=OP$, опущеннаго на нее изъ начала координатъ, и углами α, β, γ, образованными этимъ перпендикуляромъ съ осями координатъ. Построимъ координаты произвольной точки $M\ (x, y, z)$ плоскости и спроектируемъ ломаную $OQRM$ на линію OP:



Фиг. 58.

$$np_{OP}OQPM=np_{OP}OQ+np_{OP}QR+np_{OP}RM=p$$

или [гл. II теор. 2] $\quad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$. . . . . (1)

Это уравненіе называется *нормальнымъ* уравненіемъ плоскости; оно первой степени относительно текущихъ координатъ.

Обратная теорема. *Поверхность 1-го порядка есть плоскость.*

Возьмемъ *общее* уравненіе поверхности 1-го порядка.

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (2)$$

гдѣ A, B, C, D произвольныя данныя числа.

Покажемъ, что *всегда* существуетъ такое число M, называемое *нормирующимъ множителемъ*, по умноженіи на которое обѣихъ частей уравненія (2) получается уравненіе (1), т.-е.

$$MA=\cos\alpha,\ MB=\cos\beta,\ MC=\cos\gamma,\ MD=-p \qquad (3)$$

Такъ какъ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (гл. VIII, § 6) или $M^2(A^2+B^2+C^2)=1$

то $$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (4)$$

Такъ какъ p существенно положительная величина, то соотношеніе $MD=-p$ показываетъ, что знакъ нормирующаго множителя долженъ быть противоположенъ знаку свободнаго члена D.

§ 2. **Различные виды уравненія плоскости.** Кромѣ *общаго* и *нормальнаго* уравненій, разсмотримъ еще уравненіе плоскости *относительно отрѣзковъ*. Обозначимъ черезъ a, b и c отрѣзки, отсѣкаемые плоскостью $\quad Ax+By+Cz+D=0$ . . . . (1)
на осяхъ координатъ. Тогда плоскость (1) пересѣкаетъ координатныя оси въ точкахъ $A(a, o, o)$, $B(o, b, o)$, $C(o, o, c)$. Напишемъ теперь условія того, что плоскость проходитъ черезъ точки A, B, C:

[1]) Точки A, B и C на фиг. 58 пропущены.

$$Aa+D=0,\ Bb+D=0,\ Cc+D=0;$$

отсюда $$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}.$$

Подставимъ эти выраженія A, B и C въ уравненіе (1)

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$$

или, по сокращеніи на $-D$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

Это и есть такъ называемое *уравненіе плоскости относительно отрѣзковъ.*

§ 3. **Изслѣдованіе уравненія плоскости**. Разсмотримъ теперь частные случаи уравненія плоскости (1), когда одинъ или нѣсколько коэффиціентовъ его обращаются въ нуль.

1) Если $D=0$, то уравненіе (1) принимаетъ такой видъ: $Ax+By+Cz=0$ и, слѣдовательно, можетъ быть удовлетворено значеніями: $x=0$, $y=0$ и $z=0$, т.-е. *плоскость проходитъ черезъ начало координатъ.*

2) Если $A=0$, то уравненіе (1) принимаетъ такой видъ: $By+Cz+D=0$ и представляетъ плоскость, параллельную оси X. Дѣйствительно $\cos\alpha=MA$, а такъ какъ по условію $A=0$, то $\cos\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$, т.-е. перпендикуляръ къ плоскости образуетъ прямой уголъ съ осью X; плоскость и ось X перпендикулярны къ одной и той же прямой, и, слѣдовательно, параллельны между собой. По аналогіи при $B=0$ плоскость параллельна оси Y, при $C=0$—параллельна оси Z. Такимъ образомъ, *если въ уравненіи плоскости отсутствуетъ какая-либо координата, то плоскость параллельна соотвѣтствующей оси.*

3) Если $D=0$ и $A=0$, то уравненіе плоскости (1) имѣетъ такой видъ: $By+Cz=0$. Плоскость проходитъ черезъ начало координатъ (случай 1) и параллельна оси X (случай 2), т.-е. плоскость проходитъ черезъ ось X. Аналогично при $D=0$ и $B=0$ плоскость проходитъ черезъ ось Y, при $D=0$ и $C=0$—черезъ ось Z. *Такимъ образомъ, если въ уравненіи плоскости отсутствуетъ какая-либо кордината и свободный членъ, то плоскость проходитъ черезъ соотвѣтствующую ось.*

Если $A=0$ и $B=0$, то уравненіе (1) принимаетъ видъ: $Cz+D=0$ или $z=-\frac{D}{C}$. Плоскость параллельна одновременно осямъ X и Y; т.-е. параллельна координатной плоскости XY. Аналогично при $A=0$ и $C=0$ плоскость (1) параллельна координатной плоскости XZ, при $B=0$ и $C=0$—параллельна плоскости YZ.

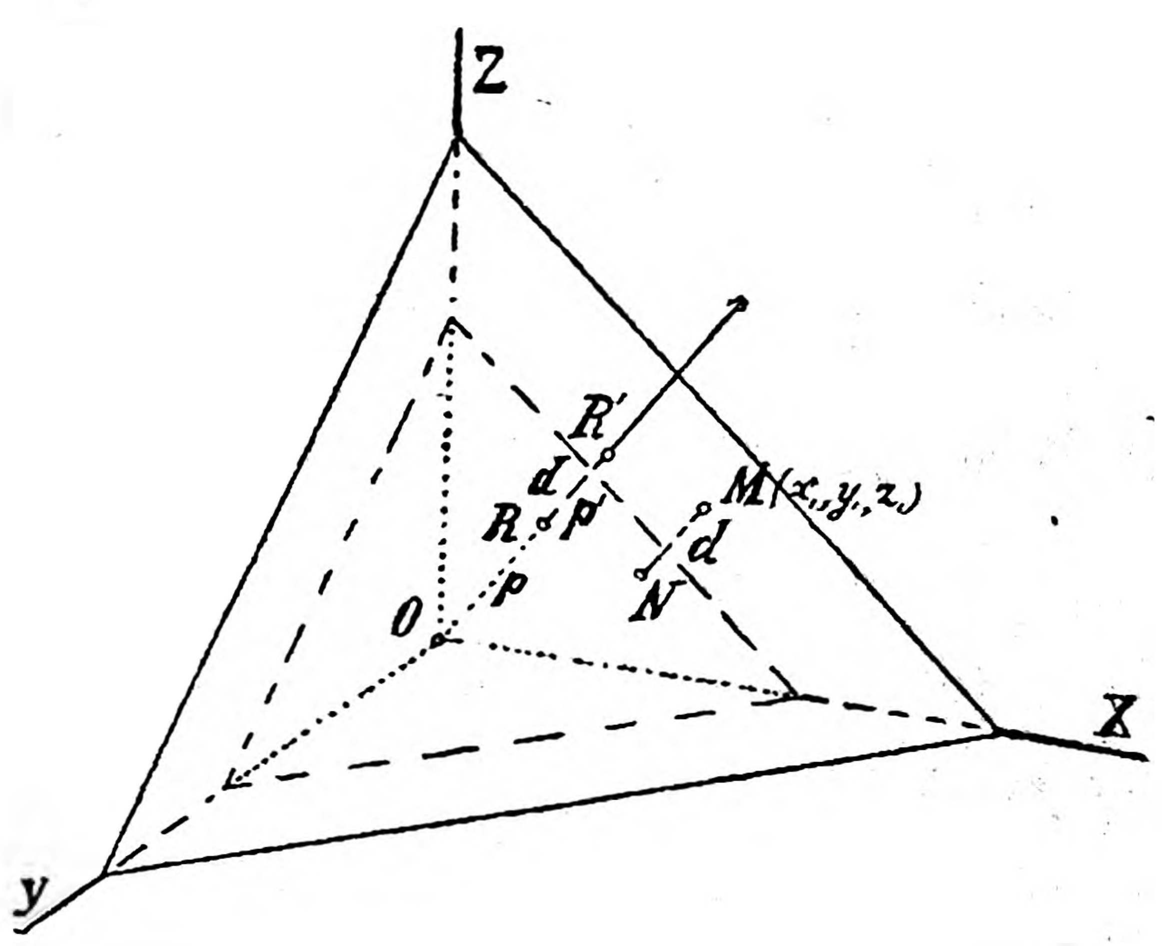
5) Если $A=0$, $B=0$ и $D=0$, то уравненіе (1) получаетъ видъ: $Cz=0$, или $z=0$; плоскость должна быть параллельна плоскости XY и въ то же время проходить черезъ начало координатъ; т.-е. она сливается съ координатною плоскостью XY. Аналогично при $B=0$, $C=0$ и $D=0$

уравненіе (1), или $x=0$, опредѣляетъ координатную плоскость YZ, а при $A=0$, $C=0$ и $D=0$ уравненіе (1), т.-е. $y=0$, представляетъ плоскость ZX.

6) Если всѣ три коэффиціента при текущихъ координатахъ равны нулю: $A=0$, $B=0$, $C=0$, то уравненіе (1) принимаетъ видъ: $D=0$ или, по сокращеніи на D, $1=0$. Въ этомъ случаѣ нормирующій множитель равенъ ∞, въ виду чего и $p=\infty$ (§ 1). Чтобы придать смыслъ этому уравненію, введемъ новое геометрическое понятіе—*безконечно удаленную плоскость*. Чтобы уравненію (1) всегда соотвѣтствовала единственная плоскость, надо допустить, что *въ пространствѣ существуетъ единственная безконечно удаленная плоскость*.

Ее можно разсматривать, какъ предѣльное положеніе плоскости, неограниченно удаляющейся отъ начала координатъ.

7) Наконецъ, при $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$ уравненіе (1) представляетъ собою тождество и, слѣдовательно, плоскость неопредѣленна.



Фиг. 59.

§ 4. **Разстояніе точки до плоскости.** Возьмемъ уравненіе плоскости въ нормальномъ видѣ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0\ .\ (1)$$

и точку $M(x_1, y_1, z_1)$ (см. фиг. 59). Чтобы опредѣлить разстояніе $d=MN$ этой точки отъ плоскости, проведемъ черезъ точку M плоскость параллельную данной. Ея уравненіе отличается отъ (1) только свободнымъ членомъ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p'=0\ .\ .\ .\ (2)$$

Очевидно, $d=p'-p$.

Величину p' опредѣлимъ изъ условія, что плоскость (2) проходитъ черезъ точку $M(x_1, y_1, z_1)$

$$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p'=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2')$$

Слѣдовательно, $d=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p$.

т.-е. *разстояніе точки до плоскости равно лѣвой части нормальнаго уравненія плоскости съ замѣной текущихъ координатъ координатами точки.*

Полагая $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$, получаемъ $d=-p$. Такъ какъ для точекъ, лежащихъ на плоскости $d=0$, то отсюда слѣдуетъ, что для точекъ, расположенныхъ по одну сторону отъ плоскости съ началомъ координатъ, разстояніе d отрицательно, для точекъ же, находящихся по другую сторону плоскости,—положительно.

§ 5. **Уголъ между двумя плоскостями.** Пусть даны плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0\ .\ .\ (1)\qquad A'x+B'y+C'z+D'=0\ .\ .\ (2)$$

Опуская на нихъ перпендикуляры изъ начала координатъ, мы получимъ уголъ, стороны котораго соотвѣтственно перпендикулярны къ сторонамъ линейнаго угла. Слѣдовательно, изъ двухъ смежныхъ угловъ, образованныхъ плоскостями, одинъ уголъ φ равенъ углу между перпендикулярами, а другой, внутри котораго лежитъ начало координатъ, дополняетъ его до 180°. Слѣдовательно (гл. VIII § 2):

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma', \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

гдѣ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, направляющіе косинусы этихъ перпендикуляровъ. Такъ какъ

$$\cos\alpha=MA,\ \cos\beta=MB,\ \cos\gamma=MC,$$
$$\cos\alpha'=M'A',\ \cos\beta'=M'B',\ \cos\gamma'=M'C',$$

гдѣ M и M'—нормирующіе множители уравненій (1) и (2), то

$$\cos\varphi=MM'(AA'+BB'+CC')$$

откуда,
$$\cos\varphi=\pm\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Частные случаи. 1. Если плоскости (1) и (2) взаимно перпендикулярны, то $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $\cos\varphi=0$; отсюда условіе перпендикулярности двухъ плоскостей $AA'+BB'+CC'=0$ . . . .

2. Если двѣ плоскости (1) и (2) параллельны, то параллельны и перпендикуляры къ нимъ, т.-е. $\cos\alpha=\pm\cos\alpha'$, $\cos\beta=\pm\cos\beta'$, $\cos\gamma=\pm\cos\gamma'$,

или
$$A=\pm\frac{M'A'}{M},\ B=\pm\frac{M'B'}{M},\ C=\pm\frac{M'C'}{M}.$$

Отсюда условіе параллельности:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

Т.-е. *плоскости параллельны, когда коэффиціенты при соотвѣтственныхъ текущихъ координатахъ въ ихъ уравненіяхъ пропорціональны.*

Задача. Найти плоскость, проходящую черезъ точку (2, 1, 2) параллельно плоскости $5x-6y-17=0$.

Уравненіе любой плоскости (см. § 7), параллельной данной, будетъ

$$5x-6y+D=0;$$

а такъ какъ искомая плоскость проходитъ черезъ точку (2, 1, 2), то $D=-4$, и, слѣдовательно, уравненіе ея:

$$5x-6y-4=0.$$

§ 6. **Точка пересѣченія трехъ плоскостей.** Даны три плоскости:

$$\begin{aligned}Ax+By+Cz+D&=0\\A'x+B'y+C'z+D'&=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)\\A''x+B''y+C''z+D''&=0\end{aligned}$$

Точка ихъ пересѣченія лежитъ одновременно на всѣхъ трехъ плоскостяхъ и, слѣдовательно, координаты ея удовлетворяютъ одновременно всѣмъ тремъ уравненіямъ. Рѣшая систему (1), получимъ гл. III § 2):

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -D & B & C \\ -D' & B' & C' \\ -D'' & B'' & C'' \end{vmatrix}}{\Delta},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} A & -D & C \\ A' & -D' & C' \\ A'' & -D'' & C'' \end{vmatrix}}{\Delta},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} A & B & -D \\ A' & B' & -D' \\ A'' & B'' & -D'' \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (2)$$

гдѣ

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

Если детерминантъ Δ не равенъ нулю, то x, y, z имѣютъ конечныя значенія, и мы получимъ вполнѣ опредѣленную точку пересѣченія.

Если $\Delta=0$, но изъ числителей въ формулахъ (2) по крайней мѣрѣ одинъ не равенъ нулю, то соотвѣтственная кордината $=\infty$ и соотвѣтствующая точка—безконечно удаленная. Тогда прямыя, по которымъ плоскости (1), попарно пересѣкаются, параллельны, т.-е. всѣ три плоскости параллельны одной и той же прямой, какъ боковыя грани призмы. Въ частности, если коэффиціенты при соотвѣтственныхъ текущихъ координатахъ въ двухъ уравненіяхъ системы (1) пропорціональны, то двѣ изъ трехъ плоскостей будутъ параллельны между собой.

Если знаменатель и всѣ числители формулъ (2) равны нулю, то координаты x, y, z неопредѣленны $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, $z=\frac{0}{0}$; общихъ точекъ у плоскостей безчисленное множество; онѣ могутъ расположиться или на прямой, или на плоскости. Если система (1) опредѣляетъ прямую, то она состоитъ только изъ двухъ самостоятельныхъ уравненій, т.-е. существуютъ такія два числа m и n, что, помноживъ обѣ части одного уравненія на m, а другого на n и сложивъ полученные результаты, будемъ имѣть третье уравненіе. Слѣдовательно, *всѣ* значенія x, y, z, удовлетворяющія первымъ двумъ уравненіямъ системы (1), обращаютъ въ тождество и третье уравненіе. Геометрически это означаетъ, что плоскость, опредѣляемая третьимъ уравненіемъ системы (1), проходитъ черезъ прямую пересѣченія первыхъ двухъ плоскостей. Въ частности, если коэффиціенты при соотвѣтственныхъ текущихъ координатахъ во всѣхъ трехъ уравненіяхъ системы (1) пропорціональны между собою, то эта прямая будетъ безконечно удаленной, т.-е. плоскости (1) будутъ параллельны.

Наконецъ, система (1) опредѣляетъ плоскость, если два уравненія системы несамостоятельны т.-е. каждое изъ нихъ можно получить умноженіемъ обѣихъ частей третьяго уравненія на соотвѣтственный множитель. Тогда всѣ три плоскости, опредѣляемыя системой (1), сливаются.

§ 7. **Понятіе о связкѣ плоскостей.** Пусть дана система 3-хъ уравненій:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$
$$A''x+B''y+C''z+D''=0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

уравненіе:

$$p(Ax+By+Cz+D)+q(A'x+B'y+C'z+D')+A''x+B''y+C''z+D''=0, \quad (4)$$

гдѣ p и q произвольныя числа, представляетъ плоскость, потому что она относительно текущихъ координатъ первой степени. Притомъ, значенія x, y, z, обращающія уравненія (1), (2) и (3) въ тождества, обратятъ въ нуль и лѣвую часть уравненія (4); слѣдовательно, при *всякихъ значеніяхъ p и q плоскость* (4) *проходитъ черезъ точку пересѣченія основныхъ трехъ плоскостей* (1), (2) и (3). Совокупность плоскостей, проходящихъ черезъ эту точку, называется *связкой* плоскостей; а общая точка ихъ пересѣченія—*центромъ* связки. (ср. гл. XIX § 6). Уравненіе (4) представляетъ уравненіе связки, если разсматривать множители p и q, какъ перемѣнные параметры.

Если за основныя уравненія примемъ $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, то получимъ

$$p(x-x_1)+q(y-y_1)+z-z_1=0$$

уравненіе любой плоскости, проходящей черезъ заданную точку (x_1, y_1, z_1).

Примѣръ. *Найти плоскость, проходящую черезъ начало координата, точку (0, 1, 0) и точку пересѣченія плоскостей:*

$$\left.\begin{aligned} 101x+45y-19z+71=0 \\ 67x+21y+43z+21=0 \\ 13x+66y+179z+92=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Искомая плоскость принадлежитъ къ связкѣ плоскостей,

$$p(101x+45y-19z+71)+q(67x+21y+43z+21)+13x+66y+179z+92=0 \quad (9)$$

Параметры p и q опредѣлимъ изъ условій прохожденія искомой плоскости черезъ начало координатъ и точку (0, 1, 0). Напишемъ эти условія: $71p+21q+92=0$, $45p+21q+66=0$; отсюда $p=-1$, $q=-1$. Подставляя найденныя значенія p и q въ уравненіе связки (9), получаемъ уравненіе искомой плоскости: $-155x+155z=0$, или $x=z$.

§ 8. Условіе расположенія четырехъ точекъ въ одной плоскости. Пусть даны четыре точки

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ (x_3, y_3, z_3)\ (x_4, y_4, z_4).$$

Выберемъ изъ связки плоскостей, проходящихъ черезъ точку (x_4, y_4, z_4),

$$p(x-x_4)+q(y-y_4)+(z-z_4)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

такую плоскость, которая проходила бы черезъ точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), т.-е., чтобы

$$p(x_1-x_4)+q(y_1-y_4)+(z_1-z_4)=0. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$p(x_2-x_4)+q(y_2-y_4)+(z_2-z_4)=0. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$p(x_3-x_4)+q(y_3-y_4)+(z_3-z_4)=0. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Три уравненія (2), (3) и (4) относительно двухъ неизвѣстныхъ p и q должны быть совмѣстны, т.-е. (гл. IV § 4).

$$\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix} =0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

§ **9. Задачи. 1.** Найти плоскость, проходящую черезъ 3 точки. Если координаты точки (x_1, y_1, z_1) въ равенствѣ (5) (см. § 8) будемъ разсматривать, какъ текущія, то оно опредѣляетъ геометрическое мѣсто точекъ, лежащихъ въ плоскости, проходящей черезъ точки (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) и (x_4, y_4, z_4), т.-е. соотношеніе (5) представляетъ собою уравненіе искомой плоскости.

2. Найти плоскость, проходящую черезъ точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) перпендикулярно къ плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Пишемъ уравненіе связки плоскостей, проходящихъ черезъ точку (x_1, y_1, z_1):

$$p(x-x_1)+q(y-y_1)+(z-z_1)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Параметры p и q опредѣлятся изъ тѣхъ условій, что плоскость связки (2) проходитъ черезъ точку (x_2, y_2, z_2)

$$p(x_2-x_1)+q(y_2-y_1)+(z_2-z_1)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и перпендикулярна къ плоскости (1) (§ 5)

$$pA+qB+C=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Чтобы найти уравненіе искомой плоскости, надо опредѣлить p и q изъ уравненій (3) и (4) и подставить въ уравненіе (2).

Результатъ исключенія p и q изъ уравненій (2), (3) и (4) (гл. IV, § 4) можно представить въ видѣ такого детерминанта:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

Таково уравненіе искомой плоскости.

ГЛАВА XI.

Прямая въ пространствѣ.

§ **1. Системы уравненій прямой.** Пучокъ плоскостей. Система уравненій

$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$
$$Ax+By+Cz+D=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

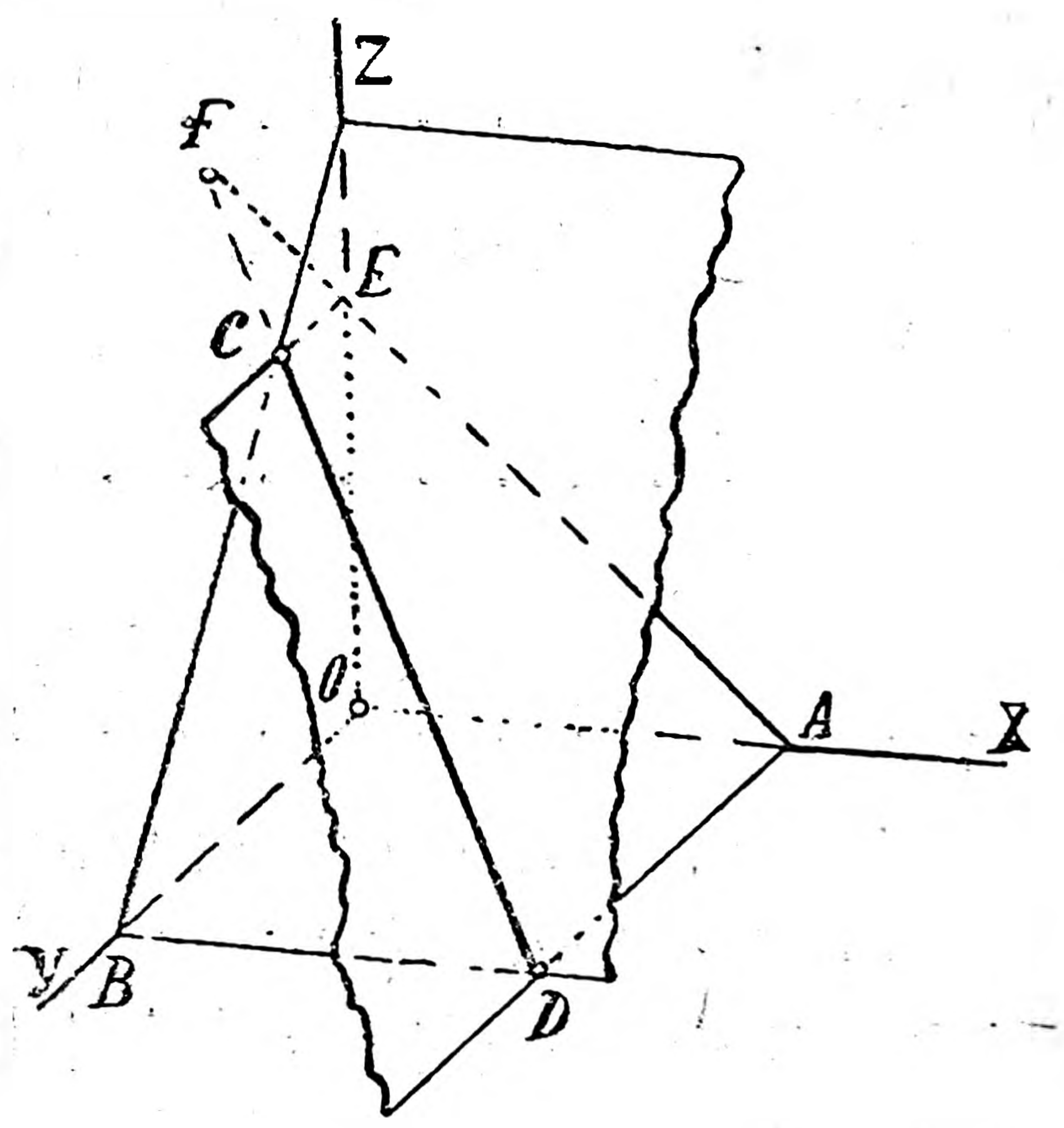
опредѣляетъ линію пересѣченія двухъ плоскостей, т.-е. прямую.

Уравненіе $Ax+By+Cz+D+q(A'x+B'y+C'z+D')=0$ . . . . . (2) опредѣляетъ плоскость, такъ какъ оно первой степени относительно текущихъ координатъ, притомъ плоскость, проходящую черезъ прямую (1), такъ какъ общія рѣшенія уравненій (1) удовлетворяютъ при всякомъ значеніи параметра q и уравненію (2). Слѣдовательно, при перемѣнномъ параметрѣ q оно опредѣляетъ *пучокъ плоскостей* (ср гл. IX § 6). Давая параметру q какія-нибудь два различныхъ значенія, мы получимъ новую систему двухъ уравненій, которая вполнѣ можетъ замѣнить данную систему (1).

Проекціи прямой на 2 плоскости координатъ. Дадимъ въ уравненіи пучка (3) параметру q одинъ разъ такое значеніе, чтобы коэффиціентъ при y обращался въ нуль, другой разъ—чтобы коэффиціентъ при x равнялся нулю. Опредѣляя отсюда x и y, мы получимъ 2 уравненія такого вида: $x=mz+a$, ... (3)

$y=nz+b$ . . . . (4)

Въ уравненіи (3) нѣтъ члена съ координатой y; слѣдовательно, оно опредѣляетъ плоскость, параллельную оси Y (гл. X § 3); аналогично, уравненіе (4) опредѣляетъ плоскость, параллельную оси X; такимъ образомъ двѣ плоскости (3) и (4) проектируютъ прямую соотвѣтственно на плоскости ZX и YZ (см. фиг. 60). Уравненія получаемыхъ при этомъ проекцій будутъ соотвѣтственно:



Фиг. 60.

$$x=mz+a,\ y=0 \text{ и } y=nz+b,\ x=0.$$

Такимъ образомъ, если мы уравненіе (3) будемъ разсматривать на *плоскости XZ*, то оно представитъ проекцію на эту плоскость прямой (1); проекція эта отсѣкаетъ на оси X отрѣзокъ OA, равный a, и образуетъ съ осью Z уголъ α_1, такой, что $m=tg\alpha_1$ (гл. IV § 2).

Точно такъ же, *на плоскости YZ* уравненіе (4) представитъ проекцію прямой (1) на эту плоскость; проекція эта отсѣкаетъ на оси Y отрѣзокъ OB, равный b, и образуетъ съ осью Z уголъ α_2 такой, что $tg\alpha_2=n$. Такимъ образомъ коэффиціенты m и n опредѣляютъ направленія проекцій прямой и, слѣдовательно, направленіе ея самой; коэффиціенты же a и b суть двѣ первыя координаты слѣда прямой (1) на плоскости XY. Уравненія эти не симметричны относительно текущихъ координатъ.

Нормальная система уравненій прямой. Чтобы опредѣлить положеніе прямой въ пространствѣ, достаточно знать координаты x_1, y_1, z_1 какой-нибудь ея точки C, и углы α, β, γ, образуемые ею съ осями координатъ. Возьмемъ на прямой произвольную точку M (x, y, z). Проектируя отрѣзокъ $MC=d$ послѣдовательно на координатныя оси, получимъ (гл. IX § 3) $x-x_1=d\cos\alpha, y-y_1=d\cos\beta, z-z_1=d\cos\gamma$. (5)

Съ передвиженіемъ по прямой точки M мѣняется параметръ d, т.-е. ея разстояніе отъ точки C; вмѣстѣ съ тѣмъ претерпѣваютъ измѣненіе и ея координаты: x, y, z; такимъ образомъ система (5) представляетъ *параметрическія* уравненія прямой. Исключимъ параметръ d:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Этотъ видъ системы уравненій прямой мы будемъ называть *нормальнымъ*.

Чтобы привести систему уравненій (3) и (4) къ нормальному виду, опредѣлимъ въ каждомъ уравненіи z. Тогда эту систему можно представить въ такой формѣ:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z}{1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Вообще система уравненій

$$\frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

называется *системой уравненій съ угловыми коэффиціентами,* а величины M, N и P, которые, очевидно, пропорціональны направляющимъ косинусамъ прямой,—*угловыми коэффиціентами.*

Обозначимъ черезъ L множитель, съ помощью котораго система уравненій (8) приводится къ нормальному виду; онъ называется *нормирующимъ множителемъ*. Тогда

$$\cos\alpha=LM,\ \cos\beta=LN,\ \cos\gamma=LP \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Возводя въ квадратъ и складывая почленно эти соотношенія, получимъ
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=L^2(M^2+N^2+P^2)$$

или (гл. IX § 2):
$$L=\pm\frac{1}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Откуда
$$\cos\alpha=\pm\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}$$
$$\cos\beta=\pm\frac{N}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$
$$\cos\gamma=\pm\frac{P}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}$$

Двойной знакъ здѣсь соотвѣтствуетъ двумъ направленіямъ прямой. Изъ соотношеній (11) мы видимъ, что *угловые коэффиціенты M, N, P опредѣляютъ направленіе прямой; для этой цѣли достаточно знать не самые коэффиціенты, а отношенія двухъ къ одному изъ нихъ.*

Связка прямыхъ. Если въ уравненіяхъ (8) M, N, P будемъ разсматривать, какъ перемѣнные параметры, системѣ (8) будетъ соотвѣтствовать безчисленное множество прямыхъ проходящихъ черезъ точку (x_1, y_1, z_1), совокупность этихъ прямыхъ называется *связкой.* Такимъ образомъ система (8) опредѣляетъ связку прямыхъ при томъ условіи, что угловые коэффиціенты M, N, P—перемѣнные параметры.

§ **2. Изслѣдованіе системы уравненій прямой**. Чтобы изслѣдовать геометрическое значеніе тѣхъ случаевъ, когда одинъ или нѣсколько угловыхъ коэффиціентовъ прямой равны нулю, напишемъ уравненія системы [(8) § 1] въ такой формѣ:

$$\left.\begin{aligned} P(x-x_1)&=M(z-z_1)\\ P(y-y_1)&=N(z-z_1)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

1. Если $M=O$, система (1) приметъ такой видъ:

$$x=x_1,\ \frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P}. \qquad (2)$$

Такъ какъ $\cos\alpha=LM$, то $\cos\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$, т.-е. *система* (2) *представляетъ прямую*, перпендикулярную къ оси X и, слѣдовательно, *параллельную плоскости* YZ. Въ частности, если $x_1=0$, система (2) переходитъ въ такую:

$$\left.x=0, \frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P}\right\}, \qquad (2')$$

и прямая расположена въ плоскости YZ. Аналогично *системы*

$$\left.\begin{array}{c} y=y_1 \\ \frac{x-x_1}{M}=\frac{z-z_1}{P}\end{array}\right\} (3), \qquad \left.\begin{array}{c} z=z_1 \\ \frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}\end{array}\right\} \qquad (4)$$

опредѣляютъ прямыя параллельныя соотвѣтственно плоскостямъ XZ и XY.

2. Если $M=0$ и $N=0$, то система (1) приметъ такой видъ:

$$x=x_1,\ y=y_1. \qquad (5)$$

Прямая перпендикулярна одновременно къ осямъ X и Y и, слѣдовательно, къ координатной плоскости YX; т.-е. *прямая* (5) *параллельна оси* Z. Въ частности, если $x_1=0$ и $y_1=0$, система (5) принимаетъ такой видъ:
$$x=0,\ y=0, \qquad (5')$$
и *опредѣляетъ ось* Z (гл. IX § 1). Аналогично системы

$$y=y_1;\ z=z_1\ (6), \text{ или } x=x_1,\ z=z_1 \qquad (7)$$

представляютъ прямыя, параллельныя соотвѣтственно осямъ X или Y.

3. Если $M=0, N=0, P=0$, то система (1) состоитъ изъ тождествъ и прямая неопредѣленна.

Общія формулы, которыя будутъ выведены въ дальнѣйшемъ, сохраняютъ свою силу и въ разсмотрѣнныхъ частныхъ случаяхъ уравненій прямой; слѣдуетъ только въ этихъ формулахъ сообразно каждому случаю полагать равными нулю соотвѣтственные коэффиціенты.

§ 3. Уголъ между двумя прямыми:

$$\frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P}\ (1),\quad \frac{x-x'_1}{M'}=\frac{y-y'_1}{N'}=\frac{z-z'_1}{P'} \qquad (2)$$

Обозначимъ черезъ α, β, γ углы первой прямой и черезъ α', β', γ' углы второй прямой съ координатными осями. Тогда искомый уголъ φ между прямыми представится такъ (гл. IX § 2)

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'. \qquad (3)$$

Пользуясь формулами (11) § 1, получимъ

$$\cos\varphi=\pm\frac{MM'+NN'+PP'}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}\sqrt{M'^2+N'^2+P'^2}} \qquad (4)$$

Въ случаѣ перпендикулярности прямыхъ (1) и (2) $\cos\varphi=0$ и, $$MM'+NN'+PP'=0.$$

Въ случаѣ параллельности прямыхъ (1) и (2) направляющіе косинусы равны или противоположны [(9) § 1]

$$LM=\pm L'M',\ LN=\pm L'N',\ LP=\pm L'P';$$

откуда имѣемъ условія параллельности прямыхъ (1) и (2):

$$\frac{M}{M'}=\frac{N}{N'}=\frac{P}{P'}.$$

Задача. Найти прямую, проходящую черезъ точку (1,—2, 3) параллельно прямой

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+4}{7}.$$

Связкѣ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку (1,—2, 3), соотвѣтствуетъ такая система: $\frac{x-1}{M}=\frac{y+2}{N}=\frac{z-3}{P}.$

Выберемъ изъ этой связки прямую, параллельную данной:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-3}{7}.$$

§ **4. Задачи. 1.** Найти прямую, проходящую черезъ точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2).

Пишемъ уравненія связки прямыхъ съ центромъ въ точкѣ (x_1, y_1, z_1):

$$\frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P}.$$

Изъ этой связки выберемъ прямую, проходящую черезъ вторую точку: $$\frac{x_2-x_1}{M}=\frac{y_2-y_1}{N}=\frac{z_2-z_1}{P},$$

откуда, по исключеніи коэффиціентовъ M, N, P, получаемъ уравненія искомой прямой: $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Система (2) представляетъ условіе расположенія трехъ точекъ на одной прямой (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), если подъ x, y, z разумѣть не текущія координаты, а координаты первой изъ данныхъ точекъ.

2. Найти прямую, проходящую черезъ точку (a, b, c) перпендикулярно къ прямымъ

$$\frac{x-x_1}{M_1}=\frac{y-y_1}{N_1}=\frac{z-z_1}{P_1}\ \ldots\ (1),\quad \frac{x-x_2}{M_2}=\frac{y-y_2}{N_2}=\frac{z-z_2}{P_2}\ \ldots\ (2)$$

Пишемъ уравненія связки прямыхъ, проходящихъ черезъ точку (a, b, c), $$\frac{x-a}{M}=\frac{y-b}{N}=\frac{z-c}{P}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Выберемъ изъ этой связки прямую, перпендикулярную къ прямымъ (1) и (2) (§ 3) $MM_1+NN_1+PP_1=0$ и $MM_2+NN_2+PP_2=0$. Изъ этихъ уравненій можно найти отношеніе угловыхъ коэффиціентовъ; дѣлимъ на какой-либо коэффиціентъ, напримѣръ, P обѣ части каждаго изъ этихъ уравненій.

$$M_1\frac{M}{P}+N_1\frac{N}{P}+P_1=0 \text{ и } M_2\frac{M}{P}+N_2\frac{N}{P}+P_2=0,$$

опредѣляемъ отсюда неизвѣстныя $\frac{M}{P}$ и $\frac{N}{P}$ (см. гл. III § 3) [1]).

$$\frac{M}{P}=\frac{\begin{vmatrix} N_1 & P_1 \\ N_2 & P_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}} \quad . \ . \ . \ (4), \quad \frac{N}{P}=\frac{\begin{vmatrix} P_1 & M_1 \\ P_2 & M_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Переставляемъ въ пропорціяхъ (4) и (5) средніе члены.

$$\frac{M}{\begin{vmatrix} N_1 & P_1 \\ N_2 & P_2 \end{vmatrix}}=\frac{N}{\begin{vmatrix} P_1 & M_1 \\ P_2 & M_2 \end{vmatrix}}=\frac{P}{\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

Подставляя въ уравненіяхъ (3) вмѣсто M, N, P величины имъ пропорціональныя, получимъ уравненіе искомой прямой:

$$\frac{x-a}{\begin{vmatrix} N_1 & P_1 \\ N_2 & P_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-b}{\begin{vmatrix} P_1 & M_1 \\ P_2 & M_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-c}{\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}}$$

ГЛАВА XII.

Плоскость и прямая.

§ 1. Уголъ между прямой

$$\frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

и плоскостью. $$Ax+By+Cz+D=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Угломъ между плоскостью и прямой называется уголъ φ, составленный этой прямой съ проекціей ея на данную плоскость. Возставимъ изъ точки пересѣченія прямой (1) съ плоскостью (2) перпендикуляръ къ этой послѣдней; уголъ ψ между проведеннымъ перпендикуляромъ и прямой (1) будетъ равенъ $90^0-\varphi$. Если черезъ α, β, γ и α', β', γ

---

[1]) Въ детерминантахъ, которые стоятъ въ числителяхъ формулъ (4) и (5), переставлены столбцы и измѣненъ знакъ.

обозначимъ углы прямой (1) и перпендикуляра къ плоскости (2) съ осями координатъ, то (гл. VIII § 2)

$$\sin\varphi = \cos\psi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (3$$

Отсюда, пользуясь формулами (3) гл. X § 1 и (11) гл. XI § 1 получимъ

$$\sin\varphi = \pm\frac{AM+BN+CP}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{M^2+N^2+P^2}}.$$

Въ случаѣ параллельности плоскости (2) и прямой (1) $\varphi=0$, $\sin\varphi=0$ и слѣдовательно $AM+BN+CP=0$.

Если прямая (1) перпендикулярна къ плоскости (2), то она должна имѣть одинаковое направленіе съ перпендикуляромъ къ этой послѣдней (или ему противоположное), слѣдовательно,

$$\cos\alpha = \pm\cos\alpha';\ \cos\beta = \pm\cos\beta',\ \cos\gamma = \pm\cos\gamma',$$

откуда имѣемъ: $ZM = \pm\overline{M}A$, $LN = \pm\overline{M}B$, $LP = \pm\overline{M}C$.

Отсюда слѣдуетъ условіе перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{M} = \frac{B}{N} = \frac{C}{P}.$$

Задача 1. Найти плоскость, проходящую черезъ точку (—1, 0, 2) перпендикулярно къ прямой

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y+4}{-2} = z.$$

Пучку плоскостей, перпендикулярныхъ къ данной прямой соотвѣтствуетъ уравненіе: $3x-2y+z+D=0$;
такъ какъ искомая плоскость проходитъ черезъ точку (—1, 0, 2), то $D=1$, и, слѣдовательно, уравненія ея:

$$3x-2y+z+1=0.$$

Задача 2. Найти перпендикуляръ, опущенный изъ точки (—2, 3, 0) на плоскость

$$x-2y-4z+7=0.$$

Уравненіе связки прямыхъ, проходящихъ черезъ точку (—2, 3, 0):

$$\frac{x+2}{M} = \frac{y-3}{N} = \frac{z}{P}.$$

Выберемъ изъ этой связки прямую, перпендикулярную къ данной плоскости:

$$\frac{M}{1} = \frac{N}{-2} = \frac{P}{-4};$$

слѣдовательно, искомая прямая представится такими уравненіями

$$x+2 = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{-4}$$

§ 2. **Точка пересѣченія прямой**

$$\frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{O} \qquad (1)$$

и плоскости $$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

Искомую точку пересѣченія найдемъ, рѣшивъ совмѣстно 3 уравненія (1) и (2). Чтобы удобнѣе исключить неизвѣстныя, введемъ вспомогательное неизвѣстное s

$$\frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P}=s,$$

или $$x=x_1+Ms,\ y=y_1+Ns,\ z=z_1+Ps \qquad (3)$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (2), получимъ уравненіе для s $\quad Ax_1+By_1+Cz_1+D+s\,(AM+BN+CP)=0,$

откуда $$s=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{AM+BN+CP} \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) опредѣляютъ координаты искомой точки пересѣченія.

Если $AM+BN+CP=0$, то s, а вмѣстѣ съ нимъ и x, y, z будутъ безконечно велики; точка пересѣченія лежитъ въ безконечности, прямая и плоскость параллельны.

Если $$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \text{ и } AM+BN+CP=0, \qquad (5)$$
то s, x, y, z неопредѣленны; плоскость (2) и прямая (1) имѣютъ сколько угодно общихъ точекъ и, слѣдовательно, прямая (1) расположена на плоскости (2); такимъ образомъ, соотношенія (5) служатъ *условіемъ совпаденія плоскости и прямой.*

§ 3. **Задачи. 1.** Найти плоскость, проходящую черезъ прямую $$\frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P} \qquad (1)$$

и перпендикулярную къ плоскости
$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

Возьмемъ связку плоскостей, проходящихъ черезъ точку (x_1, y_1, z_1)
$$p\,(x-x_1)+q\,(y-y_1)+(z-z_1)=0, \qquad (3)$$
и выберемъ изъ связки плоскость, параллельную данной прямой и, слѣдовательно, совпадающую съ ней:
$$pM+qN+P=0, \qquad (4)$$
и перпендикулярную къ плоскости (2):
$$pA+qB+C=0 \qquad (5)$$

Исключая изъ уравненій (3), (4), (5) неизвѣстныя p и q (стр. 28) получаемъ уравненіе искомой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ M & N & P \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

2. Найти плоскость, проходящую черезъ точку (a, b, c) и черезъ прямую

$$\frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P}.$$

Возьмемъ связку плоскостей, проходящихъ черезъ точку (a, b, c)

$$p(x-a)+q(y-b)+(z-c)=0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

и выберемъ изъ связки плоскость, совпадающую съ данной прямой,

$$p(x_1-a)+q(y_1-b)+(^1z-c)=0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$pM+qN+P=0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Исключая изъ уравненій (1), (2), (3) p и q (стр. 28), получаемъ искомую плоскость:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ x_1-a & y_1-b & z_1-c \\ M & N & P \end{vmatrix}=0.$$

3. Найти перпендикуляръ, опущенный изъ точки (a, b, c) на прямую $\frac{x-x_1}{M}=\frac{y-y_1}{N}=\frac{z-z_1}{P}$.

Искомый перпендикуляръ служитъ пересѣченіемъ двухъ плоскостей, изъ которыхъ одна

$$M(x-a)+N(y-b)+P(z-c)=0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

проходитъ черезъ точку (a, b, c) перпендикулярно къ данной прямой

а на другой

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ x_1-a & y_1-b & z_1=c \\ M & N & P \end{vmatrix}=0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

расположена та же точка (a, b, c) и данная прямая (задача 2).

4. Найти плоскость, проходящую черезъ точку (a, b, c) параллельно двумъ прямымъ

$$\frac{x-x_1}{M_1}=\frac{y-y_1}{N_1}=\frac{z-z_1}{P_1} \quad \ldots \quad (1), \qquad \frac{x-x_2}{M_2}=\frac{y-y_2}{N_2}=\frac{z-z_2}{P_2} \quad \ldots \quad (2)$$

Напишемъ уравненіе связки плоскостей, проходящихъ черезъ точку (a, b, c) $\quad p(x-a)+q(y-b)+(z-c)=0. \ldots \ldots \quad (3)$

Выберемъ изъ связки (3) плоскость параллельную прямымъ (1) и (2):

$$pM_1+qN_1+P_1=0 \quad \ldots \quad (4) \text{ и } pM_2+qN_2+P_2=0 \quad \ldots \quad 5)$$

Исключая изъ уравненій (3), (4), (5) p и q (стр. 28). получаемъ искомую плоскость:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ M_1 & N_1 & P_1 \\ M_2 & N_2 & P_2 \end{vmatrix}=0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

5. **Найти плоскость, проходящую черезъ прямую**

$$\frac{x-x_1}{M_1}=\frac{y-y_1}{N_1}=\frac{z-z_1}{P_1}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

параллельно прямой $$\frac{x-x_2}{M_2}=\frac{y-y_2}{N_2}=\frac{z-z_2}{P_2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Возьмемъ связку плоскостей, проходящихъ черезъ точку (x_1, y_1, z_1)

$$p\,(x-x_1)+q\,(y-y_1)+(z-z_1)=0;\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

выберемъ изъ связки плоскость, совпадающую съ прямой (1)

$$pM_1+qN_1+P_1=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

и параллельную (2) $$pM_2+qN_2+P_2=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Исключая изъ уравненій (3), (4), (5) p и q (стр. 28), получаемъ искомую плоскость:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ M_1 & N_1 & P_1 \\ M_2 & N_2 & P_2 \end{vmatrix}=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Условіе пересѣченія 2 прямыхъ. Если прямыя (1) и (2) пересѣкаются, то въ плоскости (3) лежитъ точка ихъ пересѣченія, а, слѣдовательно, и прямая (2), такъ какъ она параллельна этой плоскости (3). Въ частности на плоскости (3) расположена точка (x_2, y_2, z_2) прямой (2), такъ что

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ M_1 & N_1 & P_1 \\ M_2 & N_2 & P_2 \end{vmatrix}=0.$$

Это равенство представляетъ собою *условіе пересѣченія двухъ прямыхъ (1) и (2).*

6. **Найти кратчайшее разстояніе между прямыми**

$$\frac{x-x_1}{M_1}=\frac{y-y_1}{N_1}=\frac{z-z_1}{P_1}\quad\ldots(1),\qquad \frac{x-x_2}{M_2}=\frac{y-y_2}{P_2}=\frac{z-z_2}{P_2}\quad\ldots(2)$$

Искомое разстояніе d равно длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ произвольной точки какой-либо данной прямой, напримѣръ (2 на плоскость, проходящую черезъ прямую (1) параллельно (2).

Разлагая детерминантъ въ уравненіи (6) задачи 5 по элементамъ первой строки, мы получимъ уравненіе этой плоскости

$$\begin{vmatrix} N_1 & P_1 \\ N_2 & P_2 \end{vmatrix}(x-x_1)-\begin{vmatrix} M_1 & P_1 \\ M_2 & P_2 \end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}(z-z_1)=0\quad\ldots(3)$$

откуда (гл. X § 4), искомое разстояніе

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ M_1 & N_1 & P_1 \\ M_2 & N_2 & P_2 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} N_1 & P_1 \\ N_2 & P_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} P_1 & M_1 \\ P_2 & M_2 \end{vmatrix}^2}}$$

ГЛАВА XIII.

Поверхности 2-го порядка.

§ 1. **Основныя понятія**. Общій видъ уравненія поверхности 2-го порядка такой:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2+2Gx+2Hy+2Iz+K=0 \quad . \; . \quad (1)$$

Такъ какъ уравненіе (1) вполнѣ опредѣлится, если даны будутъ отношенія всѣхъ его коэффиціентовъ къ одному изъ нихъ, и такъ какъ изъ десяти коэффиціентовъ этого уравненія можно составить девять такихъ отношеній,—то *поверхность второго порядка опредѣляется девятью условіями.*

Напримѣръ, поверхность 2-го порядка вполнѣ опредѣлится, если задать 9 точекъ, черезъ которыя она должна проходить.

Пересѣчемъ поверхность 2-го порядка плоскостью XY (посредствомъ преобразованія координатъ всякую плоскость можно сдѣлать плоскостью XY). Кривая пересѣченія опредѣлится совокупностью уравненій (1) и $z=0$. Эту систему можно замѣнить системой

$$z=0,\; Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Gx+2Hy+K=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Слѣдовательно, *поверхность 2-го порядка пересѣкается произвольной плоскостью по линіи 2-го порядка.* Если кривая (2) мнима, то плоскость не встрѣчаетъ поверхности. Если кривая (2) распадается на пару прямыхъ, то плоскость *касается* поверхности (1).

Аналогично, точки пересѣченія поверхности (1) съ осью X (произвольная прямая можетъ быть сдѣлана осью X) опредѣляются совокупностью уравненій (1), $y=0$, $z=0$ или

$$y=0,\; z=0,\; Ax^2+2Gx+K=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Слѣдовательно, *произвольная прямая пересѣкаетъ поверхность 2-го порядка въ 2 точкахъ.* Если эти точки мнимы, то прямая не встрѣчаетъ поверхности; если они сливаются, то прямая касается поверхности.

§ 2. **Касательная прямая и плоскость къ поверхности 2-го порядка, Конусъ 2-го порядка**. Перенесемъ начало координатъ въ произвольную точку (x_0, y_0, z_0) и разсмотримъ точки пересѣченія поверхности (1) и связки прямыхъ съ центромъ въ новомъ началѣ

$$x'=mz',\; y'=nz' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Пользуясь формулами переноса начала координатъ:

$$x=x'+x_0,\; y=y'+y_0,\; z=z'+z_0,$$

гдѣ x, y, z и x', y', z' соотвѣтственно старыя и новыя координаты, мы преобразуемъ уравненіе (1) къ виду

$$A(x'+x_0)^2+2B(x'+x_0)(y'+y_0)+C(y'+y_0)^2+2D(x'+x_0)(z'+z_0)+$$
$$+2E(y'+y_0)(z'+z_0)+F(z'+z_0)^2+2G(x'+x_0)+2H(y'+y_0)+2I(z'+z_0)+K=0$$

или

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2Dx'z'+2Ey'z'+Fz'^2+2\overline{G}x'+2\overline{H}y'+2\overline{I}z'+\overline{K}=0. \quad (1')$$

гдѣ [1])

$$\overline{G}=Ax_0+By_0+Dz_0+G,\ \overline{H}=Bx_0+Cy_0+Ez_0+H,\ \overline{I}=Dx_0+Ey_0+Fz_0+I,$$
$$\overline{K}=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0z_0+2Ey_0z_0+Fz_0^2+2Gx_0+2Hy_0+2Iz_0+K\ . \quad (3)$$

Подставляя въ уравненіе (1') x' и y' изъ уравненій (2), мы получимъ для опредѣленія аппликаты точки пересѣченія поверхности (1') и прямой (2) квадратное уравненіе

$$(Am^2+2Bmn+Cn^2+2Dm+2En+F)z'^2+2(\overline{G}m+\overline{H}n+\overline{I})z'+\overline{K}=0\ .\ . \quad (4)$$

Отсюда снова получаемъ, что произвольная прямая пересѣкаетъ поверхность 2-го порядка въ 2 точкахъ.

Если $\overline{K}=0$, то одинъ изъ корней уравненія (4) $z_1'=0$; всякая прямая связки (2) пересѣкаетъ поверхность (1') въ началѣ координатъ и точка x_0, y_0, z_0 лежитъ на поверхности. Если и коэффиціентъ при z' равенъ нулю $\qquad \overline{G}m+\overline{H}n+\overline{I}=0, \ldots \ldots \ldots \ldots$ (5)

то оба корня нули $z_1'=z_2'=0$, обѣ точки пересѣченія сливаются въ новомъ началѣ; прямая касается поверхности. Уравненіе (5) опредѣляетъ угловые коэффиціенты m и n прямыхъ, касательныхъ къ поверхности въ началѣ координатъ. Замѣняя m и n ихъ выраженіями

$$m=\frac{x'}{z'}=\frac{x-x_0}{z-z_0};\ n=\frac{y'}{z'}=\frac{y-y_0}{z-z_0},$$

получаемъ уравненіе геометрическаго мѣста этихъ касательныхъ

$$\overline{Q}\frac{x-x_0}{z-z_0}+\overline{H}\frac{y-y_0}{z-z_0}+\overline{I}=0$$

или
$$(Ax_0+By_0+Dz_0+q)(x-y_0)+(Bx_0+Cy_0+Ez_0+H)(y-y_0)+$$
$$+(Dx_0+Ey_0+Fy_0+I)(z-z_0)=0$$

—касательной плоскости.

Если точка (x_0, y_0, z_0), выбранная за новое начало, окажется такой, что
$$\overline{G}=0,\ \overline{H}=0,\ \overline{I}=0, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$
то направленіе касательныхъ ничѣмъ не связано. Всякая прямая, про-

---

[1]) Легко сообразить, что $\overline{K}=f(x_0, y_0, z_0)$, $\overline{G}=\frac{1}{2}f'_x(x_0, y_0, z_0)$, $\overline{H}=\frac{1}{2}f'_y(x_0, y_0, z_0)$ $\overline{I}=\frac{1}{2}f'_z(x_0, y_0, z_0)$, гдѣ черезъ $f(x, y, z)$ обозначена вся лѣвая часть уравненія (1) и черезъ f'_x, f'_y, f'_z частныя производныя отъ f по x, y или z.

ходящая черезъ точку $O'(x_0, y_0, z_0)$ пересѣкаетъ поверхность въ двухъ слившихся точкахъ. Если же выбрать прямыя такъ, чтобы

$$Am^2+2Bmn+Cn^2+2Dm+2En+F=0, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

то уравненіе (4) обращается въ тождество, и точка пересѣченія становится неопредѣленной. Въ такомъ случаѣ, прямыя съ угловыми коэффиціентами m, n, удовлетворяющими уравненію (7), всѣми своими точками расположены на поверхности (1'). Съ другой стороны, всѣ точки этой поверхности лежатъ на прямыхъ, которыя исходятъ изъ начала координатъ и угловые коэффиціенты которыхъ удовлетворяютъ уравненію (7), т.-е. разсматриваемая поверхность есть *конусъ 2-го порядка*, и точка $O'(x_0, y_0, z_0)$ *вершина конуса*. Въ уравненіи (1')

$$\overline{G}=0,\ \overline{H}=0,\ \overline{I}=0,\ \overline{K}=0; \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

слѣдовательно, *однородное относительно текущихъ координатъ уравненіе второй степени представляетъ конусъ 2-го порядка, отнесенный къ вершинѣ*.

Уравненіе (1) опредѣляетъ конусъ, если возможно найти точку $O'(x_0, y_0, z_0)$, чтобы имѣла мѣсто система уравненій (8).

Такъ какъ $\overline{K}=\overline{G}x_0+\overline{H}y_0+\overline{I}z_0+(Gx_0+Hy_0+Iz_0+K)$,

то система (8) принимаетъ видъ

$$\begin{aligned} Ax_0+By_0+Dz_0+G&=0,\\ Bx_0+Cy_0+Ez_0+H&=0,\\ Dx_0+Ey_0+Fz_0+I&=0,\\ Gx_0+Hy_0+Iz_0+K&=0. \end{aligned}$$

Въ частности, если точка O' лежитъ въ безконечности, то поверхность (1) представляетъ изъ себя цилиндръ.

§ 3. Центръ, діаметральныя плоскости и діаметры поверхности 2-го порядка.

Если въ уравненіи (4) коэффиціентъ при z' равенъ нулю

$$\overline{G}m+\overline{H}n+\overline{I}=0, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

то, на основаніи теоремы о соотношеніи между корнями и коэффиціентами квадратнаго уравненія, аппликата середины хорды, соединяющей точки пересѣченія прямой (2) и поверхности, $z'=\frac{z_1'+z_2'}{2}=0$. Уравненія (2) показываютъ, что и обѣ другія координаты ея нули, т.-е. средина хорды съ угловыми коэффиціентами m и n, удовлетворяющими уравненію (5), лежитъ въ новомъ началѣ координатъ.

Если уравненіе (5) исчезаетъ тождественно

$$\overline{G}=0,\ \overline{H}=0,\ \overline{I}=0, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

то направленіе хорды ничѣмъ не связано; всякая хорда, проходящая черезъ новое начало, дѣлится въ немъ пополамъ. Такая точка, въ которой дѣлятся пополамъ всѣ проходящія черезъ нее хорды, называется *центромъ* поверхности 2-го порядка. Слѣдовательно, координаты центра опредѣляются тремя уравненіями (6)

$$\begin{aligned} &Ax_0+By_0+Dz_0+G=0,\\ &Bx_0+Cy_0+Ez_0+H=0, \qquad (6')\\ &Dx_0+Ey_0+Fz_0+I=0. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, у *поверхности 2-го порядка существуетъ, вообще говоря, единственный центръ.*

Если поверхность отнесена къ центру, т.-е. новое начало координатъ находится въ центрѣ, *то уравненіе поверхности не содержитъ членовъ съ первыми степенями текущихъ координатъ.*

Плоскость, проходящая черезъ центръ, называется *діаметральной плоскостью*; прямая, проходящая черезъ центръ, называется *діаметромъ.* Отсюда слѣдуетъ, что двѣ діаметральныя плоскости пересѣкаются по діаметру и черезъ два діаметра проходитъ діаметральная плоскость.

Уравненіе связки діаметральныхъ плоскостей будетъ

$$m(Ax+By+Dz+G)+n(Bx+Cy+Ez+H)+(Dx+Ey+Fz+I)=0; \quad (9)$$

центромъ этой связки діаметральныхъ плоскостей служитъ центръ поверхности (1).

Такъ какъ діаметръ можно опредѣлить, какъ пересѣченіе двухъ діаметральныхъ плоскостей, то связка діаметровъ представится такой системой уравненій

$$\left.\begin{aligned} &m(Ax+By+Dz+G)+n(Bx+Cy+Ez+H)+(Dx+Ey+Fz+I)=0,\\ &m'(Ax+By+Dz+G)+n'(Bx+Cy+Ez+H)+(Dx+Ey+Fz+I)=0, \end{aligned}\right\} (10)$$

гдѣ m, m', n, n'—произвольные параметры.

§ 4. **Классификація поверхностей 2-го порядка.** Опредѣляя изъ уравненій (6′) координаты центра, получимъ (см. гл. IV, § 4)

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} -G & B & D\\ -H & C & E\\ -I & E & F \end{vmatrix}}{\Delta},\quad y_0=\frac{\begin{vmatrix} A & -G & D\\ B & -H & E\\ D & -I & F \end{vmatrix}}{\Delta},\quad z_0=\frac{\begin{vmatrix} A & B & -G\\ B & C & -H\\ D & E & -I \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (11)$$

гдѣ

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F \end{vmatrix} \quad (12)$$

1-й случай. Если $\Delta\neq0$, то координаты центра имѣютъ конечныя значенія. Поверхность имѣетъ центръ въ конечной части пространства и поэтому называется *центральной*. Въ частности, если и $K=0$, она представляетъ собой конусъ; центромъ конуса служитъ его вершина (гл. XIX § 2).

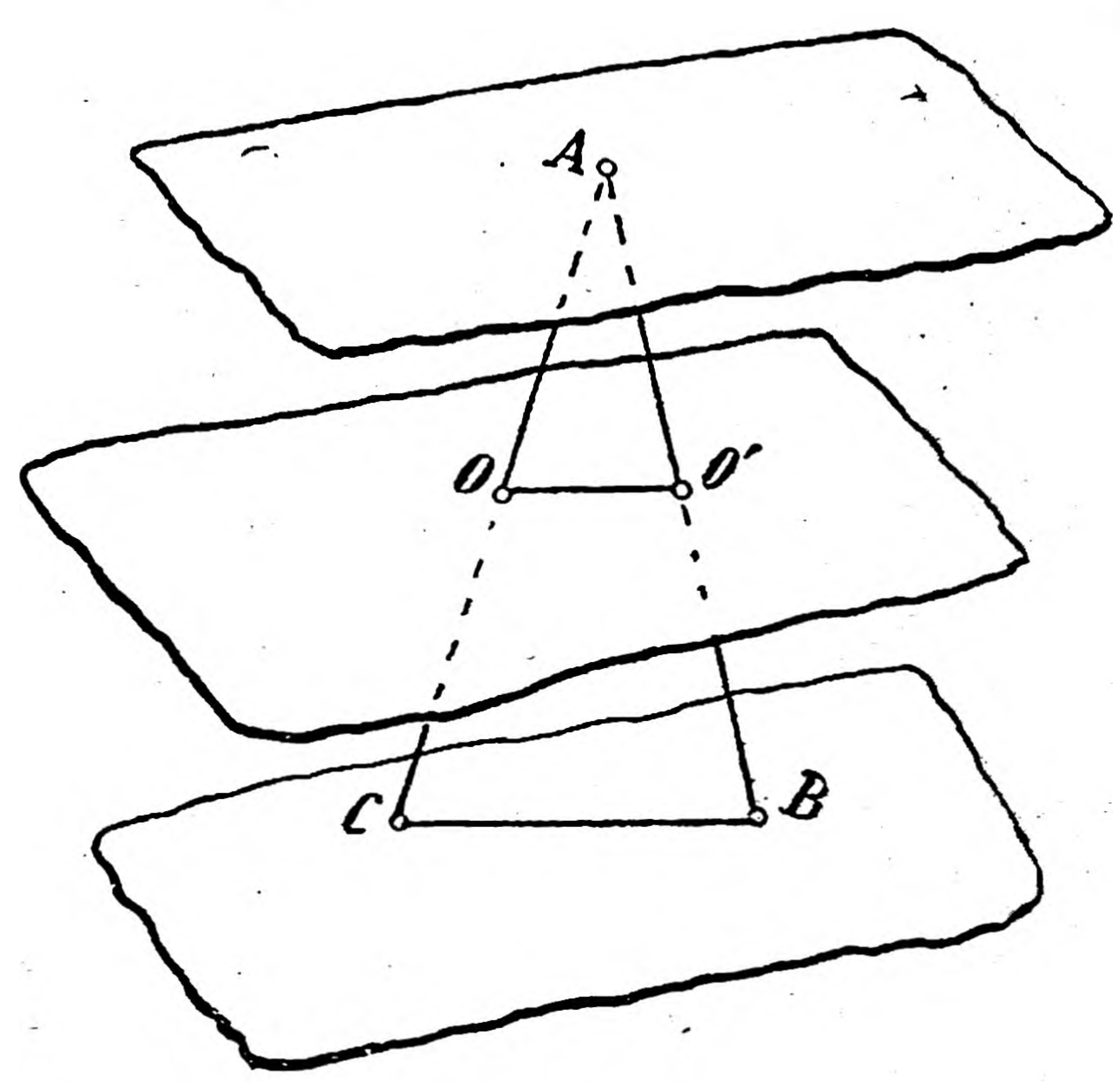
2-й случай. Если $\Delta=0$ и хотя бы одинъ изъ числителей не равенъ нулю, то по крайней мѣрѣ одна координата центра имѣетъ безконечно-большое значеніе; центромъ поверхности служитъ безконечно-удаленная точка. Такія поверхности называются *параболоидами.* Такъ какъ всѣ діаметры проходятъ черезъ центръ, то *всѣ діаметры параболоида параллельны и всѣ діаметральныя плоскости параллельны одной и той же прямой.*

3-й случай. Если знаменатель и всѣ числители равны нулю, то координаты центра имѣютъ неопредѣленныя значенія; здѣсь могутъ быть два случая (см. гл. X § 6).

1) Система уравненій (6') опредѣляетъ прямую, т.-е. она содержитъ только два самостоятельныхъ уравненія. Въ этомъ случаѣ роль центра играетъ прямая, называемая *осью.* Не трудно показать (см. гл. V § 5), что во всякой плоскости, проходящей черезъ ось, лежатъ двѣ прямыя, параллельныя оси, всѣ точки которыхъ принадлежатъ поверхности. Слѣдовательно, поверхность есть геометрическое мѣсто параллельныхъ прямыхъ. Такая поверхность называется *цилиндромъ.* Осью можетъ служить и безконечно удаленная прямая.

Въ частности, поверхность можетъ распадаться на пару пересѣкающихся мнимыхъ или дѣйствительныхъ плоскостей.

2) Система уравненій (6') опредѣляетъ плоскость; изъ этихъ трехъ уравненій только одно самостоятельно. Роль центра въ этомъ случаѣ играетъ плоскость и поверхность распадается на пару плоскостей, параллельныхъ этой плоскости и проходящихъ на равномъ отъ нея разстояніи.



Фиг. 61.

Дѣйствительно, если точка A (см. фиг. 61) лежитъ на поверхности, то поверхности принадлежитъ и любая точка B плоскости, параллельной плоскости центровъ и проходящей черезъ точку C такъ, что перпендикуляръ на плоскость $AO=OC$, гдѣ O точка, принадлежащая геометрическому мѣсту центровъ.

Изъ подобія $\triangle AOO'$ и $\triangle ACB$ слѣдуетъ $\frac{AO'}{AB}=\frac{AO}{AC}$, т.-е. средина хорды AB лежитъ въ точкѣ O', и, слѣдовательно, A и B двѣ точки пересѣченія прямой AB съ поверхностью. Такъ же покажемъ, что плоскость, проходящая черезъ точку A параллельно плоскости центровъ, принадлежитъ поверхности.

Детерминантъ $\triangle$ (12), отъ которой зависитъ видъ поверхности, называется *дискриминантомъ.*

§ 5. **Каноническія уравненія центральныхъ поверхностей, эллиптическаго и гиперболическаго цилиндровъ.** Подобно кривымъ 2-го порядка (гл. V § 7) и поверхности 2-го порядка всегда имѣютъ *главныя направленія,* т.-е. такія, что хорды параллельныя этимъ направленіямъ, дѣлятся пополамъ перпендикулярными къ нимъ плоскостями. Какъ и въ случаѣ кривыхъ второго порядка, если оси координатъ имѣютъ главныя направленія, то уравненіе поверхности не содержитъ членовъ съ произведеніями текущихъ координатъ.

Перенесемъ кромѣ того начало координатъ въ центръ поверхности; тогда уравненіе поверхности не будетъ содержать и членовъ съ первыми степенями текущихъ координатъ и, слѣдовательно, приметъ такой видъ $$Ax^2+Cy^2+Fz^2+K=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Оси координатъ въ этомъ случаѣ называются *осями* поверхности. Не трудно замѣтить, что онѣ дѣлятъ пополамъ всѣ перпендикулярныя къ нимъ хорды. Дѣйствительно, уравненіе (1) содержитъ только квадраты текущихъ координатъ и, слѣдовательно, одинаково удовлетворяется координатами (x, y, z) и $(-x, -y, z)$.

Разсмотримъ сначала тѣ случаи, когда одинъ изъ коэффиціентовъ A, C, F или K равенъ нулю.

I. Если $K=0$, то уравненіе опредѣляетъ конусъ (§ 2).

1) Если всѣ коэффиціенты A, C и F положительны, то уравненіе (1) удовлетворяется только одной группой дѣйствительныхъ значеній: $x=0$, $y=0$, $z=0$ и, слѣдовательно, опредѣляетъ *мнимый конусъ* съ вершиной въ началѣ координатъ.

2) Если не всѣ коэффиціенты A, C и F одного знака, то, умножая на -1, можно сдѣлать два изъ нихъ положительными; третій тогда будетъ отрицателенъ, мы положимъ $A=\frac{1}{a^2}$, $C=\frac{1}{b^2}$, $F=-\frac{1}{c^2}$, и уравненіе (1) приметъ такой видъ:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Уравненіе это опредѣляетъ (дѣйствительный) *конусъ* съ вершиной въ началѣ координатъ (§ 2), отнесенный къ его осямъ. Въ случаѣ $a=b$ уравненіе (2)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

опредѣляетъ *круглый конусъ*.

II. Положимъ теперь, что одинъ изъ коэффиціентовъ при текущихъ координатахъ, напр., F равенъ нулю. Тогда уравненіе (1) принимаетъ такой видъ: $$Ax^2+Cy^2+K=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

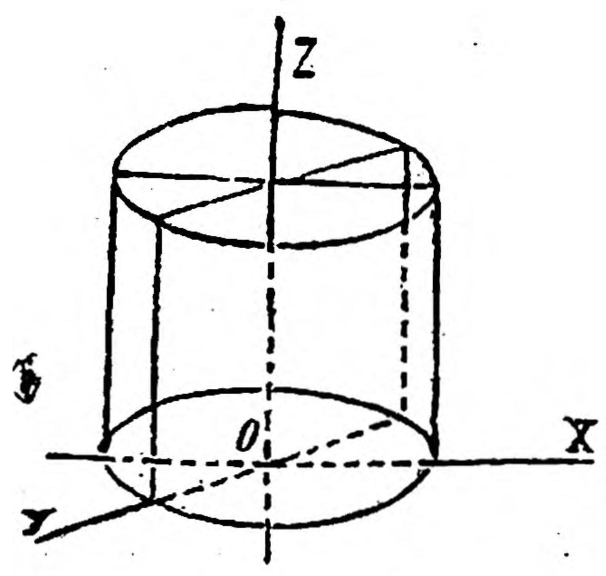
Въ главѣ VI (§ 1) мы видѣли, что это уравненіе можно привести къ одному изъ двухъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. (4) или $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ . . . (5)

Уравненія (4) и (5) опредѣляютъ соотвѣтственно *эллиптическій* (см. фиг. 62) *и гиперболическій* (см. фиг. 63) *цилиндры* (сравн. гл. X, § 1). Если $a=b$, уравненіе (4) имѣетъ такой видъ: $x^2+y^2=a^2$, и опредѣляетъ *круглый цилиндръ*.

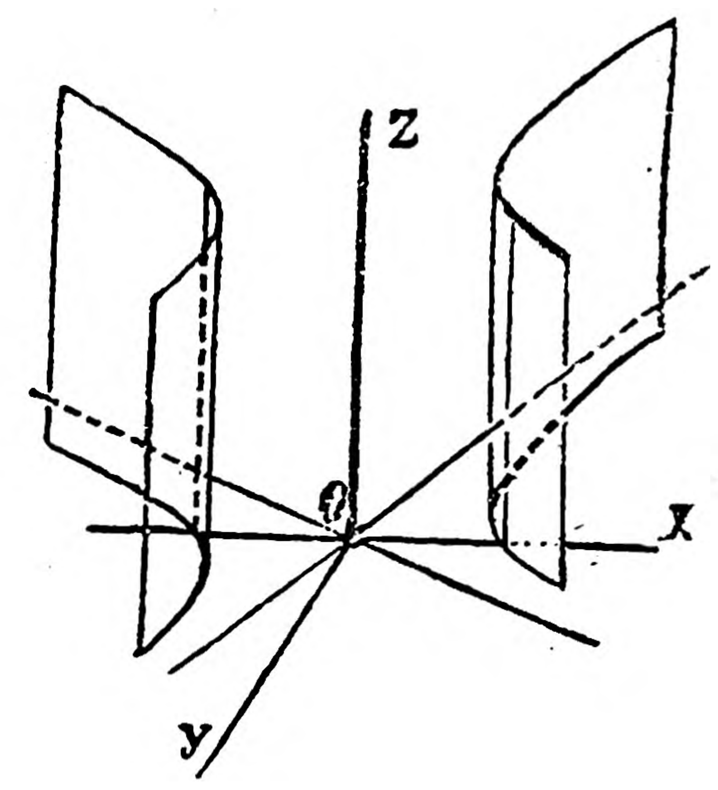
Положимъ, теперь, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ A, C, F, K не нуль; дѣлимъ обѣ части уравненія въ (1) на $-K$:

$$\frac{x^2}{\frac{-K}{A}}+\frac{y^2}{\frac{-K}{C}}+\frac{z^2}{\frac{-K}{F}}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

1) Если всѣ коэффиціенты A, C, F, K одного знака, то уравненіе опредѣляетъ *мнимую поверхность второго порядка*, такъ какъ не суще-



Фиг. 62.



Фи .

ствуетъ группы дѣйствительныхъ значеній x, y, z, удовлетворяющихъ уравненію. Будемъ считать $K<0$.

2) Если $A>0$, $C>0$, $F>0$, то мы можемъ положить $\frac{-K}{A}=a^2$, $\frac{-K}{C}=b^2$, $\frac{-K}{F}=c^2$, и уравненіе (6) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Это—каноническое уравненіе *эллипсоида*.

3) Если $A>0$, $C>0$ и $F<0$, то мы можемъ положить $\frac{-K}{A}=a^2$, $\frac{-K}{C}=b^2$, $\frac{-K}{F}=-c^2$, и уравненіе (6) принимаетъ такой видъ:

$$\frac{x^2}{a^3}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Это—каноническое уравненіе *однополостнаго гиперболоида*.

4) Если $A>0$, $C>0$ и $F>0$, то мы можемъ положить $\frac{-K}{A}=-a^2$, $\frac{-K}{C}=-b^2$, $\frac{-K}{F}=c^2$, и уравненіе (6) принимаетъ такой видъ:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ или } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{c^2}{z^2}=-1. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Это—каноническое уравненіе *двуполостнаго гиперболоида*.

§ 6. **Каноническія уравненія параболоидовъ и параболическаго цилиндра**. Дадимъ координатнымъ осямъ главныя направленія и перенесемъ начало координатъ въ точку: (x_0, y_0, z_0) такъ, чтобы $\overline{G}=0$, $\overline{H}=0$, $\overline{K}=0$. Тогда уравненіе поверхности приметъ такой видъ:

$$Ax^2+Cy^2+Fz^2+2Iz=0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

гдѣ мы положимъ $I<0$; въ противномъ случаѣ, мы измѣнимъ направленіе оси Z (сравн. гл. VI § 5). Если уравненіе опредѣляетъ параболоидъ, то дискриминантъ долженъ обратиться въ нуль.

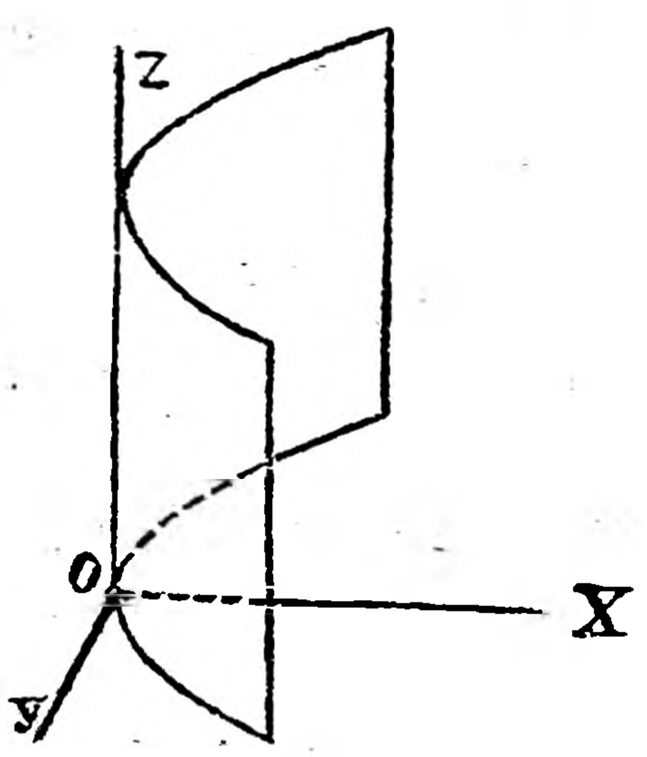
$$\Delta=\begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix}=ACF,$$

слѣдовательно $ACF=0$.

I. Если $A=0$ или $C=0$, то уравненіе (1) не содержитъ координаты x или y и опредѣляетъ, слѣдовательно, цилиндръ. Напримѣръ, при $A=0$ уравненіе (1) принимаетъ такой видъ:

$$y^2=2pz+qz^2 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

гдѣ $p=\frac{-I}{C}$, $q=\frac{-F}{C}$. Если $q\neq0$, то мы имѣемъ уже разсмотрѣнные (§ 5) случаи *эллиптическаго и гиперболическаго цилиндровъ* (см. гл. VI § 5); если же $q=0$, то уравненіе (2) $y^2=2pz$ опредѣляетъ *параболическій цилиндръ* (см. фиг. 64), образующая котораго параллельна оси X [1].



Фиг. 64.

II. Если $F=0$, то уравненіе (1) послѣ дѣленія на $-I$ приметъ видъ:

$$\frac{x^2}{\frac{-I}{A}}+\frac{y^2}{\frac{-I}{C}}=2z. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Тутъ могутъ быть два случая.

1) Если $A>0$, $C>0$, то мы можемъ положить $\frac{-I}{A}=p$, $\frac{-I}{C}=q$, где $p>0$, $q>0$; уравненіе

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

есть каноническое уравненіе *эллиптическаго параболоида*.

2) Если $A>0$ и $C<0$, то мы можемъ положить $\frac{-I}{A}=p$, $\frac{-I}{C}=-q$, гдѣ $p>0$, $q>0$, и уравненіе

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z. \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

есть каноническое уравненіе *гиперболическаго параболоида*.

§ 7. Форма конуса второго порядка. Сѣченіе конуса произвольной плоскостью. Пересѣкая конусъ второго порядка $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ координатными плоскостями, имѣемъ для плоскости $XY - z=0$;

[1] На фиг. 64 изображенъ цилиндръ $y^2=2px$.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; $YZ-x=0$, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; $ZX-y=0$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, т.-е. координатныя плоскости пересѣкаютъ конусъ 2 го порядка по парѣ прямыхъ, при чемъ плоскости XZ и YZ пересѣкаютъ конусъ по дѣйствительнымъ прямымъ, а плоскость XY по мнимымъ; послѣдняя имѣетъ съ конусомъ одну общую дѣйствительную точку — начало координатъ. Сѣченія конуса плоскостями, параллельными координатнымъ плоскостямъ опредѣляются уравненіями:

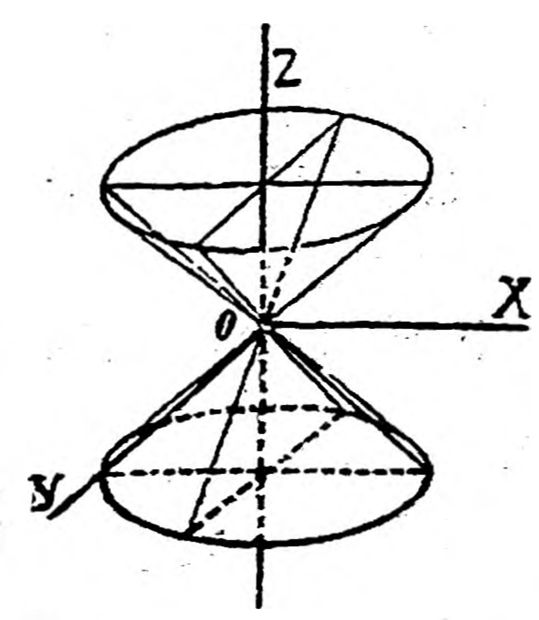
$z=h$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$ (1); $x=h$, $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{a^2}$ (2); $y=h$, $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{b^2}$ или

$$z=h\,,\ \left(\frac{x}{a'}\right)^2+\left(\frac{y}{b'}\right)^2=1\ ,\ \text{гдѣ}\ a'=\frac{ah}{c}\ ;\ b'=\frac{bh}{c}\quad(1)$$

$$x=h\,,\ \left(\frac{z}{c'}\right)^2-\left(\frac{y}{b'}\right)^2=1\ ,\ \text{гдѣ}\ c'=\frac{ch}{a}\ ;\ b'=\frac{bh}{a}\quad(2)$$

$$y=h\,;\ \left(\frac{z}{c'}\right)^2-\left(\frac{x}{a'}\right)^2=1\ ,\ \text{гдѣ}\ c'=\frac{ch}{b}\ ;\ a'=\frac{ah}{b}\quad(3),$$

т.-е. плоскости параллельныя плоскости XY пересѣкаютъ конусъ по подобнымъ эллипсамъ, а плоскости, параллельныя двумъ другимъ координатнымъ плоскостямъ, пересѣкаютъ конусъ по гиперболамъ, при чемъ размѣры сѣченій съ увеличеніемъ h растутъ (см. фиг. 65).



Фиг. 65.

Если $a=b$, то конусъ переходитъ въ т. н. круглый конусъ, и сѣченія параллельныя плоскости XY переходятъ въ круги.

Покажемъ теперь, что всѣ кривыя второго порядка могутъ быть получены сѣченіемъ круглаго конуса, чѣмъ и объясняется данное имъ въ древности названіе коническихъ сѣченій. Замѣтимъ прежде всего, что проекціей эллипса будетъ всегда эллипсъ (въ частномъ случаѣ кругъ), проекціей гиперболы — гипербола, параболы — парабола. Поэтому теорема наша будетъ доказана, если мы покажемъ, что проекція плоскаго сѣченія круглаго конуса на плоскость XY можетъ имѣть форму любой кривой второго порядка. Не нарушая общности разсужденій плоскость сѣченія можно выбрать перпендикулярно плоскости XZ; ея уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ $z=kx+m$, гдѣ k есть угловой коэффиціентъ сѣченія плоскости XZ данной плоскостью. Для опредѣленія проекціи сѣченія конуса этой плоскостью на плоскость XY исключаемъ z изъ уравненій $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ и $z=kx+m$; получимъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{kx+m}{c}\right)^2=0$ или $x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{k^2}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2kmx}{c^2}-\frac{m^2}{c^2}=0$; Эта проекція будетъ эллипсомъ, гиперболой или пароболой въ зависимости отъ того, будетъ ли дискриминантъ старшихъ членовъ $D=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{k^2}{c^2}\right)\frac{1}{b^2}\gtreqless 0$; $D>0$, если $|k|<\frac{c}{a}$, $D<o$, если $|k|>\frac{c}{a}$ и

$D=0$, если $\left| k \right| = \frac{c}{a}$. Но $\frac{c}{a}$ есть абсолютное значеніе угловыхъ коэффиціентовъ сѣченія конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ плоскостью XZ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \text{ или } \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0, \text{ откуда } z=\pm\frac{c}{a}x.$$

Такъ какъ уголъ между слѣдомъ сѣкущей плоскости на плоскость XZ и осью X дополняетъ до прямого уголъ между этимъ слѣдомъ и *осью* Z конуса, то плоскость пересѣкаетъ конусъ по эллипсу, гиперболѣ или параболѣ въ зависимости отъ того, пересѣкаетъ ли она ось конуса подъ угломъ большимъ, меньшимъ или равнымъ углу наклона къ оси образующей конуса. Въ послѣднемъ случаѣ, т.-е. въ случаѣ сѣченія по порабoлѣ, сѣкущая плоскость должна быть параллельна одной образующей (и только одной); въ случаѣ эллипса она пересѣкаетъ всѣ образующія; въ случаѣ гиперболы — параллельна двумъ образующимъ.

§ **8 Форма эллипсоида.** Уравненіе эллипсоида (§ 5)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

можно написать въ такой формѣ: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$. Сумма трехъ положительныхъ чиселъ равна 1; слѣдовательно, каждое изъ нихъ

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2\leqslant 1, \left(\frac{y}{b}\right)^2\leqslant 1, \left(\frac{z}{c}\right)^2\leqslant 1, \text{ откуда } |x|\leqslant a, |y|\leqslant b \; |z|\leqslant c.$$

Эти неравенства показываютъ, что, прямоугольный параллелепипедъ образованный тремя парами плоскостей $x=a, x=-a, y=b, y=-b, z=c, z=-c$ будетъ заключать внутри себя эллипсоидъ (1). Отсюда вытекаетъ, что *эллипсоидъ представляетъ замкнутую поверхность.*

Сѣченіе эллипсоида координатными плоскостями. Линія пересѣченія плоскостью XY, опредѣляется системой уравненій (1) и $z=0$, или $z=0$ и:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

Эти два уравненія въ совокупности опредѣляютъ эллипсъ. Аналогично уравненія $y=0$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ или $x=0$ и $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ опредѣляютъ кривыя сѣченія эллипсоида (1) координатными плоскостями XZ и YZ. *Всѣ три координатныя плоскости пересѣкаютъ эллипсоидъ по эллипсамъ.*

Сѣченіе плоскостями параллельными координатнымъ. Линія пересѣченія плоскостью параллельной плоскости XY опредѣляется совокупностью уравненій $z=h$ и (1) или $z=h$ и:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

На плоскости XY это уравненіе опредѣляетъ проекцію на эту координатную плоскость кривой сѣченія; она тождественна съ самой кривой, такъ какъ обѣ лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ. Дѣля обѣ части уравненія (2) на $\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)$, мы получимъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

гдѣ $$a'=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}. \ (5) \text{ и } b'=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad \ldots \ldots (6)$$

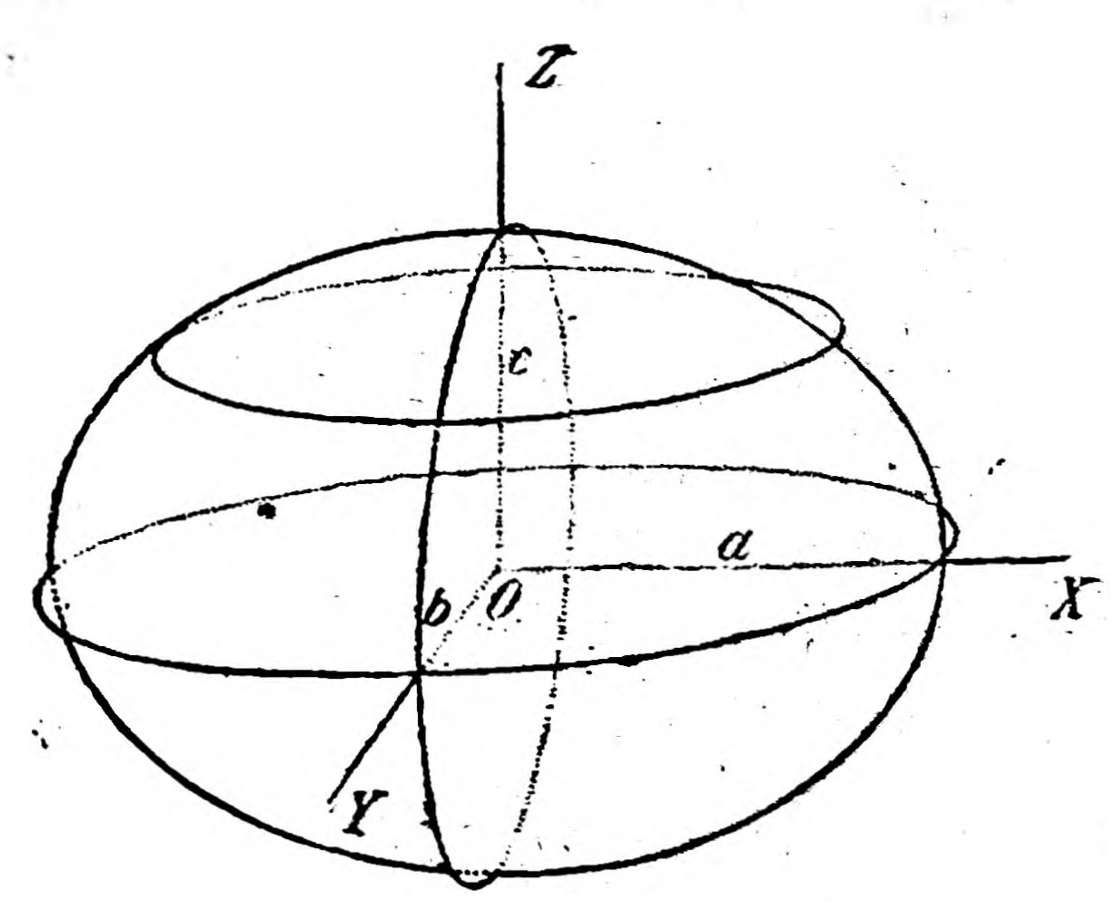
Уравненіе (3) опредѣляетъ эллипсъ съ полуосями a' и b'. Раздѣлимъ почленно равенство (5) на (6): $\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}$, т.-е. полуоси эллипсовъ (2) и (4) пропорціональны; такіе эллипсы подобны, они имѣютъ одинаковое очертаніе и отличаются только размѣромъ; слѣдовательно, плоскости, параллельныя координатной плоскости XY, разсѣкаютъ эллипсоидъ по подобнымъ эллипсамъ [1]).

Если $1-\frac{h^2}{c^2}<0$, или $|h|<c$, то эллипсъ (4) мнимъ. Если $|h|=c$, то уравненіе (3) имѣетъ такой видъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, откуда $x=0$ и $y=0$, $z=\pm c$. Слѣдовательно, плоскости, параллельныя плоскости XY и отстоящія отъ нея на разстояніи c касаются эллипсоида (12) въ точкахъ (o, o, c) и $(o, o, -c)$.

Совершенно тѣ же результаты получимъ, если будемъ пересѣкать эллипсоидъ плоскостями, параллельными двумъ другимъ координатнымъ плоскостямъ XZ и YZ, такъ какъ въ уравненіе эллипса координаты x, y, z входятъ равноправно. Такимъ образомъ *плоскости, параллельныя координатнымъ плоскостямъ, пересѣкаютъ эллипсоидъ по эллипсамъ* (мнимымъ или дѣйствительнымъ) [2]).

Точки пересѣченія эллипсоида съ осями.

Если положимъ $y=0$, $z=0$, то изъ уравненія (1) найдемъ $x=\pm a$. Это значитъ, что ось X пересѣкаетъ эллипсоидъ въ двухъ точкахъ: (a, o, o) и $(-a, o, o)$. Аналогично этому, оси Y и Z пересѣкаютъ эллипсоидъ соотвѣтственно въ точкахъ: (o, b, o), $(o, -b, o)$ и (o, o, c), $(o, o, -c)$. Всѣ эти шесть точекъ служатъ *вершинами* эллипсоида (ср. гл. VI, § 2); разстоянія между каждой парой соотвѣтственныхъ вершинъ, т.-е. $2a$, $2b$, $2c$, представляютъ *длины осей* поверхности. Обычно принято полагать $a>b>c$; видъ эллипсоида см. на фиг. 66.



Фиг. 66.

[1]) Вообще поверхность второго порядка разсѣкается параллельными плоскостями по подобнымъ кривымъ второго порядка.

[2]) Вообще эллипсоидъ сѣчется плоскостями только по эллипсамъ.

Въ частномъ случаѣ, когда $a=b>c$, уравненіе $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, опредѣляетъ *слюснутый эллипсоидъ вращенія.* Эта поверхность можетъ быть получена отъ вращенія эллипса около его малой оси. Осью вращенія служитъ ось Z; плоскости, перпендикулярныя къ оси разсѣкаютъ этотъ эллипсоидъ по кругамъ.

Въ случаѣ $a>b=c$, уравненіе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ опредѣляетъ *вытянутый эллипсоидъ вращенія,* получаемый отъ вращенія эллипса около большой его оси.

Наконецъ, въ случаѣ $a=b=c$ уравненіе $x^2+y^2+z^2=a^2$ опредѣляетъ *сферу*; слѣдовательно, *шаръ есть частный случай эллипсоида.*

§ **9. Форма однополостнаго гиперболоида.** Уравненіе однополостнаго гиперболоида (§ 5)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots \quad (1)$$

Сѣченіе координатными плоскостями. Съ координатной плоскостью XY однополостный гиперболоидъ даетъ въ сѣченіи эллипсъ, опредѣляемый уравненіями $z=0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; съ плоскостями же XZ и YZ—гиперболы, $y=0$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ и $x=0$, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Сѣченіе плоскостями параллельными координатнымъ. Линія пересѣченія плоскостью параллельной плоскости XY опредѣляется уравненіями (1) и $z=h$ или

$$z=h \text{ и } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \quad \ldots \quad (2)$$

На плоскости XY, уравненіе (2) опредѣляетъ проекцію линіи пересѣченія. Его можно представить въ видѣ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1 \quad \ldots \quad (3)$$

гдѣ $a'=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ и $b'=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. Это — уравненіе эллипса; слѣдовательно *плоскости, проведенныя параллельно координатной плоскости XY, разсѣкаютъ однополостный гиперболоидъ по эллипсамъ.*

Мнимаго сѣченія здѣсь не можетъ быть, такъ какъ двучленъ, стоящій подъ знакомъ радикала въ выраженіяхъ a' и b', всегда положителенъ. Слѣдовательно, однополостный гиперболоидъ (1) уходитъ вдоль оси Z по обоимъ направленіямъ въ безконечность. Въ частности при $h=0$ и $a'=a$, $b'=b$, мы получаемъ въ сѣченіи плоскостью XY наименьшій эллипсъ, который называется *горловымъ эллипсомъ.*

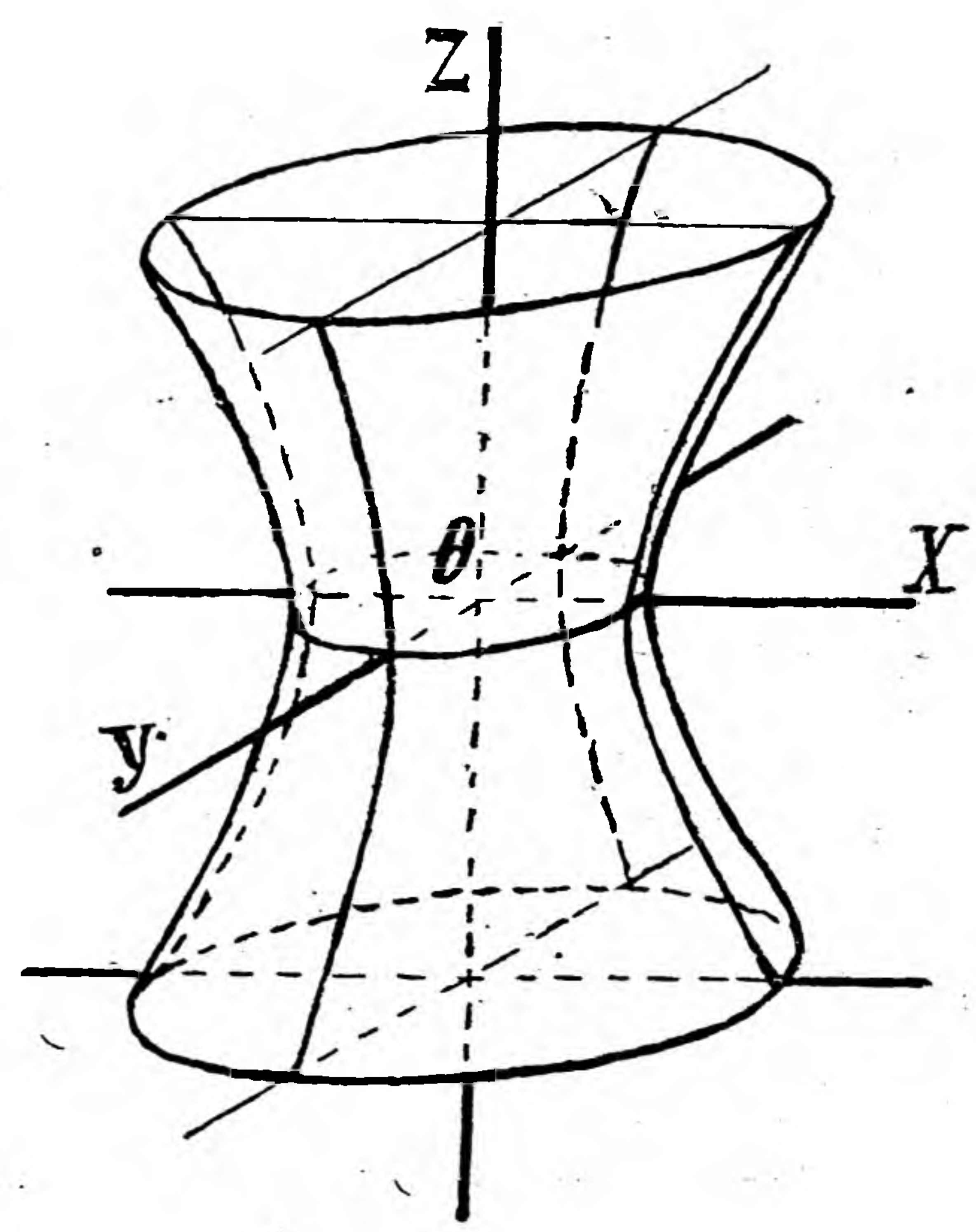
Линія пересѣченія плоскостью параллельной плоскости YZ опредѣляется совокупностью уравненій (1) и $x=k$ или $x=k$ и:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2} \quad \ldots \quad (4)$$

На плоскости YZ уравненіе (4) опредѣляетъ проекцію на эту плоскость кривой сѣченія, вполнѣ съ ней тождественную (см. § 8). Дѣлимъ обѣ части уравненія (4) на $\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)$:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)}=1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

это уравненіе опредѣляетъ гиперболу. Если $|k|<a$, то $1-\frac{k^2}{a^2}>0$ и дѣйствительной осью гиперболы (5) служитъ ось Y[1]), а у проектируемой кривой дѣйствительная ось параллельна оси Y. Если $|k|>a$, то $1-\frac{k^2}{a^2}<0$ и гипербола (5) имѣетъ дѣйствительной осью ось Z, а у кривой сѣченія дѣйствительная ось параллельна оси Z. Наконецъ, при $1-\frac{k^2}{a^2}=0$ уравненіе (4) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ опредѣляетъ пару прямыхъ; слѣдовательно, плоскости $x=\pm a$ разсѣкаютъ гиперболоидъ (1) по парѣ прямыхъ. Разсѣкая гиперболоидъ плоскостью, параллельною плоскости XZ, мы получимъ тотъ же результатъ, такъ какъ координаты x и y входятъ въ уравненіе (1) равноправно. Такимъ образомъ *въ сѣченіи однополостнаго гиперболоида плоскостями, параллельными плоскостямъ YZ и XZ, получаются гиперболы и, въ частности, пара дѣйствительныхъ прямыхъ.*



Фиг. 67.

Точки пересѣченія съ осями. Если положимъ $x=0$ и $y=0$, то изъ уравненія (1) найдемъ: $z=\pm ci$, т.-е. ось Z не пересѣкается съ однополостнымъ гиперболоидомъ. Аналогично получимъ, что оси X и Y пересѣкаютъ гиперболоидъ соотвѣтственно въ точкахъ: (a, o, o) и $(-a, o, o)$, (o, b, o) и $(o, -b, o)$. Такимъ образомъ у однополостнаго гиперболоида двѣ дѣйствительныхъ оси и четыре дѣйствительныхъ вершины; одна ось (ось Z) мнимая. Видъ однополостнаго гиперболоида такой, какъ на фиг. 67.

Въ случаѣ $a=b$ уравненіе $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ опредѣляетъ *однополостный гиперболоидъ вращенія.*

---

[1]) Въ каноническомъ уравненіи гиперболы знакъ плюсъ находится при квадратѣ той текущей координаты, которая соотвѣтствуетъ дѣйствительной оси гиперболы.

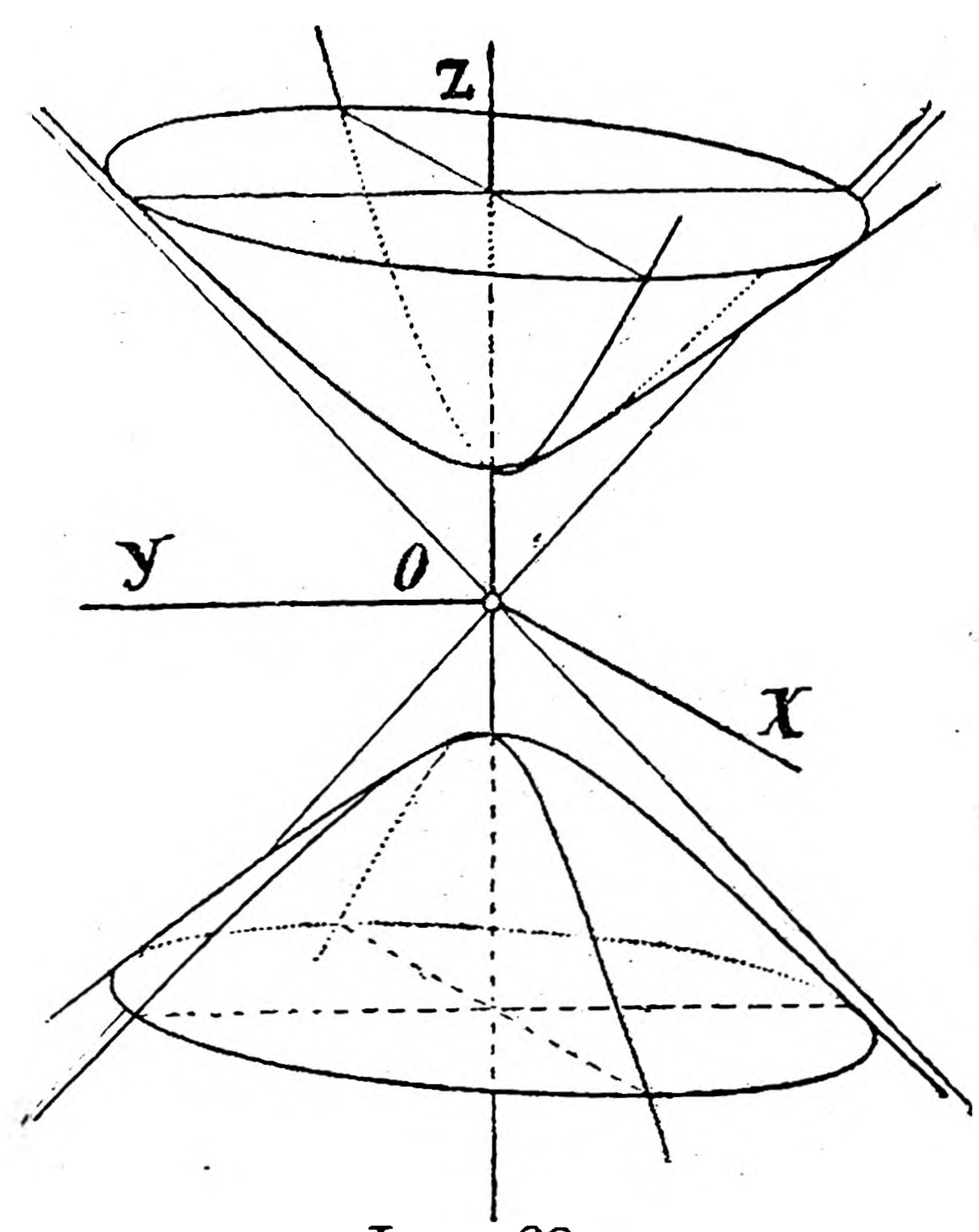
§ **10. Форма двуполостнаго гиперболоида.** Сѣченіе координатными плоскостями. Положивъ въ уравненіи двуполостнаго гиперболоида
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (1)$$
$z=0$ получимъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$; на плоскости XY, это уравненіе мнимаго эллипса—кривой пересѣченія гиперболоида (1) съ этой плоскостью. Слѣдовательно, *координатная плоскость XY не пересѣкаетъ двуполостнаго гиперболоида*. Аналогично, *плоскости XZ и YZ пересѣкаютъ двуполостный гиперболоидъ по гиперболамъ*
$$y=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ и } x=0, \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Сѣченіе плоскостями параллельными координатнымъ. Проекція на плоскость XY линіи пересѣченія гиперболоида плоскостью $z=h$, параллельною плоскости XY опредѣляется уравненіемъ:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$
или
$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1 \qquad (2)$$
гдѣ
$$a'=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \text{ и } b'=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

На плоскости XY это—уравненіе эллипса съ полуосями a' и b'. Полуоси a' и b' будутъ мнимы, т.-е. плоскость $z=h$ не пересѣчетъ двуполостнаго гиперболоида (1), если $\frac{h^2}{c^2}-1<0$, т.-е. $|h|<c$. Дѣйствительный эллипсъ мы получимъ, если $\frac{h^2}{c^2}-1>0$, т.-е. при $|h|>c$. Наконецъ, при $\frac{h^2}{c^2}-1=0$, т.-е. при $|h|=c$, уравненіе проекціи линіи пересѣченія $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ опредѣляетъ пару мнимыхъ прямыхъ и удовлетворяется только одной группой дѣйствительныхъ значеній: $x=0$ и $y=0$; плоскости $z=\pm c$ касаются двуполостнаго гиперболоида (1). Такимъ образомъ, *плоскости параллельныя плоскости XY, пересѣкаютъ двуполостный гиперболоидъ (1) по эллипсамъ* мнимымъ или дѣйствительнымъ.

Сѣченіе гиперболоида (1) плоскостью $x=k$ параллельной плоскости YZ, получимъ, разсуждая по предыдущему. Уравненіе:
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{k^2}{a^2} \text{ или } \frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)}-\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)}=1 \qquad (3)$$
опредѣляетъ проекцію на плоскость YZ кривой сѣченія. Уравненіе (3) опредѣляетъ гиперболу. Слѣдовательно, *плоскости, параллельныя коорди-*

натной плоскости YZ, разсѣкаютъ двуполостный гиперболоидъ по гиперболамъ. Аналогично, *плоскости, проведенныя параллельно плоскости XZ, разсѣкаютъ двуполостный гиперболоидъ также по гиперболамъ*, такъ какъ координаты x и y входятъ въ уравненіе (1) равноправно. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что двуполостный гиперболоидъ (1) состоитъ изъ *двухъ полостей*, расположенныхъ одна надъ плоскостью XY, а другая подъ ней и уходящихъ вдоль оси Z по обоимъ направленіямъ въ безконечность.



Фиг. 68.

Точки пересѣченія съ осями. Если положить $x=0$ и $y=0$, то изъ уравненія (1) найдемъ $z=\pm c$. Слѣдовательно, ось Z пересѣкаетъ двуполостный гиперболоидъ въ двухъ точкахъ (o, o, c) и $(o, o, -c)$. Оси же X и Y не пересѣкаютъ гиперболоида; полагая въ уравненіи (1) $x=0$, $z=0$ или $y=0$, $z=0$, получимъ $y=\pm bi$ или $x=\pm ai$.

Такимъ образомъ у двуполостнаго гиперболоида только одна дѣйствительная ось (ось Z) и только двѣ вершины дѣйствительны. Видъ двуполостнаго гиперболоида см. на фиг. 68.

Если $a=b$, то уравненіе $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, опредѣляетъ *двуполостный гиперболоидъ вращенія*.

§ 11. **Асимптотическій конусъ.** Пересѣчемъ гиперболоидъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{. . . . . (1)}$$

прямой, проходящей черезъ его центръ

$$x=mz,\; y=nz \quad \text{. . . . . (2)}$$

Аппликата точки пересѣченія опредѣляется квадратнымъ уравненіемъ

$$\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2-1=0 \quad \text{. . . . . (3)}$$

Оба корня этого уравненія безконечно велики, если

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0 \quad \text{. . . . . (4)}$$

Слѣдовательно, прямая съ угловыми коэффиціентами, удовлетворяющими уравненію (4), касается поверхности (1) въ безконечно-удаленной точкѣ. Такихъ прямыхъ безчисленное множество, такъ какъ уравненіе (4) не опредѣляетъ m и n вполнѣ. Всѣ эти прямыя проходятъ черезъ начало координатъ и, слѣдовательно, лежатъ на одномъ конусѣ съ вершиной въ центрѣ поверхности. Такой конусъ называется *асимптотическимъ конусомъ*. Уравненіе его получимъ, исключая m и n изъ уравненій (2) и (4)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Оно отличается отъ уравненія (1) только отсутствіемъ свободнаго члена. Уравненіе двуполостнаго гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1')$$

отличается отъ уравненія (1) знакомъ свободнаго члена. Два гиперболоида съ одними и тѣми же параметрами a, b, c называются *сопряженными*. Слѣдовательно, у сопряженныхъ гиперболоидовъ общій асимптотическій конусъ.

Разсѣчемъ асимптотическій конусъ (5) плоскостью $z=h$. Проекція на плоскость XY сѣченія представится такимъ уравненіемъ $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ гдѣ $a_1=a\frac{|h|}{c}$ и $b_1=b\frac{|h|}{c}$. Сравнивая полуоси этого эллипса съ полуосями (3) § 9 и (2) § 10, замѣтимъ пропорцію $\frac{a'}{a_1}=\frac{b'}{b_1}$.

Слѣдовательно, *плоскость, параллельная плоскости XY, разсѣкаетъ сопряженные гиперболоиды и ихъ асиптотическій конусъ по подобнымъ эллипсамъ*, при чемъ изъ сравненія полуосей сѣченій гиперболоидовъ и асимптотическаго конуса видно, что наименьшее по размѣрамъ сѣченіе имѣетъ двуполостный гиперболоидъ, а наибольшее однополостный. Послѣднее даетъ возможность представить расположеніе двухъ сопряженныхъ гиперболоидовъ относительно ихъ асимптотическаго конуса.

§ 12. Форма эллиптическаго параболоида. Уравненіе эллиптическаго параболоида (§ 2)

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Сѣченіе координатными плоскостями. При $z=0$, мы получаемъ

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Это уравненіе удовлетворяется только одной парой дѣйствительныхъ значеній: $x=0$, $y=0$; слѣдовательно, плоскость XY даетъ въ сѣченіи съ поверхностью (1) пару мнимыхъ прямыхъ съ дѣйствительной точкой (o, o, o); иначе говоря, *плоскость XY касается эллиптическаго параболоида въ началѣ координатъ*. Аналогично, *координатныя плоскости XZ и YZ* [1]) *даютъ въ сѣченіи съ эллиптическимъ параболоидомъ параболы*, $x=0$, $y^2=2qz$ и $y=0$, $x^2=2pz$.

Сѣченіе плоскостями параллельными координатнымъ. Полагая въ уравненіи (1) $z=h$, мы получаемъ уравненіе

---

[1]) Они служатъ главными діаметральными плоскостями, ось Z осью, а начало координатъ вершиной эллиптическаго параболоида.

проекціи на плоскость XY кривой пересѣченія параболоида съ плоскостью $z=h$ параллельной плоскости XY:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h \text{ или } \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

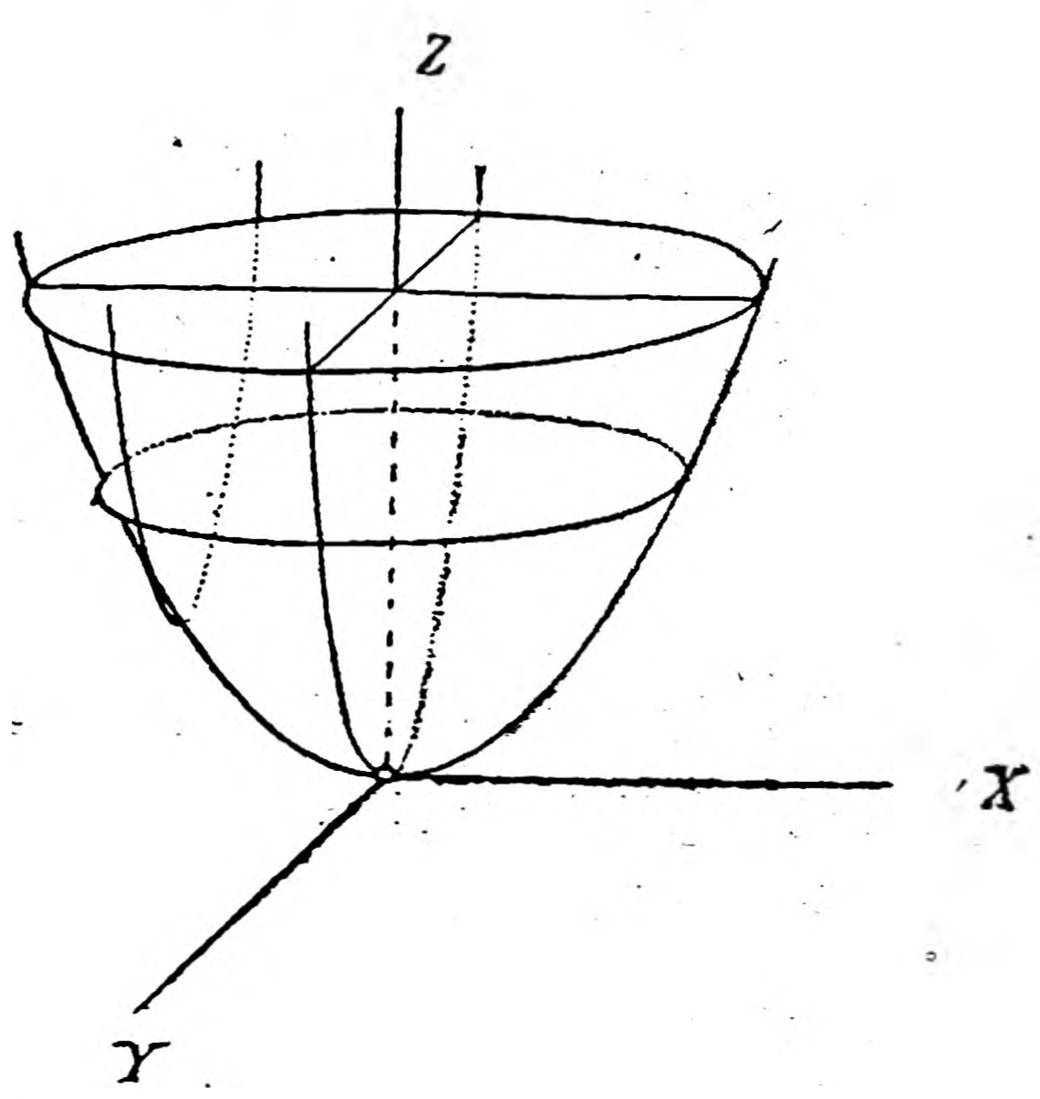
гдѣ $a'=\sqrt{2ph}$, $b'=\sqrt{2qh}$. Легко видѣть, что при $h>0$ уравненіе (3) опредѣляетъ дѣйствительный эллипсъ, при $h<0$—мнимый. Такимъ образомъ эллиптическій параболоидъ (1) расположенъ надъ плоскостью XY, касаясь ея въ началѣ координатъ. *Плоскости, параллельныя плоскости XY, даютъ въ сѣченіи съ эллиптическимъ параболоидомъ эллипсы* (мнимые или дѣйствительные).

Разсѣкая поверхность (1) плоскостью $x=k$, параллельной плоскости YZ, получимъ уравненіе проекціи кривой сѣченія на плоскость YZ:

$$\frac{y^2}{q}=2z-\frac{k^2}{p}, \text{ или } y^2=2q\left(z-\frac{k^2}{2p}\right) \ldots\ldots\ldots (4)$$

Это уравненіе опредѣляетъ параболу. Тѣ же результаты получимъ, разсѣкая плоскостью, параллельною плоскости XZ, такъ какъ координаты x и y входятъ въ уравненіе (1) равноправно. Такимъ образомъ *плоскости, параллельныя координатнымъ плоскостямъ XZ и YZ, разсѣкаютъ эллиптическій параболоидъ по параболамъ.*

Видъ эллиптическаго параболоида данъ на черт. 69.



Фиг. 69.

Если $p=q$, то уравненіе (1) $\frac{x^2+y^2}{p}=2z$ опредѣляетъ *параболоидъ вращенія.*

§ **13. Форма гиперболическаго параболоида.** Уравненіе гиперболическаго параболоида (§ 2) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

С ѣ ч е н і е к о о р д и н а т н ы м и п л о с к о с т я м и. При $z=0$ мы получимъ: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0$ или $\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=0.$

Слѣдовательно, *плоскость XY касается поверхности (1) въ началѣ координатъ, пересѣкаясь вмѣстѣ съ тѣмъ съ ней по двумъ прямымъ.* Аналогично *плоскости YZ и ZX* [1]) *пересѣкаютъ поверхность (1) по параболамъ* $x=0$, $y^2=-2qz$ и $y=0$, $x^2=2pz$; *осью ихъ служитъ ось Z, при чемъ въ первомъ случаѣ парабола простирается въ безконечность въ отрицательномъ направленіи оси Z, а во второмъ—въ положительномъ.*

С ѣ ч е н і е п л о с к о с т я м и п а р а л л е л ь н ы м и к о о р д и н а т н ы м ъ. Возьмемъ плоскость $z=h$. Такъ же, какъ и въ § 12, получимъ

[1]) Они служатъ главными діаметральными плоскостями, ось Z осью, а нача л координатъ вершино гйбоdлическаго параболоида (1).

уравненіе проекціи на плоскость XY линіи пересѣченія этой плоскости съ поверхностью (1): $\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1$. . . . . (2)

Это—уравненіе гиперболы, имѣющей своей дѣйствительной осью или ось X или ось Y, смотря по тому, что $h>0$ или $h<0$ [1]. Слѣдовательно, *плоскости, параллельныя плоскости XY, пересѣкаютъ гиперболическій параболоидъ по гиперболамъ*, дѣйствительныя оси которыхъ параллельны оси X или оси Y.

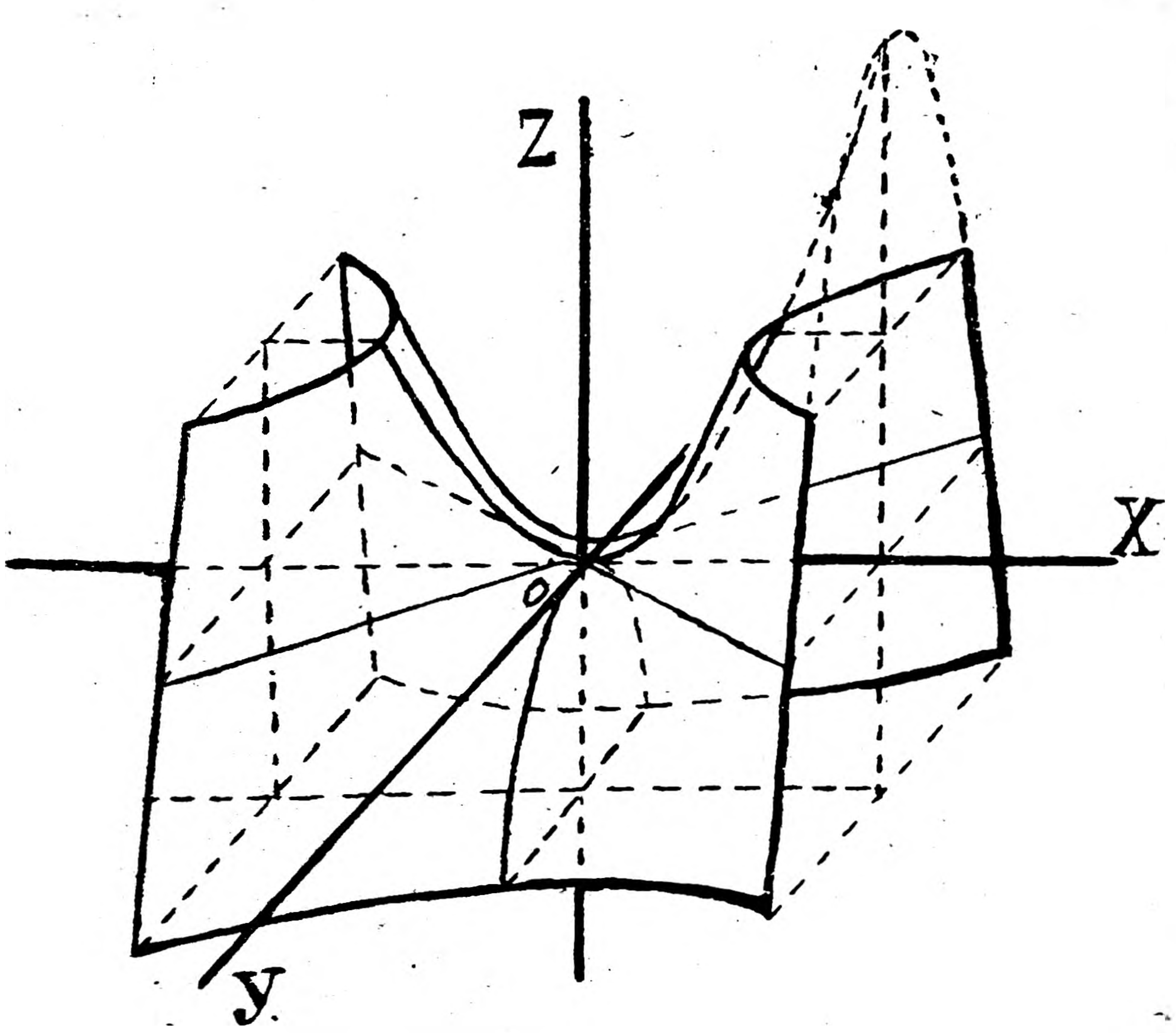
Плоскость $x=k$ пересѣкаетъ параболоидъ (1) по кривой, уравненіе проекціи которой на плоскость YZ представится въ такомъ видѣ:

$$-\frac{y^2}{q}=2z-\frac{k^2}{p}, \text{ или } y^2=-2q\left(z-\frac{k^2}{2p}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

По прежнему, получимъ что *плоскости, параллельныя плоскости YZ, пересѣкаются съ гиперболическимъ параболоидомъ по параболамъ* (3); *эти параболы имѣютъ своими осями прямыя, параллельныя оси Z, и простираются въ безконечность въ отрицательномъ направленіи этой оси.* Проекція на плоскость XZ кривой сѣченія плоскости $y=g$ имѣетъ уравненіемъ:

$$\frac{x^2}{p}=2z+\frac{g^2}{q}, \text{ или } x^2=2p\left(z+\frac{g^2}{2q}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Слѣдовательно, *плоскости, параллельныя плоскости XZ, разсѣкаютъ гиперболическій параболоидъ по параболамъ*, имѣющимъ осями прямыя, параллельныя оси Z, простирающимся въ безконечность въ положительномъ направленіи этой оси. Видъ гиперболическаго параболоида такой, какъ на черт. 70.



Фиг. 70.

§ 14. Линейчатыя поверхности 2-го порядка. Поверхность, которая можетъ быть образована движеніемъ прямой линіи, называется *линейчатой*, прямая же линія — *прямолинейной образующей.* Кромѣ конуса и цилиндра только однополостный гиперболоидъ и гиперболическій параболоидъ имѣютъ сплошныя полости, уходящія въ безконечность въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ; только на этихъ поверхностяхъ слѣдуетъ искать прямолинейныя образующія.

[1]) Случай $h=0$, т.-е. случай сѣченія поверхн. (21) коорд. плоскостью XY, мы разсмотрѣли выше.

Уравненіе однополостнаго гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

можно написать такъ: $\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \quad \ldots (1')$

или, дѣля обѣ части на $\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$, такъ: $\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}}=\dfrac{1-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}} \quad \ldots (2)$

Пересѣчемъ гиперболоидъ (2) плоскостью

$$\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}}=l_1 \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

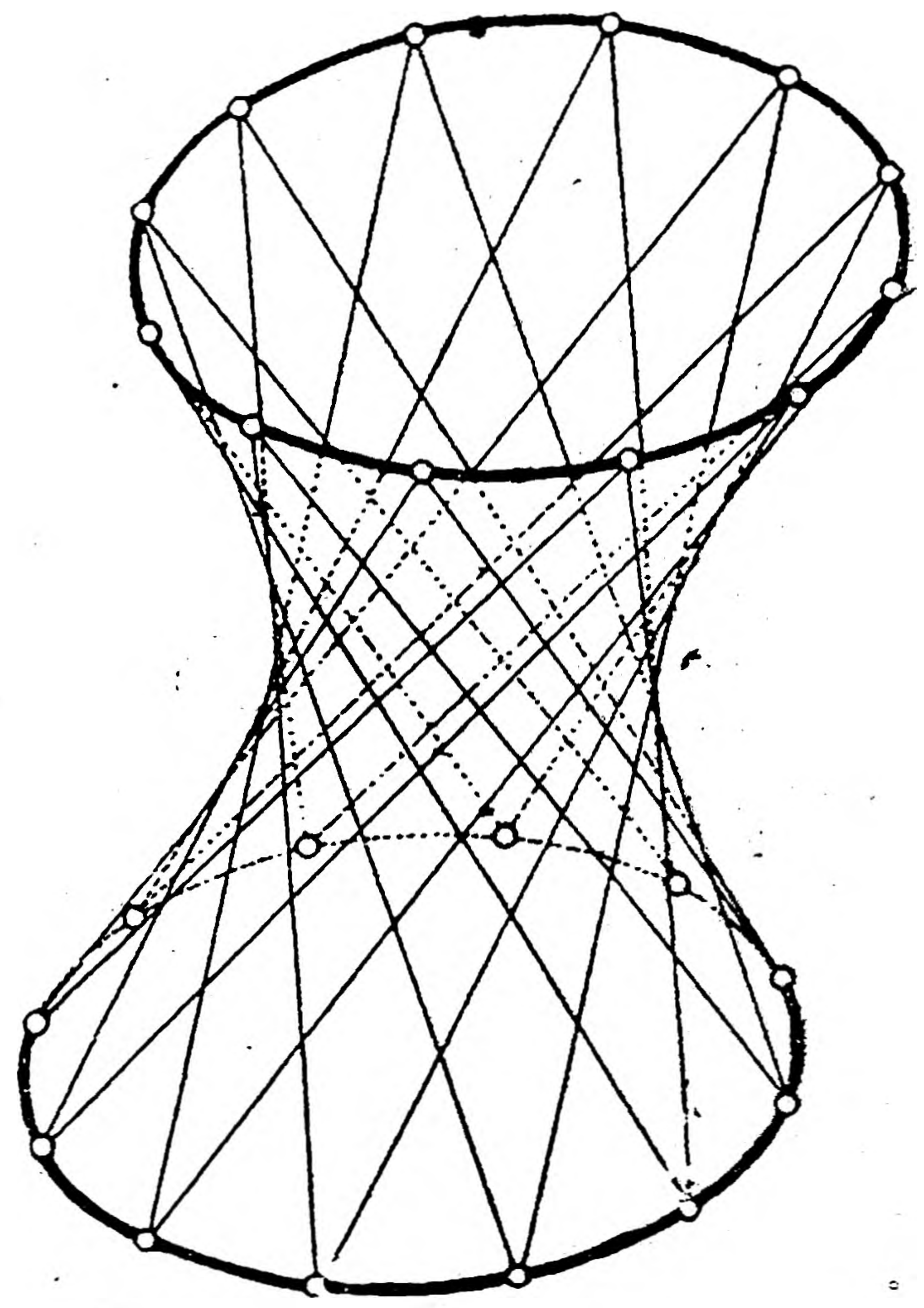
Линія сѣченія опредѣляется уравненіями (2) и (3) или (3) и

$$l_1=\dfrac{1-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Освобождаясь отъ знаменателя, получимъ систему уравненій

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=l_1\left(1+\frac{y}{b}\right) \quad \ldots (3')$$

$$l_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4')$$



Фиг. 71.

Эти уравненія первой степени; слѣдовательно, они опредѣляютъ прямую. Она лежитъ на однополостномъ гиперболоидѣ (1). Если l_1 произвольный параметръ, то уравненія (3') и (4') опредѣляютъ систему прямыхъ, расположенныхъ на однополостномъ гиперболоидѣ. Такимъ же образомъ, дѣля обѣ части уравненія (1') на $\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$ и пересѣкая плоскостью

$$\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}}=l_2$$

получимъ уравненіе второй системы прямолинейныхъ образующихъ гиперболоида (1) (см. фиг. 71):

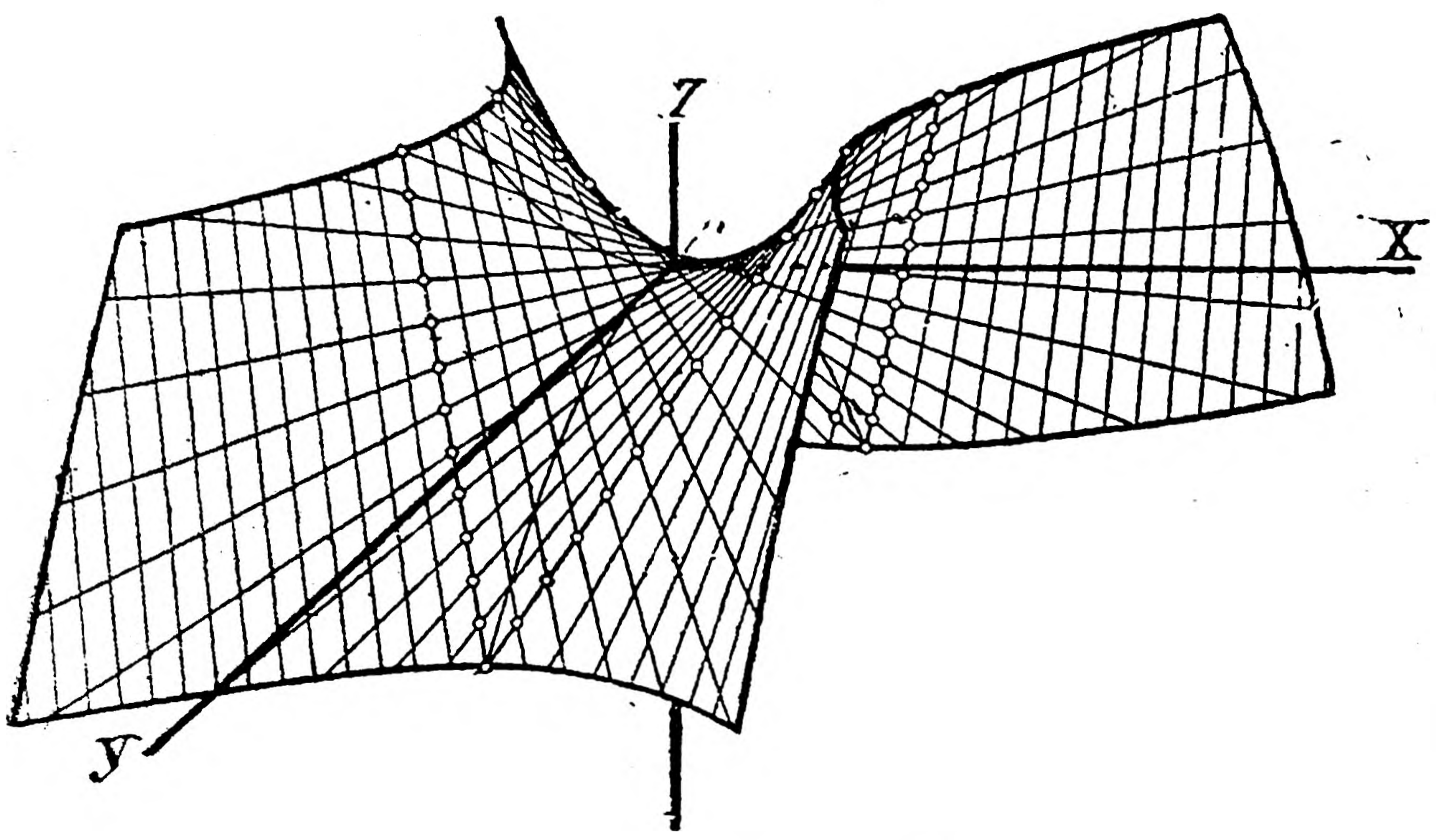
$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=l_2\left(1-\frac{y}{b}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

$$l_2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

Уравненіе гиперболическаго параболоида (см. § 13) преобразуемъ такъ: $\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{q}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z \ldots \ldots \ldots (7)$

Плоскость $$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=l_1, \ldots \ldots \ldots (8)$$

пересѣкаетъ параболоидъ (7) по прямой, опредѣляемой уравненіями (7) и (8) или (8) и $$l_1\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z \ldots \ldots \ldots (9)$$



Фиг. 72.

Уравненія (8) и (9), гдѣ l_1 неопредѣленный параметръ, опредѣляютъ систему прямолинейныхъ образующихъ гиперболическаго параболоида (см. фиг. 72). Вторая система прямолинейныхъ образующихъ этой поверхности опредѣляется уравненіями:

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=l_2 \ldots (10)$$

$$l_2\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z \ldots \ldots \ldots (11)$$

Уравненіе (8) показываетъ, что прямолинейныя образующія первой системы параллельны одной и той же плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0; \ldots \ldots \ldots (12)$$

прямолинейныя образующія второй системы параллельны плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0. \ldots \ldots \ldots (12')$$

Плоскости (12) и (12′) называются *направляющими* плоскостями гиперболическаго параболоида.

Въ случаѣ конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (6) уравненія (3′) и (4′), (5) и (6) преобразуются въ такія:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=l_1\frac{y}{b},\ l_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=-\frac{y}{b};\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=-l_2\frac{y}{b},\ l_2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\frac{y}{b}.$$

Если положить $l_1=-l_2$, то первая пара уравненій совпадетъ со второй, слѣдовательно *у конуса обѣ системы прямолинейныхъ образующихъ сливаются въ одну.*

Точно также и у *цилиндра 2-го порядка система прямолинейныхъ образующихъ единственна.* Въ самомъ дѣлѣ для эллиптическаго цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ уравненія (3′) и (4′), (5) и (6) преобразуются въ такія:

$$\frac{x}{a}=l_1\left(1+\frac{y}{b}\right),\ l_1\frac{x}{a}=1-\frac{y}{b};\quad \frac{x}{a}=l_2\left(1-\frac{y}{b}\right),\ l_2\frac{x}{a}=1+\frac{y}{b}.$$

Соотвѣтственныя уравненія совпадаютъ, если положить $l_1=\frac{1}{l_2}$. Въ случаѣ гиперболическаго цилиндра $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ прямолинейныя образующія опредѣляются уравненіями $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=l$, $l\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1$.

Въ случаѣ параболическаго цилиндра $y^2=2qz$ уравненія (8) и (9), (10) и (11) переходятъ въ такія:

$$\frac{y}{\sqrt{q}}=l_1,\quad l_1\frac{y}{\sqrt{q}}=2z;\quad \frac{y}{\sqrt{q}}=l_2,\ l_2\frac{y}{\sqrt{q}}=2z,$$

т.-е. опять обѣ системы прямолинейныхъ образующихъ сливаются въ одну.

Теорема. *Черезъ каждую точку однополостнаго гиперболоида, равно какъ и черезъ каждую точку гиперболическаго параболоида, проходятъ двѣ прямолинейныя образующія, по одной отъ каждой системы.*

Каждой точкѣ (x, y, z) однополостнаго гиперболоида или гиперболическаго параболоида соотвѣтствуетъ одно значеніе параметра l_1, опредѣляемое любымъ изъ уравненій (3') или (4') и одно значеніе параметра l_2. Точно такъ же одному значенію параметра l_1 соотвѣтствуетъ единственная прямолинейная образующая первой системы и одному значенію параметра l_2 соотвѣтствуетъ единственная прямая второй системы прямолинейныхъ образующихъ.

Отсюда слѣдуетъ, что *прямолинейныя образующія одной и той же системы никогда не пересѣкаются.*

§ 15. **Круговыя сѣченія поверхностей 2-го порядка.** Такъ какъ окружность есть частный случай эллипса, то круговыя сѣченія слѣдуетъ искать только на тѣхъ поверхностяхъ 2-го порядка, которыя допускаютъ въ сѣченіи эллипсы. Таковы *всѣ центральныя поверхности*, а также *эллиптическіе параболоидъ и цилиндръ.*

Возьмемъ уравненіе вида $Ax^2+Cy^2+Fz^2=2Iz+K$; . . . . . . (1) давая A, C, F, I и K соотвѣтственныя частныя значенія, мы примѣнимъ затѣмъ полученные результаты къ каждой изъ поверхностей, допускающихъ сѣченія по эллипсу.

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ уравненія (1) $m(x^2+y^2+z^2)$, гдѣ m произвольное число:

$$(A+m)x^2+(C+m)y^2+(F+m)z^2=(x^2+y^2+z^2)m+2Iz+K. \quad . \ . \ . \ (1')$$

Выберемъ теперь m такъ, чтобы лѣвая часть уравненія (1') разлагалась на множители. Этого мы достигнемъ, если одинъ изъ коэффиціентовъ трехчлена будетъ равенъ нулю, а два другихъ будутъ разныхъ знаковъ; напр. $A+m=0$, $C+m=-\alpha^2$, $F+m=\beta^2$.

Уравненіе поверхности (1) представится тогда въ видѣ

$$(\beta z+\alpha y)(\beta z-\alpha y)=(x^2+y^2+z^2)m+2Iz+K \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Пересѣчемъ поверхность (2) плоскостью $\beta z+\alpha y=l_1$ . . . . (3)

Линія сѣченія опредѣляется совокупностью уравненій (2) и (3) или (3) и

$$l_1(\beta z-\alpha y)=(x^2+y^2+z^2)m+2Iz+K \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4$$

Уравненіе (4) есть уравненіе сферы (см. гл. IX § 6). Слѣдовательно, линія, опредѣляемая уравненіями (3) и (4), какъ линія сѣченія шара (4) плоскостью (3), есть кругъ. При произвольномъ l_1 уравненія (3) и (4) опредѣлятъ систему круговыхъ сѣченій. Всѣ они лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ. Другая система опредѣляется совокупностью уравненій

$$\beta z - \alpha y = l_2, \qquad (5)$$

$$(\beta z + \alpha y)\, l_2 = (x^2 + y^2 + z^2)m + 2Iz + K \qquad (6)$$

Въ частности, если круговое сѣченіе обращается въ точку, то точка эта называется *точкой округленія.*

У эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, гдѣ $a > b > c$, надо положить

$$\frac{1}{a^2} + m = -\alpha^2,\ \frac{1}{b^2} + m = 0,\ \frac{1}{c^2} + m = \beta^2,\ I = 0,\ K = 1$$

и круговыя сѣченія лежатъ въ плоскостяхъ

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x + \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}z = l_1,\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x - \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}z = l_2$$

У гиперболоидовъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ и у конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, гдѣ $a > b$, полагаемъ

$$\frac{1}{a^2} + m = 0,\ \frac{1}{b^2} + m = \alpha^2,\ -\frac{1}{c^2} + m = -\beta^2,\ I = 0,\ K = \pm 1 \text{ или } K = 0.$$

Круговыя сѣченія даютъ плоскости

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y + \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z = l_1,\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y - \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z = l_2.$$

У эллиптическаго параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, гдѣ $p > q$ полагаемъ $\frac{1}{p} + m = 0,\ \frac{1}{q} + m = \alpha^2,\ m = -\beta^2,\ I = 1,\ K = 0.$

Круговыя сѣченія лежатъ въ плоскостяхъ

$$\sqrt{\frac{p-q}{q}}\,y + z = l_1,\ \sqrt{\frac{p-q}{q}}\,y - z = l_2.$$

У эллиптическаго цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, гдѣ $a > b$ полагаемъ

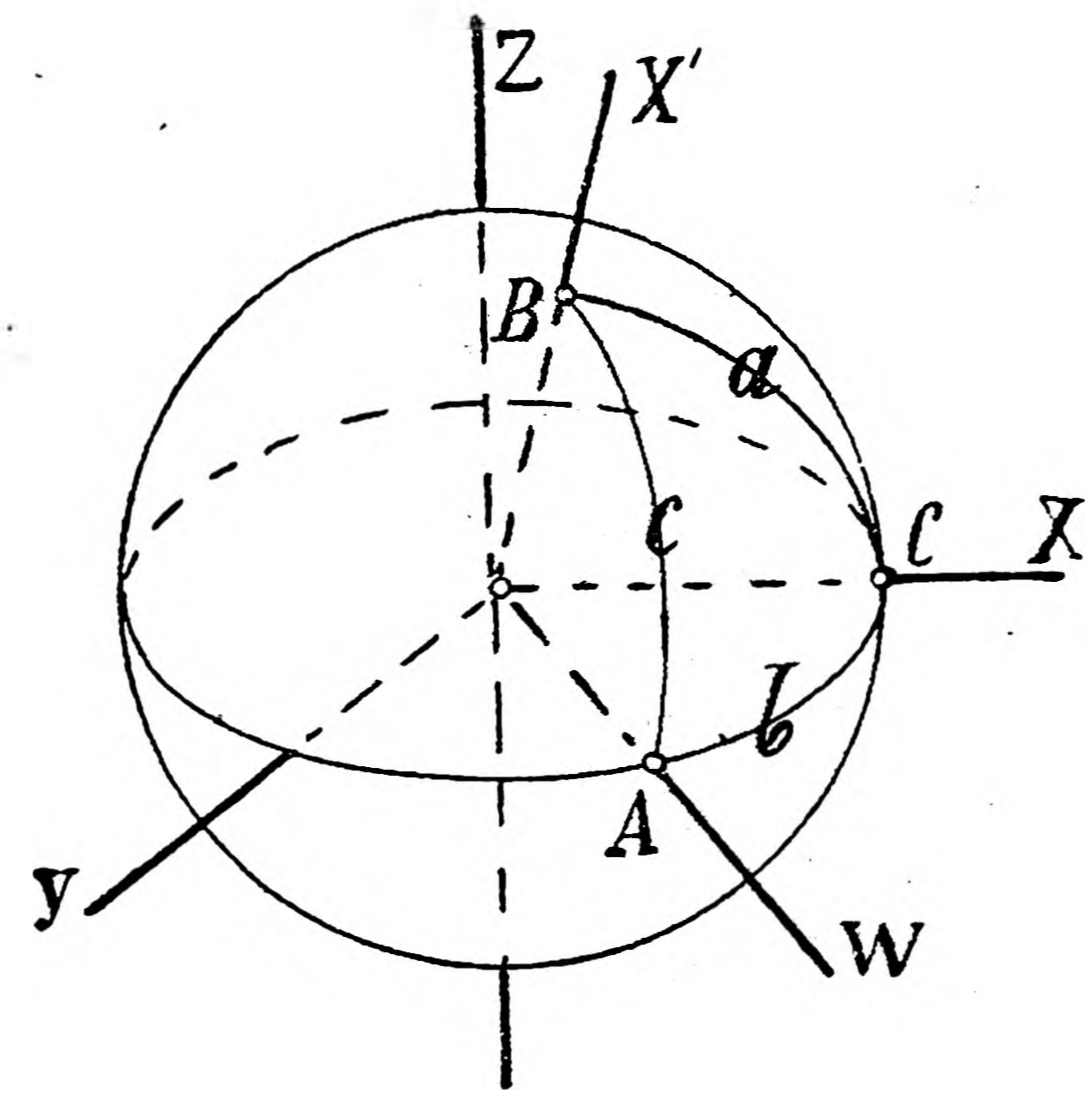
$$\frac{1}{a^2} + m = 0,\ \frac{1}{b^2} + m = \alpha^2,\ m = -\beta^2,\ I = 0,\ K = 1$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y + z = l_1,\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y - z = l_2.$$

Въ случаѣ поверхности вращенія $\alpha = 0$. Слѣдовательно, *у поверхности вращенія 2-го порядка обѣ системы круговыхъ сѣченій сливаются въ одну.*

Приложенiе. Основныя понятiя сферической тригонометрiи.

При установленiи соотношенiй между углами въ пространствѣ приходится пользоваться формулами, связующими элементы сферическаго треугольника. Сферическимъ треугольникомъ называется часть поверхности шара, ограниченная тремя дугами большихъ круговъ; дуги эти называются сторонами треугольника, а точки пересѣченiя дугъ—вершинами его.



Фиг. 73.

Соединимъ вершины треугольника ABC (см. фиг. 73) съ центромъ шара O [1]). Плоскiе углы получившагося при этомъ треграннаго угла $OABC$ измѣряются соотвѣтственными сторонами треугольника. Если въ какой-либо вершинѣ треугольника, напр. A, провести касательныя къ пересѣкающимся въ ней сторонамъ его AB и AC, то получившiйся при этомъ линейный уголъ соотвѣтствующаго двуграннаго угла $CAOB$ называется угломъ сферическаго треугольника. Отдѣлъ тригонометрiи, посвященный установленiю соотношенiй между элементами сферическаго треугольника, называется сферической тригонометрiей.

Въ виду того, что плоскiе и двугранные углы трегранного угла $OABC$ измѣряются соотвѣтственно сторонами и углами сферическаго треугольника ABC, мы можемъ выписать цѣлый рядъ соотвѣтствующихъ другъ другу теоремъ:

1. Каждый плоскiй уголъ трегранняго угла менѣе суммы двухъ другихъ.
2. Сумма плоскихъ угловъ трегранного угла менѣе четырехъ прямыхъ.
3. Каждый плоскiй уголъ трегранного угла меньше двухъ прямыхъ.
4. Сумма двугранныхъ угловъ трехграннаго менѣе шести прямыхъ и болѣе двухъ прямыхъ.
5. Существуетъ трегранный уголъ, называемый *дополнительнымъ* даннаго, каждый плоскiй и каждый двугранный уголъ котораго дополняютъ до двухъ прямыхъ соотвѣтственный двугранный и соотвѣтственный плоскiй даннаго.

I. Каждая сторона сферическаго треугольника менѣе суммы двухъ другихъ.

2. Сумма сторонъ сферическаго треугольника менѣе окружности большого круга.

3. Каждая сторона сферическаго треугольника меньше полуокружности большого круга.

4. *Сумма угловъ сферическаго треугольника* менѣе шести прямыхъ и *болѣе двухъ прямыхъ*.

5. Существуетъ сферическiй треугольникъ называемый полярнымъ или дополнительнымъ даннаго, каждая сторона и каждый уголъ котораго дополняютъ до π соотвѣтственный уголъ и соотвѣтств. сторону даннаго.

Выведемъ теперь основныя формулы сферическаго треугольника и для этого примемъ за оси X, X' и узловую линiю (см. гл. IX § 4) соотвѣтственно радiусы OC, OB и OA. Изъ сравненiя формулъ (2) и (7) гл. IX § 4 получаемъ:

$$\cos\alpha_1=\cos\varphi\,\cos\psi-\sin\varphi\,\sin\psi\,\cos\vartheta$$

или

$$\cos a=\cos b\,\cos c+\sin b\,\sin c\,\cos A \qquad \text{(I)},$$

такъ какъ

$$\alpha_1=a,\ \varphi=b,\ \psi=c,\ \vartheta=\pi-A.$$

Принимая во вниманiе теорему 5, получаемъ:

$$\cos A=-\cos B\,\cos C+\sin B\,\sin C\,\cos a \qquad \text{(II)}.$$

---

[1]) Точка O на фиг. 73 пропущена.

Сложимъ и вычтемъ почленно равенства (I) и

$$\cos b=\cos a\ \cos c+\sin a\ \sin c\ \cos B \ldots\ldots \quad (\mathrm{I}'):$$

$$\cos a+\cos b=\cos c\,(\cos b+\cos a)+\sin c\,(\sin b\ \cos A+\sin a\ \cos B),$$
$$\cos a-\cos b=\cos c\,(\cos b-\cos a)+\sin c\,(\sin b\ \cos A-\sin a\ \cos B),$$

или
$$(\cos a+\cos b)\,(1-\cos c)=\sin c\,(\sin b\ \cos A+\sin a\ \cos B),$$
$$(\cos a-\cos b)\,(1+\cos c)=\sin c\,(\sin b\ \cos A-\sin a\ \cos B).$$

Умножаемъ почленно эти два равенства.

$$(\cos^2 a-\cos^2 b)\,(1-\cos^2 c)=\sin^2 c\,(\sin^2 b\ \cos^2 A-\sin^2 a\ \cos^2 B),$$

или
$$-\sin^2 a+\sin^2 b=\sin^2 b-\sin^2 b\ \sin^2 A-\sin^2 a+\sin^2 a\ \sin^2 B,$$

откуда
$$\sin^2 a\ \sin^2 B=\sin^2 b\ \sin^2 A.$$

Слѣдовательно, на основанiи теоремы (3),

$$\sin a\ \sin B=\sin b\ \sin A.$$

Такимъ образомъ,
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}\ldots\ldots \quad (\mathrm{III})$$

Въ случаѣ прямоугольнаго сферическаго треугольника, когда $A=\frac{\pi}{2}$, формулы (I), (II) и (III) переходятъ соотвѣтственно въ такiя

$$\cos a=\cos b\ \cos c \ldots\ldots \quad (1)$$
$$\cos a=\operatorname{ctg} B\ \operatorname{ctg} C \ldots\ldots \quad (2)$$
$$\sin a=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}\ldots\ldots \quad (3)$$

ОГЛАВЛЕНІЕ.