

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ДВУХЪ И ТРЕХЪ ИЗМѢРЕНІЙ.

Б О Ч И Н Е Н І Е

М. Е. Ващенко-Захарченко,

Сверхштатнаго Ординарнаго Профессора Императорскаго Университета
Св. Владиміра.



КІЕВЪ.

Въ Типографіи Императорскаго Университета Св. Владиміра.

1887.

524026

Установлено
"Відомості для видачі університету"
Ім. І. І. Ващенко

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра,
15 Ноября 1886 года.

Ректоръ *Н. Ренненкампфъ*.

Продается въ книжныхъ магазинахъ Н. Я. Оглобина:

Кіевъ, Крещатикъ, № 33.

| С.-Петербургъ, Малая Садовая, № 4.

Предисловіе.

До XVII столѣтія не существовало никакого общаго метода для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ, а въ XVI в., когда были положены первыя основы алгебры, она была приложена и къ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ, но въ каждомъ отдѣльномъ вопросѣ, величины данныя и искомыя обозначались буквами и по условіямъ задачи составлялись уравненія, которыя затѣмъ рѣшались алгебраическими способами, въ результатѣ получалось алгебраическое выраженіе, которое требовалось построить геометрически. Смотря по расположенію данныхъ въ задачѣ, такое построеніе бываетъ возможно или невозможно, поэтому и задача, хотя и рѣшена комбинаціей алгебраическихъ символовъ, но конкретнаго значенія не представляетъ. Стараясь истолковать геометрически всякое алгебраическое выраженіе, дающее рѣшеніе геометрической задачи, геометры нашли геометрическое значеніе отрицательныхъ рѣшеній и предложили нѣсколько способовъ для геометрическаго представленія мнимыхъ — воображаемыхъ количествъ. Геометрическое значеніе отрицательныхъ количествъ и разсмотрѣніе мнимыхъ результатовъ, какъ рѣшенія, хотя не конкретныхъ представленій, но отвлеченныхъ, дало такую общность изслѣдованіямъ, которой древніе геометры не могли достигнуть и это потому, что всѣ ихъ разсужденія происходили на чертежѣ, символами своихъ количественныхъ мыслей они не выражали, поэтому они не пришли ни къ отрицательнымъ, ни къ мнимымъ рѣшеніямъ, которыя дали возможность включить въ одно выраженіе всѣ случаи расположенія данныхъ въ задачѣ; случаи эти древніе геометры должны были разсматривать и доказывать отдѣльно.

Введеніе мнимыхъ выраженій дало возможность геометрамъ выражать предложенія между геометрическими данными, когда эти данныя такъ расположены, что предложеніе конкретно перестаетъ существовать — глазъ не видитъ, но отвлеченная комбинація символовъ не перестаетъ

выражать свойство исчезнувшее для глаза, являющееся опять въ дальнѣйшихъ комбинаціяхъ конкретно въ видѣ предложенія, которое безъ этого могло-бы остаться неизвѣстнымъ. Безъ мнимыхъ—воображаемыхъ количествъ многія предложенія въ геометріи не было-бы возможности доказать.

Такая частность приемовъ для рѣшенія геометрическихъ задачъ и доказательствъ предложеній алгебраическимъ путемъ происходила отъ того, что не имѣли способовъ выражать уравненіями основныхъ элементовъ геометріи точки и прямой, точки и плоскости. Что такое точка? Обыкновенно точку опредѣляютъ, говоря, *что это есть геометрическое мѣсто въ пространствѣ, неимѣющее измѣренія*. Затѣмъ, если примемъ, что это опредѣленіе даетъ возможность составить отчетливое понятіе объ этомъ элементѣ, то прямую опредѣляютъ, говоря, *что прямая есть такая линія, которая вполне опредѣляется двумя данными точками*; изъ этого опредѣленія непосредственно слѣдуетъ: что двѣ прямыя пересѣкаются только въ одной точкѣ. Если теперь замѣтимъ, что въ силу постулата Евклида, двѣ прямыя линіи на плоскости всегда пересѣкаются въ одной точкѣ, конечной или бесконечно-удаленной, то мы будемъ имѣть слѣдующую взаимность между точкою и прямою: *прямая опредѣляется двумя точками, а точка двумя прямыми*. Изъ этого видимъ, что въ отвлеченномъ опредѣленіи, между точкою и прямою нѣтъ разницы, разница состоитъ въ ихъ конкретномъ представленіи, которое не имѣетъ никакого значенія, такъ какъ всѣ дальнѣйшія изслѣдованія вытекаютъ изъ отвлеченнаго опредѣленія, а не изъ конкретнаго ихъ представленія. Такая же взаимность существуетъ между точкою и плоскостью въ пространствѣ.

Итакъ, какой-бы ни взяли изъ этихъ двухъ элементовъ за основной, другой будетъ имѣть опредѣляться тождественнымъ выраженіемъ въ обоихъ случаяхъ, слѣдовательно эти два элемента мы должны принимать какъ данныя — извѣстные, ясно представляемые. Изъ сказаннаго также видимъ, что необходимо два элемента въ плоскости или три элемента въ пространствѣ одного рода для опредѣленія одного элемента другого рода—двѣ точки для прямой и двѣ прямыя для точки, три точки для плоскости и три плоскости для точки, слѣдовательно, если-бы можно было одинъ изъ элементовъ—точку или прямую, или плоскость, выразить уравненіемъ, то другой выразится двумя уравненіями. Изъ такой зависимости между элементами — точкою и прямою на плоскости, точкою и плоскостью въ пространствѣ, вытекъ методъ двойственности, обобщившій геометрическое значеніе алгебраическихъ уравненій.

Первая мысль общаго алгебраическаго способа, для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ и изслѣдованій вообще, принадлежитъ французскому

философу и геометру Декарту, который въ своей „Геометріи“, въ 1637 г., далъ первыя основы такого метода изслѣдованій и приложилъ его къ коническимъ сѣченіямъ.

Методъ Декарта, извѣстный въ настоящее время подъ именемъ Аналитической Геометріи, даетъ возможность выразить уравненіемъ между двумя переменными количествами, всякую плоскую кривую, если ея свойство присуще каждой ея точкѣ извѣстно, и, обратно, каждое уравненіе съ двумя переменными количествами, представить геометрической фигурой. Онъ даетъ способъ выразить уравненіемъ между тремя переменными всякую поверхность въ пространствѣ, если извѣстно свойство каждой ея точки, и обратно, каждое уравненіе между тремя переменными представляетъ поверхность. Такимъ образомъ вмѣсто чертежа геометръ имѣетъ передъ глазами рядъ уравненій, въ которыхъ неявно включены всѣ свойства геометрическихъ фигуръ, подлежащихъ изслѣдованію, всѣ разсужденія обращаются въ комбинацію отвлеченныхъ алгебраическихъ законовъ, синтезъ древнихъ геометровъ потерялъ свою силу, напряженная дѣятельность мышленія и воображенія замѣняется алгебраическими преобразованіями одного выраженія въ другое, непрерывная цѣпь среднихъ разсужденій обращается въ механическія преобразованія, такъ что результатъ изслѣдованій является, какъ бы полученнымъ изъ хаоса и часто въ такой сложной комбинаціи алгебраическихъ символовъ, что не представляется возможности выяснить его геометрическое значеніе. Вотъ почему Ньютонъ, Маклоренъ, Лейбницъ и другіе геометры свои изслѣдованія по новому методу переводили на синтезъ древнихъ геометровъ, такъ какъ считали новый методъ механическимъ. Но такой недостатокъ былъ устраненъ, по мѣрѣ развитія этого замѣчательнаго метода, которому обязаны своимъ развитіемъ механика, физика и астрономія.

Усовершенствованія координатнаго метода Декарта были сдѣланы введеніемъ понятія *двойственности* и введеніемъ метода проэкцій. Двойственность состоитъ въ томъ, что на каждое уравненіе можно смотрѣть съ двухъ точекъ зрѣнія: какъ на выраженіе перемѣщенія точки на плоскости или въ пространствѣ, или какъ на перемѣщеніе прямой на плоскости или плоскости въ пространствѣ. Такой взглядъ на уравненіе даетъ возможность переходить отъ предложеній относительно точекъ къ предложеніямъ относительно прямой или плоскости въ пространствѣ, и обратно. Такое воззрѣніе на аналитическое уравненіе дало необыкновенную общность методу Декарта. Какъ частный случай двойственности представляется методъ взаимныхъ поляръ, такъ изящно разработанный Понселе. Методъ проэкцій, въ которомъ переходятъ отъ предложеній относительно точекъ къ предложеніямъ также относительно точекъ, отъ предложеній относительно пря-

мой и плоскости къ предложеніямъ также относительно прямой и плоскости. Этотъ послѣдній методъ достигъ въ настоящее время такого совершенства, что спорить съ методомъ Декарта и сдѣлался совершенно независимымъ отъ этого послѣдняго.

Въ методѣ Декарта трудно, иногда, бываетъ усмотрѣть геометрическое значеніе извѣстнаго результата, выраженнаго комбинаціей алгебраическихъ символовъ, а тѣмъ болѣе построить такое выраженіе. Это заставило геометровъ нашего столѣтія обратить вниманіе на чисто геометрическіе приемы, слѣдствіемъ чего было появленіе сочиненій подъ различными названіями, каковы: „Высшая Геометрія“ (Géométrie supérieure, Höhere Geometrie), „Новая Геометрія“ (Modern Geometry, Neuere Geometrie), „Геометрія положенія“ (Géométrie de position, Geometrie der Lage), и тому подобныя названія. Въ настоящее время наука эта извѣстна подъ названіемъ „Проективной Геометріи“ въ силу того, что она основана на методѣ проэкцій. Изъ нея алгебраическіе приемы совершенно устранены. До того просты методы проективной геометріи, что Штаудтъ написалъ свое замѣчательное сочиненіе „Geometrie der Lage“, предполагая даже незнакомство читателя съ элементарной геометріей. Самыя трудныя задачи и свойства фигуръ на плоскости и въ пространствѣ не ускользаютъ отъ этого метода, который имѣетъ громадное техническое приложеніе: въ перспективѣ, архитектурѣ, механикѣ и вообще во всѣхъ техническихъ отрасляхъ знанія. Предложенія служащія основаніемъ метода проэкцій „ангармонія и гармонія“ мы уже встрѣчаемъ въ сочиненіяхъ Апполонія Пергскаго, Палпа, Дезарга, а полное развитіе—проективнаго метода, хотя не чисто геометрическое, дали Шаль, Понселе, Штейнеръ, Мёбіусъ и другіе, но ту чисто геометрическую форму, о которой мы упоминали, этому методу далъ Штаудтъ. Изученіе этого метода рядомъ съ методомъ Декарта даетъ ясное пониманіе весьма сложныхъ алгебраическихъ выраженій. Мы выше сказали, что Штаудтъ написалъ свою „Geometrie der Lage“ не предполагая даже знакомства читателя съ „Началами“ Евклида, поэтому элементарный курсъ проективной геометріи въ начальныхъ техническихъ школахъ принесъ бы несомнѣнную пользу будущимъ практическимъ техникамъ.

Затѣмъ введенъ былъ въ Аналитическую Геометрію способъ сокращеннаго обозначенія уравненій прямой и точки въ нормальныхъ формахъ, который собственно есть ничто иное, какъ неявный переходъ отъ одной системы координатъ къ другой. Съ помощью его часто избѣгаютъ весьма сложныхъ вычисленій и преобразованій.

Наконецъ введеніе трилинейной и тетраэдрической системъ координатъ дало такую общность координатному методу Декарта, что этотъ послѣдній сдѣлался частнымъ случаемъ трилинейнаго и тетраэдрическаго.

Скажу теперь нѣсколько словъ о цѣли и содержаніи настоящаго сочиненія. Основаніемъ его послужили лекціи, читанныя мною въ Императорскомъ университетѣ св. Владиміра, которыя были разработаны по болѣе извѣстнымъ сочиненіямъ по Аналитической Геометріи, существующимъ въ западно-европейской математической литературѣ. Если сравнить курсы Аналитической Геометріи, написанные въ началѣ настоящаго столѣтія, какъ напр. курсъ Бурдона, съ курсами написанными въ послѣдніе годы, то легко видѣть ту громадную разницу, которая существуетъ между ними. Читая курсъ Аналитической Геометріи въ продолженіи болѣе двадцати лѣтъ и слѣдя постоянно за развитіемъ этой части математики я пополнялъ и свои лекціи тѣми методами, которые явились въ этотъ промежутокъ времени. Такимъ образомъ было написано настоящее сочиненіе, содержаніе котораго вкратцѣ привожу.

Прежде всего я предпосылаю историческій очеркъ развитія Аналит. Геом., начиная отъ Виета, т. е. съ XVI вѣка, до настоящаго времени, въ которомъ упоминаются всѣ почти сочиненія вышедшія въ этотъ трехсотлѣтній промежутокъ времени, при чемъ указывается на содержаніе сочиненій и что принадлежитъ каждому изъ авторовъ въ исторіи развитія этой отрасли математическихъ наукъ *). За историческимъ очеркомъ слѣдуетъ изложеніе содержанія самого предмета.

Все сочиненіе состоитъ изъ двухъ частей: въ первой части излагается Аналитическая Геометрія на плоскости, а во второй—въ пространствѣ. Вторая часть изложена кратче, такъ какъ въ сущности это есть повтореніе первой, только съ добавленіемъ третьей координаты; болѣе подробно изложены тѣ части ея, которыя существенно отличаются отъ Анал. Геом. на плоскости. Передаемъ вкратцѣ содержаніе отдѣльныхъ главъ.

Первая часть. Въ гл. I изложенъ методъ координатъ Декарта съ пояснительными, необходимыми впоследствии примѣрами, и на одномъ изъ нихъ дано понятіе о геометрическомъ мѣстѣ. Также дано представленіе о полярныхъ координатахъ, а въ концѣ помѣщены пояснительные примѣры. Въ гл. II излагается обстоятельно представленіе уравненіями геометрическихъ мѣстъ и показывается, какъ представляются уравненіями прямая линія и всѣ коническія сѣченія: эллипсъ, гипербола, парабола и кругъ, какъ частный случай эллипса. Далѣе показаны уравненія нѣсколькихъ кривыхъ третьей и четвертой степеней, каковы конхоида, циссоида и др., и наконецъ нѣсколько трансцендентныхъ кривыхъ. Въ гл. III изложено преобразование координатъ. Въ гл. IV показаны всѣ виды уравненія прямой и даны примѣры для поясненій. Въ гл. V и VI изложена двой-

*) Очеркъ этотъ былъ уже нами напечатанъ въ 1884 году, отдѣльною брошюрой; въ настоящее время мы его немного дополнили.

ственность координатъ; всѣ виды уравненія точки и примѣры. Въ гл. VII показанъ сокращенный способъ и его приложеніе къ прямой и точкѣ. Въ гл. VIII даны задачи на прямую линію и точку—геометрическія мѣста. Въ гл. IX и X изложены ангармоническія свойства рядовъ точекъ и связей прямыхъ линій, и вообще все то, что извѣстно въ настоящее время подъ именемъ проэктивной геометріи, но изложено аналитически. Въ гл. XI излагается значеніе и свойства однородныхъ уравненій. Гл. XII посвящена трилинейной системѣ координатъ. Въ гл. XIII дано геометрическое понятіе о инвариантахъ и ихъ значеніи въ геометріи. Въ гл. XIV изложены свойства кривыхъ втораго порядка и ихъ дѣленіе на классы; въ гл. XV изложено тоже, но съ точки зрѣнія двойственности. Въ гл. XVI подробно изложены свойства всѣхъ трехъ родовъ коническихъ сѣченій и приведены примѣры. Въ гл. XVII и XVIII подробно изложены свойства круга и системы круговъ; все это пояснено примѣрами. Въ гл. XIX изложены условія, при которыхъ уравненіе второй степени распадается на два линейные множителя и представляетъ пару прямыхъ линій. Въ гл. XX, XXI и XXII показаны условія пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій; ангармоническія ихъ свойства и инварианты системъ коническихъ сѣченій; послѣдняя изъ этихъ главъ заканчивается построеніемъ коническихъ сѣченій по даннымъ пяти условіямъ. Въ гл. XXIII и XXIV показаны геометрическіе методы взаимныхъ поляръ и проэктій; въ послѣдней изъ этихъ главъ въ концѣ показаны пересѣченія конуса плоскостью.

Вторая часть. Въ гл. XXV изложенъ методъ координатъ въ пространствѣ, при чемъ пояснено, что представляютъ уравненія съ тремя переменными, съ двумя и съ однимъ; въ этой же главѣ показано рѣшеніе нѣкоторыхъ существенныхъ вопросовъ. Въ гл. XXVI изложены свойства и всѣ виды уравненія плоскости. Въ гл. XXVII показаны свойства прямой, различные виды ея уравненій, и примѣры для различныхъ взаимныхъ положеній прямой и плоскости. Въ гл. XXVIII изложена двойственность координатъ въ пространствѣ и примѣры, какъ для прямой, такъ и для плоскости; показано значеніе уравненія съ тремя переменными съ точки зрѣнія двойственности. Гл. XXIX содержитъ сокращенный способъ и примѣры. Въ гл. XXX изложены: ангармонія, гармонія и инволюція связи плоскостей, а также примѣры. Въ гл. XXXI показано преобразование координатъ въ пространствѣ и система тетраэдрическихъ координатъ. Въ гл. XXXII и XXXIII изложены общія свойства поверхностей втораго порядка и второй степени, со стороны двойственности. Въ гл. XXXIV изложены роды поверхностей, ихъ дѣленіе на классы и признаки, по которымъ ихъ различаютъ. Въ гл. XXXVI показаны свойства центральныхъ поверхностей: эллипсоида, гиперболоида однополаго и двуполаго;

при этомъ приведены примѣры. Въ гл. XXXVII излагаются свойства поверхностей неимѣющихъ центра: эллиптической параболоидъ и гиперболическій параболоидъ. Гл. XXXVIII посвящена шару и системамъ шаровъ. Въ гл. XXXIX изложены общія понятія о фокусахъ поверхностей, поверхности софокусныя, эллиптическія координаты и примѣры. Наконецъ гл. XL, послѣдняя, содержитъ образованіе поверхностей вообще и образованныхъ движеніемъ прямой въ особенности, какъ напр. поверхности цилиндрическія, коническія, коноидальныя, косыя и развертывающіяся.

Таково вкратцѣ содержаніе изданнаго мною сочиненія. Изъ общаго содержанія отдѣльныхъ главъ видно, что оно содержитъ всѣ части университетскаго курса Анал. Геом., но въ дополненномъ видѣ. Книга моя, я надѣюсь, можетъ служить пособіемъ къ изученію Аналитической Геометріи и къ ознакомленію съ современнымъ состояніемъ этого отдѣла геометріи, т. е. въ томъ видѣ, какой она получила благодаря трудамъ наиболѣе извѣстныхъ геометровъ, каковы: Салмонъ, Гессе и Клебшъ. Классическое сочиненіе Салмона „Коническія сѣченія“ было мною переведено на русскій языкъ въ 1860 году. Въ настоящее время книга эта библиографическая рѣдкость. Къ тому же на русскомъ языкѣ была издана только Аналитическая Геометрія двухъ измѣреній. Издавая настоящій трудъ я имѣлъ въ виду пополнить этотъ пробѣлъ и надѣюсь, что книга моя принесетъ учащимся такую же пользу, какую принесло русское изданіе „Коническихъ сѣченій“ Салмона двадцать лѣтъ тому назадъ. Первоначально трудъ мой былъ дважды изданъ литографически въ 1883 и 1884 годахъ. Сдѣлавъ нѣкоторыя измѣненія и исправленія я рѣшился его напечатать.

При составленіи настоящаго сочиненія я пользовался, главнымъ образомъ, классическими трудами Салмона, сочиненіями Клебша, Гессе и прекраснымъ курсомъ Аналитической Геометріи, составленнымъ профессоромъ Лувенскаго университета Карнуа. Привожу ниже болѣе подробный перечень главныхъ пособій, которыми я пользовался при чтеніи лекцій въ университетѣ и при изданіи настоящаго сочиненія.

Baltzer, Analytische Geometrie. Leipzig, 1882, in-8.

Bourdon, Application de l'Algèbre à la Géométrie comprenant la géométrie analytique à deux et à trois dimensions. Paris, 4 ed. 1837 in-8.

Carnoy, Cours de Géométrie analytique, Vol. I. Géométrie plane; 3 ed. 1880, Paris, in-8.—Vol. II. Géométrie de l'espace; 3 ed. 1881, Paris, in-8.

Chasles, Traité de Géométrie supérieure. Paris, 1852, in-8.

Chasles, Traité des Sections coniques, 1-e partie. Paris, 1865, in-8.

Clebsch, Vorlesungen über Geometrie. Hrsg. v. Lindemann. Bd. I, Th. 1—2. Leipzig, 1875. Также французское изданіе: Leçons sur la Géométrie. T. I—III, Paris, 1879—80—83, in-8,

- Cremona, Elementi di geometria projectiva. Vol. I. Roma, 1873. in-8.
- Cremona, Introduzione ad una theoria geometrica delle Curve piane. Bologna, 1862, in-4.
- De Volson Wood, The elements of Coördinate Geometry in three parts. I. Cartesian Geometry, II. Quaternions, III. Modern Geometry. New edition. New-York. 1882, in-8.
- Hesse, Vorlesungen über die Analytische Geometrie der geraden Linie, des Punkts und des Kreises in der Ebene. Leipzig, 1865, in-8.
—3 Aufl., rev. von S. Gundelfinger. Leipzig, 1881, in-8.
- Hesse, Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raums. Leipzig, 1861, in-8.—3 Aufl. rev. von S. Gundelfinger. Leipzig, 1876, in-8.
- Hesse, Vier Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie. Leipzig, 1866, in-8.
- Hesse, Sieben Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig, 1874, in-8.
- Reye, Die Geometrie der Lage. Verträge von Dr. Th. Reye. 2 Aufl. Hannover, 1877—80, in-8.
- Salmon, A treatise on Conic Sections. 3 ed. London, 1855, in-8.
- Salmon, A treatise on Conic Sections. 6 ed. London, 1879, in-8.
- Salmon, Analytic Geometry of three dimensions. 3 ed. Dublin, 1874, in-8.
- Salmon, Treatise on the higher plane curves. 2 ed. Dublin, 1878, in-8.
- Стрекаловъ, Курсъ аналитической геометріи. Т. I. Кривыя перваго порядка и перваго класса. СПБ. 1884, in-8.

Въ заключеніе считаю долгомъ принести искреннюю благодарность Совѣту Императорскаго университета св. Владиміра за пособіе, оказанное при напечатаніи настоящаго сочиненія.

М. Ващенко-Захарченко.

Кіевъ, февраль 1887 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Предисловіе	v
Оглавленіе	xiii
Введеніе	xvii

Часть первая.—Аналитическая геометрія двухъ измѣреній.

Глава I.	—	Методъ координатъ Декарта	1
Глава II.	—	Алгебраическое представленіе геометрическихъ мѣстъ.	8
Глава III.	—	Преобразование координатъ	30
Глава IV.	—	Прямая линія	35
Глава V.	—	Двойственность координатъ. Прямая и точка	59
Глава VI.	—	Прямая и точка.	70
Глава VII.	—	Сокращенный способъ. Прямая. Точка	76
Глава VIII.	—	Геометрическое мѣсто точекъ есть прямая линія. Прямая. Геометрическое мѣсто прямой линіи есть точка.	84
Глава IX.	—	Ангармонія, гармонія, инволюція. Проективность. Инволюція. Проективныя связки. Гармоническая связка. Инволюціонная связка.	102
Глава X.	—	Ангармонія, гармонія, изложенныя аналитически. Гармоническія свойства полнаго четырехугольника. Проективность и инволюція. Инволюція точекъ. Инволюціонная связка	138
Глава XI.	—	Геометрическое значеніе однородныхъ уравненій	164

Глава XII. — Трилинейныя координаты	174
Глава XIII. — Инварианты и коварианты въ геометріи.	186
Глава XIV. — Кривыя втораго порядка и втораго класса. Пересѣченіе коническаго сѣченія съ прямою. Поляры и касательныя	203
Глава XV. — Кривыя втораго порядка въ линейныхъ координатахъ. Прямая и полюсь	225
Глава XVI. — Прямая на безконечности. Роды коническихъ сѣченій. Эллипсъ, гипербола и парабола. Общія количественныя свойства коническихъ сѣченій. Каноническія формы коническихъ сѣченій. Эллипсъ. Гипербола. Парабола. Подобіе коническихъ сѣченій	238
Глава XVII. — Кругъ. Сокращенный способъ. Пересѣченіе двухъ круговъ	300
Глава XVIII. — Свойства системы круговъ, проходящихъ чрезъ точки пересѣченія двухъ данныхъ круговъ. Уравненіе круга въ линейныхъ координатахъ. Свойства системы трехъ круговъ. Общій полярный треугольникъ системы круговъ, проходящихъ чрезъ двѣ данныя точки.	320
Глава XIX. — Условія, при которыхъ коническое сѣченіе представляетъ пару прямыхъ и ихъ опредѣленіе	335
Глава XX. — Опредѣленіе точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій	348
Глава XXI. — Нѣкоторыя замѣчательныя свойства коническихъ сѣченій. Уравненіе коническаго сѣченія отнесеннаго къ двумъ касательнымъ и къ хордѣ ихъ соприкосновенія. Ангармоническія свойства коническихъ сѣченій. Фокусы коническихъ сѣченій	363
Глава XXII. — Геометрическое значеніе инвариантовъ системы коническихъ сѣченій. Построеніе коническихъ сѣченій.	394
Глава XXIII. — Методъ взаимныхъ поляръ. Взаимныя предложенія	422
Глава XXIV. — Методъ проэкцій. Сѣченіе конуса плоскостью. Ортогональная проэкція	430

Часть вторая.—Аналитическая геометрія трехъ измѣреній.

- Глава XXV. — Методъ координатъ въ пространствѣ. Геометрическое представленіе уравненія между координатами точки въ пространствѣ. Рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ 445
- Глава XXVI. — Плоскость 458
- Глава XXVII. — Прямая 470
- Глава XXVIII. — Двойственность въ пространствѣ. Плоскость и точка 481
- Глава XXIX. — Сокращенный способъ 495
- Глава XXX. — Ангармонія, гармонія и инволюція плоскостей . . 502
- Глава XXXI. — Преобразование координатъ. Преобразование плоскостныхъ координатъ. Тетраэдрическая система координатъ 515
- Глава XXXII. — Общія свойства поверхностей второго порядка . . 532
- Глава XXXIII. — Общія свойства поверхностей второго порядка въ плоскостныхъ координатахъ 544
- Глава XXXIV. — Роды поверхностей второго порядка и первоначальныя ихъ свойства. Конусъ 557
- Глава XXXV. — Приведеніе поверхностей второго порядка къ канонической формѣ. Свойства полярнаго тетраэдра. Центральныя поверхности. Поверхности не имѣющія центра. Поверхности имѣющія безконечное число центровъ. Поверхности вращенія 570
- Глава XXXVI. — Свойства центральныхъ поверхностей. Эллипсоидъ. Однополый гиперболоидъ. Однополый гиперболоидъ, какъ геометрическое мѣсто прямыхъ линій. Двуполый гиперболоидъ 596
- Глава XXXVII.— Поверхности не имѣющія центра. Эллиптическій параболоидъ. Гиперболическій параболоидъ . . . 635
- Глава XXXVIII.— Шаръ. Уравненія конуса описаннаго около шара, полярной и касательной плоскостей. Уравненіе шара въ линейныхъ координатахъ. Система двухъ шаровъ. Центры подобія. Система трехъ шаровъ. Система четырехъ шаровъ 652

- Глава XXXIX. — Фокусы поверхностей. Фокусы и фокальныя линіи въ центральныхъ поверхностяхъ. Образованіе центральныхъ поверхностей. Софокусныя центральныя поверхности. Фокальныя линіи поверхностей не имѣющихъ центра. Софокусныя поверхности не имѣющія центра. Примѣры. Поверхности проходящія черезъ пересѣченіе двухъ поверхностей второго порядка. 677
- Глава XL. — Образованіе поверхностей. Поверхности цилиндрическія. Поверхности коническія. Поверхности вращенія. Конoidalныя поверхности. Поверхности награфленныя: косыя и развертывающіяся. . . . 709
-

Введеніе.

Историческій очеркъ развитія аналитической геометріи.

Первоначальныя основы Аналитической Геометріи были положены знаменитымъ французскимъ математикомъ XVI вѣка *Виетомъ* (1540—1603 г.). Онъ первый сдѣлалъ нововведеніе въ тогдашнюю Алгебру, введя въ нее символы и показавъ, какъ при помощи ихъ могутъ быть производимы вычисленія. Обозначая буквами величины извѣстныя и неизвѣстныя, Виетъ создалъ науку о символахъ и показалъ какъ эти символы подчиняются всѣмъ тѣмъ дѣйствіямъ, которыя производили до него только надъ числами. Первыя основы своего метода Виетъ изложилъ въ 1591 г. въ своемъ „Введеніи къ искусству аналитики“¹⁾ и въ послѣдующихъ добавленіяхъ къ этому сочиненію. Необыкновенную важность своего нововведенія ясно сознавалъ уже самъ Виетъ, говоря: „что методъ его даетъ возможность рѣшить самый важный вопросъ, а именно: задачу о рѣшеніи всѣхъ задачъ“²⁾. Показавъ какъ алгебраическимъ путемъ могутъ быть рѣшены различные геометрическіе вопросы, рѣшаемые до него построеніемъ, Виетъ внесъ въ изслѣдованіе геометрическихъ вопросовъ новое направленіе, которое послужило къ болѣе тѣсному сближенію Алгебры съ Геометріей.

¹⁾ Francisci Vietae in artem analiticam Isagoge, 1591, Tours, pet. in-fol. Дополненіемъ къ этому сочиненію служило другое, заглавіе котораго: Ad Logisticem speciosam Notae priores. Оно было напечатано только послѣ смерти автора въ собраніи его сочиненій, изданномъ подъ заглавіемъ: Francisci Vietae Opera Mathematica in unum Volumen congesta, ac recognita; Opera atque studio Francisci à Schooten Leydensis. Lugduni Batavorum. 1646. in—4. Первыя два поименованныя сочиненія Виета переведены на француз. яз. и напечатаны въ *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*. Roma. T. I, pag. 223—276.

²⁾ Denique fastuosum problema problematum ars Analitice, triplicem Zetetices Poristices et Exegetices formam tandem induta, iure sibi adrogat, Quod est nullum non problema solvera (In artem analiticam Isagoge cap. VIII, 29).

Замѣчательная попытка Виета получила дальнѣйшее развитіе только благодаря французскому философу *Декарту* (1596—1650 г.), котораго по справедливости считаютъ истиннымъ творцемъ Аналитической Геометріи, хотя весьма вѣроятно, что первоначальную идею своего метода Декартъ почерпнулъ изъ сочиненій Виета. Методъ свой Декартъ изложилъ въ первый разъ въ 1637 г. въ своей „Геометріи“, составляющей прибавленіе къ философскому трактату¹⁾. Особенность метода координатъ созданнаго Декартомъ, заключается въ томъ, что онъ внесъ въ Геометрію, при рѣшеніи вопросовъ различнаго рода характеръ общности, который она до него не имѣла. До Декарта геометры изслѣдовали только частныя свойства нѣкоторыхъ кривыхъ; такое направленіе существовало у всѣхъ древнихъ геометровъ. Методъ внесенный въ Геометрію Декартомъ придалъ ей характеръ, который она до него не имѣла, такъ какъ при помощи одной формулы стало возможно выразить свойства, принадлежащія цѣлымъ классамъ кривыхъ. Благодаря новому направленію, данному Декартомъ, Геометрія быстро подвинулась впередъ и развитіе ея оказало несомнѣнную пользу развитію другихъ отраслей математическихъ наукъ. Особенно много подвинулась впередъ Алгебра, символическіе приемы которой стали принимать наглядную форму и стали благодаря этому болѣе понятны, вслѣдствіи ихъ осязательности. Однимъ изъ первыхъ приложений Геометріи къ Алгебрѣ было объясненіе значенія и примѣненіе отрицательныхъ корней уравненій, о которыхъ древніе математики имѣли весьма неотчетливое представленіе и которые ими старательно избѣгались. Начиная съ Декарта развитіе Геометріи и Алгебры идетъ рука объ руку и развитіе одной тѣсно связано съ развитіемъ другой. Методъ Декарта былъ подготовительнымъ путемъ къ блестящему открытію Лейбница и Ньютона—дифференціальному исчисленію.

Методъ координатъ былъ примѣненъ Декартомъ только на плоскости къ Геометріи двухъ измѣреній. Сознвая всю важность и значеніе своего метода Декартъ не ограничился приложеніемъ его къ плоскимъ кривымъ, а показалъ также его приложеніе къ кривымъ двойной кривизнѣ въ своей теоріи кривыхъ двойной кривизны. Для этой цѣли онъ изъ точекъ кривой, лежащей въ пространствѣ, опускалъ перпендикуляры на двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости; проэктіи этихъ перпендикуляровъ образовали двѣ плоскія кривыя, положеніе каждой изъ которыхъ онъ относилъ къ двумъ осямъ координатъ, лежащимъ въ плоскости кривой, изъ которыхъ одна была пересѣченіе двухъ плоскостей. Приемъ этотъ, какъ видно, давалъ

¹⁾ *Descartes, Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences; plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, Leyde, 1637, in-4.*

возможность, при помощи метода координатъ, опредѣлить положеніе кривой въ пространствѣ. Методъ этотъ приводитъ къ системѣ координатъ трехъ измѣреній и къ представленію поверхностей въ видѣ уравненія между тремя переменными. Но прошелъ значительный періодъ времени пока геометры освоились съ методомъ координатъ и первоначально ограничивались только примѣненіемъ его къ плоскимъ кривымъ.

Методъ координатъ Декарта, какъ всякое нововведеніе, былъ встрѣченъ многими изъ современниковъ автора „Геометріи“ съ неудовольствіемъ. Къ числу противниковъ новаго метода принадлежалъ также французскій геометръ *Роберваль* (Roberval, 1602—1675) подвергшій „Геометрію“ Декарта самой строгой критикѣ; извѣстность Роберваля среди современныхъ ему математиковъ только способствовала распространенію метода координатъ. Есть основанія полагать, что критикуя сочиненія Декарта Роберваль руководствовался не чувствомъ справедливости, а скорѣе дѣйствовалъ подъ вліяніемъ зависти, такъ какъ впослѣдствіи имъ самимъ былъ примѣненъ методъ Декарта въ одномъ изъ своихъ сочиненій¹⁾. Къ числу сторонниковъ метода Декарта принадлежалъ французскій математикъ *Ферма* (1601—1665), которому нѣкоторые изъ аналитическихъ приемовъ Декарта были извѣстны еще ранѣе выхода въ свѣтъ „Геометріи“, но спеціальнѣйшій характеръ его изслѣдованій, основанныхъ имъ, большею частью, на созданномъ имъ методѣ „*maximis* и *minimis*“ ближе подходитъ къ геометрическимъ изслѣдованіямъ древнихъ геометровъ²⁾. Другой сторонникъ новаго метода былъ другъ Декарта французъ *Де-Боне* (De-Beaune, 1601—1652), написавшій комментаріи на „Геометрію“³⁾, которые очень цѣнились самимъ Декартомъ. Де-Боне установилъ новыя воззрѣнія въ Аналитической Геометріи кривыхъ линій, онъ первый указалъ на связь существующую между уравненіемъ и свойствами касательной и соотвѣтствующей ей кривой. Комментаріи Де-Боне появились въ печати въ первый разъ при обширномъ комментаріи на „Геометрію“ Декарта, сдѣланномъ голландскимъ математикомъ *Ванъ-Шотеномъ* (1581—1661). Въ другомъ изъ своихъ сочиненій озаглавленномъ „Матема-

¹⁾ De resolutione aequationum. Сочиненіе это напечатано было послѣ смерти Роберваля вмѣстѣ съ другими его сочиненіями въ сборникѣ: *Divers ouvrages de mathématiques et de physique, par M. M. de l'Académie Royale des Sciences. Paris 1693 in-fol.*

²⁾ Сочиненіе Ферма „о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ“ до насъ не дошло въ подлинникѣ, а сохранилось въ изданіи сочиненій Ферма: *Varia opera mathematica D. Petri de Fermat, senatoris Tolosani; Tolosae, 1679, in-fol.*

³⁾ *Geometria, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, nunc autem cum notis Fiorimondi de Beaune, incuria Blaesensi consil. regii, in linguam latinam versa opera Franc. a Schooten, Lugd. Batav. 1649, in-4.* Есть еще изданія 1659 и 1683 годовъ.

тическихъ упражненія“ ¹⁾ Ванъ-Шотенъ примѣнилъ методъ координатъ къ рѣшенію многихъ весьма сложныхъ и интересныхъ вопросовъ высшей геометріи. Методъ этотъ онъ съ успѣхомъ примѣнилъ въ III-ей книгѣ этого сочиненія, предметъ которой относится къ возстановленію утеряннаго сочиненія Аполлонія „Плоскія мѣста“. Въ V-й книгѣ того же трактата Шотена мы находимъ первое приложеніе метода координатъ къ кривымъ въ пространствѣ. Это былъ первый шагъ къ Аналитической Геометріи трехъ измѣреній. Изъ числа другихъ послѣдователей метода Декарта упомянемъ еще голландскихъ математиковъ: *Вита* (Witt, 1632—1672), *Слуза* (Sluse, 1623—1685), *Гудда* (Hudde, 1633—1704), *Гюйгенса* (Huyghens, 1629—1695), *Ванъ-Герета* (Van-Heuraet), англичанина *Нейля* (Neil, 1630—1677), усвоившихъ методъ координатъ и примѣнявшихъ его при рѣшеніи различныхъ геометрическихъ вопросовъ. Послѣдніе два геометра, именно Ванъ-Геретъ и Нейль, одни изъ первыхъ занимались вопросомъ о спрямленіи кривыхъ. Нельзя также пройти молчаніемъ довольно обстоятельные комментаріи на „Геометрію“ Декарта, написанные іезуитомъ *Рабуэлемъ* (1663—1628) ²⁾.

Первое сочиненіе относящееся къ коническимъ сѣченіямъ, въ которомъ былъ приложенъ методъ Декарта, было написано въ 1665 году английскимъ математикомъ *Валлисомъ* (1616—1703) ³⁾. Сочиненіе это не заключаетъ ничего особеннаго, такъ какъ Валлисъ въ своихъ геометрическихъ изслѣдованіяхъ большею частію всегда слѣдовалъ синтетическому методу древнихъ, творенія которыхъ онъ очень цѣнилъ. Несравненно важнѣе приложеніе метода Декарта, которое сдѣлалъ Валлисъ въ своей „Ариѳметикѣ безконечныхъ“ ⁴⁾ къ методу недѣлимыхъ италіанскаго математика *Кавалери* (Cavalieri, 1598—1647).

Одновременно съ Декартомъ другіе современные ему геометры, продолжая заниматься изученіемъ сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ Аполлонія и Паппа, изслѣдовали геометрическіе вопросы съ иной точки зрѣнія—съ синтетической. Обобщая выводы древнихъ и продолжая далѣе кругъ геометрическихъ изслѣдованій они оказали также не малое вліяніе на послѣдующее развитіе Аналитической Геометріи. Изъ числа такихъ геометровъ первое мѣсто принадлежитъ другу Декарта *Дезарю* (1593—1662) и ученику послѣдняго извѣстному *Паскалю* (1623—1662). На труды этихъ геометровъ долгое время не было обращено должнаго вниманія, такъ какъ изслѣдованіе геометрическихъ вопросовъ синтетическимъ путемъ постепенно

¹⁾ Exercitationes mathematicae, Amsterd., 1657.

²⁾ Rabuel, Commentaires sur la Geometrie de M. Descartes. Lyon, 1730, in-4.

³⁾ Wallis, De Sectionibus Conicis, Oxon., 1665, in-4.

⁴⁾ Wallis, Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilinearum quadraturam aliaque problemata, Oxon., 1656, in-4.

вытѣснялось новымъ методомъ координатъ Декарта. Только въ началѣ нынѣшняго столѣтія на синтетическій методъ изслѣдованій было обращено снова вниманіе и онъ далъ блестящіе результаты. Сочиненія Дезарга касались многихъ геометрическихъ вопросовъ интересныхъ по своему существу, къ сожалѣнію авторъ ихъ писалъ въ видѣ набросковъ, сообщая читателямъ только основныя положенія и результаты. Главное изъ его сочиненій,—напечатанное въ 1639 г.,—имѣло предметомъ коническія сѣченія¹⁾; методъ изслѣдованія Дезарга примененный въ немъ былъ основанъ на методѣ перспективы. Сочиненіе это дошло до насъ только благодаря копіи снятой съ напечатаннаго экземпляра геометромъ Лагиромъ. Въ сочиненіи этомъ находится много замѣчательныхъ изслѣдованій и воззрѣній автора, такъ напр. Дезаргъ первый высказалъ явно положеніе выраженное Евклидомъ неявно въ своемъ постулатѣ, что если разсматривать прямую, какъ продолженную въ обѣ стороны въ безконечность, то ея противоположные концы сходятся. Въ этомъ же сочиненіи Дезарга изложены основныя начала теоріи инволюціи, которыя впоследствии, благодаря французскому геометру Шалю, стали однимъ изъ основаній новѣйшей Геометріи; также Дезаргу мы обязаны основными положеніями метода сѣкущихъ и метода поляръ и полюсовъ на плоскости и въ пространствѣ. Послѣдній методъ, который нѣкоторые приписывали французскому геометру Лагиру, послужилъ основаніемъ метода взаимныхъ поляръ. Геометрическія изслѣдованія и методъ Дезарга высоко цѣнились Декартомъ, не смотря на то что методы ихъ были различны; говоря о заслугахъ Дезарга Декартъ въ письмѣ къ Мерсенну говоритъ, „что Дезаргъ первый внесъ въ геометрическія изслѣдованія направленіе и характеръ, который онъ, Декартъ, называетъ метафизикой Геометріи и который никѣмъ не былъ прилагаетъ кромѣ Архимеда“.

Направленіе внесенное въ геометрическія изслѣдованія Дезаргомъ нашло послѣдователя въ лицѣ французскаго философа Паскаля, который также слѣдовалъ синтетическому пути. Методъ этотъ Паскаль применилъ съ рѣдкимъ успѣхомъ въ своемъ сочиненіи „Коническія Сѣченія“ въ шести книгахъ. Къ сожалѣнію сочиненіе это въ настоящее время утеряно, хотя еще въ 1676 году Лейбницъ въ бытность свою въ Парижѣ имѣлъ его въ рукахъ и упоминаетъ о его содержаніи. Указанія на содержаніе этого замѣчательнаго сочиненія сохранились также въ дошедшемъ сочиненіи Паскаля „Опытъ коническихъ сѣченій“, написанномъ въ 1640 году²⁾. Въ не-

¹⁾ Brouillon project d'une atteinte aux événemens. des rencontres d'un cône avec un plan, et aux événemens des contrariétés d'entre les actions des puissances ou forces Paris, 1639.

²⁾ Сочиненіе это было издано только въ 1779 г., подъ заглавіемъ: „Essai pour les coniques“, въ полномъ изданіи сочиненій Паскаля, даннымъ Bossut.

дошедшемъ до насъ трактатъ Паскаля были положены основы предложеній, касающихся ангармоническихъ отношеній, и дано также дальнѣйшее развитіе теоріи инволюціи Дезарга. Въ „Опытъ“ Паскаля были указаны свойства шестиугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе. Шестиугольникъ этотъ Паскаль называлъ „мистическимъ.“ Коническія сѣченія Паскаль образовывалъ съ помощью круга, примѣняя начала перспективы, и свойства ихъ выводилъ изъ свойствъ круга.

Другой современникъ Декарта, также одинъ изъ его друзей, французъ *Мидоржъ* (1585—1647) первый написалъ во Франціи сочиненіе по коническимъ сѣченіямъ, вышедшее въ 1631 г. въ двухъ книгахъ; въ 1641 г. оно было авторомъ дополнено и издано въ четырехъ книгахъ¹⁾. Методъ изслѣдованій Мидоржа слѣдуетъ отнести къ синтетическому методу древнихъ, который онъ стремился обобщить и расширить.

Послѣдователемъ метода Паскаля былъ также извѣстный знатокъ твореній древнихъ греческихъ геометровъ голландецъ іезуитъ *Гр. де-Сенъ-Венсенъ* (Grégoire de-St.-Vincent, 1584—1667), обогатившій теорію коническихъ сѣченій множествомъ предложеній, найденныхъ имъ²⁾.

Въ духъ древнихъ геометровъ разработывалъ теорію коническихъ сѣченій также французскій математикъ *Лагиръ* (La-Nige, 1640—1718) написавшій нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ главное „Трактатъ коническихъ Сѣченій“ напечатанный въ 1685 г.³⁾. Хотя Лагиръ былъ основательно знакомъ съ методомъ координатъ Декарта, но онъ предпочиталъ производить свои изслѣдованія методомъ синтетическимъ, впрочемъ въ значительной степени разнящимся отъ пріемовъ древнихъ. Лагиръ инымъ образомъ образовывалъ коническія сѣченія чѣмъ древніе. Онъ принадлежалъ къ числу послѣдователей Дезарга, который поручилъ ему даже окончаніе одного изъ своихъ сочиненій по прикладной математикѣ.

Первый геометръ представившій поверхность въ видѣ уравненія между тремя переменными, на сколько извѣстно, былъ французъ *Паренъ* (1666—1715). Соображенія свои по этому вопросу онъ представилъ въ мемуарѣ,

¹⁾ *Mydorgius*, Prodrum. Catoptric. et Dioptricum, Parisiis 1641, in-fol. „Коническія Сѣченія“ были введеніемъ къ сочиненію, содержаніе котораго Катоптрика и Диоптрика. Введеніе это должно было заключать восемь книгъ, но послѣднія четыре не были напечатаны.

²⁾ *Gregorio a St-Vicentio*, Opus geometricum quadraturae circuli et Sectionum conii, decem libris comprehensum. Vol. I—II, Antverp. 1625, in-fol. Въ сочиненіи этомъ авторъ даетъ невѣрное рѣшеніе задачи квадратуры круга. Ошибочность выводовъ первый указалъ Декартъ.

³⁾ *Sectiones conicae in novem libros distributae*. Parisiis, 1685, in-fol.

читанномъ имъ въ 1700 г. въ Парижской Академіи Наукъ. Въ другомъ своемъ сочиненіи Парень находитъ уравненіе шара, уравненіе касательной плоскости къ шару, уравненіе нѣкоторыхъ поверхностей третьей степени и кривыхъ двойной кривизны и многое другое¹⁾. Нововведеніе Парена оказало несомнѣнныя услуги развитію Аналитической Геометріи трехъ измѣреній.

Методъ координатъ въ пространствѣ въ первый разъ обстоятельно былъ изложенъ французскимъ геометромъ *Клеро* (1713—1765), въ 1731 г., въ сочиненіи: „Трактатъ о кривыхъ двойной кривизны“²⁾, которое онъ написалъ имѣя всего шестнадцать лѣтъ. Въ этомъ сочиненіи показано примѣненіе координатъ въ пространствѣ къ поверхностямъ и кривымъ двойной кривизны, происходящихъ отъ ихъ пересѣченія. Изъ другихъ математиковъ способствовавшихъ развитію Анал. Геом. трехъ измѣреній укажемъ еще на французскаго геометра аббата *Де-Гуа* (1713—1788) автора сочиненія по теоріи кривыхъ³⁾, въ которомъ онъ даетъ приемы для нахождения касательныхъ, ассимптотъ и кратныхъ точекъ кривыхъ всевозможныхъ степеней. Онъ первый показалъ, что нѣкоторыя изъ этихъ точекъ могутъ лежать на бесконечности. Методъ Декарта нашелъ также примѣненіе въ сочиненіи швейцарскаго геометра *Крамера* (1704—1752), озаглавленномъ: „Введеніе въ анализъ алгебраическихъ кривыхъ“⁴⁾ и въ сочиненіи француза маркиза *Лопиталья* (1661—1704), озаглавленномъ „Аналитическій трактатъ коническихъ сѣченій“⁵⁾. Въ послѣднихъ двухъ сочиненіяхъ подробно изложена аналитическая теорія кривыхъ линій и поверхностей.

Знаменитый *Леонардъ Эйлеръ* (1707—1783), членъ Спб. Академіи Наукъ, также изложилъ основанія аналитической теоріи различныхъ геометрическихъ кривыхъ въ своемъ сочиненіи: „Введеніе въ анализъ бесконечныхъ“, написанномъ въ 1748 г.⁶⁾. Изслѣдованія свои онъ распространилъ на Геометрію трехъ измѣреній и первый изслѣдовалъ уравненія съ двумя и тремя переменными, заключающія уравненія поверхностей втораго порядка. Изслѣдованія Эйлера занимательны по своей удобопонятности и общности.

¹⁾ *Parent*, Essai et recherches de physique et de mathématiques. Paris, 1713. 3 vol in-12.

²⁾ *Clairaut*, Recherches sur les courbes a double courbure. Paris, 1731, in-4.

³⁾ *De-Gua*, Usage de l'analyse de Descartes, pour découvrir sans le secours du calcul différentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres. Paris, 1740, in-12.

⁴⁾ *Cramer*, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève. 1750, in-4.

⁵⁾ *L'Hospital*, Traité analytique des sections coniques. Paris, 1720, in-4.

⁶⁾ *L. Euler*, Introductio in Analysin infinitorum, Vol. I—II. Lausanne, 1748, in-8.

Первый изъ геометровъ изслѣдовавшій вопросъ о кривыхъ высшихъ порядковъ во всей его общности былъ великій *Ньютонъ* (1642—1727). Работы его по этому предмету изложены въ сочиненіи: „Перечисленіе кривыхъ третьяго порядка“¹⁾. Ньютонъ насчитываетъ 72 вида различныхъ кривыхъ третьяго порядка, которыя онъ дѣлитъ на пять классовъ. Онъ показываетъ, что онѣ образованы перспективной проэкціей пяти кубическихъ параболъ, подобно тому какъ всѣ кривыя втораго порядка образованы проэкціями круговъ. Также указаны были Ньютономъ различныя интересныя свойства принадлежащія алгебраическимъ кривымъ, но доказательства никакихъ этому онъ не далъ. Въ настоящее время даже трудно сказать, какъ онъ пришелъ къ этимъ выводамъ: путемъ-ли анализа или геометрическимъ? Многіе изъ вопросовъ чистой геометріи рѣшены были Ньютономъ въ первомъ отдѣлѣ его знаменитаго сочиненія „Начала философіи“²⁾. Въ этомъ отдѣлѣ изложенъ методъ Ньютона, которымъ онъ пользовался при рѣшеніи различныхъ геометрическихъ вопросовъ, а также показаны многія замѣчательныя свойства коническихъ сѣченій.

Болѣе обстоятельно была изложена теорія кривыхъ, разсмотрѣнныхъ Ньютономъ, англійскими геометрами *Стирлингомъ* (1692—1770) и *Маклореномъ* (1698—1746). Первый далъ доказательства различныхъ свойствъ кривыхъ третьяго порядка перечисленныхъ Ньютономъ и прибавилъ къ нимъ еще четыре вида. Изслѣдованія Стирлинга составляютъ предметъ его сочиненія: „Кривыя третьяго порядка перечисленныя Ньютономъ“³⁾. Подобнаго же содержанія суть сочиненія Маклорена⁴⁾, во второмъ изъ которыхъ онъ выводитъ наиболѣе интересныя и важныя свойства алгебраическихъ кривыхъ синтетическимъ путемъ.

Попытки классификаціи различныхъ кривыхъ были уже сдѣланы древними геометрами. Они сознавали что всякая кривая есть ничто иное какъ рѣшеніе неопредѣленнаго вопроса. Въ такомъ смыслѣ древніе называли кривыя *геометрическими мѣстами*. Хотя они не имѣли понятія объ уравненіяхъ и объ представленіи кривыхъ уравненіями, но они понимали, что геометрическая кривая есть *мѣсто* точекъ соотвѣтствующихъ безчис-

¹⁾ *Isaac Newton*, Enumeratio linearum tertii ordinis. Сочиненіе это есть прибавленіе къ „Оптикѣ“ того же автора, напечатанной въ 1704 г.

²⁾ *Newton*, Philosophiae naturalis principia mathematica. London, 1687, in-4.

³⁾ *Stirling*, Lineae tertii ordinis Newtonianae. Oxon. 1717, in-8.

⁴⁾ *Maclaurin*, Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis, Lond. 1719. in-4.

Maclaurin, De linearum geometricarum proprietatibus generalis tractatus. Lond. 1720, in-4.

ленному множеству рѣшеній, соотвѣтствующихъ предложенному вопросу. Декартъ указаль на отличительныя свойства двухъ видовъ кривыхъ, именно: геометрическихъ и механическихъ. По его опредѣленію *геометрическія* кривыя суть тѣ, въ которыхъ точки кривой могутъ быть опредѣлены сочетаніемъ двухъ движеній, между которыми существуетъ опредѣленное отношеніе. Таковы конхоида, циссоида и т. д. Къ числу *механическихъ* кривыхъ принадлежатъ: спираль, квадратрикса, циклоида, логариѳмическая кривая и др., отношенія движеній отъ которыхъ онѣ происходятъ неизвѣстны. Это дѣленіе кривыхъ было замѣнено впоследствии другимъ, предложеннымъ *Лейбницомъ* (1646—1716). Онъ всѣ кривыя отнесъ къ числу геометрическихъ, раздѣливъ ихъ на два класса: *кривыя алгебраическія* и *кривыя трансцендентныя*. Первыя суть тѣ въ которыхъ ординаты въ функціи абсциссы выражаются конечнымъ числомъ алгебраическихъ дѣйствій. Вторыя суть тѣ, въ которыхъ эти функціи состоятъ изъ безконечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій, таковы Sin, Cos, Tang, log и т. д. Классификація алгебраическихъ кривыхъ, какъ мы видѣли выше, дана была въ первый разъ Ньютономъ.

Мы перечислили всѣ болѣе извѣстныя сочиненія по Аналитической Геометріи написанныя въ XVII и XVIII столѣтіяхъ и указали на ихъ характеръ. Эти же сочиненія представляютъ постепенное развитіе метода координатъ, созданнаго Декартомъ. Мы уже видѣли какъ Паскаль, Дезаргъ и другіе геометры стремились создать синтетическій методъ, основанный на новыхъ методахъ, который они постепенно вводили въ геометрическія изслѣдованія. Такой синтетическій методъ былъ снова введенъ въ геометрическія изслѣдованія въ началѣ настоящаго столѣтія знаменитымъ французскимъ геометромъ *Монжемъ* (1746—1818), основателемъ политехнической школы, творцемъ „Начертательной Геометріи“¹⁾. Предметъ Начерт. Геом. есть рѣшеніе различныхъ вопросовъ, относящихся къ фигурамъ въ пространствѣ путемъ графическимъ—на плоскости. Методъ Монжа много способствовалъ болѣе обобщенному воззрѣнію на фигуры вообще. Такимъ образомъ въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ разсмотрѣніе различныхъ фигуръ и ихъ соотношеній въ пространствѣ являлось однимъ изъ самихъ главныхъ. Подтвержденіемъ этому отчасти могутъ служить классическое сочиненіе Монжа „Приложеніе Аналіза къ Геометріи“²⁾, предметъ котораго происхожденіе и свойства поверхностей, а равно и труды многочисленныхъ его учениковъ:

¹⁾ *Monge, Géométrie descriptive, Paris, 1794, in-4.*

²⁾ *Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie des surfaces du 1-e et 2-e degré. Paris, 1807—1809, in-8,*

Дюпена (1784—18..) ¹⁾, Био (1774—1862) ²⁾, Брианшона (1785—1880) ³⁾, Гашета (1769—1834) ⁴⁾, Понселе (1788—1867) ⁵⁾ и многихъ другихъ.

Понселе въ 1822 г. въ своемъ сочиненіи „Трактатъ о проэктивныхъ свойствахъ фигуръ“ далъ методъ проэкцій, въ которомъ отъ частныхъ свойствъ фигуръ восходятъ къ болѣе общимъ. Такія свойства носятъ названіе *проэктивныхъ* свойствъ фигуръ. Перспективная проэкція еще ранѣе была приложена къ геометрическимъ изслѣдованіямъ Дезаргомъ, Ньютономъ и Паскалемъ, о чемъ мы упоминали уже выше, а въ послѣдствіи нѣмецкій геометръ Ламбертъ (1728—1777) въ своей „Перспективѣ“ ⁶⁾ приложилъ ее къ рѣшенію нѣкоторыхъ весьма сложныхъ вопросовъ, при помощи преобразованія ихъ въ болѣе простые. Но только Понселе въ проэктивныхъ свойствахъ фигуръ увидѣлъ весьма плодотворный геометрический методъ и при помощи его развитія далъ новый толчекъ къ возникновенію новѣйшаго синтетическаго метода. Въ сочиненіи Понселе изложена также одна изъ болѣе важныхъ геометрическихъ теорій, именно „Теорія взаимныхъ поляръ“, первоначальные слѣды которой нѣкоторые математики усмотрѣли въ сочиненіяхъ Дезарга. Еще ранѣе, именно Лагиру въ 1685 г., было извѣстно, что въ плоскости коническаго сѣченія всякая точка съ прямою и всякая прямая съ точкою находятся въ извѣстномъ соотношеніи. Такое соотношеніе Понселе примѣнилъ къ преобразованію одной фигуры въ другую, ей взаимную, и изъ него создалъ геометрический методъ, гдѣ точкѣ въ одной фигурѣ соотвѣтствуетъ прямая въ другой, и обратно. Французскій геометръ Гергонне (1771—1859) въ подобномъ соотношеніи двухъ взаимныхъ фигуръ усмотрѣлъ *общее начало*, изъ котораго съ того времени возникла новая точка зрѣнія при геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Начало это извѣстно

¹⁾ *Dupin*, Essai sur la description des lignes et des surfaces du second degré. Помѣщ. въ Journal de l'École Polytechnique, XIV cahier, 1808, p. 45—83.

Dupin, Développements de Géométrie, 1813, Paris, in-4.

Dupin, Applications de Géométrie et de Mécanique, Paris, 1822, in-4.

²⁾ *Biot*, Essai de Géométrie analytique, Paris, 1805, in-8.

Biot, Essai analytique des courbes et des surfaces, Paris, 1802. in-8.

³⁾ *Brianchon*, Mémoire sur les surfaces courbes du second degré. Помѣщ. въ Journal de l'École Polytechnique, XIII cahier, 1806, p. 297—311.

Brianchon, Mémoire sur les lignes du second ordre. Paris, 1817, in-8.

⁴⁾ *Hachette*, Éléments de Géométrie à trois dimensions, Paris, 1817, in-8.

Hachette, Application de l'algèbre à la géométrie de trois dimensions, Paris, 1817, in-8.

⁵⁾ *Poncelet*, Traité des propriétés projectives des figures. Paris, 1822, in-8.

Poncelet, Théorie générale des polaires réciproques. См. Journal Crell. T. IV p. 1—71, 1829.

⁶⁾ *Lambert*, Die freie Perspective. Zürich. 1759, in-8.

нынѣ подѣ именемъ *двойственности координатъ* (dualité). Название это введено было Гергонномъ ¹⁾.

Новая точка зрѣнія введенная Понселе въ изслѣдованіе геометрическихъ вопросовъ получила вскорѣ быстрое развитіе. Незадолго до появленія сочиненія Понселе появилась въ 1803 г. „Геометрія положенія“ ²⁾ французскаго геометра Карно (1753—1823), къ которой авторъ изслѣдуетъ свойства фигуръ въ зависимости отъ ихъ положенія. Главное нововведеніе Карно въ его „Геометріи“ заключается въ томъ, что онъ далъ геометрическое представленіе количествъ положительныхъ и отрицательныхъ, что способствовало значительно обобщенію геометрическихъ рѣшеній, въ томъ смыслѣ что одного рѣшенія было достаточно, каковы бы ни были положенія различныхъ частей фигуры. До Карно требовалось столько рѣшеній сколько было различныхъ расположеній частей фигуры.

Дальнѣйшему развитію геометрическихъ изслѣдованій много также содѣйствовала новая геометрическая теорія мнимыхъ количествъ, созданная въ началѣ настоящаго вѣка. Теорія эта дала блестящіе результаты въ своихъ приложеніяхъ къ различнымъ вопросамъ математическаго анализа. Первый ³⁾ разсматривавшій выраженіе $\sqrt{-1}$ какъ условный символъ, выражающій перпендикулярность, а выраженія вида $\pm a\sqrt{-1}$ какъ представляющія линіи перпендикулярныя къ направленіямъ по которымъ отсчитывались величины дѣйствительныя, положительныя и отрицательныя, былъ французскій математикъ Арганъ (1768—1813), написавшій въ 1806 г. сочиненіе „Попытка представить мнимыя величины при геометрическихъ построеніяхъ“ ⁴⁾. Одновременно съ Арганомъ тѣмъ же вопросомъ занимался аббатъ Бюэ ⁵⁾ и Франсе ⁶⁾. Дальнѣйшія обобщенія методъ Аргана получилъ благодаря тру-

¹⁾ Annales de Mathématiques, T. XVI, 1825—1826, p, 209.

²⁾ Carnot, Géométrie de position, Paris, 1803, in-4.

Carnot, Théorie des transversales, Paris, 1806, in-4.

³⁾ Первая попытка представить геометрически мнимыя выраженія принадлежитъ прусскому геометру Кюну (Kühn, 1690—1769), автора мемуара: Meditationes de quantitibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis. Мемуаръ этотъ былъ напечатанъ авторомъ въ 1750 году въ Novi Commentarii Academ. Scient. Imper. Petropolit., T. III.

⁴⁾ Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris 1806, in-8. Есть изданіе 1873 г.

⁵⁾ Buée, Mémoire sur les quantités imaginaires. Помѣщено въ Philosophical Transaction, 1806.

⁶⁾ Français, Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires. Помѣщено въ Annales de Mathématiques, T. IV, p. 222, 228, 364; T. V p. 197; 1813—1815.

дамъ англичанина *Варена* ¹⁾, француза *Мурея* ²⁾ и наконецъ въ новой геометрической теоріи эквиваленцій, созданной профессоромъ падуанскаго университета *Беллавитисомъ* въ 1832 году ³⁾. Правильное воззрѣніе на геометрическое представленіе мнимыхъ выраженій имѣлъ также извѣстный германскій математикъ *Гауссъ* (Gauss, 1777—1855), предложившій ⁴⁾ символъ i для выраженія $\sqrt{-1}$. Особенно удачныя приложенія геометрической теоріи мнимыхъ величинъ при изслѣдованіи различныхъ аналитическихъ вопросовъ сдѣлалъ французскій математикъ *Коши* (1789—1857) въ 1847 г. ⁵⁾. Методъ геометрическаго представленія точки на плоскости при помощи мнимыхъ выраженій англійскій геометръ *Гамильтонъ* обобщилъ къ алгебраическому представленію точки въ пространствѣ. Методъ этотъ получилъ названіе: *метода кватерненовъ* ⁶⁾. Упомянемъ еще англичанъ *Пикока*, который въ свой „Алгебрѣ“ ⁷⁾ занимался символомъ $(+)^{p/q}$ и *Грегори* (1813—1844), который въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ предложилъ особенное геометрическое представленіе для мнимыхъ количествъ ⁸⁾. Оригинальное геометрическое представленіе мнимыхъ количествъ далъ еще современный

¹⁾ *John Warren*, A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities, Cambridge, 1828, in-8. Дальнѣйшее развитіе своей теоріи авторъ даетъ въ Philosophical Transaction за 1829 г. pag., 241—254, 339—359.

²⁾ *Mourey*, La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, Paris, 1823. in-8. Есть изданіе 1861 г.

³⁾ *Bellavitis*, Metodo delle equipollenze (См. Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto, T. VII, 1837).—Sposizione del metodo delle equipollenze (См. Memorie della Società Italiana delle scienze, T. XXV, Modena, 1854). Последнее сочиненіе существуетъ во француз. переводѣ: Exposition de la méthode des equipolences par G. Bellavitis, traduit par Laisant, Paris, 1874, in-8.

⁴⁾ О мнимыхъ величинахъ Гауссъ упоминаетъ мимоходомъ, говоря объ составныхъ количествахъ. Онъ говоритъ, что если величины положительныя и отрицательныя отсчитывать по горизонтальной линіи на право и на лѣво, то мнимыя величины слѣдуетъ отсчитывать по направленію перпендикулярному. См. Göttingischen gelehrten Anzeigen, Jahr 1831, St. 61, S. 625 и Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio 2-de, Göttingae, 1832, pag. 16, art. 38 et 39.

⁵⁾ *Cauchy*, Sur les quantités géométriques; См. Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. IV, 1847, Paris, pag. 157—180.

⁶⁾ *Hamilton*, On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra, См. Philosophical Magazine, 1844, 1845.—On Symbolical Geometry. См. The Cambridge and Dublin Mathem. Journal, 1846, Vol. I; 1847 Vol. II. — *Hamilton*, Lectures on quaternions. Dublin, 1853, in-8.

⁷⁾ *Peacock*, Algebra. Cambrid., 1842, in-8.

⁸⁾ *Gregory*, On the elementary principles of the application of algebraical symbols to geometry. Помѣщ. въ Cambridge Mathematical Journal, T. II. 1841.—Дальнѣйшее развитіе своей мысли Грегори приложилъ въ сочиненіи: *Gregory*, Exemples of the Differen. and Integral Calculus. Cambrid., 1841, in-8.

французскій геометръ *Мари* ¹⁾, съ помощью котораго онъ легко объяснилъ періодичность не только интеграловъ простыхъ, но и кратныхъ.

Изъ новаго метода проэктій Понселе, новаго воззрѣнія на геометрическое значеніе мнимыхъ выраженій, „Геометріи положенія“ Карно возникла новѣйшая синтетическая геометрія. Предметъ ея изслѣдованій касался въ началѣ только общихъ проэктивныхъ свойствъ фигуръ, въ послѣдствіи въ нее вошли также изслѣдованія непроэктивныхъ—метрическихъ свойствъ. Послѣ Понселе французскій геометръ *Шаль* (1793—1880) и нѣмецкій геометръ *Штейнеръ* (1796—1863), независимо одинъ отъ другаго, положили основанія новой синтетической геометріи, опредѣливъ отношенія существующія между проэктіей двухъ фигуръ, независимо отъ ихъ перспективнаго положенія. Условія эти легли въ основаніе ихъ теоріи. Труды этихъ двухъ геометровъ составили предметъ многочисленныхъ ихъ сочиненій и мемуаровъ, изъ которыхъ болѣе важны „Высшая Геометрія“ *Шалья* ²⁾ и „Геометрическія построенія произведенныя при помощи неподвижнаго круга и прямой линіи“ *Штейнера* ³⁾. Въ другомъ сочиненіи „Систематическое развитіе взаимной зависимости геометрическихъ образовъ“ ⁴⁾ *Штейнеръ* излагаетъ свои геометрическія воззрѣнія и подробно разбираетъ нѣкоторые изъ методовъ новѣйшей геометріи, какъ напр. двойственность, проэктивность и др. Около того же времени Геометрію положенія разработывалъ нѣмецкій геометръ *Штаудтъ* (1798—188.) авторъ сочиненія „Геометрія положенія“ ⁵⁾, содержащее много интересныхъ изслѣдованій. Весьма много интересныхъ геометрическихъ вопросовъ было рѣшено италіанскимъ геометромъ *Маскерони* (1750—1800), изслѣдовавшимъ цѣлый рядъ задачъ, которыя онъ рѣшилъ въ своей „Геометріи циркуля“ только съ помощью круга ⁶⁾.

Новый методъ, внесенный въ изслѣдованія геометрическихъ вопросовъ, далъ самые блестящіе результаты въ рукахъ такихъ геніальныхъ математи-

¹⁾ *Maximilien Marie*, Théorie des fonctions des variables imaginaires. T. I—III. Paris. 1874—76, in-8.

²⁾ *Chasles*, Traité de Géométrie Supérieure, Paris, 1852, in-8.

³⁾ *Steiner*, Die geometrischen Constructionen angeführt mittelst der geraden Linie und einem festen Kreises. Berlin, 1833, in-8.

⁴⁾ *Steiner*, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität und s. w. Berlin, 1832, in-8. Сочиненіе это должно было состоять изъ пяти частей, но вышла въ свѣтъ только первая часть.

⁵⁾ *Staudt*, Geometrie der Lage. Nürnberg. 1847, in-8 Beiträge zur Geometrie der Lage. Heft 1--2—3, 1856—60. Nürnberg, in-8.

⁶⁾ *Mascheroni*, La geometria del compasso. Pavia, 1797, in-8.

ковъ, какъ Шаль и Штейнеръ. Методъ этотъ способствовалъ много расширенію границъ геометрическихъ изслѣдованій. При этомъ замѣтимъ, что большую часть своихъ теоремъ Штейнеръ далъ безъ всякихъ доказательствъ, а приводитъ лишь ихъ сущность, между этими предложеніями есть весьма сложныя; ихъ доказательствомъ впоследствии занимались многіе геометры. Изъ болѣе выдающихся сочиненій по Геометріи положенія укажемъ на сочиненіе германскаго геометра *Рейя*, вышедшее въ 1868 г. ¹⁾.

Быстрое развитіе синтетической Геометріи оказало также вліяніе на дальнѣйшее развитіе Аналитической Геометріи. Явилась необходимость аналитическаго толкованія новыхъ началъ геометріи и новыхъ воззрѣній. Требовалось методъ доказательствъ, усвоенный, синтетической геометріей, перевести на аналитическій языкъ. Этому оказалъ важную услугу нѣмецкій геометръ *Плюккеръ* (1801—1868), занимавшійся болѣе глубокимъ и всестороннимъ изслѣдованіемъ аналитическихъ уравненій. Плюккеръ показалъ въ 1828 г. въ своемъ сочиненіи „Аналитически-геометрическія развитія“ ²⁾, какъ при аналитическомъ изслѣдованіи геометрическихъ задачъ при извѣстномъ сочетаніи уравненій видны линіи фигуръ и взаимное отношеніе между ними. Совершенно справедливо замѣтилъ Плюккеръ, сказавъ: „формы моихъ уравненій суть полныя представленія графическихъ построеній, въ которыхъ нѣтъ ничего посторонняго; это суть идеальныя, аналитическими символами, начертанныя фигуры“ ³⁾. Благодаря Плюккеру Аналитическая Геометрія совершенно измѣнилась и стала на должной степени своего развитія. Болѣе обстоятельно были изслѣдованы Плюккеромъ кривыя 3-го порядка, которыя онъ разсматриваетъ въ зависимости отъ ихъ вида и формы, при чемъ даетъ полное перечисленіе ихъ. Онъ насчитываетъ 219 кривыхъ 3-го порядка. Геометрическія свои воззрѣнія Плюккеръ проводилъ во многихъ сочиненіяхъ, изъ которыхъ болѣе важны слѣдующія: „Аналитическая Геометрія“ ⁴⁾, „Теорія алгебраическихъ кривыхъ“ ⁵⁾, „Геометрія трехъ измѣреній“ ⁶⁾. Кромѣ того Плюккеръ написалъ, подобно Шалю, множество мемуаровъ чисто геометрическаго характера.

¹⁾ *Reye*, Die Geometrie der Lage. Thle 1—2. Hannover. 1866—68, in-8. Переведено также на французскій языкъ подъ заглавіемъ: *Reye*, Géométrie de position. Par 1—2, Paris, 1880—81. in-8.

²⁾ *Plücker*, Analytisch-geometrische Entwicklungen. Bd. I—II, Essen. 1828—31, in-4.

³⁾ *Plücker*, Ueber Curven 3. Ordnung. J. Crelle Bd. XXXIV, 1847, S. 382. Воззрѣніемъ этимъ, говоритъ Плюккеръ, я обязанъ Монжу.

⁴⁾ *Plücker*, System d. Analytischen Geometrie, Berlin, 1835, in-4.

⁵⁾ *Plücker*, Theorie der algebraischen Curven, Bonn, 1839, in-4.

⁶⁾ *Plücker*, System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf, 1846, in-4.

Исходя изъ своихъ возрѣній на методъ синтетической геометріи Пюккеръ и другой германскій геометръ *Мебіусъ* (1790—1868)¹⁾, независимо отъ Понселе и Гергонна, пришли къ началу двойственности координатъ, какъ это видно изъ нѣкоторыхъ мѣстъ „Аналитически-геометрическихъ развитій“ Пюккера и „Барицентрическаго счисленія“ Мебіуса²⁾. Пюккеру также обязаны введеніемъ *тетраэдрическихъ координатъ* и *сокращеннаго способа*, который собственно въ первый разъ былъ предложенъ французскимъ геометромъ *Бобилье* (Bobilier) въ 1827 году³⁾.

Новымъ синтетическимъ методомъ изслѣдованій впервые воспользовались геометры для изслѣдованія кривыхъ порядка выше втораго; этимъ занимались: Понселе, Штейнеръ и Пюккеръ. Въ теоріи этихъ кривыхъ особенное значеніе имѣли различныя присущія имъ свойства. Къ такимъ свойствамъ принадлежатъ, на примѣръ, такъ называемыя *точки перегиба* кривой, т. е. точки въ которыхъ кривыя измѣняютъ направленіе своей кривизны, а также *двойныя касательныя*, т. е. касательныя касающіяся двухъ различныхъ точекъ кривой. Еще Понселе въ этихъ особенностяхъ думалъ найти объясненіе нѣкоторыхъ парадоксовъ, представляемыхъ методомъ взаимныхъ поляръ. Изъ этой теоріи Пюккеръ вывелъ число точекъ перегиба и двойныхъ касательныхъ, соотвѣтствующихъ алгебраической кривой известнаго порядка. Но нахожденіе аналитическимъ путемъ этого числа представляло непреодолимыя трудности, такъ какъ эти особенности зависели отъ различныхъ свойствъ аналитическихъ уравненій, а также отъ одной изъ самыхъ трудныхъ частей Анализа, именно теоріи элиминаціи. Вслѣдствіи этихъ причинъ аналитическое изслѣдованіе алгебраическихъ кривыхъ высшихъ порядковъ долгое время оставалось неполнымъ, пока не получилъ окончательнаго своего развитія одинъ изъ новѣйшихъ методовъ Анализа, именно теорія опредѣлителей, о которомъ справедливо сказалъ Сильвестръ: „Теорія опредѣлителей есть примѣненіе Алгебры къ Алгебрѣ; это есть методъ дающій возможность предвидѣть и связать результаты аналитическихъ дѣйствій, такимъ же точно образомъ какъ Алгебра освобождаетъ насъ отъ производства обыкновенныхъ дѣйствій Ариѳметики“⁴⁾.

¹⁾ *Möbius*, Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Klassen von Aufgaben und die Entwicklung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewandt, von A. F. Möbius, Professor der Astronomie zu Leipzig. Leipzig, 1827, in-8.

²⁾ Названіе, „Барицентрическое счисленіе“, по словамъ Мебіуса, онъ ввелъ потому, что методъ этотъ онъ вывелъ изъ началъ центра тяжести. „Предметъ барицентрическаго счисленія суть точки и численные коэффициенты ихъ“, говоритъ Мебіусъ.

³⁾ *Annales de Mathématiques*; T. XVIII, 1827—1828, pag. 320.

⁴⁾ *Philos. Mag.* Vol. I. 4 th. Ser. 1851, pag. 295.

Изслѣдованія Плюккера нашли также многихъ послѣдователей, изъ числа которыхъ наиболѣе извѣстны нѣмецкіе геометры *Гессе* (1811—1874) и *Клебшъ* (1831—1872). Главная заслуга Гессе заключается въ томъ, что онъ обобщилъ многое въ Аналитической Геометріи, введя въ свои изслѣдованія *опредѣлители*. Занимаясь, на ряду съ геометрическими вопросами, вопросами алгебры Гессе показалъ, какъ при помощи теоріи опредѣлителей можно исключить одно неизвѣстное изъ двухъ уравненій высшихъ степеней. Занимаясь этимъ вопросомъ Гессе далъ нѣсколько важныхъ предложеній, касающихся этого исключенія и приложилъ ихъ къ изслѣдованію кривыхъ 3-го порядка и къ вопросу какъ форму 3-ей степени отъ трехъ переменныхъ привести къ возможно простой формѣ изъ четырехъ членовъ¹⁾. Рѣшеніе этого вопроса свелось на опредѣлитель изъ двухъ дифференціальныхъ коэффиціентовъ 3-ей степени, который въ первый разъ былъ введенъ Гессе въ вычисленія. Опредѣлитель этотъ, получившій большое приложеніе въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ различныхъ вопросовъ, получилъ названіе „Гессевскаго опредѣлителя“. Одновременно съ изслѣдованіями Гессе, которыя привели его къ открытію опредѣлителя его имени, англійскій геометръ *Келле* (Cauley) въ 1845 г.²⁾ положилъ первыя основы *теоріи инвариантовъ*. Теорія эта получила свое названіе отъ вопроса, изслѣдованіемъ котораго она обязана своимъ возникновеніемъ; вопросъ этотъ слѣдующій: „какъ могутъ быть изъ уравненія кривой выведены уравненія другихъ фигуръ, которыя находились бы съ кривой въ такомъ неизмѣнномъ (invariable) соотношеніи, что ихъ проэкціи неизмѣняются“. Дальнѣйшее развитіе теорія инвариантовъ получила благодаря изслѣдованіямъ многихъ геометровъ, примѣнившихъ ее въ своихъ сочиненіяхъ; изъ числа ихъ мы укажемъ на англичанъ *Сильвестра*, *Салмона*³⁾, и германскихъ геометровъ *Клебша*⁴⁾, *Аронгольда*

¹⁾ *Hesse, Ueber die Elimination der Var. aus drei alg. Gleichungen vom 2-ten Grad mit zwei Veränderlichen.—Ueber die Wendepunkte der Curve 3. Ordnung.* См. Jour. Crell., Bd. XXVIII, 1814, S. 68, 97.

²⁾ Изслѣдованія Келле составляютъ предметъ цѣлаго ряда (десяти) мемуаровъ подъ заглавіемъ „Upon Quantics“, напечатанныхъ въ Philosoph. Trans. въ періодъ 1856—79 гг.

³⁾ *Salmon, Treatise on analytic Geometry.* London, 1848. in-8. Послѣдующія изданія озаглавлены: *Salmon, Treatise on Conic Sections.* Сочиненіе это выдержало шесть изданій, изъ коихъ послѣднее (6-е) вышло въ 1879 году. Сочиненіе это пользуется вполне заслуженною извѣстностью и переведено почти на всѣ европейскіе языки. Переводъ на русскій языкъ сдѣланъ нами въ 1860 году и намъ принадлежитъ первымъ честь перевода этого сочиненія на иностранный языкъ. Переводъ нашъ озаглавленъ „Коническія Сѣченія“, СПб. 1860, in-8. Изъ другихъ сочиненій Салмона укажемъ еще Аналитическую Геометрію трехъ измѣреній: *Salmon, Treatise on the analytic Geometry of three dimensions.* Dublin, 1861, in-8, и на его теорію кривыхъ: *Salmon, Treatise on higher plane curves.* Dublin, 1852, in-8. Всѣ эти сочиненія выдержали по нѣскольку изданій и читаются математиками съ пользою и въ настоящее время.

⁴⁾ Изъ сочиненій Клебша наиболѣе извѣстны: *Clebsch, Vorlesungen über Geometrie.*

(Aronholdt), *Гордана* (Gordan) и многихъ другихъ. Далѣе Гессе показалъ, что его опредѣлитель даетъ возможность найти къ каждой кривой другую кривую, связанную съ первой извѣстными условіями. Кривая эта получила въ послѣдствіи названіе „кривой Гессе“¹⁾. Изъ числа чисто геометрическихъ вопросовъ рѣшенныхъ Гессе укажемъ на слѣдующій: даны 9 точекъ, опредѣляющихъ поверхность втораго порядка, требуется найти 10-ю точку этой поверхности? Вопросъ этотъ былъ предложенъ Брюссельской Академіей въ 1825 году, но долгое время оставался нерѣшеннымъ, пока не было дано рѣшенія Гессе въ 1842 году²⁾. Вопросъ этотъ въ геометріи трехъ измѣреній тоже что задача о нахожденіи 6-й точки конического сѣченія по даннымъ пяти его точкамъ. Послѣдняя задача, какъ извѣстно была рѣшена еще Паскалемъ, при помощи его знаменитаго шестиугольника. Рѣшеніе данное Гессе чисто синтетическое. Замѣтимъ здѣсь, что еще ранѣе Гессе, въ 1836 году, Штейнеръ предложилъ два рѣшенія этой задачи.

Многія интересныя свойства кривыхъ высшихъ порядковъ были изслѣдованы съ аналитической точки зрѣнія италіанскимъ математикомъ *Кремоной*, написавшимъ по этому предмету цѣлый рядъ сочиненій³⁾. Дальнѣй-

Hrsg. v. Lindemann. Bd. I—II, Leipzig, 1875—77, in-8. Существуетъ также французское изданіе этого капитальнаго сочиненія. Полное заглавіе его: *Leçons sur la géométrie, par Alfred Clebsch; recueillies et complétées par F. Lindemann, traduites par A. Benoist. T. I. — Traité des sections coniques et introduction a la théorie des formes algébriques; T. II. — Courbes algébriques en général et courbes du troisième ordre; T. III. — Intégrales abéliennes et connexes. Paris, 1879—80—83, in-8.* Лекціи Клебша были изданы уже послѣ его смерти однимъ изъ его близкихъ друзей проф. Линдеманомъ. Въ составъ изданнаго курса Аналитической Геометріи вошли лекціи, читанныя Клебшемъ въ Геттингенскомъ университетѣ въ лѣтніе семестры 1871 и 1872 года и зимній семестръ 1871—72 г. Подробный обзоръ ученой дѣятельности Клебша помѣщенъ въ *Mathem. Annal. V. VII, 1874* и *Göttinger Nachr. 1872.*

¹⁾ Изъ трудовъ Гессе болѣе извѣстны: *Hesse, Vorlesungen über die Analytische Geometrie des Raums. Leipzig, 1861, in—8.*—*Hesse, Analytische Geometrie der geraden Linie, des Punkts und des Kreises in der Ebene, Leipzig, 1865, in—8,* Кромѣ того онъ написалъ еще: „*Vier Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie*“ (См. *Zeitschrift für Mathem. und Physik, Jahrg. XI.*)—„*Sieben Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie der Kegelschnitte*“ (См. *Zeitsch. f. Math. und Physik, Jahrg XIX* и *Jahrg. XXI.*) Кромѣ того онъ написалъ до 50-ти мемуаровъ по Геометріи.

²⁾ *Hesse, Ueber die Construction der Oberfläche 2. Ordnung, von welchen beliebige 9 Punkte gegeben sind.* См. *Jour. Crell., Bd. XXIV, 1842, S. 36.*

³⁾ Главныя изъ его сочиненій: *Cremona, Introduz. ad una theoria geometr. delle curve piane. Bologna, 1862 in-4.*—*Preliminari di una teoria geom. delle superficie (di 1 e 2 ord.). Bologna, 1867, in-4.*

шимъ успѣхамъ Аналитической Геометріи также много способствовало введеніе въ изслѣдованіе *однородныхъ* и *тримнейныхъ* координатъ. На дальнѣйшее развитіе Геометріи также оказало не малое вліяніе примѣненіе при геометрическихъ изслѣдованіяхъ трансцендентныхъ функцій. Такое примѣненіе было сдѣлано съ особеннымъ успѣхомъ Клебшемъ въ 1863 году ¹⁾).

На ряду съ синтетической Геометріей возникла еще новая отрасль Геометріи извѣстная подъ именами: „мнимой“, „воображаемой“, „пангеометріи“, „геометріи высшихъ измѣреній“, „гипергеометріи“ и т. п. Первыя основы этой новой отрасли геометрическаго изслѣдованія, были положены нашимъ соотечественникомъ *Николаемъ Ивановичемъ Лобачевскимъ* (1793—1856), занимавшимъ мѣсто профессора въ Казанскомъ университетѣ въ періодъ времени между 1816—1856 гг. Систему свою Лобачевскій изложилъ въ сочиненіи „Воображаемая Геометрія“, напечатанномъ въ 1835 г.²⁾ Одновременно съ Лобачевскимъ тѣми же вопросами занимались венгерскіе математики *Болеи, отецъ и сынъ* (1775—1856, 1802—1860). Изслѣдованія Болея-отца были напечатаны въ 1829 и 1851 гг., а Болея-сына въ 1833 г.³⁾ Въ настоящее время „Мнимая Геометрія“ и вообще обобщеніе различныхъ геометрическихъ вопросовъ, касающихся пространствъ болѣе трехъ измѣреній, занимаютъ многихъ геометровъ и составляетъ предметъ многочисленныхъ мемуаровъ и изслѣдованій, въ которыхъ трактуется о пространствахъ многихъ измѣреній. Основное свойство или положеніе въ геометріи Лобачевскаго состоитъ въ томъ, что сумма угловъ во всякомъ треугольникѣ менѣе двухъ прямыхъ угловъ. Исходя изъ этого начала онъ доказываетъ много занимательныхъ предложеній. Изъ математиковъ настоящаго времени, занимающихся „Мнимой Геометріей“, названной въ послѣднее время также „Неевклидовой“, въ отличіе отъ геометріи Евклида, т. е. обыкновенной, входящей въ составъ гимназическаго курса, наиболѣе извѣстны

¹⁾ *Clebsch*, Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, См. Jour. Crelle, Bd. LXIII, 1863, S. 53.

²⁾ Напечатано въ ученыхъ запискахъ Казанскаго Универ. кн. 1, 1835 г., а также въ Journal Crelle, Bd. XVII, 1837. Кромѣ этого сочиненія онъ написалъ нѣсколько другихъ, относящихся къ тому же вопросу, изъ нихъ главное: *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*. Kazan, 1856, in-8. См. также полное собраніе сочиненій по геометріи Н. И. Лобачевскаго. Изданіе Императорскаго Казанскаго университета Т. I—II, Казань, 1883—86, in-4.

³⁾ Интересное изслѣдованіе Болея-сына переведено на французскій языкъ Гуэлемъ подъ заглавіемъ: *La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiôme XI d'Euclide ect.*, par Jean Bolyai, Paris, 1868, in-8.

труды: *Белтрами* ¹⁾, *Клейна* ²⁾, *Риманна* (1826—1866) ³⁾, *Фришауфа* ⁴⁾, *Буняковского* ⁵⁾ и многихъ другихъ ⁶⁾. Далѣе геометры обобщили понятіе о пространствахъ трехъ измѣреній и стали разсматривать и изслѣдовать пространства четырехъ, пяти и вообще m , $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ измѣреній. Конкретное представленіе такихъ пространствъ недоступно нашему пониманію, съ геометрической точки зрѣнія, но съ аналитической вполне возможны и подлежатъ математическимъ изслѣдованіямъ.

Выходя изъ предѣловъ нашего представленія при помощи Геометріи высшихъ измѣреній рѣшаются вопросы повидимому совершенно невозможные, лишенные здраваго смысла, какъ напр. выворачиваніе вполне замкнутаго тѣла, въ родѣ шара, эллипсоида и т. под.; основывая свои разсужденія на аналогіи и исходя изъ свойствъ тѣлъ трехъ измѣреній многіе геометры, теоремы, имѣющія мѣсто въ нашемъ пространствѣ, обобщили и на пространства высшихъ измѣреній. Въ послѣднее время германскіе геометры *Рудель* ⁷⁾ и *Дюрежъ* ⁸⁾ изслѣдовали нѣкоторыя свойства тѣлъ болѣе трехъ измѣреній. Дюрежъ показалъ, что для тѣлъ въ пространствахъ четырехъ, пяти, шести и т. д. измѣреній, соотвѣтствующимъ нашимъ многогранникамъ также существуетъ теорема Эйлера, выражающая зависимость между сторонами, ребрами и углами многогранника. Какъ частный случай изъ общей формулы для тѣла n измѣреній онъ выводитъ формулу Эйлера. Американскій математикъ *Нюкомбъ* ⁹⁾ рѣшилъ задачу о выворотѣ бочковидной фи-

¹⁾ *Beltrami*, Saggio di Interpretazione delle Geometria non Enclidea. Napoli, Giornale di Matematiche, Vol. VI, 1868.

²⁾ *Klein*, Ueber die sogenannte Nicht-Enklidische Geometrie. См. Mathem. Annalen T. IV, 1871; T. VI, 1873; T. VII, 1874.

³⁾ *Riemann*, Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zur Grunde liegen. Habilitationsschrift von 10 Juni 1854. Abhandlungen der Königl. Gesellsch. zu Göttingen, Bd. XIII.

⁴⁾ *Frischauf*, Absolute Geometrie nach I. Bolyal. Leipzig, 1872, in-8. — Elemente der Absoluten Geometrie. Leipzig, 1876, in-8.

⁵⁾ *Bouniakoffsky*, Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la Géométrie non-euclidienne. См. Mémoires de l'Acad. de St. Petersb., Serie VII, T. XVIII, 1872.

⁶⁾ Основныя начала „Неевклидовой Геометріи“ изложены нами въ сочиненіи „Начала Евклида“, Кіевъ, 1880, in-8. См. стр. 1—80.

⁷⁾ *Rudel*, Vom Körper höheren Dimensionen. Beiträge zu den Elementen einer n —dimensionalen Geometrie. Kaiserslautern, 1882, in—8.

⁸⁾ *Durège*, Ueber Körper von vier Dimensionen. Sitzb. der k. k. Akad. der Wissenschaften von Wien. Bd. LXXXIII, II Abth., Mai-Heft, Jahrg. 1881.

⁹⁾ *Newcomb*, Note on a class of Transformations which Surfaces may undergo in Space of more than three dimensions. См. American Journal of Mathematic., T. I, pag. 1—4, 1878.

гуры безъ разрыва или разрѣза частей. Въ послѣднее время извѣстный германскій математикъ *Бальцеръ* въ своей „Аналитической Геометріи“ ¹⁾ также ввелъ нѣкоторыя обобщенія, основанныя на введеніе въ геометрическое изслѣдованіе пространства *m* измѣреній. Но замѣтимъ здѣсь, что выводы Дюрежа основаны только на аналогіи и на обобщеніи извѣстныхъ свойствъ, присущихъ только нашему пространству. Съ аналитической точки зрѣнія такое обобщеніе возможно, но съ геометрической—реальной, такія обобщенія представляютъ несообразность. Въ настоящее время вопросы эти, какъ мы уже замѣтили выше, занимаютъ многихъ геометровъ и представляютъ обширное поле для абстрактнаго мышленія человѣческаго ума.

¹⁾ *R. Baltzer, Analytische Geometrie. Leipzig, 1882, in-8.*

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Аналитическая Геометрія двухъ измѣреній.

ГЛАВА I.

Методъ координатъ Декарта.

§ 1. Аналитическая Геометрія есть методъ съ помощью котораго каждая геометрическая задача облакается въ алгебраическую форму, а каждая кривая или поверхность выражается алгебраическимъ уравненіемъ. Такъ какъ геометрическія задачи относятся къ системѣ точекъ въ конечномъ или бесконечномъ числѣ, въ этомъ послѣднемъ случаѣ точки образуютъ поверхность или кривую линію, то необходимо имѣть способъ съ помощью котораго возможно бы было выразить точку, на плоскости или въ пространствѣ, числами.

Методъ этотъ принадлежитъ Декарту; приложенный къ геометріи на плоскости онъ носитъ названіе: *Аналитической Геометріи двухъ измѣреній* или просто *плоской*, а приложенный къ геометріи въ пространствѣ носитъ названіе: *Аналитической Геометріи трехъ измѣреній*.

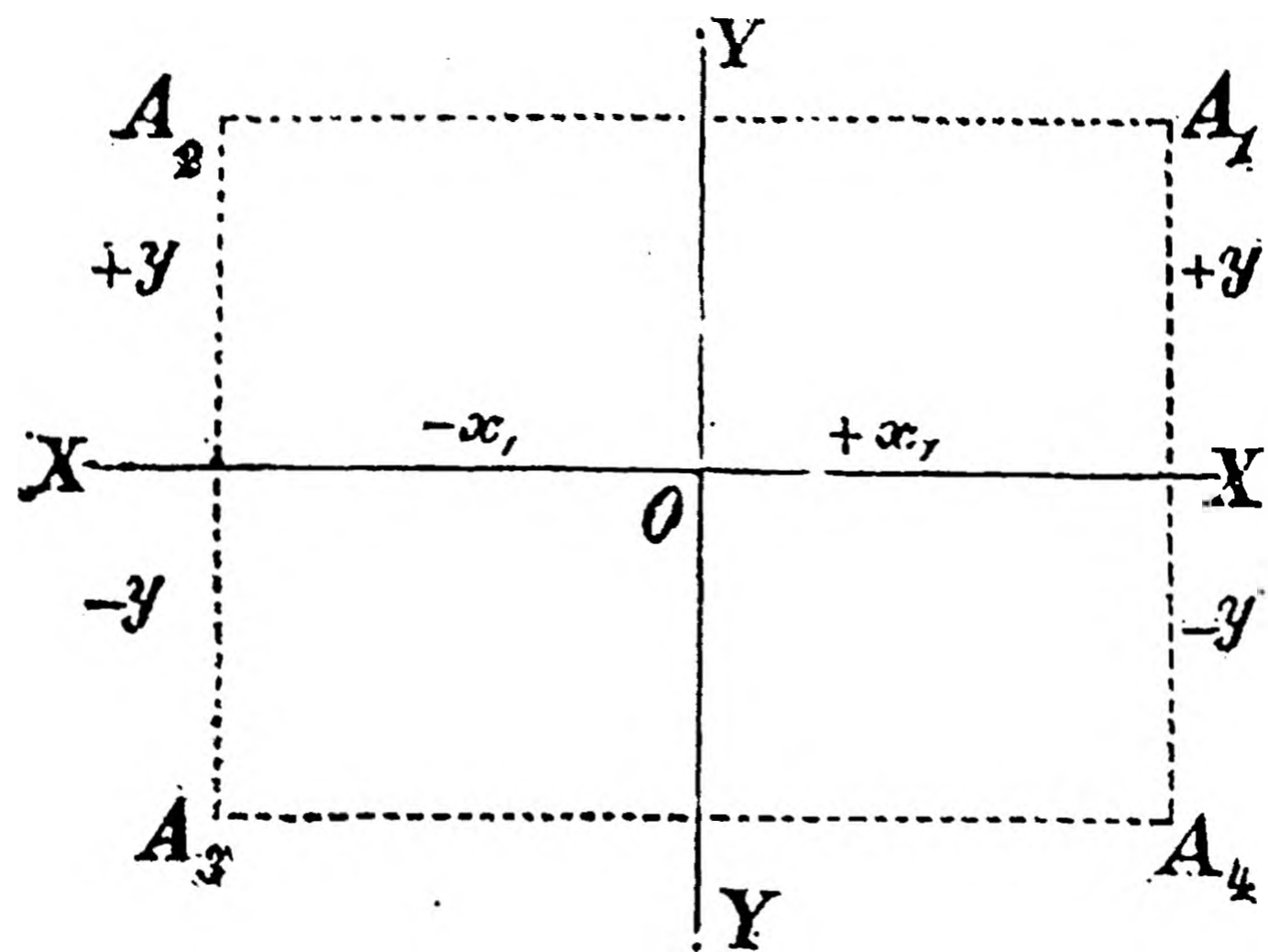
Замѣтимъ при этомъ, что Декартъ свой методъ приложилъ только къ плоской геометріи.

Методъ Декарта рѣзко отличался отъ всѣхъ методовъ до него употреблявшихся; онъ самъ о немъ говоритъ, что съ помощью его можно рѣшить всякую геометрическую задачу, то есть по извѣстнымъ опредѣленнымъ правиламъ можно найти алгебраическое выраженіе, которое соотвѣтствуетъ искомому результату.

§ 2. Въ чемъ-же состоитъ этотъ методъ? Методъ этотъ состоитъ въ томъ, что каждая точка на плоскости опредѣляется двумя числами слѣдующимъ образомъ:

Проводятъ на плоскости двѣ прямыя, для простоты, подѣ прямымъ угломъ (фиг. 1), которыя называютъ: *координатными осями*, а точку ихъ пересѣченія—*началомъ координатъ*. Пусть такія прямыя будутъ XX и YY , точка ихъ пересѣченія или начало координатъ O .

Фиг. 1.



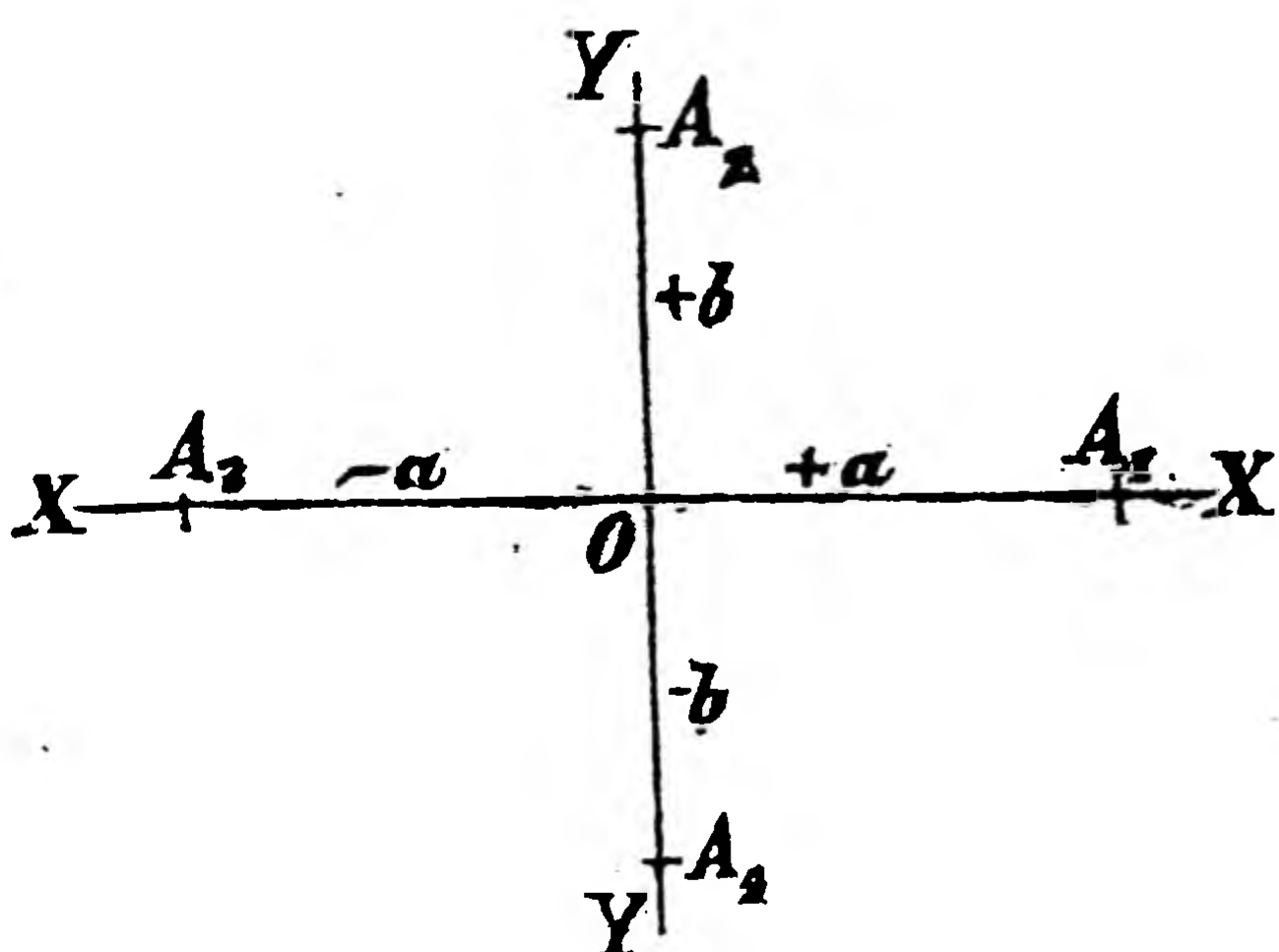
Пересѣченія—*началомъ координатъ*. Пусть такія прямыя будутъ XX и YY , точка ихъ пересѣченія или начало координатъ O .

Прямая XX называется *осью абсциссъ*, а прямая YY —*осью ординатъ*. Условимся теперь отсчитывать по оси абсциссъ XX отъ точки O вправо, по принятому масштабу, положительныя числа, которыя всегда будемъ означать $+x$, а влѣво отъ точки O ,

по той-же прямой, будемъ отсчитывать, по тому-же масштабу, отрицательныя числа $-x$. По оси ординатъ YY , начиная отъ начала O вверхъ, будемъ отсчитывать положительныя числа $+y$, а внизъ отрицательныя $-y$ по тому-же масштабу. Легко видѣть, что съ помощью этого условія, каждой точкѣ на плоскости принадлежатъ два числа, которыя получатся: одно на оси абсциссъ, а другое на оси ординатъ, если изъ взятой точки на плоскости опустимъ перпендикуляры на XX и YY . Таковы точки A_1, A_2, A_3, A_4 , которымъ соотвѣтствуютъ числа: $+x$ и $+y$ для A_1 , $-x$ и $+y$ для A_2 , $-x$ и $-y$ для A_3 и наконецъ $+x$ и $-y$ для A_4 . Обратво, каждымъ двумъ даннымъ числамъ, какъ абсцисса и ордината точки, соотвѣтствуютъ точки на плоскости, когда изъ точекъ соотвѣтствующихъ числамъ на ординатѣ и абсциссѣ возставимъ перпендикуляры; пересѣченіе этихъ перпендикуляровъ и будетъ соотвѣтствующая даннымъ числамъ точка на плоскости.

Точки соотвѣтствующія числамъ: $x = 0, y = 0$; $x = +a, y = 0$; $x = 0, y = +b$; $x = -a, y = 0$; $x = 0, y = -b$ суть (фиг. 2): начало координатъ O и точки A_1, A_2, A_3, A_4 .

Фиг. 2.



Вмѣсто того, чтобы писать точки $x = a, y = b$ мы будемъ писать просто (a, b) . Слѣдовательно значенія $(3, 5), (-3, -5)$ и т. д. будутъ означать точки, коихъ абсциссы суть: $+3, -3, \dots$, а ординаты $+5, -5, \dots$

Мы взяли за координатныя оси двѣ перпендикулярныя прямыя, но можно взять и прямыя наклоненныя подѣ произвольнымъ угломъ. Въ этомъ случаѣ, вмѣсто перпендикуляровъ, изъ точекъ на осяхъ, должно брать за координаты точки, линіи параллельныя координатнымъ осямъ.

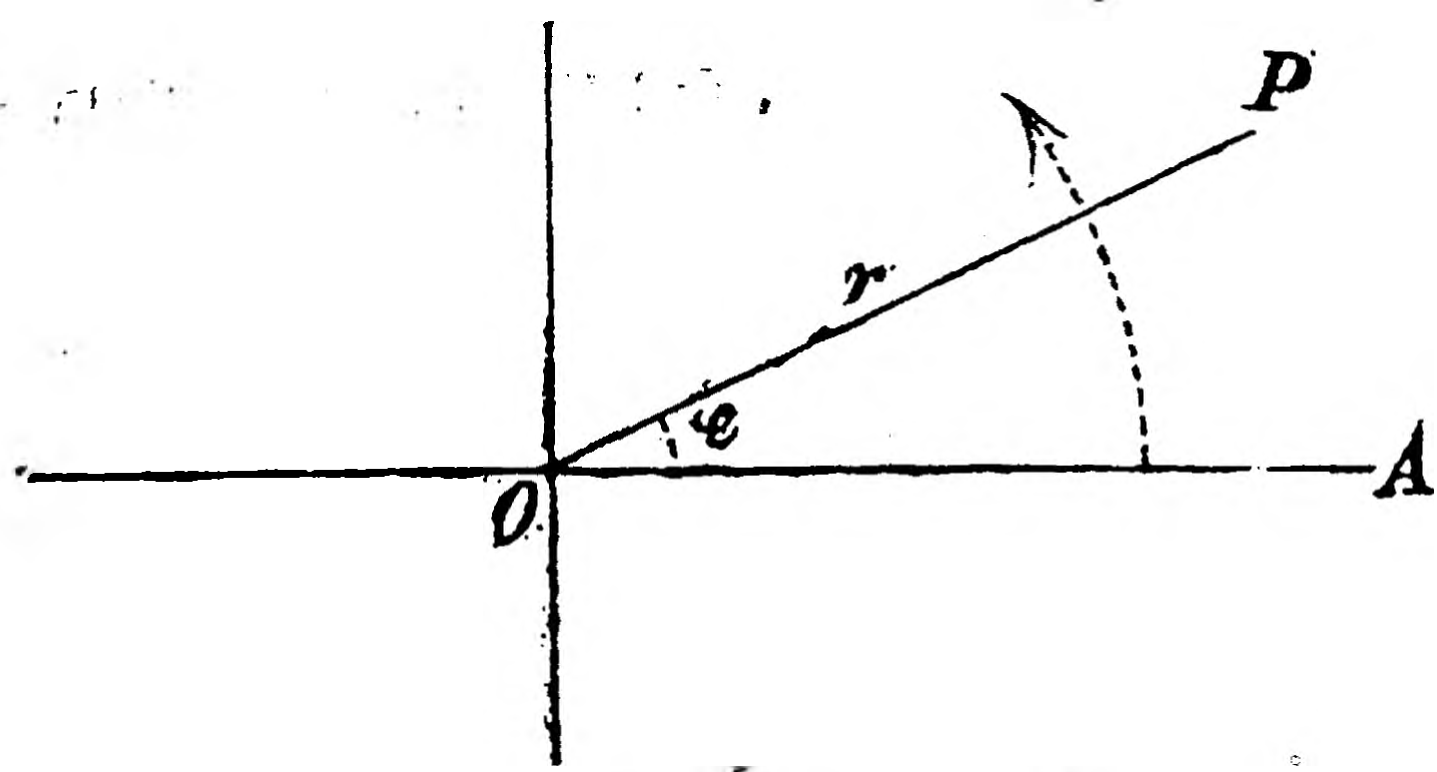
Въ первомъ случаѣ говорятъ: *прямоугольная система координатъ*, а во второмъ—*косугольная система координатъ*.

Замѣтимъ еще, что мы будемъ всегда обозначать координаты точки, которая можетъ принимать различныя положенія на плоскости, то есть описывать какую нибудь линію, черезъ (x, y) , а координаты точекъ данныхъ, фиксированныхъ на плоскости, черезъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и т. д. Первыя мы будемъ называть *переменными*, а вторыя—*постоянными*.)

§ 3. *Полярныя координаты*. Есть еще другой способъ опредѣлять положеніе точки на плоскости, именно: ея разстояніемъ отъ данной точки, принятой за начало, которую называютъ *полюсомъ* и угломъ который это разстояніе составляетъ съ данною прямою, проходящей черезъ полюсь. Пусть данная точка—полюсь—будетъ O (фиг. 3), данная прямая OA .

Положеніе точки P опредѣляется разстояніемъ $OP=r$, которое называется *радіусомъ векторомъ*, и угломъ $POA=\varphi$. Радиусу r даютъ опредѣленный знакъ, а уголъ φ измѣняютъ отъ 0° до 360° , чтобы каждой точкѣ на плоскости принадлежала единственная пара координатъ (r, φ) . Такая система координатъ называется

Фиг. 3.

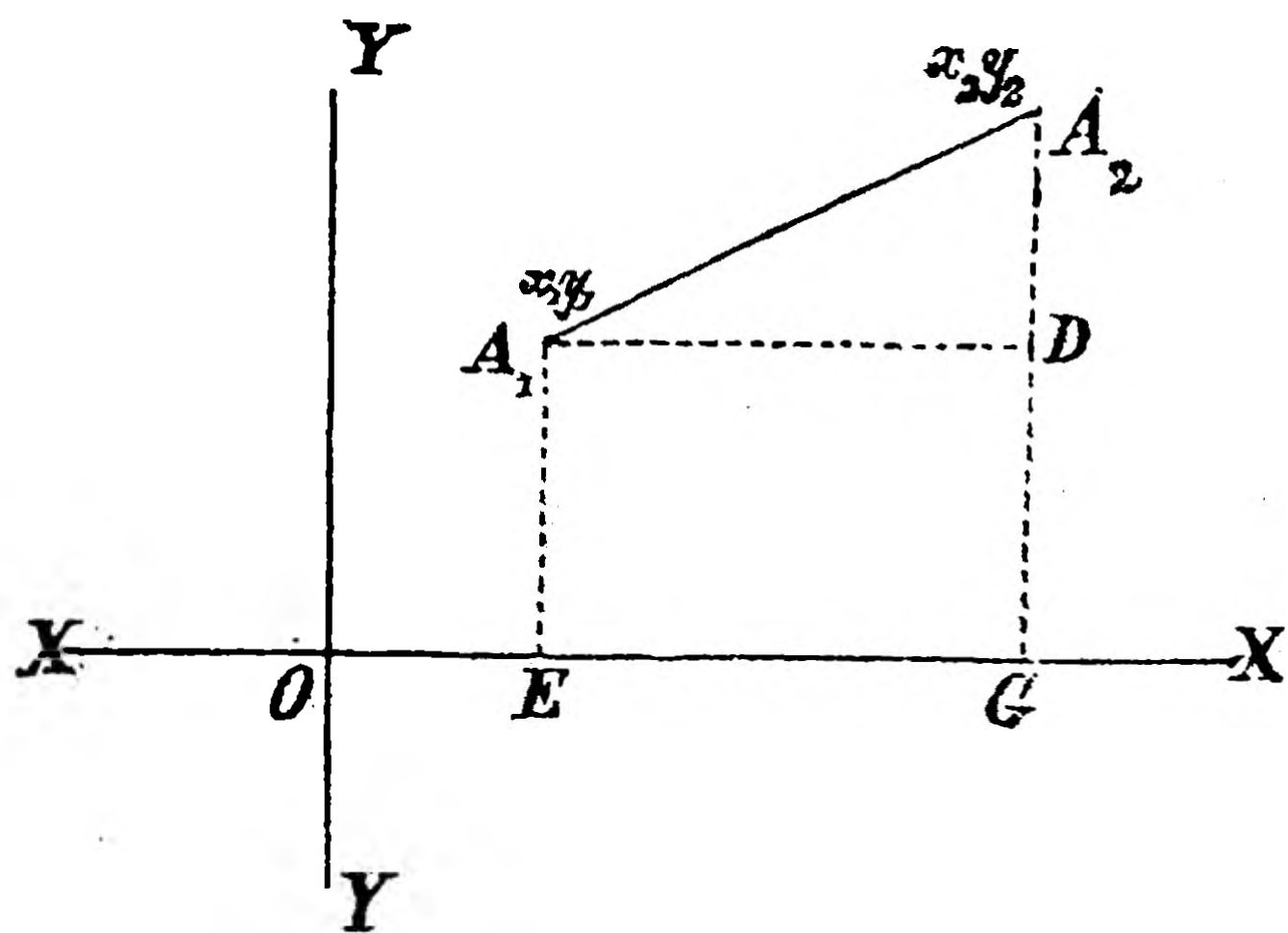


полярной. Условились углы отсчитываемые отъ AO по направленію стрѣлки принимать за положительные, а отсчитываемые отъ AO въ противоположномъ направленіи за отрицательные. Углы отъ AO въ обѣ стороны могутъ возрастать отъ 0 до $+\infty$ или $-\infty$.

§ 4. Рѣшимъ, съ помощью метода координатъ, нѣкоторыя простыя задачи, которыя намъ будутъ необходимы впоследствии.

Задача 1. Найти выраженіе для разстоянія точекъ A_1 и A_2 , коихъ координаты, отнесенныя къ прямоугольнымъ осямъ, суть: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ?

Фиг. 4.



Рѣшеніе. Пусть данныя оси XX и YY (фиг. 4), данныя точки A_1 и A_2 , коихъ координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Проведемъ прямую A_1D параллельно абсциссѣ.

Изъ прямоугольнаго треугольника A_1A_2D мы имѣемъ:

$$\overline{A_1A_2}^2 = \overline{A_1D}^2 + \overline{A_2D}^2$$

но:

$$A_1A_2 = r \quad , \quad A_1D = OG - OE \quad , \quad A_2D = A_2G - GD = A_2G - A_1E$$

$$OE = x_1 \quad , \quad OG = x_2 \quad , \quad A_1E = y_1 \quad , \quad A_2G = y_2$$

подставляя, найдемъ:

$$A_1 D = (x_2 - x_1) \quad , \quad A_2 D = (y_2 - y_1)$$

откуда:

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (1)$$

Извлекая корень квадратный, найдемъ:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Если въ уравненіи (1) отбросимъ у x_1 и y_1 значки, то есть сдѣлаемъ ихъ неопредѣленными, то уравненіе (1) приметъ слѣдующій видъ:

$$r^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

изъ котораго видно, что точка, координаты которой (x, y) , лежитъ на окружности круга, коего радиусъ r , а слѣдовательно уравненіе выражаетъ окружность.

Если точка A_2 будетъ лежать въ началѣ координатъ, то $x_2 = 0$ и $y_2 = 0$. Слѣдовательно уравненіе (1) приметъ видъ:

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 \quad \text{или} \quad r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (2)$$

и выражаетъ разстояніе точки (x_1, y_1) , находящейся на окружности круга радиуса r , отъ начала координатъ, въ которомъ лежитъ центръ круга.

Если оси будутъ косоугольныя и уголъ между ними будетъ ω , то легко видѣть, что:

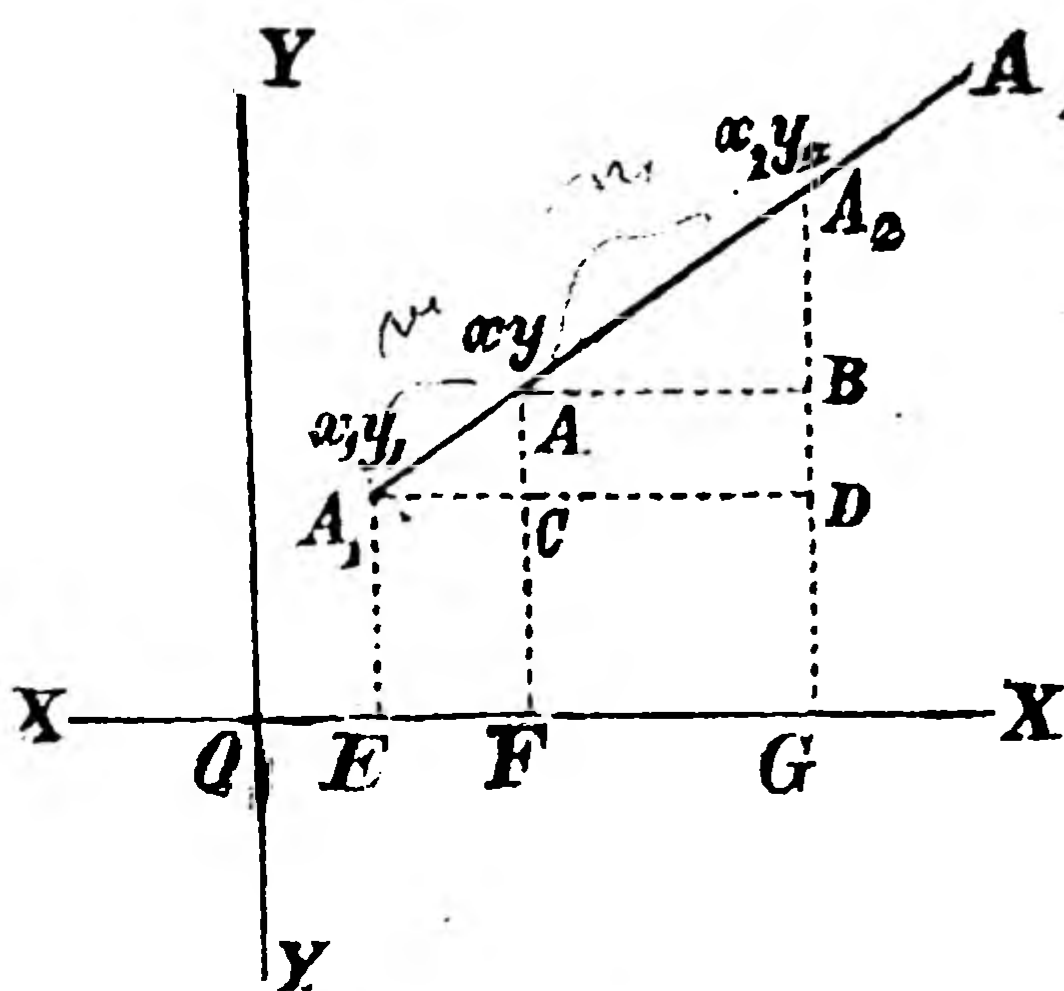
$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \omega \quad (3)$$

откуда:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \omega}$$

Въ предъидущихъ выраженіяхъ радикалу нужно дать положительный знакъ, такъ какъ дѣло идетъ объ абсолютной величинѣ разстоянія. Если

Фиг. 5.



въ уравненіи (3) отбросимъ у x_1 и y_1 значки, то получимъ уравненіе круга, отнесеннаго къ косоугольной системѣ координатъ.

Задача 2. Даны двѣ точки на плоскости: (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , найти на прямой, соединяющей эти двѣ точки, координаты точки, которая дѣлитъ разстояніе между данными точками въ данномъ отношеніи $\frac{m}{n}$?

Рѣшеніе. Пусть данныя точки будутъ A_1 и A_2 (фиг. 5), ихъ коор-

динаты (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ; искомая точка пусть будетъ A , ея координаты (x, y) .

Проводя черезъ точки A и A_1 линіи AB и A_1D параллельныя къ оси OX , черезъ точку A , прямую AF параллельную оси OY , мы найдемъ:

$$\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{A_1C}{CD} = \frac{m}{n}$$

но:

$$A_1C = EF = OF - OE = x - x_1$$

и

$$CD = FG = OG - OF = x_2 - x$$

подставляя эти выраженія въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

откуда имѣемъ:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}$$

Такъ какъ между x и y нѣтъ разницы относительно координатныхъ осей, то можно прямо написать и выраженіе для y , оно будетъ:

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}$$

Сокращая предъидущія выраженія для x и y на n и означая отношеніе $\frac{m}{n}$ черезъ λ , найдемъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (4)$$

Если искомая точка должна дѣлить внѣшнее разстояніе между данными точками въ томъ же отношеніи $\frac{m}{n} = \lambda$, то процессъ подобный предъидущему приведетъ къ формуламъ:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \quad (5)$$

Изъ этихъ двухъ выраженій для x и y видимъ, что для точекъ, лежащихъ между точками A_1 и A_2 , отношеніе $\frac{m}{n}$ или λ есть величина положитель-

ная, а для точекъ лежащихъ внѣ A_1 и A_2 , это отношеніе есть величина отрицательная.

Замѣтимъ, что уравненія (4) и (5) имѣютъ мѣсто и при косоугольной системѣ координатъ, такъ какъ подобіе треугольниковъ A_1AC и A_1A_2D независитъ отъ наклоненія осей.

Давая въ формулахъ (4) величинѣ λ всѣ возможные значенія, мы получимъ координаты всѣхъ точекъ, лежащихъ на прямой, проходящей черезъ точки A_1 и A_2 , коихъ координаты суть: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Изъ всѣхъ значеній λ отъ $-\infty$ до $+\infty$ единственное $\lambda = -1$ дѣлаетъ координаты x и y равными безконечности, а это показываетъ, что прямая имѣетъ одну только точку лежащую на безконечности. Между тѣмъ по формѣ прямой казалось-бы, что на прямой есть двѣ безконечно удаленныя точки—одна въ одномъ направленіи, а другая въ противоположномъ ¹⁾.

Пр. 1. Найти разстояніе между точками: $(-3, 4)$ и $(5, -6)$?

Отв. $2\sqrt{41}$.

Пр. 2. Найти длину сторонъ треугольника, коего вершины суть: $(2, 3)$; $(4, -5)$; $(-3, -6)$?

Отв. $\sqrt{68}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{106}$.

Пр. 3. Найти координаты точки, дѣлящей пополамъ разстояніе между точками: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ?

Отв. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Пр. 4. Найти координаты срединъ сторонъ треугольника, коего вершины суть: $(2, 3)$; $(4, -5)$; $(-3, -6)$?

Отв. $(3, -1)$; $(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2})$; $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

Пр. 5. Найти координаты точки, лежащей на одной трети разстоянія между точками $(2, 3)$, $(4, -5)$ ближе къ первой?

Отв. $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

Пр. 6. Координаты вершинъ треугольника суть: (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) , найти координаты точки, лежащей на одной трети прямой, соединяющей вершину треугольника съ серединой противоположной стороны, считая треть отъ этой стороны?

Отв. $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

¹⁾ Это заключеніе можно вывести изъ опредѣленія прямой: что прямая есть такая линія, которая вполне опредѣляется двумя точками. Такъ какъ принимается что двѣ параллельныя прямыя линіи пересѣкаются на безконечности, то, имѣя на безконечности двѣ общія точки, онѣ бы совмѣстились.

Такъ какъ въ эти выраженія координаты (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) входятъ одинаково, то изъ этого заключаемъ, что три такія прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 7. Какая нибудь изъ сторонъ треугольника раздѣлена въ отношеніи $m:n$, а линія, соединяющая эту точку съ противуположащей вершиной, раздѣлена въ отношеніи $m+n:l$; найти координаты этой послѣдней точки?

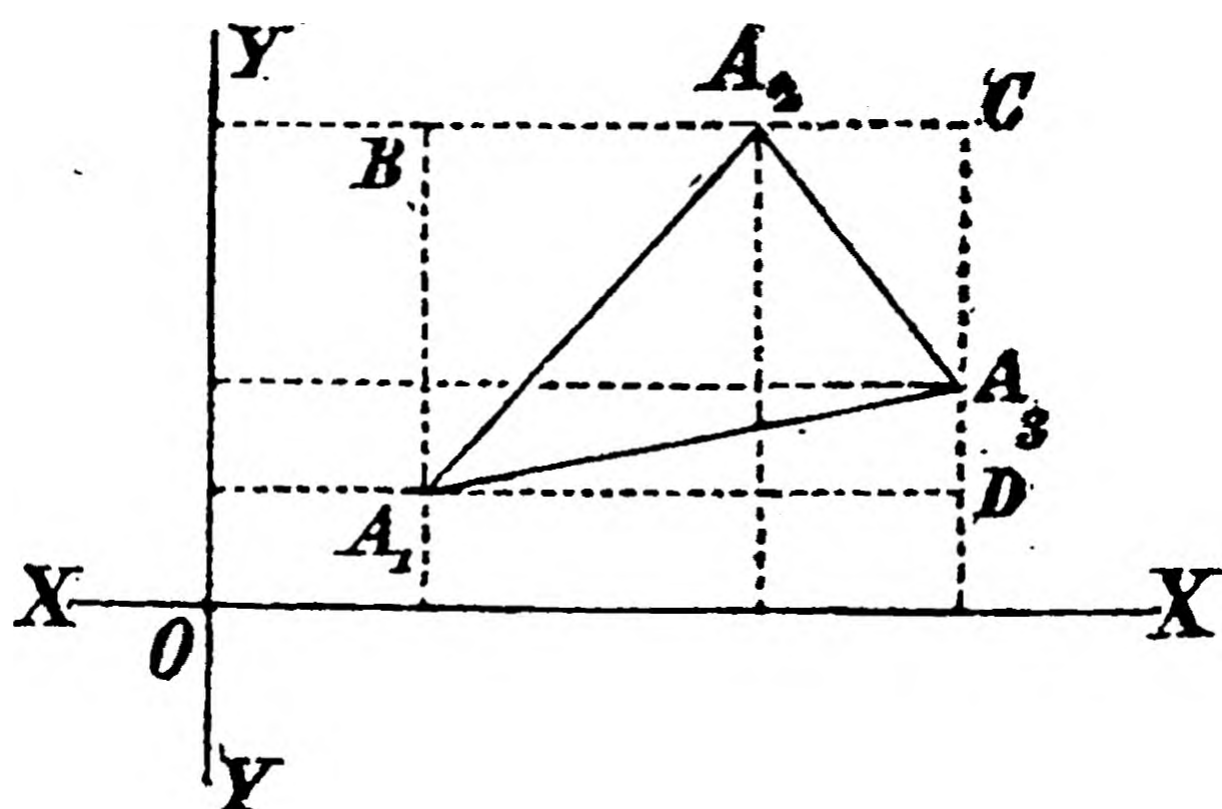
$$\text{Отв. } x = \frac{lx_1 + mx_2 + nx_3}{l+m+n}, \quad y = \frac{ly_1 + my_2 + ny_3}{l+m+n}.$$

§ 5. *Задача.* По даннымъ координатамъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) вершинъ треугольника, найти его площадь?

Рѣшеніе. Пусть координатныя оси будутъ XX и YY (фиг. 6), начало O и треугольникъ $A_1 A_2 A_3$.

Площадь прямоугольника $A_1 BCD$, очевидно, равна произведенію: $(x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$; если отъ этой площади отнимемъ площади трехъ треугольниковъ $A_1 B A_2$, $A_2 C A_3$, $A_1 D A_3$, коихъ площади суть:

Фиг. 6.



$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \quad , \quad \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) \quad , \quad \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)$$

то получимъ искомую площадь:

$$\begin{aligned} \Delta = & (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) - \\ & - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \end{aligned}$$

откуда имѣемъ:

$$2\Delta = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

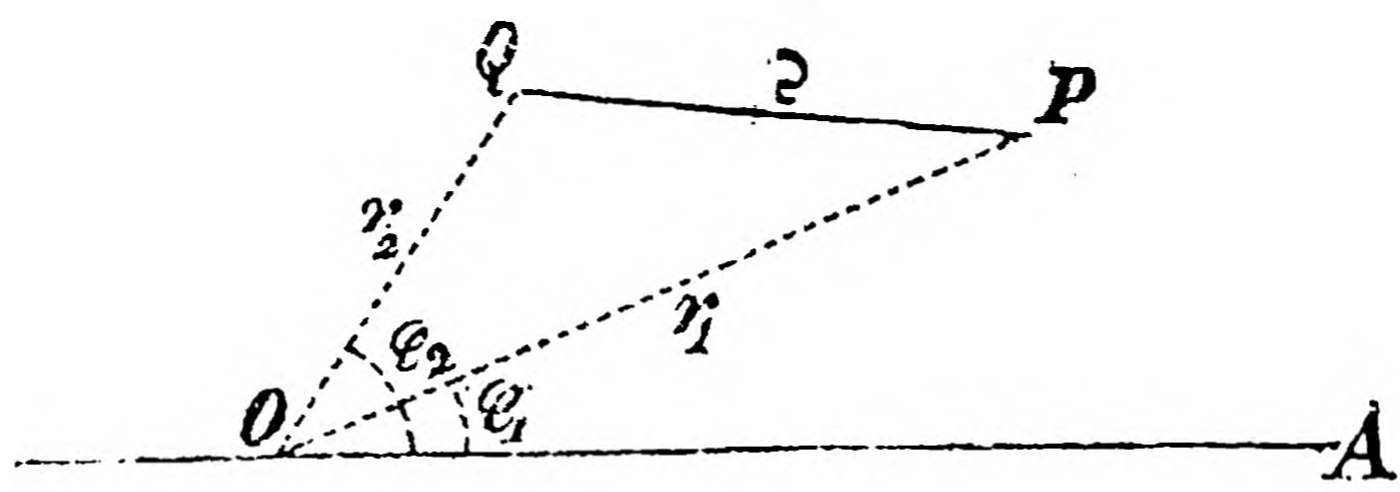
Выраженіе, которое можно изобразить въ видѣ определителя:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Если $\Delta = 0$, то это будетъ условіе, что три точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) лежатъ на одной прямой линіи.

§ 6. *Задача.* Найти разстояніе между двумя точками, коихъ полярныя координаты суть: (r_1, φ_1) , (r_2, φ_2) ?

Фиг. 7.



Рѣшеніе. Пусть (фиг. 7) $OP = r_1$, $OQ = r_2$ и углы $\angle AOP = \varphi_1$, а $\angle AOQ = \varphi_2$.

Если разстояніе PQ означимъ черезъ ρ , то легко видѣть, замѣтивъ, что уголъ $\angle POQ = \varphi_2 - \varphi_1$, что:

$$\rho^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

ГЛАВА II.

Алгебраическое представленіе геометрическихъ мѣстъ.

§ 7. Какая бы нибыла выбрана система координатъ всегда необходимо имѣть двѣ величины для опредѣленія положенія точки на плоскости, то есть необходимо имѣть два условія или уравненія. Если-же будетъ дана одна только изъ этихъ величинъ или одно условіе, то существуетъ безконечное число точекъ на плоскости, которыхъ положеніе будетъ удовлетворять данному условію. Совокупность такихъ точекъ представляетъ *кривую линію* или *геометрическое мѣсто*.

Для поясненія сказаннаго возьмемъ нѣсколько примѣровъ:

Пр. 1. Пусть будетъ дано одно условіе $x = a$. Координата y остается неопредѣленною.

Если черезъ точку, лежащую на оси X на разстояніи a отъ начала координатъ, проведемъ прямую параллельную оси Y , то всѣ точки этой прямой будутъ удовлетворять уравненію:

$$x = a$$

такъ какъ всѣ онѣ находятся на разстояніи a отъ оси Y . Слѣдовательно проведенная прямая есть геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на разстояніи a отъ оси Y , коего алгебраическое представленіе есть уравненіе $x = a$. Очевидно, что уравненіе $y = b$, представляетъ прямую параллельную оси X , проведенную на разстояніи b отъ оси X .

Совокупность этихъ уравненій даетъ точку, коей координаты суть (a, b) . Слѣдовательно въ Декартовой системѣ координатъ положеніе точки

на плоскости опредѣляется пересѣченіемъ двухъ простѣйшихъ геометрическихъ мѣстъ.

Легко видѣть, что въ отдѣльности, каждое изъ уравненій:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0$$

представляетъ первое ось Y , а второе ось X , а въ совокупности—начало координатъ.

Пр. 2. Возьмемъ направленіе φ за постоянное, а разстояніе r оставимъ неопредѣленнымъ, очевидно, что всѣ точки лежащія на прямой, проходящей черезъ начало и составляющей уголъ φ съ осью X будутъ удовлетворять этому условію, т. е. координаты всѣхъ точекъ этой прямой будутъ удовлетворять уравненію:

$$y = x \operatorname{tg}(\varphi)$$

слѣдовательно это уравненіе будетъ алгебраическое представленіе этой прямой.

Напротивъ, если оставимъ r постояннымъ, а уголъ φ будемъ измѣнять или оставимъ неопредѣленнымъ, то точки, коихъ координаты будутъ удовлетворять этимъ условіямъ, будутъ находится на окружности круга, коего центръ находится въ полюсѣ, а радіусъ равенъ постоянной величинѣ r . Слѣдовательно уравненіе:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

будетъ алгебраическое представленіе окружности круга, коего радіусъ есть r , т. е. всѣ точки, коихъ координаты удовлетворяютъ предъидущему уравненію, будутъ лежать на этой окружности.)

§ 8. Идея геометрическаго мѣста, о которомъ предъидущіе примѣры даютъ первое понятіе, есть основная въ Аналитической Геометріи, предметъ которой и составляетъ изслѣдованіе свойствъ такихъ мѣстъ или кривыхъ линій.

Одно условіе или уравненіе между координатами (x, y) или (r, φ) :

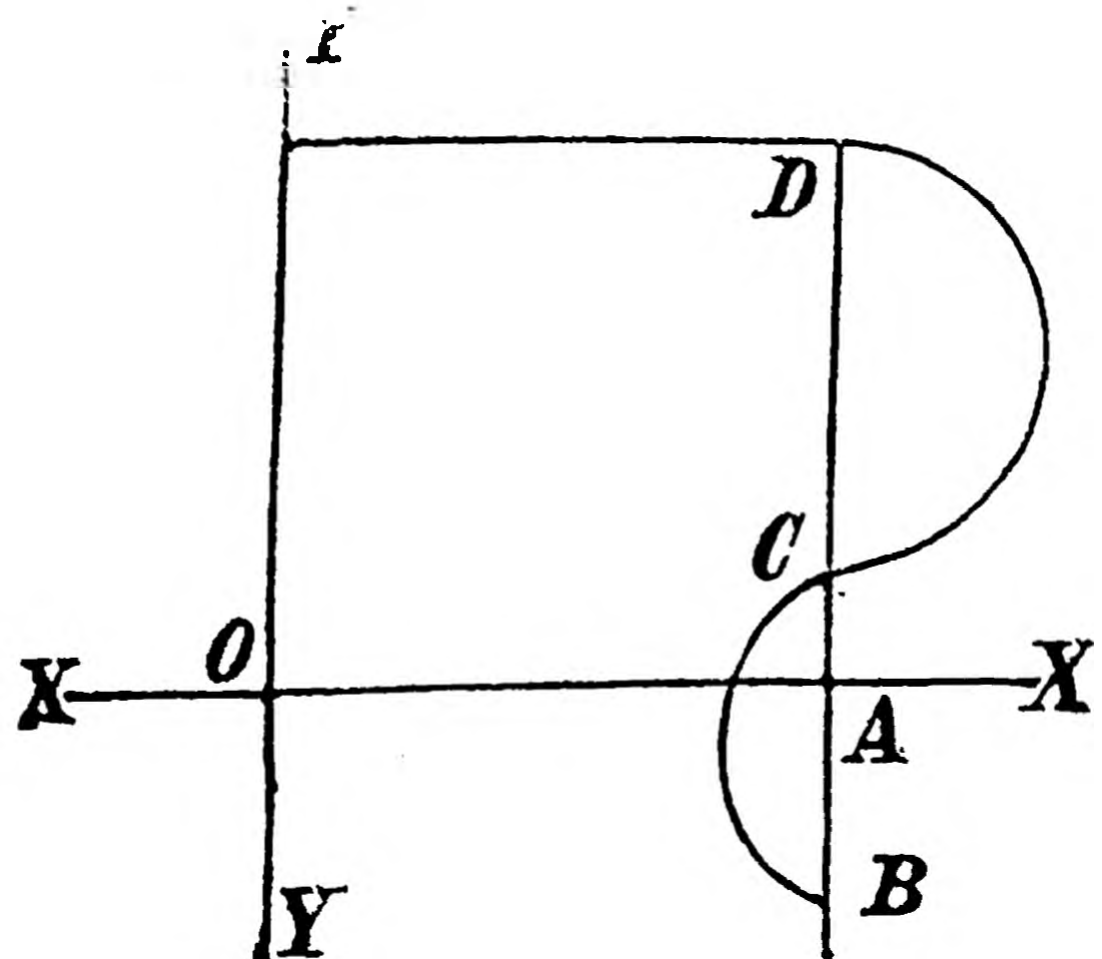
$$F(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad \Phi(r, \varphi) = 0$$

представляетъ кривую или геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ, прямоугольныя или полярныя, удовлетворяютъ предъидущимъ уравненіямъ. Эти уравненія выражаютъ геометрическое свойство, общее всѣмъ точкамъ кривой. Чтобы построить такую кривую надобно рѣшить предъидущія уравненія относительно y или x . Изъ перваго будемъ имѣть:

$$y = f(x) \tag{1}$$

Давая произвольныя значенія x , начиная, напримѣръ, съ 0, 1, 2,....., —1, —2, —3,..... мы изъ уравненія (1) будемъ получать величины для y ,

Фиг. 8.



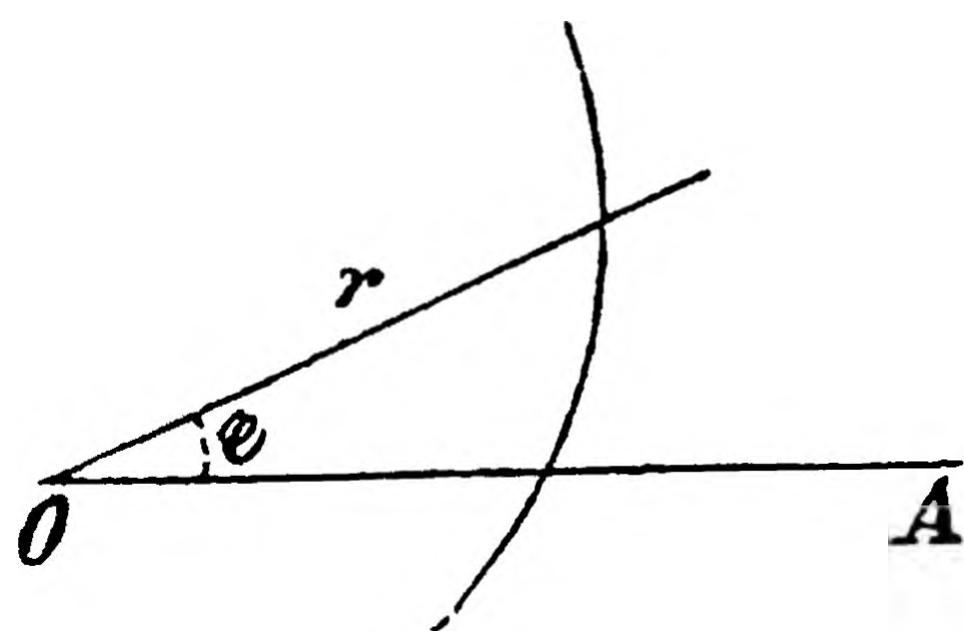
соотвѣтственно одно или нѣсколько, смотря по характеру уравненія. Напримѣръ абсциссѣ OA (фиг. 8) будутъ соотвѣтствовать три ординаты AC , AD и AB , изъ коихъ послѣдняя отрицательная.

Тоже самое можно сказать и объ уравненіи $\Phi(r, \varphi)$, которое рѣшивъ, получимъ:

$$r = \psi(\varphi)$$

Давая всѣ возможныя значенія углу φ (фиг. 9) получимъ соотвѣтственныя значенія для r .

Фиг. 9.



Такимъ образомъ кривая будетъ построена, хотя въ общихъ чертахъ.

Обратно, если будетъ дано геометрическое свойство кривой, общее для всѣхъ ея точекъ, то выразивъ это свойство уравненіемъ между координатами, произвольно выбранными на плоскости, найдемъ уравненіе, которое и будетъ алгебраическое представленіе кривой, опредѣленной даннымъ свойствомъ. Кругъ, напримѣръ, опредѣляется общимъ свойствомъ всѣхъ его точекъ: что онѣ находятся въ равномъ разстояніи отъ центра, или что хорда есть средне-пропорціональная величина между цѣлымъ діаметромъ и прилежащимъ отрѣзкомъ. Первое свойство даетъ уравненіе круга:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2)$$

если начало координатъ находится въ центрѣ его, а второе даетъ уравненіе:

$$x^2 + y^2 = 2rx \quad (3)$$

если начало координатъ помѣститъ на окружности, діаметръ проведенный черезъ начало взять за ось абсциссѣ, а касательную къ окружности, черезъ начало,—за ось ординатъ.

Изъ этого мы видимъ, что извѣстное свойство, принадлежащее всѣмъ точкамъ кривой, даетъ ея уравненіе или-же алгебраическое представленіе; обратно, каждое алгебраическое уравненіе между координатами x , y или r , φ выражаетъ геометрическое свойство кривой, принадлежащее всѣмъ ея точкамъ. Все здѣсь сказанное вкратцѣ будетъ выяснено ниже.)

(§ 9. Мы ограничимся изученіемъ алгебраическихъ кривыхъ, т. е. такихъ, которыя выражаются алгебраическими уравненіями и преимущест-

венно кривыми выражаемыми уравненіями первой и второй степеней; эти кривыя извѣстны въ анализѣ подѣ именемъ *коническихъ степеній*.

Всѣ кривыя, которыя не могутъ быть выражены алгебраическими уравненіями, называются *трансцендентными*, таковы:

$$y = \sin x \quad , \quad y = e^x \quad , \quad y = \operatorname{tg} x \quad \text{и т. д.}$$

Какъ ни любопытны свойства трансцендентныхъ кривыхъ, но ихъ свойство, при настоящемъ состояніи анализа, не могутъ быть обстоятельно изслѣдованы и относятся къ анализу трансцендентныхъ функцій.

§ 10. Алгебраическія кривыя раздѣляются по порядкамъ; порядкомъ кривой называютъ степень x или y или того и другаго вмѣстѣ въ уравненіи. Чтобы опредѣлить порядокъ кривой надобно привести ея уравненіе въ такую форму, въ которой оно заключаетъ только цѣлыя и положительныя степени переменныхъ x и y . Напримѣръ уравненіе круга:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

будучи приведено къ формѣ:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

показываетъ, что окружность есть кривая второго порядка. Уравненіе

$$y = x \operatorname{tg} \varphi$$

показываетъ, что прямая линія первого порядка.)

§ 11. Пояснимъ все выше сказанное примѣрами и выберемъ тѣ изъ нихъ, которые будутъ составлять главный предметъ изслѣдованій настоящаго курса—*коническія степенія*; покажемъ самыя замѣчательныя ихъ свойства, а затѣмъ выведемъ уравненія, наиболѣе выдающихся, по своимъ свойствамъ, или историческому значенію, кривыхъ выше второго порядка.

§ 12. *Прямая линія*. Мы выше видѣли, что какая нибудь линія, проходящая черезъ двѣ данныя точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , дѣлится, какою нибудь, точкою, лежащей на ней, въ нѣкоторомъ отношеніи λ и что координаты такой точки выражаются черезъ λ , x_1 , x_2 , y_1 , y_2 слѣдующими уравненіями:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

давая всѣ возможныя значенія λ , точка (x, y) будетъ скользить по прямой, проходящей черезъ точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Слѣдовательно если, между предъидущими уравненіями исключимъ λ , то получимъ уравненіе между координатами точки, скользящей по прямой. Это уравненіе и будетъ алгебраи-

ческое представлѣніе прямой, положеніе которой вполнѣ опредѣляется точками (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Уравненіе это будетъ:

$$\frac{x-x_1}{x-x_2} = \frac{y-y_1}{y-y_2} \quad (4)$$

или:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad (5)$$

Легко видѣть (фиг. 10), что:

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \operatorname{tg} \varphi$$

если φ есть уголъ, который данная прямая составляетъ съ осью абсциссъ. Слѣдовательно уравненіе (5) можно написать въ слѣдующихъ формахъ:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \operatorname{tg} \varphi \quad (6)$$

или:

$$(y-y_1) \cos \varphi - (x-x_1) \sin \varphi = 0 \quad (7)$$

Нѣкоторые авторы выводятъ уравненіе прямой изъ нѣкоторыхъ ея геометрическихъ свойствъ; мы находимъ, что лучше выводить уравненіе

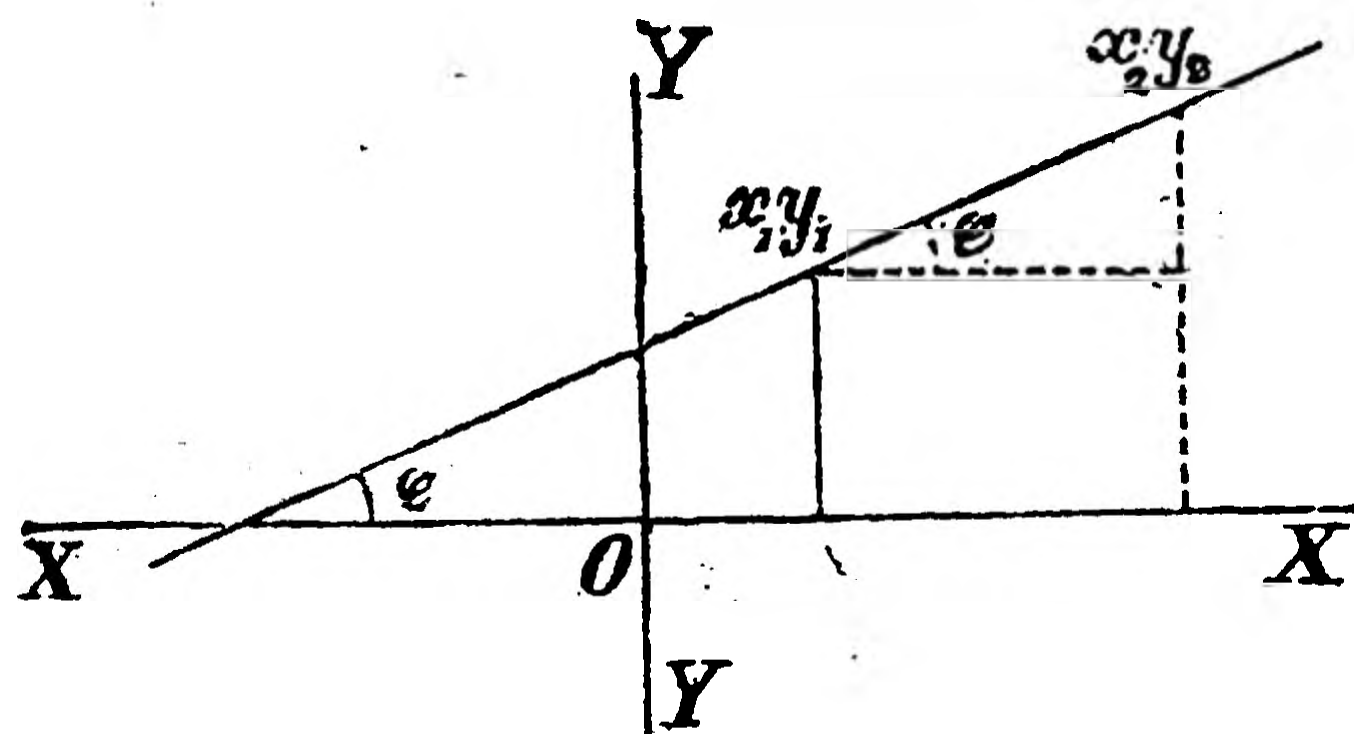
прямой изъ ея геометрическаго опредѣленія: что прямою мы называемъ ту линію, которая вполнѣ опредѣляется двумя данными точками.

Клебшъ, напримѣръ, выводитъ уравненіе прямой изъ выраженія для площади треугольника, коего вершины (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) даны (§ 5):

$$2 \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Если третья точка (x_3, y_3) будетъ скользить по прямой, соединяющей точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , то площадь такого треугольника будетъ всегда равна нулю. Слѣдовательно, обозначая координаты скользящей точки черезъ x, y найдемъ уравненіе прямой въ формѣ определителя:

$$2 \Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Фиг. 10.

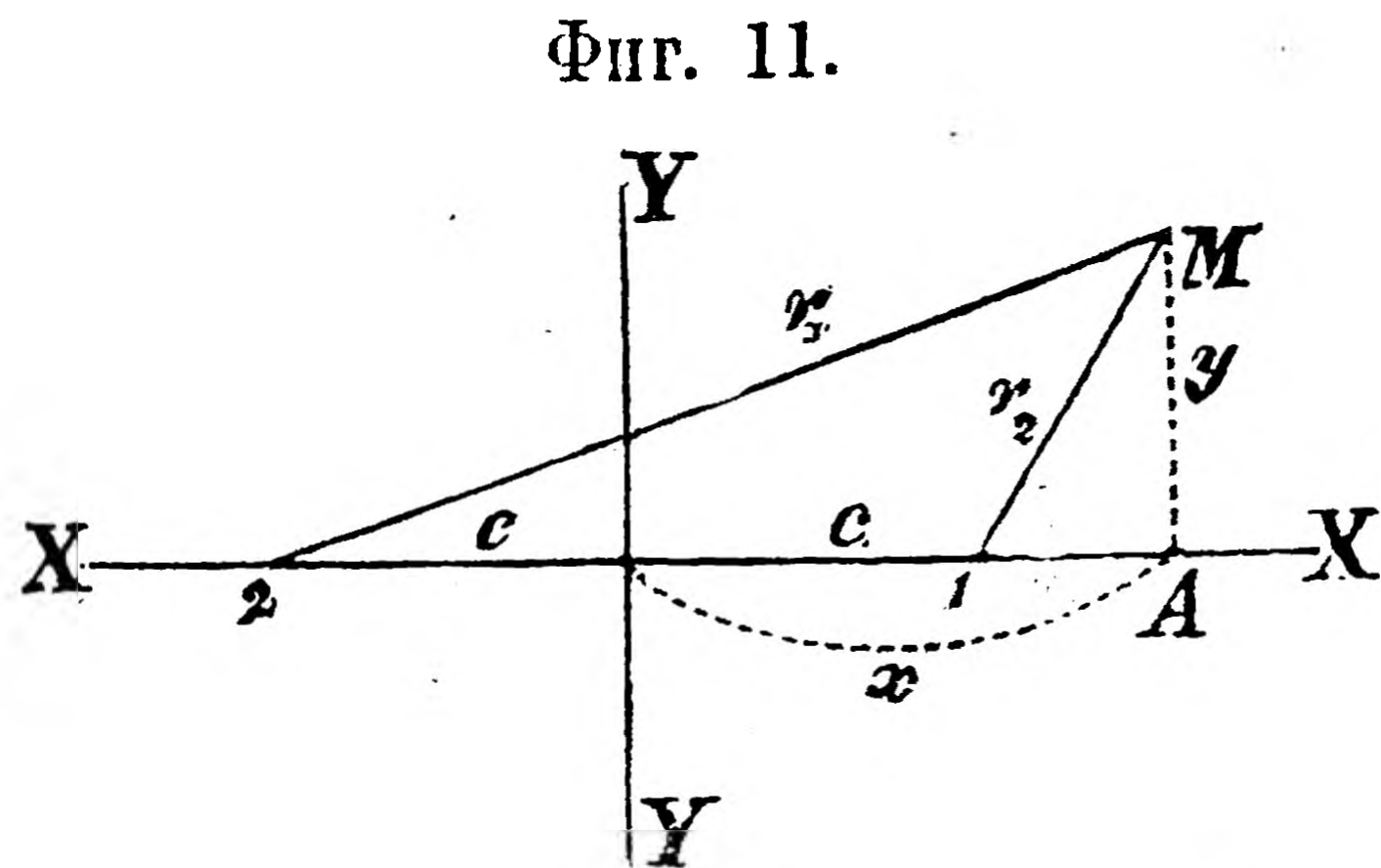
Это уравненіе тождественно съ уравненіемъ (5), такъ какъ оно есть алгебраическое представленіе опредѣленія прямой линіи двумя точками.

Гессе опредѣляетъ прямую линію, какъ геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ точекъ.

§ 13. *Эллипсъ*. Даны двѣ точки, найти геометрическое мѣсто точекъ, коихъ сумма разстояній отъ данныхъ точекъ была бы величина постоянная?

Координатныя оси могутъ быть взяты произвольно на плоскости, но задача упрощается, если онѣ будутъ выбраны симметрично, относительно данныхъ точекъ.

Для этого соединимъ данныя двѣ точки прямою (фиг. 11), раздѣлимъ это разстояніе пополамъ и означимъ его черезъ $2c$, изъ точки дѣленія возставимъ перпендикуляръ и возьмемъ эти двѣ прямыя за координатныя оси; линію, соединяющую данныя точки 1, 2, за ось абсциссъ X , а перпендикуляръ, возставленный изъ середины ея, за ось ординатъ Y . Означимъ постоянную сумму разстояній черезъ $2a$.



Фиг. 11.

По условію задачи сумма разстояній r_1 и r_2 , какой нибудь, точки (x, y) на кривой, отъ данныхъ точекъ 1 и 2 равна $2a$, т. е. мы имѣемъ:

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{8}$$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ $2MA$ и $1MA$ будемъ имѣть:

$$r_1^2 = y^2 + (x + c)^2 \tag{9}$$

$$r_2^2 = y^2 + (x - c)^2$$

вычитая, найдемъ:

$$r_1 - r_2 = \frac{2cx}{a} \tag{10}$$

имѣя сумму и разность двухъ количествъ r_1 и r_2 , найдемъ каждое изъ нихъ:

$$r_1 = a + \frac{cx}{a}, \quad r_2 = a - \frac{cx}{a}$$

Подставляя выраженіе для r_1 въ первое изъ уравненій (9), найдемъ:

$$\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = y^2 + (x + c)^2$$

откуда, полагая $a^2 - c^2 = b^2$, а такое положеніе мы въ правѣ сдѣлать, такъ какъ изъ $\triangle(12M)$ мы имѣемъ $2a > 2c$ и $a > c$, слѣдовательно $a^2 - c^2$ есть величина положительная. Послѣ всѣхъ приведеній, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

Изъ этого уравненія видимъ, что x не можетъ быть больше a , а y не можетъ быть больше b , слѣдовательно вся кривая заключена въ прямоугольникѣ, котораго стороны суть $2a$ и $2b$.

Такъ какъ x всегда меньше a , то можно положить:

$$x = a \cos \varphi \quad , \quad y = b \sin \varphi \quad (12)$$

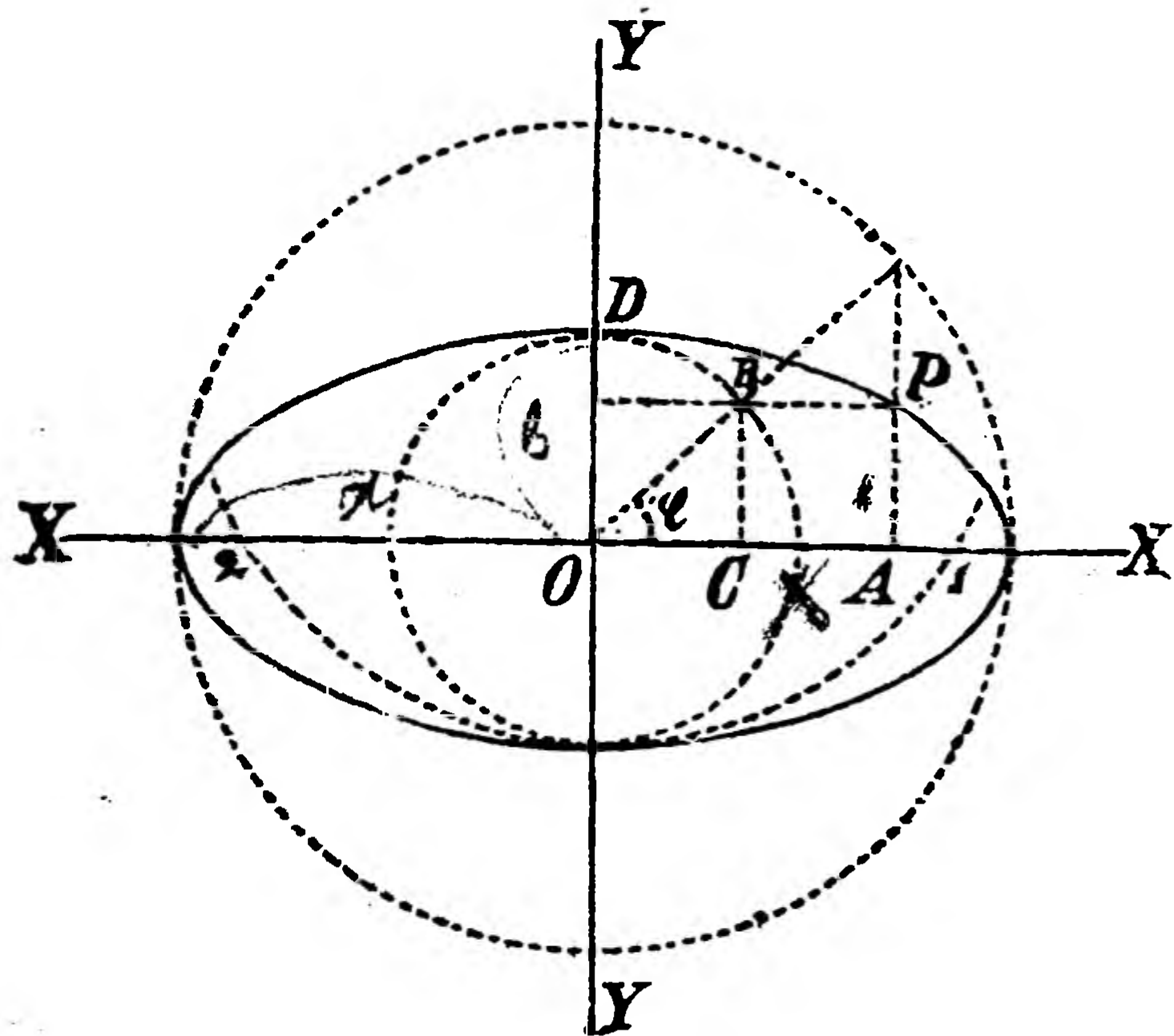
эти величины будучи подставлены въ уравненіе (11) удовлетворяютъ ему, такъ какъ это подстановленіе даетъ:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

Давая въ уравненіяхъ (12) углу φ всѣ значенія отъ 0 до 2π получимъ координаты всѣхъ точекъ кривой.

Способъ выразить координаты точекъ кривой съ помощью третьяго переменнаго—*параметра*, тождественъ съ уравненіемъ кривой, которое по-

Фиг. 12.



лучится, исключая этотъ параметръ, какъ мы уже сдѣлали относительно прямой, гдѣ для полученія уравненія прямой исключили переменный параметръ λ .

Изъ выраженій (12) легко видѣть форму эллипса и построить сколько угодно его точекъ. Для этого около начала координатъ (фиг. 12), какъ центра, опишемъ два круга одинъ радиусомъ a , а другой радиусомъ b .

Черезъ начало проведемъ, какую нибудь, прямую, составляющую уголъ φ съ осью абсциссъ. Легко видѣть, что:

$$OA = x = a \cos \varphi \quad , \quad Bc = AP = y = b \sin \varphi$$

Слѣдовательно точка P находится на эллипсѣ. Если $\varphi = 0$, то $x = a$, т. е. эллипсъ встрѣчаетъ ось X на разстояніи a отъ начала координатъ, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $y = b$, т. е. эллипсъ встрѣчаетъ ось Y на разстояніи

b отъ начала координатъ. Легко видѣть, что эллипсъ встрѣчаетъ ось X еще на разстояніи $-a$, а ось Y на разстояніи $-b$ отъ начала координатъ и слѣдовательно состоитъ изъ четырехъ тождественныхъ четвертей. Если $a > b$, то a называютъ *большою*, а b *малою* осью эллипса. Данныя точки 1, 2 на оси X , лежація на разстояніяхъ $+c$ и $-c$ отъ начала, называютъ *фокусами* эллипса; ихъ легко построить, зная, что:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Въ самомъ дѣлѣ, если изъ точки D (фиг. 12), какъ изъ центра радіусомъ a , опишемъ кругъ, то кругъ этотъ пересѣчетъ ось X , очевидно, въ точкахъ 1 и 2, т. е. въ фокусахъ. Разстояніе c называютъ *эксцентриситетомъ*. Если $c = 0$, то $a = b$ и эллипсъ обращается въ кругъ:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

слѣдовательно кругъ есть частный случай эллипса.

§ 14. *Гипербола*. Даны двѣ точки, найти геометрическое мѣсто точекъ, коихъ разность разстояній отъ данныхъ точекъ есть величина постоянная?

Если означимъ разстояніе данныхъ точекъ черезъ $2c$, а разность разстояній, какой нибудь, точки на кривой отъ данныхъ точекъ черезъ $2a$ и помѣстимъ координаты, какъ въ эллипсѣ, то замѣчая, что:

$$r_1 - r_2 = 2a$$

мы легко найдемъ, какъ выше, для эллипса, уравненіе искомой кривой:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (13)$$

если положимъ:

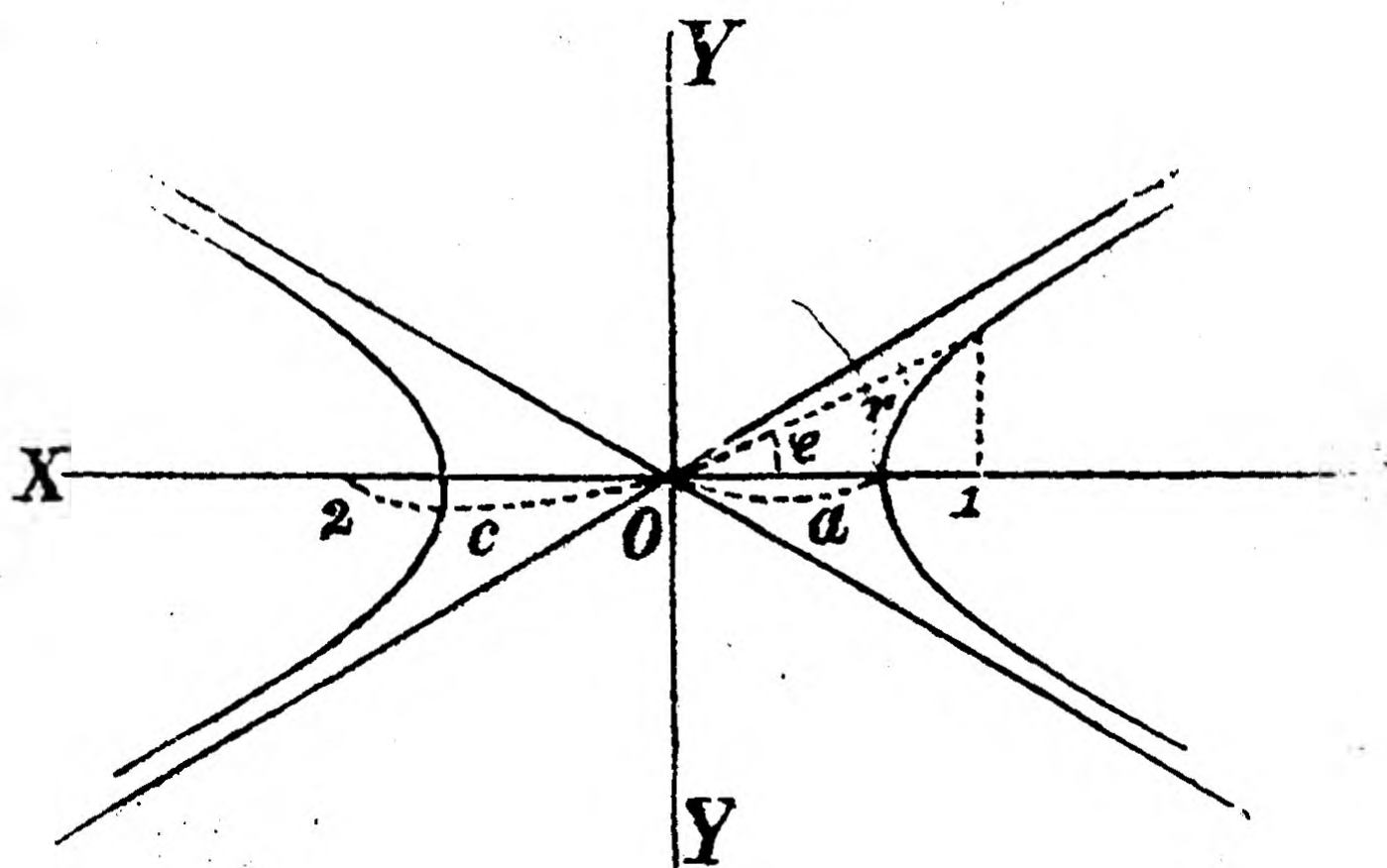
$$c^2 = a^2 + b^2$$

a и b называются осями кривой, какъ въ эллипсѣ.

Изъ уравненія (13) мы видимъ, что x не можетъ быть меньше a , а y можетъ возрастать неопредѣленно. Легко видѣть, что между параллельными оси Y , проведенными на разстояніи $+a$ и $-a$ отъ начала координатъ, нѣтъ ни одной точки, принадлежащей кривой; въ остальной части плоскости x и y не имѣютъ предѣловъ; онѣ могутъ возрастать до безконечности, слѣдовательно гипербола есть кривая, простирающая свои вѣтви въ безконечность.

Чтобы ближе видѣть форму кривой, проведемъ прямую черезъ начало координатъ подъ угломъ φ къ оси X (фиг. 13) и разыщемъ точки кривой, лежація на этой прямой.

Фиг. 13.



Означимъ черезъ r разстояніе такой точки отъ начала координатъ и положимъ:

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе кривой (13), найдемъ:

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}} \quad (14)$$

Слѣдовательно на каждомъ радіусѣ находятся двѣ точки кривой, такъ какъ r опредѣляется изъ уравненія второй степени. Если, начиная съ нуля, мы будемъ увеличивать уголъ φ , то членъ $\frac{\cos^2 \varphi}{a^2}$ уменьшается, а $\frac{\sin^2 \varphi}{b^2}$ увеличивается, т. е. r возрастаетъ непрерывно, начиная съ a , и при:

$$\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \quad (15)$$

дѣлается безконечностью; для величинъ угла φ большихъ, знаменатель въ уравненіи (14) дѣлается отрицательнымъ, а r мнимымъ. Если означимъ черезъ α уголъ удовлетворяющій уравненію (15) и дающій направленіе безконечно-удаленной точки на кривой, то будемъ имѣть:

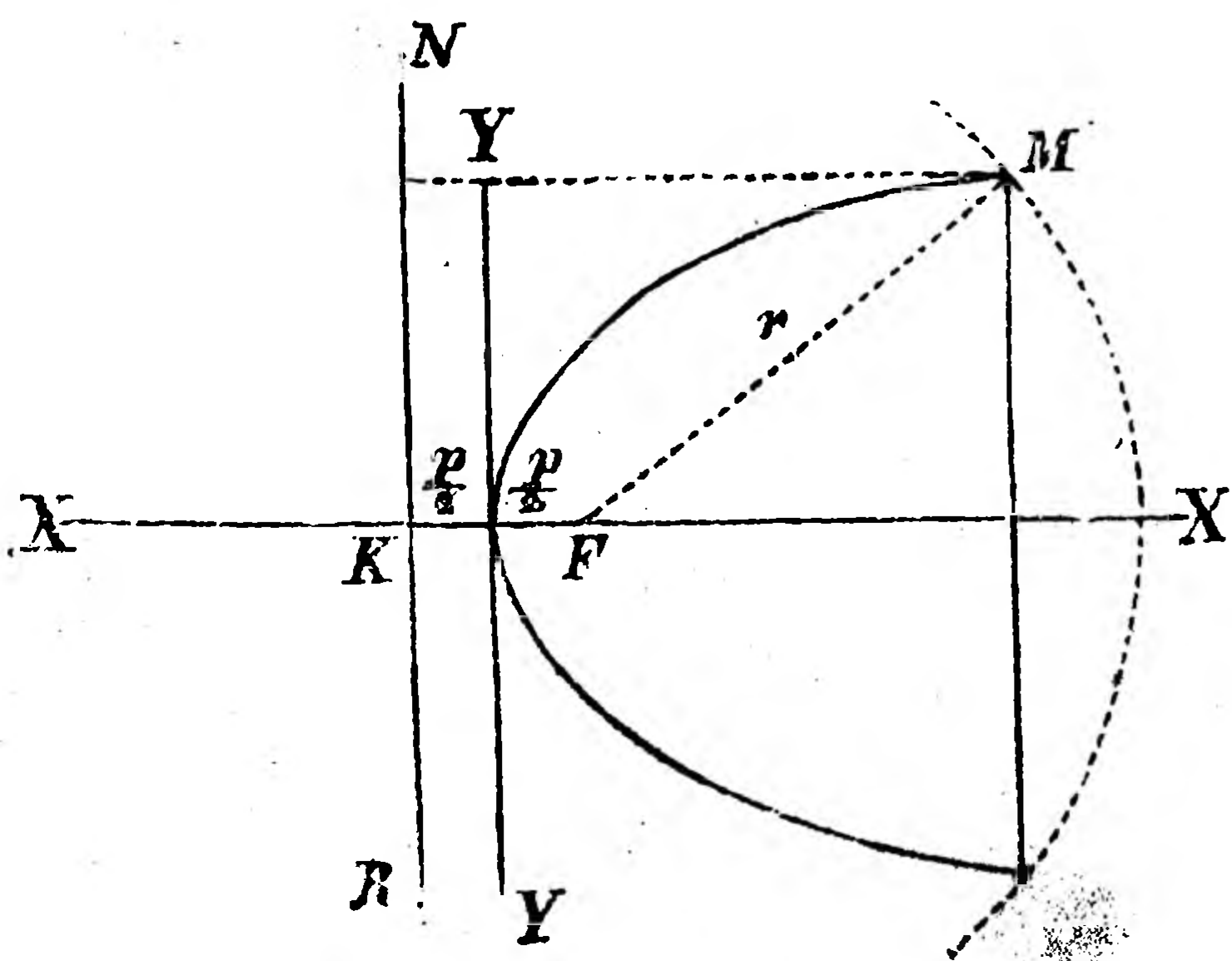
$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{b}{a}$$

Слѣдовательно есть два направленія, симметрично расположенныхъ относительно координатныхъ осей, къ которымъ кривая приближается неопредѣленно, но никогда ихъ не встрѣчаетъ. Эти двѣ прямыя называются *асимптотами* кривой.

Данныя двѣ точки, какъ и въ эллипсѣ, называются *фокусами* и связь ихъ съ осями дается уравненіемъ:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Фиг. 14.



съ помощью котораго ихъ легко построить.

§ 15. *Парабола.* Найти геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ данной точки и данной прямой?

Пусть данная прямая будетъ NR (фиг. 14), данная точка F . Изъ точки F опускаемъ перпендикуляръ на данную прямую и возьмемъ его за ось абсциссъ.

Разстояніе $FK = p$ дѣлимъ пополамъ, изъ точки дѣленія возставимъ

перпендикуляръ YU къ оси абсциссъ и возьмемъ его за ось ординатъ, пусть M будетъ точка на кривой, тогда будемъ имѣть:

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

откуда, раскрывая скобки и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$y^2 = 2px$$

Это опять кривая второго порядка—*парабола*, коей уравненіе не заключаетъ второй степени величины x .

Форма уравненія показываетъ, что кривая проходитъ черезъ начало координатъ и вся лежитъ съ положительной стороны оси X , т. е. x не можетъ быть отрицательной величиной, такъ какъ, въ этомъ случаѣ y дѣлается мнимымъ. Легко также видѣть, что вѣтвь параболы бесконечна и осью X дѣлится на двѣ совершенно тождественныя части: одна съ положительными ординатами $+y$, а другая съ отрицательными $-y$.

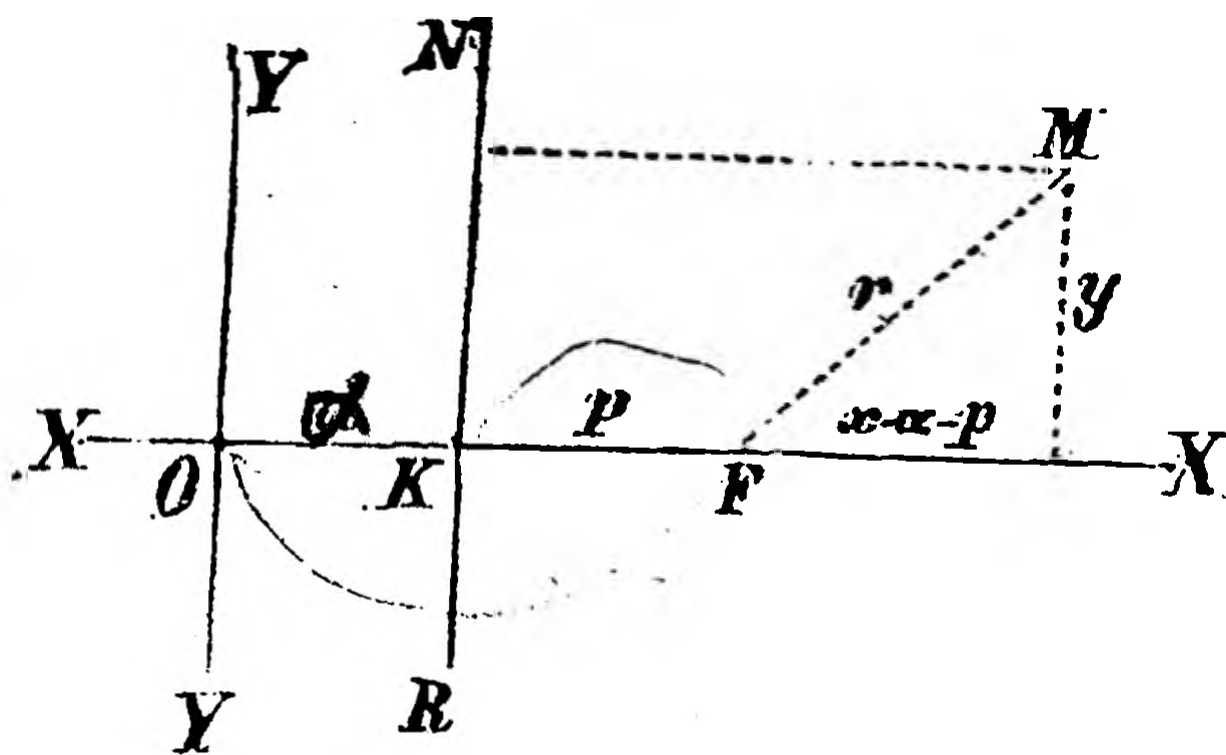
Законъ образованія параболы даетъ легкій способъ построить сколько угодно ея точекъ. Для этого около данной точки F (фиг. 14), какъ центра, описываютъ кругъ, произвольнымъ радіусомъ r ; на разстояніи r отъ данной прямой (директрисы) по оси X возставляютъ къ этой послѣдней перпендикуляръ, который встрѣчаетъ описанный кругъ въ двухъ точкахъ, принадлежащихъ параболѣ: одна съ положительной ординатой, другая съ отрицательной.

§ 16. Уравненія эллипса, гиперболы и параболы могутъ быть выведены еще изъ слѣдующей задачи:

Найти геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстояній которыхъ отъ данной прямой и отъ данной точки было-бы постоянное?

Возьмемъ перпендикуляръ FK , опущенный изъ данной точки на данную прямую NR , за ось X (фиг. 15), означимъ черезъ p разстояніе данной точки отъ данной прямой, возьмемъ на оси X произвольную точку O , на разстояніи α отъ данной прямой NR , за начало координатъ, и пусть наконецъ λ будетъ данное отношеніе.

Фиг. 15.



Легко видѣть, что уравненіе искомага геометрическаго мѣста будетъ:

$$r^2 = y^2 + (x - \alpha - p)^2 = \lambda^2(x - \alpha)^2$$

или:

$$y^2 + (x - \alpha - p)^2 - \lambda^2(x - \alpha)^2 = 0$$

откуда имѣемъ:

$$(\lambda^2 - 1)x^2 - 2\{(\lambda^2 - 1)\alpha - p\}x + \lambda^2\alpha^2 - (p + \alpha)^2 - y^2 = 0 \quad (16)$$

такъ какъ α есть величина произвольная, то можно положить для упрощенія уравненія:

$$\alpha = \frac{p}{\lambda^2 - 1}$$

вслѣдствіи чего предъидущее уравненіе сдѣлается:

$$\frac{x^2}{\frac{\lambda^2 p^2}{(1 - \lambda^2)^2}} + \frac{y^2}{1 - \lambda^2} = 1$$

Очевидно, что это уравненіе будетъ эллипсъ, если $\lambda < 1$, и гипербола, если $\lambda > 1$. Изъ этого слѣдуетъ, что если даны точка и прямая и если другая точка скользитъ по плоскости такъ, что отношеніе разстоянія ея отъ данной точки къ разстоянію отъ данной прямой, есть величина постоянная, то точка опишетъ эллипсъ, если она постоянно будетъ ближе къ данной точкѣ, и опишетъ гиперболу, если она постоянно ближе къ данной прямой.

Мы здѣсь имѣемъ нѣкоторую точку и прямую, которыя тѣсно связаны съ двумя кривыми, эллипсомъ и гиперболой. Простое вычисленіе покажетъ, что данная точка есть одинъ изъ фокусовъ, съ которыми мы уже познакомились выше. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $\lambda < 1$ —это эллипсъ. Квадраты осей эллипса будутъ:

$$a^2 = \frac{\lambda^2 p^2}{(1 - \lambda^2)^2}, \quad b^2 = \frac{\lambda^2 p^2}{1 - \lambda^2}$$

откуда:

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{\lambda^4 p^2}{(1 - \lambda^2)^2} \quad \text{или} \quad c = \frac{\lambda^2 p}{1 - \lambda^2}$$

Но разстояніе данной точки отъ начала есть:

$$p + \alpha = \frac{\lambda^2 p}{1 - \lambda^2} = c$$

а это есть разстояніе фокуса отъ начала, слѣдовательно эти двѣ точки тождественны.

Есть еще другая прямая, которая играетъ ту же роль относительно другого фокуса, ~~что~~ ^{чего} требуетъ симметрія кривой относительно оси Y . Эти двѣ прямыя называются *директрисами* эллипса. Выраженіе разстоянія

директрисы отъ центра эллипса, или начала координатъ, даетъ способъ построить эту прямую. Въ самомъ дѣлѣ:

$$cp = b^2$$

слѣдовательно разстояніе:

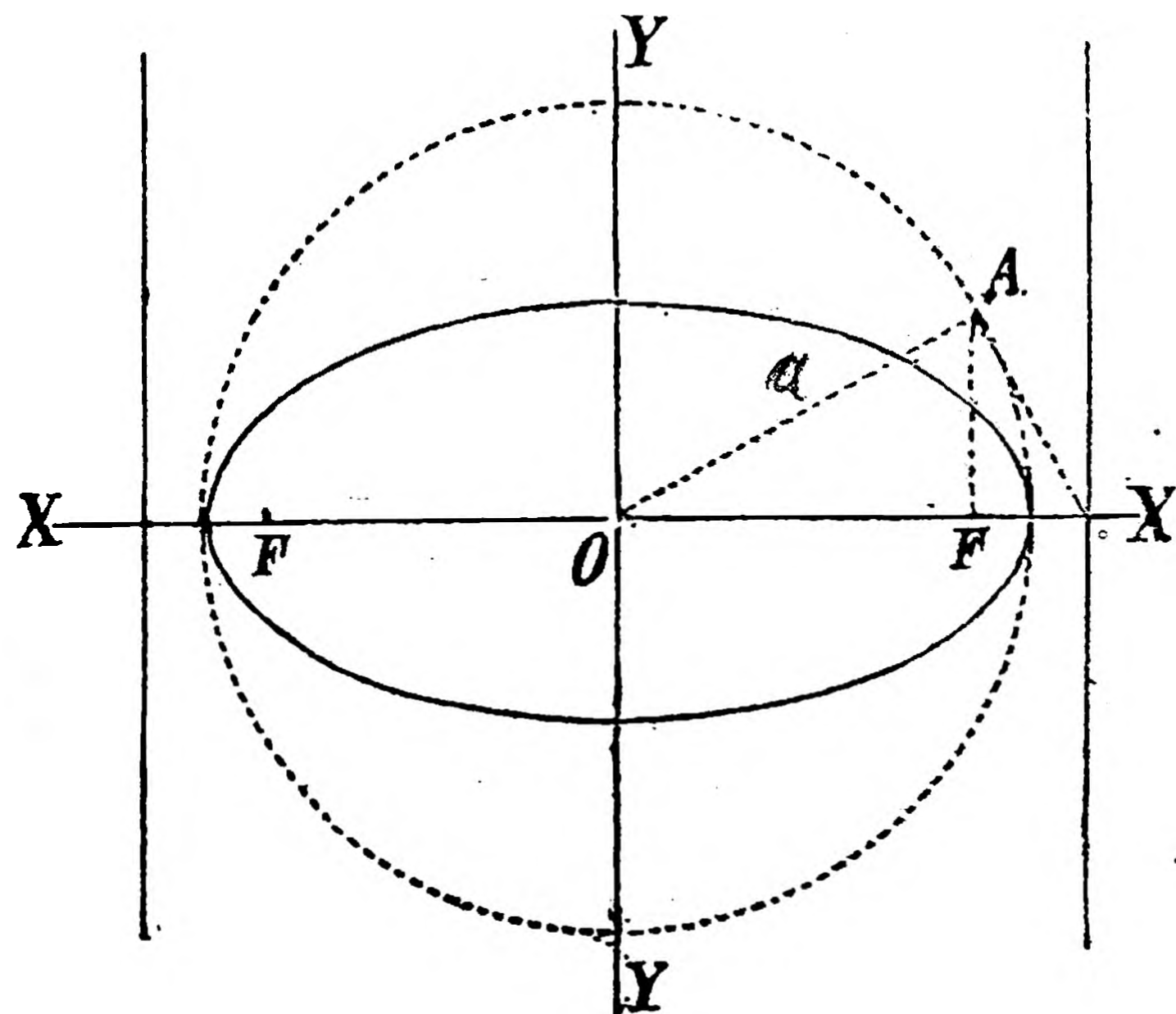
$$f = c + p$$

даетъ:

$$f = c + p = \frac{b^2 + c^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

т. е. большая полуось есть средне-пропорціональная между разстояніемъ директрисы отъ начала и эксцентриситетомъ эллипса.

Съ помощью этого свойства легко построить директрису, слѣдующимъ образомъ. Изъ центра эллипса O радіусомъ a описываютъ кругъ (фиг. 16), изъ фокуса F возставляютъ перпендикуляръ къ оси X и продолжаютъ его до пересѣченія съ окружностью; точку пересѣченія A соединяютъ съ центромъ и изъ той-же точки A возставляютъ перпендикуляръ къ проведенному радіусу; пересѣченіе этого перпендикуляра съ осью X даетъ точку, изъ которой возставленный къ оси X перпендикуляръ и будетъ иско-
Фиг. 16.



мой директрисой. Вторая директриса будетъ параллельна первой, на такомъ же разстояніи отъ центра съ другой стороны оси X . Слѣдовательно эллипсъ весь лежитъ между директрисами.)

§ 17. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда $\lambda = 1$, т. е. когда скользящая точка находится всегда въ равномъ разстояніи отъ данной точки (фокуса) и отъ данной прямой (директрисы). Въ этомъ случаѣ уравненіе (16) § 16 сдѣлается:

$$y^2 - 2px + p(p + 2a) = 0$$

Если положимъ $a = -\frac{p}{2}$, то будемъ имѣть:

$$y^2 = 2px$$

а это, какъ мы выше видѣли, есть уравненіе параболы.

Изъ предъидущаго видимъ, что уравненія: эллипса, гиперболы, параболы и круга, какъ частный случай эллипса, всѣ втораго порядка; ниже увидимъ, что самое общее уравненіе между координатами x и y втораго

порядка будетъ алгебраически представлять одну изъ этихъ трехъ замѣчательныхъ кривыхъ, названныхъ древними *триадой Менейхма*, которому приписываютъ ихъ открытіе. Формы уравненій, полученныя нами для этихъ кривыхъ, самыя простыя, поэтому онѣ называются *каноническими*.

§ 18. Уже въ V-омъ в. до Р. Х. греческихъ геометровъ занимали три задачи: квадратура круга, трисекція угла и удвоеніе куба или Делійская задача, которыя они старались рѣшить съ помощью линейки и круга; послѣдняя задача была сведена Гиппократомъ Хіоскимъ на разысканіе двухъ средне-пропорціональныхъ отрѣзковъ прямой линіи между двумя данными отрѣзками, т. е. если a и b суть данные отрѣзки, то требуется найти другіе два x и y такіе, чтобы:

$$a:x = x:y \quad , \quad x:y = y:b$$

или:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

или еще:

$$x^2 = ay \quad , \quad y^2 = bx$$

Если изъ перваго уравненія опредѣлить y и вставить во второе, то найдемъ:

$$x^3 = a^2b$$

полагая $b = 2a$, будемъ имѣть:

$$x^3 = 2a^3$$

рѣшить это уравненіе значитъ найти сторону x такого куба, который былъ-бы вдвое больше куба, построеннаго на данномъ отрѣзкѣ a .

Три задачи: отысканіе двухъ средне-пропорціональныхъ, трисекція угла и удвоеніе куба занимали многихъ греческихъ геометровъ. Начиная съ Платона вопросы эти не переставали интересовать древнихъ геометровъ, которые придавали имъ особенное значеніе и важность.

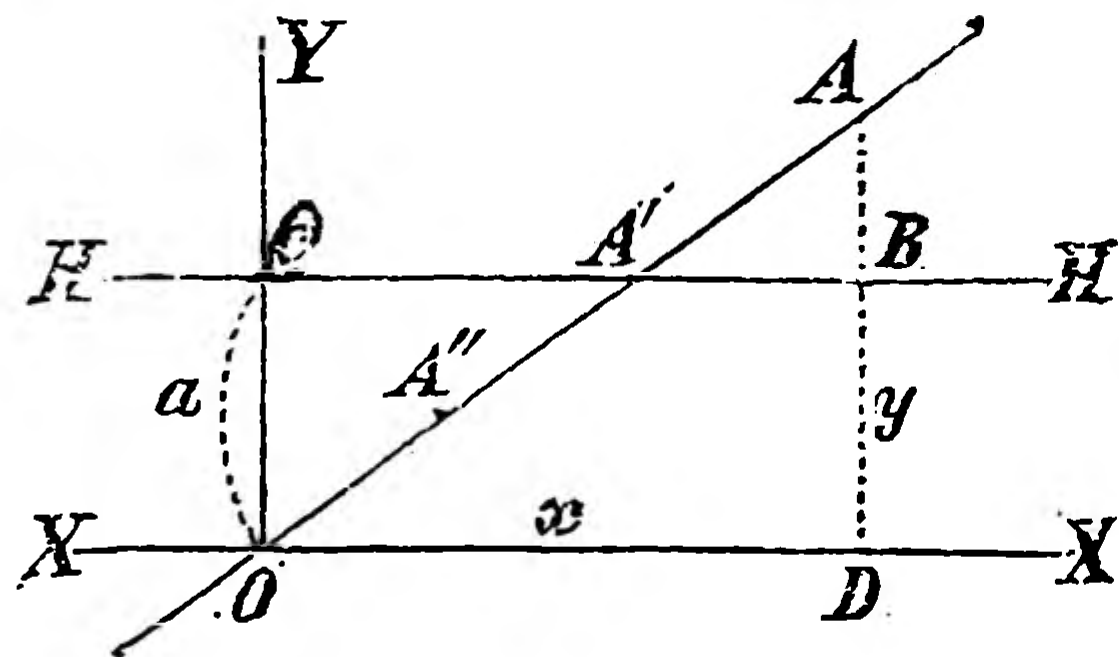
Древніе геометры стремились рѣшить эти задачи съ помощью прямой линіи (линейки) и круга (циркуля), но только въ послѣднее время, въ 1837 году, была доказана Ванцелемъ (Wanzel) невозможность такого рѣшенія.

Нѣкоторыми геометрами даны были рѣшенія при помощи коническихъ сѣченій, другими были изобрѣтены особыя кривыя, изъ числа которыхъ наиболѣе извѣстны: конхоида Никомеда, циссоида Діоклеса, одна изъ кривыхъ двойной кривизны, предложенная Архитомъ и другія. Также были изобрѣтены, нѣкоторыми геометрами, приборы для рѣшенія этихъ задачъ, т. е. инструменты для черченія различныхъ кривыхъ, рѣшающихъ вопросъ.

Изъ такихъ приборовъ извѣстенъ *мессолабъ* (messo-lab), предложенный Эратосѣеномъ для рѣшенія задачи объ удвоеніи куба. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію нѣкоторыхъ изъ этихъ кривыхъ.

§ 19. *Конхоида Никомеда*. Конхоида (черепахообразная) была изобрѣтена Никомедомъ для трисекціи угла. Вотъ ея образованіе. Дана прямая HN (фиг. 17) и внѣ ея точка O , данъ отрѣзокъ прямой линіи b . Данная точка O называется *полосомъ*, прямая HN *директрисой*, а отрѣзокъ b *параметромъ*. Изъ точки O опустимъ перпендикуляръ OY на HN и проведемъ прямую XOX параллельно HN . Возьмемъ полюсъ O за начало координатъ, а XO за абсциссу и OY за ординату.

Фиг. 17.



Проведемъ черезъ точку O , какую нибудь, прямую OA , которая пересѣчетъ HN въ точкѣ A' , отъ точки A' , на прямой OA , отложимъ въ обѣ стороны отрѣзки $A'A$ и $A'A''$ равные b . Геометрическое мѣсто, такимъ образомъ, полученныхъ точекъ, проводя черезъ O прямая во всѣхъ направленіяхъ, есть *конхоида*. Пусть координаты точки A будутъ x и y , пусть разстояніе $OA'' = a$. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ODA и $A'BA$ имѣемъ:

$$\frac{AD}{OD} = \frac{AB}{A'B} \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = \frac{y-a}{A'B}$$

но:

$$\overline{A'B}^2 = \overline{A'A}^2 - \overline{AB}^2 \quad \text{или} \quad \overline{A'B}^2 = b^2 - (y-a)^2$$

откуда будемъ имѣть слѣдующее:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{(y-a)^2}{b^2 - (y-a)^2}$$

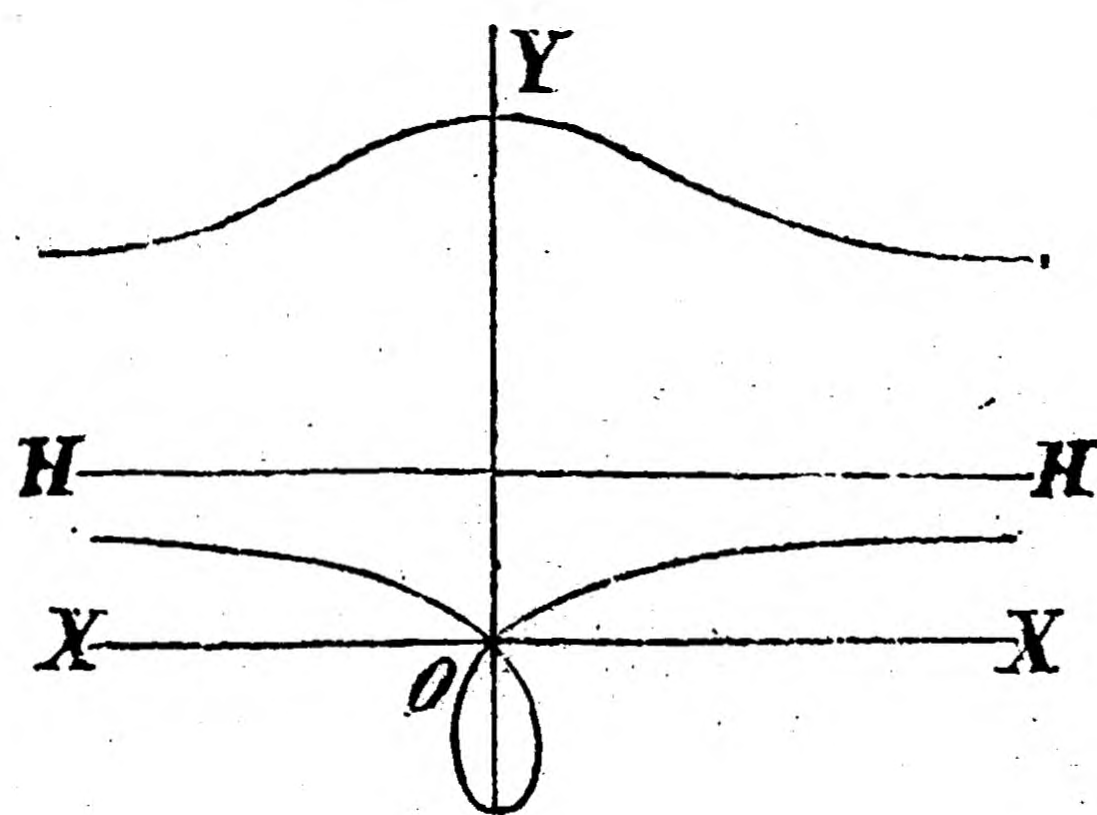
или:

$$(x^2 + y^2)(y-a)^2 = b^2 y^2$$

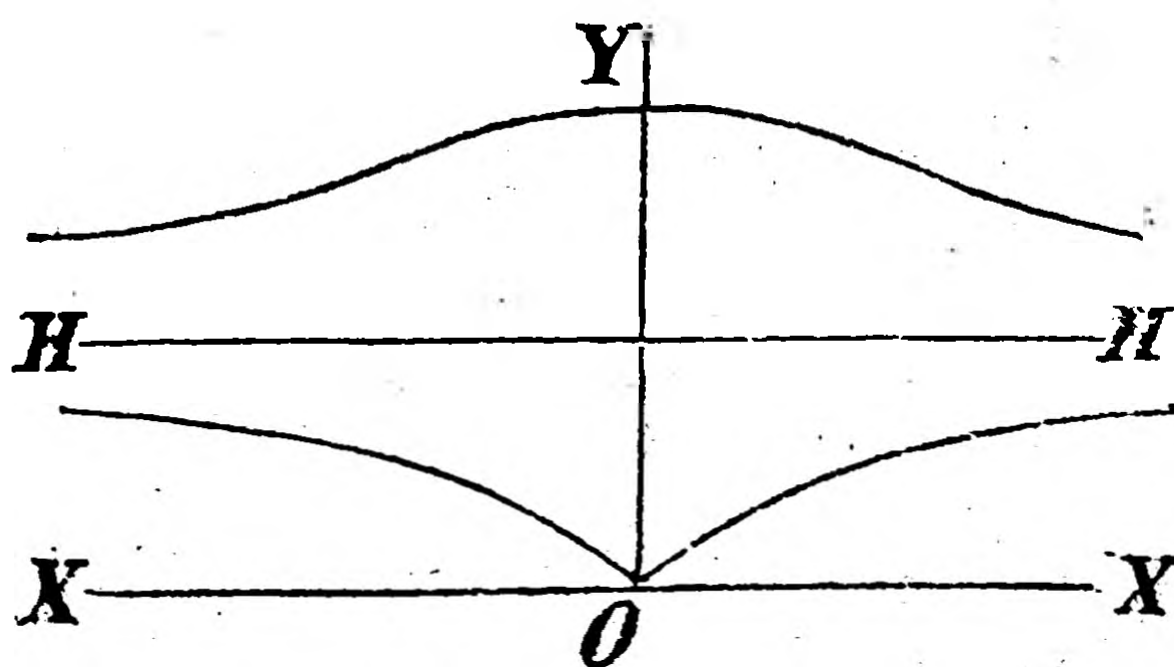
При построеніи конхоиды можетъ быть три случая:

1. *Случай*, $b > a$. Въ этомъ случаѣ конхоида имѣетъ форму (фиг. 18).

Фиг. 18.



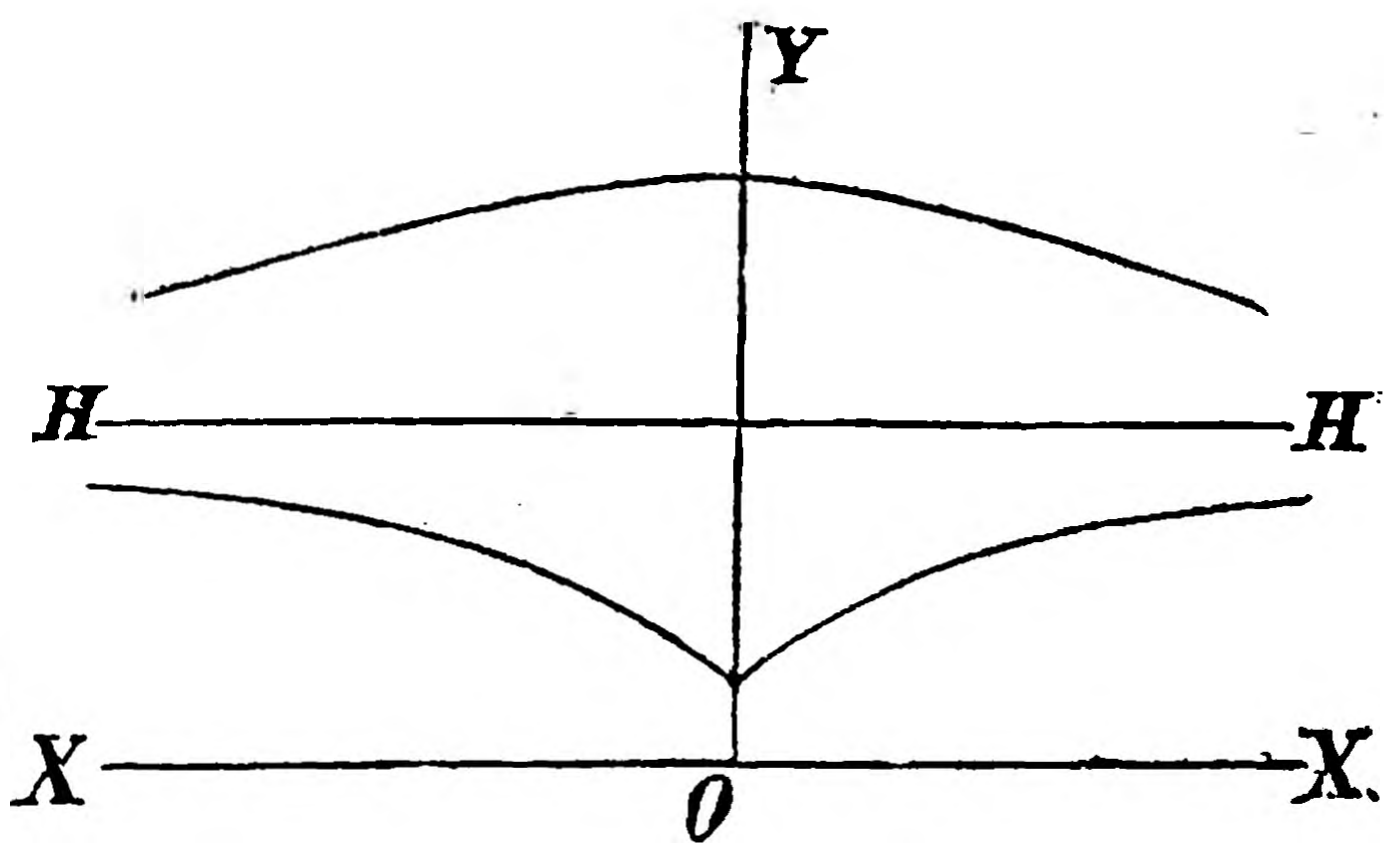
Фиг. 19.



2. *Случай*, $b = a$. Въ этомъ случаѣ форма конхоиды будетъ (фиг. 19).

3. *Случай*, $b < a$. Форма конхоиды будетъ (фиг. 20).

Фиг. 20.

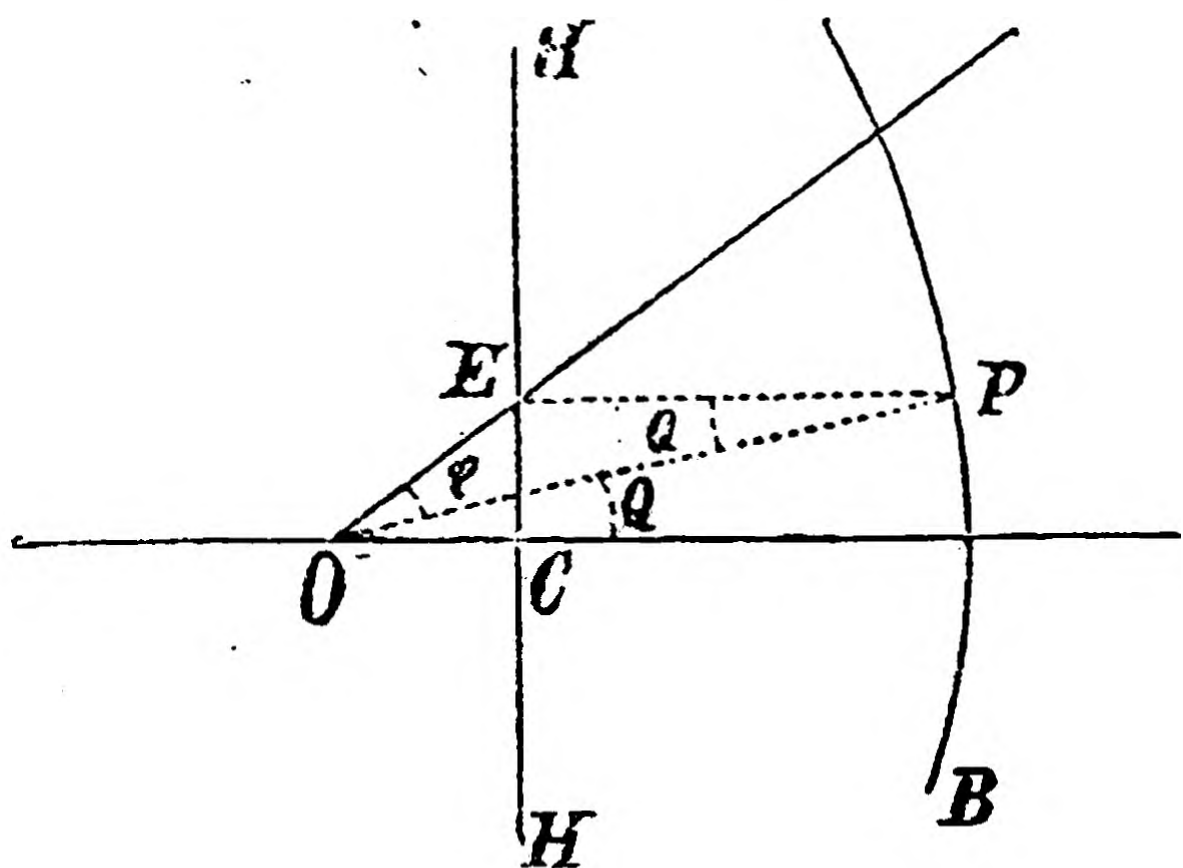


Вѣтви конхоиды на безконечности встрѣчаютъ директрису HH' , поэтому она есть асимптота вѣтвей конхоиды.

§ 20. *Трисекція угла*. Пусть $\angle EOC$ будетъ данный уголъ, который требуется раздѣлить на три равныя части. Возьмемъ за директрису конхоиды перпендикуляръ EC къ OC въ какой нибудь точкѣ C (фиг. 21).

Построимъ конхоиду, которой бы полюсъ былъ O , а параметръ $b = 2OE$. Проведемъ EP параллельно OC до встрѣчи съ конхоидой въ точкѣ P , соединяя O съ P и положивъ $\angle EOP = \varphi$ мы будемъ имѣть:

Фиг. 21.



$$\angle ROC = \frac{1}{3} \angle EOC$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $\angle \theta = \angle EPO = \angle ROC$, то $EP = b \cos \theta = 2OE \cos \theta$, а треугольникъ EOP даетъ:

$$\frac{EP}{EO} = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{b \cos \theta}{\frac{1}{2} b} = 2 \cos \theta$$

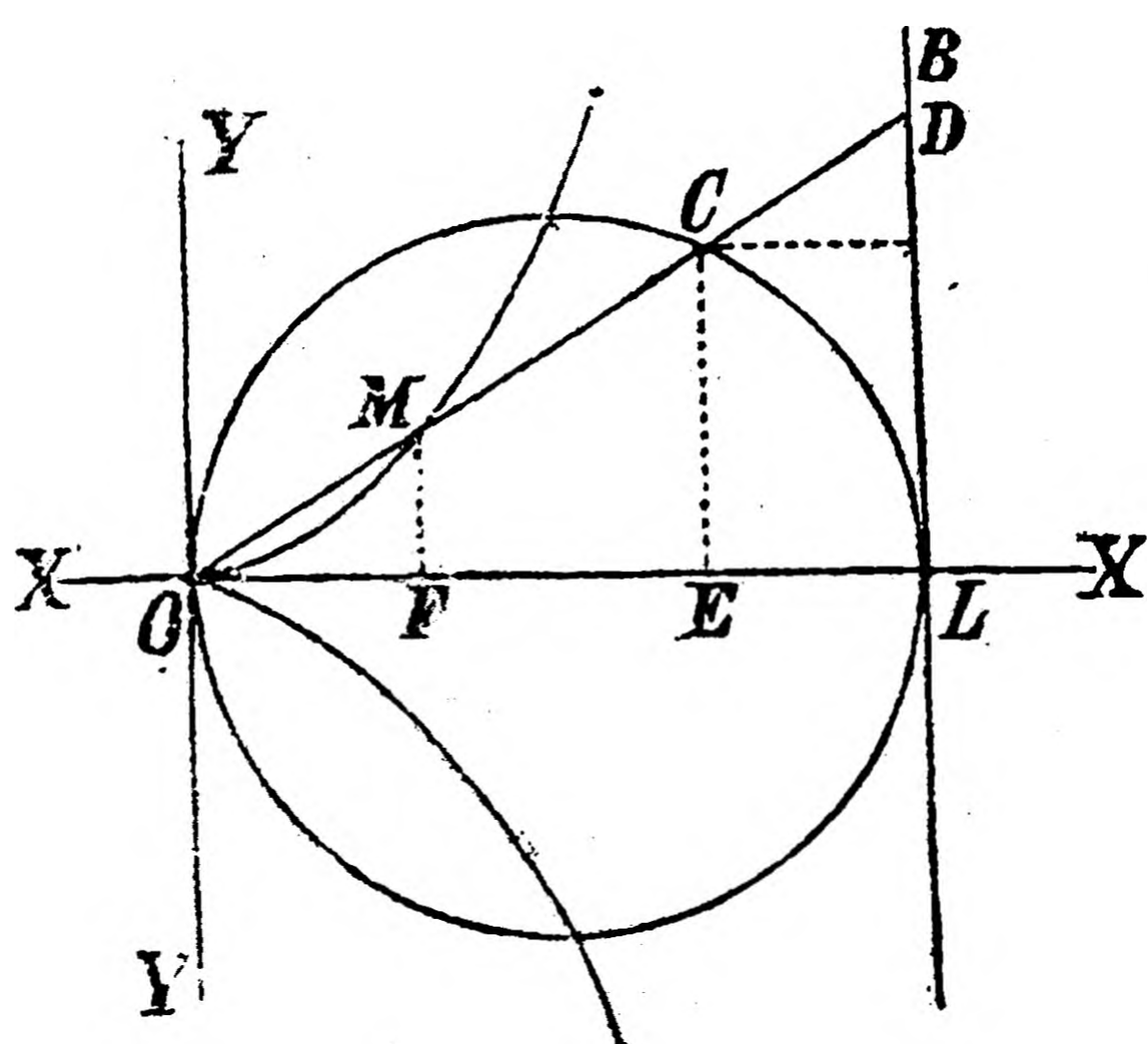
откуда:

$$\sin \varphi = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = \sin 2\theta$$

Слѣдовательно $\varphi = 2\theta$. Если $\varphi = 2\theta$, то:

$$\theta = \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{3} \angle EOC$$

Фиг. 22.



§ 21. *Циссоида* (клинообразная). Данъ кругъ, коего радиусъ r . Изъ концовъ діаметра OL (фиг. 22) проведены касательныя OY и LB , діаметръ OL принимаютъ за ось X , касательную OY за ось Y . Черезъ начало O проводятъ безчисленное множество прямыхъ, въ родѣ OD , каждая изъ этихъ прямыхъ пересѣкаетъ окружность и касательную LB въ точкахъ, какъ C и D . На каждой изъ такихъ

прямыхъ откладываютъ отрѣзокъ $OM = CD$; геометрическое мѣсто точекъ M и будетъ кривая, носящая названіе *циссоиды Діоклеса*.

Такъ какъ точка M на кривой, то $OF = EL = x$, а $FM = y$. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ OMF и OCE имѣемъ:

$$MF : OF = CE : OE$$

но:

$$CE^2 = OE \cdot EL = x(2r - x)$$

слѣдовательно:

$$y^2 : x^2 = (2r - x)x : (2r - x)^2$$

откуда:

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

Изъ этого уравненія видимъ, что циссоида есть кривая третьяго порядка, состоящая изъ двухъ тождественныхъ вѣтвей: одна съ положительными ординатами, другая съ отрицательными. Обѣ эти вѣтви неопредѣленно приближаются къ касательной LB и сливаются съ нею на бесконечности, когда $x = 2r$, слѣдовательно касательная LB есть ихъ общая асимптота. Кривая вся лежитъ съ положительной стороны оси X и вся заключена между касательными OY и LB , а для $x > 2r$ и для $-x$ ординаты дѣлаются мнимыми.

§ 22. Найти два средне-пропорціональныхъ отрѣзка, между двумя данными отрѣзками a и b ?

Опишемъ кругъ AHB , коего радиусъ есть a . Построимъ циссоиду AHD (фиг. 23):

Изъ центра C возставимъ перпендикуляръ $EC = b$, соединимъ E съ B , EB встрѣтитъ циссоиду въ точкѣ G , проведемъ AG , которая встрѣтитъ CE въ точкѣ F , отрѣзокъ CF и будетъ искомый въ пропорціяхъ: $a : u = u : z = z : b$.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{a}{x} = \frac{CF}{y} \quad \text{и} \quad \frac{2a - x}{a} = \frac{y}{b}$$

Откуда, замѣчая что:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

найдемъ:

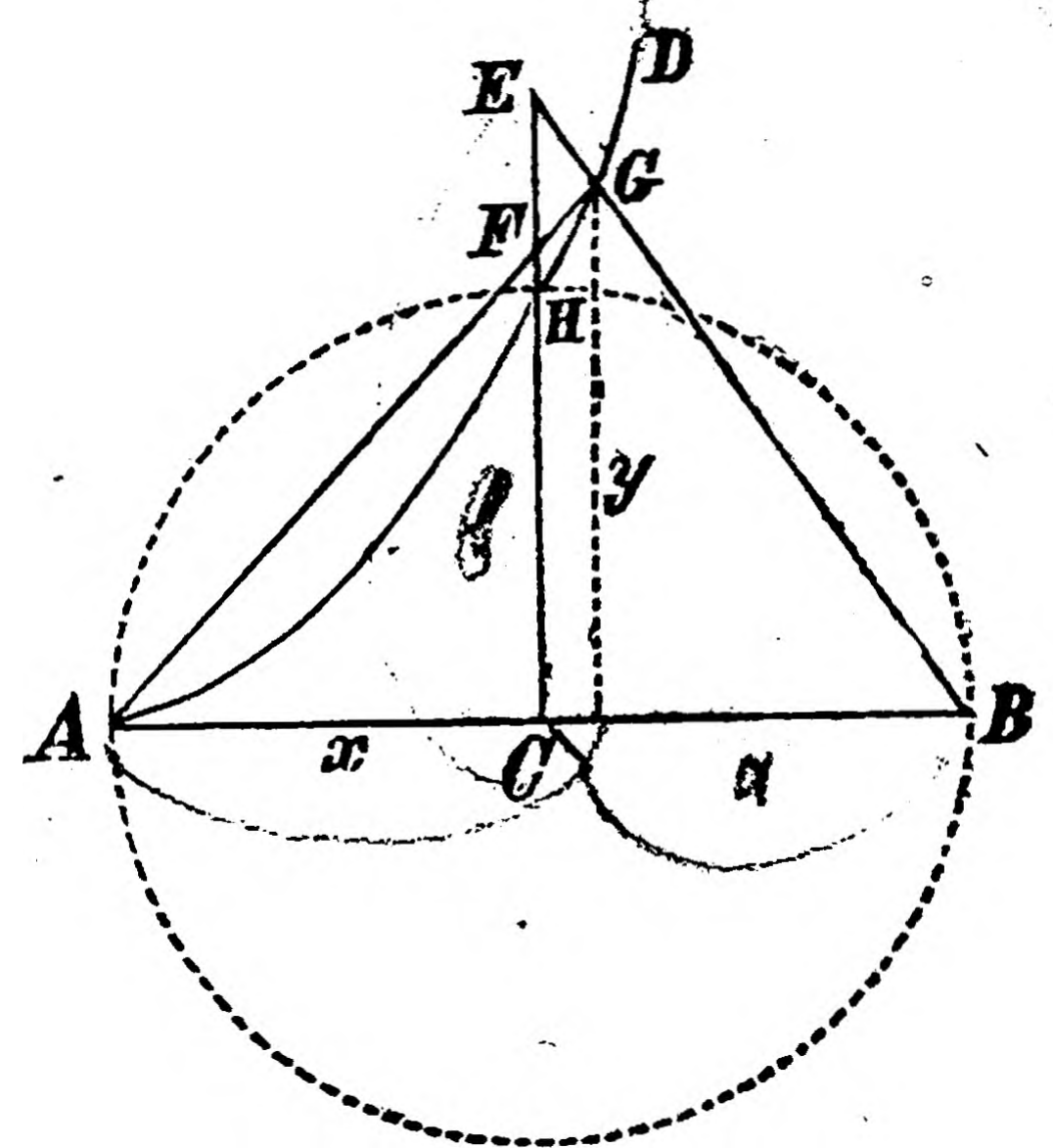
$$CF^3 = a^2b = u^3$$

§ 23. Фоліумъ Декарта. Эта кривая дается уравненіемъ:

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

Такъ какъ оно симметрично относительно x и y , то и ея фигура расположена также симметрично.

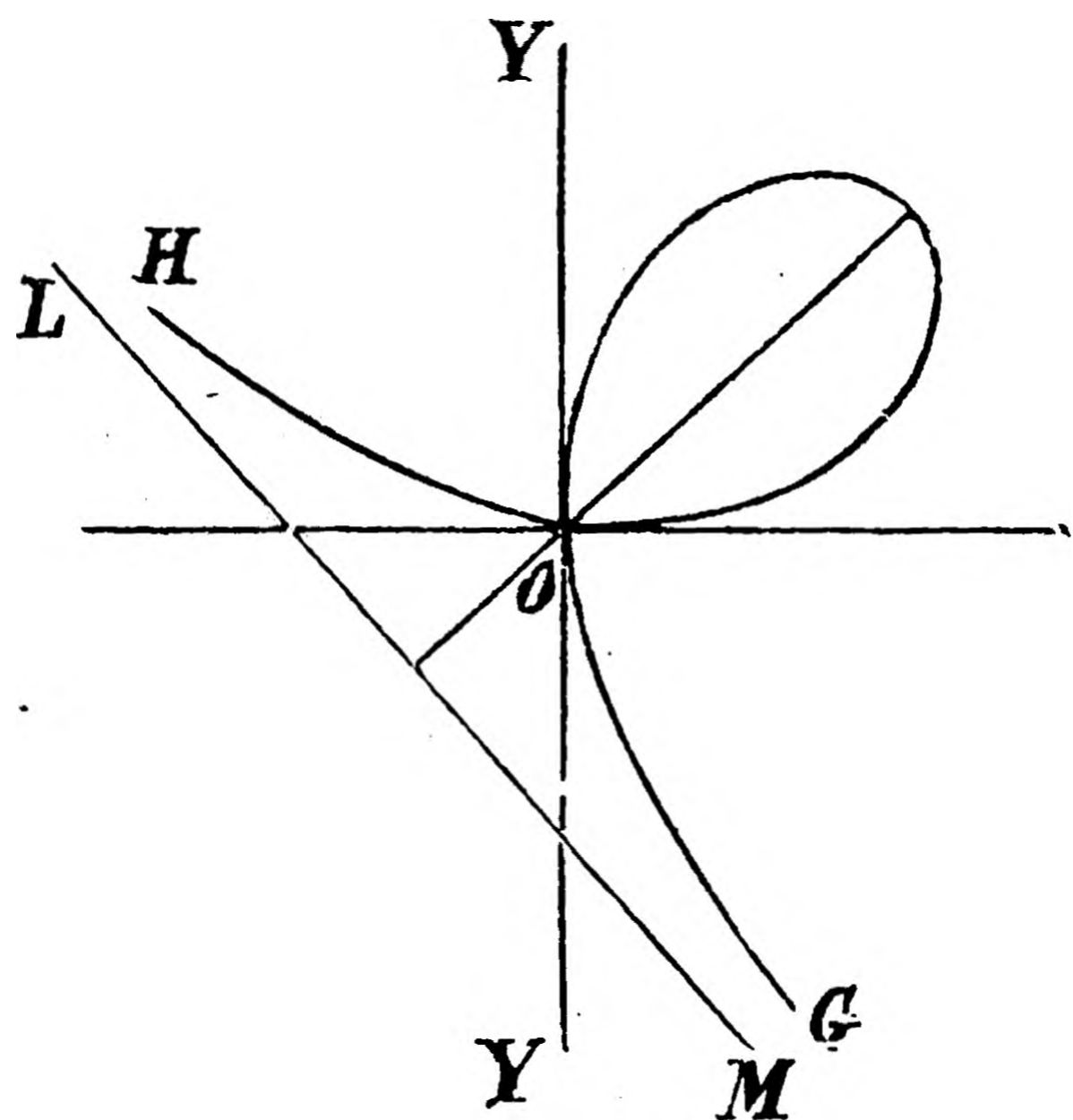
Фиг. 23.



Легко видѣть, что выраженія:

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad \text{и} \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

Фиг. 24.

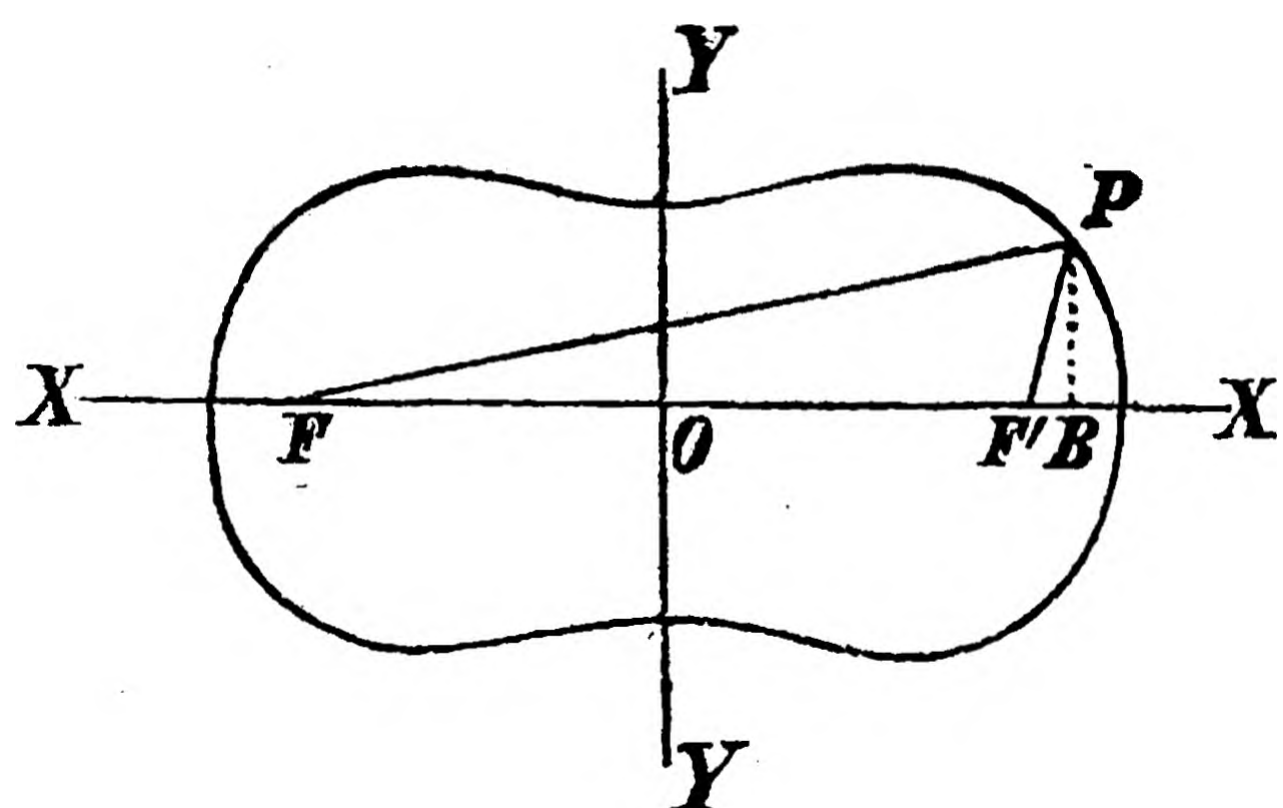


удовлетворяютъ уравненію кривой, какое бы значеніе не имѣло переменное t , поэтому, давая различныя числовыя значенія t , мы будемъ имѣть координаты точекъ кривой, которая имѣетъ форму, показанную на фигурѣ (фиг. 24). Вѣтви ея OH и OG имѣютъ асимптотой прямую LM .

§ 24. *Овалъ Кассини.* Найти геометрическое мѣсто точекъ, коихъ произведеніе разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ было бы величина постоянная?

Пусть данныя точки будутъ F и F' , разстояніе между ними $FF' = 2c$

Фиг. 25.



(фиг. 25), произведеніе разстояній каждой точки геометрическаго мѣста отъ точекъ F и F' пусть будетъ m^2 .

Раздѣлимъ, въ точкѣ O , разстояніе FF' пополамъ, возьмемъ FF' за абсциссу, а OY , перпендикулярную FF' , за ординату.

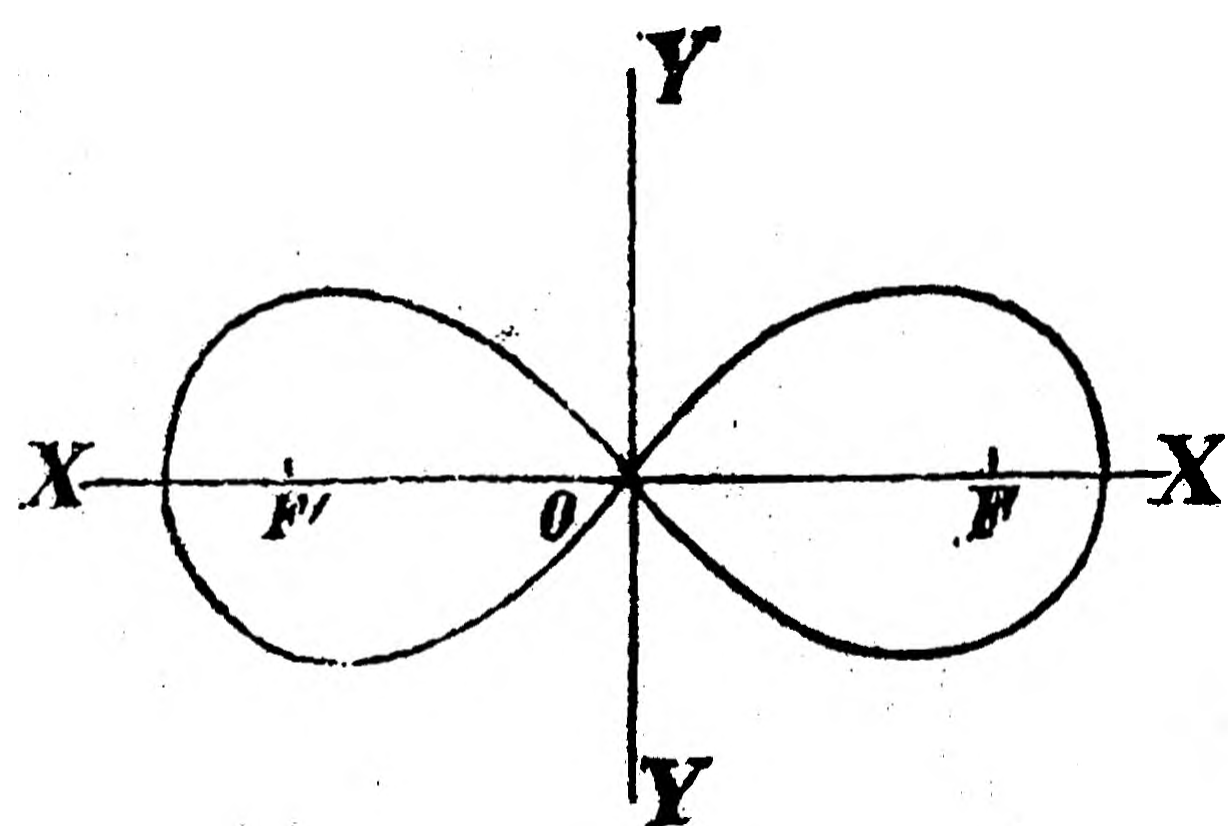
Если точка P находится на геометрическомъ мѣстѣ, то:

$$F'P \cdot FP = m^2$$

Такъ какъ OB и BP суть координаты x и y , точки P , то мы имѣемъ:

$$\{y^2 + (x+c)^2\} \{y^2 + (x-c)^2\} = m^4$$

Фиг. 26.



или:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = m^4$$

Овалъ будетъ имѣть форму (фиг. 25) если $m > c$.

Если же $m = c$, то мы будемъ имѣть *лемнискату Бернулли*, коей уравненіе есть:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$$

Форма лемнискаты будетъ (фиг. 26).

Если-же $m < c$, то овалъ Кассини состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ оваловъ (фиг. 27).

§ 25. Трансцендентная кривая.

Всѣ до сихъ поръ разсмотрѣнныя кривыя называются алгебраическими, такъ какъ всѣ онѣ выражаются алгебраическими уравненіями различныхъ степеней. Коническія сѣченія

суть кривыя 2-ой степени, конхоида—4-ой, циссоида—3-ей и т. д. За алгебраическими кривыми слѣдуютъ трансцендентныя, т. е. такія кривыя, въ уравненія которыхъ входятъ трансцендентныя функціи: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\log x$, e^x и т. д.

§ 26. Синусоида. Уравненіе этой кривой есть:

$$y = \sin x$$

Чтобы видѣть ея форму дадимъ x всѣ значенія, начиная съ 0, и опредѣлимъ y :

$$x=0, \dots x=\frac{\pi}{6}, \dots x=\frac{\pi}{4}, \dots x=\frac{\pi}{2}, \dots x=\frac{5\pi}{6}, \dots x=\pi, \dots x=\frac{7\pi}{6}, \dots x=\frac{3\pi}{2}, \dots x=2\pi, \dots$$

$$y=0, \dots y=\frac{1}{2}, \dots y=\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots y=1, \dots y=\frac{1}{2}, \dots y=0, \dots y=-\frac{1}{2}, \dots y=-1, \dots y=0, \dots$$

Эта кривая имѣетъ слѣдующую форму (фиг. 28).

Въ болѣе общей формѣ уравненіе синусоиды будетъ:

$$y = a \sin (bx)$$

гдѣ a и b произвольныя количества.

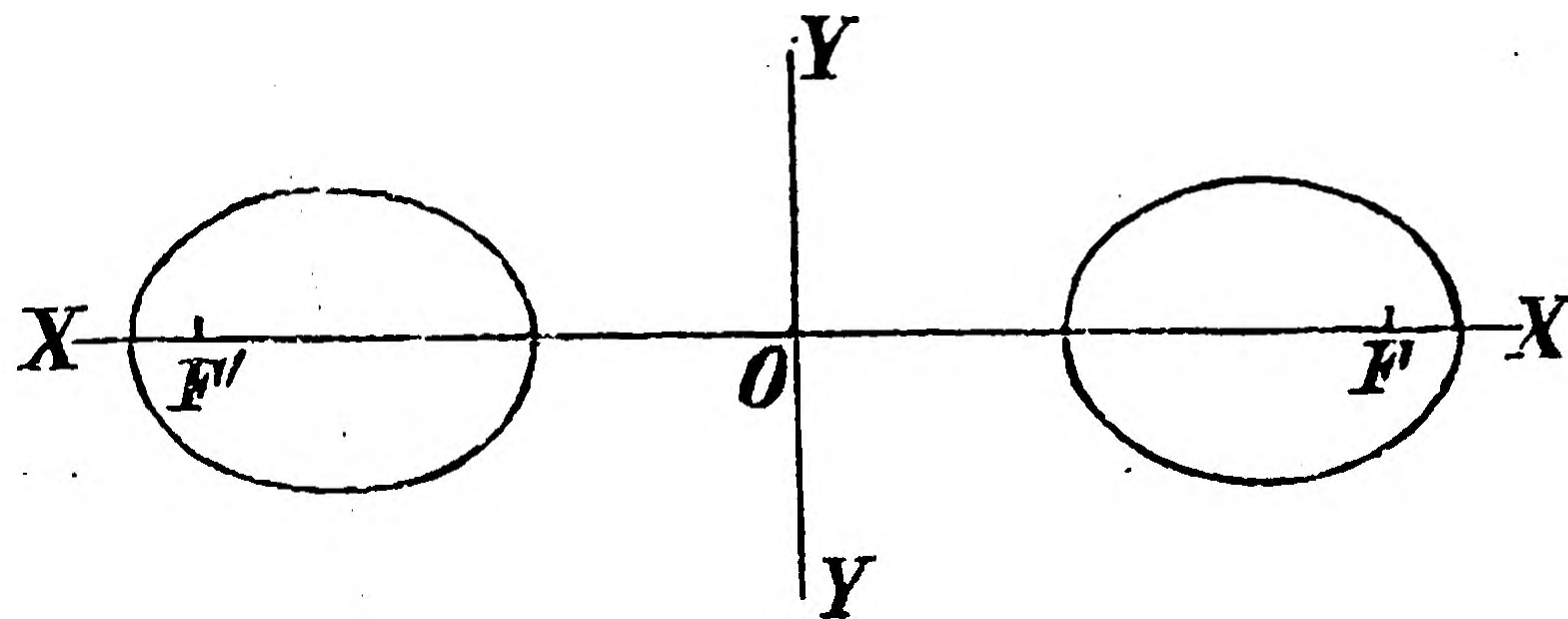
§ 27. Косинусоида. Эта кривая выражается уравненіемъ:

$$y = \cos x$$

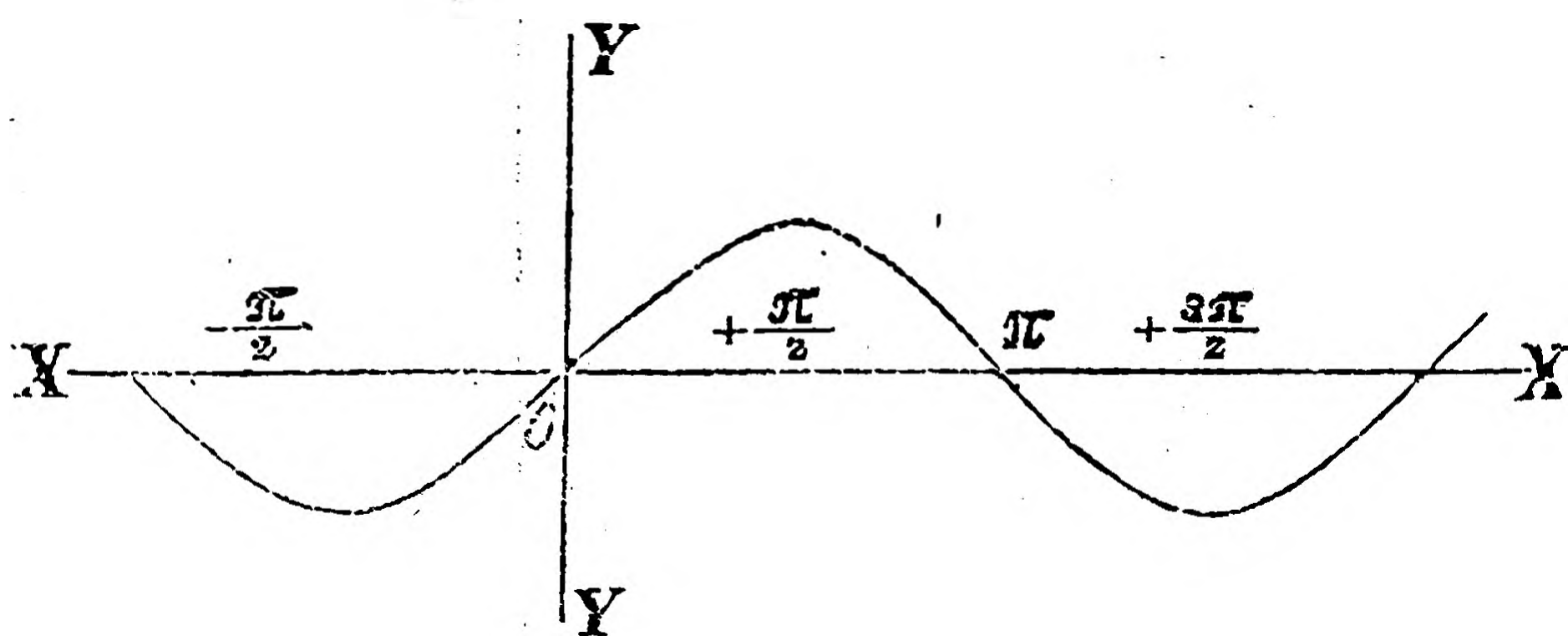
Если изслѣдуемъ ея форму, какъ это мы сдѣлали для синусоиды, то увидимъ, что она имѣетъ слѣдующій видъ (фиг. 29).

Видъ ея показываетъ, что кривая пересѣкаетъ ось ординатъ на разстояніи равномъ единицѣ отъ начала координатъ O .

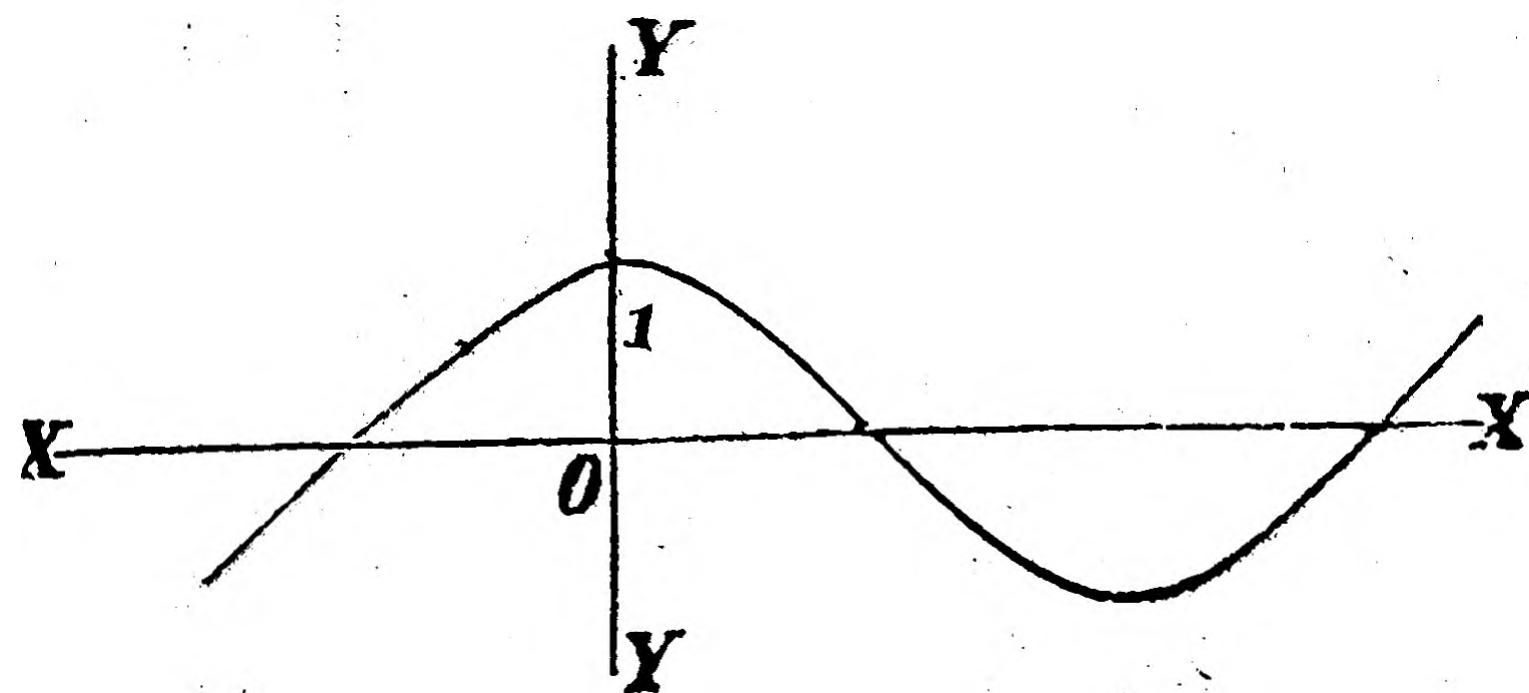
Фиг. 27.



Фиг. 28.



Фиг. 29.



§ 28. *Кривая тангенсовъ.* Кривая эта выражается уравненіемъ:

$$y = \operatorname{tg} x$$

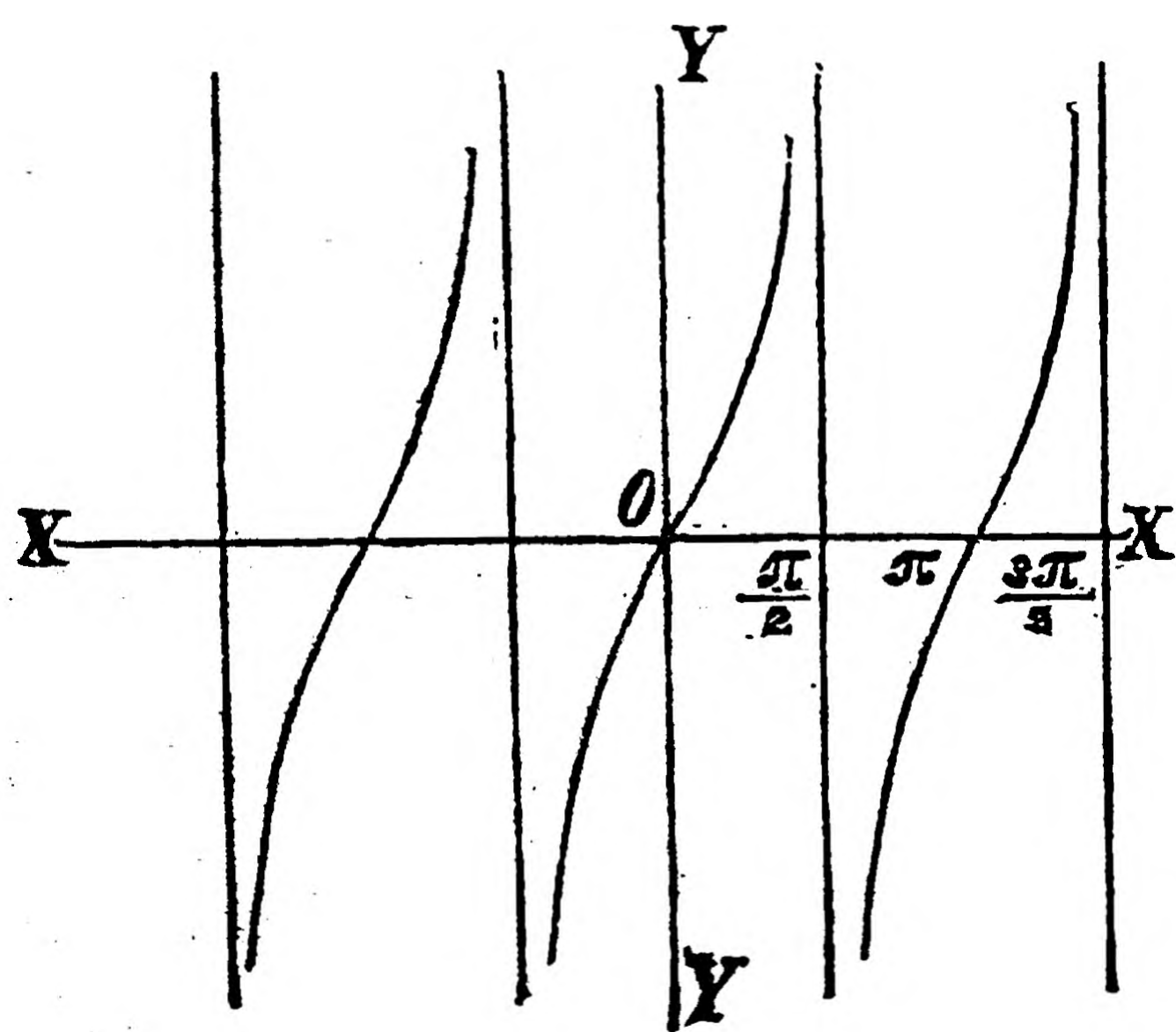
Если изслѣдуемъ ея форму, какъ сдѣлали это для двухъ предыдущихъ кривыхъ, то найдемъ, что:

$$x = 0, \dots \quad x = \frac{\pi}{6}, \dots \quad x = \frac{\pi}{4}, \dots \quad x = \frac{\pi}{2}, \dots \quad x = \pi, \dots \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

$$y = 0, \dots \quad y = \sqrt{\frac{2}{3}}, \dots \quad y = 1, \dots \quad y = \infty, \dots \quad y = 0, \dots \quad y = -\infty$$

Кривая имѣетъ форму (фиг. 30).

Фиг. 30.



§ 29. *Логарифмическая кривая.* Кривая эта выражается уравненіемъ:

$$x = \log(y)$$

которое можно написать въ формѣ:

$$y = e^x$$

если \log есть неперовскій.

$$x = -\infty, \dots \quad x = 0, \dots \quad x = \infty$$

$$y = 0, \dots \quad y = 1, \dots \quad y = \infty$$

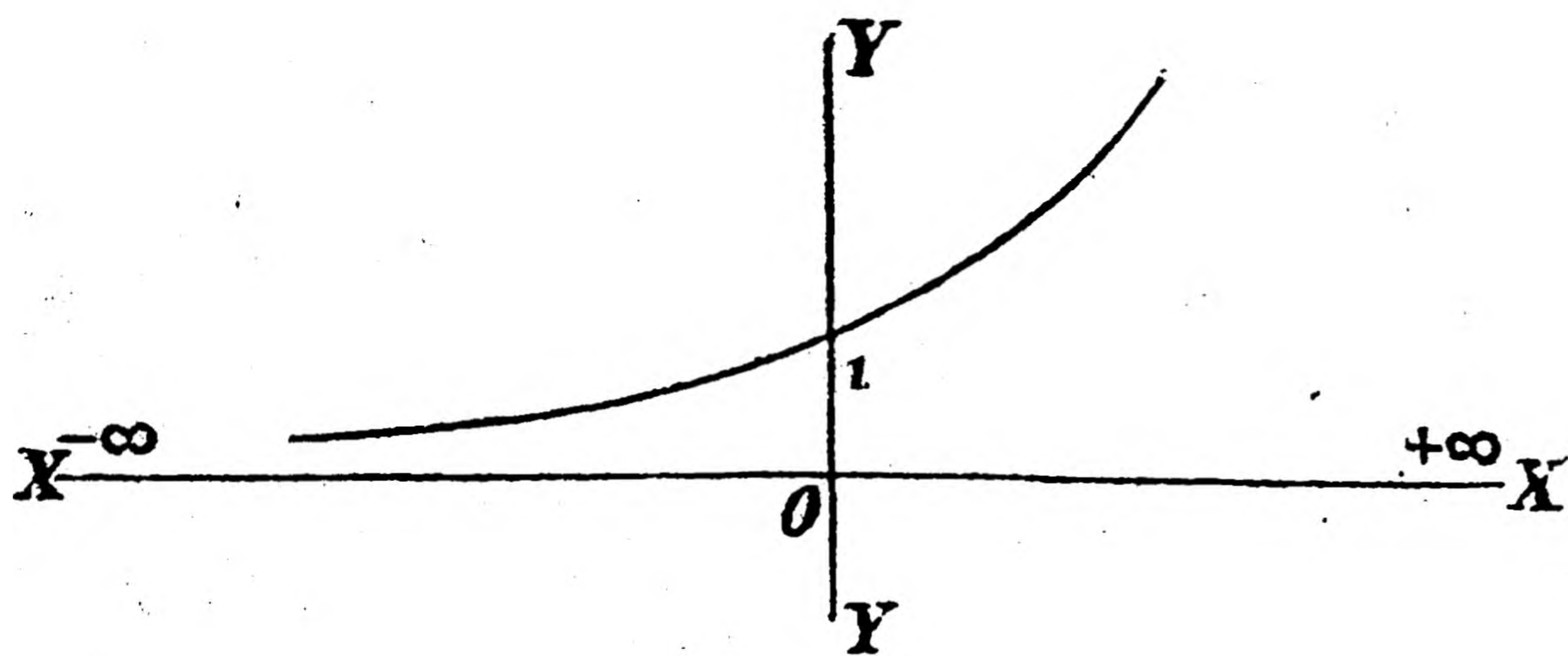
форма кривой будетъ (фиг. 31).

§ 30. *Кривая секансовъ.* Кривая эта выражается уравненіемъ:

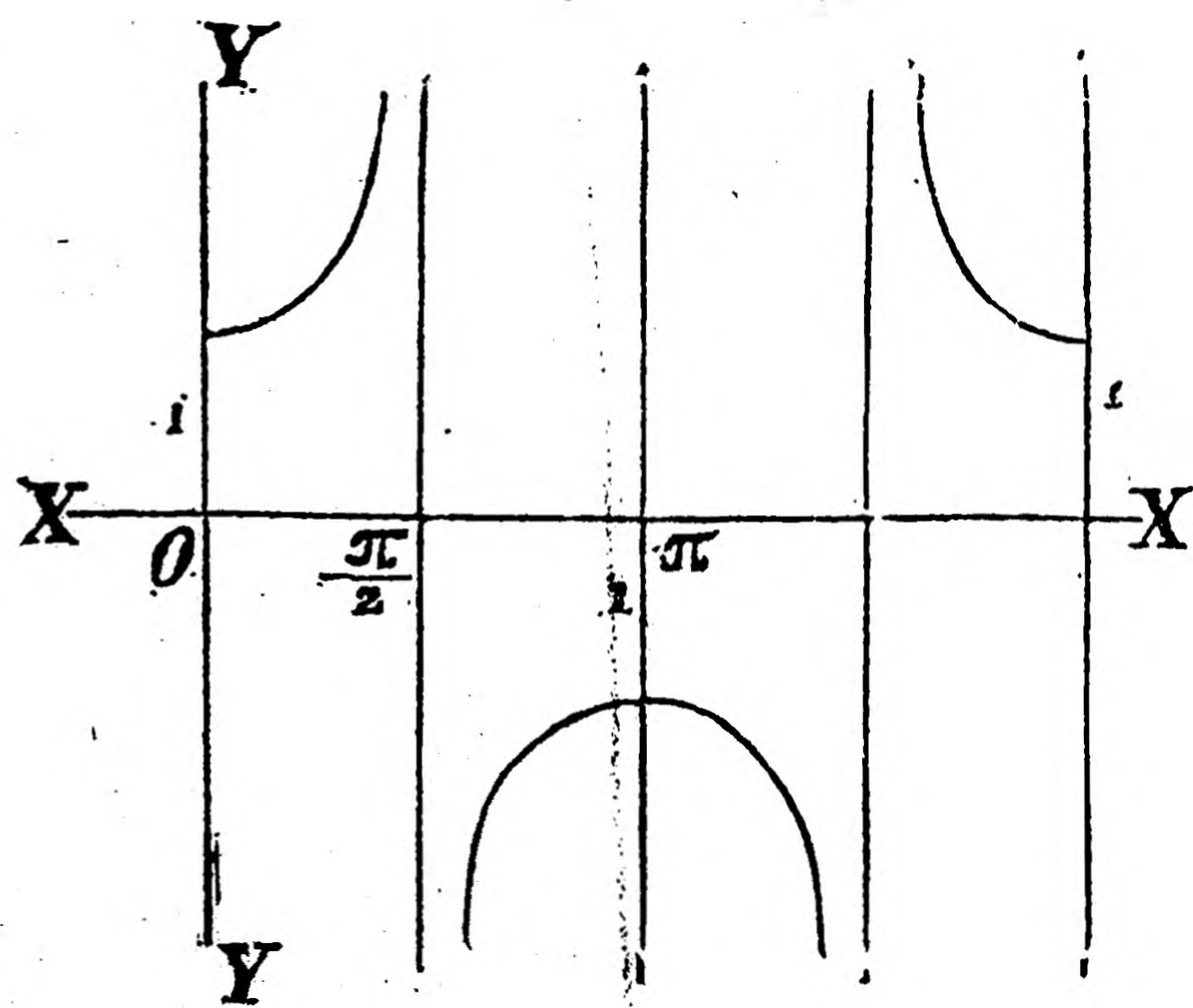
$$y = \sec x$$

и имѣетъ форму (фиг. 32).

Фиг. 31.



Фиг. 32.



§ 31. *Квадратрикса Дейнострата.* Если ордината DP (фиг. 33) равномерно движется по діаметру AB круга O , начиная съ точки B къ A , и въ то же время радіусъ OB вращается также равномерно около центра,

то точка пересѣченія ординаты и радиуса, образуетъ геометрическое мѣсто, которое и называется *квадратриксой*.

Если радиусъ круга есть r , а $\angle BOR = \varphi$, то очевидно, изъ условія движенія, мы будемъ имѣть:

$$r - x = a\varphi. \text{ Если при } x=0, \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{то } a = \frac{2r}{\pi}, \text{ откуда } \varphi = \frac{r-x}{2r} \cdot \pi.$$

Но мы имѣемъ:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi$$

откуда:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left(\frac{r-x}{2r} \cdot \pi \right)$$

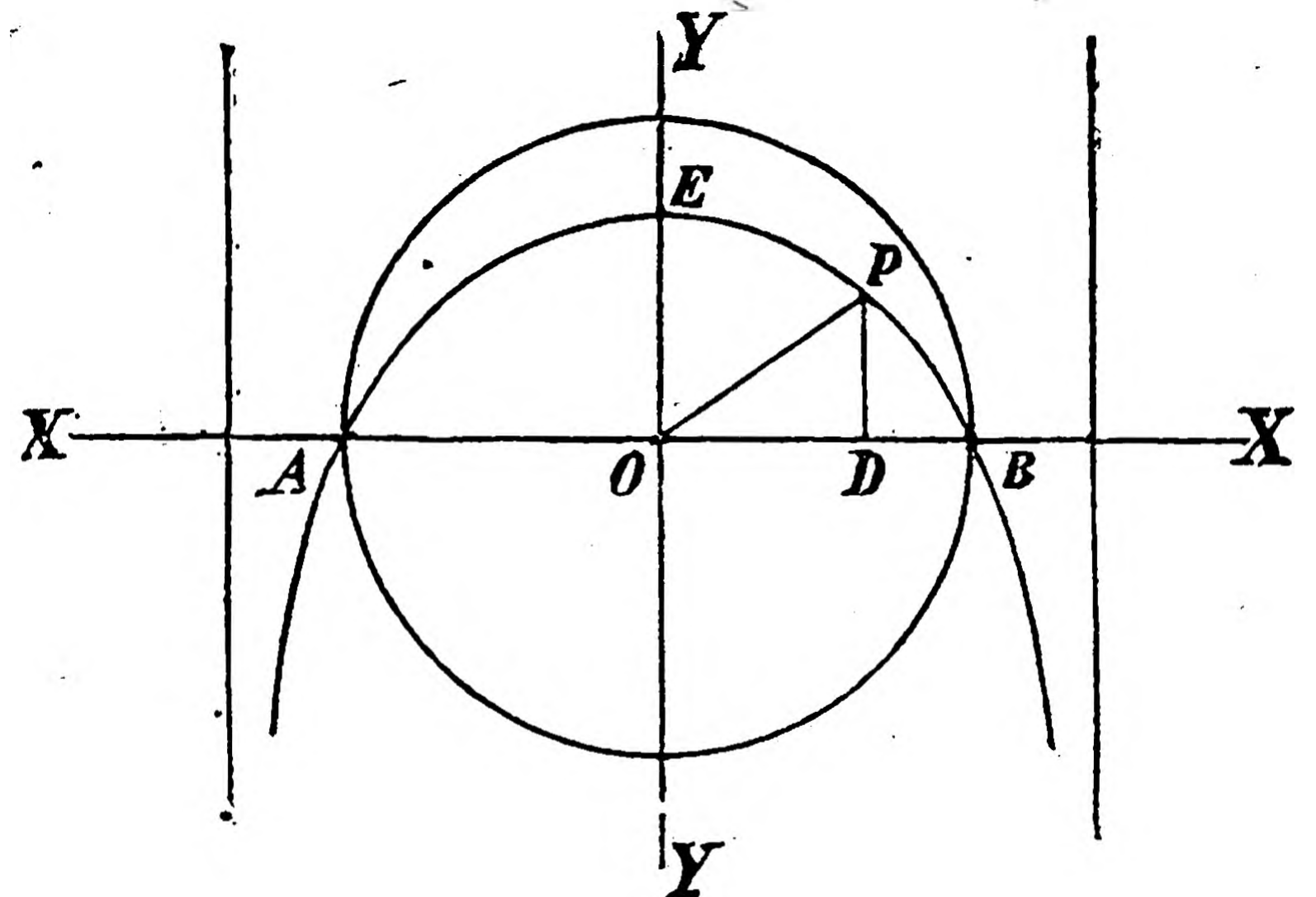
Это и есть уравненіе квадратриксы. Эта кривая была изобрѣтена Дейнотратомъ для отысканія квадратуры круга, откуда ея названіе. Если $x=0$, то ордината OE будетъ равна $\frac{2r}{\pi}$, это можно показать съ помощью нѣкоторыхъ преобразованій уравненія, слѣдовательно надобно только построить точку E , чтобы найти π . Но построеніе точки E представляетъ такія-же трудности, какъ и построеніе π . Съ помощью квадратриксы можно также раздѣлить уголъ на три равныя части, для этого надобно раздѣлить на три равныя части отрѣзокъ DB , тогда ординаты этихъ точекъ встрѣтятъ квадратриксу въ точкахъ, которыя соединивъ съ центромъ, раздѣлимъ уголъ φ на три равныя части.

§ 32. *Циклоида*. Циклоида есть кривая, описанная точкою окружности круга, который катится, не скользя, по прямой линіи. Пусть OX будетъ прямая, по которой катится кругъ, коего радиусъ есть r (фиг. 34). Пусть r будетъ точка касанія круга и прямой OX , пусть M будетъ точка, описывающая кривую. Мы полагаемъ, что въ началѣ движенія точка M совпадаетъ съ точкою касанія O , прямой и окружности.

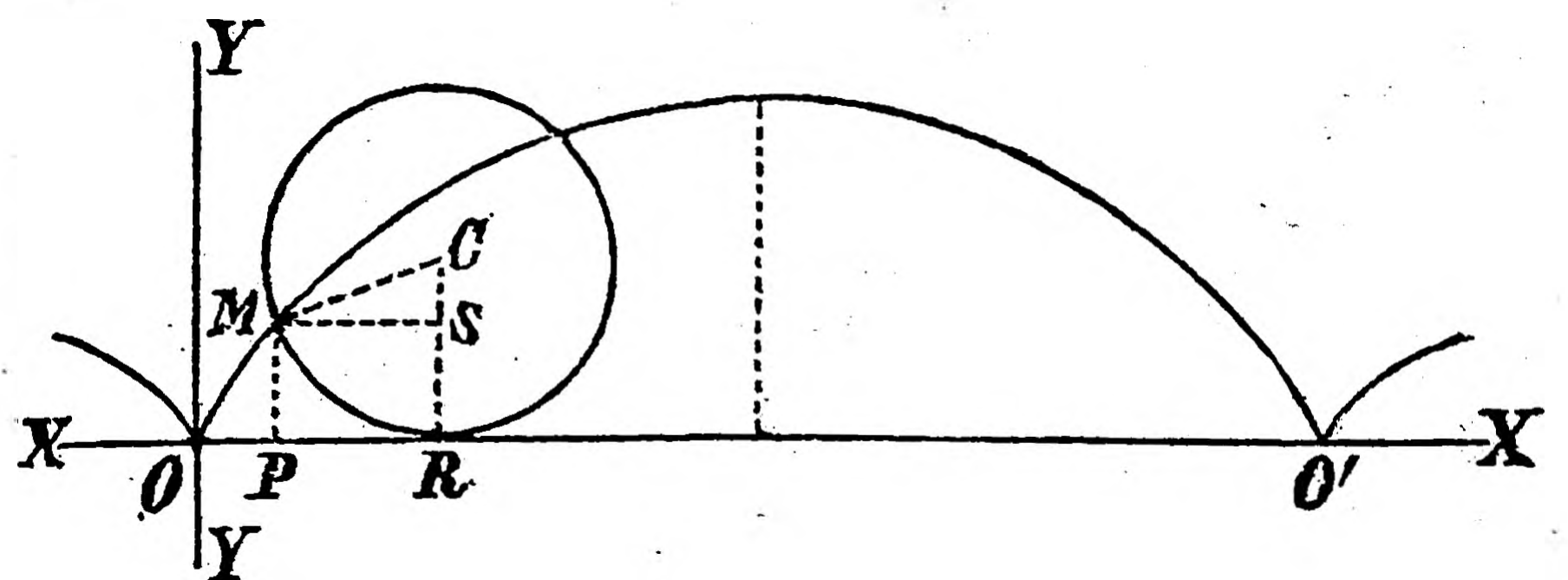
Возьмемъ за ось X прямую OX , O за начало координатъ, OY перпендикулярную OX за ось Y . Въ томъ положеніи, какое имѣетъ кругъ на фигурѣ, координаты точки M будутъ:

$$x = OP = OR - PR, \quad y = CR - CS \quad (17)$$

Фиг. 33.



Фиг. 34.



Означимъ черезъ φ уголъ, который радиусъ CM составляетъ съ начальнымъ своимъ положеніемъ CR . По свойству движенія мы имѣемъ:

$$OR = \text{дугъ } MR = r\varphi$$

Но:

$$RP = MS = r \sin \varphi \quad , \quad SC = r \cos \varphi$$

подставляя въ (17), найдемъ:

$$x = r(\varphi - \sin \varphi) \quad , \quad y = r(1 - \cos \varphi) \quad (18)$$

Откуда найдемъ:

$$\cos \varphi = \frac{r-y}{r} \quad , \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r}$$

Слѣдовательно:

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r}$$

подставляя это выраженіе φ въ первое изъ выраженій (18), найдемъ:

$$x = r \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r} + \sqrt{2ry-y^2}$$

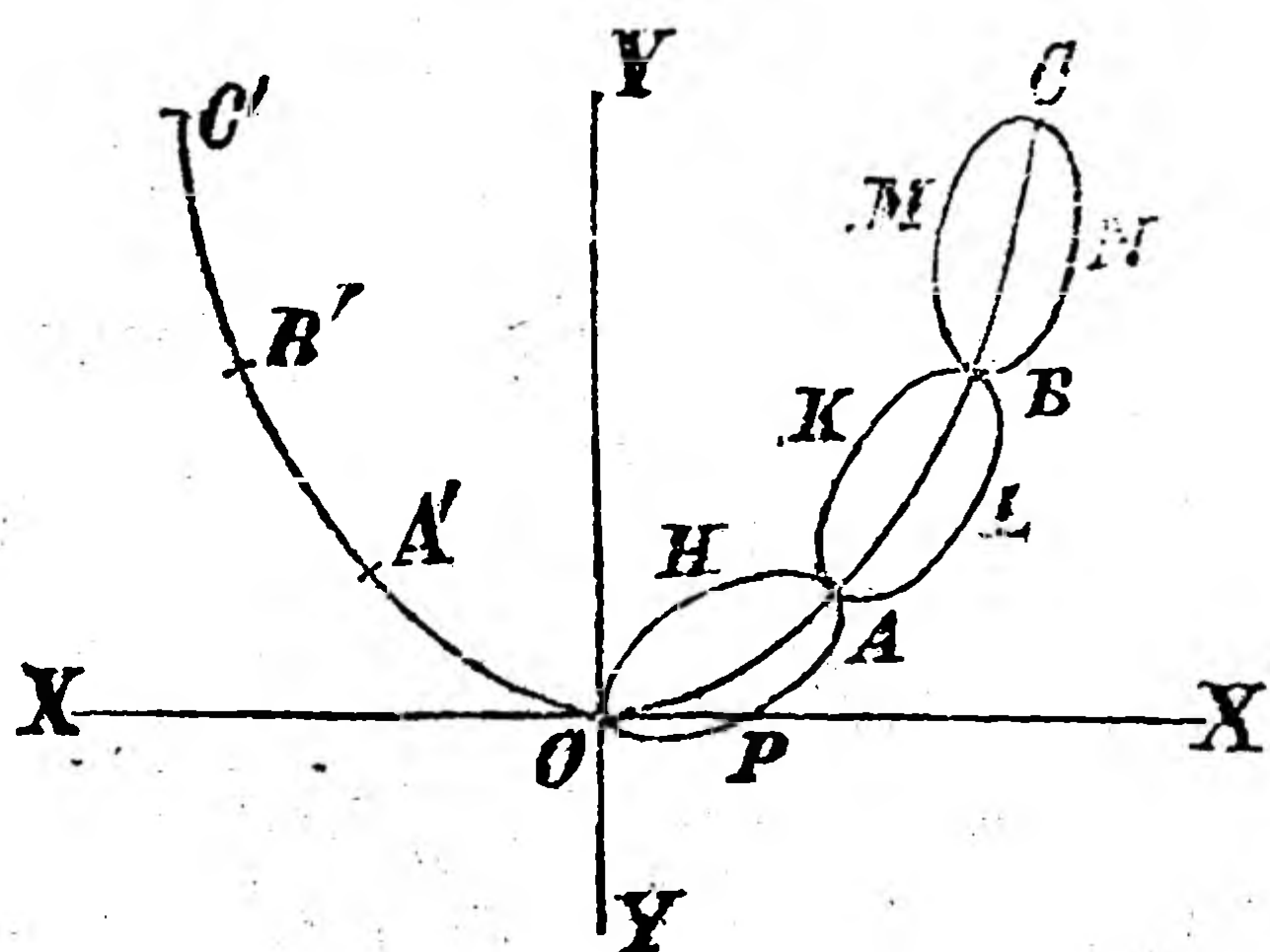
Таково уравненіе одной изъ самыхъ замѣчательныхъ кривыхъ по своимъ геометрическимъ и механическимъ свойствамъ. Она состоитъ изъ безконечнаго числа тождественныхъ частей, изъ коихъ только одна дана на чертежѣ.

§ 33. Вотъ еще замѣчательная кривая, выражаемая уравненіемъ:

$$y = ax^2 \pm \sin x \sqrt{x}$$

Чтобы построить эту кривую, построимъ сначала параболу $y = ax^2$.

Фиг. 35.

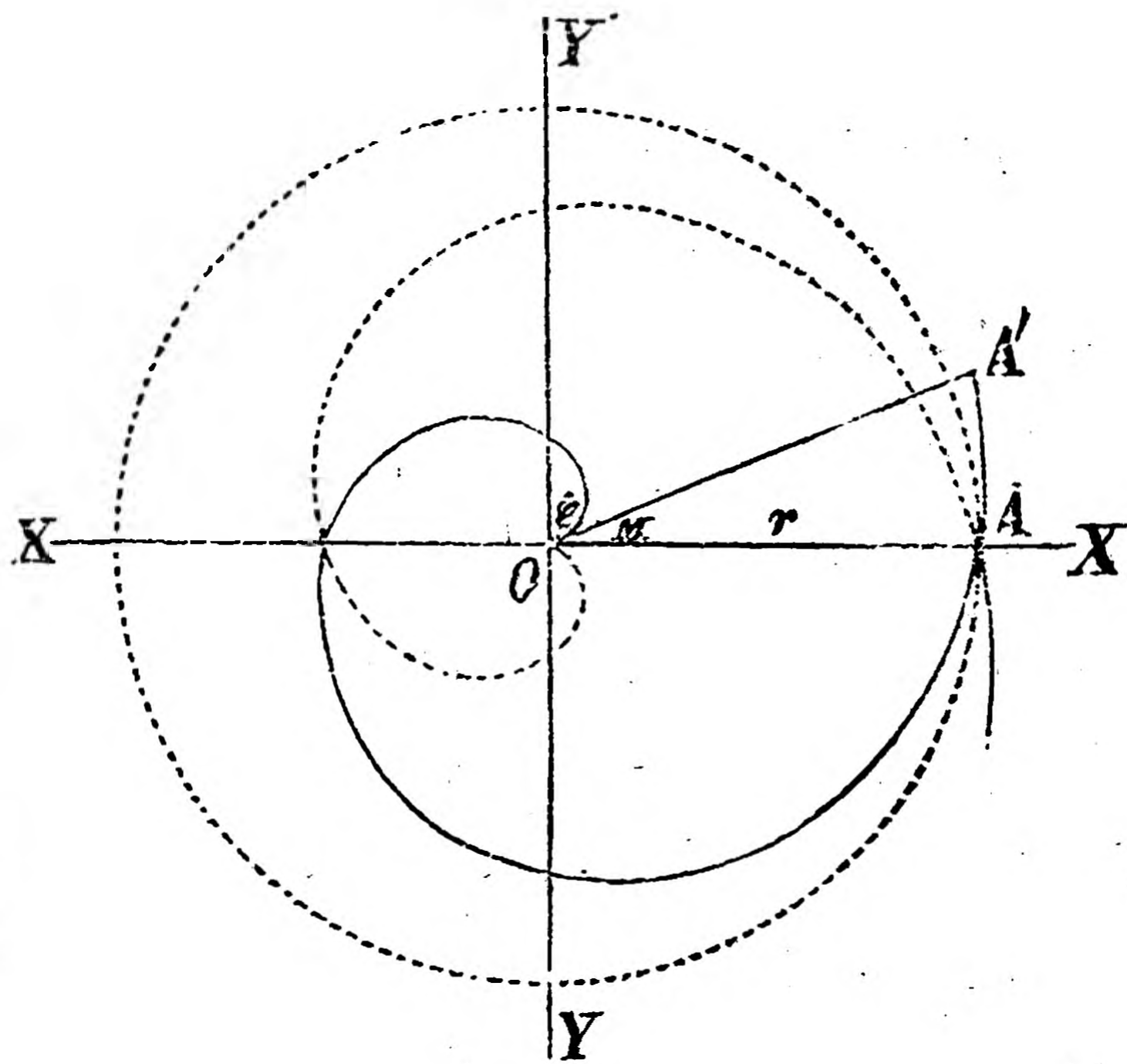


Пусть она будетъ $C'OC$ (фиг. 35). Если будемъ прибавлять и отнимать отъ ординатъ параболы, величину $\sin x \sqrt{x}$, то съ положительной стороны получимъ овалы: RH , KL и $MN...$, а съ отрицательной отдѣльныя точки A' , B' , C' , ..., на вѣтвяхъ параболы, такъ какъ для отрицательныхъ величинъ x выраженіе $\sin x \sqrt{x}$ будетъ мнимое, а дѣйствительное, равное нулю, только въ точкахъ A' , B' , C' ...

Длина оваловъ и разстоянія точекъ A' , B' , C' ..., считая по оси X , будутъ все равны π .

§ 34. *Спираль Архимеда.* Прямая OA вращается равномерно около точки O (фиг. 36), точка M , начиная съ O , скользитъ равномерно по прямой OA и притомъ такъ, что когда прямая сдѣлаетъ полный оборотъ, точка M проскользитъ на прямой разстояніе r всегда одно и тоже для всѣхъ полныхъ оборотовъ.

Фиг. 36.



При такихъ движеніяхъ, съ прямою и по прямой, точка M опишетъ кривую, состоящую изъ безконечнаго числа оборотовъ около точки O . Кривая эта извѣстна подъ именемъ *спирали Архимеда*.

Возьмемъ полярныя координаты: точку O за полюсь, а постоянная прямая пусть будетъ первоначальное направленіе прямой OA .

Пусть OA' будетъ такое положеніе радіуса вектора OA , при которомъ уголъ φ будетъ шестнадцатая часть окружности. По условію точка M пройдетъ шестнадцатую часть r , слѣдовательно:

$$\frac{OM}{OA'} = \frac{AA_1}{2\pi} \quad \text{или} \quad \frac{\rho}{r} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

откуда:

$$\rho = \frac{r}{2\pi} \cdot \varphi$$

полагая $\frac{r}{2\pi} = a$, искомое уравненіе спирали будетъ:

$$\rho = a\varphi \tag{19}$$

Уголъ φ можетъ возрасть неопредѣленно, какъ въ положительномъ, такъ и въ отрицательномъ направленіи, въ обоихъ случаяхъ получатся двѣ вѣтви тождественныя, но съ противоположными оборотами.

Если изъ точки O возставимъ перпендикуляръ и возьмемъ его за ось Y , а OA за ось X , то будемъ имѣть:

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Откуда уравненіе спирали въ декартовыхъ координатахъ будетъ:

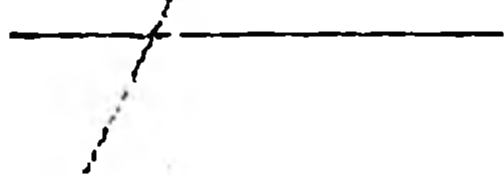
$$x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x}$$

или:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left(\frac{y^2 + x^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

уравнение трансцендентное, между тѣмъ съ перваго раза кажется, что въ полярныхъ координатахъ (19) оно алгебраическое. Чтобы выяснитъ это противорѣчiе, надобно вспомнить, что ρ и φ величины разнородныя.

§ 35. Этихъ примѣровъ достаточно, чтобы показать, какъ съ помощью метода Декарта, всякую кривую, которой свойство, общее всѣмъ ея точкамъ, извѣстно, служащее для ея опредѣленiя, выразитъ алгебраическимъ уравненiемъ, и обратно, каждое алгебраическое уравнение представить геометрически. Такимъ образомъ, всѣ геометрическiя изслѣдованiя обращаются въ алгебраическiя комбинаци и преобразованiя, геометрическiя конкретныя представлениа обобщаются въ отвлеченныхъ алгебраическихъ символахъ и часто, переставая существовать конкретно для глаза, идеализируются въ алгебраическихъ символахъ и ихъ законахъ. Такiя обобщенiя, или такая идеализацiя, ведутъ ко многимъ теоремамъ, которыя безъ этого были-бы для насъ всегда скрыты, существуя только въ отвлеченной комбинаци алгебраическихъ символовъ.

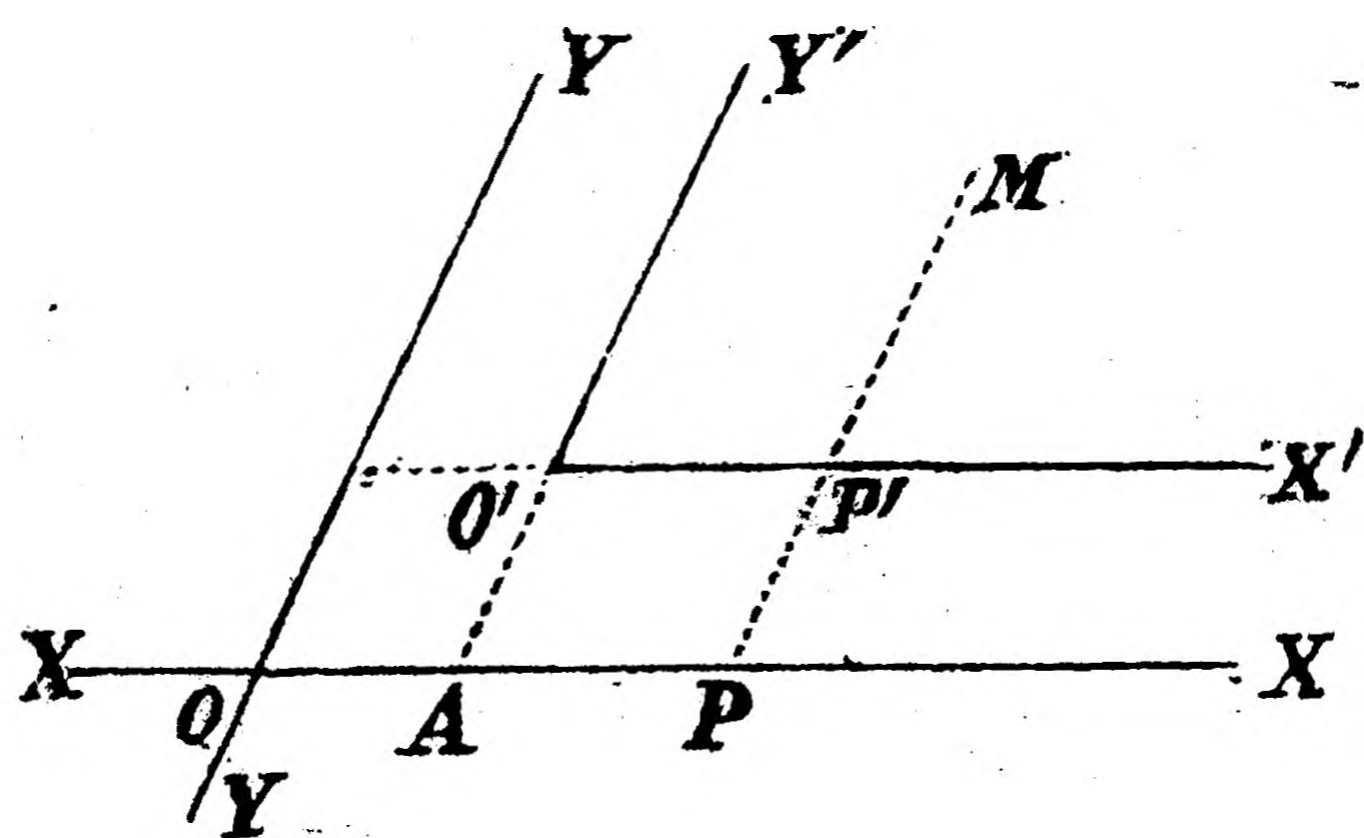


ГЛАВА III.

Преобразование координатъ.

§ 36. Часто встрѣчается необходимость опредѣлить положенiе точки на плоскости относительно другаго начала или другихъ координатныхъ осей. Такой переходъ отъ однѣхъ координатныхъ осей къ другимъ называется *преобразованиемъ координатъ*. Въ переходѣ отъ однѣхъ осей къ другимъ встрѣчается нѣсколько случаевъ:

Фиг. 37.



Случай 1. *Перенесенiе начала*. Пусть OX и OY (фиг. 37) будутъ старыя оси, $O'X'$ и $O'Y'$ новыя, параллельныя старымъ. Черезъ x и y мы будемъ обозначать координаты точки M относительно старыхъ осей, а черезъ x' и y' координаты той-же точки относительно новыхъ осей. Пусть координаты новаго начала, относительно старыхъ осей, будутъ $OA = a$ и $AO' = b$. Координаты точки M , отнесенной къ старымъ осямъ,

будутъ x и y , а координаты той-же точки относительно новыхъ осей, будутъ x' и y' . Пусть координаты новаго начала, относительно старыхъ осей, будутъ $OA = a$ и $AO' = b$. Координаты точки M , отнесенной къ старымъ осямъ,

будутъ $x = OP$, $y = PM$; отнесенной къ новымъ, будутъ $x' = O'P'$, $y' = P'M$. Но:

$$OP = OA + AP = OA + O'P'$$

$$MP = PP' + MP' = O'A + MP'$$

или:

$$x = a + x' \quad , \quad y = b + y' \quad (1)$$

Это формулы, съ помощью которыхъ перемѣняется начало, а направленіе осей остается тоже; a и b суть величины данныя.

Пр. 1. Что сдѣлается съ уравненіями:

$$y + 4x - 7 = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$$

если начало координатъ перенесемъ въ точку $(2, -1)$?

Отв. $y' + 4x' = 0 \quad , \quad x'^2 + y'^2 = 6.$

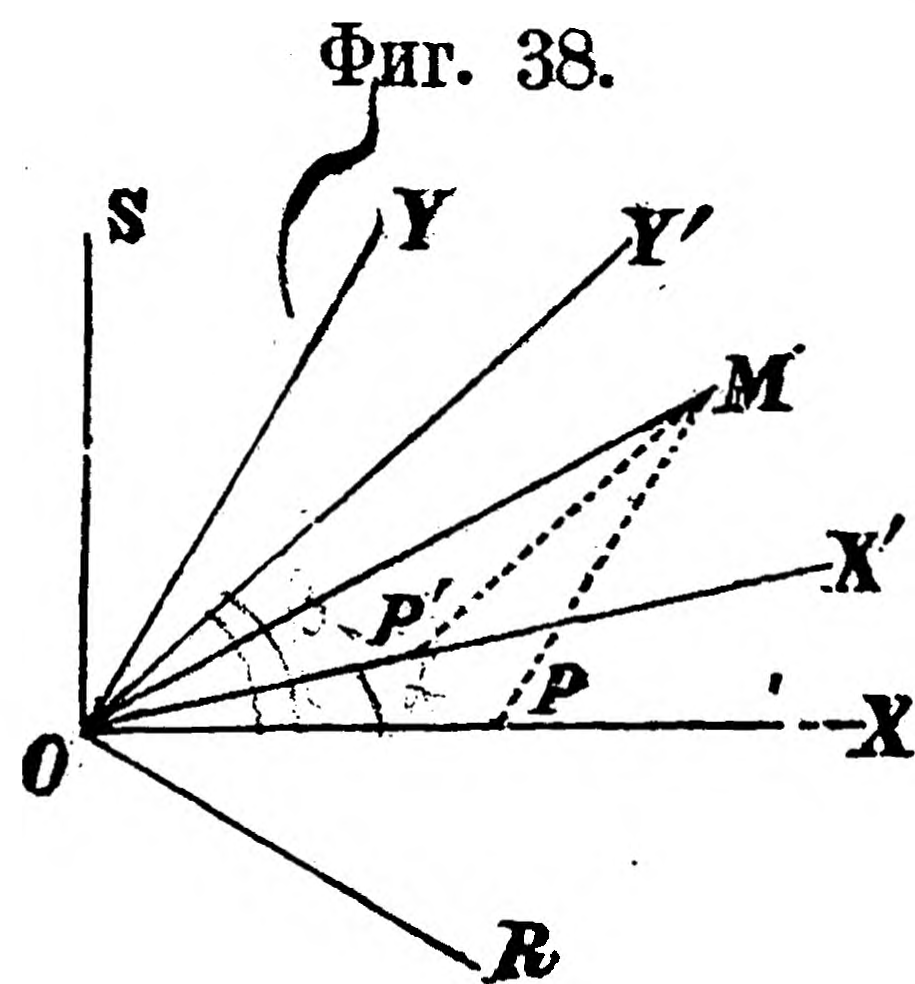
Пр. 2. Что сдѣлается съ уравненіемъ:

$$x^2 + y^2 - \frac{2mn}{m-n} x = 0$$

если новое начало находится на оси OX , на разстояніи $\frac{mn}{m-n}$ отъ стараго начала?

Отв. $x'^2 + y'^2 + \left(\frac{mn}{m-n}\right)^2 = 0.$

(Случай 2. Перемѣна направленія осей. Пусть OX и OY будутъ старыя оси, а OX' и OY' —новыя, имѣющія общее начало со старыми осями. Пусть α и β будутъ углы, которые новыя оси OX' и OY' составляютъ съ осью OX (фиг. 38), эти углы опредѣляютъ положеніе новыхъ осей. Какъ прежде мы будемъ обозначать черезъ x, y координаты точки M относительно старыхъ осей, а черезъ x', y' координаты той-же точки относительно новыхъ осей. Пусть наконецъ θ будетъ уголъ между старыми осями OX и OY .



Слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\theta = YOX \quad , \quad \alpha = X'OX \quad , \quad \beta = Y'OX$$

$$x = OP \quad , \quad y = MP \quad , \quad x' = OP' \quad , \quad y' = MP'$$

Чтобы выразить x и y черезъ x' и y' , проведемъ OR перпендикулярно OY и OS перпендикулярно OX и проэктируемъ полигонъ $OP'MPO$ на OR . Въ силу теоремы, что алгебраическая сумма проэкцій сторонъ замкнутого полигона, на какую нибудь прямую, равна нулю, мы будемъ имѣть слѣдующее уравненіе, пробѣгая полигонъ въ направленіи $OP'MPO$:

$$OP' \cdot \cos P'OR + P'M \cdot \cos ROY' + MP \cdot \cos ROY - PO \cdot \cos ROP = 0$$

или:

$$x' \cos ROP' + y' \cos ROY' - x \cos ROX = 0$$

проекція стороны MP на OR равна нулю, такъ какъ уголъ ROY есть прямой. Но мы имѣемъ:

$$XOR = YOR - YOX = \frac{\pi}{2} - \theta$$

а также:

$$X'OR = X'OX + XOR = \alpha + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha)$$

$$Y'OR = Y'OX + XOR = \beta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - (\theta - \beta)$$

подставляя, найдемъ:

$$x' \sin (\theta - \alpha) + y' \sin (\theta - \beta) - x \sin \theta = 0 \quad (2)$$

Если тотъ же полигонъ проектируемъ на OS , то найдемъ:

$$OP' \cdot \cos X'OS + P'M \cdot \cos Y'OS - MP \cdot \cos YOS - PO \cdot \cos XOS = 0$$

но:

$$X'OS = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad Y'OS = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad YOS = \frac{\pi}{2} - \theta$$

а сторона OP перпендикулярна OS , слѣдовательно ея проекція равна нулю; подставляя найдемъ:

$$x' \sin \alpha + y' \sin \beta - y \sin \theta = 0 \quad (3)$$

Уравненія (2) и (3) даютъ искомыя величины для x и y :

$$x = \frac{x' \sin (\theta - \alpha) + y' \sin (\theta - \beta)}{\sin \theta}, \quad y = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \theta} \quad (4)$$

Эти формулы служатъ для перехода отъ одной системы косоугольных осей, къ другой косоугольной, имѣющей тоже начало; онѣ рѣдко употребляются во всей ихъ общности.

Мы разберемъ тѣ частные случаи, которые часто встрѣчаются.

1. Перейти отъ системы прямоугольных осей къ системѣ косоугольных? Въ этомъ случаѣ $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta = 1$, слѣдовательно формулы (4)

сдѣлаются:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \cos \beta \\ y &= x' \sin \alpha + y' \sin \beta \end{aligned} \quad (5)$$

2. Перейти отъ системы прямоугольной къ другой прямоугольной?

Въ этомъ случаѣ $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta = 1$ и $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\cos \beta = -\sin \alpha$ и $\sin \beta = \cos \alpha$. Въ силу этого формулы (4) сдѣлаются:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

Это самыя употребительныя формулы.

3. Перейти отъ системы косоугольной къ системѣ прямоугольной?

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \sin(\theta - \alpha) = -\cos(\theta - \alpha) \quad \text{и} \quad \sin \beta = \cos \alpha$$

въ силу чего формулы (4) сдѣлаются:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\theta - \alpha) - y' \cos(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \\ y &= \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (7)$$

Случай 3. Общее преобразование. Оно состоитъ въ перенесеніи начала и въ измѣненіи направленія осей.

Этого можно достигнуть съ помощью двухъ предъидущихъ преобразованій. Если координаты новаго начала O' будутъ (a, b) , а оси проведенныя черезъ это начало, параллельно старымъ, будутъ $O'X''$ и $O'Y''$, то мы будемъ имѣть:

$$x = a + x'', \quad y = b + y''$$

Остается перейти отъ системы $O'X''$, $O'Y''$ къ системѣ $O'Y'$, $O'X'$, сохраняя начало O' . Для этого надобно преобразовать x'' и y'' по формуламъ (4), что даетъ:

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin \theta} \\ y &= b + \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (8)$$

Всѣ предъидущія формулы, служащія для перехода отъ одной системы къ другой, первой степени относительно x' и y' , имѣютъ форму:

$$x = a + px' + qy', \quad y = b + rx' + sy'$$

Подстановленіе этихъ выраженій въ уравненіе n -ой степени вмѣсто x и y ведетъ къ уравненію той-же степени относительно новыхъ координатъ x' и y' . Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что степень не можетъ повысится, возвышая полиномъ въ n -ую степень и не дастъ членовъ въ x' и y' выше n -ой степени; степень и не понизится, ибо возвращаясь обратно, она бы повысилась.

Пр. 1. Показать, что уравненіе:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

будетъ такой-же формы для всѣхъ прямоугольныхъ осей, имѣющихъ тоже начало?

Пр. 2. Что сдѣлается съ уравненіемъ:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = r^2$$

если начало координатъ перенесемъ въ точку (a, b) ?

Отв. $x'^2 + y'^2 = r^2$.

Пр. 3. Что сдѣлается съ уравненіемъ:

$$y^2 - x^2 = 6$$

въ прямоугольныхъ осяхъ, если за новыя оси возьмемъ равнодѣляющія углы между старыми осями?

Отв. $x'y' = 3$.

Пр. 4. Написать формулы, служащія къ переходу отъ одной системы прямоугольныхъ осей къ другой косоугольной, сохраняя начало и ось X ?

Отв. $x = x' + y' \cos \beta$, $y = y' \sin \beta$.

Пр. 5. Дано уравненіе въ прямоугольныхъ осяхъ:

$$2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1$$

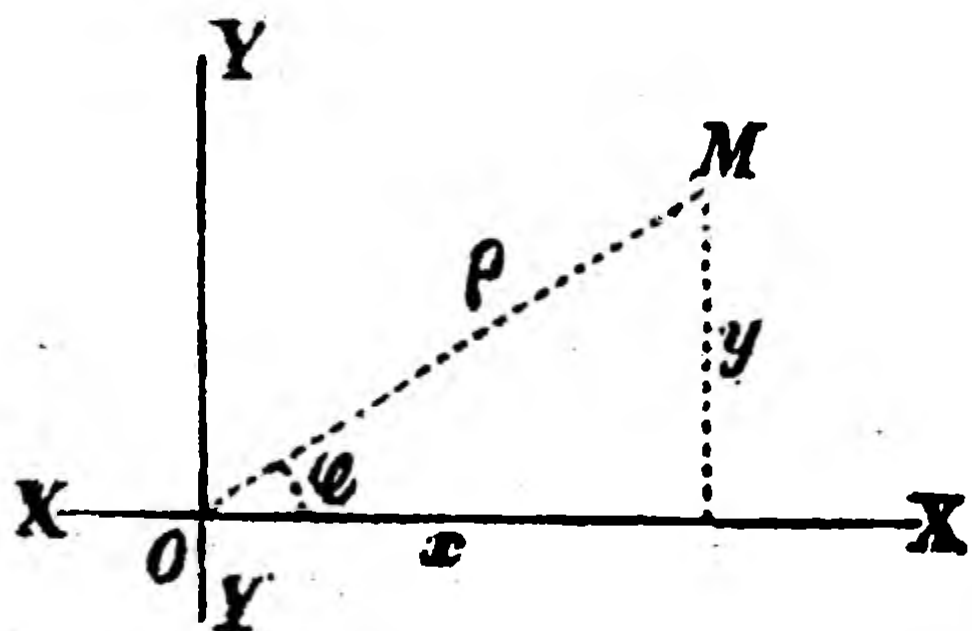
какую форму оно будетъ имѣть, если оставить ось X , а за ось Y взять равнодѣляющую уголъ между старыми осями?

Отв. $4x'^2 + y'^2 + x'y'\sqrt{2} = 2$.

§ 37. *Переходъ отъ декартовыхъ координатъ къ полярнымъ и обратно.*

Предъидущія формулы даютъ возможность перейти отъ одной системы декартовыхъ координатъ къ другой, но часто необходимо бываетъ отъ декартовыхъ координатъ перейти къ полярнымъ и обратно. Если мы имѣемъ прямоугольную систему координатъ и желаемъ преобразовать уравненіе кривой въ декартовыхъ координатахъ, въ полярныя, коихъ полюсъ находится въ началѣ, а направленіе дается осью X , то будемъ имѣть слѣдующую зависимость:

Фиг. 39.



картовыхъ координатъ къ другой, но часто необходимо бываетъ отъ декартовыхъ координатъ перейти къ полярнымъ и обратно. Если мы имѣемъ прямоугольную систему координатъ и желаемъ преобразовать уравненіе кривой въ декартовыхъ координатахъ, въ полярныя, коихъ полюсъ находится въ началѣ, а направленіе дается осью X , то будемъ имѣть слѣдующую зависимость:

$$x = \rho \cos \varphi \quad , \quad y = \rho \sin \varphi \quad , \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi$$

гдѣ ρ есть разстояніе точки (x, y) отъ начала координатъ O , а φ уголъ, который ρ составляетъ съ осью абсциссъ (фиг. 39); подставляя вмѣсто

x и y ихъ выраженія черезъ ρ и φ въ данное уравненіе, мы получимъ уравненіе кривой въ полярныхъ координатахъ. Если, обратно, требуется перейти отъ уравненія въ полярныхъ координатахъ къ декартовымъ прямоугольнымъ, то предъидущія уравненія даютъ:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Подставляя эти выраженія въ полярное уравненіе, найдемъ уравненіе въ координатахъ Декарта.

Если оси X и Y (фиг. 40) не прямоугольны, а составляютъ уголъ ω , то мы будемъ имѣть слѣдующія пропорціи:

$$y : \rho = \sin \varphi : \sin \omega \quad , \quad x : \rho = \sin(\omega - \varphi) : \sin \omega$$

откуда:

$$y = \frac{\rho \sin \varphi}{\sin \omega} \quad , \quad x = \frac{\rho \sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega}$$

Эти формулы и служатъ для перехода отъ косоугольныхъ декартовыхъ координатъ къ полярнымъ, если начало координатъ есть полюсъ.

(Пр. 1. Преобразовать слѣдующія уравненія въ прямоугольныхъ координатахъ, въ полярныя:

$$x^2 + y^2 = 5ax \quad , \quad x^2 - y^2 = a^2$$

$$\text{Отв. } r = 5a \cos \varphi \quad , \quad r^2 \cos 2\varphi = a^2.$$

(Пр. 2. Преобразовать слѣдующія уравненія въ полярныхъ координатахъ, въ прямоугольныя:

$$r^2 \sin 2\varphi = 2a^2 \quad , \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad , \quad r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} \varphi = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Отв. } xy = a^2 \quad , \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad , \quad x^2 + y^2 = (2a - x)^2$$

ГЛАВА IV.

Прямая линія.

§ 38. Въ главѣ II § 12 мы вывели уравненіе прямой, основываясь на ея опредѣленіи; въ настоящей главѣ мы дадимъ этому уравненію различныя формы и изслѣдуемъ всѣ свойства прямой, какъ въ отдѣльности, такъ и въ связи съ системою прямыхъ на той-же плоскости.

Въ § 12 мы нашли, что уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , произвольно выбранныя на плоскости, есть:

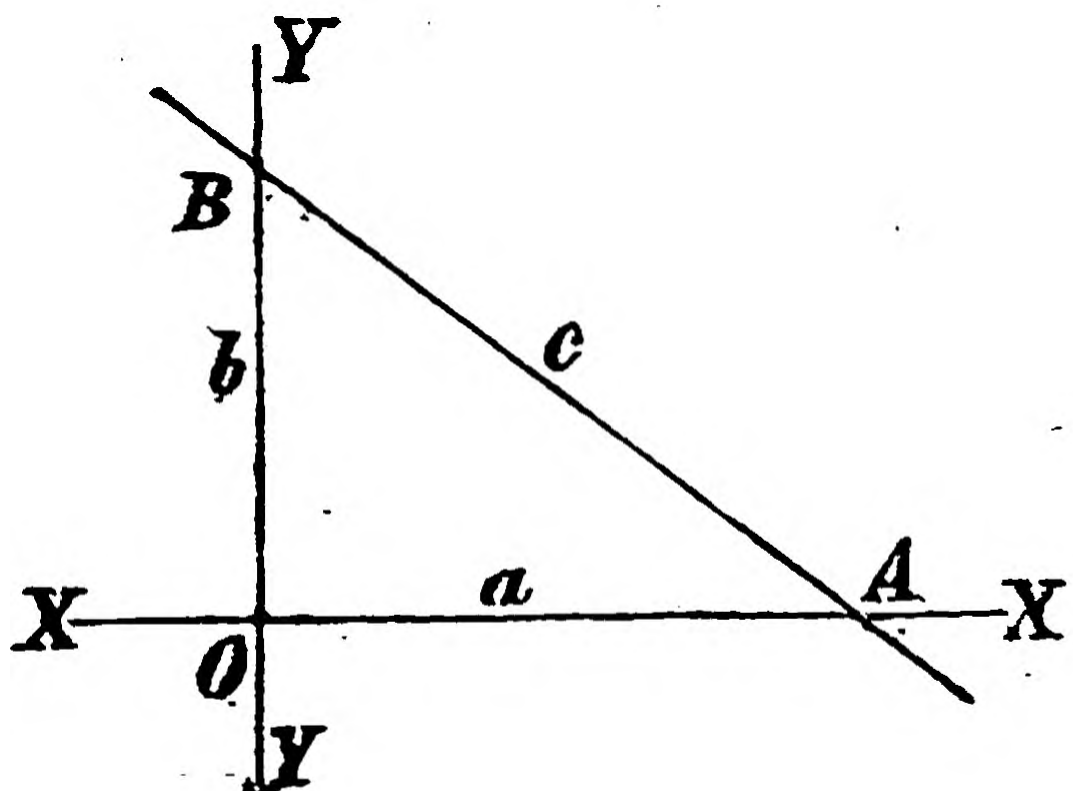
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{или} \quad y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) \quad (1)$$

или еще:

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

Замѣтимъ, что форма этого уравненія не зависитъ отъ наклоненія координатныхъ осей между собою.

Фиг. 41.



Одна изъ самыхъ замѣчательныхъ формъ уравненія прямой получится, если возьмемъ точки, опредѣляющія прямую, одну на пересѣченіи прямой съ осью X (фиг. 41), другую на пересѣченіи съ осью Y , слѣдовательно надобно положить:

$$x_1 = a, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = b$$

гдѣ a и b *отрѣзки*, которые прямая дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ. Подставляя эти величины въ уравненіе (1), найдемъ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (2)$$

Если положимъ:

$$a = -\frac{1}{\xi}, \quad b = -\frac{1}{\eta} \quad (3)$$

то предъидущее уравненіе сдѣлается:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0 \quad (4)$$

Это одна изъ самыхъ замѣчательныхъ формъ уравненія прямой. Она также не зависитъ отъ наклоненія осей.

Отрѣзки a и b опредѣляютъ положеніе прямой или-же ξ и η , связанные съ a и b уравненіями (3). Величины ξ и η называются *координатами* прямой, фиксирующія ея положеніе на плоскости, такъ точно, какъ координаты точки фиксируютъ ея положеніе.

Въ уравненіи (4) x и y называются *бѣгущими* или *скользящими* координатами, онѣ остаются неопредѣленными и должны удовлетворять только уравненію (4). Когда x и y удовлетворяютъ уравненію (4), точка, коей координаты суть x, y , скользитъ по прямой, фиксированной координатами ξ, η .

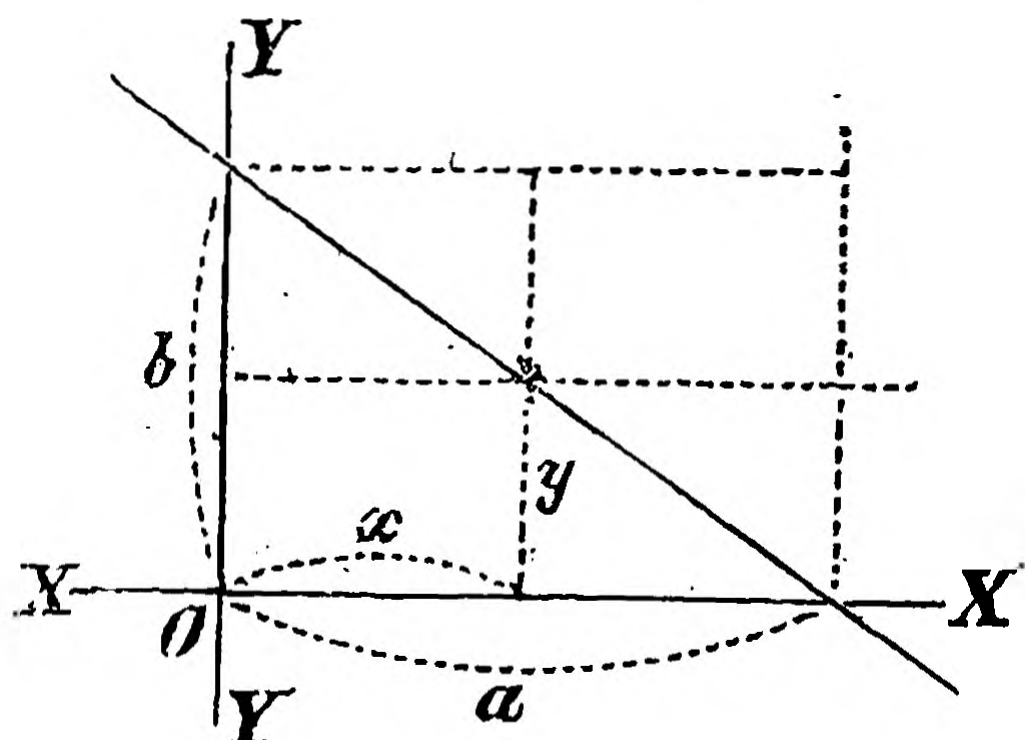
Форма уравненія (4) замѣчательна въ томъ отношеніи, что она симметрична, относительно координатъ ξ, η прямой, и координатъ x, y точки. (Ниже увидимъ важное значеніе этой симметріи.)

(При изученіи Аналитической геометріи необходимо выяснитъ геометрическое значеніе каждаго алгебраическаго выраженія или уравненія, безъ этого аналитическія формулы навсегда остаются только отвлеченными комбинаціями алгебраическихъ символовъ, которые теряютъ, такимъ образомъ,

конкретное представлѣніе. Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе (2), которое выражаетъ только то, что прямая проходитъ черезъ точки $(a, 0)$, $(0, b)$; но если мы его напишемъ въ формѣ:

$$bx + ay = ab$$

Фиг. 42.



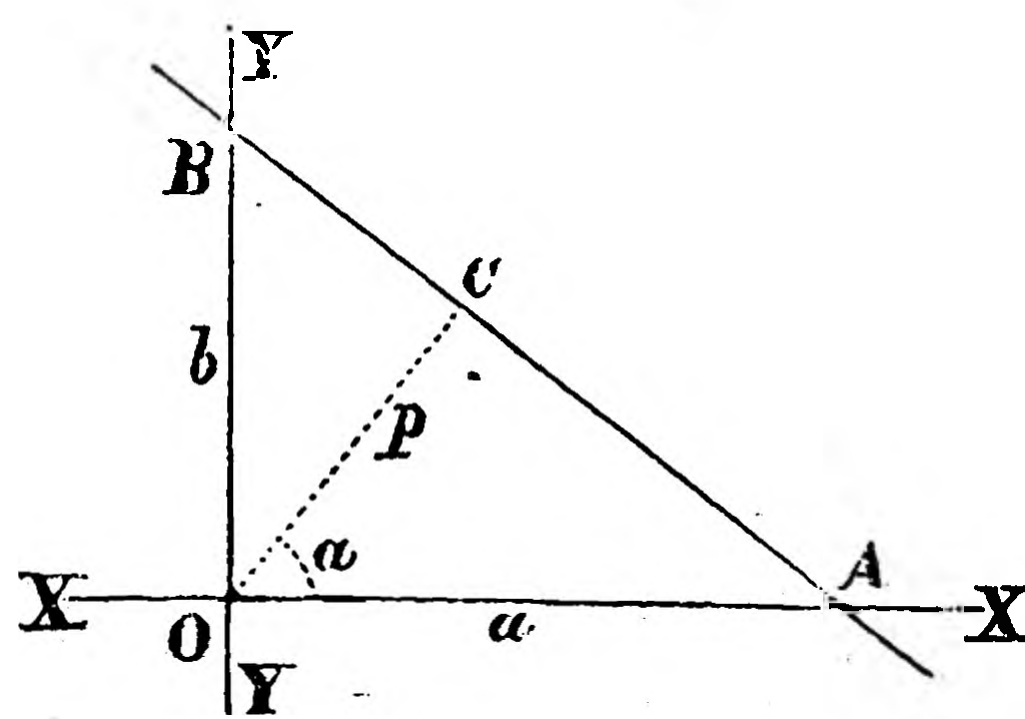
то видимъ, что площадь прямоугольника ab (фиг. 42), построеннаго на отрѣзкахъ a и b всегда равна суммѣ площадей прямоугольниковъ bx и ay , гдѣ бы точка (x, y) ни была взята на діагонали прямоугольника, т. е. на прямой (2) ¹⁾.

§ 39. Если уравненіе (2) помножимъ на перпендикуляръ p , опущенный изъ начала координатъ на прямую AB (фиг. 43), то получимъ:

$$\frac{p}{a}x + \frac{p}{b}y = p$$

Но $\frac{p}{a}$ есть \cos угла, который перпендикуляръ p составляетъ съ осью X ,

Фиг. 43.



а $\frac{p}{b}$ есть \sin того-же угла, слѣдовательно, означая черезъ α этотъ уголъ, найдемъ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (5)$$

Это уравненіе прямой, которой положеніе фиксируется координатами α и p . Эта форма называется *нормальной*—ниже увидимъ почему. Замѣтимъ, что:

$$OA = a = -\frac{1}{\xi}, \quad OB = b = -\frac{1}{\eta}, \quad OC = p, \quad \angle AOC = \alpha$$

§ 40. Мы видѣли въ § 12, (6), что уравненію прямой, проходящей черезъ точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , можно дать слѣдующую форму:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \operatorname{tg} \varphi$$

или:

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \varphi \quad (6)$$

Это есть уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку (x_1, y_1) и составляющей уголъ φ съ осью X . Точку (x_1, y_1) можно выбрать гдѣ угодно

¹⁾ См. Ващенко-Захарченко, *Элементарная геометрія*. Кіевъ, 1883, in-8, стр. 73, § 139.

на прямой. Возьмемъ точку пересѣченія прямой съ осью Y , координаты этой точки будутъ $(0, b)$; b есть отрѣзокъ, который прямая дѣлаетъ на оси Y . Полагая въ уравненіи (6) $x_1 = 0, y_1 = b$, найдемъ:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + b$$

или полагая $\operatorname{tg} \varphi = a$, уравненіе сдѣлается:

$$y = ax + b \quad (7)$$

Значеніе коэффиціента въ этомъ уравненіи объяснено выше. Уравненіе (6) можно написать еще въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{y - y_1}{\sin \varphi} = \frac{x - x_1}{\cos \varphi} \quad (8)$$

или, полагая:

$$\frac{y - y_1}{\sin \varphi} = \frac{x - x_1}{\cos \varphi} = r \quad (9)$$

найдемъ:

$$y = y_1 + r \cdot \sin \varphi, \quad x = x_1 + r \cdot \cos \varphi \quad (10)$$

гдѣ r есть разстояніе скользящей точки отъ данной точки (x_1, y_1) . Если прямая проходитъ черезъ начало координатъ, то въ уравненіе (7) отрѣзокъ $b = 0$, слѣдовательно:

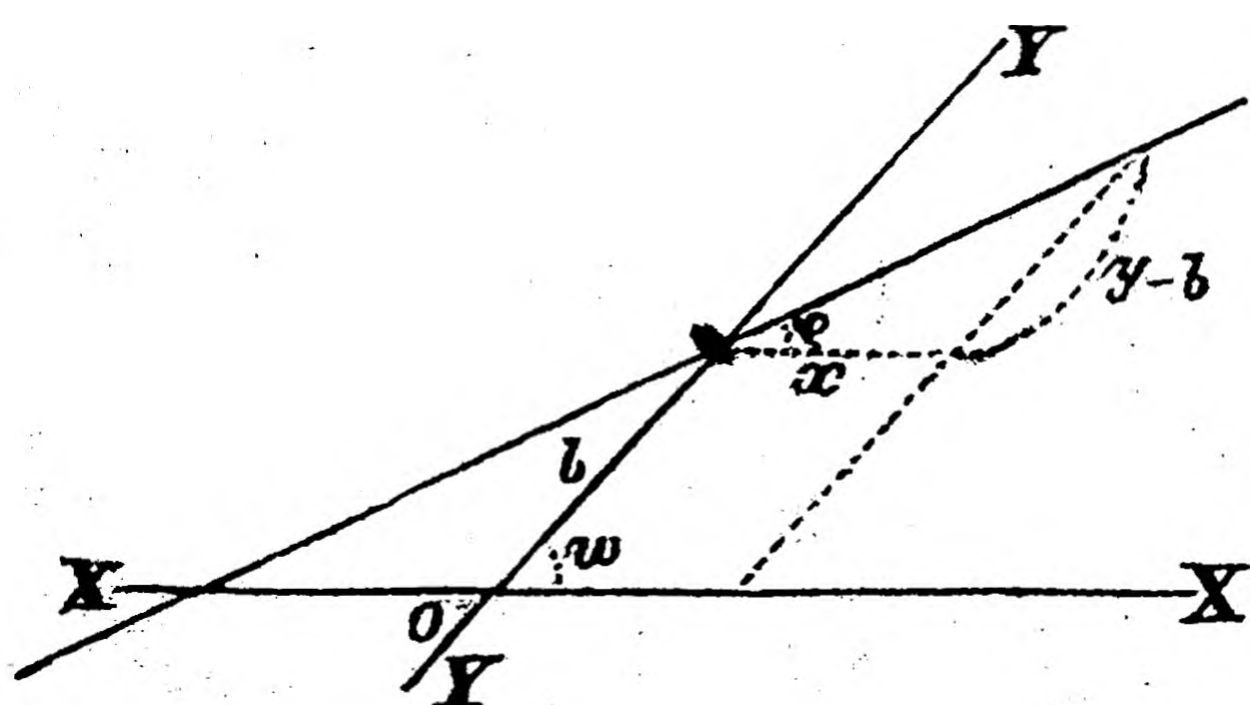
$$y = ax \quad (11)$$

будетъ уравненіе прямой, проходящей черезъ начало координатъ и составляющей съ осью X уголъ, коего тангенсъ равенъ числу a .

Если въ уравненіи:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Фиг. 44.



помѣстимъ точку (x_2, y_2) въ начало координатъ, т. е. положимъ $x_2 = 0, y_2 = 0$, то уравненіе сдѣлается:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1}{x_1} \quad \text{или} \quad y = \frac{y_1}{x_1} x \quad (12)$$

Если оси будутъ косоугольныя и уголъ между ними будетъ ω (фиг. 44), то значеніе коэффиціента a въ уравненіи:

$$y = ax + b \quad (13)$$

найдемъ, написавъ уравненіе (13) въ формѣ:

$$y - b = ax \quad \text{или} \quad \frac{y - b}{x} = a$$

или:

$$\frac{y - b}{x} = \frac{\sin \varphi}{\sin (\omega - \varphi)}$$

откуда:

$$a = \frac{\sin \varphi}{\sin (\omega - \varphi)} \quad (14)$$

§ 41. Мы исчерпали всѣ формы, которыя уравненіе прямой можетъ получать, выбирая извѣстнымъ образомъ величины (координаты), опредѣляющія положеніе прямой. Всѣ эти уравненія первой степени относительно x, y , откуда представляется самъ собою вопросъ: всякое-ли уравненіе первой степени, въ x и y , представляетъ прямую линію?

Мы сейчасъ покажемъ, что это такъ. Въ самомъ дѣлѣ, самая общая форма уравненія первой степени относительно x, y будетъ:

$$Ax + By + C = 0 \quad (15)$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \quad (16)$$

но это ничто иное, какъ уравненіе прямой въ формѣ (2) § 38, гдѣ:

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

откуда заключаемъ, что *каждое уравненіе первой степени относительно x и y представляетъ прямую линію.*

§ 42. Мы видѣли въ предъидущемъ параграфѣ, какъ прямая, данная въ самой общей формѣ:

$$Ax + By + C = 0 \quad (17)$$

приводится къ формѣ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

но чаще всего требуется уравненію (17) дать нормальную форму:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (18)$$

для этого помножимъ уравненіе (18) на неопредѣленный множитель λ , тогда получимъ:

$$\lambda x \cos \alpha + \lambda y \sin \alpha - \lambda p = 0$$

Если это уравненіе тождественно съ (17), то мы должны имѣть:

$$\lambda \cos \alpha = A \quad , \quad \lambda \sin \alpha = B \quad , \quad -\lambda p = C \quad (19)$$

откуда, возвышая въ квадратъ первыя два уравненія и складывая, найдемъ:

$$\lambda^2 = A^2 + B^2$$

или:

$$\lambda = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$$

Подставляя въ уравненія (19), получимъ:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad , \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad , \quad p = \frac{-C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (20)$$

Перпендикуляръ p , опущенный изъ начала координатъ, на прямую, мы будемъ всегда принимать за величину положительную, поэтому въ выраженіи:

$$p = \frac{-C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (21)$$

радикалу нужно давать такой знакъ, чтобы вторая часть была положительная. Этимъ условіемъ опредѣляется знакъ радикала. Если C будетъ количество положительное, то радикалу нужно дать знакъ $-$, а если C будетъ количество отрицательное, то радикалу надобно дать знакъ $+$. Опредѣливъ, такимъ образомъ, знакъ радикала, мы будемъ имѣть $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

Слѣдовательно если уравненіе (17) раздѣлимъ на $\sqrt{A^2 + B^2}$, то оно приметъ нормальную форму:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (22)$$

Замѣтимъ еще, что $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ выражаются только коэффициентами A и B и не зависятъ отъ C .

§ 43. Если въ уравненіи прямой:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (23)$$

измѣнимъ a и b на na и nb , то получимъ уравненіе:

$$\frac{x}{na} + \frac{y}{nb} = 1 \quad (24)$$

или:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = n$$

прямой, очевидно, параллельной прямой (23).

Если въ уравненіи:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad (25)$$

измѣнимъ p на p_1 , то прямая перенесется параллельно самой себѣ, такъ какъ ея наклоненіе, при такомъ замѣщеніи, неизмѣняется. Слѣдовательно прямая:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p_1$$

параллельна прямой (25).

Такъ какъ наклоненіе прямой, данной общимъ уравненіемъ:

$$Ax + By + C = 0$$

выражается только коэффициентами A и B , то съ измѣненіемъ C прямая переносится параллельно самой себѣ.

Наконецъ въ уравненіи:

$$y = ax + b$$

оставляя a , угловой коэффициентъ, безъ переменны, а измѣняя только b , мы будемъ переносить прямую параллельно самой себѣ.

§ 44. *Задача.* Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку (x_1, y_1) ?

Рѣшеніе. Возьмемъ уравненіе прямой въ самой общей формѣ:

$$Ax + By + C = 0 \quad (26)$$

Если эта прямая должна проходить черезъ точку (x_1, y_1) , то координаты x_1 и y_1 должны удовлетворять предыдущему уравненію, т. е. мы должны имѣть:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

откуда:

$$C = -Ax_1 - By_1$$

вставляя въ уравненіе (26), найдемъ:

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) = 0 \quad (27)$$

Это и есть уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (x_1, y_1) .

Легко видѣть, что если уравненіе прямой будетъ дано въ формахъ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad (28)$$

$$y = ax + b$$

то уравненія прямой, проходящей черезъ точку (x_1, y_1) , будутъ:

$$\frac{x-x_1}{a} + \frac{y-y_1}{b} = 0$$

$$(x-x_1) \cos \alpha + (y-y_1) \sin \alpha = 0 \quad (29)$$

$$y-y_1 = a(x-x_1)$$

Если въ уравненіяхъ (29) будемъ измѣнять коэффициенты a, b , уголъ α и угловой коэффициентъ a , то прямая выраженная этими уравненіями, будетъ вращаться около точки (x_1, y_1) , принимая всѣ возможные направленія.

§ 45. *Задача.* Дано уравненіе прямой въ нормальной формѣ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad (30)$$

и точка (x_1, y_1) внѣ этой прямой; найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки (x_1, y_1) на данную прямую?

Рѣшеніе. Черезъ данную точку (x_1, y_1) проведемъ прямую параллельно прямой (30), уравненіе ея будетъ (§ 43):

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p_1 \quad (31)$$

если p_1 будетъ разстояніе, проведенной прямой отъ начала координатъ. Если означимъ черезъ δ искомый перпендикуляръ, то легко видѣть, что:

$$\delta = p_1 - p$$

Но точка (x_1, y_1) находится на прямой (31), слѣдовательно:

$$p_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha$$

откуда:

$$\delta = p_1 - p = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p \quad (32)$$

Откуда видимъ, что если прямая дана въ нормальной формѣ и точка внѣ ея, то результатъ подстановленія координатъ x_1 и y_1 въ данное уравненіе, дастъ длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x_1, y_1) на прямую.

Если данная точка лежитъ съ той стороны прямой, съ которой лежитъ и начало координатъ, то длину перпендикуляра принимаютъ за величину положительную, въ противномъ случаѣ за величину отрицательную. Слѣдовательно мы должны писать:

$$\delta = + (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p) \quad (33)$$

въ первомъ случаѣ, и:

$$\delta = - (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p) \quad (34)$$

во второмъ.

Если уравненіе прямой будетъ въ общей формѣ:

$$Ax + By + C = 0$$

то надобно его привести въ нормальную форму, какъ это было уже показано (§ 42, 22):

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

подставляя координаты x_1 и y_1 въ это уравненіе, найдемъ:

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \delta \quad (35)$$

знакъ радикала надобно такъ выбрать, чтобы перпендикуляръ δ имѣлъ величину положительную или отрицательную, смотря по положенію точки относительно прямой, какъ сказано выше.

Пр. 1. Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на прямую:

$$3x + 4y + 20 = 0$$

Отв. $\delta = 4$.

Пр. 2. Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (2, 3) на прямую:

$$2x + y - 4 = 0$$

Отв. $\frac{-3}{\sqrt{5}}$, точка находится съ противоположной стороны начала координатъ.

Пр. 3. Найти длину перпендикуляра изъ начала на прямую:

$$a(x - a) + b(y - b) = 0$$

Отв. $\sqrt{a^2 + b^2}$

§ 46. *Задача.* Найти координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Рѣшеніе. Координаты точки пересѣченія должны удовлетворять обоимъ уравненіямъ, слѣдовательно должно изъ этихъ уравненій опредѣлить x и y :

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad (37)$$

или:

$$\frac{x}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y}{A_2C_1 - A_1C_2} = \frac{1}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad (38)$$

Выраженія (37) и будутъ координаты точки пересѣченія прямыхъ. Если въ уравненіяхъ (36) коэффициенты находятся въ такой зависимости, что знаменатель у x и y :

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \quad (39)$$

то $x = \infty$ и $y = \infty$, если при этомъ числители остаются величинами конечными; слѣдовательно въ этомъ случаѣ прямая (36) встрѣчаются на бесконечности, т. е. онѣ параллельны.

Условіе параллельности (39) можно написать въ формѣ:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (40)$$

т. е. коэффициенты у x и y въ уравненіяхъ (36) пропорціональны.

Пр. Прямая:

$$3x + 5y + 1 = 0 \quad 6x + 10y + 7 = 0$$

параллельны, такъ какъ:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$$

Если при условіи (39) случилось бы, что и одинъ изъ числителей, напримѣръ:

$$B_1C_2 - B_2C_1 = 0$$

то и другой числитель, какъ извѣстно, будетъ также равенъ нулю и координаты примутъ неопредѣленную форму:

$$x = \frac{0}{0} \quad , \quad y = \frac{0}{0}$$

слѣдовательно двѣ данныя прямая тождественны.

Задача. Найти координаты точки пересѣченія прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , съ прямою, данною уравненіемъ:

$$Ax + By + C = 0 \quad (41)$$

Очевидно, это предъидущая задача въ другой формѣ.

Рѣшеніе. Прямая, данная предъидущимъ уравненіемъ, встрѣчая прямую, соединяющую точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , дѣлитъ разстояніе между этими точками въ нѣкоторомъ отношеніи (внутренне или внѣшне); если это неизвѣстное отношеніе означимъ черезъ λ , то координаты искомой точки пересѣченія будутъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

эти координаты должны удовлетворять уравненію (41), слѣдовательно имѣемъ:

$$A \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + C = 0$$

откуда:

$$\lambda = - \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} \quad (42)$$

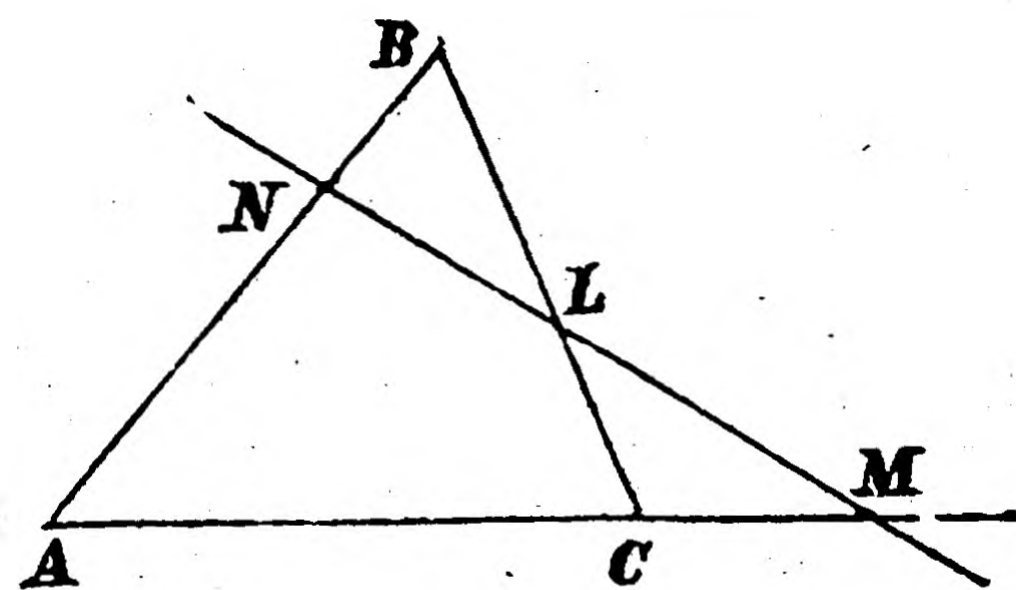
Если это выраженіе напишемъ въ формѣ:

$$\lambda = - \frac{\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}}{\frac{Ax_2 + By_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \quad (43)$$

то легко видѣть, что числитель и знаменатель этой дроби суть перпендикуляры, опущенные изъ точекъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) на прямую (41). Знакъ — передъ дробью произошелъ отъ того, что если искомая точка пересѣченія находится между точками (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , то упомянутые перпендикуляры имѣютъ противные знаки, вслѣдствіи чего λ будетъ величина положительная, какъ и слѣдуетъ, для точекъ, лежащихъ между точекъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) .

§ 47. Съ помощью выраженія для λ (42) можно легко доказать слѣдующее свойство треугольника:

Если прямая линія (фиг. 45) пересѣкаетъ стороны BC , CA , AB треугольника ABC въ точкахъ N , L , M , то мы будемъ имѣть:



Фиг. 45.

$$\frac{BL \cdot CM \cdot AN}{CL \cdot AM \cdot BN} = -1 \quad (44)$$

Пусть координаты вершинъ треугольника ABC будутъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , то мы будемъ имѣть (42):

$$\frac{BL}{CL} = -\frac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_3 + By_3 + C}$$

также:

$$\frac{CM}{AM} = -\frac{Ax_3 + By_3 + C}{Ax_1 + By_1 + C}$$

и наконецъ:

$$\frac{AN}{BN} = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}$$

перемножая эти выраженія, найдемъ зависимость (44).

Если въ предыдущей задачѣ, уравненіе (41) прямой будетъ дано въ формѣ:

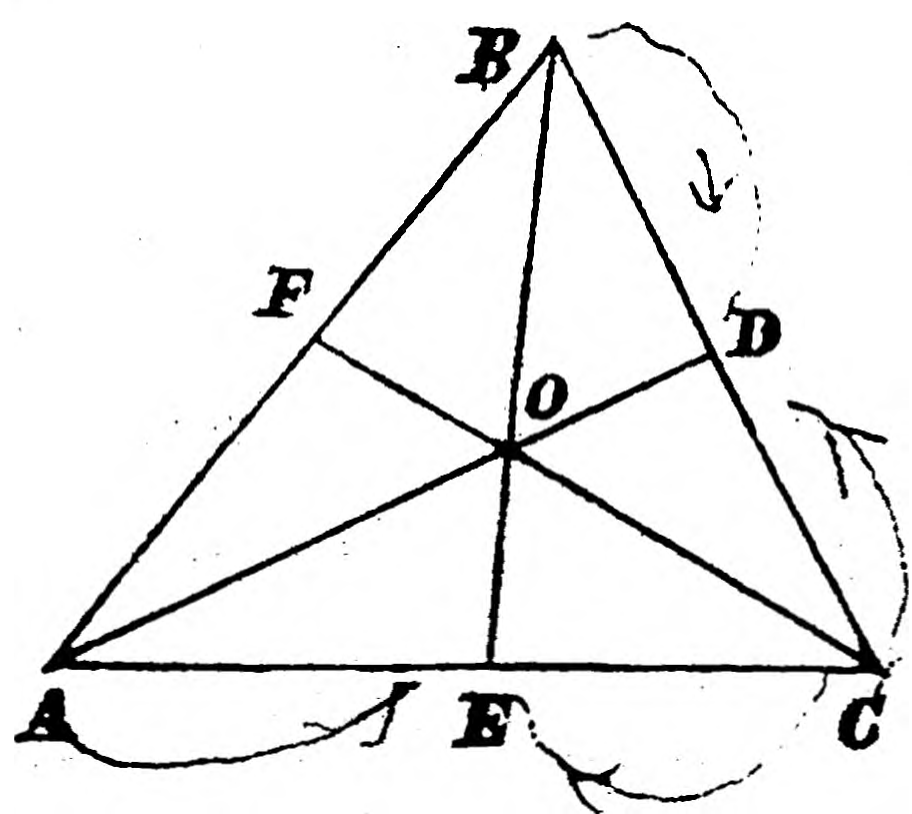
$$(y_3 - y_4)x - (x_3 - x_4)y + x_3y_4 - x_4y_3 = 0$$

проходящей черезъ данныя двѣ точки (x_3, y_3) , (x_4, y_4) , то λ будетъ:

$$\lambda = -\frac{(y_3 - y_4)x_1 - (x_3 - x_4)y_1 + x_3y_4 - x_4y_3}{(y_3 - y_4)x_2 - (x_3 - x_4)y_2 + x_3y_4 - x_4y_3} \quad (45)$$

§ 48. На основаніи этого послѣдняго выраженія для λ , можно показать еще слѣдующее свойство треугольника:

Если, какую-нибудь, точку O (фиг. 46), взятую на плоскости, соединимъ прямыми линіями съ вершинами треугольника ABC (фиг. 46), то эти прямыя встрѣчаютъ противоположныя стороны BC , CA и AB въ точкахъ D , E , F , дѣлящія стороны на отрѣзки, которые удовлетворяютъ всегда слѣдующему условію:



$$\frac{BD \cdot CE \cdot AF}{CD \cdot AE \cdot BF} = +1 \quad (46)$$

Если координаты взятой точки будутъ (x_4, y_4) , а вершинъ треугольника (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , то мы будемъ имѣть (45):

$$\frac{BD}{CD} = \frac{x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2)}{x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)}$$

$$\frac{CE}{AE} = \frac{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)}{x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2)}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)}{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)}$$

перемножая эти выраженія, найдемъ зависимость (46).

§ 49. *Задача.* Даны уравнения двухъ прямыхъ:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

найти уголъ между ними?

Рѣшеніе. Уголъ между двумя прямыми линиями равенъ углу между перпендикулярами, опущенными изъ начала координатъ на прямая. Если означимъ черезъ α_1 и α_2 углы, которые перпендикуляры, опущенные изъ начала на прямая, составляютъ съ осью X , то будемъ имѣть (§ 42, 20):

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, & \cos \alpha_2 &= \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \\ \sin \alpha_1 &= \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, & \sin \alpha_2 &= \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \end{aligned}$$

Изъ этихъ выраженій мы имѣемъ:

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (48)$$

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

откуда:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} \quad (49)$$

Если данныя прямая параллельны, то $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ и мы будемъ имѣть:

$$A_2B_1 - A_1B_2 = 0$$

Если прямая перпендикулярны, то $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, слѣдовательно мы имѣемъ $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, откуда:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad (50)$$

Это условіе перпендикулярности прямыхъ (47), т. е. если сумма произведеній коэффициентовъ у x и y равна нулю, то прямая перпендикулярны; условіе (50) можно написать еще въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \quad (51)$$

Если уравненія прямыхъ даны въ формѣ:

$$y = a_1x + b_1 \quad , \quad y = a_2x + b_2 \quad (52)$$

то условіе перпендикулярности будетъ:

$$a_1a_2 + 1 = 0 \quad (53)$$

Слѣдовательно, уравненіе прямой перпендикулярной къ прямой:

$$y = a_1x + b_1$$

будетъ:

$$y = -\frac{1}{a_1}x + b_1$$

если обѣ прямая проходятъ черезъ точку $(0, b_1)$; если онѣ проходятъ черезъ, какую-нибудь точку (x_1, y_1) , то ихъ уравненія будутъ въ общей формѣ:

$$y - y_1 = a_1(x - x_1) \quad (54)$$

$$y - y_1 = -\frac{1}{a_1}(x - x_1)$$

Если уравненіе прямой дано въ общей формѣ:

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) = 0 \quad (55)$$

то уравненіе прямой, проходящей черезъ ту же точку (x_1, y_1) и перпендикулярной (55) будетъ:

$$B_1(x - x_1) - A_1(y - y_1) = 0 \quad (56)$$

Если прямая дана въ общей формѣ:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (57)$$

то уравненіе прямой перпендикулярной къ ней и проходящей черезъ точку (x_1, y_1) внѣ ея будетъ (56), гдѣ точка (x_1, y_1) не лежитъ на прямой (57):

§ 50. *Задача.* Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку (x_1, y_1) и составляющей съ данной прямой данный уголъ?

Рѣшеніе. Пусть данная прямая будетъ:

$$y = ax + b \quad (58)$$

данная точка (x_1, y_1) , данный уголъ φ .

Если означимъ tg угла, который искомая прямая составляетъ съ осью X , черезъ a_1 , то ея уравненіе будетъ (§ 44, 29):

$$y - y_1 = a_1(x - x_1) \quad (59)$$

уголъ между этими прямыми будетъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a - a_1}{1 + aa_1} \quad (60)$$

откуда tg искомага угла a_1 будетъ:

$$a_1 = \frac{a - \operatorname{tg} \varphi}{1 + a \operatorname{tg} \varphi} \quad (61)$$

Пр. 1. Найти уравненія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ (2, 1), (3, -2), (-4, -1) треугольника, на противоположныя вершинамъ стороны?

Отв. Уравненія сторонъ (§ 38, 1):

$$x + 7y + 11 = 0, \quad 3y - x = 1, \quad 3x + y = 7$$

Уравненія перпендикуляровъ:

$$7x - y = 13, \quad 3x + y = 7, \quad 3y - x = 1$$

Пр. 2. Найти уравненія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ срединъ сторонъ того-же треугольника?

Отв. Координаты срединъ будутъ (§ 4, пр. 3):

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right); \quad (-1, 0); \quad \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

а перпендикуляры:

$$7x - y + 2 = 0, \quad 3x + y + 3 = 0, \quad 3y - x + 4 = 0$$

эти перпендикуляры пересѣкаются въ одной точкѣ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Пр. 3. Найти уравненія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) треугольника на противоположныя стороны?

Отв.

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y + (x_1 x_3 + y_1 y_3) - (x_1 x_2 + y_1 y_2) = 0$$

$$(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y + (x_1 x_2 + y_1 y_2) - (x_2 x_3 + y_2 y_3) = 0$$

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + (x_2 x_3 + y_2 y_3) - (x_1 x_3 + y_1 y_3) = 0$$

эти три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 4. Найти уравненія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ срединъ сторонъ того-же треугольника?

Отв.

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2) + \frac{1}{2}(y_2^2 - y_3^2) = 0$$

$$(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y + \frac{1}{2}(x_3^2 - x_1^2) + \frac{1}{2}(y_3^2 - y_1^2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) = 0$$

эти три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 5. Взявъ за оси основаніе треугольника и перпендикуляръ изъ вершины на основаніе, найти уравненіе двухъ остальныхъ перпендикуляровъ и точку ихъ пересѣченія?

Отв. Координаты вершинъ треугольника въ этомъ предположеніи будутъ $(0, y_1)$, $(x_1, 0)$, $(-x_2, 0)$, а искомыя уравненія:

$$x = 0 \quad ; \quad x_2(x - x_1) + y_1y = 0 \quad ; \quad x_1(x + x_2) - y_1y = 0$$

точка пересѣченія будетъ: $\left(0, \frac{x_1x_2}{y_1}\right)$.

§ 51. *Задача.* Найти уравненіе прямой равнодѣлящей уголъ между прямыми:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0 \tag{62}$$

$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$$

Рѣшеніе. Если вспомнимъ, что перпендикуляры, опущенные изъ каждой точки прямой, равнодѣлящей уголъ между прямыми (62) на эти прямыя, равны, то уравненіе равнодѣлящей, очевидно будетъ:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 \tag{63}$$

Такъ какъ скользящая точка (x, y) находится на равнодѣлящей, то обѣ части уравненія (63) и выражаютъ длину перпендикуляровъ на прямую (62).

Такъ какъ прямыя (62) заключаютъ еще и другой уголъ, дополненіе перваго до двухъ прямыхъ, то очевидно, что уравненіе равнодѣлящей другой уголъ будетъ:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = - (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2) \tag{64}$$

Если уравненія даны въ общей формѣ:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{65}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

то уравненія обѣихъ равнодѣлящихъ углы между этими прямыми, очевидно, будутъ:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{66}$$

Если начало координатъ дано, т. е. показано въ какомъ изъ угловъ между данными прямыми оно находится, то легко, по принятому условію (§ 42) относительно знака перпендикуляровъ, опущенныхъ на прямую, опредѣлить, какой знакъ надобно принять для равнодѣлящей тотъ уголъ, въ которомъ лежитъ начало и какой знакъ для угла дополнительнаго.

Пр. 1. Дать равнодѣлящей между прямыми нормальную форму:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

Отв.

$$x \cos \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\pi}{2} \right\} + y \sin \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\pi}{2} \right\} = \frac{p_1 - p_2}{2 \sin \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$x \cos \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) + y \sin \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) = - \frac{p_1 + p_2}{2 \cos \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Пр. 2. Если начало координатъ лежитъ внутри треугольника, коего стороны суть:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$$

$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$$

$$x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3 = 0$$

то равнодѣлящія внутренніе углы треугольника будутъ:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 - (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2) = 0$$

$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 - (x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3) = 0$$

$$x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3 - (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1) = 0$$

показать, что онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ?

Пр. 3. Найти уравненія равнодѣлящихъ углы между прямыми:

$$3x + 4y - 9 = 0 ; 12x + 5y - 3 = 0$$

Отв.

$$7x - 9y + 34 = 0 ; 9x + 7y - 12 = 0$$

§ 52. Задача. Найти условіе пересѣченія трехъ прямыхъ въ одной точкѣ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія прямыхъ будутъ:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \tag{67}$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

Если эти прямая пересѣкаются въ одной точкѣ, то координаты этой точки должны удовлетворять всѣмъ тремъ уравненіямъ, что влечетъ за собой условіе:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{68}$$

§ 53. Задача. Найти условіе, что три точки (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) лежатъ на одной прямой?

Рѣшеніе. Пусть уравненіе прямой будетъ:

$$Ax + By + C = 0 \quad (69)$$

такъ какъ всѣ три точки лежатъ на этой прямой, то мы должны имѣть:

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0 \end{aligned} \quad (70)$$

$$Ax_3 + By_3 + C = 0$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (71)$$

Если это условіе сравнимъ съ выраженіемъ § 5 для площади треугольника, то увидимъ, что оно съ нимъ тождественно. Если три данныя точки лежатъ на одной прямой линіи, то площадь треугольника $\Delta = 0$.

§ 54. *Задача.* Найти площадь треугольника, коего стороны суть:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (72)$$

Рѣшеніе. Съ помощью этихъ уравненій опредѣлимъ координаты вершинъ треугольника; пусть (x_1, y_1) будетъ точка пересѣченія двухъ послѣднихъ прямыхъ; (x_2, y_2) —первой и третьей; (x_3, y_3) —первой и второй. Опредѣливъ эти координаты, надобно вставить ихъ въ опредѣлитель § 5.

Координаты эти будутъ:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2} ; & y_1 &= \frac{c_2a_3 - c_3a_2}{a_2b_3 - a_3b_2} \\ x_2 &= \frac{b_1c_3 - b_3c_1}{a_1b_3 - a_3b_1} ; & y_2 &= \frac{c_1a_3 - c_3a_1}{a_1b_3 - a_3b_1} \\ x_3 &= \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} ; & y_3 &= \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned} \quad (73)$$

Числители и знаменатели этихъ выражений суть миноры опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (74)$$

и:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_1}{C_1} & ; & \quad y_1 = \frac{B_1}{C_1} \\ x_2 &= \frac{A_2}{C_2} & ; & \quad y_2 = \frac{B_2}{C_2} \\ x_3 &= \frac{A_3}{C_3} & ; & \quad y_3 = \frac{B_3}{C_3} \end{aligned} \quad (75)$$

Слѣдовательно площадь искомага треугольника будетъ:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{A_1}{C_1} & , & \frac{B_1}{C_1} & , & 1 \\ \frac{A_2}{C_2} & , & \frac{B_2}{C_2} & , & 1 \\ \frac{A_3}{C_3} & , & \frac{B_3}{C_3} & , & 1 \end{vmatrix} \quad (76)$$

или:

$$\Delta = \frac{1}{2C_1C_2C_3} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2C_1C_2C_3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 \quad (77)$$

Ниже мы еще встрѣтимся съ этимъ послѣднимъ выраженіемъ для площади треугольника.

§ 55. *Задача.* Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ?

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (78)$$

Рѣшеніе. Если какое-нибудь изъ двухъ предъидущихъ уравненій помножимъ на неопредѣленный множитель λ и сложимъ ихъ, то получимъ уравненіе:

$$a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad (79)$$

также прямой, которая проходит через точку пересѣченія данныхъ прямыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, координаты точки пересѣченія прямыхъ (78), очевидно, обратятъ въ нуль и уравненіе (79), независимо отъ произвольнаго множителя λ . Давая всѣ возможные значенія λ отъ $-\infty$ до $+\infty$, мы получимъ безчисленное множество прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія данныхъ (78). Между всѣми этими находятся и данныя (78), именно когда $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$.

Пр. 1. Найти уравненіе прямой, соединяющей начало координатъ съ точкой пересѣченія прямыхъ:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (80)$$

Умножимъ первое на c_2 , а второе на c_1 и вычтемъ, получимъ уравненіе:

$$x(a_1c_2 - a_2c_1) + (b_1c_2 - b_2c_1)y = 0 \quad (81)$$

Эта прямая проходитъ черезъ начало координатъ, такъ какъ уравненіе (81) удовлетворяется координатами $x = 0$, $y = 0$ и по предъидущему она проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ (80).

Пр. 2. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (82)$$

и параллельной оси X ?

Отв. $(b_1a_2 - b_2a_1)y + c_1a_2 - c_2a_1 = 0$

Пр. 3. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (83)$$

и черезъ точку (x_1, y_1) ?

Отв. Если прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ (83), то ея уравненіе будетъ:

$$a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad (84)$$

Но эта прямая, по условію, должна проходить и черезъ точку (x_1, y_1) , слѣдовательно:

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 + \lambda(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0 \quad (85)$$

Откуда:

$$\lambda = -\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}$$

вставляя въ уравненіе (84), найдемъ уравненіе искомой прямой:

$$(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2)(a_1x + b_1y + c_1) - (a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad (86)$$

Пр. 4. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (2, 3) и черезъ пересѣченіе прямыхъ:

$$2x + 3y + 1 = 0 \quad , \quad 3x - 4y = 5$$

Отв.

$$11(2x + 3y + 1) + 14(3x - 4y - 5) = 0 \quad \text{или} \quad 64x - 23y = 59$$

Пр. 5. Мы видѣли (§ 44, 29), что:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

есть уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (x_1, y_1) . Если a разсматривать, какъ неопредѣленный множитель, то это есть уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$y - y_1 = 0 \quad , \quad x - x_1 = 0$$

т. е. черезъ точку, данную координатами $y = y_1, x = x_1$.

§ 56. Условіе, данное (§ 52, 68) для пересѣченія трехъ прямыхъ въ одной точкѣ, часто можно замѣнить слѣдующимъ правиломъ:

Три прямая пересѣкаются въ одной точкѣ, если ихъ уравненія, будучи помножены на прилично выбранные множители и алгебраически сложены, тождественно равны нулю, т. е. если:

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) + \nu(a_3x + b_3y + c_3) \equiv 0$$

какія бы ни были x и y .

Въ самомъ дѣлѣ, координаты точки пересѣченія первыхъ двухъ обращаютъ въ нуль первые два члена предъидущаго тождества, но въ силу тождества тѣже координаты должны обращать въ нуль и третій членъ,

Пр. 1. Три прямая, соединяющія вершины $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ угловъ треугольника со срединами противулежащихъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Отв. Легко видѣть, что уравненія равнодѣлящихъ суть:

$$(y_2 + y_3 - 2y_1)x - (x_2 + x_3 - 2x_1)y + (x_2y_1 - x_1y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) = 0$$

$$(y_3 + y_1 - 2y_2)x - (x_3 + x_1 - 2x_2)y + (x_3y_2 - x_2y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

$$(y_1 + y_2 - 2y_3)x - (x_1 + x_2 - 2x_3)y + (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0$$

Такъ какъ эти три уравненія будучи сложены даютъ тождественно нуль, то онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ, коей координаты суть:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Пр. 2. Если уравненія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ треугольника $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ на противулежащія стороны (§ 50, пр. 3), сложимъ, то получимъ въ результатъ тождество—нуль, слѣдовательно они пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 3. Приложить тоже къ примѣру 4, § 50.

Пр. 4. Показать тоже, взявъ за координатныя оси стороны треугольника, коихъ длина есть a и b ?

Отв.

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad , \quad \frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 1 \quad , \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

§ 57. *Мнимая прямая.* Если въ количественный матеріалъ введемъ и числа составныя, то переменныя или скользящія координаты могутъ получить и составныя формы:

$$x = a_1 + a_2i \quad , \quad y = b_1 + b_2i \quad (87)$$

соотвѣтствующая этимъ координатамъ точка есть *мнимая*. Двѣ мнимыя точки называются *сопряженными*, когда онѣ отличаются только знакомъ передъ i , таковы:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + a_2i \quad , \quad y_1 = b_1 + b_2i \\ x_2 &= a_1 - a_2i \quad , \quad y_2 = b_1 - b_2i \end{aligned} \quad (88)$$

Точка равнодѣлящая разстояніе между сопряженными точками дѣйствительная, такъ какъ ея координаты суть (§ 4, пр. 3):

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad \frac{y_1 + y_2}{2}$$

или:

$$x = a_1 \quad , \quad y = b_1 \quad (89)$$

Прямая, проходящая черезъ двѣ сопряженныя точки, дѣйствительна. Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіи:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (90)$$

подставимъ выраженія для (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (88), то найдемъ:

$$\frac{y - b_1 - b_2i}{x - a_1 - a_2i} = \frac{b_2i}{a_2i} = \frac{b_2}{a_2}$$

или:

$$y - b_1 = \frac{b_2}{a_2} (x - a_1) \quad (91)$$

а это уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (a_1, b_1) и составляющей съ осью X уголъ, коего tg равенъ $\frac{b_2}{a_2}$.

Мы выше видѣли, что точка (a_1, b_1) лежитъ на срединѣ между точками $(a_1 + a_2i, b_1 + b_2i)$, $(a_1 - a_2i, b_1 - b_2i)$, слѣдовательно прямая (91) проходить черезъ эту точку.

§ 58. Уравненіе прямой:

$$Ax + By + C = 0 \quad (92)$$

гдѣ A, B, C суть количества дѣйствительныя, удовлетворяется дѣйствительными координатами точекъ, лежащихъ на этой прямой, но оно удовлетворяется еще безчисленнымъ множествомъ точекъ мнимыхъ, поэтому можно сказать, что прямая (92) содержитъ еще безчисленное множество мнимыхъ точекъ.

Пусть $a_1 + a_2i, b_1 + b_2i$, будутъ координаты мнимой точки, удовлетворяющія уравненію (92), то мы будемъ имѣть:

$$A(a_1 + a_2i) + B(b_1 + b_2i) + C = 0$$

откуда:

$$Aa_1 + Bb_1 + C = 0 \quad , \quad Aa_2 + Bb_2 = 0 \quad (93)$$

числа a_1 и b_1, a_2 и b_2 суть координаты двухъ дѣйствительныхъ точекъ, изъ коихъ одна лежитъ на прямой (92), а другая на прямой:

$$Aa_2 + Bb_2 = 0$$

Съ помощью уравненій (93) можно опредѣлить отношенія $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$, которыя входятъ въ уравненіе прямой, проходящей черезъ данную мнимую точку $(a_1 + a_2i, b_1 + b_2i)$.

Уравненія (93) даютъ только одну систему величинъ для этихъ отношеній, слѣдовательно есть только одна прямая, проходящая черезъ данную мнимую точку.

§ 59. Самое общее уравненіе мнимой прямой есть:

$$(A_1 + A_2i)x + (B_1 + B_2i)y + C_1 + C_2i = 0 \quad (94)$$

Это уравненіе можно написать въ формѣ:

$$A_1x + B_1y + C_1 + i(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (95)$$

изъ этой формы видно, что прямая (94) проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ (§ 55, 79):

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (96)$$

Слѣдовательно, каждая мнимая прямая, проходитъ только черезъ одну дѣйствительную точку на плоскости.

Уравненія двухъ сопряженныхъ прямыхъ суть:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2i)x + (B_1 + B_2i)y + C_1 + C_2i &= 0 \\ (A_1 - A_2i)x + (B_1 - B_2i)y + C_1 - C_2i &= 0 \end{aligned} \quad (97)$$

Эти уравненія можно написать въ формѣ:

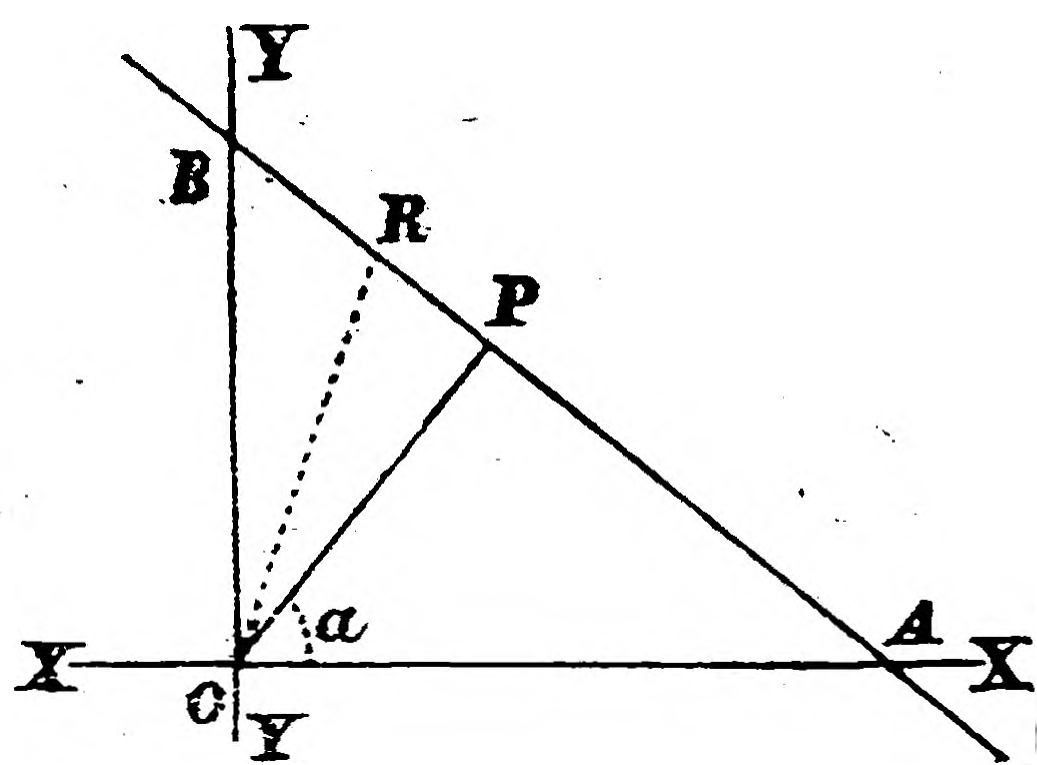
$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 + i(A_2x + B_2y + C_2) &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1 - i(A_2x + B_2y + C_2) &= 0 \end{aligned} \quad (98)$$

Откуда видно, что обѣ эти прямыя проходятъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ (96). Слѣдовательно двѣ сопряженныя прямыя пересѣкаются въ дѣйствительной точкѣ.

Ни мнимыя точки, ни мнимыя прямыя, не могутъ быть построены геометрически, т. е. не могутъ быть видимы для глаза, тѣмъ не менѣе онѣ ведутъ къ аналитическимъ комбинаціямъ, которымъ давая геометрическій смыслъ дѣйствительныхъ значеній, получаютъ весьма замѣчательные выводы и обобщенія.

§ 60. Уравненіе прямой въ полярныхъ координатахъ. Пусть AB (фиг. 47)

Фиг. 47.



будетъ прямая, отнесенная къ прямоугольнымъ осямъ OX и OY . Изъ начала O проведемъ OP перпендикулярно AB и возьмемъ OP за начало угловъ, а O за полюсь.

Если R есть, какая-нибудь точка на прямой AB , то $OR = \rho$, $\angle POR = \varphi$. Изъ $\triangle POR$ мы имѣемъ:

$$OR \cos POR = OP$$

откуда:

$$\rho \cos \varphi = p \quad (99)$$

если $OP = p$.

Если бы за начало угловъ была взята ось X , то уравненіе прямой, если $\angle XOR = \varphi$, будетъ:

$$\rho \cos (\varphi - \alpha) = p \quad (100)$$

гдѣ α есть уголъ XOR .

Уравненіе (100) можно получить преобразованіемъ уравненія:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

Извѣстно, что (§ 37):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

подставляя, найдемъ:

$$\rho (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = p$$

откуда:

$$\rho \cos (\varphi - \alpha) = p$$

Пр. 1. Преобразовать уравнение:

$$\rho = 2a \sec \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right)$$

въ прямоугольныя координаты?

Пр. 2. Найти полярныя координаты точки пересѣченія прямыхъ:

$$\rho \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = 2a \quad , \quad \rho \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) = a$$

и уголъ между ними?

Отв.

$$\rho = 2a \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \text{уголъ есть } \frac{\pi}{3}$$

Пр. 3. Найти полярное уравненіе прямой, проходящей черезъ точки (ρ_1, φ_1) , (ρ_2, φ_2) ?

Отв. $\rho_1 \rho_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \rho \rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi) + \rho \rho_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = 0$

Пр. 4. Найти условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ:

$$\rho \cos(\varphi - \varphi_1) = p_1 \quad , \quad \rho \cos(\varphi - \varphi_2) = p_2$$

Отв. $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

ГЛАВА V.

Двойственность координатъ.

Прямая и точка.

§ 61. Если обратимъ вниманіе на геометрическое опредѣленіе прямой и точки, то увидимъ, что онѣ въ отвлеченномъ смыслѣ тождественны, то есть по опредѣленію, между прямою линіею и точкою, нѣтъ разницы. Отличаются же онѣ только конкретнымъ геометрическимъ представленіемъ. Изъ этой отвлеченной тождественности вытекаетъ методъ извѣстный въ аналитической геометріи, подъ именемъ *двойственности координатъ*.

Вотъ свойства прямой и точки, дающія начало двойственности.

1. Прямая линія вполне опредѣляется двумя точками.

2. Если двѣ точки одной прямой совмѣщаются съ двумя точками другой прямой, то обѣ прямыя совмѣщаются.

3. Двѣ прямыя могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ.

1. Точка вполне опредѣляется двумя прямыми линіями.

2. Если двѣ прямыя одной точки совмѣщаются съ двумя прямыми другой точки, то обѣ точки совмѣщаются.

3. Двѣ точки могутъ лежать только на одной прямой.

Изъ предъидущаго видимъ, что между прямою и точкою разница заключается въ словахъ: *прямая и точка, точка и прямая*.

§ 62. Методъ Декарта состоитъ въ томъ, что положеніе точки на плоскости опредѣляется относительно двухъ прямыхъ, проведенныхъ произвольно на плоскости; прямыя эти называются *координатами*, а точка ихъ пересѣченія называется *началомъ координатъ*.

Въ силу двойственнаго смысла опредѣленія прямой или точки, выраженнаго въ предъидущемъ параграфѣ, можно представить другую координатную систему, въ которой вмѣсто двухъ прямыхъ берутъ *две точки*, которыя и будутъ соотвѣтствовать *абсциссѣ* и *ординатѣ* Декарта, а прямая, соединяющая двѣ взятыя точки будетъ соотвѣтствовать *началу* координатъ. Въ этой системѣ всякая прямая такъ опредѣляется относительно *координатныхъ точекъ* и прямой соединяющей ихъ, какъ точка опредѣляется относительно декартовыхъ координатъ и точки ихъ пересѣченія—*начала*.

Въ силу такого условія, положеніе прямой на плоскости будетъ опредѣляться двумя числами (координатами) или двумя уравненіями, а точка однимъ уравненіемъ первой степени между координатами прямой. Въ декартовой системѣ точка, коей координаты удовлетворяютъ уравненію первой степени, *скользитъ* по прямой, которой алгебраическое представленіе и есть это уравненіе, а въ настоящей системѣ, прямая, коей координаты удовлетворяютъ уравненію первой степени, *вращается* около точки, коей алгебраическое представленіе и есть это уравненіе. Въ этой системѣ всякое уравненіе, какой бы ни было степени, между двумя координатами прямой, будетъ опредѣлять безчисленное множество положеній прямой на плоскости, послѣдовательное пересѣченіе которыхъ образуетъ геометрическое мѣсто или кривую, которой движущаяся прямая касается во всѣхъ своихъ положеніяхъ.

Слѣдовательно, разъ геометрическое мѣсто есть непрерывный рядъ точекъ, удовлетворяющихъ извѣстному уравненію, а другой разъ геометрическое мѣсто или кривая есть непрерывный рядъ прямыхъ, удовлетворяющихъ извѣстному условію; на примѣръ: окружность есть геометрическое мѣсто точекъ или прямыхъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ данной точки—центра.

Мы не станемъ развивать эту систему координатъ, такъ какъ въ такомъ приѣмѣ мы потеряемъ въ единствѣ координатной идеи, а мысль *двойственности* мы разовьемъ изъ декартовой системы.

Мы видѣли, что въ декартовой системѣ координатъ положеніе точки на плоскости опредѣляется двумя числами, координатами, или что тоже,

двумя уравненіями, а геометрическое мѣсто точекъ, однимъ уравненіемъ.

Геометрическое мѣсто точекъ, лежащихъ на прямой представляется алгебраически однимъ уравненіемъ первой степени между координатами точекъ.

Въ уравненіе прямой входятъ величины во первыхъ, опредѣляющія положеніе прямой относительно координатныхъ осей, а во вторыхъ величины, опредѣляющія положеніе, каждой точки на прямой; первыя изъ этихъ величинъ для одной и той-же прямой *постоянны*, а вторыя должны удовлетворять уравненію прямой, слѣдовательно величины *перемѣнныя*—онѣ называются *бѣгущими* или *скользящими* координатами точекъ на прямой.

Величины, входящія въ уравненіе прямой и опредѣляющія ея положеніе суть координаты двухъ данныхъ точекъ. Эти двѣ точки, выбранныя извѣстнымъ образомъ, даютъ различныя формы уравненію прямой. Самое удобное положеніе точекъ для нашей цѣли, есть то, въ которомъ одна изъ точекъ взята на оси X ($a, 0$), а другая по оси Y ($0, b$). Уравненіе прямой при такомъ выборѣ точекъ, какъ мы видѣли, принимаетъ форму:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (1)$$

или:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0 \quad (2)$$

полагая:

$$\xi = -\frac{1}{a}, \quad \eta = -\frac{1}{b} \quad (3)$$

форма уравненія (2), какъ видно, замѣчательна въ томъ отношеніи, что она симметрична относительно x и y и ξ и η . Эта симметрія и слѣдствія, изъ нея вытекающія, и были причиною выбора этой формы уравненія.

Въ уравненіи:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

ξ, η суть координаты прямой, опредѣляющія ея положеніе, а x, y координаты точекъ на прямой. Первыя величины—постоянныя, а вторыя величины—перемѣнныя.

§ 63. Возьмемъ на прямой:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0 \quad (4)$$

опредѣленную точку (x_1, y_1). Координаты этой точки должны удовлетворять уравненію (4), слѣдовательно:

$$\xi x_1 + \eta y_1 + 1 = 0 \quad (5)$$

Если въ этомъ уравненіи, оставивъ координаты x_1, y_1 постоянными, будемъ измѣнять ξ, η такъ, чтобы онѣ удовлетворяли уравненію (5), то мы получимъ безчисленное множество прямыхъ, которыя всѣ будутъ проходить черезъ точку (x_1, y_1) , т. е. будутъ вращаться около точки (x_1, y_1) .

Слѣдовательно, если въ уравненіи:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0 \quad (6)$$

ξ, η будутъ величины постоянныя, а x, y переменныя, то точка, коей координаты удовлетворяютъ предъидущему уравненію, будетъ скользить по прямой, коей положеніе опредѣляется постоянными величинами ξ, η . Если въ томъ же уравненіи x, y будутъ величины постоянныя, а ξ, η переменныя, то прямая, коей координаты удовлетворяютъ тому-же уравненію, будетъ вращаться около точки, коей положеніе опредѣляется величинами x, y .

Поэтому уравненіе:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

называютъ уравненіемъ точки (x_1, y_1) , около которой вращаются всѣ прямыя, коихъ координаты ξ, η удовлетворяютъ предъидущему уравненію.

Изъ этого вытекаетъ двойной взглядъ на уравненіе первой степени:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

Оно есть уравненіе *прямой*, если ξ, η суть величины постоянныя, а x, y переменныя;—оно есть уравненіе *точки*, если ξ, η суть величины переменныя, а x, y постоянныя.

Это начало *двойственности*. Оно вытекаетъ изъ тождественности опредѣленій точки и прямой. Опредѣленіе точки переходитъ въ опредѣленіе прямой, а опредѣленіе прямой переходитъ въ опредѣленіе точки, замѣщеніемъ слова: *точка—прямою*, а *прямая—точкою*.

Смысль уравненія (6) можно выразить, говоря: что оно есть совмѣстное представленіе прямой и точки, т. е. представленіе положенія, въ которомъ точка находится на прямой, а прямая проходитъ черезъ точку.

Такъ какъ геометрическія теоремы относятся или къ системѣ точекъ или къ системѣ прямыхъ, или къ тому и другому, то изъ предъидущаго видно, что точка въ геометріи прямой играетъ такую-же роль, какую прямая въ геометріи точки.

Итакъ въ аналитической геометріи есть два основные элемента для изслѣдованія—точка и прямая, обѣ даются и координатами и уравненіемъ,

объ въ отвлеченномъ представленіи, т. е. въ алгебраическомъ, тождественны, а различаются только конкретнымъ представленіемъ.

§ 64. Перенесемъ теперь теоремы, по смыслу двойственности, найденныя въ теоріи прямой, на теоремы въ теоріи точки.

1. Уравненіе первой степени относительно координатъ x, y представляетъ прямую линію.

1. Уравненіе первой степени относительно координатъ ξ, η представляетъ точку.

Въ уравненіи:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

постоянные коэффиціенты суть вмѣстѣ и координаты, представляемаго уравненіемъ элемента, т. е., если предъидущее уравненіе представляетъ прямую, то коэффиціенты ξ, η суть ея координаты, а если оно представляетъ точку, то постоянные коэффиціенты x, y суть ея координаты.

2. Если положеніе прямой дано координатами ξ_1, η_1 то ея уравненіе:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

3. Если прямая дана уравненіемъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

то ея координаты суть:

$$\xi_1, \eta_1$$

4. Если уравненіе прямой дано въ самой общей формѣ:

$$Ax + By + C = 0$$

то ея координаты суть:

$$\xi = \frac{A}{C}, \quad \eta = \frac{B}{C}$$

2. Если положеніе точки дано координатами x_1, y_1 то ея уравненіе:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

3. Если точка дана уравненіемъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

то ея координаты суть:

$$x_1, y_1$$

4. Если уравненіе точки дано въ самой общей формѣ:

$$A\xi + B\eta + C = 0$$

то ея координаты суть:

$$x = \frac{A}{C}, \quad y = \frac{B}{C}$$

Эта взаимность не имѣла-бы мѣста, если мы за координаты прямой взяли-бы отрѣзки, которые она дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ.

5. Уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

есть:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

5. Уравненіе точки находящейся на пересѣченіи двухъ данныхъ прямыхъ:

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$$

есть:

$$\frac{\xi - \xi_1}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\eta - \eta_1}{\eta_1 - \eta_2}$$

Изъ предъидущихъ примѣровъ видимъ, что дѣйствія и результаты изъ нихъ вытекающія, въ обоихъ случаяхъ однѣ и тѣже, только значеніе постоянныхъ и переменныхъ величинъ различно.

§ 65. Но тамъ, гдѣ входятъ отрѣзки и углы такого преобразованія сдѣлать непосредственно нельзя, а можно сдѣлать перенося задачу на прямую, коей координаты входятъ въ задачу. Возьмемъ для примѣра задачу, уже рѣшенную для прямой (§ 45).

Задача. Найти разстояніе точки, данной уравненіемъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0 \quad (7)$$

отъ прямой данной координатами (ξ_1, η_1) ?

Рѣшеніе. Мы видѣли (§ 64, 2), что уравненіе прямой, данной координатами (ξ_1, η_1) есть:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

а въ нормальной формѣ:

$$\frac{\xi_1 x + \eta_1 y + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = 0$$

Но координаты точки, данной уравненіемъ (7) суть (x_1, y_1) , слѣдовательно, если искомое разстояніе означимъ черезъ r , то будемъ имѣть:

$$\frac{\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = r \quad (8)$$

Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ координаты ξ_1, η_1 переменными, удовлетворяющими постоянно этому уравненію, то прямая, перемѣщаясь, будетъ находится постоянно на разстояніи r отъ точки, коей уравненіе будетъ слѣдующее:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

а координаты (x_1, y_1) .

Слѣдовательно:

$$\frac{x_1 \xi + y_1 \eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = r$$

или:

$$(x_1 \xi + y_1 \eta + 1)^2 = r^2 (\xi^2 + \eta^2) \quad (9)$$

будетъ уравненіе круга, тогда какъ уравненіе круга въ декартовыхъ координатахъ есть:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

гдѣ x_1, y_1 суть координаты центра.

Изъ этихъ выраженій видимъ, что кругъ, какъ въ одной, такъ и въ другой системѣ координатъ, относительно переменныхъ—второго порядка и второго класса.

§ 66. *Задача.* Найти уголъ между двумя прямыми, данными координатами (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) ?

Рѣшеніе. Уравненія прямыхъ, коихъ координатъ (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) будутъ (§ 64, 1):

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0 \quad , \quad \xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0 \quad (10)$$

слѣдовательно уголъ между этими прямыми будетъ (§ 49, 48):

$$\sin \varphi = \frac{\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \quad , \quad \cos \varphi = \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \quad (11)$$

Изъ этихъ выраженій найдемъ условіе параллельности прямыхъ:

$$\sin \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0 \quad (12)$$

а условіе перпендикулярности:

$$\cos \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 = 0 \quad (13)$$

§ 67. Въ § 43 мы видѣли, что если въ уравненіи прямой, оставляя коэффиціенты при x, y (переменныхъ) постоянными, будемъ измѣнять только постоянный членъ, то прямая будетъ переноситься, на плоскости, параллельно самой себѣ. Что сдѣлается съ точкою, если въ ея уравненіи сдѣлаемъ тоже, т. е. оставимъ коэффиціенты при ξ, η неизмѣнными, а будемъ измѣнять постоянный членъ?

Пусть уравненіе точки будетъ дано въ самой общей формѣ:

$$A\xi + B\eta + C = 0 \quad (14)$$

Координаты точки будутъ (§ 64, 4):

$$x = \frac{A}{C} \quad , \quad y = \frac{B}{C}$$

Если постоянное C будемъ измѣнять, то координаты точки, измѣняясь, будутъ удовлетворять уравненіе:

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \quad (15)$$

Слѣдовательно точка, данная уравненіемъ, будетъ скользить по прямой (15), проходящей черезъ начало координатъ.

§ 68. *Задача 1.* Даны уравненія двухъ прямыхъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

$$\xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0$$

Найти координаты точки ихъ пересѣченія?

Координаты точки пересѣченія должны удовлетворять обѣимъ уравненіямъ, слѣдовательно нужно опредѣлить x и y изъ данныхъ уравненій.

Поставимъ еще въ параллель слѣдующія двѣ задачи относительно прямыхъ и точекъ.

Задача 2. Найти условіе пересѣченія трехъ прямыхъ, данныхъ уравненіями, въ одной точкѣ?

Три прямая:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

$$\xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0$$

$$\xi_3 x + \eta_3 y + 1 = 0$$

Если эти три прямая пересѣкаются въ одной точкѣ, то координаты x, y этой точки должны удовлетворять всѣ три предъидущія уравненія, а для этого необходимо условіе между коэффициентами:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Задача 3. Найти условіе, при которомъ три точки, данныя координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, лежатъ на одной прямой?

Если три точки:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

лежатъ на одной прямой:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

Задача 1. Даны уравненія двухъ точекъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

$$x_2 \xi + y_2 \eta + 1 = 0$$

Найти координаты прямой, проходящей черезъ эти точки?

Координаты прямой, проходящей черезъ данныя точки должны удовлетворять обѣимъ уравненіямъ, слѣдовательно, нужно опредѣлить ξ и η изъ данныхъ уравненій.

Задача 2. Найти условіе, при которомъ три точки, данныя уравненіями, лежатъ на одной прямой?

Три точки:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

$$x_2 \xi + y_2 \eta + 1 = 0$$

$$x_3 \xi + y_3 \eta + 1 = 0$$

Если эти три точки лежатъ на одной прямой, то координаты ξ, η этой прямой должны удовлетворять всѣ три предъидущія уравненія, а для этого необходимо условіе между коэффициентами:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Задача 3. Найти условіе, при которомъ три прямая, данныя координатами $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$, пересѣкаются въ одной точкѣ?

Если три прямая:

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$$

пересѣкаются въ одной точкѣ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

то мы имѣемъ:

$$\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + 1 = 0$$

$$\xi_1 x_2 + \eta_1 y_2 + 1 = 0$$

$$\xi_1 x_3 + \eta_1 y_3 + 1 = 0$$

откуда имѣемъ искомое условіе:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

то мы имѣемъ:

$$x_1 \xi_1 + y_1 \eta_1 + 1 = 0$$

$$x_1 \xi_2 + y_1 \eta_2 + 1 = 0$$

$$x_1 \xi_3 + y_1 \eta_3 + 1 = 0$$

откуда имѣемъ искомое условіе:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Если сравнимъ эти послѣднія условія съ предъидущими, то увидимъ, что то, которое въ одномъ случаѣ стоитъ въ правомъ столбцѣ, переходитъ, въ другомъ случаѣ, въ лѣвый и обратно.

§ 69. *Задача.* Найти уравненія точекъ пересѣченія трехъ прямыхъ:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \tag{16}$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

Рѣшеніе. Если черезъ ξ и η означимъ координаты, какой-нибудь, прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ данныхъ послѣдними двумя уравненіями (16), то ея уравненіе будетъ:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0 \tag{17}$$

Координаты точки пересѣченія трехъ прямыхъ:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \tag{18}$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

должны удовлетворять этимъ тремъ уравненіямъ, слѣдовательно (§ 52) между коэффиціентами этихъ уравненій должно существовать условіе:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

Если ξ , η координаты прямой (17), измѣняясь, будутъ всегда удовлетворять предъидущему уравненію, то прямая (17) будетъ всегда проходить

черезъ пересѣченія послѣднихъ двухъ прямыхъ (16); слѣдовательно (19) будетъ уравненіе этой точки. Если изъ коэффициентовъ уравненій (16) составимъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = R \quad (20)$$

то легко видѣть, что коэффициенты при ξ и η въ уравненіи суть миноры опредѣлителя R , соотвѣтствующіе элементамъ a_1, b_1, c_1 . Если эти миноры означимъ черезъ A_1, B_1, C_1 , то опредѣлитель (19), или уравненіе искомой точки, можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1 = 0 \quad (21)$$

Изъ сказаннаго легко видѣть, что:

$$\begin{aligned} A_2\xi + B_2\eta + C_2 &= 0 \\ A_3\xi + B_3\eta + C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

будутъ уравненія точекъ пересѣченія прямыхъ (16): первой и третьей, первой и второй. A_2, B_2, C_2, A_3, B_3 и C_3 суть миноры опредѣлителя R (20), соотвѣтствующіе a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 и c_3 .

§ 70. *Задача.* Найти уравненія трехъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точки:

$$\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + c_1 &= 0 \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2 &= 0 \\ a_3\xi + b_3\eta + c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Рѣшеніе. Разсужденіе подобное предъидущему, даетъ намъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

гдѣ A, B, C суть миноры опредѣлителя R (§ 69).

Легко видѣть, что если бы были даны уравненія (21), (22) или

(17) въ минорахъ, то подобный пріемъ, какой изложенъ выше, приведетъ къ уравненіямъ (23) и уравненіямъ (18). Замѣтимъ при этомъ, что:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 \quad (25)$$

§ 71. Задачу § 54 можно рѣшить теперь гораздо проще. Если стороны искомага треугольника даны уравненіями:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

то уравненія его вершинъ будутъ (§ 69, 21, 22):

$$\begin{aligned} A_1\xi + B_1\eta + C_1 &= 0 \\ A_2\xi + B_2\eta + C_2 &= 0 \\ A_3\xi + B_3\eta + C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Слѣдовательно координаты вершинъ будутъ:

$$\left(\frac{A_1}{C_1}, \frac{B_1}{C_1}\right), \left(\frac{A_2}{C_2}, \frac{B_2}{C_2}\right), \left(\frac{A_3}{C_3}, \frac{B_3}{C_3}\right) \quad (28)$$

откуда площадь треугольника, коего вершины суть (27), будетъ:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{A_1}{C_1} & \frac{B_1}{C_1} & 1 \\ \frac{A_2}{C_2} & \frac{B_2}{C_2} & 1 \\ \frac{A_3}{C_3} & \frac{B_3}{C_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2C_1C_2C_3} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2C_1C_2C_3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

§ 72. Найти площадь треугольника, коего вершины даны уравненіями:

$$\begin{aligned} x_1\xi + y_1\eta + 1 &= 0 \\ x_2\xi + y_2\eta + 1 &= 0 \\ x_3\xi + y_3\eta + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Если эти уравненія представляютъ вершины треугольника, то координаты

этихъ вершинъ будутъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) . Слѣдовательно треугольникъ будетъ (§ 5):

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Если уравненія вершинъ даны въ самой общей формѣ:

$$a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0$$

$$a_2\xi + b_2\eta + c_2 = 0$$

$$a_3\xi + b_3\eta + c_3 = 0$$

то координаты этихъ вершинъ будутъ:

$$\left(\frac{a_1}{c_1}, \frac{b_1}{c_1}\right), \left(\frac{a_2}{c_2}, \frac{b_2}{c_2}\right), \left(\frac{a_3}{c_3}, \frac{b_3}{c_3}\right)$$

слѣдовательно площадь треугольника будетъ:

$$\Delta = \frac{1}{2c_1c_2c_3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ГЛАВА VI.

Прямая и точка.

§ 73. Въ уравненіи прямой:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0 \quad (1)$$

неподвижный элементъ есть сама прямая, данная координатами (ξ_1, η_1) , а подвижный элементъ есть скользящая точка; координаты x, y этой точки должны удовлетворять уравненію (1). Слѣдовательно элементъ постоянный въ уравненіи (1) есть (ξ_1, η_1) , а переменный x, y .

Въ уравненіи точки:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0 \quad (2)$$

неподвижный элементъ есть точка, данная координатами (x_1, y_1) , а под-

вижный элементъ есть прямая, постоянно, проходящая черезъ точку (x_1, y_1) и коей координаты ξ, η должны удовлетворять уравненію (2).

Слѣдовательно уравненія:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

представляютъ неподвижные элементы, первое прямую, а второе точку.

Изъ двухъ неподвижныхъ элементовъ, принадлежащихъ одной системѣ, можно построить одинъ неподвижный элементъ, принадлежащій другой системѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

(3)

$$\xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0$$

будутъ уравненія двухъ прямыхъ. Если одно изъ этихъ уравненій, напр. второе, помножимъ на неопредѣленный параметръ λ и сложимъ съ первымъ, то получимъ уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ (3) (§ 55):

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 + \lambda (\xi_2 x + \eta_2 y + 1) = 0$$

(4)

или:

$$\frac{\xi_1 + \lambda \xi_2}{1 + \lambda} x + \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda} y + 1 = 0$$

(5)

координаты этой прямой суть:

$$\xi = \frac{\xi_1 + \lambda \xi_2}{1 + \lambda}, \quad \eta = \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda}$$

(6)

Съ измѣненіемъ параметра λ , прямая, выраженная уравненіемъ (6), вращается около точки пересѣченія прямыхъ (3), имѣя всегда своими координатами выраженія (6). Это будетъ подвижный элементъ, принадлежащій второй системѣ. Если между выраженіями (6) исключимъ параметръ λ , то найдемъ уравненіе:

$$\begin{vmatrix} \xi - \xi_1 & , & \eta - \eta_1 \\ \xi_1 - \xi_2 & , & \eta_1 - \eta_2 \end{vmatrix} = 0$$

или:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

Это уравнение точки или неподвижный элемент второй системы.

§ 74. Если все то, что мы сказали въ предыдущемъ параграфѣ относительно двухъ прямыхъ, перенесемъ на двѣ точки, коихъ уравненія суть:

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 = 0 \quad , \quad x_2\xi + y_2\eta + 1 = 0 \quad (8)$$

то найдемъ, что:

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 + \lambda(x_2\xi + y_2\eta + 1) = 0 \quad (9)$$

или:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \xi + \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \eta + 1 = 0 \quad (10)$$

есть уравнение точки, лежащей на прямой соединяющей точки (8). Координаты этой точки суть:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (11)$$

Измѣняя параметръ λ , точка (9, 10) будетъ двигаться по прямой, имѣя всегда своими координатами выраженія (11).

Уравненія (9) или (10) будутъ представлять неподвижный элементъ второй системы, а выраженія (11) подвижный элементъ первой системы.

Если между уравненіями (11) исключимъ параметръ λ , то найдемъ уравнение прямой, проходящей черезъ точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 0$$

или:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

какъ это уже видѣли выше.

Уравнения:

$$x = \frac{x_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

дают самое общее представление прямой, как основание ряда точек.

Уравнения:

$$\xi = \frac{\xi_1 + \lambda \xi_2}{1 + \lambda}, \quad \eta = \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda}$$

дают самое общее представление точки, как центр связки прямых.

Итакъ, разъ прямая или точка дается однимъ уравненіемъ, другой разъ онѣ даются, каждая, двумя уравненіями, съ переменнымъ параметромъ, исключеніе котораго ведетъ къ уравненію прямой или точки.

§ 75. Разсмотримъ теперь геометрическое значеніе переменнаго параметра λ , какъ въ уравненіи прямой, такъ и въ уравненіи точки.

Въ § 4 мы видѣли, что въ выраженіяхъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (12)$$

$\lambda = \frac{m}{n}$, если $\frac{m}{n}$ есть отношеніе, въ которомъ точка (x, y) дѣлитъ разстояніе между точками (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Если означимъ черезъ s и r разстоянія точки (x, y) отъ точекъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , то $\frac{m}{n} = \frac{r}{s} = \lambda$. Слѣдовательно въ уравненіи:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 + \lambda (x_2 \xi + y_2 \eta + 1) = 0 \quad (13)$$

λ есть отношеніе разстояній точки, выраженной предыдущимъ уравненіемъ отъ точекъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) черезъ которыя эта прямая проходитъ.

Если уравненіе точки будетъ дано въ самой общей формѣ:

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 + \mu (A_2 \xi + B_2 \eta + C_2) = 0 \quad (14)$$

то, очевидно, что отношеніе λ , въ которомъ точка (14) дѣлитъ разстояніе между точками:

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 = 0 \quad A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 = 0$$

будетъ:

$$\lambda = \frac{C_2}{C_1} \mu \quad (15)$$

§ 76. Уравненіе:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 + \lambda (\xi_2 x + \eta_2 y + 1) = 0 \quad (16)$$

представляет прямую, проходящую через точку пересѣченія прямыхъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0 \quad \xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0 \quad (17)$$

Эти уравненія, написанныя въ нормальной формѣ, будутъ:

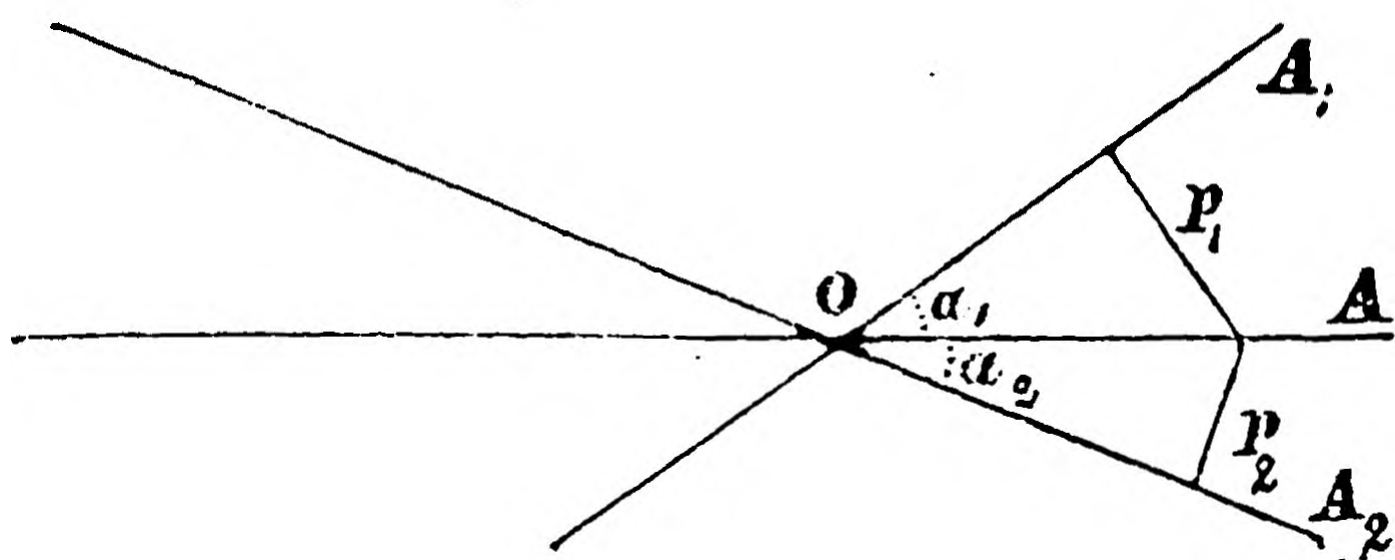
$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} \left(\frac{\xi_1 x + \eta_1 y + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} \right) = 0 \quad (18)$$

$$\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \left(\frac{\xi_2 x + \eta_2 y + 1}{\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \right) = 0$$

Выраженія, заключенныя въ скобкахъ, для точекъ лежащихъ внѣ прямыхъ, будутъ имѣть числовое значеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ на прямую. Если для такихъ точекъ означимъ перпендикуляры черезъ p_1 , на первую прямую, а черезъ p_2 на вторую, то будемъ имѣть:

$$\frac{\xi_1 x + \eta_1 y + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = p_1, \quad \frac{\xi_2 x + \eta_2 y + 1}{\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} = p_2$$

Фиг. 48.



Пусть прямая (17) будутъ OA_1 и OA_2 (фиг. 48), то прямая (16) будетъ OA ; пусть углы $\angle OAA_1 = \alpha_1$, $\angle OAA_2 = \alpha_2$.

Такъ какъ въ уравненіи (16), точки лежащія на этой прямой относительно прямыхъ (17) будутъ внѣ, то это уравненіе

можно написать въ формѣ:

$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} \cdot p_1 + \lambda \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \cdot p_2 = 0 \quad (19)$$

откуда:

$$\lambda = - \frac{p_1 \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}{p_2 \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \quad (20)$$

Но очевидно:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \quad (21)$$

слѣдовательно:

$$\lambda = - \frac{\sin \alpha_1 \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}{\sin \alpha_2 \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \quad (22)$$

Если уравненія (17) будутъ даны въ нормальной формѣ, то есть:

$$x \cos \beta_1 + y \sin \beta_1 - q_1 = 0, \quad x \cos \beta_2 + y \sin \beta_2 - q_2 = 0$$

то въ уравненіи:

$$x \cos \beta_1 + y \sin \beta_1 - q_1 + \lambda (x \cos \beta_2 + y \sin \beta_2 - q_2) = 0 \quad (23)$$

коэффициентъ:

$$\lambda = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \quad (24)$$

Наконецъ, если уравненія прямыхъ (17) даны въ самой общей формѣ:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (25)$$

то въ уравненіи:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \mu (A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (26)$$

коэффициентъ μ , очевидно, будетъ:

$$\mu = \lambda \frac{C_1}{C_2} \quad (27)$$

Изъ всего сказаннаго выше видимъ, что если уравненія двухъ прямыхъ, или двухъ точекъ, даны въ нормальной формѣ:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0 \quad , \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0 \quad (28)$$

$$\frac{x_1 \xi + y_1 \eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0 \quad , \quad \frac{x_2 \xi + y_2 \eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0$$

то въ уравненіи прямой, проходящей черезъ точку ихъ пересѣченія, или въ уравненіи точки, лежащей на прямой, соединяющей эти точки:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 + \lambda (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{x_1 \xi + y_1 \eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + \lambda \left(\frac{x_2 \xi + y_2 \eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) = 0$$

коэффициентъ λ , въ первомъ случаѣ, будетъ представлять отношеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ каждой точки прямой (29) на прямая (28), а во второмъ λ будетъ отношеніе разстояній точки (29) отъ точекъ (28) или отношеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ (28) на всѣ прямая, проходящія черезъ точку (29).

ГЛАВА VII.

Сокращенный способъ.

Прямая.

§ 77. Если въ уравненіи прямой или точки, написанныхъ въ нормальной формѣ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (1)$$

$$\frac{x\xi + y\eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0 \quad (2)$$

вставимъ координаты точки, лежащей внѣ прямой или координаты прямой не проходящей черезъ точку, то мы видѣли въ § 45, что числовыя значенія, полученныя отъ такого подстановленія, будутъ выражать длину перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ данной координатами точки на прямую, данную уравненіемъ, или изъ данной уравненіемъ точки на прямую, данную координатами. Слѣдовательно, если означимъ черезъ x_1, y_1 координаты точки внѣ прямой (1), то:

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - \underline{p_1} = A$$

будетъ длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x_1, y_1) на прямую (1). Если ξ_1, η_1 будутъ координаты прямой внѣ точки (2), то:

$$\frac{x\xi_1 + y\eta_1 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = A$$

будетъ длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (2) на прямую (ξ_1, η_1) .

Если точка (x_1, y_1) находится на прямой (1) или прямая (ξ_1, η_1) проходитъ черезъ точку (2), то длина перпендикуляра A равна нулю. На основаніе такого свойства, прямую (1) и точку (2) обозначаютъ просто одной буквой A , подъ которой разумѣютъ или уравненіе (1) или уравненіе (2). Слѣдовательно уравненіе:

$$A = 0$$

будетъ показывать, что длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на прямую, равна нулю, т. е. точка лежитъ на прямой (1) или прямая проходитъ черезъ точку (2). Такой способъ въ аналитической геометріи называется *сокращеннымъ*; съ помощью его многія предложенія доказываются проще и задачи рѣшаются легче.

§ 78. Условимся разъ навсегда обозначать символами A_1, A_2, A_3, \dots , прямая:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0 \quad , \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0 \quad ,$$

$$x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3 = 0, \dots\dots$$

или точки:

$$\frac{x_1 \xi + y_1 \eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0 \quad , \quad \frac{x_2 \xi + y_2 \eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0 \quad , \quad \frac{x_3 \xi + y_3 \eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0, \dots\dots$$

такъ, что индексы при углахъ α , и при координатахъ x, y соотвѣтствуютъ индексамъ при A . Такъ, напримѣръ, A_n будетъ представлять или прямую:

$$x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n - p_n = 0 \tag{3}$$

или точку:

$$\frac{x_n \xi + y_n \eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0 \tag{4}$$

смотря потому изображаетъ-ли A_n , сокращенно, прямую или точку. Слѣдовательно подъ уравненіемъ $A_n = 0$ мы будемъ всегда подразумѣвать уравненія (3) или (4).

§ 79. Если:

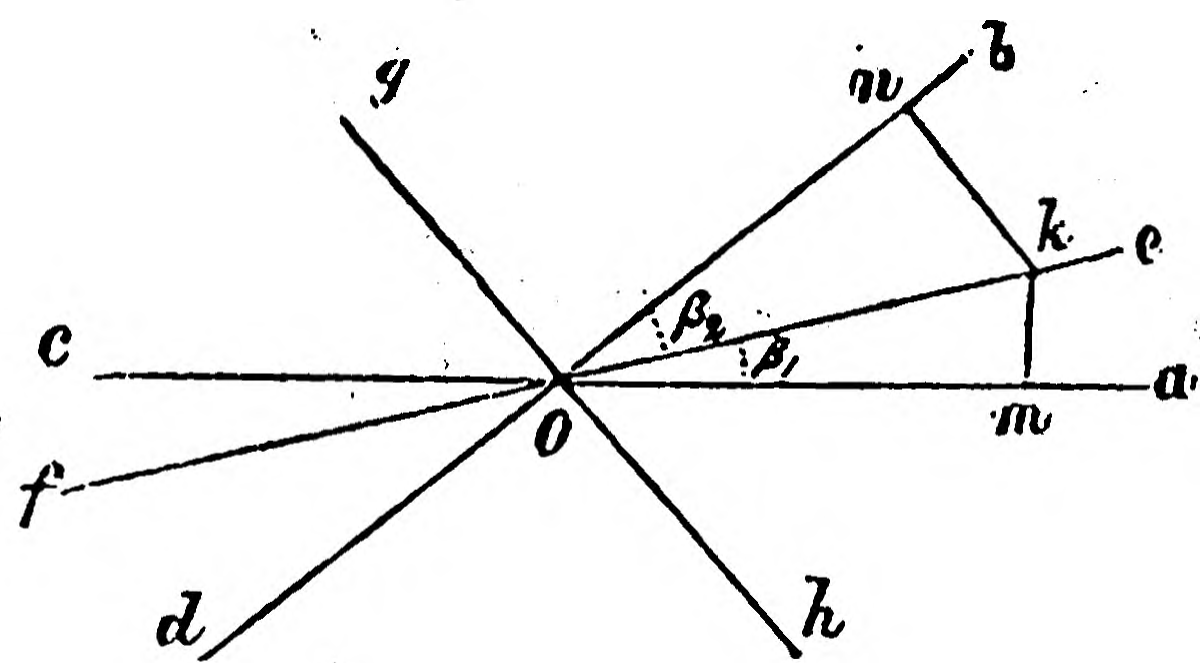
$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \tag{5}$$

будутъ уравненія двухъ прямыхъ въ сокращенной формѣ, то уравненіе:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \tag{6}$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэффициентъ, будетъ уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ (5).

Фиг. 49.



Давая λ всѣ значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$ мы получимъ всѣ прямая, проходящія черезъ точку пересѣченія прямыхъ (5).

Чтобы опредѣлить геометрическое значеніе λ возьмемъ двѣ прямая ac и bd (фиг. 49), пусть первая будетъ $A_1 = 0$, а вторая $A_2 = 0$.

Пусть ef будетъ прямая:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0$$

Для всѣхъ точекъ на прямой ef , A_1 и A_2 будутъ числовыя значенія перпендикуляровъ, опущенныхъ на прямая:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

Возьмемъ на ef , какую-нибудь, опредѣленную точку k ; пусть перпендикуляры kt и kn , на ac и bd , будутъ a_1 и a_2 , то мы будемъ имѣть:

$$a_1 + \lambda a_2 = 0$$

откуда:

$$\lambda = -\frac{a_1}{a_2}$$

слѣдовательно уравненіе (6) сдѣлается:

$$A_1 - \frac{a_1}{a_2} A_2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad (7)$$

Если начало координатъ въ томъ же углу, въ которомъ лежитъ и прямая ef , т. е. въ $\angle aob$, то перпендикуляры, опущенные изъ точекъ ef , на ac и bd , будутъ или оба положительные или оба отрицательные, смотря потому, будутъ-ли они опущены изъ точекъ прямой ef , лежащихъ въ углѣ aob или лежащихъ въ углѣ cod , въ обѣихъ случаяхъ λ будетъ величина отрицательная. Если-же прямая (6) лежитъ въ углѣ boc , то перпендикуляры a_1 и a_2 будутъ имѣть форму:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad (8)$$

Если β_1 и β_2 будутъ углы, которые прямая ef составляетъ съ ac и bd , то, очевидно, мы имѣемъ:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$$

слѣдовательно уравненія прямыхъ ef и gh можно написать въ формѣ:

$$\frac{A_1}{\sin \beta_1} - \frac{A_2}{\sin \beta_2} = 0, \quad \frac{A_1}{\sin \beta_1} + \frac{A_2}{\sin \beta_2} = 0 \quad (9)$$

§ 80. Если прямая ef и gh будутъ равнодѣлящія углы aob и boc , то $a_1 = a_2$ или $\beta_1 = \beta_2$, слѣдовательно уравненія равнодѣлящихъ углы между прямыми $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ будутъ:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 + A_2 = 0 \quad (10)$$

Очевидно, что уравненія:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0$$

будутъ уравненія прямыхъ, дѣлящихъ углы между прямыми ac и bd въ одномъ и томъ-же отношеніи.

§ 81. Мы видѣли въ § 56, что если уравненія трехъ прямыхъ, помноженные на прилично выбранные коэффициенты, даютъ въ суммѣ тождество, то такія прямая пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad (11)$$

будутъ уравненія трехъ прямыхъ, которыя, пересѣкаясь, образуютъ треугольникъ. Назовемъ углы этого треугольника, противулежащія сторонамъ (11) черезъ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Если прямая, проходящая черезъ вершины треугольника (11) будутъ имѣть форму:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (12)$$

то, очевидно, такія прямая пересѣкаются въ одной точкѣ, такъ какъ ихъ сумма даетъ тождество. Легко также видѣть, что прямая:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (13)$$

также, проходящая черезъ вершины треугольника (11), пересѣкаются въ одной точкѣ, такъ какъ сумма перваго и послѣдняго уравненія безъ втораго даетъ тождество.

Если въ уравненіяхъ (12) сдѣлаемъ:

$$a_1 = a_2 = a_3$$

то онѣ сдѣлаются:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_2 - A_3 = 0 \quad , \quad A_3 - A_1 = 0 \quad (14)$$

Если начало координатъ находится внутри треугольника (11), то уравненія (14) будутъ уравненія равнодѣлящихъ внутренніе углы треугольника (11), слѣдовательно эти равнодѣлящія пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если въ уравненіяхъ (13) сдѣлаемъ:

$$a_1 = a_2 = a_3$$

то онѣ сдѣлаются:

$$A_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0 \quad , \quad A_3 - A_1 = 0$$

Первыя два уравненія будутъ равнодѣлящія внѣшніе углы треугольника, а послѣднее будетъ равнодѣлящая внутренній уголъ, слѣдовательно, двѣ равнодѣлящія два внѣшніе угла и равнодѣлящая одинъ внутренній уголъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Задача 1. Найти уравнения трехъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ треугольника (11) на противоположя стороны, и показать, что эти перпендикуляры пересѣкаются въ одной точкѣ?

Рѣшеніе. Если стороны треугольника будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

то легко видѣть, что синусы угловъ, которые перпендикуляры составляютъ со сторонами треугольника, равны косинусамъ угловъ треугольника, слѣдовательно уравненія этихъ перпендикуляровъ будутъ:

$$\frac{A_1}{\cos \beta_2} - \frac{A_2}{\cos \beta_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{\cos \beta_3} - \frac{A_3}{\cos \beta_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{\cos \beta_1} - \frac{A_1}{\cos \beta_3} = 0$$

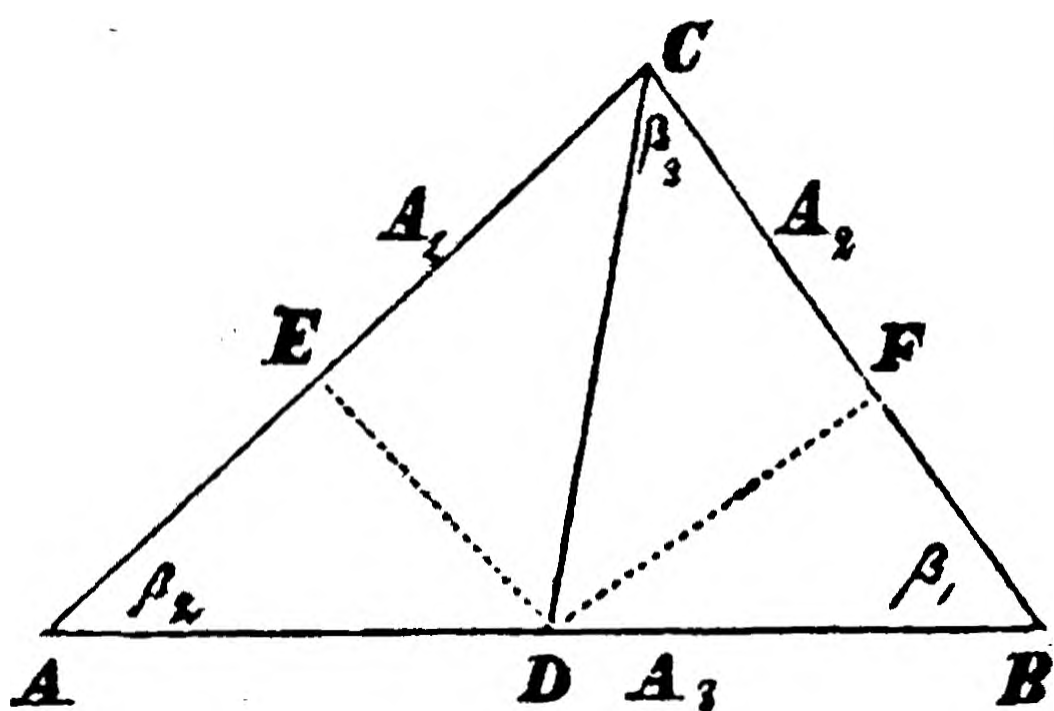
формы которыхъ показываютъ, что они пересѣкаются въ одной точкѣ.

Задача 2. Написать уравненія прямыхъ, проходящихъ черезъ вершины треугольника и черезъ середины противоположящихъ сторонъ?

Рѣшеніе. Пусть (фиг. 50) стороны треугольника будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

Фиг. 50.



Если точка D будетъ середина AB , то CD будетъ одна изъ искомыхъ прямыхъ. Если перпендикуляры DE и DF на AC и BC назовемъ черезъ a_1 и a_2 , то уравненіе прямой DC будетъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0$$

но очевидно:

$$a_1 = AD \sin \beta_2 \quad , \quad a_2 = DB \sin \beta_1$$

откуда, замѣчая, что:

$$AD = DB$$

найдемъ:

$$A_1 \sin \beta_1 - A_2 \sin \beta_2 = 0 \quad , \quad A_2 \sin \beta_2 - A_3 \sin \beta_3 = 0 \quad , \quad A_3 \sin \beta_3 - A_1 \sin \beta_1 = 0$$

форма этихъ уравненій показываетъ, что искомыя прямая пересѣкаются въ одной точкѣ. Послѣднія два уравненія получаются такимъ же образомъ, какъ и первое.

Пр. 1. Показать, что если въ треугольникѣ изъ конца основанія возставимъ перпендикуляръ, то его уравненіе будетъ:

$$A_1 + A_2 \cos \beta_3 = 0$$

Пр. 2. Если перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ одного треугольника

на стороны другаго, пересѣкаются въ одной точкѣ, то перпендикуляры опущенные изъ вершинъ втораго треугольника на стороны перваго, также пересѣкутся въ одной точкѣ?

Рѣшеніе. Пусть стороны треугольниковъ будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad ; \quad A'_1 = 0 \quad , \quad A'_2 = 0 \quad , \quad A'_3 = 0$$

Означимъ черезъ $(A_1 A_2)$, вообще, уголъ между прямыми $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$, то уравненіе перпендикуляра

изъ вершины $(A_1 A_2)$ на A'_3

будетъ (§ 81, зад. 1):

$$A_1 \cos (A_2 A'_3) - A_2 \cos (A_1 A'_3) = 0$$

изъ вершины $(A_2 A_3)$ на A'_1

будетъ:

$$A_2 \cos (A_3 A'_1) - A_3 \cos (A_2 A'_1) = 0$$

изъ вершины $(A_1 A_3)$ на A'_2

будетъ:

$$A_3 \cos (A_1 A'_2) - A_1 \cos (A_3 A'_2) = 0$$

Условіе, что эти три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ:

$$\cos (A_1 A'_2) \cdot \cos (A_2 A'_3) \cdot \cos (A_3 A'_1) = \cos (A'_1 A_2) \cdot \cos (A'_2 A_3) \cdot \cos (A'_3 A_1)$$

коего симметрія показываетъ, что другіе перпендикуляры пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 3. Показать, что прямая:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0$$

составляетъ такой уголъ съ $A_1 = 0$, какой прямая:

$$\lambda A_1 - A_2 = 0$$

составляетъ съ $A_2 = 0$, или, что эти прямыя одинаково наклонены къ равнодѣлящей:

$$A_1 - A_2 = 0$$

Пр. 4. Если черезъ вершины треугольника:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

проведемъ три, какія-нибудь, прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ, то прямыя одинаково наклоненныя съ ними къ равнодѣлящимъ угламъ треугольника, также пересѣкутся въ одной точкѣ?

Рѣшеніе. Уравненія трехъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ будутъ (§ 81):

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0$$

Уравненія прямыхъ одинаково наклоненныхъ съ этими послѣдними къ равнодѣлящимъ угламъ треугольника, очевидно, будутъ:

$$\frac{A_1}{a_2} - \frac{A_2}{a_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_3} - \frac{A_3}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_1} - \frac{A_1}{a_3} = 0$$

или:

$$a_1 A_1 - a_2 A_2 = 0 \quad , \quad a_2 A_2 - a_3 A_3 = 0 \quad , \quad a_3 A_3 - a_1 A_1 = 0$$

которыя, очевидно пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 5. Выведемъ еще предложеніе изъ уравненія прямой слѣдующей формы:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad (15)$$

гдѣ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

суть уравненія сторонъ треугольника.

Уравненіе (15) можно разсматривать, какъ происшедшее изъ сложения уравненій:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 + A_3 = 0$$

но второе уравненіе есть равнодѣлящая внѣшній уголъ треугольника между сторонами $A_2 = 0$ и $A_3 = 0$, слѣдовательно точка пересѣченія равнодѣлящей внѣшній уголъ треугольника съ противоположной стороною лежитъ на прямой (15). Дѣлая тоже разсужденіе относительно уравненій:

$$A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_3 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0$$

будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Три точки пересѣченія равнодѣлящихъ внѣшніе углы треугольника съ противоположными сторонами, лежатъ на одной прямой линіи.

Если тоже разсужденіе сдѣлаемъ надъ прямою:

$$A_1 + A_2 - A_3 = 0$$

то получимъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Три точки пересѣченія двухъ равнодѣлящихъ внутренніе углы въ треугольникѣ и одной--внѣшній съ противоположащими сторонами, лежатъ на одной прямой линіи.

Задача. Съ помощью сокращеннаго способа можно доказать свойство треугольника, доказанное выше (§§ 47, 48).

Точка.

§ 82. Если уравненія двухъ точекъ въ нормальной формѣ будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad (16)$$

то:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \quad (17)$$

будетъ уравненіе точки, лежащей на прямой проходящей черезъ точки (16).

Числовыя значенія A_1 и A_2 въ уравненіи (17) будутъ перпендикуляры, опущенные изъ точекъ (16) на прямую, проходящую черезъ точку (17). слѣдовательно λ въ уравненіи (17) будетъ отношеніе этихъ перпендикуляровъ. Если точка (17) будетъ находится между точками (16), то эти перпендикуляры будутъ имѣть противные знаки, если-же эта точка будетъ внѣ точекъ (16), то они будутъ имѣть одинаковые знаки, то есть будутъ или оба положительные или оба отрицательные.

Пусть A_1A_2 будетъ прямая (фиг. 51), проходящая через точки (16). Пусть O будетъ точка на A_1A_2 между A_1 и A_2 .

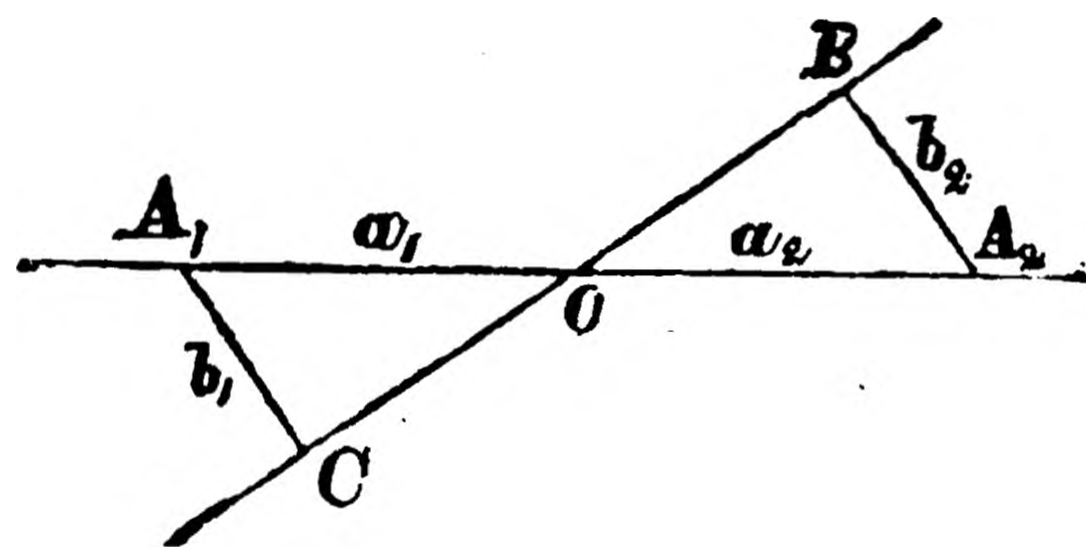
Если $A_1C = b_1$, $A_2B = b_2$, то для прямой CB мы будемъ имѣть:

Фиг. 51.

$$b_1 + \lambda b_2 = 0$$

откуда:

$$\lambda = -\frac{b_1}{b_2}$$



но b_1 и b_2 имѣютъ противные знаки, слѣдовательно:

$$\lambda = \frac{b_1}{b_2} = \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

откуда уравненіе (16) сдѣлается:

$$A_1 + \frac{a_1}{a_2} A_2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad (18)$$

Если точка O будетъ лежать внѣ точекъ A_1 и A_2 , то ея уравненіе, очевидно, будетъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad (19)$$

Очевидно, что (18) и (19) суть уравненія точекъ, дѣлящія разстояніе A_1A_2 , первая внутренне, а вторая внѣшне, въ отношеніи $a_1 : a_2$.

Если $a_1 = a_2$ въ уравненіи (18), то:

$$A_1 + A_2 = 0$$

будетъ уравненіе точки, дѣлящей пополамъ разстояніе A_1A_2 . Если $a_1 = a_2$ въ уравненіи (19), то:

$$A_1 - A_2 = 0$$

будетъ уравненіе точки на безконечности.

§ 83. Если уравненія трехъ точекъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

помноженные, на прилично выбранные коэффициенты, дають въ суммѣ тождество, т. е. если мы имѣемъ:

$$\lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 \equiv 0$$

то такія три точки лежатъ на одной прямой линіи. Разсужденіе такое, какъ и въ § 56.

Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

суть уравненія вершинъ треугольника, то очевидно, что точки, лежащія на сторонахъ треугольника и данныя уравненіями:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (20)$$

или уравненіями:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (21)$$

лежатъ на одной прямой линіи.

Пр. 1. Если въ уравненіи (20) $a_1 = a_2 = a_3$, то три точки данныя уравненіями:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_2 - A_3 = 0 \quad , \quad A_3 - A_1 = 0$$

находятся на безконечности и лежатъ на одной прямой линіи.

Пр. 2. Если $a_1 = a_2 = a_3$ въ уравненіяхъ (21), то середины двухъ сторонъ треугольника и точка на безконечности на третьей сторонѣ лежатъ на одной прямой линіи.

Пр. 3. Уравненія (20) показываютъ, что если разстоянія между точками A_1 и A_2 раздѣлимъ внѣшне въ отношеніи $a_1 : a_2$, разстояніе между A_2 и A_3 раздѣлимъ въ отношеніи $a_2 : a_3$ и наконецъ разстояніе A_3 и A_1 въ отношеніи $a_3 : a_1$, то построенныя три точки лежатъ на одной прямой линіи.

Пр. 4. Сдѣлать выводы изъ уравненій:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 - A_3 = 0$$

какія мы сдѣлали относительно прямыхъ линій въ § 81.

Пр. 5. Тоже сдѣлать и относительно уравненій:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0$$

ГЛАВА VIII.

Геометрическое мѣсто точекъ есть прямая линія.

§ 84. Геометрическое мѣсто есть непрерывный рядъ точекъ или прямыхъ линій, каждая изъ коихъ удовлетворяетъ извѣстному условію. Это условіе выражается уравненіемъ, въ которое, если введемъ или координаты точекъ или координаты прямыхъ, выбравъ извѣстную систему координатъ, то получимъ уравненіе между координатами, которое и будетъ представлять

геометрическое мѣсто. Въ главѣ II мы уже познакомились съ приемами, съ помощью которыхъ по даннымъ условіямъ мы выводили уравненія геометрическихъ мѣстъ. Въ настоящей главѣ мы займемся, только тѣми условіями, которыя даютъ, какъ геометрическое мѣсто точекъ—прямую линію и какъ геометрическое мѣсто прямыхъ линій—точку. Приемъ для составленія по извѣстному условію уравненія геометрическаго мѣста есть слѣдующій: берутъ двѣ, какія-нибудь, прямыя за координатныя оси и съ помощью, даннаго условія ищутъ зависимость между координатами точекъ или прямыхъ геометрическаго мѣста. Таковъ приемъ въ общихъ чертахъ, но выборъ координатъ имѣетъ большое значеніе, какъ относительно легкости составленія уравненія геометрическаго мѣста, такъ и относительно простоты самаго уравненія. Указать правило для выбора координатъ нельзя по безконечной разнообразности условій дающихъ геометрическія мѣста. Единственный для этого указатель есть симметрія условій, навыкъ и соображеніе.

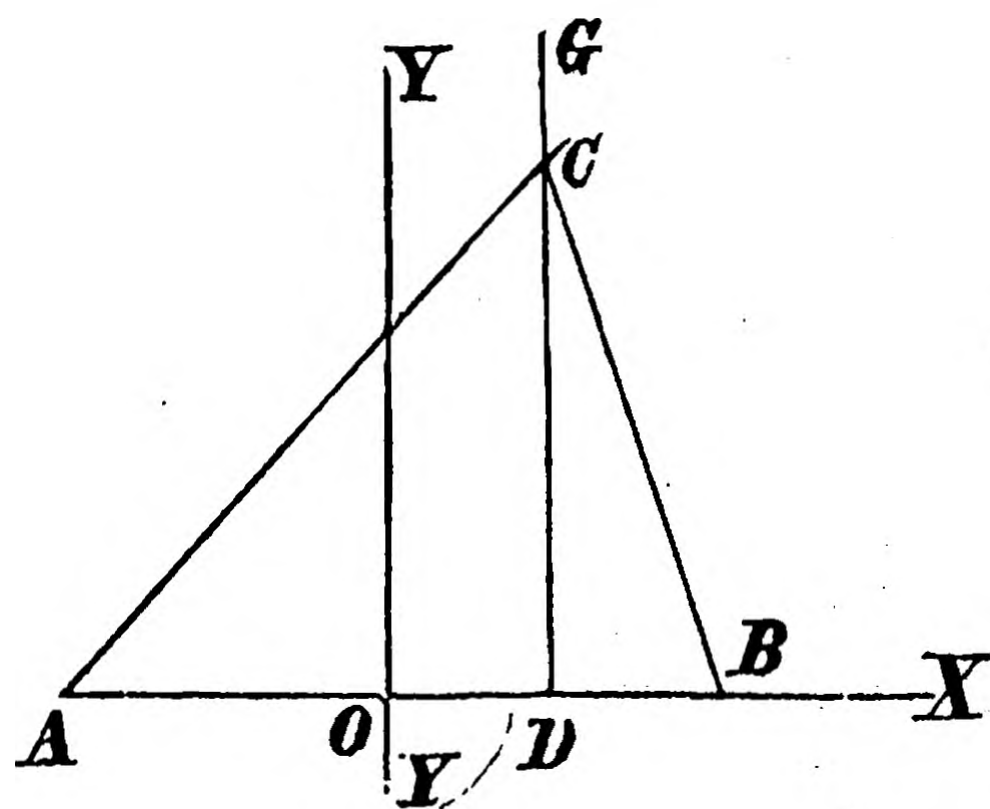
При симметріи условій координатныя оси такъ выбираютъ, чтобы, данныя, условіями геометрическаго мѣста, были расположены симметрично относительно выбранныхъ координатныхъ осей. Иногда вводятся параметры, которые затѣмъ исключаются и въ результатѣ исключенія получается геометрическое мѣсто. Нижеслѣдующіе примѣры пояснятъ все сказанное.

Прямая.

Пр. 1. Найти геометрическое мѣсто вершинъ треугольника, коего основаніе дано и дана разность квадратовъ его сторонъ?

Рѣшеніе. Такъ какъ основаніе треугольника дано, то концы его будутъ симметрично расположены относительно координатныхъ осей, если это основаніе возьмемъ за ось абсциссъ, а перпендикуляръ, возставленный изъ его середины, за ось ординатъ.

Фиг. 52.



Пусть (фиг. 52) AB будетъ данное основаніе, его середина O , OY ось ординатъ, C одна изъ точекъ геометрическаго мѣста.

По условію задачи:

$$AB = 2a \quad , \quad AC^2 - CB^2 = m^2$$

Если C есть точка геометрическаго мѣста, то:

$$OD = x \quad , \quad DC = y$$

Изъ $\triangle ADC$ и $\triangle DBC$ мы имѣемъ:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = (a + x)^2 + y^2 \quad , \quad CB^2 = (a - x)^2 + y^2$$

откуда:

$$(a + x)^2 + y^2 - (a - x)^2 - y^2 = m^2 \quad \text{или} \quad (a + x)^2 - (a - x)^2 = m^2$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто будетъ:

$$4ax = m^2 \quad \text{или} \quad x = \frac{m^2}{4a}$$

прямая перпендикулярная къ основанію на разстояніи $\frac{m^2}{4a}$ отъ его середины.

Пр. 2. По данному основанію треугольника и $\cotg A + m \cotg B$ найти геометрическое мѣсто вершины?

Рѣшеніе. Пусть основаніе $AB = 2a$, а $\cotg A + m \cotg B = b$ (фиг. 52). Возьмемъ тѣже координатныя оси, что и въ предыдущемъ примѣрѣ, то легко видѣть что:

$$\cotg A = \frac{AD}{CD} = \frac{a+x}{y}, \quad \cotg B = \frac{DB}{CD} = \frac{a-x}{y}$$

откуда:

$$\frac{a+x}{y} + m \frac{a-x}{y} = b$$

или:

$$(a+x) + m(a-x) - by = 0$$

или:

$$(1-m)x - by + a(1+m) = 0$$

слѣдовательно геометрическое мѣсто есть прямая линія.

Пр. 3. Дано основаніе треугольника и сумма двухъ другихъ сторонъ; высота треугольника продолжена такъ, чтобы вся ея длина была равна одной изъ сторонъ. Найти геометрическое мѣсто конца этой высоты?

Рѣшеніе. Возьмемъ ту же фигуру (52) и тѣже координатныя оси. Мы имѣемъ:

$$AB = 2a, \quad AC + CB = m, \quad AC = DG$$

Изъ этихъ данныхъ имѣемъ:

$$BC = m - y, \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AD$$

или замѣчая, что $AC = GD = y$,

$$(m-y)^2 = 4a^2 + y^2 - 4a(a+x)$$

откуда:

$$2my - 4ax = m^2$$

прямая линія.

Пр. 4. Найти геометрическое мѣсто точекъ, конхъ разность разстояній отъ двухъ данныхъ прямыхъ есть величина постоянная?

Фиг. 53.

Рѣшеніе. Возьмемъ данныя прямыя (фиг. 53) за координатныя оси. Пусть онѣ будутъ OX и OY .

Если M есть одна изъ точекъ геометрическаго мѣста, а MA и MB суть перпендикуляры къ OX и OY , то мы будемъ имѣть, если $\angle XOY = \varphi$ и $MB - MA = k$:

$$MA = y \sin \varphi, \quad MB = x \sin \varphi$$

$$y - x = \frac{k}{\sin \varphi}$$

Очевидно, это прямая параллельная равнодѣлящей уголъ φ .

Пр. 5. Если сумма разстояній будетъ дана, то геометрическое мѣсто будетъ:

$$y = -x + \frac{k}{\sin \varphi}$$

Пр. 6. Найти геометрическое мѣсто точекъ, коихъ разность квадратовъ разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная?

Рѣшеніе. Возьмемъ для симметріи разстояніе данныхъ двухъ точекъ за ось X , перпендикуляръ, возставленный изъ середины этого разстоянія, за ось Y . Пусть это разстояніе будетъ равно $2a$; разность квадратовъ разстояній точки геометрическаго мѣста пусть будетъ k^2 , то мы будемъ имѣть:

$$y^2 + (x - a)^2 - y^2 + (x + a)^2 = k^2$$

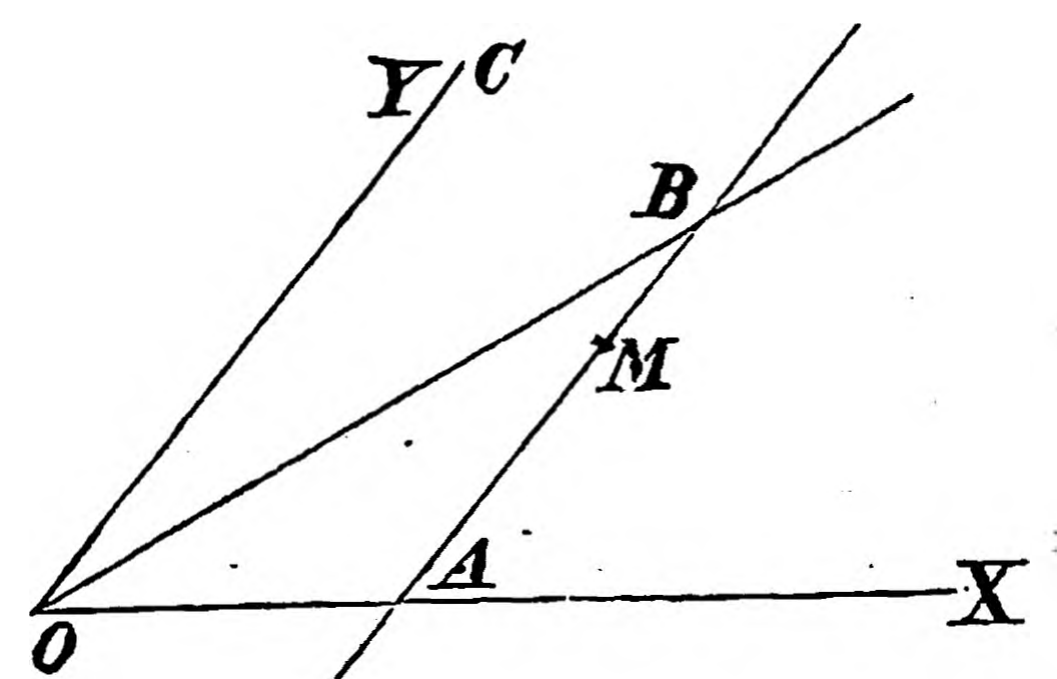
откуда:

$$4ax = -k^2$$

Пр. 7. Даны двѣ прямыя линіи OA и OB , проведена, какая-нибудь, прямая AB , параллельно третьей данной прямой OC , AB пересѣкаетъ прямыя OA и OB въ точкахъ A и B , на AB взята точка M , такъ чтобы $\frac{MA}{AB} = n$. Найти геометрическое мѣсто точекъ M ?

Рѣшеніе. Возьмемъ OA и OC за координатныя оси X и Y (фиг. 54). Пусть уравненіе данной прямой OB будетъ $y = mx$.

Фиг. 54.



Такъ какъ точка B лежитъ на прямой $y = mx$, то:

$$AB = m \cdot OA = mx$$

Но по условію $MA = n \cdot AB$, слѣдовательно геометрическое мѣсто будетъ:

$$y = m \cdot n \cdot x$$

Пр. 8. Проведена прямая AB , какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ, параллельно данной прямой OC . Пересѣкаетъ она прямыя, коихъ уравненія суть:

$$y = mx \quad , \quad y = m_1x + n_1 \quad , \quad y = m_2x + n_2 \quad , \quad y = m_3x + n_3, \dots$$

въ точкахъ B, B_1, B_2, B_3, \dots . На этой прямой взята точка M такъ, чтобы отрѣзокъ AM былъ пропорціоналенъ суммѣ ординатъ $AB, AB_1, AB_2, AB_3, \dots$. Найти геометрическое мѣсто точекъ M ?

Рѣшеніе. Если:

$$\frac{AB + AB_1 + AB_2 + \dots}{AM} = k$$

то мы будемъ имѣть:

$$ky = mx + m_1x + n_1 + m_2x + n_2 + \dots$$

или:

$$ky = (m + m_1 + m_2 + \dots)x + n_1 + n_2 + \dots$$

Пр. 9. Даны основанія и сумма площадей нѣсколькихъ треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину, найти ея геометрическое мѣсто?

Рѣшеніе. Пусть уравненія основаній треугольниковъ будутъ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad , \quad x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, \dots \quad (1)$$

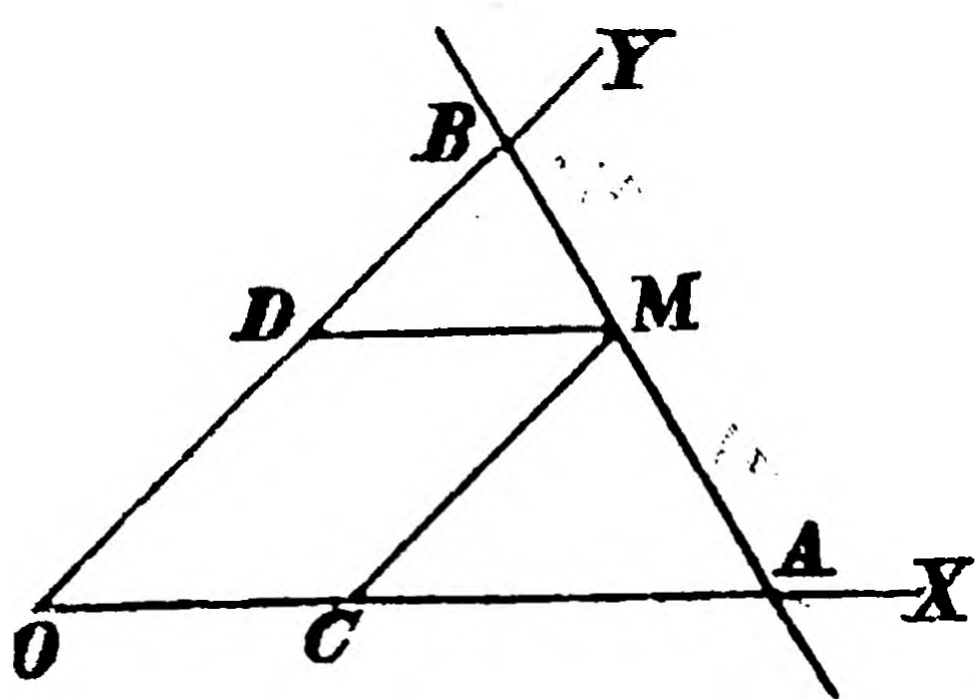
ихъ основанія a, a_1, a_2, \dots . Сумма площадей пусть будетъ m^2 . Если въ уравненіи (1) вставимъ координаты общей вершины треугольниковъ, то числовыя ихъ величины будутъ длины перпендикуляровъ изъ вершины на основанія (§ 45). Слѣдовательно:

$$a(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) + a_1(x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1) + a_2(x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2) + \dots = 2m^2$$

а потому геометрическое мѣсто есть прямая линія.

Пр. 10. Дана сумма двухъ сторонъ въ треугольникѣ и уголъ между ними. Сторона противуположная данному углу раздѣлена въ данномъ отношеніи. Найти геометрическое мѣсто этой точки?

Фиг. 55.



Рѣшеніе. Возьмемъ (фиг. 55) стороны OA и OB , заключающія данный уголъ AOB , за координатныя оси. Сторона AB въ точкѣ M раздѣлена въ отношеніи $\frac{MA}{BM} = \frac{n}{m}$.

По условію мы имѣемъ:

$$OA + OB = k, \quad OC = x, \quad MC = y$$

Изъ подобія треугольниковъ $\triangle AOB$ и $\triangle MDB$ имѣемъ:

$$\frac{OA}{x} = \frac{m+n}{m}, \quad \frac{OB}{y} = \frac{m+n}{n}$$

откуда:

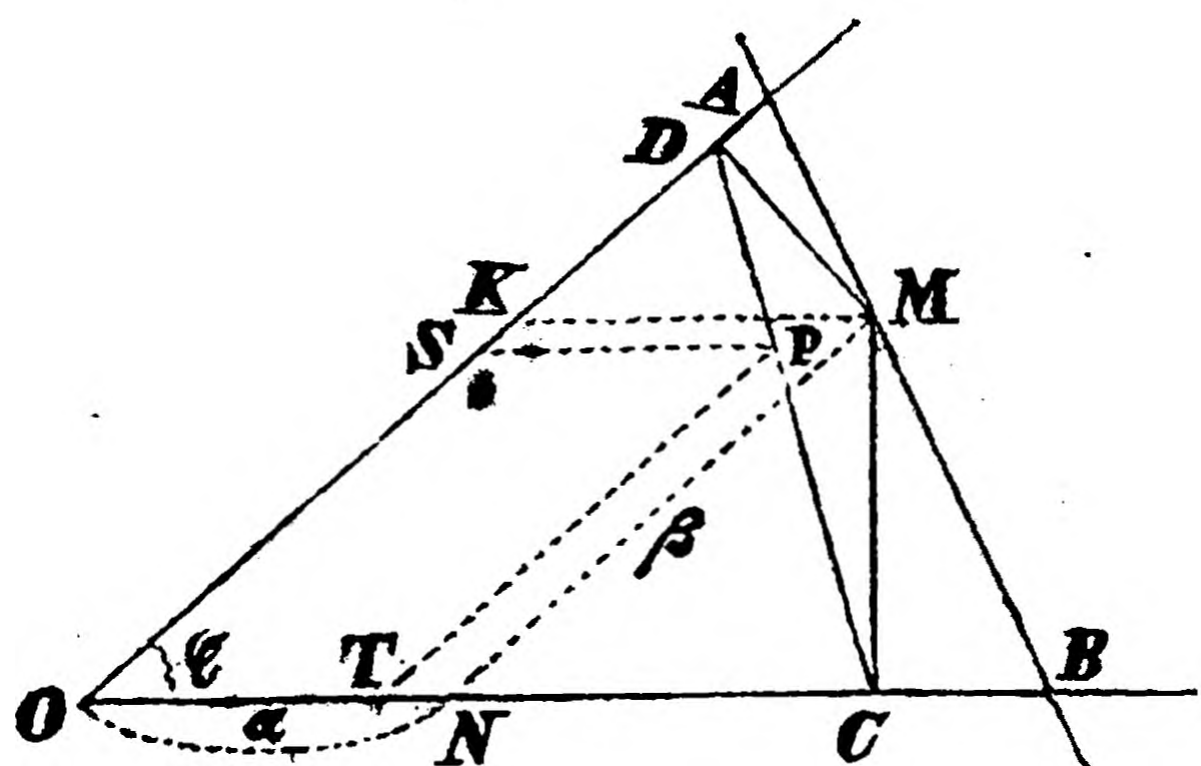
$$\frac{m+n}{m}x + \frac{m+n}{n}y = k$$

или:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{k}{m+n}$$

Пр. 11. Даны двѣ прямыя OA и OB и прямая $y = ax + b$ (AB) (фиг. 56). Изъ какой-нибудь точки M прямой AB опущены перпендикуляры MC и MD на OB и OA . Найти геометрическое мѣсто серединъ P отрезка DC ?

Фиг. 56.



Рѣшеніе. Возьмемъ OA и OB за оси X и Y .

Если $\angle AOB = \varphi$, а координаты точки M будутъ α и β , то координаты точки P будутъ:

$$OC = ON + NC = 2x = \alpha + \beta \cos \varphi,$$

$$OD = OK + KD = 2y = \beta + \alpha \cos \varphi$$

откуда вставляя α и β , полученные изъ этихъ уравненій, въ уравненіе $y = ax + b$, найдемъ иско-

мое геометрическое мѣсто:

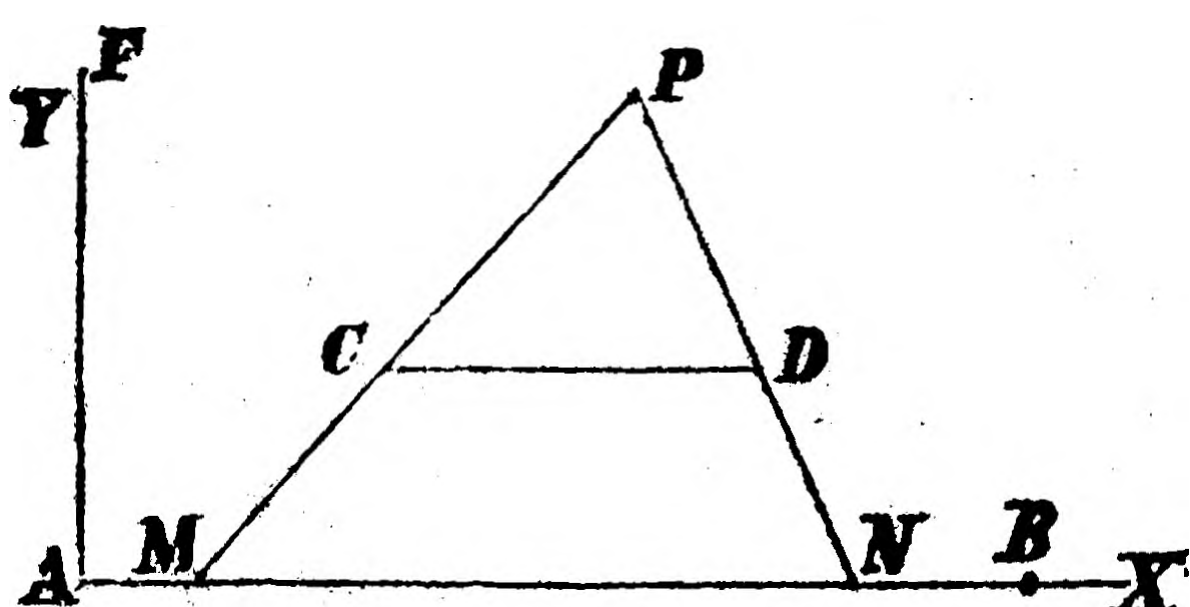
$$2y - 2x \cos \varphi = 2a(x - y \cos \varphi) + b \sin^2 \varphi$$

или:

$$(1 + a \cos \varphi)y - (a + \cos \varphi)x = \frac{b \sin^2 \varphi}{2}$$

Пр. 12. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего основаніе CD дано и дано отношеніе $AM : NB = k$ частей даннаго отрезка $AB = a$, параллельнаго основанію?

Фиг. 57.



Рѣшеніе. Возьмемъ AB (фиг. 57) за ось X , а AF перпендикуляръ къ AB , за ось Y .

Пусть координаты точки P будутъ (x, y) , координаты точекъ C и D пусть будутъ (x_1, y_1) , (x_2, y_1) , ордината y_1 одна для обѣихъ точекъ C и D , такъ какъ CD параллельно AB . Уравненіе прямой PC будетъ, если бѣгущія координаты обозначимъ черезъ x', y' :

$$(y - y_1)x' - (x - x_1)y' = yx_1 - xy_1$$

полагая въ этомъ уравненіи $y' = 0$, $AM = x'$, будемъ имѣть:

$$AM = \frac{yx_1 - xy_1}{y - y_1}$$

Точно также найдемъ AN :

$$AN = \frac{yx_2 - xy_1}{y - y_1}$$

такъ какъ $AB = a$, то отношеніе $AM = k \cdot BN$ даетъ:

$$\frac{yx_1 - xy_1}{y - y_1} = k \left(a - \frac{x_2y - y_1x}{y - y_1} \right)$$

откуда будемъ имѣть искомое геометрическое мѣсто:

$$x_1y - y_1x = k \{ a(y - y_1) - (x_2y - y_1x) \}$$

Пр. 13. Данъ уголь XOY и точка P (фиг. 58); проведемъ, какія-нибудь двѣ сѣкущія PBA и PDC , которыя пересѣкаютъ OY и OX въ точкахъ A и B , C и D ; найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ AD и BC ?

Рѣшеніе. Возьмемъ OX и OY за координатныя оси.

Фиг. 58.

Пусть координаты точки P будутъ (x_1, y_1) .

Уравненія двухъ, какихъ-нибудь, сѣкущихъ PA и PC будутъ:

$$(PA) \quad y - y_1 = \alpha_1(x - x_1) \quad , \quad y - y_1 = \alpha_2(x - x_1) \quad (PC)$$

Полагая въ этихъ уравненіяхъ $y = 0$, найдемъ отрѣзки OB и OD :

$$OB = \frac{y_1 - \alpha_1 x_1}{\alpha_1} \quad , \quad OD = \frac{y_1 - \alpha_2 x_1}{\alpha_2}$$

полагая $x = 0$ будемъ имѣть отрѣзки OA и OC :

$$OA = y_1 - \alpha_1 x_1 \quad , \quad OC = y_1 - \alpha_2 x_1$$

Имѣя эти отрѣзки, мы будемъ имѣть уравненія прямыхъ AD и BC (§ 38):

$$(AD) \quad \frac{\alpha_1 x}{\alpha_1 x_1 - y_1} + \frac{y}{y_1 - \alpha_2 x_1} = 1 \quad , \quad \frac{\alpha_2 x}{\alpha_2 x_1 - y_1} + \frac{y}{y_1 - \alpha_1 x_1} = 1 \quad (BC)$$

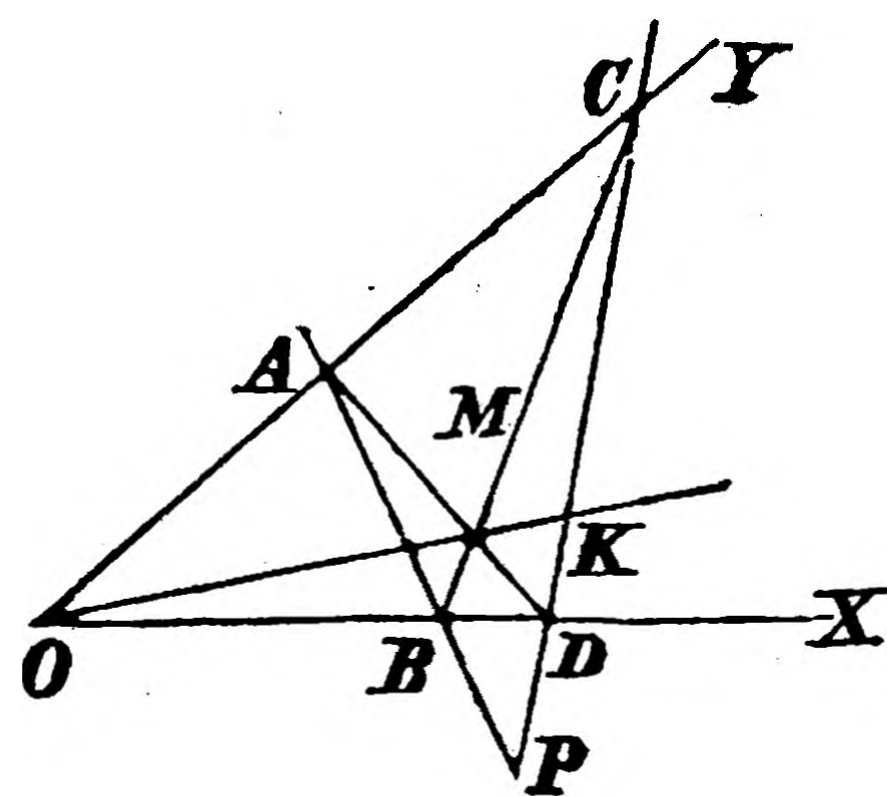
Точка M пересѣченія AD и BC должна удовлетворять обѣимъ уравненіямъ (AD) и (BC) , какіе бы ни были параметры α_1 и α_2 . Если ихъ исключимъ, получимъ искомое геометрическое мѣсто. Вычтемъ предыдущія уравненія, то найдемъ:

$$y_1 x + x_1 y = 0$$

Это уравненіе прямой, проходящей черезъ точку O .

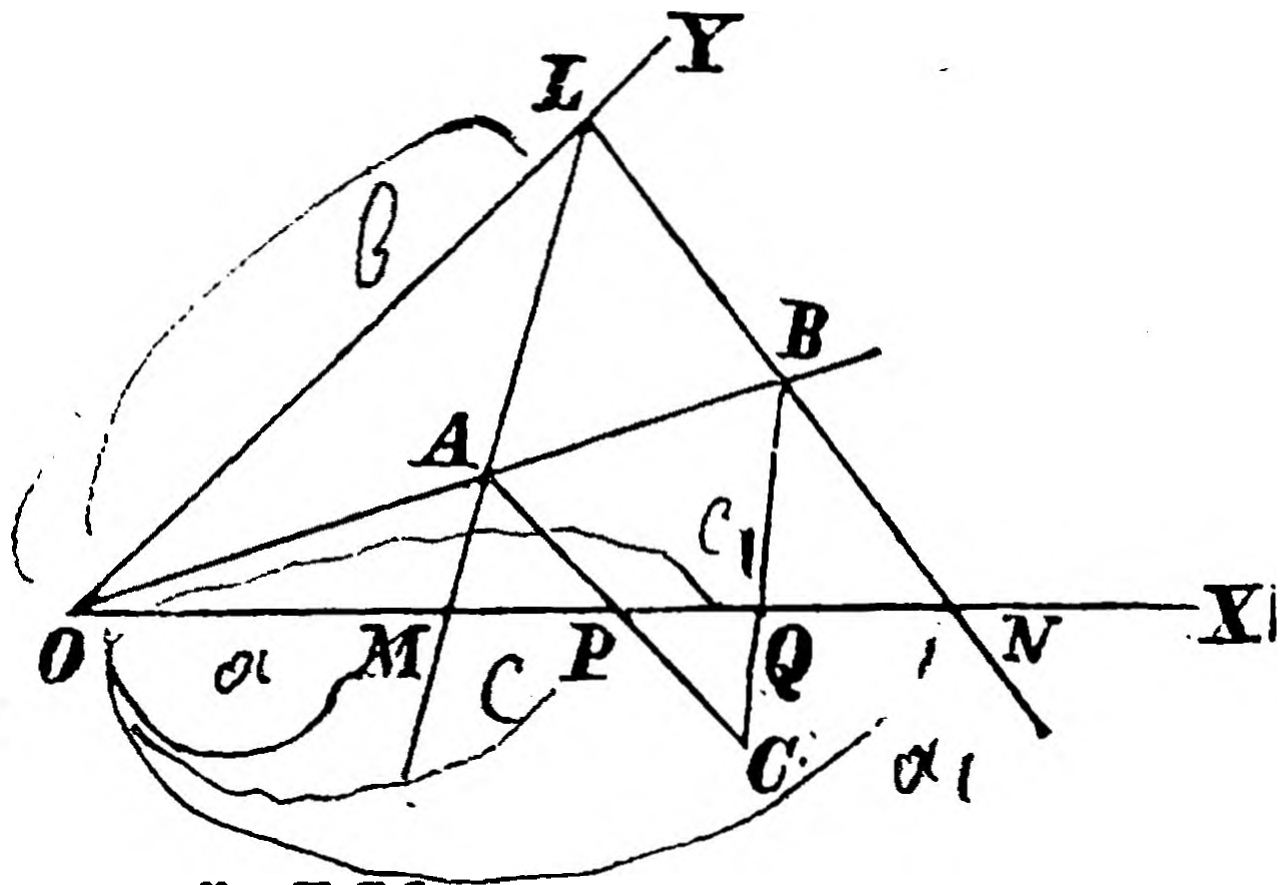
Пр. 14. Двѣ вершины треугольника ABC скользятъ по двумъ даннымъ прямымъ LM и LN , три стороны этого треугольника проходятъ черезъ три данныя точки O , P и Q , лежащія на одной прямой. Найти геометрическое мѣсто третьей вершины?

Рѣшеніе. Возьмемъ за ось X прямую OPQ (фиг. 59), а за ось Y прямую OL , соединяющую точку O съ точкою L пересѣченія прямыхъ ML и NL .



Пусть координаты точки C будутъ (x, y) , пусть $OL = b$, $OM = a$, $ON = a_1$, $OP = c$, $OQ = c_1$.

Фиг. 59.



Очевидно, что уравненія прямыхъ LM и LN будутъ:

$$(LM) \quad \frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 1 \quad , \quad \frac{x'}{a_1} + \frac{y'}{b} = 1 \quad (LN)$$

а уравненіе прямой CP , проходящей черезъ точки $P(c, 0)$ и $C(x, y)$ будетъ:

$$(x - c)y' - yx' + yc = 0 \quad (PC)$$

Координаты точки A пересѣченія этой прямой съ прямой LM будутъ:

$$x_1 = \frac{ab(x - c) + acy}{b(a - c) + ay} \quad , \quad y_1 = \frac{b(x - c)y}{b(a - c) + ay}$$

Координаты точки B , пересѣченія прямой CQ съ LN , получатся изъ предыдущихъ, давая индексы буквамъ a и c :

$$x_2 = \frac{a_1b(x - c_1) + a_1c_1y}{b(a_1 - c_1) + a_1y} \quad , \quad y_2 = \frac{b(x - c_1)y}{b(a_1 - c_1) + a_1y}$$

Но мы должны имѣть:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

такъ какъ прямая AB должна проходить черезъ начало, слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\frac{b(a - c)y}{ab(x - c) + acy} = \frac{b(a_1 - c_1)y}{a_1b(x - c_1) + a_1y}$$

откуда послѣ приведеній, найдемъ:

$$\frac{(ac_1 - ca_1)x}{cc_1(a - a_1) - aa_1(c - c_1)} + \frac{y}{b} = 1$$

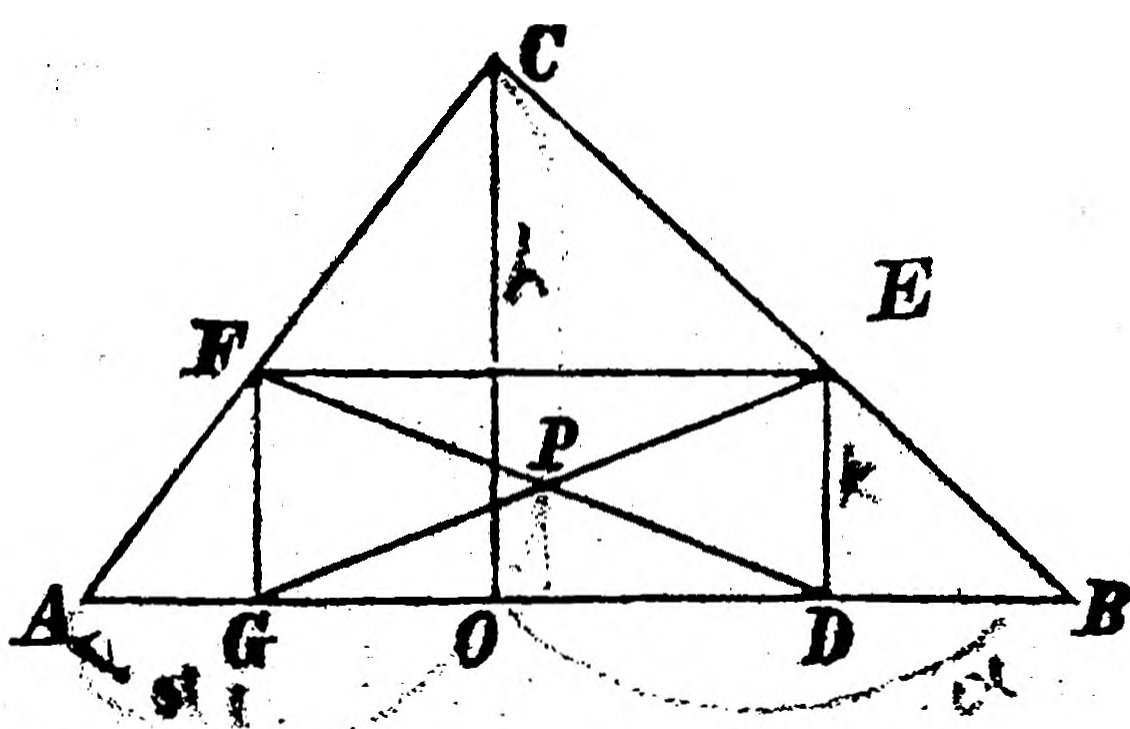
Пр. 15. Найти геометрическое мѣсто вершины C въ предыдущемъ примѣрѣ, если прямая PQ проходит не черезъ O , а черезъ L ?

Отв. Если за координатныя оси взять LM и LN , а уравненіе прямой PQ будетъ $y = mx$, то:

$$x_3x_2(y - y_1) - y_3x_1(x - x_2) = x_1x_2(mx - y)$$

Пр. 16. Найти геометрическое мѣсто пересѣченія діагоналей, вписаннаго въ данный треугольникъ, прямоугольника?

Фиг. 60.



Рѣшеніе. Пусть (фиг. 60) данный треугольникъ будетъ ABC .

Возьмемъ основаніе AB и высоту CO за координатныя оси. Пусть $OC = h$, $OB = a$, $OA = a_1$, то уравненія прямыхъ AC и BC будутъ:

$$\frac{y}{h} - \frac{x}{a_1} = 1 \quad , \quad \frac{y}{h} + \frac{x}{a} = 1 \quad (2)$$

Проведемъ EF параллельно AB на разстояніи k отъ AB . Абсциссы OD и GO то-

чекъ E и F найдутся изъ уравненій (2), положивъ въ нихъ $y = k$. Слѣдовательно мы будемъ имѣть:

$$OD = a \left(1 - \frac{k}{h}\right), \quad OG = -a_1 \left(1 - \frac{k}{h}\right)$$

Имѣя абсциссы точекъ E и F мы найдемъ абсциссу середины FE , которую если назовемъ черезъ x , то найдемъ:

$$x = \frac{a - a_1}{2} \left(1 - \frac{k}{h}\right) \quad (3)$$

очевидно это абсцисса пересѣченія діагоналей FD и GE . Но ордината этой точки есть $\frac{1}{2}k$, слѣдовательно геометрическое мѣсто получится измѣняя k на $2y$, именно:

$$2x = (a - a_1) \left(1 - \frac{2y}{h}\right)$$

или:

$$\frac{2x}{a - a_1} + \frac{2y}{h} = 1$$

или еще:

$$\frac{x}{\frac{a - a_1}{2}} + \frac{y}{\frac{h}{2}} = 1$$

Слѣдовательно искомое геометрическое мѣсто есть прямая, проходящая черезъ середину основанія AB и черезъ середину высоты h .

Пр. 17. Въ данномъ треугольникѣ ABC проведена прямая FE параллельно AB , точки F и E пересѣченія этой прямой съ AC и BC соединены съ данными точками P и Q на основаніи AB . Найти геометрическое мѣсто точки M пересѣченія прямыхъ FQ и EP (фиг. 61)?

Рѣшеніе. Возьмемъ за координатныя оси основаніе AB и высоту OC . Пусть координаты данныхъ точекъ P и Q будутъ $(m, 0)$, $(n, 0)$. Пусть $OB = a$, $OA = -a_1$, $OC = h$, то уравненія прямыхъ BC и AC будутъ:

$$(BC) \frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1, \quad -\frac{x}{a_1} + \frac{y}{h} = 1 \quad (AC)$$

Если EF проведено на разстояніи k отъ AB , то абсциссы точекъ E и F получатся изъ уравненій (BC) и (AC), полагая въ нихъ $y = k$, что даетъ:

$$OG = a \left(1 - \frac{k}{h}\right), \quad OD = -a_1 \left(1 - \frac{k}{h}\right)$$

Слѣдовательно уравненія прямыхъ QF и PE будутъ:

$$y = \frac{k}{a \left(1 - \frac{k}{h}\right) - n} (x - n), \quad y = \frac{k}{-a_1 \left(1 - \frac{k}{h}\right) - m} (x - m)$$

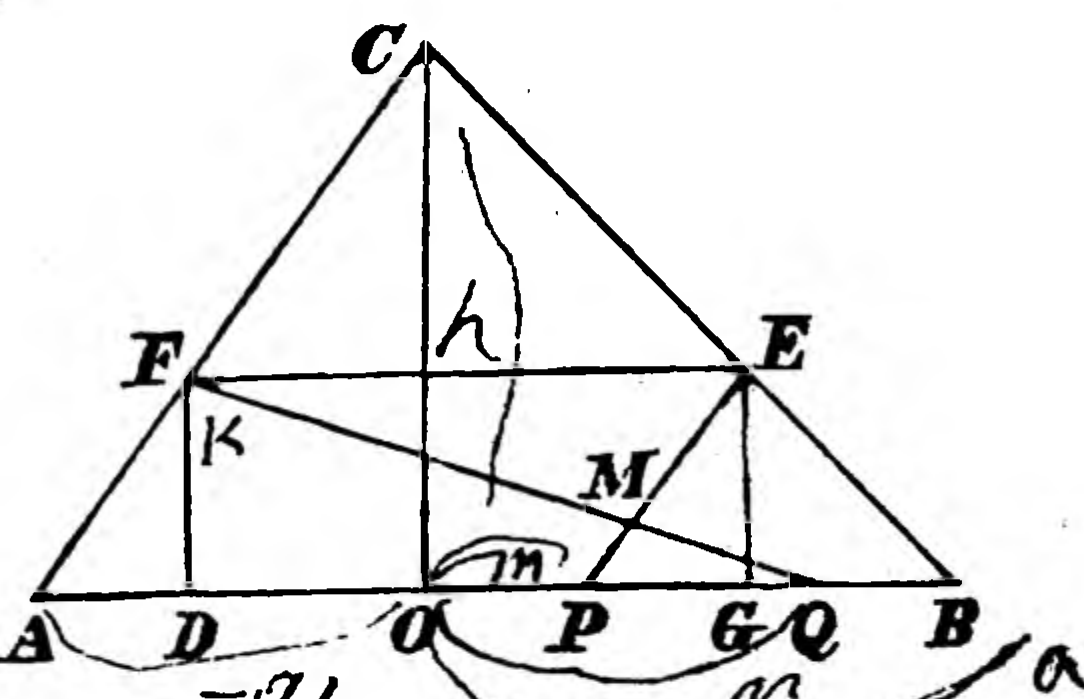
исключая изъ этихъ уравненій k , найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$(a - n) \{ x_1 y - h(x - m) \} = (a_1 + m) \{ ay - h(x - n) \}$$

Пр. 18. Рѣшить ту же задачу если точки P и Q совпадаютъ съ A и B ?

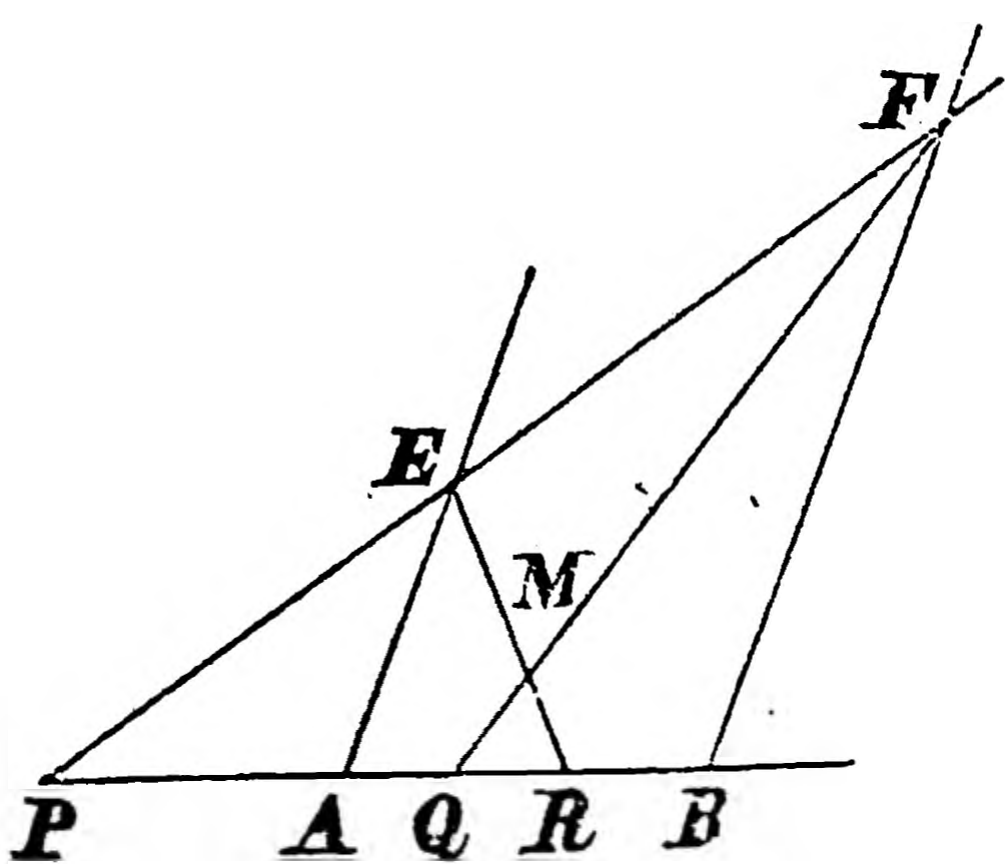
Отв. $(a - a_1) y + 2hx + h(a + a_1) = 0$

Фиг. 61.



Пр. 19. Даны двѣ параллельныя линіи AE и BF и три точки P, Q, R на одной прямой линіи, черезъ точку P проведена, какая-нибудь, сѣкущая PEF , точки E и F пересѣченія этой сѣкущей съ прямыми AE и BF соединимъ съ точками R и Q прямыми ER и FQ . Найти геометрическое мѣсто точки M пересѣченія прямыхъ ER и FQ (фиг. 62)?

Фиг. 62.



Рѣшеніе. Пусть A и B будутъ точки пересѣченія прямой PQR съ AE и BF . Возьмемъ PA за ось X , а AE за ось Y .

Пусть $AB = a$, $AQ = a_1$, $AR = a_2$, $AP = a_3$, то координаты точекъ P, Q, R будутъ:

$$(a_1, 0), (a_2, 0), (a_3, 0)$$

Пусть $AE = u$, то уравненія прямыхъ PE и ER будутъ:

$$-\frac{x}{a_1} + \frac{y}{u} = 1, \quad \frac{x}{a_3} + \frac{y}{u} = 1$$

Чтобы найти уравненіе прямой QF , замѣтимъ, что абсцисса точки F есть a , слѣдовательно ордината BF получится изъ уравненія:

$$-\frac{x}{a_1} + \frac{y}{u} = 1$$

подставивъ a вмѣсто x , найдемъ:

$$y = BF = u \left(1 + \frac{a}{a_1} \right) = \frac{u}{a_1} (a + a_1)$$

такъ какъ прямая QF проходитъ черезъ точки $(a_2, 0)$ и (a_1, BF) , то мы имѣемъ:

$$y = \frac{BF}{a - a_2} (x - a_2) = \frac{u}{a_1} \cdot \frac{a + a_1}{a - a_2} (x - a_2)$$

исключая u изъ этого уравненія и уравненія:

$$\frac{x}{a_3} + \frac{y}{u} = 1$$

найдемъ геометрическое мѣсто:

$$x = \frac{a_1 a_3 (a - a_2) + a_1 a_3 (a + a_1)}{a_1 (a - a_2) + a_3 (a + a_1)}$$

которое есть прямая параллельная оси Y .

Пр. 20. Разсмотримъ въ предыдущей задачѣ тѣ случаи, когда точки Q и R совпадаютъ съ A и B и когда точка P находится на безконечности, т. е. когда $PE \parallel AB$?

Рѣшить еще слѣдующія задачи:

Пр. 21. Данъ треугольникъ ABC ; на его основаніи AB даны три точки P, Q, R , черезъ точку P проведена сѣкущая, которая встрѣчаетъ стороны AC и BC въ точкахъ E и F , точки E и F соединены съ R и Q прямыми ER и FQ . Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія прямыхъ ER и FQ ?

Разобрать тѣ случаи, въ которыхъ точки Q и R совпадаютъ съ A и B и когда точка P находится на безконечности, т. е. когда $PE \parallel AB$. Показать, что пр. 19 есть частный случай настоящаго?

Пр. 22. Проведены двѣ прямыя PP' и QQ' параллельно сторонамъ AB и AC даннаго параллелограмма. Точки P, P', Q и Q' суть точки встрѣчи прямыхъ PP' и QQ' со сторонами параллелограмма. Найти геометрическое мѣсто точки встрѣчи прямыхъ PQ и $P'Q'$?

Пр. 23. Дана точка и двѣ прямыя линіи, черезъ данную точку проведены двѣ сѣкущія и точки ихъ встрѣчи съ данными прямыми соединены крестообразно. Найти геометрическое мѣсто точки ихъ встрѣчи?

Пр. 24. Данъ треугольникъ ABC , на его основаніи дана точка P ; проведена, какая-нибудь, прямая $ab \parallel AB$, точки ея пересѣченія a и b съ AC и BC соединены съ P и A прямыми aP и Ab . Найти геометрическое мѣсто точки ихъ пересѣченія?

Пр. 25. Данъ треугольникъ ABC , на основаніи его даны точки Q и P , черезъ точку P проведена сѣкущая Pab , которая встрѣчаетъ стороны AC и BC въ точкахъ a и b , черезъ точку a проведена прямая $ac \parallel AB$, точка b соединена съ Q прямою bQ . Найти геометрическое мѣсто пересѣченія ac и bQ ?

Пр. 26. Даны двѣ параллельныя прямыя $AХ$ и $ВУ$ и три точки P, Q, R на прямой параллельной первымъ двумъ, черезъ точку P проведена сѣкущая Pab , которая встрѣчаетъ $AХ$ и $AУ$ въ точкахъ a и b , точка a соединена съ P , а точка b съ Q прямыми aP и bQ . Найти геометрическое мѣсто точки встрѣчи прямыхъ aP и bQ ?

Геометрическое мѣсто прямой линіи есть точка.

§ 85. Во всѣхъ предъидущихъ примѣрахъ условія были таковы, что всѣ точки, удовлетворяющія этимъ условіямъ, находились на одной прямой линіи. Въ нижеслѣдующихъ примѣрахъ условія будутъ таковы, что всѣ прямыя, коихъ координаты удовлетворяютъ этимъ условіямъ, будутъ проходить черезъ одну точку, которая и называется геометрическимъ мѣстомъ прямыхъ линій.

Задачи этого рода, также какъ и предъидущія, можно рѣшать съ помощью каждаго изъ методовъ двойственности, т. е. въ координатахъ точки и въ координатахъ линіи. Но по послѣднему методу, за исключеніемъ не многихъ случаевъ, рѣшенія бываютъ вообще сложнѣе, такъ какъ выборъ координатъ стѣсняется нѣкоторыми особенностями метода, такъ напримѣръ, если даны двѣ прямыя въ условіяхъ задачи, то въ методѣ Декарта можно всегда эти прямыя взять за координатныя оси, что сейчасъ-же упрощаетъ ихъ уравненія; въ другомъ-же методѣ это нельзя сдѣлать, такъ какъ всякая прямая, проходящая черезъ начало, опредѣляется координатами $\xi = \infty, \eta = \infty$, а ея уравненіе дается парадоксомъ $C = 0$, т. е. постоянное количество равно нулю, что въ Декартовой системѣ координатъ соотвѣтствуетъ прямой на безконечности. Слѣдующія примѣры пояснятъ сказанное. Замѣтимъ сначала, что если даны координаты точки (x_1, y_1) , то ея уравненіе будетъ (§ 63):

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 = 0$$

а если даны координаты прямой (ξ_1, η_1) , то ея уравненіе будетъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

Если даны координаты двухъ точекъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) то уравненіе прямой, проходящей черезъ эти точки будетъ (§ 68):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

а если даны координаты двухъ прямыхъ (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) , то уравненіе точки ихъ пересѣченія будетъ (§ 68):

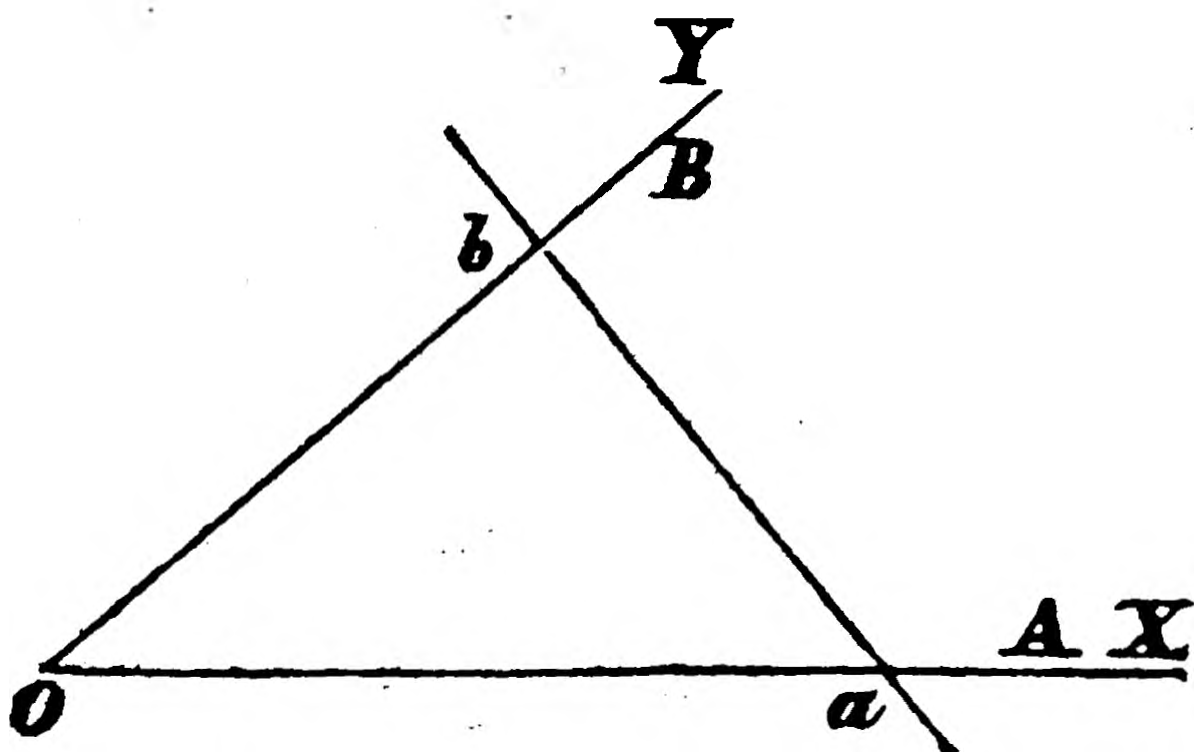
$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Пр. 1. Даны двѣ прямыя OA и OB , третья прямая ab пересѣкаетъ OA и OB такъ, что:

$$\frac{1}{Oa} + \frac{1}{Ob} = k$$

k есть число постоянное. Найти геометрическое мѣсто прямой ab ?

Фиг. 63.



Рѣшеніе. Возьмемъ за координатныя оси OA и OB (фиг. 63), то изъ условій задачи видимъ, что координаты ξ и η прямой ab , которыя суть ничто иное какъ $\frac{1}{Oa}$ и $\frac{1}{Ob}$, должны удовлетво- рять уравненію:

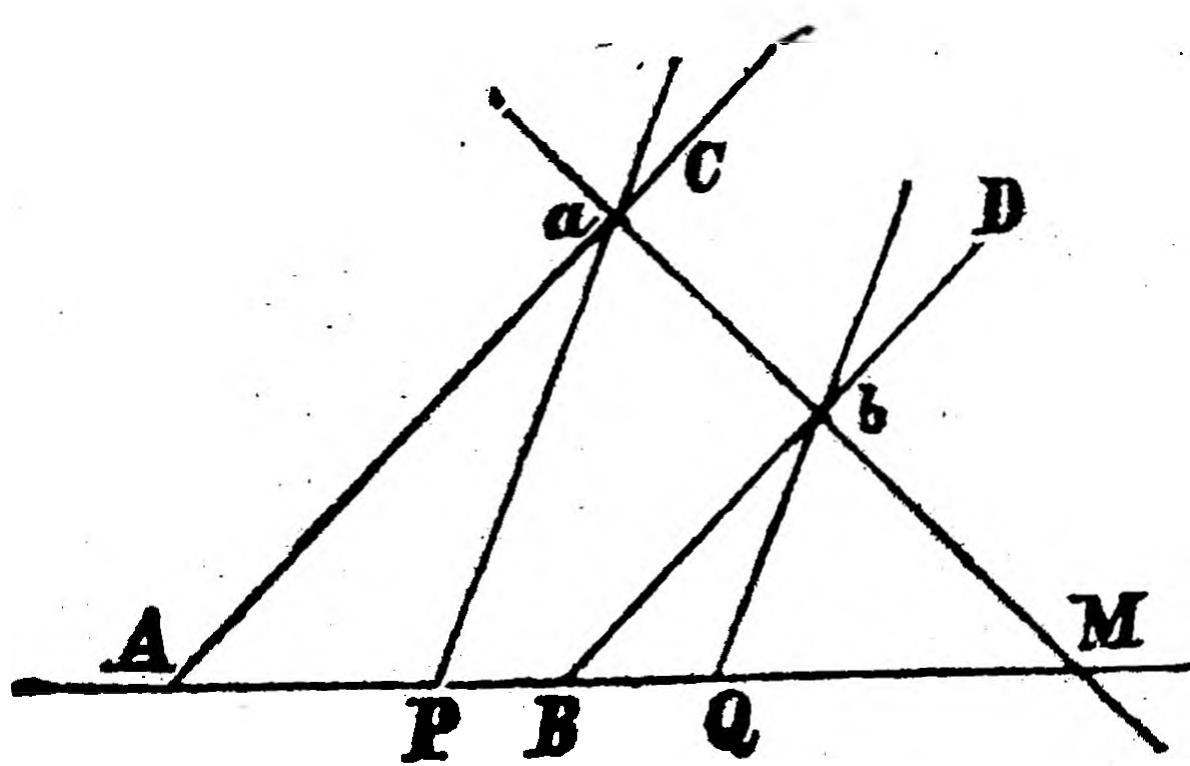
$$\xi + \eta = k \quad \text{или} \quad \frac{1}{k} \xi + \frac{1}{k} \eta = 1$$

а это уравненіе точки, коей координаты:

$$x = \frac{1}{k}, \quad y = \frac{1}{k}.$$

Пр. 2. Даны двѣ параллельныя AC и BD и двѣ точки P и Q . Черезъ точки

Фиг. 64.



P и Q проведены двѣ, какія-нибудь, параллельныя Pa и Qb , точки a и b пересѣченія ихъ съ прямыми AC и BD соединены прямою ab . Найти геометри- ческое мѣсто ab ?

Рѣшеніе. Проведемъ прямую PQ и возьмемъ PQ и AC (фиг. 64) за координатныя оси. Пусть ко- ординаты данныхъ точекъ P и Q будутъ $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$. Если положимъ $AB = a$, то уравненіе прямой

Bb' будетъ $x = a$.

Если AC и AB суть координатныя оси, то уравненія прямыхъ Pa и Qb будутъ:

$$y = \alpha(x - x_1) \quad , \quad y = \alpha(x - x_2) \quad (4)$$

абсциссы точекъ a и b суть 0 и a , чтобы получить ординаты надобно въ уравненіяхъ (4) положить въ первомъ $x = 0$, а во второмъ $x = a$, что даетъ $-\alpha x_1$, $\alpha(a - x_2)$, слѣдовательно координаты точекъ a и b будутъ:

$$(a) \quad (0, -\alpha x_1) \quad , \quad (a, \alpha(a - x_2)) \quad (b)$$

Слѣдовательно уравненіе прямой ab будетъ (§ 63):

$$\begin{vmatrix} x & , & y & , & 1 \\ 0 & , & -\alpha x_1 & , & 1 \\ a & , & \alpha(a - x_2) & , & 1 \end{vmatrix} = 0$$

откуда координаты этой прямой будутъ:

$$\xi = \frac{x_2 - x_1 - a}{\alpha x_1} \quad , \quad \eta = \frac{1}{\alpha x_1}$$

Изъ чего видимъ, что прямая проходитъ во всѣхъ своихъ положеніяхъ черезъ точку:

$$\left(\frac{\alpha x_1}{x_2 - x_1 - a} \quad , \quad 0 \right)$$

(Пр. 3. Даны двѣ точки A и B на прямой AB и двѣ другія a и b на другой прямой, которая встрѣчаетъ AB въ точкѣ C ; около этой точки (фиг. 65) вращается прямая ab . Во всѣхъ ея положеніяхъ проводятъ прямыя Aa и Bb , которыя встрѣчаются въ точкѣ S , черезъ точку S проводятъ прямую $SO \parallel ab$. Найти геометрическое мѣсто прямой SO ?

Рѣшеніе. Возьмемъ CA за ось X , CY , перпендикулярную CA , за ось Y . Въ этомъ предположеніи уравненіе вращающейся прямой Ca будетъ:

$$y = \alpha x$$

Въ извѣстномъ положеніи прямой Ca пусть координаты точекъ a и b будутъ (x', y') , (x'', y'') , то очевидно, что:

$$y' = \alpha x' \quad , \quad y'' = \alpha x''$$

Если означимъ разстояніе $Ca = \rho$, $ab = \omega$, то:

$$cb = \rho + \omega$$

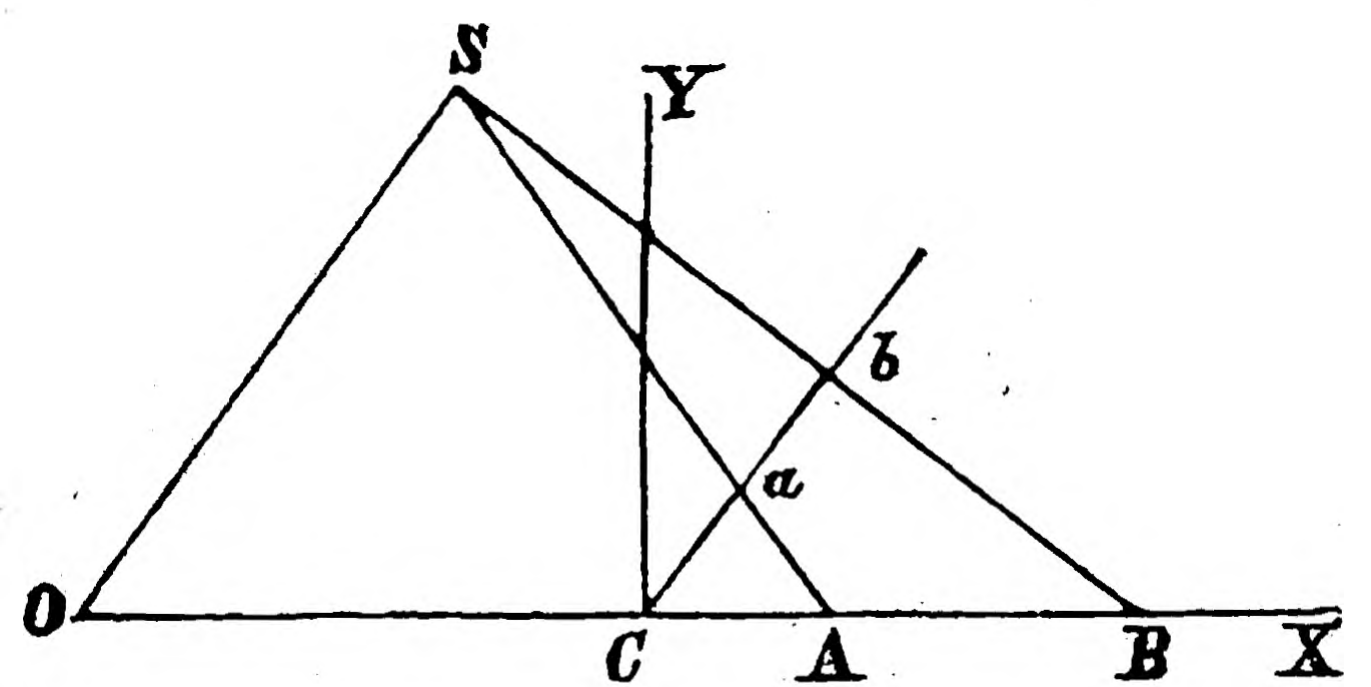
Такъ какъ координаты точекъ a и b суть $(x', \alpha x')$, $(x'', \alpha x'')$, то ихъ уравненія будутъ:

$$(a) \quad x'\xi + \alpha x'\eta = 1 \quad , \quad x''\xi + \alpha x''\eta = 1 \quad (b)$$

Полагая:

$$CA = x_1 \quad , \quad CB = x_2$$

Фиг. 65.



координаты точекъ A и B будутъ $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, слѣдовательно ихъ уравненія будутъ:

$$(A) \quad x_1\xi = 1, \quad x_2\xi = 1 \quad (B)$$

Если имѣемъ уравненія точекъ (a) и (b) , (A) и (B) , то легко найти координаты прямыхъ Aa и Bb . Эти координаты получатся, опредѣляя изъ уравненій (a) и (A) , (b) и (B) , ξ и η , что даетъ:

$$(Aa) \quad \left(\frac{1}{x}, \frac{x_1 - x'}{\alpha x_1 x'} \right), \quad (Bb) \quad \left(\frac{1}{x_2}, \frac{x_2 - x''}{\alpha x' x_2} \right)$$

Имѣя координаты (Aa) и (Bb) , найдемъ уравненіе точки ихъ пересѣченія S (§ 63):

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \frac{1}{x_1} & \frac{x_1 - x'}{\alpha x' x_1} & 1 \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_2 - x''}{\alpha x' x_2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (S)$$

Откуда будемъ имѣть координаты точки S .

Изъ уравненія мы найдемъ, что координаты (x_3, y_3) точки S будутъ:

$$x_3 = \frac{x'x_1x_2 - x'x''x_2 - x'x_1x_2 + x'x'x_1}{x_1x'' - x'x_2}, \quad y_3 = \frac{x'x''(x_1 - x_2)}{x_1x'' - x'x_2} \alpha$$

Уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (S) параллельно прямой Ca , будетъ:

$$y - y_3 = \alpha(x - x_3)$$

Чтобы найти точку ея встрѣчи съ осью X , надобно въ этомъ уравненіи положить $y = 0$, то $x = CO$, если O есть точка ея встрѣчи:

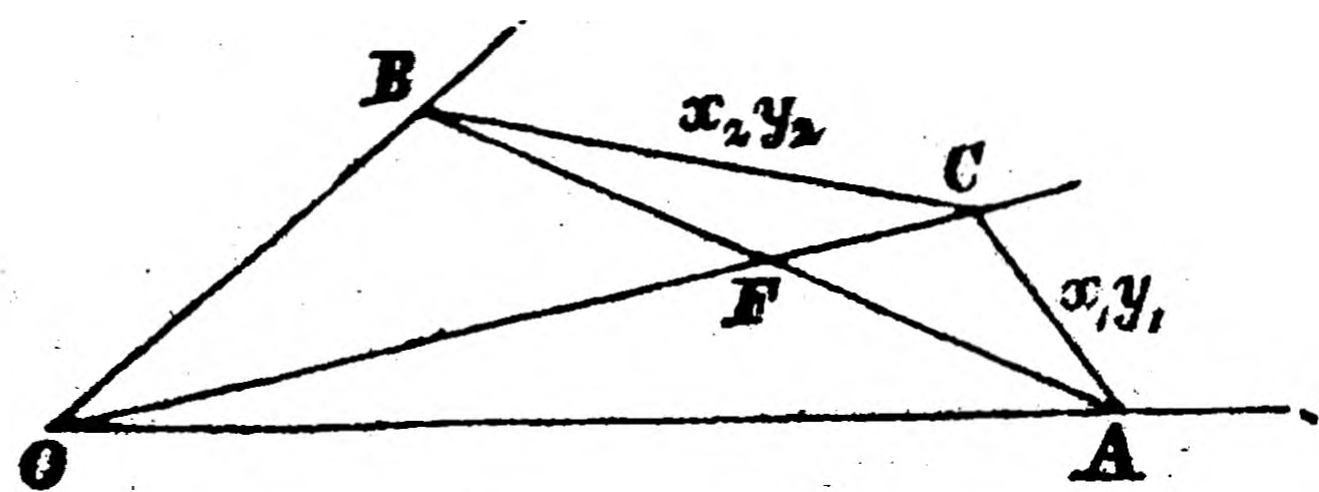
$$CO = \frac{\alpha x_3 - y_3}{\alpha}$$

подставляя предъидущія выраженія для x_3, y_3 , найдемъ:

$$CO = \frac{x_1 x_2 \omega}{x_1(\rho + \omega) - \rho x_2}$$

величина постоянная, слѣдовательно прямая постоянно проходитъ черезъ точку O , т. е. эта точка есть геометрическое мѣсто прямой SO .

/ *Пр. 4.* Даны три прямая OA, OB, OC , проходящія черезъ одну точку O (фиг. 66); вершины треугольника скользятъ по этимъ тремъ прямымъ, двѣ изъ его сторонъ AC и BC проходятъ черезъ двѣ данныя точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Найти геометрическое мѣсто третьей стороны AB ?



Фиг. 66.

Рѣшеніе. Возьмемъ OA и OB за координат-

ныя оси, то уравненіе прямой OC будетъ:

$$y = \alpha x \quad (OC)$$

Координаты точекъ A и B будутъ $(x', 0)$, $(0, y')$, если положимъ $OA = x'$, $OB = y'$, слѣдовательно уравненіе прямой AB будетъ:

$$y = -\frac{y'}{x'}(x - x')$$

Уравненія прямыхъ AC и BC будутъ:

$$(AC) \quad y = \frac{y_1}{x_1 - x'}(x - x'), \quad y - y_2 = \frac{y_2 - y'}{x_2}x \quad (BC)$$

Но эти прямые должны пересѣкаться на OC , слѣдовательно мы будемъ имѣть координаты точки C , опредѣливъ x и y изъ уравненій OC и AC , OC и BC , что даетъ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y_1 x'}{y_1 - \alpha(x_1 - x')} & x &= \frac{x_2 y'}{\alpha x_2 - (y_2 - y')} \\ y &= \frac{\alpha y_1 x'}{y_1 - \alpha(x_1 - x')} & y &= \frac{\alpha x_2 y'}{\alpha x_2 - (y_2 - y')} \end{aligned}$$

Но такъ какъ эти выраженія равны, то мы будемъ имѣть:

$$\frac{y_1 x'}{y_1 - \alpha(x_1 - x')} = \frac{x_2 y'}{\alpha x_2 - (y_2 - y')}$$

Откуда найдемъ, полагая $x' = \frac{1}{\xi}$, $y' = \frac{1}{\eta}$:

$$y_1(\alpha x_2 - y_2)\eta + x_2(\alpha x_1 - y_1)\xi - (\alpha x_2 - y_1) = 0$$

или:

$$\frac{y_1(\alpha x_2 - y_2)}{\alpha x_2 - y_1}\eta + \frac{x_2(\alpha x_1 - y_1)}{\alpha x_2 - y_1}\xi = 1$$

Это уравненіе точки, коей координаты суть:

$$x = -x_2 \frac{\alpha x_1 - y_1}{\alpha x_2 - y_1} \quad y = -y_1 \frac{\alpha x_2 - y_2}{\alpha x_2 - y_1}$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто прямой AB есть точка. Рѣшить еще слѣдующіе примѣры:

Пр. 5. Даны двѣ прямые SA и SB и двѣ точки P и Q на одной прямой съ точкою S . Если черезъ точки P и Q проведемъ къ каждой изъ точекъ, данной третьей прямой ML , прямые, которыя встрѣтятъ SA и SB въ точкахъ m и n , то геометрическое мѣсто прямой mn есть точка.

Пр. 6. Даны двѣ прямые SA и SB и точка R . Если черезъ эту точку проведемъ, какую-нибудь прямую, которая встрѣтитъ SA и SB въ точкахъ m и n ; черезъ двѣ другія данныя точки P и Q проведемъ прямые Pm и Qn , которыя встрѣтятъ SA и SB въ точкахъ m_1 и n_1 , то геометрическое мѣсто прямой $m_1 n_1$ будетъ точка.

Пр. 7. Даны три прямые SA , SB , SC , проходящія черезъ одну и ту же точку S , прямые эти встрѣчаютъ третью данную прямую въ трехъ точкахъ A , B , C . Если черезъ каждую изъ точекъ M прямой SC , проведемъ прямую MB , которая встрѣчаетъ SA въ точкѣ a и параллельную AB , которая встрѣчаетъ SB въ точкѣ b , черезъ точку b проведемъ bA , которая встрѣчаетъ SC въ точкѣ c , то геометрическое мѣсто прямой ac есть точка. Чертежи къ каждой изъ задачъ читатель можетъ легко сдѣлать по указаніямъ въ задачѣ.

Рѣшить наконецъ примѣръ:

Пр. 8. Если изъ данныхъ точекъ, въ какомъ угодно числѣ, опустимъ перпендикуляры на такъ выбранную прямую, что сумма произведеній этихъ перпендикуляровъ на данныя числа равна нулю, то геометрическое мѣсто такихъ прямыхъ есть точка.

Рѣшеніе. Пусть уравненіе искомой прямой будетъ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (5)$$

пусть координаты, данныхъ точекъ, будутъ:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots (x_n, y_n)$$

а данныя числа $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$.

По условію задачи мы будемъ имѣть (§ 45):

$$m_1(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p) + m_2(x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha - p) + \dots + m_n(x_n \cos \alpha + y_n \sin \alpha - p) = 0$$

откуда:

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n) \cos \alpha + (m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n) \sin \alpha - p(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = 0$$

Опредѣляя отсюда p и вставляя въ уравненіе (5), найдемъ:

$$x \cos \alpha \sum_1^n m_r + y \sin \alpha \sum_1^n m_r - \cos \alpha \sum_1^n m_r x_r - \sin \alpha \sum_1^n m_r y_r = 0$$

откуда, найдемъ:

$$(x \sum_1^n m_r - \sum_1^n m_r x_r) + \operatorname{tg} \alpha (y \sum_1^n m_r - \sum_1^n m_r y_r) = 0$$

Изъ формы этого уравненія видимъ, что эта прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ:

$$x \sum_1^n m_r - \sum_1^n m_r x_r = 0, \quad y \sum_1^n m_r - \sum_1^n m_r y_r = 0$$

Координаты точки пересѣченія, или геометрическаго мѣста, будутъ:

$$x = \frac{\sum_1^n m_r x_r}{\sum_1^n m_r}, \quad y = \frac{\sum_1^n m_r y_r}{\sum_1^n m_r}$$

§ 86. *Геометрическія мѣста въ полярныхъ координатахъ.* Иногда по характеру задачи удобнѣе брать или составлять уравненія въ полярныхъ координатахъ.

Вотъ нѣсколько примѣровъ:

Пр. 9. Даны двѣ точки A и B (фиг. 67), черезъ точку B проведена, какая-нибудь, прямая BP , изъ точки A опустимъ на нее перпендикуляръ AP и продол-

ЖИМЪ ЕГО ДО ТОЧКИ Q ТАКЪ, ЧТО $AP \cdot AQ = k^2$, k ЕСТЬ ВЕЛИЧИНА ПОСТОЯННАЯ. НАЙТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МѢСТО ТОЧКИ Q ?

Рѣшеніе. Возьмемъ A за полюсь, AB за начало угловъ, пусть $AB = a$, $\angle BAP = \varphi$, $AQ = \rho$.

По условию мы имѣемъ:

$$AP \cdot QA = k^2$$

но:

$$AP = a \cos \varphi$$

слѣдовательно геометрическое мѣсто будетъ:

$$\rho a \cos \varphi = k^2 \quad \text{или} \quad \rho \cos \varphi = \frac{k^2}{a}$$

а это, очевидно, прямая перпендикулярная къ AB .

Пр. 10. Даны углы въ треугольникѣ ABC , вершина A неподвижна, вершина B скользитъ по данной прямой BP . Найти геометрическое мѣсто третьей вершины C ?

Рѣшеніе. Возьмемъ A за полюсь, AP перпендикулярную BP за начало угловъ (фиг. 68), пусть

$$\angle A = \alpha, \quad \angle B = \beta, \quad \angle C = \gamma, \quad AC = \rho, \\ \angle PAC = \varphi, \quad AP = a.$$

Такъ какъ углы въ треугольникѣ даны, то мы имѣемъ:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = k$$

Но $AP = AB \cos (\varphi - \alpha) = a$, откуда:

$$\rho \cos (\varphi - \alpha) = ak$$

а это есть уравненіе прямой, составляющей уголъ α съ данною прямою BP и пересекающей ее на разстояніи ak отъ точки A .

Пр. 11. Дано основаніе AB треугольника ABC и сумма сторонъ, изъ конца B основанія возставляемъ перпендикуляръ BP къ сторонѣ BC . Найти геометрическое мѣсто точки его встрѣчи съ равнодѣлящей CP внѣшняго угла BCE ?

Рѣшеніе. Возьмемъ точку B за полюсь, AB за начало угловъ (фиг. 69), то $BP = \rho$, $\angle PBD = \varphi$.

Означимъ черезъ a, b, c стороны треугольника, противуположація угламъ A, B, C .

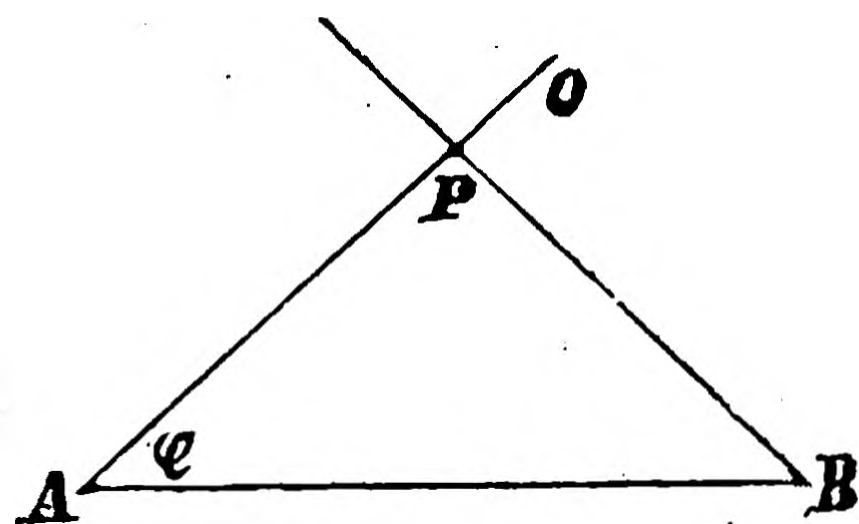
Легко видѣть, что $\angle BCP = 90 - \frac{1}{2}C$, а изъ $\triangle PBC$ мы будемъ имѣть:

$$a = \rho \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \tag{6}$$

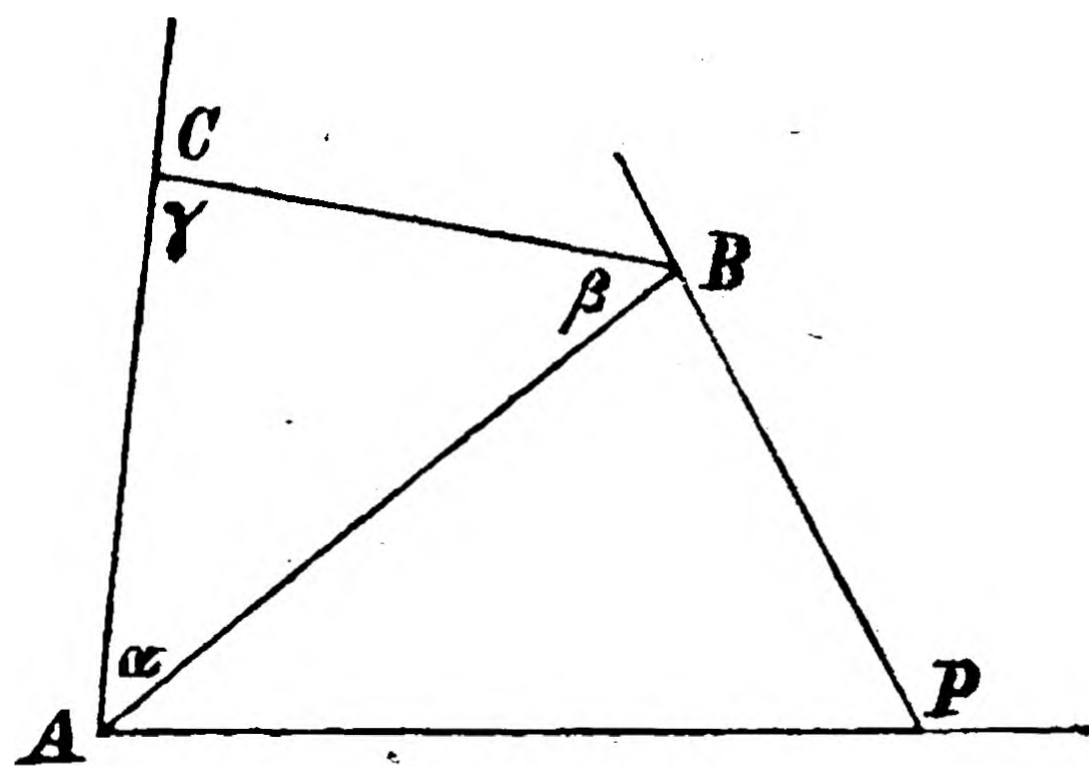
Слѣдовательно, если выразимъ a и $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C$ черезъ φ , то будемъ имѣть уравненіе геометрическаго мѣста точки P . Изъ $\triangle ABC$ мы имѣемъ:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

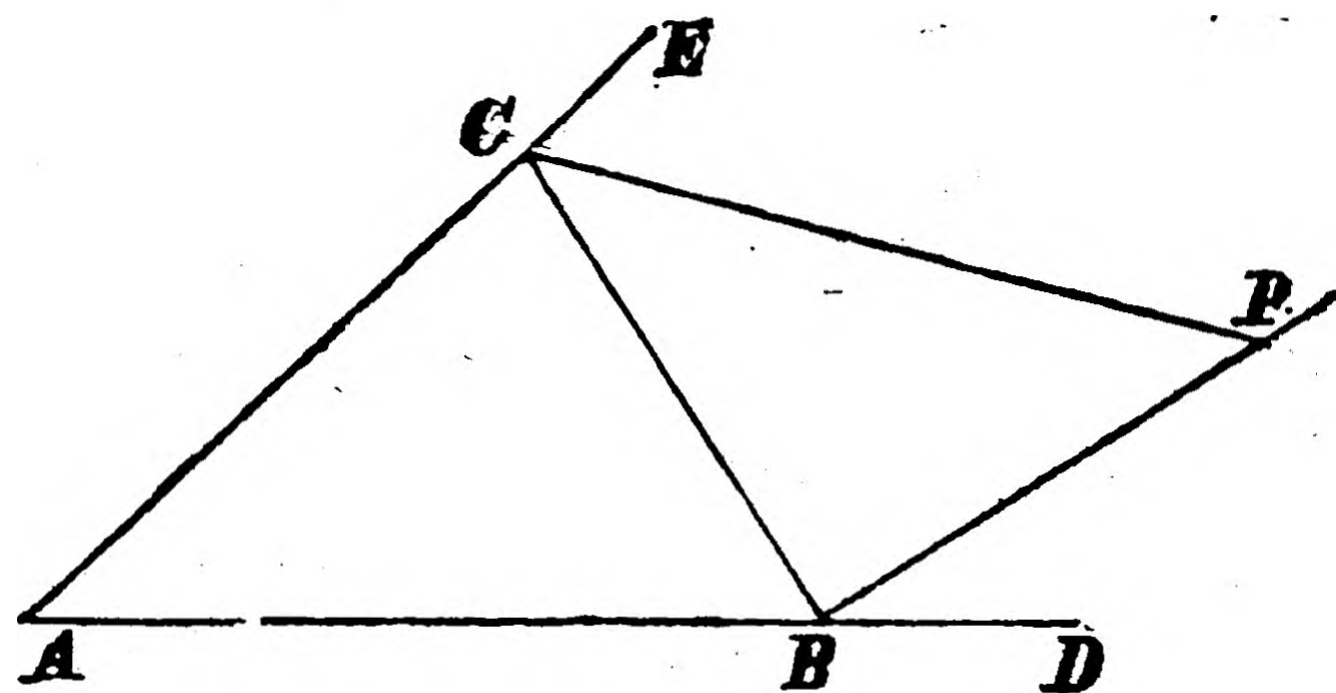
Фиг. 67.



Фиг. 68.



Фиг. 69.



но если сумма сторонъ есть m , то:

$$b = m - a$$

слѣдовательно, такъ какъ:

$$\cos B = \sin \varphi$$

то:

$$m^2 - 2ma + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \varphi$$

откуда:

$$a = \frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \varphi)}$$

Но мы имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{b \sin C}{b(1 + \cos C)}$$

а такъ какъ:

$$b \sin C = c \sin B = c \cos \varphi \quad \text{и} \quad b \cos C = a - c \cos B = a - c \sin \varphi$$

то:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{c \cos \varphi}{m - c \sin \varphi}$$

подставляя въ уравненіе (6) найденныя выраженія для a и $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C$, найдемъ уравненіе геометрическаго мѣста:

$$\frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \varphi)} = \frac{\rho c \cos \varphi}{m - c \sin \varphi} \quad \text{или} \quad \rho \cos \varphi = \frac{m^2 - c^2}{2c}$$

Откуда видимъ, что геометрическое мѣсто есть перпендикуляръ къ основанію AB , проведенный на разстояніи $\frac{m^2 - c^2}{2c}$ отъ B .

Рѣшить ту же задачу относительно внутренней равнодѣлящей уголъ ACB ?

Пр. 12. Дано n прямыхъ линій и точка O , проведемъ черезъ O , какую-нибудь прямую, которая встрѣтитъ данныя прямыя въ точкахъ r_1, r_2, \dots, r_n , на этой прямой построимъ точку R такъ, чтобы:

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{Or_1} + \frac{1}{Or_2} + \dots + \frac{1}{Or_n}$$

Найти геометрическое мѣсто точекъ R ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія прямыхъ будутъ:

$$\rho \cos(\varphi - \alpha_1) = p_1, \quad \rho \cos(\varphi - \alpha_2) = p_2, \dots, \rho \cos(\varphi - \alpha_n) = p_n$$

Легко видѣть, что уравненіе геометрическаго мѣста будетъ:

$$\frac{n}{\rho} = \frac{\cos(\varphi - \alpha_1)}{p_1} + \frac{\cos(\varphi - \alpha_2)}{p_2} + \dots$$

очевидно, прямая линія.

§ 87. Мы уже выше видѣли, какъ по извѣстнымъ даннымъ условіямъ отыскивается геометрическое мѣсто точекъ, положеніе которыхъ удовлетворяетъ даннымъ условіямъ. Слѣдующіе примѣры даются для упражненій, въ которыхъ уравненія геометрическихъ мѣстъ выше 1-ой степени.

Пр. 1. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего основаніе дано и сумма квадратовъ сторонъ?

$$\text{Отв. } x^2 + y^2 = \frac{1}{2} m^2 - a^2.$$

Пр. 2. Даны: основаніе и сумма или разность m разъ взятый квадратъ одной стороны и n разъ взятый квадратъ другой?

$$\text{Отв. } (m \pm n)(x^2 + y^2) + 2(m \mp n)ax + (m \pm n)a^2 = k^2.$$

Пр. 3. Даны основаніе и отношеніе сторонъ.

Пр. 4. Даны основаніе и произведеніе тангенсовъ угловъ при основаніи.

$$\text{Отв. } y^2 + m^2 x^2 = m^2 a^2.$$

Пр. 5. Даны основаніе, уголъ въ вершинѣ или что тоже сумма угловъ при основаніи.

$$\text{Отв. } x^2 + y^2 - 2axy \cotg \varphi = a^2.$$

Пр. 6. Даны основаніе и разность угловъ при основаніи.

$$\text{Отв. } x^2 - y^2 + 2axy \cotg \varphi = a^2.$$

Пр. 7. Даны: основаніе и одинъ изъ угловъ при основаніи равенъ удвоенному другому.

$$\text{Отв. } 3x^2 - y^2 + 2ax = a^2.$$

Пр. 8. Даны: основаніе и $\text{tg } C = m \text{tg } B$.

$$\text{Отв. } m(x^2 + y^2 - a^2) = 2a(a - x).$$

Пр. 9. Проведена прямая MB параллельно OC (см. пр. 7, § 85), пересѣкающая двѣ данныя прямыя въ точкахъ B и B' и взято $AM^2 = PB \cdot PB'$, найти геометрическое мѣсто точки M ?

$$\text{Отв. } mx(m'x + n') = y(mx + m'x + n').$$

Пр. 10. MA есть средне-гармоническая между AB и AB' .

$$\text{Отв. } 2mx(m'x + n') = y(mx + m'x + n').$$

Пр. 11. Данъ уголъ въ вершинѣ треугольника, найти геометрическое мѣсто точки, въ которой основаніе раздѣлено въ данномъ отношеніи, если при этомъ дана площадь треугольника?

$$\text{Отв. } xy = \text{постоянному.}$$

Пр. 12. Если дано основаніе.

$$\text{Отв. } \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} - \frac{2xy \cos \omega}{mn} = \frac{b^2}{(m + n)^2}.$$

Пр. 13. Если основаніе проходитъ чрезъ данную точку.

$$\text{Отв. } \frac{mx'}{x} + \frac{ny'}{y} = m + n.$$

Пр. 14. Найти геометрическое мѣсто точки P (см. пр. 12, § 86), если прямая CD не параллельна основанію?

Пр. 15. Дано основаніе CD треугольника, найти геометрическое мѣсто вершины, если AB на данной прямой есть постоянный отрѣзокъ (см. пр. 12, § 86)?

$$\text{Отв. } (x'y - y'x)(y - y'') + (x''y - y''x)(y - y') = a(y - y')(y - y'').$$

ГЛАВА IX.

Ангармония, гармония, инволюция.

§ 88. Отрѣзокъ прямой линіи между точками a и b изображается черезъ ab , принимая a за начало отрѣзка, а b за конецъ.

Тотъ же отрѣзокъ, но взятый въ противоположномъ направленіи изображается черезъ ba . Если примѣнимъ здѣсь геометрическое значеніе знаковъ $+$ и $-$, то мы должны положить:

$$ab = -ba \quad \text{или} \quad ab + ba = 0 \quad (1)$$

т. е. если отрѣзокъ, откладываемый въ извѣстномъ направленіи на прямой, принимается за положительный, то отложенный въ противоположномъ направленіи онъ принимается за отрицательный.

§ 89. Предложеніе. Какое бы нибыло относительное положеніе трехъ точекъ a , b , c на одной прямой линіи мы всегда будемъ имѣть:

$$ab + bc + ca = 0 \quad (2)$$

Доказательство. Если точки находятся на прямой въ порядкѣ a , b , c (фиг. 70), то уравненіе (2) очевидно, потому что сумма отрѣзковъ:

$$ab + bc = ac \quad , \quad \text{а} \quad ac = -ca$$

слѣдовательно мы имѣемъ (2).

Фиг. 70.



Если точка c будетъ между точками a и b , то мы имѣемъ (фиг. 71):

$$ab = ac + cb$$

но:

$$ac = -ca \quad , \quad cb = -bc$$

подставляя, найдемъ снова (2).

Фиг. 71.



Точно также легко показать и для другихъ положеній точекъ c и b относительно a , что уравненіе (2) всегда имѣетъ мѣсто.

На основаніи этого свойства можно, какой-нибудь, отръзокъ bc выразить разностью $ac - ab$, гдѣ a есть, какая-нибудь, точка на прямой bc . Въ этомъ случаѣ точка a служитъ началомъ отсчитыванія отръзковъ.

§ 90. *Предложеніе.* Какое бы нибыло относительное положеніе четырехъ точекъ a, b, c, d , на одной прямой линіи, мы будемъ всегда имѣть:

$$ab \cdot cd + ac \cdot db + ad \cdot bc = 0 \quad (3)$$

Доказательство. Если точки находятся на прямой въ порядкѣ a, b, c, d , то мы будемъ имѣть, отсчитывая всѣ отръзки отъ точки a :

$$cd = ad - ac, \quad db = da - ba, \quad bc = ac - ab$$

подставляя въ (3), вмѣсто отръзковъ cd, db, bc эти выраженія, найдемъ, что выраженіе (3) равно нулю (фиг. 72).

Фиг. 72.



Если бы точки были въ порядкѣ b, a, c, d (фиг. 73), то для этого порядка, по предъидущему, мы будемъ имѣть:

$$ba \cdot cd + bc \cdot da + bd \cdot ac = 0$$

но по условію мы имѣемъ:

$$ba = -ab, \quad bd = -db, \quad da = -ad$$

подставляя, найдемъ (3).

Фиг. 73.



Точно также можно показать, что уравненіе (3) имѣетъ мѣсто и при другихъ положеніяхъ точекъ.

§ 91. *Опредѣленіе.* Возьмемъ четыре точки a, b, c, d на одной прямой линіи (фиг. 72) и будемъ ихъ разсматривать по-парно соответственными, напримѣръ, a и b, c и d . Эти четыре точки образуютъ шесть отръзковъ ab, ac, ad, bc, bd и cd .

Составимъ изъ этихъ отръзковъ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{ac}{ad} \cdot \frac{bc}{bd} = \frac{ac \cdot bc}{ad \cdot bd} \quad (4)$$

т. е. отношеніе разстояній первой точки a , изъ первой пары (a, b) , отъ точекъ (c, d) второй пары, раздѣленное на отношеніе разстояній второй точки b , изъ первой пары, отъ точекъ второй пары.

Такое выраженіе называется *ангармоническимъ* отношеніемъ четырехъ точекъ. Мы его будемъ изображать символомъ $(abcd)$, гдѣ a и b , c и d суть пары соотвѣтственныхъ точекъ. Слѣдовательно символъ, напримѣръ, $(cdab)$ будетъ изображать выраженіе:

$$\frac{ca}{cb} \cdot \frac{da}{db}$$

Такъ какъ вторая часть выраженія (4) можетъ быть написана въ четырехъ формахъ:

$$\frac{ac}{ad} \cdot \frac{bc}{bd} = \frac{ac}{ad} \cdot \frac{bd}{bc} = \frac{ac}{bc} \cdot \frac{bd}{ad} = \frac{bd}{ad} \cdot \frac{ac}{bc} = \frac{bd}{bc} \cdot \frac{ac}{ad}$$

или также:

$$\frac{ac}{ad} \cdot \frac{bc}{bd} = \frac{ca}{cb} \cdot \frac{da}{db} = \frac{db}{da} \cdot \frac{cb}{ca} = \frac{bd}{bc} \cdot \frac{ad}{ac}$$

то есть:

$$(abcd) = (cdab) = (dcba) = (badc) \quad (5)$$

слѣдовательно, если соотвѣтственными парами будутъ ab и cd , cd и ab , dc и ba , ba и dc , то ангармоническое отношеніе неизмѣняется. Эти перестановленія получаются изъ $(abcd)$, второе перестановленіемъ паръ a и b , c и d между собою, третее получается изъ втораго перемѣщеніемъ буквъ c и d , a и b между собою, а четвертое получится такъ изъ перваго, какъ третее получено изъ втораго.

Такъ какъ изъ четырехъ буквъ всѣхъ перестановленій двадцать четыре, то различныя ангармоническія отношенія суть только слѣдующія группы:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad (abcd) \quad , \quad (acdb) \quad , \quad (adbc) \\ \text{II} \quad (abdc) \quad , \quad (acbd) \quad , \quad (adcb) \end{array} \quad (6)$$

Первая группа получается изъ $(abcd)$ круговымъ перемѣщеніемъ трехъ буквъ bcd , а вторая группа получается изъ первой, перемѣщая между собою сопряженныя точки вторыхъ паръ. Легко видѣть, что произведенія соотвѣтственныхъ паръ ангармоническихъ отношеній (6) равны единицѣ, т. е.:

$$\begin{array}{l} (abcd) \cdot (abdc) = 1 \\ (acdb) \cdot (acbd) = 1 \\ (adbc) \cdot (adcb) = 1 \end{array} \quad (7)$$

Слѣдовательно ангармоническія отношенія второй группы (6) суть обратныя ангармоническимъ отношеніямъ первой группы. Три ангармоническія отношенія первой группы (6) мы будемъ называть *основными*. Слѣдовательно основныя ангармоническія отношенія суть слѣдующія:

$$\frac{ac}{ad} \cdot \frac{bc}{bd} , \quad \frac{ad}{ab} \cdot \frac{cd}{cb} , \quad \frac{ab}{ac} \cdot \frac{db}{dc} \quad (8)$$

Если обратимъ вниманіе на направленіе отрѣзковъ въ предъидущихъ трехъ ангармоническихъ отношеніяхъ и на условіе относительно знаковъ, то увидимъ, что ангармоническія отношенія первое и третье (8) суть положительныя, а второе отрицательное.

§ 92. Мы видѣли въ § 90, (3), что если четыре точки a, b, c, d находятся на одной прямой линіи, то мы всегда имѣемъ слѣдующее выраженіе:

$$ab \cdot cd + ac \cdot db + ad \cdot bc = 0$$

раздѣляя всѣ члены этого тождества на послѣдній членъ $ad \cdot bc$, найдемъ:

$$\frac{ac \cdot db}{ad \cdot bc} + \frac{ab \cdot cd}{ad \cdot bc} + 1 = 0$$

или:

$$\frac{ac}{ad} \cdot \frac{bc}{bd} + \frac{ab}{ad} \cdot \frac{cb}{cd} = 1$$

или:

$$(abcd) + (acbd) = 1 \quad (9)$$

Точно также найдемъ:

$$(acdb) + (adcb) = 1 \quad (10)$$

$$(adbc) + (abdc) = 1$$

Ангармоническія отношенія, коихъ сумма равна единицѣ, называются *дополнительными*.

Изъ уравненій (7) и (9), (10) мы видимъ, что всѣ шесть ангармоническихъ отношеній, такъ связаны между собою, что могутъ быть всѣ выражены въ функціи одного изъ нихъ. Если положимъ:

$$(abcd) = \alpha, \quad \text{то} \quad (abdc) = \frac{1}{\alpha}$$

дополнительныя имъ:

$$(acbd) = 1 - \alpha, \quad (adbc) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \quad (11)$$

и обратныя послѣднимъ двумъ:

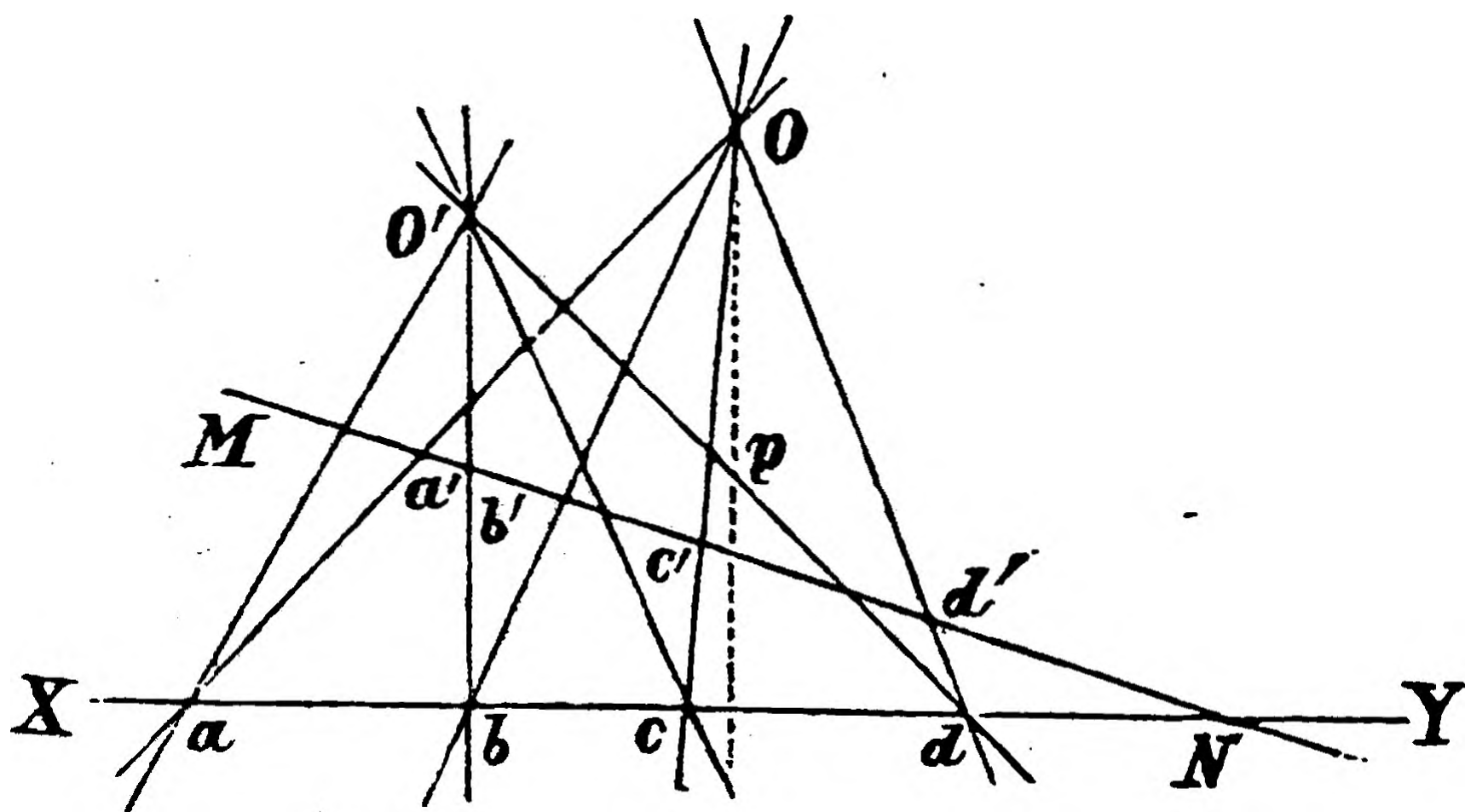
$$(acdb) = \frac{1}{1-\alpha} \quad , \quad (adcb) = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Какое бы изъ этихъ выраженій ни означили одной буквой, напримѣръ $1-\alpha = \beta$, всѣ функціи (11) получаютъ тѣже формы только въ другомъ порядкѣ:

$$\alpha = 1 - \beta \quad , \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1-\beta} \quad , \quad 1 - \alpha = \beta \quad , \quad \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\beta} \quad ,$$

$$\frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta-1} \quad , \quad \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{\beta-1}{\beta}$$

Фиг. 74.



§ 93. Возьмемъ, какую-нибудь, точку O (фиг. 74), внѣ прямой, на которой находятся четыре точки a, b, c, d . Проведемъ черезъ точку O и точки a, b, c, d прямыя Oa, Ob, Oc и Od . Означимъ углы между этими прямыми символами $(Oa, Ob), (Oa, Oc)$

Площади треугольниковъ $\Delta aOc, \Delta bOd, \Delta aOd, \Delta aOb, \Delta bOc, \Delta cOd$ можно выразить двоякимъ образомъ:

$$\begin{aligned} 2 \Delta aOc &= ac \cdot p = Oa \cdot Oc \cdot \sin(Oa, Oc) \\ 2 \Delta bOd &= bd \cdot p = Ob \cdot Od \cdot \sin(Ob, Od) \\ 2 \Delta aOd &= ad \cdot p = Oa \cdot Od \cdot \sin(Oa, Od) \\ 2 \Delta aOb &= ab \cdot p = Oa \cdot Ob \cdot \sin(Oa, Ob) \\ 2 \Delta bOc &= bc \cdot p = Ob \cdot Oc \cdot \sin(Ob, Oc) \\ 2 \Delta cOd &= cd \cdot p = Oc \cdot Od \cdot \sin(Oc, Od) \end{aligned} \tag{12}$$

Если въ каждомъ изъ ангармоническихъ отношеній точекъ a, b, c, d поставимъ вмѣсто отрѣзковъ ac, ab, \dots ихъ выраженія, полученныя изъ выраженій (12), то найдемъ, напримѣръ:

$$(abcd) = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\sin(Oa, Oc)}{\sin(Oa, Od)} : \frac{\sin(Ob, Oc)}{\sin(Ob, Od)} \tag{13}$$

точно такія же выраженія найдемъ и для другихъ ангармоническихъ отношеній.

Выраженіе:

$$\frac{\sin(Oa, Oc)}{\sin(Oa, Od)} \cdot \frac{\sin(Ob, Oc)}{\sin(Ob, Od)} \quad (14)$$

называется *ангармоническимъ отношеніемъ* связки четырехъ прямыхъ Oa, Ob, Oc, Od , проходящихъ черезъ точку O . Оно обозначается символомъ $(O . abcd)$; слѣдовательно:

$$(abcd) = (O . abcd) \quad (15)$$

§ 94. *Предложеніе.* Изъ уравненія (13) слѣдуетъ, что ангармоническое отношеніе $(O . abcd)$ связки, не будетъ измѣняться, при перемѣщеніи точки O на плоскости, если прямая проходитъ постоянно черезъ точки a, b, c, d . И, обратно, ангармоническое отношеніе $(abcd)$ точекъ на прямой не будетъ измѣняться, если прямая XU перемѣщается на плоскости, а связка Oa, Ob, Oc, Od не измѣняется, т. е:

$$(abcd) = (a'b'c'd') \quad , \quad (O . abcd) = (O' . abcd) \quad (16)$$

§ 95. Вообще шесть выраженій (11) ангармоническихъ отношеній четырехъ точекъ имѣютъ различныя числовыя значенія, но въ частности точки a, b, c, d могутъ быть такъ расположены, что нѣкоторыя изъ этихъ выраженій будутъ равны между собой. Такъ можетъ случиться, что:

- 1) $\alpha = \frac{1}{\alpha}$ откуда $\alpha = \pm 1$
- 2) $\alpha = 1 - \alpha$ откуда $\alpha = \frac{1}{2}$
- 3) $\alpha = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$ откуда $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ (17)
- 4) $\alpha = \frac{1}{1 - \alpha}$ откуда $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$
- 5) $\alpha = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ откуда $\alpha^2 - 2\alpha = 0$, $\alpha = 0$ и $\alpha = 2$

Изъ этихъ значеній только три различны. Въ самомъ дѣлѣ, если $\alpha = 1$, то мы будемъ имѣть слѣдующія числовыя значенія для шести ангармоническихъ отношеній:

$$\alpha \quad , \quad \frac{1}{\alpha} \quad , \quad 1 - \alpha \quad , \quad \frac{\alpha - 1}{\alpha} \quad , \quad \frac{1}{1 - \alpha} \quad , \quad \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$1 \quad , \quad 1 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad \infty \quad , \quad \infty$$

Такъ какъ одно изъ этихъ значеній есть 0, а это пятый случай (17), то пятый случай даетъ тѣже числовыя значенія, только въ другомъ порядкѣ:

$$0, \infty, 1, \infty, 1, 0$$

Положимъ $\alpha = -1$, то ангармоническія отношенія будутъ:

$$-1, -1, 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

и такъ какъ между ними находятся второй и пятый случаи (17), т. е. $\frac{1}{2}, 2$, то онѣ дадутъ тѣже числовыя значенія.

Замѣтимъ, что третій и четвертый случаи тождественны, слѣдовательно четыре точки на прямой могутъ имѣть только три исключительныя положенія, при которыхъ ангармоническія отношенія будутъ:

$$\alpha = 1, \alpha = -1, \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Разсмотримъ каждый изъ этихъ случаевъ.

1) $\alpha = 1$.

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$\frac{ac}{ad} = \frac{bc}{bd}$$

т. е. отношенія разстояній двухъ точекъ a и b отъ другихъ двухъ c и d равны, слѣдовательно точки a и b , c и d совпадаютъ.

2) $\alpha = -1$.

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$(abcd) = -1$$

или:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = -1, \quad \frac{ac}{ad} + \frac{bc}{bd} = 0 \quad (18)$$

Четыре точки, находящіяся въ такомъ положеніи называются гармоническими. Если второе изъ уравненій (18) напишемъ въ формѣ:

$$\frac{ac}{bc} = -\frac{ad}{db} \quad (19)$$

то легко видѣть, что точки c и d дѣлятъ разстояніе между точками a и b одна внутренне, а другая внѣшне, въ одномъ и томъ-же отношеніи. Если тоже уравненіе напишемъ въ формѣ:

$$\frac{db}{dc} = -\frac{da}{ac} \quad (20)$$

то легко видѣть, что разстояніе между точками c и d дѣлится точками b и a , одною внутренне, другою внѣшне, въ одномъ и томъ-же отношеніи. Поэтому точки a и b , c и d называются *сопряженными гармоническими парами*.

Если уравненіе (19) напишемъ въ формѣ:

$$\frac{ac}{cb} = \frac{ad}{bd} \quad (21)$$

и положимъ, что точка d находится на безконечности, то:

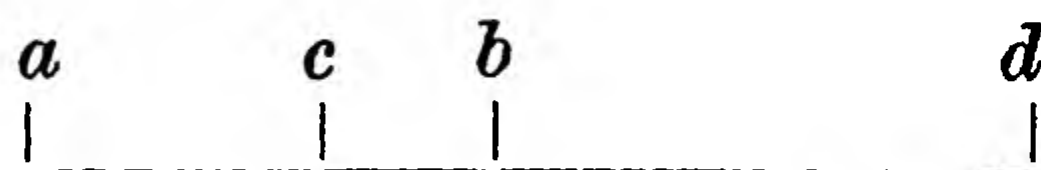
$$a \infty = b \infty$$

слѣдовательно:

$$ac = cb$$

т. е. точка c дѣлитъ разстояніе ab пополамъ. Откуда слѣдуетъ, что двѣ точки, ихъ середина и точка на безконечности суть *четыре гармоническія точки* (фиг. 75).

Фиг. 75.



Если уравненіе (21) напишемъ въ формѣ:

$$\frac{1}{cb} + \frac{1}{db} = \frac{2}{ab} \quad (22)$$

то изъ него легко видѣть, что если точка c будетъ приближаться къ точкѣ b , то точка d также будетъ приближаться къ точкѣ b и обѣ съ нею совпадутъ

Если точка c , перейдя средину ab , будетъ приближаться къ a , то d перейдетъ на другую сторону отрѣзка ab и будетъ къ нему приближаться пока не совпадетъ съ точкою a .

$$3) \alpha^2 - \alpha + 1 = 0, \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{или} \quad \alpha^3 + 1 = 0$$

Въ этомъ случаѣ α есть кубическій корень изъ -1 , слѣдовательно имѣетъ три значенія:

$$\alpha = -1, \quad \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Въ первыхъ двухъ случаяхъ мы имѣемъ три системы по два равныхъ ангармоническихъ отношеній, а въ настоящемъ случаѣ двѣ системы по три равныхъ ангармоническихъ отношеній. Кремона, итальянскій геометръ, это послѣднее расположеніе точекъ назвалъ *эквиангармоническимъ*.

Проективность.

§ 96. Если на двухъ данныхъ прямыхъ AB и $A'B'$, пересѣкающихся въ точкѣ O , возьмемъ по три точки a, b, c , на AB , и a', b', c' , на $A'B'$, то по данной четвертой d , на AB , можно найти всегда четвертую d' , на $A'B'$, такъ чтобы ангармоническое отношеніе точекъ a, b, c, d было равно ангармоническому отношенію точекъ a', b', c', d' , т. е., чтобы:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{ba} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'} \quad (23)$$

точки a и a' , b и b' , c и c' , d и d' называются *соотвѣтственными*.

Такъ какъ четвертая точка d взята произвольно, то можно построить на прямыхъ AB и $A'B'$ безчисленное множество соотвѣтственныхъ точекъ, коихъ ангармоническія отношенія съ точками a, b, c и a', b', c' равны. Напримѣръ, по данной еще точкѣ e , на прямой AB , можно построить точку e' , на $A'B'$, такъ чтобы:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ae}{be} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'e'}{b'e'} \quad (24)$$

Если, такимъ образомъ, построимъ ряды на AB и $A'B'$, то ангармоническое отношеніе четырехъ, произвольно выбранныхъ изъ ряда, точекъ на AB всегда равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ точекъ на $A'B'$.

Такъ, напримѣръ, если раздѣлимъ (24) на (23), то найдемъ:

$$\frac{ad}{bd} : \frac{ae}{be} = \frac{a'd'}{b'd'} : \frac{a'e'}{b'e'}$$

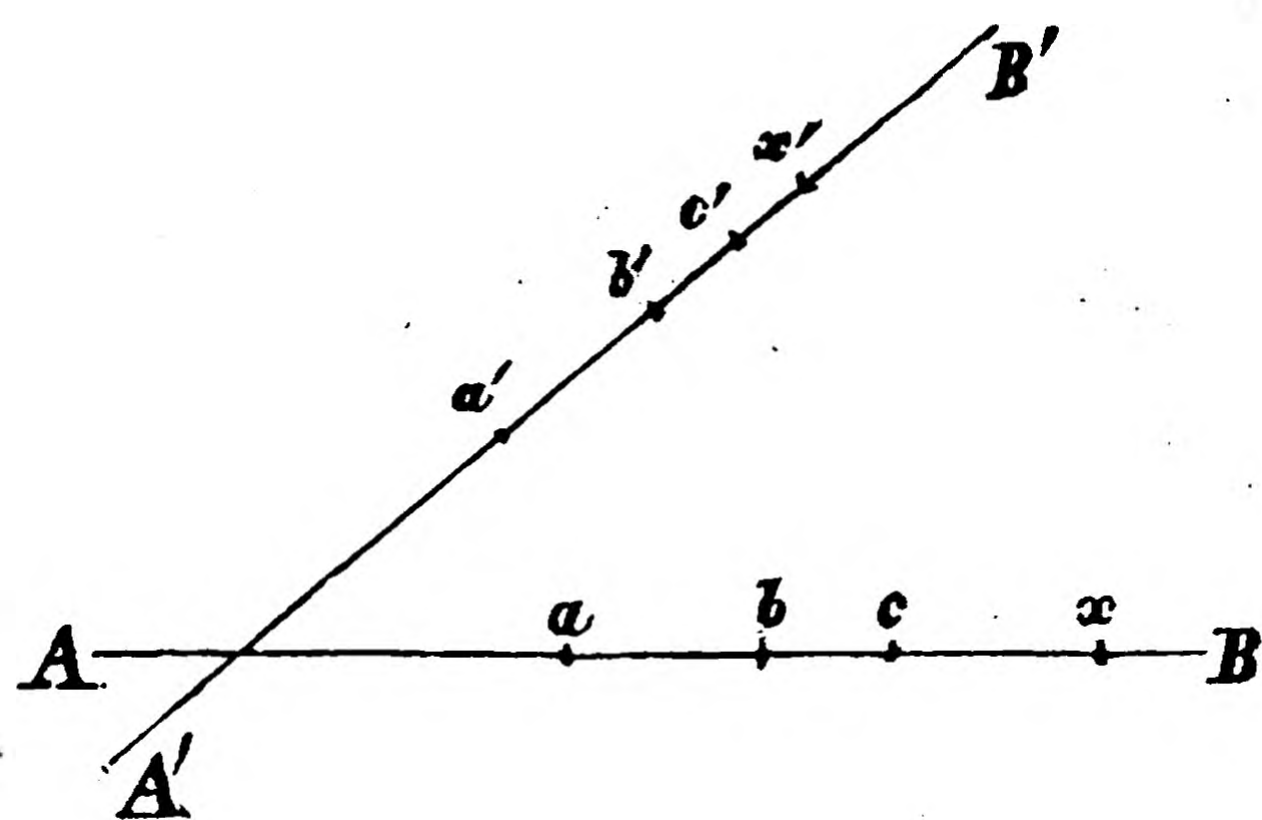
т. е. ангармоническое отношеніе точекъ a, b, d, e равно ангармоническому отношенію соотвѣтственныхъ точекъ a', b', d', e' .

Такіе два ряда на прямыхъ AB и $A'B'$ называются *проективными*. Шаль ихъ назвалъ *гомографическими*, а Мёбіусъ *коллинеарными*.

Изъ этого видимъ, что три данныя пары точекъ на прямыхъ AB и $A'B'$ вполне опредѣляютъ проективные ряды.

Слѣдовательно, если a и a' , b и b' , c и c' (фиг. 76) суть три данныя пары, то, какая-нибудь, четвертая проективная пара x и x' найдется изъ уравненія (23):

Фиг. 76.



$$\frac{ax}{bx} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'x'}{b'x'} : \frac{a'c'}{b'c'} \quad (25)$$

§ 97. *Точки соответствующія безконечно удаленнымъ.* Если на двухъ прямыхъ расположены два проективные ряда, то каждой точкѣ одного ряда соответствуетъ точка другаго. Посмотримъ какія точки соответвуютъ точкамъ на безконечности.

Если въ уравненіи (25) положимъ $x' = \infty$, а $x = I$, то найдемъ:

$$\frac{aI}{bI} : \frac{ac}{bc} = 1 : \frac{a'c'}{b'c'}$$

или:

$$\frac{aI}{bI} = \frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'} \quad (26)$$

Полагая $x = \infty$, а $x' = I'$ изъ того-же уравненія (25), найдемъ:

$$1 : \frac{ac}{bc} = \frac{a'I'}{b'I'} : \frac{a'c'}{b'c'}$$

или:

$$\frac{a'I'}{b'I'} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{ac}{bc} \quad (27)$$

Съ помощью уравненій (26) и (27), опредѣляются точки I и I' , соответствующія безконечно удаленнымъ точкамъ на прямыхъ AB и $A'B'$ двухъ проективныхъ рядовъ, которые опредѣляются тремя данными парами a, a' ; b, b' ; c, c' соответственныхъ точекъ. Эти точки связаны слѣдующею зависимою, которая получается, раздѣливъ (26) на (27):

$$\frac{aI}{bI} = \frac{b'I'}{a'I'} \quad (28)$$

Такъ какъ проєктивные ряды вполнѣ опредѣляются тремя парами соответственныхъ точекъ, то въ уравненіи (25) можно или одну изъ данныхъ паръ замѣстить парюю I, ∞ или ∞, I' или двѣ пары данныхъ точекъ замѣстить двумя парами I, ∞ и ∞, I' .

Если оставимъ пары a, a' и b, b' , а вмѣсто пары c, c' возьмемъ I, ∞ , то въ уравненіи (25), которое можно написать въ формѣ:

$$\frac{ax}{bx} : \frac{a'x'}{b'x'} = \frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'} \quad (29)$$

надобно замѣстить вторую часть выраженіемъ (26), что даетъ:

$$\frac{ax}{bx} = \frac{aI}{bI} \cdot \frac{a'x'}{b'x'} \quad (30)$$

Это уравненіе проєктивности двухъ рядовъ, опредѣляемыхъ тремя парами $a, a'; b, b'$ и I, ∞ .

Точно также проєктивность тѣхъ же рядовъ опредѣляемыхъ парами $a, a'; b, b'$ и ∞, I' , выражается уравненіемъ:

$$\frac{a'I'}{b'I'} \cdot \frac{ax}{bx} = \frac{a'x'}{b'x'} \quad (31)$$

Наконецъ, если пары b, b' и c, c' замѣстимъ парами I, ∞ и ∞, I' , то найдемъ:

$$\frac{ax}{Ix} = \frac{a'x'}{a'I'} \quad (32)$$

Таковы уравненія (29), (30), (31), (32) проєктивности двухъ рядовъ.

§ 98. Назовемъ точки I и I' , соответствующія безконечно удаленнымъ точкамъ *главными*.

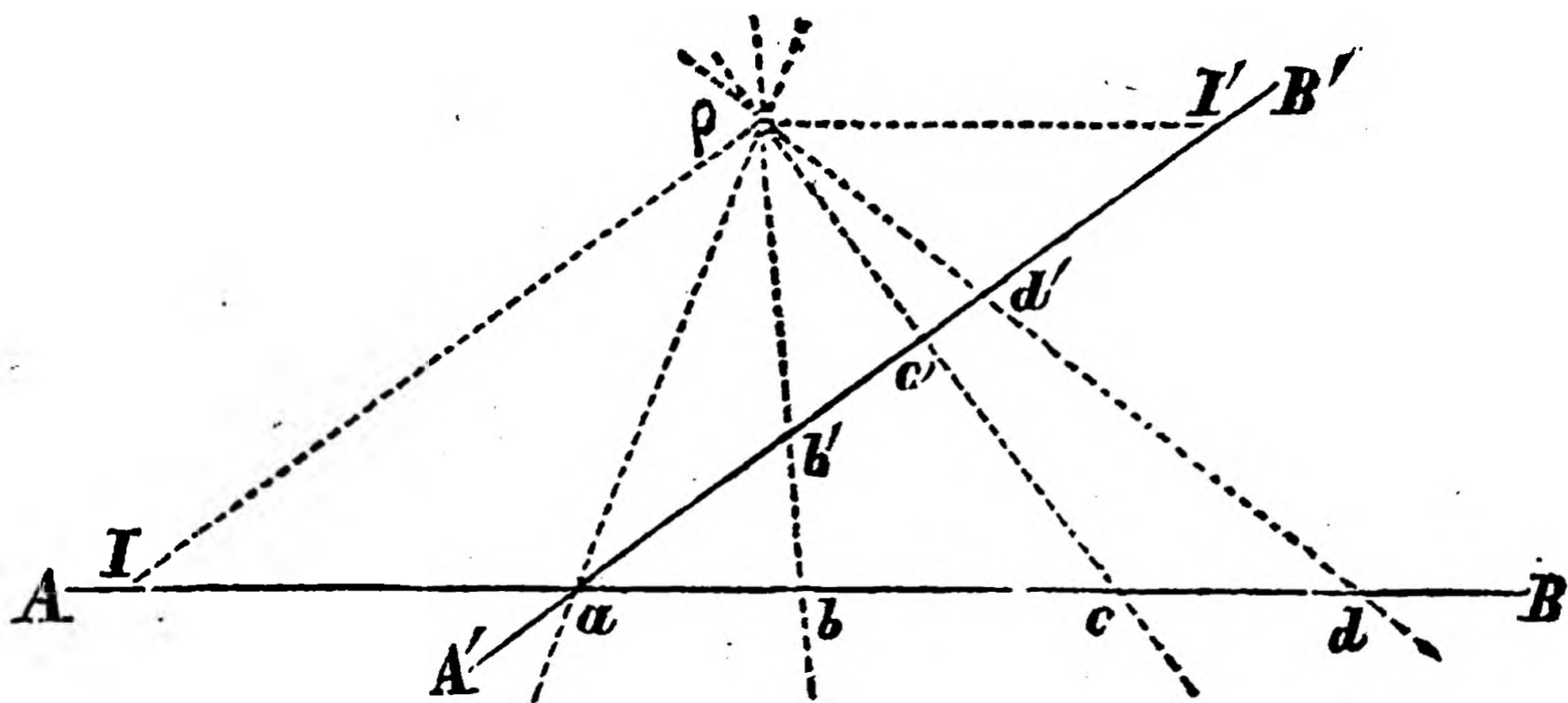
Если бы два проєктивные ряда были такого свойства, что $I = \infty$, то и $I' = \infty$, какъ показываетъ уравненіе (28), въ этомъ случаѣ проєктивность двухъ рядовъ выразится уравненіемъ:

$$\frac{ax}{bx} = \frac{a'x'}{b'x'}, \quad (33)$$

полученнымъ изъ (30) или (31), полагая въ первомъ $I = \infty$, а во второмъ $I' = \infty$. Изъ предъидущаго уравненія видимъ, что проєктивность, въ этомъ случаѣ, обращается въ пропорціональность. Такіе два ряда называются *подобными*. Слѣдовательно въ подобныхъ рядахъ на двухъ прямыхъ, точкѣ на безконечности, въ одномъ изъ нихъ, соответствуетъ точка на безконечности въ другомъ и обратно.

§ 99. *Предложение.* Если въ двухъ проэтивныхъ рядахъ на двухъ прямыхъ AB и $A'B'$ соотвѣтственныя точки, наприимѣръ, a и a' совпадаютъ, то всѣ прямыя, проходящія черезъ соотвѣтственныя точки, проходятъ черезъ одну точку, которая называется *центромъ перспективы*.

Фиг. 77.



Доказательство. Пусть a, b, c, d, \dots и a, b', c', d', \dots

суть (фиг. 77) соотвѣтственныя точки на AB и $A'B'$, т. е. a есть общая точка или сама себѣ соотвѣтственная.

Такъ какъ эти ряды проэтивны по условію, то мы имѣемъ:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ac'}{ad'} : \frac{b'c'}{b'd'} \quad (34)$$

Проведемъ прямыя bb' и cc' и точку ихъ пересѣченія p соединимъ съ общею точкою a , проведемъ прямую pd , если она не пройдетъ чрезъ соотвѣтственную точку d' , то она встрѣтитъ $A'B'$ въ точкѣ d'' , слѣдовательно мы будемъ имѣть (§ 94):

$$(abcd) = (ab'c'd'')$$

соображаясь съ (34), найдемъ равенство:

$$(ab'c'd') = (ab'c'd'')$$

изъ котораго видимъ, что точка d'' совпадаетъ съ d' .

Такіе два проэтивные ряда называются *перспективными*. Если проэтивные ряды подобны, центръ перспективы находится на бесконечности.

Два проэтивные ряда могутъ быть сдѣланы перспективными; для этого одну изъ прямыхъ передвигаютъ параллельно самой себѣ до тѣхъ поръ пока одна изъ точекъ одной прямой не совпадетъ съ своею соотвѣтственной точкою другой прямой. Очевидно, что въ этомъ положеніи проэтивные ряды дѣлаются перспективными.

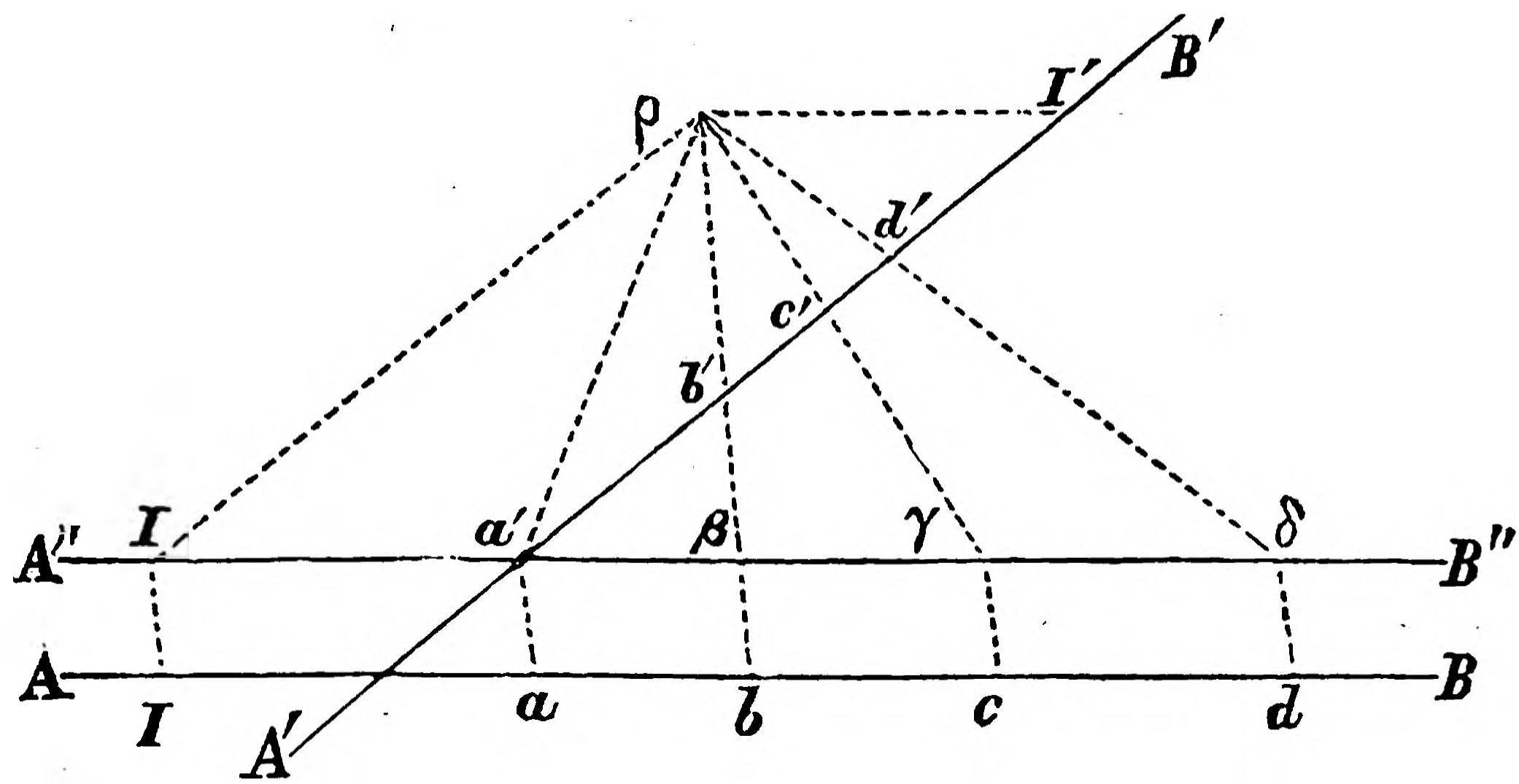
Въ двухъ перспективныхъ рядахъ легко построить главныя точки I и I' . Пусть a, b, c, d, \dots и a, b', c', d', \dots (фиг. 77) будутъ два перспективныхъ ряда на прямыхъ AB и $A'B'$. Если черезъ центръ p перспективы проведемъ прямую $pI \parallel A'B'$ и $pI' \parallel AB$, то эти прямыя встрѣтятъ AB и $A'B'$ въ точкахъ I и I' , которыя, очевидно, и суть главныя точки соотвѣтственныя точкамъ на бесконечности на прямыхъ AB и $A'B'$.

§ 100. Легко также построить точки I и I' въ двухъ проэтивныхъ рядахъ (фиг. 78).

Пусть $a, b, c, d, \dots; a', b', c', d', \dots$ будутъ два проэтивные ряда на AB и $A'B'$; передвинемъ прямую AB параллельно самой себѣ въ положеніе $A''B''$ такъ, чтобы

Фиг. 78.

одна изъ ея точекъ, напри-
мѣръ a , совпала со своей со-
отвѣтственной a' на $A'B'$;
проведемъ прямую aa' и
 $b\beta \parallel aa'$, $c\gamma \parallel aa'$, $d\delta \parallel aa'$ и
т. д.; рядъ полученныхъ, та-
кимъ образомъ, точекъ $\alpha, \beta,$
 γ, δ, \dots на $A''B''$ будетъ пер-



спективный съ рядомъ a', b', c', d', \dots . Центръ перспективы ρ получится, проводя прямыя $b'\beta$ и $c'\gamma$ до встрѣчи въ точкѣ ρ . Если черезъ ρ проведемъ прямыя $\rho I'' \parallel A'B'$ и $\rho I' \parallel AB$, то точки I'' и I' на прямыхъ $A''B''$ и $A'B'$ будутъ главными точками перспективныхъ рядовъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ и a', b', c', d', \dots . Если наконецъ проведемъ $I''I \parallel aa'$, то точка I , полученная на AB , будетъ искомая. Очевидно, что точки I и I' , полученные на AB и $A'B'$, будутъ главныя двухъ данныхъ проэтивныхъ рядовъ.

§ 101. Проэтивность двухъ рядовъ на двухъ прямыхъ можетъ быть выражена еще въ болѣе общей формѣ, слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ три пары соотвѣтственныхъ точекъ, произвольно выбранныхъ изъ двухъ данныхъ проэтивныхъ рядовъ.

Три выбранныя пары вполне опредѣляютъ проэтивность рядовъ, какъ мы видѣли выше. Возьмемъ на каждой изъ прямыхъ AB и $A'B'$ по точкѣ и примемъ каждую изъ этихъ точекъ за начало, такъ что всѣ точки на прямыхъ AB и $A'B'$ опредѣляются разстояніями ихъ отъ точекъ принятыхъ за начало. Пусть три пары точекъ опредѣляются абсциссами $x_1, x'_1; x_2, x'_2$ и x_3, x'_3 и наконецъ, какія-нибудь, скользящія точки опредѣляются абсциссами x и x' .

Легко видѣть, что уравненіе проэтивности (23) сдѣлается, если точки $a, b, c, d; a', b', c', d'$ будутъ имѣть абсциссами $x_1, x_2, x_3, x; x'_1, x'_2, x'_3, x'$:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{x'_1 - x'_3}{x'_2 - x'_3} \cdot \frac{x'_1 - x'}{x'_2 - x'} \quad (35)$$

откуда, послѣ всѣхъ приведеній, это уравненіе приметъ форму:

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \quad (36)$$

гдѣ коэффициенты A, B, C, D суть функціи трехъ паръ данныхъ точекъ.

Такимъ уравненіемъ связаны два проэктивные ряда на двухъ прямыхъ.

Обратно, если между абсциссами точекъ на двухъ прямыхъ, существуетъ зависимость выраженная уравненіемъ:

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \quad (37)$$

то эти два ряда будутъ проэктивны. Въ самомъ дѣлѣ, изъ этого уравненія мы имѣемъ:

$$x' = -\frac{D+Bx}{C+Ax}$$

Возьмемъ на прямой AB , какія-нибудь, четыре точки; пусть ихъ абсциссы будутъ x_1, x_2, x_3, x_4 , то абсциссы соотвѣтственныхъ точекъ x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 опредѣлятся изъ уравненій:

$$x'_1 = -\frac{D+Bx_1}{C+Ax_1}, \quad x'_2 = -\frac{D+Bx_2}{C+Ax_2}, \quad x'_3 = -\frac{D+Bx_3}{C+Ax_3}, \quad x'_4 = -\frac{D+Bx_4}{C+Ax_4}$$

откуда легко видѣть, что:

$$\frac{x'_1 - x'_2}{x'_1 - x'_3} : \frac{x'_2 - x'_3}{x'_2 - x'_4} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}$$

т. е. ангармоническія отношенія, произвольно выбранныхъ четырехъ точекъ и четырехъ имъ соотвѣтственныхъ, опредѣляемыхъ изъ уравненія (37), равны, слѣдовательно ряды проэктивны.

§ 102. Уравненію проэктивности:

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \quad (38)$$

можно дать различныя формы, опредѣляя коэффиціенты A, B, C, D точками выбранными извѣстнымъ образомъ.

Если даны три пары проэктивныхъ точекъ $x_1, x'_1; x_2, x'_2; x_3, x'_3$, то онѣ должны удовлетворять уравненію (38), слѣдовательно:

$$Ax_1x'_1 + Bx_1 + Cx'_1 + D = 0$$

$$Ax_2x'_2 + Bx_2 + Cx'_2 + D = 0$$

$$Ax_3x'_3 + Bx_3 + Cx'_3 + D = 0$$

присовокупляя къ этимъ уравненіемъ, уравненіе (38) для, какой-нибудь, пары скользящихъ точекъ, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1 \\ x_1 x'_1 & x_1 & x'_1 & 1 \\ x_2 x'_2 & x_2 & x'_2 & 1 \\ x_3 x'_3 & x_3 & x'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

таково уравненіе проэктивности двухъ рядовъ опредѣляемыхъ тремя парами соотвѣтственныхъ точекъ.

Выбирая извѣстнымъ образомъ пары соотвѣтственныхъ точекъ, уравненію проэктивности можно дать различныя формы. Въ уравненіи одинъ изъ коэффиціентовъ можно положить равнымъ единицѣ, на примѣръ A , слѣдовательно уравненіе проэктивности будетъ:

$$xx' + Bx + Cx' + D = 0 \quad (40)$$

Если за начало, на прямыхъ AB и $A'B'$, примемъ соотвѣтственныя точки, то, очевидно, при $x=0$ мы должны имѣть и $x'=0$, а это требуетъ, чтобы $D=0$, слѣдовательно уравненіе (40) сдѣлается:

$$xx' + Bx + Cx' = 0 \quad (41)$$

Если вмѣсто абсциссъ x и x' возьмемъ отрѣзки ax и $a'x'$, гдѣ a и a' суть соотвѣтственныя точки, то предъидущее уравненіе сдѣлается:

$$ax \cdot a'x' + Bax + Ca'x' = 0 \quad (42)$$

Опредѣлимъ B и C съ помощью главныхъ точекъ I и I' , для этого положимъ въ (42) послѣдовательно $ax = aI$, $a'x' = \infty$ и $a'x' = a'I'$, $ax = \infty$, то будемъ имѣть:

$$B + a'I' = 0 \quad , \quad C + aI = 0$$

откуда уравненіе (42) сдѣлается:

$$ax \cdot a'x' - a'I' \cdot ax - aI \cdot a'x' = 0 \quad (43)$$

или:

$$\frac{aI}{ax} + \frac{a'I'}{a'x'} = 1 \quad (44)$$

§ 103. На основаніи этого уравненія (44) можно рѣшить слѣдующія задачи:

Задача 1. По данной точкѣ a въ одномъ изъ двухъ данныхъ проэктивныхъ рядовъ, найти такую точку x , чтобы отрѣзокъ ax былъ равенъ соотвѣтственному отрѣзку $a'x'$ или равенъ, но съ противнымъ знакомъ?

Рѣшеніе. Эта задача рѣшается, положивъ въ уравненіи (44) $ax = a'x'$ или $ax = -a'x'$. Такія положенія даютъ:

$$ax = aI + a'I' \text{ и } ax = aI - a'I'$$

Для построенія этихъ отрѣзковъ необходимо условиться въ какомъ направленіи, отъ точекъ a и a' , считать отрѣзки положительными и въ какомъ отрицательными.

Задача 2. Даны двѣ прямыя OA и OA' и точка ρ , провести черезъ точку ρ такъ прямую, чтобы она, пересѣкаясь съ OA и OA' въ точкахъ x и x' дала отрѣзки $Ox = Ox'$ или $Ox = -Ox'$.

Рѣшеніе. Если черезъ точку ρ (фиг. 79) будемъ проводить прямыя, пересѣкающія OA и OA' , то получимъ на этихъ прямыхъ два проэктивные ряда точекъ (§ 94), въ которыхъ точка O сама себѣ соотвѣтственная, слѣдовательно соотвѣтственные точки будутъ удовлетворять уравненію (44):

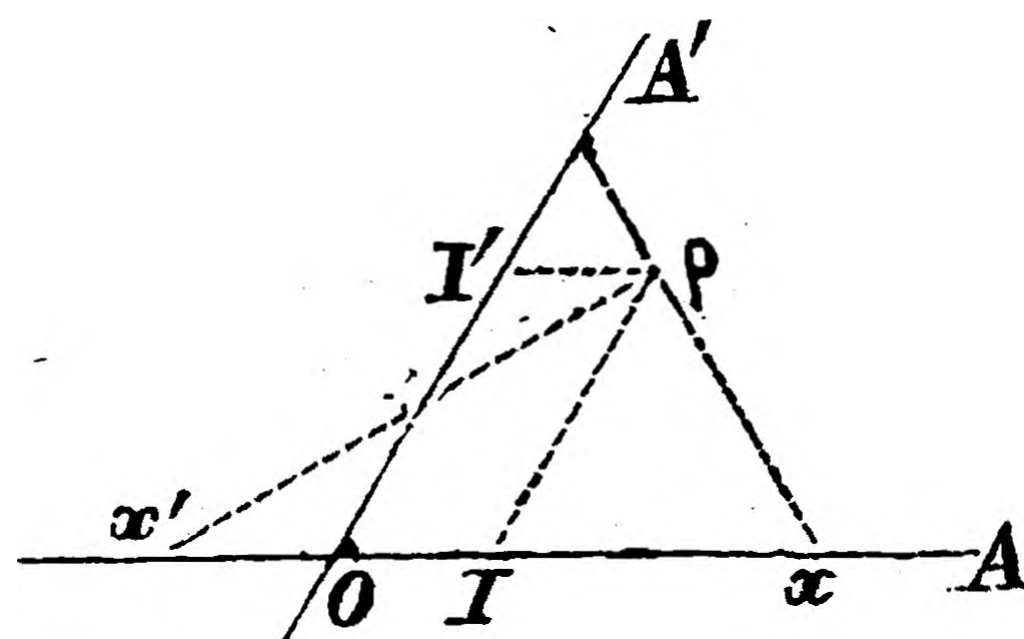
$$\frac{OI}{Ox} + \frac{OI'}{Ox'} = 1$$

полагая $Ox = Ox'$ или $Ox = -Ox'$ будемъ имѣть:

$$Ox = OI + OI' \quad , \quad Ox = OI - OI'$$

проводя черезъ ρ прямыя $\rho I' \parallel OA$ и $\rho I \parallel OA'$ найдемъ главные точки I и I' . Слѣдовательно задача рѣшается построениемъ главныхъ точекъ I и I' . Условимся считать отрѣзки по направленію отъ O къ I и I' положительными. Если отъ точки I отложимъ $Ix = OI'$ и $Ox' = -OI$, то прямыя ρx и $\rho x'$ будутъ искомыя.

Фиг. 79.



Задача 3. Черезъ данную точку ρ на основаніи треугольника $AA'B$ провести прямую $\rho xx'$, такъ чтобы отрѣзки Ax и $A'x'$ были равны или равны съ противными знаками?

Рѣшеніе. Прямая, проведенная черезъ точку ρ , пересѣкаясь съ сторонами AB и $A'B$ треугольника $AA'B$ (фиг. 80) образуетъ проэктивные ряды. Если построимъ главные точки I и I' , какъ показано выше (§ 100), то соотвѣтственные точки будутъ удовлетворять уравненію:

$$\frac{AI}{Ax} + \frac{A'I'}{A'x'} = 1$$

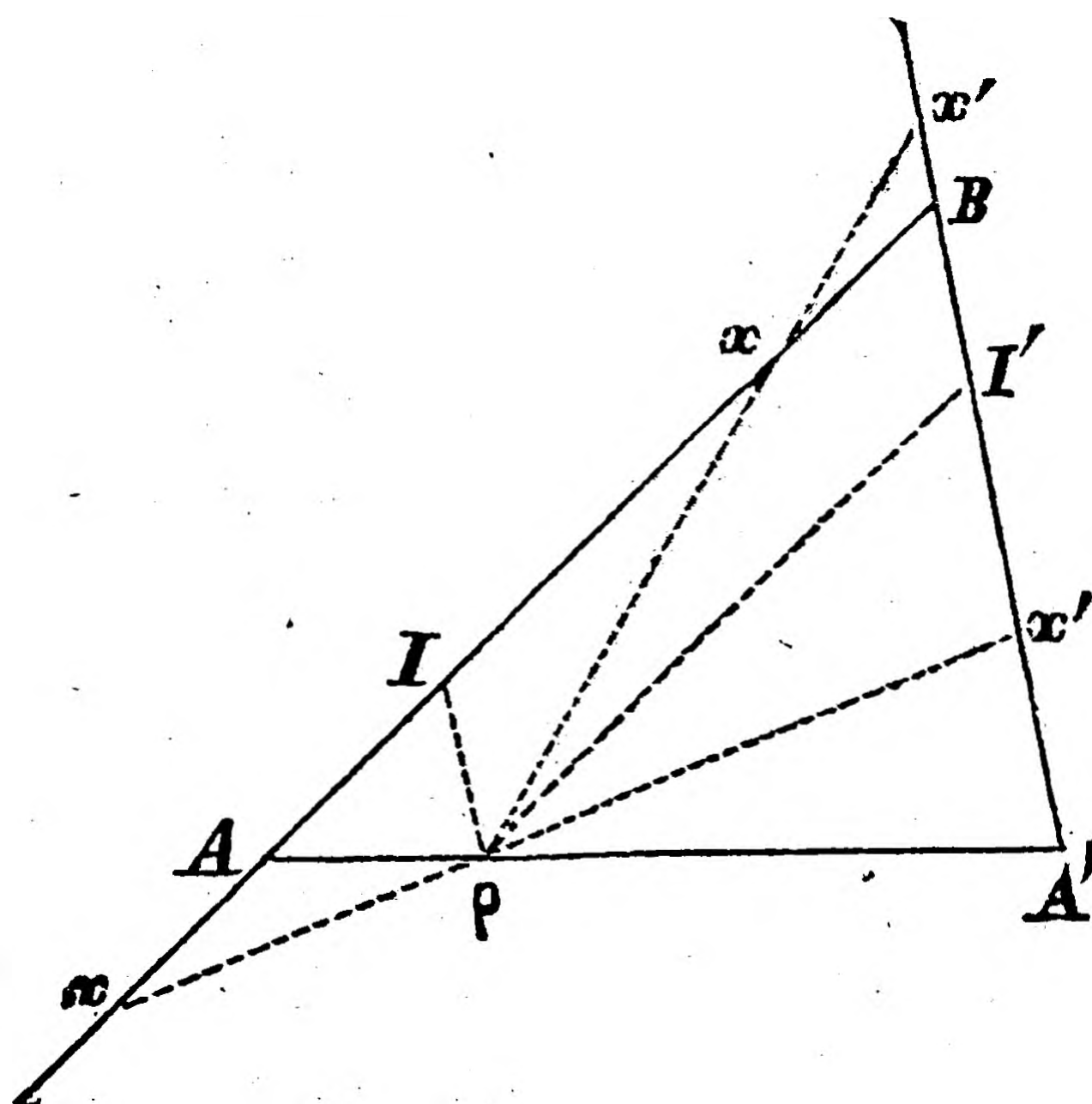
Фиг. 80.

A и A' суть соотвѣтственные точки. Полагая $Ax = \pm A'x'$, найдемъ:

$$Ax = AI \pm A'I'$$

Если условимся считать отрѣзки, отсчитываемые отъ A и A' по направленію къ I и I' , то, откладывая отъ точки I , $Ix = A'I'$ и $Ix = -A'I'$, найдемъ точки x и x' , черезъ которыя, проведенныя прямыя ρx и $\rho x'$, рѣшаютъ задачу. Если бы въ предыдущихъ задачахъ требовалось найти такіе отрѣзки Ax и $A'x'$, чтобы отношеніе между ними было данное λ , то надобно только въ уравненіяхъ положить:

$$Ax = \pm \lambda A'x'$$



§ 104. Если въ уравненіи:

$$xx' + Bx + Cx' + D = 0 \quad (45)$$

будемъ считать отрѣзки на прямыхъ AB и $A'B'$ не отъ соотвѣтственныхъ точекъ, а отъ какихъ-нибудь, a на AB и b' на $A'B'$, то предъидущее уравненіе будетъ имѣть форму:

$$ax \cdot b'x' + Bax + Cb'x' + D = 0 \quad (46)$$

Полагая $x = I$ и $x' = I'$, найдемъ:

$$B = -b'I' \quad , \quad C = -aI$$

слѣдовательно уравненіе (46) будетъ:

$$ax \cdot b'a' - b'I' \cdot ax - aI \cdot b'x' + D = 0 \quad (47)$$

чтобы опредѣлить D положимъ $x = a$, то $x' = a'$, подставляя найдемъ:

$$D = aI \cdot b'a'$$

слѣдовательно уравненіе приметъ форму:

$$ax \cdot b'x' - b'I' \cdot ax - aI \cdot b'x' + aI \cdot b'a' = 0 \quad (48)$$

Если въ (47) положимъ $a = I$, а $b' = I'$, то это уравненіе приметъ весьма простую форму:

$$Ix \cdot I'x' = aI \cdot a'I' = k^2 \quad (49)$$

k есть величина постоянная, а $D = aI \cdot a'I' = k^2$.

§ 105. Если въ уравненіи:

$$Aax \cdot b'x' + Bax + Cb'x' + D = 0 \quad (50)$$

коэффициенты B и C опредѣлимъ, полагая послѣдовательно $x = I$, $x' = \infty$; $x = \infty$, $x' = I$, то найдемъ:

$$B + A \cdot b'I' = 0 \quad , \quad C + A \cdot aI = 0.$$

откуда:

$$b'I' = -\frac{B}{A} \quad , \quad aI = -\frac{C}{A}$$

Если проэктивные ряды подобны, то $aI = \infty$ и $a'I' = \infty$ (§ 98), слѣдовательно необходимо имѣть $A = 0$, въ силу чего уравненіе (50) сдѣлается:

$$Bax + Cb'x' + D = 0$$

полагая $x = a$, $x' = a'$; $x' = b'$, $x = b$, найдемъ:

$$\frac{C}{D} = -\frac{1}{b'a'} \quad , \quad \frac{B}{D} = -\frac{1}{ab}$$

подставляя въ предыдущее уравненіе, получимъ:

$$\frac{ax}{ab} + \frac{b'x'}{b'a'} = 1 \quad (51)$$

Если вмѣсто $b'x'$ подставимъ $a'x' - a'b'$, то уравненіе преобразуется въ:

$$\frac{ax}{ab} + \frac{a'x'}{b'a'} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{ax}{a'x'} = \frac{ab}{a'b'}$$

форма, изъ которой видна пропорціональность соотвѣтственныхъ отрѣзковъ.

§ 106. Если одну изъ прямыхъ, на которыхъ расположены два проэктивные ряда, совмѣстимъ съ другою, то оба проэктивные ряда расположатся на одной прямой.

Помѣстимъ прямую $A'B'$ на AB такъ, чтобы точка b' совпала съ точкою a , то уравненіе (48) проэктивности двухъ рядовъ расположенныхъ на одной прямой, если отрѣзки отсчитываются отъ одной точки a , будетъ:

$$ax \cdot ax' - aI' \cdot ax - aI \cdot ax' + aI \cdot aa' = 0 \quad (52)$$

какъ бы прямая $A'B'$ ни была наложена на AB всегда найдутся такія двѣ соотвѣтственныя точки, которыя совпадутъ. Такія точки называются *двойными*. Чтобы найти эти точки надобно въ уравненіи (52) положить $x = x'$, полученное уравненіе:

$$\overline{ax^2} - (aI + aI')ax + aI \cdot aa' = 0 \quad (53)$$

даетъ возможность опредѣлить положеніе двойныхъ точекъ. Такъ какъ это уравненіе второй степени, то проэктивные ряды на одной прямой линіи имѣютъ двѣ двойныя точки, дѣйствительныя, совпадающія или мнимыя.

Если двойныя точки означимъ черезъ e и f , то ae и af будутъ корни уравненія (53). Изъ свойствъ квадратнаго уравненія мы имѣемъ:

$$ae + af = aI + aI'$$

а это показываетъ, что середина между e и f есть вмѣстѣ и середина между I и I' . Если O есть середина, то:

$$2aO = aI + aI'$$

слѣдовательно уравненіе (53) можно написать въ формѣ:

$$\overline{ax^2} - 2aO \cdot ax + aI \cdot aa' = 0 \quad (54)$$

Если за начало отрѣзковъ возьмемъ точку O , т. е. положимъ $a=O$, то уравненіе (54) сдѣлается:

$$\overline{Ox^2} + OI \cdot OO' = 0 \quad (55)$$

гдѣ O' есть соотвѣтственная точка точки O . Такъ какъ O есть середина между I и I' , то $OI = -OI'$, слѣдовательно:

$$\overline{Ox^2} = OI' \cdot OO' \quad (56)$$

откуда:

$$Ox = \pm \sqrt{OI' \cdot OO'}$$

т. е.:

$$Oe = +\sqrt{OI' \cdot OO'} \quad , \quad Of = -\sqrt{OI' \cdot OO'} \quad (57)$$

Слѣдовательно двойныя точки находятся по обѣ стороны точки O на разстояніи $\sqrt{OI' \cdot OO'}$.

Если точки O' и I' находятся по одну сторону точки O , то двойныя точки будутъ дѣйствительныя, въ противномъ случаѣ онѣ мнимыя.

Выраженіе (56) даетъ легкой способъ построить двойныя точки; для этого надобно только построить отрѣзокъ средне-пропорціональный между отрѣзками OI' и OO' .

§ 107. Мы видѣли, что три пары точекъ a, a' ; b, b' ; c, c' опредѣляютъ проэктивность двухъ рядовъ, а четвертая, какая-нибудь, пара опредѣляется изъ уравненія:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ax}{bx} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'x'}{b'x'}$$

или:

$$\frac{ax}{bx} = \lambda \frac{a'x'}{b'x'} \quad (58)$$

гдѣ λ есть величина постоянная. Если a и b суть двойныя точки e и f , то мы имѣемъ:

$$\frac{ex}{fx} = \lambda \frac{ex'}{fx'} \quad \text{или} \quad \frac{ex}{fx} : \frac{ex'}{fx'} = \lambda \quad (59)$$

т. е. ангармоническое отношеніе двухъ, какихъ-нибудь, соотвѣтственныхъ точекъ съ двойными точками, есть величина постоянная.

§ 108. Такова теорія проэктивности рядовъ точекъ расположенныхъ на прямыхъ линіяхъ. Съ помощью свойствъ такихъ рядовъ легко рѣша-

ются задачи, которыя занимали уже древнихъ и считались трудными. Апполоній посвятилъ имъ три сочиненія: „De sectione determinata“, „De sectione rationis“ и „De sectio spatii“. Первую задачу онъ рѣшилъ съ помощью 83-хъ предложеній, вторую съ помощью 181-го и третью съ помощью 124-хъ.

Задачи эти суть слѣдующія.

1. Даны на прямой четыре точки, требуется найти пятую, такъ чтобы отношеніе произведенія разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ къ произведенію разстояній отъ другихъ двухъ было величиною данною?

2. Даны двѣ прямыя OA и OB и на нихъ двѣ точки A и B , черезъ данную точку p провести такъ прямую, чтобы она, пересѣкаясь съ OA и OB въ точкахъ a и a' , дала отрѣзки Aa и Ba' , отношеніе между которыми было бы данное λ ?

3. На двухъ прямыхъ OA и OB даны двѣ точки A и B , провести черезъ данную точку p прямую такъ, чтобы отрѣзки Aa и Ba' , которые она дѣлаетъ на данныхъ прямыхъ, дали произведеніе данной величины λ ?

Читатель найдетъ рѣшенія этихъ задачъ въ главахъ XIV и XV сочиненія Шаля ¹⁾.

Инволюція.

§ 109. Когда два проэктивные ряда, расположенные на двухъ прямыхъ линіяхъ, переносятся на одну изъ нихъ, то есть замѣчательное положеніе этихъ рядовъ, при которомъ *главныя точки* совпадаютъ. Въ этомъ случаѣ проэктивность двухъ рядовъ, на одной прямой линіи, носитъ названіе *инволюціи*.

Говорятъ, что рядъ точекъ есть *инволюціонный*.

Посмотримъ какую форму приметъ уравненіе проэктивности въ этомъ случаѣ.

Если изъ уравненія проэктивности:

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \quad (60)$$

опредѣлимъ главныя точки I, I' въ функции коэффициентовъ, то найдемъ, полагая, послѣдовательно, $x = I, x' = \infty, x = \infty, x' = I'$:

$$I = -\frac{C}{A}, \quad I' = -\frac{B}{A}$$

¹⁾ Chasles, Traité de géométrie supérieure. Paris, 1852, in-8.

Изъ этихъ выраженій видимъ, что если точки I и I' совпадутъ, то мы должны имѣть $B = C$, слѣдовательно уравненіе проэктивности (60) приметъ форму:

$$Axx' + B(x+x') + D = 0 \quad (61)$$

Такъ какъ это уравненіе симметрично относительно x и x' , то пары соответственныхъ точекъ, опредѣляемыхъ этимъ уравненіемъ, взаимно соответственны, т. е. онѣ мѣняются ролями, когда одну изъ нихъ разсматривать, какъ принадлежащую, то къ одному, то къ другому ряду. Если точка x принадлежитъ къ первому ряду, то соответственная x' находится во второмъ ряду, а если точку x разсматривать, какъ принадлежащую ко второму ряду, то x' будетъ находится въ первомъ ряду. Вслѣдствіи такого свойства рядъ точекъ былъ названъ *инволюціоннымъ*.

Уравненіе инволюціоннаго ряда (61), выраженное въ отрѣзкахъ, отсчитываемыхъ отъ извѣстной точки a , получится изъ (52), полагая въ немъ $aI = aI' = aO$:

$$ax \cdot ax' - aO(ax + ax') + aO \cdot aa' = 0. \quad (62)$$

Точка O , совпаденія главныхъ точекъ I и I' , называется *инволюціоннымъ центромъ*. Соответственная ей точка находится на безконечности. Изъ этого видимъ, что инволюціонный рядъ точекъ отличается отъ проэктивнаго только относительнымъ положеніемъ проэктивныхъ рядовъ на одной прямой линіи. Слѣдовательно онъ имѣетъ такую же общность, какъ и ряды проэктивные.

§ 110. Чтобы получить уравненія двойныхъ точекъ инволюціоннаго ряда, надобно положить въ уравненію (62) $x = x'$, что даетъ:

$$\overline{ax^2} - 2aO \cdot ax + aO \cdot aa' = 0 \quad (63)$$

если означимъ двойныя точки черезъ e и f , то ae и af будутъ корни уравненія (63). Изъ свойствъ квадратнаго уравненія мы имѣемъ:

$$2aO = ae + af \quad \text{или} \quad aO = \frac{ae + af}{2}$$

т. е. центръ инволюціи находится на срединѣ разстоянія ef двойныхъ точекъ. Эти точки могутъ быть дѣйствительныя, совпадающія и мнимыя, смотря потому будетъ-ли:

$$\overline{aO^2} - aO \cdot aa' = aO(aO - aa') = aO \cdot a'O \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$$

Если соответственные точки a и a' будут по одну сторону центра O , то двойные точки будут действительные, если же a и a' находятся по обе стороны O , то двойные точки мнимы, наконец двойные точки совпадут, если центр будет точка сама себя соответствующая, а это тогда случится, когда центр O будет самъ на бесконечности, т. е. когда ряды подобны и соответственные отрезки равны. Мы видели (49), что:

$$Ix.I'x' = aI.a'I'$$

если рядъ будетъ инволюціонный, то $I = I' = O$, слѣдовательно уравненіе сдѣлается:

$$Ox.Ox' = Oa.Oa'$$

если вмѣсто точки a возьмемъ двойную точку e , то уравненіе сдѣлается:

$$Ox.Ox' = \overline{Oe}^2 \quad (64)$$

Мы показали, что въ проэктивномъ ряду мы имѣемъ (59):

$$\frac{ex}{fx} : \frac{ex'}{fx'} = \lambda$$

λ есть величина постоянная; если рядъ инволюціонный, то положивъ $x = O$, $x' = \infty$, найдемъ:

$$\frac{Oe}{Of} = \lambda$$

но $Oe = -Of$, слѣдовательно $\lambda = -1$; откуда видимъ, что двѣ, какія нибудь, соответственные точки суть сопряженно-гармоническія съ двойными точками инволюціоннаго ряда.

Проективныя связки.

§ 111. Если черезъ точки O и O' проходятъ лучи, черезъ первую A, B, C , а черезъ вторую A', B', C' , то по данному четвертому лучу D , проходящему черезъ точку O , можно опредѣлить четвертый лучъ D' , проходящій черезъ точку O' такъ, чтобы:

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(B, C)} \cdot \frac{\sin(A, D)}{\sin(B, D)} = \frac{\sin(A', C')}{\sin(B', C')} \cdot \frac{\sin(A', D')}{\sin(B', D')} \quad (65)$$

т. е., чтобы ангармоническое отношеніе первой связки лучей было равно ангармоническому отношенію второй.

Такъ какъ четвертый лучъ D можетъ быть взятъ произвольно, а D' опредѣляется по немъ изъ уравненія (65), то образуются, такимъ образомъ, двѣ связки лучей, коихъ ангармоническія отношенія съ лучами A, B, C и A', B', C' равны.

И равны вообще какіе бы соотвѣтственные лучи ни были взяты изъ связокъ.

Такія двѣ связки называются *проективными*, лучи A и A' , B и B' , ... называются *соотвѣтственными*.

Изъ этого видимъ, что проективныя связки опредѣляются тремя парами соотвѣтственныхъ лучей и выражаются уравненіемъ:

$$\frac{\sin(A, C) \cdot \sin(A, X)}{\sin(B, C) \cdot \sin(B, X)} = \frac{\sin(A', C') \cdot \sin(A', X')}{\sin(B', C') \cdot \sin(B', X')} \quad (66)$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\frac{\sin(A, X)}{\sin(B, X)} = \lambda \frac{\sin(A', X')}{\sin(B', X')} \quad (67)$$

гдѣ λ есть величина постоянная.

Если бы лучи A и B и соотвѣтственные лучи A' и B' были перпендикулярны, то предыдущее уравненіе будетъ имѣть форму:

$$\operatorname{tg}(A, X) = \lambda \cdot \operatorname{tg}(A', X') \quad (68)$$

§ 112. *Задача.* Показать, что если въ двухъ проективныхъ связкахъ два соотвѣтственные луча совпадутъ, то всѣ другіе соотвѣтственные лучи пересѣкутся на одной прямой линіи?

Мы не станемъ развивать свойства проективныхъ связокъ, а напишемъ только уравненія, соотвѣтствующія уравненіямъ проективныхъ рядовъ.

Уравненію (25) § 96 соотвѣтствуетъ (66).

Уравненію (42) § 102 соотвѣтствуетъ:

$$\frac{\sin(A, X) \cdot \sin(A, C)}{\sin(B, X) \cdot \sin(B, C)} + \frac{\sin(C', X') \cdot \sin(C', A')}{\sin(B', X') \cdot \sin(B', A')} = 1$$

или:

$$\lambda \frac{\sin(A, X)}{\sin(B, X)} + \mu \frac{\sin(C', X')}{\sin(B', X')} = 1 \quad (69)$$

Если лучъ A перпендикуляренъ къ B , а лучъ C' къ B' , то это уравненіе сдѣлается:

$$\lambda \operatorname{tg}(A, X) + \mu \operatorname{tg}(A', X') = 1 \quad (70)$$

Уравнение соответствующее (46) § 104:

$$\frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} \cdot \frac{\sin(B', X')}{\sin(D', X')} + \lambda \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} + \mu \frac{\sin(B', X')}{\sin(D', X')} + \nu = 0 \quad (71)$$

если лучи A и C , B' и D' перпендикулярны, то уравнение будетъ:

$$\text{tg}(A, X) \cdot \text{tg}(B', X') + \lambda \text{tg}(A, X) + \mu \text{tg}(B', X') + \nu = 0 \quad (72)$$

§ 113. Если обѣ проэктивныя связки исходятъ изъ одной точки, то всегда есть лучи соответственныя сами себѣ,—эти лучи называются *двойными*. Если эти лучи назовемъ черезъ E и F , то проэктивность можно написать въ формѣ (67):

$$\frac{\sin(E, X)}{\sin(F, X)} = \lambda \frac{\sin(E, X')}{\sin(F, X')} \quad (73)$$

Если это уравнение напишемъ въ формѣ:

$$\frac{\sin(E, X)}{\sin(F, X)} \cdot \frac{\sin(E, X')}{\sin(F, X')} = \lambda \quad (74)$$

то мы будемъ имѣть предложеніе (§ 107):

Ангармоническое отношеніе двухъ, какихъ-нибудь, соответственныхъ лучей съ двойными лучами есть величина постоянная.

Если двойные лучи перпендикулярны, то уравненіе (74) будетъ имѣть форму:

$$\text{tg}(E, X) = \lambda \text{tg}(E, X') \quad (75)$$

§ 114. Если въ уравненіи (71), гдѣ лучи B' и D' взяты произвольно, положимъ, что они совпадаютъ съ лучами A и C и назовемъ черезъ I и I' два луча, которые соответствують въ первой и во второй связкѣ одному и тому же лучу C , рассматриваемому, какъ принадлежащій и первой и второй связкѣ, то уравненіе (71) приметъ форму:

$$\frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} \cdot \frac{\sin(A, X')}{\sin(C, X')} + \lambda \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} + \mu \frac{\sin(A, X')}{\sin(C, X')} + \nu = 0 \quad (76)$$

полагая, послѣдовательно, $X = C$ и $X' = C$, найдемъ, соображаясь съ сказаннымъ выше, значеніе коэффиціентовъ λ и μ :

$$\lambda = - \frac{\sin(A, I')}{\sin(C, I')} \quad , \quad \mu = - \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)}$$

Слѣдовательно уравненіе (76) сдѣлается:

$$\frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} \cdot \frac{\sin(A, X')}{\sin(C, X')} - \frac{\sin(A, I')}{\sin(C, I')} \cdot \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} - \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)} \cdot \frac{\sin(A, X')}{\sin(C, X')} + \nu = 0 \quad (77)$$

чтобы опредѣлить коэффициентъ ν положимъ въ уравненіи (77) $X = A$, то найдемъ:

$$\nu = \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)} \cdot \frac{\sin(A, A')}{\sin(C, A')}$$

Слѣдовательно уравненіе (77), наконецъ, сдѣлается:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} \cdot \frac{\sin(A, X')}{\sin(C, X')} - \frac{\sin(A, I')}{\sin(C, I')} \cdot \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} - \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)} \cdot \frac{\sin(A, X')}{\sin(C, X')} + \\ + \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)} \cdot \frac{\sin(A, A')}{\sin(C, A')} = 0. \end{aligned} \quad (78)$$

Полагая $X = X'$, найдемъ уравненіе, опредѣляющее двойные лучи:

$$\left\{ \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} \right\}^2 - \left\{ \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)} + \frac{\sin(A, I')}{\sin(C, I')} \right\} \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} + \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)} \cdot \frac{\sin(A, A')}{\sin(C, A')} = 0 \quad (79)$$

Лучи A и C выбраны произвольно, слѣдовательно можно ихъ взять перпендикулярными, въ этомъ случаѣ уравненія (78) и (79) сдѣлаются:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(A, X) \cdot \operatorname{tg}(A, X') - \operatorname{tg}(A, I') \cdot \operatorname{tg}(A, X) - \operatorname{tg}(A, I) \cdot \operatorname{tg}(A, X') + \\ + \operatorname{tg}(A, I) \cdot \operatorname{tg}(A, A') = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

$$\operatorname{tg}^2(A, X) - \{ \operatorname{tg}(A, I) + \operatorname{tg}(A, I') \} \operatorname{tg}(A, X) + \operatorname{tg}(A, I) \cdot \operatorname{tg}(A, A') = 0 \quad (81)$$

Если бы вмѣсто A поставили лучъ C , то въ предъидущихъ уравненіяхъ (80) и (81) надобно только измѣнить A на C , а tg на cotg .

§ 115. *Инволюционная связка.* Если проективность будетъ такого свойства, что лучи будутъ взаимно соответственными, то такая связка называется *инволюционной*.

Если лучи связки взаимно соответственны, то рассматривая лучъ C , какъ принадлежащій къ первой или второй связкѣ, соответственный лучъ будетъ I , слѣдовательно уравненія проективности (78) и (80) при $I' = I$ сдѣлаются:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} \cdot \frac{\sin(A, X')}{\sin(C, X')} - \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)} \left\{ \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} + \frac{\sin(A, X')}{\sin(C, X')} \right\} + \\ + \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)} \cdot \frac{\sin(A, A')}{\sin(C, A')} = 0 \end{aligned} \quad (82)$$

$$\operatorname{tg}(A, X) \cdot \operatorname{tg}(A, X') - \operatorname{tg}(A, I) \{ \operatorname{tg}(A, X) + \operatorname{tg}(A, X') \} + \operatorname{tg}(A, I) \cdot \operatorname{tg}(A, A') = 0 \quad (83)$$

а уравненія для двойныхъ лучей примутъ форму:

$$\left\{ \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} \right\}^2 - 2 \cdot \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)} \cdot \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} + \frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)} \cdot \frac{\sin(A, A')}{\sin(C, A')} = 0 \quad (84)$$

$$\operatorname{tg}^2(A, X) - 2 \operatorname{tg}(A, I) \cdot \operatorname{tg}(A, X) + \operatorname{tg}(A, I) \cdot \operatorname{tg}(A, A') = 0 \quad (85)$$

§ 116. Послѣ этой общей теоріи проэктивности и ея особенной формы—инволюціи, рассмотримъ эту послѣднюю, выраженную извѣстною зависимостью между тремя парами точекъ сопряженныхъ по двѣ.

Мы видѣли, что три пары точекъ вполне опредѣляютъ инволюцію ряда, если эти три пары такъ даны, что ангармоническое отношеніе четырехъ, произвольно выбранныхъ, изъ трехъ паръ точекъ, равно ангармоническому отношенію четырехъ имъ сопряженныхъ.

Разсмотримъ всесторонне связь между этими тремя парами точекъ опредѣляющихъ инволюцію:

Пусть a и a' , b и b' , c и c' , будутъ три сопряженныя пары точекъ. Если онѣ опредѣляютъ инволюцію, то (§ 91) мы будемъ имѣть, напримѣръ:

$$(abcc') = (a'b'c'c)$$

§ 117. *Предложеніе.* Если три пары точекъ:

$$a, a' \quad ; \quad b, b' \quad ; \quad cc'$$

составляютъ инволюцію, которая опредѣляется комбинаціей:

$$(abcc') = (a'b'c'c)$$

то это уравненіе будетъ удовлетворено, какую бы ни выбрали комбинацію четырехъ изъ шести точекъ.

Доказательство. Положимъ что инволюція шести точекъ $a, a'; b, b'; c, c'$ опредѣлена сочетаніемъ:

$$(abcc') = (a'b'c'c) \quad (86)$$

Мы говоримъ, что уравненіе будетъ имѣть мѣсто, какое бы сочетаніе ни взяли изъ шести точекъ по четыре.

1. Такъ какъ уравненіе (86) по условію имѣетъ мѣсто, то мы имѣемъ (§ 91):

$$(c'bca) = (cb'c'a')$$

или:

$$\frac{c'e}{c'a} \cdot \frac{bc}{ba} = \frac{cc'}{ca'} \cdot \frac{b'e}{b'a'}$$

Если въ этомъ уравненіи $c's$ и cc' замѣнимъ отрѣзками $a'a$ и aa' , то будемъ имѣть:

$$\frac{a'a}{c'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{aa'}{ca'} : \frac{b'c'}{b'a'}$$

или:

$$\frac{a'c}{a'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{ac'}{aa'} : \frac{b'c'}{b'a'}$$

Это уравненіе показываетъ равенство ангармоническихъ отношеній:

$$a', b, c, a \text{ и } a, b', c', a'$$

2. Равенство ангармоническихъ отношеній сочетаній (86) можно выразить и въ формѣ:

$$(cc'ab) = (c'ca'b')$$

или:

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a}{c'b} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{ca'}{cb'}$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\frac{ca}{cb'} : \frac{c'a}{c'b'} = \frac{c'a'}{c'b} : \frac{ca'}{cb}$$

а въ этой формѣ уравненіе выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній сочетаній a, b', c, c' и a', b, c', c и т. д.

§ 118. Если три пары сопряженныхъ точекъ a и a' , b и b' , c и c' составляютъ инволюцію, то слѣдующія семь уравненій имѣютъ мѣсто; и обратно, каждое изъ этихъ уравненій выражаетъ инволюцію и заключаетъ въ себѣ остальные шесть:

$$\frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{a'b' \cdot a'b}{a'c' \cdot a'c}$$

$$\frac{bc \cdot bc'}{ba \cdot ba'} = \frac{b'c' \cdot b'c}{a'b' \cdot b'a}$$

$$\frac{ca \cdot ca'}{cb \cdot cb'} = \frac{c'a' \cdot c'a}{c'b' \cdot c'b}$$

(87)

$$ab' \cdot bc' \cdot ca' = - a'b \cdot b'c \cdot c'a$$

$$ab' \cdot bc \cdot c'a' = - a'b \cdot b'c' \cdot ca$$

$$ab \cdot b'c' \cdot ca' = - a'b' \cdot bc \cdot c'a$$

$$ab \cdot b'c \cdot c'a' = - a'b' \cdot bc' \cdot ca$$

(88)

Каждое изъ этихъ уравненій можно написать въ формѣ, выражающей равенство ангармоническихъ отношеній четырехъ точекъ, изъ шести, четыремъ сопряженнымъ. Это равенство имѣетъ мѣсто, такъ какъ, по условію, шесть точекъ составляютъ инволюцію; слѣдовательно предъидущія уравненія имѣютъ мѣсто.

§ 119. Обратнo, каждое изъ этихъ уравненій (87 и 88) выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній, т. е. инволюцію шести точекъ, слѣдовательно остальные имѣютъ также мѣсто. Такъ, на примѣръ, первое изъ уравненій (87) можно написать въ двухъ формахъ:

$$\frac{ab}{ac} : \frac{a'b}{a'c} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{ab'}{ac'} \quad , \quad \frac{ab}{ac'} : \frac{a'b}{a'c'} = \frac{a'b'}{a'c} : \frac{ab'}{ac}$$

первое выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній сочетанія a, b, c, a' и a', b', c', a , а второе сочетанія a, b, c', a' и a', b', c, a . Второе изъ уравненій (88):

$$ab' \cdot bc \cdot c'a' = - a'b \cdot b'c' \cdot ca$$

вводя множитель aa' въ обѣ части, можно написать въ формѣ:

$$\frac{a'a}{a'b} : \frac{ca}{cb} = \frac{aa'}{ab'} : \frac{c'a'}{c'b'}$$

которое выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній сочетаній a, b, c, a' и a', b', c', a .

Вводя множитель bb' наше уравненіе можно написать въ формѣ выражающей равенство ангармоническихъ отношеній сочетаній a, b, c, b' и a', b', c', b .

Наконецъ, вводя множитель cc' , уравненіе можно написать въ формѣ, выражающей равенство ангармоническихъ отношеній сочетаній a, b', c, c' и a', b, c', c .

§ 120. *Опредѣленіе.* Если одинъ изъ двухъ отрѣзковъ находится частью на другомъ, а частью внѣ, то мы будемъ говорить, что одинъ отрѣзокъ *налегаетъ* на другой.

§ 121. *Предложеніе.* Если три отрѣзка aa', bb', cc' составляютъ инволюцію, то если одинъ изъ отрѣзковъ налегаетъ на другой, то онъ налегаетъ также и на третій.

Доказательство. Пусть отрѣзокъ aa' налегаетъ на bb' , одна изъ точекъ a или a' будетъ на bb' , а другая внѣ bb' , слѣдовательно произведенія $ab \cdot ab'$ и $a'b \cdot a'b'$ будутъ имѣть противные знаки, а если эти произведе-

денія имѣютъ противные знаки, то изъ перваго уравненія (87) видно, что и произведенія $ac \cdot ac'$ и $a's'$ имѣютъ также противные знаки, а это показываетъ, что одна изъ точекъ a или a' находится на отрѣзкѣ cc' , т. е. что отрѣзокъ aa' налегаетъ и на cc' . Откуда слѣдуетъ, очевидно, что если отрѣзокъ не налегаетъ на bb' , то онъ не налегаетъ и на cc' .

§ 122. Даны четыре точки a , a' , b и b' , пятую точку c можно взять произвольно, а сопряженную ей c' опредѣлить изъ уравненій (87) и (88).

Произвольный выборъ точки c даетъ два случая, въ которыхъ инволюціонная зависимость имѣетъ мѣсто только между пятью точками: это когда точка c будетъ взята на бесконечности или когда она совпадаетъ со своей сопряженной.

§ 123. Положимъ, что точка c находится на бесконечности, назовемъ черезъ O сопряженную ей точку c' , то (87) и (88) сдѣлаются:

$$\frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'} = \frac{aO}{a'O} \quad , \quad \frac{ba \cdot ba'}{b'a \cdot b'a'} = \frac{bO}{b'O} \quad , \quad Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'$$

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{ab'}{ba'} \quad , \quad \frac{Oa'}{Ob'} = \frac{a'b}{b'a}$$

$$\frac{Oa}{Ob'} = \frac{ab}{b'a'} \quad , \quad \frac{Oa'}{Ob} = \frac{a'b'}{ba}$$
(89)

§ 124. Уравненіе:

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'$$

показываетъ, что если точки a и a' находятся съ одной стороны точки O , то и точки b и b' находятся также съ одной стороны, такъ какъ, въ этомъ случаѣ, отрѣзки Oa и Oa' будутъ имѣть одинаковые знаки, а слѣдовательно и отрѣзки Ob и Ob' должны имѣть также одинаковые знаки. Если точка O находится между точками a и a' , то, очевидно, что она должна находится и между точками b и b' . Изъ этого слѣдуетъ, что если отрѣзки aa' и bb' налегаютъ одинъ на другой, то точка O должна находится на общей обѣимъ отрѣзкамъ части, такъ какъ въ противномъ случаѣ, т. е. если бы точка была внѣ отрѣзковъ aa' и bb' , одно изъ произведеній было бы больше другаго.

Наконецъ, если-бы два отрѣзка были одинъ внѣ другаго, то точка O должна находится между отрѣзками. Она не можетъ находится на одномъ изъ отрѣзковъ, потому что произведенія $Oa \cdot Oa'$ и $Ob \cdot Ob'$ имѣли-бы различные знаки; она не можетъ находится внѣ обоихъ отрѣзковъ, потому что одно изъ произведеній $Oa \cdot Oa'$ и $Ob \cdot Ob'$ было-бы больше другаго.

§ 125. *Двойныя точки.* Положимъ, что двѣ точки e и e' , составляющія инволюцію съ двумя парами aa' и bb' , совмѣщаются въ одну, которую мы назовемъ *двойною точкою инволюціи*; означимъ эту точку черезъ e , то семь уравненій (§ 118) сводятся на слѣдующія четыре:

$$\frac{ab \cdot ab'}{a'b' \cdot a'b} = \frac{ae^2}{a'e^2}$$

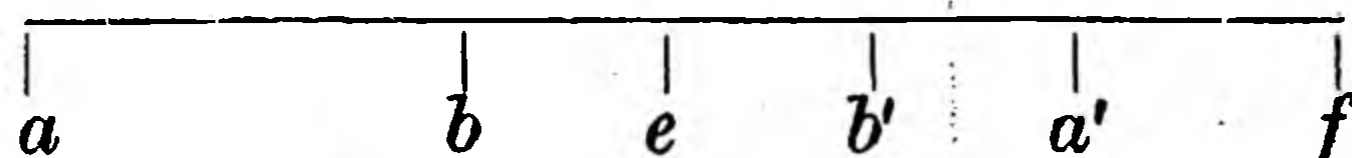
$$\frac{ba \cdot ba'}{b'a' \cdot b'a} = \frac{be^2}{b'e^2} \quad (90)$$

$$ab' \cdot be \cdot ea' = - a'b \cdot b'e \cdot ea$$

$$ab \cdot b'e \cdot ea' = - a'b' \cdot be \cdot ea$$

Каждое изъ этихъ уравненій выражаетъ, что точка e составляетъ съ двумя парами точекъ a, a' и b, b' инволюцію, въ которой точка e есть сама себѣ сопряженная (фиг. 81).

Фиг. 81.



Положеніе точекъ имѣющихъ это свойство, опредѣляется каждымъ изъ четырехъ уравненій (90), которыя, будучи второй степени, даютъ два положенія для точки e . Слѣдовательно существуетъ двѣ двойныя точки инволюціи.

Означимъ вторую изъ этихъ точекъ черезъ f , тогда мы будемъ имѣть:

$$\frac{ab \cdot ab'}{a'b' \cdot a'b} = \frac{af^2}{a'f^2}$$

слѣдовательно:

$$\frac{ae^2}{a'e^2} = \frac{af^2}{a'f^2} \quad \text{откуда} \quad \frac{ae}{a'e} = - \frac{af}{a'f} \quad (91)$$

Знакъ — взятъ потому что съ положительнымъ знакомъ точки e и f совпали-бы, что не имѣетъ мѣста.

Точно также имѣемъ:

$$\frac{be}{b'e} = - \frac{bf}{b'f} \quad (92)$$

Уравненія (91) и (92) показываютъ, что отрѣзки aa' и bb' точками e и f дѣлятся гармонически.

Такъ какъ двойныя точки опредѣляются квадратнымъ уравненіемъ, то онѣ могутъ быть и *мнимыя*, что бываетъ тогда, когда отрѣзки aa' и bb' налегаютъ одинъ на другой.

§ 126. Обратнo, если двѣ точки e и f дѣлятъ гармонически въ одно время два отрѣзка aa' и bb' , то каждая изъ этихъ точекъ составляетъ съ парами a, a' и b, b' , инволюцію, въ которой она будетъ сама себѣ сопряженною.

Въ самомъ дѣлѣ, если точки e и f дѣлятъ гармонически отрѣзки aa' и bb' , то мы имѣемъ (§ 95):

$$\frac{2}{ef} = \frac{1}{ea} + \frac{1}{ea'} \quad , \quad \frac{2}{ef} = \frac{1}{eb} + \frac{1}{eb'}$$

откуда:

$$\frac{1}{ea} - \frac{1}{eb} = - \left(\frac{1}{ea'} - \frac{1}{eb'} \right)$$

или:

$$\frac{eb - ea}{ea \cdot eb} = - \frac{eb' - ea'}{ea' \cdot eb'}$$

или еще:

$$\frac{ab}{ea \cdot eb} = - \frac{a'b'}{ea' \cdot eb'}$$

откуда:

$$ab \cdot b'e \cdot ea' = - a'b' \cdot be \cdot ea$$

а это одно изъ уравненій (90) § 125, слѣдовательно и т. д.

§ 127. Одна изъ двойныхъ точекъ можетъ быть на бесконечности. Пусть эта точка будетъ e . Дѣлая это положеніе въ уравненіяхъ (90), найдемъ:

$$ab \cdot ab' = a'b' \cdot a'b$$

$$ab \cdot ba' = a'b' \cdot b'a$$

$$ab = b'a' \quad ; \quad ab' = ba'$$

а вторая точка f будетъ находится на срединѣ каждаго изъ отрѣзковъ aa' и bb' (§ 95).

§ 128. *Предложеніе.* Если три пары точекъ a, a' ; b, b' ; c, c' составляютъ инволюцію, то четвертая пара d, d' , составляющая инволюцію съ двумя первыми парами, составляетъ инволюцію съ третьей парой и каждой изъ двухъ первыхъ паръ.

Доказательство. Такъ какъ три пары точекъ составляютъ инволюцію, то мы имѣемъ, на примѣръ:

$$(acbb') = (a'c'b'b)$$

или:

$$\frac{ab}{ab'} : \frac{cb}{cb'} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{c'b'}{c'b} \quad (93)$$

но по условию три пары точек $a, a'; b, b'; d, d'$ составляют инволюцию, следовательно мы имеем также:

$$(adbb') = (a'd'b'b)$$

или:

$$\frac{ab}{ab'} : \frac{db}{db'} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{d'b'}{d'b} \quad (94)$$

изъ уравнений (93) и (94), найдемъ:

$$\frac{cb}{cb'} : \frac{db}{db'} = \frac{c'b'}{c'b} : \frac{d'b'}{d'b}$$

а это показываетъ, что ангармоническое отношеніе точекъ b, b', c, d равно ангармоническому отношенію точекъ b', b, c', d' ; следовательно три пары точекъ $b, b'; c, c'; d, d'$ составляют инволюцію.

§ 129. *Центральная точка.* Мы видѣли § 123, что если три пары точекъ:

$$a, a'; b, b'; 0, \infty$$

составляютъ инволюцію, то:

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'$$

Если c, c' есть третья пара, составляющая инволюцію съ двумя первыми парами a, a' и b, b' , то, по предыдущему предложенію, мы также имеемъ:

$$Ob \cdot Ob' = Oc \cdot Oc'$$

т. е. если три пары точекъ составляютъ инволюцію, то всегда существуетъ такая точка, коей произведеніе разстояній отъ сопряженныхъ точекъ есть величина постоянная. Эту точку называютъ *центральной* точкою инволюціи. Эта точка, какъ мы уже выше видѣли, составляетъ инволюцію съ двумя, какими-нибудь, изъ трехъ паръ, имѣя сопряженную точку на бесконечности.

§ 130. Обратнo, если три пары точекъ связаны условіемъ:

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob' = Oc \cdot Oc'$$

то онѣ составляютъ инволюцію.

Въ самомъ дѣлѣ, если точка c' съ пятью точками $a, a'; b, b'$ и c не составляла бы инволюціи, то существовала бы другая точка c'' , которая составляла бы инволюцію съ $a, a'; b, b'$ и c' , т. е. мы имѣли бы:

$$Oa \cdot Oa' = Oc \cdot Oc''$$

сравнивая съ предъидущимъ, найдемъ:

$$Oc \cdot Oc' = Oc \cdot Oc''$$

откуда:

$$Oc' = Oc''$$

слѣдовательно и т. д.

§ 131. *Предложеніе.* Если на двухъ отрѣзкахъ aa' и bb' описаны два какіе-нибудь круга, то ихъ общая хорда пройдетъ всегда черезъ центральную точку O .

Доказательство. Пусть g будетъ одна изъ точекъ встрѣчи этихъ двухъ окружностей, мы говоримъ, что прямая Og пройдетъ и черезъ другую точку встрѣчи окружностей. Въ самомъ дѣлѣ, если черезъ g' и g'' означимъ точки встрѣчи окружностей съ Og , то мы будемъ имѣть:

$$Og \cdot Og' = Oa \cdot Oa' \quad \text{и} \quad Og \cdot Og'' = Ob \cdot Ob'$$

но мы имѣемъ:

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'$$

откуда:

$$Og' = Og''$$

т. е. точки g' и g'' совпадаютъ.

Слѣдствіе 1. Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если на трехъ инволюціонныхъ отрѣзкахъ опишемъ три окружности, проходящія черезъ одну и ту же точку, то эти три окружности пройдутъ всѣ и черезъ вторую точку и ихъ общая хорда пройдетъ черезъ центральную точку.

Слѣдствіе 2. Окружности, описанныя на трехъ инволюціонныхъ отрѣзкахъ, какъ на діаметрахъ, всѣ три проходятъ черезъ двѣ однѣ и тѣ же точки. Въ самомъ дѣлѣ, общія хорды этихъ окружностей, взятая по двѣ, проходятъ всѣ три черезъ центральную точку, а такъ какъ онѣ перпендикулярны къ прямой, соединяющей ихъ центры, то совпадаютъ.

§ 132. Точки пересѣченія окружностей могутъ быть мнимыя, а это имѣетъ мѣсто, когда отрѣзки не налегаютъ одинъ на другой; въ этомъ случаѣ говорятъ, что окружности имѣютъ общую радикальную ось¹⁾.

¹⁾ См. Ващенко-Захарченко, *Элементарная Геометрія*. Кіевъ, 1883, in-8. См. стр. 138.

Если три окружности имѣютъ общую радикальную ось, то касательныя, проведенныя изъ центральной точки, къ тремъ окружностямъ равны.

§ 133. Если три окружности, описанныя на трехъ отрѣзкахъ aa' , bb' , cc' , какъ на діаметрахъ, пересѣкаются, то прямыя, проведенныя изъ точки пересѣченія окружностей къ концамъ отрѣзковъ, перпендикулярны.

Откуда слѣдуетъ, что если три отрѣзка, на прямой, составляютъ инволюцію, то есть двѣ точки, дѣйствительныя или мнимыя, изъ которыхъ всѣ три отрѣзка видны подъ прямымъ угломъ.

Обратно: если прямой уголъ вращается около своей вершины, то отрѣзки, которые онъ дѣлаетъ своими сторонами, на какой-нибудь прямой составляютъ инволюцію.

§ 134. Возвратимся опять къ свойствамъ двойныхъ точекъ инволюціи. Пусть онѣ будутъ e и f , каждая изъ нихъ составляетъ инволюцію съ двумя парами a, a' и b, b' изъ пяти точекъ, въ которой онѣ сами себѣ сопряжены. Въ силу предложенія § 116 эти точки имѣютъ тоже свойство и относительно двухъ паръ b, b' и c, c' , слѣдовательно онѣ дѣлать гармонически въ одно время три отрѣзка aa' , bb' , cc' . Изъ этого мы имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если три пары точекъ a, a' ; b, b' ; c, c' составляютъ инволюцію, то существуетъ пара точекъ, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, которыя дѣлать гармонически три отрѣзка aa' , bb' , cc' . Мы выше видѣли, что это суть двойныя точки.

§ 135. Двойныя точки лежатъ по обѣ стороны центральной точки.

Въ самомъ дѣлѣ, точка e составляетъ инволюцію съ двумя парами точекъ a, a' и b, b' , слѣдовательно:

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob' = Oe^2$$

точно тоже имѣемъ и относительно точки f , слѣдовательно:

$$Oe^2 = Of^2 \quad , \quad Oe = -Of$$

Знакъ — взятъ потому что со знакомъ $+$ точки e и f совмѣстились бы. Изъ этого видно, что точки e и f лежатъ, одна съ одной, другая съ другой стороны точки O , на равномъ отъ нея разстояніи.

Уравненіе:

$$Oe^2 = Oa \cdot Oa'$$

показываетъ, что точки e и f будутъ мнимыя, если точка O будетъ находится на отрѣзкахъ aa' и bb' , что бываетъ, когда отрѣзки aa' и bb' налегаютъ одинъ на другой. Напротивъ, точки e и f будутъ дѣйствительныя, если одинъ отрѣзокъ заключенъ въ другомъ или одинъ лежитъ внѣ другаго.

§ 136. *Предложение.* Двойныя точки инволюціи, которой принадлежатъ двѣ пары сопряженныхъ точекъ a, a' ; b, b' составляютъ инволюцію изъ шести точекъ съ двумя парами a и b' , a' и b .

Доказательство. Мы выше видѣли, что точки e и f дѣлятъ гармонически каждый изъ отрѣзковъ aa' и bb' такъ, что мы имѣемъ:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{a'e}{a'f} \quad \text{и} \quad \frac{be}{bf} = -\frac{b'e}{b'f}$$

откуда:

$$\frac{ae}{af} \cdot \frac{a'e}{a'f} = \frac{b'f}{b'e} \cdot \frac{bf}{be}$$

а это показываетъ, что:

$$(aa'ef) = (b'bfe)$$

а изъ этого слѣдуетъ, что три пары точекъ a и b' , a' и b , e и f составляютъ инволюцію.

Гармоническая связка.

§ 137. Въ § 93 мы видѣли, что если черезъ четыре точки a, b, c, d , находящіяся на одной прямой линіи, проведемъ прямыя линіи, проходящія черезъ одну точку O , лежащую внѣ прямой точекъ a, b, c, d , то мы имѣемъ:

$$\frac{ac}{ad} \cdot \frac{bc}{bd} = \frac{\sin(Oa \cdot Oc)}{\sin(Oa \cdot Od)} \cdot \frac{\sin(Ob \cdot Oc)}{\sin(Ob \cdot Od)} \quad (95)$$

Если точки a, b, c, d будутъ гармоническія, то и связка $(O \cdot abcd)$ будетъ гармоническая и мы будемъ имѣть:

$$\frac{ac}{ad} \cdot \frac{bc}{bd} = \frac{\sin(Oa \cdot Oc)}{\sin(Oa \cdot Od)} \cdot \frac{\sin(Ob \cdot Oc)}{\sin(Ob \cdot Od)} = -1 \quad (96)$$

Изъ уравненія:

$$\frac{\sin(Oa \cdot Oc)}{\sin(Oa \cdot Od)} \cdot \frac{\sin(Ob \cdot Oc)}{\sin(Ob \cdot Od)} = -1$$

легко видѣть, что если сопряженныя прямыя Oc и Od перпендикулярны, то сопряженныя прямыя Oa и Ob составляютъ равные углы съ Oc .

И обратно, прямая, дѣлящая уголъ между двумя прямыми и прямая перпендикулярная къ ней, составляютъ гармоническую связку.

Легко также видѣть, что если прямая Oc , приближаясь къ Ob , совпадаетъ съ нею, то и сопряженная ей прямая Od будетъ приближаться къ

Ob и совпадетъ съ нею вмѣстѣ съ прямою Oc . Это видно изъ свойства гармоническихъ точекъ a, b, c, d , черезъ которыя проходятъ прямыя Oa, Ob, Oc, Od .

Инволюціонная связка.

§ 138. Шесть прямыхъ линій, проходящихъ черезъ одну точку и попарно сопряженныхъ образуютъ *инволюціонную связку*, если ангармоническое отношеніе четырехъ прямыхъ линій, взятыхъ изъ трехъ паръ, равно ангармоническому отношенію четырехъ имъ сопряженныхъ прямыхъ.

Очевидно (§ 137), что инволюціонная связка пересѣкается всякою прямою въ шести точкахъ, которыя образуютъ инволюціонный рядъ и всѣ свойства этого ряда, въ который входятъ только ангармоническія отношенія, распространяются и на связку прямыхъ.

§ 139. Если шесть прямыхъ попарно сопряженныхъ Oa и Oa' , Ob и Ob' , Oc и Oc' назовемъ просто нумерами 1 и 1', 2 и 2', 3 и 3', а углы между ними символами $(1, 1')$; $(1, 2)$;....., то легко видѣть изъ § 93, что между синусами ихъ угловъ существуетъ семь уравненій подобныхъ уравненіямъ (87) и (88) § 118:

$$\frac{\sin(1, 2) \cdot \sin(1, 2')}{\sin(1, 3) \cdot \sin(1, 3')} = \frac{\sin(1', 2') \cdot \sin(1', 2)}{\sin(1', 3') \cdot \sin(1', 3)} \quad (97)$$

$$\sin(1, 2) \cdot \sin(2', 3) \cdot \sin(1', 3') = - \sin(1', 2') \cdot \sin(2, 3') \cdot \sin(1, 3)$$

каждое изъ этихъ уравненій опредѣляетъ инволюцію связки и заключаетъ всѣ остальные шесть, какъ слѣдствіе.

§ 140. Двойнымъ точкамъ инволюціоннаго ряда соотвѣтствуютъ двойные радіусы связки, которые могутъ быть дѣйствительные или мнимые. Эти двойные радіусы составляютъ гармоническую связку съ каждой парой сопряженныхъ радіусовъ и составляютъ инволюціонную связку съ радіусами Oa и Ob' , Oa' и Ob . Но въ связкѣ нѣтъ радіуса, соотвѣтствующаго центральной точкѣ ряда шести инволюціонныхъ точекъ. Отличительное свойство центральной точки есть то, что сопряженная ей точка находится на бесконечности и исчезаетъ изъ уравненій инволюціоннаго ряда, между тѣмъ какъ въ инволюціонной связкѣ всѣ радіусы не имѣютъ никакой особенности относительно другихъ и ни одинъ не можетъ исчезнуть изъ уравненій инволюціи.

§ 141. *Предложеніе.* Если въ инволюціонной связкѣ два радіуса соотвѣтственно перпендикулярны къ ихъ сопряженнымъ радіусамъ, то и два другіе сопряженные радіусы также перпендикулярны между собою.

Доказательство. Проведемъ сѣкущую; пусть $a, a'; b, b'; c, c'$ будутъ точки пересѣченія ея съ инволюціонной связкой. По предъидущему эти три пары точекъ образуютъ инволюцію, а слѣдовательно окружности, описанныя на отрѣзкахъ aa' и bb' , какъ на діаметрахъ, проходятъ черезъ вершину связки, такъ какъ радіусы Oa и Oa' , Ob и Ob' , по условію, перпендикулярны; слѣдовательно окружность, описанная на отрѣзкѣ cc' , какъ на діаметрѣ, пройдетъ также черезъ точку O , а слѣдовательно радіусы Oc и Oc' также перпендикулярны. Поэтому если три прямые угла имѣютъ общую вершину, то ихъ стороны или радіусы образуютъ инволюціонную связку.

§ 142. *Предложеніе.* Если углы, которые два радіуса инволюціонной связки, составляютъ съ ихъ сопряженными радіусами имѣютъ одну и ту же равнодѣлящую, то эта прямая будетъ равнодѣлящая и угла составляемаго двумя сопряженными радіусами.

Доказательство. Углы aOa' и bOb' , по условію, имѣютъ общую равнодѣлящую, требуется доказать, что она будетъ равнодѣлящею и угла cOc' . Мы выше видѣли, что равнодѣлящая и перпендикулярная къ ней прямая дѣлятъ углы aOa' и bOb' гармонически, слѣдовательно это двойные радіусы связки, а потому они дѣлятъ гармонически и уголь cOc' , но такъ какъ эти радіусы перпендикулярны, то они суть равнодѣлящія одинъ угла cOc' , а другой его дополнительнаго.

Въ этой главѣ мы изложили геометрически основную часть геометріи, которую называютъ *высшей геометріей* или *проективной*. Это послужитъ къ болѣе ясному представленію тѣхъ аналитическихъ изслѣдованій, которыя будутъ составлять предметъ слѣдующей главы. Большая часть изслѣдованій будетъ относиться къ свойствамъ настоящей главы, но съ аналитической точки зрѣнія.

ГЛАВА X.

Ангармонія, гармонія, изложенныя аналитически.

§ 143. *Ангармонія.* Если:

$$(a) \quad A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0 \quad (b) \quad (1)$$

суть уравненія двухъ точекъ или двухъ прямыхъ, то всякая другая точка (c), находящаяся на прямой (фиг. 82), проходящей черезъ точки (a) и (b) или всякая другая прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія прямыхъ (a) и (b), будетъ выражаться уравненіемъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad (2)$$

Точки или прямая (a) , (b) мы будем называть *основными* или *координатными*, такъ какъ онѣ служатъ основаніемъ для представленія уравненіями другихъ точекъ или прямыхъ.

Фиг. 82.

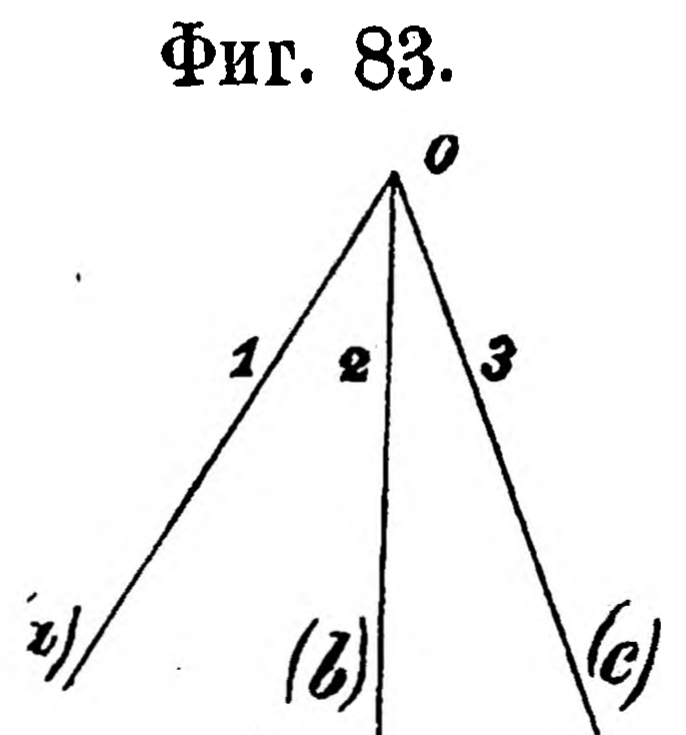


Если уравненія (a) , (b) даны въ нормальной формѣ, то значеніе коэффиціента λ для точекъ будетъ (§§ 76 и 77)

$$\lambda = \frac{ac}{cb} = -\frac{ac}{bc} \quad (3)$$

а для прямыхъ:

$$\lambda = \frac{\sin(1, 3)}{\sin(2, 3)} \quad (4)$$



если символы $(1, 3)$, $(2, 3)$ будутъ изображать углы между прямыми 1 и 3, 2 и 3 (фиг. 83).

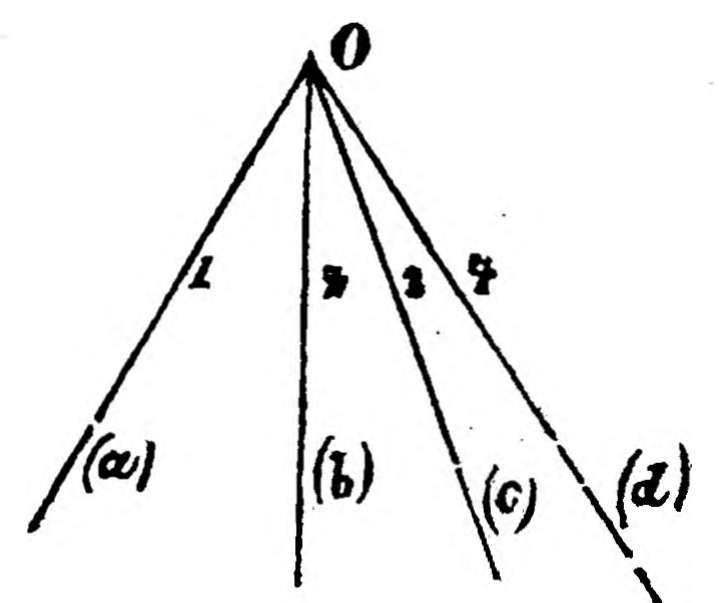
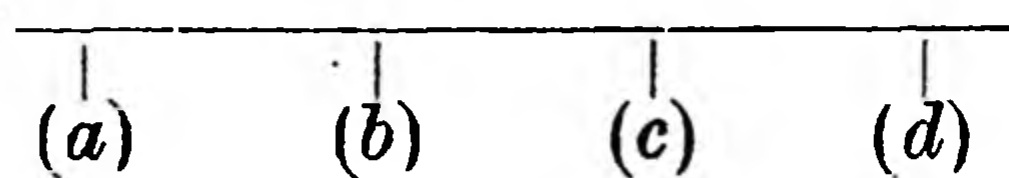
§ 144. Принимая точки или прямая (1) за основныя напишемъ уравненія четырехъ точекъ, находящихся на одной прямой линіи, или четырехъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку. Уравненія эти будутъ (фиг. 84):

$$(a) A_1=0 \quad , \quad (b) A_2=0 \quad , \quad (c) A_1-\lambda A_2=0 \quad , \quad (d) A_1-\mu A_2=0 \quad (5)$$

Значеніе коэффиціентовъ λ и μ , если это четыре точки, будетъ:

Фиг. 84.

$$\lambda = \frac{ac}{bc} \quad , \quad \mu = \frac{ad}{bd}$$



Слѣдовательно ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ (5) будетъ:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \alpha = \frac{\lambda}{\mu} \quad (6)$$

Если же (5) будутъ четыре прямая, то ангармоническое отношеніе этой связки будетъ:

$$\frac{\sin(1, 3)}{\sin(2, 3)} : \frac{\sin(1, 4)}{\sin(2, 4)} = \frac{\sin(1, 3)}{\sin(1, 4)} : \frac{\sin(2, 3)}{\sin(2, 4)} = \alpha = \frac{\lambda}{\mu} \quad (7)$$

Изъ этого видимъ, что если четыре точки или четыре прямая даны уравненіями въ формѣ (5), то ихъ ангармоническое отношеніе будетъ отношеніе $\frac{\lambda}{\mu}$ — коэффиціентовъ.

§ 145. Но уравненія четырехъ точекъ или четырехъ прямыхъ не всегда бываютъ даны въ формѣ (5), а часто онѣ даются въ формѣ:

$$\begin{aligned} A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 & , \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0 \\ A_1 - \lambda_3 A_2 = 0 & , \quad A_1 - \lambda_4 A_2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Въ этомъ случаѣ выраженіе для ангармонического отношенія точекъ или прямыхъ находится, приводя уравненія (8) къ формѣ уравненій (5), слѣдующимъ образомъ:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = A'_1 \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = A'_2$$

опредѣливъ изъ этихъ уравненій A_1 и A_2 черезъ A'_1 и A'_2 , выразимъ и два послѣднія изъ уравненій (8) черезъ эти величины.

Это преобразование даетъ слѣдующія уравненія:

$$A_1 = \frac{\lambda_2 A'_1 - \lambda_1 A'_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad A_2 = \frac{A'_1 - A'_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$A_1 - \lambda_3 A_2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3) A'_1 - (\lambda_1 - \lambda_3) A'_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$A_1 - \lambda_4 A_2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_4) A'_1 - (\lambda_1 - \lambda_4) A'_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Слѣдовательно уравненія (8) сдѣлаются:

$$A'_1 = 0 \quad , \quad A'_2 = 0$$

$$A'_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} A'_2 = 0 \quad (9)$$

Эти уравненія имѣютъ форму уравненій (5), слѣдовательно ихъ ангармоническое отношеніе есть:

$$\alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} \quad (10)$$

Другія выраженія для ангармонического отношенія легко получить изъ этихъ, перемѣщеніемъ индексовъ при λ .

§ 146. *Гармония*. Если (5) есть рядъ гармоническихъ точекъ или связка гармоническихъ прямыхъ, то мы будемъ имѣть:

$$\frac{\lambda}{\mu} = -1 \quad \text{или} \quad \lambda = -\mu \quad (11)$$

Слѣдовательно уравненія четырехъ точекъ или гармоническихъ прямыхъ будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \lambda A_2 = 0 \quad (12)$$

Если уравненія будутъ даны въ формѣ (8), то ихъ гармонія выражается условіемъ:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} = -1 \quad , \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} = 0 \quad (13)$$

откуда:

$$\lambda_1 \lambda_2 - \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0 \quad (14)$$

Пр. 1. Если въ уравненіи (12) $\lambda = 1$, то гармоническія точки или прямая будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0 \quad (15)$$

Если (12) будутъ уравненія четырехъ точекъ, то гармоническія точки будутъ: точки $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$, ихъ середина $A_1 + A_2 = 0$ и $A_1 - A_2 = 0$ точка на бесконечности.

Если (12) будутъ прямая, то прямая (15) будутъ прямая $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ и равнодѣляющія углы между ними $A_1 - A_2 = 0$ и $A_1 + A_2 = 0$.

Пр. 2. Уравненіе (14) можетъ служить для опредѣленія четвертой гармонической точки или прямой, если даны, на примѣръ, три уравненія точекъ или прямыхъ:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_3 A_2 = 0$$

то λ_4 опредѣляется изъ условія (14):

$$\lambda_4 = - \frac{\lambda_1 \lambda_3 - 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 - 2\lambda_3 + \lambda_2}$$

слѣдовательно четвертая гармоническая точка или прямая, будетъ:

$$(\lambda_1 - 2\lambda_3 + \lambda_2) A_1 + (\lambda_1 \lambda_3 - 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3) A_2 = 0$$

Пр. 3. Проведемъ прямую линію, которая-бы пересѣкла стороны треугольника, коего вершины даны уравненіями:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad (16)$$

Уравненія точекъ пересѣченія, проведенной прямой со сторонами треугольника, очевидно, будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (17)$$

Четвертая гармоническія точки, точекъ (16) и каждой изъ предыдущихъ, будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (18)$$

а эти уравненія показываютъ, что двѣ первыя точки (18) и послѣдняя (17) находятся на одной прямой линіи.

Если проведенная прямая пересѣкаетъ стороны треугольника внѣшне, то уравненія (17) будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (19)$$

а точки гармоническія этимъ послѣднимъ будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (20)$$

откуда выведемъ тоже заключеніе.

Пр. 4. Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

будутъ уравненія сторонъ треугольника, то уравненія:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (21)$$

будутъ уравненія прямыхъ, проходящихъ черезъ вершины треугольника и пересѣкающихся въ одной точкѣ.

Четвертая гармоническая, каждой парѣ сторонъ и одной изъ прямыхъ (20), будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (22)$$

изъ этихъ уравненій видимъ, что первая двѣ прямыхъ (22) и послѣдняя (21) пересѣкаются въ одной точкѣ.

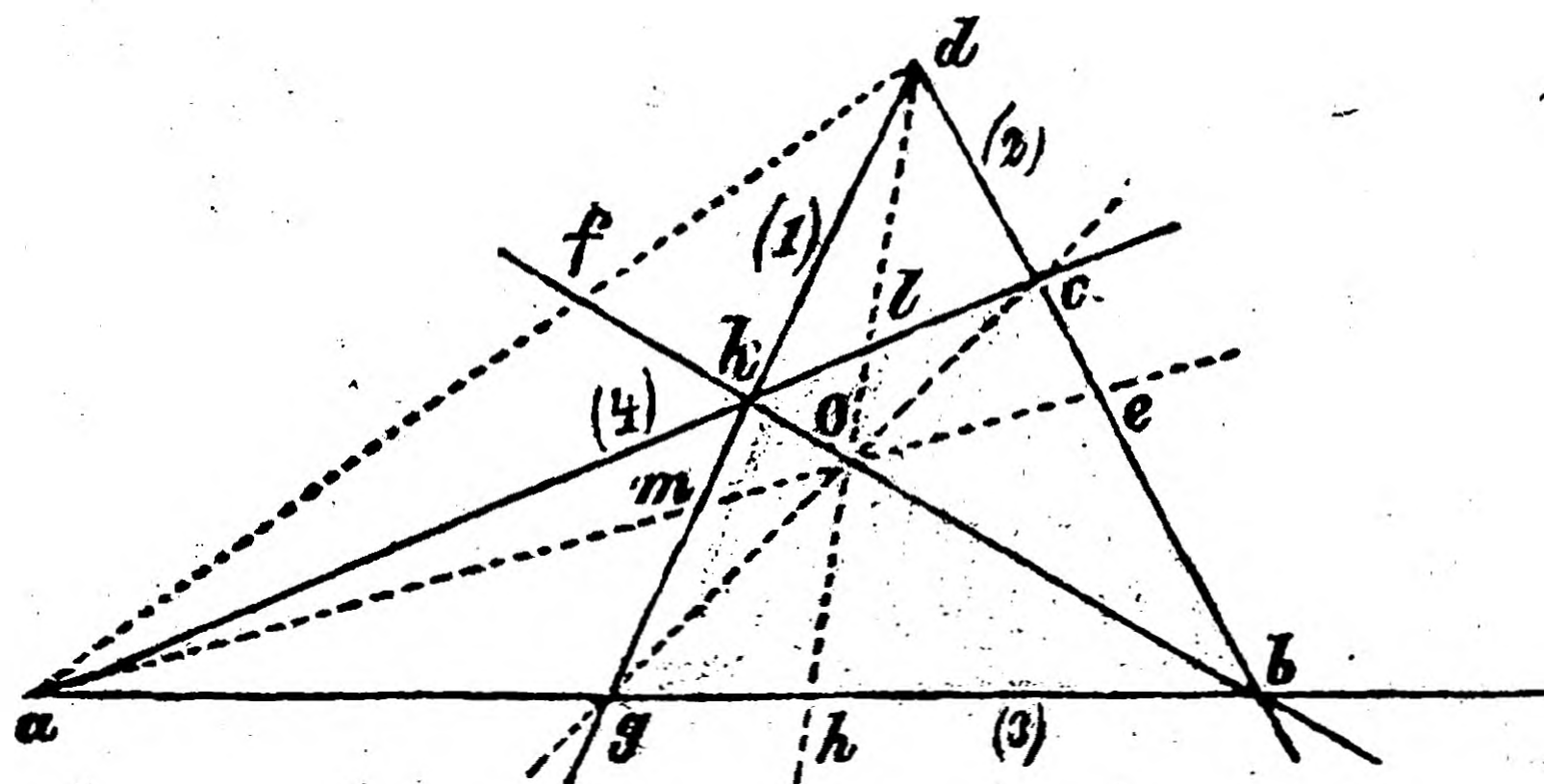
Гармоническія свойства полного четырехугольника.

§ 147. Пусть:

$$(1) A_1 = 0 \quad , \quad (2) A_2 = 0 \quad , \quad (3) A_3 = 0 \quad , \quad (4) A_4 = 0 \quad (23)$$

будутъ уравненія сторонъ четырехугольника $gbck$ (фиг. 85). Если соединимъ a и d , b и k , g и c , то это будутъ діагонали четырехугольника, который называется *полнымъ*. Проведемъ еще прямыхъ Od и Oa .

Фиг. 85.



Прежде чѣмъ мы изложимъ свойства этого четырехугольника, покажемъ, что изъ четырехъ уравненій (23) можно составить тождество:

$$\lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 + \delta A_4 \equiv 0 \quad (24)$$

гдѣ λ , μ , ν , δ суть числовые коэффициенты, опредѣленные известнымъ

образомъ. Напишемъ уравненія (23) въ ихъ полной формѣ, пусть онѣ будутъ:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad A_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ A_3 &= a_3x + b_3y + c_3 = 0 \quad , \quad A_4 = a_4x + b_4y + c_4 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Если эти уравненія сложимъ, помноживъ на $\lambda, \mu, \nu, \delta$, и отберемъ коэффициенты при x, y , то найдемъ:

$$(a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu + a_4\delta)x + (b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu + b_4\delta)y + (c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu + c_4\delta) = 0 \quad (26)$$

Если приравняемъ нулю коэффициенты:

$$a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu + a_4\delta = 0$$

$$b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu + b_4\delta = 0$$

$$c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu + c_4\delta = 0$$

и изъ этихъ уравненій опредѣлимъ $\lambda, \mu, \nu, \delta$, то уравненіе (26) будетъ удовлетворено произвольными значеніями x и y , а слѣдовательно оно будетъ тождество (24). Такъ какъ, помножая уравненіе прямой линіи на какой-нибудь числовой коэффициентъ, прямая неизмѣняется, то коэффициенты $\lambda, \mu, \nu, \delta$ можно включить въ символы A_1, A_2, A_3, A_4 и написать тождество (24) въ формѣ:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \equiv 0 \quad (27)$$

§ 148. Замѣтивъ это, возвратимся къ нашему четырехугольнику. Тождество (27) даетъ слѣдующія три тождества:

$$A_1 + A_2 \equiv -(A_3 + A_4)$$

$$A_1 + A_3 \equiv -(A_2 + A_4) \quad (28)$$

$$A_1 + A_4 \equiv -(A_2 + A_3)$$

Легко видѣть, что прямая:

$$A_1 + A_2 = 0 \quad (29)$$

проходя черезъ точку пересѣченія (1) и (2), проходитъ и черезъ точку пересѣченія (3) и (4), такъ какъ эти уравненія можно написать, въ силу перваго изъ тождествъ (28), и въ формѣ:

$$A_3 + A_4 = 0$$

Слѣдовательно прямая, коей уравненіе есть (29), будетъ діагональ *ad*.

Уравненіе прямой:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad (30)$$

можно написать въ формѣ:

$$A_1 - A_2 \equiv A_1 + A_3 - (A_2 + A_3)$$

эта прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія (1) и (2), что видно изъ формы первой части; она проходитъ черезъ пересѣченіе gc и bk , т. е. черезъ точку O , вслѣдствіи тождествъ (28), слѣдовательно прямая (30) есть Od .

Изъ этого видимъ, что уравненія связки da, dg, dO, db , суть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0$$

что показываетъ, что это гармоническая связка (§ 146).

Точно также легко показать, что и связка ad, ac, aO, ab есть гармоническая.

Если связка da, dg, dO, db гармоническая, то точки a, k, l, c , также гармоническія, слѣдовательно и связка Oc, Ol, Ok и Oa гармоническая. Изъ этого всего видно, что и точки $a, g, h, b; b, e, c, d; g, m, k, d$ суть гармоническія. Откуда легко видѣть, что двѣ діагонали полнаго четырехъугольника дѣлятъ третью гармонически.

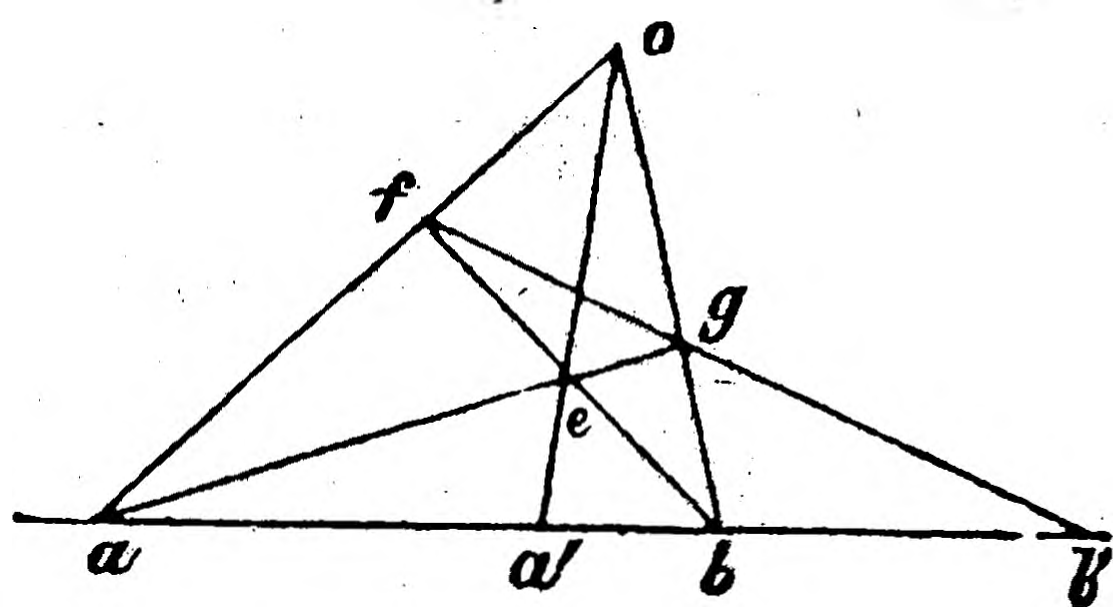
Тѣхъ же результатовъ мы бы могли достигнуть, если бы уравненія (23) представляли не стороны четырехъугольника, а точки пересѣченія его сторонъ.

Съ помощью свойствъ полнаго четырехъугольника легко построить, съ помощью только прямой, четвертую гармоническую точку къ тремъ даннымъ или четвертую гармоническую прямую къ тремъ даннымъ прямымъ.

§ 149. *Задача.* На прямой даны три точки a, a', b (фиг. 86); построить четвертую гармоническую, сопряженную точкѣ b ?

Рѣшеніе. Для этого черезъ произвольно взятую точку O , внѣ прямой, проведемъ прямыя Oa, Ob, Oa' . На прямой Oa' возьмемъ какую-нибудь точку e , проведемъ прямыя ae, be и продолжимъ ихъ до встрѣчи съ Oa и Ob въ точкахъ f и g , проведемъ прямую fg ; эта прямая встрѣчаетъ, данную прямую въ искомой точкѣ b' .

Фиг. 86.



Легко видѣть, изъ этого построенія, какъ слѣдуетъ построить a' , если бы точки a, b и b' были даны.

Если бы были даны три прямыя, проходящія черезъ одну точку и требуется построить четвертую гармоническую, то слѣдуетъ данную связку пересѣчь, какою-нибудь, прямою и къ тремъ точкамъ пересѣченія построить четвертую гармоническую, какъ показано выше; соединивъ, построенную точку съ вершиною данной связки, получимъ искомую прямую.

Задача. Показать гармоническія свойства полнаго четырехъугольника, если даны уравненія трехъ его сторонъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

а четвертая сторона дана въ формѣ:

$$\lambda A_1 + \mu A_2 + A_3 = 0$$

т. е. выражена черезъ три данныя стороны?

Проективность и инволюція.

§ 150. Проективность двухъ рядовъ точекъ можетъ быть изложена въ болѣе общей формѣ слѣдующимъ образомъ.

Пусть:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0; \quad A'_1 = 0, \quad A'_2 = 0 \quad (31)$$

будутъ уравненія двухъ паръ точекъ. Уравненія точекъ на прямыхъ, проходящихъ черезъ каждую пару предъидущихъ точекъ, будутъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0; \quad A'_1 - \mu A'_2 = 0 \quad (32)$$

давая всевозможныя значенія λ и μ мы будемъ имѣть уравненія всѣхъ точекъ на прямыхъ $(A_1 A_2)$ и $(A'_1 A'_2)$.

Чтобы каждой точкѣ на одной прямой соотвѣтствовала одна, и только одна, точка на другой прямой необходимо, чтобы одинъ изъ коэффициентовъ, на примѣръ μ , былъ линейная функція другаго λ . Но самая общая линейная функція отъ λ имѣетъ форму:

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{\gamma + \delta\lambda}$$

Слѣдовательно самая общая соотвѣтственность между точками на прямыхъ $(A_1 A_2)$ и $(A'_1 A'_2)$ будетъ дана уравненіями:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0; \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda}{\gamma + \delta\lambda} A'_2 = 0 \quad (33)$$

Легко видѣть, что эти два ряда проективны. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, какія-нибудь, четыре точки:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0, \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0, \quad A_1 - \lambda_3 A_2 = 0, \quad A_1 - \lambda_4 A_2 = 0$$

имъ соотвѣтственныя будутъ:

$$A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda_1}{\gamma + \delta\lambda_1} A'_2 = 0, \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda_2}{\gamma + \delta\lambda_2} A'_2 = 0,$$

$$A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda_3}{\gamma + \delta\lambda_3} A'_2 = 0, \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda_4}{\gamma + \delta\lambda_4} A'_2 = 0$$

если положимъ:

$$\mu_1 = \frac{\alpha + \beta\lambda_1}{\gamma + \delta\lambda_1}, \quad \mu_2 = \frac{\alpha + \beta\lambda_2}{\gamma + \delta\lambda_2}, \quad \mu_3 = \frac{\alpha + \beta\lambda_3}{\gamma + \delta\lambda_3}, \quad \mu_4 = \frac{\alpha + \beta\lambda_4}{\gamma + \delta\lambda_4}$$

то легко видѣть, что:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4}$$

т. е. ангармоническое отношеніе четырехъ произвольно взятыхъ точекъ изъ перваго ряда равно ангармоническому отношенію четырехъ соответственныхъ точекъ изъ втораго ряда, слѣдовательно два ряда (33) будутъ проэктивны.

§ 151. Если даны два проэктивные ряда:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0, \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda}{\gamma + \delta\lambda} A'_2 = 0 \quad (34)$$

то, выбравъ, три совершенно произвольныя точки изъ перваго ряда, на-
примѣръ:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0, \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0, \quad A_1 - \lambda_3 A_2 = 0 \quad (35)$$

мы можемъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такъ опредѣлить, что точкамъ (35) будутъ соответствовать совершенно произвольныя три точки со втораго ряда, на-
примѣръ:

$$A'_1 - \mu_1 A'_2 = 0, \quad A'_1 - \mu_2 A'_2 = 0, \quad A'_1 - \mu_3 A'_2 = 0$$

для этого надобно только положить:

$$\frac{\alpha + \beta\lambda_1}{\gamma + \delta\lambda_1} = \mu_1, \quad \frac{\alpha + \beta\lambda_2}{\gamma + \delta\lambda_2} = \mu_2, \quad \frac{\alpha + \beta\lambda_3}{\gamma + \delta\lambda_3} = \mu_3$$

и изъ этихъ уравненій опредѣлить отношенія $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ или просто положить $\delta = 1$ и опредѣлить α, β, γ .

§ 152. Полагая въ уравненіяхъ (33) $\lambda = 1$ мы будемъ имѣть:

$$A_1 - A_2 = 0, \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} A'_2 = 0$$

изъ коихъ первое уравненіе представляетъ точку на безконечности на
прямой $(A_1 A_2)$, а второе точку I' на $(A'_1 A'_2)$.

Полагая:

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = 1$$

мы будемъ имѣть:

$$A_1 - \frac{\alpha - \gamma}{\delta - \beta} A_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - A'_2 = 0$$

изъ коихъ первое уравненіе есть точка I на $(A_1 A_2)$, а второе есть точка на безконечности на прямой $(A'_1 A'_2)$. Слѣдовательно уравненія главныхъ точекъ двухъ проэтивныхъ рядовъ (33) будутъ:

$$(I) \quad A_1 - \frac{\alpha - \gamma}{\delta - \beta} A_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} A'_2 = 0 \quad (I') \quad (36)$$

Если:

$$\frac{\alpha - \gamma}{\delta - \beta} = 1$$

то точка I будетъ на безконечности, но если $\frac{\alpha - \gamma}{\delta - \beta} = 1$, то $\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = 1$, слѣдовательно и точка I' будетъ также на безконечности, или ряды *подобны* (§ 98).

§ 153. Если два проэтивные ряда имѣютъ общій соотвѣтственный элементъ, на примѣръ точку $A_1 = 0$, то уравненія проэтивныхъ рядовъ будутъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - k\lambda A'_2 = 0$$

вычитая эти уравненія, найдемъ:

$$\lambda(A_2 - kA'_2) = 0$$

или:

$$A_2 - kA'_2 = 0 \quad (37)$$

а это есть уравненіе точки, лежащей на прямой, проходящей черезъ двѣ соотвѣтственные точки. Но такъ какъ это уравненіе независитъ отъ λ , то всѣ прямыя, проходящія черезъ соотвѣтственные точки двухъ проэтивныхъ рядовъ, пересѣкаются въ одной точкѣ (37).

§ 154. *Глазныя точки.* Если прямыя совмѣстимъ и оба ряда отнесемъ къ основнымъ точкамъ:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0$$

то проэтивные ряды на прямой $(A_1 A_2)$ выразятся двумя уравненіями:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \frac{a_2 + b_2 \lambda}{a_1 + b_1 \lambda} A_2 = 0 \quad (38)$$

Уравненія главныхъ точекъ I и I' , очевидно, будутъ:

$$(I) \quad A_1 - \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2} A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} A_2 = 0 \quad (I') \quad (39)$$

§ 155. *Двойныя точки.* Если соотвѣтственные точки рядовъ (38) совпадаютъ, то мы должны имѣть:

$$\lambda = \frac{a_2 + b_2 \lambda}{a_1 + b_1 \lambda}$$

откуда:

$$b_1 \lambda^2 + (a_1 - b_2) \lambda - a_2 = 0 \quad (40)$$

Это квадратное уравненіе даетъ для λ два значенія:

$$\lambda_1 = -\frac{a_1 - b_2}{2b_1} + \sqrt{\left(\frac{a_1 - b_2}{2b_1}\right)^2 + \frac{a_2}{b_1}} \quad , \quad \lambda_2 = -\frac{a_1 - b_2}{2b_1} - \sqrt{\left(\frac{a_1 - b_2}{2b_1}\right)^2 + \frac{a_2}{b_1}}$$

или полагая:

$$-\frac{a_1 - b_2}{2b_1} = k \quad , \quad \left(\frac{a_1 - b_2}{2b_1}\right)^2 + \frac{a_2}{b_1} = R$$

найдемъ:

$$\lambda_1 = k + \sqrt{R} \quad , \quad \lambda_2 = k - \sqrt{R}$$

Слѣдовательно уравненія двойныхъ точекъ будутъ:

$$A_1 - (k + \sqrt{R}) A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - (k - \sqrt{R}) A_2 = 0 \quad (41)$$

§ 156. Если проективные ряды будутъ такъ совмѣщены, что главные точки (39) совпадутъ (§ 109), то рядъ, какъ мы видѣли, будетъ инволюціонный. Чтобы точки (39) совпали необходимо имѣть:

$$\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2} = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}$$

этому уравненію можно дать слѣдующую форму:

$$(a_1 + b_2)(a_2 - b_1 - a_1 + b_2) = 0$$

откуда, или:

$$(a_1 + b_2) = 0$$

или:

$$a_2 - a_1 = b_1 - b_2$$

или еще:

$$a_2 + b_2 = a_1 + b_1$$

второе и третье изъ этихъ уравненій даютъ тотъ случай, когда главные точки совпадаютъ на бесконечности (§ 153), т. е. когда ряды подобны, слѣдовательно инволюціонный рядъ дается первымъ условіемъ:

$$a_1 + b_2 = 0 \quad \text{или} \quad a_1 = -b_2$$

и выразится уравненіями:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \frac{a_2 - a_1 \lambda}{a_1 + b_1 \lambda} A_2 = 0 \quad (42)$$

Легко провѣрить, что соотвѣтственныя точки, представляемыя этими уравненіями, взаимно соотвѣтственны. Въ самомъ дѣлѣ, если, какую-нибудь, точку втораго ряда, напр:

$$\frac{a_2 - a_1 \lambda}{a_1 + b_1 \lambda}$$

разсматривать, какъ принадлежащую первому ряду, то ей соотвѣтственная точка втораго ряда будетъ:

$$\frac{a_2 - a_1 \frac{a_2 - a_1 \lambda}{a_1 + b_1 \lambda}}{a_1 + b_1 \frac{a_2 - a_1 \lambda}{a_1 + b_1 \lambda}} = \lambda$$

а это показываетъ, что эта точка находится въ первомъ ряду.

§ 157. Отнесемъ проэктивные ряды:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \frac{a_2 + b_2 \lambda}{a_1 + b_1 \lambda} A_2 = 0 \quad (43)$$

къ двойнымъ точкамъ (40), для этого положимъ:

$$A_1 - (k + \sqrt{R}) A_2 = X \quad , \quad A_1 - (k - \sqrt{R}) A_2 = Y$$

Замѣтимъ, что при совершенно произвольныхъ значеніяхъ λ' , λ'' мы имѣемъ тождество:

$$A_1 - \lambda A_2 = \frac{(\lambda - \lambda'')(A_1 - \lambda' A_2) - (\lambda - \lambda')(A_1 - \lambda'' A_2)}{\lambda' - \lambda''} \quad (44)$$

если въ этомъ тождествѣ положимъ $\lambda' = \lambda_1$, $\lambda'' = \lambda_2$, λ_1 и λ_2 суть корни уравненія (40), то найдемъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = \frac{(\lambda - \lambda_2) X - (\lambda - \lambda_1) Y}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Слѣдовательно уравненіе:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0$$

сдѣлается:

$$(\lambda - \lambda_2) X - (\lambda - \lambda_1) Y = 0 \quad \text{или} \quad X - \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0 \quad (45)$$

точно такимъ же образомъ преобразуемъ уравненіе:

$$A_1 - \frac{a_2 + b_2 \lambda}{a_1 + b_1 \lambda} A_2 = 0$$

въ:

$$\left(\frac{a_2 + b_2 \lambda}{a_1 + b_1 \lambda} - \lambda_2 \right) X - \left(\frac{a_2 + b_2 \lambda}{a_1 + b_1 \lambda} - \lambda_1 \right) Y = 0$$

откуда:

$$\{a_2 - a_1 \lambda_2 + (b_2 - b_1 \lambda_2) \lambda\} X - \{a_2 - a_1 \lambda_1 + (b_2 - b_1 \lambda_1) \lambda\} Y = 0$$

или:

$$\left(\lambda + \frac{a_2 - a_1 \lambda_2}{b_2 - b_1 \lambda_2} \right) X - \frac{b_2 - b_1 \lambda_1}{b_2 - b_1 \lambda_2} \left(\lambda + \frac{a_2 - a_1 \lambda_1}{b_2 - b_1 \lambda_1} \right) Y = 0 \quad (46)$$

Такъ какъ при $\lambda = \lambda_1$ это уравненіе должно дать двойную точку $X = 0$, а при $\lambda = \lambda_2$ оно должно дать $Y = 0$, то мы должны имѣть:

$$\lambda_1 + \frac{a_2 - a_1 \lambda_1}{b_2 - b_1 \lambda_1} = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 + \frac{a_2 - a_1 \lambda_2}{b_2 - b_1 \lambda_2} = 0 \quad (47)$$

но легко видѣть, что эти уравненія суть ничто иное какъ уравненіе (40), написанное въ другой формѣ послѣ подстановленія въ него корней λ_1 и λ_2 ; слѣдовательно уравненіе (46) можно написать въ формѣ:

$$X - \frac{b_2 - b_1 \lambda_1}{b_2 - b_1 \lambda_2} \cdot \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0$$

Слѣдовательно уравненія проэктивныхъ рядовъ, отнесенныя къ двойнымъ точкамъ, будутъ:

$$X - \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0 \quad , \quad X - \frac{b_2 - b_1 \lambda_1}{b_2 - b_1 \lambda_2} \cdot \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0 \quad (48)$$

Изъ этихъ уравненій видимъ, что ангармоническое отношеніе двухъ соответственныхъ точекъ съ двойными точками есть величина постоянная (§ 107):

$$\frac{b_2 - b_1 \lambda_1}{b_2 - b_1 \lambda_2} \quad (49)$$

Если эта величина равна -1 , то уравнение (48) сдѣлается:

$$X - \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0 \quad , \quad X + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0 \quad (50)$$

т. е. двѣ какія-нибудь соотвѣтственные точки съ двойными точками суть гармоническія, а это свойство принадлежит инволюціонному ряду (§ 110). И въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$\frac{b_2 - b_1 \lambda_1}{b_2 - b_1 \lambda_2} = -1$$

откуда:

$$2b_2 = b_1 (\lambda_1 + \lambda_2) = -(a_1 - b_2)$$

Слѣдовательно $a_1 = -b_2$, а это условіе инволюціи (§ 156).

§ 158. *Инволюціонный центръ.* Мы видѣли, что инволюціонный центръ (§ 109) есть точка совпаденія главныхъ точекъ, и дѣйствительно при условіи $b_2 = -a_1$ уравненія (39) главныхъ точекъ тождественны, слѣдовательно уравненіе инволюціоннаго центра будетъ:

$$A_1 - \frac{a_2 - a_1}{a_1 + b_1} A_2 = 0 \quad (51)$$

Очевидно, что уравненіе ему соотвѣтствующей точки есть:

$$A_1 - A_2 = 0$$

т. е. точка на безконечности.

§ 159. Легко показать, что центръ есть середина между двойными точками:

$$A_1 - (k + \sqrt{R}) A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - (k - \sqrt{R}) A_2 = 0 \quad (52)$$

для этого надобно только найти уравненіе точки дѣлящей разстояніе между двойными точками (52) пополамъ. Уравненіе этой точки будетъ (51).

Задача. Даны двѣ точки $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ и двѣ другія:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0$$

Найти уравненіе середины между этими послѣдними?

Отв. $(2 - \lambda_1 - \lambda_2) A_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_1 \lambda_2) A_2 = 0$

§ 160. Уравненія двухъ проективныхъ рядовъ на одной прямой линіи могутъ быть всегда написаны въ формѣ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - k\lambda A_2 = 0$$

ангармоническое отношеніе этихъ рядовъ есть k , а

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

суть двойныя точки ряда.

Точкѣ λ соотвѣтствуетъ $k\lambda$, а этой послѣдней, если ее разсматривать какъ принадлежащую первому ряду, соотвѣтствующая во второмъ ряду есть $k^2\lambda$; если эту послѣднюю опять разсматривать, какъ принадлежащую первому ряду, то ея соотвѣтственная во второмъ будетъ $k^3\lambda$; продолжая такимъ образомъ получимъ рядъ точекъ:

$$\lambda, k\lambda, k^2\lambda, \dots, k^{n-1}\lambda, k^n\lambda \quad (53)$$

въ которомъ каждая точка соотвѣтствуетъ предъидущей. Если рядъ будетъ такого свойства, что:

$$k^n\lambda = \lambda$$

то рядъ замкнется, т. е. возвращается въ начальную точку λ . Такой рядъ называется *круго-проективнымъ* n -го порядка. Инволюціонный рядъ есть круго-проективный, втораго порядка, а подобный перваго.

Въ инволюціонномъ рядѣ $k = -1$, слѣдовательно уравненія, представляющія такой рядъ будутъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \lambda A_2 = 0$$

или однимъ уравненіемъ:

$$A_1^2 - \lambda^2 A_2^2 = 0 \quad (54)$$

Инволюція точекъ.

§ 161. Изложивъ аналитически въ самой общей формѣ проективность и инволюцію, мы теперь изложимъ инволюцію аналитически въ параллель съ §§ 143—149.

Если шесть точекъ по-парно сопряженныхъ a и a' , b и b' , c и c' , коихъ уравненія суть:

$$\begin{aligned} (a) \quad A_1 = 0 \quad , \quad (b) \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad (c) \quad A_1 - \mu A_2 = 0 \\ (a') \quad A_2 = 0 \quad , \quad (b') \quad A_1 - \lambda' A_2 = 0 \quad , \quad (c') \quad A_1 - \mu' A_2 = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

находятся въ такой зависимости, что ангармоническое отношеніе четырехъ, произвольно выбранныхъ, изъ шести точекъ, равно ангармоническому отношенію четырехъ сопряженныхъ точекъ (§ 116), то говорятъ, что шесть точекъ составляютъ инволюціонный рядъ. Выберемъ, на примѣръ, изъ (55), слѣдующія четыре точки a , a' , b' и c' :

$$(a) \quad A_1 = 0 \quad , \quad (a') \quad A_2 = 0 \quad , \quad (b') \quad A_1 - \lambda' A_2 = 0 \quad , \quad (c') \quad A_1 - \mu' A_2 = 0 \quad (56)$$

Если рядъ точекъ (55) составляетъ инволюцію, то ангармоническое отноше-
шеніе (56) $\frac{\lambda'}{\mu'}$, должно быть равно ангармоническому отношенію a', a, b, c :

$$(a') A_2 = 0, (a) A_1 = 0, (b) A_1 - \lambda A_2 = 0, (c) A_1 - \mu A_2 = 0 \quad (57)$$

Эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$(a') A_2 = 0, (a) A_1 = 0, (b) A_2 - \frac{1}{\lambda} A_1 = 0, (c) A_2 - \frac{1}{\mu} A_1 = 0 \quad (58)$$

ангармоническое отношеніе этихъ точекъ будетъ:

$$\frac{1}{\lambda} : \frac{1}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda}$$

Слѣдовательно для инволюціи мы должны имѣть:

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\mu}{\lambda} \quad \text{или} \quad \lambda \cdot \lambda' = \mu \cdot \mu' \quad (59)$$

Если примемъ въ соображеніе геометрическое значеніе коэффициентовъ λ, λ', μ и μ' , то найдемъ:

$$\lambda = \frac{ab}{a'b}, \quad \lambda' = \frac{ab'}{a'b'}, \quad \mu = \frac{ac}{a'c}, \quad \mu' = \frac{ac'}{a'c'}$$

откуда (59) сдѣлается:

$$\frac{ab}{a'b} \cdot \frac{ab'}{a'b'} = \frac{ac}{a'c} \cdot \frac{ac'}{a'c'}$$

или:

$$\frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{a'b' \cdot a'b}{a'c' \cdot a'c} \quad (60)$$

а это первое изъ условий (87) § 118 инволюціи.

Если положимъ:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\mu'} = k$$

то данныя уравненія (55) сдѣлаются:

$$(a) A_1 = 0, (b) A_1 - \lambda A_2 = 0, (c) A_1 - k\lambda A_2 = 0 \quad (61)$$

$$(a') A_2 = 0, (b') A_1 - \lambda' A_2 = 0, (c') A_1 - \frac{\lambda'}{k} A_2 = 0$$

такую форму имѣютъ уравненія шести инволюціонныхъ точекъ, если двѣ изъ нихъ (a) и (a') приняты за основныя. Изъ этихъ уравненій легко видѣть, что какую бы мы не взяли комбинацію четырехъ точекъ изъ шести, всегда условіе (59) инволюціи будетъ удовлетворено.

Возьмемъ, на примѣръ, такую комбинацію:

$$(a) A_1 = 0, \quad (a') A_2 = 0, \quad (b) A_1 - \lambda A_2 = 0, \quad (c) A_1 - k\lambda A_2 = 0$$

уравненія сопряженныхъ этой комбинаціи точекъ, будутъ:

$$(a') A_2 = 0, \quad (a) A_1 = 0, \quad (b') A_2 - \frac{1}{\lambda'} A_1 = 0, \quad (c') A_1 - \frac{k}{\lambda'} A_1 = 0$$

Очевидно, что ангармоническое отношеніе обѣихъ системъ будетъ $\frac{1}{k}$.

Изъ шести точекъ, пять можно взять произвольно, а шестую определить изъ условія (59) и мы будемъ имѣть шесть инволюціонныхъ точекъ.

§ 162. *Предложеніе.* Если три пары точекъ составляютъ инволюцію, то всегда можно найти четвертую пару точекъ, дѣйствительную или мнимую, которая будетъ сопряженно гармоническою каждой изъ трехъ данныхъ инволюціонныхъ паръ.

Доказательство. Если три пары точекъ составляютъ инволюцію, то форма ихъ уравненій будетъ:

$$\begin{aligned} (a) A_1 = 0, \quad (b) A_1 - \lambda A_2 = 0, \quad (c) A_1 - k\lambda A_2 = 0 \\ (a') A_2 = 0, \quad (b') A_1 - \lambda' A_2 = 0, \quad (c') A_1 - \frac{\lambda'}{k} A_2 = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Пусть уравненія искомой пары будутъ:

$$A_1 - \rho A_2 = 0, \quad A_1 + \rho A_2 = 0 \quad (63)$$

Форма этихъ уравненій потому такая, что эти точки должны быть сопряженно гармоническія точкамъ (a) и (a') . Но эта пара должна быть гармонична и паръ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0, \quad A_1 - \lambda' A_2 = 0 \quad (64)$$

слѣдовательно мы должны имѣть (§ 146):

$$\frac{\lambda - \rho}{\lambda + \rho} \cdot \frac{\lambda' - \rho}{\lambda' + \rho} = \frac{(\lambda - \rho)(\lambda' + \rho)}{(\lambda' - \rho)(\lambda + \rho)} = -1$$

откуда:

$$2\lambda\lambda' = 2\rho^2 \quad \text{или} \quad \rho^2 = \lambda\lambda' \quad (65)$$

откуда:

$$\rho = \pm \sqrt{\lambda\lambda'} \quad (66)$$

Слѣдовательно искомая пара будетъ:

$$A_1 - \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \quad (67)$$

Легко убѣдиться, что эта пара гармонична и послѣдней данной парѣ. Эти точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя, смотря потому, будутъ-ли λ и λ' имѣть одинаковые знаки или разные.

§ 163. *Предложеніе.* Если три пары точекъ такъ связаны между собою, что каждая изъ паръ есть сопряженно гармоническая четвертой парѣ, то три данныя пары составляютъ инволюцію (Обратное).

Доказательство. Возьмемъ за основную пару, ту, которая сопряженно гармонична тремъ даннымъ; пусть эта пара будетъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

то уравненія трехъ данныхъ паръ будутъ:

$$\begin{aligned} A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \mu A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \nu A_2 = 0 \\ A_1 + \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \mu A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \nu A_2 = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

Чтобы показать, что эти три пары точекъ составляютъ инволюцію, возьмемъ за основную пару:

$$A_1 - \lambda A_2 = A'_1 \quad , \quad A_1 + \lambda A_2 = A'_2$$

тогда данныя пары (68) сдѣлаются:

$$\begin{aligned} A'_1 = 0 \quad , \quad A'_1 + \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 + \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \nu} A'_2 = 0 \\ A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 + \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 + \frac{\lambda + \nu}{\lambda - \nu} A'_2 = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Изъ формы этихъ уравненій видно, что условіе инволюціи (59) удовлетворено.

§ 164. Мы выше видѣли, что пара точекъ:

$$(e) \quad A_1 - \sqrt{\lambda\lambda_1} A_2 = 0 \quad , \quad (f) \quad A_1 + \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \quad (70)$$

есть сопряженно гармоническая тремъ слѣдующимъ парамъ точекъ въ инволюціи:

$$(a) \quad A_1 = 0 \quad , \quad (b) \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad (c) \quad A_1 - k\lambda A_2 = 0 \quad (71)$$

$$(a') \quad A_2 = 0 \quad , \quad (b') \quad A_1 - \lambda' A_2 = 0 \quad , \quad (c') \quad A_1 - \frac{\lambda'}{k} A_2 = 0$$

Легко видѣть, что каждая изъ точекъ (70) будетъ составлять инволюцію съ двумя парами изъ (71), имѣя саму себя сопряженною. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненія:

$$(a) \quad A_1 = 0 \quad , \quad (b) \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad (e) \quad A_1 - \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \quad (72)$$

$$(a') \quad A_2 = 0 \quad , \quad (b') \quad A_1 - \lambda' A_2 = 0 \quad , \quad (e) \quad A_1 - \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0$$

условіе инволюціи будетъ (§ 161, 59):

$$\lambda\lambda' = \sqrt{\lambda\lambda'} \sqrt{\lambda\lambda'}$$

слѣдовательно удовлетворено.

Поэтому точки (e) и (f) называютъ *двойными точками* инволюціоннаго ряда.

Одна изъ двойныхъ точекъ можетъ быть на бесконечности; для этого необходимо имѣть $\lambda\lambda' = 1$, что даетъ $A_1 - A_2 = 0$ и $A_1 + A_2 = 0$, т. е. другая двойная точка будетъ середина точекъ a и a' .

Уравненія двойныхъ точекъ (e) и (f) (70) можно получить, сдѣлавъ въ послѣдней парѣ уравненій (71) $\lambda k = \frac{\lambda'}{k}$ или $k^2 = \frac{\lambda'}{\lambda}$, откуда $k = \pm \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}$.

Подставляя вмѣсто k его выраженія въ послѣднюю пару (71), найдемъ уравненія двойныхъ точекъ (e) и (f).

Двойныя точки (e) и (f) составляютъ инволюцію съ точками (a) и (b'), (a') и (b) взятыми какъ сопряженные изъ трехъ инволюціонныхъ паръ a и a' , b и b' , c и c' , т. е. три пары точекъ:

$$(a) \quad A_1 = 0 \quad , \quad (a') \quad A_2 = 0 \quad , \quad (e) \quad A_1 - \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \quad (73)$$

$$(b') \quad A_1 - \lambda' A_2 = 0 \quad , \quad (b) \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad (f) \quad A_1 + \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0$$

составляютъ инволюціонный рядъ (§ 161):

Легко видѣть, что:

$$\sqrt{\lambda\lambda'} = \frac{ae}{a'e} \quad , \quad -\sqrt{\lambda\lambda'} = \frac{af}{a'f}$$

или:

$$\lambda\lambda' = \frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'} = \frac{ae^2}{a'e^2}, \quad \lambda\lambda' = \frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'} = \frac{af^2}{a'f^2}$$

а это суть формулы (§ 125).

§ 165. Положимъ теперь, что одна изъ точекъ инволюціоннаго ряда:

$$(a) A_1 = 0, \quad (b) A_1 - \lambda A_2 = 0, \quad (c) A_1 - k\lambda A_2 = 0 \quad (74)$$

$$(a') A_2 = 0, \quad (b') A_1 - \lambda' A_2 = 0, \quad (c') A_1 - \frac{\lambda'}{k} A_2 = 0$$

напримѣръ точка (c), находится на бесконечности, въ этомъ случаѣ, мы должны положить $k\lambda = 1$ (§ 82); въ этомъ предположеніи сопряженная точка (c') будетъ:

$$(O) A_1 - \lambda\lambda' A_2 = 0 \quad (75)$$

Слѣдовательно инволюціонный рядъ будетъ:

$$(a) A_1 = 0, \quad (b) A_1 - \lambda A_2 = 0, \quad (\infty) A_1 - A_2 = 0$$

$$(a') A_2 = 0, \quad (b') A_1 - \lambda' A_2 = 0, \quad (O) A_1 - \lambda\lambda' A_2 = 0$$

Изъ уравненія (O) будемъ имѣть (§ 123, 89):

$$\lambda\lambda' = \frac{Oa}{Oa'} = \frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'}$$

Такъ какъ двойныя точки (e) и (f) суть гармонично сопряженныя съ точками (§ 162):

$$(\infty) A_1 - A_2 = 0, \quad (O) A_1 - \lambda\lambda' A_2 = 0$$

то точка (O) находится по срединѣ отрѣзка ef.

Точка (O), какъ мы уже выше видѣли (§ 129), называется *инволюціоннымъ центромъ* ряда точекъ. Если положимъ:

$$\lambda\lambda' = \rho^2$$

то уравненіе центра сдѣлается:

$$A_1 - \rho^2 A_2 = 0$$

Если къ двойнымъ точкамъ e и f инволюціоннаго ряда (74) будемъ строить безчисленное множество паръ точекъ гармонически сопряженныхъ, то получимъ бесконечный рядъ точекъ, по-парно сопряженныхъ, каждая три пары изъ котораго, произвольно выбранныя, составляютъ инволюцію. Та-

кія пары мы получимъ, давая въ рядѣ (74) коэффиціенту k всевозможныя величины отъ $-\infty$ до $+\infty$. Если коэффиціенты сопряженныхъ паръ будутъ λ и λ' , μ и μ' , ν и ν' , ..., то мы будемъ имѣть:

$$\rho^2 = \lambda\lambda' = \mu\mu' = \nu\nu' = \dots\dots\dots$$

§ 166. *Задача.* Даны двѣ пары точекъ:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0$$

$$A_1 - \mu_1 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \mu_2 A_2 = 0$$

найти третью пару, которая была бы сопряженно гармоническая каждой изъ данныхъ паръ?

Рѣшеніе. Пусть искомая пара будетъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \mu A_2 = 0$$

Если эта пара гармонична первой парѣ, то мы имѣемъ (§ 146):

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda + \mu) + \lambda_1\mu_1 = 0$$

но она гармонична, по условію, и второй парѣ, слѣдовательно:

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda + \mu) + \lambda_2\mu_2 = 0$$

Эти два уравненія линейны относительно неизвѣстныхъ $\lambda\mu$ и $\lambda + \mu$, слѣдовательно ихъ можно опредѣлить; пусть будетъ:

$$\lambda + \mu = a_1 \quad , \quad \lambda\mu = a_2$$

то λ и μ будутъ корни квадратнаго уравненія:

$$z^2 - a_1 z + a_2 = 0$$

Слѣдовательно искомыя точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя.

§ 167. *Задача.* Найти условіе инволюціи трехъ данныхъ паръ точекъ:

$$(a) A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad (b) A_1 - \lambda_2 A_2 = 0 \quad , \quad (c) A_1 - \lambda_3 A_2 = 0$$

(76)

$$(a') A_1 - \mu_1 A_2 = 0 \quad , \quad (b') A_1 - \mu_2 A_2 = 0 \quad , \quad (c') A_1 - \mu_3 A_2 = 0$$

Рѣшеніе. Мы видѣли (§ 134), что если три пары точекъ составляютъ инволюцію, то есть четвертая пара, сопряженно гармоническая каждой изъ данныхъ паръ, поэтому если эта послѣдняя пара будетъ:

$$(e) A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad (f) A_1 - \mu A_2 = 0$$

то мы будемъ имѣть:

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda + \mu) + \lambda_1\mu_1 = 0$$

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda + \mu) + \lambda_2\mu_2 = 0$$

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_3 + \mu_3)(\lambda + \mu) + \lambda_3\mu_3 = 0$$

Эти три уравненія, линейныя относительно $\lambda\mu$ и $\lambda + \mu$, должны быть совместно удовлетворены значеніями $\lambda\mu$ и $\lambda + \mu$, поэтому мы должны имѣть:

$$\begin{vmatrix} 1 & , & \lambda_1 + \mu_1 & , & \lambda_1\mu_1 \\ 1 & , & \lambda_2 + \mu_2 & , & \lambda_2\mu_2 \\ 1 & , & \lambda_3 + \mu_3 & , & \lambda_3\mu_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (77)$$

Это условіе инволюціи между тремя парами точекъ.

Если развернемъ предъидущій опредѣлитель, то найдемъ:

$$(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_3)(\lambda_3 - \mu_1) + (\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_3)(\mu_3 - \lambda_1) = 0 \quad (78)$$

Если примемъ въ соображеніе геометрическое значеніе коэффиціентовъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \mu_1, \mu_2, \mu_3$ и тождество § 89, то найдемъ, что это уравненіе есть первое изъ условій (88) § 118 инволюціи, а именно:

$$ab' \cdot bc' \cdot ca' = -a'b \cdot b'c \cdot c'a$$

§ 168. *Предложеніе.* Всякая прямая пересѣкаетъ три пары прямыхъ линій, проходящихъ черезъ четыре точки, въ шести точкахъ, составляющихъ инволюціонный рядъ.

Доказательство. Пусть уравненія четырехъ точекъ будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0 \quad (79)$$

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 будутъ числовыя значенія выраженій (79), когда въ нихъ подставимъ координаты сѣкущей.

Уравненія точекъ пересѣченія сторонъ и діагоналей съ сѣкущею, очевидно, будутъ:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_4}{a_4} = 0, \quad (a') \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \\ (b) \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_4}{a_4} = 0, \quad (b') \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \\ (c) \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_4}{a_4} = 0, \quad (c') \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

Положимъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_4}{a_4} = \frac{A'_1}{\lambda}, \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_4}{a_4} = \frac{A'_2}{\mu}, \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_4}{a_4} = \frac{A'_3}{\nu}$$

λ , μ и ν суть множители, которые даютъ уравненіямъ (a), (b), (c) каноническую форму:

$$x\xi + y\eta + 1 = 0$$

Такимъ образомъ уравненія (80) сдѣлаются:

$$(a) \quad A'_2 = 0, \quad (b) \quad A'_2 = 0, \quad (c) \quad A'_3 = 0$$

$$(a') \quad \frac{A'_2}{\mu} - \frac{A'_3}{\nu} = 0, \quad (b') \quad \frac{A'_3}{\nu} - \frac{A'_1}{\lambda} = 0, \quad (c') \quad \frac{A'_1}{\lambda} - \frac{A'_2}{\mu} = 0$$

откуда:

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{ba'}{ca'}, \quad \frac{\nu}{\lambda} = \frac{cb'}{ab'}, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{ac'}{bc'}$$

перемножая, найдемъ:

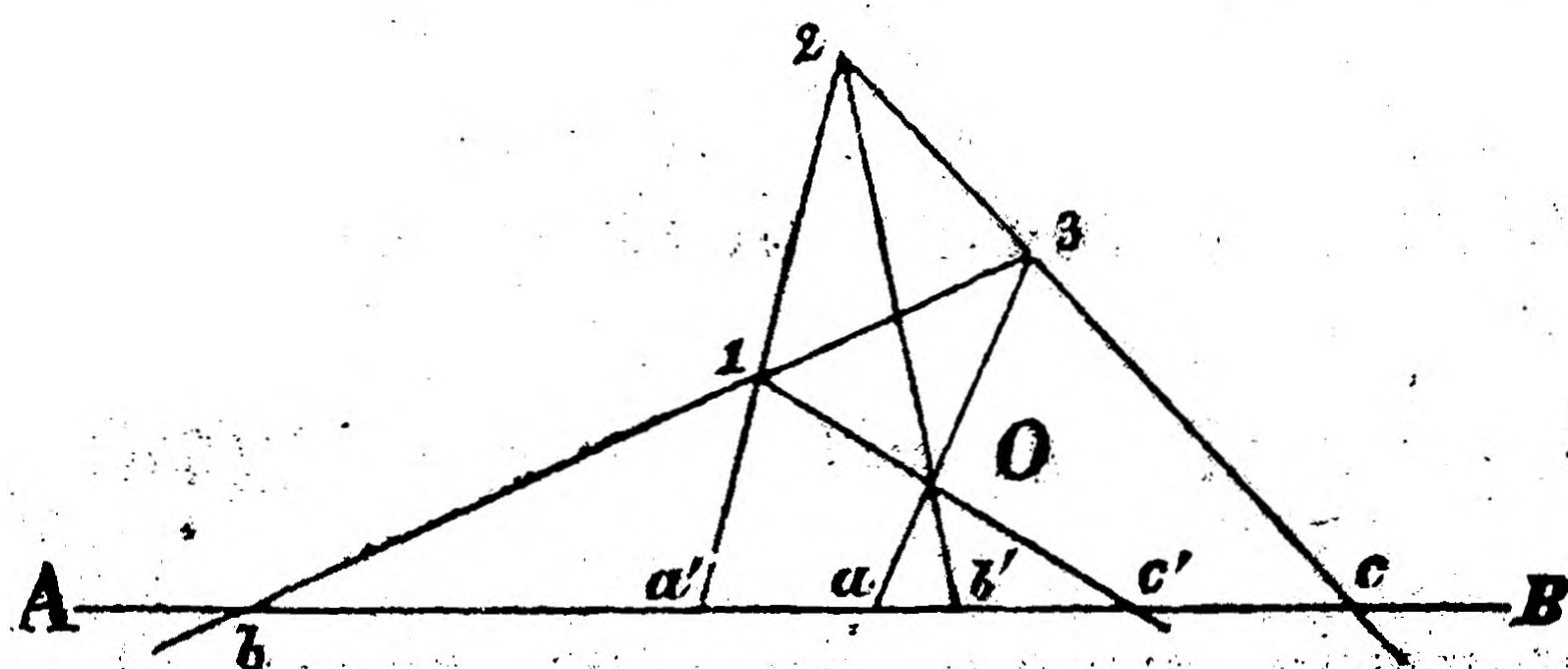
$$\frac{ab' \cdot bc' \cdot ca'}{a'b \cdot b'c \cdot c'a} = 1 \quad (81)$$

а это первое изъ условий (88) § 118 инволюціи.

§ 169. На основаніи этого свойства полного четырехугольника можно рѣшить слѣдующую задачу:

Задача. По даннымъ пяти точкамъ, на одной прямой линіи, изъ трехъ паръ, составляющихъ инволюцію, построить шестую точку?

Фиг. 87.



бы образовали треугольникъ 123. Проведемъ прямыя 3a и 2b', соеди-

Рѣшеніе. Пусть данныя пять точекъ будутъ a и a' , b и b' , c (фиг. 87).

Черезъ три точки c , b , a' , данной прямой AB проведемъ, какія-нибудь, три прямыя линіи, которыя

бы образовали треугольникъ 123. Проведемъ прямыя 3a и 2b', соеди-

нимъ точку ихъ пересѣченія O прямою съ точкою 1 ; прямая $O1$ встрѣтитъ данную AB въ искомой точкѣ c' . Это построение дало четырехугольникъ $O123$, въ которомъ данная прямая AB пересѣкла четыре стороны и двѣ діагонали, а по § 168 шесть точекъ пересѣченія составляютъ инволюціонный рядъ. Построение шестой инволюціонной точки, по пяти даннымъ, какъ видимъ, дѣлается только съ помощью прямой линіи.

Инволюціонная связка.

§ 170. Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

суть уравненія двухъ прямыхъ въ нормальной формѣ, то уравненія:

$$\begin{aligned} (a) \quad A_1 = 0 \quad , \quad (b) \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad (c) \quad A_1 - \mu A_2 = 0 \\ (a') \quad A_2 = 0 \quad , \quad (b') \quad A_1 - \lambda' A_2 = 0 \quad , \quad (c') \quad A_1 - \mu' A_2 = 0 \end{aligned} \quad (82)$$

будутъ прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія (a) и (a') . Всѣ предложенія относительно инволюціонныхъ свойствъ (82) связки получаются весьма просто изъ свойствъ инволюціоннаго ряда точекъ, если слово *точка* замѣнить словомъ *прямая* во всѣхъ предложеніяхъ относительно точекъ, и если вмѣсто λ , λ' , μ и μ' поставимъ ихъ геометрическія значенія:

$$\lambda = \frac{\sin(a, b)}{\sin(a', b)} \quad , \quad \lambda' = \frac{\sin(a, b')}{\sin(a', b')} \quad , \quad \mu = \frac{\sin(a, c)}{\sin(a', c)} \quad , \quad \mu' = \frac{\sin(a, c')}{\sin(a', c')}$$

гдѣ a, b ; a, c ; означаютъ углы между прямыми a и b , a и c и т. д.

Принимая во вниманіе это геометрическое значеніе коэффиціентовъ мы будемъ имѣть слѣдующіе результаты:

1. Условіе инволюціи связки (82) будетъ (59, § 161).
2. Въ силу чего уравненія инволюціонной связки будутъ имѣть форму (61, § 161).
3. Двойные лучи будутъ выражены уравненіями (67, § 162).
4. О лучахъ на бесконечности не можетъ быть и рѣчи, а соотвѣтственные лучи (§ 165) центру и точкѣ на бесконечности будутъ (73):

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda\lambda' A_2 = 0$$

5. Если въ двойныхъ лучахъ будемъ имѣть $\lambda\lambda' = 1$, то лучи будутъ:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0$$

это показываетъ, что эти лучи дѣлятъ углы между прямыми (a) и (a') пополамъ, а инволюціонная связка будетъ:

$$(a) \quad A_1 = 0 \quad , \quad (b) \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad (c) \quad A_1 - A_2 = 0$$

$$(a') \quad A_2 = 0 \quad , \quad (b') \quad A_1 \lambda - A_2 = 0 \quad , \quad (f) \quad A_1 + A_2 = 0$$

форма второй пары показываетъ (§ 81, пр. 3), что лучъ (b) дѣляетъ съ лучемъ (a) такой уголъ, какой лучъ (b) дѣляетъ съ лучемъ (a') .

6. Уравненіе (77) будетъ условіе инволюціи связки, имѣющей форму (76).

§ 171. Заклучимъ свойства инволюціонной связки слѣдующими двумя замѣчательными предложеніями:

Предложеніе. Если вершины, какого-нибудь, треугольника соединимъ прямыми линіями съ произвольно взятою точкою въ плоскости треугольника, то стороны треугольника и проведенныя прямыя находятся въ инволюціонной зависимости, т. е. прямыя проведенныя, черезъ какую-нибудь, точку параллельно сторонамъ треугольника и проведеннымъ прямымъ, составляютъ инволюціонную связку.

Доказательство. Пусть уравненія сторонъ треугольника и проведенныхъ черезъ одну точку линій будутъ:

$$(a) \quad A_1 = 0 \quad , \quad (b) \quad A_2 = 0 \quad , \quad (c) \quad A_3 = 0$$

$$(a') \quad \frac{A_1}{\lambda} - \frac{A_2}{\mu} = 0 \quad , \quad (b') \quad \frac{A_2}{\mu} - \frac{A_3}{\nu} = 0 \quad , \quad (c') \quad \frac{A_3}{\nu} - \frac{A_1}{\lambda} = 0$$

Изъ геометрическаго значенія коэффициентовъ λ , μ , ν будемъ имѣть:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(a, a')}{\sin(b, a')} \quad , \quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{\sin(b, b')}{\sin(c, b')} \quad , \quad \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\sin(c, c')}{\sin(a, c')}$$

перемножая, найдемъ:

$$\frac{\sin(a, a') \cdot \sin(b, b') \cdot \sin(c, c')}{\sin(b, a') \cdot \sin(c, b') \cdot \sin(a, c')} = 1$$

Изъ этого выраженія, соответствующаго выраженію (81), видимъ, что стороны треугольника и три проведенныя прямыя находятся въ инволюціонной зависимости, т. е. составляютъ углы между собою, которые удовлетворяютъ инволюціонной зависимости. Слѣдовательно, если черезъ, какую-нибудь, точку проведемъ прямыя, параллельно сторонамъ треуголь-

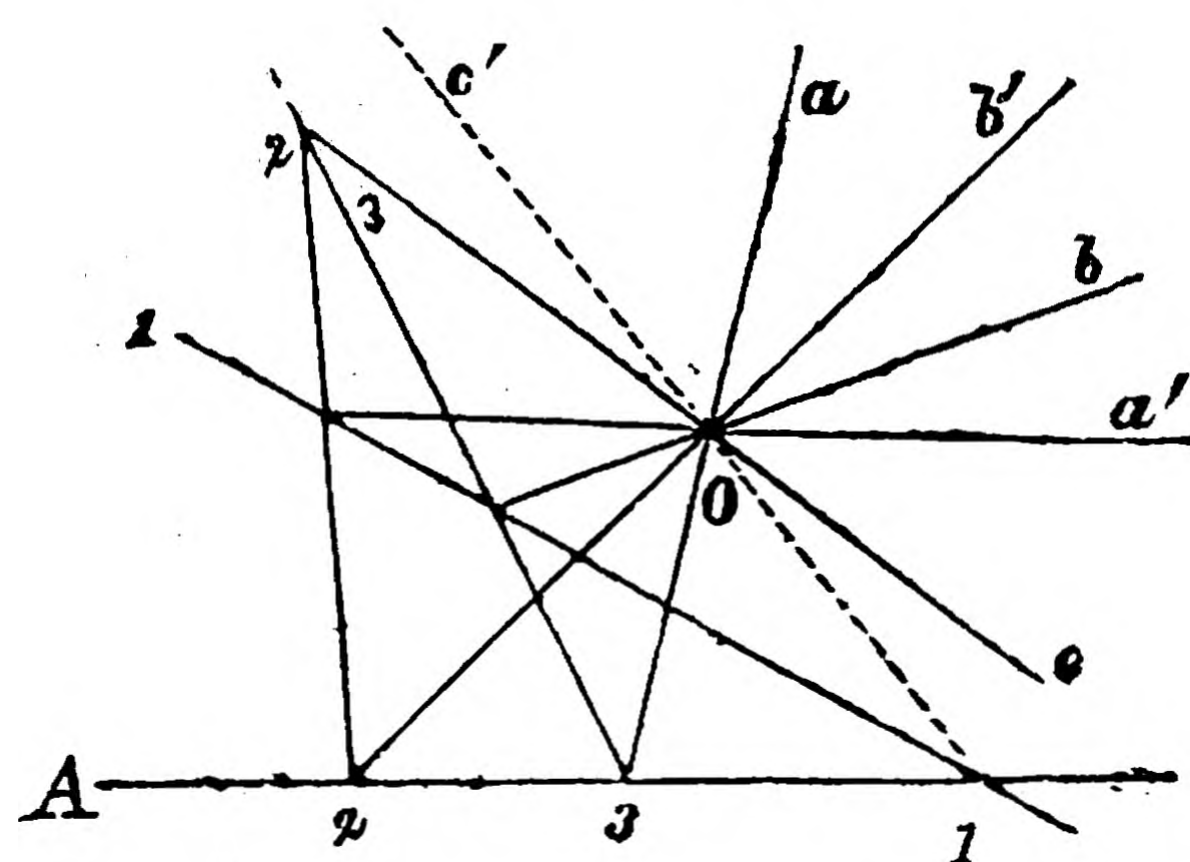
ника и проведеннымъ прямымъ къ вершинамъ, то получимъ инволюціонную связку.

Это свойство треугольника даетъ возможность рѣшить слѣдующую задачу.

Задача. По даннымъ пяти прямымъ изъ трехъ паръ въ инволюціи, проходящихъ черезъ одну точку, провести шестую?

Рѣшеніе. Пусть данныя пары будутъ Oa, Oa', Ob, Ob', Oc ; требуется построить Oc' . Проведемъ, какую-нибудь, прямую линію 11. Точки пересѣченія этой линіи съ прямыми Oa' и Ob соединимъ съ произвольно взятою точкою на прямой Oc (фиг. 88). Эти прямая будутъ 22 и 33. Соединимъ точки пересѣченія 22 и Ob' , 33 и Oa прямою A , то прямая A и 11 пересѣкнутся въ точкѣ, находящейся на искомой прямой. Слѣдовательно, соединивъ эту точку съ O , найдемъ искомую шестую прямую.

Фиг. 88.



Предложеніе. Если шесть вершинъ четырехугольника соединимъ съ какою-нибудь, точкою взятою въ его плоскости, то шесть прямыхъ будутъ составлять инволюціонную связку.

Доказательство. Пусть уравненія сторонъ четырехугольника будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0$$

Если, теперь, a_1, a_2, a_3, a_4 будутъ числовыя значенія предъидущихъ уравненій, когда въ нихъ подставимъ координаты взятой точки, то уравненія шести прямыхъ будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_4}{a_4} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_4}{a_4} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_4}{a_4} = 0$$

$$\frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0$$

Пусть λ, μ, ν , будутъ множители, дающіе нормальную форму первымъ тремъ уравненіямъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_4}{a_4} = \frac{A}{\lambda} \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_4}{a_4} = \frac{B}{\mu} \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_4}{a_4} = \frac{C}{\nu}$$

Слѣдовательно предъидущія уравненія сдѣлаются:

$$(a) A = 0 \quad , \quad (b) B = 0 \quad , \quad (c) C = 0$$

$$(a') \frac{B}{\mu} - \frac{C}{\nu} = 0 \quad , \quad (b') \frac{C}{\nu} - \frac{A}{\lambda} = 0 \quad , \quad (c') \frac{A}{\lambda} - \frac{B}{\mu} = 0$$

но:

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\sin(b, a')}{\sin(c, a')} \quad , \quad \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\sin(c, b')}{\sin(a, b')} \quad , \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(a, c')}{\sin(b, c')}$$

откуда, перемноживъ:

$$\frac{\sin(b, a') \cdot \sin(c, b') \cdot \sin(a, c')}{\sin(c, a') \cdot \sin(a, b') \cdot \sin(b, c')} = 1$$

а это показываетъ, что шесть прямыхъ составляютъ инволюціонную связку.

Рѣшить при помощи свойствъ проэективныхъ рядовъ и связокъ задачи § 84, прим. 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, и т. д. до 26 включительно, и задачи § 85, прим. 2, 3, 4, 5, 6, 7.

ГЛАВА XI.

Геометрическое значеніе однородныхъ уравненій.

§ 172. Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \tag{1}$$

суть уравненія двухъ прямыхъ въ нормальной формѣ, то уравненіе:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \tag{2}$$

представляетъ прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ (1). Числовое значеніе A_1 , A_2 и λ въ уравненіи (2) было объяснено выше.

Если обратимъ вниманіе на форму уравненія (2), то увидимъ, что оно ничѣмъ не отличается отъ обыкновеннаго уравненія въ декартовыхъ координатахъ:

$$x - \lambda y = 0 \tag{3}$$

прямой, проходящей черезъ начало координатъ, т. е. черезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0$$

разница заключается въ томъ, что въ уравненіи (3) координаты точки на прямой проводятся параллельно осямъ, а въ уравненіи (2) A_1 и A_2 суть пер-

пендикуляры, опущенные на прямая (1) изъ точекъ прямой (2), какъ бы ни были наклонены между собою прямая (1). Но такъ какъ эти перпендикуляры пропорціональны прямымъ, параллельнымъ координатамъ, то уравненія (2) и (3) не имѣютъ между собою разницы—параллельныя могутъ быть замѣщены перпендикулярами и, обратно, значеніе уравненій (2) и (3) неизмѣняется.

Дѣло только въ томъ, что въ уравненіи (3):

$$x = 0 \quad , \quad y = 0$$

суть сами координатныя оси, а въ уравненіи (2):

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

суть прямая отнесенныя къ координатамъ Декарта, и если эти прямая принять за координатныя оси, то уравненіе (2) будетъ тождественно съ уравненіемъ (3).

Если вмѣсто λ напишемъ отношеніе $a_1 : -a_0$, то уравненіе (2) приметъ форму:

$$a_0x + a_1y = 0 \quad (4)$$

значеніе отношенія было показано въ § 79.

§ 173. Если уравненія (1) представляютъ точки въ нормальной формѣ, то уравненіе (2) будетъ представлять точку на прямой, проходящей черезъ точки (1). Числовое значеніе A_1 , A_2 и λ въ уравненіи (2) было объяснено въ § 82:

Если отношеніе λ дано, то дано и положеніе точки (2) на прямой (A_1 A_2). Въ самомъ дѣлѣ, означимъ разстояніе между точками (1) черезъ k , черезъ p и q разстояніе точки (2) отъ точекъ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, то соображаясь съ значеніемъ λ , найдемъ:

$$p + q = k \quad , \quad p = q\lambda$$

откуда p и q будутъ опредѣлены.

Если теперь оставимъ въ сторонѣ координаты Декарта, въ которыхъ выражено уравненіе (2), а перпендикуляры A_1 и A_2 , опущенные изъ точекъ (1) на прямую (2), означимъ черезъ x и y , то уравненіе (2) приметъ форму:

$$px + qy = 0$$

или для большей общности, полагая $pp = a_0$, $qq = a_1$ будемъ имѣть:

$$a_0x + a_1y = 0 \quad (5)$$

Въ этомъ уравненіи точки, координатами становятся не двѣ прямыя, какъ въ декартовой системѣ, а двѣ точки $x = 0$ и $y = 0$, которыя мы будемъ называть *координатными*.

Итакъ однородное уравненіе 1-ой степени:

$$a_0x + a_1y = 0$$

представляетъ или прямую или точку, смотря потому придаемъ-ли мы уравненіямъ:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0$$

значеніе прямыхъ или точекъ.

§ 174. Послѣ этихъ поясненій легко показать геометрическое значеніе однороднаго уравненія n -ой степени:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 0 \quad (6)$$

Это уравненіе можно написать въ формѣ:

$$a_0 \left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{x}{y}\right) + a_n = 0 \quad (7)$$

которое можетъ быть рѣшено относительно $\frac{x}{y}$. Если его корни означимъ черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то уравненіе (7) можно написать въ формѣ:

$$a_0 \left(\frac{x}{y} - \alpha_1\right) \left(\frac{x}{y} - \alpha_2\right) \dots \left(\frac{x}{y} - \alpha_n\right) = 0 \quad (8)$$

или:

$$a_0(x - \alpha_1y)(x - \alpha_2y) \dots (x - \alpha_ny) = 0 \quad (9)$$

которое, такимъ образомъ, представляетъ n прямыхъ или точекъ:

$$x - \alpha_1y = 0 \quad , \quad x - \alpha_2y = 0, \dots, x - \alpha_ny = 0 \quad (10)$$

смотря потому будутъ-ли уравненія $x = 0, y = 0$ представлять прямыя или точки.

Если бы мы выразили и корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ отношеніями:

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}$$

то уравненія (10) представились-бы въ формѣ:

$$x_1x - y_1y = 0 \quad , \quad x_2x - y_2y = 0, \dots, x_nx - y_ny = 0 \quad (11)$$

§ 175. Если уравнения:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad (12)$$

представляют прямые, то:

$$x - y = 0 \quad , \quad x + y = 0 \quad (13)$$

суть равнодвлящие углы между прямыми.

Если уравнения (12) суть точки, то (13) суть точки равнодвлящего расстояния между точками (12) внутренне или внешне (§ 82), изъ коихъ первое изъ уравнений (13) представляет точку на бесконечности (§ 82).

Уравнения (12) и (13) представляют гармоническую связку или рядъ.

Точно также уравнения:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad a_0x - a_1y = 0 \quad , \quad a_0x + a_1y = 0 \quad (14)$$

представляют или гармоническую связку или гармонический рядъ.

Примѣръ. Уравнение:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = 0$$

представляет двѣ прямые или двѣ точки. Если корни этого уравнения относительно $\frac{x}{y}$ будутъ α_1 , α_2 , то уравнения прямыхъ или точекъ будутъ:

$$x - \alpha_1y = 0 \quad , \quad x - \alpha_2y = 0$$

эти прямые или точки будутъ действительныя, совпадающія или мнимыя, смотря потому будетъ-ли:

$$a_1^2 - a_0a_2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

§ 176. *Задача.* Найти углы между прямыми:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = 0 \quad (15)$$

и уравнения равнодвлящихъ?

Рѣшеніе 1. Предположимъ, что оси $x=0$, $y=0$ прямоугольны. Означая корни даннаго уравненія черезъ α_1 и α_2 , оно распадается на два:

$$x - \alpha_1y = 0 \quad , \quad x - \alpha_2y = 0 \quad (16)$$

Слѣдовательно задача сводится къ опредѣленію угла между этими послѣдними прямыми. Означимъ черезъ φ_1 и φ_2 углы, которые эти прямые составляютъ съ осью Y , то будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \alpha_1 \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \alpha_2$$

Слѣдовательно уголъ между прямыми (16) будетъ:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 + \alpha_1 \alpha_2}$$

но изъ свойствъ квадратнаго уравненія (15) имѣемъ:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{2a_1}{a_0}, \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

откуда:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm \frac{2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0}$$

слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0 + a_2}$$

Если черезъ φ' и φ'' означимъ эти углы:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0 + a_2}, \quad \operatorname{tg} \varphi'' = -\frac{2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0 + a_2}$$

то, очевидно, $\varphi' + \varphi'' = \pi$.

Чтобы найти уравненіе равнодѣлящихъ углы между прямыми (15), то замѣтивъ, что если ω есть уголъ, который равнодѣлящая составляетъ съ осью Y , имѣемъ:

$$2\omega = \varphi_1 + \varphi_2$$

откуда:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2 \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg}^2 \omega} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2}$$

подставляя значенія для $\alpha_1 + \alpha_2$ и $\alpha_1 \alpha_2$, найдемъ:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg}^2 \omega} = -\frac{2a_1}{a_0 - a_2}$$

откуда:

$$a_1 \operatorname{tg}^2 \omega - (a_0 - a_2) \operatorname{tg} \omega - a_1 = 0$$

корни этого уравненія будутъ давать двѣ равнодѣлящія. Если вмѣсто $\operatorname{tg} \omega$, поставимъ $\frac{x}{y}$, то уравненіе равнодѣлящихъ будетъ:

$$a_1 x^2 - (a_0 - a_2) xy - a_1 y^2 = 0 \quad (17)$$

Очевидно корни этого уравненія всегда дѣйствительныя, будутъ-ли данныя уравненіемъ (15) прямыя дѣйствительныя или мнимыя.

Рѣшеніе 2. Эту послѣднюю задачу можно еще рѣшить слѣдующимъ образомъ:

Пусть прямыя:

$$x - \mu_1 y = 0 \quad , \quad x - \mu_2 y = 0 \quad (18)$$

будутъ сопряженно-гармоническія съ прямыми (16), то мы имѣемъ (§ 146):

$$\mu_1 \mu_2 - \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

Если уравненія (18) суть равнодѣлящія углы между прямыми (16), то онѣ должны быть перпендикулярны и, слѣдовательно:

$$\mu_1 \mu_2 = -1$$

откуда:

$$-2 - (\mu_1 + \mu_2) (\alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_1 \alpha_2 = 0$$

изъ этого уравненія найдемъ:

$$\mu_1 + \mu_2 = -\frac{2 - 2\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{a_0 - a_2}{a_1}$$

имѣя $\mu_1 + \mu_2$ и $\mu_1 \mu_2$ найдемъ уравненіе:

$$a_1 \mu^2 - (a_0 - a_2) \mu - a_1 = 0$$

Замѣщая μ черезъ $\frac{x}{y}$, найдемъ уравненіе (17).

Задача. Даны уравненія двухъ прямыхъ:

$$a_0 x + a_1 y = 0 \quad , \quad b_0 x + b_1 y = 0$$

Найти уравненіе равнодѣлящихъ?

Рѣшеніе. Перемноживъ эти уравненія, найдемъ уравненіе:

$$a_0 b_0 x^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) xy + a_1 b_1 y^2 = 0$$

Если сравнимъ это уравненіе съ уравненіемъ (15), найдемъ уравненіе равнодѣлящихъ, соотвѣтствующее уравненію (17):

$$(a_0 b_1 + a_1 b_0) x^2 - 2(a_0 b_0 - a_1 b_1) xy - (a_0 b_1 + a_1 b_0) y^2 = 0 \quad (19)$$

Если данныя уравненія будутъ двѣ мнимыя сопряженныя прямыя, то равнодѣлящія будутъ дѣйствительныя.

§ 177. Если уравненія:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0$$

будутъ точки, то уравненіе:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = 0 \quad (20)$$

будетъ представлять двѣ точки, коихъ уравненія будутъ:

$$x - \alpha_1y = 0 \quad , \quad x - \alpha_2y = 0$$

если α_1 и α_2 суть корни уравненія (20).

Задача. Найти уравненіе точекъ дѣлящихъ разстояніе между точками (20) пополамъ?

Рѣшеніе. Точка дѣлящая внѣшне это разстояніе находится на безконечности.

Условіе, чтобы точки:

$$x - \mu_1y = 0 \quad , \quad x - \mu_2y = 0 \quad (21)$$

были сопряженно-гармоническія съ точками (20) есть:

$$\mu_1\mu_2 - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 = 0 \quad (22)$$

Если эти точки суть равнодѣлящія, то одна изъ нихъ, на примѣръ вторая, должна находится на безконечности, а слѣдовательно ея уравненіе должно быть:

$$x - y = 0$$

т. е. $\mu_2 = 1$. Въ силу чего условіе (22) дѣлается:

$$\mu_1 - \frac{1}{2}(\mu_1 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 = 0$$

откуда имѣемъ:

$$a_0\mu_1 + (\mu_1 + 1)a_1 + a_2 = 0$$

или:

$$(a_0 + a_1)\mu_1 + a_1 + a_2 = 0$$

замѣщая μ_1 черезъ $\frac{x}{y}$, найдемъ уравненіе искомой равнодѣлящей:

$$(a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)y = 0 \quad (23)$$

Задача 1. Даны уравненія двухъ точекъ:

$$a_0x + a_1y = 0 \quad , \quad b_0x + b_1y = 0$$

найти уравненіе равнодѣлящей?

Рѣшеніе. Какъ второе рѣшеніе задачи о прямыхъ (§ 176).

Отв. $(a_0b_1 + b_0a_1 + 2a_0b_0)x + (a_0b_1 + b_0a_1 + 2a_1b_1)y = 0$

Задача 2. Найти выраженіе для ангармоническаго отношенія четырехъ точекъ:

$$a_0x + a_1y = 0 \quad , \quad b_0x + b_1y = 0$$

$$c_0x + c_1y = 0 \quad , \quad d_0x + d_1y = 0$$

Рѣшеніе. Если сравнимъ эти уравненія съ уравненіями § 145, то найдемъ:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{c_0a_1 - a_0c_1}{d_0a_1 - a_0d_1} : \frac{c_0b_1 - b_0c_1}{d_0b_1 - d_1b_0} \quad (24)$$

Если это отношеніе равно -1 , то точки будутъ гармоническія.

Задача. Найти условіе, чтобы точки:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2 = 0 \quad (25)$$

были сопряженно-гармоническія?

Рѣшеніе. Если корни перваго уравненія назовемъ черезъ λ_1, λ_2 , а втораго черезъ λ_3, λ_4 , то надобно только найти условіе гармоничности четырехъ точекъ:

$$x - \lambda_1y = 0 \quad , \quad x - \lambda_3y = 0$$

$$x - \lambda_2y = 0 \quad , \quad x - \lambda_4y = 0$$

Но условіе гармоничности этихъ точекъ есть (§ 146):

$$\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 = 0$$

Но изъ уравненій (25) имѣемъ:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a_2}{a_0} \quad , \quad \lambda_3\lambda_4 = \frac{b_2}{b_0} \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2a_1}{a_0} \quad , \quad \lambda_3 + \lambda_4 = -\frac{2b_1}{b_0}$$

слѣдовательно условіе гармоничности будетъ:

$$a_0b_2 + a_2b_0 - 2a_1b_1 = 0 \quad (26)$$

Примѣръ. Показать, что уравненія:

$$x^2 + y^2 = 0 \quad , \quad x^2 + 2a_1xy - y^2 = 0$$

представляютъ гармоническія точки.

Задача. Найти зависимость между коэффициентами уравнения четвертой степени, чтобы точки, которыя оно представляет, были гармоническія?

Рѣшеніе. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4 = 0 \quad (27)$$

Уравненіе взято съ биноміальными коэффициентами. Пусть его корни будутъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, то уравненія точекъ, которыя представляетъ уравненіе (27), будутъ:

$$x - \alpha_1y = 0, \quad x - \alpha_2y = 0, \quad x - \alpha_3y = 0, \quad x - \alpha_4y = 0$$

Чтобы эти точки были гармоническія необходимо имѣть:

$$\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4 = 0$$

Но такъ какъ три точки опредѣляютъ четвертую гармоническую, а соединеній изъ четырехъ точекъ по три есть три, то мы должны имѣть еще слѣдующія уравненія:

$$\alpha_1\alpha_3 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4) + \alpha_2\alpha_4 = 0$$

$$\alpha_2\alpha_3 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_4) + \alpha_1\alpha_4 = 0$$

первое уравненіе можно написать въ формѣ:

$$2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_4) - (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4) = 0$$

Но мы знаемъ, что:

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{6a_2}{a_0}$$

подставляя вмѣсто:

$$\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4$$

его величину изъ предъидущаго тождества, найдемъ:

$$a_0(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4) - 2a_2 = 0$$

Точно также найдемъ и для остальныхъ двухъ соединеній:

$$a_0(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4) - 2a_2 = 0$$

$$a_0(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3) - 2a_2 = 0$$

перемножая получимъ симметрическую функцію корней уравненія, которую легко вычислить въ коэффициентахъ:

$$a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a^2_3 - a_4a^2_1 - a^3_2 = 0 \quad (28)$$

Это и есть не только необходимое, но и достаточное условіе для гармоничности четырехъ точекъ, выраженныхъ уравненіемъ (27).

Задача. Найти зависимость между коэффициентами уравненія 4-ой степени, чтобы точки, которыя оно представляет, были эквиангармоническія?

Рѣшеніе. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4 = 0 \quad (29)$$

Въ § 95 мы назвали эквиангармоническимъ такое положеніе четырехъ точекъ, при которомъ три основныя ангармоническія отношенія равны, т. е. когда:

$$(abcd) = (acdb) = (adbс)$$

Въ этомъ случаѣ ангармоническое отношеніе есть одинъ изъ мнимыхъ корней уравненія $x^3 + 1 = 0$.

Если эквиангармоническія точки представляемы уравненіемъ суть:

$$x - \alpha_1 y = 0 \quad , \quad x - \alpha_2 y = 0 \quad , \quad x - \alpha_3 y = 0 \quad , \quad x - \alpha_4 y = 0$$

то мы должны имѣть:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_4} : \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_4} = \frac{\alpha_1 - \alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_2} : \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{\alpha_3 - \alpha_2}$$

равенство третьяго ангармоническаго отношенія $(adbс)$ есть слѣдствіе равенства первыхъ двухъ. Предъидущее уравненіе можно написать въ формѣ:

$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}$$

или:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_1 - \alpha_4)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2 = 0$$

Это уравненіе послѣ перемноженія будетъ симметрическая функція корней даннаго уравненія, слѣдовательно легко можетъ быть вычислена въ функціи его коэффициентовъ, а именно:

$$a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 = 0 \quad (30)$$

§ 178. Легко видѣть, что уравненія:

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 = 0 \quad , \quad b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2 = 0 \quad (31)$$

и

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 + \lambda (b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2) = 0 \quad (32)$$

гдѣ λ можетъ получать всевозможныя значенія, представляютъ рядъ точекъ образующихъ инволюціонный рядъ или инволюціонную связку прямыхъ линій.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \quad (33)$$

будетъ пара точекъ сопряженно-гармоническихъ къ обѣимъ парамъ точекъ (31), то мы будемъ имѣть (§ 177, 26):

$$a_0 c + a_2 a - 2a_1 b = 0 \quad , \quad b_0 c + b_2 a - 2b_1 b = 0 \quad (34)$$

Легко видѣть теперь, что точки (33) суть сопряженно-гармоническія и каждой парѣ точекъ (32). Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что условіе:

$$(a_0 + \lambda b_0) c + (a_2 + \lambda b_2) a - 2(a_1 + \lambda b_1) b = 0$$

удовлетворяется независимо отъ λ , такъ какъ его можно написать въ формѣ:

$$a_0c + a_2a - 2a_1b + \lambda(b_0c + b_2a - 2b_1b) = 0$$

которое удовлетворяется въ силу (34).

Чтобы получить двойныя точки (35) этого инволюціоннаго ряда надобно исключить a , b , c изъ уравненій (33) и (34), что даетъ:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \\ b_2 & -b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

ГЛАВА XII.

Трилинейныя координаты.

§ 179. Мы видѣли, что когда точка дается координатами, т. е. двумя уравненіями, то прямая линія дается уравненіемъ, и, обратно, если прямая линія дается координатами, то точка дается уравненіемъ. Въ первомъ случаѣ мы будемъ говорить: координаты точекъ, а во второмъ координаты линій.

Въ § 36 мы видѣли, какъ преобразуются координаты точекъ.

1. Когда координаты переносятся, оставаясь параллельными; если назовемъ старыя координаты точки черезъ x и y , новыя черезъ x' и y' , координаты новаго начала назовемъ черезъ a и b , то мы имѣемъ:

$$x = a + x' \quad , \quad y = b + y'$$

откуда:

$$x' = x - a \quad , \quad y' = y - b$$

2. Если начало, оставалось тоже, а поворачивались оси на уголъ α , то мы имѣли при прямоугольной системѣ:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \quad , \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

откуда:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad , \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

3. Если при поворачиваніи осей переносится и начало, то мы имѣемъ:

$$x = a + x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \quad , \quad y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

откуда:

$$x' = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha \quad , \quad y' = -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha$$

4. Наконецъ, самое общее преобразование дается формулами (4) § 36.

$$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y \sin(\theta - \beta)}{\sin \theta}, \quad y = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \theta}$$

Таковы формулы для преобразования координатъ точекъ.

§ 180. Посмотримъ, какъ преобразуются координаты линий.

1. Если x и y суть координаты точки, то ея уравненіе (§ 62, 2) будетъ:

$$x\xi + y\eta + 1 = 0$$

перенесемъ начало координатъ въ точку (a, b) и означимъ новыя координаты точки черезъ (x', y') , то:

$$x = a + x', \quad y = b + y'$$

подставляя въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$x\xi + y\eta + 1 = x'\xi + y'\eta + a\xi + b\eta + 1 = 0$$

или:

$$x' \frac{\xi}{a\xi + b\eta + 1} + y' \frac{\eta}{a\xi + b\eta + 1} + 1 = 0$$

если ξ' , η' будутъ новыя координаты линии, то:

$$\xi' = \frac{\xi}{a\xi + b\eta + 1}, \quad \eta' = \frac{\eta}{a\xi + b\eta + 1} \quad (1)$$

опредѣляя изъ этихъ уравненій ξ и η черезъ ξ' и η' , найдемъ:

$$\xi = \frac{\xi'}{-a\xi' - b\eta' + 1}, \quad \eta = \frac{\eta'}{-a\xi' - b\eta' + 1} \quad (2)$$

таковы формулы для преобразования координатъ линий, когда переносится начало, неизмѣняя направленія координатъ.

Легко видѣть, что:

$$a\xi + b\eta + 1 = 0$$

есть уравненіе новаго начала.

2. Оставимъ начало тоже, а поворотимъ координаты на уголъ α , то:

$$x\xi + y\eta + 1 = (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) \xi + (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) \eta + 1 = 0$$

или:

$$x' (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) + y' (-\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha) + 1 = 0$$

Если новыя координаты линии будутъ ξ' , η' , то:

$$\xi' = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha, \quad \eta' = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$$

откуда:

$$\xi = \xi' \cos \alpha - \eta' \sin \alpha, \quad \eta = \xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha$$

3. Совмѣстное преобразование, поворотъ координатъ и перенесеніе начала, даетъ:

$$x\xi + y\eta + 1 = (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) \xi + (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) \eta + a\xi + b\eta + 1 = 0$$

обозначая новыя координаты черезъ ξ' , η' , найдемъ:

$$\xi' = \frac{\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha}{a\xi + b\eta + 1}, \quad \eta' = \frac{-\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha}{a\xi + b\eta + 1}$$

откуда:

$$\xi = \frac{\xi' \cos \alpha - \eta' \sin \alpha}{-(a \cos \alpha + b \sin \alpha) \xi' + (a \sin \alpha - b \cos \alpha) \eta' + 1}$$

$$\eta = \frac{\xi' \sin \alpha - \eta' \cos \alpha}{-(a \cos \alpha + b \sin \alpha) \xi' + (a \sin \alpha - b \cos \alpha) \eta' + 1}$$

Таковы формулы для преобразованія координатъ линій. Изъ формы этихъ уравненій видимъ, что онѣ имѣютъ характеръ отличный отъ координатъ точекъ; между тѣмъ по аналитическому смыслу онѣ должны бы имѣть ту же форму и характеръ, такъ какъ мы уже выше показали, что между точкой и прямой линіей нѣтъ разницы въ аналитическомъ смыслѣ; причина этому та, что декартовы координаты суть только частный случай болѣе общей системы, которая называется *трилинейной*. Причина этого заключается еще въ томъ, что мы относимъ, какъ положеніе точки, такъ и положеніе прямой, къ двумъ прямымъ, а слѣдуетъ относить положеніе прямой къ двумъ точкамъ.

Въ трилинейной системѣ координатъ такая взаимность является сама собою и формулы для преобразованія въ обѣихъ системахъ тождественны по формѣ.

§ 181. Возьмемъ три прямыя линіи, образующія треугольникъ, пусть ихъ уравненія будутъ:

$$\begin{aligned} 1) \quad a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ 2) \quad a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \\ 3) \quad a_3 x + b_3 y + c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Такъ какъ эти три прямыя образуютъ треугольникъ, т. е. не пересѣкаются въ одной точкѣ, то опредѣлитель:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$$

Означивъ миноры этого опредѣлителя черезъ $A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3$, уравненія точекъ (2,3), (1,3), (1,2), т. е. вершинъ треугольника, будутъ (§ 71):

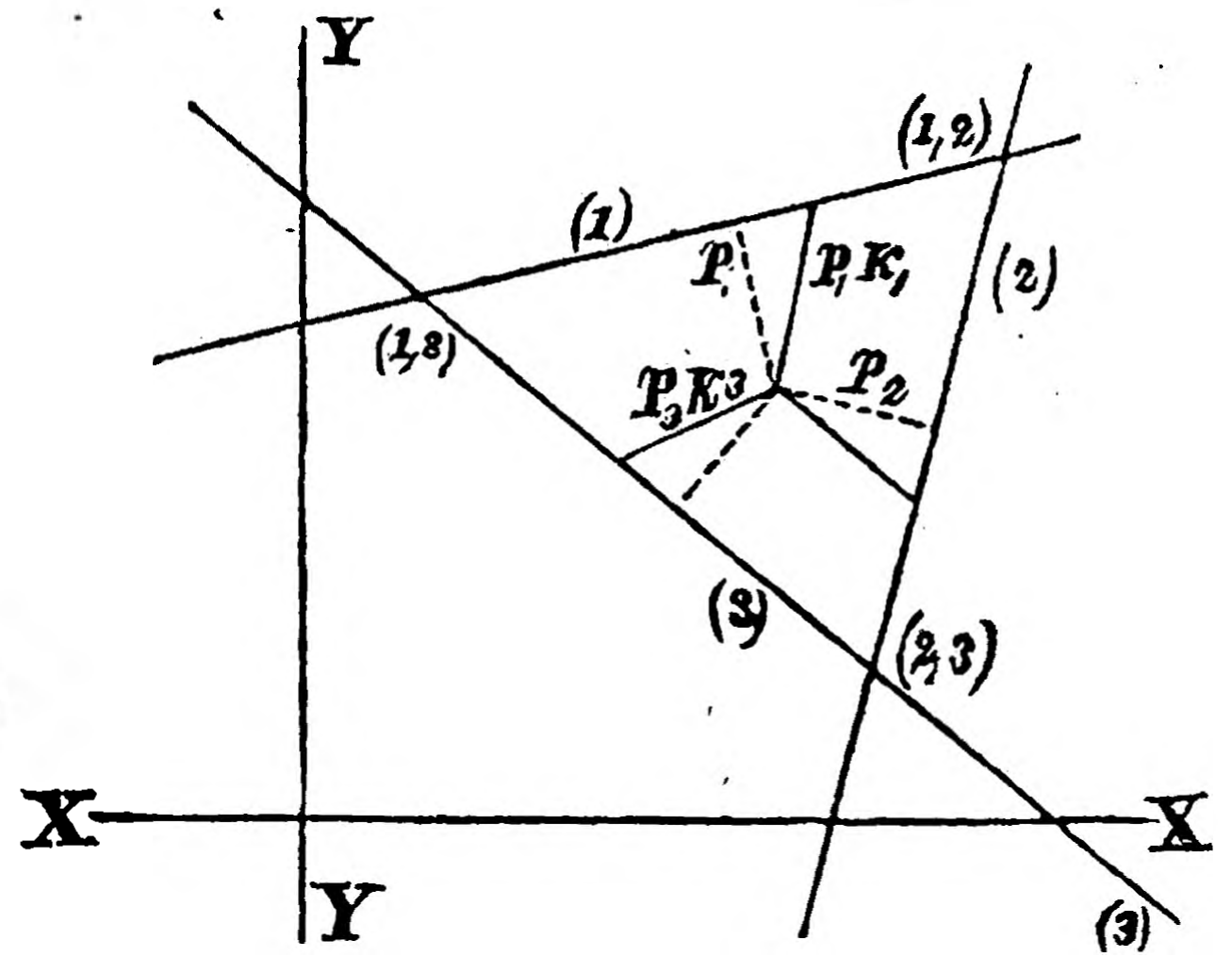
$$\begin{aligned} (2,3) \quad A_1\xi + B_1\eta + C_1 &= 0 \\ (1,3) \quad A_2\xi + B_2\eta + C_2 &= 0 \\ (1,2) \quad A_3\xi + B_3\eta + C_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Положеніе каждой точки въ трилинейной системѣ координатъ, отнесемъ къ тремъ прямымъ (3), а положеніе каждой прямой къ тремъ точкамъ (4), т. е. къ вершинамъ треугольника, который называется *координатнымъ*.

Пусть разстоянія, какой-нибудь, точки (x, y) на плоскости отъ сторонъ координатнаго треугольника будутъ p_1, p_2, p_3 (фиг. 89).

Эти три элемента состоятъ, очевидно, въ извѣстной зависимости, такъ какъ для опредѣленія положенія точки относительно координатнаго треугольника, достаточно двухъ изъ нихъ, слѣдовательно три элемента будутъ равносильны двумъ, если мы будемъ принимать во вниманіе не ихъ величину, а только ихъ отношенія. Такъ какъ координатный треугольникъ данъ, то можно всегда опредѣлить точно и числовыя величины элементовъ p_1, p_2, p_3 , но въ этомъ, въ трилинейной системѣ координатъ, не представляется надобности; даже вмѣсто разстояній p_1, p_2, p_3 можно брать разстоянія точки въ произвольномъ направленіи, т. е. помножить p_1, p_2, p_3 на постоянные коэффициенты, напримѣръ, k_1, k_2, k_3 .

Фиг. 89.



Если означимъ черезъ x_1, x_2, x_3 такія величины, что:

$$\rho x_1 = p_1 k_1 \quad , \quad \rho x_2 = p_2 k_2 \quad , \quad \rho x_3 = p_3 k_3$$

гдѣ ρ есть коэффициентъ пропорціональности, совершенно произвольный, и примемъ x_1, x_2, x_3 за координаты точки (x, y) , то трилинейныя координаты точки будутъ: *три числа имѣющія между собою отношенія равныя отношеніямъ разстояній точки отъ сторонъ треугольника, помноженныхъ, каждое, на произвольный, но постоянный коэффициентъ, т. е. отсчитываемая въ произвольномъ, но постоянномъ направленіи.*

Легко видѣть, что уравненія сторонъ координатнаго треугольника будутъ:

$$(1) \quad x_1 = 0 \quad , \quad (2) \quad x_2 = 0 \quad , \quad (3) \quad x_3 = 0$$

а координаты вершинъ:

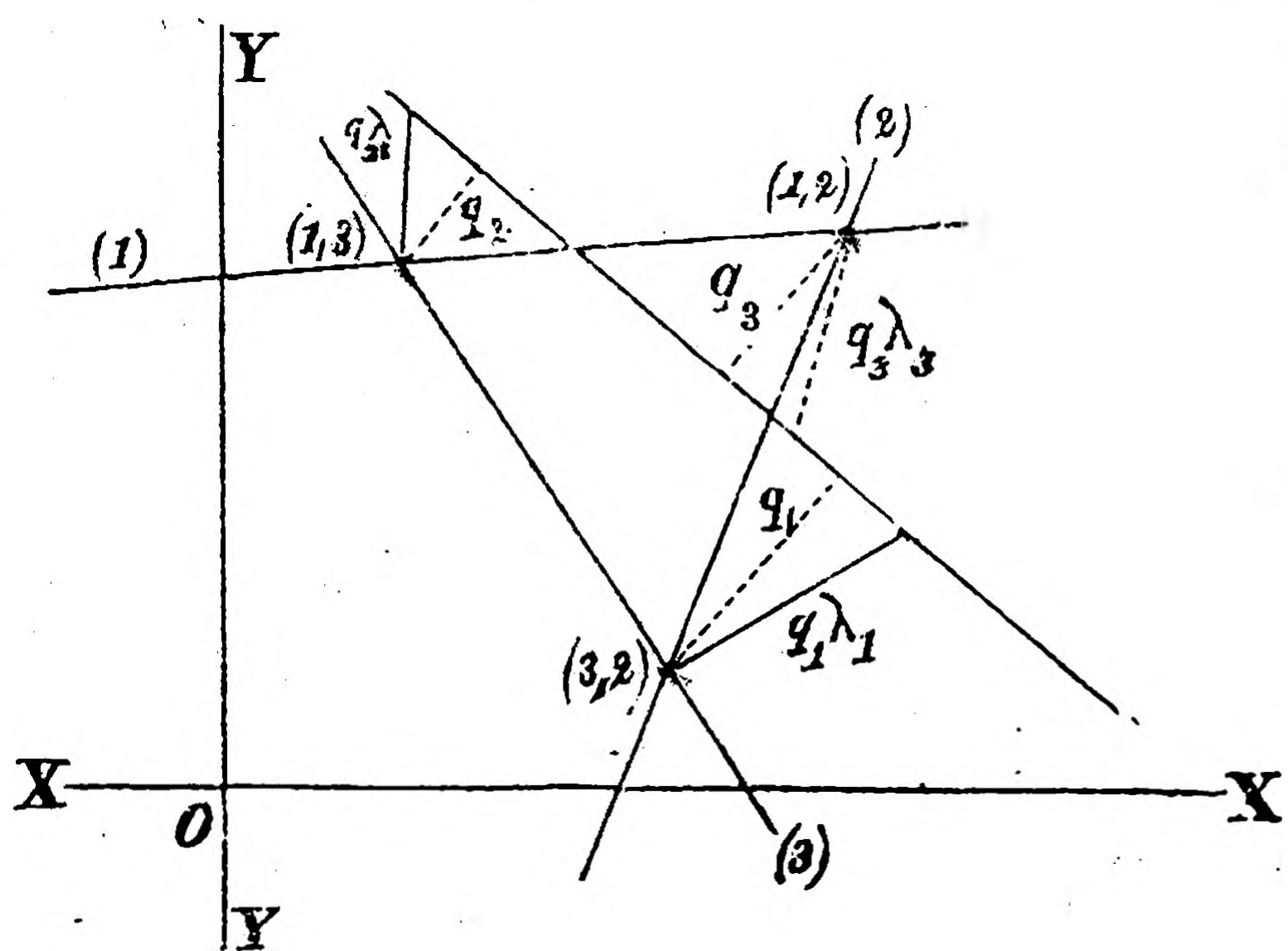
$$(1,2) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0; \quad (1,3) \quad x_1 = 0, \quad x_3 = 0; \quad (2,3) \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

Въ этихъ трехъ случаяхъ, въ первомъ x_3 , во второмъ x_2 , въ третьемъ x_1 , могутъ имѣть совершенно произвольныя величины, исключая нуля. Точно также мы опредѣлимъ трилинейныя координаты линіи. Пусть q_1, q_2, q_3 будутъ разстоянія прямой, данной координатами ξ, η , отъ вершинъ координатнаго треугольника, пусть эти разстоянія будутъ отсчитываться не по перпендикулярамъ q_1, q_2, q_3 , а въ извѣстномъ опредѣленномъ направленіи, каждое, т. е. q_1, q_2, q_3 помножаются на коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Если черезъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 назовемъ такія величины, что (фиг. 90):

$$\sigma \xi_1 = q_1 \lambda_1, \quad \sigma \xi_2 = q_2 \lambda_2, \quad \sigma \xi_3 = q_3 \lambda_3$$

и назовемъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 координатами прямой (ξ, η) , то трилинейными координатами прямой будутъ: три числа имѣющія, между собою, отношенія

Фиг. 90.



равныя отношеніямъ разстояній прямой отъ вершинъ треугольника, помноженныхъ, каждое, на произвольный, но постоянный коэффициентъ, т. е. отсчитываемая въ произвольномъ, но постоянномъ направленіи.

Очевидно, что:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0$$

суть уравненія вершинъ треугольника, а:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0; \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_3 = 0; \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0$$

суть координаты сторонъ треугольника. Въ каждомъ изъ этихъ трехъ случаевъ: въ первомъ ξ_3 , во второмъ ξ_2 , въ третьемъ ξ_1 , могутъ имѣть произвольныя величины, исключая нуля.

§ 182. Опредѣливъ, такимъ образомъ, трилинейныя координаты точки и прямой, мы будемъ имѣть, если напишемъ уравненія (3) и (4) § 181, въ нормальной формѣ:

$$\rho x_1 = p_1 k_1 = k_1 \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

$$\rho x_2 = p_2 k_2 = k_2 \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\rho x_3 = p_3 k_3 = k_3 \frac{a_3 x + b_3 y + c_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}$$

$$\sigma \xi_1 = \lambda_1 q_1 = \lambda_1 \frac{A_1 \xi + B_1 \eta + C_1}{C_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

$$\sigma \xi_2 = \lambda_2 q_2 = \lambda_2 \frac{A_2 \xi + B_2 \eta + C_2}{C_2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

$$\sigma \xi_3 = \lambda_3 q_3 = \lambda_3 \frac{A_3 \xi + B_3 \eta + C_3}{C_3 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

Такъ какъ k и λ суть величины совершенно произвольныя, то мы можемъ ихъ такъ выбрать, чтобы:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \xi x + \eta y + 1 = 0$$

то есть, чтобы уравненія прямой или точки представлялись въ формѣ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

Если это прямая, то ея координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 ; если-же это уравненіе точки, то ея координаты будутъ x_1, x_2, x_3 .

Для этого положимъ:

$$k_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad , \quad k_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \quad , \quad k_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}$$

$$\lambda_1 = C_1 \quad , \quad \lambda_2 = C_2 \quad , \quad \lambda_3 = C_3$$

а общій дѣлитель $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ введемъ въ коэффициентъ пропорціональности σ , что даетъ:

$$\begin{array}{l|l} \rho x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 & \sigma \xi_1 = A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \\ \rho x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 & \sigma \xi_2 = A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 \\ \rho x_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 & \sigma \xi_3 = A_3 \xi + B_3 \eta + C_3 \end{array} \quad (5)$$

таковы формулы, служащія для перехода отъ трилинейныхъ координатъ къ декартовымъ. Если эти уравненія рѣшимъ относительно x, y , то найдемъ формулы для обратнаго перехода, отъ декартовыхъ координатъ къ трилинейнымъ:

$$\begin{array}{l|l} x = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3} & \xi = \frac{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3}{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3} \\ y = \frac{B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3} & \eta = \frac{b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_3 \xi_3}{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3} \end{array} \quad (6)$$

Легко теперь видѣть, что:

$$\rho \sigma (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) = R (\xi x + \eta y + 1) = 0$$

Слѣдовательно уравненіе:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

есть совмѣстное представленіе прямой и точки, т. е. что точка скользитъ по прямой, коей координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 , или, что прямая вращается около точки, коей координаты суть x_1, x_2, x_3 .

Изъ всего сказаннаго выше видно, что въ трилинейной системѣ координатъ существуетъ полная соотвѣтственность:

Положеніе точки опредѣляется, относительно *сторонъ* координатнаго треугольника, разстояніями ея, отсчитываемыми въ извѣстномъ, опредѣленномъ направленіи, отъ сторонъ треугольника.

Положеніе прямой опредѣляется относительно *вершинъ* координатнаго треугольника, разстояніями ея, отсчитываемыми въ извѣстномъ, опредѣленномъ направленіи, отъ вершинъ треугольника.

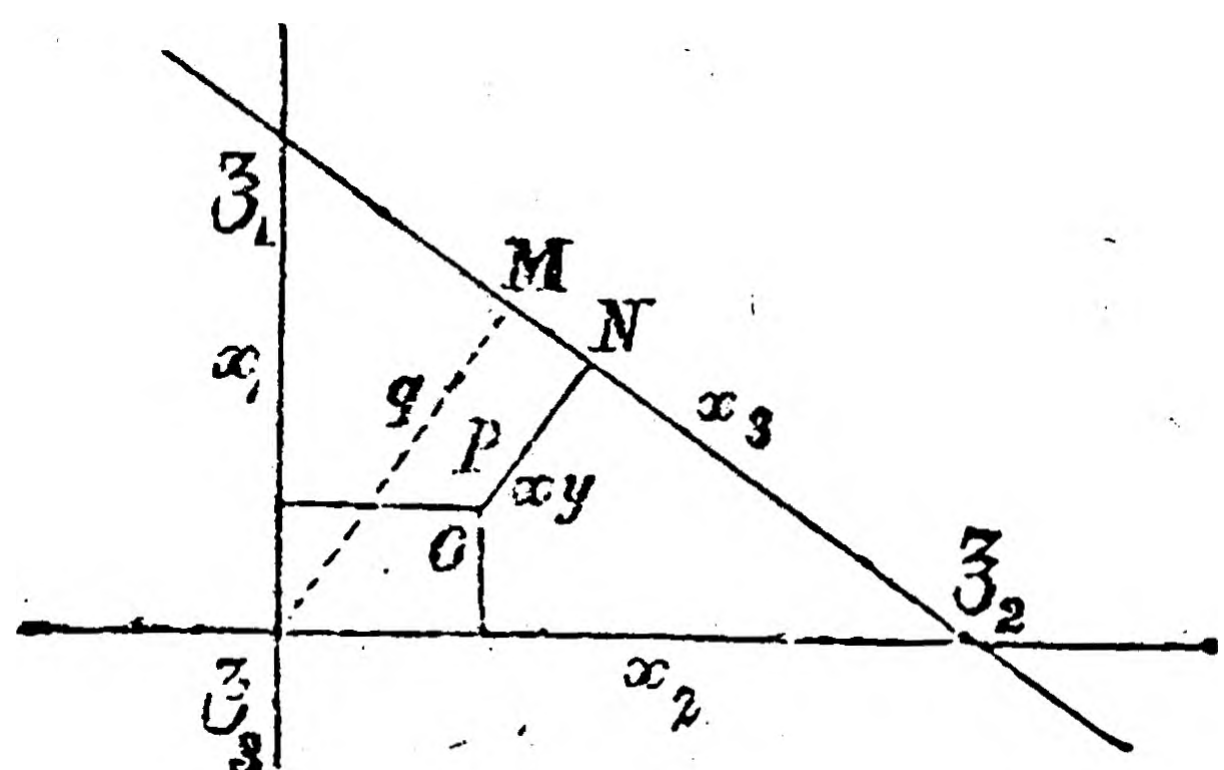
Вслѣдствіи этого формулы (5) и (6) для преобразованіи тождественны по формѣ.

§ 183. Остается показать, что система декартовыхъ координатъ есть частный случай трилинейной.

Для этого преобразуемъ координатный треугольникъ въ другой, въ которомъ бы стороны $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ были перпендикулярны, что легко дѣлается простымъ преобразованіемъ (фиг. 91).

Пусть x и y будутъ разстоянія точки O отъ $x_1 = 0$ и отъ $x_2 = 0$; пусть p будетъ ея разстояніе отъ стороны $x_3 = 0$, то мы будемъ имѣть, если q будетъ разстояніе стороны $x_3 = 0$ отъ вершины $\xi_3 = 0$:

Фиг. 91.



$$\rho x_1 = k_1 x \quad , \quad \rho x_2 = k_2 y \quad , \quad \rho x_3 = k_3 p$$

Полагая $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = \frac{1}{q}$, найдемъ:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = \frac{p}{q}$$

Положимъ теперь, что сторона $x_3 = 0$ удаляется неопредѣленно на безконечное разстояніе, оставаясь параллельна сама себѣ; въ этомъ предположеніи $\frac{p}{q}$, очевидно, будетъ стремиться къ единицѣ и въ предѣлѣ мы будемъ имѣть $\frac{p}{q} = 1$, откуда:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = 1$$

поэтому, чтобы перейти отъ трилинейной системы координатъ къ декартовой надобно только положить въ уравненіи:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

помноживъ его на ρ ,

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = 1$$

что даетъ:

$$\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 = 0$$

въ которомъ, если положимъ, умноживъ на σ ,

$$\sigma\xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma\xi_3 = 1$$

найдемъ:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

т. е. координаты ξ_1 и ξ_2 дѣлаются координатами прямой. Теперь видимъ къ какому замѣчательному результату мы пришли, взявъ (§ 62) за координаты прямой не отрѣзки, дѣлаемые ею на координатныхъ осяхъ, а величины обратныя этимъ отрѣзкамъ, взятая отрицательно:

§ 184. Такъ какъ x, y и ξ, η въ трилинейныхъ координатахъ суть линейныя функціи съ общимъ знаменателемъ, то степень уравненія относительно переменныхъ не можетъ ни повысится, ни понизится введеніемъ новыхъ переменныхъ, но характеръ уравненія, этимъ введеніемъ, измѣняется: оно дѣлается, по приведеніи къ одному знаменателю, однороднымъ между тремя переменными.

Такъ, на примѣръ, уравненіе второй степени:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

если вмѣсто x и y поставимъ ихъ выраженія (6) § 182, по приведеніи къ одному знаменателю, дѣлается:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

§ 185. Одно изъ самыхъ замѣчательныхъ уравненій прямой, которое играетъ весьма важную роль въ изслѣдованіяхъ свойствъ кривыхъ линій, есть уравненіе, полученное, приравнивая нулю знаменатель первыхъ двухъ уравненій (6) § 182:

$$C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = 0 \tag{7}$$

для всѣхъ точекъ этой прямой (7), и только для этой, мы имѣемъ $x = \infty$ и $y = \infty$, слѣдовательно на ней находятся всѣ безконечно удаленныя точки на плоскости. Мы будемъ называть эту прямую *безконечно-удаленною*. Введеніе этой прямой въ изслѣдованія свойствъ кривыхъ линій даетъ возможность выразить много предложеній, перенося на эту прямую разсужденія, какъ на прямую, находящуюся дѣйствительно передъ глазами. На примѣръ, изъ этого вытекаетъ, что всякая прямая, какъ мы уже выше упомянули, имѣетъ только одну точку на безконечности, такъ какъ двѣ прямыя могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ.

§ 186. Остается показать, какъ преобразовать одну систему трилинейныхъ координатъ въ другую также трилинейную. Пусть x_1, x_2, x_3 ;

ξ_1, ξ_2, ξ_3 , будутъ координаты точки или линіи въ одной системѣ, а y_1, y_2, y_3 ; η_1, η_2, η_3 , координаты точки или линіи въ другой системѣ. Пусть уравненіе прямой линіи въ первой системѣ будетъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0 \quad (8)$$

а во второй, той-же прямой:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0 \quad (9)$$

Координаты y_1, y_2, y_3 второй системы должны быть линейныя функціи координатъ первой системы; пусть онѣ будутъ:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \rho y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \rho y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \quad (10)$$

Если эти выраженія подставимъ въ (9) и сравнимъ съ (8), то найдемъ:

$$\begin{aligned} \sigma \xi_1 &= a_{11} \eta_1 + a_{21} \eta_2 + a_{31} \eta_3 \\ \sigma \xi_2 &= a_{12} \eta_1 + a_{22} \eta_2 + a_{32} \eta_3 \\ \sigma \xi_3 &= a_{13} \eta_1 + a_{23} \eta_2 + a_{33} \eta_3 \end{aligned} \quad (11)$$

Составимъ опредѣлитель изъ элементовъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & , & a_{12} & , & a_{13} \\ a_{21} & , & a_{22} & , & a_{23} \\ a_{31} & , & a_{32} & , & a_{33} \end{vmatrix} = R \quad (12)$$

онъ не долженъ быть равенъ нулю, ибо въ противномъ случаѣ прямыя, образующія второй координатный треугольникъ, пересѣкутся въ одной точкѣ. Если миноръ соотвѣтственный элементу $a_{i,k}$ назовемъ черезъ $A_{i,k}$, то изъ уравненій (10) и (11), найдемъ:

$$\begin{aligned} \mu x_1 &= A_{11} y_1 + A_{21} y_2 + A_{31} y_3 \\ \mu x_2 &= A_{12} y_1 + A_{22} y_2 + A_{32} y_3 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mu x_3 = A_{13} y_1 + A_{23} y_2 + A_{33} y_3$$

и:

$$\begin{aligned} \nu \eta_1 &= A_{11} \xi_1 + A_{12} \xi_2 + A_{13} \xi_3 \\ \nu \eta_2 &= A_{21} \xi_1 + A_{22} \xi_2 + A_{23} \xi_3 \\ \nu \eta_3 &= A_{31} \xi_1 + A_{32} \xi_2 + A_{33} \xi_3 \end{aligned} \quad (14)$$

Изъ уравненій (10) и (14), (11) и (13) ясно видно геометрическое значеніе коэффиціентовъ подстановленій $a_{i,k}$, $A_{i,k}$. Въ самомъ дѣлѣ:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0; \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 0$$

суть уравненія сторонъ и вершинъ втораго координатнаго треугольника, отнесенныхъ къ первому. Эти уравненія суть:

сторонъ:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

вершинъ:

$$A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 = 0$$

$$A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 = 0$$

$$A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 = 0$$

откуда видимъ, что координаты:

новыхъ сторонъ:

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{13}$$

$$a_{21}, \quad a_{22}, \quad a_{23}$$

$$a_{31}, \quad a_{32}, \quad a_{33}$$

новыхъ вершинъ:

$$A_{11}, \quad A_{12}, \quad A_{13}$$

$$A_{21}, \quad A_{22}, \quad A_{23}$$

$$A_{31}, \quad A_{32}, \quad A_{33}$$

Уравненія сторонъ и вершинъ стараго координатнаго треугольника, отнесенныя къ новому, очевидно, будутъ:

старыхъ сторонъ:

$$A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 = 0$$

$$A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 = 0$$

$$A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3 = 0$$

старыхъ вершинъ:

$$a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + a_{31}\eta_3 = 0$$

$$a_{12}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{32}\eta_3 = 0$$

$$a_{13}\eta_1 + a_{23}\eta_2 + a_{33}\eta_3 = 0$$

Откуда видимъ, что координаты:

старыхъ сторонъ:

$$A_{11}, \quad A_{21}, \quad A_{31}$$

$$A_{12}, \quad A_{22}, \quad A_{32}$$

$$A_{13}, \quad A_{23}, \quad A_{33}$$

старыхъ вершинъ:

$$a_{11}, \quad a_{21}, \quad a_{31}$$

$$a_{12}, \quad a_{22}, \quad a_{32}$$

$$a_{13}, \quad a_{23}, \quad a_{33}$$

Новая система координатъ, т. е. трилинейная, въ особенности удобна для изслѣдованій, въ которыхъ идетъ дѣло о положеніи, а не о числовой зависимости, поэтому тамъ гдѣ будутъ изслѣдоваться теоремы относительно положеній, мы будемъ всегда прибѣгать къ этой системѣ координатъ. ¶

§ 187. Рѣшимъ еще слѣдующіе вопросы въ этой системѣ координатъ.

Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точки:

$$(y_1, y_2, y_3); \quad (z_1, z_2, z_3)$$

Найти уравненіе точки пересѣченія двухъ прямыхъ:

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3); \quad (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

Пусть x_1, x_2, x_3 будут скользящія координаты прямой, то ея уравненіе будетъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

Но данныя точки находятся, по условію, на прямой, слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = 0$$

$$\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 = 0$$

Откуда уравненіе искомой прямой будетъ:

$$\begin{vmatrix} x_1 & , & x_2 & , & x_3 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 \\ z_1 & , & z_2 & , & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

Легко видѣть, что:

координаты прямой (15) будутъ:

$$\begin{aligned} \sigma \xi_1 &= y_2 z_3 - z_2 y_3 \\ \sigma \xi_2 &= y_3 z_1 - z_3 y_1 \\ \sigma \xi_3 &= y_1 z_2 - z_1 y_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Уравненія (15) и (15') можно разложить на слѣдующія, которыя представляютъ съ помощью параметра λ , или скользящую точку по прямой или вращающуюся прямую около точки (§ 73):

Скользящая точка:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= y_1 + \lambda z_1 \\ \rho x_2 &= y_2 + \lambda z_2 \\ \rho x_3 &= y_3 + \lambda z_3 \end{aligned} \quad (17)$$

Эти уравненія получатся изъ (15) и (15') если въ нихъ элементы третьей горизонтали помноживъ на λ , сложимъ съ элементами второй и приравняемъ элементамъ первой, помноженнымъ на коэффициенты пропорціональности ρ и σ .

Помножимъ уравненія (17) на ξ_1, ξ_2, ξ_3 , а уравненія (17') на x_1, x_2, x_3 и сложимъ, то найдемъ:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0$$

Это уравненіе одной изъ скользящихъ точекъ по прямой (15), гдѣ:

$$\begin{aligned} A_1 &= y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 \\ A_2 &= z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3 \end{aligned}$$

Пусть координаты, вращающейся прямой около искомой точки, будутъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 , то уравненіе точки будетъ:

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = 0$$

Но точка находится и на данныхъ прямыхъ, слѣдовательно мы имѣемъ:

$$x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3 = 0$$

$$x_1 \zeta_1 + x_2 \zeta_2 + x_3 \zeta_3 = 0$$

Откуда уравненіе искомой точки будетъ:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_3 \\ \eta_1 & , & \eta_2 & , & \eta_3 \\ \zeta_1 & , & \zeta_2 & , & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (15')$$

координаты точки (15') будутъ:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= \eta_2 \zeta_3 - \zeta_2 \eta_3 \\ \rho x_2 &= \eta_3 \zeta_1 - \zeta_3 \eta_1 \\ \rho x_3 &= \eta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \eta_2 \end{aligned} \quad (16')$$

Вращающаяся прямая:

$$\begin{aligned} \sigma \xi_1 &= \eta_1 + \lambda \zeta_1 \\ \sigma \xi_2 &= \eta_2 + \lambda \zeta_2 \\ \sigma \xi_3 &= \eta_3 + \lambda \zeta_3 \end{aligned} \quad (17')$$

$$A'_1 + \lambda A'_2 = 0$$

Это уравненіе одной изъ вращающихся прямыхъ около точки (15'), гдѣ:

$$\begin{aligned} A'_1 &= \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 \\ A'_2 &= \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 \end{aligned}$$

Параметръ λ , помноженный на нѣкоторый коэффициентъ имѣеть тоже геометрическое значеніе, какое онъ имѣеть и въ прямолинейной системѣ координатъ, въ чемъ легко убѣдиться изъ уравненій (17) и (17') и (6) § 182. Изъ нихъ мы имѣемъ:

$$x = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \lambda(A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3)}{C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \lambda(C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3)}$$

$$y = \frac{B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3 + \lambda(B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 z_3)}{C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \lambda(C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3)}$$

$$\xi = \frac{a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + a_3 \eta_3 + \lambda(a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + a_3 \zeta_3)}{c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 + \lambda(c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + c_3 \zeta_3)}$$

$$\eta = \frac{b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 + b_3 \eta_3 + \lambda(b_1 \zeta_1 + b_2 \zeta_2 + b_3 \zeta_3)}{c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 + \lambda(c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + c_3 \zeta_3)}$$

Откуда уравненія скользящей точки (x, y) или вращающейся прямой (ξ, η) будутъ имѣть форму:

$$P + \lambda Q = 0$$

$$R + \lambda S = 0$$

гдѣ P и Q суть линейныя функціи отъ (ξ, η) , а R и S линейныя функціи отъ x, y . Такъ какъ эти уравненія въ декартовой системѣ линейны относительно параметра λ , то изъ этого и слѣдуетъ его геометрическое значеніе.

Изъ этого заключаемъ, что всѣ выводы, основанные на геометрическомъ значеніи параметра λ , не зависятъ отъ системы координатъ; всѣ теоремы относительно ангармоніи и проективности сохраняютъ тѣже аналитическія выраженія.

§ 188. *Примѣчаніе.* Первый зародышъ трилинейной системы координатъ заключается въ предположеніи, что уравненіе всякой прямой можетъ быть выражено съ помощью уравненій трехъ прямыхъ, не пересѣкающихся въ одной точкѣ, а уравненіе точки можетъ быть выражено съ помощью уравненій трехъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой линіи.

Пусть будутъ уравненія трехъ данныхъ:

прямыхъ:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

(18)

точекъ:

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 = 0$$

$$A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 = 0$$

$$A_3 \xi + B_3 \eta + C_3 = 0$$

(18')

а уравненія, какой-нибудь, четвертой:

прямой:

$$ax + by + c = 0 \quad (19)$$

точки:

$$A\xi + B\eta + C = 0 \quad (19')$$

Помножимъ уравненія (18) на неопредѣленные множители λ , μ , ν , а уравненія (18') на ρ , δ , ω и, сложивъ, приравняемъ уравненіямъ (19) и (19'), найдемъ:

$$\begin{array}{l|l} \lambda(a_1x + b_1y + c_1) + & \rho(A_1\xi + B_1\eta + C_1) + \\ \mu(a_2x + b_2y + c_2) + & \delta(A_2\xi + B_2\eta + C_2) + \\ \nu(a_3x + b_3y + c_3) = & \omega(A_3\xi + B_3\eta + C_3) = \\ = ax + by + c = 0 & = A\xi + B\eta + c = 0 \end{array}$$

Откуда, приравнивая коэффиціенты при x , y и ξ , η , найдемъ:

$$\begin{array}{l|l} a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu = a & A_1\rho + A_2\delta + A_3\omega = A \\ b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu = b & B_1\rho + B_2\delta + B_3\omega = B \\ c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu = c & C_1\rho + C_2\delta + C_3\omega = C \end{array} \quad (20) \quad (20')$$

Такъ какъ, по условію, данныя прямыя не пересѣкаются въ одной точкѣ, а данныя точки не лежатъ на одной прямой линіи, то изъ (20) и (20') λ , μ , ν ; ρ , δ , ω можно опредѣлить; слѣдовательно прямая (19) и точка (19') выразятся въ формахъ:

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0 \quad | \quad \rho \xi_1 + \delta \xi_2 + \omega \xi_3 = 0$$

гдѣ x_1 , x_2 , x_3 ; ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 суть числовыя значенія уравненій (18) и (18'), когда въ нихъ подставляются координаты точекъ внѣ прямой и координаты прямой внѣ точки. Слѣдовательно ихъ геометрическое значеніе тоже что и въ трилинейной системѣ координатъ.

ГЛАВА XIII.

Инварианты и коварианты въ геометріи.

§ 189. Методъ координатъ Декарта или обобщенный методъ трилинейныхъ координатъ, съ помощью которыхъ изслѣдуются свойства кривыхъ линій, не есть нѣчто неразрывно связанное съ кривыми линіями, нѣчто необходимое, а есть инструментъ, которымъ отдѣляется вещь—это лѣса при постройкѣ зданія. Ни инструментъ съ вещью, съ помощью котораго она была сдѣлана, ни лѣса съ зданіемъ, съ помощью которыхъ оно было

выстроено, не имѣютъ ничего общаго; вещь сдѣлана, зданіе построено, инструментъ и лѣса отбрасываются прочь—остается вещь и зданіе.

Такая вообще роль координатъ въ геометріи; съ помощью ихъ находятъ свойства кривыхъ линій, которыя разъ найдены,—координаты отбрасываются прочь и мы имѣемъ передъ глазами образъ кривой со всѣми ея свойствами, какъ зданіе со всѣми подробностями, послѣ снятія лѣсовъ.

Свойства кривыхъ линій даются функціями, составленными, извѣстнымъ образомъ, изъ коэффициентовъ уравненія кривой или изъ уравненій системы кривыхъ линій или кривыми линіями, составленными, извѣстнымъ образомъ, изъ переменныхъ и коэффициентовъ уравненія или уравненій; эти послѣднія кривыя, такъ сказать, рождаются кривою, всегда ее сопровождаютъ, т. е. выражаютъ извѣстныя ея свойства.

Слово кривая или система кривыхъ линій мы здѣсь употребляемъ въ самомъ обширномъ смыслѣ, разумѣя и прямую или систему прямыхъ линій, точку или систему точекъ. Свойства кривой или кривыхъ линій, выраженные извѣстною зависимостью между коэффициентами уравненія или уравненій, или между коэффициентами и переменными, не должны, по свойству координатъ, зависеть отъ системы координатъ, поэтому не должны измѣняться при переходѣ отъ одной системы координатъ къ другой, а такой переходъ совершается линейнымъ преобразованіемъ, и все измѣненіе, которое могутъ потерпѣть такія функціи, состоитъ въ приобрѣтеніи числоваго множителя, зависящаго только отъ системы координатъ.

Функціи, составленныя только изъ коэффициентовъ, имѣющія выше сказанныя свойства, называются *инвариантами* кривой или кривыхъ линій.

Функціи, составленныя изъ коэффициентовъ и переменныхъ, т. е. кривыя линіи, имѣющія такія же свойства, называются *ковариантами* кривой или системы кривыхъ линій.

§ 190. *Формою* называютъ однородную, цѣлую рациональную функцію нѣсколькихъ переменныхъ. *Двоичною формою* называютъ форму съ двумя переменными, таковы:

$$a_0x + a_1y \quad , \quad a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 \quad , \quad a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 \quad (1)$$

и т. д. Это суть двоичныя формы первой, второй, третьей и т. д. степеней. Такія формы изображаются символами:

$$(a_0, a_1 \zeta x, y) \quad , \quad (a_0, a_1, a_2 \zeta x, y) \quad , \quad (a_0, a_1, a_2, a_3 \zeta x, y) \quad \text{и т. д.} \quad (2)$$

Коэффициенты въ формахъ a_0, a_1, a_2, \dots могутъ быть сопровождаемы, какъ

выше, биноміальными, численными коэффициентами. Формы о трехъ переменныхъ называются *троичными*, первой, второй, третьей и т. д. степеней. Такъ на примѣръ форма:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (3)$$

будеть троичная отъ переменныхъ x_1, x_2, x_3 , второй степени. Двоичныя формы, приравненныя нулю, представляютъ систему точекъ или прямыхъ (§ 173). Троичныя формы представляютъ кривыя; четверичныя формы представляютъ поверхности. Формы большаго числа переменныхъ не имѣютъ геометрическаго представленія.

Линейнымъ преобразованиемъ формъ называютъ преобразование, въ которомъ количества переменныхъ замѣщаются другими линейно связанными съ первыми. Двоичныя формы отъ x и y , преобразовываются подстановленіями:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad , \quad y = \gamma x' + \delta y' \quad (4)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ называются коэффициентами линейнаго преобразованія; определитель, составленный изъ коэффициентовъ преобразованія:

$$\begin{vmatrix} \alpha & , & \beta \\ \gamma & , & \delta \end{vmatrix} = \Delta \quad (5)$$

называется *модулемъ преобразованія*.

Двоичная форма:

$$f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n; x, y)$$

такимъ подстановленіемъ, преобразовывается въ:

$$f(A_0, A_1, A_2, \dots, A_n; x'y') = f(a_0, a_1, \dots, a_n; x, y) \quad (6)$$

гдѣ коэффициенты A_0, A_1, \dots суть функціи отъ коэффициентовъ a_0, a_1, \dots и отъ коэффициентовъ преобразованія $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Такъ, на примѣръ, форма:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

сдѣлается:

$$A_0x'^2 + 2A_1x'y' + A_2y'^2 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

гдѣ:

$$A_0 = a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha\gamma + a_2\gamma^2$$

$$A_1 = a_0\alpha\beta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_2\gamma\delta \quad (7)$$

$$A_2 = a_0\beta^2 + 2a_1\beta\delta + a_2\delta^2$$

Преобразование (4) геометрически представляетъ изменение основныхъ точекъ или основныхъ прямыхъ, т. е. координатъ. Основными точками или прямыми въ формѣ $f(a_0, a_1 \dots, a_n; x, y)$ были $x = 0$, $y = 0$, линейнымъ же преобразованиемъ (4) эти точки или прямая замѣщаются другими $x' = 0$, $y' = 0$; старыя, т. е. $x = 0$, $y = 0$, выражаются относительно новыхъ уравненіями:

$$\alpha x' + \beta y' = 0 \quad , \quad \gamma x' + \delta y' = 0$$

Если рѣшимъ уравненія (4) относительно x' , y' , то найдемъ, означая $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta$:

$$\Delta x' = \delta x - \beta y \quad , \quad \Delta y' = -\gamma x + \alpha y$$

приравнивая эти выраженія нулю, найдемъ уравненія:

$$\delta x - \beta y = 0 \quad , \quad \gamma x - \alpha y = 0 \quad (8)$$

которыя представляютъ новыя, основныя, точки или прямая $x' = 0$ и $y' = 0$, отнесенныя къ старымъ.

Линейное преобразование троичной формы:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

будеть:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3 \\ \rho x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3 \\ \rho x_3 &= \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Слѣдовательно послѣ преобразования мы будемъ имѣть:

$$f(x'_1, x'_2, x'_3) = f(x_1, x_2, x_3)$$

Опредѣлитель, составленный изъ элементовъ α :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & , & \alpha_{12} & , & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & , & \alpha_{22} & , & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & , & \alpha_{32} & , & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \Delta \quad (10)$$

называется *опредѣлителемъ преобразования*. Его взаимный есть:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & , & A_{12} & , & A_{13} \\ A_{21} & , & A_{22} & , & A_{23} \\ A_{31} & , & A_{32} & , & A_{33} \end{vmatrix} = \Delta' \quad (11)$$

Рѣшая уравненія (9) относительно x'_1, x'_2, x'_3 , найдемъ:

$$\begin{aligned}\delta x'_1 &= A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3 \\ \delta x'_2 &= A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{32}x_3 \\ \delta x'_3 &= A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3\end{aligned}\tag{12}$$

Уравненія $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ суть стороны координатнаго треугольника, слѣдовательно уравненія:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3 &= 0 \\ \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3 &= 0 \\ \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 &= 0\end{aligned}\tag{13}$$

суть уравненія тѣхъ-же сторонъ только отнесенныхъ къ новому координатному треугольнику $x'_1 = 0, x'_2 = 0, x'_3 = 0$. Приравнивая нулю уравненія (12), мы найдемъ:

$$\begin{aligned}A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3 &= 0 \\ A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{32}x_3 &= 0 \\ A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3 &= 0\end{aligned}\tag{14}$$

уравненія сторонъ новаго координатнаго треугольника, отнесеннаго къ старому (§ 186).

Въ параллель съ координатами x_1, x_2, x_3 , часто преобразовываются другія координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 въ ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 уравненіями (10) и (11) § 186:

$$\begin{aligned}\mu\xi'_1 &= \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_3 \\ \mu\xi'_2 &= \alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{32}\xi_3 \\ \mu\xi'_3 &= \alpha_{13}\xi_1 + \alpha_{23}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3\end{aligned}\tag{15}$$

такія координаты называются обратными x_1, x_2, x_3 , откуда:

$$\begin{aligned}\nu\xi_1 &= A_{11}\xi'_1 + A_{12}\xi'_2 + A_{13}\xi'_3 \\ \nu\xi_2 &= A_{21}\xi'_1 + A_{22}\xi'_2 + A_{23}\xi'_3 \\ \nu\xi_3 &= A_{31}\xi'_1 + A_{32}\xi'_2 + A_{33}\xi'_3\end{aligned}\tag{16}$$

координаты $x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3; \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3$, связаны, какъ извѣстно, уравненіемъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \xi'_1 x'_1 + \xi'_2 x'_2 + \xi'_3 x'_3 \quad (17)$$

Это уравненіе представляетъ или прямую или точку, въ первомъ случаѣ x_1, x_2, x_3 суть координаты скользящей точки по прямой (17), а во второмъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 суть координаты вращающейся около точки (17) прямой, а x_1, x_2, x_3 координаты этой точки. Стороны координатнаго треугольника суть $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, а его вершины $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0; x'_1 = 0, x'_2 = 0, x'_3 = 0$ суть уравненія сторонъ новаго координатнаго треугольника, а $\xi'_1 = 0, \xi'_2 = 0, \xi'_3 = 0$ суть уравненія его вершинъ.

§ 191. Слѣдовательно линейное преобразование формы соотвѣтствуетъ переходу отъ одной системы координатъ къ другой.

Внутреннія свойства системы точекъ или прямыхъ, кривой или системы кривыхъ, поверхности или системы поверхностей, не должны зависеть отъ системы координатъ, а зависятъ отъ извѣстныхъ связей между коэффициентами формъ. Эта связь, выражающая внутреннія, прирожденные, свойства формы не должна измѣняться при переходѣ отъ одной системы координатъ къ другой—координатная система это случайный придатокъ формъ. Слѣдовательно, для каждой формы должны существовать такія функціи, цѣлыя рациональныя, которыя неизмѣняются линейнымъ преобразованиемъ; все измѣненіе, которое онѣ могутъ претерпѣть заключается въ приобрѣтеніи числоваго множителя.

Такъ, напримѣръ, если форма будетъ:

$$f(a_0, a_1, a_2 \dots; x_1, x_2, x_3) \quad (18)$$

то $\Phi(a_0, a_1, a_2 \dots)$ функція коэффициентовъ $a_0, a_1, a_2 \dots$, которая въ линейномъ преобразованіи имѣетъ свойство:

$$\Phi(A_0, A_1, A_2, \dots) = \Delta^\lambda \Phi(a_0, a_1 \dots) \quad (19)$$

называется *инвариантомъ* формы (18). Δ есть опредѣлитель преобразованія (5, 10).

Система формъ, имѣющихъ извѣстную зависимость между собою, имѣетъ инварианты.

Пусть формы будутъ:

$$f_1(a_0, a_1, a_2, \dots; x_1, x_2, \dots), f_2(b_0, b_1, \dots; x_1, x_2, \dots), f_3(c_0, c_1, \dots; x_1, x_2, \dots) \quad (20)$$

Если зависимость между коэффициентами формъ будетъ:

$$\Phi(A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots, C_0, C_1, \dots) = \Delta^\lambda \Phi(a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots, c_0, c_1, \dots) \quad (21)$$

то это будетъ инвариантъ системы.

Рядомъ съ формою или системою формъ всегда существуютъ другія формы, имѣющія необходимую связь съ данными, связь, которая не зависитъ отъ координатной системы или линейнаго преобразованія. Если такая форма существуетъ для формы (18), то мы имѣемъ:

$$\Phi(A_0, A_1, \dots; x'_1, x'_2, \dots) = \Delta^\lambda \Phi(a_0, a_1, \dots; x_1, x_2, \dots) \quad (22)$$

Такія формы называются *ковариантами* формы (18) или системы формъ (20).

Наконецъ рядомъ съ формою (18) или системою формъ (20) существуютъ формы характера (22), но въ которыхъ переменныя преобразуются обратнымъ преобразованиемъ въ то время, когда формы преобразуются прямо, т. е., если x_1, x_2, x_3 переходятъ въ x'_1, x'_2, \dots , то другія переменныя ξ_1, ξ_2, ξ_3 переходятъ въ ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 (см. 15, 16) и мы имѣемъ:

$$\Phi(A_0, A_1, \dots; \xi'_1, \xi'_2, \dots) = \Delta^\lambda \Phi(a_0, a_1, \dots; \xi_1, \xi_2, \dots) \quad (23)$$

Такія функции называются *контраковариантами*.

Бываютъ формы, которыя заключаютъ и переменныя x_1, x_2, x_3, \dots и $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$; первыя преобразуются прямо, а вторыя обратно; при такомъ преобразованіи форма имѣетъ свойство инварианта:

$$\Phi(A_0, A_1, \dots; x'_1, x'_2, \dots, \xi'_1, \xi'_2, \dots) = \Delta^\lambda \Phi(a_0, a_1, \dots; x_1, x_2, \dots, \xi_1, \xi_2, \dots) \quad (24)$$

такъ на примѣръ форма:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \quad (25)$$

вовсе неизмѣняется, т. е. числовой множитель равенъ единицѣ. Формы характера (24) называются *эвектантами*.

§ 192. Пояснимъ сказанное примѣрами:

Пр. 1. Двоичная форма первой степени:

$$a_0 x + a_1 y = 0 \quad (26)$$

представляетъ или точку на прямой, соединяющей *основныя координатныя* точки $x = 0, y = 0$ или прямую, проходящую черезъ пересѣченіе координатъ $x = 0, y = 0$. Очевидно, что эта форма не можетъ имѣть инварианта или коварианта, такъ какъ она выражаетъ только, что точка или прямая существуютъ.

Пр. 2. Двѣ двоичныя формы первой степени:

$$a_0 x + a_1 y = 0, \quad b_0 x + b_1 y = 0 \quad (27)$$

представляютъ или двѣ точки на прямой $x = 0, y = 0$, или двѣ прямыя, проходящія черезъ точку $x = 0, y = 0$. Коэффициенты a_0, a_1, b_0, b_1 могутъ имѣть такую, между собою, зависимость, что точки или прямыя совпадаютъ. Это будетъ очевидно тогда, когда коэффициенты a_0, a_1 пропорциональны коэффициентамъ b_0, b_1 , т. е. когда:

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

Мы говоримъ, что эта функція есть инвариантъ (27). Въ самомъ дѣлѣ, если точки или прямыя (27) совпадаютъ, то это совпаденіе независитъ отъ основныхъ, т. е. координатныхъ точекъ или прямыхъ. Слѣдовательно, если положеніе точекъ (27) отнесемъ къ какимъ-нибудь другимъ двумъ точкамъ, какъ основнымъ, то условіе (28) должно быть удовлетворено коэффициентами новыхъ уравненій точекъ (27). Если $x' = 0$, $y' = 0$ будутъ другія основныя точки на той-же прямой, то старыя точки выразятся уравненіями:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad , \quad y = \gamma x' + \delta y' \quad (29)$$

подставляя въ уравненія (27), найдемъ:

$$A_0 x' + A_1 y' = 0 \quad , \quad B_0 x' + B_1 y' = 0 \quad (30)$$

гдѣ:

$$A_0 = a_0 \alpha + a_1 \gamma \quad , \quad A_1 = a_0 \beta + a_1 \delta \quad , \quad B_0 = b_0 \alpha + b_1 \gamma \quad , \quad B_1 = b_0 \beta + b_1 \delta$$

такъ какъ точки (27) послѣ преобразованія не перестаютъ совпадать, то мы должны имѣть:

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix} = 0$$

или, подставляя вмѣсто A и B ихъ выраженія, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 \alpha + a_1 \gamma & a_0 \beta + a_1 \delta \\ b_0 \alpha + b_1 \gamma & b_0 \beta + b_1 \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \quad (31)$$

Слѣдовательно функція (28), линейнымъ преобразованіемъ (29), неизмѣнилась, а только приобрѣла числовой множитель:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$$

который называется *модулемъ преобразованія*.

Слѣдовательно (28) есть инвариантъ формъ.

Пр. 3. Двоичная форма второй степени:

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 = 0 \quad (32)$$

какъ мы видѣли въ § 172 представляетъ или двѣ точки или двѣ прямыя. Какую внутреннюю зависимость могутъ имѣть точки (32) между собою и только между собою? Очевидно, единственная такая зависимость—это ихъ совпаденіе. Условіе этого совпаденія должно выразитъ ся связью между коэффициентами формы. Эта функція связи не должна зависеть отъ положенія основныхъ точекъ, т. е. не должна измѣняться, когда форма будетъ линейно преобразована подстановленіями:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad , \quad y = \gamma x' + \delta y' \quad (33)$$

Мы знаемъ, что точки (32) совпадутъ, когда существуетъ слѣдующая зависимость между коэффициентами:

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0 \quad (34)$$

Мы говоримъ, что это инвариантъ формы (32). Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ (33) въ (32), найдемъ:

$$A_0 x'^2 + 2A_1 x'y' + A_2 y'^2 = 0 \quad (35)$$

гдѣ:

$$A_0 = a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha\gamma + a_2\gamma^2$$

$$A_1 = a_0\alpha\beta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_2\gamma\delta$$

$$A_2 = a_0\beta^2 + 2a_1\beta\delta + a_2\delta^2$$

Условіе совпаденія точекъ (35) будетъ:

$$A_0A_2 - A_1^2 = \begin{vmatrix} \alpha & , & \gamma \\ \beta & , & \delta \end{vmatrix}^2 (a_0a_2 - a_1^2)$$

Слѣдовательно функція (34) въ линейномъ преобразованіи приобрѣла только числовой коэффициентъ. Функція (34) есть единственный инвариантъ формы (32); онъ служитъ основаніемъ всѣхъ изслѣдованій, касающихся формы, во всѣхъ отрасляхъ анализа.

Пр. 4. Двоичныя формы второй степени:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2 = 0 \quad (36)$$

представляютъ четыре точки на одной прямой, или четыре прямыя, проходящія черезъ одну точку. Основныя точки или прямыя суть $x=0$, $y=0$. Эти четыре точки могутъ быть сопряженно гармоническими и одна точка одной формы можетъ совпадать съ одною изъ точекъ другой формы. Зависимость между коэффициентами, существующая въ этихъ случаяхъ, не должна зависеть отъ линейнаго преобразованія; слѣдовательно эти функціи коэффициентовъ будутъ инварианты формъ (36).

Пусть точки или прямыя формъ будутъ:

$$\begin{aligned} x - \lambda_1y = 0 \quad , \quad x - \lambda_3y = 0 \\ x - \lambda_2y = 0 \quad , \quad x - \lambda_4y = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ суть корни уравненій (36). Если эти уравненія (36) представляютъ гармоническій рядъ или связку, то мы будемъ имѣть (§ 146, 14):

$$\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 = 0$$

но:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a_2}{a_0} \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2a_1}{a_0} \quad , \quad \lambda_3 + \lambda_4 = -\frac{2b_1}{b_0} \quad , \quad \lambda_3\lambda_4 = \frac{b_2}{b_0}$$

подставляя, найдемъ:

$$a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \quad (38)$$

Послѣ линейнаго преобразованія, уравненія (36) сдѣлаются:

$$A_0x'^2 + 2A_1x'y' + A_2y'^2 = 0 \quad , \quad B_0x'^2 + 2B_1x'y' + B_2y'^2 = 0$$

гдѣ A и B будутъ имѣть формы (35) и мы найдемъ:

$$A_0B_2 - 2A_1B_1 + A_2B_0 = \begin{vmatrix} \alpha & , & \gamma \\ \beta & , & \delta \end{vmatrix}^2 (a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0) \quad (39)$$

Слѣдовательно (38) есть инвариантъ формъ (36).

Если одна точка одной изъ формъ (36) совпадаетъ съ одной изъ точекъ или прямыхъ другой формы, то мы должны имѣть, какъ результатъ исключенія $\frac{x}{y}$ слѣдующую зависимость между коэффициентами формъ:

$$(a_0b_2 - a_2b_0)^2 - 4(a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1)$$

эта зависимость есть инвариантъ, такъ какъ совпаденіе точекъ не зависитъ отъ линейнаго преобразованія.

Уравненіе (§ 178, 35):

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \\ b_2 & -b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (40)$$

представляющее двойныя точки или прямая инволюціоннаго ряда (31, 32) есть, очевидно, ковариантъ.

И въ самомъ дѣлѣ, послѣ преобразованія, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} x'^2 & x'y' & y'^2 \\ A_2 & -A_1 & A_0 \\ B_2 & -B_1 & B_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & , & \gamma \\ \beta & , & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \\ b_2 & -b_1 & b_0 \end{vmatrix} \quad (41)$$

Изъ этого примѣра видимъ, какимъ образомъ, извѣстная связь между точками, прямыми, или вообще кривыми, сопровождается всегда другими функціями тѣсно связанными съ данными. Замѣтимъ еще, что условіе параллельности прямыхъ линий:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

именно:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (42)$$

есть инвариантъ.

Условіе, что три прямая пересѣкаются въ одной точкѣ:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

именно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (44)$$

или, что три точки лежатъ на одной прямой линіи, есть инвариантъ.

Условіе (28) § 177, выражающее, что четыре точки представляемы уравненіемъ 4-ой степени суть гармоническія, есть инвариантъ, также точно какъ и условіе (30) § 177 выражающее, что четыре точки уравненія 4-ой степени эквигармоничны.

Этихъ примѣровъ достаточно, чтобы составить ясное понятіе объ инвариантахъ и ковариантахъ и о той роли, которую они должны играть въ анализѣ.

Въ настоящее время существуетъ цѣлый отдѣлъ анализа: теорія формъ, въ которомъ излагаются способы разысканія инвариантовъ формъ, ихъ число, зависимость между ними; это одна изъ самыхъ интересныхъ и трудныхъ частей анализа. Эта часть анализа обязана своимъ возникновеніемъ англійскому математику Булю.

§ 193. Въ этомъ параграфѣ мы укажемъ на нѣкоторые инварианты или коварианты, которые имѣетъ каждая форма или система формъ.

Если $f(a_0, a_1, a_2, \dots; x, y)$ двоичная форма нѣкоторой степени, $\Phi(a_0, a_1, a_2, \dots)$ ея инвариантъ, то по свойству инварианта мы должны имѣть:

$$\Phi(A_0, A_1, A_2, \dots) = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}^\lambda \cdot \Phi(a_0, a_1, a_2, \dots) \quad (45)$$

гдѣ A_0, A_1, A_2, \dots суть значенія коэффициентовъ a_0, a_1, a_2, \dots , въ которые они переходятъ послѣ линейнаго преобразованія:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad , \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

Если $\Phi(a_0, a_1, a_2, \dots; x, y)$ есть ковариантъ, то мы имѣемъ:

$$\Phi(A_0, A_1, A_2, \dots; x', y') = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}^\lambda \Phi(a_0, a_1, a_2, \dots; x, y) \quad (46)$$

Если форма $f(a_0, a_1, \dots; x, y, z)$ будетъ троичная, то линейное преобразование будетъ:

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' \quad , \quad y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' \quad , \quad z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' \quad (47)$$

а инварианты опредѣляются тѣми же уравненіями (45) и (46).

Пусть f_1 и f_2 будутъ двѣ, какія-нибудь, двоичныя формы; мы говоримъ, что опредѣлитель:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & , & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & , & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (48)$$

который называется *функциональнымъ* или *опредѣлителемъ Якоби*, всегда есть инвариантъ или ковариантъ формъ, какія бы эти формы ни были.

Пусть F_1 и F_2 будутъ формы f_1 и f_2 , послѣ линейнаго преобразованія:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad , \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

Легко видѣть, что:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x'} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f_1}{\partial y} \gamma \\ \frac{\partial F_2}{\partial y'} &= \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \beta + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta \end{aligned}$$

точно также найдемъ:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x'} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f_2}{\partial y} \gamma$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y'} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \beta + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta$$

откуда имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x'} & , & \frac{\partial F_1}{\partial y'} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x'} & , & \frac{\partial F_2}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f_1}{\partial y} \gamma & , & \frac{\partial f_1}{\partial x} \beta + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f_2}{\partial y} \gamma & , & \frac{\partial f_2}{\partial x} \beta + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta \end{vmatrix}$$

а по правилу перемноженія опредѣлителей, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x'} & , & \frac{\partial F_1}{\partial y'} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x'} & , & \frac{\partial F_2}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & , & \gamma \\ \beta & , & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & , & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & , & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

а это показываетъ, что опредѣлитель Якоби есть инвариантъ или ковариантъ.

Пр. 1. Пусть данныя формы будутъ:

$$f_1 = a_1 x + b_1 y \quad , \quad f_2 = a_2 x + b_2 y$$

изъ нихъ имѣемъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = a_1 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = b_1 \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = a_2 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = b_2$$

откуда опредѣлитель Якоби будетъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & , & b_1 \\ a_2 & , & b_2 \end{vmatrix}$$

который, какъ уже извѣстно, есть инвариантъ:

Пр. 2. Пусть данныя формы будутъ:

$$f_1 = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 \quad , \quad f_2 = b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2$$

откуда:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial x} = a_0 x + a_1 y \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial y} = a_1 x + a_2 y$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial x} = b_0 x + b_1 y \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial y} = b_1 x + b_2 y$$

Слѣдовательно определитель Якоби будетъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & , & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & , & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 x + a_1 y & , & a_1 x + a_2 y \\ b_0 x + b_1 y & , & b_1 x + b_2 y \end{vmatrix} \quad (49)$$

а это ковариантъ формъ, который уже нашли выше (41).

Пр. 3. Легко также показать, что функциональный определитель трехъ трюичныхъ формъ f_1, f_2, f_3 есть также инвариантъ или ковариантъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & , & \frac{\partial f_1}{\partial y} & , & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & , & \frac{\partial f_2}{\partial y} & , & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & , & \frac{\partial f_3}{\partial y} & , & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (50)$$

§ 194. Если f есть двоичная форма, какой бы то ни было степени, то определитель:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad (51)$$

который называется *Гессевскимъ*, есть инвариантъ или ковариантъ. Если возьмемъ производныя по x и y формы f , то будемъ имѣть двѣ формы, которыхъ определитель Якоби есть ничто иное какъ Гессевскій определитель, слѣдовательно (51) есть инвариантъ или ковариантъ формы f .

Пр. 1. Пусть данная форма будетъ:

$$f = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2$$

то будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a_0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2a_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a_2$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_0 & , & 2a_1 \\ 2a_1 & , & 2a_2 \end{vmatrix} = 4(a_0 a_2 - a_1^2)$$

инвариантъ, найденный уже выше (34).

Пр. 2. Пусть f будетъ двоичная форма третьей степени:

$$f = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

то:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(a_0 x + a_1 y) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6(a_1 x + a_2 y) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6(a_2 x + a_3 y)$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} a_0 x + a_1 y & , & a_1 x + a_2 y \\ a_1 x + a_2 y & , & a_2 x + a_3 y \end{vmatrix} \quad (52)$$

есть ковариантъ.

§ 195. Если f есть троичная форма, то легко, такимъ же образомъ, показать, что Гессевскій опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} \quad (53)$$

есть инвариантъ или ковариантъ формы.

Пр. 1. Пусть f будетъ троичная форма второй степени:

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 \quad (54)$$

откуда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= 2a_{11} & , & \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2a_{12} & , & \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 2a_{13} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} &= 2a_{23} & , & \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2a_{22} & , & \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2a_{33} \end{aligned}$$

Слѣдовательно опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & , & a_{12} & , & a_{13} \\ a_{21} & , & a_{22} & , & a_{23} \\ a_{31} & , & a_{32} & , & a_{33} \end{vmatrix} \quad (55)$$

есть инвариантъ. Этотъ опредѣлитель, какъ увидимъ ниже, играетъ важную роль въ коническихъ сѣченіяхъ.

§ 196. Есть еще два инварианта или коварианта, которые имѣетъ всякая двоичная форма, или формы, какой бы то ни было степени.

Пусть будутъ двѣ двоичныя формы:

$$f_1(a_0, a_1, a_2, \dots; x, y) \quad \text{и} \quad f_2(b_0, b_1, b_2, \dots; x, y) \quad (56)$$

Эти двѣ формы, приравненныя нулю, представляютъ два ряда точекъ на одной прямой линіи или двѣ связки, проходящія черезъ одну точку. Если одна изъ точекъ одной формы совмѣщается съ одной изъ точекъ другой формы, то между коэффициентами формъ должна существовать известная зависимость, независимо отъ положенія основныхъ точекъ или отъ линейнаго преобразованія. Эту зависимость получаютъ, если между формами (56) исключимъ $\frac{x}{y}$. Результатъ такого исключенія есть функція, цѣлая рациональная, отъ коэффициентовъ $a_0, a_1, \dots; b_0, b_1, \dots$. Очевидно, это будетъ инвариантъ двухъ формъ.

Пр. 1. Пусть данныя формы будутъ:

$$f_1 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

$$f_2 = b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2$$

результатъ исключенія будетъ инвариантъ:

$$(a_0b_2 - a_2b_0)^2 - 4(a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) \quad (57)$$

Пр. 2. Если дана двоичная форма f , то производныя ея будутъ также двоичныя формы:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Результатъ исключенія $\frac{y}{x}$ изъ этихъ формъ будетъ инвариантъ производныхъ или инвариантъ начальной формы f , который называется *дискриминантомъ* или *признач-ной*. Пусть двоичная форма будетъ:

$$f = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(a_0x + a_1y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(a_1x + a_2y)$$

результатъ исключенія x и y будетъ дискриминантъ формы:

$$\begin{vmatrix} a_0 & , & a_1 \\ a_1 & , & a_2 \end{vmatrix} = a_0a_2 - a_1^2$$

какъ уже видѣли выше.

Пр. 3. Если форма троичная:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

ея дискриминантъ получится изъ уравненій:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

исключая x_1, x_2, x_3 , что даетъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & , & a_{12} & , & a_{13} \\ a_{21} & , & a_{22} & , & a_{23} \\ a_{31} & , & a_{32} & , & a_{33} \end{vmatrix}$$

инвариантъ уже выше найденный (55).

Пр. 4. Дискриминантъ формы:

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

получится изъ уравненій:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3(bx^2 + 2cxy + dy^2) = 0$$

исключение x, y даетъ дискриминантъ двончной формы третьей степени:

$$\begin{vmatrix} a & , & 2b & , & c & , & 0 \\ 0 & , & a & , & 2b & , & c \\ b & , & 2c & , & d & , & 0 \\ 0 & , & b & , & 2c & , & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) \quad (58)$$

Дискриминантъ есть условіе, что форма имѣетъ равные корни. Замѣтимъ, что инвариантъ или ковариантъ коварианта формы или формъ есть инвариантъ или ковариантъ начальной формы или формъ.

§ 197. Теперь остается сказать нѣсколько словъ о числѣ инвариантовъ двоичныхъ формъ. Мы уже выше сказали, что двоичная форма первой степени $a_0x + a_1y$ не имѣетъ инварианта, такъ какъ она представляетъ или одну точку или одну прямую.

Форма втораго порядка:

$$f = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 \quad (59)$$

имѣетъ только одинъ инвариантъ—это дискриминантъ:

$$I_{2,2} = a_0a_2 - a_1^2 \quad (60)$$

Форма третьяго порядка:

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 \quad (61)$$

имѣеть также только одинъ инвариантъ—дискриминантъ (58):

$$I_{3,4} = (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) \quad (62)$$

Что эти двѣ формы имѣють по одному инварианту, это легко показать слѣдующимъ образомъ. Преобразуемъ формы (59) и (61) подстановленіемъ:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad , \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

Эти формы сдѣлаются:

$$F = A_0 x'^2 + 2A_1 x'y' + A_2 y'^2$$

$$F = A_0 x'^3 + 3A_1 x'^2 y' + 3A_2 x'y'^2 + A_3 y'^3$$

такъ какъ въ коэффициенты A_0, A_1, \dots входятъ четыре совершенно произвольныя величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, то формы f можно преобразовать въ совершенно произвольныя формы F , для этого надобно опредѣлить четыре величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, въ первомъ случаѣ изъ трехъ уравненій, а во второмъ изъ четырехъ. Слѣдовательно коэффициенты A_0, A_1, \dots могутъ быть выбраны совершенно произвольно, т. е. не существуетъ никакой зависимости между коэффициентами начальныхъ формъ и коэффициентами преобразованныхъ.

Положимъ теперь, что наши формы имѣють по два инварианта φ_1 и φ_2 , слѣдовательно имѣемъ, по свойству инвариантовъ:

$$\varphi_1(A_0, A_1, A_2) = \rho^\lambda \varphi_1(a_0, a_1, a_2)$$

$$\varphi_2(A_0, A_1, A_2) = \rho^\mu \varphi_2(a_0, a_1, a_2)$$

для формы втораго порядка (59), и

$$\varphi_1(A_0, A_1, A_2, A_3) = \rho^\lambda \varphi_1(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

$$\varphi_2(A_0, A_1, A_2, A_3) = \rho^\mu \varphi_2(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

для формы третьаго порядка (61).

Возвысимъ первыя изъ этихъ уравненій въ степень μ , а вторыя въ степень λ и раздѣляя результаты, найдемъ:

$$\Phi(A_0, A_1, A_2) = \Phi(a_0, a_1, a_2)$$

$$\Phi(A_0, A_1, A_2, A_3) = \Phi(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

т. е. мы бы имѣли зависимость между совершенно произвольными коэффициентами a_0, a_1, a_2, \dots и A_0, A_1, A_2, \dots .

Форма четвертаго порядка имѣеть пять коэффициентовъ, слѣдовательно, исключая четыре величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ изъ пяти уравненій, мы найдемъ зависимость между a и A такого рода:

$$\Phi_1(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \Phi_1(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4) \quad (63)$$

слѣдовательно форма четвертаго порядка должна имѣть два основные инварианта. Форма пятаго порядка имѣеть ихъ три, а форма шестаго порядка—четыре. Всякая форма имѣеть безчисленное множество инвариантовъ, но всѣ они суть функціи основныхъ. Такъ напр. всякая степень инварианта $a_0a_2 - a_1^2$ есть инвариантъ формы втораго порядка. Инварианты свойства (63) называются *абсолютными инвариантами* формы, такъ какъ эти функціи вовсе неизмѣняются линейнымъ преобразованіемъ.

ГЛАВА XIV.

Кривыя втораго порядка и втораго класса.

§ 198. Въ началѣ настоящаго сочиненія мы уже познакомились съ четырьмя кривыми: кругомъ, эллипсомъ, гиперболой и параболой. Всѣ эти кривыя выражаются уравненіями второй степени и были уже извѣстны древнимъ геометрамъ; кривыя эти носили у нихъ названіе *коническихъ сѣченій*, такъ какъ всѣ онѣ получаются пересѣченіемъ конуса плоскостью въ извѣстномъ направленіи. Въ настоящей главѣ мы изслѣдуемъ геометрическія мѣста, представляемыя общимъ уравненіемъ второй степени между координатами, и покажемъ, что такимъ уравненіемъ выражаются только четыре коническія сѣченія, названныя выше, кругъ, эллипсъ, гипербола, парабола, и двѣ прямыя.

Самое общее уравненіе второй степени между двумя переменными координатами имѣеть форму:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

Это уравненіе, какъ видимъ, содержитъ шесть числовыхъ коэффициентовъ, отъ которыхъ зависитъ, какъ ниже увидимъ, родъ коническаго сѣченія. Такъ какъ на одинъ изъ коэффициентовъ можно всѣ члены, или лучше сказать всѣ коэффициенты, раздѣлить, то числовыхъ коэффициентовъ будетъ только пять. Слѣдовательно одинъ изъ коэффициентовъ въ уравненіи (1), не нарушая общности, можетъ быть сдѣланъ равнымъ единицѣ.

§ 199. Чтобы наши изслѣдованія были самаго общаго характера, мы отнесемъ положеніе кривой къ координатному треугольнику, котораго уравненія сторонъ, въ декартовыхъ координатахъ, пусть будутъ:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Трилинейныя координаты, какой-нибудь, точки x_1, x_2, x_3 , будутъ (§ 182):

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= a_1x + b_1y + c_1 \\ \rho x_2 &= a_2x + b_2y + c_2 \\ \rho x_3 &= a_3x + b_3y + c_3 \end{aligned} \quad (3)$$

а декартовы, выраженные въ трилинейныхъ, будутъ (§ 182):

$$x = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3}, \quad y = \frac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3} \quad (4)$$

Значеніе коэффициентовъ A, B, C извѣстно (§ 181):

Если эти выраженія для x и y подставимъ въ уравненіе (1), то оно послѣ всѣхъ приведеній получитъ слѣдующую однородную форму:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (5)$$

Дальнѣйшія изслѣдованія покажутъ выгоду писать коэффициенты въ уравненіи съ двойными индексами. Правило для нихъ есть слѣдующее: коэффициентъ у $x_i x_k$ всегда $a_{i,k}$.

(Прежде чѣмъ приступимъ къ изслѣдованію свойствъ коническихъ сѣченій покажемъ нѣкоторыя замѣчательныя свойства функціи (5) или троичной формы втораго порядка (§ 190). Функцію (5) можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\begin{aligned} f &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)x_2 + \\ &+ (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)x_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Если теперь замѣтимъ, что:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad (7)$$

($a_{i,k} = a_{k,i}$), то уравнение (5) или (6) приметъ форму:

$$2f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \quad (8)$$

Мы увидимъ ниже, что всѣ изслѣдованія свойствъ кривыхъ втораго порядка, основаны на различныхъ значеніяхъ, которыя можно придавать формѣ (8).

Функция (5) можетъ быть написана въ слѣдующей простой символической формѣ:

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 \quad (9)$$

если условимся, послѣ возвышенія въ степень, замѣщать коэффициентъ $a_k a_i$ черезъ $a_{k,i}$; такъ, на примѣръ, $a^2_1 = a_{11}$ замѣщается черезъ a_{11} , $a_1 a_2$ замѣщается черезъ a_{12} и т. д.

Замѣтимъ еще одно изъ весьма важныхъ свойствъ выраженія (9). Это свойство заключается въ слѣдующемъ:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \quad (10)$$

т. е. что эта функция не измѣняется, замѣняя однѣ переменныя x_1, x_2, x_3 другими y_1, y_2, y_3 . Это свойство легко провѣрить подстановленіемъ въ (10) выраженій (7) вмѣсто:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

§ 200. Если въ тождествахъ (7) положимъ:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \sigma \xi_1, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \sigma \xi_2, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3} = \sigma \xi_3 \quad (11)$$

то онѣ сдѣлаются:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= \sigma \xi_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= \sigma \xi_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= \sigma \xi_3 \end{aligned} \quad (12)$$

откуда, рѣшая эти уравненія относительно x , найдемъ:

$$\begin{aligned} A_{11} \xi_1 + A_{21} \xi_2 + A_{31} \xi_3 &= \rho x_1 \\ A_{12} \xi_1 + A_{22} \xi_2 + A_{32} \xi_3 &= \rho x_2 \\ A_{13} \xi_1 + A_{23} \xi_2 + A_{33} \xi_3 &= \rho x_3 \end{aligned} \quad (13)$$

Если первое изъ уравненій (12) помножимъ на x_1 , второе на x_2 , третье на x_3 и сложимъ, то будемъ имѣть:

$$f(x) = \sigma (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) \quad (14)$$

Помножимъ точно также первое изъ уравненій (13) на ξ_1 , второе на ξ_2 , третье на ξ_3 и складывая, найдемъ ($A_{i,k} = A_{k,i}$):

$$\begin{aligned} A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = \\ = \rho(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) \end{aligned} \quad (15)$$

Означая первую часть этого уравненія черезъ $f'(\xi)$, найдемъ:

$$f'(\xi) = \rho(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) \quad (16)$$

Изъ уравненій (14) и (16), найдемъ:

$$f(x) = \frac{\sigma}{\rho} f'(\xi) \quad (17)$$

Изъ уравненій (13) и (15), имѣемъ:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \xi_1} = \rho x_1, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \xi_2} = \rho x_2, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \xi_3} = \rho x_3 \quad (18)$$

Изъ выраженій (11) и (18) видимъ, что функции $f(x)$ и $f'(\xi)$ переходятъ одна въ другую подстановленіями совершенно подобными, поэтому онѣ называются *взаимными функциями*.

Если къ уравненіямъ (12) присовокупимъ уравненіе (8), которое въ силу положеній (11) можно написать въ формѣ:

$$\sigma \xi_1 x_1 + \sigma \xi_2 x_2 + \sigma \xi_3 x_3 = f(x) \quad (19)$$

то изъ четырехъ уравненій (12) и (19), исключая $x_1, x_2, x_3, 1$, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -\sigma \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -\sigma \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -\sigma \xi_3 \\ \sigma \xi_1 & \sigma \xi_2 & \sigma \xi_3 & -f(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

или:

$$\Delta f(x) + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sigma\xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sigma\xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sigma\xi_3 \\ \sigma\xi_1 & \sigma\xi_2 & \sigma\xi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

откуда:

$$f(x) = -\frac{\sigma^2}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

гдѣ Δ есть известнѣйшій определитель или инвариантъ функции (5) § 195, 55.

Если къ уравненіямъ (13) присовокупимъ уравненіе:

$$2f'(\xi) = \xi_1 \frac{\partial f'}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial f'}{\partial \xi_2} + \xi_3 \frac{\partial f'}{\partial \xi_3} \quad (22)$$

которое въ силу положеній (18) можно написать въ формѣ:

$$\rho x_1 \xi_1 + \rho x_2 \xi_2 + \rho x_3 \xi_3 = f'(\xi) \quad (23)$$

то изъ четырехъ уравненій (13) и (22) найдемъ, какъ выше:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & , & A_{12} & , & A_{13} & , & -\rho x_1 \\ A_{21} & , & A_{22} & , & A_{23} & , & -\rho x_2 \\ A_{31} & , & A_{32} & , & A_{33} & , & -\rho x_3 \\ \rho x_1 & , & \rho x_2 & , & \rho x_3 & , & -f'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

откуда:

$$f'(\xi) = -\frac{\rho^2}{\Delta'} \begin{vmatrix} A_{11} & , & A_{12} & , & A_{13} & , & x_1 \\ A_{21} & , & A_{22} & , & A_{23} & , & x_2 \\ A_{31} & , & A_{32} & , & A_{33} & , & x_3 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & 0 \end{vmatrix} \quad (24)$$

гдѣ Δ' есть взаимный определитель определителя Δ и связанъ съ нимъ зависимою $\Delta' = \Delta^2$.

Элементы определителя:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11} & , & A_{12} & , & A_{13} \\ A_{21} & , & A_{22} & , & A_{23} \\ A_{31} & , & A_{32} & , & A_{33} \end{vmatrix} \quad (25)$$

выражаются въ элементахъ определителя Δ , слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{22}a_{33} - a_{23}^2 & A_{23} &= A_{32} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ A_{22} &= a_{11}a_{33} - a_{13}^2 & A_{13} &= A_{31} = a_{12}a_{13} - a_{22}a_{13} \\ A_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 & A_{12} &= A_{21} = a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12} \end{aligned} \quad (26)$$

Если коэффициенты пропорциональности σ и ρ въ уравненіяхъ (21) и (24), внесемъ въ переменныя, то найдемъ:

$$f(x) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad f'(\xi) = -\frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} \quad (27)$$

Изъ этихъ выраженій ясно видна взаимность между функціями f и f' .

§ 201. Если положимъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1} &= \sigma \eta_1, & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2} &= \sigma \eta_2, & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_3} &= \sigma \eta_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z_1} &= \sigma \zeta_1, & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z_2} &= \sigma \zeta_2, & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z_3} &= \sigma \zeta_3 \end{aligned} \quad (28)$$

и соотвѣтственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} &= \rho y_1, & \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} &= \rho y_2, & \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} &= \rho y_3 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \zeta_1} &= \rho z_1, & \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \zeta_2} &= \rho z_2, & \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \zeta_3} &= \rho z_3 \end{aligned} \quad (29)$$

то легко найти, исходя изъ выраженія:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}$$

что:

$$\rho \left(z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} \right) = \sigma \left(\zeta_1 \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \right) \quad (30)$$

или, внося коэффициенты пропорциональности ρ и σ въ переменныя:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = \zeta_1 \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \quad (30')$$

§ 202. Мы видѣли, что уравненіе второй степени (5) заключаетъ пять числовыхъ коэффициентовъ, относительно которыхъ уравненіе имѣетъ линейную форму, слѣдовательно, если будетъ дана точка координатами, черезъ которую должна проходить кривая (5), то эти координаты должны удовлетворять уравненіе (5), подставивъ ихъ въ это уравненіе мы будемъ имѣть одно линейное уравненіе между пятью коэффициентами. Если кривая должна проходить, на примѣръ, черезъ точку $y_1 y_2 y_3$, то мы должны имѣть:

$$f(y_1 y_2 y_3) = a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2a_{12} y_1 y_2 + 2a_{13} y_1 y_3 + 2a_{23} y_2 y_3 = 0 \quad (31)$$

Слѣдовательно, если даны пять точекъ, черезъ которыя должна проходить кривая, то мы будемъ имѣть пять линейныхъ уравненій, подобныхъ уравненію (1), изъ которыхъ можно опредѣлить всѣ пять коэффициентовъ. Отсюда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Черезъ пять, произвольно выбранныхъ, точекъ въ одной плоскости можно провести одну только кривую второго порядка и эта кривая пятью точками вполне опредѣляется во всѣхъ ея частяхъ.

Кривую второго порядка или степени мы будемъ всегда называть *коническимъ сѣченіемъ*.

§ 203. Пять точекъ, опредѣляющія коническое сѣченіе, могутъ быть такъ сгруппированы, что кривая будетъ состоять изъ пары прямыхъ линій.

Чтобы это показать, пусть пять точекъ, опредѣляющія коническое сѣченіе, будутъ:

$$(y_1 y_2 y_3), (z_1 z_2 z_3), (u_1 u_2 u_3), (v_1 v_2 v_3), (w_1 w_2 w_3) \quad (32)$$

такъ какъ черезъ эти точки должно проходить коническое сѣченіе, то эти координаты должны удовлетворять уравненію (5), слѣдовательно подстановленіе ихъ въ это уравненіе даетъ пять уравненій подобныа урав-

ненію (31). Исключая изъ этихъ пяти уравненій и шестаго (5) коэффициенты $a_{i,k}$, найдемъ уравненіе кривой въ формѣ определителя:

$$f(x_1 x_2 x_3) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_1y_2 & y_1y_3 & y_2y_3 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_1z_2 & z_1z_3 & z_2z_3 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_1u_2 & u_1u_3 & u_2u_3 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_1v_2 & v_1v_3 & v_2v_3 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & w_1w_2 & w_1w_3 & w_2w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

Легко видѣть, что этотъ определитель обращается въ нуль, если переменныя координаты $x_1 x_2 x_3$ равны координатамъ одной изъ пяти данныхъ точекъ.

Пусть послѣднія три изъ пяти данныхъ точекъ (32) будутъ находиться на одной прямой линіи, коей уравненіе есть:

$$U = ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

такъ какъ точки $(u_1 u_2 u_3)$, $(v_1 v_2 v_3)$, $(w_1 w_2 w_3)$ находятся, по условію, на этой прямой, то мы должны имѣть:

$$U_3 = au_1 + bu_2 + cu_3 = 0, \quad U_4 = av_1 + bv_2 + cv_3 = 0,$$

$$U_5 = aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0 \quad (34)$$

Умножимъ первую колонну определителя (33) на a придадимъ къ ней четвертую и пятую колонны, умноживъ сначала первую изъ нихъ на b , а вторую на c . Означимъ сверхъ того:

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = U_1; \quad az_1 + bz_2 + cz_3 = U_2$$

Такая операція даетъ слѣдующее:

$$af(x_1 y_1 z_1) = \begin{vmatrix} x_1U & x_2^2 & x_3^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ y_1U_1 & y_2^2 & y_3^2 & y_1y_2 & y_1y_3 & y_2y_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1U_5 & w_2^2 & w_3^2 & w_1w_2 & w_1w_3 & w_2w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

Въ этомъ послѣднемъ определителѣ умножимъ вторую колонну на b и придадимъ къ ней послѣднюю и четвертую, умноживъ сначала первую

на c , а вторую на a . Наконецъ умножимъ третью колонну на c и придадимъ къ ней предпоследнюю и четвертую, умноживъ сначала первую на a , а вторую на b . Такимъ образомъ получимъ опредѣлитель:

$$abc f(x_1 x_2 x_3) = \begin{vmatrix} x_1 U & x_2 U & x_3 U & x_1 x_2 & x_1 x_3 & x_2 x_3 \\ y_1 U_1 & y_2 U_1 & y_3 U_1 & y_1 y_2 & y_1 y_3 & y_2 y_3 \\ z_1 U_2 & z_2 U_2 & z_3 U_2 & z_1 z_2 & z_1 z_3 & z_2 z_3 \\ u_1 U_3 & u_2 U_3 & u_3 U_3 & u_1 u_2 & u_1 u_3 & u_2 u_3 \\ v_1 U_4 & v_2 U_4 & v_3 U_4 & v_1 v_2 & v_1 v_3 & v_2 v_3 \\ w_1 U_5 & w_2 U_5 & w_3 U_5 & w_1 w_2 & w_1 w_3 & w_2 w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

Этотъ опредѣлитель раздѣленъ на четыре квадрата и такъ какъ, по условію, три данныя точки лежатъ на прямой $U=0$, то мы имѣемъ $U_3=0$, $U_4=0$, $U_5=0$, слѣдовательно всѣ элементы, внизу на лѣво стоящаго квадрата, равны нулю; а потому, по свойству опредѣлителей, опредѣлитель (36) распадается на произведение:

$$abc f(x_1 x_2 x_3) = \begin{vmatrix} x_1 U & x_2 U & x_3 U \\ y_1 U_1 & y_2 U_1 & y_3 U_1 \\ z_1 U_2 & z_2 U_2 & z_3 U_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 u_2 & u_1 u_3 & u_2 u_3 \\ v_1 v_2 & v_1 v_3 & v_2 v_3 \\ w_1 w_2 & w_1 w_3 & w_2 w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

или:

$$abc f(x_1 x_2 x_3) = UU_1 U_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 u_2 & u_1 u_3 & u_2 u_3 \\ v_1 v_2 & v_1 v_3 & v_2 v_3 \\ w_1 w_2 & w_1 w_3 & w_2 w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (38)$$

Изъ этого послѣдняго уравненія видимъ, что $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ распадается на два линейные множителя:

$$U = ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Изъ коихъ первый есть прямая, на которой находятся три точки $(u_1 u_2 u_3)$, $(v_1 v_2 v_3)$, $(w_1 w_2 w_3)$, а второй есть прямая, проходящая через остальные двѣ точки $(y_1 y_2 y_3)$ и $(z_1 z_1 z_3)$. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если изъ пяти данныхъ точекъ, опредѣляющихъ коническое сѣченіе, три лежатъ на одной прямой линіи, то коническое сѣ-

ченіе обращается въ пару прямыхъ линій. Какимъ же условіемъ связаны коэффиціенты уравненія (5), когда оно распадается на два линейные, рациональные, множителя?

Если уравненіе (5) распадается на два линейные множителя, то его форма будетъ:

$$f = u.v$$

гдѣ u и v суть линейныя функціи относительно переменныхъ x_1 x_2 x_3 .

Изъ этого уравненія имѣемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = u \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = u \frac{\partial v}{\partial x_2} + v \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = u \frac{\partial v}{\partial x_3} + v \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

Если въ эти уравненія подставимъ координаты точки пересѣченія прямыхъ:

$$u = 0 \quad \text{и} \quad v = 0$$

то будемъ имѣть:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

Если изъ этихъ уравненій исключимъ x_1 x_2 x_3 , то найдемъ слѣдующую зависимость между коэффиціентами уравненія (5):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

для симметріи мы писали вмѣсто $a_{k,i}$, $a_{i,k}$ и впредь будемъ предполагать, что $a_{k,i} = a_{i,k}$.

§ 204. Двѣ кривыя линіи, выраженыя уравненіями въ декартовыхъ координатахъ пересѣкаются въ тѣхъ точкахъ, коихъ координаты удовлетворяютъ оба уравненія. Слѣдовательно число точекъ пересѣченія кривыхъ линій будетъ равно числу паръ координатъ, удовлетворяющихъ оба уравненія кривыхъ. Если одна изъ кривыхъ есть коническое сѣченіе, а другая есть прямая линія, то опредѣливъ изъ послѣдняго y , если подставимъ въ уравненіе коническаго сѣченія, то получимъ квадратное урав-

неніе относительно x . Двумъ корнямъ x_1, x_2 этаго уравненія будутъ соотвѣтствовать двѣ ординаты y_1 и y_2 , слѣдовательно прямая линія пересѣкаетъ коническое сѣченіе въ двухъ точкахъ.

Легко найти уравненія этихъ точекъ. Пусть:

$$f(x_1 \ x_2 \ x_3) = 0 \quad , \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad (40)$$

будутъ уравненія коническаго сѣченія и прямой. Если означимъ черезъ $y_1 \ y_2 \ y_3$ координаты одной изъ точекъ пересѣченія коническаго сѣченія съ прямою, то уравненіе этой точки будетъ:

$$y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 = 0 \quad (41)$$

Такъ какъ координаты $(y_1 \ y_2 \ y_3)$ должны удовлетворять уравненія (40) и (41), то исключая эти величины изъ уравненій (40) и (41), найдемъ:

$$f(b\xi_3 - c\xi_2, c\xi_1 - a\xi_3, a\xi_2 - b\xi_1) = 0 \quad (42)$$

Это уравненіе представляетъ пару точекъ, такъ какъ легко видѣть съ помощью критеріума (39), что оно распадается на два линейные множителя относительно линейныхъ координатъ $\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3$.

§ 205. Остается рѣшить вопросъ относительно числа точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій.

Пусть уравненія коническихъ сѣченій въ трилинейныхъ координатахъ будутъ:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (43)$$

$$f_1 = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 = 0$$

Эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$f = a_0x_3^2 + a_1x_3 + a_2 = 0$$

$$f_1 = b_0x_3^2 + b_1x_3 + b_2 = 0$$

гдѣ a_0 и b_0 не заключаютъ ни x_1 ни x_2 , a_1 и b_1 суть функціи первой степени относительно x_1 и x_2 , a_2 и b_2 суть функціи второй степени относительно тѣхъ-же переменныхъ.

Если изъ этихъ уравненій опредѣлимъ x_3^2 и x_3 , то найдемъ:

$$x_3^2 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_0b_1 - a_1b_0} \quad x_3 = \frac{b_0a_2 - a_0b_2}{a_0b_1 - a_1b_0}$$

откуда:

$$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0} = \left(\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \right)^2$$

или:

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0) (a_1 b_2 - a_2 b_1) = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 \quad (44)$$

уравнение, очевидно, однородное четвертой степени относительно x_1 и x_2 , следовательно разлагается на четыре линейные множителя:

$$x_1 - \alpha_1 x_2 = 0, \quad x_1 - \alpha_2 x_2 = 0, \quad x_1 - \alpha_3 x_2 = 0, \quad x_1 - \alpha_4 x_2 = 0$$

которые представляют прямые, соединяющія вершину $x_1 = 0, x_2 = 0$ координатнаго треугольника съ точками пересѣченія данныхъ коническихъ сѣченій. Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе: два коническія сѣченія пересѣкаются всегда въ четырехъ точкахъ.

§ 206. Четыре данныя точки не вполне опредѣляютъ коническое сѣченіе. Возьмемъ два коническихъ сѣченія:

$$f_1(x_1 x_2 x_3) = 0, \quad f_2(x_1 x_2 x_3) = 0 \quad (45)$$

которыя, какъ мы выше видѣли, пересѣкаются въ четырехъ точкахъ. Если возьмемъ уравненіе:

$$f_1(x_1 x_2 x_3) - \lambda f_2(x_1 x_2 x_3) = 0 \quad (46)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэффициентъ, то это уравненіе представляетъ цѣлый рядъ коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре точки пересѣченія кривыхъ (45), такъ какъ координаты этихъ четырехъ точекъ, удовлетворяя уравненія (45) удовлетворяютъ и уравненіе (46). Давая коэффициенту λ всевозможныя значенія, мы получимъ цѣлый рядъ коническихъ сѣченій, который мы будемъ называть *связкой коническихъ сѣченій*, проходящихъ черезъ четыре точки, подобно тому, какъ мы назвали связкой прямыхъ, прямые проходящія черезъ одну точку.

Легко видѣть изъ уравненія (46), что черезъ каждую, произвольно взятую, точку на плоскости проходитъ одно изъ коническихъ сѣченій связки (46). Въ самомъ дѣлѣ, пусть $y_1 y_2 y_3$ будетъ, какая-нибудь, произвольно взятая точка. Если коническое сѣченіе (46) должно проходить черезъ эту точку, то ея координаты должны удовлетворять уравненію (46), следовательно найдемъ:

$$f_1(y_1 y_2 y_3) - \lambda f_2(y_1 y_2 y_3) = 0$$

откуда:

$$\lambda = \frac{f_1(y_1 y_2 y_3)}{f_2(y_1 y_2 y_3)}$$

подставляя въ (46), найдемъ:

$$f_2(y_1 y_2 y_3) f_1(x_1 x_2 x_3) - f_1(y_1 y_2 y_3) f_2(x_1 x_2 x_3) = 0$$

уравненіе конического сѣченія, проходящаго черезъ четыре точки пересѣченія $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ и черезъ пятую точку $(y_1 y_2 y_3)$.

Пересѣченіе конического сѣченія съ прямою. Поляры и касательныя.

§ 207. Первая задача, рѣшеніе которой служитъ ключемъ къ изслѣдованію свойствъ коническихъ сѣченій или кривыхъ, есть слѣдующая, которую мы уже рѣшили въ § 204, а здѣсь мы ее изслѣдуемъ подробно.

Задача. Опреѣлить точки пересѣченія конического сѣченія съ прямою, проходящею черезъ двѣ данныя точки $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$?

Рѣшеніе. Координаты, какой-нибудь, точки на прямой, проходящей черезъ точки $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$ выражаются уравненіями (§ 187, 17):

$$\rho x_1 = y_1 + \lambda z_1 \quad , \quad \rho x_2 = y_2 + \lambda z_2 \quad , \quad \rho x_3 = y_3 + \lambda z_3 \quad (47)$$

Если $x_1 x_2 x_3$ суть координаты точекъ пересѣченія прямой (47) съ коническимъ сѣченіемъ:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = 0 \quad (48)$$

то онѣ должны удовлетворять уравненіе (48), слѣдовательно мы должны имѣть:

$$\{a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \lambda(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)\}^2 = 0 \quad (49)$$

или:

$$(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)^2 + 2\lambda(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3) + \lambda^2(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)^2 = 0$$

или:

$$R\lambda^2 + 2Q\lambda + P = 0 \quad (50)$$

гдѣ:

$$R = (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)^2 \quad , \quad P = (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)^2$$

$$Q = (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)$$

Если развернемъ эти уравненія съ условіями сказанными въ § 199, то

найдемъ, что R и P суть ничто иное какъ уравненіе коническаго сѣченія, въ которое подставлены координаты $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$, а:

$$Q = \frac{1}{2} \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} \right) \quad \text{или} \quad Q = \frac{1}{2} \left(z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} \right) \quad (51)$$

Если рѣшимъ уравненіе (50), найдемъ для λ двѣ величины:

$$\lambda_1 = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - PR}}{R}, \quad \lambda_2 = \frac{-Q - \sqrt{Q^2 - PR}}{R} \quad (52)$$

Слѣдовательно прямая, проходящая черезъ точки $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$, пересѣкаетъ коническое сѣченіе въ двухъ точкахъ, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, коихъ выраженія получатся изъ (47), подставляя вмѣсто λ его значенія (52):

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= R y_1 - (Q - \sqrt{Q^2 - RP}) z_1, & \rho x'_1 &= R y_1 - (Q + \sqrt{Q^2 - RP}) z_1 \\ \rho x_2 &= R y_2 - (Q - \sqrt{Q^2 - RP}) z_2, & \rho x'_2 &= R y_2 - (Q + \sqrt{Q^2 - RP}) z_2 \\ \rho x_3 &= R y_3 - (Q - \sqrt{Q^2 - RP}) z_3, & \rho x'_3 &= R y_3 - (Q + \sqrt{Q^2 - RP}) z_3 \end{aligned} \quad (53)$$

гдѣ общій знаменатель R внесень въ коэффициентъ пропорціональности ρ .

Такимъ образомъ на данной прямой мы будемъ имѣть четыре точки: $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$ и двѣ точки данныя предыдущими выраженіями, т. е. точки пересѣченія коническаго сѣченія съ прямою.

Ангармоническое отношеніе этихъ четырехъ точекъ будетъ или $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ или $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, если ихъ означимъ черезъ α_1 и α_2 , т. е.:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

откуда:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad \alpha_1 \alpha_2 = 1$$

Такъ какъ λ_1 и λ_2 суть корни уравненія (50), то имѣемъ:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2Q}{R}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{P}{R}$$

слѣдовательно:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{4Q^2 - 2PR}{PR}$$

Имѣя сумму количествъ α_1 и α_2 и ихъ произведение составимъ квадратное уравненіе, коего количества эти суть корни, именно:

$$\alpha^2 - \frac{4Q^2 - 2PR}{PR} \alpha + 1 = 0$$

или:

$$(1 + \alpha)^2 PR - 4Q^2 \alpha = 0 \quad (54)$$

корни этого уравненія дадутъ непосредственно ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$ и точекъ (53).

§ 208. Если въ уравненіи (54) мы фиксируемъ одну изъ точекъ, напримѣръ $(y_1 y_2 y_3)$, дадимъ опредѣленное числовое значеніе ангармоническому отношенію α и будемъ вращать сѣкущую, выбирая на ней, во всѣхъ ея положеніяхъ, такую точку $(z_1 z_2 z_3)$, чтобы она удовлетворяла уравненію (54), то мы получимъ геометрическое мѣсто точекъ, коихъ ангармоническое отношеніе съ точкою $(y_1 y_2 y_3)$ и двумя точками пересѣченія сѣкущихъ съ коническимъ сѣченіемъ (48), имѣетъ данное опредѣленное числовое значеніе. Такъ какъ уравненіе (54), относительно $z_1 z_2 z_3$ второй степени, то это геометрическое мѣсто есть также *коническое сѣченіе*.

Давая α различныя значенія получимъ систему коническихъ сѣченій относительно точки $(y_1 y_2 y_3)$. Измѣняя положеніе точки $(y_1 y_2 y_3)$ на плоскости получимъ такую-же систему коническихъ сѣченій для каждой точки плоскости.

Особеннаго вниманія заслуживаютъ, относительно каждой точки плоскости, тѣ изъ системы коническихъ сѣченій, для которыхъ ангармоническое отношеніе $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$.

1. Положимъ $\alpha = 1$, то уравненіе (54) сдѣлается:

$$PR - Q^2 = 0 \quad (55)$$

Разсматривая выраженія (53) мы видимъ, что при условіи (55) точки пересѣченія прямой съ коническимъ сѣченіемъ совпадаютъ, т. е. прямая проходящая черезъ точки $(y_1 y_2 y_3)$ и $(z_1 z_2 z_3)$ касается коническаго сѣченія. Слѣдовательно точка $(z_1 z_2 z_3)$ можетъ находится только на этой прямой. И дѣйствительно, если къ уравненію (55) приложимъ критеріумъ § 203, 39, то увидимъ, что это уравненіе, второй степени относительно $z_1 z_2 z_3$, разлагается на два линейные множителя, т. е. представляетъ тотъ случай, въ которомъ коническое сѣченіе распадается на два линейные множителя (§ 203). Слѣдовательно уравненіе (55) представляетъ двѣ касательныя, проведенныя къ коническому сѣченію черезъ точку $(y_1 y_2 y_3)$. Ниже мы еще возвратимся къ этому уравненію.

2. Несравненно важнѣе, для изслѣдованія свойствъ конического сѣченія, тотъ случай, въ которомъ $\alpha = -1$.

Если $\alpha = -1$, то уравненіе (55) дѣлается:

$$Q^2 = 0 \quad \text{или} \quad Q = 0 \quad (56)$$

т. е.

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \quad \text{или} \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0 \quad (57)$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто точекъ $(z_1 z_2 z_3)$ есть прямая линія, такъ какъ уравненіе (57) есть линейная функція относительно переменныхъ $z_1 z_2 z_3$. Но при $\alpha = -1$ четыре точки $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$ и двѣ точки пересѣченія прямой, проходящей черезъ точку $(y_1 y_2 y_3)$, съ коническимъ сѣченіемъ, суть гармоническія. Слѣдовательно прямая (57) есть геометрическое мѣсто гармоническихъ точекъ къ тремъ точкамъ: $(y_1 y_2 y_3)$ и къ двумъ точкамъ пересѣченія прямой, проходящей черезъ точку $(y_1 y_2 y_3)$, съ коническимъ сѣченіемъ.

Эта прямая, играющая самую важную роль въ изслѣдованіи свойствъ коническихъ сѣченій, носитъ названіе *поляръ* точки $(y_1 y_2 y_3)$, относительно конического сѣченія, а точка $(y_1 y_2 y_3)$ называется ея *полюсомъ*.

Точки, коихъ координаты удовлетворяютъ уравненію (57) называются *гармоническими полюсами*.

Изъ этого видимъ, что всякая прямая, проведенная черезъ полюсъ, пересѣкаясь съ коническимъ сѣченіемъ и полярюй, даетъ четыре гармоническія точки: полюсъ и три точки пересѣченія ея съ коническимъ сѣченіемъ и полярюй.

Нѣкоторыя прямыя, проходящія черезъ полюсъ встрѣчаютъ коническое сѣченіе въ двухъ мнимыхъ сопряженныхъ точкахъ, а какъ такія точки имѣютъ всегда пару дѣйствительныхъ гармонически сопряженныхъ точекъ, то предъидущее предложеніе не престааетъ существовать и въ томъ случаѣ, когда прямая, проходящая черезъ точку $(y_1 y_2 y_3)$, не встрѣчаетъ коническое сѣченіе.

§ 209. Изъ свойства функціи Q или уравненія полярюй точки $(y_1 y_2 y_3)$:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0 \quad (58)$$

что она неизмѣняется замѣщеніемъ y -овъ z -ами и обратно (§ 199, 10) непосредственно вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложение 1. Если точка $(y_1 y_2 y_3)$ находится на полярѣ точки $(z_1 z_2 z_3)$, то полярѣ точки $(z_1 z_2 z_3)$ проходитъ черезъ точку $(y_1 y_2 y_3)$.

Предложение 2. Если точка $(z_1 z_2 z_3)$ скользитъ по полярѣ точки $(y_1 y_2 y_3)$, то полярѣ точки $(z_1 z_2 z_3)$ вращается около точки $(y_1 y_2 y_3)$.

Предложение 3. Если прямая вращается около одной изъ своихъ точекъ, то ея полюсь скользитъ по полярѣ, точки вращенія.

Легко видѣть, что полярѣ (58) точки $(y_1 y_2 y_3)$ есть ковариантъ формы (48), такъ какъ связь ея съ кривою не зависитъ отъ положенія координатъ.

§ 210. *Касательная.* Полярѣ пересекаетъ коническое сѣченіе въ двухъ точкахъ (§ 204). Если одну изъ этихъ точекъ соединимъ съ полюсомъ прямою линіею, то на этой прямой должны находиться четыре гармоническія точки (§ 209) 1 и 2 и имъ сопряженныя 3 и 4. Но вторая и третья совпадаютъ, слѣдовательно совпадаетъ съ ними и четвертая (§ 95). Откуда слѣдуетъ, что прямая, соединяющая полюсь съ точкою пересѣченія полярѣ съ коническимъ сѣченіемъ, пересекаетъ кривою въ двухъ совпадающихъ точкахъ, т. е. она есть *касательная* къ кривой въ точкѣ пересѣченія полярѣ съ кривою. Если соединимъ полюсь съ другою точкою пересѣченія полярѣ съ кривою—прямою, то эта прямая будетъ другая касательная къ кривой, проведенная черезъ полюсь. Изъ этого видимъ, что изъ данной точки, къ кривой втораго порядка можно провести двѣ касательныя линіи, которыя проходятъ черезъ точки пересѣченія полярѣ данной точки съ кривою (§ 208).

Изъ этого послѣдняго свойства слѣдуетъ, что если какая-нибудь, точка скользитъ по касательной, то ея полярѣ вращается около точки касанія, которая, слѣдовательно, есть полюсь касательной (§ 209, пред. 2). Другими словами: *полярѣ, какой-нибудь, точки на кривой есть касательная къ кривой въ этой точкѣ.*

Слѣдовательно, если точка $(y_1 y_2 y_3)$ находится на кривой, т. е. удовлетворяетъ уравненіе (48):

$$f(y_1 y_2 y_3) = 0 \quad (59)$$

то уравненіе касательной къ кривой въ этой точкѣ будетъ:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0 \quad (60)$$

или если переменныя координаты $z_1 z_2 z_3$ поставимъ вмѣстѣ:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \quad (61)$$

Если теперь замѣтимъ, что (§ 199, 8):

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 2f = 0$$

то будемъ имѣть, вычитая это уравненіе изъ (61):

$$(z_1 - y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} + (z_2 - y_2) \frac{\partial f}{\partial y_2} + (z_3 - y_3) \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \quad (62)$$

таково уравненіе касательной къ кривой, въ данной на кривой точкѣ $(y_1 y_2 y_3)$, въ трилинейныхъ координатахъ. Но въ большей части случаевъ необходимо имѣть уравненіе касательной въ декартовыхъ координатахъ; чтобы получить это уравненіе надобно перейти отъ трилинейной системы къ декартовой, какъ было показано въ § 183, т. е. положить:

$$\rho z_1 = x \quad , \quad \rho z_2 = y \quad , \quad \rho z_3 = 1$$

$$\rho y_1 = x_1 \quad , \quad \rho y_2 = y_1 \quad , \quad \rho y_3 = 1$$

откуда уравненіе (62) касательной сдѣлается:

$$(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (y - y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0 \quad (63)$$

Пр. Найти уравненіе касательной въ точкѣ (2,1) къ кривой:

$$f = 3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$$

Мы имѣемъ $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, слѣдовательно:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + 4y_1 - 7 = 9 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 4x_1 + 10y_1 - 8 = 6$$

откуда уравненіе касательной будетъ:

$$9x + 6y = 28$$

§ 211. *Нормальная линія.* Нормальной линіей называютъ прямую перпендикулярную къ касательной въ точкѣ ея касанія. Изъ уравненія касательной (63) видимъ, что тангенсъ угла α , который она составляетъ съ осью абсциссъ, есть (§ 49, 54):

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial y_1}}$$

Слѣдовательно уравненіе нормальной линіи будетъ (§ 49):

$$(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} - (y - y_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad (64)$$

Пр. Найти уравнение нормальной линии в точке (2,1) к кривой:

$$f = 3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$$

Мы имеем, как выше:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 9, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 6$$

следовательно уравнение нормальной линии будет:

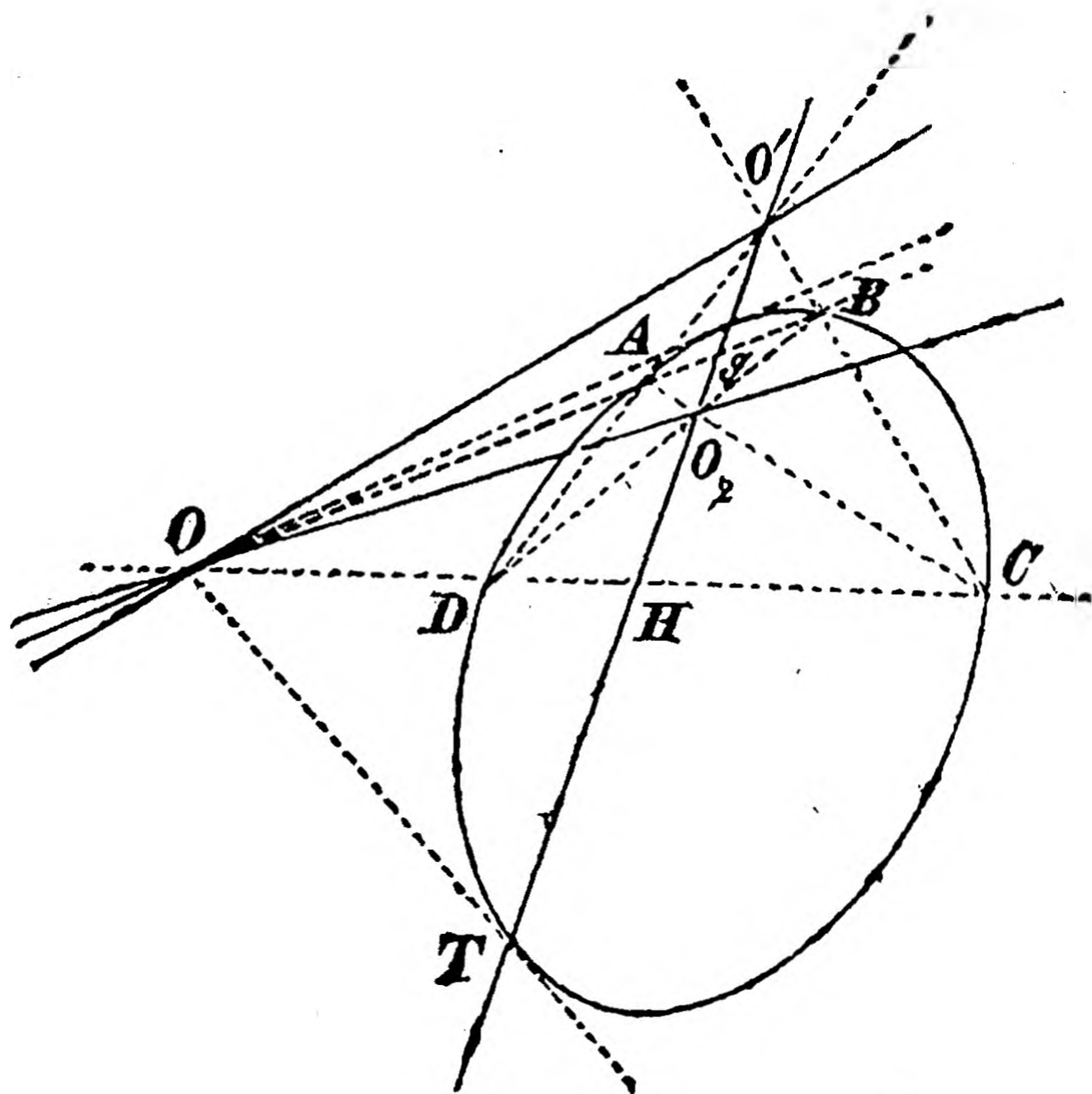
$$6x - 9y = 11$$

§ 212. Построение поляр. Свойства поляр и полюса, изложенные выше, дают способ построить поляр, по данному полюсу.

Для этого через полюс проведем двѣ, какія-нибудь, сѣкущія к данному коническому сѣченію и на каждой изъ них построим четвертую гармоническую точку к полюсу и двумъ точкамъ пересѣченія сѣкущихъ съ кривою. Прямая, проходящая черезъ, такимъ образомъ, построенныя, точки и будетъ искомая поляр. Построить эти точки можно съ помощью свойствъ полного четырехугольника слѣдующимъ образомъ:

Пусть O будетъ данный полюс (фиг. 92), $ABCD$ данное коническое сѣченіе.

Фиг. 92.



Черезъ точку O проведемъ двѣ, въ произвольномъ направленіи, сѣкущія OB и OC , которыя пересѣкаются съ кривою въ точкахъ A, B, C, D . Если эти точки соединимъ прямыми линиями AC, AD, DB, BC , то образуется полный четырехугольникъ, коего стороны OB, OC, AD и BC , а діагонали AC, BD, OO' . По свойству четырехугольника $O'O, O'A, O'O_2, O'B$ есть гармоническая связка, слѣдовательно O, A, G, B и O, D, H, C суть гармоническія точки. Если точки G и H суть гармоническія съ точками O, A, B и O, D, C , то прямая GH есть поляр точки O .

Легко видѣть изъ свойствъ этого четырехугольника, что OO_2 есть поляр точки O' , а OO' есть поляр точки O_2 . Такимъ образомъ мы построили треугольникъ $OO'O_2$ въ которомъ каждая изъ вершинъ есть полюсъ противоположащей стороны. Такой треугольникъ называется *полярнымъ треугольникомъ* относительно даннаго коническаго сѣченія.

Такъ какъ точки пересѣченія поляр съ коническимъ сѣченіемъ суть точки касанія касательныхъ проведенныхъ изъ полюса, то это свойство даетъ способъ проводить касательныя къ коническому сѣченію изъ точекъ внѣ кривой.

Построение, этимъ способомъ, какъ полярны данной точки, такъ и касательныхъ изъ данной точки къ коническому сѣченію дѣлается, какъ видно, съ помощью только прямой линіи, т. е. линейки.

§ 213. Во всемъ предъидущемъ мы предположили, что всякая прямая имѣетъ свой полюсъ, относительно даннаго конического сѣченія. Чтобы это доказать напишемъ уравненіе полярны точки $(y_1 y_2 y_3)$ въ формѣ:

$$\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 = 0 \quad (65)$$

$\eta_1 \eta_2 \eta_3$ суть координаты полярны. Но уравненіе полярны, коей полюсъ есть $(y_1 y_2 y_3)$:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \quad (66)$$

если это уравненіе тождественно съ уравненіемъ (65), то мы должны имѣть:

$$\begin{aligned} \sigma \eta_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \sigma \eta_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \sigma \eta_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_3} \end{aligned} \quad (67)$$

Изъ этихъ уравненій можно опредѣлить координаты $y_1 y_2 y_3$ полюса, данной полярны (65), если опредѣлитель:

$$\Delta \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad (68)$$

Случай, когда этотъ опредѣлитель равенъ нулю мы теперь исключаемъ; мы выше видѣли, что въ этомъ случаѣ коническое сѣченіе представляетъ пару прямыхъ линій.

Рѣшая уравненіе (67) относительно y_1, y_2, y_3 найдемъ, если положимъ $\frac{\Delta}{\sigma} = \rho$:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= A_{11} \eta_1 + A_{12} \eta_2 + A_{13} \eta_3 \\ \rho y_2 &= A_{21} \eta_1 + A_{22} \eta_2 + A_{23} \eta_3 \\ \rho y_3 &= A_{31} \eta_1 + A_{32} \eta_2 + A_{33} \eta_3 \end{aligned} \quad (69)$$

§ 214. Уравненія (67) и (69) выражаютъ зависимость между координатами полюса и поляръ. Если полюсь находится на полярѣ, то его поляръ есть касательная къ коническому сѣченію (§ 210).

Обратно, полюсь только въ томъ случаѣ находится на полярѣ, когда онъ находится на коническомъ сѣченіи. Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 = 0$$

будетъ уравненіе поляръ, коей полюсь есть точка $(y_1 y_2 y_3)$. Если эта точка находится на полярѣ, то мы должны имѣть:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0 \quad (70)$$

Помножая первое изъ уравненій (67) на y_1 , второе на y_2 , третье на y_3 и складывая, найдемъ:

$$\sigma(\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3) = a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2a_{12} y_1 y_2 + 2a_{13} y_1 y_3 + 2a_{23} y_2 y_3$$

Но такъ какъ въ силу условія (70) первая часть этого уравненія равна нулю, то равна нулю также и вторая, которая есть коническое сѣченіе $f(x) = 0$, въ которое вставлены координаты полюса.

Изъ этого слѣдуетъ, что если полюсь $(y_1 y_2 y_3)$ скользитъ по коническому сѣченію, то поляръ его $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ касается коническаго сѣченіа. Чтобы получить зависимость между координатами поляръ, когда полюсь скользитъ по кривой, надобно изъ уравненій (67), съ присовокупленіемъ къ нимъ уравненія (70), исключить $y_1 y_2 y_3$. Результатъ исключенія будетъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \eta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \eta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \eta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (71)$$

которое есть ничто иное какъ взаимная функція $f'(\xi)$ функціи $f(x)$, въ которую вставлена η вмѣсто ξ (§ 200). Слѣдовательно взаимная функція функціи $f(x)$, приравненная нулю, даетъ ту зависимость между координатами поляръ, въ силу которой поляръ касается во всѣхъ своихъ положеніяхъ коническаго сѣченіа $f(x) = 0$.

Слѣдовательно:

$$f'(\xi) = 0$$

есть уравненіе коническаго сѣченіа въ линейныхъ координатахъ,

Въ § 200, 17 мы видѣли, что:

$$f(x) = f'(\xi)$$

откуда видимъ, что если координаты точки обращаютъ въ нуль первую часть, т. е. если точка находится на коническомъ сѣченіи, то координаты касательной должны обращать въ нуль вторую часть и обратно.

Изъ уравненія § 200, 24 видимъ, что уравненіе конического сѣченія въ формѣ определителя будетъ:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (72)$$

Пр. 1. Найти уравненія эллипса или гиперболы въ линейныхъ координатахъ, если ихъ уравненія даны въ формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Определитель Δ будетъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

слѣдовательно:

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0$$

$$A_{11} = \pm \frac{1}{b^2}, \quad A_{22} = -\frac{1}{a^2}, \quad A_{33} = \pm \frac{1}{a^2 b^2}$$

откуда уравненіе эллипса будетъ:

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - 1 = 0$$

а гиперболы:

$$a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2 - 1 = 0$$

Пр. 2. Найти уравненіе параболы въ линейныхъ координатахъ, если ея уравненіе есть:

$$y^2 - 2px = 0$$

Откуда слѣдуетъ, что:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

а:

$$A_{11} = A_{33} = A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{22} = -p^2, \quad A_{13} = p$$

Слѣдовательно уравненіе параболы будетъ:

$$p\eta^2 - 2\xi = 0$$

ГЛАВА XV.

Кривыя второго порядка въ линейныхъ координатахъ.

Прямая и полюсъ.

§ 215. Въ предъидущей главѣ мы показали, какимъ образомъ данное коническое сѣченіе $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ выразить уравненіемъ въ линейныхъ координатахъ $f'(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0$, въ которомъ переменныя ξ , удовлетворяющія этому уравненію суть координаты прямой, которая во всѣхъ своихъ положеніяхъ касается коническаго сѣченія, а коэффициенты суть миноры $A_{i,k}$ определителя Δ (§ 203, 39).

Слѣдовательно каждое уравненіе второго порядка въ линейныхъ координатахъ есть коническое сѣченіе, къ изслѣдованію свойствъ котораго можно приложить всѣ тѣ способы, которые были приложены къ уравненію $f(x_1 x_2 x_3) = 0$.

§ 216. Пусть данное уравненіе въ линейныхъ координатахъ будетъ:

$$f'(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = A_{11} \xi_1^2 + A_{22} \xi_2^2 + A_{33} \xi_3^2 + 2A_{12} \xi_1 \xi_2 + 2A_{13} \xi_1 \xi_3 + 2A_{23} \xi_2 \xi_3 = 0 \quad (1)$$

Будемъ сначала разсматривать функцію f' независимо отъ функціи f , а $A_{i,k}$ независимо отъ $a_{i,k}$.

Шесть коэффициентовъ, въ этомъ уравненіи, опредѣляютъ родъ коническаго сѣченія, изъ нихъ, очевидно, одинъ можетъ быть сдѣланъ равнымъ единицѣ, слѣдовательно собственно пять коэффициентовъ опредѣляютъ родъ и свойства коническаго сѣченія.

Если координаты прямой линіи удовлетворяютъ уравненію (1), то эта прямая есть касательная къ кривой. Слѣдовательно, если будетъ дана прямая координатами, какъ касательная къ кривой (1), то мы будемъ имѣть линейное уравненіе между коэффициентами даннаго коническаго сѣченія (1). Откуда слѣдуетъ, что пять, произвольно выбранныхъ, касательныхъ опредѣляютъ коническое сѣченіе. Пусть эти пять касательныхъ будутъ даны координатами:

$$(\eta_1 \eta_2 \eta_3) \quad , \quad (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3) \quad , \quad (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) \quad , \quad (\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3) \quad , \quad (\chi_1 \chi_2 \chi_3)$$

Подставляя эти координаты въ уравненіе (1) будемъ имѣть:

$$f'(\eta_1 \eta_2 \eta_3) = 0 \quad , \quad f'(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3) = 0 \quad , \quad f'(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) = 0 \quad , \quad f'(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3) = 0 \quad , \quad f'(\chi_1 \chi_2 \chi_3) = 0$$

Присоединяя къ этимъ уравненіямъ шестое (1) будемъ имѣть шесть

линейныхъ уравненій между коэффициентами A , изъ которыхъ исключивъ эти коэффициенты, найдемъ коническое сѣченіе въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 \\ \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 & \eta_1 \eta_2 & \eta_1 \eta_3 & \eta_2 \eta_3 \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \zeta_3^2 & \zeta_1 \zeta_2 & \zeta_1 \zeta_3 & \zeta_2 \zeta_3 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_2 \gamma_3 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 & \varepsilon_1 \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \varepsilon_3 \\ \kappa_1^2 & \kappa_2^2 & \kappa_3^2 & \kappa_1 \kappa_2 & \kappa_1 \kappa_3 & \kappa_2 \kappa_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

къ которому касаются пять данныхъ прямыхъ.

Положимъ, что послѣднія три касательныя, т. е. данныя координатами $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$, $\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$, проходятъ черезъ одну точку, коей уравненіе есть:

$$U = a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0 \quad (3)$$

Слѣдовательно имѣемъ:

$$U_3 = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3 = 0, \quad U_4 = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 = 0, \quad U_5 = a\kappa_1 + b\kappa_2 + c\kappa_3 = 0$$

Означимъ черезъ U_1, U_2, \dots, U_5 , числовыя значенія уравненія (3), когда въ него подставимъ послѣдовательно координаты $\eta, \zeta, \gamma, \varepsilon, \kappa$.

Поступая съ опредѣлителемъ (2), какъ поступили съ опредѣлителемъ § 203, найдемъ:

$$abc f'(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = UU_1 U_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_2 \gamma_3 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 & \varepsilon_1 \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \varepsilon_3 \\ \kappa_1 \kappa_2 & \kappa_1 \kappa_3 & \kappa_2 \kappa_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

изъ котораго видимъ, что если изъ пяти данныхъ касательныхъ къ коническому сѣченію три проходятъ черезъ одну точку, то коническое сѣченіе обращается въ двѣ точки, изъ которыхъ одна есть:

$$U = a_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + c_3 \xi_3 = 0$$

пересѣченіе трехъ касательныхъ, а другая:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0$$

есть пересѣченіе остальныхъ двухъ. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если изъ пяти данныхъ касательныхъ, три пересѣкаются въ одной точкѣ, то коническое сѣченіе есть пара точекъ.

Если уравненіе (1) распадается на два линейные множителя:

$$f' = U.V$$

то разсуждая, какъ въ § 203, найдемъ слѣдующее условіе между коэффициентами уравненія (1):

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

§ 217. Если будутъ даны уравненія коническаго сѣченія и точки:

$$f'(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0 \quad , \quad a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0 \quad (6)$$

то координаты, удовлетворяющія обоимъ уравненіямъ будутъ координаты прямыхъ, которыя, проходя черезъ данную точку, касаются даннаго коническаго сѣченія. Но такъ какъ изъ уравненій (6) мы получимъ пару координатъ удовлетворяющихъ оба уравненія, то изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Изъ данной точки, внѣ коническаго сѣченія, можно провести къ нему только двѣ касательныя.

Чтобы найти уравненія этихъ касательныхъ, замѣтимъ, что координаты этихъ касательныхъ удовлетворяютъ уравненія:

$$f'(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0 \quad , \quad \text{и} \quad a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0$$

слѣдовательно уравненіе касательной будетъ:

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = 0$$

исключая изъ этихъ трехъ уравненій $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, найдемъ:

$$f'(bx_3 - cx_2, cx_1 - ax_3, ax_2 - bx_3) = 0 \quad (7)$$

уравненіе второй степени, которое въ силу критеріума § 203, 39, распадается на два линейные множителя относительно $x_1 x_2 x_3$, которые будучи приравнены нулю представляютъ искомыя касательныя.

§ 218. Остается рѣшить вопросъ относительно общихъ касательныхъ двумъ даннымъ коническимъ сѣченіямъ.

Пусть данныя коническія сѣченія будутъ:

$$\Phi_1(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0 \quad , \quad \Phi_2(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0$$

Если къ этимъ уравненіямъ приложимъ разсужденія и дѣйствія § 205, то найдемъ слѣдующее предложеніе: къ двумъ коническимъ сѣченіямъ можно провести четыре касательныя.

§ 219. Четыре данныя касательныя не опредѣляютъ коническое сѣченіе.

Возьмемъ два коническія сѣченія:

$$\Phi_1(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0 \quad , \quad \Phi_2(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0 \quad (8)$$

которыя какъ мы видѣли, имѣютъ четыре общія касательныя. Если составимъ уравненіе:

$$\Phi_1 - \lambda \Phi_2 = 0 \quad (9)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэффициентъ, то это уравненіе представляетъ рядъ коническихъ сѣченій, которыя всѣ касаются къ четыремъ общимъ касательнымъ къ кривымъ (8). Къ каждой прямой, произвольно взятой на плоскости, касается одно изъ ряда (9) коническихъ сѣченій. Въ самомъ дѣлѣ, если дано уравненіе прямой, то она будетъ касательная, если ея координаты удовлетворяютъ уравненію (9). Это условіе опредѣляетъ λ .

Коническія сѣченія, представляемыя уравненіемъ (9), мы будемъ называть *рядомъ*.

§ 220. Теперь остается рѣшить задачу соотвѣтствующую задачѣ § 207 и вывести слѣдствія изъ нея вытекающія.

Задача. Опредѣлить касательныя къ данному коническому сѣченію, проходящія черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$, $(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)$?

Рѣшеніе. Координаты, какой-нибудь, прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$, $(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)$, выражаются уравненіями:

$$\sigma \xi_1 = \eta_1 + \lambda \zeta_1 \quad , \quad \sigma \xi_2 = \eta_2 + \lambda \zeta_2 \quad , \quad \sigma \xi_3 = \eta_3 + \lambda \zeta_3 \quad (10)$$

Если $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ суть координаты касательныхъ къ коническому сѣченію, то будемъ имѣть:

$$\{ A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 + \lambda (A_1 \zeta_1 + A_2 \zeta_2 + A_3 \zeta_3) \}^2 = 0 \quad (11)$$

если уравненіе конического сѣченія въ символической формѣ будетъ:

$$(A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3)^2 = 0 \quad (12)$$

Уравненіе (11) будетъ второй степени относительно λ :

$$L + 2M\lambda + N\lambda^2 = 0 \quad (13)$$

гдѣ:

$$L = (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3)^2, \quad N = (A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3)^2 \quad (14)$$

$$M = (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3)(A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3) \quad (15)$$

или, какъ выше было условлено (§ 201, 10):

$$M = \frac{1}{2} \left(\eta_1 \frac{\partial f'}{\partial \zeta_1} + \eta_2 \frac{\partial f'}{\partial \zeta_2} + \eta_3 \frac{\partial f'}{\partial \zeta_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \right) \quad (16)$$

Если рѣшимъ уравненіе (13), то найдемъ два значенія для λ :

$$\lambda_1 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - LN}}{N}, \quad \lambda_2 = \frac{-M - \sqrt{M^2 - LN}}{N} \quad (17)$$

Слѣдовательно, черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ проходятъ двѣ касательныя къ коническому сѣченію, коихъ координаты будутъ:

$$\begin{aligned} \sigma\xi_1 &= N\eta_1 - (M - \sqrt{M^2 - LN})\zeta_1, & \sigma\xi'_1 &= N\eta_1 - (M + \sqrt{M^2 - LN})\zeta_1 \\ \sigma\xi_2 &= N\eta_2 - (M - \sqrt{M^2 - LN})\zeta_2, & \sigma\xi'_2 &= N\eta_2 - (M + \sqrt{M^2 - LN})\zeta_2 \\ \sigma\xi_3 &= N\eta_3 - (M - \sqrt{M^2 - LN})\zeta_3, & \sigma\xi'_3 &= N\eta_3 - (M + \sqrt{M^2 - LN})\zeta_3 \end{aligned} \quad (18)$$

гдѣ общій знаменатель N вошелъ въ составъ коэффициента пропорциональности σ .

Такимъ образомъ будемъ имѣть связку изъ четырехъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку.

Ангармоническое отношеніе этой связки будетъ $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ или $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; если ихъ означимъ черезъ α_1 и α_2 , то будемъ имѣть:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

откуда, найдемъ:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2M}{N}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{L}{N}$$

слѣдовательно, какъ въ § 207, будемъ имѣть уравненіе опредѣляющее α :

$$(1 + \alpha)^2 LN - 4M^2\alpha = 0 \quad (19)$$

корни этого уравненія дадутъ ангармоническое отношеніе связки.

221. Если въ уравненіи (19) мы фиксируемъ одну изъ данныхъ прямыхъ, на примѣръ $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$, дадимъ опредѣленное числовое значеніе ангармоническому отношенію α и будемъ координаты другой прямой $(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)$ такъ измѣнять, чтобы онѣ удовлетворяли уравненіе (19), то получимъ геометрическое мѣсто прямыхъ, коихъ ангармоническое отношеніе съ прямою $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ и двумя касательными къ коническому сѣченію, проходящими черезъ точку пересѣченія прямыхъ $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$, $(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)$, имѣетъ опредѣленное числовое значеніе. Такъ какъ уравненіе (19), относительно координатъ $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ второй степени, то геометрическое мѣсто есть коническое сѣченіе въ линейныхъ координатахъ.

Давая α различныя значенія получимъ систему коническихъ сѣченій относительно прямой $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$. Измѣняя положеніе прямой на плоскости получимъ подобныя системы для каждой прямой на плоскости.

Особеннаго вниманія заслуживаютъ, относительно каждой прямой на плоскости, тѣ изъ системы коническихъ сѣченій, для которыхъ ангармоническое отношеніе $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

1. Положимъ $\alpha = 1$, то уравненіе (19) сдѣлается:

$$LN - M^2 = 0 \quad (20)$$

Разсматривая выраженіе (18) видимъ, что при условіи (20) касательныя къ коническому сѣченію совпадаютъ, т. е. точка пересѣченія касательныхъ находится на коническомъ сѣченіи. Если приложимъ критеріумъ § 203 къ уравненію (20), то увидимъ, что оно разлагается на два линейные множителя, которые представляютъ, очевидно, точки пересѣченія прямой $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ съ коническимъ сѣченіемъ.

2. Второй случай это когда $\alpha = -1$.

Полюсь. Если $\alpha = -1$, то уравненіе (19) сдѣлается:

$$M^2 = 0 \quad \text{или} \quad M = 0 \quad (21)$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто прямыхъ $(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)$ есть точка, такъ какъ уравненіе (21) есть линейная функція относительно $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$. Но при $\alpha = -1$ двѣ прямая $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$, $(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)$ и двѣ касательныя, проведенныя черезъ пересѣченіе этихъ прямыхъ къ коническому сѣченію, составляютъ

гармоническую связку; слѣдовательно точка (21) есть геометрическое мѣсто четвертой гармонической прямой къ прямой $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ и къ двумъ касательнымъ проведеннымъ изъ точекъ, находящихся на прямой $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$.

Эта точка (21) называется *полюсомъ* прямой $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$, а прямая—его *полярой*.

Изъ этого видимъ, что полярна $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$, двѣ касательныя къ коническому сѣченію. проведенная черезъ, какую-нибудь, точку полярна и прямая, проходящая черезъ эту точку и полюсъ, составляютъ гармоническую связку.

Двѣ прямыя, коихъ координаты удовлетворяютъ уравненію $M=0$, называются *гармоническими полярнами*.

§ 222. Изъ того свойства, что функція M или уравненіе полюса:

$$M = \eta_1 \frac{\partial f'}{\partial \zeta_1} + \eta_2 \frac{\partial f'}{\partial \zeta_2} + \eta_3 \frac{\partial f'}{\partial \zeta_3} = 0 \quad (22)$$

неизмѣняется замѣщеніемъ η черезъ ζ , и обратно, непосредственно вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Если прямая $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ проходитъ черезъ полюсъ прямой $(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)$, то эта послѣдняя проходитъ черезъ полюсъ первой.

Предложеніе 2. Если прямая $(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)$ вращается около полюса прямой $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$, то ея полюсъ скользитъ по прямой $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$.

Предложеніе 3. Если полюсъ скользитъ по прямой, то его полярна вращается около полюса прямой, по которой скользитъ точка.

§ 223. *Точка на коническомъ сѣченіи.* Мы видѣли, что если полюсъ находится на коническомъ сѣченіи, то полярна его есть касательная (§ 210). Если коническое сѣченіе выражено въ линейныхъ координатахъ, то полюсъ полярна, данной координатами $\eta_1 \eta_2 \eta_3$, есть:

$$\zeta_1 \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} = 0$$

Если полярна есть касательная, то полюсъ лежитъ на коническомъ сѣченіи, слѣдовательно если $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ суть координаты касательной, то уравненіе точки касанія есть:

$$\zeta_1 \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} = 0$$

§ 224. Въ § 200 мы видѣли, что если будетъ дана троичная форма второго порядка $f(x)$, то ее можно преобразовать въ другую—взаимную

$f'(\xi)$, или обратно, данную форму $\Phi(\xi)$ можно преобразовать въ взаимную $\Phi'(x)$. Въ этомъ преобразованіи связь между x и ξ есть слѣдующая:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} = \xi, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \xi} = x \quad (23)$$

при такой связи всегда имѣемъ:

$$f(x) = f'(\xi) \quad (24)$$

Мы видѣли также еще, что при такой связи:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = \zeta_1 \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \quad (25)$$

гдѣ:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} = \zeta, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \zeta} = z$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \eta, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta} = y \quad (26)$$

Если координаты x удовлетворяютъ $f(x) = 0$, то вслѣдствіи (24) координаты ξ будутъ удовлетворять уравненію $f'(\xi) = 0$. Оба эти уравненія представляютъ одно и тоже коническое сѣченіе, первое уравненіе даетъ связь между координатами точекъ на кривой, а второе даетъ связь между координатами касательной къ кривой.

Если $(y_1 y_2 y_3)$ есть точка, то поляръ этой точки или полюса есть:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \quad (27)$$

Если это выраженіе равно нулю, то равно нулю и выраженіе:

$$\zeta_1 \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} = 0 \quad (28)$$

Но это есть уравненіе точки, коей координаты суть:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} = y_1, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} = y_2, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} = y_3$$

Слѣдовательно уравненіе (28) представляетъ полюсъ, котораго поляръ дана уравненіемъ (27) и координатами:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1} = \eta_1, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2} = \eta_2, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_3} = \eta_3$$

Изъ этого заключаемъ, что уравненія:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \quad , \quad \zeta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_3} = 0$$

представляютъ поляръ и полюсъ въ коническихъ сѣченіяхъ данныхъ въ координатахъ точекъ или въ линейныхъ координатахъ.

§ 225. Изъ уравненія:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = \zeta_1 \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \quad (29)$$

вытекаютъ слѣдующія предложенія:

1. Поляры двухъ гармоническихъ полюсовъ суть гармоническія поляры (§ 221).

2. Полюсы двухъ гармоническихъ поляръ суть гармоническіе полюсы (§ 208):

§ 226. Изъ того свойства полюса и поляры, что если полюсъ скользитъ по прямой, то его поляръ вращается около полюса прямой и, обратно, если прямая вращается около одной изъ ея точекъ, то ея полюсъ скользитъ по полярѣ точки вращенія, слѣдуетъ, что если въ данную прямую, по которой скользитъ полюсъ:

$$\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0$$

вставимъ координаты полюса:

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \xi_1} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \xi_2} \quad , \quad x_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \xi_3}$$

то получимъ уравненіе полюса, и, обратно, если въ уравненіе точки, около которой вращается прямая, подставимъ координаты поляры:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad , \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad , \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

то получимъ уравненіе поляры.

Пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \mu A_2 = 0 \quad (30)$$

будутъ уравненія четырехъ прямыхъ, ихъ ангармоническое отношеніе, какъ мы знаемъ, равно $\frac{\lambda}{\mu}$. Если въ уравненія этихъ прямыхъ вставимъ

координаты ихъ полюсовъ относительно конического сѣченія, то эти уравненія сдѣлаются уравненіями полюсовъ данныхъ четырехъ прямыхъ. Если черезъ A'_1 , A'_2 означимъ то, во что обращаются A_1 и A_2 вышесказаннымъ подстановленіемъ, то уравненія полюсовъ будутъ:

$$A'_1 = 0 \quad , \quad A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \lambda A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \mu A'_2 = 0 \quad (31)$$

и, обратно, если (30) суть уравненія четырехъ точекъ на одной прямой линіи, то подставляя въ нихъ координаты поляръ, получимъ уравненія (31) поляръ. Изъ этого вытекаютъ слѣдующія предложенія:

1. Ангармоническое отношеніе четырехъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку, равно ангармоническому отношенію ихъ полюсовъ.

2. Ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ, на одной прямой линіи, равно ангармоническому отношенію ихъ поляръ.

3. Полюсы трехъ паръ прямыхъ, составляющихъ инволюціонную связку, составляютъ инволюціонный рядъ.

4. Связка поляръ инволюціоннаго ряда точекъ есть инволюціонная.

§ 227. *Методъ взаимныхъ поляръ.* Пусть будетъ дано коническое сѣченіе, которое назовемъ *основнымъ*, пусть его уравненія въ взаимныхъ формахъ будутъ:

$$f(x) = 0 \quad , \quad f'(\xi) = 0 \quad (32)$$

Если координаты, какой-нибудь, точки будутъ $y_1 y_2 y_3$, то координаты поляры этой точки относительно основнаго конического сѣченія будутъ:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1} \quad , \quad \eta_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \quad , \quad \eta_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_3} \quad (33)$$

и обратно:

$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} \quad , \quad y_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} \quad , \quad y_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \quad (34)$$

Пусть теперь будетъ дано, какое-нибудь коническое сѣченіе:

$$F(x_1 x_2 x_3) = 0 \quad (35)$$

Если заставимъ полюсъ (34) описывать это коническое сѣченіе, то его координаты должны удовлетворять уравненію (35), т. е.:

$$F(y_1 y_2 y_3) = F\left(\frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_1} \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_2} \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_3}\right) = \Phi(\eta_1 \eta_2 \eta_3) = 0 \quad (36)$$

откуда видимъ, что координаты поляръ должны удовлетворять предъидущему уравненію, которое, очевидно, второй степени, слѣдовательно, въ то время, какъ полюсъ описываетъ коническое сѣченіе (35), его поляръ касается коническаго сѣченія (36). Изъ этого видимъ, что точки на коническомъ сѣченіи (35) суть полюсы касательныхъ къ коническому сѣченію (36).

Легко показать, что, обратно, каждая точка на коническомъ сѣченіи (36) есть полюсъ одной изъ касательныхъ къ коническому сѣченію (35). Въ самомъ дѣлѣ, замѣтимъ, что точка пересѣченія двухъ поляръ есть полюсъ прямой, проходящей черезъ полюсъ данныхъ поляръ. Но пересѣченіе двухъ бесконечно близкихъ касательныхъ есть точка на коническомъ сѣченіи (36), слѣдовательно она есть полюсъ прямой, проходящей черезъ двѣ бесконечно близкія точки на коническомъ сѣченіи (35), а такая прямая есть касательная къ коническому сѣченію (35). Изъ этого видимъ, что коническія сѣченія:

$$F(y_1 y_2 y_3) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(\eta_1 \eta_2 \eta_3) = 0$$

находятся въ такой взаимной зависимости между собою, что точки на одномъ изъ нихъ суть полюсы касательныхъ къ другому. Поэтому они называются *взаимными коническими сѣченіями*.

Изложенныя свойства полюса и поляръ относительно коническаго сѣченія служатъ основаніемъ метода изслѣдованій извѣстнаго въ геометріи подъ именемъ метода *взаимныхъ поляръ*, который мы изложимъ подробнѣе ниже.

§ 228. Если:

$$\Phi_1(x) = 0 \quad , \quad \Phi_2(x) = 0 \quad (37)$$

суть два коническія сѣченія, то:

$$\Phi_1 - \lambda \Phi_2 = 0 \quad (38)$$

есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ четыре точки пересѣченія коническихъ сѣченій (37). Поляръ, какой-нибудь точки $(y_1 y_2 y_3)$ относительно связки коническихъ сѣченій будетъ:

$$x_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_3} - \lambda \left(x_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_3} \right) = 0$$

Слѣдовательно она проходитъ черезъ пересѣченіе поляръ коническихъ сѣченій (37) относительно точки $(y_1 y_2 y_3)$.

§ 229. Если:

$$F_1(\xi) = 0 \quad , \quad F_2(\xi) = 0 \quad (39)$$

суть уравненія коническихъ сѣченій въ линейныхъ координатахъ, то:

$$F_1(\xi) - \lambda F_2(\xi) = 0 \quad (40)$$

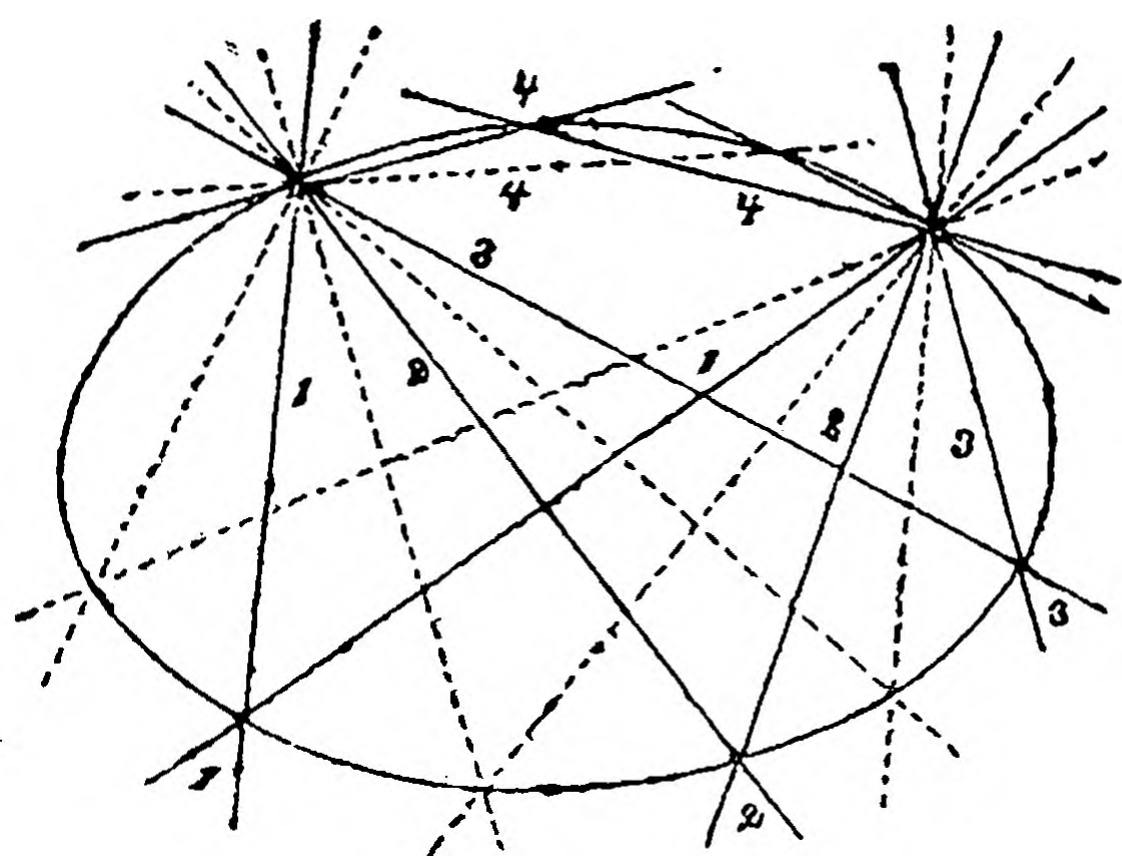
есть коническое сѣченіе, касающееся четырехъ общихъ касательныхъ къ коническимъ сѣченіямъ (39). Полюсъ, какой-нибудь, прямой $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ относительно ряда коническихъ сѣченій (40) будетъ:

$$\zeta_1 \frac{\partial F_1}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial F_1}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial F_1}{\partial \eta_3} - \lambda \left(\zeta_1 \frac{\partial F_2}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial F_2}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial F_2}{\partial \eta_3} \right) = 0$$

Слѣдовательно онъ скользитъ по прямой, проходящей черезъ полюсы прямой $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ относительно коническихъ сѣченій (39).

§ 230. Остается показать одно изъ самыхъ замѣчательныхъ свойствъ коническаго сѣченія въ обѣихъ системахъ координатъ.

Фиг. 93.



Двѣ проэктивныя связки, не находящіяся въ положеніи перспективы, пересѣченіями соотвѣтственныхъ лучей, образуютъ геометрическое мѣсто, которое есть коническое сѣченіе.

Пусть:

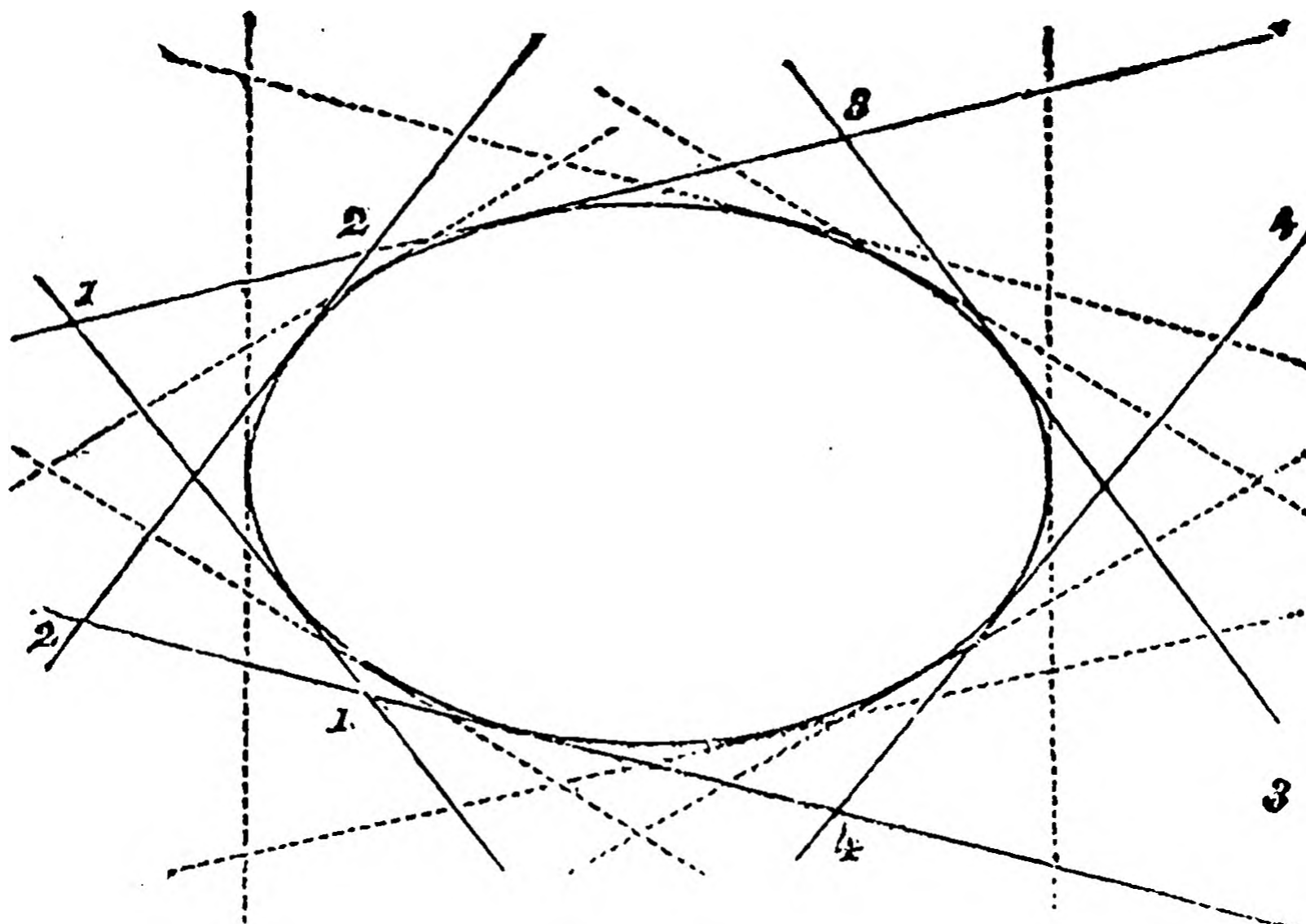
$$A_1 - \lambda A_2 = 0, \quad A'_1 - \lambda A'_2 = 0$$

будутъ двѣ проэктивныя связки. Координаты точекъ пересѣченія двухъ соотвѣтствующихъ лучей, т. е. тѣ, которыя соотвѣтствуютъ одному и тому-же значенію λ , должны удовлетворять обѣимъ уравненіямъ, слѣдовательно геометрическое мѣсто получится, исключая λ изъ предыдущихъ уравненій, что даетъ:

$$A_1 A'_2 - A_2 A'_1 = 0 \quad (41)$$

такъ какъ это уравненіе относительно x, y второй степени, то геометрическое мѣсто есть коническое сѣченіе.

Фиг. 93'.



Два проэктивные ряда не находящіяся въ положеніи перспективы, образуютъ прямыми, соединяющими соотвѣтственные точки, обертку, которая есть коническое сѣченіе.

Пусть:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0, \quad A'_1 - \lambda A'_2 = 0$$

будутъ два проэктивные ряда точекъ. Координаты прямыхъ, проходящихъ черезъ двѣ соотвѣтствующія точки, т. е. тѣ, которыя соотвѣтствуютъ одному и тому-же значенію λ , должны удовлетворять обѣимъ уравненіямъ, слѣдовательно геометрическое мѣсто прямыхъ получится, исключая λ изъ предыдущихъ уравненій, что даетъ:

$$A_1 A'_2 - A_2 A'_1 = 0 \quad (41')$$

такъ какъ это уравненіе второй степени относительно ξ, η , то геометрическое мѣсто есть коническое сѣченіе.

Изъ уравненія (41) легко видѣть, что кривая проходитъ черезъ вершины связокъ, такъ какъ оно удовлетворяется одновременно, или:

$$\begin{aligned} & A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0 \\ \text{или:} & A'_1 = 0 \quad \text{и} \quad A'_2 = 0 \end{aligned}$$

Примѣръ. Если двѣ проэктивныя связки, имѣющія вершины въ точкахъ O и O' (фиг. 94), тождественны, то кривая есть, очевидно, кругъ. Это вытекаетъ изъ равенства угловъ:

$$\begin{aligned} \angle 102 &= \angle 10'2, \\ \angle 203 &= \angle 20'3, \\ \angle 304 &= \angle 30'4 \end{aligned}$$

§ 231. Въ §§ 202 и 216 мы уже видѣли:

Что коническое сѣченіе вполне опредѣляется пятью данными точками.

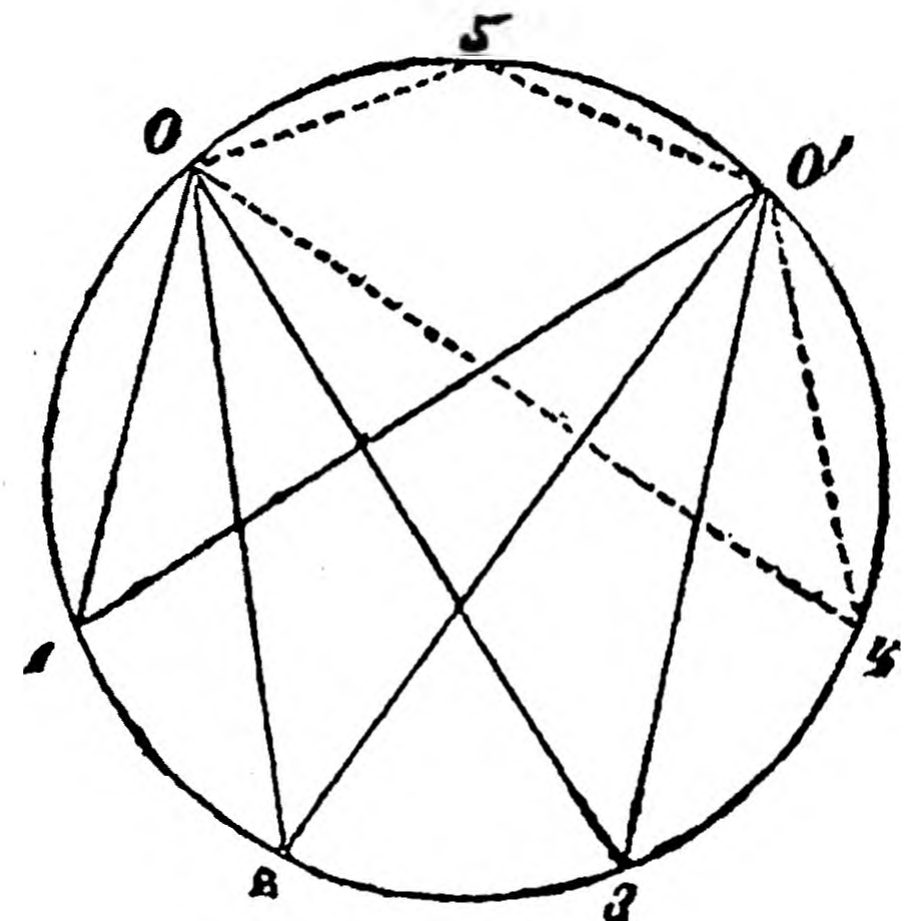
Изъ этого слѣдуетъ, что если дано коническое сѣченіе, то можно на немъ взять произвольно пять точекъ (пять касательныхъ къ нему), выбрать двѣ изъ нихъ за вершины связокъ (за прямая рядовъ точекъ) и остальными тремя установить проэктивность связокъ (рядовъ). Геометрическое мѣсто пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей (соотвѣтственныхъ прямыхъ) есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ пять выбранныхъ точекъ (касающееся пяти выбранныхъ касательныхъ), а такъ какъ черезъ пять точекъ проходитъ только одно коническое сѣченіе (къ пяти прямымъ касается только одно коническое сѣченіе), то геометрическое мѣсто и есть данное коническое сѣченіе. Изъ этого слѣдуетъ.

Что каждое коническое сѣченіе есть геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей двухъ проэктивныхъ связокъ.

Изъ уравненія (41') легко видѣть, что прямая, на которыхъ находятся проэктивные ряды, касаются конического сѣченія (фиг. 93'), такъ какъ уравненіе (41') удовлетворяется одновременно или:

$$\begin{aligned} & A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0 \\ \text{или:} & A'_1 = 0 \quad , \quad A'_2 = 0 \end{aligned}$$

Фиг. 94.



Что коническое сѣченіе вполне опредѣляется пятью даннымъ касательными.

Что каждое коническое сѣченіе есть геометрическое мѣсто (обертка) соотвѣтственныхъ прямыхъ двухъ проэктивныхъ рядовъ.

Такъ какъ на коническомъ сѣченіи можно выбрать совершенно произвольно пять точекъ (пять касательныхъ), чтобы съ помощью ихъ описать, какъ показано выше, коническое сѣченіе, то изъ этого слѣдуетъ, что вершины связокъ (прямыхъ, на которыхъ находятся ряды) ничѣмъ не отличаются отъ другихъ точекъ (прямыхъ) конического сѣченія, откуда вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Прямая, соединяющая двѣ данныя точки на коническомъ

Предложеніе 1. На двухъ данныхъ касательныхъ къ коническому сѣченію,

сѣченіи съ другими его точками, образуютъ двѣ проэктивныя связки.

Предложеніе 2. Если точка движется къ коническому сѣченію, то прямая, соединяющія эту точку съ другими точками коническаго сѣченія, образуютъ связку, которая во время перемѣщенія точки остается проэктивною.

Предложеніе 3. Если четыре данныя точки на коническомъ сѣченіи, соединимъ съ какою-нибудь, пятою точкою, то получимъ связку, коей ангармоническое отношеніе будетъ величина постоянная.

другія его касательныя образуютъ два ряда проэктивныхъ точекъ.

Предложеніе 2. Если касательная къ коническому сѣченію движется, оставаясь касательной, то ряды точекъ пересѣченія ея съ другими касательными останутся всегда проэктивными сами себѣ.

Предложеніе 3. Если четыре касательныя къ коническому сѣченію, пересѣчемъ, какою-нибудь пятою, то ангармоническое отношеніе, полученныхъ точекъ, будетъ всегда величина постоянная.

ГЛАВА XVI.

Прямая на безконечности.

Роды коническихъ сѣченій. Эллипсъ, гипербола и парабола.

§ 232. Мы видѣли выше (§ 185), что всѣ безконечно удаленныя точки на плоскости лежатъ на прямой, коей уравненіе есть:

$$C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = 0$$

поэтому эту прямую называютъ *безконечно удаленною*.

Изслѣдуемъ ея связь съ коническимъ сѣченіемъ. Во первыхъ положимъ, что $\Delta \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$.

Мы видѣли, что какая-нибудь, прямая можетъ пересѣчь кривую втораго порядка только въ двухъ точкахъ и эти точки бывають обѣ дѣйствительныя, совпадающія и обѣ мнимыя. Перенесемъ это на безконечно удаленную прямую. Эта прямая можетъ пересѣчь коническое сѣченіе въ двухъ дѣйствительныхъ, въ двухъ мнимыхъ и въ двухъ совпадающихъ точкахъ; другихъ случаевъ не представляется. Эти три случая и будутъ характеризовать кривыя втораго порядка. Поэтому мы будемъ называть:

1. *Эллипсомъ* такую кривую, которая пересѣкается безконечно-удаленною прямою въ двухъ мнимыхъ точкахъ.
2. *Гиперболой* такую кривую, которая пересѣкается безконечно-удаленною прямою въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ.

3. *Параболой* такую кривую, которой бесконечно-удаленная прямая касается.

Слѣдовательно эллипсъ есть кривая, которой всѣ точки находятся въ конечномъ разстояніи отъ начала—*замкнутая кривая*, гипербола имѣетъ двѣ точки на бесконечности и парабола имѣетъ только одну точку на бесконечности.

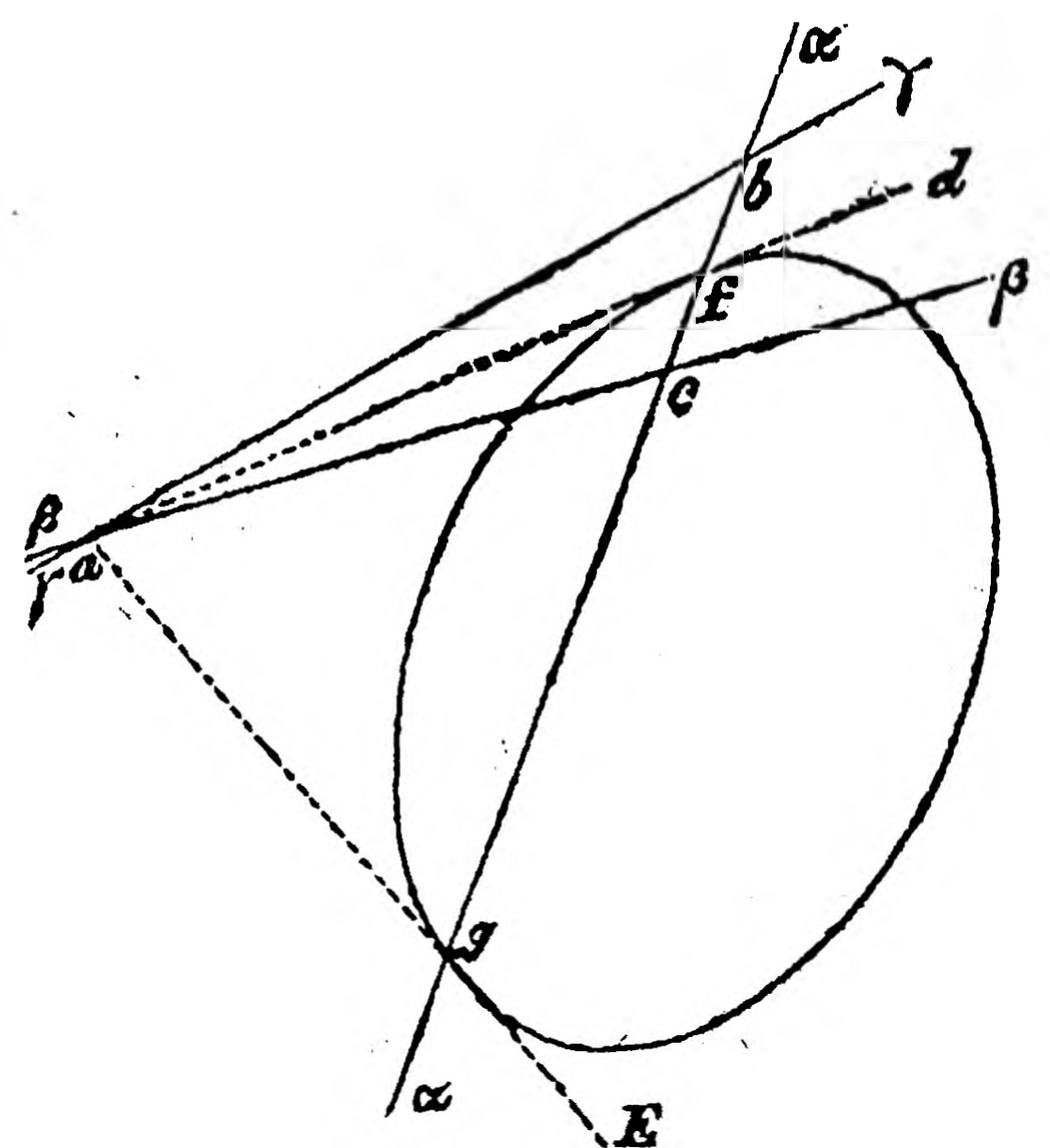
§ 233. Основаніемъ другой классификаціи служитъ положеніе полюса бесконечно-удаленной прямой.

Проведемъ черезъ этотъ полюсъ, какую-нибудь, прямую, эта прямая будетъ раздѣлена гармонически: полюсомъ, кривою и бесконечно-удаленною прямою—полярной (§ 208); такъ какъ одна изъ четырехъ гармоническихъ точекъ находится на бесконечности, то ей сопряженная, т. е. полюсъ, дѣлитъ разстояніе между двумя другими пополамъ; слѣдовательно полюсъ бесконечно-удаленной прямой дѣлитъ пополамъ всѣ хорды кривой, черезъ него проходящія. По этой причинѣ эта точка называется *центромъ* кривой второго порядка. Хорды, проходящія черезъ центръ, называются *діаметрами* кривой. Если бесконечно-удаленная прямая касается кривой, то ея полюсъ лежитъ на ней, слѣдовательно на бесконечности. Поэтому различаютъ два рода кривыхъ.

1. Центральныя кривыя—эллипсъ и гипербола.
2. Неимѣющія центра кривыя—парабола.

§ 234. Займемся здѣсь только центральными кривыми и для этого рассмотримъ, какой-нибудь, *полярный треугольникъ* (§ 212), т. е. такой треугольникъ, коего вершины суть полюсы противуположныхъ сторонъ относительно кривой второго порядка. Такихъ треугольниковъ есть *трижды* бесконечное число, т. е. онъ заключаетъ *три произвольные параметра*.

Фиг. 95.



Припомнимъ главныя свойства полярнаго треугольника (§ 212).

1. *Вся прямая, проходящая черезъ вершину полярнаго треугольника дѣлится кривою и противуположной стороною гармонически.*

Предложеніе взаимное предъидущему будетъ:

2. *Если изъ, какой-нибудь, точки, взятой на сторонѣ полярнаго треугольника, проведены двѣ касательныя къ кривою, то онѣ съ этой стороною и съ прямой, соединяющей взятую точку съ противуположной вершиною, составляютъ гармоническую связку.*

§ 235. Возьмемъ теперь за сторону $\gamma\gamma$ (фиг. 95) полярнаго треугольника бесконечно-удаленную прямую, тогда двѣ другія стороны полярнаго треугольника будутъ проходить черезъ центръ коническаго сѣченія: это будутъ сопряженные діаметры этой кривой. Подъ сопряженными діаметрами мы понимаемъ такія двѣ прямыя, въ которыхъ бесконечно-удаленная точка одной изъ нихъ, есть полюсъ другой. Два сопряженные діаметра суть гармоническія поляры (§ 221).

Такимъ образомъ гармоническое дѣленіе хордъ, проходящихъ черезъ бесконечно-удаленныя вершины полярнаго треугольника, замѣщено дѣленіемъ пополамъ, т. е. хорды параллельныя одному изъ сопряженныхъ діаметровъ дѣлятся другимъ діаметромъ пополамъ; касательныя въ концахъ одного діаметра параллельны другому.

Двѣ гармоническія поляры $\beta\beta$ и $\gamma\gamma$ съ касательными af и ag , проведенными изъ точки ихъ пересѣченія a къ кривой, образуютъ гармоническую связку, такъ какъ точки касанія f и g съ полюсами b и c поляръ суть четыре гармоническія точки.

Если вершина связки есть центръ кривой, то мы будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

Каждая пара сопряженныхъ діаметровъ составляетъ гармоническую связку съ двумя асимптотами кривой, т. е. съ двумя касательными проведенными въ точкахъ пересѣченія бесконечно-удаленной прямой съ кривою. Всѣ коническія сѣченія, имѣютъ двѣ асимптоты, т. е. прямыя соединяющія центръ кривой съ бесконечно-удаленными точками пересѣченія кривой съ бесконечно-удаленною прямою.

Если эти точки дѣйствительныя, то и асимптоты дѣйствительныя. Слѣдовательно въ гиперболѣ асимптоты дѣйствительны, а въ эллипсѣ мнимыя. Въ параболѣ асимптоты совпадаютъ и лежатъ на бесконечности. Хотя въ эллипсѣ асимптоты и мнимыя, но теоремы относящіяся къ нимъ остаются въ силѣ, такъ какъ аналитическія комбинаціи остаются тѣ же. Если одинъ изъ пары сопряженныхъ діаметровъ совпадаетъ съ асимптотой, то по свойству гармоническаго дѣленія и другой діаметръ пары совпадетъ съ нею, поэтому говорятъ: *что асимптота есть сама себя сопряженный діаметръ.*

Напротивъ, если одинъ изъ пары сопряженныхъ діаметровъ дѣлитъ пополамъ уголъ между асимптотами, то другой діаметръ пары, по свойству гармоническаго дѣленія, раздѣлитъ пополамъ дополнительный уголъ. Слѣдовательно кривыя втораго порядка имѣютъ два сопряженные діаметра, пересѣкающіеся подъ прямымъ угломъ; эти діаметры называются осями кривой.

§ 236. Отъ этихъ геометрическихъ изслѣдованій, изъ которыхъ видимъ, какую важную роль играетъ бесконечно-удаленная прямая, перейдемъ къ аналитическимъ. Для этого возьмемъ прямоугольныя декартовы координаты; въ этой системѣ координатъ бесконечно-удаленная прямая представляется съ весьма замѣчательнымъ характеромъ. Чтобы перейти отъ трилинейной системы координатъ къ декартовой надобно положить:

$$\begin{aligned} \rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = 1 \\ \sigma \xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma \xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma \xi_3 = 1 \end{aligned}$$

Уравненія между полюсомъ и полярной дѣлаются:

$$\begin{aligned} \rho \xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \quad , \quad \sigma x = A_{11}\xi + A_{12}\eta + A_{13} \\ \rho \eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \quad , \quad \sigma y = A_{21}\xi + A_{22}\eta + A_{23} \\ \rho \cdot 1 &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \quad , \quad \sigma \cdot 1 = A_{31}\xi + A_{32}\eta + A_{33} \end{aligned} \quad (1)$$

гдѣ $a_{i,k} = a_{k,i}$, при этомъ опредѣлитель Δ не равенъ нулю. Если прямая:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

или:

$$\xi x + \eta y = 1$$

удаляется на бесконечное разстояніе, то отрѣзки a и b равны бесконечности, слѣдовательно:

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0$$

Такъ какъ центръ кривой есть полюсъ бесконечно-удаленной прямой, то, полагая въ уравненіяхъ (1) $\xi = 0$, $\eta = 0$, найдемъ координаты центра:

$$x = \frac{A_{13}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{32} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad , \quad y = \frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad (2)$$

Если бы A_{13} , A_{23} , A_{33} были всѣ равны нулю, то опредѣлитель Δ былъ бы также равенъ нулю, случай, который мы исключаемъ. Слѣдовательно центръ всегда опредѣленъ, исключая когда:

$$A_{33} = 0 \quad (3)$$

въ этомъ случаѣ центръ кривой находится на *бесконечности*—это условіе соотвѣтствуетъ параболѣ.

Розыщемъ теперь зависимость между безконечно-удаленною прямою и кривою, изъ этой зависимости вытечетъ не только аналитическій характеръ параболы (3), но и эллипса и гиперболы.

Проведемъ черезъ начало координатъ прямую, составляющую уголъ α съ осью x . Если эта прямая пересѣкаетъ кривую на разстояніи r отъ начала координатъ, то координаты точекъ встрѣчи будутъ:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе конического сѣченія:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (4)$$

найдемъ:

$$r^2(a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha) + 2r(a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha) + a_{33} = 0 \quad (5)$$

Изъ этого квадратнаго уравненія найдемъ двѣ величины для r , которыя могутъ быть дѣйствительныя, равныя и мнимыя.

Въ первомъ случаѣ, прямая, проведенная подъ угломъ α къ оси абсциссъ, встрѣчаетъ коническое сѣченіе въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ, во второмъ она будетъ касаться, въ третьемъ случаѣ она его не встрѣчаетъ, тѣмъ не менѣе мы будемъ говорить, что прямая встрѣчаетъ коническое сѣченіе *всегда въ двухъ точкахъ*. Напротивъ, если разстояніе r будетъ дано, то изъ уравненія (5) опредѣлится два значенія для угла α , которыя могутъ быть и дѣйствительными, равными и мнимыми. Въ обоихъ случаяхъ кривая имѣетъ двѣ безконечно-удаленныя точки, мы найдемъ прямыя, проходящія черезъ эти точки, т. е. асимптоты кривой, полагая въ уравненіе (5) $r = \infty$, что даетъ:

$$a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha = 0 \quad (6)$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}}{a_{22}} \quad (7)$$

Изъ этого выраженія видимъ, что двѣ асимптоты будутъ дѣйствительныя, мнимыя или совпадающія, смотря потому будетъ-ли A_{33} величина отрицательная, положительная или нуль.

Слѣдовательно аналитическій признакъ для отличія коническихъ сѣченій есть слѣдующій:

$$\begin{aligned} A_{33} > 0 & \text{ эллипсъ.} \\ A_{33} = 0 & \text{ парабола.} \\ A_{33} < 0 & \text{ гипербола.} \end{aligned} \quad (8)$$

Условіе для параболы найдемъ изъ уравненія въ линейныхъ координатахъ:

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + 2A_{12}\xi\eta + 2A_{13}\xi + 2A_{23}\eta + A_{33} = 0 \quad (9)$$

Если бесконечно-удаленная прямая касается конического сѣченія, то:

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0$$

должны удовлетворять предыдущему уравненію, а это условіе требуетъ, чтобы:

$$A_{33} = 0$$

Изъ выраженія:

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

видимъ, что только коэффиціенты у членовъ втораго измѣренія въ уравненіи (4) a_{11} , a_{22} , a_{12} служатъ къ отличію рода конического сѣченія.

Пр. 1. Какой родъ коническихъ сѣченій представляютъ уравненія:

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x - 7y - 4 = 0$$

Отв. Здѣсь $A_{33} = 15 - 4 = 11$; эллипсъ.

Пр. 2. $2x^2 + xy - y^2 + 3x + y = 0$

Отв. $A_{33} = -2 - 1 = -3$; гипербола.

Пр. 3. $x^2 - 2xy + y^2 - x - y - 1 = 0$

Отв. $A_{33} = 1 - 1 = 0$; парабола.

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что при $A_{33} = 0$ члены втораго измѣренія въ (4) составляютъ полный квадратъ.

§ 237. Уравненіе (8) опредѣляетъ только направленіе ассимптотъ, но такъ какъ онѣ проходятъ черезъ центръ, то онѣ вполне опредѣлены и мы можемъ написать ихъ уравненія. Приравнивая нулю члены втораго измѣренія въ уравненіи (4), найдемъ:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \quad (10)$$

откуда:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}}{a_{22}}$$

а это есть направленіе прямыхъ, идущихъ къ бесконечно-удаленнымъ точкамъ на кривой. Слѣдовательно уравненіе этихъ прямыхъ есть (10). Розысканіе этихъ прямыхъ сводится на розысканіе отношенія координатъ бесконечно-удаленныхъ точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, сдѣлаемъ уравненіе (4)

однороднымъ, полагая $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ вмѣсто x и y . Чтобы получить точки пересѣченія бесконечно-удаленной прямой съ коническимъ сѣченіемъ надобно положить $x_3 = 0$, а это именно и даетъ уравненіе (10). Уравненія ассимптотъ получатся, написавъ уравненія прямыхъ, которыя-бы были па-

параллельны прямой (10) и проходили через центр кривой, координаты мы нашли выше (2).

Уравнение (10) будет представлять асимптоты, если начало координат находится в центре кривой.

Пр. 1. В кривой:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

которую назвали эллипсомъ, действительно имѣемъ:

$$A_{33} = \frac{1}{a^2 b^2} > 0$$

а уравнение асимптотъ будетъ:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{bi}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{bi}\right) = 0$$

Пр. 2. В кривой:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

которую назвали гиперболой, имѣемъ:

$$A_{33} = -\frac{1}{a^2 b^2} < 0$$

а уравнение асимптотъ будетъ:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

Пр. 3. В кривой:

$$y^2 - 2px = 0$$

которую назвали параболой, имѣемъ:

$$A_{33} = 0$$

а уравнение асимптотъ будетъ:

$$y^2 = 0$$

это уравнение даетъ только направление къ бесконечно удаленной точкѣ повторенное два раза; а собственно асимптотъ парабола не имѣетъ.

§ 238. Выше мы видѣли (§ 233), что поляръ точки на бесконечности есть діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды конического сѣченія, проведенныя параллельно прямой, соединяющей центръ съ точкою на бесконечности, т. е. съ полюсомъ.

Если уравнение конического сѣченія есть:

$$f = a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (11)$$

то полярна точка $(y_1y_2y_3)$ будетъ (§ 209, 58):

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \quad (12)$$

или:

$$x_1 (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3) + x_2 (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3) + \\ + x_3 (a_{31}x_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3) = 0 \quad (13)$$

полагая въ этомъ уравненіи $\rho x_1 = x$, $\rho x_2 = y$, $\rho x_3 = 1$; $\rho y_1 = x_1$, $\rho y_2 = y_1$, $\rho y_3 = 1$ будемъ имѣть полярну точки (x_1y_1) въ декартовыхъ координатахъ:

$$x(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}) + y(a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}) + a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} = 0 \quad (14)$$

Полагая $x_1 = r_1 \cos \alpha_1$, $y_1 = r_1 \sin \alpha_1$ это уравнение сдѣлается:

$$x(a_{11}r_1 \cos \alpha_1 + a_{12}r_1 \sin \alpha_1 + a_{13}) + y(a_{21}r_1 \cos \alpha_1 + a_{22}r_1 \sin \alpha_1 + a_{23}) + \\ + a_{31}r_1 \cos \alpha_1 + a_{32}r_1 \sin \alpha_1 + a_{33} = 0 \quad (15)$$

Если положимъ $r_1 = \infty$, то полярна сдѣлается діаметромъ, дѣлящимъ хорды, проведенныя въ направленіи α_1 , именно:

$$x(a_{11} \cos \alpha_1 + a_{12} \sin \alpha_1) + y(a_{21} \cos \alpha_1 + a_{22} \sin \alpha_1) + a_{31} \cos \alpha_1 + a_{32} \sin \alpha_1 = 0 \quad (16)$$

или:

$$(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}) \cos \alpha_1 + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}) \sin \alpha_1 = 0 \quad (17)$$

или еще, если въ уравненіи (11) $\rho x_1 = x$, $\rho x_2 = y$, $\rho x_3 = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha_1 = 0 \quad (18)$$

это и есть уравнение діаметра.

Если черезъ α означимъ уголъ, который діаметръ составляетъ съ осью абсциссъ, то изъ уравненія (16) найдемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{a_{11} \cos \alpha_1 + a_{12} \sin \alpha_1}{a_{12} \cos \alpha_1 + a_{22} \sin \alpha_1} = - \frac{a_{11} + a_{12} \operatorname{tg} \alpha_1}{a_{12} + a_{22} \operatorname{tg} \alpha_1} \quad (19)$$

или:

$$a_{22} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + a_{12}(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1) + a_{11} = 0 \quad (20)$$

Сопряженными діаметрами называются такіе два діаметра, въ которыхъ точка, лежащая на безконечности, на одномъ изъ нихъ, есть полюсъ другого, или, другими словами, хорды параллельныя одному изъ нихъ, дѣлятся пополамъ другимъ.

Такъ какъ уравненіе (20) симметрично относительно угловъ α и α_1 , то изъ этого заключаемъ, что если направленіе хорды будетъ α , то направленіе діаметра будетъ α_1 , слѣдовательно углы α и α_1 , связанные уравненіемъ (20) суть углы двухъ сопряженныхъ діаметровъ. Это уравненіе получится, если въ уравненіи (16) положимъ $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$ и сдѣлаемъ $r = \infty$.

Это слѣдуетъ изъ опредѣленія сопряженныхъ діаметровъ, какъ поляръ точекъ, лежащихъ на безконечности.

Изъ формы уравненія (18) видно, что всѣ діаметры проходятъ черезъ пересѣченіе двухъ прямыхъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

которыя пересѣкаются въ центрѣ кривой (§ 236).

Если $\alpha_1 = 0$, то діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды параллельныя оси x , будетъ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, если-же $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, то діаметръ, дѣлящій хорды параллельныя оси y , будетъ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Если въ уравненіи (20) сдѣлаемъ $\alpha_1 = \alpha$, то оно сдѣлается:

$$a_{22} \operatorname{tg}^2 \alpha + 2a_{12} \operatorname{tg} \alpha + a_{11} = 0 \quad (22)$$

а это уравненіе, дающее направленіе ассимптотъ (§ 237, 10), показываетъ, что ассимптоту можно разсматривать, какъ діаметръ самъ себѣ сопряженный.

Общія количественныя свойства коническихъ сѣченій.

§ 239. Всѣ выше выведенныя свойства коническихъ сѣченій относятся къ положенію; ниже слѣдующія относятся къ мѣрѣ, т. е. къ количественнымъ свойствамъ.

Предложеніе. Если чрезъ какую-нибудь точку O проведемъ двѣ сѣкущія, встрѣчающія коническое сѣченіе въ точкахъ R_1, R_2, S_1, S_2 , то отношеніе:

$$\frac{OR_1 \cdot OR_2}{OS_1 \cdot OS_2}$$

будетъ величина постоянная, гдѣ бы нибыла взята точка O , лишь-бы направленія OR и OS были постоянныя.

Доказательство. Изъ § 236, замѣчая, что OR_1 и OR_2 суть корни уравненія (5), найдемъ:

$$OR_1 \cdot OR_2 = \frac{a_{33}}{a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha}$$

и точно также:

$$OS_1 \cdot OS_2 = \frac{a_{33}}{a_{11} \cos^2 \alpha' + 2a_{12} \sin \alpha' \cdot \cos \alpha' + a_{22} \sin^2 \alpha'}$$

откуда:

$$\frac{OR_1 \cdot OR_2}{OS_1 \cdot OS_2} = \frac{a_{11} \cos^2 \alpha' + 2a_{12} \sin \alpha' \cdot \cos \alpha' + a_{22} \sin^2 \alpha'}{a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha}$$

но вторая часть этого уравненія есть величина постоянная, такъ какъ величины a_{11} , a_{12} , a_{22} при перенесеніи начала координатъ неизмѣняются, а α и α' не измѣняются, потому что направленіе, по условію, остается постояннымъ.

Это предложеніе можетъ быть выражено еще слѣдующимъ образомъ:

Если чрезъ двѣ данныя точки O_1 и O_2 будутъ проведены, какія-нибудь двѣ параллельныя линіи O_1R и O_2S , то отношеніе:

$$\frac{O_1R_1 \cdot O_1R_2}{O_2S_1 \cdot O_2S_2}$$

будетъ величина постоянная.

Въ самомъ дѣлѣ, числитель и знаменатель предъидущей дроби, очевидно, суть:

$$\frac{a_{33}}{a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha} \quad , \quad \frac{a'_{33}}{a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha}$$

откуда, ихъ отношеніе равно $a_{33} : a'_{33}$ — величина постоянная (a'_{33} новое значеніе коэффиціента a_{33} при перенесеніи начала координатъ изъ точки O_1 въ O_2).

Слѣдствіе 1. Пусть O_2 будетъ центръ кривой, то $O_2S_1 = O_2S_2$, а слѣдовательно $O_2S_1 \cdot O_2S_2$ будетъ квадратъ полудіаметра параллельнаго сѣкущей O_1R . Откуда слѣдуетъ, что произведенія отрѣзковъ двухъ пересѣкающихся хордъ относятся между собою, какъ квадраты имъ параллельныхъ полудіаметровъ.

Слѣдствіе 2. Пусть O_1O_2 будетъ діаметръ конического сѣченія, а O_1R и O_2S параллельны діаметру сопряженному O_1O_2 , то $O_1R_1 = O_1R_2$ и $O_2S_1 = O_2S_2$.

Если діаметръ O_1O_2 пересѣкаетъ кривую въ точкахъ a и b , то:

$$\frac{\overline{O_1R}^2}{O_1a \cdot O_1b} = \frac{\overline{O_2S}^2}{O_2a \cdot O_2b}$$

т. е. квадраты полухордъ, сопряженныхъ діаметру O_1O_2 , пропорціональны произведеніямъ отрѣзковъ, на которые эти хорды дѣлятъ діаметръ O_1O_2 .

§ 240. Предыдущее предложеніе не имѣетъ мѣста въ томъ случаѣ, когда прямая OS_1 параллельна одной изъ прямыхъ встрѣчающихъ кривую, на безконечности, въ этомъ случаѣ отрѣзокъ $OS_2 = \infty$, и только OS_1 встрѣчаетъ кривую въ конечной точкѣ. Мы покажемъ, что въ этомъ случаѣ, отношеніе:

$$\frac{OS_1}{Or_1 \cdot Or_2}$$

есть величина постоянная. Для простоты возьмемъ OS за ось x , а OR за ось y .

Такъ какъ ось x параллельна прямой встрѣчающей кривую на безконечности, то въ уравненіи:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (23)$$

коэффициентъ $a_{11} = 0$, слѣдовательно уравненіе кривой будетъ:

$$2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

полагая $y = 0$, найденный отрѣзокъ на оси x будетъ:

$$OS_1 = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$$

полагая $x = 0$ произведеніе отрѣзковъ на оси y будетъ:

$$OR_1 \cdot OR_2 = \frac{a_{33}}{a_{22}}$$

откуда:

$$\frac{OS_1}{OR_1 \cdot OR_2} = -\frac{a_{22}}{2a_{13}}$$

Перенесемъ теперь начало координатъ въ точку (x_1, y_1) , оставивъ оси параллельными старымъ осямъ, то a_{22} неизмѣнится, а a_{13} сдѣлается $a_{12}y_1 + a_{13}$, слѣдовательно новое отношеніе будетъ:

$$-\frac{a_{22}}{2(a_{12}y_1 + a_{13})}$$

Если кривая будет парабола, то $a_{12} = 0$, а следовательно это отношение будет величина постоянная. Если же кривая будет гипербола, то это отношение будет величина постоянная только в том случае, когда y_1 будет величина постоянная.

Пр. 1. Составить уравнение конического сечения, которое дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ x и y отрезки $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$?

Рѣшеніе. Если вѣ уравненіи (23) сдѣлаемъ послѣдовательно $x = 0, y = 0$, то найдемъ:

$$x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2 = 0, \quad y^2 - (\mu_1 + \mu_2)y + \mu_1\mu_2 = 0$$

гдѣ:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2a_{13}}{a_{11}}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}, \quad \mu_1 + \mu_2 = -\frac{2a_{23}}{a_{22}}, \quad \mu_1\mu_2 = \frac{a_{33}}{a_{22}}$$

откуда исконое уравненіе будетъ:

$$\mu_1\mu_2x^2 + 2a_{12}xy + \lambda_1\lambda_2y^2 - \mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2)x - \lambda_1\lambda_2(\mu_1 + \mu_2)y + \lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 = 0 \quad (24)$$

Если коническое сѣченіе есть парабола, то:

$$a_{12}^2 = \mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2, \quad a_{12} = \pm \sqrt{\mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2}$$

слѣдовательно чрезъ четыре точки можно провести только двѣ параболы.

Пр. 2. Найти геометрическое мѣсто центровъ конического сѣченія, проходящаго чрезъ четыре данныя точки?

Рѣшеніе. Уравненіе (24) представляетъ коническое сѣченіе, проходящее чрезъ четыре данныя точки. Координаты центра опредѣляются уравненіями (§ 236, 1):

$$2\mu_1\mu_2x + 2a_{12}y + \mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \quad 2\lambda_1\lambda_2y + 2a_{12}x - \lambda_1\lambda_2(\mu_1 + \mu_2) = 0$$

такъ какъ a_{12} остается произвольнымъ, то исключеніе его изъ этихъ уравненій и даетъ зависимость между координатами центровъ, именно:

$$2\mu_1\mu_2x^2 - 2\lambda_1\lambda_2y^2 - \mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2)x - \lambda_1\lambda_2(\mu_1 + \mu_2)y = 0$$

это коническое сѣченіе, которое проходитъ чрезъ пересѣченія каждой изъ трехъ паръ линій, которыя можно провести чрезъ четыре данныя точки и чрезъ средину этихъ линій. Геометрическое мѣсто будетъ гипербола если $\lambda_1\lambda_2$ и $\mu_1\mu_2$ будутъ имѣть, каждая изъ паръ, одинаковые или разные знаки, въ противномъ случаѣ будемъ имѣть эллипсъ. Слѣдовательно эллипсъ будетъ вѣ томъ случаѣ, когда двѣ точки на одной изъ осей будутъ съ одной стороны начала, а другія двѣ съ противоположныхъ сторонъ. Другими словами, когда четырехугольникъ, образуемый четырьмя данными точками имѣетъ вогнутый уголъ. Это очевидно геометрически, такъ какъ около четырехугольника, имѣющаго вогнутый уголъ, ни эллипсъ, ни парабола, не могутъ быть описаны. Слѣдовательно описанное коническое сѣченіе должно быть гипербола, такъ что нѣкоторыя вершины четырехугольника должны лежать на различныхъ вѣтвяхъ гиперболы. Откуда видимъ, что вѣ этомъ случаѣ описанное коническое сѣченіе должно быть всегда гипербола, а такъ какъ центръ гиперболы находится всегда вѣ конечномъ разстояніи, то геометрическое мѣсто центровъ будетъ эллипсъ. Вѣ другомъ случаѣ, т. е. если всѣ углы четырехугольника выпуклы, два положенія центра будутъ на безконечности, соотвѣтственно двумъ параболамъ, которыя можно описать около даннаго четырехугольника.

Каноническія формы коническихъ сѣченій.

§ 241. Теперь займемся упрощеніемъ общаго уравненія центрального конического сѣченія:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (25)$$

Для этого положимъ, что оно отнесено къ полярному координатному треугольнику. Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ $x_3 = 0$, то получимъ уравненіе:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \quad (26)$$

которое есть произведеніе двухъ прямыхъ, соединяющихъ съ противоположной вершиной, точки пересѣченія кривой съ прямою $x_3 = 0$. Это уравненіе разлагается на два линейные множителя:

$$x_1 - \alpha x_2 = 0 \quad , \quad x_1 - \beta x_2 = 0$$

Но мы предположили, что координатный треугольникъ есть полярный, слѣдовательно эти линіи суть касательныя, а касательныя со сторонами полярнаго треугольника составляютъ гармоническую связку (§ 210), слѣдовательно $\beta = -\alpha$, и уравненіе (26) сдѣлается:

$$x_1^2 - \alpha^2 x_2^2 = 0$$

Если это послѣднее уравненіе тождественно съ уравненіемъ (26), то въ уравненіи конического сѣченія (25) нѣтъ члена $2a_{12}x_1x_2$. Такое-же разсужденіе покажетъ, что въ уравненіи недостаетъ и членовъ $2a_{13}x_1x_3$, $2a_{23}x_2x_3$. слѣдовательно уравненіе конического сѣченія заключаетъ только квадратные члены, т. е. оно будетъ:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \quad (27)$$

Въ этой формѣ уравненіе конического сѣченія можетъ быть представлено трижды безконечнымъ числомъ, такъ какъ выборъ полярнаго треугольника зависитъ, какъ мы видѣли, отъ трехъ произвольныхъ параметровъ, изъ коихъ каждый можетъ имѣть безконечное число значеній. (Если теперь мы предположимъ, что одна изъ сторонъ координатнаго полярнаго треугольника, на примѣръ $x_3 = 0$, есть безконечно-удаленная прямая, то пересѣченіе другихъ двухъ сторонъ будетъ центръ кривой, а сами стороны, т. е. координатныя оси, будутъ сопряженные діаметры. слѣдовательно мы должны только положить:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = 1$$

и уравненіе сдѣлается:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad (28)$$

Но вообще въ немъ координатныя оси не прямоугольны.

§ 242. Сдѣлаемъ тѣже разсужденія относительно того-же конического сѣченія, но отнесеннаго къ линейнымъ координатамъ:

$$f'(\xi) = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \quad (29)$$

Для этого положимъ, какъ и выше, что это уравненіе отнесено къ полярному треугольнику, коего вершины суть:

$$\xi_1 = 0 \quad , \quad \xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_3 = 0$$

Если положимъ въ уравненіи (29) $\xi_3 = 0$, то получимъ уравненіе:

$$A_{11}\xi_1^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + A_{22}\xi_2^2 = 0 \quad (30)$$

которое есть произведеніе двухъ линейныхъ множителей:

$$\xi_1 - \alpha\xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_1 - \beta\xi_2 = 0 \quad (31)$$

слѣдовательно представляетъ двѣ точки касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ точки $\xi_3 = 0$ къ коническому сѣченію (29). Но такъ какъ, по условію, координатный треугольникъ есть полярный, то двѣ касательныя, со сторонами полярнаго треугольника, черезъ пересѣченіе которыхъ онѣ проходятъ, составляютъ гармоническую связку, слѣдовательно (§ 221):

$$\xi_1 = 0 \quad , \quad \xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_1 - \alpha\xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_1 - \beta\xi_2 = 0$$

суть четыре гармоническія точки, а поэтому мы должны имѣть $\beta = -\alpha$, слѣдовательно уравненіе точекъ касанія будетъ:

$$\xi_1^2 - \alpha^2\xi_2^2 = 0$$

Но это есть уравненіе (30), слѣдовательно $A_{12} = 0$. Тоже разсужденіе покажетъ, что въ уравненіи (29), если оно отнесено къ полярному треугольнику, недостаетъ членовъ $2A_{13}\xi_1\xi_3$, $2A_{23}\xi_2\xi_3$. Слѣдовательно уравненіе конического сѣченія, отнесеннаго къ полярному треугольнику, будетъ:

$$A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 = 0 \quad (32)$$

Если одна изъ сторонъ полярнаго треугольника будетъ на безконечности, то будемъ имѣть:

$$\sigma\xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma\xi_3 = 1$$

откуда уравненіе сдѣлается:

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33} = 0 \quad (33)$$

оно отнесено, очевидно, къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ и центру, какъ началу. Уравненія (28) и (33) центральныхъ коническихъ сѣченій суть самыя простыя въ обѣихъ системахъ координатъ.

Каноническія формы коническихъ сѣченій.

§ 241. Теперь займемся упрощеніемъ общаго уравненія центрального конического сѣченія:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (25)$$

Для этого положимъ, что оно отнесено къ полярному координатному треугольнику. Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ $x_3 = 0$, то получимъ уравненіе:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \quad (26)$$

которое есть произведеніе двухъ прямыхъ, соединяющихъ съ противоположной вершиной, точки пересѣченія кривой съ прямою $x_3 = 0$. Это уравненіе разлагается на два линейные множителя:

$$x_1 - \alpha x_2 = 0 \quad , \quad x_1 - \beta x_2 = 0$$

Но мы предположили, что координатный треугольникъ есть полярный, слѣдовательно эти линіи суть касательныя, а касательныя со сторонами полярнаго треугольника составляютъ гармоническую связку (§ 210), слѣдовательно $\beta = -\alpha$, и уравненіе (26) сдѣлается:

$$x_1^2 - \alpha^2 x_2^2 = 0$$

Если это послѣднее уравненіе тождественно съ уравненіемъ (26), то въ уравненіи конического сѣченія (25) нѣтъ члена $2a_{12}x_1x_2$. Такое-же рассужденіе покажетъ, что въ уравненіи недостаетъ и членовъ $2a_{13}x_1x_3$, $2a_{23}x_2x_3$. слѣдовательно уравненіе конического сѣченія заключаетъ только квадратные члены, т. е. оно будетъ:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \quad (27)$$

Въ этой формѣ уравненіе конического сѣченія можетъ быть представлено трижды безконечнымъ числомъ, такъ какъ выборъ полярнаго треугольника зависитъ, какъ мы видѣли, отъ трехъ произвольныхъ параметровъ, изъ коихъ каждый можетъ имѣть безконечное число значеній. (Если теперь мы предположимъ, что одна изъ сторонъ координатнаго полярнаго треугольника, на примѣръ $x_3 = 0$, есть безконечно-удаленная прямая, то пересѣченіе другихъ двухъ сторонъ будетъ центръ кривой, а сами стороны, т. е. координатныя оси, будутъ сопряженныя діаметры. слѣдовательно мы должны только положить:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = 1$$

и уравненіе сдѣлается:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad (28)$$

Но вообще въ немъ координатныя оси не прямоугольны.

§ 242. Сдѣлаемъ тѣже разсужденія относительно того-же конического сѣченія, но отнесеннаго къ линейнымъ координатамъ:

$$f'(\xi) = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \quad (29)$$

Для этого положимъ, какъ и выше, что это уравненіе отнесено къ полярному треугольнику, коего вершины суть:

$$\xi_1 = 0 \quad , \quad \xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_3 = 0$$

Если положимъ въ уравненіи (29) $\xi_3 = 0$, то получимъ уравненіе:

$$A_{11}\xi_1^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + A_{22}\xi_2^2 = 0 \quad (30)$$

которое есть произведеніе двухъ линейныхъ множителей:

$$\xi_1 - \alpha\xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_1 - \beta\xi_2 = 0 \quad (31)$$

слѣдовательно представляетъ двѣ точки касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ точки $\xi_3 = 0$ къ коническому сѣченію (29). Но такъ какъ, по условію, координатный треугольникъ есть полярный, то двѣ касательныя, со сторонами полярнаго треугольника, черезъ пересѣченіе которыхъ онѣ проходятъ, составляютъ гармоническую связку, слѣдовательно (§ 221):

$$\xi_1 = 0 \quad , \quad \xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_1 - \alpha\xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_1 - \beta\xi_2 = 0$$

суть четыре гармоническія точки, а поэтому мы должны имѣть $\beta = -\alpha$, слѣдовательно уравненіе точекъ касанія будетъ:

$$\xi_1^2 - \alpha^2\xi_2^2 = 0$$

Но это есть уравненіе (30), слѣдовательно $A_{12} = 0$. Тоже разсужденіе покажетъ, что въ уравненіи (29), если оно отнесено къ полярному треугольнику, недостаетъ членовъ $2A_{13}\xi_1\xi_3$, $2A_{23}\xi_2\xi_3$. Слѣдовательно уравненіе конического сѣченія, отнесеннаго къ полярному треугольнику, будетъ:

$$A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 = 0 \quad (32)$$

Если одна изъ сторонъ полярнаго треугольника будетъ на безконечности, то будемъ имѣть:

$$\sigma\xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma\xi_3 = 1$$

откуда уравненіе сдѣлается:

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33} = 0 \quad (33)$$

оно отнесено, очевидно, къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ и центру, какъ началу. Уравненія (28) и (33) центральныхъ коническихъ сѣченій суть самыя простыя въ обѣихъ системахъ координатъ.

§ 243. Остается только сдѣлать на самомъ дѣлѣ переходъ отъ общаго уравненія (25) къ (28).

Перенесемъ начало координатъ въ центръ. Такъ какъ центръ есть полюсъ бесконечно-удаленной прямой, то оси x и y будутъ дѣлиться гармонически кривою и бесконечно-удаленною прямою, въ силу этого члены x_1x_3 , x_2x_3 , или x и y , исчезнутъ, остается только сдѣлать поворотъ координатныхъ осей.

Перенесеніе начала координатъ въ центръ дѣлается подстановленіемъ:

$$\rho x_1 = x = x' + \alpha_1$$

$$\rho x_2 = y = y' + \beta_1$$

$$\rho x_3 = 1$$

гдѣ α_1 и β_1 суть координаты центра, слѣдовательно (§ 236, 2)

$$\alpha_1 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad \beta_1 = \frac{A_{23}}{A_{33}}$$

но изъ теории опредѣлителей имѣемъ:

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13} = 0$$

$$a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 + a_{23} = 0$$

$$a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + a_{33} = \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{A_{33}} = \frac{\Delta}{A_{33}} \quad (34)$$

слѣдовательно:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = a_{11}x' + a_{12}y'$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = a_{21}x' + a_{22}y'$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = a_{31}x' + a_{32}y' + \frac{\Delta}{A_{33}}$$

Умножимъ первыя части этихъ уравненій соотвѣтственно на x , y , 1, а вторыя на $x' + \alpha_1$, $y' + \beta_1$, 1 и сложимъ, то найдемъ:

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \\ & = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Этимъ преобразованіемъ члены первой степени удалены, а второй степени остались безъ переменны. Здѣсь мы должны исключить тотъ случай, въ которомъ $A_{33} = 0$, такъ какъ въ предыдущемъ уравненіи послѣдній членъ будетъ равенъ безконечности, и кривая будетъ имѣть центръ на безконечности. Напротивъ, уничтоженіе опредѣлителя Δ неизмѣняетъ нашихъ изслѣдованій, только ихъ геометрической смыслъ будетъ различенъ. Этотъ послѣдній случай мы рассмотримъ ниже.

§ 244. Мы уже выше показали геометрически, что есть пара перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ (§ 235); теперь покажемъ это аналитически. Нашъ анализъ покажетъ, что существуетъ только одна пара такихъ діаметровъ.

Если сопряженные діаметры перпендикулярны, то $\alpha_1 = \alpha + 90^\circ$, а

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

подставляя это выраженіе въ (19), найдемъ:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0 \quad (36)$$

Корни этого уравненія всегда дѣйствительны и даютъ направленіе сопряженныхъ перпендикулярныхъ діаметровъ.

Если вмѣсто $\operatorname{tg} \alpha$ поставимъ въ предыдущемъ уравненіи $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, то найдемъ:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (37)$$

полагая $2\alpha = \beta$ будемъ имѣть:

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \right) \quad (38)$$

Откуда, найдемъ величины для α :

$$\alpha = \frac{\beta}{2}, \quad \alpha = \frac{\beta}{2} + 90^\circ, \quad \alpha = \frac{\beta}{2} + 180^\circ, \quad \alpha = \frac{\beta}{2} + 270^\circ$$

которыя отличаются только на 90° ; слѣдовательно даютъ одну и ту же систему, рассматриваемую иначе, т. е. *есть только одна система прямоугольныхъ сопряженныхъ діаметровъ*. Эти діаметры называютъ *осями* конического сѣченія. Здѣсь представляется только одно исключеніе, это когда имѣемъ въ одно время:

$$a_{11} - a_{22} = 0, \quad a_{12} = 0$$

Коническое сѣченіе имѣетъ тогда форму:

$$x^2 + y^2 = c$$

слѣдовательно есть кругъ. Въ этомъ случаѣ уголь α остается неопредѣленнымъ, слѣдовательно есть безчисленное множество сопряженныхъ перпендикулярныхъ діаметровъ, и, дѣйствительно, въ кругѣ каждая пара перпендикулярныхъ діаметровъ есть сопряженная. Если въ уравненіи вмѣсто $\operatorname{tg} \alpha$ подставимъ $\frac{y}{x}$, то найдемъ уравненіе осей:

$$a_{22}y^2 + (a_{11} - a_{22})xy - a_{12}x^2 = 0$$

или равнодѣлящихъ углы между асимптотами.

§ 245. Чтобы сопряженные перпендикулярные діаметры сдѣлать координатными осями надобно поворотить старыя оси на уголь α , опредѣленный уравненіемъ (37), а для этого надобно положить (§ 35, 6):

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \tag{39}$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

Если эти выраженія подставимъ въ уравненіе (35), то оно должно принять форму уравненія (28), если въ немъ сдѣлаемъ $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$. Слѣдовательно послѣ подстановленія въ уравненіе:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0 \tag{40}$$

коэффициентъ при xy долженъ быть равенъ нулю, что и имѣетъ мѣсто въ силу условія (19). Въ самомъ дѣлѣ, этотъ коэффициентъ есть:

$$\cos \alpha (a_{22} \sin \alpha + a_{12} \cos \alpha) - \sin \alpha (a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha) = 0$$

слѣдовательно можемъ положить:

$$\frac{a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha}{\sin \alpha} = \lambda \tag{41}$$

или:

$$(a_{11} - \lambda) \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = 0 \tag{42}$$

$$a_{12} \cos \alpha + (a_{22} - \lambda) \sin \alpha = 0$$

Исключая между этими уравненіями $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, найдемъ квадратное уравненіе въ λ , котораго корни и будутъ коэффиціенты при x'^2 и y'^2 въ преобразованномъ уравненіи. Это исключеніе даетъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (43)$$

или:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad (44)$$

Означимъ корни этого уравненія черезъ λ_1 , λ_2 , каждому изъ нихъ будутъ соотвѣтствовать въ силу (41) величины α , которыя будутъ различаться на 90° , если членъ $x'y'$ исчезъ. Поэтому будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha &= \lambda_1 \cos \alpha \\ a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha &= \lambda_1 \sin \alpha \\ a_{11} \sin \alpha - a_{12} \cos \alpha &= \lambda_2 \sin \alpha \\ a_{12} \sin \alpha - a_{22} \cos \alpha &= -\lambda_2 \cos \alpha \end{aligned} \quad (45)$$

Умножая третее изъ этихъ уравненій на x , а четвертое на y и складывая, получимъ, соображаясь съ (39):

$$(a_{11} \sin \alpha - a_{12} \cos \alpha) x + (a_{12} \sin \alpha - a_{22} \cos \alpha) y = -\lambda_2 y' \quad (46)$$

точно также изъ перваго и втораго получимъ:

$$(a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha) x + (a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha) y = \lambda_1 x' \quad (47)$$

Если наконецъ умножимъ (46) на:

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = y'$$

а (47) на:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = x'$$

и результаты вычтемъ, то найдемъ:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

Слѣдовательно уравненіе коническаго сѣченія получить самую простую форму:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0$$

Итакъ корни уравненія (44) дѣйствительно даютъ коэффиціенты въ новомъ уравненіи. Въ исключительномъ случаѣ, который указали выше,

именно, когда $a_{11} = a_{22}$ и $a_{12} = 0$, корни λ_1, λ_2 остаются определенными, но дѣлаются только равными.

Мы выше видѣли, что всегда есть пара перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ, если только Δ и A_{33} не равны нулю. Но легко показать, что уравненіе (44) всегда имѣетъ дѣйствительные корни.

Въ самомъ дѣлѣ, оно даетъ:

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}$$

Изъ этого выраженія видимъ, что подрадикальная величина не можетъ быть отрицательной величиной, если только коэффициенты въ уравненіи конического сѣченія суть величины дѣйствительныя.

§ 246. Преобразование уравненія конического сѣченія:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0 \quad (48)$$

въ форму:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0 \quad (49)$$

можно сдѣлать гораздо проще способомъ Буля слѣдующимъ образомъ: если уравненіе (48) преобразуемъ подстановленіемъ (39), коего модуль преобразования равенъ единицѣ, то будемъ имѣть:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} \quad (50)$$

или:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 \quad (51)$$

гдѣ A, B, C суть функціи коэффициентовъ a_{11}, a_{12}, a_{22} и $\cos \alpha, \sin \alpha$. Но мы имѣемъ всегда:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

такъ какъ каждое изъ этихъ выраженій есть разстояніе начала координатъ отъ точки (x, y) или (x', y') .

Если къ обѣимъ частямъ (51) прибавимъ по:

$$\lambda(x^2 + y^2) \quad \text{и} \quad \lambda(x'^2 + y'^2)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэффициентъ, то найдемъ:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \lambda(x^2 + y^2) = Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + \lambda(x'^2 + y'^2)$$

или:

$$(a_{11} + \lambda)x^2 + 2a_{12}xy + (a_{22} + \lambda)y^2 = (A + \lambda)x'^2 + 2Bx'y' + (C + \lambda)y'^2$$

По свойству инвариантовъ (§ 192, пр. 3) будемъ имѣть:

$$(a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda) - a_{12}^2 = (A + \lambda)(C + \lambda) - B^2 \quad (52)$$

такъ какъ это уравненіе должно имѣть мѣсто при всѣхъ значеніяхъ λ , то приравнивая коэффициенты при λ , найдемъ:

$$A + C = a_{11} + a_{22}$$

$$AC - B^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Если выберемъ направленіе новыхъ координатныхъ осей такъ, чтобы $B=0$, то будемъ имѣть:

$$A + C = a_{11} + a_{22}$$

$$AC = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Имѣя эти уравненія, получимъ уравненіе:

$$t^2 - (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \quad (53)$$

котораго корни суть A и C , и уравненіе (50) сдѣлается:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = Ax'^2 + Cy'^2 + \frac{\Delta}{A_{33}}$$

Пр. 1. Найти оси эллипса:

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 = 60$$

и преобразовать его уравненіе къ осямъ.

Такъ какъ оси суть равнодѣлящія углы между асимптотами, а асимптоты суть:

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 = 0$$

то уравненіе осей будетъ:

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 = 0$$

или:

$$(2x - y)(x + 2y) = 0$$

Въ этомъ примѣрѣ имѣемъ:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 25, \quad \lambda_1\lambda_2 = 150$$

откуда $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 10$, а уравнение преобразуется въ:

$$3x^2 + 2y^2 = 12$$

Пр. 2. Преобразовать уравнение гиперболы:

$$11x^2 + 84xy - 24y^2 = 156$$

здѣсь:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -13, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -2028$$

откуда:

$$\lambda_1 = 39, \quad \lambda_2 = -52$$

а потому:

$$3x^2 - 4y = 12$$

§ 247. Посмотримъ теперь, какія кривыя представляетъ уравненіе:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0$$

Это уравненіе можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$-\frac{x^2}{\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}}} + \frac{y^2}{\frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}}} = 1$$

Уравненіе въ этой формѣ даетъ сейчасъ классификацію кривыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе знаменателей:

$$\frac{\Delta^2}{\lambda_1 \lambda_2 A_{33}^2}$$

всегда имѣетъ, какъ видно, знакъ произведенія $\lambda_1 \lambda_2$, а это произведеніе есть:

$$\lambda_1 \lambda_2 = A_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

такъ какъ λ_1 и λ_2 суть корни уравненія (53).

Слѣдовательно классифицировать кривыя по знаку произведенія коэффиціентовъ при x^2 и y^2 все равно, что классифицировать по знаку A_{33} .

Вотъ возможные случаи:

Случай 1. $A_{33} > 0$; λ_1 и λ_2 имѣютъ одинаковые знаки.

$$1. \quad -\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}} = a^2, \quad -\frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}} = b^2; \text{ эллипсъ.}$$

$$2. \quad -\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}} = -a^2, \quad -\frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}} = -b^2; \text{ эллипсъ мнимый.}$$

Случай 2. $A_{33} < 0$; λ_1 и λ_2 имѣютъ противные знаки.

1. $-\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}} = a^2$, $-\frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}} = -b^2$; гипербола, встрѣчаемая осью x въ двухъ точкахъ.

2. $-\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}} = -a^2$, $-\frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}} = b^2$; гипербола, встрѣчаемая осью y въ двухъ точкахъ.

Эти двѣ гиперболы отличаются только направлениемъ осей. Слѣдовательно мы находимъ только двѣ кривыя (дѣйствительныя), имѣющія центръ, которыя представляются алгебраически уравнениемъ второй степени. Что касается мнимаго эллипса, то можно только замѣтить, что его центръ и оси суть дѣйствительныя, точно также, какъ и его полярныя дѣйствительныхъ полюсовъ.

Эллипсъ.

§ 248. Изъ предъидущаго параграфа видимъ, что эллипсъ и гипербола, отнесенные къ центру, какъ началу координатъ и къ своимъ осямъ, имѣютъ самую простую алгебраическую форму:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Изъ этихъ уравненій видимъ, что гиперболу можно разсматривать, какъ частный случай эллипса, когда одна изъ его осей сдѣлается мнимой. Если b измѣнимъ въ эллипсѣ на bi , то получимъ гиперболу:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

встрѣчающую ось x , а если измѣнимъ a на ai , то получимъ гиперболу:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

встрѣчающую ось y .

Такую простую форму, какъ эллипсъ, такъ и гипербола, могутъ получить, будучи отнесены къ косоугольнымъ координатамъ, когда за начало будетъ взятъ опять центръ, а за координатныя оси, пара сопряженныхъ діаметровъ.

Такъ какъ пара сопряженныхъ діаметровъ съ бесконечно-удаленной

прямой образуютъ полярный треугольникъ, относительно разсматриваемаго центрального коническаго сѣченія, то его форма:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (54)$$

не будетъ измѣняться, если за косоугольныя оси выберемъ пару сопряженныхъ діаметровъ. Такой переходъ отъ прямоугольныхъ координатныхъ осей къ косоугольнымъ мы сдѣлаемъ съ помощью формулъ (§ 36, 5):

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \cos \beta \\ y &= x' \sin \alpha + y' \sin \beta \end{aligned} \quad (55)$$

гдѣ $\beta - \alpha = \varphi$ есть уголъ между сопряженными діаметрами. Послѣ подстановленія уравненіе (54) сдѣлается:

$$\frac{x'^2}{a^2_1} + \frac{y'^2}{b^2_1} = 1 \quad (56)$$

такъ какъ коэффиціентъ при $x'y'$, по свойству полярнаго, какъ координатнаго треугольника, долженъ быть равенъ нулю, именно:

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{b^2} = 0 \quad (57)$$

а a_1 и b_1 будутъ даны уравненіями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2_1} &= \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \\ \frac{1}{b^2_1} &= \frac{\cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2} \end{aligned} \quad (58)$$

Полагая въ уравненіи (56) сначала $x' = 0$, а потомъ $y' = 0$, найдемъ:

$$y'^2 = b^2_1, \quad x'^2 = a^2_1$$

слѣдовательно a_1 и b_1 суть длины сопряженныхъ діаметровъ, считая отъ центра до встрѣчи ихъ съ кривою.

Съ помощью уравненій (58) можемъ вычислить эти длины, имѣя длину a и b . Кромѣ того уравненіе (57) есть ничто иное, какъ уравненіе (§ 238, 19), которое даетъ зависимость между углами, составленными сопряженными діаметрами и осью x .

Такъ какъ $\varphi = \beta - \alpha$, то имѣемъ два уравненія:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos \varphi$$

и

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{b^2} = 0$$

или:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

откуда:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{a^2}{a^2 - b^2} \cos \varphi, \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{b^2}{a^2 - b^2} \cos \varphi$$

вычитая, найдемъ:

$$\cos (\beta + \alpha) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \cos \varphi \quad (59)$$

Это уравненіе даетъ двѣ величины для $\alpha + \beta$ равныя, но съ противными знаками:

$$\alpha + \beta = \pm u$$

но мы имѣемъ:

$$\beta - \alpha = \varphi$$

слѣдовательно:

$$\alpha = \frac{-\varphi \pm u}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi \pm u}{2}$$

Изъ этихъ выраженій получимъ, какъ и должно было предвидѣть, по причинѣ симметріи кривой относительно осей, двѣ системы сопряженныхъ діаметровъ, изъ коихъ одна, относительно осей, есть воспроизведеніе другой. И въ самомъ дѣлѣ, вторая величина β равна первой α , а вторая величина α равна первой β и обратно.

Въ эллипсѣ эти рѣшенія будутъ дѣйствительны, подѣ условіемъ:

$$\cos \varphi < \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

что даетъ предѣлъ угла φ и наименьшій уголъ, который могутъ составлять сопряженные діаметры. Предѣлъ этотъ даетъ уравненія:

$$\cos \varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad \sin \varphi = \frac{\pm 2ab}{a^2 + b^2}$$

или:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$$

Изъ этого видимъ, что сопряженные діаметры суть діAGONАЛИ прямоугольника, описаннаго около эллипса параллельно осямъ. Уголъ между діAGONАЛЯМИ дѣлится осями пополамъ.

Но въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$\cos(\alpha + \beta) = 1$$

слѣдовательно:

$$\alpha + \beta = 0$$

т. е. двѣ діAGONАЛИ симметрично расположены около осей. Измѣняя b на bi будемъ имѣть для гиперболы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos \varphi$$

Здѣсь имѣемъ всегда $a^2 > b^2$, поэтому никакого ограниченія быть не можетъ и мы знаемъ, что φ можетъ быть равно нулю, такъ какъ каждая ассимптота есть сама себѣ сопряженный діаметръ (§ 247).

§ 249. Задача эта рѣшается еще слѣдующимъ образомъ: прямо ищутся величины a^2_1 и b^2_1 съ помощью квадратнаго уравненія подобнаго тому, которое служитъ къ разысканію осей a^2 и b^2 . Мы видѣли (57 и 58), что:

$$\frac{1}{a^2_1} = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}$$

$$0 = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{b^2}$$

$$\frac{1}{b^2_1} = \frac{\cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2}$$

Умножимъ разъ первое и второе уравненіе на $\sin \beta$ и $-\sin \alpha$; а другой разъ на $-\cos \beta$ и $\cos \alpha$ и сложимъ, то получимъ:

$$\frac{\sin \beta}{a^2_1} = \frac{\cos \alpha}{a^2} \sin \varphi, \quad -\frac{\cos \beta}{a^2_1} = \frac{\sin \alpha}{b^2} \sin \varphi$$

Умножая второе и третье на $\sin \beta$ и $-\sin \alpha$, а потомъ на $-\cos \beta$ и $\cos \alpha$ и складывая, какъ выше, найдемъ:

$$-\frac{\sin \alpha}{b^2_1} = \frac{\cos \beta}{a^2} \sin \varphi, \quad \frac{\cos \alpha}{b^2_1} = \frac{\sin \beta}{b^2} \sin \varphi$$

Если теперь перемножимъ первое съ четвертымъ, а второе съ третьимъ, и эти произведения вычтемъ, то получимъ:

$$a^2_1 b^2_1 \sin^2 \varphi = a^2 b^2 \quad (60)$$

откуда:

$$a_1 b_1 \sin \varphi = ab$$

или:

$$4a_1 b_1 \sin \varphi = 4ab$$

Но $4ab$ есть площадь прямоугольника, описаннаго около эллипса параллельно осямъ, а $4a_1 b_1 \sin \varphi$ есть площадь параллелограмма, описаннаго около эллипса параллельно діаметрамъ a_1 и b_1 . Слѣдовательно, площадь параллелограмма, описаннаго около эллипса параллельно сопряженнымъ діаметрамъ, есть величина постоянная. Откуда $\sin \varphi$, т. е. \sin угла между сопряженными діаметрами, будетъ:

$$\sin \varphi = \frac{ab}{a_1 b_1} \quad (61)$$

Такъ какъ $a_1 \sin \varphi$ есть длина перпендикуляра $CT = p$ (фиг. 96), опущеннаго изъ центра эллипса на касательную PT въ точкѣ P , которая параллельна сопряженному діаметру $CP' = b_1$, то:

$$p = \frac{ab}{b_1} \quad (62)$$

Если уравненія, выведенныя изъ уравненій (57) и (58) напишемъ въ формѣ:

$$a^2 \sin \beta = a^2_1 \cos \alpha \cdot \sin \varphi, \quad b^2 \cos \beta = -a^2_1 \sin \alpha \cdot \sin \varphi$$

$$a^2 \sin \alpha = -b^2_1 \cos \beta \cdot \sin \varphi, \quad b^2 \cos \alpha = b^2_1 \sin \beta \cdot \sin \varphi$$

и умножимъ первыя два слѣва на $\cos \alpha$ и $-\cos \beta$, а вторыя справа на $-\sin \alpha$, $\sin \beta$ и сложимъ, то найдемъ:

$$a^2 = a^2_1 \cos^2 \alpha + b^2_1 \cos^2 \beta \quad (63)$$

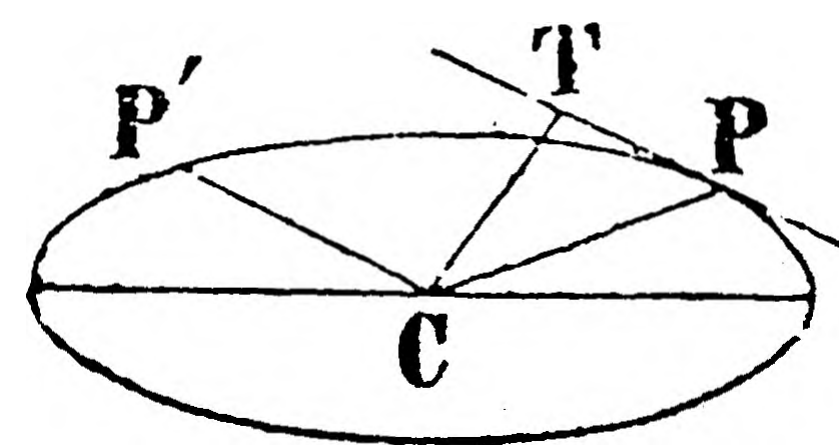
$$b^2 = a^2_1 \sin^2 \alpha + b^2_1 \sin^2 \beta$$

откуда, складывая, получимъ:

$$a^2 + b^2 = a^2_1 + b^2_1 \quad (64)$$

т. е. что сумма квадратовъ сопряженныхъ діаметровъ есть величина постоянная.

Фиг. 96.



Если означимъ чрезъ (x_1, y_1) координаты конца діаметра a_1 , то легко найти длины сопряженныхъ діаметровъ a_1 и b_1 въ функціи абсциссы x_1 .

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ $x_1 = a_1 \cos \alpha$, $y_1 = a_1 \sin \alpha$; подставляя въ (63), найдемъ:

$$a^2 = x_1^2 + b_1^2 \cos^2 \beta$$

$$b^2 = y_1^2 + b_1^2 \sin^2 \beta$$

откуда, складывая:

$$a^2 + b^2 = x_1^2 + y_1^2 + b_1^2$$

но:

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_1^2)$$

слѣдовательно:

$$b_1^2 = a^2 - e^2 x_1^2, \quad a_1^2 = b^2 + e^2 x_1^2 \quad (65)$$

гдѣ (§ 13):

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

Складывая эти два выраженія, найдемъ уравненіе (64).

Уравненія (60) и (64) даютъ возможность построить квадратное уравненіе, котораго корнями будутъ a_1^2 и b_1^2 . Это уравненіе есть:

$$z^2 - (a^2 + b^2)z + \frac{a^2 b^2}{\sin^2 \varphi} = 0 \quad (66)$$

Если оси a и b кривой извѣстны, то для каждой величины угла φ это уравненіе даетъ длину сопряженныхъ діаметровъ. Въ самомъ дѣлѣ, корни этого уравненія суть:

$$a_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - \frac{a^2 b^2}{\sin^2 \varphi}} \quad (67)$$

$$b_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - \frac{a^2 b^2}{\sin^2 \varphi}}$$

Имѣя, такимъ образомъ, a_1^2 и b_1^2 , уравненія (58) дадутъ углы α и β .

$$\cos^2 \alpha = \frac{\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}, \quad \cos^2 \beta = \frac{\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_1^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}, \quad \sin^2 \beta = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b_1^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

Если въ выраженіяхъ a^2_1 и b^2_1 приравняемъ нулю подкоренную величину, то a^2_1 будетъ равно b^2_1 , т. е. сопряженные діаметры будутъ равны, но при этомъ будемъ имѣть:

$$\sin \varphi = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \quad (68)$$

т. е. наименьшій уголъ между сопряженными діаметрами. Въ этомъ случаѣ уравненіе эллипса будетъ:

$$x^2 + y^2 = a^2_1 \quad (69)$$

Слѣдовательно уравненіе эллипса, отнесеннаго къ двумъ равнымъ сопряженнымъ діаметрамъ, будетъ имѣть форму уравненія круга, отнесеннаго къ прямоугольнымъ осямъ, имѣющимъ начало въ центрѣ.

§ 250. Мы видѣли, что углы, которые сопряженные діаметры составляютъ съ осью x связаны уравненіемъ:

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{b^2} = 0$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2}{a^2} \quad (70)$$

Изъ этого уравненія видимъ, что если одинъ изъ сопряженныхъ діаметровъ составляетъ съ осью x острый уголъ, то другой составляетъ тупой, т. е. сопряженные діаметры въ эллипсѣ лежатъ съ различныхъ сторонъ малой полуоси.

Если x_1, y_1 суть координаты точки, въ которой, какой-нибудь, діаметръ эллипса встрѣчаетъ кривую, то:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_1}{x_1}$$

гдѣ β есть уголъ, который этотъ діаметръ составляетъ съ осью x .

Если сопряженный ему діаметръ составляетъ съ осью x уголъ α , то имѣемъ:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

если x и y суть скользящія координаты этого діаметра. Слѣдовательно будемъ имѣть уравненіе сопряженнаго діаметра діаметру, составляющему

съ осью x уголъ β , или коего координаты точки пересѣченія съ эллипсомъ суть $(x_1 y_1)$:

$$\frac{yy_1}{xx_1} = -\frac{b^2}{a^2}$$

или:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 0 \quad (71)$$

§ 251. *Дополнительныя хорды.* Если двѣ прямыя, проходящія черезъ концы большой оси a , встрѣчаются на эллипсѣ, то онѣ параллельны сопряженнымъ діаметрамъ и отсѣкаютъ отъ малой полуоси, считая отъ начала, отрѣзки, коихъ произведение равно b^2 .

Если уравненіе эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

напишемъ въ формѣ:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

то можно положить:

$$\frac{y}{b} = \lambda \left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэффициентъ. Очевидно, что первая изъ этихъ прямыхъ проходитъ черезъ точку $(a, 0)$, а вторая черезъ точку $(-a, 0)$, т. е. черезъ концы большой оси. Далѣе эти прямыя встрѣчаются на эллипсѣ, такъ какъ, перемножая ихъ уравненія, найдемъ уравненіе эллипса.

Если означимъ черезъ α и β углы, которые онѣ составляютъ съ осью x , то найдемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\lambda b}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{\lambda a}$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

а это зависимость между углами сопряженныхъ діаметровъ. Чтобы получить отрѣзки, дѣлаемые на малой оси этими прямыми, надобно положить въ ихъ уравненіяхъ $x = 0$, что даетъ:

$$y_1 = \lambda b, \quad y_2 = \frac{b}{\lambda}$$

откуда, перемножая, найдемъ:

$$y_1 y_2 = b^2$$

Точно также можно показать, что прямая, проходящая чрезъ концы малой оси и встрѣчающіяся на эллипсѣ также параллельны сопряженнымъ діаметрамъ и дѣлаютъ на большой оси, считая отъ начала, отрѣзки, коихъ произведеніе равно a^2 . Съ помощью этой теоремы легко построить сопряженный діаметръ данному діаметру. Для этого черезъ конецъ большой оси нужно провести параллельную данному діаметру до встрѣчи съ эллипсомъ, точку встрѣчи соединить съ другимъ концомъ большой оси, наконецъ черезъ центр эллипса провести параллельную этой послѣдней прямой—это и будетъ, въ силу предъидущей теоремы, діаметръ сопряженный данному.

Двѣ прямая, проходящая черезъ концы, какого-нибудь, діаметра и пересѣкающіяся на эллипсѣ, параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ; онѣ называются *дополнительными хордами*.

§ 252. *Задача*. Определить предѣлы, между которыми измѣняется уголъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ и построить два сопряженные діаметра, образующіе, между собой, данный уголъ?

Рѣшеніе. Проведемъ черезъ концы большой оси дополнительные хорды, которыхъ уравненія суть:

$$\frac{y}{b} = \lambda \left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

Пусть φ будетъ уголъ, составленный этими прямыми или сопряженными діаметрами параллельными хордамъ. Мы будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{b\lambda}{a} - \frac{b}{\lambda a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = -\frac{ab}{a^2 - b^2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

но:

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{y}{b}}{1 - \frac{x}{a}} + \frac{\frac{y}{b}}{1 + \frac{x}{a}} = \frac{\frac{2y}{b}}{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2b}{y}$$

слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2ab^2}{(a^2 - b^2)y} \quad (72)$$

когда y измѣняется отъ 0 до $+b$, то абсолютное значеніе втораго члена уменьшается и тупой уголъ φ увеличивается, онъ получаетъ значеніе maximum при $y = b$; при этомъ предѣлѣ имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2ab}{a^2 - b^2} \quad (73)$$

и соотвѣтствующіе діаметры параллельны дополнительнымъ хордамъ, опирающимся на концы малой оси.

Значеніе minimum угла φ , соотвѣтствующее $y = 0$, есть уголъ между осями, т. е. прямой.

Чтобы опредѣлить сопряженные діаметры составляющіе между собою данный уголъ, заключенный между предъидущими предѣлами, проводятъ черезъ центръ, какой-нибудь, діаметръ и описываютъ на этомъ діаметрѣ сегментъ, вмѣщающій данный уголъ. Окружность встрѣтитъ эллипсъ въ нѣкоторой точкѣ M . Діаметры параллельные дополнительнымъ хордамъ, которые опираются въ эту точку будутъ сопряженные и образуютъ между собой данный уголъ. Направленіе осей найдется также, описывая полуокружность на какомъ-нибудь діаметрѣ. Дополнительные хорды, соотвѣтствующія точкѣ пересѣченія круга и эллипса, перпендикулярны и параллельны осямъ кривой.)

Задача. Найти координаты (x_2, y_2) конца діаметра, сопряженнаго діаметру проходящему черезъ точку (x_1, y_1) .

Рѣшеніе. Очевидно онѣ найдутся опредѣляя x, y изъ уравненій:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

что даетъ:

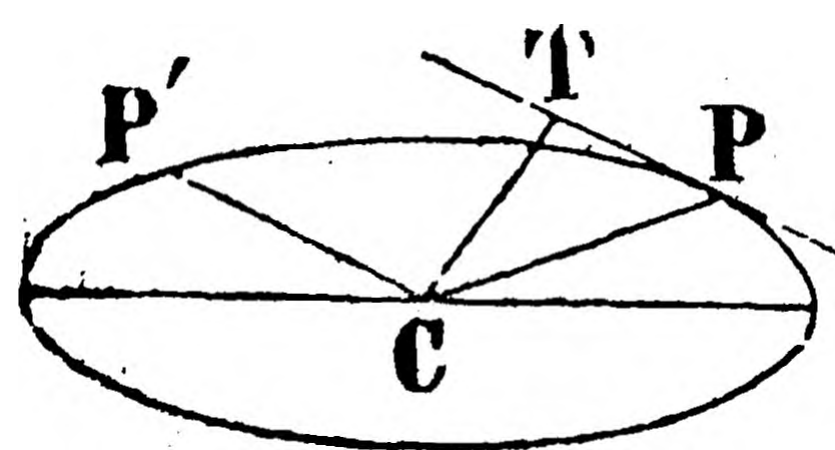
$$x_2 = \pm \frac{a}{b} y_1, \quad y_2 = \mp \frac{b}{a} x_1 \quad (74)$$

§ 253. Поляра и касательная. Уравненіе:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad (75)$$

будетъ поляра точки x_1, y_1 , полюса, если эта точка находится внѣ кривой.

Фиг. 97.



Если же эта точка находится на кривой, то это будетъ касательная.

Если это уравненіе сравнимъ съ уравненіемъ (71), то легко видѣть, что діаметръ сопряженный діаметру, проходящему черезъ точку x_1, y_1 параллеленъ касательной къ эллипсу въ точкѣ (x_1, y_1) $PT \parallel P'C$ (фиг. 97).

Въ § 16 мы видѣли, что координаты фокуса суть $(c, 0)$, а уравненіе директрисы, одной или другой:

$$x = \pm \frac{a^2}{c} \quad (76)$$

Если въ уравненіи (75) положимъ $x_1 = \pm c$, $y_1 = 0$, то найдемъ:

$$x = \pm \frac{a^2}{c}$$

т. е. поляра фокуса есть директриса. Слѣдовательно, всякая прямая, проходящая черезъ фокусъ дѣлится, кривою и директрисою гармонически.

§ 254. *Задача.* Найти уравненіе пары касательныхъ къ эллипсу, проведенныхъ чрезъ данную точку (x_1, y_1) ?

Рѣшеніе. Соображаясь съ (§ 208, 55), найдемъ:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2 \quad (77)$$

Если чрезъ φ означимъ уголъ составленный этими касательными, то будемъ имѣть (§ 176):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2ab \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1}}{x_1^2 + y_1^2 - a^2 - b^2} \quad (78)$$

Полагая:

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$$

будемъ имѣть $\varphi = \frac{\pi}{2}$, слѣдовательно геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія перпендикулярныхъ между собою касательныхъ къ эллипсу, есть кругъ. Вообще же геометрическое мѣсто будетъ кривая четвертой степени.)

§ 255. *Задача.* Найти длину перпендикуляра опущеннаго изъ центра эллипса на данную касательную въ точкѣ (x_1, y_1) ?

Рѣшеніе. Сравнивая уравненіе касательной:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad (79)$$

съ уравненіемъ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{\cos \alpha}{p}, \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{\sin \alpha}{p}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе эллипса, получимъ:

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha \quad (80)$$

Слѣдовательно уравненіе касательной будетъ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} = 0 \quad (81)$$

Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y') на касательную, очевидно будетъ:

$$x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} \quad (82)$$

Пр. 1. Если двѣ данныя параллельныя касательныя къ эллипсу пересѣкаются, какою-нибудь третею, то площадь прямоугольника построеннаго на отрѣзкахъ, отсѣкаемыхъ этой послѣдней касательной отъ первыхъ двухъ, есть величина постоянная?

Доказательство. Возьмемъ за координатныя оси діаметръ параллельный даннымъ касательнымъ и ему сопряженный, то уравненія эллипса и касательной будутъ:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad \frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{b_1^2} = 1$$

гдѣ a_1 и b_1 сопряженные полудіаметры. Полагая $x = a_1$ и $x = -a_1$ въ уравненіи касательной, найдемъ отрѣзки на данныхъ двухъ касательныхъ:

$$y = \frac{b_1^2}{y_1} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right), \quad y = \frac{b_1^2}{y_1} \left(1 + \frac{x_1}{a_1}\right)$$

коихъ произведеніе:

$$\frac{b_1^4}{y_1^2} \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}\right) = b_1^2$$

величина постоянная.

Пр. 2. Показать, что въ томъ же примѣрѣ площадь прямоугольника, построеннаго на отрѣзкахъ третьей касательной, равна квадрату полудіаметра параллельнаго этой касательной?

Рѣшеніе. Какъ и предъидущее.

Пр. 3. Если какая-нибудь касательная пересѣкаетъ два какіе-нибудь сопряженные діаметра, то площадь прямоугольника, построеннаго на ея отрѣзкахъ, равна квадрату ей параллельнаго полудіаметра?

Рѣшеніе. Уравненія какихъ-нибудь сопряженныхъ діаметровъ суть:

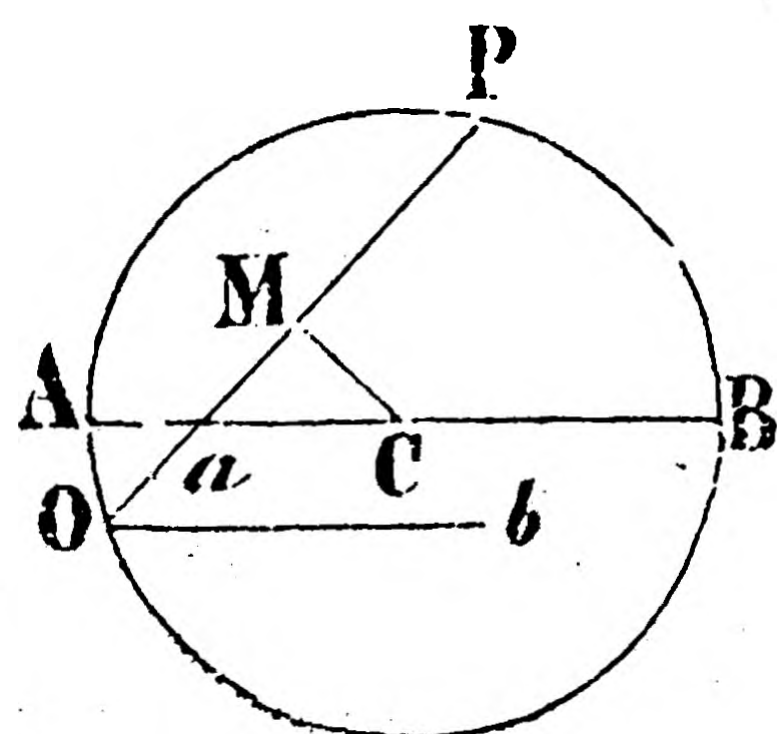
$$y = \frac{y_1}{x_1} x, \quad \frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{b_1^2} = 0$$

полагая $x = a_1$, найдемъ отрѣзки:

$$y = \frac{y_1}{x_1} a_1 \quad \text{и} \quad y = -\frac{b_1^2}{a_1} \frac{x_1}{y_1}$$

коихъ произведеніе равно b_1^2 .

Фиг. 98.



Пр. 4. Даны величина и положеніе двухъ сопряженныхъ полудіаметровъ Oa и Ob центрального конического сѣченія (фиг.98); опредѣлите положеніе осей?

Рѣшеніе. Черезъ конецъ a одного изъ діаметровъ проведемъ прямую параллельную другому, эта прямая будетъ касательная къ коническому сѣченію. На Oa возьмемъ точку P такъ, чтобы:

$$Oa \cdot aP = \overline{Ob}^2$$

и при томъ для эллипса на продолженіи Oa , а въ противо-

ложномъ направленіи для гиперболы. Опишемъ кругъ, имѣющій центръ на aC и проходящій чрезъ O и P . Очевидно OA и OB будутъ искомыя оси кривой. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$Aa \cdot aB = Oa \cdot aP = \overline{Ob}^2$$

слѣдовательно OA и OB суть сопряженные діаметры, а такъ какъ они перпендикулярны (AB есть діаметръ круга), то это оси кривой.

§ 256. *Нормаль*. Если чрезъ точку касанія $(x_1 y_1)$ касательной:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad (83)$$

проведемъ прямую перпендикулярную къ касательной, то эта прямая называется *нормалью*. Уравненіе ея, очевидно, будетъ:

$$\frac{x_1}{a^2}(y - y_1) = \frac{y_1}{b^2}(x - x_1)$$

или:

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = c^2 \quad (84)$$

гдѣ:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Задача. Изъ данной точки, внѣ эллипса провести нормаль?

Рѣшеніе. Пусть искомая точка на эллипсѣ будетъ (x_1, y_1) . Координаты этой точки должны удовлетворять двумъ уравненіямъ: уравненію эллипса и уравненію нормали:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{a^2x_1}{x} - \frac{b^2y_1}{y} = c^2$$

или:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2xy = a^2x_1y - b^2y_1x$$

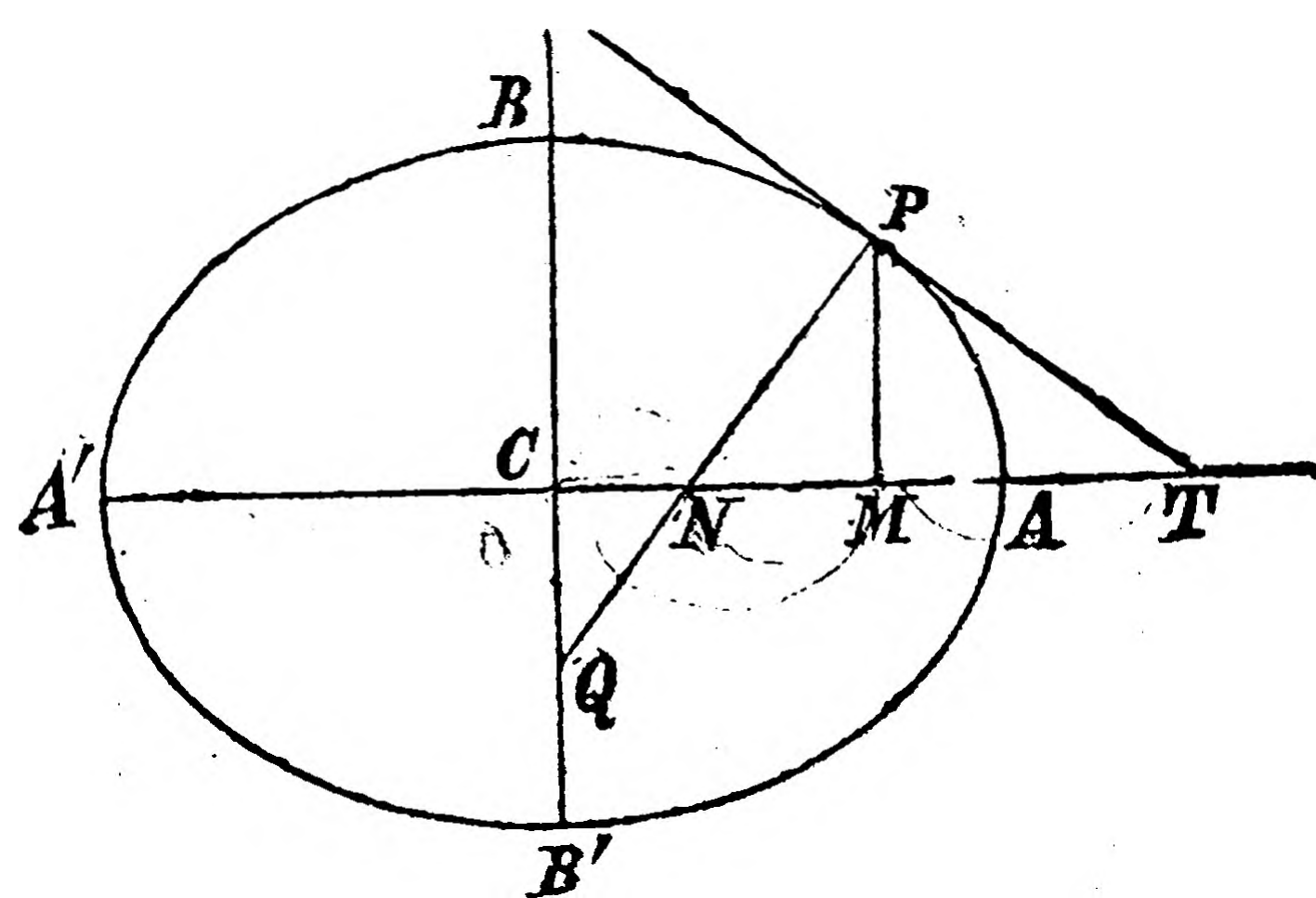
Но послѣднее уравненіе есть гипербола, слѣдовательно пересѣченіе этой гиперболы съ даннымъ эллипсомъ даетъ искомыя точки.

Если въ нормали (84) сдѣлаемъ $y=0$, то найдемъ отрѣзокъ CN (фиг. 99) на оси x :

$$CN = \frac{c^2}{a^2} x_1 = c^2 x_1 \quad (85)$$

изъ этого уравненія, имѣя отрѣзокъ CN , найдемъ абсциссу x_1 , а слѣдовательно и точку на эллипсѣ, которую соединяя съ N будемъ имѣть нормаль.

Фиг. 99.



Отрѣзокъ MN называется *поднормалью* (subnormal). Его длина, очевидно будетъ:

$$MN = x_1 - CN = x_1 - e^2 x_1 = x_1(1 - e^2) = \frac{b^2}{a^2} x_1 \quad (86)$$

Если касательная PT встрѣчаетъ ось x въ T , то отрѣзокъ MT называется *подкасательной* (subtangens). Такъ какъ $CT = \frac{a^2}{x_1}$ (79), то:

$$MT = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1} \quad (87)$$

Длина нормали NP будетъ (§ 249, 65):

$$\overline{NP}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{NM}^2 = y_1^2 + \frac{b^4}{a^4} x_1^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{b^2} y_1^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2 \right) = \frac{b^2 b_1^2}{a^2}$$

откуда:

$$NP = \frac{bb_1}{a} \quad (88)$$

Легко показать также, что отрѣзокъ PQ :

$$PQ = \frac{ab_1}{b} \quad (89)$$

откуда:

$$NP \cdot PQ = b^2_1 \quad (90)$$

Мы выше (§ 249, 62) показали, что перпендикуляръ изъ центра на касательную:

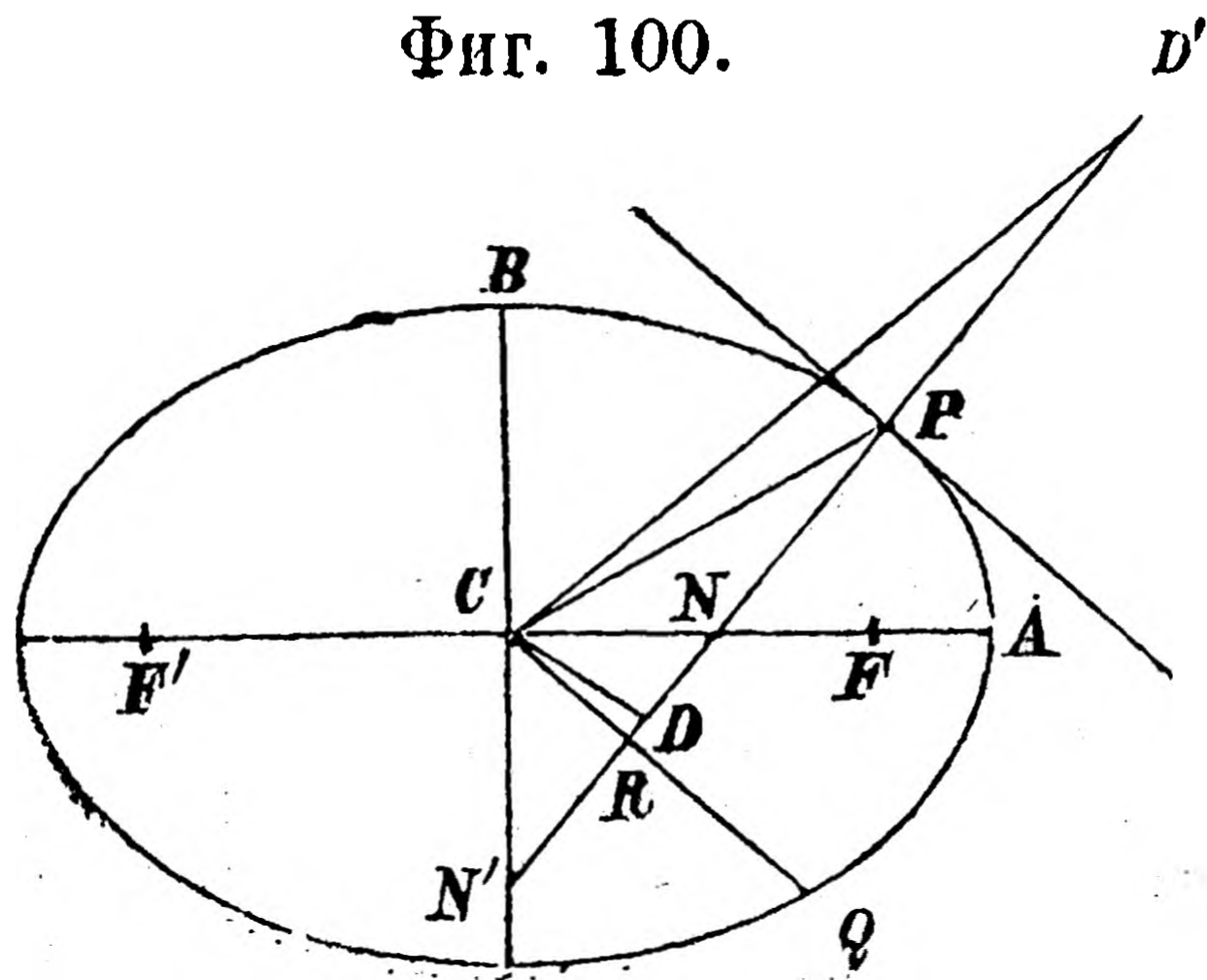
$$p = \frac{ab}{b_1}$$

откуда:

$$p \cdot NP = b^2 \quad (91)$$

величина постоянная.

Фиг. 100.



§ 257. Пусть CP и CQ будутъ два сопряженные полудіаметра, пусть нормаль PN пересѣкаетъ CQ въ точкѣ R . Отложимъ на нормали отъ точки P , отрѣзки PD и PD' , оба равные CQ , то длины отрѣзковъ CD и CD' будутъ $a - b$, $a + b$.

Такъ какъ:

$$\overline{CD}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PD}^2 + 2PD \cdot PR$$

а $\overline{CP}^2 + \overline{PD}^2 = a^2 + b^2$ (§ 249, 64)

и $2PD' \cdot PQ = 2ab$

слѣдовательно $CD' = a + b$. Точно также найдемъ, что $CD = a - b$. Откуда $\overline{CD}^2 = (a + b)^2$. Точно также и для CD . Большая ось дѣлитъ уголъ DCD' пополамъ. Имѣемъ:

$$D'N = D'P + PN = b_1 + \frac{bb_1}{a} = \frac{b_1}{a}(a + b)$$

Подобнымъ образомъ:

$$DN = \frac{b_1}{a}(a - b)$$

Слѣдовательно основаніе DD' треугольника DCD' въ точкѣ N раздѣлено въ отношеніи сторонъ, откуда видимъ, что CN есть внутренняя равнодѣлящая уголъ DCD' . Точно также можно показать, что CN' есть равнодѣлящая уголъ внѣшній.

Откуда имѣемъ слѣдующее построеніе: Даны два сопряженные полудіаметра CP и CQ , какъ по величинѣ, такъ и по положенію, построить какъ величину, такъ и положеніе осей?

Изъ точки P опустимъ перпендикуляръ PR на CQ , отложимъ отрѣзки PD и PD' равные CQ , то направленіе осей будутъ равнодѣлящія уголъ DCD' , а величина будетъ сумма и разность CD и CD' .

§ 258. Свойства фокусовъ. Въ § 13 видѣли, что фокусы эллипса суть двѣ точки, сумма разстояній коихъ отъ точекъ на эллипсѣ есть величина постоянная и равна большой оси эллипса. Если ось есть $2a$, а разстояніе между фокусами $2c$, то мы нашли § 13:

$$FP = a - cx \quad , \quad F'P = a + cx$$

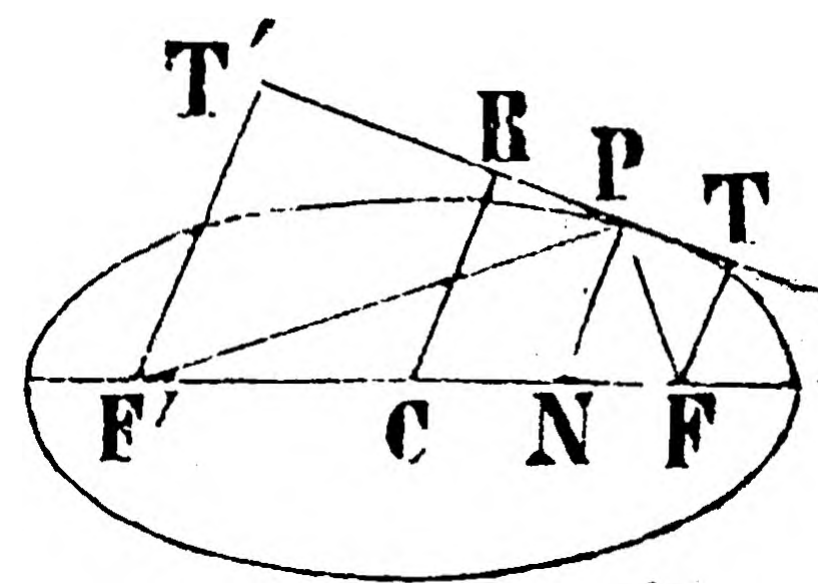
F и F' фокусы (фиг. 101), $c^2 = a^2 - b^2$, $c = ae$.

Этимъ свойствомъ эллипса пользуются для его черченія непрерывнымъ движеніемъ.

Для этого берутъ нитку, коей длина равна большой оси и концы ея укрѣпляютъ въ фокусахъ F и F' , разстояніе $FF' = 2c < 2a$. Затѣмъ захватываютъ нитку карандашомъ и натягивая ее двигаютъ карандашъ, очевидно, онъ скользя по бумагѣ, начертитъ эллипсъ, большая ось котораго будетъ $2a$, а малая ось $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

§ 259. Задача. Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ фокуса эллипса на касательную въ точкѣ (x_1, y_1) ?

Фиг. 101.



Рѣшеніе. Уравненіе касательной въ точкѣ $P(x_1, y_1)$ есть (фиг. 101):

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

это уравненіе, написанное въ нормальной формѣ, будетъ:

$$\frac{\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = 0$$

подставляя въ это уравненіе координаты фокусовъ $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ найдемъ искомую длину. Назовемъ чрезъ p_1 длину перпендикуляра изъ фокуса $F(c, 0)$, а чрезъ p_2 изъ фокуса $F'(-c, 0)$, на касательную, то будемъ имѣть:

$$p_1 = \frac{cx_1 - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}, \quad p_2 = \frac{cx_1 + 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}$$

Выраженія эти можно написать въ формѣ:

$$p_1 = \frac{ab(1 - cx_1)}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x_1^2 + \frac{a^2}{b^2}y_1^2}}, \quad p_2 = \frac{ab(1 + cx_1)}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x_1^2 + \frac{a^2}{b^2}y_1^2}}$$

Въ § 252, 74 видѣли, что координаты x_2, y_2 конца сопряженнаго діаметра, діаметру проходящему чрезъ точку (x_1, y_1) , суть:

$$x_2 = \pm \frac{a}{b} y_1, \quad y_2 = \mp \frac{b}{a} x_1$$

но длина этого діаметра $b_1^2 = x_2^2 + y_2^2$, слѣдовательно:

$$b_1^2 = \frac{a^2}{b^2} y_1^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2 = a^2 - e^2 x_1^2$$

откуда:

$$p_1 = \frac{ab}{b_1} (ex_1 - 1), \quad p_2 = \frac{ab}{b_1} (ex_1 + 1)$$

или:

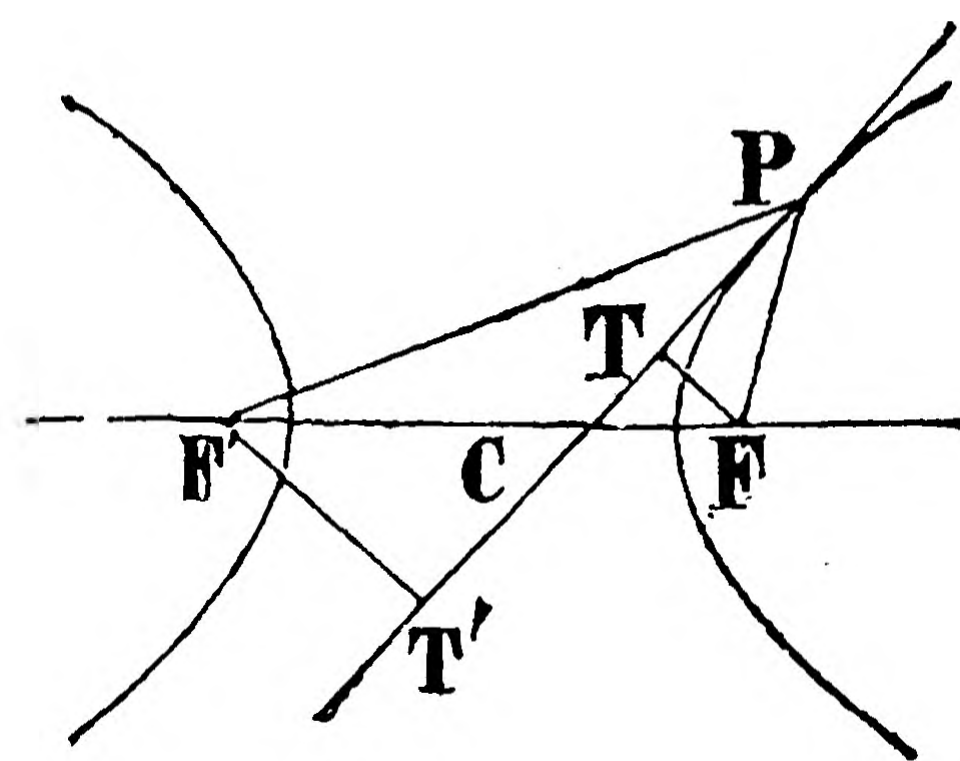
$$p_1 = \frac{b}{b_1} (a - ex_1), \quad p_2 = \frac{b}{b_1} (a + ex_1)$$

Таковы искомыя выраженія.

Перемножая, найдемъ:

$$p_1 p_2 = \frac{b^2}{b_1^2} (a^2 - e^2 x_1^2) = b^2 \quad (92)$$

т. е. прямоугольникъ построенный на перпендикулярахъ p_1 и p_2 изъ фокусовъ F и F' на касательную есть величина постоянная и равна квадрату малой полуоси. Тоже имѣетъ мѣсто и для гиперболы (фиг. 102). Фиг. 102.



Означимъ черезъ r_1 и r_2 радиусы векторы FP и $F'P$ эллипса (фиг. 101), то какъ выше:

$$p_1 = \frac{b}{b_1} r_1, \quad p_2 = \frac{b}{b_1} r_2 \quad (93)$$

откуда:

$$\frac{p_1}{r_1} = \frac{p_2}{r_2} = \frac{b}{b_1} = \sin FPT = \sin F'PT'$$

слѣдовательно:

$$\angle FPT = \angle F'PT' \quad (94)$$

откуда видимъ, что углы, составляемые радиусами векторами, проведенными изъ фокусовъ въ точку касанія, составляютъ равные углы съ касательной. Тоже имѣетъ мѣсто и для гиперболы (фиг. 102).

Определение. Два коническія сѣченія, имѣющія общіе фокусы, называются *софокусными*.

Пр. 1. Показать что два софокусные эллипса пересекаются подъ прямымъ угломъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія двухъ данныхъ эллипсовъ будутъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

если они софокусны, то $a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2 = c^2$. Координаты x_1, y_1 общихъ точекъ пересѣченія, удовлетворяя предыдущія уравненія, удовлетворяютъ и ихъ разности:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} = 0$$

или:

$$\frac{(a^2 - a_1^2)x_1^2}{a^2 a_1^2} + \frac{(b^2 - b_1^2)y_1^2}{b^2 b_1^2} = 0$$

но $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2$, слѣдовательно:

$$\frac{x_1^2}{a^2 a_1^2} + \frac{y_1^2}{b^2 b_1^2} = 0$$

но легко видѣть, что это есть условіе перпендикулярности касательныхъ:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1 x}{a_1^2} + \frac{y_1 y}{b_1^2} = 1$$

къ эллипсамъ въ общей точкѣ пересѣченія.

Пр. 2. Найти длину прямой, проведенной изъ центра, параллельно фокусному радиусу, и оканчивающейся въ точкѣ пересѣченія съ касательной?

Рѣшеніе. Если въ уравненіи касательной, написанной въ нормальной формѣ, положимъ $x = 0$, $y = 0$, то будемъ имѣть длину перпендикуляра, опущеннаго изъ центра на касательную:

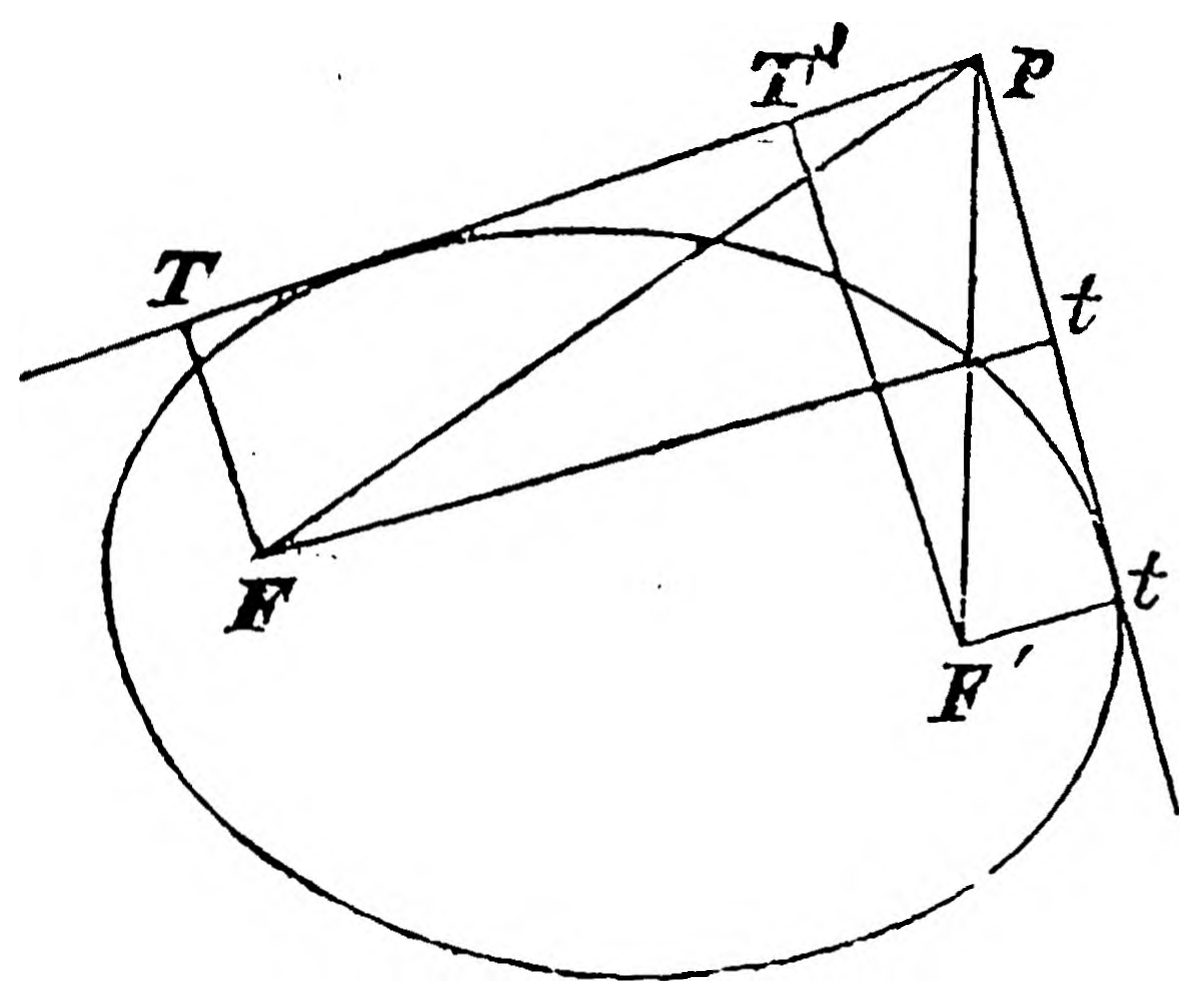
$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} x_1^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2}} = \frac{ab}{b_1}$$

раздѣляя это выраженіе на синусъ угла, который касательная составляетъ съ фокуснымъ радіусомъ, а этотъ синусъ $= \frac{b}{b_1}$, будемъ имѣть a .

Пр. 3. Провести нормаль къ эллипсу изъ какой-нибудь точки на малой оси.

Отв. Кругъ проведенный чрезъ данную точку и чрезъ фокусы пересѣкаетъ кривую въ искомой точкѣ.

Фиг. 103.



§ 260. Изъ того свойства, что прямоугольникъ построенный на перпендикулярахъ изъ фокусовъ на касательную (§ 259, 92) есть величина постоянная, мы выведемъ еще весьма важное свойство эллипса.

Выше видѣли (§ 259), что:

$$FT \cdot F'T' = b^2$$

слѣдовательно, если возьмемъ какую-нибудь другую касательную, то будемъ имѣть:

$$FT \cdot F'T' = Ft \cdot F't' \quad \text{или} \quad \frac{FT}{Ft} = \frac{F't'}{F'T'}$$

Но $\frac{FT}{Ft}$ есть отношеніе синусовъ угловъ, на которые прямая FP дѣлитъ уголъ P , и $\frac{F't'}{F'T'}$ есть отношеніе синусовъ угловъ, на которые прямая $F'P$ дѣлитъ уголъ P , слѣдовательно имѣемъ:

$$\angle TPF = \angle t'PF' \quad (95)$$

Если представимъ, что коническое сѣченіе проходитъ чрезъ точку P , имѣя фокусами F и F' , то было показано выше, что касательная одинаково наклонена къ FP и $F'P$; слѣдовательно по настоящему свойству онѣ должны быть и одинаково наклонены къ PT и Pt . Откуда видимъ, что если чрезъ какую-нибудь точку P на коническомъ сѣченіи проведемъ касательныя PT' и Pt къ софокусному коническому сѣченію, то эти касательныя будутъ составлять равные углы съ касательной въ точкѣ P .

261 (Задача. Найти геометрическое мѣсто основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ какого-нибудь фокуса, на касательную?)

Рѣшеніе. Перпендикуляръ изъ фокуса, какъ видѣли выше (82), выражается чрезъ уголь, который онъ составляетъ съ осью:

$$\rho = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} - x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

полагая въ этомъ уравненіи $x' = c$, $y' = 0$ получимъ полярное уравненіе геометрическаго мѣста:

$$\rho = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} - c \cdot \cos \alpha$$

или:

$$\rho^2 + 2c\rho \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha$$

или:

$$\rho^2 + 2c\rho \cos \alpha = b^2$$

а это очевидно полярное уравненіе круга, коего центръ находится на оси x на разстояніи c отъ фокуса. Слѣдовательно кругъ концентрическій съ коническимъ сѣченіемъ. Радиусъ круга очевидно есть a .

Слѣдствіе 1. Если опишемъ кругъ на оси $2a$, какъ на діаметрѣ эллипса, то перпендикуляръ, опущенный изъ фокуса на касательную, встрѣчаетъ касательную на окружности этого круга.

Слѣдствіе 2. Обратнo, если изъ какой-нибудь точки F (фиг. 103) проведемъ радиусъ векторъ FT къ данному кругу и проведемъ TP перпендикулярно къ FT , то TP будетъ всегда касаться коническаго сѣченія имѣющаго фокусомъ F и которое будетъ эллипсъ или гипербола, смотря потому будетъ ли точка F внутри или внѣ круга.

§ 262. *Задача.* Къ центральному коническому сѣченію изъ данной точки проведена касательная, найти уголь, коего вершина находится въ фокусѣ, а стороны проходятъ чрезъ данную точку и чрезъ точку касанія?

Рѣшеніе. Пусть данная точка будетъ (x, y) , и точка касанія (x_1, y_1) . Пусть начало координатъ будетъ въ центрѣ; если радиусы, проведенные изъ фокуса F въ точки (x, y) и (x_1, y_1) будутъ ρ и ρ_1 , а углы, которые они составляютъ съ осью x , φ и φ_1 , то очевидно:

$$\cos \varphi = \frac{x + c}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{x_1 + c}{\rho_1}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{y_1}{\rho_1}$$

откуда:

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{(x + c)(x_1 + c) + yy_1}{\rho\rho_1}$$

подставляя въ уравненіе касательной:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

выраженіе для yy_1 , найдемъ:

$$\begin{aligned} \rho\rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1) &= xx_1 + cx + cx_1 + c^2 - \frac{b^2}{a^2}xx_1 + b^2 = \\ &= e^2xx_1 + cx + cx_1 + a^2 = (a + ex)(a + ex_1) \end{aligned}$$

но такъ какъ $\rho_1 = a + ex_1$, то:

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{a + ex}{\rho}$$

это выраженіе не заключаетъ координатъ точки касанія, а только координаты (x, y) , слѣдовательно углы для обѣихъ касательныхъ, проведенныхъ изъ точки (x, y) , равны. Откуда слѣдуетъ, что уголъ, составляемый прямыми, проведенными изъ фокуса къ концамъ какой-нибудь хорды, дѣлится пополамъ прямою, соединяющею фокусъ съ полюсомъ этой хорды.

§ 263. *Предложеніе.* Прямая, соединяющая фокусъ съ полюсомъ хорды чрезъ него проходящей, перпендикулярна къ этой хордѣ.

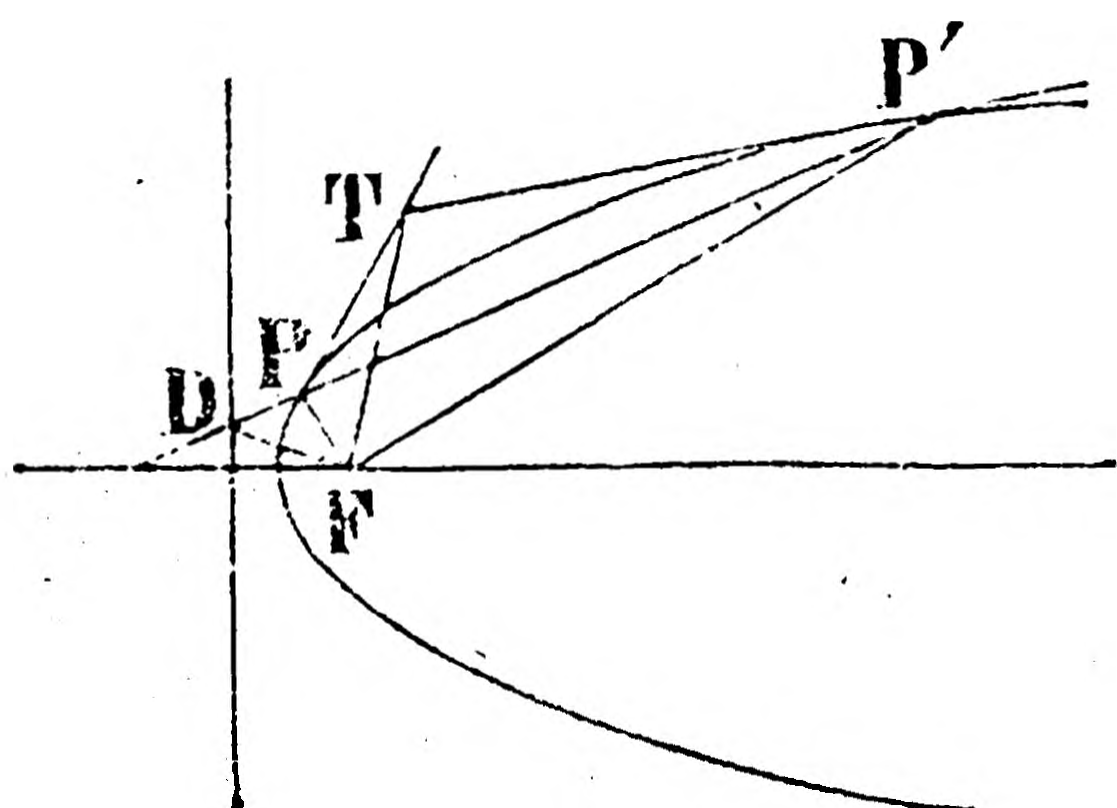
Доказательство. Это легко видѣть изъ предыдущаго §, такъ какъ въ этомъ случаѣ уголъ $\varphi - \varphi_1 = 180^\circ$.

Если кривая выражена въ полярныхъ координатахъ, то часть отсѣченная касательной на перпендикулярѣ къ радіусу вектору, проведенному чрезъ полюсъ, называется полярной подкасательной (subtangens). Въ силу такого опредѣленія настоящее предложеніе можно выразить такъ: Если фокусъ будетъ полюсъ, то геометрическое мѣсто концовъ полярныхъ подкасательныхъ есть директриса.

Пр. 1. Показать, что уголъ составляемый прямыми проведенными чрезъ фокусъ къ точкамъ перемѣнной касательной съ двумя данными касательными, есть величина постоянная.

Рѣшеніе. По задачѣ § 262 уголъ этотъ равенъ половинѣ угла составляемаго прямыми проведенными чрезъ фокусъ къ концамъ хорды соприкосновенія данныхъ двухъ касательныхъ.

Фиг. 104.



Пр. 2. Если какая-нибудь хорда PP' пересѣкаетъ директрису въ точкѣ D , то FT есть внѣшняя равнодѣлящая уголъ FPF' . Въ самомъ дѣлѣ (§ 262) FT есть внутренняя равнодѣлящая, но D есть полюсъ FT (такъ какъ D есть пересѣченіе PP' полярны T съ директрисой, которая есть полярны F), слѣдовательно $DF \perp FT$, а это показываетъ, что DF есть внѣшняя равнодѣлящая.

Пр. 3. Если изъ какой-нибудь точки взятой на данномъ перпендикулярѣ къ оси, опустимъ перпендикуляръ на полярну взятой

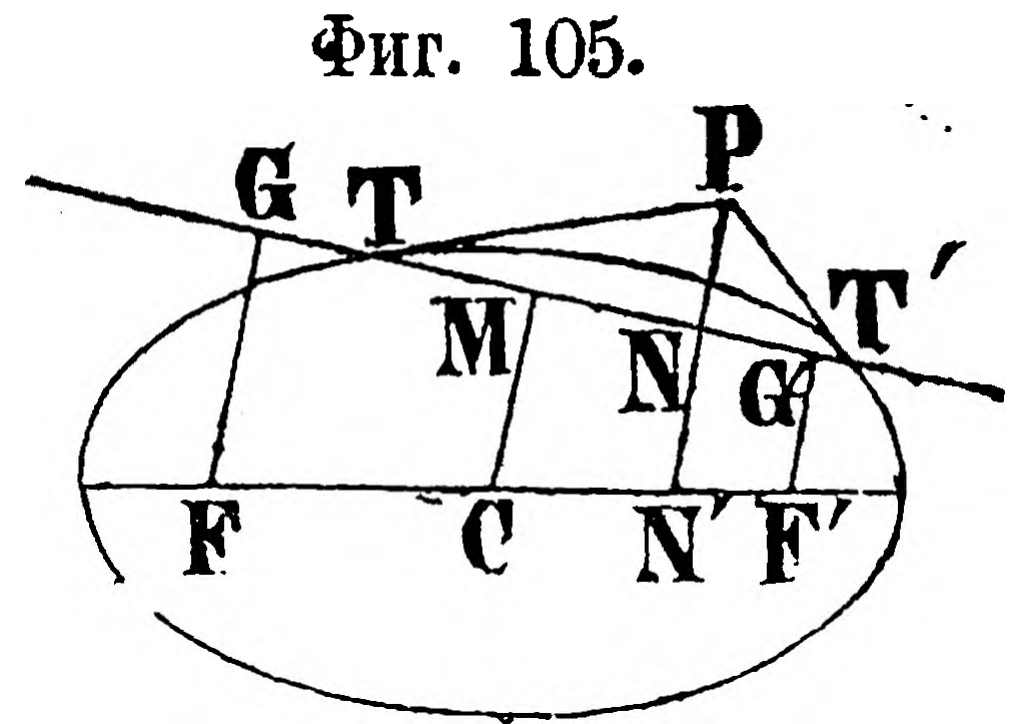
точки, то его геометрическое мѣсто есть точка на оси. Это слѣдуетъ изъ того, что отрѣзокъ дѣлаемый перпендикуляромъ на оси есть e^2x_1 — величина постоянная, если x_1 неизмѣняется.

Пр. 4. Найти длину перпендикуляровъ изъ центра и фокуса на полярѣ точки (x_1, y_1) ?

Пр. 5. Показать, что $CM.PN' = b^2$?

Пр. 6. Показать, что (фиг. 105):

$$PN'.NN' = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - e^2x_1^2)$$



Если точка P находится на кривой, то это будетъ длина нормали, именно (88):

$$PN = \frac{bb_1}{a}$$

Пр. 7. Показать, что (фиг. 105):

$$FG.F'G' = CM.NN'$$

Если P на кривой, то:

$$FG.F'G' = b^2 \quad (96)$$

§ 264. *Задача.* Найти уравненіе эллипса или гиперболы, принявъ за полюсь фокусъ?

Рѣшеніе. Извѣстно изъ § 13, что фокусный радіусъ векторъ:

$$r = a - ex$$

а x , считая отъ центра:

$$x = r \cos \varphi + c = r \cos \varphi + ae$$

откуда:

$$r = a - e \cos \varphi \cdot r - ae^2$$

или:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e \cos \varphi} \quad (97)$$

эллипсъ или гиперболу, смотря потому будетъ-ли $e < 1$ или $e > 1$.

Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ $\varphi = 90^\circ$, то получимъ ординату соответствующую фокусу, именно:

$$r = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}$$

Эту ординату означаютъ чрезъ p и называютъ *параметромъ* конического сѣченія, слѣдовательно уравненіе будетъ:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (98)$$

Пр. 1. Показать, что средне-гармоническій отрѣзокъ между отрѣзками фокусной хорды есть величина постоянная и равна полупараметру?

Рѣшеніе. Выше видѣли (98), что:

$$F'P = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (a)$$

Если этотъ радіусъ продолжимъ въ противоположную сторону до встрѣчи съ кривою въ точкѣ P' , то получимъ его длину, полагая въ (a) $\varphi + 180^\circ$ вмѣсто φ , что даетъ:

$$T'P' = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

откуда:

$$\frac{1}{T'P} + \frac{1}{T'P'} = \frac{2}{p} \quad (99)$$

Пр. 2. Произведеніе изъ отрѣзковъ фокусной хорды пропорціонально цѣлой хордѣ?

Рѣшеніе. Перемножая и складывая уравненія предыдущаго примѣра, найдемъ:

$$F'P \cdot T'P' = \frac{b^4}{a^2} \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}, \quad F'P + T'P' = \frac{2b^2}{a} \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}$$

откуда и слѣдуетъ сказанное свойство.

Пр. 3. Сумма фокусныхъ хордъ, параллельныхъ сопряженнымъ діаметрамъ, есть величина постоянная?

§ 265. Уравненіе эллипса, отнесенное къ его вершинѣ, очевидно, есть:

$$\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

или:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad (100)$$

Уравненіе гиперболы будетъ:

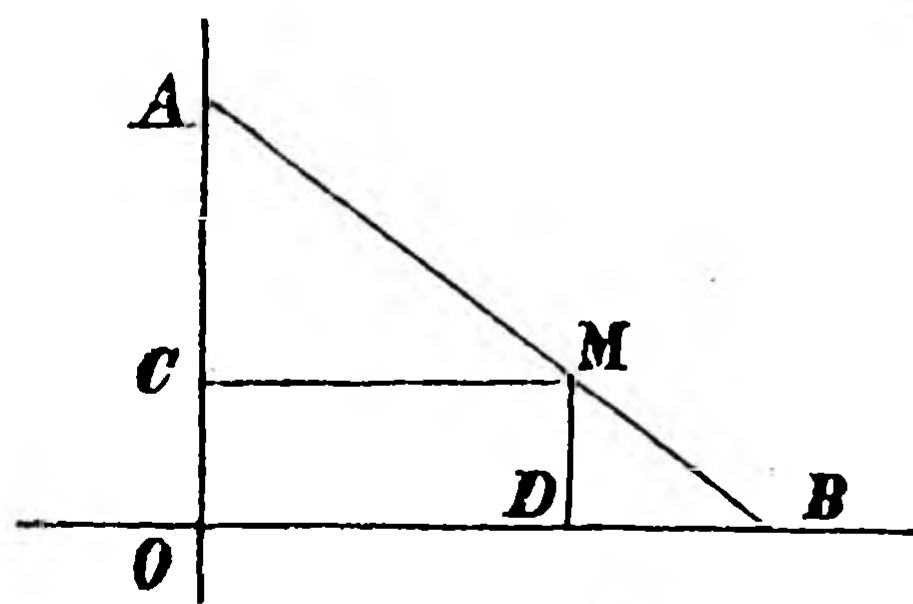
$$y = 2px + \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad (101)$$

Въ параболѣ:

$$y = 2px \quad (102)$$

Изъ этихъ свойствъ и произошли названія эллипса (недостатокъ— $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\psi\iota\varsigma$), гиперболы (избытокъ— $\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\omicron\lambda\eta$) и параболы (равенство— $\pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta$).

Фиг. 106.



§ 266. *Предложеніе.* Если прямая AB , постоянной длины, скользитъ концами на двухъ прямоугольныхъ осяхъ, то какая-нибудь, точка M этой прямой (фиг. 106), находящаяся на разстояніяхъ a и b отъ ея концовъ, опишетъ эллипсъ, коего оси суть $2a$ и $2b$.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, пусть AB будетъ одно изъ положеній скользящей прямой.

Если:

$$AM = a, MB = b, OD = CM = x, OC = MD = y$$

и

$$\angle AMC = \angle MBO = \varphi$$

то имѣемъ, очевидно:

$$CM = x = a \cdot \cos \varphi, \quad MD = y = b \cdot \sin \varphi$$

откуда:

$$\frac{x}{a} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin \varphi$$

возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ эллипсъ:

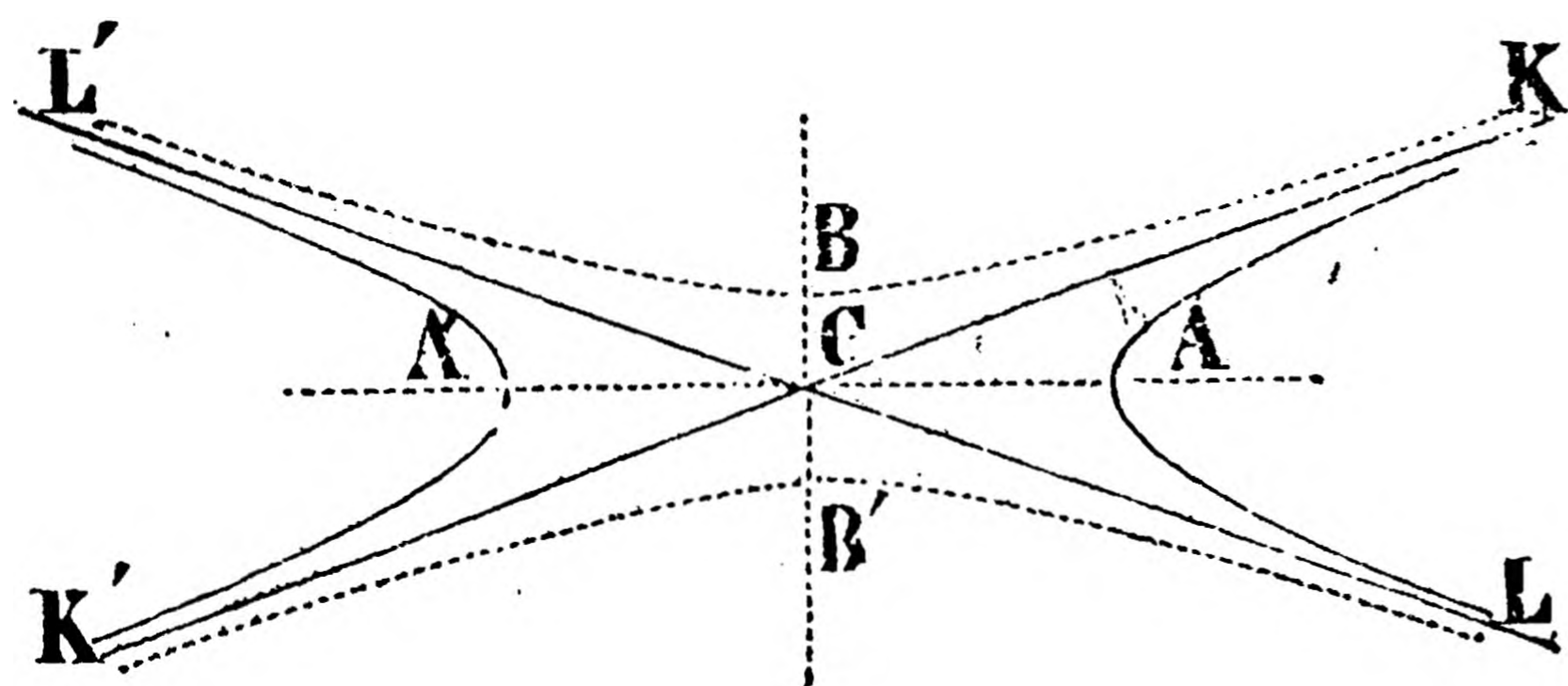
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Легко также показать, что какая-нибудь точка, находящаяся на продолженіи прямой AB , опишетъ также эллипсъ. На основаніи этой теоремы устраиваютъ *эллипсографы*.

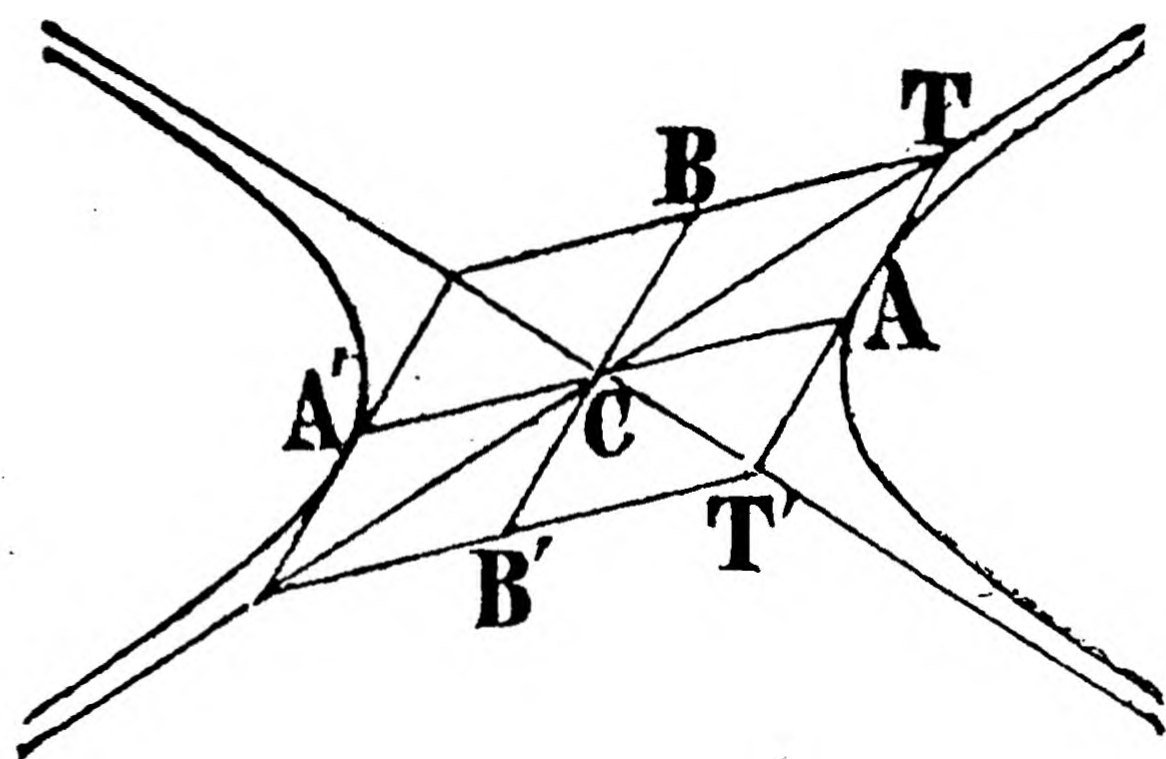
Гипербола.

§ 267. Выше замѣтили, что если въ уравненіи эллипса измѣнить b на bi , то получится уравненіе гиперболы (фиг. 107), отнесенной къ осямъ, а измѣняя b_1 на b_1i въ уравненіе эллипса, отнесеннаго къ сопряженнымъ

Фиг. 107.



Фиг. 108.



діаметрамъ, получимъ уравненіе гиперболы, отнесенной также къ парѣ сопряженныхъ діаметровъ. Вслѣдствіи такого замѣчанія, изъ различныхъ свойствъ эллипса получимъ свойства гиперболы (фиг. 108). Если въ уравненіяхъ (56) и (57) § 248 измѣнимъ b на bi , то найдемъ:

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{a^2} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{b^2} = 0$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2} \tag{103}$$

слѣдовательно въ гиперболѣ углы α и β оба острые или оба тупые, т. е. сопряженные діаметры лежатъ съ одной стороны сопряженной оси. Если $\operatorname{tg} \alpha < \frac{b}{a}$, то $\operatorname{tg} \beta > \frac{b}{a}$, но уголь, коего $\operatorname{tg} = \frac{b}{a}$ соотвѣтствуетъ асимптотѣ, которая отдѣляетъ діаметры, встрѣчающіе кривую, отъ діаметровъ не встрѣчающихъ, слѣдовательно, если одинъ изъ сопряженныхъ діаметровъ встрѣчаетъ кривую, то другой ее не встрѣчаетъ. Отсюда же видно, какъ и было замѣчено выше, что асимптота есть сама себѣ сопряженный діаметръ.

Въ гиперболѣ имѣемъ:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos \varphi \quad (104)$$

слѣдовательно, здѣсь относительно угла φ не можетъ быть, какъ въ эллипсѣ, никакого ограниченія; уголь φ можетъ быть и равенъ нулю, т. е. сопряженные діаметры могутъ совпадать и мы знаемъ, какъ выше уже было замѣчено, что такіе сопряженные діаметры суть асимптоты.

Какъ въ эллипсѣ, такъ и въ гиперболѣ имѣемъ:

$$a_1 b_1 \sin \varphi = ab \quad (105)$$

такъ какъ это уравненіе не измѣняется замѣщеніемъ b_1 и b выраженіями bi_1 и bi .

Наконецъ имѣемъ еще изъ (64) § 249:

$$a^2_1 - b^2_2 = a^2 - b^2 \quad (106)$$

т. е. въ гиперболѣ разность квадратовъ сопряженныхъ діаметровъ есть величина постоянная.

Если $(x_1 y_1)$ есть точка, въ которой, какой нибудь, діаметръ встрѣчаетъ гиперболу, то уравненіе сопряженнаго діаметра будетъ:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 0$$

Если будемъ искать пересѣченіе этого діаметра съ кривою, то найдемъ:

$$x = \pm \frac{ay_1}{b} i, \quad y = \pm \frac{bx_1}{a} i \quad (107)$$

величины мнимыя, т. е. діаметръ сопряженный діаметру, встрѣчающему кривую, не встрѣчаетъ ее.

§ 268. Если уравнение гиперболы напишемъ въ формѣ:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \left(\frac{x}{a} - 1\right) \left(\frac{x}{a} + 1\right)$$

и положимъ:

$$\frac{y}{b} = \lambda \left(\frac{x}{a} - 1\right), \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{a} + 1\right) \quad (108)$$

то эти двѣ прямыя, проходя черезъ оконечности $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ оси $2a$, пересѣкаются на кривой, такъ какъ перемножая эти два уравненія, найдемъ уравненіе гиперболы.

Если назовемъ черезъ α и β углы, которые эти прямыя составляютъ съ осью x , то найдемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda b}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{\lambda a}$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2}$$

слѣдовательно эти прямыя параллельны парѣ сопряженныхъ діаметровъ. Отрѣзки y_1 и y_2 , которые дѣлаютъ эти прямыя на оси b , получатся, полагая въ уравненіяхъ (108) $x = 0$:

$$y_1 = -\lambda b, \quad y_2 = \frac{b}{\lambda} \quad (109)$$

произведеніе этихъ отрѣзковъ будетъ:

$$y_1 y_2 = -b^2$$

Съ помощью этого свойства можно, по даннымъ осямъ гиперболы, построить сколько угодно ея точекъ.

Легко также построить, какъ мы показали для эллипса, діаметръ сопряженный данному.

Уголъ между прямыми (108), очевидно, дается уравненіемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2ab^2}{(a^2 + b^2)y}$$

Когда y возрастаетъ отъ 0 до ∞ , уголъ φ уменьшается отъ $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Съ помощью этой формулы, по данному острому углу можно всегда построить, какъ сказано относительно эллипса (§ 252), два сопряженные діаметра, составляющіе уголъ равный данному.

§ 269. Поляра и касательная. Въ полярѣ эллипса, измѣняя b на bi получимъ полярю гиперболы:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad (110)$$

Если точка x_1y_1 находится на кривой, то это будетъ касательная.

Нормалью къ ней въ точкѣ (x_1y_1) , очевидно, будетъ:

$$\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = c^2 \quad (111)$$

гдѣ:

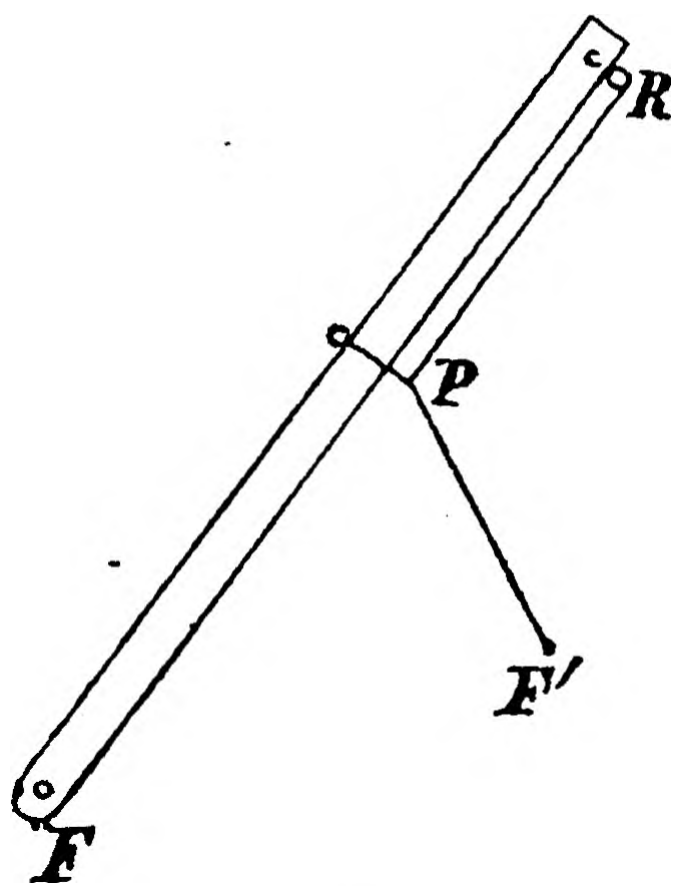
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Легко также видѣть, что директриса есть полярю фокуса.

Разсматривая формулы 88, 89, 90 и 91 мы видимъ, что онѣ имѣютъ мѣсто и для гиперболы.

Такъ какъ въ гиперболѣ разность разстояній каждой ея точки отъ двухъ данныхъ точекъ (фокусовъ) есть величина постоянная (§ 14), то чертить гиперболу можно слѣдующимъ образомъ.

Фиг. 109.



Укрѣпимъ линейку FR около точки F , такъ чтобы она могла вращаться около F . Къ другому концу R линейки прикрѣпимъ нитку, коей другой конецъ прикрѣпимъ въ точкѣ F' . Захватимъ конецъ R нитки карандашомъ и будемъ его вестъ такъ, чтобы онъ скользилъ по линейкѣ и бумагѣ, наклоняя линейку FR , около точки F (фиг. 109). Очевидно, точка P опишетъ гиперболу, въ которой разность между длинами FP и $F'P$ линейки и нитки есть дѣйствительная ось гиперболы.

§ 270. Ассимптоты. Мы видѣли, что ассимптоты гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (112)$$

суть:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

или:

$$bx - ay = 0 \quad , \quad bx + ay = 0$$

Уравненіе гиперболы (112) можно написать въ формѣ:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$$

или:

$$(bx - ay)(bx + ay) = a^2b^2$$

или, раздѣляя обѣ части на $a^2 + b^2$:

$$\frac{bx - ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \quad (113)$$

Но, множители первой части суть перпендикуляры, опущенные изъ какой-нибудь точки кривой на ассимптоты, слѣдовательно, если ихъ означимъ черезъ p_1 и p_2 , то будемъ имѣть:

$$p_1 p_2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \quad (114)$$

Уголъ, который ассимптоты составляютъ съ осью x опредѣлится уравненіемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

слѣдовательно уголъ между ассимптотами будетъ вдвое больше и будемъ имѣть:

$$\sin 2\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \quad (115)$$

Если теперь возьмемъ ассимптоты за координатныя оси, то легко видѣть, что:

$$p_1 = x \sin 2\alpha, \quad p_2 = y \sin 2\alpha$$

или:

$$p_1 = x \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad p_2 = y \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (114), найдемъ:

$$4xy \frac{a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

откуда:

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

Если означимъ $\frac{a^2 + b^2}{4} = k^2$, то получимъ уравненіе гиперболы, отнесенной къ ассимптотамъ:

$$\underline{xy = k^2} \quad (116)$$

Это самая простая форма уравненія гиперболы,

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что параллелограмъ, образованный прямыми, проведенными черезъ, какую-нибудь, точку гиперболы, параллельно ассимптотамъ имѣетъ постоянную площадь. Эта площадь равна площади квадрата, построеннаго на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$.

§ 271. *Поляра и касательная.* Легко видѣть, что уравненіе поляры или касательной будетъ:

$$xy_1 + yx_1 = 2k^2 \quad (117)$$

Если это касательная, то точка (x_1y_1) находится на кривой и мы можемъ написать предъидущее уравненіе въ формѣ:

$$xy_1 + yx_1 = 2x_1y_1 \quad (118)$$

откуда:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2 \quad (119)$$

отрѣзки, которые дѣлаетъ касательная на ассимптотахъ, очевидно, будутъ:

$$2x_1 \text{ и } 2y_1$$

ихъ произведеніе:

$$2x_1 2y_1 = 4k^2 = a^2 + b^2$$

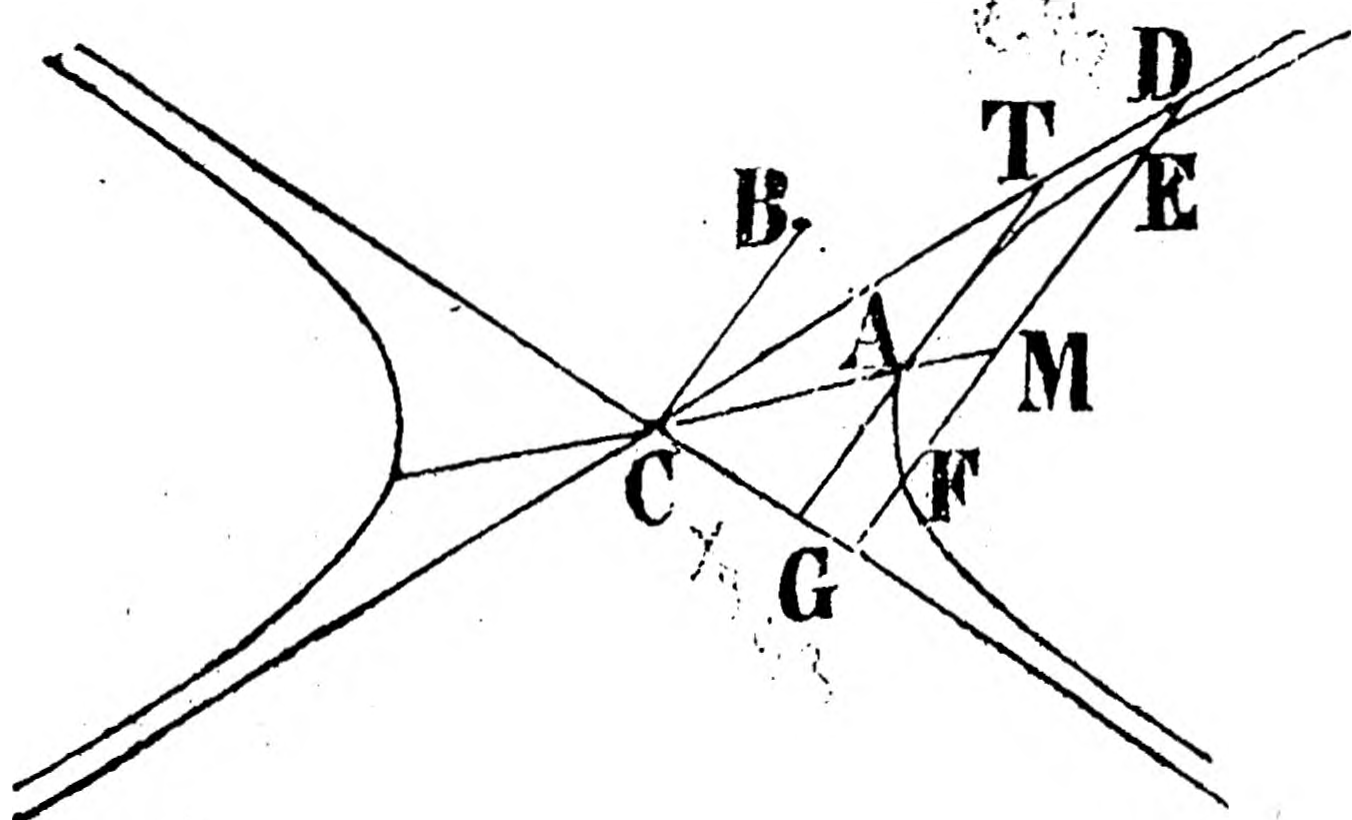
Слѣдовательно площадь треугольника, составленнаго ассимптотами и касательной, есть величина постоянная и равная двойной площади параллелограмма, составленнаго координатами точки касанія.

Изъ уравненія (119), которое можно написать въ формѣ:

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$$

видно, что отрѣзокъ касательной TG , заключенный между ассимптотами, въ точкѣ $A(x_1y_1)$ дѣлится пополамъ (фиг. 110).

Фиг. 110.



Предложеніе. Если двѣ данныя точки (x_1y_1) и (x_2y_2) на гиперболѣ соединимъ съ скользящею точкою $(x'y')$, то отрѣзокъ, отсѣкаемый этими прямыми на одной изъ ассимптотъ есть величина постоянная.

Доказательство. Уравненіе одной изъ прямыхъ есть $x'y + y_1x = y_1x' + k^2$, полагая $y = 0$, найдемъ отрѣзокъ на оси

x , т. е. на ассимптотѣ $x' + x_1$. Точно также найдемъ отрѣзокъ на ассимптотѣ, дѣлаемый другою прямою $x' + x_2$, разность между ними будетъ $x_1 - x_2$, величина постоянная.

Парабола.

§ 272. Мы видѣли въ § 235, 3, что парабола есть то изъ коническихъ сѣченій, котораго центръ находится на безконечности, т. е. когда:

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

Но при этомъ условіи члены втораго порядка въ уравненіи:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (120)$$

составляютъ полный квадратъ, т. е. уравненіе имѣетъ форму:

$$(ax + by)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (121)$$

Слѣдовательно если въ уравненіи коническаго сѣченія члены втораго порядка составляютъ полный квадратъ, то оно есть парабола. Чтобы привести это уравненіе къ простѣйшей—канонической формѣ, возьмемъ двѣ прямыя:

$$(O'A) \quad ax + by = 0, \quad (122)$$

и

$$(O'B) \quad 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

и напишемъ уравненіе (121) въ формѣ:

$$(a^2 + b^2) \left(\frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + 2\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2} \left(\frac{2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}}{2\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}} \right) = 0 \quad (123)$$

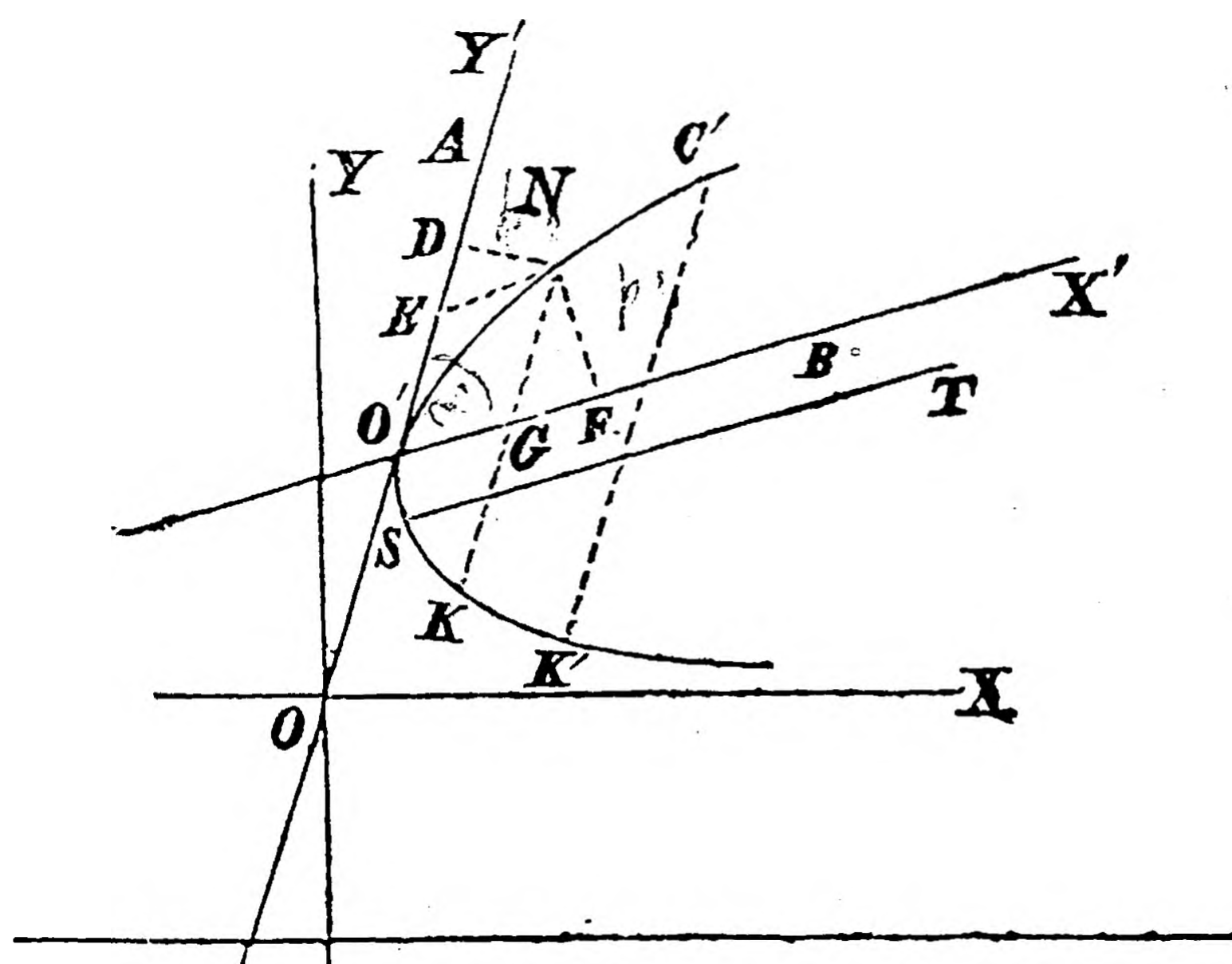
Легко видѣть теперь, что:

$$\frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}}{2\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}} \quad (124)$$

суть длины перпендикуляровъ ND и NF , опущенныхъ изъ точки $N(x, y)$ параболы на прямыя (122). Означимъ эти перпендикуляры черезъ $NF = p_1$ и $ND = p_2$, то уравненіе (123) будетъ:

$$p_2^2 + \frac{2\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}}{a^2 + b^2} p_1 = 0 \quad (125)$$

Фиг. 111.



Черезъ α назовемъ уголъ $AO'B$ между прямыми (122) и положимъ:

$$NF = NG \sin \alpha, \quad ND = NE \sin \alpha$$

или:

$$p_2 = y' \sin \alpha, \quad p_1 = x' \sin \alpha$$

или, поставляя въ уравненіе (125), получимъ:

$$y'^2 \sin^2 \alpha + \frac{2 \sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}}{a^2 + b^2} x' \sin \alpha = 0 \quad (126)$$

полагая:

$$\frac{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}}{(a^2 + b^2) \sin \alpha} = -p'$$

уравненіе (126) сдѣлается:

$$y'^2 = 2p'x' \quad (127)$$

Если теперь прямая (122) примемъ за оси координатъ, то уравненіе (127) будетъ уравненіе параболы, отнесенной къ прямой (122), какъ координатнымъ осямъ. Очевидно, что новое начало находится на кривой въ точкѣ O' , а какъ каждому значенію x' въ (127) соотвѣтствуютъ два равныя и съ противными знаками значенія для y' , то новая ось x' есть діаметръ, а ось y' параллельна хордамъ NK и $C'K'$, которыя діаметръ $O'B$ дѣлитъ пополамъ. Но если $x' = 0$, то $y'^2 = 0$, слѣдовательно ось y' пересѣкаетъ параболу въ двухъ совпадающихъ точкахъ, т. е. ось y' есть касательная къ кривой въ началѣ координатъ. Слѣдовательно, если уравненіе параболы дано въ формѣ (121), то:

$$ax + by = 0$$

есть уравненіе діаметра кривой, проходящаго черезъ начало, а:

$$2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

есть уравненіе касательной въ точкѣ O' , гдѣ діаметръ встрѣчаетъ кривую. Слѣдовательно уравненіе параболы, отнесенной къ діаметру и къ касательной въ точкѣ его встрѣчи съ кривою, будетъ имѣть всегда форму (127).

§ 273. Хотя уравненіе (127) параболы весьма простое, но неудобно, такъ какъ координаты не прямоугольны. Но легко дать уравненію параболы такую-же форму, но съ прямоугольными осями.

Для этого напишемъ уравненіе (121) въ формѣ:

$$(ax + by + \lambda)^2 + 2(a_{13} - a\lambda)x + 2(a_{23} - b\lambda)y + a_{33} + \lambda^2 = 0 \quad (128)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэффициентъ.

Если къ этому уравненію приложимъ разсужденія предыдущаго параграфа, то найдемъ, что:

$$ax + by + \lambda = 0 \quad (129)$$

есть діаметръ, и:

$$2(a_{13} - a\lambda)x + 2(a_{23} - b\lambda)y + a_{33} + \lambda^2 = 0 \quad (130)$$

есть касательная въ точкѣ его встрѣчи съ кривою.

Такъ какъ въ это уравненіе входитъ неопредѣленный коэффициентъ λ , то его можно такъ выбрать, чтобы прямая (129) и (130) были перпендикулярны, а для этого мы должны имѣть (§ 49):

$$a(a_{13} - a\lambda) + b(a_{23} - b\lambda) = 0$$

откуда:

$$\lambda = \frac{aa_{13} + ba_{23}}{a^2 + b^2} \quad (131)$$

такъ какъ изъ этого выраженія видно, что λ имѣетъ всегда величину дѣйствительную, то мы заключаемъ, что есть всегда *одинъ* діаметръ въ параболѣ, перпендикулярный къ касательной въ точкѣ встрѣчи его съ кривою. Если прямая (129) и (130) возьмемъ за координатныя оси и сдѣлаемъ это, какъ въ предыдущемъ параграфѣ, то уравненіе параболы будетъ:

$$y^2 = 2px \quad (132)$$

гдѣ, какъ легко видѣть:

$$p = \frac{aa_{13} - ba_{23}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (133)$$

§ 274. Касательная. Изъ общаго уравненія касательной (§ 210) легко показать, что уравненіе касательной къ параболѣ:

$$y^2 = 2px$$

въ точкѣ $P(x_1y_1)$ есть (фиг. 112):

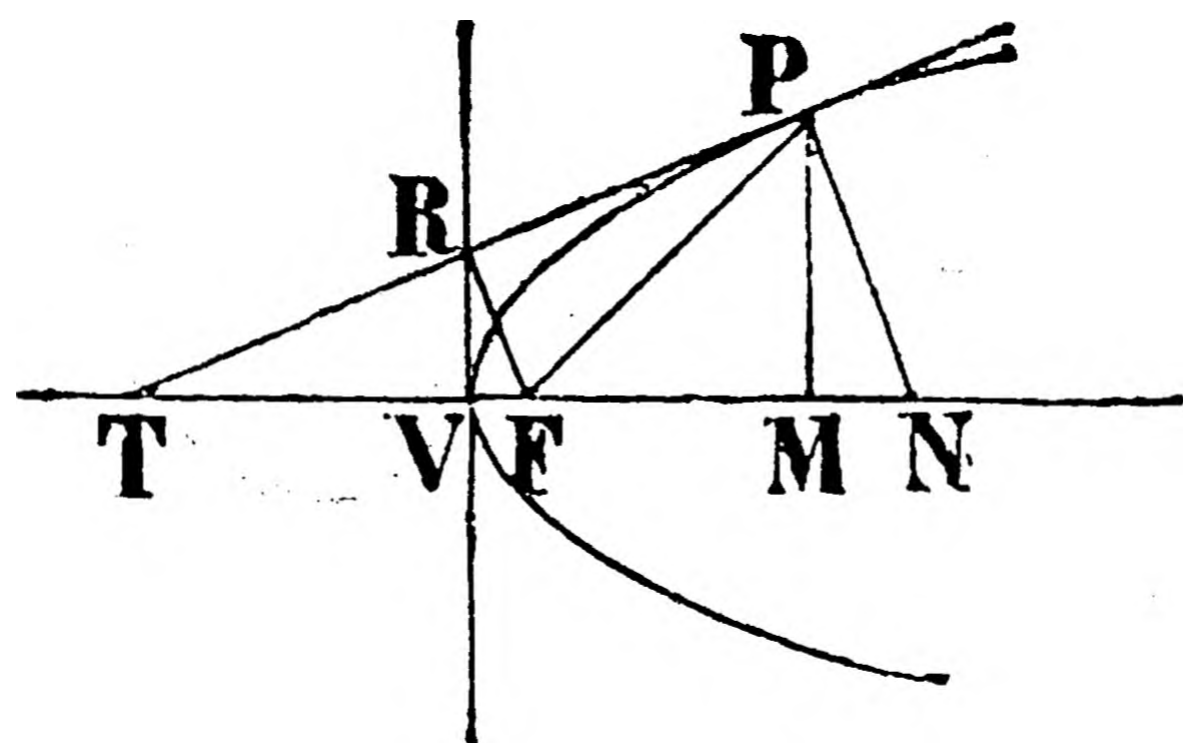
$$yy_1 = p(x + x_1) \quad (134)$$

Слѣдовательно тангенсъ угла α , который касательная составляетъ съ осью x , будетъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y_1}$$

Чтобы найти точку T встрѣчи касательной съ осью абсцисъ надобно положить въ уравненіи (134) $y = 0$, что даетъ $x + x_1 = 0$; отсюда видимъ,

Фиг. 112.



что абсцисса точки встрѣчи $VT = x = -x_1$, равна абсциссѣ VM точки касанія, но отложенной отрицательно. Это свойство даетъ легкій способъ проводить касательную къ параболѣ, если даны координаты точки касанія. Для этого надобно абсциссу точки касанія отложить отрицательно и полученную точку соединить прямою съ точкою касанія, эта прямая и будетъ касательная.

Уравненіе (134) будетъ поляра точки $(x_1 y_1)$, если эта точка не лежитъ на кривой.

§ 275. *Нормаль*. Уравненіе прямой, проходящей черезъ точку P (фиг. 112) касанія перпендикулярно къ касательной, очевидно, будетъ:

$$(PN) \quad p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0 \quad (135)$$

Координаты точки встрѣчи нормали PN съ осью x , очевидно, будутъ $y=0$, $x = x_1 + p$, откуда $x - x_1 = p = MN$, т. е. отрѣзокъ, заключенный между точкою встрѣчи нормали съ осью x и абсцисса x_1 , есть величина постоянная p . На основаніи этого свойства можно провести нормаль и касательную къ параболѣ.

§ 276. *Діаметръ*. Мы видѣли въ § 236, что центръ параболы находится на безконечности, слѣдовательно всѣ діаметры въ параболѣ параллельны, такъ какъ всѣ діаметры въ коническомъ сѣченіи проходятъ черезъ центръ. Но изъ уравненія:

$$y^2 = 2px$$

видно, что ось x есть діаметръ, слѣдовательно всѣ діаметры въ параболѣ параллельны оси x ; это легко видѣть и аналитически. Уравненіе діаметра, какого-нибудь, конического сѣченія есть:

$$\frac{df}{dx} \cos \alpha + \frac{df}{dy} \sin \alpha = 0$$

гдѣ α есть направленіе хорды. Для параболы имѣемъ:

$$\frac{df}{dx} = -2p, \quad \frac{df}{dy} = 2y$$

слѣдовательно діаметръ параболы будетъ:

$$y \sin \alpha - p \cos \alpha = 0$$

откуда:

$$y = \frac{p}{\operatorname{tg} \alpha}$$

т. е. прямая параллельная оси x ,

§ 277. Уравнение параболы, отнесенной къ одному изъ диаметровъ и къ касательной въ точкѣ встрѣчи съ кривою (§ 272), есть:

$$y^2 = 2p'x$$

а уравненіе, отнесенное къ тѣмъ же элементамъ, только перпендикулярнымъ, имѣетъ такую же форму (132):

$$y^2 = 2px \quad (136)$$

гдѣ p есть параметръ, значеніе котораго мы видѣли въ § 273 (133); спрашивается, какая зависимость существуетъ между параметрами p и p' ? Чтобы показать эту зависимость, проведемъ въ точкѣ $C(x_1, y_1)$ діаметръ CD и касательную AB (фиг. 113). Уравненіе параболы, отнесенной къ CD и CB , какъ осямъ, будетъ:

$$y^2 = 2p'x \quad (137)$$

Если хорда $OF \parallel AB$, то она будетъ сопряженная діаметру CD и въ точкѣ E будетъ дѣлиться пополамъ.

Означимъ $\angle BCD = \angle DEF = \angle BAO$ черезъ α . Такъ какъ $EF = OE$, то $FH = HK = GC = y_1$. Координаты точки F относительно осей CD и CB будутъ EF и CE . Но $EF = \frac{FH}{\sin \alpha} = \frac{y_1}{\sin \alpha}$, слѣдовательно имѣемъ:

$$\frac{y_1^2}{\sin^2 \alpha} = 2p' \cdot CE$$

Но $CE = AO = x_1$ (§ 274), слѣдовательно:

$$\frac{y_1^2}{\sin^2 \alpha} = 2p'x_1$$

Но мы также имѣемъ $y_1^2 = 2px_1$ (136); вставляя это значеніе въ предыдущее уравненіе, найдемъ:

$$\frac{2px_1}{\sin^2 \alpha} = 2p'x_1 \quad \text{откуда} \quad p' = \frac{p}{\sin^2 \alpha} \quad (138)$$

Такъ какъ α есть уголъ, который касательная въ точкѣ $C(x_1, y_1)$ составляетъ съ осью x , то изъ § 274 имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y} \quad \text{откуда} \quad \sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{p}{p + 2x_1}}$$

Подставляя эту величину для $\sin \alpha$ въ (138), найдемъ:

$$p' = p + 2x_1$$

§ 278. *Свойства фокуса.* Остается показать еще одно замѣчательное свойство параболы. Пусть S будетъ фокусъ параболы (фиг. 113). Если проведемъ прямую SC и касательную CB , то уголь $\angle BCD = \angle ACS$? Такъ какъ CB есть касательная въ точкѣ $C(x_1, y_1)$, то полагая $\angle BCD = BAG = \alpha$, будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y_1}$$

Означимъ $\angle ACS = \psi$, $\angle CSG = \varphi$, то $\psi = \varphi - \alpha$, но:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}} = \frac{2y_1}{2x_1 - p}$$

слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{2y_1}{2x_1 - p} - \frac{p}{y_1}}{1 + \frac{2p}{2x_1 - p}} = \frac{2y_1^2 - 2px_1 + p^2}{y_1(2x_1 - p + 2p)} = \frac{p}{y_1}$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \psi \quad , \quad \text{откуда} \quad \psi = \alpha$$

На этомъ свойствѣ параболы основано устройство параболическихъ зеркаль. Впрочемъ это свойство вытекаетъ изъ того, что $\triangle ASC$ равнобедренный, такъ какъ въ немъ $AS = x + \frac{p}{2}$ и тоже $SC = x + \frac{p}{2}$, откуда:

$$\angle CAO = \angle ACS = \angle BCD$$

§ 279. *Задача.* Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ фокуса параболы на касательную?

Рѣшеніе. Пусть (x_1, y_1) будетъ точка касанія, какой-нибудь, касательной; уравненіе ея будетъ (§ 274):

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

въ нормальной формѣ оно будетъ:

$$\frac{yy_1 - px - px_1}{\pm \sqrt{y_1^2 + p^2}} = 0$$

подставляя въ него координаты фокуса: $y = 0$, $x = \frac{p}{2}$ будемъ имѣть длину искомаго перпендикуляра q :

$$q = \frac{-\frac{1}{2}p^2 - px_1}{\pm \sqrt{y_1^2 + p^2}} = -\frac{1}{2} \frac{p(p + 2x_1)}{\pm \sqrt{2px_1 + p^2}}$$

но q есть величина, по условию, всегда положительная, поэтому:

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + px_1}$$

§ 280. *Задача.* Выразить длину перпендикуляра q , черезъ углы, которые онъ составляетъ съ координатными осями?

Рѣшеніе. Перенесемъ начало координатъ въ фокусъ, то уравненія параболы и касательной въ точкѣ (x_1, y_1) будутъ:

$$y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right), \quad yy_1 = p \left(x + x_1 + \frac{p}{2} \right) \quad (139)$$

Если черезъ α означимъ уголь, который перпендикуляръ изъ фокуса на касательную составляетъ съ координатными осями, то уравненіе касательной можно написать въ формѣ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - q = 0 \quad (140)$$

сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ касательной (139), найдемъ:

$$\cos \alpha = \frac{-p}{\pm \sqrt{y_1^2 + p^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{y_1}{\pm \sqrt{y_1^2 + p^2}}, \quad q = \frac{p \left(\frac{p}{2} + x_1 \right)}{\pm \sqrt{y_1^2 + p^2}}$$

откуда, замѣчая, что q есть величина положительная, будемъ имѣть:

$$\cos \alpha = \frac{-p}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}, \quad q = \frac{p(p + 2x_1)}{2\sqrt{y_1^2 + p^2}}$$

или:

$$\cos \alpha = \frac{-p}{\sqrt{2px_1 + p^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{y_1}{\sqrt{2px_1 + p^2}}, \quad q = \frac{1}{2} \sqrt{2px_1 + p^2}$$

слѣдовательно:

$$\cos \alpha = \frac{-p}{2q} \quad \text{а} \quad q = \frac{p}{2 \cos \alpha}$$

Такимъ образомъ уравненіе (140) касательной можно написать въ формѣ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + \frac{p}{2 \cos \alpha} = 0 \quad (141)$$

§ 281. *Задача.* Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса, на касательныя къ параболѣ?

Рѣшеніе. Выше нашли, что:

$$q = \frac{-p}{2 \cos \alpha}$$

откуда легко видѣть, что основанія перпендикуляровъ q находятся на касательной въ вершинѣ параболы. Изъ этого слѣдуетъ, обратно, если изъ, какой-нибудь точки будемъ проводить прямыя до встрѣчи съ данной прямой и изъ точекъ встрѣчи будемъ возставлять перпендикуляры къ этимъ прямымъ, то всѣ эти перпендикуляры будутъ касательныя къ параболѣ, коей фокусъ находится въ данной точкѣ, а вершина есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную прямую.

§ 282. *Задача.* Найти геометрическое мѣсто пересѣченія перпендикулярныхъ между собою касательныхъ къ параболѣ?

Рѣшеніе. Уравненіе касательной къ параболѣ есть:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + \frac{p}{2 \cos \alpha} = 0 \quad \text{или} \quad x \cos^2 \alpha + y \sin \alpha \cos \alpha + \frac{p}{2} = 0$$

уравненіе перпендикулярной къ ней касательной будетъ:

$$x \sin^2 \alpha - y \sin \alpha \cos \alpha + \frac{p}{2} = 0$$

исключая α , найдемъ:

$$x + p = 0$$

а это уравненіе директрисы.

§ 283. *Предложеніе.* Точка касанія P касательной PT къ параболѣ (фиг. 112) и точка T встрѣчи этой касательной съ осью x находятся въ равномъ разстояніи отъ фокуса F .

Доказательство. Изъ уравненія касательной (134), полагая $y = 0$, будемъ имѣть $VT = -x$, но такъ какъ $FV = \frac{p}{2}$ (§ 15), то $FT = VT + \frac{p}{2}$.

Изъ того же § извѣстно, что $FP = x + \frac{p}{2}$, слѣдовательно:

$$FT = FP$$

§ 284. *Предложение.* Угол между, какими-нибудь, двумя касательными къ параболѣ равенъ половинѣ угла между радіусами векторами проведенными въ точки ихъ касанія.

Доказательство. Изъ предъидущаго предложенія слѣдуетъ, что $\triangle TFR$ равнобедренный, слѣдовательно (фиг. 112):

$$\angle PTF = \frac{1}{2} \angle PFM$$

Для другой касательной въ точкѣ P' , встрѣчающей ось x въ T' имѣемъ также:

$$\angle P'T'F = \frac{1}{2} \angle P'FM'$$

откуда, вычитая, найдемъ искомое предложеніе.

§ 285. *Предложение.* Прямая, соединяющая фокусъ съ точкою пересѣченія двухъ касательныхъ, дѣлитъ пополамъ уголъ образуемый радіусами векторами, проведенными изъ фокуса въ точки касанія.

Доказательство. Уравненія двухъ касательныхъ (141) суть:

$$x \cos^2 \alpha_1 + y \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 + \frac{p}{2} = 0 \quad , \quad x \cos^2 \alpha_2 + y \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 + \frac{p}{2} = 0$$

вычитая, найдемъ прямую:

$$x \sin (\alpha_1 + \alpha_2) - y \cos (\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

составляющую уголъ $\alpha_1 + \alpha_2$ съ осью x . Но α_1 и α_2 суть углы, которые перпендикуляры, опущенные изъ фокуса на касательныя, составляютъ съ осью x , слѣдовательно $\angle VFR = 2\alpha_1$, $\angle VFR' = 2\alpha_2$ (фиг. 112), откуда, прямая составляющая съ осью x уголъ $\alpha_1 + \alpha_2$ есть равнодѣлящая уголъ $\angle PFR'$.

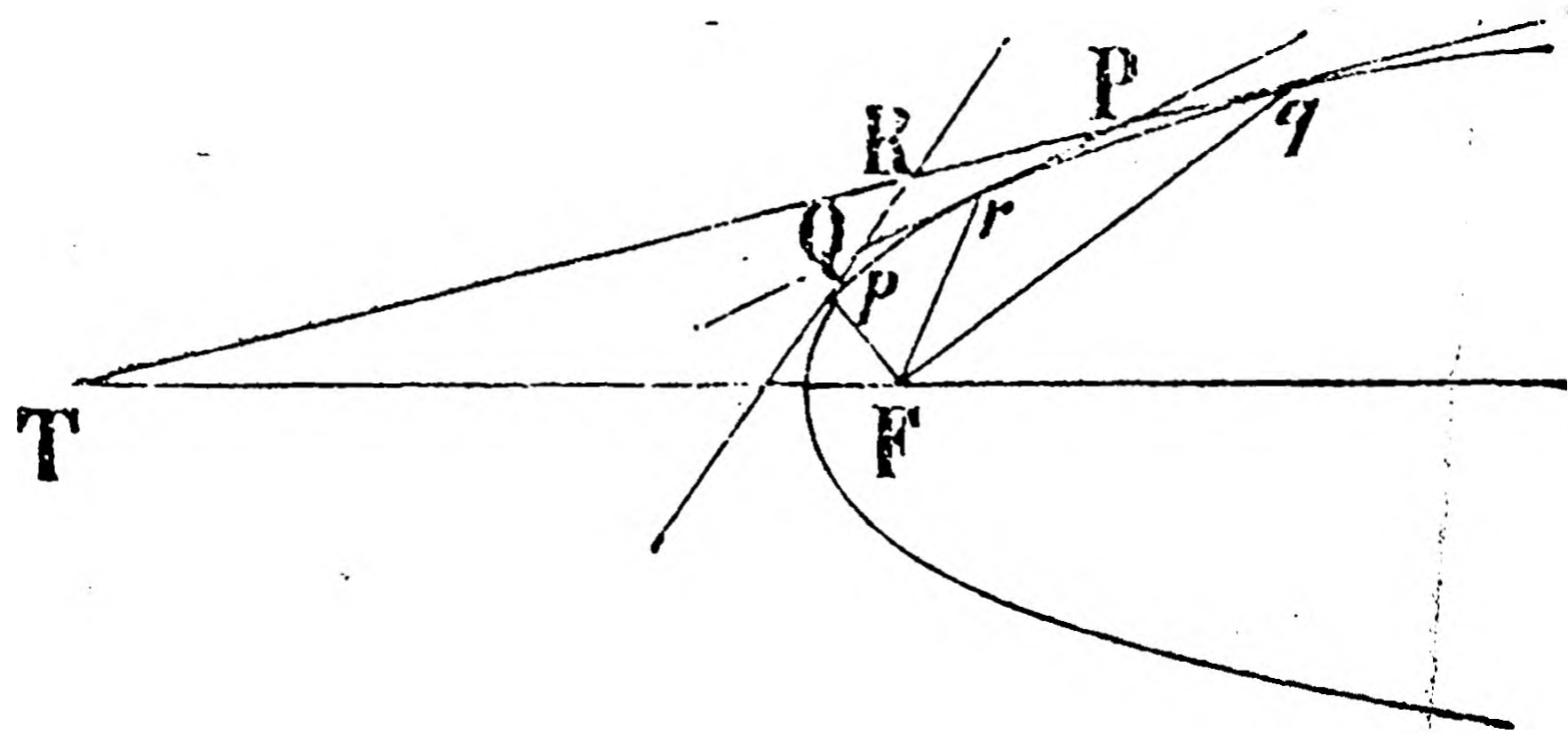
Слѣствие 1. Если положимъ $\angle PFR' = 180^\circ$, то PP' пройдетъ чрезъ фокусъ, касательныя TP и $T'P'$ пересѣкутся на директрисѣ, а $\angle TFR = 90^\circ$.

Слѣствие 2. Если какая-нибудь хорда PP' пересѣкаетъ директрису въ точкѣ D , то FD есть внѣшняя равнодѣлящая $\angle PFR'$. Это можно показать, какъ въ § 263, пр. 2. (фиг. 104).

Слѣствие 3. Если двѣ данныя касательныя къ параболѣ пересѣкаются, какою-нибудь, третьею касательною, то уголъ образуемый радіусами векторами, проведенными изъ фокуса къ точкамъ пересѣченія третьей касательной съ двумя данными, будетъ дополнительный до 180° углу составляемому данными двумя касательными.

Въ самомъ дѣлѣ, уголъ QRT (фиг. 114) равенъ половинѣ $\angle pFq$ (§ 284), а по настоящему §, очевидно:

Фиг. 114.



$$\angle PFQ = \frac{1}{2} \angle pFq$$

слѣдовательно:

$$\angle PFQ = \angle QRT$$

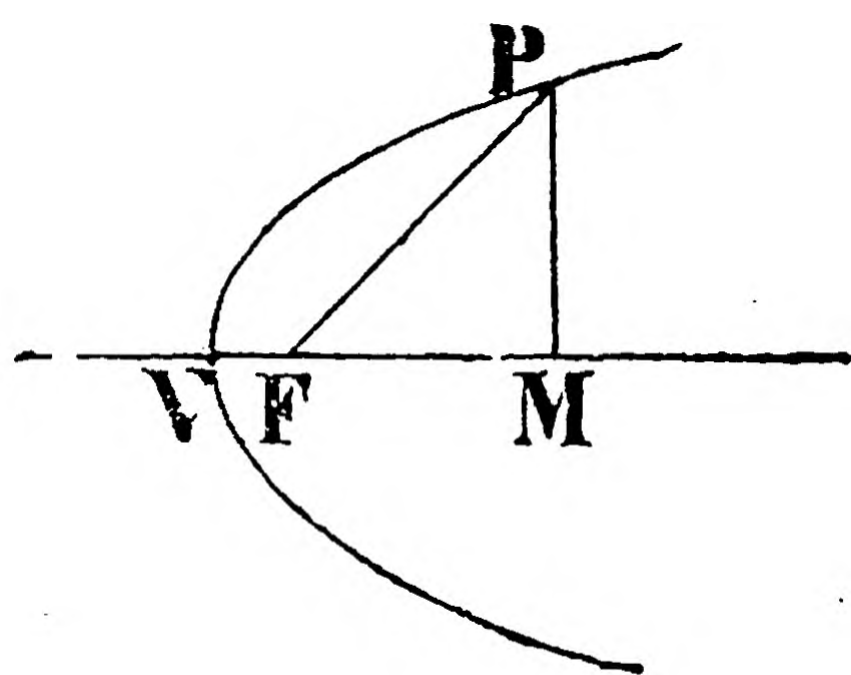
откуда видимъ, что:

$$\angle PRQ + \angle pFq = 180^\circ$$

Слѣдствіе 4. Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что кругъ описанный около треугольника PRQ , образуемаго тремя касательными къ параболѣ, всегда проходитъ чрезъ ея фокусъ.

§ 286. *Задача.* Найти полярное уравненіе параболы, принявъ фокусъ за полюсъ?

Фиг. 115.



Рѣшеніе. Въ § 15 видѣли, что фокусный радіусъ векторъ (фиг. 115):

$$FP = r = x + \frac{p}{2}$$

но:

$$x = \frac{1}{2}p + FM = \frac{1}{2}p + r \cos \varphi, \quad \varphi \text{ есть } \angle PFM;$$

слѣдовательно:

$$r = p + r \cos \varphi$$

откуда:

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi} \quad (142)$$

Это частный случай уравненія (97), если положимъ $e = 1$.

Уголъ φ отсчитывается въ направленіи FM , если же будемъ его отсчитывать въ направленіи FV , то предъидущее уравненіе будетъ:

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \quad (143)$$

которое можно написать въ формѣ:

$$2r \cos^2 \frac{\varphi}{2} = p \quad (144)$$

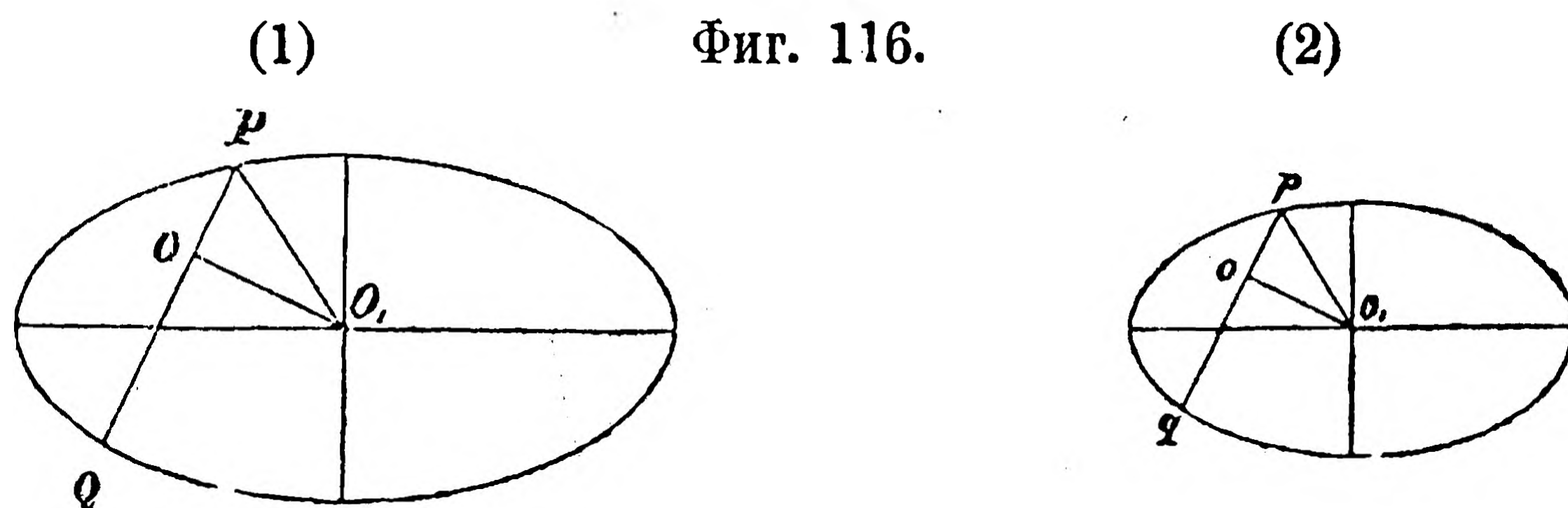
Подобіе коническихъ сѣченій.

§ 287. *Подобными и подобно-расположенными фигурами* называются такія, въ которыхъ радіусы векторы, проведенные изъ нѣкоторой точки,

въ одной изъ нихъ, пропорціональны радіусамъ векторамъ въ другой, проведеннымъ изъ другой точки, параллельно первымъ.

Если существуетъ пара такихъ точекъ O и o (фиг. 116) въ подобныхъ фигурахъ, то существуетъ такихъ же и безчисленное множество.

Возьмемъ какую-нибудь точку O_1 въ первой фигурѣ.



Проведемъ $oo_1 \parallel OO_1$ и отложимъ OO_1 такъ, чтобы:

$$\frac{oo_1}{OO_1} = \frac{op}{OP}$$

то будемъ имѣть два подобные треугольника OO_1P и oo_1p , изъ которыхъ слѣдуетъ, что $O_1P \parallel o_1p$ и:

$$\frac{o_1p}{O_1P} = \frac{op}{OP}$$

Легко также показать, что всѣ параллельные радіусы векторы, проведенные черезъ точки O_1 и o_1 , пропорціональны, слѣдовательно точки O_1 и o_1 имѣютъ такія же свойства, какъ и точки O и o .

§ 288. *Задача.* Найти условіе подобія коническихъ сѣченій данныхъ общими уравненіями:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} &= 0 \\ a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} &= 0 \end{aligned} \tag{145}$$

Если перенесемъ начала координатъ въ центры этихъ коническихъ сѣченій (§ 243), то онѣ сдѣлаются:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} &= 0 \\ a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + \frac{\Delta'}{A'_{33}} &= 0 \end{aligned} \tag{146}$$

Если теперь положимъ, въ первомъ:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

а во второмъ:

$$x = \rho_1 \cos \theta, \quad y = \rho_2 \sin \theta$$

то найдемъ:

$$\rho^2 = \frac{\Delta}{A_{33}} \cdot \frac{1}{a_{11} \cos^2 \theta + 2a_{12} \cos \theta \sin \theta + a_{22} \sin^2 \theta} \quad (147)$$

$$\rho_1^2 = \frac{\Delta'}{A'_{33}} \cdot \frac{1}{a'_{11} \cos^2 \theta + 2a'_{12} \cos \theta \sin \theta + a'_{22} \sin^2 \theta}$$

откуда, если:

$$a'_{11} = ka_{11}, \quad a'_{12} = ka_{12}, \quad a'_{22} = ka_{22} \quad (148)$$

будемъ имѣть:

$$\frac{\rho^2}{\rho_1^2} = \frac{\Delta}{A_{33}} : \frac{\Delta'}{A'_{33}} \cdot k \quad (149)$$

т. е. параллельные радиусы векторы ρ и ρ_1 пропорциональны. Изъ этого видимъ, что два коническія сѣченія подобны и подобно расположены, если коэффициенты при переменныхъ второй степени: x^2 , xy , y^2 равны или отличаются только постояннымъ множителемъ.

Изъ формулы (149) видимъ, что параллельные діаметры, подобныхъ и подобно расположенныхъ коническихъ сѣченій пропорциональны.

§ 289. Очевидно, что направленіе осей двухъ подобныхъ и подобно расположенныхъ коническихъ сѣченій одно и то же, такъ какъ наибольшій и наименьшій изъ діаметровъ должны быть параллельны.

Если діаметръ одного изъ коническихъ сѣченій дѣлается безконечнымъ, то и ему параллельный діаметръ также сдѣлается безконечнымъ, т. е. асимптоты, двухъ подобныхъ и подобно расположенныхъ коническихъ сѣченій, параллельны. Это слѣдуетъ изъ § 237, гдѣ мы показали, что направленіе асимптотъ зависитъ только отъ членовъ второго порядка въ уравненіи.

Въ подобныхъ коническихъ сѣченіяхъ эксцентриситеты равны; въ самомъ дѣлѣ, если e и e_1 суть эксцентриситеты данныхъ коническихъ сѣченій (145), то имѣемъ (§ 13):

$$e = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad e_1 = \frac{k^2 a^2 - k^2 b^2}{k^2 a^2}$$

т. е. $e = e_1$.

Поэтому иногда опредѣляютъ подобіе коническихъ сѣченій, говоря, что онѣ имѣютъ параллельныя оси и равные эксцентриситеты.

Если въ двухъ гиперболахъ асимптоты параллельны, то онѣ подобны, такъ какъ ихъ оси, будучи равнодѣлящими угловъ между асимп-

тотами, параллельны, а эксцентриситеты зависят отъ угла между асимптотами (§ 270).

Такъ какъ въ параболѣ эксцентриситетъ равенъ единицѣ, то заключаемъ, что всѣ параболы подобны и подобно расположены, если ихъ оси параллельны.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія параболы:

$$y^2 = 2px$$

имѣемъ:

$$\rho = \frac{2p \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

для другой, какой-нибудь, параболы будемъ имѣть:

$$\rho_1 = \frac{2p_1 \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

откуда $\rho : \rho_1 = p : p_1$, т. е. радіусы ρ и ρ_1 пропорціональны.

§ 290. Двѣ фигуры подобны, но не подобно расположены, если пропорціональные радіусы составляютъ постоянный уголъ, такъ что если одна изъ фигуръ будетъ поворочена на этотъ уголъ, то эти фигуры дѣлаются и подобно расположенными.

Задача. Найти условія подобія двухъ коническихъ сѣченій, данныхъ общими уравненіями (145), но которые не расположены подобно?

Рѣшеніе. Для этого надобно преобразовать первое изъ уравненій къ осямъ, составляющимъ уголъ θ съ данными осями, и искать величину угла, при которой коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} будутъ пропорціональны коэффициентамъ a'_{11} , a'_{12} , a'_{22} . Положимъ, что они сдѣлаются ka_{11} , ka_{12} , ka_{22} . Такъ какъ оси прямоугольны, то мы знаемъ, что $a_{11} + a_{22}$ и $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ суть инварианты, слѣдовательно:

$$a_{11} + a_{22} = k(a'_{11} + a'_{22}) \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = k^2(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12})$$

а потому искомое условіе, очевидно, есть:

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{(a_{11} + a_{22})^2} = \frac{a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}}{(a'_{11} + a'_{22})^2}$$

ГЛАВА XVII.

Кругъ.

§ 291. Послѣ изученія свойствъ кривыхъ второго порядка, между которыми находится и кругъ, какъ частный случай эллипса, мы займемся отдѣльно этой, по видимому, самой простой кривой послѣ прямой линіи, но которой свойства ведутъ къ необыкновенно замѣчательнымъ обобщеніямъ, послужившимъ основаніемъ преобразованія метрическихъ свойствъ или предложеній въ проэктивныя, т. е. преобразованій предложеній относительно *мѣры* въ предложенія относительно *положенія*.

Опредѣленіе. Окружность или кругъ есть кривая линія, которой каждая точка находится въ равномъ разстояніи отъ данной точки называемой *центромъ*.

Какъ видно опредѣленіе круга есть метрическое, ниже мы это опредѣленіе преобразуемъ въ опредѣленіе положенія.

Если отнесемъ кругъ къ прямоугольнымъ координатамъ и назовемъ координаты центра черезъ (a, b) , радіусъ черезъ r , то уравненіе круга будетъ, если (x, y) суть координаты, какой-нибудь на немъ точки:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1)$$

Если центръ находится въ началѣ координатъ, то $a = 0$ и $b = 0$, слѣдовательно уравненіе круга будетъ:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2)$$

Наконецъ, если начало координатъ будетъ въ концѣ діаметра, а ось абсциссъ діаметръ, то $a = r$, $b = 0$, слѣдовательно уравненіе круга будетъ:

$$x^2 + y^2 = 2rx \quad (3)$$

§ 292. Замѣтимъ, что уравненіе круга, отнесеннаго къ прямоугольнымъ координатамъ, не содержитъ члена xy и коэффициенты при x^2 и при y^2 равны. слѣдовательно общее уравненіе второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (4)$$

не можетъ представлять круга, если a_{12} не равно нулю и если a_{11} не равно a_{22} .

Если же $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$, то уравненію:

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (5)$$

можно дать форму (1). Въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе можно написать въ формѣ:

$$\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2} \quad (6)$$

а это, очевидно, кругъ, коего координаты центра суть:

$$-\frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad -\frac{a_{23}}{a_{11}} \quad (7)$$

а радіусъ:

$$\frac{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}}{a_{11}} \quad (8)$$

Если $a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}$ есть величина отрицательная, то радіусъ круга будетъ мнимый и уравненіе не можетъ быть удовлетворено дѣйствительными величинами координатъ x и y . Если $a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33} = 0$, то радіусъ круга равенъ нулю и уравненіе удовлетворяется только координатами центра, т. е. представляетъ одну точку или бесконечно малый кругъ.

§ 293. Уравненіе круга, отнесеннаго къ косоугольнымъ координатамъ рѣдко употребляется, а получается изъ уравненія разстоянія между двумя точками (x, y) и (a, b) , гдѣ a и b суть координаты центра (§ 4). Если ω есть уголъ между координатами, а r радіусъ круга, то его уравненіе будетъ (§ 4):

$$(x-a)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\omega + (y-b)^2 = r^2 \quad (9)$$

Если это уравненіе сравнимъ съ общимъ уравненіемъ второго порядка (4), то найдемъ, что оно можетъ представлять кругъ только въ томъ случаѣ, когда:

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = a \cos\omega \quad (10)$$

Если эти уравненія удовлетворены, то изъ сравненія коэффиціентовъ уравненій (4) и (9), найдемъ:

$$a + b \cos\omega = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad b + a \cos\omega = -\frac{a_{23}}{a_{11}}, \quad (11)$$

$$a^2 + b^2 + 2ab \cos\omega = r^2 + \frac{a_{33}}{a_{11}}$$

Такъ какъ координаты центра (a, b) опредѣляются только изъ двухъ первыхъ уравненій (11), которыя не содержатъ a_{33} , то заключаемъ, что два круга будутъ концентрическими, если ихъ уравненія отличаются только постояннымъ членомъ.

Если $a_{33} = 0$, то кругъ проходитъ черезъ начало координатъ, такъ какъ уравненіе его удовлетворяется координатами начала $x = 0$, $y = 0$.

§ 294. *Задача.* Найти координаты точекъ пересѣченія данной прямой съ даннымъ кругомъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія круга и прямой будутъ:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (12)$$

Изъ уравненія прямой имѣемъ:

$$y = \frac{p - x \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

а изъ уравненія круга:

$$y^2 = r^2 - x^2$$

приравнивая, найдемъ:

$$\left(\frac{p - x \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = r^2 - x^2$$

откуда найдемъ квадратное уравненіе:

$$x^2 - 2p \cos \alpha x + p^2 - r^2 \sin^2 \alpha = 0$$

изъ котораго:

$$\begin{aligned} x &= p \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{r^2 - p^2} \\ y &= p \sin \alpha \mp \cos \alpha \sqrt{r^2 - p^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Изъ этихъ выраженій видимъ:

1. Если $r > p$, то данная прямая встрѣчаетъ окружность въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ.

2. Если $r = p$, то точки встрѣчи совпадаютъ, данная прямая касается круга, слѣдовательно уравненіе касательной будетъ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = r \quad (14)$$

гдѣ α , очевидно, будетъ уголъ, который составляетъ съ осью x радіусъ, проведенный въ точку касанія. Если черезъ (x_1, y_1) означимъ координаты точки касанія, то найдемъ:

$$x_1 = r \cos \alpha, \quad y_1 = r \sin \alpha$$

подставляя вмѣсто $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ эти значенія въ (14), найдемъ уравненіе касательной:

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \quad (15)$$

3. Если наконецъ $r < p$, то выраженія (13) дѣлаются мнимыми, прямая не пересѣкаетъ кругъ видимо, но мы будемъ всегда говорить, что она пересѣкаетъ кругъ въ двухъ воображаемыхъ точкахъ.

Если уравненіе круга дано въ общей формѣ (1), то уравненіе касательной будетъ:

$$(a - x_1)(a - x) + (b - y_1)(b - y) = r^2 \quad (16)$$

§ 295. *Задача.* Найти точки пересѣченія даннаго круга съ прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки?

Рѣшеніе. Пусть уравненіе круга будетъ:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

а координаты данныхъ точекъ $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$.

Мы знаемъ, что координаты, какой-нибудь, точки на прямой, проходящей черезъ точки $(x_1 y_1)$ и $(x_2 y_2)$ даются выраженіями (§ 4):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Если x и y суть координаты точекъ пересѣченія прямой съ кругомъ, то предъидущія выраженія должны удовлетворять уравненію круга, слѣдовательно будемъ имѣть:

$$(x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 = (1 + \lambda)^2 r^2$$

откуда:

$$(x_2^2 + y_2^2 - r^2)\lambda^2 + 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2)\lambda + (x_1^2 + y_1^2 - r^2) = 0 \quad (17)$$

Это уравненіе относительно λ второй степени, слѣдовательно λ будетъ имѣть два значенія и слѣдовательно данная прямая пересѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ.

Слѣдствіе 1. Если точку $(x_1 y_1)$ фиксируемъ, а точку $(x_2 y_2)$ будемъ такъ измѣнять, чтобы координаты ея удовлетворяли уравненіе:

$$x_1 x + y_1 y - r^2 = 0 \quad (18)$$

то въ уравненіи (17) коэффициентъ при λ будетъ равенъ нулю, а потому корни этого уравненія будутъ равны, но съ противными знаками, слѣдовательно точка $(x_1 y_1)$, двѣ точки пересѣченія круга съ прямою и точка удовлетворяющая уравненію (18), будутъ четыре гармоническія точки. Откуда видимъ, что уравненіе (18) есть поляра точки $(x_1 y_1)$ относительно круга.

Слѣдствіе 2. Если точка $(x_1 y_1)$ будетъ фиксирована, а точка $(x_2 y_2)$ будетъ такъ выбрана, чтобы удовлетворить уравненіе:

$$(x^2 + y^2 - r^2)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) = (xx_1 + yy_1 - r^2)^2 \quad (19)$$

то корни уравненія (17) будутъ равны, данная прямая касается круга, слѣдовательно уравненіе (19) будетъ пара касательныхъ, проведенныхъ изъ точки $(x_1 y_1)$ къ данному кругу. Хотя это уравненіе второй степени относительно x, y , но оно разлагается на два линейные множителя.

Если уравненіе круга будетъ въ общей формѣ, то уравненіе касательныхъ будетъ:

$$\begin{aligned} \{(a - x_1)^2 + (b - y_1)^2 - r^2\} \{(a - x)^2 + (b - y)^2 - r^2\} = \\ = \{(a - x_1)(a - x) + (b - y_1)(b - y) - r^2\}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

§ 296. *Задача.* Найти длину касательной, проведенной изъ данной точки къ данному кругу?

Рѣшеніе. Пусть данный кругъ будетъ:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

а данная точка $(x_1 y_1)$. Разстояніе данной точки отъ центра, очевидно, есть:

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$$

Слѣдовательно искомое разстояніе будетъ δ :

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = \delta^2 \quad (21)$$

изъ этого видимъ, что если точка $(x_1 y_1)$ обращаетъ въ нуль первую часть уравненія (21), то она находится на окружности, если же первая часть обращается въ числовое значеніе, то это значеніе есть квадратъ длины касательной, проведенной изъ точки $(x_1 y_1)$ къ кругу.

§ 297. Такъ какъ уравненіе круга (1) содержитъ только три коэффициента, то его вполне опредѣляютъ три данныя координатами точки. Мы увидимъ ниже, почему кругъ, будучи коническимъ сѣченіемъ, опредѣляется не пятью, а только тремя данными точками.

§ 298. *Уравненіе круга въ полярныхъ координатахъ.* Если въ уравненіи (1) подставимъ вмѣсто x и y :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

то найдемъ:

$$\rho^2 - 2(a \cos \varphi + b \sin \varphi)\rho + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad (22)$$

Если центръ круга будетъ на оси x , то $b = 0$, слѣдовательно уравненіе будетъ:

$$\rho^2 - 2a \cos \varphi \cdot \rho + a^2 - r^2 = 0 \quad (23)$$

Если при этомъ полюсъ будетъ на окружности, то $a = r$ и уравненіе круга сдѣлается:

$$\rho = 2r \cos \varphi \quad (24)$$

Пр. 1. Дано основаніе треугольника и уголъ противуположащій основанію, найти геометрическое мѣсто вершины?

Рѣшеніе. Пусть данное основаніе $AB = 2a$, данный уголъ C . Возьмемъ (фиг. 117) средину основанія O за начало координатъ, основаніе за ось x , перпендикуляръ изъ середины за ось y .

$$OE = x, EC = y;$$

если положимъ:

$$\angle ACE = \alpha, \quad \angle BCE = \beta$$

то:

$$\alpha + \beta = C$$

откуда, замѣчая, что:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a+x}{y}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a-x}{y}$$

найдемъ:

$$\operatorname{tg} C = \frac{2ay}{y^2 - a^2 + x^2}$$

откуда:

$$y^2 + x^2 - \frac{2ay}{\operatorname{tg} C} = a^2$$

это уравненіе искомага геометрическаго мѣста, которое, очевидно есть кругъ. Если $C = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} C = \infty$ и уравненіе геометрическаго мѣста будетъ:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

т. е. кругъ, коего радіусъ есть a .

Пр. 2. Дано основаніе треугольника и уголъ, противуположащій основанію, найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ на стороны?

Рѣшеніе: Пусть данное основаніе будетъ $AB = 2a$, данный уголъ C . Возьмемъ тѣже координатныя оси, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ. Если черезъ (x, y_1) означимъ координаты вершины C , то будемъ имѣть, какъ выше:

$$y_1^2 + x^2 - \frac{2ay_1}{\operatorname{tg} C} = a^2$$

Если означимъ черезъ (x, y) координаты искомага мѣста, то, очевидно будемъ имѣть:

$$y_1 = \frac{a^2 - x^2}{y}$$

подставляя вмѣсто y_1 его выраженіе въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$y^2 + x^2 + \frac{2ay}{\operatorname{tg} C} = a^2$$

уравненіе, которое отличается отъ предъидущихъ только знакомъ при $\operatorname{tg} C$.

Пр. 3. Дано нѣкоторое число точекъ, найти геометрическое мѣсто точки, которой бы квадратъ разстоянія отъ первой точки умноженный на m_1 , сложенный съ квадратомъ разстоянія, умноженнымъ на m_2 , отъ второй точки и т. д. была-бы величина постоянная?

Рѣшеніе. Пусть координаты данныхъ точекъ будутъ $(x_1y_1), (x_2y_2) \dots$, постоянная величина пусть будетъ a^2 , наконецъ пусть (xy) будутъ координаты точки искомага мѣста. По условію должны имѣть:

$$\{ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \} m_1 + \{ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \} m_2 + \dots = a^2$$

или:

$$x^2 \sum m_r + y^2 \sum m_r - 2x \sum m_r x_r - 2y \sum m_r y_r + \sum m_r x_r^2 + \sum m_r y_r^2 = a^2$$

очевидно, кругъ, коего координаты центра суть:

$$x = \frac{\sum m_r x_r}{\sum m_r}, \quad y = \frac{\sum m_r y_r}{\sum m_r}$$

Пр. 4. Данъ кругъ и прямая линія, найти геометрическое мѣсто точки, изъ которой если проведемъ сѣкущую круга и изъ точекъ пересѣченія опустимъ перпендикуляры на данную прямую, то площадь прямоугольника построеннаго на этихъ перпендикулярахъ была бы величина постоянная?

Рѣшеніе. Возьмемъ данную прямую за ось x , перпендикуляръ опущенный изъ центра даннаго круга за ось y , пусть координаты искомой точки геометрическаго мѣста будутъ $(x'y')$. Очевидно, уравненіе круга будетъ:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

уравненіе, какой-нибудь, сѣкущей будетъ:

$$y - y' = \alpha (x - x')$$

исключая изъ этихъ двухъ уравненій x , найдемъ квадратное уравненіе относительно y , произведеніе корней котораго будетъ:

$$\frac{(y' - \alpha x')^2 + \alpha^2 (b^2 - r^2)}{1 + \alpha^2}$$

Чтобы это была величина постоянная необходимо, чтобы это выраженіе зависело отъ α , а это только тогда возможно, когда $x' = 0$ $y'^2 = b^2 - r^2$; слѣдовательно геометрическое мѣсто будетъ двѣ точки:

$$x' = 0, \quad y' = +\sqrt{b^2 - r^2}$$

$$x' = 0, \quad y' = -\sqrt{b^2 - r^2}$$

Сокращенный способъ.

§ 299. Если черезъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0$$

означимъ уравненія прямыхъ въ нормальной формѣ:

$$x \cos \alpha_r + y \sin \alpha_r - p_r = 0 \quad (25)$$

то уравненіе:

$$A_1 A_2 = k A_3 A_4 \quad (26)$$

будетъ, очевидно, коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки пересѣченія прямыхъ:

$$A_1 = 0 \text{ и } A_3 = 0, \quad A_1 = 0 \text{ и } A_4 = 0; \quad A_2 = 0 \text{ и } A_3 = 0, \quad A_2 = 0 \text{ и } A_4 = 0$$

Если необходимо знать какое изъ коническихъ сѣченій представляетъ (26), то надобно вмѣсто A_1, A_2, \dots подставить ихъ выраженія (25) и опредѣлить родъ коническаго сѣченія признакомъ даннымъ въ § 236.

Уравненіе (26) выражаетъ слѣдующее свойство коническаго сѣченія, описаннаго около четырехугольника: Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ, какой-нибудь, точки коническаго сѣченія, описаннаго около четырехугольника, на стороны $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ находится въ постоянномъ отношеніи съ произведеніемъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ той-же точки на стороны $A_3 = 0, A_4 = 0$.

Задача. Когда коническое сѣченіе:

$$A_1 A_2 = k A_3 A_4$$

будетъ кругъ?

Рѣшеніе. Подставимъ въ это уравненіе вмѣсто A_1, A_2, \dots ихъ выраженія:

$$x \cos \alpha_r + y \sin \alpha_r - p_r$$

то найдемъ:

$$\begin{aligned} & (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1) (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2) = \\ & = k (x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3) (x \cos \alpha_4 + y \sin \alpha_4 - p_4) \end{aligned}$$

перемножая и приравнивая коэффициенты при x^2 и y^2 , а коэффициентъ при xy , полагая равнымъ нулю, найдемъ:

$$\cos (\alpha_1 + \alpha_2) = k \cos (\alpha_3 + \alpha_4) \quad ; \quad \sin (\alpha_1 + \alpha_2) = k \sin (\alpha_3 + \alpha_4)$$

возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ $k = \pm 1$. Это значеніе k даетъ слѣдующую зависимость между углами:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 \quad \text{или} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ + \alpha_3 + \alpha_4$$

откуда:

$$\alpha_1 - \alpha_3 = \alpha_4 - \alpha_2 \quad \text{или} \quad \alpha_1 - \alpha_3 = 180^\circ + \alpha_4 - \alpha_2$$

§ 300. Если въ уравненіи:

$$A_1 A_2 = k A_3 A_4 \quad (27)$$

положимъ $A_3 = A_4$, то это уравненіе сдѣлается:

$$A_1 A_2 = k A^2_3 \quad (28)$$

Чтобы получить точку, въ которой сторона A_1 четырехугольника пересѣкаетъ коническое сѣченіе, надобно положить въ уравненіи (28) $A_1 = 0$, но это даетъ уравненіе $A^2_3 = 0$, которое есть полный квадратъ, слѣдовательно сторона A_1 пересѣкаетъ коническое сѣченіе въ двухъ совпадающихъ точкахъ, т. е. она касается коническаго сѣченія. Точно также и сторона A_2 есть касательная къ коническому сѣченію. слѣдовательно A_1 и A_2 суть касательныя, а A_3 есть хорда, соединяющая точки касанія. Хорду эту будемъ называть *хордою соприкосновенія*.

Задача. Когда уравненіе:

$$A_1 A_2 = k A^2_3$$

представляетъ кругъ?

Рѣшеніе. Приемъ, изложенный въ предъидущей задачѣ даетъ для этого слѣдующія условія:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = k \cos 2\alpha_3, \quad \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = k \sin 2\alpha_3$$

откуда, какъ выше:

$$k = 1, \quad \alpha_1 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_2$$

т. е. треугольникъ будетъ равнобедренный. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если изъ, какой-нибудь, точки окружности опустимъ перпендикуляры на двѣ касательныя и ихъ хорду соприкосновенія, то произведеніе перпендикуляровъ на касательныя находится въ постоянномъ отношеніи съ квадратомъ перпендикуляра на хорду соприкосновенія.

Задача. Найти уравненіе круга, описаннаго около треугольника, коего стороны суть:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

Рѣшеніе. Уравненіе формы:

$$\lambda A_1 A_2 + \mu A_1 A_3 + \nu A_2 A_3 = 0 \quad (29)$$

представляетъ, очевидно, коническое сѣченіе, описанное около даннаго треугольника, такъ какъ оно удовлетворяется координатами точекъ пересѣченія сторонъ:

$$A_1 = 0 \text{ и } A_2 = 0 ; A_1 = 0 \text{ и } A_3 = 0 ; A_2 = 0 \text{ и } A_3 = 0$$

спрашивается, когда уравненіе (29) представляетъ кругъ?

Поступая, какъ сказали выше (§ 299), найдемъ слѣдующія условія:

$$\lambda \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + \mu \cos (\alpha_1 + \alpha_3) + \nu \cos (\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

$$\lambda \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + \mu \sin (\alpha_1 + \alpha_3) + \nu \sin (\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

откуда:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\sin (\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \cos (\alpha_1 + \alpha_3) - \sin (\alpha_1 + \alpha_3) \cos (\alpha_2 + \alpha_3)} = \\ & = \frac{\mu}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2) \cos (\alpha_2 + \alpha_3) - \sin (\alpha_2 + \alpha_3) \cos (\alpha_1 + \alpha_2)} = \\ & = \frac{\nu}{\sin (\alpha_1 + \alpha_3) \cos (\alpha_1 + \alpha_2) - \sin (\alpha_1 + \alpha_2) \cos (\alpha_1 + \alpha_3)} \end{aligned}$$

или:

$$\frac{\lambda}{\sin (\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\mu}{\sin (\alpha_1 - \alpha_3)} = \frac{\nu}{\sin (\alpha_3 - \alpha_2)}$$

Но $\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_1 - \alpha_3$, $\alpha_2 - \alpha_1$ суть углы между сторонами A_2 и A_3 ; A_1 и A_3 , A_2 и A_1 , которые если означимъ черезъ φ_1 , φ_2 , φ_3 , то найдемъ:

$$A_1 A_2 \sin \varphi_3 + A_1 A_3 \sin \varphi_2 + A_2 A_3 \sin \varphi_1 = 0 \quad (30)$$

углы φ_1 , φ_2 , φ_3 противулежатъ сторонамъ A_1 , A_2 , A_3 .

Покажемъ теперь замѣчательное геометрическое значеніе уравненія (30). Пусть треугольникъ, около котораго описанъ кругъ, будетъ ABC (фиг. 118).

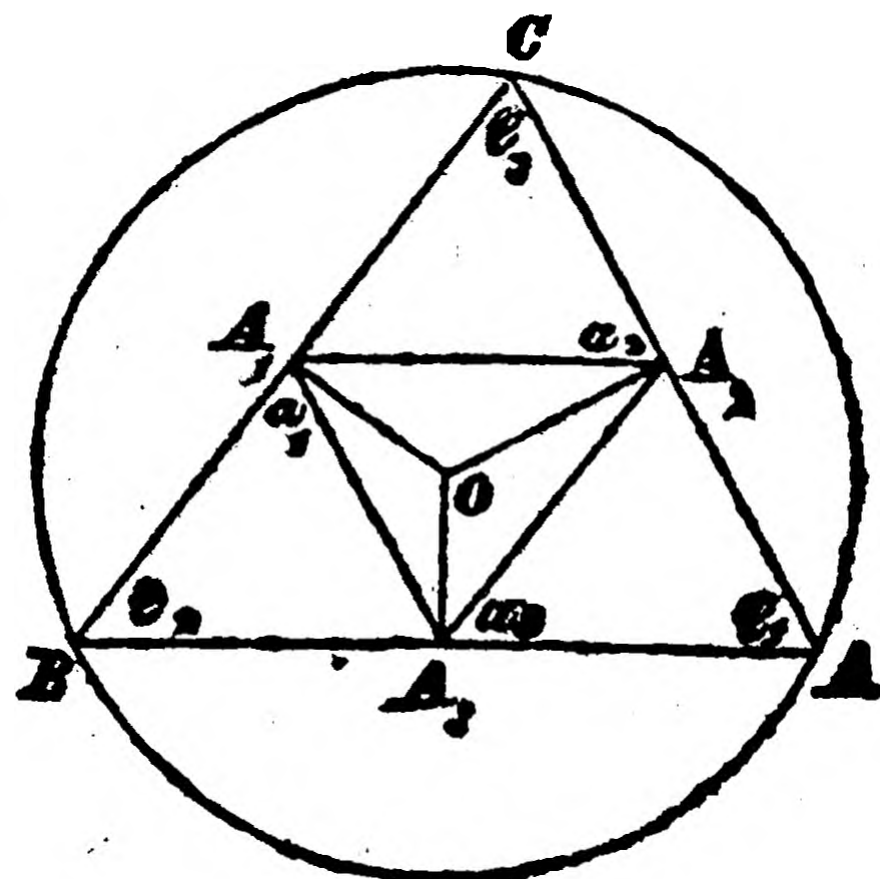
Возьмемъ, какую-нибудь точку O , то для ея координатъ значенія A_1 , A_2 , A_3 будутъ перпендикуляры Oa_1 , Oa_2 , Oa_3 . Если проведемъ прямыя $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_2 a_3$, то образуется треугольникъ $a_1 a_2 a_3$, въ которомъ углы при точкѣ O суть дополнительные угловъ φ_1 , φ_2 , φ_3 до $2d$, слѣдовательно:

$$A_1 A_2 \sin \varphi_3 \quad , \quad A_1 A_3 \sin \varphi_2 \quad , \quad A_2 A_3 \sin \varphi_1$$

суть двойныя площади треугольниковъ:

$$\Delta A_1 O A_2 \quad , \quad \Delta A_1 O A_3 \quad , \quad \Delta A_2 O A_3$$

Фиг. 118.



откуда:

$$A_1 A_2 \sin \varphi_3 + A_1 A_3 \sin \varphi_2 + A_2 A_3 \sin \varphi_1$$

есть двойная площадь треугольника $a_1 a_2 a_3$.

Если точка O находится на окружности круга, то эта площадь равна нулю, откуда вытекает слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если изъ, какой-нибудь, точки окружности круга, описаннаго около треугольника, опустимъ перпендикуляры на стороны треугольника, то основанія этихъ перпендикуляровъ лежатъ на одной прямой линіи. Это предложеніе принадлежит Симсону.

§ 301. Напишемъ уравненіе (29) въ формѣ:

$$\lambda A_1 A_2 + A_3 (\mu A_1 + \nu A_2) = 0$$

которое представляетъ коническое сѣченіе и кругъ, если λ , μ , ν имѣютъ выше найденныя значенія. Это уравненіе удовлетворяется координатами точекъ пересѣченія прямыхъ:

$$A_1 = 0 \text{ и } A_3 = 0 \quad ; \quad A_2 = 0 \text{ и } A_3 = 0$$

Точно также оно удовлетворяется координатами точекъ пересѣченія прямыхъ:

$$A_1 = 0 \text{ и } \mu A_1 + \nu A_2 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \text{ и } \mu A_1 + \nu A_2 = 0$$

Но эти двѣ точки совпадаютъ, потому что прямая:

$$\mu A_1 + \nu A_2 = 0$$

проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$; слѣдовательно прямая:

$$\mu A_1 + \nu A_2 = 0$$

есть касательная къ кривой въ точкѣ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$; точно также:

$$\lambda A_2 + \mu A_3 = 0 \quad , \quad \lambda A_1 + \nu A_3 = 0$$

суть касательныя къ кривой въ точкахъ $A_1 = 0$, $A_3 = 0$; $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. Если касательныя въ вершинахъ треугольника напишемъ въ формѣ:

$$\frac{A_2}{\mu} + \frac{A_3}{\lambda} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{\nu} + \frac{A_3}{\lambda} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{\nu} + \frac{A_2}{\mu} = 0 \quad (31)$$

то легко видѣть, что три точки, въ которыхъ касательныя пересѣкаются, лежатъ на одной прямой линіи:

$$\frac{A_1}{\nu} + \frac{A_2}{\mu} + \frac{A_3}{\lambda} = 0 \quad (32)$$

Вычитая по-парно уравненія (31), найдемъ:

$$\frac{A_2}{\mu} - \frac{A_3}{\lambda} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{\lambda} - \frac{A_1}{\nu} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{\nu} - \frac{A_2}{\mu} = 0 \quad (33)$$

уравненія, которыя показываютъ, что эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ. Откуда имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Прямыя, соединяющія вершины вписаннаго въ кругъ треугольника съ соответствующими вершинами треугольника, образуемаго касательными въ этихъ вершинахъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

§ 302. Легко видѣть, что:

$$\lambda^2 A_1^2 + \mu^2 A_2^2 + \nu^2 A_3^2 - 2\lambda\mu A_1 A_2 - 2\lambda\nu A_1 A_3 - 2\mu\nu A_2 A_3 = 0 \quad (34)$$

есть уравненіе кривой второго порядка, вписанной въ треугольникъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\sqrt{\lambda A_1} + \sqrt{\mu A_2} + \sqrt{\nu A_3} = 0 \quad (35)$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $A_3 = 0$, то имѣемъ:

$$(\lambda A_1 - \mu A_2)^2 = 0$$

т. е. сторона $A_3 = 0$ пересѣкаетъ кривую въ двухъ совпадающихъ точкахъ, т. е. $A_3 = 0$ есть касательная къ коническому сѣченію (34); точно также $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ суть касательныя къ нему. Если уравненіе (34) напишемъ въ формѣ:

$$\nu A_3 (\nu A_3 - 2\lambda A_1 - 2\mu A_2) + (\lambda A_1 - \mu A_2)^2 = 0 \quad (36)$$

то увидимъ, что прямая $\lambda A_1 - \mu A_2 = 0$, проходя черезъ точку $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, проходитъ и черезъ точку, въ которой прямая $A_3 = 0$ пересѣкаетъ кривую; слѣдовательно три прямыя:

$$\lambda A_1 - \mu A_2 = 0 \quad , \quad \mu A_2 - \nu A_3 = 0 \quad , \quad \nu A_3 - \lambda A_1 = 0$$

которыя соединяютъ точки касанія съ противуположащими сторонами описаннаго треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ. Тоже разсужденіе, которое показываетъ, что $A_3 = 0$ есть касательная, покажетъ изъ уравненія (36), что и прямая:

$$\nu A_3 - 2\lambda A_1 - 2\mu A_2 = 0 \quad (37)$$

есть также касательная. Легко видѣть, что (37) есть касательная въ точкѣ, въ которой прямая, соединяющая точку пересѣченія $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ съ точкою касанія прямой $A_3 = 0$, пересѣкаетъ кривую.

Изъ этого видимъ, что точки, въ которыхъ касательныя:

$$2\lambda A_1 + 2\mu A_2 - \nu A_3 = 0, \quad 2\mu A_2 + 2\nu A_3 - \lambda A_1 = 0, \quad 2\nu A_3 + 2\lambda A_1 - \mu A_2 = 0$$

пересѣкаютъ противоположныя стороны лежатъ на одной прямой:

$$\lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 = 0$$

Задача. Найти условія, при которыхъ коническое сѣченіе (34) будетъ кругъ?

Пересѣченіе двухъ круговъ.

§ 303. Пусть:

$$\begin{aligned} S_1 &= (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ S_2 &= (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

будутъ уравненія двухъ круговъ; эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$\begin{aligned} S_1 &= x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0 \\ S_2 &= x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Уравненіе:

$$S_1 - \lambda S_2 = 0 \quad (40)$$

будетъ уравненіе кривой, проходящей чрезъ точки пересѣченія двухъ круговъ (38). Легко видѣть изъ формы уравненія (40), что эта кривая будетъ также кругъ. Этотъ кругъ при $\lambda = 1$ обращается въ прямую:

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + c_1 - c_2 = 0 \quad (41)$$

которая есть общая хорда двухъ данныхъ круговъ.

Чтобы найти координаты точекъ пересѣченія двухъ круговъ (38), надобно только опредѣлить x и y изъ уравненій (41) и одного изъ уравненій (38). Слѣдовательно два круга пересѣкаются въ двухъ дѣйствительныхъ, совпадающихъ, или двухъ мнимыхъ точкахъ. Какія бы эти точки ни были, дѣйствительныя или мнимыя, прямая $S_1 - S_2 = 0$ (41) всегда дѣйствительна. Когда круги пересѣкаются въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ она называется *общей хордою*, когда же круги пересѣкаются въ двухъ мнимыхъ точкахъ, то эта прямая называется *радикальною осью* двухъ круговъ.

§ 304. Мы выше видѣли (§ 296), что если въ уравненіе круга $S_1 = 0$ подставимъ координаты точки внѣ окружности, то S_1 получитъ числовую величину, которая есть квадратъ разстоянія взятой точки отъ точки ка-

санія касательной, проведенной чрезъ взятую точку въ кругу $S_1 = 0$. Изъ этого замѣчанія и изъ уравненія радикальной оси:

$$S_1 - S_2 = 0 \quad \text{или} \quad S_1 = S_2$$

видимъ, что *радикальная ось есть геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ проведенныя касательныя къ двумъ кругамъ равны*. Это свойство имѣетъ прямая $S_1 - S_2 = 0$ будутъ-ли круги пересѣкаться въ дѣйствительныхъ или мнимыхъ точкахъ.

Если замѣтимъ, что уравненіе прямой, проходящей черезъ центры данныхъ двухъ круговъ есть (§ 39):

$$\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{y - b_1}{b_2 - b_1}$$

то легко видѣть, что общая хорда перпендикулярна къ этой прямой.

Если круги пересѣкаются въ дѣйствительныхъ точкахъ, то радикальная ось есть общая хорда и легко можетъ быть построена. Если-же круги пересѣкаются въ мнимыхъ точкахъ, то радикальная ось, будучи перпендикулярна къ прямой, проходящей черезъ центры круговъ, дѣлитъ разстояніе между центрами такъ, что *разность квадратовъ этихъ разстояній равна разности квадратовъ радіусовъ*.

§ 305. Пусть:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \quad (42)$$

будутъ уравненія трехъ круговъ, радикальныя оси каждой пары будутъ:

$$S_1 - S_2 = 0 \quad , \quad S_2 - S_3 = 0 \quad , \quad S_3 - S_1 = 0 \quad (43)$$

очевидно (§ 52) эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, которая называется *радикальнымъ центромъ* двухъ круговъ (42).

Если изъ радикальнаго центра проведемъ касательныя къ тремъ кругамъ, то по свойству радикальныхъ осей, всѣ эти касательныя равны.

Если радикальный центръ возьмемъ за центръ, а касательную за радіусъ и опишемъ кругъ, то этотъ кругъ, пересѣчетъ всѣ три круга (42) подъ прямымъ угломъ.

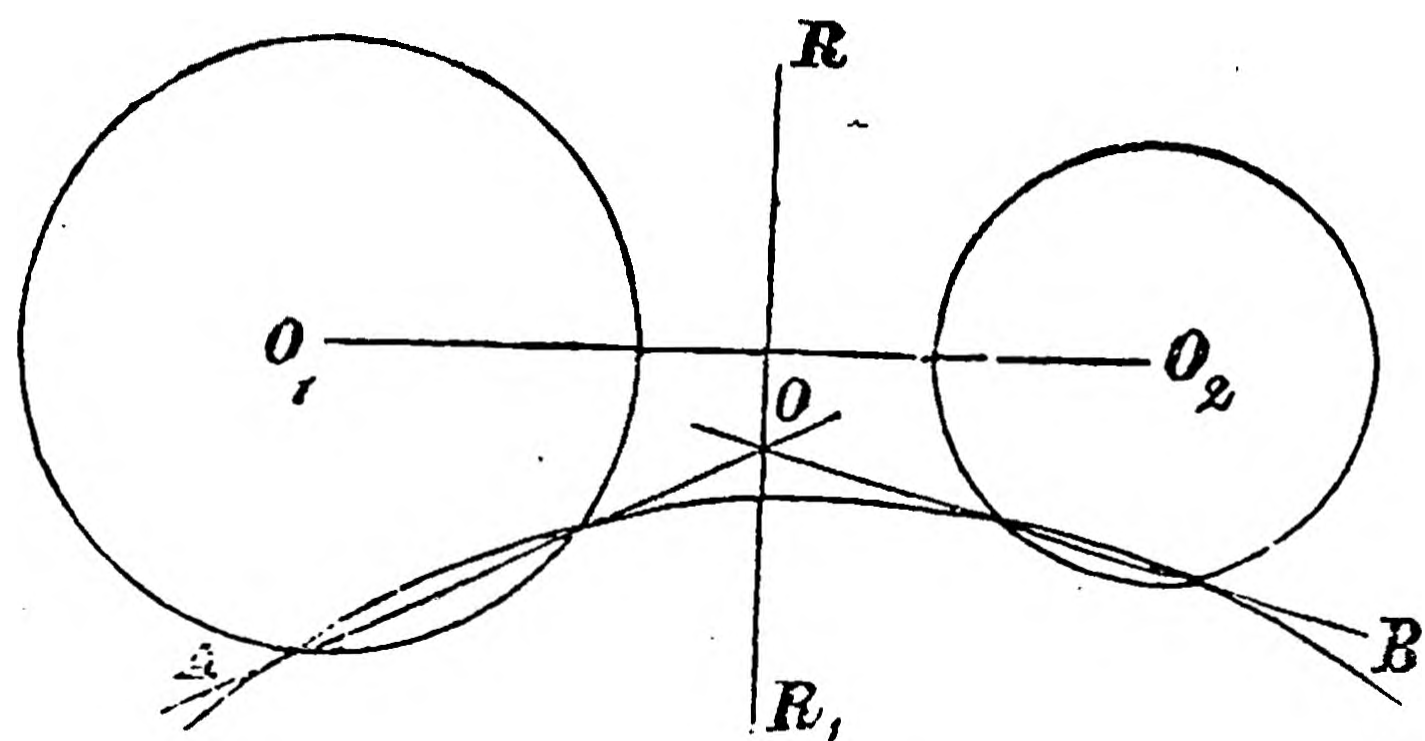
На основаніи свойствъ изложенныхъ въ настоящемъ параграфѣ легко рѣшить слѣдующую задачу:

Задача. Построить радикальную ось двухъ данныхъ круговъ?

Рѣшеніе. Пусть $S_1 = 0$ и $S_2 = 0$ будутъ данные круги, коихъ центры

суть O_1 и O_2 (фиг. 119). Проведемъ третій кругъ $S_3 = 0$ совершенно произволь-

Фиг. 119.



ный, но обусловленный только тѣмъ, чтобы онъ пересѣкался съ обоими данными кругами. Пусть его центръ будетъ O_3 .

Проведемъ общія хорды AO и BO круговъ S_1 и S_3 , S_2 и S_3 . Точка O пересѣченія AO и OB будетъ радикальный центръ. Перпендикуляръ $OR \perp O_1O_2$ будетъ искомая радикальная ось круговъ S_1 и S_2 (43).

§ 306. Мы выше видѣли, что два круга пересѣкаются въ двухъ только точкахъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ, между тѣмъ, какъ вообще коническія сѣченія пересѣкаются въ четырехъ точкахъ. Такое свойство круга зависитъ отъ особенной формы его уравненія, которая ведетъ къ весьма интереснымъ заключеніямъ. Для этого отнесемъ данные два круга:

$$x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0 \quad (44)$$

$$x^2 + y^2 + 2a''x + 2b''y + c'' = 0$$

къ координатному треугольнику. Координаты Декарта выражаются въ трилинейныхъ слѣдующимъ образомъ (§ 182):

$$x = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3} = \frac{A}{C}, \quad y = \frac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3} = \frac{B}{C} \quad (45)$$

подставляя эти выраженія въ уравненія (44), найдемъ:

$$A^2 + B^2 + 2a'AC + 2b'BC + c'C^2 = 0 \quad (46)$$

$$A^2 + B^2 + 2a''AC + 2b''BC + c''C^2 = 0$$

вычитая получимъ уравненіе геометрическаго мѣста, проходящаго чрезъ точки пересѣченія двухъ круговъ:

$$C \{ 2(a' - a'')A + 2(b' - b'')B + (c' - c'')C \} = 0 \quad (47)$$

которое представляетъ пару прямыхъ:

$$2(a' - a'')A + 2(b' - b'')B + (c' - c'')C = 0 \quad \text{и} \quad C = 0 \quad (48)$$

Слѣдовательно уравненіе четвертой степени, изъ котораго опредѣляются координаты точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій, въ насто-

ящемъ случаѣ, распадается на два квадратныя уравненія. Это происходитъ отъ того, что разрѣшающее кубическое уравненіе $\Delta(\lambda) = 0$, какъ увидимъ ниже, понижается на одну степень, а пониженіе разрѣшающаго уравненія происходитъ отъ того, что одна изъ сторонъ общаго полярнаго треугольника напередъ извѣстна—это прямая, проходящая черезъ центры круговъ. Слѣдовательно одинъ изъ корней уравненія $\Delta(\lambda) = 0$ извѣстенъ.

Изъ этого видимъ, что двѣ точки пересѣченія двухъ круговъ находятся на радикальной оси, а двѣ на бесконечно удаленной прямой $C = 0$, а слѣдовательно положеніе этихъ точекъ независитъ отъ коэффициентовъ $a', b', c'; a'', b'', c''$, опредѣляющихъ круги. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее замѣчательное и интересное предложеніе:

Предложеніе. Всѣ круги на плоскости проходятъ черезъ двѣ однѣ и тѣ же мнимыя точки на бесконечно-удаленной прямой, слѣдовательно не могутъ пересѣчься болѣе, чѣмъ въ двухъ конечныхъ, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, точкахъ. Эти точки называются *мнимыми циклическими точками*.

Циклическія точки опредѣляются пересѣченіемъ прямой $C = 0$ съ бесконечно малымъ кругомъ:

$$A^2 + B^2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 0 \quad (49)$$

Если изъ уравненій:

$$A \pm Bi = 0 \quad , \quad C = 0 \quad , \quad A\xi + B\eta + C = 0 \quad (50)$$

исключимъ A, B, C , то найдемъ уравненіе циклическихъ точекъ:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi & \eta & 1 \end{vmatrix} = \eta \pm i\xi = 0 \quad (51)$$

Произведеніе циклическихъ точекъ выражается уравненіемъ:

$$\xi^2 + \eta^2 = 0 \quad (52)$$

Изъ этого видимъ, что кругъ есть коническое сѣченіе, которое опредѣляется пятью точками, изъ коихъ двѣ, на бесконечно-удаленной прямой, для всѣхъ круговъ на плоскости, однѣ и тѣ же, слѣдовательно всегда даны, поэтому кругъ опредѣляется только тремя точками.

§ 307. Приравнивая нулю члены второго порядка въ уравненіи круга:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad (53)$$

найдемъ уравненіе прямыхъ параллельныхъ ассимптотамъ (§ 237):

$$x^2 + y^2 = (y + ix)(y - ix) \quad (54)$$

Если начало координатъ въ центрѣ круга, то его ассимптоты будутъ:

$$y + ix = 0 \quad , \quad y - ix = 0 \quad (55)$$

Изъ этого видимъ, что направленіе ассимптотъ въ кругѣ дается уравненіемъ:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 0$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm i$$

Изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Ассимптоты всѣхъ круговъ параллельны.

Изъ такого обобщенія или, лучше сказать, геометрическаго взгляда на отвлеченныя комбинаціи алгебраическихъ символовъ, вытекаютъ слѣдующія замѣчательныя предложенія:

Предложеніе 1. Направленіе ассимптотъ составляетъ со всѣми направленіями прямыхъ постоянный уголъ—безконечно большой.

Доказательство. Направленіе одной изъ ассимптотъ дается уравненіемъ $\operatorname{tg} \alpha = i$. Если черезъ φ назовемъ уголъ, который, какая-нибудь, прямая составляетъ съ осью x , то найдемъ:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - i}{1 + i \operatorname{tg} \varphi} = -i$$

результатъ независимый отъ угла φ . Точно также получимъ и для $\operatorname{tg} \alpha = -i$.

Теперь покажемъ, что если $\operatorname{tg} \alpha = i$, то:

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(i) = \infty$$

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$e^{\varphi i} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad , \quad e^{-\varphi i} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

откуда:

$$\varphi i = \log(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad , \quad -\varphi i = \log(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

вычитая, найдемъ:

$$\varphi = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} \right) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \varphi}{1 - i \operatorname{tg} \varphi} \right) \quad (56)$$

Если въ этомъ выраженіи положимъ $\varphi = \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = \pm i$, то найдемъ, что:

$$\alpha = \frac{1}{2i} \log (0) = -\infty \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{1}{2i} \log (\infty) = \infty$$

Откуда заключаемъ, что прямыя составляющія безконечно большой уголъ съ, какою-нибудь, прямою, всѣ проходятъ черезъ циклическія точки, т. е. эти точки суть обертки такихъ прямыхъ. Если прямыя, составляющія безконечно большіе углы съ асимптотическимъ направлениемъ, назовемъ *безконечно-удаленными прямыми*, то выведемъ слѣдующее заключеніе: что всѣ безконечно-удаленныя точки находятся на безконечно-удаленной прямой (§ 185), а всѣ безконечно-удаленныя прямыя проходятъ черезъ циклическія точки.

Предложеніе 2. Двѣ, какія-нибудь перпендикулярныя прямыя съ асимптотами круга составляютъ гармоническую связку.

Доказательство. Пусть уравненія двухъ перпендикулярныхъ прямыхъ будутъ:

$$y + ax = 0 \quad , \quad y - \frac{1}{a}x = 0$$

уравненія асимптотъ суть:

$$y + ix = 0 \quad , \quad y - ix = 0 \quad (57)$$

ангармоническое отношеніе этой связки будетъ:

$$\frac{a-i}{a+i} : \frac{-\frac{1}{a}-i}{-\frac{1}{a}+i} = \frac{a-i}{a+i} : \frac{1+ai}{1-ai} = \frac{(a-i)(1-ai)}{(a+i)(1+ai)} = -1$$

Легко показать, обратно, что если двѣ прямыя гармоничны съ прямыми (57), то онѣ перпендикулярны между собою.

Легко видѣть, что если φ есть уголъ между асимптотами круга:

$$y - ix = 0 \quad , \quad y + ix = 0$$

то $\operatorname{tg} \varphi = 1$.

Это послѣднее предложеніе, задачу построенія перпендикулярныхъ прямыхъ, приводитъ, какъ видимъ, къ построенію чисто проэктивному—построенію гармоническихъ точекъ.

§ 308. Мы выше видѣли, что кругъ можно разсматривать, какъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ циклическія точки, слѣдовательно всѣ свойства круга сливаются со свойствами коническихъ сѣченій, имѣ-

ющихъ двѣ общія точки, но изученіе свойствъ такихъ коническихъ сѣченій основано на проэктивности, слѣдовательно метрическая, обыкновенная геометрія, въ тѣхъ частяхъ, основаніемъ которыхъ служатъ свойства круга, является какъ приложеніе предложеній относительно положеній.

Такъ мы видѣли, что изъ опредѣленія круга исчезаетъ все *метрическое*—это есть коническое сѣченіе, проходящее чрезъ пять точекъ, изъ коихъ двѣ мнимыя, на бесконечно-удаленной прямой.

Понятіе объ углѣ можемъ замѣстить ангармоническимъ отношеніемъ, которое, какъ видѣли изъ всего предъидущаго, служитъ основаніемъ всѣхъ проэктивныхъ изслѣдованій.

Если $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$ суть координаты двухъ прямыхъ, то имѣемъ (§ 66), если α есть уголъ между ними:

$$\cos \alpha = \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}}$$

откуда:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \right)$$

или:

$$\alpha = \frac{i}{2} \log \left\{ \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \sqrt{(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2)^2 - (\xi_1^2 + \eta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2)}}{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 - \sqrt{(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2)^2 - (\xi_1^2 + \eta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2)}} \right\} \quad (58)$$

Это выраженіе вытекаетъ изъ формулы (56).

Выраженіе подъ знакомъ \log есть, очевидно, отношеніе корней уравненія:

$$(\xi_2^2 + \eta_2^2) \lambda^2 + 2(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) \lambda + \xi_1^2 + \eta_1^2 = 0 \quad (59)$$

рѣшеннаго относительно λ . Но это уравненіе есть ничто иное, какъ произведеніе уравненій циклическихъ точекъ (51) или (52), въ которыя вмѣсто ξ и η вставлены координаты $\xi_1 + \lambda \xi_2$, $\eta_1 + \lambda \eta_2$. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее весьма важное предложеніе:

Предложеніе. Уголъ между двумя прямыми есть логарифмъ ангармоническаго отношенія связки, которую данныя прямая составляютъ съ прямыми, проходящими черезъ точку ихъ пересѣченія и черезъ циклическія точки, умноженный на $\frac{i}{2}$.

Съ помощью этого предложенія проэктивная угловая геометрія можетъ быть прослѣжена со всѣхъ сторонъ. Такъ, напримѣръ, фигуры, которыя предлагаются для изслѣдованія, рассматриваются по отношенію къ

двумъ, какимъ-нибудь, точкамъ и прямой, проходящей черезъ эти точки, затѣмъ эти точки замѣщаются циклическими, а прямая замѣщается безконечно-удаленною прямою; откуда найденныя проэктивныя предложенія обращаются въ метрическія въ ихъ обыкновенной формѣ. Какъ примѣры могутъ служить слѣдующія предложенія.

1. Кругъ вполне опредѣляется тремя точками.

2. Центръ круга, какъ и вообще коническаго сѣченія, есть полюсъ безконечно-удаленной прямой, откуда слѣдуетъ, что концентрическіе круги опредѣляются свойствомъ имѣть общія ассимптоты. Слѣдовательно они касаются въ циклическихъ точкахъ, а поэтому пересѣкаться въ другихъ точкахъ больше не могутъ. Такая система круговъ представляется уравненіемъ:

$$x_1 x_2 = \lambda x_3^2 \quad (60)$$

въ которомъ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ суть ассимптоты, а $x_3 = 0$ безконечно-удаленная прямая. Чтобы перейти къ прямоугольнымъ координатамъ надобно положить:

$$x_1 = x + iy, \quad x_2 = x - yi, \quad x_3 = 1$$

подставляя въ уравненіе (60) найдемъ:

$$x^2 + y^2 = \lambda$$

уравненіе круга въ его обыкновенной формѣ.

3. Всѣ углы, имѣющіе вершины на окружности, коихъ стороны заключаютъ равныя дуги, равны. Это предложеніе есть частный случай предложенія, что ангармоническое отношеніе связки прямыхъ, коей вершина находится на коническомъ сѣченіи, а прямыя проходятъ черезъ четыре постоянныя точки на томъ же коническомъ сѣченіи, есть величина постоянная (§ 230). Въ настоящемъ случаѣ четыре луча идутъ изъ точки на окружности къ четыремъ точкамъ на той же окружности, изъ коихъ двѣ суть циклическія.

4. Сопряженные діаметры въ кругѣ перпендикулярны. Діаметры съ ассимптотами образуютъ гармоническую связку (§ 235), а мы видѣли, что такія прямыя перпендикулярны между собою. Изъ этого предложенія вытекаетъ, какъ слѣдствіе, слѣдующее парадоксальное предложеніе:

Предложеніе. Каждая изъ ассимптотъ въ кругѣ сама себѣ перпендикулярна. Это слѣдуетъ изъ того (§ 235), что ассимптота въ коническомъ сѣченіи есть сама себѣ сопряженный діаметръ. Это слѣдуетъ еще и изъ того, что если:

$$\operatorname{tg} \alpha = i$$

то

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = -1$$

т. е. условіе перпендикулярности самой себѣ.

§ 309. Преобразовавъ понятіе объ углѣ въ проэктивное понятіе ангармоническаго отношенія, легко преобразовать и понятіе объ отрѣзкѣ и, такимъ образомъ, всѣ метрическія предложенія преобразуются въ проэктивныя.

Пусть a, b, c, d , будутъ четыре точки на прямой. Ихъ ангармоническое отношеніе есть:

$$\frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd}$$

если въ этомъ выраженіи положимъ:

$$cb = 1$$

а точку d на бесконечности, то оно сдѣлается:

$$\frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd} = \frac{ab}{1} : \frac{a\infty}{c\infty} = ab$$

откуда имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Разстояніе точекъ a и b или отрѣзокъ ab (взятый въ извѣстномъ направленіи) равенъ ангармоническому отношенію этихъ двухъ точекъ съ точками, изъ коихъ одна находится на разстояніи отъ b равномъ единицѣ, а другая на бесконечности.

Такимъ образомъ видимъ, что мѣровыя понятія преобразуются въ проэктивныя, а слѣдовательно предложенія относительно мѣры могутъ быть преобразованы въ проэктивныя и обратно. На дальнѣйшемъ развитіи этого обобщенія мы не остановимся, а займемся нѣкоторыми замѣчательными свойствами системы круговъ.

ГЛАВА XVIII.

Свойства системы круговъ, проходящихъ чрезъ точки пересѣченія двухъ данныхъ круговъ.

§ 310. Если:

$$S_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$$

$$S_2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0$$

(1)

суть уравненія двухъ круговъ, то выше видѣли, что:

$$S_1 - \lambda S_2 = 0 \quad (2)$$

есть уравненіе цѣлой системы круговъ, проходящихъ черезъ точки пересѣченія круговъ (1), дѣйствительныя или мнимыя. Если радіусъ одного изъ круговъ системы (2) означимъ черезъ r , а координаты его центра черезъ a и b , то легко найдемъ изъ (2), что:

$$a = \frac{a_1 - \lambda a_2}{1 - \lambda}, \quad b = \frac{b_1 - \lambda b_2}{1 - \lambda}, \quad r^2 = \frac{r_2^2 \lambda^2 + (d^2 - r_1^2 - r_2^2) \lambda + r_1^2}{(1 - \lambda)^2} \quad (3)$$

гдѣ d есть разстояніе между центрами круговъ (1).

Изъ этихъ выраженій видимъ, что центры всей системы круговъ (2) находятся на прямой, проходящей черезъ центры круговъ (1).

§ 311. Вся система круговъ (2) имѣетъ общую радикальную ось или общую хорду, смотря потому пересѣкаются-ли круги (1) въ мнимыхъ или дѣйствительныхъ точкахъ. Между кругами системы (2) есть два круга, коихъ радіусы равны нулю; положеніе этихъ круговъ найдемъ, если въ третьемъ изъ выраженій (3) положимъ $r = 0$. Это условіе даетъ квадратное уравненіе относительно λ :

$$r_2^2 \lambda^2 + (d^2 - r_1^2 - r_2^2) \lambda + r_1^2 = 0 \quad (4)$$

λ_1 и λ_2 корни этого уравненія даютъ положенія ихъ центровъ, которые, въ этомъ случаѣ, суть сами круги. Эти круги или точки называются *предѣльными* точками системы круговъ (2).

Предѣльныя точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя, смотря потому будутъ-ли корни уравненія (4) дѣйствительные или мнимые. Если выраженіе:

$$(d^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \quad (5)$$

будетъ положительное, то корни уравненія (4) будутъ дѣйствительные, въ противномъ случаѣ корни будутъ мнимые. Это выраженіе разлагается на слѣдующее произведеніе:

$$-(d + r_1 + r_2)(-d + r_1 + r_2)(d - r_1 + r_2)(d + r_1 - r_2) \quad (6)$$

изъ котораго видимъ, что выраженіе (5) будетъ отрицательнымъ подъ условіемъ:

$$d > r_1 + r_2 \quad \text{или} \quad d < r_2 - r_1$$

если $r_2 > r_1$.

Слѣдовательно система круговъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки, будетъ имѣть предѣльныя точки мнимыя, если точки пересѣченія круговъ будутъ дѣйствительныя; напротивъ, эти точки будутъ дѣйствительныя, если круги пересѣкаются въ мнимыхъ точкахъ.

§ 312. Такъ какъ уравненіе (3) второй степени относительно λ , то изъ этого заключаемъ, что всегда, въ системѣ круговъ (2), есть два круга съ даннымъ радіусомъ.

Легко построить систему круговъ (2) если два данные круга (1) пересѣкаются въ дѣйствительныхъ точкахъ, но если они пересѣкаются въ мнимыхъ точкахъ, то построеніе системы круговъ дѣлается на основаніи слѣдующаго свойства системы (2).

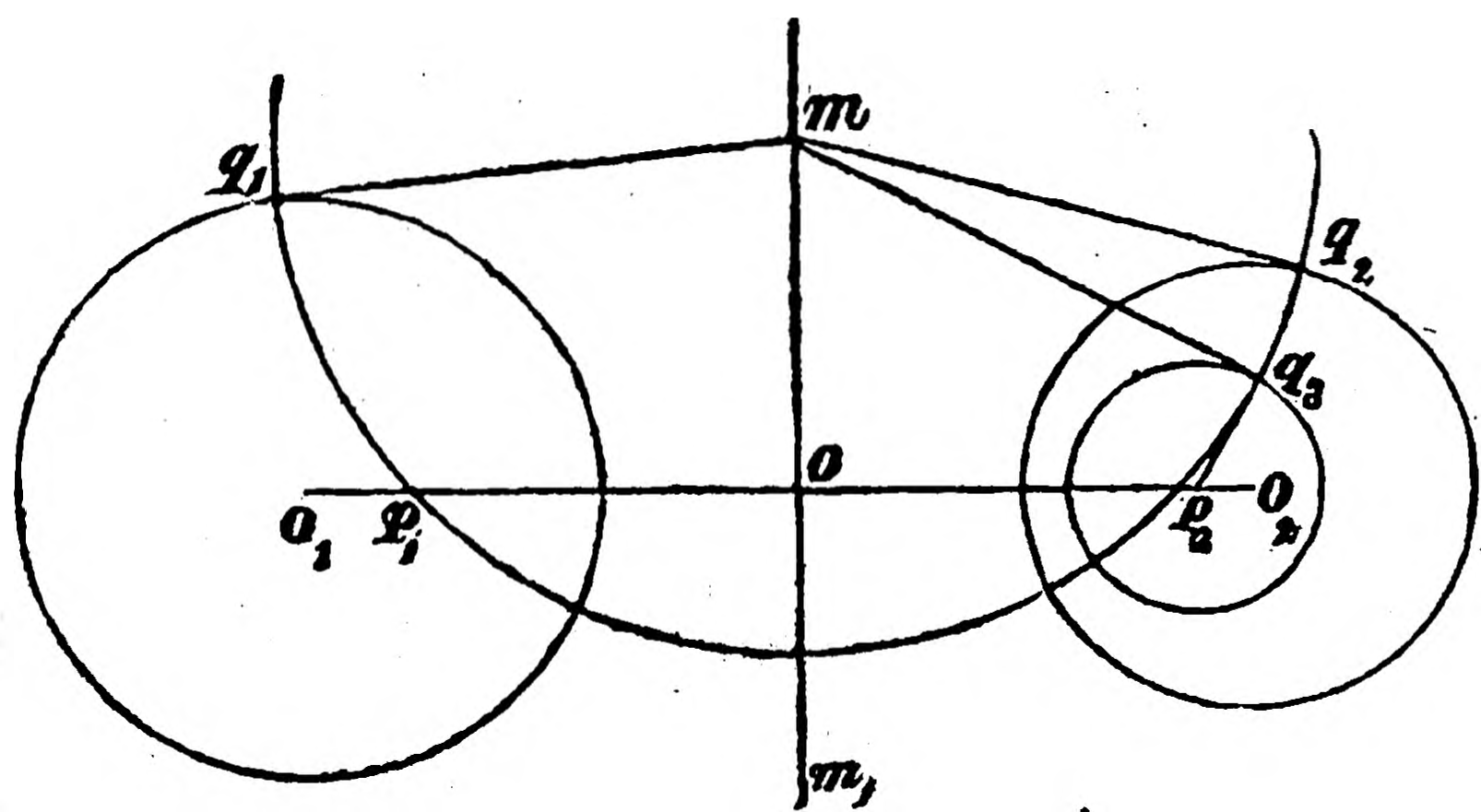
Мы видѣли, что касательныя, проведенныя изъ, какой-нибудь, точки m радикальной оси двухъ данныхъ круговъ (1) равны, но такъ какъ система круговъ (2) имѣетъ общую радикальную ось, то касательныя, проведенныя изъ точки m къ какимъ-нибудь двумъ кругамъ системы, равны.

Слѣдовательно, если изъ, какой-нибудь, точки m радикальной оси системы круговъ (2) проведемъ касательныя ко всѣмъ кругамъ системы, то эти касательныя равны.

Откуда заключаемъ, что геометрическое мѣсто точекъ касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ точки m радикальной оси, есть кругъ, пересѣкающій всѣ круги системы (2) подъ прямымъ угломъ и коего центръ есть точка m . Этотъ кругъ, пересѣкая всѣ круги системы, очевидно проходитъ и черезъ предѣльныя точки системы. Если теперь будемъ перемѣщать точку m по радикальной оси, то получимъ вторую систему круговъ пересѣкающихся круги данной системы подъ прямымъ угломъ.

Всѣ круги этой послѣдней системы, проходятъ черезъ предѣльныя точки, слѣдовательно прямая, проходящая черезъ предѣльныя точки, есть общая хорда второй системы, которая имѣетъ свойства подобныя первой системѣ. Изъ сопоставленія этихъ свойствъ вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Фиг. 120.



Предложеніе. Если система круговъ проходитъ черезъ двѣ однѣ и тѣ же точки, то она даетъ другую систему круговъ, которая пересѣкаетъ первую систему подъ прямымъ угломъ и проходитъ также черезъ двѣ точки (фиг. 120). Предѣльныя точки одной системы суть точки пересѣченія другой.

Если предѣльныя точки одной системы суть дѣйствительныя, то предѣльныя точки другой будутъ мнимыя.

Задача. На основаніи выше изложенныхъ свойствъ построить, какой-нибудь, кругъ изъ системы, если даны два круга?

§ 313. Изъ того свойства, что круги, имѣющіе центры на радикальной оси системы (2) и пересѣкающіе эту систему подъ прямымъ угломъ, проходятъ черезъ предѣльныя точки, слѣдуетъ, что предѣльныя точки находятся по обѣ стороны радикальной оси въ равныхъ отъ нея разстояніяхъ.

Если за основныя круги системы (2) возьмемъ вмѣсто круговъ (1) предѣльныя точки системы, то мы должны въ уравненіи (3) положить $r_1 = 0$ и $r_2 = 0$, которое въ силу этого сдѣлается:

$$r^2 = \frac{d_1^2 \lambda}{(1 - \lambda)^2} \quad (7)$$

гдѣ d_1 есть разстояніе между предѣльными точками.

Если во вторую часть уравненія (7) вмѣсто λ вставимъ $\frac{1}{\lambda}$, то она неизмѣняется, откуда заключаемъ, что центры круговъ системы съ равными радіусами находятся по обѣ стороны радикальной оси въ равныхъ отъ нея разстояніяхъ.

§ 314. Въ § 296 (16) нашли, что полярныя двухъ круговъ (1) относительно точки $(x_1 y_1)$ суть:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1 - a_1)(x - a_1) + (y_1 - b_1)(y - b_1) - r_1^2 = 0 \\ P_2 &= (x_1 - a_2)(x - a_2) + (y_1 - b_2)(y - b_2) - r_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

а потому легко видѣть, что полярная системы круговъ (2) есть:

$$P_1 - \lambda P_2 = 0 \quad (9)$$

Откуда заключаемъ, что всѣ полярныя точки $(x_1 y_1)$ круговъ системы (2) проходятъ черезъ точку пересѣченія поляръ:

$$P_1 = 0 \quad \text{и} \quad P_2 = 0$$

Эта послѣдняя точка есть гармоническій полюсъ (§ 208) данной точки $(x_1 y_1)$ относительно каждаго круга системы (2).

§ 315. Полярныя, какой-нибудь, точки на прямой, соединяющей центры круговъ (1), на примѣръ, точки:

$$x = \frac{a_1 - \lambda a_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{b_1 - \lambda b_2}{1 - \lambda}$$

очевидно, будутъ:

$$\begin{aligned} P_1 &= (a_1 - a_2)(x - a_1) + (b_1 - b_2)(y - b_1) - \frac{r_1^2(1 - \lambda)}{\lambda} = 0 \\ P_2 &= (a_2 - a_1)(x - a_2) + (b_2 - b_1)(y - b_2) - \frac{r_2^2(1 - \lambda)}{\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Эти прямыя перпендикулярны къ прямой, проходящей черезъ центры круговъ (1).

Если желаемъ имѣть полярныя одной изъ предѣльныхъ точекъ, то мы должны въ предъидущія уравненія вмѣсто λ вставить корни λ_1 и λ_2 уравненія (4) и будемъ имѣть полярныя одной изъ предѣльныхъ точекъ, на-примѣръ:

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)(x - a_1) + (b_1 - b_2)(y - b_1) - \frac{r_1^2(1 - \lambda_1)}{\lambda_1} &= 0 \\ (a_2 - a_1)(x - a_2) + (b_2 - b_1)(y - b_2) - \frac{r_2^2(1 - \lambda_1)}{\lambda_1} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Если въ эти уравненія вмѣсто x и y вставимъ координаты другой предѣльной точки:

$$x = \frac{a_1 - \lambda_2 a_2}{1 - \lambda_2}, \quad y = \frac{b_1 - \lambda_2 b_2}{1 - \lambda_2}$$

то замѣтивъ, что:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = - \frac{(d^2 - r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2}$$

найдемъ, что эти уравненія удовлетворяются этими координатами, откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если одну изъ предѣльныхъ точекъ возьмемъ за полюсъ, то прямая, проходящая черезъ другую предѣльную точку, перпендикулярно къ прямой, проходящей черезъ центры круговъ (1), будетъ полярна относительно всей системы круговъ (2). Слѣдовательно предѣльныя точки суть гармоническія полюсы относительно системы круговъ.

§ 316. Уравненію полярныя:

$$P_1 = (x_1 - a_1)(x - a_1) + (y_1 - b_1)(y - b_1) - r_1^2 = 0$$

точки (x_1, y_1) относительно круга:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$$

можно дать еще другую форму.

Для этого возьмемъ тождества:

$$\begin{aligned} (x - a_1)^2 - 2(x - a_1)(x_1 - a_1) + (x_1 - a_1)^2 - (x - x_1)^2 &\equiv 0 \\ (y - b_1)^2 - 2(y - b_1)(y_1 - b_1) + (y_1 - b_1)^2 - (y - y_1)^2 &\equiv 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Если придадимъ эти тождества къ $2P_1$, то найдемъ:

$$\begin{aligned} 2P_1 = \{ (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 \} + \{ (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 - r_1^2 \} - \\ - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 \end{aligned}$$

первый членъ этого выраженія есть S_1 , второй членъ есть тоже S_1 , но въ которое вмѣсто x, y вставлены координаты полюса x_1, y_1 , если числовое значеніе этого выраженія означимъ черезъ S'_1 , то предъидущее выраженіе $2P_1$ будетъ:

$$2P_1 = S_1 + S'_1 - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 = 0 \quad (13)$$

это и есть искомая форма поляры.

§ 317. Уравненія:

$$\begin{aligned} S_1 + S'_1 - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 &= 0 \\ S_2 + S'_2 - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

суть поляры точки (x_1, y_1) относительно круговъ (1). Если вычтемъ эти уравненія, то найдемъ:

$$S_1 - S_2 = -(S'_1 - S'_2) \quad (15)$$

Уравненія (14) совокупно выражаютъ условіе, что точки (x, y) и (x_1, y_1) суть гармоническіе полюсы круговъ $S_1 = 0$ и $S_2 = 0$ и вмѣстѣ всей системы круговъ (2).

Каждая изъ частей уравненія (15) есть уравненіе радикальной оси круговъ (1), въ которое подставлены координаты гармоническихъ полюсовъ (xy) и (x_1y_1) . Если это уравненіе (15) умножимъ на множитель, который бы давалъ нормальную форму обѣимъ частямъ уравненія (15), то ихъ числовыя величины будутъ перпендикуляры, опущенные изъ точекъ (xy) и (x_1y_1) на радикальную ось. Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Два гармоническіе полюса системы круговъ (2) находятся въ равномъ разстояніи отъ радикальной оси по обѣ ея стороны, или радикальная ось дѣлитъ пополамъ разстояніе между гармоническими полюсами системы круговъ.

Уравненіе круга въ линейныхъ координатахъ.

§ 318. Если a и b суть координаты точки, то ея уравненіе будетъ (§ 73):

$$A = a\xi + b\eta + 1 = 0 \quad (16)$$

Разстояніе прямой, данной координатами ξ_1, η_1 отъ точки (16), если его назовемъ черезъ r , будетъ:

$$\frac{a\xi_1 + b\eta_1 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = r \quad (17)$$

Если r будетъ величина постоянная, а ξ и η будутъ переменныя, удовлетворяющія уравненію (17), то прямая, данная координатами ξ, η будетъ, во всѣхъ своихъ положеніяхъ, находится въ равномъ разстояніи отъ точки (16), слѣдовательно будетъ касаться круга, коего центръ есть (a, b) , а радиусъ r .

Слѣдовательно уравненіе (17) представляетъ кругъ въ линейныхъ координатахъ. Этому уравненію можно дать форму:

$$r^2(\xi^2 + \eta^2) = (a\xi + b\eta + 1)^2 \quad (18)$$

или:

$$S = r^2(\xi^2 + \eta^2) - (a\xi + b\eta + 1)^2 = 0 \quad (19)$$

или:

$$S = r^2(\xi^2 + \eta^2) - A^2 = 0$$

§ 319. Легко найти условія, которымъ должны удовлетворять коэффициенты уравненія второй степени въ линейныхъ координатахъ, чтобы оно представляло кругъ. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + 2A_{12}\xi\eta + 2A_{13}\xi + 2A_{23}\eta + A_{33} = 0 \quad (20)$$

Если развернемъ уравненіе (19) и приравняемъ его коэффициенты коэффициентамъ уравненія (20), умноживъ предварительно уравненіе (19) на неопредѣленный коэффициентъ λ , то найдемъ:

$$\lambda(a^2 - r^2) = A_{11} \quad , \quad \lambda ab = A_{12} \quad , \quad \lambda(b^2 - r^2) = A_{22} \quad (21)$$

$$\lambda a = A_{13} \quad , \quad \lambda b = A_{23} \quad , \quad \lambda = A_{33}$$

исключая изъ этихъ уравненій λ, a, b, r , найдемъ слѣдующія условія для того, чтобы уравненіе (20) представляло кругъ:

$$A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33} = 0 \quad , \quad A_{13}^2 - A_{11}A_{33} = A_{23}^2 - A_{22}A_{33} \quad (22)$$

Координаты центра и радиусъ круга, опредѣляются слѣдующими выраже-
ніями:

$$a = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad b = \frac{A_{23}}{A_{33}}, \quad r^2 = \frac{A_{13}^2 - A_{11}A_{33}}{A_{33}^2} = \frac{A_{23}^2 - A_{22}A_{33}}{A_{33}^2} \quad (23)$$

§ 320. Уравненіе полюса данной координатами (ξ_1, η_1) поляры, оче-
видно, будетъ:

$$r^2(\xi_1\xi + \eta_1\eta + 1) = (a\xi_1 + b\eta_1 + 1)(a\xi + b\eta + 1) \quad (24)$$

Если прямая (ξ_1, η_1) касается круга, то уравненіе (24) будетъ представлять
точку касанія (§ 223).

§ 321. *Задача.* Найти общія касательныя двухъ данныхъ круговъ?

Рѣшеніе. Пусть данные два круга будутъ:

$$S_1 = (\xi^2 + \eta^2) - \left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + 1}{r_1} \right)^2 = 0 \quad (25)$$

$$S_2 = (\xi^2 + \eta^2) - \left(\frac{a_2\xi + b_2\eta + 1}{r_2} \right)^2 = 0$$

или:

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{A_1^2}{r_1^2} = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 - \frac{A_2^2}{r_2^2} = 0 \quad (26)$$

Уравненіе:

$$S_1 - \lambda S_2 = 0$$

будетъ коническое сѣченіе, которое имѣетъ общія касательныя съ круга-
ми (26). Между этимъ рядомъ коническихъ сѣченій есть пара точекъ, че-
резъ которыя, очевидно должны проходить общія касательныя къ даннымъ
кругамъ. Пара точекъ получится, когда $\lambda = 1$, именно:

$$\frac{A_1^2}{r_1^2} - \frac{A_2^2}{r_2^2} = 0$$

или:

$$\frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} = 0, \quad \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0 \quad (27)$$

Если эти уравненія напишемъ въ формѣ:

$$\frac{a_1r_2 + a_2r_1}{r_2 + r_1}\xi + \frac{b_1r_2 + b_2r_1}{r_2 + r_1}\eta + 1 = 0$$

$$\frac{a_1r_2 - a_2r_1}{r_2 - r_1}\xi + \frac{b_1r_2 - b_2r_1}{r_2 - r_1}\eta + 1 = 0 \quad (28)$$

то изъ нихъ видимъ, что координаты этихъ точекъ суть:

$$x = \frac{a_1 r_2 + a_2 r_1}{r_2 + r_1}, \quad y = \frac{b_1 r_2 + b_2 r_1}{r_2 + r_1} \quad (29)$$

$$x = \frac{a_1 r_2 - a_2 r_1}{r_2 - r_1}, \quad y = \frac{b_1 r_2 - b_2 r_1}{r_2 - r_1} \quad (30)$$

Эти точки называются *центрами подобія* двухъ круговъ.

Изъ формы ихъ координатъ видно, что онѣ дѣлятъ гармонически разстояніе между центрами круговъ. Отношеніе, въ которомъ онѣ дѣлятъ это разстояніе внутренне или внѣшне, очевидно, есть $\frac{r_2}{r_1}$. Одинъ изъ этихъ центровъ называется *внѣшнимъ*, а другой *внутреннимъ*.

Такъ какъ изъ каждой точки можно провести двѣ касательныя къ кругу (§ 295), то изъ предыдущаго слѣдуетъ, что къ двумъ кругамъ можно провести четыре касательныя, по парѣ черезъ каждый изъ центровъ подобія.

Задача. Найти уравненія общихъ касательныхъ къ двумъ даннымъ кругамъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ круговъ будутъ:

$$S_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0, \quad S_2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0 \quad (31)$$

Уравненіе касательныхъ, проведенныхъ изъ точки (x_1, y_1) внѣ окружности къ кругу $S_1 = 0$, есть (§ 295):

$$\begin{aligned} & \{(x_1 - a_1)(x - a_1) + (y_1 - b_1)(y - b_1) - r_1^2\}^2 = \\ & = \{x_1 - a_1\}^2 + \{y_1 - b_1\}^2 - r_1^2 \{ (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 \} \end{aligned}$$

Если желаемъ имѣть уравненіе внѣшнихъ касательныхъ, то надобно въ предыдущее уравненіе подставить вмѣсто x_1 и y_1 координаты внѣшняго центра подобія (30), что послѣ нѣкоторыхъ преобразованій даетъ:

$$\{S_2 - S_1 - [d^2 - (r_2 - r_1)^2]\}^2 - 4S_1\{d^2 - (r_2 - r_1)^2\} = 0$$

гдѣ d есть разстояніе между центрами.

Чтобы получить уравненіе внутреннихъ касательныхъ надобно въ предыдущемъ уравненіи измѣнить r_1 на $-r_1$.

Задача. Найти уравненія поляръ центровъ подобія двухъ круговъ, относительно обоихъ круговъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ круговъ будутъ (31). Поляра точки $(x_1 y_1)$ относительно круга $S_1 = 0$ будетъ:

$$(x_1 - a_1)(x - a_1) + (y_1 - b_1)(y - b_1) - r_1^2 = 0$$

Если положимъ:

$$x_1 = \frac{a_1 r_2 - a_2 r_1}{r_2 - r_1}, \quad y_1 = \frac{b_1 r_2 - b_2 r_1}{r_2 - r_1}$$

то будемъ имѣть полярю внѣшняго центра подобія, относительно круга S_1 . Это подстановленіе даетъ:

$$(a_1 - a_2)(x - a_1) + (b_1 - b_2)(y - b_1) - r_1(r_2 - r_1) = 0$$

откуда, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, найдемъ:

$$S_2 - S_1 - \{d^2 - (r_2 - r_1)^2\} = 0 \quad (32)$$

Поляра той-же точки относительно круга $S_2 = 0$, будетъ:

$$S_2 - S_1 + \{d^2 - (r_2 - r_1)^2\} = 0 \quad (33)$$

Легко видѣть, что уравненія поляръ, относительно внутренняго центра подобія, будутъ:

$$S_2 - S_1 - \{d^2 - (r_1 + r_2)^2\} = 0 \quad (34)$$

$$S_2 - S_1 + \{d^2 - (r_1 + r_2)^2\} = 0$$

Свойства системы трехъ круговъ.

§ 322. Если означимъ выраженіе:

$$a_i \xi + b_i \eta + 1 = A_i$$

то уравненіе, какого-нибудь, круга, коего центръ данъ уравненіемъ $A_i = 0$, будетъ имѣть форму:

$$r_i(\xi^2 + \eta^2) = A_i^2$$

Пусть:

$$S_1 = r_1^2(\xi^2 + \eta^2) - A_1^2 = 0, \quad S_2 = r_2^2(\xi^2 + \eta^2) - A_2^2 = 0, \quad S_3 = r_3^2(\xi^2 + \eta^2) - A_3^2 = 0$$

будутъ уравненія трехъ круговъ, то:

$$S_1 - S_2 = 0, \quad S_2 - S_3 = 0, \quad S_3 - S_1 = 0$$

или:

$$\frac{A_1^2}{r_1^2} - \frac{A_2^2}{r_2^2} = 0, \quad \frac{A_2^2}{r_2^2} - \frac{A_3^2}{r_3^2} = 0, \quad \frac{A_3^2}{r_3^2} - \frac{A_1^2}{r_1^2} = 0$$

откуда:

$$\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0, \quad \frac{A_2}{r_2} - \frac{A_3}{r_3} = 0, \quad \frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1} = 0 \quad (35)$$

суть уравненія внѣшнихъ центровъ подобія P , M и N (фиг. 121), каждой пары изъ данныхъ трехъ круговъ, а:

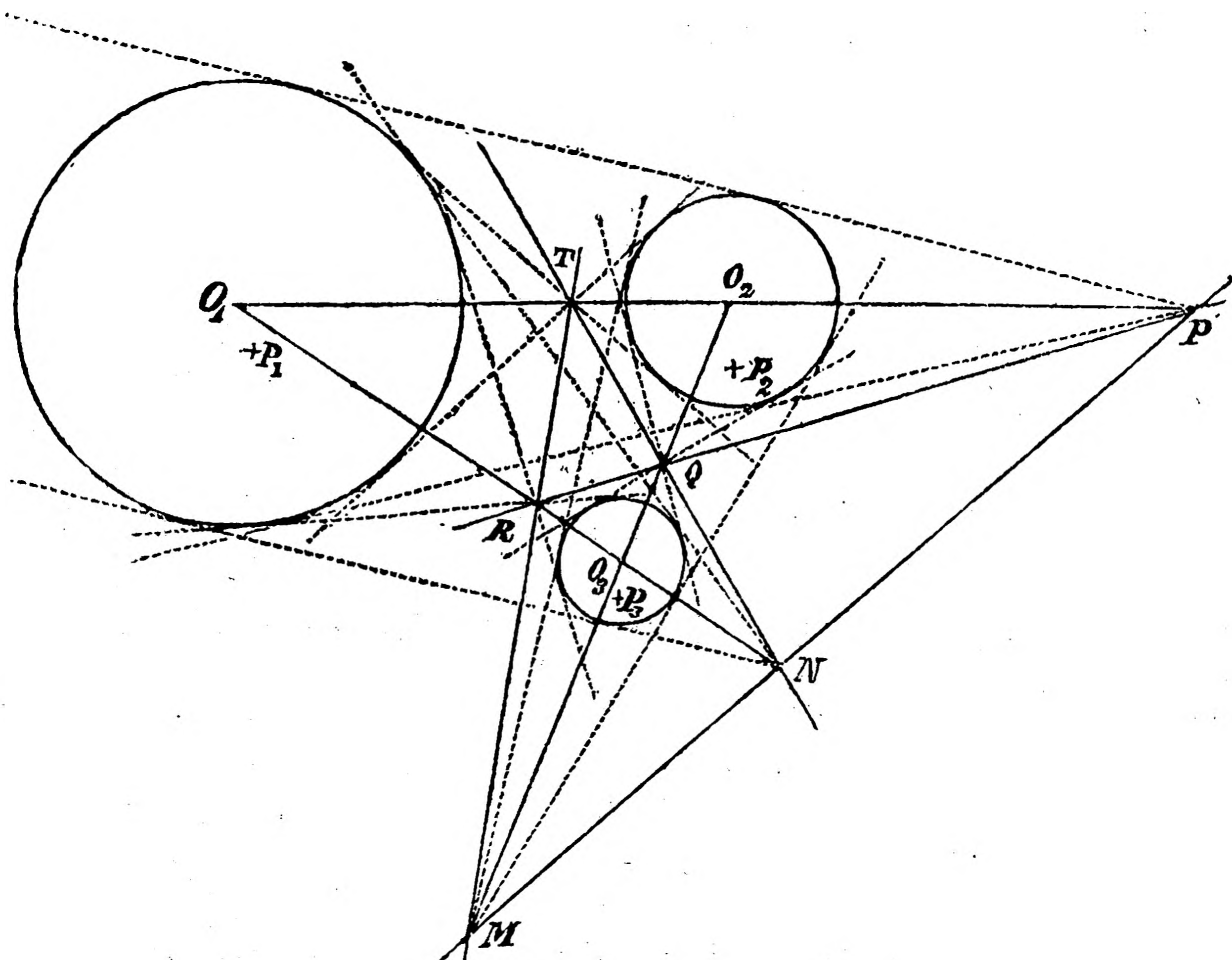
$$\frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} = 0, \quad \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3} = 0, \quad \frac{A_3}{r_3} + \frac{A_1}{r_1} = 0 \quad (36)$$

уравненія внутреннихъ центровъ подобія T , Q и R .

Изъ уравненій (35) видимъ, что три внѣшніе центра подобія лежатъ на одной прямой линіи, а изъ двухъ уравненій (36) съ однимъ изъ (35) видно, что два внутреннихъ и одинъ изъ внѣшнихъ центровъ подобія лежатъ на одной прямой линіи; такъ напримѣръ, центры подобія:

$$\frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} = 0, \quad \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3} = 0, \quad \frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1} = 0 \quad (37)$$

Фиг. 121.



лежатъ на одной прямой. Эти прямыя называются *осями подобія* данныхъ круговъ, изъ коихъ одна MP внѣшняя ось, и три внутреннихъ NT , RP и MT .

§ 323. *Задача.* Найти уравнение внѣшней оси подобія?

Рѣшеніе. Координаты двухъ внѣшнихъ центровъ подобія P и N (фиг. 121) суть (§ 321):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_2 r_1 - a_1 r_2}{r_1 - r_2}, & y_1 &= \frac{b_2 r_1 - b_1 r_2}{r_1 - r_2} \\ x_2 &= \frac{a_3 r_1 - a_1 r_3}{r_1 - r_3}, & y_2 &= \frac{b_3 r_1 - b_1 r_3}{r_1 - r_3} \end{aligned} \quad (38)$$

Составляя уравнение прямой проходящей черезъ эти двѣ точки, найдемъ искомое уравнение, которому можно дать форму:

$$\begin{aligned} \{r_1(b_3 - b_2) + r_2(b_1 - b_3) + r_3(b_2 - b_1)\}x - \{r_1(a_3 - a_2) + r_2(a_1 - a_3) + r_3(a_2 - a_1)\}y + \\ + r_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + r_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + r_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Точно также найдемъ уравненія и другихъ осей подобія.

§ 324. *Задача.* Найти полюсъ внѣшней оси подобія?

Рѣшеніе. Мы выше (§ 321) нашли уравнение:

$$S_2 - S_1 - \{d^2 - (r_2 - r_1)^2\} = 0 \quad (40)$$

поляры внѣшняго центра подобія круговъ S_1 и S_2 относительно перваго круга.

Поляра центра подобія круговъ S_1 и S_3 , будетъ, очевидно:

$$S_3 - S_1 - \{d_1^2 - (r_3 - r_1)^2\} = 0 \quad (41)$$

гдѣ d_1 есть разстояніе центровъ круговъ S_3 и S_1 . Очевидно искомый центръ подобія долженъ находится на обѣихъ прямыхъ (40) и (41), слѣдовательно надобно только изъ этихъ уравненій опредѣлить x и y .

§ 325. Закончимъ изслѣдованія о кругѣ, задачей, которая была уже извѣстна древнимъ, рѣшена Апполоніемъ Пергскимъ, занимала арабовъ, а также многихъ европейскихъ геометровъ, Виета, Романуса, Декарта и др.

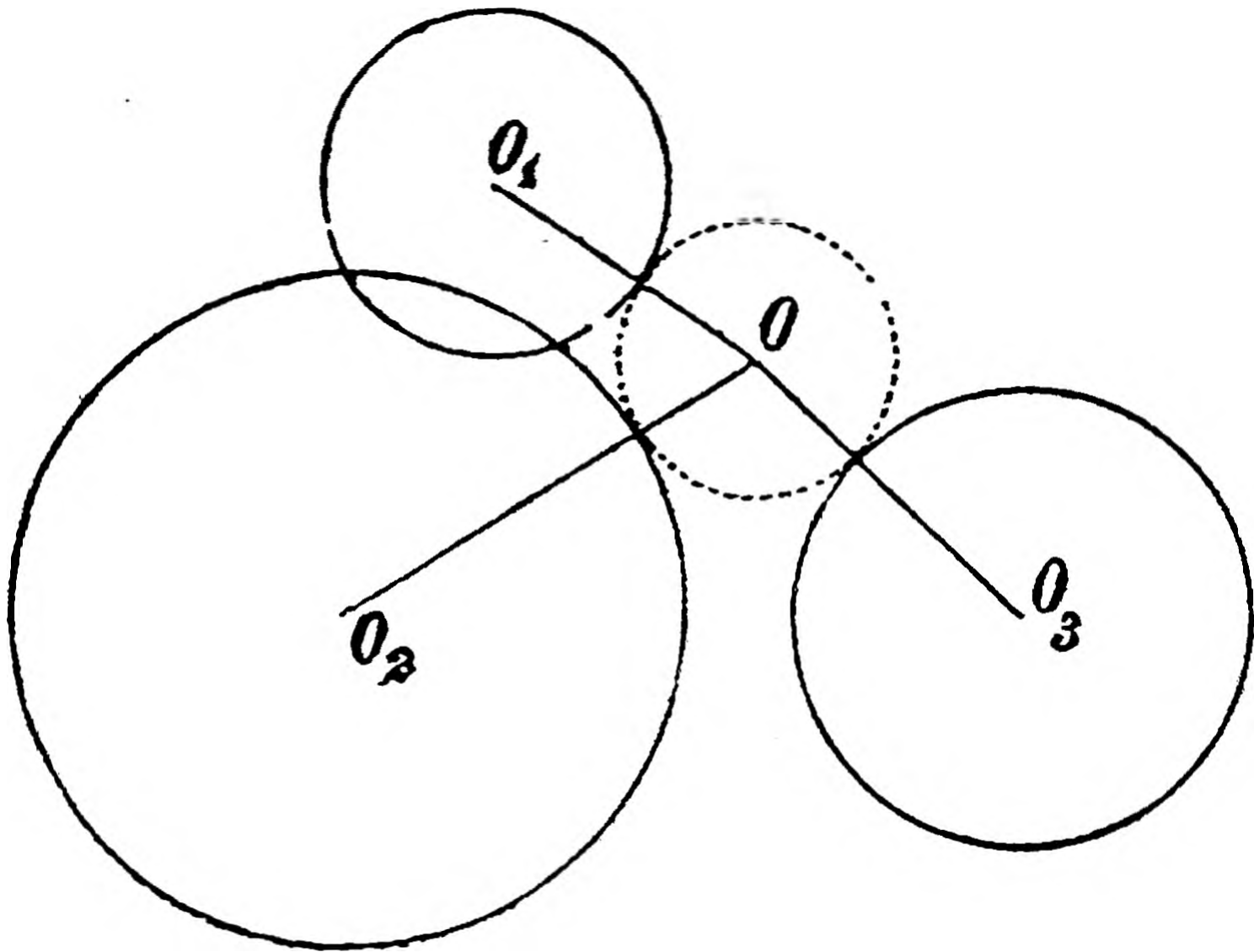
Задача. Построить кругъ, который-бы касался трехъ данныхъ круговъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ круговъ будутъ:

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0 \quad (42)$$

Означимъ ихъ центры (фиг. 122) черезъ O_1, O_2, O_3 . Пусть центръ искомаго круга будетъ O , его координаты (x, y) , а радиусъ r .

Фиг. 122.



Если искомый кругъ касается внѣшне данныхъ круговъ, то должны имѣть:

$$\begin{aligned}\overline{OO_1}^2 &= (r + r_1)^2 \\ \overline{OO_2}^2 &= (r + r_2)^2 \\ \overline{OO_3}^2 &= (r + r_3)^2\end{aligned}\quad (43)$$

Эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$S_1 + r^2_1 = (r + r_1)^2 \quad , \quad S_2 + r^2_2 = (r + r_2)^2 \quad , \quad S_3 + r^2_3 = (r + r_3)^2 \quad (44)$$

Задача эта имѣетъ восемь рѣшеній, но это число можетъ быть и меньше, смотря по положенію данныхъ круговъ.

1. Если всѣ три круга будутъ одинъ внутри другого, то всѣ рѣшенія будутъ мнимыя.

2. Если каждый изъ данныхъ круговъ будетъ внѣ двухъ другихъ, то всѣ рѣшенія будутъ дѣйствительныя.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ одинъ изъ искомыхъ круговъ будетъ касаться внѣшне всѣхъ трехъ данныхъ круговъ, другой будетъ заключать внутри всѣ данные круги, три круга будутъ касатся двухъ данныхъ внѣшне и одного внутренне, три будутъ касатся двухъ внутренне и одного внѣшне.

Въ каждомъ изъ этихъ случаевъ уравненія (44) сохраняютъ ту же форму, если радиусамъ r_1, r_2, r_3 дадимъ приличный знакъ, такъ напримѣръ, если искомый кругъ заключаетъ внутри себя всѣ три данные круга, то надобно въ уравненіяхъ (44) измѣнить r_1, r_2, r_3 въ $-r_1, -r_2, -r_3$, т. е. эти уравненія будутъ:

$$S_1 + r^2_1 = (r - r_1)^2 \quad , \quad S_2 + r^2_2 = (r - r_2)^2 \quad , \quad S_3 + r^2_3 = (r - r_3)^2 \quad (45)$$

Остается только рѣшить эти уравненія относительно x, y и r , но такъ какъ это рѣшеніе сложно и не даетъ яснаго геометрическаго представленія, то мы предложимъ здѣсь другое независимое отъ рѣшенія уравненій (44).

Вычтемъ по-парно уравненія (44), то найдемъ:

$$S_2 - S_3 = 2r(r_2 - r_3) \quad , \quad S_3 - S_1 = 2r(r_3 - r_1) \quad , \quad S_1 - S_2 = 2r(r_1 - r_2) \quad (46)$$

умножая эти уравненія на r_1, r_2, r_3 и складывая, найдемъ:

$$r_1 (S_2 - S_3) + r_2 (S_3 - S_1) + r_3 (S_1 - S_2) = 0 \quad (47)$$

координаты центра x, y должны удовлетворять уравненія (46) и (47), такъ какъ онѣ вытекаютъ изъ уравненій (44).

Если замѣтимъ, что $S_2 - S_3, S_3 - S_1, S_1 - S_2$ суть первыя части уравненій, представляющихъ радикальныя оси или общія хорды данныхъ круговъ, то легко видѣть, что (47) есть уравненіе прямой, проходящей черезъ радикальный центръ данныхъ круговъ, но такъ какъ это уравненіе не измѣняется при измѣненіи r_1, r_2, r_3 въ $-r_1, -r_2, -r_3$, то изъ этого видимъ, что эта прямая содержитъ центры искомымъ двухъ круговъ, касающихся данныхъ внутренне и внѣшне. Тангенсъ угла, который эта прямая составляетъ съ осью x , есть:

$$\frac{r_1(a_3 - a_2) + r_2(a_1 - a_3) + r_3(a_2 - a_1)}{r_1(b_3 - b_2) + r_2(b_1 - b_3) + r_3(b_2 - b_1)} \quad (48)$$

а внѣшняя ось подобія составляетъ уголъ съ осью x , коего тангенсъ есть:

$$\frac{r_1(b_3 - b_2) + r_2(b_1 - b_3) + r_3(b_2 - b_1)}{r_1(a_3 - a_2) + r_2(a_1 - a_3) + r_3(a_2 - a_1)}$$

слѣдовательно эти двѣ прямыя перпендикулярны, откуда слѣдуетъ предложеніе:

Предложеніе. Центры восьми касательныхъ круговъ къ тремъ даннымъ находятся по парно на перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ радикальнаго центра круговъ на оси подобія.

Доказательство. Возьмемъ тотъ изъ искомымъ круговъ, который касается внѣшне всѣхъ трехъ данныхъ круговъ. Пусть x', y' будутъ координаты точки его касанія съ кругомъ S_1 , эта точка дѣлитъ разстояніе OO_1 , между центрами, на два отрѣзка r_1 и r , слѣдовательно:

$$x' = \frac{r_1 x + r a_1}{r_1 + r}, \quad y' = \frac{r_1 x + r b_1}{r_1 + r} \quad (49)$$

откуда:

$$x = \frac{(r + r_1) x' - r a_1}{r_1}, \quad y = \frac{(r + r_1) y' - r b_1}{r_1} \quad (50)$$

Эти величины должны удовлетворять уравненія (46). Замѣтимъ сначала,

что подстановленіе этихъ выраженій въ функціи формы $ax + by + c$ даетъ въ результатѣ:

$$\frac{r+r'}{r_1}(ax'+by'+c) - \frac{r}{r_1}(aa_1+bb_1+c)$$

т. е. надобно функцію $ax + by + c$ помножить на $\frac{r+r_1}{r_1}$ и подставить вмѣсто x, y координаты x', y' , затѣмъ изъ этого произведенія вычестъ ту же функцію, умноживъ ее на $\frac{r}{r_1}$, и подставивъ въ нее вмѣсто x, y координаты a_1, b_1 . Въ силу этого подстановленія, выраженій (50) въ два послѣднія уравненія (46), будемъ имѣть:

$$\frac{r+r_1}{r_1}(S'_3 - S'_1) - \frac{r}{r_1}(\overline{O_1O_3}^2 + r_1^2 - r_3^2) = 2r(r_3 - r_1)$$

$$\frac{r+r_1}{r_1}(S'_1 - S'_2) - \frac{r}{r_1}(-r_1^2 - \overline{O_1O_2}^2 + r_2^2) = 2r(r_1 - r_2)$$

гдѣ S'_1, S'_2, S'_3 суть уравненія круговъ (42), въ которыя подставлены x', y' . Изъ этихъ уравненій, упрощая и отбрасывая черточки, найдемъ:

$$\frac{S_3 - S_1}{\overline{O_1O_3}^2 - (r_3 - r_1)^2} - \frac{r}{r+r_1} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{S_2 - S_1}{\overline{O_1O_2}^2 - (r_2 - r_1)^2} - \frac{r}{r+r_1} = 0 \quad (52)$$

уравненія, которыя представляютъ прямыя, проходящія черезъ точку касанія x', y' .

Сравнимъ эти уравненія съ уравненіями поляръ внѣшнихъ центровъ подобія, которыя можно написать въ формѣ:

$$\frac{S_3 - S_1}{\overline{O_1O_3}^2 - (r_3 - r_1)^2} - 1 = 0, \quad \frac{S_2 - S_1}{\overline{O_1O_2}^2 - (r_2 - r_1)^2} - 1 = 0$$

вычитая ихъ, найдемъ новое уравненіе прямой, проходящей черезъ радикальный центръ и полюсъ внѣшней оси подобія, именно:

$$\frac{S_3 - S_1}{\overline{O_1O_3}^2 - (r_3 - r_1)^2} - \frac{S_2 - S_1}{\overline{O_1O_2}^2 - (r_2 - r_1)^2} = 0$$

Тотъ-же результатъ получится, вычитая уравненія (51) и (52). Тоже получимъ, если измѣнимъ r_1, r_2, r_3 въ $-r_1, -r_2, -r_3$. Изъ этого заключаемъ, что прямая, проходящая черезъ радикальный центръ и полюсъ внѣшней оси подобія, относительно круга S_1 , проходитъ и черезъ точки касанія этого круга съ кругами, которые касаются данныхъ круговъ внутренне и внѣшне.

Слѣдовательно прямая, проходящая черезъ радикальный центръ и полюсы одной и той-же оси подобія относительно каждаго изъ данныхъ круговъ, встрѣчаютъ эти круги въ шести точкахъ, которыя суть точки касанія двухъ круговъ съ кругами (42).

Откуда вытекаетъ слѣдующее построеніе круга, который касается внѣшне всѣхъ трехъ круговъ: построить полюсы p_1, p_2, p_3 , внѣшней оси подобія, относительно круговъ (42), и если R есть радикальный центръ, то прямая Rp_1, Rp_2, Rp_3 встрѣчаютъ круги (42) въ точкахъ касанія. Изъ точки R опускаютъ перпендикуляръ на ось подобія, прямая соединяющая центръ одного изъ круговъ съ его точкою касанія, встрѣчаясь съ выше опущеннымъ перпендикуляромъ, опредѣляетъ центръ искомаго круга.

Общій полярный треугольникъ системы круговъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки.

§ 326. Мы выше видѣли, что если система круговъ проходитъ черезъ двѣ мнимыя точки, то есть на прямой, проходящей черезъ центры круговъ двѣ дѣйствительныя точки, которыя мы назвали предѣльными. Эти точки, какъ мы выше показали, суть гармоническіе полюсы, а прямая, проходящая черезъ нихъ, перпендикулярно линіи центровъ, суть гармоническія поляры. Онѣ встрѣчаются въ точкѣ на бесконечно-удаленной прямой и образуютъ общій, всей системѣ круговъ, полярный треугольникъ, коего вершины суть двѣ предѣльныя точки и точка на бесконечности, а стороны двѣ гармоническія поляры, проходящая черезъ предѣльныя точки, и линія центровъ системы круговъ.

ГЛАВА XIX.

Условія, при которыхъ коническое сѣченіе представляетъ пару прямыхъ и ихъ опредѣленіе.

§ 327. Въ §§ 203 и 216 видѣли, при какомъ условіи уравненіе коническаго сѣченія въ декартовыхъ координатахъ представляетъ пару прямыхъ линій, а въ линейныхъ координатахъ пару точекъ. Тамъ-же мы по-

казали, что это условіе есть $\Delta = 0$ или $\Delta' = 0$, но геометрическаго смысла не выяснили, въ настоящей главѣ мы разберемъ эти случаи подробно и выяснимъ ихъ геометрическое значеніе.

Мы знаемъ, что зависимость между координатами полюса (y_1, y_2, y_3) и координатами его поляръ (ξ_1, ξ_2, ξ_3) относительно коническаго свченія:

$$f(x_1 x_2 x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (1)$$

опредѣляется уравненіями:

$$\begin{aligned} \sigma \xi_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ \sigma \xi_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ \sigma \xi_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{aligned} \quad (2)$$

при этомъ было обусловлено, что опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

инвариантъ формы (1), не равенъ нулю.

Мы видѣли, что при этомъ условіи, каждой произвольно взятой точкѣ соотвѣтствуетъ поляръ и, обратно, каждая произвольная прямая имѣетъ полюсь. Посмотримъ, что случится если $\Delta = 0$?

Въ этомъ случаѣ уравненія (2) продолжаютъ существовать, но онѣ не разрѣшмы относительно y , т. е. что всякой произвольно взятой точкѣ соотвѣтствуетъ опредѣленная поляръ, но, обратно, этой полярѣ не соотвѣтствуетъ опредѣленный полюсь.

Такъ какъ $\Delta = 0$, то всегда существуетъ система количествъ u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющихъ уравненія:

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= 0 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 &= 0 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

слѣдовательно поляръ точки (u_1, u_2, u_3) будетъ неопредѣленная въ томъ смыслѣ, что мы можемъ всякую прямую на плоскости разсматривать, какъ поляръ точки u . Тогда какъ поляръ всякой другой точки проходитъ че-

резъ точку u , что легко видѣть изъ уравненій (2), помножая ихъ соотвѣтственно на u_1, u_2, u_3 и складывая, найдемъ:

$$\sigma(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3) = 0 \quad (5)$$

уравненіе, которое удовлетворяется координатами u независимо отъ u_1, u_2, u_3 , т. е. для всѣхъ точекъ плоскости. Множитель σ , который входитъ въ уравненіе (5) можетъ быть тогда только равенъ нулю, когда всѣ $a_{i,k} = 0$, случай, который мы исключаемъ.

Слѣдовательно можемъ принимать за поляры точекъ только тѣ прямыя, которыя проходятъ черезъ точку u , если не хотимъ принимать всѣ прямыя за поляры точки u . Но каждой изъ этихъ прямыхъ ξ принадлежитъ безконечное число точекъ, какъ полюсы, такъ какъ, если точка y удовлетворяетъ уравненіямъ (2), то имъ удовлетворяютъ, вслѣдствіи уравненій (4), и всѣ точки:

$$u + \lambda y$$

прямой, соединяющей точки u и y .

§ 328. Посмотримъ теперь, какую форму имѣетъ коническое сѣченіе (1), при условіи:

$$\Delta = 0$$

Чтобы видѣть форму кривой рассмотримъ прямую линію, соединяющую точку u (4) съ какою-нибудь точкою x кривой. Подставимъ въ уравненіе (1) кривой вмѣсто x , $u + \lambda x$, то найдемъ уравненіе (§ 207):

$$P + 2Q\lambda + R\lambda^2 = 0 \quad (6)$$

въ которомъ всѣ коэффиціенты равны нулю, такъ какъ въ силу уравненій (4):

$$f(u_1, u_2, u_3) = 0 = P$$

и:

$$R = f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

такъ какъ точка x находится на кривой; а также изъ уравненій (4) и (§ 207):

$$Q = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0$$

слѣдовательно прямая:

$$u + \lambda x$$

вся находится на кривой, которая въ этомъ случаѣ, будетъ состоять изъ двухъ прямыхъ, пересѣкающихся въ точкѣ u ; а изъ двухъ прямыхъ потому, что уравненіе (1) второй степени.

§ 329. Координаты точки (u_1, u_2, u_3) опредѣляются двумя изъ трехъ уравненій (4), слѣдовательно уравненіе этой точки можно написать въ слѣдующихъ трехъ формахъ (§ 186):

$$\begin{aligned} A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 &= 0 \\ A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 &= 0 \\ A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

изъ коихъ каждое имѣетъ смыслъ уравненія (5):

$$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = 0$$

слѣдовательно можемъ положить:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mu u_1^2, & A_{12} &= \mu u_1 u_2 \\ A_{22} &= \mu u_2^2, & A_{13} &= \mu u_1 u_3 \\ A_{33} &= \mu u_3^2, & A_{23} &= \mu u_2 u_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Откуда видимъ, что миноры опредѣлителя Δ , когда $\Delta = 0$, пропорциональны квадратамъ и произведеніямъ величинъ, которыя суть координаты двойной точки (u_1, u_2, u_3) конического сѣченія.

Эту двойную точку, т. е. ея уравненіе, получимъ если выразимъ въ линейныхъ координатахъ коническое сѣченіе. Это уравненіе есть:

$$A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \quad (9)$$

Мы видѣли выше (§ 214, 71), что (9) есть условіе, которому должны удовлетворять координаты прямой, чтобы она встрѣчала кривую въ двухъ совпадающихъ точкахъ. Этотъ послѣдній случай можетъ только тогда случится, если двѣ прямыя, представляющія коническое сѣченіе, совмѣщаются, или если прямая проходитъ черезъ ихъ точку пересѣченія; и въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (9) преобразуется въ уравненіе:

$$(u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3)^2 = 0 \quad (10)$$

если въ него подставимъ вмѣсто A_{11}, A_{12}, \dots ихъ выраженія (8). Уравненіе (10) представляетъ, очевидно, двойную точку, коей координаты суть (u_1, u_2, u_3) ,

§ 330. Пусть прямая, на которую распадается коническое сѣченіе:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

будутъ:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad , \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0 \quad (11)$$

Слѣдовательно:

$$f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) \quad (12)$$

перемножая и сравнивая коэффициенты, найдемъ:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1 &= a_{11} \quad , \quad \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = 2a_{12} \\ \alpha_2 \beta_2 &= a_{22} \quad , \quad \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1 = 2a_{13} \\ \alpha_3 \beta_3 &= a_{33} \quad , \quad \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2 = 2a_{23} \end{aligned} \quad (13)$$

Изъ этихъ уравненій, раздѣляя второе, третье и четвертое на первое, найдемъ:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{a_{22}}{a_{11}} \quad , \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2a_{12}}{a_{11}} \quad (14)$$

и

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{a_{33}}{a_{11}} \quad , \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{2a_{13}}{a_{11}} \quad (15)$$

изъ этихъ послѣднихъ уравненій можемъ составить два квадратныя уравненія, коихъ корни суть отношенія:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad , \quad \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad , \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \quad , \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} \quad (16)$$

Означая эти отношенія черезъ $\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2$, уравненія, коихъ корни $\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2$, будутъ:

$$\lambda^2 - 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} \lambda + \frac{a_{22}}{a_{11}} = 0 \quad , \quad \mu^2 - 2 \frac{a_{13}}{a_{11}} \mu + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0 \quad (17)$$

Изъ этихъ двухъ уравненій, найдемъ отношенія (16).

Если послѣднее изъ уравненій (13) раздѣлимъ на первое, то найдемъ:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2a_{23}}{a_{11}} \quad (18)$$

Такъ какъ уравненіями (17) отношенія (16) вполне опредѣляются, то ихъ выраженія, вставленныя въ (18), должны удовлетворять этому уравненію, т. е. дать зависимость между $a_{i,k}$, которая будетъ ничто иное какъ: $\Delta = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{a_{22}}{a_{11}}, \quad \mu_1 + \mu_2 = 2 \frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad \mu_1 \mu_2 = \frac{a_{33}}{a_{11}} \quad (19)$$

изъ уравненія (18) имѣемъ:

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = \frac{2a_{23}}{a_{11}} \quad (20)$$

перемножая первое и третье изъ выраженій (19), найдемъ:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = 4 \frac{a_{12} a_{13}}{a_{11}^2}$$

откуда:

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 4 \frac{a_{12} a_{13}}{a_{11}^2} - (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) = 4 \frac{a_{12} a_{13}}{a_{11}^2} - \frac{2a_{23}}{a_{11}}$$

или, наконецъ:

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 2 \frac{2a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}}{a_{11}^2} \quad (21)$$

Перемножая (20) и (21), найдемъ:

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \mu_1 \mu_2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2) \lambda_1 \lambda_2 = 4 \frac{2a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}}{a_{11}^2} \cdot \frac{a_{23}}{a_{11}}$$

откуда, замѣчая, что:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2 \frac{2a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}{a_{11}^2}, \quad \mu_1^2 + \mu_2^2 = 2 \frac{2a_{13}^2 - a_{11} a_{33}}{a_{11}^2}$$

найдемъ, послѣ сокращеній:

$$a_{12}^2 a_{33} + a_{13}^2 a_{22} + a_{23}^2 a_{11} - a_{11} a_{22} a_{33} - 2a_{12} a_{13} a_{23} = 0 \quad (22)$$

но это послѣднее выраженіе есть ничто иное, какъ опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Остается только опредѣлить изъ уравненій (17) λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 , или отношенія:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_1}$$

Эти уравненія даютъ:

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_{12} + \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}}, \quad \lambda_2 = \frac{a_{12} - \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}}$$

$$\mu_1 = \frac{a_{13} + \sqrt{-A_{22}}}{a_{11}}, \quad \mu_2 = \frac{a_{13} - \sqrt{-A_{22}}}{a_{11}}$$
(23)

Такъ какъ изъ уравненій (19) имѣемъ:

$$\lambda_1 \mu_2 \cdot \lambda_2 \mu_1 = \frac{a_{22} a_{33}}{a_{11}^2}$$

а (20) даетъ:

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = \frac{2a_{23}}{a_{11}}$$

$\lambda_1 \mu_2$ и $\lambda_2 \mu_1$ суть корни уравненія:

$$t^2 - 2 \frac{a_{23}}{a_{11}} t + \frac{a_{23} a_{33}}{a_{11}^2} = 0$$
(24)

откуда:

$$\lambda_1 \mu_2 = \frac{a_{23} + \sqrt{-A_{11}}}{a_{11}}, \quad \lambda_2 \mu_1 = \frac{a_{23} - \sqrt{-A_{11}}}{a_{11}}$$

Легко также составить уравненіе, коего корни суть: $\lambda_1 \lambda_2$, $\mu_1 \mu_2$. Опредѣливъ такимъ образомъ λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 , уравненіе:

$$f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0$$

можно написать въ формѣ:

$$f = \alpha_1 \beta_1 (x_1 + \lambda_1 x_2 + \mu_1 x_3)(x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_2 x_3) = 0$$

или, замѣчая, что:

$$\alpha_1 \beta_1 = a_{11}$$

найдемъ:

$$f = a_{11} (x_1 + \lambda_1 x_2 + \mu_1 x_3)(x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_2 x_3) = 0$$

Пр. 1. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f = 6x_1^2 + 15x_2^2 + 7x_3^2 + 19x_1x_2 + 17x_1x_3 + 7x_2x_3 = 0$$

въ которомъ условіе $\Delta = 0$ удовлетворено, требуется разложить его на два линейныхъ множителя?

Въ этомъ случаѣ:

$$a_{11} = 6, \quad a_{22} = 15, \quad a_{33} = 7, \quad a_{12} = \frac{19}{2}, \quad a_{13} = \frac{17}{2}, \quad a_{23} = \frac{7}{2}$$

Составляя уравненія (17) и рѣшая, найдемъ:

$$\lambda_1 = \frac{5}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}, \quad \mu_1 = \frac{7}{3}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}$$

Слѣдовательно:

$$f = (3x_1 + 5x_2 + 7x_3)(2x_1 + 3x_2 + x_3)$$

Пр. 2. Показать, что:

$$x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 - 5x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$$

разлагается на линейные множители:

$$x_1 - x_2 - x_3 \quad \text{и} \quad x_1 - 4x_2 + 2x_3$$

Пр. 3. Определить въ уравненіи:

$$x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + hx_1x_2 + 5x_1x_3 - 7x_2x_3 = 0$$

h такъ, чтобы оно разложилось на два линейные множителя?

§ 331. Вотъ еще способъ, болѣе симметричный, для опредѣленія коэффициентовъ α_r и β_r въ уравненіяхъ (11).

Пусть y_1, y_2, y_3 будутъ координаты точки пересѣченія прямыхъ (11):

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = 0 \quad , \quad \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 = 0$$

то будемъ имѣть:

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \alpha_3y_3 = 0 \quad , \quad \beta_1y_1 + \beta_2y_2 + \beta_3y_3 = 0$$

откуда имѣемъ:

$$2ry_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \quad , \quad 2ry_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \quad , \quad 2ry_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \quad (25)$$

Такъ какъ y должны удовлетворять уравненіямъ (4), то соображаясь съ уравненіями (13), найдемъ слѣдующія девять уравненій:

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 &= a_{11} \quad , \quad \alpha_2\beta_1 = a_{21} - ry_3 \quad , \quad \alpha_3\beta_1 = a_{31} + ry_2 \\ \alpha_1\beta_2 &= a_{12} + ry_3 \quad , \quad \alpha_2\beta_2 = a_{22} \quad , \quad \alpha_3\beta_2 = a_{32} - ry_1 \\ \alpha_1\beta_3 &= a_{13} - ry_2 \quad , \quad \alpha_2\beta_3 = a_{23} + ry_1 \quad , \quad \alpha_3\beta_3 = a_{33} \end{aligned} \quad (26)$$

откуда отношенія $\alpha_1: \alpha_2: \alpha_3$ и $\beta_1: \beta_2: \beta_3$ будутъ непосредственно даны, если будетъ извѣстенъ коэффициентъ ρ . Количество ρ было введено, какъ коэффициентъ пропорціональности и въ качествѣ такового онъ остается совершенно произвольнымъ, но здѣсь онъ зависитъ въ силу уравненій (6) отъ коэффициента пропорціональности μ . Въ самомъ дѣлѣ, въ силу уравненій (13) мы можемъ миноры $A_{r,s}$ выразить черезъ α и β и придемъ къ тождественнымъ выраженіямъ, которыя вытекаютъ изъ уравненій (25), для квадратовъ и произведеній y . Такъ, напримѣръ:

$$4A_{11} = -(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 = -4\rho^2y_1^2$$

а слѣдовательно, соображаясь съ (8), найдемъ $\rho^2 = -\mu$, это такъ опредѣляетъ ρ , что во вторыхъ частяхъ уравненій (26) $a_{i,k}$ входитъ линейно.

Для ρ имѣемъ два значенія:

$$\rho = +\sqrt{-\mu} \quad , \quad \rho = -\sqrt{-\mu}$$

но оба эти значенія даютъ одинъ и тотъ же результатъ, что легко видѣть изъ того, что α и β только перемѣняются, если ρ замѣстимъ черезъ $+\sqrt{-\mu}$, а потомъ черезъ $-\sqrt{-\mu}$. Такимъ образомъ, получимъ для координатъ двухъ прямыхъ слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned} \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 &= a_{11} & : a_{12} + \sqrt{-A_{33}} : a_{13} - \sqrt{-A_{22}} \\ &= a_{11} - \sqrt{-A_{33}} : a_{22} & : a_{23} + \sqrt{-A_{11}} \\ &= a_{31} + \sqrt{-A_{22}} : a_{32} - \sqrt{-A_{11}} : a_{33} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 &= a_{21} & : a_{21} - \sqrt{-A_{33}} : a_{31} + \sqrt{-A_{22}} \\ &= a_{12} + \sqrt{-A_{33}} : a_{22} & : a_{32} - \sqrt{-A_{11}} \\ &= a_{13} - \sqrt{-A_{22}} : a_{23} + \sqrt{-A_{11}} : a_{33} \end{aligned}$$

§ 332. Обратнo, если коническое сѣченіе переходитъ въ пару прямыхъ линій, то необходимо $\Delta = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (2), въ силу уравненій (13), преобразуются въ слѣдующія:

$$\rho_1 \xi_1 = \beta_1 \sum \alpha_i x_i + \alpha_1 \sum \beta_i x_i$$

$$\rho_1 \xi_2 = \beta_2 \sum \alpha_i x_i + \alpha_2 \sum \beta_i x_i$$

$$\rho_1 \xi_3 = \beta_3 \sum \alpha_i x_i + \alpha_3 \sum \beta_i x_i$$

которыя тождественно обращаются въ нуль для $x = y$, такъ какъ уравненія:

$$\sum \alpha_i y_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum \beta_i y_i = 0$$

изъ коихъ вытекаетъ условіе $\Delta = 0$, имѣютъ мѣсто.

§ 333. Во всѣхъ предъидущихъ изслѣдованіяхъ мы предположили, что уравненія (4) опредѣляютъ дѣйствительно двойную точку, т. е. точку пересѣченія прямыхъ. Но не то бываетъ если эти три уравненія (4) представляютъ одно:

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = 0 \tag{28}$$

такъ, что онѣ отличаются отъ (28) только постояннымъ множителемъ m_i .
Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, можемъ положить:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 \gamma_1 & , & & a_{12} &= m_1 \gamma_2 & , & & a_{13} &= m_1 \gamma_3 \\ a_{21} &= m_2 \gamma_1 & , & & a_{22} &= m_2 \gamma_2 & , & & a_{23} &= m_2 \gamma_3 \\ a_{31} &= m_3 \gamma_1 & , & & a_{32} &= m_3 \gamma_2 & , & & a_{33} &= m_3 \gamma_3 \end{aligned} \quad (29)$$

но такъ какъ $a_{i,k} = a_{k,i}$, то имѣемъ:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$$

означая черезъ μ коэффициентъ пропорціональности, найдемъ:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mu \gamma_1^2 & , & & a_{23} &= \mu \gamma_2 \gamma_3 \\ a_{22} &= \mu \gamma_2^2 & , & & a_{31} &= \mu \gamma_3 \gamma_1 \\ a_{33} &= \mu \gamma_3^2 & , & & a_{12} &= \mu \gamma_1 \gamma_2 \end{aligned} \quad (30)$$

откуда уравненіе кривой или конического сѣченія (1) сдѣлается:

$$\sum a_{i,k} x_i x_k = (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^2 \mu \quad (31)$$

Слѣдовательно коническое сѣченіе состоитъ изъ двойной прямой, которой каждая точка должна разсматриваться какъ двойная.

Уравненія (29) влекутъ за собой слѣдующія:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0 & , & & A_{23} &= 0 \\ A_{22} &= 0 & , & & A_{31} &= 0 \\ A_{33} &= 0 & , & & A_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Съ другой стороны, уничтоженіе этихъ миноровъ влечетъ за собой уравненія (29), слѣдовательно: если не только инвариантъ $\Delta = 0$, но и его миноры равны нулю, то коническое сѣченіе состоитъ изъ двойной прямой. И въ самомъ дѣлѣ, взаимное уравненіе:

$$\sum A_{i,k} \xi_i \xi_k = 0$$

удовлетворяется координатами всякой прямой, какъ и должно быть, такъ какъ всякая прямая пересѣкаетъ, въ двухъ совпадающихъ точкахъ, прямую, которая принимается за двойную.

§ 334. Приложимъ выше-изложенный способъ къ разложенію на линейные множители уравненія (§ 208):

$$PR - Q^2 = 0 \quad (33)$$

которое представляет, какъ мы видѣли, двѣ касательныя, проведенныя изъ точки y къ коническому сѣченію $f = 0$.

Чтобы разложить уравненіе (33) на линейныя множители, поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Пусть η_i будутъ координаты полярны точки y_i , относительно конического сѣченія:

$$f = \sum a_{i,k} x_i x_k = 0$$

коэффициенты при x_i въ выраженіи Q суть:

$$\sigma \eta_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3 \quad (34)$$

полагая $i = 1, 2, 3$.

Въ уравненіяхъ (26) надобно поставить вмѣсто $a_{i,k}$ коэффициенты при $x_i x_k$ изъ уравненія (33), т. е.

$$a_{i,k} P - \sigma^2 \eta_i \eta_k$$

Координаты α_i и β_i обѣихъ касательныхъ опредѣляются уравненіями:

$$\alpha_1 \beta_1 = a_{11} P - \sigma^2 \eta_1^2, \quad \alpha_2 \beta_1 = a_{21} P - \sigma^2 \eta_2 \eta_1 - \rho y_3, \quad \alpha_3 \beta_1 = a_{31} P - \sigma^2 \eta_3 \eta_1 + \rho y_2$$

$$\alpha_1 \beta_2 = a_{12} P - \sigma^2 \eta_1 \eta_2 + \rho y_3, \quad \alpha_2 \beta_2 = a_{22} P - \sigma^2 \eta_2^2, \quad \alpha_3 \beta_2 = a_{32} P - \sigma^2 \eta_3 \eta_2 - \rho y_1$$

$$\alpha_1 \beta_3 = a_{13} P - \sigma^2 \eta_1 \eta_3 + \rho y_2, \quad \alpha_2 \beta_3 = a_{23} P - \sigma^2 \eta_2 \eta_3 + \rho y_1, \quad \alpha_3 \beta_3 = a_{33} P - \sigma^2 \eta_3^2$$

y_i непосредственно опредѣляется изъ этихъ уравненій, а необходимо опредѣлить ρ , чтобы имѣть отношеніе между α_i и между β_i ; это количество опредѣлится изъ уравненій (8), изъ которыхъ имѣемъ:

$$A'_{i,k} = -\rho^2 y_i y_k \quad (35)$$

гдѣ $A'_{i,k}$ есть $A_{i,k}$, въ которое вмѣсто выраженія $a_{i,k}$ вставлено выраженіе $a_{i,k} P - \sigma^2 \eta_i \eta_k$.

Если составимъ всѣ девять уравненій (35) и умножимъ каждое изъ нихъ на $\sigma^2 \eta_i \eta_k$ и сложимъ, то, соображаясь съ (34), найдемъ:

$$\sigma^2 \sum A'_{i,k} \eta_i \eta_k = -\rho^2 P^2 \quad (36)$$

Первую часть можемъ еще преобразовать, взявъ ея форму въ видѣ опредѣлится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

замѣстивъ, для нашего случая, въ этомъ выраженіи a_{ik} выраженіемъ $a_{ik}P - \sigma^2 \xi_i \xi_k$, уравненіе (36) сдѣлается:

$$-\rho^2 P^2 = \sigma^2 \begin{vmatrix} a_{11}P - \sigma^2 \xi_1^2 & , & a_{12}P - \sigma^2 \xi_1 \xi_2 & , & a_{13}P - \sigma^2 \xi_1 \xi_3 & , & \xi_1 \\ a_{21}P - \sigma^2 \xi_2 \xi_1 & , & a_{22}P - \sigma^2 \xi_2^2 & , & a_{23}P - \sigma^2 \xi_2 \xi_3 & , & \xi_2 \\ a_{31}P - \sigma^2 \xi_3 \xi_1 & , & a_{32}P - \sigma^2 \xi_3 \xi_2 & , & a_{33}P - \sigma^2 \xi_3^2 & , & \xi_3 \\ \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_3 & , & 0 \end{vmatrix}$$

или, если послѣднюю горизонталь умножимъ на $\sigma^2 \xi_1$, $\sigma^2 \xi_2$, $\sigma^2 \xi_3$ и сложимъ съ первою, со второю и съ третьею, то найдемъ:

$$-\rho^2 P^2 = \sigma^2 \begin{vmatrix} a_{11}P & , & a_{12}P & , & a_{13}P & , & \xi_1 \\ a_{21}P & , & a_{22}P & , & a_{23}P & , & \xi_2 \\ a_{31}P & , & a_{32}P & , & a_{33}P & , & \xi_3 \\ \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_3 & , & 0 \end{vmatrix} = \sigma^2 P^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Если теперь умножимъ первыя три вертикальныя линіи на y_1, y_2, y_3 и прибавимъ ихъ къ четвертой, умноженной на $-\sigma$, то, соображаясь съ (34), имѣемъ:

$$\sigma \sum \xi_i y_i = \sum a_{ik} y_i y_k = P$$

откуда найдемъ:

$$\rho^2 = \sigma \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \frac{1}{\sigma} P \end{vmatrix} = P \Delta \quad (37)$$

Слѣдовательно мы должны въ уравненіи (35) подставить вмѣсто ρ два его значенія:

$$\rho = +\sqrt{P\Delta} \quad , \quad \rho = -\sqrt{P\Delta} \quad (38)$$

замѣщеніе одного значенія другимъ измѣняетъ только α на β . Знакъ ρ^2 даетъ признакъ положенія точки y_i относительно конического сѣченія. Когда имѣемъ дѣйствительное коническое сѣченіе, то необходимо различать три случая:

1. $\rho^2 = P\Delta > 0$. Двѣ дѣйствительныя касательныя.
2. $\rho^2 = P\Delta < 0$. Двѣ мнимыя касательныя.
3. $\rho^2 = P\Delta = 0$. Двѣ касательныя совпадаютъ.

Слѣдовательно вся плоскость дѣлится коническимъ сѣченіемъ на двѣ части: на одной находятся точки, изъ которыхъ можно провести только

мнимыя касательныя къ коническому сѣченію—это *внутренняя часть*; на другой находятся точки, изъ которыхъ можно провести дѣйствительныя касательныя—это *внѣшняя часть*.

Точки, находящіяся на кривой служатъ переходомъ отъ дѣйствительныхъ касательныхъ къ мнимымъ, и обратно; въ этихъ точкахъ пара касательныхъ совпадаетъ.

§ 335. Система касательныхъ, проведенныхъ изъ точки y , есть перерожденіе коническаго сѣченія формы (§ 207):

$$(\alpha + 1)^2 PR - 4\alpha Q^2 = 0 \quad (39)$$

Если въ уравненіи будемъ разсматривать α , какъ переменный параметръ, то это уравненіе будетъ представлять безконечную систему коническихъ сѣченій, между которыми находится поляръ точки y , дважды повторенная, и пара касательныхъ. Эти двѣ послѣднія прямыя получатся, замѣщая коническое сѣченіе $P=0$, какимъ-нибудь, другимъ изъ системы; другими словами: всѣ коническія сѣченія системы имѣютъ для точки y : одну и ту же пару касательныхъ и одну и ту же поляръ. Въ самомъ дѣлѣ, если вмѣсто z подставимъ $z + \lambda y$, то найдемъ:

$$(\alpha + 1)^2 P(R + 2\lambda Q + \lambda^2 P) - 4\alpha (Q + \lambda P)^2 = 0$$

или:

$$\lambda^2 R_1 + 2\lambda Q_1 + P_1 = 0$$

полагая:

$$P_1 = (\alpha + 1)^2 PR - 4\alpha Q^2$$

$$Q_1 = (\alpha - 1)^2 PQ$$

$$R_1 = (\alpha - 1)^2 P^2$$

откуда:

$$P_1 R_1 - Q_1^2 = (\alpha^2 - 1)^2 P^2 (PR - Q^2)$$

Слѣдовательно выраженія $P_1 R_1 - Q_1^2$ и Q_1^2 , которыя будучи приравнены нулю, даютъ пару касательныхъ и поляръ, для одного изъ системы коническихъ сѣченій, отличаются только постояннымъ множителемъ, отличнымъ отъ нуля, отъ подобныхъ выраженій относительно даннаго коническаго сѣченія. Слѣдовательно мы, такимъ образомъ, доказали слѣдующее предложеніе.

Предложеніе. Всѣ коническія сѣченія системы (39) касаются въ двухъ точкахъ, а y есть полюсъ ихъ общей хорды сопряженія.

Пр. 1. Для примѣра возьмемъ пару касательныхъ къ каноническому уравненію эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

требуется найти пару касательныхъ, проведенныхъ къ нему изъ точки x_1y_1 . Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$P = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1, \quad Q = \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} - 1, \quad R = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

пара касательныхъ будетъ:

$$a^2b^2(PR - Q^2) = (xy_1 - xy_1)^2 - (x - x_1)^2b^2 - (y - y_1)^2a^2 = 0$$

Чтобы разложить это уравненіе на два линейные множителя:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$$

воспользуемся уравненіями относительно α, β, γ (13), которыя, если всѣ ихъ умножимъ на a^2b^2 и вмѣсто ρ напишемъ ρa^2b^2 , примутъ форму:

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_1 &= y_1^2 - b^2, & \beta\alpha_1 &= -x_1y_1 - \rho, & \gamma\alpha_1 &= b^2x_1 + \rho y_1 \\ \alpha\beta_1 &= -x_1y_1 + \rho, & \beta\beta_1 &= x_1^2 - a^2, & \gamma\beta_1 &= a^2y_1 - \rho x_1 \\ \alpha\gamma_1 &= b^2x_1 - \rho y_1, & \beta\gamma_1 &= a^2y_1 + \rho x_1, & \gamma\gamma_1 &= -b^2x_1^2 - a^2y_1^2 \end{aligned}$$

гдѣ, соображаясь съ (37), легко найти:

$$\rho^2 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2$$

Уравненія двухъ искомыхъ касательныхъ, если ρ есть корень уравненія относительно ρ^2 , будутъ даны уравненіями:

$$b^2x(x - x_1) + a^2y_1(y - y_1) + \rho(x_1y - xy_1) = 0$$

и

$$b^2x_1(x - x_1) + a^2y_1(y - y_1) + \rho(x_1y - xy_1) = 0$$

Пр. 2. Рѣшить ту же задачу относительно гиперболы и параболы.

ГЛАВА XX.

Опредѣленіе точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій.

§ 336. Въ § 204 показали, что два коническія сѣченія, данныя уравненіями:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ f_1(x) &= b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

пересѣкаются въ четырехъ точкахъ, координаты которыхъ даются рѣшеніемъ уравненія четвертой степени. Затѣмъ въ § 218 показали, что эти два коническія сѣченія, данныя въ линейныхъ координатахъ:

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \\ f'_1(\xi) &= B_{11}\xi_1^2 + B_{22}\xi_2^2 + B_{33}\xi_3^2 + 2B_{12}\xi_1\xi_2 + 2B_{13}\xi_1\xi_3 + 2B_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

гдѣ $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ суть миноры опредѣлителей Δ и Δ_1 , имѣютъ четыре общія касательныя, координаты которыхъ даются также уравненіемъ четвертой степени.

Въ настоящей главѣ мы покажемъ, какимъ способомъ можно опредѣлить координаты, какъ точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій, такъ и координаты общихъ ихъ касательныхъ.

Для большаго удобства мы будемъ писать уравненія (1) и (2) въ слѣдующихъ символическихъ формахъ:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum a_{i,k} x_i x_k = 0 \quad , \quad f_1(x) = \sum b_{i,k} x_i x_k = 0 \\ f'(\xi) &= \sum A_{i,k} \xi_i \xi_k = 0 \quad , \quad f'_1(\xi) = \sum B_{i,k} \xi_i \xi_k = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

гдѣ Σ есть символъ суммы, давая индексамъ всѣ значенія отъ 1 до 3 включительно. Инварианты коническихъ сѣченій f и f_1 означимъ чрезъ Δ и Δ_1 (§ 203, 39).

§ 337. Если:

$$f(x) = 0 \quad , \quad f_1(x) = 0 \quad (4)$$

суть уравненія двухъ коническихъ сѣченій, то уравненіе:

$$f - \lambda f_1 = 0 \quad (5)$$

есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки пересѣченія двухъ данныхъ. Давая коэффиценту λ всѣ величины отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ систему или связку коническихъ сѣченій, которыя всѣ проходятъ черезъ четыре точки пересѣченія коническихъ сѣченій (4).

Между коническими сѣченіями системы (5) есть нѣкоторыя, которыя состоятъ изъ пары прямыхъ линій, слѣдовательно, если найдемъ такую пару, то точки пересѣченія двухъ данныхъ коническихъ сѣченій (4) опредѣлятся пересѣченіемъ одного изъ нихъ съ найденною парю прямыхъ линій, или двухъ паръ между собою.

Мы видѣли (§ 203, 39), что для того, чтобы коническое сѣченіе обра-

тилось въ пару прямыхъ линий должна существовать между коэффициентами слѣдующая зависимость:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Такъ какъ въ уравненіи (5) коэффициенты его имѣютъ форму $a_{i,k} - \lambda b_{i,k}$, то для того чтобы коническое сѣченіе (5) обратилось въ пару прямыхъ, должны имѣть:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & a_{32} - \lambda b_{32} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

таково уравненіе, опредѣляющее то значеніе λ , при которомъ коническое сѣченіе (5) распадается на два линейные множителя. Какъ видимъ это уравненіе третьей степени, относительно λ , слѣдовательно, есть три значенія λ , при которыхъ коническія сѣченія изъ системы (5) распадаются на пару прямыхъ линий. слѣдовательно задача сводится на розысканіе этихъ трехъ паръ прямыхъ линий и на опредѣленіе точекъ пересѣченія двухъ изъ этихъ паръ. Очевидно, три пары прямыхъ линий образуютъ полный четырехугольникъ, стороны котораго образуютъ двѣ пары, а діагонали третью пару.

Выше видѣли (§ 205, 44), что для опредѣленія точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій необходимо рѣшить уравненіе четвертой степени, между тѣмъ здѣсь, какъ видно, требуется рѣшить уравненіе третьей степени; но если вспомнимъ, что разрѣшающее уравненіе четвертой степени есть уравненіе третьей степени, то настоящій случай самъ собою выясняется.

Далѣе, уравненіе третьей степени само рѣшается съ помощью разрѣшающаго уравненія второй степени и дѣйствительно въ концѣ концовъ разложеніе квадратичной троичной формы на два линейные множителя требуетъ рѣшенія уравненія только второй степени (§ 330).

§ 338. Если означимъ корни кубическаго уравненія (7) черезъ λ_1 , λ_2 , λ_3 , то будемъ имѣть:

$$f - \lambda_1 f_1 = A'B' \quad , \quad f - \lambda_2 f_1 = A''B'' \quad , \quad f - \lambda_3 f_1 = A'''B''' \quad (8)$$

гдѣ A и B суть линейныя функціи относительно x_1 , x_2 , x_3 . Разложеніе этихъ формъ на два линейные множителя, каждый разъ, требуетъ рѣшенія

квадратнаго уравненія, какъ уже замѣтили выше. Три пары найденныхъ прямыхъ:

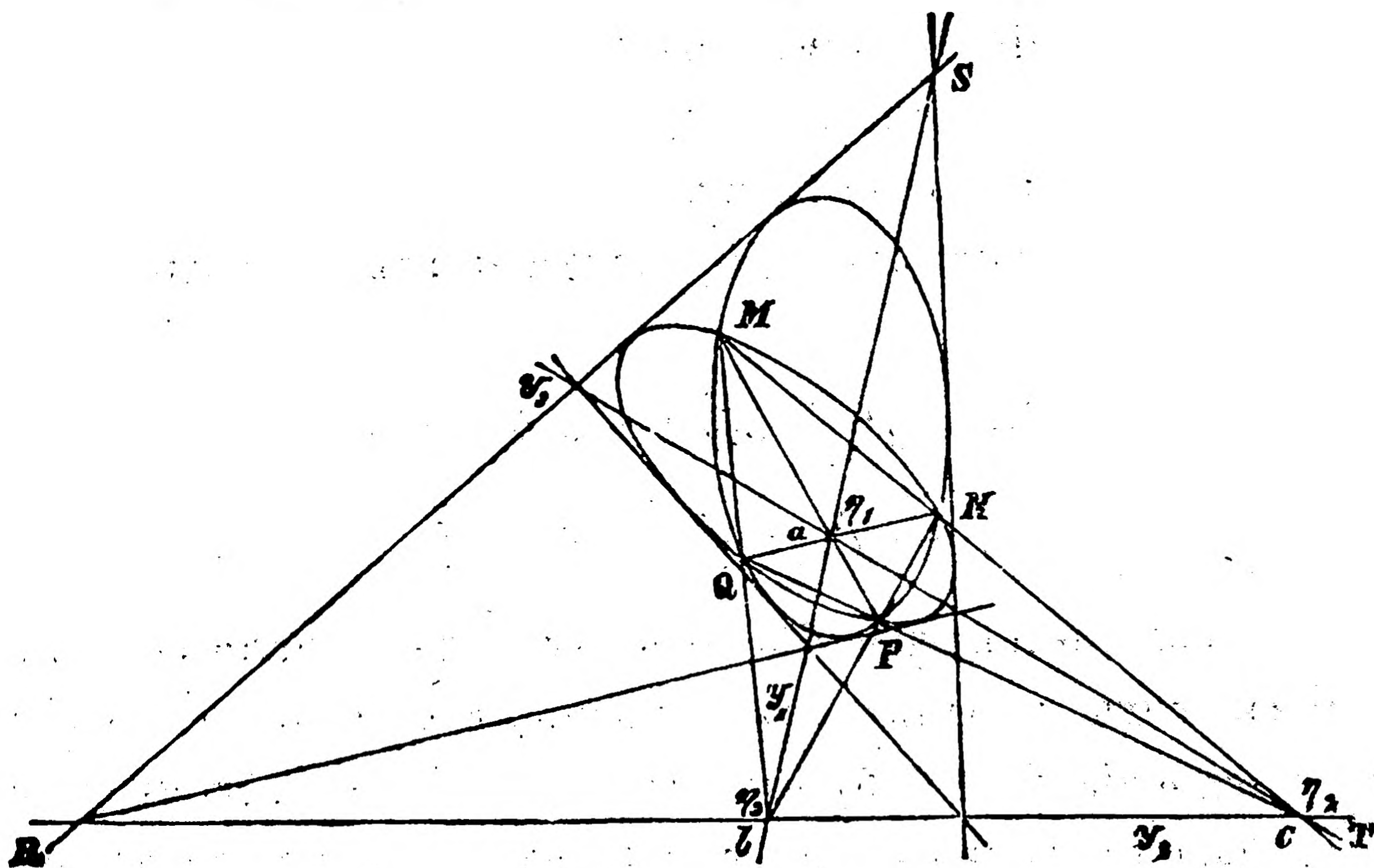
$$A'B' = 0 \quad , \quad A''B'' = 0 \quad , \quad A'''B''' = 0 \quad (9)$$

образуютъ. четырехугольникъ, въ которомъ пересѣченія противоположныхъ сторонъ и пересѣченія діагоналей суть вершины полярнаго треугольника abc , общаго всѣмъ коническимъ сѣченіямъ системы:

$$f - \lambda f_1 = 0$$

Въ этомъ легко убѣдится бросивъ взглядъ на прилагаемый чертежъ (фиг. 123) и вспомнивъ свойства полного четырехугольника.

Фиг. 123.



Очевидно, это единственный полярный треугольникъ системы (5).

§ 339. Положеніе данныхъ коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$ отнесено къ извѣстному данному координатному треугольнику, коего уравненія сторонъ суть:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0$$

а вершины даны уравненіями:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad ; \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad ; \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0$$

измѣнимъ теперь нашъ координатный треугольникъ и возьмемъ общій полярный. Пусть уравненія его сторонъ, относительно даннаго координатнаго треугольника будутъ:

$$y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3$$

$$y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \quad (10)$$

$$y_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3$$

гдѣ коэффиціенты $\alpha_{i,k}$ неизвѣстны, а требуется такъ ихъ опредѣлить, чтобы $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ были уравненія сторонъ общаго полярнаго треугольника.

Если изъ уравненій (10) опредѣлимъ x_1 , x_2 , x_3 , черезъ y_1 , y_2 , y_3 и вставимъ въ уравненія (4), то онѣ примутъ форму:

$$\begin{aligned} f &= a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 = 0 \\ f_1 &= b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

такъ какъ уравненіе конического сѣченія, отнесеннаго къ полярному треугольнику, имѣетъ эту форму (§ 241). Далѣе коэффиціенты b во второмъ изъ уравненій (11) можно положить равными единицѣ, такъ какъ уравненія (10) преобразованій, можемъ помножить на постоянныя, извѣстнымъ образомъ выбранныя, величины и опредѣлить координаты y такъ, чтобы коэффиціенты b вошли въ составъ этихъ координатъ. Слѣдовательно уравненія данныхъ коническихъ сѣченій, отнесенныхъ къ общему полярному треугольнику, будутъ:

$$\begin{aligned} f &= a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 = 0 \\ f_1 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

При этомъ предполагается, что $f_1 = 0$ не есть пара прямыхъ линій, такъ какъ, въ этомъ случаѣ, одинъ изъ коэффиціентовъ b будетъ равенъ нулю, а коническое сѣченіе $f_1 = 0$ будетъ само одной изъ искомыхъ паръ, пересѣченіе которой съ коническимъ сѣченіемъ $f = 0$ и дастъ искомыя точки пересѣченія.

§ 340. Такимъ опредѣленіемъ коэффиціентовъ b въ коническомъ сѣченіи $f_1 = 0$, коэффиціенты конического сѣченія $f = 0$ вполне опредѣляются. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы три уравненія (8) имѣли мѣсто необходимо, чтобы ихъ первыя части заключали только два переменныя изъ трехъ y_1 , y_2 , y_3 , такъ какъ сумма квадратовъ трехъ величинъ не можетъ быть разложена на два линейные множителя. А для того, чтобы первыя части уравненій (8) заключали только два переменныя необходимо положить въ формѣ:

$$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 = f$$

слѣдующее:

$$a_1 = \lambda_1 \quad , \quad a_2 = \lambda_2 \quad , \quad a_3 = \lambda_3$$

что даетъ:

$$\begin{aligned} f - \lambda_1 f_1 &= (\lambda_2 - \lambda_1) y_2^2 + (\lambda_3 - \lambda_1) y_3^2 = 0 \\ f - \lambda_2 f_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2) y_1^2 + (\lambda_3 - \lambda_2) y_3^2 = 0 \\ f - \lambda_3 f_1 &= (\lambda_1 - \lambda_3) y_1^2 + (\lambda_2 - \lambda_3) y_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Вторая части этихъ уравненій разлагаются на линейные множители:

$$\begin{aligned} & (y_2 \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1} + y_3 \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}) (y_2 \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1} - y_3 \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}) \\ & (y_1 \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} + y_3 \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}) (y_1 \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} - y_3 \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}) \\ & (y_1 \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3} + y_2 \sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}) (y_1 \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3} - y_2 \sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}) \end{aligned} \quad (14)$$

приравнивая нулю эти выраженія будемъ имѣть уравненія трехъ паръ искомымъ прямыхъ, отнесенныхъ къ общему полярному треугольнику, какъ координатному.

Возвратимся къ уравненіямъ (13), изъ которыхъ найдемъ:

$$\frac{y_1^2}{\lambda_2 - \lambda_3} = \frac{y_2^2}{\lambda_3 - \lambda_1} = \frac{y_3^2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\rho} \quad (15)$$

откуда:

$$\rho y_1^2 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \rho y_2^2 = \lambda_3 - \lambda_1, \quad \rho y_3^2 = \lambda_1 - \lambda_2$$

полагая $\sqrt{\rho} = \sigma$, найдемъ:

$$\sigma y_1 = \pm \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}, \quad \sigma y_2 = \pm \sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}, \quad \sigma y_3 = \pm \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (16)$$

Это координаты точекъ пересѣченія данныхъ коническихъ сѣченій. Такъ какъ передъ каждымъ корнемъ стоятъ два знака, то есть восемь комбинацій, но изъ нихъ тѣ пары комбинацій, которыя отличаются только общимъ множителемъ—1, даютъ одну и ту же точку. Таковы комбинаціи:

$$\begin{aligned} & + y_1, - y_1 \quad + y_1, - y_1 \quad + y_1, - y_1 \quad + y_1, - y_1 \\ & + y_2, - y_2, + y_2, - y_2, - y_2, + y_2, - y_2, + y_2 \\ & + y_3, - y_3 \quad - y_3, + y_3 \quad + y_3, - y_3 \quad - y_3, + y_3 \end{aligned} \quad (17)$$

§ 341. Остается только опредѣлить коэффициенты $a_{i,k}$ преобразованій (10). Для этого возьмемъ уравненія тѣхъ-же коническихъ сѣченій $f = 0$ и $f_1 = 0$ въ линейныхъ координатахъ (2):

$$f'(\xi) = 0 \quad \text{и} \quad f'_1(\xi) = 0 \quad (18)$$

Уравненіе:

$$f'(\xi) - \mu f'_1(\xi) = 0 \quad (19)$$

представляетъ систему коническихъ сѣченій, имѣющихъ общія касательныя съ коническими сѣченіями (18).

Въ этой системѣ есть три пары коническихъ сѣченій, которыя разлагаются на линейные множители, слѣдовательно, каждое представляетъ пару точекъ. Эти шесть точекъ суть пересѣченія общихъ касательныхъ, онѣ образуютъ полный четырехугольникъ и если вспомнимъ построение полярныя данной точки, то увидимъ, что въ этомъ четырехугольникѣ, какъ и въ предыдущемъ, образуется общій полярный треугольникъ, а такъ какъ онъ и единственный для системы коническихъ сѣченій, то это тотъ самый, который мы выше построили.

Слѣдовательно, уравненія данныхъ коническихъ сѣченій въ линейныхъ координатахъ, отнесенныя къ общему полярному треугольнику, будутъ:

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \lambda_2 \lambda_3 \eta_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 \eta_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 \eta_3^2 = 0 \\ f'_1(\xi) &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

гдѣ коэффициенты при η составлены изъ корней уравненія:

$$\Delta(\lambda) = 0$$

Легко видѣть изъ уравненій (20), что корни кубическаго уравненія, составленнаго такъ изъ $A_{i,k}$ и $B_{i,k}$, какъ уравненіе $\Delta(\lambda)$ составлено изъ $a_{i,k}$ и $b_{i,k}$, суть обратные корнямъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Пары точекъ опредѣлятся изъ уравненія:

$$f'(\xi) - \mu f'_1(\xi) = 0 \quad (21)$$

полагая въ немъ послѣдовательно μ равнымъ $\lambda_2 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_2$, что даетъ:

$$\begin{aligned} f' - \mu f'_1 &= \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2) \eta_2^2 + \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_3) \eta_3^2 = 0 \\ f' - \mu f'_1 &= \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_1) \eta_1^2 + \lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_3) \eta_3^2 = 0 \\ f' - \mu f'_1 &= \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1) \eta_1^2 + \lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_2) \eta_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Каждое изъ этихъ уравненій разлагается на два линейные множителя и представляетъ слѣдовательно пару точекъ.

Координаты четырехъ общихъ касательныхъ найдутся изъ уравненій (20):

$$p\eta_1 = \pm \sqrt{\lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_2)}, \quad p\eta_2 = \pm \sqrt{\lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_3)}, \quad p\eta_3 = \pm \sqrt{\lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (23)$$

и здѣсь, какъ выше, изъ восьми комбинацій, тѣ которыя отличаются множителемъ -1 , даютъ одну и ту же касательную.

§ 342. Перейдемъ къ опредѣленію коэффиціентовъ $\alpha_{i,k}$. Для этого означимъ черезъ r опредѣлитель:

$$r = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad (24)$$

и рѣшимъ уравненія (10) относительно x , то найдемъ:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, & x_1 &= \beta_{11}y_1 + \beta_{21}y_2 + \beta_{31}y_3 \\ y_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, & x_2 &= \beta_{12}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{32}y_3 \\ y_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3, & x_3 &= \beta_{13}y_1 + \beta_{23}y_2 + \beta_{33}y_3 \end{aligned} \quad (25)$$

Соображаясь съ § 186 будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \beta_{11}\xi_1 + \beta_{12}\xi_2 + \beta_{13}\xi_3, & \xi_1 &= \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{21}\eta_2 + \alpha_{31}\eta_3 \\ \eta_2 &= \beta_{21}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3, & \xi_2 &= \alpha_{12}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \alpha_{32}\eta_3 \\ \eta_3 &= \beta_{31}\xi_1 + \beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3, & \xi_3 &= \alpha_{13}\eta_1 + \alpha_{23}\eta_2 + \alpha_{33}\eta_3 \end{aligned} \quad (26)$$

$\beta_{i,k}$ суть миноры опредѣлителя r (24).

Изъ этихъ уравненій видимъ, что:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ &\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ &\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{aligned} \quad (27)$$

суть координаты сторонъ общаго полярнаго треугольника относительно стараго координатнаго треугольника, а:

$$\begin{aligned} &\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ &\beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ &\beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{aligned} \quad (28)$$

суть координаты вершинъ новаго общаго полярнаго треугольника, противуположащихъ сторонамъ (27).

Но эти вершины суть полюсы противуположащихъ сторонъ общаго полярнаго треугольника, относительно обѣихъ коническихъ свѣченій, слѣдо-

вательно уравненія поляръ, обѣихъ коническихъ сѣченій, относительно каждой изъ вершинъ, должны быть тождественны.

Но поляры одной изъ вершинъ $\beta_{i,1}$, $\beta_{i,2}$, $\beta_{i,3}$ относительно коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$ суть:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial \beta_{i,1}} + z_2 \frac{\partial f}{\partial \beta_{i,2}} + z_3 \frac{\partial f}{\partial \beta_{i,3}} = 0, \quad z_1 \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{i,1}} + z_2 \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{i,2}} + z_3 \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{i,3}} = 0$$

Слѣдовательно должны имѣть:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial \beta_{i,1}} + z_2 \frac{\partial f}{\partial \beta_{i,2}} + z_3 \frac{\partial f}{\partial \beta_{i,3}} = \mu \left(z_1 \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{i,1}} + z_2 \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{i,2}} + z_3 \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{i,3}} \right)$$

откуда:

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_{i,1}} = \mu \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{i,1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta_{i,2}} = \mu \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{i,2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta_{i,3}} = \mu \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{i,3}}$$

а изъ этого:

$$\begin{aligned} a_{11}\beta_{i,1} + a_{12}\beta_{i,2} + a_{13}\beta_{i,3} &= \mu (b_{11}\beta_{i,1} + b_{12}\beta_{i,2} + b_{13}\beta_{i,3}) \\ a_{21}\beta_{i,1} + a_{22}\beta_{i,2} + a_{23}\beta_{i,3} &= \mu (b_{21}\beta_{i,1} + b_{22}\beta_{i,2} + b_{23}\beta_{i,3}) \\ a_{31}\beta_{i,1} + a_{32}\beta_{i,2} + a_{33}\beta_{i,3} &= \mu (b_{31}\beta_{i,1} + b_{32}\beta_{i,2} + b_{33}\beta_{i,3}) \end{aligned} \quad (29)$$

или:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \mu b_{11})\beta_{i,1} + (a_{12} - \mu b_{12})\beta_{i,2} + (a_{13} - \mu b_{13})\beta_{i,3} &= 0 \\ (a_{21} - \mu b_{21})\beta_{i,1} + (a_{22} - \mu b_{22})\beta_{i,2} + (a_{23} - \mu b_{23})\beta_{i,3} &= 0 \\ (a_{31} - \mu b_{31})\beta_{i,1} + (a_{32} - \mu b_{32})\beta_{i,2} + (a_{33} - \mu b_{33})\beta_{i,3} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

исключая изъ этихъ уравненій β , найдемъ, уже выше найденное, кубическое уравненіе $\Delta(\mu) = 0$. Слѣдовательно корни μ суть ничто иное, какъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Подставляя каждый изъ этихъ корней въ (30) и полагая $i = 1, 2, 3$, найдемъ координаты вершинъ, именно:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \rho_1 \beta_1 & ; & & \beta_{12} &= \rho_1 \beta_2 & ; & & \beta_{13} &= \rho_1 \beta_3 \\ \beta_{21} &= \rho_2 \beta'_1 & ; & & \beta_{22} &= \rho_2 \beta'_2 & ; & & \beta_{23} &= \rho_2 \beta'_3 \\ \beta_{31} &= \rho_3 \beta''_1 & ; & & \beta_{32} &= \rho_3 \beta''_2 & ; & & \beta_{33} &= \rho_3 \beta''_3 \end{aligned} \quad (31)$$

коэффициенты пропорціональности ρ_1, ρ_2, ρ_3 опредѣляются условіемъ преобразованія формы $f_1=0$ въ форму $y^2_1 + y^2_2 + y^2_3 = 0$ подстановленіями (25).

Такимъ образомъ наша задача рѣшена вполне, но можно рѣшить ее еще изящнѣе, слѣдующимъ образомъ, на основаніи свойствъ инвариантовъ,

§ 343. Троицная квадратичная форма:

$$\sum a_{i,k} x_i x_k = f \quad (32)$$

имѣеть инвариантомъ, какъ видѣли, опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta \quad (33)$$

и ковариантомъ или, лучше, контраковариантомъ (§ 191), взаимную функцію функціи (32):

$$\sum A_{i,k} \xi_i \xi_k = f' \quad (34)$$

Если форму (32) преобразуемъ линейными преобразованіями (25), а взаимную форму (34) преобразованіями (26), то по свойству инвариантовъ вообще будемъ имѣть:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (35)$$

или:

$$\Delta' = R^2 \cdot \Delta \quad (36)$$

$a'_{i,k}$ суть коэффиціенты преобразованной формы:

$$\sum a'_{i,k} y_i y_k$$

Преобразуя форму (34), найдемъ:

$$\sum A'_{i,k} \eta_i \eta_k = R^2 \sum A_{i,k} \xi_i \xi_k \quad (37)$$

гдѣ $A'_{i,k}$ суть коэффиціенты въ преобразованной формѣ. Замѣтивъ это, возьмемъ опредѣлитель или инвариантъ:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & , & a_{12} - \lambda b_{12} & , & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & , & a_{22} - \lambda b_{22} & , & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & , & a_{32} - \lambda b_{32} & , & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} \quad (38)$$

формы:

$$\sum a_{i,k} x_i x_k - \lambda \sum b_{i,k} x_i x_k = f - \lambda f_1 \quad (39)$$

Выше видѣли, что преобразованиемъ къ полярному треугольнику, коническое сѣченіе (39) приводится къ виду:

$$f - \lambda f_1 = (\lambda_1 - \lambda) y_1^2 + (\lambda_2 - \lambda) y_2^2 + (\lambda_3 - \lambda) y_3^2 = 0 \quad (40)$$

откуда найдемъ, соображаясь съ сдѣланными выше замѣчаніями:

$$R^2 \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & \lambda_2 - \lambda & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) \quad (41)$$

и:

$$R^2 \Sigma \Delta_{i,k}(\lambda) \xi_i \xi_k = (\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) \eta_1^2 + (\lambda_3 - \lambda)(\lambda_1 - \lambda) \eta_2^2 + (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \eta_3^2 \quad (42)$$

гдѣ $\Delta_{i,k}(\lambda)$ суть миноры определителя $\Delta(\lambda)$ (38).

Изъ уравненія (41) видимъ, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ суть корни уравненія $\Delta(\lambda) = 0$.

Приравнивая коэффициенты при λ^2 въ уравненіи (41), найдемъ:

$$1 = R^2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad (43)$$

или:

$$R^2 = \frac{1}{\Delta_1}$$

гдѣ Δ_1 есть инвариантъ конического сѣченія $f_1 = 0$, который, по условію, не равенъ нулю.

Въ этомъ предположеніи сдѣлаемъ въ уравненіи (42), послѣдовательно, $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то найдемъ:

$$\begin{aligned} \eta_1^2 &= (\beta_{11} \xi_1 + \beta_{12} \xi_2 + \beta_{13} \xi_3)^2 = \frac{1}{\Delta_1 (\lambda_2 - \lambda_1) (\lambda_3 - \lambda_1)} \sum \Delta_{i,k}(\lambda_1) \xi_i \xi_k \\ \eta_2^2 &= (\beta_{21} \xi_1 + \beta_{22} \xi_2 + \beta_{23} \xi_3)^2 = \frac{1}{\Delta_1 (\lambda_3 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_2)} \sum \Delta_{i,k}(\lambda_2) \xi_i \xi_k \\ \eta_3^2 &= (\beta_{31} \xi_1 + \beta_{32} \xi_2 + \beta_{33} \xi_3)^2 = \frac{1}{\Delta_1 (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_3)} \sum \Delta_{i,k}(\lambda_3) \xi_i \xi_k \end{aligned} \quad (44)$$

Въ этихъ уравненіяхъ можно извлечь квадратный корень изъ обѣихъ частей и изъ полученныхъ трехъ линейныхъ уравненій опредѣлить коэф-

фиціенты $\beta_{i,k}$ подстановленій (25). Мы можемъ въ предъидущихъ уравненіяхъ просто приравнять коэффиціенты при $\xi_i \xi_k$, что даетъ вообще:

$$\beta_{i,h} \beta_{k,h} = \frac{\Delta_{i,k}(\lambda_h)}{\Delta_1 \mu_h} \quad (45)$$

въ выраженіи (45) индексу h надобно дать значенія 1, 2, 3 и положить: $\mu_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)$, $\mu_2 = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)$, $\mu_3 = (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$ знаки при коэффиціентахъ $\beta_{i,k}$ останутся неопредѣленными.

§ 344. Если опредѣлитель $\Delta(\lambda)$ (38) расположимъ по степенямъ λ , то найдемъ, что уравненіе $\Delta(\lambda) = 0$ будетъ:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1 \lambda^3 - Q_1 \lambda^2 + Q \lambda - \Delta = 0 \quad (46)$$

гдѣ:

$$Q = A_{11}b_{11} + A_{22}b_{22} + A_{33}b_{33} + 2A_{12}b_{12} + 2A_{13}b_{13} + 2A_{23}b_{23} \quad (47)$$

$$Q_1 = B_{11}a_{11} + B_{22}a_{22} + B_{33}a_{33} + 2B_{12}a_{12} + 2B_{13}a_{13} + 2B_{23}a_{23} \quad (48)$$

$A_{i,k}$ и $B_{i,k}$ суть миноры опредѣлителей Δ и Δ_1 . Очевидно Q_1 получается изъ Q , измѣняя $a_{i,k}$ на $b_{i,k}$ и обратно.

Исключая λ изъ уравненій (46) и $f - \lambda f_1 = 0$, найдемъ уравненіе:

$$\Delta_1 f^3 - Q_1 f_1 f^2 + Q f_1^2 f - \Delta f_1^3 = 0 \quad (49)$$

Какъ видно уравненіе шестой степени и представляетъ три пары прямыхъ линій, проходящихъ чрезъ четыре точки пересѣченія данныхъ коническихъ сѣченій $f = 0$ и $f_1 = 0$. Замѣтимъ, что коэффиціенты въ кубическомъ уравненіи (46), суть инварианты, а уравненіе (49) есть ковариантъ.

§ 345. Уравненіе (42):

$$R^2 \sum \Delta_{i,k} \xi_i \xi_k = (\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) \eta_1^2 + (\lambda_3 - \lambda)(\lambda_1 - \lambda) \eta_2^2 + (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \eta_3^2 = 0 \quad (50)$$

представляетъ систему коническихъ сѣченій, имѣющихъ общими касательными четыре касательныя къ кривымъ $f = 0$ и $f_1 = 0$. Чтобы найти то изъ системы коническихъ сѣченій, которое касается данной координатами $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3$ прямой, надобно эти координаты подставить въ уравненіе (50) и опредѣлить изъ него λ . Такъ какъ уравненіе (50) относительно λ второй степени, то имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Каждая прямая на плоскости есть касательная къ двумъ коническимъ сѣченіямъ изъ системы или связки $f - \lambda f_1 = 0$.

Предложеніе взаимное этому есть слѣдующее:

Предложеніе. Черезъ каждую точку плоскости, проходятъ два коническихъ сѣченія изъ системы или связки $f - \lambda f_1 = 0$.

§ 346. Относительное положеніе точекъ, въ которыхъ какое-нибудь изъ коническихъ сѣченій системы встрѣчаетъ данную прямую, и двухъ точекъ касанія ея съ двумя коническими сѣченіями той же системы, заслуживаетъ особеннаго вниманія.

Чтобы опредѣлить это положеніе, возьмемъ за данную прямую сторону координатнаго треугольника $x_1 = 0$. Если затѣмъ положимъ $x_1 = 0$ въ одномъ изъ коническихъ сѣченій, которыя касаются этой прямой, то должно получиться квадратное уравненіе относительно x_2, x_3 , имѣющее равные корни относительно отношенія $\frac{x_2}{x_3}$, или что тоже полный квадратъ линейнаго выраженія въ x_2 и x_3 . Слѣдовательно уравненія коническихъ сѣченій, касающихся прямой, должны имѣть форму:

$$f = x_1 M + N^2, \quad f_1 = x_1 M_1 + N_1^2$$

гдѣ M и M_1 суть линейныя функціи изъ x_1, x_2, x_3 , а N и N_1 линейныя только въ x_2 и x_3 . Слѣдовательно, какое-нибудь изъ системы коническихъ сѣченій будетъ дано уравненіемъ:

$$f - \lambda f_1 = x_1 (M - M_1) + N^2 - \lambda N_1^2 = 0$$

а его точки пересѣченія съ данною прямою даются уравненіями:

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad N^2 - \lambda N_1^2 = 0$$

Послѣднее изъ этихъ уравненій представляетъ пару прямыхъ линій, идущихъ изъ вершины $x_2 = 0, x_1 = 0$ координатнаго треугольника къ искомымъ точкамъ пересѣченія. Эти прямыя суть:

$$N - N_1 \sqrt{\lambda} = 0 \quad \text{и} \quad N + N_1 \sqrt{\lambda} = 0$$

эти двѣ прямыя, очевидно, гармоническія съ прямыми:

$$N = 0 \quad \text{и} \quad N_1 = 0$$

проходящими чрезъ точку ихъ пересѣченія и чрезъ точки касанія данной прямой съ коническими сѣченіями $f = 0$ и $f_1 = 0$. Слѣдовательно искомыя точки пересѣченія суть гармоническія съ точками касанія. Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если система коническихъ сѣченій:

$$f - \lambda f_1 = 0$$

пересѣкается прямою линіею, то полученный рядъ точекъ будетъ инво-

люціонный, коего двойныя точки суть точки касанія съ данною прямою двухъ изъ системы коническихъ свѣченій.

Такое же разсужденіе относительно системы коническихъ свѣченій въ линейныхъ координатахъ:

$$f' - \lambda f'_1 = 0$$

даетъ взаимное предложеніе.

Предложеніе. Если изъ какой-нибудь точки проходятъ къ системѣ коническихъ свѣченій касательныя, то эта связка касательныхъ будетъ инволюціонная, коей двойныя лучи будутъ касательныя къ двумъ коническимъ свѣченіямъ изъ системы, которыя проходятъ чрезъ данную точку. Съ этими предложеніями мы встрѣтимся еще ниже.

Слѣдующіе примѣры служатъ для вычисленія инвариантовъ Δ , Q ; Δ_1 , Q_1 въ случаяхъ, которые часто встрѣчаются.

Пр. 1. Найти геометрическое мѣсто пересѣченія нормалей къ коническому свѣченію, проведенныхъ въ концахъ хордъ, проходящихъ чрезъ данную точку (x_1, y_1) ?

Рѣшеніе. Пусть данное коническое свѣченіе будетъ эллипсъ:

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

точки на эллипсѣ, чрезъ которыя проходятъ нормали, проведенныя чрезъ данную точку $(x'y')$, какъ мы видѣли (§ 256), даются пересѣченіемъ эллипса f съ гиперболой:

$$f_1 = 2(c^2xy + b^2y'x - a^2x'y)$$

Составимъ уравненіе шести хордъ (49), проходящихъ чрезъ пересѣченіе коническихъ свѣченій:

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{и} \quad f_1 = 2(c^2xy + b^2x'y - a^2x'y) = 0$$

для нихъ имѣемъ:

$$\Delta = -\frac{1}{a^2b^2}, \quad Q = 0, \quad Q_1 = -(a^2x'^2 + b^2y'^2 - c^4), \quad \Delta = -2a^2b^2c^2x'y'$$

Слѣдовательно уравненіе шести хордъ будетъ:

$$\frac{8}{a^2b^2} (a^2x'y - b^2y'x - c^2xy)^3 + 2(a^2x'^2 + b^2y'^2 - c^4)(a^2x'y - b^2xy' - c^2xy) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 + 2a^2b^2c^2x'y' \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^3 = 0$$

это уравненіе должно удовлетворяться координатами (x_1, y_1) , слѣдовательно, если подставимъ x_1, y_1 на мѣсто x, y и измѣнимъ x', y' на x, y , то найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$\frac{8}{a^2b^2} (a^2y_1x - b^2x_1y - c^2x_1y_1)^3 + 2(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)(a^2y_1x - b^2x_1y - c^2x_1y_1) \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)^2 + 2a^2b^2c^2x_1y_1 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)^3 = 0.$$

Какъ видимъ кривая третьей степени. Если данная точка находится на одной изъ осей, то кривая будетъ коническое сѣченіе, которое получится, полагая $x_1 = 0$. Геометрически видно, что въ этомъ случаѣ ось есть часть геометрическаго мѣста. Геометрическое мѣсто будетъ коническое сѣченіе въ томъ случаѣ, когда данная точка (x_1, y_1) находится на бесконечности, т. е. когда, хорды проводятся параллельно данной прямой.

Пр. 2. Вычислить инварианты, когда коническія сѣченія отнесены къ общему полярному треугольнику?

Рѣшеніе. Если коническія сѣченія отнесены къ общему полярному треугольнику, то ихъ форма будетъ:

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad , \quad f_1 = a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 = 0$$

одно изъ уравненій можно упростить, напримѣръ второе, написавъ x, y, z вмѣсто $x\sqrt{a_1}, y\sqrt{b_1}, z\sqrt{c_1}$, послѣ чего данныя коническія сѣченія примутъ форму:

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad , \quad f_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

откуда, найдемъ инварианты:

$$\Delta = abc \quad , \quad Q = bc + ca + ab \quad , \quad Q_1 = a + b + c \quad , \quad \Delta_1 = 1$$

слѣдовательно $f - \lambda f_1 = 0$ будетъ представлять прямые линіи, когда:

$$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (bc + ca + ab)\lambda - abc = 0$$

корни этого уравненія суть a, b, c . Что эти величины обращаютъ $f - \lambda f_1 = 0$ въ пару прямыхъ само собою очевидно.

Пр. 3. Возьмемъ, какъ выше, $f_1 = x^2 + y^2 + z^2$, а f пусть будетъ общей формы, то будемъ имѣть:

$$\Delta \quad , \quad Q = A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad , \quad Q_1 = a + b + c \quad , \quad \Delta_1 = 1.$$

Пр. 4. Пусть f и f_1 будутъ два круга:

$$f = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad , \quad f_1 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r_1^2 = 0$$

Рѣшеніе. $\Delta = -r^2, Q = \alpha^2 + \beta^2 - 2r^2 - r_1^2, Q_1 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 - 2r_1^2, \Delta_1 = -r_1^2$

и если означимъ чрезъ d разстояніе между центрами круговъ, то найдемъ:

$$r_1^2 \lambda^3 + (d^2 - 2r_1^2 - r^2)\lambda^2 - (d^2 - 2r^2 - r_1^2)\lambda - r^2 = 0$$

но мы знаемъ, что $f - \lambda f_1 = 0$ представляетъ пару прямыхъ линій изъ коихъ одна на бесконечности, слѣдовательно одинъ изъ корней есть $+1$, и предыдущее уравненіе должно дѣлиться на $\lambda - 1$ и въ частномъ получится:

$$r_1^2 \lambda^2 + (d^2 - r^2 - r_1^2)\lambda + r^2 = 0$$

Пр. 5. Пусть:

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad , \quad f_1 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

то:

$$\Delta = -\frac{1}{a^2b^2}, \quad Q = \frac{1}{a^2b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - r^2)$$

$$Q_1 = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - r^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right), \quad \Delta_1 = -r^2$$

Пр. 6. Пусть:

$$f = y^2 - 2px = 0, \quad f_1 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

то:

$$\Delta = -p^2, \quad Q = -2p\alpha - p^2, \quad Q_1 = \beta^2 - 2p\alpha - r^2, \quad \Delta_1 = -r^2$$

ГЛАВА XXI.

НѢКОТОРЫЯ ЗАМѢЧАТЕЛЬНЫЯ СВОЙСТВА КОНИЧЕСКИХЪ СЪЧЕНІЙ.

§ 347. Разсмотримъ нѢкоторые частные случаи системы коническихъ съченій:

$$f - \lambda f_1 = 0 \tag{1}$$

Случай 1. Положимъ, что коническое съченіе $f_1 = 0$ распадается на два линейные множителя $f_1 = A_1 A_2$, т. е. представляетъ пару прямыхъ линій $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Слѣдовательно уравненіе (1) будетъ:

$$f - \lambda A_1 A_2 = 0 \tag{2}$$

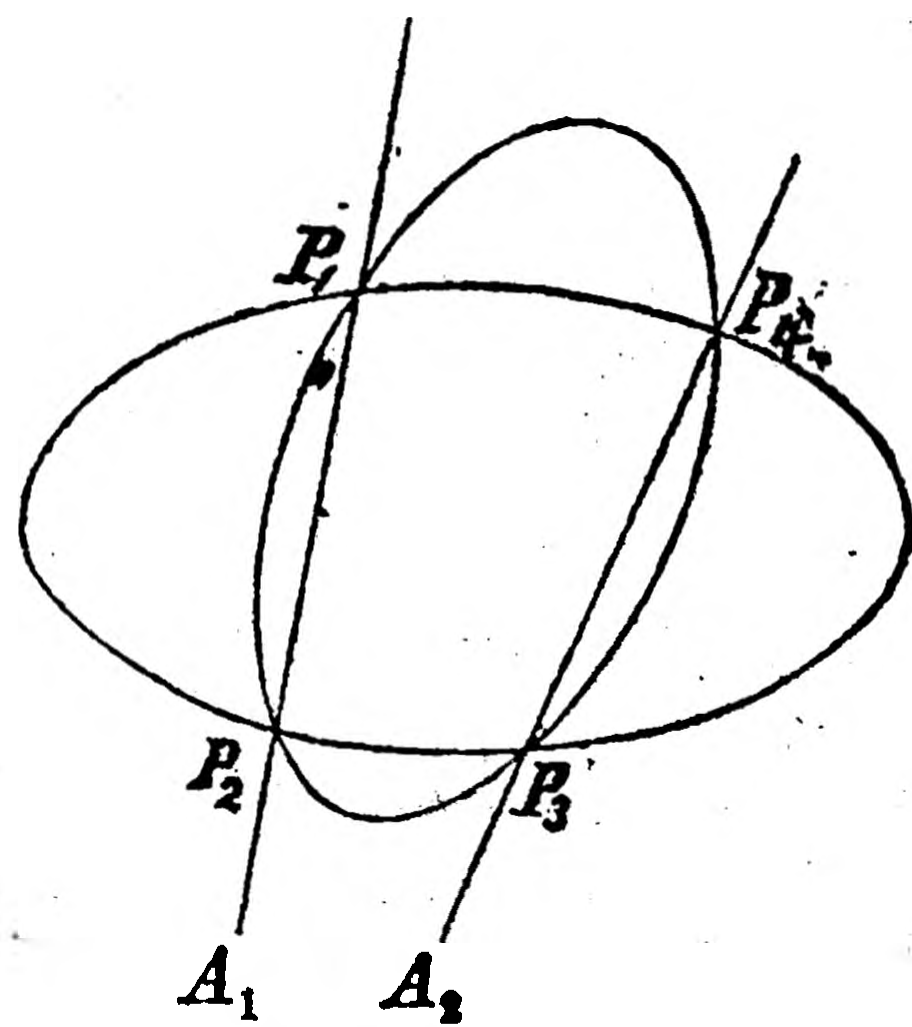
Оно представляетъ, очевидно, систему коническихъ съченій, проходящихъ черезъ четыре точки p_1, p_2, p_3, p_4 пересѣченія прямыхъ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ съ коническимъ съченіемъ $f = 0$ (фиг. 124).

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ $\Delta_1 = 0$, то кубическое уравненіе (§ 344, 46) сдѣлается квадратнымъ

$$Q_1 \lambda^2 - Q \lambda + \Delta = 0 \tag{3}$$

Слѣдовательно одинъ изъ корней кубическаго уравненія $\lambda = \infty$; онъ даетъ пару хордъ $A_1 A_2 = 0$ общихъ системѣ коническихъ съченій (2), остальные двѣ пары общихъ хордъ даются корнями квадратнаго уравненія (3). Эти двѣ пары хордъ будутъ $p_1 p_4$ и $p_2 p_3$; $p_1 p_3$ и $p_4 p_2$. Если точка p_2 совпадетъ съ p_1 , а p_3 съ p_4 , то хорды $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ будутъ касательныя къ коническому съченію $f = 0$, а двѣ пары остальныхъ хордъ совпадутъ и составятъ хорду, которая проходитъ чрезъ

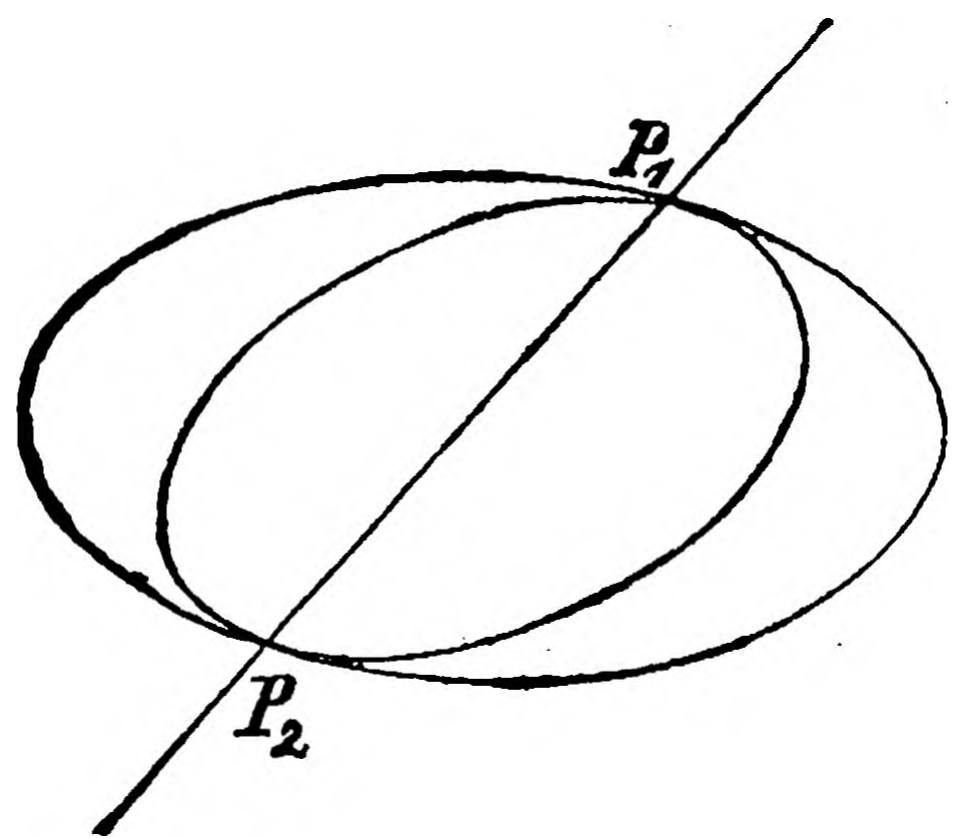
Фиг. 124.



точки касанія хордъ $A_1=0$ и $A_2=0$ съ коническимъ сѣченіемъ $f=0$. Такъ какъ двѣ пары хордъ совпадаютъ, то уравненіе (3) будетъ имѣть въ этомъ случаѣ два равные корня, а это дается условіемъ:

Фиг. 125.

$$Q_1 \Delta - 4Q^2 = 0 \quad (4)$$



При этомъ условіи система коническихъ сѣченій (2) имѣетъ общія касательныя $A_1=0$ и $A_2=0$, а ихъ общая хорда соприкосновенія p_1p_2 (фиг. 125) дается уравненіемъ:

$$2Q_1f - QA_1A_2 = 0 \quad (5)$$

которое должно быть полнымъ квадратомъ.

Положимъ, что въ уравненіи (2) A_2 есть постоянная величина k , то это уравненіе сдѣлается:

$$f - \lambda k A_1 = 0 \quad (6)$$

преобразуя это уравненіе въ трилинейныя координаты, полагая (§ 182, 6):

$$x = \frac{A}{C}, \quad y = \frac{B}{C}$$

найдемъ:

$$f - \lambda C A_1 = 0 \quad (7)$$

гдѣ $C=0$ есть уравненіе бесконечно удаленной прямой. Изъ этой формы видимъ, что коническія сѣченія системы (7) пересѣкаются въ двухъ конечныхъ точкахъ на прямой $A_1=0$ и въ двухъ бесконечно удаленныхъ на прямой $C=0$. Прямая $A_1=0$ и $C=0$ суть общія хорды системы коническихъ сѣченій (7).

Положимъ еще, что двѣ общія хорды $A_1=0$ и $A_2=0$ системы (2) совпадутъ, т. е. $A_2 = A_1 = 0$, то это уравненіе сдѣлается:

$$f - \lambda A_1^2 = 0 \quad (8)$$

Если хорды $A_1=0$ и $A_2=0$ совпадутъ, то совпадетъ съ ними и другая пара p_1p_3 и p_2p_4 , а третья пара p_1p_4 и p_2p_3 сдѣлается общими касательными къ системѣ (2), $A_1^2=0$ ихъ общая хорда соприкосновенія. Такъ какъ въ этомъ случаѣ не только $\Delta_1=0$, но и $Q_1=0$ (§ 333, 32), то кубическое уравненіе (§ 344, 46) будетъ имѣть два бесконечно большіе корня, а третій дается уравненіемъ:

$$Q\lambda - \Delta = 0 \quad (9)$$

первые два корня даютъ пару хордъ $A_1^2=0$, а корень $\lambda = \frac{\Delta}{Q}$ даетъ остальную пару:

$$Qf - \Delta A_1^2 = 0 \quad (10)$$

т. е. общія касательныя. Если $A_1 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$, то легко видѣть, что $Q = f'$, слѣдовательно уравненіе (10) будетъ:

$$f'f - \Delta A_1^2 = 0 \quad (11)$$

Если бы случилось, что $A_1 = 0$ есть касательная къ коническому сѣченію $f = 0$, то и пара (10) совпадетъ съ нею, а для этого необходимо условіе $f' = 0$, какъ намъ уже извѣстно.

Случай 2. Положимъ теперь, что въ системѣ (1) оба коническія сѣченія $f = 0$ и $f_1 = 0$ распадаются, на каждой, на пару прямыхъ линій $f = A_1 A_2$, $f_1 = A_3 A_4$, то система будетъ:

$$A_1 A_2 - \lambda A_3 A_4 = 0$$

и какъ мы видѣли выше (§ 299) есть система коническихъ сѣченій, проходящихъ чрезъ точки пересѣченія прямыхъ:

$$A_1 = 0 \text{ и } A_3 = 0, \quad A_2 = 0 \text{ и } A_3 = 0,$$

$$A_1 = 0 \text{ и } A_4 = 0, \quad A_2 = 0 \text{ и } A_4 = 0$$

Въ этомъ случаѣ $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = 0$, слѣдовательно кубическое уравненіе (§ 344, 46) сдѣлается:

$$Q_1 \lambda^2 - Q \lambda = 0 \quad (12)$$

Слѣдовательно оно имѣетъ одинъ корень $\lambda = \infty$, другой $\lambda = 0$, а третій $\lambda = \frac{Q}{Q_1}$.

Первый корень, т. е. $\lambda = \infty$, даетъ пару общихъ хордъ $A_3 A_4 = 0$, второй, т. е. $\lambda = 0$, даетъ другую пару $A_1 A_2 = 0$, а третій даетъ остальную пару:

$$Q_1 A_1 A_2 - Q A_3 A_4 = 0$$

Если положимъ, что хорды $A_3 = 0$ и $A_4 = 0$ совпадаютъ, то очевидно $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ будутъ общія касательныя къ системѣ:

$$A_1 A_2 - \lambda A_3^2 = 0 \quad (13)$$

но въ этомъ случаѣ и $Q_1 = 0$, слѣдовательно третій корень $\lambda = \infty$, который даетъ $A_3^2 = 0$.

Если A_3 будетъ постоянное C , то система:

$$A_1 A_2 - \lambda C^2 = 0 \quad (14)$$

будетъ очевидно коническое сѣченіе, коего ассимптоты будутъ $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$.

Гипербола $xy = k^2$ есть частный случай предыдущаго уравненія.

Примѣръ. Уравненіе параболы $y^2 = 2px$, есть частный случай уравненія:

$$A_1^2 = \lambda A_2 C$$

слѣдовательно $x = 0$ и $C = 0$ суть касательныя, а $y = 0$ хорда соприкосновенія, т. е. одна изъ касательныхъ къ параболѣ есть ось y , другая, прямая на бесконечности, а ось x , есть хорда соприкосновенія.

Такъ какъ самая общая форма параболы есть:

$$(ax + \beta y)^2 + 2gx + 2cy + f = 0$$

то изъ этого заключаемъ, что всѣ параболы касаются бесконечно удаленной прямой (§ 232).

§ 348. Уравненіе коническаго сѣченія:

$$f - \lambda k A_3 = 0 \quad \text{или} \quad f - \lambda A_3 C = 0$$

представляетъ систему коническихъ сѣченій, которыя пересѣкаются въ двухъ конечныхъ точкахъ, гдѣ прямая $A_3 = 0$ пересѣкаетъ коническое сѣченіе $f = 0$, и въ двухъ бесконечно-удаленныхъ точкахъ на прямой $C = 0$.

Но коэффициенты при x^2 , xy и y^2 въ уравненіяхъ:

$$f = 0 \quad ; \quad f - \lambda A_3 = 0$$

равны, слѣдовательно эти кривыя подобны и подобно расположены (§ 288). Отсюда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Два подобныя и подобно расположенныя коническія сѣченія пересѣкаются въ двухъ бесконечно-удаленныхъ точкахъ, а слѣдовательно пересѣкаться могутъ только въ двухъ конечныхъ точкахъ.

Если коническія сѣченія суть параболы, то онѣ обѣ касаются прямой на бесконечности (§ 232), но такъ какъ направленіе къ точкѣ касанія дается только тремя первыми членами уравненія, слѣдовательно будетъ для обѣихъ параболъ одно и тоже, откуда заключаемъ, что двѣ подобныя и подобно расположенныя параболы касаются въ бесконечно-удаленной точкѣ. Общія бесконечно удаленныя точки, подобныхъ и подобно расположенныхъ коническихъ сѣченій, будутъ дѣйствительныя, совпадающія или мнимыя, смотря потому будетъ-ли коническое сѣченіе гипербола, парабола и эллипсъ.

§ 349. Уравненіе $f - \lambda k = 0$ или $f - \lambda C^2 = 0$ представляетъ коническое сѣченіе, которое, очевидно, не только подобно и подобно распо-

ложено коническому съченію $f=0$, но и concentрическое съ нимъ. Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Два подобныя и concentрическія коническія съченія имѣютъ двойное соприкосновеніе въ двухъ точкахъ на безконечно удаленной прямой, поэтому не могутъ пересѣкаться въ конечныхъ точкахъ.

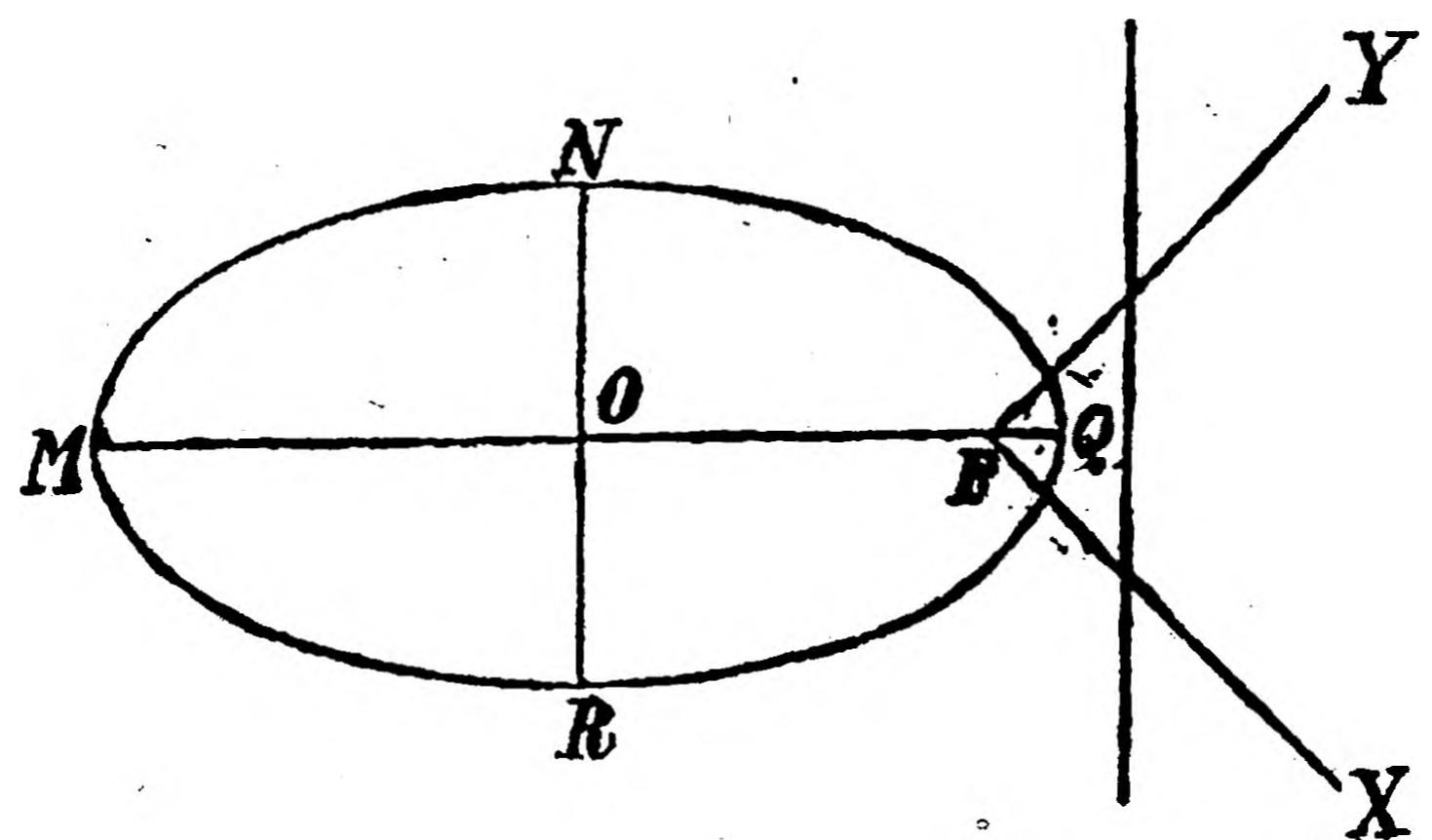
§ 350. Разсмотримъ еще уравненіе:

$$x^2 + y^2 = e^2 A_1^2 \quad (15)$$

гдѣ $x=0$, $y=0$ суть перпендикулярныя координатныя оси, а $A_1=0$ уравненіе прямой въ нормальной формѣ. Очевидно, что это уравненіе коническаго съченія, коего фокусъ находится въ началѣ координатъ, а директриса есть $A_1=0$ (фиг. 126).

Изъ формы этого уравненія видимъ, что координатныя оси и директриса образуютъ полярный треугольникъ, коего вершины суть: фокусъ и точки пересѣченія директрисы съ координатными осями. Изъ этого видимъ, что полярная каждой точки на директрисѣ перпендикулярна къ прямой, проходящей чрезъ фокусъ и точку на директрисѣ.

Фиг. 126.



Изъ формы уравненія (15) видимъ, что мнимыя прямыя:

$$y - xi = 0 \quad , \quad y + xi = 0 \quad (16)$$

суть касательныя, проведенныя изъ фокуса къ коническому съченію. Такъ какъ эти прямыя не зависятъ отъ директрисы, то заключаемъ, что *всѣ коническія съченія, имѣющія общій фокусъ имѣютъ и двѣ общія касательныя, проходящія черезъ этотъ фокусъ.* Слѣдовательно всѣ коническія съченія, имѣющія общіе оба фокуса, имѣютъ четыре общія касательныя, а потому могутъ быть разсматриваемы какъ вписанныя въ одинъ и тотъ же четырехугольникъ. Эти касательныя суть тѣ прямыя, которыя идутъ изъ фокуса къ циклическимъ точкамъ на безконечно удаленной прямой (§ 306). Изъ этого составляемъ слѣдующее представленіе о фокусахъ: изъ каждой циклической точки на кругѣ проведено двѣ касательныя къ коническому съченію, которыя образуютъ четырехугольникъ, двѣ вершины котораго суть фокусы кривой, а двѣ другія могутъ быть разсматриваемы, какъ ея мнимые фокусы.

§ 351. *Задача.* Найти условіе касанія двухъ коническихъ съченій $f=0$ и $f_1=0$?

Рѣшеніе. Пусть p_1, p_2, p_3, p_4 (фиг. 124) будутъ четыре точки пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій. Если изъ этихъ точекъ, на примѣръ p_1 и p_4 , совпадутъ, то очевидно, что пара хордъ p_1p_3, p_4p_2 совпадетъ съ парой хордъ p_1p_2 и p_3p_4 , слѣдовательно кубическое уравненіе:

$$\Delta_1 \lambda^3 - Q_1 \lambda^2 + Q \lambda - \Delta = 0 \quad (17)$$

будетъ имѣть два равные корня; а изъ алгебраическаго анализа извѣстно, что въ такомъ случаѣ призначная (discriminant), единственный инвариантъ кубическаго уравненія и одинъ изъ инвариантовъ двухъ коническихъ сѣченій, равна нулю, именно:

$$Q^2 Q_1^2 + 18 \Delta \Delta_1 Q Q_1 - 27 \Delta^2 \Delta_1^2 - 4 \Delta Q^3 - 4 \Delta_1 Q^3 = 0 \quad (18)$$

или:

$$(Q Q_1 - 9 \Delta \Delta_1)^2 = 4 (Q^2 - 3 \Delta Q_1) (Q_1^2 - 3 \Delta_1 Q) \quad (19)$$

Извѣстно, что призначная (19) пропорціональна произведенію квадратовъ разностей корней кубическаго уравненія (17) и если призначная (18) есть величина положительная, то всѣ три корня уравненія (17) дѣйствительные, а если она есть величина отрицательная, то два изъ трехъ корней мнимы. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ коническія сѣченія $f=0$ и $f_1=0$ пересѣкаются въ двухъ дѣйствительныхъ и двухъ мнимыхъ точкахъ. Въ первомъ же случаѣ, онѣ пересѣкаются въ четырехъ дѣйствительныхъ или четырехъ мнимыхъ точкахъ. Для отличія этихъ двухъ случаевъ простаго признака не существуетъ.

Если три точки p_1, p_4, p_3 пересѣченія совпадутъ, то коническія сѣченія въ этой тройной точкѣ имѣютъ общую касательную и общій радіусъ кривизны.

Въ этомъ случаѣ всѣ три корня уравненія (17) равны, т. е. оно есть полный кубъ, для чего необходимо имѣть:

$$\frac{3\Delta}{Q} = \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q_1}{3\Delta_1} \quad (20)$$

Условіе для двойнаго соприкосновенія двухъ коническихъ сѣченій будетъ показано ниже.

Пр. 1. Найти предъидущимъ способомъ условіе касанія двухъ круговъ?

Рѣшеніе. Составляя условіе, при которомъ уравненіе (§ 346, пр. 4):

$$r_1^2 \lambda^2 + (d^2 - r^2 - r_1^2) \lambda + r^2 = 0$$

имѣетъ равные корни, это условіе даетъ:

$$d^2 = r^2 + r_1^2 \pm 2rr_1, \quad d = r \pm r_1$$

какъ извѣстно изъ элементарной геометріи.

Пр. 2. Найти условія касанія коническихъ сѣченій, когда онѣ даны въ трех-членной формѣ?

Рѣшеніе. Для уравненій:

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0 \quad , \quad \sqrt{ax_1} + \sqrt{bx_2} + \sqrt{cx_3} = 0$$

Отв.

$$\sqrt{aa_{23}} + \sqrt{ba_{13}} + \sqrt{ca_{12}} = 0$$

Для уравненій:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \quad , \quad \sqrt{ax_1} + \sqrt{bx_2} + \sqrt{cx_3} = 0$$

Отв.

$$\left(\frac{a^2}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{c^2}{a_{33}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Для уравненій:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \quad , \quad a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0$$

Отв.

$$(a_{11}a_{23}^2)^{\frac{1}{3}} + (a_{22}a_{13}^2)^{\frac{1}{3}} + (a_{33}a_{12}^2)^{\frac{1}{3}} = 0$$

§ 352. Если два коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкоснове- ніе съ третьимъ (фиг. 127), то ихъ уравненія будутъ имѣть форму:

$$f + A_1^2 = 0 \quad , \quad f + A_2^2 = 0 \quad (21)$$

Фиг. 127.

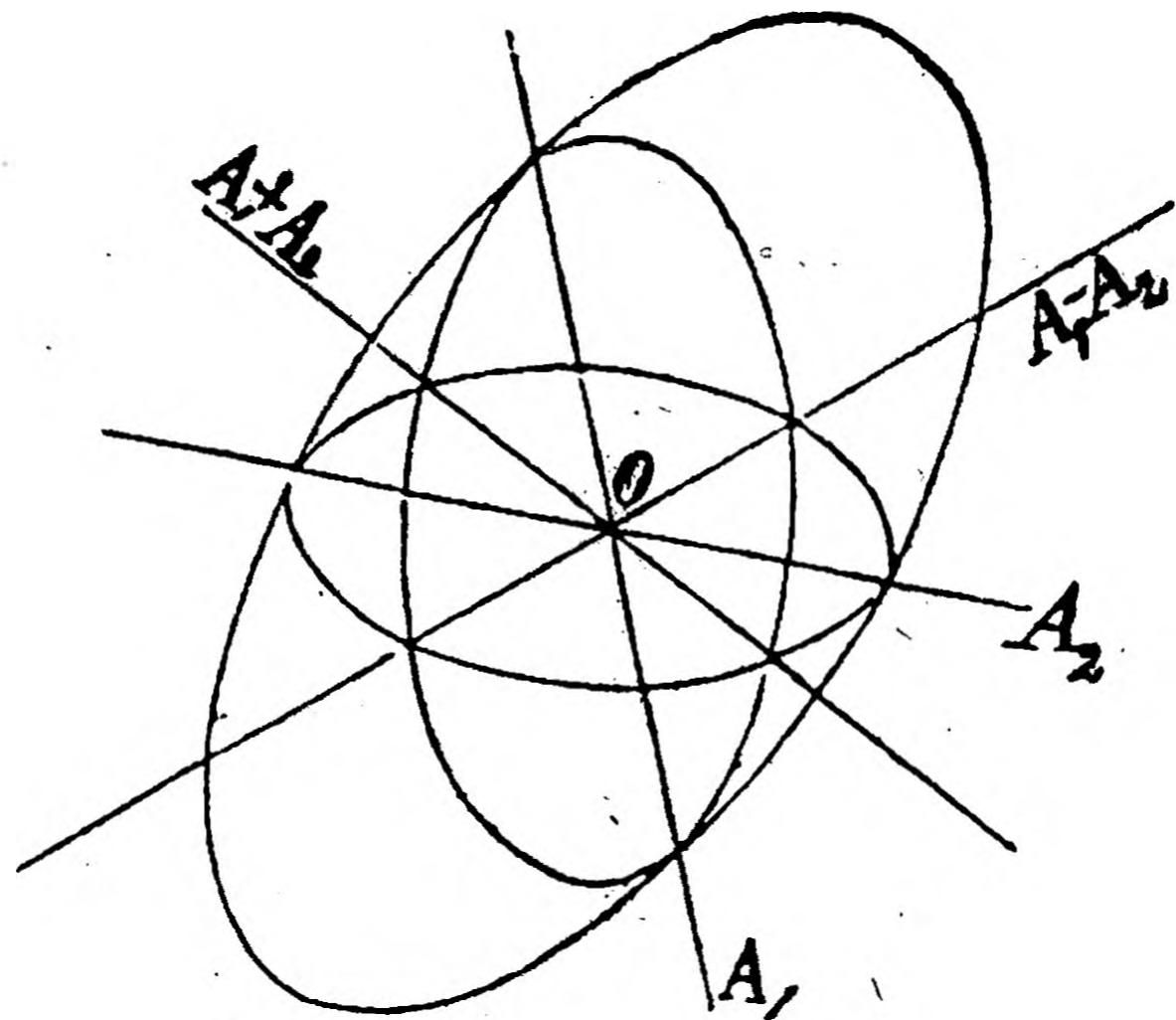
$A_1=0$ и $A_2=0$ суть хорды соприкоснове- нія коническихъ сѣченій (21) съ $f=0$.

Если вычтемъ уравненія (21), то най- демъ:

$$A_1^2 - A_2^2 = 0$$

откуда

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0$$



суть общія хорды, проходящія черезъ точку пересѣченія хордъ сопри- косновения $A_1=0$ и $A_2=0$, съ которыми онѣ, очевидно, образуютъ гар- моническую связку.

Пр. 1. Хорды соприкосновения двухъ коническихъ сѣченій съ общими касательными проходятъ чрезъ пересѣченіе пары ихъ общихъ хордъ. Это предложеніе есть частный случай предъидущаго, полагая въ немъ, что коническое сѣченіе f распадается на двѣ прямыя линіи.

Пр. 2. Діагонали какого-нибудь вписаннаго и соотвѣтствующаго описаннаго четырехугольника около коническаго сѣченія пересѣкаются въ одной точки и образуютъ гармоническую связку. Это предложеніе есть также частный случай предъидущаго, полагая въ немъ, что коническія сѣченія $f + A_1^2$, $f + A_2^2$ распадутся, каждое, на пару прямыхъ линій. Впрочемъ это можно показать слѣдующимъ образомъ: пусть $t_1, t_2, c_1; t_3, t_4, c_2$ будутъ двѣ пары касательныхъ и соотвѣтствующія хорды соприкосновения, другими словами c_1 и c_2 суть діагонали соотвѣтствующаго вписаннаго че-

тыреугольника. Слѣдовательно уравненіе конического сѣченія f можетъ быть написано въ формахъ:

$$t_1 t_2 - c_1^2 = 0 \quad , \quad t_3 t_4 - c_2^2 = 0$$

Вторая форма должна быть тождественна съ первой или отличается отъ нея только постояннымъ множителемъ. Слѣдовательно $t_1 t_2 - \lambda t_3 t_4$ должно быть тождественно съ $c_1^2 - \lambda c_2^2$. Но $c_1^2 - \lambda c_2^2$ есть пара прямыхъ линій, проходящихъ чрезъ точки пересѣченія $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ и гармоническихъ съ ними, а тождественная форма $t_1 t_2 - \lambda t_3 t_4 = 0$ показываетъ, что эти прямыя линіи проходятъ чрезъ точки $t_1 t_3$, $t_2 t_4$ и $t_1 t_4$, $t_2 t_3$, такъ какъ $t_1 t_2 - \lambda t_3 t_4$ есть геометрическое мѣсто проходящее чрезъ эти точки.

§ 353. Если три коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкосновеніе съ четвертымъ, то ихъ уравненія будутъ:

$$f + A_1^2 = 0 \quad , \quad f + A_2^2 = 0 \quad , \quad f + A_3^2 = 0 \quad (22)$$

вычитая попарно, найдемъ уравненія общихъ хордъ:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - A_3 = 0 \quad , \quad A_2 - A_3 = 0$$

$$A_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_3 = 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0$$

Изъ этихъ уравненій видно, что слѣдующія общія хорды пересѣкаются по три въ одной точкѣ:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - A_3 = 0 \quad , \quad A_2 - A_3 = 0$$

$$A_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_3 = 0 \quad , \quad A_2 - A_3 = 0$$

$$A_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - A_3 = 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0$$

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_3 = 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0$$

(23)

Полагая, что нѣкоторыя изъ коническихъ сѣченій (22) распадаются на линейные множители, а также и f , получимъ весьма замѣчательныя предложенія.

1. Положимъ, что коническое сѣченіе f распадается на два линейные множителя, то эти множители суть общія касательныя къ коническимъ сѣченіямъ:

$$f + A_2^2 = 0 \quad , \quad f + A_3^2 = 0$$

Если при этомъ $A_1 = 0$ есть прямая, проходящая черезъ пересѣченіе общихъ касательныхъ, то коническое сѣченіе:

$$f + A_1^2 = 0$$

распадается также на линейные множители и представляетъ пару прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія общихъ касательныхъ. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если черезъ точку пересѣченія общихъ касательныхъ двухъ коническихъ сѣченій проведемъ, какую-нибудь, пару прямыхъ линий, то общія хорды каждаго изъ коническихъ сѣченій съ этими прямыми пересѣкаются на одной изъ общихъ хордъ двухъ коническихъ сѣченій.

Слѣдствіе. Касательныя, проведенныя черезъ точки встрѣчи съ сѣкущей, пересѣкаются на общей хордѣ коническихъ сѣченій.

2. Положимъ, что всѣ три коническія сѣченія:

$$f + A_1^2 = 0 \quad , \quad f + A_2^2 = 0 \quad , \quad f + A_3^2 = 0$$

распадаются на линейные множители, въ этомъ случаѣ, это суть три пары касательныхъ, образующихъ шестиугольникъ, въ который вписано коническое сѣченіе $f=0$.

Соображаясь съ предъидущимъ предложеніемъ, будемъ имѣть знаменитую теорему Бриансона.

Предложеніе Бриансона. Три противоположныя діагонали, описаннаго около коническаго сѣченія шестиугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если стороны шестиугольника означимъ черезъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, то прямая, соединяющія вершины (1, 2) съ (4, 5), (2, 3) съ (5, 6), (3, 4) съ (6, 1) будутъ противоположныя діагонали.

3. Если три коническія сѣченія имѣютъ общую хорду, то ихъ уравненія будутъ:

$$f = 0 \quad , \quad f + A_1 A_2 = 0 \quad , \quad f + A_1 A_3 = 0$$

вычитая два послѣднія, найдемъ:

$$A_1(A_2 - A_3) = 0$$

Изъ этого видимъ, что три остальные общія хорды $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_2 - A_3 = 0$ пересѣкаются въ одной точкѣ.

Это свойство можетъ быть выражено еще слѣдующимъ образомъ. Общія хорды системы коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре данныя точки, съ даннымъ коническимъ сѣченіемъ, проходящимъ черезъ двѣ изъ данныхъ точекъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

§ 354. *Предложеніе Паскаля.* Три точки пересѣченія, противоположныхъ сторонъ вписаннаго въ коническое сѣченіе шестиугольника, лежатъ на одной прямой линіи.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ будутъ вершины шестиугольника; пусть $a_r a_s = 0$ означаетъ уравненіе прямой, проходящей черезъ вершины a_r и a_s .

Такъ какъ коническое сѣченіе описано около шестиугольника, то его уравненіе можетъ быть написано въ формѣ (§ 299):

$$a_1 a_2 \cdot a_3 a_4 - a_2 a_3 \cdot a_1 a_4 = 0 \quad (24)$$

но такъ какъ то же коническое сѣченіе описано и около четырехугольника $a_4 a_5 a_6 a_1$, то его уравненіе можетъ быть написано и въ формѣ:

$$a_4 a_5 \cdot a_6 a_1 - a_5 a_6 \cdot a_1 a_4 = 0 \quad (25)$$

Такъ какъ эти уравненія должны быть тождественны, то имѣеть:

$$a_1 a_2 \cdot a_3 a_4 - a_4 a_5 \cdot a_6 a_1 = (a_2 a_3 - a_5 a_6) a_1 a_4 \quad (26)$$

Вторая часть этого уравненія разлагается на два множителя, а такъ какъ первая есть коническое сѣченіе, описанное около четырехугольника, коего стороны суть $a_1 a_2, a_3 a_4; a_6 a_1, a_4 a_5$, то, очевидно, два множителя второй части суть діагонали этого четырехугольника. Но $a_1 a_4$ есть діагональ, проходящая черезъ вершины a_1 и a_4 , слѣдовательно $a_2 a_3 - a_5 a_6$ есть другая діагональ, которая должна соединять точки пересѣченія сторонъ $a_1 a_2$ и $a_4 a_5; a_3 a_4$ и $a_1 a_6$. Изъ формы этой діагонали видно, что она проходитъ и черезъ точку пересѣченія прямыхъ $a_2 a_3$ и $a_5 a_6$, слѣдовательно три точки:

$$(a_1 a_2, a_4 a_5) ; (a_3 a_4, a_1 a_6) \text{ и } (a_2 a_3, a_5 a_6)$$

лежатъ на одной прямой линіи: $a_2 a_3 - a_5 a_6 = 0$.

Подобныя предложенія получаемъ относительно тѣхъ же шести точекъ, если ихъ будемъ брать въ различныхъ порядкахъ. Такъ напримѣръ, коническое сѣченіе описано около четырехугольника $a_2 a_3 a_5 a_6$, слѣдовательно его уравненіе будетъ:

$$a_2 a_5 \cdot a_3 a_6 - a_2 a_3 \cdot a_5 a_6 = 0 \quad (27)$$

но это выраженіе должно быть тождественно съ выраженіемъ (24), откуда:

$$a_1 a_2 \cdot a_3 a_4 - a_2 a_5 \cdot a_3 a_6 = (a_1 a_4 - a_5 a_6) a_2 a_3$$

изъ этого уравненія слѣдуетъ, какъ выше, что три точки:

$$(a_1 a_2, a_3 a_6) ; (a_3 a_4, a_2 a_5) ; (a_1 a_4, a_5 a_6)$$

лежатъ на одной прямой:

$$a_1 a_4 - a_5 a_6 = 0$$

Точно также, приравнивая формы (25) и (27) конического сѣченія, найдемъ, что три точки:

$$(a_4 a_5, a_3 a_6) ; (a_6 a_1, a_2 a_5) ; (a_1 a_4, a_2 a_5)$$

лежатъ на одной прямой линіи:

$$a_2 a_3 - a_1 a_4 = 0$$

но три прямыя:

$$a_2 a_3 - a_5 a_6 = 0, \quad a_5 a_6 - a_1 a_4 = 0, \quad a_1 a_4 - a_2 a_5 = 0$$

пересѣкаются въ одной точкѣ, слѣдовательно три Паскалевы линіи, которыя получили, взявъ вершины шестиугольника въ порядкахъ:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 ; a_1 a_4 a_3 a_6 a_5 a_2 ; a_1 a_6 a_3 a_2 a_5 a_4$$

пересѣкаются въ одной точкѣ—это извѣстное *предложеніе Штейнера*.

Соотвѣтствующія предложенія можно получить и относительно предложенія Бриансона.

§ 355. На основаніи предложенія Паскаля, по даннымъ пяти точкамъ a, b, c, d, e , можно построить коническое сѣченіе, т. е. можно построить какое угодно число точекъ, которыя будутъ находится на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ пять данныхъ точекъ.

Проведемъ черезъ точку a , какую-нибудь, прямую ap ; мы можемъ построить точку f , въ которой прямая ap пересѣкаетъ еще разъ коническое сѣченіе, слѣдовательно, такимъ образомъ, можемъ построить, какое угодно число точекъ на коническомъ сѣченіи. По теоремѣ Паскаля точки пересѣченія (ab, de) , (bc, ef) , (cd, af) лежатъ на одной прямой линіи, но точки (ab, dc) или O , (cd, af) или p , извѣстны; проведемъ прямую pO , которая пересѣчетъ cb въ точкѣ q , наконецъ прямая qe пересѣчетъ ab въ точкѣ f на коническомъ сѣченіи.

Примѣръ. По даннымъ пяти точкамъ на коническомъ сѣченіи найти его центръ.

Рѣшеніе. Проведемъ $ap \parallel bc$ и опредѣлимъ точку f . Отрѣзки af и bc будутъ хорды, а прямая проходящая чрезъ ихъ середины будетъ діаметръ. Проведемъ $qe \parallel dc$ легко найдемъ, точно также, другой діаметръ, а слѣдовательно искомый центръ.

Уравненіе конического сѣченія отнесеннаго къ двумъ касательнымъ и къ хордѣ ихъ сопрякосновенія.

§ 356. Мы видѣли въ § 300, что если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

суть уравненія прямыхъ въ нормальной формѣ, то уравненіе:

$$A_1 A_2 = A_3^2 \quad (28)$$

есть коническое сѣченіе, въ которомъ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ суть касательныя, а $A_3 = 0$ ихъ хорда сопрякосновенія.

Если:

$$\mu A_1 = A_3$$

есть прямая, проходящая черезъ, какую-нибудь, точку конического сѣченія, которую назовемъ черезъ μ и точку $(A_1 A_3)$, то изъ этого уравненія и изъ уравненія (28), найдемъ:

$$A_2 = \mu A_3 \quad \text{и} \quad \mu^2 A_1 = A_2$$

это суть прямыя, соединяющія точку μ съ точками $(A_2 A_3)$ и $(A_1 A_2)$. Два какія-нибудь изъ трехъ уравненій:

$$\mu A_1 = A_3 \quad , \quad A_2 = \mu A_3 \quad , \quad \mu^2 A_1 = A_2 \quad (29)$$

опредѣляютъ точку на коническомъ сѣченіи.

Легко видѣть, что уравненіе хорды, соединяющей точки μ и μ' на коническомъ сѣченіи будетъ:

$$\mu\mu' A_1 - (\mu + \mu') A_3 + A_2 = 0 \quad (30)$$

Если точки μ, μ' совпадутъ, то уравненіе (30) будетъ касательная въ точкѣ μ :

$$\mu^2 A_1 - 2\mu A_3 + A_2 = 0 \quad (31)$$

Обратно, если уравненіе прямой, какъ (31) содержитъ неопредѣленный коэффициентъ μ во второй степени, то прямая будетъ всегда касаться конического сѣченія $A_1 A_2 = A_3^2$.

§ 357. *Задача.* Найти уравненіе поляры данной точки?

Рѣшеніе. Если въ уравненіе касательной, проходящей черезъ полюсъ, поставимъ его координаты, то уравненіе (31) сдѣлается:

$$\mu^2 A'_1 - 2\mu A'_3 + A'_2 = 0 \quad (32)$$

гдѣ A'_1 , A'_2 , A'_3 суть значенія A_1 , A_2 , A_3 , когда въ нихъ подставимъ координаты полюса; но въ точкѣ касанія имѣемъ:

$$\mu^2 = \frac{A_2}{A_1} \quad , \quad \mu = \frac{A_3}{A_1}$$

подставляя въ (32), найдемъ:

$$A_1 A'_2 - 2A_3 A'_3 + A_2 A'_1 = 0 \quad (33)$$

Если полюсъ будетъ данъ пересѣченіемъ прямыхъ:

$$aA_1 = A_3 \quad , \quad bA_3 = A_2$$

то уравненіе полярны будетъ:

$$abA_1 - 2aA_3 + A_2 = 0 \quad (34)$$

§ 358. Замѣтимъ, что если между уравненіями:

$$\mu^2 A_1 - 2\mu A_3 + A_2 = 0 \quad , \quad \mu'^2 A_1 - 2\mu' A_3 + A_2 = 0 \quad (35)$$

исключимъ A_3 , то найдемъ уравненіе:

$$\mu\mu' A_1 = A_2$$

прямой, соединяющей точку пересѣченія касательныхъ (35) съ точкою $(A_1 A_2)$. Слѣдовательно, если намъ дано произведеніе $\mu\mu' = a$, то геометрическое мѣсто точки пересѣченія касательныхъ (35) будетъ прямая линія:

$$aA_1 = A_2$$

Если въ уравненіи хорды (30) подставимъ вмѣсто $\mu\mu' = a$, то легко видѣть, что геометрическое мѣсто такихъ хордъ будетъ точка:

$$aA_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

Такъ какъ уравненіе прямой, соединяющей точку μ съ точкою $(A_1 A_2)$, есть $\mu^2 A_1 = A_2$, то точки μ и $-\mu$ лежатъ на прямой, проходящей черезъ точку $(A_1 A_2)$.

Если уравненія двухъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ общими касательными $A_1=0$, $A_2=0$, будутъ:

$$A_1 A_2 = A_3^2 \quad , \quad A_1 A_2 = A_4^2$$

то такъ какъ прямая $\mu^2 A_1 = A_2$ не содержитъ A_3 и A_4 , то прямая, соединяющая точку $+\mu$, на одномъ изъ коническихъ сѣченій съ одною изъ точекъ $\pm\mu$ на другомъ, проходитъ черезъ точку $(A_1 A_2)$.

Говорятъ, что точка $+\mu$ на одномъ коническомъ сѣченіи соотвѣтствуетъ прямо-точкѣ $+\mu$ на другомъ, и обратно, на другомъ точкѣ $-\mu$. Мы будемъ называть *соотвѣтственными хордами* хорды, соединяющія соотвѣтственныя точки.

Пр. 1. Соотвѣтствующія хорды двухъ коническихъ сѣченій пересѣкаются на одной изъ общихъ хордъ съ коническимъ сѣченіемъ. Въ самомъ дѣлѣ, коническія сѣченія:

$$A_1 A_2 = A_3^2 \quad , \quad A_1 A_2 = A_4^2$$

имѣютъ общими хордами пару прямыхъ:

$$A_3 - A_4 = 0 \quad , \quad A_3 + A_4 = 0$$

Но хорды (30):

$$\mu\mu' A_1 - (\mu + \mu') A_3 + A_2 = 0 \quad , \quad \mu\mu' A_1 - (\mu + \mu') A_4 + A_2 = 0$$

очевидно пересѣкаются на общей хордѣ $A_3 - A_4 = 0$.

Если во второмъ изъ предъидущихъ уравненій перемѣнимъ знаки при μ и μ' , то эти хорды пересѣкутся на общей хордѣ $A_3 + A_4 = 0$.

Пр. 2. Двѣ вершины, описаннаго около коническаго сѣченія, треугольника скользятъ по даннымъ двумъ прямымъ, найти геометрическое мѣсто третьей вершины?

Рѣшеніе. Отнесемъ коническое сѣченіе къ двумъ касательнымъ, проведеннымъ къ коническому сѣченію чрезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ, и къ ихъ хордѣ сопркосновенія. Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$aA_1 - A_2 = 0 \quad , \quad bA_1 - A_2 = 0$$

а коническое сѣченіе:

$$A_1 A_2 = A_3^2$$

Мы выше показали, что двѣ касательныя, пересѣкающіяся на прямой $aA_1 - A_2 = 0$, будутъ имѣть произведеніе $\mu\mu' = a$, слѣдовательно если одна изъ сторонъ треугольника касается коническаго сѣченія въ точкѣ μ , то другія будутъ касаться въ точ-

кахъ $\frac{a}{\mu}$ и $\frac{b}{\mu}$ и ихъ уравненія будутъ:

$$\frac{a^2}{\mu^2} A_1 - 2 \frac{a}{\mu} A_3 + A_2 = 0 \quad , \quad \frac{b^2}{\mu^2} A_1 - 2 \frac{b}{\mu} A_3 + A_2 = 0$$

исключая μ , найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$A_1 A_2 = \frac{4ab}{(a+b)^2} A_3^2$$

Очевидно это есть коническое сѣченіе, имѣющее двойное соприкосновеніе съ даннымъ.

Пр. 3. Найти обертку основанія треугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, коего двѣ стороны проходятъ черезъ двѣ данныя точки?

Рѣшеніе: Возьмемъ прямую, соединяющую данныя двѣ точки за A_3 , а уравненіе коническаго сѣченія пусть будетъ:

$$A_1A_2 = A_3^2$$

пусть прямая, соединяющія данныя точки съ точкою (A_1A_2) , будутъ:

$$aA_1 = A_2 \quad , \quad bA_1 = A_2$$

Мы выше показали, что если точки пересѣченія какой-нибудь хорды, проходящей черезъ точку $(aA_1 - A_2, A_3)$ суть μ' и μ'' , то означая черезъ μ вершину треугольника, вершины угловъ основанія будутъ $\mu\mu' = a$, $\mu\mu'' = b$, откуда:

$$\mu' = \frac{a}{\mu} \quad , \quad \mu'' = \frac{b}{\mu}$$

Слѣдовательно уравненіе основанія будетъ:

$$abA_1 - (a + b)\mu A_3 + \mu^2 A_2 = 0$$

хорда, которая есть обертка (§ 356) коническаго сѣченія:

$$A_1A_2 = \frac{(a + b)^2}{4ab} A_3^2$$

Это коническое сѣченіе имѣетъ двойное соприкосновеніе съ прямыми $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, а $A_3 = 0$ есть хорда соприкосновенія.

Пр. 4. Вписать въ данное коническое сѣченіе треугольникъ, котораго бы три стороны проходили черезъ три данныя точки?

Рѣшеніе. Если двѣ изъ данныхъ точекъ возьмемъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, то уравненіе основанія искомаго треугольника будетъ:

$$abA_1 - (a + b)\mu A_3 + \mu^2 A_2 = 0$$

Если эта прямая проходитъ черезъ точку:

$$a'A_1 - A_3 = 0 \quad , \quad b'A_3 - A_2 = 0$$

то должны имѣть:

$$ab - (a + b)a'\mu + a'b'\mu^2 = 0$$

уравненіе, изъ котораго можно опредѣлить μ .

Но въ точкѣ μ имѣемъ:

$$\mu A_1 = A_3 \quad , \quad \mu^2 A_1 = A_2$$

Слѣдовательно координаты этой точки должны удовлетворять уравненіе:

$$abA_1 - (a + b)a'A_3 + a'b'A_2 = 0$$

Задача, очевидно, имѣетъ два рѣшенія, такъ какъ каждая изъ точекъ пересѣченія, предыдущей прямой съ коническимъ сѣченіемъ, можетъ быть взята за вершину искомаго треугольника.

Пр. 5. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего основаніе касается даннаго конического сѣченія, вершины при основаніи скользятъ по двумъ касательнымъ, а стороны проходятъ черезъ двѣ данныя точки?

Рѣшеніе. Пусть уравненіе конического сѣченія будетъ:

$$A_1 A_2 = A_3^2 \quad (36)$$

Очевидно координаты A_1 , A_3 , A_2 точки пересѣченія прямой $A_1 = 0$, съ какою-нибудь касательною:

$$\mu^2 A_1 - 2\mu A_3 + A_2 = 0 \quad (37)$$

будутъ пропорціональны количествамъ 0, 1, 2μ , слѣдовательно уравненіе прямой, соединящей эту точку съ точкою данною координатами A'_1 , A'_3 , A'_2 , будетъ:

$$A_1 A'_2 - A'_1 A_2 = 2\mu (A_1 A'_3 - A'_1 A_3) \quad (38)$$

Точно также уравненіе прямой, соединяющей данную координатами A''_1 , A''_3 , A''_2 точку съ точкою $(2, \mu, 0)$, которая есть пересѣченіе прямой $A_2 = 0$ съ тою-же касательною (37), есть:

$$2(A_2'' A_3 - A_3'' A_2) = \mu (A_2'' A_1 - A_1'' A_2) \quad (39)$$

Исключая μ изъ уравненій (38) и (39), найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$(A'_2 A_1 - A'_1 A_2) (A''_2 A_1 - A''_1 A_2) = 4 (A'_3 A_1 - A'_1 A_3) (A''_2 A_3 - A''_3 A_2)$$

которое есть коническое сѣченіе, очевидно, проходящее черезъ двѣ данныя точки.

§ 358. Хорда, соединяющая точки $\mu \operatorname{tg} \varphi$ и $\mu \operatorname{cotg} \varphi$, гдѣ φ есть постоянный уголъ, всегда касается конического сѣченія, имѣющаго двойное соприкосновеніе съ даннымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе хорды есть:

$$\mu^2 A_1 - \mu A_3 (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{cotg} \varphi) + A_2 = 0$$

и такъ какъ:

$$\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{cotg} \varphi = 2 \operatorname{cosec} 2 \varphi$$

то обертка этой хорды (§ 356) есть коническое сѣченіе:

$$A_1 A_2 = A_3^2 \operatorname{cosec}^2 2 \varphi$$

Легко можно показать, что геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія касательныхъ къ коническому сѣченію въ точкахъ $\mu \operatorname{tg} \varphi$, $\mu \operatorname{cotg} \varphi$, есть:

$$A_1 A_2 = A_3^2 \sin^2 2 \varphi$$

Примѣръ. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего основаніе касается даннаго конического сѣченія; вершины при основаніи скользятъ по данному коническому сѣченію, имѣющему двойное соприкосновеніе съ даннымъ, а стороны проходятъ черезъ двѣ данныя точки?

Рѣшеніе. Пусть данныя коническія сѣченія будутъ:

$$A_1 A_2 = A_3^2, \quad A_1 A_2 = A_3^2 \operatorname{cosec}^2 2 \varphi$$

Слѣдовательно изъ предъидущаго слѣдуетъ, что если, какая-нибудь, прямая касается втораго коническаго сѣченія въ точкѣ μ , то она пересѣкаетъ первое въ точкахъ $\mu \operatorname{tg} \varphi$ и $\mu \operatorname{cotg} \varphi$.

Если μ' и μ'' суть данныя точки, то уравненія сторонъ будутъ:

$$\mu\mu' \operatorname{tg} \varphi \cdot A_1 - (\mu' + \mu \operatorname{tg} \varphi) A_3 + A_2 = 0$$

$$\mu\mu'' \operatorname{tg} \varphi \cdot A_1 - (\mu'' + \mu \operatorname{tg} \varphi) A_3 + A_2 = 0$$

исключая μ , найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$(A_2 - \mu' A_3)(\mu'' A_1 - A_3) = \operatorname{tg}^2 \varphi (A_2 - \mu'' A_3)(\mu' A_1 - A_3)$$

§ 359. *Предложеніе.* Ангармоническое отношеніе связки, соединяющей четыре данныя точки на коническомъ сѣченіи съ какою-нибудь пятою, есть величина постоянная.

Доказательство. Пусть данныя четыре точки будутъ $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, а пятая μ . Пусть уравненіе коническаго сѣченія будетъ:

$$A_1 A_2 = A_3^2$$

Уравненія прямыхъ, соединяющихъ четыре точки съ пятою, суть:

$$\mu\mu_1 A_1 - (\mu + \mu_1) A_3 + A_2 = 0 \quad , \quad \mu\mu_2 A_1 - (\mu + \mu_2) A_3 + A_2 = 0$$

$$\mu\mu_3 A_1 - (\mu + \mu_3) A_3 + A_2 = 0 \quad , \quad \mu\mu_4 A_1 - (\mu + \mu_4) A_3 + A_2 = 0$$

эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$\mu_1 (\mu A_1 - A_3) + (A_2 - \mu A_3) = 0 \quad , \quad \mu_2 (\mu A_1 - A_3) + (A_2 - \mu A_3) = 0$$

$$\mu_3 (\mu A_1 - A_3) + (A_2 - \mu A_3) = 0 \quad , \quad \mu_4 (\mu A_1 - A_3) + (A_2 - \mu A_3) = 0$$

коихъ ангармоническое отношеніе, есть:

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4}$$

какъ видно величина независящая отъ μ , а слѣдовательно постоянная. Это предложеніе было уже доказано выше (§ 231, пред. 3).

§ 360. *Предложеніе.* Ангармоническое отношеніе ряда точекъ полученныхъ пересѣченіемъ четырехъ данныхъ касательныхъ къ коническому сѣченію, какою-нибудь, пятою есть величина постоянная.

Доказательство. Пусть уравненіе коническаго сѣченія будетъ:

$$A_1 A_2 = A_3^2$$

пусть $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ будутъ точки касанія четырехъ данныхъ касательныхъ, μ — пятой. Ангармоническое отношеніе четырехъ полученныхъ точекъ на пятой касательной, очевидно, равно ангармоническому отношенію связки, соединяющей эти точки съ точкою $(A_1 A_2)$. Но уравненія этихъ прямыхъ, какъ мы видѣли (§ 358), суть:

$$\mu\mu_1 A_1 = A_2, \quad \mu\mu_2 A_1 = A_2, \quad \mu\mu_3 A_1 = A_2, \quad \mu\mu_4 A_1 = A_2$$

слѣдовательно ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ равно ангармоническому отношенію этихъ прямыхъ, которое есть:

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} : \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4}$$

величина независимая отъ μ , слѣдовательно постоянная. Это предложеніе было уже доказано выше (§ 231).

§ 361. Выраженіе:

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} : \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4}$$

неизмѣняется, если измѣнимъ знаки при μ_1, μ_2, \dots , слѣдовательно, если проведемъ черезъ точку $(A_1 A_2)$ четыре прямыя, то ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, въ которыхъ эти прямыя пересекаютъ коническое сѣченіе, будетъ равно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ $-\mu_1, -\mu_2, -\mu_3, -\mu_4$, въ которыхъ эти прямыя еще разъ встрѣчаютъ коническое сѣченіе.

По той же причинѣ ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ, на одномъ коническомъ сѣченіи, равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтствующихъ точекъ, на другомъ.

Ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ не измѣняется, если μ помножимъ на $\operatorname{tg} \varphi$ или на $\operatorname{cotg} \varphi$, откуда будемъ имѣть *предложеніе Товсенда*.

Предложеніе. Если два коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкосновеніе, то ангармоническое отношеніе точекъ касанія четырехъ касательныхъ къ одному изъ нихъ, равно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ, въ которыхъ эти касательныя встрѣчаютъ другое и четырехъ точекъ, въ которыхъ эти касательныя встрѣчаютъ еще разъ коническое сѣченіе.

§ 362. *Предложеніе*. Если даны три хорды въ данномъ коническомъ сѣченіи aa_1, bb_1, cc_1 и четвертая хорда dd_1 такого свойства, что $(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$, то она будетъ всегда касаться коническаго сѣченія, имѣющаго двойное соприкосновеніе съ даннымъ (предложеніе обратное предъидущему).

Доказательство. Если положимъ, что a, b, c и a_1, b_1, c_1 означаютъ величины μ для шести данныхъ точекъ, μ и μ' суть точки четвертой переменнѣнной хорды, то будемъ имѣть:

$$\frac{(a-b)(c-\mu)}{(a-c)(b-\mu)} = \frac{(a_1-b_1)(c_1-\mu')}{(a_1-c_1)(b_1-\mu')}$$

откуда:

$$A\mu\mu' + B\mu + C\mu' + D = 0 \quad (40)$$

A, B, C, D суть извѣстныя постоянныя величины. Опредѣляя μ' изъ этого уравненія и подставляя въ уравненіе хорды:

$$\mu\mu A_1 - (\mu + \mu')A_3 + A_2 = 0$$

найдемъ:

$$\mu(B\mu + D)A_1 + A_3\{\mu(A\mu + C) - (B\mu + D)\} - A_2(A\mu + C) = 0$$

или:

$$\mu^2(BA_1 + AA_3) + \mu\{DA_1 + (C - B)A_3 - AA_2\} - (DA_3 + CA_2) = 0$$

откуда обертка этой хорды будетъ (§ 356):

$$\{DA_1 + (C - B)A_3 - AA_2\}^2 + 4(BA_1 + AA_3)(CA_2 + DA_3) = 0$$

уравненіе, которое можно написать въ формѣ:

$$4(BC - AD)(A_1A_2 - A_3^2) + \{DA_1 + (B + C)A_3 + AA_2\}^2 = 0$$

эта форма показываетъ, что это коническое сѣченіе имѣетъ двойное соприкосновеніе съ даннымъ.

Въ частномъ случаѣ, когда $B = C$, уравненіе (40) сдѣлается:

$$A\mu\mu' + B(\mu + \mu') + D = 0$$

которое показываетъ, что хорда:

$$\mu\mu' A_1 - (\mu + \mu') A_3 + A_2 = 0$$

проходитъ черезъ постоянную точку.

§ 363. Уравненіе коническаго сѣченія, отнесеннаго къ фокусу, какъ началу, коего директриса есть $A_1 = 0$, какъ видѣли выше (§ 350) есть:

$$x^2 + y^2 = e^2 A_1^2$$

его можно написать въ формѣ:

$$(eA_1 - x)(eA_1 + x) = y^2$$

откуда слѣдуетъ, что:

$$eA_1 - x = 0 \quad , \quad eA_1 + x = 0$$

суть касательныя къ коническому сѣченію изъ точки $(x \ A_1)$ на директрисѣ.

Если кривая будетъ парабола, то $e=1$, а потому касательныя, проведенныя изъ какой-нибудь точки на директрисѣ, къ параболѣ, будутъ:

$$A_1 - x = 0 \quad , \quad A_1 + x = 0$$

Слѣдовательно, касательныя съ осью x и директрисой составляютъ гармоническую связку и такъ какъ изъ ихъ уравненій видно, что онѣ суть равнодѣлящія углы между x и A_1 , то онѣ перпендикулярны. Слѣдовательно касательныя, проведенныя, изъ какой-нибудь точки на директрисѣ къ параболѣ, перпендикулярны.

§ 364. Если черезъ φ означимъ уголь, который, какой-нибудь радіусъ векторъ, проведенный черезъ фокусъ, составляетъ съ осью x , то очевидно выраженія:

$$x = eA_1 \cos \varphi \quad , \quad y = eA_1 \sin \varphi$$

удовлетворяютъ уравненію:

$$x^2 + y^2 = e^2 A_1^2$$

Если φ_1 и φ_2 суть углы, которые радіусы векторы, проведенные изъ фокуса конического сѣченія, къ концамъ данной хорды, образуютъ съ осью x , то ея уравненіе будетъ:

$$x \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) + y \sin \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) = eA_1 \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Если данная хорда перемѣщается такъ, что уголь $\varphi_1 - \varphi_2$ остается постояннымъ, то обертка этой хорды будетъ:

$$x^2 + y^2 = e^2 A_1^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

очевидно коническое сѣченіе, имѣющее двойное соприкосновеніе съ даннымъ и общую съ нимъ директрису.

§ 365. Если уравненіе конического сѣченія будетъ:

$$x^2 + y^2 = e^2 A_1^2$$

то касательная къ нему въ точкѣ $x_1 = eA'_1 \sin \varphi_1$, $y_1 = eA'_1 \sin \varphi_1$ будетъ:

$$xx_1 + yy_1 = e^2 A'_1 A_1$$

гдѣ A'_1 есть A_1 , въ которое подставлены координаты (x_1, y_1) . Подставляя въ это уравненіе вмѣсто x_1, y_1 ихъ выраженія, найдемъ:

$$x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - eA_1 = 0$$

касательная въ точкѣ:

$$x_2 = eA'_1 \cos \varphi_2, \quad y_2 = eA'_1 \sin \varphi_2$$

будетъ:

$$x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - eA_1 = 0$$

вычитая эти уравненія, найдемъ уравненіе:

$$x \sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - y \cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0 \quad (41)$$

которое есть прямая, соединяющая фокусъ съ пересѣченіемъ касательныхъ въ точкахъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) .

Изъ уравненія этой прямой видимъ, что она составляетъ съ осью x , уголъ $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, а слѣдовательно дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами векторами, проведенными къ точкамъ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) .

Уравненіе прямой, проведенной изъ фокуса въ точку пересѣченія хорды соприкосновенія съ директрисой, очевидно, есть:

$$x \cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + y \sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$$

слѣдовательно перпендикулярна къ прямой (41).

§ 366. *Задача.* Найти геометрическое мѣсто пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ точкахъ, въ которыхъ радіусы, проведенные въ фокусъ, составляютъ данный уголъ 2δ .

Рѣшеніе. Пусть уравненія касательныхъ будутъ:

$$x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - eA_1 = 0$$

$$x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - eA_1 = 0$$

опредѣляя координаты точекъ пересѣченія, найдемъ:

$$x = eA_1 \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad y = eA_1 \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

если уголъ $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\delta$, то:

$$x = eA_1 \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos \delta}, \quad y = eA_1 \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos \delta}$$

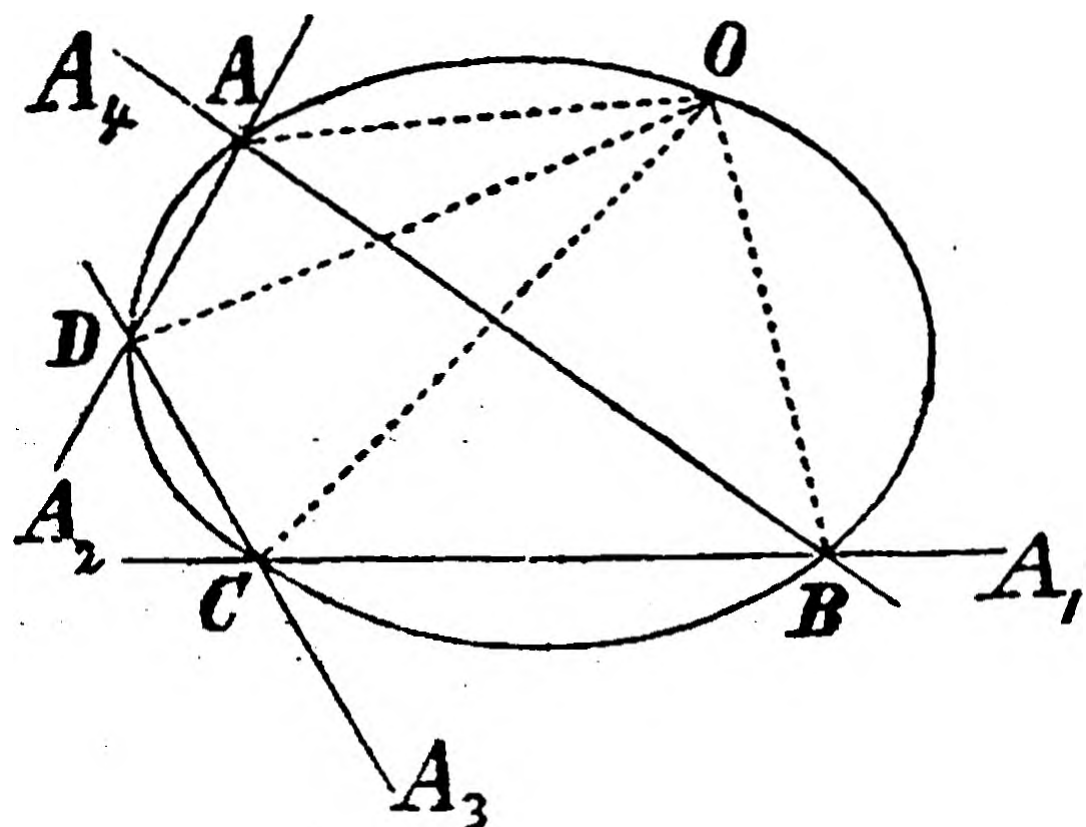
исключая изъ этихъ уравненій уголъ $\varphi_1 + \varphi_2$, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$(x^2 + y^2) \cos^2 \delta = e^2 A_1^2$$

коническое сѣченіе, имѣющее одинъ фокусъ и директрису съ даннымъ, а эксцентриситетъ котораго есть $\frac{e}{\cos \delta}$.

§ 367. Ангармоническія свойства коническихъ сѣченій, выраженные предложеніями § 359 и § 360, можно доказать еще слѣдующимъ образомъ.

Фиг. 128.



Уравненіе коническаго сѣченія, описаннаго около четырехугольника $ABCD$ (фиг. 128), коего стороны даны уравненіями:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 0 \quad (42)$$

въ нормальной формѣ, какъ мы видѣли (§ 299) есть:

$$A_1 A_2 - \lambda A_3 A_4 = 0 \quad (43)$$

Если координаты, какой-нибудь точки O на коническомъ сѣченіи подставимъ въ уравненія (42), то A_1, A_2, A_3, A_4 будутъ выражать длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки O на прямыя (42); слѣдовательно, разсматривая треугольники BOC, AOD, AOB и COD , будемъ имѣть:

$$A_1 = \frac{BO \cdot CO \sin BOC}{BC}, \quad A_2 = \frac{AO \cdot DO \sin AOD}{AD},$$

$$A_3 = \frac{AO \cdot BO \sin AOB}{AB}, \quad A_4 = \frac{CO \cdot DO \sin COD}{CD}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (43), найдемъ:

$$\frac{BO \cdot CO \cdot AO \cdot DO \sin BOC \sin AOD}{BC \cdot AD} = \lambda \frac{AO \cdot BO \cdot CO \cdot DO \sin AOB \sin COD}{AB \cdot CD}$$

откуда:

$$\frac{\sin BOC \sin AOD}{\sin AOB \sin COD} = \lambda \frac{AD \cdot BC}{AB \cdot CD} \quad (44)$$

Первая часть этого уравненія выражаетъ ангармоническое отношеніе связки $(O \cdot ABCD)$, а вторая часть остается постоянною, когда точка O скользитъ по коническому сѣченію, что и выражаетъ предложеніе § 359 (§ 231).

§ 368. Если

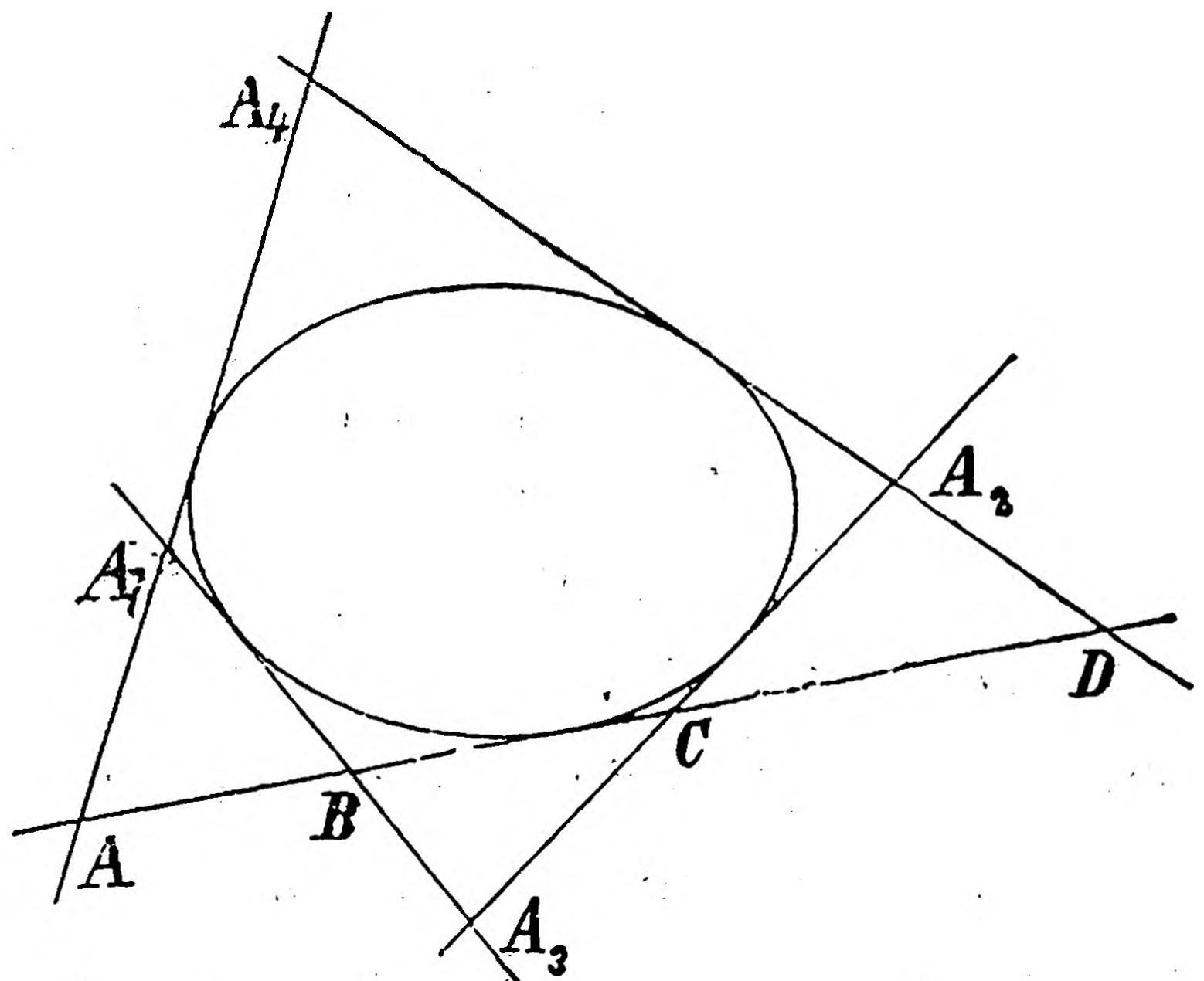
$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0 \quad (45)$$

будутъ уравненія точекъ въ нормальной формѣ, то:

$$A_1 A_2 - \lambda A_3 A_4 = 0 \quad (46)$$

Фиг. 129.

будетъ уравненіе конического сѣченія, вписаннаго въ четырехугольникъ $A_1 A_3 A_2 A_4$ (фиг. 129). Уравненіе (46) выражаетъ, что отношеніе произведенія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ на какую-нибудь касательную AD къ коническому сѣченію, къ произведенію перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ $A_3 = 0$, $A_4 = 0$ на ту же касательную, есть величина постоянная λ .



Пусть A , B , C , D будутъ точки пересѣченія данныхъ четырехъ касательныхъ $A_1 A_4$, $A_1 A_3$, $A_3 A_2$ и $A_2 A_4$ съ какою-небудь пятою AD . Если въ уравненіе (46) вставимъ координаты касательной AD , то A_1 , A_2 , A_3 , A_4 будутъ длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ (45) на касательную AD . Разсматривая треугольники AA_1B , CA_2D , BA_3C , AA_4D и поступая какъ въ предъидущемъ параграфѣ, найдемъ предложеніе § 360, что ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ A , B , C , D пересѣченія какой-небудь касательной AD съ четырьмя данными касательными $A_1 A_4$, $A_1 A_3$, $A_3 A_2$, $A_2 A_4$ есть величина постоянная, когда перемѣщается касательная AD .

Ангармоническія свойства коническихъ сѣченій.

§ 369. *Предложеніе.* Геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего три стороны проходятъ черезъ три данныя точки, а другія двѣ вершины скользятъ по двумъ даннымъ прямымъ, есть коническое сѣченіе.

Доказательство. Пусть данныя точки будутъ O_1 , O_2 , O_3 (фиг. 130), данныя двѣ прямыя Oa и Ob . Возьмемъ четыре положенія такого треугольника:

$$\triangle aa'u_4, \quad \triangle bb'u_3, \quad \triangle cc'u_2, \quad \triangle dd'u_1$$

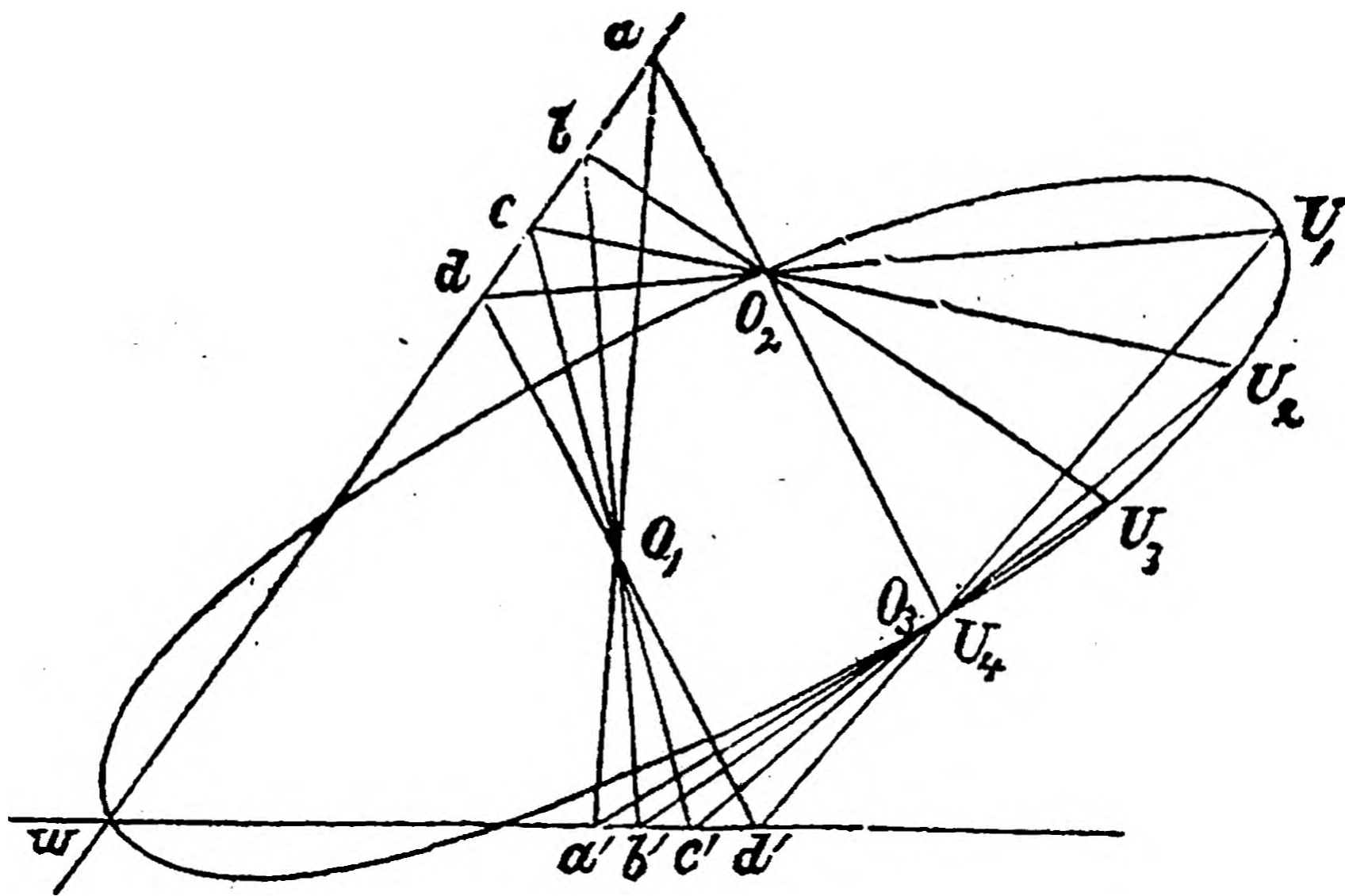
Изъ свойствъ ангармоническихъ отношеній имѣемъ:

$$(O_1. abcd) = (O_1. a'b'c'd')$$

слѣдовательно $(abcd) = (a'b'c'd')$, откуда $(O_2.abcd) = (O_3.a'b'c'd')$, откуда наконецъ:

$$(O_2.u_1u_2u_3u_4) = (O_3.u_1u_2u_3u_4)$$

Фиг. 130.



а изъ этого равенства заключаемъ, что точки u_1, u_2, u_3, u_4 находятся на коническомъ сѣченіи (§ 230). Если три первые треугольника будутъ фиксированы, то геометрическое мѣсто вершины четвертаго будетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки O_2, O_3, u_1, u_2, u_3 .

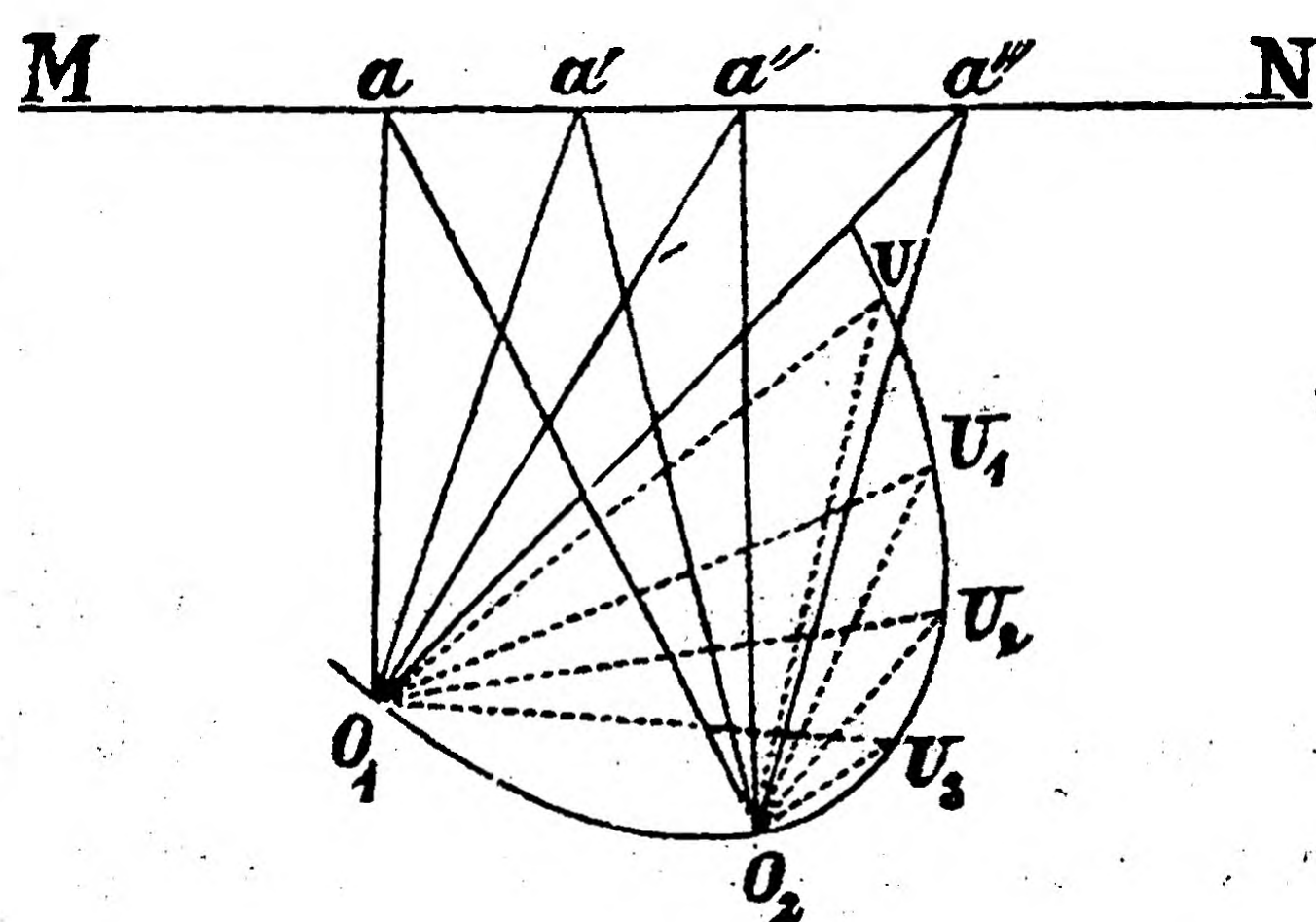
Этотъ способъ образованія коническаго сѣченіа принадлежитъ Маклореню. Шаль обобщилъ предъидущее предложеніе, показавъ, что геометрическое мѣсто вершинъ треугольника будетъ коническое сѣченіе и въ томъ случаѣ, если сторона aa' вмѣсто того, чтобы проходить чрезъ точку O_1 будетъ касаться даннаго коническаго сѣченіа. Въ самомъ дѣлѣ, въ четырехъ положеніяхъ стороны aa' будемъ имѣть (§ 360):

$$(abcd) = (a'b'c'd')$$

откуда будетъ слѣдовать, какъ выше, предложеніе Шаля.

Можно положить, что основаніе aa' треугольника скользитъ по какому нибудь коническому сѣченію, проходящему черезъ точки O_2 и O_3 . Въ самомъ дѣлѣ, для четырехъ положеній треугольника имѣемъ:

Фиг. 131.



$$(abcd) = (a'b'c'd')$$

откуда, какъ выше:

$$(O_2.abcd) = (O_3.a'b'c'd')$$

слѣдовательно:

$$(O_2.u_1u_2u_3u_4) = (O_3.u_1u_2u_3u_4)$$

§ 370. *Предложеніе.* Если два данныя угла вращаются около своихъ вершинъ O_1 и O_2 такъ, что двѣ ихъ стороны пересѣкаются на данной прямой, то геометрическое мѣсто пересѣченія двухъ другихъ сторонъ будетъ коническое сѣченіе.

Доказательство. Возьмемъ (фиг. 131) четыре положенія угловъ aO_1u и aO_2u , $a'O_1u_1$ и $a'O_2u_1$, $a''O_1u_2$ и $a''O_2u_2$, $a'''O_1u_3$ и $a'''O_2u_3$.

Изъ свойствъ ангармоническихъ отношеній имѣемъ:

$$(O_1.aa'a''a''') = (O_2.aa'a''a''')$$

но:

$$(O_1.aa'a''a''') = (O_1.uu_1u_2u_3) \quad \text{и} \quad (O_2.aa'a''a''') = (O_2.uu_1u_2u_3)$$

откуда:

$$(O_1.uu_1u_2u_3) = (O_2.uu_1u_2u_3)$$

а это показываетъ, что точки u, u_1, u_2, u_3 , находятся на коническомъ сѣченіи.

Этотъ способъ образованія коническихъ сѣченій принадлежитъ Ньютону. Шаль показалъ, что если точки a, a', a'', a''' , лежатъ не на одной прямой, а на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ точки O_1 и O_2 , то геометрическое мѣсто точекъ u, u_1, u_2, \dots будетъ также коническое сѣченіе. И въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$(O_1.aa'a''a''') = (O_2.aa_1a_2a_3)$$

§ 371. Свойство ангармоническаго отношенія даетъ возможность доказать предложеніе Паскаля (§ 354) слѣдующимъ образомъ.

Доказательство. Пусть $ABCDEF$ (фиг.132) будетъ вписанный въ коническое сѣченіе шестиугольникъ, коего вершины суть A, B, C, D, E, F , а противоположныя стороны AB и DE , BC и EF , CD и AF .

Изъ ангармоническаго свойства коническаго сѣченія имѣемъ:

$$(E.CDFB) = (A.CDFB)$$

Если теперь рассмотримъ отрѣзки, которые связка $(E.CDFB)$ дѣлаеть на сторонѣ CB , а связка $(A.CDFB)$ на сторонѣ CD , то:

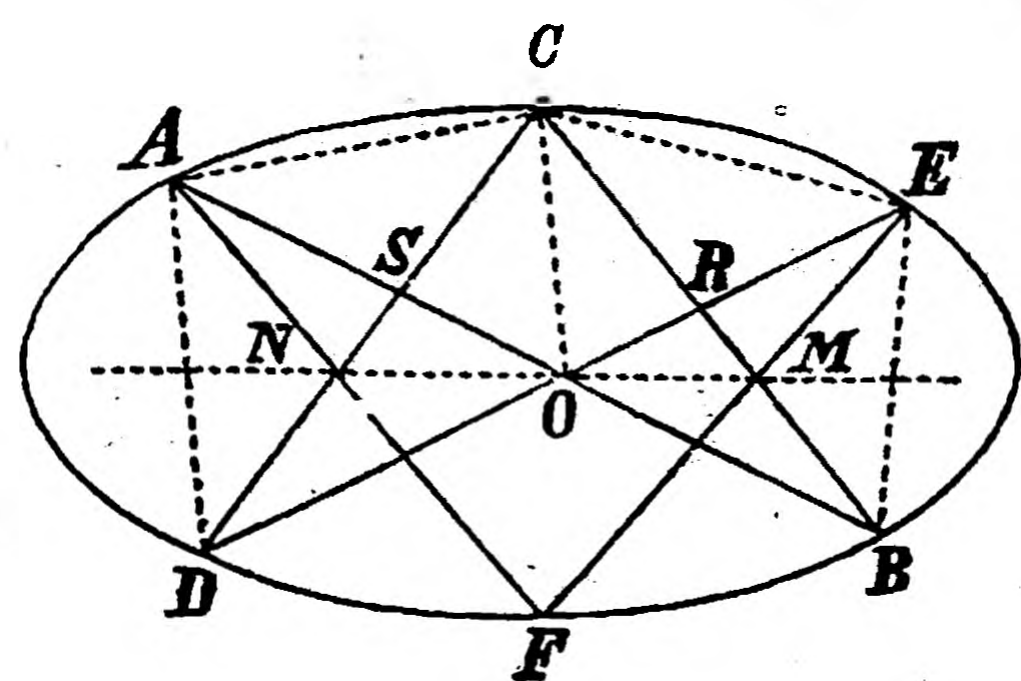
$$(CRMB) = (CDNS)$$

Если изъ точки O пересѣченія сторонъ AB и DE проведемъ прямыя къ этимъ точкамъ, то найдемъ:

$$(O.CRMB) = (O.CDNS)$$

Эти двѣ связки имѣютъ общими лучи: CO, DE, AB , слѣдовательно OM и ON должны составлять одну прямую линію, но M, O, N суть точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ шестиугольника.

Фиг. 132.



§ 372. *Предложеніе.* Рядъ точекъ, полученный пересѣченіемъ связки коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре данныя точки, какою-нибудь прямою, есть инволюціонный (§ 346).

Доказательство. Пусть $f=0$, $f_1=0$ будутъ два коническія сѣченія; система коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре точки пересѣченія этихъ двухъ коническихъ сѣченій, выражается уравненіемъ:

$$f - \lambda f_1 = 0$$

Если сѣкущую возьмемъ за ось x и положимъ въ предыдущихъ трехъ уравненіяхъ $y=0$, то онѣ сдѣлаются:

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + 2b_1x + b_2 = 0 \quad (47)$$

и

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 + \lambda(b_0x^2 + 2b_1x + b_2) = 0 \quad (48)$$

Это послѣднее уравненіе даетъ точки пересѣченія системы коническихъ сѣченій съ осью x . Но эти точки съ точками (47) составляютъ инволюціонный рядъ (§ 178). Въ числѣ лучей связки считаются двѣ пары противоположныхъ сторонъ и пара діагоналей четырехугольника, коего вершины суть данныя четыре точки.

§ 373. Если коническія сѣченія даны въ линейныхъ координатахъ, то будемъ имѣть слѣдующее, взаимное предыдущему, предложеніе.

Предложеніе. Пары касательныхъ, проведенныхъ, черезъ какую-нибудь точку, къ системѣ коническихъ сѣченій, имѣющихъ четыре общія касательныя составляютъ инволюціонную связку.

Доказательство. Это предложеніе можно доказать, какъ и предыдущее.

Пр. 1. Если около одного четырехугольника описаны три коническія сѣченія, то общая касательная къ двумъ изъ нихъ пересѣкается третьимъ гармонически, потому что точки касанія суть фокусы инволюціоннаго ряда.

Пр. 2. Если черезъ пересѣченіе общихъ хордъ двухъ коническихъ сѣченій проведемъ касательную къ одному изъ нихъ, то она пересѣкается другимъ гармонически.

Пр. 3. Построить коническое сѣченіе, проходящее черезъ четыре данныя точки и касающееся данной прямой? Точка касанія должна быть фокусомъ инволюціонной системы, слѣдовательно задача имѣетъ два рѣшенія.

§ 374. *Предложеніе.* Система коническихъ сѣченій, имѣющихъ общій полярный треугольникъ, пересѣкается, какою-нибудь прямою, проходящею черезъ одну изъ его вершинъ, въ точкахъ образующихъ инволюціонный рядъ.

Доказательство. По свойству полярнаго треугольника, прямая проходящая черезъ его вершину, пересѣкаетъ каждое изъ коническихъ сѣченій системы въ точкахъ, которыя суть сопряженно-гармоническія съ вершиною и точкою пересѣченія прямой съ противуположащей стороною полярнаго треугольника, слѣдовательно каждая пара точекъ на коническихъ сѣченіяхъ системы, гармонична съ одной и той-же парой, а потому онѣ образуютъ инволюціонный рядъ, коего двойныя точки суть вершины и точка пересѣченія прямой съ противуположащей стороною.

Предложеніе. Если черезъ, какую-нибудь, точку на сторонѣ общаго полярнаго треугольника системы коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре данныя точки, проведемъ пару касательныхъ къ каждому изъ коническихъ сѣченій системы, то онѣ образуютъ инволюціонную связку, коей двойныя лучи суть: взятая сторона общаго полярнаго треугольника и прямая, проходящая черезъ взятую на ней точку и ея полюсъ, т. е. противуположащую вершину полярнаго треугольника (предложеніе взаимное предъидущему).

Доказательство основано на свойствахъ полярнаго треугольника (§ 212).

Фокусы коническихъ сѣченій.

§ 375. Выше мы видѣли (§ 350) изъ уравненія коническаго сѣченія отнесеннаго къ фокусу какъ началу, выражающаго основное свойство фокуса и директрисы:

$$x^2 + y^2 = e^2 A_1 \quad (49)$$

что коническое сѣченіе можно разсматривать, какъ вписанное въ четырехугольникъ, коего стороны пересѣкаются въ двухъ *циклическихъ* бесконечно удаленныхъ точкахъ, въ двухъ дѣйствительныхъ и въ двухъ мнимыхъ *фокусахъ*.

Разсмотримъ ближе характеръ и свойства этихъ замѣчательныхъ точекъ:

Пусть:

$$f' = 0 \text{ и } f'_1 = 0 \quad (50)$$

будутъ два коническія сѣченія въ линейныхъ координатахъ.

Уравненіе:

$$f' - \lambda f'_1 = 0 \quad (51)$$

будетъ представлять систему коническихъ сѣченій, имѣющихъ четыре общія касательныя съ двумя коническими сѣченіями. Между коническими сѣченіями системы (51) есть три пары точекъ, принадлежащихъ этой си-

стемѣ въ качествѣ коническихъ сѣченій. Если предположимъ, что одна изъ этихъ паръ есть пара циклическихъ точекъ, то (51) будетъ система коническихъ сѣченій, въ которой въ качествѣ коническихъ сѣченій будетъ и пара циклическихъ точекъ.

Такъ какъ въ системѣ (51) можно, вмѣсто коническихъ сѣченій (49), выбрать какую-угодно пару другихъ изъ системы, а мы предположили, что въ системѣ (51) находятся и пара циклическихъ точекъ, то вмѣсто $f'_1 = 0$ можемъ взять циклическія точки: $\xi^2 + \eta^2 = 0$. Въ силу этого система (51) приметъ форму:

$$f' - \lambda(\xi^2 + \eta^2) = 0 \quad (52)$$

изъ которой ясно видно, что между коническими сѣченіями (51) находится и пара циклическихъ точекъ, именно, когда $\lambda = \infty$. Если за координатныя оси возьмемъ оси a и b коническаго сѣченія $f' = 0$, то оно приметъ форму:

$$f' = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - 1 = 0 \quad (53)$$

слѣдовательно уравненіе (52) преобразуется въ слѣдующее:

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - 1 - \lambda(\xi^2 + \eta^2) = 0$$

или:

$$(a^2 - \lambda)\xi^2 + (b^2 - \lambda)\eta^2 - 1 = 0 \quad (54)$$

Чтобы опредѣлить другія двѣ пары точекъ въ системѣ коническихъ сѣченій (54), необходимо опредѣлить λ изъ уравненія (§ 337):

$$\begin{vmatrix} a^2 - \lambda & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & b^2 - \lambda & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1 \end{vmatrix} = (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0 \quad (55)$$

откуда:

$$\lambda = a^2 \quad , \quad \lambda = b^2$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (54), найдемъ:

$$(a^2 - b^2)\xi^2 = 1 \quad (56)$$

$$(b^2 - a^2)\eta^2 = 1 \quad (57)$$

Это суть уравненія остальныхъ двухъ паръ точекъ:

$$\pm \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \xi - 1 = 0 \quad , \quad \pm \sqrt{b^2 - a^2} \cdot \eta - 1 = 0 \quad (58)$$

если $a > b$, то первая пара будетъ дѣйствительная, а вторая мнимая. Координаты этихъ точекъ, очевидно, суть (§ 64):

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{a^2 - b^2} \quad , \quad x = 0 \\ y &= 0 \quad , \quad y = \pm \sqrt{b^2 - a^2} \end{aligned} \tag{59}$$

Первая пара представляетъ тѣ точки, которыя мы назвали *фокусами* коническихъ сѣченій, а вторая представляетъ *мнимые фокусы*.

§ 376. Такъ какъ выраженія (59) не зависятъ отъ λ , то изъ этого заключаемъ, что система коническихъ сѣченій:

$$(a^2 - \lambda) \xi^2 + (b^2 - \lambda) \eta^2 = 1 \tag{60}$$

или въ декартовой системѣ (§ 214):

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1 \tag{61}$$

имѣетъ общіе фокусы; такія коническія сѣченія называются *софокусными* (confocales). Эти общіе фокусы принадлежатъ основному коническому сѣченію $f' = 0$.

§ 377. Изъ уравненій софокусныхъ коническихъ сѣченій:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1 \quad , \quad (a^2 - \lambda) \xi^2 + (b^2 - \lambda) \eta^2 = 1 \tag{62}$$

вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Черезъ каждую точку на плоскости всегда проходятъ два изъ системы софокусныхъ коническихъ сѣченій.

Доказательство. Пусть данная система будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1 \tag{63}$$

а данная точка $(x_1 y_1)$. Подставляя координаты точки $(x_1 y_1)$ въ это уравненіе, найдемъ:

$$\frac{x_1^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y_1^2}{b^2 - \lambda} = 1$$

откуда :

$$\lambda^2 - (a^2 + b^2 - x_1^2 - y_1^2) \lambda - (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2) = 0 \tag{64}$$

Изъ этого уравненія видимъ, что λ имѣетъ всегда два дѣйствительныя значенія, которыя будучи подставлены въ первое изъ уравненій (62) да-

дуть два софокусныя коническія сѣченія, проходящія черезъ данную точку (x_1, y_1) . Если въ уравненіи (64) положимъ послѣдовательно $\lambda = a^2$, $\lambda = b^2$ и $\lambda = -\infty$, то результаты этихъ подстановленій будутъ:

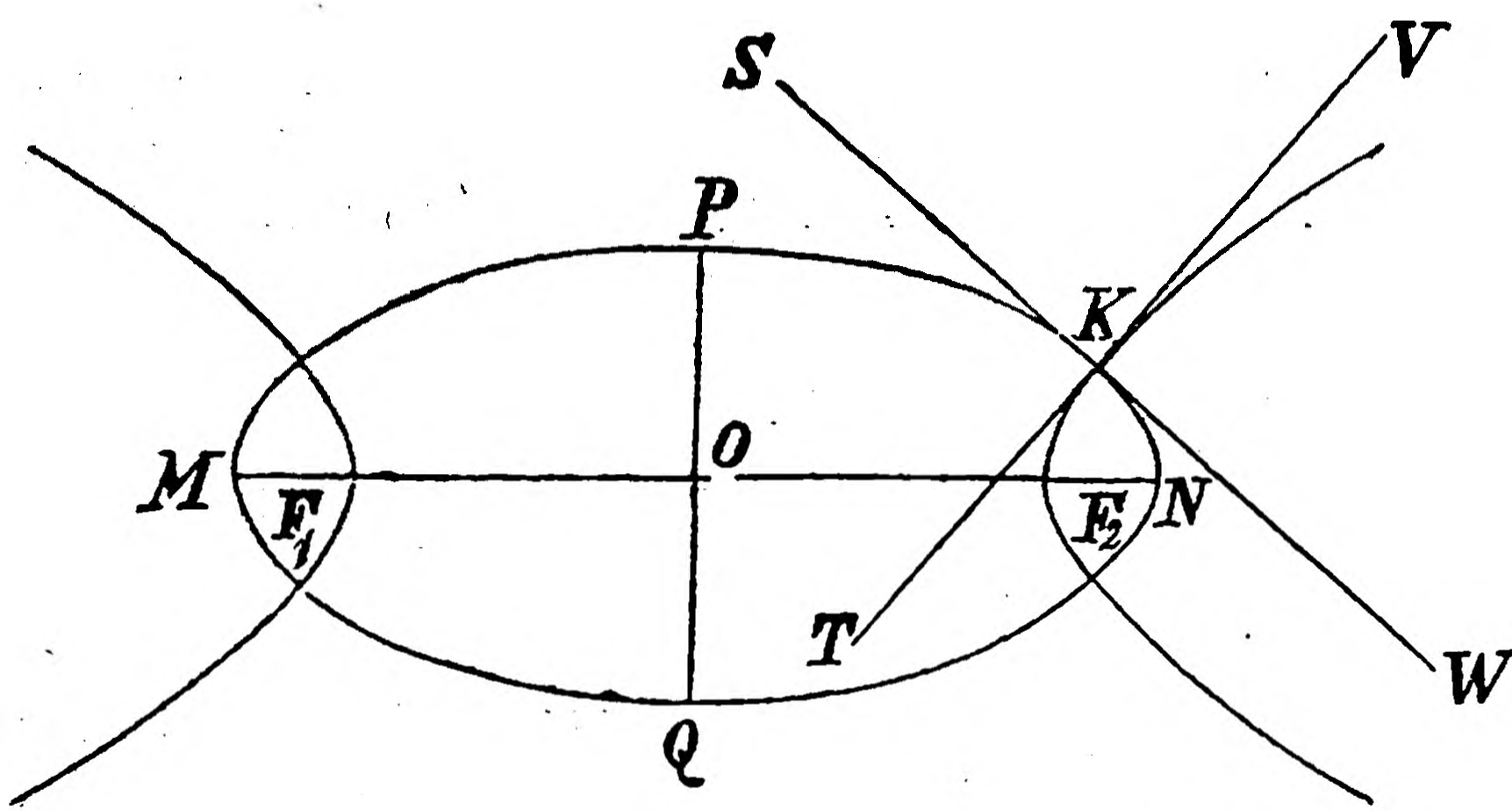
$$x_1^2(a^2 - b^2) \quad , \quad y_1^2(b^2 - a^2) \quad , \quad +\infty$$

если $a > b$, то будемъ имѣть рядъ знаковъ $+ - +$, слѣдовательно одинъ изъ корней заключается между a^2 и b^2 , а другой, очевидно, между $+b^2$ и $-\infty$. Откуда, замѣчая, что уравненіе (63) будетъ представлять:

эллипсъ, если $\lambda < b^2$
 гиперболу, если $a^2 > \lambda > b^2$
 мнимый эллипсъ, если $a^2 < \lambda < b^2$

видимъ, что черезъ каждую дѣйствительную точку на плоскости проходитъ всегда два коническія сѣченія: эллипсъ и гиперболу, принадлежащія одной системѣ софокусныхъ коническихъ сѣченій.

Фиг. 133.



Предложеніе. Показать, что два софокусныя коническія сѣченія, проходящія черезъ данную точку (x_1, y_1) на плоскости, пересекаются подъ прямымъ угломъ?

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, пусть λ_1, λ_2 будутъ корни уравненія (64), то уравненія:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_1} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2 - \lambda_2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_2} = 1$$

будутъ представлять одно эллипсъ, а другое гиперболу.

Въ точкѣ (x_1, y_1) касательныя къ нимъ будутъ:

$$\frac{x_1 x}{a^2 - \lambda_1} + \frac{y_1 y}{b^2 - \lambda_1} = 1 \quad , \quad \frac{x_1 x}{a^2 - \lambda_2} + \frac{y_1 y}{b^2 - \lambda_2} = 1 \quad (65)$$

откуда, вычитая, найдемъ, отбрасывая множитель $\lambda_1 - \lambda_2$:

$$\frac{x_1^2}{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)} + \frac{y_1^2}{(b^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2)} = 0$$

а это есть условіе перпендикулярности прямыхъ (65).

На чертежѣ видно (фиг. 133) положеніе этихъ двухъ кривыхъ.

Предложеніе 2. Къ каждой прямой на плоскости касается одно изъ системы софокусныхъ коническихъ сѣченій.

Доказательство. Пусть данная система будетъ:

$$(a^2 - \lambda)\xi^2 + (b^2 - \lambda)\eta^2 = 1 \quad (66)$$

а данная прямая $(\xi_1 \eta_1)$. Если коническое сѣченіе (66) касается прямой $(\xi_1 \eta_1)$, то имѣемъ:

$$(a^2 - \lambda)\xi_1^2 + (b^2 - \lambda)\eta_1^2 = 1$$

откуда для λ имѣемъ одно только значеніе, а слѣдовательно и одно коническое сѣченіе изъ системы (66) касается прямой $(\xi_1 \eta_1)$.

Предложеніе 3. Въ системѣ софокусныхъ коническихъ сѣченій не существуетъ ни одного, которое бы распадалось на пару прямыхъ линій.

Доказательство. Это легко видѣть изъ формы уравненія (63).

Предложеніе 4. Въ системѣ софокусныхъ коническихъ сѣченій существуютъ три коническія сѣченія распадающіяся на пару точекъ: пара циклическихъ точекъ, пара дѣйствительныхъ и пара мнимыхъ фокусовъ.

Доказательство. Это было показано выше.

Предложеніе 5. Всѣ софокусныя коническія сѣченія имѣютъ общія оси, которыя съ безконечно-удаленною прямою образуютъ полярный, общій всей системѣ, треугольникъ.

Доказательство. Это очевидно (§ 338).

§ 378. *Эллиптическія координаты.* Свойства софокусныхъ коническихъ сѣченій даютъ систему координатъ, съ помощью которой опредѣляется положеніе точки на плоскости пересѣченіемъ двухъ софокусныхъ коническихъ сѣченій. Эти координаты называютъ *эллиптическими*.

Пусть:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

будетъ уравненіе коническаго сѣченія. Пусть его фокусное разстояніе будетъ c , то оно можетъ быть написано въ формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Измѣняя a получимъ систему софокусныхъ коническихъ сѣченій, изъ которыхъ два будутъ проходить черезъ каждую изъ точекъ на плоскости. Найдемъ то изъ нихъ, которое проходитъ черезъ точку $(x_1 y_1)$. Координаты этой точки должны удовлетворять уравненіе:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2 - c^2} = 1$$

или:

$$a^4 - (x_1^2 + y_1^2 + c^2)a^2 + c^2x_1^2 = 0 \quad (67)$$

Точно такое же уравненіе получимъ, если пожелаемъ опредѣлить ось b , именно:

$$b^4 - (x_1^2 + y_1^2 + c^2)b^2 - c^2y_1^2 = 0 \quad (68)$$

Если назовемъ корни уравненія (67) черезъ a_1, a_2 , а корни уравненія (68) черезъ b_1, b_2 , то найдемъ:

$$a_1^2 a_2^2 = c^2 x_1^2 \quad ; \quad b_1^2 b_2^2 = -c^2 y_1^2$$

откуда:

$$x_1^2 = \frac{a_1^2 a_2^2}{c^2} \quad , \quad y_1^2 = -\frac{b_1^2 b_2^2}{c^2}$$

или:

$$x_1^2 = \frac{a_1^2 a_2^2}{a^2 - b^2} \quad , \quad y_1^2 = \frac{b_1^2 b_2^2}{b^2 - a^2}$$

Такимъ образомъ выражаются координаты Декарта въ функціи осей двухъ софокусныхъ, коническихъ съченій, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ. Это и суть эллиптическія координаты.

ГЛАВА XXII.

Геометрическое значеніе инвариантовъ системы коническихъ съченій.

§ 379. Если коническія съченія:

$$f = 0 \quad , \quad f_1 = 0 \quad (1)$$

преобразуемъ къ другимъ координатамъ декартовымъ или трилинейнымъ, то если f и f_1 сдѣлаются Φ и Φ_1 , уравненіе $f - \lambda f_1 = 0$, очевидно, сдѣлается $\Phi - \lambda \Phi_1 = 0$. Изъ этого слѣдуетъ, что значенія λ , для которыхъ:

$$f - \lambda f_1 = 0 \quad (2)$$

распадается на пару прямыхъ линій, должно остаться неизмѣннымъ къ какимъ бы координатамъ не были отнесены коническія съченія $f = 0$ и $f_1 = 0$. Слѣдовательно отношеніе между двумя, какими-нибудь, корнями кубическаго уравненія (§ 344, 46):

$$\Delta_1 \lambda^3 - Q_1 \lambda^2 + Q \lambda - \Delta = 0 \quad (3)$$

неизмѣняется, если перейдемъ отъ одной системы координатъ къ другой. Въ силу этого свойства Δ , Q ; Δ_1 , Q_1 названы *инвариантами*. Легко проверить, что если въ f и f_1 подставимъ вмѣсто x , y , z выраженія:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \quad , \quad y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \quad , \quad z = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$$

то выраженія Δ , Q ; Δ_1 , Q_1 для преобразованныхъ f и f_1 равны прежнимъ умноженнымъ на квадратъ определителя:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & , & \alpha_2 & , & \alpha_3 \\ \beta_1 & , & \beta_2 & , & \beta_3 \\ \gamma_1 & , & \gamma_2 & , & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Поэтому, если два коническія сѣченія, будучи преобразованы къ другой системѣ координатъ, получаютъ простѣйшую форму и въ этой простѣйшей формѣ вычислимъ выраженія Δ , Q ; Δ_1 , Q_1 и найдемъ, что между ними существуетъ однородная зависимость, то эта зависимость будетъ существовать, между тѣми же выраженіями, какая бы ни была выбрана координатная система.

Такимъ образомъ можемъ выразить въ функціи этихъ четырехъ количествъ всѣ тѣ зависимости между коническими сѣченіями, которыя не зависятъ отъ координатной системы, къ которой онѣ отнесены. Таково на примѣръ условіе (19) § 351, что два коническія сѣченія касаются. Пояснимъ выше сказанное примѣрами.

§ 380. Если въ коническомъ сѣченіи:

$$f - \lambda f_1 = 0 \tag{4}$$

f_1 распадается на пару прямыхъ линій $f_1 = A_1 A_2$, то:

$$f - \lambda A_1 A_2 = 0 \tag{5}$$

есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки пересѣченія $f = 0$ съ прямыми $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. При этомъ условіи $\Delta_1 = 0$; посмотримъ значеніе инвариантовъ Q и Q_1 ?

Для этого возьмемъ прямыя $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ за координатныя оси, тогда уравненіе (5) сдѣлается:

$$f - \lambda xy = 0 \tag{6}$$

Въ силу свойства инвариантовъ, найденная между ними зависимость для

формы (6) будетъ оставаться и вообще. Призначную (discriminant) формы (6) найдемъ, написавъ въ призначной Δ , значеніе $a_{12} - \lambda$ вмѣсто a_{12} , что даетъ:

$$\Delta - 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})\lambda - a_{33}\lambda^2 \quad (7)$$

Если $a_{33} = 0$, то точка (x, y) находится на кривой $f = 0$. Если $a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33} = 0$, то прямая x и y суть сопряженные поляры относительно конического съченія $f = 0$. Слѣдовательно, если $f_1 = 0$ есть пара прямыхъ линий, то $\Delta_1 = 0$, а $Q_1 = 0$ даетъ условіе, что точка пересѣченія прямыхъ линий $x = 0, y = 0$ находится на $f = 0$, и наконецъ $Q = 0$ есть условіе, что двѣ прямая суть сопряженные поляры конического съченія $f = 0$.

Если уравненіе:

$$Q_1\lambda^2 - Q\lambda + \Delta = 0 \quad (8)$$

есть полный квадратъ, то:

$$Q^2 = 4Q_1\Delta$$

это есть условіе, что одна изъ прямыхъ $f_1 = 0$ касается конического съченія $f = 0$. Въ выбранномъ примѣрѣ легко найдемъ:

$$Q^2 - 4Q_1\Delta = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)$$

§ 381. *Задача.* Найти уравненіе пары касательныхъ линий въ точкахъ пересѣченія прямой:

$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$$

съ коническимъ съченіемъ $f = 0$?

Рѣшеніе. Если въ уравненіи (5) положимъ:

$$A_1 = A_2 = (\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3) \quad (9)$$

то оно сдѣлается:

$$f - \lambda(\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3)^2 = 0 \quad (10)$$

и представляетъ, очевидно, систему коническихъ съченій, имѣющихъ двойное соприкосновеніе съ коническимъ съченіемъ $f = 0$, коихъ общая хорда соприкосновенія будетъ $A_1 = 0$ (§ 347, фиг. 125). Вся система имѣетъ общія касательныя въ точкахъ пересѣченія $A_1 = 0$ и $f = 0$.

Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ не только $\Delta_1 = 0$, но и $Q_1 = 0$ (§ 333, 32), а Q будетъ:

$$Q = f' = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3$$

при такомъ условіи два корня уравненія (§ 336, 7) равны нулю, а третій дается уравненіемъ:

$$Q \cdot \lambda - \Delta = 0 \quad \text{или} \quad f' \cdot \lambda = \Delta$$

подставляя это значеніе λ въ уравненіе (10) найдемъ искомое уравненіе:

$$f' \cdot f = \Delta (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2 \quad (11)$$

Если прямая $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ касается конического сѣченія $f = 0$, то пара касательныхъ совпадаетъ съ этой прямой, и условіе для этого, какъ намъ извѣстно, есть $f' = 0$. Если и f разбивается на линейные множители, то $\Delta = 0$ и уравненіе (11) будетъ $f = 0$, какъ и слѣдуетъ.

§ 382. Разсмотримъ геометрическое значеніе $Q = 0$.

Возьмемъ за координатный треугольникъ одинъ изъ полярныхъ треугольниковъ относительно конического сѣченія $f = 0$. Его уравненіе будетъ:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \quad (12)$$

слѣдовательно $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$ и $a_{23} = 0$. При этихъ значеніяхъ:

$$Q = a_{22}a_{33}b_{11} + a_{33}a_{11}b_{22} + a_{11}a_{22}b_{33} \quad (13)$$

и обращается въ нуль при $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$, $b_{33} = 0$, т. е. когда коническое сѣченіе $f_1 = 0$, отнесенное къ тому же полярному треугольнику, будетъ имѣть форму:

$$f_1 = b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 = 0$$

Слѣдовательно Q тогда равно нулю, когда какой-нибудь треугольникъ, вписанный въ коническое сѣченіе $f_1 = 0$, есть полярный относительно конического сѣченія $f = 0$.

Если за координатный треугольникъ возьмемъ какой-нибудь полярный, относительно конического сѣченія $f_1 = 0$, то $b_{12} = 0$, $b_{13} = 0$, $b_{23} = 0$, слѣдовательно:

$$Q = A_{11}b_{11} + A_{22}b_{22} + A_{33}b_{33} \quad (14)$$

выраженіе, которое обратится въ нуль при:

$$A_{11} = 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{33} = 0$$

но это суть условія, при которыхъ коническое сѣченіе $f = 0$ вписано въ координатный треугольникъ, слѣдовательно Q равно нулю и въ томъ случаѣ, если треугольникъ, описанный около конического сѣченія $f = 0$, есть полярный относительно $f_1 = 0$.

Точно также можно показать, что $Q_1 = 0$ есть условіе возможности вписать въ $f = 0$ треугольникъ, который бы былъ полярнымъ для $f_1 = 0$, или описать около $f = 0$ треугольникъ, который бы былъ полярнымъ $f_1 = 0$. Если одно изъ этихъ предложеній возможно, то возможно и другое.

Пара коническихъ сѣченій, связанныхъ условіемъ $Q = 0$, имѣетъ еще другое слѣдующее свойство. Если точку пересѣченія прямыхъ, соединяющихъ вершины какого-нибудь треугольника съ соответственными вершинами его полярнаго треугольника относительно конического сѣченія, назовемъ полюсомъ этого треугольника относительно конического сѣченія, а прямую, соединяющую точки пересѣченія соответственныхъ сторонъ треугольниковъ, назовемъ ихъ осью, то условіе $Q = 0$ показываетъ, что полюсъ относительно конического сѣченія $f = 0$ находится на $f_1 = 0$; и что ось, относительно конического сѣченія $f_1 = 0$, какого-нибудь описаннаго около $f = 0$ треугольника, касается конического сѣченія $f = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, исключая x_1, x_2, x_3 изъ каждаго изъ двухъ паръ уравненій:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \quad a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

получимъ:

$$(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})x_1 = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_2 = (a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})x_3$$

уравненія прямыхъ, соединяющихъ вершины треугольника $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ съ соответственными вершинами его полярнаго, относительно конического сѣченія $f = 0$. Эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$A_{23}x_1 = A_{13}x_2 = A_{12}x_3$$

координаты полюса треугольника будутъ:

$$\frac{1}{A_{23}}, \quad \frac{1}{A_{13}}, \quad \frac{1}{A_{12}} \quad (15)$$

Подставляя эти величины въ $f_1 = 0$, въ которомъ полагаемъ $b_{11} = 0, b_{22} = 0, b_{33} = 0$, получимъ:

$$2A_{23}b_{23} + 2A_{13}b_{13} + 2A_{12}b_{12} = Q = 0 \quad (16)$$

Точно также можно доказать и вторую часть предложенія.

Пр. 1. Если даны два полярные треугольника относительно конического сѣченія $f_1 = 0$, то можно описать одно коническое сѣченіе, проходящее черезъ шесть вершинъ данныхъ треугольниковъ, а другое касающееся шести ихъ сторонъ.

Доказательство. Опишемъ коническое сѣченіе чрезъ три вершины одного треугольника и черезъ двѣ другаго, коего стороны пусть будутъ $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Такъ какъ искомое коническое сѣченіе описано около перваго треугольника, то $Q_1 = 0$ или $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ (§ 346 пр. 3), но оно проходитъ и чрезъ двѣ вершины втораго треугольника, слѣдовательно $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, откуда и $a_{33} = 0$, т. е. коническое сѣченіе проходитъ и черезъ шестую вершину. Вторая часть этого предложенія доказывается точно также.

Пр. 2. Квадратъ касательной, проведенной изъ центра коническаго сѣченія къ кругу описанному около полярнаго треугольника, есть величина постоянная.

Доказательство. Это слѣдуетъ изъ пр. 5. § 346, гдѣ $Q = 0$ или:

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = a^2 + b^2$$

§ 383. Если имѣемъ два произвольно взятыхъ коническихъ сѣченія, то вообще нельзя вписать въ одно изъ нихъ треугольникъ, который бы былъ описанъ около другаго, но можно построить безчисленное множество такихъ треугольниковъ, если коэффициенты данныхъ двухъ коническихъ сѣченій связаны нѣкоторымъ условіемъ, которое мы и разыщемъ. Положимъ, что такой треугольникъ построенъ, возьмемъ его за координатный, то уравненія коническихъ сѣченій будутъ:

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0 \\ f_1 &= 2b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

ихъ инварианты будутъ:

$$\Delta = -4, \quad Q = 4(b_{12} + b_{13} + b_{23}), \quad Q_1 = -(b_{12} + b_{13} + b_{23})^2, \quad \Delta_1 = 2b_{12}b_{13}b_{23}$$

выраженія, которыя, очевидно связаны уравненіемъ:

$$Q^2 = 4\Delta Q_1 \tag{18}$$

Это уравненіе составлено изъ инвариантовъ, а слѣдовательно неизмѣняется преобразованіемъ координатъ и въ какой бы формѣ ни были даны коническія сѣченія, условіе (18) должно оставаться, когда коническія сѣченія преобразуются въ форму (17). Обратно, легко показать, что если условіе (18) существуетъ, то треугольникъ описанный около $f = 0$ и котораго двѣ вершины находятся на $f_1 = 0$, то и третья вершина будетъ на этомъ коническомъ сѣченіи.

Пр. 1. Найти такіе два круга, чтобы треугольникъ, вписанный въ одинъ изъ нихъ, былъ бы описанъ около другаго?

Рѣшеніе. Пусть $d^2 - r^2 - r_1^2 = k$, то условіе (см. пр. 3. § 346):

$$(k - r^2)^2 + 4r^2(k - r_1^2) = 0 \quad \text{или} \quad (k + r^2)^2 = 4r^2r_1^2$$

откуда:

$$d^2 = r^2 \pm 2rr_1$$

Это извѣстное выраженіе Эйлера для разстоянія между центрами круга описаннаго и одного изъ круговъ касающагося трехъ сторонъ треугольника.

Пр. 2. Найти условіе при которомъ бы стороны треугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе $f_1 = 0$, касались коническихъ сѣченій:

$$f + \lambda f_1 = 0 \quad , \quad f + \mu f_1 = 0 \quad , \quad f + \nu f_1 = 0$$

Пусть:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(1 + \nu a_{12})x_1x_2 - 2(1 + \mu a_{13})x_1x_3 - 2(1 + \lambda a_{23})x_2x_3 = 0$$

$$f_1 = 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

очевидно, коническое сѣченіе $f + \lambda f_1 = 0$ касается сторонъ треугольника $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Но мы имѣемъ:

$$\Delta = -(2 + \lambda a_{23} + \mu a_{13} + \nu a_{12})^2 - 2\lambda\mu\nu \cdot a_{12}a_{13}a_{23}$$

$$Q = 2(a_{12} + a_{13} + a_{23})(2 + \lambda a_{23} + \mu a_{13} + \nu a_{12}) + 2a_{12}a_{13}a_{23}(\mu\nu + \nu\lambda + \mu\lambda)$$

$$Q_1 = -(a_{12} + a_{13} + a_{23})^2 - 2(\lambda + \mu + \nu)a_{12}a_{13}a_{23} \quad , \quad \Delta_1 = 2a_{12}a_{13}a_{23}$$

откуда:

$$\{Q - \Delta_1(\lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu)\}^2 = 4(\Delta + \lambda\mu\nu\Delta_1)\{Q_1 + \Delta_1(\lambda + \mu + \nu)\}$$

§ 384. Въ § 208 и § 221 мы нашли уравненія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ коническому сѣченію, и двухъ точекъ пересѣченія данной прямой съ коническимъ сѣченіемъ. Эти уравненія суть:

$$PR - Q^2 = 0 \quad \text{и} \quad LN - M^2 = 0 \quad (19)$$

какъ видно изъ значеній $P, R, Q; L, N, M$, развернуть ихъ, относительно переменныхъ, весьма трудно, но ихъ можно получить въ развернутой формѣ слѣдующимъ образомъ.

Замѣтимъ сначала, что уравненіе коническаго сѣченія:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (20)$$

и

$$f' = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \quad (21)$$

первое выражаетъ, что точка данная координатами $(x_1x_2x_3)$ лежитъ на коническомъ сѣченіи, а второе, что прямая данная координатами $(\xi_1\xi_2\xi_3)$ касается коническаго сѣченія.

Задача 1. Найти уравненіе касательныхъ проведенныхъ къ коническому сѣченію (20) изъ данной точки?

Рѣшеніе. Возьмемъ уравненіе прямой проходящей черезъ точки $(y_1y_2y_3)$ и $(z_1z_2z_3)$ (§ 74):

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

ея координаты будутъ (§ 187):

$$\xi_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2, \quad \xi_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3, \quad \xi_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1 \quad (23)$$

Если прямая (22) касается конического сѣченія (20), то ея координаты (23) должны удовлетворять уравненію (21), что даетъ:

$$A_{11}(y_2 z_3 - y_3 z_2)^2 + A_{22}(y_3 z_1 - y_1 z_3)^2 + \dots = 0 \quad (24)$$

или разлагая вторую часть относительно z и замѣщая z черезъ x , найдемъ уравненіе:

$$\begin{aligned} & (A_{22}y^2_3 + A_{33}y^2_2 - 2A_{23}y_2y_3)x^2_1 + \\ & + (A_{11}y^2_3 + A_{33}y^2_1 - 2A_{13}y_1y_3)x^2_2 + \\ & + (A_{11}y^2_2 + A_{22}y^2_1 - 2A_{12}y_1y_2)x^2_3 + \\ & + 2(A_{23}y_1y_3 + A_{13}y_2y_3 - A_{33}y_1y_2 - A_{12}y^2_3)x_1x_2 + \\ & + 2(A_{12}y_2y_3 + A_{23}y_1y_2 - A_{22}y_1y_3 - A_{13}y^2_3)x_1x_3 + \\ & + 2(A_{13}y_1y_2 + A_{12}y_1y_3 - A_{11}y_2y_3 - A_{23}y^2_1)x_2x_3 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Если фиксируемъ точку $(y_1y_2y_3)$, а x_1, x_2, x_3 сдѣлаемъ переменными, удовлетворяющими уравненіе (25), то это уравненіе будетъ выражать, что прямая, проходящая черезъ точки $(y_1y_2y_3)$ и $(x_1x_2x_3)$, касается конического сѣченія (20). Но какъ это уравненіе относительно x_1, x_2, x_3 второй степени, то оно и представляетъ искомыя касательныя и легко убѣдиться, что критеріумъ $\Delta = 0$ удовлетворяется.

Задача 2. Найти уравненіе точекъ пересѣченія данной прямой съ коническимъ сѣченіемъ (20)?

Рѣшеніе. Возьмемъ уравненіе точки пересѣченія двухъ прямыхъ $(\eta_1\eta_2\eta_3)$ и $(\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$ (§ 187, 15'):

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

координаты этой точки будутъ (§ 187):

$$y_1 = \eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2, \quad y_2 = \eta_3\zeta_1 - \eta_1\zeta_3, \quad y_3 = \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1 \quad (27)$$

Если эта точка лежитъ на коническомъ сѣченіи (20), то ея координаты должны удовлетворять уравненію (20), что даетъ:

$$a_{11}(\eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2)^2 + a_{22}(\eta_3\zeta_1 - \eta_1\zeta_3)^2 + \dots = 0 \quad (28)$$

разлагая по ζ и замѣняя ζ чрезъ ξ найдемъ, очевидно, уравненіе подобное уравненію (25), въ которомъ $A_{i,k}$, y , x замѣнены чрезъ $a_{i,k}$, η , ξ .

Если въ уравненіи (28) фиксируемъ η , а ξ будемъ измѣнять такъ что ξ_1, ξ_2, ξ_3 удовлетворяютъ это уравненіе, то это будетъ представлять вращающуюся прямую около точки на коническомъ сѣченіи, а такъ какъ оно второй степени, то и будетъ представлять двѣ точки пересѣченія прямой $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ съ коническимъ сѣченіемъ. Изъ этого слѣдуетъ, что уравненія (25) и (28) суть ничто иное какъ уравненія (19) въ развернутой формѣ.

Сдѣлавъ эти преобразованія уравненій (19) можно легко рѣшить слѣдующія двѣ задачи.

Задача 3. Найти геометрическое мѣсто точекъ, касательныя проведенныя изъ которыхъ къ двумъ даннымъ коническимъ сѣченіямъ, составляли-бы гармоническую связку?

Рѣшеніе. Пусть данныя два коническихъ сѣченія будутъ:

$$\begin{aligned} f &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ f_1 &= b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

ихъ взаимныя:

$$\begin{aligned} f' &= A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \\ f_1' &= B_{11}\xi_1^2 + B_{22}\xi_2^2 + B_{33}\xi_3^2 + 2B_{12}\xi_1\xi_2 + 2B_{13}\xi_1\xi_3 + 2B_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Если гармоническую связку пересѣчемъ какою-нибудь прямою, то получимъ четыре гармоническія точки (§ 93). Сдѣлаемъ въ уравненіи (25) и въ уравненіи полученномъ изъ (25), измѣняя $A_{i,k}$ на $B_{i,k}$, $x_3 = 0$, то найдемъ два слѣдующія уравненія четырехъ точекъ пересѣченія стороны x_3 координатнаго треугольника съ четырьмя касательными, проведенными къ коническимъ сѣченіямъ (29) изъ точки $(y_1 y_2 y_3)$:

$$\begin{aligned} &(A_{22}y_2^2 + A_{33}y_3^2 - 2A_{23}y_2y_3)x_1^2 + (A_{11}y_1^2 + A_{33}y_3^2 - 2A_{13}y_1y_3)x_2^2 + \\ &+ 2(A_{23}y_1y_3 + A_{13}y_2y_3 - A_{33}y_1y_2 - A_{12}y_2^2)x_1x_2 = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &(B_{22}y_2^2 + B_{33}y_3^2 - 2B_{23}y_2y_3)x_1^2 + (B_{11}y_1^2 + B_{33}y_3^2 - 2B_{13}y_1y_3)x_2^2 + \\ &+ 2(B_{23}y_1y_3 + B_{13}y_2y_3 - B_{33}y_1y_2 - B_{12}y_2^2)x_1x_2 = 0 \end{aligned}$$

Если четыре точки представляемыя этими двумя уравненіями будутъ гар-

моническія, то условіе (26) § 177 должно быть удовлетворено, т. е. должны имѣть:

$$\begin{aligned} & (A_{22}y^2_3 + A_{33}y^2_2 - 2A_{23}y_2y_3)(B_{11}y^2_3 + B_{33}y^2_1 - 2B_{13}y_1y_3) + \\ & + (B_{22}y^2_3 + B_{33}y^2_2 - 2B_{23}y_2y_3)(A_{11}y^2_3 + A_{33}y^2_1 - 2A_{13}y_1y_3) = \quad (32) \\ & = 2(A_{23}y_1y_3 + A_{13}y_2y_3 - A_{33}y_1y_3 - A_{12}y^2_3)(B_{22}y_1y_3 + B_{13}y_2y_3 - B_{33}y_1y_3 - B_{12}y^2_3) \end{aligned}$$

Развертывая и раздѣляя на y^2_3 , найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$\begin{aligned} F = & (A_{22}B_{33} + A_{33}B_{22} - 2A_{12}B_{12})x^2_1 + (A_{33}B_{11} + A_{11}B_{33} - 2A_{13}B_{13})x^2_2 + \\ & + (A_{11}B_{22} + A_{22}B_{11} - 2A_{23}B_{23})x^2_3 + 2(A_{13}B_{23} + A_{23}B_{13} - A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11})x_1x_2 + \\ & + 2(A_{23}B_{12} + A_{12}B_{23} - A_{22}B_{13} - A_{13}B_{22})x_1x_3 + \\ & + 2(A_{12}B_{22} + A_{22}B_{12} - A_{33}B_{23} - A_{23}B_{33})x_2x_3 = 0 \quad (33) \end{aligned}$$

какъ видно это коническое сѣченіе, которое имѣетъ важную зависимость съ данными двумя коническими сѣченіями. Если бы ангармоническое отношеніе четырехъ касательныхъ было дано, то геометрическое мѣсто будетъ кривая четвертой степени:

$$F^2 = kff_1 \quad (34)$$

гдѣ F есть уравненіе (33), а f и f_1 коническія сѣченія (29).

Задача 4. Найти геометрическое мѣсто (обвертку) прямой, которая бы пересѣкала два данныя коническія сѣченія (29) въ четырехъ гармоническихъ точкахъ?

Рѣшеніе. Это задача взаимная предъидущей, и, рассуждая надъ уравненіями (28) и (21), какъ выше, легко найдемъ слѣдующее геометрическое мѣсто, которое получится изъ (33), замѣняя $A_{i,k}$, $B_{i,k}$, x чрезъ $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, ξ :

$$\begin{aligned} & (a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{12}b_{12})\xi^2_1 + (a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33} - 2a_{13}b_{13})\xi^2_2 + \\ & + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{23}b_{23})\xi^2_3 + \\ & + 2(a_{13}b_{23} + a_{23}b_{13} - a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})\xi_1\xi_2 + 2(a_{23}b_{12} + a_{12}b_{23} - a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22})\xi_1\xi_3 + \\ & + 2(a_{12}b_{22} + a_{22}b_{12} - a_{33}b_{23} - a_{23}b_{33})\xi_2\xi_3 = 0 = \Phi \quad (35) \end{aligned}$$

какъ видно коническое сѣченіе.

Если ангармоническое отношеніе дано, то обвертка будетъ четвертой степени:

$$\Phi^2 = kf'.f'_1 \quad (36)$$

Функціи (33) и (35) будемъ всегда обозначать символами F и Φ .

§ 385. *Задача.* Найти уравнение четырех общих касательных къ двумъ даннымъ коническимъ сѣченіямъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія въ линейныхъ координатахъ данныхъ коническихъ сѣченій будутъ:

$$f' = 0 \quad , \quad f_1' = 0 \quad (37)$$

Уравненіе:

$$f' + \lambda f_1' = 0 \quad (38)$$

представляетъ систему коническихъ сѣченій, имѣющихъ четыре общія касательныя съ данными двумя. Если это уравненіе преобразуемъ къ трилинейной Декартовой системѣ, то найдемъ:

$$\Delta f + \lambda F + \lambda^2 \Delta_1 f_1 = 0 \quad (39)$$

гдѣ F есть выраженіе (33).

Уравненіе (39) представляетъ систему коническихъ сѣченій, коей обертка есть:

$$F^2 = 4 \Delta \Delta_1 f f_1 \quad (40)$$

Но обертка системы коническихъ сѣченій (38) есть четыре общія касательныя къ коническимъ сѣченіямъ (37). Слѣдовательно (40) и есть ихъ уравненіе.

Уравненіе (40) по формѣ представляетъ геометрическое мѣсто, касающееся коническихъ сѣченій (39), а кривая $F=0$ проходитъ черезъ точки касанія. Откуда видимъ, что восемь точекъ касанія двухъ коническихъ сѣченій съ общими ихъ касательными находятся на коническомъ сѣченіи $F=0$. Взаимно, восемь касательныхъ въ точкахъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій, касаются коническаго сѣченія $\Phi=0$.

Если $f_1=0$ есть пара прямыхъ линій, то $F=0$ есть пара касательныхъ, проведенныхъ изъ точки пересѣченія прямыхъ $f_1=0$, къ коническому сѣченію $f=0$.

Пр. Найти уравненіе общихъ касательныхъ къ коническимъ сѣченіямъ:

$$ax^2_1 + bx^2_2 + cx^2_3 = 0 \quad , \quad a'x^2_1 + b'x^2_2 + c'x^2_3 = 0?$$

Рѣшеніе. Здѣсь:

$$A_{11} = bc \quad , \quad A_{22} = ca \quad , \quad A_{33} = ab$$

откуда:

$$F = aa' (bc' + b'c) x^2_1 + bb' (ca' + c'a) x^2_2 + cc' (ab' + a'b) x^2_3$$

слѣдовательно искомое уравненіе будетъ:

$$\begin{aligned} & \{aa' (bc' + b'c) x^2_1 + bb' (ca' + c'a) x^2_2 + cc' (ab' + a'b) x^2_3\}^2 = \\ & = 4 abca'b'c' (ax^2_1 + bx^2_2 + cx^2_3) (a'x^2_1 + b'x^2_2 + c'x^2_3) \end{aligned}$$

которое легко разлагается на четыре линейные множителя:

$$x_1 \sqrt{aa'(bc' + b'c)} \pm x_2 \sqrt{bb'(ca' + c'a)} \pm x_3 \sqrt{cc'(ab' + a'b)} = 0.$$

§ 386. Если коническія сѣченія $f=0$ и $f_1=0$ касаются, то коническое сѣченіе F касается каждаго въ точкѣ ихъ касанія. Это слѣдуетъ изъ того, что $F=0$ проходитъ чрезъ точки касанія общихъ касательныхъ къ $f=0$ и $f_1=0$. Если $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ двойное соприкосновеніе, то и $F=0$ имѣетъ двойное соприкосновеніе съ ними въ точкахъ ихъ соприкосновенія. Это можно провѣрить, составляя $F=0$ для коническихъ сѣченій:

$$cx^2_3 + 2hx_1x_2 = 0 \quad \text{и} \quad c'x^2_3 + 2h'x_1x_2 = 0$$

которое будетъ той же формы:

$$2cc'h'h'x^2_3 + 2hh'(ch' + c'h)x_1x_2 = 0$$

Замѣтивъ, что если $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ двойное соприкосновеніе, то $F=0$ имѣетъ форму $lf + mf_1$, найдемъ систему условій, при которыхъ коническія сѣченія $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ двойное соприкосновеніе. Для этого напишемъ $F=0$ въ формѣ:

$$ax^2_1 + bx^2_2 + cx_3 + 2hx_1x_2 + 2gx_1x_3 + 2fx_2x_3 = 0$$

гдѣ a, b, c, \dots имѣютъ значенія коэффициентовъ при F въ (33). Эти условія очевидно суть рядъ опредѣлителей, выраженныхъ символомъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ b_{11} & b_{22} & b_{33} & b_{12} & b_{13} & b_{23} \\ a & b & c & h & g & f \end{vmatrix} = 0 \quad (41)$$

значеніе котораго извѣстно изъ теоріи опредѣлителей.

Что $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ линейную зависимость съ F , если онѣ имѣютъ двойное соприкосновеніе, можно показать слѣдующимъ образомъ. Если $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ двойное соприкосновеніе, то въ выраженіи $f - \lambda f_1 = 0$ величина λ имѣетъ такое значеніе, при которомъ это уравненіе представляетъ двѣ совпадающія прямыя. Но если коническое сѣченіе есть двѣ совпадающія прямыя, то его взаимное тождественно равно нулю, слѣдовательно мы должны имѣть тождественно:

$$f'_1 \lambda^2 - \Phi \cdot \lambda + f' = 0 \quad (42)$$

Но значеніе λ , при которомъ это имѣетъ мѣсто, есть двойной корень уравненія:

$$\Delta_1 \lambda^3 - Q_1 \lambda^2 + Q \lambda - \Delta = 0 \quad (43)$$

исключая λ изъ предыдущаго уравненія и двухъ дифференціаловъ настоящаго, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} f' & \Phi & f_1' \\ 3\Delta & 2Q & Q_1 \\ Q & 2Q_1 & 3\Delta_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (44)$$

Если два коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкосновеніе, то ихъ взаимныя имѣютъ его также, и легко видѣть, что предыдущая зависимость между f' , Φ и f_1' даетъ слѣдующую между f , F и f_1 :

$$\begin{vmatrix} f & F & f_1 \\ 3\Delta & 2\Delta Q_1 & Q \\ Q_1 & 2\Delta_1 Q & 3\Delta_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

§ 387. *Задача.* Найти условіе, при которомъ прямая:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

проходитъ черезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$?

Рѣшеніе. Другими словами, требуется найти уравненіе четырехъ точекъ пересѣченія данныхъ коническихъ сѣченій. Уравненіе въ линейныхъ координатахъ одного изъ системы коническихъ сѣченій $f + \lambda f_1 = 0$ найдемъ, подставивъ въ линейное уравненіе $f'=0$ коническаго сѣченія $f=0$ вмѣсто a_{11}, a_{22}, \dots , выраженія $a_{11} + \lambda, a_{22} + \lambda, \dots$

Но

$$f' = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0$$

откуда, подставляя, найдемъ:

$$f' + \lambda\Phi + \lambda^2 f_1' = 0 \quad (46)$$

гдѣ Φ есть выраженіе (35). Обертка этой системы коническихъ сѣченій есть:

$$\Phi^2 = 4f'f_1' \quad (47)$$

Но такъ какъ обертка системы коническихъ сѣченій суть четыре точки ихъ пересѣченія, то уравненіе (47) и есть искомое, т. е. прямая, которой координаты удовлетворяютъ уравненію (47), проходитъ чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія данныхъ коническихъ сѣченій.

§ 388. *Коваріанты и контраваріанты.* Въ главѣ XIII мы опредѣлили, что такое инвариантъ и ковариантъ формы или системы формъ. Въ настоящемъ параграфѣ мы пояснимъ примѣрами данное опредѣленіе и скажемъ, что такое *контраваріантъ*. Инвариантъ и ковариантъ имѣютъ то свойство, что ихъ геометрическое значеніе не зависитъ отъ координатныхъ осей, къ которымъ отнесено уравненіе или уравненія; но инварианты, какъ мы видѣ-

ли, суть функции только коэффициентовъ уравненія, а коварианты содержать и переменныя. Если намъ дана кривая или система кривыхъ и мы найдемъ изъ ихъ общихъ уравненій такое геометрическое мѣсто $U=0$, коего связь съ данными кривыми не зависитъ отъ координатныхъ осей, къ которымъ отнесены уравненія, то кривая $U=0$ называется *ковариантомъ* данной системы кривыхъ. Если мы желаемъ имѣть уравненіе кривой $U=0$, отнесенной къ какимъ-нибудь новымъ координатнымъ осямъ, то мы очевидно получимъ одинъ и тотъ же результатъ, преобразуя уравненіе $U=0$ къ новымъ осямъ, или преобразуя данную кривую или кривыя и изъ преобразованныхъ уравненій составляемъ U такъ, какъ оно было составлено изъ начальныхъ.

Такъ на примѣръ, если преобразуемъ уравненія двухъ коническихъ сѣченій къ новому координатному треугольнику, то должны подставить вмѣсто x_1, x_2, x_3 выраженія:

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \quad \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \quad \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3$$

Если теперь подставимъ эти выраженія въ уравненіе $F=4\Delta\Delta_1ff_1$, а потомъ составимъ тоже уравненіе изъ преобразованныхъ коническихъ сѣченій, то очевидно, что эти два уравненія будутъ отличаться только постояннымъ множителемъ зависящимъ отъ коэффициентовъ $\alpha_{i,k}$. Это происходитъ вслѣдствіе того, что уравненіе $F^2=4\Delta\Delta_1ff_1$ представляетъ четыре общія касательныя къ коническимъ сѣченіямъ $f=0$ и $f_1=0$.

Точно такое же свойство имѣетъ и кривая $F=0$, которая есть геометрическое мѣсто точекъ, изъ коихъ четыре касательныя, проведенныя къ двумъ даннымъ коническимъ сѣченіямъ $f=0$ и $f_1=0$, составляютъ гармоническую связку (33). Поляра данной точки относительно даннаго коническаго сѣченія $f=0$ есть ковариантъ. На этихъ свойствахъ основано аналитическое опредѣленіе ковариантовъ. Функция, составленная изъ одной или нѣсколькихъ данныхъ функций по извѣстному правилу, называется *ковариантомъ*, если она будетъ такого свойства, что результатъ, полученный линейнымъ преобразованиемъ переменныхъ въ ней, будетъ отличаться отъ результата, полученнаго составляя ту же функцію изъ данной или данныхъ функции линейно преобразованныхъ, только постояннымъ множителемъ.

Есть еще другой родъ ковариантовъ, которые называются *контравариантами*. Контраварианты суть ничто иное какъ коварианты формъ въ линейныхъ координатахъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 и въ то время, когда переменныя x_1, x_2, x_3 преобразуются линейно, переменныя ξ_1, ξ_2, ξ_3 преобразуются обратно (§ 186). Пусть стороны координатнаго треугольника будутъ:

$$y_1=0, \quad y_2=0, \quad y_3=0$$

Если черезъ η_1, η_2, η_3 назовемъ координаты какой-нибудь прямой, отнесенной къ этому треугольнику, то ея уравненіе будетъ:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0 \quad (48)$$

Если положимъ, что x_1, x_2, x_3 суть стороны другаго треугольника, то y_1, y_2, y_3 будутъ линейныя функціи переменныхъ x_1, x_2, x_3 ; пусть онѣ будутъ:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, & y_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\ y_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \end{aligned} \quad (49)$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (48) и означая коэффиціенты при x_1, x_2, x_3 , чрезъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 , найдемъ:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{21}\eta_2 + \alpha_{31}\eta_3, & \xi_2 &= \alpha_{12}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \alpha_{32}\eta_3, \\ \xi_3 &= \alpha_{13}\eta_1 + \alpha_{23}\eta_2 + \alpha_{33}\eta_3 \end{aligned} \quad (50)$$

откуда, означая чрезъ Δ опредѣлитель элемента $\alpha_{i,k}$, найдемъ:

$$\begin{aligned} \Delta \eta_1 &= \beta_{11}\xi_1 + \beta_{12}\xi_2 + \beta_{13}\xi_3 \\ \Delta \eta_2 &= \beta_{21}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 \\ \Delta \eta_3 &= \beta_{31}\xi_1 + \beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 \end{aligned} \quad (51)$$

Слѣдовательно, если переменныя x_1, x_2, x_3 преобразуются уравненіями (51), то η_1, η_2, η_3 должны преобразоваться уравненіями (50). Если теперь функція, составленная изъ коэффиціентовъ уравненія кривой или системы кривыхъ и переменныхъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 , будетъ имѣть свойство коварианта относительно линейнаго преобразованія (50), то она называется *контравариантомъ* данной кривой или системы кривыхъ. Такъ, на примѣръ, уравненіе:

$$f' = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + \dots = 0$$

или условіе, что прямая, данная координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , касается конического сѣченія:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots = 0$$

есть его контравариантъ.

Уравненіе $\Phi = 0$ (35) геометрическаго мѣста прямыхъ, которыя пересѣкаютъ два коническихъ сѣченія $f = 0$ и $f_1 = 0$ въ четырехъ гармоническихъ точкахъ, есть контравариантъ этой системы.

§ 389. Каждое коническое съченіе, ковариантъ съ коническими съченіями $f=0$ и $f_1=0$, можетъ быть выражено въ функціи f и f_1 и коварианта $F=0$, а контравариантъ можетъ быть выраженъ въ функціи f' , f_1' и Φ .

Пр. 1. Выразить въ функціи f , f_1 и F полярное коническое съченіе конического съченіа $f=0$ относительно $f_1=0$?

Рѣшеніе. Изъ свойствъ инвариантовъ и ковариантовъ мы знаемъ, что всякая найденная зависимость между ними, при какой-нибудь системѣ координатныхъ осей имѣетъ мѣсто и тогда, когда координаты будутъ преобразованы. Слѣдовательно можно отнести коническія съченіа $f=0$ и $f_1=0$ къ ихъ общему полярному треугольнику, тогда ихъ форма будетъ:

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2, \quad f_1 = x^2 + y^2 + z^2$$

при этомъ найдемъ, что ихъ ковариантъ F будетъ:

$$F = a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2 \quad (52)$$

Но условіе, что прямая ξ, η, ζ касается конического съченіа $f=0$, очевидно, есть:

$$bc\xi^2 + ca\eta^2 + ab\zeta^2 = 0$$

Геометрическое мѣсто полюса относительно $f_1=0$ касательной къ $f=0$ есть:

$$bcx^2 + cay^2 + abz^2 = 0$$

но его можно написать въ формѣ:

$$(bc + ca + ab)(x^2 + y^2 + z^2) = F$$

слѣдовательно искомое геометрическое мѣсто будетъ:

$$Qf_1 = F$$

Точно также, можно показать, что полярное коническое съченіе конического съченіа f_1 относительно f есть:

$$Q_1f = F$$

Пр. 2. Выразить въ функціи f , f_1 , F обертку прямой, которая пересѣкается коническими съченіями $f=0$ и $f_1=0$ въ четырехъ гармоническихъ точкахъ?

Рѣшеніе. Мы видѣли, что уравненіе этой обертки есть коническое съченіе (33) $\Phi = 0$, въ этомъ случаѣ:

$$\Phi = (b+c)\xi^2 + (c+a)\eta^2 + (a+b)\zeta^2 = 0 \quad (53)$$

слѣдовательно ея уравненіе въ координатахъ x, y, z есть:

$$(c+a)(a+b)x^2 + (a+b)(b+c)y^2 + (c+a)(b+c)z^2 = 0$$

или:

$$(bc + ca + ab)(x^2 + y^2 + z^2) + (a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2) - F = 0$$

или:

$$Qf_1 + Q_1f - F = 0$$

Пр. 3. Найти условіе, при которомъ ковариантъ F распадается на двѣ прямыя линіи?

Рѣшеніе. Инвариантъ Δ коварианта $F=0$ (52) долженъ быть равенъ нулю, что даетъ:

$$abc(b+c)(c+a)(a+b) = 0$$

или:

$$abc[(a+b+c)(bc+ca+ab) - abc] = 0$$

откуда:

$$\Delta \cdot \Delta_1 (QQ_1 - \Delta\Delta_1) = 0$$

искомое условіе. Уравненіе $QQ_1 - \Delta\Delta_1 = 0$ есть также условіе распадаенія коварианта Φ на два линейные множителя. Это условіе будетъ удовлетворяться, когда два круга пересѣкаются подъ прямымъ угломъ; въ этомъ случаѣ, каждая изъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ одинъ изъ центровъ, пересѣкается кругами въ четырехъ гармоническихъ точкахъ, а геометрическое мѣсто точекъ, изъ коихъ четыре касательныя къ кругамъ образуютъ гармоническую связку, есть двѣ прямыя линіи. Геометрическое мѣсто и обертка будутъ такія же, если $d^2 = 2(r^2 + r_1^2)$.

Пр. 4. Преобразовать два коническихъ сѣченія въ формы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad (54)$$

Рѣшеніе. Количества a, b, c опредѣляются изъ уравненія:

$$\Delta_1 \lambda^3 - Q_1 \lambda^2 + Q \lambda - \Delta = 0 \quad (55)$$

какъ въ § 346 пр. 2. Если изъ уравненій:

$$x^2 + y^2 + z^2 = f, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = f_1, \quad a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2 = F$$

опредѣлимъ x^2, y^2, z^2 , то найдемъ эти величины въ функціи f, f_1, F .

Пр. 5. Преобразовать уравненія:

$$3x^3 - 6xy + 9y^2 - 2x + 4y = 0, \quad 5x^2 - 14xy + 8y^2 - 6x - 2 = 0$$

въ форму (54)?

Рѣшеніе. Отыщемъ опредѣлители Δ и Δ_1 и ихъ миноры:

$$\Delta = -9, \quad Q = -54, \quad Q_1 = -99, \quad \Delta_1 = -54,$$

откуда корни уравненія (55) будутъ 1, 2, 3. Вычисляя F , найдемъ:

$$F = -9(23x^2 - 50xy + 44y^2 - 15x + 12y - 4)$$

Полагая:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 3x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x - 4y$$

$$X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 = 5x^2 - 14xy + 8y^2 - 6x - 2$$

$$5X^2 + 8Y^2 + 9Z^2 = 23x^2 - 50xy + 44y^2 - 18x + 12y - 4$$

Найдемъ:

$$X^2 = (3y + 1)^2$$

изъ

$$6f + f_1 - F$$

$$Y^2 = (2x - y)^2$$

изъ

$$F - 3f - 2f_1$$

и:

$$Z^2 = -(x + y + 1)^2$$

изъ

$$2f + 3f_1 - F$$

Пр. 6. Найти уравненіе четырехъ касательныхъ въ точкахъ пересѣченія коническихъ сѣченій $f = 0$ и $f_1 = 0$?

Отв.

$$(Qf - \Delta f_1)^2 = 4\Delta f(Q_1f - F)$$

Пр. 7. Найти обертку основанія треугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе $f = 0$, и коего двѣ остальные стороны касаются коническаго сѣченія $f_1 = 0$?

Рѣшеніе. Возьмемъ за координатный треугольникъ, треугольникъ вписанный въ $f = 0$ въ извѣстномъ положеніи, и пусть:

$$f = 2(fyz + yzx + 2xy)$$

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2xy - 2\lambda hxy$$

гдѣ, очевидно, прямыя $x = 0$, $y = 0$ касаются коническаго сѣченія $f_1 = 0$. Очевидно, что $\lambda f + f_1 = 0$ коническое сѣченіе, коего касается третья сторона треугольника $z = 0$; мы покажемъ, что это коническое сѣченіе опредѣленное.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\Delta = 2fgh, Q = -(f + g + h)^2 - 2\lambda fgh, Q_1 = 2(f + g + h)(2 + \lambda h), \Delta_1 = -(2 + \lambda h)^2$$

откуда:

$$Q_1^2 - 4Q\Delta_1 = 4\lambda\Delta\Delta_1$$

слѣдовательно уравненіе $\lambda f + f_1 = 0$ можетъ быть написано въ формѣ:

$$(Q_1^2 - 4Q\Delta_1)f + 4\Delta\Delta_1f_1 = 0$$

какъ видно опредѣленное коническое сѣченіе, коего касается третья сторона треугольника. Если $Q_1^2 = 4\Delta\Delta_1$, то очевидно третья сторона треугольника всегда касается коническаго сѣченія $f_1 = 0$.

Пр. 8. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего стороны касаются коническаго сѣченія $f = 0$, а двѣ остальные вершины находятся на коническомъ сѣченіи $f_1 = 0$?

Рѣшеніе. Означимъ черезъ $f(1)$ и $f_1(1)$ результатъ подстановленія x', y', z' въ данныя коническія сѣченія f и f_1 . Рѣшеніе будетъ состоять въ слѣдующемъ: составить уравненіе двухъ касательныхъ къ коническому сѣченію $f = 0$, проведенныхъ изъ точки $(x_1y_1z_1)$, за тѣмъ составимъ уравненіе прямыхъ, соединяющихъ точки пересѣченія касательныхъ съ коническимъ сѣченіемъ $f_1 = 0$, и наконецъ составимъ условіе, при которомъ одна изъ этихъ прямыхъ (которая должна быть третья сторона искомаго треугольника) касается коническаго сѣченія $f = 0$. Если чрезъ P назовемъ полярю точки $(x_1y_1z_1)$ коническаго сѣченія $f = 0$, то пара касательныхъ изъ этой точки къ $f = 0$ будетъ $ff(1) - P^2 = 0$. Чтобы найти хорды пересѣченія этихъ касательныхъ съ $f_1 = 0$, надобно опредѣлить λ такъ, чтобы уравненіе $ff(1) - P^2 + \lambda f_1 = 0$ представляло пару прямыхъ линий. Призначная (discriminant) этого уравненія есть слѣдующее квадратное уравненіе:

$$\Delta_1\lambda^2 + F(1)\lambda + \Delta f(1)f_1(1) = 0$$

для опредѣленія λ . Наконецъ, чтобы найти условіе касанія одной изъ этихъ хордъ коническаго сѣченія $f = 0$, составимъ призначную уравненія:

$$\mu f + (ff(1) - P^2 + \lambda f_1) = 0$$

и приравнявъ ее нулю, составимъ условие, чтобы это уравнение, относительно μ , имѣло равные корни. Эта признающая есть:

$$\Delta\mu^2 + (2\Delta f(1) + \lambda Q)\mu + [\Delta f^2(1) + \lambda(Qf(1) + \Delta f_1(1) + Q_1\lambda^2)] = 0$$

искомое условие равенства корней будетъ:

$$\lambda(4\Delta Q_1 - Q^2) + 4\Delta^2 f_1(1) = 0$$

подставляя, полученное отсюда значеніе λ въ:

$$\Delta_1\lambda^2 + F(1)\lambda + \Delta f(1) \cdot f_1(1) = 0$$

найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$16\Delta^2\Delta_1 f_1 - 4\Delta(4\Delta Q_1 - Q^2)F + f(4\Delta Q_1 - Q^2)^2 = 0$$

которое, при $Q^2 = 4\Delta Q_1$, обращается въ $f_1 = 0$.

Пр. 9. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего двѣ стороны касаются конического сѣченія $f = 0$, а третья касается конического сѣченія $af + bf_1 = 0$, а двѣ остальные вершины находятся на коническомъ сѣченіи $f_1 = 0$?

Рѣшеніе. Какъ въ предыдущемъ примѣрѣ найдемъ, что искомое мѣсто есть одно изъ коническихъ сѣченій, касающихся четырехъ общихъ касательныхъ къ коническимъ сѣченіямъ $f = 0$ и $f_1 = 0$:

$$\Delta\Delta_1 f_1\lambda^2 + \mu F \cdot \lambda + \mu^2 f = 0$$

гдѣ $\lambda : \mu$ дано квадратнымъ уравненіемъ:

$$a(ab - \beta a)\lambda^2 + a(4a\Delta + 2Qb)\lambda\mu - b^2\mu^2 = 0$$

въ которомъ:

$$\alpha = 4\Delta\Delta_1, \quad a \quad \beta = Q^2 - 4\Delta Q_1$$

Пр. 10. Найти геометрическое мѣсто вершины многоугольника, коего стороны касаются конического сѣченія $f = 0$, а остальные вершины скользятъ по коническому сѣченію $f_1 = 0$?

Рѣшеніе. Этотъ примѣръ сводится на предыдущій. Въ самомъ дѣлѣ, прямая, соединяющая смежныя вершины съ вершиною геометрическое мѣста, которое ищется, касается конического сѣченія формы $af + af_1 = 0$. Найдемъ, если $\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''; \lambda''', \mu'''$ будутъ величины для многоугольниковъ $n-1, n$ и $n+1$ сторонъ, что $\lambda''' = \mu'\mu''^2$, $\mu''' = \Delta\lambda'\lambda''(\alpha\mu'' - \Delta_1\beta\lambda'')$. Для треугольника имѣемъ $\lambda' = \alpha$, $\mu' = \Delta_1\beta$; для четырехугольника $\lambda'' = \beta^2$, $\mu'' = \alpha(4\Delta\alpha + \alpha Q\beta)$, и подобнымъ образомъ, послѣдовательно, найдемъ для всякаго многоугольника.

§ 390. *Якобьевская кривая.* Даны три коническія сѣченія. Найти геометрическое мѣста точки, коей три поляры относительно трехъ данныхъ коническихъ сѣченій пересѣкаются въ одной точкѣ.

Рѣшеніе. Пусть данныя коническія сѣченія будутъ:

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0 \quad (56)$$

три ихъ поляръ относительно точки $(x_1 y_1 z_1)$ будутъ:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x_1} + y \frac{\partial f}{\partial y_1} + z \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0, \quad x \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + y \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + z \frac{\partial f_1}{\partial z_1} = 0, \\ x \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + y \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + z \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Если эти поляръ проходятъ чрезъ одну точку, то будемъ имѣть (§ 68):

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (58)$$

Такому уравненію должны удовлетворять координаты точки $(x_1 y_1 z_1)$ встрѣчи трехъ поляръ. Какъ видно это кривая третьей степени, которая называется *якобьевскою кривою* трехъ коническихъ съченій.

Легко видѣть, что если три поляръ, какой-нибудь точки относительно коническихъ съченій (56) пересѣкаются въ одной точкѣ, то поляръ той же точки относительно всѣхъ коническихъ съченій системы:

$$\lambda f + \mu f_1 + \nu f_2 = 0 \quad (59)$$

пройдетъ также чрезъ точку пересѣченія трехъ поляръ (57).

Если поляръ точки A , лежащей на якобьевской кривой, всѣхъ коническихъ съченій (59), проходятъ чрезъ точку B , то прямая AB пересѣкается гармонически каждымъ коническимъ съченіемъ изъ системы (59), а слѣдовательно поляръ точки B пройдутъ всѣ чрезъ точку A , поэтому и точка B находится на якобьевской кривой и называется *соотвѣтственной* точкѣ A . Очевидно, прямая AB пересѣкается системою коническихъ съченій (59) въ точкахъ образующихъ инволюціонный рядъ, коего двойныя точки суть A и B . Такъ какъ двойныя точки суть совпадающія соотвѣтственныя инволюціоннаго ряда, то изъ этого слѣдуетъ, что если какое-нибудь изъ коническихъ съченій системы (59) касается прямой AB , то оно можетъ ее коснуться только въ точкахъ A или B . Если одно изъ коническихъ съченій системы (59) распадается на двѣ прямыя линіи, пересѣкающіяся на прямой AB , то точки ихъ пересѣченія должны быть или A или B , исключая того случая, въ которомъ сама линія AB есть одна изъ распавшагося коническаго съченія на двѣ прямыя.

Впрочемъ можно прямо доказать, что если коническое сѣченіе:

$$\lambda f + \mu f_1 + \nu f_2 = 0 \quad (60)$$

распадается на пару прямыхъ линий, то точки ихъ пересѣченія находятся на якобіевской кривой. Въ самомъ дѣлѣ, если (60) есть прямая линия, то координаты точки пересѣченія должны удовлетворить уравненіе:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} + \nu \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \\ \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_1}{\partial y} + \nu \frac{\partial f_1}{\partial z} &= 0 \\ \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial y} + \nu \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (61)$$

исключая изъ этихъ уравненій λ , μ , ν найдемъ якобіевскую кривую (58).

Прямая AB пересѣкаетъ якобіевскую кривую еще въ третьей точкѣ, а изъ того, что было сказано выше, слѣдуетъ что сама линия AB есть одна изъ пары прямыхъ линий, проходящихъ чрезъ эту точку, и находится въ системѣ коническихъ сѣченій (59).

Если три данныя коническія сѣченія будутъ:

$$\begin{aligned} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 &= 0, \\ (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 &= 0, \\ (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

въ символической формѣ (§ 199), то очевидно ихъ якобіевская кривая будетъ:

$$\begin{aligned} &(a_{11} b_{13} c_{12}) x_1^3 + (a_{22} b_{12} c_{23}) x_2^2 + (a_{33} b_{23} c_{13}) x_3^2 \\ &- [(a_{11} b_{22} c_{13}) + (a_{11} b_{12} c_{23})] x_1^2 x_2 - [(a_{33} b_{11} c_{12}) + (a_{11} b_{23} c_{13})] x_1^2 x_3 - \\ &- [(a_{11} b_{22} c_{23}) + (a_{22} b_{13} c_{12})] x_1 x_2^2 - [(a_{22} b_{33} c_{12}) + (a_{22} b_{23} c_{13})] x_2^2 x_3 - \\ &- [(a_{33} b_{11} c_{23}) + (a_{33} b_{13} c_{12})] x_2^2 x_1 - [(a_{22} b_{33} c_{13}) + (a_{33} b_{12} c_{23})] x_2^2 x_2 - \\ &- [(a_{11} b_{23} c_{33}) + 2(a_{23} b_{13} c_{12})] x_1 x_2 x_3 = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

Символь, напримѣръ, $(a_{11} b_{13} c_{12})$ означаетъ опредѣлитель полученный изъ члена $a_{11} b_{13} c_{12}$, перемѣщая буквы a, b, c .

Пр. 1. Описать коническое сѣченіе, проходящее чрезъ четыре данныя точки и касающееся даннаго коническаго сѣченія $f_2 = 0$?

Рѣшеніе. Пусть четыре данныя точки будутъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$. Легко видѣть, что задача имѣетъ шесть рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, если въ условіе (§ 351) касанія двухъ коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_2=0$ подставимъ $a_{11} + \lambda b_{11}, a_{12} + \lambda b_{12}, \dots$ вмѣсто a_{11}, a_{12}, \dots , то λ войдетъ въ это условіе въ шестой степени. Якобiевская кривая трехъ коническихъ сѣченій $f=0, f_1=0, f_2=0$ пересѣкаетъ $f_2=0$ въ шести искомымъ точкахъ касанія. Такъ какъ полярна точка касанія съ $f_2=0$ будетъ полярна той же точки относительно коническаго сѣченія $\lambda f + \mu f_1 = 0$, то она проходитъ чрезъ точку пересѣченія поляръ относительно коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$.

Пр. 2. Если три коническія сѣченія имѣютъ общій полярный треугольникъ, то ихъ якобiевская кривая обращается въ три прямыя линіи.

Рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ, если три коническія сѣченія отнесены къ общему ихъ полярному треугольнику, то онѣ имѣютъ формы:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \quad a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 = 0, \quad a_2x^2 + b_2y^2 + c_2z^2 = 0$$

очевидно, ихъ якобiевская кривая есть $xyz = 0$.

Пр. 3. Если коническія сѣченія имѣютъ двѣ общія точки, то ихъ якобiевская кривая распадается на коническое сѣченіе, проходящее чрезъ двѣ общія точки, и на прямую линію. Геометрически, очевидно, что прямая, проходящая чрезъ двѣ точки, удовлетворяетъ условію. Тоже легко показать аналитически. Въ частномъ случаѣ, якобiевская кривая трехъ круговъ есть кругъ, пересѣкающій три данныя круга подъ прямымъ угломъ.

Пр. 4. Якобiевская кривая состоитъ изъ коническаго сѣченія и прямой и въ томъ случаѣ, когда одно изъ коническихъ сѣченій будетъ полный квадратъ, т. е. двѣ совпадающія прямыя $f = L^2 = 0$. Въ этомъ случаѣ, изъ формы (58) якобiевской кривой видно, что прямая $L = 0$ будетъ въ ней множителемъ. Слѣдовательно можно описать четыре коническія сѣченія касающіяся даннаго коническаго сѣченія $f_1 = 0$ въ двухъ точкахъ пересѣченія $f_1 = 0$ съ $L = 0$, и касающаеся $f_2 = 0$ въ точкахъ пересѣченія его съ якобiевскимъ коническимъ сѣченіемъ.

Если три коническія сѣченія суть: коническое сѣченіе, кругъ и квадратъ безконечно удаленной прямой, то ихъ якобiевская кривая проходитъ чрезъ основанія нормалей, которыя можно провести изъ центра круга къ коническому сѣченію.

§ 391. Выше мы видѣли, что два коническія сѣченія:

$$f=0 \quad \text{и} \quad f_1=0$$

имѣютъ четыре инварианта $\Delta, Q; \Delta_1, Q_1$ и одинъ ковариантъ $F=0$, который есть также коническое сѣченіе (33); но кромѣ этого есть еще кубическій ковариантъ,—это якобiевская кривая трехъ коническихъ сѣченій $f=0, f_1=0$ и $F=0$. Мы видѣли выше (§ 390, пр. 2), что коническое сѣченіе $F=0$ имѣетъ общій полярный треугольникъ съ коническими сѣченіями $f=0$ и $f_1=0$, слѣдовательно если составимъ якобiевскую кривую коническихъ сѣченій $f=0, f_1=0, F=0$, то найдемъ кубическій ковариантъ, который будетъ ни что иное, какъ стороны общаго полярнаго треугольника

коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$. Изъ § 389 также видно, что якобевская J тождественно уничтожается, если $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ двойное соприкосновеніе. Въ § 389, пр. 4 мы показали, какъ найти уравненіе сторонъ общаго полярнаго треугольника, и если сравнимъ эти два метода, то найдемъ:

$$J = F^3 - F^2(Qf_1 + Q_1f) + F(\Delta_1 Qf^2 + \Delta Q_1f_1^2) + Fff_1(QQ_1 - 3\Delta\Delta_1) - \Delta^2_1\Delta f^3 - \Delta^2\Delta_1f_1^3 + \Delta_1(2\Delta Q_1 - Q^2)f^2f_1 + \Delta(2\Delta_1Q - Q^2_1)ff_1^2 \quad (64)$$

Изъ этого видимъ, что система изъ двухъ коническихъ сѣченій имѣетъ, кромѣ четырехъ инвариантовъ, четыре коварианта:

$$f, f_1, F, J$$

которые связаны зависимоію (64). Точно также имѣемъ четыре контраварианта:

$$f', f'_1, \Phi \text{ и } \Gamma$$

изъ коихъ послѣдній представляетъ вершины общаго полярнаго треугольника въ линейныхъ координатахъ. Эти коварианты связаны зависимоію подобною (64) между f', f'_1, Φ, Γ и инвариантами.

Пр. Написать для коническихъ сѣченій:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

всѣ двѣнадцать формъ:

$$\Delta, \Delta_1, Q, Q_1, f, f_1, F, F_1, f', f'_1, \Phi, \Gamma?$$

Отв.

$$\Delta = 1, \quad \Delta_1 = abc, \quad Q = a + b + c, \quad Q_1 = bc + ca + ab$$

$$f = x^2 + y^2 + z^2, \quad f_1 = ax^2 + by^2 + cz^2, \quad F = a(b + c)x^2 + b(a + c)y^2 + c(a + b)z^2$$

$$J = (b - c)(c - a)(a - b)xyz$$

$$f' = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad f'_1 = bc\xi^2 + ca\eta^2 + ab\zeta^2, \quad \Phi = (b + c)\xi^2 + (c + a)\eta^2 + (a + b)\zeta^2$$

$$\Gamma = (b - c)(c - a)(a - b)\xi\eta\zeta$$

§ 392. Кромѣ инвариантовъ, ковариантовъ и контравариантовъ, есть еще смѣшанные коварианты; это такія функціи отъ коэффициентовъ, переменныхъ x_1, x_2, x_3 и переменныхъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 , которыя имѣютъ характеръ ковариантовъ, когда x_1, x_2, x_3 преобразовываются подстановленіями § 388 (49), а ξ_1, ξ_2, ξ_3 подстановленіями (50). Эти смѣшанные коварианты можно разсматривать, какъ коварианты системы двухъ коническихъ сѣченій $f=0, f_1=0$ и прямой $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$. Напримѣръ, мы можемъ составить якобевскую кривую этой системы, или геометрическое мѣсто точекъ, коихъ по-

ляры относительно f и f_1 пересѣкаются на прямой $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$. Эта якобіевская функція, очевидно, есть:

$$N = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \end{vmatrix}$$

а для уравненій въ канонической формѣ:

$$\xi(b-c)yz + \eta(c-a)zx + \zeta(a-b)xy = 0$$

соотвѣтствующая взаимная форма этой послѣдней относительно f' , f'_1 будетъ:

$$a\eta\zeta(b-c)x + b\xi\zeta(c-a)y + c\xi\eta(a-b)z = 0$$

Это уравненіе представляетъ прямую, проходящую черезъ полюсы прямой $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$, относительно $f=0$ и $f_1=0$. Мы можемъ взять полюсь, какой-нибудь, прямой $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$ относительно $f=0$ и полярю этого полюса относительно $f_1=0$ и получить линію K , которой уравненіе, если f и f_1 даны въ канонической формѣ, будетъ:

$$K = a\xi x + b\eta y + c\zeta z = 0$$

мы получимъ другую прямую K_1 , если возьмемъ полюсь прямой $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$ относительно $f_1=0$ и полярю этого полюса относительно $f=0$. Если f и f_1 будутъ въ канонической формѣ, то:

$$K_1 = bc\xi x + ca\eta y + ab\zeta z = 0$$

Всѣхъ смѣшанныхъ ковариантовъ системы, состоящей изъ двухъ коническихъ свченій, есть восемь, изъ нихъ четыре мы нашли, а четыре суть слѣдующія:

якобіевская функція отъ f , K и $\xi x + \eta y + \zeta z$ въ канонической формѣ:

$$\eta\zeta(b-c)x + \zeta\xi(c-a)y + \xi\eta(a-b)z$$

якобіевская функція отъ f_1 , K_1 и $\xi x + \eta y + \zeta z$:

$$\eta\zeta a^2(b-c)x + \zeta\xi b^2(c-a)y + \xi\eta c^2(a-b)z$$

и двѣ ихъ взаимныя:

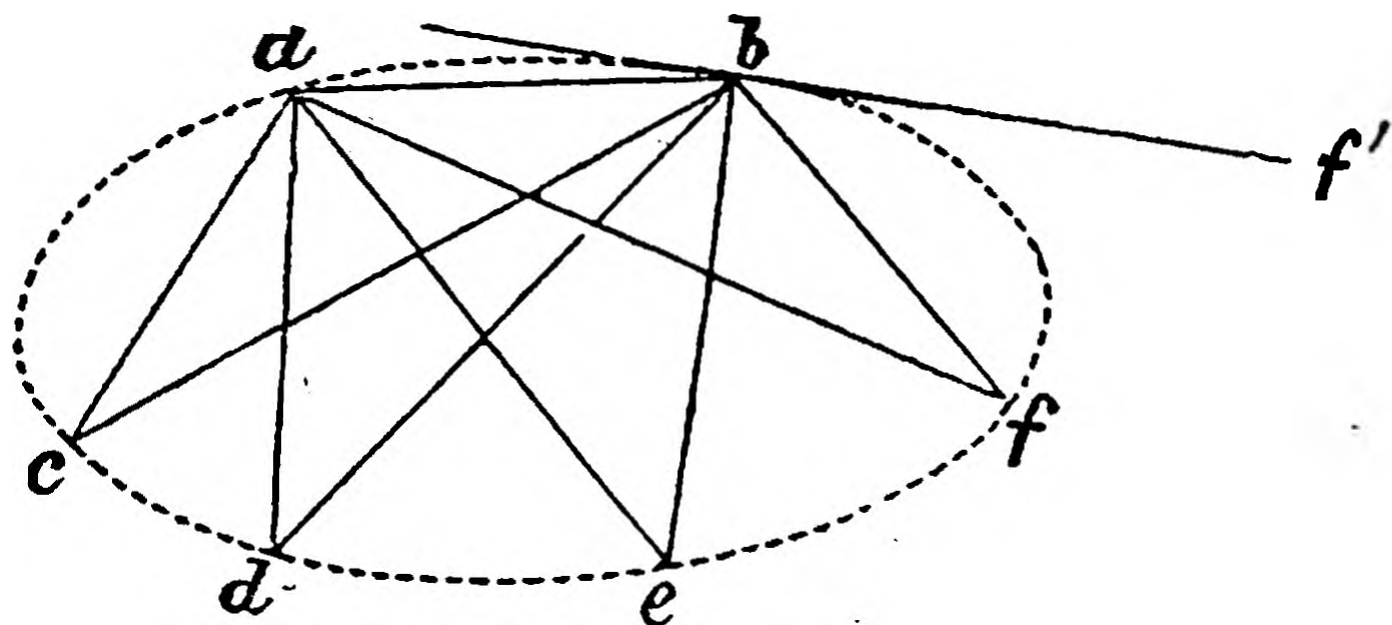
$$\xi a y z (b-c) + \eta b z x (c-a) + \zeta c x y (a-b)$$

$$\xi b c (b-c) y z + \eta c a (c-a) x z + \zeta a b (a-b) x y$$

Построение конических съчений.

§ 393. *Задача. 1.* По даннымъ пяти точкамъ на коническомъ съченіи построить шестую?

Фиг. 134.



Рѣшеніе 1. Пусть a, b, c, d, e (фиг. 134) будутъ данныя точки на коническомъ съченіи. Возьмемъ двѣ изъ нихъ, наприимѣръ, a и b за вершины двухъ связокъ. Проведемъ лучи ac, ad, ae и bc, bd, be ; эти двѣ связки устанавливають (§ 230) ихъ про-

эктивность, если теперь возьмемъ, какой-нибудь лучъ af и построимъ ему соответственный bf , то точка пересѣченія ихъ f будетъ на коническомъ съченіи, проходящемъ черезъ пять данныхъ точекъ.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

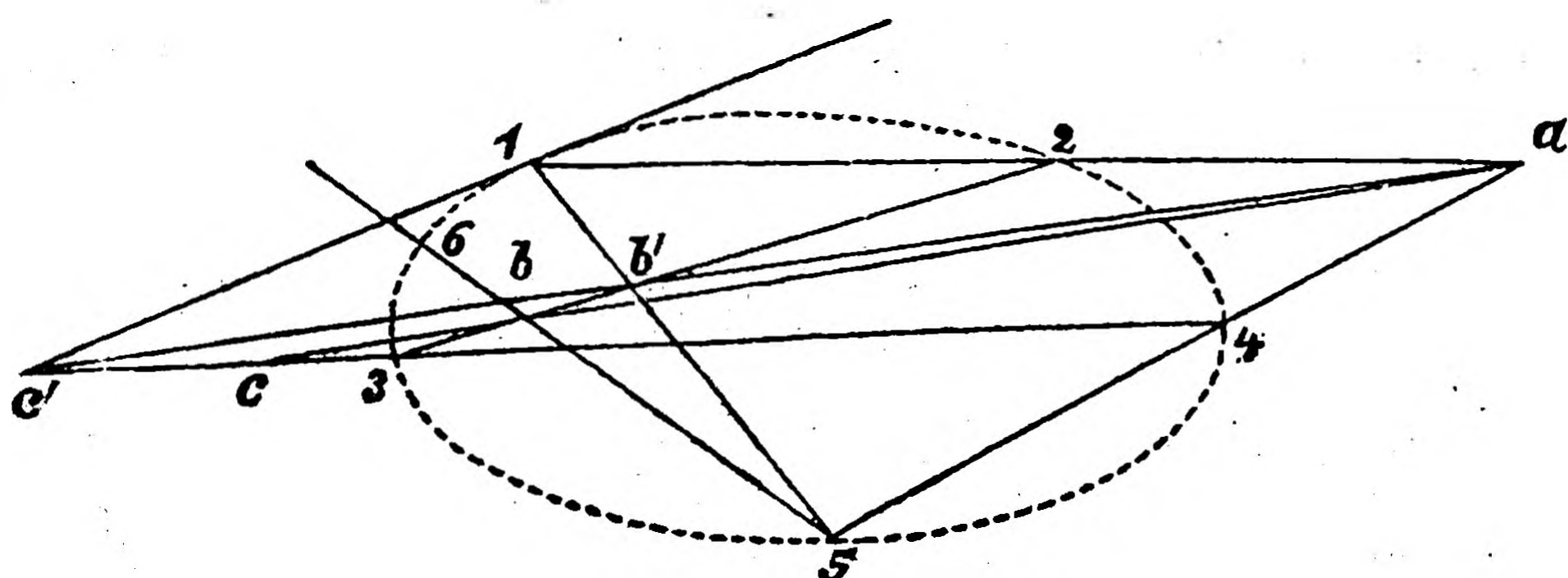
$$(a.cdef) = (b.cdef)$$

Такимъ образомъ можемъ построить сколько угодно точекъ на данномъ коническомъ съченіи.

Если вмѣсто луча af возьмемъ лучъ ab , то соответственный лучъ bf' будетъ касательная въ точкѣ b къ коническому съченію.

Рѣшеніе 2. Пусть (фиг. 135) данныя пять точекъ будутъ 1, 2, 3, 4, 5. Соединимъ точки 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5 прямыми 12, 23, 34, 45. Черезъ пятую точку проведемъ, какую-нибудь прямую 56, которая встрѣчаетъ данное пятью точками коническое съченіе въ неизвѣстной точкѣ, которую означимъ черезъ 6.

Фиг. 135.



Такимъ образомъ будемъ имѣть, вписанный въ коническое съченіе шестиугольникъ 123456, коего противоположныя стороны будутъ 12 и 45, 23 и 56, 34 и 61. По предложенію

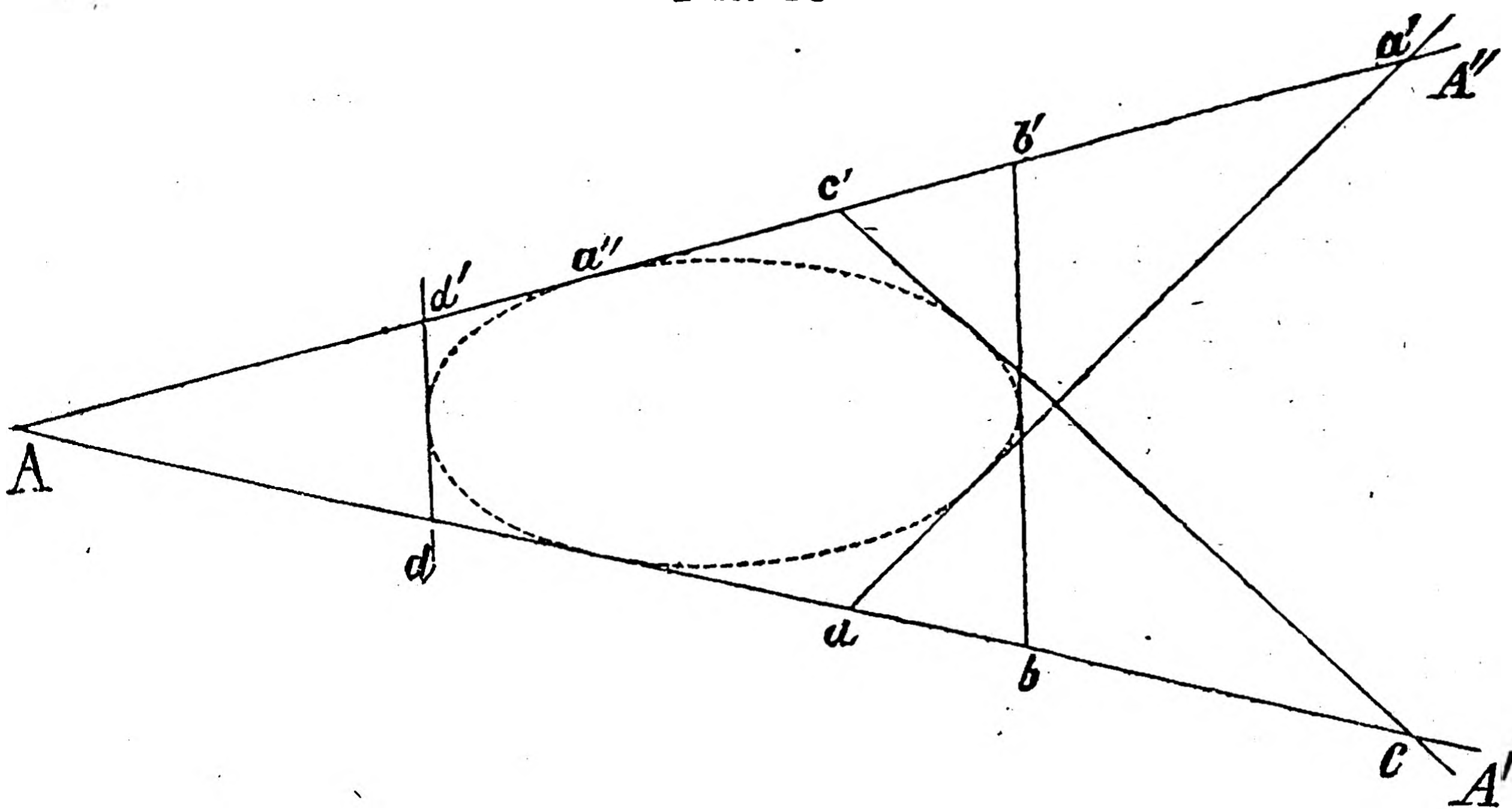
Паскаля точки пересѣченія этихъ сторонъ лежатъ на одной прямой линіи. Пусть точки встрѣчи 12 и 45; 23 и 56 будутъ a и b . Продолжимъ прямую ab до встрѣчи въ точкѣ c съ прямою 34. Очевидно, искомая точка 6 должна находится на прямой $1c$, но она находится и на 56, слѣдовательно искомая точка будетъ пересѣченіе произвольно проведенной прямой 56 съ $1c$. Проводя черезъ точку 5 прямая въ произвольномъ направленіи можемъ построить сколько угодно точекъ на коническомъ съченіи, коего

пять точек даны. Если произвольную прямую 56 проведемъ черезъ точку 1 , то 51 пересѣчетъ 23 въ точкѣ b' , прямая ab' пересѣчется съ 34 въ точкѣ c' . Если теперь проведемъ прямую $1c'$, то это, очевидно, будетъ касательная къ коническому сѣченію въ точкѣ 1 . И въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ построеніи искомая шестая точка совпадаетъ съ 1 , слѣдовательно шестая сторона $c'1$ шестиугольника проходитъ черезъ совпадающія двѣ точки. Это самое простое рѣшеніе.

§ 394. *Задача 2.* По даннымъ пяти касательнымъ къ коническому сѣченію построить шестую?

Рѣшеніе 1. Пусть (фиг. 136) данныя касательныя будутъ AA' , AA'' , aa' , bb' , cc' . Пусть a , a' ; b , b' ; c , c' будутъ точки пересѣченія трехъ изъ пяти касательныхъ aa' , bb' , cc' съ двумя AA' , AA'' .

Фиг. 136.



Извѣстно, что ангармоническія отношенія точекъ пересѣченія четырехъ постоянныхъ касательныхъ съ пятою переменною равны (§ 230), слѣдовательно, если на касательной AA' возьмемъ, какую-нибудь четвертую точку d и опредѣлимъ на касательной AA'' точку d' , такъ чтобы имѣли:

$$(abcd) = (a'b'c'd')$$

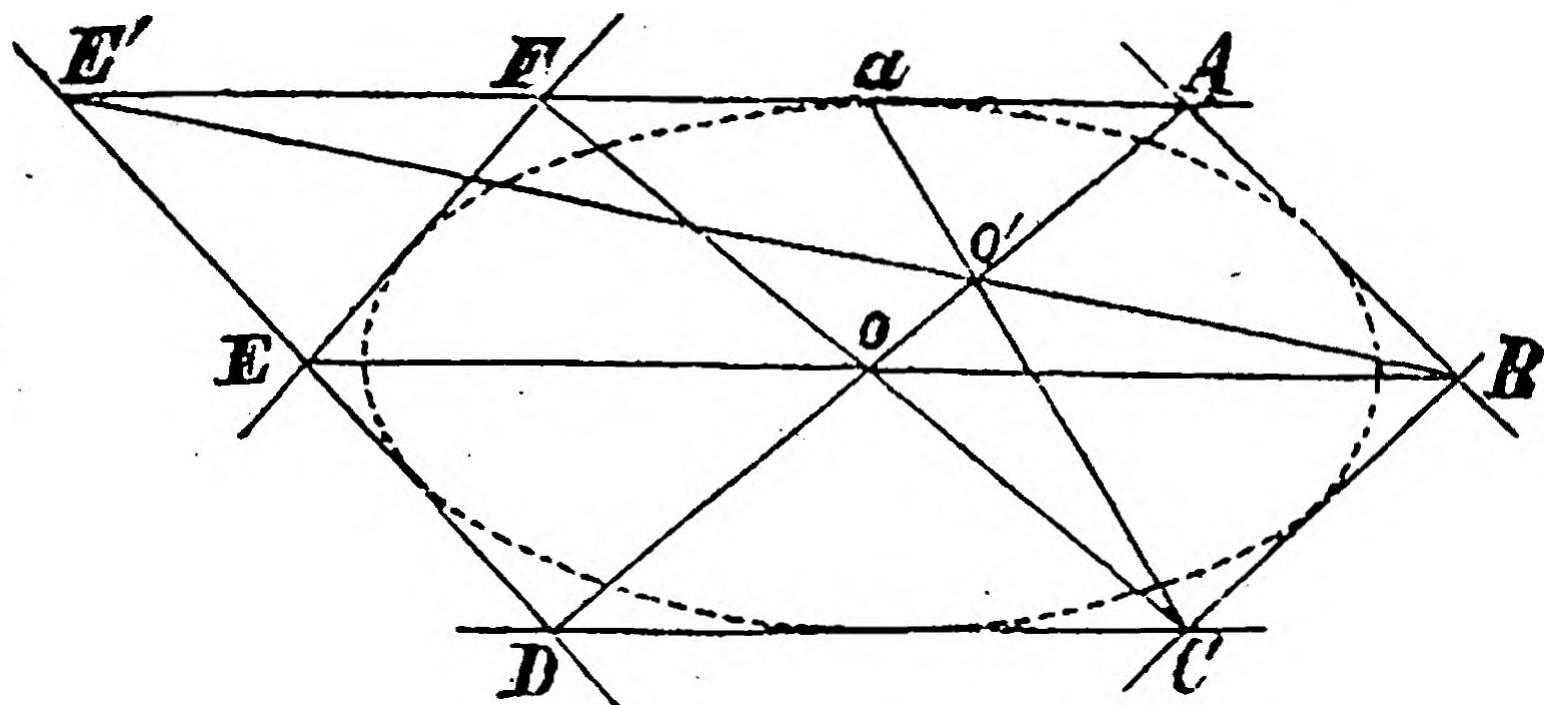
то прямая dd' будетъ искомая шестая касательная. Такимъ образомъ можемъ построить сколько угодно касательныхъ къ коническому сѣченію, котораго пять касательныхъ даны.

Если вмѣсто точки d взята точка A и опредѣлена на AA'' точка a'' такъ, чтобы $(abcA) = (a'b'c'a'')$, то очевидно точка a'' будетъ точка касанія касательной AA'' . Если бы точку A рассматривали, какъ находящуюся на касательной AA'' и опредѣлили точку a''' на касательной AA' такъ, чтобы $(abca''') = (a'b'c'A)$, то точка a''' будетъ точка касанія касательной AA' . Это легко видѣть изъ того, что по мѣрѣ приближенія точки d къ A ,

точка d' будетъ приближаться къ точкѣ касанія a'' и совпадаетъ съ нею, когда d совпадетъ съ A .

Рѣшеніе 2. Пусть данныя касательныя будутъ FA, AB, BC, CD, DE (фиг. 137). Если на касательной DE возьмемъ произвольную точку E и положимъ, что EF есть искомая шестая касательная, то по предложенію Бриансона діагонали AD, BF, CF пересѣкутся въ одной точкѣ.

Фиг. 137.



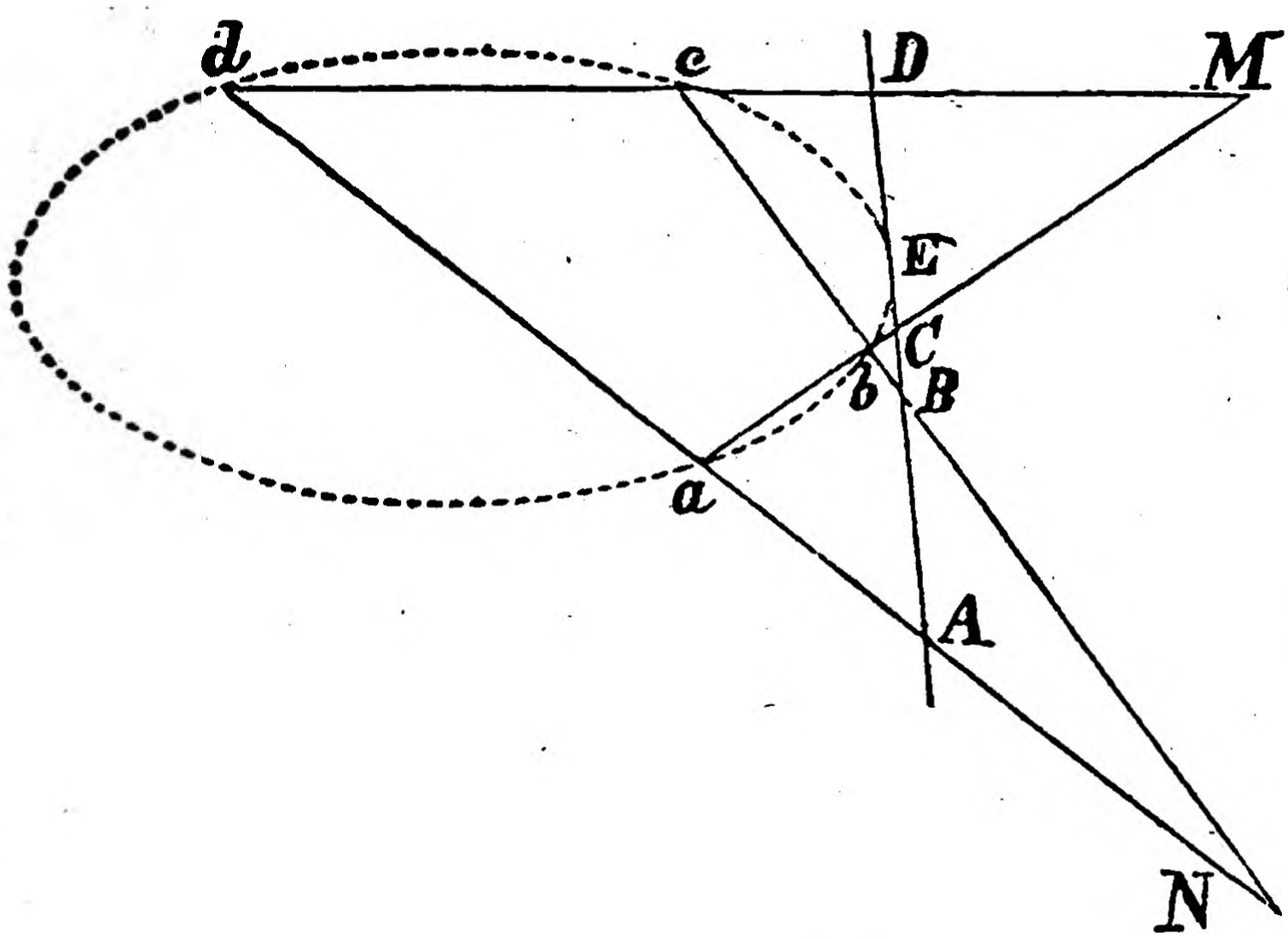
Такъ какъ діагонали AD и BE извѣстны и пересѣкаются въ точкѣ O , то прямая CO встрѣтитъ касательную FA въ точкѣ F , которая будетъ вершина описаннаго шестиугольника, противолежащая вершинѣ C ; слѣдовательно EF будетъ шестая искомая касательная.

Если бы точку E на касательной DE взяли на пересѣченіи ея съ касательной AF , то построенная, такимъ образомъ, точка a будетъ точка касанія касательной AF . Въ самомъ дѣлѣ, по мѣрѣ приближенія произвольно взятой точки E къ точкѣ E' , точка F приближается къ a и когда E и E' совпадутъ, то F совпадетъ съ точкою a . Это самое простое рѣшеніе задачи.

§ 395. *Задача 3.* По даннымъ четыремъ точкамъ и одной касательной построить пятую точку?

Рѣшеніе. Пусть (фиг. 138) a, b, c, d будутъ данныя четыре точки, AD данная касательная. Точки a, b, c, d образуютъ четырехугольникъ, противоположныя стороны котораго da и bc, ab и cd пересѣкаютъ касательную AD въ точкахъ A, B, C, D , которыя съ неизвѣстною точкою касанія E касательной AD , образуютъ инволюціонный рядъ, коего двойная точка есть E .

Фиг. 138.



Если эту двойную точку построимъ, то будемъ имѣть пятую точку коническаго сѣченія, слѣдовательно можемъ построить, какъ показано выше (§ 393, зад. 1), сколько угодно точекъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ чрезъ точки a, b, c, d и касающемся прямой AD . Но такъ какъ есть двѣ двойныя точки E и E' , составляющихъ инволюцію съ точками A, B, C, D , то есть два коническія сѣченія, удовлетворяющія данному условію.

на коническомъ сѣченіи, проходящемъ чрезъ точки a, b, c, d и касающемся прямой AD . Но такъ какъ есть двѣ двойныя точки E и E' , составляющихъ инволюцію съ точками A, B, C, D , то есть два коническія сѣченія, удовлетворяющія данному условію.

§ 396. *Задача 4.* Даны четыре касательныя и одна точка, построить пятую касательную?

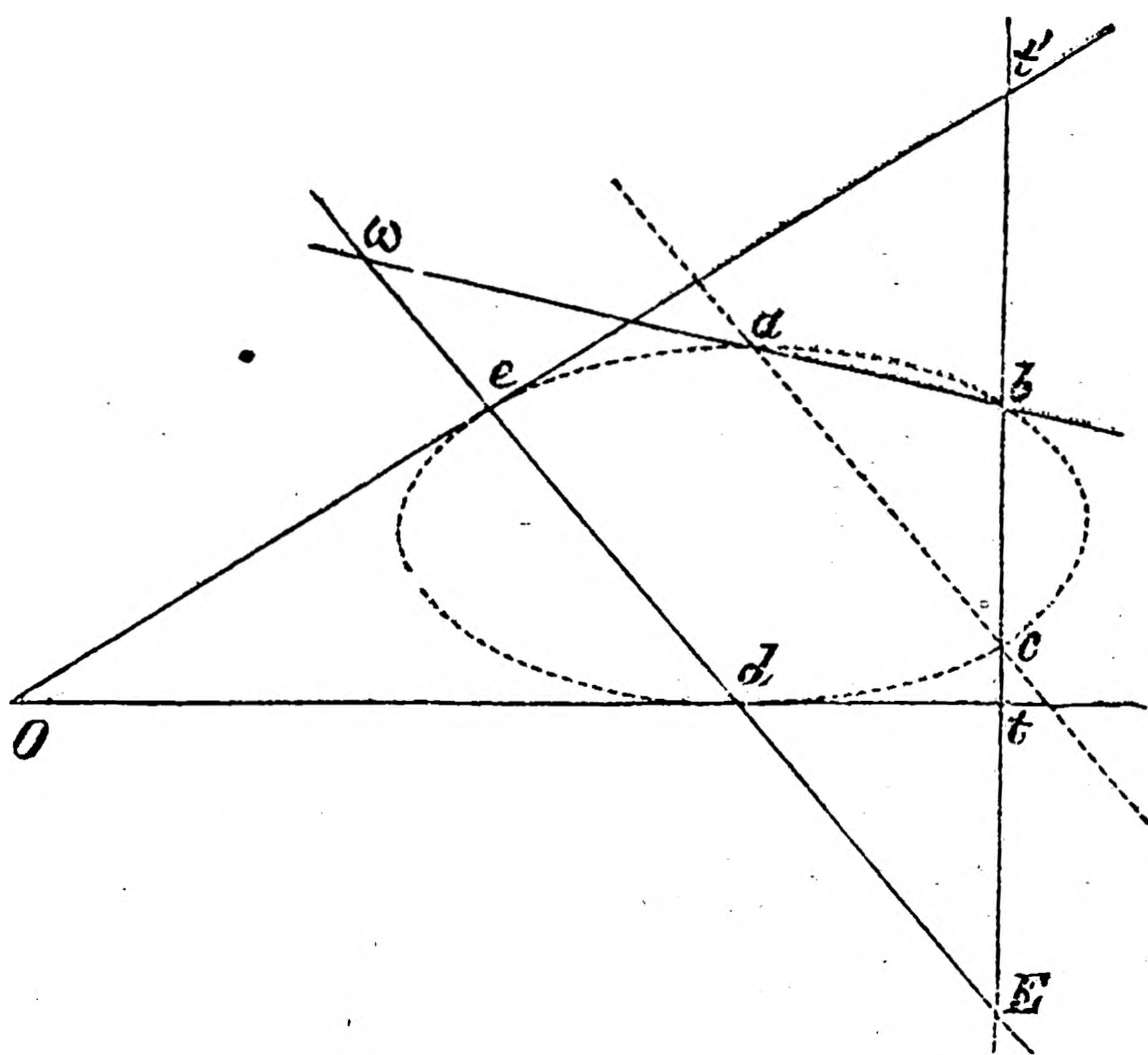
Рѣшеніе. Если данную точку соединимъ прямыми линиями съ вершинами четырехугольника, образуемаго четырьмя данными касательными, то эти прямые образуютъ инволюціонную связку, коей двойной лучъ будетъ искомаемая пятая касательная. Но есть другой двойной лучъ, слѣдовательно задача имѣетъ два рѣшенія, т. е. существуютъ два коническія сѣченія, касающіяся четырехъ касательныхъ, и проходящія черезъ одну точку.

§ 397. *Задача 5.* По даннымъ тремъ точкамъ и двумъ касательнымъ построить коническое сѣченіе?

Рѣшеніе. Пусть (фиг. 139) a, b, c будутъ данныя точки, а Ot и Ot' данныя касательныя.

Если опредѣлимъ точки e и d касанія, то будемъ имѣть пять точекъ на коническомъ сѣченіи, а слѣдовательно можемъ построить сколько угодно другихъ точекъ. На прямой de , каждая изъ точекъ d и e представляетъ двѣ бесконечно близкія точки на коническомъ сѣченіи, слѣдовательно она представляетъ двѣ противоположныя стороны вписаннаго въ коническое сѣченіе четырехугольника, коего двѣ другія противоположныя стороны суть касательныя Ot и Ot' .

Фиг. 139.



Слѣдовательно сѣкущая bc пересѣкаетъ стороны этого четырехугольника въ точкахъ t и t' и кривую въ точкахъ b и c . Эти четыре точки съ пятою E составляютъ инволюціонный рядъ, коего двойная точка есть E . Слѣдовательно, если построимъ точку E и такую же точку ω на сѣкущей ab , то прямая $E\omega$ опредѣлитъ на касательныхъ Ot и Ot' двѣ точки d и e , которыя будутъ точки касанія. Слѣдовательно будемъ имѣть пять точекъ на коническомъ сѣченіи, а потому можемъ построить и какое угодно число другихъ точекъ. Но такъ какъ есть по двѣ двойныя точки на сѣкущихъ bc и ab , то будемъ имѣть четыре прямыя, соединяющія двойныя точки E, E' съ ω, ω' , слѣдовательно будемъ имѣть четыре рѣшенія.

Если замѣтимъ, что сѣкущая ac даетъ также два рѣшенія, т. е. двѣ двойныя точки ψ и ψ' , то можно провести двѣнадцать прямыхъ:

$$E\omega, E'\omega, E\omega', E'\omega'; E\psi, E'\psi, E\psi', E'\psi'; \omega\psi, \omega'\psi, \omega\psi', \omega'\psi'$$

которыя казалось бы дадутъ и двѣнадцать рѣшеній. Но, если замѣтимъ, что каждая изъ сторонъ треугольника abc дѣлится въ точкахъ a, b, ω, ω' ; b, c, E, E' ; a, c, ψ, ψ' , гармонически, то увидимъ, что точки, какъ напримѣръ E, ω, ψ лежатъ на одной прямой линіи (§ 146), слѣдовательно рѣшеній всего четыре.

§ 398. *Задача 6.* По тремъ даннымъ касательнымъ и двумъ точкамъ построить коническое сѣченіе?

Рѣшеніе. Пусть AB, BC, CA будутъ данныя касательныя, a, b данныя точки. Касательныя въ этихъ точкахъ пересѣкаются въ точкѣ M , которую надобно опредѣлить. Легко видѣть, что лучъ BM есть двойной въ инволюціонной связкѣ: BA и BC , Ba и Bb , слѣдовательно можно его построить. Точно также найдемъ, что лучъ MC , пересѣченіе котораго съ BM даетъ точку M , которую если соединимъ съ a и b , то будемъ имѣть касательныя въ точкахъ a и b . Но такъ какъ построеніе даетъ каждый разъ два двойные луча, то будемъ имѣть четыре рѣшенія, а слѣдовательно и четыре коническія сѣченія, удовлетворяющія условіямъ задачи.

Если между условіями для построенія коническаго сѣченія будетъ дана одна асимптота, то она должна считаться за два условія, такъ какъ этимъ условіемъ дается положеніе касательной и точка касанія, которая находится на безконечности.

Если будетъ сказано, что коническое сѣченіе есть парабола, то это даетъ одно условіе—именно касательную на безконечности.

Если сказано, что коническое сѣченіе есть кругъ, то этимъ дается два условія—именно двѣ безконечно удаленныя точки.

Если данъ фокусъ, то этимъ даются два условія, такъ какъ черезъ фокусъ проходятъ двѣ касательныя къ коническому сѣченію. Если даны два фокуса, то это тоже что даны четыре касательныя.

Если данъ полюсъ данной прямой, то этимъ даны два условія. Наконецъ если данъ центръ, то этимъ даны два условія, такъ какъ центръ есть полюсъ безконечно-удаленной прямой.

ГЛАВА XXIII.

Методъ взаимныхъ полярѣ.

§ 399. Въ § 227 мы изложили уже главное основаніе *метода взаимныхъ полярѣ*, а теперь изложимъ самый методъ. Пусть:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad f'(\xi) = 0 \quad (1)$$

будутъ уравненія коническаго сѣченія во взаимныхъ формахъ; мы его называли основнымъ. Если $(y_1 y_2 y_3)$ есть какая-нибудь точка, то координаты поляръ этой точки относительно коническаго сѣченія (1) будутъ:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \eta_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_3} \quad (2)$$

и обратно:

$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_1}, \quad y_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_2}, \quad y_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \quad (3)$$

Въ выше упомянутомъ параграфѣ видѣли, что если:

$$F(x_1 x_2 x_3) = 0 \quad (4)$$

есть какое-нибудь коническое сѣченіе и полюсь $(y_1 y_2 y_3)$ скользить по немъ, то его координаты должны удовлетворять уравненіе (3):

$$F(y_1 y_2 y_3) = F\left(\frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_1}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_2}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \eta_3}\right) = \Phi(\eta_1 \eta_2 \eta_3) = 0$$

и видѣли, что коническія сѣченія:

$$F(x_1 x_2 x_3) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0 \quad (5)$$

находятся въ такой зависимости между собою, что точки одного изъ нихъ суть полюсы касательныхъ къ другому и, обратно, касательныя къ одному изъ нихъ суть поляръ точекъ на другомъ. Такія два коническія сѣченія называются *взаимными*. Это основное свойство служить основаніемъ метода изслѣдованій свойствъ коническихъ сѣченій и вообще кривыхъ линій.

§ 400. Для сокращенія рѣчи, означимъ основное коническое сѣченіе черезъ $f_0 = 0$, данное черезъ $f_1 = 0$, а взаимное, относительно $f_1 = 0$, черезъ $f_1' = 0$. Мы будемъ говорить, что точка *соотвѣтствуетъ* прямой, если она есть полюсь этой прямой относительно $f_0 = 0$, слѣдовательно точки на коническихъ сѣченіяхъ $f_1 = 0$ и $f_1' = 0$ суть соотвѣтственныя касательнымъ на $f_1' = 0$ и $f_1 = 0$.

На основаніи этихъ свойствъ взаимныхъ коническихъ сѣченій можемъ изъ свойствъ одного изъ нихъ заключить о свойствахъ другаго. Свойства эти суть предложенія, относительно положенія и, въ исключительныхъ случаяхъ, относительно мѣры.

§ 401. 1. Точкѣ пересѣченія касательныхъ къ кривой $f_1 = 0$ соотвѣтствуетъ прямая, соединяющая соотвѣтственныя касательнымъ точки на

кривой $f_1' = 0$. Это слѣдуетъ изъ § 209, что точка пересѣченія двухъ поляръ есть полюсъ прямой, проходящей черезъ ихъ полюсы.

2. Если три или болѣе точекъ на кривой $f_1 = 0$ лежатъ на одной прямой линіи, то соотвѣтственные касательныя къ кривой $f_1' = 0$ пересѣкаются въ одной точкѣ, и обратно, если три или болѣе касательныхъ къ кривой $f_1 = 0$ пересѣкаются въ одной точкѣ, то соотвѣтственные точки на кривой $f_1' = 0$ лежатъ на одной прямой линіи. Это слѣдуетъ изъ общихъ свойствъ поляры и полюса.

Пояснимъ теперь приложеніе этого метода примѣрами.

§ 402. Мы видѣли въ § 371, что если шестиугольникъ $ABCDEF$ вписанъ въ коническое сѣченіе $f_1 = 0$, то его противоположныя стороны AB и ED , BC и EF , CD и FA пересѣкаются на одной прямой линіи. Каждой вершинѣ A, B, C, \dots соотвѣтствуетъ касательная къ $f_1' = 0$, слѣдовательно вписанному шестиугольнику $ABCDEF$ въ коническомъ сѣченіи $f_1 = 0$ соотвѣтствуетъ описанный шестиугольникъ $abcdef$ около $f_1' = 0$. Точкамъ пересѣченія противоположныхъ сторонъ AB и ED , BC и EF , CD и AF будутъ соотвѣтствовать діагонали ad, bc, ef противоположныхъ вершинъ и такъ какъ точки пересѣченія AB и ED , BC и EF , CD и AF лежатъ на одной прямой линіи, то діагонали ad, be, cf пересѣкаются въ одной точкѣ. Такимъ образомъ видимъ, что изъ предложенія Паскаля вытекаетъ предложеніе Бріаншона, слѣдовательно это два взаимныя предложенія. Обратно, изъ предложенія Бріаншона получается предложеніе Паскаля.

Операція вывода изъ даннаго предложенія его взаимнаго состоитъ въ слѣдующемъ механическомъ процессѣ: слова *точка* и *прямая*, *вписанный* и *описанный* замѣщаются словами: *прямая* и *точка*, *описанный* и *вписанный*.

Взаимныя предложенія.

Пр. 1. Если двѣ вершины треугольника, скользятъ по прямымъ линіямъ, а три его стороны проходятъ черезъ три данныя точки, то третья вершина опишетъ коническое сѣченіе (Маклорень).

Пр. 2. Если въ предъидущемъ примѣрѣ точки, чрезъ которыя проходятъ три стороны треугольника лежатъ на одной прямой линіи, то геометрическое мѣсто вершины будетъ прямая линія (пр. 14, § 84).

Пр. 1. Если двѣ стороны треугольника проходятъ черезъ двѣ точки, а три вершины его скользятъ по тремъ даннымъ прямымъ, то третья его сторона будетъ касаться конического сѣченія.

Пр. 2. Если прямая, по которой скользятъ три вершины треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ, то геометрическое мѣсто третьей стороны будетъ точка (пр. 4, § 85).

Если два коническія сѣченія касаются, то ихъ взаимныя будутъ также касаться. Въ самомъ дѣлѣ, первая пара коническихъ сѣченій имѣетъ общую точку и общую касательную въ этой точкѣ, слѣдовательно взаимная пара будетъ имѣть общую касательную и общую точку.

Пр. 3. Если двѣ вершины, описаннаго около коническаго сѣченія, треугольника скользятъ по двумъ прямымъ, то геометрическое мѣсто третьей вершины есть коническое сѣченіе, имѣющее двойное соприкосновеніе съ даннымъ (пр. 2. § 358).

Пр. 3. Если двѣ стороны вписаннаго въ коническое сѣченіе треугольника проходятъ черезъ двѣ данныя точки, то обертка третьей стороны есть коническое сѣченіе, имѣющее двойное соприкосновеніе съ даннымъ (пр. 3, § 358).

§ 403. Мы выше показали, что если двумъ точкамъ P_1, P_2 на $f_1=0$, соотвѣтствуютъ касательныя P_1S_1, P_2S_2 на $f'_1=0$, то касательнымъ въ точкахъ P_1 и P_2 будутъ соотвѣтствовать точки p_1 и p_2 , а слѣдовательно точка Q пересѣченія этихъ касательныхъ будетъ соотвѣтствовать хордѣ p_1p_2 . Откуда заключаемъ, что какой нибудь точкѣ Q и ея полярѣ P_1P_2 относительно $f_1=0$, соотвѣтствуетъ прямая p_1p_2 и ея полюсь q относительно взаимнаго коническаго сѣченія $f'_1=0$.

Пр. 4. Если система коническихъ сѣченій проходитъ черезъ четыре данныя точки, то геометрическое мѣсто поляръ данной точки относительно системы коническихъ сѣченій есть точка (§ 228).

Пр. 4. Если система коническихъ сѣченій касается четырехъ данныхъ касательныхъ, то геометрическое мѣсто полюса данной прямой относительно системы коническихъ сѣченій есть прямая линія (§ 229).

Пр. 5. Вписать въ коническое сѣченіе треугольникъ, коего стороны проходятъ черезъ три данныя точки?

Пр. 5. Описать около коническаго сѣченія треугольникъ, коего вершины находились бы на трехъ данныхъ прямыхъ.

§ 404. Даны два коническія сѣченія $f_1=0$ и $f_2=0$, а ихъ взаимныя $f'_1=0$ и $f'_2=0$; четыремъ точкамъ пересѣченія A, B, C, D первыхъ двухъ соотвѣтствуютъ четыре общія касательныя A', B', C', D' ; шести общимъ хордамъ коническихъ сѣченій f_1 и f_2 : $AB, CD; AC, BD; AD, BC$ соотвѣтствуютъ шесть точекъ пересѣченія общихъ касательныхъ $A'B', C'D'; A'C', B'D'; A'D', B'C'$ къ f'_1 и f'_2 .

Пр. 1. Если три коническія сѣченія имѣютъ общія касательныя или имѣютъ двойное соприкосновеніе съ четвертымъ, то ихъ шесть общихъ хордъ по три проходятъ черезъ одну точку (§ 352).

Пр. 1. Если три коническія сѣченія имѣютъ двѣ общія точки или двойное соприкосновеніе съ четвертымъ, то шесть точекъ пересѣченія общихъ касательныхъ по три лежатъ на одной прямой линіи (352).

Пр. 2. Другими словами, если три коническія сѣченія, имѣютъ двойное соприкосновеніе съ четвертымъ, то ихъ можно разсматривать, какъ имѣющія четыре радикальные центра.

Пр. 2. Если три коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкосновеніе съ четвертымъ, то ихъ можно разсматривать, какъ имѣющія четыре оси подобія.

Пр. 3. Если черезъ точку касанія двухъ касающихся коническихъ сѣченій, проведемъ, какую-нибудь, хорду, то касательныя въ концахъ этой хорды пересѣкутся на хордѣ общей двумъ коническимъ сѣченіямъ.

Пр. 3. Если изъ какой-нибудь точки общей касательной двухъ касающихся коническихъ сѣченій проведемъ касательныя къ каждому изъ нихъ, то прямая, соединяющая точки ихъ касанія пройдетъ черезъ точку пересѣченія общихъ касательныхъ къ даннымъ коническимъ сѣченіямъ,

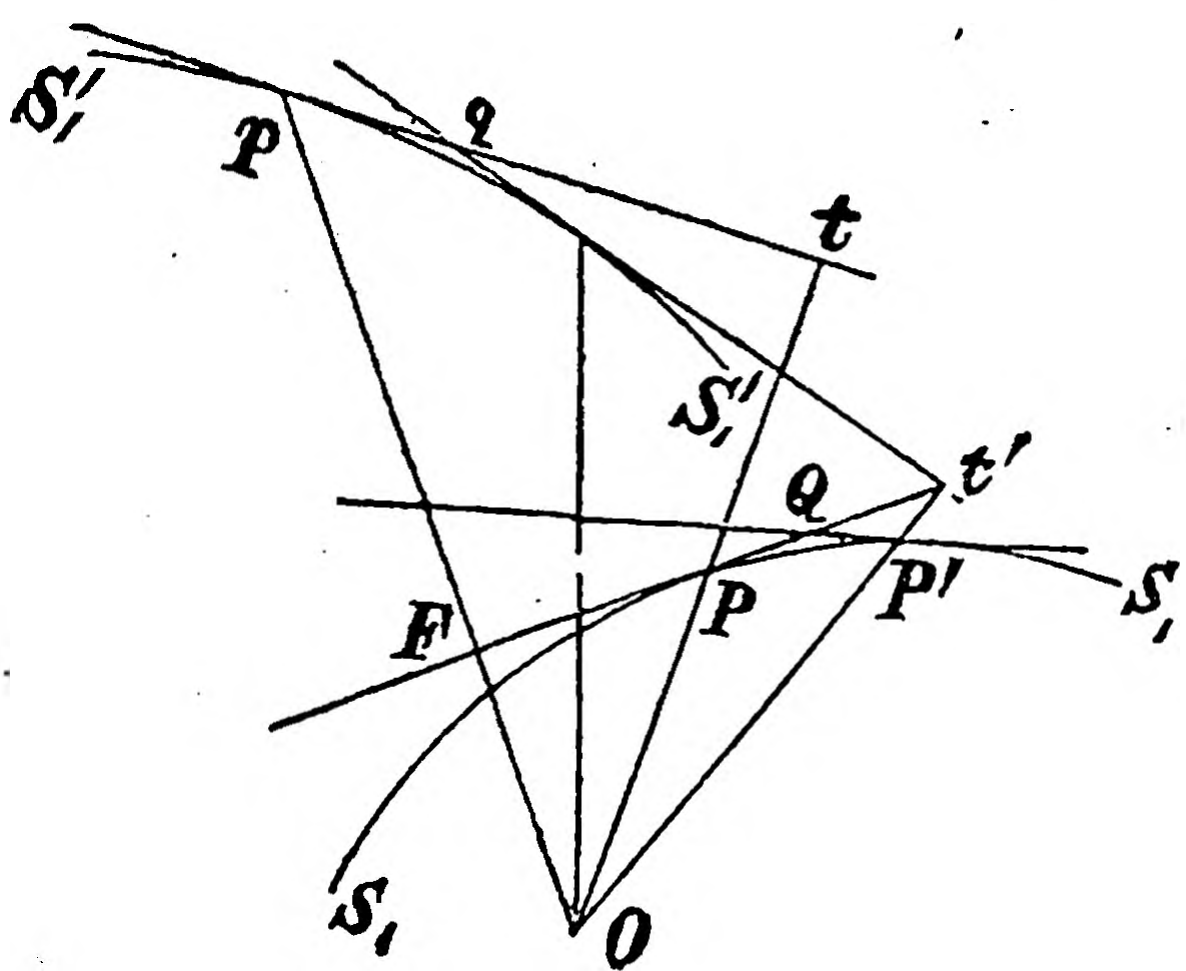
§ 405. Мы брали за основное коническое сѣченіе какое-нибудь изъ коническихъ сѣченій, но всегда почти берутъ въ этомъ методѣ за основное коническое сѣченіе кругъ и полюсы прямыхъ и поляры точекъ берутъ относительно круга.

Изъ уравненій круга и поляры точки $(x_1 y_1)$:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad xx_1 + yy_1 = r^2$$

легко видѣть, что поляра перпендикулярна къ прямой, соединяющей полюсъ съ центромъ, и что прямоугольникъ, построенный на разстояніяхъ

Фиг. 140.



полюса и поляры отъ центра круга, равенъ квадрату построенному на радиусѣ r . Если центръ круга есть O , полюсъ P , поляра Q , то имѣемъ:

$$OP \cdot OQ = r^2$$

Поэтому говорятъ: если изъ данной точки O (фиг. 140) опустимъ перпендикуляръ OT на какую-нибудь касательную къ кривой f_1 и продолжимъ его до точки p такъ, чтобы $OT \cdot Op = r^2$, то геометрическое мѣсто точекъ p будетъ кривая f_1' взаимная кривой f_1 . Очевидно, что это то же, что брать полюсъ p прямой PF относительно круга, коего радиусъ есть r .

Легко видѣть, что величина радиуса r измѣняетъ только размѣръ кривой f_1' , но не ея форму. Поэтому слово кругъ можетъ быть выброшено, а говорятъ, что кривая f_1' есть взаимная кривой f_1 относительно точки O , которую называютъ *началомъ*.

Выгода употребленія круга, какъ основнаго коническаго сѣченія, заключается въ слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ, которыя легко выводятся изъ того, что было сказано выше и которыя, въ этомъ методѣ, могутъ преобразовать не только предложенія относительно положенія, но и относительно мѣры линій и угловъ.

Эти предложенія суть слѣдующія:

Предложеніе 1. Разстояніе, какой-нибудь, точки P отъ начала, есть взаимное разстояніе отъ начала соотвѣтствующей прямой pt .

Предложеніе 2. Уголъ TQT' между двумя прямыми TQ и $T'Q$ равенъ углу pOp' , такъ какъ $Op \perp TQ$ и $Op' \perp T'Q$.

Поясимъ сказанное примѣрами.

§ 406. *Задача.* Найти взаимную кривую даннаго круга относительно другаго круга?

Рѣшеніе. Пусть начало или центръ основнаго круга будетъ O , пусть центръ даннаго круга будетъ C . Проведемъ, какую-нибудь, касательную PF къ кругу C , изъ центра или начала O опустимъ на нее перпендикуляръ OF и построимъ на этомъ перпендикулярѣ, такую точку p , чтобы:

$$OF \cdot Op = r^2$$

гдѣ r есть радіусъ круга O . Наша задача, очевидно, состоитъ въ томъ, чтобы найти геометрическое мѣсто точки.

На прямой OC (фиг. 141) построимъ точку Q , такъ чтобы:

$$OC \cdot OQ = r^2$$

и проведемъ $M'M \perp OC$. Изъ точки p проведемъ $pN \perp MM'$.

Изъ построенія имѣемъ:

$$OC \cdot OQ = OF \cdot Op$$

откуда:

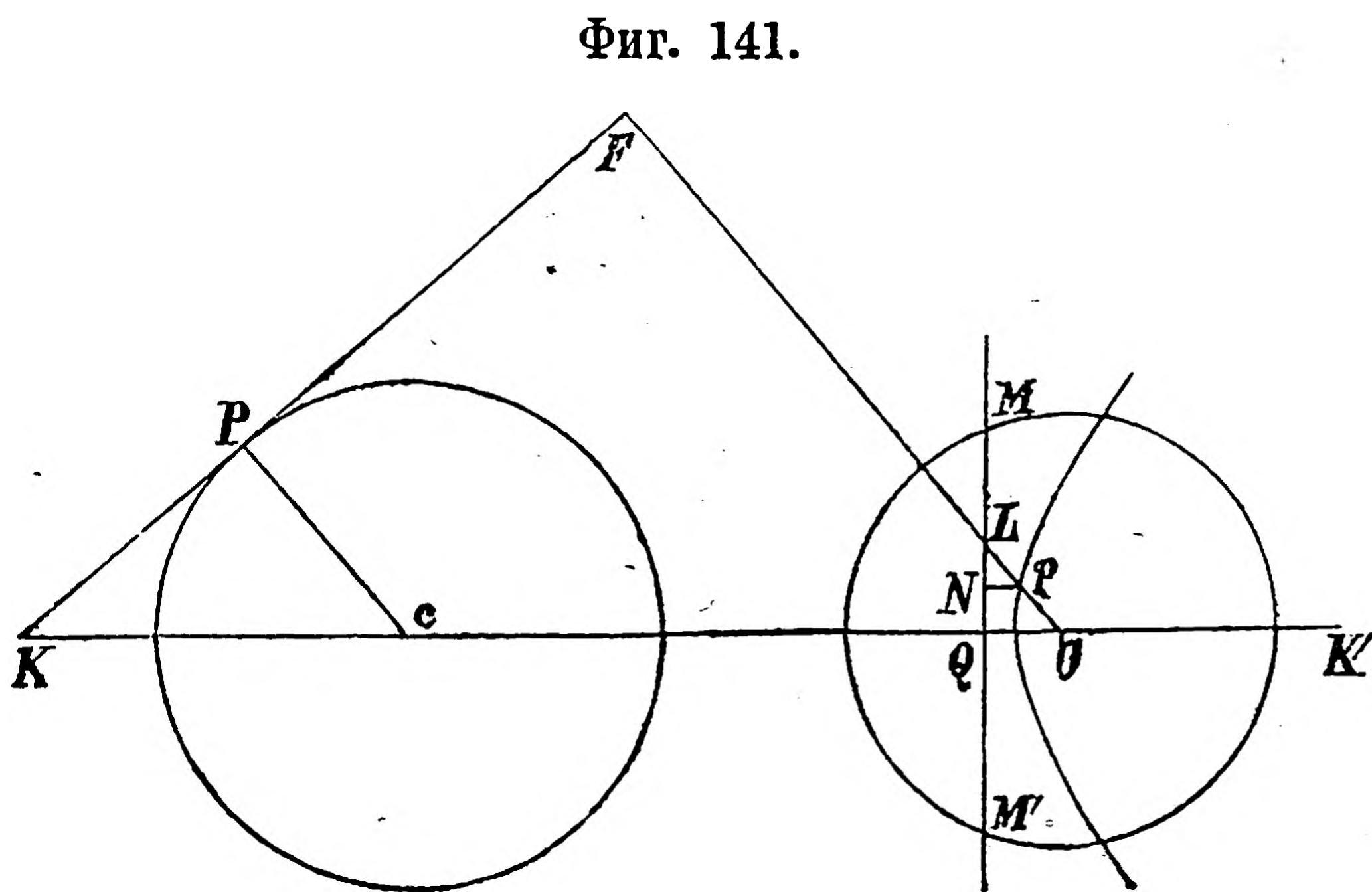
$$\frac{OC}{Op} = \frac{OF}{OQ}$$

Но легко видѣть изъ этой пропорціи и изъ треугольниковъ KOF , KCP , OQL , NpL , что:

$$\frac{OF}{OQ} = \frac{CP}{Np}$$

откуда:

$$\frac{OC}{CP} = \frac{Op}{Np}$$



Замѣчая, что $OC:PC$ есть величина постоянная, видимъ, что отношеніе разстояній точки p отъ прямой MM' и отъ точки O есть величина постоянная, слѣдовательно геометрическое мѣсто точки p есть коническое сѣченіе, коего фокусъ есть O , директриса MM' , а эксцентриситетъ $OC:CP$. Откуда видимъ, что коническое сѣченіе будетъ эллипсъ, гипербола или парабола, смотря потому будетъ-ли начало O внутри, внѣ или на окружности круга C .

§ 407. Принявъ во вниманіе пред. 2, § 405, имѣемъ слѣдующія два взаимныя предложенія:

Пр. 1. Двѣ касательныя къ кругу составляютъ равные углы съ ихъ хордой соприкосновенія.

Пр. 1. Прямая, соединяющая фокусъ съ пересѣченіемъ двухъ касательныхъ къ коническому сѣченію, дѣлитъ пополамъ уголь, составляемый радіусами векторами, проведенными изъ фокуса въ точки соприкосновенія.

Въ самомъ дѣлѣ, уголь между касательной PQ и хордою соприкосновенія PP' равенъ углу между Op и Oq , точно также уголь $QP'R$ равенъ углу между Op' и Oq , но такъ какъ $\angle QPP' = \angle QP'R$, то $\angle pOq = \angle p'Oq$.

Пр. 2. Въ кругѣ касательная перпендикулярна къ радіусу проведенному въ точку касанія.

Пр. 2. Радіусы, проведенные изъ фокуса коническаго сѣченія въ точку касанія какой-нибудь касательной и въ точку, гдѣ эта касательная встрѣчаетъ директрису, перпендикулярны.

Это слѣдуетъ изъ того, что директриса соотвѣтствуетъ центру круга.

Пр. 3. Прямая линія перпендикулярна къ прямой, соединяющей ея полюсъ съ центромъ круга.

Пр. 3. Прямая, проведенная изъ фокуса коническаго сѣченія въ какую-нибудь точку и въ точку пересѣченія поляры этой точки съ директрисой, перпендикулярны.

Пр. 4. Прямая, соединяющая точку пересѣченія двухъ касательныхъ къ кругу съ центромъ, дѣлитъ пополамъ уголь между касательными.

Пр. 4. Если точку пересѣченія, какой-нибудь, прямой съ директрисой соединимъ съ фокусомъ прямою, то эта прямая дѣлитъ пополамъ уголь между радіусами проведенными изъ фокуса къ точкамъ встрѣчи съ прямой.

Пр. 5. Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія касательныхъ къ кругу, составляющихъ данный уголь, есть кругъ концентрическій данному.

Пр. 5. Обертка хордъ коническаго сѣченія, составляющихъ въ фокусѣ данный уголь, есть коническое сѣченіе, имѣющее общій фокусъ и общую директрису съ даннымъ.

Пр. 6. Обертка хордъ соприкосновенія касательныхъ къ кругу, состав-

Пр. 6. Геометрическое мѣсто пересѣченія касательныхъ, коихъ хорды со-

ляющихъ данный уголъ, есть кругъ концентрическій данному.

Пр. 7. Геометрическое мѣсто точекъ касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ ряду концентрическихъ круговъ, есть кругъ, проходящей черезъ ихъ общій центръ и черезъ данную точку.

прикосновенія составляютъ данный уголъ въ фокусѣ коническаго сѣченія, есть коническое сѣченіе, имѣющее общій фокусъ и общую директрису съ даннымъ.

Пр. 7. Обвертка касательныхъ, проведенныхъ въ точкахъ пересѣченія данной прямой съ рядомъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ общій фокусъ и директрису, есть коническое сѣченіе, имѣющее тотъ-же фокусъ и касающееся данной прямой и общей директрисы.

Если въ этомъ послѣднемъ примѣрѣ, положимъ что данная прямая находится на бесконечности, то найдемъ, что обертка ассимптотъ ряда гиперболъ, имѣющихъ общій фокусъ и директрису, есть парабола, имѣющая тотъ же фокусъ и касающаяся общей директрисы.

Пр. 8. Обвертка хорды, стягивающей концы двухъ перпендикулярныхъ хордъ, проходящихъ черезъ данную точку на кругѣ есть центръ круга.

Пр. 8. Геометрическое мѣсто пересѣченія двухъ перпендикулярныхъ касательныхъ къ параболѣ есть директриса.

Мы говоримъ, вмѣсто коническаго сѣченія, парабола, такъ какъ взяли за начало данную точку на кругѣ (§ 406).

Пр. 9. Если изъ, какой-нибудь, точки на окружности круга, опустимъ перпендикуляры на стороны вписаннаго въ кругъ треугольника, то основанія этихъ перпендикуляровъ лежатъ на одной прямой линіи (§ 300).

Если данную точку на окружности возьмемъ за начало, то вписанному въ кругъ треугольнику будетъ соответствовать, описанный около параболы треугольникъ; основаніямъ перпендикуляровъ соответствуютъ прямая, проходящая черезъ точки соответственныя сторонамъ треугольника перпендикулярно къ радіусамъ векторамъ, проведеннымъ черезъ начало въ эти точки. Слѣдовательно, если соединимъ фокусъ съ вершинами описаннаго около параболы треугольника и изъ этихъ вершинъ возставимъ перпендикуляры къ этимъ радіусамъ, то эти перпендикуляры пересѣкутся въ одной точкѣ. Изъ этого слѣдуетъ, что кругъ, коего діаметръ есть разстояніе фокуса отъ точки пересѣченія выше упомянутыхъ перпендикуляровъ, проходитъ черезъ вершины описаннаго около параболы треугольника. Откуда вытекаетъ, что геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, касающихся трехъ данныхъ прямыхъ, есть кругъ, проходящій черезъ точки пересѣченія трехъ данныхъ прямыхъ.

§ 408. Если:

$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \quad , \quad A_1-\lambda A_2=0 \quad , \quad A_1-\mu A_2=0 \quad (6)$$

суть уравненія прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія A_1 и A_2 , то:

$$A'_1=0 \quad , \quad A'_2=0 \quad , \quad A'_1-\lambda A'_2=0 \quad , \quad A'_1-\mu A'_2=0 \quad (7)$$

будутъ полюсы прямыхъ (6), находящіяся на прямой (A'_1, A'_2) , если A'_r есть ничто иное какъ A_r , въ которое подставлены вмѣсто x выраженіе $\frac{1}{2} \frac{\partial f'}{\partial \xi}$ (§ 200).

Изъ этого вытекаютъ слѣдующія предложенія:

1. Ангармоническое отношеніе связки прямыхъ (6) равно ангармоническому отношенію ряда ихъ полюсовъ относительно даннаго конического сѣченія.

2. Ангармоническое отношеніе ряда точекъ (7) равно ангармоническому отношенію связки ихъ поляръ относительно конического сѣченія.

3. Если прямая, проходящая черезъ одну точку, составляютъ инволюціонную связку, то ихъ полюсы относительно даннаго конического сѣченія составляютъ инволюціонный рядъ.

4. Если точки, находящіяся на одной прямой линіи, составляютъ инволюціонный рядъ, то ихъ поляры относительно даннаго конического сѣченія образуютъ инволюціонную связку.

5. Точки пересѣченія связки коническихъ сѣченій, проходящей черезъ четыре данныя точки, съ какою-нибудь прямою образуютъ инволюціонный рядъ.

5. Касательныя, проведенныя изъ какой-нибудь точки, къ ряду коническихъ сѣченій, касающихся четырехъ данныхъ прямыхъ, образуютъ инволюціонную связку.

Этихъ примѣровъ достаточно, чтобы составить ясное понятіе о методѣ взаимныхъ поляръ, который принадлежитъ французскому геометру Понселе.

ГЛАВА XXIV.

Методъ проэкцій.

§ 409. Методъ проэкцій, такъ же какъ и методъ взаимныхъ поляръ, служитъ вообще къ отысканію свойствъ и предложеній фигуръ относительно положенія, но есть предложенія и относительно мѣры, къ которымъ эти оба метода могутъ быть приложены.

Въ настоящемъ методѣ *точка* соотвѣтствуетъ *точка*, *прямой*—*прямая*, а въ методѣ взаимныхъ поляръ соотвѣтствіе обратное. Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ методъ.

Если всѣ точки фигуры на плоскости соединимъ прямыми линіями съ точкою O внѣ плоскости, то образуется *пирамида* или *конусъ*, коихъ вершины будутъ точка O . Пересѣченіе этой пирамиды или конуса, какою-нибудь, плоскостью даетъ фигуру, которая называется *проэктией* данной фигуры. Плоскость, которая пересѣкаетъ пирамиду или конусъ называется *плоскостью проэктий*. Вотъ основныя предложенія этого метода.

Предложеніе 1. Какой-нибудь точкѣ одной фигуры соотвѣтствуетъ точка въ другой.

Въ самомъ дѣлѣ, если точка A будетъ соединена съ вершиною O , то точка a , въ которой, какая-нибудь, плоскость пересѣкаетъ OA , будетъ проэктия точки A на этой плоскости.

Предложеніе 2. Проэктия прямой линіи есть прямая линія.

Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ точки прямой линіи, соединимъ съ вершиною O , то образуется плоскость, пересѣченіе которой съ плоскостью проэктий есть прямая, очевидно, проэктия данной.

Слѣдовательно, если нѣсколько точекъ въ одной фигурѣ лежатъ на одной прямой линіи, или нѣсколько прямыхъ линій пересѣкаются въ одной точкѣ, то проэктии точекъ также лежатъ на одной прямой, а проэктии прямыхъ проходятъ черезъ одну точку.

Предложеніе 3. Всякая плоская кривая всегда проэктируется кривою того же порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, если данная кривая пересѣкается прямою въ точкахъ A, B, C, \dots , то ея проэктия пересѣчется проэктией сѣкущей въ столькихъ же точкахъ a, b, c, \dots , но степень кривой опредѣляется числомъ точекъ пересѣченія прямой съ кривою, а это число одно и то же въ обѣихъ кривыхъ. Если прямая AB пересѣкаетъ кривую въ дѣйствительныхъ и мнимыхъ точкахъ, то проэктия ab пересѣчетъ проэктию кривой въ столькихъ же дѣйствительныхъ и мнимыхъ точкахъ.

Точно также, если двѣ кривыя пересѣкаются, то ихъ проэктии пересѣкутся въ столькихъ же точкахъ и точка общая одной парѣ кривыхъ есть проэктия общей точки другой пары.

Предложеніе 4. Проэктия касательной къ кривой есть касательная къ проэктии кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, если какая-нибудь прямая AB пересѣкаетъ кривую въ точкахъ A и B , то ея проэктия ab пересѣчетъ проэктию кривой въ точкахъ a и b . Если точки A и B совпадутъ, то совпадутъ и точки

a и b , слѣдовательно, когда прямая AB дѣлается касательной къ данной кривой, то ab дѣлается касательной къ ея проэкции.

И вообще, если двѣ кривыя соприкасаются въ нѣсколькихъ точкахъ, то соприкасаются и ихъ проэкции въ столькихъ же точкахъ.

Предложеніе 5. Если черезъ вершину O конуса проведемъ плоскость, параллельно плоскости проэкции, которая пересѣчетъ первоначальную плоскость по прямой AB , то всякая связка прямыхъ линій, имѣющая свою вершину на AB будетъ проектироваться на плоскости проэкции рядомъ параллельныхъ линій. Въ самомъ дѣлѣ, если двѣ прямыя пересѣкаются на AB , то точка ихъ пересѣченія проектируется на безконечности, слѣдовательно проэкции такихъ прямыхъ параллельны.

Обратно, система параллельныхъ линій на начальной плоскости проектируется связкой прямыхъ, коихъ точки пересѣченія находятся на прямой AB пересѣченія плоскости проэкции съ плоскостью проходящею черезъ вершину O параллельно начальной плоскости. Это даетъ намъ право разсматривать систему параллельныхъ линій, какъ связку, коей точка пересѣченія находится на безконечности, такъ какъ ихъ проэкции вообще проходятъ черезъ одну точку въ конечномъ разстояніи. Точно также всѣ точки на безконечности можно разсматривать, какъ образующія прямую линію, такъ какъ ихъ проэкции находятся на прямой AB пересѣченія плоскости проэкции съ плоскостью, проходящею черезъ вершину O параллельно начальной плоскости.

§ 410. Это суть основныя предложенія настоящаго метода, изъ которыхъ видимъ, что если какое-нибудь свойство кривой относится только къ положенію, а не къ мѣрѣ, то это свойство сохраняетъ и проэція кривой. Такъ, напримѣръ, увидимъ ниже, что всякое коническое сѣченіе можетъ быть проектировано кругомъ, слѣдовательно изъ свойствъ круга мы можемъ выводить свойства коническихъ сѣченій. Всякій четырехугольникъ можетъ быть проектированъ параллелограммомъ, слѣдовательно можемъ изъ свойствъ параллелограмма выводить свойства четырехугольника.

Пр. 1. Если изъ концовъ хорды въ кругѣ, проходящей черезъ одну точку, проведемъ касательныя, то геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ касательныхъ есть кругъ.

Такъ какъ всякое коническое сѣченіе можетъ быть проектировано кругомъ, то это свойство принадлежитъ и коническому сѣченію.

Пр. 2. Если теоремы Паскаля или Бріаншона доказаны для круга, то онѣ имѣютъ мѣсто и для всякаго коническаго сѣченія.

Изъ этого слѣдуетъ, что если мы желаемъ доказать, какое-нибудь, проэтивное свойство фигуры, то достаточно доказать это свойство для

простѣйшей фигуры, которая можетъ быть проэктіей данной, а фигура дѣлается въ проэктіи простѣйшей, если нѣкоторыя изъ ея точекъ или прямыхъ проектируются на безконечности.

Пр. 3. Если желаемъ доказать гармоническія свойства полнаго четырехугольника $ABCD$, коего противоположныя стороны пересѣкаются въ точкахъ E и F , а діагонали въ точкѣ G , то мы должны всѣ точки фигуры соединить съ какою-нибудь точкою O внѣ плоскости четырехугольника и пересѣчь конусъ или пирамиду плоскостью параллельною плоскости OEF . Очевидно проэктія прямой EF будетъ на безконечности, слѣдовательно проэктія $abcd$ даннаго четырехугольника будетъ параллелограмъ, такъ какъ точка e пересѣченія ab и cd будетъ находится на безконечности, а слѣдовательно противоположныя стороны ab и cd будутъ параллельны. слѣдовательно всякій четырехугольникъ можетъ быть проэктированъ параллелограмомъ.

Такъ какъ діагонали въ параллелограмѣ взаимно дѣлятся пополамъ, то діагональ ac дѣлится гармонически въ точкахъ a , g , c и e , находящейся на ∞ ; слѣдовательно $(O.agce) = (O.AGCE)$, откуда вытекаетъ извѣстное гармоническое свойство полнаго четырехугольника.

§ 411. Мы сказали, что коническое сѣченіе можетъ быть проэктировано всегда кругомъ, но при этомъ мы можемъ выбрать вершину проэктіи O и плоскость проэктіи такъ, что одна изъ прямыхъ въ фигурѣ будетъ проектироваться на безконечности, какъ выше уже видѣли. Допустивши это будемъ имѣть слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Если дано коническое сѣченіе и точка въ его плоскости, то оно можетъ быть проэктировано кругомъ, коего центръ есть проэктія данной точки.

Доказательство. Для этого надобно его проэктировать такъ, чтобы поляръ проэктіи данной точки была на безконечности (§ 233).

Предложеніе 2. Два коническія сѣченія могутъ быть всегда проэктированы кругами.

Доказательство. Для этого надобно одно изъ нихъ проэктировать кругомъ и притомъ такъ, чтобы одна изъ ихъ общихъ хордъ проектировалась на безконечности, слѣдовательно (§ 306) проэктія втораго конического сѣченія пройдетъ черезъ двѣ безконечно удаленныя точки на первомъ кругѣ, а слѣдовательно сама будетъ кругъ.

Предложеніе 3. Два коническія сѣченія, имѣющія двойное соприкосновеніе, могутъ быть проэктированы концентрическими кругами.

Доказательство. Для этого надобно одно изъ нихъ проэктировать

кругомъ и притомъ такъ, чтобы ихъ общая хорда проектировалась на безконечности (§ 306).

§ 412. Теперь предложимъ нѣсколько примѣровъ, какъ изъ свойствъ круга выводить свойства коническихъ сѣченій или изъ частнаго предложенія коническаго сѣченія выводить болѣе общее.

Пр. 1. Прямая, проходящая черезъ какую-нибудь точку дѣлится гармонически этой точкой, ея полярной и коническимъ сѣченіемъ.

Это свойство и его взаимное суть проэктивныя и оба имѣя мѣсто для круга, будутъ имѣть мѣсто и для всякаго коническаго сѣченія.

Пр. 2. Ангармоническія свойства точекъ на коническомъ сѣченіи и касательныхъ къ нему, имѣя мѣсто для круга, будутъ имѣть мѣсто и для всякаго коническаго сѣченія.

Пр. 3. Хорда одного изъ двухъ концентрическихъ круговъ, касающаяся другаго, дѣлится пополамъ въ точкѣ касанія.

Пр. 4. Касательная къ одному изъ трехъ концентрическихъ круговъ, дѣлится другими двумя гармонически.

Пр. 3. Хорда одного изъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ двойное соприкосновеніе, касающаяся другаго, въ точкѣ касанія дѣлится гармонически и въ точкѣ пересѣченія ея съ хордою соприкосновенія.

Пр. 4. Два изъ трехъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ двойное соприкосновеніе въ двухъ общихъ точкахъ, дѣлят гармонически касательную къ одному изъ нихъ.

§ 413. Замѣчая, что если F есть фокусъ, а A и B суть циклическія точки, то AF и BF суть касательныя къ коническому сѣченію, найдемъ нѣкоторыя интересныя свойства фокуса.

Пр. 5. Геометрическое мѣсто центра круга, касающагося двухъ данныхъ круговъ, есть гипербола, коей фокусы суть центры данныхъ круговъ.

Пр. 5. Геометрическое мѣсто полюса прямой AB относительно коническаго сѣченія проходящаго черезъ двѣ данныя точки A и B и касающагося двухъ данныхъ коническихъ сѣченій, также проходящихъ черезъ точки A и B , есть коническое сѣченіе, касающееся четырехъ прямыхъ AC , CB , $C'A$, $C'B$, гдѣ C и C' суть полюсы AB относительно двухъ данныхъ коническихъ сѣченій.

Въ этомъ примѣрѣ мы замѣнили слово *кругъ* словами *коническое сѣченіе* проходящее черезъ точки A и B , слово *центръ* замѣнили словами: *полюсъ прямой AB* .

Пр. 6. Данъ фокусъ и двѣ точки на коническомъ сѣченіи, геометрическое

Пр. 6. Даны двѣ касательныя и двѣ точки на коническомъ сѣченіи, гео-

мѣсто пересѣченія касательныхъ въ этихъ точкахъ есть прямая линія.

Пр. 7. Данъ фокусъ и двѣ касательныя къ коническому сѣченію, геометрическое мѣсто другаго фокуса есть прямая линія.

Пр. 8. Кругъ, описанный около треугольника, описаннаго около параболы, проходитъ черезъ фокусъ (§ 285).

Надобно замѣтить, что второй описанный около параболы треугольникъ есть треугольникъ, коего вершины суть: фокусъ и двѣ циклическія точки.

Пр. 9. Геометрическое мѣсто центра круга, проходящаго черезъ данную точку и касающагося данной прямой, есть парабола, коей фокусъ есть данная точка.

Пр. 10. Геометрическое мѣсто центра коническаго сѣченія, касающагося четырехъ данныхъ касательныхъ, есть прямая линія, проходящая черезъ середины діагоналей, образуемаго касательными четырехугольника.

Изъ опредѣленія фокуса слѣдуетъ, что если два коническія сѣченія имѣютъ общій фокусъ, то онъ есть точка пересѣченія общихъ касательныхъ, а слѣдовательно коническія сѣченія имѣютъ свойства изложенныя въ § 356.

Если два коническія сѣченія имѣютъ общій фокусъ и общую директрису, то ихъ можно разсматривать, какъ имѣющія двойное соприкосновеніе, а слѣдовательно онѣ могутъ быть проектированы концентрическими кругами.

§ 414. Перейдемъ къ изслѣдованію свойствъ угловъ съ помощью метода проэкцій. Замѣтимъ при этомъ, что уголъ будучи постояннымъ въ извѣстной фигурѣ не остается постояннымъ въ проэкціи этой фигуры, поэтому свойства угловъ относительно величины не могутъ быть получены изъ свойствъ угловъ въ проэкціи фигуры.

метрическое мѣсто пересѣченія касательныхъ въ этихъ точкахъ есть прямая линія.

Пр. 7. Даны двѣ точки A , B и двѣ касательныя FA и FB , проходящія, каждая, черезъ одну изъ точекъ A , B и двѣ другія касательныя; геометрическое мѣсто пересѣченія касательныхъ FA и FB есть прямая линія.

Пр. 8. Если два треугольника описаны около коническаго сѣченія, то ихъ шесть вершинъ находятся на одномъ коническомъ сѣченіи.

Пр. 9. Даны касательная и три точки на коническомъ сѣченіи, геометрическое мѣсто пересѣченія касательныхъ въ двухъ изъ трехъ данныхъ точекъ, есть коническое сѣченіе, вписанное въ треугольникъ, коего вершины суть три данныя точки.

Пр. 10. Геометрическое мѣсто полюса, какой-нибудь прямой, относительно коническаго сѣченія, касающагося четырехъ данныхъ касательныхъ, есть прямая, соединяющая точки четвертыя гармоническія, въ которыхъ данная прямая пересѣкаетъ діагонали четырехугольника.

Пусть $x = 0$, $y = 0$ будутъ уравненія двухъ перпендикулярныхъ прямыхъ, то уравненія прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія данныхъ прямыхъ и черезъ циклическія точки будутъ (§ 307):

$$x + iy = 0 \quad , \quad x - iy = 0$$

которыя съ $x = 0$ и $y = 0$ составляютъ гармоническую связку. Пусть A , B , C , D будутъ четыре гармоническія точки на одной прямой, A и B могутъ быть дѣйствительными и мнимыми, если эти четыре точки могутъ быть такъ проэктированы, что A и B сдѣлаются въ проэкции циклическими точками, то проэкции прямыхъ, проходящихъ черезъ точки C и D , будутъ перпендикулярны.

Обратно, двѣ какія-нибудь перпендикулярныя прямая проэктируются прямыми, которыя дѣлятъ гармонически прямую, соединяющую проэкции циклическихъ точекъ.

Пр. 1. Касательная въ кругѣ перпендикулярна къ радіусу проведенному въ точку касанія.

Пр. 1. Какая-нибудь хорда въ коническомъ сѣченіи пересѣкается гармонически, какою-нибудь касательною и прямою соединяющею точку касанія съ полюсомъ хорды (§ 208).

Это слѣдуетъ изъ предложенія, что хорда проэктируется на плоскости круга прямою на безконечности, точки пересѣченія хорды съ коническимъ сѣченіемъ проэктируются циклическими точками, а полюсъ хорды—центромъ круга.

Пр. 2. Какая-нибудь прямая, проведенная черезъ фокусъ коническаго сѣченія, перпендикулярна къ прямой, соединяющей фокусъ съ полюсомъ данной прямой.

Пр. 2. Какая-нибудь прямая, проходящая черезъ данную точку, прямая соединяющая ее полюсъ съ этой точкой и двѣ касательныя черезъ эту точку, составляютъ гармоническую связку.

Пр. 3. Найти геометрическое мѣсто полюса данной прямой относительно системы софокусныхъ коническихъ сѣченій?

Рѣшеніе. Если даны два фокуса, то данъ и четырехугольникъ, въ который вписано коническое сѣченіе, поэтому можемъ приложить пр. 10 § 413. Одна изъ діагоналей этого четырехугольника есть прямая, соединяющая фокусы, слѣдовательно одна изъ точекъ искомаго мѣста есть четвертая гармоническая къ точкѣ, гдѣ данная прямая дѣлитъ разстояніе между фокусами. Другая діагональ четырехугольника есть безконечно удаленная прямая и, такъ какъ концы діагонали суть циклическія точки, то геометрическое мѣсто есть прямая перпендикулярная къ данной прямой. Такимъ образомъ геометрическое мѣсто вполне опредѣлено.

Пр. 4. Софокусныя коническія сѣченія пересѣкаются подѣ прямымъ угломъ.

Пр. 5. Геометрическое мѣсто, перпендикулярныхъ касательныхъ къ центральному коническому сѣченію, есть кругъ.

Пр. 6. Если черезъ данную точку на коническомъ сѣченіи проведемъ двѣ перпендикулярныя хорды, то геометрическое мѣсто прямой, соединяющей ихъ концы, есть точка.

Пр. 4. Если два коническія сѣченія вписаны въ одинъ четырехугольникъ, то двѣ касательныя въ одной изъ точекъ ихъ пересѣченія пересѣкаютъ гармонически, какую-нибудь изъ діагоналей четырехугольника.

Пр. 5. Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія касательныхъ къ коническому сѣченію, которыя дѣлятъ гармонически отрѣзокъ AB , есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки A и B .

Пр. 6. Если черезъ какую-нибудь точку на коническомъ сѣченіи проведемъ гармоническую связку, коей два луча постоянны, то геометрическое мѣсто хорды, соединяющей точки пересѣченія двухъ остальныхъ лучей, есть точка.

§ 415. Пары прямыхъ линій, проходящихъ черезъ одну точку и при томъ такъ, что каждая пара составляетъ равные углы съ данной прямой, пересѣкаютъ бесконечно удаленную прямую въ точкахъ, составляющихъ инволюціонный рядъ, коему принадлежатъ циклическія точки, какъ сопряженныя. Въ самомъ дѣлѣ, эти пары пересѣкаютъ какую-нибудь прямую въ точкахъ, образующихъ инволюціонный рядъ, коего двойныя точки суть пересѣченіе прямой внутреннею и внѣшнею равнодѣлящими углы между прямыми. Изъ этого очевидно, что циклическія точки принадлежатъ системѣ, такъ какъ прямыя, направленныя къ нимъ, суть сопряженно гармоническія съ каждой парой перпендикулярныхъ прямыхъ (Пред. 2 § 307).

Пр. Касательныя, проведенныя изъ какой-нибудь точки къ системѣ софокусныхъ коническихъ сѣченій, составляютъ равные углы съ двумя данными прямыми.

Пр. Касательныя изъ какой-нибудь точки къ системѣ коническихъ сѣченій, вписанныхъ въ данный четырехугольникъ, пересѣкаютъ какую-нибудь изъ діагоналей этого четырехугольника въ точкахъ, образующихъ инволюціонный рядъ, коего сопряженныя точки суть концы діагонали.

§ 416. Двѣ прямыя, составляющія постоянный уголъ, пересѣкаютъ бесконечно удаленную прямую въ точкахъ, коихъ ангармоническое отношеніе съ циклическими точками есть величина постоянная.

Если $x = 0$, $y = 0$ суть двѣ прямыя, составляющія уголъ θ , то направление къ циклическимъ точкамъ дается уравненіемъ:

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta = 0$$

разлагая это уравненіе на линейные множители, легко видѣть, что ангармоническое отношеніе четырехъ линій будетъ постоянно, если уголъ θ есть величина постоянная.

Пр. Предложеніе, что уголъ вписанный въ сегментъ круга есть величина постоянная, есть ничто иное какъ предложеніе, что ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ на кругѣ, изъ коихъ двѣ суть циклическія, есть величина постоянная. Сказаннаго достаточно для составленія яснаго понятія о методѣ проэкцій.

§ 417. Таковы два геометрические метода для изслѣдованія свойствъ кривыхъ линій; въ одномъ изъ нихъ координаты двухъ системъ точекъ такъ связаны между собою, что каждой точкѣ въ одной системѣ соответствуетъ точка въ другой, каждой прямой соответствуетъ прямая—это методъ проэкцій. Во второмъ, каждой точкѣ въ одной системѣ соответствуетъ прямая въ другомъ и обратно—это методъ взаимныхъ поляръ.

Эти два метода можно обобщить и изложить аналитически слѣдующимъ образомъ.

Пусть будутъ двѣ системы точекъ въ одной плоскости или въ различныхъ плоскостяхъ, пусть каждая изъ системъ будетъ отнесена къ координатнымъ треугольникамъ $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ въ первой системѣ и $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$ во второй. Если координаты точекъ этихъ двухъ системъ будутъ всегда связаны уравненіемъ:

$$F(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

то, принимая x_1, x_2, x_3 за постоянныя величины, а y_1, y_2, y_3 за переменныя, будемъ имѣть кривую во второй системѣ, соответствующую точкѣ въ первой и обратно: слѣдовательно каждой точкѣ въ одной системѣ будетъ соответствовать кривая въ другой. Но если координаты точекъ первой системы будутъ линейныя функціи другой, то обратно координаты точекъ второй системы будутъ линейныя функціи координатъ первой. При такой зависимости, очевидно, каждой точкѣ въ одной системѣ будетъ соответствовать точка въ другой и обратно; каждой прямой въ одной системѣ будетъ соответствовать прямая въ другой и т. д.

Если координаты точекъ въ одной системѣ будутъ связаны линейно съ координатами прямой въ другой системѣ, то, очевидно, точкѣ въ одной системѣ будетъ соответствовать прямая въ другой и обратно. Такова общая мысль обобщенія двухъ геометрическихъ методовъ: метода проэкцій и метода взаимныхъ поляръ.

Сѣченія конуса плоскостью.

§ 418. Кривыя втораго порядка называютъ *коническими сѣченіями*, потому что всѣ онѣ могутъ быть получены пересѣченіемъ конуса плоскостью въ различныхъ направленіяхъ.

Открытіе коническихъ сѣченій древніе геометры приписываютъ ученику Платона Менайхму и поэтому часто называютъ эти кривыя „*тріадою Менайхма*.“ Нѣкоторыя же геометры ихъ открытіе приписываютъ самому Платону, но это мнѣніе едва-ли справедливо. Первый изъ геометровъ исчерпавшій до малѣйшихъ подробностей свойства коническихъ сѣченій былъ Апполоній Пергскій (во II в. до Р. X.); ему приписываютъ и названія: эллипсъ, гипербола и парабола—*недостатокъ, избытокъ и равенство*. Сначала геометры получали эти кривыя, пересѣкая конусъ плоскостью, перпендикулярною къ образующей или ребру, и, такимъ образомъ, получали эллипсъ, если конусъ былъ остроугольный, параболу, если онъ былъ прямоугольный и гиперболу если конусъ былъ тупоугольный. Евтокій (въ VI в. послѣ Р. X.) говоритъ, что и названія эти произошли по этой причинѣ, т. е. если конусъ былъ остроугольный, то *недоставало* до прямого угла—эллипсъ, если конусъ былъ прямоугольный, то было *равенство*—парабола, если уголъ былъ тупой, то былъ *избытокъ* надъ прямымъ угломъ—гипербола. Но Папусъ, жившій раньше Евтокія, говоритъ, что названія эти произошли отъ слѣдующихъ свойствъ этихъ трехъ кривыхъ.

Если эти кривыя будутъ отнесены къ ихъ вершинамъ, то ихъ уравненія будутъ:

$$y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad , \quad y^2 = 2px \quad , \quad y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2$$

Слѣдовательно въ эллипсѣ противъ параболы недостаетъ того, что является избыткомъ въ гиперболѣ.

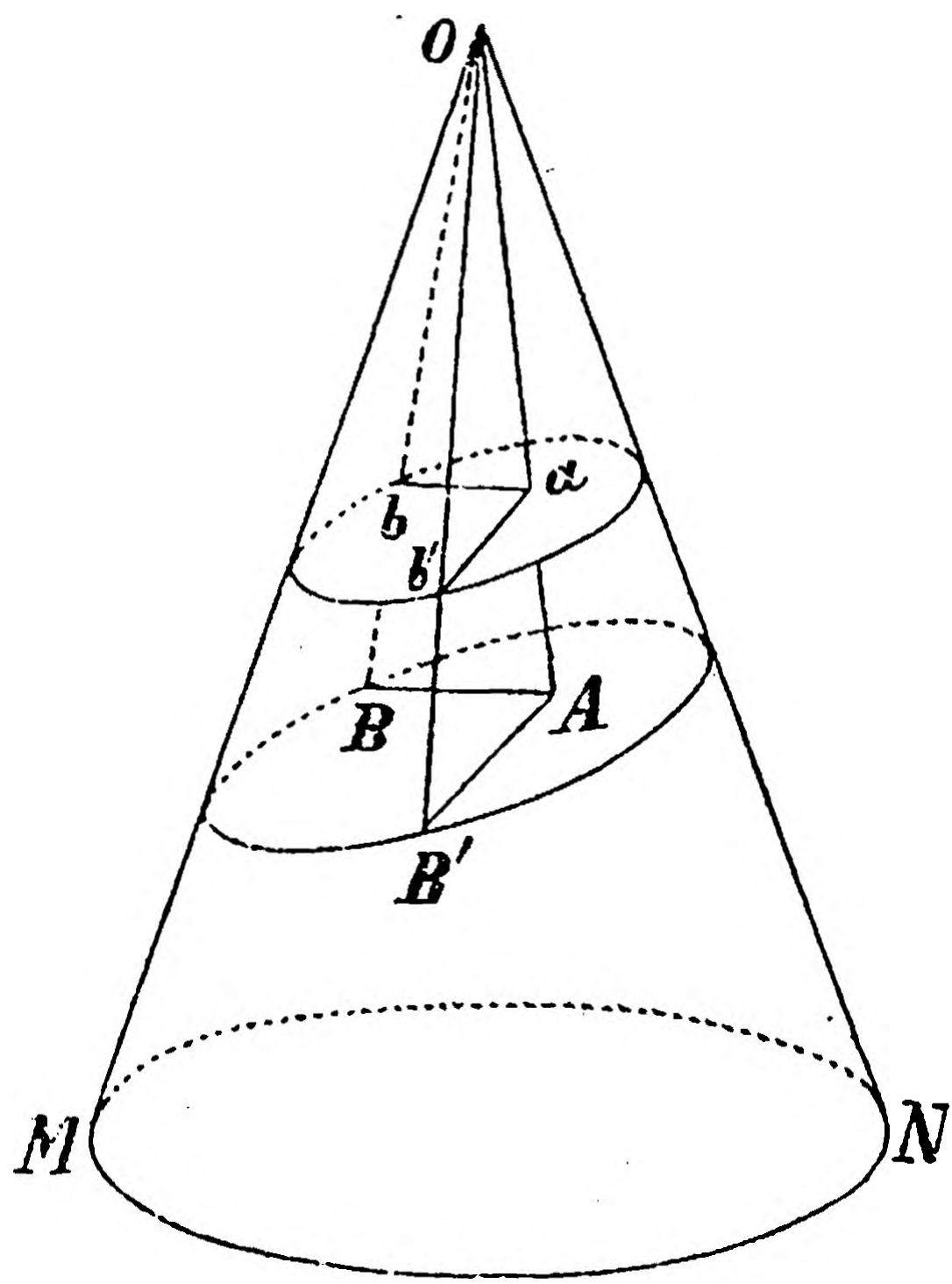
Апполоній Пергскій показалъ, что всѣ коническія сѣченія могутъ получиться изъ одного и того-же конуса, пересѣкая его плоскостью въ различныхъ направленіяхъ. Въ заключеніе покажемъ это.

§ 419. *Предложеніе*. Кривыя, полученныя пересѣченіемъ конуса параллельными плоскостями, подобны.

Доказательство. Пусть O (фиг. 142) будетъ вершина конуса, пусть прямая OA , соединяющая какую-нибудь точку A въ плоскости сѣченія, встрѣчаетъ параллельную ей другую плоскость въ точкѣ a , проведемъ радіусы векторы изъ точекъ A и a къ соответствующимъ двумъ точкамъ B и b на кривыхъ.

Изъ подобія треугольниковъ $\triangle AOB$ и $\triangle aOb$ имѣемъ:

Фиг. 142.



$$\frac{AB}{ab} = \frac{AO}{aO}$$

и такъ какъ такая зависимость существуетъ для всѣхъ радиусовъ векторовъ, проведенныхъ изъ точекъ A и a , ко всѣмъ соотвѣтственнымъ точкамъ на кривыхъ, то эти кривыя подобны (§ 287).

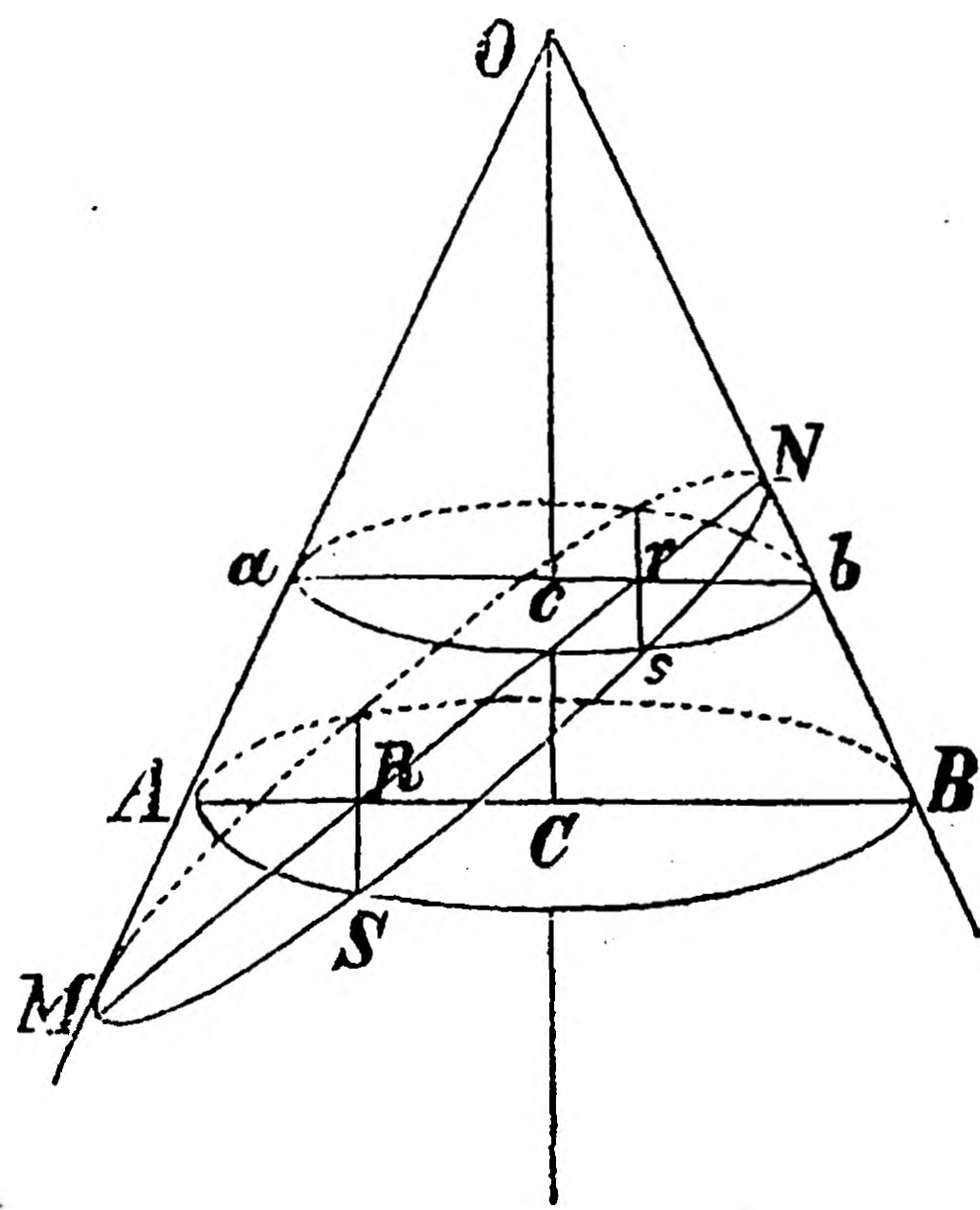
Слѣдствіе. Всѣ сѣченія конуса, имѣющаго основаніемъ кругъ, плоскостями параллельными основанію, суть круги.

§ 420. *Определение.* Конусъ, коего основаніе есть кругъ, называется *прямымъ*, если основаніе перпендикулярна, опущеннаго изъ вершины на основаніе есть центръ основанія, въ противномъ случаѣ конусъ называется *косымъ*. Рассмотримъ сначала сѣченіе прямого конуса.

Предложеніе. Пересѣченіе прямого конуса плоскостью можетъ быть: эллипсъ, гипербола и парабола.

Предложеніе. Пересѣченіе прямого конуса плоскостью можетъ быть: эллипсъ, гипербола и парабола.

Фиг. 143.



Доказательство. Пусть (фиг. 143) OAB будетъ плоскость, проходящая по оси OC перпендикулярно къ плоскости MSN сѣченія конуса, пусть плоскости основанія ASB и сѣченія MSN будутъ обѣ перпендикулярны къ плоскости AOB . Пусть RS будетъ пересѣченіе основанія ASB съ MSN , очевидно RS также перпендикулярна къ плоскости AOB .

Случай 1. Положимъ, что прямая MN , по которой пересѣкаются плоскости AOB и MSN , пересѣкаетъ обѣ стороны OA и OB треугольника AOB , съ одной стороны вершины O . Проведемъ плоскость aSb , параллельно основанію ASB , черезъ какую-нибудь изъ точекъ S сѣченія MSN .

Такъ какъ сѣченіе ASB и asb суть круги, то имѣемъ:

$$SR^2 = AR \cdot RB \quad , \quad sr^2 = ar \cdot rb$$

Но изъ подобія треугольниковъ $\triangle ARM$ и $\triangle arM$; $\triangle BRN$ и $\triangle brN$ можно показать, что:

$$AR \cdot RB : RM \cdot RN = ar \cdot rb : Mr \cdot rN$$

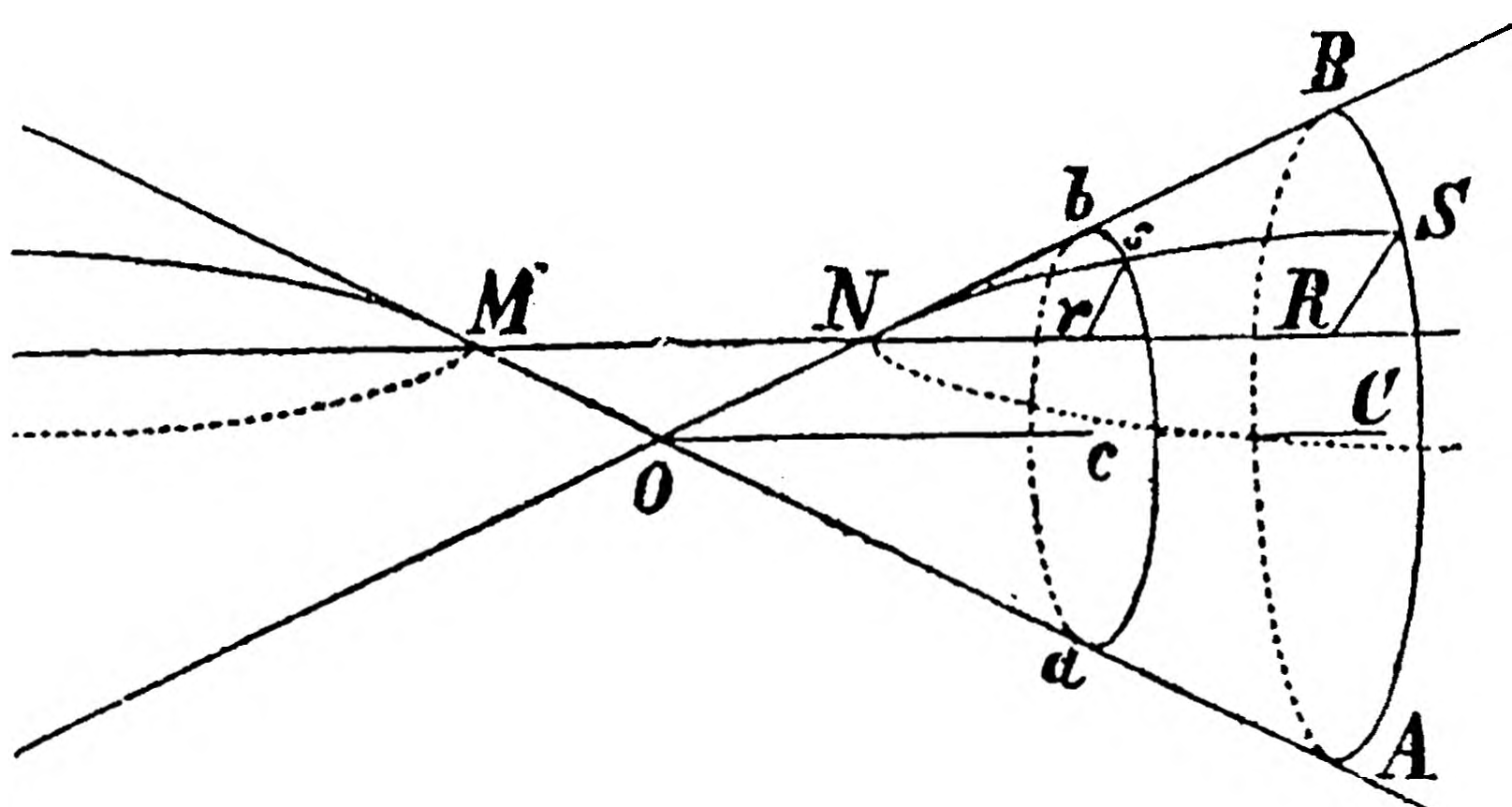
откуда:

$$RS^2 : rS^2 = MR \cdot RN : Mr \cdot rN$$

а такая зависимость показываетъ, что сѣченіе MS_sN есть эллипсъ.

Случай 2. Прямая MN встрѣчаетъ продолженіе одной изъ сторонъ, напримѣръ OA (фиг. 144). Поступая, какъ выше, найдемъ ту же зависимость, но только точка M будетъ лежать на продолженіи ребра OA . Легко видѣть изъ этой зависимости, что это будетъ гипербола.

Фиг. 144.



Случай 3. Пусть (фиг. 145) прямая $NM \parallel OA$. Въ этомъ случаѣ, такъ какъ:

$$AR = ar$$

и

$$RB : rb = NR : Nr$$

то имѣемъ:

$$RS^2 = AR \cdot RB \quad , \quad rs^2 = AR \cdot rb$$

откуда:

$$rs^2 = \frac{RS^2}{RB} \cdot rb$$

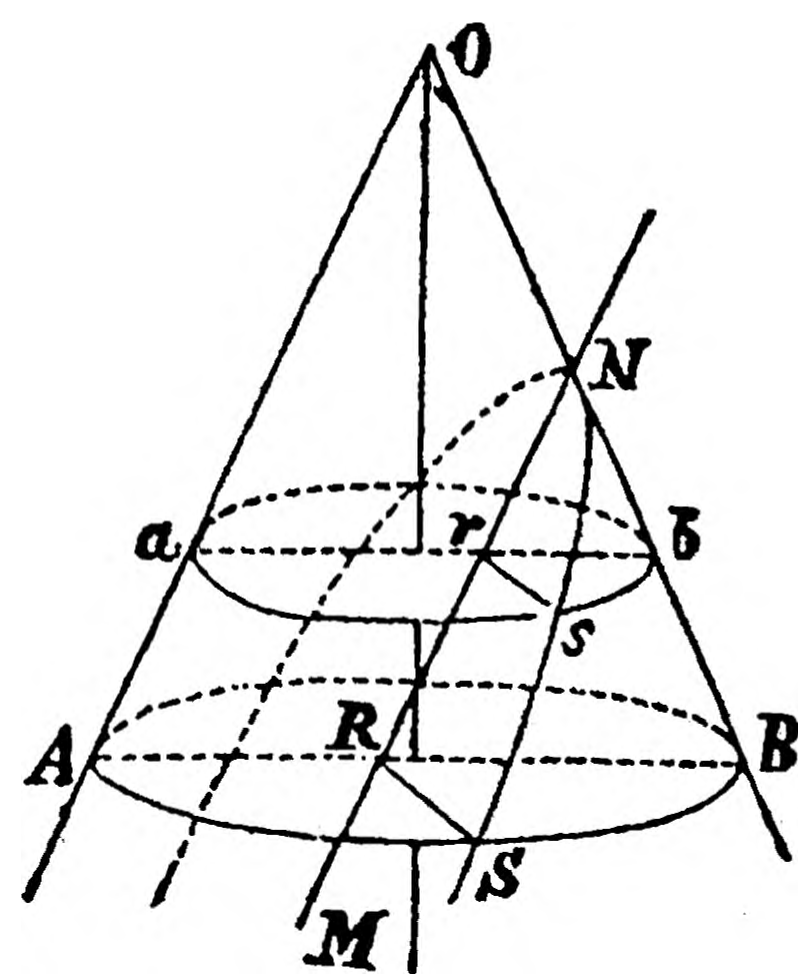
но:

$$RS^2 : RB$$

есть величина постоянная, слѣдовательно это свойство параболы.

Проекціи касательныхъ въ точкахъ A и B къ кругамъ суть касательныя въ точкахъ M и N къ коническимъ сѣченіямъ. Если коническое сѣченіе будетъ парабола, то точка M и касательная будутъ на бесконечности, слѣдовательно опять приходимъ къ тому заключенію, что каждая парабола имѣетъ касательной бесконечно-удаленную прямую.

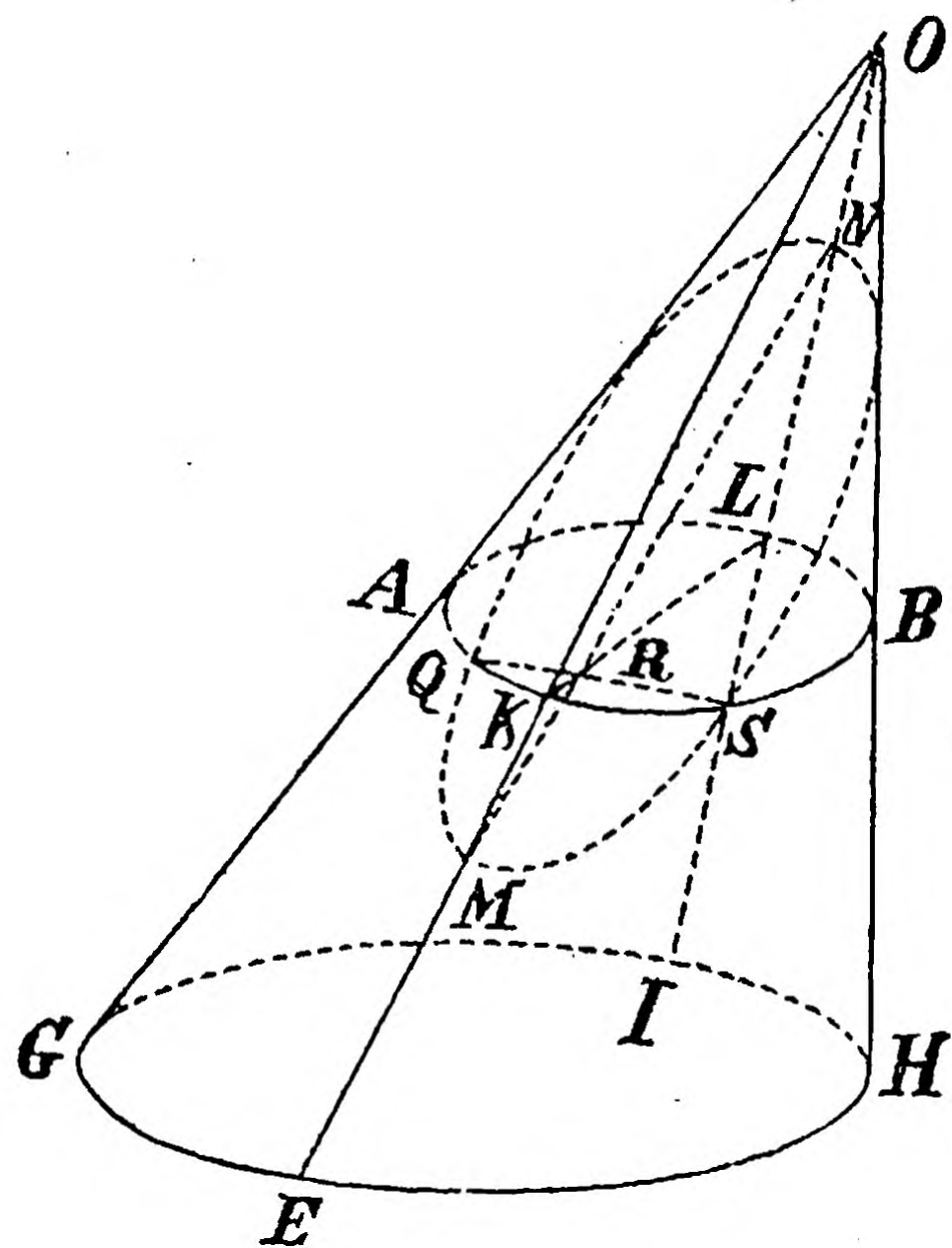
Фиг. 145.



§ 421. Теперь положимъ, что конусъ косою. Пусть основаніе конуса есть кругъ; сѣченіе конуса плоскостями параллельными основанію, какъ мы выше видѣли, будутъ круги. Пусть $MSNQ$ будетъ пересѣченіе конуса съ какой-нибудь плоскостью, пусть $AQSRL$ будетъ кругъ, полученный отъ пересѣченія конуса плоскостью параллельною основанію и при томъ проведенною такъ, чтобы кривая и кругъ имѣли общую хорду, пусть эта хорда будетъ QS .

Проведемъ (фиг. 146) діаметръ KL , дѣлящій хорду QS пополамъ, проведемъ прямыя OK и OL ; эти прямыя пересѣкутъ кривую $MSNQ$ въ точкахъ M и N , прямая KL будемъ, очевидно, проэктіа MN .

Фиг. 146.



Изъ построения имѣемъ:

$$RS^2 = KR \cdot RL \quad , \quad rS^2 = Kr \cdot rb$$

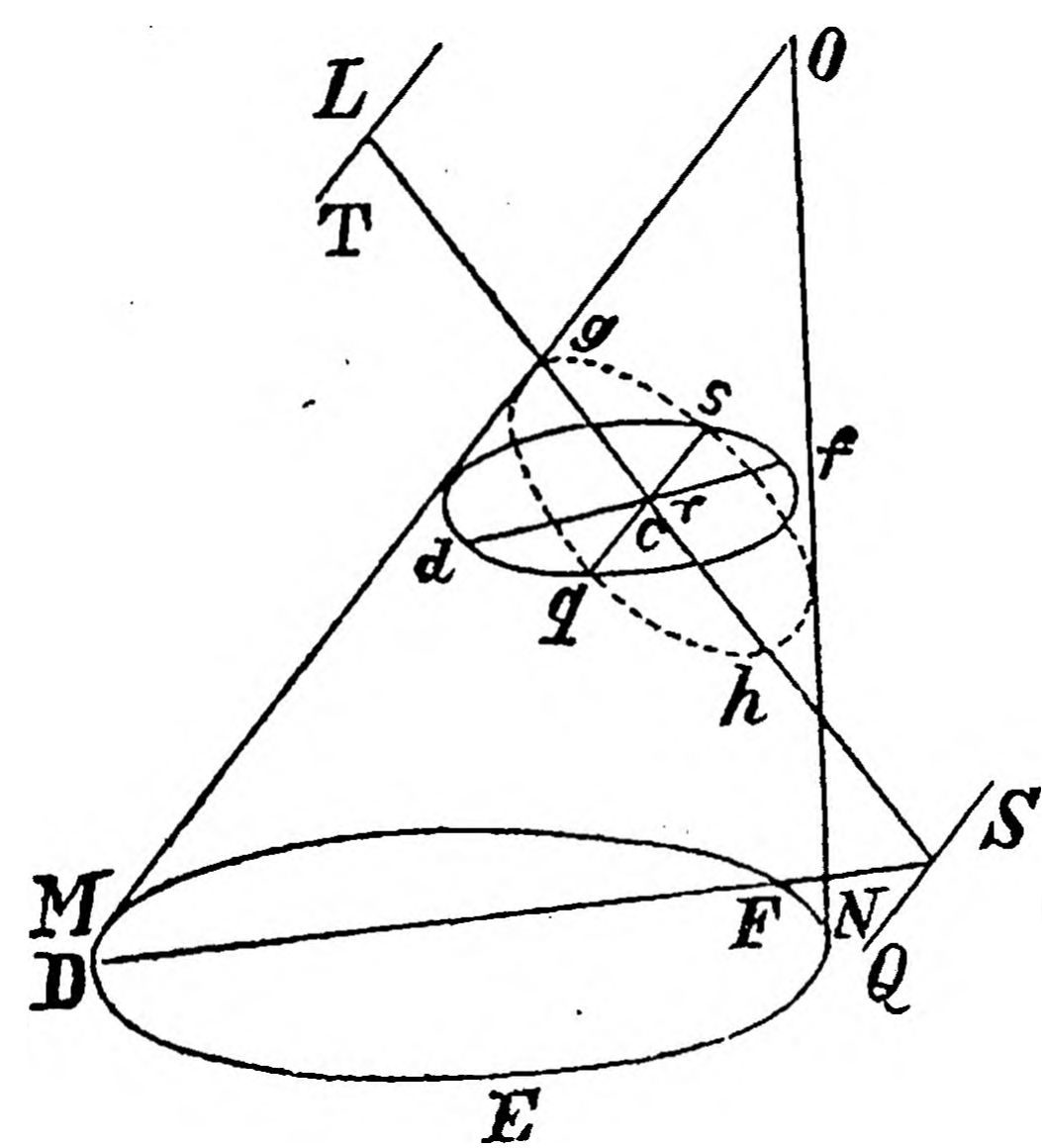
если rS есть хорда пересѣченія кривой другою круговою плоскостью. Изъ подобія треугольниковъ KRM и krM ; LRN и lrN въ плоскости OLK найдемъ, что:

$$RS^2 : rS^2 = MR \cdot RN : Mr \cdot rN$$

а это показываетъ, что кривая $MSNQ$ есть коническое сѣченіе, въ которомъ MN есть діаметръ сопряженный хордѣ QS . Кривая будетъ эллипсъ, если MN пересѣкаетъ OL и OK по одну сторону вершины O . Гипербола, если MN пересѣкаетъ эти прямыя съ различныхъ сторонъ точки O , и наконецъ парабола, если MN параллельна одной изъ прямыхъ OL и OK .

§ 422. *Предложеніе.* Если плоскость круговаго сѣченія конуса пересѣчется, какою-нибудь, плоскостью, то сопряженный діаметръ общей хорды QS въ этомъ сѣченіи и въ кругѣ пересѣкутъ QS въ одной точкѣ.

Фиг. 147.



Это предложеніе очевидно, если коническое сѣченіе и кругъ пересѣкаются въ дѣйствительныхъ точкахъ, но требуетъ доказательства, если QS пересѣкаетъ обѣ кривыя въ мнимыхъ точкахъ.

Доказательство. Пусть (фиг. 147) QS будетъ пересѣченіе плоскостей: коническаго сѣченія $qksq$ и круговаго DEF .

Пусть DF будетъ діаметръ перпендикулярный къ QS , проведемъ такую плоскость dqf круговаго сѣченія, въ которой-бы пересѣкались кругъ и коническое сѣченіе въ дѣйствительныхъ точкахъ

q и s , очевидно $qs \parallel QS$, черезъ средину r хорды qs проведемъ Rr , мы говоримъ, что Rr есть сопряженный діаметръ направленію qs или QS .

Въ самомъ дѣлѣ, діаметръ df , перпендикулярный къ qs въ кругѣ dqf , очевидно, есть проэктіа діаметра DF , слѣдовательно геометрическое мѣсто срединъ хордъ параллельныхъ qs и QS будетъ плоскость Odf . Откуда слѣдуетъ, что діаметръ, сопряженный QS въ какомъ-нибудь сѣченіи есть пересѣченіе плоскости Odf съ плоскостью сѣченія, слѣдовательно Rr и есть этотъ діаметръ.

Легко видѣть, что:

$$dr.rf = rs^2 \quad , \quad gr.rk = \text{квад. діам. парал. } qs$$

Но изъ подобія треугольниковъ, какъ выше, имѣемъ:

$$dr.rf : DR.RF = gr.rk : gR.Rk$$

откуда:

$$DR.RF : gR.kR = rs^2 : \text{квад. діам. парал. } QS$$

а потому, если дано коническое сѣченіе qkg , то можно опредѣлить прямоугольникъ $DR.RF$, т. е. квадратъ касательной проведенной изъ точки R къ кругу DEF .

§ 423. Остается показать, какъ выше упомянули (§ 410), что всякое коническое сѣченіе можно проэктировать кругомъ.

Пусть $gskq$ будетъ, какое-нибудь коническое сѣченіе и TL какая-нибудь прямая въ его плоскости (фиг. 147), очевидно, надобно найти вершину конуса, коего основаніе есть данное коническое сѣченіе $gskq$, и притомъ такъ чтобы кривая пересѣченія этого конуса плоскостью параллельною плоскости QPL , былъ кругъ. Тогда всѣ сѣченія конуса плоскостями параллельными плоскости QTL будутъ круги

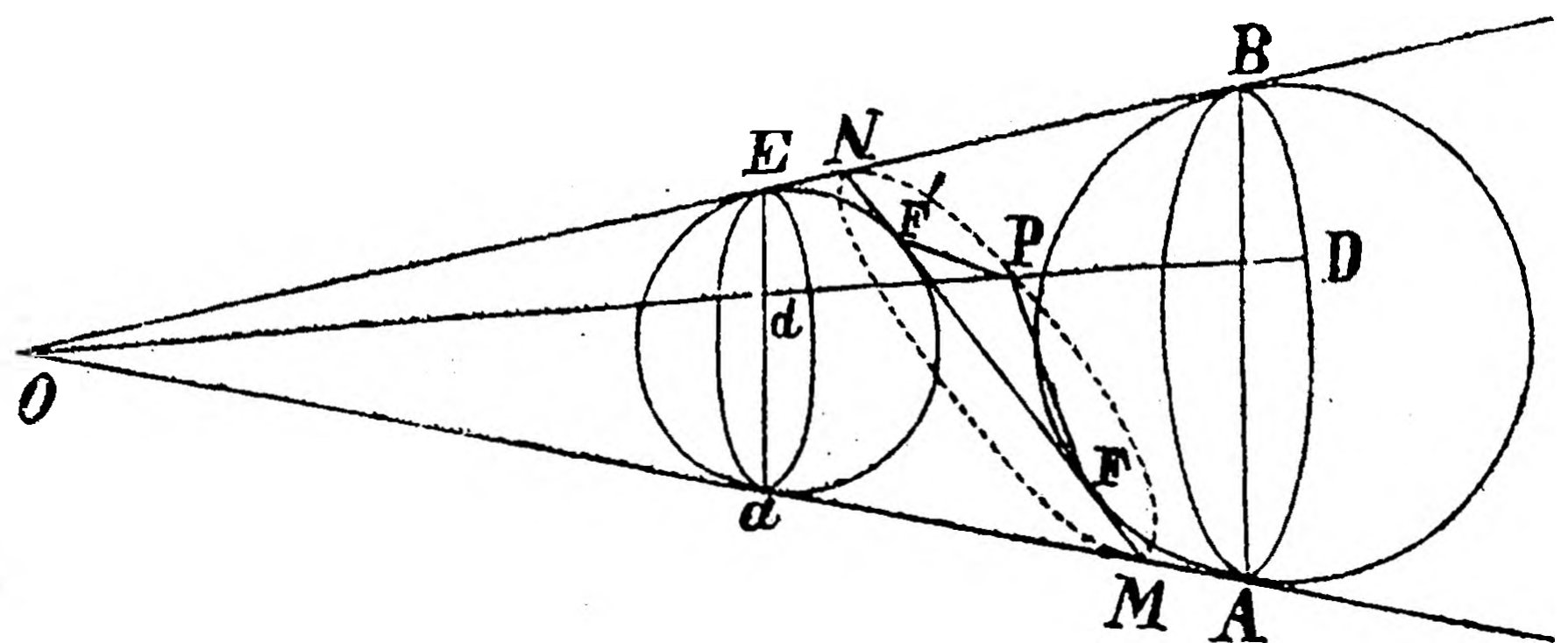
Если L есть точка пересѣченія прямой LT съ сопряженнымъ ей діаметромъ kg , то изъ предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что разстояніе OL будетъ извѣстно, такъ какъ вершину O можно разсматривать, какъ безконечно малый кругъ и мы имѣемъ:

$$OL^2 : gL : sL = rs^2 : \text{квадр. діам. парал. } TL$$

OL находится въ перпендикулярной плоскости къ TL . Такъ какъ относительно разстоянія OL мы не имѣемъ другихъ условій, то изъ этого заключаемъ, что вершина искомаго конуса находится на окружности круга въ плоскости перпендикулярной къ TL , коего радіусъ есть OL .

§ 424. *Предложеніе.* Если въ прямой конусъ пересѣченный, какою-нибудь, плоскостью впишемъ шаръ, который бы касался плоскости сѣченія, то точка прикосновенія его съ плоскостью сѣченія будетъ фокусъ коническаго сѣченія, полученнаго пересѣченіемъ плоскости съ конусомъ.

Доказательство. Возьмемъ, какую-нибудь точку P (фиг. 148) на коническомъ сѣченіи, соединимъ ее съ вершиною O прямою OP , которая пересѣчетъ плоскости соприкосновенія шаровъ съ конусомъ въ точкахъ D и d .



Фиг. 148.

Если шаръ касается плоскости сѣченія въ точкѣ F , то очевидно $PD=PF$, такъ какъ PD и PF суть касательныя къ шару, точно также, если F' есть точка прикосновенія другаго шара, то $Pd=PF'$; откуда:

$$PD + Pd = Dd = PF + F'P$$

Но отрѣзокъ Dd есть величина постоянная, слѣдовательно точки F и F' суть фокусы конического сѣченія. Это интересное предложеніе было уже извѣстно Апполонію Пергскому.

Ортогональная проэктія.

§ 425. Если изъ всѣхъ точекъ фигуры опустимъ перпендикуляры на какую-нибудь плоскость, то основанія перпендикуляровъ образуютъ на плоскости фигуру, которая называется *ортогональной проэктіей* данной фигуры.

Слѣдовательно ортогональная проэктія фигуры есть перпендикулярное сѣченіе къ оси цилиндра, проходящаго черезъ данную фигуру.

Легко доказать слѣдующія свойства ортогональной проэктіи:

1. Всѣ параллельные отрѣзки находятся въ постоянномъ отношеніи къ ихъ проэктіи.

2. Всѣ отрѣзки параллельные пересѣченію плоскости фигуры съ плоскостью проэктіи равны ихъ ортогональнымъ проэктіямъ.

3. Площадь фигуры въ данной плоскости находится въ постоянномъ отношеніи къ площади ея ортогональной проэктіи въ другой плоскости.

4. Эллипсъ можетъ быть ортогонально проэктированъ кругомъ.

Конецъ первой части.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

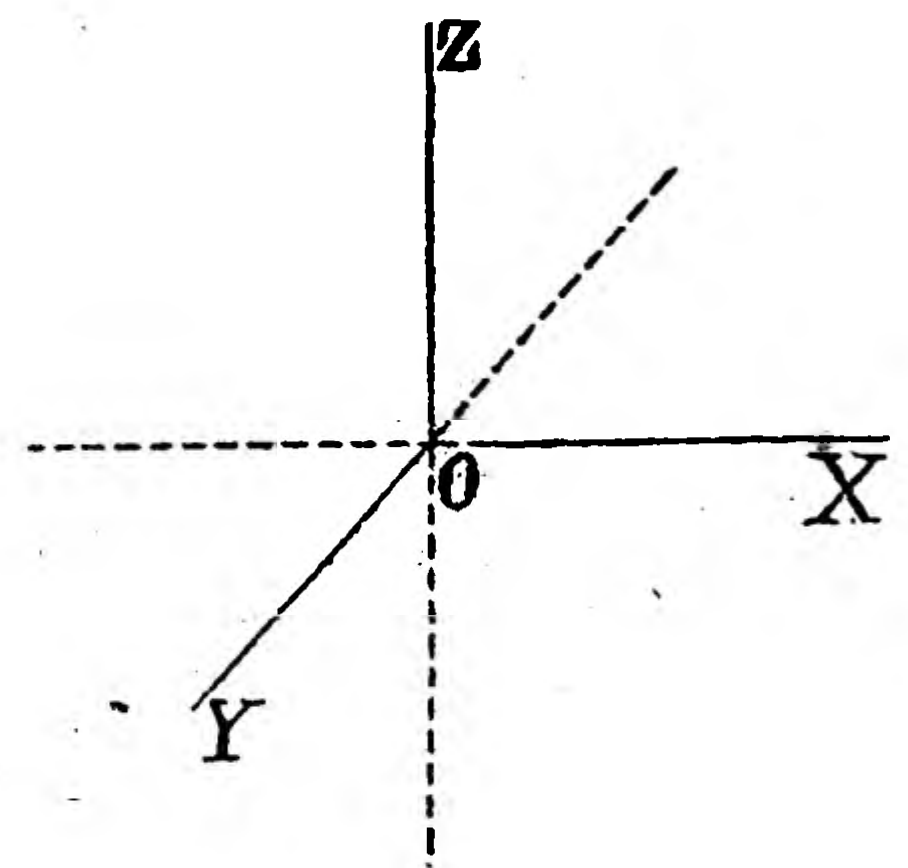
Аналитическая Геометрія трехъ измѣреній.

ГЛАВА XXV.

Методъ координатъ въ пространствѣ.

§ 426. Въ Аналитической Геометріи двухъ измѣреній положеніе точки на плоскости, какъ мы видѣли, опредѣляется разстояніями ея отъ двухъ перпендикулярныхъ между собою прямыхъ. Чтобы опредѣлить положеніе точки въ пространствѣ, возьмемъ три прямыя OX , OY , OZ , проходящія черезъ одну точку O (фиг. 149) перпендикулярныя между собою. Эти прямыя называются *координатными осями*, ось X , ось Y , ось Z . Точка ихъ пересѣченія O называется *началомъ координатъ*.

Фиг. 149.



Плоскости, опредѣленныя осями OX и OY , OX и OZ , OY и OZ , называются *координатными плоскостями*. Обыкновенно плоскость (OX, OY) представляется горизонтальною, слѣдовательно ось Z будетъ перпендикулярна къ ней.

§ 427. Если знаемъ разстояніе точки P (фиг. 150) въ пространствѣ отъ координатныхъ плоскостей (OY, OZ) ; (OX, OZ) ; (OX, OY) , то положеніе точки относительно координатныхъ плоскостей вполне опредѣляется.

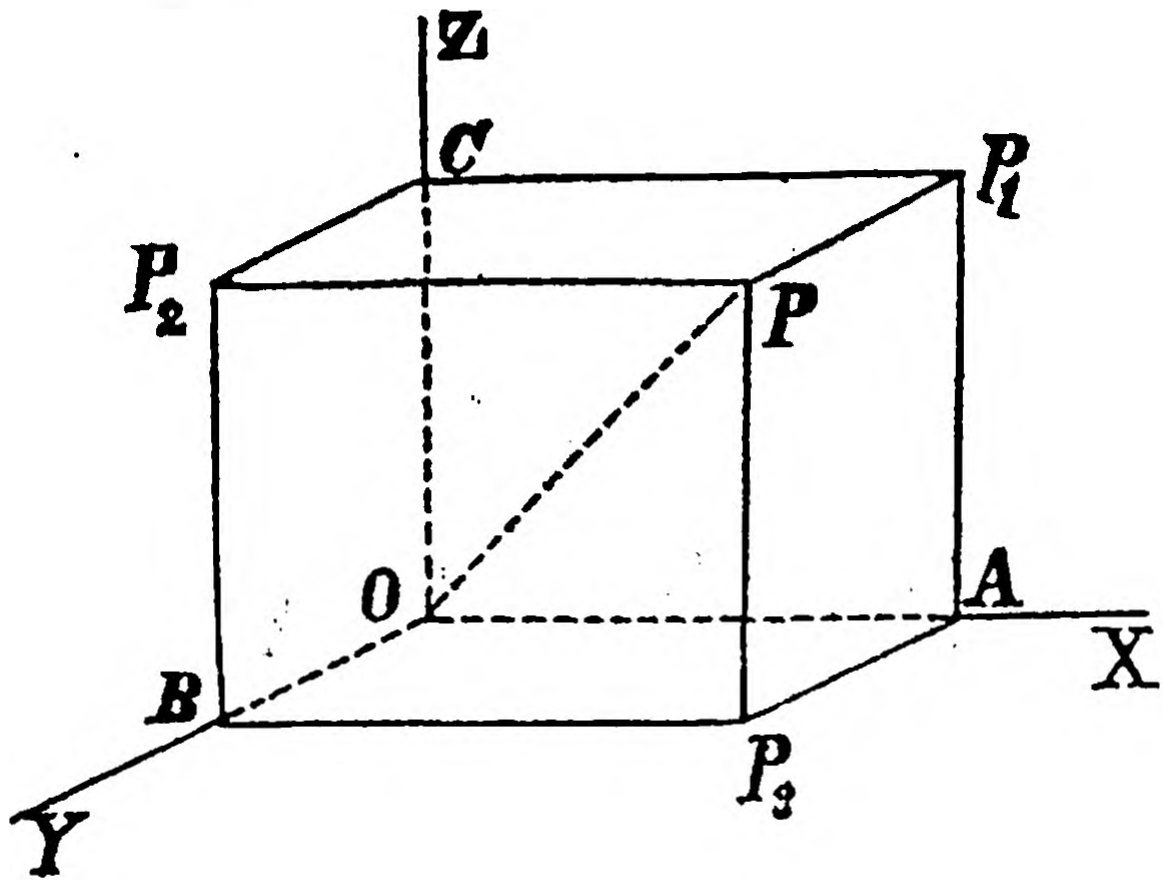
Пусть разстоянія отъ плоскостей (OY, OZ) , (OX, OZ) и (OX, OY) будутъ:

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

т. е. $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Черезъ точки A , B , C проведемъ плоскости, перпендикулярныя къ осямъ X , Y и Z . Всѣ точки плоскости перпен-

дикулярной къ оси X будутъ находится на разстояніи a отъ плоскости (OY, OZ) ; всѣ точки плоскости перпендикулярной къ оси Y будутъ нахо-

Фиг. 150.



дится на разстояніи b отъ плоскости (OX, OZ) , и наконецъ всѣ точки плоскости перпендикулярной къ оси Z будутъ находится на разстояніи c отъ плоскости (OX, OY) , слѣдовательно точка P находится на пересѣченіи этихъ трехъ плоскостей и вполне опредѣляется. Числа a, b, c называются *координатами* точки P . Изъ этого видимъ, что положеніе точки въ пространствѣ опредѣляется тремя уравненіями:

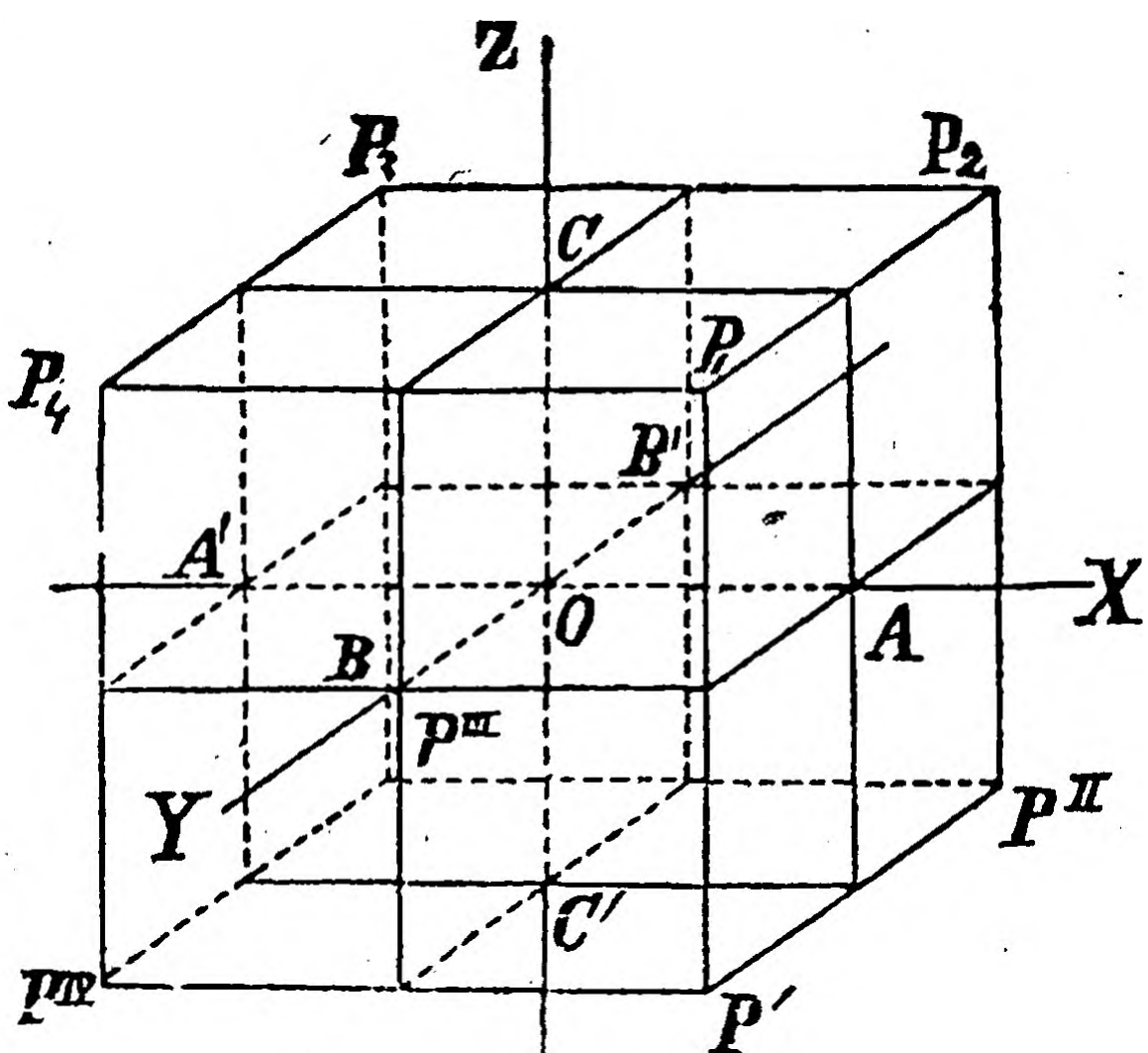
$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

которыя пишутъ въ символической формѣ, для сокращенія, въ видѣ символа (a, b, c) .

Три перпендикулярныя плоскости дѣлятъ все пространство на восемь тождественныхъ частей, которыя суть трехгранные прямые углы. Въ каждомъ изъ этихъ угловъ находится точка, которой положеніе опредѣляется тѣми же числами a, b, c .

Въ самомъ дѣлѣ, если $OA = OA' = a$ (фиг. 151); $OB = OB' = b$; $OC = OC' = c$, то восемь точекъ $P_1, P_2, P_3, P_4; P', P'', P''', P''''$ бу-

Фиг. 151.



дуть опредѣляться числами a, b, c , слѣдовательно не отличаются одна отъ другой этими числовыми значеніями. Чтобы отличать эти точки одна отъ другой необходимо сдѣлать условіе относительно знаковъ, указывающихъ направленіе, по которому числа a, b, c отсчитываются отъ точки O по осямъ X, Y, Z .

Для этого условились отъ начала O , по оси X , откладывать вправо числа положительныя, а влѣво отрицательныя; по оси Y въ направленіи OB положительныя, а по OB' отрицательныя, и наконецъ по оси Z въ верхъ положительныя, а внизъ отрицательныя. Такое условіе даетъ возможность отличать одну отъ другой всѣ восемь точекъ P , точно также какъ отличали четыре точки въ геометріи на плоскости.

Такъ:

$$\begin{array}{cccc}
 x = +a & x = +a & x = -a & x = -a \\
 P_1 \quad y = +b & ; \quad P_2 \quad y = -b & ; \quad P_3 \quad y = -b & ; \quad P_4 \quad y = +b \\
 z = +c & z = +c & z = +c & z = +c \\
 \\
 x = +a & x = +a & x = -a & x = -a \\
 P^I \quad y = +b & ; \quad P^{II} \quad y = -b & ; \quad P^{III} \quad y = -b & ; \quad P^{IV} \quad y = +b \\
 z = -c & z = -c & z = -c & z = -c
 \end{array}$$

Точки P_1 P_2 P_3 (фиг. 150) называются проэціями точки P на координатныхъ плоскостяхъ (OX, OZ) ; (OY, OZ) ; (OX, OY) . Эти точки на соответственныхъ координатныхъ плоскостяхъ опредѣляются уравненіями:

$$\begin{array}{ccc}
 P_1 \quad x = a & ; \quad P_2 \quad y = b & ; \quad P_3 \quad x = a \\
 z = c & ; \quad z = c & ; \quad y = b
 \end{array}$$

Мы предположили, что координатныя оси перпендикулярны между собою, но онѣ могутъ быть наклонены подъ известными углами одна къ другой. Тогда за координаты точки принимаются разстоянія точки P отъ координатныхъ плоскостей, отсчитываемыя параллельно координатнымъ осямъ.

Слѣдовательно, если даны координаты точки, то ея положеніе относительно координатныхъ плоскостей вполне опредѣляется.

Обратно, если положеніе точки относительно координатныхъ плоскостей дано, то легко опредѣлить ея координаты. Для этого надобно черезъ данную точку P (фиг. 150) провести три плоскости перпендикулярныя къ координатнымъ осямъ; разстоянія точекъ встрѣчи этихъ плоскостей съ осями отъ начала координатъ и будутъ искомыя координаты точки.

(Легко видѣть, что координаты точекъ P_1 , P_2 , P_3 (фиг. 150), лежащихъ на плоскостяхъ (OX, OZ) ; (OY, OZ) ; (OX, OY) , суть:

$$\begin{array}{ccc}
 P_1 \quad x = a & ; \quad P_2 \quad x = 0 & ; \quad P_3 \quad x = a \\
 y = 0 & ; \quad y = b & ; \quad y = b \\
 z = c & ; \quad z = c & ; \quad z = 0
 \end{array}$$

Координаты точекъ A , B и C , лежащихъ на осяхъ, суть:

$$\begin{array}{ccc}
 A \quad x = a & ; \quad B \quad x = 0 & ; \quad C \quad x = 0 \\
 y = 0 & ; \quad y = b & ; \quad y = 0 \\
 z = 0 & ; \quad z = 0 & ; \quad z = c
 \end{array}$$

Наконецъ координаты начала O суть:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0$$

Геометрическое представление уравненія между координатами точки въ пространствѣ.

§ 428. Всѣ точки плоскости, проведенной на разстояніи $x = a$ отъ начала координатъ перпендикулярно къ оси X , находятся на разстояніи a отъ координатной плоскости (OY, OZ) , слѣдовательно уравненіе:

$$x = a$$

и представляетъ эту плоскость. Координаты y и z могутъ получать всѣвозможныя значенія, т. е. остаются неопредѣленными.

Если будутъ даны совокупно два уравненія:

$$x = a \quad , \quad y = b$$

а z остается неопредѣленнымъ, то легко видѣть, что этимъ уравненіямъ будутъ удовлетворять всѣ точки прямой пересѣченія плоскостей $x = a$ и $y = b$. Эта прямая перпендикулярна къ плоскости (OX, OY) и встрѣчаетъ эту плоскость въ точкѣ P_3 (фиг. 150). Изъ этихъ двухъ простыхъ примѣровъ видимъ, что одно уравненіе представляетъ поверхность, въ разсматриваемомъ случаѣ плоскость, а два уравненія представляютъ линію, въ настоящемъ случаѣ прямую. Наконецъ видѣли, что три уравненія.

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

представляютъ точку.

§ 429. Посмотримъ теперь, что представляетъ уравненіе между координатами x, y, z :

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

Рѣшимъ это уравненіе относительно z , пусть это рѣшеніе будетъ:

$$z = f(x, y) \tag{2}$$

Такъ какъ координаты x, y, z связаны только однимъ уравненіемъ, то двѣ изъ координатъ, на примѣръ x и y , могутъ получать совершенно произвольныя значенія, а z будетъ опредѣляться съ помощью предыдущаго уравненія и получить одно или нѣсколько значеній, для каждой пары значеній x, y , смотря по свойству уравненія (1). Возьмемъ, какую-нибудь, точку на плоскости (OX, OY) , пусть ея координаты будутъ a и b , подставимъ эти числа въ уравненіи (2) и опредѣлимъ z ; пусть $z = c$.

Изъ точки (a, b) на плоскости (OX, OY) возставимъ перпендикуляръ и отложимъ на немъ отрѣзокъ равный c , получимъ точку въ пространствѣ, координаты которой (a, b, c) будутъ удовлетворять уравненіямъ (1) или (2). Дѣлая подобныя построения для всѣхъ точекъ плоскости (OX, OY) , получимъ соотвѣтственныя точки на перпендикулярахъ возставленныхъ изъ точекъ плоскости (OX, OY) . Концы этихъ перпендикуляровъ образуютъ непрерывную поверхность, которая и будетъ геометрическое представленіе алгебраическаго уравненія (1) съ тремя переменными. Можетъ случится, при построеніи, что для извѣстныхъ точекъ плоскости (OX, OY) значеніе для z будетъ мнимое, тогда въ этомъ мѣстѣ нѣтъ поверхности; а иногда извѣстнымъ точкамъ на плоскости соотвѣтствуютъ, каждой, два и болѣе значенія для z , тогда поверхность можетъ имѣть нѣсколько вѣтвей.

Вообще форма поверхности зависитъ отъ уравненія. Обратнo, если знаемъ, какое-нибудь свойство извѣстной поверхности, принадлежащее каждой ея точкѣ, то выражая это свойство уравненіемъ между координатами точекъ, это уравненіе и будетъ алгебраическое представленіе геометрической поверхности. Напримѣръ, мы знаемъ, что всѣ точки поверхности шара равно удалены отъ его центра; выражая это свойство уравненіемъ между координатами точекъ его поверхности, это уравненіе и будетъ его алгебраическое представленіе.

§ 430. Мы видѣли въ Аналитической Геометріи двухъ измѣреній, что уравненіе:

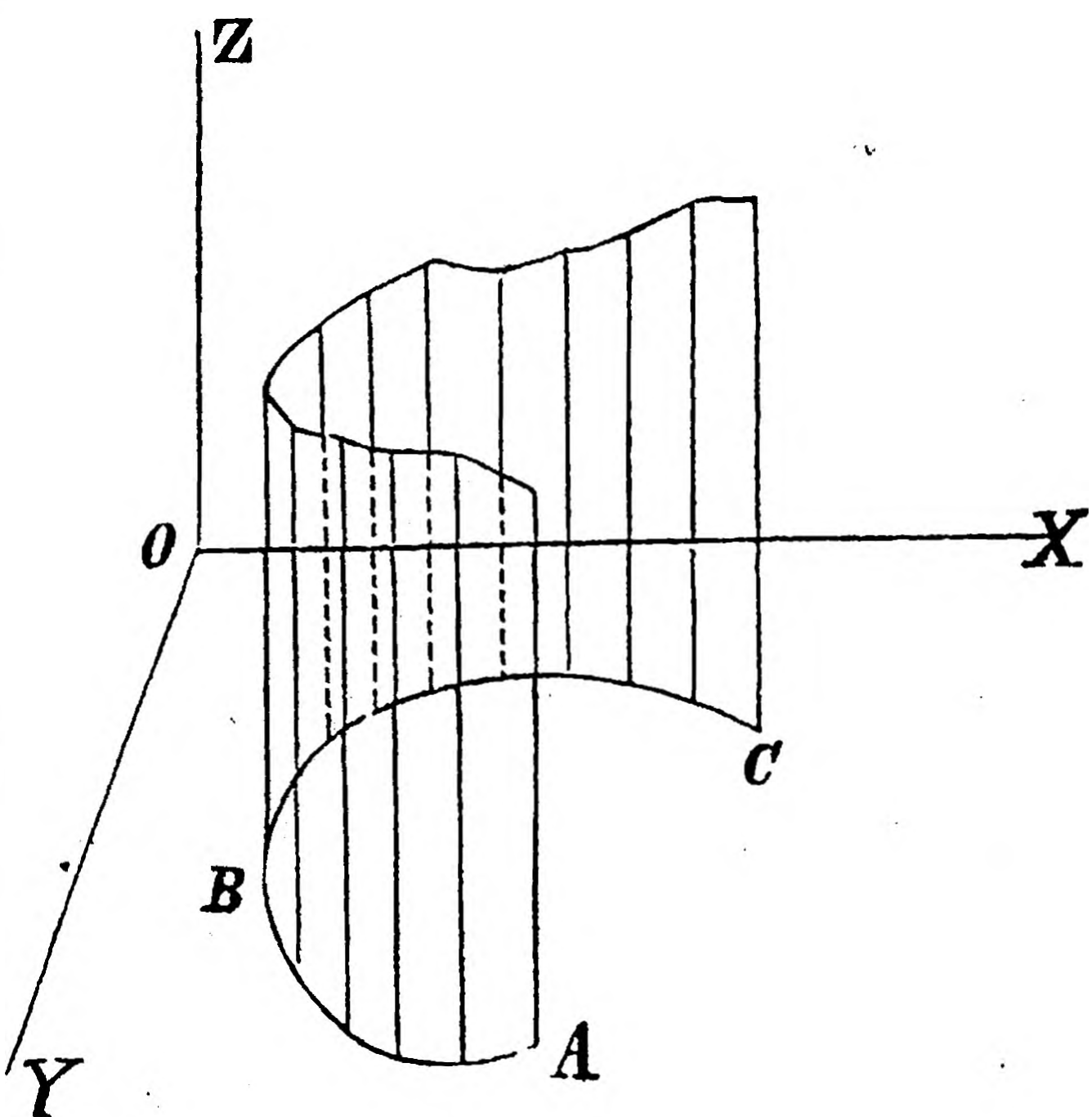
$$f(x, y) = 0$$

Фиг. 152.

представляетъ кривую на плоскости (OX, OY) . Пусть эта кривая будетъ ABC (фиг. 152).

Черезъ каждую точку этой кривой возставимъ перпендикуляры къ плоскости (OX, OY) , эти перпендикуляры образуютъ цилиндрическую поверхность, которая и будетъ геометрическимъ представленіемъ уравненія $f(x, y) = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ уравненіе не входитъ z , то всякая, произвольно взятая, точка на построенной цилиндрической поверхности, будетъ имѣть координаты на плоскости (OX, OY) , которыя удовлетворяютъ уравненію $f(x, y) = 0$, слѣдовательно это уравненіе и представляетъ цилиндрическую поверхность, кoей генератрисы перпендикулярны къ плоскости



(OX, OY). Уравненія $f_1(x, z) = 0$ и $f_2(y, z) = 0$ будутъ представлять такія-же цилиндрическія поверхности, коихъ генератрисы будутъ, одна перпендикулярна къ плоскости (OX, OZ), а другая къ плоскости (OY, OZ). Напримеръ, уравненіе:

$$y = ax + b \quad (3)$$

представляетъ прямую на плоскости (OX, OY), а въ пространствѣ плоскость перпендикулярную къ плоскости (OX, OY) и коей пересѣченіе съ этой послѣдней есть прямая (3).

Уравненія:

$$x = az + b, \quad y = cz + d \quad (4)$$

представляютъ, первое плоскость перпендикулярную къ плоскости (OX, OZ), а второе плоскость перпендикулярную къ плоскости (OY, OZ). Совокупно же онѣ будутъ представлять прямую въ пространствѣ—пересѣченіе двухъ плоскостей (4), такъ какъ координаты всѣхъ точекъ этой прямой будутъ удовлетворять обѣимъ предъидущимъ уравненіямъ.

Мы уже выше видѣли, что уравненія:

$$x = a, \quad y = b$$

представляютъ прямую, перпендикулярную къ плоскости (OX, OY).

§ 431. Возьмемъ два уравненія:

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad f_1(x, y, z) = 0 \quad (5)$$

каждое изъ нихъ представляетъ, какъ видѣли, поверхность, совокупно-же онѣ представляютъ точки общія обѣимъ поверхностямъ, т. е. кривую, по которой эти поверхности пересѣкаются, такъ какъ координаты каждой точки этой кривой должны удовлетворять обѣимъ уравненіямъ (5) поверхностей. Слѣдовательно двѣ поверхности, совокупно взятая, представляетъ кривую въ пространствѣ.

Исключимъ изъ уравненій (5) переменное z , то получимъ уравненіе:

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (6)$$

это уравненіе, какъ видѣли выше, представляетъ цилиндрическую поверхность, коей генератрисы перпендикулярны къ плоскости (OX, OY). Эта цилиндрическая поверхность, очевидно, проходитъ черезъ кривую пересѣченія поверхностей (5), такъ какъ координаты всѣхъ точекъ этой кривой удовлетворяютъ уравненію (6). Слѣдовательно кривая представляется на-

дѣтою на цилиндръ $\varphi(x, y) = 0$. Исключая y изъ уравненій (5), найдемъ цилиндрическую поверхность:

$$\varphi_1(x, z) = 0$$

на которую надѣта та же кривая. Слѣдовательно, кривую, пересѣченіе поверхностей (5), можно представить пересѣченіемъ двухъ цилиндровъ:

$$\varphi(x, y) = 0 \quad , \quad \varphi_1(x, z) = 0$$

коихъ уравненія получаются исключеніемъ сначала z , а послѣ y , между уравненіями поверхностей (5). Очевидно, что третій цилиндръ:

$$\varphi_2(y, z) = 0$$

полученный исключеніемъ x , пройдетъ также черезъ ту же кривую, но двухъ цилиндровъ достаточно для представленія кривой въ пространствѣ. Слѣдовательно кривая представляется надѣтою на три цилиндра, коихъ генератрисы перпендикулярны къ координатнымъ плоскостямъ.

Возьмемъ уравненія двухъ поверхностей:

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad z = a$$

первое изъ этихъ уравненій представляетъ, какую-то поверхность, а второе плоскость параллельную плоскости (OX, OY) на разстояніи a . Совокупно эти уравненія представляютъ кривую пересѣченія поверхности $f(x, y, z) = 0$ съ плоскостью $z = a$; исключеніе z изъ этихъ уравненій даетъ цилиндрическую поверхность:

$$f(x, y, a) = 0$$

или кривую на плоскости (OX, OY) . Давая всевозможныя значенія количеству a получимъ рядъ кривыхъ, коихъ форма даетъ нѣкоторое понятіе о формѣ поверхности:

$$f(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

тоже можно сдѣлать относительно координатъ x, y , что даетъ еще опредѣленнѣе понятіе о формѣ поверхности.

Очевидно уравненія:

$$f(x, y, 0) = 0 \quad , \quad f(x, 0, z) = 0 \quad , \quad f(0, y, z) = 0$$

полученныя, полагая послѣдовательно въ уравненіи (7) $z=0, y=0, x=0$

будутъ представлять кривыя пересѣченія поверхности $f(x, y, z) = 0$ съ координатными плоскостями (OX, OY) , (OX, OZ) , (OY, OZ) .

§ 432. Если будутъ даны три поверхности:

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, z) = 0 \quad , \quad f_3(x, y, z) = 0 \quad (8)$$

то изъ этихъ трехъ уравненій можно опредѣлить x , y и z ; пусть:

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c \quad (9)$$

эти величины представляютъ координаты точки общей тремъ поверхностямъ. Данныя уравненія могутъ имѣть такую форму, что дадутъ нѣсколько системъ:

$$\begin{aligned} x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c \\ x = a_1 \quad , \quad y = b_1 \quad , \quad z = c_1 \\ x = a_2 \quad , \quad y = b_2 \quad , \quad z = c_2 \end{aligned} \quad (10)$$

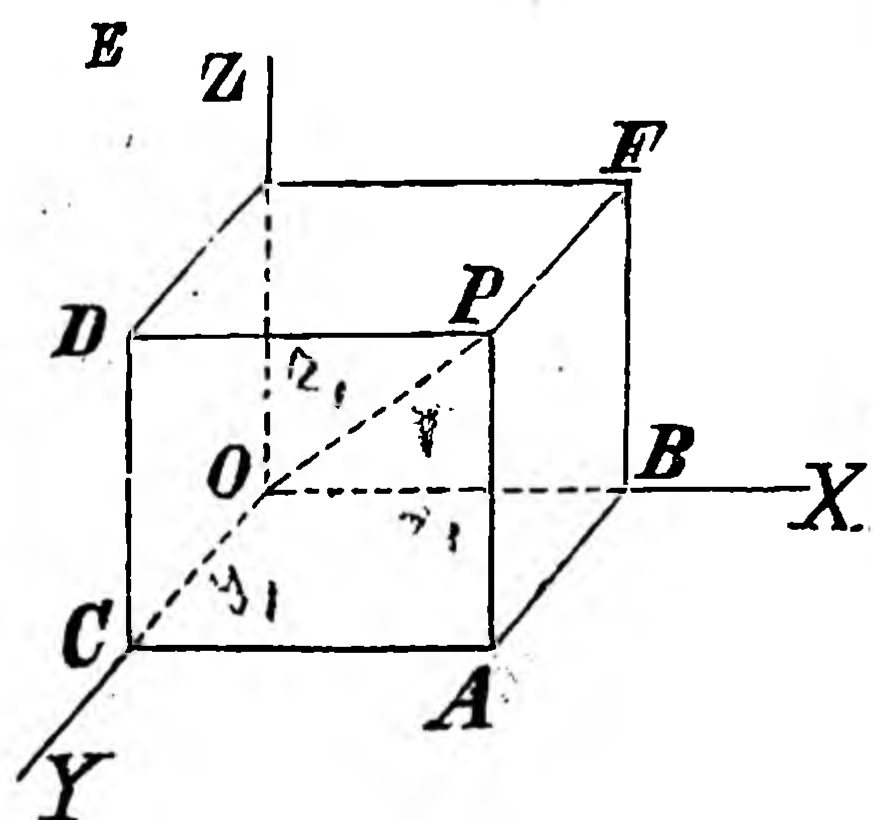
Въ этомъ случаѣ уравненія представляютъ нѣсколько общихъ точекъ тремъ поверхностямъ. Первые два изъ уравненій (8) представляютъ кривую, первое и послѣднее также кривую, слѣдовательно эти кривыя обѣ находятся на поверхности $f_1(x, y, z) = 0$, точки ихъ пересѣченія даны координатами (9) или (10).

Этихъ объясненій достаточно для составленія отчетливаго представленія о методѣ координатъ въ пространствѣ.

Рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ.

§ 433. Теперь рѣшимъ нѣсколько вопросовъ, которые намъ будутъ необходимы во всѣхъ послѣдующихъ изслѣдованіяхъ.

Фиг. 153.



Задача 1. Даны координаты точки, найти ея расстояние отъ начала координатъ?

Рѣшеніе. Пусть координаты данной точки P (фиг. 153) будутъ x_1, y_1, z_1 , а расстояние ея отъ начала пусть будетъ r .

Координаты точки P , очевидно, суть стороны, построеннаго параллелепипеда $\begin{pmatrix} ABOC \\ PFED \end{pmatrix}$, коего стороны суть: $OB = x_1$, $OC = y_1$, $OE = z_1$.

Диагональ $OP = r$. Но извѣстно, что квадратъ построенный на диагонали прямого параллелепипеда равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его сторонахъ, т. е.:

$$OP^2 = OB^2 + OC^2 + OE^2$$

или:

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad (11)$$

Слѣдствіе. Если бы точка P перемѣщалась такъ, чтобы ея координаты удовлетворяли во всѣхъ ея положеніяхъ предъидущему уравненію, а r было бы постоянно, то уравненіе:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (12)$$

будетъ представлять поверхность шара, коего радиусъ есть r , а центръ находится въ началѣ координатъ.

Задача. 2. Даны координаты двухъ точекъ, найти разстояніе между ними?

Рѣшеніе. Пусть данныя точки будутъ P_1 и P_2 ; ихъ координаты $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ (фиг. 154). Построимъ параллелепипедъ, коего діагональю было бы разстояніе $P_1P_2 = r$, а стороны были-бы параллельны координатнымъ осямъ.

Пусть этотъ параллелепипедъ будетъ $(ABCP_1)$, (FP_2DE) , стороны его суть P_2F, P_2D и P_2B ; очевидно, имѣемъ:

$$P_2F = x_1 - x_2, \quad P_2D = y_1 - y_2, \quad P_2B = z_1 - z_2$$

но:

$$P_1P_2^2 = P_2F^2 + P_2D^2 + P_2B^2$$

слѣдовательно:

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \quad (13)$$

Если въ этомъ уравненіи будемъ измѣнять x_1, y_1, z_1 , а r и x_2, y_2, z_2 оставимъ постоянными, то это уравненіе будетъ представлять поверхность шара, коего радиусъ есть r , а центръ находится въ точкѣ (x_2, y_2, z_2) .

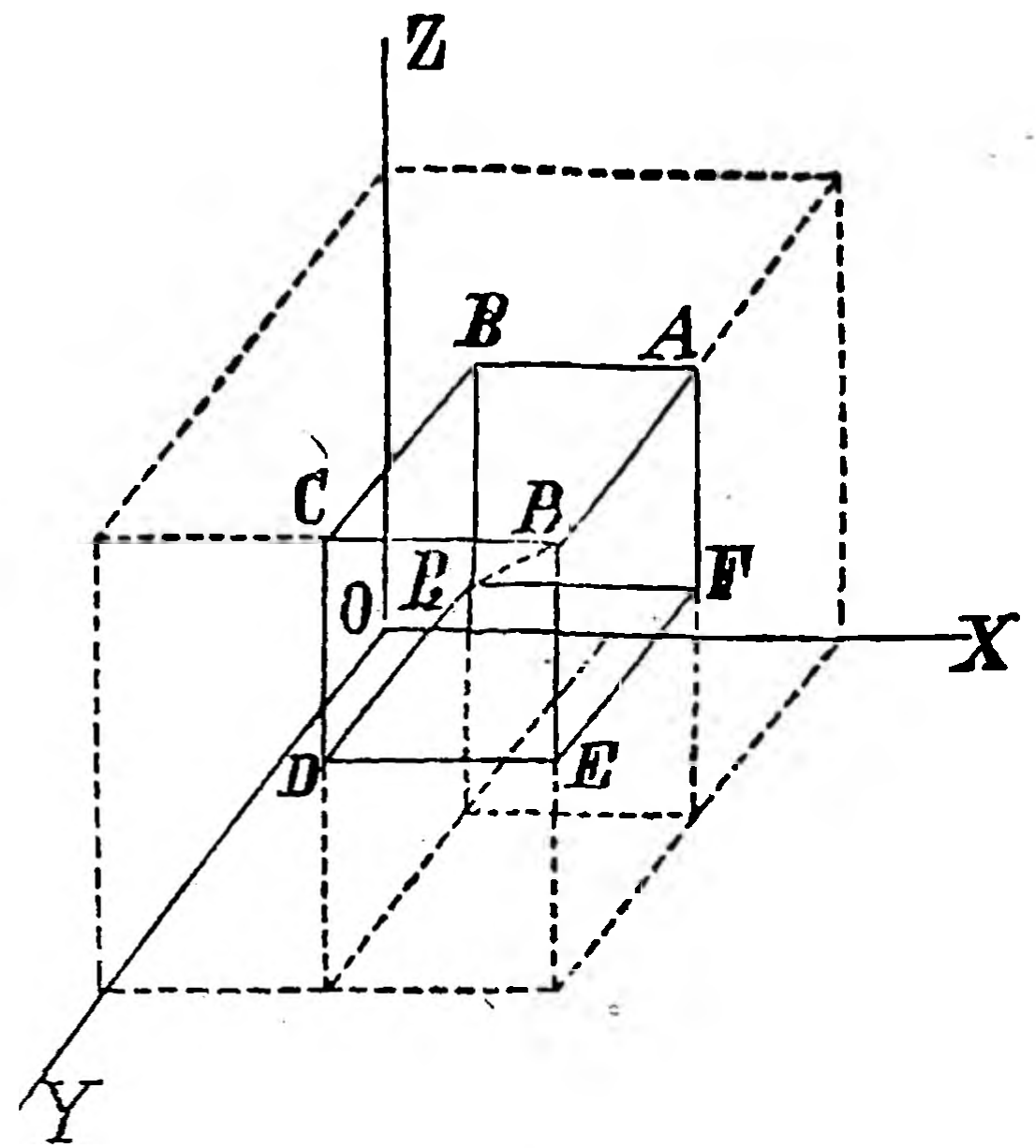
Если координатныя оси будутъ косоугольныя и составляютъ углы α, β, γ между собою, то разстояніе выразится формулой:

$$P_1P_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\gamma + 2(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)\cos\beta + 2(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)\cos\alpha \quad (14)$$

полагая $x_2 = 0, y_2 = 0, z_2 = 0$, найдемъ разстояніе δ начала координатъ отъ точки (x_1, y_1, z_1) :

$$\delta^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2x_1y_1\cos\gamma + 2x_1z_1\cos\beta + 2y_1z_1\cos\alpha \quad (15)$$

Фиг. 154.



Задача 3. Найти радиусъ шара, который проходитъ черезъ точки $(0,0,0)$, $(0,2,0)$, $(1,0,0)$, $(0,0,3)$?

Рѣшеніе. Надобно рѣшить три уравненія:

$$x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = x^2 + (y - 2)^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

откуда координаты центра будутъ:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 1, \quad z = \frac{3}{2}$$

а радиусъ:

$$r^2 = \frac{14}{4}$$

Задача 4. Выразить, что разстояніе точки (x, y, z) отъ точки $(2, -1, 1)$ равно 3.

Отв.

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9.$$

§ 434. Если разстояніе точки, коей координаты суть (x_1, y_1, z_1) , отъ начала координатъ, означимъ черезъ r , а углы которые r составляетъ съ координатными осями X, Y, Z означимъ черезъ α, β, γ , то будемъ имѣть (12):

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

или:

$$\left(\frac{x_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{r}\right)^2 = 1$$

Но, очевидно:

$$x_1 = r \cos \alpha, \quad y_1 = r \cos \beta, \quad z_1 = r \cos \gamma$$

слѣдовательно:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (16)$$

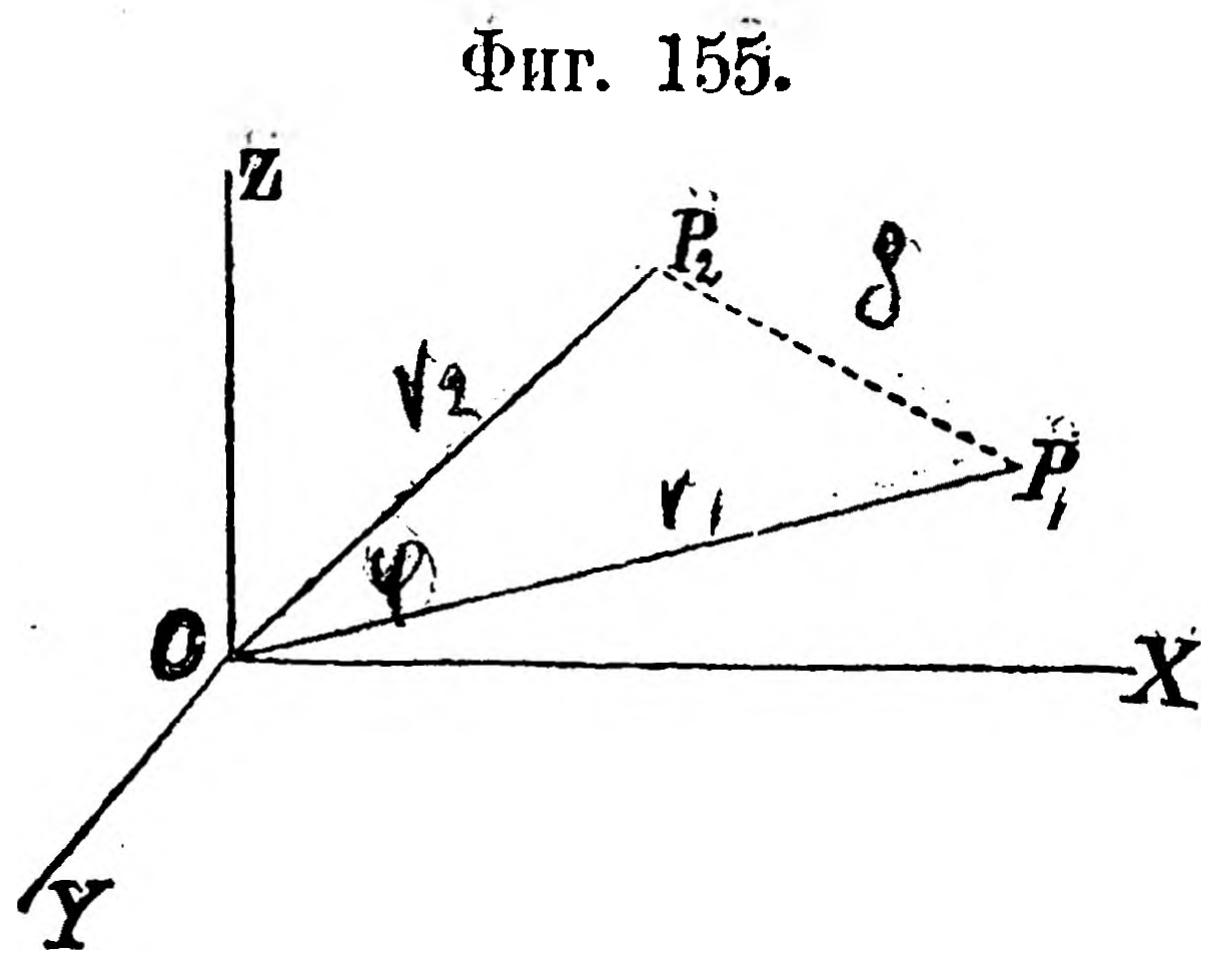
такимъ уравненіемъ связаны углы, которые, какая-нибудь прямая, проходящая черезъ начало координатъ, составляетъ съ координатными осями.

Если прямая не проходитъ черезъ начало координатъ, то для опредѣленія угловъ, которые она составляетъ съ координатными осями, надобно провести черезъ начало координатъ прямую параллельную данной прямой; углы, которые эта послѣдняя прямая составляетъ съ координатными осями и суть углы, составляемые съ тѣми-же осями данной прямой въ пространствѣ.

§ 435. *Задача.* Найти уголъ между двумя прямыми, проходящими черезъ начало координатъ?

Рѣшеніе. Пусть данныя прямыя будутъ OP_1 и OP_2 (фиг. 155); пусть углы, которые онѣ составляютъ съ координатными осями будутъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

Возьмемъ на данныхъ прямыхъ, какія нибудъ, точки P_1 и P_2 ; пусть координаты этихъ точекъ будутъ $(x_1 y_1 z_1); (x_2 y_2 z_2)$, соединимъ точки P_1 и P_2 прямою $P_1 P_2$ и разстояніе означимъ черезъ δ . Означимъ разстоянія точекъ P_1 и P_2 отъ начала координатъ черезъ r_1 и r_2 , а уголъ между этими прямыми черезъ φ .



Выше видѣли (§ 433), что:

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \\ &= \underbrace{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}_{r_1^2} + \underbrace{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}_{r_2^2} - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \end{aligned}$$

или:

$$\delta^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)$$

но изъ $\triangle OP_1 P_2$ имѣемъ:

$$\delta^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi$$

подставляя, найдемъ:

$$r_1 r_2 \cos \varphi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

откуда:

$$\cos \varphi = \frac{x_1}{r_1} \cdot \frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1} \cdot \frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1} \cdot \frac{z_2}{r_2}$$

но:

$$x_1 = r_1 \cos \alpha_1, \quad y_1 = r_1 \cos \beta_1, \quad z_1 = r_1 \cos \gamma_1$$

$$x_2 = r_2 \cos \alpha_2, \quad y_2 = r_2 \cos \beta_2, \quad z_2 = r_2 \cos \gamma_2$$

слѣдовательно:

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \quad (17)$$

Если прямыя OP_1 и OP_2 перпендикулярны, то имѣемъ:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0 \quad (18)$$

Если двѣ прямыя не проходятъ черезъ начало координатъ, то за уголъ

между ними принимается уголъ, который прямыя, проведенныя черезъ начало координатъ параллельно даннымъ, составляютъ между собою. Следовательно уголъ между прямыми, не проходящими черезъ начало координатъ, выразится тою-же формулой (17).

Легко видѣть, что:

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi = & (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1)^2 + \\ & + (\cos \alpha_1 \cos \gamma_2 - \cos \alpha_2 \cos \gamma_1)^2 + (\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

§ 436. *Задача.* Найти косинусы угловъ, которые прямая, перпендикулярная къ двумъ даннымъ прямымъ, составляетъ съ координатными осями?

Рѣшеніе. Пусть углы, которые двѣ данныя прямыя составляютъ съ координатными осями будутъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; означимъ углы искомой прямой съ координатными осями черезъ α, β, γ .

Такъ какъ искомая прямая перпендикулярна къ двумъ даннымъ прямымъ, то имѣемъ (16 и 18):

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha + \cos \beta_1 \cos \beta + \cos \gamma_1 \cos \gamma = 0$$

$$\cos \alpha_2 \cos \alpha + \cos \beta_2 \cos \beta + \cos \gamma_2 \cos \gamma = 0$$

и

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Изъ первыхъ двухъ найдемъ:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1} = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1}$$

Возвышая въ квадратъ, складывая числители и знаменатели, и извлекая корень, найдемъ:

$$\sin \varphi \cos \alpha = \cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1$$

$$\sin \varphi \cos \beta = \cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1 \quad (20)$$

$$\sin \varphi \cos \gamma = \cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1$$

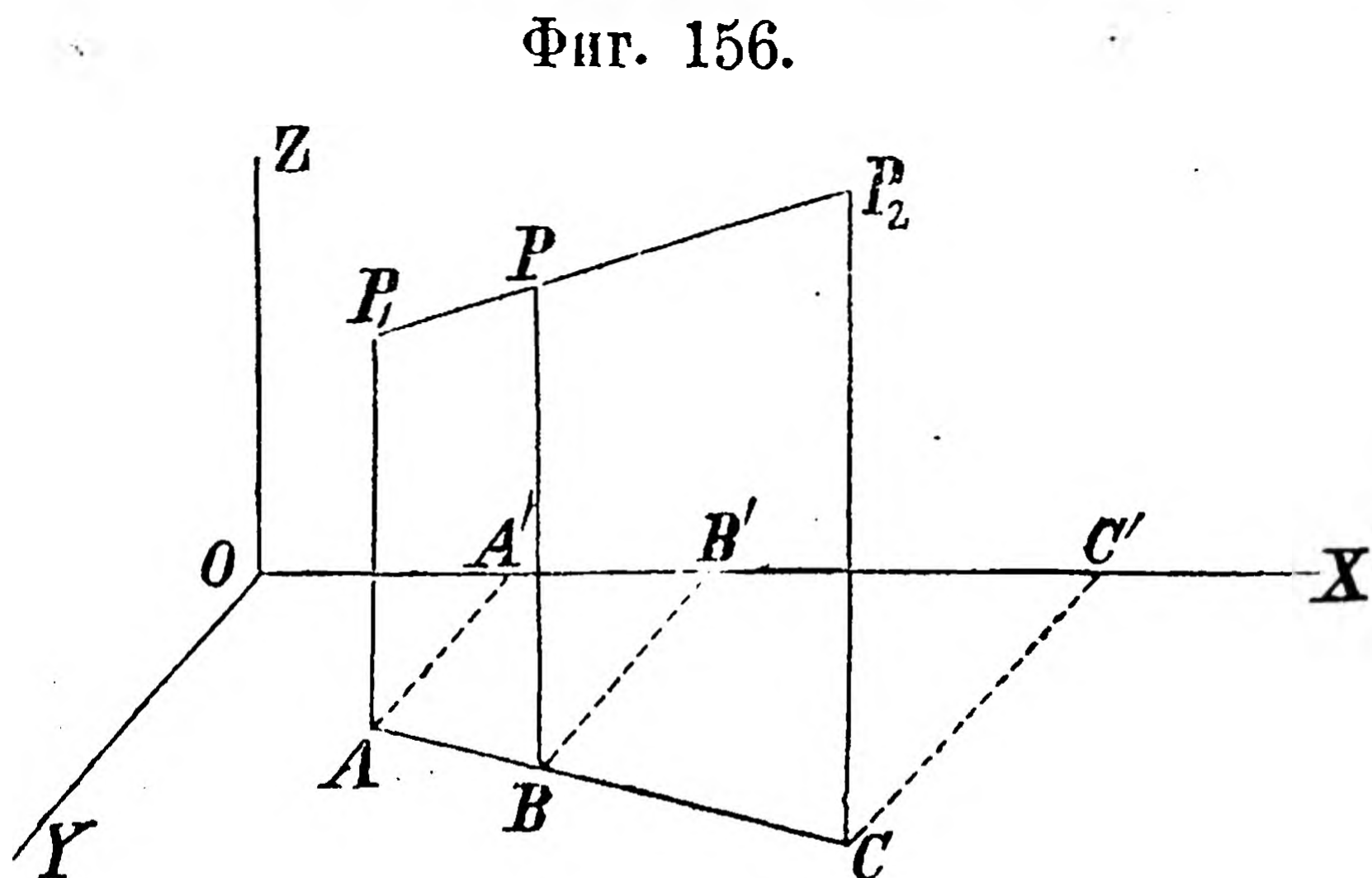
гдѣ $\sin \varphi$ есть выраженіе (19), т. е. синусъ угла между данными прямыми.

Если данныя прямыя пересѣкаются, то искомая прямая будетъ перпендикулярна къ плоскости двухъ данныхъ прямыхъ.

§ 437. *Задача.* Даны координаты двухъ точекъ, найти координаты точки, дѣлящей разстояніе между данными точками въ данномъ отношеніи?

Рѣшеніе. Пусть координаты данныхъ точекъ P_1 и P_2 (фиг. 156) будутъ (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , данное отношеніе $m:n$.

Пусть координаты искомой точки P будутъ x, y, z . Опустимъ изъ точекъ P_1, P и P_2 перпендикуляры P_1A, PB, P_2C на плоскость (OX, OY) .



По условію, имѣемъ:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}$$

Но:

$$A'B' = x - x_1, \quad B'C' = x_2 - x$$

слѣдовательно:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

откуда:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} \tag{21}$$

точно также найдемъ:

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}, \quad z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m} \tag{22}$$

Если положимъ:

$$\frac{m}{n} = \lambda$$

то три координаты искомой точки выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \tag{23}$$

Если отношеніе λ будетъ количествомъ отрицательнымъ, то точка P лежитъ внѣ отрѣзка P_1P_2 и дѣлитъ разстояніе между точками P_1 и P_2 внѣшне въ томъ же отношеніи.

Давая отношенію λ всевозможныя величины отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ всѣ точки на прямой, проходящей черезъ точки P_1 и P_2 ; изъ всѣхъ величинъ λ единственная есть -1 , при которой всѣ три коорди-

наты (23) обращаются въ ∞ , слѣдовательно на прямой P_1P_2 есть только одна точка на бесконечности.

Пр. Если $\lambda = 1$, то точка P дѣлитъ разстояніе PP_2 пополамъ и ея координаты суть:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

ГЛАВА XXVI.

Плоскость.

§ 428. Мы видѣли въ § 428, что плоскость параллельная плоскости (OY, OZ) на разстояніи a отъ начала координатъ представляется уравненіемъ первой степени:

$$x = a$$

а плоскость перпендикулярная къ плоскости (OX, OY) выражается уравненіемъ первой степени (§ 430):

$$y = ax + b$$

Плоскости въ этихъ двухъ случаяхъ имѣютъ исключительное положеніе относительно координатныхъ осей. Посмотримъ какимъ уравненіемъ выражается плоскость, имѣющая какое нибудь положеніе относительно координатныхъ осей.

Чтобы представить плоскость уравненіемъ надобно одно изъ ея свойствъ, принадлежащее каждой изъ ея точекъ, выразить уравненіемъ между координатами точекъ на плоскости. Такихъ свойствъ плоскость имѣетъ нѣсколько, возьмемъ одно изъ нихъ, на примѣръ, слѣдующее.

Если изъ какой-нибудь точки на плоскости возставимъ къ ней перпендикуляръ и продолжимъ его въ обѣ стороны плоскости, то каждая точка на плоскости будетъ равно-удалена отъ двухъ точекъ взятыхъ на перпендикулярѣ въ равномъ разстояніи отъ его основанія.

Изъ начала координатъ опустимъ на плоскость перпендикуляръ и продолжимъ его по другую сторону плоскости такъ, чтобы это продолженіе было равно разстоянію начала координатъ отъ точки встрѣчи съ перпендикуляромъ. Пусть координаты, такимъ образомъ, построенной точки будутъ x_1, y_1, z_1 . Возьмемъ какую-нибудь точку на плоскости, пусть ея координаты будутъ x, y, z . Квадратъ разстоянія этой послѣдней точки отъ начала будетъ:

$$x^2 + y^2 + z^2$$

а отъ точки $(x_1 y_1 z_1)$:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

Слѣдовательно, по свойству плоскости, будемъ имѣть:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

откуда:

$$x_1 x + y_1 y + z_1 z - \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{2} = 0 \quad (1)$$

Изъ этого видимъ, что плоскость выражается уравненіемъ первой степени между координатами произвольно взятой на ней точки. Слѣдуетъ только показать, обратно, что всякое уравненіе первой степени:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

есть аналитическое выраженіе плоскости въ пространствѣ.

Для этого надобно только показать, что уравненію (2) можно дать форму уравненія (1); слѣдовательно уравненіе (2) въ формѣ (1) будетъ выражать свойство плоскости, выраженное этимъ послѣднимъ уравненіемъ.

Помножимъ уравненіе (2) на неопредѣленный множитель λ и приравняемъ коэффициенты при одинаковыхъ переменныхъ, что дастъ слѣдующія уравненія:

$$\lambda A = x_1, \quad \lambda B = y_1, \quad \lambda C = z_1, \quad \lambda D = -\frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{2} \quad (3)$$

изъ этихъ уравненій найдемъ:

$$\lambda = \frac{-2D}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad x_1 = \frac{-2DA}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y_1 = \frac{-2DB}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad z_1 = \frac{-2DC}{A^2 + B^2 + C^2} \quad (4)$$

откуда видимъ, что уравненіе (2), умноженное на λ , принимаетъ форму (1), въ которомъ x, y, z , опредѣляются предъидущими уравненіями (4), дающими для x_1, y_1, z_1 , величины всегда дѣйствительныя.

Изъ этого видимъ, что уравненіе (2) съ произвольными коэффициентами A, B, C, D есть самое общее алгебраическое представленіе плоскости.

§ 439. Общее уравненіе плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (5)$$

содержитъ четыре коэффиціента A, B, C, D , но по раздѣленіи на одинъ изъ нихъ будемъ имѣть уравненіе только съ тремя коэффиціентами, которыми опредѣляется, какъ увидимъ ниже, положеніе плоскости, поэтому ихъ называютъ *координатами плоскости*.

Чтобы найти точки пересѣченія плоскости съ координатными осями x, y и z надобно, послѣдовательно, положить въ уравненіи (5):

$$\begin{aligned} x = a \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad , \quad y = b \quad , \quad z = 0 \quad ; \\ x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = c \end{aligned}$$

что даетъ:

$$Aa = -D \quad , \quad Bb = -D \quad , \quad Cc = -D$$

подставляя эти величины въ уравненіе (5) вмѣсто A, B, C , оно сдѣлается:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (6)$$

гдѣ a, b, c суть отрѣзки, которые плоскость дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ. Форму уравненія (6) называютъ *канонической формой* уравненія плоскости.

§ 440. Изъ начала координатъ опустимъ перпендикуляръ на плоскость (6), пусть длина этого перпендикуляра будетъ p .

Очевидно, что косинусы угловъ α, β, γ , которые этотъ перпендикуляръ составляетъ съ координатными осями, будутъ:

$$\cos \alpha = \frac{p}{a} \quad , \quad \cos \beta = \frac{p}{b} \quad , \quad \cos \gamma = \frac{p}{c}$$

Помножая уравненіе (6) на p и подставляя предъидущія выраженія, уравненіе (6) примемъ форму:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p \quad (7)$$

которая называется *нормальной формой* уравненія плоскости.

§ 441. Если уравненіе (2) сравнимъ съ уравненіемъ (7), т. е. помножимъ это послѣднее на неопредѣленный коэффиціентъ λ и приравняемъ коэффиціенты при x, y, z , то найдемъ:

$$\lambda \cos \alpha = A \quad , \quad \lambda \cos \beta = B \quad , \quad \lambda \cos \gamma = C \quad , \quad p = -\lambda D \quad (8)$$

откуда, возвышая первыя три уравненія въ квадратъ и складывая, найдемъ:

$$\lambda^2 = A^2 + B^2 + C^2 \quad (9)$$

откуда:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (10)$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

и:

$$p = \frac{-D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (11)$$

знакъ передъ радикаломъ опредѣляется слѣдующимъ образомъ: условимся разъ на всегда принимать перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на плоскость за величину положительную, а также и всѣ перпендикуляры, опущенные на плоскость изъ точекъ, лежащихъ съ той-же стороны плоскости съ какой лежитъ и начало координатъ; всѣ перпендикуляры, опущенные на плоскость изъ точекъ, лежащихъ съ противоположной стороны плоскости принимаются за величины отрицательныя. При такомъ условіи легко опредѣлить знакъ радикала въ выраженіяхъ (10). Для этого возьмемъ выраженіе (11), въ этомъ выраженіи p , по условію, есть величина положительная, слѣдовательно, если въ уравненіи (5) D есть величина положительная, то радикаль надобно взять съ знакомъ—, въ противномъ случаѣ съ знакомъ +.

Изъ выраженій (10) видимъ, что положеніе плоскости относительно координатныхъ осей опредѣляется только коэффициентами A, B, C , такъ что измѣняя D , плоскость будетъ только переносится параллельно сама себѣ.

Легко перейти отъ общаго уравненія плоскости (5) къ нормальной ея формѣ, для этого надобно уравненіе (5) раздѣлить только на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, то въ силу выраженій (10) форма ея сдѣлается нормальной:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Примѣръ 1. Найти косинусы угловъ, которые перпендикуляръ къ плоскости:

$$2x - 3y + 5z - 3 = 0$$

составляетъ съ координатными осями?

Отв. Такъ какъ послѣдній членъ отрицательный, то радикаль надобно взять съ знакомъ +.

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{38}}, \quad \cos \beta = \frac{-3}{\sqrt{38}}, \quad \cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

и:

$$p = \frac{3}{\sqrt{38}}$$

Примѣръ 2. Найти косинусы угловъ, которые плоскость:

$$y - ax - b = 0$$

составляетъ съ координатными осями и дать ей нормальную форму?

Отв.

$$\cos \alpha = \frac{-a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos \gamma = 0, \quad \frac{y - ax - b}{\sqrt{1+a^2}} = 0$$

§ 442. *Задача.* Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную плоскость?

Рѣшеніе. Пусть данная точка будетъ $(x_1 y_1 z_1)$, данная плоскость въ нормальной формѣ (7):

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p \quad (12)$$

черезъ данную точку $(x_1 y_1 z_1)$ проведемъ плоскость параллельно данной плоскости. Означимъ черезъ p_1 длину перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на эту послѣднюю плоскость. Очевидно ея уравненіе будетъ:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p_1 \quad (13)$$

Если означимъ длину искомаго перпендикуляра черезъ δ , то будемъ имѣть:

$$\delta = \mp (p_1 - p) \quad (14)$$

Но точка $(x_1 y_1 z_1)$ лежитъ на плоскости (13), слѣдовательно будемъ имѣть:

$$p_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma$$

подставляя эту величину въ (14), найдемъ:

$$\delta = \mp (x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p) \quad (15)$$

Откуда видимъ, что если въ уравненіе плоскости, въ нормальной формѣ, подставимъ координаты точки, лежащей внѣ плоскости, то получается числовая величина, которая будетъ длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки $(x_1 y_1 z_1)$ на плоскость. Знакъ \mp берется, смотря потому съ какой стороны плоскости лежитъ точка $(x_1 y_1 z_1)$ относительно начала координатъ (§ 441).

Это свойство плоскости въ формѣ (7) послужило къ названію уравненія (12) *нормальнымъ*.

Если уравненіе плоскости дано не въ нормальной формѣ, а въ общей, то его надобно написать въ нормальной:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

и подставить вмѣсто x, y, z значенія x_1, y_1, z_1 , что даетъ:

$$\delta = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Примѣръ 1. Найти разстоянiе начала координатъ отъ плоскости:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$$

Отв. Плоскость эта, написанная въ нормальной формѣ, будетъ:

$$\frac{bcx + acy + abz - 2abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}} = 0$$

полагая $x = 0, y = 0, z = 0$ и замѣчая, что перпендикуляръ δ изъ начала координатъ на данную плоскость есть величина положительная, найдемъ:

$$\delta = \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$$

Примѣръ 2. Найти разстоянiе точки $x = 0, y = 0, z = c$ отъ плоскости:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 1$$

Отв. Въ нормальной формѣ эта плоскость будетъ:

$$\frac{bcx + acy - abz - abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$$

полагая $x = 0, y = 0, z = c$, найдемъ:

$$\delta = \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}$$

Примѣръ 3. Найти разстоянiе двухъ параллельныхъ плоскостей:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \quad Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

Отв. Въ нормальной формѣ эти плоскости будутъ:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad , \quad \frac{Ax + By + Cz + D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Если назовемъ черезъ p и p_1 ихъ разстоянiя отъ начала координатъ, то будемъ имѣть (11):

$$p = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad , \quad p_1 = \frac{D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

откуда разстоянiе плоскостей будетъ:

$$\delta = p_1 - p = \frac{D_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

§ 443. *Задача.* Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку?

Решение. Пусть данная точка будет $(x_1 y_1 z_1)$. Возьмем уравнение плоскости в самой общей формѣ:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Если эта плоскость проходит через точку $(x_1 y_1 z_1)$, то должны имѣть:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

Вычитая это уравнение изъ предыдущаго, найдемъ:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (16)$$

Если бы уравнение плоскости было взято в канонической или нормальной формахъ, то уравнения плоскостей, проходящихъ через точку $(x_1 y_1 z_1)$ будутъ:

$$\frac{x - x_1}{a} + \frac{y - y_1}{b} + \frac{z - z_1}{c} = 0 \quad (17)$$

$$(x - x_1) \cos \alpha + (y - y_1) \cos \beta + (z - z_1) \cos \gamma = 0 \quad (18)$$

Если плоскость должна проходить через начало координатъ, то $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, слѣдовательно ея уравнение будетъ:

$$Ax + By + Cz = 0$$

§ 444. *Задача.* Найти косинусъ угла между двумя данными плоскостями?

Решение. Пусть данныя плоскости будутъ:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Если назовемъ черезъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ углы, которые перпендикуляры, опущенные изъ начала координатъ на данныя плоскости, составляютъ съ координатными осями, то будемъ имѣть (10):

$$\cos \alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \cos \beta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \cos \gamma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \cos \beta_2 = \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \cos \gamma_2 = \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Если назовемъ черезъ φ уголъ между перпендикулярами, опущенными на плоскости, то найдемъ (§ 435):

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \quad (19)$$

Легко видѣть, что:

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 + (A_1 C_2 - A_2 C_1)^2 + (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (20)$$

Если плоскости перпендикулярны, то $\cos \varphi = 0$, а если параллельны, то $\sin \varphi = 0$. Первое условіе даетъ:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad (21)$$

а второе:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \quad , \quad A_1 C_2 - A_2 C_1 = 0 \quad , \quad B_1 C_2 - B_2 C_1 = 0$$

или:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (22)$$

Это послѣднее условіе показываетъ, что если въ двухъ плоскостяхъ коэффиціенты при переменныхъ пропорціональны, то плоскости параллельны. Это мы уже замѣтили выше (§ 441).

Изъ формулъ (19) и (20) имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 + (A_1 C_2 - A_2 C_1)^2 + (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2}}{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2} \quad (23)$$

Пр. Найти уголъ между плоскостями:

$$cy - bz = 0 \quad , \quad cx - az = 0$$

и между плоскостями:

$$x - az - p = 0 \quad , \quad y - bz - q = 0$$

Отв.

$$\cos \varphi = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + c^2}} \quad , \quad \cos \varphi = \frac{ab}{\sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + b^2}}$$

§ 445. *Задача.* Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ три данныя точки?

Рѣшеніе. Пусть данныя точки будутъ:

$$(x_1 y_1 z_1) \quad , \quad (x_2 y_2 z_2) \quad , \quad (x_3 y_3 z_3)$$

Напишемъ уравненіе плоскости въ общей формѣ:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Такъ какъ эта плоскость должна проходить черезъ данныя точки, то должны имѣть:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

Изъ этихъ четырехъ уравненій можно исключить коэффициенты A, B, C, D и найдемъ:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

Это уравненіе линейное относительно x, y, z и удовлетворяется координатами данныхъ трехъ точекъ, слѣдовательно это есть уравненіе искомой плоскости.

§ 446. *Задача.* Найти точку пересѣченія трехъ данныхъ плоскостей?

Рѣшеніе. Пусть данныя плоскости будутъ:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (25)$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Такъ какъ точка пересѣченія лежитъ на всѣхъ трехъ плоскостяхъ, то ея координаты найдутся изъ трехъ предыдущихъ уравненій, опредѣливъ изъ нихъ x, y, z .

Легко видѣть, что:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}$$

Если бы случилось, что въ предъидущихъ выраженіяхъ знаменатель равенъ нулю, то точка пересѣченія плоскостей будетъ на безконечности, если же и числители равны нулю, то есть безчисленное множество точекъ пересѣченія трехъ плоскостей, въ этомъ случаѣ всѣ три плоскости пересѣкаются по одной прямой. Можно дать слѣдующій признакъ пересѣченія трехъ плоскостей по одной прямой линіи. Если три плоскости:

$$A=0 \quad , \quad B=0 \quad , \quad C=0$$

пересѣкаются по одной прямой линіи, то всегда можно подобрать такіа три числа λ , μ , ν , для которыхъ будетъ существовать тождество:

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

Въ самомъ дѣлѣ, точки, лежація на пересѣченіи плоскостей $A=0$ и $B=0$, удовлетворяютъ уравненіе:

$$\lambda A + \mu B = 0$$

а слѣдовательно для этихъ точекъ и $C=0$.

§ 447. *Задача.* Найти условіе, что четыре плоскости проходятъ черезъ одну точку?

Рѣшеніе. Пусть данныя плоскости будутъ (25) и четвертая:

$$A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \tag{26}$$

условіе это найдется, если найденныя величины для x , y , z изъ уравненій (25) подставимъ въ уравненіе (26). Но это условіе можно выразить опредѣлителемъ, исключая x , y , z между уравненіями (25) и (26), что даетъ:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{27}$$

Признакъ пересѣченія четырехъ плоскостей:

$$A=0 \quad , \quad B=0 \quad , \quad C=0 \quad , \quad D=0$$

въ одной точкѣ можно еще найти слѣдующимъ образомъ.

Если можно найти такіа четыре числа λ , μ , ν и δ , что:

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \delta D = 0$$

то четыре плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, координаты точки пересѣченія плоскостей:

$$A = 0 \quad , \quad B = 0 \quad , \quad C = 0$$

удовлетворяютъ и $D = 0$ въ силу предыдущаго тождества.

§ 448. Если одно изъ уравненій двухъ плоскостей:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (28)$$

умножимъ на неопредѣленный множитель λ и сложимъ, то получимъ уравненіе:

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \quad (29)$$

которое есть тоже плоскость, такъ какъ оно линейное относительно x, y, z . Давая λ всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ безчисленное множество—систему плоскостей, которыя всѣ проходятъ черезъ пересѣченіе данныхъ плоскостей, такъ такъ координаты точекъ, удовлетворяющихъ обѣимъ уравненіямъ (28) удовлетворяютъ и (29). Между всѣми плоскостями (29) находятся и данныя (28) именно, когда $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$.

Такъ какъ плоскость (29) заключаетъ одно неопредѣленное количество λ , то для опредѣленія ея требуется еще одно условіе.

Пр. 1. Опредѣлить λ такъ, чтобы плоскость (29) проходила черезъ точку (x_1, y_1, z_1) ?

Рѣш. Если плоскость (29) проходитъ черезъ точку (x_1, y_1, z_1) , то имѣемъ:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) = 0$$

откуда:

$$\lambda = - \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}$$

подставляя это значеніе λ въ (29), найдемъ искомую плоскость:

$$\begin{aligned} & (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)(Ax + By + Cz + D) - \\ & - (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Если плоскость должна проходить черезъ начало координатъ, то $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$, слѣдовательно уравненіе плоскости будетъ:

$$(AD_1 - A_1D)x + (BD_1 - B_1D)y + (CD_1 - C_1D)z = 0 \quad (31)$$

Пр. 2. Опредѣлить λ такъ, чтобы плоскость (29) была перпендикулярна къ прямой, которая составляетъ углы α, β, γ съ координатными осями.

Рѣш. Очевидно, условіе это будетъ (§ 441):

$$(A + \lambda A_1) \cos \alpha + (B + \lambda B_1) \cos \beta + (C + \lambda C_1) \cos \gamma = 0$$

§ 449. Если два изъ трехъ уравненій плоскостей:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

помножимъ на неопредѣленные множители λ , μ и сложимъ, то получимъ четвертую плоскость:

$$\begin{aligned} (Ax + By + Cz + D) + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \\ + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

которая, очевидно, проходитъ черезъ точку пересѣченія трехъ плоскостей (32), такъ какъ координаты точки пересѣченія удовлетворяютъ всѣмъ тремъ уравненіямъ (32), а слѣдовательно удовлетворяютъ и (33). Такъ какъ уравненіе плоскости (33) содержитъ два произвольные множителя λ , μ , то оно можетъ удовлетворять еще двумъ условіямъ.

Пр. 1. Чтобы плоскость проходила еще черезъ двѣ точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) ?

Пр. 2. Чтобы плоскость была перпендикулярна къ прямой, которая составляетъ углы α, β, γ съ координатными осями и проходила черезъ точку (x_1, y_1, z_1) ?

Первая задача даетъ для опредѣленія λ и μ два уравненія.

$$(A + \lambda A_1 + \mu A_2)x_1 + (B + \lambda B_1 + \mu B_2)y_1 + (C + \lambda C_1 + \mu C_2)z_1 + D + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0 \quad (34)$$

$$(A + \lambda A_1 + \mu A_2)x_2 + (B + \lambda B_1 + \mu B_2)y_2 + (C + \lambda C_1 + \mu C_2)z_2 + D + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0$$

или:

$$(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)\lambda + (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2)\mu + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$(A_1x_2 + B_1y_2 + C_1z_2 + D_1)\lambda + (A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 + D_2)\mu + Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

изъ этихъ уравненій можно опредѣлить μ и λ .

Для второй задачи уравненія будутъ: первое изъ предъидущихъ (34), а второе (§ 444):

$$(A + \lambda A_1 + \mu A_2) \cos \alpha + (B + \lambda B_1 + \mu B_2) \cos \beta + (C + \lambda C_1 + \mu C_2) \cos \gamma = 0$$

или:

$$(A_1 \cos \alpha + B_1 \cos \beta + C_1 \cos \gamma)\lambda + (A_2 \cos \alpha + B_2 \cos \beta + C_2 \cos \gamma)\mu + A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0 \quad (35)$$

изъ которыхъ легко опредѣлить λ и μ .

Пр. 3. Уравненіе:

$$ax + by + c + \lambda z = 0 \quad (36)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэффициентъ, представляетъ плоскость, проходящую черезъ пересѣченіе плоскостей:

$$ax + by + c = 0, \quad z = 0$$

ГЛАВА XXVII.

Прямая.

§ 450. Въ § 431 мы видѣли, что уравненія двухъ поверхностей, совокупно взятыя, представляютъ кривую—пересѣченіе двухъ поверхностей, слѣдовательно уравненія двухъ плоскостей представляютъ прямую въ пространствѣ.

Пусть уравненія двухъ плоскостей будутъ:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad , \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (1)$$

Если изъ этихъ уравненій исключимъ сначала y , а потомъ x , то найдемъ два уравненія:

$$x = az + b \quad , \quad y = cz + d \quad (2)$$

Это суть проэкции прямой на плоскостяхъ (OX, OZ) ; (OY, OZ) или уравненія плоскостей перпендикулярныхъ къ тѣмъ-же координатнымъ плоскостямъ, пересѣченіемъ которыхъ замѣщено пересѣченіе плоскостей (1). Изъ уравненій (2) видимъ, что уравненіе прямой линіи въ пространствѣ содержитъ четыре постоянныя величины—параметра, которыми опредѣляются положеніе прямой въ пространствѣ.

§ 451. Если на пересѣченіи плоскостей возьмемъ, какую-нибудь, точку $(x_1y_1z_1)$, то уравненія плоскостей можно написать въ формѣ (§ 443):

$$\begin{aligned} A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) &= 0 \\ A_2(x - x_1) + B_2(y - y_1) + C_2(z - z_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

такъ какъ обѣ плоскости (1) проходятъ черезъ точку $(x_1y_1z_1)$.

Изъ этихъ уравненій легко получить слѣдующія:

$$\frac{x - x_1}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y - y_1}{C_1A_2 - C_2A_1} = \frac{z - z_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad (4)$$

которыя суть ничто иное, какъ уравненія прямой, проходящей черезъ точку $(x_1y_1z_1)$, которыми замѣщены уравненія двухъ плоскостей (1).

§ 452. Если означимъ черезъ α , β , γ углы этой прямой съ координатными осями, черезъ r разстояніе какой-нибудь скользящей точки по ней $(x y z)$ отъ точки $(x_1y_1z_1)$, то найдемъ:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma} = r \quad (5)$$

это суть уравнения прямой, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) и составляющей углы α, β, γ с координатными осями.

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$x = x_1 + r \cos \alpha, \quad y = y_1 + r \cos \beta, \quad z = z_1 + r \cos \gamma \quad (6)$$

т. е. координаты точки выражены съ помощью одного переменнаго параметра r .

Если прямая, выраженная уравненіями (5) есть таже, что и выраженная уравненіями (4), то будемъ имѣть:

$$\lambda \cos \alpha = B_1 C_2 - B_2 C_1, \quad \lambda \cos \beta = C_1 A_2 - C_2 A_1, \quad \lambda \cos \gamma = A_1 B_2 - A_2 B_1 \quad (7)$$

λ есть неопредѣленный коэффициентъ, на который помножили знаменатели уравненій (5), чтобы отождествить ихъ съ уравненіями (4). Если уравненія (7) возвысимъ въ квадратъ и сложимъ, то опредѣлимъ λ , именно:

$$\lambda^2 = (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2 + (C_1 A_2 - C_2 A_1)^2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 \quad (8)$$

Слѣдовательно:

$$\cos \alpha = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{\lambda}, \quad \cos \beta = \frac{C_1 A_2 - C_2 A_1}{\lambda}, \quad \cos \gamma = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\lambda} \quad (9)$$

гдѣ λ имѣетъ выраженіе (8).

Изъ этого видимъ, что если прямая дается общими уравненіями двухъ плоскостей (1), то косинусы угловъ, которые она составляетъ съ координатными осями, даются уравненіями (9).

§ 453. Если уравненія прямой даны въ формѣ:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C} \quad (10)$$

то сравнивая ихъ съ (5), найдемъ:

$$\lambda \cos \alpha = A, \quad \lambda \cos \beta = B, \quad \lambda \cos \gamma = C$$

откуда:

$$\lambda^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Слѣдовательно:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (11)$$

§ 454. Если уравненія прямой даны въ формѣ:

$$x = az + b \quad , \quad y = cz + d \quad (12)$$

то ихъ можно написать такъ:

$$\frac{x - b}{a} = \frac{y - d}{c} = \frac{z - 0}{1} \quad (13)$$

Если эти уравненія сравнимъ съ уравненіями (5), то легко видѣть, что прямая проходитъ черезъ точку $(b, d, 0)$ и составляетъ углы съ координатными осями, коихъ косинусы пропорціональны количествамъ a, c и 1 , то есть:

$$\lambda \cos \alpha = a \quad , \quad \lambda \cos \beta = c \quad , \quad \lambda \cos \gamma = 1$$

откуда, какъ выше, найдемъ:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2 + 1}} \quad , \quad \cos \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 + 1}} \quad , \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2 + 1}} \quad (14)$$

§ 455. Мы видѣли, что если двѣ точки $(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2)$ въ пространствѣ даны, то всякая точка $(x y z)$ на прямой, проходящей черезъ данныя двѣ точки, выражается съ помощью переменнаго параметра λ (§ 437):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad , \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (15)$$

исключая этотъ параметръ изъ этихъ трехъ уравненій, найдемъ уравненія прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} \quad (16)$$

Эти уравненія можно получить просто изъ уравненій (5) замѣчая, что:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 - x_2}{r} \quad , \quad \cos \beta = \frac{y_1 - y_2}{r} \quad , \quad \cos \gamma = \frac{z_1 - z_2}{r}$$

Въ уравненіяхъ (16), очевидно, въ числителяхъ можно поставить вмѣсто координатъ x_1, y_1, z_1 координаты x_2, y_2, z_2 .

Это и всѣ формы, которыя можно дать уравненіямъ прямой.

§ 456. Двѣ прямыя въ пространствѣ вообще не пересѣкаются, спрашивается, какая зависимость должна существовать между коэффициентами прямыхъ для того, чтобы онѣ пересѣклись?

Пусть уравненія прямыхъ будутъ:

$$\begin{aligned} x &= az + b \quad , \quad x = a_1z + b_1 \\ y &= cz + d \quad , \quad y = c_1z + d_1 \end{aligned} \quad (17)$$

такъ какъ координаты точки пересѣченія должны удовлетворять всѣмъ предыдущимъ уравненіямъ, то x , y и z , опредѣленные изъ трехъ уравненій, должны удовлетворять и четвертому, что даетъ:

$$\frac{b - b_1}{a - a_1} = \frac{d - d_1}{c - c_1} \quad (18)$$

это и есть условіе пересѣченія прямыхъ (17). Если $a = a_1$ и $c = c_1$, то условіе (18) удовлетворяется; но это условіе параллельности линій, т. е. онѣ находятся въ одной плоскости, а слѣдовательно пересѣкаются (на безконечности).

§ 457. Рѣшимъ теперь нѣкоторыя задачи относительно прямой и плоскости.

Задача 1. Найти уголъ между двумя прямыми:

$$\frac{x - x_1}{A_1} = \frac{y - y_1}{B_1} = \frac{z - z_1}{C_1} \quad , \quad \frac{x - x_2}{A_2} = \frac{y - y_2}{B_2} = \frac{z - z_2}{C_2} \quad (19)$$

Рѣшеніе. Такъ какъ косинусы угловъ, которые эти прямая составляютъ съ координатными осями суть (§ 444).

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \quad , \quad \cos\beta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \quad , \quad \cos\gamma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \\ \cos\alpha_2 &= \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad , \quad \cos\beta_2 = \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad , \quad \cos\gamma_2 = \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \end{aligned}$$

слѣдовательно (§ 444):

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (20)$$

откуда, если прямая перпендикулярны, то:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad (21)$$

Задача 2. Найти уголъ между прямой и плоскостю?

Рѣшеніе. Пусть уравненіе плоскости будетъ:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (22)$$

а уравненія прямой:

$$\frac{x - x_1}{A_1} = \frac{y - y_1}{B_1} = \frac{z - z_1}{C_1} \quad (23)$$

Изъ выраженій для угловъ (§ 441), перпендикуляра къ плоскости (22) и выраженій для угловъ прямой (23) найдемъ, что:

$$\cos \varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \quad (24)$$

Если-бы прямая была дана въ формѣ:

$$x = az + c, \quad y = bz + d$$

то очевидно:

$$\cos \varphi = \frac{aA + bB + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \quad (25)$$

Если прямая перпендикулярна къ плоскости, то:

$$aA + bB + C = 0 \quad (26)$$

Задача. 3. Написать уравненіе плоскости перпендикулярной къ прямой:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C} \quad (27)$$

Рѣшеніе. Соображаясь съ предыдущимъ, найдемъ:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (28)$$

гдѣ D остается неопредѣленнымъ, если-же плоскость должна проходить черезъ точку (x_2, y_2, z_2) , то будемъ имѣть:

$$A(x - x_2) + B(y - y_2) + C(z - z_2) = 0 \quad (29)$$

Если прямая будетъ дана уравненіями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (30)$$

то уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку (x_1, y_1, z_1) и перпендикулярной къ пересѣченію двухъ предыдущихъ плоскостей, будетъ (§ 452):

$$(B_1C_2 - B_2C_1)(x - x_1) + (C_1A_2 - C_2A_1)(y - y_1) + (A_1B_2 - A_2B_1)(z - z_1) = 0 \quad (31)$$

Наконецъ если уравненія прямой будутъ въ формѣ:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma} \quad (32)$$

то уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку $(x_2 y_2 z_2)$, перпендикулярной къ прямой (32), будетъ:

$$(x - x_2) \cos \alpha + (y - y_2) \cos \beta + (z - z_2) \cos \gamma = 0 \quad (33)$$

Задача 4. Написать уравненія прямой перпендикулярной къ плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (34)$$

Рѣшеніе. Легко видѣть, что уравненія прямой будутъ, если она еще проходитъ черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C} \quad (35)$$

Задача 5. Найти уравненіе плоскости, опредѣленной двумя пересѣкающимися прямыми?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma_1} ; \quad \frac{x - x_1}{\cos \alpha_2} = \frac{y - y_1}{\cos \beta_2} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma_2} \quad (36)$$

прямая проходятъ черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$.

Если означимъ черезъ A, B, C косинусы угловъ, которые составляетъ съ координатными осями перпендикуляръ къ искомой плоскости, то ея уравненіе будетъ, какъ видѣли выше (§ 443, 16):

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (37)$$

такъ какъ и плоскость проходитъ черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$.

Такъ какъ перпендикуляръ къ плоскости будетъ перпендикуляромъ и къ прямымъ (36), то имѣемъ (§ 436):

$$A \cos \alpha_1 + B \cos \beta_1 + C \cos \gamma_1 = 0 \quad (38)$$

$$A \cos \alpha_2 + B \cos \beta_2 + C \cos \gamma_2 = 0$$

откуда найдемъ:

$$\frac{A}{\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1} = \frac{B}{\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1} = \frac{C}{\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1} \quad (39)$$

Подставляя въ (37) вмѣсто A, B, C величины пропорціональныя, найдемъ искомое уравненіе:

$$(x - x_1)(\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1) + (y - y_1)(\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1) + (z - z_1)(\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1) = 0 \quad (40)$$

Задача 6. Найти условіе, при которомъ прямая:

$$x = cz + b, \quad y = cz + d \quad (41)$$

или:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma} \quad (42)$$

лежитъ въ плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (43)$$

Рѣшеніе. Прямую (41) можно написать въ формѣ (§ 454):

$$\frac{x - b}{a} = \frac{y - d}{c} = \frac{z - 0}{1}$$

слѣдовательно она проходитъ черезъ точку $(b, d, 0)$; такъ какъ, по условію, она находится вся въ плоскости (43), то точка $(b, d, 0)$ должна удовлетворять уравненію (43), т. е.:

$$Ab + Bd + D = 0 \quad (44)$$

Но перпендикуляръ къ плоскости (43) долженъ быть перпендикуляромъ и къ прямой (41), слѣдовательно имѣемъ еще одно условіе:

$$Aa + Bc + C = 0 \quad (45)$$

Если прямая будетъ дана въ формѣ (42), то предъидущія условія (44), (45) будутъ:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \quad (46)$$

$$A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0$$

Задача 7. Найти уравненіе плоскости, опредѣленной двумя параллельными прямыми:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}; \quad \frac{x - x_2}{\cos \alpha} = \frac{y - y_2}{\cos \beta} = \frac{z - z_2}{\cos \gamma} \quad (47)$$

Рѣшеніе. Очевидно въ искомой плоскости будетъ находится прямая, соединяющая точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) , но ея уравненіе, какъ выше видѣли, есть (§ 455):

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} \quad (48)$$

слѣдовательно задача сводится на 5-ую: Написать уравненіе плоскости определенной одной изъ прямыхъ (47) и прямою (48)?

Откуда легко видѣть, что косинусы угловъ, которые перпендикуляръ къ искомой плоскости составляетъ съ координатными осями, пропорціональны выраженіямъ:

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2) \cos \gamma - (z_1 - z_2) \cos \beta & ; \quad (z_1 - z_2) \cos \alpha - (x_1 - x_2) \cos \gamma ; \\ (x_1 - x_2) \cos \alpha - (y_1 - y_2) \cos \beta & \end{aligned} \quad (49)$$

такъ какъ углы, которые прямая (48) составляетъ съ координатными осями пропорціональны разностямъ $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$.

Слѣдовательно уравненіе искомой плоскости будетъ:

$$\begin{aligned} & \{(y_1 - y_2) \cos \gamma - (z_1 - z_2) \cos \beta\} (x - x_1) + \\ & + \{(z_1 - z_2) \cos \alpha - (x_1 - x_2) \cos \gamma\} (y - y_1) + \\ & + \{(x_1 - x_2) \cos \beta - (y_1 - y_2) \cos \alpha\} (z - z_1) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Задача 8. Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ прямую:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad , \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (51)$$

и перпендикулярную къ плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (52)$$

Рѣшеніе. Такъ какъ искомая плоскость должна проходить черезъ пересѣченіе плоскостей (51), то ея уравненіе есть:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (53)$$

или:

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + D_1 + \lambda D_2 = 0 \quad (54)$$

Но эта плоскость, по условію, перпендикулярна къ плоскости (52), слѣдовательно имѣемъ:

$$A(A_1 + \lambda A_2) + B(B_1 + \lambda B_2) + C(C_1 + \lambda C_2) = 0 \quad (55)$$

опредѣляя изъ этого уравненія λ и вставляя въ уравненіе (53), найдемъ уравненіе искомой плоскости:

$$\lambda = - \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{AA_2 + BB_2 + CC_2} \quad (56)$$

слѣдовательно:

$$\begin{aligned} & (AA_2 + BB_2 + CC_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - \\ & - (AA_1 + BB_1 + CC_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Если уравненія прямой и плоскости даны въ формахъ:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad \frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_2}{\cos \gamma_1} \quad (58)$$

то искомую плоскость можно написать въ формѣ:

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

но такъ какъ перпендикуляръ къ этой плоскости перпендикуляренъ къ перпендикуляру къ плоскости (58) и перпендикуляренъ къ прямой (58), то имѣемъ (38):

$$A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0$$

$$A \cos \alpha_1 + B \cos \beta_1 + C \cos \gamma_1 = 0$$

откуда:

$$\frac{A}{\cos \beta \cos \gamma_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma} = \frac{B}{\cos \gamma \cos \alpha_1 - \cos \gamma_1 \cos \alpha} = \frac{C}{\cos \alpha \cos \beta_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta}$$

слѣдовательно уравненіе искомой плоскости будетъ:

$$\begin{aligned} & (\cos \beta \cos \gamma_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma)(x-x_1) + (\cos \gamma \cos \alpha_1 - \cos \gamma_1 \cos \alpha)(y-y_1) + \\ & + (\cos \alpha \cos \beta_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta)(z-z_1) = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Задача 9. Даны уравненія двухъ непересекающихся прямыхъ:

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1}; \quad \frac{x-x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y-y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z-z_2}{\cos \gamma_2} \quad (60)$$

написать уравненіе плоскости, проходящей черезъ одну изъ данныхъ прямыхъ параллельно другой?

Рѣшеніе. Если искомаѣ плоскость будетъ проходить по первой прямой, то еѣ уравненіе будетъ:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (61)$$

Но перпендикуляръ къ этой плоскости перпендикуляренъ къ обѣимъ прямымъ (60), слѣдовательно (40) уравненіе искомаѣ плоскости будетъ:

$$(x - x_1)(\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1) + (y - y_1)(\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1) + \\ + (z - z_1)(\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1) = 0 \quad (62)$$

Очевидно, что уравненіе плоскости, проходящей по второй изъ прямыхъ (60) параллельно первой, будетъ:

$$(x - x_2)(\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1) + (y - y_2)(\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1) + \\ + (z - z_2)(\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1) = 0 \quad (63)$$

Разстояніе между плоскостями (62) и (63), очевидно, будетъ разность перпендикуляровъ, опущенныхъ на эти плоскости изъ начала координатъ. Чтобы найти длину этихъ перпендикуляровъ надобно плоскостямъ (62) и (63) дать нормальную форму и положить въ нихъ $x=0, y=0, z=0$ (§ 442).

Чтобы этимъ плоскостямъ дать нормальную форму надобно обѣ раздѣлить на корень квадратный изъ суммы квадратовъ выраженій:

$$\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1, \quad \cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1, \quad \cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1$$

но этотъ корень есть ничто иное, какъ синусъ угла между плоскостями (§ 435), слѣдовательно, разстояніе между плоскостями будетъ, если черезъ φ назовемъ уголъ между ними:

$$\frac{(x_1 - x_2)(\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1) + (y_1 - y_2)(\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1) + \\ + (z_1 - z_2)(\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1)}{\sin \varphi} \quad (64)$$

Задача 10. Найти длину и уравненіе кратчайшаго разстоянія между двумя непересѣкающимися прямыми?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma_1}; \quad \frac{x - x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y - y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z - z_2}{\cos \gamma_2} \quad (65)$$

уравненія плоскостей, изъ коихъ каждая проходитъ черезъ одну изъ этихъ прямыхъ параллельно другой, какъ видѣли выше (62) и (63) суть:

$$(x - x_1)(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) + (y - y_1)(\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) + \\ + (z - z_1)(\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1) = 0 \quad (66)$$

$$(x - x_2)(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) + (y - y_2)(\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) + \\ + (z - z_2)(\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1) = 0$$

разстояніе между этими плоскостями, какъ мы видѣли есть (64); оно-же, очевидно, и кратчайшее. Чтобы найти уравненія прямой, проходящей черезъ точки на прямыхъ (65), которыхъ, разстояніе есть кратчайшее, надобно составить уравненія двухъ плоскостей, изъ коихъ каждая, проходя черезъ одну изъ прямыхъ (65), была-бы перпендикулярна къ одной изъ плоскостей (66). Очевидно, что пересѣченіе этихъ плоскостей будетъ перпендикулярно къ обѣимъ прямымъ, а слѣдовательно и есть прямая кратчайшаго разстоянія.

Пусть уравненіе одной изъ этихъ плоскостей, положимъ той, которая проходитъ по первой изъ прямыхъ (65) и перпендикулярна ко второй изъ плоскостей (66), будетъ:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (67)$$

Такъ какъ эта плоскость проходитъ по первой прямой (65), то имѣемъ (§ 457):

$$A \cos\alpha_1 + B \cos\beta_1 + C \cos\gamma_1 = 0 \quad (68)$$

но плоскость (67) должна быть перпендикулярна ко второй изъ плоскостей (66), слѣдовательно будемъ имѣть:

$$(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) A + (\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) B + \\ + (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1) C = 0 \quad (69)$$

откуда найдемъ, что A , B , C пропорціональны выраженіямъ:

$$\cos\beta_1 (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1) - \cos\gamma_1 (\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) \\ \cos\gamma_1 (\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1) - \cos\alpha_1 (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1) \\ \cos\alpha_1 (\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1) - \cos\beta_1 (\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1)$$

Если вспомнимъ, что:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

то легко видѣть, что три предъидущія выраженія будутъ:

$$-\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \varphi, \quad -\cos \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \varphi, \quad -\cos \gamma_2 + \cos \gamma_1 \cos \varphi$$

Слѣдовательно уравненіе искомой плоскости будетъ:

$$\begin{aligned} &(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \varphi)(x - x_1) + (\cos \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \varphi)(y - y_1) + \\ &+ (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 \cos \varphi)(z - z_1) = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

Уравненіе другой плоскости, очевидно, будетъ, по симметріи:

$$\begin{aligned} &(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cos \varphi)(x - x_2) + (\cos \beta_1 - \cos \beta_2 \cos \varphi)(y - y_2) + \\ &+ (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2 \cos \varphi)(z - z_2) = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

Эти двѣ плоскости (70) и (71) и представляютъ прямую кратчайшаго разстоянія между данными двумя прямыми. Косинусы угловъ, которые прямая кратчайшаго разстоянія составляетъ съ координатными осями, очевидно, пропорціональны выраженіямъ:

$$\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1; \quad \cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1; \quad \cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1$$

ГЛАВА XXVIII.

Двойственность въ пространствѣ.

Плоскость и точка.

§ 458. Мы видѣли, что уравненіе плоскости, приведенное къ простѣйшему виду содержитъ три постоянныя величины, которыя опредѣляютъ ея положеніе въ пространствѣ, таковы косинусы угловъ, которые перпендикуляръ къ плоскости составляетъ съ координатными осями и длина перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на плоскость, отрѣзки, которые плоскость дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ и наконецъ, въ самой общей формѣ, отношенія трехъ коэффициентовъ къ четвертому. Эти три величины, опредѣляющія положеніе плоскости въ пространствѣ мы будемъ называть *координатами плоскости*; очевидно, что онѣ во всѣхъ своихъ видахъ суть ничто иное, какъ три точки, такъ какъ положеніе плоскости опредѣляется *тремя точками*; отсюда вытекаетъ такая взаимность: что точка въ пространствѣ опредѣляется тремя плоскостями—это

система Декарта, а плоскость опредѣляется тремя точками; отсюда вытекаетъ то что называютъ *двойственностью координатъ*, которая состоитъ въ томъ, что три постоянныя величины можно разсматривать, какъ координаты точки или какъ координаты плоскости.

Въ первомъ случаѣ точка опредѣляется координатами или тремя уравненіями, а плоскость однимъ; во второмъ, плоскость опредѣляется координатами или тремя уравненіями, а точка однимъ уравненіемъ.

§ 459. Возьмемъ уравненіе плоскости въ канонической формѣ (§ 439):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1)$$

гдѣ a, b, c суть отрѣзки, которые плоскость дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ. Возьмемъ на этой плоскости, какую нибудь, точку (x_1, y_1, z_1) , то будемъ имѣть:

$$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c} = 1 \quad (2)$$

Если координаты точки, т. е. x_1, y_1, z_1 оставимъ постоянными, а отрѣзки a, b, c будемъ измѣнять, но такъ, чтобы они удовлетворяли постоянно уравненію (2), то плоскость будетъ измѣнять свое положеніе, при чемъ будетъ постоянно проходить черезъ точку (x_1, y_1, z_1) . При такомъ условіи, разсматривая (x_1, y_1, z_1) , какъ постоянныя, а (a, b, c) , какъ переменныя величины, уравненіе (2) будетъ представлять уравненіе точки.

Чтобы дать этому уравненію болѣе симметрическую форму мы вмѣсто отрѣзковъ a, b, c возьмемъ ихъ обратныя величины съ противными знаками, т. е. положимъ:

$$\frac{1}{a} = -\xi, \quad \frac{1}{b} = -\eta, \quad \frac{1}{c} = -\zeta \quad (3)$$

тогда уравненіе (2) приметъ весьма простую форму:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0 \quad (4)$$

Если это уравненіе напишемъ въ формѣ:

$$x \xi + y \eta + z \zeta + 1 = 0 \quad (5)$$

то разсматривая въ немъ ξ, η, ζ , какъ величины постоянныя, а x, y, z , какъ переменныя, оно будетъ представлять плоскость, коей положеніе опредѣляется величинами или координатами ξ, η, ζ , а каждая по ней скользящая точка будетъ опредѣляться переменными x, y, z , удовлетворяющими уравненію (5).

Обратно, если x, y, z будемъ разсматривать, какъ величины постоянныя, а ξ, η, ζ , какъ переменныя, то уравненіе (5) будетъ представлять точку, которой положеніе опредѣляется координатами $(x y z)$; координаты плоскости, принимающей всевозможныя положенія около точки $(x y z)$ опредѣляются величинами переменными ξ, η, ζ удовлетворяющими уравненіе (5).

§ 460. Если уравненія плоскости или точки будутъ даны общими уравненіями:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \quad A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0 \quad (6)$$

то координаты плоскости, въ первомъ, а координаты точки, во второмъ, очевидно, будутъ:

$$\frac{A}{D} \quad , \quad \frac{B}{D} \quad , \quad \frac{C}{D} \quad (7)$$

Если будутъ, слѣдовательно, даны координаты плоскости ξ_1, η_1, ζ_1 , то ея уравненіе будетъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0 \quad (8)$$

а если даны координаты точки x_1, y_1, z_1 , то ея уравненіе будетъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0 \quad (9)$$

§ 461. Перенесемъ теперь, по смыслу двойственности, теоремы, найденныя выше, относительно плоскости, на теоремы относительно точки.

Пр. 1. Если положеніе плоскости дано координатами ξ_1, η_1, ζ_1 , то ея уравненіе будетъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0$$

Пр. 2. Если плоскость дана уравненіемъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0$$

то ея координаты будутъ:

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1$$

Пр. 3. Если уравненіе плоскости дано въ общей формѣ:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

то ея координаты будутъ:

$$\frac{A}{D} \quad , \quad \frac{B}{D} \quad , \quad \frac{C}{D}$$

Пр. 1. Если положеніе точки дано координатами x_1, y_1, z_1 , то ея уравненіе будетъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0$$

Пр. 2. Если точка дана уравненіемъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0$$

то ея координаты будутъ:

$$x_1, y_1, z_1$$

Пр. 3. Если уравненіе точки дано въ общей формѣ:

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

то ея координаты будутъ:

$$\frac{A}{D} \quad , \quad \frac{B}{D} \quad , \quad \frac{C}{D}$$

Эта взаимность не имѣла бы мѣста если бы за координаты плоскости взяли не обратныя величины отрѣзковъ съ противными знаками, а сами отрѣзки.

Пр. 4. Уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$ есть (§ 443):

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

или:

$$\xi_1(x - x_1) + \eta_1(y - y_1) + \zeta_1(z - z_1) = 0$$

Пр. 5. Уравненіе плоскости, проходящей черезъ три точки:

$$(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), (x_3 y_3 z_3)$$

есть:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Пр. 6. Если четыре плоскости:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0$$

$$\xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z + 1 = 0$$

$$\xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z + 1 = 0$$

$$\xi_4 x + \eta_4 y + \zeta_4 z + 1 = 0$$

пересѣкаются въ одной точкѣ, то:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Изъ этихъ примѣровъ видимъ, что переходъ отъ однихъ теоремъ или выраженій къ другимъ дѣлается, замѣщая слова *плоскость*—*точкою*, а слова *точка*—*плоскостью*.

§ 462. Но если входятъ въ выраженія углы и отрѣзки, то такого перехода сдѣлать нельзя, а надобно перевести всѣ данныя относительно точки на плоскость и рѣшить задачу въ этой системѣ.

Задача 1. Найти уголъ между двумя плоскостями, коихъ положеніе дано координатами?

Пр. 4. Уравненіе точки, лежащей на плоскости $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ есть:

$$A(\xi - \xi_1) + B(\eta - \eta_1) + C(\zeta - \zeta_1) = 0$$

или:

$$x_1(\xi - \xi_1) + y_1(\eta - \eta_1) + z_1(\zeta - \zeta_1) = 0$$

Пр. 5. Уравненіе точки находящейся на трехъ плоскостяхъ:

$$(\xi_1 \eta_1 \zeta_1), (\xi_2 \eta_2 \zeta_2), (\xi_3 \eta_3 \zeta_3)$$

есть:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Пр. 6. Если четыре точки:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0$$

$$x_2 \xi + y_2 \eta + z_2 \zeta + 1 = 0$$

$$x_3 \xi + y_3 \eta + z_3 \zeta + 1 = 0$$

$$x_4 \xi + y_4 \eta + z_4 \zeta + 1 = 0$$

лежать въ одной плоскости то:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Рѣшеніе Пусть координаты двухъ данныхъ плоскостей будутъ:

$$(\xi_1 \eta_1 \zeta_1) ; (\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$$

Если координаты плоскости даны, то уравненіе ея легко написать (§ 460), слѣдовательно уравненія двухъ данныхъ плоскостей будутъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0 \quad , \quad \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z + 1 = 0$$

откуда уголъ φ между ними будетъ (§ 444):

$$\cos \varphi = \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2}}$$

Задача 2. Найти углы, которые прямая, соединяющая двѣ данныя (уравненіями) точки, составляетъ съ координатными осями?

Рѣшеніе. Пусть уравненія двухъ данныхъ точекъ будутъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0 \quad , \quad x_2 \xi + y_2 \eta + z_2 \zeta + 1 = 0$$

Очевидно, координаты этихъ точекъ суть:

$$x_1, y_1, z_1 \quad ; \quad x_2, y_2, z_2$$

Слѣдовательно уравненія прямой, соединяющей эти двѣ точки будутъ (§ 455):

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} = r$$

откуда если α, β, γ суть углы, которые эта прямая составляетъ съ координатными осями, а r разстояніе точекъ, то (§ 455):

$$\cos \alpha = \frac{x_1 - x_2}{r} \quad , \quad \cos \beta = \frac{y_1 - y_2}{r} \quad , \quad \cos \gamma = \frac{z_1 - z_2}{r}$$

Задача 3. Найти разстояніе точки данной уравненіемъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0 \tag{10}$$

отъ плоскости данной координатами $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$?

Рѣшеніе. Такъ какъ точка дана уравненіемъ (10), то ея координаты суть $(x_1 y_1 z_1)$, а плоскость дана координатами, то ея уравненіе есть (§ 460):

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0 \tag{11}$$

Слѣдовательно задача сводится на слѣдующую: найти разстояніе точки $(x_1 y_1 z_1)$ отъ плоскости (11), которая рѣшена въ § 442, а для этого надобно написать уравненіе (11) въ нормальной формѣ:

$$\frac{\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}} = 0 \quad (12)$$

и вставить въ него координаты данной точки; если разстояніе означимъ чрезъ r , то найдемъ:

$$\frac{\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}} = r \quad (13)$$

Если $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, то разстояніе начала координатъ отъ плоскости $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ будетъ:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}} = r \quad (14)$$

Уравненіе (13) можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$(\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 + 1)^2 = r^2 (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) \quad (15)$$

Если въ этомъ уравненіи отбросимъ при ξ_1, η_1, ζ_1 индексы и примемъ ихъ за величины переменныя, но удовлетворяющія предъидущему уравненію, то плоскость, которой положеніе будетъ опредѣляться этими переменными, будетъ принимать всевозможныя положенія около точки $(x_1 y_1 z_1)$, находясь отъ нея постоянно на разстояніи r , слѣдовательно во всѣхъ своихъ положеніяхъ она будетъ касаться шара, коего радіусъ есть r , а центръ въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$, а потому уравненіе:

$$(x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1)^2 = r^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \quad (16)$$

будетъ алгебраическое представленіе поверхности шара, коего радіусъ есть r , а центръ данъ уравненіемъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0 \quad (17)$$

Если центръ шара находится въ началѣ координатъ, то $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, а уравненіе (16) приметъ весьма простую форму:

$$r^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1 \quad (18)$$

Это будетъ уравненіе поверхности шара, коего центръ находится въ началѣ координатъ, радіусъ есть r , а плоскость, коей координаты

удовлетворяютъ уравненіе (18) касается во всѣхъ своихъ положеніяхъ этого шара.

Изъ этого примѣра видимъ, что можно разсматривать поверхность шара, какъ обертку плоскостей, которыя касаются его во всѣхъ своихъ положеніяхъ, если координаты, опредѣляющія эти положенія, удовлетворяютъ уравненія (16) или (18).

§ 463. Разсмотримъ теперь, какъ слѣдуетъ понимать уравненіе, связывающее координаты, опредѣляющія положеніе плоскости. Пусть будетъ какое нибудь уравненіе:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad (19)$$

Это уравненіе имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, каждая система ξ, η, ζ , удовлетворяющая уравненіе (19), опредѣляетъ положеніе плоскости; этихъ положеній можетъ быть нѣсколько, смотря по характеру уравненія. Плоскости эти, во всѣхъ своихъ положеніяхъ, будутъ касаться поверхности, которой форма и свойства будутъ зависеть отъ уравненія (19). Поверхность эта называется *оберткой* всѣхъ положеній плоскостей, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненіе (19).

Слѣдовательно разъ поверхность представляется, какъ непрерывный рядъ точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ извѣстному уравненію $f(x, y, z) = 0$, другой разъ, какъ непрерывный рядъ плоскостей, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненіе $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Пояснимъ это примѣрами:

Пр. 1 Мы видѣли, что уравненіе:

$$x = a$$

представляетъ плоскость перпендикулярную къ оси x на разстояніи a отъ начала координатъ.

Пр. 2. Уравненія:

$$x = a, \quad y = b$$

совокупно, представляютъ прямую пересѣченія двухъ плоскостей:

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b$$

Пр. 3. Уравненія:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

представляютъ точку пересѣченія плоскостей:

$$x = a, \quad y = b \quad \text{и} \quad z = c$$

Пр. 1. Уравненіе:

$$\xi = a$$

будетъ представлять точку на оси x на разстояніи $\frac{1}{a}$ отъ начала координатъ:

Пр. 2. Уравненія:

$$\xi = a, \quad \eta = b$$

совокупно, представляютъ прямую, проходящую черезъ точки:

$$\xi = a \quad \text{и} \quad \eta = b$$

Пр. 3. Уравненія:

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c$$

представляютъ плоскость проходящую черезъ точки:

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c$$

Если:

$$z = 0 \quad , \quad x = a \quad , \quad y = b$$

то это будетъ точка на плоскости (OX, OY) .

Если:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0$$

то это начало координатъ.

Если:

$$x = \infty \quad , \quad y = \infty \quad , \quad z = \infty$$

то это точка на безконечности.

Если:

$$\zeta = 0 \quad , \quad \xi = a \quad , \quad \eta = b$$

то соответственный отръзокъ на оси z будетъ равенъ ∞ , а совокупно эти уравненія представляютъ плоскость параллельную оси Z .

Если:

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \zeta = 0$$

то это будетъ плоскость на безконечности.

Если:

$$\xi = \infty \quad , \quad \eta = \infty \quad , \quad \zeta = \infty$$

то это плоскость, проходящая черезъ начало координатъ.

§ 464. Мы видѣли, что уравненія двухъ поверхностей:

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad f_1(x, y, z) = 0 \quad (20)$$

представляютъ совокупно кривую, образованную пересѣченіемъ двухъ поверхностей.

Два уравненія:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad , \quad f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad (21)$$

представляютъ поверхности, къ которымъ касаются плоскости, координаты которыхъ удовлетворяютъ обѣимъ предъидущимъ уравненіямъ. Эти касательныя плоскости, во всѣхъ своихъ положеніяхъ, пересѣкаютъ координатныя плоскости по прямымъ, которыя во всѣхъ своихъ положеніяхъ касаются кривыхъ, уравненія которыхъ получатся, исключая одно изъ переменныхъ между уравненіями (21). Исключая ζ , η и ξ , найдемъ уравненія этихъ кривыхъ на координатныхъ плоскостяхъ (OX, OY) , (OX, OZ) , (OY, OZ) . Возьмемъ, на примѣръ, уравненія:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad \text{и} \quad x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0 \quad (22)$$

последнее есть точка, коей координаты суть x_1, y_1, z_1 .

Координаты ξ, η, ζ , удовлетворяющія оба предъидущія уравненія, будутъ опредѣлять положенія плоскостей, которыя, проходя постоянно черезъ точку (x_1, y_1, z_1) , касаются поверхности $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$; очевидно, плоскости образуютъ конусъ, описанный около поверхности, вершина котораго находится въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) , а его вѣтви, пересѣкаясь съ координатными плоскостями, образуютъ кривыя, которыя получатся, исключая между уравненіями (22) величины ζ или η , или ξ .

Пр. 1. Пусть будутъ даны двѣ поверхности:

$$r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1, \quad \zeta = a \quad (23)$$

первая изъ нихъ есть шаръ, коего центръ находится въ началѣ координатъ, а вторая точка на оси Z , на разстояніи $-\frac{1}{a}$ отъ начала координатъ. Если исключимъ изъ этихъ уравненій ζ , то найдемъ:

$$r^2(\xi^2 + \eta^2 + a^2) = 1$$

или:

$$\left(\frac{r}{\sqrt{1 - a^2 r^2}}\right)^2 (\xi^2 + \eta^2) = 1$$

форма этого уравненія показываетъ, что это есть кругъ (§ 65), коего радиусъ равенъ:

$$\frac{r}{\sqrt{1 - a^2 r^2}}$$

Это тотъ кругъ, который образуетъ конусъ, описанный около шара и имѣющій вершину въ точкѣ $\zeta = a$, пересѣченіемъ съ плоскостью (OX, OY) . Если $a = 0$, то вершина конуса находится на безконечности; конусъ обращается въ цилиндръ, описанный около шара, который пересѣкается съ плоскостью (OX, OY) по кругу:

$$r^2(\xi^2 + \eta^2) = 1$$

Пр. 2. Уравненія двухъ точекъ:

$$x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0, \quad x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta + 1 = 0 \quad (24)$$

очевидно, въ совокупности, представляютъ прямую, проходящую черезъ эти точки. Эта прямая есть пересѣченіе всѣхъ плоскостей, координаты которыхъ удовлетворяютъ обѣимъ предыдущимъ уравненіямъ.

Очевидно, что уравненія:

$$x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0, \quad \zeta = 0 \quad (25)$$

представляютъ прямую, проходящую черезъ точку (x_1, y_1, z_1) параллельно оси Z . Эта прямая встрѣчаетъ, очевидно, плоскость (OX, OY) въ точкѣ:

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 = 0$$

Если имѣемъ уравненія трехъ поверхностей:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad , \quad f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad , \quad f_2(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad (26)$$

то совокупно онѣ представляютъ одну или нѣсколько общихъ касательныхъ плоскостей къ этимъ поверхностямъ. Напримѣръ:

$$r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0 \quad , \quad x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0 \quad , \quad x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta + 1 = 0 \quad (27)$$

эти три уравненія будутъ представлять двѣ касательныя плоскости къ шару, проходящія черезъ точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) .

§ 465. Всего сказаннаго выше достаточно для уразумѣнія геометрическаго значенія уравненія:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

или такихъ уравненій въ совокупности. Рѣшимъ еще нѣсколько вопросовъ.

Задача 1. Даны уравненія четырехъ плоскостей, образующихъ тетраэдръ, найти уравненія его вершинъ?

Рѣшеніе. Пусть данныя уравненія будутъ:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Найдемъ уравненіе вершины, образуемой пересѣченіемъ послѣднихъ трехъ плоскостей (28). Пусть уравненіе, какой нибудь, плоскости, проходящей черезъ эту вершину будетъ:

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0$$

Такъ какъ, по условію, эта плоскость проходитъ черезъ пересѣченіе послѣднихъ трехъ плоскостей (28), то слѣдующее условіе должно быть удовлетворено:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

или:

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 = 0$$

это и есть искомое уравненіе вершины, гдѣ A_1, B_1, \dots суть миноры, соотвѣтствующіе элементамъ a_1, b_1, \dots определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = R \quad (30)$$

Легко видѣть теперь, что всѣ четыре вершины будутъ даны уравненіями:

$$\begin{aligned} A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 &= 0 \\ A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 &= 0 \\ A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3 &= 0 \\ A_4\xi + B_4\eta + C_4\zeta + D_4 &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Задача 2. Даны уравненія четырехъ точекъ, образующихъ вершины тетраэдра, найти уравненія его граней?

Рѣшеніе. Пусть уравненія вершинъ будутъ:

$$\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1 &= 0 \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2 &= 0 \\ a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3 &= 0 \\ a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4 &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Разсужденія, подобныя предъидущимъ, даютъ слѣдующія уравненія граней:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

гдѣ A_1, B_1, \dots имѣютъ тѣ же значенія, какъ и въ предъидущей задачѣ.

§ 466. *Задача.* Найти объемъ тетраэдра, коего вершины даны координатами?

Рѣшеніе. Пусть ребра тетраэдра будутъ r, r_1, r_2 , а углы между эти-

ми ребрами пусть будутъ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$. Двойная площадь треугольника, коего стороны суть r и r_1 , а уголъ между ними α_2 , какъ извѣстно, есть:

$$2 \Delta = rr_1 \sin \alpha_2$$

Высота тетраэдра, очевидно, есть;

$$r_2 \sin \alpha_1 \sin A$$

если A есть двугранный уголъ, коего ребро есть r . Слѣдовательно имѣемъ:

$$6\Pi = rr_1 r_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin A \quad (34)$$

гдѣ Π есть объемъ тетраэдра.

Изъ этого выраженія видимъ, что если отъ вершины тетраэдра, гдѣ сходятся ребра r, r_1, r_2 , отложить отрѣзки r', r_1', r_2' такъ, чтобы:

$$rr_1 r_2 = r' r_1' r_2'$$

то получимъ новый тетраэдръ, коего объемъ будетъ равенъ объему даннаго, если только наклоненіе реберъ и граней неизмѣняется.

Возьмемъ теперь тетраэдръ, коего одна изъ вершинъ находится въ началѣ координатъ, а три остальные, имѣя x', y', z' ; x'', y'', z'' ; x''', y''', z''' координатами, лежатъ въ плоскости параллельной плоскости (OX, OY) . Такъ какъ площадь этого треугольника равна площади своей проэкции на (OX, OY) , то его площадь будетъ (§ 5):

$$2 \Delta = (x'y'' - x''y') + (x''y''' - x'''y'') + (x'''y' - x'y''') \quad (35)$$

Если этотъ треугольникъ возьмемъ за основаніе тетраэдра, то его высота z' , будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на площадь предыдущаго треугольника.

Если положимъ $z' = z'' = z'''$, то объемъ тетраэдра можно написать въ формѣ:

$$6\Pi = (x'y'' - x''y') z''' + (x'''y' - x'y''') z'' + (x''y''' - x'''y'') z' \quad (36)$$

отложимъ теперь на ребрахъ тетраэдра отъ начала координатъ отрѣзки r', r_1', r_2' , но такъ, чтобы $rr_1 r_2 = r' r_1' r_2'$. Пусть координаты полученныхъ, такимъ образомъ, вершинъ втораго тетраэдра, котораго объемъ будетъ равенъ объему даннаго, будутъ:

$$(x_1 y_1 z_1) ; (x_2 y_2 z_2) ; (x_3 y_3 z_3)$$

но котораго основаніе, очевидно, не будетъ параллельно плоскости (OX, OY) . Изъ этого построения легко видѣть, что:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{r}{r'} x'_1 & , & & y' &= \frac{r}{r'} y'_1 & , & & z' &= \frac{r}{r'} z'_1 \\ x'' &= \frac{r_1}{r'_1} x'_2 & , & & y'' &= \frac{r_1}{r'_1} y'_2 & , & & z'' &= \frac{r_1}{r'_1} z'_2 \\ x''' &= \frac{r_2}{r'_2} x'_3 & , & & y''' &= \frac{r_2}{r'_2} y'_3 & , & & z''' &= \frac{r_2}{r'_2} z'_3 \end{aligned}$$

подставляя эти выраженія въ (36) и замѣчая, что $rr_1r_2 = r'r'_1r'_2$, найдемъ:

$$6\Pi = (x'_2y'_3 - x'_3y'_2)z'_1 + (x'_3y'_1 - x'_1y'_3)z'_2 + (x'_1y'_2 - x'_2y'_1)z'_3$$

или:

$$6\Pi = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix} \quad (37)$$

Это шесть разъ взятый объемъ тетраэдра, коего одна изъ вершинъ находится въ началѣ, а координаты трехъ остальныхъ суть:

$$(x'_1y'_1z'_1) \quad , \quad (x'_2y'_2z'_2) \quad , \quad (x'_3y'_3z'_3)$$

Легко теперь найти объемъ тетраэдра, коего координаты вершинъ суть:

$$(x_1y_1z_1) \quad , \quad (x_2y_2z_2) \quad , \quad (x_3y_3z_3) \quad , \quad (x_4y_4z_4)$$

Для этого надобно только перенести начало координатъ въ вершину $(x_1y_1z_1)$, тогда, очевидно, координаты остальныхъ вершинъ будутъ:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 & \quad , & x_1 - x_3 & \quad , & x_1 - x_4 \\ y_1 - y_2 & \quad , & y_1 - y_3 & \quad , & y_1 - y_4 \\ z_1 - z_2 & \quad , & z_1 - z_3 & \quad , & z_1 - z_4 \end{aligned}$$

которыя, подставивъ въ (37) вмѣсто x'_1, y'_1, z'_1, \dots , найдемъ:

$$6\Pi = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & , & y_1 - y_2 & , & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & , & y_1 - y_3 & , & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & , & y_1 - y_4 & , & z_1 - z_4 \end{vmatrix}$$

а этотъ опредѣлитель легко преобразовать въ слѣдующій:

$$6\Pi = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (38)$$

Если этотъ опредѣлитель сравнимъ съ опредѣлителемъ, найденнымъ въ § 461, то найдемъ, что онъ есть тотъ, который, обращаясь въ нуль, показываетъ, что четыре точки лежатъ въ одной плоскости.

Слѣдовательно уравненіе плоскости, проходящей черезъ три, данныя координатами точки (§ 445), есть ничто иное, какъ условіе, что четвертая вершина тетраэдра лежитъ въ плоскости трехъ данныхъ точекъ.

§ 467. *Задача.* Даны уравненія четырехъ граней тетраэдра, найти его объемъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія его граней будутъ:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$$

уравненія вершинъ тетраэдра будутъ:

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 = 0$$

$$A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 = 0$$

$$A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3 = 0$$

$$A_4\xi + B_4\eta + C_4\zeta + D_4 = 0$$

откуда, очевидно, координаты его вершинъ будутъ:

$$\left(\frac{A_1}{D_1}, \frac{B_1}{D_1}, \frac{C_1}{D_1}\right); \left(\frac{A_2}{D_2}, \frac{B_2}{D_2}, \frac{C_2}{D_2}\right); \left(\frac{A_3}{D_3}, \frac{B_3}{D_3}, \frac{C_3}{D_3}\right); \left(\frac{A_4}{D_4}, \frac{B_4}{D_4}, \frac{C_4}{D_4}\right)$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} \frac{A_1}{D_1} & , & \frac{B_1}{D_1} & , & \frac{C_1}{D_1} & , & 1 \\ \frac{A_2}{D_2} & , & \frac{B_2}{D_2} & , & \frac{C_2}{D_2} & , & 1 \\ \frac{A_3}{D_3} & , & \frac{B_3}{D_3} & , & \frac{C_3}{D_3} & , & 1 \\ \frac{A_4}{D_4} & , & \frac{B_4}{D_4} & , & \frac{C_4}{D_4} & , & 1 \end{vmatrix} = 6\Pi$$

или:

$$6\Pi = \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}^3$$

§ 468. *Задача.* Найти объемъ тетраэдра, коего вершины даны уравненіями:

$$a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 = 0$$

$$a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 = 0$$

$$a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta + d_3 = 0$$

$$a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4 = 0$$

Изъ этихъ уравненій видимъ, что координаты вершинъ тетраэдра будутъ (§ 460):

$$\left(\frac{a_1}{d_1}, \frac{b_1}{d_1}, \frac{c_1}{d_1} \right) ; \left(\frac{a_2}{d_2}, \frac{b_2}{d_2}, \frac{c_2}{d_2} \right) ; \left(\frac{a_3}{d_3}, \frac{b_3}{d_3}, \frac{c_3}{d_3} \right) ; \left(\frac{a_4}{d_4}, \frac{b_4}{d_4}, \frac{c_4}{d_4} \right)$$

слѣдовательно:

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{d_1} & \frac{b_1}{d_1} & \frac{c_1}{d_1} & 1 \\ \frac{a_2}{d_2} & \frac{b_2}{d_2} & \frac{c_2}{d_2} & 1 \\ \frac{a_3}{d_3} & \frac{b_3}{d_3} & \frac{c_3}{d_3} & 1 \\ \frac{a_4}{d_4} & \frac{b_4}{d_4} & \frac{c_4}{d_4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

ГЛАВА XXIX.

Сокращенный способъ.

§ 469. Въ § 448 мы видѣли, что если:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0 \tag{1}$$

суть уравненія двухъ плоскостей, то:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \tag{2}$$

будетъ уравненіе плоскости, проходящей черезъ пересѣченіе плоскостей (1). Измѣняя λ получимъ безчисленное множество—систему плоскостей, которыя пересѣкаются по одной прямой линіи.

Если уравненія (1) даны въ канонической формѣ:

$$A_1 = \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0 \quad , \quad A_2 = \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z + 1 = 0$$

то уравненіе (2) будетъ:

$$\frac{\xi_1 + \lambda \xi_2}{1 + \lambda} x + \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda} y + \frac{\zeta_1 + \lambda \zeta_2}{1 + \lambda} z + 1 = 0 \quad (3)$$

Слѣдовательно положеніе этой плоскости опредѣляется координатами (§ 460):

$$\xi = \frac{\xi_1 + \lambda \xi_2}{1 + \lambda} \quad , \quad \eta = \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda} \quad , \quad \zeta = \frac{\zeta_1 + \lambda \zeta_2}{1 + \lambda} \quad (4)$$

Если будутъ даны три плоскости:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad (5)$$

то уравненіе (§ 447):

$$A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3 = 0 \quad (6)$$

будетъ плоскость, проходящая черезъ точку пересѣченія плоскостей (5). Если:

$$A_1 = \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0$$

$$A_2 = \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z + 1 = 0$$

$$A_3 = \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z + 1 = 0$$

то уравненіе плоскости (6) будетъ:

$$\frac{\xi_1 + \lambda \xi_2 + \mu \xi_3}{1 + \lambda + \mu} x + \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2 + \mu \eta_3}{1 + \lambda + \mu} y + \frac{\zeta_1 + \lambda \zeta_2 + \mu \zeta_3}{1 + \lambda + \mu} z + 1 = 0 \quad (7)$$

Слѣдовательно координаты, опредѣляющія ея положеніе, будутъ:

$$\xi = \frac{\xi_1 + \lambda \xi_2 + \mu \xi_3}{1 + \lambda + \mu} \quad , \quad \eta = \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2 + \mu \eta_3}{1 + \lambda + \mu} \quad , \quad \zeta = \frac{\zeta_1 + \lambda \zeta_2 + \mu \zeta_3}{1 + \lambda + \mu} \quad (8)$$

§ 470. Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

будутъ уравненія точекъ, то:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \quad (9)$$

будетъ уравненіе точки, находящейся на прямой соединяющей двѣ данныя точки. Если онѣ даны въ канонической формѣ, т. е.:

$$A_1 = x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0 \quad , \quad A_2 = x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta + 1 = 0$$

то уравненіе (9) будетъ:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \xi + \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \eta + \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \zeta + 1 = 0 \quad (10)$$

Слѣдовательно координаты, опредѣляющія положеніе точки (9), будутъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad , \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (11)$$

какъ мы уже выше видѣли (§ 437).

Слѣдовательно форма координатъ (4) переменнѣй плоскости (3), проходящей черезъ одну прямую и координатъ, скользящей по прямой точки, есть одна и таже.

Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad (12)$$

суть уравненія трехъ точекъ, то уравненіе:

$$A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3 = 0 \quad (13)$$

будетъ точка, лежащая на плоскости, положеніе, которой опредѣляется уравненіями (12).

Если:

$$A_1 = x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0$$

$$A_2 = x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta + 1 = 0$$

$$A_3 = x_3\xi + y_3\eta + z_3\zeta + 1 = 0$$

то уравненіе (13) будетъ:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3}{1 + \lambda + \mu} \xi + \frac{y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3}{1 + \lambda + \mu} \eta + \frac{z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3}{1 + \lambda + \mu} \zeta + 1 = 0 \quad (14)$$

Слѣдовательно координаты этой точки будутъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3}{1 + \lambda + \mu} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3}{1 + \lambda + \mu} \quad , \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3}{1 + \lambda + \mu} \quad (15)$$

Откуда видимъ, что форма координатъ плоскости (§ 469), проходящей черезъ точку пересѣченія трехъ плоскостей и координатъ точки, лежащей на плоскости, положеніе которой опредѣляется тремя точками, одна и таже.

Элементы:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad (16)$$

постоянны; элементы:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3 = 0 \quad (17)$$

переменны, слѣдовательно первые служатъ координатами для послѣднихъ, которые измѣняютъ свое положеніе относительно элементовъ (16) съ измѣненіемъ параметровъ λ и μ .

§ 471. Изслѣдуемъ теперь нѣкоторыя свойства системы плоскостей и системы точекъ.

Если уравненія двухъ плоскостей:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad (18)$$

даны въ нормальной формѣ, т. е. если:

$$\begin{aligned} A_1 &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1 = 0 \\ A_2 &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 - p_2 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

то легко видѣть, что:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0 \quad (20)$$

будутъ уравненія плоскостей, дѣлящихъ пополамъ смежные двугранные углы между плоскостями (18).

§ 472. Пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad (21)$$

будутъ уравненія трехъ плоскостей въ нормальной формѣ, эти плоскости дѣлятъ пространство на восемь частей, изъ коихъ каждая есть трехгранный уголъ, въ одномъ изъ которыхъ лежитъ начало координатъ. Уравненія плоскостей, дѣлящихъ двугранные углы того трехграннаго угла, въ которомъ лежитъ начало координатъ, очевидно, будутъ:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_2 - A_3 = 0 \quad , \quad A_3 - A_1 = 0 \quad (22)$$

Такъ какъ сумма этихъ трехъ уравненій тождественно равна нулю, то плоскости (22) пересѣкаются по одной прямой. Это предложеніе можно выразить въ слѣдующей формѣ. Опишемъ изъ вершины трехграннаго угла, какъ изъ центра произвольнымъ радіусомъ, шаръ; пересѣченія поверхности этого шара съ гранями трехграннаго угла образуютъ сферическій треугольникъ, а пересѣченія съ плоскостями образуютъ дуги большихъ круговъ, равнодѣлящія углы сферическаго треугольника; слѣдовательно предложеніе можетъ быть выражено въ такой формѣ.

Предложение 1. Большие круги, дѣлящие внутренніе углы сферическаго треугольника пополамъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Уравненія плоскостей, дѣлящихъ пополамъ внѣшніе углы разсматриваемаго треграннаго угла, очевидно, суть:

$$A_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0 \quad , \quad A_3 + A_1 = 0 \quad (23)$$

Если изъ двухъ первыхъ уравненій (23) и послѣдняго (22) составимъ тождество:

$$A_1 + A_2 - (A_2 + A_3) + (A_3 - A_1) = 0 \quad (24)$$

то будемъ имѣть, перенося на поверхность шара, слѣдующее предложеніе:

Предложение 2. Дуги большихъ круговъ, дѣлящія пополамъ два внѣшнихъ угла и одинъ внутренній сферическаго треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ. Это предложеніе относительно сферическаго треугольника не отличается отъ предъидущаго, такъ какъ равнодѣлящія круги, два внѣшніе угла и одинъ внутренній, суть равнодѣлящія внутренніе углы сферическаго треугольника, полученнаго отъ продолженія двухъ его сторонъ.

Но это предложеніе отлично отъ предъидущаго относительно плоскаго треугольника (§ 81).

§ 473. Разсмотримъ еще слѣдующія четыре уравненія:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\ -A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\ A_1 - A_2 + A_3 &= 0 \\ A_1 + A_2 - A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

эти уравненія, очевидно, (§ 447) представляютъ плоскости, пересѣкающіяся въ одной точкѣ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

Первое изъ уравненій (25) есть плоскость, проходящая черезъ пересѣченіе плоскостей $A_1 = 0$ и $A_2 + A_3 = 0$ (§ 449), а также черезъ пересѣченіе плоскостей $A_2 = 0$, $A_1 + A_3 = 0$ и плоскостей $A_3 = 0$, $A_1 + A_2 = 0$. Слѣдовательно три прямыя пересѣченія этихъ плоскостей всѣ находятся въ одной плоскости. Точно также пересѣченія плоскостей:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0 \quad ; \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_2 - A_1 = 0 \quad ; \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_2 - A_1 = 0$$

находятся въ одной плоскости:

$$-A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

подобныя свойства имѣютъ мѣсто и для двухъ послѣднихъ плоскостей (25). Первое изъ предъидущихъ свойствъ можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ.

Предложеніе 1. Пересѣченія плоскостей, равнодѣлящихъ внѣшніе углы треграннаго угла, съ противуположающимися гранями лежатъ въ одной плоскости. Это предложеніе, перенесенное на сферическій треугольникъ, можно выразить слѣдующимъ образомъ: точки пересѣченія большихъ круговъ, равнодѣлящихъ внѣшніе углы сферическаго треугольника, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ съ противуположающимися сторонами.

Второе изъ предъидущихъ свойствъ, перенесенное на шаръ, можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Предложеніе 2. Точки пересѣченія большихъ круговъ, равнодѣлящихъ два внутренніе угла и одинъ внѣшній сферическаго треугольника, съ противуположающимися сторонами, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ.

§ 474. Возьмемъ еще уравненія четырехъ плоскостей, непересѣкающихся въ одной точкѣ, пусть эти уравненія будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0 \quad (26)$$

Эти плоскости образуютъ тетраэдръ—трегранную пирамиду. Въ томъ предположеніи, что начало координатъ находится внутри тетраэдра, уравненія плоскостей, равнодѣлящихъ внутренніе двугранные углы тетраэдра, будутъ:

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_2 - A_3 = 0 \quad , \quad A_3 - A_4 = 0 \\ A_1 - A_3 = 0 \quad , \quad A_2 - A_4 = 0 \\ A_1 - A_4 = 0 \quad , \end{aligned} \quad (27)$$

Такъ какъ изъ трехъ первыхъ, въ горизонтальной линіи, уравненій вытекаютъ три послѣднія (§ 447), то имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе 1. Всѣ шесть плоскостей, равнодѣлящихъ внутренніе углы тетраэдра, пересѣкаются въ одной точкѣ. Точка эта, очевидно, есть центръ описаннаго около тетраэдра шара.

Уравненіе плоскостей равнодѣлящихъ всѣ внѣшніе двугранные углы тетраэдра суть:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0 \quad , \quad A_3 + A_4 = 0 \\ A_1 + A_3 = 0 \quad , \quad A_2 + A_4 = 0 \quad , \\ A_1 + A_4 = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Если возьмемъ уравненія:

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 &= 0 \quad , \quad A_1 + A_4 = 0 \\ A_2 - A_3 &= 0 \quad , \quad A_2 + A_4 = 0 \\ A_3 - A_1 &= 0 \quad , \quad A_3 + A_4 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

то легко видѣть, что эти плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ, откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе 2. Плоскости равнодѣлящія три двугранные угла, одного изъ трегранныхъ угловъ тетраэдра, и три плоскости, равнодѣлящія внѣшніе двугранные углы, противулежащія первымъ тремъ, пересѣкаются въ одной точкѣ. Эта точка есть центръ вписаннаго внѣшне въ тетраэдръ шара.

§ 475. Если уравненія:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad (30)$$

представляютъ точки и написаны въ нормальной формѣ, то уравненія:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0 \quad (31)$$

будутъ представлять, первое точку на безконечности на прямой соединяющей точки (30), а второе точку, дѣлящую разстояніе между тѣми-же точками пополамъ.

Предложенія, выраженные уравненіями (22), (24), (25) относительно плоскостей не дадутъ новыхъ предложеній относительно точекъ, а дадутъ предложенія относительно плоскаго треугольника, такъ какъ три точки всегда лежатъ въ одной плоскости. Относительно четырехъ точекъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0 \quad (32)$$

будемъ имѣть слѣдующія предложенія соотвѣтствующія предложеніямъ (27) и (29).

Уравненія точекъ, дѣлящихъ ребра тетраэдра пополамъ, суть:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \quad , \quad A_3 + A_4 = 0 \\ A_1 + A_3 &= 0 \quad , \quad A_4 + A_2 = 0 \\ A_1 + A_4 &= 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Каждая пара, въ горизонтальной линіи, уравненій сложенная даетъ уравненіе:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \quad (34)$$

изъ котораго вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложение 1. Если середины трехъ противоположащихъ ребръ тетраэдра, соединимъ прямыми линиями, то эти три прямыя линіи пересѣкутся въ одной точкѣ.

Если уравненіе (34) будемъ разсматривать, какъ сложенное изъ уравненій:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

или:

$$A_2 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 + A_3 + A_4 = 0$$

или:

$$A_3 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 + A_2 + A_4 = 0$$

или наконецъ:

$$A_4 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

то будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

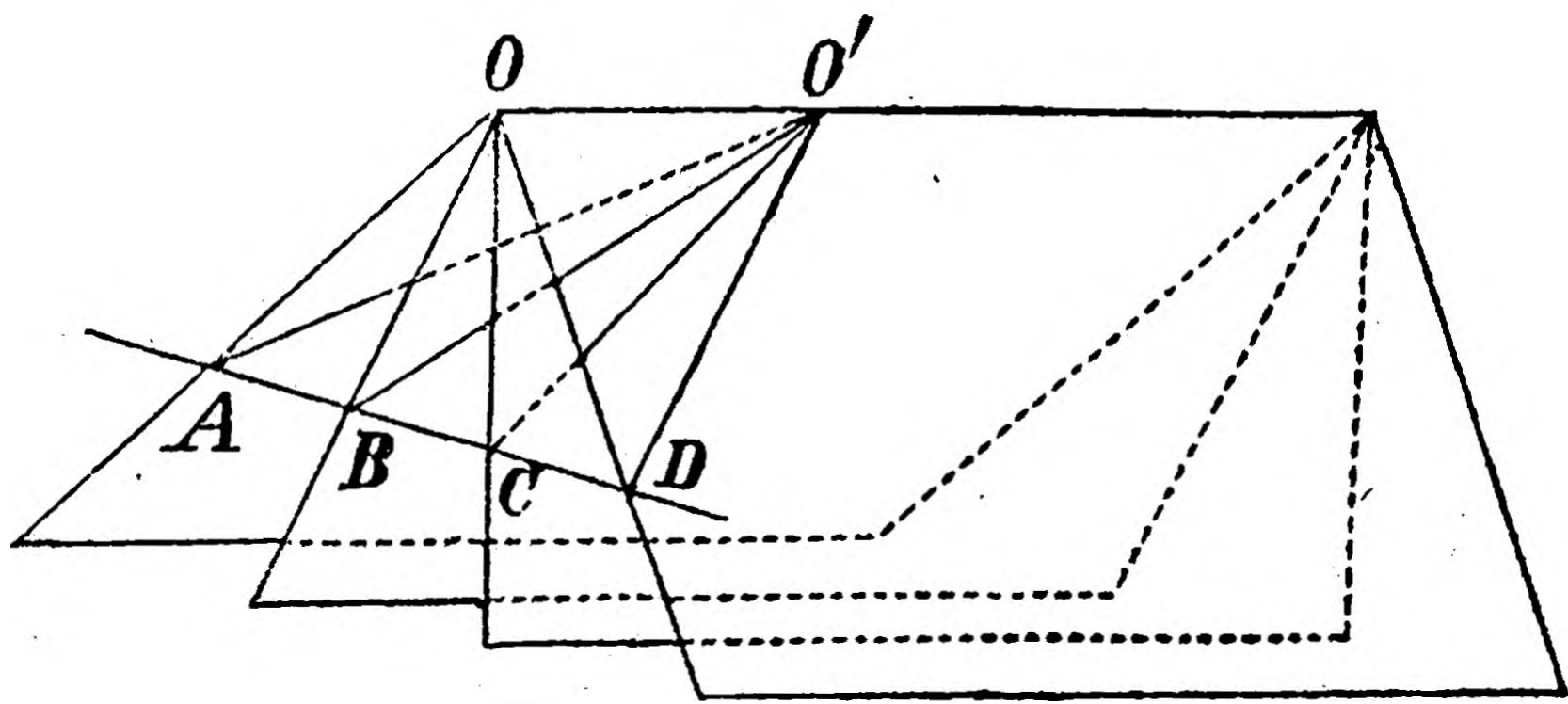
Предложение 2. Если центры тяжести граней тетраэдра соединимъ прямыми линиями съ вершинами тетраэдра, то эти четыре прямыя линіи пересѣкутся въ одной точкѣ.

ГЛАВА XXX.

Ангармонія, гармонія и инволюція плоскостей.

§ 476. *Ангармонія* Если четыре плоскости пересѣкаются на одной прямой, то *ангармоническимъ отношеніемъ* называютъ *ангармоническое отношеніе* связки прямыхъ линій, полученной пересѣченіемъ данныхъ четырехъ плоскостей плоскостью перпендикулярною къ общему ихъ ребру пересѣченія.

Фиг. 157.



§ 477. Пусть OO' будетъ общее пересѣченіе четырехъ плоскостей, пусть OA, OB, OC, OD (фиг. 157) будетъ связка, полученная пересѣченіемъ четырехъ плоскостей плоскостью перпендикулярною къ ребру OO' .

Ангармоническое отношеніе этой связки будетъ (§ 144):

$$\frac{\sin AOC}{\sin AOD} \cdot \frac{\sin BOC}{\sin BOD} \quad (1)$$

Пересѣчемъ данныя плоскости, какою-нибудь, плоскостью, которая образуетъ связку $O'A, O'B, O'C, O'D$. Пересѣченіе первой сѣкущей плоскости со

вторую даетъ прямую $ABCD$, которая пересѣкаетъ обѣ связки, слѣдовательно будемъ имѣть (§ 144):

$$\frac{\sin AOC}{\sin AOD} \cdot \frac{\sin BOC}{\sin BOD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{\sin AO'C}{\sin AO'D} \cdot \frac{\sin BO'C}{\sin BO'D} \quad (2)$$

Откуда заключаемъ, что ангармоническое отношеніе всѣхъ связокъ, полученныхъ пересѣченіемъ четырехъ данныхъ плоскостей пятою произвольною, неизмѣняется; неизмѣняется, очевидно, и ангармоническое отношеніе отрѣзковъ пересѣченія четырехъ плоскостей съ прямою, проведенною въ произвольномъ направленіи.

§ 478. Пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad (3)$$

будутъ уравненія двухъ плоскостей въ нормальной формѣ.

Уравненіе плоскости, проходящей черезъ пересѣченіе этихъ двухъ будетъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad (4)$$

Если на этой плоскости возьмемъ, какую-нибудь, опредѣленную точку, коей разстоянія отъ плоскостей (3) будутъ a_1 и a_2 , то будемъ имѣть:

$$a_1 - \lambda a_2 = 0$$

откуда:

$$\lambda = \frac{a_1}{a_2}$$

Слѣдовательно уравненіе (4) сдѣлается:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad (5)$$

Означимъ плоскость (4) номеромъ 3, а символами (1,3), (2,3) означимъ углы между плоскостями (3) и плоскостью (4), то будемъ имѣть:

$$\lambda = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin(1,3)}{\sin(2,3)}$$

Возьмемъ четвертую плоскость также, проходящую черезъ пересѣченіе плоскостей (3); пусть эта плоскость будетъ:

$$A_1 - \mu A_2 = 0 \quad (6)$$

Ангармоническое отношеніе четырехъ плоскостей:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \mu A_2 = 0 \quad (7)$$

очевидно, будетъ (§ 144):

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(1, 3)}{\sin(1, 4)} : \frac{\sin(2, 3)}{\sin(2, 4)} \quad (8)$$

§ 479. Если уравненія четырехъ плоскостей будутъ даны не въ нормальной формѣ:

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - lU_2 = 0 \quad , \quad U_1 - mU_2 = 0 \quad (9)$$

то ихъ ангармоническое отношеніе будетъ также равно отношенію $l:m$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$U_1 = \rho_1 A_1 \quad , \quad U_2 = \rho_2 A_2 \quad (10)$$

гдѣ A_1 и A_2 имѣютъ нормальную форму, а ρ_1 и ρ_2 суть тѣ множители, которые обращаютъ U_1 и U_2 въ нормальную форму. Уравненія (9) сдѣлаются:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - l \frac{\rho_1}{\rho_2} A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - m \frac{\rho_1}{\rho_2} A_2 = 0 \quad (11)$$

откуда, такъ какъ эти уравненія даны въ нормальной формѣ, то ихъ ангармоническое отношеніе будетъ:

$$l \frac{\rho_1}{\rho_2} : m \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{l}{m} \quad (12)$$

§ 480. Въ предъидущемъ параграфѣ мы выражали уравненія двухъ изъ четырехъ данныхъ плоскостей съ помощью другихъ двухъ, т. е. какъ бы плоскости $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ служили координатами. Возьмемъ теперь уравненія четырехъ плоскостей, пересѣкающихся по одной прямой линіи, выраженные съ помощью одной пары $U_1 = 0$ и $U_2 = 0$. Пусть эти уравненія будутъ:

$$U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \lambda_3 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \lambda_4 U_2 = 0 \quad (13)$$

Поступая съ этими четырьмя плоскостями какъ поступили въ § 145, найдемъ, что ихъ ангармоническое отношеніе будетъ:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} \quad (14)$$

§ 481. *Гармонія*. Если ангармоническое отношеніе равно -1 , то оно называется *гармоническимъ* и если четыре плоскости будутъ гармоническія, то имѣемъ:

$$\frac{\sin(1, 3)}{\sin(1, 4)} : \frac{\sin(2, 3)}{\sin(2, 4)} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} = -1 \quad (15)$$

откуда:

$$\frac{\sin(1, 3)}{\sin(1, 4)} + \frac{\sin(2, 3)}{\sin(2, 4)} = 0$$

и

$$\lambda_1 \lambda_2 - \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0 \quad (16)$$

§ 482. *Задача.* Даны уравнения двухъ паръ плоскостей, проходящихъ по одной прямой линіи; найти уравненія третьей пары, которая была бы гармоническая обѣимъ даннымъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ плоскостей будутъ:

$$\begin{aligned} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 & , & U_1 - \lambda_3 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 & , & U_1 - \lambda_4 U_2 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

пусть уравненія искомой пары будутъ:

$$U_1 - \lambda U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \mu U_2 = 0$$

Такъ какъ эта пара должна быть гармонична обѣимъ, то имѣемъ (§ 16).

$$\begin{aligned} \lambda \mu - \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda + \mu) + \lambda_1 \lambda_2 &= 0 \\ \lambda \mu - \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda_4) (\lambda + \mu) + \lambda_3 \lambda_4 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

откуда легко опредѣлить $\lambda + \mu$ и $\lambda \mu$, а потому легко построить квадратное уравненіе, коего корнями будутъ λ и μ . Пусть $\lambda + \mu = a$, $\lambda \mu = b$, то уравненіе, опредѣляющее λ и μ , будетъ:

$$t^2 - at + b = 0 \quad (19)$$

Искомая пара будетъ дѣйствительная или мнимая, смотря потому какіе корни будутъ въ уравненіи (19).

§ 483. *Инволюція.* Три пары плоскостей, проходящихъ черезъ одну прямую, составляютъ инволюцію, если можетъ быть найдена четвертая пара гармоническая къ каждой изъ данныхъ трехъ паръ.

Двѣ пары плоскостей, проходящихъ по одной прямой линіи, опредѣляютъ, какъ выше видѣли (§ 482), третью пару, которая гармонична каждой изъ двухъ паръ. Третья пара, гармоничная парѣ, опредѣленной двумя данными парами, будетъ составлять съ ними инволюцію. Но такъ какъ, составляя третью пару можно первую плоскость взять произвольно, а вторая, затѣмъ, опредѣлится изъ условія гармоничности, то видимъ, что изъ трехъ паръ плоскостей въ инволюціи, проходящихъ по одной прямой, пять можно взять произвольно, а шестая опредѣлится пятью взятыми.

Слѣдовательно между тремя парами плоскостей, составляющих инволюцію, должно существовать условное уравненіе.

Пусть уравненія трехъ паръ плоскостей будутъ:

$$\begin{aligned} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \lambda_3 U_2 = 0 \\ U_1 - \mu_1 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \mu_2 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \mu_3 U_2 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Если онѣ составляютъ инволюцію, то существуетъ четвертая пара, гармоничная ко всѣмъ тремъ парамъ; пусть эта пара будетъ:

$$U_1 - \lambda U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \mu U_2 = 0 \quad (21)$$

такъ какъ она гармонична къ каждой парѣ (20), то имѣемъ:

$$\begin{aligned} \lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda + \mu) + \lambda_1\mu_2 = 0 \\ \lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda + \mu) + \lambda_2\mu_2 = 0 \\ \lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_3 + \mu_3)(\lambda + \mu) + \lambda_3\mu_3 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

откуда имѣемъ искомое условіе:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1 + \mu_1 & 1 \\ \lambda_2\mu_2 & \lambda_2 + \mu_2 & 1 \\ \lambda_3\mu_3 & \lambda_3 + \mu_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

или:

$$(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_3)(\lambda_3 - \mu_1) + (\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_3)(\mu_3 - \lambda_1) = 0 \quad (24)$$

Если положимъ:

$$\lambda_1 = \mu_1 = \lambda \quad , \quad \lambda_3 = \mu_3 = \mu$$

то предыдущее условіе переходитъ въ условіе гармоничности четырехъ плоскостей, откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе.

Предложеніе. Если изъ трехъ паръ плоскостей, составляющих инволюцію, двѣ пары, каждая, обращается въ одну пару, то третья инволюционная пара будетъ гармоническая къ двумъ полученнымъ парамъ.

§ 484. Если въ уравненіяхъ (20) положимъ $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \infty$, то эти уравненія сдѣлаются:

$$\begin{aligned} 1) U_1 = 0 \quad , \quad 3) U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \quad , \quad 5) U_1 - \lambda_3 U_2 = 0 \\ 2) U_2 = 0 \quad , \quad 4) U_1 - \mu_2 U_2 = 0 \quad , \quad 6) U_1 - \mu_3 U_2 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

а условіе (24) ихъ инволюціи сдѣлается:

$$\lambda_2 \mu_2 = \lambda_3 \mu_3 \quad (26)$$

или, припоминая значеніе коэффиціентовъ λ_2 , μ_2 и λ_3 , μ_3 (§ 478), найдемъ:

$$\frac{\sin(3, 1)}{\sin(3, 2)} \cdot \frac{\sin(4, 1)}{\sin(4, 2)} = \frac{\sin(5, 1)}{\sin(5, 2)} \cdot \frac{\sin(6, 1)}{\sin(6, 2)} \quad (27)$$

§ 485. Условію инволюціи трехъ паръ плоскостей можно дать еще слѣдующую форму.

Уравненія трехъ паръ плоскостей, составляющихъ инволюцію, можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\begin{aligned} V_1 - \lambda_1 V_2 = 0 & \quad , \quad V_1 - \lambda_2 V_2 = 0 & \quad , \quad V_1 - \lambda_3 V_2 = 0 \\ V_1 + \lambda_1 V_2 = 0 & \quad , \quad V_1 + \lambda_2 V_2 = 0 & \quad , \quad V_1 + \lambda_3 V_2 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

которыя, какъ видно изъ формы ихъ, суть гармоничны съ парой плоскостей:

$$V_1 = 0 \quad , \quad V_2 = 0$$

Если вмѣсто символовъ V_1 и V_2 , съ помощью которыхъ выражены уравненія (28), выберемъ три символа U_1 , U_2 , U_3 , связанныя съ V_1 и V_2 уравненіями:

$$V_1 - \lambda_1 V_2 = \frac{U_1}{\lambda_2 - \lambda_3} \quad , \quad V_1 - \lambda_2 V_2 = \frac{U_2}{\lambda_3 - \lambda_1} \quad , \quad V_1 - \lambda_3 V_2 = \frac{U_3}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (29)$$

то эти уравненія даютъ тождество:

$$U_1 + U_2 + U_3 \equiv 0 \quad (30)$$

а уравненія (28) сдѣлаются:

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = 0 \quad , \quad U_3 = 0 \quad , \quad \frac{U_2}{\mu_2} - \frac{U_3}{\mu_3} = 0 \quad , \quad \frac{U_3}{\mu_3} - \frac{U_2}{\mu_2} = 0 \quad , \quad \frac{U_1}{\mu_1} - \frac{U_2}{\mu_2} = 0 \quad (31)$$

гдѣ:

$$\mu_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \quad , \quad \mu_2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} \quad , \quad \mu_3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (32)$$

Такъ какъ коэффиціенты λ въ уравненіяхъ (28) суть величины произвольныя, то коэффиціенты μ , составленные изъ нихъ, будутъ также величины произвольныя. Послѣднія три изъ уравненій (31), съ произвольными коэффиціентами μ , въ предположеніи тождества (30), которое показываетъ, что плоскости:

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = 0 \quad , \quad U_3 = 0$$

пересекаются по одной прямой, также проходят через ту же прямую; следовательно, шесть плоскостей (31) составляют инволюцию. Если уравнениямъ:

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = 0 \quad , \quad U_3 = 0$$

дадимъ нормальную форму, положивъ:

$$\rho_1 U_1 = A_1 \quad , \quad \rho_2 U_2 = A_2 \quad , \quad \rho_3 U_3 = A_3$$

то тождество (30) сдѣлается:

$$\frac{A_1}{\rho_1} + \frac{A_2}{\rho_2} + \frac{A_3}{\rho_3} \equiv 0 \quad (33)$$

а уравненія (31) плоскостей, составляющихъ инволюцію, будутъ:

$$\begin{aligned} 1) \quad A_1 = 0 \quad , \quad 2) \quad A_2 = 0 \quad , \quad 3) \quad A_3 = 0 \\ 4) \quad \frac{A_2}{\rho_2 \mu_2} - \frac{A_3}{\rho_3 \mu_3} = 0 \quad , \quad 5) \quad \frac{A_3}{\rho_3 \mu_3} - \frac{A_1}{\rho_1 \mu_1} = 0 \quad , \quad 6) \quad \frac{A_1}{\rho_1 \mu_1} - \frac{A_2}{\rho_2 \mu_2} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

откуда, припоминая значенія коэффициентовъ ρ , μ , найдемъ:

$$\frac{\rho_2 \mu_2}{\rho_3 \mu_3} = \frac{\sin(4, 2)}{\sin(4, 3)} \quad , \quad \frac{\rho_3 \mu_3}{\rho_1 \mu_1} = \frac{\sin(5, 3)}{\sin(5, 1)} \quad , \quad \frac{\rho_1 \mu_1}{\rho_2 \mu_2} = \frac{\sin(6, 1)}{\sin(6, 2)} \quad (35)$$

перемножая, получимъ:

$$\frac{\sin(4, 2) \cdot \sin(5, 3) \cdot \sin(6, 1)}{\sin(4, 3) \cdot \sin(5, 1) \cdot \sin(6, 2)} = 1 \quad (36)$$

Это послѣднее уравненіе есть одна изъ различныхъ формъ условія инволюціи трехъ паръ плоскостей, пересекающихся по одной прямой линіи.

§ 486. Возьмемъ уравненія трехъ плоскостей въ нормальной формѣ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad (37)$$

которыя пересекаются въ точкѣ P или, что тоже, которыя попарно связываютъ три прямая линіи, исходящія изъ точки P .

Уравненія:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (38)$$

будутъ, очевидно, три плоскости, проходящія, каждая, черезъ пересѣченіе

двухъ изъ (37) и пересѣкающихся по одной прямой, проходящей черезъ точку P . Слѣдовательно шесть уравненій (37) и (38) представляютъ три пары плоскостей, соединяющихъ попарно четыре произвольныя прямыя, исходящія изъ точки P .

Три пары уравненій (37) и (38) совершенно сходны съ тремя парами уравненій (34), разница только въ томъ, что между уравненіями (38) не имѣетъ мѣста тождество (33), откуда заключаемъ, что три пары плоскостей, составляющихъ инволюцію, есть только частный случай трехъ паръ плоскостей, связывающихъ, попарно, четыре прямыя линіи, исходящія изъ одной точки. Въ самомъ дѣлѣ, если четыре прямыя, исходящія изъ одной точки, совпадаютъ, то и условіе (30) будетъ удовлетворено, т. е. всѣ условія инволюціи будутъ удовлетворены.

Если точка P будетъ отодвинута на безконечность, то четыре прямыя, исходящія изъ этой точки, сдѣлаются параллельными, но между синусами угловъ наклоненія трехъ паръ плоскостей будетъ имѣть мѣсто уравненіе (36) и какъ это уравненіе выражаетъ условіе инволюціи плоскостей, то мы построимъ три пары плоскостей, составляющихъ инволюцію, если черезъ данную прямую проведемъ шесть плоскостей, параллельныхъ шести плоскостямъ, которыя связываютъ попарно четыре прямыя линіи параллельныя данной прямой.

Это даетъ возможность построить шестую плоскость, составляющую инволюцію съ пятью данными, проходящими по одной прямой.

§ 487. Если черезъ пересѣченіе каждой пары плоскостей, данныхъ уравненіями:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad (39)$$

проведемъ три произвольныя плоскости, пересѣкающіяся по одной прямой линіи внутри трегранныаго угла (39), то ихъ уравненія будутъ, полагая начало координатъ внутри угла (39):

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (40)$$

Если теперь въ каждомъ двугранномъ углѣ трегранныаго угла (39) построимъ плоскость—четвертую гармоническую къ тремъ проходящимъ черезъ его ребра, то уравненія этихъ плоскостей будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad (41)$$

вычитая первыя два уравненія (41) и складывая съ послѣднимъ (40), найдемъ:

$$\left(\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2}\right) - \left(\frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3}\right) + \left(\frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1}\right) \equiv 0 \quad (42)$$

что показываетъ, что эти три плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ. Перенося это свойство на поверхность шара, коего центръ находится въ вершинѣ трегранныаго угла (33) будемъ имѣть слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Если черезъ произвольную точку, взятую на поверхности шара, и черезъ вершины сферическаго треугольника проведемъ большіе круги и въ каждомъ углѣ проведемъ четвертый гармоническій большой кругъ, то два изъ этихъ круговъ пересѣкаются въ точкѣ, черезъ которую проходитъ большой кругъ, проходящій черезъ третій уголъ треугольника и черезъ взятую на шарѣ точку.

Разсуждая надъ уравненіями:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} &= 0 \\ -\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} &= 0 \\ \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} &= 0 \\ \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

какъ выше (§ 473), найдемъ:

Предложеніе 2. Если, какую-нибудь, точку шара соединимъ съ вершинами сферическаго треугольника дугами большихъ круговъ, и въ каждомъ углѣ проведемъ четвертый гармоническій большой кругъ, то эти послѣдніе круги пересѣкутъ противулежащія стороны сферическаго треугольника въ точкахъ, лежащихъ на одномъ большомъ кругѣ.

Предложеніе 3. Если, какую-нибудь, точку поверхности шара соединимъ дугами большихъ круговъ съ вершинами сферическаго треугольника и въ одномъ изъ угловъ проведемъ большой кругъ четвертый гармоническій, то онъ пересѣчетъ противулежащую сторону въ точкѣ, которая съ точками пересѣченія двухъ остальныхъ большихъ круговъ, проведенныхъ черезъ взятую точку, съ противулежащими сторонами, лежитъ на одномъ большомъ кругѣ.

Послѣднее предложеніе важно въ томъ отношеніи, что съ помощью его можно построить линейно, т. е. только съ помощью проведенія большихъ

круговъ, четвертый гармоническій большой кругъ къ тремъ даннымъ, проходящимъ черезъ одну точку.

§ 488. Остается показать, какъ построить линейно къ даннымъ пяти плоскостямъ, пересекающимся по одной прямой, шестую, которая бы составляла инволюцію съ пятью данными плоскостями.

Пусть:

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = 0 \quad , \quad U_3 = 0 \quad , \quad U_4 = 0 \quad (44)$$

будутъ уравненія четырехъ плоскостей, проходящихъ черезъ центръ P шара, коего радіусъ равенъ единицѣ. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 , будутъ величины, которыя получаютъ выраженія U_1, U_2, \dots , когда въ нихъ вмѣсто переменныхъ координатъ вставимъ координаты, какой-нибудь, данной точки p , которую для простоты возьмемъ на поверхности шара, то:

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{a_1} - \frac{U_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{U_2}{a_2} - \frac{U_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{U_3}{a_3} - \frac{U_4}{a_4} = 0 \\ \frac{U_2}{a_2} - \frac{U_4}{a_4} = 0 \quad , \quad \frac{U_3}{a_3} - \frac{U_4}{a_4} = 0 \quad , \quad \frac{U_1}{a_1} - \frac{U_4}{a_4} = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

будутъ уравненія трехъ паръ плоскостей, которыя пересекаются на прямой Pp и проходятъ черезъ шесть прямыхъ линій, по которымъ пересекаются четыре плоскости (44). Чтобы предъидущія уравненія преобразовать въ нормальную форму, съ помощью множителей ρ, μ, \dots , положимъ:

$$\frac{U_1}{a_1} - \frac{U_4}{a_4} = \frac{A_1}{\rho_1 \mu_1} \quad ; \quad \frac{U_2}{a_2} - \frac{U_4}{a_4} = \frac{A_2}{\rho_2 \mu_2} \quad ; \quad \frac{U_3}{a_3} - \frac{U_4}{a_4} = \frac{A_3}{\rho_3 \mu_3} \quad (46)$$

этими подстановленіями уравненія (45) сдѣлаются:

$$\begin{aligned} A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \\ \frac{A_2}{\rho_2 \mu_2} - \frac{A_3}{\rho_3 \mu_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{\rho_3 \mu_3} - \frac{A_1}{\rho_1 \mu_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{\rho_1 \mu_1} - \frac{A_2}{\rho_2 \mu_2} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

эти послѣднія уравненія суть ничто иное, какъ уравненія (24), изъ коихъ вывели условіе инволюціи (35); изъ нихъ вытекаетъ предложеніе, которое перенося на поверхность шара, можно выразить такъ:

Предложеніе. Если произвольно взятую точку на поверхности шара соединимъ дугами большихъ круговъ съ точками пересѣченія, какихъ-нибудь, шести большихъ круговъ, то шесть большихъ круговъ, проходящихъ черезъ взятую на шарѣ точку, будутъ составлять инволюцію.

Въ этомъ предположеніи подъ большими кругами, составляющими инволюцію, надобно разумѣть такіе круги, которые лежатъ въ плоскостяхъ, составляющихъ инволюцію. Предъидущее предположеніе даетъ способъ построить шестой большой кругъ къ пяти даннымъ, проходящимъ черезъ одну точку, такъ чтобы они составляли инволюцію, такъ же точно, какъ и шестую инволюціонную плоскость къ пяти даннымъ, проходящимъ черезъ одну прямую линію.

§ 489. Если изъ центра шара проведемъ четыре прямыя линіи въ одной плоскости, то онѣ встрѣтятся поверхность шара въ четырехъ точкахъ на одномъ большомъ кругѣ.

Если эти точки означимъ нумерами 1, 2, 3, 4, а символами (1, 2), (1, 3),.... означимъ дуги большого круга между точками 1 и 2, 1 и 3, и т. д. то ангармоническое отношеніе этихъ точекъ будетъ:

$$\frac{\sin (1, 3) \cdot \sin (2, 3)}{\sin (1, 4) \cdot \sin (2, 4)} \quad (48)$$

Если это отношеніе равно — 1, то говорятъ, что четыре точки большого круга составляютъ гармонію.

Если между дугами шести точекъ на одномъ большомъ кругѣ существуетъ зависимость (36):

$$\frac{\sin (4, 2) \cdot \sin (5, 3) \cdot \sin (6, 1)}{\sin (4, 3) \cdot \sin (5, 1) \cdot \sin (6, 2)} = 1 \quad (49)$$

то говорятъ, что шесть точекъ на одномъ большомъ кругѣ составляютъ инволюцію.

§ 490. Если положимъ, что формулы (47) и (48) относятся къ весьма малымъ дугамъ, которыя можно разсматривать, какъ отрѣзки прямой линіи, то синусы такихъ дугъ равны дугамъ и наши формулы относительно дугъ обращаются въ формулы относительно прямой линіи:

$$\frac{(1, 3) \cdot (2, 3)}{(1, 4) \cdot (2, 4)}$$

это ангармоническое отношеніе отрѣзковъ прямой, а:

$$\frac{(4, 2) \cdot (5, 3) \cdot (6, 1)}{(4, 3) \cdot (5, 1) \cdot (5, 2)} = 1$$

будетъ инволюція шести отрѣзковъ.

Шаровая поверхность общнѣе плоской, а поэтому всѣ предположенія, имѣющія мѣсто на плоскости имѣютъ мѣсто и на шарѣ, но не всѣ предположенія на шарѣ имѣютъ мѣсто на плоскости.

§ 491. Изложимъ еще одно начало на шаровой поверхности, которое соотвѣтствуетъ началу двойственности на плоскости, именно: способъ перехода отъ предложеній относительно прямыхъ и точекъ къ предложеніямъ относительно точекъ и прямыхъ. Вотъ это начало:

Каждой точкѣ на поверхности шара, какъ полюсу, соотвѣтствуетъ большой кругъ, а каждому большому кругу соотвѣтствуетъ полюсъ.

Пр. 1. Полюсы большихъ круговъ на шарѣ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ.

Пр. 2. Дуга большого круга, соединяющая два полюса двухъ большихъ круговъ, равна углу наклоненія между плоскостями большихъ круговъ.

Пр. 1. Большіе круги шара, концы полюсы лежатъ на одномъ большомъ кругѣ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 2. Наклоненіе плоскостей двухъ большихъ круговъ, равно дугѣ соединяющей два полюса большихъ круговъ.

Полярной фигурой, соотвѣтствующей данной фигурѣ на шарѣ, называется фигура, которая строится изъ данной, построивъ каждой точкѣ, данной фигуры, какъ полюсъ, большой кругъ, а каждому большому кругу, данной фигуры, полюсъ; такимъ образомъ получится фигура, которая и называется полярной данной фигуры.

Такимъ образомъ предложенія относительно данной фигуры дадутъ предложенія полярной, но такъ какъ полярная фигура полярной есть данная фигура, то всѣ предложенія относительно полярной фигуры дадутъ предложенія относительно данной.

Слѣдующія предложенія вытекаютъ изъ четырехъ предложеній §§ 472, 473.

Предложеніе 1. Точки, дѣлящія пополамъ дополненія сторонъ сферическаго треугольника, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ.

Предложеніе 2. Точки, дѣлящія пополамъ двѣ стороны сферическаго треугольника и точка, дѣлящая пополамъ дополненіе третьей стороны, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ.

Предложеніе 3. Большіе круги, соединяющіе середины сторонъ сферическаго треугольника съ противуположающимися вершинами, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Предложеніе 4. Большіе круги, соединяющіе середины дополненій двухъ сторонъ сферическаго треугольника и середину третьей стороны съ противуположающимися вершинами, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Слѣдующія четыре предложенія вытекаютъ изъ предложеній §§ 487, 488.

Предложеніе 1. Если стороны сферическаго треугольника, или ихъ продолженія, пересѣчемъ дугою большого круга и построимъ на сторонахъ

треугольника четвертыя гармоническія точки, то двѣ, какія-нибудь, изъ этихъ послѣднихъ съ точкою пересѣченія третьей стороны съ сѣкущимъ кругомъ, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ.

Предложеніе 2. Если стороны сферическаго треугольника или ихъ продолженія пересѣчемъ дугою большаго круга и на сторонахъ треугольника построимъ четвертыя гармоническія точки, то большіе круги, соединяющіе эти точки съ противуположающимися вершинами, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Предложеніе 3. Если стороны сферическаго треугольника или ихъ продолженія пересѣчемъ дугою большаго круга и двѣ изъ этихъ точекъ пересѣченія соединимъ дугами большихъ круговъ съ противуположающимися вершинами треугольника, то эти дуги пересѣкутся въ точкѣ, черезъ которую проходитъ большой кругъ, соединяющій четвертую гармоническую точку на третьей сторонѣ треугольника съ противуположающейся вершиной.

Предложеніе 4. Три пары большихъ круговъ, соединяющихъ попарно, какія-нибудь, четыре точки на поверхности шара, пересѣкаются, какой-нибудь, большой кругъ въ точкахъ, составляющихъ инволюцію.

§ 492. Относительно ангармоніи, гармоніи и инволюціи точекъ на прямой въ пространствѣ можно только повторить то, что было сказано въ первой части настоящаго сочиненія, или повторить всѣ предложенія и выраженія, изложенныя въ §§ 476 до 485 включительно, относительно плоскостей, измѣняя слова *плоскость* на *точку*, а вмѣсто синусовъ поставить отрѣзки.

Въ заключеніе прибавимъ слѣдующее. Пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0 \quad (50)$$

будутъ уравненія вершинъ тетраэдра.

Три произвольныя точки на ребрахъ тетраэдра, исходящихъ изъ вершины $A_1 = 0$, можно представить слѣдующими уравненіями:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_4}{a_4} = 0 \quad (51)$$

вычитая эти уравненія получимъ уравненія:

$$\frac{A_3}{a_3} - \frac{A_4}{a_4} = 0 \quad , \quad \frac{A_4}{a_4} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad (52)$$

трехъ точекъ на остальныхъ ребрахъ, которыя лежатъ также на плоскости, проходящей черезъ три первыя точки (51), такъ что точки пересѣченія, какой-нибудь, плоскости съ шестью ребрами тетраэдра, могутъ быть выражены предъидущими уравненіями (51) и (52).

Уравненія четвертыхъ гармоническихъ точекъ съ точками (50), (51) и (52) на ребрахъ тетраэдра, очевидно, будутъ:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0, \quad \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_3}{a_3} = 0, \quad \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_4}{a_4} = 0 \\ \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_4}{a_4} = 0, \quad \frac{A_4}{a_4} + \frac{A_2}{a_2} = 0, \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

складывая каждую пару, стоящую въ одной вертикальной линіи, найдемъ уравненіе:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_4}{a_4} = 0 \quad (54)$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если ребра тетраэдра или ихъ продолженія пересѣчемъ плоскостью и на каждомъ ребрѣ построимъ четвертую гармоническую точку, то три прямыя, соединяющія построенныя на противоположныхъ ребрахъ точки, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если плоскость, пересѣкающая ребра тетраэдра, находится на безконечности, то четвертыя гармоническія точки суть середины реберъ тетраэдра, слѣдовательно, прямыя, соединяющія середины противоположныхъ реберъ тетраэдра, пересѣкаются въ одной точкѣ.

ГЛАВА XXXI.

Преобразование координатъ.

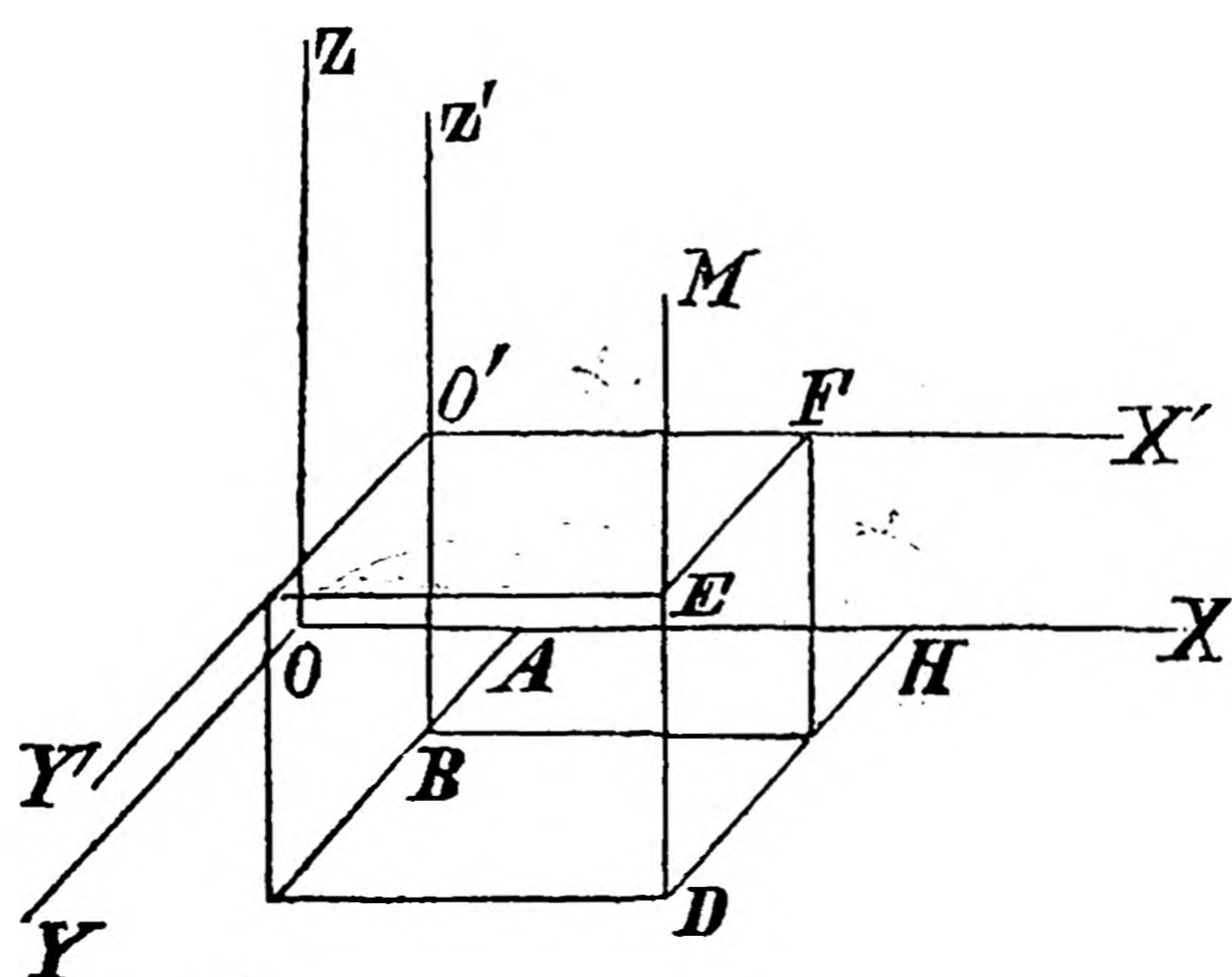
§ 493. Преобразовать координаты значитъ отнести положеніе точки къ другимъ координатнымъ осямъ. Эти вторыя координатныя оси, относительно первыхъ, бываютъ расположены такъ, что, оставаясь параллельными старымъ осямъ, имѣютъ начало въ другой точкѣ, или онѣ имѣя тоже начало, имѣютъ другое направленіе, или наконецъ онѣ имѣютъ другое начало и другое направленіе. Мы будемъ разсматривать преобразованія только прямоугольныхъ координатъ и прямоугольныхъ къ косоугольнымъ, такъ какъ другіе случаи рѣдко употребляются.

Случай 1. Преобразовать координаты въ другія, которыя бы, оставаясь параллельными старымъ, имѣли начало въ другой точкѣ?

Пусть старое начало будетъ O , координаты какой нибудь точки M (фиг. 158) означимъ черезъ x, y, z ; пусть координаты новаго начала O' отно-

нительно старыхъ осей, будутъ a, b, c , а координаты точки M относительно новаго начала пусть будутъ x', y', z' .

Фиг. 158.



Очевидно, имѣемъ:

$$OA = a, \quad AB = b, \quad BO' = c$$

$$ON = x, \quad ND = y, \quad DM = z$$

$$O'F = x', \quad FE = y', \quad EM = z'$$

откуда легко видѣть, что:

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'$$

Случай 2. Преобразовать координаты въ другія, которыя бы, имѣя тоже начало, имѣли другое направленіе? Обѣ системы прямоугольны.

Пусть (фиг. 159) старыя координаты будутъ x, y, z , а новыя x', y', z' .

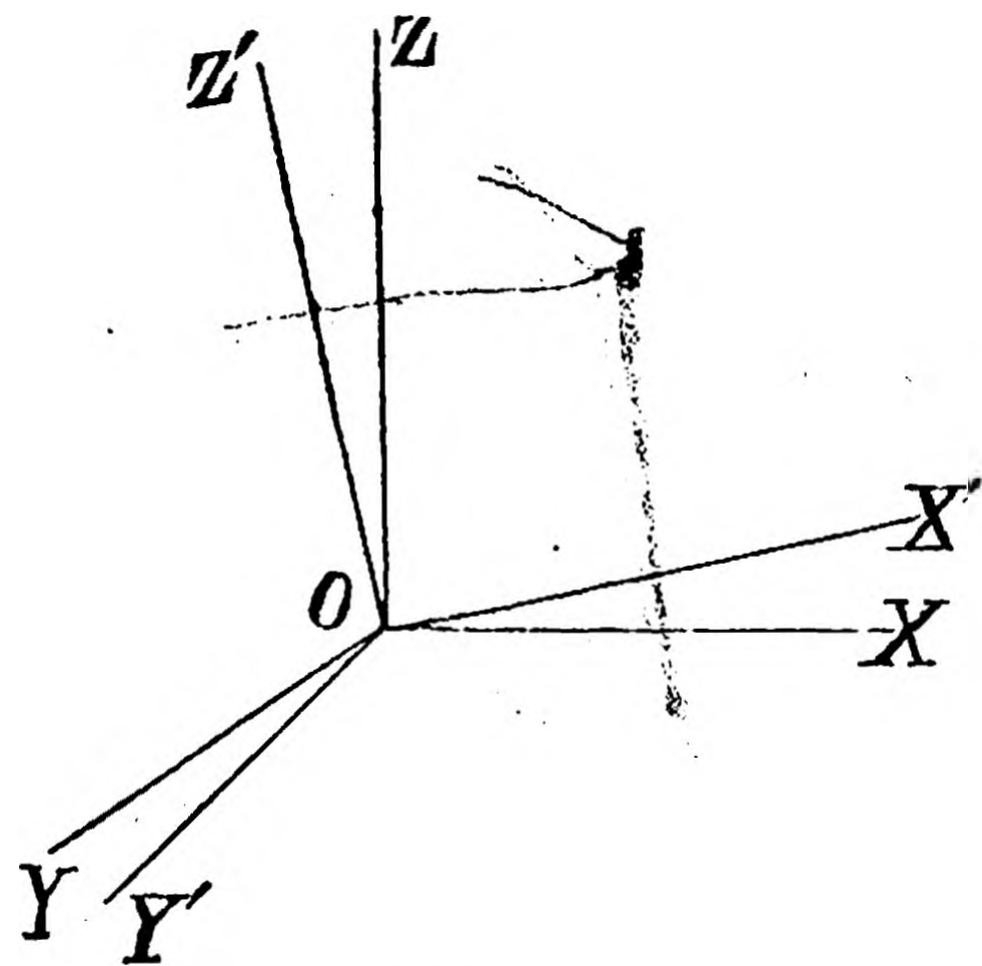
Пусть новая ось X' со старыми осями X, Y, Z составляетъ углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Пусть новая ось Y' со старыми осями X, Y, Z составляетъ углы $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

Наконецъ, пусть новая ось Z' со старыми осями составляетъ углы $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Замѣтимъ, что координаты x, y, z , какой-нибудь, точки суть ничто иное, какъ ея разстоянія отъ плоскостей $(OY, OZ), (OX, OZ), (OX, OY)$.

Фиг. 159.



Уравненія плоскостей $(OY', OZ'), (OX', OZ'), (OX', OY')$ относительно старыхъ осей легко написать.

Въ самомъ дѣлѣ, OX' есть перпендикуляръ къ плоскости (OY', OZ') , и составляетъ углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ съ осями X, Y, Z ; плоскость проходитъ черезъ начало координатъ, слѣдовательно, ея уравненіе есть:

$$x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 = 0$$

очевидно, уравненія плоскостей $(OX', OZ'), (OX', OY')$ будутъ:

$$x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 = 0$$

$$x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3 = 0$$

Если x, y, z будутъ координаты точки M , внѣ этихъ плоскостей, то предъидущія уравненія не будутъ равны нулю, а будутъ представлять длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ взятой точки M на эти плоскости,

Означимъ эти перпендикуляры черезъ x', y', z' , то найдемъ:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 \\ y' &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 \\ z' &= x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3 \end{aligned} \quad (1)$$

гдѣ x', y', z' суть, очевидно, координаты точки M относительно новыхъ осей, слѣдовательно формулы (1) даютъ зависимость между старыми и новыми координатами, какой-нибудь, точки. Углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ связаны слѣдующими уравненіями. Оси X', Y', Z' , составляютъ углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ съ осями X, Y, Z , слѣдовательно имѣемъ (§ 434, 16):

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1 \\ \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 &= 1 \\ \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Оси X, Y, Z составляютъ углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ съ осями X', Y', Z' , слѣдовательно имѣемъ (§ 434, 16):

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 &= 1 \\ \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3 &= 1 \\ \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Оси X', Y', Z' перпендикулярны между собою, слѣдовательно (§ 435):

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0 \\ \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 &= 0 \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Оси X, Y, Z перпендикулярны между собой, слѣдовательно (§ 435):

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 &= 0 \\ \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 + \cos \alpha_3 \cos \gamma_3 &= 0 \\ \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \cos \beta_2 \cos \gamma_2 + \cos \beta_3 \cos \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Имѣя эти зависимости между углами легко выразить старыя координаты въ функціи новыхъ. Для этого помножимъ уравненія (1) сначала на $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$ и сложимъ; затѣмъ помножимъ на $\cos \beta_1, \cos \beta_2, \cos \beta_3$ и сложимъ; наконецъ помножимъ на $\cos \gamma_1, \cos \gamma_2, \cos \gamma_3$ и сложимъ; соображаясь съ уравненіями (3) и (6), найдемъ:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 \\ y = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 \\ z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 \end{cases} \quad (6)$$

Эти формулы и служатъ для преобразованія старыхъ координатъ въ новыя.

Замѣтимъ при этомъ, что всегда имѣемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad (7)$$

Это равенство получимъ, подставляя вмѣсто x, y, z ихъ выраженія (6) или просто, замѣчая, что обѣ части уравненія (7) выражаютъ разстоянiе взятой точки отъ начала координатъ (§ 433).

Случай 3. Легко видѣть, что перенося начало координатъ въ точку (abc) и измѣняя направленія осей, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} x &= a + x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 \\ y &= b + x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 \\ z &= c + x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 \end{aligned} \quad (8)$$

§ 494. *Задача.* Преобразовать прямоугольныя координаты въ косоугольныя?

Рѣшенiе. Пусть прямоугольныя координаты, какой-нибудь точки M будутъ x, y, z , а косоугольныя, имѣющія тоже начало, пусть будутъ x', y', z' . Пусть косоугольныя координаты составляютъ между собою углы λ, μ, ν ; λ уголъ между Y' и Z' , μ между X' и Z' , а ν между X' и Y' . Пусть ось X' составляетъ съ осями X, Y, Z углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; ось Y' съ X, Y, Z углы $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и ось Z' съ X, Y, Z углы $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Эти углы, очевидно, связаны слѣдующими условiями:

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 \\ \cos \mu &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 \\ \cos \nu &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Такъ какъ сумма проэктiй координатъ x', y', z' , точки M на оси X , равна координатѣ x этой точки, то:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

гдѣ углы α, β, γ связаны условiями (2) и (9).

Изъ предъидущихъ уравненiй легко видѣть, что разстоянiе точки M отъ начала координатъ будетъ, если его означимъ чрезъ r :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z' \cos \lambda + 2x'z' \cos \mu + 2x'y' \cos \nu \quad (11)$$

а разстояніе между точками, коихъ координаты суть x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 , будетъ:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + 2(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)\cos\lambda + 2(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)\cos\mu + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\nu \quad (12)$$

Это уравненіе (14) § 433.

Такъ какъ двѣ системы координатъ связаны между собою линейными уравненіями, то преобразование координатъ не можетъ ни повысить, ни понизить степень уравненія поверхности.

§ 495. *Полярныя координаты.* Опредѣляютъ также положеніе точки въ пространствѣ, ея разстояніемъ отъ начала координатъ и углами, которые это разстояніе составляетъ съ координатными осями.

Пусть r будетъ это разстояніе, пусть α, β, γ будутъ углы, которые это разстояніе составляетъ съ осями X, Y и Z , то, очевидно, будемъ имѣть:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma \quad (13)$$

углы α, β, γ связаны уравненіемъ:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (14)$$

Подставляя въ уравненіе поверхности вмѣсто x, y, z эти величины, найдемъ уравненіе поверхности въ координатахъ, которыя называются *полярными*.

Замѣтимъ, что уголь γ есть функція угловъ α и β , вслѣдствіи зависимости (14).

§ 496. *Сферическія координаты.* Опредѣляютъ еще положеніе точки въ пространствѣ, ея разстояніемъ r отъ начала координатъ, угломъ ψ , который это разстояніе составляетъ съ осью Z и угломъ φ , который проэкція r на плоскости (OX, OY) составляетъ съ осью X (фиг. 160):

$$\begin{aligned} OM &= r, & OM' &= \rho \\ \angle AOM' &= \varphi, & \angle MOB &= \psi \\ OA &= x, & M'A &= y, & OB &= z \end{aligned}$$

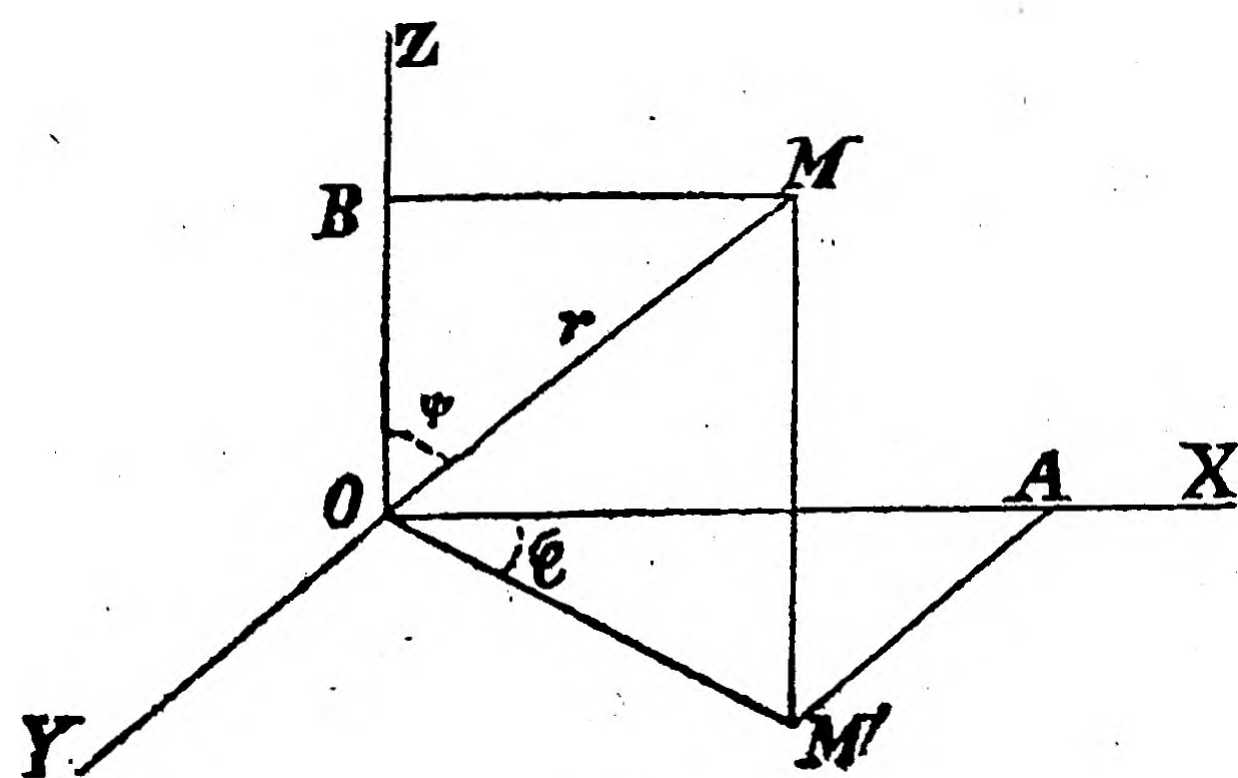
Очевидно, имѣемъ:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = r \cos \psi$$

но:

$$\rho = r \sin \psi$$

Фиг. 160.



слѣдовательно:

$$x = r \cos \varphi \sin \psi, \quad y = r \sin \varphi \sin \psi, \quad z = r \cos \psi \quad (15)$$

r , φ и ψ называются *сферическими координатами*.

Сравнивая выраженія для x , y и z (15) съ (13), найдемъ:

$$\cos \alpha = \cos \varphi \sin \psi, \quad \cos \beta = \sin \varphi \sin \psi, \quad \cos \gamma = \cos \psi \quad (16)$$

Это есть зависимость между сферическими и полярными координатами.

Преобразование плоскостныхъ координатъ.

§ 497. Посмотримъ теперь, какъ преобразуются координаты плоскости; когда переносится только начало координатъ, когда измѣняется только ихъ направленіе и когда дѣлается и то и другое.

Случай 1. Мы выше видѣли (§ 460), что если x, y, z суть координаты точки, то ея уравненіе будетъ:

$$x\xi + y\eta + z\zeta + 1 = 0 \quad (17)$$

перенесемъ начало координатъ въ точку (a, b, c) , неизмѣняя направленія осей; для этого положимъ (§ 483):

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (17), найдемъ:

$$x'\xi + y'\eta + z'\zeta + a\xi + b\eta + c\zeta + 1 = 0$$

или:

$$x' \frac{\xi}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1} + y' \frac{\eta}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1} + z' \frac{\zeta}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1} + 1 = 0 \quad (18)$$

если ξ', η', ζ' будутъ новыя координаты плоскости, то:

$$\xi' = \frac{\xi}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1}, \quad \eta' = \frac{\eta}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1} \quad (19)$$

откуда:

$$\xi = \frac{\xi'}{-a\xi' - b\eta' - c\zeta' + 1}, \quad \eta = \frac{\eta'}{-a\xi' - b\eta' - c\zeta' + 1}, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{-a\xi' - b\eta' - c\zeta' + 1} \quad (20)$$

таковы формулы для преобразованія координатъ плоскости, когда переносится только начало координатъ.

Знаменатель въ выраженіяхъ (19), приравненный нулю, есть, очевидно, уравненіе новаго начала:

$$a\xi + b\eta + c\zeta + 1 = 0$$

а:

$$a\xi' + b\eta' + c\zeta' - 1 = 0$$

есть уравненіе стараго начала относительно новыхъ осей.

Случай 2. Если, оставивъ начало, измѣнимъ направленіе осей, то мы должны въ уравненіе (17), поставить вмѣсто x, y, z выраженія (6), что даетъ:

$$\begin{aligned} (x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\xi + (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\eta + \\ + (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)\zeta + 1 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

или:

$$\begin{aligned} x'(\xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1) + y'(\xi\cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2) + \\ + z'(\xi\cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_3 + \zeta\cos\gamma_3) + 1 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

означимъ черезъ ξ', η', ζ' новыя координаты плоскости, то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1 \\ \eta' &= \xi\cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2 \\ \zeta' &= \xi\cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_3 + \zeta\cos\gamma_3 \end{aligned} \quad (23)$$

откуда:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi'\cos\alpha_1 + \eta'\cos\alpha_2 + \zeta'\cos\alpha_3 \\ \eta &= \xi'\cos\beta_1 + \eta'\cos\beta_2 + \zeta'\cos\beta_3 \\ \zeta &= \xi'\cos\gamma_1 + \eta'\cos\gamma_2 + \zeta'\cos\gamma_3 \end{aligned} \quad (24)$$

Изъ этихъ выраженій видно, что онѣ ничѣмъ не отличны отъ формулъ, служащихъ для преобразованія координатъ точки (4) и (6).

Случай 3. Перенесеніе начала и измѣненіе направленія осей дается выраженіями (8), которыя подставляя въ уравненіе (17), найдемъ:

$$\begin{aligned} (a + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\xi + (b + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\eta + \\ + (c + x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)\zeta + 1 = 0 \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned} x'(\xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1) + y'(\xi\cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2) + \\ + z'(\xi\cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_3 + \zeta\cos\gamma_3) + a\xi + b\eta + c\zeta + 1 = 0 \end{aligned}$$

раздѣляя на:

$$a\xi + b\eta + c\zeta + 1$$

и означая черезъ ξ', η', ζ' новыя координаты, найдемъ:

$$\begin{aligned}\xi' &= \frac{\xi \cos \alpha_1 + \eta \cos \beta_1 + \zeta \cos \gamma_1}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1} \\ \eta' &= \frac{\xi \cos \alpha_2 + \eta \cos \beta_2 + \zeta \cos \gamma_2}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1} \\ \zeta' &= \frac{\xi \cos \alpha_3 + \eta \cos \beta_3 + \zeta \cos \gamma_3}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1}\end{aligned}\quad (25)$$

откуда легко опредѣлить ξ, η, ζ въ функціи новыхъ координатъ ξ', η', ζ' .

Изъ выраженій для преобразованія координатъ плоскости видимъ, что онѣ не имѣютъ той формы и характера, который имѣютъ формулы, служащія для преобразованія координатъ точки; это, опять повторяемъ, происходитъ отъ того, что система координатъ Декарта есть только частный случай болѣе общей системы, которую мы и изложимъ теперь.

Тетраэдрическая система координатъ.

§ 498. Возьмемъ уравненія четырехъ плоскостей не пересѣкающихся въ одной точкѣ, образующихъ тетраэдръ. Пусть эти уравненія будутъ:

$$\begin{aligned}1) \quad & a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ 2) \quad & a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ 3) \quad & a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ 4) \quad & a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0\end{aligned}\quad (26)$$

Такъ какъ, по условію, эти четыре плоскости не пересѣкаются въ одной точкѣ, то:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad (27)$$

Означимъ черезъ $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ миноры, соотвѣтствующіе элементамъ $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ определителя (27).

Уравненія вершинъ тетраэдра (§ 465, 31) будутъ:

$$\begin{aligned}(2, 3, 4) \quad & A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 = 0 \\ (1, 3, 4) \quad & A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 = 0 \\ (1, 2, 4) \quad & A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3 = 0 \\ (1, 2, 3) \quad & A_4\xi + B_4\eta + C_4\zeta + D_4 = 0\end{aligned}\quad (28)$$

Символы (2, 3, 4), (1, 3, 4),... означаютъ какія изъ плоскостей (26) пересекаются въ этой точкѣ.

Въ *тетраэдрической системѣ* координатъ положеніе точки относится къ четыремъ плоскостямъ (26), а положеніе плоскости къ четыремъ точкамъ (28). Этотъ тетраэдръ называется *координатнымъ*.

Означимъ черезъ p_1, p_2, p_3, p_4 разстоянія, какой нибудь точки (x, y, z) отъ четырехъ граней тетраэдра; эти четыре элемента, очевидно, находятся въ известной зависимости между собою, такъ какъ положеніе точки вполне опредѣляется ея разстояніями отъ трехъ плоскостей, слѣдовательно эти четыре элемента будутъ равносильны тремъ, если будемъ принимать не ихъ величины, а ихъ отношенія. Такъ какъ тетраэдръ данъ, то всегда можно опредѣлить и числовую величину четырехъ элементовъ p_1, p_2, p_3, p_4 , но въ тетраэдрической системѣ координатъ въ этомъ нѣтъ надобности, даже вмѣсто разстояній, для большей общности, можно брать разстоянія точки (x, y, z) въ известныхъ направленіяхъ, т. е. помножить p_1, p_2, p_3, p_4 на постоянные коэффициенты, на примѣръ, на k_1, k_2, k_3, k_4 . Означимъ черезъ x_1, x_2, x_3, x_4 такія величины, которыя бы удовлетворяли уравненія:

$$px_1 = p_1 k_1 \quad , \quad px_2 = p_2 k_2 \quad , \quad px_3 = p_3 k_3 \quad , \quad px_4 = p_4 k_4 \quad (29)$$

гдѣ p есть коэффициентъ пропорціональности. Эти величины x_1, x_2, x_3, x_4 примемъ за координаты точки (x, y, z) относительно координатнаго тетраэдра. Слѣдовательно, координатами точки, въ этой системѣ, мы будемъ называть: четыре числа, имѣющія между собою отношенія равныя отношеніямъ разстояній точки отъ граней тетраэдра помноженныхъ, каждое, на постоянный коэффициентъ, т. е. отсчитываемыя въ известномъ направленіи.

Легко видѣть, что уравненія граней тетраэдра будутъ:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_4 = 0 \quad (30)$$

а уравненія его реберъ:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 = 0 & x_1 = 0 & x_1 = 0 & x_2 = 0 & x_2 = 0 & x_3 = 0 \\ x_2 = 0 & x_3 = 0 & x_4 = 0 & x_3 = 0 & x_4 = 0 & x_4 = 0 \end{array} \quad (31)$$

а координаты его вершинъ:

$$\begin{array}{cccc} x_1 = 0 & x_1 = 0 & x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_2 = 0 & x_2 = 0 & x_3 = 0 & x_3 = 0 \\ x_3 = 0 & x_4 = 0 & x_4 = 0 & x_4 = 0 \end{array} \quad (32)$$

§ 499. Точно также мы опредѣлимъ тетраэдрическія координаты плоскости. Пусть q_1, q_2, q_3, q_4 будутъ разстоянія плоскости, данной координатами (ξ, η, ζ) , отъ вершинъ тетраэдра, данныхъ уравненіями (28); пусть эти разстоянія будутъ отсчитываться, не по перпендикулярнымъ направленіямъ, а въ извѣстныхъ, опредѣленныхъ, но произвольныхъ; для этого q_1, q_2, q_3, q_4 множатся на коэффиціенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ и черезъ $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ означаются величины, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\sigma \xi_1 = \lambda_1 q_1 \quad , \quad \sigma \xi_2 = \lambda_2 q_2 \quad , \quad \sigma \xi_3 = \lambda_3 q_3 \quad , \quad \sigma \xi_4 = \lambda_4 q_4 \quad (33)$$

гдѣ σ есть коэффиціентъ пропорціональности.

Числа $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ называютъ *координатами плоскости*, слѣдовательно координаты плоскости суть *четыре числа, имѣющія между собою отношенія равныя отношеніямъ разстояній плоскости отъ вершинъ тетраэдра, каждое разстояніе помножено на произвольный, но постоянный коэффиціентъ; т. е. отсчитывается это разстояніе въ произвольномъ, но постоянномъ направленіи.*

Очевидно, уравненія вершинъ тетраэдра суть:

$$\xi_1 = 0 \quad , \quad \xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_3 = 0 \quad , \quad \xi_4 = 0 \quad (34)$$

уравненія его реберъ:

$$\begin{array}{cccccc} \xi_1 = 0 & \xi_1 = 0 & \xi_1 = 0 & \xi_2 = 0 & \xi_2 = 0 & \xi_3 = 0 \\ \xi_2 = 0 & \xi_3 = 0 & \xi_4 = 0 & \xi_3 = 0 & \xi_4 = 0 & \xi_4 = 0 \end{array} \quad (35)$$

а координаты его граней будутъ:

$$\begin{array}{cccc} \xi_1 = 0 & \xi_1 = 0 & \xi_1 = 0 & \xi_2 = 0 \\ \xi_2 = 0 & \xi_2 = 0 & \xi_3 = 0 & \xi_3 = 0 \\ \xi_3 = 0 & \xi_4 = 0 & \xi_4 = 0 & \xi_4 = 0 \end{array} \quad (36)$$

§ 500. Если напишемъ уравненія (26) и (28) въ нормальной формѣ, то найдемъ:

$$\rho x_1 = k_1 p_1 = k_1 \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

$$\rho x_2 = k_2 p_2 = k_2 \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\rho x_3 = k_3 p_3 = k_3 \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}}$$

$$\rho x_4 = k_4 p_4 = k_4 \frac{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}{\sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2}}$$

$$\sigma \xi_1 = \lambda_1 q_1 = \lambda_1 \frac{A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta + D_1}{D_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

$$\sigma \xi_2 = \lambda_2 q_2 = \lambda_2 \frac{A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 \zeta + D_2}{D_2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

$$\sigma \xi_3 = \lambda_3 q_3 = \lambda_3 \frac{A_3 \xi + B_3 \eta + C_3 \zeta + D_3}{D_3 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

$$\sigma \xi_4 = \lambda_4 q_4 = \lambda_4 \frac{A_4 \xi + B_4 \eta + C_4 \zeta + D_4}{D_4 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

Такъ какъ k и λ суть величины совершенно произвольныя, то можемъ ихъ выбрать такъ, чтобы:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = \xi x + \eta y + \zeta z + 1 \quad (37)$$

т. е. чтобы уравненія плоскости и точки представлялись въ формѣ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \quad (38)$$

а для этого положимъ:

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} & , & & k_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \\ \lambda_1 &= D_1 & , & & \lambda_2 &= D_2 \\ k_3 &= \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2} & , & & k_4 &= \sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2} \\ \lambda_3 &= D_3 & , & & \lambda_4 &= D_4 \end{aligned}$$

введя общій дѣлитель $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ въ коэффициентъ пропорциональности σ , найдемъ:

$$\begin{array}{l|l} \rho x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 & \sigma \xi_1 = A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta + D_1 \\ \rho x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 & \sigma \xi_2 = A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 \zeta + D_2 \\ \rho x_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 & \sigma \xi_3 = A_3 \xi + B_3 \eta + C_3 \zeta + D_3 \\ \rho x_4 = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 & \sigma \xi_4 = A_4 \xi + B_4 \eta + C_4 \zeta + D_4 \end{array} \quad (39)$$

Таковы формулы, служащія для перехода отъ тетраэдрическихъ координатъ къ декартовымъ. Если эти уравненія рѣшимъ относительно x, y, z , то найдемъ формулы для обратнаго перехода, т. е. отъ декартовыхъ къ тетраэдрическимъ:

$$\begin{array}{l|l} x = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4}{D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4} & \xi = \frac{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4}{d_1 \xi_1 + d_2 \xi_2 + d_3 \xi_3 + d_4 \xi_4} \\ y = \frac{B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_4}{D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4} & \eta = \frac{b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_3 \xi_3 + b_4 \xi_4}{d_1 \xi_1 + d_2 \xi_2 + d_3 \xi_3 + d_4 \xi_4} \\ z = \frac{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4}{D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4} & \zeta = \frac{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3 + c_4 \xi_4}{d_1 \xi_1 + d_2 \xi_2 + d_3 \xi_3 + d_4 \xi_4} \end{array} \quad (40)$$

Легко видѣть теперь, перемноживъ уравненія (39), что будемъ имѣть:

$$\rho \sigma (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4) = \Delta (\xi x + \eta y + \zeta z + 1)$$

Слѣдовательно уравненіе:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \quad (41)$$

будетъ представлять плоскость, коей координаты суть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ и точку, коей координаты суть x_1, x_2, x_3, x_4 .

Изъ всего предъидущаго слѣдуетъ, что въ тетраэдрической системѣ координатъ существуетъ полная соотвѣтственность.

Положеніе точки опредѣляется относительно координатнаго тетраэдра ея разстояніями отъ его граней, отсчитываемыми въ опредѣленномъ направленіи.

Положеніе плоскости опредѣляется относительно вершинъ координатнаго тетраэдра ея разстояніями отъ его вершинъ, отсчитываемыми въ опредѣленномъ направленіи.

Поэтому формулы для преобразованія координатъ въ обѣихъ системахъ тождественны по формѣ.

§ 501. Остается показать, какъ выше замѣтили, что система координатъ Декарта есть только частный случай системы тетраэдрической.

Для этого преобразуемъ координатный тетраэдръ въ другой, котораго бы три грани $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ были перпендикулярны между собою. Пусть x, y, z будутъ разстоянія, какой нибудь, точки отъ плоскостей $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$; пусть p будетъ ея разстояніе отъ четвертой плоскости $x_4 = 0$, которой разстояніе отъ пересѣченія трехъ плоскостей $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, означимъ черезъ q . Очевидно, будемъ имѣть:

$$px_1 = k_1x \quad , \quad px_2 = k_2y \quad , \quad px_3 = k_3z \quad , \quad px_4 = k_4p$$

полагая:

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1 \quad , \quad k_4 = \frac{1}{q}$$

найдемъ:

$$px_1 = x \quad , \quad px_2 = y \quad , \quad px_3 = z \quad , \quad px_4 = \frac{p}{q}$$

Если плоскость $x_4 = 0$ отодвинемъ на бесконечность, то $p = \infty$ и $q = \infty$; слѣдовательно $\frac{p}{q} = 1$, откуда:

$$px_1 = x \quad , \quad px_2 = y \quad , \quad px_3 = z \quad , \quad px_4 = 1 \quad (42)$$

Изъ этого видимъ, что въ декартовой системѣ координатъ четвертая координатная плоскость находится на бесконечности и переходъ отъ тетраэдрической системы къ декартовой дѣлается съ помощью уравненій (42).

§ 502. Одно изъ самыхъ замѣчательныхъ уравненій плоскости, есть уравненіе:

$$D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4 = 0 \quad (43)$$

полученное, приравнявъ нулю знаменатель въ уравненіяхъ (40).

Для всѣхъ точекъ этой плоскости $x=\infty$, $y=\infty$ и $z=\infty$, слѣдовательно на этой плоскости находятся всѣ бесконечно-удаленныя точки. Мы эту плоскость будемъ называть *бесконечно-удаленною*. Ниже увидимъ, какую важную роль играетъ эта плоскость во всѣхъ изслѣдованіяхъ свойствъ поверхностей.

Мы видѣли въ первой части (§ 185), что всѣ бесконечно-удаленныя точки на плоскости, лежатъ на одной прямой, здѣсь-же видимъ, что всѣ бесконечно-удаленныя точки пространства находятся на одной плоскости.

Отсюда видимъ, что плоскость можно разсматривать, какъ площадь круга, коего окружность находится на бесконечности, а пространство—какъ замкнутый шаръ, коего поверхность находится на бесконечности.

§ 503. Остается показать, какъ преобразуется одна тетраэдрическая система координатъ въ другую, тоже тетраэдрическую.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 будутъ координаты точки, а $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ координаты плоскости въ одной системѣ, а y_1, y_2, y_3, y_4 и $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ координаты точки и плоскости въ другой системѣ.

Уравненіе плоскости въ первой системѣ будетъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \quad (44)$$

а уравненіе той-же плоскости въ другой системѣ:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \eta_4 y_4 = 0 \quad (45)$$

Координаты y_1, y_2, y_3, y_4 второй системы будутъ линейныя функціи координатъ первой системы; пусть онѣ будутъ:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ \rho y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\ \rho y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\ \rho y_4 &= a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 \end{aligned} \quad (46)$$

Если эти выраженія подставимъ въ (45) и сравнимъ съ (44), то найдемъ:

$$\begin{aligned} \sigma \xi_1 &= a_{11} \eta_1 + a_{21} \eta_2 + a_{31} \eta_3 + a_{41} \eta_4 \\ \sigma \xi_2 &= a_{12} \eta_1 + a_{22} \eta_2 + a_{32} \eta_3 + a_{42} \eta_4 \\ \sigma \xi_3 &= a_{13} \eta_1 + a_{23} \eta_2 + a_{33} \eta_3 + a_{43} \eta_4 \\ \sigma \xi_4 &= a_{14} \eta_1 + a_{24} \eta_2 + a_{34} \eta_3 + a_{44} \eta_4 \end{aligned} \quad (47)$$

Составимъ опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (48)$$

который не долженъ быть равенъ нулю, такъ какъ въ противномъ случаѣ, второй тетраэдръ обращается въ точку. Если черезъ $A_{k,i}$ назовемъ миноръ, соотвѣтствующій элементу $a_{k,i}$ въ Δ , то изъ уравненій (46) и (47), найдемъ:

$$\begin{aligned} \mu x_1 &= A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 + A_{41}y_4 \\ \mu x_2 &= A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 + A_{42}y_4 \\ \mu x_3 &= A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3 + A_{43}y_4 \\ \mu x_4 &= A_{14}y_1 + A_{24}y_2 + A_{34}y_3 + A_{44}y_4 \end{aligned} \quad (49)$$

и:

$$\begin{aligned} \nu \eta_1 &= A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 + A_{14}\xi_4 \\ \nu \eta_2 &= A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 + A_{24}\xi_4 \\ \nu \eta_3 &= A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 + A_{34}\xi_4 \\ \nu \eta_4 &= A_{41}\xi_1 + A_{42}\xi_2 + A_{43}\xi_3 + A_{44}\xi_4 \end{aligned} \quad (50)$$

Изъ уравненій (46), (47), (49) и (50) ясно видно значеніе коэффиціентовъ $a_{k,i}$ и $A_{k,i}$. Уравненія:

$$\begin{aligned} y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad y_3 = 0 \quad , \quad y_4 = 0 \\ \eta_1 = 0 \quad , \quad \eta_2 = 0 \quad , \quad \eta_3 = 0 \quad , \quad \eta_4 = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

представляютъ стороны и вершины втораго тетраэдра относительно перваго. Эти уравненія суть:

границы:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (52)$$

вершины:

$$\begin{aligned} A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 + A_{14}\xi_4 &= 0 \\ A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 + A_{24}\xi_4 &= 0 \\ A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 + A_{34}\xi_4 &= 0 \\ A_{41}\xi_1 + A_{42}\xi_2 + A_{43}\xi_3 + A_{44}\xi_4 &= 0 \end{aligned} \quad (52')$$

откуда видимъ, что координаты:

новыхъ граней:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \quad (53)$$

новыхъ вершинъ:

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{matrix} \quad (53')$$

Уравненія сторонъ и вершинъ стараго координатнаго тетраэдра, отнесенныя къ новому, будутъ:

$$\begin{aligned} x_1 = 0 & , \quad x_2 = 0 & , \quad x_3 = 0 & , \quad x_4 = 0 \\ \xi_1 = 0 & , \quad \xi_2 = 0 & , \quad \xi_3 = 0 & , \quad \xi_4 = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

старыя грани:

$$\begin{aligned} A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 + A_{41}y_4 &= 0 \\ A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 + A_{42}y_4 &= 0 \\ A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3 + A_{43}y_4 &= 0 \\ A_{14}y_1 + A_{24}y_2 + A_{34}y_3 + A_{44}y_4 &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

старыя вершины:

$$\begin{aligned} a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + a_{31}\eta_3 + a_{41}\eta_4 &= 0 \\ a_{12}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{32}\eta_3 + a_{42}\eta_4 &= 0 \\ a_{13}\eta_1 + a_{23}\eta_2 + a_{33}\eta_3 + a_{43}\eta_4 &= 0 \\ a_{14}\eta_1 + a_{24}\eta_2 + a_{34}\eta_3 + a_{44}\eta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (55')$$

Откуда видимъ, что координаты:

старыхъ граней:

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{matrix} \quad (56)$$

старыхъ вершинъ:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{matrix} \quad (56')$$

Тетраэдрическая система координатъ въ особенности прилагается удобно къ предложеніямъ относительно положенія, гдѣ не входятъ числовыя значенія величинъ.

§ 504. Рѣшимъ еще слѣдующую задачу:

Задача. Написать уравненіе плоскости, проходящей через три точки:

$$(x'_1 x'_2 x'_3 x'_4), (x''_1 x''_2 x''_3 x''_4), (x'''_1 x'''_2 x'''_3 x'''_4)$$

Пусть искомое уравненіе плоскости будетъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \quad (57)$$

Такъ какъ координаты данныхъ точекъ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Задача. Написать уравненіе точки, лежащей на трехъ плоскостяхъ:

$$(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4), (\xi_1'' \xi_2'' \xi_3'' \xi_4''), (\xi_1''' \xi_2''' \xi_3''' \xi_4''')$$

Пусть уравненіе точки будетъ:

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 + x_4 \xi_4 = 0 \quad (57')$$

Такъ какъ плоскости проходятъ черезъ

должны удовлетворять уравнение плоскости, то имѣемъ:

$$\begin{aligned}\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' + \xi_4 x_4' &= 0 \\ \xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'' + \xi_4 x_4'' &= 0 \quad (58) \\ \xi_1 x_1''' + \xi_2 x_2''' + \xi_3 x_3''' + \xi_4 x_4''' &= 0\end{aligned}$$

исключая изъ уравненій (57) и (58) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0 \quad (59)$$

Легко видѣть, что координаты плоскости и координаты точки будутъ даны минорами предыдущихъ определителей, соответствующихъ элементамъ $x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Изъ уравненій (59) и (59'), найдемъ:

$$\begin{array}{l|l} \rho x_1 = x_1' + \lambda x_1'' + \mu x_1''' & \sigma \xi_1 = \xi_1' + \lambda \xi_1'' + \mu \xi_1''' \\ \rho x_2 = x_2' + \lambda x_2'' + \mu x_2''' & \sigma \xi_2 = \xi_2' + \lambda \xi_2'' + \mu \xi_2''' \\ \rho x_3 = x_3' + \lambda x_3'' + \mu x_3''' & \sigma \xi_3 = \xi_3' + \lambda \xi_3'' + \mu \xi_3''' \\ \rho x_4 = x_4' + \lambda x_4'' + \mu x_4''' & \sigma \xi_4 = \xi_4' + \lambda \xi_4'' + \mu \xi_4''' \end{array}$$

Если уравненія двухъ плоскостей будутъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0, \quad \xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3 + \xi_4' x_4 = 0$$

то уравнение плоскости, проходящей через пересѣченіе этихъ двухъ, будетъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 + \lambda (\xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3 + \xi_4' x_4) = 0$$

или:

$$(\xi_1 + \lambda \xi_1') x_1 + (\xi_2 + \lambda \xi_2') x_2 + (\xi_3 + \lambda \xi_3') x_3 + (\xi_4 + \lambda \xi_4') x_4 = 0$$

Слѣдовательно координаты этой плоскости будутъ:

$$\xi_1 + \lambda \xi_1', \quad \xi_2 + \lambda \xi_2', \quad \xi_3 + \lambda \xi_3', \quad \xi_4 + \lambda \xi_4'$$

Если уравненія двухъ точекъ будутъ:

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 + x_4 \xi_4 = 0, \quad x_1' \xi_1 + x_2' \xi_2 + x_3' \xi_3 + x_4' \xi_4 = 0$$

искомую точку, то ихъ координаты должны удовлетворять уравненіе точки и мы имѣемъ:

$$\begin{aligned}x_1 \xi_1' + x_2 \xi_2' + x_3 \xi_3' + x_4 \xi_4' &= 0 \\ x_1 \xi_1'' + x_2 \xi_2'' + x_3 \xi_3'' + x_4 \xi_4'' &= 0 \quad (58') \\ x_1 \xi_1''' + x_2 \xi_2''' + x_3 \xi_3''' + x_4 \xi_4''' &= 0\end{aligned}$$

исключая изъ уравненій (57') и (58') x_1, x_2, x_3, x_4 , найдемъ:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' & \xi_4' \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' & \xi_4'' \\ \xi_1''' & \xi_2''' & \xi_3''' & \xi_4''' \end{vmatrix} = 0 \quad (59')$$

то уравненіе точки на прямой, соединяющей эти двѣ точки, будетъ:

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 + \lambda(x'_1\xi_1 + x'_2\xi_2 + x'_3\xi_3 + x'_4\xi_4) = 0$$

откуда координаты этой точки будутъ:

$$x_1 + \lambda x'_1, \quad x_2 + \lambda x'_2, \quad x_3 + \lambda x'_3, \quad x_4 + \lambda x'_4$$

§ 505. Тетраэдрическая система координатъ вытекаетъ изъ того свойства, что уравненіе всякой плоскости можно выразить съ помощью четырехъ данныхъ плоскостей не пересѣкающихся въ одной точкѣ, а уравненіе каждой точки можно выразить съ помощью четырехъ данныхъ точекъ, не лежащихъ въ одной плоскости.

Пусть уравненія четырехъ данныхъ плоскостей будутъ:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$$

требуется съ помощью этихъ уравненій выразить уравненіе плоскости:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Для этого помножимъ предъидущія уравненія на λ, μ, ν, ρ и сложивъ приравняемъ коэффиціенты при x, y, z коэффиціентамъ a, b, c, d , то найдемъ:

$$\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 + \rho a_4 = a$$

$$\lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 + \rho b_4 = b$$

$$\lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 + \rho c_4 = c$$

$$\lambda d_1 + \mu d_2 + \nu d_3 + \rho d_4 = d$$

изъ этихъ четырехъ уравненій, найдемъ искомыя коэффиціенты λ, μ, ν, ρ .

Если уравненія четырехъ точекъ будутъ:

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 = 0$$

$$A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 = 0$$

$$A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3 = 0$$

$$A_4\xi + B_4\eta + C_4\zeta + D_4 = 0$$

то уравненіе пятой точки:

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

можетъ быть выражено съ помощью предъидущихъ уравненій.

Для этого помножимъ ихъ на коэффициенты λ, μ, ν, ρ и сложивъ приравняемъ коэффициенты коэффициентамъ послѣдняго уравненія, что даетъ слѣдующія уравненія для опредѣленія λ, μ, ν, ρ :

$$A_1\lambda + A_2\mu + A_3\nu + A_4\rho = A$$

$$B_1\lambda + B_2\mu + B_3\nu + B_4\rho = B$$

$$C_1\lambda + C_2\mu + C_3\nu + C_4\rho = C$$

$$D_1\lambda + D_2\mu + D_3\nu + D_4\rho = D$$

изъ коихъ опредѣлимъ λ, μ, ν, ρ , если четыре, данныя уравненіями, точки не лежатъ на одной плоскости.

ГЛАВА XXXII.

Общія свойства поверхностей втораго порядка.

§ 506. Геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію второй степени:

$$f(x, y, z) = a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + 2a_2yz + 2b_2xz + 2c_2xy + \\ + 2a_3x + 2b_3y + 2c_3z + k = 0 \quad (1)$$

называется *поверхностью втораго порядка*.

Какъ видно изъ формы уравненія оно содержитъ десять членовъ, слѣдовательно десять коэффициентовъ, при: $x^2, y^2, z^2, yz, xz, xy, x, y, z, 1$. Изъ этихъ десяти числовыхъ коэффициентовъ, не нарушая общности уравненія (1), можно одинъ сдѣлать равнымъ единицѣ, на примѣръ k , раздѣляя на него всѣ остальные девять коэффициентовъ.

Такимъ образомъ, въ уравненіе поверхности войдутъ линейно только девять коэффициентовъ, коихъ числовыя величины опредѣляютъ форму и свойства поверхности.

Эти девять коэффициентовъ будутъ состоять въ линейной зависимости, если поверхность должна проходить черезъ данную точку. Эта линейная зависимость между коэффициентами получится, вставивъ въ уравненіе по-

верности координаты данной точки. Если поверхность должна проходить и через другую, данную координатами точку, то мы будем имѣть между девятью коэффициентами и другую линейную зависимость, слѣдовательно, чтобы всѣ девять коэффициентовъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и поверхность, вполне опредѣлились, необходимо имѣть девять такихъ линейныхъ уравненій, т. е. девять данныхъ точекъ, черезъ которыя должна проходить поверхность. Но не каждыя девять точекъ опредѣляютъ поверхность, такъ какъ положеніе точекъ можетъ быть таково, что изъ девяти линейныхъ уравненій одно или нѣсколько могутъ вытекать изъ остальныхъ; въ этомъ случаѣ мы не имѣемъ достаточнаго числа уравненій для опредѣленія девяти коэффициентовъ.

Слѣдовательно восемь данныхъ точекъ не опредѣляютъ вполне поверхность. Между девятью коэффициентами мы будемъ имѣть только восемь линейныхъ уравненій; изъ которыхъ восемь коэффициентовъ опредѣляются линейно черезъ девятый; если этотъ девятый назовемъ черезъ λ , который остается совершенно произвольнымъ, то, очевидно, восемь остальныхъ коэффициентовъ будутъ имѣть форму $a + b\lambda$, гдѣ a и b суть функции координатъ данныхъ восьми точекъ. Подставляя восемь коэффициентовъ, выраженныхъ линейно черезъ девятый λ , въ уравненіе (1) и собирая члены независимые отъ λ и члены, имѣющіе коэффициентомъ λ , найдемъ:

$$f(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - \lambda\psi(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

Въ этомъ уравненіи съ произвольнымъ коэффициентомъ λ заключаются всѣ поверхности второго порядка, проходящія черезъ восемь данныхъ точекъ. Произвольный коэффициентъ опредѣлится, если будетъ дана девятая точка, черезъ которую поверхность, проходящая уже черезъ восемь точекъ, должна пройти.

Уравненія:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

полученныя, полагая $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, представляютъ двѣ поверхности второго порядка, каждая изъ коихъ проходитъ черезъ восемь данныхъ точекъ. Эти двѣ поверхности пересѣкаются по кривой, которая также проходитъ черезъ восемь данныхъ точекъ. Эта кривая, проходя черезъ восемь точекъ, проходитъ еще черезъ безчисленное множество другихъ, которыя всѣ данными восьмью точками, опредѣляются и которыя всѣ лежатъ на общей поверхности, ^{кривой} проходящей черезъ восемь данныхъ точекъ.

Слѣдовательно всѣ поверхности второго порядка, которыя проходятъ черезъ восемь произвольно выбранныхъ точекъ въ пространствѣ, прохо-

дять по кривой, которая опредѣляется взятыми восьмью точками, черезъ которую проходятъ и поверхности (3).

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для того, чтобы поверхность второго порядка девятью точками вполне опредѣлилась надобно, чтобы эти точки не лежали всѣ на кривой пересѣченія поверхностей (3). И въ самомъ дѣлѣ, кривая опредѣляется восьмью точками, а координаты каждой, лежащей на ней точки, обращаютъ въ нуль $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$, слѣдовательно девятою точкою на кривой, λ изъ уравненій (3) неопредѣляется.)

§ 507. Особенный случай поверхности второго порядка представляютъ двѣ плоскости, если уравненіе (1) разлагается на два линейные множителя:

$$F(x, y, z) = A \cdot B = 0 \quad (4)$$

гдѣ:

$$A = a'x + b'y + c'z + d' \quad , \quad B = a''x + b''y + c''z + d'' \quad (5)$$

очевидно, что координаты точекъ, лежащихъ какъ на одной, такъ и на другой изъ плоскостей:

$$A = 0 \quad \text{и} \quad B = 0 \quad (6)$$

удовлетворяютъ уравненію второго порядка (4).

Если двѣ плоскости пересѣкаютъ, какую нибудь, поверхность второго порядка $f(x, y, z) = 0$ по двумъ плоскимъ кривымъ, то всѣ поверхности второго порядка, проходящія по обѣимъ этимъ кривымъ, могутъ быть представлены въ формѣ:

$$f(x, y, z) - \lambda A \cdot B = 0 \quad (7)$$

такъ, что если $f_1(x, y, z) = 0$ есть, какая нибудь, поверхность второго порядка, проходящая по двумъ плоскимъ кривымъ, то λ и μ можно такъ опредѣлить, что:

$$f(x, y, z) - \lambda A \cdot B = \mu f_1(x, y, z) \quad (8)$$

Если-же будутъ даны только поверхность $f = 0$ и плоскость $A = 0$, то уравненіе (7) будетъ содержать четыре произвольные коэффициента въ плоскости $\lambda B = 0$ и мы покажемъ, что всѣ поверхности второго порядка, проходящія черезъ пересѣченіе $f = 0$ съ $A = 0$, представляются уравненіемъ:

$$f(x, y, z) - \lambda A \cdot B = 0 \quad (9)$$

Замѣтимъ сначала, что пересѣченіе поверхности второго порядка съ плоскостью есть одно изъ коническихъ сѣченій. Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ уравненіи (1) $z = 0$, или $y = 0$, или $x = 0$, найдемъ пересѣченіе

поверхности съ плоскостями (OX, OY) , (OX, OZ) , (OY, OZ) , которыя, очевидно, суть коническія сѣченія.

Но такъ какъ каждую плоскость можно сдѣлать, преобразованіемъ координатъ, которое неизмѣняетъ поверхности, одною изъ координатныхъ плоскостей, то изъ этого вытекаетъ сдѣланное выше заключеніе.

Возвратимся къ нашему предложенію. Предложеніе состоитъ въ томъ, что всякая поверхность, проходящая черезъ пересѣченіе $f = 0$ и $A = 0$, т. е. черезъ коническое сѣченіе, можетъ быть представлена въ формѣ (9). Если поверхность $\varphi = 0$ проходитъ черезъ пересѣченіе поверхностей $f = 0$ и $A = 0$, то она должна удовлетворять пяти условіямъ, такъ какъ коническое сѣченіе опредѣляется пятью точками, слѣдовательно поверхность $\varphi = 0$ заключаетъ еще только четыре произвольныхъ коэффициента, въ линейной формѣ, а этому условію удовлетворяетъ и уравненіе (9). Слѣдовательно если $f = 0$ и $\varphi = 0$ суть уравненія двухъ какихъ-нибудь, поверхностей втораго порядка, которыя пересѣкаются по плоской кривой, лежащей въ плоскости $A = 0$, то можно всегда такъ опредѣлить четыре коэффициента въ $\lambda B = 0$ и еще множитель μ , что будемъ имѣть тождество:

$$f - \mu\varphi \equiv \lambda A \cdot B \quad (10)$$

а это даетъ слѣдующее свойство:

Если двѣ поверхности втораго порядка пересѣкаются по одной плоской кривой, то онѣ въ тоже время пересѣкаются и по другой плоской кривой.

§ 508. Если будутъ даны только семь точекъ, черезъ которыя должна проходить поверхность втораго порядка, то между десятью коэффициентами въ уравненіи поверхности, будемъ имѣть только семь линейныхъ уравненій, съ помощью которыхъ семь коэффициентовъ опредѣлятся линейно черезъ два λ и μ , которые останутся совершенно произвольными. Форма семи коэффициентовъ будетъ:

$$a + b\lambda + c\mu$$

которыя если вставимъ въ уравненіе (1), то оно сдѣлается:

$$\varphi_1(x, y, z) + \lambda \varphi_2(x, y, z) + \mu \varphi_3(x, y, z) = 0 \quad (11)$$

Это уравненіе съ двумя произвольными коэффициентами λ и μ представляетъ цѣлую систему поверхностей, которыя всѣ проходятъ черезъ семь данныхъ точекъ. Между этими поверхностями находятся и поверхности втораго порядка:

$$\varphi_1(x, y, z), \quad \varphi_2(x, y, z), \quad \varphi_3(x, y, z) \quad (12)$$

которыя соотвѣтствуютъ значеніямъ:

$$\lambda = 0, \mu = 0; \mu = 0, \lambda = \infty; \lambda = 0, \mu = \infty$$

Такъ какъ онѣ втораго порядка, то онѣ пересѣкаются въ восьми точкахъ, слѣдовательно всѣ поверхности втораго порядка, проходящія черезъ семь данныхъ точекъ, проходятъ въ тоже время и черезъ восьмую, которая опредѣляется семью данными.

Изъ этого слѣдуетъ, что для опредѣленія кривой въ пространствѣ, по которой пересѣкаются поверхности втораго порядка, проходящія черезъ восемь точекъ, восьмая точка не должна быть та, которая опредѣляется семью данными или, что всѣ восемь точекъ не должны быть тѣ, по которымъ пересѣкаются поверхности (12).

§ 509. Возьмемъ координатный тетраэдръ, пусть уравненія его граней будутъ:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Если черезъ x_1, x_2, x_3, x_4 означимъ тетраэдрическія координаты, то декартовскія x, y, z выразятся въ этихъ послѣднихъ уравненіями (§ 500, 40). Если эти выраженія подставимъ вмѣсто x, y, z въ уравненіе (1), то послѣ всѣхъ приведеній оно приметъ форму:

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Это уравненіе можно написать въ символической формѣ, какъ было показано въ § 199 (9):

$$f = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)^2 = 0 \quad (15)$$

§ 510. *Задача.* Найти точки пересѣченія прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки, съ поверхностью втораго порядка?

Рѣшеніе. Пусть данныя точки будутъ:

$$(y_1y_2y_3y_4), \quad (z_1z_2z_3z_4)$$

Всякая точка на прямой, соединяющей эти двѣ точки, будетъ дана уравненіями (§ 437):

$$\rho x_1 = y_1 + \lambda z_1, \quad \rho x_2 = y_2 + \lambda z_2, \quad \rho x_3 = y_3 + \lambda z_3, \quad \rho x_4 = y_4 + \lambda z_4 \quad (16)$$

Если точка $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ находится на поверхности, то предыдущія выраженія должны удовлетворять уравненіямъ (14) и (15).

Подставляя въ (15), найдемъ:

$$\{a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 + \lambda (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4)\}^2 = 0 \quad (17)$$

откуда, развертывая, найдемъ:

$$R\lambda^2 + 2Q\lambda + P = 0 \quad (18)$$

гдѣ:

$$P = (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4)^2$$

$$R = (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4)^2 \quad (19)$$

$$Q = (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4) (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4)$$

Очевидно, что первыя два выраженія (19) суть ничто иное, какъ уравненіе (14), въ которое вмѣсто x_1, x_2, x_3, x_4 подставили y_1, y_2, y_3, y_4 и z_1, z_2, z_3, z_4 , т. е:

$$P = f(y_1 y_2 y_3 y_4) \quad , \quad R = f(z_1 z_2 z_3 z_4) \quad (20)$$

а Q , очевидно, есть:

$$\frac{1}{2} \left(z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} \right) = \frac{1}{2} \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} \right) \quad (21)$$

Рѣшая уравненіе (18), найдемъ:

$$\lambda = - \frac{Q \mp \sqrt{Q^2 - PR}}{R} \quad (22)$$

Подставляя вмѣсто λ его выраженіе въ (16), найдемъ:

$$\rho x_1 = R y_1 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR}) z_1$$

$$\rho x_2 = R y_2 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR}) z_2$$

$$\rho x_3 = R y_3 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR}) z_3$$

$$\rho x_4 = R y_4 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR}) z_4 \quad (23)$$

Откуда видно, что прямая встрѣчаетъ поверхность втораго порядка всегда въ двухъ точкахъ дѣйствительныхъ, мнимыхъ или совпадающихъ. Общій знаменатель R вошелъ въ составъ коэффициента пропорціональности.

Такимъ образомъ на данной прямой будемъ имѣть четыре точки: двѣ данныя и двѣ точки пересѣченія поверхности съ прямою. Если че-

резь λ_1 и λ_2 означимъ корни уравненія (18), то ангармоническое отноше-
 шеніе этихъ четырехъ точекъ будетъ или $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ или $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Если первое озна-
 чимъ черезъ α_1 , а второе черезъ α_2 , то будемъ имѣть:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

но λ_1 и λ_2 суть корни уравненія (18), слѣдовательно:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2Q}{R}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{P}{R}$$

откуда:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{4Q^2 - 2PR}{PR}$$

но $\alpha_1 \alpha_2 = 1$, слѣдовательно α_1 и α_2 суть корни уравненія:

$$\alpha^2 - \frac{4Q^2 - 2PR}{PR} \alpha + 1 = 0 \quad (24)$$

или:

$$(\alpha + 1)^2 PR - 4Q^2 \alpha = 0 \quad (25)$$

Корни этого уравненія даютъ непосредственно ангармоническое отноше-
 ніе четырехъ точекъ.

Если теперь дадимъ въ уравненіи (25) ангармоническому отноше-
 нію α определенное числовое значеніе и, неизмѣняя положенія точки
 $(y_1 y_2 y_3 y_4)$, будемъ двигать точку $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ такъ, чтобы ея координаты
 удовлетворяли постоянно уравненію (25), то это уравненіе будетъ пред-
 ставлять поверхность второго порядка, которая будетъ геометрическимъ
 мѣстомъ точекъ, коихъ ангармоническое отношеніе съ точкою $(y_1 y_2 y_3 y_4)$
 и съ двумя точками пересѣченія прямой, проходящей черезъ эту точку,
 съ поверхностью, будетъ имѣть определенное значеніе. Давая ангармони-
 ческому отношенію α различныя величины получимъ безчисленное мно-
 жество поверхностей, связанныхъ съ точкою $(y_1 y_2 y_3 y_4)$. Между этой сис-
 темою поверхностей будетъ одна, соответствующая значенію $\alpha = -1$,
 которая играетъ весьма важную роль въ изслѣдованіи поверхностей вто-
 рого порядка. Уравненіе этой поверхности есть:

$$Q^2 = 0 \quad \text{или} \quad Q = 0 \quad (26)$$

такъ какъ Q первой степени относительно переменныхъ координатъ z_1, z_2, z_3, z_4 :

$$Q = z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \quad (27)$$

то это есть плоскость. Эта плоскость называется *полярной плоскостью* точки $(y_1 y_2 y_3 y_4)$, которая, по отношенію къ плоскости (27), называется *полосомъ*.

Очевидно, полярная плоскость есть геометрическое мѣсто гармоническихъ точекъ къ тремъ точкамъ: $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ и къ двумъ точкамъ пересѣченія прямыхъ, проходящихъ черезъ точку $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ съ поверхностью. Означимъ черезъ $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ координаты полярной плоскости, то будемъ имѣть:

$$\sigma \xi_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \sigma \xi_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \sigma \xi_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_3}, \quad \sigma \xi_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_4} \quad (28)$$

или:

$$\begin{aligned} \sigma \xi_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + a_{14} y_4 \\ \sigma \xi_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + a_{24} y_4 \\ \sigma \xi_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + a_{34} y_4 \\ \sigma \xi_4 &= a_{41} y_1 + a_{42} y_2 + a_{43} y_3 + a_{44} y_4 \end{aligned} \quad (29)$$

гдѣ $a_{i,k} = a_{k,i}$. Откуда видимъ, что каждая точка въ пространствѣ имѣетъ полярную плоскость.

Этими уравненіями выражаются координаты полярной плоскости черезъ координаты полюса и, обратно, координаты полюса выразятся черезъ координаты полярной плоскости уравненіями:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= A_{11} \xi_1 + A_{21} \xi_2 + A_{31} \xi_3 + A_{41} \xi_4 \\ \rho y_2 &= A_{12} \xi_1 + A_{22} \xi_2 + A_{32} \xi_3 + A_{42} \xi_4 \\ \rho y_3 &= A_{13} \xi_1 + A_{23} \xi_2 + A_{33} \xi_3 + A_{43} \xi_4 \\ \rho y_4 &= A_{14} \xi_1 + A_{24} \xi_2 + A_{34} \xi_3 + A_{44} \xi_4 \end{aligned} \quad (30)$$

если только опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} > 0 \quad (31)$$

Но такъ какъ координаты $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ полярной плоскости могутъ быть совершенно произвольныя величины, то каждая произвольная плоскость въ пространствѣ можетъ быть полярной плоскостью полюса, коего координаты опредѣляются уравненіями (30).

§ 511. Мы видѣли, что уравненіе полярной плоскости можетъ быть написано въ двухъ формахъ:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \quad (32)$$

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0$$

изъ которыхъ видимъ, что если возьмемъ на полярной плоскости, какую нибудь, точку, то полярная плоскость этой точки пройдетъ черезъ полюсъ полярной плоскости.

Откуда вытекаетъ слѣдующее весьма важное предложеніе:

Предложеніе 1. Если точка скользитъ по данной плоскости, то полярная плоскость этой точки вращается около полюса данной плоскости.

Изъ этого предложенія вытекаетъ слѣдующее:

Предложеніе 2. Если точка скользитъ по прямой пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей, то полярная плоскость, скользящей точки, вращается около прямой, проходящей черезъ полюсы данныхъ плоскостей.

Эти двѣ прямыя такъ связаны между собою, что полярная плоскость точки на одной изъ этихъ прямыхъ проходитъ по другой. Такая пара прямыхъ линій называется *взаимными полярными* поверхности второго порядка и легко видѣть, что произвольно взятая прямая въ пространствѣ имѣетъ свою взаимную полярю.

Легко доказать слѣдующія обратныя предложенія двумъ предъидущимъ:

Предложеніе 3. Если плоскость вращается около данной точки, то ея полюсъ скользитъ по полярной плоскости данной точки.

Предложеніе 4. Если плоскость вращается около данной прямой, то ея полюсъ скользитъ по взаимной полярѣ данной прямой.)

§ 512. Смотри по положенію полюса относительно поверхности, онъ лежитъ, то ближе, то дальше отъ своей полярной плоскости; онъ лежитъ и на самой полярной плоскости.

Чтобы полюсъ $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ находился на своей полярной поверхности:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \quad (33)$$

надобно, чтобы координаты y_1, y_2, y_3, y_4 полюса удовлетворяли предъидущему уравненію, т. е. чтобы:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \quad (34)$$

но это уравненіе есть ничто иное какъ:

$$f(y_1 y_2 y_3 y_4) = 0.$$

т. е. полюсъ есть точка на поверхности; слѣдовательно, если полюсъ есть точка на поверхности, то онъ лежитъ въ своей полярной плоскости.

Въ этомъ случаѣ, полярная плоскость имѣетъ замѣчательныя свойства.

Возьмемъ, какую нибудь, точку на полярной плоскости, коей полюсъ находится на поверхности, соединимъ эту точку съ полюсомъ, то по свойству полюса и полярной плоскости эти двѣ точки будутъ сопряженно-гармоническія съ точками пересѣченія, проведенной прямой съ поверхностью; но полюсъ совпадаетъ съ одною изъ точекъ пересѣченія прямой съ поверхностью, а потому и вторая точка пересѣченія совпадаетъ съ полюсомъ. слѣдовательно прямая, соединяющая, какую нибудь, точку полярной плоскости съ ея полюсомъ, лежащимъ на поверхности, пересѣкаетъ поверхность въ двухъ совпадающихъ точкахъ. Такая прямая называется *касательной къ поверхности* въ точкѣ $(y_1 y_2 y_3 y_4)$. слѣдовательно полярная плоскость точки $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ на поверхности, есть геометрическое мѣсто касательныхъ къ поверхности въ точкѣ $(y_1 y_2 y_3 y_4)$. Въ этомъ случаѣ, полярная плоскость называется *касательной плоскостью* къ поверхности, коей полюсъ есть точка касанія.

слѣдовательно:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \quad (35)$$

будетъ уравненіе касательной плоскости, если точка $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ лежитъ на поверхности.

§ 513. Если, какая-нибудь, плоскость A , коей полюсъ есть P , пересѣкаетъ поверхность второго порядка, то касательная плоскость къ поверхности въ точкѣ O , взятой на кривой пересѣченія плоскости A съ поверхностью, пройдетъ черезъ точку P , такъ какъ касательная плоскость есть полярная точки O , слѣдовательно прямая PO касается поверхности. Откуда имѣемъ слѣдующее предложеніе.

Предложеніе. Если полюсь, какой-нибудь, плоскости соединимъ прямою линіей съ какой-нибудь, точкой кривой пересѣченія плоскости съ поверхностью, то эта прямая будетъ касательная къ поверхности.

Слѣдовательно, всѣ прямыя, соединяющія, какую-нибудь точку съ точками кривой пересѣченія полярной плоскости взятой точки съ поверхностью второго порядка, суть касательныя къ поверхности. Геометрическое мѣсто этихъ касательныхъ есть, очевидно, конусъ, который называется *касательнымъ конусомъ* къ поверхности. Слѣдовательно касательный конусъ касается поверхности по кривой, по которой полярная плоскость его вершины, пересѣкается съ поверхностью.

§ 514. *Касательная плоскость.* Мы выше видѣли, что если точка $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ находится на поверхности, то уравненіе касательной будетъ:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0$$

Если вспомнимъ, что:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 2f(y_1 y_2 y_3 y_4) = 0$$

то, вычитая это уравненіе изъ предъидущаго, найдемъ:

$$(z_1 - y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} + (z_2 - y_2) \frac{\partial f}{\partial y_2} + (z_3 - y_3) \frac{\partial f}{\partial y_3} + (z_4 - y_4) \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0$$

Чтобы, перейти отъ тетраэдрической системы координатъ къ декартовой, выдѣли выше (§ 501), что надобно сдѣлать:

$$\rho z_1 = x \quad , \quad \rho z_2 = y \quad , \quad \rho z_3 = z \quad , \quad \rho z_4 = 1$$

$$\rho y_1 = x_1 \quad , \quad \rho y_2 = y_1 \quad , \quad \rho y_3 = z_1 \quad , \quad \rho y_4 = 1$$

что даетъ:

$$(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (y - y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} + (z - z_1) \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \quad (36)$$

Это уравненіе касательной плоскости въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ къ поверхности второго порядка:

$$f(x y z) = 0$$

§ 515. Касательная плоскость къ поверхности второго порядка $f=0$ въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ есть:

$$(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (y - y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} + (z - z_1) \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \quad (37)$$

Слѣдовательно косинусы угловъ, которые перпендикуляръ къ касательной плоскости составляетъ съ координатными осями, будутъ (§ 441):

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}} \quad (38)$$

Уравненіе перпендикуляра къ касательной плоскости въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) будетъ (§ 457, зад. 4):

$$\frac{(x-x_1)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{(y-y_1)}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} = \frac{(z-z_1)}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \quad (39)$$

Этотъ перпендикуляръ называется *нормалью* къ поверхности въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) .

§ 516. Мы выше видѣли (§ 510), что координаты полярной плоскости ξ и координаты ея полюса y связаны уравненіями:

$$\sigma \xi_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

$$\sigma \xi_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

$$\sigma \xi_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_3}$$

$$\sigma \xi_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_4} \quad (40)$$

уравненіе той-же полярной плоскости будетъ:

$$\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 + \xi_4 z_4 = 0 \quad (41)$$

Если полюсъ будетъ на поверхности, то полярная плоскость, какъ мы видѣли (§ 511), будетъ касательная къ поверхности и ея уравненіе будетъ:

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 = 0 \quad (42)$$

Исключая изъ уравненій (40) и (42) y_1, y_2, y_3, y_4 , найдемъ условіе, которому

должны удовлетворять координаты ξ плоскости, чтобы она, во всѣхъ своихъ положеніяхъ, касалась поверхности втораго порядка (1). Это условіе есть:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \xi_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \xi_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 = F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) \quad (43)$$

§ 517. Если при этихъ условіяхъ, т. е. полагая точку $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ на поверхности, исключимъ $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ изъ уравненій (30) и (42), то найдемъ уравненіе поверхности втораго порядка, выраженное въ формѣ определителя:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & x_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 = f(x_1 x_2 x_3 x_4) \quad (44)$$

гдѣ поставлены вмѣсто y , какъ переменныя, координаты x .

Уравненія (43) и (44) представляютъ поверхности втораго порядка, второе въ декартовыхъ координатахъ, а первое въ плоскостныхъ.

ГЛАВА XXXIII.

Общія свойства поверхностей втораго порядка въ плоскостныхъ координатахъ.

§ 518. Въ предъидущей главѣ (§ 516, 43) мы нашли уравненіе между плоскостными координатами, которое выражаетъ, что плоскость, коей координаты удовлетворяютъ этому уравненію, касается поверхности втораго порядка. Это уравненіе можетъ служить аналитическимъ представленіемъ поверхности, которая и можетъ быть изслѣдована съ этой точки зрѣнія.

Пусть это уравненіе будетъ:

$$F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = 0 \quad (1)$$

Оно имѣетъ такую же форму относительно координатъ ξ , какъ и уравненіе (§ 509, 14) относительно координатъ x , именно:

$$F = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + A_{44}\xi_4^2 + \\ + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{14}\xi_1\xi_4 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{24}\xi_2\xi_4 + 2A_{34}\xi_3\xi_4 = 0 \quad (2)$$

въ немъ десять членовъ, слѣдовательно и десять коэффициентовъ. Если положимъ:

$$\sigma\xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma\xi_3 = \zeta \quad , \quad \sigma\xi_4 = 1$$

то оно преобразуется въ форму, соотвѣтствующую формѣ уравненія въ декартовыхъ координатахъ:

$$F'(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad (3)$$

Въ этой формѣ мы сначала и изслѣдуемъ общія свойства поверхности.

Одинъ изъ десяти коэффициентовъ въ уравненіи (3) можно сдѣлать равнымъ единицѣ, раздѣливъ на него всѣ остальные; слѣдовательно, уравненіе будетъ содержать девять коэффициентовъ, входящихъ въ него линейно, которыхъ числовыя значенія опредѣляютъ свойства и образъ поверхности.

§ 519. Если поверхность втораго порядка касается плоскости, данной координатами, то девять коэффициентовъ уравненія поверхности должны удовлетворять линейному уравненію, которое получится, если координаты данной плоскости вставить въ уравненіе поверхности. Девять такихъ условій дадутъ девять линейныхъ уравненій между коэффициентами уравненія поверхности, изъ которыхъ опредѣлятся всѣ девять коэффициентовъ.

Слѣдовательно, поверхность втораго порядка девятью, произвольно выбранными, касательными плоскостями вполнѣ опредѣляется. Восемь касательныхъ плоскостей къ поверхности втораго порядка не вполнѣ ее опредѣляютъ, такъ какъ между девятью коэффициентами будетъ существовать, въ этомъ случаѣ, только восемь линейныхъ уравненій, изъ которыхъ восемь коэффициентовъ опредѣлятся черезъ девятый, который останется совершенно произвольнымъ. Пусть этотъ девятый коэффициентъ будетъ λ , то форма всѣхъ остальныхъ будетъ $a + b\lambda$. Подставляя это выраженіе восьми коэффициентовъ въ уравненіе (3), найдемъ общую форму уравненія всѣхъ поверхностей втораго порядка, которыя касаются восьми данныхъ плоскостей. Форма эта, очевидно, есть:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) - \lambda\psi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad (4)$$

Между этими поверхностями находятся и поверхности:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad , \quad \psi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad (5)$$

когда $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$.

Объ поверхности (5) имѣютъ безчисленное множество общихъ касательныхъ плоскостей, коихъ координаты, одновременно, удовлетворяютъ оба уравненія (5). Но такъ какъ плоскостныя координаты, удовлетворяющія оба уравненія (5), удовлетворяютъ и уравненіе (4), то имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Всѣ поверхности втораго порядка, касающіяся восьми данныхъ плоскостей, будутъ касаться всѣхъ общихъ касательныхъ плоскостей къ двумъ поверхностямъ (5).

Слѣдовательно, если поверхность втораго порядка должна опредѣляться девятью касательными плоскостями, то онѣ не должны касаться одновременно поверхностей (5).

Частный случай поверхности втораго порядка есть пара точекъ или поверхность въ видѣ отрѣзка прямой между парю точекъ. И въ самомъ дѣлѣ, если:

$$A = 0 \quad , \quad B = 0 \quad (6)$$

суть уравненія двухъ точекъ, то:

$$A \cdot B = 0 \quad (7)$$

будетъ второй степени и представляетъ поверхность втораго порядка.

Если:

$$F(\xi \eta \zeta) = 0 \quad (8)$$

будетъ уравненіе въ плоскостныхъ координатахъ, данной поверхности, то общее уравненіе всѣхъ поверхностей втораго порядка, къ которымъ касаются всѣ касательныя плоскости къ поверхности (8), проходящія черезъ одну или черезъ другую изъ точекъ (6), есть:

$$F - \lambda A \cdot B = 0 \quad (9)$$

Другими словами, уравненіе (9), съ произвольнымъ коэффициентомъ λ , представляетъ всевозможныя поверхности втораго порядка, которыя кругомъ обертываютъ оба касательныя конуса къ поверхности F , коихъ вершины находятся въ точкахъ (6). Поэтому, если $\Phi = 0$, есть уравненіе поверхности втораго порядка, которая кругомъ обертываетъ каждый изъ выше упомянутыхъ конусовъ, то можно всегда опредѣлить два коэффициента λ и μ такъ, чтобы:

$$F - \lambda \cdot AB \equiv \mu \Phi \quad (10)$$

Если положимъ, что F и A даны, то уравненіе (9) съ четырьмя произвольными коэффициентами въ $\lambda \cdot B$ представляетъ поверхность втораго порядка, которая касается касательнаго конуса къ поверхности $F = 0$, коего вершина находится въ точкѣ $A = 0$.

Ниже мы увидимъ, что касательный конусъ къ поверхности втораго порядка, исходящій изъ, какой-нибудь, точки, опредѣляется вполне пятью его касательными плоскостями.

Поэтому, если будетъ дана точка $A = 0$ и поверхность $F = 0$, то касательный конусъ къ поверхности $F = 0$, исходящій изъ точки $A = 0$, пятью касательными къ нему плоскостями, а слѣдовательно и къ поверхности, вполне опредѣляется. Но поверхность $F = 0$ этими пятью касательными плоскостями вполне не опредѣляется, а пять касательныхъ плоскостей даютъ пять линейныхъ уравненій между коэффициентами уравненія поверхности, а слѣдовательно въ этомъ уравненіи будетъ еще со-держатся четыре произвольные коэффициента въ линейной формѣ.

Въ уравненіи:

$$F - \lambda A \cdot B = 0 \quad (11)$$

пять коэффициентовъ удовлетворяютъ пяти линейнымъ уравненіямъ, а четыре въ $\lambda \cdot B$ еще остаются произвольными; слѣдовательно оно представляетъ всѣ поверхности втораго порядка, къ которымъ касается конусъ, имѣющій вершину въ точкѣ $A = 0$ и касающійся поверхности $F = 0$.

Если теперь будутъ уравненія:

$$F = 0 \quad , \quad \Phi = 0$$

двухъ поверхностей втораго порядка, которыя имѣютъ общій касательный конусъ, исходящій изъ точки $A = 0$, то всегда можно опредѣлить μ и четыре коэффициента въ $\lambda \cdot B$ такъ, чтобы:

$$F - \mu \Phi \equiv \lambda A \cdot B \quad (12)$$

откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если двѣ поверхности втораго порядка обернуты однимъ касательнымъ конусомъ, то онѣ будутъ обернуты еще и другимъ конусомъ.

§ 520. Если даны, координатами, семь касательныхъ плоскостей къ поверхности втораго порядка $F = 0$, то будемъ имѣть семь линейныхъ уравненій между девятью его коэффициентами, слѣдовательно эти семь могутъ быть выражены линейно двумя произвольными, которые назовемъ черезъ λ и μ . Общая форма коэффициентовъ будетъ $a + \lambda b + \mu c$, подставляя ихъ выраженія въ уравненіе данной поверхности, найдемъ самую общую форму поверхности втораго порядка, которая касается семи данныхъ плоскостей:

$$\Phi_1 + \lambda \Phi_2 + \mu \Phi_3 = 0 \quad (13)$$

Это уравнение составлено изъ уравненій трехъ поверхностей втораго порядка:

$$\Phi_1 = 0 \quad , \quad \Phi_2 = 0 \quad , \quad \Phi_3 = 0 \quad (14)$$

и будетъ удовлетворяться каждой системой плоскостныхъ координатъ, удовлетворяющихъ предъидущія три уравненія, т. е. общія касательныя плоскости къ тремъ поверхностямъ (14) будутъ касаться и поверхности (13).

Такъ какъ уравненія (14), каждое второй степени, то существуетъ восемь системъ плоскостныхъ координатъ, удовлетворяющихъ эти уравненія, слѣдовательно существуетъ восемь общихъ касательныхъ къ поверхностямъ (14). Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Всѣ поверхности втораго порядка, касающіяся семи данныхъ плоскостей, касаются еще и восьмой, которая опредѣляется семью данными.

Слѣдовательно если дано восемь такихъ плоскостей, для построенія поверхности втораго порядка, то онѣ равносильны только семи изъ нихъ.

§ 521. Отнесемъ теперь поверхность втораго порядка, выраженную въ плоскостныхъ координатахъ, къ вершинамъ тетраэдра, коего грани суть (§ 498, 26), а вершины (§ 498, 28).

Для этого мы должны положить (§ 500, 40') въ уравненіи (3) § 518:

$$\xi = \frac{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4}{d_1 \xi_1 + d_2 \xi_2 + d_3 \xi_3 + d_4 \xi_4}$$

$$\eta = \frac{b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_3 \xi_3 + b_4 \xi_4}{d_1 \xi_1 + d_2 \xi_2 + d_3 \xi_3 + d_4 \xi_4}$$

$$\zeta = \frac{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3 + c_4 \xi_4}{d_1 \xi_1 + d_2 \xi_2 + d_3 \xi_3 + d_4 \xi_4}$$

откуда, послѣ всѣхъ преобразованій, найдемъ:

$$F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = A_{11} \xi_1^2 + A_{22} \xi_2^2 + A_{33} \xi_3^2 + A_{44} \xi_4^2 +$$

$$+ 2A_{12} \xi_1 \xi_2 + 2A_{13} \xi_1 \xi_3 + 2A_{14} \xi_1 \xi_4 + 2A_{23} \xi_2 \xi_3 + 2A_{24} \xi_2 \xi_4 + 2A_{34} \xi_3 \xi_4 = 0 \quad (16)$$

или въ символической формѣ:

$$F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = (A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3 + A_4 \xi_4)^2 = 0 \quad (17)$$

§ 522. *Задача.* Найти касательныя плоскости къ поверхности втораго порядка, проходящія черезъ пересѣченіе двухъ данныхъ, координатами, плоскостей?

Рѣшеніе. Пусть координаты двухъ данныхъ плоскостей будутъ:

$$(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4) \quad , \quad (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4) \quad (18)$$

Координаты, какой нибудь, плоскости, проходящей черезъ пересѣченіе данныхъ двухъ плоскостей, будутъ (§ 504):

$$\sigma\xi_1 = \eta_1 + \lambda\zeta_1 \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta_2 + \lambda\zeta_2 \quad , \quad \sigma\xi_3 = \eta_3 + \lambda\zeta_3 \quad , \quad \sigma\xi_4 = \eta_4 + \lambda\zeta_4 \quad (19)$$

Если плоскость, коей координаты суть (18), касается поверхности (16) или (17), то выраженія (19) должны удовлетворять уравненію (17); слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\{A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3 + A_4\eta_4 + \lambda(A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3 + A_4\zeta_4)\}^2 = 0$$

откуда:

$$R\lambda^2 + 2Q\lambda + P = 0 \quad (20)$$

гдѣ:

$$\begin{aligned} P &= (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3 + A_4\eta_4)^2 \\ R &= (A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3 + A_4\zeta_4)^2 \\ Q &= (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3 + A_4\eta_4)(A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3 + A_4\zeta_4) \end{aligned} \quad (21)$$

т. е. R и P суть значенія функции (16), когда въ нее подставили координаты данныхъ плоскостей, а:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \left(\eta_1 \frac{\partial F}{\partial \zeta_1} + \eta_2 \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} + \eta_3 \frac{\partial F}{\partial \zeta_3} + \eta_4 \frac{\partial F}{\partial \zeta_4} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \left(\zeta_1 \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial F}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial F}{\partial \eta_3} + \zeta_4 \frac{\partial F}{\partial \eta_4} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Такъ какъ λ опредѣляется квадратнымъ уравненіемъ (20), то черезъ пересѣченіе двухъ данныхъ плоскостей можно провести двѣ касательныя плоскости къ поверхности, дѣйствительныя или мнимыя.

Опредѣляя λ изъ уравненія (20), и вставляя въ (19), найдемъ:

$$\begin{aligned} \sigma\xi_1 &= R\eta_1 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\zeta_1 \\ \sigma\xi_2 &= R\eta_2 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\zeta_2 \\ \sigma\xi_3 &= R\eta_3 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\zeta_3 \\ \sigma\xi_4 &= R\eta_4 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\zeta_4 \end{aligned} \quad (23)$$

Ангармоническое отношеніе четырехъ плоскостей: двухъ данныхъ и двухъ

найденныхъ касательныхъ къ поверхности, будетъ или $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ или $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, если λ_1 и λ_2 суть корни уравненія (20).

Положимъ:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \alpha_1 \quad ; \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \alpha_2$$

то будемъ имѣть:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2Q}{R} \quad , \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{P}{R}$$

откуда:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{4Q^2 - 2PR}{PR} \quad , \quad \alpha_1 \alpha_2 = 1$$

Слѣдовательно α_1 и α_2 будутъ корнями уравненія:

$$\alpha^2 - \frac{4Q^2 - 2PR}{PR} \alpha + 1 = 0 \quad (24)$$

или:

$$(\alpha + 1)^2 PR - 4Q^2 \alpha = 0 \quad (25)$$

Корни этого уравненія дадутъ ангармоническое отношеніе четырехъ плоскостей.

Если въ уравненіе (25) дадимъ ангармоническому отношенію α определенное числовое значеніе, сдѣлаемъ координаты одной изъ двухъ данныхъ плоскостей, на примѣръ $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, постоянными, а координаты $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ другой будемъ такъ измѣнять, чтобы онѣ постоянно удовлетворяли уравненіе (25), то оно будетъ представлять поверхность втораго порядка, такъ какъ уравненіе (25), относительно координатъ ζ , второй степени. Такимъ образомъ, измѣняя α , получимъ систему поверхностей втораго порядка, связанныхъ извѣстнымъ образомъ съ данною поверхностью и съ данною плоскостью. Самая замѣчательная изъ этой системы поверхностей та, которая соотвѣтствуетъ значенію $\alpha = -1$, т. е., когда четыре, выше определенныя, плоскости, суть гармоническія.

При этомъ значеніи α уравненіе (25) обращается въ:

$$Q^2 = 0 \quad \text{или} \quad Q = 0$$

или:

$$\zeta_1 \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial F}{\partial \eta_2} + \zeta_3 \frac{\partial F}{\partial \eta_3} + \zeta_4 \frac{\partial F}{\partial \eta_4} = 0 \quad (26)$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\eta_1 \frac{\partial F}{\partial \zeta_1} + \eta_2 \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} + \eta_3 \frac{\partial F}{\partial \zeta_3} + \eta_4 \frac{\partial F}{\partial \zeta_4} = 0 \quad (27)$$

Въ этомъ уравненіи координаты η суть постоянныя, а ζ переменныя, и какъ это уравненіе относительно ζ и η первой степени, то оно представляетъ точку, коей координаты суть:

$$\rho y_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta_1}, \quad \rho y_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta_2}, \quad \rho y_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta_3}, \quad \rho y_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta_4} \quad (28)$$

или:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= A_{11}\eta_1 + A_{12}\eta_2 + A_{13}\eta_3 + A_{14}\eta_4 \\ \rho y_2 &= A_{21}\eta_1 + A_{22}\eta_2 + A_{23}\eta_3 + A_{24}\eta_4 \\ \rho y_3 &= A_{31}\eta_1 + A_{32}\eta_2 + A_{33}\eta_3 + A_{34}\eta_4 \\ \rho y_4 &= A_{41}\eta_1 + A_{42}\eta_2 + A_{43}\eta_3 + A_{44}\eta_4 \end{aligned} \quad (29)$$

откуда, обратно:

$$\begin{aligned} \sigma \eta_1 &= a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4 \\ \sigma \eta_2 &= a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + a_{42}y_4 \\ \sigma \eta_3 &= a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 + a_{43}y_4 \\ \sigma \eta_4 &= a_{14}y_1 + a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4 \end{aligned} \quad (30)$$

гдѣ $A_{i,k}$ суть миноры опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \Delta \quad (31)$$

если F есть выраженіе (43) § 516. Опредѣлитель $\Delta \geq 0$.

Уравненіе (26) показываетъ, что всѣ плоскости четвертая гармоническія къ данной плоскости и къ двумъ касательнымъ плоскостямъ, проходятъ черезъ одну точку, коей координаты даны уравненіями (29). Данная координатами η плоскость, называется *полярной* плоскостью точки y , а точка, данная координатами y , называется *полюсомъ* плоскости η . Уравненія (29) и (30) показываютъ, что плоскость η и точка y суть полярная плоскость и ея полюсъ, свойства которыхъ мы уже частью разсмотрѣли въ § 510—513.

Откуда имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Плоскость четвертая гармоническая данной плоскости, относительно поверхности втораго порядка, проходитъ черезъ полюсъ данной полярной плоскости.

Изъ уравненій (26) и (27) видимъ, что полюсъ одной изъ двухъ гармоническихъ плоскостей, лежитъ въ другой. Пара такихъ плоскостей называется *полярными гармоническими* плоскостями.

Изъ уравненій (26), (27) и (29), (30) слѣдуетъ:

Что полюсы пары гармоническихъ плоскостей суть гармоническія полюсы поверхностей втораго порядка, а полярныя плоскости пары гармоническихъ полюсовъ суть гармоническія полярныя плоскости поверхности втораго порядка.

§ 523. Если координаты полюса, выраженные координатами полярной плоскости (26), поверхности втораго порядка:

$$\rho y_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \quad \rho y_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \quad \rho y_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_3}, \quad \rho y_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_4}$$

вставить въ уравненіе другой поверхности втораго порядка:

$$\Phi(y_1 y_2 y_3 y_4) = 0$$

то получимъ третью поверхность втораго порядка въ плоскостныхъ координатахъ:

$$\Phi \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_3}, \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_4} \right\} = 0$$

Если же, обратно, мы въ уравненіи поверхности втораго порядка въ плоскостныхъ координатахъ:

$$\varphi(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = 0$$

вставимъ ихъ выраженія въ координатахъ полюса (30):

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad \xi_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

то получимъ третее уравненіе поверхности втораго порядка въ тетраэдрическихъ координатахъ:

$$\varphi \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_4} \right\} = 0$$

Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если полюсъ данной поверхности втораго порядка перемѣщается по другой поверхности, также втораго порядка, то его полярная плоскость касается третьей поверхности втораго порядка, и, обратно, если полярная плоскость данной поверхности втораго порядка, ка-

сается другой поверхности второго порядка, то ее полюсь перемѣщается по третьей поверхности второго порядка.

Вторая и третья поверхность совпадаютъ съ данною, если полюсь перемѣщается по данной поверхности, или если полярная плоскость ее касается.

Изъ предъидущаго непосредственно слѣдуютъ еще слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ на одной прямой линіи, равно ангармоническому отношенію ихъ полярныхъ плоскостей.

Предложеніе 2. Ангармоническое отношеніе четырехъ плоскостей, которыя пересѣкаются по одной прямой линіи, равно ангармоническому отношенію ихъ полюсовъ.

Предложеніе 3. Полярныя плоскости гармоническихъ точекъ суть гармоничны.

Предложеніе 4. Полюсы четырехъ гармоническихъ плоскостей, гармоничны.

Предложеніе 5. Полярныя плоскости, трехъ паръ инволюціонныхъ точекъ, составляютъ инволюцію.

Предложеніе 6. Полюсы трехъ паръ инволюціонныхъ плоскостей, составляютъ инволюцію.

§ 524. Изъ свойства взаимныхъ поляръ (§ 511) поверхности второго порядка вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Всякая прямая линія, пересѣкающая двѣ взаимныя поляры поверхности второго порядка, встрѣчаетъ поверхность въ двухъ точкахъ гармоническихъ съ точками ее встрѣчи съ взаимными полярными.

Такъ какъ полярныя плоскости, всѣхъ точекъ, находящихся въ одной плоскости, пересѣкаются въ полюсь этой послѣдней плоскости, то полярная плоскость точки, находящейся на пересѣченіи двухъ прямыхъ въ данной плоскости, проходитъ черезъ полюсь этой плоскости. Откуда слѣдуетъ:

Предложеніе 2. Если двѣ прямыя линіи въ пространствѣ пересѣкаются, то пересѣкаются и ихъ взаимныя поляры въ точкѣ, которая есть полюсь плоскости двухъ данныхъ прямыхъ и обратно, точка пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ есть полюсь плоскости, въ которой находятся ихъ взаимныя поляры.

Предложеніе 3. Если прямая линія описываетъ, какимъ-бы то ни было образомъ, плоскость, то ее взаимная полярна вращается около полюса, описываемой прямою плоскости.

Предложеніе 4. Если прямая вращается около одной точки, то ея взаимная полярна описываетъ плоскость, которой данная точка есть полюсь.

Предложеніе 5. Если прямая линія въ одной плоскости вращается около одной точки, то ея взаимная полярна вращается около полюса первой въ полярной плоскости точки вращенія первой прямой.

§ 525. Такъ какъ взаимная полярна данной прямой линіи находится въ полярной плоскости, какой нибудь, точки данной прямой (§ 511), то взаимная полярна касательной къ поверхности втораго порядка, лежитъ въ касательной плоскости, проведенной въ точкѣ касанія касательной. Слѣдовательно, взаимная полярна касательной къ поверхности втораго порядка есть также касательная къ поверхности въ той-же точкѣ.

Изъ выше сказаннаго и изъ предъидущихъ предложеній вытекають слѣдующія:

Предложеніе 1. Если прямая линія движется, касаясь плоской кривой на поверхности втораго порядка, то ея взаимная полярна опишетъ конусъ, который обвертываетъ поверхность, касаясь ея по плоской кривой, и обратно, если прямая, касаясь поверхности втораго порядка описываетъ конусъ, то ея взаимная полярна касается плоской кривой, по которой конусъ соприкасается съ поверхностью.

Предложеніе 2. Если прямая линія движется, касаясь поверхности втораго порядка, отличной отъ основной поверхности, то ея взаимная полярна, перемѣщаясь, касается третьей поверхности втораго порядка, которой касаются полярныя плоскости точекъ второй поверхности.

Если полюсь описываетъ вторую поверхность втораго порядка, то его полярная плоскость касается третьей поверхности втораго порядка (§ 523).

Касательная линія ко второй поверхности есть линія, соединяющая двѣ безконечно близкія точки на поверхности, ихъ полярныя плоскости, которыя касаются третьей поверхности, лежатъ также безконечно близко и пересѣкаются по касательной къ поверхности. Эта касательная есть взаимная полярна, вышеупомянутой касательной ко второй поверхности.

§ 526. *Методъ взаимныхъ поляръ.* Изъ свойствъ полюса и полярной плоскости относительно поверхности втораго порядка вытекаетъ методъ изслѣдованія кривыхъ поверхностей втораго порядка, который извѣстенъ подъ именемъ *метода взаимности* или *метода взаимныхъ поляръ*.

Онъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Всякая фигура въ пространствѣ, состоящая изъ точекъ, прямыхъ линій, кривыхъ, плоскостей и поверхностей можетъ быть образована точкою или плоскостью. Если выберемъ точку, какъ элементъ образованія фигуры, то каждая фигура есть собраніе точекъ, которыя на ней находятся.

Если выберемъ плоскость, какъ элементъ образованія фигуръ, то точка есть собраніе плоскостей, черезъ нее проходящихъ; прямая линія есть собраніе всѣхъ плоскостей, по ней пересѣкающихся; кривая есть собраніе плоскостей, пересѣкающихся по ея касательнымъ; наконецъ, поверхность есть собраніе всѣхъ касательныхъ къ ней плоскостей.

Возьмемъ, какую-нибудь, поверхность втораго порядка и назовемъ ее *директрисой* и будемъ разсматривать каждую точку данной фигуры въ пространствѣ, какъ полюсъ нѣкоторой плоскости, относительно директрисы, а каждую плоскость, какъ полярную плоскость, нѣкоторой точки относительно той-же директрисы. Такимъ образомъ, каждой точкѣ данной фигуры будетъ соответствовать плоскость, а каждой плоскости будетъ соответствовать точка. Эти соответственныя плоскости и точки образуютъ вторую фигуру, которая называется *взаимной* данной, относительно директрисы. Слѣдовательно каждой точкѣ данной фигуры соответствуетъ плоскость взаимной фигуры; каждой плоскости данной фигуры соответствуетъ точка взаимной; каждой прямой, данной фигуры, соответствуетъ прямая, взаимной; каждой кривой данной фигуры соответствуетъ кривая взаимной, и наконецъ, каждой поверхности данной фигуры соответствуетъ поверхность взаимной.

Обратно, каждой точкѣ взаимной фигуры, соответствуетъ плоскость данной; каждой плоскости взаимной соответствуетъ точка данной; каждой прямой линіи взаимной фигуры, соответствуетъ прямая данной фигуры; каждой кривой взаимной, соответствуетъ кривая данной фигуры и наконецъ, каждой поверхности взаимной фигуры соответствуетъ поверхность данной, т. е. данная фигура есть взаимная ея взаимной. Такимъ образомъ, каждое свойство данной фигуры, относительно положенія ея составныхъ частей, обуславливаетъ соответственное свойство взаимной фигуры. Однимъ словомъ, изъ каждаго предложенія относительно положенія частей данной фигуры слѣдуетъ предложеніе относительно соответственныхъ частей взаимной фигуры.

Пояснимъ это начало простымъ примѣромъ; выберемъ для этого слѣдующее предложеніе: три поверхности втораго порядка пересѣкаются въ восьми точкахъ.

Тремъ поверхностямъ втораго порядка данной фигуры, соответствуютъ три поверхности втораго порядка взаимной фигуры. Каждой точкѣ одной изъ данныхъ поверхностей соответствуетъ касательная плоскость взаимной поверхности. Каждой точкѣ, лежащей на всѣхъ трехъ данныхъ поверхностяхъ, соответствуетъ плоскость, которая касается всѣхъ трехъ взаимныхъ поверхностей. Слѣдовательно число точекъ пересѣченія трехъ данныхъ поверхностей равно числу общихъ касательныхъ плоскостей къ

тремъ взаимнымъ поверхностямъ. Если бы три взаимныя поверхности имѣли еще и девятую общую касательную плоскость, то мы, обратно, заключили-бы, что данныя поверхности пересѣкаются еще и въ девятой точкѣ. Слѣдовательно три поверхности втораго порядка имѣютъ восемь общихъ касательныхъ плоскостей.

Легко видѣть, что методъ взаимныхъ поляръ есть только частный случай двойственности, гдѣ точка опредѣляется разъ координатами, а другой разъ уравненіемъ также какъ и плоскость.

Переходъ отъ даннаго предложенія къ взаимному, дѣлается замѣщая слова: точка, прямая, плоскость, словами: плоскость прямая, точка.

Пояснимъ сказанное выше простыми примѣрами:

Предложеніе 1. Если пара точекъ есть пара гармоническихъ полюсовъ къ каждой изъ двухъ данныхъ поверхностей втораго порядка, то эта пара будетъ пара гармоническихъ полюсовъ, относительно всѣхъ поверхностей втораго порядка, проходящихъ черезъ кривую пересѣченія двухъ данныхъ поверхностей.

Это предложеніе можно доказать на основаніи § 177.

Предложеніе 2. Всякая прямая линия пересѣкаетъ три поверхности втораго порядка, изъ коихъ одна проходитъ черезъ кривую пересѣченія двухъ другихъ въ шести точкахъ, которыя составляютъ инволюціонный рядъ. Это предложеніе непосредственно слѣдуетъ изъ предъидущаго и изъ § 178.

Предложеніе 3. Всѣ полярныя плоскости данной точки относительно системы поверхностей втораго порядка, проходящихъ черезъ восемь данныхъ точекъ въ пространствѣ, пересѣкаются по одной прямой.

Это предложеніе слѣдуетъ изъ § 506.

Предложеніе 4. Всѣ полярныя плоскости данной точки, относительно системы поверхностей втораго порядка, проходящихъ черезъ семь данныхъ точекъ въ пространствѣ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Предложеніе 1'. Если пара плоскостей есть пара гармоническихъ плоскостей къ каждой изъ двухъ данныхъ поверхностей втораго порядка, то эта пара будетъ гармоническая и къ каждой поверхности втораго порядка, которая касается всѣхъ общихъ касательныхъ плоскостей къ даннымъ двумъ поверхностямъ.

Предложеніе 2'. Если черезъ, какую нибудь, прямую линію проведены касательныя плоскости къ тремъ поверхностямъ втораго порядка, изъ коихъ одна касается всѣхъ общихъ касательныхъ плоскостей, къ другимъ двумъ, то шесть плоскостей составляютъ инволюціонную связку.

Предложеніе 3'. Всѣ полюсы данной плоскости, относительно системы поверхностей втораго порядка, касающихся восьми данныхъ плоскостей, лежатъ на одной прямой линіи.

Предложеніе 4'. Всѣ полюсы данной плоскости, относительно системы поверхностей втораго порядка, касающихся семи данныхъ плоскостей, лежатъ на одной плоскости.

ГЛАВА XXXIV.

Роды поверхностей второго порядка и первоначальныя ихъ свойства.

§ 527. Уравненіе поверхности второго порядка въ тетраэдрическихъ координатахъ, какъ видѣли выше, есть:

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + \\ + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{14} x_1 x_4 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + 2a_{34} x_3 x_4 = 0 \quad (1)$$

а тоже уравненіе въ плоскостныхъ тетраэдрическихъ координатахъ будетъ (§ 516, 43):

$$F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = A_{11} \xi_1^2 + A_{22} \xi_2^2 + A_{33} \xi_3^2 + A_{44} \xi_4^2 + \\ + 2A_{12} \xi_1 \xi_2 + 2A_{13} \xi_1 \xi_3 + 2A_{14} \xi_1 \xi_4 + 2A_{23} \xi_2 \xi_3 + 2A_{24} \xi_2 \xi_4 + 2A_{34} \xi_3 \xi_4 = 0 \quad (2)$$

гдѣ $A_{i,k}$ суть миноры опредѣлителя (§ 510, 31).

Если y_1, y_2, y_3, y_4 суть координаты полюса, то уравненіе полярной плоскости будетъ (§ 510):

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \quad (3)$$

Если полюсъ находится на поверхности, то y_1, y_2, y_3, y_4 должны удовлетворять уравненіе (1) поверхности.

Координаты полярной или касательной плоскости опредѣляются уравненіями:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \xi_2 = \frac{1}{1} \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_3}, \quad \xi_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_4} \quad (4)$$

Если $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ суть координаты полярной плоскости, то уравненіе полюса (§ 522) будетъ:

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial \eta_2} + \xi_3 \frac{\partial F}{\partial \eta_3} + \xi_4 \frac{\partial F}{\partial \eta_4} = 0 \quad (5)$$

Если плоскость $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ будетъ касательная къ поверхности, т. е. η будетъ удовлетворять уравненіе (2), то (5) будетъ уравненіе точки на поверхности, а ея координаты опредѣляются выраженіями:

$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta_1}, \quad y_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta_2}, \quad y_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta_3}, \quad y_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta_4} \quad (6)$$

§ 528. Плоскость, лежащая на бесконечности (§ 502), можетъ пересѣкать, коснуться и непересѣкать поверхность второго порядка. Въ пер-

вомъ и во второмъ случаяхъ поверхность будетъ *незамкнутая*, полы ея будутъ простираться въ безконечность, гдѣ онѣ встрѣчаются съ безконечно удаленною плоскостью. Таковы:

1. Гиперболоиды: однополый и двуполый.
2. Параболоиды: эллиптическій и гиперболическій.

Въ третьемъ случаѣ безконечно удаленная плоскость не встрѣчаетъ поверхность; всѣ ея точки находятся въ конечномъ разстояніи—поверхность будетъ *замкнутая*. Таковы:

3. Эллипсоидъ.

Во всемъ сказанномъ мы полагаемъ, что опредѣлитель, который называется *опредѣлителемъ поверхности втораго порядка*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad (7)$$

§ 529. Та же безконечно-удаленная плоскость, рассматриваемая, какъ полярная поверхность втораго порядка, имѣетъ своимъ полюсомъ весьма замѣчательную точку.

Въ самомъ дѣлѣ, черезъ полюсъ безконечно-удаленной плоскости проведемъ, какую-нибудь, сѣкущую; эта сѣкущая встрѣчаетъ поверхность въ двухъ точкахъ сопряженно-гармоническихъ съ полюсомъ и точкой встрѣчи сѣкущей съ безконечно-удаленной полярной плоскостью (§ 510). Такъ какъ эта послѣдняя точка лежитъ на безконечности, то ея сопряженная, т. е. полюсъ, дѣлитъ разстояніе пополамъ между точками встрѣчи, проведенной прямой съ поверхностью. Прямая была проведена въ произвольномъ направленіи, слѣдовательно всѣ хорды, проходящія черезъ полюсъ, безконечно-удаленной плоскости, дѣлятся въ немъ пополамъ. Эту точку называютъ *центромъ* поверхности втораго порядка. Безконечно-удаленная плоскость, какъ мы выше предположили, можетъ касаться поверхности, въ этомъ случаѣ полюсъ лежитъ на полярной плоскости (§ 512); слѣдовательно центръ поверхности находится на безконечности. Поэтому поверхности втораго порядка дѣлятся на два рода: *центральныя* и *не имѣющія центра* или лучше сказать, коихъ центръ находится на безконечности.

1. Центральныя: эллипсоиды, гиперболоиды—однополые и двуполые.

2. Не имѣющія центра: параболоиды—эллиптическіе и гиперболическіе.

Ниже увидимъ, что есть еще два рода поверхностей втораго порядка, имѣющихъ безчисленное множество центровъ, которые въ однѣхъ поверх-

ностямъ всѣ лежатъ на одной прямой линіи, а въ другихъ на плоскости. Въ этихъ поверхностяхъ опредѣлитель (7) $\Delta = 0$.

§ 530. Изъ этого опредѣленія центра поверхности втораго порядка имѣемъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Геометрическое мѣсто центровъ поверхностей втораго порядка, касающихся восьми данныхъ плоскостей, есть прямая линія.

Предложеніе 2. Геометрическое мѣсто центровъ поверхностей втораго порядка касающихся семи данныхъ плоскостей, есть плоскость.

§ 531. Опредѣлить центръ поверхности втораго порядка аналитически можно или координатами или уравненіемъ.

Пусть:

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

будетъ уравненіе поверхности втораго порядка. Мы видѣли выше (§ 515), что если координаты полярной плоскости будутъ $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, координаты полюса x_1, x_2, x_3, x_4 , то:

$$\frac{1}{2} \frac{df}{dx_1} = \xi_1, \quad \frac{1}{2} \frac{df}{dx_2} = \xi_2, \quad \frac{1}{2} \frac{df}{dx_3} = \xi_3, \quad \frac{1}{2} \frac{df}{dx_4} = \xi_4 \quad (8)$$

или:

$$\begin{aligned} \sigma \xi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \sigma \xi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ \sigma \xi_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ \sigma \xi_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{aligned} \quad (9)$$

откуда:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= A_{11}\xi_1 + A_{21}\xi_2 + A_{31}\xi_3 + A_{41}\xi_4 \\ \rho x_2 &= A_{12}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{32}\xi_3 + A_{42}\xi_4 \\ \rho x_3 &= A_{13}\xi_1 + A_{23}\xi_2 + A_{33}\xi_3 + A_{43}\xi_4 \\ \rho x_4 &= A_{14}\xi_1 + A_{24}\xi_2 + A_{34}\xi_3 + A_{44}\xi_4 \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая одну изъ координатныхъ плоскостей на безконечности, т. е. переходя къ декартовымъ координатамъ, мы должны положить (§ 501):

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= x, \quad \rho x_2 = y, \quad \rho x_3 = z, \quad \rho x_4 = 1 \\ \sigma \xi_1 &= \xi, \quad \sigma \xi_2 = \eta, \quad \sigma \xi_3 = \zeta, \quad \sigma \xi_4 = 1 \end{aligned}$$

въ силу чего уравненія (9) и (10) сдѣлаются:

$$\begin{aligned}\sigma\xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ \sigma\eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ \sigma\zeta &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ \sigma &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}\end{aligned}\tag{11}$$

и:

$$\begin{aligned}\rho x &= A_{11}\xi + A_{21}\eta + A_{31}\zeta + A_{41} \\ \rho y &= A_{12}\xi + A_{22}\eta + A_{32}\zeta + A_{42} \\ \rho z &= A_{13}\xi + A_{23}\eta + A_{33}\zeta + A_{43} \\ \rho &= A_{14}\xi + A_{24}\eta + A_{34}\zeta + A_{44}\end{aligned}\tag{12}$$

Если полярная плоскость находится на безконечности, то:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$$

откуда:

$$\int \sigma x = A_{41}, \quad \int \sigma y = A_{42}, \quad \int \sigma z = A_{43}, \quad \int \sigma = A_{44}$$

изъ этихъ послѣднихъ уравненій, найдемъ координаты центра:

$$x = \frac{A_{41}}{A_{44}}, \quad y = \frac{A_{42}}{A_{44}}, \quad z = \frac{A_{43}}{A_{44}}\tag{13}$$

Чтобы поверхность имѣла центръ, необходимо имѣть $A_{44} > 0$, въ противномъ случаѣ центръ будетъ находиться на безконечности и поверхность не будетъ имѣть центра.

Во второмъ случаѣ, когда центръ поверхностей опредѣляется уравненіемъ, пусть поверхность втораго порядка въ плоскостныхъ координатахъ будетъ:

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0\tag{14}$$

Если координаты полярной плоскости будутъ $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, то уравненіе полюса будетъ:

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial \eta_2} + \xi_3 \frac{\partial F}{\partial \eta_3} + \xi_4 \frac{\partial F}{\partial \eta_4} = 0\tag{15}$$

Если одна изъ координатныхъ плоскостей будетъ на безконечности, то мы должны положить:

$$\begin{aligned}\sigma\xi_1 &= \xi, & \sigma\xi_2 &= \eta, & \sigma\xi_3 &= \zeta, & \sigma\xi_4 &= 1 \\ \sigma\eta_1 &= \xi_1, & \sigma\eta_2 &= \eta_1, & \sigma\eta_3 &= \zeta_1, & \sigma\eta_4 &= 1\end{aligned}$$

Въ силу этого уравненіе полюса:

$$\eta_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \eta_3 \frac{\partial F}{\partial \xi_3} + \eta_4 \frac{\partial F}{\partial \xi_4} = 0 \quad (16)$$

сдѣляется:

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial F}{\partial \eta} + \zeta_1 \frac{\partial F}{\partial \zeta} + \frac{\partial F}{\partial \eta_4=1} = 0 \quad (17)$$

гдѣ выраженіе $\frac{\partial F}{\partial \eta_4=1}$ означаетъ, что послѣ дифференцированія нужно сдѣлать $\sigma \eta_4 = 1$. Если полярная плоскость на безконечности, то ея полюсъ есть центръ; при этомъ: $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$; откуда уравненіе центра будетъ:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_4=1} = 0 \quad (18)$$

или:

$$A_{14}\xi + A_{24}\eta + A_{34}\zeta + A_{44} = 0 \quad (19)$$

Это уравненіе можно было написать, зная, что координаты центра суть выраженія (13). Если въ уравненіи (19) $A_{44} = 0$, то точка, выраженная этимъ уравненіемъ, находится на безконечности, такъ какъ это уравненіе въ этомъ случаѣ, удовлетворяется координатами:

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \zeta = 0$$

§ 532. Если центръ поверхности втораго порядка находится въ началѣ координатъ, то изъ уравненій (11) и (13) видимъ, что:

$$a_{14} = 0 \quad , \quad a_{24} = 0 \quad , \quad a_{34} = 0$$

$$A_{14} = 0 \quad , \quad A_{24} = 0 \quad , \quad A_{34} = 0$$

что показываетъ, что въ уравненіяхъ поверхностей:

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad F(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

недостаетъ членовъ первой степени относительно переменныхъ: x, y, z и ζ, η, ξ .

Слѣдовательно форма уравненій поверхностей втораго порядка, въ обѣихъ системахъ координатъ, коихъ начало помѣщено въ центрѣ, есть:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{44} &= 0 \\ A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + 2A_{12}\xi\eta + 2A_{13}\xi\zeta + 2A_{23}\eta\zeta + A_{44} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Конусъ.

§ 533. Особеннаго вниманія заслуживаетъ поверхность втораго порядка, въ которой центръ находится на самой поверхности.

Уравненіе поверхности въ координатахъ Декарта:

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (21)$$

можно написать въ формѣ:

$$2f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (22)$$

Но мы видѣли (11) и (13), что координаты центра удовлетворяютъ уравненія:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

слѣдовательно уравненіе (22) для координатъ центра, сдѣлается:

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (24)$$

Откуда видимъ, что координаты центра должны удовлетворять и уравненіе (24), т. е. уравненія (23) и (24) должны удовлетворяться координатами центра.

Но эти уравненія суть:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Откуда видимъ, что коэффициенты въ уравненіи поверхности втораго порядка, которой центръ находится на самой поверхности, должны удовлетворять уравненіе:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

Изъ сказаннаго видимъ, что если поверхность, коей центръ находится на ней самой, выражена въ тетраэдрическихъ координатахъ, то есть система переменныхъ x_1, x_2, x_3, x_4 , которыя удовлетворяютъ совокупно четыре уравненія:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \quad (27)$$

изъ коихъ вытекаетъ характеристическое свойство такой поверхности, выраженное уравненіемъ (26).

Первое характеристическое свойство такой поверхности есть то, что полярная плоскость относительно ея, какой нибудь, точки въ пространствѣ, проходитъ всегда черезъ центръ и что всѣ точки, находящіяся на прямой, проходящей черезъ центръ и данную точку, имѣютъ всѣ одну и ту же полярную плоскость.

Пусть y_1, y_2, y_3, y_4 будутъ координаты данной точки, то полярная ея плоскость будетъ:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \quad (28)$$

или:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \quad (29)$$

но мы видѣли выше, что всегда есть система координатъ, которая удовлетворяетъ уравненія (27); слѣдовательно эта система удовлетворяетъ и уравненіе (28) полярной плоскости, произвольно взятой въ пространствѣ, точки y .

Если означимъ черезъ z_1, z_2, z_3, z_4 координаты центра, то координаты, какой-нибудь, точки на прямой, соединяющей точки z и y будутъ:

$$z_1 + \lambda y_1 \quad , \quad z_2 + \lambda y_2 \quad , \quad z_3 + \lambda y_3 \quad , \quad z_4 + \lambda y_4 \quad (30)$$

полярная плоскость этой точки будетъ:

$$(z_1 + \lambda y_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (z_2 + \lambda y_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + (z_3 + \lambda y_3) \frac{\partial f}{\partial x_3} + (z_4 + \lambda y_4) \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$$

или:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} + \lambda \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} \right) = 0$$

Но первый членъ этого уравненія, написанный въ формѣ:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0$$

потому что z_1, z_2, z_3, z_4 , будучи координатами центра, удовлетворяютъ уравненія:

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0 \quad (31)$$

Слѣдовательно полярная плоскость точки (30) будетъ (29), т. е. тоже что и точки $(y_1 y_2 y_3 y_4)$.

Очевидно, что полярная плоскость центра неопредѣленная, такъ какъ въ силу (31) каждый ея членъ обращается въ нуль.

Изъ сказаннаго заключаемъ, что только тѣ плоскости имѣютъ полюсъ, относительно этой поверхности, которыя проходятъ черезъ центръ.

§ 534. Второе замѣчательно свойство разсматриваемой поверхности есть еще то, что прямая, соединяющая центръ съ какою-нибудь точкою поверхности, вся лежитъ на поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, пусть x_1, x_2, x_3, x_4 будутъ координаты центра, а y_1, y_2, y_3, y_4 координаты, какой-нибудь, точки на поверхности. Координаты, какой-нибудь, точки на прямой, соединяющей точки x и y , будутъ:

$$x_1 + \lambda x_1 \quad , \quad x_2 + \lambda y_2 \quad , \quad x_3 + \lambda y_3 \quad , \quad x_4 + \lambda y_4$$

λ есть произвольный коэффициентъ. Подставляя эти выраженія въ уравненіе поверхности, найдемъ (§ 510, 18):

$$R\lambda^2 + 2Q\lambda + P = 0$$

гдѣ:

$$P = f(x_1 x_2 x_3 x_4) \quad , \quad R = (y_1 y_2 y_3 y_4)$$

$$2Q = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

Но такъ какъ точки x и y находятся на поверхности, то $R = 0$ и $P = 0$, а $Q = 0$, потому что x суть координаты центра, а слѣдовательно удовлетворяютъ уравненіямъ (27).

Изъ этого видимъ, что уравненіе поверхности удовлетворяется независимо отъ λ .

Поверхность эта есть конусъ, коего вершина есть и его центръ, а характеристическое свойство его выражается уравненіемъ (26).

Слѣдовательно уравненіе конуса отличается отъ уравненія поверхности втораго порядка:

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \\ + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (32)$$

только тѣмъ, что коэффициентъ a_{44} въ уравненіи конуса опредѣляется уравненіемъ (26).

§ 535. Мы видѣли, что если начало координатъ находится въ центрѣ поверхности, то ея уравненіе есть:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{44} = 0 \quad (33)$$

Но если эта поверхность будетъ конусъ, то центръ, т. е. начало координатъ, находится на поверхности, слѣдовательно ея уравненіе должно удовлетворяться координатами начала:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0$$

а для этого необходимо имѣть въ уравненіи (33) $a_{44} = 0$.

Слѣдовательно уравненіе конуса, коего вершина находится въ началѣ координатъ, будетъ:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \quad (34)$$

Изъ формы этого уравненія видимъ, что если ему удовлетворяютъ координаты x_1, y_1, z_1 , то ему удовлетворяютъ и координаты $\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1$, гдѣ λ есть произвольный коэффициентъ. Изъ этого заключаемъ, что всѣ точки прямой, проходящей черезъ начало и точку (x_1, y_1, z_1) удовлетворяютъ уравненіе поверхности, т. е. эта прямая вся находится на поверхности.

Мы выше видѣли, что полярная плоскость конуса, какой-нибудь, точки въ пространствѣ, проходитъ всегда черезъ его вершину, но касательная плоскость есть полярная, точки на поверхности, слѣдовательно касательная плоскость, какой-нибудь, точки на конусѣ, проходитъ черезъ его вершину и касается поверхности по всей прямой, проходящей черезъ его вершину и черезъ точку касанія.

§ 536. Мы видѣли въ § 534, что уравненіе поверхности втораго порядка:

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (35)$$

отличается отъ конуса только тѣмъ, что въ конусѣ коэффициентъ a_{44} связанъ съ другими коэффициентами уравненія уравненіемъ (26), слѣдовательно координаты центра поверхности (35) и конуса той же формы опредѣляются одними и тѣми же уравненіями.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Слѣдовательно ихъ центры совпадаютъ, т. е. вершина конуса, коего уравненіе есть (35) совпадаетъ съ центромъ поверхности, коей уравненіе есть также (35). Въ уравненіи конуса a_{44} обусловлено уравненіемъ (26).

Наконецъ система величинъ для координатъ x, y, z не можетъ совокупно удовлетворять оба уравненія, т. е. поверхности и конуса; единственная система, которая удовлетворяетъ оба уравненія, это $x = \infty, y = \infty, z = \infty$; изъ этого заключаемъ, что поверхность (35) и конусъ (35) встрѣчаются на бесконечности, а поэтому этотъ конусъ называется *асимптотическимъ*. Слѣдовательно асимптотическій конусъ центральной поверхности втораго порядка, коей уравненіе есть (35), получится, если въ этомъ уравненіи вмѣсто a_{44} поставимъ его величину, полученную изъ уравненія (26).

Асимптотическій конусъ касается поверхности втораго порядка по кривой пересѣченія поверхности съ бесконечно-удаленною плоскостью.

Если начало координатъ находится въ центрѣ поверхности втораго порядка, то ея уравненіе есть (33), а уравненіе асимптотическаго конуса будетъ (34).

§ 537. Уравненіе конуса въ формѣ (34) содержитъ шесть коэффициентовъ, а по раздѣленіи уравненія на одинъ изъ нихъ, оно будетъ содержать только пять, слѣдовательно поверхность конуса вполне опредѣляется пятью данными точками или, что тоже, пятью данными прямыми, исходящими изъ его вершины, или изъ начала координатъ.

Такъ какъ начало координатъ можно всегда перенести въ вершину конуса, то общему уравненію (33) этой поверхности можно всегда дать форму (34), а слѣдовательно поверхность всякаго конуса вполне опредѣляется пятью прямыми, проходящими черезъ его вершину.

§ 538. Такъ какъ въ уравненіи конуса коэффициенты связаны уравненіемъ (26), то координаты точки на поверхности не могутъ быть выражены въ координатахъ касательной плоскости изъ уравненій (§ 531, 9, 10), а слѣдовательно и коническая поверхность не можетъ быть выражена уравненіемъ въ плоскостныхъ координатахъ, а выражается двумя уравненіями: уравненіемъ поверхности втораго порядка и уравненіемъ точки—его вершины:

$$F(\xi \eta \zeta) = 0 \quad ; \quad x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0$$

§ 539. Если:

$$f = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = 0$$

суть уравненія двухъ поверхностей втораго порядка, то:

$$f + \lambda \varphi = 0$$

будетъ уравненіе всѣхъ поверхностей втораго порядка, проходящихъ черезъ пересѣченіе двухъ данныхъ поверхностей:

$$f=0 \text{ и } \varphi=0$$

Если поверхность:

$$\varphi=0$$

будетъ произведеніе двухъ линейныхъ выраженій A и B , т. е. φ есть пара плоскостей:

$$A=0 \text{ и } B=0$$

то:

$$f + \lambda A \cdot B = 0 \quad (36)$$

будетъ уравненіе всѣхъ поверхностей, проходящихъ черезъ пересѣченія поверхности $f=0$ съ плоскостями:

$$A=0 \text{ и } B=0$$

Положимъ, что A и B суть полярныя плоскости точекъ $(y_1 y_2 y_3 y_4)$, $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ относительно поверхности f , то имѣемъ:

$$A = x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \quad (37)$$

$$B = x_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0 \quad (38)$$

Слѣдовательно уравненіе (36), въ этомъ случаѣ, будетъ представлять всѣ поверхности, проходящія черезъ пересѣченіе поверхности:

$$f=0$$

съ двумя полярными плоскостями точекъ y и z .

Чтобы поверхность (36) вполне опредѣлилась надобно дать точку, съ помощью которой можно бы было опредѣлить λ . Выберемъ для этого полюсь $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ и подставимъ эти координаты въ уравненіе (36); опредѣлимъ изъ этого уравненія λ и вставимъ въ уравненіе (36), то будемъ имѣть:

$$2f(x_1 x_2 x_3 x_4) \left\{ y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} \right\} - \left\{ x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} \right\} \left\{ x_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} \right\} = 0 \quad (39)$$

уравнение поверхности второго порядка, которая, проходя через кривыя пересѣченія поверхности:

$$f = 0$$

съ полярными плоскостями (37) и (38), проходить и через полюсъ плоскости (37).

Такъ какъ уравнение неизмѣняется, измѣняя y на z , то изъ этого слѣдуетъ, что поверхность (39) проходить и через полюсъ $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ второй плоскости (38).

Если обѣ полярныя плоскости (37) и (38) совпадаютъ, то совпадутъ и ихъ полюсы и мы получимъ поверхность второго порядка, которая, проходя через пересѣченіе поверхности $f = 0$ съ плоскостью (37), проходить и через полюсъ этой плоскости:

$$4f(x_1 x_2 x_3 x_4) \cdot f(y_1 y_2 y_3 y_4) - \left\{ x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} \right\}^2 = 0 \quad (40)$$

Легко видѣть, что эта поверхность есть конусъ, такъ какъ ея четыре производныя, по x_1, x_2, x_3, x_4 , удовлетворяются координаты полюса $(y_1 y_2 y_3 y_4)$, который слѣдовательно есть вершина конуса.

Слѣдовательно уравненіе (40) представляетъ касательный конусъ, исходящій изъ произвольно взятой точки $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ къ поверхности второго порядка $f = 0$. Его основаніе есть пересѣченіе поверхности f съ произвольно взятой плоскостью (37). Изъ этого слѣдуетъ, что пересѣченіе поверхности второго порядка съ, какою-нибудь, плоскостью есть *коническое сѣченіе*.

Если полюсъ $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ будетъ на поверхности f , то первый членъ уравненія (40) равенъ нулю и коническая поверхность превращается въ касательную плоскость.

Если уравненіе (40) представимъ въ формѣ:

$$2f(x_1 x_2 x_3 x_4) \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} \right) - \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} \right)^2 = 0 \quad (41)$$

и перенесемъ полюсъ $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ въ центръ поверхности второго порядка и затѣмъ перейдемъ къ координатамъ Декарта, полагая:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = z \quad , \quad \rho x_4 = 1$$

$$\rho y_1 = x_1 \quad , \quad \rho y_2 = y_1 \quad , \quad \rho y_3 = z_1 \quad , \quad \rho y_4 = 1$$

то найдемъ:

$$2f(x y z) \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial y_4=1} \right) - \\ - \left(x \frac{\partial f}{\partial x_1} + y \frac{\partial f}{\partial y_1} + z \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial y_4=1} \right)^2 = 0$$

Но для координатъ центра имѣемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0$$

Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$2f(x y z) \frac{\partial f}{\partial y_4=1} - \left(\frac{\partial f}{\partial y_4=1} \right)^2 = 0$$

или:

$$2f(x y z) - \frac{\partial f}{\partial y_4=1} = 0 \tag{42}$$

Легко видѣть, что это ассимптотическій конусъ. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_4=1} = a_{14}x_1 + a_{24}y_1 + a_{34}z_1 + a_{44}$$

Слѣдовательно уравненіе (42) сдѣлается:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z - (a_{14}x_1 + a_{24}y_1 + a_{34}z_1) = 0 \tag{43}$$

Но координаты центра суть:

$$x_1 = \frac{A_{14}}{A_{44}} \quad , \quad y_1 = \frac{A_{24}}{A_{44}} \quad , \quad z_1 = \frac{A_{34}}{A_{44}}$$

Слѣдовательно послѣдній членъ уравненія (43) будетъ:

$$\frac{a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34}}{A_{44}}$$

Но это есть ничто иное, какъ a_{44} , опредѣленное изъ опредѣлителя (26), а это есть признакъ, что уравненіе (43) представляетъ ассимптотическій конусъ къ поверхности:

$$f(x, y, z) = 0$$

ГЛАВА XXXV.

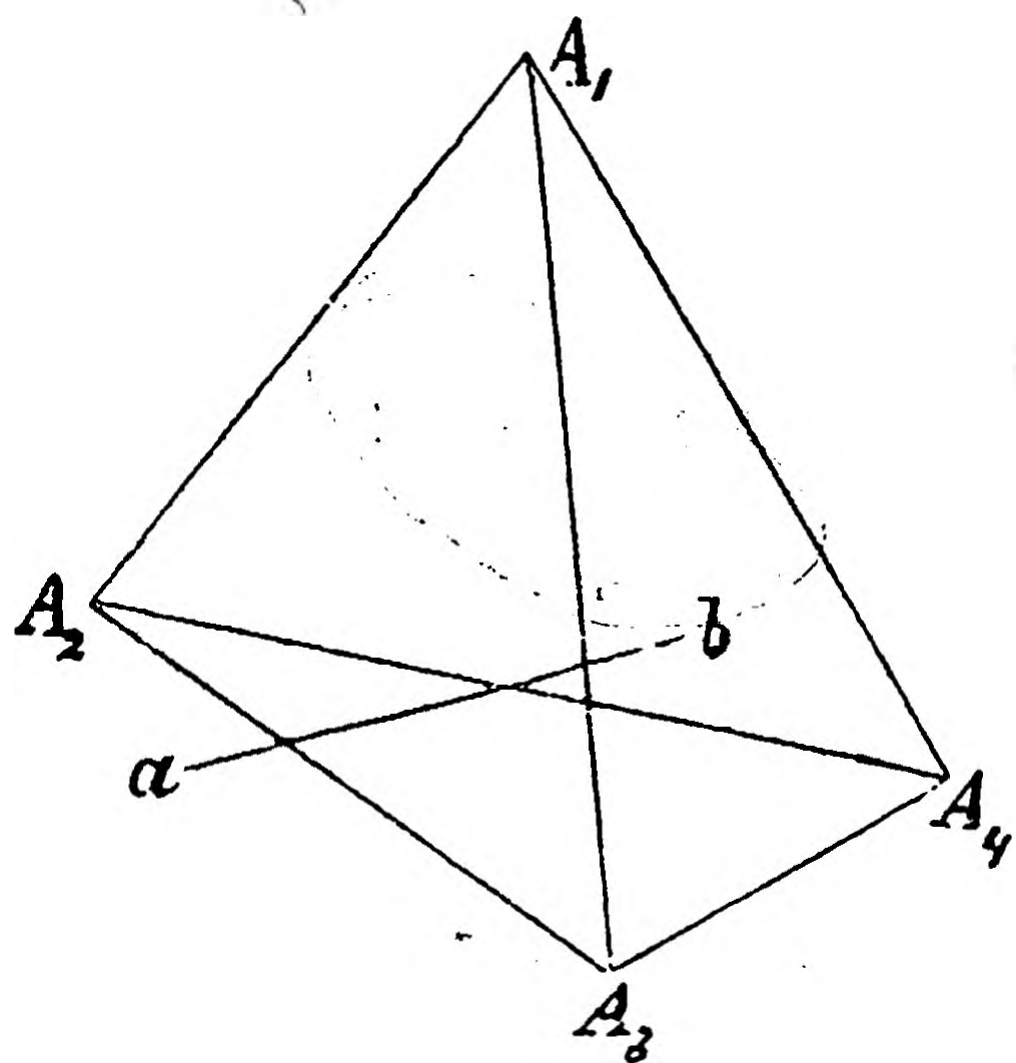
Приведение поверхностей второго порядка къ канонической формѣ.

§ 540. Пусть данная поверхность второго порядка будетъ:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0 \quad (1)$$

Возьмемъ, какую нибудь, точку A_1 внѣ этой поверхности (фиг. 161), построимъ ея полярную плоскость, на этой плоскости возьмемъ, какую нибудь, точку A_2 , построимъ ея полярную плоскость, которая пройдетъ черезъ точку A_1 ; на пересѣченіи двухъ построенныхъ полярныхъ плоскостей возьмемъ опять, какую нибудь, точку A_3 и построимъ ея полярную

Фиг. 161.



плоскость, которая пройдетъ черезъ точки A_1 и A_2 ; три построенныя полярныя плоскости пересѣкутся въ точкѣ A_4 .

Такимъ построениемъ образовался тетраэдръ, коего вершины суть A_1, A_2, A_3, A_4 ; этотъ тетраэдръ называется *полярнымъ*, такъ какъ каждая изъ его вершинъ есть полюсъ противоположной грани.

Такихъ тетраэдровъ, относительно поверхности второго порядка, есть, очевидно, безконечное множество—шесть разъ безконечное число.

Свойства полярнаго тетраэдра.

§ 541. 1. Каждая изъ вершинъ A_1, A_2, A_3, A_4 (фиг. 161) есть полюсъ противоположной грани.)

2. Каждая пара противоположныхъ реберъ A_1A_4 и A_2A_3 ; A_1A_2 и A_3A_4 ; A_1A_3 и A_2A_4 суть взаимныя полярныя относительно поверхности второго порядка (§ 540).

3. Пара смежныхъ граней и пара касательныхъ плоскостей, проведенныхъ черезъ пересѣченіе граней къ поверхности, составляютъ гармоническую связку.

4. Двѣ касательныя плоскости, проведенныя къ поверхности черезъ какую-нибудь прямую ab , лежащую въ грани $(A_2 A_3 A_4)$, плоскость проведенная черезъ ту же прямую ab и противоположный полюсъ A_1 и грань $(A_2 A_3 A_4)$, составляютъ гармоническую связку.

5. *Определение.* Двѣ плоскости, у которыхъ полюсъ одной находится на другой, называются *сопряженными плоскостями*, и ихъ полюсы *сопряженными полюсами*.

§ 542. Положимъ теперь, что грань $(A_2 A_3 A_4)$ полярнаго тетраэдра отодвинута на бесконечность, т. е. вершина A_1 есть полюсъ плоскости, лежащей на бесконечности.

Мы выше видѣли (§ 528), что полюсъ A_1 будетъ центръ поверхности. Слѣдовательно одна изъ вершинъ полярнаго тетраэдра находится въ центрѣ, а три остальные на бесконечно-удаленной плоскости. Изъ этого положенія полярнаго тетраэдра слѣдуетъ:

1. Что всѣ хорды, проходящія черезъ вершину A_1 , дѣлятся въ ней поверхностью пополамъ, такъ какъ A_1 есть центръ поверхности (§ 528).

2. Такъ какъ каждая изъ остальныхъ трехъ граней $(A_1 A_2 A_3)$, $(A_1 A_2 A_4)$ и $(A_1 A_3 A_4)$ суть полярныя плоскости точекъ, лежащихъ на бесконечно-удаленной плоскости, то изъ этого слѣдуетъ, что каждая изъ этихъ граней дѣлитъ пополамъ всѣ хорды поверхности, проведенной параллельно пересѣченію двухъ остальныхъ граней.

3. *Определение.* Плоскость, дѣлящая пополамъ хорды поверхности втораго порядка, проведенныя параллельно извѣстному направленію, называется *діаметральной плоскостью*, а направленіе хордъ называется *сопряженнымъ* направленіемъ діаметральной плоскости.

4. Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что каждая изъ трехъ граней, пересѣкающихся въ центрѣ поверхности, суть *діаметральныя* плоскости, коихъ *сопряженное* направленіе есть пересѣченіе двухъ другихъ граней.

5. Такъ какъ каждой точкѣ, лежащей на бесконечно-удаленной плоскости, соотвѣтствуетъ полярная плоскость, т. е. діаметральная, то изъ этого заключаемъ, что каждому направленію есть сопряженная діаметральная плоскость. Слѣдовательно каждая плоскость, проходящая черезъ центръ, есть діаметральная.

§ 543. Отнесемъ теперь уравненіе поверхности втораго порядка къ произвольно построенному полярному тетраэдру.

Пусть этотъ тетраэдръ будетъ $(A_1 A_2 A_3 A_4)$, а уравненіе поверхности, отнесенной къ нему, пусть будетъ:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0 \quad (2)$$

Уравненія граней полярнаго тетраэдра будутъ:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_4 = 0$$

Если въ уравненіи (2) сдѣлаемъ:

$$x_4 = 0$$

то найдемъ уравненіе:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (3)$$

кривой пересѣченія плоскости $x_4 = 0$ съ поверхностью.

Такъ какъ грань $(A_1 A_2 A_3)$ или $x_4 = 0$ есть, очевидно, полярный треугольникъ относительно конического сѣченія (3), къ которому оно отнесено, то его уравненіе должно имѣть форму:

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 = 0$$

какъ видѣли въ § 241; слѣдовательно должны имѣть:

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0$$

Разсуждая подобнымъ образомъ относительно каждой изъ граней, найдемъ, что въ уравненіи (2), если оно отнесено къ полярному тетраэдру:

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{24} = 0, \quad a_{34} = 0$$

откуда уравненіе поверхности, отнесенной къ полярному тетраэдру, будетъ:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0 \quad (4)$$

Такъ какъ переходъ отъ тетраэдра, къ которому отнесено уравненіе поверхности, къ полярному тетраэдру дѣлается линейнымъ преобразованиемъ тетраэдрическихъ координатъ, какъ показано въ § 502, то изъ этого видимъ, что четверичной однородной формѣ (2), линейнымъ преобразованиемъ, можно дать форму (4) и притомъ безчисленнымъ множествомъ способовъ, такъ какъ поверхность, отнесенная къ каждому изъ полярныхъ тетраэдровъ, имѣетъ форму (4).

Это самая простая форма уравненія поверхности втораго порядка, которая называется *канонической*.

Центральныя поверхности.

§ 544. Если поверхность будетъ центральная, то полагая въ уравненіи (4):

$$\rho x_1 = x, \quad \rho x_2 = y, \quad \rho x_3 = z, \quad \rho x_4 = 1$$

найдемъ:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0 \quad (5)$$

самую простую форму центральной поверхности, которая отнесена къ тремъ діаметральнымъ сопряженнымъ плоскостямъ. Неудобство только состоитъ въ томъ, что эти три діаметральныя сопряженныя плоскости, къ которымъ теперь отнесено уравненіе (5), какъ координатнымъ, перпендикулярны.

Въ уравненіи (5) коэффициентъ a_{44} можно всегда сдѣлать отрицательнымъ; въ этомъ предположеніи коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33} могутъ быть:

1. Всѣ три положительны:

Поверхность будетъ замкнутая—*эллипсоидъ*.

2. Два положительныхъ и одинъ отрицательный:

Поверхность будетъ *однополый гиперболоидъ*.

3. Одинъ положительный и два отрицательныхъ:

Поверхность будетъ *двуполый гиперболоидъ*.

4. Всѣ три отрицательныя:

Поверхность будетъ *мнимая*.

§ 545. Остается рѣшить вопросъ: Есть-ли такое направление параллельныхъ хордъ, въ центральной поверхности второго порядка, къ которому ему сопряженная діаметральная плоскость перпендикулярна?

Уравненіе полярной плоскости точки $(x_1 y_1 z_1)$ есть:

$$x \frac{\partial f}{\partial x_1} + y \frac{\partial f}{\partial y_1} + z \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \quad (6)$$

или:

$$\begin{aligned} & x (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 + a_{14}) + \\ & + y (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 + a_{24}) + \\ & + z (a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 + a_{34}) + \\ & + (a_{41}x_1 + a_{42}y_1 + a_{43}z_1 + a_{44}) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы полярная плоскость точки $(x_1 y_1 z_1)$ была діаметральная, необходимо, чтобы ея полюсъ лежалъ на бесконечно-удаленной плоскости.

Положимъ:

$$x_1 = r_1 \cos \alpha \quad ; \quad y_1 = r_1 \cos \beta \quad ; \quad z_1 = r_1 \cos \gamma \quad (8)$$

Если полюсъ $(x_1 y_1 z_1)$, коего направление дается углами α, β, γ , находится на бесконечности, то $r_1 = \infty$. Слѣдовательно, чтобы найти уравненіе діаметральной плоскости, сопряженной направленію α, β, γ , надобно въ уравненіи (7) вставить вмѣсто x_1, y_1, z_1 , выраженія (8) и сдѣлать $r_1 = \infty$. Такая

операція дасть слѣдующее уравненіе діаметральной плоскости сопряженной направленію α, β, γ :

$$\begin{aligned} & x(a_{11} \cos \alpha + a_{12} \cos \beta + a_{13} \cos \gamma) + \\ & + y(a_{21} \cos \alpha + a_{22} \cos \beta + a_{23} \cos \gamma) + \\ & + z(a_{31} \cos \alpha + a_{32} \cos \beta + a_{33} \cos \gamma) + \\ & + (a_{41} \cos \alpha + a_{42} \cos \beta + a_{43} \cos \gamma) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

или:

$$\cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

Изъ этого уравненія видимъ, что уравненія:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

суть діаметральныя плоскости, сопряженныя направленіямъ координатныхъ осей x, y, z .

§ 546. Если діаметральная плоскость (9) будетъ перпендикулярна своему сопряженному направленію, то мы должны имѣть:

$$\begin{aligned} a_{11} \cos \alpha + a_{12} \cos \beta + a_{13} \cos \gamma &= \lambda \cos \alpha \\ a_{21} \cos \alpha + a_{22} \cos \beta + a_{23} \cos \gamma &= \lambda \cos \beta \\ a_{31} \cos \alpha + a_{32} \cos \beta + a_{33} \cos \gamma &= \lambda \cos \gamma \end{aligned} \quad (12)$$

или:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) \cos \alpha + a_{12} \cos \beta + a_{13} \cos \gamma &= 0 \\ a_{21} \cos \alpha + (a_{22} - \lambda) \cos \beta + a_{23} \cos \gamma &= 0 \\ a_{31} \cos \alpha + a_{32} \cos \beta + (a_{33} - \lambda) \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

откуда имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

развертывая опредѣлитель, найдемъ:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{32}^2(a_{11} - \lambda) - a_{13}^2(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2(a_{33} - \lambda) + \\ + 2a_{12}a_{13}a_{23} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

или:

$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2)\lambda + a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{13}a_{23} = 0 \quad (16)$$

Это уравнение третьей степени, слѣдовательно имѣетъ всегда хоть одинъ дѣйствительный корень, но мы ниже покажемъ, что оно всегда имѣетъ три дѣйствительные корня, какіе бы коэффиціенты въ уравненіи поверхности ни были. Слѣдовательно всегда существуетъ по крайней мѣрѣ три направленія, которыя перпендикулярны къ своимъ сопряженнымъ діаметральнымъ плоскостямъ.

§ 547. Покажемъ теперь, что всѣ три корня уравненія (16) дѣйствительны. Мы приведемъ здѣсь два доказательства. Первое принадлежитъ Коши (Cauchy), а второе послужитъ къ выводу нѣкоторыхъ слѣдствій, которыя намъ будутъ необходимы въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи свойствъ поверхностей втораго порядка.

Напишемъ уравненіе (16) въ формѣ:

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - a_{23}^2(\lambda - a_{11}) - a_{13}^2(\lambda - a_{22}) - a_{12}^2(\lambda - a_{33}) - 2a_{12}a_{13}a_{23} = 0 \quad (17)$$

а это полѣднее можно написать такъ:

$$(\lambda - a_{11}) \{ (\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - a_{23}^2 \} - a_{13}^2(\lambda - a_{22}) - a_{12}^2(\lambda - a_{33}) - 2a_{12}a_{13}a_{23} = 0 \quad (18)$$

Означимъ черезъ λ' и λ'' корни уравненія:

$$(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - a_{23}^2 = 0 \quad (19)$$

Очевидно, одинъ изъ корней, на примѣръ λ' , больше a_{22} и a_{33} , а другой λ'' меньше этихъ количествъ.

Если подставимъ въ уравненіе (18) вмѣсто λ корень λ' , то найдемъ:

$$- \{ (\lambda' - a_{22})a_{13}^2 + 2a_{12}a_{13}a_{23} + (\lambda' - a_{33})a_{12}^2 \} \quad (20)$$

Но такъ какъ мы имѣемъ (19):

$$(\lambda' - a_{22})(\lambda' - a_{33}) = a_{23}^2$$

то выраженіе (20), въ скобкахъ, есть полный квадратъ, слѣдовательно величина отрицательная.

Если въ уравненіе (18) вставимъ другой корень λ'' уравненія (19), то будемъ имѣть:

$$(a_{22} - \lambda'') a_{13}^2 - 2a_{12} a_{13} a_{23} + (a_{33} - \lambda'') a_{12}^2$$

полный квадратъ и притомъ величина положительная.

Если теперь въ уравненіе (18) вставимъ, послѣдовательно, вмѣсто λ величины: $+\infty, \lambda', \lambda'', -\infty$, то найдемъ результаты:

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

а это показываетъ, что между:

$$\infty \text{ и } \lambda', \quad \lambda' \text{ и } \lambda'', \quad \lambda'' \text{ и } -\infty$$

находится по одному корню дѣйствительному.

Итакъ видимъ, что всѣ три корня уравненія (17) суть величины дѣйствительныя.

§ 548. Приведемъ второе доказательство, что три корня уравненія (15) всегда дѣйствительны, изъ котораго намъ будутъ необходимы нѣкоторыя слѣдствія.

Возьмемъ первое изъ уравненія (13) § 546 и напишемъ его въ формѣ:

$$\frac{\cos \beta}{a_{13}} + \frac{\cos \gamma}{a_{12}} = \frac{\cos \alpha}{a_{12}a_{13}} (\lambda - a_{11})$$

прибавимъ къ обѣимъ частямъ этого уравненія по $\frac{\cos \alpha}{a_{23}}$ и сдѣлаемъ съ остальными двумя уравненіями (13) § 546, подобное же преобразование, то найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{a_{23}} + \frac{\cos \beta}{a_{13}} + \frac{\cos \gamma}{a_{12}} &= \frac{\cos \alpha}{a_{12}a_{13}} \left(\lambda - a_{11} + \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} \right) \\ \frac{\cos \alpha}{a_{23}} + \frac{\cos \beta}{a_{13}} + \frac{\cos \gamma}{a_{12}} &= \frac{\cos \beta}{a_{12}a_{23}} \left(\lambda - a_{22} + \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} \right) \\ \frac{\cos \alpha}{a_{23}} + \frac{\cos \beta}{a_{13}} + \frac{\cos \gamma}{a_{12}} &= \frac{\cos \gamma}{a_{13}a_{23}} \left(\lambda - a_{33} + \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

положимъ:

$$\frac{\cos \alpha}{a_{23}} + \frac{\cos \beta}{a_{13}} + \frac{\cos \gamma}{a_{12}} = k$$

$$a_{11} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = a_1 \quad ; \quad a_{22} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = a_2 \quad ; \quad a_{33} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} = a_3 \quad (22)$$

вслѣдствіе чего уравненія (21) дадутъ:

$$\cos \alpha = \frac{k a_{12} a_{13}}{\lambda - a_1}, \quad \cos \beta = \frac{k a_{12} a_{23}}{\lambda - a_2}, \quad \cos \gamma = \frac{k a_{13} a_{23}}{\lambda - a_3} \quad (23)$$

Раздѣлимъ эти уравненія на a_{23} , a_{13} , a_{12} , сложимъ и сократимъ на k , то найдемъ:

$$\frac{a_{12} a_{13}}{a_{23} (\lambda - a_1)} + \frac{a_{12} a_{23}}{a_{13} (\lambda - a_2)} + \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12} (\lambda - a_3)} = 1 \quad (24)$$

или:

$$\frac{1}{a_{23}^2 (\lambda - a_1)} + \frac{1}{a_{13}^2 (\lambda - a_2)} + \frac{1}{a_{12}^2 (\lambda - a_3)} - \frac{1}{a_{12} a_{13} a_{23}} = 0 \quad (25)$$

Откуда видимъ, что уравненію (25) можно дать слѣдующую форму:

$$\frac{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)}{a_{12} a_{13} a_{23}} - \frac{(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)}{a_{23}^2} - \frac{(\lambda - a_1)(\lambda - a_3)}{a_{13}^2} - \frac{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)}{a_{12}^2} = 0 \quad (26)$$

Положимъ, что $a_1 < a_2 < a_3$. Кромѣ этого произведеніе $a_{12} a_{13} a_{23}$ можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ. Положимъ $a_{12} a_{13} a_{23} < 0$ и подставимъ въ уравненіе (26) вмѣсто λ значенія: $-\infty$, a_1 , a_2 , a_3 . Результаты подстановленій будутъ:

$$+\infty, \quad -\frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}{a_{23}^2}, \quad -\frac{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}{a_{13}^2}, \quad -\frac{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}{a_{12}^2} \quad (27)$$

Знаки этихъ величинъ будутъ:

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

Слѣдовательно уравненіе (26) или (17) будетъ имѣть три дѣйствительные корня, заключенные между числами:

$$-\infty \text{ и } a_1, \quad a_1 \text{ и } a_2, \quad a_2 \text{ и } a_3$$

Если произведеніе $a_{12} a_{13} a_{23} > 0$, то мы подставимъ въ уравненіе (26) количества a_1 , a_2 , a_3 , $+\infty$. Результаты подстановленія дадутъ знаки:

$$- \quad + \quad - \quad +$$

Слѣдовательно опять три корня дѣйствительные.

Давая уравненію (17) § 547 форму (26), мы неявно предположили, что коэффициенты a_{12} , a_{13} , a_{23} не равны нулю. Положимъ теперь, что одинъ изъ нихъ, на примѣръ $a_{12} = 0$.

Тогда уравненіе (17) сдѣлается:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{23}^2(a_{11} - \lambda) - a_{13}^2(a_{22} - \lambda) = 0 \quad (28)$$

полагая $a_{22} > a_{11}$ и подставляя послѣдовательно $-\infty$, a_{11} , a_{22} , $+\infty$, знаки результатовъ подстановленій будутъ:

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

Слѣдовательно корни дѣйствительные и будутъ заключаться между $-\infty$ и a_{11} , a_{11} и a_{22} , a_{22} и $+\infty$.

Наконецъ, можетъ случиться, что $a_{12} = 0$, и $a_{13} = 0$, въ этомъ случаѣ уравненіе сдѣлается:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{23}^2(a_{11} - \lambda) = 0$$

или:

$$(a_{11} - \lambda) \{ (a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{23}^2 \} = 0 \quad (29)$$

Одинъ изъ корней очевидно есть a_{11} , а другіе два дѣйствительные. Слѣдовательно во всѣхъ случаяхъ уравненіе (17) имѣетъ всегда всѣ три корня дѣйствительные.

§ 549. Мы предположили, что всѣ три корня уравненія (26) или (17) различны; положимъ теперь, что это уравненіе имѣетъ два равные корня. Мы видѣли выше, что корни заключены между предѣлами $-\infty$, a_1 , a_2 , a_3 или между a_1 , a_2 , a_3 , $+\infty$, смотря по тому будетъ-ли произведеніе $a_{12} a_{13} a_{23}$ отрицательнымъ или положительнымъ. Но если два корня сдѣлаются равными, то необходимо, двойной корень совпадетъ съ однимъ изъ предѣловъ a_1 , a_2 , a_3 .

Если положимъ, что двойной корень есть a_1 , то уравненіе (26) должно имѣть множителемъ $(\lambda - a_1)^2$, что влечетъ за собой равенство $a_1 = a_2 = a_3$.

Обратно, если $a_1 = a_2 = a_3$, то уравненіе (26) будетъ имѣть множитель $(\lambda - a_1)^2$ и a_1 будетъ двойной корень. Слѣдовательно условіе, необходимое и достаточное, чтобы уравненія (26) или (16) имѣли два равные корня, есть:

$$a_{11} - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} \quad (30)$$

Легко видѣть, что если два корня уравненія равны нулю, то:

$$a_{11} - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{23}} = 0 \quad , \quad a_{22} - \frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} = 0 \quad , \quad a_{33} - \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} = 0 \quad .$$

и, обратно, если эти уравненія имѣютъ мѣсто, то два корня уравненія (17) равны нулю, ибо послѣдній членъ и коэффициентъ при λ обращаются въ нуль при этихъ значеніяхъ.

Если наконецъ уравненіе будетъ имѣть тройной корень, то очевидно, необходимо, чтобы:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 \quad , \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} \quad (31)$$

§ 550. Легко показать теперь, что три направленія, соотвѣтствующія дѣйствительнымъ корнямъ уравненія (17), перпендикулярны между собою.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ будутъ эти корни уравненія (16). Если эти корни подставимъ послѣдовательно въ уравненія (13), то для cadaго найдемъ соотвѣтственное направленіе: для λ_1 направленіе $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, для λ_2 направленіе $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, для λ_3 направленіе $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Эти направленія называются *главными*. Подставимъ въ уравненія (12) λ_1 и углы соотвѣтственные этому корню $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, затѣмъ подставимъ корень λ_2 и соотвѣтственные углы $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, то найдемъ:

$$\begin{aligned} a_{11} \cos \alpha_1 + a_{12} \cos \beta_1 + a_{13} \cos \gamma_1 &= \lambda_1 \cos \alpha_1 \\ a_{21} \cos \alpha_1 + a_{22} \cos \beta_1 + a_{23} \cos \gamma_1 &= \lambda_1 \cos \beta_1 \\ a_{31} \cos \alpha_1 + a_{32} \cos \beta_1 + a_{33} \cos \gamma_1 &= \lambda_1 \cos \gamma_1 \end{aligned} \quad (32)$$

и:

$$\begin{aligned} a_{11} \cos \alpha_2 + a_{12} \cos \beta_2 + a_{13} \cos \gamma_2 &= \lambda_2 \cos \alpha_2 \\ a_{21} \cos \alpha_2 + a_{22} \cos \beta_2 + a_{23} \cos \gamma_2 &= \lambda_2 \cos \beta_2 \\ a_{31} \cos \alpha_2 + a_{32} \cos \beta_2 + a_{33} \cos \gamma_2 &= \lambda_2 \cos \gamma_2 \end{aligned} \quad (33)$$

Умножимъ теперь уравненія (32) на $\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2$, а уравненія (33) на $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$, и сложивъ, первыя между собою, вторыя между собою, вычтемъ эти суммы, найдемъ:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) = 0$$

полагая корни λ_1 и λ_2 неравными, найдемъ:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$$

а это показываетъ, что направленія $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ перпендикулярны.

Точно также можно показать, что и направленія $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ перпендикулярны.

Если въ уравненіи діаметральной плоскости (9) подставимъ вмѣсто α, β, γ послѣдовательно углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, соотвѣтствующіе корнямъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и замѣстимъ коэффициенты при x, y, z ихъ величинами изъ (32), то найдемъ уравненія діаметральныхъ плоскостей перпендикулярныхъ къ направленіямъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1) + a_{14} \cos \alpha_1 + a_{24} \cos \beta_1 + a_{34} \cos \gamma_1 &= 0 \\ \lambda_2 (x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2) + a_{14} \cos \alpha_2 + a_{24} \cos \beta_2 + a_{34} \cos \gamma_2 &= 0 \quad (34) \\ \lambda_3 (x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3) + a_{14} \cos \alpha_3 + a_{24} \cos \beta_3 + a_{34} \cos \gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ни одинъ изъ корней уравненія (16) не можетъ быть равенъ нулю, такъ какъ его послѣдній членъ есть A_{44} , а въ центральной поверхности A_{44} не можетъ быть равно нулю.

§ 551. Итакъ видимъ, что въ центральныхъ поверхностяхъ есть три направленія, перпендикулярныя между собою, коихъ сопряженныя діаметральныя плоскости къ нимъ перпендикулярны. Перенесемъ начало координатъ въ центръ, то уравненіе поверхности сдѣлается:

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0 \quad (35)$$

такое перенесеніе дѣлается, замѣщая x, y, z черезъ $x + x_1, y + y_1, z + z_1$ и опредѣляя x_1, y_1, z_1 изъ уравненій:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \quad (36)$$

Полагая $-\frac{\Delta}{A_{44}} = H$, величина H опредѣлится уравненіемъ:

$$H = -\frac{a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}}{A_{44}} = -\frac{\Delta}{A_{44}}$$

Возьмемъ за новыя координатныя оси три перпендикулярныя между собою направленія, коихъ сопряженныя діаметральныя плоскости къ нимъ перпендикулярны, то уравненіе (35) сдѣлается:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H$$

такъ какъ координатнымъ тетраэдромъ будетъ полярный тетраэдръ, коего одна грань находится на бесконечности. Остается только сдѣлать это преобразование на самомъ дѣлѣ.

Для этого, означая новыя координаты черезъ x', y', z' мы должны положить:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 \end{aligned} \quad (37)$$

Если эти выраженія подставимъ въ (35), то первый членъ этого уравненія преобразуется въ:

$$b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + b_{33}z'^2 + 2b_{12}x'y' + 2b_{13}x'z' + 2b_{23}y'z'$$

а $\frac{\Delta}{A_{44}}$ неизмѣняется, слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{23}yz &= \\ = b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + b_{33}z'^2 + 2b_{12}x'y' + 2b_{13}x'z' + 2b_{23}y'z' \end{aligned}$$

гдѣ $b_{i,k}$ суть функціи отъ $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$.

Такъ какъ всегда существуетъ зависимость:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

то предъидущее уравненіе можно написать въ формѣ:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) &= \\ = b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + b_{33}z'^2 + 2b_{12}x'y' + 2b_{13}x'z' + 2b_{23}y'z' + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2) \end{aligned}$$

или:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x^2 + (a_{22} - \lambda)y^2 + (a_{33} - \lambda)z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz &= \\ = (b_{11} - \lambda)x'^2 + (b_{22} - \lambda)y'^2 + (b_{33} - \lambda)z'^2 + 2b_{12}x'y' + 2b_{13}x'z' + 2b_{23}y'z' \end{aligned}$$

гдѣ λ есть количество произвольное.

Если возьмемъ инвариантъ этой формы, который называется *призначною* или *дискриминантомъ* и замѣтимъ, что модуль преобразованія:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} = 1$$

то найдемъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

или:

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2)\lambda + a_{11}a_{23}^2 + \\ & \quad a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{13}a_{23} = \\ & = \lambda^3 - (b_{11} + b_{22} + b_{33})\lambda^2 + (b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33} - b_{12}^2 - b_{13}^2 - b_{23}^2)\lambda + b_{11}b_{23}^2 + \\ & \quad b_{22}b_{13}^2 + b_{33}b_{12}^2 - b_{11}b_{22}b_{33} - 2b_{12}b_{13}b_{23} \end{aligned}$$

Такъ какъ это уравненіе должно существовать для произвольнаго значенія λ , то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{22} + b_{33} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33} - b_{12}^2 - b_{13}^2 - b_{23}^2 &= \\ &= a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2 \\ b_{11}b_{23}^2 + b_{22}b_{13}^2 + b_{33}b_{12}^2 - b_{11}b_{22}b_{33} - 2b_{12}b_{13}b_{23} &= \\ &= a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{13}a_{23} \end{aligned}$$

Но если за новыя оси взяты три направленія, коихъ сопряженныя диаметральныя плоскости къ нимъ перпендикулярны, то:

$$b_{12} = 0 \quad , \quad b_{13} = 0 \quad , \quad b_{23} = 0$$

откуда:

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{22} + b_{33} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33} &= a_{11}a_{23} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2 \\ b_{11}b_{22}b_{33} &= a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 \end{aligned}$$

Вторыя части этихъ уравненій извѣстны, а первыя суть сумма количествъ b_{11}, b_{22}, b_{33} , сумма ихъ различныхъ соединеній по два, и ихъ произведеніе, слѣдовательно онѣ суть корни кубическаго уравненія:

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2)\lambda - \\ & - (a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2) = 0 \quad (38) \end{aligned}$$

Рѣшивъ это уравненіе, котораго всѣ корни дѣйствительныя (§ 547), будемъ имѣть корни b_{11}, b_{22}, b_{33} и наше уравненіе сдѣлается:

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0 \quad (39)$$

или:

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 = H \quad (40)$$

§ 552. Легко показать непосредственно, что если $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ суть тѣ направленія, которыя опредѣляются изъ (12) или (13), соотвѣтственно каждому изъ трехъ корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ уравненія (16), то коэффициенты при xy, xz и yz будутъ равны нулю.

Въ самомъ дѣлѣ послѣ подстановленія выраженій (37) въ уравненіе (35) коэффициентъ, напримѣръ, при yz будетъ:

$$a_{11} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + a_{22} \cos \beta_2 \cos \beta_3 + a_{33} \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 + 2a_{23} (\cos \beta_2 \cos \gamma_3 + \cos \beta_3 \cos \gamma_2) + \\ + 2a_{13} (\cos \alpha_2 \cos \gamma_3 + \cos \alpha_3 \cos \gamma_2) + 2a_{12} (\cos \alpha_2 \cos \beta_3 + \cos \alpha_3 \cos \beta_2)$$

Но мы имѣемъ (33):

$$a_{11} \cos \alpha_2 + a_{12} \cos \beta_2 + a_{13} \cos \gamma_2 = \lambda_2 \cos \alpha_2$$

$$a_{21} \cos \alpha_2 + a_{22} \cos \beta_2 + a_{23} \cos \gamma_2 = \lambda_2 \cos \beta_2$$

$$a_{31} \cos \alpha_2 + a_{32} \cos \beta_2 + a_{33} \cos \gamma_2 = \lambda_2 \cos \gamma_2$$

Если эти уравненія умножимъ, послѣдовательно, на $\cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3$ и сложимъ, то найдемъ:

$$a_{11} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + a_{22} \cos \beta_2 \cos \beta_3 + a_{33} \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 + 2a_{23} (\cos \beta_2 \cos \gamma_3 + \cos \beta_3 \cos \gamma_2) + \\ + 2a_{13} (\cos \alpha_2 \cos \gamma_3 + \cos \alpha_3 \cos \gamma_2) + 2a_{12} (\cos \alpha_2 \cos \beta_3 + \cos \alpha_3 \cos \beta_2) = \\ = \lambda_2 (\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3)$$

Но такъ какъ направленія $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ перпендикулярны между собою, то вторая часть предъидущаго уравненія равна нулю.

Слѣдовательно коэффициентъ при yz такимъ преобразованиемъ уничтожается, точно также можно показать, что уничтожатся коэффициенты при: xy и xz .

§ 553. Три корня уравненія (38) суть коэффициенты при x, y и z въ преобразованномъ уравненіи:

$$b_{11} x^2 + b_{22} y^2 + b_{33} z^2 = H \quad (41)$$

Случай 1. Всѣ три корня положительные. Полагая:

$$\frac{H}{b_{11}} = a^2, \quad \frac{H}{b_{22}} = b^2, \quad \frac{H}{b_{33}} = c^2$$

уравненіе (41) сдѣлается:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (42)$$

Полагая, послѣдовательно, въ этомъ уравненіе:

$$y = 0, \quad z = 0; \quad x = 0, \quad z = 0; \quad x = 0, \quad y = 0$$

найдемъ:

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

Слѣдовательно a, b, c суть разстоянія начала координатъ или центра поверхности отъ точекъ встрѣчи поверхности съ координатными осями. Эти разстоянія называются *главными осями* поверхности.

Если $a > b > c$, то a называется *большою*, b —*среднею*, а c —*малою* осью.

Легко видѣть изъ формы уравненія, что это поверхность замкнутая, такъ какъ ни одна изъ координатъ въ уравненіи не можетъ быть равна ∞ . Она называется *эллипсоидомъ*.

Случай 2. Два корня положительные, одинъ отрицательный. Уравненіе (41) будетъ:

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 - b_{33}z^2 = H \quad (43)$$

Полагая:

$$\frac{H}{b_{11}} = a^2, \quad \frac{H}{b_{22}} = b^2, \quad \frac{H}{b_{33}} = c^2$$

уравненіе (41) приметъ форму:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Полагая, послѣдовательно:

$$y = 0, \quad z = 0; \quad x = 0, \quad z = 0; \quad x = 0, \quad y = 0$$

найдемъ:

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm ci$$

т. е. оси x и y встрѣчаютъ поверхность, а ось z ее не встрѣчаетъ, поэтому a и b называется *дѣйствительными осями* поверхности, а c *мнимой осью*.

Если сдѣлаемъ $x = 0$, то будемъ имѣть:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (44)$$

т. е. пересѣченіе плоскости YZ съ поверхностью есть гипербола, поэтому поверхность имѣетъ точки на безконечности, а слѣдовательно незамкнута. Это *однополый гиперболоидъ*.

Случай 3. Одинъ корень положительный, а два отрицательные.
Уравненіе будетъ:

$$b_{11}x^2 - b_{22}y^2 - b_{33}z^2 = H$$

дѣлая:

$$\frac{H}{b_{11}} = a^2, \quad \frac{H}{b_{22}} = b^2, \quad \frac{H}{b_{33}} = c^2$$

оно сдѣлается:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (45)$$

Полагая, послѣдовательно:

$$y = 0, \quad z = 0; \quad x = 0, \quad z = 0; \quad x = 0, \quad y = 0$$

найдемъ:

$$x = \pm a, \quad y = \pm bi, \quad z = \pm ci$$

откуда видимъ, что ось X встрѣчаетъ поверхность, а оси Y и Z ее не встрѣчаютъ, поэтому a называется дѣйствительною осью поверхности, а b и c мнимыми осями.

Если сдѣлаемъ $y = 0$ или $z = 0$, то получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

двѣ гиперболы, какъ пересѣченіе плоскостей (XZ) и (XY) съ поверхностью. Откуда заключаемъ, что это поверхность незамкнутая. Легко видѣть, что она двуполая.

Въ самомъ дѣлѣ, если сдѣлать $x = 0$, то найдемъ мнимую кривую:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Слѣдовательно плоскость (YZ) не встрѣчаетъ поверхность, т. е. одна ея пола лежитъ по одну сторону плоскости $x = 0$, а другая по другую. Это *двуполый гиперболюидъ*.

Поверхности не имѣющія центра.

§ 554. Если поверхность втораго порядка не имѣетъ центра, т. е. какъ мы видѣли, центръ находится на безконечности, то координаты центра (§ 531):

$$x = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \quad y = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \quad z = \frac{A_{34}}{A_{44}}$$

равны безконечности, т. е. $A_{44}=0$. Но въ уравненіи (16) послѣдній членъ есть, очевидно, A_{44} , слѣдовательно одинъ изъ корней этого уравненія равенъ нулю.

Если поворотимъ координатныя оси параллельно главнымъ направлениямъ, т. е. преобразуемъ уравненіе линейнымъ подстановленіямъ (37), то уравненіе:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

сдѣлается:

$$\lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2x(a_{14} \cos \alpha_1 + a_{24} \cos \beta_1 + a_{34} \cos \gamma_1) + 2y(a_{14} \cos \alpha_2 + a_{24} \cos \beta_2 + a_{34} \cos \gamma_2) + 2z(a_{14} \cos \alpha_3 + a_{24} \cos \beta_3 + a_{34} \cos \gamma_3) + H = 0 \quad (46)$$

Если теперь перенесемъ начало координатъ въ точку (x_1, y_1, z_1) , т. е. сдѣлаемъ подстановленіе $x + x_1, y + y_1, z + z_1$, то вообще можно такъ определить x_1, y_1, z_1 , что коэффициенты при z, y и величина H исчезнутъ, и уравненіе (46) сдѣлается:

$$\lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2x(a_{14} \cos \alpha_1 + a_{24} \cos \beta_1 + a_{34} \cos \gamma_1) = 0 \quad (47)$$

Если коэффициентъ при x неравенъ нулю, то означая его черезъ — Q , предыдущее уравненіе будетъ:

$$\lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 2Qx \quad (48)$$

Корни λ_2 и λ_3 могутъ имѣть одинаковые знаки и могутъ имѣть разные.

Случай 1. Корни λ_2 и λ_3 оба положительные или оба отрицательные; въ обоихъ случаяхъ, полагая:

$$\frac{Q}{\lambda_2} = \frac{a}{b}, \quad \frac{Q}{\lambda_3} = \frac{a}{c}$$

найдемъ:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm \frac{2x}{a} \quad (49)$$

смотря потому будутъ - ли корни оба положительные или оба отрицательные. Поверхность эта есть *параболоидъ эллиптический*.

Случай 2. Если корни имѣютъ разные знаки, то будемъ имѣть:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a}$$

Поверхность эта есть *параболоидъ гиперболическій*.

Это и всѣ поверхности не имѣющія центра.

Діаметральныя плоскости въ этомъ случаѣ будутъ:

$$a_{14} \cos \alpha_1 + a_{24} \cos \beta_1 + a_{34} \cos \gamma_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 (x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2) + a_{14} \cos \alpha_2 + a_{24} \cos \beta_2 + a_{34} \cos \gamma_2 &= 0 \\ \lambda_3 (x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3) + a_{14} \cos \alpha_3 + a_{24} \cos \beta_3 + a_{34} \cos \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

изъ коихъ первая находится на безконечности.

Поверхности имѣющія безконечное число центровъ.

§ 555. Выше мы предположили, что коэффициентъ при x въ уравненіи (46) не равенъ нулю. Положимъ теперь, что:

$$a_{14} \cos \alpha_1 + a_{24} \cos \beta_1 + a_{34} \cos \gamma_1 = 0$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (46) не содержитъ x . Начало координатъ можемъ перенести въ точку (y_1, z_1) на плоскости (YZ) и выбрать y_1 и z_1 такъ, чтобы коэффициенты при y и z исчезли и уравненіе (46) сдѣлается:

$$\lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = H \quad (51)$$

Это будетъ, очевидно цилиндрическая поверхность, коей ось есть ось X . Цилиндръ будетъ эллиптической или гиперболической, смотря потому будутъ-ли корни λ_2 и λ_3 съ одинаковыми знаками или съ разными. Если H будетъ величина положительная, а корни отрицательные, то поверхность будетъ мнимая. Центры такой поверхности всѣ лежатъ на ея оси X .

Въ этомъ случаѣ, первая изъ діаметральныхъ плоскостей (50) $0=0$ неопредѣленная, а пересѣченіе двухъ послѣднихъ дадутъ ось цилиндра или геометрическое мѣсто центровъ.

§ 556. Положимъ теперь, что одинъ изъ корней λ_2, λ_3 равенъ нулю, на примѣръ λ_2 . Въ этомъ случаѣ уравненіе (46) сдѣлается:

$$\begin{aligned} \lambda_3 z^2 + 2x(a_{14} \cos \alpha_1 + a_{24} \cos \beta_1 + a_{34} \cos \gamma_1) + 2y(a_{14} \cos \alpha_2 + a_{24} \cos \beta_2 + a_{34} \cos \gamma_2) + \\ + 2z(a_{14} \cos \alpha_3 + a_{24} \cos \beta_3 + a_{34} \cos \gamma_3) + H = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Можно направленіе $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ такъ выбрать, чтобы:

$$a_{14} \cos \alpha_2 + a_{24} \cos \beta_2 + a_{34} \cos \gamma_2 = 0$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (52) сдѣлается:

$$\begin{aligned} & \lambda_3 z^2 + 2x(a_{14} \cos \alpha_1 + a_{24} \cos \beta_1 + a_{34} \cos \gamma_1) + \\ & + 2z(a_{14} \cos \alpha_3 + a_{24} \cos \beta_3 + a_{34} \cos \gamma_3) + H = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Можетъ случиться, что коэффициентъ при x равенъ также нулю, въ этомъ случаѣ уравненіе (53) будетъ:

$$\lambda_3 z^2 + 2z(a_{14} \cos \alpha_3 + a_{24} \cos \beta_3 + a_{34} \cos \gamma_3) + H = 0$$

Переносъ координаты параллельно самимъ себѣ, уравненіямъ (52) и (53), можно дать форму:

$$\lambda_3 z^2 + 2x(a_{14} \cos \alpha_1 + a_{24} \cos \beta_1 + a_{34} \cos \gamma_1) = 0 \quad (54)$$

$$\lambda_3 z^2 + K = 0 \quad (55)$$

Первое есть параболическія цилиндры, а второе двѣ параллельныя плоскости. K есть постоянная величина.

Въ первомъ случаѣ одна изъ діаметральныхъ плоскостей, сопряженная направленію $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ находится на бесконечности, а сопряженная направленію $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ неопредѣленная. Во второмъ случаѣ первыя двѣ діаметральныя плоскости неопредѣленны, а послѣдняя есть геометрическое мѣсто центровъ поверхности.

Но когда два корня уравненія (17) равны нулю, то имѣемъ:

$$a_{11} = \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}, \quad a_{22} = \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}, \quad a_{33} = \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

Подставляя эти выраженія въ уравненія (12) найдемъ, что онѣ сливаются въ одно:

$$a_{12}a_{13} \cos \alpha + a_{12}a_{22} \cos \beta + a_{13}a_{23} \cos \gamma = 0$$

Слѣдовательно есть безчисленное множество главныхъ направленій, соответствующихъ корнямъ равнымъ нулю въ сопряженной направленію $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ діаметральной плоскости.

Это и всѣ поверхности, которыя представляетъ уравненіе второй степени между тремя координатами.

Если бы мы имѣли въ одно время:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

$$a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2 = 0$$

$$a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{13}a_{23} = 0$$

то три корня уравненія (17) равны нулю. Возвысимъ первое изъ этихъ уравненій въ квадратъ и складывая со вторымъ, умноживъ его сначала на 2, найдемъ:

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{12}^2 + 2a_{13}^2 + 2a_{23}^2 = 0$$

что можетъ быть только тогда, когда:

$$a_{11} = 0 \quad , \quad a_{22} = 0 \quad , \quad a_{33} = 0 \quad , \quad a_{12} = 0 \quad , \quad a_{13} = 0 \quad , \quad a_{23} = 0$$

но въ этомъ случаѣ уравненіе поверхности не будетъ второй степени. Слѣдовательно невозможно, чтобы три корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ были въ одно время равны нулю. Изъ этого заключаемъ, что въ поверхности второго порядка, существуетъ, по крайней мѣрѣ, хоть одна діаметральная плоскость въ конечномъ разстояніи.

Поверхности вращенія.

§ 557. *Поверхность вращенія*, около известной прямой называемой *осью вращенія*, есть такая поверхность, которой пересѣченіе съ плоскостью перпендикулярной къ оси вращенія есть всегда кругъ, коего центръ находится на оси.

Если уравненіе второй степени, выраженное въ прямоугольныхъ координатахъ, можетъ быть преобразовано въ форму:

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{14}x + 2\alpha_{24}y + 2\alpha_{34}z + \alpha_{44} = 0 \quad (56)$$

въ которой два коэффициента при переменныхъ въ квадратъ равны, то это есть поверхность вращенія. Пусть напримѣръ: $\alpha_{11} = \alpha_{22}$. Полагая $z = k$ пересѣкаемъ поверхность плоскостью перпендикулярною къ оси Z и проекція этого пересѣченія на плоскости (XY) будетъ:

$$\alpha_{11}(y^2 + z^2) + 2\alpha_{14}x + 2\alpha_{24}y + \alpha_{33}k^2 + 2\alpha_{34}k + \alpha_{44} = 0 \quad (57)$$

Очевидно, что это есть кругъ, коего координаты центра

$$\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}} \quad , \quad -\frac{\alpha_{24}}{\alpha_{11}}$$

независятъ отъ k ; слѣдовательно пересѣченія поверхности съ плоскостью, которая перемѣщается параллельно плоскости (XY) , суть круги, коихъ центры находятся на прямой параллельной оси Z и коей координаты точки пересѣченія съ плоскостью (XY) , суть: $-\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}}$, $-\frac{\alpha_{24}}{\alpha_{11}}$. Слѣдовательно ось вращенія поверхности есть эта прямая.

Обратно, если общее уравнение второй степени представляет поверхность вращения, то ему можно дать форму (56). Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ за ось Z прямую параллельную оси вращения, а за другія двѣ оси перпендикулярныя прямыя. Пусть въ этомъ предположеніи уравнение поверхности будетъ:

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}xz + 2\alpha_{23}yz + 2\alpha_{14}x + 2\alpha_{24}y + 2\alpha_{34}z + \alpha_{44} = 0$$

Проекція кривой пересѣченія этой поверхности съ плоскостью $z = k$ на плоскости (XY) будетъ:

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}kx + 2\alpha_{23}ky + 2\alpha_{14}x + 2\alpha_{24}y + 2\alpha_{34}k + \alpha_{33}k^2 + \alpha_{44} = 0$$

чтобы это уравнение представляло кругъ необходимо:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} \quad , \quad \alpha_{12} = 0$$

Если k будетъ переменное, то предыдущее уравнение должно представлять круги, коихъ центры находятся на одной и той-же прямой; но координаты центра суть:

$$-\frac{\alpha_{13}k + \alpha_{14}}{\alpha_{11}} \quad , \quad -\frac{\alpha_{23}k + \alpha_{24}}{\alpha_{11}}$$

Слѣдовательно мы должны имѣть $\alpha_{13} = 0$, $\alpha_{23} = 0$. Такимъ образомъ въ уравненіи нѣтъ членовъ xy , yz , xz , а коэффициенты при x^2 и y^2 равны, слѣдовательно оно имѣетъ форму (57).

§ 558. Мы видѣли, что уравнение поверхности втораго порядка, отнесенное къ прямоугольной системѣ координатъ:

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + \\ & + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}xz + 2\alpha_{23}yz + 2\alpha_{14}x + 2\alpha_{24}y + 2\alpha_{34}z + \alpha_{44} = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

подстановленіями вмѣсто x , y , z выраженій:

$$\begin{aligned} & x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 \\ & x \cos \beta_1 + y \cos \beta_2 + z \cos \beta_3 \\ & x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3 \end{aligned} \quad (59)$$

гдѣ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ суть направленія *главныхъ осей*, преобразуется въ:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2\alpha_{14}x + 2\alpha_{24}y + 2\alpha_{34}z + \alpha_{44} = 0 \quad (60)$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ суть корни уравненія (16).

Если теперь корни λ_1 и λ_2 будутъ равны, то уравненіе (60) будетъ представлять поверхность вращенія, какъ мы показали въ § 557.

Но если уравненіе (16) имѣетъ двойной корень, то имѣемъ (30):

$$a_{11} - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} \quad (61)$$

слѣдовательно это есть условіе, необходимое и достаточное, чтобы уравненіе (58) представляло поверхность вращенія. Мы видѣли (§ 557), что одинъ изъ двухъ равныхъ корней, наприимѣръ, λ_1 , равенъ выраженіямъ (61), слѣдовательно имѣемъ:

$$a_{11} - \lambda_1 = \frac{a_{12} a_{13}}{a_{23}}, \quad a_{22} - \lambda_1 = \frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}}, \quad a_{33} - \lambda_1 = \frac{a_{13} a_{23}}{a_{12}} \quad (62)$$

подставляя эти выраженія въ уравненія (13), найдемъ, что эти три уравненія тождественны:

$$a_{12} a_{13} \cos \alpha_1 + a_{12} a_{13} \cos \beta_1 + a_{13} a_{23} \cos \gamma_1 = 0 \quad (63)$$

Откуда видимъ, что главныхъ направленій, соотвѣтствующихъ двойному корню, есть безчисленное множество и всѣ онѣ, очевидно находятся въ плоскости:

$$a_{12} a_{13} x + a_{12} a_{23} y + a_{13} a_{23} z = 0 \quad (64)$$

или:

$$\frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{13}} + \frac{z}{a_{12}} = 0 \quad (65)$$

Всѣ эти направленія перпендикулярны къ направленію $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ опредѣленному третьимъ корнемъ λ_3 .

Сопряженная направленію $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ діаметральная плоскость, какъ мы видѣли есть (34):

$$\lambda_3 (x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3) + a_{14} \cos \alpha_3 + a_{24} \cos \beta_3 + a_{34} \cos \gamma_3 = 0 \quad (66)$$

которая сдѣлается, если вмѣсто $\cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3$ подставимъ выраженія (23):

$$\lambda_3 (a_{12} a_{13} x + a_{12} a_{23} y + a_{13} a_{23} z) + a_{12} a_{13} a_{14} + a_{12} a_{23} a_{24} + a_{13} a_{23} a_{34} = 0 \quad (67)$$

или:

$$\frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{13}} + \frac{z}{a_{12}} + \frac{1}{\lambda_3} \left(\frac{a_{14}}{a_{23}} + \frac{a_{24}}{a_{13}} + \frac{a_{34}}{a_{12}} \right) = 0 \quad (68)$$

слѣдовательно ось вращенія будетъ перпендикулярна къ этой плоскости. Если поверхность будетъ центральная, то координаты центра удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0$$

подставляя вмѣсто a_{11}, a_{22}, a_{33} ихъ выраженія (62), найдемъ:

$$a_{12}a_{13}x + a_{12}a_{23}y + a_{13}a_{23}z + a_{23}(\lambda_1 x + a_{14}) = 0$$

$$a_{12}a_{13}x + a_{12}a_{23}y + a_{13}a_{23}z + a_{13}(\lambda_1 y + a_{24}) = 0 \quad (69)$$

$$a_{12}a_{13}x + a_{12}a_{23}y + a_{13}a_{23}z + a_{12}(\lambda_1 z + a_{34}) = 0$$

Слѣдовательно координаты центра удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$a_{23}(\lambda_1 x + a_{14}) = a_{13}(\lambda_1 y + a_{24}) = a_{12}(\lambda_1 z + a_{34}) \quad (70)$$

которыя представляютъ прямую, проходящую черезъ центръ и перпендикулярную къ діаметральной плоскости, сопряженной направленія $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Условія (61) невозможны, если какой-нибудь изъ коэффиціентовъ a_{12}, a_{13}, a_{23} равенъ нулю, но если два изъ этихъ коэффиціентовъ равны нулю, на примѣръ $a_{12} = 0, a_{13} = 0$, то уравненіе (15) сдѣлается:

$$(a_{11} - \lambda) \{ (a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{23}^2 \} = 0 \quad (71)$$

Одинъ изъ корней этаго уравненія есть a_{11} и если онъ удовлетворитъ и уравненіе:

$$(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{23}^2 = 0 \quad (72)$$

то онъ будетъ двойной корень; поверхность будетъ поверхностью вращенія, если при условіяхъ $a_{12} = 0, a_{13} = 0$ имѣемъ:

$$a_{23}^2 = (a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33})$$

Второй корень квадратнаго уравненія (72) будетъ:

$$a_{22} + a_{33} - a_{11}$$

подставляя его въ уравненія (12), найдемъ уравненія для опредѣленія направленія оси вращенія:

$$\cos \alpha = 0, \quad \frac{\cos \beta}{a_{11} - a_{22}} + \frac{\cos \gamma}{a_{23}} = 0$$

§ 559. Если поверхность будетъ поверхностью вращения, то всякая плоскость перпендикулярная къ оси вращения, пересѣкаетъ ее по кругу. Если въ кругѣ проведемъ, какую-нибудь хорду, то плоскость, проходящая черезъ ось вращения и середину хорды, перпендикулярна къ хордѣ, слѣдовательно каждую плоскость, проходящую черезъ ось вращения, можно разсматривать, какъ *главную*. Это замѣчаніе сейчасъ даетъ условіе (61). Въ самомъ дѣлѣ, выражая, что уравненія (13) § 546 тождественны, такъ какъ есть безконечное число *главныхъ направлений*, будемъ имѣть:

$$\frac{a_{11} - \lambda}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22} - \lambda} = \frac{a_{13}}{a_{23}}, \quad \frac{a_{11} - \lambda}{a_{13}} = \frac{a_{12}}{a_{23}} = \frac{a_{13}}{a_{33} - \lambda}$$

откуда:

$$a_{11} - \lambda = \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}, \quad a_{22} - \lambda = \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}, \quad a_{33} - \lambda = \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

исключая λ , найдемъ условія (61):

$$a_{11} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

§ 560. Такъ какъ кубическое уравненіе (16) § 546 имѣетъ всегда три корня дѣйствительные, то можно судить о родѣ поверхности по знакамъ его членовъ.

1. Если всѣ члены въ уравненіи положительны, то всѣ его корни будутъ отрицательны, если же знаки идутъ по перемежно, то всѣ его корни будутъ положительные (теорема Декарта). Въ обоихъ случаяхъ поверхность будетъ или дѣйствительный или мнимый *эллипсоидъ*.

2. Если знаки расположены не въ вышесказанномъ порядкѣ, то каждой перемежнѣ соотвѣтствуетъ положительный корень, а каждому повторенію знаковъ—отрицательный. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ поверхность будетъ одинъ изъ *иперболоидовъ*.

3. Если въ квадратномъ уравненіи, въ которое обращается кубическое, въ неимѣющихъ центра поверхностяхъ, знаки членовъ одинаковы или идутъ попеременно, то поверхность будетъ, въ первомъ случаѣ *параболоидъ эллиптический*, а во второмъ *параболоидъ гиперболическій*.

4. Для *цилиндрическаго параболоида* кубическое уравненіе обращается въ уравненіе первой степени, такъ какъ два его корня равны нулю.

Пр. 1. Какая поверхность представляется уравненіемъ:

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6 = 0$$

Соотвѣтствующее кубическое уравненіе будетъ:

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$$

Знаки идутъ попеременно, слѣдовательно это одинъ изъ эллипсоидовъ. Корни этого уравненія суть:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 9$$

Преобразованное уравненіе будетъ:

$$3x^2 + 6y^2 + 9z^2 = 6$$

или:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2$$

эллипсоидъ, коего оси суть:

$$a = \sqrt{2}, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Пр. 2. Какую поверхность представляетъ уравненіе:

$$11x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 12xy + 4xz - 8yz - 12 = 0$$

Соотвѣтствующее кубическое уравненіе будетъ:

$$\lambda^3 - 27\lambda^2 + 180\lambda - 324 = 0$$

По знакамъ это одинъ изъ эллипсоидовъ. Корни этого уравненія суть:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 18$$

Преобразованное уравненіе:

$$x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 4$$

эллипсоидъ.

Пр. 3. Какую поверхность представляетъ уравненіе:

$$7x^2 - 13y^2 + 6z^2 + 24xy - 12xz + 12yz \pm 84 = 0$$

Кубическое уравненіе будетъ:

$$\lambda^3 - 343\lambda - 2058 = 0$$

Корни этого уравненія суть:

$$\lambda_1 = -7, \quad \lambda_2 = -14, \quad \lambda_3 = +21$$

Преобразованное уравненіе:

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = \pm 12$$

Это будетъ однополый или двуполый гиперболоидъ, смотря по знаку второй части.

Пр. 4. Какую поверхность представляетъ уравненіе:

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6xy + 8xz + 4yz - 8 = 0$$

Кубическое уравненіе будетъ:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 3\lambda + 20 = 0$$

Въ этомъ уравненіи два корня положительные и одинъ отрицательный, слѣдовательно это одинъ изъ гиперболоидовъ.

Пр. 5. Какую поверхность представляет уравнение:

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$$

Кубическое уравнение будетъ:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0$$

или:

$$\lambda(\lambda^2 - 5\lambda - 14) = 0$$

Одинъ изъ корней равенъ нулю, слѣдовательно это одинъ изъ параболоидовъ. По знакамъ квадратнаго уравненія — это параболоидъ гиперболическій. Корни кубическаго уравненія суть:

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 7 \quad , \quad \lambda_3 = -2$$

Преобразованное уравнение поверхности есть:

$$7x^2 - 2y^2 = \frac{8z}{\sqrt{14}}$$

§ 561. Вотъ еще одно доказательство дѣйствительности корней кубическаго уравненія (16) § 546. Пусть два его корня будутъ:

$$\lambda_2 = a_2 + b_2i \quad , \quad \lambda_3 = a_2 - b_2i$$

третій всегда дѣйствительный.

Уравненія (12) § 546 дадутъ, очевидно, для косинусовъ угловъ главныхъ направлений, выраженія формы:

$$\cos \alpha_2 = \mu_2 + \nu_2i \quad , \quad \cos \beta_2 = \delta_2 + \omega_2i \quad , \quad \cos \gamma_2 = \rho_2 + \sigma_2i$$

$$\cos \alpha_3 = \mu_2 - \nu_2i \quad , \quad \cos \beta_3 = \delta_2 - \omega_2i \quad , \quad \cos \gamma_3 = \rho_2 - \sigma_2i$$

Но въ этомъ случаѣ условіе:

$$\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 = 0$$

обращается въ:

$$\mu_2^2 + \nu_2^2 + \delta_2^2 + \omega_2^2 + \rho_2^2 + \sigma_2^2 = 0$$

и это возможно только при условіи:

$$\mu_2 = 0 \quad , \quad \nu_2 = 0 \quad , \quad \delta_2 = 0 \quad , \quad \omega_2 = 0 \quad , \quad \rho_2 = 0 \quad , \quad \sigma_2 = 0$$

Но при этомъ значеніи нельзя удовлетворить уравненіе:

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1$$

Слѣдовательно невозможно, чтобы кубическое уравненіе имѣло мнимые корни.

ГЛАВА XXXVI.

Свойства центральныхъ поверхностей.

§ 562. Теперь остается изслѣдовать отдѣльно свойства каждой изъ центральныхъ поверхностей и поверхностей неимѣющихъ центра. Мы видѣли, что уравненія всѣхъ центральныхъ поверхностей приводятся къ формѣ:

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 = H$$

Если H есть величина постоянная, а коэффициенты b_{11}, b_{22}, b_{33} будутъ всѣ три положительные или отрицательные, то поверхность будетъ, въ этомъ случаѣ, *эллипсоидъ действительный*, а во второмъ *эллипсоидъ мнимый*.

Если два изъ коэффициентовъ b_{11}, b_{22}, b_{33} , какіе бы то ни было, будутъ положительные, а одинъ отрицательный, то поверхность будетъ *однополый гиперболоидъ*.

Если одинъ изъ коэффициентовъ b_{11}, b_{22}, b_{33} , какой-бы то ни было, будетъ положительный, а два отрицательные, то это будетъ *двуполый гиперболоидъ*.

Эллипсоидъ.

§ 563. Въ § 553 мы дали уравненію эллипсоида слѣдующую форму:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

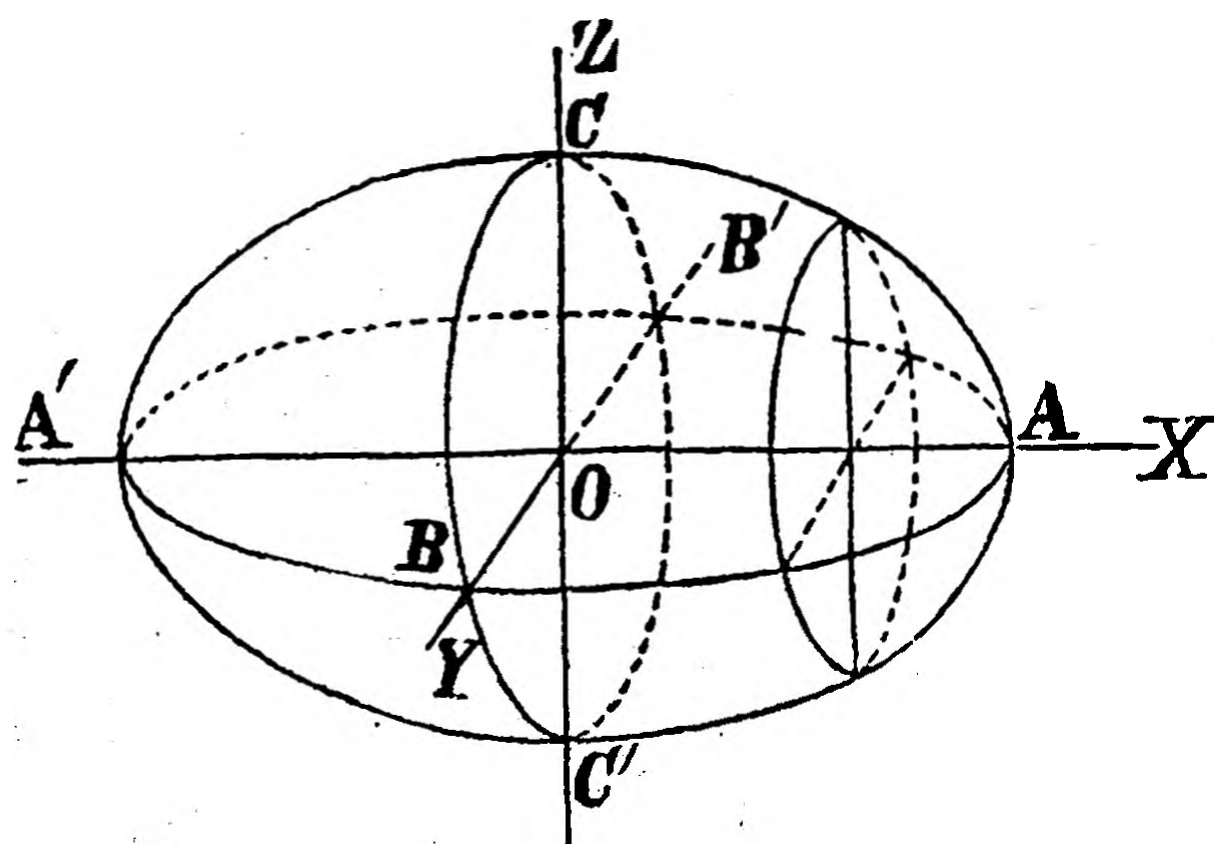
или:

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \quad (2)$$

Полагая въ уравненіи (1):

$$y = 0, \quad z = 0; \quad x = 0, \quad z = 0; \quad x = 0, \quad y = 0$$

Фиг. 162.



найдемъ:

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

Это суть точки A и A' , B и B' , C и C' , въ которыхъ координатныя оси X, Y, Z (фиг. 162) встрѣчаютъ поверхность.)

Эти точки называются *вершинами* эллипсоида, при чемъ $2a = AA'$ называется *большою осью*, $2b = BB'$ — *среднею*, а $2c = CC'$ — *малою*, если $a > b > c$.

§ 564. Если вмѣсто координатъ x, y, z подставимъ въ уравненіе (1):

$$x = \rho \cos \alpha \quad , \quad y = \rho \cos \beta \quad , \quad z = \rho \cos \gamma$$

то найдемъ, замѣчая, что:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

слѣдующее:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \cos^2 \beta + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \cos^2 \gamma \quad (3)$$

Такъ какъ, по условію, $a > b > c$, то $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, $\frac{1}{c} > \frac{1}{a}$, слѣдовательно два послѣдніе члена второй части уравненія (3) суть всегда положительные, а вторая его часть будетъ *наименьшая*, когда:

$$\cos \beta = 0 \quad \text{и} \quad \cos \gamma = 0$$

т. е. когда направленіе радіуса вектора ρ совпадаетъ съ осью X . Но, когда вторая часть будетъ *наименьшая*, то $\rho = a$ будетъ *наибольшее*, слѣдовательно вершины A и A' эллипсоида суть самыя отдаленныя точки отъ начала координатъ или отъ центра. Легко показать, что C и C' будутъ самыя ближайшія точки отъ центра поверхности.

§ 565. Если въ уравненіи (1) сдѣлаемъ, послѣдовательно, $z=0$, $y=0$, $x=0$, то найдемъ пересѣченія поверхности съ координатными плоскостями XY , XZ , YZ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

это суть эллипсы, проходящіе черезъ вершины эллипсоида. Полагая въ уравненіи (1) $z = \alpha$, найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{c^2}$$

или:

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2} \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2} \right)} = 1 \quad (5)$$

Слѣдовательно пересѣченіе эллипсоида съ плоскостью $z = \alpha$ есть эллипсъ, коего оси суть:

$$a \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2}} \quad , \quad b \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2}} \quad (6)$$

Пока $\alpha < c$ эллипсъ будетъ дѣйствительный, его оси будутъ уменьшаться, по мѣрѣ возрастанія α отъ нуля до c . Въ вершинѣ эллипсъ обращается въ нуль, а затѣмъ для всѣхъ значеній $\alpha > c$ будетъ мнимый. Поверхность не распространяется дальше вершины C . Точно такіе-же результаты получимъ, пересѣкая эллипсоидъ плоскостями параллельными плоскостямъ XZ и YZ .

Найдемъ теперь пересѣченіе, какой-нибудь, плоскости:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \quad (7)$$

съ поверхностью. Подставимъ вмѣсто z въ уравненіе (1) его выраженіе (7), то найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma)^2}{c^2} = 1 \quad (8)$$

Составляя выраженіе $a^2_{12} - a_{11}a_{22}$ (§ 236), найдемъ:

$$-\left(\frac{\alpha^2}{b^2c^2} + \frac{\beta^2}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right) \quad (9)$$

величина всегда отрицательная, слѣдовательно уравненіе (8) представляетъ эллипсъ на плоскости XU , какіе бы ни были коэффициенты α, β, γ . Но этотъ эллипсъ есть проэктія кривой пересѣченія плоскости (7) съ поверхностью (1), которая, очевидно, будетъ также эллипсъ. слѣдовательно пересѣченіе всякой плоскости съ эллипсоидомъ есть эллипсъ. Откуда заключаемъ, что эллипсоидъ есть *замкнутая* поверхность.

Замѣтимъ, что эллипсы, полученные отъ пересѣченія поверхности параллельными плоскостями, подобны, такъ какъ члены второй степени въ уравненіи (8) не зависятъ отъ γ , съ измѣненіемъ котораго плоскость (7) переносится параллельно самой себѣ. Это свойство принадлежитъ всѣмъ поверхностямъ втораго порядка.

§ 566. *Круговыя сѣченія.* Пересѣчемъ эллипсоидъ плоскостью, проходящей по средней оси b . Если эта плоскость совпадетъ съ плоскостью XU , то оси эллипса будутъ a и b , а если плоскость совпадаетъ съ плоскостью YZ , то оси эллипса будутъ b и c . Ось b остается постоянною, а другая будетъ измѣняться съ наклоненіемъ плоскости сѣченія отъ c до a , слѣдовательно есть такое положеніе сѣкущей плоскости, при которомъ другая ось эллипса будетъ равна b , а если обѣ оси въ эллипсѣ равны, то онъ будетъ кругомъ.

Итакъ видимъ, что есть такое положеніе сѣкущей плоскости, при которомъ пересѣченіе ея съ эллипсоидомъ есть кругъ. Если есть хоть од-

но положеніе сѣкущей плоскости, которое даетъ кругъ, то пересѣченія всѣхъ плоскостей, параллельныхъ этому направленію плоскости, съ поверхностью, будутъ круги, такъ какъ выше замѣтили, что всѣ сѣченія параллельными плоскостями подобны.

Убѣдившись въ этомъ, пересѣчемъ эллипсоидъ плоскостью, проходящей черезъ его центръ и положимъ, что это сѣченіе есть кругъ, коего радіусъ назовемъ r . Этотъ кругъ будетъ находится на шарѣ, коего центръ находится въ началѣ координатъ, а уравненіе есть:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

или:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

Если это уравненіе вычтемъ изъ уравненія (1), то найдемъ:

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) + y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) + z^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) = 0 \quad (10)$$

Это есть уравненіе поверхности, проходящей черезъ пересѣченіе эллипсоида съ шаромъ, а какъ оно однородное и втораго порядка, то это конусъ, коего вершина находится въ центрѣ. Чтобы эллипсоидъ и шаръ имѣли пересѣченіемъ кругъ, необходимо, чтобы конусъ (10) преобразовался въ двѣ плоскости, проходящія черезъ начало, а это требуетъ, чтобы одинъ изъ членовъ уравненія конуса (10) исчезъ. Одинъ изъ членовъ исчезнетъ если положимъ $r = a$, $r = b$, $r = c$; при этихъ положеніяхъ уравненія конусовъ сдѣлаются:

$$\begin{aligned} y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + z^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) &= 0 \\ x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) &= 0 \\ x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) + y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

полагая $a > b > c$ первое и третее уравненія представляютъ мнимыя плоскости, а второе преобразуется въ форму:

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{z}{c} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} \quad (12)$$

которая представляетъ двѣ плоскости, проходящія по средней оси поверхности.

Если означимъ черезъ φ наклоненіе этихъ плоскостей къ плоскости XU , то будемъ имѣть:

$$\cos \varphi = \pm \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \quad \sin \varphi = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad (13)$$

а слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}} \quad (14)$$

Изъ этого видимъ, что въ эллипсоидѣ есть два ряда сѣченій, дающихъ кругъ. Плоскости сѣченій параллельны средней оси b и наклонены къ плоскости XU подъ углами (14).

Когда плоскости круговыхъ сѣченій, будутъ переноситься, отдаляясь отъ центра, параллельно самимъ себѣ, то круги будутъ дѣлаться все меньше и меньше, наконецъ, когда плоскости сѣченій коснутся поверхности, то круги обращаются въ точки, которыя называются *круглячками эллипсоида* или *омбилликами* (ombilic, point ombilical); такихъ круглячковъ на поверхности эллипсоида четыре. Координаты этихъ точекъ легко найти.

Легко видѣть, что круглячекъ будетъ находиться на эллипсѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (15)$$

въ концѣ діаметра, сопряженнаго діаметру равному b въ эллипсѣ (15). Но мы знаемъ, что:

$$b_z^2 = a^2 - c^2 x'^2 = a^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} x'^2$$

откуда:

$$x' = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z' = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \quad (16)$$

суть координаты четырехъ круглячковъ.

§ 567. Если въ уравненіе (1) эллипсоида $a = b$, то оно сдѣлается:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

изъ котораго видимъ, что всѣ плоскости перпендикулярныя къ оси Z пересѣкаютъ поверхность по кругамъ, слѣдовательно поверхность есть эллипсоидъ вращенія около оси Z .

Если:

$$a = b = c$$

то эллипсоидъ будетъ шаръ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Если $c = \infty$ или корень уравненія (16) § 546, $\lambda_3 = 0$, то эллипсоидъ обращается въ эллиптическій цилиндръ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Наконецъ, если и другой корень $\lambda_2 = 0$, то будемъ имѣть двѣ плоскости:

$$x = \pm a$$

§ 568. Координаты точекъ поверхности эллипсоида заключены въ предѣлахъ $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$.

Поэтому можно положить:

$$x = a \cdot \cos \alpha \quad , \quad y = b \cdot \cos \beta \quad , \quad z = c \cdot \cos \gamma$$

подставляя въ уравненіе (1) найдемъ, что:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

откуда видимъ, что α, β, γ суть углы, которые составляетъ съ координатными осями прямая, проходящая черезъ начало, къ нѣкоторой точкѣ поверхности. Каждой точкѣ поверхности соотвѣтствуетъ прямая (α, β, γ) и обратно. Въ вершинѣ A , гдѣ $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ имѣемъ:

$$\cos \alpha = 1 \quad , \quad \cos \beta = 0 \quad , \quad \cos \gamma = 0$$

слѣдовательно прямая направляется по оси X . Но это исключительный случай, въ которомъ прямая проходитъ черезъ соотвѣтственную точку на поверхности.

Если черезъ центръ проведемъ двѣ перпендикулярныя прямыя $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, то:

$$\cos \alpha' \cos \alpha'' + \cos \beta' \cos \beta'' + \cos \gamma' \cos \gamma'' = 0 \quad (17)$$

а соотвѣтствующія точки (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) удовлетворяютъ уравненіе:

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 0 \quad (18)$$

Обратно, если координаты двухъ точекъ на поверхности удовлетворяютъ

уравнение (18), то соответствующие углы будутъ удовлетворять уравнение (17). Длина діаметра, проходящаго черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$, будетъ:

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 \cos^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \beta' + c^2 \cos^2 \gamma'$$

α , β и γ называются *угловыми координатами*.

§ 569. *Касательная плоскость*. Въ § 514, (36) мы нашли уравнение касательной плоскости къ поверхности втораго порядка $f=0$ въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$:

$$(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (y - y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} + (z - z_1) \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \quad (19)$$

откуда для эллипсоида имѣемъ:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1 \quad (20)$$

гдѣ:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \quad (21)$$

Если точка $(x_1 y_1 z_1)$ не удовлетворяетъ уравнение (21), т. е. если она находится внѣ или внутри поверхности, то (20) будетъ уравнение *полярной* плоскости, коей полюсь есть точка $(x_1 y_1 z_1)$.

Въ угловыхъ координатахъ уравнение (20) сдѣлается:

$$\frac{x}{a} \cos \alpha' + \frac{y}{b} \cos \beta' + \frac{z}{c} \cos \gamma' = 1 \quad (22)$$

Означимъ черезъ p перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на касательную плоскость (20). Пусть α, β, γ будутъ углы, которые p составляетъ съ осями X, Y, Z , то уравнение касательной плоскости можно написать такъ:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p \quad (23)$$

Сравнивая съ (20) и (22), найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{\cos \alpha}{p}, \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{\cos \beta}{p}, \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{\cos \gamma}{p} \quad (24)$$

$$\frac{\cos \alpha'}{a} = \frac{\cos \alpha}{p}, \quad \frac{\cos \beta'}{b} = \frac{\cos \beta}{p}, \quad \frac{\cos \gamma'}{c} = \frac{\cos \gamma}{p} \quad (25)$$

откуда найдемъ:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}, \quad \frac{1}{p^2} = \frac{\cos^2 \alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta'}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma'}{c^2} \quad (26)$$

Предложеніе. Если изъ центра эллипсоида опустимъ перпендикуляры на три перпендикулярныя между собою касательныя плоскости къ поверхности, то сумма квадратовъ этихъ перпендикуляровъ будетъ величина постоянная.

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ будутъ направленія трехъ перпендикуляровъ p_1, p_2, p_3 , то будемъ имѣть (24):

$$p_1^2 = a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \beta_1 + c^2 \cos^2 \gamma_1$$

$$p_2^2 = a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \cos^2 \beta_2 + c^2 \cos^2 \gamma_2$$

$$p_3^2 = a^2 \cos^2 \alpha_3 + b^2 \cos^2 \beta_3 + c^2 \cos^2 \gamma_3$$

складывая и замѣчая, что:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

найдемъ:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad (27)$$

Слѣдствіе. Отсюда слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто вершинъ прямоугольнаго трехграннаго угла, описаннаго около эллипсоида, есть шаръ, коего радіусъ есть $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

§ 570. *Нормальная линія.* Перпендикуляръ къ касательной плоскости въ точкѣ касанія называется *нормалью* къ поверхности. Его уравненія суть (§ 515):

$$\frac{x - x_1}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z}{c^2}} \quad (28)$$

или:

$$(x - x_1) \frac{a^2}{x_1} = (y - y_1) \frac{b^2}{y_1} = (z - z_1) \frac{c^2}{z_1} \quad (29)$$

Задача. Сколько можно провести нормальныхъ линій къ эллипсоиду черезъ данную точку внѣ его?

Рѣшеніе. Пусть координаты данной точки будутъ x', y', z' . Черезъ точку $(x'y'z')$ проведемъ нормаль къ поверхности, пусть ея точка встрѣчи съ поверхностью будетъ $(x_1 y_1 z_1)$.

Координаты x_1, y_1, z_1 будутъ удовлетворять уравненія:

$$\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z_1}{c^2}}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (30)$$

Пусть:

$$\frac{x' - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y' - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z' - z_1}{\frac{z_1}{c^2}} = k$$

откуда, найдемъ:

$$x_1 = \frac{a^2 x'}{a^2 + k}, \quad y_1 = \frac{b^2 y'}{b^2 + k}, \quad z_1 = \frac{c^2 z'}{a^2 + k} \quad (31)$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе эллипсоида, найдемъ:

$$\frac{a^2 x'^2}{(a^2 + k)^2} + \frac{b^2 y'^2}{(b^2 + k)^2} + \frac{c^2 z'^2}{(c^2 + k)^2} = 1$$

или:

$$(a^2 + k)^2 (b^2 + k)^2 (c^2 + k)^2 - a^2 (b^2 + k)^2 (c^2 + k)^2 x'^2 - \\ - b^2 (a^2 + k)^2 (c^2 + k)^2 y'^2 - c^2 (a^2 + k)^2 (b^2 + k)^2 z'^2 = 0 \quad (32)$$

Это уравненіе шестой степени относительно k , оно всегда имѣетъ два действительные корня, такъ какъ, полагая послѣдовательно $k = -\infty$, $-a^2$, $+\infty$, получимъ результаты:

+ — +

Перенося начало координатъ въ точку $(x' y' z')$, назовемъ новыя координаты точки $(x_1 y_1 z_1)$ черезъ u, v, w , то уравненія нормали сдѣлаются (28):

$$\frac{u}{u + x'} = \frac{v}{v + y'} = \frac{w}{w + z'}$$

откуда получимъ:

$$\frac{u(v + y')}{b^2} = \frac{v(u + x')}{a^2}, \quad \frac{u(w + z')}{c^2} = \frac{w(u + x')}{a^2}, \quad \frac{v(w + z')}{c^2} = \frac{w(v + y')}{b^2}$$

или:

$$(a^2 - b^2) uv = b^2 x' v - a^2 y' u$$

$$(c^2 - a^2) uw = a^2 z' u - c^2 x' w$$

$$(b^2 - c^2) vw = c^2 y' w - b^2 z' v$$

Умножая эти уравненія на z', y', x' и складывая, найдемъ:

$$x' (b^2 - c^2) vw + y' (c^2 - a^2) uw + z' (a^2 - b^2) uv = 0$$

или:

$$x' (b^2 - c^2) yz + y' (c^2 - a^2) xz + z' (a^2 - b^2) xy = 0 \quad (33)$$

а это есть конусъ (34) § 535. Слѣдовательно черезъ данную точку внѣ эллипсоида можно провести шесть нормальныхъ линій къ поверхности, изъ коихъ двѣ всегда дѣйствительны; всѣ шесть нормальныя линіи лежатъ на поверхности конуса, коего вершина находится въ данной точкѣ x', y', z' .

§ 571. *Діаметральная плоскость.* Если черезъ α, β, γ означимъ направление прямой, проходящей черезъ центръ эллипсоида, то уравненіе діаметральной, сопряженной этому направленію, плоскости будетъ:

$$\frac{x}{a^2} \cos \alpha + \frac{y}{b^2} \cos \beta + \frac{z}{c^2} \cos \gamma = 0 \quad (34)$$

Пусть x_1, y_1, z_1 будутъ координаты точки встрѣчи прямой $(\alpha \beta \gamma)$ съ поверхностью, то:

$$\frac{x_1}{\cos \alpha} = \frac{y_1}{\cos \beta} = \frac{z_1}{\cos \gamma} \quad (35)$$

откуда уравненіе (34) сдѣлается:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 0 \quad (36)$$

Это уравненіе плоскости параллельной касательной плоскости въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$. Слѣдовательно діаметральная плоскость, сопряженная направленію, соединяющему центръ съ точкою касанія, параллельна касательной плоскости.

Если черезъ ρ , означимъ полудіаметръ, проходящій черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$, то будемъ имѣть:

$$x_1 = \rho_1 \cos \alpha_1, \quad y_1 = \rho_1 \cos \beta_1, \quad z_1 = \rho_1 \cos \gamma_1$$

гдѣ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ есть направленіе ρ_1 . Подставляя эти выраженія въ уравненіе эллипсоида будемъ имѣть:

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{\cos^2 \alpha_1}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta_1}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma_1}{c^2} \quad (37)$$

Возьмемъ еще два полудіаметра ρ_2 и ρ_3 и положимъ, что ρ_1, ρ_2, ρ_3 , перпендикулярны между собою. Пусть направленія ρ_2 и ρ_3 будутъ: $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, то будемъ имѣть также слѣдующее:

$$\frac{1}{\rho_2^2} = \frac{\cos^2 \alpha_2}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta_2}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma_2}{c^2} \quad (38)$$

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{\cos^2 \alpha_3}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta_3}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma_3}{c^2}$$

Складывая (37) и (38), найдемъ:

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (39)$$

Слѣдовательно сумма квадратовъ обратныхъ величинъ трехъ перпендикулярныхъ діаметровъ есть величина постоянная.

§ 572. Пусть $2a_1, 2b_1, 2c_1$ будутъ длины трехъ сопряженныхъ діаметровъ эллипсоида, т. е. такихъ діаметровъ, каждый изъ которыхъ есть сопряженное направленіе діаметральной плоскости, проходящей черезъ два другіе.

Пусть $(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), (x_3 y_3 z_3)$ будутъ точки встрѣчи этихъ діаметровъ съ поверхностью. Если выразимъ, что діаметральная плоскость:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 0$$

сопряженная первому діаметру, заключаетъ два другіе, то будемъ имѣть:

$$\frac{x_2 x_1}{a^2} + \frac{y_2 y_1}{b^2} + \frac{z_2 z_1}{c^2} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{x_3 x_1}{a^2} + \frac{y_3 y_1}{b^2} + \frac{z_3 z_1}{c^2} = 0$$

Точно также, если діаметральная плоскость сопряженная второму діаметру:

$$\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} + \frac{zz_2}{c^2} = 0$$

проходитъ черезъ третій, то:

$$\frac{x_2 x_3}{a^2} + \frac{y_2 y_3}{b^2} + \frac{z_2 z_3}{c^2} = 0 \quad (41)$$

Въ угловыхъ координатахъ уравненія (40) и (41) сдѣлаются:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0 \\ \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 &= 0 \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

такъ что направленія (α, β, γ) , соответствующія $(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2)$ и $(x_3 y_3 z_3)$,

трехъ сопряженныхъ діаметровъ, перпендикулярны между собою и мы будемъ имѣть:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$

$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1$$

$$\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

а также и:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$

$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1$$

$$\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

§ 573. Въ § 543 мы видѣли, что всякая центральная поверхность будучи отнесена къ какому-нибудь полярному тетраэдру, коего одна изъ граней находится на безконечности, имѣетъ форму:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H$$

или:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1$$

Слѣдовательно уравненіе поверхности имѣетъ такую-же форму, только координатныя оси не перпендикулярны между собою. Величины $2a_1, 2b_1, 2c_1$, суть длины сопряженныхъ діаметровъ.

Если a_1, b_1, c_1 суть длины сопряженныхъ полудіаметровъ, то имѣемъ:

$$a_1^2 = a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\cos^2\beta_1 + c^2\cos^2\gamma_1$$

$$b_1^2 = a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\cos^2\beta_2 + c^2\cos^2\gamma_2$$

$$c_1^2 = a^2\cos^2\alpha_3 + b^2\cos^2\beta_3 + c^2\cos^2\gamma_3$$

складывая, найдемъ:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

такъ какъ направленія $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ перпендикулярны между собою (§ 550). Слѣдовательно сумма квадратовъ трехъ сопряженныхъ діаметровъ равна суммѣ квадратовъ осей поверхности.

§ 574. *Предложеніе.* Объемъ параллелепипеда, построеннаго на трехъ сопряженныхъ діаметрахъ, равенъ объему параллелепипеда, построеннаго на осяхъ.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, параллелепипедъ, построенный на діаметрахъ a_1, b_1, c_1 равенъ шесть разъ взятой треугольной пирамидѣ, построенной на тѣхъ-же діаметрахъ.

Слѣдовательно объемъ V параллелепипеда будетъ:

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} = abc$$

такъ какъ определитель, составленный изъ косинусовъ угловъ равенъ единицѣ.

§ 575. Если три сопряженные діаметра равны, то должны имѣть:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0, \quad \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1$$

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 = 0, \quad \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1$$

$$\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 = 0, \quad \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 = 1$$

и:

$$\begin{aligned} a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \beta_1 + c^2 \cos^2 \gamma_1 &= a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \cos^2 \beta_2 + c^2 \cos^2 \gamma_2 = \\ &= a^2 \cos^2 \alpha_3 + b^2 \cos^2 \beta_3 + c^2 \cos^2 \gamma_3 \end{aligned}$$

Восемь уравненій между девятью неизвѣстными, слѣдовательно есть безчисленное множество равныхъ сопряженныхъ діаметровъ. Пусть длина одного изъ нихъ есть a_1 , то будемъ имѣть:

$$a_1^2 = a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \beta_1 + c^2 \cos^2 \gamma_1$$

$$a_1^2 = a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \cos^2 \beta_2 + c^2 \cos^2 \gamma_2$$

$$a_1^2 = a^2 \cos^2 \alpha_3 + b^2 \cos^2 \beta_3 + c^2 \cos^2 \gamma_3$$

складывая, найдемъ:

$$3a_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Слѣдовательно, концы сопряженныхъ равныхъ діаметровъ находятся на пересѣченіи эллипсоида съ шаромъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

§ 576. *Задача.* Найти оси эллипса, происшедшаго отъ пересѣченія эллипсоида плоскостью, проходящей черезъ центръ?

Рѣшеніе. Пусть α, β, γ будутъ углы, которые перпендикуляръ, составленный изъ начала координатъ къ данной плоскости, составляетъ съ координатными осями. Пусть ρ будетъ длина этого перпендикуляра до пересѣченія съ поверхностью. Если черезъ a_1 и b_1 означимъ оси искомаго

эллипса, то будемъ имѣть (§ 571):

$$\frac{1}{a^2_1} + \frac{1}{b^2_1} + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

но:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

слѣдовательно:

$$\frac{1}{a^2_1} + \frac{1}{b^2_1} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

или:

$$\frac{1}{a^2_1} + \frac{1}{b^2_1} = \frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} + \frac{\sin^2\gamma}{c^2}$$

Но (§ 569):

$$\frac{1}{a^2_1 b^2_1} = \frac{\rho^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{\cos^2\alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2\beta}{a^2 c^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2 b^2}$$

Слѣдовательно $\frac{1}{a^2_1}$ и $\frac{1}{b^2_1}$ суть корни квадратнаго уравненія:

$$\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} + \frac{\sin^2\gamma}{c^2} \right) + \frac{\cos^2\alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2\beta}{a^2 c^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2 b^2} = 0$$

или:

$$\frac{a^2 \cos^2\alpha}{a^2 - x^2} + \frac{b^2 \cos^2\beta}{b^2 - x^2} + \frac{c^2 \cos^2\gamma}{c^2 - x^2} = 0$$

§ 577. Мы нашли уравненіе касательной плоскости въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ къ эллипсоиду:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} + \frac{z z_1}{c^2} - 1 = 0$$

Координаты этой плоскости будутъ:

$$\xi = \frac{x_1}{a^2}, \quad \eta = \frac{y_1}{b^2}, \quad \zeta = \frac{z_1}{c^2}$$

откуда:

$$x_1 = a^2 \xi, \quad y_1 = b^2 \eta, \quad z_1 = c^2 \zeta$$

Такъ какъ точка $(x_1 y_1 z_1)$ находится на поверхности эллипсоида, то координаты x_1, y_1, z_1 должны удовлетворять уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

подставляя выражения для x_1, y_1, z_1 , найдемъ:

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 1 \quad (43)$$

Это уравненіе эллипсоида въ плоскостныхъ координатахъ.

Если ξ_1, η_1, ζ_1 суть координаты касательной плоскости къ эллипсоиду, то уравненіе точки касанія будетъ:

$$a^2\xi_1\xi + b^2\eta_1\eta + c^2\zeta_1\zeta = 1 \quad (44)$$

Если плоскость данная координатами ξ_1, η_1, ζ_1 не касается поверхности, то уравненіе (44) будетъ, полюсь этой плоскости.

Однополюй гиперболоидъ.

§ 578. Когда два корня въ уравненіи (16) § 546 положительные, то уравненіе поверхности имѣетъ форму:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (45)$$

или:

$$b^2c^2a^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \quad (46)$$

Если въ уравненіи (45) сдѣлаемъ, послѣдовательно, $z = 0, y = 0, x = 0$, то найдемъ пересѣченіе гиперболоида съ плоскостями XY, XZ, YZ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

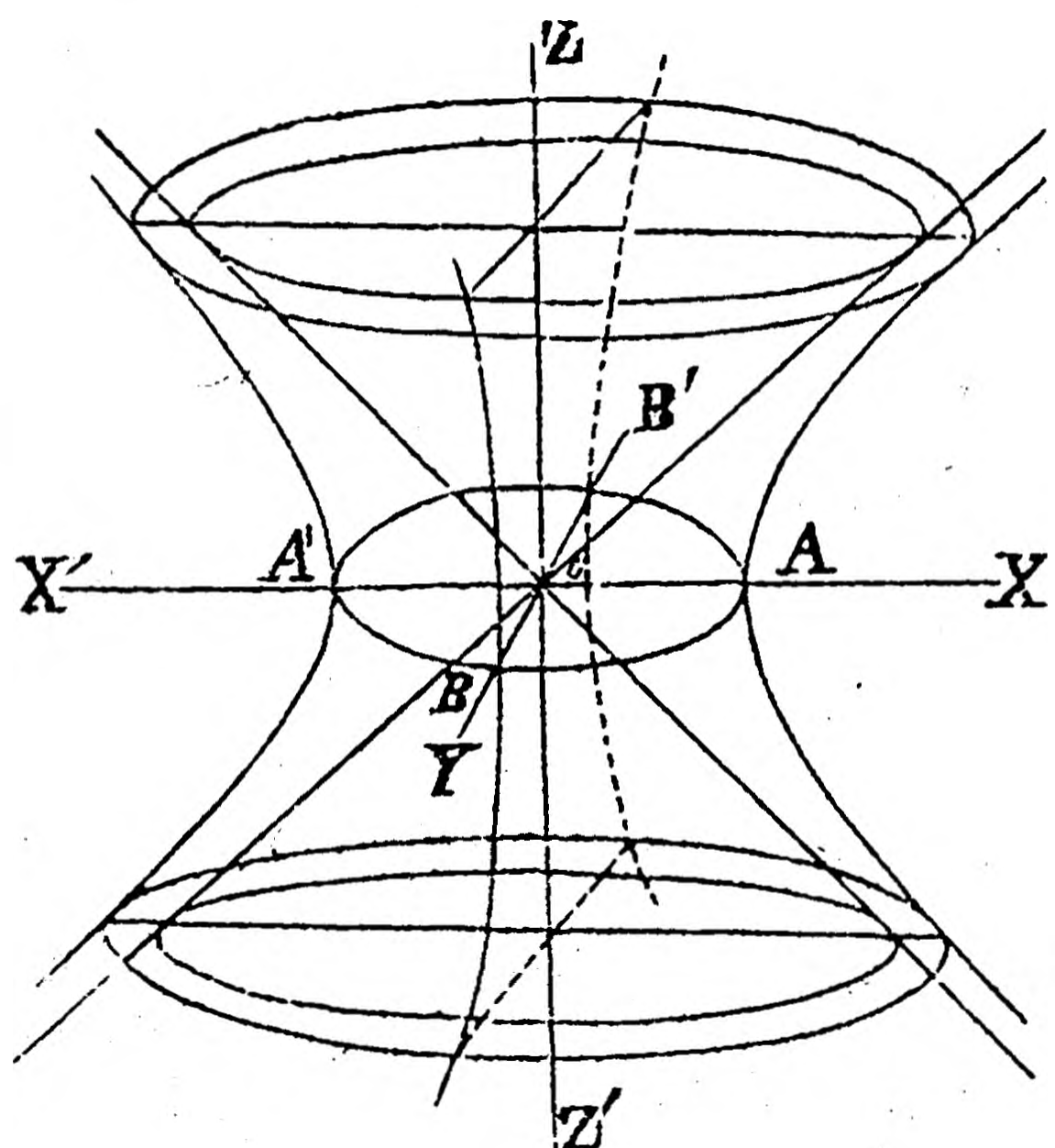
изъ коихъ первое есть эллипсъ, а два послѣднія—гиперболы.

Дѣлая, послѣдовательно, въ уравненіи (45) $y = 0, z = 0; x = 0, z = 0;$

Фиг. 163.

$x = 0, y = 0$, найдемъ координаты точекъ пересѣченія осей съ поверхностью:

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm ci$$



Откуда видимъ, что ось X и ось Y встрѣчаютъ поверхность, а ось Z ее не встрѣчаетъ; мы будемъ предполагать, что $a > b > c$. Точки встрѣчи осей X и Y съ поверхностью обозначенныя черезъ $A, A'; B, B'$ (фиг. 163) называютъ *вершинами гиперболоида*. Онѣ лежатъ въ вершинахъ эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

который называется *горловымъ эллипсомъ*.

Чтобы составить ясное представление о формѣ этой поверхности, пересѣчемъ ее плоскостями параллельными плоскости XY. Для этого положимъ $z = \gamma$, то найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}$$

или:

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)} = 1 \quad (47)$$

Слѣдовательно проэція сѣченія есть эллипсъ, коего оси суть:

$$a \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{c^2}}, \quad b \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{c^2}}$$

По мѣрѣ удаленія плоскости $z = \gamma$, какъ съ положительной стороны плоскости XY, такъ и съ отрицательной, оси эллипса (47) возрастаютъ неопредѣленно, начиная съ горловаго эллипса, который соотвѣтствуетъ значенію $\gamma = 0$.

Пересѣчемъ поверхность плоскостями параллельными плоскости XZ, полагая $y = \beta$. Кривая пересѣченія будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\beta^2}{b^2} \quad (48)$$

или:

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right)} = 1 \quad (49)$$

Это гипербола, коей оси суть:

$$a \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{b^2}}, \quad c \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{b^2}} \quad (50)$$

Начиная съ $\beta = 0$ до $\beta = b$ оси гиперболы уменьшаются и при $\beta = b$ уравненіе (48) дѣлается:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 0$$

или:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

двѣ прямыя. Слѣдовательно пересѣченіе плоскости $y = \pm b$ съ гиперболоидомъ есть двѣ прямыя линіи. Изъ этого видимъ, что однополый гиперболоидъ есть такая поверхность, на которой помѣщается и безконечная прямая.

Когда β сдѣлается больше b , то квадраты осей (50) гиперболы перемѣняютъ знаки. Гиперболы поворачиваются, т. е. сдѣлаются сопряженными гиперболамъ (49), и ихъ оси возрастаютъ неопредѣленно.

Тоже самое можно сказать и относительно пересѣченія гиперболоида съ плоскостями $x = \alpha$. Плоскость $\alpha = 0$ даетъ гиперболу:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Затѣмъ, по мѣрѣ возрастанія α , оси гиперболъ уменьшаются; при $x = \pm a$ гиперболы обращаются въ двѣ прямыя, а когда α дѣлается больше a , то гиперболы поворачиваются и ихъ оси возрастаютъ неопредѣленно.

Разсмотримъ теперь пересѣченіе, какой-нибудь, плоскости:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \quad (51)$$

съ поверхностью. Подставляя въ уравненіе (45) выраженіе для z , найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma)^2}{c^2} = 1$$

развертывая и составляя выраженіе $a^2_{12} - a_{11}a_{22}$, найдемъ его въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{c^2} - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{\alpha^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{\beta^2}{c^2}\right) = \frac{1}{a^2b^2c^2} (\alpha^2a^2 + \beta^2b^2 - c^2)$$

Изъ этого выраженія видимъ, что пересѣченіе плоскости съ однополымъ гиперболоидомъ будетъ эллипсъ, если.

$$\alpha^2a^2 + \beta^2b^2 - c^2 < 0$$

это пересѣченіе будетъ гипербола, если:

$$\alpha^2a^2 + \beta^2b^2 - c^2 > 0$$

и будетъ парабола, если:

$$\alpha^2a^2 + \beta^2b^2 - c^2 = 0$$

Этому послѣднему условію мы удовлетворимъ, если положимъ:

$$\alpha = \frac{c}{a} \cos \varphi \quad , \quad \beta = \frac{c}{b} \sin \varphi$$

гдѣ φ есть неопредѣленный уголъ. Подставляя въ (51) выраженія для α и β и дѣлая $\gamma = 0$, будемъ имѣть:

$$\frac{z}{c} = \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi \quad (52)$$

Откуда заключаемъ, что пересѣченіе гиперболоида съ плоскостями параллельными плоскости (52) будетъ парабола.)

§ 579. *Круговыя сѣченія.* Дѣлая разсужденія относительно плоскости, проходящей по оси a , подобныя тѣмъ, которыя намъ показали существованіе круговаго сѣченія въ эллипсоидѣ, мы увидимъ, что и въ гиперболоидѣ есть такое-же и именно то, котораго плоскость, проходящая по оси a будетъ такъ наклонена къ плоскости XU , что малая ось эллипса пересѣченія будетъ равна a .

Аналитическое выраженіе для круговыхъ сѣченій получится, выражая, что конусъ:

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{r^2}\right)z^2 = 0$$

преобразуется въ двѣ плоскости. Полагая, послѣдовательно, $r^2 = a^2$, $r^2 = b^2$, $r^2 = -c^2$, найдемъ плоскости круговыхъ сѣченій:

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)z^2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)y^2 = 0$$

такъ какъ мы полагаемъ, что $a > b > c$, то два послѣднія уравненія представляютъ мнимыя плоскости, а первому можно дать форму:

$$y = \pm z \frac{b}{c} \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2}}$$

плоскость параллельная оси X . Изъ этого видимъ, что въ однополонъ гиперболоидѣ есть двѣ системы плоскостей, дающихъ круговыя сѣченія.

§ 580. *Ассимптотическій конусъ.* Поверхность:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

есть ассимптотическій конусъ; разстояніе между нимъ и гиперболоидомъ уменьшается по мѣрѣ удаленія отъ начала координатъ по поверхности. Это легко показать; вычтемъ изъ уравненія гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

уравненіе конуса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0$$

это даетъ:

$$\frac{\zeta^2}{c^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

откуда:

$$\zeta - z = \frac{c^2}{z + \zeta}$$

когда z будетъ возрастать неопредѣленно, то вторая часть будетъ убывать неопредѣленно и на бесконечности она слѣдается равна нулю; слѣдовательно $\zeta = z$, т. е. точки на конусѣ и гиперболоидѣ совпадутъ. Очевидно, что весь конусъ находится внутри поверхности.

Такъ какъ коэффиціенты въ обѣихъ поверхностяхъ равны, то ихъ пересѣченія плоскостью, будутъ подобныя и концентрическія кривыя. Слѣдовательно плоскость, пересѣкающая конусъ по эллипсу, пересѣчетъ по эллипсу и гиперболоидъ; пересѣкающая по гиперболѣ, пересѣчетъ по гиперболѣ и гиперболоидъ. Касательная къ конусу плоскость пересѣкаетъ гиперболоидъ по гиперболѣ.

§ 581. Замѣтимъ еще, что поверхности выраженыя уравненіями:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

представляютъ ту же поверхность, только мнимая ось въ первой направлена по оси Y , а во второй по оси X . Если въ уравненіи гиперболоида $a = b$, то уравненіе:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

представляетъ гиперболоидъ вращенія около оси Z . Если a или b или c равны бесконечности, то мы будемъ имѣть цилиндрическія поверхности:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

первыя двѣ суть гиперболическіе цилиндры, а третья эллиптическій.

§ 582. Мы выше видѣли, что на однополномъ гиперболоидѣ помѣщаются четыре пары прямыхъ линій, именно: пересѣченія гиперболоида съ плоскостями:

$$x = \pm a \quad , \quad y = \pm b$$

Посмотримъ есть-ли еще на гиперболоидѣ прямыя, кромѣ этихъ послѣднихъ. Для этого попробуемъ помѣстить на немъ прямую:

$$x = \alpha z + \beta \quad , \quad y = \gamma z + \delta$$

Подставляя въ уравненіе гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

эти выраженія, найдемъ:

$$\frac{(\alpha z + \beta)^2}{a^2} + \frac{(\gamma z + \delta)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Чтобы это уравненіе удовлетворялось независимо отъ z , необходимо имѣть:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \quad , \quad \frac{\alpha\beta}{a^2} + \frac{\gamma\delta}{b^2} = 0 \quad , \quad \frac{\beta^2}{a^2} + \frac{\delta^2}{b^2} - 1 = 0$$

Изъ послѣдняго видимъ, что точка пересѣченія прямой съ плоскостью XU находится на горловомъ эллипсѣ.

Второе уравненіе даетъ:

$$\frac{\frac{\alpha}{a}}{\frac{\beta}{a}} = -\frac{\frac{\gamma}{b}}{\frac{\delta}{b}} = \pm \frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} + \frac{b^2}{\delta^2}}} = \pm \frac{\beta\delta}{abc}$$

откуда:

$$\alpha = \pm \frac{a\delta}{bc} \quad , \quad \gamma = \pm \frac{b\beta}{ac}$$

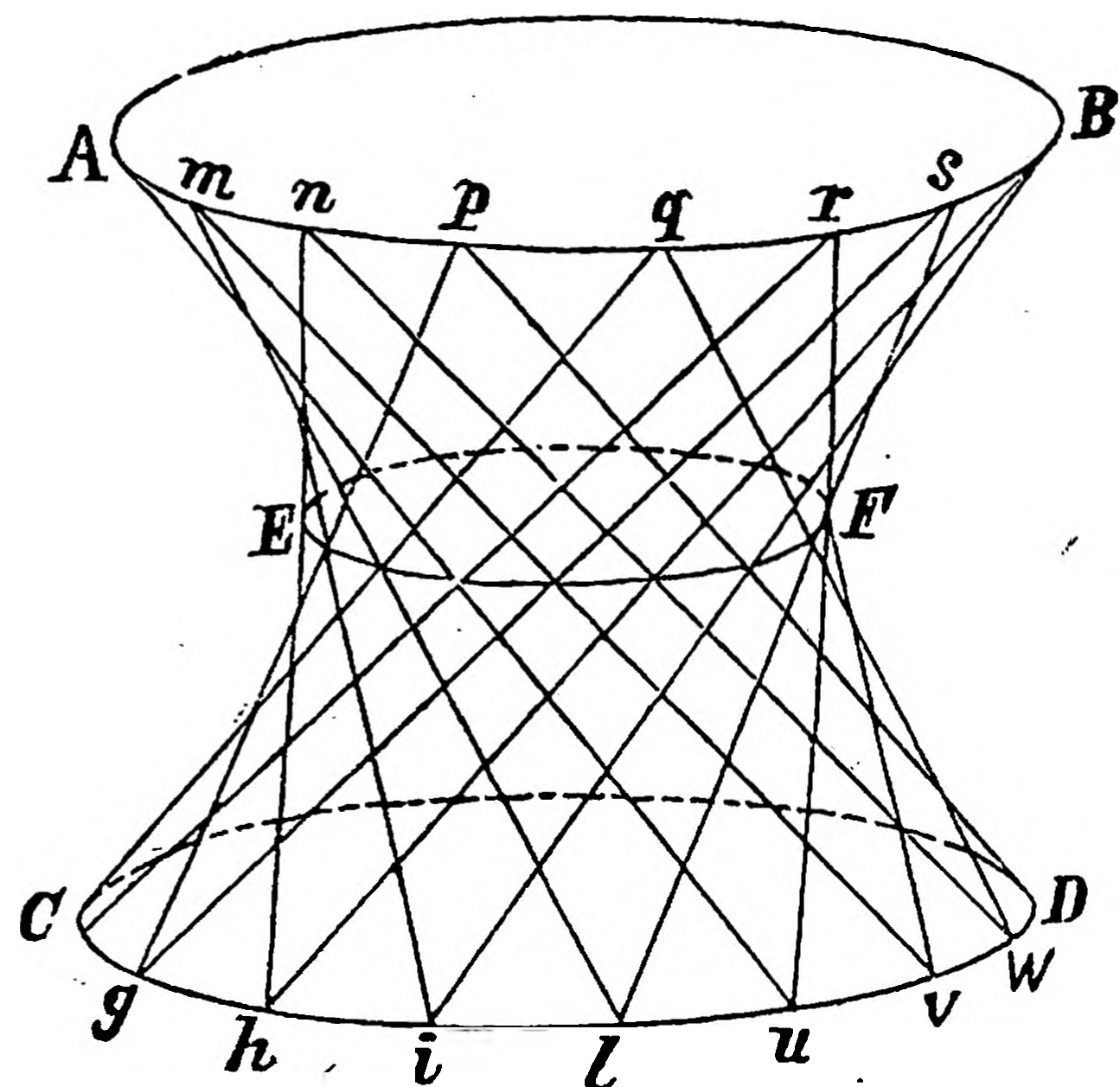
Эти выраженія показываютъ, что существуетъ двѣ системы прямыхъ линій и только двѣ, которыя расположены по поверхности, ихъ уравненія суть:

$$(1) \quad x = \frac{a\delta}{bc} z + \beta \quad , \quad y = -\frac{b\beta}{ac} z + \delta$$

$$(2) \quad x = -\frac{a\delta}{bc} z + \beta \quad , \quad y = \frac{b\beta}{ac} z + \delta$$

(53)

β и δ удовлетворяютъ горловому эллипсу. Изъ этого видимъ, что на
Фиг. 164.



однополонъ гиперболоидъ существуетъ
безчисленное множество прямыхъ линий
(фиг. 164).

Если возьмемъ вспомогательный уголъ
 φ и положимъ:

$$\beta = a \cos \varphi \quad , \quad \delta = b \sin \varphi$$

то уравненія (53) можно написать въ
формѣ:

$$(1') \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \sin \varphi + \cos \varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c} \cos \varphi + \sin \varphi$$

$$(2') \quad \frac{x}{a} = -\frac{z}{c} \sin \varphi + \cos \varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \cos \varphi + \sin \varphi$$

Съ помощью этихъ уравненій легко провѣрить, что эти прямая находятся на поверхности гиперболоида; для этого возвысимъ въ квадратъ (1') и (2') и сложимъ, то получимъ уравненіе поверхности.

Для краткости, прямая на гиперболоидѣ, мы будемъ называть *женсратрисами*; причину такого названія увидимъ ниже.

Женсратрисамъ гиперболоида можно дать еще слѣдующую форму. Напишемъ уравненіе гиперболоида въ формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

откуда:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \left(1 + \frac{y}{b} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right)$$

возьмемъ двѣ системы уравненій:

$$(1'') \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b} \right) \quad , \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{y}{b} \right)$$

$$(2'') \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu \left(1 - \frac{y}{b} \right) \quad , \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{y}{b} \right)$$

гдѣ λ и μ суть произвольные параметры, которые опредѣляютъ двѣ системы прямыхъ линий. Будучи перемножены, почленно, или уравненія (1''), или уравненія (2''), дадутъ уравненіе поверхности.

Если положимъ:

$$A_1 = \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \quad , \quad A_2 = 1 + \frac{y}{b} \quad , \quad B_2 = \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \quad , \quad B_1 = 1 - \frac{y}{b}$$

то уравненія (1'') и (2'') сдѣлаются:

$$(1''') \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad B_2 - \frac{1}{\lambda} B_1 = 0$$

$$(2''') \quad A_1 - \mu A_2 = 0 \quad , \quad B_2 - \frac{1}{\mu} A_2 = 0$$

а уравненіе поверхности будетъ:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$

§ 583. Черезъ каждую точку на гиперболоидѣ проходятъ двѣ генератрисы, но различныхъ системъ.

Пусть $(x_1 y_1 z_1)$ будетъ точка на поверхности; A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 соответствующія значенія A_1, A_2, B_1, B_2 . Для опредѣленія λ и μ мы будемъ имѣть уравненія:

$$A'_1 - \lambda A'_2 = 0 \quad , \quad B'_2 - \frac{1}{\lambda} B'_1 = 0 \quad , \quad A'_1 - \mu B'_1 = 0 \quad , \quad B'_2 - \frac{1}{\mu} A'_2 = 0$$

съ условіями:

$$A'_1 B'_2 = A'_2 B'_1 \quad \text{или} \quad \frac{A'_1}{A'_2} = \frac{B'_1}{B'_2} \quad . \quad (54)$$

откуда:

$$\lambda = \frac{A'_1}{A'_2} \quad , \quad \lambda = \frac{B'_1}{B'_2} \quad , \quad \mu = \frac{A'_1}{B'_1} \quad , \quad \mu = \frac{A'_2}{B'_2}$$

но вслѣдствіи (54) оба λ и оба μ совпадаютъ. Слѣдовательно черезъ каждую точку на поверхности гиперболоида проходитъ по одной прямой изъ каждой системы.

§ 584. Генератрисы, принадлежащія одной и той-же системѣ, не встрѣчаются.

Пусть:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad B_2 - \frac{1}{\lambda_1} B_1 = 0$$

$$A_1 - \lambda_2 A_2 = 0 \quad , \quad B_2 - \frac{1}{\lambda_2} B_1 = 0$$

уравненія двухъ генератрисъ, принадлежащихъ одной системѣ. Если вычтемъ почленно эти уравненія, то найдемъ:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) A_2 = 0 \quad , \quad \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) B_1 = 0$$

а эти уравненія могутъ существовать одновременно только при условіи $A_2 = B_1 = 0$, что невозможно.

§ 585. Двѣ генератрисы, принадлежащія различнымъ системамъ, встрѣчаются.

Уравненіе плоскости, проходящей по генератрисѣ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad B_2 - \frac{1}{\lambda} B_1 = 0$$

очевидно есть:

$$A_1 - \lambda A_2 + k \left(B_2 - \frac{1}{\lambda} B_1 \right) = 0 \quad (55)$$

гдѣ k есть неопредѣленный коэффициентъ. Если эта плоскость проходитъ черезъ генератрису второй системы:

$$A_1 - \mu B_1 = 0 \quad ; \quad B_2 - \frac{1}{\mu} A_2 = 0$$

то мы должны имѣть:

$$A_1 - \mu B_1 + t \left(B_2 - \frac{1}{\mu} A_2 \right) = 0$$

Это уравненіе должно быть тождественно съ (53), а для этого необходимо имѣть: $t = k = \lambda\mu$.

Слѣдовательно обѣ генератрисы находятся въ плоскости:

$$A_1 - \lambda A_2 + \lambda\mu \left(B_2 - \frac{1}{\lambda} B_1 \right) = 0$$

Это уравненіе можно написать въ формѣ:

$$(1 + \lambda\mu) \frac{x}{a} + (\mu - \lambda) \frac{y}{b} + (1 - \lambda\mu) \frac{z}{c} - (\lambda + \mu) = 0$$

если подставимъ въ него значенія A_1, A_2, B_1, B_2 .

Если генератрисы даны въ формѣ:

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \sin \varphi + \cos \varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c} \cos \varphi + \sin \varphi$$

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c} \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1$$

то условіе, чтобы плоскость:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \sin \varphi - \cos \varphi \right) + k \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c} \cos \varphi - \sin \varphi \right) = 0$$

проходила черезъ вторую женера-трису будетъ:

$$k = \frac{\sin \varphi + \sin \varphi_1}{\cos \varphi + \cos \varphi_1} = \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_1}{2}}{\cos \frac{\varphi + \varphi_1}{2}}$$

Слѣдовательно уравненіе плоскости, въ которой находятся обѣ женера-трисы будетъ:

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\varphi + \varphi_1}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\varphi + \varphi_1}{2} + \frac{z}{c} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} = \cos \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \quad (56)$$

§ 586. *Женера-трисы параллельныя.* Очевидно, что параллельными женера-трисами могутъ быть женера-трисы, принадлежащія различнымъ системамъ.

Пусть уравненія такихъ женера-трисъ будутъ:

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \sin \varphi + \cos \varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c} \cos \varphi + \sin \varphi$$

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c} \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1$$

Если онѣ параллельны, то необходимо:

$$\sin \varphi = -\sin \varphi_1 \quad , \quad \cos \varphi = -\cos \varphi_1$$

откуда:

$$\varphi_1 = \varphi + 180^\circ \quad \text{или} \quad \varphi_1 - \varphi = 180^\circ$$

Слѣдовательно уравненіе плоскости (56) двухъ параллельныхъ женера-трисъ будетъ:

$$\frac{x}{a} \sin \varphi - \frac{y}{b} \cos \varphi - \frac{z}{c} = 0$$

Откуда видимъ, что параллельныя женера-трисы находятся въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ центръ поверхности.

§ 587. *Женератрисы перпендикулярныя.* Если женератрисы:

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \sin \varphi + \cos \varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c} \cos \varphi + \sin \varphi$$

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c} \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1$$

перпендикулярны, то мы должны имѣть:

$$a^2 \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 + b^2 \cos \varphi \cos \varphi_1 - c^2 = 0 \quad (57)$$

Но изъ уравненій женератрисъ имѣемъ:

$$\left(\frac{x}{a} - \cos \varphi \right)^2 = \frac{z^2}{c^2} \sin^2 \varphi \quad , \quad \left(\frac{x}{a} - \cos \varphi_1 \right)^2 = \frac{z^2}{c^2} \sin^2 \varphi_1$$

такъ, что $\cos \varphi$ и $\cos \varphi_1$ суть корни квадратнаго уравненія:

$$\left(\frac{x}{a} - \cos \varphi \right)^2 = \frac{z^2}{c^2} (1 - \cos^2 \varphi)$$

Произведеніе корней $\cos \varphi$ и $\cos \varphi_1$ этого уравненія, очевидно, есть:

$$\cos \varphi \cos \varphi_1 = \frac{\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}{1 + \frac{z^2}{c^2}} \quad (58)$$

Точно также $\sin \varphi$ и $\sin \varphi_1$ суть корни квадратнаго уравненія:

$$\left(\frac{y}{b} - \sin \varphi \right)^2 = \frac{z^2}{c^2} (1 - \sin^2 \varphi)$$

откуда имѣемъ:

$$\sin \varphi \sin \varphi_1 = \frac{\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}{1 + \frac{z^2}{c^2}} \quad (59)$$

подставляя выраженія (58) и (59) въ (57), найдемъ:

$$a^2 \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) + b^2 \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) = c^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2} \right)$$

или:

$$\frac{b^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2} - (a^2 + b^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = z^2 + c^2$$

откуда:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

Слѣдовательно точки, въ которыхъ генератрисы пересѣкаются подѣ прямымъ угломъ, находятся на пересѣченіи двухъ поверхностей:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

шара и гиперболоида.

§ 588. Всѣ генератрисы однополаго гиперболоида проектируются на плоскости XY, касательными къ горловому эллипсу. Въ самомъ дѣлѣ, исключая z изъ уравненій генератрисы:

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \sin \varphi + \cos \varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c} \cos \varphi + \sin \varphi$$

найдемъ:

$$\left(\frac{x}{a} - \cos \varphi \right) \cos \varphi + \left(\frac{y}{b} - \sin \varphi \right) \sin \varphi = 0$$

или:

$$\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi = 1$$

а это касательная къ эллипсу:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

§ 589. Геометрическое мѣсто прямыхъ, проходящихъ черезъ центръ, параллельно генератрисамъ гиперболоида, есть ассимптотическій конусъ.

Уравненія, какойнибудь, генератрисы суть:

$$x = \frac{a\delta}{bc} z + \beta \quad , \quad y = -\frac{b\beta}{ac} z + \delta$$

уравненія прямой, проходящей черезъ центръ, параллельно этой генератрисѣ, суть:

$$x = \frac{a\delta}{bc} z \quad , \quad y = -\frac{b\beta}{ac} z$$

откуда:

$$\beta = -\frac{ac}{b} \frac{y}{z} \quad , \quad \delta = \frac{bc}{a} \frac{x}{z}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе § 582:

$$\frac{\beta^2}{a^2} + \frac{\delta^2}{b^2} = 1$$

найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

а это есть ассимптотическій конусъ.

Слѣдствіе. Три генератрисы одной системы не могутъ быть параллельны одной плоскости, такъ какъ въ противномъ случаѣ три генератрисы ассимптотическаго конуса, параллельныя генератрисамъ гиперboloида, были бы въ одной плоскости, что невозможно.

§ 590. *Предложеніе.* Произведеніе синусовъ угловъ, которые, какая нибудь, изъ генератрисъ гиперboloида, составляетъ съ плоскостями круговыхъ сѣченій, есть величина постоянная.

Доказательство. Если $a > b$, то уравненія плоскостей круговыхъ сѣченій суть:

$$y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) - z^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 0 \quad (60)$$

Возьмемъ, какую нибудь точку M на ассимптотическомъ конусѣ и проведемъ генератрису конуса OM . Эта генератриса будетъ параллельна одной изъ генератрисъ гиперboloида (§ 589). Изъ точки M опустимъ перпендикуляры MP и MP' на плоскости (60). Координаты точки M удовлетворяютъ уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) y^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) z^2 = - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} \quad (61)$$

Первая часть есть произведеніе плоскостей круговыхъ сѣченій. Если первую часть раздѣлимъ на:

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2}$$

то она будетъ, очевидно, $MP \cdot MP'$. Слѣдовательно уравненіе (61) можно написать такъ:

$$MP \cdot MP' = - \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} = - \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \frac{OM^2}{a^2} \quad (62)$$

OM есть разстояніе точки M отъ центра поверхности O .

Пусть теперь φ_1 и φ_2 будутъ углы, которые OM составляетъ съ плоскостями круговыхъ сѣченій, то:

$$MP = OM \cdot \sin \varphi_1 \quad , \quad MP' = OM \cdot \sin \varphi_2$$

откуда, подставляя въ (62), найдемъ:

$$\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \frac{b^2 c^2}{a^2 (b^2 + c^2)}$$

Однополый гиперболоидъ, какъ геометрическое мѣсто прямыхъ линій.

§ 591. Изъ всего выше сказаннаго относительно однополаго гиперболоида мы видимъ, что это самая замѣчательная и самая интересная изъ поверхностей втораго порядка, по своимъ свойствамъ. На этой поверхности помѣщаются всѣ кривыя втораго порядка, не исключая и прямой.

Всѣ прямыя, находящіяся на гиперболоидѣ дѣлятся на двѣ системы. Системы эти отличаются между собою тѣмъ, что прямыя, принадлежащія одной системѣ, непересѣкаются, а каждая изъ прямыхъ одной системы пересѣкаетъ всѣ прямыя другой системы.

Изъ такого свойства генератрисъ гиперболоида можно видѣть, что эта поверхность можетъ быть образована перемѣщеніемъ прямой въ пространствѣ подъ извѣстными условіями.

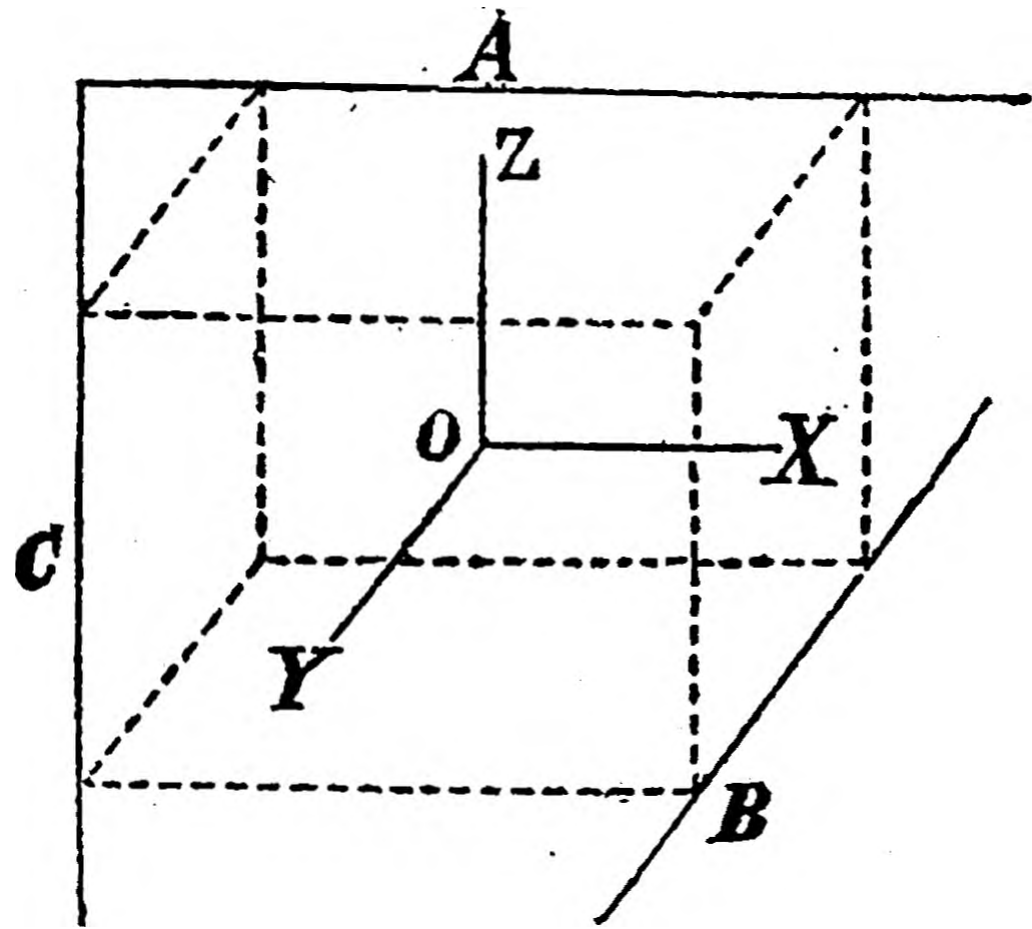
Движеніе прямой въ пространствѣ вполне опредѣленно, если она должна скользить, упираясь на три данныя прямыя, не лежащія попарно въ одной плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ точку M на первой прямой и черезъ нее проведемъ двѣ плоскости, изъ коихъ одна проходила-бы по другой прямой, а другая по третьей. Эти плоскости вполне опредѣленны и ихъ первсѣченіе—прямая проходитъ черезъ точку M и встрѣчаетъ другія двѣ данныя прямыя. Такую прямую можно построить для каждой точки первой данной прямой, такъ что геометрическое мѣсто такихъ прямыхъ будетъ единственная и опредѣленная поверхность.

Такъ какъ въ гиперболоидѣ каждая генератриса одной системы пересѣкаетъ всѣ другой, то можно образовать гиперболоидъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ три генератрисы въ первой системѣ и заставимъ по нимъ скользить прямую линію, то эта прямая опишетъ гиперболоидъ такъ какъ нѣтъ двухъ различныхъ прямыхъ, которыя бы встрѣтили генератрисы въ однѣхъ и тѣхъ же трехъ точкахъ. Скользящая прямая во всѣхъ своихъ положеніяхъ воспроизведетъ всѣ генератрисы второй системы.

Можно прямо сказать, что прямая, скользящая по тремъ прямымъ, не параллельнымъ одной плоскости и попарно не лежащимъ въ одной плоскости, образуетъ однополый гиперболоидъ. Для этого черезъ каждую изъ данныхъ прямыхъ проведемъ плоскость параллельную двумъ другимъ даннымъ прямымъ. Эти плоскости образуютъ параллелепипедъ, въ центрѣ котораго помѣстимъ начало координатъ O и возьмемъ за координатныя

Фиг. 165.



оси (фиг. 165) прямыя параллельныя ребрамъ параллелепипеда. Пусть длина реберъ параллелепипеда будетъ $2a$, $2b$, $2c$. Легко видѣть, что уравненія трехъ данныхъ прямыхъ, которыя назовемъ черезъ A , B , C будутъ:

$$(A) \quad \begin{matrix} y = -b \\ z = c \end{matrix}, \quad (B) \quad \begin{matrix} x = a \\ z = -c \end{matrix}, \quad (C) \quad \begin{matrix} x = -a \\ y = b \end{matrix}$$

Скользящую прямую можно разсматривать, какъ пересѣченіе плоскостей, изъ коихъ одна проходитъ по прямой A , а другая по прямой B . Уравненія этихъ плоскостей можно написать въ формѣ:

$$\begin{aligned} z - c - \lambda(y + b) &= 0 \\ z + c - \mu(x - a) &= 0 \end{aligned} \tag{63}$$

надобно теперь показать, что эта прямая встрѣчаетъ прямую C . Вычитая уравненія (63), найдемъ:

$$2c - \mu(x - a) + \lambda(y + b) = 0$$

этому уравненію должны удовлетворять x и y изъ уравненій (C), что дасть условіе пересѣченія:

$$c + \lambda b + \mu a = 0$$

подставляя вмѣсто λ и μ ихъ величины:

$$\lambda = \frac{z - c}{y + b}, \quad \mu = \frac{z + c}{x - a}$$

найдемъ:

$$ayz + bxz + cxy + abc = 0$$

или:

$$\frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} + 1 = 0$$

Это уравненіе искомой поверхности.

Составляя для этой поверхности кубическое уравнение (16) § 546, найдемъ:

$$4\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda - abc = 0$$

которое имѣетъ два положительные корня и одинъ отрицательный; слѣдовательно это однополый гиперболоидъ.

§ 592. Въ § 582 мы видѣли, что если:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad B_1 - \lambda B_2 = 0 \quad (64)$$

суть уравненія генератрисы первой системы, то уравнение поверхности будетъ:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \quad (65)$$

Уравненія (64) представляютъ двѣ проективныя связки плоскостей. Одна связка проходитъ черезъ прямую:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

а другая черезъ прямую:

$$B_1 = 0 \quad , \quad B_2 = 0$$

Откуда имѣемъ слѣдующее свойство: если черезъ двѣ, какія-нибудь, данныя прямыя, проведемъ плоскости, проходящія по генератрисамъ одной и той-же системы гиперболоида, то будемъ имѣть двѣ проективныя связки.

Обратно, въ двухъ проективныхъ связкахъ, проходящихъ черезъ двѣ, какія-нибудь, прямыя, соотвѣтствующія плоскости пересѣкаются по генератрисамъ гиперболоида.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad ; \quad B_1 = 0 \quad , \quad B_2 = 0$$

будутъ двѣ данныя прямыя. Проективныя связки, проходящія по этимъ прямымъ, очевидно, будутъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad B_1 - k\lambda B_2 = 0$$

гдѣ k величина постоянная, а λ произвольный параметръ. Исключая λ изъ этихъ уравненій, найдемъ:

$$kA_1 B_2 = A_2 B_1$$

Эта поверхность есть геометрическое мѣсто пересѣченія соотвѣтствующихъ проективныхъ плоскостей.

Очевидно это есть однополый гиперболоидъ.

§ 593. *Касательная плоскость и нормаль.* Если (x_1, y_1, z_1) есть точка на поверхности гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

то касательная плоскость въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) есть:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1$$

Если ее сравнимъ съ уравненіемъ:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

то найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{\cos \alpha}{p}, \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{\cos \beta}{p}, \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{\cos \gamma}{p}$$

откуда:

$$\frac{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma}{p^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

Слѣдовательно:

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma$$

Уравненія нормальной линіи въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) , очевидно, суть:

$$\frac{(x - x_1) a^2}{x_1} = \frac{(y - y_1) b^2}{y_1} = \frac{(z - z_1) c^2}{z_1}$$

Слѣдующія предложенія доказываются также, какъ и для эллипсоида.

Предложеніе 1. Сумма квадратовъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра на три перпендикулярныя между собою касательныя плоскости, есть величина постоянная.

Предложеніе 2. Геометрическое мѣсто вершинъ трехграннаго прямого угла, описаннаго около гиперболоида, есть шаръ, коего уравненіе есть:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

Предложеніе 3. Черезъ данную точку внѣ поверхности можно къ ней провести, вообще, шесть нормальныхъ линій, которыя всѣ находятся на одномъ конусѣ.

§ 594. *Діаметральная плоскость.* Уравненіе діаметральной плоскости, сопряженной направленію α, β, γ въ гиперболоидѣ есть:

$$\cos \alpha \frac{x}{a^2} + \cos \beta \frac{y}{b^2} - \cos \gamma \frac{z}{c^2} = 0$$

или:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 0 \quad (66)$$

если x_1, y_1, z_1 суть координаты конца діаметра.

Если прямая (α, β, γ) находится внутри ассимптотическаго конуса, то параллельныя хорды встрѣчаютъ обѣ полу этой поверхности, слѣдовательно діаметральная плоскость пересѣчетъ конусъ въ одной точкѣ, а гиперболоидъ по эллипсу, такъ какъ сѣченія суть подобныя кривыя.

Если прямая (α, β, γ) лежитъ на конусѣ, то діаметральная плоскость будетъ касательная къ конусу, что видно изъ уравненія (66) и пересѣкаетъ гиперболоидъ по параболѣ. Наконецъ, если прямая (α, β, γ) находится внѣ конуса, то хорды встрѣчаютъ въ двухъ точкахъ одну полу и діаметральная плоскость пересѣчетъ конусъ по двумъ прямымъ, а гиперболоидъ по гиперболѣ.

§ 595. *Сопряженные діаметры.* Гиперболоидъ отнесенный къ тремъ сопряженнымъ діаметрамъ, коихъ длина есть a_1, b_1, c_1 , будетъ:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 1$$

Когда плоскость (a_1, b_1) пересѣкаетъ гиперболоидъ по эллипсу, то діаметръ сопряженный этой плоскости будетъ внутри ассимптотическаго конуса, а когда плоскость (a_1, b_1) пересѣкаетъ гиперболоидъ по гиперболѣ, то сопряженный діаметръ плоскости (a_1, b_1) будетъ внѣ конуса. слѣдовательно изъ трехъ сопряженныхъ діаметровъ есть всегда одинъ, который не встрѣчаетъ поверхность.

Если черезъ конецъ дѣйствительнаго діаметра a_1 проведемъ плоскость параллельную плоскости двухъ другихъ діаметровъ, то это будетъ касательная плоскость къ поверхности; она пересѣкаетъ поверхность по двумъ прямымъ, коихъ уравненія суть:

$$x = a_1, \quad \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 0$$

слѣдовательно касательная плоскость къ гиперболоиду однополому, пересѣкаетъ поверхность по двумъ дѣйствительнымъ прямымъ,—это женера-

трисы, проходящія черезъ точку касанія. Касательныя плоскости, проведенныя въ различныхъ точкахъ одной и той-же женератрисы всѣ содержатъ эту женератрису, но эти плоскости различны, потому-что онѣ должны содержать, каждая, еще женератрису другой системы, проходящую черезъ точку касанія.

§ 596. Пусть a_1, b_1, c_1 будутъ три сопряженные діаметра.

Положимъ, что плоскость $(a_1 b_1)$ пересѣкаетъ гиперболоидъ по эллипсу. Она пересѣчетъ горловой эллипсъ по діаметру, который назовемъ черезъ α . Если β будетъ діаметръ сопряженный α въ эллипсѣ плоскости $(a_1 b_1)$, то будемъ имѣть:

$$a_1^2 + b_1^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

слѣдовательно:

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c_1^2$$

Означимъ черезъ γ діаметръ сопряженный діаметру α въ горловомъ эллипсѣ. Діаметральная плоскость, сопряженная діаметру α , который есть пересѣченіе плоскостей (ab) и $(a_1 b_1)$, пересѣчетъ гиперболоидъ по гиперболѣ и будетъ содержать діаметры γ, c_1, c, β ; діаметры γ и c также какъ діаметры c_1 и β суть сопряженные въ гиперболѣ пересѣченія, слѣдовательно:

$$\gamma^2 - c^2 = \beta^2 - c_1^2$$

откуда:

$$\alpha^2 + \gamma^2 - c^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c_1^2$$

Замѣчая, что:

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + b^2$$

найдемъ:

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = \alpha^2 + b^2 - c^2$$

Если вспомнимъ, что площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ конического сѣченія, есть величина постоянная, то будемъ имѣть:

$$\text{Об. } (a_1 b_1 c_1) = \text{Об. } (\alpha \beta c_1) = \text{Об. } (\alpha \gamma c) = \text{Об. } (abc)$$

т. е. объемъ параллелепипеда, построеннаго на трехъ сопряженныхъ діаметрахъ однополаго гиперболоида, есть величина постоянная.

§ 597. Уравненіе гиперболоида въ плоскостныхъ координатахъ есть:

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^2 \zeta^2 = 1$$

а уравненіе точки касанія плоскости, данной координатами ξ_1, η_1, ζ_1 , будетъ:

$$a^2 \xi_1 \xi + b^2 \eta_1 \eta - c^2 \zeta_1 \zeta = 1$$

Эти уравненія получаются точно также, какъ ихъ получали для эллипсоида.

Двуполый гиперболоидъ.

§ 598. Когда уравненіе (16) § 546 имѣетъ одинъ положительный и два отрицательныхъ корня, то уравненіе поверхности приводится къ формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (67)$$

полагая, послѣдовательно, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, найдемъ пересѣченія плоскостей YZ , XZ , XY , съ поверхностью:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Первая кривая есть мнимый эллипсъ, а вторая и третья гиперболы. Полагая:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad , \quad z = 0 \quad ; \quad y = 0 \quad , \quad z = 0$$

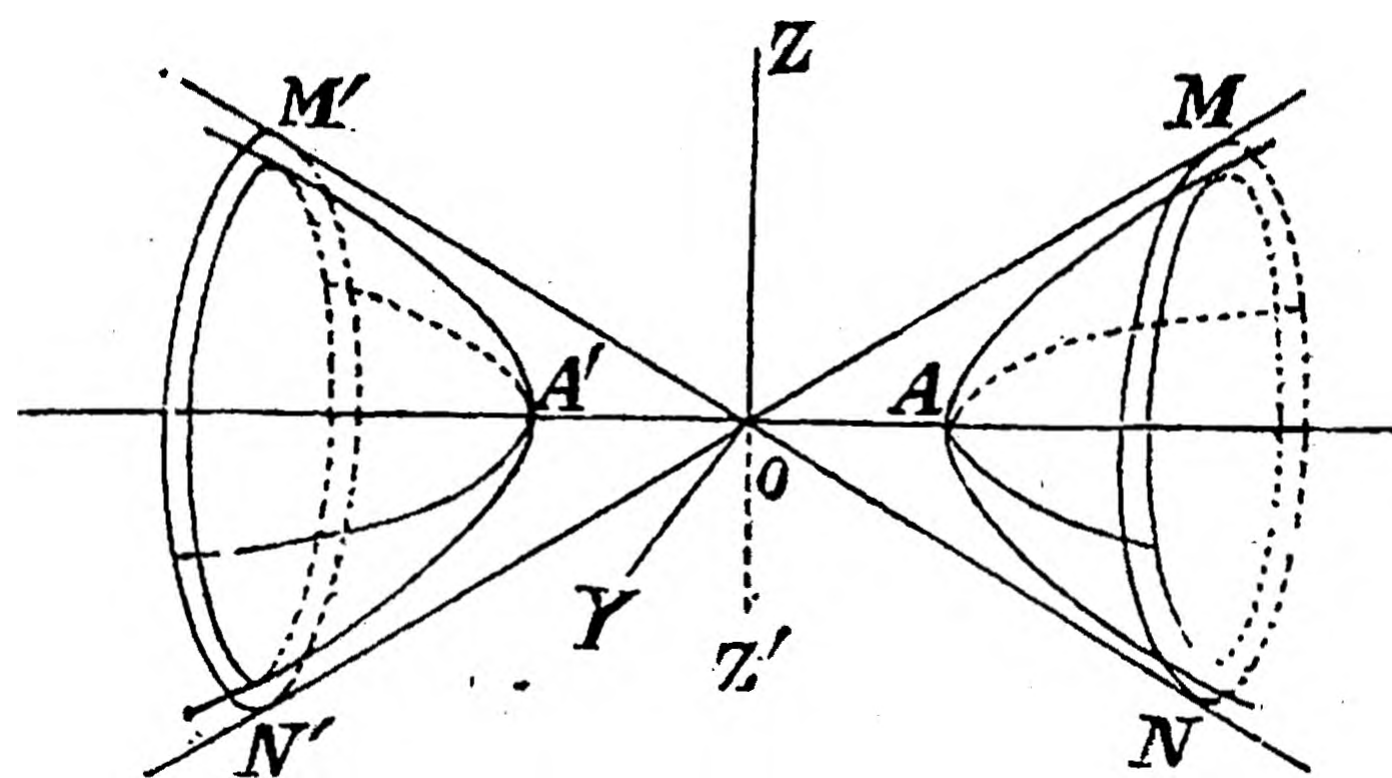
пересѣченія поверхности съ координатными осями будутъ:

$$z = \pm ci$$

$$y = \pm bi$$

$$x = \pm a$$

Фиг. 166.



Слѣдовательно оси Y и Z не встрѣчаютъ поверхность; встрѣчаетъ ее только ось X (фиг. 166) въ точкахъ A и A' .

Величины a , b , c называются осями двуполого гиперболоида; первая называется дѣйствительною осью, а b и c мнимыми. Мы всегда будемъ полагать, что $a > b > c$.

§ 599. Пересѣчемъ гиперболоидъ плоскостію $x = \alpha$, то кривая пересѣченія будетъ:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} - 1$$

изъ этого уравненія видимъ, что пока $\alpha < a$ вторая часть будетъ отрицательная, слѣдовательно пересѣченіе будетъ мнимый эллипсъ, начиная отъ $\alpha = 0$ до $\alpha = \pm a$. Когда α сдѣлается больше a , то эллипсы будутъ

дѣйствительные, ихъ оси:

$$b \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} - 1}, \quad c \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} - 1}$$

будутъ возрастать неопредѣленно. Изъ этого видимъ, что плоскости перпендикулярныя къ оси X , начиная съ $-a$ до $+a$ не встрѣчаютъ поверхность, слѣдовательно она состоитъ изъ двухъ совершенно отдѣльныхъ частей, которыя называются *полами* поверхности; отсюда поверхность получила названіе *двуполого гиперболоида*.

Пересѣченіе гиперболоида съ плоскостями перпендикулярными къ осямъ Y и Z получится, полагая:

$$y = \beta, \quad z = \gamma$$

откуда:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{\beta^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}$$

это гиперболы, коихъ оси:

$$a \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{b^2}}, \quad ci \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{b^2}}; \quad a \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{c^2}}, \quad bi \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{c^2}}$$

неопредѣленно возрастаютъ съ возрастаніемъ β и γ , т. е. съ удаленіемъ сѣкущихъ плоскостей отъ начала.

Возьмемъ наконецъ, какую нибудь, плоскость:

$$x = \alpha y + \beta z + \gamma$$

и найдемъ пересѣченіе ея съ поверхностью.

Подставляя вмѣсто x это выраженіе въ уравненіе поверхности, найдемъ:

$$\frac{(\alpha y + \beta z + \gamma)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

развертывая и составляя $a^2_{12} - a_{11}a_{22}$ будемъ имѣть:

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{a^2} - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{\beta^2}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) = \frac{1}{a^2b^2c^2}(b^2\alpha^2 + c^2\beta^2 - a^2)$$

Изъ этого выраженія видимъ, что пересѣченіе поверхности плоскостью можетъ дать всѣ три коническія сѣченія.

1. Если:

$$b^2\alpha^2 + c^2\beta^2 - a^2 < 0$$

сѣченіе будетъ эллипсъ.

2. Если:

$$b^2\alpha^2 + c^2\beta^2 - a^2 = 0$$

сѣченіе будетъ парабола.

3. Если:

$$b^2\alpha^2 + c^2\beta^2 - a^2 > 1$$

сѣченіе будетъ гипербола.

Второму изъ этихъ условій можно удовлетворить, полагая:

$$\alpha = \frac{a}{b} \cos \varphi, \quad \beta = \frac{a}{c} \sin \varphi$$

а потому уравненіе плоскости сѣченія будетъ:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \cos \varphi - \frac{z}{c} \sin \varphi = \gamma$$

Слѣдовательно пересѣченія съ поверхностью плоскостей параллельныхъ плоскости:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \cos \varphi - \frac{z}{c} \sin \varphi = 0$$

дадутъ параболы.

§ 600. *Круговыя сѣченія.* Если вычтемъ изъ уравненія гиперboloида уравненіе шара:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

то получимъ уравненіе конуса:

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) - y^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right) - z^2 \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

проходящаго черезъ пересѣченіе гиперboloида съ шаромъ. Конусъ этотъ преобразуется въ двѣ плоскости, полагая:

$$r^2 = a^2, \quad r^2 = -b^2, \quad r^2 = -c^2$$

$$y^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) + z^2 \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) = 0$$

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - z^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 0$$

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) - y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) = 0$$

Полагая $b > c$ второе изъ предыдущихъ уравненій можно написать въ формѣ:

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 + b^2} = \pm \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2}$$

Оно представляетъ двѣ дѣйствительныя плоскости, проходящія по оси Y . Остальные два уравненія суть мнимыя плоскости. Слѣдовательно двуполый гиперболоидъ пересѣкается на кругамъ двумя системами плоскостей параллельныхъ оси Y , т. е. параллельныхъ большей изъ мнимыхъ осей.

Легко найти, такимъ же образомъ, какъ въ эллипсоидѣ, координаты круглячковъ:

$$y = 0, \quad x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

601. *Ассимптотическій конусъ.* Уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

представляетъ конусъ, который встрѣчаетъ поверхность гиперболоида на бесконечности.

Въ самомъ дѣлѣ, если (x, y, z) суть координаты точки на гиперболоидѣ, а (x, y, ζ) координаты, соотвѣтствующей точки на конусѣ, то будемъ имѣть:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0$$

вычитая, найдемъ:

$$\frac{\zeta^2 - z^2}{c^2} = 1, \quad \text{откуда} \quad \zeta - z = \frac{c^2}{\zeta + z}$$

по мѣрѣ позрстанія z , разность $\zeta - z$ стремится къ нулю, слѣдовательно обѣ поверхности коснутся на бесконечности. Легко видѣть, что вся поверхность заключается въ конусѣ.

§ 602. Легко видѣть, что уравненія:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

представляютъ, каждое, двуполый гиперболоидъ, въ которыхъ b и c будутъ дѣйствительныя оси.

§ 603. Если въ гиперболоидѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$b = c$, то уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

будеть представлять гиперболоидъ вращенія около оси X.

§ 604. *Касательная плоскость и нормаль.* Касательная плоскость къ поверхности въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) есть:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1$$

отождествляя это уравненіе съ уравненіемъ:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{\cos \alpha}{p}, \quad \frac{y_1}{b^2} = -\frac{\cos \beta}{p}, \quad \frac{z_1}{c^2} = -\frac{\cos \gamma}{p}$$

откуда:

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma$$

Уравненія нормали будутъ:

$$(x - x_1) \frac{a^2}{x_1} = - (y - y_1) \frac{b^2}{y_1} = - (z - z_1) \frac{c^2}{z_1}$$

Легко доказать, какъ было сдѣлано для эллипсоида, слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Сумма квадратовъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра на три перпендикулярныя между собою плоскости, есть величина постоянная и равная:

$$a^2 - b^2 - c^2$$

Предложеніе 2. Геометрическое мѣсто вершины треграннаго прямого угла, описаннаго около гиперболоида, есть шаръ, коего уравненіе есть:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - b^2 - c^2$$

§ 605. *Діаметральная плоскость.* Уравненіе діаметральной, сопряженной направленію α, β, γ , плоскости есть:

$$\frac{x}{a^2} \cos \alpha - \frac{y}{b^2} \cos \beta - \frac{z}{c^2} \cos \gamma = 0$$

или:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 0$$

(x_1, y_1, z_1) есть точка, въ которой сопряженное направленіе плоскости встрѣчаетъ поверхность. Діаметральная плоскость никогда не пересѣкаетъ поверхность по эллипсу. Въ самомъ дѣлѣ, если направленіе (α, β, γ) , проходящее черезъ центръ находится внутри ассимптотическаго конуса, то хорды параллельныя этому направленію, пересѣкаютъ обѣ полу конуса, а слѣдовательно діаметральная плоскость, проходящая черезъ ихъ середины не встрѣчаетъ гиперболоидъ. Если направленіе (α, β, γ) внѣ конуса, то хорды параллельныя этому направленію пересѣкаютъ только одну полу конуса, слѣдовательно діаметральная плоскость, проходящая черезъ ихъ середины, пересѣкаетъ конусъ по двумъ прямымъ, а гиперболоидъ по гиперболѣ. Наконецъ если направленіе находится на конусѣ, то діаметральная плоскость будетъ касательная къ конусу, а слѣдовательно не пересѣкаетъ поверхность.

§ 606. *Діаметры.* Уравненіе гиперболоида, отнесеннаго къ тремъ сопряженнымъ діаметрамъ, коихъ длина есть a_1, b_1, c_1 , будетъ:

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 1$$

Одинъ только изъ этихъ діаметровъ встрѣчаетъ поверхность. Сопряженные діаметры удовлетворяютъ уравненіе:

$$a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 = a^2 - b^2 - c^2$$

§ 607. Легко видѣть, что уравненіе двуполаго гиперболоида въ плоскостныхъ координатахъ есть:

$$a^2 \xi^2 - b^2 \eta^2 - c^2 \zeta^2 = 1$$

а уравненіе точки касанія плоскости данной координатами будетъ:

$$a^2 \xi_1 \xi - b^2 \eta_1 \eta - c^2 \zeta_1 \zeta = 1$$

ГЛАВА XXXVII.

Поверхности не имѣющія центра.

Эллиптическій параболоидъ.

§ 608. Когда уравненіе втораго порядка представляетъ поверхность, неимѣющую центра, то ея уравненіе имѣетъ форму (48) § 554:

$$\lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 - 2Qx = 0 \quad (1)$$

гдѣ λ_2 и λ_3 суть корни уравненія (16) § 546, а корень $\lambda_1 = 0$.

Если корни λ_2 и λ_3 имѣютъ одинаковые знаки, то уравненіе (1) можно написать въ формѣ:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a} \quad (2)$$

поверхность эту назвали: *эллиптическимъ параболоидомъ*.

§ 609. Легко видѣть, что эллиптическій параболоидъ проходитъ черезъ начало координатъ.

Пересѣченіе поверхности съ плоскостями YZ , XZ , XY найдемъ, полагая, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$:

$$\begin{aligned} x = 0 & , \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 & , \quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a} , \quad z^2 = 2 \frac{c^2}{a} x \\ z = 0 & , \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} , \quad y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x \end{aligned} \quad (3)$$

Первое изъ этихъ уравненій представляетъ точку—начало координатъ, такъ что въ этой точкѣ поверхность касается плоскости YZ . Второе и третье уравненія представляютъ, очевидно, параболы, одна на плоскости XZ , другая на плоскости XY . Если черезъ p и p_1 означимъ ихъ параметры $\frac{c^2}{a}$, $\frac{b^2}{a}$, то ихъ уравненія будутъ:

$$y^2 = 2p_1 x \quad z^2 = 2px \quad (4)$$

Мы предположили, что a есть количество положительное.

Если въ уравненіи (2) будемъ давать x различныя числовыя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, то найдемъ пересѣченія поверхности съ плоскостями перпендикулярными къ оси X ,

Въ отрицательномъ направленіи оси X плоскости сѣченій не пересекаютъ поверхности и даютъ мнимые эллипсы:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -\frac{2\alpha}{a}$$

Вся поверхность, слѣдовательно, лежитъ съ положительной стороны плоскости YZ .

Въ положительномъ направленіи эллипсы будутъ дѣйствительные:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2\alpha}{a} \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2 \frac{2\alpha}{a}} + \frac{z^2}{c^2 \frac{2\alpha}{a}} = 1$$

коихъ оси будутъ:

$$b \sqrt{\frac{2\alpha}{a}}, \quad c \sqrt{\frac{2\alpha}{a}}$$

съ возрастаніемъ α , т. е. съ удаленіемъ плоскости сѣченія отъ начала координатъ, размѣры эллипсовъ возрастаютъ до бесконечности.

Давая z числовыя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ сѣченія поверхности съ перпендикулярными оси Z плоскостями. Эти сѣченія будутъ:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} - \frac{\alpha^2}{c^2} \quad \text{или} \quad y^2 = 2px + k$$

гдѣ:

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad k = -\frac{\alpha^2 b^2}{c^2}$$

Очевидно это параболы, коихъ параметры будутъ равны параметру параболы въ плоскости XU , а проэкціи вершинъ будутъ находиться на оси X .

Тоже самое можно повторить и относительно пересѣченія поверхности плоскостями перпендикулярными къ оси Y .

Найдемъ теперь пересѣченіе поверхности съ какою нибудь плоскостью:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \quad (5)$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе (2), найдемъ проэкцію пересѣченія плоскости (5) съ поверхностью:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma)^2}{c^2} = \frac{2x}{a}$$

Это уравненіе даетъ для выраженія:

$$a^2_{12} - a_{11}a_{22}$$

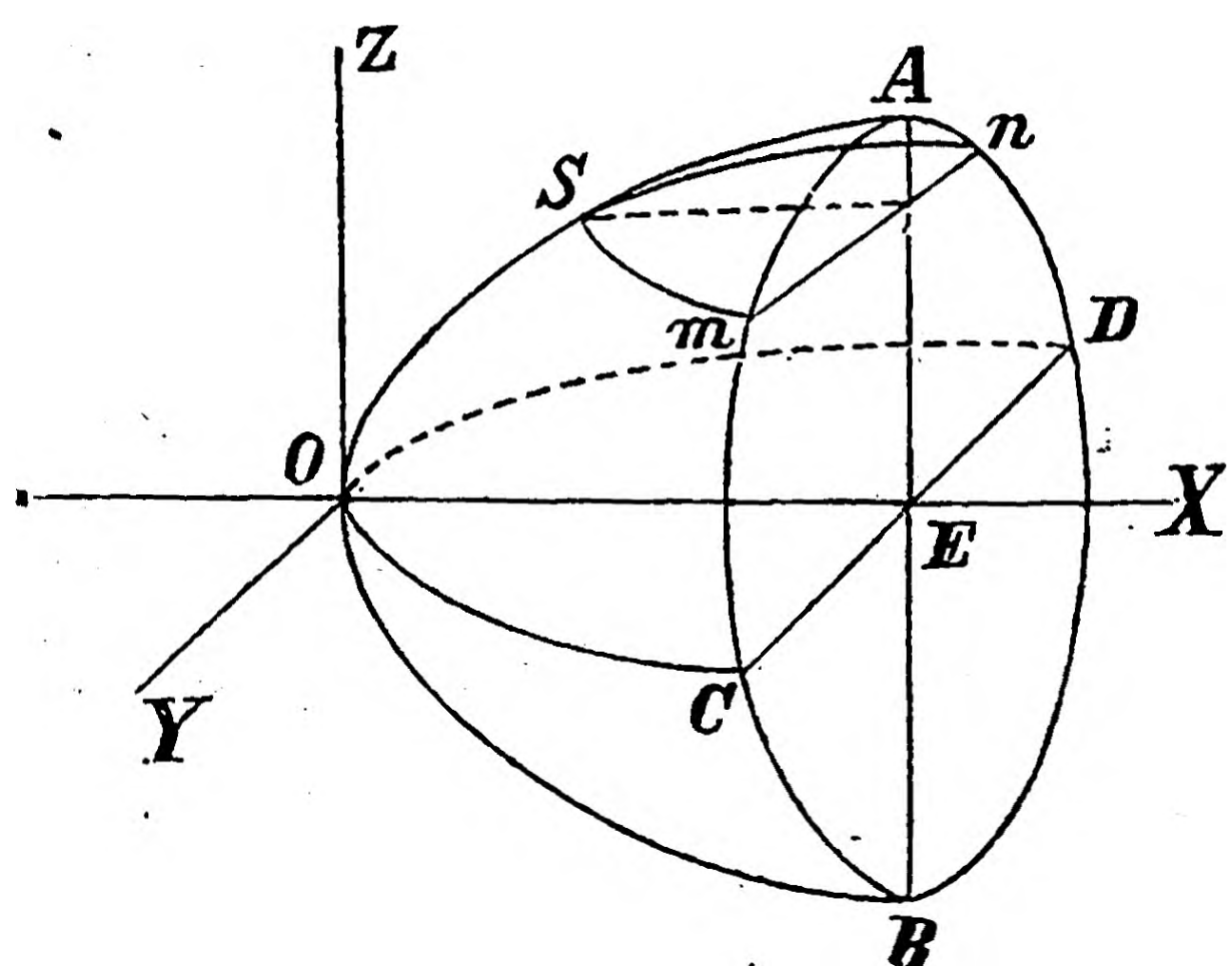
слѣдующее:

$$\frac{\alpha^2 \beta^2 a^2}{c^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{c^4} \left(\frac{1}{b} + \frac{\beta^2}{c^2} \right) = - \frac{\alpha^2 a^2}{b^2 c^2}$$

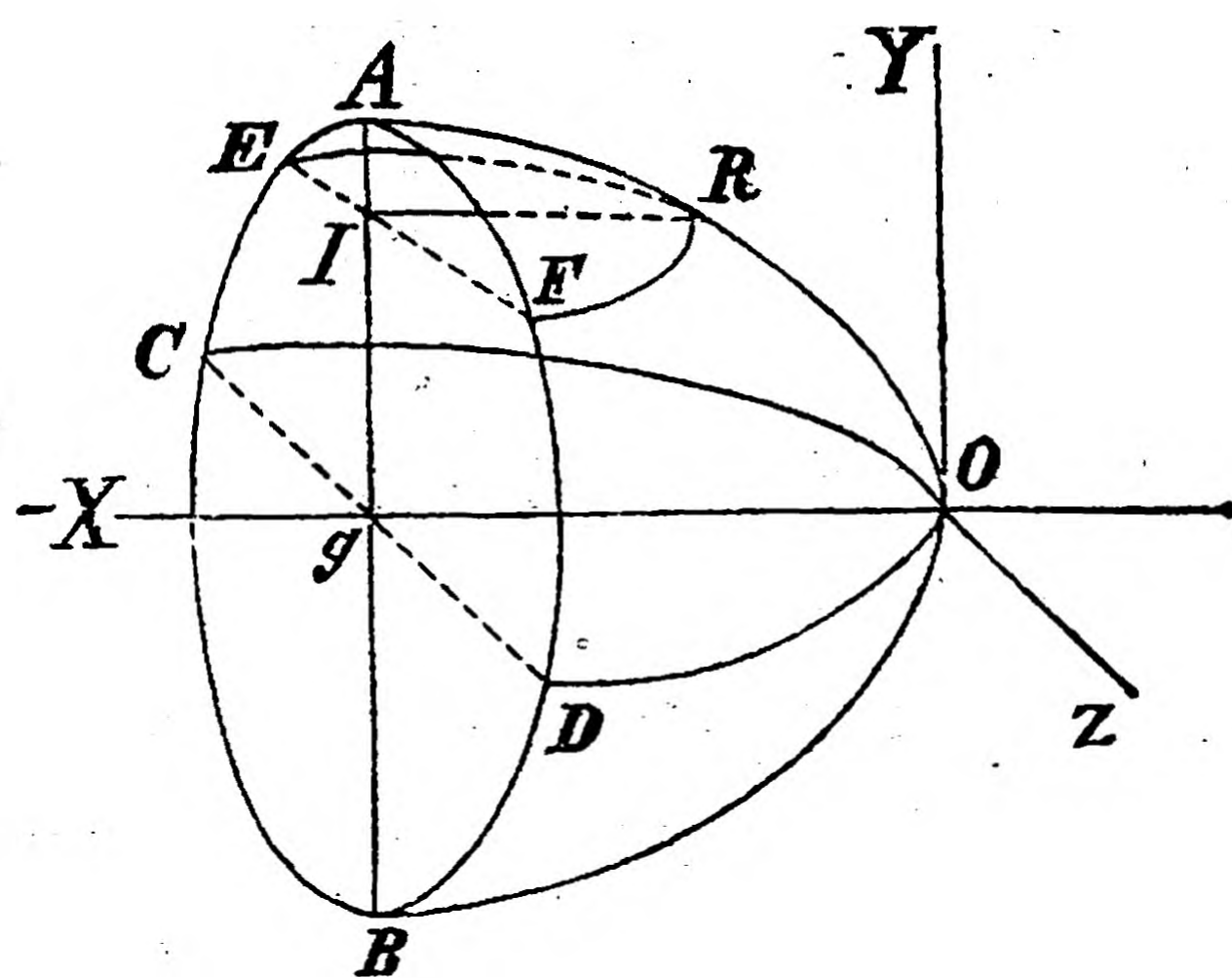
величина, очевидно отрицательная, слѣдовательно всѣ сѣченія будутъ эллипсы. Но если $\alpha = 0$, то сѣченіе будетъ парабола а α только въ томъ случаѣ равно нулю, когда сѣкущая плоскость параллельна оси X или оси поверхности. Ось X называется *осью поверхности*, потому что центры всѣхъ эллипсовъ пересѣченія плоскостей перпендикулярныхъ къ оси X находятся на оси X .

Изъ этого видимъ, что эллиптическій параболоидъ есть поверхность незамкнутая, имѣющая одну только полу (фиг. 167), которая вся лежитъ съ положительной стороны плоскости YZ .

Фиг. 167.



Фиг. 168.



Если въ уравненіи (2) количество a было-бы величиной отрицательной; то вся поверхность эллипческаго параболоида находилась бы съ отрицательной стороны плоскости YZ (фиг. 168).

§ 610. *Круговыя сѣченія.* Если въ уравненіе (2) положимъ $b > c$, то легко видѣть, что есть такое направленіе плоскости сѣченія параллельной оси Y , что эллипсъ сѣченія будетъ кругъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ можно убѣдиться аналитически. Проведемъ черезъ начало координатъ плоскость и положимъ, что пересѣченіе ея съ поверхностью есть кругъ. Представимъ шаръ, проходящій черезъ этотъ кругъ и касающійся въ началѣ координатъ плоскости YZ . Центръ шара будетъ на оси X , а его уравненіе:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2rx$$

если r есть радіусъ, или:

$$\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r} - 2x = 0$$

вычитая изъ этого уравненія раздѣленнаго на a , уравненіе (2), найдемъ:

$$\frac{x^2}{ar} + \left(\frac{1}{ar} - \frac{1}{b^2} \right) y^2 + \left(\frac{1}{ar} - \frac{1}{c^2} \right) z^2 = 0$$

поверхность эта есть конусъ, который долженъ преобразоваться въ двѣ плоскости, если параболоидъ и шаръ пересекаются по кругу. Положивъ, послѣдовательно, $ar = b^2$, $ar = c^2$, найдемъ:

$$\frac{x^2}{b^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) z^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{c^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) y^2 = 0$$

Первое изъ этихъ уравненій представляетъ пару дѣйствительныхъ плоскостей, если $b > c$, а второе пару мнимыхъ. Слѣдовательно эллиптическій параболоидъ имѣетъ двѣ системы круговыхъ сѣченій, плоскости которыхъ суть плоскости параллельныя плоскостямъ:

$$\frac{x}{b^2} + z \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} = 0 \quad , \quad \frac{x}{b^2} - z \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} = 0 \quad (6)$$

§ 611. *Касательная плоскость.* Пусть (x_1, y_1, z_1) будетъ точка на параболоидѣ, то уравненіе касательной плоскости въ этой точкѣ будетъ:

$$-\frac{(x-x_1)}{a} + (y-y_1) \frac{y_1}{b^2} + (z-z_1) \frac{z_1}{c^2} = 0$$

откуда найдемъ:

$$\frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - \frac{(x+x_1)}{a} = 0 \quad (7)$$

Если p есть длина перпендикуляра опущеннаго изъ начала координатъ на плоскость (7), α, β, γ суть углы этого перпендикуляра съ координатными осями, то уравненіе касательной плоскости будетъ:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

Сравнивая это уравненіе съ (7), найдемъ:

$$-\frac{1}{a \cos \alpha} = \frac{y_1}{b^2 \cos \beta} = \frac{z_1}{c^2 \cos \gamma} = \frac{x_1}{ap}$$

откуда:

$$x_1 = -\frac{p}{\cos \alpha} \quad , \quad y_1 = -\frac{b^2 \cos \beta}{a \cos \alpha} \quad , \quad z_1 = -\frac{c^2 \cos \gamma}{a \cos \alpha}$$

подставляя эти величины въ уравненіе (2), найдемъ:

$$p = - \frac{b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}{2a \cos \alpha} \quad (8)$$

Слѣдовательно уравненіе касательной плоскости можетъ быть написано въ формѣ:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma + \frac{b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}{2a \cos \alpha} = 0 \quad (9)$$

§ 612. *Предложеніе.* Сумма проэкцій, на оси параболоида, перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершины поверхности на три перпендикулярныя между собою касательныя плоскости, есть величина постоянная.

Доказательство. Означимъ эти перпендикуляры черезъ p_1, p_2, p_3 , углы, которые они составляютъ съ координатными осями, означимъ черезъ $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1), (\alpha_2 \beta_2 \gamma_2), (\alpha_3 \beta_3 \gamma_3)$, то уравненіе (8) даетъ:

$$p_1 \cos \alpha_1 = - \frac{b^2}{2a} \cos^2 \beta_1 - \frac{c^2}{2a} \cos^2 \gamma_1$$

$$p_2 \cos \alpha_2 = - \frac{b^2}{2a} \cos^2 \beta_2 - \frac{c^2}{2a} \cos^2 \gamma_2$$

$$p_3 \cos \alpha_3 = - \frac{b^2}{2a} \cos^2 \beta_3 - \frac{c^2}{2a} \cos^2 \gamma_3$$

Слѣдовательно найдемъ, складывая:

$$p_1 \cos \alpha_1 + p_2 \cos \alpha_2 + p_3 \cos \alpha_3 = - \frac{b^2 + c^2}{2a} \quad (10)$$

§ 613. *Предложеніе.* Геометрическое мѣсто вершинъ прямоугольнаго трехграннаго угла, описаннаго около эллиптическаго параболоида, есть плоскость перпендикулярная къ оси поверхности.

Доказательство. При тѣхъ же значеніяхъ p и α, β, γ уравненіе (9) даетъ:

$$x \cos^2 \alpha_1 + y \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + z \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + \frac{b^2}{2a} \cos^2 \beta_1 + \frac{c^2}{2a} \cos^2 \gamma_1 = 0$$

$$x \cos^2 \alpha_2 + y \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + z \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 + \frac{b^2}{2a} \cos^2 \beta_2 + \frac{c^2}{2a} \cos^2 \gamma_2 = 0$$

$$x \cos^2 \alpha_3 + y \cos \alpha_3 \cos \beta_3 + z \cos \alpha_3 \cos \gamma_3 + \frac{b^2}{2a} \cos^2 \beta_3 + \frac{c^2}{2a} \cos^2 \gamma_3 = 0$$

Складывая эти уравненія, найдемъ:

$$x + \frac{b^2 + c^2}{2a} = 0$$

§ 614. *Нормальная линия.* Уравненія нормальной линіи въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ суть:

$$\frac{x - x_1}{-1} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z_1}{c^2}} \quad (11)$$

Чтобы опредѣлить число нормальныхъ линій, проведенныхъ изъ данной точки $(x' y' z')$ внѣ поверхности, мы будемъ имѣть уравненія:

$$\frac{x' - x}{-1} = \frac{y' - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z' - z}{\frac{z}{c^2}}, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a} \quad (12)$$

$(x y z)$ есть точка встрѣчи нормали съ поверхностью. Если черезъ ρ означимъ общее значеніе первыхъ трехъ уравненій, то найдемъ:

$$x = x' + \frac{\rho}{a}, \quad y = \frac{b^2 y'}{b^2 + \rho}, \quad z = \frac{c^2 z'}{c^2 + \rho} \quad (13)$$

подставляя эти значенія въ уравненіе поверхности, найдемъ:

$$\frac{b^2 y'^2}{(b^2 + \rho)^2} + \frac{c^2 z'^2}{(c^2 + \rho)^2} - 2 \frac{(ax' + \rho)}{a^2} = 0 \quad (14)$$

уравненіе пятой степени относительно ρ , слѣдовательно изъ данной точки внѣ поверхности можно провести пять нормальныхъ линій къ поверхности.

Изъ уравненій (12) найдемъ:

$$-(x' - x) \frac{y}{b^2} = \frac{y' - y}{a} y, \quad (x' - x) \frac{z}{c^2} = \frac{z' - z}{a} z$$

или:

$$\frac{xy}{b^2} - \frac{x'y}{b^2} + \frac{y - y'}{a} = 0, \quad \frac{xz}{c^2} - \frac{x'z}{c^2} + \frac{z - z'}{a} = 0$$

умножая первое на y , а второе на z и складывая, найдемъ:

$$x \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - x' \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) + \frac{y^2 + z^2 - y'y - z'z}{a} = 0$$

или:

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2x'x - y'y - z'z = 0 \quad (15)$$

Такъ какъ коэффициенты при y^2 и z^2 равны, то уравненіе представляетъ поверхность вращенія около оси параллельной оси X . Изъ этого видимъ, что изъ данной точки внѣ поверхности можно провести пять нормальныхъ линій, коихъ точки пересѣченія съ поверхностью находятся на поверхности вращенія, проходящей черезъ начало, и коей ось вращенія параллельна оси параболоида.

§ 615. *Діаметральная плоскость.* Уравненіе діаметральной плоскости сопряженной направленію (α, β, γ) есть (10) § 545:

$$-\frac{\cos \alpha}{a} + \frac{y}{b^2} \cos \beta + \frac{z}{c^2} \cos \gamma = 0$$

откуда видимъ, что діаметральная плоскость, сопряженная направленію (α, β, γ) , всегда параллельна оси поверхности, какое бы ни было направленіе (α, β, γ) . Изъ этого заключаемъ, что всѣ діаметры, которые суть пересѣченіе діаметральныхъ плоскостей, параллельны оси поверхности.

Есть безчисленное множество координатныхъ осей относительно которыхъ уравненіе эллиптического параболоида будетъ имѣть форму:

$$\frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = \frac{2x}{a_1}$$

Легко видѣть, что такія оси, въ какой-нибудь точкѣ на поверхности, принятой за начало, суть: діаметръ проходящій черезъ эту точку—ось X , касательная къ параболѣ въ плоскости, проходящей черезъ діаметръ—ось Y , и ось Z —сопряженное направленіе къ діаметральной плоскости, въ которой лежитъ парабола.

§ 616. Уравненіе эллиптического параболоида въ линейныхъ координатахъ, очевидно, будетъ:

$$b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 = 2a\xi$$

а точка касанія касательной плоскости (ξ_1, η_1, ζ_1) есть:

$$b^2 \eta_1 \eta + c^2 \zeta_1 \zeta = a(\xi_1 + \xi)$$

Гиперболическій параболоидъ.

§ 617. Если въ уравненіи (16) § 546 одинъ изъ трехъ корней равенъ нулю, напримѣръ $\lambda_1 = 0$, а другіе два λ_2 и λ_3 имѣютъ противные знаки, то уравненію поверхности можно дать форму:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a} \quad (16)$$

Изъ этого уравненія видимъ, что начало координатъ находится на поверхности, такъ какъ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ удовлетворяютъ уравненію (16). Пе-

ресе́ченіе поверхности съ координатными плоскостями XY, XZ, YZ получимъ, дѣлая въ уравненіи (16), послѣдовательно, $z = 0, y = 0, x = 0$. Эти положенія даютъ:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}, \quad \frac{z^2}{c^2} = -\frac{2x}{a}, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Откуда видимъ, что пересѣченіе поверхности съ плоскостями XY, ZX суть параболы, а съ плоскостью YZ двѣ прямыя. Слѣдовательно гиперболическій параболоидъ есть такая поверхность, на которой могутъ помѣщаться и прямыя линіи.

§ 618. Разсмотримъ теперь пересѣченіе поверхности съ плоскостями перпендикулярными къ осямъ X, Y, Z . Если сдѣлаемъ $x = \alpha$, то будемъ имѣть:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{2\alpha}{a}$$

уравненіе гиперболы. Давая, послѣдовательно, количеству α всѣ значенія отъ 0 до $+\infty$ будемъ имѣть постоянно гиперболы, начиная съ двухъ прямыхъ. Оси этихъ гиперболъ будутъ:

$$b \sqrt{\frac{2\alpha}{a}}, \quad c \sqrt{\frac{2\alpha}{a}}$$

изъ коихъ первая будетъ дѣйствительная ось, а вторая мнимая. Оси эти возрастаютъ неопредѣленно съ возрастаніемъ α , т. е. съ удаленіемъ плоскости сѣченія отъ начала координатъ вершины гиперболъ расходятся все больше и больше. Давая α отрицательныя значенія отъ 0 до $-\infty$ будемъ имѣть гиперболы:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2\alpha}{a}$$

оси которыхъ будутъ:

$$c \sqrt{\frac{2\alpha}{a}}, \quad b \sqrt{\frac{2\alpha}{a}}$$

изъ коихъ первая будетъ дѣйствительная ось, а вторая мнимая, т. е. гиперболы будутъ сопряженныя предъидущимъ. Положимъ теперь $z = \gamma$, то получимъ пересѣченіе поверхности съ плоскостью перпендикулярною къ оси Z :

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} + \frac{\gamma^2}{c^2} \quad (17)$$

Это есть парабола, которой вершина при $\gamma = 0$ находится въ началѣ координатъ, а по мѣрѣ возрастанія γ удаляется неопредѣленно отъ начала по отрицательной части оси X . Если сдѣлаемъ $y = \beta$, то найдемъ:

$$\frac{z^2}{c^2} = -\frac{2x}{a} + \frac{\beta^2}{b^2} \quad (18)$$

Это также парабола, которой вершина при $\beta = 0$ находится въ началѣ координатъ, а затѣмъ по мѣрѣ возрастанія β удаляется неопредѣленно отъ начала по положительной части оси X . Пересѣчемъ наконецъ параболоидъ (16), какою-нибудь плоскостью:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

подставляя это выраженіе въ уравненіе (16), найдемъ:

$$\frac{y^2}{a^2} - \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{c} \right)^2 = \frac{2x}{a}$$

Составляя для этого уравненія выраженіе:

$$a^2_{12} - a_{11}a_{22}$$

найдемъ:

$$a^2_{12} - a_{11}a_{22} = \frac{\alpha^2}{a^2b^2}$$

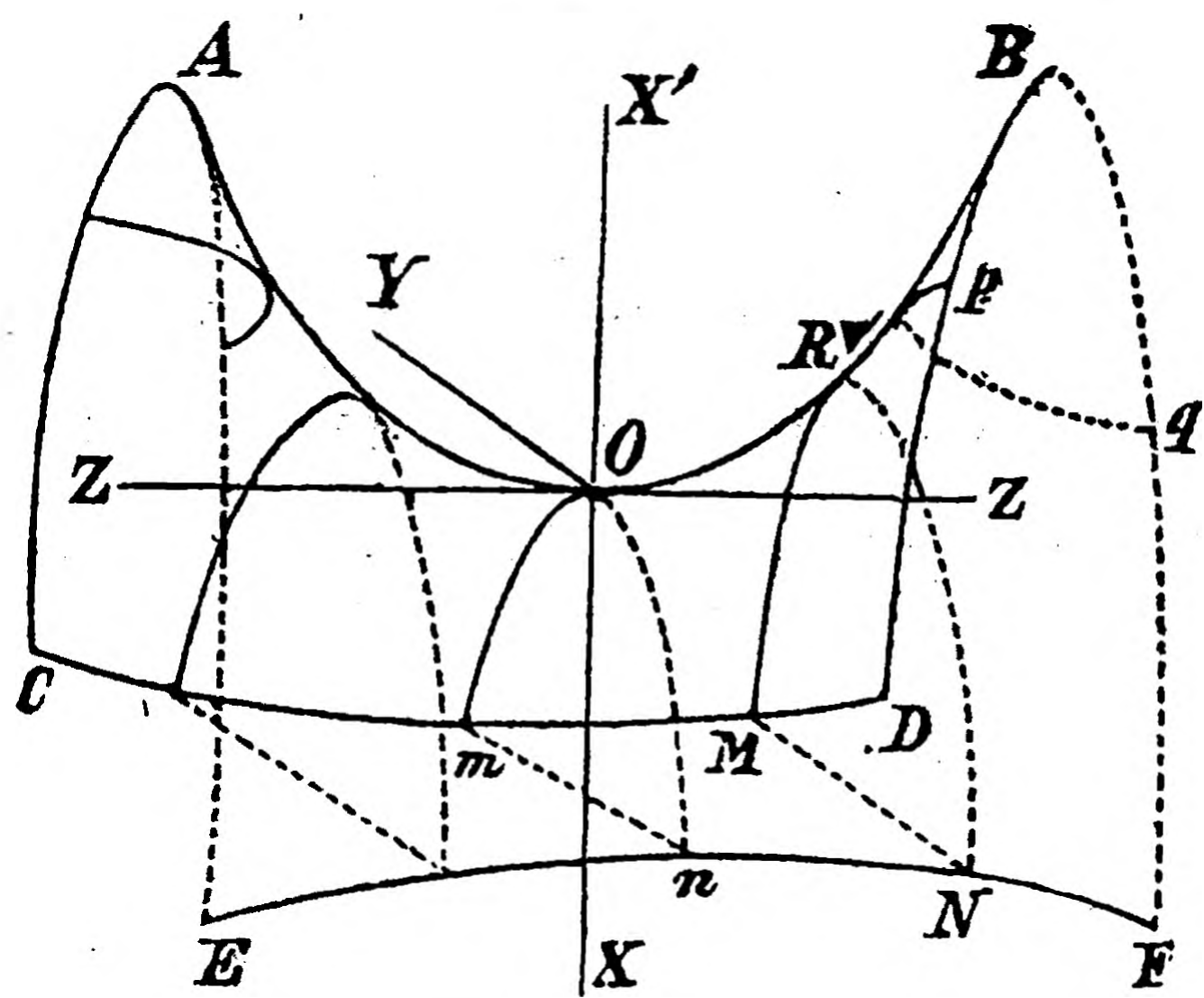
величина положительная, слѣдовательно сѣченіе есть всегда гипербола, исключая того случая, когда $\alpha = 0$; въ этомъ случаѣ сѣченіе есть парабола.

Изъ этого видимъ, что гиперболическій параболоидъ (фиг. 169) не можетъ имѣть круговыхъ сѣченій съ плоскостью, потому-что всѣ его сѣченія съ плоскостью суть незамкнутыя кривыя.

Изъ уравненій (17) и (18) видимъ, что сѣченія поверхности плоскостями параллельными плоскости XU суть равныя параболы, точно также равны между собою и параболы пересѣченій

поверхности плоскостями параллельными плоскости XZ , слѣдовательно этотъ параболоидъ можно разсматривать, какъ образованный движеніемъ параболы, коей плоскость движется параллельно плоскости XU , а вершина скользитъ по параболѣ (17). Или эта поверхность можетъ быть образована параболой, коей плоскость остается параллельною плоскости XZ , а вершина скользитъ по параболѣ (18).

Фиг. 169.



§ 619. *Прямолинейныя генератрисы.* Выше видѣли, что на гиперболическомъ параболоидѣ помѣщаются двѣ прямыя:

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$$

посмотримъ есть-ли еще, кромѣ этой пары, прямая, которая помѣщается на этой поверхности. Пусть такая прямая будетъ:

$$x = \alpha z + \beta, \quad y = \gamma z + \delta \quad (19)$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе поверхности (16), найдемъ:

$$\frac{(\gamma z + \delta)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{2(\alpha z + \beta)}{a}$$

уравненіе, которое должно быть удовлетворено независимо отъ z , а для этого надобно имѣть:

$$\frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0, \quad \frac{\gamma\delta}{b^2} - \frac{\alpha}{a} = 0, \quad \frac{\delta^2}{b^2} - \frac{2\beta}{a} = 0 \quad (20)$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что точки пересѣченія прямыхъ, лежащихъ на поверхности, съ плоскостью XU , лежатъ всѣ на параболѣ:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} \quad (21)$$

которая есть пересѣченіе поверхности плоскостью XU . Другія два уравненія (20) даютъ:

$$\gamma = \pm \frac{b}{c}, \quad \alpha = \pm \frac{a\delta}{bc} \quad (22)$$

Одинъ изъ параметровъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ остается произвольнымъ, а какъ для α и γ имѣемъ только двѣ величины, то существуетъ только двѣ системы генератрисъ и только двѣ, коихъ уравненія суть:

$$(1') \quad x = \frac{a\delta}{bc} z + \beta, \quad y = \frac{b}{c} z + \delta \quad (23)$$

$$(2') \quad x = -\frac{a\delta}{bc} z + \beta, \quad y = -\frac{b}{c} z + \delta$$

β и δ суть координаты, какой-нибудь точки параболы (21). Уравненія прямолинейныхъ генератрисъ могутъ быть выведены прямо изъ уравненія поверхности:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a} \quad (24)$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \frac{2x}{a}$$

Для этого положимъ:

$$(1'') \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \lambda \quad , \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{2x}{\lambda a} \quad (25)$$

$$(2'') \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \mu \quad , \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{2x}{\mu a}$$

λ и μ суть произвольные параметры, опредѣляющіе двѣ различныя системы прямыхъ, находящихя на поверхности, такъ какъ перемножая предъидущія уравненія находимъ уравненіе (24).

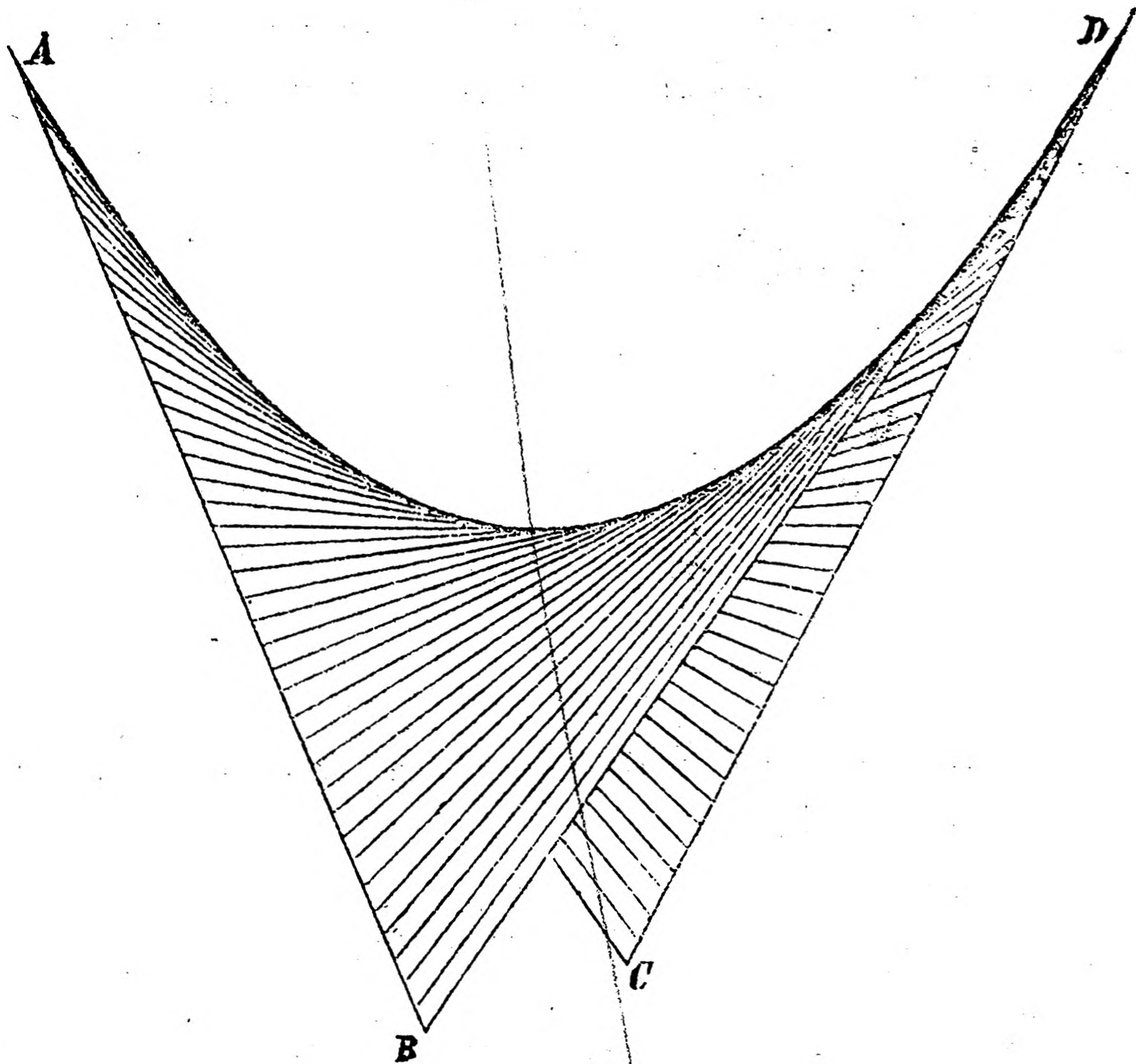
Полагая для краткости:

$$A_1 = \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \quad , \quad A_2 = \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \quad , \quad B_1 = \frac{2x}{a}$$

уравненія (25) сдѣлаются:

$$\begin{aligned} (a) \quad A_1 - \lambda = 0 \quad , \quad \lambda A_2 - B_1 = 0 \\ (b) \quad A_2 - \mu = 0 \quad , \quad \mu A_1 - B_1 = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Фиг. 170.



а уравненіе поверхности будетъ:

$$A_1 A_2 = B_1 \quad (27)$$

часть этой поверхности представлена на чертежѣ (фиг. 170) въ видѣ сѣдлообразной, вогнутой, поверхности $ABCD$.

§ 620. *Предложеніе.* Черезъ каждую точку на гиперболическомъ параболоидѣ проходить по одной женератрисѣ изъ каждой системы.

Доказательство. Пусть x_1, y_1, z_1 будутъ координаты, какой-нибудь, точки на поверхности. Пусть A'_1, A'_2, B'_1 будутъ величины количествъ A_1, A_2, B_1 соотвѣтствующихъ этимъ координатамъ, то будемъ имѣть уравненія:

$$A'_1 - \lambda = 0 \quad , \quad \lambda A'_2 - B'_1 = 0 \quad , \quad A'_2 - \mu = 0 \quad , \quad \mu A'_1 - B'_1 = 0$$

откуда:

$$\lambda = A'_1 \quad , \quad \lambda = \frac{B'_1}{A'_2} \quad , \quad \mu = A'_2 \quad , \quad \mu = \frac{B'_1}{A'_1}$$

но изъ уравненія (27) имѣемъ:

$$A'_1 A'_2 = B'_1$$

Слѣдовательно оба параметра λ и μ совпадаютъ.

§ 621. *Предложеніе.* Двѣ женератрисы одной системы не встрѣчаются, а двѣ различныхъ системъ лежатъ въ одной плоскости.

Доказательство. Пусть:

$$A_1 - \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_1 A_2 - B_1 = 0$$

$$A_1 - \lambda_2 = 0 \quad , \quad \lambda_2 A_2 - B_1 = 0$$

будутъ двѣ женератрисы одной системы, вычитая эти уравненія, найдемъ:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

что невозможно, такъ какъ λ_1 и λ_2 неравны.

Съ другой стороны, уравненіе плоскости, проходящей по женератрисѣ первой системы, будетъ:

$$A_1 - \lambda + k(\lambda A_2 - B_1) = 0$$

и если обусловимъ, что эта плоскость проходитъ по женератрисѣ другой системы, то найдемъ два условія, которыя оба даютъ для k одно значеніе $\frac{1}{\mu}$. Слѣдовательно плоскость:

$$\mu A_1 + \lambda A_2 - B_1 - \lambda \mu = 0$$

содержитъ двѣ женератрисы различныхъ системъ. Въ декартовыхъ координатахъ уравненіе этой плоскости будетъ:

$$(\lambda + \mu) \frac{y}{b} + (\lambda - \mu) \frac{z}{c} - \frac{2x}{a} - \lambda\mu = 0$$

§ 622. *Женератрисы перпендикулярныя.* Возьмемъ уравненія (1'') и (2'') § 619 и рѣшивъ ихъ относительно x и y , найдемъ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a\lambda}{c} z + \frac{\lambda^2 a}{2}, & y &= \frac{b}{c} z + \lambda b \\ x &= -\frac{\mu a}{c} z + \frac{\mu^2 a}{2}, & y &= -\frac{b}{c} z + \mu b \end{aligned} \quad (28)$$

Въ этой формѣ видно, что женератрисы не могутъ быть параллельны.

Условіе перпендикулярности женератрисъ, очевидно, есть:

$$-\frac{\lambda\mu a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} + 1 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda\mu + \frac{b^2 - c^2}{a^2} = 0$$

Замѣщая λ и μ ихъ выраженіями (25), найдемъ:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{b^2 - c^2}{a^2} = 0$$

или:

$$2x + \frac{b^2 - c^2}{a} = 0 \quad (29)$$

откуда видимъ, что геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ женератрисы перпендикулярны, есть гипербола—пересѣченіе предыдущей плоскости (29) съ поверхностью.

§ 623. *Предложете.* Проекціи женератрисъ поверхности суть касательныя къ главной параболѣ на плоскости XU .

Доказательство. Исключивъ z изъ уравненій:

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \lambda, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{2x}{\lambda a}$$

найдемъ:

$$\frac{2\lambda y}{b} = \lambda^2 + \frac{2x}{a} \quad (30)$$

Но для, какой нибудь, точки $(x_1, y_1, 0)$ параболы:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x \quad (31)$$

имѣемъ:

$$y_1^2 = \frac{2b^2}{a} x_1, \quad \lambda = \frac{y_1}{b}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (30) найдемъ уравненіе проэкцій на плоскости XU :

$$yy_1 = \frac{b^2}{a} (x + x_1)$$

а это есть уравненіе касательной къ параболѣ (31) въ точкѣ $(x_1 y_1)$.

§ 624. *Предложеніе.* Всѣ женератрисы одной системы параллельны одной постоянной плоскости.

Доказательство. Уравненіе:

$$A_1 - \lambda = 0$$

представляетъ плоскость, проекирующую женератрисы первой системы на плоскость YZ ; всѣ эти плоскости параллельны плоскости:

$$A_1 = 0$$

слѣдовательно женератрисы, находящіяся въ этихъ плоскостяхъ, параллельны плоскости:

$$A_1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad (32)$$

Точно также женератрисы второй системы параллельны плоскости:

$$A_2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \quad (33)$$

Эти двѣ плоскости (32) и (33) называются *директрисами* поверхности.

§ 625. Предыдущія свойства даютъ два способа образованія гиперболическаго параболоида движеніемъ прямой линіи. Эта поверхность можетъ быть образована, если прямая второй системы скользитъ по тремъ прямымъ первой системы, или еще, если прямая второй системы скользитъ по двумъ прямымъ первой системы, оставаясь параллельною плоскости:

$$A_2 = 0$$

Обратно, поверхность образованная прямой, скользящей по тремъ даннымъ прямымъ, параллельнымъ одной плоскости и не лежащимъ по парно въ одной плоскости, есть гиперболическій параболоидъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть AB , CD , OE суть три данныя прямыя параллельныя одной плоскости (фиг. 171). Возьмемъ прямую OE за ось Z , плоскость XZ за плоскость, которой данныя прямыя параллельны, за ось Y возьмемъ прямую встрѣчающую прямыя AB и CD .

Уравненія данныхъ прямыхъ, отнесенныхъ къ этой системѣ координатъ, будутъ:

$$(AB) \quad \begin{cases} y = \beta \\ z = \gamma x \end{cases}, \quad (CD) \quad \begin{cases} y = \beta' \\ z = \gamma' x \end{cases}, \quad (OE) \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Уравненіе женератрисы, разсматриваемой, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, одной проходящей черезъ AB , а другой, проходящей черезъ CD , будетъ:

$$z - \gamma x = \lambda (y - \beta), \quad z - \gamma' x = \mu (y - \beta') \quad (34)$$

гдѣ λ и μ суть произвольные параметры.

Фиг. 171.

Вычитая эти уравненія, найдемъ:

$$(\gamma' - \gamma)x = (\lambda - \mu)y + \mu\beta' - \lambda\beta$$

и какъ прямая (женератриса) встрѣчаетъ ось Z , то:

$$\mu\beta' - \lambda\beta = 0$$

Исключая параметры λ , μ съ помощью уравненій (34), найдемъ:

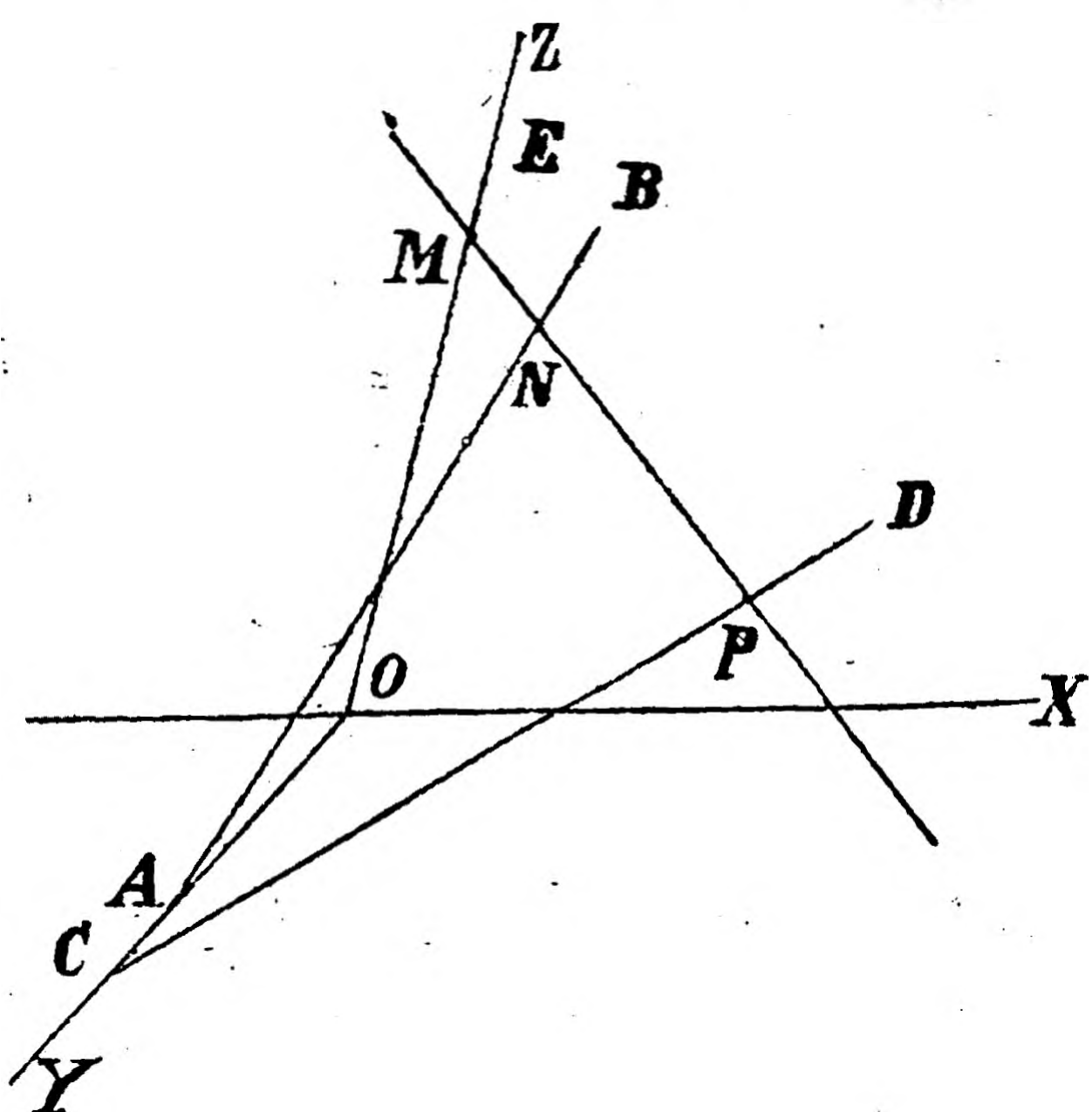
$$(\beta - \beta')yz - (\beta\gamma - \beta'\gamma')xy - \beta\beta'(\gamma - \gamma')x = 0$$

это поверхность втораго порядка, неимѣющая центра, образованная движеніемъ прямой, слѣдовательно есть гиперболическій параболоидъ.

Точно также поверхность описанная прямой, скользящей по двумъ прямымъ и параллельной данной плоскости, есть гиперболическій параболоидъ. Чтобы это показать, пусть AB и OC (фиг. 172) будутъ двѣ данныя прямыя, P данная плоскость. Возьмемъ OC за ось Z , плоскость P за плоскость XU ; выберемъ за плоскость XZ плоскость параллельную, AB , а за ось Y прямую встрѣчающую AB .

Уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

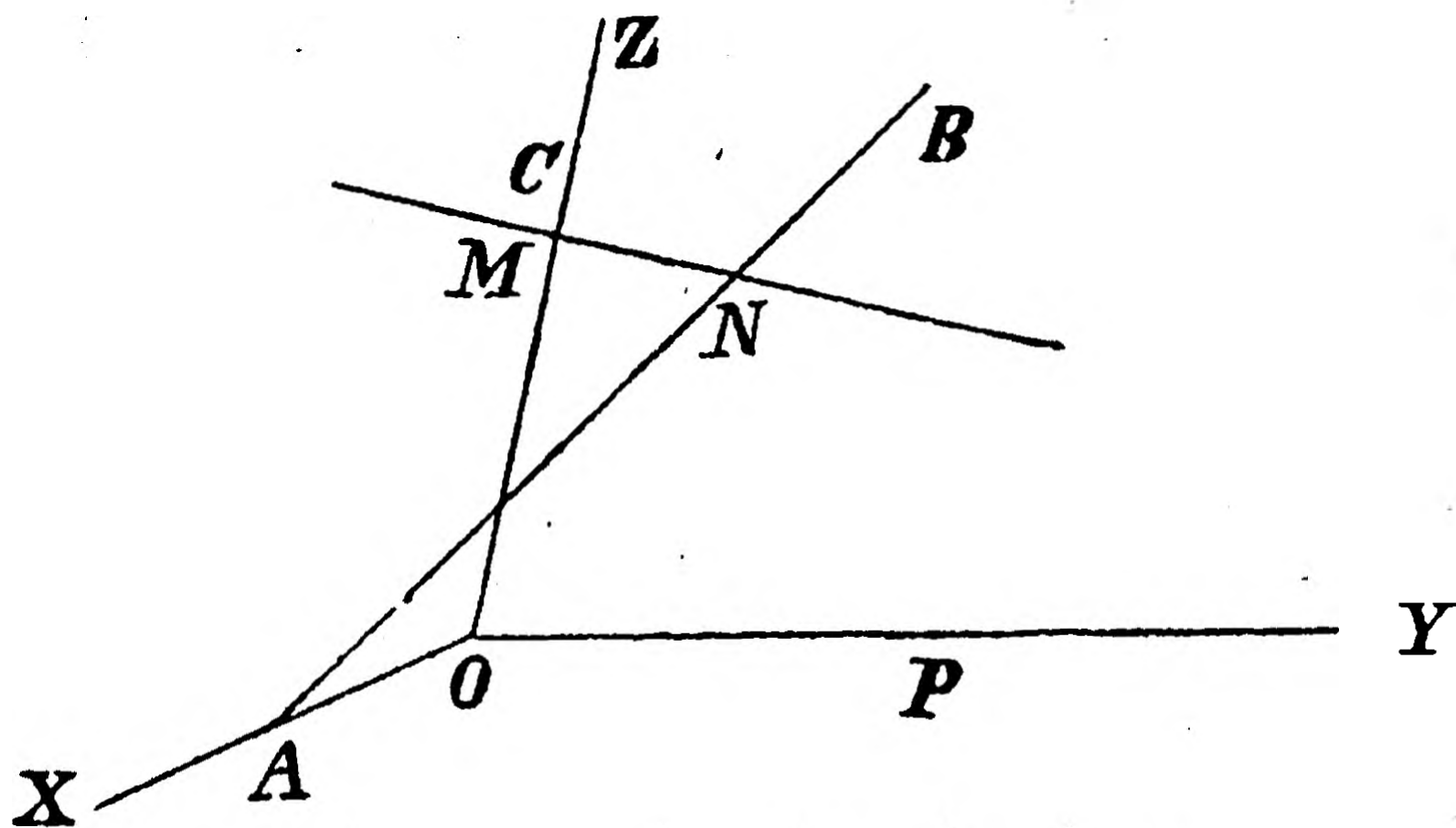
$$(AB) \quad \begin{cases} y = \beta \\ z = \alpha x \end{cases}, \quad (OC) \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Женератриса будучи параллельна плоскости XU и встрѣчая ось Z , будетъ имѣть уравненія:

Фиг. 172.

$$z = \lambda \quad , \quad y = \mu x \quad (35)$$



Параметры λ и μ должны удовлетво- рять уравненіе:

$$\alpha\beta = \lambda\mu$$

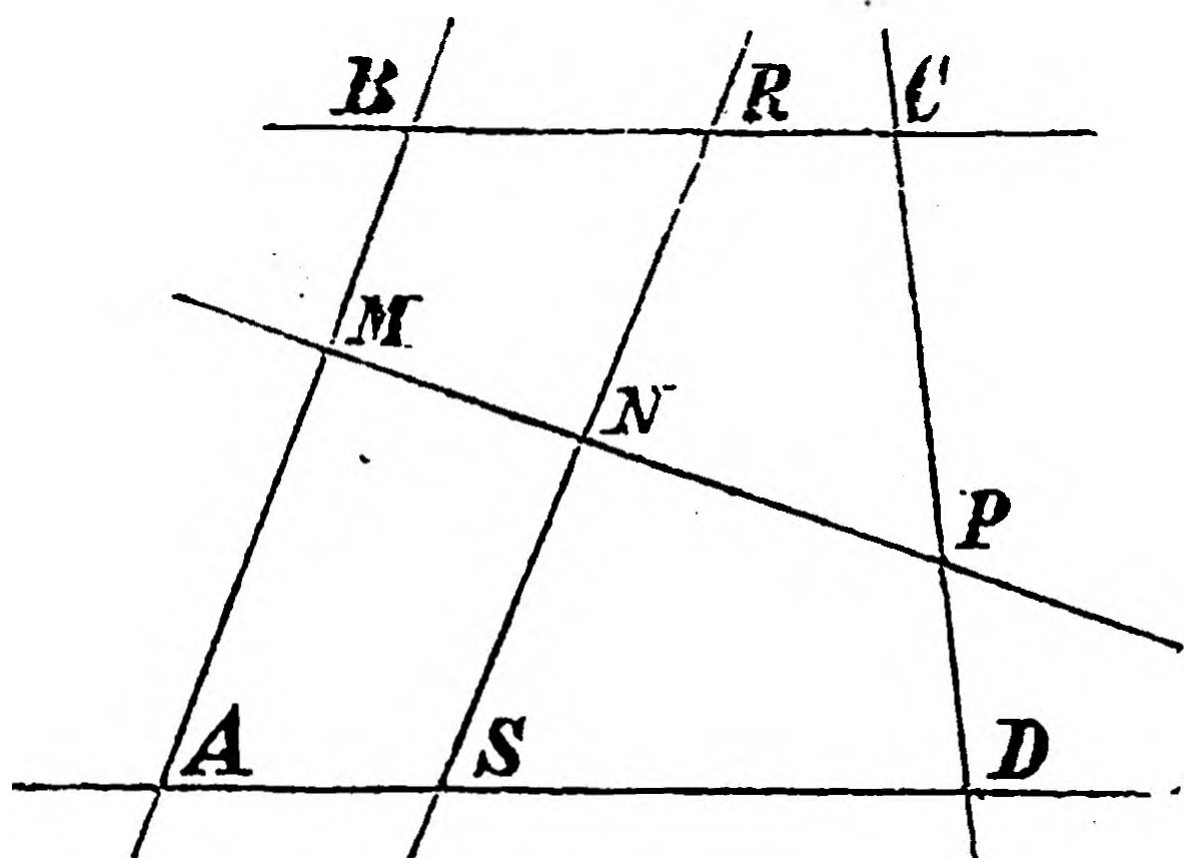
если женератриса упирается на AB . Исключая λ и μ съ помощью урав- неній (35), найдемъ уравненіе по- верхности:

$$yz - \alpha\beta x = 0$$

которое, очевидно, есть гиперболическій параболоидъ.

§ 626. *Предложеніе.* Если прямая линія такъ скользитъ по двумъ даннымъ прямымъ, что ея отрѣзки будутъ пропорціональны, то она опи- шетъ гиперболическій параболоидъ.

Фиг. 173.



Доказательство. Замѣтимъ сначала, что если AB и CD (фиг. 173) суть двѣ же- нератрисы параболоида, а AD , MP и BC три прямая другой системы, то:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DP}{PC}$$

Въ самомъ дѣлѣ, если по каждой прямой AD , MP и BC проведемъ плоскости параллельныя направляющей плос- кости, то онѣ будутъ параллельны между собою и опредѣлятъ на AB и CD пропорціональныя отрѣзки.

Обратно, положимъ, что прямая MP скользитъ по AB и CD и обра- зуетъ пропорціональныя отрѣзки. Пусть Q будетъ плоскость параллельная двумъ положеніямъ AD и BC скользящей прямой, проведемъ черезъ AB и BC двѣ плоскости параллельныя плоскости Q . Плоскость, проведенная черезъ точку M параллельно послѣднимъ плоскостямъ, отдѣлитъ на AB и CD пропорціональныя отрѣзки, а слѣдовательно пройдетъ черезъ точ- ку P и опишетъ, какъ видно гиперболическій параболоидъ. На этомъ основаніи устраиваютъ модель этой поверхности: раздѣляютъ стороны AB и CD косога четырехугольника на равное число равныхъ частей, точки дѣленія соединяютъ нитями, которыя представляютъ женератрисы пара- болоида. Если двѣ другія стороны четырехугольника также раздѣлимъ на

равное число равныхъ частей, то нити, соединяющія точки дѣленія будутъ генератрисы другой системы.

Мы назвали прямыя, лежащія на однополномъ гиперболоидѣ и на гиперболоическомъ параболоидѣ, *генератрисами*, потому что движеніемъ этихъ прямыхъ по извѣстному закону образуются эти двѣ поверхности.

§ 627. *Касательная плоскость*. Уравненіе касательной плоскости есть:

$$\frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} - \frac{(x+x_1)}{a} = 0$$

Если отождествимъ это уравненіе съ уравненіемъ плоскости двухъ генератрисъ:

$$(\lambda + \mu) \frac{y}{b} + (\lambda - \mu) \frac{z}{c} - \frac{2x}{a} - \gamma\mu = 0$$

то найдемъ:

$$\frac{\lambda + \mu}{\frac{y_1}{b}} = \frac{\lambda - \mu}{-\frac{z_1}{c}} = 2$$

откуда:

$$\lambda = \frac{y_1}{b} - \frac{z_1}{c}, \quad \mu = \frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c}$$

это величины параметровъ λ и μ генератрисъ, пересѣкающихся въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) . Слѣдовательно касательная плоскость проходитъ по двумъ генератрисамъ, пересѣкающимся въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) .

Легко, какъ выше, показать, что:

1. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины поверхности на касательную плоскость, будетъ:

$$p = - \frac{b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma}{2a \cos \alpha}$$

такъ что:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma + \frac{b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma}{2a \cos \alpha} = 0$$

будетъ уравненіе касательной плоскости.

2. Сумма проэкцій на оси гиперболоического параболоида перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершины поверхности на три перпендикулярныя между собою касательныя плоскости, есть величина постоянная.

3. Геометрическое мѣсто вершины трехграннаго прямого угла, описаннаго около гиперболоического параболоида, есть:

$$x + \frac{b^2 - c^2}{2a} = 0$$

плоскость перпендикулярная къ оси X,

4. Уравненія нормальной линіи суть:

$$\frac{x - x_1}{1} = \frac{y - y_1}{b^2} = \frac{z - z_1}{c^2}$$

Изъ точки взятой внѣ поверхности къ ней можно, вообще, провести пять нормальныхъ линій, коихъ основанія находятся на поверхности вращенія, проходящей черезъ вершину, и коей ось параллельна оси гиперболическаго параболоида.

5. Всѣ діаметры параллельны и есть безчисленное множество координатныхъ косоугольныхъ осей, для которыхъ гиперболическій параболоидъ будетъ представляться уравненіемъ формы:

$$\frac{y^2}{b^2_1} - \frac{z^2}{c^2_1} = \frac{2x}{a_1}$$

§ 628. Уравненіе гиперболическаго параболоида въ линейныхъ координатахъ будетъ:

$$b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 2a\xi$$

а уравненіе точки касанія касательной плоскости (ζ_1, η_1, ξ_1) есть:

$$b^2\eta_1\eta - c^2\zeta_1\zeta = a(\xi + \xi_1)$$

ГЛАВА XXXVIII.

Шарь.

§ 629. Уравненіе шара получимъ, если выразимъ основное свойство шаровой поверхности, что разстояніе каждой ея точки отъ центра есть величина постоянная.

Пусть a, b, c будутъ координаты центра, x, y, z координаты, какой-нибудь точки поверхности шара, r радіусъ шара, то будемъ имѣть:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad (1)$$

Если начало координатъ помѣстимъ въ центрѣ шара, то $a = 0, b = 0, c = 0$, слѣдовательно уравненіе (1) сдѣлается:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (2)$$

Это самая простая форма уравненія шара.

Если развернемъ уравненіе (1), то найдемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + d = 0 \quad (3)$$

гдѣ:

$$a_1 = -a, \quad b_1 = -b, \quad c_1 = -c, \quad d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 \quad (4)$$

Изъ уравненія (3) видимъ, что самое общее уравненіе шара въ прямоугольныхъ координатахъ не заключаетъ произведеній, или какъ говорятъ прямоугольниковъ xy , xz , yz , и коэффициенты при x^2 , y^2 , z^2 равны.

Если уравненіе шара дано въ формѣ (3), то координаты центра и радіусъ вычисляются съ помощью уравненій (4).

Уравненіе шара есть частный случай уравненія поверхности втораго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (5)$$

когда:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

въ этомъ случаѣ уравненіе (5) будетъ:

$$a_{11}(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (6)$$

которое по раздѣленіи на a_{11} имѣетъ форму уравненія (3).

§ 630. Если координаты будутъ косоугольными и углы между ними будутъ α , β , γ , то уравненіе поверхности шара будетъ (§ 433, 14):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\gamma + 2(x - a)(z - c)\cos\beta + 2(y - b)(z - c)\cos\alpha = r^2 \quad (7)$$

гдѣ a , b , c суть координаты центра, а r радіусъ шара. Если начало координатъ помѣстимъ въ центрѣ шара, то $a = b = c = 0$, откуда уравненіе шара сдѣлается:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos\gamma + 2xz\cos\beta + 2yz\cos\alpha = r^2 \quad (8)$$

§ 631. Пусть x_1, y_1, z_1 будутъ координаты точки M въ пространствѣ, а:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

уравненіе шара; a, b, c координаты его центра.

Изъ точки M проведемъ, какую-нибудь, касательную MT къ шару; T точка касанія. Если O есть центръ шара, то очевидно:

$$MT^2 = OM^2 - r^2$$

но:

$$OM^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2$$

слѣдовательно:

$$MT^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 - r^2$$

Изъ этого заключаемъ, что если въ уравненіе шара:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

вставимъ координаты, какой-нибудь точки внѣ поверхности шара, то полученное числовое значеніе будетъ длина касательной проведенной изъ взятой точки къ шару.

§ 632. Уравненіе шара (3) заключаетъ четыре произвольные коэффициента a_1, b_1, c_1, d_1 , слѣдовательно шаръ вполне опредѣляется четырьмя данными точками не лежащими въ одной плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, если точки $(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), (x_3 y_3 z_3), (x_4 y_4 z_4)$, находятся на шарѣ:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1 x + 2b_1 y + 2c_1 z + d = 0 \quad (9)$$

то имѣемъ:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2a_1 x_1 + 2b_1 y_1 + 2c_1 z_1 + d = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + 2a_1 x_2 + 2b_1 y_2 + 2c_1 z_2 + d = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + 2a_1 x_3 + 2b_1 y_3 + 2c_1 z_3 + d = 0$$

$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + 2a_1 x_4 + 2b_1 y_4 + 2c_1 z_4 + d = 0$$

откуда найдемъ уравненіе шара, проходящаго черезъ четыре данныя точки, если къ этимъ уравненіямъ присовокупимъ уравненіе (9):

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & , & x & , & y & , & z & , & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & , & x_1 & , & y_1 & , & z_1 & , & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & , & x_2 & , & y_2 & , & z_2 & , & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & , & x_3 & , & y_3 & , & z_3 & , & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & , & x_4 & , & y_4 & , & z_4 & , & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Уравненія конуса, описаннаго около шара, полярной и касательной плоскостей.

§ 633. Пусть уравненіе шара будетъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (11)$$

пусть $(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2)$ будутъ двѣ какія нибудь точки; координаты точки находящейся на прямой, проходящей черезъ эти точки, будутъ (§ 437):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Если прямая встрѣчаетъ шаръ, и λ соотвѣтствуетъ точкѣ встрѣчи, то эти выраженія должны удовлетворять уравненіе (11). Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - r^2)\lambda^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - r^2)\lambda + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 = 0 \quad (12)$$

Это уравненіе второй степени относительно λ , слѣдовательно прямая встрѣчаетъ шаръ, вообще, въ двухъ точкахъ. Если эти точки совпадаютъ, то прямая касается шара, а для этого необходимо, чтобы въ уравненіи (12) оба корня были равны, т. е. должны имѣть:

$$(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - r^2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - r^2) \quad (13)$$

Если теперь точку $(x_1y_1z_1)$ оставимъ въ покоѣ, а точку $(x_2y_2z_2)$ будемъ такъ перемѣщать въ пространствѣ, чтобы ея координаты постоянно удовлетворяли уравненіе (12), то уравненіе:

$$(x_1x + y_1y + z_1z - r^2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2)(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) \quad (14)$$

будетъ представлять, очевидно, геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на касательныхъ проведенныхъ изъ точки $(x_1y_1z_1)$ къ поверхности шара. Очевидно, это уравненіе конуса, описаннаго около шара, коего вершина находится въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$.

Если точка $(x_1y_1z_1)$ находится на поверхности шара, то:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 = 0$$

слѣдовательно уравненіе (14) сдѣлается:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - r^2 = 0$$

какъ видно плоскость, а такъ какъ всѣ прямыя въ этой плоскости, проходящія черезъ $(x_1y_1z_1)$ касаются шара, то это есть уравненіе касательной плоскости въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$ къ шару (11).

§ 634. Если точки пересѣченія шара съ прямою, проходящею черезъ точки $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, суть сопряженно гармоническія точкамъ $(x_1y_1z_1)$ и $(x_2y_2z_2)$, то корни уравненія (12) должны быть равны, но съ противными знаками, а для этого необходимо имѣть:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - r^2 = 0 \quad (15)$$

Если точку $(x_1y_1z_1)$ оставимъ въ покоѣ, а точку $(x_2y_2z_2)$ будемъ такъ опредѣлять, чтобы ея координаты удовлетворяли уравненіе (15), то:

$$x_1x + y_1y + z_1z - r^2 = 0 \quad (16)$$

будетъ уравненіе плоскости, которая есть геометрическое мѣсто четвертой гармонической къ тремъ точкамъ: $(x_1 y_1 z_1)$ и къ двумъ точкамъ пересѣченія прямой, проходящей черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$ съ шаромъ. Слѣдовательно это есть полярная плоскость, коей полюсь есть $(x_1 y_1 z_1)$. Если точка $(x_1 y_1 z_1)$ находится на шарѣ, то полярная плоскость обращается въ касательную.

Легко видѣть, что если уравненіе шара будетъ дано въ общей формѣ (1), то уравненіе полярной плоскости точки $(x_1 y_1 z_1)$ или касательной плоскости въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ на шарѣ будетъ:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) + (z_1 - c)(z - c) - r^2 = 0 \quad (17)$$

Замѣтимъ, что уравненіе полярной плоскости можно получить изъ общаго уравненія ея для поверхности втораго порядка (§ 510).

§ 635. Уравненіе прямой, соединяющей точку $(x_1 y_1 z_1)$ съ центромъ (a, b, c) шара, есть:

$$\frac{x - a}{x_1 - a} = \frac{y - b}{y_1 - b} = \frac{z - c}{z_1 - c} \quad (18)$$

изъ котораго видимъ (§ 457), что эта прямая перпендикулярна къ полярной плоскости (17). Если разстояніе полюса $(x_1 y_1 z_1)$ отъ полярной плоскости назовемъ черезъ p , а разстояніе его отъ центра шара черезъ q , то легко видѣть, что:

$$\frac{r^2}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2}} = p$$

или:

$$r^2 = p \cdot q \quad (19)$$

такъ какъ:

$$q = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2}$$

Съ помощью этого выраженія легко построить полярную плоскость, если данъ полюсь.

Уравненіе шара въ линейныхъ координатахъ.

§ 636. Мы видѣли, что если координаты точки суть a, b, c , то ея уравненіе есть:

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 1 \quad (20)$$

разстояніе r этой точки отъ плоскости данной координатами ξ_1, η_1, ζ_1 имѣетъ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1 - 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}} = r \quad (21)$$

если r есть величина постоянная, а ξ_1, η_1, ζ_1 будемъ такъ измѣнять, чтобы онѣ удовлетворяли уравненіе (21), то будемъ имѣть уравненіе шара:

$$(a\xi + b\eta + c\zeta - 1)^2 = r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \quad (22)$$

Координаты ξ, η, ζ удовлетворяющіе этому уравненію опредѣляютъ положеніе плоскости, которая касается шара, коего координаты центра суть (a, b, c) , а радіусъ r . Уравненіе центра, очевидно, есть (20).

Если начало координатъ находится въ центрѣ шара, то $a = b = c = 0$ и уравненіе шара будетъ:

$$r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1 \quad (23)$$

Если развернемъ уравненіе (22), то найдемъ:

$$(a^2 - r^2)\xi^2 + (b^2 - r^2)\eta^2 + (c^2 - r^2)\zeta^2 + 2ab\xi\eta + 2ac\xi\zeta + 2bc\eta\zeta - 2(a\xi + b\eta + c\zeta) + 1 = 0 \quad (24)$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ:

$$a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{13}\xi\zeta + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{14}\xi + 2a_{24}\eta + 2a_{34}\zeta + a_{44} = 0 \quad (25)$$

найдемъ условія, при которыхъ это уравненіе представляетъ шаръ:

$$a^2 - r^2 = \frac{a_{11}}{a_{44}}, \quad b^2 - r^2 = \frac{a_{22}}{a_{44}}, \quad c^2 - r^2 = \frac{a_{33}}{a_{44}} \quad (26)$$

$$ab = \frac{a_{12}}{a_{44}}, \quad ac = \frac{a_{13}}{a_{44}}, \quad bc = \frac{a_{23}}{a_{44}}, \quad a = -\frac{a_{14}}{a_{44}}, \quad b = -\frac{a_{24}}{a_{44}}, \quad c = -\frac{a_{34}}{a_{44}}$$

исключая изъ этихъ уравненій a, b, c, r найдемъ:

$$a^2_{14} - a_{11}a_{44} = a^2_{24} - a_{22}a_{44} = a^2_{34} - a_{33}a_{44} \quad (27)$$

$$a_{14}a_{24} = a_{12}a_{44}, \quad a_{14}a_{34} = a_{13}a_{44}, \quad a_{24}a_{34} = a_{23}a_{44}$$

Это необходимыя и достаточныя условія, чтобы общее уравненіе втораго порядка представляло шаръ. Если условія (27) удовлетворяются, то координаты центра и радіусъ будутъ:

$$a = -\frac{a_{14}}{a_{44}}, \quad b = -\frac{a_{24}}{a_{44}}, \quad c = -\frac{a_{34}}{a_{44}} \quad (28)$$

$$r^2 = \frac{a^2_{14} - a_{11}a_{44}}{a^2_{44}} = \frac{a^2_{24} - a_{22}a_{44}}{a^2_{44}} = \frac{a^2_{34} - a_{33}a_{44}}{a^2_{44}}$$

§ 637. *Задача.* Найти уравнение точки касанія касательной плоскости къ шару?

Рѣшеніе. Пусть уравнение шара будетъ:

$$r^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1 \quad (29)$$

пусть ξ_1, η_1, ζ_1 ; ξ_2, η_2, ζ_2 будутъ координаты двухъ, какихъ-нибудь, плоскостей. Очевидно уравненія этихъ плоскостей въ координатахъ Декарта будутъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z - 1 = 0 \quad ; \quad \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z - 1 = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей черезъ пересѣченіе этихъ двухъ плоскостей, будетъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z - 1 + \lambda (\xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z - 1) = 0 \quad (30)$$

Слѣдовательно координаты этой плоскости будутъ:

$$\xi = \frac{\xi_1 + \lambda \xi_2}{1 + \lambda}, \quad \eta = \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda}, \quad \zeta = \frac{\zeta_1 + \lambda \zeta_2}{1 + \lambda} \quad (31)$$

Если плоскость (30) будетъ касательная къ поверхности шара (29), то координаты (31) должны удовлетворять уравненію (29), слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} & \{r^2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - 1\} \lambda^2 + 2 \{(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2) r^2 - 1\} \lambda + \\ & + r^2(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Это уравненіе квадратное, слѣдовательно даетъ для λ два значенія, откуда заключаемъ, что черезъ пересѣченіе двухъ данныхъ плоскостей можно провести двѣ касательныя плоскости къ шару. Но если координаты ξ_1, η_1, ζ_1 ; ξ_2, η_2, ζ_2 удовлетворяютъ уравненію:

$$\{r^2(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2) - 1\}^2 = \{r^2(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - 1\} \{r^2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - 1\} \quad (33)$$

то оба корня уравненія (32) будутъ равны, а слѣдовательно плоскости совпадутъ, что требуетъ, чтобы прямая пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей касалась шара, въ одной изъ точекъ пересѣченія плоскости ξ_1, η_1, ζ_1 съ поверхностью шара. Если въ предъидущемъ уравненіи замѣнимъ ξ_2, η_2, ζ_2 переменными ζ, η, ξ , то найдемъ:

$$\{r^2(\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \zeta_1 \zeta) - 1\}^2 - \{r^2(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - 1\} \{r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 1\} = 0 \quad (34)$$

Это уравненіе удовлетворяется координатами, какой нибудь, плоскости,

проходящей через касательную къ кругу пересѣченія плоскости ξ_1, η_1, ζ_1 съ шаромъ. Но если эта послѣдняя плоскость будетъ касательная къ шару, то имѣемъ:

$$r^2 (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - 1 = 0$$

Слѣдовательно предъидущее равенство сдѣлается:

$$r^2 (\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \zeta_1 \zeta) = 1 \quad (35)$$

Это уравненіе удовлетворяется координатами, какой нибудь изъ плоскостей, пересѣкающей плоскость $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ по касательной къ шару; слѣдовательно это будетъ уравненіе искомой точки.

Если уравненіе шара будетъ:

$$(a\xi + b\eta + c\zeta - 1)^2 = r^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

то уравненіе точки касанія плоскости $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ будетъ:

$$(a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1 - 1)(a\xi + b\eta + c\zeta - 1) - r^2 (\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \zeta_1 \zeta) = 0$$

§ 638. Если въ уравненіи (32) корни будутъ равны, но съ противоположными знаками, то будемъ имѣть:

$$r^2 (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2) - 1 = 0 \quad (36)$$

при этомъ условіи, очевидно плоскости $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$, $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ и двѣ соотвѣтствующіе корнямъ $+\lambda$ и $-\lambda$ будутъ гармоническія. Если плоскость $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ фиксируемъ, а координаты плоскости $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ будемъ такъ измѣнять, чтобы онѣ удовлетворяли уравненіе, то это уравненіе будетъ представлять точку, которая есть, очевидно, полюсъ плоскости $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$. Всѣ предъидущіе результаты можно получить изъ общихъ свойствъ кривыхъ втораго порядка, изложенныхъ въ §§ 207—211.

Система двухъ шаровъ.

639. Пусть уравненія двухъ шаровъ будутъ:

$$\begin{aligned} S_1 &= (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ S_2 &= (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

если эти уравненія вычтемъ, то найдемъ:

$$S_1 - S_2 = 0 \quad (38)$$

или:

$$(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2 - r_1^2 + r_2^2}{2} = 0 \quad (39)$$

Это уравнение представляет плоскость, которая, очевидно, перпендикулярна къ прямой:

$$\frac{x - a_1}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_1}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_1}{c_1 - c_2} \quad (40)$$

соединяющей центры шаровъ $S_1 = 0$ и $S_2 = 0$. Эта плоскость называется *радикальною плоскостью*.

Изъ уравненія:

$$S_1 = S_2 \quad (41)$$

видимъ, припоминая числовое значеніе количествъ S_1 и S_2 (§ 631), что всѣ касательныя, проведенныя изъ какой нибудь точки радикальной плоскости къ шарамъ (37) равны. Если шары $S_1 = 0$ и $S_2 = 0$ пересѣкаются, то радикальная плоскость есть плоскость круга, по которому пересѣкаются шары (37); если шары касаются, то радикальная плоскость есть общая касательная плоскость къ обѣимъ шарамъ, наконецъ если шары не пересѣкаются, то радикальная плоскость проходитъ черезъ середины общихъ касательныхъ къ шарамъ. Въ частномъ случаѣ, если шары концентричны, а при этомъ $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, то уравненіе (39) сводится на постоянное количество, что показываетъ, что радикальная плоскость находится на безконечности.

§ 640. Очевидно, что уравненіе:

$$S_1 - \lambda S_2 = 0 \quad (42)$$

есть шаръ, проходящій черезъ пересѣченіе шаровъ (37); давая λ всевозможныя значенія, мы будемъ имѣть систему изъ безконечнаго числа шаровъ, которые всѣ проходятъ черезъ пересѣченіе шаровъ (37). Если означимъ черезъ a, b, c, r координаты центра и радіусъ одного изъ этихъ шаровъ, то будемъ имѣть:

$$a = \frac{a_1 - \lambda a_2}{1 - \lambda}, \quad b = \frac{b_1 - \lambda b_2}{1 - \lambda}, \quad c = \frac{c_1 - \lambda c_2}{1 - \lambda} \quad (43)$$

$$r^2 = \frac{r_2^2 \lambda^2 + (d^2 - r_1^2 - r_2^2) \lambda + r_1^2}{(1 - \lambda)^2} \quad (44)$$

гдѣ d есть разстояніе между центрами шаровъ. Изъ выраженій (43) ви-

димъ, что центры шаровъ системы всѣ находятся на прямой, соединяющей центры шаровъ (37). Такъ какъ всѣ шары (42) проходятъ черезъ пересѣченіе, дѣйствительное или мнимое шаровъ (37), то вся система имѣетъ общую радикальную плоскость. Между шарами системы (42) есть два шара, коихъ радіусы равны нулю; положеніе этихъ шаровъ или точекъ найдемъ, если въ уравненіи (44) положимъ $r = 0$. Это условіе даетъ уравненіе:

$$r_2^2 \lambda^2 = (d^2 - r_1^2 - r_2^2) \lambda + r_1^2 = 0 \quad (45)$$

Изъ этого квадратнаго уравненія найдемъ для λ два значенія λ_1 и λ_2 , которыя и дадутъ положеніе центровъ искомымъ шаровъ, называемыхъ *предѣльными*.

Предѣльныя точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя, смотря потому будутъ-ли корни уравненія (45) дѣйствительные или мнимые. Если выраженіе:

$$(d^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \quad (46)$$

будетъ положительное, то корни уравненія (45) будутъ дѣйствительные, въ противномъ случаѣ они будутъ мнимые. Если выраженіе (46) будетъ равно нулю, то корни будутъ равные.

Выраженіе (46) можетъ быть написано въ формѣ:

$$(d + r_1 + r_2)(-d + r_1 + r_2)(d - r_1 + r_2)(d + r_1 - r_2) \quad (47)$$

изъ котораго видно, что выраженіе (46) будетъ отрицательнымъ подъ условіемъ:

$$d > r_1 + r_2 \quad \text{или} \quad d < r_2 - r_1$$

если $r_2 > r_1$. Предѣльныя точки совмѣстятся если:

$$d = r_1 + r_2 \quad \text{или} \quad d = r_2 - r_1$$

Изъ этого видимъ, что предѣльныя точки будутъ мнимыя, если шары пересѣкаются, и дѣйствительныя въ противномъ случаѣ.

§ 641. Такъ какъ уравненіе (44) относительно λ второй степени, то въ системѣ шаровъ (42) есть всегда два шара съ даннымъ радіусомъ.

Если шары (37) пересѣкаются, то легко построить систему шаровъ (42), имѣющихъ общую сѣкущую плоскость, но если шары (37) не пересѣкаются, то построеніе системы шаровъ (42) дѣлается съ помощью слѣдующихъ свойствъ системы.

Такъ какъ система шаровъ (42) имѣетъ общую радикальную плоскость, то изъ свойствъ (41) слѣдуетъ, что касательныя, проведенныя изъ

какой-нибудь точки m радикальной плоскости ко всѣмъ шарамъ системы (42), равны, слѣдовательно геометрическое мѣсто точекъ касанія касательныхъ проведенныхъ изъ точки m къ шарамъ системы, есть шаръ, пересекающій всѣ шары системы подъ прямымъ угломъ и коего центръ есть точка m . Этотъ шаръ, очевидно, проходитъ и черезъ *предѣльные* точки системы. Если точку m будемъ перемѣщать по радикальной плоскости, то получимъ другую систему шаровъ, пересекающихъ первую подъ прямыми углами.

Всѣ шары второй системы проходятъ черезъ предѣльныя точки, слѣдовательно, прямая соединяющая эти точки есть общая хорда шаровъ второй системы. На этомъ свойствѣ легко построить, какой-нибудь изъ шаровъ, принадлежащихъ второй системѣ.

§ 642. *Полярная плоскость системы шаровъ.* Мы видѣли выше (§ 634), что полярныя плоскости шаровъ $S_1 = 0$ и $S_2 = 0$ относительно полюса $(x_1 y_1 z_1)$ суть:

$$P_1 = (x_1 - a_1)(x - a_1) + (y_1 - b_1)(y - b_1) + (z_1 - c_1)(z - c_1) - r_1^2 = 0 \quad (48)$$

$$P_2 = (x_1 - a_2)(x - a_2) + (y_1 - b_2)(y - b_2) + (z_1 - c_2)(z - c_2) - r_2^2 = 0$$

слѣдовательно полярная плоскость системы (42) относительно того же полюса будетъ:

$$P_1 - \lambda P_2 = 0 \quad (49)$$

Изъ формы этого уравненія видимъ, что полярная плоскость, какой-нибудь, точки относительно шаровъ системы (42) всегда проходитъ черезъ пересѣченіе полярныхъ плоскостей (48) той-же точки относительно шаровъ $S_1 = 0$ и $S_2 = 0$.

Если полюсъ находится на прямой соединяющей центры шаровъ, то вмѣсто x_1, y_1, z_1 надобно подставить въ уравненіе (49) выраженія:

$$x_1 = \frac{a_1 - \lambda a_2}{1 - \lambda}, \quad y_1 = \frac{b_1 - \lambda b_2}{1 - \lambda}, \quad z_1 = \frac{c_1 - \lambda c_2}{1 - \lambda} \quad (50)$$

откуда будемъ имѣть:

$$P_1 = (a_1 - a_2)(x - a_1) + (b_1 - b_2)(y - b_1) + (c_1 - c_2)(z - c_1) - \frac{r_1^2(1 - \lambda)}{\lambda} = 0 \quad (51)$$

$$P_2 = (a_1 - a_2)(x - a_2) + (b_1 - b_2)(y - b_2) + (c_1 - c_2)(z - c_2) - r_2^2(1 - \lambda) = 0$$

очевидно эти плоскости перпендикулярны къ прямой, соединяющей центры шаровъ.

Если желаемъ имѣть полярныя плоскости одной изъ предѣльныхъ точекъ, то мы должны въ уравненія (51) вставить вмѣсто λ корни уравненія (45) λ_1 и λ_2 , что даетъ:

$$(a_1 - a_2)(x - a_1) + (b_1 - b_2)(y - b_1) + (c_1 - c_2)(z - c_1) - \frac{r_1^2(1 - \lambda_1)}{\lambda_1} = 0 \quad (52)$$

$$(a_1 - a_2)(x - a_2) + (b_1 - b_2)(y - b_2) + (c_1 - c_2)(z - c_2) - r_2^2(1 - \lambda_1) = 0$$

Если въ эти уравненія вставимъ вмѣсто x, y, z координаты другой предѣльной точки:

$$x = \frac{a_1 - \lambda_2 a_2}{1 - \lambda_2}, \quad y = \frac{b_1 - \lambda_2 b_2}{1 - \lambda_2}, \quad z = \frac{c_1 - \lambda_2 c_2}{1 - \lambda_2} \quad (53)$$

и замѣтимъ, что:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = - \frac{(d^2 - r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2}$$

то найдемъ, что уравненія (52) удовлетворяются этими координатами, откуда видимъ, что полярныя плоскости (52) проходятъ черезъ другую предѣльную точку, а такъ какъ онѣ перпендикулярны къ прямой соединяющей центры шаровъ, то онѣ совмѣщаются, откуда слѣдуетъ, что полярная плоскость одной изъ предѣльныхъ точекъ, относительно каждаго изъ шаровъ системы (42), есть плоскость, проходящая черезъ другую предѣльную точку перпендикулярно къ прямой, соединяющей центры шаровъ.

Центры подобія.

§ 643. Пусть уравненія двухъ шаровъ будутъ:

$$\begin{aligned} S_1 &= (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ S_2 &= (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

уравненія центровъ этихъ шаровъ, очевидно, будутъ:

$$A_1 = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta - 1 = 0, \quad A_2 = a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta - 1 = 0 \quad (55)$$

Два общіе описанные конуса около шаровъ (54) имѣютъ вершины на прямой, соединяющей центры шаровъ, одну внѣ шаровъ, другую между шарами. Назовемъ центры шаровъ черезъ O_1, O_2 , а вершины конусовъ черезъ S и s . Помѣстимъ начало координатъ въ вершинѣ S , возьмемъ за

ось X прямую SO_1O_2 . Плоскость XZ пересѣчетъ оба шара по кругамъ, коихъ внѣшній центръ подобія будетъ вершина S . Если A и a будутъ двѣ, какія-нибудь, соотвѣтственныя точки на кругахъ пересѣченія, то будемъ имѣть, очевидно:

$$\frac{SA}{sa} = \frac{r_1}{r_2} = k$$

откуда:

$$SA = sa \cdot k \quad (56)$$

k есть коэффициентъ подобія круговъ. Но за плоскость XZ можно взять какую угодно плоскость, проходящую по прямой O_1O_2 , слѣдовательно зависимость (56) будетъ имѣть мѣсто для двухъ, какихъ-нибудь, точекъ шаровъ, лежащихъ на прямой, проходящей черезъ вершину S . Такимъ образомъ уравненіе служитъ для опредѣленія одной изъ двухъ точекъ A и a , если другая дана и данъ коэффициентъ подобія k . Вершина S называется *внѣшнимъ центромъ подобія* двухъ шаровъ (54), а вершина s — *внутреннимъ центромъ подобія* тѣхъ-же шаровъ.

Изъ подобія круговъ въ плоскости, проходящей черезъ прямую SO_1O_2 , слѣдуетъ, что S, O_1, s, O_2 суть гармоническія точки и что радіусы проведенные въ соотвѣтственныя точки шаровъ параллельны. Чтобы построить внѣшній центръ подобія двухъ данныхъ шаровъ надобно черезъ ихъ центры провести два параллельные радіуса въ одномъ направленіи и черезъ ихъ концы провести прямую, которая встрѣтитъ прямую O_1O_2 въ искомой точкѣ S . Если параллельные радіусы будутъ проведены въ противоположныхъ направленіяхъ, то прямая, соединяющая ихъ концы встрѣтитъ прямую центровъ O_1O_2 въ точкѣ s , которая будетъ внутреннимъ центромъ подобія.

§ 644. *Задача.* Найти координаты центровъ подобія двухъ данныхъ шаровъ?

Рѣшеніе. Выше видѣли, что точки S, O_1, s, O_2 суть гармоническія и что:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1S}{O_2S} = \frac{O_1s}{O_2s}$$

Замѣчая, что уравненія точекъ O_1 и O_2 суть (55):

$$A_1 = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta - 1 = 0, \quad A_2 = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta - 1 = 0$$

найдемъ уравненія точекъ S и s :

$$(S) \quad A_1 - \frac{r_1}{r_2} A_2 = 0, \quad (s) \quad A_2 + \frac{r_1}{r_2} A_1 = 0 \quad (57)$$

или:

$$\begin{aligned} (a_1 r_2 - a_2 r_1) \xi + (b_1 r_2 - b_2 r_1) \eta + (c_1 r_2 - c_2 r_1) \zeta - (r_2 - r_1) &= 0 \\ (a_1 r_2 + a_2 r_1) \xi + (b_1 r_2 + b_2 r_1) \eta + (c_1 r_2 + c_2 r_1) \zeta - (r_2 + r_1) &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

откуда координаты точекъ S и s будутъ:

$$\begin{aligned} (S) \quad x &= \frac{a_1 r_2 - a_2 r_1}{r_2 - r_1}, \quad y = \frac{b_1 r_2 - b_2 r_1}{r_2 - r_1}, \quad z = \frac{c_1 r_2 - c_2 r_1}{r_2 - r_1} \\ (s) \quad x &= \frac{a_1 r_2 + a_2 r_1}{r_2 + r_1}, \quad y = \frac{b_1 r_2 + b_2 r_1}{r_2 + r_1}, \quad z = \frac{c_1 r_2 + c_2 r_1}{r_2 + r_1} \end{aligned} \quad (59)$$

§ 645. *Задача.* Найти уравненія конусовъ, описанныхъ около двухъ данныхъ шаровъ?

Рѣшеніе. Означимъ черезъ x_1, y_1, z_1 координаты вершины конуса, описаннаго около шара $S_1=0$, его уравненіе будетъ (§ 631):

$$\begin{aligned} \{x_1 - a_1(x - a_1) + (y_1 - b_1)(y - b_1) + (z_1 - c_1)(z - c_1) - r_1^2\}^2 - \\ - S_1 \{(x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 + (z_1 - c_1)^2 - r_1^2\} = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Замѣстивъ координаты x_1, y_1, z_1 , координатами S (59), найдемъ:

$$\begin{aligned} \{(x - a_1)(a_1 - a_2) + (y - b_1)(b_1 - b_2) + (z - c_1)(c_1 - c_2) - r_1(r_2 - r_1)\}^2 - \\ - S_1 \{\overline{O_1 O_2}^2 - (r_2 - r_1)^2\} = 0 \end{aligned}$$

Если развернемъ квадратъ въ этомъ уравненіи и замѣтимъ, что:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(S_2 - S_1) = \\ = (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + \frac{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 - r_2^2 + r_1^2}{2} \end{aligned}$$

то найдемъ:

$$\{S_2 - S_1 - \overline{O_1 O_2}^2 + (r_2 - r_1)^2\}^2 - 4S_1 \{\overline{O_1 O_2}^2 - (r_2 - r_1)^2\} = 0 \quad (61)$$

Это есть уравненіе конуса описаннаго около шаровъ $S_1=0$ и $S_2=0$, коего вершина есть точка S . Легко такимъ же образомъ найти описанный конусъ, коего вершина есть точка s :

$$\{S_2 - S_1 - \overline{O_1 O_2}^2 + (r_1 + r_2)^2\}^2 - 4S_1 \{\overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 + r_2)^2\} = 0 \quad (62)$$

§ 646. *Задача.* Найти уравненія полярныхъ плоскостей центровъ подобія двухъ шаровъ?

Рѣшеніе. Полярная плоскость точки (x_1, y_1, z_1) относительно шара $S_1 = 0$ есть:

$$(x_1 - a_1)(x - a_1) + (y_1 - b_1)(y - b_1) + (z_1 - c_1)(z - c_1) - r_1^2 = 0$$

Замѣстимъ координаты x_1, y_1, z_1 координатами S (59), то съ помощію предыдущаго преобразованія, найдемъ:

$$S_2 - S_1 - \{ \overline{O_1 O_2}^2 - (r_2 - r_1)^2 \} = 0 \quad (63)$$

Полярная плоскость той-же точки относительно шара $S_2 = 0$ будетъ:

$$S_2 - S_1 + \{ \overline{O_1 O_2}^2 - (r_2 - r_1)^2 \} = 0 \quad (64)$$

Точно также найдемъ уравненія полярныхъ плоскостей внутренняго центра подобія относительно обоихъ шаровъ:

$$S_2 - S_1 - \{ \overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 + r_2)^2 \} = 0 \quad (65)$$

$$S_2 - S_1 + \{ \overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 + r_2)^2 \} = 0$$

Система трехъ шаровъ.

§ 647. Пусть данные три шара будутъ:

$$\begin{aligned} S_1 &= (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ S_2 &= (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 - r_2^2 = 0 \\ S_3 &= (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 - r_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

Уравненія ихъ центровъ будутъ:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta - 1 = 0 \\ A_2 &= a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta - 1 = 0 \\ A_3 &= a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta - 1 = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

Радикальныя плоскости каждой пары изъ трехъ шаровъ (66) будутъ:

$$S_1 - S_2 = 0 \quad , \quad S_2 - S_3 = 0 \quad , \quad S_3 - S_1 = 0 \quad (68)$$

Легко видѣть, что эти три плоскости пересѣкаются по одной прямой, которая называется *радикальною осью* трехъ шаровъ.

Каждая изъ точекъ радикальной оси удовлетворяетъ уравненія:

$$S_1 = S_2 = S_3 \quad (69)$$

Слѣдовательно она есть геометрическое мѣсто точекъ, изъ коихъ касательныя, проведенныя къ тремъ шарамъ (66), равны. Такъ какъ радикальная плоскость перпендикулярна къ прямой соединяющей центры шаровъ, то изъ этого слѣдуетъ, что радикальная ось перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ центры трехъ шаровъ.

648. Уравненіе:

$$S_1 + \lambda S_2 + \mu S_3 = 0 \quad (70)$$

представляетъ систему шаровъ, имѣющихъ общую радикальную ось съ шарами (66).

Въ самомъ дѣлѣ, длина касательной, проведенной изъ какой нибудь точки радикальной оси къ шару (70), очевидно, есть:

$$\frac{S_1 + \lambda S_2 + \mu S_3}{1 + \lambda + \mu}$$

но для всякой точки на радикальной оси имѣемъ $S_1 = S_2 = S_3$, слѣдовательно:

$$\frac{S_1 + \lambda S_2 + \mu S_3}{1 + \lambda + \mu} = S_1 \quad (71)$$

а это показываетъ, что всѣ шары системы (70) имѣютъ общую радикальную ось.

Координаты центра одного изъ шаровъ системы (70) суть:

$$x = \frac{a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3}{1 + \lambda + \mu}, \quad y = \frac{b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3}{1 + \lambda + \mu}, \quad z = \frac{c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3}{1 + \lambda + \mu}$$

исключая изъ этихъ уравненій λ и μ найдемъ геометрическое мѣсто центровъ шаровъ (70):

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

которое, какъ видно, есть плоскость, проходящая черезъ центры трехъ шаровъ (66).

Задача. Показать, что геометрическое мѣсто центровъ шаровъ системы (70), коихъ радиусъ есть данная величина, есть коническое сѣченіе на плоскости центровъ?

§ 649. *Предложеніе.* Полярныя плоскости данной точки, относительно каждаго изъ системы шаровъ (70), проходятъ всѣ черезъ одну и ту же точку.

Доказательство. Пусть:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \quad (72)$$

будутъ три шара.

$$S_1 + \lambda S_2 + \mu S_3 = 0 \quad (73)$$

есть система шаровъ имѣющихъ общую радикальную ось съ тремя данными шарами (72).

Если:

$$P_1 = 0 \quad , \quad P_2 = 0 \quad , \quad P_3 = 0$$

суть полярныя плоскости точки $(x_1 y_1 z_1)$ относительно шаровъ (72), то:

$$P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3 = 0 \quad (74)$$

будетъ, очевидно, полярная плоскость той-же точки относительно шара (73). Изъ формы уравненія (74) видно, что эта плоскость проходитъ черезъ точку пересѣченія плоскостей (73), какія бы ни были значенія параметровъ λ и μ .

Задача. Показать, что если данная точка $(x_1 y_1 z_1)$ находится на радикальной оси трехъ шаровъ, то полярныя плоскости (73) пересѣкаются также на радикальной оси?

§ 650. *Центры подобія.* Три шара:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \quad (75)$$

взятые попарно имѣютъ шесть центровъ подобія, которые расположены на сторонахъ треугольника $O_1 O_2 O_3$, если O_1, O_2, O_3 суть центры данныхъ шаровъ. Уравненія этихъ центровъ суть:

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{r_2} - \frac{A_3}{r_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0 \\ \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{r_3} + \frac{A_1}{r_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

первыя три уравненія даютъ тождество:

$$\left(\frac{A_2}{r_2} - \frac{A_3}{r_3} \right) + \left(\frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1} \right) + \left(\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} \right) = 0$$

Слѣдовательно три внѣшніе центра подобія лежатъ на одной прямой ли-

ни. Изъ тѣхъ же уравненій (76) найдемъ еще слѣдующія тождества:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2}\right) - \left(\frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3}\right) + \left(\frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1}\right) &\equiv 0 \\ \left(\frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2}\right) - \left(\frac{A_3}{r_3} + \frac{A_1}{r_1}\right) - \left(\frac{A_2}{r_2} - \frac{A_3}{r_3}\right) &\equiv 0 \\ \left(\frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3}\right) - \left(\frac{A_3}{r_3} + \frac{A_1}{r_1}\right) + \left(\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2}\right) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Изъ этихъ тождествъ слѣдуетъ, что два внутреннiе и одинъ внѣшнiй изъ центровъ подобiя также лежатъ на одной прямой линiи. Четыре прямыя, на которыхъ лежатъ по три центра подобiя называются *осями подобiя* трехъ шаровъ. Очевидно эти четыре оси находятся въ плоскости центровъ.

Съ помощью уравненiй (76) легко написать координаты центровъ подобiя. Такъ, наприимѣръ, координаты центровъ подобiя:

$$\frac{A_2}{r_2} - \frac{A_3}{r_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1} = 0$$

суть:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_2 r_1 - a_1 r_2}{r_1 - r_2} \quad , \quad y_1 = \frac{b_2 r_1 - b_1 r_2}{r_1 - r_2} \quad , \quad z_1 = \frac{c_2 r_1 - c_1 r_2}{r_1 - r_2} \\ x_2 &= \frac{a_3 r_1 - r_1 a_3}{r_1 - r_3} \quad , \quad y_2 = \frac{b_3 r_1 - b_1 r_3}{r_1 - r_3} \quad , \quad z_2 = \frac{c_3 r_1 - c_1 r_3}{r_1 - r_3} \end{aligned} \quad (77)$$

Косинусы угловъ прямой, проходящей черезъ двѣ точки $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, пропорциональны разностямъ:

$$x_2 - x_1 \quad , \quad y_2 - y_1 \quad , \quad z_2 - z_1$$

Слѣдовательно изъ выраженiй (77) слѣдуетъ, что косинусы угловъ, которые внѣшняя ось подобiя составляетъ съ координатными осями, пропорциональны выраженiямъ:

$$\begin{aligned} r_1(a_2 - a_3) + r_2(a_3 - a_1) + r_3(a_1 - a_2) \\ r_1(b_2 - b_3) + r_2(b_3 - b_1) + r_3(b_1 - b_2) \\ r_1(c_2 - c_3) + r_2(c_3 - c_1) + r_3(c_1 - c_2) \end{aligned} \quad (78)$$

Въ уравненiи:

$$r_1(S_2 - S_3) + r_2(S_3 - S_1) + r_3(S_1 - S_2) = 0$$

коэффициенты при x, y, z , очевидно, пропорциональны выраженiямъ (78), слѣ-

довательно это уравнение представляет плоскость, которая проходит через радикальную ось и перпендикулярна къ внѣшней оси подобія.

§ 651. *Задача.* Найти взаимную полярю внѣшней оси подобія трехъ шаровъ?

Рѣшеніе. Пусть данные шары будутъ:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0$$

Выше видѣли, что уравнение полярной плоскости точки:

$$\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0$$

относительно шара $S_1 = 0$, есть:

$$S_1 - S_2 + \{ \overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2 \} = 0 \quad (79)$$

Уравнение полярной плоскости точки:

$$\frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1} = 0$$

относительно того-же шара, есть:

$$S_1 - S_3 + \{ \overline{O_1 O_3}^2 - (r_1 - r_3)^2 \} = 0 \quad (80)$$

Уравненія (79) и (80) взятыя вмѣстѣ представляютъ взаимную полярю внѣшней оси подобія относительно шара $S_1 = 0$, такъ какъ полярныя плоскости двухъ точекъ пересѣкаются по взаимной полярѣ прямой, проходящей черезъ двѣ точки. Такія-же уравненія можно получить относительно другихъ шаровъ.

Извѣстно, что взаимная полярю пересѣченія двухъ касательныхъ плоскостей къ шару, есть хорда сопряженія. Слѣдовательно, если къ уравненіямъ (79) и (80) присовокупимъ уравнение шара $S_1 = 0$, то будемъ имѣть три уравненія, изъ коихъ можно опредѣлить точки касанія касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ шару $S_1 = 0$ черезъ внѣшнюю ось подобія.

Система четырехъ шаровъ.

652. Пусть уравненія четырехъ шаровъ будутъ:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \quad , \quad S_4 = 0 \quad (81)$$

Радикальныя оси этихъ шаровъ, взятыя по три, суть:

$$\begin{aligned}
 S_1 - S_2 = 0 & , \quad S_2 - S_3 = 0 & , \quad S_3 - S_1 = 0 \\
 S_2 - S_3 = 0 & , \quad S_3 - S_4 = 0 & , \quad S_4 - S_2 = 0 \\
 S_3 - S_4 = 0 & , \quad S_4 - S_1 = 0 & , \quad S_1 - S_3 = 0 \\
 S_4 - S_1 = 0 & , \quad S_1 - S_2 = 0 & , \quad S_2 - S_4 = 0
 \end{aligned}
 \tag{82}$$

Легко видѣть, что эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, которая соотвѣтствуетъ равенству:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$

Эта точка называется *радикальнымъ центромъ* четырехъ данныхъ шаровъ. Точка эта имѣетъ то свойство, что всѣ касательныя проведенныя изъ нея ко всѣмъ четыремъ шарамъ, равны; она есть центръ шара, который проходитъ черезъ всѣ точки касанія, касательныхъ къ четыремъ шарамъ, и коего радиусъ есть общая длина этихъ касательныхъ.

Положимъ, что четвертый шаръ $S_4 = 0$ измѣняется и пусть D будетъ радикальная ось трехъ остальныхъ шаровъ. Какое-бы нибыло положеніе центра, шаръ $S_4 = 0$ пересѣчетъ другіе шары по кругамъ, коихъ плоскости пересѣкутся на прямой D .

§ 653. *Центры подобія*. Если возьмемъ шары по-парно, то найдемъ по три центра подобія на каждомъ ребрѣ тетраэдра, коего вершины суть центры данныхъ четырехъ шаровъ. Уравненія этихъ двѣнадцати центровъ подобія суть:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0 & , \quad \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_3}{r_3} = 0 & , \quad \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_4}{r_4} = 0 \\
 (\beta) \quad \frac{A_2}{r_2} - \frac{A_3}{r_3} = 0 & , \quad \frac{A_2}{r_2} - \frac{A_4}{r_4} = 0 & , \quad \frac{A_3}{r_3} - \frac{A_4}{r_4} = 0 \\
 (\gamma) \quad \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} = 0 & , \quad \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_3}{r_3} = 0 & , \quad \frac{A_3}{r_3} + \frac{A_4}{r_4} = 0 \\
 (\delta) \quad \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3} = 0 & , \quad \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_4}{r_4} = 0 & , \quad \frac{A_3}{r_3} + \frac{A_4}{r_4} = 0
 \end{aligned}
 \tag{83}$$

гдѣ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0$$

суть уравненія центровъ шаровъ.

Легко видѣть, что уравненія (β) суть слѣдствія уравненій (α), откуда слѣдуетъ, что шесть первыхъ центровъ подобія (α) и (β) находятся въ одной плоскости. Точно также легко показать, что вычитая почленно три уравненія системъ (γ) и (δ) найдемъ три уравненія, принадлежащія системамъ (α) и (β). Откуда слѣдуетъ, что три центра подобія втораго рода находятся съ тремя центрами подобія перваго рода въ одной плоскости. Для каждой системы изъ трехъ шаровъ существуютъ четыре оси подобія, такъ что двѣнадцать центровъ подобія находятся по три на шестнадцати осяхъ подобія и комбинированные по шесть, находятся въ одной плоскости, которая называется *плоскостью подобія*; такихъ плоскостей есть восемь; онѣ пересѣкаются по осямъ подобія.

§ 654. *Задача.* Найти полюсъ плоскости подобія относительно одного изъ четырехъ данныхъ шаровъ?

Рѣшеніе. Опредѣлимъ, напримѣръ, полюсъ плоскости подобія, въ которой находятся точки (α) и (β) (83). Означимъ эту плоскость черезъ P и назовемъ ее *внѣшнею* плоскостью подобія въ отличіе отъ другихъ. Мы выше видѣли, что полярная плоскость точки:

$$\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0$$

относительно шара $S_1 = 0$, есть:

$$S_1 - S_2 + \overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2 = 0 \quad (84)$$

и полярныя плоскости относительно точекъ:

$$\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_3}{r_3} = 0, \quad \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_4}{r_4} = 0$$

относительно того-же шара, суть:

$$\begin{aligned} S_1 - S_3 + \overline{O_1 O_3}^2 - (r_1 - r_3)^2 &= 0 \\ S_1 - S_4 + \overline{O_1 O_4}^2 - (r_1 - r_4)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (85)$$

Полюсъ плоскости P есть пересѣченіе этихъ трехъ плоскостей, слѣдовательно, опредѣляя изъ этихъ трехъ уравненій x, y, z , найдемъ координаты искомаго полюса.

Точно также найдемъ уравненія, опредѣляющія полюсъ той-же плоскости относительно другихъ шаровъ, а также и полюсы другихъ плоскостей подобія относительно данныхъ шаровъ.

§ 655. *Задача.* Найти шарь касательный къ четыремъ даннымъ шарамъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ шаровъ будутъ:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \quad , \quad S_4 = 0$$

а координаты ихъ центровъ и радіусы пусть будутъ:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & r_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & r_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & r_4 \end{array}$$

Если означимъ центры этихъ шаровъ черезъ O_1, O_2, O_3, O_4 , а центръ и радіусъ искомага шара черезъ O и r , который касается внутренне данныхъ шаровъ, то, очевидно, будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$\overline{OO_1}^2 = (r + r_1)^2 \quad , \quad \overline{OO_2}^2 = (r + r_2)^2 \quad , \quad \overline{OO_3}^2 = (r + r_3)^2 \quad , \quad \overline{OO_4}^2 = (r + r_4)^2$$

Но извѣстно, что разстояніе OO_1 дается выраженіемъ:

$$\overline{OO_1}^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2$$

гдѣ x, y, z суть координаты центра искомага шара, слѣдовательно предъидущія уравненія могутъ быть выражены въ формѣ:

$$\begin{aligned} S_1 + r^2_1 &= (r + r_1)^2 \quad , \quad S_2 + r^2_2 = (r + r_2)^2 \\ S_3 + r^2_3 &= (r + r_3)^2 \quad , \quad S_4 + r^2_4 = (r + r_4)^2 \end{aligned} \tag{86}$$

Эти четыре уравненія содержатъ рѣшеніе предложенной задачи, онѣ даютъ возможность опредѣлить радіусъ искомага шара и координаты его центра. Въ уравненіяхъ (86) мы предположили, что шарь касается внутренне данныхъ шаровъ; въ случаѣ внѣшняго касанія надобно переменить знаки при радіусахъ r_1, r_2, r_3, r_4 . Наконецъ, какой-бы ни былъ шарь касательный къ даннымъ, надобно написать уравненіе (86), давая знакъ — тѣмъ шарамъ, коихъ искомый шарь касается внѣшне. Сосчитывая всѣ комбинаціи знаковъ легко видѣть, что задача имѣетъ шестнадцать рѣшеній, изъ коихъ нѣкоторыя могутъ быть мнимыя—это зависитъ отъ положенія данныхъ шаровъ.

§ 656. Если вычтемъ почленно уравненія (86), то найдемъ:

$$(a) \quad S_1 - S_2 = 2r(r_1 - r_2) \quad , \quad S_1 - S_3 = 2r(r_1 - r_3) \quad , \quad S_1 - S_4 = 2r(r_1 - r_4)$$

$$(b) \quad S_2 - S_3 = 2r(r_2 - r_3) \quad , \quad S_2 - S_4 = 2r(r_2 - r_4) \quad , \quad S_3 - S_4 = 2r(r_3 - r_4)$$

изъ этихъ уравненій только три различны, такъ какъ три послѣднія суть слѣдствія первыхъ. Исключая r изъ уравненій (a), найдемъ:

$$(r_1 - r_4)(S_1 - S_2) - (r_1 - r_2)(S_1 - S_4) = 0$$

$$(r_1 - r_4)(S_1 - S_2) - (r_1 - r_3)(S_1 - S_4) = 0$$

или:

$$r_1(S_4 - S_2) + r_2(S_1 - S_4) + r_4(S_2 - S_1) = 0 \quad (87)$$

$$r_1(S_4 - S_3) + r_3(S_1 - S_4) + r_4(S_3 - S_1) = 0 \quad (88)$$

Эти уравненія неизмѣняются, если измѣнимъ знаки радіусовъ r_1, r_2, r_3, r_4 и такъ какъ онѣ вытекаютъ изъ уравненій (a), то онѣ будутъ удовлетворяться координатами центра шара, который касается внутренне или внѣшне данныхъ шаровъ. Разности $S_4 - S_2$ и т. д. первой степени относительно x, y, z , слѣдовательно уравненія (87) и (88) представляютъ двѣ плоскости, проходящія черезъ радикальный центръ и пересѣкающіяся по прямой, на которой находятся центры двухъ касательныхъ шаровъ. Первое изъ предъидущихъ уравненій (87) представляетъ плоскость перпендикулярную къ внѣшней оси подобія (§ 650) шаровъ O_1, O_2, O_4 , а второе (88) представляетъ плоскость перпендикулярную къ внѣшней оси подобія шаровъ O_1, O_3, O_4 , слѣдовательно плоскость D , которая содержитъ шесть точекъ:

$$\frac{A_4}{r_4} - \frac{A_2}{r_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{r_2} - \frac{A_1}{r_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_4}{r_4} = 0$$

$$\frac{A_4}{r_4} - \frac{A_3}{r_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_4}{r_4} - \frac{A_1}{r_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_3}{r_3} = 0$$

перпендикулярна къ плоскостямъ (87) и (88) и къ ихъ общему сѣченію. Изъ этого заключаемъ, что центры двухъ касательныхъ шаровъ внѣшне и внутренне къ даннымъ, находятся на перпендикулярѣ, опущенномъ изъ радикальнаго центра на внѣшнюю плоскость подобія.

Точно также найдемъ, если не всѣ радіусы r_1, r_2, r_3, r_4 имѣютъ общій знакъ, что центры шестнадцати шаровъ касательныхъ къ четыремъ даннымъ, находятся на перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ радикальнаго центра на восемь плоскостей подобія.

§ 657. Пусть S будетъ касательный шаръ, касающійся внутренне, пусть x_1, y_1, z_1 суть координаты точки касанія шаровъ $S=0$ и $S_1=0$. Эта точка дѣлитъ разстояніе OO_1 въ отношеніи $\frac{r_1}{r}$, слѣдовательно:

$$x_1 = \frac{r_1 x + r a_1}{r + r_1}, \quad y_1 = \frac{r_1 y + r b_1}{r + r_1}, \quad z = \frac{r_1 z + r c_1}{r + r_1}$$

откуда:

$$x = \frac{(r + r_1) x_1 - r a_1}{r_1}, \quad y = \frac{(r + r_1) y_1 - r b_1}{r_1}, \quad z = \frac{(r + r_1) z_1 - r c_1}{r_1}$$

такъ какъ x, y, z суть координаты центра O , то онѣ должны удовлетворять уравненіямъ (а). Прежде подстановленія замѣтимъ, что замѣщая въ полиномѣ первой степени формы $ax + by + cz + d$ величины x, y, z ихъ предъидущими выраженіями, найдемъ:

$$\frac{r + r_1}{r_1} (ax_1 + by_1 + cz_1 + d) - \frac{r}{r_1} (aa_1 + bb_1 + cc_1 + d)$$

т. е. результатъ равенъ данному полиному, въ которомъ x, y, z замѣщены черезъ x_1, y_1, z_1 , умноженному на $\frac{r + r_1}{r_1}$ безъ того-же полинома, умноженнаго на $\frac{r}{r_1}$, и въ который вмѣсто x, y, z вставлены координаты a_1, b_1, c_1 . Въ силу этого правила первое изъ уравненій (а) сдѣлается:

$$\begin{aligned} & \frac{r + r_1}{r_1} (S_1' - S_2') - \frac{r}{r_1} \{ 2(a_2 - a_1)a_1 + 2(b_2 - b_1)b_1 + \\ & + 2(c_2 - c_1)c_1 + a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + r_2^2 \} = 2r(r_1 - r_2) \end{aligned}$$

или:

$$\frac{r + r_1}{r_1} (S_1' - S_2') + \frac{r}{r_1} (\overline{O_1 O_2}^2 + r_1^2 - r_2^2) = 2r(r_1 - r_2)$$

послѣ сокращеній это уравненіе приметъ форму:

$$S_1' - S_2' + \frac{r}{r + r_1} \{ \overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2 \} = 0$$

точно также найдемъ для остальныхъ двухъ уравненій (а):

$$S_1' - S_3' + \frac{r}{r + r_1} \{ \overline{O_1 O_3}^2 - (r_1 - r_3)^2 \} = 0$$

$$S_1' - S_4' + \frac{r}{r + r_1} \{ \overline{O_1 O_4}^2 - (r_1 - r_4)^2 \} = 0$$

Откуда, отбрасывая индексы, видимъ, что координаты точки касанія шаровъ S и S_1 удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} \frac{S_1 - S_2}{O_1 O_2^2 - (r_1 - r_2)^2} + \frac{r}{r + r_1} &= 0 \\ \frac{S_1 - S_3}{O_1 O_3^2 - (r_1 - r_3)^2} + \frac{r}{r + r_1} &= 0 \\ \frac{S_1 - S_4}{O_1 O_4^2 - (r_1 - r_4)^2} + \frac{r}{r + r_1} &= 0 \end{aligned} \quad (89)$$

откуда, вычитая, найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{S_1 - S_2}{O_1 O_2^2 - (r_1 - r_2)^2} - \frac{S_1 - S_4}{O_1 O_4^2 - (r_1 - r_4)^2} &= 0 \\ \frac{S_1 - S_3}{O_1 O_3^2 - (r_1 - r_3)^2} - \frac{S_1 - S_4}{O_1 O_4^2 - (r_1 - r_4)^2} &= 0 \end{aligned} \quad (90)$$

Эти уравненія представляютъ плоскости, въ которыхъ находится радикальный центръ и точки касанія шара S съ шаромъ $S_1 = 0$; совокупно эти уравненія представляютъ прямую, проходящую черезъ эти двѣ точки. Такъ какъ эти уравненія неизмѣняются, если измѣнимъ r_1, r_2, r_3, r_4 на $-r_1, -r_2, -r_3, -r_4$, то прямая эта проходитъ и черезъ внѣшнюю точку касанія шара $S_1 = 0$ съ шаромъ S .

Если вычтемъ уравненіе (84) изъ уравненій (85), которыя опредѣляютъ полюсъ внѣшней плоскости подобія, то найдемъ уравненія (90). Слѣдовательно прямая, соединяющая радикальный центръ съ полюсомъ плоскости D относительно шара $S_1 = 0$, содержитъ точки касанія двухъ шаровъ касательныхъ внутренне и внѣшне къ даннымъ шарамъ. Такое же заключеніе выведемъ и относительно шаровъ $S_2 = 0, S_3 = 0, S_4 = 0$.

Слѣдовательно прямая, соединяющая радикальный центръ, съ полюсами внѣшней плоскости подобія, опредѣляютъ пересѣченіемъ своимъ съ данными шарами точки касанія двухъ касательныхъ шаровъ, одного внѣшне, а другаго внутренне, съ данными шарами.

Обобщая этотъ результатъ, найдемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если выберемъ произвольно одну изъ плоскостей подобія системы четырехъ шаровъ, то прямая, соединяющая радикальный центръ съ полюсами этой плоскости относительно каждаго изъ четырехъ шаровъ, встрѣчаютъ шары въ восьми точкахъ, которыя суть точки касанія двухъ шаровъ касательныхъ къ даннымъ.

§ 658. Замѣтимъ здѣсь, что рѣшеніе задачи „о нахожденіи шара, касающагося четырехъ данныхъ шаровъ“ было дано Ферма, которому этотъ вопросъ былъ предложенъ, для рѣшенія, Декартомъ. Послѣдній хотя утверждалъ, что имъ найдено рѣшеніе этой задачи, при помощи обыкновенной геометріи, но указаній по этому предмету въ его сочиненіяхъ нѣтъ никакихъ. Вопросъ объ отысканіи шара, касающагося четырехъ данныхъ есть ничто иное, какъ дальнѣйшее обобщеніе задачи объ отысканіи круга, касающагося трехъ данныхъ; послѣдняя задача, какъ извѣстно, была одной изъ важнѣйшихъ утеряннаго сочиненія Аполлонія „О соприкосновеніяхъ“, которое было возстановлено Виетомъ. Задачу эту Виетъ предлагалъ для рѣшенія голландскому геометру Адриану Романусу, который нашелъ центръ искомаго круга, какъ точку пересѣченія двухъ гиперболъ. Но Виетъ ему показалъ, что задача можетъ быть рѣшена безъ посредства коническихъ сѣченій и что искомую точку можно найти проще, какъ пересѣченіе двухъ прямыхъ линій. Другія рѣшенія этой задачи были даны Ньютономъ. Вопросъ этотъ занималъ также Декарта, который далъ два рѣшенія; первое изъ нихъ по его же словамъ „было на столько сложно, что потребовалось бы не менѣе мѣсяца для его построенія“. Другое представляло не меньшія затрудненія.

ГЛАВА XXXIX.

Фокусы поверхностей.

§ 659. Если:

$$S_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - r_1^2 = 0 \quad (1)$$

есть уравненіе шара, коего центръ есть (a_1, b_1, c_1) , радіусъ r_1 , а:

$$A_1 = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1 = 0 \quad (2)$$

$$A_2 = x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 - p_2 = 0$$

суть уравненія двухъ плоскостей въ нормальной формѣ, то:

$$S_1 - \lambda A_1 A_2 = 0 \quad (3)$$

есть уравненіе поверхности втораго порядка, проходящей черезъ пересѣченіе шара (1) съ плоскостью (2). Пересѣченія эти суть круги, а слѣдовательно всѣ пересѣченія поверхности (3) плоскостями параллельными плоскостямъ (2) будутъ также круги.

Легко показать, что поверхность (3) съ шаромъ (1) имѣютъ двойное соприкосновеніе на прямой пересѣченія плоскостей (2), т. е. въ точкахъ гдѣ прямая $(A_1 A_2)$ встрѣчаетъ шаръ (1) и поверхность (3). Въ самомъ дѣлѣ, пусть (x_1, y_1, z_1) будетъ точка общая обѣимъ поверхностямъ (1) и (3),

а $P=0$ уравнение касательной плоскости въ этой точкѣ къ шару (1), очевидно:

$$P=(x_1-a_1)(x-a_1)+(y_1-b_1)(y-b_1)+(z_1-c_1)(z-c_1)-r_1^2=0 \quad (4)$$

Уравнение касательной плоскости къ поверхности (3) въ той-же точкѣ есть:

$$P-\lambda(A'_1A_2+A_1A'_2)=0 \quad (5)$$

гдѣ A'_1 и A'_2 суть числовыя значенія A_1 и A_2 , когда въ нихъ подставимъ координаты x_1, y_1, z_1 . Если точка (x_1, y_1, z_1) находится на пересѣченіи плоскостей (2), то $A'_1=0$, $A'_2=0$, слѣдовательно уравнение (5) касательной плоскости къ поверхности (3) сдѣлается $P=0$, т. е. поверхности (1) и (3) имѣютъ общую касательную плоскость въ точкѣ встрѣчи поверхности съ прямою (A_1, A_2) .

Обратно, если поверхность втораго порядка имѣетъ двойное соприкосновение съ шаромъ въ двухъ точкахъ q_1 и q_2 , то пересѣченіе этихъ поверхностей суть два круга. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $P=0$ и $Q=0$ будутъ общія касательныя къ обѣмъ поверхностямъ въ точкахъ q_1 и q_2 , пусть q_3 будетъ третья точка на пересѣченіи поверхностей. Если черезъ точки q_1, q_2, q_3 проведемъ плоскость, то сѣченія ея съ поверхностями будутъ два коническія сѣченія, имѣющія двойное соприкосновение въ точкахъ q_1 и q_2 , а такъ какъ онѣ проходятъ и черезъ точку q_3 , то оба вполне опредѣляются одними и тѣми-же пятью условіями, а слѣдовательно онѣ тождественны, т. е. совпадаютъ.

Но пересѣченіе поверхностей втораго порядка четвертой степени, слѣдовательно другія точки не находящіяся на первомъ кругѣ должны находиться на другомъ.

Если черезъ $A_1=0$ и $A_2=0$ означимъ плоскости круговъ пересѣченія шара и поверхности втораго порядка, то ея уравнение будетъ имѣть форму:

$$S_1-\lambda A_1 A_2=0$$

Если шаръ (1) обращается въ точку, т. е. если $r_1=0$, то его уравнение будетъ:

$$S_1=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=0 \quad (6)$$

Эту точку должно разсматривать, какъ имѣющую двойное соприкосновение съ поверхностью:

$$S_1-\lambda A_1 A_2=0$$

Точка, имѣющая такое свойство называется *фокусомъ* поверхности, а прямая соприкосновения называется *соответствующей директрисой*,

Мы сейчас увидимъ, что поверхность второго порядка имѣетъ безчисленное множество фокусовъ, которые образуютъ три коническія сѣченія на трехъ главныхъ сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостяхъ. Эти коническія сѣченія называются *фокальными линиями* поверхности.

Фокусы и фокальныя линіи въ центральныхъ поверхностяхъ.

§ 660. Пусть уравненіе центральной поверхности отнесенной къ ея осямъ будетъ:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + \frac{z^2}{r} = 1 \quad (7)$$

Если она имѣетъ фокусъ $(a_1 b_1 c_1)$, то ея уравненію можно дать форму:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = A_1 A_2 \quad (8)$$

Но плоскости $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ суть плоскости круговыхъ сѣченій, следовательно онѣ параллельны одной изъ осей поверхности; а потому произведеніе $A_1 A_2$ можно замѣстить однимъ изъ выраженій:

$$\lambda(x - k)^2 + \mu(y - h)^2, \quad \lambda(x - k)^2 + \nu(z - g)^2, \quad \mu(y - h)^2 + \nu(z - g)^2 \quad (9)$$

которыя, будучи приравнены нулю, представляютъ плоскости, пересѣкающіяся по прямымъ параллельнымъ одной изъ осей. Эти плоскости будутъ дѣйствительныя или мнимыя, смотря по знакамъ постоянныхъ количествъ λ, μ, ν .

Возьмемъ уравненіе:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = \lambda(x - k)^2 + \mu(y - h)^2 \quad (10) \quad)$$

и выразимъ, что оно представляетъ ту же поверхность, что и уравненіе (7). Уравненія ея центра будутъ:

$$x - a_1 - \lambda(x - k) = 0, \quad y - b_1 - \mu(y - h) = 0, \quad z - c_1 = 0 \quad (11)$$

такъ какъ центръ долженъ быть въ началѣ, то мы должны имѣть:

$$a_1 = \lambda k, \quad b_1 = \mu h, \quad c_1 = 0 \quad (12)$$

Въ силу этихъ значеній уравненіе (10) сдѣлается:

$$(1 - \lambda)x^2 + (1 - \mu)y^2 + z^2 = \frac{1 - \lambda}{\lambda} a_1^2 + \frac{1 - \mu}{\mu} b_1^2 \quad (13)$$

сравнивая которое съ (7) найдемъ:

$$p(1-\lambda) = q(1-\mu) = r = \frac{1-\lambda}{\lambda} a^2_1 + \frac{1-\mu}{\mu} b^2_1 \quad (14)$$

откуда:

$$\lambda = \frac{p-r}{p}, \quad \mu = \frac{q-r}{q}, \quad 1-\lambda = \frac{r}{p}, \quad 1-\mu = \frac{r}{q} \quad (15)$$

подставляя эти значенія въ уравненіе:

$$\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} a^2_1 + \frac{1-\mu}{\mu} b^2_1 = r$$

найдемъ:

$$\frac{a^2_1}{p-r} + \frac{b^2_1}{q-r} = 1 \quad (16)$$

т. е. координаты фокуса удовлетворяютъ уравненіе (16). Слѣдовательно въ плоскости XU существуетъ безчисленное множество фокусовъ поверхности, которыя образуютъ коническое сѣченіе:

$$\frac{x^2}{p-r} + \frac{y^2}{q-r} = 1 \quad (17)$$

Если сдѣлаемъ тѣже преобразованія относительно уравненій:

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = \lambda(x-k)^2 + \nu(z-g)^2$$

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = \mu(y-h)^2 + \nu(z-g)^2$$

то будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Геометрическое мѣсто фокусовъ центральныхъ поверхностей состоитъ изъ трехъ коническихъ сѣченій въ главныхъ плоскостяхъ, которыхъ уравненія суть:

$$\begin{aligned} z=0 & , \quad \frac{x^2}{p-r} + \frac{y^2}{q-r} = 1 \\ y=0 & , \quad \frac{x^2}{p-q} + \frac{z^2}{r-q} = 1 \\ x=0 & , \quad \frac{y^2}{q-p} + \frac{z^2}{r-p} = 1 \end{aligned} \quad (18)$$

Между дѣйствительными фокусами различаютъ фокусы, коихъ директриса есть пересѣченіе двухъ дѣйствительныхъ плоскостей, и фокусы, коихъ ди-

ректриса есть пересѣченіе двухъ мнимыхъ плоскостей; первые называются *фокусами первого рода*, а вторые *фокусами второго рода*.

Въ каждомъ изъ этихъ случаевъ директриса есть пересѣченіе дѣйствительныхъ или мнимыхъ плоскостей:

$$\lambda(x-k)^2 + \mu(y-h)^2 = 0, \quad \lambda(x-k)^2 + \nu(z-g)^2 = 0, \quad \mu(y-h)^2 + \nu(z-g)^2 = 0 \quad (19)$$

Координаты точки встрѣчи этихъ прямыхъ съ главными плоскостями, очевидно, будутъ:

$$\begin{aligned} g = 0, \quad k = \frac{pa_1}{p-r}, \quad h = \frac{qb_1}{q-r} \\ h = 0, \quad k = \frac{pa_1}{p-q}, \quad g = \frac{rc_1}{r-q} \\ h = 0, \quad h = \frac{qb_1}{q-p}, \quad g = \frac{rc_1}{r-p} \end{aligned} \quad (20)$$

откуда найдемъ:

$$\frac{k\sqrt{p-r}}{p} = \frac{a_1}{\sqrt{p-r}}, \quad \frac{h\sqrt{q-r}}{q} = \frac{b_1}{\sqrt{q-r}}$$

возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ:

$$k^2 \frac{p-r}{p^2} + h^2 \frac{q-r}{q^2} = 1$$

Изъ этого заключаемъ, что директрисы образуютъ цилиндрическую поверхность, коей пересѣченіе съ плоскостью XY есть эллиптическое сѣченіе:

$$\frac{x^2}{p-r} + \frac{y^2}{q-r} = 1$$

Этотъ цилиндръ называется *направляющимъ*. Такой цилиндръ существуетъ для каждой фокальной линіи.

§ 661. Легко показать, что фокальныя линіи проходятъ черезъ круглячки поверхности. Координаты круглячковъ суть:

$$y = 0, \quad x = \pm \sqrt{\frac{p(p-q)}{p-r}}, \quad z = \pm \sqrt{\frac{r(q-r)}{p-r}}$$

когда $p > q > r$. Легко провѣрить, что эти выраженія удовлетворяютъ уравненію фокальной линіи:

$$\frac{x^2}{p-q} + \frac{z^2}{r-q} = 1$$

§ 662. *Предложение.* Основание директрисы фокуса $(a_1 b_1 c_1)$ есть полюсь касательной въ этой точкѣ къ фокальной линіи въ главной плоскости.

Доказательство. Поляра точки (k, h) главнаго сѣченія:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$$

поверхности, есть:

$$\frac{kx}{p} + \frac{hy}{q} = 1$$

или, подставляя вмѣсто k и h ихъ значенія (20):

$$\frac{a_1 x}{p-r} + \frac{b_1 y}{q-r} = 1$$

а это, очевидно, есть уравненіе касательной въ точкѣ $(a_1 b_1)$ къ фокальной линіи (17).

§ 663. *Предложение.* Прямая, соединяющая фокусъ съ основаніемъ соотвѣтствующей директрисы есть нормальная линія къ фокальной линіи.

Доказательство. Уравненіе прямой, проходящей черезъ точки $(a_1 b_1)$, (k, h) , есть:

$$\frac{x - a_1}{k - a_1} = \frac{y - b_1}{h - b_1}$$

или, подставляя вмѣсто k и h ихъ выраженія (20), найдемъ:

$$\frac{x - a_1}{\frac{a_1}{p-r}} = \frac{y - b_1}{\frac{b_1}{q-r}}$$

Очевидно, это есть уравненіе нормальной линіи въ точкѣ $(a_1 b_1)$ къ фокальной линіи въ плоскости XU .

664. *Предложение.* Плоскость, проходящая черезъ фокусъ поверхности и соотвѣтствующую директрису, пересѣкаетъ поверхность по коническому сѣченію, коего фокусъ и директриса суть фокусъ и директриса поверхности.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, если за плоскость XU возьмемъ плоскость, проходящую черезъ фокусъ $(a_1 b_1)$ и его директрису, то уравненіе поверхности будетъ имѣть форму:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + z^2 = A_1 A_2$$

гдѣ A_1 и A_2 при $z = 0$ должны обратиться въ одно и то же выраженіе $ax + by + c$, такъ какъ эти плоскости встрѣчаютъ плоскость XU по одной

и той-же прямой. Следовательно коническое сѣченіе въ плоскости XU будетъ:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (ax + by + c)^2$$

а это есть коническое сѣченіе, коего фокусъ есть (a_1b_1) , а директриса $ax + by + c = 0$.

§ 665. *Предложеніе.* Конусъ, описанный около центральной поверхности, и имѣющій вершину на фокальной линіи, есть конусъ вращенія.

Доказательство. Для доказательства, помѣстимъ начало координатъ въ фокусъ $(a_1b_1c_1)$, а плоскость XU проведемъ черезъ директрису. Въ этомъ случаѣ уравненіе поверхности будетъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = A_1 A_2 \quad (21)$$

гдѣ:

$$A_1 = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1 = 0, \quad A_2 = x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 - p_2 = 0$$

Мы видѣли, что уравненіе конуса описаннаго около поверхности:

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

есть (§ 539):

$$4f(y_1) \cdot f(x_1) - \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} \right)^2 = 0$$

Если это уравненіе приложимъ къ поверхности (21), полагая $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, $y_4 = 1$, то найдемъ:

$$4p_1^2 (x^2 + y^2 + z^2 - A_1 A_2) + p_1^2 (A_1 + A_2)^2 = 0$$

или:

$$4(x^2 + y^2 + z^2) + (A_1 - A_2)^2 = 0$$

или наконецъ:

$$4(x^2 + y^2) + 4z^2 + (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2)^2 z^2 = 0$$

а это уравненіе представляетъ, очевидно, конусъ вращенія, коего ось перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ фокусъ и соответствующую директрису.

§ 666. Пояснимъ сказанное примѣрами.

Пр. 1. Эллипсоидъ. Уравненіе этой поверхности есть:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Уравнения фокальных линий будутъ:

$$\begin{aligned} z=0 & , \quad \frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} = 1 , \quad \lambda = \frac{a^2-c^2}{a^2} , \quad \mu = \frac{b^2-c^2}{b^2} \\ y=0 & , \quad \frac{x^2}{a^2-b^2} + \frac{z^2}{c^2-b^2} = 1 , \quad \lambda = \frac{a^2-b^2}{a^2} , \quad \nu = \frac{c^2-b^2}{c^2} \\ x=0 & , \quad \frac{y^2}{b^2-a^2} + \frac{z^2}{c^2-a^2} = 1 , \quad \mu = \frac{b^2-a^2}{b^2} , \quad \nu = \frac{c^2-a^2}{c^2} \end{aligned}$$

Если $a > b > c$, то первая изъ фокальныхъ линий есть эллипсъ въ плоскости XU , фокусы будутъ втораго рода, такъ какъ λ и μ имѣютъ одинаковые знаки. Вторая фокальная линия есть гипербола въ плоскости XZ , а фокусы перваго рода. Наконецъ, третья фокальная линия есть мнимый эллипсъ.

Пр. 2. Гиперболоидъ однополый. Его уравненіе есть:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Уравненія фокальныхъ линий суть:

$$\begin{aligned} z=0 & , \quad \frac{x^2}{a^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2+c^2} = 1 , \quad \lambda = \frac{a^2+c^2}{a^2} , \quad \mu = \frac{b^2+c^2}{b^2} \\ y=0 & , \quad \frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2+c^2} = 1 , \quad \lambda = \frac{a^2-b^2}{a^2} , \quad \nu = \frac{b^2+c^2}{c^2} \\ x=0 & , \quad \frac{y^2}{b^2-a^2} - \frac{z^2}{c^2+a^2} = 1 , \quad \mu = \frac{b^2-a^2}{b^2} , \quad \nu = \frac{a^2+c^2}{c^2} \end{aligned}$$

Если $a > b > c$, то первая фокальная линия есть эллипсъ и фокусъ втораго рода; вторая фокальная линия есть гипербола и фокусы втораго рода. Третья фокальная линия есть мнимый эллипсъ.

Пр. 3. Гиперболоидъ двуполый. Его уравненіе есть:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Фокальныя линии суть:

$$\begin{aligned} z=0 & , \quad \frac{x^2}{a^2+c^2} + \frac{y^2}{c^2-b^2} = 1 , \quad \lambda = \frac{a^2+c^2}{a^2} , \quad \mu = -\frac{c^2-b^2}{b^2} \\ y=0 & , \quad \frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1 , \quad \lambda = \frac{a^2+b^2}{a^2} , \quad \nu = -\frac{b^2-c^2}{c^2} \\ x=0 & , \quad \frac{y^2}{a^2+b^2} + \frac{z^2}{a^2+c^2} = -1 , \quad \mu = \frac{a^2+b^2}{c^2} , \quad \nu = \frac{a^2+b^2}{c^2} \end{aligned}$$

Если $a > b > c$, то первая фокальная линия есть гипербола, а фокусы второго рода. Вторая фокальная линия есть эллипс, а фокусы первого рода. Наконец, третья фокальная линия есть мнимый эллипс.

Замѣтимъ, что въ трехъ центральныхъ поверхностяхъ, въ каждой, есть мнимая фокальная линия, гиперболоидъ имѣетъ фокусы только второго рода, а въ двухъ другихъ поверхностяхъ фокусы первого рода принадлежатъ главной плоскости перпендикулярной къ циклическимъ сѣченіямъ.

Пр. 4. Фокальныя линии конуса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

суть:

$$z = 0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{a^2 + c^2}{a^2} \quad , \quad \mu = \frac{b^2 + c^2}{b^2}$$

$$y = 0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad , \quad \nu = \frac{b^2 + c^2}{c^2}$$

$$x = 0 \quad , \quad \frac{y^2}{b^2 - a^2} - \frac{z^2}{a^2 + c^2} = 0 \quad , \quad \mu = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \quad , \quad \nu = \frac{a^2 + c^2}{c^2}$$

Если $a > b$, то конусъ имѣетъ одну дѣйствительную фокальную линию, которая состоитъ изъ двухъ прямыхъ въ плоскости XY, а соотвѣтствующіе фокусы второго рода.

Можно показать, что фокальныя линии перпендикулярны къ циклическимъ плоскостямъ взаимнаго конуса. *Взаимнымъ конусомъ* называютъ конусъ, образованный, проходящими черезъ вершину прямыми, перпендикулярно къ касательнымъ плоскостямъ конуса.

Уравненія перпендикуляра къ касательной плоскости конуса въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) суть:

$$\frac{x}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y}{\frac{y_1}{b^2}} = -\frac{z}{\frac{z_1}{c^2}} = \rho$$

слѣдовательно:

$$ax = \frac{x_1}{a} \rho \quad , \quad by = \frac{y_1}{b} \rho \quad , \quad cz = -\frac{z_1}{c} \rho$$

откуда:

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0$$

есть уравнение взаимнаго конуса. Уравненія циклическихъ плоскостей этой поверхности суть:

$$x^2 (a^2 - b^2) - z^2 (b^2 + c^2) = 0 \quad (22)$$

Если сравнимъ это уравненіе съ дѣйствительными фокальными линіями:

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 0 \quad (23)$$

то легко видѣть, что эти линіи перпендикулярны къ плоскостямъ (22).

Образованіе центральныхъ поверхностей.

§ 667. Если въ уравненіи:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = A_1 A_2$$

плоскости $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ дѣйствительны, то можно его написать въ формѣ:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = \lambda (x - k)^2 - \mu (y - h)^2$$

Первая часть представляетъ квадратъ разстоянія точки $(x y z)$ отъ фокуса $(a_1 b_1 c_1)$; вторая часть, раздѣленная на $\lambda + \mu$, представляетъ произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки $(x y z)$ на плоскости $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Если означимъ черезъ P_1 и P_2 эти перпендикуляры, то называя черезъ R разстояніе точекъ $(x y z)$ и $(a_1 b_1 c_1)$, будемъ имѣть:

$$R^2 = (\lambda + \mu) P_1 P_2$$

или:

$$\frac{R^2}{P_1 \cdot P_2} = \lambda + \mu = \text{постоян.}$$

Откуда имѣетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Центральную поверхность втораго порядка можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, коихъ квадратъ разстоянія отъ данной точки находится въ постоянномъ отношеніи съ произведеніемъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нихъ на двѣ данныя плоскости.

Если $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ суть мнимыя плоскости, то уравненіе поверхности можно написать въ формѣ:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = \lambda (x - k)^2 + (y - h)^2 \quad (24)$$

Пусть $(x_1 y_1 z_1)$ будетъ одна изъ точекъ этой поверхности. Проведемъ плоскость черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$ параллельно оси Y , то ея уравненіе будетъ:

$$z - z_1 = m(x - x_1) \quad (25)$$

эта плоскость встрѣчаетъ директрису соотвѣтствующую фокусу въ точкѣ, коей координаты суть:

$$x = k, \quad y = h, \quad z - z_1 = m(k - x_1) \quad (26)$$

Откуда видимъ, что квадратъ разстоянія точки $(x_1 y_1 z_1)$ отъ точки (26) будетъ:

$$(x_1 - k)^2 + (y_1 - h)^2 + m^2(x_1 - k)^2 = (1 + m^2)(x_1 - k)^2 + (y_1 - h)^2$$

Если это разстояніе означимъ черезъ δ и положимъ $1 + m^2 = \frac{\lambda}{\mu}$, то будемъ имѣть:

$$\delta^2 = \frac{\lambda(x_1 - k)^2 + \mu(y_1 - h)^2}{\mu}$$

Слѣдовательно уравненіе поверхности можно написать въ формѣ:

$$R^2 = \mu\delta^2 \quad \text{или} \quad \frac{R}{\delta} = \sqrt{\mu} = \text{постоян.}$$

Легко провѣрить, что:

$$m = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - 1}$$

есть величина дѣйствительная для эллипсоида и двуполого гиперboloида и представляетъ тангенсъ угла наклоненія циклическихъ плоскостей къ плоскости XU . Такъ, на примѣръ, въ эллипсоидѣ:

$$\lambda = \frac{a^2 - c^2}{a^2}, \quad \mu = \frac{b^2 - c^2}{b^2}$$

слѣдовательно:

$$m = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$$

Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Центральную поверхность можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, коихъ разстояніе отъ фокуса находится въ постоянномъ отношеніи съ разстояніемъ отъ директрисы, — это послѣднее разстояніе считается параллельно циклической плоскости.

Софокусныя центральныя поверхности.

§ 668. Возьмемъ центральную поверхность:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (27)$$

Если λ есть произвольный параметръ, то уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad (28)$$

представляетъ поверхность также центральную, направленіе осей въ которой тоже какъ и въ (27); кромѣ этого эта поверхность имѣетъ общія фокальныя линіи съ поверхностью (27), въ чемъ легко убѣдиться, составляя уравненія этихъ линій для поверхности (28). Поверхности, имѣющія это свойство называются *софокусными*.

Если λ есть величина положительная, то уравненіе (28) представляетъ эллипсоидъ дѣйствительный. Положимъ $a > b > c$ и $\lambda = -\mu^2$, то уравненіе (28) сдѣлается:

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu^2} + \frac{y^2}{b^2 - \mu^2} + \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1 \quad (29)$$

Это уравненіе будетъ представлять: эллипсоидъ, если $\mu^2 < c^2$; гиперболоидъ однополый, если $b^2 > \mu^2 > c^2$; гиперболоидъ двуполый, если $a^2 > \mu^2 > b^2$; и оно представляетъ мнимый эллипсоидъ, если $\mu^2 > a^2$.

Положимъ, что μ^2 приближается къ c^2 , при $\mu^2 = c^2$ одна изъ осей поверхности (29) равна нулю и поверхность обращается въ фокальную линію:

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1 \quad (30)$$

Точно также, если $\mu^2 = b^2$, то поверхность (29) обращается въ фокальную линію:

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$$

Слѣдовательно фокальныя линіи можно разсматривать, какъ поверхности софокусныя, безконечно сплюснутыя.

§ 669. *Предложеніе.* Черезъ каждую точку въ пространствѣ проходятъ три софокусныя поверхности: эллипсоидъ, гиперболоидъ однополый и гиперболоидъ двуполый.

Доказательство. Если положимъ, что поверхность:

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu^2} + \frac{y^2}{b^2 - \mu^2} + \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1 \quad (31)$$

проходить черезъ точку (x_1, y_1, z_1) , то будемъ имѣть:

$$\frac{x_1^2}{a^2 - \mu^2} + \frac{y_1^2}{b^2 - \mu^2} + \frac{z_1^2}{c^2 - \mu^2} = 1$$

откуда:

$$\begin{aligned} &(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2) + x_1^2(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2) + \\ &+ y_1^2(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - c^2) + z_1^2(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Это уравненіе относительно μ^2 третьей степени и его всѣ три корня *всегда* дѣйствительны, такъ какъ подстановленіе вмѣсто μ^2 :

$$-\infty, \quad c^2, \quad b^2, \quad a^2$$

даетъ въ результатѣ:

$$- \quad + \quad - \quad +$$

Слѣдовательно корни заключаются между $-\infty$ и c^2 , между c^2 и b^2 и между b^2 и a^2 . Корню меньшему отъ c^2 соотвѣтствуетъ эллипсоидъ, корню заключающемуся между c^2 и b^2 соотвѣтствуетъ однополый гиперболоидъ, и наконецъ корню, заключающемуся между b^2 и a^2 , соотвѣтствуетъ двуполый гиперболоидъ.

Пусть μ_1, μ_2, μ_3 будутъ корни, а $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \xi_3, \eta_3, \zeta_3$ оси трехъ поверхностей, то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= a^2 - \mu_1^2, & \eta_1^2 &= b^2 - \mu_1^2, & \zeta_1^2 &= c^2 - \mu_1^2 \\ \xi_2^2 &= a^2 - \mu_2^2, & \eta_2^2 &= b^2 - \mu_2^2, & \zeta_2^2 &= c^2 - \mu_2^2 \\ \xi_3^2 &= a^2 - \mu_3^2, & \eta_3^2 &= b^2 - \mu_3^2, & \zeta_3^2 &= c^2 - \mu_3^2 \end{aligned} \quad (33)$$

§ 670. *Задача.* Выразить координаты точки (x_1, y_1, z_1) въ функціи осей трехъ софокусныхъ поверхностей, которыя проходятъ черезъ эту точку?

Рѣшеніе. Положимъ $a^2 - \mu^2 = \xi^2$, то найдемъ:

$$b^2 - \mu^2 = \xi^2 + b^2 - a^2, \quad c^2 - \mu^2 = \xi^2 + c^2 - a^2$$

Означая черезъ m^2 и n^2 положительныя количества $a^2 - b^2$ и $a^2 - c^2$ будемъ имѣть:

$$a^2 - \mu^2 = \xi^2, \quad b^2 - \mu^2 = \xi^2 - m^2, \quad c^2 - \mu^2 = \xi^2 - n^2 \quad (34)$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (32), найдемъ:

$$\begin{aligned} & \xi^6 - (m^2 + n^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \xi^4 + \\ & + \{m^2 n^2 + (m^2 + n^2) x_1^2 + n^2 y_1^2 + m^2 z_1^2\} \xi^2 - m^2 n^2 x_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Это уравненіе, какъ и уравненіе (32) имѣетъ три дѣйствительные корня, которые суть оси $\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2$ трехъ поверхностей, проходящихъ черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$.

Такъ какъ ихъ произведеніе равно послѣднему члену уравненія (25) съ противнымъ знакомъ, то имѣемъ:

$$\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2 = m^2 n^2 x_1^2 \quad \text{или} \quad \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2 = (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) x_1^2 \quad (36)$$

точно также найдемъ:

$$\eta_1^2 \eta_2^2 \eta_3^2 = (b^2 - a^2)(b^2 - c^2) y_1^2, \quad \zeta_1^2 \zeta_2^2 \zeta_3^2 = (c^2 - a^2)(c^2 - b^2) z_1^2 \quad (37)$$

откуда найдемъ:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = \frac{(a^2 - \mu_1^2)(a^2 - \mu_2^2)(a^2 - \mu_3^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ y_1^2 &= \frac{\eta_1^2 \eta_2^2 \eta_3^2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} = \frac{(b^2 - \mu_1^2)(b^2 - \mu_2^2)(b^2 - \mu_3^2)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \\ z_1^2 &= \frac{\zeta_1^2 \zeta_2^2 \zeta_3^2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} = \frac{(c^2 - \mu_1^2)(c^2 - \mu_2^2)(c^2 - \mu_3^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \end{aligned} \quad (38)$$

Изъ уравненія (35) имѣемъ:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + m^2 + n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

откуда:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 - \mu_2^2 + a^2 - \mu_3^2 - a^2 + b^2 - a^2 + c^2$$

или:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \xi_1^2 + \eta_2^2 + \zeta_3^2 \quad (39)$$

Слѣдовательно квадратъ радіуса вектора, проведеннаго въ точку $(x_1 y_1 z_1)$, равенъ суммѣ квадратовъ осей $\xi_1^2, \eta_2^2, \zeta_3^2$, принадлежащихъ тремъ софокуснымъ поверхностямъ, проходящимъ черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$.

Выраженія (38) называются *эллиптическими координатами* точки. Въ этой системѣ координатъ положеніе точки въ пространствѣ опредѣляется тремя софокусными поверхностями.

§ 671. *Предложение.* Двѣ софокусныя поверхности пересѣкаются подѣ прямымъ угломъ.

Доказательство. Пусть:

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu^2_1} + \frac{y^2}{b^2 - \mu^2_1} + \frac{z^2}{c^2 - \mu^2_1} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu^2_2} + \frac{y^2}{b^2 - \mu^2_2} + \frac{z^2}{c^2 - \mu^2_2} = 1$$
(40)

будутъ двѣ софокусныя поверхности. Какая-нибудь точка $(x_1 y_1 z_1)$ ихъ пересѣченія удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{x^2}{(a^2 - \mu^2_1)(a^2 - \mu^2_2)} + \frac{y^2}{(b^2 - \mu^2_1)(b^2 - \mu^2_2)} + \frac{z^2}{(c^2 - \mu^2_1)(c^2 - \mu^2_2)} = 0$$
(41)

полученному, вычитая предъидущія два уравненія.

Уравненія касательныхъ плоскостей въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ къ поверхностямъ (40) суть:

$$\frac{x_1 x}{a^2 - \mu^2_1} + \frac{y_1 y}{b^2 - \mu^2_1} + \frac{z_1 z}{c^2 - \mu^2_1} = 1, \quad \frac{x_1 x}{a^2 - \mu^2_2} + \frac{y_1 y}{b^2 - \mu^2_2} + \frac{z_1 z}{c^2 - \mu^2_2} = 1$$
(42)

Но легко видѣть, что условіе перпендикулярности есть (41):

$$\frac{x^2_1}{(a^2 - \mu^2_1)(a^2 - \mu^2_2)} + \frac{y^2_1}{(b^2 - \mu^2_1)(b^2 - \mu^2_2)} + \frac{z^2_1}{(c^2 - \mu^2_1)(c^2 - \mu^2_2)} = 0$$

Задача. Какая-нибудь изъ трехъ центральныхъ поверхностей пересѣкается плоскостями параллельными одной изъ координатныхъ плоскостей; найти геометрическое мѣсто фокусовъ, полученныхъ сѣченіями коническихъ сѣченій?

§ 672. *Предложение.* Геометрическое мѣсто полюсовъ, данной плоскости относительно системы софокусныхъ поверхностей, есть прямая линия перпендикулярная къ данной плоскости.

Доказательство. Уравненіе полярной плоскости точки $(x_1 y_1 z_1)$ относительно поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu^2} + \frac{y^2}{b^2 - \mu^2} + \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1$$

есть:

$$\frac{x_1 x}{a^2 - \mu^2} + \frac{y_1 y}{b^2 - \mu^2} + \frac{z_1 z}{c^2 - \mu^2} = 1$$

Если данная плоскость дана уравненіемъ:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p \quad (43)$$

то отождествляя ее съ предъидущимъ уравненіемъ, найдемъ:

$$\frac{\cos \alpha}{p} = \frac{x_1}{a^2 - \mu^2}, \quad \frac{\cos \beta}{p} = \frac{y_1}{b^2 - \mu^2}, \quad \frac{\cos \gamma}{p} = \frac{z_1}{c^2 - \mu^2}$$

откуда:

$$\frac{px_1}{\cos \alpha} = a^2 - \mu^2, \quad \frac{py_1}{\cos \beta} = b^2 - \mu^2, \quad \frac{pz_1}{\cos \gamma} = c^2 - \mu^2$$

откуда видимъ, что координаты полюса удовлетворяютъ уравненіе:

$$\frac{px}{\cos \alpha} - a^2 = \frac{py}{\cos \beta} - b^2 = \frac{pz}{\cos \gamma} - c^2$$

а это, очевидно, уравненіе прямой перпендикулярной къ плоскости (43).

Если данная плоскость (43) будетъ касательная къ софокусной поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

то геометрическое мѣсто полюсовъ относительно всей системы поверхностей будетъ нормаль въ точкѣ касанія.

Фокальныя линіи поверхностей неимѣющихъ центра.

§ 673. Возьмемъ сначала параболоидъ эллиптическій:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \quad (44)$$

Если эта поверхность имѣетъ фокусъ, то ея уравненію можно дать одну изъ слѣдующихъ формъ:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \lambda (x - k)^2 + \mu (y - h)^2 \quad (45)$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \lambda (x - k)^2 + \nu (z - g)^2 \quad (46)$$

Изъ уравненія (45) имѣемъ:

$$(1 - \lambda)x^2 + (1 - \mu)y^2 + z^2 - 2(a - \lambda k)x - 2(b - \mu h)y - \\ - 2cz^2 + a^2 + b^2 + c^2 - \lambda k^2 - \mu h^2 = 0 \quad (47)$$

Сравнивая это уравнение съ (44), найдемъ:

$$1 - \lambda = 0 \quad , \quad c = 0 \quad , \quad a^2 + b^2 = \lambda k^2 + \mu h^2$$

$$p(1 - \mu) = q = a - \lambda k \quad , \quad b - \mu h = 0$$

откуда:

$$\lambda = 1 \quad , \quad a^2 + b^2 = (a - q)^2 + \frac{b^2}{\mu} \quad , \quad \mu = \frac{p - q}{p}$$

слѣдовательно:

$$b^2 = 2(p - q)a - q(p - q)$$

Изъ этого слѣдуетъ, что эллиптическій параболоидъ имѣетъ первую фокальную линію въ плоскости XU , коей уравненіе есть:

$$y^2 = (p - q)(2x - q) \quad (48)$$

Это парабола, коей ось совпадаетъ съ положительною осью X , если $p > q$. Соотвѣтствующіе фокусы принадлежатъ второму роду, такъ какъ имѣемъ:

$$\lambda = 1 \quad , \quad \mu = \frac{p - q}{p}$$

Уравненіе (46) даетъ:

$$(1 - \lambda)x^2 + y^2 + (1 - \nu)z^2 - 2x(a - \lambda k) - \\ - 2by - 2z(c - \nu g) + a^2 + b^2 + c^2 - \lambda k^2 - \nu g^2 = 0$$

Сравнивая это уравненіе съ (44), найдемъ:

$$1 - \lambda = 0 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad a^2 + c^2 = \lambda k^2 + \nu g^2$$

$$p = q(1 - \nu) = a - \lambda k \quad , \quad c - \nu g = 0$$

откуда:

$$\lambda = 1 \quad , \quad a^2 + c^2 = (a - p)^2 + \frac{c^2}{\nu} \quad , \quad \nu = \frac{q - p}{q}$$

Слѣдовательно:

$$c^2 = 2(q - p)a - p(q - p)$$

Откуда видимъ, что эллиптическій параболоидъ имѣетъ и вторую фокальную линію въ плоскости XZ , коей уравненіе есть:

$$z^2 = (q - p)(2x - p) \quad (49)$$

очевидно также парабола. Соответствующие фокусы принадлежат первому роду, такъ какъ:

$$\lambda = 1 \quad , \quad \nu = \frac{q-p}{q}$$

эти коэффициенты имѣютъ разные знаки, если $p > q$.

Если въ уравненіи (48) и (49) измѣнимъ q на $-q$, то найдемъ уравненія фокальныхъ линій гиперболическаго параболоида:

$$z = 0 \quad , \quad y^2 = (p+q)(2x+q) \quad , \quad \lambda = 1 \quad , \quad \mu = \frac{p+q}{p}$$

$$y = 0 \quad , \quad z^2 = -(p+q)(2x-p) \quad , \quad \lambda = 1 \quad , \quad \nu = \frac{p+q}{q}$$

Это суть параболы, а фокусы принадлежатъ къ второму роду.

§ 674. Если $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ суть дѣйствительныя плоскости въ уравненіе:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = A_1 A_2$$

то можно приложить и къ эллиптическому параболоиду образованіе центральныхъ поверхностей (§ 667). Если плоскости $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ мнимыя, то:

$$m = \sqrt{\frac{\lambda}{p} - 1} = \sqrt{\frac{q}{p-q}}$$

будетъ величина дѣйствительная, если $p > q$ и въ этомъ случаѣ можно приложить къ эллиптическому параболоиду второй способъ образованія центральныхъ поверхностей.

Если поверхность будетъ параболоидъ гиперболическій, то:

$$m = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - 1} = \sqrt{\frac{-q}{p+q}}$$

количество мнимое. Въ этомъ случаѣ мы будемъ считать разстояніе точки $(x_1 y_1 z_1)$ поверхности отъ директрисы параллельно плоскости $z = ny$.

Плоскость:

$$z - z_1 = n(y - y_1)$$

встрѣчаетъ директрису въ точкѣ, коей координаты суть:

$$x = k \quad , \quad y = h \quad , \quad z - z_1 = n(h - y_1)$$

Означая это разстояніе черезъ δ будемъ имѣть:

$$\delta^2 = (x_1 - k)^2 + (y_1 - h)^2 + n^2(y_1 - h)^2 = (x_1 - k)^2 + (1 + n^2)(y_1 - h)^2$$

полагая $1 + n^2 = \mu$, найдемъ:

$$\delta^2 = (x_1 - k)^2 + \mu (y_1 - h)^2.$$

Слѣдовательно уравненіе поверхности можно написать въ формѣ:

$$R^2 = \delta^2$$

гдѣ R есть разстояніе точки (x_1, y_1, z_1) отъ фокуса, откуда:

$$\frac{R}{\delta} = 1$$

Количество:

$$n = \sqrt{\mu - 1} = \sqrt{\frac{p+q}{p} - 1} = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

очевидно, есть величина дѣйствительная. Уравненіе плоскости $z = ny$ сдѣлается:

$$z = \pm y \sqrt{\frac{q}{p}}$$

или:

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0$$

это суть *направляющія* плоскости. Изъ этого видимъ, что гиперболоидъ параболическій можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, коихъ разстояніе отъ фокуса равно разстоянію отъ директрисы; это послѣднее разстояніе должно откладываться параллельно направляющей плоскости.

Софокусныя поверхности неимѣющія центра.

§ 675. Пусть данная поверхность будетъ эллиптической параболоидъ:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \tag{50}$$

уравненіе:

$$\frac{y^2}{b+\mu} + \frac{z^2}{q+\mu} = 2x + \mu \tag{51}$$

представляетъ систему поверхностей, имѣющихъ съ поверхностью однѣ и тѣже фокальныя линіи, въ чемъ легко убѣдится, составляя уравненія этихъ линій для поверхности (51).

Предложеніе. Главныя сѣченія поверхности (51):

$$\begin{aligned} y^2 &= 2(p + \mu)x + \mu(p + \mu) \\ z^2 &= 2(q + \mu)x + \mu(q + \mu) \end{aligned} \tag{52}$$

имѣютъ общіе фокусы съ главными сѣченіями эллиптического параболоида (50).

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, первое изъ предъидущихъ сѣченій имѣетъ свою вершину на разстояніи $-\frac{\mu}{2}$ отъ начала, а разстояніе фокуса отъ вершины есть:

$$\frac{p + \mu}{2} - \frac{\mu}{2} = \frac{p}{2}$$

Точно также разстояніе фокуса отъ начала, во второмъ изъ сѣченій, есть $\frac{q}{2}$, слѣдовательно фокусы кривыхъ совпадаютъ съ фокусами главныхъ сѣченій данной поверхности (50).

Поверхности, выраженные уравненіемъ (51), суть всегда эллиптическіе параболоиды, исключая того случая, когда μ заключается между p и q . Всѣ эти поверхности пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, такъ какъ касательныя плоскости, въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) пересѣченія двухъ софокусныхъ поверхностей:

$$\frac{y^2}{p + \mu_1} + \frac{z^2}{q + \mu_1} - 2x - \mu_1 = 0, \quad \frac{y^2}{p + \mu_2} + \frac{z^2}{q + \mu_2} - 2x - \mu_2 = 0 \quad (53)$$

суть:

$$\begin{aligned} \frac{y_1 y}{p + \mu_1} + \frac{z_1 z}{q + \mu_1} - (x_1 + x) - \mu_1 &= 0 \\ \frac{y_1 y}{p + \mu_2} + \frac{z_1 z}{q + \mu_2} - (x_1 + x) - \mu_2 &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Условіе перпендикулярности этихъ плоскостей есть:

$$\frac{y_1^2}{(p + \mu_1)(p + \mu_2)} + \frac{z_1^2}{(q + \mu_1)(q + \mu_2)} + 1 = 0 \quad (55)$$

Но это уравненіе получимъ, вычитая уравненія (53).

Примѣры.

§ 676. *Пр. 1.* Найти длину нормали эллипсоида между его основаніемъ и точкою встрѣчи съ плоскостью XU ?

Рѣшеніе. Уравненія эллипсоида и нормали въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) суть:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z_1}{c^2}} = \rho$$

Чтобы найти координаты точки встречи нормали съ плоскостью XU надобно положить въ уравненіяхъ нормали $z = 0$, что даетъ:

$$x - x_1 = -\frac{c^2 x_1}{a^2}, \quad y - y_1 = -\frac{c^2 y_1}{b^2}, \quad -z_1 = \frac{\rho z_1}{c^2}, \quad \rho = -c^2$$

возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ, означая черезъ N искомую длину:

$$N = \frac{c^2}{P}$$

гдѣ P есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ центра эллипсоида на касательную плоскость въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) .

Пр. 2. Найти на эллипсоидѣ такую точку, чтобы касательная плоскость въ этой точкѣ дѣлала равные отрѣзки на координатныхъ осяхъ?

Рѣшеніе. Если искомую точку означимъ черезъ (x_1, y_1, z_1) , то касательная плоскость въ этой точкѣ къ эллипсоиду, есть:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = 1$$

Если напишемъ ее въ формѣ:

$$\frac{x}{\frac{a^2}{x_1}} + \frac{y}{\frac{b^2}{y_1}} + \frac{z}{\frac{c^2}{z_1}} = 1$$

то отсюда видимъ, что отрѣзки, которые она дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ суть:

$$\frac{a^2}{x_1}, \quad \frac{b^2}{y_1}, \quad \frac{c^2}{z_1}$$

Если эти отрѣзки равны, то мы должны имѣть:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{y_1}{b^2} = \frac{z_1}{c^2} = \rho$$

откуда:

$$\frac{x_1}{a} = a\rho, \quad \frac{y_1}{b} = b\rho, \quad \frac{z_1}{c} = c\rho$$

возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{y_1}{b^2} = \frac{z_1}{c^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

откуда:

$$x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad z_1 = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Пр. 3. Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ нормаль къ эллипсоиду въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) и черезъ его центръ?

Отв.

$$a^2(b^2 - c^2) \frac{x}{x_1} + b^2(c^2 - a^2) \frac{y}{y_1} + c^2(a^2 - b^2) \frac{z}{z_1} = 0$$

Пр. 4. Найти геометрическое мѣсто оснований перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра эллипсоида на касательныя плоскости?

Рѣшеніе. Пусть x, y, z будутъ координаты основанія перпендикуляра P , то будемъ имѣть:

$$x = P^2 \frac{x_1}{a^2}, \quad y = P^2 \frac{y_1}{b^2}, \quad z = P^2 \frac{z_1}{c^2}, \quad P^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

откуда, исключая P , найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

Пр. 5. Три перпендикулярныя между собою прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ, касаются во всѣхъ своихъ положеніяхъ поверхности втораго порядка; найти геометрическое мѣсто точки ихъ пересѣченія?

Рѣшеніе. Пусть уравненія прямыхъ будутъ:

$$\frac{x - x_1}{\lambda_1} = \frac{y - y_1}{\mu_1} = \frac{z - z_1}{\nu_1}, \quad \frac{x - x_1}{\lambda_2} = \frac{y - y_1}{\mu_2} = \frac{z - z_1}{\nu_2}, \quad \frac{x - x_1}{\lambda_3} = \frac{y - y_1}{\mu_3} = \frac{z - z_1}{\nu_3}$$

а уравненіе поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

подставляя въ это уравненіе выраженія:

$$x = x_1 + \lambda_1 \rho, \quad y = y_1 + \mu_1 \rho, \quad z = z_1 + \nu_1 \rho$$

найдемъ:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 + 2\rho \left(\frac{\lambda_1 x_1}{a^2} + \frac{\mu_1 y_1}{b^2} + \frac{\nu_1 z_1}{c^2} \right) + \rho^2 \left(\frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\mu_1^2}{b^2} + \frac{\nu_1^2}{c^2} \right) = 0$$

Условіе касанія первой прямой поверхности есть:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_1}{a^2} + \frac{\mu_1 y_1}{b^2} + \frac{\nu_1 z_1}{c^2} \right)^2 = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\mu_1^2}{b^2} + \frac{\nu_1^2}{c^2} \right)$$

Условія касанія двухъ другихъ прямыхъ будутъ:

$$\left(\frac{\lambda_2 x_1}{a^2} + \frac{\mu_2 y_1}{b^2} + \frac{\nu_2 z_1}{c^2} \right)^2 = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{\lambda_2^2}{a^2} + \frac{\mu_2^2}{b^2} + \frac{\nu_2^2}{c^2} \right)$$

$$\left(\frac{\lambda_3 x_1}{a^2} + \frac{\mu_3 y_1}{b^2} + \frac{\nu_3 z_1}{c^2} \right)^2 = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{\lambda_3^2}{a^2} + \frac{\mu_3^2}{b^2} + \frac{\nu_3^2}{c^2} \right)$$

Складывая почленно эти уравненія, найдемъ:

$$\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4} = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

или:

$$(b^2 + c^2) x_1^2 + (a^2 + c^2) y_1^2 + (a^2 + b^2) z_1^2 = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто есть эллипсоидъ концентричный данному.

Если уравнение поверхности будетъ:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$$

то геометрическое мѣсто будетъ параболоидъ вращения:

$$y^2 + z^2 = 2(p + q)x + pq$$

Пр. 6. Три перпендикулярныя между собою прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ, перемѣщаются, упираясь постоянно на данное коническое сѣченіе; найти геометрическое мѣсто точки ихъ пересѣченія?

Рѣшеніе. Пусть уравненіе даннаго коническаго сѣченія будетъ:

$$z = 0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (56)$$

а уравненія прямыхъ тѣже, что и въ предъидущемъ примѣрѣ. Если выразимъ, что прямая:

$$x = x_1 + \lambda_1 \rho \quad , \quad y = y_1 + \mu_1 \rho \quad , \quad z = z_1 + \nu_1 \rho$$

встрѣчаетъ коническое сѣченіе (56), то найдемъ уравненіе:

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) + 2\rho \left(\frac{\lambda_1 x_1}{a^2} + \frac{\mu_1 y_1}{b^2} \right) + \rho^2 \left(\frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\mu_1^2}{b^2} \right) = 0$$

Но въ точкѣ встрѣчи прямой и коническаго сѣченія $z = 0$, $\rho = -\frac{z_1}{\nu}$, если вмѣсто ρ подставимъ эту величину въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$\nu^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) - 2z_1 \left(\frac{\lambda_1 \nu_1 x_1}{a^2} + \frac{\mu_1 \nu_1 y_1}{b^2} \right) + z_1^2 \left(\frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\mu_1^2}{b^2} \right) = 0$$

для другихъ прямыхъ точно также найдемъ:

$$\nu^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) - 2z_1 \left(\frac{\lambda_2 \nu_2 x_1}{a^2} + \frac{\mu_2 \nu_2 y_1}{b^2} \right) + z_1^2 \left(\frac{\lambda_2^2}{a^2} + \frac{\mu_2^2}{b^2} \right) = 0$$

$$\nu^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) - 2z_1 \left(\frac{\lambda_3 \nu_3 x_1}{a^2} + \frac{\mu_3 \nu_3 y_1}{b^2} \right) + z_1^2 \left(\frac{\lambda_3^2}{a^2} + \frac{\mu_3^2}{b^2} \right) = 0$$

Складывая, почленно, эти три уравненія найдемъ:

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 + (a^2 + b^2) z_1^2 = a^2 b^2$$

Слѣдовательно искомое геометрическое мѣсто есть эллипсоидъ. Это геометрическое мѣсто будетъ однополый или двуполый гиперболоидъ, если коническое сѣченіе будетъ гипербола. Если данное коническое сѣченіе будетъ парабола $y^2 = 2px$, то геометрическое мѣсто будетъ параболоидъ вращения:

$$y^2 + z^2 = 2px$$

Пр. 7. Три перпендикулярныя между собою плоскости касаются къ данному коническому сѣченію; найти геометрическое мѣсто ихъ точки пересѣченія?

Рѣшеніе. Пусть данное коническое сѣченіе и одна изъ плоскостей, проходящихъ черезъ точку (x_1, y_1, z_1) , будутъ:

$$z = 0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad (x - x_1) \cos \alpha_1 + (y - y_1) \cos \beta_1 + (z - z_1) \cos \gamma_1 = 0$$

пересѣченіе этой плоскости съ плоскостью XU есть:

$$x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 - (x_1 \cos \alpha_1 + y_1 \cos \beta_1 + z_1 \cos \gamma_1) = 0$$

оно должно быть тождественно съ касательной:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

откуда найдемъ:

$$a \cos \alpha_1 = (x_1 \cos \alpha_1 + y_1 \cos \beta_1 + z_1 \cos \gamma_1) \frac{x_1}{a} \quad , \quad b \cos \beta_1 = (x_1 \cos \alpha_1 + y_1 \cos \beta_1 + z_1 \cos \gamma_1) \frac{y_1}{b}$$

а изъ этихъ послѣднихъ уравненій имѣемъ:

$$(x_1 \cos \alpha_1 + y_1 \cos \beta_1 + z_1 \cos \gamma_1)^2 = a^2 \cos^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \beta_1$$

точно также найдемъ для двухъ другихъ плоскостей:

$$(x_1 \cos \alpha_2 + y_1 \cos \beta_2 + z_1 \cos \gamma_2)^2 = a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \cos^2 \beta_2$$

$$(x_1 \cos \alpha_3 + y_1 \cos \beta_3 + z_1 \cos \gamma_3)^2 = a^2 \cos^2 \alpha_3 + b^2 \cos^2 \beta_3$$

Складывая эти три уравненія, найдемъ уравненіе искомага геометрическаго мѣста:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 + b^2$$

Если кривая будетъ парабола $z = 0$, $y^2 = 2px$, то геометрическое мѣсто будетъ плоскость перпендикулярная къ плоскости XU и проходящая черезъ директрису параболы.

Пр. 8. Плоскость касается поверхности втораго порядка; найти геометрическое мѣсто ея полюса относительно другой данной поверхности втораго порядка?

Рѣшеніе. Пусть данная поверхность, къ которой касается плоскость будетъ:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1 \quad (57)$$

а поверхность, относительно которой берется полюсъ пусть будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (58)$$

Если черезъ (x_1, y_1, z_1) означимъ полюсъ, то:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = 1 \quad , \quad \frac{x' x}{a_1^2} + \frac{y' y}{b_1^2} + \frac{z' z}{c_1^2} = 1$$

будутъ уравненія полярной плоскости точки (x_1, y_1, z_1) и касательной плоскости въ

точкѣ $(x'y'z')$ поверхности (57). Отождествляя эти уравненія, найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{x'}{a^2_1} \quad , \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{y'}{b^2_1} \quad , \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{z'}{c^2_1}$$

исключая x_1, y_1, z_1 , найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$\frac{a^2_1}{a^4} x^2_1 + \frac{b^2_1}{b^4} y^2_1 + \frac{c^2_1}{c^4} z^2_1 = 1$$

Пр. 9. Найти геометрическое мѣсто центровъ коническихъ сѣченій, происшедшихъ отъ пересѣченія поверхности втораго порядка, плоскостями проведенными въ данномъ разстояніи отъ начала?

Рѣшеніе. Пусть данная поверхность и одна изъ сѣкущихъ плоскостей будутъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

Центръ сѣченія находится на плоскости и на сопряженномъ ей діаметрѣ, котораго уравненія, очевидно, суть:

$$\frac{x}{a^2 \cos \alpha} = \frac{y}{b^2 \cos \beta} = \frac{z}{c^2 \cos \gamma}$$

Исключая косинусы между этими уравненіями и сѣкущей плоскостью, найдемъ уравненіе искомага мѣста:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = p^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)$$

Пр. 10. Если плоскость сѣченія проходитъ черезъ данную точку, то геометрическое мѣсто сѣченій будетъ:

$$\frac{x}{a^2} (x - x_1) + \frac{y}{b^2} (y - y_1) + \frac{z}{c^2} (z - z_1) = 0$$

гдѣ x_1, y_1, z_1 суть координаты данной точки.

Пр. 11. Геометрическое мѣсто точки пересѣченія трехъ перпендикулярныхъ касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda^2_1} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda^2_1} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda^2_1} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2 + \lambda^2_2} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda^2_2} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda^2_2} = 1$$

есть шаръ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \lambda^2_1 + \lambda^2_2$$

Пр. 12. Найти разстояніе между точкою касанія $(x'y'z')$ касательной плоскости къ поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{59}$$

и полюсомъ этой плоскости относительно софокусной поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad (60)$$

Рѣшеніе. Касательная плоскость къ поверхности (59) въ точкѣ $(x'y'z')$ есть:

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 1$$

а полярная плоскость точки $(x_1y_1z_1)$ относительно поверхности (57) есть:

$$\frac{x'x}{a^2 + \lambda} + \frac{y'y}{b^2 + \lambda} + \frac{z'z}{c^2 + \lambda} = 1$$

отождествляя эти два уравненія, найдемъ:

$$\frac{x'}{a^2} = \frac{x_1}{a^2 + \lambda} \quad , \quad \frac{y'}{b^2} = \frac{y_1}{b^2 + \lambda} \quad , \quad \frac{z'}{c^2} = \frac{z_1}{c^2 + \lambda}$$

откуда:

$$x_1 - x' = \frac{\lambda x'}{a^2} \quad , \quad y_1 - y' = \frac{\lambda y'}{b^2} \quad , \quad z_1 - z' = \frac{\lambda z'}{c^2}$$

означая черезъ δ разстояніе точекъ $(x'y'z')$ и $(x_1y_1z_1)$, найдемъ наконецъ:

$$\delta = \frac{\lambda}{P}$$

Пр. 13. Дано уравненіе эллипсоида въ плоскостныхъ координатахъ:

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 1 \quad (61)$$

Найти уравненіе, какой нибудь, точки на нормальной линіи къ поверхности въ точкѣ касанія касательной плоскости данной координатами $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$?

Рѣшеніе. Уравненія нормали въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$ къ эллипсоиду въ декартовыхъ координатахъ есть:

$$\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z_1}{c^2}} = \lambda \quad (62)$$

Уравненіе точки касанія касательной плоскости есть:

$$a^2\xi_1\xi + b^2\eta_1\eta + c^2\zeta_1\zeta = 1 \quad (63)$$

Координаты этой точки, очевидно, суть:

$$x_1 = a^2\xi_1 \quad , \quad y_1 = b^2\eta_1 \quad , \quad z_1 = c^2\zeta_1$$

откуда изъ (62) найдемъ координаты, какой нибудь, точки на нормали:

$$x = (a^2 - \lambda)\xi_1 \quad , \quad y = (b^2 - \lambda)\eta_1 \quad , \quad z = (c^2 - \lambda)\zeta_1$$

Если это координаты точки на нормали, то ея уравненіе есть:

$$a^2\xi_1\xi + b^2\eta_1\eta + c^2\zeta_1\zeta - \lambda(\xi_1\xi + \eta_1\eta + \zeta_1\zeta) = 0$$

Пр. 14. Уравнение:

$$\frac{\xi^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\eta^2}{b^2 + \lambda} + \frac{\zeta^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

представляет систему поверхностей, имѣющихъ однѣ и тѣже плоскости круговыхъ сѣченій.

Рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе этой поверхности въ декартовыхъ координатахъ есть:

$$(a^2 + \lambda)x^2 + (b^2 + \lambda)y^2 + (c^2 + \lambda)z^2 = 1$$

Изъ формы этого уравненія видно, что система этихъ поверхностей имѣетъ однѣ и тѣже плоскости круговыхъ сѣченій. Эти поверхности называются *конциклическими*.

Пр. 15. Три конциклическія поверхности касаются одной и той-же плоскости въ пространствѣ, а прямая, соединяющія центръ этихъ поверхностей съ точками касанія, перпендикулярны между собою

Доказательство. Пусть уравненіе системы конциклическихъ поверхностей будетъ:

$$\frac{\xi^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\eta^2}{b^2 + \lambda} + \frac{\zeta^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

Если эти поверхности касаются плоскостя (ξ_1, η_1, ζ_1) , то имѣемъ:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\eta_1^2}{b^2 + \lambda} + \frac{\zeta_1^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

откуда получимъ уравненіе третьей степени относительно λ , всѣ три корня коего всегда дѣйствительны; пусть эти корни будутъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Слѣдовательно поверхности:

$$\frac{\xi^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{\eta^2}{b^2 + \lambda_1} + \frac{\zeta^2}{c^2 + \lambda_1} = 1, \quad \frac{\xi^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{\eta^2}{b^2 + \lambda_2} + \frac{\zeta^2}{c^2 + \lambda_2} = 1 \quad (64)$$

касаются плоскости (ξ_1, η_1, ζ_1) . Уравненія точекъ касанія будутъ:

$$\frac{\xi_1 \xi}{a^2 + \lambda_1} + \frac{\eta_1 \eta}{b^2 + \lambda_1} + \frac{\zeta_1 \zeta}{c^2 + \lambda_1} = 1, \quad \frac{\xi_1 \xi}{a^2 + \lambda_2} + \frac{\eta_1 \eta}{b^2 + \lambda_2} + \frac{\zeta_1 \zeta}{c^2 + \lambda_2} = 1$$

Если $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ суть Декартовы координаты этихъ точекъ, то имѣемъ:

$$x_1 = \frac{\xi_1}{a^2 + \lambda_1}, \quad y_1 = \frac{\eta_1}{b^2 + \lambda_1}, \quad z_1 = \frac{\zeta_1}{c^2 + \lambda_1}$$

$$x_2 = \frac{\xi_1}{a^2 + \lambda_2}, \quad y_2 = \frac{\eta_1}{b^2 + \lambda_2}, \quad z_2 = \frac{\zeta_1}{c^2 + \lambda_2}$$

Слѣдовательно косинусы угловъ, которые радіусы векторы r_1 и r_2 составляютъ съ координатными осями, суть:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\xi_1}{r_1(a^2 + \lambda_1)}, \quad \cos \beta_1 = \frac{\eta_1}{r_1(b^2 + \lambda_1)}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{\zeta_1}{r_1(c^2 + \lambda_1)}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\xi_1}{r_2(a^2 + \lambda_2)}, \quad \cos \beta_2 = \frac{\eta_1}{r_2(b^2 + \lambda_2)}, \quad \cos \gamma_2 = \frac{\zeta_1}{r_2(c^2 + \lambda_2)}$$

откуда:

$$\begin{aligned} & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = \\ & = \frac{1}{r_1 r_2} \left\{ \frac{\xi_1^2}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} + \frac{\eta_1^2}{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)} + \frac{\zeta_1^2}{(c^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_2)} \right\} \end{aligned}$$

Но если вычтемъ уравненія (64) поверхностей, то увидимъ, что вторая часть предъидущаго уравненія равна нулю, слѣдовательно r_1 и r_2 перпендикулярны.

Пр. 16. Даны двѣ прямыя линіи; двѣ перпендикулярныя плоскости, проходящія, черезъ эти прямыя пересѣкаются; найти геометрическое мѣсто пересѣченія?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$\begin{aligned} x &= az + p & , & & x &= a_1 z + p_1 \\ y &= bz + q & , & & y &= b_1 z + q_1 \end{aligned} \quad (65)$$

уравненія плоскостей, проходящихъ черезъ эти прямыя, очевидно, будутъ:

$$x - az - p = \lambda (y - bz - q) \quad , \quad x - a_1 z - p_1 = \mu (y - b_1 z - q) \quad (66)$$

такъ какъ эти плоскости перпендикулярны, по условію, то имѣемъ:

$$1 + \lambda\mu + (\lambda b - a)(\mu b_1 - a_1) = 0$$

или:

$$1 + aa_1 - ab_1\mu - a_1b\lambda + (1 + bb_1)\lambda\mu = 0 \quad (67)$$

подставляя въ это уравненіе λ и μ изъ уравненій (66), найдемъ искомое геометрическое мѣсто.

Чтобы точно опредѣлить родъ поверхности, выберемъ координатныя оси слѣдующимъ образомъ: пусть $AB = 2d$ будетъ кратчайшее разстояніе между двумя данными прямыми. Помѣстимъ начало координатъ въ серединѣ AB и возьмемъ за плоскость XU плоскость перпендикулярную къ AB , наконецъ за ось X возьмемъ равнодѣлящую уголъ между проэктіями данныхъ прямыхъ на плоскости XU . При такомъ положеніи координатныхъ осей уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$\begin{aligned} z &= d & & & z &= -d \\ y &= mx & , & & y &= -mx \end{aligned}$$

уравненія плоскостей, проходящихъ черезъ эти прямыя будутъ:

$$z - d = \lambda (y - mx) \quad , \quad z + d = \mu (y + mx) \quad (68)$$

условіе (67) сдѣлается:

$$1 + (1 - m^2)\lambda\mu = 0$$

исключая λ и μ , съ помощью уравненій (68), найдемъ:

$$1 + (1 - m^2) \frac{z - d}{y - mx} \cdot \frac{z + d}{y + mx} = 0$$

или:

$$y^2 - m^2 x^2 + (1 - m^2)(z^2 - d^2) = 0$$

или еще:

$$y^2 - m^2x^2 + (1 - m^2)z^2 = d^2(1 - m^2)$$

Это уравнение однополаго гиперболоида.

Пр. 17. Найти геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ прямыхъ?

Рѣшеніе. Взявъ ту же систему координатъ, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, найдемъ:

$$mxy + (1 + m^2)dz = 0$$

уравненіе гиперболического параболоида.

Пр. 18. Найти геометрическое мѣсто точки, коей разстояніе отъ данной точки равно n разъ взятому разстоянію отъ данной прямой?

Рѣшеніе. Пусть A будетъ данная точка, возьмемъ за ось X перпендикуляръ, опущенный изъ точки A на данную прямую, помѣстимъ начало координатъ O на разстояніи a отъ точки A ; наконецъ возьмемъ за ось Z прямую параллельную данной прямой. Уравненіе геометрическаго мѣста будетъ:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = n^2 \{ y^2 + (d - x)^2 \}$$

гдѣ d есть разстояніе данной прямой отъ начала координатъ. Если развернемъ предыдущее уравненіе, то найдемъ:

$$(1 - n^2)x^2 + (1 - n^2)y^2 + z^2 - 2ax + 2n^2dx = n^2d^2 - a^2$$

поверхность, очевидно, вращенія.

Пр. 19. Найти геометрическое мѣсто точки, которой произведеніе разстояній, отъ смежныхъ граней даннаго параллелепипеда равно произведенію разстояній отъ граней, пересѣкающихся въ противоположномъ углѣ?

Рѣшеніе. Пусть ребра даннаго косоугольнаго параллелепипеда будутъ $2a$, $2b$, $2c$. Помѣстимъ начало въ центрѣ параллелепипеда и возьмемъ за координатныя оси прямыя параллельныя ребрамъ. Уравненія граней будутъ:

$$\begin{aligned} x = a & \quad , \quad y = b & \quad , \quad z = c \\ x = -a & \quad , \quad y = -b & \quad , \quad z = -c \end{aligned}$$

Означимъ черезъ λ , μ , ν косинусы угловъ между координатными осями и положимъ:

$$\delta = \sqrt{1 + 2\lambda\mu\nu - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}$$

разстоянія, перемѣщающейся точки отъ граней параллелепипеда будутъ:

$$\begin{aligned} \delta \frac{x - a}{\sqrt{1 - \lambda^2}} & \quad , \quad \delta \frac{y - b}{\sqrt{1 - \mu^2}} & \quad , \quad \delta \frac{z - c}{\sqrt{1 - \nu^2}} \\ \delta \frac{x + a}{\sqrt{1 - \lambda^2}} & \quad , \quad \delta \frac{y + b}{\sqrt{1 - \mu^2}} & \quad , \quad \delta \frac{z + c}{\sqrt{1 - \nu^2}} \end{aligned}$$

откуда уравненіе геометрическаго мѣста будетъ однополый гиперболоидъ:

$$(x - a)(y - b)(z - c) = (x + a)(y + b)(z + c)$$

или:

$$ayz + bxz + cxy + abc = 0$$

Пр. 20. Найти геометрическое мѣсто центровъ поверхности:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda xz + 2\mu yz - 2ax - 2by + 2cz = 0$$

гдѣ λ и μ суть переменные параметры.

Пр. 21. Шаръ скользитъ, оставаясь касательнымъ къ двумъ перпендикулярнымъ непересекающимся прямымъ; найти геометрическое мѣсто его центровъ?

Отв. Гиперболическій параболоидъ.

Поверхности, проходящія черезъ пересѣченіе двухъ поверхностей второго порядка.

§ 677. Мы видѣли, что если:

$$\begin{aligned} f_1 = & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \\ & + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}xu + 2a_{24}yu + 2a_{34}zu + a_{44}u^2 = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + \\ & + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + 2b_{14}xu + 2b_{24}yu + 2b_{34}zu + b_{44}u^2 = 0 \end{aligned}$$

суть уравненія двухъ поверхностей второго порядка, то уравненіе:

$$f_1 - \lambda f_2 = 0 \quad (70)$$

будетъ представлять уравненіе поверхности также второго порядка, проходящей черезъ пересѣченіе поверхностей (69), которое есть кривая двойной кривизны четвертой степени. Такъ какъ λ есть произвольный параметръ, то есть безчисленное множество—система поверхностей, проходящихъ черезъ пересѣченіе поверхностей (69). Между этими поверхностями есть вообще четыре коническія. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли § 533, что если определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (71)$$

то уравненіе $f_1 = 0$ представляетъ конусъ. Если приложимъ этотъ критеріумъ къ уравненію (70), то найдемъ слѣдующее условіе, чтобы оно представляло конусъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & , & a_{12} - \lambda b_{12} & , & a_{13} - \lambda b_{13} & , & a_{14} - \lambda b_{14} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & , & a_{22} - \lambda b_{22} & , & a_{23} - \lambda b_{23} & , & a_{24} - \lambda b_{24} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & , & a_{32} - \lambda b_{32} & , & a_{33} - \lambda b_{33} & , & a_{34} - \lambda b_{34} \\ a_{41} - \lambda b_{41} & , & a_{42} - \lambda b_{42} & , & a_{43} - \lambda b_{43} & , & a_{44} - \lambda b_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (72)$$

Это уравнение четвертой степени относительно λ , а слѣдовательно между системой поверхностей (70) есть вообще четыре конуса.

Если означимъ черезъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ корни уравненія (72), то:

$$f_1 - \lambda f_2 = 0$$

есть конусъ, слѣдовательно (§ 533) x, y, z , и должны удовлетворять уравненіямъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

величины x, y, z , удовлетворяющія этимъ уравненіямъ суть координаты вершины конуса.

§ 678. Полярная плоскость точки $(x_1 y_1 z_1 u_1)$ относительно поверхности (70), есть:

$$x \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) + y \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right) + z \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \right) + u \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right) = 0 \quad (73)$$

Если полюсъ $(x_1 y_1 z_1 u_1)$ совпадаетъ съ вершиною конуса, соотвѣтствующаго корню λ_1 , то имѣеть слѣдующія зависимости:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_1} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = 0 \quad (74)$$

откуда, подставляя эти выраженія въ (73), найдемъ:

$$(\lambda_1 - \lambda) \left(x \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + y \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + z \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + u \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right) = 0$$

или:

$$x \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + y \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + z \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + u \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = 0$$

Это есть уравненіе полярной плоскости вершины конуса, соотвѣтствующаго корню λ_1 , такъ какъ эта плоскость не зависитъ отъ λ , то изъ этого слѣдуетъ, что она есть полярная плоскость вершины конуса относительно всей системы (70) поверхностей.

Другія вершины конусовъ, соотвѣтствующихъ корнямъ $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, будутъ имѣть тоже свойство.

Слѣдовательно тетраэдръ, коего вершины суть вершины четырехъ конусовъ, есть общій полярный тетраэдръ всей системы поверхностей (70).

Обратно, если точка въ пространствѣ есть полюсъ одной и той-же плоскости относительно всѣхъ поверхностей системы (70), то она должна совпадать съ одной изъ вершинъ четырехъ конусовъ, проходящихъ черезъ пересѣченіе поверхностей (69).

Въ самомъ дѣлѣ, если уравненіе (73) представляетъ одну и ту же плоскость, какое бы нибыло количество λ , то мы должны имѣть:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \lambda \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \lambda \frac{\partial f_2}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \lambda \frac{\partial f_2}{\partial u_1}$$

но если изъ этихъ уравненій исключимъ x_1, y_1, z_1, u_1 , то найдемъ уравненіе (72), слѣдовательно точка (x_1, y_1, z_1, u_1) будетъ вершина одного изъ четырехъ конусовъ.

Теперь покажемъ, что полярная плоскость одной изъ вершинъ конусовъ проходитъ черезъ три вершины остальныхъ конусовъ.

Умножая равенства:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u_1}$$

на x_2, y_2, z_2, u_2 , а уравненія:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u_2} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_2}$$

на x_1, y_1, z_1, u_1 и складывая, а полученные суммы вычитая, найдемъ:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \left(x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + u_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right) = 0 \quad (75)$$

замѣчая, что:

$$x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + u_2 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + z_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + u_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_2}$$

Изъ уравненія (75) видимъ, что вершина (x_2, y_2, z_2, u_2) конуса, соответствующаго корню λ_2 , лежитъ въ полярной плоскости вершины (x_1, y_1, z_1, u_1) . Точно также можно показать, что и вершины другихъ конусовъ находятся въ той-же полярной плоскости.

§ 679. Если общій полярный тетраэдръ возьмемъ за координатный, то уравненія поверхностей (69) сдѣлаются:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0, \quad b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 = 0 \quad (76)$$

а (70) будетъ:

$$(a_{11} - \lambda b_{11})x_1^2 + (a_{22} - \lambda b_{22})x_2^2 + (a_{33} - \lambda b_{33})x_3^2 + (a_{44} - \lambda b_{44})x_4^2 = 0 \quad (77)$$

Если изъ уравненій (76) исключимъ x_4 , то найдемъ уравненіе:

$$(a_{11}b_{44} - b_{11}a_{44})x_1^2 + (a_{22}b_{44} - b_{22}a_{44})x_2^2 + (a_{33}b_{44} - b_{33}a_{44})x_3^2 = 0$$

которое представляетъ конусъ, проходящій черезъ пересѣченіе поверхностей (76), и котораго вершина совпадаетъ съ вершиною тетраэдра, къ которой прилегаютъ грани $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

ГЛАВА XL.

Образование поверхностей.

§ 680. Въ нашихъ изслѣдованіяхъ мы уже встрѣчали поверхности, образованныя перемѣщеніемъ прямой линіи или вообще кривой въ пространствѣ (§ 591). Прямая линія или кривая, перемѣщаясь скользитъ, упираясь на одну или нѣсколько прямыхъ линій или кривыхъ. Эти послѣднія кривыя или прямыя называются *направляющими—директрисами*, а скользящая по нимъ прямая или кривая, образующая поверхность, называется *образующею—генератрисою*.

Кривая въ пространствѣ опредѣляется пересѣченіемъ двухъ поверхностей; пусть ея уравненія будутъ:

$$f_1(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0, \quad f_2(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0 \quad (1)$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ суть постоянныя параметры, опредѣляющіе положеніе и форму поверхностей, а слѣдовательно и кривой, которую эти поверхности представляютъ.

Такъ какъ дѣйствія, означенныя символами f_1 и f_2 извѣстны, то родъ кривой также извѣстенъ, но такъ какъ поверхности (1) содержатъ n параметровъ, то съ измѣненіемъ ихъ кривая будетъ измѣнять положеніе въ пространствѣ и форму.

Если параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ будутъ измѣняться произвольно, то кривая (1), перемѣщаясь въ пространствѣ безъ всякаго опредѣленнаго закона, можетъ иногда наполнить послѣдовательными положеніями все пространство, не образовавъ никакой поверхности.

Пр. 1. Если въ уравненіяхъ прямой:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma} \quad (2)$$

которыя содержатъ параметры α, β, γ , будемъ перемѣнять направленіе пря-

мой α, β, γ ; то прямая (2), принимая около точки (x_1, y_1, z_1) всевозможныя направленія, наполнить все пространство, не образовавъ никакой поверхности.

Пр. 2. Если въ уравненіяхъ круга:

$$z = ax + by + c \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (3)$$

которыя заключаютъ параметры a, b, c, r , будемъ ихъ измѣнять безъ всякаго опредѣленнаго закона, то кругъ представляемый уравненіями (3), перемѣщаясь, наполнить все пространство и не образуетъ никакой поверхности.

Слѣдовательно должна существовать извѣстная зависимость между параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, чтобы генератрисы (1), перемѣщаясь въ пространствѣ, образовали поверхность. Эта зависимость получится, если заставимъ генератрису (1) перемѣщаться, упираясь на $n - 1$ кривыхъ директрисъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0 \quad (4)$$

будетъ одна изъ директрисъ, на которую кривая (1), перемѣщаясь, должна постоянно упираться. Такъ какъ кривая (1) пересѣкается съ (4), то въ точкѣ пересѣченія x, y, z должны удовлетворять уравненія (1) и (2); если изъ этихъ четырехъ уравненій исключимъ x, y, z , то найдемъ зависимость между параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Пусть эта зависимость будетъ:

$$\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0 \quad (5)$$

слѣдовательно одинъ изъ параметровъ будетъ уже зависетьъ отъ остальныхъ. Если будетъ дана еще одна директриса:

$$F_3(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_4(x, y, z) = 0 \quad (6)$$

то точно также найдемъ еще одну зависимость:

$$\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0 \quad (7)$$

между тѣми-же параметрами, слѣдовательно только $(n - 2)$ изъ нихъ могутъ измѣняться произвольно. Слѣдовательно, если будетъ дано $(n - 1)$ директрисъ, то получимъ $(n - 1)$ зависимостей между параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0 \quad , \quad \Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0 \quad , \quad \dots \quad \Phi_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0 \quad (8)$$

которыя опредѣляютъ $n - 1$ параметровъ въ функціи одного изъ нихъ, на примѣръ α_1 :

$$\alpha_2 = \varphi_1(\alpha_1) \quad , \quad \alpha_3 = \varphi_2(\alpha_1) \quad , \quad \dots \quad , \quad \alpha_n = \varphi_{n-1}(\alpha_1) \quad (9)$$

Если теперь въ уравненіяхъ генератрисы:

$$f_1(x, y, z, \alpha, \dots, \alpha_n) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, z, \alpha, \dots, \alpha_n) = 0 \quad .$$

вставимъ вмѣсто $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ихъ выраженія (9), то будемъ имѣть:

$$f_1(x, y, z, \alpha_1, \varphi(\alpha_1) \dots) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, z, \alpha_1, \varphi(\alpha_1) \dots) = 0 \quad (10)$$

исключая изъ этихъ уравненій α_1 , найдемъ зависимость между x, y, z :

$$\Phi(x, y, z) = 0 \quad (11)$$

которая и будетъ представлять поверхность, образованную перемѣщеніемъ генератрисы (1), упирающейся при своемъ перемѣщеніи на $(n - 1)$ директрисъ.

§ 681. Въ большей части случаевъ дается одна только директриса, слѣдовательно генератриса не должна содержать болѣе двухъ параметровъ. Пусть такая генератриса будетъ:

$$f_1(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad (12)$$

а директриса:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F(x, y, z) = 0 \quad (13)$$

исключая изъ этихъ четырехъ уравненій x, y, z , найдемъ зависимость между параметрами α_1 и α_2 :

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad (14)$$

Но изъ уравненій (12) имѣемъ:

$$\alpha_1 = \varphi_1(x, y, z) \quad , \quad \alpha_2 = \varphi_2(x, y, z) \quad (15)$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (14), найдемъ:

$$\varphi\{\varphi_1(x, y, z) \quad , \quad \varphi_2(x, y, z)\} = \Phi(x, y, z) = 0 \quad (16)$$

уравненіе поверхности, образованной генератрисой (12), упирающейся на директрису (13).

Поверхности цилиндрическія.

§ 682. Цилиндрическія поверхности образуетъ прямая, которая перемѣщается параллельно данному направленію, упираясь въ своемъ перемѣщеніи на данную кривую.

Пусть данная директриса будетъ:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0 \quad (17)$$

Если:

$$x = mz + \alpha_1 \quad , \quad y = nz + \alpha_2 \quad (18)$$

будетъ генератриса, то въ ней параметры m и n неизмѣняются — они даютъ направленіе генератрисы, а α_1 и α_2 измѣняются, вслѣдствіе этого измѣненія генератриса переносится въ пространствѣ, оставаясь параллельною направленію, которое опредѣляется параметрами m и n .

Если изъ уравненій (17) и (18) исключимъ (x, y, z) , то найдемъ:

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$

Но изъ уравненій (18) имѣемъ:

$$\alpha_1 = x - mz \quad , \quad \alpha_2 = y - nz$$

откуда:

$$\Phi(x - mz, y - nz) = 0$$

будетъ уравненіе искомой цилиндрической поверхности, коей форма будетъ зависеть отъ формы директрисы (17).

Пр. Пусть уравненія директрисы будутъ:

$$z = 0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

если генератриса:

$$x = mz + \alpha_1 \quad , \quad y = nz + \alpha_2$$

встрѣчаетъ директрису, то имѣемъ:

$$\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\alpha_2^2}{b^2} = 0$$

откуда:

$$\frac{(x - mz)^2}{a^2} + \frac{(y - nz)^2}{b^2} = 1$$

Это есть уравненіе цилиндра, коего генератриса параллельна оси Z , а директриса есть эллипсъ на плоскости XU .

Поверхности коническія.

§ 683. *Коническія поверхности* образуются перемѣщеніемъ прямой, которая, проходя постоянно черезъ данную точку, упирается на данную директрису.

Пусть данная директриса будетъ:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0 \quad (19)$$

а генератриса:

$$x - x_1 = \alpha_1(z - z_1) \quad , \quad y - y_1 = \alpha_2(z - z_1) \quad (20)$$

Изъ этихъ четырехъ уравненій, найдемъ:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$

но:

$$\alpha_1 = \frac{x - x_1}{z - z_1} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{y - y_1}{z - z_1}$$

откуда:

$$\varphi\left(\frac{x - x_1}{z - z_1} \quad , \quad \frac{y - y_1}{z - z_1}\right) = 0$$

или:

$$\frac{y - y_1}{z - z_1} = \Phi\left(\frac{x - x_1}{z - z_1}\right) \quad (21)$$

Это уравненіе конической поверхности, коей вершина находится въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) ; если вершину помѣстимъ въ началѣ координатъ, то $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, слѣдовательно уравненіе поверхности будетъ:

$$\frac{y}{z} = \Phi\left(\frac{x}{z}\right) \quad (22)$$

Изъ этого уравненія видимъ, что два изъ отношеній $\frac{z}{x}$, $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{y}$ суть функціи одно другаго, слѣдовательно уравненіе (22) есть однородная функція.

Пр. Пусть уравненіе директрисы будетъ:

$$z = 0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

а генератрисы:

$$x - x_1 = \alpha_1(z - z_1) \quad , \quad y - y_1 = \alpha_2(z - z_1)$$

изъ этихъ четырехъ уравненій, найдемъ:

$$\left(\frac{x_1 - \alpha_1 z_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - \alpha_2 z_1}{b}\right)^2 = 1$$

подставляя вмѣсто α_1 и α_2 ихъ выраженія:

$$\alpha_1 = \frac{x - x_1}{z - z_1}, \quad \alpha_2 = \frac{y - y_1}{z - z_1}$$

найдемъ:

$$\frac{(x_1 z - z_1 x)^2}{a^2} + \frac{(y_1 z - z_1 y)^2}{b^2} = (z - z_1)^2$$

Если точка (x_1, y_1, z_1) находится на бесконечности, то полагая $\frac{x_1}{z_1} = m$, $\frac{y_1}{z_1} = n$ и $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$, $z_1 = \infty$, найдемъ уравненіе цилиндра.

Если положимъ $a = b$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, то будемъ имѣть прямой конусъ:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{z_1^2} (z - z_1)^2$$

гдѣ $\frac{a}{z_1} = \operatorname{tg} \omega$, ω есть уголъ, который генератриса составляетъ съ осью Z , слѣдовательно можно написать:

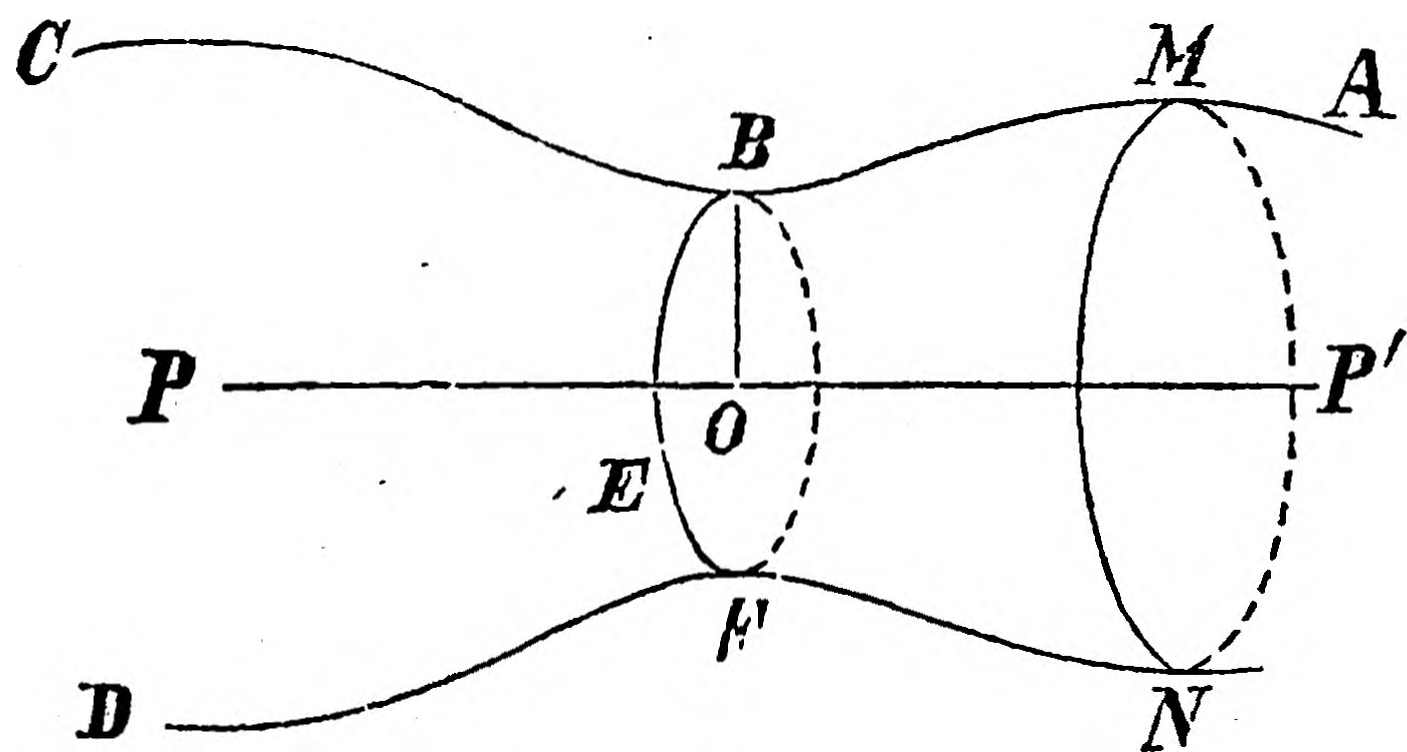
$$x^2 + y^2 = (z - z_1)^2 \operatorname{tg}^2 \omega$$

Очевидно, вершина конуса находится въ точкѣ $(0, 0, z_1)$.

Поверхности вращенія.

§ 684. Обыкновенно *поверхности вращенія* образуютъ вращеніемъ кривой около данной оси; такъ, напримѣръ, поверхность шара образуется вращеніемъ полукруга около діаметра; вращеніемъ кривой ABC (фиг. 174) около оси PP' такъ, что каждая точка B описываетъ кругъ, коего плоскость перпендикулярна къ оси PP' , а центръ находится на оси, образуется поверхность $СВАФЕ$.

Фиг. 174.



Этотъ способъ образованія поверхностей вращенія не даетъ постоянной генератрисы, такъ какъ кривая ABC измѣняется съ родомъ поверхности; но поверхности вращенія допускаютъ постоянную генератрису, если онѣ образуются перемѣщеніемъ круга, коего

центръ O перемѣщается по оси PP' , плоскость его остается перпендикулярною къ оси, а радіусъ OB постоянно встрѣчаетъ кривую ABC ; въ этомъ способѣ образованія генератриса поверхности есть постоянная кривая—кругъ, а директрисами служатъ: ось, по которой перемѣщается центръ круга, и кривая, на которую упирается конецъ радіуса, производящаго круга.

Выразимъ аналитически этотъ второй способъ образования, который собственно есть тотъ-же, что и первый, рассматриваемый съ другой точки зрѣнія.

Пусть уравненія директрисы ABC будутъ:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0 \quad (23)$$

а уравненія оси вращенія:

$$x - x_1 = m(z - z_1) \quad , \quad y - y_1 = n(z - z_1)$$

гдѣ x_1, y_1, z_1 суть координаты данной точки, черезъ которую проходитъ ось вращенія. Каждый изъ круговъ BEF , которые называются *параллельными*, можно рассматривать, какъ пересѣченіе плоскости перпендикулярной къ оси вращенія съ шаромъ, коего центръ находится на этой оси въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) ; слѣдовательно уравненія плоскости и шара будутъ:

$$mx + ny + z = \alpha_1 \quad , \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \alpha_2 \quad (24)$$

гдѣ α_1 и α_2 суть переменные параметры, съ измѣненіемъ которыхъ плоскость перемѣщается параллельно самой себѣ, а радіусъ шара возрастаетъ или убываетъ.

Если теперь замѣтимъ, что плоскость, шаръ и директриса (23) должны пересѣкаться въ одной точкѣ, то изъ четырехъ уравненій (23) и (24), исключая x, y, z , найдемъ зависимость между параметрами α_1 и α_2 , которая пусть будетъ:

$$\alpha_1 = \Phi(\alpha_2)$$

Но параметры α_1 и α_2 суть функціи координатъ x, y, z выраженные уравненіями (24), слѣдовательно имѣемъ:

$$mx + ny + z = \Phi \{ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \} \quad (25)$$

это уравненіе поверхности вращенія.

Если ось Z возьмемъ за ось вращенія, то $m = 0, n = 0$, слѣдовательно уравненіе сдѣлается:

$$z = \Phi(x^2 + y^2 + z^2) \quad (26)$$

которому можно всегда дать форму:

$$z = \psi(x^2 + y^2) \quad (27)$$

но въ этомъ частномъ случаѣ, который впрочемъ часто встрѣчается, лучше

разсматривать непосредственно каждый параллельный кругъ, какъ пересѣченіе прямого цилиндра съ плоскостью перпендикулярною къ его оси, т. е. вмѣсто уравненій (24) взять уравненія:

$$z = \alpha_1 \quad , \quad x^2 + y^2 = \alpha_2$$

изъ которыхъ найдемъ, какъ сказано выше:

$$z = \Phi(x^2 + y^2)$$

Пр. 1. Возьмемъ, на примѣръ, поверхность, описанную около оси Z , какою нибудь прямою:

$$x = az + b \quad , \quad y = a_1z + b_1$$

Эти уравненія, въ настоящемъ случаѣ, замѣщаютъ генератрису (24).

Если эти уравненія свяжемъ съ параллельнымъ кругомъ:

$$z = \alpha_1 \quad , \quad x^2 + y^2 = \alpha_2$$

то найдемъ:

$$(a\alpha_1 + b)^2 + (a_1\alpha_1 + b_1)^2 = \alpha_2$$

откуда:

$$(az + b)^2 + (a_1z + b_1)^2 = x^2 + y^2$$

или:

$$x^2 + y^2 - (a^2 + a_1^2)z^2 - 2(ab + a_1b_1)z = b^2 + b_1^2$$

Это, очевидно, однополый гиперболоидъ, коего центръ, находится на оси Z и легко опредѣляется.

Если за ось X возьмемъ кратчайшее разстояніе между осью вращенія и перемѣщающейся прямою, то плоскость YZ будетъ параллельна этой прямой, слѣдовательно надобно положить $a = 0$, $b_1 = 0$, такъ что уравненіе поверхности сдѣлается:

$$x^2 + y^2 - a^2z^2 = b^2$$

очевидно, начало находится въ центрѣ.

Пр. 2. Найти уравненіе поверхности, происшедшей отъ вращенія круга около оси OZ , находящейся въ плоскости круга, но не проходящей черезъ его центръ.

Рѣшеніе. Пусть уравненія круга вращенія будутъ:

$$y = 0 \quad , \quad (x - x_1)^2 + z^2 = r^2$$

пусть уравненія параллельнаго круга будутъ:

$$z = \alpha \quad , \quad x^2 + y^2 = \alpha_2$$

исключая x , y , z изъ четырехъ предыдущихъ уравненій, найдемъ:

$$(\sqrt{\alpha_2} - x_1)^2 + \alpha^2 = r^2$$

затѣмъ, исключая параметры α_1 и α_2 , найдемъ уравненіе поверхности:

$$(x_1 \pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2$$

которая называется *торомъ* или поверхностью *кольцеобразною*,

Если уничтожимъ радикаль, то уравненіе поверхности будетъ четвертой степени. Эта поверхность образуетъ *кольцо*, если $x_1 > r$; образуетъ *яблоковидную поверхность*, если $x_1 = r$; и наконецъ образуетъ *яблоковидную поверхность съ внутреннею полостью*, если $x_1 < r$.

Коноидальныя поверхности.

§ 685. *Коноидальными поверхностями* называются поверхности, описанныя прямою, которая перемѣщается, оставаясь параллельною данною плоскости и упираясь на данную прямую и данную кривую. Слѣдовательно директрисы этой поверхности суть: плоскость, прямая линия и какая-нибудь кривая.

Помѣстимъ начало координатъ въ точкѣ встрѣчи направляющей плоскости, которую возьмемъ за плоскость XU , съ направляющею прямою.

Въ этомъ предположеніи уравненіе направляющей будетъ:

$$x = az \quad , \quad y = a_1 z \quad (28)$$

пусть уравненія другой директрисы будутъ:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0 \quad (29) \quad (9)$$

Уравненія генератрисы, очевидно, будутъ:

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 \quad , \quad z = \alpha_3 \quad (30)$$

Такъ какъ прямая (28) и (30) встрѣчаются, то имѣемъ:

$$a_1 \alpha_3 = a \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2$$

Въ силу этой зависимости уравненія генератрисы (30) сдѣлаются:

$$z = \alpha_3 \quad , \quad y - a_1 \alpha_3 = \alpha_1 (x - \alpha_3 a) \quad (31) \quad) \quad ($$

Но эта прямая встрѣчаетъ и директрису (29), слѣдовательно будемъ имѣть зависимость между α_1 и α_3 ; пусть эта зависимость будетъ:

$$\alpha_3 = \Phi(\alpha_1)$$

откуда, исключая α_1 и α_3 съ помощью уравненій (31), найдемъ уравненіе искомой коноидальной поверхности:

$$z = \Phi \left(\frac{y - a_1 z}{x - az} \right) \quad (32)$$

Если направляющая прямая (28) перпендикулярна къ направляющей плос-

кости, т. е. къ плоскости XU , то $a = 0$ и $a_1 = 0$, слѣдовательно уравненіе поверхности будетъ:

$$z = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (33)$$

а уравненія женератрисы, если направляющую возьмемъ за ось Z , будутъ:

$$z = \alpha_3, \quad y = \alpha_1 x$$

Пр. 1. Найти уравненіе поверхности, описанной прямою, которая, оставаясь параллельною плоскости XU , скользитъ по оси Z и кривой.

$$x = x_1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (34)$$

которая есть эллипсъ въ плоскости перпендикулярной къ оси X на разстояніи x_1 отъ начала координатъ?

Рѣшеніе. Уравненія женератрисы, очевидно, суть:

$$z = \alpha_2, \quad y = \alpha_1 x \quad (35)$$

исключая x, y, z изъ уравненій (34) и (35), найдемъ:

$$\frac{\alpha_1^2 x^2}{b^2} + \frac{\alpha_2^2}{c^2} = 1$$

откуда:

$$\frac{x^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

или:

$$\frac{c^2 x_1^2}{b^2} y^2 = x^2 (c^2 - z^2)$$

Если положимъ $b = c$, то директриса (34) будетъ кругъ, а уравненіе поверхности будетъ:

$$x^2 y^2 = x^2 (b^2 - z^2)$$

Пр. 2. Гелисъ и гелисоидъ. Представимъ цилиндръ, коего ось есть ось Z , а основаніе кругъ:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

возьмемъ, какую нибудь, точку на окружности этого круга, пусть ея координаты будутъ x, y ; если означимъ черезъ φ уголъ, который составляетъ радіусъ r , проведенный въ эту точку, съ осью x , то будемъ имѣть:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Если изъ этой точки возставимъ перпендикуляръ и на немъ возьмемъ точку въ разстояніи отъ основанія равномъ $z = \frac{as}{2\pi r} = \frac{a\varphi}{2\pi}$, то такая точка опишетъ на цилиндрѣ кривую, которая называется *винтовой линіей* или *гелисомъ*.

Изъ формулы:

$$z = \frac{a\varphi}{2\pi}$$

видимъ, что каждый разъ, когда радиусъ опишетъ полный кругъ, z возрастаетъ на количество a , которое называется *шагомъ* гелиса. Слѣдовательно гелисъ или винтообразная линія выражается уравненіями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \frac{a\varphi}{2\pi}$$

или уравненіями:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r \cos \left(\frac{2\pi}{a} z \right), \quad y = r \sin \left(\frac{2\pi}{a} z \right)$$

Представимъ теперь, что прямая, оставаясь параллельною плоскости XU , скользитъ по оси Z и гелису, въ этомъ перемѣщеніи она опишетъ коноидальную поверхность, которая называется *гелисоидомъ*. Пусть уравненія генератрисы будутъ:

$$y = \alpha_1 x, \quad z = \alpha_2$$

Изъ предъидущихъ уравненій и изъ настоящихъ получимъ зависимость между параметрами α_1 и α_2 :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha_1^2}} = \cos \left(\frac{2\pi}{a} \alpha_2 \right)$$

откуда:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos \left(2\pi \cdot \frac{z}{a} \right) \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{a} \cdot z \right)$$

Это и есть искомая поверхность.

Поверхности награфленыя: носыя и развертывающіяся.

§ 686. *Награфленными поверхностями* называютъ поверхности описанныя перемѣщеніемъ прямой въ пространствѣ; эти поверхности дѣлятся на два рода: *развертывающіяся* и *косыя*; первыя суть тѣ, въ которыхъ прямая, при послѣдовательномъ перемѣщеніи, пересѣкаются: вторая пересѣкаетъ первую, третья вторую, т. е. два послѣдовательныя положенія генератрисы находятся въ одной плоскости; вторыя суть тѣ, въ которыхъ послѣдовательныя прямая не пересѣкаются, т. е. лежатъ въ различныхъ плоскостяхъ.

Первыя называются *развертывающимися* потому, что ихъ можно развернуть на плоскости безъ складокъ, а вторыя безъ складокъ, на плоскости, развернуты быть не могутъ.

Къ первымъ принадлежатъ поверхности: цилиндрическія, коническія и другія, а ко вторымъ принадлежатъ: коноидальныя и другія.

Выше мы сказали, что если генератрисы въ послѣдовательныхъ положеніяхъ пересѣкаются, то поверхность можетъ быть развернута на плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ три безконечно близкія, послѣдовательныя, положенія генератрисы AA' , AA'' , BB' , генератрисы AA' и AA'' пересѣкаются въ точкѣ A , а генератрисы AA'' и BB'' въ точкѣ B . Плос-

кости $A'AA''$, $A''BB'$ составляют двугранный уголъ, коего ребро есть AA'' , около этого ребра можно поворотить плоскость $A''BB'$, такъ что она совмѣстится съ плоскостью $A''AA'$, слѣдовательно два послѣдовательные элемента $A''AA'$ и $A''BB'$ поверхности, помѣстятся на одной плоскости; дѣлая тѣже разсужденія относительно элементовъ поверхности, слѣдующихъ за элементомъ $A''BB'$ видимъ, что вся поверхность помѣстится на плоскости безъ складокъ. Въ цилиндрическихъ поверхностяхъ всѣ генератрисы пересѣкаются въ безконечно-удаленной точкѣ, такъ какъ онѣ всѣ параллельны, слѣдовательно цилиндрическія поверхности суть развертывающіяся.

Въ коническихъ поверхностяхъ всѣ генератрисы пересѣкаются въ одной точкѣ, слѣдовательно это поверхности развертывающіяся. Въ коноидальныхъ поверхностяхъ двѣ послѣдовательныя генератрисы непересѣкаются, онѣ находятся въ различныхъ плоскостяхъ; въ самомъ дѣлѣ, генератриса въ этихъ поверхностяхъ, оставаясь параллельно данной плоскости, скользитъ по данной прямой и по данной кривой, каждое безконечно малое перемѣщеніе генератрисы можно разсматривать, какъ перемѣщеніе по касательной къ кривой и по данной прямой; безконечно малый элементъ касательной совпадетъ съ безконечно малымъ элементомъ кривой, но касательная и данная прямая, только въ весьма исключительныхъ случаяхъ находятся въ одной плоскости, слѣдовательно и два послѣдовательныя положенія генератрисы находятся въ различныхъ плоскостяхъ, т. е. онѣ непересѣкаются.

§ 687. Поверхности развертывающіяся, какъ видѣли выше, образуются при помощи одной директрисы, коноидальныя съ помощью двухъ директрисъ, изъ коихъ одна постоянная — прямая линія, а другая, какаянибудь, кривая. За этими награфленными поверхностями слѣдуютъ поверхности, въ которыхъ генератриса, оставаясь параллельною данной плоскости, скользитъ по двумъ, какимънибудь, кривымъ, очевидно, это поверхности косыя, такъ какъ въ каждый моментъ генератриса перемѣщается по двумъ касательнымъ (къ кривымъ — директрисамъ), которыя вообще не находятся въ одной плоскости — эти поверхности называются *цилиндроидами*.

§ 688. *Цилиндроиды*. Пусть данныя двѣ директрисы будутъ:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0 \quad (36)$$

Если за плоскость XU возьмемъ плоскость, которой генератриса, въ своемъ перемѣщеніи, остается параллельною, то уравненія генератрисы будутъ:

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2, \quad z = \alpha_3 \quad (37)$$

Исключая изъ этихъ уравненій и уравненій $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ величины x, y, z , найдемъ зависимость между параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; пусть эта зависимость будетъ:

$$\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

Другую зависимость найдемъ, исключая x, y, z между уравненіями $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ и уравненіями (37); пусть эта зависимость будетъ:

$$\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

откуда найдемъ:

$$\alpha_1 = \psi_1(\alpha_3) \quad , \quad \alpha_2 = \psi_2(\alpha_3)$$

подставляя эти выраженія въ первое изъ уравненій (37), найдемъ:

$$y = x\psi_1(z) + \psi_2(z) \quad (38)$$

Это общее уравненіе цилиндридовъ, гдѣ функціи ψ_1 и ψ_2 зависятъ отъ директрисъ.

Пр. Пусть данныя двѣ директрисы будутъ кругъ:

$$y^2 + z^2 = r^2 \quad , \quad x = x_1 \quad (39)$$

и эллипсъ:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad , \quad x = 0 \quad (40)$$

Если генератриса будетъ:

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 \quad , \quad z = \alpha_3 \quad (41)$$

то будемъ имѣть слѣдующія зависимости между параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2)^2 + \alpha_3^2 = r^2 \quad , \quad \frac{\alpha_2^2}{a^2} + \frac{\alpha_3^2}{b^2} = 1$$

откуда:

$$\alpha_1 = \frac{a\sqrt{r^2 - \alpha_3^2} - b\sqrt{b^2 - \alpha_3^2}}{bx_1} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \alpha_3^2}$$

исключая изъ (41) параметры, найдемъ уравненіе поверхности цилиндрида:

$$y = x \left\{ \frac{a\sqrt{r^2 - z^2} - b\sqrt{b^2 - z^2}}{bx_1} \right\} + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2}$$

§ 689. Наконецъ слѣдуютъ награфленныя косыя поверхности, которыя образуются, когда прямая скользитъ по тремъ даннымъ, какимъ нибудь, кривымъ—директрисамъ, слѣдовательно эти поверхности образуются при помощи трехъ директрисъ. Легко показать, что прямая можетъ скользить по тремъ кривымъ; въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, какую нибудь, точку на первой кривой и построимъ два конуса, коихъ вершины находятся во

взятой точкѣ, а основаніями, которыхъ служатъ двѣ другія кривыя, эти конусы пересѣкаются по прямой, которая, очевидно, упирается на всѣ три кривыя. Передвигая первую взятую точку по первой кривой и дѣлая такія-же построения, какъ выше, для каждой точки, получимъ рядъ генератрисъ, которыя и описываютъ поверхность, очевидно, косую—награфленую. Изъ такихъ поверхностей мы уже видѣли одну — однополый гиперболоидъ.

Пусть данныя три директрисы будутъ:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) = 0 & , & F_2(x, y, z) = 0 \\ f_1(x, y, z) = 0 & , & f_2(x, y, z) = 0 \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 & , & \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

Пусть уравненія генератрисы будутъ:

$$x = \alpha_1 z + \alpha_2 \quad , \quad y = \alpha_3 z + \alpha_4$$

исключая x, y, z изъ этихъ уравненій и изъ каждой пары директрисъ, найдемъ слѣдующія зависимости между параметрами:

$$\alpha_2 = \psi_1(\alpha_1) \quad , \quad \alpha_3 = \psi_2(\alpha_1) \quad , \quad \alpha_4 = \psi_3(\alpha_1)$$

откуда:

$$x = \alpha_1 z + \psi_1(\alpha_1) \quad , \quad y = \psi_2(\alpha_1) z + \psi_3(\alpha_1)$$

исключая изъ этихъ уравненій α_1 , найдемъ уравненіе искомой поверхности. Это исключеніе можно только тогда сдѣлать, когда будетъ извѣстенъ составъ функцій ψ_1, ψ_2, ψ_3 , т. е. когда будутъ даны явно уравненія трехъ директрисъ.

Пр. Даны два вертикальные полукруга, описанные на противоположныхъ сторонахъ даннаго параллелограма, и дана прямая, проходящая черезъ центръ параллелограма перпендикулярно къ плоскостямъ данныхъ круговъ; найти уравненіе поверхности, описанной прямою, которая скользитъ по даннымъ двумъ кругамъ и по данной прямой?

Рѣшеніе. Возьмемъ плоскость параллелограма за плоскость XU , данную прямую за ось Y , а за начало координатъ центръ параллелограма, ось Z будетъ, очевидно, перпендикуляръ возставленный изъ начала къ плоскости параллелограма. При этой системѣ координатъ директрисы будутъ:

$$\begin{aligned} y = -b \quad , \quad (x - a)^2 + z^2 = r^2 \quad ; \quad y = +b \quad , \quad (x + a)^2 + z^2 = r^2 \\ x = 0 \quad , \quad z = 0 \end{aligned}$$

Уравненія генератрисъ будутъ:

$$x = \alpha_1 (y - \alpha_2) \quad , \quad z = \alpha_3 (y - \alpha_2)$$

такъ какъ онѣ всегда встрѣчаютъ ось Y .

Такъ какъ генератриса скользитъ по даннымъ кругамъ, то имѣемъ:

$$\{\alpha_1 (b + \alpha_2) + a\}^2 + \alpha_3^2 (b + \alpha_2)^2 = r^2$$

$$\{\alpha_1 (b - \alpha_2) + a\}^2 + \alpha_3^2 (b - \alpha_2)^2 = r^2$$

откуда, вычитая эти уравненія, найдемъ:

$$\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \frac{a}{b} \alpha_1 = 0$$

исключая параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ изъ этихъ уравненій, найдемъ уравненіе искомой поверхности:

$$\{axy + b(x^2 + z^2)\}^2 = b^2 r^2 x^2 + b^2 z^2 (r^2 - a^2)$$

или:

$$\{axy + b(x^2 + z^2)\}^2 = b^2 \{r^2 x^2 + z^2 (r^2 - a^2)\}$$

Конецъ второй и послѣдней части.

Замѣченныя опечатки.

Стр.	Строка.	Напечатано:	Читать:
243	21	(8)	(7)
271	16	Изъ данной точки внѣ	Изъ данной точки $(x_1 y_1)$ внѣ
—	17	$(x_1 y_1)$	(x, y)
324	3	$(a_2 - a_1)(x - a_2) + (b_2 - b_1)(y - b_2) - \frac{r^2_2(1 - \lambda)}{\lambda} = 0$	$(a_1 - a_2)(x - a_2) + (b_1 - b_2)(y - b_2) - r^2_2(1 - \lambda) = 0$
490	5	$r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0$	$r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1$
542	19	$\frac{yf}{\partial y_1}$	$\frac{\partial f}{\partial y_1}$
626	15	$(z - z_1) \frac{c^2}{z^2}$	$(z - z_1) \frac{c^2}{z^2_1}$
638	17	$\frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - \frac{(x - x_1)}{a} = 0$	$\frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - \frac{(x + x_1)}{a} = 0$