А. В. Васильевъ,
заслуженный профессоръ Казанскаго Университета.

ВВЕДЕНІЕ ВЪ АНАЛИЗЪ.

ВЫПУСКЪ II.

ОБОБЩЕНІЕ ПОНЯТІЯ О ЧИСЛѢ

Изданіе **Н. Н. Іовлева.**

КАЗАНЬ
Типо-литографія П. В. Ермолаевой
преемн. Ключникова
1908.

ОГЛАВЛЕНЕ

Nullum non solvere problema.
Fr. Vieta.

Das Wesen der Mathematik besteht in ihrer Freiheit.
G. Cantor.

Основное математическое понятіе есть понятіе о цѣломъ положительномъ числѣ. Исходя изъ этого понятія, чистая математика постепенно расширяетъ понятіе о числѣ, вводя числа дробныя, отрицательныя, несоизмѣримыя, комплексныя [1]). Расширеніе понятія о числѣ является необходимымъ слѣдствіемъ разсматриванія *обратныхъ* операцій. Если мы возьмемъ два числа a и b изъ области цѣлыхъ положительныхъ чиселъ и соединимъ ихъ одною изъ прямыхъ операцій т. е. вычислимъ или $a+b$ или $a.\,b$ или a^b или $a^{(b)}$ и т. д., результатъ вычисленія будетъ всегда цѣлое положительное число ($2+4=6$, $2\times4=8$, $2^4=16$, $2^{(4)}=65.536$). Но если мы отъ прямыхъ операцій перейдемъ къ операціямъ обратнымъ надъ цѣлыми числами, то найдемъ, что результатъ не всегда (и притомъ для операцій дѣленія, извлеченія корня, логариѳмированія только въ исключительныхъ случаяхъ) будетъ выражаться цѣлымъ положительнымъ числомъ. Такъ $4-2=2$, $4:2=2$, $\sqrt[2]{4}=2$, $\mathrm{Log}_2\,4=2$, но $2-4$, $2:4$, $\sqrt[4]{2}$, $\mathrm{Log}_4 2$ представляютъ символы не имѣющіе смысла, т. к. результаты соотвѣтствующихъ операцій не могутъ быть выражены съ помощью цѣлыхъ положительныхъ чиселъ. Вообще операціи, указанныя символами: $a-b$, если $a<b$, $a:b$, если a не есть кратное отъ b, $\sqrt[b]{a}$, если a не есть b-ая степень

1) Въ современной математикѣ понятіе о числѣ расширено еще болѣе введеніемъ чиселъ гиперкомплексныхъ и трансфинитныхъ.

отъ числа a, не могутъ быть произведены съ помощью цѣлыхъ положительныхъ чиселъ и мы стоимъ въ каждомъ изъ этихъ случаевъ передъ альтернативою или признать подобныя операціи не имѣющими смысла и не разсматривать ихъ въ математикѣ, или-же введеніемъ новыхъ *областей чиселъ*, обобщеніемъ понятія о числѣ, достигнуть возможности производить обратныя операціи надъ числами a и b также неограниченно, какъ и прямыя операціи. Систематичность чистой математики, какъ науки абстрактной, и могущество ея методовъ въ приложеніи къ Естественной Философіи одинаково основываются на принятіи ею втораго изъ указанныхъ исходовъ, на послѣдовательномъ обобщеніи понятія о числѣ.

Цѣлью настоящаго выпуска нашего курса является изложеніе съ одной точки зрѣнія этихъ послѣдовательныхъ обобщеній. Мы начинаемъ съ введенія чиселъ дробныхъ, отступая этимъ нѣсколько отъ строго логическаго пути, на которомъ операція вычитанія должна была-бы предшествовать операціи дѣленія, какъ операція сложенія предшествуетъ операціи умноженія.

I. Ученіе о дробныхъ числахъ.

§ 1. **Дроби, какъ пары цѣлыхъ чиселъ** (пары 2-ой ступени). Если цѣлое положительное число b не есть кратное другого цѣлаго положительнаго числа a, то нельзя найдти цѣлаго числа, которое удовлетворяло-бы равенству $ax=b$. Мы покажемъ теперь, что этому равенству можно удовлетворить, вводя новый математическій объектъ, совокупность или пару двухъ цѣлыхъ чиселъ, взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ, и точно опредѣляя, какъ условія равенства и неравенства этихъ объектовъ, такъ и законы операцій надъ ними.

Равенство паръ. Пары $[a, b]$ и $[a', b']$ равны между собою, если выполнены условія: $a.b'=a'.b$ и притомъ **только** при этихъ условіяхъ. Напр. $[6, 10]=[9, 15]$, ибо $6.15=10.9=90$.

Слѣдствіе. 1. Пары $[an, bn]$ и $[a, b]$ равны т. е. въ парѣ безъ измѣненія можно оба ея члена умножить на одно и то-же цѣлое положительное число.

2. Пара $[a.m, a]=[m, 1]$.

Условіе. Пара, въ которой второй членъ есть 1 (модуль умноженія), будетъ считаться совпадающею съ цѣлымъ числомъ, именно со своимъ первымъ членомъ.

Неравенство паръ. Если въ двухъ парахъ $[a, b]$ и $[c, d]$ вторые члены равны, то та пара болѣе, въ которой первый членъ болѣе; такъ напр. $[3, 5]>[2, 5]$.

Слѣдствіе 1 даетъ возможность установить отношеніе величинъ между каждыми двумя парами, т. к. позволяетъ привести данныя пары, не измѣняя ихъ, къ виду, въ которомъ вторые члены тожественны. Такъ $[3, 5]>[1, 2]$ ибо $[3, 5]=[6, 10]$; $[1, 2]=[5, 10]$. Вообще $[a, b] \gtreqless [c. d]$ смотря потому, будетъ ли $ad >$ или $=$, или $< bc$.

Установивъ условія равенства и неравенства паръ, мы видимъ, что къ этимъ парамъ примѣнимы основныя аксіомы ученія о равенствѣ (т. напр. если $\alpha=[a, b]$, $\beta=[c, d]$, $\gamma=[e, f]$, то очевидно изъ данныхъ опредѣленій, что: 1° если $\alpha=\beta$, то $\beta=\alpha$; 2° если $\alpha=\beta$, $\alpha=\gamma$, то $\beta=\gamma$) и аксіомы порядка (1. если $\alpha>\beta$, $\beta\geq\gamma$, то $\alpha>\gamma$; 2. если $\alpha<\beta$, $\beta\leq\gamma$, то $\alpha<\gamma$).

Операціи надъ парами. Сложеніе паръ. Результатомъ сложенія или суммою двухъ паръ $[a, b]$ и $[c, d]$ называется новая пара $[a\ d + b\ c,\ b\ d]$.

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc,\ bd]. \qquad (1).$$

Опредѣленная равенствомъ 1) операція имѣетъ всѣ свойства операціи сложенія цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, почему мы и имѣли полное право назвать ее *сложеніемъ*.
1°. Она есть операція **ассоціативная**: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

Доказательство. Пусть $\alpha=[a, b]$, $\beta=[c, d]$, $\gamma=[e, f]$. Тогда $\alpha+(\beta+\gamma)=\alpha+[cf+de,\ df]=[adf+(cf+ed)\,b,\ bdf]$
$(\alpha+\beta)+\gamma=[ad+cb,\ bd]+[e,\ f]=[(ad+cb)\,f+bde,\ bdf]$. Но какъ первые, такъ и вторые члены въ конечныхъ парахъ равны, въ силу законовъ ассоціативности и коммутативности сложенія и умноженія цѣлыхъ чиселъ; слѣдовательно операція сложенія паръ есть операція ассоціативная.

2°. Она есть также операція **коммутативная**: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$. Дѣйствительно, если $\alpha+\beta=[ad+cb,\ bd]$: то $\beta+\alpha=[cb+ad,\ db]$.

Слѣдствіе. Если вторая пара есть $[0, 1]$, то $[a, b]+[0, 1]=[a, b]$: т. е. сложеніе паръ имѣетъ модулемъ пару $[0, 1]=0$ (распространяя и на этотъ случай условіе, данное на предыдущей страницѣ).

Умноженіе паръ. Результатомъ умноженія или произведеніемъ двухъ паръ $[a, b]$ и $[c, d]$ называется пара $[ac, bd]$. Изъ этого опредѣленія умноженія легко видѣть, что операція умноженія паръ имѣетъ всѣ тѣ свойства, которыя имѣетъ операція умноженія цѣлыхъ чиселъ.

1. Она есть операція **ассоціативная**:

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma.$$

Дѣйствительно, пусть $\alpha = [a, b]$, $\beta = [c, d]$, $\gamma = [e, f]$. Тогда

$$\alpha(\beta\gamma) = [a, b]\ [ce, df] = [a(ce), b(df)]$$

$$(\alpha\beta)\gamma = [ac, bd]\ [e, f] = [(ac)e, (bd)f].$$

Но вслѣдствіе ассоціативности умноженія цѣлыхъ чиселъ какъ первые, такъ и вторые члены въ конечныхъ парахъ равны; слѣдовательно ассоціативность умноженія паръ доказана.

2. Она есть операція **коммутативная**.

Дѣйствительно, $\alpha\beta = [a, b]\ [c, d] = [ac, bd]$

$$\beta\alpha = [c, d]\ [a, d] = [ca, db].$$

Вслѣдствіе коммутативности умноженія цѣлыхъ чиселъ $\alpha\beta = \beta\alpha$.

3. Оба закона **дистрибутивности** имѣютъ также мѣсто. Ограничимся доказательствомъ перваго: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.

Дѣйствительно, пусть $\alpha = [a, b]$, $\beta = [c, d]$, $\gamma = [e, f]$.

Тогда $(\alpha + \beta)\gamma = [ad + bc, bd]\ [e, f] = [(ad + bc)e, bdf]$.

$$\alpha\gamma + \beta\gamma = [ae, bf] + [ce, df] = [aed, bfd] + [ceb, bdf] = [aed + ceb, bdf].$$

Т. к. пары $[(ad+bc)e, bdf]$ и $[aed+ceb, bdf]$ тожественны, то законъ очевидно доказанъ.

Изъ даннаго нами опредѣленія умноженія двухъ паръ вытекаетъ, что въ этихъ парахъ мы имѣемъ математическій объектъ, удовлетворяющій поставленной нами задачѣ: **при всякихъ** a и b рѣшить уравненіе $ax = b$.

Дѣйствительно, замѣняя число цѣлое a по условію парою $[a, 1]$, мы имѣемъ

$$[a, 1]\ [b, a] = [ab, a] = [b, 1] = b$$

Найдя въ этихъ парахъ чиселъ отвѣтъ на поставленную задачу и видя, что операціи надъ парами тожественны по своимъ законамъ съ операціями надъ цѣлыми положительными числами, мы называемъ наши пары **дробными числами** (или просто дробями). Такимъ образомъ понятіе о числѣ значительно расширяется введеніемъ подъ этимъ названіемъ паръ $[a, b,]$ гдѣ a и b суть какія угодно числа изъ ряда 0, 1, 2, ... Не имѣютъ смысла только пары, въ которыхъ второй членъ есть 0. Первому члену пары мы придадимъ названіе **числителя**, второму—**знаменателя**. Дробь, знаменатель которой есть 1, совпадаетъ съ числителемъ и есть цѣлое число.

Правила, данныя нами для прямыхъ дѣйствій надъ парами и изъ которыхъ безъ труда выводятся правила для обратныхъ операцій, совпадаютъ съ правилами ариѳметики для дѣйствій надъ дробями; но въ то время, какъ изъ педагогическихъ соображеній въ ариѳметикѣ правила эти или выводятся изъ конкретнаго значенія дробей, съ помощью которыхъ измѣряются непрерывныя величины, или получаются путемъ обобщенія понятія объ операціи, правила даны нами **произвольно**, но съ тѣмъ, чтобы операціи сложенія и умноженія надъ парами переходили въ операціи сложенія и умноженія надъ цѣлыми числами, когда пары обращаются въ цѣлыя числа.

§ **2. Принципъ постоянства формальныхъ законовъ.** Идея разсматриванія **паръ** чиселъ (и общѣе совокупностей изъ трехъ, четырехъ........ чиселъ) и обоснованіе на разсматриваніи паръ теоріи обобщенныхъ чиселъ принадлежитъ ирландскому математику Вильяму Роану Гамильтону (1805—1865), который примѣнилъ ее къ обоснованію созданной имъ теоріи кватерніоновъ *). Къ дробямъ эта идея примѣнена, кажется, въ первый разъ Таннери (**).

*) См. литературу вопроса въ отд. V (ученіе о гиперкомплексныхъ и трансфинитныхъ числахъ).

**) Leçons d'Arithmétique. Paris. 1894. Нельзя не пожалѣть, что этотъ прекрасный учебникъ до сихъ поръ еще не переведенъ на русскій языкъ.

Существуютъ другіе способы строго логическаго и чисто—ариѳметическаго обоснованія теоріи дробнаго числа, въ которыхъ, какъ и въ только-что изложенномъ, свойства дробныхъ чиселъ выводятся изъ ихъ опредѣленія, независимо отъ ихъ конкретнаго представленія и отъ ихъ приложеній къ задачамъ дѣленія или измѣренія непрерывной величины.

Одинъ изъ такихъ способовъ, примѣнимыхъ и къ дальнѣйшимъ обобщеніямъ понятія о числѣ, основывается на высказанномъ въ первый разъ профессоромъ Кембриджскаго университета Пикокомъ (1791—1858) **принципѣ постоянства** формальныхъ законовъ (principle of the permanence of equivalent forms). *) На основаніи этого принципа символы $\frac{a}{b}$, $a-b$ и т. п., теряющіе ариѳметическій смыслъ, если они не выражаются цѣлыми положительными числами, продолжаютъ тѣмъ не менѣе разсматриваться въ алгебрѣ и дѣйствія надъ ними подчиняются тѣмъ же законамъ какъ и въ томъ случаѣ, если они представляютъ цѣлыя числа. Такъ $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, если a и b дѣлятся на цѣло на c. Та-же формула переносится и на тотъ случай, когда a и b не дѣлятся на c.

Тому-же пріему обобщенія понятія о числѣ **) слѣдуютъ и Ганкель въ своей Theorie der complexen Zahlensysteme (Leipz. 1867) и Шубертъ, авторъ статьи объ основаніяхъ ариѳметики въ математической энциклопедіи, издаваемой нѣмецкими академіями. Вотъ какъ послѣдній формулируетъ **принципъ постоянства**. На основаніи этого принципа: 1°. *Каждому сочетанію знаковъ, не выражающемуся съ помощью ранѣе введенныхъ чиселъ, придается такой смыслъ, при которомъ*

---

*) Глубокія разсужденія Пикока о сущности и основаніяхъ математическихъ наукъ, къ которымъ мы возвратимся въ заключительномъ отдѣлѣ этого выпуска, изложены въ замѣчательномъ отчетѣ объ успѣхахъ анализа, представленномъ Британской Ассоціаціи въ 1833 г.

) Кутюра (De l'infini mathématique. Paris. 1896) называетъ его пріемомъ **алгебраическаго обобщенія въ отличіе отъ пріема, основаннаго на разсмотрѣніи паръ, которому онъ придаетъ названіе пріема **ариѳметическаго** обобщенія.

сочетаніе можетъ производиться по тѣмъ-же правиламъ, по которымъ оно производилось съ прежде опредѣленными числами.

2⁰. *Такое сочетаніе опредѣляется, какъ число въ обобщенномъ смыслѣ этого слова.*

3⁰. *Доказывается, что для чиселъ въ обобщенномъ значеніи этого слова имѣютъ мѣсто тѣ-же предложенія, какъ и для ранѣе уже введенныхъ* (*).

4⁰. *Опредѣляется, что называется равенствомъ, больше и меньше въ расширенной области чиселъ.*

§ **3. Теорія Вейерштрасса** (1815--1897). Вейерштрассъ начиналъ свои знаменитыя лекціи по теоріи функцій съ опредѣленія различныхъ видовъ чиселъ и операцій, которыя могутъ быть надъ ними производимы. Въ окружающемъ насъ мірѣ мы постоянно встрѣчаемся, говоритъ онъ, съ предметами или явленіями, имѣющими общіе признаки. Эти общіе признаки характеризируютъ всю **группу** или **видъ** предметовъ и явленій. Каждый отдѣльный предметъ или явленіе представляетъ по отношенію къ разсматриваемымъ общимъ признакамъ **единицу** или **основный элементъ** (Grundelement) вида. Различныя группы одинаковыхъ предметовъ (т. е. принадлежащихъ къ одному и и тому-же виду) отличаются множественностью; отсюда является понятіе **о цѣломъ числѣ**. Двѣ единицы одного и того же вида равны т. е. эквивалентны по отношенію къ характеризирующему ихъ свойству. Два числа, состоящія изъ однихъ и тѣхъ-же основныхъ элементовъ e (пудовъ, фунтовъ, столовъ, абстрактныхъ единицъ 1) будутъ **равны**, когда каждому элементу одного числа соотвѣтствуетъ одинъ элементъ другого числа и **неравны**, когда, сопоставляя элементы одного числа съ элементами другаго, мы находимъ въ одномъ лишніе элементы. То число, въ которомъ имѣются лишніе элементы,

*) Пикокъ правильнѣе по нашему мнѣнію смотритъ на принципъ постоянства, такъ-какъ опредѣлительно указываетъ на невозможность доказательства законовъ операцій надъ обобщенными числами. „Правила операцій надъ обобщенными символами не могутъ быть **выведены** изъ правилъ операцій надъ числами, они могутъ быть только **„внушаемы** (suggested only) соотвѣтствующими правилами ариѳметики“. (Report on certain branches of analysis p. 198).

называется большимъ, другое меньшимъ ($a > b$, $b < a$). Опредѣленіе равенства ведетъ къ двумъ положеніямъ:

1⁰ если $a = b$, то $b = a$

2⁰ если $a = b$, $b = c$, то $a = c$.

Если понятіе о цѣломъ числѣ возникаетъ отъ разсмотрѣнія предметовъ, состоящихъ изъ элементовъ одного и того же вида, то при разсмотрѣніи предметовъ, состоящихъ изъ элементовъ различнаго вида (стадо изъ 15 коровъ, 7 овецъ и т. п.), мы должны указать какіе виды элементовъ (коровы, овцы...) входятъ въ нашъ предметъ и сколько входитъ элементовъ каждаго вида порознь. Такимъ путемъ мы приходимъ къ тому, что Вейерштрассъ называетъ или **численною величиною** (Zahlengrösse) или **составнымъ числомъ.** Два составныя числа равны, если они содержатъ въ одинаковомъ числѣ одинаковые элементы. Они равны также и въ томъ случаѣ, если съ помощью преобразованій, основанныхъ на отношеніяхъ, существующихъ между элементами, можно достигнуть того, что они будутъ содержать одинаковое число одинаковыхъ элементовъ. (Напр. три двугривенныхъ и шесть трехкопѣечниковъ равны семи гривенникамъ и восьми копѣйкамъ, т. к. можно преобразованіями обѣ численныя величины превратить въ одну и туже, въ семьдесятъ-восемь копѣекъ).

Тѣ операціи прибавленія и отниманія, которыя постоянно приходится производить надъ группами предметовъ, приводятъ къ опредѣленію простѣйшихъ ариѳметическихъ операцій (сложеніе и умноженіе) съ ихъ характеристическими законами (коммутативности, ассоціативности и дистрибутивности). Этимъ двумъ операціямъ соотвѣтствуютъ обратныя операціи, которыя не могутъ быть осуществлены въ области цѣлыхъ чиселъ и дѣлаются **всегда** возможными только при введеніи приличнымъ образомъ выбранныхъ **составныхъ** чиселъ. Для того, чтобы производить дѣленіе независимо отъ того, болѣе или менѣе дѣлимое дѣлителя и составляетъ ли дѣлимое кратное дѣлитель или нѣтъ, вводятся новые **элементы**, опредѣляемые съ помощью цѣлыхъ чиселъ а именно кромѣ **главной единицы**, изъ которой составляются цѣлыя числа, вводятся новыя единицы (или элементы) такъ что два, три, четыре, ... сорокъ ... сто, ... милліонъ, .. новыхъ единицъ замѣняютъ главную единицу. Если ε_n есть единица, n которыхъ замѣняютъ главную единицу $e=1$, т. е $n\varepsilon_n=1$, то ε_n обозначается $\frac{1}{n}$.

Соотвѣтственно этому введенію новыхъ единицъ или элементовъ разсматриваются новыя (составныя) числа, составленныя изъ главной единицы (1) и изъ нѣкотораго даннаго конечнаго числа различныхъ **дробныхъ частей** единицы (Bruchtheile), обозначенныхъ знакомъ ε_n. Эти составныя числа имѣютъ видъ $a_0+a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots+a_n\varepsilon_n$ и называются **дробными числами.**

Спрашивается, какъ надъ этими новыми числами производятся операціи, опредѣленныя раньше для цѣлыхъ чиселъ? Вейерштрассъ формулируетъ *принципъ постоянства* слѣдующимъ образомъ: *Новыя числа должны подчиняться тѣмъ-же правиламъ сочетанія* (Verknüpfungsregeln), *которымъ подчиняются цѣлыя числа.* Далѣе каждое дробное число можно всегда преобразовать такъ, что оно будетъ заключать только элементы одного и того же рода ε_n.

Такъ-какъ по опредѣленію
$mn\varepsilon_{mn}=e$ и съ другой стороны, принимая законы сложенія цѣлыхъ чиселъ, имѣемъ

$$mn\varepsilon_{mn}=(m\varepsilon_{mn})\,n=(n\varepsilon_{mn})\,m,$$

то легко видѣть что $m\varepsilon_{mn}=\varepsilon_n$ и $n\varepsilon_{mn}=\varepsilon_m$.

Если дано дробное число

$$a=a_0+a_1\varepsilon_{n_1}+a_2\varepsilon_{n_2}+\ldots+a_m\varepsilon_{n_m},\quad \text{то,}$$

обозначая черезъ n общее кратное цѣлыхъ чиселъ n_1 n_2, ... n_m, имѣемъ

$$\varepsilon_{n_\mu} = \gamma_\mu \varepsilon_n, \text{ если } \gamma_\mu = \frac{n}{n_\mu}, \text{ и потому}$$

$$a = (a_0 n + a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 \ldots + a_m \gamma_m) \varepsilon_n .$$

Такое преобразованіе даетъ возможность сравнивать дробныя числа. Два дробныя числа равны, если они могутъ быть преобразованы такъ, что оба заключаютъ одни и тѣ-же элементы и въ одномъ и томъ-же числѣ. Изъ двухъ неравныхъ дробныхъ чиселъ, представленныхъ съ помощью элементовъ ε_n одного вида, то называется бóльшимъ, которое содержитъ больше элементовъ ε_n, чѣмъ другое. Если $a = b$, то и $b = a$; если $a = b$, $b = c$, то $a = c$ и если $a > b$, $b > c$, то $a > c$.

Сложеніе двухъ дробныхъ чиселъ состоитъ въ соединеніи всѣхъ элементовъ обоихъ слагаемыхъ въ одну численную величину. Оно сводится на сложеніе цѣлыхъ чиселъ, если оба дробныя числа представлены съ помощью элементовъ ε_n одного и того-же вида.

Умноженіе двухъ дробныхъ чиселъ, по принципу постоянства, должно удовлетворять законамъ умноженія цѣлыхъ чиселъ и слѣдовательно всѣмъ производнымъ изъ этихъ законовъ формуламъ напр. формулѣ

$$(a + b + \ldots)(c + d + \ldots) = ac + ad + bc + bd + \ldots$$

Поэтому

$$\underbrace{(\varepsilon_m + \varepsilon_m + \ldots)}_{m \text{ разъ}} \quad \underbrace{(\varepsilon_n + \varepsilon_n + \ldots)}_{n \text{ разъ}} = 1.1 = 1 = mn\,(\varepsilon_m \varepsilon_n)$$

Съ другой стороны $mn\,(\varepsilon_{mn}) = 1$ откуда

$$\varepsilon_m \varepsilon_n = \varepsilon_{mn}.$$

Отсюда, примѣняя тотъ-же принципъ, выводится и общій законъ умноженія дробей:

$$p\,\varepsilon_m \,.\, q\,\varepsilon_n = pq\,\varepsilon_{mn}.$$

Для дѣленія получаемъ отсюда правило $\frac{p\,\varepsilon_m}{q\,\varepsilon_n} = pn\,\varepsilon_{mq}$, которое показываетъ, что результаты всѣхъ дѣленій надъ цѣлыми и дробными числами могутъ быть представлены съ помощью дробныхъ чиселъ.

§ 4. Алгебра раціональныхъ (положительныхъ) чиселъ.

Но какимъ бы путемъ мы ни вводили дробныя числа и ни устаповляли для нихъ основныя аксіомы равенства и неравенства (аксіомы порядка по Гильберту) см. вып. 1. § 14 и законы сочетанія посредствомъ сложенія и умноженія (аксіомы счета и сочетанія по Гильберту), разъ эти аксіомы и законы совпадаютъ съ аксіомами и законами для области цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, то и законы обратныхъ операцій, составляющіе (см. вып. 1 § 18) логическое слѣдствіе опредѣленія обратныхъ операцій, аксіомъ ученія о числахъ и законовъ прямыхъ дѣйствій, переносятся безъ измѣненія и въ теорію дробныхъ чиселъ. Наконецъ и вся получающаяся повторнымъ примѣненіемъ и комбинированіемъ законовъ семи алгебраическихъ операцій цѣпь формулъ, нѣкоторыя изъ которыхъ даны для примѣра тамъ-же (§ 19), является безъ измѣненія приложимою къ дробнымъ числамъ. Алгебра цѣлыхъ чиселъ превращается теперь въ алгебру расширенной области чиселъ, включающей и числа цѣлыя и числа дробныя. Эту область мы будемъ называть областью **раціональныхъ (пока** положительныхъ) чиселъ. Изъ сказаннаго въ предыдущемъ § слѣдуетъ, что область раціональныхъ чиселъ есть область замкнутая по отношенію къ операціямъ сложенія, умноженія, дѣленія и возвышенія въ цѣлую положительную степень т. е если a и b суть два раціональныхъ числа, то $a + b$, $a.\,b$, a: b и a^m (m—цѣлое положительное число) суть также раціональныя числа.

§ 5. Конкретное значеніе дробныхъ чиселъ. Ученіе объ измѣреніи величинъ.

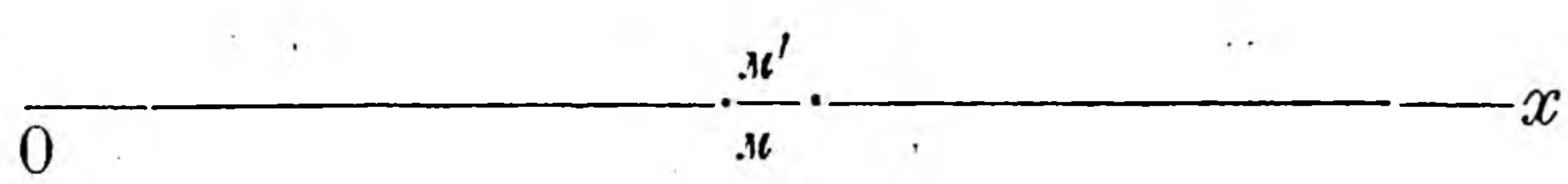
Въ предыдущихъ параграфахъ мы изложили логическія теоріи введенія дробей въ общее ученіе о числахъ. Историческій путь, которымъ создалась ариѳметика дробныхъ чиселъ, былъ совершенно иной. Происхожденіемъ понятія о дроби человѣчество обязано тому-же пути абстракціи, которымъ создалось понятіе о цѣломъ отвлеченномъ числѣ. Тѣ двѣ задачи, которыя рѣшаются съ помощью операціи обратной операціи умноженія, задача дѣленія и задача измѣренія или иначе нахожденія отношенія между двумя величинами, суть задачи, необходимость которыхъ представилась на первыхъ шагахъ человѣческой культуры. Дикарь, дѣлящій кусокъ хлѣба или мяса на равныя части между своими товарищами, пахарь, измѣряющій длину своего поля веревкой опредѣленной длины, встрѣчаются съ дробями, съ отношеніями, которыя не могутъ быть выражены съ помощью цѣлыхъ чиселъ. Поэтому уже въ древнѣйшемъ дошедшемъ до насъ математическомъ памятникѣ—египетскомъ папирусѣ Ahmes'a—мы имѣемъ уже вычисленія надъ дробями; при этихъ вычисленіяхъ дроби разлагались на сумму дробей съ числителями 1 или 2, которыя являлись такимъ образомъ элементами, изъ которыхъ составлялись прочія дроби *). Конкретное происхожденіе дробей ясно по тѣмъ наименованіямъ, которыя употреблялись для нихъ. Такъ у греческихъ астрономовъ дроби $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$, $\frac{1}{60^3}$, ... къ которымъ сводились другія дроби, носили названіе минуты, секунды, терціи и были такимъ образомъ связаны съ измѣреніемъ времени. У Римляновъ $\frac{1}{12}$ называлась унціею (uncia), т. е. отвлеченной дроби $\frac{1}{12}$ придавалась названіе конкретной дроби—двѣнадцатой части монетной единицы—римскаго фунта (as), соотвѣтственно этому $\frac{1}{72}$ было sextula, $\frac{1}{144}$ —dimidia sextula.

---

*) За подробностями отсылаемъ къ сочиненію В. В. Бобынина: „Математика древнихъ Египтянъ".

Съ введеніемъ дробныхъ чиселъ значеніе **числа** и ученія о числѣ, какъ для практической жизни, такъ и для теоретическаго изученія міровыхъ явленій неизмѣримо расширяется. Цѣлыя числа нужны **и достаточны** для счета дискретныхъ предметовъ, но для измѣренія величинъ непрерывныхъ, каковы суть отрѣзки линіи, площади, объемы, времена, вѣса, массы, силы, скорости и т. п. цѣлыя числа являются недостаточными и не доставляютъ той точности, которая требуется развитіемъ техники съ одной стороны, установленіемъ точныхъ законовъ природы—съ другой. Если мы возьмемъ единицу мѣры слишкомъ мелкою, то мы можемъ съ достаточною точностью выразить величины цѣлыми числами, но при этомъ, измѣряя большія величины, мы получимъ громадныя цѣлыя числа, операціи надъ которыми будутъ неудобны; если-же мы возьмемъ крупныя единицы мѣры, то, употребляя только цѣлыя числа, мы въ большемъ числѣ случаевъ получимъ недостаточно точное знаніе о измѣряемой величинѣ.

Введеніе дробей, знаменатель которыхъ можетъ быть произвольно увеличиваемъ, даетъ намъ средство выразить числомъ всякую величину при всякой избранной нами единицѣ длины со сколь угодно большею степенью точности. Возьмемъ для наглядности простѣйшій видъ непрерывной величины, длину прямой линіи, отсчитываемую отъ одного изъ ея концевъ. Раздѣляя принятую нами единицу длины на достаточно большее число b частей, если мы найдемъ, что длина линіи AB содержитъ a такихъ частей и не содержитъ $a+1$ ихъ, то эта длина будетъ заключаться между двумя длинами, соотвѣтственно выражающимися дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{a+1}{b}$, и ошибка, которая будетъ сдѣлана, разсматривая вмѣсто длины AB ту или другую изъ этихъ длинъ или выражая AB числомъ $\frac{a}{b}$ или $\frac{a+1}{b}$, будетъ менѣе чѣмъ b-ая часть единицы т. е. можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою, если мы возьмемъ b достаточно большимъ. Двѣ дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{a+1}{b}$ могутъ быть названы **приближеніями** съ точностью до $\frac{1}{b}$ къ истинной величинѣ длины AB. Можно-ли взять b настолько большимъ, чтобы всякая длина AB выражалась **точно** дробью съ этимъ знаменателемъ при выбранномъ нами за единицу длины отрѣзкѣ? Мы увидимъ далѣе (въ ученіи о несоизмѣримыхъ числахъ), что существуютъ длины AB, для которыхъ это невозможно (напр. діагональ квадрата, если за единицу длины принята его сторона). Такимъ образомъ и дробныхъ чиселъ недостаточно для точнаго измѣренія всѣхъ длинъ или выраженія числомъ отношенія между двумя длинами; другими словами на неопредѣленно продолжающейся прямой линіи $0x$



разстоянія не всѣхъ точекъ отъ точки 0 могутъ быть изображены дробнымъ числомъ (мы увидимъ, что число тѣхъ точекъ, для которыхъ это возможно, неизмѣримо мало по сравненіи съ числомъ тѣхъ, для которыхъ это невозможно). Но въ то-же время какія бы двѣ близкія точки M и M' мы ни взяли, между ними существуетъ безконечное множество точекъ, разстоянія которыхъ выражаются дробными числами, и потому для практическихъ цѣлей—въ *приближенной математикѣ* (*),—дробныя числа отвѣчаютъ съ произвольно большею точностью на всѣ *вопросы*, которые могутъ встрѣтиться при измѣреніи длинъ или разстояній.

Все сказанное о длинахъ примѣнимо къ всѣмъ непрерывнымъ величинамъ, допускающихъ примѣненіе методы измѣренія или, какъ мы будемъ сокращенно выражаться, **измѣримыми** величинами [линейными (П. Дюбуа-Реймонъ), допускающими аддитивное сочетаніе (Гельмгольцъ)]. Величинами (**) вообще мы называемъ «объекты или аттрибуты объектовъ, которые по сравненію съ имъ подобными допускаютъ различіе большаго, равнаго или меньшаго (Гельмгольцъ «Счетъ и измѣреніе»). Въ этомъ общемъ смыслѣ и

(*) См. Vorlesungen über die Anwendung der Differential und Integralrechnung auf die Geometrie. Revision der Principien. Götting 1903.—Феликса Клейна.

(**) Коликими—Лобачевскаго, который различаетъ **коликое** и его **величину**. „Все то, что допускаетъ понятіе о величинѣ, называется коликое". Коликое—длина вообще, величина—опредѣленная длина, значеніе той или другой длины.

наши чувства и наши ожиданія суть величины. Но для того, чтобы величина могла быть предметомъ математическаго изслѣдованія, необходимо, чтобы для этой величины мы имѣли методъ сравненія, который могъ-бы дать намъ **точное** заключеніе о равенствѣ или различіи двухъ величинъ. Такого метода сравненій мы не имѣемъ для нашихъ ощущеній или желаній и напротивъ можемъ точно сравнивать вѣса тѣлъ, помѣщая ихъ на двѣ чашки вѣрныхъ вѣсовъ. Коэффиціенты преломленія, длины волны полосъ спектра и другія физическія постоянныя могутъ быть также подвергнуты точному сравненію.

Всякій разъ какъ мы можемъ примѣнить къ величинѣ методъ сравненія, мы можемъ различныя состоянія этой величины расположить въ возрастающій или убывающій рядъ и отмѣтить ихъ произвольными числами при единственномъ условіи, чтобы бо̀льшимъ значеніямъ величины соотвѣтствовали бо̀льшія числа. Такъ торговецъ хлѣбомъ или хлопкомъ располагаетъ въ рядъ и отмѣчаетъ номерами товаръ изъ разныхъ мѣстностей по его добротности, такъ минералогъ составляетъ скалу твердости минераловъ. Въ большинствѣ изучаемыхъ естественною философіею величинъ различія настолько велики, что мы можемъ употребить для нашей скалы различій всѣ цѣлыя и дробныя числа. **Пока** мы говоримъ только о тѣхъ величинахъ, по отношенію къ которымъ можно судить точно о равенствѣ и неравенствѣ, но которыя не допускаютъ сложенія. Физика не разсматриваетъ сложенія показателей преломленія, коэффиціентовъ электропроводности тѣлъ и не разсматриваетъ сложенія температуръ. Понятія о равенствѣ или неравенствѣ подчиняются, однако, нѣкоторымъ условіямъ, которыя мы уже приводили, говоря о числахъ, но которыя не лишне опять напомнить.

Если A, B, C, ... обозначаютъ какія-либо опредѣленныя состоянія величины, то

1⁰ $A = A$ (рефлективность).

2⁰ если $A = B$, то $B = A$ (симметричность).

3⁰ если $A = B$, $B = C$, то $A = C$ (транзитивность). (Первая изъ аксіомъ Евклида (см. ихъ перечисленіе въ вып. I стр. 19).

4. Если $A \geqq B$. $B > C$, то $A > C$.

Но существуютъ и другія величины, допускающія сложеніе (аддитивное сочетаніе—Гельмгольцъ) и измѣреніе посредствомъ опредѣленной величины того-же рода, принимаемой за единицу. Къ такимъ величинамъ принадлежатъ отрѣзки, площади, объемы, времена, массы, вѣса и т. д. Вотъ тѣ условія, которыя должны быть выполнены величинами для того, чтобы къ нимъ могъ быть примѣненъ методъ измѣренія.

1. Сложеніе ихъ должно обладать свойствомъ ассоціативности и коммутативности.

2. Величина можетъ имѣть значеніе 0, и тогда $A+0=A$.

3. Если C не есть 0, то $A+C>A$, такъ что 0 есть единственное значеніе величины, которое, будучи прибавленнымъ къ A, не измѣняетъ A.

4. Если $A>B$, то существуетъ величина C, не равная 0, такая что $A=B+C$.

5. **Аксіома Архимеда.** Если A не есть 0, то какова-бы ни была величина B, существуетъ цѣлое число m такое, что A, повторенное m разъ, будетъ больше B.

6. Если m есть цѣлое число, то, каково-бы ни было B, существуетъ величина A такая, что $mA=B$; другими словами B всегда можетъ быть раздѣлено на m равныхъ частей *).

---

*) Выясненіе необходимости этихъ условій и связи ихъ съ измѣреніемъ читатель можетъ найдти въ мемуарѣ Гельмгольца (Счетъ и измѣреніе—переводъ А. В. Васильева. Казань 1893 г.) и въ „Leçons d'Arithmétique“—Жюля Таннери. Наиболѣе глубокое изслѣдованіе аксіомъ количества принадлежитъ Гёльдеру (O. Hölder. Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. Berichte der Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. 1901). Аксіомы Гёльдера формулируются слѣд. образомъ:

I. Если даны двѣ величины a и b, то или a тожественно съ b, или-же a больше b и b меньше a, или-же a меньше b и b больше a. Эти три случая взаимно исключаются.

II. Каждой величинѣ соотвѣтствуетъ и меньшая.

III. Двѣ величины a и b, которыя могутъ быть и тожественны, даютъ, будучи взяты въ опредѣленномъ порядкѣ, одну опредѣленную сумму $a+b$

IV. $a+b$ больше a и больше b.

V. Если $a<b$, то существуетъ x такое, что $a+x=b$ и y такое, что $y+a=b$.

VI. $a+(b+c)=(a+b)+c$,

Наконецъ аксіомы 5 и 6 текста замѣняются (VII) такъ называемою Дедекиндовскою аксіомою непрерывности (см. ученіе о несоизмѣримыхъ числахъ); аксіома Архимеда является доказываемою теоремою.

Авторъ подробно показываетъ, что на этихъ 7 аксіомахъ можетъ быть построено все ученіе о измѣримыхъ величинахъ.

Величины, которыя удовлетворяютъ этимъ условіямъ, и будутъ **измѣримыя** величины, ибо слѣдствіемъ этихъ условій является возможность, принявъ произвольно одно изъ значеній величины за единицу и изобразивъ его числомъ 1, всѣ прочія значенія величины съ произвольною точностью изобразить раціональными числами, т. ч. каждой величинѣ будетъ соотвѣтствовать (иногда съ приближеніемъ) опредѣленная дробь и каждому раціональному числу будетъ соотвѣтствовать опредѣленное значеніе величины *). Пропорціональность величинъ и свойства пропорціональныхъ величинъ являются слѣдствіемъ соотвѣтствія между величинами и числами.

Типомъ измѣримыхъ величинъ является отрѣзокъ прямой линіи **). Ученіе объ измѣримыхъ величинахъ было дано Евклидомъ въ книгѣ пятой Началъ и иллюстрировано имъ на прямолинейныхъ отрѣзкахъ. Для Евклида число есть только цѣлое число; категорія величины рѣзко раздѣлялась на дискретную и непрерывную; идея чиселъ, соотвѣтствующихъ непрерывной величинѣ, была чужда греческимъ геометрамъ, и поэтому въ ученіи Евклида въ основаніи лежитъ знаменитое опредѣленіе пропорціональности между величинами (6 опредѣленіе 5-ой книги): „величины a, b, c, d пропорціональны ($a:b=c:d$), если при какихъ угодно цѣлыхъ числахъ M и N всякій разъ

когда 1) $Ma > Nb$ то и $Mc > Nd$,

когда 2) $Ma = Nb$ то и $Mc = Nd$

и когда 3) $Ma < Nb$ то и $Mc < Nd$

---

*) Изъ опредѣленія дроби, какъ системы двухъ цѣлыхъ чиселъ, съ помощью которой можно выразить отношеніе одной величины къ другой, принятой за единицу длины, могутъ быть выведены обратно всѣ свойства дробей (рекомендуемъ читателямъ прекрасное изложеніе въ новой книгѣ Ж. Таннери: Notions de mathématiques. Paris 1903, руководство для преподаванія въ классѣ философіи французскихъ гимназій по новой программѣ, серьезно продуманной и заслуживающей подражанія); но такая теорія, можетъ быть, наиболѣе удобная въ педагогическомъ отношеніи, не можетъ быть допущена въ строгомъ ученіи о числахъ, основною идеею котораго должно быть логическое, независимое отъ приложеній, обоснованіе свойствъ новыхъ послѣдовательно вводимыхъ областей чиселъ.

) Поэтому Поль Дюбуа-Реймонъ называетъ эти величины **линейными (Allgemeine Functionenlehre. Tübingen 1882).

и обратно если величины пропорціональны, то выполнены сказанныя условія" (*)

Но если типомъ *измѣримыхъ* величинъ и является отрѣзокъ прямой линіи, то разнообразіе ихъ настолько велико, что измѣреніе непрерывныхъ величинъ подобно счету дискретныхъ предметовъ, лежитъ въ основаніи важнѣйшихъ наукъ. Дробныя числа, безъ которыхъ не были-бы возможны ни опредѣленія физическихъ коеффиціентовъ, ни составленія скалъ для другихъ неизмѣряемыхъ математическихъ величинъ, ни измѣреніе величинъ измѣримыхъ, имѣютъ поэтому громадное значеніе.

Но какъ-бы велики и важны ни были приложенія дробей, существуютъ вопросы, въ которыхъ появленіе дробей, какъ отвѣтовъ, указываетъ на нелѣпость или неправильность заданія вопроса. Таковы всѣ вопросы, которые относятся къ дискретнымъ предметамъ. Появленіе дроби въ отвѣтѣ на вопросъ—разставить 100 солдатъ въ ряды по 8 человѣкъ въ каждомъ - указываетъ на невозможность рѣшенія этой задачи. Этимъ замѣчаніемъ мы воспользуемся позже въ ученіи объ отрицательныхъ и комплексныхъ числахъ.

§ 6. **Перечислимость множества раціональныхъ чиселъ.**

Разсмотримъ теперь всю совокупность введенныхъ нами чиселъ раціональныхъ (включая сюда и цѣлыя), какъ *множество* т. е. какъ совокупность элементовъ, имѣющихъ общіе признаки.

Въ § 15 вып. 1 (стр. 32) было дано опредѣленіе эквивалентныхъ или имѣющихъ одинаковую мощность множествъ, по которому въ эквивалентныхъ множествахъ должно быть возможно каждому элементу одного (того или другого) множества поставить въ соотвѣтствіе одинъ—и только одинъ—элементъ другого множества.

Множествами **перечислимыми** (abzählbare Menge, ensemble dénombrable) называются множества „эквивалентныя съ

(*) Такъ-какъ M и N могутъ быть сколь угодно большія числа, то опредѣленіе Евклида implicite включаетъ въ себѣ идею безконечнаго процесса, безъ которой невозможно введеніе въ ученіе о числахъ чиселъ несоизмѣримыхъ. Поэтому то опредѣленіе Евклида и вполнѣ научно и примѣнимо не только къ соизмѣримымъ, но и къ несоизмѣримымъ отрѣзкамъ.

рядомъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ". Множество цѣлыхъ положительныхъ чиселъ состоитъ изъ дискретныхъ (раздѣльныхъ) элементовъ. Множество, состоящее изъ всѣхъ дробныхъ чиселъ, имѣетъ то свойство, что между каждыми двумя его элементами можно вставить произвольно большее (безконечно большее) элементовъ того-же множества (см. выше) (*) и тѣмъ—не менѣе множество дробныхъ чиселъ есть множество перечислимое т. е. всѣ элементы его можно расположить въ рядъ т. ч. каждому цѣлому положительному числу будетъ соотвѣтствовать одинъ и только одинъ элементъ этого ряда. Этотъ замѣчательный результатъ найденъ Георгомъ Канторомъ и доказывается слѣдующимъ образомъ. Назовемъ высотою дроби $\frac{a}{b}$ число $a+b$ т. е. сумму числителя и знаменателя. Число дробей, соотвѣтствующихъ опредѣленному значенію высоты N, конечно; такими дробями будутъ $\frac{N-1}{1}, \frac{N-1}{2}, \cdot \cdot \frac{2}{N-2}, \frac{1}{N-1}$. Послѣдовательно дѣлая N равнымъ 2, 3, 4, 5,... получаемъ группы въ 1, 2, 3, 4,.. дроби; помѣщая эти группы одна за другою, мы получаемъ рядъ дробей (равныя дроби могутъ быть выброшены):

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}; \ldots$$

очевидно эквивалентный съ рядомъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ. Мы дадимъ въ ученіи о несоизмѣримыхъ числахъ обобщеніе этого результата и выяснимъ ближе его значеніе для ученія о числахъ.

Результатъ, полученный нами въ этомъ параграфѣ, получаетъ особое освѣщеніе, если мы сопоставимъ его съ выводами слѣдующихъ §; въ § 8 мы найдемъ, что всякая дробь выражается при всякомъ основаніи системы счисленія или конечною или періодическою систематическою дробью. Но періодичность есть одинъ изъ безчисленнаго множества способовъ правильнаго распредѣленія цифръ. Правильность же есть только ничтожный частный случай среди непра-

(*) Такія множества носятъ названіе *pantachisch* или *überalldicht*. Пуанкаре называетъ это множество дробей математическимъ континуумомъ перваго порядка (Science et hypothèse p. 38).

вильныхъ распредѣленій. Мы имѣемъ поэтому право предположить, что, если множество раціональныхъ чиселъ есть множество перечислимое, имѣетъ мощность, не превышающую мощности ряда цѣлыхъ чиселъ, то множество, составленное изъ всѣхъ напр. десятичныхъ дробей 0, $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$....., гдѣ или числа α_1. α_2..... распредѣлены правильно, но правильность эта не совпадаетъ съ правильностью періодическою, или же ихъ распредѣленіе не представляетъ никакой правильности, будетъ имѣть мощность, превышающую мощность ряда цѣлыхъ чиселъ.

Къ тому же результату приведетъ насъ и § 9, въ которомъ мы увидимъ, что всякое раціональное число разлагается **въ конечную** непрерывную дробь. Мы имѣемъ снова право предполагать, что мощность множества, состоящаго изъ непрерывныхъ дробей, имѣющихъ безконечное множество звеньевъ, будетъ превышать мощность множества, состоящаго только изъ непрерывныхъ конечныхъ дробей. Эти предположенія будутъ доказаны въ ученіи о несоизмѣримыхъ числахъ.

Мощность множества, состоящаго изъ всѣхъ безконечныхъ десятичныхъ дробей или изъ всѣхъ безконечныхъ непрерывныхъ дробей, выше мощности ряда цѣлыхъ положительныхъ чиселъ Она носитъ названіе **мощности линейнаго** (иногда ариѳметическаго) **континуума.** Существованіе двухъ различныхъ мощностей (мощности ряда 1, 2, 3.....ν и мощности континуума) доказано Г. Канторомъ въ 1873 г.

§ 7. **Разложеніе раціональнаго числа на частныя дроби.** Въ ученіи о цѣлыхъ положительныхъ числахъ мы видѣли, какое значеніе имѣетъ для изученія свойствъ этихъ чиселъ и для облегченія техники операцій надъ ними представленіе цѣлыхъ чиселъ въ видѣ полинома, расположеннаго по степенямъ основанія счисленія
($N=p_0a^n+p_1a^{n-1}+\,.\,+p_n$, причемъ p_0. p_1, ... p_n суть числа изъ ряда 0, 1, 2, ... $a-1$) и разложеніе числа на простые множители ($N=a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma\ \ldots\ l^\lambda$). Для дробныхъ чиселъ мы имѣемъ аналогичныя формы.

Представленію числа подъ видомъ полинома, расположеннаго по положительнымъ степенямъ основанія счисленія, соотвѣтствуетъ для **правильной** дроби разложеніе по степенямъ дроби $\frac{1}{a}$, причемъ коэффиціентами разложенія могутъ быть только числа ряда 0, 1, .. $a-1$ т. е. разложеніе. $\frac{m}{n} = \frac{p_0}{a} + \frac{p_1}{a^2} + \frac{p_2}{a^3} + \ldots\ldots$ (десятичныя дроби для $a=10$). Такія дроби, по примѣру нѣмецкихъ ученыхъ, будемъ называть **систематическими.**

Разложенію цѣлаго числа на простые множители соотвѣтствуетъ разложеніе дроби на такъ называемыя **частныя** дроби, знаменателями которыхъ служатъ степени простыхъ множителей, входящихъ въ разложеніе знаменателя дроби.

Теорія и того и другого разложенія основывается на теоріи цѣлыхъ чиселъ. Мы начнемъ со второго разложенія.

Теорема. Каждая правильная дробь $\frac{m}{N}$, знаменатель которой разлагается на простые множители подъ видомъ $N=a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$, можетъ быть представлена подъ видомъ

$$\frac{m}{N} = \frac{x}{a^{\alpha}} + \frac{y}{b^{\beta}} + \frac{z}{c^{\gamma}} + \ldots \frac{t}{l^{\lambda}} + k$$

гдѣ числители $x, y, z, \ldots$ суть цѣлыя положительныя числа и сооотвѣтственно меньше своихъ знаменателей ($x<a^{\alpha}$, $y<b^{\beta}$, … $t<l^{\lambda}$), $k=o$ или $k=-1$.
Доказательство основывается на слѣдующей леммѣ.

Лемма. Дробь $\frac{m}{ab}$, въ которой множители знаменателя суть числа между собою взаимно-простыя, можетъ быть представлена подъ видомъ:

(1) $\frac{m}{ab} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, гдѣ $a>x>o$, y цѣлое положительное или отрицательное по абсолютному значенію меньшее b.

Цѣлыя числа x и y, удовлетворяющія равенству (1), суть рѣшенія неопредѣленнаго уравненія $m=bx+ay$; т. е. x есть рѣшеніе сравненія $b\equiv xm$ (мода) которое всегда имѣетъ рѣшеніе, т. к. b и a суть числа взаимно-простыя (см. вып. 1, § 40); при томъ за x можно взять одно изъ чиселъ 1, 2, ... $a-1$. Для y имѣемъ формулу $y=\frac{m-bx}{a}$; если $m<ab$, то y можетъ получиться отрицательнымъ,

но всегда будетъ по абсолютной величинѣ менѣе b. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ, полагая $y=-(b-y')=y'-b$, имѣемъ

$$\frac{m}{ab} = \frac{x}{a} + \frac{y'}{b} - 1.$$

Примѣры:

$$\frac{1}{35}=\frac{3}{5}-\frac{4}{7}=\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-1 \qquad \frac{2}{35}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{1}{5}+\frac{6}{7}-1$$

$$\frac{34}{35}=\frac{2}{5}+\frac{4}{7}. \qquad \frac{33}{35}=\frac{4}{5}+\frac{1}{7}$$

Итакъ вообще $\frac{m}{ab}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+k$ причемъ $k=0,-1$, если $m<ab$ и произвольному цѣлому числу, если $m>ab$.

Переходимъ теперь къ доказательству **теоремы**.

Прилагая послѣдовательно нѣсколько разъ доказанную лемму, мы находимъ:

$$\frac{m}{a^\alpha b^\lambda c^\gamma \ldots k^k l^\lambda} = \frac{x}{a^\alpha} + \frac{y'}{b^\lambda c^\gamma \ldots k^k l^\lambda}$$

$$\frac{y'}{b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda} = \frac{y}{b^\beta} + \frac{z'}{c^\gamma \ldots k^k l^\lambda}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{v'}{k^k l^\lambda} = \frac{v'}{k^k} + \frac{w'}{l^\lambda} = \frac{v}{k^k} + \frac{w}{l^\lambda} + k.$$

Сопоставляя всѣ эти равенства, имѣемъ доказательство нашей теоремы и въ общемъ случаѣ, когда дробь правильная или неправильная.

$$\text{(I)} \qquad \frac{m}{a^\alpha b^\beta c^\gamma} = n + \frac{x}{a^\alpha} + \frac{\gamma}{b^\beta} + \frac{z}{c^\gamma} + \quad ..$$

Замѣнимъ x его разложеніемъ по системѣ съ основаніемъ a $\left(x=a_0+a_1 a+a_2 a^2+..+a^{\alpha-1} a_{\alpha-1}\right)$, y подобнымъ-же разложеніемъ по системѣ съ основаніемъ b

$(b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \ldots.)$ и т д.; находимъ, что дробь $\frac{m}{a^\alpha b^\beta c^\gamma e^\lambda}$ можетъ быть представлена подъ видомъ

$$\left.\begin{array}{l}
n + \frac{a_0}{a^\alpha} + \frac{a_1}{a^{\alpha-1}} + \frac{a_2}{a^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{a_{\alpha-1}}{a} \\
+ \frac{b_0}{b^\beta} + \frac{b_1}{b^{\beta-1}} + \frac{b_2}{b^{\beta-2}} + \ldots \frac{b_{\lambda-1}}{b} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \frac{l_0}{l^\lambda} + \frac{l_1}{l^{\lambda-1}} + \frac{l_2}{l^{\lambda-2}} + \ldots + \frac{l_{\lambda-1}}{l}
\end{array}\right\} \quad \text{(II)}$$

Эти разложенія дроби на ея простые элементы тѣмъ болѣе замѣчательны, что они суть *единственныя.* Достаточно доказать это для разложенія (I); пріемъ доказательства будетъ доказательство отъ противнаго. Если-бы для одной и той-же дроби $\frac{m}{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda}$ мы имѣли два разложенія то есть

$$\frac{m}{a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda} = \frac{r}{a^\alpha} + \frac{s}{b^\beta} + \frac{t}{c^\gamma} + \ldots \frac{w}{l^\lambda} + n$$

$$\frac{m}{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots c^\lambda} = \frac{r'}{a^\alpha} + \frac{s'}{b^\beta} + \frac{t'}{c^\gamma} + \ldots \frac{w'}{l^\lambda} + n'$$

то умножая обѣ части на $b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$ имѣли бы очевидно два сравненія

$m \equiv r\, b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$ (мод a^α)

$m \equiv r'\, b^\beta c^\lambda \ldots l^\lambda$ (мод a^α), изъ сопоставленія которыхъ имѣемъ сравненіе $r \equiv r'$ (мод a^α) или, т. к. r и r' оба положительныя числа меньшія a^α, $r = r'$.

Подобнымъ-же образомъ докажутся равенства $s = s'$, $t = t', \ldots w = w'$, слѣдствіемъ чего будетъ и равенство $n = n'$.

§ 8. **Систематическія дроби**. Доказанная въ предыдущемъ § теорема даетъ возможность свести общій вопросъ о разложеніи дробей въ систематическія дроби къ вопросу о разложеніи дробей вида $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p^\alpha}$, $\frac{m}{p}$, $\frac{m}{p^\alpha}$, т. к. по полученіи соотвѣтствующихъ разложеній для частныхъ дробей $\frac{r}{a^\alpha}$, $\frac{s}{b^\beta}$, $\frac{w}{l^\lambda}$ сложеніемъ ихъ получится разложеніе дроби $\frac{m}{a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots l^\lambda}$.

Начнемъ съ разложенія дроби $\frac{1}{p}$ въ систематическую при основаніи 10 т. е. десятичную. Въ этомъ случаѣ, если p есть 2 или 5, мы получаемъ конечную дробь. Если-же p есть абсолютно простое, отличное отъ 2 и 5, то обращеніе дроби $\frac{1}{p}$ въ десятичную заключается въ опредѣленіи числа заключающихся въ ней десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ и т. д. долей. Для опредѣленія числа десятыхъ дѣлимъ 10 на p и частное даетъ число десятыхъ долей; умноживъ полученный остатокъ на 10 и раздѣливъ произведеніе на p, получимъ въ частномъ число сотыхъ долей и т. д. Весь процессъ можетъ быть представленъ такъ:

$$\begin{array}{l|l} 10 & p \\ \cline{2-2} \;\; r_1 0 & 0,\ q_1\, q_2\, q_3 \ldots \\ \;\;\;\; r_2 0 & \\ \;\;\;\;\;\; r_3 0 & \end{array}$$

По теоріи степенныхъ вычетовъ (см. вып. I отд. IX) въ ряду остатковъ r_1, r_2, r_3, ... не можетъ встрѣтиться ни одного равнаго 0; если 10 есть первообразный корень, то первый остатокъ, равный единицѣ, есть r_{p-1} и затѣмъ всѣ остатки, начиная съ r_{p-1}, будутъ повторяться періодически; вмѣстѣ съ остатками будутъ повторяться и частныя, т. ч. въ результатѣ получится **періодическая безконечная дробь**, причемъ періодъ будетъ заключать въ себѣ $p-1$ цифръ. Если же 10 не есть первообразный корень, но принадлежитъ по модулю p къ числу s, то получится также періодическая дробь, но число цифръ въ періодѣ будетъ s.

Прим. 1) Дробь $\frac{1}{7}$ разлагается въ періодическую дробь 0, (142857) т. к. 10 есть первообразный корень 7. 2) Но дробь $\frac{1}{37}$ разлагается въ періодическую дробь 0, (027), заключающую только **3** цифры въ періодѣ т. к. $10^3 \equiv 1$ (мод. 37). Нижеслѣдующая таблица, заимствованная изъ „Encyclopédie méthodique. Mathématiques" (par Mм. d' Alembert, l'Abbé Bossut etc.) Т. 2 p. 110—111 даетъ для дробей вида $\frac{1}{p}$ отъ $p=3$ до $p=101$ ихъ разложенія въ періодическія десятичныя и число цифръ въ періодѣ совпадающее съ числомъ s, къ которому принадлежитъ 10 по модулю p.

Таблица

разложеній въ періодическія десятичныя дробей съ простыми знаменателями.

$\frac{1}{3}=0,(3)$	$s=1$
$\frac{1}{7}=0,(142857)$	$s=6$
$\frac{1}{11}=0,(09)$	$s=2$
$\frac{1}{13}=0,(076923)$	$s=6$
$\frac{1}{17}=0,(0588235294117647)$	$s=16$
$\frac{1}{19}=0,(052631578947368421)$	$s=18$
$\frac{1}{23}=0,(0434782608695652173913)$	$s=22$
$\frac{1}{29}=0,(0344827586206896551724137931)$	$s=28$
$\frac{1}{31}=0,(032258064516129)$	$s=15$
$\frac{1}{37}=0,(027)$	$s=3$
$\frac{1}{41}=0,(02439)$	$s=5$

$\frac{1}{43}=0,(023258813953488372093)$ $\quad s=21$

$\frac{1}{47}=0,(0212765957446808510638297872340425531914893617)$ $\quad s=46$

$\frac{1}{53}=0.(0188679245283)$ $\quad s=13$

$\frac{1}{59}=0.(016949152542372881355932203389830508474576271\,1$
$864406770661)$ $\quad s=58$

$\frac{1}{61}=0,(016393442922950819672131147540983606557377049$
$180327868852459)$ $\quad s=60$

$\frac{1}{67}=0,(014925373134328358108955223880597)$ $\quad s=33$

$\frac{1}{71}=0,(01408450704225352112676056338028169)$ $\quad s=35$

$\frac{1}{73}=0,(01369863)$ $\quad s=8$

$\frac{1}{79}=0,(0126582278471)$ $\quad s=13$

$\frac{1}{83}=0,(01204819277108433734939759036144578313253)$ $\quad s=41$

$\frac{1}{89}=0,(01123595505617973528089887640449438202247191)$ $\quad s=44$

$\frac{1}{91}=0.(010989)$ $\quad s=6$

$\frac{1}{97}=0.(01039927835051546391752577319587628865979381$
$4432989696721649484536082474226804123711340206$
$185567)$ $\quad s=96$

$\frac{1}{101}=0,(0099)$ $\quad s=4$

Разсмотримъ теперь правильную дробь вида $\frac{m}{p}$. При этомъ мы должны также различать два случая: 1) когда 10 есть первообразный корень числа p и 2) когда 10 не есть первообразный корень.

Въ первомъ случаѣ между періодами дробей $\frac{1}{p}$ и $\frac{m}{p}$ существуетъ весьма простая зависимость. Дѣйствительно если 10 есть первообразный корень числа p, то въ ряду остатковъ, происходящихъ отъ дѣленія $10, 10^2, .. 10^{p-1}$ на p, встрѣтится непремѣнно и остатокъ m; если при дѣленіи $m \times 10$ получается частное q_i, то q_i будетъ первая цифра въ разложеніи въ систематическую дробь $\frac{m}{p}$ и за нею послѣдуютъ тѣ-же цифры, которыя слѣдуютъ за q_i въ разложеніи дробей $\frac{1}{p}$. Другими словами, періодъ дроби $\frac{m}{p}$ будетъ состоять изъ тѣхъ-же цифръ, взятыхъ въ томъ же самомъ порядкѣ, какъ и у дроби $\frac{1}{p}$, но будетъ начинаться съ другой цифры. Періоды дробей $\frac{2}{p}$, $\frac{3}{p}$, ... и т. д. будутъ **круговыми перемѣщеніями** періода дроби $\frac{1}{p}$*). Если напр. $\frac{1}{7}=0,(142857)$ то періоды дробей $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, ... и т. д. будутъ

$$\frac{2}{7}=0,\ (285714),\quad \frac{3}{7}=0,\ (428571),\quad \frac{4}{7}=0,\ (571428),$$

$$\frac{5}{7}=0,\ (714285),\quad \frac{6}{7}=0,\ (857142).$$

2) Во второмъ случаѣ т. е. если 10 не есть первообразный корень числа p, періоды дробей будутъ состоять изъ разныхъ цифръ. Возьмемъ напр. дроби кратныя $\frac{1}{11}$ и напишемъ ихъ разложенія

$$\frac{1}{11}=0,\ (09),\ \frac{2}{11}=0,\ (18),\ \frac{3}{11}=0,(27),\ \frac{4}{11}=0,(36),\ \frac{5}{11}=0,(45)$$

$$\frac{10}{11}=0,\ (90);\ \frac{9}{11}=(0,\ 81);\ \frac{8}{11}=0,(72),\ \frac{7}{11}=0,(63),\ \frac{6}{11}=0,(54).$$

Мы видимъ, что 10 дробей распредѣляются на пять паръ дробей, періодъ которыхъ состоитъ изъ однихъ и тѣхъ-же цифръ.

Чтобы доказать соотвѣтствующій общій результатъ, замѣтимъ, что если 10 не есть первообразный корень p, то $10^s=1$ (мод. p) и 10^1, 10^2, ... 10^s при дѣленіи на p дадутъ остатки $r_1\ r_2$ ... 1, число которыхъ равно s. Тогда какъ и въ

*) См. вып. 1 стр. 50. На этомъ основаніи у англичанъ періодическія систематическія дроби носятъ названіе круговыхъ (circulating fractions).

предыдущемъ случаѣ, s дробей $\frac{1}{p}$, $\frac{r_1}{p}$, $\frac{r_2}{p}$, ... $\frac{r_{s-1}}{p}$ будутъ имѣть періодами круговыя перемѣщенія одного и того-же періода. Возьмемъ дробь $\frac{k}{p}$, при чемъ k есть число, не совпадающее ни съ однимъ изъ чиселъ 1, r_1, r_2. ... r_{s-1}; періодъ этой дроби будетъ отличаться по цифрамъ и порядку ихъ расположенія отъ періода дробей первой группы; при процессѣ разложенія дроби $\frac{k}{p}$ въ періодическую десятичную будутъ получаться остатки и сообразно этому всѣ дроби. числитель которыхъ совпадаетъ съ однимъ изъ этихъ остатковъ, будутъ имѣть періодомъ то или другое изъ круговыхъ перемѣщеній періода дроби $\frac{k}{p}$; такимъ образомъ получаемъ снова s дробей второй группы. Пусть $\frac{l}{p}$ есть дробь не принадлежащая ни къ первой, ни ко второй группѣ; круговыя перемѣщенія ея періода даютъ періоды новой группы, состоящей изъ s дробей. Продолжаемъ такимъ-же образомъ, пока не исчерпаемъ всѣ $p-1$ дробей, которыя и распредѣлятся такимъ образомъ на $\frac{p-1}{s}$ группъ изъ s дробей каждая; всѣ дроби принадлежащія къ одной группѣ имѣютъ періодами—круговыя перемѣщенія періода одной изъ нихъ *).

Переходимъ теперь къ дробямъ $\frac{1}{p^\alpha}$ и $\frac{m}{p^\alpha}$. По теоремѣ Эйлера $10^{p^{\alpha-1}(p-1)} \equiv 1$ (мод. p^α) т. ч. періодъ дроби $\frac{1}{p^\alpha}$ не можетъ заключать болѣе $p^{\alpha-1}(p-1)$ цифръ, но онъ можетъ заключать и меньше, т. к. можетъ имѣть мѣсто сравненіе $10^s \equiv 1$ (мод. p^α), гдѣ $s < p^{\alpha-1}(p-1)$. Число s въ этомъ случаѣ есть дѣлитель $p^{\alpha-1}(p-1)$ (это доказывается совершенно также, какъ аналогичная теорема въ случаѣ мо-

---

*) Въ этомъ элементарномъ вопросѣ ариѳметики мы встрѣчаемся съ соображеніями, которыя имѣютъ весьма важное значеніе въ высшей математикѣ, а именно въ той плодотворной области ея, которая называется **теоріей группъ** перемѣщеній. (Напр. при доказательствѣ теоремы Лагранжа, по которой порядокъ **группы** перемѣщеній элементовъ x_1, x_2, ... x_n есть всегда дѣлитель числа $n = (1.2 \ldots n)$

дуля p). Оба случая должны быть опять различаемы. Въ первомъ случаѣ всѣ $p^{\alpha-1}$ $(p-1)$ несократимыхъ дробей съ знаменателемъ p^{α} имѣютъ одни и тѣ-же цифры въ періодѣ; періоды ихъ суть круговыя перемѣщенія періода дроби $\frac{1}{p^{\alpha}}$. Во второмъ случаѣ несократимыя дроби съзнаменателемъ распредѣляются въ $\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{s}$ группъ, каждая изъ которыхъ заключаетъ s дробей; всѣ дроби, принадлежащія къ одной группѣ, имѣютъ періодами—круговыя перемѣщенія періода одной изъ нихъ. Такъ напр., всѣ несократимыя дроби съ знаменателемъ $9=3^2$ имѣютъ періоды, состоящіе изъ различныхъ цифръ т. к. $s=1$ $(10\equiv 1$ (мод. 9)).

Наконецъ, какъ было уже выше сказано, общій вопросъ о разложеніи дроби $\frac{m}{N}$ сводится, вслѣдствіе теоремы § 7, на вопросъ о разложеніи частныхъ дробей $\frac{x}{a^{\alpha}}$, $\frac{y}{b^{\beta}}$; ....

Такъ напр. если мы желаемъ разложить въ періодическую десятичную дробь дробь $\frac{61}{385}$, то представляемъ эту дробь подъ видомъ

$\frac{61}{385}=\frac{3}{5}+\frac{2}{7}-\frac{8}{11}=\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{11}-1$ и опредѣливъ періодическія дроби для дробей $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{11}$ путемъ сложенія находимъ періодическую дробь для $\frac{61}{385}$.

$$\text{Т. к.}\quad \frac{2}{7}=0,(285714)$$
$$\frac{3}{11}=0,(27)$$
$$\frac{3}{5}=0,6$$

$$\frac{61}{385}=1,1584415584415-1=0,1(1584415).$$

Ясно, что число цифръ въ періодѣ дроби $\frac{m}{N}$ будетъ наименьшимъ кратнымъ числа цифръ въ періодахъ **частныхъ дробей** *).

Во всемъ предыдущемъ мы предполагали основаніемъ системы счисленія число 10. Нетрудно видѣть, что сущность результатовъ останется безъ измѣненія, если за основаніе принять какое-либо иное число т. е. прежде всего имѣемъ основной результатъ, по которому всякая дробь при всякомъ основаніи системы счисленія выражается или конечною или періодическою систематическою дробью, можно было бы сказать только періодическою, т. к. всякая конечная дробь можетъ быть замѣнена періодическою: 0,837 = 0,836(9)

Принципъ, лежащій въ основаніи разсмотрѣнія систематическихъ дробей, примѣнялся въ древнемъ Вавилонѣ къ дробямъ съ основаніемъ 60; эти дроби, вмѣстѣ съ астрономическими знаніями, перешли и къ греческимъ астрономамъ, которые считали также дробями съ основаніемъ 60. Такъ напр. знаменитый Птоломей (2-ое столѣтіе по Р. Х.) въ Альмагестѣ пишетъ $\pi = 3 \ldots 8 \ldots 30 = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600}$. Одинъ изъ комментаторовъ Альмагеста Теонъ Александрійскій, отецъ Гипатіи (около 360 г. по Р. Х.), далъ методу для извлеченія квадратныхъ корней посредствомъ шестидесятеричныхъ дробей. Наше дѣленіе времени и градуса, также какъ названія минута (pars *minuta* prima) и секунда (pars minuta *secunda*) суть остатки старыхъ шестидесятеричныхъ дробей. Десятичныя дроби—повидимому арабскаго происхожденія; въ европейскихъ сочиненіяхъ они встрѣчаются въ 16 столѣтіи (у Кардана въ его Practica arithmeticae (1539 г). и у Стевина въ 1589). Введеніе запятой для отдѣленія цѣлой части отъ десятичной есть заслуга знаменитаго астронома Кеплера (1572--1630) Въ концѣ XVI и началѣ XVII столѣтій окончательно выработалась техника операцій надъ десятичными дробями; безъ введенія десятичныхъ дробей не возможны были-бы тѣ вычисленія, которыя позволяютъ астрономамъ слѣдить за движеніемъ небесныхъ свѣтилъ и инженерамъ

---

*) Вопросомъ о разложеніи въ періодическія дроби занимались **Валлисъ, Бернулли, Ламбертъ** и **Гауссъ** (см. Disquis. arithm. § 315 и 316).

съ точностью вычислять условія устойчивости своихъ сооруженій. Громадная экономія научнаго труда есть слѣдствіе изобрѣтенія десятичныхъ дробей, составляющихъ дополненіе изобрѣтенія десятичной системы нумераціи.

§ 9. Разложеніе раціональныхъ чиселъ въ непрерывныя дроби.

Алгориѳмъ разложенія дроби въ непрерывную или цѣпную дробь совпадаетъ съ алгориѳмомъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ чиселъ (см. вып. 1 стр. 65). Если даны два цѣлыя положительныя числа A и B, изъ которыхъ $A > B$, то процессъ послѣдовательнаго дѣленія даетъ равенства

$$\left.\begin{aligned} A &= Aq + r \\ B &= rq' + r' \\ r &= r'q'' + r'' \\ &\cdots\cdots \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + r_{n+1} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Послѣдній остатокъ $r_{n+1} = 1$, если A и B суть числа взаимнопростыя. Равенства (I) могутъ быть представлены подъ видомъ

$$\frac{A}{B} = q + \frac{r}{B}$$

$$\frac{B}{r} = q' + \frac{r'}{r}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_{n+1} + \frac{1}{r_n};$$

которыя и даютъ для несократимой дроби $\frac{B}{A}$ искомое разложеніе ея въ непрерывную дробь:

$$\frac{B}{A} = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \ldots + \cfrac{1}{r_n}}}} \qquad (1)$$

Напр. $\dfrac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$.

Непрерывная дробь (1) (*правильная*) представляетъ частный случай болѣе общаго выраженія n—членной непрерывной дроби

$$b_0 \pm \cfrac{a_1}{b_1 \pm \cfrac{a_2}{b_2 \pm \ldots \pm \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} \pm \cfrac{a_n}{b_n}}}} \qquad (2),$$

въ которой a_ν и b_ν предполагаются произвольными числами; но, конечно, ни одно a_ν не можетъ равняться 0, между тѣмъ какъ b, за единственнымъ исключеніемъ b_n, могутъ и равняться 0; a_ν называются частными числителями, b_ν — частными знаменателями. Дробь вида (2), по предложенію Прингсгейма, обозначается

$$b_0 \pm \frac{a_1|}{|b_1} \pm \frac{a_2|}{|b_2} \pm \ldots \pm \frac{a_n|}{|b_n}$$

или символомъ $\left[b_0; \pm \dfrac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^n$

Специальная дробь $q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots + \cfrac{1}{q_n}}}$

обозначается, по предложенію Дирихле, $(q_0, q_1, \ldots q_n)$.

Нѣкоторыя свойства специальныхъ непрерывныхъ дробей $(q_0. q_1, \ldots q_n)$, при чемъ всѣ q суть цѣлыя положительныя числа, извѣстны изъ элементарной алгебры и мы ограничимся ихъ перечисленіемъ.

1. Процессъ обращенія дробнаго числа въ непрерывную дробь вида (1) показываетъ, что каждой дроби соотвѣтствуетъ одна и только одна непрерывная дробь. (Двѣ дроби $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$ и $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{2}{1}}}$ считаются тожественными).

2. Если въ $(q_0, q_1, \ldots q_n)$ мы останавливаемся, не доходя до конца, на нѣкоторомъ частномъ знаменателѣ q_m т. е. разсматриваемъ непрерывную дробь $(q_0. q_1, \ldots q_m)$, то, вычисляя значеніе этой дроби, найдемъ дробь $\frac{\text{Ч}_m}{\text{З}_m}$, которая по отношенію ко всей непрерывной дроби или равному ей раціональному числу называется m-ою подходящею или m-ымъ приближеніемъ. Для дроби $\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}}$ первою под-

ходящею будетъ $\frac{1}{q_1}$; полезно ввести и подходящую нулевого порядка $\frac{0}{1}$, обозначая ее $\frac{Ч_0}{З_0}$.

Между тремя послѣдовательными числителями и тремя послѣдовательными знаменателями существуютъ *возвратныя соотношенія*, легко доказываемыя по методу математической индукціи

$$\left.\begin{aligned} Ч_m &= Ч_{m-1}\, q_m + Ч_{m-2} \\ З_m &= З_{m-1}\, q_m + З_{m-2} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

(Такъ $Ч_2 = q_2 = Ч_1\, q_2 + Ч_0$, $З_2 = q_1\, q_2 + 1 = З_1\, q_2 + З_0$).

3. Изъ соотношеніи (a) легко выводится слѣдующее соотношеніе

$$\frac{Ч_m}{З_m} - \frac{Ч_{m-1}}{З_{m-1}} = -\frac{Ч_{m-1}\, З_{m-2} - Ч_{m-2}\, З_{m-1}}{З_m\, З_{m-1}} \quad \text{или}$$

$$Ч_m\, З_{m-1} - Ч_{m-1}\, З_m = -\left(Ч_{m-1}\, З_{m-2} - Ч_{m-2}\, З_{m-1}\right)$$

Такъ-какъ $Ч_1\, З_0 - Ч_0\, З_1 = +1$, то $Ч_2\, З_1 - Ч_1\, З_0 = -1$ и вообще $Ч_m\, З_{m-1} - Ч_{m-1}\, З_m = (-1)^{m-1}$ (b)

Отсюда $$\frac{Ч_m}{З_m} - \frac{Ч_{m-1}}{З_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{З_m\, З_{m-1}} \qquad (c)$$

Изъ соотношенія (b) выводится важное слѣдствіе: всѣ подходящія дроби суть дроби несократимыя. На этомъ-же соотношеніи основывается приложеніе непрерывныхъ дробей къ рѣшенію неопредѣленнаго уравненія 1-ой степени въ цѣлыхъ числахъ.

Пусть для рѣшенія дано уравненіе:

$Ax - By = 1$, гдѣ A и B суть числа взаимно простыя. Разлагая дробь $\frac{A}{B}$ въ непрерывную дробь, опредѣляемъ предпослѣднюю подходящую дробь $\frac{Ч_{n-1}}{З_{n-1}}$, тогда въ силу соотношенія (b).

$A З_{n-1} — B Ч_{n-1} = (—1)^n$, почему рѣшенія неопредѣленнаго уравненія будутъ числа $\pm З_{n-1}$, $\pm Ч_{n-1}$ (смотря по тому будетъ-ли n четное или нечетное).

4. Значеніе дроби $\frac{A}{B}$ лежитъ между знаменателями двухъ смежныхъ подходящихъ дробей и притомъ ближе къ $\frac{Ч_m}{З_m}$, чѣмъ къ $\frac{Ч_{m-1}}{З_{m-1}}$.

Для доказательства этого предложенія нужно будетъ вычислить разность $\frac{A}{B} — \frac{Ч_m}{З_m}$; разность эта будетъ по абсолютному значенію меньше единицы дѣленной на квадратъ знаменателя.

5. Подходящія дроби составляютъ два ряда послѣдовательныхъ приближеній къ дроби $\frac{A}{B}$, причемъ приближенія $\frac{Ч_{2r-1}}{З_{2r-1}}$ составляютъ убывающій рядъ, приближенія $\frac{Ч_{2r}}{З_{2r}}$ возростающій.

6. Всякая подходящая отличается отъ всякой слѣдующей подходящей (и въ частности отъ самой дроби $\frac{A}{B}$) менѣе, чѣмъ всякая неприводимая дробь, члены которой имѣютъ меньшія величины. На этомъ свойствѣ основано громадное значеніе непрерывныхъ дробей въ приближенной математикѣ для выраженія съ возможно большею степенью точности дроби съ большимъ членомъ черезъ дробь, знаменатель и числитель которой не превышаютъ извѣстнаго предѣла.

Напр. дается десятичная дробь 3,141513; разлагая ее въ непрерывную дробь, найдемъ подходящія

3, $3\frac{1}{7}$, $3\frac{16}{113}$, $3\frac{15729}{111086}$. Напр. $3\frac{16}{113}$ можетъ быть принятъ за данную дробь съ точностью $\frac{1}{113.111086} < 0{,}00000008$ (Лобачевскій Алгебра, стр. 135).

7. Изъ формулы (c) находимъ, что дробь $\frac{A}{B}$ можетъ

быть выражена въ видѣ суммы частныхъ дробей

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{З_1}-\frac{1}{З_1 З_2}+\frac{1}{З_2 З_3}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{1}{З_{n-1} B}. \quad (d)$$

Примѣръ. Предлагаю провѣрить указанныя свойства непрерывныхъ дробей на простѣйшей дроби

$$(1,\ 1.\ \ldots\ 1).$$

Для этой дроби рядомъ числителей и знаменателей подходящихъ дробей будетъ рядъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, извѣстный подъ названіемъ ряда Fibonacci, который въ своей Liber Abaci вычислилъ первыя 12 изъ нихъ, какъ отвѣтъ на вопросъ: Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Нѣкоторыя свойства ряда чиселъ Fibonacci даны въ первомъ выпускѣ (§ 11). Разсматриваніе этого ряда чиселъ послужило Ламе къ рѣшенію вопроса объ опредѣленіи наивысшаго предѣла числа дѣленій, которыя приходится совершать при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя. Легко показать на основаніи соотношенія, связывающаго эти числа какъ числители подходящихъ дробей: $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$, что число чиселъ этого ряда, имѣющихъ одно и то-же число цифръ, равно или 4 или 5, и доказать на основаніи этого слѣдующую теорему Ламе: „*число дѣленій, которое необходимо произвести при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, не можетъ превышать упятеренное число цифръ въ наименьшемъ изъ чиселъ*».

Важнѣйшій результатъ настоящаго § есть, какъ было уже указано выше, указаніе возможности разложить каждое раціональное число въ конечную непрерывную дробь. Но изъ того, что раціональныя числа разлагаются въ конечныя непрерывныя дроби и всякая конечная непрерывная дробь есть раціональное число, не слѣдуетъ, чтобы и безконечная непрерывная дробь не могла имѣть раціональнаго значенія. Эйлеръ далъ нѣсколько примѣровъ такихъ дробей. Такъ безконечная дробь $\cfrac{m+1}{2+\cfrac{m+2}{3+\cfrac{m+3}{4+\ldots}}} = \left[\frac{m+\nu}{1+\nu}\right]^{\infty}$, имѣющая для $m=0$ и $m=1$ значенія $\frac{1}{e-2}-1$ и $e-2$ (e есть Неперово число), имѣетъ раціональное значеніе, если цѣлое число $m \geq 2$.

Формулы (a), (b), (c) настоящаго § могутъ быть обобщены и на общую дробь $\left[b_0; \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]$. Въ особенности изящна теорія дробей вида $\left[b_0; \frac{-1}{b_\nu}\right]$, гдѣ всѣ числители суть -1. Съ такими дробями мы встрѣтимся въ ученіи о функціяхъ (теорема Штурма) для нихъ имѣетъ мѣсто напр. $Ч_m З_{m-1} - Ч_{m-1} З_m = +1$, каково-бы ни было m. Точно также изящнѣе чѣмъ для правильныхъ дробей представляется въ этомъ случаѣ формула (d). Историческія замѣчанія о непрерывныхъ дробяхъ будутъ сообщены въ ученіи о несоизмѣримыхъ числахъ.

§ 10. Разложенія дробей, данныя Стефаносомъ, Люротомъ и Канторомъ.

Въ послѣднее время даны нѣкоторыя интересныя новыя формы разложеній раціональныхъ чиселъ, которыя могутъ получить (и отчасти уже получили) примѣненіе при рѣшеніи теоретическихъ вопросовъ и выясненіи ариѳметическихъ свойствъ раціональныхъ чиселъ. Поэтому мы считаемъ полезнымъ познакомить читателя съ этими разложеніями.

1. Всякое раціональное число можетъ быть представлено, и притомъ только однимъ способомъ, подъ видомъ

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1.2} + \frac{\alpha_2}{1\,2.3.} + \frac{\alpha_3}{1.2.3.4} + \ldots . \frac{\alpha_{n-1}}{1\,2.3\,.\,.\,.\,n},$$

гдѣ α_0 есть цѣлое число, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_{n-1}$ суть числа цѣлыя соотвѣтственно меньшія чиселъ 2, 3,.... n.

Безконечная строка $\sum\limits_1^{\infty} \frac{m_\nu}{\nu!}$ (гдѣ m_ν есть такое число цѣлое меньшее ν) представляетъ, вообще говоря, число ирраціональное; оно можетъ однако дать и раціональное число, но только тогда, если начиная съ нѣкотораго ν, m_ν будетъ постоянно и ad infinitum равно $\nu - 1$. [1])

2. Если обозначить буквами $a_1, a_2, \ldots a_n$ рядъ абсолютно-простыхъ чиселъ 2, 3, 5, 7, ..., то всякое раціональное число можетъ быть представлено и притомъ только однимъ способомъ подъ формою

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_1 \cdot a_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a_1\, a_2 \ldots a_n},$$

гдѣ α_0 есть цѣлое число, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ суть числа соотвѣтственно меньшія чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$

3. **Теорема Г. Кантора** [2]).

Безконечное произведеніе

$$\left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{m_\nu}\right) \ldots$$

представляетъ раціональное число, если начиная съ нѣкотораго значенія ν и затѣмъ ad infinitum $m_{\nu+1} = m_\nu{}^2$.

4. **Теорема Люрота** [3]).

Всѣ раціональныя числа между 0 и 1 могутъ быть представлены **періодическою** безконечною строкою вида

$$\frac{1}{m_1 + 1} + \sum_1^\infty m_\nu \frac{1}{m_1 (m_1 + 1) \ldots m_\nu (m_\nu + 1)},$$

гдѣ $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ суть цѣлыя натуральныя числа.

§ 11. Бернулліевы числа.

Въ ученіи о цѣлыхъ числахъ мы встрѣчаемся съ особыми родами чиселъ или выражающимися простыми формулами въ зависимости отъ мѣста ими занимаемаго въ ряду, или связанными между собою простыми соотношеніями, или обладающими простыми ариѳметическими свойствами. Таковы

---

[1]) **Cyparissos Stephanos.** Bull. de la Soc. math. de France 1879 p. 81. Дарбу далъ приложеніе этого разложенія къ теоріи функцій. (Ann. de l'Ecole Norm. 1879).

См. также статью **Г. Кантора** въ Zeitschrift für Mathem. 1869 p. 124.

[2]) Ibid. p. 152.

[3]) Math. Ann. Bd. 21. (1883). Люротъ даетъ приложеніе своей теоремы къ теоріи функцій и ученію о множествахъ.

числа треугольныя, квадратныя, пятиугольныя, и вообще многоугольныя, числа Фибоначчи, числа Эйлера. встрѣчающіяся въ разложеніи Sécx, числа Бринклея $(\Delta^n\ O^m)$, числа совершенныя и др. Конечно, и въ области раціональныхъ чиселъ можно изучать дроби, обладающія спеціальными свойствами. Мы познакомимся, въ заключеніе ученія о дробяхъ, съ замѣчательнымъ безконечно-продолжающимся рядомъ раціональныхъ чиселъ, извѣстныхъ подъ названіемъ чиселъ **Бернулли** (Яковъ Бернулли—Ars conjectandi 1713) имѣющихъ важное значеніе въ высшей математикѣ и обладающихъ интересными ариѳметическими свойствами.

Возьмемъ равенство $(B+1)^m - B^m = m$, гдѣ m есть цѣлое положительное число, разложимъ первую часть по формулѣ бинома Ньютона и послѣ этого показатели степеней у B превратимъ въ значки. Мы получимъ соотношеніе, связывающее числа $B_1, B_2, \ldots B_{m-1}$:

$$m B_{m-1} + \frac{m\ (m-1)}{1.2} B_{m-2} + \cdots + m B_1 + 1 = m.$$ Полагая въ этомъ соотношеніи послѣдовательно $m=2, 3, 4, \ldots$ получимъ

$$B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\quad B_5 = 0,$$

$$B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = \frac{1}{30},\ B_{10}\ \frac{5}{66} \ldots B_{18} = \frac{43867}{798},$$

Форма соотношенія, связывающаго числа Бернулли, такова, что всѣ эти числа будутъ раціональныя числа. Изучая внимательнѣе это соотношеніе, можемъ видѣть, что за исключеніемъ B_1 всѣ числа Бернулли съ нечетнымъ значкомъ будутъ равны 0. Адамсъ вычислилъ 62 первыхъ Бернулліевыхъ числа. (Crelle's Journ. B. 85). Они начиная съ $B_8 = \frac{1}{30}$ неопредѣленно возрастаютъ, что имѣетъ важное значеніе для теоріи строкъ, въ которыя они входятъ коэффиціентами, напр. $B_{34} = \frac{2.577.687.858.367}{6}$. Бернулліевы числа встрѣчаются въ выраженіи суммы степеней послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ $(1^m + 2^m + \ldots + n^m)$, въ разложеніи въ безконечную строку функціи

$$\frac{xe^x}{e^x-1}=\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{B_2}{2!}x^2-\frac{B_4}{4!}x^4+\quad\cdot\cdot\right),$$ $\tan gx$, $\mathrm{Cotg}x$, $\mathrm{Cosec}x$, при изслѣдованіяхъ относительно такъ называемой послѣдней теоремы Фермата (невозможность рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе $x^m+y^m=z^m$, если $m>2$; въ этихъ изслѣдованіяхъ открывается замѣчательная связь чиселъ Бернулли и корней изъ 1), при вычисленіи суммъ безконечныхъ строкъ $\frac{1}{1^{2s}}+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{3^{2s}}+\cdot\cdot\cdot\cdot$ и т. п.

Бернулліевы числа имѣютъ слѣдующее замѣчательное ариѳметическое свойство, носящее названіе теоремы Клаузена-Штаудта. Если α, β, γ,... суть всѣ тѣ нечетныя простыя числа, которыя, будучи уменьшены на 1, даютъ дѣлителей числа $2m$, то имѣемъ равенства $B_{2m}=$ цѣлому числу $+(-1)^m\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\cdot\cdot\cdot\right\}$. Наприм. пусть $2m=34$; единственное нечетное простое число, которое, будучи уменьшено на 1, даетъ дѣлитель 34-хъ, есть 3. Поэтому знаменатель B_{34}, какъ мы видѣли, и есть 6. Напр. для $2m=8$, получимъ простыя числа $\alpha=3$, $\beta=5$, и

$$B_8=\frac{1}{30}=-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}.$$

Символическое соотношеніе, которое послужило намъ для опредѣленія чиселъ Бернулли, можетъ быть легко обобщено и тогда мы получаемъ другіе классы аналогичныхъ чиселъ. Для выше упомянутыхъ цѣлыхъ чиселъ Эйлера существуетъ символическое соотношеніе

$$(\mathrm{E}+1)^p+(\mathrm{E}-1)^p=0,\ \mathrm{E}_0=1.$$

Между числами Эйлера и Бернулли существуетъ слѣдующая связь, представляемая изящно въ символической формѣ

$$B_p=\frac{p[E+1]^{p-1}}{2^p[2^p-1]}.$$

Гурвицъ [Math. Ann. Bd. 51], изучая лемнискатическія функціи, пришелъ къ новому безконечному ряду раціональныхъ чиселъ, обладающему свойствами, аналогичными со свойствами Бернулліевыхъ.

II. Ученіе объ отрицательныхъ числахъ.

> Es sind die negativen Grössen nicht Negationen von Grössen, wie die Aehnlichkeit des Ausdrucks ihn hat vermuthen lassen, sondern etwas an sich wahrhaftig Positives, nur was dem andern entgegengesetzt ist.
>
> *Kant* [Versuch den Begriff der negativen Grössen in die Weltweisheit einzuführen 1763].
>
> Arithmeticae et Geometriae scientiae sunt connexae et suffragatoriae sibi ad invicem.
>
> *Leonardo Pisano*. (*Fibonacci*).
> Practica Geometriae (1220).

§ 12. Отрицательныя числа, какъ пары цѣлыхъ чиселъ. (Пары 1-й ступени).

Если цѣлое положительное число b не болѣе другого цѣлаго положительнаго числа a, то нельзя найдти въ ряду цѣлыхъ положительныхъ чиселъ $1, 2, 3, \ldots\ldots$ числа удовлетворяющаго равенству

$$a+x=b. \tag{1}$$

Въ томъ случаѣ, если b равно a, этому равенству удовлетворяетъ символъ 0, который разсматривается какъ число; операціи, въ которыя *входитъ* 0, удовлетворяютъ тѣмъ же законамъ сложенія и умноженія.

Разсмотримъ теперь такой случай, когда b менѣе a и покажемъ, что въ этомъ случаѣ равенству (1) можно удовлетворить, какъ въ предыдущемъ отдѣлѣ равенству $ax=b$ при b не кратномъ a, новымъ математическимъ объектомъ —парою двухъ цѣлыхъ чиселъ, взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ. Эта пара можетъ быть предметомъ математическаго изслѣдованія, если будутъ точно опредѣлены:

1° условія равенства и неравенства.

2° законы операцій сложенія и умноженія.

Равенство паръ. Пары (a, b), и $(a' b')$ будутъ равны при условіи $a+b'=a'+b$ и только при этомъ условіи. Такъ напр. пары (7, 9) и (5, 7) равны между собою.

Изъ этого опредѣленія равенства вытекаютъ слѣдующія слѣдствія.

1. Пары $(a+n, b+n)$ и (a, b) равны между собою, т. е. въ парѣ мы можемъ безъ измѣненія ея прибавить къ обоимъ членамъ или вычесть изъ обоихъ членовъ пары одно и то-же цѣлое число. Поэтому всякая пара (a, b) можетъ быть приведена къ виду, который можно назвать *каноническимъ* или *приведеннымъ*. Если $a > b$, то каноническимъ видомъ пары будетъ $(a-b, 0)$.

Эту пару **условимся** считать совпадающею съ цѣлымъ положительнымъ числомъ $a-b$. Поэтому пары (12,3), (10,1), (9,0) предполагаются равными цѣлому положительному числу 9.

Если $a=b$, каноническій видъ пары будетъ (0,0), которую мы условимся считать совпадающею съ 0.

Если $a<b$, то каноническій видъ пары будетъ $(0, b-a)$. Такъ пары (7, 9), (5, 7) равныя между собою, равны парѣ (0,2).

Данное нами опредѣленіе равенства паръ такимъ образомъ сводитъ всѣ пары или къ цѣлымъ положительнымъ числамъ, или къ 0, или къ парамъ вида $(0. m)$.

Неравенство паръ. Если въ двухъ парахъ (a, b) и (c, b) вторые члены равны, то та пара считается болѣе, въ которой первый членъ болѣе.

Такъ-какъ на основаніи **условія равенства** мы можемъ всегда сдѣлать вторые члены паръ равными, то слѣдовательно мы можемъ всегда установить отношеніе величины между двумя парами, т. е. опредѣлить, которая изъ нихъ больше, которая меньше. Такъ, напр. пара (5,9) болѣе пары (7,12), ибо первая пара можетъ быть замѣнена равною ей парою (8,12), которая, по данному опредѣленію, будетъ болѣе пары (7,12). Такъ, вообще, пара $(0,b)$ будетъ больше пары $(0,a)$, если $b<a$, п. ч. первая можетъ быть замѣнена парою $(a, a+b)$, вторая парою $(b, a+b)$.

Изъ установленныхъ нами условій равенства и неравенства паръ вытекаетъ, что къ нашимъ парамъ примѣнимы, какъ основныя аксіомы ученія о равенствѣ (напр. если $\alpha=(a, b)$, $\beta=(c, d)$, $\gamma=(e, f)$, то очевидно изъ данныхъ опредѣленій, что 1^0 если $\alpha=\beta$, то $\beta=\alpha$, 2^0, если $\alpha=\beta$, $\alpha=\gamma$, то $\beta=\gamma$), такъ и аксіомы порядка (1^0 если $\alpha>\beta$, $\beta\geq\gamma$, то $\alpha\geq\gamma$. 2^0 если $\alpha<\beta$, $\beta\leq\gamma$, то $\alpha\leq\gamma$).

Операціи надъ парами. Сложеніе паръ. Результатомъ сложенія или суммою двухъ паръ (a, b) и (c, d) называется пара $(a+c,\ b+d)$.

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d). \tag{1}$$

Опредѣленная равенствомъ (1) операція имѣетъ всѣ свойства операціи сложенія двухъ положительныхъ цѣлыхъ чиселъ; поэтому мы имѣемъ полное право назвать ее операціею **сложенія.**

1^0. Она есть операція ассоціативная. Если $\alpha=(a,\ b)$. $\beta=(c,\ d)$, $\gamma=(e,\ f)$, то $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

Дѣйствительно

$$\alpha+(\beta+\gamma)=\Big(a+(c+e),\ b+(d+f)\Big)$$

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\Big((a+c)+e,\ (b+d)+f\Big)$$

Вслѣдствіе закона ассоціативности сложенія цѣлыхъ чиселъ въ парахъ, стоящихъ во вторыхъ частяхъ, какъ первые, такъ и вторые члены тожественны, что и доказываетъ равенство

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma.$$

2^0. Она есть операція коммутативная

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\alpha+\beta=(a+c,\ b+d)$$

$$\beta+\alpha=(c+a,\ d+b).$$

Въ силу закона коммутативности сложенія цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, вторыя части равны, слѣдовательно и $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

3. Операція имѣетъ модулемъ пару (0, 0) или число 0. Дѣйствительно, по опредѣленію сложенія.

$$(a,\ b)+(0,\ 0)=(a,\ b).$$

Умноженіе паръ. Результатомъ умноженія или произведеніемъ двухъ паръ $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$ называется пара $(ac+bd,\ bc+ad)$. Изъ этого опредѣленія умноженія слѣдуетъ, что операція умноженія паръ имѣетъ всѣ тѣ свойства которыя имѣетъ операція умноженія цѣлыхъ чиселъ.

1°. Она есть операція ассоціативная $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$.

Пусть $\alpha=(a, b)$, $\beta=(c, d)$, $\gamma=(e, f)$. Тогда

$$\alpha(\beta\gamma)\equiv(a, b)(ce+df,\ cf+ed)=(a(ce+df)+(b(cf+ed), \ldots.)$$

$$(\alpha\beta)\gamma\equiv(ac+bd,\ ad+bc)(e, f)=((ac+bd)c+(ad+bc)f), \ldots.)$$

Но $a(ce+df)+b(cf+ed)=(ac+bd)e+(ad+bc)f.$

что и доказываетъ тождество произведенія $\alpha(\beta\gamma)$ и $(\alpha\beta)\gamma$.

2°. Она есть операція коммутативная.

Дѣйствительно

$$\alpha\beta\equiv(a,\ b)\ (c,\ d)=(ac+bd,\ ad+bc)$$

$$\beta\alpha\equiv(c,\ d)\ (a,\ b)=(ca+db,\ cb+da).$$

Но такъ какъ двѣ пары, стоящія во вторыхъ частяхъ, вслѣдствіе законовъ операцій надъ цѣлыми числами тожественны, то и $\alpha\beta=\beta\alpha$.

3°. Оба закона дистрибутивности имѣютъ также мѣсто. Напримѣръ, чтобы показать, что $\alpha(\beta+\gamma)=(\alpha\beta+\alpha\gamma)$ вычислимъ и ту и другую часть по даннымъ опредѣленіямъ операцій надъ парами. Имѣемъ

$$\alpha(\beta+\gamma)\equiv(a,\ b)\ .\ (c+e,\ d+f)=(a(c+e)+b(d+f),\ a(d+f)+b(c+c)$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma\equiv(a\ b)\ (c, d)+(a, b)\ (e, f)=(ac+bd+ae+bf,\ ad+bc+af+be)$$

Такъ какъ пары, стоящія во вторыхъ частяхъ, тожественны, то и первыя части равны что и тр. д.

Модуль умноженія. Модулемъ умноженія для отрицательныхъ чиселъ является число (1,0). Этотъ модуль есть единственный. Модуль сложенія **0** есть единственное число, умноженіе на которое даетъ въ произведеніи 0, каковъ бы ни былъ другой множитель. Это свойство, на которомъ мы остановимся въ ученіи о комплексныхъ числахъ, можетъ быть формулировано иначе:

$$\text{если } ab = 0, \text{ то или } a = 0 \text{ или } b = 0.$$

Изъ опредѣленія операціи умноженія вытекаетъ слѣдующее важное слѣдствіе. Пара вида $(0, m)$, къ которой, какъ мы видѣли, приводится всякая пара, неравная цѣлому положительному числу, можетъ быть разсматриваема какъ произведеніе пары (0, 1) на число m. Дѣйствительно, по данному правилу умноженія паръ мы имѣемъ $(0, 1).m = m.(0, 1) = (m, 0)(0, 1) = (0, m)$.

Такимъ образомъ всѣ новыя пары сводятся на одну основную новую пару (0, 1), которой и придается названіе отрицательной единицы и для которой употребляется обозначеніе **—1**. Соотвѣтственно этому пары $(0, m)$ могутъ быть обозначаемы для сокращенія знакомъ $-m$.

Изъ даннаго выше опредѣленія сложенія двухъ паръ вытекаетъ, что въ этихъ парахъ мы имѣемъ математическій объектъ, удовлетворяющій поставленной нами въ началѣ отдѣла задачѣ: при **всякихъ** a и b рѣшить уравненіе $a+x=b$. Дѣйствительно замѣняя по условію стр. 42 цѣлое число парою $(a, 0)$, имѣемъ

$$(a, 0) + (b, a) = (a + b, a) = (b, 0) = b.$$

Найдя въ нашихъ новыхъ парахъ чиселъ отвѣтъ на поставленную задачу и видя, что операціи надъ парами тожественны по своимъ законамъ съ операціями надъ цѣлыми положительными числами, мы называемъ наши пары **отрицательными числами** въ случаѣ, когда онѣ не приводятся къ цѣлымъ положительнымъ числамъ.

Изъ условій опредѣляющихъ термины **больше** или **меньше** слѣдуетъ, что всякое положительное число a, также и число 0—больше всякаго отрицательнаго числа и что изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ $-m$ и $-n$, $-m > -n$, если $m < n$. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ числа цѣлыя, какъ положительныя, такъ и отрицательныя, располагаются въ рядъ $\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$ Рядъ этотъ можно называть для сокращенія рядомъ **относительныхъ цѣлыхъ** чиселъ. Рядъ этотъ представляетъ такимъ образомъ рядъ безконечный въ двухъ направленіяхъ. Два числа этого ряда $+m$ и $-m$, симметрично расположенныя относительно O, можно называть **симметричными** (вмѣсто общепринятаго длиннаго термина: равные по величинѣ, но обратные по знаку). Для обоихъ этихъ чиселъ положительное число m называется **абсолютнымъ значеніемъ** и будетъ обозначаться $|m|$.

§ 12 Теорія отрицательныхъ чиселъ Вейерштрасса и др.

Соотвѣтственно изложеннымъ выше (въ § 2 и 3 ученія о дробныхъ числахъ) двумъ теоріямъ введенія дробныхъ чиселъ, мы имѣемъ и для отрицательныхъ чиселъ прежде всего двѣ теоріи Пикока-Ганкеля и Вейерштрасса.

Принципъ постоянства и былъ выставленъ Пикокомъ для перехода отъ алгебры **ариѳметической**, употребляющей буквы (общіе символы) для обозначенія **чиселъ** (числа для Пикока—только числа раціональныя положительныя) и ограничивающейся операціями надъ ними только въ случаѣ ихъ выполнимости, къ алгебрѣ **символической**, въ которой, какъ символы вполнѣ общи и неопредѣленны по значенію, такъ и операціи всегда могутъ быть выполнимы. Важнѣйшій изъ такихъ символовъ и есть $a-b$ въ случаѣ, когда $a < b$. Примѣняя къ операціямъ надъ этими символами принципъ постоянства, мы и получаемъ тѣ правила дѣйствій надъ отрицательными числами, которыя были выведены нами изъ разсматриванія паръ.

Въ теоріи отрицательныхъ чиселъ, данной Вейерштрассомъ, вводятся кромѣ основного элемента e противоположный элементъ e', удовлетворяющій равенству $a+e+e'=a$, гдѣ a состоитъ только изъ элементовъ e. Поэтому

$$e + e' = 0.$$

Если основная единица e называется **положительною**, то единица e' называется **отрицательною**. Соотвѣтственно дробнымъ частямъ ε_n (см. § 3) вводятся отрицательныя дробныя части ε'_n такъ что

$a+\varepsilon_n+\varepsilon'_n=0$ или $\varepsilon_n+\varepsilon'_n=0$. Дѣйствія надъ новыми единицами предполагаются подчиненными законамъ дѣйствій ранѣе установленнымъ.

Такъ какъ $a=a+(\varepsilon_n+\varepsilon'_n)+(\varepsilon_n+\varepsilon'_n)+\ldots=a+n\,\varepsilon_n+n\,\varepsilon'_n$, $=a+e+n\,\varepsilon'_n$, то имѣемъ $n\,\varepsilon'_n=e'$.

Двѣ численныя величины новаго рода равны, когда онѣ могутъ быть преобразованы такъ, что будутъ содержать въ равномъ числѣ, какъ положительные и отрицательные элементы e и e', такъ и дробныя части ε_n и ε'_n.

Предположимъ, что величины представлены въ формѣ $a=a_1+a_2\,e'$ и $b=b_1+b_2\,e'$, причемъ a_1, a_2, b_1, b_2 составлены только изъ e и ε_n. Равенство $a=b$ имѣетъ слѣдствіемъ равенство $a_1+a_2\,e'+a_2+b_2=b_1+b_2\,e'+a_2+b_2$ или $a_1+b_2=b_1+a_2$.

Обратно изъ равенства $a_1+b_2=b_1+a_2$ слѣдуетъ равенство $a=b$. Поэтому можно сказать: для того, чтобы a и b были равны, сумма изъ положительныхъ элементовъ a и отрицательныхъ b должна равняться суммѣ положительныхъ элементовъ b и отрицательныхъ элементовъ a. Въ отрицательныхъ элементахъ при этомъ e' замѣняется e.

Сложеніе численныхъ величинъ совершается, порознь соединяя части, составленныя изъ положительныхъ и отрицательныхъ элементовъ, и соединяя затѣмъ вмѣстѣ полученныя суммы.

Для **умноженія** должны быть даны законы умноженія единицъ т. е. произведенія ee, ee', $e'e$, $e'e'$. Какъ въ ученіи о положительныхъ числахъ $ee=e$. Общее положеніе о постоянствѣ законовъ операцій заставляетъ принять

$$e'e=ee'.$$

Изъ этого принятія выводятся какъ слѣдствія

$$e'e=ee'=e' \quad \text{и} \quad e'e'=e.$$

Чтобы доказать эти положенія, возьмемъ равенство $a=a+e+e'$ и умножимъ обѣ части его на e; получаемъ

$$ae = ae + ee + e'e.$$

Съ другой стороны $ae = ae + e + e'$. Сопоставляя вторыя части и замѣчая, что $ee = e$, имѣемъ $e'e = e'$.

Точно также изъ равенствъ

$$ae' = ae' + e + e'$$

$$ae' = ae' + ee' + e'e'$$

выводимъ: $e'e' = e$, такъ-какъ $ee' = e'$.

Подобнымъ-же образомъ выводятся законы умноженія $\varepsilon_m \varepsilon'_n$, $\varepsilon'_m \varepsilon'_n$.

Послѣ этого приложеніе формулы

$$(a+b+c+\ldots)\ (a'+b'+c'+\ldots) = aa'+ba'+bb'+\ldots$$

даетъ возможность вывести общее правило умноженія раціональныхъ чиселъ.

Изъ опредѣленія дѣйствій сложенія и умноженія выводятся правила обратныхъ операцій.

Литература по вопросу о логическомъ обоснованіи теоріи отрицательныхъ чиселъ чрезвычайно обширна и обзоръ ея не можетъ входить въ рамки нашего курса. Упомянемъ только теорію Кронекера, по которой понятіе объ отрицательныхъ числахъ можетъ быть исключено, замѣняя въ формулахъ множитель—1 неопредѣленною x и знакъ равенства Гауссовскимъ знакомъ сравненія $mod\ (x+1)$, такъ что равенство

$7-9=3-5$ напишется въ видѣ сравненія

$7+9x \equiv 3+5x$ ($мод\ x+1$), [$7+9x$ при дѣленіи на $x+1$ даетъ такой-же остатокъ какъ и $3+5x$].

Грассманъ въ своей ариѳметикѣ **) опредѣляетъ рядъ цѣлыхъ относительныхъ чиселъ, вводя, на ряду съ понятіемъ о числѣ слѣдующемъ за другимъ, понятіе о числѣ предшествующемъ.

---

*) Понятіе о числѣ (переводъ А. В.) Казань. 1893.

**) Arithmetik. 1861. Berlin. стр. 2.

На международныхъ конгрессахъ математики и фило софіи въ 1900 г. А. Падоа представилъ двѣ работы, содержащія алгебраическую теорію цѣлыхъ чиселъ, соотвѣствующую развивающей взгляды Грассмана теоріи Пеано для цѣлыхъ положительныхъ чиселъ (см. вып. 1 стр. 29). Какъ для Пеано вся ариѳметика цѣлыхъ положительныхъ чиселъ сводится къ тремъ первоначальнымъ (не опредѣлимымъ) символамъ или идеямъ: идея 0, идея цѣлаго числа и идея числа, слѣдующаго за другимъ и пяти независимымъ между собою предложеніямъ (постулатамъ), такъ, по Падоа, алгебрическая теорія цѣлыхъ чиселъ (т. е. теорія чиселъ цѣлыхъ положительныхъ и отрицательныхъ) можетъ быть построена на слѣдующихъ трехъ идеяхъ: идея цѣлаго числа, идея числа, слѣдующаго за другимъ (такое число, если оно слѣдуетъ за a. обозначимъ *) $scc\ a$) и идея числа симметричнаго числу a ($Sym a$) и на семи основныхъ постулатахъ. Вотъ эти постулаты.

1⁰. $Scc\ a$ есть цѣлое.

2⁰. $Sym\ a$ есть цѣлое.

3⁰. $Sym\ (sym\ a) = a$.

4⁰. $Sym \left\{ scc \left[sym \ (scca \right] \right\} = a$.

5⁰. Есть цѣлое x такое, что $Sym \cdot x = x$.

6⁰. Нѣтъ двухъ цѣлыхъ x и y различныхъ между собою такихъ, что $Sym\ x = x$ и $Sym\ y = y$.

7⁰. Если классъ u удовлетворяетъ условіямъ:

α) есть цѣлое, принадлежащее къ классу u.

β) всякій разъ, когда x принадлежитъ къ классу u, $suc\ x$ также принадлежитъ къ классу u.

γ) всякій разъ, когда x есть цѣлое такое, что $suc\ x$ принадлежитъ къ классу u, x принадлежитъ также къ классу u,

то всякое цѣлое принадлежитъ u.

Совмѣстимость этихъ постулатовъ доказывается существованіемъ системы, удовлетворяющей всѣмъ этимъ постулатамъ. Такова именно система **всѣхъ** чиселъ цѣлыхъ (включая и 0, и положительныя, и отрицательныя).

---

*) Scc – сокращенное Successivus (слѣдующій).

Постулаты въ то-же время не приводимы къ меньшему числу, т. е. ни одинъ изъ нихъ не можетъ быть выведенъ изъ другихъ *).

§ 14. Алгебра раціональныхъ чиселъ.

Мы можемъ повторить теперь почти слово въ слово сказанное нами въ § 4 ученія о дробныхъ числахъ.

Какимъ-бы путемъ мы ни вводили отрицательныя (пока цѣлыя числа) и ни установляли для нихъ основныя аксіомы и законы прямыхъ операцій, разъ эти аксіомы и законы совпадаютъ съ аксіомами и законами для области цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, то и законы обратныхъ операцій, составляющіе (см. вып. 1, § 18) логическое слѣдствіе опредѣленія обратныхъ операцій, аксіомъ и законовъ прямыхъ операцій переносятся безъ измѣненій и въ теорію отрицательныхъ чиселъ. Вмѣстѣ съ этимъ и вся получающаяся повторнымъ примѣненіемъ и комбинированіемъ законовъ семи алгебраическихъ операцій цѣпь формулъ является безъ измѣненія приложимою и къ отрицательнымъ числамъ. Введенныя въ предъидущихъ § отрицательныя числа—пока только цѣлыя, но если мы комбинируемъ только-что сказанное съ результатами § 4, то мы можемъ утверждать, что вся упомянутая цѣпь формулъ будетъ примѣнима также и къ болѣе общимъ числамъ, которыя можно разсматривать **или** какъ пары 1-й ступени (a, b), въ которыхъ числа a и b будутъ не цѣлыя положительныя, какъ мы до сихъ поръ предполагали, но общѣе, числа раціональныя (положительныя) или же, какъ пары $[a, b]$ (2-й ступени), въ которыхъ цѣлыя числа a и b могутъ быть не только положительныя, но и отрицательныя. $\left(\text{Пары } \left(\frac{1}{4}, 1\right)\right.$ и $[-3, 4]$ представляютъ для насъ теперь одно и то-же число $\left.-\frac{3}{4}.\right)$ Алгебра цѣлыхъ положительныхъ чиселъ (вып.

*) A. Padoa. Essai d'une théorie algébrique de nombres entiers, precédé d'une introduction logique à une théorie deductive quelconque (Bibl. du Congrès international de philosophie vol. III) Paris 1903.

Его-же. Un nouveau système irreductible de postulats pour l'Algèbre. (Compte rendu du congrès international mathématique de Paris). 1902.

1-й) и алгебра раціональныхъ положительныхъ чиселъ (отд. 1 наст. вып.) превращаются такимъ образомъ въ алгебру **общихъ раціональныхъ** (положительныхъ и отрицательныхъ) чиселъ, и изъ сказаннаго въ настоящемъ выпускѣ слѣдуетъ, что эта область **общихъ** раціональныхъ чиселъ *) есть область замкнутая по отношенію къ операціямъ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія и возвышенія въ цѣлую положительную степень т. е. если a и b суть два такія общія раціональныя числа, то $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $a:b$, a^m, если m есть цѣлое положительное число **), суть также общія раціональныя числа.

§ 15. Историческій очеркъ и конкретное значеніе отрицательныхъ чиселъ.

Діофантъ, величайшій ариѳметикъ древности, можетъ быть признанъ и отцомъ алгебры въ томъ видѣ, въ какомъ мы ее понимаемъ теперь. Онъ первый оперируетъ съ общими и сложными выраженіями, составленными изъ чиселъ ***) по опредѣленнымъ законамъ операцій, не прибѣгая, какъ Евклидъ и другіе греческіе геометры, къ геометрическимъ представленіямъ. Онъ первый, напр., подставляетъ вмѣсто произведенія $(x+1)(x+2)$ многочленъ x^2+3x+2, но только выражаетъ это равенство не буквами, какъ мы, но словами. При вычисленіи произведенія $(x-1)(x-2)$ онъ даетъ правило знаковъ (минусъ на минусъ — плюсъ), но отрицательныя числа, отдѣльно взятыя, для него не существуютъ и если квадратное уравненіе имѣетъ два рѣшенія, одно положительное, другое отрицательное, онъ не разсматриваетъ это послѣднее. Знаменитые индусскіе математики Аріабхатта, Брамагупта и Бхаскара Ачаріа (12-й вѣкъ) повидимому приближались къ современному пониманію отрицательныхъ чиселъ. Въ ихъ алгебрѣ мы встрѣчаемъ отдѣльно стоящіе отрицательные члены. Бхаскара

---

*) Въ послѣдующемъ мы будемъ употреблять болѣе краткій терминъ: **область раціональныхъ чиселъ** (область P).

**) Введеніе степеней съ отрицательнымъ показателемъ (см. ниже § 17) позволяетъ считать m и цѣлымъ отрицательнымъ числомъ.

***) раціональныхъ. Рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій, которыя онъ искалъ, суть рѣшенія въ раціональныхъ числахъ.

даетъ для уравненія $x^2 - 45x = 250$ два корня $x = 50$ и $x = -5$, но прибавляетъ, что второе значеніе не разсматривается и не допускается. Но комментаторъ къ его сочиненію уже проводитъ аналогію между положительными и отрицательными числами съ одной стороны и имуществомъ и долгами съ другой. Съ возрожденіемъ алгебры въ Италіи и другихъ странахъ западной Европы медленно, но постепенно стала развиваться идея о самостоятельныхъ отрицательныхъ числахъ; однако они были для математиковъ 16-го столѣтія numeri absurdi, ficti infra nihil (M. Stifel), aestimationes falsae seu fictae (Карданъ). Но развитіе теоріи уравненій показало, какъ разсматриваніе ихъ наравнѣ съ положительными упрощаетъ теоремы (отношенія, найденныя Гарріотомъ между корнями и коеффиціентами уравненій) и наконецъ Декартъ показалъ ихъ геометрическую интерпретацію (его предшественникомъ въ этомъ отношеніи былъ Альбертъ Жираръ).

Важное значеніе, пріобрѣтенное ими въ геометріи, и на которомъ мы сейчасъ остановимся подробнѣе, способствовало выясненію и ихъ общаго значенія.

Ученіе о цѣлыхъ положительныхъ числахъ имѣетъ конкретное приложеніе при изученіи группъ изъ дискретныхъ предметовъ и при изученіи отношеній порядка напр. при изученіи перемѣщеній между элементами (Теорія группъ перемѣщеній находится въ самой тѣсной зависимости отъ теоріи чиселъ; мы встрѣчались напр. уже не разъ съ круговыми перемѣщеніями). Въ предыдущемъ отдѣлѣ мы видѣли, что въ дробяхъ мы имѣемъ могущественное орудіе для рѣшенія вопросовъ о непрерывныхъ измѣряемыхъ величинахъ; системой дробныхъ чиселъ мы можемъ *съ сколь угодно большою степенью приближенія* изобразить всѣ состоянія, принимаемыя такою измѣряемою величиною, и замѣнить операціи надъ величинами операціями надъ числами. Но нельзя не замѣтить существеннаго различія между природою различныхъ непрерывныхъ величинъ. Однѣ (англичане называютъ ихъ **скалярными**) имѣютъ абсолютный нуль. Таковы объемъ, плотность, масса, энергія, температура (абсолютная—не градусы термометра). Другія величины, каковы напр. время, отрѣзки, отсчитываемые на одной и той же прямой линіи, и тѣ величины, которыхъ измѣненія изучаются нами на подобной линейной скалѣ (гальванометра напр.), т. е. величины, положеніе нуля на которыхъ произвольно и неопредѣленно, представляются намъ имѣющими возможность неопредѣленно т. е. безконечно далеко измѣняться въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ. [Наконецъ существуютъ и величины третьяго рода— **векторіальныя величины**, значенія которыхъ измѣняются не только съ положеніемъ точки, но и съ измѣненіемъ направленія въ пространствѣ. Таковы напр. въ Максвеллевской электромагнитной теоріи электрическая и магнитная силы, діэлектрическое перемѣщеніе, магнитная индукція. Таковъ напр., въ твердомъ тѣлѣ, температура котораго не пришла въ стаціонарное состояніе, тепловой токъ].

Отношеніямъ, которыя существуютъ между величинами втораго рода, и соотвѣтствуютъ какъ разъ тѣ отношенія, которыя представляютъ введенныя нами числа **относительныя**. Балансъ актива и пассива какого нибудь банка составляется по тѣмъ же правиламъ, по какимъ слагаются положительныя и отрицательныя числа. Сумма отрѣзковъ прямой линіи, отсчитываемыхъ въ опредѣленномъ прямомъ и обратномъ ему направленіи, будетъ отрѣзокъ, отсчитываемый въ прямомъ или обратномъ направленіи, смотря по тому, будетъ-ли сумма относительныхъ чиселъ, соотвѣтствующихъ этимъ отрѣзкамъ, положительна или отрицательна. Какъ между тремя разностями $(a-b)$, $(b-c)$ и $(c-a)$ мы имѣемъ **всегда** отношеніе $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$, такъ и между тремя отрѣзками AB, BC и CA (порядокъ буквъ опредѣляетъ направленіе отрѣзка) имѣетъ соотношеніе $AB+BC+CA=0$ (теорема Мёбіуса-Шаля). Мы имѣемъ возможность интерпретировать отрицательныя числа съ помощью тѣхъ или другихъ величинъ второго рода. Мы уже упоминали, что индусскіе математики интерпретировали отрицательные корни уравненій отношеніемъ между имуществами и долгами. В. Р. Гамильтонъ, находясь подъ вліяніемъ Критики Чистаго Разума“ Канта, видѣлъ въ отрицательныхъ числахъ отображеніе одной изъ кантовскихъ формъ чистаго воззрѣнія и, соотвѣтственно съ этимъ, разсматривалъ алгебру какъ науку «чистаго времени», науку о соотношеніяхъ эпохъ и промежутковъ времени. Съ педагогической точки зрѣнія особенно удобно по наглядности интерпретировать отрицательныя числа на отрѣзкахъ неопредѣленно продолженной въ обѣ стороны прямой *). Примѣръ: термометръ.

Многочисленныя возможныя интерпретаціи отрицательныхъ чиселъ показываютъ, какъ важно ихъ значеніе въ «мудрости вселенной», говоря словами Канта и какимъ важнымъ шагомъ было введеніе ихъ въ математику. Но, какъ повторялось не разъ въ исторіи математики, понятія вводятся, надъ ними оперируютъ, съ помощью ихъ достигаютъ весьма большихъ успѣховъ безъ точнаго выясненія ихъ истиннаго значенія, ихъ философіи, слишкомъ полагаясь на извѣстныя слова д'Аламберта: «Allez en avant et la foi vous viendra». Такъ было и съ философіею отрицательныхъ чиселъ. Ни взгляды Карно въ его большомъ сочиненіи «Géométrie de position», посвященномъ приложенію алгебры къ геометріи, ни опредѣленія Коши въ его знаменитомъ «Алгебраическомъ Анализѣ» не могутъ считаться достаточно ясными. Первый, кто представилъ весьма правильно смыслъ отрицательныхъ величинъ и ихъ значеніе, былъ знаменитый Кантъ въ сочиненіи, спеціально посвященномъ этому вопросу. Кромѣ цитаты, приведенной въ эпиграфѣ къ настоящему отдѣлу, приведемъ еще одно мѣсто изъ его „Опыта": „*Собственно ни одну величину нельзя назвать отрицательною, но нужно говорить, что изъ двухъ величинъ* $+a$ *и* $-a$ *одна величина есть отрицательная по отношенію къ другой*".

Тѣ-же самыя мысли высказалъ въ 1831 г. въ программѣ ко второму мемуару о теоріи биквадратичныхъ вычетовъ Гауссъ и убѣдительностью своего математическаго авторитета много способствовалъ ихъ распространенію. Приводимъ въ виду ихъ важности соотвѣтствующія мѣста in extenso:

---

*) Въ учебникѣ алгебры Бурле, принадлежащемъ къ ряду учебниковъ, издаваемыхъ подъ руководствомъ Дарбу, алгебрѣ предпосылается теорія отрѣзковъ прямой линіи. См. также замѣчательное по ясности изложеніе Клиффорда въ „Common sense of the exact sciences".

„Положительныя и отрицательныя числа могутъ находить приложеніе только тамъ, гдѣ численно опредѣляемое имѣетъ противоположное, которое, мысленно соединяемое съ первымъ, даетъ уничтоженіе. Такое предположеніе можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если мы будемъ разсматривать и численно опредѣлять не субстанціи (самостоятельно мыслимые предметы), но отношенія между двумя предметами. При этомъ требуется, чтобы эти предметы были расположены опредѣленнымъ образомъ въ рядъ напр. A, B, C, D,.... и чтобы отношеніе A къ B могло быть разсматриваемо равнымъ отношенію B къ C и т. д. Понятіе противоположенія совпадаетъ съ перемѣною отношенія, такъ-что, если отношеніе (или переходъ) отъ A къ B считается за $+1$, то отношеніе B къ A должно быть представлено черезъ -1. Предполагая, что такой рядъ неограниченно продолжается въ обѣ стороны, найдемъ, что каждое цѣлое число будетъ представляться какъ отношеніе нѣкотораго, произвольно принятаго за начало, члена къ опредѣленному члену ряда“.

„Насколько не опасаются вводить въ общую ариѳметику дробныя числа, хотя существуетъ такъ много пересчитываемыхъ вещей, въ примѣненіи къ которымъ дробь не имѣетъ никакого смысла, настолько же не слѣдуетъ отказывать отрицательнымъ числамъ въ правахъ, равныхъ съ положительными, потому только, что многія вещи не допускаютъ противоположенія. Реальность отрицательныхъ чиселъ достаточно оправдывается тѣмъ, что въ безчисленныхъ другихъ случаяхъ они находятъ подходящую основу (ein adaequates Substrat)“.

Послѣ Гаусса философія отрицательныхъ чиселъ можетъ считаться законченною и пониманіе истиннаго смысла отрицательныхъ чиселъ привело и къ правильному взгляду на числа комплексныя.

§ 16. Отрицательныя числа въ геометріи.

Особое значеніе имѣло введеніе относительныхъ чиселъ для геометріи; безъ него невозможно было-бы то измѣненіе въ отношеніяхъ между геометріей и чистою математикою т. е. ученіемъ о числахъ, которое Огюстъ Контъ называетъ въ своей Положительной Философіи „la grande révolution scientifique“. Геометрія—наука о протяженіяхъ—преимущественно передъ всѣми другими науками, занимающимися изученіемъ явленій окружающаго насъ внѣшняго міра, къ которому относится и наше собственное тѣло, издавна находилась въ столь сильной связи съ чистою математикою, что и до сихъ поръ считается ея составною частью. Конкретное представленіе алгебраическихъ формулъ на геометрическихъ фигурахъ предшествовало нахожденію самихъ формулъ. Наши теперешнія алгебраическія формулы и преобразованія замѣнялись у греческихъ геометровъ геометрическими преобразованіями. Книга вторая Началъ Евклида (между 306 и 283 г. до Р. Х.) составляетъ именно алгебру древнихъ; въ ней формулы алгебры наприм. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ доказываются геометрически сравненіемъ площадей. Первое предложеніе этой книги доказываетъ законъ дистрибутивности сравненіемъ площади прямоугольника, построеннаго на основаніи a и имѣющаго высоту $b+c$ съ суммою площадей прямоугольниковъ, имѣющихъ то-же основаніе и высоты равныя у одного b, у другого c. Подобнымъ-же образомъ теорія пропорцій между какими-либо величинами въ книгѣ V Началъ облечена въ геометрическую форму.

Но когда у индійскихъ математиковъ (VI и смежныхъ столѣтій), у арабскихъ (IX и слѣдующихъ столѣтій) и у европейскихъ (съ конца 15 вѣка) стала развиваться самостоятельно алгебра, то параллельно съ ея развитіемъ шло и приложеніе ея къ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ и наконецъ въ знаменитой Геометріи *) (1637 г.) **Декарта** (1596—1650) мы находимъ вполнѣ развитою великую мысль приложенія алгебры къ геометрическимъ вопросамъ и представленія геометрическихъ фигуръ аналитическими выраженіями. Систематическая доктрина рѣшенія вопросовъ геометріи съ помощью ученія о числахъ основывается на ме-

---

*) Эта небольшая книжка составляетъ приложеніе къ философскому труду Декарта: Discours sur la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences.

тодѣ **координатъ**, состоящемъ въ томъ, что положеніе каждой точки M на плоскости опредѣляется системою двухъ чиселъ, которыя и называются координатами точки. Эта система двухъ чиселъ можетъ быть взята разнообразно; такъ положеніе каждой точки можетъ быть опредѣлено, если извѣстно ея разстояніе отъ нѣкоторой точки 0 *) и уголъ, который линія, на которой отложено это разстояніе, составляетъ съ постоянною линіею (осью), проходящею черезъ точку 0; оно можетъ быть (почти) опредѣлено если даны разстоянія точки M до двухъ неподвижныхъ точекъ Но наиболѣе простой и поэтому плодотворный методъ опредѣленія положенія точки M есть методъ опредѣленія ея двумя координатами—разстояніями ея отъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ и пересѣкающихся въ опредѣленной точкѣ 0 (началѣ координатъ) опредѣленныхъ прямыхъ $0x$ и $0y$, осей абсциссъ и ординатъ.

При этомъ методѣ опредѣленія точки **декартовыми** координатами значеніе отрицательныхъ чиселъ выступаетъ особенно выпукло. Только введеніе отрицательныхъ чиселъ позволяетъ намъ отмѣтить **различными** парами чиселъ $(+a,+b)$, $(+a,-b)$, $(-a,+b)$, $(-a,-b)$ четыре точки, симметрично расположенныя относительно осей $0x$ и $0y$.

Благодаря введенію отрицательныхъ чиселъ является возможнымъ установить приблизительное, но сколь угодно точное соотвѣтствіе между системою точекъ плоскости и системою раціональныхъ чиселъ. Измѣряя съ помощью нѣкоторой единицы длины разстоянія точки M отъ осей $0x$ и $0y$, мы найдемъ два раціональныя числа, сколь угодно точно измѣряющія это разстояніе, и, придавая имъ соотвѣтствующій знакъ, получаемъ двѣ координаты точки M. Обратно, каждыя двѣ координаты, взятыя изъ области общихъ раціональныхъ чиселъ ^{r}, опредѣляютъ одну и только одну точку на плоскости, которая будетъ въ томъ или другомъ изъ четырехъ угловъ, образуемыхъ осями $0x$ и $0y$, смотря по комбинаціи знаковъ (+) и (—) у координатъ. Эту точку съ обѣими раціональными координатами будемъ для сокраще-

---

*) Начало этого метода можно найти еще до Декарта въ сочиненіи Николая Орезма. De latitudinibus formarum.

нія называть **раціональною** точкою. Соображенія, приведенныя выше въ ученіи о дробяхъ (§), позволяютъ опять сдѣлать предположеніе, что плоскость, разсматриваемая какъ совокупность раціональныхъ точекъ, содержитъ въ себѣ безконечно меньше индивидуумовъ (т. е. точекъ), чѣмъ плоскость, разсматриваемая какъ совокупность точекъ, координаты которыхъ опредѣляются **всѣми** десятичными дробями или **всѣми** и конечными и безконечными непрерывными дробями. Дѣйствительно новѣйшія математическія изслѣдованія показали, что, мысленно удаливши изъ плоскости всѣ раціональныя точки, мы, тѣмъ не менѣе, не нарушаемъ сплошности плоскости, т. к. можемъ проводить по ней непрерывныя кривыя. *)

Подобно тому какъ положеніе всякой точки на плоскости опредѣляется двумя числами, мы можемъ и для всякой другой поверхности найти систему двухъ чиселъ области P (криволинейныя координаты), опредѣляющихъ (иногда только приближенно) положеніе точки на поверхности. Таковы долгота и широта для шара и для земнаго глобуса: мы могли-бы слова сѣверная и южная, восточная и западная замѣнить произвольною, но уже неизмѣнною комбинаціею знаковъ + и —. (Мечтается, что недалеко то время, когда и въ народной школѣ будутъ этимъ путемъ подготовлять даровитыхъ учениковъ къ серьезному математическому образованію).

Примѣненіе идеи координатъ (этой idée-mère, какъ выражается О. Контъ) не ограничивается одною геометріею. Такъ физика характеризируетъ состояніе совершеннаго газа нѣсколькими числами; такъ въ физикѣ-же каждое количество цвѣтного свѣта можетъ быть, по отношенію къ чувствительному впечатлѣнію, представлено какъ соединеніе трехъ свѣтовыхъ количествъ, извѣстнымъ образомъ выбранныхъ, основныхъ цвѣтовъ. (На этомъ основано данное Ньютономъ представленіе закона смѣшенія цвѣтовъ

---

*) Такова напр. кривая $y=e^x$, на которой кромѣ точки $x=0$, $y=1$ нѣтъ ни одной раціональной точки, (e обозначаетъ такъ называемое Неперово число 2,718.....)

съ помощью построенія центра тяжести). (Гельмгольцъ — Счетъ и измѣреніе).

Вообще, если мы имѣемъ систему элементовъ, въ которой каждый элементъ можемъ опредѣлить n числами, то такая система элементовъ называется многообразіемъ n измѣреній (Mannigfaltigkeit—Риманъ). Система цвѣтовъ есть, слѣдовательно, многообразіе трехъ измѣреній. Пространство, разсматриваемое какъ совокупность точекъ, есть многообразіе **трехъ** измѣреній, но оно-же, разсматриваемое какъ совокупность прямыхъ, есть многообразіе **четырехъ** измѣреній. Введеніе координатъ элементовъ многообразій позволяетъ примѣнить къ многообразіямъ ученіе о числахъ, и современная аналитическая геометрія есть именно ученіе о многообразіяхъ (кривыхъ, поверхностяхъ). изслѣдуемыхъ съ помощью какъ алгебры, такъ и анализа безконечно-малыхъ. Въ каждомъ многообразіи съ числомъ измѣреній $\geqq 2$ мы можемъ выдѣлить элементы, составляющіе многообразіе меньшаго числа измѣреній; такъ на плоскости мы можемъ выдѣлить кривыя (многообразія одного измѣренія), въ пространствѣ—поверхности, кривыя. Если мы выдѣлили на плоскости какую-нибудь кривую, то этимъ самымъ установили нѣкоторую функціональную зависимость между координатами точекъ этой кривой, ибо на кривой каждому опредѣленному значенію одной координаты (напр. абсциссы x) соотвѣтствуетъ одно (или нѣсколько, но вполнѣ опредѣленныхъ значеній) другой (ординаты y): **y становится функціею отъ x,** и если эта функція можетъ быть выражена съ помощью знаковъ математическихъ операцій, то мы имѣемъ **уравненіе** кривой. Приведемъ два примѣра: 1) Прямая линія, проходящая черезъ начало координатъ и составляющая съ осью x уголъ α, имѣетъ своимъ уравненіемъ (мы предполагаемъ все время оси взаимно перпендикулярными) $y = tg\,\alpha . x$. 2) Кругъ радіуса R, центръ котораго лежитъ въ началѣ координатъ, имѣетъ уравненіемъ: $x^2 + y^2 = R^2$.

Обратно если мы зададимъ a priori нѣкоторую зависимость между y и x (напр. $y=x$, $y=x^2$, ... $y=x^n$, .. $y=e^x$, $y=e^{e^x}$, $y=logx$, $y=log\,logx$), то эта зависимость можетъ быть выражена графически: для этого отлагаемъ по оси x отъ начала координатъ отрѣзки соотвѣтствующіе различнымъ числамъ области P, и на перпендикулярахъ, возставленныхъ въ концахъ этихъ отрѣзковъ, отмѣтимъ соотвѣтствующія значенія y, вычисленныя по данной зависимости между x и y *). Соотвѣтствіе, устанавливаемое такимъ образомъ между ученіемъ о числахъ и ихъ функціяхъ и геометріей кривыхъ (или поверхностей) имѣетъ громадное значеніе и для той и для другой математической доктрины. Если, какъ мы уже сказали, современная аналитическая геометрія есть приложеніе ученія о числахъ къ геометріи и благодаря этому приложенію наши геометрическія знанія неизмѣримо превышаютъ знанія великихъ геометровъ Греціи, то и обратно въ ученіи о функціяхъ геометрическія представленія оказывали и оказываютъ до сихъ поръ громадныя услуги. Приведу въ примѣръ теорію характеристикъ кривыхъ и ея приложеніе къ задачѣ высшей алгебры объ отдѣленіи корней или связь между теоріею правильныхъ многогранниковъ и теоріею нѣкотораго класса дифференціальныхъ линейныхъ уравненій. Всѣ успѣхи современной математики подтверждаютъ мысль высказанную геніальнымъ итальянскимъ ученымъ 13 вѣка и поставленную нами въ эпиграфѣ къ этому отдѣлу.

§ 17. Степени съ обобщеннымъ показателемъ.

Обобщающее значеніе послѣдовательнаго введенія чиселъ 0 (см. вып. 1, стр. 24), чиселъ дробныхъ и наконецъ отрицательныхъ имѣетъ большое значеніе не только для матема-

---

*) Подобнымъ же образомъ получаются **эмпирическія кривыя**, т. е. графическія изображенія зависимостей, которыя, не будучи выражены математически, даются наблюденіемъ или опытомъ, какъ напр. кривыя хода температуры больного со временемъ (времена—абсциссы, температуры—ординаты) или кривыя, являющіяся результатомъ статистическихъ изслѣдованій. Подобныя же эмпирическія кривыя даются намъ регистрирующими аппаратами нашихъ метеорологическихъ инструментовъ. На томъ же принципѣ основывается построеніе графикъ желѣзнодорожныхъ поѣздовъ. Нельзя не пожелать въ виду громаднаго значенія метода координатъ и въ наукѣ и въ жизни, чтобы основанія его возможно скорѣе вошли въ обязательную программу нашихъ средне-учебныхъ заведеній—по примѣру французскихъ. Для первоначальнаго знакомства съ методомъ координатъ рекомендуемъ учебникъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія Нернста и Шенфлиса (харьковскій или казанскій переводъ).

тики въ ея приложеніяхъ къ изученію конкретныхъ явленій, но и для математики per se, какъ ученія объ операціяхъ. Такъ благодаря введенію новыхъ областей чиселъ мы можемъ однимъ символомъ выразить операціи по существу различныя между собою и ихъ свойства представить одною и тою же общею формулой, что представляетъ снова громадную экономію памяти и труда. Наиболѣе простой и важный примѣръ есть введеніе **степеней съ показателемъ 0, дробнымъ и отрицательнымъ.** Если условимся положить $a^0 = 1$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ и $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, то однимъ знакомъ a^α представляемъ и операціи возвышенія въ цѣлую степень, и операціи дѣленія, и операціи извлеченія корня; но свойства всѣхъ этихъ операцій выражаются одними и тѣми-же основными формулами

$$a^\alpha . a^\lambda = a^{\alpha+\lambda}$$
$$(a^\alpha)^\lambda = a^{\alpha\lambda}.$$

Повѣрку примѣнимости этихъ законовъ къ показателямъ 0, дробнымъ и отрицательнымъ, а слѣдовательно вообще къ числамъ области **P** читатель можетъ найдти въ элементарныхъ алгебрахъ или произвести самъ.

Тожество основныхъ формулъ математики влечетъ за собою и тожество слѣдствій. Поэтому-то формула бинома Ньютона, доказываемая въ элементарной алгебрѣ для цѣлаго положительнаго показателя, можетъ быть примѣнима и для общихъ показателей, если только вторая часть имѣетъ смыслъ, т. е. получающаяся въ этомъ случаѣ безконечная строка есть строка сходящаяся.

III. Ученіе объ ирраціональныхъ (несоизмѣримыхъ) числахъ.

Les nombres imitent l'espace qui sont
de nature si différents.

Pascal.

§ 18. Необходимость введенія ирраціональныхъ чиселъ.

Область раціональныхъ чиселъ, введенная въ двухъ предъидущихъ отдѣлахъ, (для сокращенія будемъ иногда обозначать ее **область P**) позволяетъ производить прямыя и обратныя операціи первыхъ двухъ ступеней, каковы-бы ни были **раціональныя числа**, соединяемыя этими операціями. Мы можемъ формулировать это свойство раціональныхъ чиселъ сокращенно, сказавъ: **область P (раціональныхъ чиселъ) есть область замкнутая по отношенію къ операціямъ первыхъ двухъ ступеней.** Переходя къ операціи возвышенія въ цѣлую степень, мы находимъ, что результатъ этой операціи, произведенной надъ раціональнымъ числомъ, даетъ всегда также раціональное число $\left(\left(\pm\frac{5}{7}\right)^3=\pm\frac{125}{343}\right)$.

Но обѣ обратныя операціи третьей ступени (извлеченіе корня и логариѳмированіе) снова требуютъ расширенія области чиселъ, даже въ томъ случаѣ, если дѣйствія производятся надъ цѣлыми положительными числами. Въ § 17 вып. 1-го доказаны слѣдующія двѣ теоремы. 1° Если $\sqrt[n]{D}$, гдѣ D есть цѣлое число, не можетъ быть выраженъ цѣлымъ числомъ, то онъ не можетъ быть выраженъ и дробью. 2°. Если алгебрическое уравненіе

$$x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots+tx+u=0,$$

въ которомъ коеффиціентъ при высшей степени есть 1, прочіе-же коеффиціенты суть цѣлыя числа (положительныя или отрицательныя). не удовлетворяется цѣлымъ числомъ (положительнымъ или отрицательнымъ), то оно не можетъ быть удовлетворено и полагая x равнымъ дробному числу.

Теорема 2-ая заключаетъ въ себѣ теорему 1-ую какъ частный случай, т. к. извлеченіе корня n-ой степени изъ D и рѣшеніе уравненія $x^n=D$ суть задачи тожественныя. Мы можемъ поэтому говорить вообще о задачѣ рѣшенія алгебрическаго уравненія n-ой степени съ цѣлыми коеффиціентами и съ коеффиціентомъ при высшей степени равнымъ единицѣ, тѣмъ болѣе, что легко показать, что рѣшеніе болѣе общаго уравненія, коеффиціенты котораго суть какія-либо числа раціональныя, приводится къ рѣшенію уравненія типа $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+..+tx+u=0$ (p, q, r .. u—суть цѣлыя числа).*)

---

*) Пусть дано уравненіе

(1) $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+kx+l=0$, гдѣ a, b, c, ... k, l суть раціональныя числа Найдемъ M- наименьшее кратное знаменателей чиселъ a, b, .. l, и умножимъ обѣ части уравненія на M, отъ чего корень уравненія не измѣняется. Новое уравненіе будетъ имѣть всѣ коэффиціенты цѣлые. Пусть оно есть

$$\alpha x^n+\beta x^{n-1}+\gamma x^{n-2}+..\varkappa x+\lambda=0 \qquad (2)$$

Составимъ уравненіе

$$\alpha\left(\frac{y}{\alpha}\right)^n+\beta\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{n-1}+\gamma\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{n-2}+..+\varkappa\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{n-2}+\lambda=0, \qquad (3)$$

которое, по умноженіи обѣихъ частей на α^{n-1}, приметъ видъ

$$y^n+\beta y^{n-1}+\gamma\alpha y^{n-2}+\ldots..+\varkappa\alpha^{n-2}y+\lambda\alpha^{n-1}=0 \qquad (3')$$

Нетрудно видѣть, что между корнями уравненій (2) и (3) существуетъ слѣдующее соотношеніе. Если корни уравненія (3) суть y_1, y_2, y_n, то корни уравненія (2) и слѣдовательно (1) суть $x_1=\frac{y_1}{\alpha}$, $x_2=\frac{y_2}{\alpha}$, .. $x_n=\frac{y_n}{\alpha}$ что и доказываетъ возможность рѣшеніе уравненіе съ раціональными коеффиціентами свести на рѣшенія уравненія типа

$x^n+p\,x^{n-1}+qx^{n-2}+..+tx+u=0$ (гдѣ $q, p, .. t, u$ суть цѣлыя числа).

Подобно тому какъ мы перешли отъ уравненія $f(x)=0$, имѣющаго корни x_1, x_2 .. x_n къ уравненію $f(y)=0$, имѣющему корни αx_1, αx_2, .. αx_n, полагая $x=\frac{y}{\alpha}$, можно отъ уравненія $f(x)=0$, преобразованіемъ $x=z-\alpha$, перейдти къ уравненію $f(z)=o$, имѣющему корни $x_1+\alpha$, $x_2+\alpha$, .. $x_n+\alpha$. Т. к. α есть произвольное число, то, полагая

$$\alpha=-\frac{x_1+x_2+\ldots.+x_n}{n}=+\frac{\beta}{n\alpha},$$

получимъ уравненіе, не имѣющее члена съ z^{n-1}. Обоими преобразованіями уравненіе полное 3-й степени легко приводится къ виду $x^3+px+q=0$.

Вторая обратная операція третьей ступени—логариѳмированіе—только въ исключительныхъ случаяхъ даетъ въ результатѣ цѣлое или раціональное число. Для того чтобы число N имѣло при основаніи A логариѳмъ раціональный, необходимо выполненіе условій, которыя найдутся слѣдующими соображеніями. Пусть $A=a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$; если $N=A^{\frac{m}{n}}$, то $N^{n}=a^{m\alpha} b^{m\beta} c^{m\gamma} \ldots l^{m\lambda}$. Это равенство показываетъ, что 1) въ составъ разложенія числа N на простые множители входятъ простые множители a, b, $c \ldots l$ и не могутъ входить никакіе другіе множители, т. е. $N=a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots l^{\lambda'}$ откуда имѣемъ $a^{n\alpha'} b^{n\beta'} c^{n\gamma'} \ldots l^{n\lambda'}=a^{m\alpha} b^{m\beta} \ldots l^{m\lambda}$ и 2) вслѣдствіе единственности разложеній всякаго числа на простые множители—имѣемъ пропорцію $\alpha' : \beta' : \gamma' : \ldots : \lambda' = \alpha : \beta : \gamma : \ldots : \lambda$.

Только при соблюденіи двухъ условій 1) и 2) число N можетъ имѣть раціональный логариѳмъ при основаніи A. Такъ напр. если $A=3600=2^4 . 3^2 . 5^2$ только числа, составленныя изъ простыхъ множителей 2, 3, 5, и показатели которыхъ притомъ пропорціональны числамъ 4, 2, 2 (напр. $2^2\, 3 . 5$, $2^6 . 3^3 . 5^3$, $2^8\, 3^4 . 5^4$) имѣютъ логариѳмы раціональные. Итакъ разсмотрѣніе **обѣихъ** обратныхъ операцій третьей ступени ставитъ передъ математикою снова альтернативу или признать только нѣкоторыя исключительныя уравненія разрѣшимыми и только нѣкоторыя цѣлыя числа имѣющими логариѳмы или новымъ расширеніемъ понятія о числѣ, введеніемъ области **ирраціональныхъ** чиселъ, достигнуть рѣшенія поставленныхъ задачъ во всей ихъ общности Именно введеніе ирраціональныхъ чиселъ и придало математикѣ ея **идеальный** характеръ, т. к. для приближеннаго рѣшенія уравненій или нахожденія логариѳмовъ мы могли бы удовольствоваться одними раціональными числами. Глубокій смыслъ таится поэтому въ томъ преданіи, по которому тайна существованія ирраціональныхъ чиселъ долго скрывалась въ тѣсномъ кружкѣ учениковъ Пиѳагора, и первый изъ его учениковъ, сдѣлавшій эту истину предметомъ обученія въ болѣе широкихъ кругахъ, погибъ какъ умилостивительная жертва, брошенная богамъ во время кораблекрушенія.

Къ истинѣ существованія ирраціональныхъ чиселъ греческіе геометры школы Пиѳагора были приведены геометрическими изслѣдованіями. Въ геометріи, какъ и въ ученіи о математическихъ операціяхъ, область раціональныхъ чиселъ (Р) совершенно достаточна для практическихъ цѣлей.

Всякій отрѣзокъ можетъ быть при всякой единицѣ длины представленъ **съ какъ угодно большою степенью точности** раціональнымъ числомъ; положеніе всякой точки на плоскости можетъ быть сколь угодно точно опредѣлено двумя числами, принадлежащими къ области *P*. Но пиѳагорейская школа доказала, что невозможно найти такую единицу длины, при которой и сторона квадрата и его діагональ выражались-бы цѣлыми числами (*) т. е. доказала **несоизмѣримость діагонали и стороны квадрата.** Это открытіе повлекло за собою рядъ глубочайшихъ изслѣдованій греческихъ геометровъ объ ирраціональныхъ отрѣзкахъ; вѣнцомъ ихъ является Х-ая книга «Началъ Евклида», посвященная ирраціональностямъ, получающимся при построеніяхъ съ помощью циркуля и линейки или, говоря алгебрически, выражающимся исключительно черезъ радикалы второй степени (таковы выраженія: $\sqrt{m\sqrt{n}}$, $\sqrt{\sqrt{a\sqrt{b}}}$ (медіаны), $a+\sqrt{b}$, $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ (биноміалы), $a-\sqrt{b}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt{a}-b$ (вычеты) и т. д.). Изученіе построеній этихъ ирраціональностей преслѣдуетъ цѣль пріема геометрическаго рѣшенія задачъ, сводящихся алгебрически на рѣшеніе уравненій высшихъ степеней, приводящихся къ цѣпи квадратныхъ уравненій. (Такъ, напр., предложенія 33—35 этой книги даютъ геометрическое рѣшеніе совмѣстныхъ уравненій $x^2+y^2=A$, $xy=B$, которыя, по исключеніи, даютъ уравненіе 4-ой степени). Книга X Началъ Евклида, наравнѣ съ „Псаммитомъ" [1]) Архимеда и Республикою Платона, останется навсегда безсмертнымъ доказательствомъ глубины и мощности греческаго генія.

(*) Геометрія Давидова 1897 г. стр. 57.

[1]) См. вып. 1 Введеніе въ Анализъ.

Греческіе геометры школы Платона при рѣшеніи задачъ объ удвоеніи куба и подобныхъ увидѣли скоро, что ирраціональностями, изученными въ книгѣ X, не исчерпываются геометрическія ирраціональности, что онѣ суть только простѣйшія изъ нихъ. Съ помощью циркуля и линейки не рѣшаются многія простыя задачи, для рѣшенія которыхъ и были введены коническія сѣченія и другія кривыя.

Геометрія научила насъ такимъ образомъ, говоря словами Дедекинда, что **„прямая линія безконечно богаче индивидумами** (точками, соотвѣтствующими отрѣзкамъ, какъ выражающимся, такъ и невыражающимся чрезъ числа области P) **чѣмъ область** P (числами цѣлыми и дробными)". Изслѣдованія Архимеда объ измѣреніи площадей привели его къ установленію одной изъ основныхъ аксіомъ ученія объ измѣримыхъ величинахъ (см. § 5) и его-же открытія въ механикѣ, сближавшія задачи геометріи съ задачами механики (опредѣленіе квадратуры параболы съ помощью механическихъ соображеній), вели къ распространенію той-же идеи на величины, изучаемыя механикою (силы, скорости, ускоренія, массы). Позже работы создателей новаго научнаго механическаго міросозерцанія, сводившаго на задачи геометріи и механики ученіе о всѣхъ непрерывныхъ величинахъ, привели естественно къ заключенію, что вообще всѣ состоянія непрерывныхъ величинъ не могутъ быть выражены числами области P. Это несоотвѣтствіе требовало измѣненія опредѣленія числа, принятаго геометрами Греціи, обобщенія понятія о числѣ и привело къ тому опредѣленію числа, которое формулировано было Ньютономъ (см. вып. 1, стр. 11) и по которому число есть отношеніе одной величины къ другой, принимаемой за единицу. Съ этимъ измѣненіемъ опредѣленія числа и открылся новый путь къ рѣшенію вопросовъ геометріи и вообще естественной философіи. **Непрерывное** число стало въ полное соотвѣтствіе съ **непрерывною** величиною и позволило изучать ее методами сначала алгебры (Vieta, Декартъ) и затѣмъ—анализа безконечно-малыхъ, въ основаніи котораго лежитъ идея непрерывности *).

Явилась возможность изученіе явленій **въ цѣломъ** сводить на изученіе явленій **безконечно-малыхъ элементовъ**, что даетъ тотчасъ-же упрощеніе и облегченіе вычисленій, составляющее основную цѣль анализа. Открылся, по горделивымъ словамъ Лейбница, тотъ царскій путь, въ которомъ когда то смѣло отказалъ греческій мудрецъ тиранну. Во многихъ областяхъ естественной философіи явилась возможность достигнуть цѣли всякой точной науки, заключающейся въ томъ, чтобы свести рѣшеніе задачъ природы на операціи надъ числами т. е. замѣнить преобразованіемъ формулъ разысканіе эмпирическихъ отношеній между величинами и изученіе законовъ природы--изученіемъ функціональныхъ зависимостей между числами. Громадное экономическое значеніе этого сведенія очевидно: изучая одну и ту же математическую функцію, мы изучаемъ въ ней законъ явленій разнаго типа (такъ изучая, напр., функцію $y=kx^2$ изучаемъ и зависимость площади круга отъ радіуса, и законъ свободнаго паденія тѣлъ и многія другія конкретныя зависимости механики и математической физики; изученіе тригонометрическихъ функцій совпадаетъ съ изученіемъ всѣхъ явленій волнообразнаго движенія, будетъ-ли это явленіе звука, или свѣта, или электрическихъ волнъ).

§ 18. Ариѳметическая теорія ирраціональныхъ чиселъ.

Ирраціональное число было внесено въ чистую математику, какъ мы видѣли въ предыдущемъ §, соображеніями, почерпнутыми изъ геометріи и вообще изъ ученія объ измѣреніи непрерывныхъ величинъ. На этомъ-же ученіи основывается и опредѣленіе числа, формулированное Ньютономъ. На изображеніи ирраціональныхъ чиселъ посредствомъ

*) C'est le monde exterieur qui nous a imposé le continu, que nous avons inventé sans doute, mais qu'il nous a forcés à inventer. Sans lui il n'y aurait pas d'analyse infinitésimale; toute la science mathématique se reduirait à l'Arithmétique on à la théorie du Substitutions (Poincaré).

непрерывныхъ величинъ (всего чаще геометрическихъ) основывалась и теорія операцій надъ несоизмѣримыми числами, которая поэтому и не могла имѣть достаточной строгости и опредѣленности. Въ общую систему ученія о числѣ, которая исходитъ изъ понятія о цѣломъ числѣ, „этомъ единственномъ настоящемъ объектѣ математической мысли“ (Пуанкаре), и въ которой послѣдовательное расширеніе понятія о числѣ является результатомъ изученія операцій надъ цѣлыми числами, и ирраціональныя числа должны быть введены строго логически: какъ опредѣленіе ихъ, такъ и установленіе условій равенства и неравенства и законовъ дѣйствій надъ ними должны быть даны строго ариѳметически, исходя исключительно изъ понятія о числахъ раньше введенныхъ т. е. о числахъ области P и не прибѣгая ни въ какимъ посторон нимъ, чуждымъ ариѳметикѣ, соображеніямъ. Это является тѣмъ болѣе необходимымъ, что ученіе объ измѣреніи величинъ далеко не такъ просто, какъ это представляется съ перваго раза. Мы привели въ ученіи о дробяхъ тѣ условія, которымъ величины должны удовлетворять для того, чтобы онѣ были измѣряемы.

Первый, кто обратилъ вниманіе на необходимость строго ариѳметической теоріи ирраціональныхъ чиселъ и ариѳметическаго доказательства тѣхъ теоремъ анализа, которыя доказывались до тѣхъ поръ исключительно геометрически, интуитивно (т. е. обращеніемъ къ наглядности), былъ пражскій математикъ и философъ Бернгардъ Больцано. Въ брошюрѣ, изданной въ 1817 г., онъ далъ строго ариѳметическое доказательство теоремы, по которой *если* цѣлый многочленъ $f(x)$ получаетъ, полагая $x=a$ и $x=b$, два численныя значенія, обратныя по знаку, то онъ обращается въ нуль для нѣкотораго значенія x, промежуточнаго между a и b *). Отвѣтомъ на выставленныя Больцано требованія явились опубликованныя въ семидесятыхъ годахъ XIX столѣтія три ариѳметическія теоріи ирраціональныхъ чиселъ: 1) теорія Дедекинда, 2) теорія Георга Кантора и 3) теорія Вейерштрасса.

---

*) B. Bolzano. Rein analytischer Beweis des Satzes. . . .1817.

Я избираю для подробнаго изложенія первую изъ этихъ теорій, изложенную Дедекиндомъ въ мемуарѣ: «Непрерывность и ирраціональныя числа» *) и основанную на понятіи о раздѣленіи *раціональныхъ* чиселъ на классы и на понятіи о *сѣченіи*.

Въ предыдущихъ отдѣлахъ даны условія, по которымъ можно расположить мысленно всѣ числа области раціональныхъ чиселъ въ порядокъ по ихъ величинѣ. Каждое раціональное число α раздѣляетъ въ такомъ случаѣ всѣ прочія раціональныя числа на два класса A_1 и A_2. Для того, чтобы произвести это раздѣленіе, отнесемъ къ классу A_1 всѣ числа раціональныя и меньшія α и къ классу A_2 всѣ раціональныя числа большія α. Что касается до самого раціональнаго числа α, то оно предполагается стоящимъ внѣ классовъ, оно есть только *сѣченіе* (Schnitt) классовъ A_1 и A_2 **). Каждому раціональному числу соотвѣтствуютъ два вполнѣ опредѣленныхъ класса, и эти классы очевидно имѣютъ слѣдующія свойства.

1⁰. Каждое число перваго класса A_1 менѣе каждаго числа второго класса A_2.

2⁰. Если какое-нибудь число a отнесено къ классу A_1, то всѣ числа меньшія a принадлежатъ къ тому-же классу и если какое-нибудь число b отнесено къ классу A_2, то всѣ числа большія b будутъ принадлежать къ тому-же классу.

3. Въ первомъ классѣ A_1 нѣтъ числа, которое было-бы больше всѣхъ чиселъ этого класса и во второмъ классѣ A_2 нѣтъ числа, которое было бы меньше всѣхъ чиселъ этого класса.

4. Всегда можно найдти въ классѣ A_1 число a_1 и въ классѣ A_2 число a_2 такія, что разность $a_2 - a_1$ будетъ меньше произвольнаго раціональнаго числа.

---

*) Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig. 1872.

**) Нѣкоторые авторы и въ томъ числѣ самъ Дедекиндъ относятъ само раціональное число къ тому или другому изъ классовъ, считая его по произволу или наибольшимъ изъ чиселъ класса A_1 или наименьшимъ изъ числа класса A_2. Но намъ кажется, что аналогія съ ирраціональными числами будетъ полнѣе, если мы будемъ считать раціональное число стоящимъ внѣ классовъ.

Свойства первое и второе очевидны; свойства третье и четвертое вытекаютъ изъ того свойства, что область раціональныхъ чиселъ есть *равномѣрно—плотное* (überalldicht) *множество*. По этому свойству между двумя раціональными числами можно вставить произвольно большее число раціональныхъ чиселъ большихъ чѣмъ одно и меньшихъ чѣмъ другое. Дѣйствительно, если-бы въ классѣ A_1 существовало послѣднее раціональное число (самое большее изъ чиселъ этого класса), то между нимъ и a не было-бы уже раціональныхъ чиселъ, что противорѣчитъ только что упомянотому свойству области раціональныхъ чиселъ. То-же самое относится и къ классу A_2. Съ другой стороны, вслѣдствіе того-же самого свойства, какъ-бы мало ни было ε, всегда можно найдти въ классѣ A_1 раціональное число $a_1 = a - \Theta$ и въ классѣ A_2 раціональное число $a_2 = a + \Theta'$, гдѣ Θ й $\Theta' < \frac{\varepsilon}{2}$; тогда разность $a_2 - a_1$, очевидно, меньше ε.

Указанныя свойства раціональныхъ чиселъ напоминаютъ взаимныя отношенія положенія между точками прямой линіи, если мы два противоположныя направленія отмѣтимъ словами „вправо" и „влѣво". Тогда, если p и q суть двѣ различныя точки прямой L, то или p лежитъ вправо отъ q и q влѣво отъ p или, обратно, q лежитъ влѣво отъ p и p—вправо отъ q.

Если p есть нѣкоторая точка на прямой L, то всѣ точки этой прямой могутъ быть распредѣлены въ два класса P_1 и P_2, если мы отнесемъ къ классу P_1 всѣ тѣ точки p_1 которыя лежатъ влѣво отъ p и къ классу P_2 всѣ тѣ точки p_2, которыя лежатъ вправо отъ p. Не трудно видѣть, что классы P_1 и P_2 обладаютъ свойствами аналогичными свойствамъ классовъ A_1 и A_2: 1°. каждая точка класса P_1 лѣвѣе каждой точки класса P_2; 2°. если какая нибудь точка p_1 отнесена къ классу P_1, то всѣ точки, лѣвѣе p_1 расположенныя, будутъ принадлежать къ тому-же классу и т. д.

3. Въ первомъ классѣ P_1 нѣтъ точки, которая была бы правѣе всѣхъ прочихъ точекъ этого класса, и во второмъ

классѣ P_2 нѣть точки, которая была-бы лѣвѣе всѣхъ точекъ этого класса.

4. Всегда можно найти въ классѣ A_1 точку p_1 и въ классѣ A_2 точку p_2 такія, что разстояніе между этими двумя точками будетъ менѣе сколь угодно малаго отрѣзка.

Каждое раціональное число является сѣченіемъ области раціональныхъ чиселъ на два класса; но обратное заключеніе не вѣрно: мы можемъ разбить область раціональныхъ чиселъ на два класса, обладающіе вышеуказанными свойствами, другимъ путемъ, исходя изъ рѣшенія тѣхъ задачъ, которыя не могутъ быть точно рѣшены съ помощью раціональныхъ чиселъ. Дѣйствительно, изученіе всѣхъ такихъ задачъ (будетъ-ли это извлеченіе корня изъ неполной степени рѣшеніе алгебраическаго уравненія, логариѳмированіе или какая-либо другая задача, являющаяся при дальнѣйшимъ развитіи математическихъ изслѣдованій (*)), приводя къ невозможности рѣшенія въ раціональныхъ числахъ, указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и способъ распредѣленія *всѣхъ* раціональныхъ чиселъ на два класса, обладающіе всѣми тѣми свойствами, которыя были указаны выше для классовъ A_1 и A_2.

Разъяснимъ это на простомъ примѣрѣ извлеченія квадратнаго корня изъ числа 3.

Какое раціональное число мы ни взяли-бы, его квадратъ будетъ или меньше или больше 3; соотвѣтственно съ этимъ относимъ его къ классу A_2 или къ классу A. Такъ напр. числа 1,7; 1,72; 1,729... будутъ отнесены къ классу A_1; къ тому-же классу отнесутся и всѣ числа, меньшія 1,7, числа, заключающіяся между 1,72 и 1,729 и т. д. Напротивъ, числа 1,8; 1,73.. будутъ отнесены къ классу A_2 также какъ и всѣ числа большія 1,8, числа, заключающіяся между 1,73 и 1,8 и т. д.

*) Напр. нахожденіе значенія тригонометрической функціи Sinx, Cosx.... по данному значенію угла x или обратная задача нахожденія угла по данному значенію тригонометрической функціи. Послѣдняя задача приводитъ къ такъ называемымъ *круговымъ* функціямъ: arc cosx, arctang x.

Для того, чтобы распредѣленіе раціональныхъ чиселъ на классы шло систематично, мы можемъ поступать слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ два числа 1, 7, и 1, 8, изъ которыхъ одно отнесено къ классу A_1, а другое къ классу A_2, и вставимъ между ними рядъ раціональныхъ чиселъ, отличающихся одно отъ другого на 0,1; т. е. числа 1,71; 1,72;... квадраты первыхъ чиселъ этого ряда будутъ менѣе 3, квадраты послѣднихъ чиселъ будутъ болѣе 3, и соотвѣтственно этому одни изъ вставленныхъ чиселъ отнесутся къ классу A_1, другія—къ классу A_2. Взявши два сосѣднихъ числа, изъ которыхъ одно отнесено къ классу A_1, а другое къ классу A_2—въ данномъ случаѣ числа 1,72 и 1,73—вставляемъ между ними новый рядъ чиселъ съ разностью 0,01 и находимъ снова два сосѣднія числа, одно относимое къ классу A_1, другое къ классу A_2. Между этими числами вставляемъ новый рядъ чиселъ съ разностью 0,001 и т. д.

Ясно, что этимъ способомъ мы будемъ послѣдовательно приближаться къ распредѣленію *всѣхъ* раціональныхъ чиселъ въ два класса, постоянно уменьшая число чиселъ сомнительныхъ (такими были сначала числа между 1,7 и 1,8, потомъ между 1,72 и 1,73 и т, д.), но ясно вмѣстѣ съ тѣмъ, что этотъ пріемъ есть одинъ изъ тѣхъ *безконечныхъ процессовъ*, которые никогда не могутъ закончиться. Дѣйствительно, онъ закончился бы только тогда, когда привелъ бы къ раціональному числу, квадратъ котораго равенъ 3; такого числа не существуетъ. Но, не заканчиваясь никогда, указанный процессъ ведетъ къ распредѣленію всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса. Классы эти очевидно обладаютъ всѣми вышеуказанными свойствами. Свойства *первое* и *второе* очевидны. Свойство *третье* есть слѣдствіе безконечности процесса, который поэтому никогда не дастъ намъ ни числа большаго всѣхъ чиселъ класса A_1, ни числа меньшаго всѣхъ чиселъ класса A_2. Наконецъ свойство *четвертое* вытекаетъ изъ того, что вышеуказанный пріемъ даетъ намъ постоянно **два** числа, принадлежащія къ двумъ различнымъ классамъ, разность между которыми принимаетъ послѣдовательно значенія 0,1; 0,01; 0,001 и т. д., и можетъ поэтому быть сдѣлана менѣе сколь угодно малаго раціональнаго числа.

Тотъ пріемъ, который мы подробно объяснили на примѣрѣ извлеченія квадратнаго корня, можетъ быть примѣнимъ и при рѣшеніи другихъ задачъ. Пусть, напр., требуется рѣшить уравненіе $x^3 - 3x - 7 = 0$. Многочленъ $x^3 - 3x - 7$ принимаетъ положительное значеніе при $x = 3$ и отрицательное при $x = 2$. Поэтому корень уравненія по своему численному значенію болѣе 2 или менѣе 3. Подставляя между 2 и 3 рядъ промежуточныхъ чиселъ съ разностью въ 0, 1 т. е. 2, 1; 2, 2; . . . . , 2,9
найдемъ два сосѣднихъ числа 2, 3 и 2, 4, для одного изъ которыхъ многочленъ будетъ имѣть положительное значеніе, между тѣмъ какъ для другого это значеніе будетъ отрицательно. Между этими двумя числами вставляемъ снова рядъ промежуточныхъ значеній съ разностью 0,01 и т. д., опредѣляя между ними два сосѣднихъ числа, дающихъ по подстановкѣ въ многочленъ ему разные знаки и т. д.

Если требуется найдти Log_2 15, то замѣчая, что $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, вычисляемъ $2^{3,1}$; $2^{3,2}$; . . . .
и снова находимъ два сосѣднія значенія показателя m_2 и m_1 такія, что $2^{m_1} < 15$, $2^{m_2} > 15$. Между этими значеніями вставляемъ рядъ промежуточныхъ значеній съ разностію 0,01 и т. д.

Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ можно найдти два ряда *раціональныхъ приближеній*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n\ \ldots\ldots$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ b_n,$$

находя которыя мы вмѣстѣ съ тѣмъ осуществляемъ и искомое распредѣленіе всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса*). Всякій разъ, когда мы имѣемъ такое распредѣ-

*) Практическія цѣли математики вполнѣ удовлетворяются, если найдемъ такія раціональныя приближенія; такъ практическая часть *высшей алгебры* состоитъ въ указаніи пріемовъ, которое позволили-бы *возможно скорѣе* найти *возможно близкое* приближеніе къ корню алгебраическаго уравненія.

леніе, мы говоримъ, что оно производитъ нѣкоторое *сѣченіе* (A_1, A_2) въ области раціональныхъ чиселъ введеніемъ новаго *ирраціональнаго числа* a, которое мы считаемъ вполнѣ опредѣленнымъ этимъ сѣченіемъ. Мы будемъ говорить, что число a соотвѣтствуетъ этому сѣченію или что оно производитъ это сѣченіе.

Послѣ введенія такихъ ирраціональныхъ чиселъ каждому опредѣленному сѣченію въ области раціональныхъ чиселъ соотвѣтствуетъ одно и только одно опредѣленное раціональное или ирраціональное число.

Опредѣливъ ирраціональныя числа, какъ *сѣченія* между двумя классами чиселъ раціональныхъ, мы вводимъ эти ирраціональныя числа въ ученіе о числахъ и такимъ образомъ получаемъ новую *расширенную* область чиселъ, заключающую въ себѣ и всѣ раціональныя числа и всѣ ирраціональныя числа. Это расширеніе области чиселъ позволяетъ считать разрѣшимыми задачи нахожденія корня изъ цѣлаго (положительнаго) числа, рѣшенія многихъ алгебраическихъ уравненій и т. п., представляя рѣшенія этихъ задачъ *числомъ*. Такъ два класса, получающіеся при рѣшеніи задачъ извлеченія квадратнаго корня изъ числа 3, опредѣляютъ ирраціональное число, которое и обозначается знакомъ $\sqrt{3}$; два класса, получающіеся при практическомъ рѣшеніи уравненія $x^3 - 3x - 7 = 0$ опредѣляютъ ирраціональное алгебрическое число, корень этого уравненія.

Новая расширенная область чиселъ будетъ называться областью вещественныхъ чиселъ и для сокращенія мы будемъ иногда называть ее областью В.

Для того, чтобы она могла быть предметомъ математическаго изученія, необходимо однако 1) опредѣлить условія равенства между числами области B, 2) привести ихъ въ извѣстный опредѣленный порядокъ, если это возможно и 3) опредѣлить операціи надъ ними.

I. Условія равенства.

1. Два числа раціональныя или ирраціональныя называются равными или неравными смотря по тому, соотвѣт-

ствуютъ ли они одному и тому-же или разнымъ сѣченіямъ т. е. два числа α и β равны, если числа раціональныя меньшія α совпадаютъ съ числами раціональными меньшими β и числа раціональныя большія α совпадаютъ съ числами раціональными большими β. Не трудно видѣть, что одно изъ этихъ условій имѣетъ своимъ слѣдствіемъ другое такъ-что для того, чтобы показать равенство чиселъ α и β достаточно, напр., показать, что всякое число раціональное меньшее α будетъ и меньше β и что всякое раціональное число меньшее β будетъ и меньше α. Изъ даннаго опредѣленія равенства слѣдуетъ, что 1^0 $\alpha = \alpha$, 2^0 если $\alpha = \beta$, то $\beta = \alpha$ и 3^0 если $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$, то $\alpha = \gamma$ (рефлективность, симметричность и транзитивность отношенія называемаго равенствомъ между двумя вещественными числами).

II. Приведеніе въ порядокъ чиселъ области B.

Пусть мы имѣемъ два раздѣленія раціональныхъ чиселъ, происходящія или отъ разсматриванія нѣкотораго раціональнаго числа или получающіяся при рѣшеніи нѣкоторой задачи, не рѣшаемой съ помощью чиселъ раціональныхъ. Пусть одно раздѣленіе есть раздѣленіе на классы A_1 и A_2, другое—на классы B_1, B_2, пусть первое соотвѣтствуетъ вещественному числу α, второе—вещественному числу β. Если классъ A_1 содержитъ числа, которыя не содержатся въ классѣ B_1 и слѣдовательно обратно классъ B_2 содержитъ такія числа, которыя не содержатся въ классѣ A_2, то мы говоримъ, что α больше β или β меньше α, [$\alpha > \beta$ или $\beta < \alpha$.] (Напр. пусть первое раздѣленіе производится ирраціональнымъ числомъ $\sqrt{3}$, второе раціональнымъ числомъ 1, 5. Число 1, 6, содержащееся въ A_1, не содержится въ B_1 и потому $\sqrt{3} > 1{,}5$).

Данное такимъ образомъ для вновь введенныхъ чиселъ опредѣленіе понятій *больше* и *меньше* даетъ возможность расположить всѣ числа области B въ извѣстный порядокъ, или, употребляя терминъ Кантора, разсматривать область B какъ *упорядоченное множество*. Канторъ называетъ *множество**) *упорядоченнымъ*, если между его элементами m существуетъ опредѣленный „*порядокъ по рангу*", при которомъ изъ двухъ произвольныхъ элементовъ m_1 и m_2 одинъ занимаетъ *низшій*, другой *высшій* рангъ и притомъ такъ что, если изъ трехъ элементовъ m_1, m_2, m_3, эл. m_1 ниже по рангу m_2, m_2 ниже m_3, то и m_1 непремѣнно ниже по рангу m_3. Данное нами опрдѣленіе понятій *больше* и *меньше* таково, что если $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ то и $\alpha > \gamma$, т. е. условившись расположить числа области B въ порядкѣ по рангу сообразно ихъ возрастающей или убывающей величинѣ, мы сдѣлали эту область *упорядоченнымъ множествомъ*.

Въ томъ случаѣ, когда $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ мы будемъ для сокращенія говорить, что число β лежитъ между числами α и γ.

Если α и γ суть два различныхъ числа, то существуетъ безконечное множество различныхъ чиселъ β, лежащихъ между α и γ. Такимъ образомъ область $\boldsymbol{B}$ подобно области P имѣетъ то свойство множества, для котораго Поль Дюбуа Реймондъ предложилъ названіе „пантахіи". *) Какъ бы ни были близки между собою элементы пантахическаго множества, между ними можно вставить безконечное множество другихъ элементовъ того-же множества.

Идею распредѣленія раціональныхъ чиселъ въ два класса можно также распространить на числа области B. Всякое число этой области α очевидно раздѣляетъ всѣ числа на два класса A_1, A_2, каждый изъ которыхъ содержитъ безконечное множество чиселъ; къ классу A_1 относимъ всѣ тѣ числа α_1, которыя меньше a и къ классу A_2 всѣ тѣ числа α_2, которыя болѣе a. Но область B имѣетъ свойство

*) См. вып. 1. стр. 32, вып. 2. стр. 19. Множество можно опредѣлить, какъ совокупность элементовъ, имѣющихъ общіе признаки, но идею множества можно разсматривать также и какъ одну изъ тѣхъ первоначальныхъ идей, которыя не нуждаются въ опредѣленіи. Считаемъ однако полезнымъ привести теперь и опредѣленіе данное Канторомъ. „Подъ множествомъ" говоритъ онъ „подразумѣваемъ каждое соединненіе въ одное цѣлое опредѣленныхъ, хорошо различаемыхъ предметовъ нашего воспріятія или нашей мысли. Эти предметы называются элементами множества". Mathem Ann Bd 46.

**) Иначе, такія множества называются „повсемѣстно плотными" (überalldicht) котораго не имѣла область раціональныхъ чиселъ, свойство, которое дѣлаетъ изъ нея *ариѳметическій континуумъ*. *) Свойство это можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Какимъ бы путемъ мы ни раздѣлили область чиселъ B на два класса A_1 и A_2 такъ, чтобы каждое число α_1 класса A_1 было меньше каждаго числа α_2 класса A_2, существуетъ всегда число α области B составляющее сѣченіе между этими двумя классами, такъ что всякое число меньшее α принадлежитъ къ классу A_1 и всякое число большее α—къ классу A_2. Это число есть вмѣстѣ съ тѣмъ единственное число, имѣющее указанное свойство.

Доказательство. Какъ только дано раздѣленіе чиселъ **B** на два класса A_1 и A_2, мы можемъ тотчасъ-же составить и раздѣленіе чиселъ **P**, распредѣленныхъ также на два класса a_1 a_2, относя къ первому всѣ раціональныя числа класса A_1, къ второму всѣ раціональныя числа класса A_2. Эти два класса a_1 и a_2, по предыдущему, опредѣляютъ нѣкоторое раціональное или ирраціональное число. Это число и будетъ число α.

Если β есть число отличное отъ α, то существуетъ безконечное множество раціональныхъ чиселъ γ, которыя лежатъ между β и α. Если $\beta < \alpha$, то и $\gamma < \alpha$; слѣдовательно γ принадлежитъ къ классу a_1, а потому и къ классу A_1; а такъ какъ и $\beta < \gamma$, то и β принадлежитъ къ тому-же классу A_1; къ классу A_2 оно принадлежать не можетъ, такъ какъ каждое число этого класса болѣе чѣмъ число γ, принадлежащее къ классу A_1. Точно также если $\beta > \alpha$, то и $\gamma > \alpha$; γ принадлежитъ къ классу a_2 и слѣдовательно къ классу A_2; такъ какъ $\beta > \gamma$, то слѣдовательно и β принадлежитъ къ тому-же классу A_2. Если такимъ образомъ каждое число β, отличное отъ числа α, принадлежитъ или классу A_1 или классу A_2, то α есть единственное число, не принадлежащее ни къ тому ни къ другому классу и составляющее сѣченіе между классами A_1 и A_2. и т. д.

---

*) Пуанкаре (Наука и Гипотеза) называетъ область B континуумомъ втораго порядка.

Доказанная теорема полагаетъ рѣзкое различіе между областью В (ариѳметическимъ континуумомъ) и областью P. Раздѣленіе чиселъ области P на два класса A_1 и A_2, имѣющіе то свойство, что каждое число класса A_1 меньше каждаго числа класса A_2, не даетъ всегда (точнѣе даетъ въ исключительныхъ случаяхъ) числа той-же самой области P. Напротивъ раздѣленіе чиселъ ариѳметическаго континуума даетъ всегда число того-же самаго континуума. Мы познакомимся далѣе ближе съ другимъ характеристическимъ свойствомъ континуума, его **неперечислимостью**, рѣзко отличающимъ его отъ множества раціональныхъ чиселъ, отъ множества перечислимаго *). **Въ множествѣ раціональныхъ чиселъ съ одной стороны и въ ариѳметическомъ (или линейномъ) континуумѣ съ другой стороны мы имѣемъ примѣры множествъ, рѣзко отличающихся по своему „порядковому типу“ (Ordnungs Typus) и имѣющихъ различныя мощности.** (См. ниже)

III. Операціи надъ числами области В. *Сложеніе.* Чтобы опредѣлить **сумму** двухъ вещественныхъ чиселъ α и β, соотвѣтствующихъ сѣченіямъ области *раціональныхъ* чиселъ $(A_1\ A_2)$ и $(B_1,\ B_2)$, составимъ новое раздѣленіе той же области на классы C_1 и C_2 по слѣдующему правилу. Относимъ къ C_1 всѣ раціональныя числа, которыя менѣе или равны суммѣ двухъ раціональныхъ чиселъ $a_1 + b_1$, изъ которыхъ одно a_1 принадлежитъ къ классу A_1, другое b_1 къ классу B_1; напротивъ къ классу C_2 относимъ всѣ тѣ раціональныя числа $a'_1 + b'_1$, которыя больше или равны суммѣ двухъ раціональныхъ чиселъ, изъ которыхъ одно a'_1 принадлежитъ къ классу A_2, а другое b'_1 къ классу B_2.

Не трудно показать, что классы C_1 и C_2 имѣютъ всѣ свойства, принадлежащія классамъ раціональныхъ чиселъ, опредѣляющихъ сѣченіе и вмѣстѣ съ тѣмъ новое ирраціональное число.

1. Каждое изъ чиселъ класса C_1, очевидно, меньше каждаго изъ чиселъ класса C_2.

---

*) См. вып. 2 стр. 21.

2. Если какое нибудь раціональное число a отнесено къ классу C_1, то и всѣ числа меньшія a относятся къ тому-же классу и если какое-нибудь раціональное число b отнесено къ классу C_2, то и всѣ числа большія b отнесутся къ тому-же классу.

3. Въ классѣ C_1 нѣтъ числа, которое было-бы больше всѣхъ чиселъ этого класса, потому что въ классахъ A_2 и B_2 нѣтъ такихъ чиселъ, которыя были-бы больше всѣхъ чиселъ соотвѣтственнаго класса; точно также въ классѣ C_2 нѣтъ числа, которое было-бы меньше всѣхъ чиселъ этого класса.

4. Легко видѣть, что разность двухъ чиселъ $a_1' + b_1'$ и $a + b$, изъ которыхъ первое принадлежитъ къ классу C_2, а второе къ классу C_1, можетъ быть сдѣлана менѣе сколь угодно малаго числа; дѣйствительно

$$(a'_1 + b'_1) - (a_1 + b_1) = (a_1' - a_1) + (b_1' - b_1),$$

каждое-же изъ слагаемыхъ, стоящихъ во второй части, можетъ быть сдѣлано менѣе сколь угодно малаго числа.

Эти свойства классовъ C_1 и C_2 показываютъ, что они опредѣляютъ нѣкоторое сѣченіе, которому и соотвѣтствуетъ ирраціональное число, *сумма* чиселъ α и β. Нахожденіе этого числа есть операція сложенія чиселъ области В и эта операція очевидно обладаетъ всѣми свойствами операціи сложенія чиселъ раньше разсмотрѣнныхъ областей.

1. Она есть операція **коммутативная**.

Доказательство. Чтобы доказать равенство

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

замѣтимъ, что первое число опредѣляется классами C_1 и C_2, причемъ классъ C_1 состоитъ изъ раціональныхъ чиселъ $a_1 + b_1$, классъ C_2—изъ раціональныхъ чиселъ $a'_1 + b'_1$; второе число опредѣляется напротивъ классами C_1' и C_2', причемъ классъ C_1' состоитъ изъ раціональныхъ чиселъ $b_1 + a_1$, а C_2'—изъ раціональныхъ чиселъ $b_1' + a_1'$. Но изъ коммутативности сложенія раціональныхъ чиселъ вытекаетъ тожественность классовъ C_1, C'_1— съ одной стороны, классовъ C_2 и C_2'—съ другой, а слѣдовательно и равенство чиселъ $\alpha + \beta$ и $\beta + \alpha$.

2. Операція сложенія есть операція **ассоціативная.**

Для доказательства читатель долженъ составить классы раціональныхъ чиселъ, опредѣляющіе число $\alpha + (\beta + \gamma)$ и классы, опредѣляющіе число $(\alpha + \beta) + \gamma$. Изъ ассоціативности сложенія раціональныхъ чиселъ вытекаетъ тожество классовъ, опредѣляющихъ эти два числа, и слѣдовательно равенство

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

3. Модуль операціи сложенія есть число 0.

Умноженіе ирраціональныхъ чиселъ. Чтобы опредѣлить *произведеніе* двухъ вещественныхъ чиселъ α и β, соотвѣтствующихъ сѣченіямъ области раціональныхъ чиселъ (A_1 и A_2) и (B_1, B_2,), составимъ новое раздѣленіе той-же области на классы C_1, и C_2 по слѣдующему правилу. Относимъ къ C_1 всѣ раціональныя числа, которыя менѣе или равны произведенію двухъ раціональныхъ чиселъ a_1 b_1, изъ которыхъ одно a_1 принадлежитъ къ классу A_1, другое b_1— къ классу B_1; напротивъ къ классу C_2 относимъ всѣ тѣ раціональныя числа (a'_1. b'_1), которыя больше или равны произведенія двухъ раціональныхъ, чиселъ, изъ которыхъ одно a'_1 принадлежитъ къ классу A'_2, адругое b'_2.—къ классу B_2.

Не трудно показать, что классы C_1 и C_2 имѣютъ всѣ свойства (1—4), принадлежащія классамъ раціональныхъ чиселъ, опредѣляющихъ сѣченіе и вмѣстѣ съ тѣмъ новое ирраціональное число. Такъ напр. (4) легко показать, что разность двухъ чиселъ $a_1' \, b_1'$ и $a_1 \, b_1$, изъ которыхъ первое принадлежитъ къ классу C_2, а второе къ классу C_1, можетъ быть сдѣлана менѣе сколь угодно малаго числа. Дѣйствительно, полагая $a_1' - a_1 = \alpha$ и $b_1' - b_1 = \beta$, имѣемъ $a_1'b_1' - a_1 \, b_1 = a_1\alpha + b_1 \beta + \alpha \, \beta$. Но разности α и β могутъ быть сдѣланы меньше сколь угодно малаго числа ε [свойство 4 для (A_1, A_2) и (B_1, B_2,)], а потому и вторая часть можетъ быть также сдѣлана меньше сколь угодно малаго числа.

Классы C_1 и C_2 опредѣляютъ нѣкоторое сѣченіе, которому и соотвѣтствуетъ ирраціональное число, *произведеніе* чиселъ α и β. Нахожденіе этого числа есть операція умноженія чиселъ области B и изъ правила, выше даннаго для нахожденія этого числа, вытекаетъ, что умноженіе чиселъ области B обладаетъ всѣми свойствами операціи умноженія чиселъ ранѣе разсмотрѣнныхъ областей, т. е. оно есть операція **коммутативная и ассоціативная**; оба закона дистрибутивности имѣютъ также мѣсто и модуль операціи умноженія есть число 1.

$$\alpha\beta=\beta\alpha$$
$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$
$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$
$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$
$$\alpha.\ 1=\alpha.$$

Доказательство этихъ свойствъ операціи умноженія, не представляющее никакихъ затрудненій для читателя, вникнувшаго въ доказательство свойствъ операціи сложенія, мы и позволяемъ себѣ не приводить.

Возвышеніе ирраціональныхъ чиселъ въ цѣлую положительную степень. Чтобы опредѣлить цѣлую положительную m-ую степень ирраціональнаго числа α, опредѣляемаго сѣченіемъ (A_1. A_2) области раціональныхъ чиселъ, составимъ новое сѣченіе той-же области, относя къ классу C_1 всѣ раціональныя числа равныя или меньшія m-ыхъ степеней раціональныхъ чиселъ, составляющихъ классъ A_1, и къ классу C_2 всѣ раціональныя числа, равныя или большія m-ыхъ степеней раціональныхъ чиселъ, составляющихъ классъ A_2. Легко видѣть, что классы C_1 и C_2 имѣютъ всѣ свойства (1 — 4), принадлежащія классамъ раціональныхъ чиселъ, опредѣляющимъ сѣченіе и вмѣстѣ съ тѣмъ новое ирраціональное число. Такъ напр. свойство 4-е доказывается слѣдующимъ образомъ. Пусть b есть число, принадлежащее къ классу A_2, a—число, принадлежащее къ классу A_1 и соотвѣтственно этому b^m принадлежитъ къ классу C_2, a^m —къ классу C_1. По извѣстному тожеству алгебры

$$b^m-a^m=(b-a)\ (b^{m-1}+b^{m-2}a+b^{m-3}a^2+\ldots+ba^{m-2}+a^{m-1});$$

Такъ-какъ разность b—a—по опредѣленію—можетъ быть сдѣлана менѣе сколь угодно малаго числа, а полиномъ стоящій въ скобкахъ, очевидно, менѣе конечнаго числа mb^{m-1}, то и разность b^m-a^m можетъ быть сдѣлана менѣе сколь угодно малаго числа.

Для вводимой такимъ образомъ операціи возвышенія въ цѣлую положительную степень будутъ имѣть очевидно мѣсто слѣдующіе законы:

$$(\alpha\beta)^n = \alpha^n \beta^n$$
$$\alpha^m \alpha^n = \alpha^{m+n}$$
$$(\alpha^m)^n = \alpha^{mn}$$

Переходимъ теперь къ *обратнымъ* операціямъ. Введеніе отрицательныхъ чиселъ позволяетъ свести *вычитаніе* на сложеніе. Разность двухъ ирраціональныхъ чиселъ α и β, соотвѣтственно опредѣляемыхъ сѣченіями (A_1, A_2) и (B_1 B_2) можетъ быть опредѣлена слѣдующимъ образомъ. Составимъ новое сѣченіе области раціональныхъ чиселъ, относя къ классу $\overline{B}_1$ всѣ числа симметричныя (см. выше стр. 46) съ числами класса B_1 и къ классу $\overline{B}_2$—числа симметричныя съ числами класса B_3. Эти два класса ($\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$) опредѣляютъ ирраціональное число, симметричное съ числами β и которое будетъ обозначаться β. Составляя затѣмъ изъ классовъ (A_1, A_2) и ($\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$) новое сѣченіе областей раціональныхъ чиселъ, по правилу выше данному для операціи сложенія, мы будемъ считать это сѣченіе (C_1, C_2) опредѣляющимъ ирраціональное число $\alpha—\beta$.

Изъ этого опредѣленія разности вытекаетъ, что $(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$ т. е. что вычитаніе, опредѣленное нами, есть операція, обратная сложенію. Основываясь на этомъ опредѣленіи, можно вывести также тѣ формулы, которыя связываютъ двѣ операціи первой ступени: прямую и обратную, т. е. формулы (см. вып. I. стр. 27)

$$a+(b-c)=(a+b)-c$$
$$a-(b+c)=(a-b)-c$$
$$a-(b-c)=(a-b)+c$$
$$a-b=(a+n)-(b+n)$$
$$a-b=(a-n)-(b-n).$$

Эти формулы вмѣстѣ съ законами прямой операціи позволяютъ затѣмъ, примѣняя основныя аксіомы, очевидно примѣнимыя и къ новымъ числамъ, вывести всю цѣпь формулъ алгебры, въ которыя входятъ только знаки сложенія и вычитанія.

Подобно тому, какъ вычитаніе было сведено на сложеніе, *дѣленіе* сводится на умноженіе, если мы предварительно опредѣлимъ число $\frac{1}{\alpha}$ обратное числу α. Для этого, предполагая, что число α соотвѣтствуетъ сѣченію (A_1, A_2), отнесемъ къ классу C_1 всѣ числа обратныя числамъ класса A_2 и къ классу C_2—числа обратныя числамъ класса A_1.

Сѣченіе области раціональныхъ чиселъ, производимое классами (C_1, C_2) опредѣляетъ нѣкоторое ирраціональное число, которое называемъ обратнымъ числу α и обозначаемъ знакомъ $\frac{1}{\alpha}$. Изъ его опредѣленія вытекаетъ: $\alpha\frac{1}{\alpha} = 1$.

Частное двухъ ирраціональныхъ чиселъ $\frac{\beta}{\alpha}$ можетъ быть опредѣлено, какъ произведеніе чиселъ β и $\frac{1}{\alpha}$, опредѣляемыхъ сѣченіями (B_1, B_2) и (C_1, C_2); опредѣленное такимъ образомъ новое ирраціональное число очевидно удовлетворяетъ равенству $\alpha.\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}.\alpha = \beta$ т. е. позволяетъ рѣшить задачу обратную задачѣ умноженія и вводитъ новую операцію—операцію дѣленія. Для опредѣляемой такимъ образомъ операціи *дѣленія* ирраціональныхъ чиселъ β и α имѣютъ мѣсто прежде всего всѣ тѣ формулы, которыя связываютъ двѣ операціи второй ступени: умноженіе и дѣленіе (см вып. I. стр. 27)

$$a.(b:c)=(a.b):c$$
$$a:(b.c)=(a:b):c$$
$$a:(b:c)=(a:b).c$$
$$a:b=(a.n):(b.n)$$
$$a:b=(a:n):(b:n)$$

Изъ опредѣленія дѣленія могутъ быть выведены также и формулы, которыя могутъ быть названы законами дистрибутивности для дѣленія:

$$(a+b):m=a:m+b:m$$
$$(a-b):m=a:m-b:m$$

Извлеченіе корня изъ ирраціональнаго числа. Чтобы опредѣлить $\sqrt[n]{\alpha}$, если α есть число ирраціональное или раціональное, не равное точно n ой степени другого раціональнаго числа, относимъ къ классу C_1 всѣ раціональныя числа, n—ыя степени которыхъ менѣе числа α, и къ классу C_2 всѣ тѣ числа, которыхъ n ыя степени болѣе α. Эти классы C_1, C_2 обладаютъ всѣми свойствами классовъ опредѣляющихъ сѣченіе области раціональныхъ чиселъ. Дѣйствительно, всякое раціональное число будетъ принадлежать къ тому или другому изъ классовъ; числа перваго класса будутъ всѣ менѣе чиселъ второго класса. Въ первомъ классѣ не можетъ быть числа которое было-бы болѣе всѣхъ чиселъ этого класса: каково-бы ни было число b перваго класса C_1, всегда можно найти число b_1 котораго n-ая степень менѣе α, но притомъ такое, что $\alpha - b_1^n < \alpha - b^n$ т. е $b_1^n > b^n$ и потому $b_1 > b$.

Подобнымъ же образомъ доказывается, что и во второмъ классѣ нѣтъ числа которое было бы менѣе всѣхъ чиселъ этого класса.

Такимъ образомъ классы C_1 и C_2 опредѣляютъ нѣкоторое ирраціональное число, которое и будемъ называть корнемъ n-ой степени изъ α и обозначать $\sqrt[n]{\alpha}$. Дѣйствительно, не трудно видѣть, что $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ такъ-какъ если мы составимъ два новые класса раціональныхъ чиселъ D_1, D_2, относя къ классу D_1 всѣ n-ыя степени раціональныхъ чиселъ класса C_1 и къ D_2 всѣ n-ыя степени раціональныхъ чиселъ класса C_2, то эти классы опредѣляютъ ирраціональное число α.

Изъ опредѣленія $\sqrt[n]{\alpha}$ выводятся, пользуясь законами возвышенія въ степень, данными выше для ирраціональныхъ чиселъ, слѣдующіе законы извлеченія корня:

$$\text{I.}\quad \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

$$\text{II.}\quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$$

$$\text{III.}\quad \sqrt[n]{a^q} = (\sqrt[n]{a})^q$$

$$\text{IV.}\quad \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}$$

$$\text{V.}\quad \sqrt[np]{a^{nq}} = \sqrt[p]{a^q}.$$

Въ этихъ формулахъ n, p, q обозначаютъ цѣлыя положительныя числа.

Но опредѣленіе $\sqrt[n]{a}$ позволяетъ распространить на ирраціональныя числа понятіе о степени съ раціональнымъ показателемъ (§ 17) и распространить на эти степени слѣдующія семь формулъ возвышенія въ степень:

$$1.\ a^p \cdot a^q = a^{p+q}.\quad 2.\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \text{ если } p>q,$$

$$3.\ \frac{a^p}{a^q} = 1, \text{ если } p=q,\quad 4.\ \frac{a^p}{a^q} = \frac{1}{a^{q-p}} \text{ если } p<q$$

$$5.\ a^q b^q = (ab)^q;\quad 6.\ \frac{a^q}{b^q} = \left(\frac{a}{b}\right)^q\quad 7\ (a^p)^q = a^{pq}\ ^{1)}$$

Введеніе несоизмѣрныхъ чиселъ приводитъ къ новому обобщенію понятія о степени, къ введенію степени съ несоизмѣримымъ показателемъ. Но мы отлагаемъ этотъ вопросъ равно какъ оставляемъ безъ разсмотрѣнія съ точки зрѣнія теоріи Дедекинда вопросы о логариѳмированіи и о рѣшеніи алгебрическихъ уравненій; изъ предъидущаго достаточно выяснился для читателя тотъ путь, слѣдуя которому мы можемъ при рѣшеніи каждаго изъ этихъ вопросовъ получить сѣченіе области P на классы, опредѣляющее новое ирраціональное число—логариѳмъ числа или корень алгебрическаго уравненія.

Такова теорія Дедекинда, при изложеніи которой мы старались возможно болѣе придерживаться автора теоріи. Она излагается въ настоящее время во многихъ курсахъ съ большими или меньшими видоизмѣненіями. Изъ этихъ видоизмѣненій мы упомянемъ теоріи Паша [2]) и Росселя [3])

---

[1]) *Историческое примѣчаніе.* Степени съ дробнымъ показателемъ отрывочно разсматривались еще Николаемъ Орезмомъ (Nicole Oresme, Algoritmus proportionum около 1360 г.) и Жираромъ.

Систематическое употребленіе дробныхъ показателей принадлежитъ Ньютону. Въ письмѣ отъ 13 іюля 1676 г. онъ пишетъ: Nam sicut analystae pro a, aa, aaa, ... scribere solent a, a^2, a^3, sic ego pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{Ca^5}$ scribo $a^{1/2}$, $a^{3/2}$, $a^{5/3}$.

[2]) Pasch. Einleitung in die Differential und Integralrechnung. Leipz. 1882

[3]) Russel. Principles of mathematics. 1902.

совпадающія въ томъ, что ирраціональное число отожествляется съ однимъ изъ двухъ классовъ, служащихъ къ его опредѣленію въ теоріи Дедекинда и именно съ классомъ A_1 (чиселъ раціональныхъ меньшихъ) и опредѣляется такимъ образомъ какъ числовой отрѣзокъ (Zahlenstrecke или segment).

§ 20. Ариѳметическія теоріи Мере-Кантора, Вейерштрасса, Кронекера и Гильберта.

1. *Теорія Мере-Кантора.*

Теорія Дедекинда и ея видоизмѣненія, данныя Пашемъ и Рэсселемъ, опредѣляетъ ирраціональное число какъ *сѣченіе* двухъ *классовъ* раціональныхъ чиселъ т. е. двухъ множествъ, заключающихъ въ себѣ *всѣ* раціональныя числа безъ исключенія. Вторая ариѳметическая теорія, основныя черты которой почти одновременно были найдены и опубликованы Мере (1869)*) и Георгомъ Канторомъ (1872)**), основывается на разсмотрѣніи рядовъ, заключающихъ въ себѣ безконечное множество раціональныхъ чиселъ, но чиселъ слѣдующихъ одно за другимъ по нѣкоторому опредѣленному закону. Для того чтобы такой безконечный рядъ раціональныхъ чиселъ

$$u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$$

(Мере называетъ этотъ рядъ варіантою) могъ служить для логическаго опредѣленія нѣкотораго ирраціональнаго числа, онъ долженъ удовлетворять слѣдующему условію:

А. *Разность* $u_{n+m} - u_n$ *дѣлается безконечно малою при возрастаніи* n, или другими словами, разность $u_{n+m} - u_n$ можетъ быть сдѣлана при всякомъ m менѣе сколь угодно

---

*) Подробнѣе теорія изложена въ его: Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale. Paris. 1872.

**) Теорія изложена Г. Канторомъ въ томъ самомъ замѣчательномъ мемуарѣ: „Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen (Math. Annalen Band V.), въ которомъ въ первый разъ были опубликованы имъ начала теоріи множествъ.

малаго положительнаго раціональнаго числа ε, если мы возьмемъ n достаточно большимъ, и остается меньше ε при возрастаніи n до безконечности *).

Условіе А обще обоимъ изложеніямъ Мере и Кантора и если далѣе эти изложенія расходятся, то главнымъ образомъ въ терминологіи.

Мере называетъ рядъ (1) удовлетворяющій условію А *сходящеюся варіантою* и двѣ сходящіяся варіанты

$$u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$$
$$v_1, v_2, \ldots v_m, \ldots$$

эквивалентными, если разность $u_m - v_n$ стремится къ нулю, когда указатели m и n неопредѣленно возрастаютъ. Если существуютъ два раціональныя числа U, V такія, что начиная съ подходящихъ значеній указателей m и n разности $U - u_m$, $V - v_n$ остаются по абсолютной величинѣ меньшими произвольнаго положительнаго числа ε, то эти два числа U и V равны или неравны смотря по тому эквивалентны или нѣтъ варіанты u и v; во второмъ случаѣ знакъ разности $U - V$ совпадаетъ съ тѣмъ знакомъ, который въ концѣ концевъ принимаетъ разность $u_m - v_m$. Въ томъ случаѣ, когда не существуетъ раціональныхъ чиселъ, имѣющихъ указанное свойство, мы вводимъ особыя фиктивныя числа, которыя и обозначаемъ спеціальными для каждой сходящейся варіанты знаками U, V. Эти фиктивныя числа равны или неравны смотря по тому эквивалентны или нѣтъ соотвѣтствующія сходящіяся варіанты; въ послѣднемъ случаѣ

---

*) Условіе это было введено въ теорію сходимости строкъ Коши въ 1821 г. (Алгебрическій анализъ), но ранѣе Коши было найдено Больцано и дано въ 1817 г. въ брошюрѣ Rein analytischer Beweis... Послѣдній формулируетъ это условіе слѣдующимъ образомъ: „если рядъ величинъ

$$F_1(x),\ F_2(x), \ldots\ F_n(x), \ldots\ F_{n+r}(x) \ldots$$

имѣетъ то свойство, что разность между n-ымъ членомъ $F_n(x)$ и позднѣйшимъ, какъ бы этотъ послѣдній ни отстоялъ далеко отъ n-аго, остается менѣе всякой сколь угодно малой величины, если мы возьмемъ n достаточно большимъ; то существуетъ всегда нѣкоторая постоянная и притомъ единственная величина, къ которой приближаются все болѣе и болѣе члены ряда“.

фиктивное число U выше (больше) или ниже (меньше), чѣмъ фиктивное число V смотря по тому, какой знакъ (положительный или отрицательный) принимаетъ и удерживаетъ разность $u_m - v_n$.

Операціи надъ фиктивными числами опредѣляются какъ операціи надъ рядами. Такъ напр. если даны два числа U и V, опредѣляемыя сходящимися варіантами

$$u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_m, \ldots \text{ и } v_1, v_2 \ldots . \; v_n \; \ldots$$

то сумма чиселъ $u + v$ опредѣляется сходящеюся варіантою

$$u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots\ldots u_m + v_m, \ldots$$

Изъ этого опредѣленія сложенія фиктивныхъ *ирраціональныхъ* чиселъ вытекаютъ какъ слѣдствіе законы ихъ сложенія. Подобнымъ-же образомъ опредѣляются прочія операціи надъ ирраціональными числами и выводятся законы этихъ операцій.

Такова теорія Мере.

Г. Канторъ называетъ ряды, удовлетворяющіе условію А *основными рядами* (Fundamentalreihen) и говоритъ про нихъ что они имѣютъ опредѣленный предѣлъ b, приписывая такимъ образомъ каждому ряду свой особый знакъ b.

Равенство $b=b'$ и неравенство $b>b'$ или $b<b'$ опредѣляются слѣдующимъ образомъ. Если даны два ряда, изъ нихъ

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$
$$a_1', a_2', \ldots a_n'$$

(первый имѣетъ опредѣленный предѣлъ b, а второй—b') то между этими рядами могутъ существовать слѣдующія три взаимно исключающія отношенія: 1) $a_n - a'_n$ становится безконечно мало, при увеличеніи n; 2) $a_n - a'_n$ начиная съ нѣкотораго n остается постоянно больше чѣмъ нѣкоторая положительная (раціональная) величина ε или 3) $a_n - a_n'$ остается, начиная съ нѣкотораго n, постоянно меньше, чѣмъ отрицательная раціональная) величина $-\varepsilon$ Въ первомъ случаѣ $b=b'$, во второмъ $b>b'$ и въ третьемъ $b<b'$.

Подобнымъ-же образомъ опредѣляются отношенія ряда (1), имѣющаго предѣлъ b, къ раціональному числу a. Или 1. $a_n - a$ становится безконечно —малымъ при возрастающемъ n или 2) $a_n - a$ остается, начиная съ нѣкотораго n постоянно больше, чѣмъ ε или 3) $a_n - a$ остается начиная съ нѣкотораго n постоянно меньше чѣмъ—ε. Соотвѣтственно этимъ тремъ отношеніямъ мы и полагаемъ

$$b = a,\ b > a,\ b < a.$$

Изъ этихъ опредѣленій слѣдуетъ, что, если b есть предѣлъ ряда (1), то разность $b - a_n$ становится безконечно —малою при возростаніи n, чѣмъ между прочимъ оправдывается обозначеніе b какъ предѣла ряда (1)

Обозначаемъ совокупность численныхъ величинъ b буквою B

Элементарныя операціи, производимыя надъ раціональными числами распространяются на новую область B слѣдующимъ образомъ.

Есл b, b', b'' суть три численныя велнчины, принадлежащія къ области B, то формулы

$$b \pm b' = b'',\ bb' = b''.\ \frac{b}{b'} = b''$$

выражаютъ, что между рядами, соотвѣтствующими числамъ b b', b'' существуютъ соотношенія

$$\text{пред}(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0$$
$$\text{пред}(a_n .\ a_n' - a_n'') = 0$$
$$\text{пред}\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) = 0$$

Подобныя-же опредѣленія могутъ быть даны для тѣхъ случаевъ, когда изъ трехъ чиселъ одно или два принадлежатъ къ области раціональныхъ чиселъ А.

Вообще каждое уравненіе, образованное посредствомъ конечнаго числа элементарныхъ операцій

$$F(b,\ b' \dots\ b^{(i)}) = 0$$

выражаетъ нѣкоторое опредѣленное отношеніе, существующее между тѣми рядами, которые опредѣляютъ численныя величины b, b', $b^{(i)}$.

Подобно тому, какъ область B получилась изъ области раціональныхъ чиселъ А, она въ совокупности съ областью А можетъ произвести новую область С. Если данъ безконечный рядъ b_1, b_2, ... b_n, численныхъ величинъ изъ областей А и В, причемъ всѣ онѣ не могутъ принадлежать къ области А, и если этотъ рядъ таковъ, что разность $b_{n+m}-b_n$ становится безконечно — малою при возрастаніи n, каково бы то ни было m, то про этотъ рядъ говорятъ, что онъ имѣетъ опредѣленный предѣлъ c. Тогда численныя величины c составляютъ область С. Безъ труда переносятся на область С опредѣленія равенства, большаго и меньшаго и установляются опредѣленія элементарныхъ операцій какъ надъ величинами c, такъ и надъ этими величинами совмѣстно съ величинами изъ области В и А.

Однако между введеніемъ областей В и С существуетъ важное различіе Между областями В и А существуетъ то соотношеніе, что каждое a можетъ быть приравнено b, но обратно не каждое b равно нѣкоторому a. Напротивъ также какъ каждое b соотвѣтствуетъ нѣкоторому c, такъ и обратное каждое c равно нѣкоторому b. Другими словами области В и С взаимно покрываются, несмотря на логическое различіе этихъ двухъ областей. Канторъ считаетъ нужными сохранить различеніе этихъ областей и, разсуждая далѣе аналогично предъидущему, получаетъ изъ области С и предшествующихъ область Д, и т. д. Черезъ λ подобныхъ переходовъ доходятъ до области L. Вмѣстѣ съ введеніемъ этихъ областей устанавливается и цѣпь опредѣленій для равенства и неравенства чиселъ этихъ областей и для элементарныхъ операцій надъ этими числами. Отношеніе области L къ предшествующимъ, за исключеніемъ области А, таково, что численная величина l всегда можетъ считаться равной каждой изъ численныхъ величинъ k,.... c, b и обратно. Уравненіе $F(l', l' .. l^{(i)})=0$, составленное изъ чиселъ l'. $l'...l^{(i)}$ съ помощью конечнаго числа элементарныхъ операцій, можетъ быть разсматриваемо, по теоріи Кантора, какъ выраженіе для извѣстнаго отношенія между $i+1$ вообще λ — кратно безконечныхъ рядовъ раціональныхъ чиселъ; эти многократные безконечные ряды получаются изъ бозконечныхъ рядовъ, опредѣляющихъ l, l',... $l^{(i)}$, если мы въ нихъ элементы замѣнимъ соотвѣтствующими имъ рядами, подобнымъ-же образомъ поступаемъ съ получаемыми такимъ образомъ двойными рядами и продолжаемъ такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока не доходимъ до ирраціональныхъ чиселъ.

II. Теорія Вейерштрасса.

Въ третьей ариѳметической теоріи ирраціональныхъ численныхъ величинъ, которую знаменитый берлинскій математикъ Карлъ Вейерштрассъ (1815—1897) уже съ 1865 г. года излагалъ какъ введеніе въ свои лекціи по теоріи функцій, ирраціональныя числа опредѣляются какъ и въ теоріи Мере-Кантора съ помощью ***перечислимаго*** ряда раціональныхъ чиселъ. Въ этой теоріи абсолютныя (положительныя) ***раціональныя*** числа разсматриваются (см. выше стр. 10) какъ аггрегаты, составленные изъ главной ***единицы, взятой конечное*** число разъ изъ и конечнаго числа различныхъ *дробныхъ* частей единицы, также взятыхъ каждая ***конечное*** число разъ. Главная единица и дробныя ея части называются *элементами*. Раціональное число дано, когда извѣстны его элементы и извѣстно, сколько разъ въ него входитъ каждый элементъ. Если мы предположимъ, что число элементовъ можетъ безпредѣльно увеличиваться, то по мѣрѣ ихъ увеличенія получаемъ монотонный (постоянно возрастающій) рядъ раціональныхъ чиселъ. Примѣромъ такого ряда можетъ служить рядъ послѣдовательныхъ приближеній къ $\sqrt{2}$, въ которыхъ число десятичныхъ знаковъ постоянно возрастаетъ. Если мы предположимъ, что число

---

*) Литература по теоріи Кантора. Кромѣ вышеупомянутаго мемуара необходимо познакомиться съ § 9 мемуара Кантора: „Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltiqkeiten. (Math Ann Bd. 21). Въ этсмъ мемуарѣ Канторъ сравниваетъ свою теорію съ теоріями Дедекинда и Вейерштрасса.

Видоизмѣненіе теоріи Мере—Кантора, предложено Гейне. (Die Elemente der Functionenlehre Crelle's J Bd. 74). Гейне предъ опредѣленіемъ равенства двухъ числовыхъ рядовъ вводитъ опредѣленіе элементарнаго ряда. Рядъ a_1, a_2,.. a_n называется элементарнымъ, если число a_n при возрастаніи n дѣлается менѣе сколько угодно малой величины.

элементовъ безконечно велико, то мы получаемъ численную величину, которая дана, когда извѣстны ея элементы и извѣстно, какое конечное число разъ каждый элементъ входитъ въ численную величину.

Такимъ образомъ въ опредѣленіи, данномъ Вейерштрассомъ для численной величины, нисколько не предполагается чтсбы число элементовъ было конечно, но только требуется чтобы каждый *элементъ* входилъ въ численную величину конечное число разъ. Сравненіе численныхъ величинъ между собою и съ раціональными числами основываютъ на на очевидной возможности выдѣлять изъ численныхъ величинъ частные аггрегаты, составленные изъ тѣхъ же элементовъ, входящихъ въ численную величину, но въ конечномъ числѣ и меньшемъ. Напр.:

$A=m_1 e_1+m_2 e_2+\ldots$

Изъ А можно выдѣлить аггрегатъ.

$n_1 e_1+n_2 e_2+\ldots$ $(n_1<m_1,\ n_2<m_2 \ldots)$

Раціональное число *r* заключается въ численной величинѣ *a*, если изъ послѣдней можно извлечь частный аггрегатъ, равный *r*. Численная величина равна раціональному числу r, если изъ численной величины можно выдѣлить всякій частный аггрегатъ, меньшій чѣмъ R, но нельзя выдѣлить ни одинъ, большій чѣмъ R. Численная величина *a* называется конечною, если можно указать раціональное число R такое, что всякое раціональное число r, заключающееся въ *a*, меньше чѣмъ R.

Двѣ конечныя численныя величины *a*, *b равны*, когда каждое раціональное число, заключающееся въ a, заключается въ *b* и обратно, всякое раціональное число, заключающееся въ *b*, заключается въ *a*.

Когда двѣ численныя величины *a b* не равны, то необходимо существуетъ раціональное число, которое или содержится въ *a*, не содержась въ *b* или содержится въ *b*, не содержась въ *a*. Въ первомъ случаѣ говорятъ что *a* больше *b*, во второмъ — что *a* меньше *b*.

Суммою двухъ численныхъ величинъ a и b называется численная величина c —аггрегатъ, состоящій изъ элементовъ, входящихъ въ a и въ b при чемъ каждый изъ этихъ элементовъ входитъ въ c столько разъ, сколько онъ входитъ вмѣстѣ и въ a и въ b.

Произведеніемъ двухъ численныхъ величинъ a и b называется численная величина c, опредѣляемая какъ аггрегатъ, котораго элементы получаются, составляя всевозможными способами произведеніе каждаго элемента a на каждый элементъ b.

Изъ этихъ опредѣленій суммы и произведенія вытекаютъ законы сложенія и умноженія, а затѣмъ и законы обратныхъ операцій.

Ирраціональное число для Вейерштрасса является опредѣленнымъ съ помощью чиселъ раціональныхъ, раціональное число сводится на цѣлое число; вся математика исходитъ изъ понятія о цѣломъ положительномъ числѣ. Но пріобрѣтя понятіе о ирраціональномъ числѣ мы можемъ пользоваться имъ, не прибѣгая всякій разъ къ его опредѣленію съ помощью цѣлыхъ чиселъ. Какъ говоритъ Вейерштрасъ въ одномъ изъ своихъ писемъ къ его „theurste Sonja“ (С. В. Ковалевской) „ирраціональное число имѣетъ столь-же реальное существованіе, какъ что-либо другое въ мірѣ мыслей“. *)

Въ иномъ смыслѣ представлялъ себѣ сведеніе ирраціональныхъ чиселъ на цѣлыя другой знаменитый берлинскій математикъ Леопольдъ Кронекеръ.

Не только помнить, что ирраціональныя числа сводятся въ концѣ концевъ на цѣлыя числа, но и въ дѣйствительности замѣнять дѣйствія надъ ними дѣйствіями надъ системами цѣлыхъ чиселъ такова была цѣль ариѳметической теоріи ирраціональныхъ чиселъ Кронекера, къ изложенію которой мы теперь и переходимъ.

---

*) До сихъ поръ не опубликовано точное изложеніе лекцій Вейерштрасса по ученію о числахъ и съ ними можно познакомиться только по слѣдующимъ источникамъ.

Kossak. Die Elemente der Arithmetik Berlin 1872. Pincherle. Saggio diuna introduzione alla teoria delle funzioni analitiche (Giornale Battaglini v.18)

III. Ариѳметическая теорія Кронекера.

Развивая мысль, выраженную въ словахъ Гаусса: „Математика есть царица наукъ, и ариѳметика есть царица математики", берлинскій математикъ Кронекеръ поставилъ поставилъ себѣ цѣлью *ариѳметизировать* математику т. е. основать всю математику единственно и исключительно на понятіи о числѣ, взятомъ въ самомъ тѣсномъ смыслѣ т. е. на понятіи о цѣломъ положительномъ числѣ. Для Кронекера вся математика должна быть сведена къ теоріи натуральныхъ чиселъ и къ теоріи цѣлыхъ цѣлочисленныхъ функцій отъ неопредѣленныхъ символовъ u, v, w... (въ конечномъ числѣ), дѣйствія надъ которыми подчиняются тѣмъ-же законамъ, какъ и дѣйствія надъ цѣлыми числами. Съ помощью этой теоріи могутъ и должны быть исключены всѣ тѣ измѣненія и распространенія понятія о числѣ, которыя были введены ради приложенія къ геометріи и механикѣ и являются чуждыми ариѳметикѣ т. е. понятія объ отрицательныхъ, дробныхъ, несоизмѣримыхъ и комплексныхъ числахъ. Это достигается разсматриваніемъ такъ называемыхъ *функціональныхъ сравненій*. Если двѣ функціи $\varphi(x)$ и $f(x)$ таковы, что разность ихъ на цѣло дѣлится на цѣлую функцію $F(x)$, то вмѣсто равенства $\varphi(x)=f(x)+F(x).\ x(x)$, гдѣ $x(x)$ есть цѣлая функція, пишутъ *функціональное сравненіе* $\varphi(x)\equiv f(x)$ (мод. $F(x)$).

Вообще $\varphi(x)\equiv f(x)$ (мод $F(x),\ F_1(x),\ldots.$)
если разность $\varphi(x)-f(x)$ можетъ быть представлена подъ видомъ
$X(x)\ F(x)+X_1(x)\ F_1(x)+\ldots.$ гдѣ $X(x),\ X_1(x)\ldots$ суть цѣлыя функціи.

Нетрудно распространить это обозначеніе на случай цѣлой функціи отъ какого угодно количества неопредѣленныхъ символовъ $u,\ v,\ w,\ldots.$

Покажемъ, какъ исключаются отрицательныя и дробныя числа при разсматриваніи функціональныхъ сравненій. Формула напр. $7-9=3-5$ является результатомъ слѣдующаго функціональнаго сравненія $7+9x\equiv3+5x$ (мод. $(x+1)$). Сравненіе (2) представляется болѣе общимъ по содержанію, чѣмъ формула (1), но также переходитъ въ эту формулу, если только x будемъ считать не неопредѣленнымъ, но «величиной», опредѣленною уравненіемъ $x+1=0$ и вводимъ такимъ образомъ отрицательную единицу.

Подобнымъ же образомъ понятіе о дробныхъ числахъ можетъ быть устранено, если напр. вмѣсто дроби $^3/_4$ мы будемъ писать подъ видомъ цѣлой функціи $3x$ и считать, что неопредѣленная величина x опредѣляется уравненіемъ $4x-1=0$. Правила дѣйствій надъ дробями замѣняются функціональными сравненіями по системѣ модулей.

Такъ правило сложенія $\frac{a}{m}+\frac{b}{n} \frac{an+bm}{mn}$ замѣняется вполнѣ слѣдующимъ сравненіемъ:

$ax \ +bx_n \equiv (an+bm; \ \ x_{mn}$ (мод. mx_m —I, nx_n —I, mn x_{mn}—I) *)

Въ приведенныхъ нами примѣрахъ модули суть цѣлыя функціи 1-ой степени: x+I или mx—I, nX—I и т. д.

Въ томъ случаѣ, когда модуль есть цѣлая функція $F(x)$ степени m функціональное сравненіе по этому модулю опредѣляетъ свойства ирраціональныхъ чиселъ, такъ называемыхъ алгебрическихъ ирраціональностей, корней уравненія $F(x)=0$.

Разъяснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ. Въ теоріяхъ выше изложенныхъ нами выводятся правила двйствій надъ фактивными ирраціональными числами; по этимъ правиламъ напр. $(\sqrt{2})^2=2$, $(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2})^4=2^2$ и т. д.

Если поэтому дана для вычисленія цѣлая раціональная функція отъ $\Theta=\sqrt{2}=$ напр. $7+5\,\Theta+6\,\Theta^2+11\Theta^3+4\Theta^4+\Theta^5$, то она по замѣнѣ Θ, Θ^2, Θ^3, Θ^4, Θ^5 ихъ вышеприведенными значеніями обратится въ $35+31\sqrt{2}$.

По теоріи Кронекера путемъ дѣленія цѣлой функціи $7+5x+6x^2+11x^3+4x^4+x^5$ на функцію x^2-2 выводится тожественное равенство $(x^5+4x^4+11x^3+6x^2+5x+7)=(x^2-2)(x^3+4x^2+13x+14)+31x+35$ или иначе говоря функціональное сравненіе $x^5+4x^4+11x^3+6x^2+5x+7\equiv 31x+35$ (мод. x^2-2.) Это функціональное сравненіе непосредственно показываетъ, что

---

*) Въ мемуарѣ Кронекера: „Понятіе о числѣ. (Основанія ариѳметики. Изданіе Казанскаго математическаго студенческаго кружка. 1907) читатель найдетъ другіе примѣры: правило умноженія и правило дѣленія.

данный многочленъ 5-й степени отъ корня уравненія $x^2-2=0$ сводится на функцію 1-ой степени $31x+35$ отъ того же корня.

Приведенные примѣры должны были уяснить, какимъ образомъ Кронекеръ считалъ возможнымъ, достигнуть поставленной имъ цѣли: *замѣнить алгебру ариѳметикою цѣлыхъ цѣлочисленныхъ функцій неопредѣленныхъ перемѣнныхъ.* Такъ какъ съ другой стороны въ результатахъ «ариѳметической теоріи цѣлыхъ цѣлочисленныхъ неопредѣленныхъ» или «общей ариѳметики» можно видѣть совокупность всѣхъ результатовъ, получающихся въ томъ случаѣ, если неопредѣленнымъ придаются цѣлочисленныя значенія, то «всѣ плоды глубочайшихъ математическихъ изслѣдованій могутъ быть въ концѣ концовъ выражены въ простыхъ свойствахъ цѣлыхъ чиселъ».

Какъ должны мы отнестись къ смѣлой попыткѣ Кронекера свести весь анализъ къ ариѳметикѣ, избѣгая введенія символовъ и фиктивныхъ чиселъ?

Не трудно видѣть слабую сторону этой теоріи. Избѣгнуть фиктивныхъ чиселъ, обойти ихъ возможно только, какъ видно изъ предыдущаго изложенія, посредствомъ громоздкаго аппарата функціональныхъ сравненій, и поэтому-то введеніе этихъ чиселъ, если они и дѣйствія надъ ними строго и точно опредѣлены, вполнѣ въ интересахъ той **экономіи мысли,** которая составляетъ цѣль всякой науки и въ особенности математики. Поразительная экономія и достигается въ математикѣ посредствомъ введенія символовъ и посредствомъ обобщеній, съ помощью которыхъ отдѣльные частные случаи соединяются въ стройную систему. Но съ другой стороны взгляды, положенные Кронекеромъ въ основаніе его теоріи, имѣютъ то важное значеніе, что они заставляютъ насъ требовать отъ операцій и символовъ, вводимыхъ въ анализъ, чтобы первыя могли быть дѣйствительно сведены въ концѣ концовъ на конечное число дѣйствій надъ конечнымъ числомъ цѣлыхъ чиселъ и чтобы вторые могли быть также вполнѣ характеризированы конечнымъ числомъ чиселъ. Всѣ опредѣленія должны быть не только логическими, но и ариѳметическими

IV. Аксіоматическій методъ Гильберта.

При всемъ ихъ различіи вышеизложенные методы введенія въ общее ученіе о числахъ чиселъ ирраціональныхъ имѣютъ между собою то общее, что ирраціональныя числа вводятся для рѣшенія задачъ, неразрѣшимыхъ съ помощью раціональныхъ чиселъ. Эти задачи или опредѣляютъ непосредственно свойства ирраціональныхъ чиселъ, какъ въ теоріи Кронекера, или-же послѣдовательное болѣе и болѣе приближенное рѣшеніе задачъ даетъ множества раціональныхъ чиселъ (классы или основные ряды), которыя опредѣляютъ собою ирраціональныя числа. Но и въ томъ и другомъ случаѣ понятіе о вещественномъ числѣ (т. е. общее понятіе о числѣ раціональномъ и ирраціональномъ) производится послѣдовательнымъ расширеніемъ простого понятія о цѣломъ положительномъ числѣ, оно рождается изъ разсмотрѣнія задачъ неразрѣшимыхъ съ помощью чиселъ введенныхъ раньше, и поэтому всѣмъ этимъ методамъ можетъ быть въ одинаковой степени присвоено названіе **генетическихъ.**

Этимъ **генетическимъ** методамъ Гильбертъ противопоставляетъ методъ **аксіоматическій**, подобный тому, который употребляется при построеніи геометріи. Въ геометріи обыкновенно начинаютъ съ допущенія существованія всѣхъ изучаемыхъ въ геометріи элементовъ, т. е. съ самого начала предполагаютъ существованіе трехъ системъ вещей, именно точекъ, прямыхъ и линій и затѣмъ устанавливаютъ соотношеніе между этими элементами—въ существенныхъ чертахъ слѣдуя Эвклиду—съ помощью извѣстныхъ аксіомъ. а именно аксіомъ сочетанія, порядка, конгруэнціи, аксіомы о параллельныхъ линіяхъ и аксіомъ непрерывности. Подобно этому вообще, когда дѣло идетъ объ установленіи началъ какой-либо науки, требуется выставить систему аксіомъ, да ющую полное и точное описаніе отношеній существующихъ между элементарными понятіями этой науки. Совокупность этихъ аксіомъ служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣленіемъ этихъ элементарныхъ понятій; никакое утвержденіе, относящееся къ этой наукѣ, не можетъ быть разсматриваемо какъ точное, если оно не можетъ быть выведено изъ аксіомъ съ помощью конечнаго числа дедукцій. Данная система аксіомъ должна отличаться слѣдующими существенными свойствами: 1) отсутствіемъ противорѣчій и 2) полнотою, т. е. должно быть доказано, 1) что исходя изъ аксіомъ и примѣняя конечное число логическихъ дедукцій, мы никогда не придемъ къ противорѣчивымъ результатамъ и 2), что система аксіомъ достаточна для доказательства всѣхъ предложеній нашей науки. Наконецъ аксіомы должны быть независимы одна отъ другой, т. е. ни одна аксіома не должна являться логическимъ слѣдствіемъ другихъ аксіомъ. Для геометріи задача постановленная выше рѣшена Гильбертомъ въ его „Grundlagen der Geometrie" (второе изданіе въ 1903 г.), причемъ вопросъ о непротиворѣчивости аксіомъ геометрическихъ былъ сведенъ на вопросъ о непротиворѣчивости аксіомъ ариѳметики.

Въ томъ же сочиненіи Гильбертъ далъ въ первый разъ систему аксіомъ, опредѣляющихъ вещественныя числа.

Мы мыслимъ систему вещей; мы называемъ эти вещи числами и обозначаемъ ихъ $a, b, c, \ldots$ Мы мыслимъ эти вещи въ извѣстныхъ взаимныхъ отношеніяхъ, которыхъ точное и полное описаніе заключается въ слѣдующихъ аксіомахъ:

I. Аксіомы сочетанія. (1—6).

I. 1. Изъ числа a и изъ числа b образуется посредствомъ „*Сложенія*" опредѣленное число c; это обозначается символически такъ:

$$a + b = c \qquad \text{или} \qquad c = a + b.$$

I. 2. Если a и b суть данныя числа, то существуетъ всегда одно и только одно число x и также одно—и только одно—число y, такъ—что:

$$a + x = b \quad \text{и соотвѣтственно} \quad y + a = b$$

I. 3. Существуетъ опредѣленное число—оно обозначается 0,—такъ что для каждаго a имѣемъ одновременно:

$$a + 0 = a \qquad \text{и} \qquad 0 + a = a.$$

I. 4 Изъ числа a и числа b образуется также посредствомъ „*Умноженія*“ опредѣленное число c; употребляя обозначенія:

$$ab = c \qquad \text{или} \qquad c = ab;$$

I. 5. Если a и b суть произвольныя данныя числа и a не есть 0, то существуетъ всегда одно—и только одно—число x и также одно (и только одно) y, такъ-что:

$$ax = b \qquad \text{и} \qquad ya = b.$$

I. 6. Существуетъ опредѣленное число—обозначаемъ его 1,—такое что для каждаго a одновременно:

$$a.1 = a \qquad \text{и} \qquad 1.a = a.$$

II. Аксіомы счета. (7—12).

Если a, b, c суть произвольныя числа, то всегда имѣютъ мѣсто слѣдующія формулы:

II. 1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ II. 2. $a + b = b + a$

II. 3. $a(bc) = (ab)c$ II. 4. $a(b + c) = ab + ac$

II. 5. $(a + b)c = ac + bc$ II. 6. $ab = ba$.

III Аксіомы порядка. (13—16)

III. 1. Если a, b суть какія—нибудь два различныя числа, то всегда одно опредѣленное изъ нихъ, напр. a больше ($>$), чѣмъ другое; это послѣднее называется тогда меньшимъ; это обозначается:

$$a > b \quad \text{и} \quad b < a$$

III. 2. Если $a>b$ и $b>c$, то и $a>c$.

III. 3. Если $a>b$, то всегда и

$$a+c>b+c \quad \text{и} \quad c+a>c+b.$$

III. 4. Если $a>b$ и $c>0$, то всегда

$$ac>bc \quad \text{и} \quad ca>cb.$$

IV. Аксіомы непрерывности.

IV. 1. (*Архимедова аксіома*). Если $a>0$ и $b>0$ суть два произвольныхъ числа, то всегда возможно сложить a последовательно столько разъ, что соотвѣтствующая сумма будетъ имѣть свойство:

$$a + a + a + \dots + a > b$$

IV. 2. (*Аксіома полноты.*) Невозможно присоединить къ системѣ чиселъ другую систему вещей такъ, чтобы и въ новой системѣ, полученной отъ соединенія, имѣли мѣсто сполна всѣ аксіомы: I, II, III, IV. 1; или короче говоря: числа составляютъ систему вещей, которая при условіи удовлетворенія всѣхъ аксіомъ уже не можетъ быть болѣе расширена.

Система вещей, имѣющихъ перечисленныя свойства и есть система вещественныхъ чиселъ, опредѣляемая аксіоматическимъ методомъ; другими словами по аксіоматическому методу мы должны мыслить подъ множественностью вещественныхъ чиселъ не совокупность всѣхъ возможныхъ разложеній въ десятичныя дроби или совокупность всѣхъ возможныхъ законовъ, по которымъ могутъ идти элементы основного ряда, но систему вещей, которыхъ взаимныя отношенія даны вышеприведенною **конечною и замкнутою** системою аксіомъ I—IV; для этой системы новыя утвержденія только тогда имѣютъ значеніе, если они могутъ быть выведены изъ аксіомъ посредствомъ конечнаго числа логическихъ заключеній.

Какъ относительно всякой системы аксіомъ, такъ и относительно вышеприведенной тотчасъ возникаютъ вопросы о **непротиворѣчивости**, о **полнотѣ** и о **независимости.**

Особенно важное значеніе конечно имѣетъ вопросъ о **непротиворѣчивости** аксіомъ.

Въ математикѣ существовать значитъ быть опредѣлен нымъ непротиворѣчащими взаимно свойствами. Если мы дадимъ, говоритъ Гильбертъ, какому-нибудь понятію взаимнопротиворѣчащція свойства, то съ математической точки зрѣнія, это понятіе не существуетъ. Такъ въ математикѣ не существуетъ вещественнаго числа, котораго корень квадратный равенъ —1. Если напротивъ можно доказать, что аттрибуты, приписываемые извѣстному понятію, не могутъ никогда—при приложеніи конечнаго числа логическихъ выводовъ—привести къ противорѣчію, то этимъ самымъ доказывается математическое существованіе разсматриваемаго понятія. Такъ и въ вопросѣ насъ занимающемъ, когда дѣло идетъ объ аксіомахъ, относящихся къ вещественнымъ числамъ, доказательство непротиворѣчивости ариѳметическихъ аксіомъ есть въ то-же время и доказательство математическаго существованія множественности вещественныхъ чиселъ (математическаго континуума).

Задача о доказательствѣ непротиворѣчивости ариѳметическихъ аксіомъ есть одна изъ задачъ поставленныхъ Гильбертомъ на международномъ Парижскомъ конгрессѣ 1900 г. (См. также *Huntington.* A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude. American Frausact. 1902 p. 264).

Полнота. системы аксіомъ Гильберта явствуетъ изъ того, что вся алгебра вещественныя чиселъ можетъ быть выведена путемъ логическихъ разсужденій изъ этой системы аксіомъ.

Что касается до вопроса о независимости аксіомъ между собою, то Гильбертъ привелъ въ своемъ мемуарѣ: „Понятіе о числѣ“ (Казанскій студ. сборникъ стр. 96) нѣсколько примѣровъ, указывающихъ на взаимную зависимость аксіомъ. Я возьму для примѣра слѣдующей важный результатъ доказанный имъ въ основаніяхъ геометріи:

Коммутативный законъ умножнеія есть необходимое слѣдствіе аксіомъ I, II. I—5, и IV. I

Доказат. Прежде всего замѣтимъ, что если a есть произвольное число нашей системы, $n=1+1+1+1...+1$ есть цѣлое раціональное число, то коммутативный законъ имѣетъ мѣсто при умноженіи a на n, т. е.

$$a.\ n=na. \quad (1)$$

Дѣйствительно, (на основаніи законовъ распредѣлительности и I, 6)

$$a.\ n=a\,(1+1+..+1)=a+a+a+..a=$$
$$n.\ a=(1+1+..+1)a=a+a+a+..+a.$$

Употребимъ теперь для доказательства методъ доказательства отъ противнаго: предположимъ, что существуютъ два числа нашей системы a, b. для которыхъ не имѣетъ мѣсто коммутативный законъ умноженія.

Мы можемъ предположить, что

$$a>0,\ b>0,\ ab-ba>0 \quad (2)$$

На основаніи I 5 существуетъ число c (>0), такое что

$$(a+b+1)\,c=ab-ba. \quad (3)$$

Выбираемъ съ другой стороны число d которое заразъ удовлетворяетъ неравенствомъ $d>0$. $d<1$ и $d<c$., и обозначимь буквами m и n два цѣлыхъ положительныхъ числа для которыхъ

$$\left.\begin{aligned} md &< a \leq (m+1)\,d \\ nd &< b \leq (n+1)\,d \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Существованіе такихъ чиселъ m, n есть непосредственное слѣдствіе аксіомы Архимеда. Пользуясь замѣчаніемъ. сдѣланнымъ въ началѣ доказательства, т. е. (1) формулою, мы получимъ изъ неравенствъ (4) перемноженіемъ

$$a\,b \leq mn\,d^2+(m+n+1)\,d^2$$
$$ba > mnd^2,$$

или вычитая

$$a\bar{b}-\bar{b}a < (m+n+1)\, d^2 \quad (5)$$

Но $md<a$, $nd<\bar{b}$, $d<1$ и потому

$$(m+n+1)\, d < a + \bar{b} + 1$$

и потому неравенство (5) даетъ

$$a\bar{b} - \bar{b}a < (a+\bar{b}+1)\, d$$

или, такъ-какъ $d < c$,

$$a\bar{b}-\bar{b}a < (a+\bar{b}+1)\, c.$$

Но это окончательное неравенство противорѣчитъ сдѣланному нами положенію. Такимъ образомъ,—теорема доказана.

Комплексныя системы. При генетическомъ методѣ введенія новыхъ чиселъ аксіомы, опредѣляющія ихъ свойства неразрывно связаны съ ихъ происхожденіемъ и являются поэтому какъ-бы имѣющими за себя абсолютную достовѣрность. Напротивъ, если мы опредѣляемъ систему вещей совершенно условно системою аксіомъ, то мы естественно вправѣ отбросить ту или другую аксіому или замѣнить ее противоположною. Геніальная идея Лобачевскаго была первымъ примѣромъ такихъ научныхъ переворотовъ.

Аксіоматическій методъ опредѣленія системы вещественныхъ чиселъ съ помощью выше данныхъ 18 аксіомъ приводитъ eo ipso къ изученію системъ вещей (мы переносимъ на нихъ названіе **чиселъ**), которыя имѣютъ только часть указанныхъ свойствъ. Всякую такую систему, къ которой приложима только часть аксіомъ, Гильбертъ называетъ **комплексною** или **системою комплексныхъ чиселъ**. Изъ его изслѣдованій вытекаетъ слѣдующая классификація аксіомъ на четыре группы, принадлежащая Пуанкаре *).

1. Законы ассоціативности и коммутативности сложенія, (II. 1. 2), законъ ассоціативности умноженія (II. 3), оба закона распредѣлительности умноженія (II. 4. 5) или короче

*) Отчетъ о работахъ Гильберта представленный Казанскому физико-математическому обществу къ присужденіи третьей преміи имени Лобачевскаго.

всѣ правила сложенія и умноженія за исключеніемъ закона коммутативности.

2. Аксіомы порядка т. е. правила исчисленія неравенствъ.

3. Законъ коммутативности умноженія, по которому можно переставлять множители, не измѣняя произведенія.

4. Аксіома Архимеда.

Допуская аксіомы 1-ой и 2-ой группы, мы можемъ оставить себѣ полную свободу по отношенію къ аксіомамъ двухъ послѣднихъ группъ, и соотвѣтственно этому изъ классификаціи аксіомъ вывести слѣдующую классификацію комплексныхъ системъ.

Числа допускающія аксіомы двухъ первыхъ группъ будутъ называться **аргезіанскими** (по имени французскаго геометра Дезарга давшаго одну изъ самыхъ важныхъ теоремъ проэктивной геометріи); они могутъ быть **паскалевыми** или **не паскалевыми**, смотря по тому, удовлетворяютъ-ли они аксіомамъ третьей группы или нѣтъ,— **архимедовыми** или **не архимедовыми**, смотря по тому, удовлетворяютъ-ли они или нѣтъ аксіомѣ четвертой группы.

Наши вещественныя числа суть въ одно и то-же время числа аргезіанскія, паскалевы и архимедовы.

Мы далѣе возвратимся къ комплекснымъ числамъ (въ особенности къ не архимедовымъ) Ограничимся теперь только указаніемъ на то, что изъ доказанной нами теоремы о логической связи закона коммутативности съ другими аксіомами слѣдуетъ, что не можетъ существовать чиселъ, которыя были бы въ одно и то-же время аргезіанскими, архимедовыми и непаскалевыми.

§ 21. Алгебра ирраціональныхъ (вещественныхъ) чиселъ.

Въ предъидущихъ двухъ параграфахъ мы изложили ариѳметическія теоріи ирраціональныхъ чиселъ. Теоріи эти одинаково относятся какъ къ числамъ ирраціональнымъ положительнымъ, такъ и къ числамъ отрицательнымъ.

Мы видѣли, что, какая бы изъ нихъ ни была принята за основаніе, основныя аксіомы и законы операцій (какъ прямыхъ, такъ и обратныхъ) совпадаютъ для вновь введенныхъ чиселъ съ аксiомами и законами операцiй для области цѣлыхъ положительныхъ чиселъ; мы имѣемъ право повторить сказанное въ двухъ предъидущихъ отдѣлахъ (§ 4 и §) и утверждать, что вся получающаяся повторнымъ примѣненiемъ и комбинированiемъ законовъ семи алгебраическихъ операцiй, цѣпь формулъ алгебры является безъ измѣненiя приложимою и къ области чиселъ, включающей въ себѣ и числа рацiональныя и вновь введенныя иррацiональныя, т. е. въ области чиселъ, которую мы условимся называть **областью чиселъ вещественныхъ**. Алгебры чиселъ цѣлыхъ и рацiональныхъ замѣняются **алгеброю чиселъ вещественныхъ.**

Изъ данной выше теорiи иррацiональныхъ чиселъ слѣдуетъ также, что область чиселъ вещественныхъ есть область замкнутая по отношенiю къ операцiямъ сложенiя, вычитанiя, умноженiя, дѣленiя и возвышенiя въ цѣлую положительную или отрицательную степень т. е. если a и b суть два вещественныя числа, то $a+b$, $a-b$, $a.\ b$, $a:b$ и a^m, гдѣ m есть число цѣлое, суть также числа вещественныя.

Но операцiя извлеченiя корня четной степени изъ отрицательнаго иррацiональнаго числа, операцiя рѣшенiя алгебраическаго уравненiя и другiя операцiи, о которыхъ мы будемъ говорить въ слѣдующемъ отдѣлѣ, требуютъ дальнѣйшаго обобщенiя понятiя о числѣ—введенiя чиселъ **комплексныхъ**.

§ 22. Алгебраическiя числа.

Необходимость разсматриванiя безконечныхъ множествъ или рядовъ рацiональныхъ чиселъ, опредѣляющихъ затѣмъ числа иррацiональныя являются при рѣшенiи тѣхъ задачъ анализа, которыя точно не могутъ быть рѣшены съ помощью рацiональныхъ чиселъ.

Примѣромъ такихъ задачъ служатъ задачи извлеченiя корня или болѣе общая задача рѣшенiя алгебраическаго уравненiя:

1) $ax^n+bx^{n-1}+....+kx+l=o$, гдѣ коеффиціенты a, b, c..l суть раціональныя числа, или же уравненія.

2) x^n+p, $x^{n-1}+....+tx+u=0$, гдѣ коеффиціенты p, q,...t u суть цѣлыя числа *).

Техника рѣшенія этихъ задачъ и состоитъ въ указаніи способовъ полученій съ наивозможно большею экономіею рядовъ раціональныхъ чиселъ, служащихъ приближеніями ирраціональныхъ чиселъ и опредѣляющихъ эти ирраціональныя числа.

Свойства ирраціональностей опредѣляются тѣми задачами, при рѣшеніи которыхъ онѣ вводятся, и классификація ирраціональностей должна основываться на классификаціи задачъ.

Ирраціональности (онѣ могутъ быть вещественныя или комплексныя; въ настоящемъ отдѣлѣ мы разсматриваемъ преимущественно вещественныя), вводимыя при рѣшеніи уравненій (1) и (2) или, говоря иначе, опредѣляемыя, какъ корни этихъ уравненій, составляютъ простѣйшій классъ ирраціональностей, **алгебраическихъ ирраціональностей** или **алгебраическихъ чиселъ.** Всѣ прочія ирраціональности носятъ названіе **трансцедентныхъ** ирраціональностей или **чиселъ.**

Классификація алгебраическихъ ирраціональностей требуетъ прежде всего введенія понятія о **неприводимости** имѣющаго весьма важное значеніе въ теоріи цѣлыхъ функцій или алгебраическихъ уравненій.

Понятіе о неприводимости есть понятіе относительное, при введеніи котораго должна быть строго указана та область чиселъ (область раціональности), къ которой принадлежатъ коеффиціенты.

Если область коеффиціентовъ $f(x)$ есть область цѣлыхъ чиселъ, то приводимость и неприводимость формулируется слѣдующимъ образомъ.

---

*) Въ подстрочномъ примѣчаніи къ стр. 63 показано какъ уравненіе 1) всегда можетъ быть приведено къ уравненію 2).

Если многочленъ $f(x)=\varphi(x).\psi(x)$, *гдѣ* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *суть цѣлые многочлены съ цѣлыми коэффиціентами то многочленъ* $f(x)$ *будетъ* **приводимымъ**; *если-же нельзя найти двухъ цѣлыхъ многочленовъ съ цѣлыми коэффиціентами, которыхъ произведеніе равнялось бы функціи* $f(x)$, *то многочленъ будетъ неприводимымъ*. Въ такомъ случаѣ и уравненіе $f(x)=0$ называется *неприводимымъ*.

При изученіи алгебраическихъ ирраціональностей, опредѣляемыхъ уравненіемъ, основнымъ вопросомъ является вопросъ, есть-ли данное уравненіе неприводимое или нѣтъ. Если оно есть неприводимое уравненіе n-ой степени, то корень его есть **алгебраическая ирраціональность** n**-аго порядка**.

Если же данное уравненіе есть приводимое, то мы должны разложить первую часть уравненія на неприводимые множители, которые въ теоріи цѣлыхъ многочленовъ играютъ *роль абсолютно-простыхъ чиселъ* въ теоріи чиселъ цѣлыхъ. Пусть

$$f(x)=F_1(x)F_2(x)\ldots.F_n(x),\ \text{гдѣ}\ F_1(x),\ F_2(x)\ldots$$

суть неприводимые многочлены.

Тогда рѣшеніе уравненія $f(x)=0$ сводится на рѣшеніе уравненій

$$F_1(x)=0,\ F_2(x)=0,\ldots.\ F_n(x)=0.$$

Сравнительно просто рѣшается вопросъ о выдѣленіи неприводимыхъ множителей 1-ой степени; задача эта въ случаѣ, если $f(x)$ есть уравненіе типа (2), совпадаетъ съ нахожденіемъ цѣлыхъ корней уравненія. Нетрудно показать, что для того, чтобы цѣлое число a было корнемъ уравненія (2), необходимо: 1) чтобы a было однимъ изъ дѣлителей и. 2) чтобы оно удовлетворяло кромѣ того ряду элементарныхъ критеріевъ.

Гораздо сложнѣе задача о выдѣленіи неприводимыхъ множителей высшихъ степеней *).

---

*) На этомъ вопросѣ мы остановимся подробнѣе въ вып. 3 (ученіе о цѣлыхъ многочленахъ). Ограничимся теперь ссылкою на сочиненія Кронекера: Grundzuge eines arithmetischen Theorie algebraischen Grossen. Berlin. 1885.

Уравненія рѣшаемыя въ радикалахъ.

Свойства алгебраическихъ ирраціональностей опредѣляютъ прежде всего ихъ **порядкомъ**. Алгебраическія ирраціональности порядковъ 2, 3, 4 представляютъ собою простѣйшій классъ ирраціональностей, выражающихся въ функціи отъ коеффиціентовъ съ помощью алгебраическихъ операцій: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышеніи въ степень цѣлую и положительную и извлеченія корней. Иначе говоря, уравненія степеней 2, 3, 4 рѣшимы **алгебраически въ радикалахъ** или короче рѣшимы **алгебраически.**

Изъ элементарной алгебры извѣстна формула для **рѣшенія уравненія 2-ой степени**. Для уравненія $x^2+px+q=0$, къ которому приводится всякое уравненіе 2-ой степени имѣемъ:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ ^{*}).$$

Рѣшеніе уравненія 3-ей степени. Уравненіе 3 ей степеніи $ax^3+bx^2+cx+d=0$ можетъ быть приведено (преобразованіями $x=\frac{y}{a}$ и $y=z+\lambda$, гдѣ λ произвольное число см. выше сноску на стр. 00) къ виду $z^3+pz+q=0$. Для рѣшенія этого послѣдняго уравненія полагаемъ $z=u+v$ что даетъ

$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q=u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0.$$

Такъ какъ u и v совершенно произвольны, то полагаемъ $3uv+p=0$, откуда $v=-\frac{p}{3u}$, что дастъ для опредѣленія u

---

*) Рѣшеніе уравненія 2-ой степени найдено древними греками въ геометрической формѣ и изложено въ началахъ Евклида. Такъ напр. 11-ое предложеніе 2-ой книги даетъ рѣшеніе задачи о золотомъ сѣченіи т е. рѣшеніе уравненія $a(a-x)=x^2$. Въ предложеніяхъ 28 и 29-омъ 6-ой книги даны геометрическія рѣшенія уравненій $x^2=ax+b^2$ и $x^2+ax=b^2$ наконецъ въ „Данныхъ" Евклида разсматривается случай $x^2+b^2=ax$. Алгебраическое рѣшеніе находимъ у Герона Александрійскаго и у Діофанта, но и они разсматриваютъ три различныя формы квадратнаго уравненія. Введеніе отрицательныхъ чиселъ позволило знаменитому индійскому математику Брамагуптѣ (род. 560) разсматривать уже только одну форму квадратнаго уравненія,

уравненіе 6 ой степени, но приводящееся, полагая $u^3=t$, къ уравненію 2-ой степени:

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0.$$

Отсюда $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\;\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$

Изъ соотношенія $3uv+p=0$ выводимъ

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$ такъ что

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\;\;4+\frac{p^3}{27}}}.\;+\;\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

(формула Кардана) *).

Рѣшеніе уравненія 4-ой степени. Представимъ уравненіе 4 ой степени подъ видомъ

$$x^4-p_1x^3+p_2\,x^2-p_3x+p_4=0;$$

пусть корни этого уравненія будутъ $x_1,x_2,x_3\,x_4$.

По формуламъ Ньютона, дающимъ выраженіе суммъ степеней x_1,x_2,x_3,x_4 посредствомъ $p_1.p_2,p_3,\ldots$ (см. Введ. въ Ан., вып. 1 стр. 49) и по соотношеніямъ существующимъ между корнями уравненія и его коэффиціентами мы можемъ составить уравненіе 3-ей степени.

---

*) Сочиненіе Луки Пачіоли „Summa" появившееся въ 1494 и заключавшее въ себѣ сводъ всѣхъ математическихъ знаній того времени, заканчивалось утвержденіемъ, что рѣшеніе уравненій $x^3+mx=n$, $x^3+n=mx$ также невозможно, какъ и квадратура круга. Но уже вскорѣ послѣ того рѣшеніе перваго изъ этихъ уравненій было найдено Сципіономъ Ферро, проподававшимъ математику между 1496 и 1525 г. въ Болоньѣ. Но до насъ не дошелъ его методъ. Данный въ текстѣ методъ рѣшенія и самая формула принадлежитъ Николо Тарталія и найденъ имъ въ 1535 г. Тарталіа сообщилъ въ стихахъ свой методъ рѣшенія Кардану, который и опубликовалъ его къ великому неудовольствію изобрѣтателя въ своемъ сочиненіи De Arte magna въ 1545 г.

Такъ называемое тригонометрическое рѣшеніе уравненія 3-ей степени, основанное на тождествѣ

$$\left(2\,Cos\,\frac{1}{\varphi}\right)^3-3\left(2\,Cos\,\frac{1}{\varphi}\right)=2\,Cos\varphi,$$

найдено Віеmога (1540—1603).

Совокупность субситуцій называется *группою*, если произведеніе каждыхъ двухъ субситуцій совокупности есть субситуція, принадлежащая къ той же совокупности.

$\xi^3 - a\xi^2 + b\xi - c = 0$, корни котораго будутъ
$\xi_1 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2$, $\xi_2 = (x_1 - x_3 + x_2 - x_4)^2$, $\xi_3 = (x_1 - x_4 + x_3 - x_2)^2$;
a, b, c выразятся раціональными цѣлыми функціями отъ коэффиціентовъ p_1, p_2, p_3, p_4. Найдя по формулѣ Кардана выраженія корней ξ_1, ξ_2, ξ_3, имѣемъ

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = \sqrt{\xi_1}$$
$$x_1 - x_3 + x_2 - x_4 = \sqrt{\xi_2}$$

и сверхъ того
$$x_1 - x_4 + x_3 - x_2 = \sqrt{\xi_3}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = p_1$$

Эти четыре уравненія даютъ искомыя радикальныя формулы для рѣшенія уравненій 4-ой степени

Напримѣръ, $$x_1 = \frac{p_1 + \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2} + \sqrt{\xi_3}}{4}$$
$$x_2 = \frac{p_1 - \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2} - \sqrt{\xi_3}}{4}$$

и подобныя же выраженія для x_3 и x_4.*)

Формулы алгебраичеекаго рѣшенія уравненій 3-й и 4 й степени были найдены итальянскими учеными 16-го столѣтія, и послѣ этого усилія математиковъ въ теченіе долгаго времени были направлены на разъисканіе подобныхъ-же *радикальныхъ* рѣшеній для уравненій высшихъ степеней. Безуспѣшность усилій заставила глубоко проникнуть въ природу уравненій, допускающихъ алгебраическое рѣшеніе. Въ этомъ отношеніи классическимъ мемуаромъ, проложившимъ новые пути въ теоріи алгебраическаго рѣшенія, является мемуаръ Лагранжа:

Reflexions sur la resolution algébrique des équations *), и мы рекомендуемъ всякому желающему ближе познакомиться съ теоріею алгебраическаго рѣшенія уравненій изучить этотъ, замѣчательный по ясности и глубинѣ изложенія, мемуаръ.

---

*) Рѣшеніе уравненія 4-й степени было найдено ученикомъ Кардана Людовикомъ Феррари въ 1540 г. и опубликовано также Кардономъ въ его „De arte magna“.

**) Oeuvres completes. Ptaris 1869. vol. 3 p. 205.

Благодаря этому мемуару начала выясняться связь между задачею рѣшенія алгебраическихъ уравненій и такъ называемою теоріею группъ субституцій, окончательно установленной другимъ геніальнымъ французскимъ математикомъ Эваристомъ Галуа (*).

Такъ приведенная нами выше метода рѣшенія уравненія 4-й степени основана на употребленіи функціи $(x_1-x_2+x_3-x_4)^2$. Особенность этой функціи заключается въ томъ, что она при всѣхъ 24 перемѣщеніяхъ четырехъ буквъ x_1, x_2, x_3, x_4 принимаетъ только три значенія и остается неизмѣнною при 8 субституціяхъ, составляющихъ группу.

Послѣ мемуара Лангранжа начала выясняться также и невозможность алгебраическаго рѣшенія общихъ уравненій 5-й и высшихъ степеней. Руффини первый близко подошелъ къ доказательству этой невозможности, но первое полное доказательство невозможности рѣшенія уравненія выше 4-й степени въ радикалахъ было дано знаменитымъ норвежскимъ математикомъ Ніэльсомъ Генрихомъ Абелемъ.

Послѣ изслѣдованія Абеля стало ясно, что ирраціональности 5-го и высшихъ порядковъ составляютъ классы ирраціональностей, по своимъ свойствамъ болѣе общихъ и трудныхъ чѣмъ ирраціональности низшихъ порядковъ, выражающіяся посредствомъ радикаловъ. Ихъ классификація

---

*) Если даны n буквъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ и два перемѣщенія этихъ буквъ $x_\alpha\, x_\beta\, x_\gamma \ldots\ldots$ и $x_{\alpha_1}\, x_{\beta_1}\, x_{1} \ldots$, то переходъ отъ одного перемѣщенія къ другому называется *субституціею* и обозначается $\begin{pmatrix} x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \ldots \\ x_{\alpha_1} & x_{\beta_1} & x_\gamma \ldots \end{pmatrix}$. Въ каждой субституціи буквы первой строки могутъ быть размѣщены въ ихъ натуральномъ порядкѣ, такъ что каждая субституція можетъ быть представлена подъ видомъ $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots & x_n \\ x_l & x_k \ldots & x_e \end{pmatrix}$.

Если мы произведемъ надъ буквами x_1, $x_2, \ldots x_n$ послѣдовательныя субституціи S, T, U,.. то получимъ въ конечномъ результатѣ нѣкоторую новую субституцію, которая называется *произведеніемъ* субституцій S, T, U.. или степенью субституціи S, если S, T, U.... тожественны.

Такъ напр. если $S=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$, то $ST=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $TS=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$. Вообще TS не равно ST.

приведеніе къ простѣйшему виду составляютъ задачи, которыя разрѣшены только въ небольшомъ числѣ простѣйшихъ случаевъ. Такъ намъ извѣстны теперь нѣкоторыя свойства ирраціональности 5-го порядка. Мы знаемъ, напр., что она сводится на ирраціональность, встрѣчающуюся въ теоріи преобразованія эллиптическихъ функцій. Не менѣе интересна также установленная Клейномъ и Гордономъ связь ирраціональности 5 го порядка съ *икосаэдрическою ирраціональностью*, —корнемъ нѣкотораго спеціальнаго уравненія 60-й степени.

$$(A)\frac{H^3(z)}{1728f^5(z)}=Z, \text{ гдѣ } H(z)=-(z^{30}+1)+228(z^{15}-z^5)-494z^{10}.$$

$$f(z)=z(z^{10}+11z^5-1) \text{ *)}.$$

Невозможность рѣшенія въ радикалахъ доказана для общихъ уравненій 5 й и высшихъ степеней. Что касается до *спеціальныхъ* уравненій высшихъ степеней, т. е. уравненій, которыхъ коеффиціенты не обозначаются неопредѣленными буквами, но имѣютъ особыя частныя значенія, то они могутъ быть рѣшены въ радикалахъ. Въ исторіи математики извѣстно уравненіе 45-й степени.

$$45y-3795y^3+95634y^5-\ldots+945y^{41}-45y^{43}+y^{45}=C,$$

которое было предложено для рѣшенія какъ, вызовъ «всѣмъ математикамъ земного шара» въ 1593 г. голландскимъ математикомъ Адріаномъ Романусомъ. Уравненіе это вмѣстѣ съ другими уравненіями, встрѣчающимися въ теоріи угловыхъ сѣченій, можетъ быть рѣшено въ радикалахъ.

---

*) Геометрическое значеніе многочленовъ $H(z)$, (fz) и многочлена $T(z)$, связаннаго съ ними уравненіемъ:

$T^2+H^3-1728f^5=O$, изученіе группы движеній не измѣняющихъ и *икосаэдра* сведеніе уравненія 5-й степени на уравненіе (A) читатель можетъ пойти въ сочиненіе Клейна. Vorlesnugen über das Ikosaeder.

См. также А. В. Васильевъ. О функціяхъ раціональныхъ, аналогичныхъ съ функціями двоякопеpіодическими. Казань 1880.

Послѣ доказательства теоремы Абеля-Руффини вопросъ объ особенностяхъ уравненій, разрѣшаемыхъ въ радикалахъ, получилъ особенное значеніе, и заслуга выясненія этого вопроса принадлежитъ Галуа.

Э. *Галуа* выяснилъ отличіе уравненій общихъ отъ тѣхъ спеціальныхъ уравненій, которыя допускаютъ рѣшеніе въ радикалахъ. *Вообще* для каждаго уравненія симметрическія функціи корней суть единственныя раціональныя функціи отъ корней, которыя могутъ быть выражены раціональными функціями отъ коеффиціентовъ. Но если уравненіе таково, что существуютъ сверхъ того другія раціональныя функціи отъ корней (коеффиціенты этихъ функцій должны быть раціонально составлены изъ коеффиціентовъ уравненія), которыя выражаются раціонально посредствомъ коеффиціентовъ уравненій, то уравненіе будетъ ***спеціальнымъ***; Кронекеръ употреблялъ выраженіе, что оно имѣетъ аффектъ.

Если, напримѣръ, между корнями уравненія, котораго степень есть абсолютно простое число, существуютъ соотношенія

$$x_2=\theta(x_1),\ x_3=\theta(x_2),\dots\ x_n=\theta(x_{n-1}),\ x_1=\theta(x_n). \quad (1),$$

гдѣ $\Theta(x)$ есть раціональная функція, то можно составить функцію отъ $x_1, x_2,\dots x_n$ (циклическую функцію Лагранжа), которая не будучи симметрической, однако можетъ быть выражена раціональною функціею коеффиціентовъ.

Аффектъ имѣютъ также всѣ тѣ неприводимыя уравненія, для которыхъ имѣютъ мѣсто слѣдующія условія: 1^0 всѣ корни выражаются раціонально посредствомъ одного изъ нихъ:

$$x_i=R_i(x_1),\ x_j=R_j(x_1) \quad (2)$$

и 2^0 раціональныя функціи R удовлетворяютъ соотношенію

$$R_i\ (R_j\ (x_1)\ )=R_j\ (R_i\ (x_1)\ ). \quad (3).$$

Эти уравненія носятъ названіе Абелевыхъ. Уравненія между корнями которыхъ существуютъ соотношенія (1) представляютъ, очевидно, частный случай Абелевыхъ.

Дѣленіе окружности на равныя части можетъ быть сведено на рѣшеніе уравненія $\frac{x^m-1}{x-1}=0$, *) гдѣ m есть абсолютно простое число p или степень его p^α.

Гауссъ показалъ, что въ случаѣ, если степень есть абсолютно простое число, всѣ корни этого уравненія могутъ быть представлены посредствомъ одного изъ нихъ V слѣдующимъ образомъ:

$$V^g,\ V^{g^2},\ V^{g^3},\ ,\ldots\ V^{g^{p-2}} \quad (4),$$

гдѣ g есть первообразный корень числа p. Такъ, напримѣръ, всѣ 16 корней уравненія

$\frac{x^{17}-1}{x-1}=0$ можно расположить въ циклъ

$$V,\ V^3,\ V^{3^2},\ V^{3^3},\ldots\ V^{3^{15}},\ V^{3^{16}}=V,\ldots.$$

Очевидно, что въ этомъ случаѣ удовлетворяются условія (1):—каждый корень представляетъ собою 3-ю степень предшествующаго. Уравненіе дѣленія круга принадлежитъ поэтому, къ абелевымъ уравненіямъ. Расположеніе корней въ рядъ позволяетъ затѣмъ Гауссу разбить циклъ изъ 16 корней на восьмичленные, 4-членные, 2-членные и одночленные циклы, соотвѣтственно тѣмъ множителямъ, на которые распадается число 16, и опредѣлить «періоды», т. е. суммы корней, принадлежащихъ къ одному и тому же циклу, послѣдовательно посредствомъ вспомогательныхъ уравненій, которыя въ данномъ случаѣ будутъ всѣ квадратныя. Въ общемъ случаѣ, когда $p-1=a^\alpha b^\beta . c^\gamma \ldots l^\chi$, вспомогательныя уравненія будутъ степеней $a, b, c, \ldots l$, но рѣшаются также съ помощью радикаловъ.

Къ абелевымъ уравненіямъ приводитъ также теорія дѣленія тригонометрическихъ функцій **) (въ исторіи мате-

---

*) Связь этого уравненія съ теоріею дѣленія круга на равныя части указана въ отдѣлѣ IV: Ученіе о комплексныхъ числахъ. Уравненіе носитъ названіе уравненія дѣленія круга. Подробное рѣшеніе его можно найти въ Disquisitiones arithmeticae Гаусса. Также см. Bachmann. Die Lehre von der Kreistheilung. Leips. 1872.

**) См. также отдѣлъ IV.

матики, эта теорія извѣстна подъ названіемъ задачи угловыхъ сѣченій—sectiones angulares); уравненіе Адріана Романуса, приведенное нами выше, и есть уравненіе, черезъ которое $C=2sin\varphi$ выражается черезъ $y=2sin\frac{\varphi}{45}$; уравненіе сводится на дѣленіе угла на пять частей и на дѣленіе угла на три части. То и другое вслѣдствіе спеціальныхъ свойствъ задачи можетъ быть выполнено съ помощью радикаловъ.

Наконецъ и болѣе общая теорія дѣленія эллиптическихъ функцій (въ частности задача о дѣленіи на n равныхъ частей дуги лемнискаты) приводитъ также къ абелевымъ уравненіямъ.

Изъ уравненій, которыя рѣшаются въ радикалахъ, выдѣляются по своему геометрическому интересу уравненія, рѣшаемыя только съ помощью радикаловъ второй степени, ибо корни такихъ уравненій могутъ быть построены съ помощью прямой линіи и круга, т. е. съ помощью циркуля и линейки. Уже Декартъ замѣтилъ, что вопросъ—можетъ-ли геометрическая величина быть построена съ помощью циркуля и линейки, сводится на вопросъ о томъ, можетъ-ли эта величина алгебраически быть выражена только черезъ радикалы второй степени.

Всякая задача, которая приводится къ неприводимому уравненію, порядокъ котораго не есть степень 2, не можетъ быть разрѣшена съ помощью круга и прямой. Такъ, задачу объ удвоеніи куба, которая приводится къ разрѣшенію неприводимаго уравненія $x^3-2a=0$, нельзя разрѣшить съ помощью элементарной геометріи; то-же справедливо и относительно задачъ о нахожденіи двухъ среднепропорціональныхъ (приводится къ рѣшенію уравненія $x^3-a^2b=0$) и о трисекціи угла (приводится къ рѣшенію уравненія

$$x^3-\frac{3}{4}x-\frac{a}{4}=0).$$

Когда m—простое число, то уравненіе

$$\frac{x^m-1}{x-1}=0 \text{ степени } m-1\text{-й}$$

будетъ, какъ это показалъ Гауссъ въ своихъ «Disquisitiones arithmeticae» (sect. VII) неприводимо. Метода Гаусса сводитъ рѣшеніе уравненія на квадратныя уравненія, если $m-1=2^n$ и, такимъ образомъ, дѣленіе можетъ быть произведено въ этомъ случаѣ—и только въ этомъ случаѣ —построеніемъ элементарной геометріи. Когда m есть число a^α, то можно показать, видоизмѣняя доказательство Гаусса, что уравненіе степени $a^{\alpha-1}(a-1)=\varphi(a^\alpha)$, (знакъ φ есть знакъ числовой функціи Эйлера, см. Введеніе въ Анализъ, вып. 1), которое получается, уравнивая нулю частное отъ дѣленія $x^{a^\alpha}-1$ на x^a-1, также неприводимо; поэтому $(a-1)\,a^{\alpha-1}$ должно быть вида 2^n, а это возможно только при $a=2$. Такимъ образомъ, *дѣленіе окружности на N равныхъ частей можно произвести съ помощью циркуля и линейки только въ томъ случаѣ, когда первоначальные множители числа N, отличные отъ 2, имѣютъ видъ 2^n+1 и входятъ въ N лишь въ первой степени.*

Въ теоріи чиселъ доказывается, что число вида 2^n+1 можетъ быть абсолютно простымъ только, если $n=2^m$; поэтому, первоначальные множители чиселъ N должны имѣть форму $2^{2^m}+1$.

Если положимъ $m=0$ и $m=1$, то получаемъ случаи извѣстные еще древнимъ геометрамъ—построеніе правильнаго треугольника и правильнаго 5—угольника (или десятиугольника).

Полагая $m=2, 3, 4$ получаемъ новые случаи дѣленія круга съ помощью циркуля и линейки на 17, 257 и 65537 частей*).

Задача угловыхъ сѣченій даетъ также примѣры уравненій, рѣшимыхъ съ помощью циркуля и линейки. Такъ Адріанъ Романусъ, предлагая для рѣшенія свое уравненіе 45-ой степени, указалъ, что при

$$C=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

*) Построеніе правильнаго 17 угольника выполнено Гауссомъ. См. Клейнъ. Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи. Казань, 1898. Относительно 257 угольника Richelot напечаталъ обширную работу въ журналѣ Крелле (9-й томъ); на 65537 угольникъ потратилъ десять лѣтъ своей жизни проф. Гермесъ.

получается

$$y=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

—выраженіе, которое можетъ быть построено съ помощью циркуля и линейки.

§ 23. Ариѳметическая теорія алгебраическихъ чиселъ.

Тѣ алгебраическія числа, которыя являются корнями уравненія

$$(1)\quad x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_n=0,$$

у котораго коеффиціентъ при высшей степени есть **единица**, *а всѣ прочіе коеффиціенты суть* **цѣлыя числа**, имѣютъ свойства аналогичныя со свойствами цѣлыхъ чиселъ и носятъ, поэтому, названіе **цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ**. Что касается до общихъ алгебраическихъ чиселъ т. е. корней уравненія

$$(2)\qquad ax^n+bx^{n-1}+\ldots l=0,$$

гдѣ a, b, c,....l суть раціональныя числа, то простое преобразованіе *) уравненія (2) показываетъ, что они могутъ быть представлены въ формѣ $\frac{w}{A}$, гдѣ w есть цѣлое алгебраическое число, а A есть цѣлое положительное раціональное число.

Свойства общихъ алгебраическихъ чиселъ аналогичны со свойствами чиселъ раціональныхъ.

Мы обратили въ вып. 1-мъ вниманіе на то свойство цѣлыхъ чиселъ, которое можно назвать „замкнутостью области цѣлыхъ чиселъ“ по отношенію къ операціямъ сложенія, вычитанія и умноженія (слѣдовательно и возвышенія въ цѣлую положительную степень) и которое состоитъ въ томъ, что если числа A и B суть цѣлыя числа, то и числа $A\pm B$, AB суть числа цѣлыя.

---

*) См. подстрочное примѣчаніе стр. 63.

Отсюда выводится какъ слѣдствіе, что если

$$F(x),\ F(x,y,z,..)$$

суть цѣлыя цѣлочисленныя функціи отъ одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ и A, B C... суть цѣлыя числа, то $F(A)$, $F(A,B,C,..)$ суть также цѣлыя числа.

Этимъ свойствамъ цѣлыхъ чиселъ соотвѣтствуютъ аналогичныя свойства цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ, какъ видно изъ слѣдующихъ теоремъ.

Теорема I. *Если числа α и β суть цѣлыя алгебраическія числа, то $\alpha\pm\beta$ есть также цѣлое алгебраическое число.*

Доказ. Пусть тѣ два уравненія которымъ удовлетворяютъ α и β, будутъ

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^m+a_1\alpha^{m-1}+.....+a_m=0\\ \beta^n+b_1\beta^{n-1}+.....+b_n=0\end{array}\right\} \qquad (1);$$

коеффиціенты обоихъ уравненій суть цѣлыя раціональныя числа. Полагая $mn=s$, составляемъ произведеніе

$$(1+\alpha+\alpha^2+....+\alpha^{m-1})(1+\beta+\beta^2+...+\beta^{n-1})$$

и послѣ того, какъ оно будетъ раскрыто, обозначимъ всѣ отдѣльные члены произведенія буквами w_1, w_2,....w_3. Напр., $w_1=1$, $w_2=\alpha$, $w_3=\beta$, $w_4=\alpha^2$,...$w_7=\alpha^3\beta^2$,..$w_s=\alpha^{m-1}\alpha^{n-1}$.

Если обозначимъ буквою w сумму $\alpha+\beta$ (или разность $\alpha-\beta$), то легко найдемъ, что каждое изъ чиселъ

$$ww_1=\alpha+\beta,\quad ww_2=(\alpha+\beta)\alpha\ ,....ww_s=(\alpha+\beta)\alpha^{m-1}\beta^{n-1}$$

можетъ быть представлено подъ формою

$$k_1w_1+k_2w_2+....+k_3w_3$$

или непосредственно или при посредствѣ уравненій (1): числа k_1. k_2, ..k_s суть цѣлыя, включая и нуль. Такъ напр.

$$ww_1=(\alpha+\beta)=0.w_1+1.w_2+1.w_3+0.w_4+..+0.\ w_s$$
$$ww_2=(\alpha+\beta)\alpha=0.w_1+0.w_2+0.w_3+1.w_4+1.w_5+0.w_6+.\ +0w_s.$$

Итакъ, будемъ имѣть s слѣдующихъ уравненій

$$(2) \qquad w_k w = h_{k,1} w_1 + h_{k,2} w_2 + \ldots + h_{k,s} w_s,$$

гдѣ k послѣдовательно принимаетъ значенія $1,2,\ldots,s$, и коэффиціенты $h_{k,s}$ (число ихъ$=s^2$) суть цѣлыя числа. Этимъ s однороднымъ уравненіямъ съ s неизвѣстными можно удовлетворить или полагая всѣ w_s равными 0, или приравнивая нулю опредѣлитель уравненій (2). Такъ какъ между w находится и произведеніе 1.1, то

$$\begin{vmatrix} h_{1,1}-w & h_{1,2} & \ldots\ldots & h_{1,s} \\ h_{2,1} & h_{2,2}-w & \ldots & h_{2,s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{s,1} & h_{s,2} & & h_{s,s}-w \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этотъ опредѣлитель, умножая результатъ на $(-1)^s$ и располагая по степенямъ w, мы найдемъ, что число w удовлетворяетъ уравненію:

$$w^s + Aw^{s-1} + \ldots + K = 0,$$

гдѣ всѣ коэффиціенты суть числа цѣлыя.

Теорема 2. *Если α и β суть цѣлыя алгебраическія числа, то и произведеніе $\alpha\beta$ есть также цѣлое алгебраическое число.*

Доказательство совершенно подобно предъидущему; необходимо лишь обозначить буквою w произведеніе $\alpha\beta$.

Изъ этихъ двухъ теоремъ вытекаетъ какъ слѣдствіе.

Теорема 3. *Если $F(x, y, z\ldots)$ есть цѣлая цѣлочисленная функція отъ перемѣнныхъ x, y, z, а $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ суть цѣлыя алгебраическія числа, то $F(\alpha, \beta, \gamma\ldots)$ есть также цѣлое алгебраическое число.*

Но къ теоремамъ 1—3, аналогичнымъ съ соотвѣтствующими теоремами теоріи цѣлыхъ (положительныхъ или отрицательныхъ) чиселъ присоединяется въ теоріи цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ, слѣдующая важная теорема:

Теорема 4. *Если число w удовлетворяетъ уравненію $w^p + aw^{p-1} + \beta w^{p-2} + \ldots\ldots + \lambda = 0$, въ которомъ коэффиціенты* *суть цѣлыя алгебраическія числа, то и число w есть цѣлое алгебраическое число.*

Доказ. По предположенію α, β, γ... суть цѣлыя алгебраическія числа, т. е. удовлетворяють соотвѣтственно уравненіямъ:

$$\begin{array}{l} \alpha^v + a_1 \alpha^{v-1} + a_2 \alpha^{v-2} + \ldots + a_r = 0 \\ \beta^s + b_1 \beta^{s-1} + b_2 \beta^{s-2} + \ldots + b_s = 0 \\ \gamma^t + c_1 \gamma^{t-1} + c_2 \gamma^{t-2} + \ldots + c_t = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

въ которыхъ числа a_1, a_2,...,b_1, b_2,...c_1, c_2... суть числа цѣлыя раціональныя. Полагая $prst....=m$, обозначимъ черезъ w_1, w_2...w^m всѣ отдѣльные члены произведенія $(1+w+......+w^{p-1})(1+\alpha+\alpha^2+...+\alpha^{r-1}).(1+\varphi+..\varphi^{t-1})$.. послѣтого какъ оно будетъ раскрыто.

Не трудно убѣдиться, что каждое изъ m чиселъ ww, $w_2 w$,.... $w_m w$ будетъ или непосредственно имѣть форму $h, w_1+h_2 w_2+....h_m w_m$, гдѣ всѣ h суть числа цѣлыя раціональныя, или можетъ быть представлено въ этой формѣ при посредствѣ уравненій.

Итакъ, будемъ имѣть m слѣдующихъ уравненій:

$$w_k w = h_{k,1} w_1 + h_{k\,2} w_2 + ... + h_{k,m} w_m,$$

гдѣ k послѣдовательно принимаетъ значенія 1, 2,.. m, а m^2 коеффиціентовъ $h_{k,r}$ суть цѣлыя числа Исключая изъ этихъ m уравненій m чиселъ w_1, w_3,... w_m, получаемъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія w

$$\begin{vmatrix} h_{1,1}-w, & h_{1,2}, & \ldots & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2}-w. & \ldots & h_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{m,1} & h_{m,2} & \ldots & h_{m,m}-w \end{vmatrix} = O.$$

Не трудно видѣть, что коеффиціенты этого уравненія суть цѣлыя раціональныя числа, а коеффиціентъ при высшей степени w есть 1, т. е. w есть цѣлое алгебраическое число и т. д.

Теоремы, нами данныя, могутъ быть безъ труда обобщены на алгебраическія *дробныя* числа и мы получаемъ соотвѣтственно:

Теоремы 1^1 и 3^1.—*Если α и β суть алгебраическія дробныя числа, то $\alpha+\beta$ и $\alpha\beta$ суть также алгебраическія дробныя числа.*

Къ этимъ теоремамъ въ ученіи объ алгебраическихъ **общихъ** числахъ присоединяется теорема, аналогичной которой мы не имѣли раньше:

Теорема (D). *Если β есть алгебраическое дробное число, то и $\frac{1}{\beta}$ есть также алгебраическое число.*

Доказательство теоремы вытекаетъ изъ того, что если β удовлетворяетъ уравненію

$$a_0\beta^n+a_1\beta^{n-1}+\ .\ .\ .\ +a_{n-1}\beta+a_n=O,$$

то $\frac{1}{\beta}$ удовлетворяетъ уравненію,

$$a_n\beta^n+a_{n-1}\beta^{n-1}+\ .\ .\ .\ +a_1\beta+a_0=O.$$

Какъ слѣдствіе теоремъ 2^1 и D имѣемъ, что $\frac{\alpha}{\beta}$ есть алгебраическое число, если α и β числа алгебраическія цѣлыя или дробныя.

Отсюда легко получить теорему 4^1. *Если $F(x, y, z,..)$ есть раціональная функція съ цѣлыми коеффиціентами, α, β, γ... суть алгебраическія числа, то $F(\alpha, \beta, \gamma...)$ есть также алгебраическое число.*

Совокупность всѣхъ алгебраическихъ чиселъ, выражающихся раціональными функціями отъ нѣсколькихъ алгебраическихъ чиселъ α, β, γ . . . , называется *числовымъ тѣломъ* (Дедекиндъ) или *областью раціональности* (Кронекеръ)

Одною изъ основныхъ теоремъ теоріи числовыхъ тѣлъ является теорема о существованіи въ каждомъ тѣлѣ числа d, имѣющаго то свойство, что всѣ другія числа этого тѣла могутъ быть представлены какъ цѣлыя раціональныя функціи отъ d съ раціональными коеффиціентами. Это число d называется числомъ *опредѣляющимъ* тѣло. Какъ алгебраическое число, оно удовлетворяетъ алгебраическимъ уравненіямъ съ раціональными коеффиціентами, изъ которыхъ можно выдѣлить одно наименьшей степени.

Если эта наименьшая степень есть m, то m называется *степенью* тѣла. Уравненіе m-ой степени для d есть уравненіе неприводимое въ области раціональныхъ чиселъ.

Обратно, каждый корень такого неприводимаго уравненія опредѣляетъ числовое тѣло m ой степени. Если d', d'' . . . . d^{m-1} суть m—1 другихъ корней уравненія, то тѣла k', k'' . . . $k^{(m-1)}$, опредѣляемыя числами d', d'' . . $d^{(m-1)}$, называются *сопряженными* съ k тѣлами.

Если $\alpha=c_1+c_2\, d+\ \ldots\ +c_m d^{m-1}$, гдѣ $c_1, c_2 \ldots c_m$ суть раціональныя числа, есть произвольное число тѣла k, то числа

$\alpha'=c_1+c_2\, d'+\ \ldots\ldots\ +c_m\, d'^{m-1}$

$\alpha''=c_1+c_2\, d''+\ \ldots\ldots\ +c_m\, d''^{m-1}$

называются *сопряженными* съ α числами.

Произведеніе $N(\alpha)=\alpha\alpha'\ \ldots\ldots\ \alpha^{(m-1)}$ называется *нормою* числа α.

Норма числа α есть всегда раціональное число; если-же число α есть цѣлое алгебраическое число, то норма есть цѣлое число. Не трудно видѣть, что $N(\alpha\beta)=N(\alpha).N(\beta)$.

Второю основною теоремою въ теоріи числовыхъ тѣлъ можно считать теорему, по которой *въ каждомъ числовомъ тѣлѣ m-ой степени всегда существуетъ m цѣлыхъ чиселъ $w_1, w_2, \ldots w_m$, имѣющихъ то свойство, что всякое другое цѣлое число w тѣла можетъ быть всегда представлено подъ видомъ $a_1 w_1+a_2 w_2+\ \ldots\ +a_m w_m$*,

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_m$ суть цѣлыя раціональныя числа.

Эти числа $w_1, w_2, \ldots w_n$ называются *основаніемъ* тѣла.

Примѣнимъ эти общія положенія къ такъ называемому вещественному квадратному тѣлу, опредѣляемому числомъ $\sqrt{D}$, корнемъ неприводимаго въ области раціональныхъ чиселъ уравненія $x^2-D=0$, гдѣ D есть цѣлое положительное число, не имѣющее дѣлителемъ полнаго квадрата Всѣ числа этого тѣла, будучи раціональными функціями отъ $\sqrt{D}$, съ цѣлыми коеффиціентами, могутъ быть съ помощью весьма легкихъ преобразованій приведены къ виду $a+b\sqrt{D}$, гдѣ a и b суть числа раціональныя. Если число $\alpha=a+b\sqrt{D}$, то сопряженное съ нимъ число $\alpha'=a-b\sqrt{D}$.

Нормою числа α будетъ произведенiе $\alpha\alpha'=a^2-b^2D$.

Теорема $N(\alpha\beta)=N(\alpha).\ N(\beta)$ даетъ замѣчательное алгебраическое тожество (обобщенiе тожества Лагранжа-Эйлера для двухъ квадратовъ)

(L) $(a^2-b^2D)\ (a'^2-b'^2D)=(aa'\pm Dbb')^2-D(ab'\mp a'b)^2$.

Что касается до *основанiя* квадратнаго тѣла, то въ этомъ отношенiи нужно различать два случая: 1) $D\equiv 1$ (мод. 4) и 2) D не$\equiv 1$ (мод. 4) Въ первомъ случаѣ основанiемъ служатъ числа 1, $w=\frac{1+\sqrt{D}}{2}$ и цѣлыя числа имѣютъ форму $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\sqrt{D}$. Во второмъ случаѣ основанiемъ служатъ числа 1, $w=\sqrt{D}$ и цѣлыя числа имѣютъ форму $A+B\sqrt{D}$.

Теорiя дѣлимости цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ. Единицы Разложенiе чиселъ на неприводимые множители.

Аналогiя между цѣлыми рацiональными и цѣлыми алгебраическими числами можетъ быть проведена и значительно далѣе; такъ мы можемъ распространить на теорiю цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ понятiе о дѣлимости и ученiе о сравненiяхъ.

Цѣлое число α называется дѣлящимся на β, если можно найдти цѣлое число γ такое, что $\alpha=\beta\gamma$. Аналогично съ соотвѣтствующими теоремами теорiи цѣлыхъ чиселъ имѣемъ:

1. Если α и β дѣлятся на γ, то $\alpha\pm\beta$ дѣлится на γ.

2 Если α дѣлится на β и β дѣлится на γ, то α дѣлится на $\beta\gamma$.

Всякiй разъ когда разность $\alpha-\beta$ дѣлится на γ, говорятъ, что α сравнимо съ β по модулю γ пишутъ

$$\alpha\equiv\beta \text{ (мод. } \gamma).$$

Основныя свойства сравненiй остаются безъ измѣненiя; такъ напр. два числа, сравнимыя съ третьимъ по модулю γ, очевидно сравнимы между собой по тому-же модулю; это свойство позволяетъ распредѣлить всѣ цѣлыя алгебраическiя числа даннаго тѣла на классы, причемъ каждый классъ будетъ состоять изъ чиселъ, сравнимыхъ между собою по модулю γ. Доказывается что число различныхъ классовъ есть всегда число конечное. Всѣ результаты, которые въ теоріи обыкновенныхъ чиселъ являются результатомъ конечности числа классовъ, переносятся и въ теорію цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ. Но, вмѣстѣ съ аналогіею, теорія цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ отличается и особенностями отъ теоріи цѣлыхъ чиселъ. Одною изъ такихъ особенностей является важность и трудность теоріи *единицъ*. Въ теоріи цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ (положительныхъ и отрицательныхъ) мы имѣемъ двѣ единицы $+1$ и -1 и мы знаемъ, что если число α дѣлится на β, то вообще число $\pm\alpha$ дѣлится на $\pm\beta$. Два числа α и $-\alpha$, отличающихся отъ другого множителемъ *единицею*, назовемъ *союзными*.

Въ теоріи цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ единицею называется всякое число, норма котораго есть ± 1, или иначе всякое число ε, котораго обратная величина $\frac{1}{\varepsilon}$ есть также цѣлое число. Оба опредѣленія совпадаютъ. Такъ напр. въ квадратномъ тѣлѣ, опредѣляемомъ $\sqrt{5}$, число $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ есть единица, т. к. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1$.

Два числа φ и φ, изъ которыхъ одно получается изъ другого путемъ умноженія на одну изъ единицъ, называются *союзными*; отсюда, если цѣлое число φ дѣлится на φ и обратно число φ дѣлится на φ, то числа φ и φ будутъ союзными.

Въ теоріи цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ разысканіе единицъ составляетъ одну изъ важнѣйшихъ задачъ.

Для квадратичнаго вещественнаго тѣла единицы опредѣляются слѣдующимъ образомъ. Если опредѣляющее тѣло число есть $\sqrt{D}$ и $D \equiv 1$ (мод. 4), то цѣлыя алгебраическія числа имѣютъ форму $\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\sqrt{D}$ и поэтому единицами будутъ тѣ числа этой формы, для которыхъ

$$A^2 - DB^2 = \pm 4$$

Если-же D не $\equiv 1$ (мод. 4), то всѣ цѣлыя числа квадратичнаго тѣла имѣютъ форму $A+B\sqrt{D}$ и единицами будутъ тѣ числа, для которыхъ $A^2-DB^2=\pm 1$.

Такимъ образомъ, вопросъ объ опредѣленіи единицъ квадратичнаго тѣла приводится къ рѣшенію неопредѣленнаго уравненія

$$T^2-DU^2=\pm 1 \text{ или } \pm 4. \ (^*)$$

Остановимся на рѣшеніи уравненія $T^2-DU^2=\pm 1$, чтобы указать замѣчательное свойство рѣшеній этого уравненія, основанное на тожествѣ (L) стр. 123. Изъ этого тожества вытекаетъ, что если (t_1, u_1) и (t_2, u_2) суть два рѣшенія уравненія $T^2-DU^2=+1$, то мы можемъ получить третье $(t_3\ u_3)$ по формулѣ (1) $(t_1+u_1\sqrt{D})(t_2+u_2\sqrt{D})=t_3+u_3\sqrt{D}$. Дѣйствительно изъ этого равенства слѣдуетъ (2) $(t_1-u_1\sqrt{D})(t_2-u_2\sqrt{D})=t_3-u_3\sqrt{D}$; перемножая равенства (1) и (2) получаемъ $t^2_3-u_3^2D=+1$. Отсюда если t_1, u_1 есть рѣшеніе уравненія $T^2-DU^2=+1$, то формула

$$(t_1+u_1\sqrt{D})^m=T+U\sqrt{D}$$

даетъ полагая послѣдовательно $m=1, 2, 3,\ldots$ безконечное множество рѣшеній. Въ теоріи чиселъ доказывается существованіе такъ называемаго основного рѣшенія t, u посредствомъ котораго всѣ прочія «положительныя» рѣшенія $(T>0, U>0)$ получаются по формулѣ

$$T+U\sqrt{D}=(t+u\sqrt{D})^m.$$

Если, напротивъ, t_1 и u_1 суть рѣшенія уравненія $T^2-DU^2=-1$, то формула $(t+u\sqrt{D})^m=T+U\sqrt{D}$ даетъ рѣшенія уравненія $T^2-DU^2=+1$ при m четномъ и уравненія $T^2-DU^2=-1$ при m нечетномъ.

Разысканіе основныхъ рѣшеній уравненій $T^2-DU^2=\pm 1$ сводится къ разложенію $\sqrt{D}$ въ непрерывную дробь (см. § 27).

---

*) Въ такъ называемой теоріи приведенія квадратичныхъ бинарныхъ формъ (см. вып. 1.) разсматривается уравненіе болѣе общаго вида

$$T^2-DU^2=\delta^2.$$

Уравненіе $T^2-DU^2=1$ носитъ названіе уравненія Пелля. Смотри § 27.

Изъ опредѣленія единицы и союзныхъ чиселъ вытекаетъ, что каждое число дѣлится на единицы и на союзныя съ нимъ числа. Но далѣе относительно μ можно сдѣлать два предположенія: или μ не дѣлится ни на какое другое число кромѣ единицы и союзныхъ съ нимъ чиселъ (въ этомъ случаѣ оно называется *неразложимымъ*) или μ дѣлится на нѣкоторое число α, которое не равно ни единицѣ и ни какому союзному съ μ числу; въ этомъ случаѣ $\mu=\alpha\,\beta$, гдѣ β также не равняется ни единицѣ, ни союзному съ μ числу. Изъ уравненія $\mu=\alpha\,\beta$ слѣдуетъ что $N(\mu)=N(\alpha).\ N(\beta)$, а слѣдовательно нормы $N(\alpha)$ и $N(\beta)$ по абсолютному значенію менѣе $N(\mu)$. Относительно чиселъ α и β возможны снова тѣ-же предположенія, которыя мы дѣлали относительно μ. Если оба числа будутъ числами неразложимыми, то разложеніе (a) числа μ есть окончательное. Если-же относительно одного или обоихъ чиселъ α и β имѣетъ мѣсто второе предположеніе, то приэтомъ нормы чиселъ, на которыя разложатся числа α и β, будутъ по абсолютному значенію менѣе соотвѣтственно нормъ α и β. Но число различныхъ цѣлыхъ чиселъ, которыя по абсолютному значенію меньше $N(\mu)$, конечно и слѣдовательно послѣ конечнаго числа операцій разложенія мы прійдемъ къ разложенію числа μ на множители далѣе не разложимые; число такихъ множителей будетъ число конечное.

Въ теоріи цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ полученное аналогичнымъ путемъ разложеніе представляется, какъ извѣстно, вмѣстѣ съ тѣмъ и единственнымъ, Единственность разложенія сложнаго числа на простые множители составляетъ основаніе теоріи чиселъ. Въ теоріи цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ мы можемъ, напротивъ, дать примѣры нѣсколькихъ разложеній одного числа на неразложимые множители. Такъ напр. въ квадратичномъ (мнимомъ) тѣлѣ опредѣляемомъ $\sqrt{-5}$, мы имѣемъ:

$$6=2.\ 3=(1+\sqrt{-5})\ (1-\sqrt{-5})$$

$$9=3^2=(2+\sqrt{-5})\ (2-\sqrt{-5})$$

Припомнимъ, что въ основаніе изученія свойствъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ мы положили слѣдующія аксіомы и свойства цѣлыхъ чиселъ:

1) Аксіомы ученія о величинахъ, которыя примѣнимы и къ цѣлымъ числамъ.

2) свойство области цѣлыхъ чиселъ, которое можно назвать *замкнутостью* по отношенію къ операціямъ сложенія. вычитавія и умноженія (т. е. $A+B$ и AB суть числа цѣлыя положительныя, если A и B суть таковыя; $A-B$ также если $A>B$).

3) если мы имѣемъ два цѣлыхъ положительныхъ числа A и B, при чемъ $A>B$, то всегда можно, составляя рядъ послѣдовательныхъ кратныхъотъ $1.B$, B, $2.\ B$, $3\ B\ldots mB$, найти такое кратное B, которое будетъ превышать A (*). Пусть $mB>A$,$(m-1)B<B$; тогда, полагая $m-1=q$, очевидно имѣемъ $A=Bq+r$ гдѣ r есть число въ ряду 0, 1, 2,... $B-1$ т. е. нѣкоторое число положительное, меньшее B.

Единственность разложенія сложнаго числа на простые множители есть слѣдствіе этихъ аксіомъ и свойствъ. Такъ-какъ аксіомы (1) и свойство (2) имѣютъ мѣсто и для цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ, то поэтому отсутствіе единственности разложенія на множители должно зависѣть отъ того, что область цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ *вообще* (въ частности напр. квадратичное тѣло, опредѣляемое $\sqrt{-5}$) не имѣетъ свойства (3). И дѣйствительно для тѣхъ тѣлъ, для которыхъ имѣетъ мѣсто свойство. аналогичное свойству (3) имѣетъ мѣсто и единственность разложенія сложнаго числа на простые множители. Таково напр. тѣло опредѣляемое $\sqrt{-1}$. Для цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ вида $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ можно показать, что если A и B суть два такія числа и $N(B)<N(A)$, то можно найти два новыя цѣлыя комплексныя числа q и r такъ что

$$A=Bq+r \text{ причемъ } N(r)<N(B)$$

---

*) Свойство (3) есть аксіома Архимида, примѣненная къ цѣлымъ числамъ.

Примѣняя послѣдовательно это свойство и замѣчая, что убывающій рядъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ

$$N(A), N(B), N(r), N(r^1),\ldots$$

долженъ быть конечнымъ, получаемъ для цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ алгориѳмъ, аналогичный алгориѳму Евклида, и рядъ теоремъ вполнѣ аналогичныхъ съ теоремами доказанными нами (см. вып. 1) для цѣлыхъ чисель и въ томъ числѣ теорему, что *всякое цѣлое комплексное число вида* $A+B\sqrt{-1}$ *можетъ быть только единственнымъ образомъ разложено на неразложимые множители*, которые и являются абсолютно простыми числами этого тѣла.

Что касается до другихъ тѣлъ, въ которыхъ отсутствуетъ свойство аналогичное со свойствомъ (3), то теорія ихъ представляетъ новыя трудности. Чтобы преодолить ихъ и создать для нихъ теорію дѣлимости, снова представляющую полную аналогію съ теоріею дѣлимости цѣлыхъ чиселъ, Куммеръ для чиселъ такъ называемаго кругового тѣла, опредѣляемаго корнемъ уравненія $x^p - 1=0$ ввелъ новое понятіе—понятіе объ идеальныхъ числахъ.

Общая теорія для цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ основанная на введеніи понятія объ идеальныхъ системахъ (идеальные модули или идеалы) была впервые создана Дедекиндомъ. Золотаревъ и Кронекеръ дали свои теоріи цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ. Мы отсылаемъ для знакомства съ теоріею цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ къ слѣдующимъ сочиненіямъ на русскомъ языкѣ:

И. Ивановъ. Цѣлыя комплексныя числа. Спб. 1891 г.

Ю. Сохоцкій. Начало общаго наибольшаго дѣлителя въ примѣненіи къ теоріи дѣлимости алгебраическихъ чиселъ, Спб. 1893. Замѣчательный рефератъ по теоріи алгебраическихъ числовыхъ тѣлъ составленъ Гильбертомъ и помѣщенъ въ Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Томъ 4-й (1894—1895).

§ 24. Перечислимость алгебраическихъ чиселъ. Доказательства существованія трансцедентныхъ чиселъ.

Теорема. *Алгебраическія вещественныя числа подобно раціональнымъ (см. § 6) составляютъ перечислимое множество (abzählbare Menge) т. е. совокупность вещественныхъ алгебраическихъ чиселъ имѣетъ ту-же мощность, какъ и совокупность цѣлыхъ положительныхъ чиселъ.*

Доказ. Чтобы доказать эту теорему, нужно показать возможность расположить въ опредѣленномъ порядкѣ всѣ вещественныя алгебраическія числа т. е. вещественные корни всѣхъ алгебраическихъ уравненій вида

$$a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_{n-1} w + a_n = 0,$$

причемъ мы имѣемъ полное право сдѣлать предположеніе, что всѣ числа a суть взаимно-простыя между собою (т. е. не существуетъ число d, на которое всѣ они дѣлятся на цѣло), a_0 положительно и уравненіе неприводимо. Для того, чтобы осуществить желательное расположеніе 1) распредѣляемъ уравненія по величинѣ такъ называемой, *высоты* N, опредѣляемой по формулѣ:

$$N = n-1 + |a_0| + |a_1| + |a_2| \ldots + |a_n|,$$

2) распредѣляемъ числа, соотвѣтствующія одной и той же высотѣ N по ихъ величинѣ. Нетрудно видѣть, что опредѣленной высотѣ N отвѣчаетъ только конечное число алгебраическихъ уравненій и слѣдовательно конечное число алгебраическихъ чиселъ.

Такъ для $N=1$ можно взять только $n=1$, $|a_0|=1$, $|a_1| = |a_2| = \ldots = 0$, что даетъ уравненіе $x=0$.

При $N=2$ имѣемъ или $n=1$, $|a_0| = 2$, $|a_1| = |a_2| = \ldots = 0$, что даетъ уже полученное число $x=0$ или $n=1$, $|a_0|=1$, $|a_1|=1$ $|a_2| = \ldots = 0$ т. е. $x \pm 1 = 0$ или $n=2$, $|a_0|=1$, $|a_1| = \ldots = 0$ т. е $x^2=0$.

При $N=3$ имѣемъ или $n=1$, $|a_0|=3$, $|a_1| = \ldots = 0$ т. е. $3x=0$.

или $n=1$, $|a_0|=2$, $|a_1|=1$ т. е $2x \pm 1=0$
или $n=1$, $|a_0|=1$, $|a_1|=2$ т. е $x \pm 2=0$
или $n=2$, $|a_0|=2$, $|a_1|=0$ т. е $2x^2=0$.

Какъ послѣднее предположеніе, такъ и прочія предположенія, которыя можно сдѣлать при $N=3$, не даютъ новыхъ не встрѣтившихся еще уравненій и чиселъ.

При $N=4$ мы получаемъ только слѣдующія новыя уравненія:

$$3x \pm 1 = 0$$
$$x \pm 3 = 0$$
$$2x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$x^2 - x + 1 = 0$$
$$x^2 - 2 = 0.$$

Располагая корни всѣхъ этихъ уравненій въ рядъ по величинѣ N и при равной величинѣ N по величинѣ корня получаемъ слѣдующую таблицу:

N	1	2	3	4
	0	$-1+1$	$-2-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$	$-3, -1{,}61803, -1{,}41241.$

Такъ—какъ примѣненіе указаннаго пріема можетъ можетъ быть продолжено и далѣе на всѣ цѣлыя значенія N, какъ-бы велико N ни было, то ясно, что всѣ алгебраическія числа (вещественныя) могутъ быть расположены въ рядъ, очевидно эквивалентный съ рядомъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ. Итакъ **совокупность алгебраическихъ чиселъ есть перечислимое множество**. Другими словами **мощность множества, состоящаго изъ всѣхъ алгебраическихъ вещественныхъ чиселъ, равна мощности ряда цѣлыхъ положительныхъ чиселъ или мощности множества раціональныхъ чиселъ.**

Только-что доказанная нами теорема составляетъ одинъ изъ замѣчательнѣйшихъ результатовъ **теоріи множествъ,** созданной Георгомъ Канторомъ, и снова приводитъ насъ къ вопросу, поставленному нами на стр. 20, о множествѣ, составленномъ изъ *всѣхъ* безконечныхъ десятичныя дробей $O, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$ Теорія Дедекинда позволяетъ обобщить этотъ вопросъ и говорить о множествѣ всѣхъ сѣченій, которыя можно всѣми возможными способами произвести въ области раціональныхъ чиселъ Исчерпываются ли всѣ эти сѣченія тѣми сѣченіями, которыя получаются при рѣшеніи всѣхъ алгебраическихъ уравненій т. е. исчерпывается ли алгебраическими числами область ирраціональныхъ чиселъ вообще? Другими словами, есть ли всякая произвольно составленная безконечная десятичная дробь (или всякая безконечная непрерывная дробь) корень какого-либо алгебраическаго уравненія съ цѣлыми коеффиціентами или же ариѳметическія выраженія (подъ этимъ общимъ терминомъ мы понимаемъ десятичныя или вообще систематическія дроби, непрерывныя дроби, безконечныя числовыя строки и т. п.), удовлетворяющія алгебраическимъ уравненіямъ, должны имѣть особый специфическій, имъ только присущій, характеръ, и составляя ариѳметическія выраженія, этого характера не имѣющія, мы получаемъ *трансцедентныя числа* и такимъ образомъ воочію доказываемъ ихъ существованіе. Рѣшеніе поставленныхъ нами вопросовъ можетъ быть получено нѣсколькими путями.

Можно ставить себѣ цѣлью выяснить именно специфическій характеръ ариѳметическихъ выраженій, удовлетворяющихъ алгебраическимъ уравненіямъ. Починъ въ этомъ отношеніи принадлежитъ Ліувиллю, которымъ и дано первое доказательство существованія трансцедентныхъ чиселъ.

Изслѣдованія Ліувилля (*) основаны на изученіи характера приближенія раціональныхъ чиселъ къ корню алгебраическаго уравненія. Ліувилль доказываетъ, что если ξ есть корень алгебраическаго уравненія ν—ой степени,

---

*) Изслѣдованія эти были опубликованы въ 1844 и снова въ 1851 въ его журналѣ.

$\frac{p}{q}$ — раціональное приближеніе къ этому корню, то всегда можно найдти достаточно большее значеніе Q такъ что для всякаго $q > Q$

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > \frac{1}{q^{\nu+1}}$$

Изъ этой теоремы вытекаетъ, что если мы составимъ такое ариѳметическое выраженіе ξ, для котораго абсолютное значеніе разности между ξ и $\frac{p}{q}$, гдѣ $\frac{p}{q}$ есть приближенная дробь, остается при неопредѣленномъ возрастаніи знаменателя q однако всегда меньше $\frac{1}{q^{\nu+1}}$, какъ бы велико ν ни было, то ξ не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія сколь угодно высокой степени и есть число трансцедентное. Числа удовлетворяющія этимъ условіямъ Мальё предложилъ называть трансцедентными числами Ліувилля. Этимъ условіями удовлетворяетъ и является трансцедентнымъ числомъ Ліувилля напримѣръ ариѳметическое выраженіе

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^{1\cdot 2}} + \frac{\alpha_3}{10^{1\cdot 2\cdot 3}} + \cdots + \frac{\alpha_i}{10^{1\cdot 2\cdot 3\cdots i}} + \cdots \quad \left(\alpha_i = 1, 2, .. 9\right)$$

т. е. десятичная дробь, въ которой число нулей между значущими цифрами все болѣе и болѣе увеличивается по мѣрѣ того, какъ мы отходимъ вправо, или общѣе слѣдующее выраженіе (систематическая дробь при основаніи b, имѣющая то-же свойство):

$$\frac{m_1}{b^{\varphi_1}} + \frac{m_2}{b^{\varphi_1\varphi_2}} + \frac{m_3}{b^{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}} + \ldots, \qquad (m_i = 1, 2, .. b-1)$$

гдѣ числа $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ составляютъ неопредѣленно возрастающій рядъ чиселъ.

Другой путь для доказательства существованія трансцедентныхъ чиселъ есть путь, при которомъ изъ изученія свойствъ спеціальныхъ чиселъ, аналитически опредѣленныхъ, выводится, что эти числа не могутъ удовлетворять никакому алгебраическому уровненію. Этимъ путемъ Эрмитъ и Линдеманъ доказали трансцедентность чиселъ e и π. Объ изслѣдованіяхъ, относящихся къ этимъ числамъ, мы будемъ подробнѣе говорить въ параграфахъ, имъ посвященныхъ.

Но оба указанные пріема доказательства существованія трансцедентныхъ чиселъ далеко уступаютъ какъ по общности, такъ и по теоретической важности пути, основанному на изслѣдованіяхъ Г. Кантора по *теоріи множествъ*. Въ этихъ изслѣдованіяхъ Канторъ имѣлъ только одного предшественника Бернгарда Больцано. На 67-мъ году своей жизни Больцано написалъ глубокомысленную книжку: Paradoxien des Unendlichen (первое изданіе въ 1850 г. послѣ смерти автора, второе въ 1889 г.), въ которой поставлены были въпервый разъ нѣкоторые основные вопросы теоріи множествъ (о безконечныхъ эквивалентныхъ множествахъ, составляющихъ одно часть другого, объ строгомъ опредѣленіи непрерывнаго протяженія или континуума). Но только въ смѣломъ изложеніи, на первый взглядъ полномъ парадоксальныхъ положеній, данномъ Канторомъ, введены въ математику тѣ понятія теоріи множествъ, безъ которыхъ, какъ теперь все болѣе и болѣе выясняется, невозможно ея дальнѣйшее развитіе. Въ 1873 г. Канторомъ найденъ результатъ особенной важности, найдено строгое доказательство существованія кромѣ множествъ перечислимыхъ множествъ бóльшей мощности. Такими множествами являются множество всѣхъ вещественныхъ чиселъ, множество всѣхъ вещественныхъ чиселъ между 0 и 1, множество всѣхъ точекъ какого-либо квадрата или куба. Всѣ эти множества между собою эквивалентны т. е. имѣютъ одну и ту-же мощность, которая называется *мощностью линейнаго континуума*. Исходнымъ пунктомъ для доказательства существованія такихъ множествъ можетъ послужить данное нами доказательство перечислимости алгебраическихъ чиселъ. Разсмотрѣніе этого перечислимаго множества ведетъ тотчасъ-же къ доказательству существованія чиселъ, не принадлежащихъ къ этому множеству. Для этого представимъ себѣ всѣ алгебраическія числа десятичными дробями (*) и затѣмъ составимъ десятичную дробь, въ которой *первый* знакъ есть одна изъ 9 цифръ, отличныхъ отъ *перваго* знака *перваго* алгебраическаго числа, *второй* знакъ есть одна изъ 9 цифръ, отличная отъ *второго* знака *второго* алгебраическаго числа. . . . . . семидесятый знакъ есть одна изъ 9 цифръ, отличная отъ цифры, стоящей на семидесятомъ мѣстѣ въ семидесятомъ алгебраическомъ числѣ и т. п. Ясно, что составленная такимъ образомъ десятичная дробь будетъ отсутствовать въ нашей таблицѣ алгебраическихъ чиселъ. Мы имѣемъ такимъ образомъ новое доказательство существованія трансцедентныхъ чиселъ. Но доказательство это имѣетъ и еще болѣе важное значеніе. Такъ-какъ оно примѣнимо ко всѣмъ перечислимымъ множествамъ и всегда даетъ возможность указать числа, не принадлежащія къ этому перечислимому множеству, то оно показываетъ, что *совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ есть множество неперечислимое.*

Можно и иначе, исходя изъ той-же общей идеи, показать неперечислимость множества, состоящаго изъ всѣхъ вещественныхъ чиселъ или изъ вещественныхъ чиселъ, заключающихся между двумя предѣлами.

Разсматривая напр. всѣ числа между 0 и 1, мы можемъ сказать, что если бы они были перечислимы, то вмѣстѣ съ тѣмъ могли-бы и быть расположены въ извѣстномъ порядкѣ:

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; . \; . \; . \; a_\nu \; . \; . \; .$$

Мы можемъ кромѣ того предположить, что всѣ онѣ представлены десятичными дробями. Пусть разложенія въ десятичныя дроби чиселъ a_1, a_2, ... будутъ

$$\begin{array}{l} a_1 = 0, \; a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; . \; . \; . \\ a_2 = 0, \; a_{21} \; a_{22} \; a_{23} \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_\nu = 0, \; a_{\nu 1} \; a_{\nu 2} \; a_{\nu 3} \end{array}$$

(*) Каждое число можетъ быть двоякимъ образомъ представлено десятичною дробью, такъ-какъ конечную дробь можно написать подъ видомъ безконечной, уменьшая послѣднюю цифру и добавляя безконечный рядъ 9; такъ напр. 0, 3=0, 2999. . . . Для устраненія этой неопредѣленности условимся разъ навсегда избѣгать безконечнаго ряда девятокъ.

Составимъ тогда число 0, $b_1\ b_2\ b_3 \ldots$ въ которомъ b_ν не равно $a_{\nu\nu}$. Число это очевидно не находится въ множествѣ, что противорѣчитъ сдѣланному предположенію о томъ, что множество заключаетъ въ себѣ всѣ числа. Этимъ заключеніемъ отъ противнаго доказывается такимъ образомъ неперечислимость всѣхъ чиселъ, выраженныхъ десятичными дробями.

Такимъ образомъ совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ (*область чиселъ* B) представляетъ собою неперечислимое множество множество мощности, превышающей мощность рядъ цѣлыхъ чиселъ. *)

Въ § 18 мы говорили о томъ, что теорія измѣренія непрерывныхъ величинъ не можетъ ограничиться разсмотреніемъ только области чиселъ P. Переходимъ теперь къ вопросу о соотвѣтствіи между числами новой области B и состояніями непрерывныхъ величинъ.

§ 25. Соотвѣтствіе между числами области В (ариѳметическаго континуума) и точками прямой линіи.

Опытъ не даетъ намъ непосредственно точнаго понятія о непрерывности подобно тому какъ онъ не даетъ намъ непосредственно понятія о геометрическомъ безконечномъ однородномъ пространствѣ. Непрерывность является, какъ видно изъ слѣдующихъ примѣровъ, результатомъ несовершенства нашихъ чувствъ. Такъ лѣсъ, состоящій изъ раздѣльно стоящихъ, иногда на далекомъ разстояніи одно отъ другаго, деревьевъ представляется намъ издали сплошною зеленою массою. Непрерывная прямая, проведенная перомъ, окажется, если мы разсмотримъ ее подъ микро-

---

*) Существованіе множествъ двухъ различныхъ мощностей ставитъ теоріи множествъ слѣдующіе два вопроса: 1) существуютъ ли множества мощности промежуточной между этими двумя множествами. Вопросъ этотъ принадлежитъ въ настоящее время къ числу важнѣйшихъ вопросовъ теоріи множествъ.

2) Существуютъ-ли множества, мощность которыхъ превышаетъ и мощность континуума? На этотъ вопросъ ученіе о множествахъ отвѣчаетъ утвердительно, но рѣшеніе выходитъ уже изъ предѣловъ ученія о числахъ и будетъ изложено въ четвертомъ выпускѣ.

скопомъ, состоящею изъ отдѣленныхъ одно отъ другого пустыми промежутками чернильныхъ пятнышекъ. Кинематографъ или стробоскопъ доставляютъ намъ впечатлѣніе непрерывныхъ картинъ, хотя впечатлѣніе это на дѣлѣ слагается изъ ряда слѣдующихъ другъ за другомъ раздѣльныхъ впечатлѣній. „Для чувственнаго ощущенія, говоритъ Э. Махъ, не существуетъ ни пространственныхъ точекъ, ни мгновеній времени, но существуютъ только пространства и времена настолько малыя, что ихъ дальнѣйшія составныя части или не могутъ быть различаемы или-же на различіе ихъ мы не обращаемъ вниманіе“.

Объяснить какимъ образомъ изъ раздѣльныхъ чувственныхъ ощущеній слагается наше идеальное представленіе о непрерывныхъ величинахъ и въ частности о непрерывной линіи есть дѣло физіолога и психолога подобно тому какъ они же должны объяснить происхожденіе понятія о геометрическомъ пространствѣ.

Но каково-бы ни было объясненіе идеи непрерывности съ психофизической точки зрѣнія, мы разсматриваемъ въ философіи природы пространство, время, массы, вѣса, энергію, какъ непрерывныя величины и для аналитическаго изученія отношеній между этими непрерывными величинами чистая математика должна доставить намъ область чиселъ, находящуюся въ полномъ соотвѣтствіи съ континуумами, изучаемыми въ геометріи и другихъ экспериментальныхъ наукахъ. Такую область чиселъ мы можемъ назвать *математическимъ континуумомъ*. Мы говоримъ, что такимъ математическимъ континуумомъ и является область B всѣхъ вещественныхъ чиселъ, введенная въ предыдущихъ параграфахъ т. е. утверждаемъ, что существуетъ полное сотвѣтствіе между непрерывными величинами и этою областью чиселъ. Иначе говоря каждому числу этой области соотвѣтствуетъ извѣстное состояніе непрерывной величины (или употребляя выраженіе Лобачевскаго „величина нѣкотораго коликаго“) и обратно каждому значенію непрерывной величины соотвѣтствуетъ число. Чтобы выяснить это соотвѣтствіе и тѣ основанія, на которыхъ оно установли вается, возьмемъ за типъ непрерывной величины прямую линію. Сказанное относительно ея будетъ имѣть мѣсто относительно всѣхъ континуумовъ (силы, скорости и т. п.), которые могутъ быть графически изображаемы прямыми. Математики выяснили въ послѣднее время, что это соотвѣтствіе основывается на нѣкоторомъ постулатумѣ. Постулатумъ состоитъ изъ трехъ отдѣльныхъ требованій:

1) Каждому раціональному числу должна соотвѣтствовать точка прямой линіи.

Уже и это требованіе вполнѣ аксіоматично, ибо раціональныя числа съ весьма большимъ знаменателемъ не могутъ быть эмпирически отложены на прямой линіи.

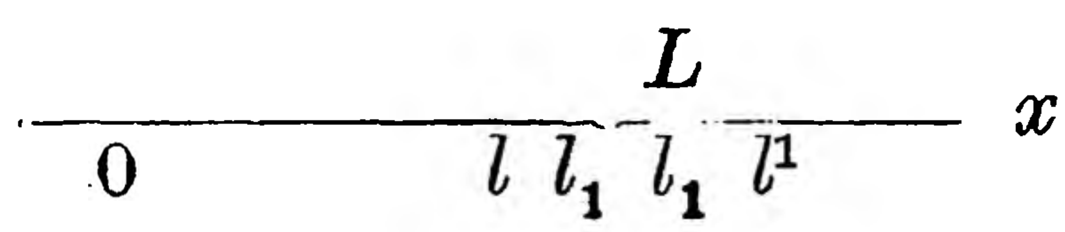
2) Каждому ирраціональному числу должна соотвѣтствовать точка прямой

Это требованіе было почти одновременно выставлено Г. Канторомъ и Дедекиндомъ. Канторъ опредѣленно указываетъ, что предположеніе, по которому каждому арифметическому выраженію (образу—Gebilde) долженъ соотвѣтствовать опредѣленный отрѣзокъ, ни подразумѣвается само собою, ни подлежитъ доказательству и составляетъ существенную чисто геометрическую аксіому—**аксіому о непрерывности прямой линіи**. Эта аксіома выражена Дедекиндомъ въ слѣдующей формѣ: *Если всѣ точки прямой линіи распадаются на два класса такъ—что каждая точка перваго класса лежитъ влѣво отъ каждой точки втораго класса, то существуетъ одна и только одна точка, которая производитъ это раздѣленіе всѣхъ точекъ на два класса, это разсѣченіе прямой на два куска.*

Таннери въ своей Ариѳметикѣ слѣдующимъ нагляднымъ образомъ объясняетъ аксіому Дедекинда: пусть ирраціональное число α заключается между β' и β''. Пусть b' и b'' будутъ точки, соотвѣтствующія β'' и β''. Отмѣтимъ всѣ точки b' краснымъ карандашемъ, а всѣ точки b'' синимъ; всѣ красныя точки будутъ влѣво отъ синихъ; между красными и синими точками не можетъ быть пустаго мѣста потому что можно найдти всегда два раціональныя числа сколь угодно близкія. Аксіома Дедекинда состоитъ въ допущеніи, что двѣ части линіи, одна съ красными, другая съ синими точками, отдѣляются нѣкоторою точкою a, которая и соотвѣтствуетъ числу α.

3) Каждой точкѣ прямой соотвѣтствуетъ нѣкоторое число.

Этотъ результатъ составляетъ слѣдствіе примѣнимости къ отрѣзкамъ прямыхъ линій аксіомы Архимеда. Если данъ



отрѣзокъ $0L$ и принять за единицу длины отрѣзокъ l, то, на основаніи аксіомы Архимеда, мы можемъ всегда найдти цѣлое число n такъ, что откладывая отрѣзки nl и $(n+1)\ l$ по линіи, начиная отъ точки 0, мы получимъ двѣ точки l и l', между которыми лежитъ точка L. Взявъ какую нибудь долю единицы $\frac{l}{m}$ мы можемъ найдти, отлагая ея кратныя отъ точки l, снова точки l_1 и l_1'', между которыми ляжетъ точка L и, поступая такимъ образомъ далѣе, выразить L въ видѣ

$$L = nl + \frac{n_1}{m_1}\ l + \frac{n_2}{m_1 m_2}\ l + \ldots$$

Въ частномъ случаѣ, когда $m_1 = m_2 = m_3 \ldots = 10$, мы имѣемъ десятичную дробь. Нетрудно также получить для отношенія $\frac{L}{l}$ и непрерывную дробь.

Тѣмъ или другимъ путемъ, имѣя единицу длины, мы можемъ на прямой Ox получить скалу раціональныхъ чиселъ. Точка L будетъ или соотвѣтствовать нѣкоторому раціональному числу или нѣтъ. Въ послѣднемъ случаѣ всѣ раціональныя числа, какъ мы знаемъ, могутъ быть раздѣлены на два класса смотря потому, лѣвѣе или правѣе соотвѣтствующая имъ точка, чѣмъ точка L. Эти два класса опредѣляютъ сѣченіе и это число мы и приписываемъ точкѣ L.

Таковы основанія того постулатума, который лежитъ въ основаніи ученія объ измѣреніи непрерывныхъ величинъ вообще.

§ 26. Графическое изображеніе функцій отъ вещественной перемѣнной. Показательная функція.

Въ § 16 мы говорили о томъ приблизительномъ соотвѣтствіи, которое можно установить между системою точекъ плоскости и системою паръ раціональныхъ чиселъ (координатъ). Соображенія предыдущаго параграфа показываютъ, что послѣ введенія чиселъ области B является возможность установить полное соотвѣтствіе между точками плоскости и парами чиселъ области B. Каждой точкѣ соотвѣтствуетъ пара чиселъ (x, y) и каждой такой парѣ соотвѣтствуетъ опредѣленная точка.

Если мы установимъ между числами x, y нѣкоторую зависимость напр. $x=y^3$ или $y=Sinx$, то выдѣлимъ изъ точекъ плоскости безконечный рядъ точекъ—кривую и обратно каждая кривая, опредѣляемая какими либо геометрическимъ свойствомъ, имѣетъ свое *уравненіе*.

Такимъ образомъ только послѣ установленія соотвѣтствія между числами области B и точками линіи является возможность вполнѣ строго обосновать рѣшеніе двухъ основныхъ задачъ аналитической геометріи: 1) графическаго изображенія функцій и 2) представленія кривыхъ (поверхностей) уравненіями между двумя (тремя) перемѣнными.

Опредѣленіе. Если мы имѣемъ два числа y и x, измѣняющіяся совмѣстно, и притомъ x принимаетъ всѣ значенія области B, то x называется вещественною перемѣнною, y функціею отъ вещественной перемѣнной.

Одно изъ важнѣйшихъ различій, которыя можно установить между функціями, есть различіе между функціями непрерывными и прерывными

Функція $f(x)$ называется *непрерывною* для значенія $x=a$, если можно всегда найдти столь малое значеніе h, что, какъ бы ни было мало ε.

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon.$$

Функція $f(x)$ называется *непрерывною* въ интервалл̆ѣ между $x=A$ и $x=B$, если функція непрерывна для каждаго значенія a заключающагося въ этомъ итервалѣ.

Непрерывная въ какомъ либо интервалл̆ѣ функція изображается для соотвѣтствующихъ значеній абсциссъ сплошною кривою.

Какъ примѣръ графическаго изображенія функцій мы возьмемъ показательную функцію a^x.

Для того, чтобы функція имѣла опредѣленное значеніе при всякомъ значеніи x какъ раціональномъ, такъ ирраціональномъ необходимо опредѣлить степень для раціональнаго и ирраціональнаго показателя. Въ § 17 дано опредѣленіе степени съ раціональнымъ показателемъ при раціональномъ основаніи; въ § 19 (ст. 83) мы дали опредѣленіе $\sqrt[n]{a}$ если a есть число ирраціональное или раціональное, и это опредѣленіе позволяетъ распространить и на ирраціональныя основанія понятіе о степени съ раціональнымъ показателемъ. Намъ остается теперь опредѣлить степень съ несоизмѣримымъ показателемъ т.е. значеніе символа a^α, въ томъ случаѣ когда числа a и α суть два какія либо числа, принадлежащія къ области B.

Мы можемъ во всемъ послѣдующемъ считать, $a>1$ т к. въ случаѣ, если $a'<1$, можно, полагая $a'=\frac{1}{a}$, гдѣ $a>1$, опредѣлить символъ a^x равенствомъ $a'^x=\frac{1}{a^x}$.

Что касается до опредѣленія значенія символа a^x, то докажемъ прежде всего слѣдующую *лемму*.

Лемма. Если $a>1$, то, какъ бы мало ни было напередъ заданное число η, можно всегда найдти столь малое раціональное число ε, при которомъ удовлетворяется неравенство.

$$a^{\varepsilon}-1<\eta.$$

Доказ. Изъ формулы бинома Ньютона (при m цѣломъ положительномъ) вытекаетъ если $p>o$ неравенство.

$$(1)\ (1+p)^m>1+mp.$$

Переписавъ это неравенство подъ видомъ

$$(1+mp)^{\frac{1}{m}}-1<p$$

и опредѣливъ p такъ-что $1+mp=a$, имѣемъ

$$(2)\ a^{\frac{1}{m}}-1<\frac{a-1}{m}.$$

Неравенство (2) и доказываетъ нашу лемму такъ-какъ a всегда можно выбрать настолько большимъ, что

$$\frac{a-1}{m}<\eta.$$

Доказавъ эту лемму мы можемъ перейти къ опредѣленію значенія символа a^α при α несоизмѣримымъ.

Пусть ирраціональное число α опредѣляется двумя классами раціональныхъ чиселъ C_1 и C_2.

Составимъ новое сѣченіе области раціональныхъ чиселъ на два класса D_1 и D_2 на слѣдующихъ основаніяхъ: относимъ къ D_1 всѣ числа раціональныя меньшія чѣмъ a^{a_i}, если a_i есть какое-либо число класса C_1 и къ D_2 всѣ большія a^{b_i}, если b_i есть какое либо число класса C_2.

Два новые классы D_1 и D_2 будутъ имѣть всѣ свойства классовъ, опредѣляющихъ *ирраціональныя* числа 1. Каждое число, принадлежащее къ классу D_1 будетъ менѣе каждаго числа, принадлежащаго къ классу D_2 (т. к. $a_i<b_i$ и слѣдовательно (при $a>1$) $a^{a_i}<a^{b_i}$).

2. Если какое-нибудь число отнесено къ классу D_1 то очевидно всѣ числа меньшія будутъ отнесены къ тому-же классу. Точно также, если какое-нибудь число будетъ отнесено къ классу D_2, то очевидно, что всѣ числа большія его будутъ отнесены къ тому-же классу.

3. Такъ какъ въ классѣ C_1 нѣтъ числа, которое было-бы больше всѣхъ чиселъ этого класса, то очевидно, что и въ классѣ D_1 не можетъ быть числа, которое было-бы боль

ше всѣхъ чиселъ этого класса. То-же самое относится и къ классамъ C_2 и D_2.

4. Въ виду того что, по только-что доказанной леммѣ разность

$$a^{b_i}-a^{a_i}=a^{a_i}\left(a^{b_i-a_i}-1\right)$$

можетъ быть сдѣлана менѣе сколь угодно малаго числа (a^{a_i} есть величина конечная), то разность между двумя числами классовъ D_1 и D_2 можетъ быть сдѣлана менѣе сколь угодно малаго числа.

Указанныя нами свойства классовъ D_1 и D_2 показываютъ, что они опредѣляютъ въ области раціональныхъ чиселъ нѣкоторое сѣченіе, которому и соотвѣтствуетъ ирраціональное число a^α.

На введенныя такимъ образомъ степени съ несоизмѣримыми показателями распространяются всѣ данныя въ § 19 (см. стр. 85) формулы возвышенія въ степень.

Лемма стр. 140 можетъ быть также распространена на степень съ несоизмѣримымъ показателемъ, и эта обобщенная лемма позволяетъ доказать непрерывность функціи a^x для всякаго значенія x принадлежащаго къ области В.

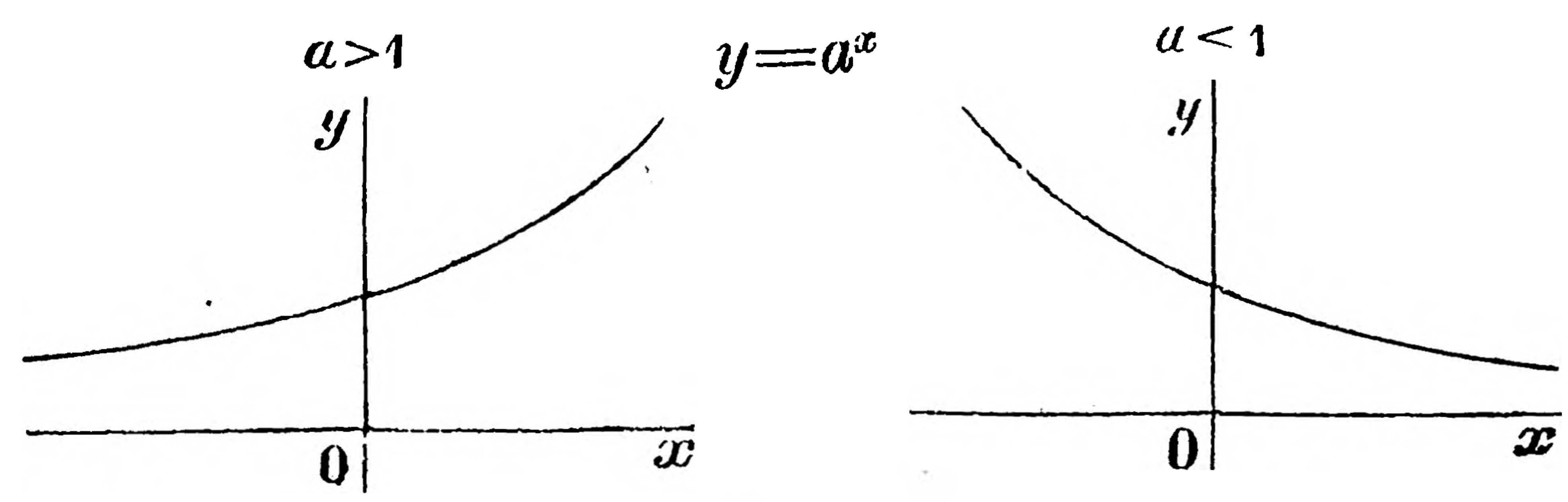
Разность $a^{x+h}-a^x=a^x\ (a^h-1)$ менѣе, если $a^x<M$, [а это всегда имѣетъ мѣсто] чѣмъ $M(a^h-1)$; съ другой стороны, на основаніи леммы только-что упомянутой, всегда можно взять h настолько малымъ, что $M(a^h-1)<\varepsilon$.

Такимъ образомъ показательная функція a^x есть функція непрерывная во всей области B и изображается поэтому графически непрерывною кривою.

При изученіи функцій какъ съ теоретической, такъ и съ практической стороны особенно важное значеніе имѣютъ вопросы о **ростѣ** функцій т. е. вопросы о томъ ростетъ или убываетъ функція при возрастаніи независимой перемѣнной, о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ функцій, о быстротѣ роста функціи, когда перемѣнная x дѣлается болѣе всякой данной величины или, какъ говорятъ, стремится къ безконечности.

Первый и второй вопросы суть вопросы рѣшаемые въ дифференціальномъ исчисленіи, и они то послужили поводомъ къ его изобрѣтенію. Что касается до вопроса о ростѣ функцій для безконечно большихъ значеній x, то онъ обратилъ на себя особенное вниманіе въ послѣднее время.

Для показательной функціи a^x первый и второй вопросъ рѣшаются весьма просто. Предположимъ напр. по прежнему $a>1$. Такъ-какъ $a^{x+y}=a^x a^y$ и при y положит. $a^y>1$, то функція a^x есть функція всегда возрастающая съ увеличеніемъ x и не можетъ имѣть поэтому ни наибольшей, ни наибольшей величины. Напротивъ если $a<1$, то функція a^x будетъ всегда функціею убывающею. Слѣдующія двѣ кривыя представятъ графическое изображеніе разсматриваемой функціи.



Изъ чертежей этихъ видно съ одной стороны, что если a и b суть два положительныя числа, то существуетъ всегда одно и только одно число принадлежащее къ области B, которое удовлетворяетъ равенству

$$a^x=b.$$

и съ другой стороны что не существуетъ вещественнаго числа, при которомъ удовлетворяется равенство

$$a^x=-b.$$

Что касается до вопроса о ростѣ функцій для безпредѣльно возрастающихъ значеній x, то онъ представляетъ именно въ случаѣ функціи a^x выдающійся интересъ. Сравнивая функціи a^x и x^m при весьма большомъ числѣ m, мы легко увидимъ, что $a^x<x^m$ при значеніяхъ x не превышающихъ извѣстнаго предѣла

(т. напр. $2^x<x^3$ для $x<9$, $2^x<x^4$ для $x<16$),

но какъ бы велико ни было m можно найдти всегда столь большее число M, что для $x>M$ $a^x>x^m$ и затѣмъ a^x возрастаетъ безпредѣльно быстро въ сравненіи съ x^m (символически это выражается: $\text{пред.}_{x=\infty}\dfrac{a^x}{x^m}=\infty$). Какъ слѣдствіе вытекаетъ, что функція a^{a^x} возрастаетъ быстрое чѣмъ a^{x^n} какъ бы велико ни было n.

И далѣе функціи

$$a^x,\quad a^{a^x},\quad a^{a^{a^x}},\quad \ldots\quad a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}$$

представляютъ рядъ функцій, быстрота возрастанія которыхъ безпредѣльно увеличивается.

Въ сравненіи быстроты возрастанія функцій и въ введеніи особыхъ символовъ для ея выраженія лежитъ новый путь къ обобщенію понятія о числѣ, къ введенію новыхъ системъ чиселъ, къ которымъ не примѣнима ни аксіома Архимеда, ни нѣкоторые изъ законовъ операцій.

§ 27. Систематическія дроби.

Предыдущіе параграфы были посвящены общимъ вопросамъ, относящимся къ алгебраическимъ и трансцедентнымъ ирраціональностямъ. Конкретные вопросы философіи природы приводятъ къ опредѣленнымъ алгебраическимъ (или трансцедентнымъ) уравненіямъ (какъ напр. уравненіе $2^x=4x$, уравненіе Кеплера) съ численными коэффиціентами и тогда задача состоитъ въ опредѣленіи численнаго значенія ирраціональныхъ корней этого уравненія; она считается рѣшенною, если найдены двѣ раціональныя дроби достаточно близкія между собою (разность между ними есть степень точности приближенія), между которыми заключается величина даннаго корня. Графическое изображеніе функцій, объясненное въ § 26, является однимъ изъ способовъ къ рѣшенію этой задачи. Напр. если дано уравненіе $x^3-x-2=0$, которое можно написать подъ видомъ $x^3=x+2$ то вычерчивая двѣ кривыя $y=x^3$ и $y=x+2$ мы можемъ графически опредѣлить приближенную величину абсциссы точки пересѣченія кривыхъ т. е. корня даннаго уравненія.

Различные наиболѣе практичные или экономичные (т. е. ведущіе къ наивозможно большей точности приближенія при наивозможно меньшей затратѣ времени) методы вычисленія корней алгебрическихъ уравненій излагаются въ учебникахъ высшей алгебры.

Большинство изъ этихъ методовъ (напр. практически очень важный методъ Горнера) даютъ при этомъ приближенныя значенія корней въ видѣ десятичныхъ дробей; напротивъ методъ Лагранжа даетъ приближенія въ видѣ подходящихъ непрерывныхъ дробей.

Точно также и при вычисленіи трансцедентныхъ чиселъ наиболѣе важное значеніе имѣетъ разложеніе ихъ въ систематическія или непрерывныя дроби.

Остановимся по отношенію къ систематическимъ дробямъ только на нѣсколькихъ историческихъ замѣчаніяхъ такъ-какъ техника дѣйствій надъ ними не представляетъ затрудненій.

Приложеніе систематическихъ дробей къ приближенному вычисленію ирраціональностей встрѣчается уже въ сочиненіяхъ греческихъ геометровъ при чемъ за основаніе систематическихъ дробей бралось то число 60, которое получило значеніе еще въ культурѣ древнихъ сумеровъ. Такъ Птоломей представляетъ въ своемъ Алмагестѣ число π подъ видомъ $3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60.60}=3{,}14166$; тѣ же систематическія дроби употребляются и Теономъ Александрійскимъ для приближеннаго вычисленія квадратныхъ корней. Въ теченіе всѣхъ среднихъ вѣковъ они употреблялись индусами, арабами и христіанами. Знаменатели 60, 60×60, 60×60×60 отбрасывались и вмѣсто этого къ числителямъ приставлялись знаки ′, ″, ‴ (знаки минуты, секунды, терціи). Но въ 12 вѣкѣ у первыхъ западныхъ алгебристовъ (Іоаннъ Севильскій) начинаютъ вмѣстѣ съ шестидесятеричными дробями появляться десятичныя дроби. Первый примѣръ исключительнаго употребленія десятичныхъ дробей встрѣчается въ тригонометрическихъ таблицахъ Регіомонтануса; но настоящимъ изобрѣтателемъ систематическаго употребленія десятичныхъ дробей нужно считать Симона Стевина. Но его обозначеніе десятичныхъ дробей было еще крайне неудобно; онъ писалъ 94(0) 3 (1) 0 (2) 4 (3) вмѣсто 94. 304. Бюрги, Віэта и др. усовершенствовали способы изображенія десятичныхъ дробей и наконецъ Неперъ ввелъ употребленіе запятой.

§ 28. Непрерывныя дроби.

Въ 7-й книгѣ Началъ Евклидъ даетъ алгориѳмъ для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя, совпадающій съ алгориѳмомъ обращенія дроби въ непрерывную (см. выше стр. 32). Нѣкоторыя приближенія, найденныя греческими геометрами для ирраціональныхъ чиселъ, указываютъ повидимому также на ихъ знакомство съ непрерывными дробями. Таково приближеніе $\frac{22}{7}$, найденное Архимедомъ для числа π, и приближеніе, найденное Теономъ Смирнскимъ (однимъ изъ неопиѳагорейскихъ арифметиковъ 2 го вѣка послѣ Р. Х.) для $\sqrt{2}$. Но въ то-же время другія приближенныя значенія, находящіяся у Архимеда и другихъ греческихъ геометровъ и не находящіяся ни въ какой связи съ непрерывными дробями, указываютъ на то, что значеніе непрерывныхъ дробей для приближеннаго вычисленія несоизмѣримыхъ чиселъ не было достаточно выяснено греческими геометрами.

Систематическое примѣненіе непрерывныхъ дробей къ вычисленію квадратныхъ корней мы находимъ только въ 17 мъ вѣкѣ у Петра Катальди *). Первый примѣръ выраженія посредствомъ непрерывной дроби ирраціональнаго числа, отличнаго отъ квадратнаго корня, былъ данъ Лордомъ Брункеромъ для числа $\frac{4}{\pi}$:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cdots}}}}} = \left[1, \frac{(2n+1)^2}{2}\right]$$

Это разложеніе Брункера, данное имъ безъ доказательства, послужило Валлису поводомъ къ изученію свойствъ непрерывныхъ дробей и ихъ подходящихъ (Arithmetica infinitorum 1656). Нѣсколько позже желаніе изобразить съ помощью механизма съ зубчатыми колесами движеніе солнечной системы привело Гюйгенса также къ вопросу о выраженіи отношеній съ весьма большими членами посредствомъ приближенныхъ дробей **).

Такимъ образомъ Валлисъ и Гюйгенсъ были первыми учеными, понявшими все значеніе непрерывныхъ дробей въ вопросѣ о приближеніи къ соизмѣримому или не соизмѣримому числу, и ими была поставлена задача необыкновенной важности, которая можетъ быть точно формулирована слѣдующимъ образомъ.

Найдти изъ всѣхъ дробей, знаменатель которыхъ не превышаетъ даннаго цѣлаго числа D, такую дробь, которая возможно ближе (съ избыткомъ или недостаткомъ) подходила-бы къ данному соизмѣримому или несоизмѣримому числу.

Рѣшеніе этой задачи, получаемое съ помощью непрерывныхъ дробей, показываетъ всю ихъ важность въ той области математики, которую Клейнъ называетъ ***приближенною математикою или математикою точности.***

---

*) Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri. Bologna. 1613.

**) Descriptio automati planetarii 1682.

Въ § 9 перечислены важнѣйшія свойства подходящихъ къ специальной непрерывной дроби $(q_0, q_1, q_2, .. q_n)$, въ которую разлагается нѣкоторое раціональное число. Свойства эти остаются безъ измѣненія и въ томъ случаѣ, если мы будемъ имѣть разложеніе въ непрерывную дробь какого-либо ирраціональнаго числа $\mathfrak{z}$. По свойству (5) подходящія дроби составляютъ два ряда послѣдовательныхъ приближеній къ ирраціональному числу $\mathfrak{z}$ при чемъ приближенія $\frac{Ч_{2r-1}}{З_{2r-1}}$ составляютъ рядъ убывающій, приближенія $\frac{Ч_{2r}}{З_{2r}}$ рядъ возростающій. По свойству (4) значеніе $\mathfrak{z}$ лежитъ между $\frac{Ч_{2r-1}}{З_{2r-1}}$ и $\frac{Ч_{2r}}{З_{2r}}$ и при томъ такъ, что $\frac{Ч_{2r-1}}{З_{2r-1}} > \mathfrak{z} > \frac{Ч_{2r}}{З_{2r}}$;

$$\left|\frac{Ч_n}{З_n} - \mathfrak{z}\right| < \frac{1}{З_n^2}. \text{ *)}$$

Наконецъ по свойству (6) $\frac{Ч_n}{З_n}$ ближе къ $\mathfrak{z}$, чѣмъ всякая неприводимая дробь съ знаменателемъ меньшимъ $З_n$.

Поэтому, если въ общей задачѣ предъидущей страницы произвольное число D совпадаетъ съ $З_n$, 1_0 отвѣтъ на задачу даетъ подходящая дробь $\frac{Ч_n}{З_n}$

Въ противномъ случаѣ рѣшеніе задачи требуетъ, какъ показалъ Лагранжъ, разсмотрѣнія такъ называемыхъ *промежуточныхъ* дробей.

Пусть $\frac{Ч_{n-1}}{З_{n-1}}$ и $\frac{Ч_{n+1}}{З_{n+1}}$ суть два послѣдовательныхъ члена одного изъ двухъ рядовъ подходящихъ; обѣ дроби могутъ быть представлены выраженіемъ $\frac{kЧ_n + Ч_{n-1}}{kЗ_n + З_{n-1}}$ такъ какъ при $k=o$ получается первая дробь, $k=q_{n+1}$ —вторая. Если неполное частное $q_{n+1}>1$, то мы можемъ придать неопредѣлен-

---

*) Борель въ своихъ leçons sur la theorie des fonctions далъ еще болѣе тѣсные предѣлы для этой разности.

ному цѣлому числу k и промежуточныя между 0 и q_{n+1} значенія: 1, 2, 3, . , q_{n+1}—1. Соотвѣтствующія дроби и будутъ *промежуточныя* дроби.

Такъ, напр., для дроби $\frac{86400}{20929}$ мы имѣемъ подходящія убывающаго ряда $\frac{29}{7}$ и $\frac{128}{31}$, которыя обѣ могутъ быть представлены въ видѣ $\frac{3.33+29}{3.8+7}$

Промежуточныя дроби будутъ

$$\frac{33+29}{8+7}=\frac{62}{15},\ \frac{95}{23}=\frac{2.33+29}{2.8+7}.$$

Взявъ двѣ подходящія возрастающаго ряда $\frac{33}{8}$ и $\frac{161}{39}$, промежуточныхъ дробей не получимъ т. к. $\frac{161}{31}=\frac{1.128+33}{1.31+8}$.

Если мы пополнимъ оба ряда подходящихъ дробей.

$$\frac{ч_1}{з_1},\ \frac{ч_3}{з_3},\ \frac{ч_5}{з_5},\ldots$$

$$\frac{ч_2}{з_2},\ \frac{ч_4}{з_4},\ \frac{ч_6}{з_6},\ldots$$

всѣми соотвѣтствующими промежуточными дробями, то получимъ два новыхъ ряда дробей, которыхъ свойства легко доказываются. Важнѣйшія изъ этихъ свойствъ слѣдующія:

1) разность двухъ послѣдовательныхъ членовъ одного и того же ряда по абсолютному значенію равна единицѣ раздѣленной на произведеніе знаменателей.

2) Одинъ изъ рядовъ представляетъ рядъ дробей, постоянно возрастающихъ, другой—постоянно убывающихъ и оба стремятся къ предѣлу ξ.

3) Если какая-нибудь дробь $\frac{A}{B}$ по величинѣ находится между двумя послѣдовательными дробями, то зна-

менатель B непремѣнно больше знаменателя каждой изъ дробей.

И наконецъ 4) каждая изъ дробей ближе съ $\mathfrak{Z}$ (съ избыткомъ или недостаткомъ) чѣмъ всякая другая дробь съ знаменателемъ, не превышающимъ знаменателя этой дроби.

Такъ, напр., $\frac{161}{39}$ ближе къ дроби $\frac{86400}{20929}$ всякой другой дроби съ знаменателемъ не большимъ 39, будучи нѣсколько меньше этой дроби.

Дробь $\frac{86400}{20929}$, которую мы взяли для примѣра, фигурируетъ въ задачѣ о *календарѣ*, которую Лагранжъ формулировалъ слѣдующимъ образомъ въ своихъ приложеніяхъ къ алгебрѣ Эйлера.

„Принимая по Лакалю длину тропическаго года въ 365 дней 5 ч. 48'49", найти различные способы исправить календарь, прибавляя черезъ извѣстное цѣлое число лѣтъ къ году цѣлое число дней".

Приближенныя дроби $\frac{33}{8}$, $\frac{161}{39}$, полученныя нами даютъ рѣшенія этой задачи, гораздо болѣе точныя, чѣмъ принятыя въ Юліанскомъ и Грегоріанскомъ лѣтоисчисленіи. Дробь $\frac{33}{8}$ соотвѣтствуетъ найденному Омаромъ Альхаями (1079 по Р. Х.) такъ наз. персидскому лѣтоисчисленію, по которому черезъ каждые тридцать три года должно прибавляться восемь дней.

Приложеніе непрерывной дроби къ ариѳметической теоріи ирраціональностей.

Значеніе непрерывныхъ дробей не исчерпывается только вопросами *приближенной* математики. Въ наиболѣе абстрактныхъ областяхъ математики—въ ученіи о цѣлыхъ числахъ и въ ученіи объ ирраціональностяхъ онѣ имѣютъ весьма важное значеніе. Въ ученіи объ ирраціональностяхъ онѣ дозволяютъ выдѣлить квадратическія ирраціональности и охарактеризовать ихъ вполнѣ слѣдующими двумя теоремами.

Теор. 1. *Всякая періодическая непрерывная дробь (простая или смѣшанная) есть корень 2 ой степени.*

Безконечная періодическая дробь называется *періодической*, если ея неполныя частныя, начиная съ нѣкотораго, постоянно повторяются въ одномъ и томъ же порядкѣ. Повторяющіяся частныя составляютъ *періодъ* непрерывной дроби. Дробь будетъ *простою* періодическою, если періодъ начинается съ перваго частнаго, и *смѣшанною*, если періоду предшествуютъ одинъ или нѣсколько членовъ.

Доказательство этой теоремы можетъ быть найдено самимъ читателемъ.

Теорема 2. *Ирраціональные корни уравненія 2-й степени разлагаются въ періодическую дродь.*

Особеннаго вниманія заслуживаетъ конечно разложеніе $\sqrt{D}$ въ непрерывную дробь.

Относительно этого разложенія мы ограничимся также перечисленіемъ его важнѣйшихъ свойствъ.

1. Періодическая дробь, получаемая при разложеніи $\sqrt{D}$ въ непрерывную дробь, есть *смѣшанная* періодическая.

2. Періоду всегда предшествуетъ только одинъ членъ.

3. Если этотъ членъ есть q_0, то послѣдній членъ періода $q_k=2q_0$ и прочіе члены періода $q_1\, q_2 \ldots q_{k-1}$ *расположены симметрично* т. е. $q_{k-1}=q_1$, $q_{k-2}=q_2 \ldots$

При этомъ необходимо различать два случая: 1) или число членовъ въ періодѣ нечетное; тогда разложеніе имѣетъ форму

$$(q_0;\ \overline{q_1,\ q_2, \ldots q_h,\ q_h, \ldots q_2,\ q_1,\ 2q_0};\ q_1 \ldots)$$

2) или число членовъ въ періодѣ есть четное и тогда разложеніе имѣетъ форму

$$(q_0;\ \overline{q_1,\ q_2, \ldots\ q_h,\ m,\ q_h, \ldots\ q_2,\ q_1,\ 2q_0}; \ldots)$$

4. Если μ есть произвольное цѣлое положительное число и $\frac{Ч_{\mu\kappa}}{З_{\mu\kappa}}$ есть подходящая дробь, соотвѣтствующая послѣднему неполному частному $2q_0$ μ—таго періода то

$$Ч^2_{\mu\kappa}—DЗ^2_{\mu\kappa}=(—1)^{\mu\kappa}.$$

Если κ т. е. число членовъ періода есть четное число, то во второй части при всякомъ μ имѣемъ $+1$; если κ есть число нечетное, то вторая часть равна ± 1, смотря по тому, будетъ ли μ четное или нечетное.

Мы иллюстрируемъ эти свойства слѣдующими двумя примѣрами:

$\sqrt{13} = (3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}; 1, 1, ...)$ (1-й случай).

$\sqrt{19} = (4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}; 2, ...)$ (2-й случай).

Въ тѣсной связи съ разложеніемъ $\sqrt{D}$ въ непрерывную дробь находится приложеніе непрерывныхъ дробей къ рѣшенію одного изъ интереснѣйшихъ неопредѣленныхъ уравненій.

Въ § 9 было указано, что рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія $Ax—By=1$ основывается на разложеніи въ непрерывную дробь дроби $\frac{A}{B}$.

Подобнымъ же образомъ рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія

$$x^2 — Dy^2 = \pm 1 \quad (1)$$

которое было встрѣчено нами въ теоріи единицъ квадратичнаго тѣла, опредѣляемаго $\sqrt{D}$, основывается на разложеніи въ непрерывную дробь радикала $\sqrt{D}$.

Уравненія типа $x^2—ay^2=s$, частный случай которыхъ представляетъ уравненіе (1), разсматривались еще индійскими геометрами, которые и изобрѣли для ихъ рѣшенія особую *круговую* методу, которую Ганкель, предлагавшій назвать уравненіе (1) *индійскимъ*, считалъ прекраснѣйшимъ изъ всѣхъ результатовъ, добытыхъ въ теоріи чиселъ до Лагранжа. Въ 1657 г. Фермать предложилъ Френиклу, а потомъ и всѣмъ современнымъ математикамъ, въ видѣ вызова рѣшить уравненіе $x^2-Dy^2=1$ въ цѣлыхъ числахъ *). Точное рѣшеніе этого уравненія, основанное на свойствахъ непрерывныхъ дробей, дано Лагранжемъ.

На основаніи свойства (4) мы видимъ, что, какое-бы число періодовъ мы ни брали, числитель и знаменатель подходящей дроби $\frac{Ч_{\mu k}}{З_{\mu k}}$ даютъ намъ рѣшенія уравненія $x^2-Dy=+1$, въ томъ случаѣ, если число членовъ періода неполныхъ частныхъ въ разложеніи $\sqrt{D}$ въ непрерывную дробь есть число четное. Напротивъ, если оно есть число четное, то смотря по тому, будетъ-ли μ число нечетное или четное мы получаемъ рѣшенія

уравненія $x^2-Dy^2=-1$ или
уравненія $x^2-Dy^2=+1$.

Лагранжъ доказываетъ также, что рѣшеніе въ наименьшихъ цѣлыхъ положительныхъ числахъ уравненія Пелля (основное) получается въ первомъ случаѣ, взявъ одинъ періодъ, во второмъ случаѣ взявъ два.

Мы предполагаемъ провѣрить эти утвержденія на уравненіяхъ

$$1)\ x^2-19y^2=1 \qquad 2)\ x^2-13y^2=1.$$

(Разложенія $\sqrt{13}$ и $\sqrt{19}$ даны на предъид. стр.). Такъ какъ разложеніе для $\sqrt{13}$ заключаетъ нечетное число неполныхъ частныхъ, то взявъ подходящую дробь соотвѣтствующую одному періоду получимъ для уравненія $x^2-13y^2=-1$ рѣшеніе въ наименьшихъ цѣлыхъ положительныхъ числахъ: $x=18, y=5$ Изъ этого рѣшенія получаются по формулѣ $T+U\sqrt{13}=(18+5\sqrt{13})^m$ рѣшенія уравненій $x^2-13y^2=\pm 1$.
Полагая напр. $m=2$, находимъ рѣшеніе уравненія Пелля $x^2-13y^2=+1$: $x=649, y=180$.

---

*) Уравненіе это носитъ обыкновенно названіе Пелля хотя безъ особаго основанія.

Это есть для даннаго уравненія Пелля рѣшеніе въ наименьшихъ цѣлыхъ положительныхъ числахъ.

§ 29. Разложенія Кантора и Стефаноса.

Обобщеніемъ систематическихъ дробей является разложеніе ирраціональныхъ чиселъ въ безконечные ряды, составленные изъ дробей съ перемѣннымъ основаніемъ. Подобные ряды разсматривали еще Ламбертъ и Лагранжъ; послѣдній приложилъ ихъ къ рѣшенію задачи: представить данную дробь съ возможно большимъ приближеніемъ черезъ дробь съ даннымъ числителемъ или знаменателемъ. (Oeuvres. vol. 7 p. 291). Въ послѣднее время подобныя разложенія разсматривались Г. Канторомъ *).

Теорема. Всякое число можетъ быть представлено подъ видомъ

$$x = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{l_1} + \frac{\varepsilon_2}{l_1 l_2} + \frac{\varepsilon_3}{l_1 l_2 l_3} + \dots$$

гдѣ ε_i суть цѣлыя числа, удовлетворяющія неравенствамъ $0 \leq \varepsilon_i < l_i$; числа $l_1, l_2, l_3, \dots$ произвольныя цѣлыя положительныя числа. [Разложенію этому можно придать также форму ***восходящей*** непрерывной дроби

$$x = \varepsilon_0 + \cfrac{\varepsilon_1 + \cfrac{\varepsilon_2 + \cfrac{\varepsilon_3}{l_3} + \dots}{l_2}}{l_1}$$]

Доказат. Выдѣлимъ сначала изъ числа x наибольшее цѣлое число ε_0; опредѣлимъ, какое кратное отъ дроби

---

*) Zeit. f. Math. 14 (1869). Смотри статьи Страусса (Acta Math. Bd. 11 и Фабера (Math. Ann Bd. 60); послѣдній прилагаетъ эти разложенія къ перечисленію раціональныхъ чиселъ.

$\frac{1}{l_1}$ заключается въ остаткѣ r_1 и пусть $r_1 = \frac{\varepsilon_1}{l_1} + \frac{r_2}{l_1}$, гдѣ r_2 очевидно <1.

Далѣе опредѣлимъ, какое кратное отъ $\frac{1}{l_2}$ заключается въ остаткѣ r_2 и пусть

$$r_2 = \frac{\varepsilon_2}{l_2} + \frac{r_3}{l_2}, \text{ гдѣ } r_3 < 1.$$

Продолжая эту операцію получимъ

$$x = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{l_2} + \frac{\varepsilon_2}{l_1\ l_2} + \frac{\varepsilon_3}{l_1\ l_2\ l_3} + \ldots \quad (1).$$

Въ случаѣ ирраціональнаго числа x получимъ очевидно безконечную строку; въ случаѣ раціональнаго числа можемъ получить конечное выраженіе, но оно можетъ быть замѣнено и другими безконечно большими въ силу равенства

$$\frac{1}{l_1\ l_2 \ldots\ l_n} = \frac{l_{n+1}-1}{l_1\ l_2 \ldots l_{n+1}} + \frac{l_{n+2}-1}{l_1\ l_2\ \ldots\ l_{n+2}} + \ldots \quad (2)$$

Такимъ образомъ и безконечныя разложенія разсматриваемой формы могутъ имѣть раціональное значеніе.

Если не обращать вниманіе на возможность, воспользовавшись равенствомъ (2), замѣнить послѣднюю дробь безконечнымъ рядомъ, то *всякое число можетъ быть только единственнымъ образомъ представлено подъ формою* (1).

Доказательство этой теоремы не представляетъ затрудненія.

Наибольшій интересъ представляетъ частный случай, разсмотрѣнный Стефаносомъ, когда $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, ... $l_i = i$ ...

Въ этомъ же параграфѣ умѣстно употребить о разложеніи Люрота*), который доказалъ, что всѣ числа лежащія между 0 и 1 могутъ быть представлены рядами формы.

$$\frac{1}{m_1+1} + \sum_1^{\infty} m_\nu \frac{1}{m_1(m_1+1)\ldots m_\nu(m_\nu+1)}.$$

---

*). Math. Ann. Bd. 21 p. 411.

§ 30. Трансцедентное число e.

Настоящій параграфъ мы посвящаемъ одному замѣчательному числу, e=2,71828... имѣющему громадное значеніе въ математическомъ Анализѣ. Значеніе его обуславливается тѣмъ, что показательная функція a^x обладаетъ особенно простыми свойствами въ томъ случаѣ, если за основаніе a будетъ взято число e. Соотвѣтственно этому и логариѳмы, вычисляемые при основаніи e, имѣютъ также громадное теоретическое преимущество по сравненію съ другими системами логариѳмовъ и носятъ поэтому названіе *естественныхъ*, почему и число e называется основаніемъ естественныхъ логориѳмовъ. Для того, чтобы объяснить это названіе и значеніе числа e необходимо исходить изъ иного опредѣленія логариѳма, отличнаго отъ того, которое было дано въ 1-мъ выпускѣ (см. также § 26). Это новое опредѣленіе логариѳмовъ, основанное на совмѣстномъ разсматриваніи двухъ прогрессій геометрической и ариѳметической, интересно и въ историческомъ отношеніи такъ-какъ логариѳмы введены были въ науку именно, какъ члены ариѳметической прогрессіи, соотвѣтствующей членамъ геометрической. Зародышъ этой плодотворной идеи можно видѣть въ одномъ замѣчаніи Архимеда въ его Псаммитѣ; но окончательнаго развитія она достигла у алгебраистовъ 15—17 столѣтій: Шюке, Стифеля и въ особенности барона Непера*). *N.* Chuquet въ своей Triparty (1484) разсматриваетъ совмѣстно ариѳметическую прогрессію 1, 2,... n и геометрическую: a, a^2,... a^n, гдѣ a обозначаетъ данное натуральное число, и онъ замѣчаетъ, что, установляя соотвѣтствіе между двумя членами, занимающими одинаковое мѣсто въ двухъ прогрессіяхъ, мы найдемъ, что суммѣ двухъ чиселъ ариѳметической прогрессіи соотвѣтствуетъ произведеніе двухъ соотвѣтствующихъ членовъ геометрической. М. Стифель (Arithmetica integra. 1544) распространяетъ это соотвѣтствіе, разсматривая ариѳметическую прогрессію —3, —2, —1, 0, 1, 2 и

*) Нѣкоторые авторы (см. статью Aubry въ Enseignement mathématique за 1906 г.) видятъ также зародышъ идеи логариѳмовъ въ изученіи греческими математиками тѣхъ отношеній, которыя играютъ роль въ музыкѣ и которымъ они придавали мистическое значеніе (Тимей—Платона).

и соотвѣтствующую геометрическую прогрессію $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1,$ 1, 2, 4,... Стифель видимо понимаетъ всю важность новаго понятія, но это понятіе окончательно развивается только у барона Іоганна Непера въ его Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Эдинбургъ 1614) и у Бюрги (Iobst Byrgs arith. und geom. progresstabuln. Прага 1620)

Имъ пришла мысль составить таблицы, которыя позволяли бы непосредственно переходить съ достаточнымъ приближеніемъ отъ какого-либо числа ариѳметической прогрессіи къ соотвѣтствующему числу геометрической. Неперу принадлежитъ названіе *логариѳмовъ* для чиселъ ариѳметической прогрессіи. Оно есть сокращеніе выраженія λόγου ἀρίθμος (число отношенія) и объясняется разсмотрѣніемъ двухъ отношеній, изъ которыхъ одно есть степень другого.

Послѣ этихъ историческихъ замѣчаній перейдемъ къ изложенію того опредѣленія логариѳмовъ, о которомъ идетъ рѣчь.

Пусть мы имѣемъ двѣ прогрессіи:

$$1,\ (1+w) \ldots \quad (1+w)^m, \ldots \quad (1+w)^n, \ldots \qquad (1)$$

$$0,\ \beta \ldots \quad m\beta, \ldots \quad n\beta, \ldots \qquad (2)$$

Произведенію двухъ членовъ геометрической прогрессіи $(1+w)^m$ и $(1+w)^n$, которымъ въ арифметической прогрессіи соотвѣтствуютъ члены $m\beta$ и $n\beta$, очевидно соотвѣтствуетъ въ ариѳметической прогрессіи членъ $(m+n)\beta$. Поэтому умноженіе $(1+w)^m$ и $(1+w)^n$ можетъ быть замѣнено сложеніемъ соотвѣтствующихъ этихъ числамъ членовъ ариѳметической прогрессіи т. е *логариѳмовъ* и нахожденіемъ въ геометрической прогрессіи числа соотвѣтствуюшаго *логариѳму* $(m+n)w$. Но только тѣ числа имѣютъ логариѳмы, которыя стоятъ въ геометрической прогрессіи. Чѣмъ меньше число w тѣмъ меньше разность между двумя сосѣдними числами геометрической прогрессіи; дѣйствительно эта разность равна $w(1+w)^m$. Въ случаѣ если даны для перемноженія два числа A и B, находящіяся въ геометрической прогрессіи, то они должны быть замѣнены приближенными числами A' и B', заключающимися въ этой прогрессіи. Чѣмъ менѣе число w, тѣмъ менѣе разности $A—A'$ и $B—B'$ и тѣмъ ближе поэтому получаемое черезъ логариѳмы число $A'B'$ къ величинѣ произведенія AB. Довольно простой счетъ показываетъ, что при w достаточно маломъ ошибка, которую мы дѣлаемъ, замѣняя AB черезъ $A'B'$ менѣе $w(A+B)$ т. е. неопредѣленно уменьшая w, мы можемъ сдѣлать эту ошибку сколь угодно малою.

Но нужно помнить, что какъ бы мала ни была величина w, числа геометрической прогрессіи идутъ скачками. *Непрерывный рядъ чиселъ получается только въ предѣлѣ, полагая $w=0$.* Только при этомъ предположеніи каждое число имѣетъ свой логариѳмъ.

Съ другой стороны въ прогрессіяхъ (1) и (2) кромѣ неопредѣленнаго числа w у насъ входитъ другое неопредѣленное число β. Въ зависимости отъ выбора неопредѣленнаго числа β или, полагая $\frac{\beta}{w}=M$, въ зависимости отъ M мы получаемъ при одной и той же геометрической прогрессіи безконечное множество ариѳметическихъ прогрессій т. е безконечное множество *системъ логариѳмовъ*. Число M называется *модулемъ* соотвѣтствующей системы логариѳмовъ.

Наиболѣе естественная система логариѳмовъ получается, очевидно, полагая $M=1$, Въ этой системѣ логариѳму 1 соотвѣтствуетъ число $\left(1+w\right)^{\frac{1}{w}}$ т. к. полагая $mw=1$, получаемъ соотвѣтствующій членъ геометрической прогрессіи равнымъ $\left(1+w\right)^{\frac{1}{w}}$.

Сопоставляя найденные нами результаты, мы находимъ, что *основаніемъ естественной системы логариѳмовъ*, при которой всякое число имѣетъ логариѳмъ, должно быть число равное

$$\underset{w=0}{\text{пред}}\left(1+w\right)^{\frac{1}{w}} \text{*)}$$

*) Логариѳмы при этомъ основаніи носятъ часто названіе *неперовыхъ*; но это названіе не точно. Логариѳмамъ, которые разсматривалъ Неперъ, соотвѣтствуетъ основаніе n находящееся въ слѣдующемъ отношеній къ e

$$n=10^7 . e - 0{,}0000001$$

Модуль десятичной системы логариѳмовъ т. е десятичный логариѳмъ числа e равняется 0,434294481.

Эго число и обозначается буквою e. Обозначеніе это находимъ у Эйлера съ 1735 г. и затѣмъ это обозначеніе употреблялось постоянно и другими математиками.

Полагая $w = \frac{1}{m}$ и замѣчая, что, когда w стремится къ 0,, m неопредѣленно возрастаетъ находимъ, что e можетъ быть опредѣлено какъ

$$\text{пред}_{m=\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

$$\text{Отсюда } e^x = \text{пред.}_{m=\infty} \left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

Изъ этого опредѣленія выводится разложеніе числа e въ безконечную строку и разложеніе функціи e^x въ безконечную степенную строку:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2..m} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2..m} + \ldots$$

Безконечная строка для e позволяетъ указать предѣлы между которыми заключается число . Очевидно что

$$e > 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} > 2\frac{2}{3} = 2{,}66\ldots$$

съ другой стороны

$$e < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \frac{1}{2\,2.2.2} + \ldots$$

т. е $e<3$.

Болѣе точныя вычисленія даютъ для e численное значеніе $e=2{,}718281828459045\ldots$

Безконечная строка выражаюшая число e, позволяетъ познакомиться съ природою этого числа, а именно показать что e не можетъ быть числомъ раціональнымъ. Дѣйстви тельно, если бы $e=\frac{a}{b}$, гдѣ a и b суть числа цѣлыя, которыя притомъ можно считать и взаимно-простыми, то мы имѣли-бы равенство

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2}+\ .\ .\ .\ .\ \frac{1}{1.2...b}+\frac{1}{1.2...b(b+1)}+\ .\ .\ .\ .$$

Умножая обѣ части этого равенства на произведеніе $1.2\ .\ .\ .\ b$, получаемъ, что цѣлое число

$a.12...(b-1)$ равно цѣлому числу $\left[1+\ +\frac{1}{1.2}+..+\frac{1}{1\ 2\ b}\right]1.2..\ b$ $+$сумма безконечной строки $\frac{1}{(b+1)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\ .\ .\ .\ .$

Но сумма этой безконечной строки очевидно менѣе суммы безконечной строки

$\frac{1}{(b+1)}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^3}+\ .\ .\ .$, которая, какъ извѣстно изъ элементарной алгебры, равняется дроби $\frac{1}{b}$.

Такъ какъ разность двухъ цѣлыхъ чиселъ не можетъ равняться числу не равному нулю, но меньшему $\frac{1}{b}$, то число e не можетъ быть раціональнымъ.

Доказательство это принадлежитъ Фурье Видоизмѣняя его и примѣняя къ строкѣ

$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ .\ .\ .\ +\frac{x^n}{1.2...n}+\ .\ .\ .$ мы легко покажемъ, что e^x есть число ирраціональное, если x есть число раціональное. *)

---

*) Идея этого доказательства позволяетъ составлять безконечныя строки, сумма которыхъ есть ирраціональное число. Таковы напр всѣ строки вида $\sum\pm\frac{1}{p_1.p_2...p_\lambda}$, гдѣ $p_1, p_2, ... p_\lambda$ суть неопредѣленно возрастающія цѣлыя числа (Штернъ).

Тѣ-же два результатата могутъ быть найдены и разсматривая разложенія e и e^x въ непрерывную дробь.

Первыя разложенія въ непрерывную дробь числа e, а также чиселъ $\sqrt{e}$ и $\frac{e-1}{2}$ были даны Эйлеромъ въ его диссертаціи: „De fractionibus continuis" въ 1737 г.

Къ этимъ разложеніямъ, найденнымъ Эйлеромъ, Ламбертъ (1728—1777) присоединилъ разложенія для $\frac{e-1}{e+1}$, $\frac{e^2-1}{e^2+1}$ и вообще для $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ и изъ вида этихъ разложеній заключилъ, что при x раціональномъ e^x раціональнымъ быть не можетъ. Строгое доказательство этого результата основывается на слѣдующей теоремѣ, данной Лежандромъ.

Если въ безконечной непрерывной дроби

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\dots}}}$$

числа m, n, m', n', m'',... *суть числа цѣлыя, а* n, n', n''... *сверхъ того и положительныя и если сверхъ того отдѣльныя дроби* $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, .. *всѣ менѣе 1, то значеніе дроби есть несоизмѣримое число.*

Эта теорема остается справедливою и въ томъ случаѣ, если дроби $\frac{m_i}{n_i}$ становятся менѣе 1 не съ самаго начала.

Такъ какъ напр. для дроби

$$\frac{e-1}{e+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\dots}}}}$$

условіе теоремы Лежандра очевидно выполнено, то $\frac{e-1}{e+1}$, а слѣдовательно и e, есть число ирраціональное.

Характеръ разложеній для e и e^2 въ непрерывную дробь легко показываетъ, что они не могутъ быть и корнями квадратнаго уравненія съ раціональными коеффиціентами. Тотъ-же самый результатъ былъ найденъ Ліувиллемъ съ помощью безконечной строки. Наконецъ общая теорема, по которой e не есть корень какого-либо уравненія

$$C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n=0, \text{ гдѣ } C_0, C_1\ldots C_n$$

суть цѣлыя числа, доказана Эрмитомъ въ его знаменитомъ мемуарѣ: „Sur la fonction exponentielle“ въ 1873 г. Первоначальное доказательство Эрмита основывалось на теоремахъ интегральнаго исчисленія, но въ настоящее время, благодаря упрощеніямъ, введеннымъ многими математиками, можетъ быть изложено вполнѣ элементарно. Первое упрощеніе было сдѣлано Вейерштрассомъ (*). Въ 1893 г. Гильбертъ, Гурвицъ и Горданъ дали настолько простыя доказательства, что они могутъ быть усвоены и лицами незнающими анализа безконечно—малыхъ (**).

Изучая доказательства Эрмита, Линдеманнъ вмѣстѣ съ доказательствомъ трансцедентности числа π далъ и доказательство двухъ слѣдующихъ замѣчательныхъ теоремъ: Показательная функція e^x есть трансцедентное число, если x представляетъ отличное отъ нуля алгебраическое число.

Натуральный логариѳмъ алгебраическаго числа x есть всегда трансцедентное число, если x не есть 1.

Теоремы эти выражаютъ интересное свойство кривой $y=e^x$. Условимся называть *раціональными* точками плоскости тѣ, *обѣ* координаты которыхъ суть числа раціональныя и *алгебраическими* тѣ, *обѣ* координаты *которыхъ суть числа алгебраическія.* Теоремы Линдеманна говорятъ, что кривая $y=e^x$ обходитъ всѣ не только раціональныя, но и алгебраическія точки.

(*) Переводъ мемуара Вейерштрасса: „къ мемуару Линдеманна: „о Лудольфовомъ числѣ“ (доказательство невозможности квадратуры круга), сдѣланный подъ редакціей пр. Васильева г. Скалозубовымъ, изданъ въ 1894 г. Казанскимъ физико-математическимъ обществомъ.

(**) Доказательства Гильберта, Гурвица и Гордана помѣщены въ 43-мъ томѣ Mathem. Annalen (1893 г.). На русскомъ языкѣ мы имѣемъ прекрасное изложеніе доказательствъ Гурвица и Гордана въ статьѣ проф. К. А. Поссе: „о трансцедентности чиселъ e и π“ (Извѣстія Технологическаго Института 1894 г.). Мы и отсылаемъ къ ней читателя, знакомаго съ основаніями высшей математики. См. также Ф. Клейнъ. Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи. Казань. 1898.

Теоремы Линдеманна выясняютъ вполнѣ связь, существующую между операціею логариѳмированія и ученіемъ о трансцедентныхъ числахъ. Съ ними находятся очевидно въ тѣсной связи слѣдующія двѣ теоремы, данныя Гильбертомъ въ его „Математическихъ задачахъ“.

1^0 Если въ равностороннемъ треугольникѣ отношеніе между угломъ при основаніи и угломъ при вершинѣ есть число алгебраическое, но не раціональное, то отношеніе между основаніемъ и стороною будетъ всегда трансцедентно.

2^0 Степень α^β для алгебраическаго основанія α и алгебраическаго нераціональнаго показателя β всегда представляетъ число трансцедентное или покрайней мѣрѣ ирраціональное. Таково напр. число $2^{\sqrt{2}}$ или $e^{\pi}=i^{-2i}$ (см. далѣе ученіе о комплексныхъ числахъ).

Приложеніе. Выводъ разложенія въ непрерывную дробь функціи $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = tanghyp x$, данный Лежандромъ.

Если мы обозначимъ безконечную строку

$$1+\frac{1}{z}\,y^2+\frac{1}{z(z+1)}\,\frac{y^4}{1.2}+\frac{1}{z(z+1)(z+2)}\,\frac{y^6}{1.2.3}+\ldots$$

знакомъ $\varphi(z)$, то безъ труда найдемъ соотношеніе

$$(1)\qquad \varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{y^2}{z(z+1)}\,\varphi(z+2)$$

и полагая въ соотношеніи (1)

$$\psi(z)=\frac{y^2}{z}\,\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$$

соотношеніе (2) $\psi(z)=\dfrac{y^2}{z+\psi(z+1)}$,

дающее для $\psi(z)$ непосредственно разложеніе въ непрерывную дробь

$$\psi(z)=\cfrac{y^2}{z+\cfrac{y^2}{z+1+\cfrac{y^2}{z+2+\ldots}}}$$

Съ другой стороны полагая $z=\frac{1}{2}$, $y=\frac{x}{2}$ имѣемъ

$$\varphi(z)=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x4}{1.2.3.4}+\ldots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\frac{y^2}{z}\varphi(z+1)=\frac{x}{2}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right)=\frac{x}{2}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

а потому $\psi(z)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Разложеніе (3) даетъ поэтому

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\cfrac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}+\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{3}{2}+\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{5}{2}+\ldots}}}=\frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{3+}\,\frac{x^2}{5+}\ldots$$

§ 31. Число π и его трансцедентность.

Къ трансцедентнымъ числамъ относится также и знаменитое Архимедово число π—отношеніе окружности къ діаметру.

Знаменитая задача о построеніи квадрата равновеликаго кругу (*квадратура круга*) сводится на построеніе числа π съ помощью циркуля и линейки и исторія числа π совпадаетъ поэтому съ исторіею квадратуры круга. Въ древнѣйшемъ дошедшемъ до насъ математическомъ сочиненіи древнихъ Египтянъ, такъ называемомъ папирусѣ Ринда, составленномъ между 2000 и 1700 г. до Р. Х. писцемъ Амесомъ (Ahmes) на основаніи еще болѣе древнихъ рукописей, площадь круга приравнивается площади квадрата, сторона котораго равна діаметру, уменьшенному на одну девятую; легко видѣть, что такое приравненіе равносильно положенію $\pi=3,1604$. Далеко менѣе точно принятое астрономами древняго Вавилона и перешедшее потомъ въ Библію (книга Царей) положеніе $\pi=3$.

На греческой почвѣ первые слѣды задачи о квадратурѣ круга встрѣчаются въ пятомъ вѣкѣ до Р. Х. Анаксагоръ Клазоменскій, посаженный по обвиненію въ атеизмѣ въ аѳинскую тюрьму, занимался въ ней, по словамъ Плутарха, задачею о квадратурѣ круга. Къ тому-же пятому вѣку относится изобрѣтеніе трансцедентной кривой квадратриксы, съ помощью которой греческіе геометры (Гиппіасъ изъ Элиды, Диностратъ) рѣшали задачу квадратуры круга. Опредѣленіе площади круга было тою задачею, которая привела къ созданію метода исчерпанія. Софисты Антифонъ и Бризонъ указали на то, что площади правильныхъ многоугольниковъ, какъ вписанныхъ, такъ и описанныхъ, съ увеличеніемъ числа сторонъ приближаются къ площади круга или «исчерпываютъ» ее. Изобрѣтатель метода исчерпанія въ его окончательномъ видѣ Евдоксъ Книдскій прилагалъ его и къ опредѣленію площади круга и вѣроятно ему принадлежитъ доказательство второго предложенія 12-ой книги началъ Евклида: «площади круговъ относятся между собою какъ квадраты радіусовъ».*) Рѣшеніе задачи найдти установляемое этимъ предложеніемъ постоянное отношеніе между площадью круга и квадратомъ радіуса составляетъ предметъ сочиненія Архимеда: „объ измѣреніи круга“. Здѣсь мы находимъ двѣ приближенныя величины для π:

$$\pi=\frac{22}{7}=3,14285 \text{ и } \pi=3\frac{10}{71}=3,14084.$$

Эти приближенныя величины получаются разсмотрѣніемъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ о 96 сторонахъ. Болѣе точное выраженіе дано Птоломеемъ:

$$\pi=3\frac{8}{60}+\frac{30}{3600}=3\frac{17}{120}=3,14166.$$

Индійскіе математики употребляли для π интересное приближенное выраженіе $\sqrt{10}$, которое объясняется тѣмъ, что при діаметрѣ 10 периметры 12, 24, 48, 96—угольниковъ

*) Подробнѣе о методѣ исчерпанія см. проф. А. Васильевъ. Историческій очеркъ анализа безконечно-малыхъ. Казань. 1905 г. (въ приложеніи къ переводу книги Папелье. Начала анализа).

выражаются $\sqrt{965}$, $\sqrt{981}$, $\sqrt{986}$, $\sqrt{987}$ т. е. какъ будто-бы приближаются къ $\sqrt{1000}$.

Въ эпоху возрожденія найдены были Лукою Пачіоли и др. болѣе точныя величины. Такъ въ половинѣ XVI столѣтія Адріанъ отецъ вычислилъ π съ точностью до 7 десятичныхъ знаковъ, Віета съ точностью до 9 знаковъ, Адріанъ Романскій до 15 и наконецъ Лудольфъ ванъ-Цейленъ (1539—1510) вычислилъ сначала съ точностью до 20, а потомъ и до 35 знаковъ. (Число π называется поэтому иногда Лудольфовымъ).

Всѣ эти математики въ своихъ вычисленіяхъ шли по пути, указанному Архимедомъ, разсматривая многоугольники съ увеличивающимся числомъ сторонъ. Замѣчательныя усовершенствованія внесены въ методу Архимеда Гюйгенсомъ (1629—1695) въ его работѣ: „De circuli magnitudine inventa“ (1654); теоремы, въ ней заключающіяся, даютъ возможность изъ разсматриванія многоугольниковъ съ небольшимъ числомъ сторонъ находить приближенныя значенія числа π съ весьма большимъ числомъ знаковъ; такъ по методѣ Гюйгенса разсматриваніе шестидесятичетыреугольника даетъ предѣлы для π: 3,1415926433 и 3,1415926538, между тѣмъ какъ Архимедъ нашелъ только двѣ первыя десятичныя цифры (*).

Созданный въ концѣ XVII вѣка методъ безконечно малыхъ открылъ новые пути къ вычисленію числа π; для числа π были получены аналитическія выраженія, составленныя съ помощью безконечнаго числа операцій. Такъ Віета далъ формулу.

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

(*) Переводъ сочиненія Гюйгенса находится въ интересной книжкѣ проф. Рудіо: Архимедъ, Гюйгенсъ, Ламбертъ, Лежандръ — переводъ четырахъ работъ объ измѣреніи круга. Въ книжкѣ Рудіо находится обзоръ исторіи вопроса о квадратурѣ круга, которымъ мы и пользовались при составленіи этого параграфа.

Валлисъ (1616—1705) далъ выраженіе для π съ помощью безконечнаго произведенія

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Найденная Лордомъ Брункеромъ непрерывная дробь была уже приведена нами въ § 27.

Она уже значительно облегчала вычисленіе π и къ той же цѣли вели разложенія въ безконечныя строки, найденныя около того-же времени.

Грегори и независимо отъ него Лейбницъ (1646—1716) нашли строку для разложенія arctgx:

$$arctgx=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\dots$$

Эта строка и ея простыя преобразованія даютъ множество весьма удобныхъ формулъ для вычисленія π съ какимъ угодно числомъ десятичныхъ знаковъ.

Такъ замѣчая, что $\frac{\pi}{4}=4\ arctg\,\frac{1}{5}-arctg\,\frac{1}{239}$, англійскій математикъ *Machin* нашелъ въ 1706 г. 100 десятичныхъ знаковъ для π. Извѣстный счетчикъ Дазе вычислилъ по формулѣ проф. Шульца:

$$\frac{\pi}{4}=arctg\,\frac{1}{2}+arctg\,\frac{1}{5}+artcg\,\frac{1}{8}$$

въ теченіе двухъ мѣсяцевъ 200 десятичныхъ знаковъ для π. Затѣмъ въ послѣднее время Рихтеръ и Шанксъ вычислили π съ точностію до 500 и 700 десятичныхъ знаковъ. Всѣ эти вычисленія представляются совершенно излишнею роскошью для практическихъ цѣлей, для которыхъ совершенно достаточно небольшаго числа десятичныхъ знаковъ (*).

(*) Для запоминанія первыхъ десятичныхъ знаковъ числа π существуетъ французское стихотвореніе.

Que j'aime à faire apprendre
Un nombre utile anx sages!
Illustre Archimede, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur.

Выписывая число буквъ въ каждомъ словѣ получаемъ π=3, 14159. 26-35. 89793. 23846. 26.

Большое количество строкъ, произведеній и непрерывныхъ дробей, дающихъ число π, даны великимъ Эйлеромъ. Ему-же принадлежитъ открытіе связи между показательными и тригонометрическими функціями. Вытекающая изъ этой связи формула $1+e^{\pi i}=0$ имѣетъ весьма большое значеніе при доказательствѣ трансцедентности числа π.

На ряду съ нахожденіемъ этихъ новыхъ и важныхъ результатовъ продолжались и попытки найдти точное рѣшеніе задачи о квадратурѣ круга. Ошибочному увлеченію найдти такое рѣшеніе предавались иногда и многіе серьезные ученые. упомянемъ изъ нихъ Кардинала Николая Кузанскаго (1401—1464) и Оронтія Финеуса (1494—1555). Ошибка перваго была указана знаменитымъ астрономомъ Регіомонтаномъ, ошибка втораго—изобрѣтателемъ ноніуса, португальскимъ математикомъ Pedro Nunez.

Подробная исторія многочисленныхъ попытокъ дать точное рѣшеніе задачи квадратуры круга составляетъ предметъ особаго сочиненія Монтюкла: „Histoire des recherches sur la quadrature du cercle“. Безуспѣшность всѣхъ этихъ попытокъ была причиною того, что въ 1775 г. Парижская Академія объявила, что „она приняла рѣшеніе не разсматривать болѣе рѣшеній задачъ удвоенія куба, трисекціи угла, *квадратуры круга*, а также и машинъ, которыя считаются ихъ изобрѣтателями доставляющими постоянное движеніе (perpetuum mobile)“. Мотивы къ этому рѣшенію были написаны знаменитымъ математикомъ и соціологомъ *Кондорсе* (умер. 1794 г.).

Примѣру Парижской Академіи скоро послѣдовали и другія Академіи и ученыя общества. Но точнаго доказательства невозможности рѣшенія квадратуры круга однако тогда еще не было дано и мотивы Кондорсе по отношенію къ квадратурѣ круга были скорѣе метафизическаго, чѣмъ математическаго характера.

Какъ было сказано выше, задача квадратуры круга сводится на построеніе числа π съ помощью круговъ и прямыхъ линій (циркуля и линейки). Но мы видѣли въ § 21, что для того, чтобы такое построеніе было возможно—π

должно быть корнемъ нѣкотораго уравненія степени 2^n эквивалентнаго цѣпи квадратныхъ уравненій. Доказательство невозможности квадратуры круга сводится поэтому къ доказательству того, что π не можетъ быть корнемъ такого уравненія.

За нѣсколько лѣтъ до объявленія Парижской Академіи въ 1766 г. Ламбертъ сдѣлалъ первый шагъ къ изученію природы числа π, показавши его ирраціональность Доказательство ирраціональности числа π основывается на найденномъ Ламбертомъ разложеніи tangx въ непрерывную дробь:

$$tang x = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\ldots}}}} \qquad (*)$$

Полагая $x=\frac{p}{q}$, мы находимъ, что дроби

$$\frac{p^2}{3q^2}, \frac{p^2}{5q^2}, \frac{p^2}{7q^2}, \ldots$$

будутъ несомнѣнно, начиная съ нѣкотораго члена, менѣе 1. На основаніи теоремы Лежандра, приведенной въ предъидущемъ параграфѣ, значеніе непрерывной дроби будетъ слѣдовательно число несоизмѣримое. Итакъ *$tang\, x$ есть число ирраціональное для x раціональнаго.* Но такъ какъ для $x=\frac{\pi}{4}$ $tang\frac{\pi}{4}=1$, то $\frac{\pi}{4}$, а слѣдовательно также и π, не могутъ быть раціональными числами.

Полагая въ томъ-же разложеніи для $tang x$ $x=\pi$, мы имѣемъ

(*) Разложеніе это получается изъ разложенія для tanghypx $=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ даннаго на стр. 164 замѣняя x на $x\sqrt{-1}$. Въ отд. 4 мы покажемъ, что tangx $=\frac{1}{i}\,\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{e^{xi}+e^{-xi}}$; гдѣ $i=\sqrt{-1}$.

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{9 - \ldots}}}}$$

Это равенство влечетъ за собою слѣдующее

$$3 = \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \ldots}}}$$

Если-бы π^2 равнялось раціональному числу $\frac{m}{n}$, то мы имѣли-бы слѣдовательно:

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{m}{7n - \cfrac{m}{9n - \ldots}}}$$

Но непрерывная дробь, стоящая въ лѣвой части, очевидно удовлетворяетъ условію теоремы Лежандра и слѣдовательно не можетъ быть равна цѣлому числу 3. Итакъ π^2 не можетъ быть числомъ раціональнымъ. Это доказательство ирраціональности числа π^2 дано Лежандромъ въ 1794 г. и давая его Лежандръ выражаетъ вмѣстѣ съ тѣмъ предположеніе (il est probable), что число π не есть алгебраическая ирраціональность (*)

Послѣ изслѣдованій Ламберта и Лежандра только Эрмитъ вернулся къ вопросу объ ирраціональности числа π и доказалъ сначала ирраціональность числа π^2. Наконецъ изобрѣтенный имъ для доказательства трансцедентности числа e методъ обобщенный Линдеманомъ, привелъ послѣдняго къ точному и строгому доказательству теоремы,

---

(*) Ранѣе Лежандра то-же убѣжденіе высказывалъ и Эйлеръ въ мемуарѣ: De relatione inter ternaspluresve quantitates instituenda (Opus. analytica II).

что π не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія съ раціональными коеффиціентами.*)

Числами e и π не ограничиваются конечно трансцедентныя вещественныя числа, имѣющія большое значеніе въ анализѣ. Упомянемъ напр. такъ называемое число Маскерони или Эйлера

$$C=\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-(log\,(1+\frac{1}{n})\right],$$

имѣющее важное значеніе въ теоріи Эйлеровыхъ интеграловъ.

Очень важный рядъ трансцедентныхъ чиселъ, имѣющихъ въ теоріи эллиптическихъ функцій значеніе аналогичное съ значеніемъ π въ теоріи круговыхъ функцій, получается, если мы будемъ рѣшать слѣдующую по видимому элементарную задачу. Пусть даны два числа a и b; составимъ изъ нихъ среднее ариѳметическое и среднее геометрическое: $a_1=\frac{a+b}{2}$, $b_1=\sqrt{ab}$. Изъ чиселъ a_1 и b_1 точно также составимъ

$$a_2=\frac{a_1+b_2}{2},\ b_2=\sqrt{a_1 b_1}\ .\ .\ .\ \text{и т. д.}$$

Оба ряда чиселъ

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & \ldots & a_i \\ b_1, & b_2, & \ldots & b_i \end{matrix}$$

стремятся къ одному и тому-же трансцедентному числу, которое называется *среднимъ ариѳметико-геометрическимъ* числомъ a и b.

Вообще теорія трансцедентныхъ функцій является неисчерпаемымъ источникомъ введенія въ анализъ трансцедентныхъ чиселъ.

---

*) Литература вопроса указана выше въ сноскахъ на стр. 162

IV. Ученіе о комплексныхъ числахъ

> Не мистическому употребленію $\sqrt{-1}$ обязанъ анализъ своими дѣйствительными важными успѣхами текущаго столѣтія, но совершенно естественному обстоятельству, что математическое движеніе безконечно свободнѣе, когда величины могутъ измѣняться въ плоскости, а не только въ линіи. Функціи одной перемѣнной являются предѣльнымъ случаемъ функцій отъ двухъ перемѣнныхъ и именно на этомъ предѣлѣ, на этихъ берегахъ, находятся тѣ подводныя мели, отъ которыхъ свободенъ широкій просторъ моря.
>
> **Л. Кронекеръ.**

Область всѣхъ **вещественныхъ** чиселъ, включающая и числа раціональныя и числа ирраціональныя, не даетъ еще возможности неограниченно производить обратныя операціи третьей ступени, если объектами операцій будутъ не только положительныя, но и отрицательныя числа.

Если $\sqrt[n]{A}$ и $Log_a\, A$ могутъ быть представлены несоизмѣримымъ числомъ при цѣломъ положительномъ A (и a), то задачи извлеченія корня четной степени изъ отрицательнаго числа и нахожденія логариѳма отрицательнаго числа при положительномъ основаніи суть задачи неразрѣшимыя и требуютъ дальнѣйшаго обобщенія понятія о числѣ. Восьмая алгебраическая операція—рѣшеніе алгебраическаго уравненія n—ой степени—также ведетъ къ этому обобщенію. Изъ элементарной алгебры извѣстно, что уравненіе 2-й степени $ax^2+bx+c=0$ имѣетъ вещественные корни только въ томъ случаѣ, если функція коеффиціентовъ b^2-4ac, называемыя **дискриминантомъ,** положительна или равна 0. Уравненіе 3 ей степени, приведенное къ виду $x^3+px+q=0$, имѣетъ

3 вещественные корни только въ томъ случаѣ, если дискриминантъ этого уравненія $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0$.

Подобныя-же условія вещественности корней выводятся въ высшей алгебрѣ (изъ такъ называемой теоремы Штурма) для уравненій n-ой степени. Цѣль настоящаго отдѣла заключается въ томъ, чтобы показать, что указанныя задачи, неразрѣшимыя съ помощью **области вещественныхъ чиселъ**, могутъ быть разрѣшены съ помощью введенія новаго математическаго объекта—**пары** двухъ вещественныхъ чиселъ, взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ, которую мы и принимаемъ за новое **комплексное число** (пары третьей ступени). Это обобщеніе понятія о числѣ—введеніе комплексныхъ чиселъ—является послѣднимъ, пока законы операцій, существующіе для цѣлыхъ положительныхъ чиселъ и сохраненные нами при всѣхъ до сихъ поръ бывшихъ обобщеніяхъ числа, остаются безъ измѣненія. Область комплексныхъ чиселъ является замкнутою областью и всѣ операціи алгебры (анализа конечныхъ) и анализа безконечно-малыхъ, производимыя надъ комплексными числами, выполняются съ помощью тѣхъ-же комплексныхъ чиселъ, не требуя никакого новаго обобщенія. Этотъ результатъ, выясненію котораго будетъ посвященъ настоящій отдѣлъ, показываетъ значеніе комплексныхъ чиселъ и объясняетъ ихъ выдающуюся роль въ современной математикѣ. Важнѣйшія теоріи чистой математики (напр. высшая алгебра и въ частности теорія дѣленія круга, теорія Абелевыхъ и въ частности эллиптическихъ функцій, теорія интегрированія дифференціальныхъ линейныхъ уравненій (въ частности теорія аутоморфныхъ функцій) созданы съ помощью комплексныхъ чиселъ. Такой, стоящій какъ бы на порогѣ математики, вопросъ, какъ вопросъ о распредѣленіи простыхъ чиселъ, начинаетъ выясняться лишь благодаря изученію Римановой функціи $\zeta(s)$ (см. вып. 1 стр. 55) не только для вещественныхъ, но и для комплексныхъ значеній аргумента s. Теорія математической физики—этотъ вѣнецъ нашего математическаго знанія (теорія потенціала, гидродинамика, теорія теплопроводности, электростатика, теорія упругости, электромагнитная теорія свѣта) черпаютъ свои методы изъ теоріи функцій отъ комплекснаго перемѣннаго.

§ 32. Дѣйствія надъ комплексными числами (парами третьей ступени).

Равенство. Двѣ пары $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$, элементы которыхъ, взятые въ опредѣленномъ порядкѣ, суть произвольныя **вещественныя** числа, равны тогда и только тогда, когда ихъ первые и ихъ вторые члены порознь равны между собою т. е.

$$\{a, b\}=\{c, d\} \text{ если } a=c,\ b=d.$$

Изъ этого опредѣленія равенства паръ вытекаетъ примѣнимость къ нимъ аксіомъ ученія о равенствѣ величинъ (т. е. 1. $a=a$ (рефлективность), 2. если $a=b$, то и $b=a$ (симметричность) и 3. если $a=b$, $a=c$, то и $b=c$ (транзитивность).

Условіе. Пара, второй элементъ которой есть число 0, считается совпадающею съ своимъ первымъ членомъ т. е. $\{a, 0\}=a$. Пара $\{0, 0\}=0$; и поэтому, если пара $\{a, b\}$ равна 0, то $a=0$, $b=0$.

Сложеніе паръ. Результатомъ сложенія или суммою двухъ паръ $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ называется новая пара

$$\{a+c, b+d\}$$

Изъ этого опредѣленія сложенія вытекаетъ, что операція сложенія паръ есть операція ассоціативная и коммутативная. Мы опускаемъ доказательство по его простотѣ и предполагая, что читатель достаточно освоился съ подобными доказательствами въ предыдущихъ отдѣлахъ. Изъ того-же опредѣленія сложенія вытекаетъ, что разность двухъ паръ $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ есть пара $\{a-c, b-d\}$. Дѣствительно

$$\{a-c, b-d\}+\{c, d\}=\{c, d\}+\{a-c, b-d\}=\{a, b\}$$

Наконецъ изъ этого опредѣленія сложенія паръ вытекаетъ, что всякая пара $\{a, b\}$ можетъ быть разсматриваема какъ сумма двухъ паръ $\{a, 0\}$ и $\{0, b\}$ т. е. какъ сумма вещественнаго числа и спеціальной пары, первый элементъ которой есть 0.

Умноженіе паръ. Результатомъ умноженія или **произведеніемъ** паръ $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ называется пара

$$\{ac-bd, ad+bc\}.$$

Операція умноженія паръ есть операція **ассоціативная, коммутативная и дистрибутивная** по отношенію къ сложенію.

Ассоціативность. Вычислимъ по данному правилу умноженія $\alpha(\beta\gamma)$ и $(\alpha\beta)\gamma$ полагая
$\alpha=\{a, b\}$, $\beta=\{c, d\}$, $\gamma=\{e, f\}$. Имѣемъ

$$\alpha(\beta\gamma)=\{a(ce-df)-b(ef+cd),\ a(cf+ed)+b(ce-df)\}$$

$$(\alpha\beta)\gamma=\{(ac-bd)e-(ad+bc)f,\ (ac-bd)f+(ad+bc)e\}$$

Пары, стоящія во вторыхъ частяхъ равенства, очевидно, равны между собою по законамъ операцій, выведеннымъ въ предыдущемъ отдѣлѣ для вещественныхъ чиселъ, что и доказываетъ ассоціативность умноженія комплексныхъ чиселъ.

Подобнымъ же образомъ провѣряется и **коммутативность** и **дистрибутивность** операціи умноженія.

Изъ даннаго нами опредѣленія операціи умноженія вытекаютъ слѣдующія частныя слѣдствія.

По правилу умноженія, находимъ:
$\{a, b\}^2=\{a^2-b^2, 2ab\}$ откуда

$\{0, 1\}^2=\{-1, 0\}$ т. е. существуетъ пара, квадратъ которой равняется, по условію, вещественному числу -1.

Мы увидимъ сейчасъ важное значеніе этой спеціальной пары.

Дѣйствительно спеціальная пара $\{0, b\}$ можетъ быть разсматриваема какъ произведеніе вещественнаго числа на пару $\{0, 1\}$.

Дѣйствительно $b.\{0, 1\}=\{b, 0\}\{0, 1\}=\{0, b\}$.

На основаніи этого всякая пара $\{a, b\}$ можетъ быть представлена подъ видомъ $a+b\{0, 1\}$ т. е. теорія паръ приводитъ къ введенію новой спеціальной пары, которая называется мнимою единицею и для обозначенія которой со времени Эйлера употребляется буква i.

Съ введеніемъ этого обозначенія мы можемъ оставить обозначеніе паръ $\{a, b\}$ и ввести новое болѣе удобное: $a+bi$. Мы видѣли, что квадратъ пары $\{0, 1\}$ есть—1; $i^2=-1$.

Легко выводятся также равенства:
$i^3=-i$, $i^4=+1$, $i^5=i$, ... т. ч. значенія степеней i періодически повторяются. Вообще $i^n=i, -1, -i, +1$, смотря по тому будетъ-ли $n\equiv 1$, 2, 3, 0 (мод. 4). Наконецъ изъ того-же опредѣленія видно, что пары $\{0, b\}$ рѣшаютъ одну изъ задачъ, неразрѣшимыхъ при помощи области вещественныхъ чиселъ—задачу извлеченія корня квадратнаго изъ отрицательнаго числа. Дѣйствительно

$$\{0, \pm b\}^2=\{-b^2, 0\}=-b^2.$$

Поэтому и рѣшеніе квадратнаго уравненія $x^2+px+q=0$ въ томъ случаѣ, если дискриминанта отрицательна доставляется формулою $=\frac{p}{2}\pm i\sqrt{\triangle}$, гдѣ $\triangle$ есть абсолютная величина дискриминанта $|p^2-4q|=\triangle$.

Найдя въ нашихъ парахъ отвѣтъ на одну изъ поставленныхъ нами задачъ и видя, что операціи надъ парами тожественны по своимъ свойствамъ съ операціями надъ числами раньше введенныхъ областей, мы получаемъ полное право ввести въ общую ариѳметику эти пары, какъ новую область **чиселъ**, заключающую въ себѣ числа **вещественныя**, какъ частный случай. Этимъ числамъ, которыя прежде назывались мнимыми или воображаемыми, придается теперь названіе **комплексныхъ** (составныхъ), указывающее на ихъ составъ изъ двухъ членовъ: **вещественной** a и **чисто-мнимой** bi.

Примѣнимость къ новымъ числамъ законовъ операцій сложенія и умноженія и аксіомъ ученія о равенствѣ ведетъ къ слѣдствію, что всѣ формулы алгебры, заключающія въ себѣ комбинаціи знаковъ сложенія и умноженія, будутъ спримѣнимы къ комплекснымъ числамъ; такова напр. формула бинома Ньютона. Переходя къ операціи вычитанія, мы находимъ изъ опредѣленія вычитанія, какъ операціи обратной сложенію, что всегда существуетъ одно и только одно комплексное число, удовлетворяющее равенству

$$\{x, y\}+\{c, d\}=\{a, b\}$$

Это число есть очевидно $\{a-c, b-d\}$ или при вычитаніи комплексныхъ чиселъ вычитаются порознь вещественныя и мнимыя части. Съ помощью новаго обозначенія имѣемъ:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Прежде чѣмъ перейти къ дѣленію, введемъ новый терминъ, назвавъ „сопряженными комплексными числами" числа $a+bi$ и $a-bi$.

По правиламъ операціи сложенія и умноженія сумма и произведеніе сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ суть величины вещественныя. Дѣйствительно.

$$(a+bi)+(a-bi)=2a$$
$$(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2$$

Выраженіе a^2+b^2носитъ названіе **нормы** комплекснаго числа Положительное значеніе корня квадратнаго изъ нормы называется **модулемъ** или **абсолютнымъ значеніемъ** (Вейерштрассъ) комплекснаго числа. Мы будемъ обозначать его знакомъ, введеннымъ выше для абсолютныхъ значеній вещественныхъ величинъ: $|a+bi|$.

Если требуется вычислить $\frac{a+bi}{a'+b'i}$, то умножая оба члена на сопряженное съ знаменателемъ число, имѣемъ

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(a+bi)\ (a'-b'i)}{a'^2+b'^2}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{ba'-ab'}{a'^2-b'^2}i.$$

Разсмотрѣніе операцій возвышенія въ степень, извлеченія корня и логариѳмированія мы отлагаемъ до введенія

тригонометрической формы комплекснаго числа, которую лучше всего объяснить вмѣстѣ съ геометрическимъ представленіемъ комплексныхъ чиселъ.

§ 33. Историческій очеркъ теоріи комплексныхъ чиселъ.

Подобно отрицательнымъ числамъ, и комплексныя числа встрѣтились математикамъ при рѣшеніи уравненій второй и высшихъ степеней. Одно изъ первыхъ упоминаній о нихъ мы находимъ въ сочиненіи „Ars magna" (1545) одного изъ оригинальнѣйшихъ умовъ эпохи возрожденія Кардана. Какъ для Кардана, такъ и для другихъ итальянскихъ алгебриковъ 16-го вѣка мнимые корни суть *radices impossibiles* и указатели невозможности рѣшенія задачи. Но уже въ началѣ XVII столѣтія Альбертъ Жираръ высказываетъ довольно правильный взглядъ на мнимыя рѣшенія. Декартъ примѣняетъ къ нимъ въ первый разъ терминъ воображаемыхъ или мнимыхъ корней.

Въ XVIII столѣтіи Эйлеръ въ рядѣ многочисленныхъ мемуаровъ показалъ всю пользу мнимыхъ чиселъ при математическихъ преобразованіяхъ и своимъ открытіемъ связи между показательною функціею e^x и тригонометрическими $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$ разрѣшилъ спорный вопросъ о логариѳмахъ отрицательныхъ чиселъ. Но несмотря на то, что въ этихъ работахъ Эйлера и позже въ классическихъ работахъ Абеля и Якоби по теоріи эллиптическихъ и Абелевыхъ функцій употребленіе мнимыхъ чиселъ оказалось могущественнымъ орудіемъ для нахожденія соотношеній между числами вещественными, мнимыя числа, какъ писалъ **Гауссъ** въ 1831 г., были въ ней только терпимы, „не получивъ полнаго права гражданства въ математикѣ и дѣйствія надъ ними разсматривались, какъ безсодержательная игра символами"

Но однако мало по малу стала выясняться и истинная природа комплексныхъ чиселъ и возможность найдти такія конкретныя отношенія, которыя точно воспроизводятся въ теоріи комплексныхъ чиселъ, подобно тому какъ въ теоріи чиселъ относительныхъ воспроизводятся отношенія между отрѣзками безпредѣльно **въ обѣ стороны** продолжающейся прямой линіи или, общѣе говоря, тѣ отношенія между элементами ряда (многообразія одного измѣренія), которыя допускаютъ измѣренія въ обратномъ смыслѣ (больше и меньше, послѣ и прежде). Уже Валлисъ (Algebra, Opera math т. II. 1693. Cap. 66—69) замѣтилъ при алгебраическомъ рѣшеніи геометрическихъ задачъ то замѣчательное обстоятельство, что если вещественные корни уравненія ведутъ къ вещественнымъ точкамъ нѣкоторой прямой, то въ случаѣ измѣненія условій, ведущаго къ уравненіямъ, имѣющимъ „невозможные" корни, получаются, какъ отвѣтъ на вопросъ, вмѣсто точекъ прямой, точки другой прямой къ ней перпендикулярной. Поэтому мнимая величина является для него „среднею пропорціональною между положительною и отрицательною величиною". Подобныя-же замѣчанія находимъ у многихъ другихъ авторовъ, связывавшихъ мнимые корни уравненій съ линіями, перпендикулярными къ линіямъ, на которыхъ откладываются вещественные корни *).

Но всѣ эти попытки уступаютъ въ ясности и опредѣленности теоріи геометрическаго представленія комплексныхъ чиселъ, данной Каспаромъ Весселемъ (Wessel) въ 1797 г. и Аргандомъ въ 1806 г. Мемуаръ Весселя былъ напечатанъ на датскомъ языкѣ подъ заглавіемъ: „Om directionens analytiske Betegning" и оставался незамѣченнымъ до послѣдняго времени. Въ 1897 г. онъ переведенъ на французскій яз. и изданъ подъ заглавіемъ: „Essai sur la représentation de la direction" Copenhague. 1897 г. Мемуаръ Арганда: „Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques" (Paris 1806), переизданный Гуэлемъ въ 1874, также долго не обращалъ на себя даннаго вниманія. Идея геометрическаго представле-

(*) Kühn. Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis (Novi Comm. Acad. Petrop. III. 1750—1751).

Buée. Mémoire sur lesquantités imaginaires Philosoph. Transactions 1806).

Mourey. La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. Paris. 1828. 2-ое изд. 1861.

Warren. Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities. Cambridge 1828 (также Philos. Trans. за 1829 г.).

нія комплексныхъ чиселъ стала общимъ достояніемъ математиковъ только послѣ появленія знаменитаго мемуара Гаусса: „Theoria residuorum biquadraticorum" (*) (1831) и самимъ Гауссомъ написаннаго реферата объ этомъ мемуарѣ. Необходимо отмѣтить также, что уже раньше въ основу доказательства, даннаго Гауссомъ для основной теоремы высшей алгебры (см. дальше § 37) въ 1799 г. положено, хотя и не явно, геометрическое представленіе комплексныхъ чиселъ.

Въ виду важности взглядовъ Гаусса для „метафизики" комплексныхъ чиселъ считаемъ полезнымъ привести дословно относящееся къ геометрическому представленію комплексныхъ чиселъ мѣсто реферата.

„Пусть намъ даны предметы, которые не могутъ быть расположены въ одинъ хотя-бы и безпредѣльный рядъ, но зато могутъ быть расположены въ ряды рядовъ т. е. составляютъ многообразіе двухъ измѣреній; если, подобно тому какъ раньше (*) разсматривались переходы отъ одного члена одного ряда къ другому члену того-же ряда, теперь будемъ разсматривать переходы отъ одного ряда къ другому или отношенія одного ряда съ другимъ, то для измѣренія перехода отъ одного члена системы къ другому необходимы кромѣ прежнихъ единицъ $+1$ и -1 ввести еще двѣ другія, взаимно противоположныя $+i$ и $-i$.

При этомъ конечно должно быть выставлено требованіе, чтобы единица i всякій разъ обозначала переходъ отъ даннаго члена ряда къ *опредѣленному* члену непосредственно примыкающаго ряда. Такимъ образомъ система можетъ быть двоякимъ образомъ расположена въ ряды рядовъ.

(*) Въ теоріи биквадратныхъ вычетовъ, которой посвященъ этотъ мемуаръ, изучается теорія сравненія $z^4=q$ (модр.). Гауссъ показываетъ, что теорія биквадратичныхъ вычетовъ получаетъ особенную простоту и изящество, если понятіе о рядѣ цѣлыхъ положительныхъ и отрицательныхъ расширяется и в теорію чиселъ вводятся *цѣлыя комплексныя числа* т. е. числа вида $A+B\sqrt{-1}$, гдѣ A и B суть цѣлыя числа. Тогда 2 не есть уже абс. простое число т. к. $2=(1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1})$; всѣ числа вида $4n+1$ также являются сложными (См. выше § 23).

(*) въ теоріи относительныхъ чиселъ. Соотвѣтствующее мѣсто реферата Гаусса читатель найдетъ на стр. 55.

Математикъ всегда мыслитъ отвлеченіемъ отъ свойствъ предметовъ и отъ содержанія ихъ отношеній; его дѣло только перечисленіе предметовъ и сравненіе ихъ отношеній; поэтому подобно тому, какъ онъ придаетъ однородность отношеніямъ, обозначаемымъ $+1$ и -1, онъ имѣетъ право распространять ее и на четыре элемента.

Наглядно эти отношенія могутъ быть представлены только въ пространствѣ и простѣйшій способъ представленія получается, если мы безпредѣльную плоскость раздѣлимъ на квадраты двумя системами прямыхъ линій, взаимно пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ и точки пересѣченія будемъ считать символами предметовъ. Каждая такая точка A имѣетъ четыре сосѣднихъ и если отношеніе A къ одной сосѣдней точкѣ обозначимъ $+1$, то этимъ опредѣляется отношеніе, обозначаемое -1; но за $+i$ мы можемъ взять какое-либо изъ двухъ другихъ; другими словами, мы можемъ по произволу взять вправо или влѣво точку, относящуюся къ $+i$. Это отношеніе между **право** и **лѣво** есть отношеніе вполнѣ *въ себѣ* опредѣленное, какъ только мы (произвольно) установимъ направленія *впередъ* и *назадъ* въ плоскости или *верхъ* и *низъ* по обѣимъ сторонамъ плоскости; но мы можемъ наше воззрѣніе этого различія передать другимъ *только* указаніемъ на дѣйствительно существующія матеріальныя вещи. (Оба эти замѣчанія сдѣлалъ уже Кантъ, но непонятно, какъ могъ этотъ остроумный философъ видѣть въ первомъ доказательство своего мнѣнія, что пространство есть только форма нашего воззрѣнія, между тѣмъ какъ второе показываетъ прямо противоположное и доказываетъ, что пространство должно имѣть реальное значеніе независимо отъ способа нашего воззрѣнія). Согласившись съ сказаннымъ, мы видимъ однако, что вполнѣ отъ нашего произвола зависитъ, который изъ двухъ взаимно перекрещивающихся въ одной точкѣ рядовъ принять за главный рядъ, и какое направленіе разсматривать въ немъ, какъ относящееся къ положительнымъ числамъ; мы видимъ далѣе, что если отношеніе, раньше принимаемое за $+i$, принять за $+1$, то мы необходимо должны принять отношеніе ранѣе обозначенное —1 за $+i$. Говоря языкомъ математиковъ, это обозначаетъ, что $+i$ есть одна изъ среднихъ пропорціональныхъ между $+1$ и -1 или соотвѣтствуетъ символу $\sqrt{-1}$; мы говоримъ намѣренно—одна изъ среднихъ пропорціональныхъ, такъ—какъ и $-i$ имѣетъ то-же право на это названіе. Такимъ образомъ вполнѣ оправдывается возможность нагляднаго представленія для $\sqrt{-1}$ и эта величина этимъ самымъ вводится въ кругъ предметовъ ариѳметики.

Мы считаемъ, что это краткое изложеніе основныхъ моментовъ новой теоріи окажетъ услугу друзьямъ математики. Если этотъ предметъ разсматривался до сихъ поръ съ ложной точки зрѣнія и въ немъ находили таинственную темноту, то это необходимо приписать главнымъ образомъ мало подходящимъ обозначеніемъ. Если бы $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ назывались не положительная, отрицательная, мнимая (или даже невозможная) единица, но напримѣръ прямая, обратная, боковая, то едва-ли могла-бы быть рѣчь о неясности".

Теорія Гаусса связываетъ такимъ образомъ различіе величинъ вещественныхъ и мнимыхъ съ различіемъ направленій на плоскости, и его „метафизика комплексныхъ чиселъ" состоитъ въ объясненіи ихъ, какъ „направленныхъ величинъ" на плоскости.

Разсматриваемыя съ этой точки зрѣнія ариѳметическія операціи надъ комплексными числами являются вполнѣ соотвѣтствующими извѣстнымъ геометрическимъ операціямъ надъ векторами на плоскости, какъ это будетъ подробно изъяснено въ слѣдующихъ параграфахъ. Изученіе этихъ операцій, проведенное чисто геометрически, составляетъ геометрическую теорію *векторовъ* или теорію *эквиполленцій*. (Беллявитисъ—1853 г.) (*).

Чисто ариѳметическая теорія комплексныхъ чиселъ, основанная на понятіи о парѣ, въ первый разъ была изложена знаменитымъ ирландскимъ математикомъ В. Р. Гамильтономъ. Въ 1835 г. имъ представленъ Ирландской

(*) На русскомъ языкѣ существуетъ подробное изложеніе теоріи векторовъ на плоскости въ сочиненіи проф. В. П. Ермакова. Теорія векторовъ. Кіевъ

Академіи Наукъ и въ 1837 г. опубликованъ мемуаръ (*), въ которомъ онъ впервые разсматриваетъ рядъ величинъ (a_1, a_2. . . a_n), взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ, какъ одинъ нераздѣльный предметъ для алгебраическихъ надъ нимъ операцій. Эти *совокупности* величинъ (sets) Гамильтонъ различаетъ по числу элементовъ на пары, тройки. четверки. Въ мемуарѣ 1835 г. онъ особенно подробно останавливается на теоріи паръ. Правила операцій надъ парами, которыя онъ установляетъ и которыя совершенно тожественны съ установленными нами въ § 31, Гамильтонъ пытается оправдать на основаніи особаго рода соображеній. Съ этою цѣлью онъ въ обширномъ вступленіи предварительно изъясняетъ основы алгебры какъ *науки о времени*: алгебра. говоритъ онъ, есть наука о соотношеніяхъ эпохъ и промежутковъ времени. Такъ—какъ число, измѣряющее промежутокъ времени, истекшаго между двумя эпохами, есть *разность* чиселъ означающихъ эти эпохи, то для Гамильтона первичное соотношеніе въ алгебрѣ дается *вычитаніемъ.*

Другая вполнѣ точная и строго ариѳметическая теорія комплексныхъ чиселъ можетъ быть построена на разсмотрѣніи *функціональныхъ сравненій.* Еще раньше чѣмъ Кронекеръ (см. § 20 стр. 24) примѣнилъ эту общую идею къ сведенію всей математики исключительно къ теоріи цѣлыхъ чиселъ, для комплексныхъ чиселъ аналогичная теорія была развита Коши (*) Коши разсматриваетъ только вещественныя числа, i есть также вообще вещественная перемѣнная, но двѣ цѣлыя функціи отъ i называются алгебраически эквивалентными, если онѣ, будучи раздѣлены на i^2+1, даютъ одинъ и тоть-же остатокъ. Другими словами, алгебраически эквивалентны двѣ функціи, которыя сравнимы по модулю i^2+1.

(*) Theory of conjugate functions or algebraic couples (Trans. of the R. Jrish Akademy vol. XVII). По русски см. В. П. Максимовичъ. Новая теорія гамильтоновыхъ паръ и соотвѣтственное обобщеніе теоріи функцій мнимаго перемѣннаго. Казань 1884.

(*) Mémoire sur la théorie des equivalences algébriques, substituée a la théorie des imaginaires (Exercices d'analyse et de phys. math. V. 4. 1897).

Нетрудно провѣрить существованіе слѣдующихъ функціональныхъ сравненій

$$i^{4m}\equiv 1,\ i^{4m+1}\equiv i,\ i^{4m+2}\equiv -1,\ i^{4m+3}\equiv -i \ (\text{мод}\ \ i^2+1)$$

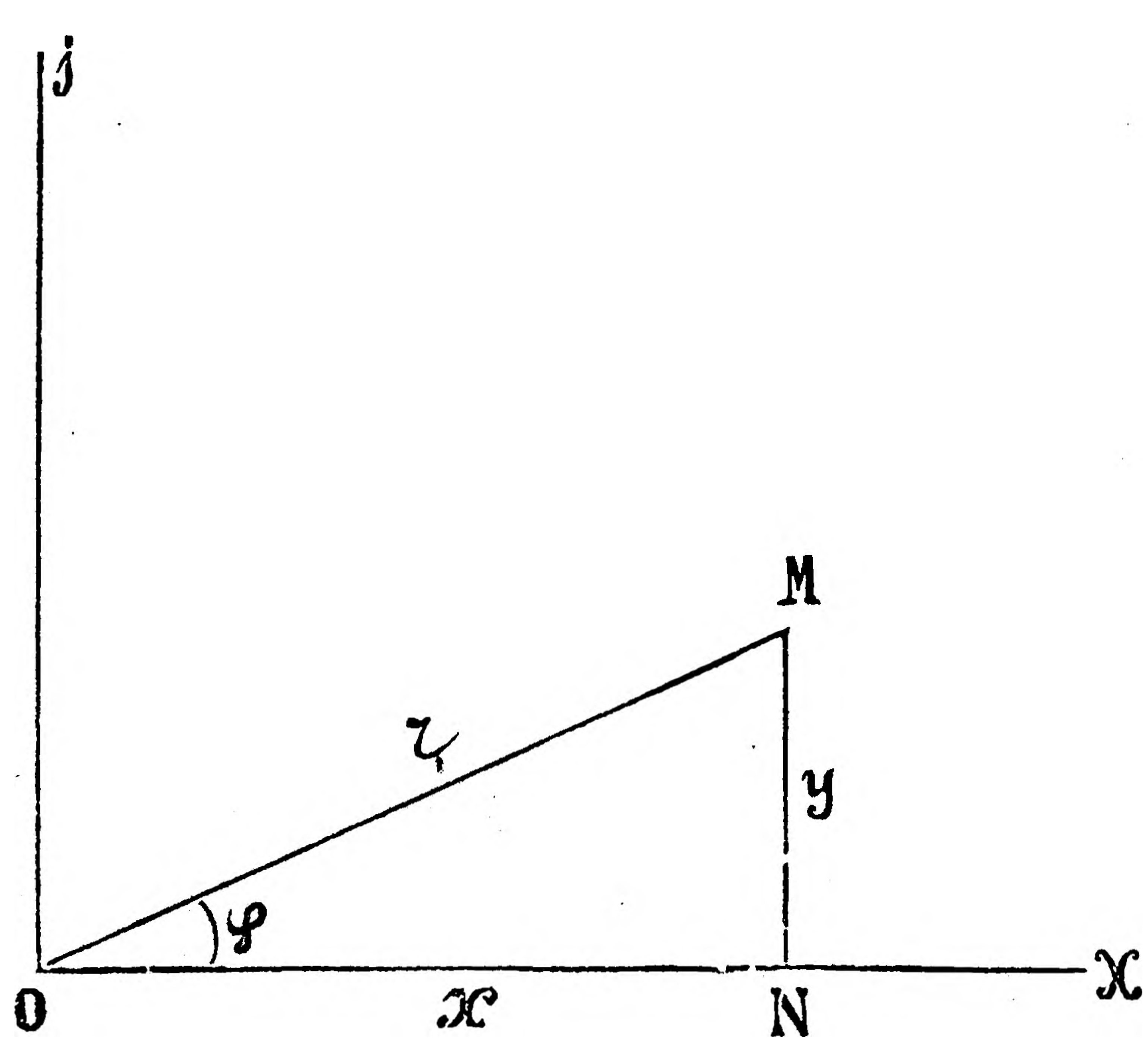
въ частномъ случаѣ $i^2\equiv -1,\ i^3\equiv -i$ (мод. i^2+1)
Поэтому

$$(\alpha+\beta i)\ (\gamma+\delta i)\equiv \alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)i \ (\text{мод.}\ i^2+1).$$

Подобнымъ-же образомъ выводятся и другія правила операцій надъ комплексными числами.

Геометрическая теорія комплексныхъ чиселъ имѣетъ передъ ариѳметическою преимущество въ томъ, что она наглядно представляетъ операціи надъ комплексными числами и приводитъ къ весьма важному представленію комплекснаго числа подъ такъ называемой *тригонометрическою* формою.

§ 34. Геометрическая теорія комплексныхъ чиселъ.



По геометрической теоріи комплексныхъ чиселъ, данной Весселемъ, Аргандомъ и Гауссомъ комплексное число $z=x+iy$ изображается точкою, координаты которой суть x и y. На основаніи установленнаго нами (см. § 16 и 25) соотвѣтствія между вещественными числами и точками прямой линіи вытекаетъ, что всякому комплексному числу соотвѣтствуетъ одна и только одна опредѣленная точка плоскости; обратно каждой точкѣ плоскости соотвѣтствуетъ опредѣленное комплексное число. Въ частности точкамъ оси x соотвѣтствуютъ вещественныя числа, точкамъ оси y чисто мнимыя числа.

Тригонометрическая (или *приведенная*) форма комплекснаго числа получается непосредственно, если мы вмѣсто декартовыхъ координатъ употребимъ для изображенія точки парою чиселъ такъ--называемыя *полярныя* координаты т. е. r—длину радіуса вектора, соединяющаго точку съ началомъ координатъ, и уголъ φ, который радіусъ векторъ образуетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x. Для того, чтобы получить всѣ точки плоскости r должно принимать всѣ вещественныя *положительныя* значенія, уголъ φ—измѣняться отъ 0 до 2π.

Между декартовыми (прямоугольными) и полярными координатами существуютъ соотношенія

1) $x=r\ Cos\varphi$, $y=r\ Sin\varphi$, откуда получимъ въ свою очередь

$$(2)\ r=+\sqrt{x^2+y^2}\,,\ \varphi=arctg\,\frac{y}{x}\,.$$

Подставляя въ выраженіе комплекснаго числа $z=x+iy$ вмѣсто x и y ихъ выраженія по формуламъ (1) мы получаемъ *тригонометрическую* форму комплекснаго числа

$$z=r\ (Cos\varphi+iSin\varphi).\quad (3)$$

r называется *модулемъ* или *абсолютною* величиною (Вейерштрассъ) комплекснаго числа z и обозначается или *mod* z или z; φ—носитъ названіе *аргумента*, *амплитуды* или *аркуса* комплекснаго числа z и обозначается соотвѣтственно подъ видомъ *arg* z, *ampl* z или *arc* z.

Для каждаго комплекснаго числа модуль есть вполнѣ опредѣленное положительное число; напротивъ формулы (1) показываютъ, что къ φ можно придать или вычесть безъ измѣненія комплекснаго числа какое угодно кратное отъ 2π. Другими словами, если

$$r\ (Cos\ \varphi+i\ Sni\ \varphi)=r'\ (Cos\varphi'+i\ Sni\varphi')$$

то $r=r'$, $\varphi=\varphi'+2k\pi$; гдѣ k есть произвольное *цѣлое* положительное или отрицательное число.

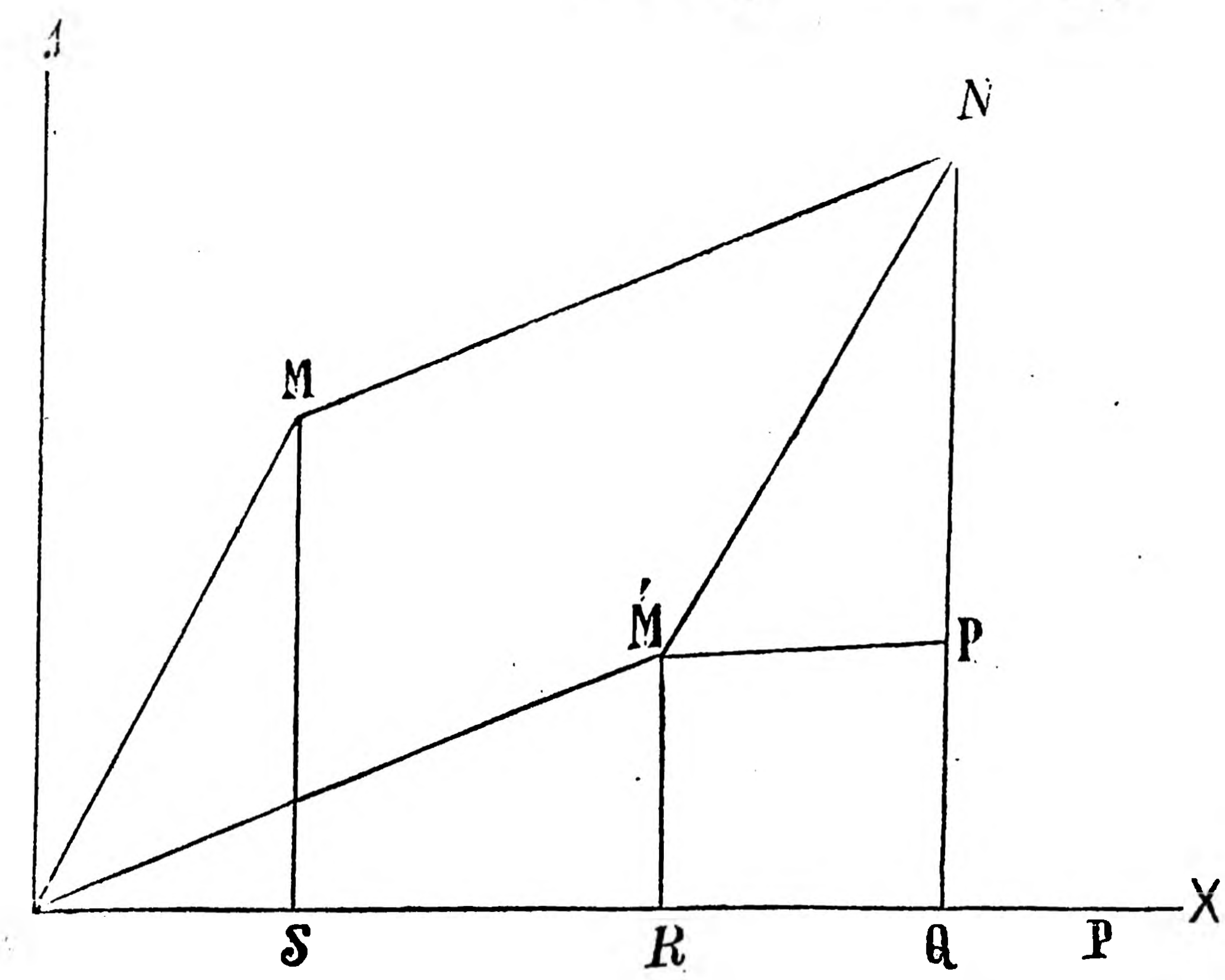
Для сокращенія иногда употребляютъ вмѣсто выраженія $Cos\varphi+iSin\varphi$ сокращенное обозначеніе $Cis\varphi$.

Тригонометрическая форма комплекснаго числа особенно ясно показываетъ то однозначное соотвѣтствіе, которое существуетъ между комплексными числами и векторами различныхъ длинъ и направленій, исходящихъ изъ начала координатъ 0. Каждому такому вектору, если его длина r и если онъ составляетъ съ положительною осью x уголъ φ, отсчитываемый въ направленіи обратномъ ходу часовой стрѣлки, соотвѣтствуетъ опредѣленное комплексное число $r\ (Cos\varphi+iSin\varphi)$ и обратно этому числу соотвѣтствуетъ только одинъ опредѣленный векторъ. Мы покажемъ теперь, что ариѳметическимъ операціямъ надъ комплексными числами соотвѣтствуютъ геометрическія операціи надъ векторами.

Сложеніе и вычитаніе комплексныхъ чиселъ (сложеніе и вычитаніе векторовъ).

Для опредѣленія точки, соотвѣтствующей суммѣ двухъ комплексныхъ чиселъ

$$z=x+iy \text{ и } z'=x'+iy',$$



соотвѣтствующихъ точкамъ M и M', построимъ на векторахъ OM и OM' параллелограммъ $OMM'N$; вершина этого параллелограмма N противоположная точкѣ 0 и будетъ соотвѣтствовать суммѣ $z+z'=(x+x')+i\ (y+y')$. Дѣйствительно опредѣляя координаты точки N, найдемъ
$NQ=NP+PQ=MS+M'R$ (вслѣдствіе равенства треугольниковъ OMS и NMP)$=y+y'$; $OQ=OR+RQ=OR+OS$ (по той-же причинѣ)$=x+x'$.

Если вмѣсто точекъ будемъ разсматривать векторы, то найденный результатъ формулируется слѣдующимъ образомъ: *если комплекснымъ числамъ z и z' соотвѣтствуютъ векторы **OM** и OM', то суммѣ ихъ $z+z'$ соотвѣтствуетъ векторъ ON (діагональ параллелограмма, построеннаго на векторахъ OM и OM').* Нахожденіе этого вектора по даннымъ векторамъ OM и OM' носитъ названіе *геометрическаго сложенія* векторовъ; векторъ ON есть геометрическая сумма векторовъ OM и OM' или векторовъ OM и MN т. к. въ теоріи векторы, равные по длинѣ и одинаковые по направленію, считаются равными. Геометрическое сложеніе векторовъ имѣетъ весьма важное значеніе какъ въ геометріи, такъ и въ механикѣ (нахожденіе равнодѣйствующей двухъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ).

Отъ сложенія двухъ комплексныхъ чиселъ не трудно перейдти къ сложенію нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ и отъ геометрическаго сложенія двухъ векторовъ къ геометрическому сложенію нѣсколькихъ векторовъ.

Вычитаніе двухъ комплексныхъ чиселъ, соотвѣтствующихъ точкамъ M и M', приводится къ построенію параллелограмма по данной діагонали его OM и одной изъ сторонъ. Соотвѣтственно этому опредѣляется и операція *геометрическаго вычитанія векторовъ* (нахожденіе силы по данной равнодѣйствующей и другой силѣ сводится къ этой геометрической операціи).

Умноженіе комплексныхъ чиселъ (*геометрическое умноженіе*). Умноженіе комплексныхъ чиселъ принимаетъ особенно изящный видъ въ случаѣ, если комплексныя числа представлены подъ тригонометрическою формою.

Пусть $z=r\ (Cos\varphi+iSin\varphi)$

$$z'=r'\ (Cos\varphi'+iSin\varphi')$$

Примѣняя правило данное въ § 32 мы найдемъ

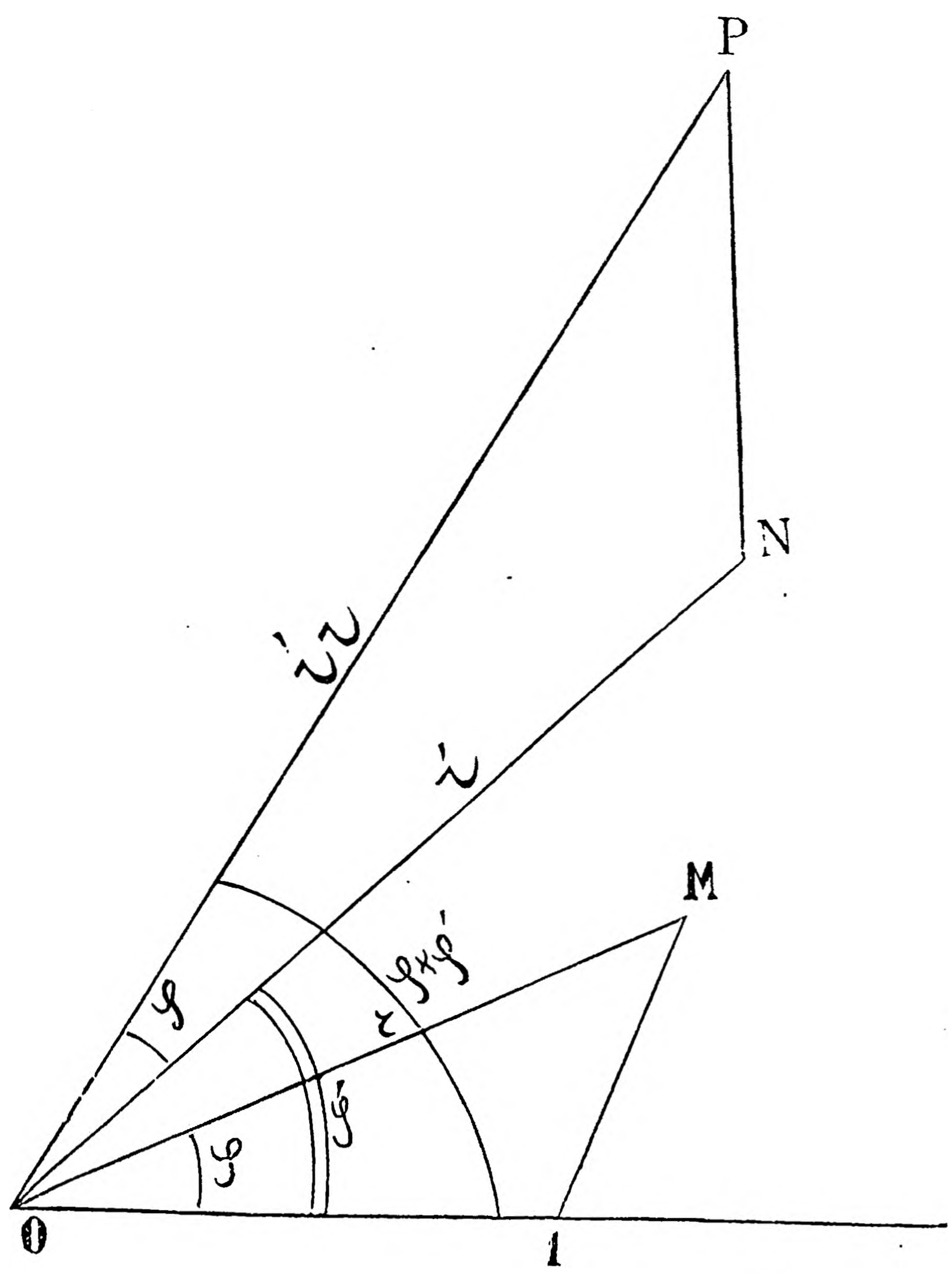
$$zz'=rr'\ [Cos\ (\varphi+\varphi')+iSin\ (\varphi+\varphi')].$$

Модуль произведенія двухъ комплексныхъ чиселъ равенъ произведенію модулей множителей; аргументъ произведенія равенъ суммѣ аргументовъ множителей.

Теорема эта безъ всякаго труда обобщается на случай произведенія какого-либо числа множителей.

$$zz' \ldots z^{(n-1)}=rr' \ldots r^{(n-1)}[Cos\ (\varphi+\varphi'+ \ldots \varphi^{(n-1)})+$$
$$+iSin(\varphi+\varphi'+ \ldots +\varphi^{(n-1)}).$$

Геометрически формула умноженія изображается слѣдующимъ образомъ:



Пусть OM и ON суть векторы соотвѣтствующіе комплекснымъ числамъ z и z'.

Отложимъ па оси x векторъравный 1 и построимъ затѣмъ треугольникъ подобный треугольнику $OM1$ взявъ за сторону его соотвѣтствующую сторонѣ $O1$ векторъ ON. Тогда сторона этого треугольника OP, соотвѣтствующая вектору OM въ треугольникъ $MO1$, будеть векторъ, соотвѣтствующій произведенію комплексныхъ чиселъ z и z'. Дѣйствительно при подобіи треугольниковъ $OM1$ и ONP имѣемъ:

$$OP: ON = OM: 1 \text{ т. е. } OP = rr'$$

$$<PO1 = <PON + <NO1 = \varphi = \varphi'.$$

Можно вкратцѣ формулировать данное геометрическое построеніе слѣдующ. образомъ: *векторъ OP, соотвѣтствующій произведенію комплексныхъ чиселъ z и z получается изъ вектора ON, соотвѣтствующаго множителю z', такъ какъ векторъ соотвѣтствующій множителю z получается изъ вектора* 01 (т. е умножая длину вектора въ отношеніи $1 : r$ и вращая его въ положительномъ направленіи на уголъ φ).

Переходимъ теперь къ *дѣленію*. Предполагая, что частное отъ дѣленія двухъ комплексныхъ чиселъ $z = (Cos\varphi + iSin\varphi)$ и $Z' = r'$ $(Cos\varphi' + iSin\varphi')$ можетъ быть представлено въ тригонометрической формѣ

$$\frac{r}{r'} \frac{(Cos\varphi + i\ Sin\varphi)}{(Cos\varphi' + i\ Sin\varphi')} = \delta\ (Cos\varphi + i\ Sin\varphi).$$

имѣемъ для опредѣленія частнаго равенства.

$$r\,(Cos\varphi+i\ Sin\varphi)=\rho\,(Cos\psi+iSin\psi).\ r'\,(Cos\varphi'+i\ Sin\varphi')$$
$$=\rho r'\,(Cos\,(\psi+\varphi')+i\ Sin\,(\psi+\varphi),$$

Откуда

$$\rho=\frac{r'}{r}$$

$$\varphi=\psi+\varphi'+2k\pi \text{ т. е. } \psi=\varphi-\varphi'$$

(слагаемое $2k\pi$ можетъ быть отброшено безъ измѣненія частнаго) Такимъ образомъ существуетъ всегда *одно* и только *одно* вполнѣ опредѣленное комплексное число, рѣшающее задачу дѣленія и находимое въ тригонометрической формѣ, на основаніи слѣдующей теоремы: *частное отъ дѣленія двухъ комплексныхъ чиселъ есть комплексное число, модуль котораго есть частное модулей дѣлимаго и дѣлителя, а аргументъ— разность ихъ аргументовъ.*

§ 35. Возвышеніе въ степень и извлеченіе корня. Рѣшеніе уравненія $x^n=0$.

Полагая въ обобщенной формулѣ умноженія, данной въ предъидущемъ параграфѣ,

$$r=r'=r''=\ \ldots.$$
$$\varphi=\varphi'=\varphi''=\ \ldots.$$

мы получаемъ для возвышенія въ степень комплекснаго числа знаменитую формулу Муавра

$$[r\,(Cos\varphi+i\ Sin\varphi)]^n=r^n\,(Cos\ n\varphi+i\ Sin\ n\varphi).$$

Изъ многихъ важныхъ приложеній этой изящной формулы отмѣтимъ приложеніе ея къ выводу формулъ дающихъ выраженія $Cos\ n\varphi$ и $Sin\ n\varphi$ въ видѣ полиномовъ расположенныхъ по степенямъ $Cos\varphi$ и $Sin\varphi$. Для полученія этихъ формулъ положимъ въ общей формулѣ $r=1$ и примѣнимъ формулу бинома Ньютона. На основаніи вышеприведенныхъ соображеній (см. стр. 177) примѣненіе этой формулы, какъ и всякой формулы алгебры, къ комплекснымъ числамъ вполнѣ законно. Приравнивая затѣмъ порознь вещественныя части и коффиціенты при $\sqrt{-1}$ получаемъ.

$$Cos\, n\varphi = Cos^n\varphi - \frac{n\,(n-1)}{1.2}\, Cos^{n-2}\varphi.\; Sin^2\varphi + \ldots.$$

$$Sin\, n\varphi = Cos^{n-1}\varphi.\; Sin\varphi - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\, Cos^{n-3}\varphi.\; Sin^3\varphi. + \ldots$$

Переходимъ къ операціи извлеченія корня. Предполагая, что корень m—ой степени изъ комплекснаго числа $r\,(Cos\,\varphi + iSin\varphi)$ выражается въ тригонометрической формѣ и полагая его равнымъ $\varrho\ (Cos\,\theta + i\,Sin\theta)$ мы будемъ имѣть для опредѣленія ϱ и θ равенство

$$\sqrt[m]{r\,(Cos\,\varphi + i\,Sin\,\varphi)} = \varrho\ (Cos\,\theta + i\,Sin\theta)$$

т. е. $r\,(Cos\,\varphi + Sin\varphi) = \varrho^m\,(Cos\,m\theta + iSin\,m\theta)$

Откуда

$r = \varrho^m,\ m\theta = \varphi + 2k\pi.$

Такъ какъ r есть величина положительная, то изъ ученія о несоизмѣримыхъ чиселъ извѣстно, что можно всегда найдти сѣченіе области раціональныхъ чиселъ, опредѣляющее ариѳметическую величину корня m-ой степени изъ r; можно выразить эту ариѳметическую величину корня посредствомъ раціональнаго числа со сколь угодно большей степенью приближенія. Мы будемъ, слѣдуя Коши, обозначать ариѳметическую величину корня знакомъ

$$\left(\left(\sqrt[m]{r}\right)\right).$$

Что касается θ. то оно выражается формулою

$$\theta = \frac{\varphi + 2\kappa\pi}{m}.$$

Поэтому

$$\sqrt[m]{r\,(Cos\varphi + i\ Sin\varphi)} = \left(\left(\sqrt[m]{r}\right)\right)\left(Cos\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{m} + iSin\frac{\varphi + 2k\pi}{m}\right) \qquad (A)$$

Придавая κ, какъ мы это имѣемъ право, всѣ значенія принадлежащія къ ряду цѣлыхъ чиселъ, какъ положительныхъ такъ и отрицательныхъ, получаемъ повидимому во второй части формулы безконечное множество различныхъ комплексныхъ чиселъ. Припоминая однако, что $Cos\ \varphi$ и $Sin\ \varphi$ имѣютъ періодъ равный 2π, легко усматриваемъ, что два значенія k : κ и κ', если они сравнимы между собою по по модулю m, дадутъ одно и тоже комплексное число. Число различныхъ значеній, принимаемыхъ второю частью, равно поэтому числу классовъ, на которыя распредѣляются всѣ цѣлыя числа по модулю m т. е. равно числу m. Чтобы получить всѣ эти различныя значенія нужно вмѣсто k поставить представителей этихъ классовъ напр. 0, 1, 2, . . m—1.

Итакъ формула (A) выражаетъ собою слѣдующую теорему.

Каждое комплексное число имѣетъ m корней m—ой степени и каждый изъ этихъ корней есть комплексное число. Иначе *уравненіе x^m—A=0 имѣетъ при всякомъ комплексномъ корнѣ A m корней.*

Остановимся подробнѣе на тѣхъ частныхъ случаяхъ, когда комплексное число $r\ (Cos\ \varphi + i\,Sin\ \varphi)$ обращается въ вещественное число, положительное или отрицательное.

Если $r\ (Cos\varphi + i\ Sin\varphi)$ равно положительному числу $+A$, то $r=A$, $\varphi=o$, и общая формула извлеченія корня (A) даетъ

$$\sqrt[m]{A} = \left(\left(\sqrt[m]{A}\right)\right)\left(Cos\,\frac{2\kappa\pi}{m} + i\,Sin\,\frac{2k\pi}{m}\right). \quad (A_1)$$

Вторая часть, какъ и въ общемъ случаѣ, имѣетъ m различныхъ значеній. Одно изъ нихъ, получающееся, полагая $k=o$, совпадаетъ съ ариѳметической величиною корня $\left(\left(\sqrt[m]{A}\right)\right)$. Придавая далѣе κ значенія κ' и $n-\kappa'$ получаемъ два комплексныя сопряженныя числа:

$$\left(\left(\sqrt[m]{A}\right)\right)\left(Cos\,\frac{2\kappa'\pi}{m} + i\,Sin\,\frac{2\kappa'\pi}{m}\right) \text{ и}$$

$$\left(\left(\sqrt[m]{A}\right)\right)\left(Cos\frac{2\kappa'\pi}{m}-i\,\mathrm{Sin}\frac{2\kappa'\pi}{m}\right).$$

Если m есть число четное, то значенія κ' и $n-\kappa'$ совпадаютъ при $\kappa'=\frac{m}{2}$.

Въ этомъ случаѣ комплексное число обращается въ вещественное— $\left(\left(\sqrt[m]{A}\right)\right)$.

Найденные результаты могутъ быть формулированы въ слѣдующей теоремѣ:

Корень m-ой степени изъ положительнаго числа имѣетъ одно вещественное (положительное) значеніе, если m есть нечетное число, и два равныхъ по численной величинѣ, но противоположныхъ по знаку, если m есть число четное. Прочіе комплексные корни распредѣляются въ пары, состоящія изъ сопряженныхъ комплексныхъ значеній.

Въ томъ случаѣ, когда комплексное число $r\,(Cos\varphi+iSin\varphi)$ равняется отрицательному числу—A, модуль $r=A$, аргументъ $\varphi=\pi$. Общая формула извлеченія корня (A) даетъ тогда

$$\sqrt[m]{-A}=\left(\left(\sqrt[m]{A}\right)\right)\quad Cos\left(\frac{\pi+2\kappa\pi}{m}\right)+iSin\left(\frac{\pi+2\kappa\pi}{m}\right)$$

$$\left(\kappa=0,\,1,\,2,\,.\,.\,m-1\right)\quad\left(A_2\right)$$

Если m есть число нечетное, то $k=\frac{m-1}{2}$ есть число цѣлое и, придавая это значеніе числу k, мы получаемъ во второй части вещественное число — $\left(\left(\sqrt[m]{A}\right)\right)$. Прочіе комплексные корни распредѣляются въ пары, состоящія изъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ. Въ томъ случаѣ, когда m есть число четное, вещественнаго значенія корня получиться не можетъ и всѣ комплексные корни распредѣляются въ пары, состоящія изъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ. Итакъ, *корень m-ой степени изъ отрицательнаго числа имѣетъ только въ томъ случаѣ вещественное (отрицательное) значеніе когда m есть число нечетное. При всякомъ m комплексные корни распредѣляются въ пары, состоящія изъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ.*

Возвращаясь къ формулѣ (A_1), положимъ въ ней $A=1$. Имѣемъ

$$\sqrt[n]{1} = Cos\ \frac{2\kappa\pi}{m} + i\ Sin\ \frac{2\kappa\pi}{m}\ \left(\kappa=0,\ 1,\ .\ .\ .\ m-1\right),$$

—общее выраженіе для m корней m-ой степени изъ 1. Сопоставляя эту формулу съ формулою (A_1) видимъ, что всѣ корни изъ вещественнаго положительнаго числа A получаются, умножая ариѳметическую величину этого корня на корни изъ единицы. Этотъ результатъ придаетъ особенное значеніе корнямъ изъ единицы или иначе корнямъ уравненія $x^n-1=0$, и какъ это обстоятельство, такъ и замѣчательная аналогія этого вопроса съ вопросомъ о сравненіи вида $x^n\equiv 1$ (Модp.), разсмотрѣнномъ нами въ 1-мъ выпускѣ заставляетъ насъ нѣсколько остановиться на вопросѣ о рѣшеніи уравненія $x^n-1=0$.

Основною теоремою въ этой теоріи можно считать слѣдующую *теорему* (аналогичная теорема для сравненій находится въ 1-мъ, вып. 3-е изданіе, стр. 102): *Если нѣкоторое комплексное число удовлетворяетъ одновременно уравненіямъ*

(1) $x^m=1$ и $x^n=1$, *то оно удовлетворяетъ и уравненію*

$x^\delta=1$, *гдѣ δ есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ m и n.*

Доказ. Найдемъ два цѣлыхъ положительныхъ, числа t и u, удовлетворяющія равенству $mt-nu=\delta$ (тамъ-же стр. 102 доказывается возможность найти такія два числа). Если α удовлетворяетъ уравненіямъ (1), то

$$\alpha^{mt}=1,\ \alpha^{nu}=1;\ \text{отсюда}$$

$\alpha^{nu}(\alpha^{\delta}-1)=0$. Такъ какъ α не равно 0,

то $\alpha^{\delta}=1$. *ч. и т. д.*

Какъ слѣдствіе этой теоремы вытекаетъ, что всякій корень уравненія $x^n-1=0$ есть корень одного изъ уравненій $x^d-1=0$, гдѣ d есть одинъ изъ дѣлителей числа n (включая конечно и 1 и n). Дѣйствительно, всякій корень уравненія $x^n-1=0$ или не удовлетворяетъ ни одному двучленному уравненію низшей степени или удовлетворяетъ уравненію $x^m-1=0$, гдѣ $m < n$. Но въ такомъ случаѣ онъ будетъ удовлетворять и уравненію $x^{\delta}-1=0$, гдѣ δ есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ m и n и слѣдовательно непремѣнно дѣлитель n.

Такъ-какъ абсолютно—простое число p имѣетъ дѣлителями только p и 1, то всякій корень уравненія $x^p-1=0$, отличный отъ 1, не удовлетворяетъ ни одному двучленному уравненію низшей степени.

Въ случаѣ-же n сложнаго корни уравненія $x^n-1=0$ распадаются на группы смотря по тому, какому изъ уравненій $x^d-1=0$ они удовлетворяютъ. Корень, удовлетворяющій уравненію $x^d-1=0$ и не удовлетворяющій ни одному двучленному уравненію низшей степени, называется *принадлежащимъ къ числу d*. Корни, принадлежащіе къ числу n, *т. е.* удовлетворяющіе уравненію $x^n-1=0$ и не удовлетворяющіе ни одному уравненію низшей степени, называются первообразными корнями уравненія $x^n-1=0$ или первообразными корнями n-ой степени изъ единицы. Такъ, напримѣръ, для уравненія $x^8-1=0$ первообразными корнями будутъ тѣ корни этого уравненія, которые не удовлетворяютъ въ то-же самое время ни одному изъ уравненій: $x^4-1=0$, $x^2-1=0$, $x-1=0$. Въ случаѣ абсолютно простого показателя p всѣ корни уравненія $x^p-1=0$, за исключеніемъ единицы, суть *первообразные корни*.

Изъ опредѣленія первообразнаго корня уравненія $x^m-1=0$ слѣдуетъ, что, возвышая его послѣдовательно въ степени 1, 2, 3, . . . n, мы получаемъ всѣ различные корни этого уравненія. Дѣйствительно если-бы $\alpha^k=\alpha^l$, (k, $l<n$ то $\alpha^{k-l}=1$, что невозможно въ томъ случаѣ, если α есть первообразный корень. Изъ этого-же опредѣленія слѣдуетъ, что если $\alpha^k=\alpha^l$ (при k и l произвольно большихъ), то непремѣнно $k\equiv l$ (мод. n). Для корней, принадлежащихъ къ показателю s имѣемъ $k\equiv l$ (мод. s) и въ частномъ случаѣ, если i—ая степень такого корня равна 1, то i цѣликомъ дѣлится на s.

Въ частномъ случаѣ p абсолютно—простого всѣ корни уравненія $x^n-1=0$ могутъ быть расположены въ рядъ x, x^2, . . x^{p-1}, x^p. Замѣчая, что всякому i изъ ряда 1, 2, 3, . . $p-1$ можно подъискать k, при которомъ удовлетворяется сравненіе $i\equiv g^k$ (модp) (см. вып. 1 стр. 106) мы находимъ, что всѣ корни уравненія, за исключеніемъ 1 могутъ быть представлены подъ видомъ x, x^g, x^{g^2}, . . $x^{g^{n-2}}$. Это свойство корней изъ единицы въ высшей степени важно и на немъ Гауссъ основалъ свои изслѣдованія о рѣшеніи двучленнаго уравненія. Въ этомъ частномъ случаѣ если $\alpha^k=\alpha^l$, то $k\equiv l$ (модp).

Остановимся въ заключеніе на вопросахъ о числѣ первообразныхъ корней и способахъ ихъ опредѣленія.

Теорема. Если α принадлежитъ къ показателю s и k есть число взаимно-простое съ s, то x^k также принадлежитъ къ показателю s.

Что $(\alpha^k)^s=1$ очевидно, т. к. $(x^k)^s=(x^s)^k=1$; но x^k не можетъ принадлежать къ показателю s', гдѣ $s'<1$, такъ какъ въ этомъ случаѣ $x^{ks'}=1$, ks' должно дѣлиться цѣликомъ на s, чего быть не можетъ (k есть число взаимно простое, $s'<s$).

Изъ этой теоремы вытекаетъ, что къ всякому показателю s или не принадлежитъ ни одного корня, или принадлежитъ φ (s) корней [здѣсь φ (s)—числовая функція Эйлера.] Обозначимъ число корней, принадлежащихъ къ показателю s, знакомъ φ (s); тогда φ (s)=0 или φ (s).

Такъ-какъ всѣ n корней уравненія $x^n-1=0$ принадлежатъ къ одному изъ дѣлителей числа n, то $\sum\varphi(d)=n$

(1). Съ другой стороны въ вып. 1, стр. 79 было доказано замѣчательное свойство числовой функціи Эйлера, по которому $\sum \varphi(d)=n$ (2); сопоставляя равенства (1) и (2) приходимъ легко къ заключенію что $\varphi(d)$ видъ ровно $\varphi(d)$ $\varphi(b)$.

Что касается до разъисканія первообразныхъ корней, то вопросъ этотъ существуетъ только для m сложнаго такъ какъ въ случаѣ абсолютно простого числа всѣ корни, за исключеніемъ единицы, суть корни первообразные. Для разъисканія-же первообразныхъ корней уравненія $x^m-1=0$ служитъ слѣдующая *лемма*: Если p и q суть числа взаимно-простыя, α и β суть первообразные корни $x^p-1=0$, $x^q-1=0$, то $\alpha\,\beta$ есть первообразный корень уравненія $x^{pq}-1=0$. На основаніи этой леммы, доказательство которой не представляетъ затрудненій, разъисканіе первообразныхъ корней уравненія $x^m-1=0$ приводится въ случаѣ, если $m=p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ къ отъисканію одного первообразнаго корня уравненія $x^{p^\alpha}-1=0$, одного—уравненія $x^{q^\beta}-1=0$ и т. д.

§ 30. Логариѳмы комплексныхъ чиселъ.

Въ предыдущихъ параграфахъ мы послѣдовательно разсмотрѣли операціи сложенія, умноженія и возвышенія въ степень съ одной стороны, дѣленія и извлеченія корня —съ другой стороны и убѣдились въ томъ, что при данномъ опредѣленіи комплекснаго числа, какъ пары, и установленныхъ нами правилахъ сложенія и умноженія—примѣненіе всѣхъ этихъ операцій къ комплекснымъ числамъ даетъ всегда комплексное число, т. е. область K (комплексныхъ чиселъ) является замкнутою по отношенію къ вышеперечисленнымъ операціямъ.

Намъ остается еще разсмотрѣть операцію логариѳмированія и рѣшеніе алгебраическаго уравненія n—ой степени (послѣдняя операція иногда носитъ названіе *восьмой* алгебраической операціи).

Графическое изображеніе функціи a^x, данное нами въ § 27, показываетъ, что при a положительномъ (безразлично будетъ-ли оно больше или меньше 1) въ ряду вещественныхъ чиселъ нѣтъ чиселъ, которыя могли-бы быть приняты за логариѳмы отрицательныхъ чиселъ.

Вопросъ объ логариѳмахъ отрицательныхъ чиселъ былъ предметомъ оживленныхъ споровъ между геометрами XVIII столѣтія и окончательно рѣшенъ только Эйлеромъ. Рѣшеніе это основано на данномъ Эйлеромъ опредѣленіи показательнаго выраженія a^z при комплексномъ показателѣ z.

Мы видѣли (см. § 17 и 26), какъ вмѣстѣ съ обобщеніемъ понятія о числѣ обобщалось и понятіе о степени и послѣдовательно вводились степени съ показателемъ нуль, отрицательнымъ, дробнымъ, несоизмѣримымъ. Съ введеніемъ въ анализъ области комплексныхъ чиселъ является необходимость опредѣлить значеніе символа a^z при $a>o$ для z комплекснаго и общѣе символа z^{z_1} причемъ и z и z_1 суть комплексныя числа вида $a+ib$.

Вопросъ объ опредѣленіи символа a^z при $a>o$ сводится на вопросъ объ опредѣленіи символа e^z т. к. $a^z=e^{z\log a}$,($\log a$ обозначаетъ естественный логариѳмъ числа a). Для опредѣленія-же значенія символа e^z Эйлеръ беретъ за исходный пунктъ безконечную строку, въ которую разлагается e^x для x вещественнаго:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\ 2}+\ldots+\frac{x^m}{1\ 2\ldots m}+\ldots\quad {}^{*)}$$

Для комплекснаго показателя $z=x+iy$ $e^z=e^{x+iy}$ опредѣляется какъ сумма безконечной строки.

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots+\frac{z^m}{1.2\ldots m}+\ldots$$

$$1+\frac{(x+iy)}{1.}+\frac{(x+iy)^2}{1.2.}+\ldots\frac{(x+iy)^m}{1.2\ldots m}+\ldots$$

---

*) Строка эта можетъ быть выведена изъ опредѣленія e^x какъ предѣла выраженія $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ (для $m=\infty$ (см. стр. 159).

При этомъ опредѣленіи сохраняются основныя свойства показательной функціи

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^{z+z_1} \text{ (теорема сложенія)}$$

$$(e^z)^{z_1} = e^{zz_1}.$$

Въ частномъ случаѣ для $z+iy$ имѣемъ

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{y^{2m}}{1.2 \ldots 2m} \mp \ldots\right)$$

$$+ i\left(\frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots -\right)$$

Въ теоріи тригонометрическихъ функцій $Cos\ y$ и $Sin\ y$ показывается, что функціи, опредѣляемыя строками

$$1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$\frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

и суть тригонометрическія функціи $Cos y$ и $Sin y$. Мы получаемъ такимъ образомъ знаменитое соотношеніе между показательною и тригонометрическими функціями, найденное Эйлеромъ

$$e^{iy} = Cos y + i\ Sin y. \text{ *)} \quad (A).$$

Въ силу соотношенія $e^z e^{z_1} = e^{z+z_1}$ имѣемъ и болѣе общую формулу

$$e^{x+iy} = e^x\ (Cos y + i\ Sin y) \quad (B)$$

---

*) Замѣняя y на $-y$ имѣемъ $e^{-iy} = Cos y - i\ Sin y$.

Поэтому имѣемъ равенства $Cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$, $Sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$

Отсюда $\text{tang} x = \dfrac{1}{i}\ \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}}$

Выраженія $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ имѣютъ свойства аналогичныя со свойствами тригометрическихъ функцій и носятъ названіе *гиперболическихъ* функцій: первое обзначается Coshyp x, второе Sinhyp x. Частное $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ обозначается tanghyp x.

Соотношеніе (B) даетъ возможность рѣшить не только частный вопросъ о логариѳмахъ (естественныхъ) отрицательныхъ чиселъ, но и общій вопросъ о логариѳмахъ комплексныхъ чиселъ.

Пусть дано комплексное число $A+Bi$, которое, какъ мы знаемъ, можно всегда представить подъ видомъ R (Cosφ+i Sinφ) и требуется, *если возможно*, найдти комплексное число $x+iy$ удовлетворяющее уравненію

$$e^{x+iy}=R\ (\mathrm{Cos}\varphi+i\ \mathrm{Sin}\varphi)$$

Замѣняя e^{x+iy} второю частью соотношенія (B) имѣемъ равенство

$$e^{x}\ (\mathrm{Cos}y+\mathrm{Sin}y)=R\ (\mathrm{Cos}\varphi+i\ \mathrm{Sin}\varphi)$$

Отсюда 1) $e^x=R$, 2) $y=\varphi+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ \ldots)$ уравненіе (1) всегда имѣетъ вещественное рѣшеніе—такъ называемую ариѳметическую величину естественнаго логариѳма положительнаго числа R (см. § 27). Обозначимъ его знакомъ ((log R)). Тогда имѣемъ $\log R\,(\mathrm{Cos}\varphi+i\ \mathrm{Sin}\varphi)=$ $((\log R))+i\varphi+2\,k\pi i$ (3).

Естественный логариѳмъ комплекснаго числа имѣетъ безконечное множество комплексныхъ значеній.

Въ частномъ случаѣ если мы имѣемъ положительное число R, формула (3) принимаетъ видъ (т. к. $q=0$)

$$\log R=((\log R))=2k\pi i\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\ \ldots)$$

При $k=0$ имѣемъ ариѳметическую величину логариѳма R; для другихъ значеній k получаемъ безконечное множество комплексныхъ значеній логариѳма положительнаго числа.

Въ другомъ частномъ случаѣ—отрицательнаго числа—R, формула (3) принимаетъ видъ (т. к. $\varphi=\pi$):

$$\log(-R)=((\log R))+(2k+1)\pi i\ \ (k=0,\pm1,\ \ldots)$$

Всѣ значенія логариѳма отрицательнаго числа суть комплексныя числа и число этихъ значеній безконечно велико

Перейдемъ теперь къ болѣе общему вопросу о логариѳмахъ при какомъ-бы то-ни было *комплексномъ* основаніи $a+bi$ (отличномъ отъ 1). На основаніи только-что разсмотрѣннаго частнаго случая естественныхъ логариѳмовъ можно всегда найдти комплексное число $\alpha+i\beta$, удовлетворяющее равенству

$$e^{\alpha+i\beta}=a+i\,b.$$

Поэтому, уравненіе

$$(a+i\,b)^{x+iy}=A+i\,B=R\,(\text{Cos}\varphi+\text{i}\,\text{Sin}\varphi)$$

сводится къ уравненію

$$e^{(\alpha+i\beta)\,(x+iy)}\;e^{\alpha x-\beta y+i\,(\beta x+\alpha y)}=A+i\,B=R\,(\text{Cos}\varphi+\text{i}\,\text{Sin}\varphi)$$

Отсюда

$$\alpha x-\beta y=R$$
$$\beta x+\alpha y=\varphi+2k\pi$$

Рѣшая эти уравненія относительно x и y, найдемъ всегда опредѣленныя вещественныя значенія для x и y т. к. опредѣлитель уравненій $\begin{vmatrix}\alpha, -\beta\\ \beta, +\alpha\end{vmatrix}+\alpha^2+\beta^2$

отличенъ отъ 0, если только комплексное число $\alpha+i\,\beta$ не равно нулю, т. е. $a+i\,b$ не есть 1. Конечно и въ этомъ случаѣ логариѳмъ комплекснаго числа имѣетъ безконечное множество комплексныхъ значеній.

Найденные результаты могутъ быть формулированы въ слѣдующей теоремѣ:

Теорема. Логариѳмъ комплекснаго числа при всякомъ основаніи (какъ вещественномъ, такъ и комплексномъ) есть число комплексное. Основываясь на томъ, что всякое комплексное число имѣетъ естественный логариѳмъ, легко доказать и слѣдующую теорему.

Каковы бы ни были комплексныя числа z и z_1 z^{z_1} есть всегда комплексное число.

Доказательство. Пусть $x+iy$ есть одно изъ значеній естественнаго логариѳма числа z. Тогда опредѣляемъ z^{z_1} какъ $(e^{x+iy})^{z_1}$. На основаніи общаго свойства показательной функціи $(e^z)^{z_1}=e^{zz_1}$ имѣемъ (полагая $z_1=\alpha+i\,\beta$)

$$z^{z_1}=e^{(x+iy)^{z_1}}=e^{(x+iy)\,(\alpha+i\,\beta)}=e^{\alpha x-\beta y+i\,(\beta x+\alpha y)}=$$
$$e^{\alpha x-\beta y}\Big(\text{Cos}\,(\beta x+\alpha y)+i\,\text{Sin}\,(\beta x+\alpha y)\Big)$$

Такъ-какъ число значеній естественнаго логариѳмае безконечно велико, то и число значеній выраженія z^{z_1} такж, безконечно велико.

Какъ слѣдствіе только-что доказанной теоремы видимъ что вообще выраженіе

$$z^{z_1^{z_2^{\cdot^{\cdot^{z_m}}}}}\text{, если } z_1, z_2, \ldots z_m$$

суть комплексныя числа, есть комплексное число. Отсюда какъ частный случай имѣемъ, что и результатъ операціи четвертой ступени $a^{(m)}$ при m цѣломъ положительномъ выражается комплекснымъ числомъ, если a есть комплексное число.

§ 37. Основная теорема высшей алгебры.

Переходимъ къ вопросу о рѣшеніи алгебраическихъ уравненій съ комплексными коеффиціентами. Мы видѣли въ § 35, что уравненіе $x^n - A = 0$ рѣшается съ помощью комплексныхъ чиселъ, каковы бы ни были цѣлое положительное число n и комплексное число A; при этомъ число корней равно n—степени уравненія.

Обобщеніемъ этого результата является слѣдующая теорема—основная теорема высшей алгебры.

Каково бы ни было цѣлое число n и комплексныя числа A_0, A_1, . . A_n уравненіе

$$F(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_n = 0$$

имѣетъ n комплексныхъ корней вида $a + bi$.

Теорема носитъ названіе теоремы D'Аламберта по имени знаменитаго энциклопедиста, который въ 1746 г. далъ первую попытку ея доказательства. Послѣ 1746 г. и до настоящаго времени теорема получила весьма большое число доказательствъ, основанныхъ на разнообразныхъ принципахъ.

Важнѣйшія изъ этихъ разнообразныхъ доказательствъ могутъ быть классифицированы въ слѣдующія группы:

а) доказательства, основанныя на *непрерывности*,

б) доказательства, основанныя на примѣненіи способа послѣдовательнаго приближенія, и

в) доказательства чисто алгебраическія (основанныя на тождествахъ алгебры). (*)

Оставляя болѣе подробный разборъ доказательствъ теоремы d'Аламберта до третьяго выпуска, мы отмѣтимъ въ настоящее время только наиболѣе замѣчательное и первое точное доказательство, данное Гауссомъ въ 1799 г. въ его знаменитой докторской диссертаціи и дополненное имъ пятьдесятъ лѣтъ спустя (**).

Въ предыдущихъ параграфахъ было показано, что примѣняя къ комплексному числу $x+iy$ операціи сложенія, умноженія возвышенія въ цѣлую положительную степень, мы получаемъ въ результатѣ всегда комплексное число. Поэтому если въ многочленѣ $f(z)$ положимъ $z=x+iy$, то

$$f(x+iy)=T(x,y)+i\,U(x,y).$$

Доказать существованіе комплекснаго корня уравненія $f(z)=0$ равносильно доказательству существованія пары вещественныхъ чиселъ x,y, удовлетворяющихъ совмѣстнымъ уравненіямъ $T(x,y)=0$, $U(x,y)=0$ или, иначе говоря, существованія точекъ пересѣченія кривыхъ, изображаемыхъ этими уравненіями. Гауссъ доказываетъ, что всегда можно провести кругъ настолько большого радіуса, что на немъ будутъ послѣдовательно перемежаться точки пересѣченія круга съ кривою $T=0$ и точки пересѣченія его съ кривою $U=0$ и изъ взаимнаго расположенія на кругѣ точекъ принадлежащихъ кривымъ $T=0$ и $U=0$ и изъ алгебраическаго характера этихъ кривыхъ на основаніи геометрическихъ наглядныхъ соображеній онъ выводитъ, что одна изъ вѣтвей кривой $T=0$ должна пересѣчь одну изъ вѣтвей

(*) Подробный историческій обзоръ доказательствъ далъ проф. Loria въ статьѣ К. Teorema fondamentale della teoria dalle equazioni algebriche (Rivista di matematica (Peano) 1891).

(**) Обѣ работы помѣщены въ третьемъ томѣ полнаго собранія сочиненій Гаусса.

кривой $U=0$. Вопросъ, какъ говоритъ Гауссъ, относится къ той части общаго абстрактнаго ученія о величинахъ, предметъ которой составляютъ континуумы т. е. комбинаціи величинъ, связанныхъ условіемъ непрерывности; онъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ только частный случай общей теоріи характеристикъ системъ функцій, развитой Кронекеромъ (*).

Теорема Д'Аламберта можетъ быть формулирована также въ слѣдующемъ видѣ:

Полиномъ $f(z)$ можетъ быть представленъ подъ видомъ произведенія и линейныхъ множителей $z-a_i$.

Въ частномъ случаѣ, когда коеффиціенты полинома суть числа вещественныя, полиномъ разлагается на множители вида $z-a$ и z^2+pz+q (a, p, q,—суть числа вещественныя)

Тожество $f(z)=(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)$ показываетъ, что $z=a_i$ обращаетъ вторую, а слѣдовательно и первую часть въ нуль т. е. что a_i есть корень уравненія $f(z)=0$. Итакъ a_1, a_2, . . a_n суть корни уравненія $f(z)=0$. Эти числа суть вмѣстѣ и единственные корни (вещественные или комплексные) уравненія, т. к., пока мы разсматриваемъ числа вещественныя или комплексныя, *произведеніе обращается въ нуль только въ томъ случаѣ если одинъ изъ его множителей равенъ нулю.* (**).

(*) Теорія характеристикъ цѣлыхъ многочленовъ $f(x)$ и $g(x)$ будетъ подробно изложена въ третьемъ выпускѣ.

См. проф. А. Васильевъ. Теорія отдѣленія корней системъ алгебраическихъ уравненій. Казань. 1884.

(**) Нетрудно провѣрить справедливость этого положенія послѣдовательно для паръ 1-ой, 2-ой и 3-ей степени т. е чиселъ отрицательныхъ, дробныхъ и комплексныхъ. Ограничимся для простоты двумя множителями.

Въ случаѣ паръ 1-ой степени произведеніе паръ (a,b) $(c\,d)$ равно парѣ $(ac+bd,\ ab+bc)$. Если пара 1-ой степени равна нулю, то первый, второй члены ея равны. Поэтому если произведеніе равно нулю, то $ac+db=ad+bc$ или $a(c-d)=b(c-d)$. Отсюда или $c-d$ отлично отъ нуля и тогда $a=b$ или-же $c-d$ равно нулю, т. е. $c=d$. Тотъ или другой изъ множителей равенъ нулю.

Въ случаѣ пары 2-ой степени $[a,b]$ $[c,d]=[ac,bd]$; $[ac,bd]=0$ если $ac=0$, т. е. или $a=0$ или $c=0$ (a и c суть числа цѣлыя, а тогда положеніе

Теерема D'Аламберта даетъ примѣръ того обобщающаго значенія, которое имѣетъ введеніе комплексныхъ чиселъ въ теорію функцій. Уравненіе *седьмой* степени съ вещественными коэффиціентами можетъ имѣть 1, 3, 5, 7, вещественныхъ корней. Разсматривая и комплексные корни, мы имѣемъ теорему, по которой число корней всегда совпадаетъ съ степенью уравненія, и только разсматривая эти корни мы можемъ установить тѣ важныя соотношенія между коэффиціентами и корнями уравненія, которыя носятъ имя Жирара. „Наука", говоритъ Гауссъ въ своемъ знаменитомъ письмѣ къ Бесселю отъ 18 дек. 1811, въ которомъ онъ задолго до Коши далъ основанія новѣйшей теоріи функцій отъ комплексныхъ чиселъ, „можетъ только потерять въ порядкѣ и закругленности отъ оттѣсненія на задній планъ фиктивныхъ (fingirte) чиселъ и принуждена будетъ въ такомъ случаѣ на каждомъ шагу придавать общимъ истинамъ не нужныя ограниченія".

Въ § 36 мы видѣли примѣръ, указывающій на иное важное значеніе комплексныхъ чиселъ—сближеніе, которое они устанавливаютъ между разнородными, повидимому, функціями. Связь между тригонометрическими и показательными функціями, установленная Эйлеромъ, ведетъ къ открытію новыхъ свойствъ и тѣхъ и другихъ (періодичность показа-

---

несомнѣнно) и слѣдовательно по свойствамъ паръ 2-ой степени или $[a,b]=0$ или $[c,d]=0$.

Наконецъ въ случаѣ пары 3-й степени $\{a,b\}\ \{c,d\} \lessgtr \{ac-bd,\ ad+bc\}$ Пара равна нулю, если оба члена равны нулю. Поэтому если произведеніе паръ $\{a,b\}$ и $\{c,d\}$ равно нулю, то $ac-bd=0$, $ad+bc=0$. Разсматриваемъ эти уравненія, какъ служащія къ опредѣленію c и d; если c и d не равны нулю, то опредѣлитель $\begin{vmatrix} a_1 & -b \\ b_1 & -a \end{vmatrix} = a^2+b^2=0$, т. е. и a и b равны 0. Обратно если a и b не равны нулю, то c и d равны нулю, т. е. положеніе и въ этомъ случаѣ доказано. Мы увидимъ далѣе (см. приложеніе § 3), что могутъ существовать иныя области чиселъ, къ которымъ это положеніе не примѣнимо. Поэтому алгебраическое уравненіе n-ой степени, имѣя только n корней въ области K, можетъ имѣть еще n^4 корней принадлежащихъ къ области кватерніоновъ.

тельной функціи). Поэтому, введеніе комплексныхъ чиселъ въ теорію функцій явилось для послѣдней исходнымъ пунктомъ плодотворнаго развитія. Гауссъ, Абель и Якоби, вводя комплексныя числа въ теорію эллиптическихъ функцій, раскрываютъ замѣчательное свойство двоякой періодичности и, пользуясь имъ, даютъ аналитическія выраженія эллиптическихъ функцій. Благодаря введенію тѣхъ-же комплексныхъ чиселъ, Коши вноситъ необычайную простоту и стройность въ теорію рядовъ, даетъ массу новыхъ опредѣленныхъ интеграловъ и выводитъ почти всѣ старые, полагаетъ основаніе точной теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій помощью рядовъ, даетъ теоремы, служащія для вычисленія мнимыхъ корней уравненія и вещественныхъ корней двухъ совокупныхъ уравненій. Съ той-же точки зрѣнія Пюизе изучаетъ алгебрическія функціи, Риманнъ и Вейерштрассъ систематизируютъ теоріи Абелевыхъ функцій, Фуксъ и Пуанкаре съ необычайнымъ успѣхомъ двигаютъ впередъ теорію интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій и дарятъ Анализу обширную область новыхъ (аутоморфныхъ) функцій. Наконецъ, Вейерштрассъ кладетъ въ основаніе теоріи функцій степенную строку и создаетъ теорію, точно обоснованную и стройно проникнутую одною идеей отъ основанія до вѣнца— теорію Абелевыхъ функцій. (*)

(*) О роли проф. Вейерштрасса въ современномъ развитіи математики смотри подробнѣе статью проф. Васильева въ собраніи протоколовъ засѣданій казанской физико-математической секціи. Томъ 4-й 1885.

ПРИЛОЖЕНІЕ

Новѣйшія обобщенія понятія о числѣ.

vera umbrae umbra
Gauss (1799).

C'etait la en Arithmétique une revolution toutvpareille à cette qu'avait faite Lobatchewski en Géométrie.

H. Poincare.

Въ возможнаго безбрежномъ Океанѣ
Для волнъ его причудливой игры
Въ непознаваемомъ туманѣ
Возможны странные міры.

Н. В.

A. Гиперкомплексныя числа.

§ 1. Историческій очеркъ теоріи гиперкомплексныхъ чиселъ.

Завершается-ли комплексными числами вида $a+b\sqrt{-1}$ обобщеніе понятія о числѣ или является необходимымъ и введеніе новыхъ областей чиселъ—таковъ вопросъ, который несомнѣнно представляется теперь уму читателя, внимательно слѣдившему за ходомъ послѣдовательнаго обобщенія понятія о числѣ. Отвѣтъ на него вытекаетъ изъ цѣли, которая преслѣдовалась этимъ послѣдовательнымъ обощеніемъ—достигнуть возможности производить обратныя операціи надъ числами такъ же неограниченно, какъ и прямыя. Цѣль эта съ введеніемъ комплексныхъ чиселъ является достигнутою.

Въ области комплексныхъ чиселъ мы имѣемъ область, не выходя изъ которой мы можемъ производить всѣ математическія операціи. Такимъ образомъ съ этой точки зрѣнія дальнѣйшее расширеніе понятія о числѣ не является необходимымъ.

Къ нему однако привели цѣли и потребности геометріи. Изображеніе съ помощью комплексныхъ чиселъ $a+b\sqrt{-1}$, чиселъ съ двумя единицами 1 и $\sqrt{-1}$, построеній надъ векторами въ плоскости естественно вело къ постановкѣ и рѣшенію подобной же проблемы относительно пространства трехъ измѣреній. Введеніе новыхъ обобщенныхъ чиселъ и употребленіе ихъ для цѣлей геометріи пространства связано съ именами Гамильтона и Грассмана, *) но еще за долго до 1844 г. въ которомъ появились въ Philosophical Magazine первые мемуары Гамильтона, посвященные теоріи кватерніоновъ и знаменитая Ausdehnungslehre Грассмана, мысль о возможности введенія чиселъ иной формы, отличныхъ отъ вещественныхъ и комплексныхъ, была высказана Гауссомъ въ его докторской диссертаціи 1799 г. Критикуя въ ней доказательство теоремы существованія корня, данное Эйлеромъ Гауссъ высказываетъ предположеніе, что уравненіе можетъ удовлетворяться не только числами вещественными и мнимыми вида $a+bi$, но и числами иной формы F, F^{1}, F^{11}, . . Но невозможно, продолжаетъ онъ, понять съ точностью, всегда требуемою въ математикѣ, какъ могутъ подобныя числа - vera umbrae umbra,—которыхъ нельзя себѣ представить даже въ идеѣ, быть складываемы или перемножаемы.

Это замѣчательное мѣсто показываетъ, что вопросъ о возможности чиселъ иной формы и подчиненныхъ инымъ законамъ сложенія и умноженія занималъ Гаусса съ юношескихъ лѣтъ. Изъ недавно опубликованныхъ (въ 6 и 8-мъ томахъ его сочиненій) бумагъ Гаусса видно, что его занималъ вопросъ о комплексныхъ числахъ въ пространствѣ, о связи ихъ съ вращеніями, что имъ самостоятельно была найдена формула умноженія кватерніоновъ Но свои мысли по этому вопросу, какъ и свои изслѣдованія по неевклидовой гео-

---

*) Этотъ вопросъ занималъ также и Арганда, который видѣлъ въ символѣ $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ новую единицу соотвѣтствующую третьей координатной оси z, если 1 и $\sqrt{-1}$ соотвѣтствуютъ осямъ x и y. Но $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ есть величина вещественная и поэтому попытка Арганда совершенно ошибочна.

метріи Гауссъ не привелъ въ систему и ограничился только обѣщаніемъ (во второмъ рефератѣ по теоріи биквадратичныхъ вычетовъ) опубликовать свои изслѣдованія по вопросу *„почему отношенія между вещами, представляющими многообразія съ большимъ числомъ измѣреній не могутъ дать еще другіе виды чиселъ, допустимые въ общей ариометикѣ“*. Въ чемъ видѣлъ Гауссъ отвѣтъ на поставленный имъ вопросъ, мы можемъ только догадываться (см. дальше § 4).

Ирландскій математикъ Вильямъ Роанъ Гамильтонъ заинтересовался теоріею комплексныхъ чиселъ подъ вліяніемъ появившагося въ 1828 г. въ Кембриджѣ трактата Уаррена (Warren) о геометрическомъ представленіи квадратнаго корня изъ отрицательнаго числа и далъ въ 1835 свою теорію комплексныхъ чиселъ, основанную на введеніи понятія о парѣ (см. § 3). Это разсмотрѣніе паръ вещественныхъ чиселъ естественно обобщалось въ разсмотрѣніе *совокупностей*, составленныхъ изъ большаго числа чиселъ, и приводило Гамильтона къ мысли видѣть въ изученіи троекъ (triplets) такое-же орудіе для изученія отношеній между векторами въ пространствѣ, какое комплексныя числа вида $a+bi$ представляютъ для изображенія соотношеній между векторами на плоскости. Рядъ попытокъ, подробно описанныхъ имъ въ предисловіи къ „Lectures“, былъ завершенъ изобрѣтеніемъ въ 1843 г. теоріи кватерніоновъ—комплексныхъ чиселъ съ четырьмя единицами (одною вещественною и тремя мнимыми) Съ 1844 г. Гамильтонъ сталъ знакомить англійскихъ математиковъ съ теоріею кватерніоновъ и ея многообразными приложеніями къ геометріи, механикѣ и математической физикѣ и наконецъ въ 1853 г. опубликовалъ большой трактатъ подъ заглавіемъ: „Lectures“. Англійскіе математики (Морганъ, Кэли, Сильвестръ, Клиффордъ и др.) много занимались дальнѣйшею разработкою теоріи кватерніоновъ. Особенный интересъ и важность представляетъ введеніе Клиффордомъ такъ называемыхъ *бикватер-*

(*). Послѣ его смерти издано другое его сочиненіе. „Elements“

ніоновъ; ихъ теорія есть аналитическое представленіе отношеній, существующихъ между парами векторовъ въ пространствѣ. Въ кинематикѣ доказывается, что всякое движеніе можно разсматривать какъ совокупность вращательнаго и поступательнаго движенія и поэтому графически оно можетъ быть изображено или парою векторовъ или нѣкоторымъ винтомъ. Изученіе винта было положено въ основу теоретической механики англійскимъ астрономомъ и математикомъ Боллемъ въ началѣ 70-хъ годовъ прошлаго столѣтія. Теорія бикватерніоновъ—комплексныхъ чиселъ вида $a+\omega b=0$—гдѣ a и b суть кватерніоны, а ω новая комплексная единица которой квадратъ равенъ 0 для евклидова пространства, -1 для пространства Лобачевскаго и $+1$ для пространства Римана—и соотвѣтствуетъ теорія винтовъ; операціямъ надъ бикватерніонами—построенія теоріи винтовъ. (*)

Создавая свою теорію протяженности, Грассманъ преслѣдовалъ цѣль гораздо болѣе общую, чѣмъ Гамильтонъ. Гамильтонъ желалъ аналитически представить отношенія между векторами, выходящими изъ одного и того-же начала. Философскому уму Грассмана было ясно, какъ онъ говоритъ въ своемъ предисловіи къ „Ausdehnungslehre“ 1844 г. что геометрія не есть никоимъ образомъ вѣтвь математики въ томъ-же смыслѣ, какъ ариѳметика или комбинаторика, „что напротивъ геометрія имѣетъ своимъ предметомъ нѣчто данное въ природѣ (именно пространство) и что поэтому должна существовать вѣтвь математики, чисто абстрактнымъ путемъ выводящая тѣ законы, которые въ геометріи являются связанными съ пространствомъ“.

Ученіе о функціяхъ, дифференціальное и интегральное исчисленіе—изучаютъ отношенія, существующія между непрерывными величинами, допускающими измѣненія только въ одномъ направленіи (интензивныя величины) и анали-

(*) По теоріи бикватерніоновъ мы имѣемъ въ русской математической литературѣ цѣнныя сочиненія проф. А. П. Котельникова.

Винтовое исчисленіе. Казань 1896 и Проэктивная теорія векторовъ. Казань 1899.

тически изображаемыми числами области В. Новая наука должна обобщить понятіе объ „алгебраически непрерывной“ или интензивной величинѣ, вводя въ него различія, соотвѣтствующія измѣненію пространства. Такимъ обобщеніемъ и является экстензивная (или комбинаторно-непрерывная величина).

Грассманъ далъ два изложенія теоріи протяженности— въ 1844 и въ 1862. Первое изложеніе было дано настолько отвлеченно въ полуфилософской, полугеометрической формѣ, что прошло совершенно незамѣченнымъ несмотря на многочисленныя приложенія къ геометріи, механикѣ, ученію о магнетизмѣ и кристаллономіи, которыми авторъ доказывалъ пользу своихъ теоретическихъ изслѣдованій. Не была выяснена въ этомъ сочиненіи и связь, существующая между протяженными величинами, допускающими измѣненія въ разныхъ направленіяхъ, и гиперкомплексными числами съ многими единицами. На новую форму теоріи протяженности (1862 г.), въ которой подъ названіемъ *экстензивной величины* въ основаніе теоріи явно положено гиперкомплексное число съ нѣсколькими единицами и предметомъ изученія являются преимущественно различные роды умноженія этихъ чиселъ повліяли вѣроятно работы Коши объ алгебраическихъ ключахъ; въ этихъ работахъ съ помощью комплексныхъ чиселъ, были найдены многіе результаты Грассмановской теоріи протяженности 1844 г. (рѣшеніе системы n линейныхъ уравненій съ n неизвѣстными). Въ этой новой формѣ своей теорія Грассмана является естественнымъ обобщеніемъ геометрической теоріи комплексныхъ чиселъ и вмѣстѣ съ теоріею кватерніоновъ Гамильтона входитъ какъ частный случай въ общее ученіе о гиперкомплексныхъ числахъ и въ общее ученіе объ операціяхъ (общее ученіе о формахъ—Грассмана), котораго принципы были даны самимъ Грассманомъ въ 1844 г. съ большею общностью. Особенное значеніе теорія Грассмана имѣетъ благодаря своимъ геометрическимъ приложеніемъ и на эту сторону было обращено особое вниманіе автора. Поэтому онъ не коснулся напр. важнаго вопроса, поставленнаго Гауссомъ. Изъ теоріи кватерніоновъ правда можно было вывести, что гиперкомплексныя числа, необходимыя для изученія отношеній въ пространствѣ не могутъ уже быть подчинены общимъ законамъ ариѳметики, но вопросъ во всей своей общности оставался не затронутымъ до работъ Вейерштрасса. Эти изслѣдованія (см. далѣе § 4) выяснили рѣзкое различіе между ариѳметикою чиселъ вещественныхъ и комплексныхъ вида $a+bi$ съ одной стороны и ариѳметикою чиселъ гиперкомплексныхъ съ тремя и большимъ числомъ единицъ. Эта послѣдняя представляетъ такія особенности (дѣлители нуля), которыя дѣлаютъ ее значительно сложнѣе ариѳметики обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ, но тѣмъ самымъ придаютъ ей особенный интересъ. Ученіе о гиперкомплексныхъ числахъ есть одинъ изъ наиболѣе разработываемыхъ въ настоящее время отдѣловъ высшей математики (*). Этому способствовало въ особенности установленіе (Пуанкаре, Шефферсъ, Студи и др.) тѣсной связи, существующей между теоріей гиперкомплексныхъ чиселъ и одною изъ самыхъ замѣчательныхъ математическихъ теорій—теоріею группъ непрерывныхъ преобразованій Софуса Ли.

§ 2. Общія основанія теоріи гиперкомплексныхъ чиселъ.

Подобно тому какъ теорія комплексныхъ чиселъ была нами обоснована на разсмотрѣніи паръ вещественныхъ чиселъ, такъ и теорія обобщенныхъ комплексныхъ или гиперкомплексныхъ чиселъ имѣетъ цѣлью ввести въ науку—новый математическій объектъ - совокупность n вещественныхъ (или комплексныхъ вида $a+b\sqrt{-1}$) чиселъ, взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ: $(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Для того, чтобы эта совокупность была предметомъ математическаго изслѣдованія необходимо прежде всего точно опредѣлить условія равенства совокупностей.

(*) Объ этомъ свидѣтельствуетъ напр. образованіе нѣсколько лѣтъ тому назадъ „Международной ассоціаціи для изученія кватерніоновъ и связанныхъ съ ними вопросовъ".

I. Равенство. *Совокупности* $(a_1\ a_2 \ldots a_n)$ *и* $(\text{ѣ}_1, \text{ѣ}_2, \ldots \text{ѣ}_n)$ *равны только въ томъ случаѣ, если сотвѣтствующіе (т. е. занимающіе одинаковое мѣсто) элементы двухъ совокупностей равны:* $a_1 = \text{ѣ}_1,\ a_2 = \text{ѣ}_2, \ldots a_n = \text{ѣ}_n$.

Это условіе есть условіе обще для всѣхъ теорій комплексныхъ чиселъ точно такъ-же, какъ общимъ для всѣхъ нихъ является слѣдующее опредѣленіе сложенія двухъ совокупностей

2. Сложеніе. *Результатомъ операціи сложенія или суммою двухъ совокупностей*

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n) \text{ и } (\text{ѣ}_1,\ \text{ѣ}_2,\ \ldots\ \text{ѣ}_n)$$

называется совокупность

$$(a_1+\text{ѣ}_1,\ a_2+\text{ѣ}_2,\ \ldots\ a_n+\text{ѣ}_n).$$

Очевидно, что опредѣляемая такимъ образомъ операція сложенія есть операція и коммутативная и ассоціативная.

Общимъ для всѣхъ теорій гиперкомплексныхъ чиселъ является также опредѣленіе умноженія совокупности на вещественное (*) число s.

3. Произведеніе совокупности $(a_1,\ a_2,\ a_n)$ *и веществена̂го числа* s *есть совокупность* $(sa_1,\ sa_2\ \ldots\ sa_n)$:

$$s\ (a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n) = (sa_1,\ sa_2,\ \ldots\ sa_n)$$

Послѣ этихъ опредѣленій всякая совокупность можетъ быть приведена къ нормальному виду. Во первыхъ, очевидно

$$a_1, a_2, \ldots a_n) = (a_1, 0, 0, \ldots 0) + (0, a_2, 0, \ldots 0) + \ldots + (0, 0, \ldots a_n)$$

Во вторыхъ

$$(a_1,\ 0,\ \ldots\ 0) = a_1\ (1,\ 0,\ \ldots\ 0)$$
$$(0_1,\ a_2,\ \ldots\ 0) = a_2\ (0,\ 1,\ \ldots\ 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(0,\ 0,\ \ldots\ a_n) = a_n\ (0,\ 0,\ \ldots\ 1)$$

Поэтому

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n) = a_1\ (1,0,\ \ldots\ 0) + a_2\ (0,1,\ \ldots\ 0) + \ldots + a_n\ (0,0,\ \ldots\ 1)$$

---

*) Въ случаѣ если a суть комплексныя числа видъ $\sqrt{-1}$ s можетъ также быть числомъ этого вида.

Обозначая совокупности (1.0, . . . 0), (0,1, . . 0), . . (0,0, . 1) послѣдовательно $e_1, e_2, .. e_n$ имѣемъ
$(a_1, a_2, . . . a_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + . . . + a_n e_n$.

Эти спеціальныя совокупности называются *единицами* и совокупность $(a_1, a_2, . . a_n)$ принимаетъ названіе гиперкомплекснаго числа съ n единицами. Вещественныя (или комплексныя) числа a_i называются *коеффиціентами* или *координатами* гиперкомплекснаго числа. Относительно операціи умноженія мы дѣлаемъ слѣдующія два допущенія, общія для всѣхъ теорій гиперкомплексныхъ чиселъ.

4. *Законъ дистрибутивности*:

$(a_1 e_1 + a_2 e_2 .... + a_n e_n)(b_1 e_1 + b_2 e_2 + . . + b_n e_n) = a_1 e_1 . b_1 e_1 + a_1 e_1 . b_2 e_2 + . . . + a_n e_n b_n e_n$

5. *Ассоціативность* въ примѣненіи къ умноженію единицъ между собою и на коеффиціенты

$$a_m e_m . b_p e_p = a_m b_m e_m e_p$$

Сопоставляя оба эти допущенія, имѣемъ

$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + . . . + a_n e_n)(b_1 e_1 + . . . + b_n e_n)$
$a_1 b_1 . e_1 e_1 + a_1 b_2 . e_1 e_2 + . . . + a_i b_k . e_i e_k + ...$

Допущенія 1—5 составляютъ основанія, общія всѣмъ теоріямъ гиперкомплексныхъ чиселъ.

Но далѣе теоріи гиперкомплексныхъ чиселъ рѣзко распадаются на два основные типа:

I. Въ теоріяхъ перваго типа произведенія единицъ $e_i e_k$ (и далѣе произведенія $e_i e_k e_e$. . и т. д въ какомъ-бы то ни было числѣ) представляютъ новыя неприводимыя единицы.

II. Въ теоріяхъ втораго типа произведенія $e_i e_k$ (а потому и $e_i e_k e_e$, . . и т. д. въ какомъ-бы-то-ни было числѣ) выражаются инейно посредствомъ единицъ е, т. е.

$$e_i e_k = \sum \gamma_{kis} e_s$$

Англійскіе и американскіе ученые (Peirce, Whitehead и др.) называютъ теоріи гиперкомплексныхъ чиселъ втораго типа—*линейными алгебрами*, теоріи перваго типа—*алгебрами высшаго порядка.*

Наиболѣе разработанный примѣръ алгебры высшаго типа представляетъ теорія протяженностей Грассмана. Какъ было указано выше (§ 1), въ основаніе ея положена Грассманомъ экстензивная величина. Экстензивная величина 1-ой ступени есть ни что иное какъ гиперкомплексное число $\alpha=a_1 e_1+a_2 e_2 + \ldots +a_n e_n$.

Произведеніе двухъ экстензивныхъ величинъ

$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$ и

$$\beta = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_n e_n$$

есть экстензивная величина второй ступени

$\sum a_i b_l e_i e_l$. Произведенія $e_i e_l$ суть *единицы второй ступени.*

Подобнымъ-же образомъ получаются произведенія трехъ и болѣе экстензивныхъ величинъ, т. е. произведенія, въ которыя входятъ единицы высшихъ ступеней. $e_i e_e e$, $e_i e_e e_k e_m$ и т. д.

Особенно подробно изучаетъ Грассманъ комбинаторное (внѣшнее) произведеніе, въ которомъ кромѣ общихъ законовъ умноженія имѣемъ *спеціальный законъ*

$$e_1 e_1 = e_2 e_2 = \ldots = e_n e_n = 0$$
$$e_i e_j = - e_j e_i.$$

Очевидно, что комбинаторное умноженіе есть операція не коммутативная. Съ помощью комбинаторнаго умноженія мы можемъ *опредѣлитель* съ n^2 элементами представить въ видѣ комбинаторнаго произведенія n комплексныхъ чиселъ съ n единицами (эти комплексныя числа носятъ названіе знакоперемѣнныхъ чиселъ Грассмана*) и этимъ ввести въ теорію опредѣлителей замѣчательную простоту.

Но особенно важны геометрическія приложенія комбинаторнаго умноженія. Вообще въ теоріи протяженности Грассмана мы имѣемъ аналитическую теорію, соотвѣтствующую *общему ученію о многообразіяхъ*, которое заключаетъ въ себѣ геометрію какъ частный случай **).

---

*) Они вполнѣ совпадаютъ съ тѣми „символическими факторами" которыя ввелъ Коши въ своей теоріи алгебраическихъ ключей.

**) Желающимъ подробно ознакомиться съ теоріей Грассмана мы особенно рекомендуемъ сочиненіе Whitehead'a: A Treatise on Universal Algebra. Vol. I. Cambr. 1898 (удостоено почетнаго отзыва на соисканіи преміи Лобачевскаго въ 1900 г.).

§ 3. Линейныя алгебры.

Линейныя алгебры суть теоріи гиперкомплексныхъ чиселъ, для которыхъ

$$(1)\ e_i\ e_k = \sum_1^n {}_s\ \gamma_{iks}\ e_s.$$

Соотвѣтствующія области гиперкомплексныхъ чиселъ носятъ носятъ названіе *замкнутыхъ*. Кромѣ всѣхъ прочихъ требованій, общихъ теоріямъ гиперкомплексныхъ чиселъ, а также условія замкнутости, выражающагося равенствомъ (1) къ замкнутымъ системамъ обыкновенно вмѣстѣ съ тѣмъ предъявляютъ слѣдующія требованія.

I. Законъ дистрибутивности.

$a.\ (b+c)=ab+ac,\ (b+c).\ a=ba+ca.$

Допуская формулы (1) мы удовлетворяемъ этому требованію, что легко провѣрить.

II. Ассоціативность умноженія.

Это требованіе удовлетворяется, если $(e_i\ e_k)\ e_s = e_i\ (e_k\ e_s)$ и если n^3 величинъ γ_{iks} удовлетворяютъ равенствамъ.

$$\sum_1^n {}_s\ \gamma_{iks}\ \gamma_{sjt} = \sum_1^n {}_s\ \gamma_{kjs}\ \gamma_{ist}\quad \ldots\ (2)$$

III. Накопецъ, III требованіе состоитъ въ томъ, чтобы была возможна операція, обратная операціи умноженія т. е. операція дѣленія; т. к. однако мы не предполагаемъ коммутативности умноженія, то числа y, удовлетворяющія уравненіямъ $yx=z$ и $xy=z$, будутъ различны между собою и поэтому возможны два рода операціи дѣленія. Требованіе возможности дѣленія совпадаетъ съ требованіемъ существованія комплекснаго числа e^o, удовлетворяющаго тожественно (для всѣхъ значеній коеффиціентовъ a_i) двумъ уравненіямъ:

(3) $e^o\,a=a$; (4) $ae^o=a$.

Такое комлексное число $e^o = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \ldots \varepsilon_n e_n$ называется модулемъ умноженія или *главною единицею.*

Подставляя, напр., въ уравненіе (3) вмѣсто e^0 и a ихъ выраженія посредствомъ единицъ, замѣняя всѣ произведенія $e_i\, e_k$ по формуламъ (1) и приравнивая затѣмъ въ обѣихъ частяхъ коэффиціенты у e_i, мы получаемъ n линейныхъ уравненій съ n неизвѣстными: ε_i.

Модуль умноженія существуетъ, если эта система можетъ быть рѣшима; но для этого необходимо чтобы не обращался въ нуль тожественно (для всѣхъ значеній a_i) опредѣлитель

$$\left|\sum_i \gamma_{iks}\; a_i\right|$$

Подобнымъ-же образомъ разсмотрѣніе уравненія (4) приводитъ къ условію, что опредѣлитель $\left|\sum^k \gamma_{iks}\; a_k\right|$ не долженъ обращаться въ нуль тожественно для всѣхъ значеній a. Разсматривая уравненія $xa=b$ и $ax=b$ и поступая съ ними подобнымъ-же образомъ, мы находимъ, что отъ тѣхъ-же опредѣлителей *) зависитъ возможность рѣшенія этихъ уравненій, что и доказываетъ совпаденіе требованія возможности дѣленій и существованія модуля. Если для нѣкоторой системы a_i опредѣлители отличны отъ нуля, то уравненія $ax=b$ и $ya=b$ имѣютъ каждое опредѣленное рѣшеніе x, y; они совпадаютъ съ модулемъ e^0, если $b=a$. Въ этомъ случаѣ уравненія $ax=0$ и $ya=0$ удовлетворятся только полагая $x=0$ и $y=0$. Напротивъ если для нѣкоторой системы a_i опредѣлители равны нулю, то существуютъ *отличныя отъ нуля* рѣшенія двухъ уравненій $ax=0$, $ya=0$.

Въ этомъ заключается рѣзкое отличіе общихъ системъ комплексныхъ чиселъ отъ системъ чиселъ вещественныхъ и комплексныхъ, не допускающихъ существованія такихъ чиселъ a, b отличныхъ отъ нуля и тѣмъ не менѣе дающихъ въ произведеніи нуль (*дѣлителей нуля*, какъ ихъ предложилъ назвать Вейерштрассъ).

---

*) Вмѣсто n линейныхъ уравненій съ неизвѣстными ε_i получаются уравненія съ x_i и y_i (коэффиціентами x и y) но съ тѣми-же самыми коэффиціентами въ первыхъ частяхъ.

Изъ предъидущихъ разсужденій легко видѣть, что всѣ свойства различныхъ системъ гиперкомплексныхъ чиселъ опредѣлятся системою n^3 постоянныхъ γ_{iks}. Соотвѣтственно этимъ постояннымъ гиперкомплексныя числа могутъ быть распредѣлены на типы. *)

Наиболѣе важный и интересный примѣръ линейной алгебры есть алгебра кватерніоновъ т. е. чиселъ α вида $a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ причемъ комплексныя единицы i, j, k подчиняются слѣдующимъ законамъ умноженія

$$\left.\begin{array}{l} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, jk = i, ki = j \\ ji = -k, ik = j, ki = -i \end{array}\right\}$$

Вещественная часть кватерніона называется его *скаляромъ* и обозначается $S\alpha$; остальные члены кватерніона—его *векторомъ* ($V\alpha$). Отсюда $\alpha = S\alpha + V\alpha$

Кватерніонъ $a_0 - a_1 i - aj_2 - a_3 k$ называется *сопряженнымъ* съ α и обозначается $K\alpha$.

Произведеніе $\alpha K\alpha$ равно $a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2$ и называется *нормою*. Корень квадратный изъ нормы называется *тензоромъ* или модулемъ и обозначается $T\alpha$. Частное отъ дѣленія α на $T\alpha$ т. е. $\frac{a_0}{T\alpha} + \frac{a_1}{T\alpha}i + \frac{a_2}{T\alpha}j + \frac{a^3}{I\alpha}k$ называется *верзоромъ* и обозначается $U\alpha$.

Предоставляемъ читателю, желающему познакомиться съ дѣйствіями надъ кватерніонами, доказать слѣдующія равенства

1. $\alpha\beta = S\alpha . S\beta + S\alpha . V\beta + S\beta . V\alpha + S(V\alpha . V\beta) + V(V\alpha . V\beta)$

2) $\beta\alpha = S\alpha . S\beta + S\alpha . V\beta + S\beta . V\alpha + S(V\alpha . V\beta) - V(V\alpha . V\beta)$.

Равенства показываютъ, что операція умноженія кватерніоновъ не коммутативна.

2. $K(\alpha\beta) = K(\beta) . K(\alpha)$.

---

*) Подробныя изслѣдованія по этому поводу принадлежатъ Штуди: Шефферсу и др. Но еще ранѣе B. Peirce въ замѣчательномъ мемуарѣ, „Linear associative algebra (Americ. journ. 4) далъ классификацію для чиселъ съ небольшимъ числомъ единицъ

Изъ этого равенства легко выводится, что

$$N\ (\alpha\beta)=N\ (\alpha).\ N\ (\beta)$$

Подъ этимъ видомъ имѣемъ знаменитую формулу Эйлера (вып. 1 стр 39).

3. Кватерніонъ $a_0+a_1i+a_2j+a_3\ k$ удовлетворяетъ уравненію 3-й степени

$$x^3-(3a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2)\ x+2a_0\ (a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)=0.$$

Алгебра кватерніоновъ во многихъ отношеніяхъ представляется сравнительно простою,такъ напр. она принадлежитъ къ числу алгебръ, не допускающихъ дѣлителей нуля отличныхъ отъ нуля. Поэтому она и есть почти единственная изъ теорій гиперкомплексныхъ чиселъ, которая имѣетъ важное значеніе въ приложеніяхъ.

§ 4. Системы съ тремя единицами. Теорема Вейерштрасса,

Разсмотримъ теперь *замкнутую* систему комплексныхъ чиселъ съ тремя единицами, допускающую *коммутативное умноженіе* единицъ. Другими словами имѣютъ мѣсто слѣдующія уравненія.

$$(1)\quad e_2^2=\alpha_1\ e_1+\alpha_2\ e_2+\alpha_3\ e_3$$

$$(2)\quad e_1e_2=e_2e_1=\beta_1e_1+\beta e+\beta_3e_3$$

$$(3)\quad e_1e_1=e_3e_1=\gamma_1e_1+\gamma_2e_2+\gamma_3e_3$$

$$(4)\quad e_2^2\qquad=\delta_1e_1+\delta_2e_2+\delta_3e_3$$

$$(5)\quad e_2e_3=e_3e_2=\varkappa_1e_1+\varkappa_2e_2+\varkappa_3e_3$$

$$(6)\quad e_3^2\qquad=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3$$

первыя три изъ этихъ уравненій могутъ быть представлены подъ видомъ

$$(\alpha_1-e_1)\,e_1+\alpha_2\,e_2+\alpha_3\,e_3=0$$

$$\beta_1e_1+(\beta_2-e_1)e_2+\beta_3e_3=0$$

$$\gamma_1\,e_1+\gamma_2\,e_2+(\gamma_3-e_1)\,e_3=0 \text{ и}$$

слѣдовательно (см. теорія опредѣлителей) только тогда удовлетворяются величинами e, отличными отъ нуля, если выполнено условіе

$$\begin{vmatrix} \alpha_1-e_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta-e_1, & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3-e_1 \end{vmatrix} - 0$$

Условіе это представляетъ уравненіе третьей степени, которое имѣетъ или три вещественныхъ корня или одинъ вещественный и два комплексныхъ вида $a+bi$. Обозначая эти корни буквами x_1, x_2, x_3 приводимъ его къ виду

$$(x_1-e_1)\,(x_2-e_1)\,(x_3-e_1)=0.$$

Подобнымъ-же образомъ изъ уравненій (2), (4) и (5 выводимъ

$$(y_1-e_2)\,(y_2-e_2)\,(y_3-e_2)=0$$

и изъ уравненій (3), (5), (6)

$$(z_1-e_3)\,(z_2-e_3)\,(z_3-e_3)=0.$$

(y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 суть, подобно x, числа вещественныя или комплексныя вида $a+b\sqrt{-1}$).

Если для разсматриваемой области чиселъ предположимъ, что произведеніе обращается въ нуль только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ его множителей обращается въ нуль, то e_1 равно или x_1 или x_2 или x_3, e_2 - или y_1 или

y_2 или y_3 и e_3—z_1 или z_2 или z_3, т. е всѣ три комплексныя единицы будутъ числами вещественными или комплексными вида $a+b\sqrt{-1}$. Такимъ образомъ при сдѣланномъ нами предположенiи замкнутая система съ тремя единицами приводится или къ области вещественныхъ или къ области обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ.

Сдѣланное нами предположенiе, какъ мы показали въ § 37*) имѣетъ мѣсто для области вещественныхъ и комплексныхъ чиселъ. Но оно нисколько не обязательно для новыхъ вводимыхъ нами областей и если мы откажемся отъ него, то можемъ получить дѣйствительно новую замкнутую и коммутативную систему съ тремя единицами. Примѣръ такой системы представляетъ система, въ которой законы умноженiя единицъ выражаются уравненiями

$$(1)\ e_1^2=e_2+e_3 \qquad (2)\ e_1e_2=e_2e_1=e_3$$

$$(4)\ e_2^2=e_3+e_1 \qquad (3)\ e_3e_1=e_1e_3=e_2$$

$$(6)\ e_3^2=e_1+e_2 \qquad (5)\ e_2e_3=e_3e_2=e_1$$

Вейерштрассъ предложилъ называть числа a, b—отличныя отъ нуля, но которыхъ произведенiе ab равно нулю—*дѣлителями нуля*. Свойство областей P, B, K,..., показанное нами*) можетъ быть формулировано такъ: *для этихъ областей чиселъ единственный дѣлитель нуля есть самъ нуль.*

Результатъ-же нами найденный въ этомъ параграфѣ можетъ быть формулированъ въ видѣ слѣдующей теоремы Вейерштрасса:

Если мы допустимъ всѣ обычные законы операцiй сложенiя и умноженiя и сверхъ того сдѣлаемъ предположенiе, что нуль есть единственный дѣлитель нуля— то комплексныхъ чиселъ съ тремя единицами не существуетъ (они сводятся къ вещественнымъ и комплекснымъ числамъ вида $a+b\sqrt{-1}$).

*) въ подсрочномъ примѣчанiи на стр. 203.

Обратно во всякой системѣ гиперкомплексныхъ чиселъ съ большимъ чѣмъ два числомъ единицъ *при коммутативномъ умноженіи* существуютъ дѣлители О. отличные отъ О.

Существованіе дѣлителей О, отличныхъ отъ О, имѣетъ своимъ слѣдствіемъ неоднозначность дѣленія. Дѣйствительно пусть $ab=O$ при чемъ a и b суть числа отличныя отъ нуля т. е. дѣлители нуля и пусть $a\ x=c$. Тогда имѣемъ также при произвольномъ множителѣ ξ $a(\alpha+\xi\ b)=c$ т. е. существуетъ безконечное множество чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію $a\ x=c$. Дѣленіе въ томъ случаѣ, если дѣлитель есть одинъ изъ дѣлителей нуля, есть операція неопредѣленная.

Фробеніусъ и Пирсъ (Peirce) дали интересное обобщеніе теоремы Вейерштрасса, объясняющее значеніе Гамильтоновскихъ кватерніоновъ: существуетъ только одна система гиперкомплексныхъ чиселъ, которая при не коммутативномъ умноженіи допускаетъ однозначность дѣленія—система кватерніоновъ съ вещественными коффиціентами. Поэтому считая недопустимымъ, чтобы алгебраическое уравненіе (напр. $a\ x+b=0$) съ отличными отъ нуля коффиціентами имѣло безконечное множество корней и не нарушало коммутативности умноженія мы должны считать допустимою въ ариѳметикѣ только область обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ. Въ этихъ изслѣдованіяхъ заключается отвѣтъ на вопросъ поставленный Гауссомъ *).

§ 5. Всеобщая алгебра.

Приведенный сжатый очеркъ важнѣйшихъ и простѣйшихъ отдѣловъ теоріи гиперкомплексныхъ чиселъ достаточенъ однако, надѣемся, для того, чтобы дать читателю понятіе о томъ переворотѣ, который введеніе гиперкомплек-

*) Въ своихъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ, опубликованныхъ въ знаменитомъ письмѣ къ Шварцу (Werke B. 2. *S*. 312) Вейерштрассъ идетъ еще далѣе, возстановляя и для областей чиселъ, допускающихъ дѣлителей нуля, аналогію съ ариѳметикою комплексныхъ чиселъ.

сныхъ чиселъ произвело въ общемъ ученіи о числѣ и который Пуанкаре въ своемъ Казанскомъ отчетѣ о работахъ Гильберта такъ справедливо сравниваетъ съ переворотомъ въ геометріи, связанномъ съ именемъ Лобачевскаго.

Дѣйствительно, въ системѣ аксіомъ, со временъ Евклида казавшейся незыблемымъ основаніемъ геометріи, Лобачевскій замѣнилъ одинъ изъ краеугольныхъ камней другимъ и получившаяся при этомъ система оказалась столь-же строго логично обоснованною, столь-же свободною отъ противорѣчій и нелѣпостей, т. е. субъективно столь-же истинною, какъ система Евклида. Вводя въ ученіе о числахъ числа гиперкомплексныя мы точно также принуждены замѣнять другимъ тотъ или другой изъ тѣхъ законовъ операцій, которые положены были въ основаніе ученія о цѣлыхъ положительныхъ чиселъ и сохранялись затѣмъ незыблемыми при всѣхъ послѣдовательныхъ обобщеніяхъ понятія о числѣ вплоть до введенія чиселъ вида $a + b \sqrt{-1}$ включительно (коммутативность умноженіи—некоммутативностью, допущеніе существованія дѣлителей нуля отличныхъ отъ нуля и т. п.).

Аналогія продолжается и далѣе: подъ вліяніемъ толчка даннаго изслѣдованіями по неевклидовой геометріи мѣняются взгляды математиковъ на сущность этой науки и ея положеніе между другими математическими науками. Геометрія разсматривается какъ часть общаго ученія о многообразіяхъ (изученіе спеціальныхъ группъ непрерывныхъ преобразованій). Подобно этому введеніе гиперкомплексныхъ чиселъ съ ихъ причудливыми законами операцій измѣняетъ нашъ взглядъ на чистую математику. Не меньшее вліяніе впрочемъ оказало на это измѣненіе и созданная Булемъ символическая логика. Въ 1854 г. появилось сочиненіе „Investigation on the laws of thought": къ обычнымъ законамъ ариѳметики присоединяются еще спеціальные законы ($a + a = a$, $a. a = a$, $a + a b = a$) и цѣпь формулъ, которая при этомъ можетъ быть получена, является точнымъ отраженіемъ всѣхъ возможныхъ комбинацій въ области ученія о понятіяхъ и предложеніяхъ *).

Алгебра чиселъ (включая сюда и незамкнутыя системы Грассмана) и алгебра логики одинаково разсматриваютъ двѣ основныя операціи—сложеніе и умноженіе Поэтому онѣ могутъ быть разсматриваемы какъ части болѣе общей науки—*всеобщей алгебры* (Грассманъ понималъ то-же самое подъ терминомъ Formenlehre), изучающей эти двѣ операціи съ самой общей точки зрѣнія.

Но, обобщая далѣе, мы можемъ мечтать и о возможности для каждой области мысли создать такой алгориѳмъ вычисленій, который можетъ облегчать разсужденія и позволяетъ замѣнить ихъ вычисленіями. Еще Лейбницъ видѣлъ сущность математики не въ ея предметѣ, но въ ея методѣ, въ дедуктивномъ (логически необходимомъ) характерѣ ея выводовъ и въ употребляемомъ ею символизмѣ. Все, что доступно точному опредѣленію, можетъ служить предметомъ такихъ-же строго вытекающихъ изъ основныхъ опредѣленій выводовъ, какіе въ обыкновенной математикѣ прилагаются къ числу и величинѣ. Должна существовать общая наука объ абстрактныхъ отношеніяхъ—всеобщая математика (Mathematica universalis). И Лейбницъ мечталъ о возможности свести всякое разсужденіе къ вычисленію (ratiocinationes in omni argumento ad calculi formam exhibere) и о томъ времени, когда спорящіе вмѣсто безполезнаго шума будутъ замѣнять споръ вычисленіемъ (ut alter alteri dicere possit: Calculemus).**)

И современный математикъ ***) видитъ точно также въ математикѣ—развитіе всѣхъ типовъ формально-необхо-

---

*) См. вып. 1 стр. 41. Кромѣ литературы, указанной тамъ, рекомендуемъ также изложеніе Whitehead въ его „Universal Algebra"—лучшемъ трактатѣ по всеобщей алгебрѣ.

**) Эти взгляды Лейбница извлечены нами изъ прекраснаго сочиненія Couturat la logique de Leibnitz.

***) Whitehead въ предисловіи къ „Universal Algebra". Въ сжатой формѣ Пирсъ говоритъ „Математика есть наука которая выводитъ необходимыя заключенія" См. также интересную статью Русселя въ International monthly 1906 годъ съ его повидимому пародоксальнымъ опредѣленіемъ математики, какъ науки, которая не знаетъ о чемъ она говоритъ и вѣрно ли то, что она говоритъ.

димаго. дедуктивнаго разсужденія и съ его точки зрѣнія „идеалъ математики—построить исчисленіе, которое бы облегчало разсужденіе въ всѣхъ тѣхъ областяхъ мысли или внѣшняго опыта, въ которыхъ послѣдовательность мысли или событій можетъ быть опредѣленно удостовѣрена или точно установлена. Такимъ образомъ всякая серьезная мысль – за исключеніемъ философіи, индуктивнаго разсужденія и дѣятельности воображенія,—должна сдѣлаться математикою, развиваемою посредствомъ вычисленія".

Б. Трансфинитныя числа.

Теорія роста функцій въ безконечности*) (см. § 26) можетъ привести къ обобщенію понятія о числѣ иного рода отличному отъ разнообразныхъ областей гиперкомплексныхъ чиселъ.

Разсматривая рядъ степеней

$x, \; x^2, \; x^3, \; . \; . \; x^n$

мы легко убѣждаемся, что онѣ представляютъ рядъ функцій, возрастающихъ при безпредѣльно возрастающемъ x все быстрѣе и быстрѣе, по мѣрѣ возрастанія показателя степени Быстрота возрастанія въ безконечности есть величина, которая можетъ быть больше или меньше; она можетъ быть и измѣряема числомъ, такъ какъ за такое измѣряющее число мы можемъ взять показатель степени.

Назовемъ вообще для функціи $f\,(x)$, возрастающей до безконечности число измѣряющее быстроту ея возрастанія *порядкомъ возрастанія функціи въ безконечности* или, для сокращенія, *моментомъ* и обозначимъ его знакомъ $\delta\,(f)$. Итакъ для степени съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ

---

*) Начала теоріи роста функцій положены Эйлеромъ въ мемуарѣ: De infinities infinitis gradibus (Acta Petrop. 1778).

Здѣсь онъ вмѣстѣ съ быстровозрастающими функціями разсматриваетъ также и функціи медленно возрастающія $\log x$, $\log_2 x$, $= \mathrm{Log}\,(\log x)$, . . Теорія роста функцій имѣетъ громадное значенія для ученія осходимости строкъ съ положительными числами и извѣстные признаки Бертрана, Моргана, В. П. Ермакова и пр. сводятся именно на разсмотрѣніе быстро и медленно возрастающихъ функцій.

$$\delta\ (x^n) = n$$

Вставляя (интерполируя) между членами ряда: x, x^2, . . x^n, . степени съ дробными и несоизмѣримыми показателями мы легко убѣждаемся, что и въ этомъ случаѣ степень тѣмъ быстрѣе возрастаетъ, чѣмъ болѣе ея показатель. Слѣдовательно по прежнему моментъ можно считать равнымъ показателю степени: $\delta\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}$, $\delta\ (x^{\alpha}) = \alpha$.

Для всего ряда степеней моменты подчиняются (какъ показатели) слѣдующимъ законамъ:

(a) $\delta(x^p \,.\, x^q) = \delta\ (x^p) + \delta\ (x^q)$. *Моментъ произведенія равенъ суммѣ моментовъ множителей.*

($б$) Если $z = y^p$, $y = x^q$, то моментъ степени z, разсматриваемой какъ функція отъ x, равняется произведенію момента z, разсматриваемой какъ степень y (y^p) на моментъ функціи y (x) Дѣйствительно $z = x^{pq}$ и потому какъ первая такъ и вторая части равны pq и равны между собою.

Распространяя понятіе о моментѣ вообще на функціи возрастающія съ возрастаніемъ перемѣнной, мы подчиняемъ моменты слѣдующимъ условіядъ:

1. *Равенство и неравенство моментовъ.* Моментъ функціи $f\ (x)$ больше, равенъ или меньше момента функціи $g\ (x)$ смотря по тому, будетъ ли имѣть

$$\lim_{x=\infty} \frac{f\ (x)}{g\ (x)} = \infty$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{f\ (x)}{g\ (x)} = A$$ (величинѣ конечной и отличной отъ нуля)

$$\lim_{x=\infty} \frac{f\ (x)}{g\ (x)} = 0$$

2. *Сложеніе моментовъ* (По аналогіи со степенями см. (a)) $\delta\ (f.\ g) = \delta\ (f) + \delta\ (g)$.

3. *Умноженіе моментовъ.* (Также по аналогіи со степенями см. (δ)) Если $z = F(y)$ $y = f(x)$, (т. е. z есть функція отъ функціи $F\ (f(x))$, $\delta\ (F\ (f)) = \delta\ (F).\ \delta\ (f)$. Моментъ функціи z, разсматриваемой какъ функція отъ функціи отъ x, есть про-

изведеніе момента z разсматриваемой какъ функція отъ y на моментъ y, разсматриваемой какъ функція отъ x. Изъ опредѣленія вытекаетъ, что порядокъ множителей долженъ быть вполнѣ опредѣленный.

Для ряда степеней съ произвольнымъ показателемъ моменты совпадаютъ съ вещественными положительными числами. Такимъ образомъ пока мы ограничиваемся разсмотрѣніемъ степеней, мы можемъ удовлетвориться при изученіи роста функціи въ безконечности областью вещественныхъ чиселъ, подчиненныхъ извѣстнымъ законамъ операціи и аксіомѣ Архимеда. Примѣнимость аксіомы Архимеда выражается въ томъ, что если даны двѣ степени x^α и x^β то всегда возможно одну изъ нихъ (возрастающую болѣе медленно) возвысить въ степень столь высокую, что получающаяся отъ возвышенія степень будетъ возрастать быстрѣе чѣмъ другая, какъ бы быстро послѣдняя ни возрастала. Но анализъ не можетъ ограничиться разсмотрѣніемъ ряда степеней (и цѣлыхъ полиномовъ, быстрота возрастанія которыхъ совпадаетъ съ быстротою возрастанія наивысшаго по показателю члена). Мы ввели въ нализъ функцію a^x и, говоря объ этой функціи, мы указали что она (при $a>o$) возрастаетъ быстрѣе чѣмъ x^m, какъ бы велико ни было m Поэтому, желая распространить на функцію a^x понятіе о моментѣ какъ о числѣ, мы должны сказать, что моментъ функціи a^x есть число, которое болѣе чѣмъ всякое число ряда $1, 2, 3, \ldots n \ldots\ldots$ Оно находится *за* рядомъ нашихъ вещественныхъ чиселъ и есть поэтому число *трансфинитное*. Обозначимъ его ω.

Разсматривая функціи $a^x x$, $a^x x^2, \ldots a^x x^n$ мы на основаніи (2 видимъ, что моменты ихъ суть $\omega+1$, $\omega+2, \ldots \omega+n$; такъ-какъ $a^x x^n = x^n a^x$, то $\omega+n=n+\omega$ т. е. операція сложенія трансфинитнаго числа съ обыкновеннымъ есть операція коммутативная.

Рядъ функцій a^{2x}, $a^{3x}, \ldots a^{nx}, \ldots$ можно разсматривать какъ y^2, $y^3, \ldots y^n$, если $y=a^x$ и поэтому на основаніи (3) моменты ихъ суть $2\,\omega$, $3\,\omega, \ldots n\,\omega$, съ другой стороны функціи a^x, $a^{x^2}, \ldots a^{x^n}, \ldots$ можно разсматривать, какъ a^y, гдѣ $y=x^2$, $x^3, \dots x^n$ и поэтому ихъ моменты суть $\omega.\ 2$ $\omega.\ 3, \dots \omega.\ n$.

Такъ-какъ функція a^{x^n} очевидно не совпадаетъ съ a^{nx}, то $\omega.\ n$ не равно $n.\ \omega$.

Умноженіе трансфинитныхъ и обыкновенныхъ чиселъ есть операція не коммутативная.

Прилагая (3) къ функціи a^{a^x} находимъ, что ея моментъ есть ω^2 и подобнымъ-же образомъ для функцій

$$a^{a^{a^x}}, \dots a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^x}}}}} \text{ —моменты суть } \omega^3, \dots, \omega^n.$$

Надъ трансфинитными числами мы можемъ производить такимъ образомъ всѣ прямыя операціи и всякому результату такихъ операцій надъ трансфинитнымъ числомъ ω—числу

$$(A)\ \kappa_0\ \omega^{\alpha}+\kappa_1\ \omega^{\alpha_1}+\kappa_2\ \omega^{\alpha_2}+\dots \text{ гдѣ } \alpha_0>\alpha_1>\alpha_2 \dots,\ 0<\kappa_i<\omega$$

соотвѣтствуетъ реальная функція (предлагаемъ читателю написать ее), имѣющая моментомъ это трансфинитное число.

Система чиселъ обыкновенныхъ и трансфинитныхъ очевидно есть система, которая не подчиняется аксіомѣ Архимеда т. к. если мы возьмемъ цѣлое число m и трансфинитное A, то никогда не можемъ умножая m на цѣлое κ получить число большее A.

Знаменитая теорема Дюбуа-Реймонда позволяетъ идти еще далѣе, указывая на то, что существуетъ функція, порядокъ возрастанія которой въ безконечности есть число, стоящее за рядомъ $\omega, \omega^2, \dots \omega^n$; это число мы должны слѣдовательно, представить символомъ ω^ω; сущестуютъ функціи, которыхъ моменты выражаются символами

ми $\omega^{\omega^{\omega}}, \dots \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}$, и отъ операціи четвертой ступени можно переходить къ операціямъ ступеней выражающихся не тольк) числами безконечнаго ряда 1, 2, . . . n, но и числами трансфинитными.

Въ трансфинитномъ нѣтъ предѣла, какъ и въ безконечномъ *).

---

*) Трансфинитныя числа были въ первый разъ введены въ науку Георгомъ Канторомъ въ теоріи множествъ; позже они были опредѣлены имъ самостоятельно, какъ „типы порядка" хорошо упорядоченныхъ множествъ. (См кромѣ мемуаровъ самого Кантора. Hessenberg. Grundbegriffe der Mengenlehre. Gottingen 1906).

Числа Кантора не совпадаютъ по своимъ свойствамъ съ числами введенными нами (по Borel'ю и преимущественно по его Leçons sur les séries à termes positifs Paris 1905) съ помощью теоріи роста функцій.

Разсмотрѣніе медленно возрастающихъ функціи $\log_i x$ (см. подстрочное примѣненіе къ стр. 224) ведетъ къ системамъ чиселъ которыя можно назвать „актуально безконечно-малыми", подобныя-же системы чиселъ были введены Веронезе. Система чиселъ Веронезе есть система неархимедова. О неархимедовыхъ системахъ и ихъ приложеніяхъ къ геометріи см. Гильбертъ. Основанія геометріи.