

НАЧАЛА
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО И ИНТЕГРАЛЬНАГО
ИСЧИСЛЕНІЙ
И ИХЪ ПРИЛОЖЕНІЯ
КЪ ОПИСАНІЮ ЯВЛЕНІЙ ПРИРОДЫ.

Генрихъ Буркхардтъ,

Орд. Профессоръ математики Цюрихскаго университета.

Разрѣшенный авторомъ переводъ сочиненія «Vorlesungen über die Elemente der Differential- u. Integralrechnung, ihre Anwendung zur Beschreibung v. Naturerscheinungen v. Prof. H. Burkhardt»

А. Я. Билибина и В. А. Крогиуса.

съ 39 ФИГУРАМИ ВЪ ТЕКСТЪ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Изданіе К. Л. Риккера.
Невскій пр., № 14.
1909.

Изданія К. Л. Риккера, въ С.-Петербургѣ.

Невскій проспектъ, 14.

Начальное руководство къ самостоятельному изученію высшей математики и механики. Сост. проф. *Н. Б. Делоне*. Съ 321 фигурой въ текстѣ, 1900, ц. 4 р. 20 к., въ изящн. перепл. 5 р.

Дифференціальное и интегральное исчисленіе съ приложеніями къ анализу и геометріи. Сост. *А. Пароменскій*. 3 испр. и дополненное статью объ интегрированіи дифференціальныхъ уравн. Съ 56 фиг. 1908 г. Ц. 4 р. 50 к. въ изящн. перепл. 5 р. 30 к.

Начальный курсъ высшаго математическаго анализа. Курсъ старшаго класса Николаевск. инж. училища, проф. *А. Саткевича*. Съ 39 фиг. 1905, ц. 3 р.

Высшая математика въ примѣненіи къ вопросамъ естествознанія проф. *А. Фурмана*. Перев. съ нѣм. подъ редак. проф. *Н. А. Гезекуса*. Съ 101 черт. 1903, ц. 3 р. 20 к., въ перепл. 3 р. 70 к.

Въ Инженерномъ журналѣ 1893 г. проф. *К. Л. Кирпичевъ* помѣстилъ отзывъ о 1 нѣмецк. изданіи этого сочиненія, изъ котораго мы приводимъ: Съ особеннымъ удовольствіемъ рекомендуемъ эту книгу начинающимъ заниматься дифференц. исчисленіемъ; она смѣло поддержитъ ту цѣль, которую поставилъ себѣ авторъ въ предисловіи: она навѣрное внушитъ любовь къ занятіямъ, возбудитъ интересъ читателя и доставитъ полное удовлетвореніе и радость въ работѣ. Пожелаемъ возможно большаго распространенія этой драгоценной книгѣ.

Бесѣды о механикѣ, заслуж. проф. *В. Л. Кирпичева*. IX+371 стр. съ 227 фигурами, 1907, ц. 2 р. 80 к. въ перепл. 3 р. 30 к.

Основанія теоретической механики. Проф. *П. О. Сомова*. Съ 276 фиг. и 700 упражненіями и задачами. 1904, ц. 5 р., въ пер. 5 р. 30 к.

Курсъ теоретической механики, для техникувъ и инженеровъ. Сост. проф. *Н. Б. Делоне*. Съ 163 фиг. 1902, ц. 3 р. 50 к. въ перепл. 4 р.

Проф. Делоне издалъ свои интересн. лекціи и за это ему можно быть вполне благодарнымъ. Его курсъ представляетъ сжатое изложеніе главныхъ основаній теорет. механики, и надо удивляться искусству автора, сумѣвшаго въ 416 стран. соединить и статику и динамику твердыхъ тѣлъ. Изложеніе курса очень ясное и вполне понятное, книга издана прекрасно. «Московскія Вѣдомости», 1903. № 29.

Лекціи по практической механикѣ, читанныя въ Варш.-Полит. Инст., орд. професс. *Н. Б. Делоне*. Съ 214 фиг. 1901, ц. 2 р., въ пер. 2 р. 50 к.

Краткій курсъ элементарной механики. Руководство, составленное по программѣ, утвержденной для испытанія на званіе техника путей сообщенія *А. Ф. Новицкимъ*. Съ 99 рис. 1905, ц. 1 р. 20 к., въ перепл. 1 р. 60 к.

Сборникъ задачъ по механикѣ съ подробными рѣшеніями. Составилъ примѣнительно къ требованіямъ при испытанія на званіе техника п. с. *А. Ф. Новицкій*. 2 пересм. и дополн. изданіе съ 40 рис., 1908, ц. 80 к.

Механика для техническихъ и ремесленныхъ училищъ, а также для самообученія, состав. *Ф. Губеръ*. Перев. съ 4-го нѣмецк., изданія. 3-е русск. изд., подъ редакц. и съ доп. проф. *М. Н. Демьянова*. Съ 522 чертеж. 1902, ц. 3 р., въ перепл. 3 р. 80 к.

Существеннымъ отличіемъ по содержанію этого изданія отъ прежнихъ является глава VII, введенная редакторомъ, гдѣ популярно и вмѣстѣ съ тѣмъ сжато изложены основы графической статики. Съ введеніемъ этой главы механика Губера приобрѣла надлежащую стройность и законченность. Богатое содержаніе книги, отвѣчающее вполне современ. состоянію техническ. познаній, популярное изложеніе при строго научной терминологіи, побуждаютъ насъ горячо рекомендовать эту книгу русскимъ техникамъ.

Механика Р. Лауэнштейна. Перев. съ 7 нѣм. обработаннаго *К. Аренсомъ* изданія *М. П. Новгородскаго*. VІІ+240 стр. Съ 218 рис. 1908, ц. 1 р. 60 к. въ пер. 2 р.

Техническая механика неизмѣняемой системы проф. *Ганса Лоренца*. Разрѣшенный авторомъ переводъ подъ редакціей *К. А. Акулова*, штатнаго преподаванія Кіевскаго Политехническаго Института. Съ 25 рис. 1909, ц. 4 р.

Статика. Курсъ Никол. Инженерн. Училища. Сост. *С. П. Бобровскій*. Часть I. Статика неизмѣняемой системы, ученіе о центрѣ тяжести, о сопротивленіяхъ движенію и о простыхъ машинахъ. Съ приложеніемъ до 100 примѣровъ и задачъ, съ 220 черт. 1904, ц. 3 р. въ перепл. 3 р. 50 к.

Статика сооружений. Начальное руководство по балочнымъ фермамъ, опорнымъ стѣнкамъ и сводамъ. Пособіе для начинающихъ изученіе строительной механики, для офицеровъ инж. войскъ, техникувъ и студентовъ *С. П. Бобровскаго*. Съ приложеніемъ 32 примѣровъ и съ 185 черт. 1906, ц. 3 р., въ пер. 3 р. 50 к.

НАЧАЛА
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО И ИНТЕГРАЛЬНАГО
И СЧИСЛЕНІЙ

И ИХЪ ПРИЛОЖЕНІЯ

†
КЪ ОПИСАНІЮ ЯВЛЕНІЙ ПРИРОДЫ.

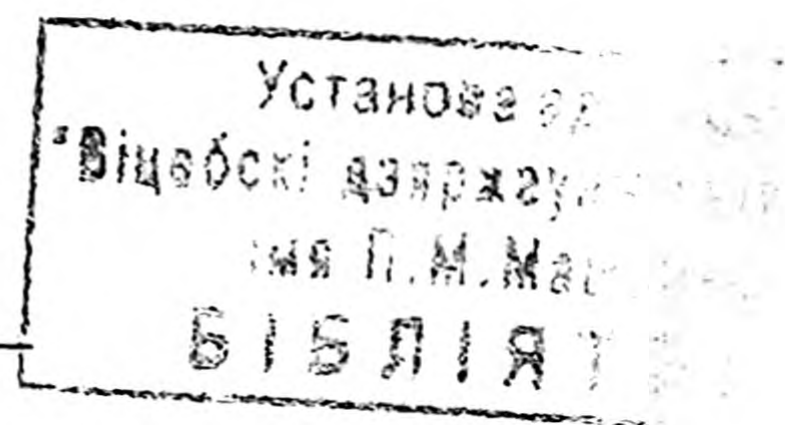
Генрихъ Буркхардтъ,

Орд. Профессоръ математики Цюрихскаго университета.

Разрѣшенный авторомъ переводъ сочиненія «Vorlesungen über die Elemente der Differential- u. Integralrechnung, ihre Anwendung zur Beschreibung v. Naturerscheinungen v. Prof. H. Burkhardt»

А. Я. Билибина и В. А. Крогуса.

съ 39 ФИГУРАМИ ВЪ ТЕКСТѢ.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Изданіе К. Л. Риккера.
Невскій пр., № 14.
1909.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПРЕДИСЛОВІЕ	СТР. VII
-----------------------	----------

Г Л А В А I.

Введеніе	1
§ 1. Современный математическій взглядъ на явленія природы	1
§ 2. Вспомогательныя средства математики для выраженія взаимной зависимости между двумя переменными величинами	3
§ 3. Сущность такъ называемаго высшаго анализа (дифференціального и интегрального исчисленій)	7
§ 4. Предварительное изслѣдованіе равномернаго движенія точки.	9
§ 5. Выясненіе основныхъ понятій дифференціального исчисленія на примѣрѣ паденія тѣла	11
§ 6. Распространеніе понятія скорости на другія явленія	18
§ 7. Графическое представленіе законовъ природы и вообще зависимостей между двумя переменными величинами	19
§ 8. Обратная задача; аналитическое изображеніе линій	23
§ 9. Объ отрицательныхъ значеніяхъ координатъ	26
§ 10. Дальнѣйшіе примѣры уравненій линій	31
§ 11. Задача проведенія касательной	34
§ 12. Взаимное отношеніе двухъ способовъ введенія въ дифференціальное исчисленіе.	38
§ 13. Задачи и обозначенія дифференціального исчисленія	39

Г Л А В А II.

Дифференцированіе рациональныхъ функцій.

§ 14. Рациональныя функціи	45
§ 15. Дифференцированіе степени съ цѣлымъ рациональнымъ показателемъ	46
§ 16. Дифференцированіе постоянной	48
§ 17. Дифференцированіе суммы и разности	49
§ 18. Дифференцированіе произведенія	51
§ 19. Дифференцированіе частнаго	52
§ 20. Линейныя дробныя функціи	53
§ 21. Дифференцированіе степени съ цѣлымъ отрицательнымъ показателемъ.	57

Г Л А В А III.

Дифференцированіе иррациональныхъ функцій.

§ 22. Обратныя функціи и ихъ дифференцированіе	59
§ 23. Дифференцированіе корня и степени съ любымъ показателемъ	61
§ 24. Дифференцированіе функцій отъ функціи	64

IV

Г Л А В А IV.

Элементы интегрального исчисления.

§ 25.	Задачи интегрального исчисления	66
§ 26.	Неопредѣленность задачъ такого рода. Постоянная интегрированія.	69
§ 27.	Формулы приведенія.	72
§ 28.	Интегрированіе цѣлыхъ рациональныхъ функцій	74
§ 29.	Опредѣленный интеграль и геометрическое значеніе его.	74
§ 30.	Приближенное вычисленіе площади	76

Г Л А В А V.

Логарифмъ и показательная функція. Интегрированіе рациональныхъ дробныхъ функцій.

§ 31.	Опредѣленіе и свойства натурального логарифма.	79
§ 32.	Опредѣленіе и свойства натуральной функцій	84
§ 33.	Интегрированіе дробныхъ рациональныхъ функцій. Простѣйшіе случаи.	87
§ 34.	Общая теорія	90
§ 35.	Примѣры	94
§ 36.	Множественные корни	97
§ 37.	Сахарная инверсія	98
§ 38.	Полныя химическія реакціи.	103
§ 39.	Неполныя химическія реакціи	106

Г Л А В А VI.

Производныя высшихъ порядковъ. Теорема о среднемъ значеніи. Формула Тейлора.

§ 40.	Производныя высшаго порядка	109
§ 41.	Теорема Ролля и теорема о среднемъ значеніи	112
§ 42.	Формула Маклорена	116
§ 43.	Формула Тейлора	121
§ 44.	Три важныхъ частныхъ случая формулы Маклорена	121
§ 45.	Дѣйствія надъ «малыми» величинами.	126
§ 46.	Приближенные способы рѣшенія уравненій	128
§ 47.	Рѣшеніе уравненій путемъ послѣдовательныхъ приближеній	133
§ 48.	Приближенные формулы дѣленія.	136
§ 49.	Обращеніе приближенныхъ формулъ.	138
§ 50.	Обобщенная теорема о среднемъ значеніи и остаточный членъ формулы Маклорена.	140
§ 51.	Примѣненія предыдущаго результата къ примѣрамъ § 44	143
§ 52.	Макіма, мініма. Простѣйшіе случаи.	144
§ 53.	Исключительные случаи	148
§ 54.	Неопредѣленные формы алгебраическихъ функцій	149
§ 55.	Неопредѣленные формы трансцендентныхъ функцій.	152

Г Л А В А VII.

Интерполированіе.

§ 56.	Интерполированіе посредствомъ цѣлой рациональной функцій.	154
§ 57.	Отдѣльное вычисленіе членовъ четнаго и нечетнаго порядковъ.	161

§ 58. Изслѣдованіе значенія интерполированія	164
§ 59. Интерполированіе посредствомъ исчисленія разностей	165
§ 60. Интерполированіе на основаніи большого числа наблюденій	173

Г Л А В А V I I I .

Дѣйствія съ безконечно-малыми величинами.

§ 61. Общія опредѣленія и теоремы	178
§ 62. Выводъ прежнихъ формулъ при помощи исчисленія безконечно-малыхъ	181
§ 63. Безконечно малыя высшихъ порядковъ	183
§ 64. Переменная независимой переменной	185

Г Л А В А I X .

Функции двухъ переменныхъ величинъ.

§ 65. Частныя производныя	188
§ 66. Производныя высшихъ порядковъ функцийъ отъ двухъ переменныхъ	191
§ 67. неявныя функции	192
§ 68. Функции отъ функцийъ двухъ переменныхъ	194

Г Л А В А X .

Тригонометрическія круговыя функции.

§ 69. Опредѣленіе тригонометрическихъ функцийъ	168
§ 70. Дифференцированіе функции синусъ	202
§ 71. Дифференцированіе остальныхъ тригонометрическихъ функцийъ	204
§ 72. Интегрированіе тригонометрическихъ функцийъ	205
§ 73. Круговыя функции	207
§ 74. Дифференцированіе круговыхъ функцийъ	210
§ 75. Обращеніе этихъ правилъ. Интегрированіе новаго класса алгебраическихъ функцийъ	211
§ 76. Еще нѣкоторыя теоремы, относящіяся къ тригонометрическимъ функциямъ	213
§ 77. Тригонометрическое интерполированіе	214
§ 78. Гармоническія колебанія	219
§ 79. Затухающія колебанія	221
§ 80. Вынужденныя колебанія	224
Дополненіе. Интерполированіе при помощи показательной функции	227

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Неужели же есть еще надобность въ учебникѣ дифференціального и интегрального исчисленія? спрашивали меня многіе, когда я говорилъ о своемъ намѣреніи опубликовать свои лекціи.

Въ отвѣтъ на это я долженъ обратить вниманіе на особенность постановки преподаванія въ здѣшнемъ (цюрихскомъ) университетѣ. Съ одной стороны, мое убѣжденіе, что нѣкоторое дополненіе къ тѣмъ математическимъ свѣдѣніямъ, которыя даетъ средняя школа, является необходимой частью подготовки къ изученію естествознанія, было встрѣчено здѣсь моими товарищами естественниками съ бѣльшимъ сочувствіемъ, чѣмъ въ другихъ мѣстахъ. Съ другой стороны, незначительное число профессоровъ небольшого университета не позволяетъ вести преподаваніе математики для естественниковъ отдѣльно отъ математиковъ и физиковъ, какъ это, конечно, не безъ пользы, дѣлается во многихъ университетахъ. Въ этомъ отношеніи въ ближайшемъ будущемъ нельзя ожидать перемѣнъ, т. к. прежде всего должны быть удовлетворены другія потребности университета и въ особенности преподаваніе естественныхъ наукъ.

Такимъ образомъ, моей задачей было поставить преподаваніе такъ, чтобы оно было какъ можно плодотворнѣе для обѣихъ категорій слушателей.

Это требовало весьма тщательнаго выбора предлагаемаго матеріала. Нельзя же ожидать, чтобы естественники или минералоги могли посвятить изученію математики больше четырехъ недѣльныхъ часовъ въ теченіе одного зимняго семестра, включая сюда одинъ часъ, необходимый для практическихъ занятій. Поэтому въ эти часы должно быть включено все то изъ дифференціального и интегрального исчисленія, что имѣетъ значеніе или интересно для естественника.

Такой порядокъ, конечно, вызываетъ необходимость дополнительныхъ лекцій для математиковъ и физиковъ; я и читалъ, дѣйствительно, въ лѣтніе семестры попеременно черезъ годъ дополнитель-

ныя лекціи по дифференціальному и интегральному исчисленію, съ традиціоннымъ въ здѣшнемъ университетѣ и требуемымъ университетскимъ уставомъ курсомъ по алгебраическому анализу.

Что касается до обработки матеріала, то я думаю, никто не будетъ оспаривать того, что въ лекціяхъ для не математиковъ слѣдуетъ отказаться отъ чисто отвлеченнаго анализа; на конкретныхъ задачахъ имъ слѣдуетъ показать, что количественное изслѣдованіе явленій природы необходимо требуетъ понятіе о перемѣнной величинѣ и о совокупныхъ измѣненіяхъ такихъ величинъ. Но какимъ образомъ избѣгать чисто отвлеченныхъ аналитическихъ вопросовъ, не навязывая въ то же время математику воззрѣній и обозначеній, отъ которыхъ ему впоследствии придется не безъ труда отвыкать? Вѣдь и намъ всѣмъ пришлось отвыкнуть и отказаться отъ многого, что мы прочли и выучили въ наше школьное время.

При такомъ изложеніи, конечно, необходимо, по крайней мѣрѣ въ тѣхъ вопросахъ, которые строятся на основаніи чисто геометрическихъ представленій, указывать, что тамъ нѣтъ строгаго аналитическаго вывода и что эти пункты требуютъ дополнительнаго изслѣдованія для математиковъ.

Но такія замѣчанія не должны встрѣчаться слишкомъ часто, потому что въ противномъ случаѣ это можетъ надобсть естествовикамъ и породить у математиковъ чувство, что они идутъ по ненадежному пути. Значитъ, вопросъ сводится къ слѣдующему: какимъ образомъ устроить, чтобы ссылки на геометрическія представленія имѣли мѣсто лишь въ немногихъ, хотя и основныхъ, вопросахъ, и чтобы въ остальныхъ частяхъ изложеніе было ведено съ указаніемъ на соотвѣтственныя геометрическія представленія, но такъ, чтобы потомъ можно было сказать математикамъ: разъ выяснены эти принципиальные основные вопросы, то строгій аналитическій выводъ отдѣльныхъ теоремъ уже не представитъ затрудненія.

Я позволю себѣ изложить послѣдовательно, какъ я стремился достигнуть этой цѣли.

Во первыхъ: если вводить понятіе о производной, какъ о предѣлѣ; то этому нужно предпослать изложеніе понятія о предѣлѣ и теоремы, сюда относящіяся; а послѣдняго нельзя сдѣлать, если не ввести предварительно ирраціональныхъ чиселъ и дѣйствій надъ ними. Последнее потому, что общій признакъ существованія предѣла не имѣетъ мѣста только для области раціональныхъ чиселъ.

Во всемъ этомъ нѣтъ надобности, если ограничиться дифферен-

цированіемъ рациональныхъ или по крайней мѣрѣ алгебраическихъ (въ старомъ смыслѣ этого слова) функцій.

Отношеніе приращенія этихъ функцій къ приращенію независимой переменнѣй всегда можно, какъ это дѣлалъ уже Фермать, посредствомъ соотвѣтственныхъ операцій преобразовать такъ, чтобы выразить это отношеніе черезъ приращеніе независимой переменнѣй; если это сдѣлано, то уже ничто не мѣшаетъ опредѣлить производную, какъ «то, что получается, если послѣ этого преобразованія положить приращеніе независимой переменнѣй равнымъ нулю».

Математическіе и естественнонаучные вопросы, возникающіе при такомъ опредѣленіи, разобраны мною въ діалогической формѣ и я надѣюсь такимъ образомъ удовлетворить запросамъ, какъ математиковъ, такъ и естественниковъ. Даже при дифференцированіи показательной и логарифмической функцій можно обойтись безъ понятія о предѣлѣ, если рассматривать логарифмъ, какъ нѣкоторый опредѣленный интегралъ, а показательную функцію, какъ функцію, обратную логарифмической.

Вѣдь не подлежитъ сомнѣнію: что естественники не могутъ освоиться съ пред. $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; но и математикамъ это дается съ трудомъ, если выводъ предлагается ex abrupto, а не въ связи съ подробнымъ выясненіемъ понятія о предѣлѣ. Но съ другой стороны, во всякомъ случаѣ, необходимо дать слушателямъ на этой ступени понятіе о площади, ограниченной нѣкоторой кривой (опредѣленномъ интегралѣ), какъ объ опредѣленной геометрической величинѣ; это первый пунктъ, гдѣ приходится указать на необходимость дальнѣйшихъ дополненій.

Вторымъ пунктомъ, гдѣ требуются дополненія для математиковъ, является теорема: «непрерывная функція не можетъ переходить отъ отрицательныхъ къ положительнымъ значеніямъ, не переходя черезъ нуль».

Мнѣ представляется невозможнымъ вообще касаться вопроса о сходимости рядовъ въ лекціяхъ, построенныхъ подобнымъ образомъ; этотъ отдѣлъ даетъ очень мало, если онъ не проведенъ строго аналитически.

Поэтому я предпочелъ вообще не произносить слова «сходимость» и рассматривать формулу Тэйлора только, какъ приближенную. Для вывода ея нужна теорема о среднемъ значеніи; чтобы просто получить ее, надо считать производную за монотонную функцію; но вѣдь

о функцияхъ съ бесконечно большимъ числомъ предѣльныхъ значеній, очевидно, говорить въ этихъ лекціяхъ нельзя.

Только на одномъ примѣрѣ, а именно, на показательной функции, я провелъ выводъ дополнительнаго члена формулы Маклорена. Въ этихъ лекціяхъ собственно и нужна только послѣдняя, а не общая формула Тэйлора; едва ли еще нужно упоминать, что вопросъ о дополнительномъ членѣ слѣдуетъ отличать отъ вопроса о сходимости. Правда, все это можно провести намѣченнымъ путемъ только въ томъ случаѣ, если совершенно не заниматься въ первыхъ отдѣлахъ дифференцированиемъ тригонометрическихъ функций.

При дифференцированіи этихъ функций необходимо придется говорить объ истинномъ значеніи выраженій, представляющихся въ видѣ $\frac{0}{0}$ для того случая, когда нельзя раскрыть этой неопредѣленности только при помощи алгебраическихъ преобразованій.

Но вообще желательно отложить тригонометрическія функции на конецъ; вѣдь онѣ и безъ того имѣютъ небольшое значеніе для всѣхъ, кому не приходится заниматься періодическими явленіями. (Положимъ, сомнительно, чтобы при теперешнемъ развитіи техники переменныхъ токовъ это можно было утверждать про кого либо). Если ихъ разсматривать только въ концѣ, то можно довольно удовлетворительно разобрать истинное значеніе $\frac{\sin x}{x}$ при $x = 0$, т. к. уже раньше обстоятельно разобраны истинныя значенія алгебраическихъ функций и такихъ функций, которыя можно выразить приблизительно черезъ алгебраическія. Опять придется указать математикамъ, что здѣсь требуются дальнѣйшія дополненія; но вѣдь цѣлесообразнымъ является, чтобы такое указаніе было по возможности ближе къ концу.

Я прибавилъ еще простѣйшія формулы тригонометр. интерполированія и, по возможности, элементарный разборъ простыхъ и затухающихъ, свободныхъ и вынужденныхъ колебаній.

Такимъ образомъ если откинуть принципиальный вопросъ о томъ, какимъ образомъ согласовать аналитическія изслѣдованія съ требованіями геометріи, то остается только три мѣста, въ которыхъ необходимо сослаться на дальнѣйшія дополненія: аналитическое понятіе о площади фигуръ; формулированіе понятія непрерывности и ближайшихъ его слѣдствій; наконецъ, связанный съ этимъ вопросъ о предѣльномъ значеніи, возникающій при дифференцированіи тригонометрическихъ функций.

Едва ли мнѣ нужно приводить основанія, почему я изложилъ обстоятельно дѣйствія надъ приближенными формулами, численное

рѣшеніе уравненій и интерполированіе; *) я въ особенности остановился на методѣ интерполированія Коши. Что касается этого метода, то я могу сослаться противъ Зеелигера **) на авторитетъ Брунса ***). Въ отдѣльной главѣ я далъ способы вычисленій съ безконечно малыми величинами вообще и въ частности съ дифференціалами. Несомнѣнно, что введеніе оперированія этими величинами съ самаго начала дифференціального исчисленія можетъ повлечь за собой нѣкоторыя неясности; но я думаю, что разъ будетъ хорошо усвоено дифференцированіе, то не слѣдуетъ упускать тѣхъ преимуществъ, которыя получаютъ при выкладкахъ съ (безконечно малыми величинами) дифференціалами.

Дѣйствительно, этимъ приходится пользоваться не только физики, но и геометру, и потому этому необходимо научить, а не вводить въ дальнѣйшихъ лекціяхъ такихъ величинъ безъ подготовки.

Функции двухъ переменныхъ я разобралъ довольно кратко; во всякомъ случаѣ, я обратилъ вниманіе на одинъ пунктъ, который часто приводилъ къ ошибкамъ въ термодинамикѣ; а именно, что частная производная только тогда вполне опредѣлена, когда не только указано, по какой переменной она взята, но также указано, какую переменную при этомъ считаютъ остающейся безъ измѣненія.

Я уже потому воздержался отъ болѣе подробныхъ естественно-научныхъ или техническихъ примѣненій, что въ нѣмецкихъ университетахъ у большинства студентовъ, которые посѣщаютъ такія лекціи, слишкомъ мало свѣдѣній изъ этихъ областей. Я не приложилъ также задачъ, потому что въ задачникахъ нѣтъ недостатка и потому, что по существу вездѣ встрѣчаются тѣ же задачи.

Но, конечно, я совѣтую всякому начинающему упражняться самостоятельно въ рѣшеніи задачъ и такимъ образомъ приобрести безусловно необходимый для пониманія навыкъ въ примѣненіи изложенныхъ правилъ.

*) Въ Парижской Академіи хранятся посмертныя рукописи Біо и Реньо, заключающія формулы и правила для интерполированія посредствомъ показательныхъ функций. Было бы очень желательно, чтобы эти рукописи были опубликованы. Я составилъ для себя способъ для такого интерполированія и привелъ его въ дополненіи.

**) Въ другомъ мѣстѣ (Jahresber. der d. Math.—V. 10. p. 819) я указалъ, почему я не считаю убѣдительнымъ примѣръ, который приводитъ Зеелигеръ и который будто бы говоритъ противъ этого метода.

***) Основанія научныхъ вычисленій (Grundlagen des wissenschaftlichen Rechnens p. 159.)

Вышеизложеннымъ способомъ я надѣялся удовлетворить по существу противорѣчивымъ требованіямъ, которыя возникаютъ въ здѣшнемъ университетѣ; но, можетъ быть, я могу надѣяться и на то, что эта книга окажется полезной еще гдѣ-нибудь, гдѣ условія преподаванія похожи на здѣшнія.

Можетъ быть, моя книга поможетъ нѣкоторымъ учителямъ составить себѣ самостоятельное мнѣніе о цѣлесообразности и возможности ввести въ среднюю школу преподаваніе началъ исчисленія безконечно-малыхъ. Однако, мнѣ не хотѣлось бы, чтобы на эту книгу смотрѣли, какъ на настоящій учебникъ для средней школы, такъ какъ все же она требуетъ извѣстной зрѣлости.

За выполненіе чертежей, составленіе оглавленія и помощь при редактированіи приношу благодарность своей женѣ.

Г. Буркхардтъ.

Цюрихъ 2 апрѣля 1907.

ГЛАВА I.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Современный математический взгляд на явления природы.

Каждое мировоззрѣніе имѣетъ прежде всего качественный характеръ.

Мы не въ состояніи измѣрить непосредственныя впечатлѣнія нашего ума; мы не можемъ даже сравнивать ихъ въ смыслѣ ихъ относительной величины; мы сознательно нашимъ умомъ не можемъ дать оцѣнки той разницы, которая имѣется, на примѣръ, между звукомъ и краской, или между двумя различными красками; а потому не можемъ и описать, въ чемъ эта разница заключается.

Самое большее, что мы въ состояніи сдѣлать, это только указать на эту разницу.

Мы приближаемся къ математическому воззрѣнію на предметъ, когда мы ограничиваемся изслѣдованіемъ однородныхъ явленій и, ставя на наши наблюденія нѣкоторыя ограниченія, мы эти явленія отличаемъ по ихъ напряженности (интенсивности). Мы говоримъ, такимъ образомъ, о большей или меньшей силѣ освѣщенія, о большемъ или меньшемъ количествѣ тепла и т. п. Но мы только тогда впервые имѣемъ возможность взяться за математическія средства, когда, изучая нѣкоторое явленіе, мы можемъ указать на то, что разница между явленіями a и b такова же, какъ между явленіями b и c ; другими словами, когда мы обладаемъ нѣкоторой скалой, по которой мы можемъ измѣрять отдѣльныя стадіи напряженій (интенсивностей) изучаемаго явленія. Въ этомъ смыслѣ цѣлый рядъ явленій природы носилъ издавна количественный характеръ, а потому подчинялся математическому трактованію.

Если же теперь говорятъ о математическомъ трактованіи задачъ естественной исторіи, то обыкновенно подъ этимъ разумѣютъ и нѣчто особенное.

Эта особенность, о которой мы говоримъ, исходитъ изъ довольно коренного различія во взглядахъ на задачи естественной исторіи, которое надо оговорить съ самаго начала: античная натурфилософія

и непосредственно изъ нея вытекающая наука средних вѣковъ задается вопросами о причинахъ и состояніи вещей. Въ ней мы находимъ отвѣты на вопросы, подобные слѣдующимъ: почему земля находится снизу, а атмосфера сверху? Почему этотъ камень синій, а тотъ зеленый? Почему данное тѣло теплое, а то холодное? Современная же наука, творцомъ которой является Галилей, занимается вопросомъ о причинахъ измѣненія вещей.

Что тѣло, разъ начавшее двигаться, продолжаетъ двигаться равномерно и прямолинейно; что синій камень сохраняетъ свой цвѣтъ; что кусокъ мягкаго намагниченнаго желѣза сохраняетъ свои магнитныя свойства и т. п.—это намъ совершенно не кажется удивительнымъ и мы совершенно не задаемся вопросами о причинахъ такихъ явленій; но зато, когда тѣло, приведенное въ движеніе, вдругъ измѣняетъ скорость или направленіе своего движенія, или, когда окрашенное въ данный цвѣтъ тѣло мѣняетъ свою краску, или когда ненамагниченное и ненаэлектризованное тѣло вдругъ становится намагниченнымъ или наэлектризованнымъ, или, наоборотъ, намагниченное или наэлектризованное тѣло вдругъ теряетъ свои магнитныя или электрическія свойства, тогда мы спрашиваемъ себя о причинѣ такого рода явленій, спрашиваемъ себя о силахъ, которыя были въ состояніи измѣнить данныя явленія.

Эту противоположность въ постановкѣ вопросовъ не слѣдуетъ, однако, какъ это склонны нѣкоторые дѣлать, понимать въ томъ смыслѣ, будто бы древніе естествоиспытатели были люди не тонкіе, которые предъявляли къ природѣ неразумные вопросы. Никакъ нельзя было рѣшить à priori, при какой постановкѣ вопросовъ будетъ достигнута наиболѣе благопріятный результатъ. Этому могла научить только неудача одного направленія и удача другого. Если мы пожелаемъ количественно или математически прослѣдить закономерную связь, которая существуетъ между измѣненіями свойствъ различныхъ тѣлъ, то мы столкнемся съ необходимостью въ наши отвлеченно мыслимыя понятія о величинѣ ввести элементъ измѣняемости. Только что разобранное различіе между древней и современной естественной исторіей переходитъ и на различіе между древней и современной математикой.

Античная геометрія и наша теперешняя школьная геометрія, которая почти вся беретъ свое начало въ античной, изучаетъ геометрическія фигуры, приписывая имъ свойства неизмѣняемости.

Такъ же поступаетъ и алгебра; правда каждая буква въ алгебрѣ можетъ принимать произвольное значеніе, но при этомъ дѣлается важная оговорка, что въ одной и той же задачѣ (вычисленіи) данная буква должна всегда обозначать одно и то же число.

Для математическаго трактованія естественно научныхъ задачъ въ томъ спеціальному смыслѣ, о которомъ мы говорили выше, и который вытекаетъ изъ кореннаго пониманія современной естественной исторіи,—этого, конечно, недостаточно.

Если мы хотимъ прослѣдить за измѣненіемъ вещей количественно, то мы должны приписать отвлеченно мыслимымъ аналитическимъ и геометрическимъ величинамъ—свойство измѣняемости.

На этотъ шагъ, который подготовлялся въ теченіе всего XVII столѣтія, со времени Галилея, рѣшились Ньютонъ и Лейбницъ, одновременно и, насколько можно о томъ судить, совершенно другъ отъ друга независимо.

Въ настоящихъ лекціяхъ мы должны слѣдовать за ними по ихъ же путямъ.

Притомъ нашей главной цѣлью будетъ изложить глубокія идеи Ньютона въ тѣхъ гибкихъ способахъ выраженій и обозначеній, которые введены Лейбницомъ и его учениками.

§ 2. Вспомогательныя средства математики для выраженія взаимной зависимости между двумя переменными величинами.

Пока мы рассматриваемъ только одну величину, мы про ея измѣненіе можемъ сказать очень мало, какъ съ отвлеченной математической точки зрѣнія, такъ и съ конкретной естественно-научной.

Самое большее, на что мы, можетъ быть, въ состояніи указать, это на то, что эта величина вообще можетъ измѣняться, и, быть можетъ, еще, что ея измѣненію положены нѣкоторые предѣлы; на примѣръ, въ томъ смыслѣ, что она, измѣняясь, можетъ получать только положительныя значенія; или, на примѣръ, подобно \sinus у нѣкотораго угла, она можетъ получать значенія не большія, чѣмъ единица.

Совсѣмъ мѣняется дѣло, когда мы изучаемъ одновременно измѣненіе двухъ (или нѣсколькихъ) величинъ.

Мы въ многочисленныхъ случаяхъ наблюдаемъ, что измѣненіе двухъ величинъ не совершается другъ отъ друга независимо, но что каждый разъ, когда одна изъ величинъ получаетъ нѣкоторое определенное значеніе, другая тоже перестаетъ быть произвольной, а также становится совершенно определенной. Такъ, на примѣръ, металлическій стержень имѣетъ при каждой определенной температурѣ совершенно определенную длину.

Соотвѣтственныя значенія температуры и длины мы можемъ свести вмѣстѣ въ нѣкоторую таблицу, причемъ мы въ одинъ столбецъ будемъ вносить наблюденныя температуры, въ другой, рядомъ стоящій,—измѣренныя длины.

Такъ напрымѣръ:

0°	1 м.
20°	1,0004 м.
40°	1,0008 м.
60°	1,0012 м.
80°	1,0016 м.
120°	1,0024 м.
200°	1,0080 м.

Мы скажемъ, что эти величины связываетъ между собой опредѣленный законъ природы.

Выраженіе этого закона мы можемъ уже видѣть въ этой таблицѣ; но такое выраженіе не удовлетворяетъ насъ ни съ теоретической, ни съ практической точекъ зрѣнія; теоретически потому, что мы изъ такой таблицы не можемъ сдѣлать никакихъ дальнѣйшихъ заключеній; практически потому, что мы не можемъ ни удержать всѣхъ таблицъ въ памяти, ни возить ихъ за собой всегда и всюду.

Мы должны поставить вопросъ: какъ бы получить выраженіе сущности тѣхъ фактовъ, которые отмѣчены въ таблицѣ, въ болѣе сжатой формѣ; однимъ словомъ, какъ можемъ мы такую взаимную зависимость между измѣненіемъ двухъ величинъ представить математически?

Во многихъ случаяхъ это удается сдѣлать при помощи самыхъ элементарныхъ алгебраическихъ дѣйствій. Простѣйшій случай тотъ, когда одна величина измѣняется постоянно въ томъ же отношеніи, какъ другая, т. е. случай, когда эти величины, какъ это обыкновенно называется, пропорціональны.

Такъ напрымѣръ, (въ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ границахъ), вызванное нагрѣваніемъ распиреніе металлическаго стержня пропорціонально повышенію температуры; такъ что повышеніе температуры на 2, 3, ... x градусовъ влечетъ за собой удлинненіе стержня, которое въ 2, 3, ... x разъ больше, чѣмъ удлинненіе, соотвѣтствующее повышенію температуры на одинъ градусъ. Если мы это послѣднее обозначимъ черезъ c или s_1 , а удлинненія стержня, соотвѣтствующія повышенію температуры на 2, 3, ... x градусовъ черезъ s_2, s_3, \dots, s_x , то мы будемъ имѣть слѣдующую таблицу:

$$\begin{aligned} s_1 &= c \\ s_2 &= 2c \\ s_3 &= 3c \\ &\vdots \\ s_x &= xc \end{aligned}$$

или лучше:

$$s_x = cx \dots \dots \dots (1)$$

Последним уравнением можно замѣнить всѣ предыдущія, т. к. въ этомъ уравненіи x можно замѣнить любымъ значеніемъ изъ ряда $1, 2 \dots x$.

Если же этотъ законъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ рассматриваемомъ случаѣ, имѣетъ смыслъ и остается правильнымъ не только для цѣлыхъ значеній x -са, но и для другихъ значеній, то мы въ последнемъ ур-ніи можемъ подъ x -сомъ разумѣть и дробныя числа; и въ этомъ случаѣ последнее уравненіе, взятое отдѣльно, будетъ болѣе полно обнимать явленіе, чѣмъ таблица всѣхъ выше написанныхъ зависимостей.

Намъ удалось, такимъ образомъ, выразить законъ природы однимъ единственнымъ уравненіемъ.

Въ этомъ уравненіи x и s суть величины переменныя, которымъ мы можемъ приписывать произвольныя значенія; что касается до величины c , то для каждаго отдѣльнаго стержня, который мы изслѣдуемъ, это есть величина вполне опредѣленная, зависящая только отъ природы стержня, но не зависящая вовсе отъ температуры. Однако измѣненіе обѣихъ величинъ x и s связаны между собою нашимъ ур-ніемъ такъ, что измѣненіе одной величины неминуемо ведетъ за собой измѣненіе другой. Такъ что значеніе одной изъ нихъ совершенно опредѣлено, если намъ извѣстно значеніе другой.

Если мы измѣримъ длину стержня, то мы тотчасъ при помощи нашей формулы можемъ опредѣлить температуру; такъ что этотъ стержень можетъ служить намъ термометромъ. Съ другой стороны, мы можемъ при помощи той же формулы опредѣлить длину стержня, если извѣстна температура.

Нѣсколько болѣе сложнымъ является второй случай: а именно, когда одна величина пропорціональна не прямо другой величинѣ, а нѣкоторой ея степени. Такъ, напримѣръ, прогибъ двухъ стержней различной длины, при одинаковой нагрузкѣ и при прочихъ равныхъ условіяхъ, пропорціоналенъ третьей степени ихъ длинъ. Это значитъ, что стержень въ два раза болѣе длинный, чѣмъ данный, прогнется по срединѣ въ 8 разъ сильнѣе перваго; а стержень тройной длины— въ 27 разъ.

Въ наши изслѣдованія мы можемъ вводить также степени съ отрицательными и дробными показателями. Такъ напримѣръ, по закону Ньютона, взаимное притяженіе двухъ матеріальныхъ точекъ пропорціонально (— 2)-й степени разстоянія между ними.

Всѣ подобные законы могутъ быть представлены въ видѣ такой формулы:

$$y = cx^n, \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ y и x обозначаютъ обѣ переменныя, связанные между собою даннымъ закономъ; c — нѣкоторую постоянную, не зависящую отъ x и y (а только отъ побочныхъ условій задачи).

Въ болѣе сложныхъ случаяхъ формула зависимости между двумя разсматриваемыми величинами не ограничивается однимъ членомъ, но выражается суммой членовъ подобнаго вида, другими словами, выраженіемъ:

$$y = ax^k + bx^l + cx^m + \dots \dots \dots (3)$$

гдѣ показатели k , l , m и коэффициенты a , b , c должны обозначать величины отъ x и y не зависящія.

Если показатели всѣ суть цѣлыя положительныя числа, то такое выраженіе называется «цѣлой рациональной функціей отъ x -са».

Надо сказать, что приведенный законъ тепловаго расширенія стержня, строго говоря, справедливъ только для довольно ограниченнаго температурнаго промежутка (интервала), причемъ въ этомъ промежуткѣ мы можемъ разность, которая получается между наблюдаемымъ и вычисленнымъ результатомъ, приписать исключительно погрѣшности наблюденія.

Если же опытъ происходитъ при болѣе высокихъ температурахъ, тогда въ формулѣ надо прибавить еще одинъ членъ—членъ со второй, а иногда еще и съ третьей степенью. Въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ величина y представляется въ видѣ такого выраженія, гдѣ x входитъ въ составъ знаменателя.

Многіе физики придерживаются того мнѣнія, что въ концѣ концовъ всѣ законы физики, въ своемъ совершенномъ видѣ, должны свестись исключительно на простыя зависимости. Другіе же придерживаются противоположнаго мнѣнія: когда одному изъ первыхъ физиковъ XIX столѣтія, Френелю, творцу математ. оптики, былъ сдѣланъ упрекъ въ томъ, что его теоретическія воззрѣнія приводятъ его къ очень сложнымъ математическимъ результатамъ, особенно въ примѣненіи къ частнымъ случаямъ, онъ отвѣтилъ: «la nature ne redoute pas les difficultes de l'analyse». (Природа не считается съ трудностями анализа).

Какъ бы то ни было, во многихъ случаяхъ еще не удалось достигнуть простыхъ выраженій для законовъ природы. Достаточно указать, на примѣръ, на формулировку закона преломленія свѣтоваго луча; наиболѣе простой формулировкой будетъ: \sin угла преломленія находится въ постоянномъ отношеніи къ \sin 'у угла паденія.

И проще его выразить нельзя.

Такимъ образомъ, символовъ алгебры для настоящаго закона недостаточно; мы пользуемся тутъ той областью математики, которая называется гоніометріей или наукой о тригонометрическихъ функціяхъ.

Другой примѣръ: траекторія брошеннаго тѣла, путь кометы, которая обѣгаетъ около солнца—это ни прямыя линіи, ни окружности и даже не приближаются къ этимъ кривымъ; значить ихъ нельзя изучить только при помощи такъ называемой элементарной геометріи, которая, кромѣ прямыхъ и окружностей, другихъ линій не разсматриваетъ.

Но и въ томъ случаѣ, когда выраженіе закона природы просто, слѣдствія изъ него бывають вовсе не просты. Такъ напримѣръ, законъ Ньютона относительнаго притяженія двухъ матеріальныхъ точекъ, какъ мы видѣли выше, очень простъ.

Даже когда, примѣняя этотъ законъ, мы хотимъ вычислить притяженіе двухъ однородныхъ шаровъ, мы еще получаемъ сравнительно простые результаты, такъ какъ весьма несложными разсужденіями можно показать, что притяженіе будетъ таково, какъ будто вся масса cadaго изъ шаровъ была сосредоточена въ центрѣ cadaго изъ нихъ, но если при изученіи взаимнаго притяженія планетъ мы захотимъ принять во вниманіе ихъ сжатіе около полюсовъ, то мы будемъ принуждены пользоваться такими сложными вспомогательными математическими средствами, которыя выходятъ за предѣлы нашего начальнаго курса.

Надо, впрочемъ, тутъ замѣтить, что доказательство того, что данная задача не можетъ быть рѣшена элементарно, не можетъ быть проведено при помощи элементарныхъ средствъ, а требуетъ примѣненія болѣе сложныхъ вспомогательныхъ методовъ.

§ 3. Сущность такъ называемаго высшаго анализа (дифференціального и интегральнаго исчисленій).

Послѣ этихъ приготовленій мы теперь въ состояніи нѣсколько намѣтить предметъ дальнѣйшихъ изслѣдованій.

Мы вернемся къ вопросамъ § 1, а именно, къ вопросамъ о силахъ, которыя вызываютъ въ тѣлахъ измѣненія. Наблюденіе показываетъ намъ, что эти силы находятся въ зависимости отъ состоянія разсматриваемой системы тѣлъ въ данный моментъ, отъ ихъ взаимнаго разстоянія другъ отъ друга, отъ ихъ электрическаго и магнитнаго состоянія и т. п. Съ другой стороны, всѣ эти состоянія, при дѣйствіи данныхъ силъ, постоянно мѣняются. При болѣе вдумчивомъ изслѣдованіи природы приходимъ къ убѣжденію, что эти наблюдаемые измѣненія тѣлъ суммируются изъ весьма большого числа измѣненій весьма малыхъ частей даннаго тѣла и что намъ приходится, при изслѣдованіи взаимодействия двухъ тѣлъ, свести его на изученіе элементарныхъ воздѣйствій другъ на друга мельчайшихъ частицъ этихъ тѣлъ.

Нѣсколько разъ упомянутый законъ притяженія Ньютона, который въ своемъ простѣйшемъ видѣ имѣетъ мѣсто для «матеріальной

точки», представляет классическій примѣръ на вышесказанное. Но и явленія въ другихъ областяхъ физики изучаются по тѣмъ же методамъ.

(Замѣтимъ тутъ, что мы совершенно можемъ тутъ обойти вопросъ о томъ, какъ происходитъ воздѣйствіе тѣлъ другъ на друга—непосредственно или на разстояніи; въ томъ и другомъ случаѣ мы можемъ стать на атомистическую точку зрѣнія).

Изъ самой сущности дѣла сразу получается два рода вопросовъ:

1) Если мы наблюдаемъ нѣкоторое явленіе и этимъ наблюденіямъ придаемъ количественный (измѣрительный) характеръ и затѣмъ хотимъ сдѣлать подробное изслѣдованіе (анализъ) этого явленія, то тотчасъ возникаютъ слѣдующіе вопросы: какъ по тѣмъ дѣйствіямъ, которыя были произведены силами въ теченіе нѣкотораго опредѣленнаго промежутка времени, сдѣлать заключеніе о дѣйствіи на тѣло силъ въ каждый отдѣльный моментъ? Какъ по тому, что происходитъ съ нашимъ тѣломъ во всей его сложности, сдѣлать заключеніе о томъ, что дѣлается съ каждой его частицей?

2) Если намъ, по нашему убѣжденію, извѣстенъ законъ элементарнаго дѣйствія нѣкоторой силы, и мы, на основаніи этого закона, желаемъ сдѣлать заключеніе о явленіи еще не наблюденномъ, желаемъ ли тѣмъ самымъ изслѣдовать справедливость нѣкотораго закона, или же найти практическое примѣненіе нашего знакомства съ общимъ закономъ, тогда возникаютъ обратные вопросы:

Какъ суммируются частичныя дѣйствія силъ въ общую равнодѣйствующую? Какъ изъ дѣйствій силъ въ данный моментъ складывается конечный результатъ дѣйствія силъ за нѣкоторый конечный промежутокъ времени?

Оба вопроса, поскольку дѣло идетъ о количественныхъ отношеніяхъ, суть вопросы математики.

Другъ по отношенію къ другу они находятся въ такомъ же противоположеніи, какъ сложеніе и вычитаніе, или возвышеніе въ степень и извлеченіе корня. Вопросы первой категоріи представляютъ предметъ дифференціального исчисленія; вопросы второй категоріи—предметъ интегральнаго исчисленія. Обѣ дисциплины, вмѣстѣ взятая, часто называются анализомъ безконечно малыхъ или (менѣе цѣлесообразно) высшимъ анализомъ.

Мы опредѣлимъ эту дисциплину, какъ ученіе о соотвѣтствующихъ другъ другу измѣненіяхъ величинъ.

Такъ какъ всѣ величины мы можемъ измѣрить, т. е. выразить ихъ въ числахъ, то все изслѣдованіе надъ взаимнымъ измѣненіемъ величинъ мы можемъ свести на изученіе дѣйствій надъ числами, которымъ мы припишемъ свойства измѣняемости.

Творцы высшаго анализа не мыслили такъ отвлеченно; они свои разсужденія строили на конкретныхъ представленіяхъ: Ньютонъ на представленіи о нѣкоторой движущейся въ пространствѣ и времени точкѣ, Лейбницъ на представленіяхъ аналитической геометріи, созданной приблизительно за 50 лѣтъ до него Декартомъ.

Въ слѣдующихъ §§ мы ознакомимся съ обоими способами введенія въ анализъ.

§ 4. Предварительное исследование равномернаго движенія точки.

Про точку, которая движется по прямой линіи и при томъ такъ, что въ равные промежутки времени она пробѣгаетъ равныя разстоянія, говорятъ: точка движется равномерно.

Если въ теченіе каждой секунды эта точка пробѣгаетъ c сантиметровъ, то говорятъ: точка имѣетъ скорость равную c .

Тогда эта точка въ t секундъ пройдетъ ct сантиметровъ.

Если обозначить путь, который эта точка прошла въ t секундъ, черезъ s , или лучше черезъ s_t , то мы получимъ слѣдующее уравненіе:

$$s_t = ct \dots \dots \dots (1)$$

Это уравненіе, очевидно, и выражаетъ законъ подобнаго движенія.

Если мы будемъ отсчитывать время съ того момента, когда точка начала двигаться, то наше уравненіе (1) мы можемъ формулировать такъ: черезъ t секундъ послѣ начала отсчета времени точка удалится отъ исходнаго пункта на ct сантиметровъ.

Та же мысль выражается еще проще: въ теченіе времени t точка проходитъ путь ct .

Эта формулировка годится не только для одного какого-нибудь опредѣленнаго момента и не для одного опредѣленнаго положенія точки, но вообще для всякаго разсматриваемаго момента, если только мы всегда подъ s будемъ разумѣть тотъ путь, который точка совершила до даннаго момента времени; другими словами: она годится для каждой пары соотвѣтственныхъ значеній s и t . Мы можемъ сказать, что s и t выступаютъ въ этомъ уравненіи, какъ переменныя величины (*variable*). Мы можемъ имъ придавать произвольныя значенія; по крайней мѣрѣ, въ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ границахъ.

(Необходимо сдѣлать оговорку: «въ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ границахъ», ибо, во первыхъ, нѣтъ никакого смысла приписывать числу t отрицательныхъ значеній или значеній, которыя больше того числа T секундъ, въ теченіе которыхъ происходитъ данное движеніе по данному закону).

Но даже, если исключить это ограниченіе, все-таки произвольность t и s не полная. Эти двѣ величины не измѣняются другъ отъ

друга независимо; наоборотъ. уравненіемъ (1) онѣ связаны другъ съ другомъ.

Мы каждой изъ нихъ независимо не можемъ дать произвольныхъ значеній, ибо когда мы одной изъ нихъ придадимъ опредѣленное значеніе, то наше уравненіе для другой величины дастъ уже совершенно опредѣленную величину.

Вопросъ, который въ данномъ случаѣ представляется, слѣдующій: мы придаемъ числу t опредѣленное значеніе; другими словами, мы наблюдаемъ нашу точку въ моментъ t (t секундъ послѣ начала отсчета времени); какое значеніе имѣетъ тогда число s , т. е. на какое разстояніе s удалилась отъ исходнаго пункта наша точка?

На этотъ вопросъ отвѣтъ сразу дается уравненіемъ (1). При данной постановкѣ вопроса t въ нашемъ уравненіи является независимой переменнѣй, которой мы можемъ придать любое значеніе; s является зависимой переменнѣй. вмѣсто того, чтобы говорить « s есть переменная, которая зависитъ отъ нѣкоторой другой переменнѣй t », выражаются короче, говоря: s есть функція отъ t .

Однако мы можемъ поставить и обратный вопросъ: мы можемъ дать произвольное значеніе величинѣ s ; другими словами, пусть мы находимся около нѣкотораго мѣста того пути, который пробѣгаетъ: движущаяся точка, и задаемъ себѣ вопросъ: для какого значенія t движущаяся точка будетъ въ данномъ мѣстѣ.

Отвѣтъ на этотъ вопросъ мы найдемъ, рѣшивъ уравненіе (1) относительно t ; т. е. написавши это уравненіе въ такомъ видѣ:

$$t = \frac{s}{c} \text{ или лучше такъ: } t_s = \frac{s}{c} (2)$$

Теперь s является независимой переменнѣй, а t функціей отъ этой переменнѣй.

Зависимость s отъ t , или t отъ s въ уравненіямъ (1) и (2) отмѣчается тѣмъ, что въ первомъ случаѣ мы приписываемъ величинѣ s индексъ t ; во второмъ случаѣ, величинѣ t индексъ s , указывая индексомъ на ту переменную, которая независима.

Обыкновенно эти индексы опускаютъ, и тогда безъ дальнѣйшихъ словъ понимается, что s и t (или какія либо другія буквы, введенныя для обозначенія переменныхъ) представляютъ изъ себя значенія переменныхъ, другъ другу соответствующія.

Множитель c при всѣхъ нашихъ изслѣдованіяхъ сохраняетъ одно и тоже значеніе; онъ обозначаетъ постоянно неизмѣнную скорость разсматриваемой точки. Величина, которая въ теченіе цѣлаго изслѣдованія постоянно сохраняетъ одно и тоже значеніе, называется величиной постоянной.

§ 5. Выяснение основныхъ понятій дифференціального исчисления на примѣрѣ паденія тѣла.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію нѣсколько болѣе сложнаго случая. Законъ, по которому происходитъ движеніе свободно падающаго тѣла подъ вліяніемъ силы тяжести, не такъ простъ, какъ законъ равномернаго движенія.

Онъ представляется, если откинуть сопротивление воздуха и прочія нарушающія движеніе вліянія, въ такой формѣ:

$$s = \frac{1}{2} gt^2 \dots \dots \dots (1)$$

При этомъ g представляетъ изъ себя постоянную, численное значеніе которой приблизительно равно 980, если длины измѣрены въ сантиметрахъ, а промежутки времени въ секундахъ.

Такое тѣло черезъ

1, 2, 3, 4... t секундъ,

послѣ начала движенія прошло путь въ

490 4.490 9.490 16.490... $t^2 \cdot 490$

или

490 1960 4410 7840... $490 t^2$

сантиметровъ. Разстоянія, которыя точка прошла въ теченіе каждой отдѣльной секунды, мы получимъ, если вычтемъ изъ того разстоянія, которое пройдено тѣломъ къ концу разсматриваемой секунды, разстояніе, которое было пройдено тѣломъ къ началу данной секунды.

Такимъ образомъ въ теченіе

1, 2, 3, 4... t секунды

тѣло прошло

490 3.490 5.490 7.490... $[t^2 - (t - 1)^2] 490$

или

490 1470 2450 3430... $490 (2t - 1)$

сантиметровъ. Такимъ образомъ, это тѣло въ теченіе каждой секунды проходитъ неодинаковыя разстоянія; его движеніе не равномерное; оно не имѣетъ постоянной скорости, а, становясь на то опредѣленіе скорости, которое мы дали въ предыдущемъ параграфѣ, въ данномъ случаѣ собственно не можетъ быть и рѣчи о скорости.

Мы должны нашу задачу изслѣдовать глубже, а для этого раньше всего условиться въ цѣлесообразномъ способѣ выраженій и записей. Мы очень часто бываемъ поставлены въ необходимость въ нѣкоторой задачѣ разсматривать рядомъ нѣсколько значеній одной и той же переменнй. Въ такихъ случаяхъ обходятся обыкновенно одной и той же буквой для всѣхъ значеній этой переменнй, отдѣльныя же зна-

ченія различаютъ индексами, которые, въ видѣ нѣкоторыхъ буквъ или чиселъ, мы приписываемъ къ нашей буквѣ. Соответственныя значенія другой переменнѣй мы опять отличаемъ по индексамъ; такъ что, напримѣръ, въ нашей задачѣ s_1 обозначаетъ тотъ путь, который точка проходитъ въ теченіе первыхъ t_1 секундъ. Путь, который точка проходитъ начиная съ момента t_1 до момента t_2 будетъ тогда:

$$\left. \begin{aligned} s_2 - s_1 &= \frac{1}{2} g t_2^2 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} g (t_2^2 - t_1^2) = \\ &= \frac{1}{2} g (t_1 + t_2) (t_2 - t_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Этотъ путь сравнимъ теперь съ тѣмъ временемъ, которое нужно на его пробѣгъ. Отношеніе

$$c_{12}^*) = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2} g (t_1 + t_2) \dots \dots \dots (3)$$

мы назовемъ средней скоростью въ промежутокъ времени отъ t_1 до t_2 .

Точка, которая бы въ теченіе этого промежутка времени двигалась бы съ постоянной скоростью c_{12} , прошла бы то же разстояніе, что и рассматриваемая нами движущаяся точка.

Найденное уравненіе мы можемъ написать и нѣсколько иначе, если для промежутка $t_2 - t_1$ введемъ обозначеніе h .

Тогда

$$t_2 = t_1 + h. \dots \dots \dots (4)$$

и

$$c_{12} = \frac{1}{2} g (2t_1 + h) = g t_1 + \frac{1}{2} g h \dots \dots \dots (5)$$

изъ этого уравненія мы можемъ вывести очень замѣчательное и для всего дальнѣйшаго очень существенное слѣдствіе.

А именно, мы можемъ въ этомъ уравненіи положить $h = 0$; другими словами, мы можемъ тотъ промежутокъ времени, на протяженіи котораго мы ищемъ среднюю скорость, свести къ нулю.

Связать съ этими словами нѣкоторое опредѣленное представленіе мы не можемъ; но въ формулѣ (5) нѣтъ никакихъ препятствій для того, чтобы въ ней положить $h = 0$.

Пожалуй, можно сказать, что формула (5) можетъ намъ дать больше, чѣмъ непосредственное пониманіе. То, что мы получимъ (послѣ упомянутой подстановки $h = 0$) мы назовемъ скоростью точки въ данный моментъ t_1 . Мы будемъ эту скорость обозначать

*) Для опредѣленности слѣдовало бы писать вмѣсто c_{12} , $c_{1, 2}$, чтобы индексъ 1 2 не спутать съ числомъ двѣнадцать.

знакомъ c_1 , такъ что получимъ:

$$c_1 = gt_1.$$

Всѣ величины, входящія въ эту формулу, относятся къ одному и тому же моменту; поэтому нѣтъ необходимости оставить индексъ 1, ибо индексы были нами введены только для того, чтобы отличать различные моменты.

Итакъ мы просто можемъ написать:

$$c = gt \dots \dots \dots (6)$$

И такъ выразить словами это уравненіе: скорость свободно падающей точки растеть пропорціонально времени.

Резюмируя все вышесказанное, мы можемъ сказать: скорость движущейся точки для нѣкотораго момента t можетъ быть опредѣлена такъ: мы сначала вычисляемъ среднюю скорость точки для промежутка времени отъ t до $t+h$ и затѣмъ въ найденномъ выраженіи для этой средней скорости полагаемъ $h=0$.

Однако намъ нужно болѣе точно дать себѣ отчетъ въ томъ, что мы собственно дѣлаемъ, поступая такимъ образомъ.

При переходѣ отъ ур-нія (2) къ ур-нію (3) мы производили дѣленіе на h , которое у насъ введено вмѣсто разности $t_2 - t_1$.

Такимъ образомъ, мы положили равной нулю величину, на которую мы раньше дѣлили.

Элементарная алгебра однако говоритъ намъ: на нуль нельзя дѣлить. Какъ же мы поступаемъ тутъ? Отвѣтъ на этотъ вопросъ можно разбить на пять пунктовъ:

I. О законности того, что мы тутъ дѣлили, можно заключить просто изъ того, что въ результатѣ у насъ получилось нѣчто вполне опредѣленное.

Какъ математики, мы можемъ свободно ставить наши задачи.

Мы въ правѣ сказать: насъ эта задача интересуеть, и мы хотимъ заняться ея рѣшеніемъ; кто этимъ не интересуется, того мы не принуждаемъ принимать участіе въ нашихъ изслѣдованіяхъ. При этомъ мы, конечно, должны себя спросить: при всѣхъ ли обстоятельствахъ получается вполне опредѣленный результатъ послѣ того, какъ мы полагаемъ равной нулю разность двухъ значеній перемѣнной, которая раньше предполагалась неравной нулю? Или при какихъ именно обстоятельствахъ это имѣеть мѣсто?

Однако мы сначала можемъ этотъ вопросъ совершенно оставить въ сторонѣ, пока на отдѣльныхъ примѣрахъ у насъ не будетъ собранъ достаточный опытный матеріаль въ подтвержденіе возможности того или другого случая.

Кто мыслить математически-отвлеченно, тотъ можетъ совершенно удовлетвориться такой формулировкой вопроса.

Не такъ будетъ думать тотъ, кто задался цѣлью изучать математику только ради ея практическихъ примѣненій.

Такой читатель не удовольствуется тѣмъ, что ему скажутъ: «мы получаемъ тутъ нѣчто математически опредѣленное»... Онъ непременно спроситъ: «получается ли при этомъ нѣчто полезное въ естественно научномъ смыслѣ»? На это мы можемъ раньше всего дать такой отвѣтъ.

II. Уравненіе (6) проще уравненія (5). Это уравненіе даетъ болѣе простой законъ природы; зависимость между скоростью свободно падающей точки въ данный моментъ и временемъ, данная уравненіемъ (6), гораздо проще, чѣмъ соответственная зависимость средней скорости въ теченіе даннаго промежутка и времени, которую намъ даетъ уравненіе (5).

Въ нашемъ примѣрѣ, гдѣ отношенія между изучаемыми нами величинами сами по себѣ очень просты, достигнутое нами упрощеніе выраженій не такъ еще существенно, однако мы, конечно, можемъ себѣ представить, что въ болѣе сложныхъ по существу случаяхъ одна формулировка по отношенію къ другой даетъ весьма очевидный перевѣсъ въ сторону простоты. Однако и противъ этого соображенія можно со строго эмпирической точки зрѣнія ожидать слѣдующаго возраженія: какую цѣну имѣетъ для насъ эта достигнутая нами простота математической формулировки закона, когда мы для того, чтобы ея достигнуть, были принуждены въ наши разсужденія и дѣйствія ввести величину, которая какъ разъ съ точки зрѣнія опыта не поддается ни опредѣленію, ни наблюденію, ни измѣренію?

Ибо вѣдь то, что мы можемъ наблюсти и измѣрить, есть только средняя скорость, а не опредѣленная нами скорость въ данный моментъ.

На это возраженіе можно отвѣтить:

III. Величина $\frac{1}{2}gh$ (погрѣшность вычисленія), которую мы отбрасываемъ, когда мы замѣняемъ среднюю скорость въ теченіе небольшого промежутка времени скоростью въ началѣ этого промежутка, мала, когда h очень мало. Когда h составляетъ только небольшую долю секунды, то $\frac{1}{2}gh$ составляетъ только нѣсколько дециметровъ, т. е. величину, которая практически совершенно не входитъ въ расчетъ по сравненію съ сотнями метровъ, которые пробѣгаетъ тѣло уже въ первыя секунды своего паденія.

Всѣ величины, встрѣчающіяся въ опытныхъ наукахъ (физикѣ, химіи), мы можемъ измѣрить только съ ограниченной степенью точ-

ности, и самыя опредѣленія, встрѣчающіяся въ этихъ наукахъ, дѣлаются на основаніи опытныхъ, и поэтому приближенныхъ, результатовъ. Мы не можемъ также никогда освободиться отъ постороннихъ вліяній (какъ въ настоящемъ случаѣ, отъ сопротивленія воздуха, вліянія электрич. и магнитн. силъ и т. п.). Поэтому мы никогда не можемъ рассчитывать на полное соотвѣтствіе между наблюденіями и вычисленіями.

Если мы опыты паденія тѣлъ будемъ вести съ хронографами (приборами для записи времени), то, въ лучшемъ случаѣ, длины мы будемъ въ состояніи измѣрить въ миллиметрахъ, время—въ сотыхъ доляхъ секунды, такъ что тѣ и другія величины, можетъ быть, съ точностью до пяти, самое большее—до шести десятичныхъ знаковъ.

Скорости, найденныя при помощи этихъ данныхъ, будутъ вычислены навѣрное не съ болѣею, а скорѣе съ меньшею (относительно) точностью.

Поэтому, конечно, нѣтъ никакого смысла вести вычисленія съ болѣею точностью, чѣмъ могутъ быть ведены наблюденія. Если только для h мы возьмемъ настолько малую долю t , что при нашихъ требованіяхъ точности мы въ состояніи имъ пренебречь, то мы безъ дальнѣйшихъ разсужденій можемъ среднюю скорость для промежутка времени отъ t до $t+h$ (которая поддается опытному опредѣленію) замѣнить скоростью для момента t , которая подчиняется простому математическому закону.

Очевидности нашихъ разсужденій въ данномъ случаѣ нѣсколько мѣшаетъ то обстоятельство, что g имѣетъ сравнительно большое численное значеніе.

Надо однако принять во вниманіе, что величина g зависитъ отъ выбранныхъ единицъ мѣръ; если бы мы выбрали большую единицу длины или меньшую единицу времени, то мы бы для этого множителя получили меньшее численное значеніе.

Такимъ толкованіемъ предмета однако теперь не доволенъ математикъ, ибо это толкованіе не удовлетворяетъ предъявленному имъ требованію абсолютной точности, которую математикъ привыкъ видѣть въ своихъ теоремахъ и формулахъ.

Эти требованія и вытекающія изъ нихъ слѣдствія должны быть, конечно, удовлетворены въ спеціальныхъ лекціяхъ для математиковъ спеціалистовъ.

Здѣсь же мы замѣтимъ только слѣдующее:

Требованіе абсолютной точности представляетъ изъ себя тотъ идеаль, къ которому можно стремиться, но котораго во многихъ случаяхъ совершенно невозможно достигъ. Мы, на примѣръ, не можемъ уже достигъ абсолютной точности, когда хотимъ обратить въ деся-

тичную обыкновенную дробь, у которой въ знаменателѣ есть множители, отличные отъ 2 и 5. Еще труднѣе въ тѣхъ случаяхъ, когда мы имѣемъ дѣло съ ирраціональными числами, которыя насъ заставляютъ ввести геометрію.

Если мы вмѣсто $\frac{1}{3}$ возьмемъ безконечную періодическую дробь

$$0,333333\dots$$

то сколько бы мы троекъ ни приписывали, на какой бы десятичной цифрѣ мы ни остановились, величины точно равной $\frac{1}{3}$ мы никогда не получимъ; причемъ, на какой бы цифрѣ ни остановились, погрѣшность, которую мы при этомъ получимъ, равна $\frac{1}{3}$ послѣдней взятой нами цифры. Такъ же, напримѣръ, по теоремѣ Пифагора, квадратъ, построенный на діагонали квадрата, имѣющаго сторону, равную единицѣ длины, имѣетъ площадь, равную двумъ квадратнымъ единицамъ. Если же мы пожелаемъ найти численную величину длины этой діагонали, то намъ придется искать такое число, которое, будучи умножено на самое себя, дало бы 2.

Элементарными способами очень нетрудно найти числа, квадраты которыхъ очень мало отличаются отъ 2-хъ; напримѣръ:

$$1,414^2 = 1,999396,$$

однако не трудно показать, и это даже доказывается въ курсахъ средней школы, что нельзя отыскать такого раціональнаго числа, квадратъ котораго былъ бы точно равенъ 2.

Въ такихъ случаяхъ мы бываемъ поневолѣ принуждены понятіе объ абсолютной точности замѣнить понятіемъ безграничнаго приближенія.

Это значитъ, что мы требуемъ такого рода формулъ, которыя бы давали намъ возможность сдѣлать ошибку результата сколь угодно малой или, по крайней мѣрѣ, столь малой, какъ того требуетъ постановка вопроса.

Въ вышеприведенныхъ примѣрахъ этого, дѣйствительно, можно достигнуть: у насъ есть способы, дающіе намъ возможность опредѣлять одну десятичную цифру за другой; а т. к. ошибка, которая при этомъ получается, не превышаетъ той десятичной цифры, на которой мы останавливаемъ наше вычисленіе, то мы въ состояніи нашу ошибку сдѣлать сколь угодно малой; конечно, заранѣе предполагается, что мы вообще умѣемъ продѣлать требуемый при этомъ процессъ вычисленія, о чемъ математикъ, какъ таковой, не заботится, по крайней мѣрѣ, не ставитъ этого вопроса въ первую голову.

Что же мы имѣемъ въ нашемъ случаѣ? Ошибка, которую мы дѣлаемъ, замѣняя среднюю скорость въ теченіе времени h скоростью

въ началѣ этого момента, равна $\frac{1}{2} gh$. Если мы хотимъ, на примѣръ, чтобы эта ошибка была меньше напередъ заданной величины ϵ , то для этого мы должны только взять

$$h < \frac{\epsilon}{2g}$$

Такимъ образомъ, мы ошибку вычисленія, дѣйствительно, можемъ подчинить каждому поставленному напередъ требованію точности, если только возьмемъ величину h достаточно малой. Всегда ли это можно сдѣлать. объ этомъ заранѣе намъ не надо заботиться. Мы можемъ совсѣмъ не разсматривать вопроса о томъ, всегда ли мы можемъ, на примѣръ, при какомъ-нибудь очень неравномерномъ и прерывистомъ движеніи, получить скорость въ данный моментъ, вычисляя предварительно среднюю скорость такого движенія въ теченіе нѣкотораго промежутка времени, и затѣмъ въ этомъ выраженіи полагая разсматриваемый промежутокъ времени равнымъ нулю.

Можемъ не разсматривать и вопроса о томъ, во всѣхъ ли случаяхъ, при выполненіи предыдущихъ условій, уменьшая сколь угодно промежутки времени, мы въ состояніи сдѣлать разность между средней скоростью въ теченіе небольшого промежутка времени и скоростью въ данный моментъ сколь угодно малой.

Намъ сейчасъ достаточно указать на слѣдующее: оказывается, что для цѣлей естественной науки мы просто можемъ исключить изъ нашихъ разсмотрѣній тѣ случаи, въ которыхъ не удовлетворено одно изъ предыдущихъ требованій.

V. Однако въ заключеніе нашихъ споровъ нужно дать еще разъ слово естествоиспытателю.

Онъ скажетъ: неограниченная точность для меня неинтересна; всѣ мои изслѣдованія, въ смыслѣ точности, имѣютъ границы, причемъ, смотря по наукѣ, эти границы очень различны, и если бы всѣ формулы были такъ составлены, что давали бы мнѣ именно ту точность, ни больше, ни меньше, какая мнѣ нужна, то это бы больше всего отвѣчало моимъ интересамъ. На это можно было бы отвѣтить: если бы можно было это сдѣлать, то это, конечно, было бы очень хорошо, но этого сдѣлать нельзя. Когда мы одну формулу выводимъ изъ другой, то, съ каждымъ дѣйствіемъ, точность результата уменьшается. Такимъ образомъ, исходныя формулы требуютъ большей точности, чѣмъ та, которую мы требуемъ отъ окончательнаго результата. И намъ бы пришлось при каждомъ послѣдующемъ шагѣ въ развитіи нашихъ выводовъ возвращаться къ самому началу вывода, чтобы данный результатъ получить съ желаемой степенью точности.

Такимъ образомъ приходится примириться съ тѣмъ, что все-таки простѣйшій путь для достиженія наиболѣе выгодныхъ практическихъ результатовъ тотъ, когда всѣ наши формулы построены такъ, чтобы онѣ могли давать намъ сколь угодно точные результаты. А затѣмъ уже въ частныхъ случаяхъ можно предпринимать спеціальныя упрощенія.

Мы будемъ имѣть, такимъ образомъ, дѣло съ такими формулами, которыя будутъ давать намъ любую степень точности, если только въ выраженіяхъ, стоящихъ въ нихъ, прибавить достаточное количество дополнительныхъ членовъ, составленныхъ по опредѣленному закону.

Сколько членовъ надо прибавить въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, зависитъ отъ соображеній спеціальныхъ, построенныхъ на знакомствѣ съ данными явленіями. Причемъ это дѣло математикъ не можетъ совершенно отнять у естествоиспытателя или техника, тѣмъ болѣе, что требованіе точности не есть что-нибудь строго опредѣленное, а растетъ съ теченіемъ времени во всякой наукѣ.

§ 6. Распространеніе понятія скорости на другія явленія.

Развитое въ послѣднихъ двухъ параграфахъ понятіе о скорости отъ случая прямолинейнаго движенія можетъ быть перенесено на всѣ тѣ случаи, когда какая-нибудь величина мѣняется съ теченіемъ времени; когда, напримѣръ, тѣло вращается около постоянной оси, то мы можемъ опредѣлить его положеніе въ каждый данный моментъ, задавая уголъ, который составляетъ нѣкоторая неразрывно связанная съ тѣломъ плоскость съ нѣкоторой вполне въ пространствѣ опредѣленной плоскостью, проходящей черезъ ось вращенія.

Этотъ уголъ измѣняется съ теченіемъ времени; если мы величину его измѣненія въ теченіе извѣстнаго времени подѣлимъ на этотъ промежутокъ времени (число градусовъ на число секундъ), то мы получимъ среднюю угловую скорость въ теченіе этого времени. Если затѣмъ мы положимъ время равнымъ нулю, то мы получимъ угловую скорость даннаго вращательнаго движенія въ данный моментъ.

Будемъ наблюдать волны, которыя распространяются по поверхности воды. При такомъ волнообразномъ движеніи отдѣльныя частицы воды въ сущности почти остаются на мѣстѣ, описывая только небольшія замкнутыя кривыя. Только само состояніе колебанія имѣетъ тутъ поступательное движеніе.

Мы можемъ наблюдать гребень волны (который образуется въ каждый данный моментъ разными частицами) и опредѣлять его положеніе; это положеніе измѣняется съ теченіемъ времени.

Если мы число, измѣряющее разстояніе, на которое въ теченіе нѣкотораго времени продвинулся гребень, раздѣлимъ на число, измѣ-

ряющее время, то мы получимъ среднюю скорость распространения волнообразнаго движенія въ теченіе этого времени. Если затѣмъ въ найденномъ выраженіи мы положимъ время равнымъ нулю, то мы получимъ скорость распространения колебанія въ данный моментъ.

И въ тѣхъ случаяхъ, когда рѣчь идетъ даже не о движеніяхъ, а о другихъ измѣненіяхъ величинъ, подлежащихъ измѣренію, мы можемъ говорить о скорости.

Такъ наприимѣръ, мы можемъ получить среднюю скорость охлажденія тѣла въ теченіе опредѣленнаго времени, когда мы число градусовъ, на которое понизилась температура тѣла, раздѣлимъ на число секундъ, содержащихся въ данномъ промежуткѣ времени.

И химическій процессъ, при которомъ изъ нѣкотораго химическаго соединенія выдѣляется или въ нѣкоторое химическое соединеніе входитъ нѣкоторый элементъ или основаніе, не происходитъ мгновенно, а тратитъ на это нѣкоторое время.

Мѣрою химическаго процесса могло бы служить количество подвергшагося химическому процессу вещества, измѣренное въ граммахъ; но для вычисленій удобнѣе это число еще раздѣлить на молекулярный вѣсъ даннаго вещества.

Подъ граммолекулой мы понимаемъ то количество граммовъ вещества, которое равно молекулярному вѣсу этого вещества.

Такъ, граммолекула хлора равна 71 грамму; граммолекула водорода—двумъ граммамъ; граммолекула соляной кислоты равна 36,5 граммамъ; такъ что одна граммолекула водорода и одна граммолекула хлора составляютъ 2 граммолекулы соляной кислоты.

Мы получимъ среднюю скорость реакціи, если мы количество переработанныхъ граммолекулъ раздѣлимъ на число секундъ, прошедшихъ на этотъ химическій процессъ. Скорость реакціи въ данный моментъ мы получимъ, полагая въ полученной для средней скорости реакціи формулѣ число секундъ равнымъ нулю. Въ-сто выраженія: «мы дѣлимъ число, выражающее нѣкоторую длину на число секундъ», которое является единственнымъ правильнымъ способомъ выраженія, мы иногда говоримъ коротко: «мы дѣлимъ длину на время и получаемъ скорость».

Этотъ краткій способъ выраженія можно примѣнять лишь въ томъ случаѣ, если слову дѣленіе мы будемъ приписывать только что упомянутый распространенный смыслъ. То же замѣчаніе относится и къ другимъ случаямъ, разобраннымъ въ этомъ параграфѣ.

§ 7. Графическое представление законовъ природы и вообще зависимостей между двумя переменными величинами.

Въ § 2 мы видѣли, что зависимость между двумя величинами, наприимѣръ, нѣкоторый законъ природы, мы во многихъ случаяхъ

можемъ представить въ видѣ формулы. Формула является прекраснымъ средствомъ для того, кто привыкъ съ ней обращаться. Но не всегда мы имѣемъ формулу къ нашимъ услугамъ.

Формула является результатомъ теоретическихъ разсужденій, но не для всѣхъ явленій у насъ имѣются достаточно развитыя теоріи.

Или формула можетъ быть получена непосредственно изъ данныхъ наблюденій, но чтобы изъ наблюденій вывести формулу, для этого требуется особенное искусство, о которомъ мы будемъ имѣть случай говорить выше. Да и вообще, въ обоихъ упомянутыхъ случаяхъ мы только тогда въ состояніи найти простую, объединяющую всѣ опытные данныя, формулу, если вообще таковая существуетъ; но вѣдь такая простота часто и не существуетъ вовсе. Что же намъ дѣлать именно въ этихъ случаяхъ, чтобы по крайней мѣрѣ чѣмъ-нибудь замѣнить формулу?

Прежде всего, какъ это уже было показано въ § 2, можно было бы наблюденныя значенія обѣихъ величинъ свести вмѣстѣ въ нѣкоторую таблицу.

Такъ было, напримѣръ, изучено дѣйствіе свѣта на хлороводородную смѣсь, причемъ зависимость между количествомъ m получающейся соляной кислоты и временемъ t (въ теченіе котораго происходитъ реакція), выражается слѣдующей таблицей:

$t = 4$	$m = 2,1$
$t = 5$	$m = 2,6$
$t = 6$	$m = 4,7$
$t = 7$	$m = 19,3$
$t = 8$	$m = 48,5$
$t = 9$	$m = 79,6$
$t = 10$	$m = 110,0$

Изъ одного взгляда на эту таблицу было бы очень трудно сдѣлать заключеніе объ общей формулѣ; число m , очевидно, непропорціонально никакой степени t ; тутъ нужно, конечно, ожидать многочленной формулы.

И непосредственно изъ таблицы нельзя сдѣлать никакого заключенія: она не даетъ нагляднаго представленія о явленіи.

Однако извѣстенъ уже съ давнихъ поръ, еще со времени послѣднихъ средневѣковыхъ схоластовъ, одинъ очень простой приѣмъ для нагляднаго представленія подобныхъ соотвѣтственныхъ рядовъ чиселъ.

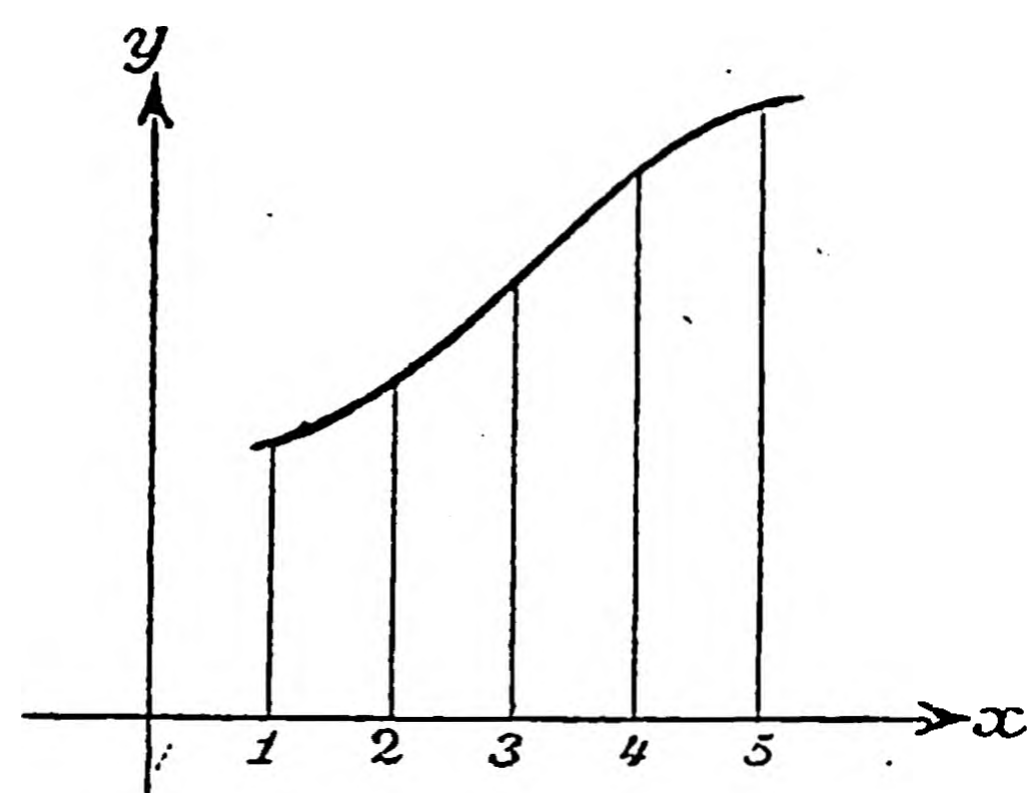
Проведемъ для этой цѣли гдѣ-нибудь на плоскости прямую, — проще всего горизонтальную, хотя это не играетъ никакой роли. Гдѣ-нибудь на прямой отмѣтимъ точку, отъ которой будемъ вести отсчеты, и выберемъ нѣкоторую длину за единицу и отъ этой на-

чальной точки отложимъ столько единицъ длины въ любомъ направленіи, обыкновенно направо, сколько того требуетъ одно изъ разсматриваемыхъ значеній одной изъ нашихъ переменныхъ.

Въ концѣ отсчета возставимъ къ нашей горизонтальной прямой перпендикуляръ,—обыкновенно его проводятъ вверхъ,—и на этой прямой, тоже въ произвольно выбранныхъ единицахъ, отложимъ отръзокъ, равный соотвѣтственному значенію другой переменной. Такъ мы будемъ поступать съ каждой парой значеній нашихъ переменныхъ.

При этомъ, конечно, мы уже не мѣняемъ разъ выбранныхъ нами единицъ длины. Такимъ образомъ мы на первыхъ порахъ представляемъ данныя численныя значенія нашихъ величинъ въ видѣ ряда точекъ въ плоскости нашего рисунка.

Пока мы еще ничего существеннаго не достигли. Рядъ численныхъ значеній или рядъ точекъ могутъ совершенно замѣнять другъ друга. Одинъ способъ записи даетъ намъ не больше и не меньше другого, если только при этомъ точность рисунка соотвѣтствуетъ точности наблюденія.



Черт. 1.

Сдѣлаемъ однако еще одинъ шагъ, въ которомъ собственно заключается большой мысленный скачекъ: между намѣченными точками отъ руки или при помощи кривой линейки (лекала) проведемъ по возможности равномерную кривую и сдѣлаемъ допущеніе, что не только наши данныя точки, но и всѣ точки, принадлежащія кривой, представляютъ графическое изображеніе всѣхъ соотвѣтственныхъ значеній m и t .

Если мы захотимъ узнать, сколько соляной кислоты образовалось по истеченіи промежутка времени, не указаннаго въ таблицѣ, то намъ придется соотвѣтственное число минутъ нанести, очевидно производя измѣреніе въ прежнихъ единицахъ, на первой прямой отъ выбраннаго начала, въ концѣ возставить перпендикуляръ и измѣрить длину отръзка этого перпендикуляра отъ горизонтальной прямой до пересѣченія съ кривой. Мы тогда и получимъ величину m , соотвѣтствующую времени t .

Какое право имѣемъ мы поступать такъ? Съ математической точки зрѣнія—никакого, ибо черезъ данныя точки можно провести сколько угодно самыхъ различныхъ кривыхъ, притомъ соблюдая условіе равномерности перехода. Съ точки зрѣнія естественно-научной дѣло обстоитъ иначе. Слѣдуя тому принципу, что природа не дѣлаетъ скачковъ, который является исходной точкой всякой

естественной науки, мы можемъ предположить, что значеніемъ t , лежащимъ въ наблюдаемыхъ границахъ, будутъ соотвѣтствовать значенія m , которыя также будутъ лежать въ ранѣе наблюдательныхъ границахъ, если только мы взяли наблюденныя значенія достаточно близко другъ къ другу, что, конечно, опредѣляется индивидуальнымъ свойствомъ каждой задачи.

Во многихъ случаяхъ мы еще имѣемъ большую поддержку въ томъ смыслѣ, что въ томъ промежуткѣ времени, въ теченіе котораго мы дѣлаемъ наши измѣренія, мы качественно можемъ слѣдить за даннымъ процессомъ. Такъ, въ нашемъ случаѣ, на примѣръ, мы замѣчаемъ, что образуется постоянно новая соляная кислота и что раньше образованная не разлагается, такъ что съ теченіемъ времени ея количество растетъ постоянно, и съ возрастаніемъ времени t должно расти и число m ; такъ что кривая, которая намъ рисуется явленіе, должна подниматься слѣва направо и не можетъ начать опускаться.

Мы можемъ еще подробнѣе прослѣдить зависимость, которая существуетъ между кривой и тѣмъ закономъ, который связываетъ переменныя t и m .

При этомъ воспользуемся выраженіемъ, введеннымъ въ § 4 и будемъ говорить, что m есть функція t .

Мы представимъ себѣ мысленно, что кривая все время идетъ слѣва направо, т. е. въ томъ направленіи, въ какомъ мы наносимъ возрастающія значенія t .

Тогда мы можемъ сказать: если кривая поднимается, то наша функція съ возрастаніемъ t растетъ. Если она опускается, то функція убываетъ съ возрастаніемъ t .

Если кривая подымается круто, то функція растетъ быстро; если же кривая подымается полого, то функція растетъ медленно. Но при этомъ нужно имѣть въ виду и то, какой масштабъ для изображенія величинъ m и t нами выбранъ.

Мы можемъ получить очень круто подымающуюся или падающую кривую, если мы, при нѣкоторомъ опредѣленномъ масштабѣ для одной величины, для другой выберемъ сравнительно очень крупный масштабъ. Такъ что при всякомъ графическомъ изображеніи функціи не премѣнно долженъ быть приложенъ соотвѣтственный масштабъ.

И въ томъ случаѣ, когда дается не таблица соотвѣтственныхъ значеній двухъ наблюдаемыхъ величинъ, а имѣется формула, ихъ связывающая, мы можемъ для нѣкотораго ряда значеній одной величины, отложенныхъ по нѣкоторой оси, откладывать соотвѣтственныя значенія другой — на перпендикулярахъ, возставленныхъ къ этой оси въ соотвѣтственныхъ ей точкахъ; и затѣмъ черезъ полученныя точки мы можемъ провести кривую.

Мы можем даже мысленно предположить, однако представить себѣ этого мы не можемъ, что мы для каждаго x -са, входящаго въ наши разсмотрѣнія, вычислили соотвѣтственное значеніе для y -ка и нанесли его на чертежъ, и затѣмъ разсматриваемъ совокупность всѣхъ этихъ точекъ. Когда зависимость между y и x имѣетъ несложный характеръ, мы будемъ въ правѣ предположить, что эти точки не беспорядочно разсѣяны по плоскости, но въ совокупности составляютъ нѣкоторую прямую или кривую линію.

Вопросъ о томъ, будетъ ли подобное заключеніе имѣть мѣсто, когда законъ зависимости между y и x имѣетъ характеръ сложный, мы пока можемъ оставить въ сторонѣ.

§ 8. Обратная задача; аналитическое изображеніе линій.

Въ только что приведенныхъ разсужденіяхъ намъ была задана зависимость между двумя переменными, или въ видѣ таблицы, или въ видѣ уравненія; кривая же служила средствомъ для болѣе нагляднаго ознакомленія съ этой зависимостью: мы изъ свойства кривой дѣлали заключенія о свойствахъ данной функціи.

Однако, эта задача обратима; если мы имѣемъ нѣкоторую геометрически опредѣленную линію, то мы можемъ задать себѣ вопросъ о томъ, какимъ уравненіемъ, въ смыслѣ § 7, она опредѣляется и изъ свойствъ этого уравненія мы можемъ дѣлать заключеніе о свойствахъ кривой. Этотъ научный методъ, который былъ не чуждъ и геометрамъ древняго міра, и который былъ развитъ въ первой половинѣ XVII столѣтія Ферматомъ и главнымъ образомъ Декартомъ, носитъ названіе аналитической геометріи. Мы должны тутъ познакомиться по крайней мѣрѣ съ основными положеніями этой науки.

Гдѣ-нибудь въ плоскости рисунка мы выбираемъ двѣ пересѣкающіяся прямыя; часто бываетъ очень цѣлесообразнымъ расположить ихъ подъ прямымъ угломъ, хотя въ этомъ нѣтъ необходимости.

Одну изъ линій мы называемъ осью абсциссъ или просто осью x -совъ; другую осью ординатъ или просто осью y -ковъ.

Точку ихъ пересѣченія мы называемъ началомъ (или нулевой точкой) данной системы.

Обыкновенно ось x -овъ располагаютъ горизонтально, ось y -овъ вертикально, хотя это несущественно.

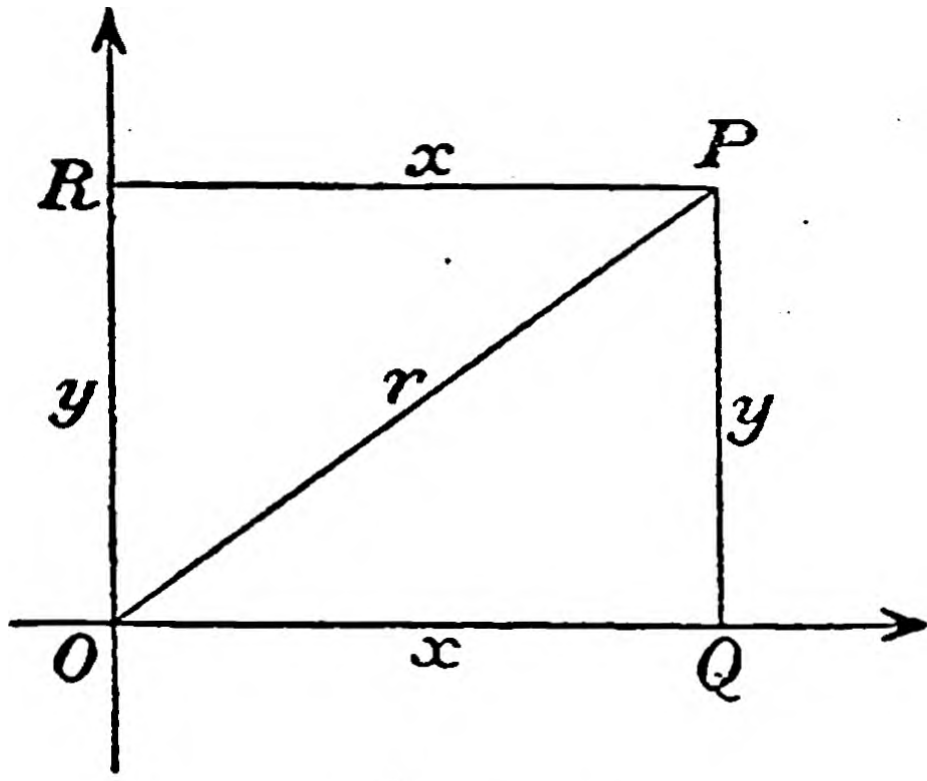
Эти двѣ линіи раздѣляютъ всю плоскость рисунка на четыре части или на четыре квадранта.

Сначала мы рассмотримъ только одинъ изъ нихъ, а именно правый верхній квадрантъ.

Положеніе точки въ этомъ квадрантѣ мы можемъ опредѣлить, задавая два числа. А именно число, выражающее разстояніе точки P отъ оси x -совъ, т. е. длину перпендикуляра PQ , опущен-

наго изъ точки P на ось x -совъ, и число, выражающее длину OQ , т. е. разстояніе отъ начала координатъ до основанія перпендикуляра QR . Последнее число мы назовемъ x -сомъ точки или его абсциссой; первое y -комъ точки или его ординатой. (Это названіе введено вмѣсто древняго *ordinatum applicata*).

Обѣ величины, вмѣстѣ взятыя, называются координатами точки; или, какъ въ нашемъ случаѣ, прямоугольными Декартовыми координатами.



Черт. 2.

Итакъ

$$OQ = x \quad QR = y.$$

Если мы проведемъ еще $PR \parallel OQ$, т. е. \perp къ OR , то изъ элементарныхъ геометрическихъ соображеній заключаемъ:

$$OR = y \quad RP = x.$$

Очевидно, мы бы могли эти величины взять за исходныя въ нашихъ опредѣленіяхъ координатъ точки (въ силу симметричности осей), но съ той точки зрѣнія, съ которой мы подходимъ, совершенно естественно для начала отдать одной изъ осей первенствующее значеніе (въ нашемъ случаѣ—оси x -совъ).

Если, наоборотъ, намъ даны два числа x и y , то мы можемъ опредѣлить одну и только одну точку, абсцисса которой равна x -су, а ордината y -ку.

Разстояніе точки (x, y) отъ начала, на основаніи теоремы Пифагора, будетъ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \dots \dots \dots (1)$$

Уголъ α , который образуетъ прямая, связывающая точку (x, y) съ началомъ, съ осью x -совъ, опредѣляется изъ слѣдующихъ очевидныхъ зависимостей:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \dots \dots \dots (2)$$

Если у насъ двѣ точки заданы своими координатами, то мы можемъ на основаніи (черт. 3) и (черт. 4) и проведенныхъ на нихъ линій, пользуясь теоремой Пифагора, получить:

Для первой фигуры (см. черт. 3) мы получаемъ:

$$r_{12}^*) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \dots \dots \dots (3)$$

для второй:

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

*) Тутъ мы опять должны сдѣлать замѣчаніе относительно индекса при величинахъ α_{12} , r_{12} и не смѣшивать его съ числомъ 12 (двѣнадцать).

оба выражения, впрочем, тождественны, т. к.

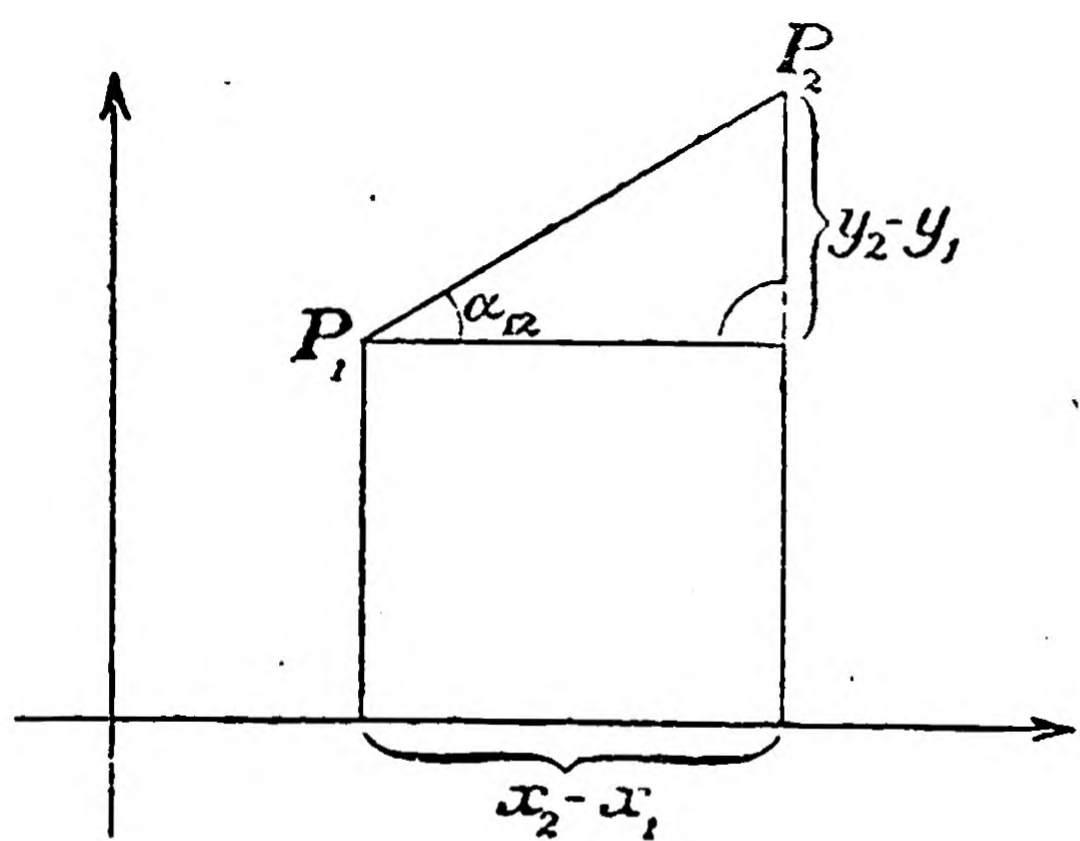
$$(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2.$$

Уголь α_{12} , который образуетъ линия, связывающая точки P_1 и P_2 съ линіей \parallel оси x , а слѣдовательно и съ самой осью x -совъ, для случая (фиг. 3) удовлетворяетъ слѣдующимъ почти очевиднымъ зависимостямъ:

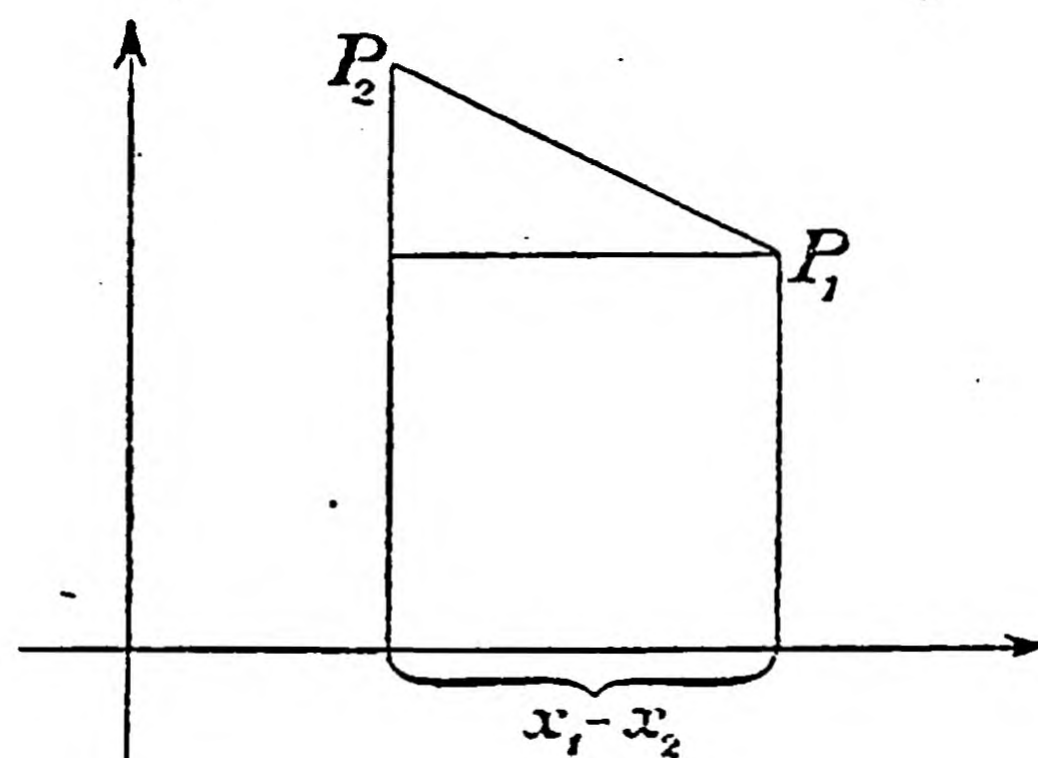
$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \sin \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{r} \quad \cos \alpha_{12} = \frac{x_2 - x_1}{r} \quad \dots (4)$$

О соответственныхъ зависимостяхъ, относящихся къ расположению (чертежа 4), мы скажемъ нѣсколько позднѣе.

Если нѣкоторая кривая опредѣлена геометрически, то мы изъ этого опредѣленія можемъ заключить о нѣкоторой зависимости, кото-



Черт. 3.



Черт. 4.

рой удовлетворяютъ всѣ точки этой линіи и притомъ только этой линіи. Эту зависимость мы можемъ выразить уравненіемъ между y -комъ и x -сомъ, и это уравненіе называется уравненіемъ кривой.

Наоборотъ, если намъ дано подобное уравненіе, то, какъ это было показано въ предыдущемъ параграфѣ, мы можемъ найти тѣ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ данному уравненію.

Въ тѣхъ случаяхъ, съ которыми мы будемъ имѣть дѣло, эти точки въ своей совокупности составляютъ опредѣленную линію, и эта линія и будетъ геометрическимъ изображеніемъ даннаго уравненія.

Гдѣ лежатъ, напримѣръ точки, для которыхъ $y = x$, т. е. точки равноотстоящія отъ обѣихъ координатныхъ осей?

Изъ элементарной геометріи мы знаемъ, что всѣ эти точки лежатъ на биссектриссѣ координатнаго угла; и обратно, что всѣ точки биссектриссы равно удалены отъ сторонъ угла.

Значитъ

$$y = x$$

есть уравненіе биссектриссы координатнаго угла.

Гдѣ лежатъ тѣ точки, для которыхъ $y = 2x$, т. е. которыя отстоятъ отъ оси x -совъ вдвое дальше, чѣмъ отъ оси y -ковъ?

И тутъ мы можемъ воспользоваться простыми элементарными геометрическими соображеніями.

Пусть P_1 есть точка, обладающая тѣмъ свойствомъ, что:

$$Q_1P_1 = 2OQ_1$$

Пусть P_2 есть нѣкоторая точка, на линіи OP_1 или ея продолженіи.

Проведемъ ординату этой точки P_2Q_2 .

Треугольники OP_1Q_1 и OP_2Q_2 подобны;

значить:

$$OQ_2 : Q_2P_2 = OQ_1 : Q_1P_1$$

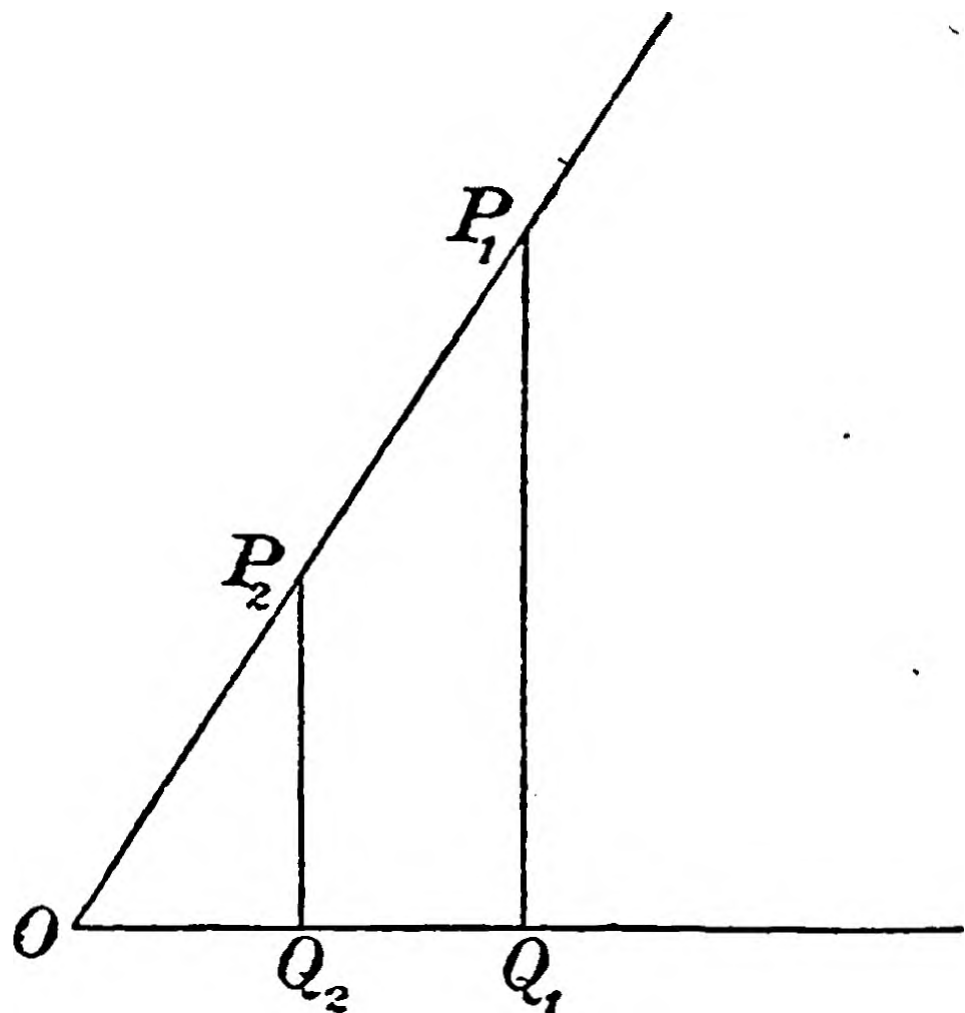
но такъ какъ

$$Q_1P_1 = 2OQ_1, \text{ то}$$

$$OQ_2 : Q_2P_2 = 1 : 2,$$

откуда

$$P_2Q_2 = 2OQ_2$$



Черт. 5.

Значить, точка P_2 обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, что и точка P_1 ; а такъ какъ

точка P_2 была взята нами совершенно произвольно на прямой OP_1 или ея продолженіи, то отсюда слѣдуетъ, что всякая точка на прямой OP_1 удовлетворяетъ требуемому условію.

Ни одна точка, не лежащая на прямой OP_1 этому условію не удовлетворяетъ, ибо если бы имѣлась, на примѣръ, такая точка P_3 внѣ прямой OP_1 , то линія Q_3P_3 должна была бы пересѣчь линію OP_1 въ какой-нибудь точкѣ P_4 для которой, какъ для точки лежащей на прямой OP_1 , должна была существовать зависимость $Q_3P_4 = 2OQ_3$; но одновременно не можетъ при этомъ существовать предполагаемое равенство

$$Q_3P_3 = 2OQ_3.$$

Значить, наше положеніе доказано.

§ 9. Объ отрицательныхъ значеніяхъ координатъ.

Пока мы разсматривали только точки одного квадранта, причемъ координаты точекъ въ этомъ квадрантѣ выражались числами положительными, каждой точкѣ въ этомъ квадрантѣ соотвѣтствовала одна пара такихъ чиселъ и наоборотъ. Если же мы хотимъ изучить всю плоскость и при этомъ желаемъ сохранить ту однозначную и обратимую связь, которая существуетъ между положеніемъ точки и координатами, то мы не можемъ ограничиться только положительными числами; ибо, если мы не примемъ во вниманіе того, по какую сторону отъ осей лежитъ данная точка, то найдется не одна точка, а цѣлыхъ четыре, которыя отстоятъ отъ осей на данныя разстоянія.

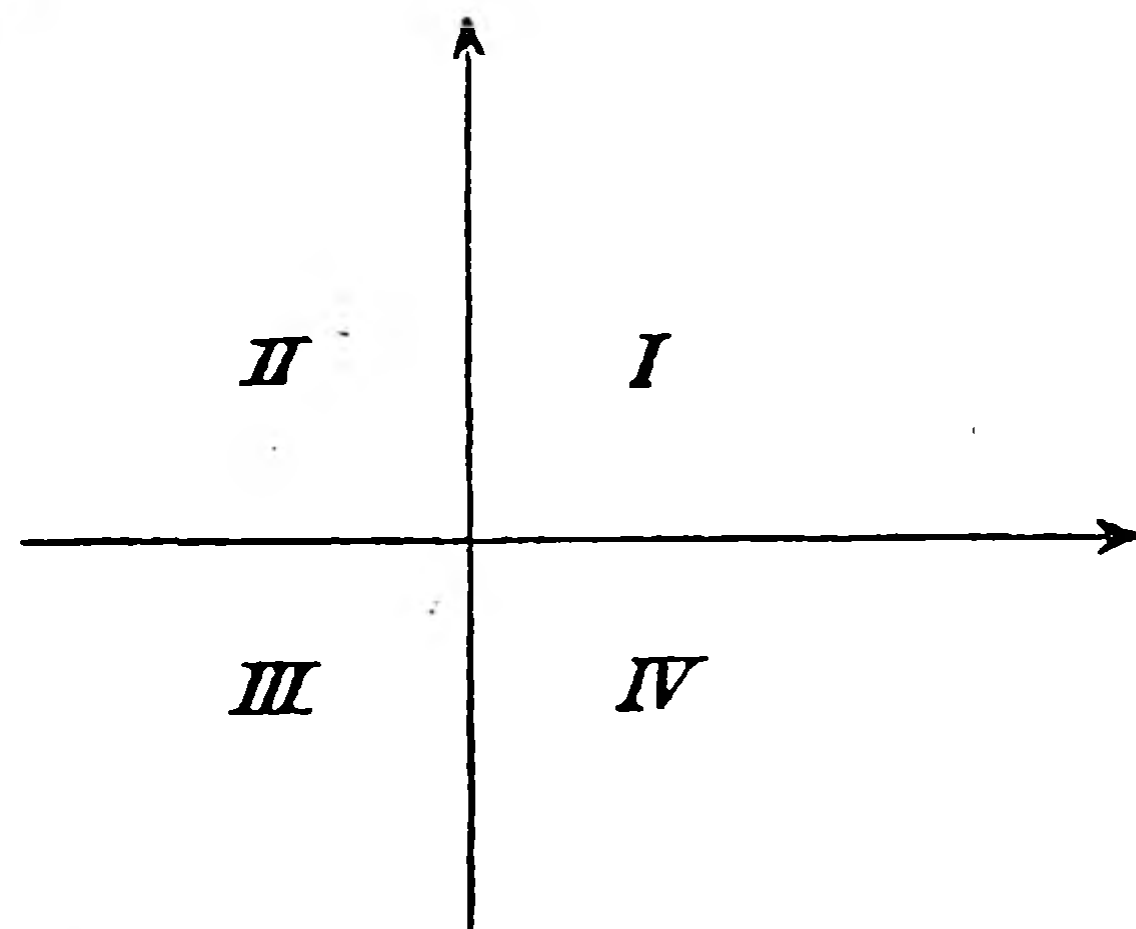
Всѣ эти точки мы можемъ получить изъ одной (напримѣръ, изъ точки, лежащей въ первомъ квадрантѣ), если возьмемъ изображеніе*) этой точки относительно двухъ осей и еще одно изображеніе одного изъ полученныхъ нами изображеній относительно продолженія одной изъ упомянутыхъ осей. Какъ отличить эти точки другъ отъ друга?

Мы достигнемъ этого, если мы для обозначенія координатъ введемъ въ наши изслѣдованія отрицательныя числа.

Мы будемъ абсциссы, которыя откладываются отъ начала координатъ направо, считать положительными, а тѣ, которыя откладываются налѣво—отрицательными. Ординаты, откладываемыя наверхъ—положительными, внизъ—отрицательными.

Такъ что точка, которая лежитъ влѣво отъ оси y -ковъ на 3 см. и вверхъ отъ оси x -совъ на 2 см. имѣетъ координаты

$$x = -3 \quad y = 2.$$



Черт. 6.

Такимъ образомъ вся плоскость чертежа, какъ уже было сказано, распадается на четыре квадранта, для которыхъ

I квадр.:	$x > 0$	$y > 0$
II квадр.:	$x < 0$	$y > 0$
III квадр.:	$x < 0$	$y < 0$
IV квадр.:	$x > 0$	$y < 0$.

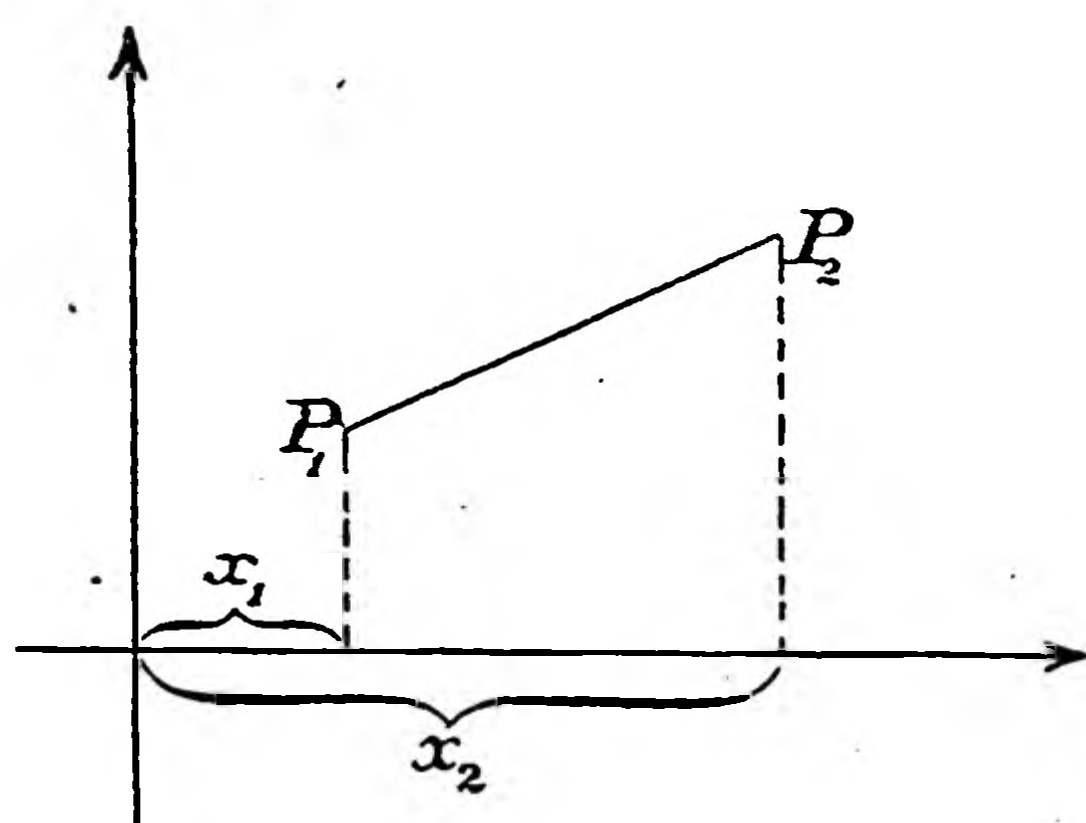
Мы получаемъ, такимъ образомъ, всѣ 4 комбинаціи знаковъ. Теперь у насъ установлено совершенно однозначное соотвѣтствіе координатъ и точекъ для всей плоскости: каждой парѣ чиселъ соотвѣтствуетъ одна точка и каждой точкѣ одна пара чиселъ.

Существеннымъ тутъ является не то, какое изъ направленій мы считаемъ положительнымъ и какое отрицательнымъ; важнымъ является то, что двумъ отрѣзкамъ одинаковой длины, но противоположно направленнымъ, мы приписываемъ различные знаки. Пока не встрѣтится какого-нибудь особеннаго случая, мы постоянно будемъ придерживаться нашего правила знаковъ.

*) Тутъ авторъ, становясь на конкретную точку зрѣнія, представляетъ себѣ ось, какъ пересѣченіе поверхности плоскаго зеркала съ плоскостью чертежа и затѣмъ изслѣдуетъ изображеніе данной точки (Spiegelung) въ данномъ зеркалѣ

Раньше всего надо рѣшить вопросъ, будутъ ли справедливы формулы предыдущаго параграфа, которыя были выведены только для точекъ перваго квадранта; или для каждаго отдѣльнаго новаго случая нужно выводить новыя формулы.

Намъ нужно рѣшить вопросъ, всегда ли разность $(x_2 - x_1)$ представляетъ изъ себя проекцію на ось x -совъ разстоянія между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .



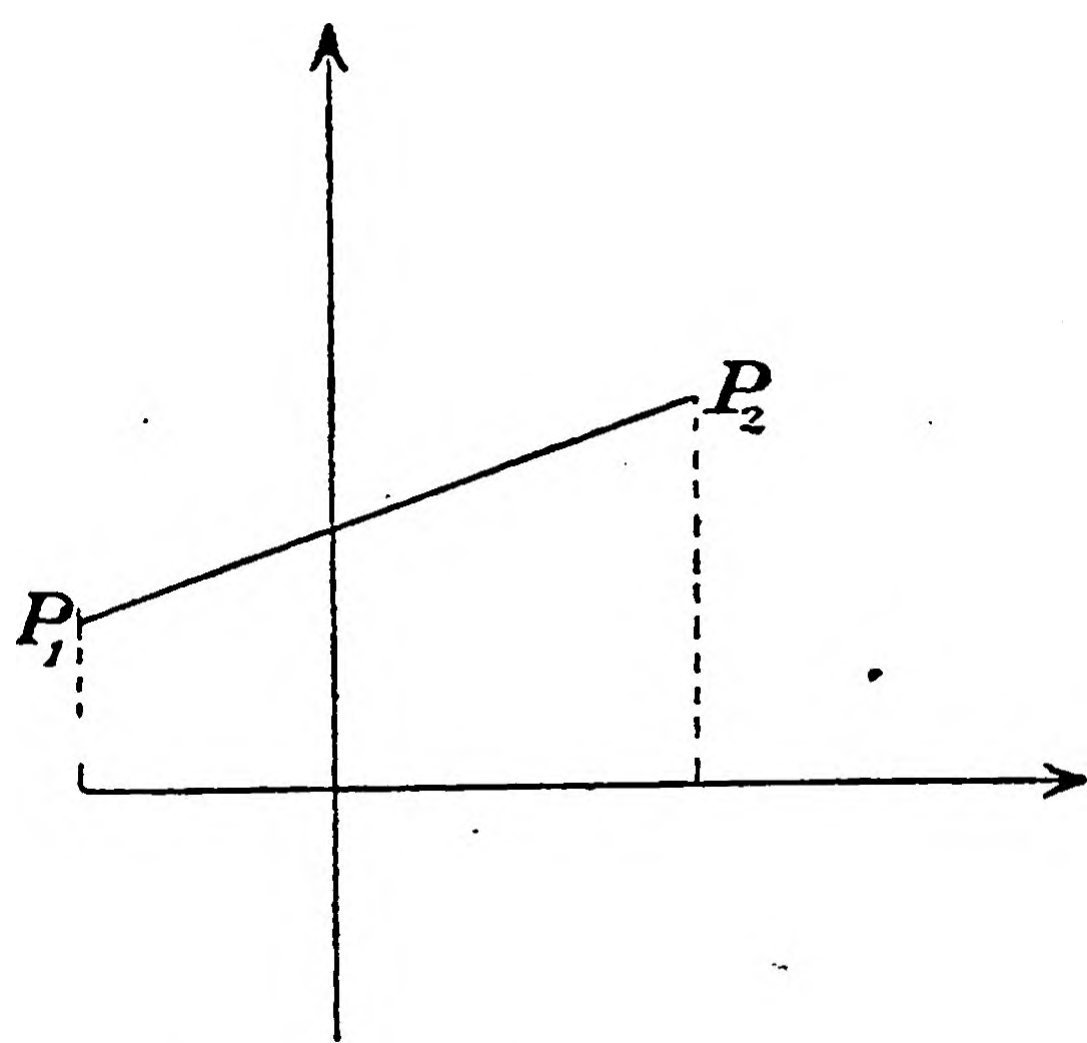
Черт. 7.

Если обѣ абсциссы положительны, то проекція равна абсолютному значенію этой разности.

Притомъ мы видимъ, что эта разность положительна или отрицательна, въ зависимости отъ того, больше ли x_2 , чѣмъ x_1 , или наоборотъ; т. е. въ зависимости отъ того, лежитъ ли вторая точка вправо или влѣво отъ первой. Мы

можемъ сказать: для двухъ точекъ перваго квадранта разность $(x_2 - x_1)$ равна по величинѣ и по направленію проекціи на ось x -совъ отрезка P_1P_2 . Если x_1 и x_2 суть обѣ величины отрицательныя, то абсолютное значеніе разности $(x_2 - x_1)$ тоже равно проекціи, причемъ эта проекція положительна, если x_2 алгебраически больше x_1 или, по абсолютному значенію меньше x_1 . И тутъ также $x_2 - x_1$ положи-

тельна или отрицательна, въ зависимости отъ того, лежитъ ли точка P_2 влѣво или вправо отъ точки P_1 . Такъ что $x_2 - x_1$ даетъ намъ проекцію на ось x -совъ, линіи P_1P_2 по величинѣ и направленію.



Черт. 8.

Если x_1 отрицательное число, а x_2 положительное, то разность $x_2 - x_1$ представляетъ изъ себя сумму абсолютныхъ значеній абсциссъ обѣихъ точекъ. Въ этомъ случаѣ, какъ показываетъ чертежъ, дѣйствительно, проекція положи-

тельна и равна этой суммѣ; значитъ формулировка правильна.

Остается еще одинъ случай, когда $x_1 > 0$, а $x_2 < 0$. Этотъ случай мы можемъ свести на предыдущій, если мы помѣняемъ ролями величины x_1 и x_2 .

При этой перемѣнѣ мѣняется знакъ разности $x_2 - x_1$, но также и знакъ проекціи, такъ что согласіе знаковъ остается. Резюмируя все вышесказанное, мы можемъ высказать слѣдующее:

Разность $x_2 - x_1$ представляетъ во всѣхъ случаяхъ про-

екцію на ось x -совъ отрѣзка P_1P_2 по величинѣ и направленію, какъ бы ни были расположены точки P_1 и P_2 по отношенію къ координатнымъ осямъ. Тоже относится и къ разности ординатъ $y_2 - y_1$

Отсюда слѣдуетъ, что формула разстоянія двухъ точекъ другъ отъ друга (§ 8, 1) справедлива для всякаго положенія этихъ точекъ, причемъ обѣ разности $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ представляютъ изъ себя во всѣхъ случаяхъ катеты прямоугольнаго треугольника, гипотенузой котораго служитъ искомое разстояніе.

Вопросъ о знакѣ въ этомъ случаѣ роли не играетъ, такъ какъ въ формулу входятъ лишь квадраты этихъ величинъ; однако мы тотчасъ придемъ къ вопросу о знакѣ, если займемся рѣшеніемъ вопроса о томъ, справедлива ли формула, выведенная нами для tg -са угла наклоненія линіи P_1P_2 къ оси x -совъ (§ 8, 4) и для случаевъ отличныхъ отъ того, который нами тамъ разобранъ.

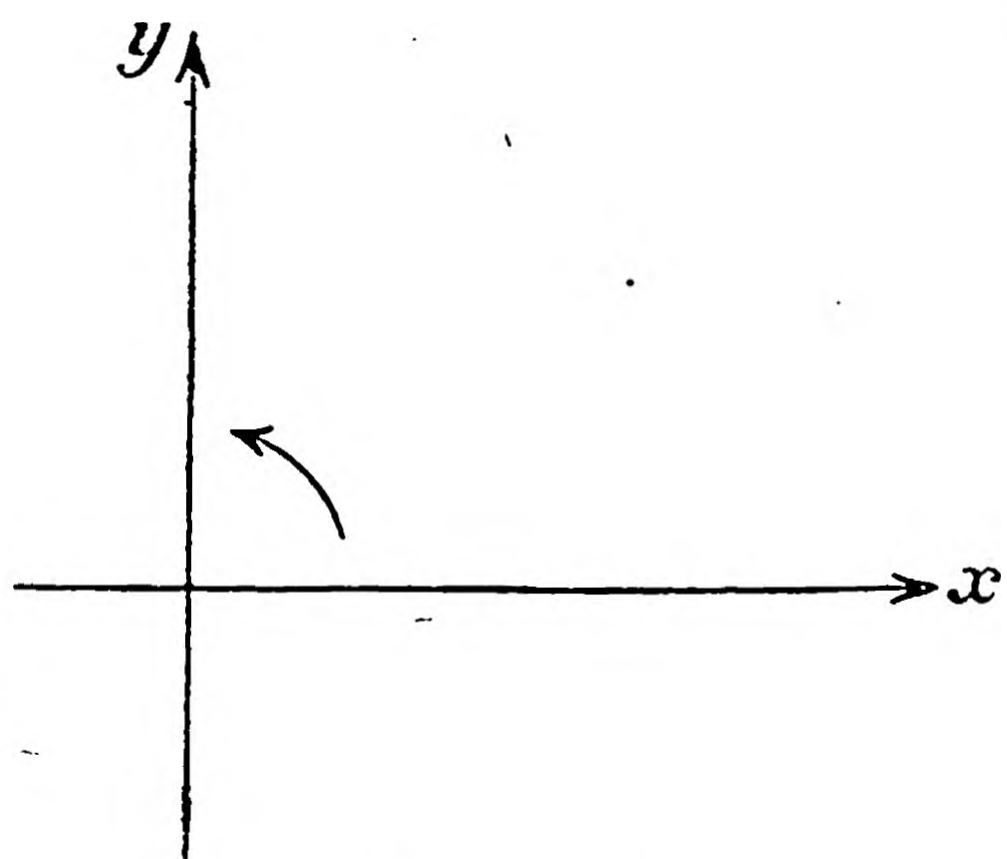
Дѣло требуетъ болѣе подробнаго изслѣдованія. Мы уже условились отличать на извѣстномъ протяженіи (огранич. отрѣзкѣ прямой) начальную и конечную точку и противоположныя направленія отличать другъ отъ друга знакомъ.

И для угловъ намъ нужно ввести соответственное условіе. Для каждаго угла мы тоже будемъ отличать начальную и конечную сторону и будемъ обращать вниманіе на то направленіе, въ которомъ намъ надо вращать начальную сторону до совпаденія съ конечной стороной.

Тутъ мы совершенно ничѣмъ не связаны въ выборѣ того или другого условія (подобно тому, какъ мы въ вопросѣ о направленіи совершенно произвольно дѣлали отличіе между правой и лѣвой стороной). Мы условимся то направленіе, въ которомъ движется указатель солнечныхъ часовъ въ умѣренномъ сѣверномъ поясѣ, слѣдовательно, и то направленіе, въ которомъ движется стрѣлка обыкновенныхъ часовъ, считать отрицательнымъ; противоположное направленіе — положительнымъ. Надо замѣтить, что это различіе можно провести только въ томъ случаѣ, если смотрѣть на плоскость, въ которой взять уголъ, съ опредѣленной стороны. Но, въ противоположность соглашенію о знакахъ отрѣзковъ прямыхъ, мы, вводя это условіе, сразу рѣшаемъ вопросъ о знакѣ любого угла, взятаго въ плоскости. Нельзя вѣдь два равныхъ, но противоположныхъ по знаку угла заставить совпасть, перемѣщая ихъ по плоскости; если они первоначально отличались знакомъ, то, какъ бы ихъ ни передвигать по плоскости, они все равно будутъ отличаться знаками.

При нашемъ условіи необходимо повернуть ось X -совъ на $+90^\circ$ или на -270° , чтобы заставить ее совпасть съ положительнымъ направленіемъ оси Y -ковъ.

Мы не будемъ ограничиваться только острыми углами, мы въ наши формулы введемъ и тупые углы (меньше и больше 180°). Въ гониометрии вводятся соглашенія относит. знаковъ тригонометр. функций такихъ угловъ. Напримѣръ *sinus* въ третьей и четвертой четверти; *cosinus* во второй и третьей четверти, *tangens* во второй и четвертой четверти — отрицательны.



Черт. 9.

Мы имѣемъ также формулы:

$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$$

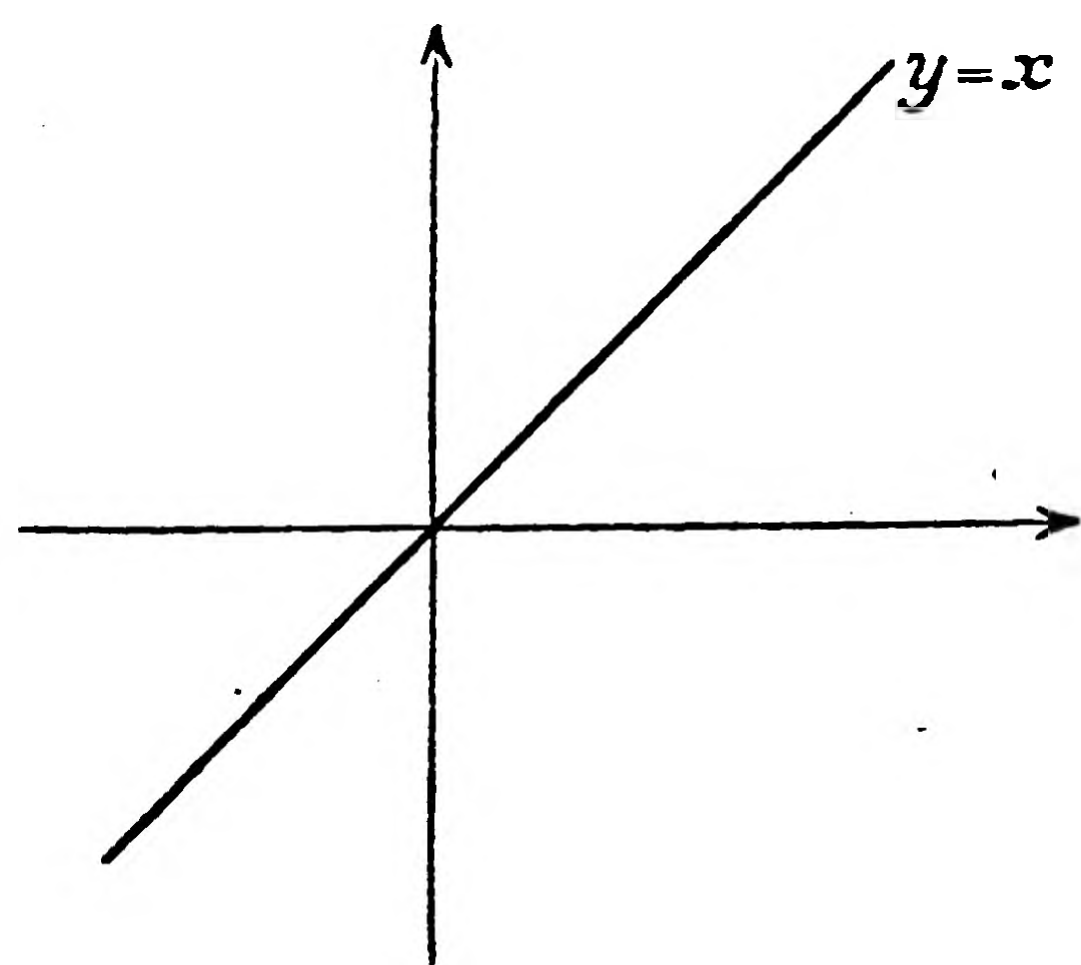
$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Если принять во вниманіе эти распространенія, то мы убѣдимся въ справедливости формулъ (§ 8, 2, 4) для всѣхъ случаевъ.

И наоборотъ, мы можемъ предположить, что мы не имѣемъ никакого понятія о гониометрии, тогда мы подъ *sinus*'омъ, *cosinus*'омъ и *tg*'сомъ угла можемъ какъ разъ подразумѣвать тѣ величины, съ присущими имъ знаками, которыя получаются изъ формулъ § 8, притомъ величинѣ r будемъ всегда приписывать знакъ $+$, разности же координатъ будетъ брать съ ихъ знаками.

Возьмемъ теперь уравненія линий, о которыхъ мы говорили въ § 8, и посмотримъ, что съ ними будетъ, если ввести въ нихъ и отрицательныя значенія координатъ.



Черт. 10.

Возьмемъ сначала уравненіе $y = x$. Во второмъ и четвертомъ квадрантѣ не можетъ быть точекъ, удовлетворяющихъ этому уравненію. Ибо координаты точекъ въ этихъ квадрантахъ имѣютъ противоположные знаки.

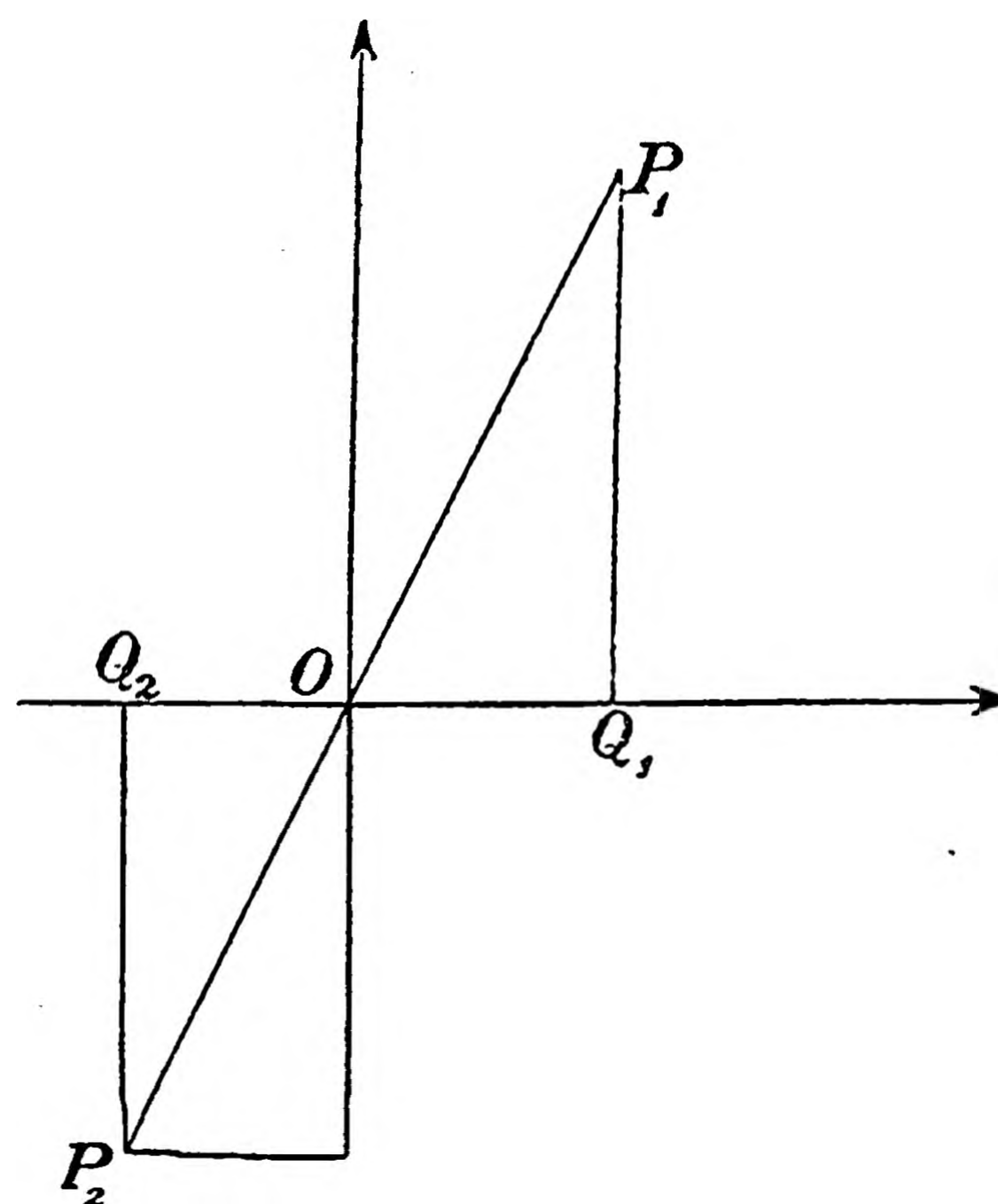
Но такія точки могутъ лежать въ третьемъ квадрантѣ и тоже на биссектрисѣ угла. Эта же биссектриса есть продолженіе биссектрисы координатнаго угла перваго квадранта.

Итакъ: если мы въ наши разсмотрѣнія введемъ и отрицательныя значенія y и x , то всѣ точки, удовлетворяющія уравненію $y = x$, лежатъ на одной и той же прямой, которая служитъ общей биссектрисой перваго и третьяго квадранта. И всѣ точки этой прямой удовлетворяютъ данному уравненію.

Итакъ, уравненіе и линія совершенно соотвѣтствуютъ другъ другу; мы можемъ сказать: уравненіе $y = x$ есть уравненіе упомянутой линіи.

Тѣ же соображенія мы можемъ примѣнить и къ уравненію $y = 2x$.

И въ этомъ случаѣ нельзя разсматривать точекъ 2-го и 4-го квадрантовъ; точки же 3-го квадранта могутъ удовлетворять этому уравненію. Если мы рассмотримъ двѣ точки 1-го и 3-го квадранта, P_1 и P_2 , которыя удовлетворяютъ данному уравненію, то чертежъ показываетъ намъ, что треугольнички $O P_1 Q_1$ и $O P_2 Q_2$ подобны, а это значитъ, что три точки P_1 , O и P_2 лежатъ на одной прямой.



Черт. 11.

Другими словами, всѣ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію $y = 2x$, лежатъ на прямой, проходящей черезъ начало, и всѣ точки этой прямой удовлетворяютъ данному уравненію. Итакъ, уравненіе это есть уравненіе упомянутой прямой.

§ 10. Дальнѣйшіе примѣры уравненій линій.

Можно сразу видѣть, что въ послѣднемъ примѣрѣ число 2 играетъ совершенно второстепенную роль.

Мы бы сдѣлали совершенно тѣ же заключенія, если бы на мѣстѣ 2 стояло какое-нибудь другое (не непременно цѣлое) число m .

Мы можемъ сказать, что ур-ніе.

$$y = mx \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ m есть постоянный множитель, есть ур-ніе прямой, проходящей черезъ начало координатъ и составляющей съ положительнымъ направлениемъ оси x -совъ уголъ, тангенсъ котораго равенъ m .

Если $m > 0$, то прямая проходитъ въ I и III квадрантахъ.

Если $m < 0$, то прямая проходитъ во II и IV квадрантахъ.

Если $m = 0$, то она совпадаетъ съ осью x -совъ.

Значитъ: $y = 0$ есть уравненіе оси x -совъ.

Также $x = 0$ есть уравненіе оси y -ковъ.

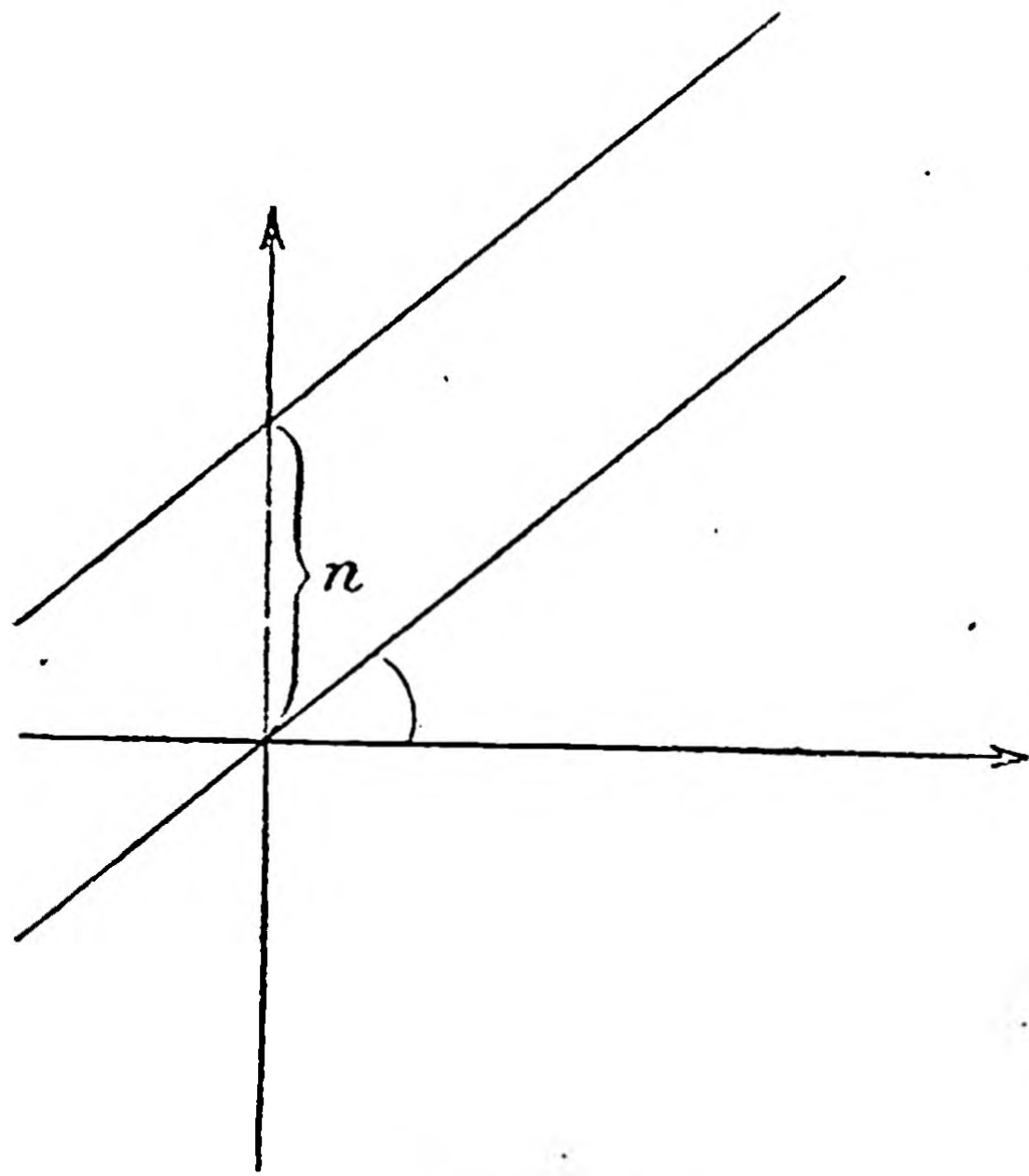
Изслѣдуемъ теперь ур-ніе:

$$y = mx + n \dots \dots \dots (2)$$

чтобы найти одну точку, координаты которой удовлетворяли бы

данному ур-нію, найдемъ сначала точку, координаты которой удовлетворяютъ ур-нію (1) и затѣмъ найденную ординату увеличимъ на число n .

Чтобы найти всѣ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ ур-нію (2), найдемъ всѣ точки, удовлетворяющія ур-нію (1), т. е. другими словами, черезъ начало координатъ проведемъ линію, тангенсъ угла которой съ положительнымъ направлениемъ оси x -совъ равенъ m и затѣмъ передвинемъ эту прямую самой себѣ параллельно



Черт. 12.

на разстояніе n въ направленіи оси y -ковъ. Или: проведемъ черезъ точку $(x = 0 \quad y = n)$ прямую, параллельную первой линіи.

Мы можемъ теперь сказать: Всякое уравненіе вида (2) представляетъ изъ себя прямую линію.

Мы можемъ высказать и обратную теорему:

Уравненіе всякой прямой, проходящей не параллельно оси y -ковъ, можетъ быть написано въ формѣ (2).

Для этого только нужно подѣ числомъ n разумѣть величину того отрѣзка, который прямая дѣлаетъ на оси y -ковъ, а подѣ m тангенсъ угла, который эта прямая составляетъ съ осью x -совъ.

Уравненіе прямой, параллельной оси y -ковъ, есть

$$x = a \dots \dots \dots (3)$$

Подѣ числомъ a мы разумѣемъ тутъ постоянную, ибо всѣ точки такой прямой имѣютъ одну и ту же постоянную абсциссу.

Если всѣ члены уравненія (2) умножить на нѣкоторый постоянный множитель k , то уравненіе отъ этого совершенно не мѣняется; всѣ пары значеній (x, y) , которыя удовлетворяли уравненію (2), будутъ удовлетворять и вновь полученному уравненію.

Такимъ образомъ, мы можемъ представить ур-ніе (2) въ формѣ:

$$ax + by + c = 0 \dots \dots \dots (4)$$

(Мы тутъ всѣ члены перенесли въ лѣвую часть равенства; зависимость между новыми и старыми коэффиціентами есть:

$$a = -mk \quad b = k \quad c = -nk).$$

Это уравненіе заключаетъ въ себѣ и ур-ніе (3) какъ частный случай.

Мы можемъ такъ формулировать нашъ результатъ: Уравненіе каждой прямой линейно, и каждое линейное уравненіе представляетъ собой прямую.

Уравненіе называется линейнымъ, если оно, по освобожденіи ур-нія отъ знаменателей и радикаловъ, не содержитъ ни степеней неизвѣстныхъ выше первой, ни попарныхъ произведеній неизвѣстныхъ.

Уравненіе $x^2 + y^2 = r^2$ (5)

удовлетворяется координатами всѣхъ точекъ, которыя отстоятъ отъ начала на разстояніе r .

Но такія точки образуютъ окружность радіуса r .

Значитъ:

Уравненіе (5) есть уравненіе окружности радіуса r съ центромъ въ началѣ координатъ.

Точно также уравненіе

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \dots\dots\dots (6)$$

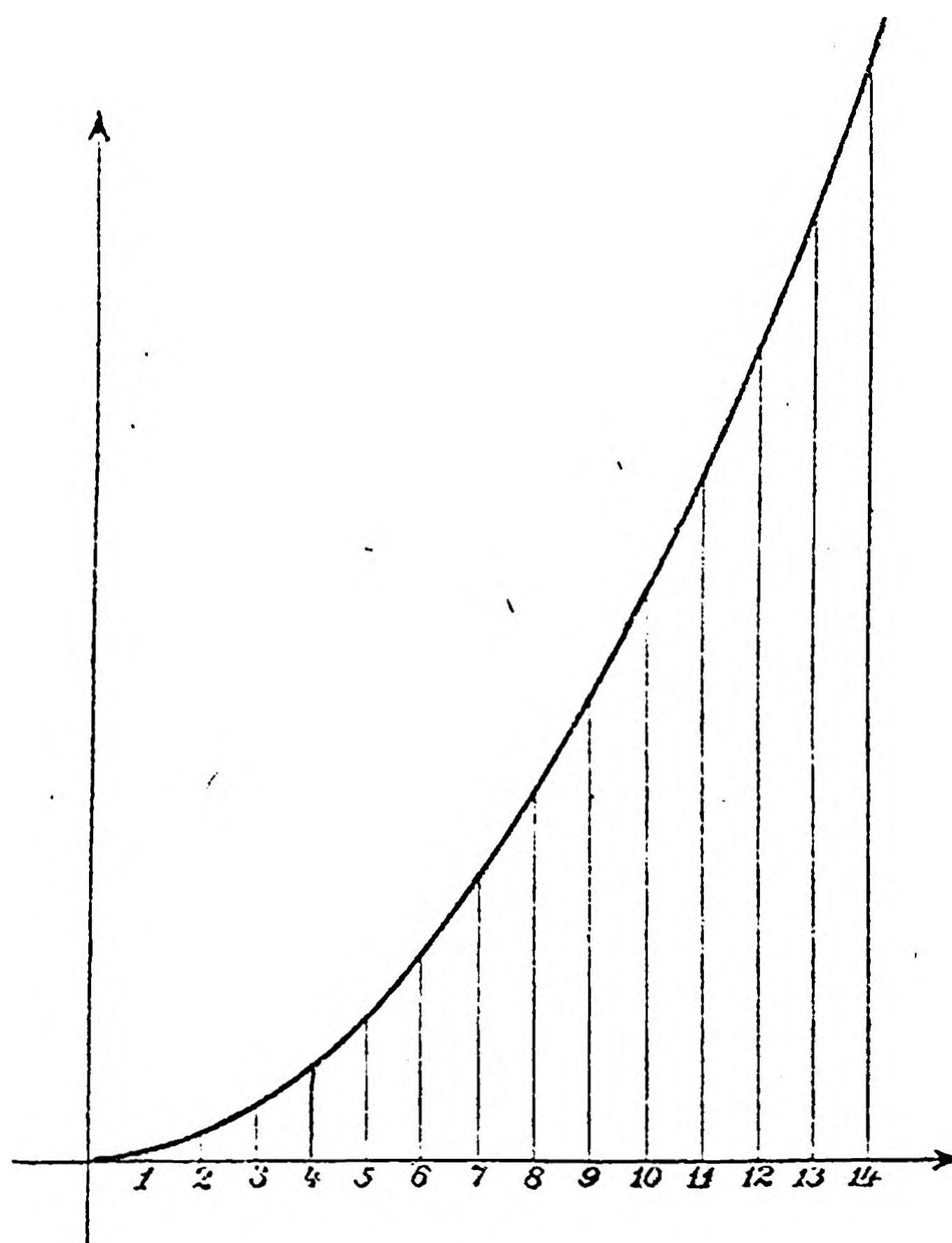
гдѣ a, b, r суть величины постоянныя, есть уравненіе окружности радіуса r съ центромъ въ точкѣ (a, b) .

Изслѣдуемъ еще уравненіе:

$$y = \frac{x^2}{10} \dots\dots\dots (7)$$

Это уравненіе не представляетъ изъ себя ни прямой, ни окружности. Оно представляетъ изъ себя кривую, которая не изучается въ начальныхъ курсахъ геометріи. Безъ доказательства замѣтимъ, что мы можемъ получить эту кривую, если мы пересѣчемъ прямой круговой конусъ плоскостью, параллельной одной изъ образующихъ этого конуса.

Эта кривая называется параболой; но т. к. названіе параболы присвоено многимъ кривымъ, то этой кривой присвоено еще имя того греческаго математика, который очень много занимался ея изученіемъ, а именно, она называется — параболой Апполонія.



Черт. 13.

Представленіе о формѣ этой кривой мы можемъ получить, если

мы на чертежѣ для данныхъ значеній x -са найдемъ соотвѣтственные значенія y -ка, пользуясь прямоугольной системой координатъ.

Для

$x = 0$	$x = 8$	$y = 0$	$y = 6,4$
1	9	0,1	8,1
2	10	0,4	10,0
3	11	0,9	12,1
4	12	1,6	14,4
5	13	2,5	16,9
6	14	3,6	19,6
7	15	4,9	22,5

Численно равнымъ значеніямъ x -са, независимо отъ знака, соотвѣтствуютъ равныя значенія y -ка, а потому во второмъ квадрантѣ расположена вѣтвь кривой, симметричная относительно оси y -ковъ вѣтви въ первомъ квадрантѣ.

Если мы хотимъ изучить нашу кривую подробнѣе, то можемъ взять болѣе тѣсныя промежутки для x -са, напримѣръ для

$$\begin{array}{cccc} x = & 2,2 & 2,4 & 2,6 & 2,8 \\ y = & 0,48 & 0,58 & 0,68 & 0,78 \end{array}$$

§ 11. Задача проведенія касательной.

Въ элементарной геометріи показывается, какъ провести въ любой точкѣ окружности касательную къ ней. Каждая прямая, проходящая черезъ точку A окружности, пересѣкаетъ эту окружность еще въ одной точкѣ и называется сѣкущей; исключеніе представляетъ прямая, проходящая черезъ точку A перпендикулярно къ радіусу: эта прямая не встрѣчаетъ ни въ какой другой точкѣ окружности и называется касательной къ ней.

Какъ теперь это понятіе о касательной, установленное нами для окружности, перенести на другія кривыя?

Тутъ ужъ намъ не приходится говорить о прямомъ углѣ, который прямая составляетъ съ радіусомъ, ибо это есть нѣчто присущее только окружности (это свойство могло бы даже служить исходнымъ въ опредѣленіи самой окружности). И то обстоятельство, что кривая съ касательной имѣетъ только одну общую точку, не можетъ намъ послужить для опредѣленія касательной. Ибо, съ одной стороны, мы легко можемъ нарисовать такую кривую, что черезъ одну изъ ея точекъ будетъ проходить не одна прямая, а безчисленное множество прямыхъ, причемъ такихъ, которыя ни въ какой другой точкѣ угла не встрѣчаютъ нашей кривой (фиг. 14).

Съ другой стороны, мы легко можемъ нарисовать такую кривую (см. фиг. 15), которая будетъ имѣть такія точки, черезъ которыя

нельзя провести прямой безъ того, чтобы она непременно еще въ какой-нибудь точкѣ не встрѣтила кривой.

Поэтому для болѣе цѣлесообразнаго обобщенія рассмотримъ нѣсколько ближе построение касательной къ окружности.

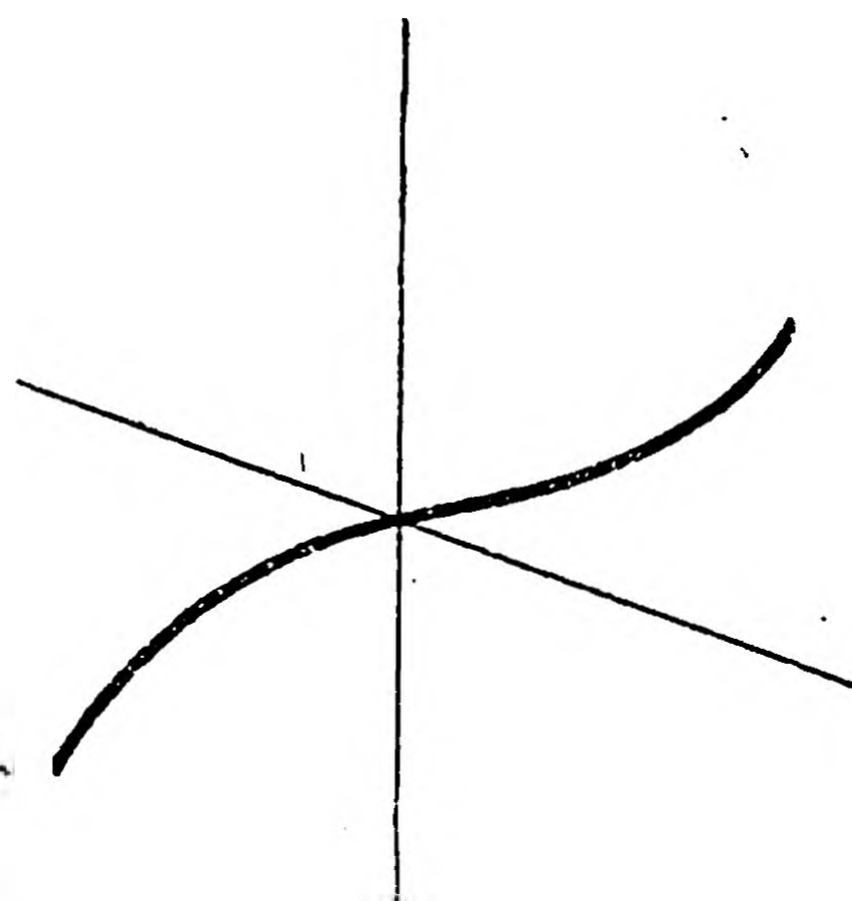
Для того, чтобы избѣгнуть неудобствъ подобныхъ тѣмъ, какія были отмѣчены нами въ послѣднемъ примѣрѣ (фиг. 15), не будемъ разсматривать цѣлой кривой сразу, а ограничимся только нѣкоторой дугой кривой, по обѣ стороны отъ нѣкоторой ея точки, въ которой мы и хотимъ провести касательную къ ней.

Для окружности тоже будемъ разсматривать только нѣкоторую опредѣленную дугу около разсматриваемой точки A . Причемъ мы исключаемъ случай совпаденія точки A съ однимъ изъ концовъ дуги. Эту точку соединимъ прямыми съ другими точками дуги. Всѣ эти прямыя будутъ лежать внутри нѣкотораго угла или, лучше сказать, внутри двухъ вертикальныхъ угловъ, которые образуются прямыми, соединяющими точку A съ концами дуги. И обратно — всякая прямая, лежащая внутри этихъ угловъ, пересѣчетъ дугу еще въ одной точкѣ, кромѣ одной единственной прямой, проходящей черезъ точку A . Эта то прямая и есть касательная. Оба вертикальныхъ угла этой прямой дѣлятся на двѣ части, причемъ каждая прямая, проходящая черезъ точку A и лежащая въ одной изъ этихъ частей, встрѣтитъ дугу еще въ одной точкѣ слѣва отъ A ; а прямая, лежащая въ другой части — встрѣтитъ нашу дугу вправо отъ точки A .

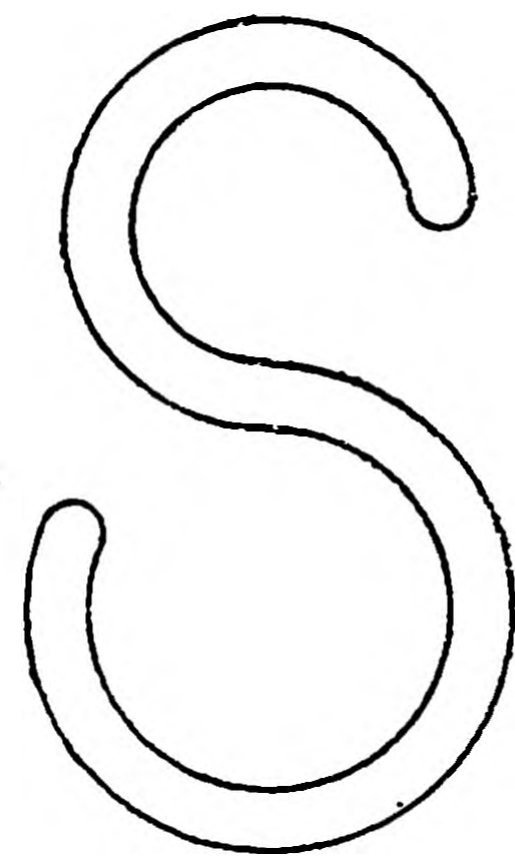
Касательная въ точкѣ A дуги окружности можетъ быть опредѣлена теперь такъ:

Это есть прямая, лежащая на границѣ между тѣми прямыми, проходящими черезъ точку A , которыя встрѣчаютъ дугу влѣво отъ точки A , и тѣми, которыя встрѣчаютъ дугу вправо отъ нея. Точка A называется точкой касанія.

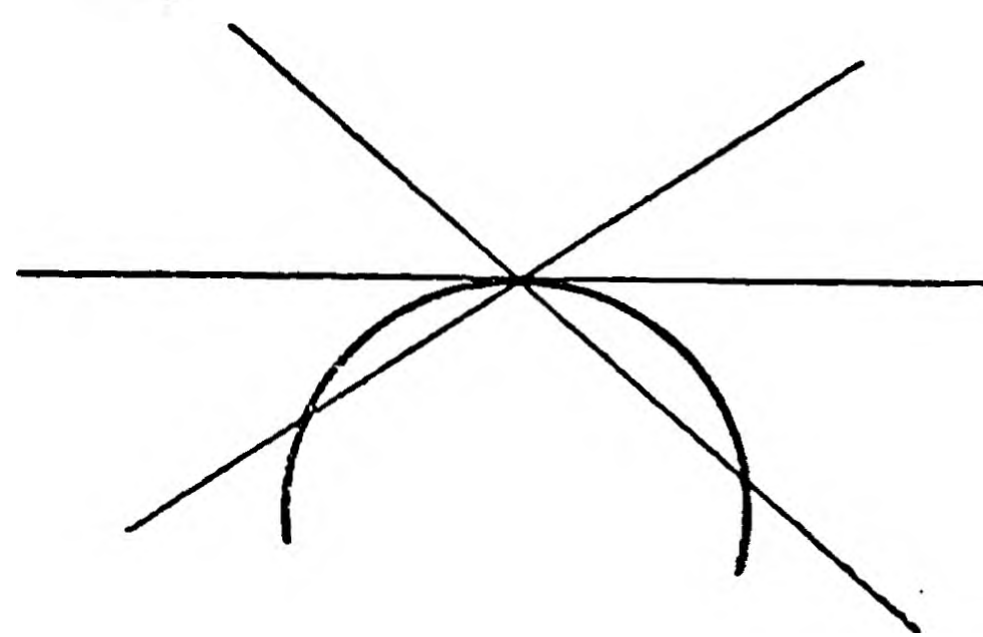
Чѣмъ меньше прямая AB отстоитъ отъ касательной (т. е. чѣмъ меньше уголъ, который она образуетъ съ касательной), чѣмъ ближе лежитъ точка B къ точкѣ касанія A . И обратно — чѣмъ ближе точка



Черт. 14.



Черт. 15.



Черт. 16.

B лежитъ къ точкѣ касанія, тѣмъ меньше уголъ, которая образуетъ эта прямая съ касательной.

Это понятіе можетъ быть перенесено и на дуги другихъ кривыхъ.

Для дуги параболы Апполонія оно также имѣетъ мѣсто, какъ для дуги окружности. И въ этомъ случаѣ мы опредѣлимъ касательную, какъ прямую, лежащую на границѣ между тѣми прямыми, которыя проходятъ черезъ разсматриваемую точку и встрѣчаютъ дугу кривой вторично слѣва отъ разсматриваемой точки, и тѣми, которыя встрѣчаютъ эту дугу вправо отъ нея.

Вообще подобное опредѣленіе касательной имѣетъ мѣсто для любой болѣе или менѣе равномерной кривой, за исключеніемъ нѣкоторыхъ особенныхъ точекъ (острія, угловыя точки).

Будетъ ли это опредѣленіе правильно, если мы представимъ нашу кривую, какъ геометрическое изображеніе какого-нибудь весьма сложнаго аналитическаго закона, этотъ вопросъ мы пока можемъ оставить въ сторонѣ.

Къ тѣмъ кривымъ, съ которыми намъ придется встрѣчаться, наше опредѣленіе вполне примѣнимо.

При рѣшеніи настоящей задачи мы воспользуемся средствами аналитической геометріи, намѣченными въ предыдущихъ параграфахъ.

Предположимъ, что кривая, къ которой мы хотимъ провести касательную, аналитически задана уравненіемъ:

$$y = f(x),$$

причемъ x мы разсматриваемъ, какъ независимую переменную, а y какъ функцію.

Координаты точки касанія пусть будутъ (x_1, y_1) . Эту точку соединимъ съ сосѣдней точкой (x_2, y_2) . Линію, соединяющую точку (x_1, y_1) и (x_2, y_2) мы опредѣлимъ заданіемъ тангенса угла, который эта прямая образуетъ съ осью x -совъ.

По формулѣ (4) § 8 мы будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Напримѣръ, для послѣдняго примѣра:

$$y_2 = \frac{1}{10} x_2^2 \quad y_1 = \frac{1}{10} x_1^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{1}{10} \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{1}{10} (x_2 + x_1); \text{ или,}$$

вводя для разности $x_2 - x_1$ обозначеніе h , откуда $x_2 = x_1 + h$, по-

лучимъ:

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{1}{5} x_1 + \frac{1}{10} h.$$

Если $h > 0$, т. е. вторая точка лежитъ вправо отъ первой, то

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} > \frac{x_1}{5}$$

Если же $h < 0$, т. е. вторая точка лежитъ влѣво отъ первой, то

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} < \frac{x_1}{5}$$

Та линія, для которой

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_1}{5}$$

служитъ раздѣломъ линій, встрѣчающихъ нашу кривую вторично влѣво и вправо отъ точки (x_1, y_1) . Это и есть касательная къ нашей параболѣ въ точкѣ (x_1, y_1) .

Опредѣленіе касательной въ нѣкоторой точкѣ кривой позволяетъ намъ точнѣе нарисовать кривую около этой точки, особенно въ томъ случаѣ, когда для построения кривой мы ограничиваемся небольшимъ количествомъ точекъ.

Если, напримѣръ, намъ надо опредѣлить касательную къ параболѣ въ точкѣ, для которой $x = 4$, то, пользуясь трехзначными логарифмическими таблицами, найдемъ:

$$\log 4 = 0,602$$

$$\log 5 = 0,699$$

Значитъ

$$\log \frac{4}{5} = 0,903 - 1.$$

Такъ какъ въ логарифм. таблицахъ тригонометрическихъ функцій всѣ логарифмы увеличены на 10, то мы должны найти такой уголъ α , для котораго

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9,903 - 10.$$

Этотъ уголъ (съ точностью до 5 минутъ)

$$= 38^\circ 40'.$$

(Если вычисленіе дѣлается только съ цѣлью дать точный рисунокъ, то бѣльшей точности вычисленій вовсе не требуется).

Подобно тому, какъ для параболы, мы можемъ найти касательную и къ другимъ кривыхъ. Если намъ нужно провести касательную въ точкѣ (x_1, y_1) , то мы возьмемъ вспомогательную точку (x_2, y_2) на той же кривой и ее соединимъ съ точкой (x_1, y_1) нѣкоторой хордой.

Мы получимъ тангенсъ угла, который эта хорда образуетъ съ положительнымъ направлениемъ оси x , взявши отношеніе разности

ординатъ къ разности абсциссъ. Если мы въ найденномъ результатѣ разность абсциссъ положимъ равной нулю, то мы и получимъ тангенсъ угла, который касательная въ точкѣ (x_1, y_1) образуетъ съ осью x -совѣ.

Но если не обращать вниманія на буквы, то вѣдь это есть тотъ же математическій процессъ, при помощи котораго мы въ § 5 отъ средней скорости движенія точки перешли къ скорости въ данный моментъ.

Какъ и тамъ, величину, на которую мы раньше дѣлили, мы полагаемъ равной нулю.

Другими словами, мы скрытымъ образомъ дѣлаемъ дѣленіе на нуль.

Но и тутъ можно говорить о законности данныхъ дѣйствій на основаніи слѣдующихъ соображеній.

I. Въ тѣхъ случаяхъ, которыми мы занимаемся, мы получаемъ вполне опредѣленный результатъ задачи; мы получаемъ опредѣленную прямую, и эту прямую мы вправѣ назвать касательной.

II. Для практическаго вычерчиванія или построенія, т. е. въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ рѣчь можетъ идти только объ очень ограниченной точности, мы легко можемъ хорду между двумя близкими точками замѣнить касательной и наоборотъ.

III. Точность мы можемъ сдѣлать сколько угодно большой, если только взять обѣ точки достаточно близко одну отъ другой.

§ 12. Взаимное отношеніе двухъ способовъ введенія въ дифференціальное исчисленіе.

Сравнимъ теперь оба метода, при помощи которыхъ мы пришли къ основному понятію дифференціального исчисленія. Мы въ обоихъ случаяхъ, какъ въ § 5, такъ и въ § 11, составили сначала частное отъ дѣленія разности двухъ значеній зависимой перемѣнной на разность соотвѣтственныхъ значеній независимой перемѣнной и затѣмъ въ полученномъ результатѣ вторую разность положили равной нулю.

Оба случая мы можемъ связать вмѣстѣ, если только мы прибѣгнемъ къ графическому изображенію зависимости между величиной s и временемъ t .

Конкретно мы можемъ себѣ представить это графическое изображеніе получающимся такъ: вообразимъ себѣ что, падающее тѣло снабжено пишущимъ штифтомъ, а вертикальная плоскость рисунка въ продолженіе его движенія движется въ горизонтальномъ направленіи въ сторону отрицательныхъ t съ равномерною скоростью; тогда въ плоскости рисунка мы получимъ линію, уравненіемъ которой и будетъ служить упомянутая въ § 5 зависимость между разстояніемъ и временемъ:

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Но это есть уравнение параболы.

Въ механическомъ практикованіи параграфа 5 отношеніе:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

дало намъ величину средней скорости паденія точки въ промежутокъ времени отъ t_1 до t_2 ; въ геометрическомъ трактованіи параграфа 11 это самое отношеніе представляетъ изъ себя тангенсъ угла который сѣкущая образуетъ съ осью x -совъ.

Полагая въ первомъ случаѣ разность временъ равной нулю, мы получили скорость паденія точки въ моментъ t_1 . Во второмъ случаѣ та же операція дастъ намъ выраженіе тангенса угла, который касательная въ точкѣ, соотвѣтствующей t_1 , образуетъ съ осью x -совъ.

Мы можемъ теперь высказать слѣдующее:

Если мы t нанесемъ на оси абсциссъ, а значенія какой-нибудь съ этимъ временемъ связанной переменнй величины на оси ординатъ, въ нѣкоторой прямоугольной координатной системѣ, то изображеніе закона измѣненія этой величины мы получимъ въ видѣ нѣкоторой кривой. Если въ какой-нибудь точкѣ этой кривой мы проведемъ касательную, то тангенсъ угла, который образуетъ касательная съ осью x -совъ дастъ намъ мѣру измѣненія скорости движенія въ данный моментъ данной переменнй величины.

Важно обратить вниманіе на масштабы нашего графика. Упомянутый тангенсъ только тогда даетъ намъ истинную величину измѣненія скорости, если единица времени на оси абсциссъ и единица другой величины на оси ординатъ представлена отрѣзкомъ одинаковой длины.

Если же масштабъ для ординатъ взять болѣе крупнымъ или болѣе мелкимъ, то кривая будетъ или болѣе крутая или болѣе пологая; это нужно всегда имѣть въ виду, если мы желаемъ судить по чертежу о скорости даннаго движенія.

§ 13. Задачи и обозначенія дифференциального исчисления.

Въ предыдущихъ §§ мы очень часто встрѣчались съ опредѣленными дѣйствіями надъ встрѣчавшимися намъ величинами, и эти дѣйствія такъ часто будутъ встрѣчаться намъ въ дальнѣйшемъ, что намъ будетъ полезно для этихъ дѣйствій ввести особыя названія и обозначенія, т. е. лучше сказать, воспользоваться тѣми, которыя введены въ науку математиками всѣхъ странъ. Раньше всего мы имѣемъ дѣло съ тѣмъ случаемъ, когда двѣ величины находятся въ такомъ отношеніи, что измѣненіе одной изъ нихъ неминуемо влечетъ за собой измѣненіе другой. Мы тогда говоримъ: обѣ переменныя связаны между собой.

Если рассуждать отвлеченно, то мы эту зависимость можем задать себѣ совершенно произвольно и затѣмъ изучать тѣ слѣдствія, которыя вытекаютъ изъ этой зависимости.

Если же анализъ свести на естественно-научную или геометрическую точку зрѣнія, то зависимость между величинами дается намъ нѣкоторымъ закономъ природы или закономъ геометріи. Напримѣръ, зависимость между абсциссой и ординатой точки окружности вытекаетъ непосредственно изъ геометрическаго опредѣленія самой окружности. Зависимость между стороной и противоположнымъ угломъ треугольника, въ которомъ двѣ другія стороны имѣютъ постоянныя значенія,—дается нѣкоторымъ геометрическимъ закономъ, а именно, тригонометрической теоремой синусовъ.

Зависимость между разстояніемъ и временемъ въ случаѣ паденія тѣла—физическимъ закономъ паденія тѣлъ.

Зависимость между временемъ реакціи и количествомъ переработаннаго вещества—законами химіи.

Такіе законы выражаются уравненіями между переменными величинами.

Причемъ не слѣдуетъ предрѣшать вопроса о томъ, достаточно-ли намъ будетъ при составленіи упомянутыхъ уравненій пользоваться простѣйшими знаками алгебры (+, —, ., :) или намъ потребуются другіе болѣе сложные знаки.

Въ большинствѣ случаевъ весьма цѣлесообразнымъ является рѣшить уравненіе относительно одной изъ переменныхъ, пусть, напримѣръ, относительно переменной y ; это значитъ выразить величину y черезъ x .

Напримѣръ, уравненіе окружности § 10 (5), рѣшенное относительно x , дастъ намъ:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Мы можемъ сказать въ этомъ случаѣ: тутъ x переменная независимая; y —переменная зависимая. Или: y есть явная функція отъ x -са.

Когда же уравненіе не было еще разрѣшено, то оно давало намъ y , какъ неявную функцію переменной x .

Которую изъ переменныхъ выбрать за независимую и которую за зависимую, это, конечно, въ чисто аналитическихъ изслѣдованіяхъ совершенно произвольно; въ приложеніяхъ анализа обыкновенно тоже природа задачи не ставитъ опредѣленныхъ требованій на этотъ счетъ; на выборъ зависимыхъ и независимыхъ переменныхъ имѣетъ вліяніе то, съ какой точки зрѣнія мы подходимъ къ рѣшенію задачи. Поэтому, можетъ быть, лучше, вмѣсто выраженія:

« x есть независимая переменная; y зависимая», говорить: «мы рассматриваемъ въ данномъ случаѣ x , какъ независимую переменную, а y , какъ величину отъ нея зависящую»...

Въ одномъ только случаѣ есть исключеніе: время можетъ быть рассматриваемо только, какъ переменная независимая, ибо измененіе его мы не можемъ рассматривать подчиненнымъ измененіямъ какой-нибудь другой величины. Но все-таки мы можемъ съ полнымъ основаніемъ высказать, на примѣръ, такое положеніе: «время, потребное для того или другого процесса, зависитъ отъ тѣхъ или другихъ условій»; или, на примѣръ, задать вопросъ: «сколько времени нужно, чтобы движущаяся точка достигла опредѣленнаго мѣста на своемъ пути?» Въ подобныхъ случаяхъ мы и время въ нашихъ математическихъ изслѣдованіяхъ можемъ рассматривать, какъ функцію другой переменной величины.

Очень часто намъ нужно только указать на то, что одна величина зависитъ отъ другой, хотя о самомъ видѣ зависимости мы или не хотимъ говорить, или ничего не можемъ сказать.

Тогда мы пишемъ просто:

$$y = f(x)$$

(читается это словами такъ: y -къ есть функція отъ x).

Скобка при x необходима, чтобы иначе $f x$ не принять за произведеніе этихъ двухъ величинъ. Значокъ f не выражаетъ собою величины, а только указываетъ на то, что y есть функція. Мы имѣемъ тутъ нѣкоторую аналогію съ символизацией алгебры, когда мы нѣкоторую неизвѣстную и совершенно неопредѣленную величину обозначаемъ одной буквой, ибо этимъ обозначеніемъ мы вовсе нашей величины не опредѣляемъ. Только тогда, когда одна и та же буква появляется въ формулахъ или вычисленіяхъ, и когда появленіе этой буквы замѣняетъ цѣлый періодъ, вродѣ: «мы тутъ встрѣчаемся съ тою же величиной, которую имѣли раньше»..., только тутъ мы имѣемъ возможность опѣнить преимущество краткаго буквеннаго обозначенія. Точно также и тутъ, когда мы пишемъ

$$y = f(x),$$

то этимъ еще не достигается особеннаго упрощенія; когда же мы напишемъ, на примѣръ, рядомъ два равенства

$$y = f(x) \quad r = f(x + h),$$

то эта запись замѣняетъ длинный періодъ, вродѣ слѣдующаго: « r получается изъ величины $x + h$ такъ же, какъ y полученъ изъ величины x ».

Если въ нѣкоторой задачѣ намъ встрѣчается нѣсколько законовъ зависимостей, то мы можемъ различныя зависимости отличать другъ

отъ друга индексами при буквѣ f , поставленными снизу; сверху значки писать не рекомендуется, ибо верхніе значки потомъ будутъ имѣть для насъ специальное значеніе. Или же употребляютъ для этой цѣли различныя буквы, имѣющія такъ или иначе нѣкоторое отношеніе къ f ; на примѣръ, большія буквы или соотвѣтственныя буквы другихъ алфавитовъ и близкіе къ нимъ; на примѣръ:

$$F, \varphi, \psi$$

и т. п. Этими буквами, по возможности, мы уже не будемъ обозначать величинъ.

Въ встрѣчавшихся до сихъ поръ изслѣдованіяхъ намъ приходилось разсматривать два значенія независимой переменнѣй x_1 и $x_2 = x_1 + h$, а также соотвѣтственныя значенія функціи:

$$y_1 = f(x_1) \quad y_2 = f(x_2) = f(x_1 + h)$$

и затѣмъ разсматривать отношеніе разности $y_2 - y_1$ къ разности $x_2 - x_1$, т. е.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Это отношеніе принято называть отношеніемъ приращеній (или разностнымъ отношеніемъ) для него введенъ особый знакъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \dots \dots \dots (2)$$

Δ не есть множитель (такъ что на него отнюдь нельзя сократить дробь); Δ является знакомъ, замѣняющимъ слова: «разность двухъ величинъ»; Δx играетъ роль одной буквы.

Далѣе, часто, вмѣсто длиннаго періода: «результатъ, который получается изъ выраженія A , когда въ этомъ выраженіи, послѣ выполненія всѣхъ дѣйствій, одну изъ величинъ, въ него входящихъ, на примѣръ h , принимаютъ равной нулю»...

Пишутъ просто:

$$\{A\}_h = 0$$

При такомъ обозначеніи то, что получится изъ нашего отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx получается равнымъ нулю, представится въ такомъ видѣ:

$$\left\{ \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\}_{\Delta x = 0} \dots \dots \dots (3)$$

Вмѣсто этого выраженія пишутъ просто:

$$\frac{dy}{dx} \dots \dots \dots (4)$$

При этомъ то, что было сказано относительно буквы, Δ относится и къ буквѣ d ; нужно, однако, замѣтить, что мы пока еще не дали опредѣленія символовъ dx и dy , взятыхъ въ отдѣльности; мы знаемъ пока только смыслъ всего выражаетъ (4).

Послѣднее выраженіе лучше читать: « dy по dx », чѣмъ « dy на dx », ибо тутъ собственно не идетъ рѣчь объ обыкновенномъ дѣленіи.

Это отношеніе называется производной y -ка по x -су.

Итакъ, для производной мы имѣемъ слѣдующее опредѣленіе:

Производной y -ка по x -су, что обозначается знакомъ $\frac{dy}{dx}$, мы назовемъ результатъ, который получается изъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда мы въ этомъ отношеніи приращеніе независимаго переменнаго Δx полагаемъ равнымъ нулю.

Предполагается, что при этомъ въ результатѣ получается нѣчто опредѣленное.

Въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ мы будемъ убѣждаться въ томъ, выполнено-ли послѣднее условіе; подробное изслѣдованіе тѣхъ условій, которыя для этого необходимы въ общихъ случаяхъ, — есть предметъ специальныхъ лекцій для математиковъ специалистовъ.

При такихъ, введенныхъ нами, обозначеніяхъ мы можемъ теперь такъ резюмировать результаты нашихъ прежнихъ изслѣдованій (§§ 5 и 12):

Скорость прямолинейнаго движенія точки равна производной пути по времени.

Если уравненіе линіи въ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ есть $y = f(x)$, то производная $\frac{dy}{dx}$ равна тангенсу угла, который касательная въ точкѣ (x, y) составляетъ съ осью x -совъ.

Вмѣсто того, чтобы говорить: «составить производную функціи y по x » говорится просто: «дифференцировать y по x ».

Итакъ, задача дифференциальнаго исчисления заключается въ томъ, чтобы продифференцировать данную функцію. При этомъ въ началахъ дифференциальнаго исчисления, которыя и представляютъ предметъ настоящихъ лекцій, мы занимаемся только тѣми функціями, которымъ приписываемъ названіе «элементарныхъ» и съ которыми мы встрѣчались уже въ средней школѣ въ курсахъ алгебры и геометріи (включая и тригонометрію).

Идея рѣшенія задачъ на дифференцированіе намъ уже извѣстна: мы должны составить отношеніе приращеній, преобразовать это отношеніе и въ преобразованномъ результатѣ положить $\Delta x = 0$.

Чтобы показать, какъ такой процессъ дѣлается въ тѣхъ случаяхъ, когда функція имѣетъ нѣсколько болѣе сложный видъ, чѣмъ раньше

разобранные нами примѣры, возьмемъ функцію:

$$y = \sqrt{1+x^2}$$

Тогда отношеніе приращеній будетъ:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{1+(x+h)^2} - \sqrt{1+x^2}}{h}$$

Мы знаемъ изъ элементарнаго курса алгебры, какъ освобождаются отъ радикаловъ въ знаменателѣ; тутъ мы освободимся отъ радикаловъ въ числителѣ; для этого только умножимъ и числителя и знаменателя дроби на сопряженнаго множителя:

$$\sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2}$$

отъ чего вся дробь не измѣнится.

Тогда въ числителѣ мы получимъ:

$$[1+(x+h)^2] - (1+x^2) = 2hx + h^2$$

а наша дробь приметъ видъ:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2hx + h^2}{h \{ \sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2} \}}$$

Сокращая дробь на h , получимъ:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2x + h}{\sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2}}$$

Полагая $h = 0$, мы получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Мы справились, такимъ образомъ, съ нашей задачей, правда, не безъ нѣкотораго, хотя и очень простаго, искусственнаго приема. Но уже и изъ этого примѣра видно, что для сложныхъ примѣровъ нельзя рекомендовать этого способа. Мы поэтому выберемъ въ дальнѣйшемъ слѣдующій путь: мы разъ навсегда найдемъ производныя простыхъ и часто встрѣчающихся функцій, а эти формулы всегда будемъ имѣть при себѣ готовыми; а затѣмъ мы найдемъ правила, которыя намъ позволятъ дифференцированіе сложной функціи свести на дифференцированіе тѣхъ простѣйшихъ, изъ которыхъ она составлена.

Причемъ въ вопросѣ о большей или меньшей простотѣ функцій мы будемъ руководствоваться математическими, а не естественно-научными точками зрѣнія. Такъ что вопросы о приложеніяхъ нашихъ результатовъ мы оставимъ на время въ сторонѣ и подчинимся математическому требованію постепеннаго перехода отъ легкаго къ трудному.

Весьма полезно будетъ ввести нѣкоторую классификацію при изученіи различныхъ функцій, что и составитъ предметъ слѣдующей главы.

Г Л А В А П.

Дифференцирование рациональныхъ функцій.

§ 14. Рациональныя функціи.

Простѣйшими законами, выражающими зависимость между переменными являются тѣ, которые даютъ возможность вычислить значеніе одной переменной по значенію другой при помощи четырехъ основныхъ дѣйствій. Дадимъ такое опредѣленіе:

y называютъ рациональной функціей x , если значеніе y , соотвѣтствующее любому значенію x , можетъ быть получено изъ x и нѣкоторыхъ постоянныхъ посредствомъ конечнаго числа сложений, вычитаній, умноженій и дѣленій; при чемъ эти дѣйствія не зависятъ отъ значенія x .

Добавленіе «конечное число» необходимо, такъ какъ далѣе намъ придется выполнять или по крайней мѣрѣ представлять себѣ выполненными безчисленное множество такихъ операцій; но функціи, получающіяся такимъ образомъ, мы уже не называемъ рациональными.

Постоянныя, упоминаемая въ опредѣленіи, могутъ быть выражены или опредѣленными числами, или буквами, которымъ слѣдуетъ приписывать всегда одно и то же значеніе независимо отъ значенія x .

Напримѣръ,

$$x + 4, ax + b,$$

$$(6x + 7)(3x - 4), x^3 \text{ (т. е. } xxx \text{)}$$

также, какъ и

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

рациональныя функціи x .

Рациональныя функціи въ свою очередь мы разбиваемъ на цѣлыя и дробныя. А именно, рациональная функція называется цѣлой, если для образованія ея не приходится дѣлить на выраженіе, заключающее x . Опредѣленіе можно формулировать такъ:

y называютъ цѣлой рациональной функціей x или просто многочленомъ (полиномомъ) относительно x , если значеніе y , соотвѣтствующее любому значенію x , можетъ быть получено изъ x и опредѣленныхъ постоянныхъ посредствомъ конечнаго числа сложений, вычитаній, умноженій и дѣленій, причемъ эти дѣйствія не зависятъ отъ значенія x .

Слѣдуетъ замѣтить, что дѣленіе на постоянную есть умноженіе на обратную величину, т. е. на постоянную. Поэтому мы можемъ, не впадая въ противорѣчіе съ опредѣленіемъ, считать, напр., $\frac{x}{8} + \frac{x^2}{\sqrt{2}}$ цѣлой рациональной функцией x . Функцию можно назвать цѣлой, если только самое x не входитъ въ знаменатель.

По раскрытіи всѣхъ скобокъ (выполненіи всѣхъ перемноженій, указанныхъ скобками) и соединеніи всѣхъ членовъ, заключающихъ одинаковыя степени x , рациональная цѣлая функция x принимаетъ видъ:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

Черезъ a здѣсь обозначены постоянныя или выраженія, составленныя какимъ-нибудь образомъ изъ постоянныхъ, т. е. опять таки постоянныя. Степенью или порядкомъ данной цѣлой функции называется высшій показатель степени при x . Иногда называютъ цѣлыя функции первой, второй и третьей степени соответственно линейной, квадратной и кубической функцией. Постоянные множители при отдѣльныхъ степеняхъ x называются коэффициентами, а членъ, не содержащій x , — абсолютнымъ (свободнымъ) членомъ.

Нецѣлая рациональная функция, т. е. такая, для образованія которой нужно примѣнить дѣленія на x или на выраженія, содержащія x , называется дробной. Всякую дробную рациональную функцию можно посредствомъ подходящихъ преобразованій представить въ видѣ частнаго двухъ цѣлыхъ рациональныхъ функций; впрочемъ, не слѣдуетъ думать, чтобы такое преобразование было всегда необходимо или даже цѣлесообразно.

§ 15. Дифференцирование степени съ цѣлымъ рациональнымъ показателемъ.

Вспомогательная теорема алгебры:

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}. \quad (1)$$

Мы уже часто пользовались этой формулой при $m = 2$; можно считать ее извѣстной и для $m = 3$:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2.$$

При $m = 4$ она принимаетъ видъ:

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3;$$

справедливость ея въ этомъ случаѣ можетъ быть провѣрена такъ называемымъ испытаніемъ; дѣйствительно, помноживъ обѣ части на

знаменатель, получаемъ въ правой части:

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4;$$

всѣ промежуточные члены сокращаются и остается $a^4 - b^4$, что и требовалось доказать. Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться въ справедливости приведенной формулы для любого цѣлаго значенія m .

Для дифференцированія $y = f(x) = x^m$, составимъ сначала отношеніе приращеній:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^m - x^m}{(x+h) - x}.$$

Это отношеніе по нашей теоремѣ равно

$$(x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}x + \dots + (x+h)x^{m-2} + x^{m-1}.$$

Чтобы отсюда получить производную, надо положить $h = 0$, чему послѣ произведенныхъ преобразованій ничто не мѣшаетъ; при этой подстановкѣ каждый членъ второй части обращается въ x^{m-1} ; такихъ членовъ всего m , а именно, члены со всевозможными цѣлыми показателями при $(x+h)$, начиная съ единицы до $(m-1)$ и еще членъ, не содержащій $(x+h)$; поэтому, положивъ $h = 0$, имѣемъ m слагаемыхъ равныхъ x^{m-1} и соотвѣтственно этому получаемъ первую формулу дифференціального исчисленія въ видѣ

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1} \dots \dots \dots (2)$$

Эта формула показываетъ, что для дифференцированія цѣлой степени надо понизить показатель степени на единицу и приписать множителемъ самый показатель степени.

Дадимъ m нѣкоторыя частныя значенія; такъ, для $m = 1$, получаемъ:

$$\frac{dx}{dx} = 1 \dots \dots \dots (3)$$

Дѣйствительно, при $m = 1$, отношеніе

$$\frac{(x+h) - x}{h}$$

всегда равно единицѣ; оно остается равнымъ единицѣ и тогда, когда положимъ $h = 0$.

При $m = 2$ имѣемъ:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x, \dots \dots \dots (4)$$

что согласуется съ результатами, полученными непосредственно въ

§ 5 и § 11; при $m = 3$:

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2 \dots \dots \dots (5)$$

и т. д.

Если возьмемъ y не равнымъ, а только пропорциональнымъ нѣ-
которой цѣлой степени x , т. е.

$$y = ax^m, \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ a — постоянная, то нашъ выводъ остается почти такимъ же.

Слѣдуетъ взять

$$f(x + h) = a(x + h)^m,$$

такъ какъ мы условились, что a постоянная, сохраняющая свое зна-
ченіе при всякихъ значеніяхъ x , значитъ, a не измѣняется при за-
мѣнѣ x черезъ $x + h$. Вынося постоянную за скобку, получаемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{(x + h)^m - x^m}{h}$$

и отсюда посредствомъ такихъ же выкладокъ, какъ и раньше,

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}.$$

Напримѣръ,

$$y = \frac{3}{4} x^4, \quad \frac{dy}{dx} = 3x^3.$$

Кривая, уравненіе которой въ прямоугольныхъ координатахъ
 $y = ax^m$, гдѣ m цѣлое положительное число, называется параболой
(въ широкомъ смыслѣ слова). Если m четное, то характеръ этой
кривой въ общихъ чертахъ такой же, какъ и Апполоніевой параболы;
она поднимается сначала медленно, а затѣмъ быстро, чѣмъ послѣд-
няя и это отличіе тѣмъ значительнѣе, чѣмъ больше m ; если m не-
четное, то для положительныхъ x имѣемъ тотъ же результатъ, а
часть кривой, соотвѣтствующая отрицательнымъ x , лежитъ уже не
во второй, а въ третьей четверти.

§ 16. Дифференцирование постоянной.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ можетъ оказаться, что вели-
чина y , которую первоначально считаютъ зависящей отъ другой
величины x , независима отъ послѣдней, т. е. она постоянная; это
мы выражаемъ равенствомъ:

$$y = a$$

(Первоначально мы считали понятія «постоянная» и «перемѣнная»
за противоположныя; теперь же принимаемъ, что постоянная есть
частный (очень спеціальный) случай перемѣнной). Какъ поступать
съ дифференцированиемъ въ этихъ случаяхъ?

Для рѣшенія этого вопроса лучше всего вернуться къ соображеніямъ § 5 и § 11. Что значитъ: «подвижная точка сохраняетъ постоянное положеніе»? Это обозначаетъ не что иное, какъ то, что точка вообще не перемѣщается. Очевидно, что въ этомъ случаѣ ея скорость равна нулю. Или еще: «какая линія представлена уравненіемъ $y = a$ »? Ясно, что это уравненіе линіи, всѣ точки которой одинаково удалены отъ оси абсциссъ, т. е. это прямая, проведенная параллельно оси абсциссъ на разстояніи a отъ нея. Касательная къ прямой есть сама прямая; дѣйствительно, прямая, образующія уголъ, о которомъ говорилось въ § 11, сливаются въ этомъ случаѣ съ данной прямой и поэтому касательная, которая должна дѣлить этотъ уголъ на двѣ части, совпадаетъ съ самой прямой. Значитъ, касательная къ нашей прямой параллельна оси и уголъ между ними равенъ нулю. На основаніи этихъ соображеній заключаемъ, что производная постоянной равна нулю.

Если мы хотимъ получить этотъ результатъ аналитически, то должны положить $f(x) = a$, $f(x + h)$ также равно a , слѣдовательно отношеніе приращеній:

$$\frac{a - a}{h} = 0.$$

Такъ какъ это отношеніе остается равнымъ нулю и тогда когда $h = 0$, то и производная равна нулю, что и требовалось доказать.

Выводы этого и предыдущаго параграфа можно объединить въ одну формулу. Хотя выраженіе x^0 не имѣетъ смысла, если разсматривать его, какъ степень, т. е. какъ произведеніе равныхъ сомножителей, но уже въ алгебрѣ оказалось полезнымъ ввести символъ x^0 и принимать его равнымъ единицѣ, каково бы ни было x . Если мы воспользуемся этимъ обозначеніемъ, то правило § 15 въ примѣненіи къ этому случаю дастъ намъ:

$$\frac{dx^0}{dx} = 0,$$

т. е. правильный результатъ. Поэтому нѣтъ надобности вводить новую формулу, а просто можно сказать:

Равенство (2), выведенное въ § 15 для цѣлаго положительнаго показателя, остается справедливымъ и для того случая, когда показатель равенъ нулю.

§ 17. Дифференцирование суммы и разности.

Возьмемъ двѣ какія либо функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, производныя которыхъ намъ уже извѣстны, и пусть $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$; мы можемъ получить производную отъ $f(x)$, зная производныя отъ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ слѣдующимъ образомъ. Составимъ сначала отношеніе при-

рашеній:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) + \psi(x+h) - \varphi(x) - \psi(x)}{h}$$

это можно переписать въ видѣ:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}.$$

Положивъ теперь $h = 0$, получимъ соотвѣтственно нашему условию для каждаго слагаемаго опредѣленный результатъ, а именно

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

Слѣдовательно, и въ суммѣ, дѣлая $h = 0$, получаемъ нѣчто опредѣленное. Поэтому можемъ высказать слѣдующую теорему:

Если обѣ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имѣютъ опредѣленную производную, то сумма ихъ имѣетъ также опредѣленную производную, которая равна суммѣ производныхъ отдѣльныхъ слагаемыхъ:

$$\frac{d(\varphi(x) + \psi(x))}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

То же самое выражаютъ короче такъ: сумму можно дифференцировать почленно.

Если введемъ для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ обозначенія u и v , то можемъ написать:

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \dots \dots \dots (1)$$

Совершенно такимъ же образомъ доказывается, что:

$$\frac{d(u-v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

Примѣняя эти двѣ теоремы нѣсколько разъ подрядъ, мы приходимъ къ заключенію, что вообще совокупность любого числа членовъ, соединенныхъ знаками $+$ или $-$, можно дифференцировать почленно.

Доказавъ эти теоремы, мы получаемъ возможность составить производную всякой цѣлой рациональной функціи x такъ какъ такая функція составлена изъ членовъ вида ax^m , а въ § 15 мы уже научились дифференцировать такіе члены.

Примѣръ:

$$y = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = 8 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 2x + 6 + 0 = 24x^2 + 24x + 6 = 6(4x^2 + 4x + 1).$$

§ 18. Дифференцирование произведения.

Возьмемъ опять двѣ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, производныя которыхъ намъ уже извѣстны, и пусть теперь:

$$f(x) = \varphi(x) \psi(x).$$

Въ такомъ случаѣ:

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) \psi(x+h) - \varphi(x) \psi(x).$$

Если прибавимъ ко второй части и вычтемъ изъ нея $\varphi(x+h) \psi(x)$, то не измѣнимъ ея величины и поэтому можемъ написать:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \varphi(x+h) \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} + \\ &+ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \psi(x). \end{aligned}$$

Положивъ здѣсь $h = 0$, получимъ:

$$\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x) \frac{d\psi(x)}{dx} + \psi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

или

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx};$$

эту теорему можно формулировать такъ: для дифференцированія произведения надо взять произведение каждаго множителя на производную другого и результаты сложить.

Примѣняя эту теорему нѣсколько разъ, доказываемъ слѣдующую болѣе общую теорему:

Для дифференцированія произведения произвольнаго числа множителей надо производную каждаго множителя помножить на остальные множители и результаты сложить.

Напримѣръ, для трехъ множителей имѣемъ:

$$\frac{d(uvw)}{dx} = uv \frac{dw}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + vw \frac{du}{dx} = uvw \left\{ \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \dots \right\};$$

и вообще:

$$\frac{d(u_1 u_2 \dots u_n)}{dx} = u_1 u_2 \dots u_n \left\{ \frac{1}{u_1} \frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2} \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{1}{u_n} \frac{du_n}{dx} \right\}.$$

Если всѣ множители равны между собою, то получаемъ:

$$\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx};$$

это частный случай другой болѣе общей формулы, которую мы выведемъ впоследствии.

При помощи послѣдней формулы можемъ еще разъ разобрать примѣръ, приведенный въ концѣ § 17:

$$y = (2x + 1)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 (2x + 1)^2 \cdot 2 = 6 (2x + 1)^2,$$

что согласуется съ результатомъ, полученнымъ выше другимъ путемъ.

Въ качествѣ примѣра примѣненія выведенной формулы рассмотримъ еще функцію:

$$y = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = x^6 - 1.$$

Если возьмемъ выраженіе $x^6 - 1$, то непосредственно получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5;$$

если же возьмемъ видъ $(x^3 - 1)(x^3 + 1)$, то получимъ первоначально:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 (x^3 + 1) + 3x^2 (x^3 - 1),$$

что по раскрытіи скобокъ и соединеніи подобныхъ членовъ даетъ прежній результатъ.

§ 19. Дифференцирование частнаго.

Возьмемъ опять

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x),$$

но пусть теперь:

$$y = \frac{u}{v}, \quad \text{или} \quad f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Въ такомъ случаѣ:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \left\{ \frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \right\},$$

а это выраженіе по приведеніи къ общему знаменателю обращается въ:

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{\varphi(x+h)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x+h)}{\psi(x)\psi(x+h)}.$$

Мы воспользуемся такъ же, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, искусственнымъ приѣмомъ, а именно, въ числитель послѣдней дроби прибавимъ и вычтемъ членъ $\varphi(x)\psi(x)$, тогда получимъ:

$$\frac{1}{\psi(x)\psi(x+h)} \left\{ \psi(x) \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi(x) \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} \right\}.$$

Подстановка $h = 0$ даетъ:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\psi^2(x)} \left\{ \psi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right\},$$

или

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{1}{v^2} \left\{ v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right\} = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx} \dots \dots (1)$$

Это равенство можно формулировать такъ: производная дроби равняется дроби, числитель которой равенъ разности произведенія знаменателя на производную числителя безъ произведенія числителя на производную знаменателя, а знаменатель равенъ квадрату знаменателя дифференцируемой дроби. Иногда оказывается болѣе удобнымъ выраженіе, написанное въ формулѣ (1) послѣднимъ. Знаки въ этой формулѣ легко запомнить, замѣтивъ, что при $v = 1$ должно получиться тождество $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}$.

При $u = 1$ формула (1) даетъ:

$$\frac{d\frac{1}{v}}{dx} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx}; \dots \dots \dots (2)$$

еще болѣе частный случай:

$$\frac{d\frac{1}{x}}{dx} = -\frac{1}{x^2} \dots \dots \dots (3)$$

§ 20. Линейныя дробныя функціи.

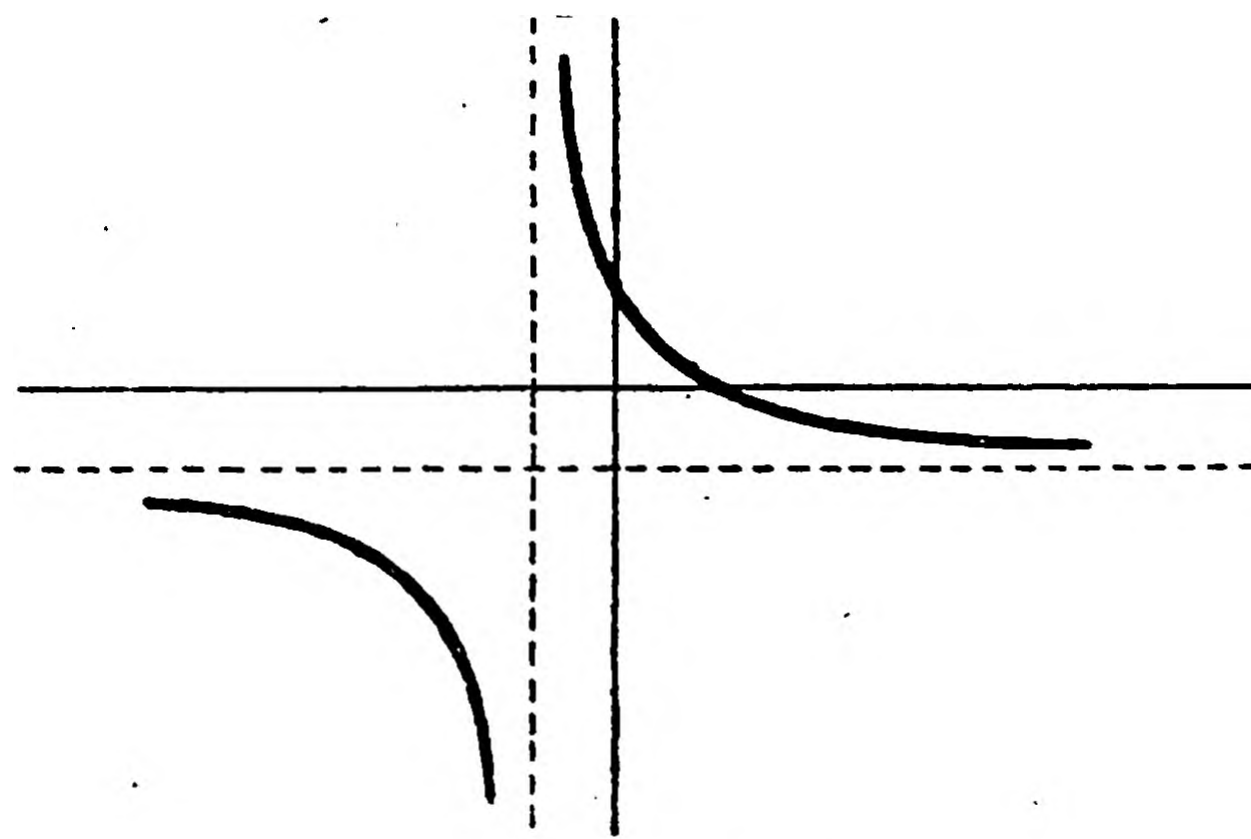
Изъ дробныхъ функцій проще всего тѣ, числитель и знаменатель которыхъ линейны (цѣлыя функціи первой степени); онѣ имѣютъ видъ:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Ихъ называютъ линейными дробными функціями. Раньше всего уяснимъ себѣ измѣненія такой функціи, начертивъ ея кривую; причемъ дадимъ постояннымъ нѣкоторыя опредѣленные значенія, напримѣръ:

$$y = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Чтобы начертить кривую по ея уравненію, мы сначала вычислимъ для выясненія приблизительной формы кривой значенія y , соотвѣтствующія нѣкоторымъ значеніямъ x , и нанесемъ найденныя точки на чертежъ, пользуясь нѣкоторой координатной системой. Эти значенія x не слѣдуетъ брать близкими другъ къ другу, такъ какъ только послѣ ознакомленія съ характе-



Черт. 17.

ра кривой, такъ какъ только послѣ ознакомленія съ характе-

ромъ кривой можно судить о томъ, въ какихъ областяхъ надо намѣтить больше точекъ. Вообще при выборѣ частныхъ значеній x мы будемъ руководствоваться величиной коэффиціентовъ уравненія, на примѣръ, въ данномъ случаѣ вычисляемъ и наносимъ на чертежъ положеніе слѣдующихъ точекъ:

$$\begin{array}{cccc} x = 0 & 2 & 4 & 6 \\ y = 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{3}{5} & -\frac{5}{7} \end{array}$$

Для отрицательныхъ значеній x находимъ:

$$\begin{array}{ccc} x = -2 & -4 & -6 \\ y = -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{5} \end{array}$$

Намѣченныхъ точекъ, какъ видно, еще недостаточно, чтобы вычертить кривую въ промежуткахъ между ними; мы можемъ лучше судить о видѣ кривой, если найдемъ производную y по x .

Примѣняя правило предыдущаго параграфа, получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2} \{(1+x)(-1) - (1-x) \cdot 1\} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

Такъ какъ это выраженіе остается отрицательнымъ при всѣхъ значеніяхъ x , то теперь очевидно, что кривая должна опускаться по мѣрѣ возрастанія x . На основаніи этого замѣчанія можно уже довольно хорошо указать видъ кривой между точками $x = -6$ и $x = -2$, такъ же, какъ и между точками $x = 2$ и $x = 6$, по крайней мѣрѣ въ томъ случаѣ, когда дѣло идетъ о первомъ наброскѣ кривой; намъ нѣтъ надобности вычислять еще какія-либо точки въ этихъ областяхъ. Но если кривая должна все время опускаться, то какимъ же образомъ она переходитъ отъ точки $x = -2$, $y = -3$ вверхъ къ точкѣ $x = 0$, $y = 1$? Для этого необходимо, чтобы она претерпѣвала гдѣ-нибудь разрывъ, и поэтому наше изслѣдованіе приводитъ насъ къ вопросу: «всякому ли данному значенію x соответствуетъ определенное значеніе y ? дѣйствительно ли мы можемъ выполнить дѣйствія, указанные для полученія y , при любомъ значеніи x ?» На это надо замѣтить слѣдующее: четыре основныхъ дѣйствія можно примѣнить ко всякимъ числамъ; всякія два числа можно сложить, вычесть, перемножить и раздѣлить (мы, конечно, считаемъ, что дробныя и отрицательныя числа уже введены); но есть одно и только одно исключеніе: нельзя дѣлить на нуль. Слѣдовательно, каждый разъ, когда для образованія функціи нужно произвести и дѣленіе, мы должны убѣдиться, не придется ли при нѣкоторыхъ

частныхъ значеніяхъ x дѣлится на нуль. Согласно этому, въ нашемъ примѣрѣ мы должны поставить вопросъ, не обращается ли знаменатель дроби при нѣкоторыхъ значеніяхъ x въ нуль, т. е. мы должны рѣшить уравненіе:

$$x + 1 = 0.$$

Рѣшеніе его $x = -1$. При этомъ значеніи x нельзя выполнить дѣйствій, необходимыхъ для полученія y . Числитель отличенъ отъ нуля, а именно равенъ 2; а вѣдь нельзя подобрать числа y , которое, будучи помножено на 0, давало бы 2.

Значитъ, на нашей кривой вообще нѣтъ точки, лежащей на ординатѣ, соответствующей $x = -1$.

Уравненіе кривой даетъ намъ для $x = -1$, кромѣ этого отрицательнаго результата, однако и нѣчто положительное.

Въ самомъ дѣлѣ, дадимъ x значеніе, очень близкое къ (-1) ; тогда знаменатель будетъ очень малъ, а числитель обратится въ число, очень мало отличающееся отъ 2. Слѣдовательно, дробь пріобрѣтетъ очень большое значеніе и притомъ тѣмъ большее, чѣмъ ближе x къ -1 . Этотъ результатъ мы выражаемъ такъ: y дѣлается безконечно большимъ при $x = -1$ и соответственнo этому пишемъ:

$$f(-1) = \infty.$$

Итакъ, послѣдняя фраза не имѣетъ какого либо метафизическаго смысла, а есть только сокращенное выраженіе вмѣсто слѣдующаго: если x давать значенія очень близкія къ -1 , то y пріобрѣтаетъ очень большія значенія; взявъ для x значенія достаточно близкія къ -1 , получимъ для y значенія сколь угодно большія.

Напр., если бы кто либо пожелалъ получить значеніе y не меньше 10, то можно ему сказать: для этого надо только позаботиться о томъ, чтобы $x + 1$ было по абсолютной величинѣ меньше $\frac{1}{20}$; а если кто этимъ не удовлетворяется и желаетъ получить y не меньше 1000, то и этому требованію можно удовлетворить, для чего только надо положить $x + 1$ по абсолютной величинѣ меньше $\frac{1}{2000}$; и т. д.

Теперь остается разобрать еще одинъ вопросъ, а именно: мы уже знаемъ, что для значеній x близкихъ къ -1 получаются очень большія значенія y , но слѣдуетъ разсмотрѣть, будутъ ли эти значенія отрицательными или положительными. Для этого положимъ:

$$x = -1 + \epsilon,$$

Разумѣя подъ ϵ очень малую величину, мы получаемъ:

$$y = \frac{2 - \epsilon}{\epsilon}.$$

Здѣсь числитель положителенъ, знаменатель того же знака, какъ ϵ ; а слѣдовательно, и дробь имѣетъ знакъ числа ϵ . Положительное значеніе ϵ соотвѣтствуетъ точкамъ направо, а отрицательное — точкамъ налѣво отъ $x = -1$. Поэтому мы можемъ, рассматривая значенія x очень близкія къ -1 , высказать слѣдующее положеніе: при значеніяхъ x , алгебраически меньшихъ (-1), получаются очень большія отрицательныя значенія y , напротивъ при x большихъ (-1), — очень большія положительныя значенія y . То же самое положеніе выражаютъ и въ такой формѣ: наша кривая при приближеніи x къ (-1) удаляется въ безконечность въ сторону отрицательныхъ y -овъ, затѣмъ перескакиваетъ къ $y = \infty$ и опять опускается внизъ, причеиъ пересѣкаетъ ось y -овъ въ точкѣ $y = +1$.

Теперь ясно, что для того, чтобы найти видъ кривой въ этой области, намъ надо вычислить еще, положимъ, двѣ точки между $x = -2$ и $x = -1$ и двѣ точки между $x = -1$ и $x = 0$. Полезно также знать положеніе одной или двухъ точекъ между $x = 0$ и $x = 2$. Вычисляемъ точки:

$$\begin{array}{cccccc} x = & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +1 \\ y = & -5 & -9 & +7 & +3 & +\frac{2}{3} & 0. \end{array}$$

Такъ какъ мы знаемъ, что найденная выше производная всегда отрицательна, т. е. возможность колебаній взадъ и впередъ, вверхъ и внизъ исключена, то, нанеся эти точки на чертежъ, мы можемъ достаточно точно для предварительнаго ознакомленія вычертить нашу кривую въ области между $x = -6$ и $x = 6$.

Невыясненнымъ еще остается вопросъ о томъ, какова форма кривой внѣ этой упомянутой области. Такъ какъ невозможно, давая x все новыя и новыя значенія, вычислять соотвѣтствующія y , то мы поставимъ вопросъ въ такой формѣ: «какой видъ принимаетъ кривая для безконечно большихъ значеній x ?» Мы можемъ рѣшить этотъ вопросъ относительно всякой рациональной функціи при помощи слѣдующаго приема: дѣлимъ числитель и знаменатель на высшую встречающуюся степень x ; значить, въ данномъ случаѣ на x ; получаемъ:

$$y = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1}.$$

Если давать x очень большія значенія, то $\frac{1}{x}$ пріобрѣтаетъ очень малыя значенія; числитель послѣдней дроби будетъ близокъ къ

(— 1), знаменатель къ + 1; слѣдовательно, значеніе дроби будетъ мало отличаться отъ (— 1) и притомъ тѣмъ меньше, чѣмъ x больше. Можно сказать, что y сколь угодно мало отличается отъ (— 1), при всѣхъ достаточно большихъ значеніяхъ x , какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ. Этотъ и только этотъ смыслъ вкладываютъ въ утвержденіе: при безконечно большихъ x , y равно (— 1), и записываютъ этотъ результатъ въ такомъ видѣ:

$$f(\infty) = -1.$$

Такъ какъ значенія y , которыя мы получили при крайнихъ значеніяхъ x (для которыхъ мы еще производили вычисленія), хотя и малы, но все же замѣтно отличаются отъ (— 1), то, пожалуй, вычислимъ еще два значенія y съ правой и лѣвой стороны отъ намѣченныхъ уже точекъ; находимъ:

$$\begin{array}{cccc} x = & -20 & -10 & +10 & +20 \\ y = & -\frac{21}{19} & -\frac{11}{9} & -\frac{9}{11} & -\frac{19}{21}. \end{array}$$

Теперь уже найдено достаточно точекъ. Такъ какъ кромѣ положенія этихъ точекъ мы знаемъ еще, что $\frac{dy}{dx}$ отрицательно, то можемъ достаточно хорошо судить о положеніи точекъ кривой, лежащихъ направо и налѣво отъ разсмотрѣнной области.

Кривая эта называется гиперболой, а обѣ прямыя $x = -1$ и $y = -1$, къ которымъ кривая неограниченно приближается, называются асимптотами.

Подобнымъ же образомъ можемъ трактовать всякую линейную дробную функцію. Геометрически всѣ эти функціи будутъ представлены гиперболами; производная любой функціи этого вида сохраняетъ свой знакъ, независимо отъ значенія x , потому что x не входитъ въ числитель производной, каковы бы ни были значенія коэффиціентовъ α , β , γ , δ ; дѣйствительно:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{(\gamma x + \delta)^2} \left\{ (\gamma x + \delta) \frac{d(\alpha x + \beta)}{dx} - (\alpha x + \beta) \frac{d(\gamma x + \delta)}{dx} \right\} = \\ &= \frac{1}{(\gamma x + \delta)^2} \{ (\gamma x + \delta) \alpha - (\alpha x + \beta) \gamma \} = \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{(\gamma x + \delta)^2}. \end{aligned}$$

§ 21. Дифференцированіе степени съ цѣлымъ отрицательнымъ показателемъ.

Если придерживаться первоначальнаго опредѣленія степени, какъ произведенія n равныхъ сомножителей, то выраженіе x^{-n} при положительномъ n не имѣетъ смысла, такъ какъ нельзя говорить о (— n)

множителяхъ; но уже въ алгебрѣ оказалось полезнымъ символомъ x^{-n} обозначать величину $\frac{1}{x^n}$. Можно показать, хотя это и не всегда дѣлается при элементарномъ изложеніи, что всѣ алгебраическія правила, выведенныя для степеней съ цѣлыми положительными показателями, справедливы и для степеней съ цѣлыми отрицательными показателями. Вопросъ о томъ, относится ли то же самое и къ формулѣ дифференцірованія, выведенной въ § 15, не можетъ быть рѣшенъ à priori; само по себѣ это не очевидно, а выводъ, сдѣланный нами для положительныхъ показателей, не можетъ быть непосредственно распространенъ на случай дробныхъ показателей.

Можно однако при помощи теоремы § 19 показать, что та же самая формула справедлива и для цѣлаго отрицательнаго показателя; а именно:

$$\frac{d \frac{1}{x^n}}{dx} = - \frac{1}{x^{2n}} \frac{dx^n}{dx} = - \frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = - \frac{n}{x^{n+1}}.$$

Пользуясь приведеннымъ обозначеніемъ, можемъ послѣднее выраженіе переписать въ видѣ:

$$\frac{dx^{-n}}{dx} = - nx^{-n-1} \dots \dots \dots (1)$$

Эта формула получается изъ формулы § 15 замѣной n на $(-n)$; поэтому нѣтъ надобности вводить новыя правила для дифференцірованія степени съ цѣлымъ отрицательнымъ показателемъ, и мы лучше просто скажемъ:

Правило дифференцірованія степени, выведенное въ § 15, годится и для степеней съ цѣлымъ отрицательнымъ показателемъ.

Точно также правило § 19, относящееся къ дифференцірованію степени какой-нибудь функціи отъ x , оказывается справедливымъ и для случая отрицательныхъ показателей. Дѣйствительно:

$$\frac{d \frac{1}{u^n}}{dx} = - \frac{1}{u^{2n}} \frac{du^n}{dx} = - \frac{nu^{n-1}}{u^{2n}} \frac{du}{dx} = - \frac{n}{u^{n+1}} \frac{du}{dx};$$

вмѣсто этого можемъ написать:

$$\frac{du^{-n}}{dx} = - nu^{-n-1} \frac{du}{dx} \dots \dots \dots (2)$$

Напримѣръ:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x^2)^2} = \frac{+4x}{(1-x^2)^3}.$$

Здѣсь можно сдѣлать замѣчаніе, которое оказывается очень по-

лезнымъ въ практическихъ примѣрахъ, такъ какъ даетъ возможность избѣжать лишнихъ вычисленій.

При помощи вышеупомянутаго обозначенія можно каждую дробь $\frac{u}{v^n}$, знаменатель которой есть степень, переписать въ видѣ uv^{-n} и дифференцировать, какъ произведеніе. Если дифференцировать это выраженіе, какъ дробь, то получимъ:

$$\frac{d}{dx} \frac{u}{v^n} = \frac{1}{v^{2n}} \left\{ v^n \frac{du}{dx} - nuv^{n-1} \frac{dv}{dx} \right\} = \frac{1}{v^{n+1}} \left\{ v \frac{du}{dx} - nu \frac{dv}{dx} \right\};$$

дифференцируя же его, какъ произведеніе, имѣмъ:

$$\frac{d(uv^{-n})}{dx} = - nuv^{-n-1} \frac{dv}{dx} + v^{-n} \frac{du}{dx}.$$

На данномъ примѣрѣ видно, что при первомъ способѣ въ числитель и знаменатель появляется лишній множитель, на который дробь сокращается; при второмъ способѣ сразу получается простѣйшій результатъ, и поэтому удобнѣе пользоваться послѣднимъ способомъ.

Г Л А В А III.

Дифференцирование ирраціональныхъ функцій.

§ 22. Обратныя функціи и ихъ дифференцирование.

Уже въ § 13 мы обратили вниманіе на то, что большею частью не самая сущность вопроса требуетъ раздѣленія переменныхъ на независимую x и зависимую y ; это раздѣленіе вводится нами только для болѣе удобнаго трактованія вопроса. Обыкновенно дѣло обстоитъ такъ: первоначально просто задана нѣкоторая зависимость между переменными, какъ на примѣрѣ, зависимость между упру́гостью и объемомъ опредѣленной массы газа при постоянной температурѣ въ видѣ равенства:

$$pv = const;$$

затѣмъ уже мы, рѣшивъ такое уравненіе, находимъ выраженіе одной переменной при помощи другой. Но мы можемъ очень часто такъ же легко выразить вторую переменную черезъ первую; въ данномъ примѣрѣ мы можемъ сказать: чтобы сжать данную массу газа до опредѣленнаго объема, надо произвести давленіе обратно-пропорціональное требуемому объему; или вмѣсто этого: объемъ, который занимаетъ данная масса газа, обратно пропорціоналенъ давленію, подъ которымъ газъ находится.

Вышеупомянутое разсужденіе имѣетъ общій характеръ. Если задана функція $y = f(x)$, то въ очень многихъ случаяхъ можно, рѣшивъ это уравненіе, выразить x въ видѣ функціи отъ y :

$$x = \varphi(y).$$

Функція f и φ называются обратными.

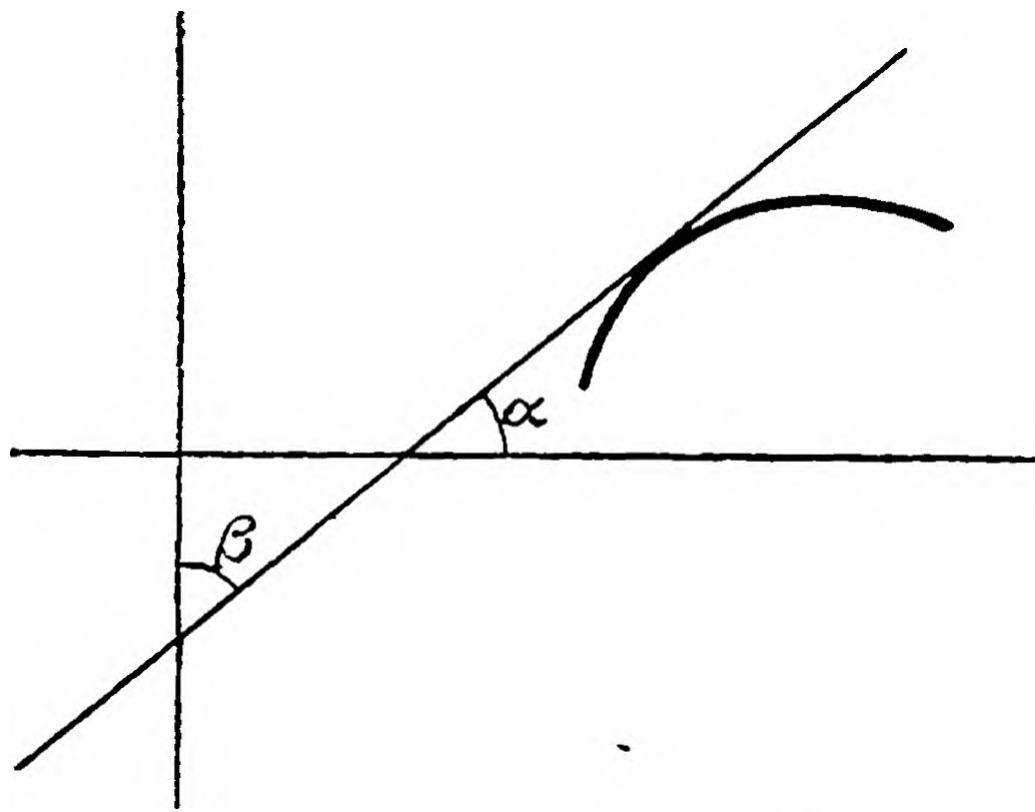
Напримѣръ, для функцій

$$y = a + x; ax; \frac{1}{x}; x^2; x^3; 10^x$$

обратными служатъ слѣдующія:

$$x = y - a; \frac{y}{a}; \frac{1}{y}; \sqrt{y}; \sqrt[3]{y}; \log_{10} y.$$

Теперь мы задаемся такимъ вопросомъ: «какимъ образомъ, зная производную нѣкоторой функціи, найти производную обратной функціи?» О возможности такой задачи вообще можно заключить на основаніи геометрическихъ представленій, приведенныхъ въ § 11; тамъ мы указали зависимость между производной y по x и угломъ наклоненія касательной къ оси x (этотъ уголъ былъ обозначенъ черезъ α): $\frac{dy}{dx}$ есть тангенсъ этого угла. Совершенно такъ же $\frac{dx}{dy}$ есть тангенсъ угла β , образуемаго касательною съ осью y -въ:



Черт. 18.

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \beta. \dots \dots \dots (1)$$

Но уголъ между осями координатъ прямой, такъ что:

$$\alpha + \beta = d$$

и поэтому:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha};$$

т. е.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \dots \dots \dots (2)$$

Слѣдовало бы еще рѣшить, всегда ли при этомъ получается должный знакъ; но мы оставимъ этотъ вопросъ, потому что выведемъ формулу (2) кромѣ этого еще аналитически. Съ этой цѣлью разсматриваемъ отношенія приращеній:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Здѣсь x_1 и y_1 , такъ же, какъ x_2 и y_2 , —соотвѣтствующія значенія переменныхъ; поэтому мы, зная, что эти буквы имѣютъ одно и то же значеніе въ обоихъ равенствахъ, можемъ заключить, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Чтобы теперь отъ отношеній приращеній перейти къ производнымъ надо положить въ правой части $\Delta x = 0$, а въ лѣвой $\Delta y = 0$; можетъ показаться, что мы дѣлаемъ различныя подстановки въ каждой части; но это не такъ; вѣдь, при $\Delta x = 0$, Δy также обращается въ нуль и наоборотъ, по крайней мѣрѣ въ тѣхъ функціяхъ, которыми мы теперь занимаемся; слѣдовательно, безразлично, которую изъ этихъ двухъ подстановокъ сдѣлать; а выполнивъ ихъ, мы снова получаемъ равенство (2), но теперь уже не сомнѣваемся болѣе въ правильности знаковъ.

Примѣненіе этой теоремы къ первымъ тремъ функціямъ не даетъ новыхъ результатовъ, но мы можемъ провѣрить ея справедливость на этихъ трехъ примѣрахъ, пользуясь извѣстными уже правилами:

$$y = a + x, \frac{dy}{dx} = 1; x = y - a, \frac{dx}{dy} = 1.$$

$$y = ax, \frac{dy}{dx} = a; x = \frac{y}{a}, \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}.$$

$$y = \frac{1}{x}, \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}; x = \frac{1}{y}, \frac{dx}{dy} = -x^2 = -\frac{1}{y^2}.$$

Напротивъ того, прилагая теорему къ четвертому и пятому примѣрамъ, получимъ новыя формулы; но мы изслѣдуемъ этотъ вопросъ въ болѣе общемъ видѣ.

§ 23. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ КОРНЯ И СТЕПЕНИ СЪ ЛЮБЫМЪ ПОКАЗАТЕЛЕМЪ.

Если

$$y = \sqrt[n]{x},$$

то:

$$x = y^n,$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dx}{dy} = ny^{n-1}$$

и поэтому на основаніи теоремы § 22:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}}.$$

Такимъ образомъ здѣсь производная y по x выражена черезъ y , а не черезъ x , какъ во всѣхъ вышеразобранныхъ вопросахъ. Соб-

ственно, мы можемъ удовлетвориться этимъ рѣшеніемъ; вѣдь, когда намъ нужно найти производную y по x при опредѣленномъ значеніи x , то большею частью намъ нужно также знать соотвѣтствующее значеніе y ; поэтому вычислять его все равно придется, а найдя его, мы можемъ воспользоваться имъ для вычисленія значенія производной. Если, на примѣръ, хотимъ построить касательную къ кривой въ нѣкоторой точкѣ, то нужно раньше найти самую точку; значитъ, въ концѣ концовъ, намъ безразлично, приходится ли вычислять направленіе касательной по ординатѣ или абсциссѣ точки. Точно также, если требуется найти скорость въ нѣкоторое время, то естественно разыскать положеніе точки въ этотъ моментъ, поэтому мы не придаемъ существеннаго значенія тому, выражаютъ ли наши формулы скорость въ данный моментъ или скорость въ данной точкѣ. Все же мы предпочитаемъ, если это возможно, выражать производную черезъ независимую переменную. Въ разсматриваемомъ случаѣ это можно сдѣлать: для этого надо только замѣнить y въ формулѣ (2) его выраженіемъ, взятымъ изъ равенства (1). тогда получаемъ:

$$\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

На примѣръ:

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \frac{d\sqrt[3]{x}}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Далѣе, если дано:

$$y = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \quad \dots \dots \dots (3)$$

то, положивъ:

$$y = u^m, \quad u = \sqrt[n]{x},$$

мы на основаніи формулы (2) § 18, получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1} \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Если подставить въ $\frac{dy}{dx}$ выраженіе, полученное для $\frac{du}{dx}$ и замѣнить u черезъ $\sqrt[n]{x}$, то можно написать:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\sqrt[n]{x^{m-1}}}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что формула § 18, которой мы воспользовались при этомъ выводѣ, справедлива и для отрица-

тельныхъ показателей m ; слѣдовательно, то же самое относится и къ только что полученной формулѣ.

Уже въ алгебрѣ обозначаютъ $\sqrt[n]{x^m}$ черезъ $x^{\frac{m}{n}}$, хотя послѣднее выраженіе по первоначальному опредѣленію степени и не имѣетъ смысла.

Примѣняя это обозначеніе, можно переписать формулу (4) такимъ образомъ:

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

Если писать нашу формулу въ такомъ видѣ, то она можетъ быть получена изъ формулы (2) § 15 посредствомъ замѣны m черезъ $\frac{m}{n}$; отсюда слѣдуетъ, что послѣдняя (формула § 15) вѣрна также и для дробныхъ (положительныхъ и отрицательныхъ) показателей. Поэтому намъ не нужно новой формулы для дифференцированія корня; вмѣсто этого, мы просто можемъ замѣтить, что правило дифференцированія степени, приведенное въ § 15, годится и въ томъ случаѣ, когда показатель степени число дробное.

Можно еще прибавить:

И въ томъ случаѣ, когда показатель — дробное отрицательное число.

Послѣднее потому, что отрицательное число можно разсматривать, какъ дробь, числитель которой отрицателенъ, а знаменатель положителенъ; а нашъ выводъ пригоденъ и для отрицательнаго числителя.

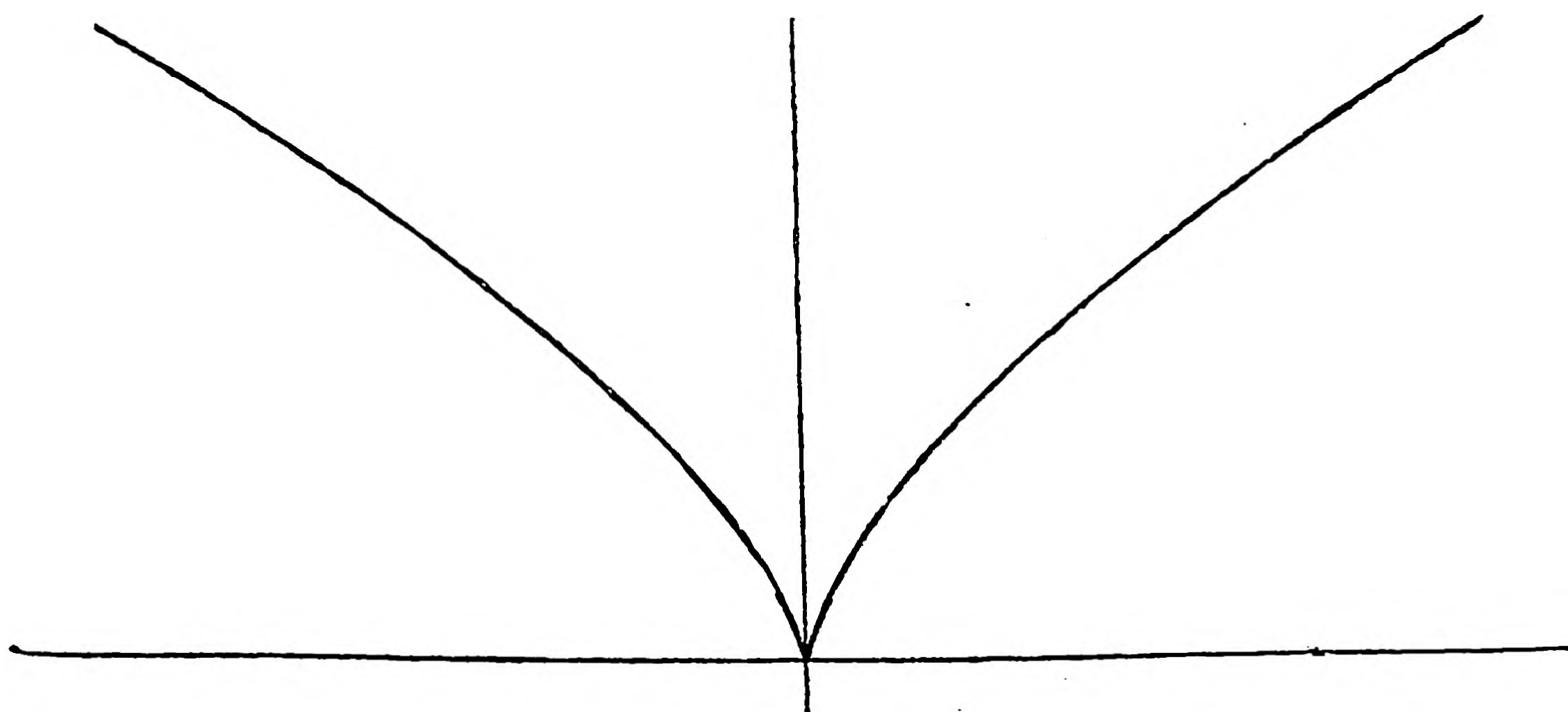
Примѣръ:

$$\frac{d\sqrt{x^3}}{dx} = \frac{dx^{\frac{3}{2}}}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

$$\frac{d\sqrt[3]{x^2}}{dx} = \frac{dx^{\frac{2}{3}}}{dx} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Изъ функцій, которыя мы разсматривали въ этомъ параграфѣ, намъ нѣтъ надобности геометрически интерпретировать тѣ, которыя получаются, если $m = 1$, потому что это функціи обратныя функціямъ $y = x^n$; а о геометрическомъ представленіи послѣднихъ мы уже говорили. Чтобы получить кривую $y = \sqrt[n]{x}$, когда дана кривая $y = x^n$, надо только повернуть систему координатъ на 90° и измѣнить положительное направленіе одной изъ осей на отрицательное. Изъ остальныхъ кривыхъ мы здѣсь остановимся только на кривой $y = \sqrt[3]{x^2}$, которая носитъ названіе полукубической параболы или параболы Нейля. Одинаковымъ численнымъ значеніямъ x (отличающимся

только знакомъ другъ отъ друга) соотвѣтствуютъ на этой кривой одинаковыя значенія y . Производная имѣетъ тѣмъ большее значеніе, чѣмъ меньше по абсолютной величинѣ x ; при $x = 0$ производная становится (какъ принято говорить) безконечно большой, т. е.



Черт. 19.

общая касательная къ двумъ вѣтвямъ кривой въ началѣ координатъ образуетъ прямой уголъ съ осью x -овъ, или, что то же самое, совпадаетъ съ осью y -овъ; обѣ вѣтви сходятся въ началѣ координатъ, образуя такъ называемую точку возврата.

§ 24. Дифференцирование функции отъ функции.

Въ § 18 мы уже рассматривали тотъ случай, когда y было степенью не самого x , а нѣкоторой величины u , которая въ свою очередь находилась въ какой-нибудь зависимости отъ x . Теперь мы обобщимъ найденную выше формулу, считая, что y не есть какъ разъ степень u , а просто зависитъ какъ-нибудь отъ u . Слѣдовательно, мы считаемъ, что y есть функция u , причемъ u есть функция x ; въ этомъ случаѣ мы просто будемъ говорить, что y есть функция отъ функции x . Рассматривая функции такого рода, можемъ отношеніе

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

замѣнить тождественно черезъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(ибо на Δu можно сократить).

Если u есть функция одного изъ видовъ, которыми мы вообще здѣсь занимаемся, то полагая $\Delta x = 0$, мы должны считать, что и Δu обращается при этомъ въ нуль. Если y такая функция отъ u , и u такая функция отъ x , которыя можно дифференцировать (имѣютъ опредѣленную производную), то оба отношенія послѣдняго выраже-

нія обращаются въ соответствующія производныя, и мы получаемъ формулу для дифференцированія функции отъ функции въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Эта формула, какъ и ранѣе полученныя формулы, во-первыхъ, показываетъ, что при упомянутыхъ допущеніяхъ получается опредѣленный результатъ и во-вторыхъ, она даетъ самый результатъ.

Если возьмемъ $y = u^n$, то $\frac{dy}{du} = nu^{n-1}$, и мы снова получаемъ формулу, приведенную уже въ § 18 (2).

Примѣръ: пусть требуется продифференцировать

$$y = \sqrt{1-x^2},$$

тогда положимъ:

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1 - x^2;$$

получаемъ:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{du}{dx} = -2x,$$

и слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Изъ этого результата можно вывести известную геометрическую теорему: касательная къ окружности перпендикулярна къ радіусу, проведенному черезъ точку касанія.

Примѣняя этотъ методъ нѣсколько разъ подъ-рядъ, можно дифференцировать и болѣе сложныя функции. Если, напримѣръ, предложена функция:

$$y = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}},$$

тогда слѣдуетъ положить:

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1 - v, \quad v = \sqrt{w}, \quad w = 1 - x^2,$$

получаемъ послѣдовательно:

$$\frac{dw}{dx} = -2x,$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{w}},$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{w}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{x}{2\sqrt{u}\sqrt{w}} = \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}.$$

Такимъ образомъ можно трактовать всякую функцію, которая получается изъ x и постоянныхъ посредствомъ конечнаго числа сложений, вычитаний, умножений, дѣлений и извлеченій корня. Прежде эти функціи называли обыкновенно алгебраическими функціями, но теперь этотъ терминъ употребляется въ болѣе широкомъ смыслѣ.

Г Л А В А IV.

Элементы интегральнаго исчисленія.

§ 25. Задачи интегральнаго исчисленія.

Уже въ § 3 было указано, что интегральное исчисленіе занимается задачами, въ которыхъ требуется по частичному дѣйствию заключить о дѣйстви цѣлаго. Напримѣръ: найти притяженіе тѣла, зная законы притяженія отдѣльной матеріальной частицы; найти разстояніе, пройденное точкой въ нѣкоторое время, зная скорость ея движенія; найти количество веществъ, получившихся при нѣкоторой реакціи за извѣстный промежутокъ времени, зная скорость реакціи. Задачи этого рода можно на основаніи введенныхъ нами опредѣлений формулировать такъ: требуется найти функцію по данному для ея производной выраженію.

Простѣйшій случай тотъ, что въ выраженіе производной входитъ только независимая переменная x и совсѣмъ не входитъ зависимая переменная y ; только на этомъ случаѣ мы и остановимся въ этой главѣ.

На простомъ примѣрѣ мы покажемъ, какъ можно приступать къ задачамъ такого рода, даже не зная ничего о дифференціальномъ исчисленіи. Пусть точка перемѣщается изъ нѣ котораго положенія $s = 0$ со скоростью, которая въ каждый данный моментъ пропорциональна времени, протекшему отъ начала движенія, т. е. равна gt .

Здѣсь черезъ g обозначена постоянная, причемъ мы можемъ, но не должны, считать ее равной ускоренію отъ силы тяжести ($g = 980$); требуется найти, гдѣ точка находится въ данное время?

Мы можемъ подойти къ рѣшенію этой задачи такимъ образомъ: въ теченіе первой секунды скорость точки была не меньше нуля и не больше g ; значить, пройденный путь

по меньшей мѣрѣ $= 0$

по большей мѣрѣ $= g$ см.

Точно также путь, пройденный въ теченіе второй секунды:

по меньшей мѣрѣ $= g$, по большей мѣрѣ $= 2g$,

въ теченіе третьей секунды:

по меньшей мѣрѣ $= 2g$, по большей мѣрѣ $3g$ и т. д.; вообще путь, пройденный въ теченіе t -ой секунды по меньшей мѣрѣ $= (t - 1)g$, по большей мѣрѣ $= tg$. Итакъ, путь, пройденный въ первыя t секундъ

$$\begin{aligned} & \text{не менѣе } (0 + 1 + 2 + \dots + (t - 1)) g \\ & \text{и не болѣе } (1 + 2 + 3 + \dots + t) g \text{ см.} \end{aligned}$$

Теперь мы должны рѣшить ариѳметическую задачу, а именно, найти сумму натурального ряда чиселъ отъ 0 до t . Для этого складываемъ первый членъ суммы съ послѣднимъ, второй съ предпослѣднимъ и т. д., тогда мы получимъ:

$$\begin{aligned} 1 + t &= t + 1, \\ 2 + t - 1 &= t + 1, \\ 3 + t - 2 &= t + 1 \dots \end{aligned}$$

Если t число четное, то такихъ паръ окажется какъ разъ $\frac{t}{2}$, и вся сумма будетъ равна:

$$\frac{t}{2} (t + 1) = \frac{t(t + 1)}{2},$$

если же t — нечетное, то паръ будетъ $\frac{t-1}{2}$ и еще отдѣльный средній членъ равный $\frac{t+1}{2}$; слѣдовательно, сумма въ этомъ случаѣ равна:

$$\frac{t-1}{2} (t + 1) + \frac{t+1}{2} = \frac{t+1}{2} \{t - 1 + 1\},$$

а это выраженіе опять таки равно:

$$\frac{t(t + 1)}{2}.$$

Итакъ, сумма первыхъ t чиселъ натурального ряда всегда равна:

$$\frac{t(t + 1)}{2},$$

независимо отъ того, четное t или нечетное.

Примѣняя этотъ результатъ къ нашей задачѣ, мы видимъ, что путь, пройденный точкой въ первыя t секундъ, равенъ: по меньшей мѣрѣ:

$$\frac{(t - 1)tg}{2} = \frac{gt^2}{2} - \frac{gt}{2},$$

по большей мѣрѣ:

$$\frac{t(t + 1)g}{2} = \frac{gt^2}{2} + \frac{gt}{2}.$$

Отсюда можем вывести такое заключение: если мы скажемъ, что этотъ путь содержитъ ровно:

$$\frac{1}{2} gt^2, \quad \dots \dots \dots (1)$$

то сдѣлаемъ ошибку не больше, чѣмъ $\frac{gt}{2}$ см., т. е. равную по большей мѣрѣ t -ой части значенія, принятаго нами за длину пути.

Если полученная точность достаточна для насъ, то вопросъ рѣшенъ; если мы не удовлетворяемся ею, то имѣемъ возможность получить большую точность; для этого надо прослѣдить движеніе болѣе подробно, по болѣе мелкимъ частямъ, такъ сказать, микроскопически.

Разбирая движеніе черезъ каждую n -ую часть секунды, мы видимъ, что въ первую n -ую часть секунды скорость была по меньшей мѣрѣ 0, по большей мѣрѣ $\frac{g}{n}$ см. въ секунду; слѣдовательно, путь, пройденный въ первую n -ую часть секунды, равенъ:

по меньшей мѣрѣ 0, по большей мѣрѣ $\frac{g}{n^2}$ см. *).

Такимъ же образомъ, путь, пройденный во вторую n -ую часть секунды, равенъ по меньшей мѣрѣ $\frac{g}{n^2}$, по большей мѣрѣ $\frac{2g}{n^2}$, см. и т. д.; наконецъ, путь, пройденный въ (nt) -ую по счету n -ую часть секунды равенъ:

по меньшей мѣрѣ

$$\frac{g}{n^2} \cdot \frac{(nt - 1) nt}{2} = \frac{gt^2}{2} - \frac{gt}{2n},$$

по большей мѣрѣ

$$\frac{g}{n^2} \cdot \frac{nt (nt + 1)}{2} = \frac{gt^2}{2} + \frac{gt}{2n}.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что путь, пройденный въ перья t секундъ, отличается отъ значенія (1) навѣрно не болѣе, чѣмъ на $\frac{gt}{2n}$; а такъ какъ число n можно взять сколь угодно большимъ, то заключаемъ, что путь вообще не можетъ не быть равнымъ $\frac{gt^2}{2}$. Если бы кто либо вздумалъ утверждать, что пройденный путь отличается отъ послѣдняго значенія на нѣкоторую величину ϵ , то мы можемъ опровергнуть это утвержденіе, взявъ n столь большимъ, чтобы было удовлетворено неравенство $\frac{gt}{2n} < \epsilon$.

*) Если бы точка перемѣщалась со скоростью $\frac{g}{n}$, то разстояніе, пройденное въ теченіе одной секунды, было бы равно $\frac{g}{n}$ см.; а слѣдовательно, разстояніе пройденное въ n -ую часть секунды, было бы равно $\frac{g}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{g}{n^2}$ см.

Вышеизложеннымъ способомъ Галилей еще до установки принциповъ дифференціального исчисленія трактовалъ законы паденія; и уже въ древности Архимедъ вычислилъ площадь, заключенную между вѣтвями параболы, способомъ, не отличающимся по существу отъ вышеуказаннаго.

Не трудно усмотрѣть, что нужно, чтобы можно было идти тѣмъ же путемъ дальше и рѣшать болѣе сложныя задачи; для этого мы должны, если дана функція $f(t)$, раньше всего получить формулу суммированія, т. е. должны постараться представить въ удобномъ видѣ сумму:

$$F(t) = f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{nt}{n}\right),$$

и затѣмъ слѣдовать, что дѣлается съ $\frac{F(t)}{n}$ когда n неограниченно возрастаетъ. Однако уже первая часть задачи представляетъ значительныя трудности; для $f(t) = t^2, t^3, t^4$ выраженіе суммы еще довольно простое, но для степеней съ большимъ показателемъ при t оно значительно усложняется, а для другихъ функцій задача становится еще болѣе трудной.

Но вѣдь намъ нѣтъ надобности идти по этому пути. Дѣйствительно, требуется только найти функцію, производная которой по t равна gt ; а такую функцію мы уже знаемъ изъ дифференціального исчисленія, производная отъ $\frac{gt^2}{2}$ равна gt . Посмотримъ: обратимо ли это положеніе и имѣемъ ли мы право заключить, что, если производная нѣкоторой функціи равна gt , то сама функція равна, непременно, $\frac{1}{2}gt^2$?

§ 26. Неопредѣленность задачъ такого рода. Постоянная интегрированія.

Очевидно, что такого заключенія дѣлать нельзя. Вѣдь $\frac{1}{2}gt^2$ не единственная функція, производная которой равна gt ; ту же самую производную имѣютъ функціи $\frac{1}{2}gt^2 + 1, \frac{1}{2}gt^2 - 3$ и вообще $\frac{1}{2}gt^2 + C$, гдѣ C обозначаетъ постоянную независящую отъ t . Эта постоянная отпадаетъ при дифференцированіи (производная постоянной равна нулю). Мы можемъ высказать вообще, что задачи интегральнаго исчисленія въ томъ видѣ, какъ онѣ формулированы въ § 25, по самому существу своему неопредѣленны; данное выраженіе производной не вполне опредѣляетъ исходную (первообразную) функцію. Это легко усмотрѣть также изъ механическихъ и геометрическихъ представленій: въ самомъ дѣлѣ, если намъ извѣстна только скорость, съ которой точка движется въ теченіе нѣкотораго

промежутка времени, то мы никоимъ образомъ на основаніи только этого даннаго не можемъ рѣшить, гдѣ находится точка, если намъ не дано положенія точки въ начальный *) или вообще въ какой-нибудь моментъ времени, точно также, зная направленіе касательной къ нѣкоторой кривой при любомъ x , мы можемъ найти видъ и форму этой кривой, но не можемъ опредѣлить ея положенія потому, что отъ перемѣщенія ея параллельно оси y -овъ наклоненіе касательныхъ для отдѣльныхъ значеній x не измѣняется. Итакъ:

Интегрированіе данной функціи не вполне опредѣленная задача; данная производная опредѣляетъ не одну, а сколько угодно функцій, отличающихся другъ отъ друга только на постоянную величину.

Эта постоянная, которой никогда не слѣдуетъ забывать, носить названіе произвольной постоянной интегрированія.

На основаніи соображеній, которыя будутъ приведены далѣе, интеграль данной функціи f , т. е. функцію F , производная которой равна f , обозначаютъ знакомъ:

$$\int f(x) dx.$$

Значитъ, мы можемъ дать слѣдующее опредѣленіе «неопредѣленнаго интеграла»:

Если

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

то

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Когда въ приложеніяхъ анализа встрѣчаются задачи интегрированія вродѣ указанныхъ выше, то всегда существуютъ еще вспомогательныя условія, по которымъ является возможность въ каждомъ частномъ случаѣ опредѣлить постоянную; въ задачахъ механики это обыкновенно начальныя условія, т. е. условія, которыя опредѣляютъ состояніе системы въ нѣкоторый начальный моментъ; въ геометрическихъ задачахъ можетъ быть задано вообще какое-нибудь число, зависящее отъ положенія кривой, или точка, черезъ которую проходитъ кривая съ даннымъ направленіемъ касательныхъ.

Эта неопредѣленность въ задачахъ интегрированія является основной во всемъ нашемъ воспріятіи природы. Всѣ законы природы—законы дифференціальныя; они только говорятъ, каково будетъ состояніе системы въ слѣдующій моментъ, если ея состояніе въ на-

*) Начальнымъ называютъ тотъ моментъ, отъ котораго ведутъ счетъ времени.

стоящій моментъ такое то. Если мы хотимъ опредѣлить состояніе въ опредѣленное время, то должны знать состояніе въ нѣкоторый начальный моментъ. Законы природы не даютъ намъ этого послѣдняго состоянія и не могутъ его дать: дѣйствительно, какъ бы далеко назадъ мы ни отодвигали это начальное состояніе, мы всегда должны считать, что оно обусловлено предшествовавшими состояніями, а законы природы могутъ только выяснить эту зависимость.

Однако, вернемся къ нашей математической задачѣ. Исчерпаемъ ли мы, дѣйствительно, всѣ рѣшенія, если введемъ эту постоянную интегрированія? Если мы знаемъ нѣкоторую функцію, имѣющую заданную производную, то можемъ ли мы прибавленіемъ произвольныхъ постоянныхъ получить всѣ функціи, имѣющія ту же производную, или существуютъ еще какія-нибудь рѣшенія? Скажемъ проще: необходимо ли, чтобы разность двухъ функцій была постоянная для того, чтобы эти функціи имѣли одинаковую производную?

Если двѣ функціи F_1 и F_2 имѣютъ ту же производную, то производная ихъ разности

$$\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$$

по положенію (2) § 17 равна нулю.

Слѣдовательно, предложенный вопросъ приводится къ слѣдующему болѣе простому: будетъ ли функція, имѣющая производную равную нулю, обязательно постоянной?

На основаніи соображеній механическаго и геометрическаго характера можетъ казаться, что на этотъ вопросъ слѣдуетъ отвѣтить безусловно утвердительно. Если точка не обладаетъ скоростью, то она остается въ покоѣ; такимъ же образомъ линія, направленіе которой вездѣ параллельно оси x -овъ, есть прямая параллельная оси x -овъ. Однако, при болѣе внимательномъ изслѣдованіи можно убѣдиться, что въ этихъ выводахъ скрыто нѣкоторое невысказанное нами предположеніе, а именно, что не встрѣчается разрывовъ функцій, что всѣ измѣненія функцій, какъ принято выражаться, непрерывны. Если допустить прерывныя измѣненія функцій, то надо, на примѣръ, считать, что функція, сохраняющая отъ $x = a$ до $x = b$ постоянное значеніе A и отъ $x = b$ до $x = c$ постоянное значеніе B , имѣетъ производную равную нулю. Можно допустить возможность полученія функцій съ очень большимъ числомъ очень малыхъ прерывныхъ измѣненій, разрывовъ; къ такимъ функціямъ вышеприведенныя заключенія непримѣнимы. Но мы не будемъ заниматься разсмотрѣніемъ такихъ функцій, не будемъ также дѣлать попытокъ дать аналитическое опредѣленіе непрерывности, о которой здѣсь идетъ рѣчь. Непрерывность мы просто будемъ считать геометрическимъ

свойствомъ, которое не нуждается въ дальнѣйшемъ опредѣленіи и соотвѣтственно этому безъ подробнаго доказательства выскажемъ такую теорему:

Непрерывная функція, производная которой вездѣ равна нулю, есть постоянная.

Для всѣхъ важнѣйшихъ приложений анализа достаточно приведенныхъ соображеній: болѣе подробныя изслѣдованія должны быть развиты въ лекціяхъ и учебникахъ для спеціалистовъ математиковъ.

Если допущена справедливость послѣдней теоремы, то на основаніи вышеизложеннаго получаемъ еще слѣдующую теорему:

Въ непрерывной функціи, производная которой дана, неопредѣленной является только постоянная.

Или:

Двѣ непрерывныя функціи, производныя которыхъ все время равны, отличаются другъ отъ друга только на постоянную.

Замѣтимъ, что эти соображенія не рѣшаютъ вопроса о томъ, всегда ли существуетъ функція, для которой данная функція является производной.

§ 27. Формулы приведенія.

На основаніи заключеній § 26 можно изъ каждой формулы дифференціального исчисленія получить соотвѣтствующую формулу интегрального исчисленія; напр., изъ теоремы § 17 о почленномъ дифференцированіи суммы и разности заключаемъ, что сумму или разность можно интегрировать почленно; другими словами:

$$\int (\varphi(x) + \psi(x)) dx = \int \varphi(x) dx + \int \psi(x) dx$$

или

$$\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx \quad (1)$$

Справедливость этой формулы доказывается дифференцированіемъ обѣихъ частей; производная лѣвой части равна $u + v$, потому что согласно опредѣленію $\int (u + v) dx$ есть одна изъ функцій, производная которыхъ равна $u + v$. Правая часть представляетъ собой сумму; ея производная равна суммѣ производныхъ обоихъ слагаемыхъ, т. е. равна $u + v$. Слѣдовательно, обѣ части равенства (1) имѣютъ одинаковыя производныя и могутъ различаться только на постоянную; но мы всегда считаемъ, что неопредѣленная постоянная подразумѣвается въ самомъ знакѣ интеграла и поэтому ея не нужно отдѣльно приписывать, если въ обѣихъ частяхъ есть знакъ интеграла.

На основаніи совершенно аналогичныхъ разсужденій заключаемъ, что

$$\int au \, dx = a \int u \, dx, \dots \dots \dots (2)$$

т. е. постоянный множитель можетъ быть вынесенъ за знакъ интеграла.

Изъ правила дифференцированія произведенія получаемъ при помощи интегрированія:

$$\int \frac{d(uv)}{dx} \, dx = \int u \frac{dv}{dx} \, dx + \int v \frac{du}{dx} \, dx,$$

или

$$\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx. \dots \dots \dots (3)$$

Правда, эта формула не приводитъ интегрированія произведенія къ интегрированію отдѣльныхъ множителей, но она даетъ правило для замѣны даннаго интеграла другимъ, или вѣрнѣе двумя интегралами, которые, можетъ быть, извѣстны намъ или проще, чѣмъ данные, а можетъ быть, и нѣтъ. Этотъ способъ называютъ неудачно выбраннымъ, по общераспространеннымъ терминомъ интегрированія по частямъ.

Правило дифференцированія функціи отъ функціи даетъ слѣдующую формулу интегральнаго исчисленія, носящей названіе формулы подстановки:

$$\int f(z) \, dz = \int f(\varphi(x)) \frac{dz}{dx} \, dx \dots \dots \dots (4)$$

Для доказательства беремъ производныя обѣихъ частей по x ; производная правой части равна:

$$f(\varphi(x)) \frac{dz}{dx},$$

производная лѣвой части по z равна:

$$f(z),$$

значить, производная ея по x равна:

$$f(z) \frac{dz}{dx}$$

и совпадаетъ съ производной правой части. Отсюда слѣдуетъ, что обѣ части могутъ отличаться другъ отъ друга только на постоянную, которой нѣтъ надобности выписывать, такъ какъ она подразумѣвается въ знакѣ интеграла. И это правило приводитъ интегрированіе одной функціи къ интегрированію другой, но вопросъ о томъ, который изъ интеграловъ проще, остается открытымъ.

§ 28. Интегрирование цѣлыхъ рациональныхъ функцийъ.

Изъ равенства (2) § 15 посредствомъ интегрирования получаемъ:

$$\int nx^{n-1} dx = x^n + C,$$

вмѣсто чего, вынеся n за знакъ интеграла и раздѣливъ на него обѣ части, можемъ написать:

$$\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} + C,$$

(Совершенно безразлично напишемъ ли, мы здѣсь $\frac{C}{n}$ или просто C , потому что n -я часть произвольной величины сама произвольна). Замѣняя n черезъ $n+1$, получаемъ формулу въ томъ видѣ, въ какомъ ею обыкновенно пользуются:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Эта формула такъ же, какъ и формула дифференціального исчисления, изъ которой она получена, имѣетъ мѣсто для всякихъ положительныхъ и отрицательныхъ, цѣлыхъ и дробныхъ показателей n съ однимъ исключеніемъ: при выводѣ ея мы дѣлимъ на n и затѣмъ замѣняемъ n черезъ $n+1$, значитъ нашъ выводъ непримѣнимъ, когда $n+1=0$, т. е. когда $n=-1$. Съ помощью этой формулы и формулы (1) § 27 можно проинтегрировать всякую цѣлую рациональную функцию x ; на примѣръ:

$$\int (x^3 - 3x^2 + 1) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x + C.$$

§ 29. Определенный интегралъ и геометрическое значеніе его.

Если $F(x)$ —одна изъ тѣхъ функцийъ, производныя которыхъ равны $f(x)$, то подъ определеннымъ интеграломъ:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

мы разумѣемъ разность

$$F(x_2) - F(x_1).$$

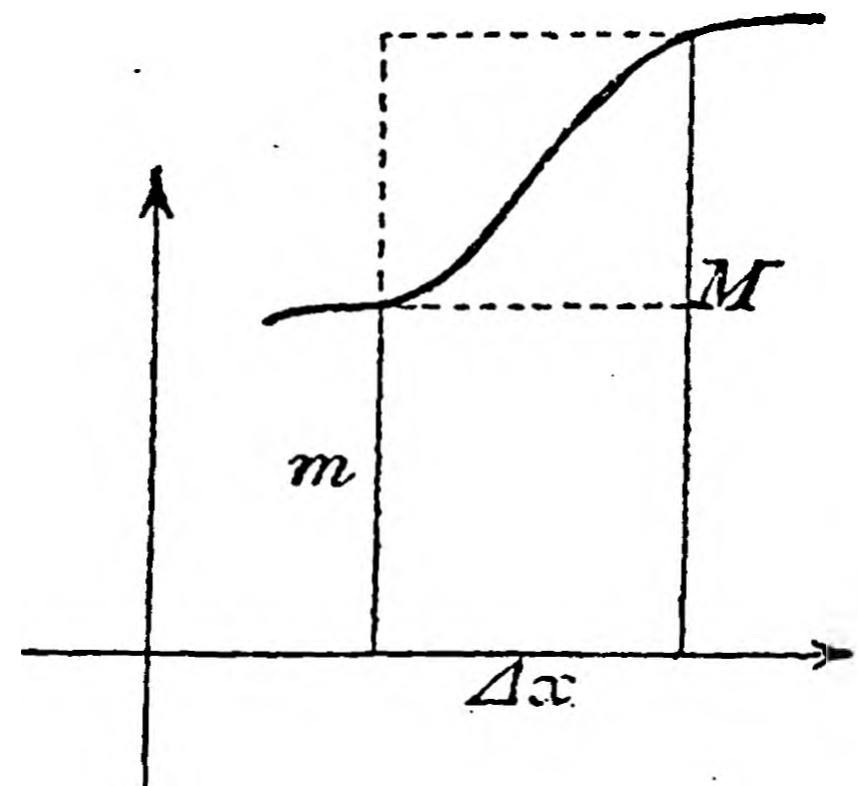
При этомъ совершенно безразлично, которую изъ функцийъ, имѣющихъ одинаковыя производныя, взять за $F(x)$, потому что постоянная, на которую онѣ отличаются другъ отъ друга, при вычитаніи пропадаетъ. На примѣръ:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (4x^3 + 9x^2 + 5) dx &= [x^4 + 3x^3 + 5x + C]_1^2 = \\ &= (16 + 24 + 10 + C) - (1 + 3 + 5 + C) = 50 - 9 = 41. \end{aligned}$$

Если въ интегрируемой функціи нѣтъ другихъ буквъ кромѣ x , а входятъ только еще численные коэффициенты, то опредѣленный интегралъ равенъ нѣкоторому совершенно опредѣленному числу. Положимъ, что мы рассматриваемъ уравненіе:

$$y = f(x),$$

какъ уравненіе нѣкоторой кривой, отнесенной къ прямоугольнымъ координатамъ; сначала мы разберемъ тотъ случай, когда y для всѣхъ рассматриваемыхъ нами значеній x остается положительнымъ. Мы постараемся вычислить площадь, ограниченную осью x -овъ, начальной ординатой, соответствующей $x = a$, кривой и конечной ординатой, соответствующей произвольному x ; при этомъ мы оставимъ неизмѣнными кривую, ось x -овъ и начальную ординату; въ такомъ случаѣ величина площади зависитъ отъ x , она есть функція x ; мы обозначимъ ее черезъ $\Phi(x)$. Если дадимъ x малое приращеніе, то площадь тоже увеличится на малую величину, которую по аналогіи съ прежними обозначеніями можно назвать черезъ $\Delta\Phi(x)$. Примемъ за геометрически очевидное, что изъ двухъ площадей, изъ которыхъ одна цѣликомъ заключена въ другой, охватывающая болѣе охватываемой. Обозначимъ въ промежуткѣ отъ x до $x + \Delta x$ наибольшую ординату черезъ M , а наименьшую черезъ m и замѣтимъ, что площадь $\Delta\Phi(x)$ больше площади прямоугольника съ основаніемъ Δx и высотой m , но меньше площади прямоугольника съ тѣмъ же основаніемъ и высотой M , слѣдовательно:



Черт. 20.

$$m\Delta x < \Delta\Phi(x) < M\Delta x, \quad \text{или} \quad m < \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} < M.$$

Если будемъ дѣлать Δx все меньше и меньше, то m и M будутъ все ближе подходить къ тому значенію, которое y принимаетъ при аргументѣ равномъ x ; такимъ образомъ:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x),$$

т. е. $\Phi(x)$ есть одна изъ тѣхъ функцій, производная которыхъ равна $f(x)$.

Если $F(x)$ одна изъ такихъ функцій, то

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

гдѣ C —постоянная. Для того, чтобы найти эту постоянную, надо

воспользоваться непринятымъ еще во вниманіе условіемъ, что иско-
мая площадь ограничена слѣва ординатой $x = a$.

Изъ этого условія слѣдуетъ, что площадь обращается въ нуль
при $x = a$, т. е. должно быть:

$$0 = F(a) + C.$$

Если взять значеніе постоянной, полученной изъ этого равенства,
то выраженіе площади получается въ такомъ видѣ:

$$\Phi(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx.$$

§ 30. Приближенное вычисленіе площади.

Когда намъ удастся найти функцію $F(x)$, то послѣдняя формула
предыдущаго параграфа даетъ возможность вычислить площадь, ко-
торую мы разсматривали тамъ. Съ другой стороны на основаніи по-
слѣднихъ соображеній можно указать методъ, дающій возможность
найти, по крайней мѣрѣ, приближенное численное значеніе опредѣ-
леннаго интеграла и въ томъ случаѣ, когда выраженіе функціи $F(x)$
нельзя найти элементарными приѣмами или когда это намъ не удастся,
или когда полученное выраженіе слишкомъ сложно. Для простоты
разсмотримъ сначала функцію, возрастающую отъ $x = a$ до $x = b$ и
введемъ произвольное число промежуточныхъ точекъ $x_1 x_2 \dots x_n$; осно-
вываясь на предыдущей геометрической аксіомѣ, получимъ съ одной
стороны:

$$\int_a^b f(x) dx < (x_1 - a) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_2) + \dots \\ + (x_{n-1} - x_{n-2}) f(x_{n-1}) + (b - x_{n-1}) f(b), \dots \dots (1)$$

съ другой стороны:

$$\int_a^b f(x) dx > (x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \dots \\ + (x_{n-1} - x_{n-2}) f(x_{n-2}) + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \dots \dots (2)$$

Если точки на оси x -овъ выбраны достаточно близко другъ къ
другу, то эти послѣднія величины, между которыми заключенъ инте-
гралъ, будутъ мало отличаться другъ отъ друга; поэтому мы имѣемъ
право каждую изъ этихъ величинъ считать за приближенное значе-
ніе интеграла.

Проще всего, хотя это не всегда самое цѣлесообразное, взять
точки на равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга и отъ крайнихъ

точекъ, тогда разность каждаго двухъ рядомъ стоящихъ x равна n -ой части всей разности $b - a$.

Вышеприведенныя формулы обращаются въ слѣдующія:

$$\int_a^b f(x) dx < \frac{b-a}{n} \{y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n\} \dots \quad (3)$$

$$\int_a^b f(x) dx > \frac{b-a}{n} \{y_0 + y_1 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1}\} \dots \quad (4)$$

Во многихъ случаяхъ можно получить достаточно близкое приближенное значеніе, если взять вмѣсто послѣднихъ выраженій ихъ арифметическое среднее, т. е.:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left\{ \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right\} \dots \quad (5)$$

(Въ приближенныхъ равенствахъ, какъ здѣсь, такъ и дальше, мы будемъ пользоваться знакомъ \approx). Сумма, написанная во второй части, имѣетъ простое геометрическое значеніе: она представляетъ собой сумму площадей трапецій, которыя получаются, если соединить прямыми концы ординатъ выбранныхъ точекъ. Эта сумма меньше или больше искомой площади, смотря по тому, повернута ли выпуклость кривой вверхъ или внизъ.

Если $f(x)$ по мѣрѣ возрастанія x убываетъ, то можно вывести аналогичныя слѣдствія, надо только обмѣнить слова «меньше» и «больше» вездѣ, кромѣ послѣдней фразы.

Если $f(x)$ возрастаетъ отъ $x = a$ до нѣкотораго x_k , а затѣмъ снова убываетъ, то можно разбить искомую площадь на двѣ части и примѣнить къ каждой изъ нихъ формулу (5); такимъ образомъ получается:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left\{ \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + y_{k-1} + \frac{1}{2} y_k \right\} +$$

$$+ \frac{b-a}{n} \left\{ \frac{1}{2} y_k + y_{k+1} + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right\},$$

а это не что иное какъ:

$$\frac{b-a}{n} \left\{ \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right\},$$

т. е. формула (5) примѣнима и въ данномъ случаѣ. Такимъ же обра-

зомъ поступаемъ, если $f(x)$ нѣсколько разъ переходитъ отъ возрастанія къ убыванію или наоборотъ; очевидно, что когда этотъ переходъ происходитъ между двумя выбранными точками, то примѣненіе «формулы трапецій» (5) въ этомъ промежуткѣ даетъ бѣольшую погрѣшность, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда функція въ данномъ промежуткѣ только возрастаетъ или только убываетъ; однако, если выбрать промежутки достаточно малыми, то погрѣшность, происходящая вслѣдствіе послѣдняго обстоятельства, будетъ въ конечномъ результатѣ незначительна.

Если отбросимъ эти случаи и ограничимся тѣми случаями, когда функція только возрастаетъ или только убываетъ въ каждомъ изъ промежутковъ, то мы будемъ въ состояніи указать, какимъ нужно взять n , чтобы быть увѣреннымъ, что погрѣшность не превзойдетъ нѣкоторой напередъ заданной величины. Разность выраженій (3) и (4), которыя можно назвать формулами прямоугольниковъ, равна:

$$\frac{b-a}{n} (y_n - y_0).$$

Одно изъ послѣднихъ выраженій даетъ, навѣрное, слишкомъ большой результатъ, другое, навѣрное, слишкомъ малый. Погрѣшность, получающаяся при вычисленіи по формулѣ трапецій (5), въ худшемъ случаѣ равна половинѣ этой разности. Въ большинствѣ же случаевъ, когда кривая не очень искривлена, ошибка значительно меньше, въ чемъ можно непосредственно убѣдиться при первомъ взглядѣ на какой-нибудь чертежъ.

Положимъ, требуется вычислить съ точностью до двухъ десятичныхъ знаковъ интегралъ

$$\int_1^2 \frac{dx}{x},$$

котораго мы не можемъ выразить по способамъ, указаннымъ выше. Здѣсь:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad f(b) = 0,5 \quad f(a) = 1,$$

поэтому, если взять $(n + 1)$ ординатъ, то погрѣшность будетъ не больше

$$\frac{1}{n} (1 - 0,5) = \frac{1}{2n}.$$

Чтобы быть увѣреннымъ, что эта погрѣшность меньше 0,005, надо взять $n = 100$; но, въ дѣйствительности, можно обойтись несра-

внѣнно меньшимъ значеніемъ n , на примѣръ, $n = 10$; тогда получимъ:

$$\begin{array}{r}
 y_0 = \qquad \qquad \qquad 1 \\
 y_1 = 0,909 \\
 y_2 = 0,833 \\
 y_3 = 0,769 \\
 y_4 = 0,714 \\
 y_5 = 0,667 \\
 y_6 = 0,625 \\
 y_7 = 0,588 \\
 y_8 = 0,555 \\
 y_9 = 0,526 \\
 \hline
 y_{10} = \qquad \qquad \qquad 0,5 \\
 \qquad \qquad \qquad 6,186 \qquad \qquad \qquad 1,5 \\
 \qquad \qquad \qquad + 0,75 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 6,936
 \end{array}$$

Это вычисленіе даетъ 0,6936, между тѣмъ какъ болѣе точное вычисленіе, выполненное по другому болѣе удобному методу, который мы далѣе укажемъ, даетъ 0,69315. Значить, дѣйствительно, погрѣшность нашего вычисленія меньше одной единицы, стоящей на третьемъ мѣстѣ послѣ запятой.

Г Л А В А V.

Логариомъ и показательная функція. Интегрированіе раціональныхъ дробныхъ функцій.

§ 31. Опредѣленіе и свойства натурального логариома.

Совершенно такъ же, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, для частнаго значенія $x = 2$, мы можемъ вычислить величину опредѣленнаго интеграла

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} \dots \dots \dots (1)$$

для любого значенія x .

Мы можемъ этотъ интеграль разсматривать, какъ нѣкоторую функцію отъ x . Такъ какъ эта функція намъ будетъ часто встрѣчаться и такъ какъ ее невозможно выразить при помощи уже ранѣ введенныхъ знаковъ (чего мы тутъ, впрочемъ, доказать не можемъ), то полезно будетъ для этой функціи дать особое названіе и обозна-

ченіе. Назовемъ ее «натуральнымъ логарифмомъ» и для обозначенія ея введемъ знакъ \log (или еще: $\log \text{ nat}$, или: \ln , или просто: l).

Называя эту функцию такъ, мы нѣсколько забѣгаемъ впередъ—ибо только въ дальнѣйшемъ будетъ видна связь этой функции съ установленнымъ въ элементарной алгебрѣ понятіемъ: « \log отъ x при данномъ основаніи a ».

Если мы дали опредѣленіе нѣкоторой функции, то естественнымъ является вопросъ о ея свойствахъ. Изъ самаго опредѣленія натурального логарифма, какъ опредѣленнаго интеграла, сразу вытекаютъ слѣдующія его свойства:

I. Это есть опредѣленная функция для каждаго положительнаго значенія x .

(Что касается до отрицательныхъ значеній x , то введеніе ихъ требуетъ болѣе подробныхъ развитій. Ибо на границѣ между положительными и отрицательными значеніями x находится значеніе $x = 0$, для котораго подинтегральная функция становится безконечно большой. Въ этомъ мѣстѣ теряется понятіе о площади. Такъ что въ этихъ лекціяхъ мы не будемъ вдаваться въ вопросъ о томъ, что нужно понимать подъ логарифмомъ числа отрицательнаго).

II. Эта функция положительна при $x > 1$
равна нулю при $x = 1$
отрицательна при $x < 1$.

III. Съ возрастаніемъ x эта функция растетъ, ибо производная этой функции для всѣхъ рассматриваемыхъ нами, т. е. положительныхъ, значеній x —положительна. Однако, мы не можемъ безъ дальнѣйшихъ разсужденій рѣшить вопроса о томъ, возрастаетъ ли эта функция при этомъ безпредѣльно или стремится къ нѣкоторому опредѣленному предѣлу.

Очень важно бываетъ при ознакомленіи съ природой нѣкотораго еще неизвѣстнаго закона зависимости найти нѣкоторую функциональную зависимость, которая удовлетворяетъ закону; другими словами, найти зависимость между значеніями функции для различныхъ значеній независимаго переменнаго, справедливую тогда, когда между самими значеніями независимаго переменнаго существуетъ одна или нѣсколько зависимостей.

Такую зависимость мы можемъ найти и тутъ слѣдующимъ образомъ:

Введемъ въ нашъ интеграль новую переменную интегрированія η , при помощи подстановки

$$\eta = \xi z \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ z обозначаетъ нѣкоторую постоянную, но произвольную положительную величину.

Примѣнимъ тутъ формулу (4) § 27.

При этомъ нужно соотвѣтственно измѣнить и предѣлы интегрированія. Значенію $\xi = 1$ соотвѣтствуетъ $\eta = z$.

Значенію $\xi = xz$ соотвѣтствуетъ значеніе $\eta = xz$.

Мы получимъ тогда:

$$\int_1^{xz} \frac{d\xi}{\xi} = \int_z^{xz} \frac{z}{\eta} \cdot \frac{d\eta}{z} = \int_1^{xz} \frac{d\eta}{\eta} - \int_1^z \frac{d\eta}{\eta}.$$

Другими словами

$$\log xz = \log x + \log z \dots \dots \dots (3)$$

Это равенство справедливо для любыхъ положительныхъ значеній x и z .

Эта формула выражаетъ собою такъ называемую теорему сложения логарифмическихъ функцій, ибо она позволяетъ намъ сумму двухъ логарифмовъ выразить помощью одного логарифма.

Эта формула сейчасъ нами выведена въ предположеніи, что подъ z разумѣется величина, не зависящая отъ x .

Такъ какъ, однако, эта формула справедлива для каждаго положительнаго значенія z , то это z мы можемъ разсматривать и какъ величину переменную, а затѣмъ даже можемъ положить ее равной x , но тогда:

$$\log x^2 = 2 \log x \dots \dots \dots (4)$$

Полагая далѣе въ формулѣ (3) $z = x^2$, мы получимъ сначала:

$$\log x^3 = \log x^2 + \log x,$$

а примѣняя формулу (4),

$$\log x^3 = 3 \log x \dots \dots \dots (5)$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы можемъ получить для нѣкотораго цѣлаго, положительнаго числа n формулу:

$$\log x^n = n \log x \dots \dots \dots (6)$$

И справедливость этой формулы для всякаго цѣлаго положительнаго n мы можемъ установить общеизвѣстнымъ переходомъ отъ n къ $(n + 1)$.

Если мы въ полученной формулѣ вмѣсто x положимъ $\sqrt[n]{x}$, то мы будемъ имѣть:

$$\log x = n \log \sqrt[n]{x},$$

или:

$$\log x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log x \dots \dots \dots (7)$$

а связывая вмѣстѣ формулы (6) и (7), мы для каждой рациональной дроби $\frac{m}{n}$ получимъ формулу:

$$\log x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log x. \quad \dots \dots \dots (8)$$

что формулируется такъ: Формула (6) справедлива не только для каждаго цѣлаго, но также и для дробнаго положительнаго рациональнаго числа n .

Справедливость этой формулы для иррациональныхъ значеній n мы могли бы установить, исходя изъ того соображенія, что каждое иррациональное число путемъ приближенія можетъ быть замѣнено числомъ рациональнымъ, и что весьма малому измѣненію x соответствуетъ весьма малое измѣненіе $\log x$. Однако, это заключеніе должно быть болѣе подробно развито въ руководствахъ для математиковъ-спеціалистовъ.

Справедливость формулы (6) для отрицательныхъ значеній показателя утверждается самымъ простымъ образомъ, если въ исходной формулѣ (3) положить $z = \frac{1}{x}$. Тогда мы получимъ:

$$\log x + \log \frac{1}{x} = \log 1.$$

Но правая часть равенства равна нулю, что вытекаетъ изъ самаго опредѣленія логарифма, какъ опредѣленнаго интеграла.

Значить:

$$\log (x^{-1}) = - \log x.$$

и значить вообще

$$\log (x^{-n}) = - n \log x \quad \dots \dots \dots (9)$$

Значить: Уравненіе (6) справедливо и для отрицательныхъ показателей.

Съ помощью этихъ формулъ мы въ состояніи вычислить натуральные логарифмы всякихъ положительныхъ чиселъ, если намъ извѣстенъ натуральный логарифмъ одного какого-нибудь положительнаго числа z . Для этого нужно только опредѣлить такое число n , чтобы имѣло мѣсто равенство:

$$z^n = x \quad \dots \dots \dots (10)$$

а это не представляетъ трудности, если мы имѣемъ подъ рукою такъ называемыя Бригговы (съ основаніемъ 10) или обыкновенныя логарифмическія таблицы, ибо, если имѣетъ мѣсто уравненіе (10), то на основаніи элементарнаго способа рѣшенія логарифмическихъ уравненій, должно имѣть мѣсто равенство:

$$n \log \text{brigg } z = \log \text{brigg } x,$$

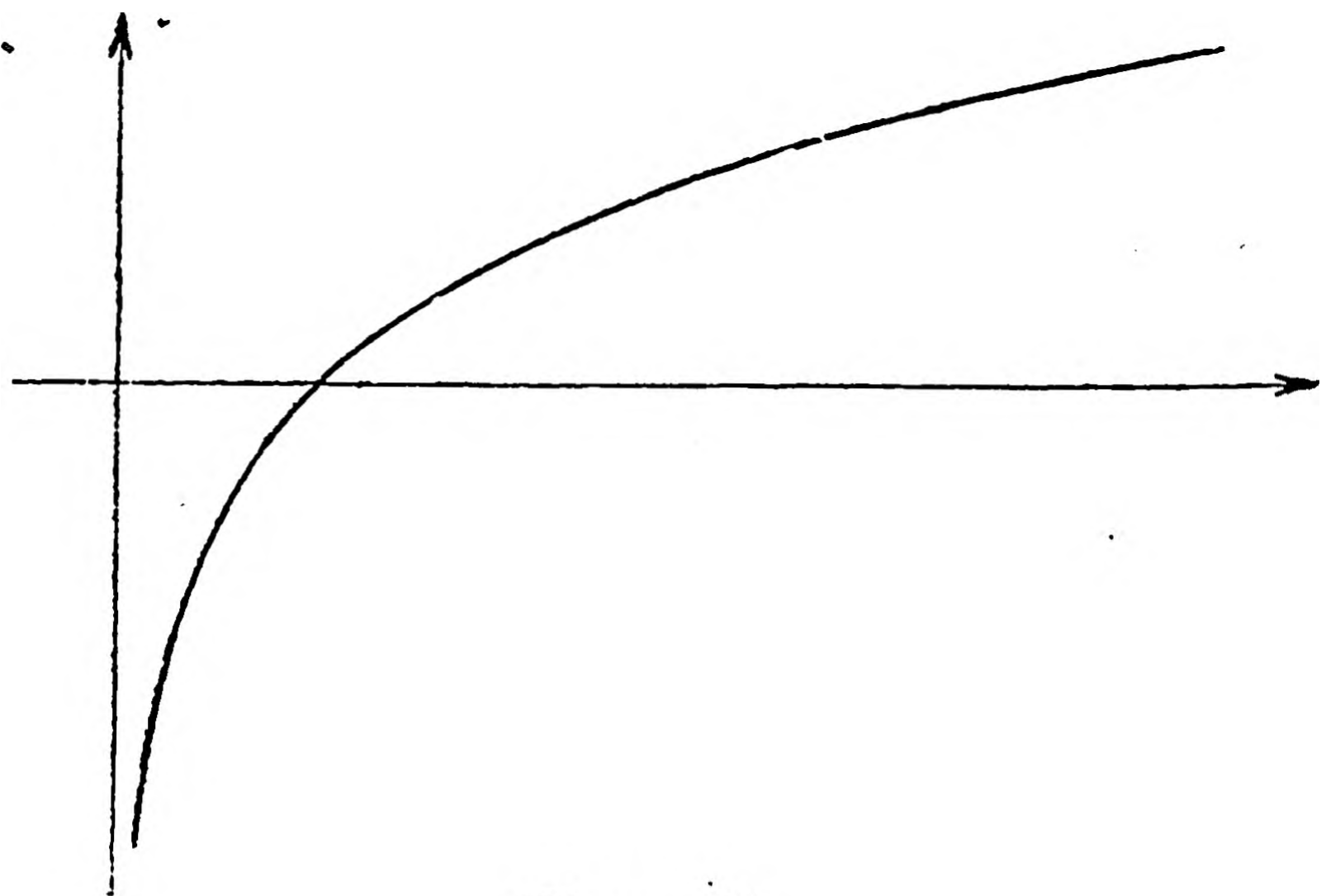
откуда:

$$n = \frac{\log \text{brigg } x}{\log \text{brigg } z} \dots \dots \dots (11)$$

Но тогда изъ формулы (6)

$$\log x = \frac{\log \text{brigg } x}{\log \text{brigg } z} \log z = \frac{\log z}{\log \text{brigg } z} \log \text{brigg } x \dots \dots (12)$$

Т. е. мы получаемъ натуральный логариѳмъ нѣкотораго положительнаго числа x , умножая табличнй логариѳмъ этого числа (\log . найденный въ Бригговыхъ таблицахъ) на нѣкотораго разъ навсегда опредѣленнаго и отъ x -са независимаго множителя. Мы можемъ найти этотъ множитель, если мы нашли какимъ-нибудь образомъ натуральный логариѳмъ какого-нибудь числа.



Черт. 21.

Если мы воспользуемся приведеннымъ въ § 30 вычисленіемъ натурального логариѳма числа 2, то мы получимъ для вышеупомянутаго множителя, который обыкновенно обозначается $\frac{1}{M}$, значеніе

$$\frac{1}{M} = \frac{0,694}{0,301} = 2,303;$$

$$M = 0,434 \dots \dots \dots (13)$$

Если мы захотимъ вычислить его значеніе болѣе точно, то намъ нужно будетъ болѣе точно вычислить значеніе $\log 2$, нанося на графикъ большее число дѣленій.

Результаты всего вышесказаннаго соберемъ въ слѣдующія формулы:

$$\log \text{nat } x = \int_1^x \frac{dx}{x} = 2,303 \dots \log \text{brigg } x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log \text{nat } x + C,$$

$$\frac{d \log \text{nat } x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Въ силу этихъ формулъ и общихъ теоремъ §§ 17, 18, 19, 24 мы теперь въ состояніи продифференцировать любую функцію, которая

составлена изъ алгебраическихъ, логарифмическихъ и показательныхъ функций.

Пусть, напримѣръ, требуется продифференцировать функцию:

$$y = \log (x + \sqrt{x^2 \pm 1}).$$

Положимъ

$$y = \log z \quad z = x + u \quad u = \sqrt{v} \quad v = x^2 \pm 1.$$

И найдемъ теперь послѣдовательно:

$$\frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{du}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 \pm 1}}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 \pm 1}}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$$

а значитъ и обратно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \log (x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + C,$$

результатъ, которымъ мы воспользуемся въ § 75.

§ 32. Опредѣленіе и свойства натуральной показательной функции.

Результаты предыдущаго § естественнымъ образомъ выдвигаютъ вопросъ, нельзя-ли натуральный логарифмъ числа разсматривать, какъ его логарифмъ при нѣкоторомъ основаніи въ установленномъ въ элементарной алгебрѣ смыслѣ этого понятія.

На этотъ вопросъ можно отвѣтить утвердительно, если только существуетъ нѣкоторое число e , натуральный логарифмъ котораго равенъ 1. Ибо тогда мы будемъ имѣть:

$$\log e^x = x \log e = x \cdot \dots \dots \dots (1)$$

Тогда натуральный логарифмъ нѣкотораго числа $y = e^x$ дѣйстви-тельно равенъ тому показателю степени x , въ которую нужно возвести число e , чтобы получить число y . Другими словами, мы будемъ имѣть логарифмъ въ алгебраическомъ смыслѣ этого опредѣленія.

Все сводится къ тому, можемъ ли мы найти такое число e .

Мы видѣли, что $\log 2$ меньше, чѣмъ 1. Тѣмъ же путемъ мы безъ труда убѣдимся въ томъ, что $\log 3$ больше 1. Кромѣ того, въ § 31 мы видѣли, что натуральный логарифмъ растетъ съ возрастаніемъ

числа x , и кромѣ того мы упомянули, что для того, чтобы получить произвольное малое измѣненіе логариѳа, достаточно соотвѣтственно мало измѣнить число, логариѳъ котораго ищется. Отсюда мы можемъ заключить, что между 2 и 3 должно лежать одно и только одно значеніе y , для котораго $\log y = 1$.

Это число мы можемъ вычислить съ любой степенью точности при помощи способа, который, правда, въ настоящемъ примѣрѣ былъ бы довольно затруднительнымъ, но который въ другихъ случаяхъ даже можетъ быть рекомендованъ для практическихъ цѣлей. А именно, если намъ даны два числа, между которыми долженъ лежать корень уравненія

$$f(x) = a, \quad \text{и если функція } f(x) \text{ такова,}$$

что для каждаго значенія x мы безъ особеннаго труда можемъ вычислить соотвѣтственное значеніе самой функціи, то мы можемъ вычислить искомый корень путемъ послѣдовательныхъ приближеній (послѣдовательныхъ пробъ), что мы и покажемъ на нашемъ примѣрѣ.

Испробуемъ сначала середину между числами 2 и 3 — значить, 2,5. Мы увидимъ, что это число еще слишкомъ мало, ибо $\log 2,5$ меньше 1. Итакъ, искомое число должно лежать между 2,5 и 3. Испробуемъ далѣе 2,7; мы можемъ убѣдиться, что и это число еще слишкомъ мало, ибо $\log 2,7$ меньше 1.

Если же мы испробуемъ число 2,8, то мы увидимъ, что $\log 2,8$ будетъ больше 1. Значить, e лежитъ между 2,7 и 2,8. Значить, мы опредѣлили число e съ точностью до 0,1. Если намъ эта точность не достаточна, то тѣмъ же путемъ мы можемъ идти и дальше. Испробуемъ число 2,75. Мы найдемъ, что это число слишкомъ велико. То же имѣетъ мѣсто для чиселъ 2,73 и 2,72, число же 2,71 оказывается слишкомъ малымъ.

Теперь число e опредѣлено у насъ съ точностью до 0,01.

Подобный процессъ мы можемъ продолжать и далѣе и опредѣлять одну десятичную цифру искомаго числа за другой. При этомъ, чѣмъ дальше мы идемъ, т. е. чѣмъ ближе подходимъ къ рѣшенію нашего вопроса, тѣмъ съ бѣльшей и бѣльшей степенью точности намъ нужно вычислять самые логариѳмы.

Ибо въ противномъ случаѣ могло бы случиться, что для нѣкаго логариѳа, который на самомъ дѣлѣ больше 1, мы бы въ силу неточности нашихъ вычисленій получили значеніе меньшее 1.

Впрочемъ, само вычисленіе даетъ намъ указаніе на то, какая точность необходима.

Въ настоящемъ примѣрѣ, какъ это было упомянуто, этотъ способъ былъ бы нѣсколько утомителенъ, ибо вычисленіе каждаго ло-

гариема, который мы пробуемъ, потребовало бы повторенія вычисленій § 30.

Мы могли бы нѣсколько облегчить нашу работу, если бы, зная, напримѣръ, $\log 2$, стали бы $\log 2,5$ вычислять уже по формулѣ:

$$\log 2,5 = \log 2 + \log 1,25.$$

Но тогда бы тѣ логарифмы, изъ которыхъ мы исходимъ, должны были бы быть вычислены съ тою высокою степенью точности, которую требуютъ отъ насъ дальнѣйшія вычисленія.

Если бы мы, дѣйствительно, хотѣли примѣнить въ данномъ случаѣ этотъ способъ, то было бы, можетъ быть, полезнѣе искать не сразу число, котораго логарифмъ равенъ 1, а такое число, натуральный логарифмъ котораго равенъ $\frac{1}{4}$; тогда бы 4-ая степень этого числа и была бы равна числу e . Это бы дало намъ болѣе удобное вычисленіе, ибо по способу § 30 логарифмы чиселъ, мало отличающихся отъ 1, получаются съ болѣею легкостью, чѣмъ логарифмы чиселъ меньшихъ или большихъ.

Однако мы можемъ не продолжать болѣе подробно развивать этотъ способъ въ силу того, что мы въ дальнѣйшемъ будемъ имѣть способы для болѣе точнаго опредѣленія числа e и вообще величины e^x для какого-нибудь значенія числа x .

Число e , натуральный логарифмъ котораго есть 1, имѣетъ въ высшемъ анализѣ такое же значеніе, какъ число, выражающее отношеніе длины окружности къ діаметру; для этого числа разъ навсегда принято обозначеніе e , совершенно такъ же, какъ упомянутое число выражается символомъ π . Итакъ на вышеставленный вопросъ мы имѣемъ теперь утвердительный отвѣтъ: натуральные логарифмы чиселъ суть не что иное, какъ логарифмы чиселъ при основаніи e въ обыкновенномъ алгебраическомъ смыслѣ.

Это формулами выражается такъ:

если

$$e^x = y,$$

то

$$x = \log \text{nat } y.$$

Степень съ постояннымъ основаніемъ и переменнымъ показателемъ называется показательной функцией.

Когда основаніе есть число e , то эта показательная функция носитъ названіе натуральной показательной функции

Свойства показательныхъ функций мы получаемъ прямо изъ свойствъ логарифмовъ, по отношенію къ которымъ они являются обратными.

Впрочемъ, эти свойства могутъ считаться установленными въ алгебрѣ.

Правило дифференцированія натур. показательной функции мы получимъ на основаніи общей теоремы § 22.

Въ самомъ дѣлѣ мы получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{y}} = \frac{1}{y} = y$$

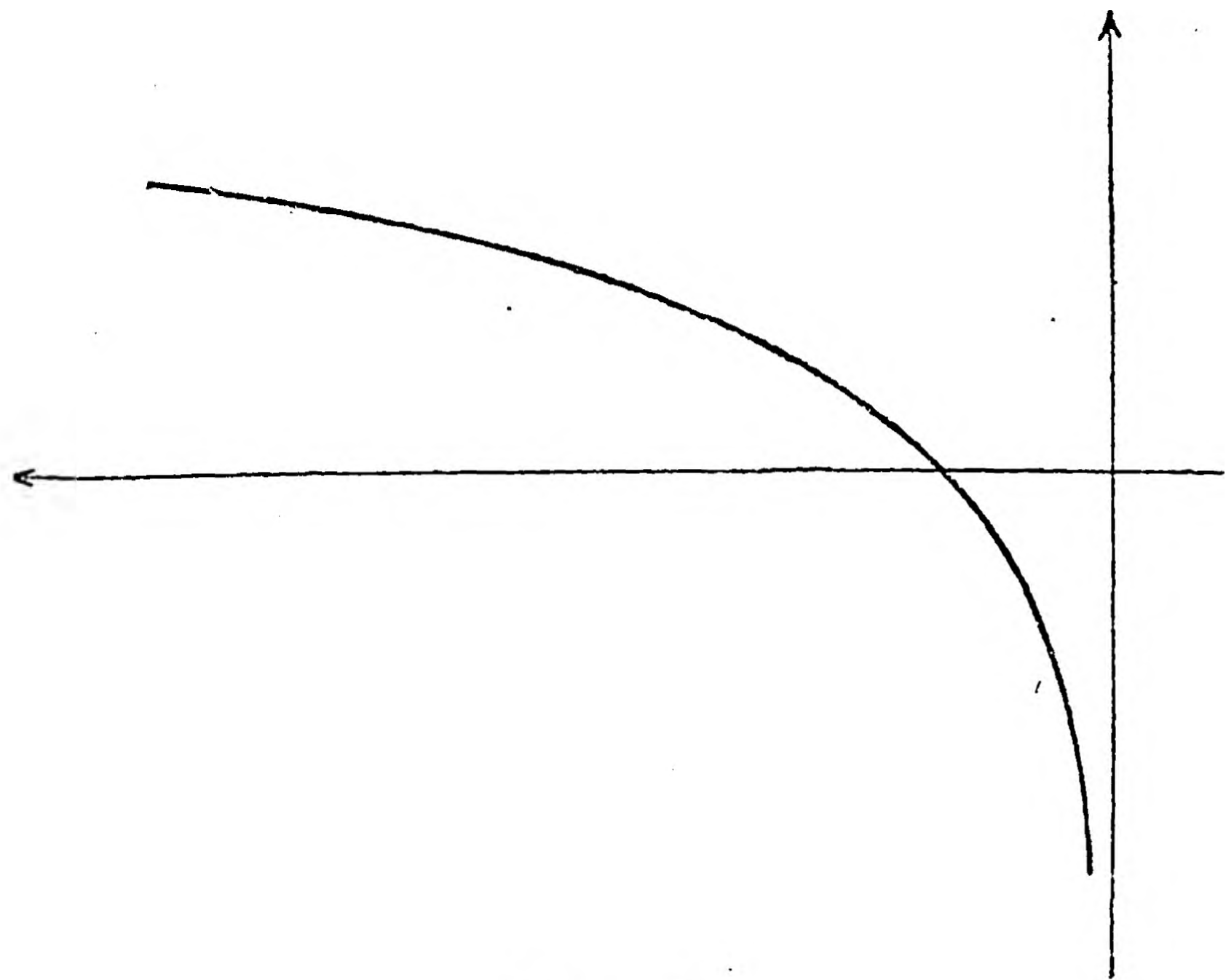
Значитъ:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

И обратно:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Черт. 22.



§ 33. Интегрирование дробныхъ рациональныхъ функций. Простѣйшіе случаи.

Выведенная въ § 31 формула

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C. \dots \dots \dots (1)$$

справедлива для всѣхъ положительныхъ значеній x . Какъ же намъ теперь поступить, если x приписываются и отрицательныя значенія? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, мы можемъ прибѣгнуть къ способу подстановки, изложенному въ § 27, полагая

$$x = -z,$$

тогда мы получимъ:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{-z} \frac{dx}{dz} dz = \int \frac{1}{-z} (-1) dz = \int \frac{dz}{z},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log (-x) + C \dots \dots \dots (2)$$

для отрицательныхъ значеній x .

Къ этому интегралу мы можемъ привести интегралъ нѣсколько болѣе сложнаго вида, а именно:

$$\int \frac{dx}{x - a}$$

Для этого положимъ

$$x - a = z \quad \text{или} \quad x - a = -z$$

въ зависимости отъ того, будетъ ли $x > a$ или $x < a$.

Въ первомъ случаѣ $\frac{dx}{dz} = 1$, во второмъ случаѣ $\frac{dx}{dz} = -1$.

Значить для обоихъ случаевъ мы получаемъ послѣ подстановки:

$$\int \frac{dz}{z} = \log z + C;$$

значить:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \begin{cases} \log(x-a) + C & \text{при } x > a \\ \log(a-x) + C & \text{при } x < a \end{cases} \dots \dots (3)$$

Интеграль еще болѣе общаго вида, а именно

$$\int \frac{dx}{ax+b}$$

сводится къ предыдущему, если только на основаніи (2) § 27 вынести постояннаго множителя $\frac{1}{a}$ за знакъ интеграла; мы получимъ въ этомъ случаѣ:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x+\frac{b}{a}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right]}$$

отсюда получимъ:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \begin{cases} \frac{1}{a} \log(ax+b) + C & \text{при } x > -\frac{b}{a} \text{ *)} \\ \frac{1}{a} \log(-ax-b) + C & \text{при } x < -\frac{b}{a} \end{cases} \dots \dots (4)$$

Посмотримъ теперь, какъ поступить въ томъ случаѣ, когда степень знаменателя относительно x - выше первой.

Разберемъ сначала простой примѣръ:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)}$$

Интегрированіе такихъ выраженій удастся легко благодаря тому, что кому то пришла удачная мысль попробовать дробь, стоящую подъ знакомъ интеграла, разложить на сумму нѣсколькихъ дробей; въ данномъ случаѣ двухъ дробей — одну со знаменателемъ x , а другую со знаменателемъ $(x+1)$. Очевидно, въ суммѣ эти двѣ дроби дадутъ одну дробь со знаменателемъ $x(x+1)$, т. е. подобную нашей подинтегральной дроби. Незвѣстные пока числители этихъ двухъ искомыхъ дробей обозначимъ буквами A и B , тогда мы должны

*) Замѣтимъ тутъ, что слагаемое $-\frac{\log a}{a}$, какъ постоянная, отъ x не зависящая величина, включено въ составъ произвольной постоянной C .

получить равенство:
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \dots \dots \dots (5)$$

Причемъ это равенство должно быть тождествомъ, т. е. оно должно имѣть мѣсто для всѣхъ значеній x (замѣчаніе это очень существенно, ибо если двѣ величины равны между собою не для всѣхъ, а только для нѣкоторыхъ значеній переменной, то мы не можемъ говорить о равенствѣ интеграловъ отъ этихъ выраженій). Если же это равенство есть тождество, то тождествомъ будетъ и то равенство, которое получится изъ даннаго (5), если мы обѣ части равенства умножимъ на общаго знаменателя обѣихъ дробей, т. е. на $x(x+1)$; мы будемъ, значить, имѣть тождество:

$$1 = A(x+1) + Bx$$

или:

$$1 = Ax + A + Bx \dots \dots \dots (6)$$

Это тождество только въ томъ случаѣ можетъ имѣть мѣсто, если въ правой части равенства вовсе не будетъ x -са, а свободный членъ равенъ будетъ 1. Другими словами, оба неизвѣстныхъ коэффиціента A , B должны удовлетворять слѣдующимъ двумъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= A \end{aligned} \dots \dots \dots (7)$$

Эти же ур-нія удовлетворяются слѣдующими значеніями A и B :

$$A = 1 \quad B = -1 \dots \dots \dots (8)$$

Итакъ мы получаемъ:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \dots \dots \dots (9)$$

Это тождество можно провѣрить, производя въ правой части равенства указанная дѣйствія. Впрочемъ, этимъ мы бы только повторили предыдущія выкладки.

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \begin{cases} \log x - \log(x+1) + C = \log \frac{x}{x+1} + C \text{ при } x > 0. \\ \log(-x) - \log(x+1) + C = \log \frac{-x}{x+1} + C \text{ при } -1 < x < 0. \\ \log(-x) - \log(-x-1) + C = \log \frac{-x}{-x-1} + C \text{ при } x < -1. \end{cases}$$

Если мы пожелаемъ сдѣлать провѣрку, то намъ нужно будетъ только продифференцировать полученное выраженіе.

Тогда мы получимъ:

$$\frac{d \log \frac{x}{x+1}}{dx} = \frac{x+1}{x} \frac{d \frac{x}{x+1}}{dx} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)},$$

т. е. какъ разъ подынтегральную функцию.

(Для дифференцированія было бы удобнѣе, если бы мы логарифмъ дроби представили въ видѣ разности двухъ логарифмовъ; но тогда бы мы провѣрили только часть предыдущихъ выкладокъ, т. е. не сдѣлали бы въ сущности полной повѣрки).

§ 34. Общая теорія.

Всегда-ли, однако, когда нужно проинтегрировать нѣкоторую рациональную дробь, можно поступить такъ, какъ въ только что разобранномъ примѣрѣ? На вопросъ приходится тотчасъ отвѣтить отрицательно.

Во многихъ случаяхъ надо еще сдѣлать предварительно нѣкоторыя подготовительныя дѣйствія.

Сумма какого угодно числа дробей съ постоянными числителями и знаменателями первой степени относительно x будетъ представлять изъ себя всегда дробь, у которой степень числителя будетъ ниже степени знаменателя. А слѣдовательно, дробь, у которой степень числителя равна или больше степени знаменателя, не можетъ быть представлена въ видѣ суммы простѣйшихъ дробей упомянутого вида.

Мы можемъ однако дробь, у которой степень числителя равна или больше степени знаменателя, разбить на сумму нѣкоторой цѣлой рациональной функции отъ x и дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

Для этого только нужно раздѣлить числителя на знаменателя (процессъ подобный тому, когда мы неправильную дробь хотимъ обратить въ смѣшанное число), причемъ дѣленіе производимъ до тѣхъ поръ, пока полученный отъ дѣленія остатокъ не будетъ степени болѣе низкой, чѣмъ дѣлитель.

Дѣленіе многочлена на многочленъ мы знаемъ изъ элементарнаго курса; мы однако выполнимъ его полностью на частномъ примѣрѣ:

$$\begin{array}{r} (x^5 + 2x^2) : (x^2 - 1) = x^3 + x + 2 \\ x^5 - x^3 \\ \hline + \\ x^3 + 2x^2 \\ x^3 - x \\ \hline + \\ 2x^2 + x \\ 2x^2 - 2 \\ \hline + \\ x + 2 \end{array}$$

Итакъ:

$$\frac{x^5 + 2x^2}{x^2 - 1} \equiv x^3 + x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}.$$

Цѣлая часть можетъ быть проинтегрирована по правиламъ § 28. Мы, значить, въ дальнѣйшемъ можемъ предполагать, что во всѣхъ дробяхъ, которыя намъ будутъ встрѣчаться, уже выдѣлена предварительно цѣлая часть, т. е. степень числителя ниже степени знаменателя.

Второе, что намъ надо сдѣлать,—это разложить знаменателя на составные множители первой степени. Въ примѣрѣ, разобранномъ въ предыдущемъ параграфѣ, знаменатель уже былъ разложенъ на простѣйшіе множители. Если же этого нѣтъ, то естественнымъ является вопросъ о томъ, всегда ли такое разложеніе возможно и какъ его выполнить.

Для частичнаго отвѣта на этотъ вопросъ могутъ служить слѣдующія теоремы.

Пусть a есть нѣкоторое опредѣленное число. Если $(x - a)$ есть множитель функціи $f(x)$, т. е. если $f(x)$ можно представить въ видѣ произведенія $(x - a)$ на нѣкоторую опредѣленную величину (вообще зависящую отъ x -са), имѣющую конечное значеніе для $x = a$, т. е.:

$$f(x) \equiv (x - a) f_1(x) \dots \dots \dots (1)$$

то $f(x)$ должно обращаться въ нуль при $x = a$.

Итакъ, если $(x - a)$ есть множитель многочлена $f(x)$, то a является корнемъ уравненія $f(x) = 0$.

И обратно: Пусть $x = a$ есть корень уравненія $f(x) = 0$.

Будемъ дѣлитель $f(x)$ на $(x - a)$ до тѣхъ поръ, пока не получится остатка. Такъ какъ дѣлитель первой степени, то остатокъ уже не будетъ содержать x (будетъ степени нулевой); но цѣлая функція нулевой степени есть число постоянное. Значить, мы можемъ дѣленіе довести до того, что въ остаткѣ получится только постоянное количество.

Значить, будетъ имѣть мѣсто тождество:

$$f(x) \equiv (x - a) f_1(x) + b \dots \dots \dots (2)$$

Положимъ теперь въ этомъ тождествѣ $x = a$. Тогда изъ условія, что $x = a$ есть корень уравненія $f(x) = 0$, мы получимъ:

$$b = 0.$$

Итакъ b должно быть равнымъ нулю при $x = a$.

А такъ какъ b вовсе не зависитъ отъ x -са, то b должно быть вообще равнымъ нулю. Тождество (2), когда $x = a$ есть корень уравненія $f(x) = 0$, должно имѣть форму (1); т. е. другими словами $f(x)$

должно дѣлиться на $(x - a)$. Значитъ, мы доказали и обратную теорему. Обѣ эти теоремы формулируются такъ:

Когда a есть корень ур-нія $f(x)$, то $(x - a)$ является множителемъ многочлена $f(x)$.

Итакъ, задача разложенія полинома $f(x)$ на простѣйшихъ множителей тождественна съ задачей рѣшенія ур-нія $f(x) = 0$. Последняя же задача составляетъ предметъ алгебры, или въ болѣе узкомъ смыслѣ—теоріи уравненій.

Изъ этой теоріи безъ доказательства мы примемъ слѣдующія теоремы:

I. Алгебраическое уравненіе n -наго порядка не можетъ имѣть болѣе n корней.

II. Уравненіе n -наго порядка имѣетъ ровно n рѣшеній, если при этомъ принять во вниманіе: а) такъ называемые комплексные (мнимые) корни, б) каждый кратный корень считать въ числѣ показателя его кратности.

Причемъ $x = a$ называется k -кратнымъ корнемъ ур-нія $f(x) = 0$ или рѣшеніемъ порядка k , если многочленъ $f(x)$ дѣлится на $(x - a)^k$, но не дѣлится на $(x - a)^{k+1}$.

(Замѣтимъ тутъ кстати, что если $x = a$ представляетъ многократный корень, напр., если:

$$f(x) \equiv (x - a)^2 f_1(x),$$

то

$$\frac{df(x)}{dx} = 2(x - a) f_1(x) + (x - a)^2 \frac{df_1(x)}{dx}.$$

Значитъ, и $\frac{df(x)}{dx}$ дѣлится на $(x - a)$.

Этими теоремами устанавливается теперь возможность любую рациональную функцію разложить на линейныхъ множителей, но эти теоремы не даютъ намъ средства выполнить эту задачу на самомъ дѣлѣ.

Для квадратныхъ уравненій мы знаемъ изъ элементарной алгебры, какъ представить рѣшеніе въ видѣ дѣйствій надъ рациональными количествами и извлеченія квадратнаго корня.

Такіе же общіе методы существуютъ для уравненій III и IV степени, которые однако даютъ рѣшенія въ комплексной формѣ именно въ тѣхъ случаяхъ, когда всѣ корни вещественны.

Что же касается общихъ уравненій высшихъ степеней, то подобныя общія формулы при помощи радикаловъ вовсе невозможны.

Другой вопросъ, какъ найти численные рѣшенія уравненій съ численными коэффициентами съ любой степенью точности.

Въ дальнѣйшемъ мы покажемъ способы для этой цѣли.

Теперь же мы будемъ разсматривать примѣры, въ которыхъ разположеніе на множители знаменателя или уже дано, или можетъ быть здѣлано простыми средствами.

Мы тутъ будемъ предварительно разсматривать только тѣ случаи, когда всѣ множители вещественны.

Если мы знаменатель дроби, которую намъ нужно разложить на простѣйшія, разбили на простѣйшіе множители, то является еще третій вопросъ, всегда ли можно разложить данную дробь на простѣйшія, т. е. на сумму дробей съ линейными знаменателями.

Сначала мы разберемъ тотъ случай, когда въ знаменателѣ нѣтъ кратныхъ корней, т. е. въ разложеніи

$$f(x) \equiv a_0 (x - a) (x - b) (x - c) \dots \dots \dots (5)$$

Числа $a, b, c \dots$ всѣ между собою различны.

Тогда должно имѣть мѣсто тождество:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \equiv \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots \dots \dots (6)$$

Но тогда должно имѣть мѣсто и слѣдующее тождество (по умноженіи обѣихъ частей равенства (6) на общаго знаменателя всѣхъ дробей):

$$\begin{aligned} \varphi(x) \equiv & Aa_0 (x - b) (x - c) \dots + Ba_0 (x - a) (x - c) \dots + \\ & + Ca_0 (x - a) (x - b) \dots + \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

Это тождество должно имѣть мѣсто и для $x = a$.

Но для этого значенія x -са всѣ члены правой части, кромѣ одного, обращаются въ нуль, и мы получаемъ:

$$\varphi(a) \equiv Aa_0 (a - b) (a - c) \dots$$

откуда

$$A = \frac{\varphi(a)}{a_0 (a - b) (a - c) \dots} \dots \dots \dots (8)$$

Тождество (7) должно имѣть мѣсто и для $x = b$, откуда:

$$\varphi(b) \equiv Ba_0 (b - a) (b - c) \dots$$

откуда

$$B = \frac{\varphi(b)}{a_0 (b - a) (b - c) \dots}$$

Такъ же найдемъ:

$$C = \frac{\varphi(c)}{a_0 (c - a) (c - b) \dots}$$

Если мы коэффициентамъ $A, B, C \dots$ дадимъ вышеупомянутыя значенія, то равенство (7) навѣрное будетъ справедливо для $x = a, x = b, x = c \dots$ и т. д. Значитъ, всего для n значеній неизвѣстнаго.

Но это есть уравнение $(n - 1)$ степени; если же оно удовлетворяется n различными значеніями x -са, то оно по теоремѣ I должно быть тождествомъ, т. е. удовлетворяться для всѣхъ значеній x -са. Значить, мы достигли того, чего хотѣли достигчь.

Значить, въ томъ случаѣ, когда всѣ множители знаменателя линейны, разложеніе дроби на простѣйшія всегда возможно.

Доказательство этой теоремы дало намъ въ то же время и способъ, при помощи котораго мы въ каждомъ сюда относящемся случаѣ можемъ на самомъ дѣлѣ произвести разложеніе дроби на простѣйшія.

Для вычисленія иногда бываетъ удобнѣе другой способъ:

Равенство (7) будетъ справедливо для всѣхъ значеній x -са, если только коэффициенты въ обѣихъ частяхъ равенства при одинаковыхъ степеняхъ x -са между собою равны.

Это условіе даетъ намъ равно n уравненій для опредѣленія n неизвѣстныхъ $A, B, C \dots$ и т. д. Притомъ всѣ уравненія линейныя (первой степени). Значить, ихъ можно рѣшить элементарными средствами. Тутъ, конечно, возникаетъ вопросъ о томъ, во всѣхъ ли случаяхъ это рѣшеніе возможно: вѣдь можно опасаться, что полученные уравненія будутъ противорѣчить другъ другу или одно или нѣсколько изъ нихъ будутъ являться слѣдствіемъ остальныхъ. Болѣе подробное изслѣдованіе даетъ намъ поводъ утверждать, что опасенія такого рода излишни. Величины, на которыя намъ приходится дѣлать дѣленіе (входящія въ составъ знаменателей неизв. вел. $A, B, C \dots$), будутъ состоять только изъ произведеній разностей величинъ a, b, \dots взятыхъ по двѣ, но мы уже предпослали условіе, что каждая изъ разностей $(a - b) (a - c) (b - c) \dots$ не равна нулю, такъ какъ всѣ числа $a, b, c \dots$ между собою различны.

Впрочемъ, намъ и не надо особенно углубляться въ эти разсужденія, такъ какъ на основаніи предыдущаго вычисленія мы видимъ, что рѣшеніе задачи возможно.

§ 35. Примѣры.

Пусть намъ предложенъ интегралъ

$$J = \int \frac{3x + 4}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx.$$

Степень числителя въ данномъ примѣрѣ ниже степени знаменателя, такъ что тутъ не надо дѣлать предварительнаго дѣленія числителя на знаменателя.

Значить, намъ надо начать задачу съ разложенія знаменателя на множители. Рѣшеніе уравненія 3-й степени не входитъ въ число

вопросовъ, извѣстныхъ изъ элементарной алгебры, но въ данномъ случаѣ мы легко можемъ справиться съ этимъ уравненіемъ, ибо мы видимъ, что знаменатель $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ обращается въ нуль, если въ немъ положить $x = 1$.

Значитъ $(x - 1)$ есть одинъ изъ дѣлителей знаменателя.

Произведемъ дѣленіе на самомъ дѣлѣ:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\
 \begin{array}{r}
 x^3 - x^2 \\
 \hline
 -5x^2 + 11x \\
 -5x^2 + 5x \\
 \hline
 +6x - 6 \\
 +6x - 6 \\
 \hline
 - \quad +
 \end{array}
 \end{array}$$

Теперь остается только разложить $x^2 - 5x + 6$ на множители. Для этой цѣли рѣшимъ квадратное уравненіе:

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Рѣшенія этого ур-нія суть $x = 2$ и $x = 3$.

Значитъ нашъ знаменатель разлагается на три множителя:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

А такъ какъ коэффициентъ при x^3 въ этомъ полиномѣ равенъ 1, то мы имѣемъ тождественно:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \equiv (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Положимъ теперь

$$\frac{3x + 4}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}.$$

Освободимся отъ знаменателей; будемъ имѣть:

$$3x + 4 = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2).$$

Положимъ въ этомъ равенствѣ $x = 1$, тогда мы будемъ имѣть:

$$7 = A(-1)(-2); A = \frac{7}{2}.$$

Если положить $x = 2$, то мы будемъ имѣть:

$$10 = B \cdot 1 \cdot (-1); B = -10.$$

Наконецъ, полагая $x = 3$, получимъ:

$$13 = C \cdot 2 \cdot 1; \quad C = \frac{13}{2}.$$

Значитъ, мы опредѣлили всѣ три неизвѣстныхъ.

Если же мы примѣнимъ другой способъ, то получимъ сначала, выполняя всѣ дѣйствія:

$$3x + 4 = A(x^2 - 5x + 6) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 - 3x + 2)$$

отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ, получимъ:

$$\begin{array}{l} 0 = A + B + C \\ 3 = -5A - 4B - 3C \\ 4 = -6A + 3B + 2C \end{array} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} -2 \\ \\ 1 \end{array}$$

Производя умноженія на указанные сбоку множители и дѣлая сложеніе, получимъ:

$$3 = -2A - B$$

$$4 = 4A + B$$

и далѣе

$$7 = 2A; \quad \text{откуда} \quad A = \frac{7}{2}$$

$$B = -2A - 3 = -10; \quad C = -A - B = \frac{13}{2}$$

т. е. величины, полученные выше.

Такимъ образомъ мы получимъ:

$$\begin{aligned} J &= \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x-1} - 10 \int \frac{dx}{x-2} + \frac{13}{2} \int \frac{dx}{x-3} = \\ &= \frac{7}{2} \log(x-1) - 10 \log(x-2) + \frac{13}{2} \log(x-3) + C. \end{aligned}$$

Для второго примѣра рассмотримъ:

$$J = \int \frac{2x^2 - 2}{2x^2 - 8x + 6} dx.$$

Тутъ числитель той же степени, что и знаменатель.

Значитъ нужно сначала выполнить дѣленіе числителя на знаменателя.

$$\frac{2x^2 - 2}{2x^2 - 8x + 6} = 1 + \frac{8x - 8}{2x^2 - 8x + 6}.$$

Теперь разложимъ знаменателя на множители.

Рѣшимъ для этого уравненіе:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0.$$

Его корни суть $x = 1$ и $x = 3$.

Значит $2x^2 - 8x + 6$ дѣлится на $(x - 1)$ и $(x - 3)$, но такъ какъ тутъ коэффициентъ при x^2 равенъ 2, то мы имѣемъ тождественно

$$2x^2 - 8x + 6 \equiv 2(x - 1)(x - 3).$$

Значитъ

$$\frac{8x - 8}{2x^2 - 8x + 6} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3}$$

откуда

$$8x - 8 \equiv 2A(x - 3) + 2B(x - 1)$$

отсюда

$$8 = 2A + 2B$$

$$-8 = -6A - 2B$$

отсюда

$$A = 0, \quad B = 4.$$

Тутъ оказывается, что дробь со знаменателемъ второй степени равняется дроби со знаменателемъ 1-й степени. На самомъ дѣлѣ тутъ возможно сокращеніе дроби на $(x - 1)$.

Значитъ:

$$J = \int dx + 4 \int \frac{dx}{x - 3} = x + 4 \log(x - 3) + C.$$

§ 36. Многократные корни.

Способъ, изложенный въ послѣднихъ §§, былъ основанъ на предположеніи, что всѣ линейные множители знаменателя между собою различны. Если же въ немъ встрѣчаются одинаковые множители, то этотъ случай требуетъ нѣкотораго видоизмѣненія метода.

Тутъ одному многократному корню не будетъ соответствовать одной дроби; если бы мы это предположили, то опредѣленіе коэффициентовъ привело бы насъ къ уравненіямъ, которыя бы противорѣчили другъ другу.

Каждому многократному множителю знаменателя вида $(x - a)^k$ будутъ соответствовать дроби со знаменателями $(x - a)^k, (x - a)^{k-1}, \dots, (x - a)^2, (x - a)$ съ нѣкоторыми постоянными въ числителяхъ. Всего k дробей.

Пусть, напримѣръ, намъ нужно проинтегрировать:

$$J = \int \frac{1 - x}{x(x + 1)^2} dx \dots \dots \dots (1)$$

Мы должны тутъ предположить такое разложеніе:

$$\frac{1 - x}{x(x + 1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} \dots \dots \dots (2)$$

откуда имѣемъ тождественно:

$$1 - x \equiv A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx \dots \dots (3)$$

A и C легко опредѣляются, если одинъ разъ положить $x = 0$, другой разъ $x = -1$.

B можно опредѣлить по тому же способу, если только принять во вниманіе то обстоятельство, что коль скоро равенство (3) справедливо для всѣхъ значеній x -а, то тождественно справедливымъ должно быть и то равенство, которое получается изъ равенства (3) путемъ почленного дифференцированія обѣихъ частей равенства по x -у.

Значить, должно имѣть мѣсто тождественно равенство:

$$-1 \equiv 2A(x + 1) + B(2x + 1) + C.$$

Тутъ проще воспользоваться вторымъ изъ указанныхъ въ § 34 способовъ и приравнять коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x -а въ обѣихъ частяхъ равенства.

Это дастъ намъ уравненія:

$$0 = A + B$$

$$-1 = 2A + B + C$$

$$1 = A.$$

которыя дадутъ намъ:

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = -1 - 2A - B = -2.$$

Значить, окончательно мы получимъ:

$$J = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \log x - \log(x+1) + \\ + \frac{2}{x+1} + C.$$

Значить, интегралъ подобной дроби содержитъ не только логарифмическіе, но и дробные алгебраическіе члены.

Примѣненіе послѣднихъ результатовъ къ химическимъ явленіямъ.

§ 37. Сахарная инверсія.

Большая часть химическихъ реакцій происходитъ не мгновенно, но требуетъ нѣкотораго времени для своего завершения. Если прервать реакцію вскорѣ послѣ начала ея, то можно убѣдиться, что сравнительно незначительная часть взятыхъ веществъ вступила въ новыя соединенія, а большая часть еще осталась въ прежнихъ. Чѣмъ

дольше реакція продолжается, тѣмъ большее количество вещества вступаетъ въ реакцію, если только позаботиться о достаточно хорошемъ смѣшеніи; но при этомъ скорость реакціи большею частью уменьшается. Наблюденія показываютъ, что скорость реакціи зависитъ отъ количествъ веществъ, не вступившихъ еще въ реакцію. Для выраженія закона этой зависимости норвежскіе ученые, Гульдбергъ и Вааге, почти 40 лѣтъ тому назадъ построили гипотезу, слѣдствія которой во многихъ случаяхъ согласуются съ опытными данными. Мы имѣемъ дѣло съ простѣйшимъ случаемъ примѣненія этого закона дѣйствія массъ при изученіи внутреннихъ молекулярныхъ перемѣщеній; но и въ другихъ случаяхъ его приходится примѣнять, какъ напримѣръ, въ случаѣ сахарной инверсіи; въ этихъ случаяхъ скорость реакціи прямо пропорціональна количеству вещества, не вступившаго еще въ реакцію. Положимъ, въ моментъ $t = 0$ имѣется всего a граммолекулъ неинвертированного сахара; пусть въ моментъ t , x граммолекулъ инвертированы и $a - x$ не инвертированы еще; въ такомъ случаѣ скорость реакціи во время t , для которой мы уже раньше (§ 6 и § 13) нашли выраженіе $\frac{dx}{dt}$, пропорціональна $a - x$. Назовемъ коэффициентъ пропорціональности буквой k , тогда:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x) \dots \dots \dots (1)$$

Изъ этого равенства надо получить x въ видѣ функціи отъ t . Эта задача предложена въ нѣсколько иной формѣ, чѣмъ задачи, разобранныя въ предыдущихъ параграфахъ; здѣсь производная x по t получена не въ видѣ функціи независимой переменнѣй t , но въ видѣ функціи переменнѣй x , которая сама есть величина зависящая. Не трудно однако, привести эту задачу къ обычному виду; дѣйствительно, правило § 22 даетъ возможность написать равенство (1) въ такомъ видѣ:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k(a - x)}, \dots \dots \dots (2)$$

а это задача, уже разобранныя въ § 33. Здѣсь соотвѣтственно условіямъ задачи надо брать только $x < a$. Поэтому, измѣняя въ формулѣ (3) § 33 въ обѣихъ частяхъ знакъ и раздѣляя на k , находимъ:

$$t = -\frac{1}{k} \log(a - x) + C \dots \dots \dots (3)$$

Постоянная не опредѣляется закономъ дѣйствія массъ; но въ задачѣ есть еще данное, на которое мы пока не обратили вниманія: во время $t = 0$ не было еще инвертированного сахара, т. е. $x = 0$,

такъ что должно имѣть мѣсто равенство:

$$0 = -\frac{1}{k} \log a + C,$$

или

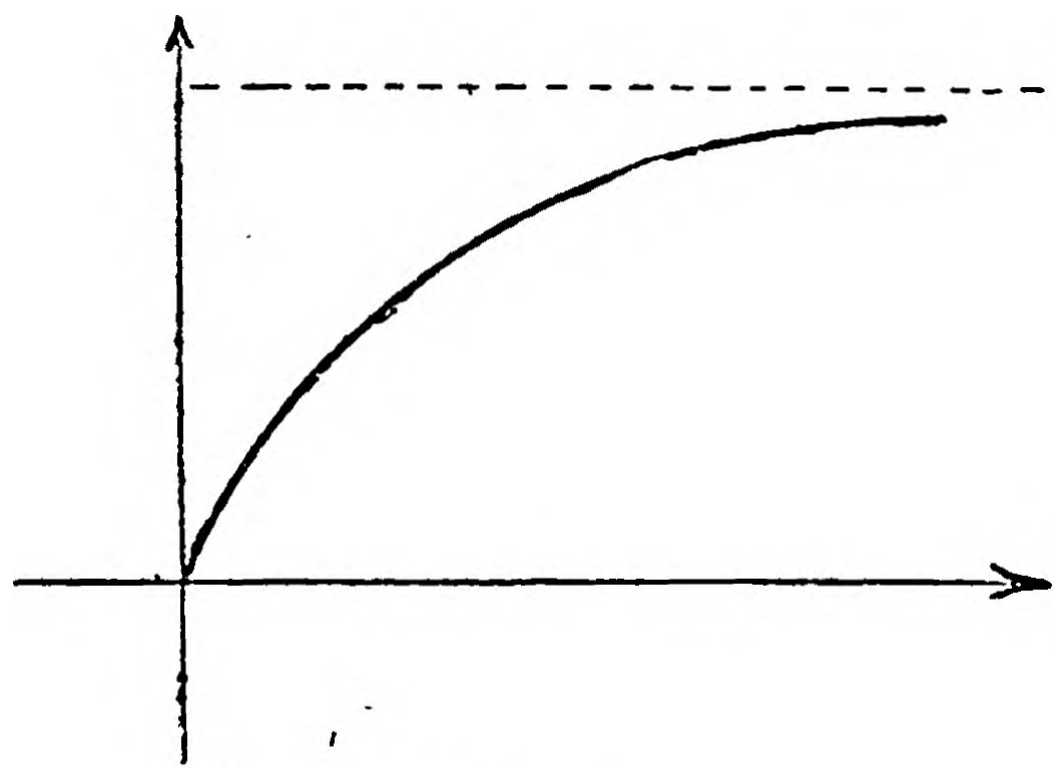
$$C = \frac{1}{k} \log a \dots \dots \dots (4)$$

Подставивъ найденное значеніе C въ равенство (3), получаемъ:

$$t = \frac{1}{k} [\log a - \log (a - x)] = \frac{1}{k} \log \frac{a}{a - x} = \frac{1}{k} \log \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} \dots \dots (5)$$

Уравненіе въ такомъ видѣ сразу даетъ отвѣтъ на вопросъ: сколько времени нужно, чтобы опредѣленная масса сахару была инвертирована? Если мы обратимъ вниманіе на послѣднее выраженіе, то увидимъ, что искомое время зависитъ только отъ отношенія $\frac{a}{x}$, чего и надо было ожидать.

Чтобы отвѣтить на обратный вопросъ: какая масса оказалась инвертированной по истеченіи опредѣленнаго времени? надо рѣшить послѣднее уравненіе относительно x . Мы получаемъ послѣдовательно:



Черт. 23.

$$kt = \log \frac{1}{1 - \frac{x}{a}}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = e^{kt}$$

$$1 - \frac{x}{a} = e^{-kt}$$

и наконецъ:

$$x = a (1 - e^{-kt}) \dots \dots \dots (6)$$

Построимъ кривую, соответствующую данному уравненію въ координатной системѣ x и t . Замѣтимъ при этомъ, что насъ интересуютъ только положительныя значенія t ; мы видимъ, что кривая проходитъ черезъ начало координатъ, образуя съ осью x уголъ, тангенсъ котораго равенъ ak ; онъ получается изъ уравненія:

$$\frac{dx}{dt} = ake^{-kt}, \dots \dots \dots (7)$$

если положить $t = 0$. Такъ какъ производная x по t все время остается положительной, то съ возрастаніемъ t , x также возрастаетъ, но не безгранично; для очень большихъ t , $1 - \frac{x}{a}$ становится очень малымъ, т. е. x очень мало отличается отъ a . Соответственно этому

прямая $x = a$ есть асимптота кривой, и послѣдняя приближается къ этой прямой снизу.

Легко убѣдиться изъ этихъ формулъ, что множитель $\frac{1}{k}$ имѣетъ простое физическое значеніе; онъ обозначаетъ то время, которое нужно, чтобы масса не перешедшаго еще въ другія соединенія вещества $a - x$ равнялась e -ой части первоначально взятаго вещества. Впрочемъ, для разныхъ реакцій, къ которымъ примѣнимы эти выкладки, $\frac{1}{k}$ имѣетъ очень различныя численныя значенія.

Такъ какъ x , какъ это видно изъ формулы (6), не можетъ сдѣлаться равнымъ a ни при одномъ конечномъ значеніи t , то реакція, протекающая точно по приведенному здѣсь закону, никогда не оканчивается, но скорость ея все время уменьшается. Конечно, на опытѣ этотъ результатъ нѣсколько измѣняется благодаря различнымъ побочнымъ обстоятельствамъ, въ особенности благодаря измѣненію температуры. Но собственно практической интересъ имѣетъ вопросъ совсѣмъ не о томъ, сколько времени нужно, чтобы все вещество перешло въ новыя соединенія, а только о томъ, черезъ сколько времени перейдетъ столько вещества, что остатка нельзя будетъ обнаружить химическимъ анализомъ. Конечно, это зависитъ отъ того, какое количество можно еще обнаружить; если оно извѣстно, то интересующій насъ вопросъ рѣшается уравненіемъ (5).

Предыдущіе выводы сдѣланы въ предположеніи, что k извѣстно изъ ранѣе сдѣланныхъ наблюденій той же реакціи и что рѣчь идетъ только о примѣненіи уже извѣстнаго закона или о провѣркѣ его на опытѣ. Съ другой стороны, если мы думаемъ или убѣждены, что мы въ правѣ считать, что реакція протекаетъ по этому закону, но не знаемъ значенія k , то для опредѣленія его нужно рѣшить уравненіе (5) относительно k ; оно даетъ:

$$k = \frac{1}{t} \log \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} \dots \dots \dots (8)$$

Затѣмъ, надо сдѣлать одно наблюденіе, чтобы получить одну пару соотвѣтствующихъ значеній x и t ; подставивъ эти значенія въ равенство (8), получимъ k . Но если мы хотимъ одновременно сдѣлать то и другое, т. е. найти k и провѣрить, дѣйствительно ли процессъ происходитъ по этому закону, то одного наблюденія недостаточно; намъ придется взять и испытать, по крайней мѣрѣ, двѣ пробы въ разное время, чтобы такимъ образомъ получить двѣ пары соотвѣтствующихъ значеній (t_1, x_1) и (t_2, x_2) . Подстановка обѣихъ паръ въ (8) должна дать для k одно и то же число; въ дѣйствительности,

вслѣдствіе неизбѣжныхъ ошибокъ наблюдений полного совпаденія никогда не будетъ; придется удовлетвориться приблизительнымъ совпадениемъ. Впрочемъ, чтобы получить надежное число для k , слѣдуетъ сдѣлать не два наблюдения, а больше и затѣмъ по числамъ, полученнымъ такимъ образомъ, найти среднее по способу, о которомъ скажемъ впоследствии.

При этомъ все же надо обратить вниманіе на одно практическое затрудненіе: не всегда удается точно опредѣлить моментъ начала реакціи и кромѣ того часто съ самаго начала въ смѣсь входятъ вещества въ обоихъ химическихъ соединеніяхъ. Въ этихъ случаяхъ нельзя найти постоянную подстановкой $x = 0$, а приходится брать нѣкоторое значеніе x , равное x_0 , и соотвѣтствующее значеніе t , равное t_0 . Это даетъ:

$$t_0 = -\frac{1}{k} \log (a - x_0) + C (9)$$

Подставивъ значеніе C , полученное отсюда, въ формулу (3), находимъ:

$$t - t_0 = \frac{1}{k} \log \frac{a - x_0}{a - x} .$$

Имѣя это уравненіе, мы опять-таки можемъ опредѣлить k изъ двухъ наблюдений, независимо отъ начала счета времени.

Наконецъ, слѣдуетъ обратить вниманіе еще и на тотъ случай, когда намъ менѣе важно знать численное значеніе k , чѣмъ проверить, дѣйствительно ли процессъ происходитъ по упомянутому закону. Чтобы привести формулы къ виду удобному для этой цѣли, возьмемъ три наблюдения во времена t_0 , t_1 и t_2 и выпишемъ слѣдующія два равенства, соотвѣтствующія этимъ наблюдениямъ:

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{k} \log \frac{a - x_0}{a - x_1}; \quad t_2 - t_1 = \frac{1}{k} \log \frac{a - x_1}{a - x_2} . . . (10)$$

Значенія k , получающіяся изъ этихъ равенствъ, должны совпадать; слѣдовательно, должно быть:

$$(t_2 - t_1) : (t_1 - t_0) = \log \frac{a - x_1}{a - x_2} : \log \frac{a - x_0}{a - x_1} . . . (11)$$

Процессъ будетъ происходить по принятому закону, если только это равенство справедливо для трехъ какихъ-нибудь паръ соотвѣтствующихъ значеній x и t .

Такъ какъ, большею частью, отъ насъ зависитъ, когда дѣлать испытаніе, то мы можемъ устроить такъ, чтобы

$$t_2 - t_1 = t_1 - t_0,$$

т. е. дѣлать испытанія черезъ равные промежутки времени. Тогда

равенство (11) упрощается и приводится къ виду:

$$\frac{a - x_0}{a - x_1} = \frac{a - x_1}{a - x_2} \dots \dots \dots (12)$$

Это можно выразить такъ: если время растеть въ ариѳметической прогрессіи, то количество вещества, не вступившаго въ реакцію, уменьшается въ геометрической прогрессіи. (Положимъ, черезъ полчаса осталась половина первоначально взятаго вещества; тогда черезъ часъ останется четверть, черезъ 1¹/₂ часа—восьмая часть, черезъ 2 часа—шестнадцатая часть и т. д., черезъ 5 часовъ приблизительно тысячная часть).

§ 38. Полныя химическія реакціи.

Многія химическія реакціи, при которыхъ нѣсколько веществъ дѣйствуютъ другъ на друга не прекращаются, пока еще остается хоть что-нибудь отъ первоначальныхъ веществъ. Оказалось, что скорость нѣкоторыхъ изъ этихъ реакцій пропорціональна произведенію количествъ веществъ, еще не вступившихъ въ реакцію.

Пусть a, b, \dots число граммолекулъ различныхъ, дѣйствующихъ другъ на друга веществъ, которыя были въ началѣ счета времени налицо; x — число вступившихъ въ реакцію ко времени t , такъ что въ этотъ моментъ уже оставалось $a - x, b - x, \dots$ граммолекулъ первоначально данныхъ веществъ. Въ такомъ случаѣ можно написать для скорости выраженіе:

$$\frac{dx}{dt} = k (a - x) (b - x) \dots \dots \dots (1)$$

Мы рассмотримъ только случай двухъ взаимодействующихъ веществъ, тогда:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k (a - x) (b - x)} \dots \dots \dots (2)$$

Для разложенія на простѣйшія дроби:

$$\frac{1}{(a - x) (b - x)} = \frac{A}{a - x} + \frac{B}{b - x} \dots \dots \dots (3)$$

надо положить:

$$1 = A (b - x) + B (a - x), \dots \dots \dots (4)$$

слѣдовательно:

$$\begin{matrix} 1 = & Ab + Ba & \left| \begin{matrix} 1 \\ a \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 1 \\ b \end{matrix} \right| & \dots \dots \dots \\ 0 = & -A - B & \left| \begin{matrix} 1 \\ a \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 1 \\ b \end{matrix} \right| & \dots \dots \dots \end{matrix} (5)$$

Рѣшая эти уравненія, получаемъ:

$$A = \frac{1}{b - a}, \quad B = \frac{1}{a - b} \dots \dots \dots (6)$$

Подставляя и интегрируя, имѣемъ:

$$t = \frac{1}{k(a-b)} \left\{ - \int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{b-x} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Чтобы рѣшить, которыя изъ приведенныхъ въ § 33 значеній этихъ интеграловъ надо взять, замѣтимъ, что можно брать только такія x , которыя меньше a и меньше b , поэтому надо положить:

$$t = \frac{1}{k(a-b)} \{ \log(a-x) - \log(b-x) \} + C \dots \dots \dots (8)$$

(Въ этомъ видѣ формула написана въ предположеніи, что черезъ a обозначено большее изъ чиселъ a и b , т. е. количество того вещества, которое было въ избыткѣ; если бы это было не такъ, то удобнѣе измѣнить знакъ числителя и знаменателя; тогда числитель и знаменатель сдѣлались бы положительными, а величина дроби осталась бы безъ измѣненія).

Постоянную можно опредѣлить такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Если наблюденіе началось съ момента начала реакціи, то при $t = 0$, x также равно 0, значить:

$$0 = \frac{1}{k(a-b)} \{ \log a - \log b \} + C \dots \dots \dots (9)$$

Принимая во вниманіе это равенство, получаемъ:

$$t = \frac{1}{k(a-b)} \log \frac{b(a-x)}{a(b-x)} \dots \dots \dots (10)$$

Рѣшеніе этого уравненія относительно x даетъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned} k(a-b)t &= \log \frac{b(a-x)}{a(b-x)}, \\ \frac{b(a-x)}{a(b-x)} &= e^{k(a-b)t}, \\ x &= \frac{ab(e^{k(a-b)t} - 1)}{ae^{k(a-b)t} - b} = ab \frac{1 - e^{-k(a-b)t}}{a - be^{-k(a-b)t}} \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

Съ возрастаніемъ t , x также все время возрастаетъ, пока при очень большихъ t , при которыхъ

$$e^{-k(a-b)t},$$

очень мало, x не сдѣлается равнымъ $\frac{ab}{a} = b$. Слѣдовательно, реакція идетъ далѣе, пока все то вещество, число граммолекулъ котораго меньше, не будетъ израсходовано (отсюда обозначеніе полная реакція). Но если реакція происходитъ по приведенному закону, то теоретически такой моментъ наступитъ черезъ безконечно большое

время. Практическій интересъ имѣетъ опять таки только вопросъ о томъ, черезъ сколько времени отъ b совсѣмъ не останется замѣтнаго остатка. Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ надо въ уравненіе (10) подставить вмѣсто x число, отличающееся отъ b на величину, соответствующую погрѣшности наблюдений. Конечно, отвѣтъ будетъ очень значительно зависеть отъ k , которое для различныхъ реакцій, слѣдующихъ этому закону, имѣетъ очень различныя значенія.

Если начало реакціи не было точно опредѣлено или если уже въ началѣ входили продукты реакціи, то для опредѣленія постоянной надо взять два какія-нибудь соответствующія x_0 и t_0 , это даетъ:

$$t_0 = \frac{1}{k(a-b)} \{ \log(a-x_0) - \log(b-x_0) \} + C, \dots (12)$$

или черезъ исключеніе C :

$$t - t_0 = \frac{1}{k(a-b)} \log \frac{(a-x)(b-x_0)}{(b-x)(a-x_0)}. \dots (13)$$

Если мы, не интересуясь опредѣленіемъ числа k , хотимъ вообще испытать, происходитъ ли реакція по приведенному закону, то опять таки лучше всего выбрать три равноотстоящихъ момента наблюдения t_0, t_1, t_2 такъ, чтобы

$$t_2 - t_1 = t_1 - t_0. \dots (14)$$

Примѣняя уравненіе (13) одинъ разъ для t_0 и t_1 , другой разъ для t_1 и t_2 , и исключая k , находимъ, что въ этомъ случаѣ должно имѣть мѣсто равенство:

$$\frac{a-x_2}{b-x_2} : \frac{a-x_1}{b-x_1} = \frac{a-x_1}{b-x_1} : \frac{a-x_0}{b-x_0} \dots (15)$$

Для случая

$$b = a, \dots (16)$$

когда даны одинаковыя количества взаимодействующихъ веществъ, наши формулы непригодны. Въ этомъ случаѣ получаемъ:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k(a-x)^2} \dots (17)$$

И отсюда посредствомъ интегрированія:

$$t = \frac{1}{k(a-x)} + C.$$

Опредѣлимъ опять постоянную изъ того условія, что для $t = 0$ x также должно быть равно 0, получимъ:

$$t = \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} \right\} \dots (18)$$

И отсюда

$$\frac{1}{a-x} = kt + \frac{1}{a}$$

$$a-x = \frac{a}{1+akt}$$

$$x = a \left(1 - \frac{1}{1+akt} \right) = \frac{a^2kt}{1+akt} = \frac{a}{1 + \frac{1}{akt}} \dots (19)$$

Здѣсь также x дѣлается точно равнымъ a тогда и только тогда, когда $t = \infty$. Практическій вопросъ о времени, которое нужно, чтобы все вещество, поскольку это можно обнаружить, вступило въ реакцію, можетъ быть разрѣшенъ съ помощью формулы (18) сообразно требуемой точности.

Если начало реакціи не было точно опредѣлено, то можно найти C при помощи двухъ какихъ-нибудь соотвѣтствующихъ значеній x и t , мы получаемъ:

$$t - t_0 = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a-x_0} \right) \dots (20)$$

Если t_0, t_1, t_2 —три равноотстоящихъ другъ отъ друга момента, а x_0, x_1, x_2 —соотвѣтствующія значенія x , то посредствомъ исключенія k получимъ аналогично прежнимъ результатамъ:

$$\frac{1}{a-x_2} - \frac{1}{a-x_1} = \frac{1}{a-x_1} - \frac{1}{a-x_0}$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ, если времена растутъ въ ариѳметической прогрессіи, то величины, обратныя количествамъ веществъ, не вступившихъ въ реакцію, также растутъ въ ариѳметической прогрессіи.

§ 39. Неполныя химическія реакціи.

Въ болѣе сложныхъ случаяхъ реакція не идетъ такъ далеко и не все то вещество, число граммолекулъ котораго меньше, переходитъ въ новыя соединенія, но въ результатѣ наступаетъ состояніе равновѣсія, при которомъ въ смѣсь входитъ опредѣленное количество веществъ, какъ тѣхъ, которыя были даны въ началѣ реакціи, такъ и продуктовъ реакціи. Чтобы объяснить подобныя явленія, приняли, что выраженіе для скорости состоитъ изъ двухъ членовъ, причемъ одинъ пропорціоналенъ произведенію количествъ взаимодействующихъ соединеній, а другой — произведенію количествъ вновь получающихся соединеній; каждый членъ входитъ съ особымъ коэффициентомъ пропорціональности. Простѣйшимъ случаемъ оказывается опять таки тотъ, когда дѣло идетъ о внутренней перемѣнѣ въ строеніи каждой молекулы; этого рода измѣненія поступаютъ при образованіи такъ называемаго лактона (внутренняго ангидрида) изъ ки-

слоты. Чтобы сразу перейти къ общему случаю, допустили, что въ началѣ реакціи было a_1 грамммолекулъ кислоты и a_2 грамммолекулъ лактона, а ко времени t еще x грамммолекулъ кислоты перешли въ лактонъ, такъ что въ этотъ моментъ имѣется $a_1 - x$ грамммолекулъ кислоты и $a_2 + x$ грамммолекулъ лактона. Наше допущеніе даетъ для скорости реакціи выраженіе:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (a_1 - x) - k_2 (a_2 + x) = k_1 a_1 - k_2 a_2 - (k_1 + k_2) x, \quad (1)$$

гдѣ черезъ k_1 и k_2 обозначены коэффиціенты пропорціональности. Последнее равенство того же вида, какъ равенство (1) § 37, только значеніе коэффиціентовъ другое; поэтому намъ нѣтъ надобности повторять выкладки, а можно сразу выписать результатъ:

$$t = \frac{1}{k_1 + k_2} \log \frac{k_1 a_1 - k_2 a_2}{k_1 a_1 - k_2 a_2 - (k_1 + k_2) x} \quad \dots \quad (2)$$

или, если рѣшить это уравненіе относительно x , то:

$$x = \frac{k_1 a_1 - k_2 a_2}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2) t}) \quad \dots \quad (3)$$

При изслѣдованіи слѣдуетъ различать два случая.

1. Если смѣшиваемыя массы находятся въ такомъ отношеніи, что

$$k_1 a_1 - k_2 a_2 > 0, \quad \dots \quad (4)$$

то $\frac{dx}{dt}$ сначала положительно, т. е. количество лактона увеличивается; это увеличеніе происходитъ до тѣхъ поръ, пока не будетъ:

$$x = \frac{k_1 a_1 - k_2 a_2}{k_1 + k_2}, \quad \dots \quad (5)$$

такъ какъ $\frac{dx}{dt}$ остается до этого времени положительнымъ. Но изъ равенства (3) видно, что x (теоретически) достигаетъ этого значенія черезъ безконечно большое время; и здѣсь процессъ, разъ начавшись, продолжается все время въ томъ же направленіи. При этомъ однако не вся кислота обращается въ лактонъ; если реакція, дѣйствительно, протекаетъ по принятому закону, то, какъ бы далеко мы ни продолжали наблюденія, мы никогда не получимъ лактона больше, чѣмъ то количество, которое указывается правой частью равенства (5). Продолжительность того времени, которое требуется, пока это, въ предѣлахъ точности наблюденій, будетъ достигнуто, зависитъ отъ постоянныхъ k_1 и k_2 , или, лучше сказать, отъ ихъ суммы; если она не очень мала, то для этого требуется не очень продолжительный промежутокъ времени. Посредствомъ наблюденія этого наступающаго въ концѣ концовъ приблизительнаго состоянія равновѣсія можно опре-

дѣлить значеніе дроби, стоящей въ правой части равенства (5) и отсюда, если a_1 и a_2 извѣстны, отношеніе $\frac{k_1}{k_2}$; когда это отношеніе опредѣлено, то наблюденіе протеканія реакціи даетъ значеніе $k_1 + k_2$ такъ же, какъ въ § 38 наблюденіе даетъ число k .

2. Если въ началѣ реакціи

$$k_1 a_1 - k_2 a_2 > 0 \dots \dots \dots (6)$$

то $\frac{dx}{dt}$ отрицательно; количество лактона уменьшается, и часть лактона переходитъ снова въ кислоту; изслѣдованіе, совершенно аналогичное предыдущему, показываетъ, что этотъ процессъ продолжается безконечно долго. Но намъ нѣтъ надобности отдѣльно трактовать этотъ случай: мы можемъ просто привести его къ предыдущему, переставивъ величины, относящіяся къ кислотѣ и лактону.

Изъ неполныхъ химическихъ реакцій, при которыхъ происходитъ взаимодѣйствіе двухъ веществъ, мы рассмотримъ только полученіе какого-нибудь эфира изъ кислоты и спирта и притомъ только тотъ случай, когда въ началѣ реакціи даны эквивалентныя количества того и другого вещества и еще совсѣмъ не образовалось эфира. Въ этомъ случаѣ можно первоначально данныя количества кислоты и спирта принять за 1; если ко времени t получилось x граммолекулъ эфира, то принятый нами законъ даетъ уравненіе:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (1 - x)^2 - k_2 x^2 \dots \dots \dots (7)$$

а отсюда получается:

$$t = \int \frac{dx}{k_1 (1 - x)^2 - k_2 x^2} \dots \dots \dots (8)$$

Рѣшая уравненіе:

$$k_1 (1 - x)^2 - k_2 x^2 = 0, \dots \dots \dots (9)$$

имѣемъ:

$$\frac{1 - x}{x} = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}},$$

а корни уравненія получаются въ такомъ видѣ:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}}; \beta = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}} \dots \dots \dots (10)$$

(Замѣтимъ, что черезъ α обозначенъ большій, черезъ β —меньшій корень уравненія).

При разложеніи на простѣйшія дроби (ср. § 34) слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что въ знаменатель выраженія (8) входитъ не просто произведеніе множителей $(x - \alpha)(x - \beta)$, а это произведеніе помноженное на коэффициентъ при высшей степени x въ выраженіи

(9), т. е. на $k_1 - k_2$. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\frac{1}{k_1(1-x)^2 - k_2x^2} = \frac{1}{(k_1 - k_2)(\alpha - \beta)} \left\{ \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta} \right\}.$$

Если подставить въ $(\alpha - \beta)$ значенія α и β , приведенныя въ (10), то получается:

$$\frac{1}{2\sqrt{k_1k_2}} \left\{ \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

а отсюда посредствомъ интегрированія, пока x меньше β :

$$t = \frac{1}{2\sqrt{k_1k_2}} \left\{ \log \frac{\alpha - x}{\beta - x} - \log \frac{\alpha}{\beta} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{k_1k_2}} \log \frac{\beta(\alpha - x)}{\alpha(\beta - x)}. \dots (12)$$

Рѣшимъ это уравненіе относительно x , сначала получимъ:

$$\frac{\beta(\alpha - x)}{\alpha(\beta - x)} = e^{2t\sqrt{k_1k_2}},$$

а затѣмъ

$$x = \alpha\beta \frac{1 - e^{-2t\sqrt{k_1k_2}}}{\alpha - \beta e^{-2t\sqrt{k_1k_2}}} \dots \dots \dots (13)$$

При $t = \infty$, $x = \beta$; наблюдая это наступающее, въ концѣ концовъ, равновѣсіе, можно найти β и по данному β вычислить отношеніе коэффиціентовъ k_1 и k_2 . Когда это отношеніе извѣстно, то можно по даннымъ двумъ соотвѣтствующимъ значеніямъ x и t на основаніи равенства (13) найти произведеніе этихъ множителей и наконецъ вычислить отдѣльно k_1 и k_2 .

Напримѣръ, для уксусной кислоты и этиловаго спирта $\frac{k_1}{k_2} = 4$, значить $\alpha = 2$, $\beta = \frac{2}{3}$, а

$$x = 2 \frac{1 - e^{-2t\sqrt{k_1k_2}}}{3 - e^{-2t\sqrt{k_1k_2}}}.$$

Г Л А В А VI.

Производныя высшихъ порядковъ. Теорема о среднемъ значеніи. Формула Тейлора.

§ 40. Производныя высшаго порядка.

Производная фукціи $y = f(x)$ въ тѣхъ случаяхъ, съ кторыми мы имѣемъ дѣло, для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній x , за исключеніемъ, быть можетъ, нѣкоторыхъ отдѣльныхъ значеній, имѣетъ вполне опредѣленное значеніе. Значить, мы можемъ эту производную, соотвѣтственно съ опредѣленіемъ понятія о фукціи (§ 13),

тоже рассматривать, какъ нѣкоторую функцію x -са. Какъ таковую обозначимъ ее символомъ $f'(x)$ *).

Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда $f(x)$ представляетъ изъ себя функцію, принадлежащую къ извѣстнымъ намъ классамъ, и $f'(x)$ будетъ тоже извѣстная намъ функція. Мы можемъ поэтому всѣ выведенныя нами правила дифференцированія примѣнить и тутъ, и мы получимъ новую функцію, которую мы назовемъ: «второй производной $f(x)$ » и обозначимъ черезъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \cdot \dots \dots \dots (1)$$

(мѣсто значка 2 при буквѣ d въ числительѣ и соотвѣтств. мѣсто значка 2 въ знаменателѣ, послѣ буквы x , будетъ разъяснено въ § 63).

Значить, если, на примѣръ,

$$f(x) = x^n$$

то

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

а потому

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}.$$

Если, на примѣръ,

$$f(x) = e^x,$$

то не только $f'(x) = e^x$, но и $f''(x) = e^x$.

Если

$$f(x) = \log x,$$

то

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

и

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Значить, какъ было сказано, для опредѣленія второй производной, намъ не нужно знать никакихъ новыхъ правилъ, а только дважды нужно воспользоваться извѣстными намъ правилами дифференцированія. Мы остановимся болѣе подробно на одной формулѣ, а именно на формулѣ для второй производной отъ произведенія двухъ функцій.

Пусть

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x).$$

Тогда по § 18 мы получимъ сначала:

$$f'(x) = \varphi(x) \psi'(x) + \varphi'(x) \psi(x).$$

*) Вводя такое обозначеніе, мы въ дальнѣйшемъ уже будемъ избѣгать ставить значокъ наверху въ другомъ смыслѣ, на примѣръ какъ отличительный знакъ двухъ разн. величинъ.

Если мы еще разъ продифференцируемъ обѣ части этого равенства, то получимъ:

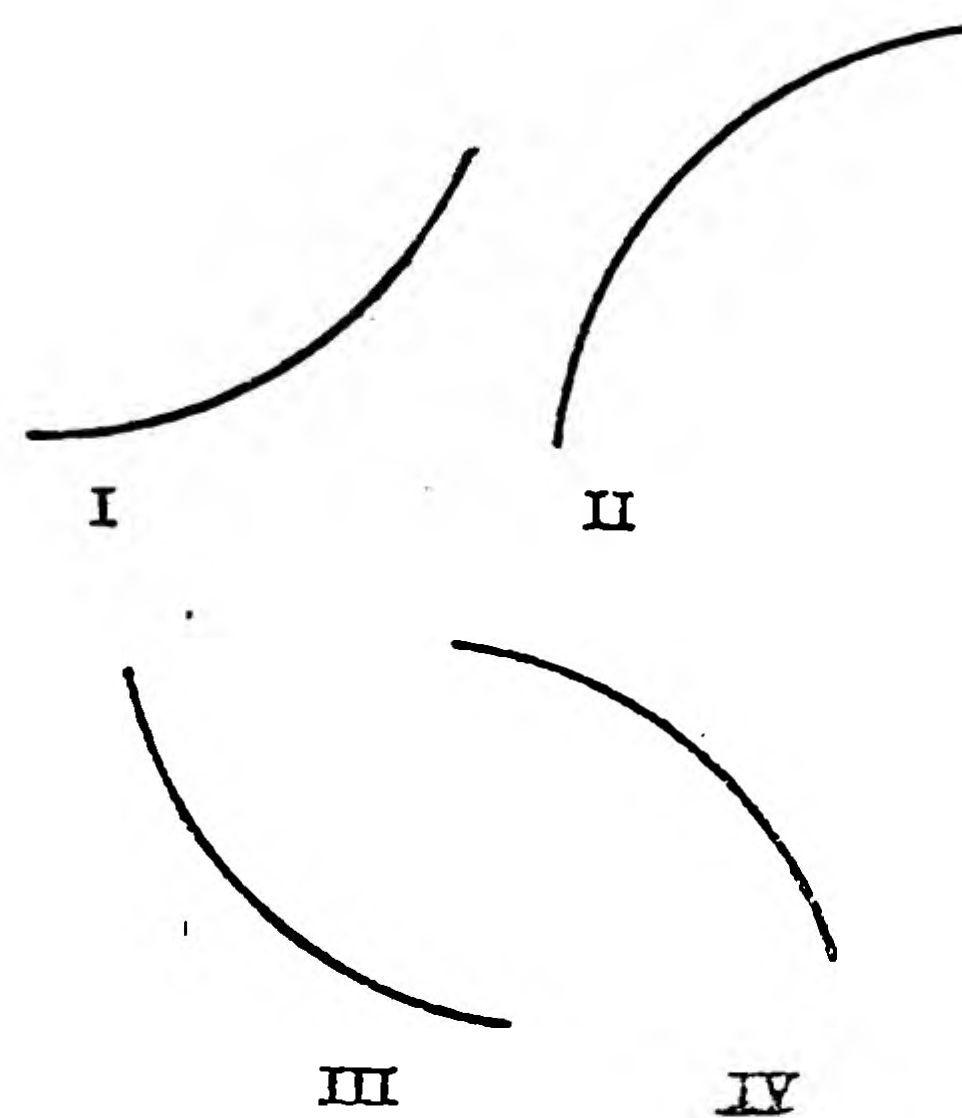
$$f''(x) = [\varphi(x)\psi''(x) + \varphi'(x)\psi'(x)] + [\varphi''(x)\psi(x) + \varphi'(x)\psi'(x)].$$

Соединяя подобные члены, будемъ имѣть:

$$f''(x) = \varphi(x)\psi''(x) + 2\varphi'(x)\psi'(x) + \varphi''(x)\psi(x) \dots (2)$$

Вторая производная имѣетъ тоже очень простое геометрическое значеніе для кривой, которая задана въ прямоугольныхъ декартовыхъ координатахъ уравненіемъ $y = f(x)$.

Мы видѣли раньше, что съ возрастаніемъ x -са растеть и $f(x)$, пока $f'(x)$ остается положительной. Если же мы это соображеніе приложимъ къ $f'(x)$, то мы увидимъ, что пока $f_1''(x)$ остается положительной, $f'(x)$ будетъ возрастать съ возрастаніемъ величины x , а это значитъ, что скорость возрастанія функции увеличивается съ возрастаніемъ самого x -са. Возрастание и убываніе мы должны понимать алгебраически, а не по абсолютному значенію, считая, напримѣръ, изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ бѣльшимъ то, абсолютное значеніе котораго меньше.



Черт. 24.

Если мы примемъ во вниманіе знаки, то мы должны различать слѣдующіе четыре случая:

- I. Если $f' > 0, f'' > 0$, то f растеть, притомъ сначала тише, потомъ скорѣе.
- II. Если $f' > 0, f'' < 0$, то f растеть, но сначала скорѣе, а потомъ тише.
- III. Если $f' < 0, f'' > 0$, то f убываетъ, сначала скорѣе, потомъ тише.
- IV. Если $f' < 0, f'' < 0$, то f убываетъ, сначала тише, потомъ скорѣе.

Въ случаяхъ I и III кривая выпукла книзу и вогнута кверху. Въ случаяхъ II и IV кривая вогнута книзу и выпукла кверху. Значитъ мы можемъ сказать, что если

$$f'' > 0, \text{ кривая вогнута кверху.}$$

$$f'' < 0, \text{ кривая вогнута книзу.}$$

(Встрѣчающіеся здѣсь термины «кверху» и «книзу» должны совпадать съ условнымъ отсчетомъ положительныхъ и отрицательныхъ значеній y -ка). И съ механической точки зрѣнія значеніе второй производной очень просто. f' выражаетъ скорость измѣненія f ; f'' будетъ выражать скорость измѣненія скорости. Эта величина назы-

вается ускореніемъ. Многія явленія движенія легче всего поддаются описанію, если намъ извѣстно ускореніе; въ силу того, что ускореніе зависитъ отъ состоянія тѣла только въ данный моментъ и отъ окружающей его среды, скорость же только тогда можетъ быть опредѣлена, если знать предшествующее состояніе тѣла.

(Напримѣръ, въ случаѣ паденія тѣла, можно лишь тогда опредѣлить скорость въ данный моментъ, если намъ извѣстно, падаетъ ли тѣло свободно или оно было брошено, тогда какъ ускореніе въ томъ и другомъ случаѣ одно и то же). Для того, кто отъ задачъ математической физики переходитъ къ задачамъ химіи, должно казаться весьма страннымъ, что въ этихъ вопросахъ пока еще не встрѣтилось необходимости ввести въ разсмотрѣніе ускореніе.

Процессъ, который мы совершили для нахождения 1 и 2 производной, мы можемъ повторить сколько угодно разъ подъ-рядъ и такимъ образомъ мы получимъ производныя сколь угодно высокаго порядка.

Эти послѣднія (производныя высшихъ порядковъ) не имѣютъ такого простаго геометрическаго и механическаго смысла, но онѣ играютъ большую роль въ выводѣ формулъ, которыя имѣютъ въ анализѣ крупное значеніе.

§ 41. Теорема Ролля и теорема о среднемъ значеніи.

Ролль (Rolle), современникъ Лейбница и Ньютона, въ продолженіе своей жизни держался въ сторонѣ отъ исчисленія бесконечно малыхъ, которое тогда было еще совершенно новой научной дисциплиной, ибо эта дисциплина казалась ему недостаточно строго обоснованной. Такъ что можно усмотрѣть небольшую иронию исторіи въ томъ, что одна изъ теоремъ, найденныхъ Роллемъ, представляетъ одну изъ основныхъ теоремъ дифференціального исчисленія, если эту теорему обосновать чисто аналитически, не пользуясь соображеніями геометрическими.

Эта теорема гласитъ такъ:

Если имѣются два значенія x_1 и x_2 , для которыхъ нѣкоторая функція $f(x)$ два раза принимаетъ значеніе нуль, т. е.

$$f(x_1) = 0 \quad \text{и} \quad f(x_2) = 0,$$

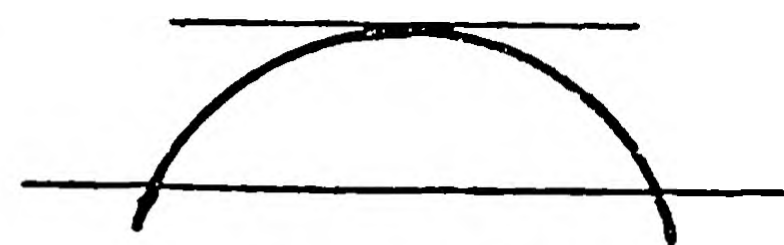
то между x_1 и x_2 должно найтись по крайней мѣрѣ одно значеніе $x = \xi$, для котораго

$$f'(\xi) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

причемъ предполагается, что $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывно мѣняются въ промежуткѣ отъ x_1 до x_2 .

Откажемся отъ аналитическаго способа доказательства, а удовольствуемся геометрическими соображеніями. Если $f(x)$ для всего промежутка отъ x_1 до x_2 равна нулю, то теорема сама собой очевидна.

Если же $f(x)$ не равна нулю на всемъ промежуткѣ, то предположимъ, что она положительна. (Предположеніе, что она отрицательна, трактуется совершенно такъ же). Такъ какъ f переходитъ отъ нуля къ положит. значеніямъ, то значить, $f(x)$ въ нѣк. промежуткѣ должна расти, а значить $f'(x)$ должна имѣть знакъ $+$. Но $f'(x)$ не можетъ все время оставаться положительной, ибо въ этомъ случаѣ $f(x)$ росла бы все время и никакъ не могла бы вернуться къ значенію нуль. А между тѣмъ по условію это именно такъ. Однако, мы поставили условіе, чтобы $f'(x)$ мѣнялась непрерывно (а не скачками) и значить: она не можетъ перейти отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ, не пройдя черезъ нуль. Значить, между x_1 и x_2 $f'(x)$ хоть одинъ разъ должна обратиться въ нуль. Т. е. наша теорема доказана. Легко видѣть, къ чему бы свелось доказательство теоремы Ролля, свободное отъ геометрическихъ соображеній.



Черт. 25.

Для этого нужно было бы геометрическому представленію, которое мы выражаемъ словами «непрерывный переходъ» дать настолько точный смыслъ, чтобы изъ такого опредѣленія «непрерывности» непосредственно вытекала необходимость обстоятельства, отмѣченнаго жирнымъ шрифтомъ (а именно, что нѣкоторая величина не можетъ перейти отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ, не пройдя черезъ нуль).

Простымъ обобщеніемъ теоремы Ролля является извѣстная «теорема дифференціального исчисленія о среднемъ значеніи». Геометрически эта теорема можетъ быть выражена такъ: на непрерывной вѣтви кривой, съ непрерывно мѣняющейся касательной, имѣется по крайней мѣрѣ одна точка, въ которой касательная \parallel хордѣ, соединяющей концы вѣтви (фиг. 26)



Черт. 26.

Обозначимъ уголъ, подобно тому, какъ мы это дѣлали въ § 11, который хорда образуетъ съ осью x черезъ α_{12} ; уголъ, который касат. въ нѣк. точкѣ образуетъ съ осью x ,—черезъ α . Тогда мы будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(\xi), \text{ гдѣ } x_1 < \xi < x_2.$$

Теорема о среднемъ значеніи говоритъ: между x_1 и x_2 имѣется

по крайней мѣрѣ одна точка ξ , для которой

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \dots \dots \dots (2)$$

или, что то же:

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) f'(\xi).$$

Доказательство этой теоремы можно получить какъ слѣдствіе теоремы Ролля, если упомянутую хорду совмѣстить съ осью x . Или можно дать чисто аналитическое доказательство, применяя теорему Ролля къ искусственной функціи:

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_1) - (x - x_1) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Производная которой

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

такъ какъ x_1 и x_2 , $f(x_1)$ и $f(x_2)$ должны при дифференцированіи разсматриваться какъ постоянныя.

Въ механическомъ смыслѣ теорема о среднемъ значеніи можетъ быть формулирована такъ: Скорость въ данный моментъ на протяженіи нѣкотораго промежутка времени не можетъ быть все время меньше или больше средней скорости движенія въ теченіе этого промежутка времени.

Относительно числа ξ , которое встрѣчается въ нашихъ формулахъ, мы не можемъ сказать ничего болѣе опредѣленнаго (кромѣ того, что оно лежитъ между x_1 и x_2), пока намъ неизвѣстно чего-нибудь опредѣленнаго про $f(x)$. Можно дать примѣры, когда это значеніе ξ будетъ весьма близко къ x_1 или очень близко къ x_2 или гдѣ-нибудь въ напередъ заданномъ мѣстѣ между x_1 и x_2 .

Пусть, на примѣръ, дана функція:

$$f(x) = x(x - 3)(x - 3c) = x^3 - 3(c + 1)x^2 + 9cx.$$

При $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$ выполнены условія теоремы Ролля.

Уравненіе:

$$x^2 - 2(c + 1)x + 3c = 0$$

имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень, лежащій между 0 и 3, каково бы ни было c .

Этимъ свойствомъ будетъ обладать рѣшеніе

$$x_1 = c + 1 + \sqrt{(c + 1)^2 - 3c},$$

когда c лежитъ между $-\infty$ и 1 и рѣшеніе

$$x_2 = c + 1 - \sqrt{(c + 1)^2 - 3c}$$

когда c лежитъ между 0 и $+\infty$.

Послѣдній корень очень близокъ къ нулю, когда c очень мало; x_1 лежитъ очень близко къ 3, когда c близко къ единицѣ.

Если c положить равнымъ

$$c = \frac{\xi^2 - 2\xi}{2\xi - 3},$$

гдѣ ξ есть число, лежащее между 0 и 1, то одинъ изъ корней будетъ имѣть значеніе близкое къ ξ .

Для многихъ цѣлей, какъ мы это увидимъ выше, вовсе и не нужно знать точнѣе число ξ ; важно только знать, что такое число, подчиненное даннымъ условіямъ, вообще должно существовать.

Когда намъ извѣстно, что для всѣхъ значеній ξ между x_1 и x_2 должно существовать неравенство:

$$m < f'(\xi) < M$$

то мы отсюда тотчасъ сдѣлаемъ заключеніе о необходимости существованія и такого неравенства:

$$m(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < M(x_2 - x_1),$$

Если же на протяженіи всего промежутка отъ x_1 до x_2 $f'(\xi)$ отличается отъ величины $f'(x_1)$ меньше, чѣмъ на величину ϵ , то мы можемъ заключить отсюда, что разность $f(x_2) - f(x_1)$ отличается меньше, чѣмъ на $\epsilon(x_2 - x_1)$ отъ величины $(x_2 - x_1)f'(x_1)$. Если съ одной стороны ϵ , съ другой стороны $(x_2 - x_1)$ настолько малы, что мы можемъ, при требуемой степени точности, произведеніемъ $\epsilon(x_2 - x_1)$ пренебречь, то мы можемъ написать:

$$f(x_2) - f(x_1) \approx (x_2 - x_1) f'(x_1) \dots \dots \dots (3)$$

Причемъ знакъ \approx употребленъ нами, какъ въ § 30, для выраженія приближеннаго равенства. Такъ какъ x_2 и x_1 въ приближенномъ равенствѣ (3) выражаютъ совершенно произвольныя значенія x -са, если только выполнено условіе непрерывности для этихъ значеній, то мы можемъ совершенно откинуть индексъ 2 и разсматривать x_2 какъ переменную величину x ; индексъ 1 замѣнимъ знакомъ 0; тогда равенство (3) приметъ видъ:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

Это равенство выражаетъ слѣдующее: Если мы желаемъ предложенную функцію $f(x)$ выразить приближенно черезъ цѣлую функцію первой степени:

$$g(x) = Ax + B$$

(геометрически: приближенно кривую представить въ видѣ прямой),

то мы можемъ положить

$$A = f'(x_0) \quad B = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Причемъ для $x = x_0$ мы имѣемъ тождественныя равенства:

$$f(x_0) = g(x_0)$$

и

$$f'(x_0) = g'(x_0).$$

§ 42. Формула Маклорена.

Только что полученные результаты выдвигаютъ слѣдующій вопросъ. Если намъ дана нѣкоторая функція $f(x)$, то не можемъ ли мы найти нѣкоторую цѣлую рациональную функцію $g(x)$, которая бы для нѣкотораго частнаго значенія $x = x_0$ не только сама и ея первая производная имѣли бы тѣ же значенія, что и $f(x)$ и $f'(x)$, но чтобы подобныя равенства имѣли бы мѣсто и для нѣкотораго опредѣленнаго числа производныхъ высшаго порядка? Проведемъ такое вычисленіе для нѣкоторой рациональной функціи четвертой степени и притомъ для простоты выкладокъ возьмемъ $x_0 = 0$. Положимъ въ искомой функціи сначала коэффиціенты неопредѣленными, т. е.:

$$g(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \dots \dots \dots (1)$$

Путемъ послѣдовательныхъ дифференцированій мы будемъ имѣть:

$$g'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3,$$

$$g''(x) = 2C + 6Dx + 12Ex^2,$$

$$g'''(x) = 6D + 24Ex,$$

$$g^{IV}(x) = 24E.$$

Значить

$$\left. \begin{aligned} g(0) = A, \quad g'(0) = B, \quad g''(0) = 2C, \quad g'''(0) = 6D, \\ g^{IV}(0) = 24E. \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

(При этомъ подъ $g''(0)$, напримѣръ, нужно понимать величину, которая получится, если мы два раза продифференцируемъ $g(x)$ и уже въ полученномъ результатѣ положимъ $x = 0$).

Если коэффиціенты $A, B, C \dots$ должны быть опредѣлены такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства:

$$\left. \begin{aligned} f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad f''(0) = g''(0), \quad f'''(0) = g'''(0), \\ f^{IV}(0) = g^{IV}(0), \end{aligned} \right\} (3)$$

то для этого необходимо, чтобы:

$$\left. \begin{aligned} A = f(0), \quad B = f'(0), \quad C = \frac{1}{1 \cdot 2} f''(0), \quad D = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0), \\ E = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(0) \end{aligned} \right\} (4)$$

Итакъ, на поставленный вопросъ мы имѣемъ слѣдующій отвѣтъ:

Цѣлая рациональная функція четвертой степени, которая для $x = 0$ вмѣстѣ съ ея четырьмя первыми производными тождественно совпадаетъ съ данной $f(x)$ и ея соотв. производными, имѣетъ видъ:

$$g(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(0). \quad (5)$$

То, что нами проведено на функціи 4-й степени, можетъ быть перенесено на функцію любой степени; если мы желаемъ совпаденія производныхъ функціи $g(x)$ и $f(x)$ до n -ой включительно при $x = 0$, то мы въ формулѣ (6) должны прибавить соотвѣтственное число членовъ, составленныхъ по тому же закону; причемъ въ этомъ случаѣ послѣднимъ членомъ будетъ:

$$\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

(То, что при f значокъ n выражаетъ у насъ знакъ производной, отмѣчается нами скобками при этой буквѣ, чтобы не смѣшать этого символа со степенью).

Пусть, напримѣръ,

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Тогда мы послѣдовательно получимъ:

$$f(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$f''(x) = +\frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$f'''(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4},$$

$$f^{IV}(x) = +\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5},$$

значитъ

$$f(0) = 1,$$

$$f'(0) = -1,$$

$$f''(0) = +1 \cdot 2,$$

$$f'''(0) = -1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$f^{IV}(0) = +1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

Если мы теперь эти значенія подставимъ въ общую формулу, то мы получимъ:

$$g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4. \dots \dots \dots (6)$$

Эта функція не только сама, но и ея четыре первыя производныя для частнаго значенія $x = 0$ совпадаютъ съ значеніями функціи $\frac{1}{1+x}$ и ея четырьмя первыми производными.

Теперь является такой вопросъ: можетъ быть, и для другихъ значеній, кромѣ значенія $x = 0$, между функціей $g(x)$ и функціей $\frac{1}{1+x}$ будетъ имѣть мѣсто упомянутое соотвѣтствіе?

Въ данномъ простомъ случаѣ мы можемъ отвѣтить на этотъ вопросъ путемъ непосредственнаго вычисленія.

Если бы $g(x)$ было равно частному отъ дѣленія 1 на $1+x$, для всѣхъ значеній x , то мы должны были бы имѣть тождество:

$$g(x) \cdot (1+x) = 1.$$

Однако мы имѣемъ въ настоящемъ случаѣ

$$g(x) \cdot (1+x) = 1 + x^5 \dots \dots \dots (7)$$

откуда

$$\frac{1}{1+x} - g(x) = -\frac{x^5}{1+x} \dots \dots \dots (8)$$

Значитъ обѣ функціи $g(x)$ и $\frac{1}{1+x}$ вообще не равны между собою, а отличаются другъ отъ друга на величину

$$-\frac{x^5}{1+x}.$$

Значитъ, мы тогда и только тогда можемъ одну изъ нихъ замѣнить другой, когда упомянутая разность между ними такъ мала, что, при данномъ требованіи точности, можетъ быть отброшена.

А это будетъ имѣть мѣсто въ тѣхъ случаяхъ, когда x само мало; причемъ x вовсе не должно быть столь малымъ, чтобы мы могли пренебречь первой его степенью.

Напримѣръ, если отъ насъ требуется точность до 4-хъ десятичныхъ знаковъ, то мы можемъ пренебречь [самимъ x -сомъ лишь въ томъ случаѣ, если $x < 0,0001$; x^2 мы уже можемъ пренебречь, если $x < 0,01$. Что касается до x^5 , то этой величиной, въ предѣлахъ требуемой точности, мы можемъ пренебречь, если $x < 0,1$.

Поэтому мы можемъ сказать:

Равенство

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots \dots \dots (9)$$

строго справедливо только для $x = 0$. Оно вѣрно съ большимъ приближеніемъ, если x очень мало. Оно справедливо съ грубой степенью точности, если x замѣтно меньше 1. И оно совсѣмъ не справедливо, когда x близко къ 1 или больше 1.

Напримѣръ, $0,8^5 \neq 0,3$ *) а напримѣръ $1,2^5 \neq 2,4$. Значитъ при $x = 0,8$ ошибка простирается до 0,3, для x же $= 1,2$ эта ошибка будетъ почти въ $2^{1/2}$ раза больше настоящей величины нашего выраженія.

Мы должны тутъ сдѣлать одно общее замѣчаніе. Равенство элементарной алгебры справедливо или для нѣкотораго конечнаго числа значеній переменнѣй или оно справедливо для всѣхъ значеній переменнѣй; если нѣкоторое алгебраическое равенство строго справедливо для всѣхъ значеній x -са, которыя, напримѣръ, $< \frac{1}{10}$, то оно справедливо будетъ вообще для всѣхъ значеній x -са, для которыхъ обѣ его части имѣютъ вещественное значеніе. Если же нѣкоторое равенство только приближенно справедливо для нѣкотораго промежутка значеній x -са, напримѣръ, для всѣхъ значеній x -са, меньшихъ, чѣмъ нѣкоторая опредѣленная величина a , то изъ этого ни въ коемъ случаѣ не слѣдуетъ, что равенство будетъ существовать и внѣ этого промежутка.

Разсмотримъ еще на численномъ примѣрѣ, какъ будетъ обстоять дѣло съ нашимъ равенствомъ (9), когда мы x -су дадимъ не очень малое значеніе, напримѣръ $x = 0,3$. Тогда мы будемъ имѣть:

$$\begin{array}{r}
 1 = 1 \\
 x^2 = 0,09 \\
 x^4 = 0,0081 \\
 \hline
 1 + x^2 + x^4 = 1,0981 \\
 - x - x^3 = - 0,327 \\
 \hline
 g(x) = 0,7711
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x = 0,3 \\
 x^3 = 0,027 \\
 \hline
 x + x^3 = 0,327
 \end{array}$$

Истинное же значеніе равно

$$\frac{1}{1,3} = 0,7692 \dots$$

Значитъ ошибка приближенной формулы тутъ равна 0,0019. Вычисляя x^5 , имѣемъ $x^5 = 0,00243$:

$$\frac{x^5}{1+x} = \frac{0,00243}{1,3} = 0,0019$$

(приблизительно).

*) Приближенныя равенства съ точностью до $\frac{1}{10}$.

Значить оба результата совпадаютъ.

Сдѣлаемъ теперь нѣкоторыя общія заключенія на основаніи полученныхъ нами свойствъ формулы Маклорена.

Если значенія функцій $f(x)$ и $g(x)$ при $x = 0$ тождественно равны другъ другу, то, конечно, если предположить нѣкоторую «равномѣрность хода» этихъ функцій, значенія этихъ функцій для значеній x -са, близкихъ къ нулю будутъ другъ къ другу ближе, чѣмъ значенія двухъ любыхъ функцій, которыя при $x = 0$ не были тождественно равны другъ другу. Конечно, это замѣчаніе справедливо только для малыхъ значеній x -са. Ибо при дальнѣйшемъ измѣненіи двѣ первыхъ кривыя ($y = f(x)$ и $y = g(x)$) могутъ другъ отъ друга удалиться весьма значительно; а вторыя, наоборотъ, сблизиться другъ съ другомъ.

Если еще, кромѣ того, обѣ кривыя $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при $x = 0$ имѣютъ общія касательныя (значенія $f'(x)$ и $g'(x)$ при $x = 0$ тождественно равны другъ другу), т. е. одинаковое начальное направленіе, то недалеко отъ $x = 0$ ихъ взаимное сближеніе будетъ болѣе глубокое, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда касательныя не одинаковы. Онѣ въ этомъ случаѣ, близко отъ начала координатъ, мало будутъ уклоняться другъ отъ друга и, значить, область, въ которой онѣ мало отличаются одна отъ другой, будетъ простирается дальше, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда эти кривыя имѣютъ только одну общую точку въ началѣ съ различными касательными въ ней, если, опять таки, предположить болѣе или менѣе равномѣрный ходъ этихъ кривыхъ.

Если при $x = 0$ и обѣ вторыя производныя нашихъ функцій имѣютъ одинаковыя значенія, то все то, что было сказано про $f(x)$ и $g(x)$, можетъ быть теперь перенесено на $f'(x)$ и $g'(x)$, и отсюда можно будетъ заключить опять-таки, что самыя функціи $f(x)$ и $g(x)$ въ этомъ случаѣ будутъ близки другъ къ другу еще на большемъ протяженіи, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ. Такъ можно рассуждать и далѣе; чѣмъ больше производныхъ при $x = 0$ имѣетъ равныя значенія, тѣмъ больше, при прочихъ равныхъ условіяхъ, можно рассчитывать на близкое совпаденіе обѣихъ функцій (кривыхъ).

Однако безъ дальнѣйшихъ рассужденій видно, что въ этомъ рассужденіи мало математическихъ основаній, ибо мы дѣлаемъ тутъ постоянно прибавку: «болѣе или менѣе равномѣрный ходъ функціи», что собственно не представляетъ изъ себя понятія математическаго.

Значить на эти выводы мы только тогда можемъ ссылаться, когда мы будемъ уже убѣждены въ такой равномѣрности хода явленія изъ основаній естественнонаучныхъ. Къ вопросу о болѣе точномъ математическомъ опредѣленіи условій справедливости нашихъ приближенныхъ равенствъ мы еще вернемся ниже.

§ 43. Формула Тайлора.

Формула Маклорена даетъ нѣкоторую рациональную цѣлую функцію, которая сама и производныя которой до n -аго порядка включительно совпадаютъ въ своихъ значеніяхъ съ данной функціей и ея n первыми производными для частнаго значенія $x = 0$. Приближенно этой рациональной функціей мы можемъ замѣнить данную.

Если бы мы хотѣли получить упомянутое совпаденіе не для частнаго значенія $x = 0$, а для нѣкотораго значенія $x = x_0$, то мы легко можемъ достигъ этого, вводя новую переменную ξ подстановкой $\xi = x - x_0$. Послѣ этой замѣны переменнаго, $f(x)$ становится у насъ функціей новаго переменнаго ξ , и эту новую функцію мы обозначимъ знакомъ $\varphi(\xi)$.

Производная $f'(x)$ равна въ этомъ случаѣ производной функціи $\varphi(\xi)$, взятой по ξ , что мы обозначимъ знакомъ $\varphi'(\xi)$, умноженной на производную величины ξ по переменной x ; но эта послѣдняя величина равна 1.

Значить, мы просто будемъ имѣть:

$$\varphi'(\xi) = f'(x)$$

причемъ нужно только помнить, что дифференцирование лѣвой части совершается по ξ , а правой по x .

Такъ же:

$$\varphi''(\xi) = f''(x)$$

и т. п.

Положимъ теперь $\xi = 0$; это все равно, что положить

$$x = x_0.$$

Тогда мы изъ формулы Маклорена для $\varphi(\xi)$ и получимъ формулу Тайлора для $f(x)$, а именно:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x_0).$$

Изъ этой формулы мы снова можемъ получить ф. Маклорена, если положить $x_0 = 0$. (Собственно ф. Маклорена представляетъ изъ себя лишь частный видъ ф. Тайлора, и то, что эта формула имѣетъ свое собственное названіе, не вполне правильно, ибо открытіе Тайлоромъ его формулы предшествовало работамъ Маклорена).

§ 44. Три важныхъ частныхъ случая формулы Маклорена.

Если мы въ формулѣ Маклорена вмѣсто $f(x)$ возьмемъ какую-нибудь опредѣленную функцію, то мы получимъ частные случаи этой формулы.

Изъ этихъ спеціальныхъ случаевъ мы остановимся на трехъ въ силу большого числа приложений этихъ формулъ.

1) Положимъ $f(x) = (1+x)^m$, гдѣ m будетъ представлять любое (не только цѣлое и положительное) число; тогда мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(1+x)^{m-1}, \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}, \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \\ &\dots \dots \dots \\ f(0) &= 1, \\ f'(0) &= m, \\ f''(0) &= m(m-1), \\ f'''(0) &= m(m-1)(m-2), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Откуда и получимъ формулу биннома Ньютона:

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \quad (1)$$

2) Положимъ $f(x) = e^x$.

Всѣ производныя этой функціи равны между собой, а при $x=0$ равны 1; мы получаемъ такимъ образомъ формулу Ньютона и Ивана Бернулли для показательной функціи e^x :

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (2)$$

Если мы желаемъ получить такую же формулу для разложенія натурального логарифма въ рядъ, то функція $\log x$ для этой цѣли непригодна, ибо при $x=0$ эта функція имѣетъ безконечно большое значеніе, но мы можемъ разсматривать функцію $f(x) = \log(1+x)$; тогда мы получимъ:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x), \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ f'''(x) &= +\frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \\ f^{IV}(x) &= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}. \end{aligned}$$

Значитъ:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 1, \\ f''(0) &= -1, \\ f'''(0) &= +1 \cdot 2, \\ f^{iv}(0) &= -1 \cdot 2 \cdot 3. \end{aligned}$$

Отсюда получается формула Н. Меркатора:

$$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (3)$$

Съ помощью формулы для показательной функции мы безъ особеннаго труда можемъ вычислить значеніе e , и гораздо проще, чѣмъ на основаніи разсужденій § 32.

Для этого только въ формулѣ (2) достаточно положить $x = 1$. Отдѣльные члены формулы тогда очень легко вычисляются одинъ за другимъ, причеиъ для того, чтобы получить каждый послѣдующій членъ изъ предыдущаго, достаточно этотъ послѣдній раздѣлить на нѣкотораго простаго множителя.

Если мы желаемъ вычисленіе сдѣлать съ точностью до 4-хъ десятичныхъ знаковъ, то намъ нужно отдѣльные члены ряда вычислить съ точностью до 5 десятичныхъ знаковъ изъ опасенія, что ошибки вычисленія, полученные на каждомъ членѣ, въ суммѣ могутъ дать довольно значительную величину. Мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 &= 1 \\ \frac{1}{2} &= 0,5 \\ \frac{1}{3!} &= 0,16667 \\ \frac{1}{4!} &= 0,04167 \\ \frac{1}{5!} &= 0,00833 \\ \frac{1}{6!} &= 0,00139 \\ \frac{1}{7!} &= 0,00020 \\ \frac{1}{8!} &= 0,00002 \\ \hline e &= 2,7183 \end{aligned}$$

Мы можемъ удовольствоваться меньшимъ числомъ членовъ ряда, если мы положимъ $x = \frac{1}{2}$ и будемъ, значитъ, вычислять сначала величину \sqrt{e} :

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,125$$

$$\frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,02083$$

$$\frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,00260$$

$$\frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0,00026$$

$$\frac{1}{6!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0,00002$$

$$\sqrt{e} = 1,6487;$$

правда, намъ остается еще произвести умноженіе этого числа на самое себя, чтобы получить число e .

Формулой (3) Меркатора мы можемъ воспользоваться для вычисления натуральныхъ логарифмовъ чиселъ; сама формула, собственно, не особенно удобна для непосредственнаго пользованія ею, ибо намъ при этомъ нужно будетъ брать слишкомъ большое число членовъ для того, чтобы достигнуть достаточной степени точности.

Но изъ этой формулы мы можемъ получить и полезные для практики результаты; для этой цѣли положимъ въ ней сначала вмѣсто x , — x ; тогда мы будемъ имѣть:

$$\log (1 - x) \infty - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \dots \dots (4)$$

Эту формулу свяжемъ съ формулой (3) путемъ вычитанія. Будемъ имѣть:

$$\log \frac{1+x}{1-x} \infty 2 \left\{ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right\} \dots \dots (5)$$

Если мы желаемъ, напримѣръ, вычислить $\log 2$, то для этого нужно положить:

$$\frac{1+x}{1-x} = 2, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{1}{3}.$$

Тогда мы будемъ имѣть:

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{1}{3} & = & 0,33333 \\
 \left(\frac{1}{3}\right)^3 & = & 0,03704 \\
 \left(\frac{1}{3}\right)^5 & = & 0,00412 \\
 \left(\frac{1}{3}\right)^7 & = & 0,00046 \\
 \frac{1}{3} & = & 0,33333 \\
 \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 & = & 0,01235 \\
 \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 & = & 0,00082 \\
 \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 & = & 0,00007 \\
 \hline
 & & 0,34657
 \end{array}$$

Значить

$$\log 2 = 0,6931$$

какъ и § 30.

Если мы желаемъ вычислить логариѣмы и дальнѣйшихъ чиселъ, другими словами, составить цѣлую логариѣмическую таблицу, то мы, насколько это возможно, будемъ пользоваться уже вычисленными логариѣмами.

Мы имѣемъ, напримѣръ:

$$\log 3 = \log 2 + \log \frac{3}{2}.$$

Положимъ:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{3}{2}; \text{ для этого нужно положить } x = \frac{1}{5}.$$

Тогда мы будемъ имѣть:

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{1}{5} & = & 0,2 \\
 \left(\frac{1}{5}\right)^3 & = & 0,008 \\
 \left(\frac{1}{5}\right)^5 & = & 0,00032 \\
 \frac{1}{5} & = & 0,2 \\
 \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 & = & 0,00267 \\
 \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 & = & 0,00006 \\
 \hline
 & & 0,20273
 \end{array}$$

Значить

$$\log \frac{3}{2} = 0,4055$$

и

$$\log 3 = 1,0986.$$

Для того, чтобы вычислить логариѣмъ 4, мы можемъ воспользо-ваться или равенствомъ:

$$\log 4 = 2 \log 2$$

или равенствомъ:

$$\log 4 = \log 3 + \log \frac{4}{3}.$$

Если мы сдѣлаемъ вычисленіе по той и другой формулѣ, то у насъ тѣмъ самымъ будетъ и желательный контроль вѣрности нашихъ вычисленій и т. п.

Конечно, работу можно сокращать различными искусственными упрощеніями.

Логарифмы Бригга, которыя мы имѣемъ въ обыкновенныхъ таблицахъ (ср. § 31), получаютъ изъ натуральныхъ логарифмовъ путемъ умноженія этихъ послѣднихъ на нѣкотораго полученнаго въ упомянутомъ параграфѣ множителя.

§ 45. Дѣйствія надъ «малыми» величинами.

Мы будемъ называть «малыми» такія величины, первыми степенями которыхъ мы не можемъ пренебречь въ нашихъ выкладкахъ, но квадратами которыхъ или произведеніями этихъ величинъ по двѣ, а также произведеніемъ этихъ квадратовъ или попарныхъ произведеній на не очень большіе численные коэффициенты (напримѣръ, до 5 или 6) мы уже будемъ въ состояніи пренебречь. Какъ малы должны быть эти величины, зависитъ, конечно, раньше всего отъ требуемой точности вычисленія.

Если, напримѣръ, точность требуется до двухъ десятичныхъ знаковъ, то величина можетъ считаться малой, если она не превышаетъ 0,02.

Если δ , ϵ , ξ суть такія «малыя» величины, то приближенно имѣютъ силу слѣдующія равенства, которыя частью получаютъ непосредственной повѣркой (умноженіемъ), частью же на основаніи § 44.

$$(1 + \delta)(1 + \epsilon) \approx 1 + \delta + \epsilon \quad \dots \quad (1)$$

$$(1 + \delta)(1 + \epsilon)(1 + \xi) \approx 1 + \delta + \epsilon + \xi \quad \dots \quad (2)$$

$$(1 + \delta)^n \approx 1 + n\delta \quad \dots \quad (3)$$

Въ особенности же

$$(1 + \delta)^{-1} \approx 1 - \delta \quad \dots \quad (4)$$

$$(1 + \delta)^2 \approx 1 + 2\delta \quad \dots \quad (5)$$

$$\sqrt{1 + \delta} \approx 1 + \frac{\delta}{2} \quad \dots \quad (6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \delta}} \approx 1 - \frac{\delta}{2} \quad \dots \quad (7)$$

$$e^\delta \approx 1 + \delta \quad \dots \quad (8)$$

$$\log(1 + \delta) \approx \delta \quad \dots \quad (9)$$

Всѣми этими формулами очень часто пользуются, когда при разработкѣ опытныхъ данныхъ имѣютъ въ виду принять во вниманіе различныя постороннія обстоятельства, вродѣ измѣненія температуры или барометрическаго давленія или плотности земного магнетизма и т. п.

Формулы эти точны «до членовъ второго порядка исключительно». Это значитъ, что мы въ этихъ формулахъ уже пренебрегли квадратами и произведеніями малыхъ величинъ, взятыхъ по двѣ.

Очень часто приходится имѣть дѣло съ величинами, которыя не такъ малы, чтобы мы, при поставленномъ условіи точности, могли пренебречь произведеніями ихъ по двѣ (или квадратами); кубами же, или произведеніями этихъ величинъ по три, мы пренебречь уже въ состояніи. Въ этихъ случаяхъ мы имѣемъ формулы, «точные до членовъ второго порядка включительно» (до членовъ третьяго порядка исключительно).

Такъ наримѣръ,

$$(1 + a\delta + b\delta^2)^2 \approx 1 + 2a\delta + (a^2 + 2b)\delta^2 \dots (10)$$

или:

$$\frac{1 + a\delta}{1 + b\delta} \approx 1 + (a - b)\delta + (b^2 - ab)\delta^2 \dots (11)$$

Послѣднюю формулу примѣняютъ при случаѣ и въ обратномъ смыслѣ: она можетъ дать намъ выраженіе цѣлой функціи второго порядка въ видѣ дробной функціи съ числителемъ и знаменателемъ перваго порядка.

Сдѣлаемъ, наримѣръ, эту операцію для функціи:

$$1 + f\delta + g\delta^2.$$

Величины a и b найдутся изъ слѣдующихъ уравненій:

$$a - b = f$$

$$b(a - b) = -g.$$

Тогда мы получимъ изъ нихъ:

$$b = -\frac{g}{f}, \quad a = \frac{f^2 - g}{f},$$

а слѣдовательно,

$$1 + f\delta + g\delta^2 \approx \frac{f + (f^2 - g)\delta}{f - g\delta} \dots (12)$$

Изъ различныхъ комбинацій данныхъ формулъ мы можемъ получить и другія, которыя даютъ намъ приближенныя формулы для

болѣе сложныхъ случаевъ; напр.

$$\frac{\sqrt[3]{1+a\delta}}{\sqrt[3]{1+b\delta}} \approx \frac{1 + \frac{1}{2}a\delta}{1 + \frac{1}{3}b\delta} \approx 1 + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)\delta \dots (13)$$

Однако при этомъ нужно слѣдить за тѣмъ, чтобы при комбинированіи членовъ, которыми мы потомъ пренебрегаемъ, не получить столь большихъ коэффициентовъ, которые выходятъ за предѣлы, допускаемые точностью; такъ что осторожнѣе будетъ вычислять отдѣльные члены съ бѣльшей точностью, чѣмъ того требуетъ конечный результатъ.

Въ прикладной математикѣ очень часто это не дѣлается. Но тогда нужно имѣть въ виду, что мы исходимъ въ этомъ случаѣ не изъ математическихъ, а естественно научныхъ заключеній.

§ 46. Приближенные способы рѣшенія ур-ній.

Если намъ нужно рѣшить численно нѣкоторое уравненіе съ численными коэффициентами, то при рѣшеніи уравненій высшихъ степеней эта задача не можетъ быть сдѣлана при помощи общихъ формулъ, составленныхъ изъ коэффициентовъ уравненія. Во многихъ случаяхъ такихъ общихъ формулъ нѣтъ вовсе.

Въ другихъ случаяхъ имѣющіяся общія формулы весьма плохо приспособлены для численныхъ примѣненій. Въ этихъ случаяхъ намъ на помощь приходятъ методы приближенныхъ вычисленій корней, которыя даютъ намъ возможность послѣдовательно ближе и ближе подходить къ истинному значенію корня.

При это не нужно думать, что такой процессъ приближенія носить менѣе математическій характеръ, чѣмъ пользованіе формулой; потому что, напримѣръ, какъ мы имѣемъ въ случаѣ квадратнаго уравненія, извлеченіе квадратнаго корня, которое требуется формулой, можетъ быть сдѣлано только путемъ послѣдовательныхъ пробъ, при чемъ одна десятичная цифра опредѣляется за другой и при чемъ весьма часто можетъ случиться, что нѣкоторая ранѣе опредѣленная цифра должна быть потомъ увеличена на 1 или 2 единицы.

Ибо по существу уже даже простое вычитаніе и дѣленіе имѣютъ вышеупомянутый характеръ.

Большинство этихъ приближенныхъ методовъ предполагаютъ а priori, что намъ извѣстно нѣкоторое приближенное значеніе корня. И даютъ намъ методу—изъ этого даннаго корня получить лучшій корень.

Въ приложеніяхъ анализа въ большинствѣ случаевъ изъ самой природы задачи мы можемъ намѣтить границы, въ которыхъ необхо-

димо долженъ лежать искомый корень. Для алгебраическихъ ур-нй дается алгебраическй методъ, при помощи котораго мы во всѣхъ случаяхъ можемъ найти такія границы. (Для не алгебраическихъ, такъ называемыхъ трансцендентныхъ, уравненій—по самому существу дѣла, не можетъ существовать какой-нибудь общей методы). Самой простой изъ этихъ методъ является та, по которой, путемъ простыхъ пробъ, уменьшается промежутокъ, въ которомъ долженъ заключаться корень. Дадимъ на это примѣръ.

Пусть дано уравненіе

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Обозначимъ лѣвую часть этого уравненія черезъ $y = f(x)$.

Задача рѣшенія этого ур-нія сводится такимъ образомъ къ слѣдующему: нужно найти значенія x -са, для которыхъ соответственныя значенія y -ка равны нулю. Геометрически это значитъ: найти точки пересѣченія кривой, ур-ніе которой есть $y = f(x)$, съ осью x -совъ.

Для $x_1 = 0, y_1 = 1$. Значитъ число положительное. Значитъ около $x_1 = 0$ кривая проходитъ надъ осью x -совъ.

При $x_2 = 1, y_2 = -1$, т. е. величина отрицательная. Значитъ, около $x_2 = 1$ кривая проходитъ подъ осью x -совъ. Но эта кривая непрерывна. Значитъ по теоремѣ, которую мы уже часто упоминали, эта кривая изъ области положительныхъ y -ковъ не можетъ перейти въ область отрицательныхъ y -ковъ, не пересѣкая оси x -совъ.

Значитъ, между $x = 0$ и $x = 1$ находится, по крайней мѣрѣ, одинъ корень уравненія.

Этотъ корень мы нашли, такимъ образомъ, съ точностью до единицы.

Если эта точность недостаточна, тогда мы можемъ, путемъ пробъ, сузить промежутокъ, въ которомъ долженъ лежать корень.

Мы можемъ взять на пробу любое значеніе x , лежащее между 0 и 1, и затѣмъ посмотримъ, будетъ ли для этого значенія x -са y положителенъ или отрицателенъ.

Если мы не имѣемъ никакихъ спеціальныхъ данныхъ, то естественнѣе всего попробовать $x_3 = \frac{1}{2}$.

Тогда мы получимъ:

$$y_3 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1 - 12 + 8}{8} = -\frac{3}{8};$$

это величина отрицательная. Значитъ между x_1 и x_3 есть по крайней мѣрѣ одинъ корень. (Напротивъ для насъ совершенно остается открытымъ вопросъ относительно того, есть-ли корень между x_2 и x_3 ;

можно только сказать, что въ этомъ промежуткѣ или совсѣмъ нѣтъ корней, или четное число ихъ, либо кратные корни, сосчитанные по числу показателя ихъ кратности).

Такимъ образомъ, промежутокъ, въ которомъ необходимо долженъ лежать корень, уменьшенъ на половину.

Повтореніемъ подобнаго разсужденія можно испробовать значенія x -са, равныя $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, т. е. уменьшая все болѣе и болѣе промежутки, въ которыхъ долженъ лежать корень, причемъ этотъ промежутокъ можно сдѣлать сколь угодно малымъ. Напримѣръ, достаточно было бы подобное дѣйствіе сдѣлать 10 разъ, чтобы свести этотъ промежутокъ до 0,001.

Часто бываетъ полезнымъ нѣсколько видоизмѣнить этотъ способъ. Погрѣшность значенія y -ка, которая получилась, когда мы положили $x_1 = 0$, была равна 1; погрѣшность, которую мы сдѣлали, полагая $x_3 = \frac{1}{2}$, была (по абсол. знач.) $\frac{3}{8}$.

Отсюда видно, что значеніе x_3 лучше, чѣмъ x_1 , и что искомый корень ближе лежитъ къ значенію x_3 , чѣмъ къ x_1 и приблизительно въ томъ же отношеніи, въ какомъ находятся самыя погрѣшности. Поэтому является болѣе цѣлесообразнымъ для x_4 (новой пробы) взять то значеніе, которое дѣлитъ промежутокъ между x_1 и x_3 въ отношеніи погрѣшностей, т. е. другими словами вычислить x_4 изъ пропорціи:

$$(x_3 - x_4) : (x_4 - x_1) = \frac{3}{8} : 1, \quad (2)$$

откуда получается

$$x_4 = \frac{8}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{11}.$$

Этотъ способъ носить названіе, «способа двухъ чашекъ вѣсовъ» и былъ извѣстенъ уже арабскимъ математикамъ; теперь его обыкновенно называютъ «двойнымъ ложнымъ допущеніемъ».

Для дальнѣйшаго рекомендуется еще найденное значеніе x_4 обратить въ десятичную дробь; но при этомъ было бы совершенно бесполезнымъ опредѣлять много десятичныхъ знаковъ этой дроби, ибо мы можемъ навѣрное ручаться только за очень небольшое число знаковъ, а потому небольшое отклоненіе отъ истиннаго значенія x_4 не имѣетъ никакого значенія при дальнѣйшихъ вычисленіяхъ.

Совершенно достаточно, если мы возьмемъ для

$$x_4 = 0,36,$$

что намъ дастъ для

$$y_4 = 0,047 - 1,08 + 1 = -0,033,$$

т. е. погрѣшность значительно меньшую, чѣмъ прежде.

Мы можемъ теперь величины

$$x_1 = 0 \text{ и } x_4 = 0,36$$

опять связать вмѣстѣ со значеніемъ

$$y_1 = 1 \quad y_4 = -0,033$$

по вышеуказанному способу, и такимъ образомъ получить новое число x_5 .

Впрочемъ, когда мы уже зашли такъ далеко, больше рекомендуется дальше слѣдовать способу, данному Ньютономъ. Значеніе $x = x_4$ есть приближенный корень. Пусть истинное значеніе корня ровно будетъ $x_4 + \delta$, гдѣ δ есть величина малая, квадратомъ и высшими степенями которой мы можемъ пренебречь.

По формулѣ Тейлора

$$f(x_4 + \delta) \approx f(x_4) + \delta f'(x_4).$$

Выберемъ теперь δ такъ, чтобы $f(x_4 + \delta) = 0$; мы должны имѣть тогда

$$\delta \approx -\frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \dots \dots \dots (3)$$

Въ этомъ и заключается способъ Ньютона.

Геометрическое значеніе этой методы очень просто; она сводится (см. § 41) къ тому, что вмѣсто точки пересѣченія кривой $y = f(x)$ съ осью x -совъ, ищется пересѣченіе съ осью x касательной къ этой кривой въ точкѣ, соотвѣтствующей $x = x_4$. Это обнаруживается еще тѣмъ, что очень часто способъ этотъ приводитъ насъ къ ошибочному результату: а именно, когда и ордината кривой въ точкѣ x_4 очень мала и когда эта точка лежитъ уже очень близко къ точкѣ пересѣченія кривой съ осью x -совъ, все-таки возможно, что кривая все время идетъ очень параллельно къ оси x и только потомъ загибается, такъ что пересѣченіе касательной въ точкѣ x_4 съ осью x -совъ лежитъ дальше отъ точки пересѣченія кривой съ осью x -совъ, чѣмъ сама точка x_4 . И слѣдовательно, новое приближенное значеніе не лучше, а хуже прежняго.

Значить, всегда при пользованіи этимъ способомъ при нахожденіи каждаго новаго приближенія полезно провѣрить, будетъ ли новое значеніе лучше раньше найденныхъ.

Для нашего примѣра:

$$x_4 = 0,36.$$

$f(x_4)$ у насъ уже вычислено:

$$f(x_4) = -0,033.$$

Возьмемъ теперь

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \dots \dots \dots (4)$$

Значить

$$f'(x_4) = 0,39 - 3 = -2,61.$$

Значить

$$\delta = -\frac{0,033}{2,61} = -0,013,$$

а потому

$$x_5 = x_4 + \delta = 0,347.$$

Для пробы вычислимъ

$$y_5 = 0,04178 - 1,041 + 1 = 0,00078.$$

Значить, на самомъ дѣлѣ, ошибка сдѣлалась еще меньше, хотя еще не очень мала. Сдѣлаемъ этотъ процессъ еще одинъ разъ; мы получимъ:

$$f'(x_5) = 0,361 - 3 = -2,639$$

$$\delta = \frac{0,00078}{2,639} = 0,0003.$$

$$x_6 = x_5 + \delta = 0,3473.$$

Если мы хотимъ идти еще дальше, то воспользуемся логарифмами; мы получимъ:

$\log x_6 = 0,54070 - 1$	$2 \log x_6 = 0,08140 - 1$
$3 \log x_6 = 0,62210 - 2$	$x_6^2 = 0,1206$
$x_6^3 = 0,041889$	$3x_6^2 = 0,3618$
$1 + x_6^3 = 1,041889$	$f'(x_6) = 3x_6^2 - 3 = -2,6382$
$-3x_6 = 1,0419$	
$f(x_6) = -0,000011$	

$$\delta = -\frac{0,000011}{2,6382} = -0,000005,$$

значить

$$x_7 = x_6 + \delta = 0,347295.$$

Тутъ мы не можемъ быть увѣрены за послѣднюю цифру. Можетъ быть, она и вѣрна, однако для вѣрности нужно было бы вести вычисленіе съ болѣе многозначными логарифмами. Какъ показываетъ данный примѣръ, этотъ способъ очень быстро ведетъ насъ къ цѣли, если только сдѣланы первые шаги. Можно безъ доказательства принять къ свѣдѣнію: если не встрѣчается на нашемъ пути особенно неблагоприятныхъ случаевъ, то можно рассчитывать на то, что когда мы правильно нашли n десятичныхъ знаковъ, то слѣдующій шагъ дастъ намъ еще $(n - 1)$ знаковъ, такъ что мы будемъ уже имѣть опредѣленными $2n - 1$ знаковъ; однако при этомъ нужно имѣть въ виду тѣ ошибки, которыя мы сдѣлали при промежуточныхъ вычисленіяхъ. Ввиду этого нужно замѣтить, что на первыхъ порахъ отдѣльные

члены $f'(x)$ нужно вычислять очень точно, ибо обыкновенно эти члены взаимно уничтожаются.

При вычисленіи $f'(x)$ можно ограничиться меньшею точностью, ибо обыкновенно отъ одного шага къ другому $f'(x)$ мѣняется не очень замѣтно.

Нужно только исключить тотъ случай, когда $f'(x)$ вблизи иско- мой точки имѣетъ очень малое значеніе.

Въ этомъ случаѣ обстоятельства вообще неблагопріятны, ибо пе- ресѣченіе касательной съ осью x -совъ даетъ такъ называемое (въ графикѣ) скользящее сѣченіе. Въ этихъ случаяхъ болѣе рекомен- дуется примѣненіе перваго способа («двойного ложнаго предположе- нія»), который именно въ подобныхъ случаяхъ даетъ очень хорошіе результаты.

§ 47. РѢШЕНІЕ УРАВНЕНІЙ ПУТЕМЪ ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНЫХЪ ПРИБЛИЖЕНІЙ.

Мы дадимъ тутъ еще другой способъ рѣшенія уравненій, кото- рый во многихъ случаяхъ можетъ быть весьма полезнымъ.

Для того, чтобы примѣнить этотъ способъ, приведемъ наше ур-ніе къ такому виду, чтобы въ одной части оставался одинъ x , т. е.:

$$x = \varphi(x), \dots \dots \dots (1)$$

что можно сдѣлать весьма различными способами.

Начнемъ тогда съ какого-нибудь совершенно произвольнаго зна- ченія x . Практически, конечно, лучше взять значеніе, близкое къ искомому, и вычислимъ рядъ значеній:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0), \\ x_2 &= \varphi(x_1), \\ x_3 &= \varphi(x_2), \dots \dots \dots (2) \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Во многихъ случаяхъ весьма скоро два значенія x_{n-1} и x_n , при требуемой степени точности, будутъ имѣть одно и то же значеніе.

Мы имѣемъ въ этомъ случаѣ приближенное равенство:

$$x_n = \varphi(x_n), \dots \dots \dots (3)$$

т. е. мы нашли значеніе x -са, которое «почти что» обращаетъ дан- ное равенство въ тождество.

Можемъ ли мы заключить изъ этого, что x_n есть приближенный корень ур-нія. Очевидно, что во всѣхъ случаяхъ мы этого утвер- ждать не можемъ.

Вѣдь кривая $y = f(x)$ могла очень близко подойти къ оси x -овъ, однако не пересѣчь ея, а снова отъ нея удалиться.

Это заключеніе мы вправѣ сдѣлать въ одномъ случаѣ, а именно, когда:

$$f'(x) \equiv 1 - \varphi'(x) \dots \dots \dots (4)$$

вблизи разсматриваемой точки не мала, т. е. когда $\varphi'(x)$ значительно меньше 1.

Если мы примѣнимъ этотъ способъ къ выше нами разсмотрѣнному примѣру, то мы будемъ имѣть:

$$x = \frac{x^3 + 1}{3}.$$

Тогда

$$\varphi'(x) = x^2,$$

т. е. значеніе $\varphi'(x)$ будетъ значительно меньше 1, если только x хотя бы немного меньше 1.

Поэтому въ данномъ примѣрѣ мы можемъ примѣнить упомянутый способъ.

Мы начнемъ со значенія $x = \frac{2}{3}$; тогда мы получимъ:

$$x_0 = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{8}{27} + 1 \right) = \frac{35}{81} = 0,43 \text{ *}).$$

Далѣе:

$$\begin{array}{r} 0,43 \cdot 0,43 \\ \hline 0,172 \\ 13 \\ \hline 0,185 \cdot 0,43 \\ \hline 74 \\ 5 \\ \hline x_1^3 = 0,079 \end{array}$$

(Вполнѣ достаточно умноженіе вести съ точностью до двухъ десятичныхъ знаковъ).

Поэтому:

$$x_2 = \frac{1,079}{3} = 0,36.$$

Далѣе будетъ болѣе цѣлесообразнымъ вести счетъ при помощи

*) Мы имѣемъ въ данномъ мѣстѣ и дальше приближенныя равенства.

логариѳмовъ и счетной машины. Мы будемъ имѣть:

$$\begin{array}{r}
 \log 0,36 = 0,5563 \quad - 1 \\
 3 \log 0,36 = 0,6689 \quad - 2 \\
 \hline
 1 + x_2^3 = 1,0467 \\
 x_3 = 0,349 \\
 \hline
 \log x_3 = 0,5428 \quad - 1 \\
 3 \log x_3 = 0,6284 \quad - 2 \\
 \hline
 1 + x_3^3 = 1,0425 \\
 x_4 = 0,3475 \\
 \hline
 \log x_4 = 0,54095 \quad - 1 \\
 3 \log x_4 = 0,62285 \quad - 2 \\
 \hline
 1 + x_4^3 = 1,04196 \\
 x_5 = 0,34732 \\
 \hline
 \log x_5 = 0,540726 \quad - 1 \\
 3 \log x_5 = 0,622178 \quad - 2 \\
 \hline
 1 + x_5^3 = 1,041897 \\
 x_6 = 0,347299.
 \end{array}$$

Предпоследняя цифра можетъ тутъ считаться вѣрной.

За послѣднюю цифру, при пользованіи пятизначными таблицами, мы вообще ручаться не можемъ.

Мы видимъ уже по этому примѣру, что этотъ способъ, когда не требуется большая степень точности, быстро приводитъ насъ къ хорошему практическому результату; но, начиная съ нѣкотораго мѣста, гораздо тише ведетъ насъ къ цѣли, чѣмъ способъ Ньютона.

Значить, этотъ способъ рекомендуется примѣнять тогда, когда мы можемъ и хотимъ довольствоваться небольшою степенью точности.

Передъ способомъ Ньютона, этотъ способъ имѣетъ то преимущество, что его очень легко примѣнить и къ рѣшенію системъ уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными. Особенно слѣдуетъ обратить вниманіе на тотъ случай, когда мы имѣемъ дѣло, что очень часто имѣетъ мѣсто, съ системой уравненій линейныхъ, и притомъ такихъ, что въ каждомъ изъ уравненій коэффициентъ при одной неизвѣстной величинѣ значительно больше коэффициентовъ при другихъ неизвѣстныхъ, причемъ это обстоятельство имѣетъ мѣсто въ каждомъ уравненіи для новой неизвѣстной; на примѣръ, пусть дана система:

$$\begin{array}{l}
 7x + y = 38 \\
 x + 5y = 20.
 \end{array}$$

Возьмемъ, какъ первое приближеніе:

$$x = 0 \quad \text{и} \quad y = 0.$$

Тогда второе приближеніе будетъ:

$$x = \frac{38}{7} = 5,4; \quad y = \frac{20}{5} = 4.$$

Третье приближеніе:

$$x = \frac{38 - 4}{7} = 4,86; \quad y = \frac{20 - 5,4}{5} = 2,92.$$

Четвертое:

$$x = \frac{38 - 2,92}{7} = \frac{35,08}{7} = 5,01$$

$$y = \frac{20 - 4,86}{5} = \frac{15,14}{5} = 3,03.$$

Наконецъ пятое:

$$x = \frac{38 - 3,03}{7} = \frac{34,97}{7} = 4,996$$

$$y = \frac{20 - 5,01}{5} = \frac{14,99}{5} = 2,998.$$

На самомъ же дѣлѣ точныя рѣшенія суть:

$$x = 5 \quad \text{и} \quad y = 3.$$

Въ настоящемъ случаѣ этотъ способъ, какъ легко видѣть, не такъ быстро приводитъ насъ къ цѣли, какъ обыкновенное рѣшеніе уравненій по обыкновенному способу. Но, когда имѣешь дѣло съ большимъ числомъ уравненій, этотъ способъ значительно короче.

§ 48. Приближенныя формулы дѣленія.

Когда нѣкоторая функція y отъ x , до членовъ опредѣленнаго порядка, точно представляется цѣлой раціональной функціей, свободный членъ которой не равенъ нулю, то мы можемъ также $\frac{1}{y}$ съ точностью до членовъ того же порядка представить подобной же функціей.

Свободный членъ мы всегда можемъ считать равнымъ 1. (Въ противномъ случаѣ произведемъ дѣленіе на свободный членъ).

Пусть съ точностью до членовъ 4-го порядка включительно:

$$y = 1 + ax + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + (x^5), \dots \dots \dots (1)$$

тогда мы можемъ правую часть этого равенства положить равной $1 + z$, гдѣ

$$z = ax + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + (x^5).$$

По формулѣ (1) § 44 мы получимъ сначала:

$$\frac{1}{y} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - (z^5);$$

а затѣмъ, такъ какъ

$$\begin{aligned} -z &= -\alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4 + (x^5), \\ z^2 &= \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x^3 + (\beta^2 + 2\alpha\gamma) x^4 + (x^5), \\ -z^3 &= -\alpha^3 x^3 - 3\alpha^2\beta x^4 + (x^5), \\ z^4 &= \alpha^4 x^4 + (x^5), \\ (z^5) &= + (x^5); \end{aligned}$$

то, собирая все вмѣстѣ, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} = 1 - \alpha x + (\alpha^2 - \beta) x^2 + (-\alpha^3 + 2\alpha\beta - \gamma) x^3 + \\ + (\alpha^4 - 3\alpha^2\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma - \delta) x^4 + (x^5), \end{aligned}$$

что и даетъ намъ искомую форму результата.

Когда мы такимъ образомъ убѣдились, что рѣшеніе задачи вообще возможно, то настоящее вычисленіе можно сдѣлать еще по другому способу. А именно, мы можемъ сначала ввести неопредѣленные коэффициенты, т. е. положить:

$$\frac{1}{y} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + (x^5),$$

и затѣмъ опредѣлить эти коэффициенты изъ того соображенія, что произведеніе этого выраженія и даннаго y , до членовъ четвертаго порядка включительно, должно быть равно единицѣ.

Это дастъ намъ:

$$\begin{aligned} 1 = 1 + (A + \alpha) x + (B + A\alpha + \beta) x^2 + (C + B\alpha + A\beta + \gamma) x^3 + \\ + (D + C\alpha + B\beta + A\gamma + \delta) x^4 + (x^5). \end{aligned}$$

Значитъ:

$$\begin{aligned} A + \alpha &= 0 \\ B + A\alpha + \beta &= 0 \\ C + B\alpha + A\beta + \gamma &= 0 \\ D + C\alpha + B\beta + A\gamma + \delta &= 0. \end{aligned}$$

Первое изъ этихъ уравненій тотчасъ дастъ намъ $A = -\alpha$. Второе:

$$B = -A\alpha - \beta = \alpha^2 - \beta$$

и т. п.

Мы примѣнимъ этотъ способъ для разложенія въ рядъ функціи e^{-x} изъ известнаго намъ ряда для e^x .

Мы будемъ имѣть:

$$1 \infty \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4).$$

Значить:

$$A + 1 = 0,$$

$$B + A + \frac{1}{2} = 0,$$

$$C + B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{6} = 0,$$

$$D + C + \frac{1}{2}B + \frac{1}{6}A + \frac{1}{24} = 0,$$

откуда подъ рядъ:

$$A = -1, \quad B = -A - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad C = -B - \frac{1}{2}A - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$D = -C - \frac{1}{2}B - \frac{1}{6}A - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}.$$

Значить:

$$e^{-x} \infty 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

Такъ, какъ оно и должно быть.

§ 49. Обращеніе приближенныхъ формулъ.

Пусть y опредѣленъ приближенно нѣкоторой раціональной функціей отъ x , причемъ въ этой функціи не встрѣчается свободнаго члена, но зато имѣется членъ съ первой степенью x . Въ этомъ случаѣ и x можетъ быть приближенно выраженъ нѣкоторой раціональной функціей y .

Нисколько не нарушая общности нашихъ разсужденій, мы можемъ предположить, что въ выраженіи для y коэффициентъ при первой степени x равенъ 1. Ибо, если бы это не имѣло мѣста, то мы всегда могли бы достигъ этого, вводя на мѣсто старой переменнѣй новую переменнѣй, кратную первой. Тогда, при достаточно малыхъ x и y , обѣ эти величины суть величины одного и того же порядка; такъ что если мы не будемъ принимать во вниманіе нѣкоторыхъ степеней x , то намъ придется не принимать во вниманіе и соответственныхъ степеней y . Поэтому мы тутъ можемъ пользоваться способомъ неопредѣленныхъ коэффициентовъ.

Пусть дано, на примѣръ:

$$y = x + \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4 + (x^5) \dots \dots \dots (1)$$

Тогда положимъ:

$$x = y + Ay^2 + By^3 + Cy^4 + (y^5) \dots \dots \dots (2)$$

Это дастъ намъ:

$$x^2 = y^2 + 2Ay^3 + (A^2 + 2B) y^4 + (y^5)$$

$$x^3 = y^3 + 3Ay^4 + (y^5)$$

$$x^4 = y^4 + (y^5)$$

$$(x^5) = (y^5);$$

Слѣдовательно:

$$y = y + (A + \alpha) y^2 + (B + 2\alpha A + \beta) y^3 + \\ + [C + \alpha (A^2 + 2B) + 3\beta A + \gamma] y^4 + (y^5)$$

но, если это равенство должно имѣть мѣсто, то должны имѣть мѣсто и слѣдующія равенства:

$$A + \alpha = 0 \quad B + 2\alpha A + \beta = 0 \quad C + \alpha (A^2 + 2B) + 3\beta A + \gamma = 0,$$

т. е.

$$A = -\alpha \quad B = 2\alpha^2 - \beta \quad C = -5\alpha^3 + 5\alpha\beta - \gamma$$

И искомая формула будетъ:

$$x = y - \alpha y^2 + (2\alpha^2 - \beta) y^3 - (5\alpha^3 - 5\alpha\beta + \gamma) y^4 + (y^5)$$

Мы бы могли и обратно: выразить цѣлыя раціональныя степени y черезъ раціональныя функціи x (при помощи равенства 1) и эти величины подставить въ равенство (2).

Для вычисленія во многихъ случаяхъ удобенъ еще другой способъ, который мы покажемъ на томъ же примѣрѣ.

Въ первомъ приближеніи мы совсѣмъ можемъ пренебречь величиной x^2 и положить

$$x \approx y \dots \dots \dots (3)$$

Мы получимъ второе приближеніе, если мы малую величину x^2 не совсѣмъ откинемъ, а замѣнимъ ее первымъ приближеніемъ (3); а x^3 отбросимъ вовсе; это дастъ намъ тогда (на осн. рав. 1):

$$x \approx y - \alpha y^2.$$

Третье приближеніе мы получимъ, если мы для x^2 примемъ второе приближеніе, а для x^3 — первое; x^4 откинемъ вовсе; мы будемъ имѣть (на осн. рав. 1):

$$x \approx y - \alpha (y - \alpha y^2)^2 - \beta y^3 \approx y - \alpha y^2 + (2\alpha^2 - \beta) y^3.$$

Такимъ образомъ шагъ за шагомъ мы можемъ продолжать дальше;

слѣдующій шагъ въ нашемъ развитіи дастъ намъ:

$$\begin{aligned} x \approx y - \alpha (y - \alpha y^2 + (2\alpha^2 - \beta) y^3)^2 - \beta (y - \alpha y^2)^3 - \gamma y^4 \approx \\ \approx y - \alpha y^2 + (2\alpha^2 - \beta) y^3 - (5\alpha^3 - 5\alpha\beta + \gamma) y^4. \end{aligned}$$

То есть какъ разъ предыдущій результатъ.

Мы видимъ, что этотъ способъ очень удобенъ въ тѣхъ случаяхъ, когда намъ нужно только небольшое количество членовъ; съ каждымъ послѣдующимъ шагомъ этотъ способъ становится болѣе затруднительнымъ.

Такъ же можно поступать, между прочимъ, и въ томъ случаѣ, когда между y -комъ и x -сомъ дано уравненіе вида:

$$0 = x + ay + bx^2 + cxy + dy^2 + ex^3 + \dots,$$

не содержащее члена, свободнаго отъ x и y , но содержащее членъ съ x -сомъ въ первой степени, свободный отъ y .

§ 50. Обобщенная теорема о среднемъ значеніи и остаточный членъ формулы Маклорена.

Въ послѣднихъ §§ мы мало заботились о томъ, какъ велика будетъ ошибка, которую мы дѣлаемъ, замѣняя нашу функцію одной изъ нашихъ приближенныхъ формулъ.

Оцѣнка этой погрѣшности или указаніе числа, больше котораго не можетъ сдѣлаться ошибка, было бы дѣломъ въ высшей степени желательнымъ во всѣхъ областяхъ анализа.

Но эта задача часто рѣшается очень трудно.

Мы поэтому удовольствуемся только тѣмъ, что на нѣкоторыхъ простѣйшихъ примѣрахъ покажемъ, какъ на самомъ дѣлѣ дѣлается эта оцѣнка погрѣшности.

Для этой цѣли мы сначала дадимъ обобщеніе теоремы о среднемъ значеніи. Это обобщеніе касается двухъ функцій $F(x)$ и $G(x)$, которыя обѣ при $x=0$ принимаютъ значеніе 0 и кромѣ того обѣ въ промежуткѣ отъ $x=0$ до $x=a$ вмѣстѣ со своими первыми производными непрерывны.

Составимъ изъ этихъ функцій новую функцію

$$H(x) = F(x) G(a) - F(a) G(x) \dots \dots \dots (1)$$

Эта функція не только для $x=0$ обращается въ нуль, но и для значенія $x=a$, т. е. $H(0) = 0$ и $H(a) = 0$; значитъ, существуетъ, по теоремѣ Ролля, между 0 и величиной a , по крайней мѣрѣ одно число b , для котораго

$$H'(b) = 0.$$

Значитъ:

$$F'(b) G(a) - F(a) G'(b) = 0,$$

откуда

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F'(b)}{G'(b)} \dots \dots \dots (2)$$

Этотъ результатъ имѣетъ очень простое геометрическое значеніе. Его можно геометрически выразить такъ: если обѣ кривыя $y = G(a) F(x)$ и $y = F(a) G(x)$ пересѣкаются при $x = 0$ и $x = a$, то въ этомъ промежуткѣ одна кривая не можетъ все время подыматься круче другой, но должно существовать между 0 и a хотя бы одно мѣсто b , гдѣ обѣ кривыя одинаково круто направлены.

Если обѣ функціи $F'(x)$ и $G'(x)$ при $x = 0$ обѣ обращаются въ нуль и если, кромѣ того, $F''(x)$ и $G''(x)$ непрерывны для промежутка $0 \dots a$, а слѣдовательно, въ частности и для промежутка $0 \dots b$, то мы можемъ по отношенію къ первымъ производнымъ примѣнить только что установленную теорему и написать:

$$\frac{F'(b)}{G'(b)} = \frac{F''(c)}{G''(c)} \dots \dots \dots (3)$$

гдѣ число c заключается между $0 \dots b$.

Если мы этотъ результатъ свяжемъ съ раньше полученнымъ и притомъ замѣтимъ, что величина, лежащая между 0 и b необходимо будетъ лежать и между 0 и a , то мы получимъ слѣдующую теорему: Если функціи $F(x)$ и $G(x)$ въ промежуткѣ $0 \dots a$ вмѣстѣ со своими первыми и вторыми производными непрерывны и если кромѣ того $F(0) = 0$ и $G(0) = 0$ и $F'(0) = 0$ и $G'(0) = 0$, то между 0 и a навѣрное находится по крайней мѣрѣ одно число c , для котораго имѣетъ мѣсто равенство:

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F''(c)}{G''(c)} \dots \dots \dots (4)$$

Если и дальнѣйшія производныя обѣихъ функцій при $x = 0$ обращаются въ нуль, то подобное заключеніе можно повторить нѣсколько разъ и мы придемъ къ слѣдующей общей теоремѣ: Если двѣ функціи $F(x)$ и $G(x)$ въ промежуткѣ $0 \dots a$ вмѣстѣ со своими $(n + 1)$ производными непрерывны, а кромѣ того при $x = 0$ какъ самыя функціи $F(x)$ и $G(x)$, такъ и всѣ ихъ производныя, до n -тыхъ производныхъ включительно, равны нулю, то между $0 \dots a$ навѣрное есть нѣкоторое число ξ , — такого рода, что имѣетъ мѣсто равенство:

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} \dots \dots \dots (5)$$

Частный видъ этой теоремы мы можемъ получить, полагая полагая функцію $G(x)$ равной x^{n+1} , которая удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ,

наложеннымъ въ общей теоремѣ на $G(x)$.

Тогда

$$G^{(n+1)}(\xi) = (n+1)! \dots \dots \dots (6)$$

совершенно независимо отъ числа ξ ; мы будемъ имѣть въ этомъ случаѣ теорему:

Если $F(x)$ для промежутка отъ $x=0$ до $x=a$ съ ея $(n+1)$ производными непрерывна и если при $x=0$ не только $F(x)$, но и всѣ ея производныя $F^{(k)}(x)$, гдѣ $k=1, 2 \dots n$, обращаются въ нуль, то между 0 и a существуетъ по крайней мѣрѣ одно число ξ , для котораго имѣетъ мѣсто равенство:

$$F(a) = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\xi) \dots \dots \dots (7)$$

Эту теорему приложимъ теперь къ разности:

$$F(x) = f(x) - g(x) \dots \dots \dots (8)$$

между нѣкоторой функцией $f(x)$ и суммой $(n+1)$ первыхъ членовъ ея разложенія (по стокъ Маклорена), которую мы обозначимъ черезъ $g(x)$, ибо эта разность удовлетворяетъ требованіямъ непрерывности, если только $f(x)$ имъ удовлетворяетъ, кромѣ того на основаніи § 42:

$$f(0) = g(0) \quad f'(0) = g'(0) \quad f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0),$$

а слѣдовательно и

$$F(0) = 0 \quad F'(0) = 0 \quad F^{(n)}(0) = 0$$

Наконецъ

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),$$

такъ какъ $g(x)$ есть функция n -той степени, $(n+1)$ производная которой уже обращается въ нуль.

Отсюда слѣдуетъ:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

или

$$f(x) - g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

откуда

$$f(x) = g(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

гдѣ ξ лежитъ между 0 и x .

Значитъ: если нѣкоторая функция въ промежуткѣ отъ 0 до нѣкотораго x сама непрерывна и непрерывна ея $(n+1)$ производная, то между 0 и x существуетъ хотя бы одно зна-

ченіе ξ , для котораго тождественно имѣетъ мѣсто равенство:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Тутъ мы, на самомъ дѣлѣ, имѣемъ желаемую возможность оцѣнить ту ошибку, которую мы дѣлаемъ замѣняя данную функцію $(n+1)$ членомъ ея разложенія въ рядъ по формулѣ Маклорена.

Наибольшее значеніе этой ошибки равно произведенію величины

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

на наибольшее значеніе, которое можетъ принять $(n+1)$ -ая производная функціи $f(x)$ для промежутка значеній $0 \dots x$.

§ 51. ПРИЛОЖЕНІЯ ПРЕДЫДУЩАГО РЕЗУЛЬТАТА КЪ ПРИМЪРАМЪ § 44.

Для биноміального разложенія $(1+x)^m$ мы получимъ, если введемъ обозначеніе:

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \binom{m}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{m-n-1} \dots \dots \dots (2)$$

Для показательной функціи:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^\xi \dots \dots \dots (3)$$

и наконецъ для логариѳмическаго ряда

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \pm \frac{1}{(n+1)} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \dots \dots \dots (4)$$

Съ помощью этихъ формулъ можно убѣдиться, что въ вычисленіяхъ § 44 пропущенные члены на самомъ дѣлѣ не оказывали вліянія на результатъ при поставленномъ тамъ условіи на степень точности.

Но тутъ возникаетъ новый вопросъ, можемъ-ли мы, сдѣлавши n достаточно большимъ, сдѣлать ошибку сколь угодно малой.

На этотъ вопросъ очень легко дать отвѣтъ для показательной функціи на основаніи формулы (3): ибо какъ бы великъ ни былъ x , мы всегда можемъ взять n столь большимъ, чтобы величина

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

была бы меньше любой напередъ заданной величины. Ибо пусть g будетъ наибольшее цѣлое число, которое заключается въ x .

Тогда мы можемъ представить

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

въ видѣ произведенія такихъ двухъ множителей:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^g}{g!} \left(\frac{x}{g+1} \cdot \frac{x}{g+2} \cdots \frac{x}{n+1} \right)$$

причемъ первый множитель имѣетъ независимое отъ n вполне определенное значеніе; что же касается до второго множителя, то въ этомъ произведеніи каждый послѣдующій множитель меньше своего предыдущаго; значить, произведеніе всѣхъ этихъ множителей меньше перваго изъ нихъ, взятаго въ степени, равной числу этихъ множителей. А такъ какъ этотъ послѣдній меньше единицы, то мы для любого напередъ заданнаго числа ϵ (столь угодно малаго) всегда можемъ такъ подобрать число n , что не только все произведеніе, но и то, которое получится отъ умноженія его на нѣкотораго постояннаго, независимаго отъ n множителя, — будетъ меньше ϵ . Конечно, при этомъ при данномъ значеніи x , n намъ придется брать тѣмъ болѣе большимъ, чѣмъ больше число x ; но опредѣлить n можно для всякаго x .

Болѣе сложнымъ является соотвѣтственное изслѣдованіе для обѣихъ остальныхъ формулъ § 44.

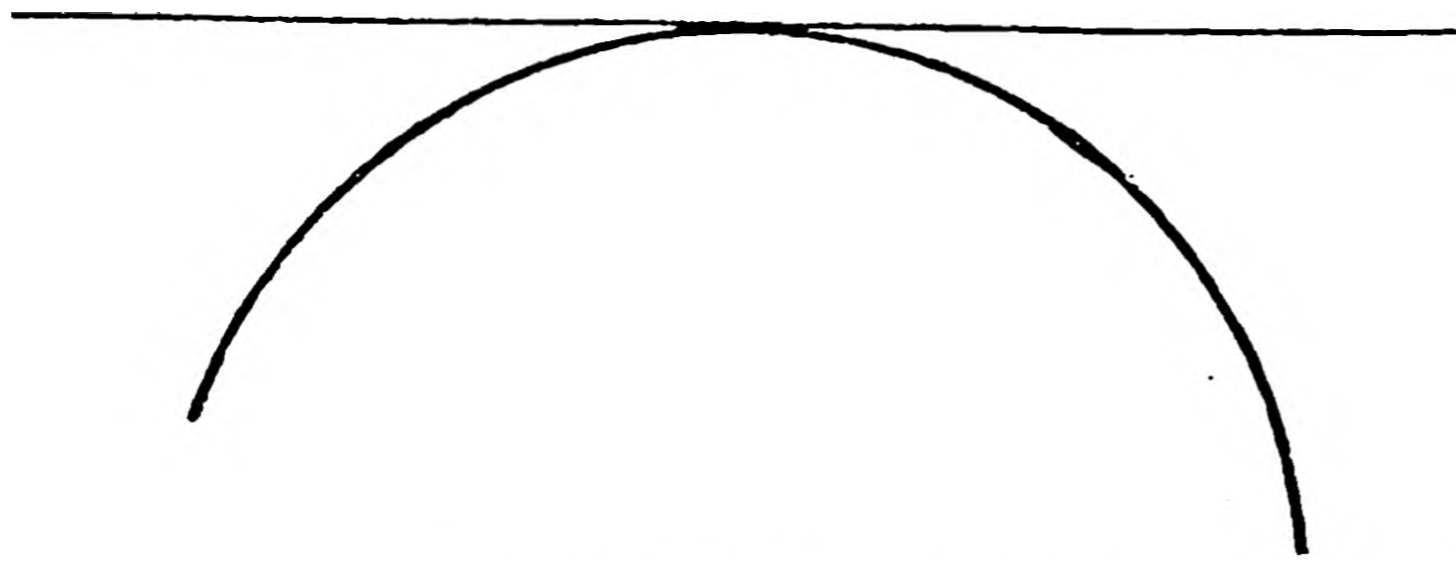
Мы примемъ безъ доказательства, что для тѣхъ значеній x , которыя меньше 1, можно, соотвѣтственнымъ выборомъ значенія n , сдѣлать ошибку меньше любой напередъ заданной величины ϵ ; но мы не можемъ этого сдѣлать для тѣхъ значеній x , которыя больше 1. Что касается значеній $x = 1$ и $x = -1$, то сужденіе о возможности или невозможности въ этомъ случаѣ опредѣлить соотвѣтственное значеніе числа n зависитъ еще отъ самого числа n .

§ 52. Maxima и minima. Простѣйшіе случаи.

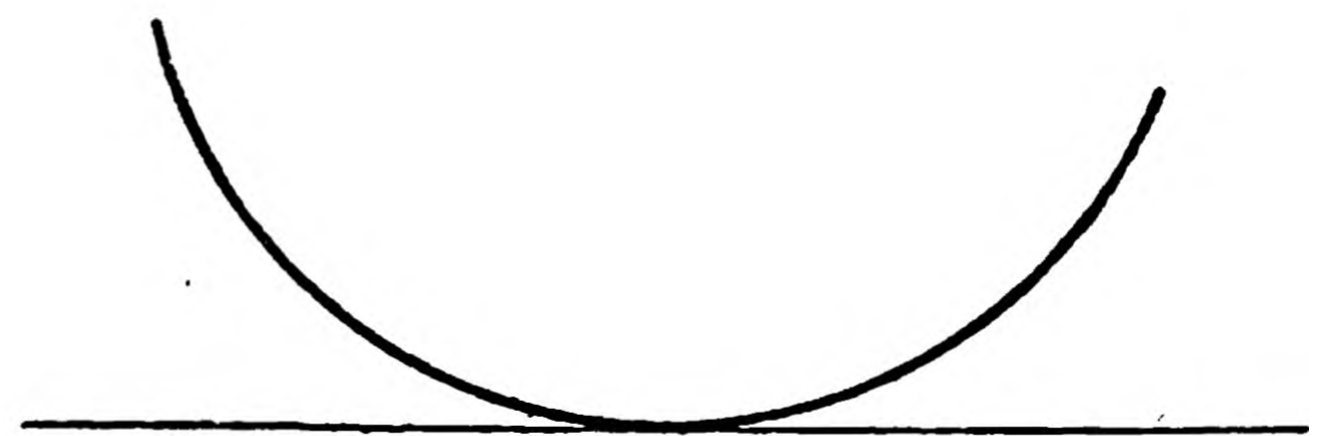
Мы видѣли уже раньше, что при нашемъ выборѣ координатной системы, при которомъ ось x -совъ положительна направо, а ось y -ковъ — вверхъ, кривая, заданная ур-ніемъ $y = f(x)$, подымается слѣва направо для тѣхъ значеній x , для которыхъ $f'(x)$ положительна. И наоборотъ, спускается слѣва направо для тѣхъ значеній x , для которыхъ $f'(x)$ отрицательна.

Теперь мы обратимъ наше вниманіе на тѣ точки, гдѣ кривая переходитъ отъ подъема къ спуску или отъ спуска къ подъему, или, что то же самое, на тѣ точки, гдѣ функція переходитъ отъ возрастанія къ убыванію или отъ убыванія къ возрастанію.

Первыя изъ упомянутыхъ точекъ мы назовемъ точками махіма, вторыя — точками мініма. Слѣдовательно махімумъ есть такое значеніе функціи, которое больше сосѣднихъ значеній функціи, а мінімумъ такое значеніе, которое меньше своихъ сосѣднихъ значеній. Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что махімумъ или мінімумъ не можетъ имѣть мѣста для тѣхъ значеній x , для которыхъ $f'(x)$ положительна или отрицательна, иначе говоря: 1. Ма-



Черт. 27 Махімум.



Черт. 28 Мінімум.

хімумъ или мінімумъ можетъ имѣть мѣсто (пока $f'(x)$ сохраняетъ конечныя значенія) только для такого значенія $x = x_0$, для котораго

$$f'(x_0) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Но не всякое такое значеніе x даетъ намъ непремѣнно махімумъ или мінімумъ *). Если долженъ получиться махімумъ, то для этого недостаточно, чтобы въ данномъ мѣстѣ $f'(x)$ обращалась въ нуль. Для этого еще необходимо, чтобы до этого мѣста $f'(x)$ была положительна (признакъ возрастанія функціи), а потомъ стала отрицательной (признакъ убыванія функціи).

Если же она отъ положительныхъ значеній переходитъ къ отрицательнымъ черезъ нуль, то она, значить, съ этого мѣста начинаетъ убывать, а значить, въ точкѣ $x = x_0$ ея производная должна быть отрицательной; но производная первой производной есть вторая производная нашей функціи $f'(x)$; слѣдовательно, мы имѣемъ:

2. Если для нѣкотораго значенія $x = x_0$ мы имѣемъ одновременно

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad f''(x_0) < 0 \dots \dots \dots (2)$$

то для этого значенія $x = x_0$ мы имѣемъ махімумъ функціи $f(x)$.

Если же для даннаго значенія x вторая производная положительна, то значить — съ этого мѣста первая производная начинаетъ возрастать. Если же она, по условію, для этого значенія равна нулю, а затѣмъ начинаетъ возрастать, то она должна была раньше быть отрицательной; значить, сама функція сначала убывала, а затѣмъ

*) Условіе необходимое, но не достаточное.

начала возрастать; но это есть характерная особенность *minimum'a*; слѣдовательно мы имѣемъ:

3. Если для нѣкотораго значенія $x = x_0$ мы имѣемъ одновременно

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad f''(x_0) > 0 \dots \dots \dots (3)$$

то для этого значенія $x = x_0$ мы имѣемъ *minimum* функции $f(x)$.

Значить, для того, чтобы опредѣлить *maximum* *minimum* предложенной функции $f(x)$, намъ нужно раньше всего рѣшить ур-нiе $f'(x) = 0$ относительно x ; и затѣмъ для каждаго рѣшенія этого уравненія изслѣдовать знакъ $f''(x)$. Тѣ изъ корней, которые дадутъ отрицательныя значенія второй производной, соотвѣтствуютъ *maximum'амъ* функции; тѣ же изъ корней, которые дадутъ положительныя значенія второй производной, будутъ соотвѣтствовать *minimum'амъ* функции.

Возьмемъ простой примѣръ и опредѣлимъ *maximum*, *minimum* функции:

$$f(x) = x(a - x) = ax - x^2 \dots \dots \dots (4)$$

Тутъ $f'(x) = a - 2x$; значить мы будемъ имѣть $f'(x_0) = 0$, если положить $x_0 = \frac{a}{2}$.

Далѣе вторая производная $f''(x) = -2$, причемъ это значеніе даже вовсе отъ x не зависитъ. Значить, вторая производная для всякаго значенія x , а въ частности и для $x = \frac{a}{2}$ есть число отрицательное. Мы имѣемъ, значить, для значенія $x = \frac{a}{2}$ *maximum* функции; значеніе этого *maximum'a* будетъ:

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}.$$

Надо отличать задачу отысканія *maximum'a* и *minimum'a* функции отъ вопроса отысканія наибольшаго или наименьшаго значенія, которая можетъ получить эта функция. Если $f(x)$ есть вполне опредѣленная функция для всякаго значенія x и если она имѣетъ непрерывную производную, то конечно, послѣдній вопросъ сведется на первый. Ибо величина, которая больше всѣхъ возможныхъ значеній функции, будетъ, конечно, больше своихъ сосѣднихъ значеній, т. е. будетъ значеніемъ *maximum*; значить, наибольшее значеніе функции нужно искать среди всѣхъ *maximum'овъ* функции, выбирая изъ нихъ наибольшій. Значить, все дѣло сводится къ тому, чтобы найти наибольшій изъ всѣхъ *maximum'овъ* функции.

То же относится и къ наименьшему значенію функции.

Совсѣмъ иначе обстоитъ дѣло, если $f(x)$ есть вполне опредѣленная функция не для всѣхъ возможныхъ значеній x , или, если на не-

зависимую переменную x , по причинамъ геометрическаго или физическаго свойства, наложены нѣкоторыя ограниченія.

Для крайнихъ значеній промежутка, въ которомъ мы можемъ разсматривать независимую переменную, предыдущія заключенія теряютъ смыслъ. Такое крайнее значеніе можетъ дать намъ наибольшее значеніе функціи, если это значеніе больше значеній функціи, соотвѣтствующихъ значеніямъ x , лежащимъ только влѣво отъ разсматриваемаго значенія (а не съ обѣихъ сторонъ, какъ того требуетъ самое опредѣленіе); ибо такъ какъ мы разсматриваемъ крайнее значеніе промежутка, то всѣ значенія x , лежащія вправо отъ разсматриваемаго, въ расчетъ не идутъ. Для такихъ исключительныхъ случаевъ можно было бы дать общія правила; но проще въ этихъ случаяхъ просто посмотрѣть, не будутъ-ли крайнія значенія функціи больше всѣхъ максимум'овъ или меньше всѣхъ минимум'овъ.

Пусть, на примѣръ, требуется изъ всѣхъ прямоугольниковъ, имѣющихъ периметръ равный $2a$, найти такой, который имѣетъ наибольшую площадь. За независимую переменную мы примемъ одну изъ сторонъ искомаго прямоугольника; тогда другая сторона будетъ $(a-x)$, а искомая площадь будетъ:

$$f(x) = (a - x)x,$$

т. е. функція, ранѣе нами разобранная.

Геометрически допустимыя границы для переменной независимой суть $0 \dots a$.

Функція для этихъ крайнихъ значеній промежутка обращается въ нуль, ибо

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad f(a) = 0.$$

Значитъ имѣетъ значенія меньшія, чѣмъ найденный максимум функціи. Тутъ, значитъ, дѣйствительно, максимум функціи совпадаетъ съ наибольшимъ значеніемъ функціи, т. е. съ наибольшею изъ площадей, которую можетъ имѣть прямоугольникъ съ периметромъ $2a$. Такъ какъ геометрическія соображенія указываютъ намъ, что, по смыслу задачи, долженъ существовать максимум и такъ какъ, съ другой стороны, мы нашли только одно значеніе x , для котораго можетъ получиться максимум или минимум, то въ настоящемъ случаѣ это, очевидно, и есть максимум. и мы могли бы въ этомъ случаѣ не опредѣлять знака второй производной.

Мы могли бы сдѣлать заключеніе о правильности настоящаго результата и безъ помощи дифференціальнаго исчисленія, ибо мы имѣемъ на самомъ дѣлѣ:

$$\frac{a^2}{4} - (ax - x^2) = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

т. е. величина положительная для всѣхъ значеній x , кромѣ $x = \frac{a}{2}$.
Значить, дѣйствительно, $\frac{a^2}{4}$ больше всѣхъ другихъ значеній функціи.

§ 53. Исключительные случаи.

Изслѣдованія предыдущаго § не коснулись еще случая, когда одновременно

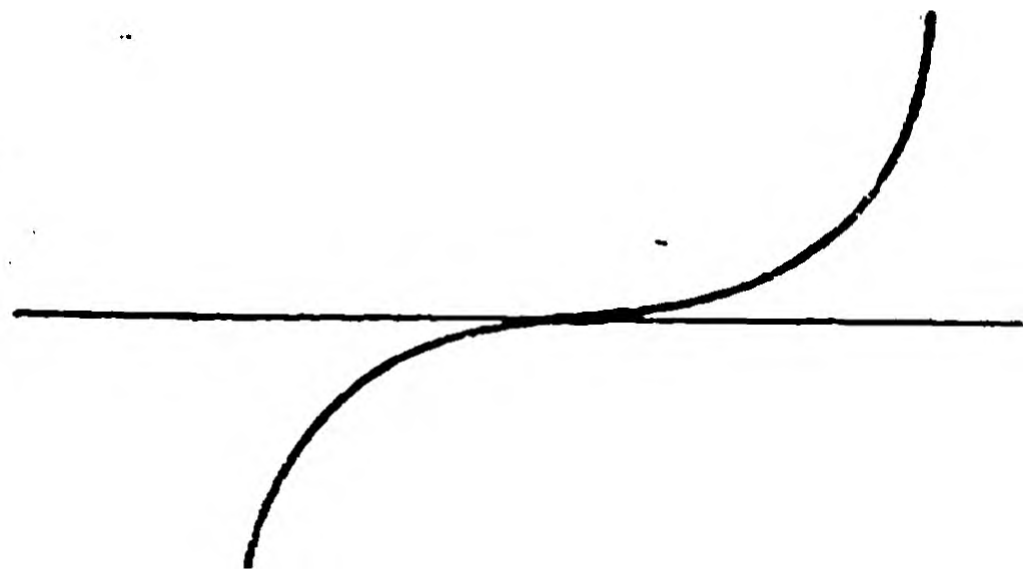
$$f'(x_0) = 0, \quad \text{и} \quad f''(x_0) = 0, \quad \dots \dots \dots (1)$$

Въ этомъ случаѣ мы должны сдѣлать еще одинъ шагъ дальше и составить $f'''(x)$.

Тутъ могутъ представиться слѣдующія возможности, которыя надо отличать другъ отъ друга:

I. $f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) = 0 \quad f'''(x_0) > 0.$

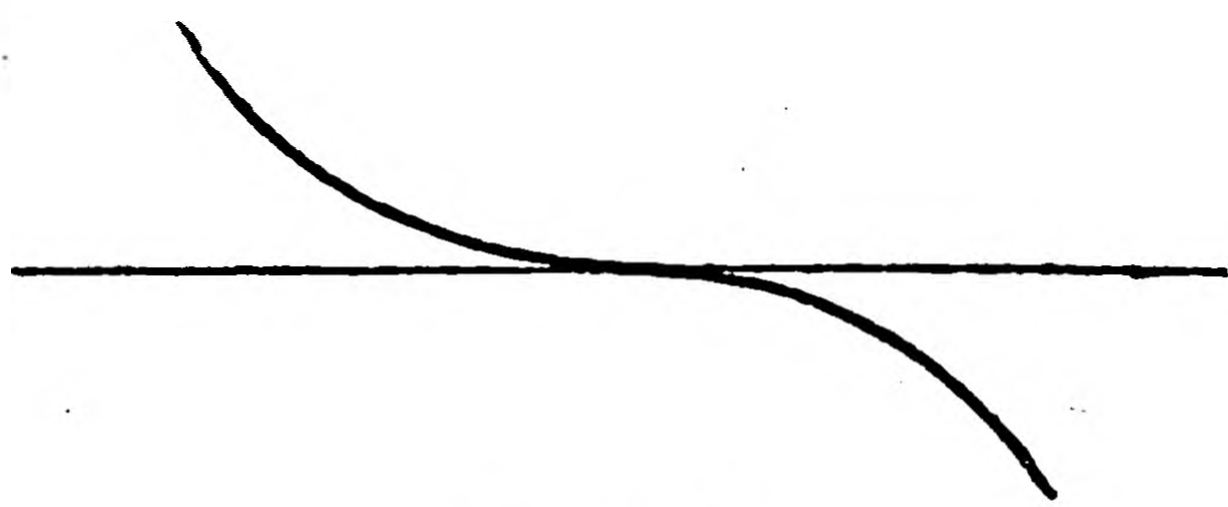
Въ этомъ случаѣ начиная съ $x = x_0$, $f''(x)$ начинаетъ возрастать. Такъ какъ для даннаго значенія $x = x_0$ она была равна нулю, то, значить, она была сначала отрицательной, а затѣмъ становится положительной.



Черт. 29.

Итакъ $f'(x)$ сначала убываетъ, а начиная съ точки $x = x_0$, — начинаетъ возрастать. Такъ какъ эта послѣдняя функція при $x = x_0$ равна нулю, то значить она сначала была положительной, но такъ какъ она при $x = x_0$ начинаетъ возра-

стать, то она и остается положительной; значить, $f'(x)$ все время остается положительной — а это обозначаетъ, что $f(x)$ все время возрастаетъ. Въ этомъ случаѣ при $x = x_0$ $f(x)$ не имѣетъ ни maximum'a, ни minimum'a.



Черт. 30.

II. Такъ же можно обнаружить отсутствіе max. или min. въ случаѣ одновременнаго существованія трехъ условій:

$$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) = 0 \quad f'''(x_0) < 0.$$

Въ предыдущихъ заключеніяхъ пришлось бы только замѣнить слова: «возрастаніе, величина положительная» словами: «убываніе, величина отрицательная».

III. Если для нѣкотораго значенія $x = x_0$ существуютъ равенства:

$$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) = 0 \quad f'''(x_0) = 0,$$

то нужно сдѣлать еще одинъ шагъ впередъ и образовать $f^{IV}(x)$.

Тутъ могутъ имѣть мѣсто слѣдующіе подслучаи:

IIIa. Къ условіямъ (III) присоединяется еще одно:

$$f^{IV}(x_0) > 0.$$

Значитъ $f'''(x_0)$, начиная съ точки $x = x_0$, начинаетъ возрастать. Такъ какъ при $x = x_0$ $f'''(x_0) = 0$, то это обозначаетъ, что $f'''(x)$ была сначала отрицательной, потомъ становится положительной; значитъ $f''(x)$ сначала убываетъ, а, начиная съ точки $x = x_0$, начинаетъ возрастать. Следовательно $f''(x)$ (такъ какъ $f''(x_0) = 0$), была сначала положительной и остается положительной. Значитъ, $f'(x)$ возрастаетъ, какъ до точки $x = x_0$, такъ и послѣ.

Но такъ какъ $f'(x_0) = 0$, то это обозначаетъ, что $f'(x)$ была сначала отрицательной, а потомъ становится положительной. Функция $f(x)$ въ этомъ случаѣ при точкѣ $x = x_0$ переходитъ отъ убыванія къ возрастанію, т. е. при точкѣ $x = x_0$ мы имѣемъ минимумъ функции.

IIIb. Такимъ же образомъ мы покажемъ, что, если наряду съ условіями (III) имѣетъ мѣсто условіе:

$$f^{IV}(x_0) < 0,$$

то $f(x)$ при $x = x_0$ имѣетъ максимумъ.

IIIc. Если же одновременно выполнены четыре условія:

$$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) = 0 \quad f'''(x_0) = 0 \quad f^{IV}(x_0) = 0,$$

то нужно сдѣлать еще шагъ дальше и изслѣдовать функцию $f^V(x)$ и т. д.

Ясно, что при каждомъ новомъ случаѣ намъ приходится разбивать вопросъ на нѣсколько подслучаевъ; и при этомъ среди этихъ подслучаевъ постоянно будутъ встрѣчаться такіе (ср. IIIc), которые будутъ требовать дальнѣйшаго развитія.

Важно еще замѣтить, что если для нѣкотораго значенія $x = x_0$

$$f''(x_0) = 0$$

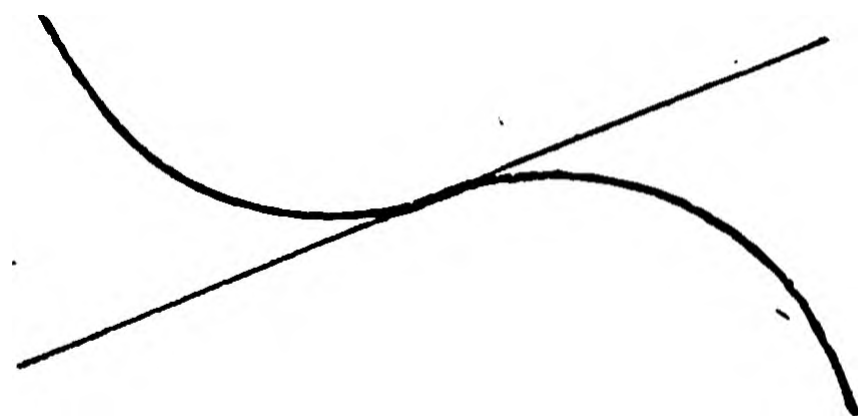
(даже, если ничего неизвѣстно про значеніе $f'(x_0)$) то въ этой точкѣ функция $f'(x)$ достигаетъ своего максимум'а или минимум'а. Въ такой точкѣ кривая наклонена къ оси x -совъ больше или меньше, чѣмъ до этой точки и послѣ нея.

Такая точка носитъ названіе точки изгиба (перегиба).

§ 54. Неопределенные формы алгебраических функций.

Иногда случается, что нѣкоторое выраженіе, вполне определенное для всѣхъ значеній x , или, по крайней мѣрѣ, для определеннаго промежутка значеній x , для нѣкоторыхъ отдѣльныхъ значеній этого промежутка, перестаетъ быть определеннымъ.

Самымъ важнымъ является тутъ случай, когда мы имѣемъ дѣло съ алгебраическою дробью, числитель и знаменатель которой для нѣкотораго значенія x одновременно обращаются въ нуль.



Черт. 31.

Если мы имѣемъ дѣло съ рациональною дробью, то такое обстоятельство всегда можно легко устранить; ибо если нѣкоторая цѣлая рациональная функція при нѣкоторомъ значеніи $x = x_0$ обращается въ нуль, то на основаніи теоремы § 34, она должна дѣлиться на $x - x_0$. Значитъ, если числитель и знаменатель нѣкоторой рациональной дроби при $x = x_0$ одновременно обращаются въ нуль, то оба должны содержать множителя $(x - x_0)$, на который и можно сократить дробь. Если и послѣ такого сокращенія числитель и знаменатель снова обращаются въ нуль, то сокращеніе можно повторить.

Путемъ повторныхъ сокращеній мы дойдемъ, наконецъ, до того, что числитель и знаменатель не будутъ оба обращаться въ нуль при $x = x_0$ одновременно.

Если теперь числитель и знаменатель имѣютъ значенія, отличныя отъ нуля, то дробь будетъ имѣть нѣкоторое вполне определенное и отъ нуля отличное значеніе. Если числитель равенъ нулю, а знаменатель нулю не равенъ, то величина дроби будетъ нуль. Наконецъ, когда знаменатель равенъ нулю, а числитель не равенъ нулю, то, на основаніи введеннаго въ § 20 способа выражаться, мы скажемъ, что дробь при $x = x_0$ имѣетъ бесконечно большое значеніе (равна бесконечности).

Болѣе сложнымъ является случай, когда мы имѣемъ дѣло съ иррациональною алгебраическою дробью. Тогда зачастую нельзя произвести сокращенія дроби. Нужно въ этихъ случаяхъ предварительно преобразовать дробь.

Пусть, наприимѣръ, дана дробь:

$$y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \dots \dots \dots (1)$$

которая при $x = 0$ обращается въ выраженіе вида $\frac{0}{0}$.

Тутъ дробь нельзя сразу сократить на x , но мы можемъ удалить знаки радикаловъ изъ числителя (§ 13), умножая и числителя и знаменателя дроби одновременно на

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}.$$

Тогда мы будемъ имѣть:

$$y = \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

или

$$y = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \dots \dots \dots (2)$$

Если мы теперь въ этомъ выраженіи положимъ $x = 0$, то мы

получимъ въ результатѣ 1; такъ что теперь при $x = x_0$ дробь получаетъ совершенно определенное значеніе.

Однако, прежде чѣмъ дѣлать какое-нибудь заключеніе, отдадимъ себѣ отчетъ въ томъ, что мы собственно тутъ сдѣлали.

Мы сначала раздѣлили дробь на $(x - x_0)$, а затѣмъ положили $x = x_0$, т. е. $x - x_0 = 0$. Но развѣ это можно дѣлать? Это вопросъ совершенно родственнѣй тому, съ которымъ мы встрѣтились уже въ § 5.

На него можно подобнымъ же образомъ отвѣтить:

1) Раньше всего мы можемъ сказать: выраженіемъ (1) определена функція не для всѣхъ значеній x въ нѣкоторомъ промежуткѣ (напримѣръ, промежутокъ отъ -1 до $+1$), а для всѣхъ значеній, за исключеніемъ одного, а именно $x = 0$. Значитъ, нѣтъ никакого смысла спрашивать, чему равно это выраженіе при $x = 0$. Мы даже не можемъ утверждать, что выраженіе (2) равно выраженію (1) для всѣхъ значеній x , а только: «для всѣхъ значеній, кромѣ $x = 0$ ».

2) Становясь на точку зрѣнія чистаго анализа, мы можемъ сказать далѣе: именно въ силу того, что выраженіе это не определено у насъ для значенія $x = 0$, мы можемъ совершенно произвольно условиться придавать этому выраженію определенное значеніе для $x = 0$; мы можемъ сказать: нашу функцію мы определяемъ такъ, чтобы при $x \geq 0$ она была равна выраженію (1), а при $x = 0$ она была равна 1.

3) Однако, нужно спросить далѣе, чего, собственно, мы достигаемъ такимъ на первый взглядъ совершенно произвольнымъ условіемъ?

Чѣмъ отличается такъ нами определенная функція отъ всякой другой, которая бы при $x \geq 0$ определялась выраженіемъ (1), но которой бы при $x = 0$ мы приписали то или другое значеніе?

На это мы отвѣтимъ: наше условіе даетъ намъ возможность получить непрерывную функцію.

Значеніе, которое получаетъ выраженіе (2) при $x = 0$ тѣсно примыкаетъ къ тѣмъ значеніямъ, которыя имѣетъ это выраженіе для значеній x , весьма близкихъ къ нулю; такъ что если мы нашей функціи (1) не только для $x \geq 0$, но и для $x = 0$, будемъ приписывать тѣ же значенія, что и выраженію (2), то мы этимъ достигнемъ непрерывнаго (тѣснаго) перехода значеній функціи при переходѣ переменнѣй x черезъ нуль *) Мы можемъ сказать, что значеніе $y = 1$, при $x = 0$, есть именно то значеніе, которое даетъ непрерывный переходъ отъ значеній функціи, соответствующихъ отрицательнымъ x -самъ, къ значеніямъ, соответствующимъ положительнымъ x -самъ. Геометрически

*) Т. е. что значеніе функціи при $x = 0$, будетъ тѣсно примыкать къ тѣмъ значеніямъ, которыя функція будетъ имѣть при весьма малыхъ положительныхъ и весьма малыхъ отрицательныхъ значеніяхъ x .

это представляется такъ: уравненіе (1) опредѣляетъ кривую, которая имѣетъ двѣ вѣтви, одну въ области положительныхъ x -овъ, другую въ области отрицательныхъ x -овъ, причемъ обѣ эти вѣтви приближаются къ оси y -овъ. При этомъ обѣ эти вѣтви безпредѣльно приближаются къ одной и той же точкѣ на оси y -овъ, а именно къ $y = 1$. Такъ что, если эту точку предположить лежащей на обѣихъ вѣтвяхъ, то мы можемъ это точку разсматривать, какъ точку, связывающую обѣ вѣтви, а потому обѣ вѣтви весьма естественно мы будемъ разсматривать, какъ части одной сплошной кривой.

4) Приложенія анализа къ задачамъ требуютъ отъ насъ, чтобы мы имѣли дѣло съ непрерывными функціями. Мы, такимъ образомъ, только идемъ навстрѣчу этимъ требованіямъ.

§ 55. Неопредѣленныя формы трансцендентныхъ функцій.

Если нѣкоторая трансцендентная (не алгебраическая) функція для нѣкотораго опредѣленнаго значенія $x = x_0$ получаетъ видъ $\frac{0}{0}$, то мы простымъ преобразованиемъ, какъ это имѣло мѣсто въ случаѣ алгебраической функціи, часто не въ состояніи рѣшить задачи. Мы должны вернуться къ только что изложеннымъ соображеніямъ и такъ поставить задачу: Мы должны найти такое значеніе функціи, которое бы тѣсно примыкало къ значеніямъ функціи, соответствующимъ значеніямъ x , тѣсно прилегающимъ съ той и другой стороны къ разсматриваемому значенію $x = x_0$.

(Конечно, надо предположить заранѣе, что такое значеніе существуетъ, что далеко не всегда имѣетъ мѣсто въ трансцендентныхъ функціяхъ).

Чтобы рѣшить эту задачу, намъ нужно, такимъ образомъ, знать тѣ значенія функціи, которыя соответствуютъ значеніямъ x , весьма мало отличнымъ отъ значенія $x = x_0$. При опредѣленіи этихъ значеній мы можемъ разность $x - x_0$ считать величиной «малой» въ смыслѣ § 54.

Пусть, на примѣръ, намъ дана дробь

$$y = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{e^x + e^{-x} - 2} \dots \dots \dots (1)$$

Эта дробь при $x = 0$ имѣетъ форму $\frac{0}{0}$.

Мы имѣемъ

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

$$e^{-x} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

Значить:

$$e^x - e^{-x} - 2x \approx \frac{x^3}{3},$$

$$e^x + e^{-x} - 2 \approx x^2,$$

и слѣдовательно

$$y \approx \frac{x}{3} \dots \dots \dots (2)$$

Мы будемъ имѣть желаемый непрерывный переходъ отъ значеній функціи, соотвѣтствующихъ положительнымъ x -самъ къ значеніямъ, соотвѣтствующимъ отрицательнымъ x -самъ, приписывая нашей функціи при $x = 0$ значеніе 0.

Мы можемъ такимъ же образомъ поступать во многихъ случаяхъ, а именно, когда и числитель и знаменатель около даннаго значенія $x = x_0$ могутъ быть приближенно выражены нѣкоторой рациональной функціей (разложены въ рядъ).

Въ другихъ случаяхъ пользуются нѣкоторыми специальными формулами, изъ которыхъ нѣкоторыя мы выведемъ:

1) Если x , принимая положительныя значенія, растетъ безпредѣльно, то и e^x будетъ расти безпредѣльно, ибо изъ ур-нія (2) § 44 слѣдуетъ, что $e^x > 1 + x$. Этотъ результатъ мы выразимъ такъ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty \dots \dots \dots (3)$$

2) Изъ этого далѣе слѣдуетъ:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-z} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^z} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

3) Когда x положительно, то для каждаго цѣлаго положительнаго n :

$$e^x \cdot x^{-n} > \frac{x}{(n + 1)!}$$

Значить, для всякаго такого числа n (да и вообще для всякаго положительнаго n):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cdot x^{-n} = \infty \dots \dots \dots (5)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cdot x^n = 0 \dots \dots \dots (6)$$

4) Если мы въ предыдущихъ равенствахъ напишемъ $-x$, вмѣсто x , то мы получимъ:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \cdot x^{-n} = \pm \infty \dots \dots \dots (7)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot x^n = 0 \dots \dots \dots (8)$$

(Двойной знакъ въ формулѣ (7) соотвѣтствуетъ двумъ случаямъ:

четному и нечетному n ; въ первомъ случаѣ нужно взять знакъ $+$, во второмъ случаѣ знакъ $-$).

5) Если мы въ формулахъ (6) и (8) замѣнимъ e^x величиной x^v , значить, величину x величиной $v \log x$, и положимъ $n = 1$ и затѣмъ упустимъ множитель v , то мы получимъ еще:

$$\lim_{x=0} (x^v \log x) = 0 \dots \dots \dots (9)$$

и

$$\lim_{x=\infty} (x^{-v} \log x) = 0 \dots \dots \dots (10)$$

ГЛАВА VII.

Интерполированіе.

§ 56. Интерполированіе посредствомъ цѣлой рациональной функціи.

Естественно-научныя изслѣдованія часто приводятъ къ слѣдующей задачѣ. Изъ наблюдений извѣстно нѣсколько значеній y , соответствующихъ даннымъ значеніямъ независимой переменнѣй x ; требуется найти такое уравненіе:

$$y = f(x),$$

чтобы при подстановкѣ данныхъ x наблюденныя значенія y получались изъ этого уравненія. Если x и y считать декартовыми координатами точки, взятой на плоскости, то этой задачѣ соответствуетъ такая геометрическая: построить кривую, проходящую черезъ данныя точки. При такой формулировкѣ сразу обнаруживается, что задача далеко не опредѣленная: черезъ данныя точки можно провести не одну, а произвольное число кривыхъ; значить, безчисленное множество функцій даютъ при данныхъ значеніяхъ x требуемыя значенія y .

Задача дѣлается опредѣленной, если потребовать, чтобы y было выражено черезъ x въ видѣ функціи опредѣленнаго класса, чтобы это выраженіе имѣло заданный видъ. Въ этомъ отношеніи наше вниманіе прежде всего останавливается на цѣлыхъ рациональныхъ функціяхъ. Итакъ, мы хотимъ представить данныя наблюдений въ видѣ цѣлой рациональной функціи отъ x :

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots,$$

т. е. такъ выбрать коэффициенты a, b, c, \dots , чтобы эта функція при данныхъ значеніяхъ x давала требуемыя значенія y . Это равносильно требованію подобрать коэффициенты такъ, чтобы были удо-

влетворены равенства:

$$\begin{aligned} a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 + \dots &= y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 + \dots &= y_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a + bx_n + cx_n^2 + dx_n^3 + \dots &= y_n. \end{aligned}$$

(Въ этихъ равенствахъ въ противоположность обычнымъ обозначеніямъ неизвѣстныя оказались обозначенными первыми буквами алфавита, а извѣстныя—последними).

Если число коэффициентовъ, написанныхъ въ этой формулѣ, меньше числа наблюдений, то эти равенства будутъ, по крайней мѣрѣ въ общемъ случаѣ, противорѣчить другъ другу; нельзя подобрать такихъ значеній для коэффициентовъ, чтобы они удовлетворяли всѣмъ даннымъ наблюдений; слѣдовательно, нельзя выразить всѣхъ наблюдений формулой принятаго вида. Если бы въ частномъ случаѣ это оказалось возможнымъ, то такое обстоятельство давало бы основаніе предположить, что мы имѣемъ дѣло уже не просто съ формулой интерполированія, но что найденъ нѣкоторый законъ природы.

Если число коэффициентовъ какъ разъ равно числу наблюдений, то можно всегда рѣшить уравненія относительно этихъ коэффициентовъ. Правда, и въ этомъ случаѣ можно было бы опасаться, что нѣкоторыя уравненія будутъ противорѣчить другимъ; это проявилось бы въ томъ, что примѣненіе общихъ формулъ для рѣшенія уравненій потребовало бы дѣленія на нуль. Подробное изслѣдованіе (которому не мѣсто въ этой книгѣ) показываетъ, что въ нашихъ уравненіяхъ этого случиться не можетъ, если только всѣ значенія x , выбранныя нами (а они, конечно, такъ выбраны) различны: при рѣшеніи уравненій приходится дѣлить только на разности между отдѣльными значеніями x или на произведенія такихъ разностей.

Вычисленія оказываются наиболѣе простыми, когда значенія x выбраны равноотстоящими, т. е. когда разности между ближайшими значеніями x равны между собой. Мы сдѣлаемъ одинъ примѣръ такого рода. Положимъ, наблюдаены слѣдующія пары соотвѣтствующихъ значеній x и y :

$x = 1$	$y = 0,6931$
2	1,0986
3	1,3863
4	1,6094
5	1,7917
6	1,9459

Если мы хотимъ представить эти наблюденія формулой вида:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5,$$

то коэффиціенты надо выбрать такими, чтобы были удовлетворены уравненія:

$$\begin{aligned} a + 6b + 36c + 216d + 1296e + 7776f &= 1,9459 \\ a + 5b + 25c + 125d + 625e + 3125f &= 1,7917 \\ a + 4b + 16c + 64d + 256e + 1024f &= 1,6094 \\ a + 3b + 9c + 27d + 81e + 243f &= 1,3863 \\ a + 2b + 4c + 8d + 16e + 32f &= 1,0986 \\ a + b + c + d + e + f &= 0,6931 \end{aligned} \quad (1)$$

Вычитая каждое уравненіе изъ предыдущаго, получаемъ:

$$\begin{aligned} b + 11c + 91d + 671e + 4651f &= 0,1542 \\ b + 9c + 61d + 369e + 2101f &= 0,1823 \\ b + 7c + 37d + 175e + 781f &= 0,2231 \\ b + 5c + 19d + 65e + 211f &= 0,2877 \\ b + 3c + 7d + 15e + 31f &= 0,4055. \end{aligned} \quad (2)$$

Если для исключенія b опять вычтемъ каждое уравненіе изъ предыдущаго, то получимъ:

$$\begin{aligned} 2c + 30d + 302e + 2550f &= -0,0281 \\ 2c + 24d + 194e + 1320f &= -0,0408 \\ 2c + 18d + 110e + 570f &= -0,0646 \\ 2c + 12d + 50e + 180f &= -0,1178. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффиціенты лѣвыхъ частей заключаютъ общій множитель 2; мы можемъ (и это, конечно, слѣдуетъ сдѣлать) раздѣлить каждое изъ уравненій на 2. Получаемъ:

$$\begin{aligned} c + 15d + 151e + 1275f &= -0,01405, \\ c + 12d + 97e + 660f &= -0,02040, \\ c + 9d + 55e + 285f &= -0,03230, \\ c + 6d + 25e + 90f &= -0,05890. \end{aligned} \quad (4)$$

Далѣе посредствомъ новаго вычитанія находимъ:

$$\begin{aligned} 3d + 54e + 615f &= 0,00635, \\ 3d + 42e + 375f &= 0,01190, \\ 3d + 30e + 195f &= 0,02660, \end{aligned} \quad (5)$$

Или, раздѣливъ на 3:

$$\begin{aligned} d + 18e + 205f &= 0,0021167, \\ d + 14e + 125f &= 0,0039667, \\ d + 10e + 65f &= 0,0088667. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы и далѣе имѣть дѣло съ десятичными, числами пришлось остановить дѣленіе на какомъ-нибудь десятичномъ знакѣ. Мы остановились при дѣленіи на седьмомъ знакѣ; ошибка, происшедшая отъ этого, по большей мѣрѣ равна четыремъ единицамъ восьмого знака. Мы помѣтимъ это маленькой четверкой, приписанной въ скобкахъ.

При новомъ вычитаніи ошибки въ худшемъ случаѣ сложатся; слѣдовательно, мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} 4e + 80f &= -0,0018500 \\ 4e + 60f &= -0,0049000 \quad (8) \end{aligned} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (7)$$

что послѣ дѣленія на 4 даетъ:

$$\begin{aligned} e + 20f &= -0,0004625 \\ e + 15f &= -0,0012250 \quad (2) \end{aligned} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (8)$$

При дѣленіи на 4 ошибка, сдѣланная выше, также раздѣляется на 4, поэтому она не превосходитъ теперь двухъ единицъ восьмого десятичнаго знака. Наконецъ получаемъ:

$$5f = 0,0007625 \quad (4) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (9)$$

а слѣдовательно

$$f = 0,0001525 \quad (1)$$

Теперь, когда f вычислено, удобнѣе всего для полученія остальныхъ коэффиціентовъ воспользоваться послѣднимъ равенствомъ каждой системы. Правда, при такомъ методѣ ошибки будутъ довольно быстро накапливаться, но слѣдуетъ замѣтить, что для того, чтобы наши равенства были вѣрны съ опредѣленной степенью точности, нѣтъ надобности находить первые коэффиціенты съ той же точностью, какъ послѣдніе; вѣдь, послѣдніе коэффиціенты, по крайней мѣрѣ въ нѣкоторыхъ изъ этихъ равенствъ, помножены на числа гораздо большія, чѣмъ первые.

Выкладки даютъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned} & - 0,0012250 \quad (2) \\ - 15f &= - 0,0022875 \quad (15) \\ \hline e &= - 0,0035125 \quad (17) \\ & 0,0088667 \quad (4) \\ - 10e &= + 0,0351250 \quad (170) \\ - 65f &= - 0,0099125 \quad (65) \\ \hline d' &= 0,0340792 \quad (239) \\ & - 0,0589000 \\ - 6d &= - 0,2044752 \quad (1434) \\ - 90f &= - 0,0137250 \quad (90) \\ \hline & - 0,2771002 \\ - 25e &= + 0,0878125 \quad (425) \\ \hline c &= - 0,1892877 \quad (1949) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & 0,4055000 & \\
 - 15e = & 0,0526875 & (255) \\
 - 3c = & 0,5678631 & (6847) \\
 \hline
 & 1,0260506 & \\
 & - 0,2432819 & (1504) \\
 \hline
 b = & 0,7827687 & (8606)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 - 7d = & - 0,2385544 & (1473) \\
 - 31f = & - 0,0047275 & (31) \\
 \hline
 & - 0,2432819 & (1504)
 \end{array}$$

наконецъ:

$$\begin{array}{rcl}
 & 0,6931000 & \\
 - e = & 0,0035125 & (17) \\
 - c = & 0,1892877 & (1949) \\
 \hline
 & 0,8859002 & (1966) \\
 & - 0,8170004 & (8846) \\
 \hline
 a = & 0,0688998 & (10812)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 - f = & - 0,0001525 & (1) \\
 - d = & - 0,0340792 & (239) \\
 - b = & - 0,7827687 & (8606) \\
 \hline
 & - 0,8170004 & (8846)
 \end{array}$$

Теперь видно, что въ (6) дѣленіе надо было непремѣнно продолжать до седьмого десятичнаго знака, такъ какъ въ противномъ случаѣ ошибки, которыхъ можно ожидать, были бы еще въ 10 разъ больше. Если подставимъ найденныя значенія коэффициентовъ въ общую формулу и сохранимъ въ каждомъ изъ нихъ одну цифру послѣ послѣдней, за которую можно еще ручаться, то получимъ:

$$\begin{aligned}
 y = & 0,0689 + 0,78277x - 0,18929x^2 + \\
 & + 0,034079x^3 - 0,0035125x^4 + 0,0001525x^5 \dots (11)
 \end{aligned}$$

Если мы хотимъ испытать правильность вычисленій, то стоитъ только провѣрить, удовлетворяется ли одно изъ другихъ уравненій первой системы найденными значеніями. Мы имѣемъ, напримѣръ:

$$\begin{array}{rcl}
 a = & 0,0689 & \\
 5b = & 3,9138 & \\
 25c = & & - 4,7322 \\
 125d = & 4,2599 & \\
 625e = & & - 2,1953 \\
 3125f = & 0,4766 & \\
 \hline
 & 8,7192 & \\
 & - 6,9275 & \\
 \hline
 & 1,7917 &
 \end{array}$$

Получилось полное совпаденіе, хотя и могла получиться разница на нѣсколько единицъ четвертаго десятичнаго знака, потому что нельзя ручаться за вѣрность четвертаго знака въ значеніи, найденномъ для числа a .

Слѣдуетъ рассмотреть еще одно очень существенное обстоятельство. Наблюденія, которыя мы хотѣли выразить нашей формулой,

никогда не бываютъ совершенно точными: невозможно достигнуть того, чтобы значенія x , для которыхъ мы наблюдаемъ соотвѣтствующіе y , отличались другъ отъ друга точно на одинаковыя величины; такъ же, какъ невозможно измѣрить значенія y совершенно точно: въ эти значенія, навѣрно, будутъ включены ошибки наблюденія. Мы можемъ однако не разсматривать вліянія погрѣшностей x -овъ; дѣйствительно, если измѣрено y , соотвѣтствующее не выбранному значенію x , а нѣсколько отличному отъ выбраннаго, то вмѣсто этого можно считать, что приближенно найдено y , соотвѣтствующее выбранному x . Поэтому для цѣлей нашей задачи можно всѣ погрѣшности приписывать значеніямъ y . Возьмемъ опредѣленный случай: допустимъ, на примѣръ, что въ приведенныхъ значеніяхъ y можно полагаться на столько знаковъ, сколько у насъ выписано, т. е. что ошибка не превосходитъ пяти единицъ пятаго десятичнаго знака. Но если вычесть два числа, причемъ каждое дано съ точностью пяти единицъ пятаго знака, то можно поручиться только за то, что ошибка въ разности не превзойдетъ десяти единицъ того же знака; вѣдь, можетъ случиться, что какъ разъ уменьшаемое на пять единицъ слишкомъ велико, а вычитаемое на пять единицъ слишкомъ мало или наоборотъ; въ этомъ случаѣ правыя части равенствъ (2) могутъ заключать ошибку на 10 единицъ, а правыя части равенствъ (3) на 20 единицъ пятаго знака. Дѣленіе на 2 опять уменьшаетъ ошибку вдвое, и поэтому можно утверждать, что правыя части въ равенствахъ (4) приведены съ точностью до 10 единицъ пятаго знака, а въ равенствахъ (5) до 20 единицъ того же знака. При дѣленіи на 3 ошибка вновь уменьшается, но здѣсь присоединяется ошибка, происходящая отъ того, что дѣленіе прерывается; такимъ образомъ можно ручаться за то, что ошибка въ правыхъ частяхъ равенствъ (6) не превосходитъ 6670 единицъ восьмого знака.

Продолжая такимъ же образомъ, заключаемъ, что ошибка, въ худшемъ случаѣ, содержитъ:

въ равенствахъ	(7):	13340,
»	»	(8): 3335,
» равенствѣ	(9):	6670,

и наконецъ, въ значеніи, приведенномъ для f : 1334 единицы восьмого знака послѣ запятой.

Если идти такимъ путемъ, то можно было бы прійти къ заключенію, что пока дойдемъ до первыхъ коэффиціентовъ ошибки могутъ накопиться такъ значительно, что относительно коэффиціента a , пожалуй, нельзя будетъ даже сказать, положителенъ ли онъ или отрицателенъ. Въ дѣйствительности, дѣло ужъ не такъ плохо: болѣе точ-

ное изслѣдованіе обнаруживаетъ, что при вычисленіи остальныхъ коэффициентовъ по найденному f , ошибки никогда не могутъ всѣ складываться между собой. Мы можемъ судить о точности вычисленія, если возьмемъ самый неблагоприятный случай, а именно, что всѣ значенія y заключаютъ ошибку равную половинѣ единицы четвертаго знака и притомъ попеременно слишкомъ велики и слишкомъ малы; пусть, на примѣръ, истинныя значенія y не тѣ, которыя приведены въ равенствахъ (1), а слѣдующія:

$$1,94595 \quad 1,79165 \quad 1,60945 \quad 1,38625 \quad 1,09865 \quad 0,69305,$$

въ такомъ случаѣ во второй части въ равенствахъ (2) должно бы быть:

$$0,1543, \quad 0,1822, \quad 0,2232, \quad 0,2876, \quad 0,4056,$$

въ равенствахъ (3):

$$- 0,0279, \quad - 0,0410, \quad - 0,0644, \quad - 0,1180,$$

въ равенствахъ (4):

$$- 0,01395, \quad - 0,02050, \quad - 0,03220, \quad - 0,05900,$$

въ равенствахъ (5):

$$0,00655, \quad 0,01170, \quad 0,02680$$

въ равенствахъ (6):

$$0,0021833, \quad 0,0039000, \quad 0,0089333,$$

въ равенствахъ (7):

$$- 0,0017167, \quad - 0,0050333,$$

въ равенствахъ (8):

$$- 0,0004292, \quad - 0,0012583,$$

въ равенствѣ (9):

$$0,0008291$$

и для f получилось бы значеніе:

$$f = 0,0001658.$$

Далѣе, отсюда получилось бы:

$$\begin{array}{r} \\ - 0,0012583 - 10e = 0,0374530 \\ - 15f = - 0,0024870 - 65f = - 0,0107770 \\ \hline e = - 0,0037453 d = 0,0356093 \end{array}$$

$$- 0,0590000$$

$$- 6d = - 0,2136558$$

$$- 90f = - 0,0149220$$

$$- 0,2875778$$

$$- 25e = - 0,0936325$$

$$c = - 0,1939453$$

$$\begin{array}{r}
 0,4056000 \\
 - 15e = 0,0561795 \\
 - 3c = 0,5818359 \\
 \hline
 1,0436154 \\
 - 0,2544049 \\
 \hline
 b = 0,7892105 \\
 \\
 0,6930500 \\
 - e = 0,0037453 \\
 - c = 0,1939453 \\
 \hline
 0,8907406 \\
 - 0,8249856 \\
 \hline
 a = 0,0657550
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 - 7d = - 0,2492651 \\
 - 31f = - 0,0051398 \\
 \hline
 - 0,2544049
 \end{array}$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ вмѣсто уравненія (11) мы получаемъ такое:

$$y = 0,0658 + 0,78921x - 0,19395x^2 + \\
 + 0,035609x^3 - 0,0037453x^4 + 0,0001658x^5 \dots (12).$$

Изъ сравненія съ прежнимъ результатомъ видно, что когда значенія y наблюдаемы съ точностью до одной десятичной, то ни одного изъ коэффициентовъ нельзя опредѣлить съ точностью до одного процента. Можно получить понятіе о вліяніи отдѣльныхъ ошибокъ наблюденія на результаты, если составить функцію, которая при значеніяхъ $x = 1, 2, 3, 4, 5$ обращается въ нуль, а при $x = 6$, равна 0,00005. Находимъ:

$$y = - 0,0000504 + 0,0001151x - 0,0000945x^2 + \\
 + 0,0000357x^3 - 0,0000063x^4 + 0,00000042x^5.$$

§ 57. Отдѣльное вычисленіе членовъ четнаго и нечетнаго порядковъ.

Въ такихъ случаяхъ, какъ вышеприведенный, вычисленіе дѣлается немного проще, если начать отсчитывать независимую переменную не отъ крайняго значенія, а отъ ариѳметическаго средняго значеній, выбранныхъ для x . Кромѣ того, чтобы не вводить лишнихъ дробей, можно отнести значенія новаго аргумента къ другому масштабу. Въ разсмотрѣнномъ нами примѣрѣ положимъ:

$$x = \frac{\xi + 7}{2}, \quad \xi = 2x - 7 \dots (1)$$

Теперь можно считать y за функцію отъ ξ и попытаться представить наблюденія формулой вида:

$$y = \varphi(\xi) = \alpha + \beta\xi + \gamma\xi^2 + \delta\xi^3 + \epsilon\xi^4 + \zeta\xi^5 \dots (2)$$

Отдѣлимъ здѣсь члены съ четными и нечетными показателями,

и пусть

$$\eta_1 = \alpha + \gamma\xi^2 + \varepsilon\xi^4 \dots \dots \dots (3)$$

$$\eta_2 = \beta + \delta\xi^2 + \zeta\xi^4,$$

тогда

$$y = \eta_1 + \xi\eta_2 \dots \dots \dots (4)$$

Такъ какъ

$$\varphi(-\xi) = \alpha - \beta\xi + \gamma\xi^2 - \delta\xi^3 + \varepsilon\xi^4 - \zeta\xi^5, \dots \dots \dots (5)$$

то получается:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \{ \varphi(\xi) + \varphi(-\xi) \},$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2\xi} \{ \varphi(\xi) - \varphi(-\xi) \}, \dots \dots \dots (6)$$

Итакъ, надо на основаніи наблюденій опредѣлить обѣ величины η_1 и η_2 и затѣмъ каждую изъ нихъ представить формулой приведеннаго въ (3) и (4) вида. Съ этой цѣлью составимъ таблицу:

x	ξ	y					
1	— 5	0,6931					
2	— 3	1,0986					
3	— 1	1,3863					
			Сумма	Дифференц.	η_1	η_2	
4	+ 1	1,6094	1,3863	2,9957	0,2231	1,49785	0,11155
5	+ 3	1,7917	1,0986	2,8903	0,6931	1,44515	0,11552
6	+ 5	1,9459	0,6391	2,6390	1,2528	1,31950	0,12528

Значить, коэффициенты α , γ , ε надо найти изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\begin{aligned} \alpha + 25\gamma + 625\varepsilon &= 1,31950 \\ \alpha + 9\gamma + 81\varepsilon &= 1,44515 \\ \alpha + \gamma + \varepsilon &= 1,49785. \end{aligned}$$

Такъ же, какъ въ предыдущемъ параграфѣ, получаемъ:

$$\begin{array}{r} 16\gamma + 544\varepsilon = -0,12565 \\ 8\gamma + 80\varepsilon = -0,05270 \\ \hline \gamma + 34\varepsilon = -0,007853 \\ \gamma + 10\varepsilon = -0,006587 \\ \hline 24\varepsilon = -0,001266 \\ \varepsilon = -0,00005275 \\ \hline -10\varepsilon = +0,0005275 \\ -0,006587 \\ \hline \gamma = -0,006060 \end{array}$$

Такимъ же образомъ находимъ коэффициенты выраженія η_2 , а

именно:

$$\begin{array}{rcl}
 \beta + 25\delta + 625\zeta & = & 0,12528 \\
 \beta + 9\delta + 81\zeta & = & 0,11552 \\
 \beta + \delta + \zeta & = & 0,11155 \\
 \hline
 16\delta + 544\zeta & = & 0,00976 \\
 8\delta + 80\zeta & = & 0,00397 \\
 \hline
 \delta + 34\zeta & = & 0,000610 \\
 \delta + 10\zeta & = & 0,000496 \\
 \hline
 & & 0,11155 \\
 - \delta & = & - 0,00045 \\
 - \zeta & = & - 0,00000 \\
 \hline
 \beta & = & - 0,11110
 \end{array}$$

Соединивъ результаты обоихъ вычислений, получаемъ теперь y въ видѣ:

$$y = 1,50396 + 0,11110\xi - 0,006060\xi^2 + 0,000449\xi^3 - 0,00005275\xi^4 + 0,00000475\xi^5.$$

Во многихъ случаяхъ нѣтъ никакого основанія отдавать предпочтеніе разложенію y по степенямъ x передъ разложеніемъ по степенямъ ξ ; тогда мы можемъ удовольствоваться найденнымъ выраженіемъ. Если мы желаемъ имѣть для y выраженіе, расположенное по степенямъ x , то надо въ выраженіи (6) замѣнить ξ черезъ $2x - 7$ и произвести вычисления; послѣднія располагаются слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned}
 y &= 1,50396 + 0,11110(2x - 7) - 0,006060(4x^2 - 28x + 49) \\
 &+ 0,000449(8x^3 - 84x^2 + 294x - 343) \\
 &- 0,00005275(16x^4 - 224x^3 + 1176x^2 - 2744x + 2401) \\
 &+ 0,00000475(32x^5 - 560x^4 + 3920x^3 - 13720x^2 + 24010x - 16807) \\
 &= 1,50396 \\
 &- 0,77770 + 0,22220x \\
 &- 0,29694 + 0,16968x - 0,024240x^2 \\
 &- 0,15401 + 0,13201x - 0,037716x^2 + 0,003592x^3 \\
 &- 0,12665 + 0,14475x - 0,062034x^2 + 0,011816x^3 - 0,0008440x^4 \\
 &- 0,07983 + 0,11405x - 0,065170x^2 + 0,018620x^3 - 0,0026600x^4 + 0,0001520x^5 \\
 &= + 0,06883 + 0,78269x - 0,189160x^2 + 0,034028x^3 - 0,0035040x^4 + 0,0001520x^5.
 \end{aligned}$$

А ранѣе у насъ было:

$$y = 0,0689 + 0,78277x - 0,18929x^2 + 0,034079x^3 - 0,0035125x^4 + 0,0001525x^5:$$

результаты отличаются другъ отъ друга не болѣе, чѣмъ можно было ожидать.

Такъ какъ проще рѣшить двѣ системы трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными въ каждой, чѣмъ одну систему шести уравненій съ

шестью неизвестными, то второй способ, по крайней мѣрѣ въ тѣхъ случаяхъ, когда не требуется послѣднее преобразование, значительно удобнѣе, чѣмъ первый. Послѣднее преобразование представляетъ собой, когда оно является необходимымъ, неприятное усложненіе второго способа.

§ 58. Изслѣдованіе значенія интерполированія.

Положимъ, мы нашли по одному изъ способовъ, указанныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, соотвѣтствующее наблюденіямъ выраженіе для y . Есть ли основаніе думать, что и для другихъ значеній x , кромѣ наблюденныхъ формула, дастъ истинныя значенія y ? или, имѣемъ ли мы право считать, что найденная формула есть выраженіе нѣкотораго закона природы?

Съ математической точки зрѣнія на первый вопросъ можно дать только слѣдующій отвѣтъ: нѣтъ никакого основанія думать такъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $F(x)$ — неизвѣстное намъ правильное выраженіе искомой функціи, а $f(x)$ — то, которое найдено при помощи интерполированія, тогда мы можемъ только сказать, что

$$D(x) = F(x) - f(x) \dots \dots \dots (1)$$

для данныхъ значеній x обращается въ нуль. Если бы даже было извѣстно, что эта разность цѣлая, раціональная функція x , то все же можно было бы положить ее равной произведенію

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)\psi(x),$$

гдѣ $\psi(x)$ — произвольная цѣлая раціональная функція x ; если бы не было дано и этого, то $\psi(x)$ была бы произвольная функція, ограниченная только тѣмъ условіемъ, что при $x = 1, 2, \dots, 6$ она должна имѣть конечныя значенія.

Итакъ, надо сказать, что задача интерполированія, если ее разсматривать съ чисто математической точки зрѣнія, представляется совершенно неопредѣленной.

Однако дѣло совершенно измѣняется, если встать на естественно-научную точку зрѣнія; тогда можно основываться на принципѣ правильности измѣненій въ природѣ. Этотъ принципъ является предпосылкой всякаго изученія явленій природы. Съ этой точки зрѣнія мы можемъ, какъ это было уже сдѣлано въ § 7, рассуждать такъ: если рядъ точекъ одной кривой совпадаетъ съ точками другой, то эти двѣ кривыя не могутъ значительно уклоняться другъ отъ друга кромѣ того случая, когда одна изъ нихъ имѣетъ очень неправильный видъ. Теперь мы можемъ утверждать это съ большимъ основаніемъ, чѣмъ раньше, такъ какъ мы убѣдились при вычисленіяхъ, сдѣланныхъ выше, что даже небольшія неправильности въ измѣне-

ніяхъ функціи влекутъ за собой значительныя неправильности въ измѣненіи производной перваго и въ особенности высшихъ порядковъ.

Нельзя однако дѣлать подобныхъ заключеній относительно вида кривой внѣ той области, къ которой относились наблюденія: двѣ кривыя, почти совпадающія между нѣкоторыми границами, могутъ очень сильно разойтись внѣ этихъ границъ (ср. § 42). Значитъ, если наблюденія относятся только къ значеніямъ независимой переменнѣй вънутри нѣкоторой области, то нельзя сдѣлать никакихъ заключеній даже съ естественно-научной точки зрѣнія о значеніяхъ функціи внѣ этой области. Это положеніе иногда высказываютъ въ такой формѣ: можно интерполировать, но нельзя экстраполировать. Впрочемъ, нельзя не упомянуть о томъ, что многія естественно-научныя открытія были сдѣланы при помощи смѣлаго экстраполированія; но при этомъ надо помнить, что на результаты экстраполированія можно полагаться только въ томъ случаѣ, когда самые результаты или ихъ слѣдствія провѣрены непосредственными наблюденіями.

Приведенныя соображенія рѣшаютъ и второй предложенный вопросъ: а именно, мы можемъ считать формулу, найденную при помощи интерполированія, только тогда за выраженіе нѣ котораго закона природы, если выяснена ея связь съ другими формулами.

§ 59. Интерполирование посредством исчисления разностей.

Положимъ, на основаніи наблюденій y выражено въ видѣ функціи отъ x по приведенному выше методу; въ такомъ случаѣ для разысканія какого нибудь наблюденнаго y надо только въ полученной формулѣ подставить вмѣсто x данное значеніе и этотъ пріемъ оказывается, дѣйствительно, самымъ простымъ, если требуется найти y , соотвѣтствующее только одному данному значенію x ; но если мы хотимъ опредѣлить для цѣлаго ряда значеній x соотвѣтствующія y , то это легче сдѣлать иначе; причемъ даже нѣтъ надобности выводить общую формулу.

Въ особенности это просто, когда формула съ двумя членами вида:

$$y = ax + b \dots \dots \dots (1)$$

дастъ удовлетворительное согласіе съ наблюденіями. Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) двѣ пары соотвѣтствующихъ значеній, полученные опытнымъ путемъ, а x лежитъ между x_1 и x_2 ; въ такомъ случаѣ можно написать слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y &= ax + b \dots \dots \dots (2) \\ y_2 &= ax_2 + b \end{aligned}$$

Если придерживаться способа § 56, то надо изъ первого и послѣдняго равенства опредѣлить коэффиціенты a и b и подставить найденныя значенія во второе равенство; но можно вмѣсто этого исключить a и b изъ этихъ равенствъ, т. е. получить такое уравненіе, которое уже не содержитъ a и b . Сначала посредствомъ вычитанія получаемъ:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a(x - x_1) \dots \dots \dots (3) \\ y_2 - y_1 &= a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

и затѣмъ дѣля одно на другое:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \dots \dots \dots (4)$$

Для интерполированія очень часто пользуются этой формулой, на примѣръ, ее можно примѣнять въ большей части логариѳмическихъ таблицъ; обыкновенно въ логариѳмическихъ таблицахъ приведены маленькія таблички съ заглавіемъ *PP* (Partes proportionales), которыя облегчаютъ вычисленія по послѣдней формулѣ: $x_2 - x_1$ есть та постоянная разность, на которую измѣняется независимая переменная (она равна единицѣ послѣдняго знака); разность $x - x_1$ равна одному изъ чиселъ $1 - 9$ и обозначаетъ единицы знака слѣдующаго за послѣднимъ приведеннымъ; $y_2 - y_1$ — «табличная разность», т. е. разность между двумя рядомъ стоящими логариѳмами (значеніями y); табличка «*PP*» содержитъ нужныя намъ произведенія $(y_2 - y_1)$ $(x - x_1)$. Вычисленіе можно производить такимъ образомъ, если оказывается справедливымъ допущеніе, что между двумя рядомъ стоящими числами таблицъ интерполируемая функція измѣняется приблизительно, какъ линейная, т. е. равнымъ разностямъ $x - x_1$ соотвѣтствуютъ также равныя разности $y - y_1$, по крайней мѣрѣ для нѣсколькихъ слѣдующихъ ближайшихъ табличныхъ значеній. (При этомъ не слѣдуетъ придавать значенія измѣненію разностей $y - y_1$ на единицу послѣдняго знака, такъ какъ такая погрѣшность можетъ произойти вслѣдствіе откидыванія всѣхъ цифръ, стоящихъ за послѣдней выписанной цифрой).

Обыкновенно обозначаютъ разницы отдѣльныхъ значеній x и y черезъ Δx и Δy . Соотвѣтственно этому равенство (3) можно переписать въ видѣ:

$$\Delta y = a \Delta x \dots \dots \dots (5)$$

Иногда нельзя удовлетвориться такимъ простымъ интерполированіемъ, но и въ этомъ случаѣ можно воспользоваться разностями; тогда приходится брать разности не только перваго, но и высшихъ порядковъ, которыя получаются, если составить сначала разности ближайшихъ значеній y , затѣмъ разности этихъ разностей («раз-

ности второго порядка» или просто «вторья разности») и т. д. Рѣдко есть основаніе принимать во вниманіе разности порядковъ, выше второго; но разберемъ тотъ случай, когда разности 3-го и 4-го порядковъ должны быть приняты во вниманіе. Мы покажемъ ходъ вычисленій на одномъ примѣрѣ, причемъ сдѣлаемъ нѣкоторыя упрощенія, которыхъ всегда можно достигнуть введеніемъ новой переменной: пусть начало отсчета x -овъ совпадаетъ съ среднимъ арифметическимъ всѣхъ взятыхъ x и пусть еще разность ближайшихъ значеній x равна единицѣ. Если интерполируемую функцію въ разсматриваемой области можно съ достаточной точностью представить цѣлой рациональной функціей 4-й степени:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4, \dots \dots \dots (6)$$

то мы возьмемъ пять наблюденій:

$$\left. \begin{aligned} y_{-2} &= a - 2b + 4c - 8d + 16e \\ y_{-1} &= a - b + c - d + e \\ y_0 &= a \\ y_1 &= a + b + c + d + e \\ y_2 &= a + 2b + 4c + 8d + 16e \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (7)$$

Теперь составляемъ разности рядомъ стоящихъ равенствъ; при этомъ введемъ такое обозначеніе:

$$y_{n+1} - y_n = \Delta y_{n+\frac{1}{2}}, \dots \dots \dots (8)$$

тогда получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_{-\frac{3}{2}} &= b - 3c + 7d - 15e \\ \Delta y_{-\frac{1}{2}} &= b - c + d - e \\ \Delta y_{\frac{1}{2}} &= b + c + d + e \\ \Delta y_{\frac{3}{2}} &= b + 3c + 7d + 15e \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Вычитая вновь, получаемъ вторья разности:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 y_{-1} &= 2c - 6d + 14e \\ \Delta^2 y_0 &= 2c + 2e \\ \Delta^2 y_1 &= 2c + 6d + 14e \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Повтореніе того же процесса даетъ:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^3 y_{-\frac{1}{2}} &= 6d - 12e \\ \Delta^3 y_{\frac{1}{2}} &= 6d + 12e \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

и наконецъ, четвертая разность равна:

$$\Delta^4 y_0 = 24e \dots \dots \dots (12)$$

Съ помощью этихъ формулъ можно коэффициенты a, b, \dots выразить черезъ приведенныя разности; выражения принимаютъ наиболѣе простой видъ, если обозначить:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_0 &= \frac{1}{2} (\Delta y_{-\frac{1}{2}} + \Delta y_{\frac{1}{2}}) \\ \Delta^3 y_0 &= \frac{1}{2} (\Delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \Delta^3 y_{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Въ такомъ случаѣ:

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{24} \Delta^4 y_0, & d &= \frac{1}{6} \Delta^3 y_0, & c &= \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 - \frac{1}{24} \Delta^4 y_0, \\ b &= \Delta y_0 - \frac{1}{6} \Delta^3 y_0, & a &= y_0 \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

Искомое выраженіе для y представляется теперь въ такой формѣ:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + x \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^3 y_0}{6} \right) + x^2 \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^4 y_0}{24} \right) + x^3 \frac{\Delta^3 y_0}{6} + \\ &+ x^4 \frac{\Delta^4 y_0}{24} \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

Собирая члены съ разностями одного порядка, находимъ:

$$y = y_0 + x \Delta y_0 + \frac{x^2}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{x^3 - x}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{x^4 - x^2}{24} \Delta^4 y_0 \dots (16)$$

Чтобы примѣнить это къ примѣру § 57, откинемъ тамъ послѣднее данное и составимъ такую таблицу:

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,6931				
1,0986	0,4055			
1,3863	0,2877	— 0,1178		
1,6094	0,2231	— 0,0646	0,0532	
1,7917	0,1823	— 0,0408	0,0238	— 0,0294

Изъ этой таблицы получаемъ:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= 0,2554, & \Delta^2 y_0 &= -0,0646, & \Delta^3 y_0 &= 0,0385, & \Delta^4 y_0 &= -0,0294, \\ \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 &= -0,0323, & \frac{1}{6} \Delta^3 y_0 &= 0,00642, & \frac{1}{24} \Delta^4 y_0 &= -0,001225, \end{aligned}$$

слѣдовательно:

$$y = 1,3863 + 0,2490 (x - 3) - 0,0311 (x - 3)^2 + 0,00642 (x - 3)^3 - 0,001225 (x - 3)^4.$$

Если требуется найти только одно значеніе y , соотвѣтствующее нѣкоторому значенію x , лежащему внутри той области, для которой были произведены наблюденія, то нужно просто подставить x въ послѣднюю формулу. Но если хотимъ найти значенія y , соотвѣтствующія цѣлому ряду значеній x , лежащихъ на равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга, то можемъ поступить слѣдующимъ образомъ. Положимъ, мы ищемъ значенія y для значеній x , разности δx которыхъ равны между собой, но составляютъ только n -ую часть разностей Δx , наблюденныхъ x , для которыхъ извѣстны значенія y . Для опредѣленности положимъ $n = 10$, такъ что

$$\delta x = \frac{1}{10} \Delta x \dots \dots \dots (17)$$

Въ такомъ случаѣ мы можемъ формулу (15) сопоставить съ такой:

$$y = y_0 + x \left(\delta y_0 - \frac{1}{6} \delta^3 y_0 \right) + x^2 \left(\frac{1}{2} \delta^2 y_0 - \frac{1}{24} \delta^4 y_0 \right) + \\ + x^3 \frac{\delta^3 y_0}{6} + x^4 \frac{\delta^4 y_0}{24} \dots \dots \dots (18)$$

Но нужно замѣтить слѣдующее: въ формулѣ (15) было принято, что x измѣрено въ такихъ единицахъ, что $\Delta x = 1$, соотвѣтственно этому формула (18) написана въ предположеніи, что $\delta x = 1$. Чтобы x имѣло въ обѣихъ формулахъ одно и то же значеніе; надо замѣнить въ формулѣ (15) x черезъ $\frac{x}{10}$, такъ что эта формула принимаетъ видъ:

$$y = y_0 + \frac{x}{10} \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^3 y_0}{6} \right) + \frac{x^2}{100} \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^4 y_0}{24} \right) + \frac{x^3}{1000} \cdot \frac{\Delta^3 y_0}{6} + \\ + \frac{x^4}{10000} \cdot \frac{\Delta^4 y_0}{24} \dots \dots \dots (19)$$

Такъ какъ значенія y , полученные изъ обѣихъ формулъ, должны быть одинаковыми, то сравненіе коэффиціентовъ въ обѣихъ формулахъ даетъ:

$$\left. \begin{aligned} \delta y_0 - \frac{1}{6} \delta^3 y_0 &= \frac{1}{10} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{6} \Delta^3 y_0 \right) \\ \delta^2 y_0 - \frac{1}{12} \delta^4 y_0 &= \frac{1}{100} \left(\Delta^2 y_0 - \frac{1}{12} \Delta^4 y_0 \right) \\ \delta^3 y_0 &= \frac{1}{1000} \Delta^3 y_0 \\ \delta^4 y_0 &= \frac{1}{10000} \Delta^4 y_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

Посредствомъ этихъ формулъ можно найти разности δ , если даны разности Δ ; въ настоящемъ примѣрѣ имѣемъ:

$$\begin{array}{rcl}
 \delta^4 y_0 & = & - 0,00000294 \\
 \delta^3 y_0 & = & 0,0000385 \\
 \Delta^2 y_0 & = & - 0,0646 \\
 -\frac{1}{12} \Delta^4 y_0 & = & + 0,00245 \\
 \hline
 & & - 0,06215 \\
 \delta^2 y_0 & = & - 0,0006215
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \Delta y_0 & = & 0,2554 \\
 -\frac{1}{6} \Delta^3 y_0 & = & - 0,0064 \\
 \hline
 & & 0,2490 \\
 & & 0,02490 \\
 \frac{1}{6} \delta^3 y_0 & = & 0,00001 \\
 \hline
 \delta y_0 & = & 0,02491
 \end{array}$$

Посредствомъ сложения и вычитанія получаемъ еще:

$$\begin{aligned}
 \delta y_{\frac{1}{2}} &= \delta y_0 + \frac{1}{2} \delta^2 y_0 = 0,02460, \\
 \delta^3 y_{\frac{1}{2}} &= \delta^3 y_0 + \frac{1}{2} \delta^4 y_0 = 0,00003703.
 \end{aligned}$$

Имѣя эти значенія, мы можемъ построить таблицу совершенно аналогичную той, которая помѣщена на стр. 168; но теперь намъ придется составить эту таблицу справа налѣво; при этомъ надо будетъ, и мы на это имѣемъ право, принять, что пятая разности здѣсь не оказываютъ вліянія, т. е. что четвертая разности всѣ равны между собой. Выпишемъ сначала значенія y_0 , $\delta y_{\frac{1}{2}}$, $\delta^2 y_0$, $\delta^3 y_{\frac{1}{2}}$ въ такую таблицу:

$$\begin{array}{rcl}
 1,3863 & & - 0,0006215 \\
 * & & \\
 & 0,02460 & \\
 & & 0,00003703.
 \end{array}$$

По этой таблицѣ мы найдемъ y_1 (т. е. значеніе y при $x = 3,1$); сложивъ $\delta y_{\frac{1}{2}}$ съ y_0 , получаемъ 1,41090. Далѣе можемъ написать:

$$\delta^2 y_1 = \delta^2 y_0 + \delta^3 y_{\frac{1}{2}} = - 0,0005845$$

и затѣмъ:

$$\begin{aligned}
 \delta y_{\frac{3}{2}} &= \delta y_{\frac{1}{2}} + \delta^2 y_{\frac{1}{2}} = 0,02402, \\
 y_2 &= y_1 + \delta y_{\frac{3}{2}} = 1,43492.
 \end{aligned}$$

Теперь уже таблицу можно переписать въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{rcl}
 1,3863 & & - 0,0006215 \\
 & 0,02460 & \\
 1,41090 & & - 0,0005830 \\
 & 0,02402 & \\
 1,43492 & & 0,00003703 \\
 & & - 0,00000294.
 \end{array}$$

Далѣе, послѣдовательно вычисляемъ:

$$\delta^3 y_{\frac{3}{2}} = \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \delta^4 y_1 = 0,00003409,$$

$$\delta^2 y_2 = \delta^2 y_1 + \delta^3 y_{\frac{3}{2}} = -0,0005504,$$

$$\delta y_{\frac{5}{2}} = \delta y_{\frac{3}{2}} + \delta^2 y_2 = 0,02347,$$

$$y_3 = y_2 + \delta y_{\frac{5}{2}} = 1,45839.$$

Внеся эти результаты въ таблицу, получаемъ:

1,3863	— 0,0006215		
	0,02460	0,00003703	
1,41090	— 0,0005845		— 0,00000294
	0,02402	0,00003409	
1,43492	— 0,0005554		— 0,00000294
	0,02347	0,00003115	
1,45839			

Такимъ образомъ мы поступаемъ и далѣе, приписывая, какъ мы уже говорили, четвертымъ разностямъ всегда одно и то же значеніе; наконецъ, получаемъ:

1,3863	— 0,0006215		
	0,02460	0,00003703	
1,41090	— 0,0005845		— 0,00000294
	0,02402	0,00003409	
1,43492	— 0,0005504		— 0,00000294
	0,02347	0,00003115	
1,45839	— 0,0005192		— 0,00000294
	0,02295	0,00002821	
1,48134	— 0,0004910		— 0,00000294
	0,02246	0,00002527	
1,50380	— 0,0004657		— 0,00000294
	0,02199	0,00002233	
1,52579	— 0,0004434		— 0,00000294
	0,02155	0,00001939	
1,54734	— 0,0004240		— 0,00000294
	0,02113	0,00001645	
1,56847	— 0,0004076		— 0,00000294
	0,02072	0,00001351	
1,58919	— 0,0003941		
	0,02033		
1,60952			

Последнее значение y , соответствующее $x = 4$, должно бы совпадать съ заданнымъ, именно, $y = 1,6094$; эти значенія отличаются на единицу четвертаго знака послѣ запятой, но большей точности и нельзя было ожидать. Совпаденіе найденнаго y съ заданнымъ служить провѣркой правильности вычисленій.

Тѣ же значенія y можно получать еще иначе: будемъ исходить изъ значенія y , даннаго для $x = 4$, найдемъ соответствующія разности и построимъ таблицу вверхъ. Вотъ требуемое вычисленіе:

$$\begin{array}{r}
 y_0 = 1,6094, \quad \Delta y_0 = 0,2027, \quad \Delta^2 y_0 = -0,0408, \quad \Delta^3 y_0 = 0,01825, \\
 \Delta^4 y_0 = -0,0111, \quad \delta^4 y_0 = -0,00000111, \quad \delta^3 y_0 = 0,00001825, \\
 \begin{array}{r}
 \Delta^2 y_0 = -0,0408 \qquad \Delta y_0 = 0,2027 \\
 - \frac{1}{12} \Delta^4 y_0 = +0,0009 \qquad - \frac{1}{6} \Delta^3 y_0 = -0,0030 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad -0,0399 \qquad \qquad \qquad 0,1997 \\
 \delta^2 y_0 = -0,000399 \qquad \delta y_0 = 0,01997 \\
 \delta y_{-\frac{1}{2}} = \delta y_0 - \frac{1}{2} \delta^2 y_0 = 0,02017 \\
 \delta^3 y_{-\frac{1}{2}} = \delta^3 y_0 - \frac{1}{2} \delta^4 y_0 = 0,0000188
 \end{array}
 \end{array}$$

Исходя изъ найденныхъ значеній, строимъ таблицу:

1,38626				
	0,02474			
1,41100		— 0,000608		
	0,02413		0,0000276	
1,43513		— 0,000580		— 0,00000111
	0,02355		0,0000265	
1,45868		— 0,000553		— 0,00000111
	0,02300		0,0000254	
1,48168		— 0,000528		— 0,00000111
	0,02247		0,0000243	
1,50415		— 0,000504		— 0,00000111
	0,02197		0,0000232	
1,52612		— 0,000481		— 0,00000111
	0,02149		0,0000221	
1,54761		— 0,000459		— 0,00000111
	0,02103		0,0000210	
1,56864		— 0,000438		— 0,00000111
	0,02059		0,0000199	
1,58923		— 0,000418		— 0,00000111
	0,02017		0,0000188	
1,6094		— 0,000399		— 0,00000111

То, что первое число, выписанное въ этой таблицѣ, получилось съ погрѣшностью равной только четыремъ единицамъ пятаго знака, служить провѣркой сдѣланныхъ вычисленій. Изъ сравненія таблицъ видно, что онѣ очень хорошо согласуются для крайнихъ значеній x , но больше расходятся въ среднихъ частяхъ; значенія, соотвѣтствующія $x = 3,5$, отличаются другъ отъ друга на 35 единицъ пятаго знака. Если такое несогласіе по требованію задачи недопустимо, то при вычисленіи надо взять также пятыя разности, а не ограничиваться четвертыми.

Легко убѣдиться въ томъ, что уклоненія получились бы гораздо большія, если бы разности высшихъ порядковъ не были вычислены съ бѣльшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ, чѣмъ заданныя значенія y . Но съ другой стороны нѣтъ также смысла брать для значеній y бѣльшее число знаковъ, если за точность ихъ нельзя ручаться, потому что каждая погрѣшность въ значеніяхъ функціи переносится и на значенія, полученные изъ нихъ вычисленіемъ. Въ нашемъ вычисленіи не слѣдуетъ полагаться на пятую цифру, но все-таки лучше ея не опускать, чтобы не увеличить этимъ ошибки еще больше.

§ 60. Интерполирование на основании большого числа наблюдений.

До сихъ поръ мы брали въ формулахъ интерполированія, которыя должны были давать зависимость между двумя переменными, столько членовъ, сколько различныхъ наблюдений было произведено; такимъ образомъ получалась система съ одинаковымъ числомъ уравненій и неизвѣстныхъ. Часто дѣлаютъ больше наблюдений, чѣмъ число коэффициентовъ въ принимаемой формулѣ интерполированія, и это съ той цѣлью, чтобы, во-первыхъ, лучше опредѣлить коэффициенты и во-вторыхъ, чтобы этимъ уменьшить вліяніе ошибокъ наблюдений. Естественнѣе всего въ такомъ случаѣ выбрать наиболѣе надежныя наблюденія, представить ихъ формулой интерполированія и затѣмъ уже испытать, справедлива ли эта формула для другихъ, не использованныхъ при нахожденіи ея наблюдений. Если послѣднее имѣетъ мѣсто, то это даетъ основаніе считать; что формула правильно передаетъ ходъ явленій, по крайней мѣрѣ въ той области, въ которой были сдѣланы наблюденія; а если этого нѣтъ, то остается еще открытымъ вопросъ о томъ, нельзя ли, можетъ быть, внеся нѣкоторыя небольшія измѣненія въ коэффициенты, достигнуть того, чтобы формула хорошо удовлетворяла остальнымъ наблюденіямъ, не переставая въ то же время давать хорошіе результаты и для тѣхъ наблюдений, на основаніи которыхъ она первоначально получена. Въ этомъ случаѣ пришлось бы сдѣлать новыя вычисленія, выбравъ уже другія наблюденія за исходныя. Поэтому теперь возникаетъ во-

прось, нельзя ли воспользоваться всѣми наблюденіями и притомъ такъ, чтобы получить формулу, которая бы представляла наблюденія лучше, чѣмъ всякая другая формула того же вида.

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, надо раньше условиться, что значить, что одна формула «лучше» представляетъ наблюденія, чѣмъ другая. Астрономы и геодезисты обыкновенно считаютъ, что та формула лучше всего изображаетъ наблюденія, которая даетъ наименьшую сумму квадратовъ разностей между вычисленными и наблюденными значеніями. Чтобы практически провести этотъ принципъ, требуется столько вычисленій, что имъ мѣсто только въ тѣхъ случаяхъ, когда даны очень точныя наблюденія, какъ это и бываетъ обыкновенно въ астрономіи и геодезіи. Кромѣ случая очень точныхъ наблюденій и противоположнаго ему столь ненадежныхъ наблюденій, что вообще не стоитъ дѣлать много вычисленій, есть очень много случаевъ, когда оказывается возможнымъ и полезнымъ воспользоваться всѣми наблюденіями, но способъ наименьшихъ квадратовъ слишкомъ затруднителенъ.

Если требуется представить наблюденія двучленной формулой:

$$y = ax + b,$$

то очень часто удобно прибѣгнуть къ графическому изображенію: для этого надо нанести результаты наблюденій на чертежъ и построить такую прямую, которая проходитъ возможно ближе ко всѣмъ намѣченнымъ точкамъ. Конечно, этотъ способъ примѣнимъ только тогда, когда достаточна точность, которой можно достигнуть при черченіи. какъ это бываетъ при очень многихъ физическихъ наблюденіяхъ; но и въ остальныхъ случаяхъ можно воспользоваться этимъ способомъ для приблизительнаго опредѣленія функціи и подвергнуть дальнѣйшимъ вычисленіямъ только разности между значеніями, полученными изъ наблюденій и изъ графическаго изображенія. Если наблюденія взяты черезъ равныя промежутки времени, то можно такимъ же способомъ, отдѣливъ члены четнаго отъ членовъ нечетнаго порядка, представить наблюденія въ видѣ цѣлой рациональной функціи второй и третьей степени. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ можно съ успѣхомъ примѣнить методъ, предложенный Коши. Этимъ методомъ, который не такъ извѣстенъ, какъ онъ того бы заслуживалъ, слѣдуетъ пользоваться во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда наблюденія настолько хороши, что нельзя удовольствоваться описаннымъ графическимъ методомъ, и не такъ точны, чтобы стоило примѣнять методъ «наименьшихъ квадратовъ».

Со способомъ Коши мы ознакомимся на частномъ примѣрѣ. Положимъ, дано шесть наблюденій и требуется представить эти наблю-

денія въ видѣ рациональной функціи по возможности низкой степени; однимъ изъ преимуществъ этого метода является то обстоятельство, что не нужно съ самаго начала вычисленій предрѣшать вопроса о числѣ членовъ, которые должны быть включены въ формулу. Вопросъ въ нашемъ случаѣ приводится къ рѣшенію слѣдующихъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} a - 2b + 4c - 8d + \dots &= 0,94084 \\ a - b + c - d + \dots &= 0,95508 \\ a &= 0,96887 \\ a + b + c + d + \dots &= 0,98223 \\ a + 2b + 4c + 8d + \dots &= 0,99520 \\ a + 3b + 9c + 27d + \dots &= 1,00779 \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Раньше всего слѣдуетъ позаботиться о томъ, чтобы всѣ коэффициенты при томъ неизвѣстномъ, которое мы хотимъ опредѣлить, были положительны; для этого въ случаѣ надобности придется перемѣнить знаки въ нѣкоторыхъ уравненіяхъ; относительно a это требованіе у насъ выполнено. Сложивъ всѣ равенства почленно, получимъ:

$$6a + 3b + 19c + 27d + \dots = 5,85001 \dots \dots (2)$$

За первое приближеніе мы будемъ считать то значеніе a , которое получается изъ послѣдняго равенства, если принять въ немъ всѣ остальные неизвѣстныя равными нулю; это значеніе назовемъ черезъ a_1 . Имѣемъ:

$$6a_1 = 6a + 3b + 19c + 27d + \dots, \dots \dots (3)$$

то есть:

$$a_1 = 0,97500 \dots \dots (4)$$

Далѣе обозначимъ:

$$y - a_1 = \Delta y \dots \dots (5)$$

Знакъ Δ имѣетъ здѣсь другой смыслъ, чѣмъ раньше. Введемъ вмѣсто x, x^2, \dots вспомогательныя функціи, опредѣляющіяся изъ равенствъ:

$$\Delta v = x - \frac{\Sigma x}{6}, \quad \Delta w = x^2 - \frac{\Sigma x^2}{6}, \dots \dots (6)$$

гдѣ $\Sigma x, \Sigma x^2, \dots$ обозначаютъ суммы всѣхъ встрѣчающихся значеній x, x^2, \dots . Въ данномъ примѣрѣ:

$$\Sigma x = 3, \quad \Sigma x^2 = 19, \dots \text{ слѣд., } \Delta v = x - \frac{1}{2}, \quad \Delta w = x^2 - \frac{19}{6}. (7)$$

Общее равенство:

$$y = a + bx + cx^2 + \dots$$

переходить въ такое:

$$a_1 + \Delta y = a + b\Delta v + b \frac{\Sigma x}{6} + c\Delta w + c \frac{\Sigma x^2}{6} + \dots,$$

или, такъ какъ:

$$a_1 = a + b \frac{\Sigma x}{6} + c \frac{\Sigma x^2}{6} + \dots,$$

то

$$\Delta y = b\Delta v + c\Delta w + \dots \quad (8)$$

Если подставить вмѣсто x , y и функций, полученныхъ изъ нихъ, результаты наблюденій, то получается вторая система равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{5}{2}b + \frac{5}{6}c + \dots &= -0,03416 \\ -\frac{3}{2}b - \frac{13}{6}c + \dots &= -0,01992 \\ -\frac{1}{2}b - \frac{19}{6}c + \dots &= -0,00613 \\ +\frac{1}{2}b - \frac{13}{6}c + \dots &= +0,00723 \\ +\frac{3}{2}b + \frac{5}{6}c + \dots &= +0,02020 \\ +\frac{5}{2}b + \frac{35}{6}c + \dots &= +0,03279 \end{aligned} \right\} \dots \quad (9)$$

Мы опять должны позаботиться о томъ, чтобы множители при b были всѣ положительными, т. е. надо измѣнить знаки въ первыхъ трехъ равенствахъ; сложивъ ихъ, получаемъ:

$$9b + 9c + \dots = 0,12043 \quad (10)$$

Въ качествѣ перваго приближенія возьмемъ опять то значеніе b_1 , которое получается, если пренебречь числами c, d, \dots т. е. положить что:

$$9b_1 = 9b + 9c + \dots \quad (11)$$

значить:

$$b_1 = 0,01338 \quad (12)$$

Наше допущеніе (что $c, d, \dots = 0$), равносильно предположенію, что $\Delta y = b\Delta v$. Обозначимъ еще поправку черезъ $\Delta^2 y$, т. е. положимъ:

$$\Delta y = b\Delta v + \Delta^2 y \quad (13)$$

и введемъ обозначеніе:

$$\Delta^2 w = \Delta w - \frac{\Sigma \Delta w}{\Sigma \Delta v} \Delta v \dots \quad (14)$$

Тогда общее равенство (8) переходит въ такое:

$$b_1 \Delta v + \Delta^2 y = b \Delta v + c \frac{\Sigma \Delta w}{\Sigma \Delta v} \Delta v + c \Delta^2 w + \dots,$$

или, такъ какъ:

$$b_1 = b + c \frac{\Sigma \Delta w}{\Sigma \Delta v} \Delta v + \dots,$$

то

$$\Delta^2 y = c \Delta^2 w + \dots, \dots \dots \dots (15)$$

Притомъ здѣсь $\Delta^2 w = \left(x^2 - \frac{19}{6}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x - \frac{8}{3}$. Если въ это равенство подставимъ снова результаты наблюдений, то получаемъ третью систему уравнений въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{10}{3} c + \dots &= - 0,00071 \\ - \frac{2}{3} c + \dots &= + 0,00015 \\ - \frac{8}{3} c + \dots &= + 0,00056 \\ - \frac{8}{3} c + \dots &= + 0,00054 \\ - \frac{2}{3} c + \dots &= + 0,00013 \\ + \frac{10}{3} c + \dots &= - 0,00066 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Суммирование этихъ равенствъ съ переменною знака у среднихъ четырехъ даетъ:

$$+ \frac{40c}{3} + \dots = - 0,00275.$$

Поэтому въ качествѣ приближеннаго значенія для c беремъ:

$$c = - 0,000201 \dots \dots \dots (17)$$

Подставивъ въ лѣвыя части равенствъ (16) вмѣсто c это приближенное значеніе и пренебрегая остальными членами, получаемъ числа, превосходящія вторыя части этихъ равенствъ на $+ 4, - 2, - 2, 0, 0, - 1$ единицъ послѣдняго знака; если мы можемъ приписать эти разности ошибкамъ наблюденія, то нѣтъ надобности продолжать далѣе и выписать:

$$\begin{aligned} y &= 0,97500 + 0,01338 \left(x - \frac{1}{2}\right) - 0,000201 \left(x^2 - x - \frac{8}{3}\right) = \\ &= 0,968846 + 0,013581x - 0,000201x^2. \end{aligned}$$

Г Л А В А VIII.

ДѢЙСТВІЯ СЪ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ.

61. Общія опредѣленія и теоремы.

Если мы оглянемся на выводы основныхъ теоремъ дифференціального исчисления во второй и третьей главѣ, то убѣдимся, что въ сущности вездѣ былъ примѣненъ такой методъ: независимую переменную x замѣняли черезъ $x + h$, затѣмъ располагали выраженіе $f(x + h) - f(x)$ по степенямъ h , дѣлили на h и въ частномъ дѣлали подстановку $h = 0$. При этомъ въ результатѣ всегда отпадалъ одинъ или нѣсколько членовъ, которые надо было принимать во вниманіе въ началѣ вычисленія. Поэтому возникаетъ вопросъ, нельзя ли съ самаго начала разсужденія рѣшить, какіе члены повліяютъ на окончательный результатъ и какіе обратятся въ нуль; тогда еще до вычисленій можно было бы, оставивъ первые члены, откинуть послѣдніе. На этотъ вопросъ можно отвѣтить утвердительно, если принять во вниманіе слѣдующія опредѣленія и теоремы:

1) Опредѣленіе: Величина, которую полагаютъ послѣ всѣхъ выкладокъ равной нулю, называется безконечно-малой.

Поэтому никогда не слѣдуетъ говорить: «эта величина безконечно-мала», а можно только говорить: «въ данной задачѣ соотвѣтственно цѣли и смыслу задачи, мы принимаемъ ее за безконечно-малую». Пока дѣло касается чистаго анализа, всецѣло зависитъ отъ насъ, какія величины считать безконечно-малыми; въ приложеніяхъ анализа это рѣшается сущностью задачи.

2) Теорема: Произведеніе безконечно-малой на величину, которая при $h = 0$ оказывается конечной, есть величина безконечно-малая.

Собственно эта теорема представляетъ собой очевидное слѣдствіе того, что произведеніе, одинъ изъ множителей котораго равенъ нулю, также равно нулю; значить, полагая въ результатѣ $h = 0$, мы должны положить $hf(h)$ также равнымъ нулю, если только $f(h)$ имѣетъ конечное значеніе. Мы все-таки формулируемъ это положеніе, чтобы подчеркнуть необходимость добавочнаго условія, которое часто опускаютъ. Напр.,

$$\frac{h}{e^h - e^{-h}}$$

не безконечно-малая, когда $h = 0$, потому что при $h = 0$ знаменатель тоже обращается въ нуль.

3) Теорема: Сумма, разность и произведеніе безконечно-малыхъ сами безконечно-малы.

Нельзя сказать того же самаго о частномъ. Чтобы ясно и опредѣленно формулировать положенія относительно частнаго, начнемъ съ такого опредѣленія:

4) Двѣ безконечно-малыя называются безконечно-малыми одного порядка, если ихъ отношеніе конечно и не равно нулю.

Напр., при безконечно-маломъ h , величины $h^2 + h^3$ и $h^2 + h^4$ безконечно-малыя одного порядка, потому что ихъ отношеніе:

$$\frac{h^2 + h^3}{h^2 + h^4} = \frac{1 + h}{1 + h^2}$$

обращается въ 1 при $h = 0$, т. е. оно конечно и не равно 0.

Согласно этому опредѣленію только тогда можно сравнивать порядки малости двухъ безконечно-малыхъ, если одна зависитъ отъ другой или обѣ зависятъ отъ третьей. Если нѣтъ никакой зависимости между h и k , то вообще ничего нельзя сказать о значеніи отношенія $\frac{h}{k}$, когда h и k обращаются въ нуль.

Методы, указанные въ предыдущихъ главахъ, даютъ возможность сравнивать между собой порядокъ двухъ безконечно-малыхъ тогда и только тогда, когда одна изъ нихъ есть цѣлая рациональная функція другой или можетъ быть представлена въ видѣ таковой, при помощи теоремъ §§ 42—44.

Если h и k —двѣ зависимыя другъ отъ друга безконечно-малыя различныхъ порядковъ и если положить h и k равными нулю, то, навѣрно, одно изъ отношеній $\frac{h}{k}$ или $\frac{k}{h}$ окажется равнымъ нулю.

5) Опредѣленіе: Если h безконечно-малая перваго порядка, то величину h^n называютъ безконечно-малой n -го порядка; вообще всякую величину того же порядка, какъ h^n , называютъ безконечно-малой n -го порядка.

Напр., изъ формулъ § 44 слѣдуетъ, что, когда h безконечно-малая перваго порядка, то $e^h - e^{-h}$ безконечно-малая перваго, $e^h + e^{-h} - 2$ безконечно-малая второго, и $e^h - e^{-h} - 2h$ безконечно-малая третьяго порядка.

Согласно опредѣленію (5) порядокъ безконечно-малой величины есть понятіе относительное; любую изъ безконечно-малыхъ величинъ, входящихъ въ наши вычисленія, мы можемъ считать безконечно-малой перваго порядка; но лишь только такой выборъ сдѣланъ, то этимъ уже рѣшенъ вопросъ о порядкахъ всѣхъ тѣхъ безконечно-малыхъ, которыя вообще по сравненію съ данной имѣютъ опредѣленный порядокъ. Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что далеко не всякой безконечно-малой можетъ быть по сравненію съ данной при-

писанъ опредѣленный порядокъ. Напримѣръ, если h бесконечно-малая, то и $\frac{1}{\log h}$ бесконечно-малая; но изъ формулы (9) § 55 видно, что послѣдняя величина не имѣетъ опредѣленнаго порядка малости по сравненію съ h .

6) Опредѣленіе: Равенство двухъ многочленовъ, въ которые входятъ только бесконечно-малыя разныхъ порядковъ, имѣетъ слѣдующій смыслъ: надо, раздѣливъ на одну изъ величинъ, порядокъ которыхъ самый низкій—назовемъ ее черезъ h ,— замѣнить отношенія бесконечно-малыхъ одного порядка ихъ конечными значеніями и положить $h=0$.

При этомъ отпадаютъ всѣ члены, порядокъ которыхъ не самый низкій; такъ что съ самаго начала не было надобности принимать во вниманіе этихъ членовъ. Поэтому мы получаемъ такое правило:

7) Въ многочленѣ можно при существованіи членовъ даннаго порядка малости опускать всѣ члены высшихъ порядковъ.

8) Если примѣненіе правила (7) приводитъ къ тождеству $0 = 0$, то это можетъ имѣть очень различное значеніе; это можетъ означать, что наши допущенія выполнены, или что требованіе задачи удовлетворяется не опредѣленнымъ, а любымъ значеніемъ неизвѣстнаго, или, что посредствомъ избраннаго метода нельзя получить опредѣленнаго результата. Чтобы рѣшить который изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто, нужно снова произвести выкладки и принять во вниманіе члены слѣдующаго высшаго порядка малости.

Правило (7) можно непосредственно прилагать только къ цѣлымъ рациональнымъ функціямъ. Напр., неправильно было бы такое рассужденіе: въ числитель дроби

$$\frac{\sqrt{h+h^2} - \sqrt{h}}{\sqrt{h^3}}$$

можно опредѣлить h^2 по сравненію съ h ; тогда числитель обращается въ нуль, а слѣдовательно, и вся дробь равна нулю. Въ подобныхъ случаяхъ слѣдуетъ встрѣтившуюся функцію приближенно представить въ видѣ рациональной цѣлой функціи, для чего можно воспользоваться формулой Маклорена или формулами, полученными изъ нея. Въ приведенномъ примѣрѣ:

$$\sqrt{h+h^2} = \sqrt{h} \cdot \sqrt{1+h} \approx \sqrt{h} \left(1 + \frac{h}{2}\right)$$

$$\sqrt{h+h^2} - \sqrt{h} \approx \frac{1}{2} \sqrt{h^3}$$

$$\frac{\sqrt{h+h^2} - \sqrt{h}}{\sqrt{h^3}} \approx \frac{1}{2}.$$

Для примѣненія вышеприведенныхъ опредѣленій и теоремъ къ дифференціальному исчисленію полезно прибавить еще нѣсколько положеній, имѣющихъ значеніе для такого примѣненія.

9) Когда независимая переменная получаетъ безконечно-малое приращеніе, то это приращеніе называютъ «дифференціаломъ x » и обозначаютъ черезъ dx (причемъ dx не обозначаетъ произведенія, а представляетъ собой нераздѣлимый знакъ).

10) То приращеніе, которое получаетъ нѣкоторая функція y , когда x возрастаетъ на dx , обозначаютъ черезъ dy .

11) Опредѣленіе: Если при безконечно-маломъ dx , dy также безконечно мало, то y называется непрерывной функціей x .

Выше мы уже пользовались терминомъ «непрерывный», но исходили при этомъ изъ геометрическихъ представленій; здѣсь мы дали аналитическое опредѣленіе этого понятія.

12) Опредѣленіе: Дифференціалъ независимой переменной считаютъ безконечно-малой перваго порядка, если относительно этого не сдѣлано спеціальной оговорки.

13) Опредѣленіе: Функцію называютъ дифференцируемой, если ея дифференціалъ есть безконечно малая перваго порядка.

§ 62. Выводъ прежнихъ формулъ при помощи исчисленія безконечно-малыхъ.

Мы вновь выведемъ нѣкоторыя изъ прежнихъ формулъ, чтобы показать, какъ легко онѣ получаются, если пользоваться опредѣленіями и теоремами предыдущаго параграфа.

Если функція имѣетъ опредѣленную производную, отличную отъ нуля, то согласно предыдущему параграфу ея дифференціалъ есть безконечно-малая перваго порядка. Дѣйствительно, откидывая въ формулѣ Тейлора безконечно малыя высшихъ порядковъ, имѣемъ:

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x) dx,$$

значитъ

$$dy = f'(x) dx,$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

т. е. отношеніе дифференціаловъ зависимой и независимой переменной равно производной первой переменной, взятой относительно второй, какъ и было опредѣлено въ § 13. Поэтому можемъ высказать такое положеніе:

Дифференціалъ постоянной равенъ нулю (безконечно малая какого угодно порядка).

Пусть другимъ примѣромъ дѣйствій съ безконечно-малыми служить дифференцирование функции

$$y = x^2.$$

Мы получаемъ:

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x dx + (dx)^2.$$

Вычтемъ изъ обѣихъ частей по y и откинемъ членъ $(dx)^2$, какъ величину безконечно малую второго порядка, тогда просто получаемъ:

$$dy = 2x dx.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что при этомъ выводѣ не обращается совсѣмъ вниманія на то, есть ли dy безконечно-малая и какого порядка; напротивъ того, это видно только изъ конечнаго результата. Вообще dy является, какъ это видно изъ приведенной формулы, безконечно-малой перваго порядка, кромѣ того случая, когда $x = 0$. При $x = 0$ безконечно-малая перваго порядка во второй части пропадаетъ, и поэтому надо оставить безконечно-малыя второго порядка, слѣдовательно:

$$dy = (dx)^2,$$

т. е. при $x = 0$ величина dy , дѣйствительно, безконечно-малая второго порядка.

Далѣе, если

$$y = \frac{1}{x},$$

то

$$y + dy = \frac{1}{x + dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{dx}{x}}.$$

Но если положить

$$\frac{1}{1 + \frac{dx}{x}} = 1 - \frac{dx}{x} + \varepsilon,$$

то

$$\varepsilon \left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \left(\frac{dx}{x}\right)^2,$$

т. е. ε безконечно-малая второго порядка. Отбрасывая безконечно-малыя второго порядка, получаемъ:

$$y + dy = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{dx}{x}\right),$$

или:

$$dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

Тотъ же результатъ можно получить еще и такимъ способомъ:

$$xy = 1$$

$$(x + dx)(y + dy) = 1.$$

Послѣ вычитанія получаемъ:

$$x dy + y dx + dx dy = 0.$$

Если не останавливаться на томъ случаѣ, что x или $y = 0$, и считать y непрерывной функцией x , то dy становится одновременно съ dx бесконечно-малыми; поэтому произведение $dx dy$ высшаго порядка малости, чѣмъ каждый изъ множителей и, значить, этотъ членъ по сравненію съ другими надо откинуть, тогда:

$$x dy = -y dx.$$

Такимъ образомъ dy и здѣсь, кромѣ указанныхъ случаевъ, оказывается бесконечно-малой того же порядка, какъ dx .

Такимъ же образомъ можно трактовать правила дифференцированія произведенія и частнаго, а именно:

$$y = uv, y + dy = (u + du)(v + dv), dy = u dv + v du.$$

$$y = \frac{u}{v}, vy = u, v dy + y dv = du, dy = \frac{du}{v} - \frac{y dv}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u dv}{v^2}.$$

При такомъ трактованіи правила § 22 и § 24 получаются непосредственно; слѣдуетъ только положить, что dx , dy , dz , которыя здѣсь имѣютъ самостоятельный смыслъ, обозначаютъ соотвѣтствующія другъ другу приращенія переменныхъ x , y и z .

Выкладки съ такими бесконечно-малыми величинами очень удобны въ приложеніяхъ къ геометрическимъ, механическимъ и другимъ задачамъ, такъ какъ является возможность съ самаго начала откидывать члены, которые не повліяютъ на результатъ. Слѣдуетъ однако внимательно разсмотрѣть, дѣйствительно ли откидываемые члены высшаго порядка малости, чѣмъ оставшіеся.

§ 63. Производныя высшихъ порядковъ.

Изъ уравненія:

$$y = f(x)$$

мы получили уравненіе:

$$y + dy = f(x + dx),$$

обозначивъ черезъ dy то приращеніе y , которое соотвѣтствуетъ приращенію x на dx . Если теперь дадимъ x еще разъ приращеніе dx , то вообще y , конечно, возрастетъ не на dy , но на величину, отличающуюся отъ dy на величину бесконечно малую (второго порядка,

какъ мы сейчасъ увидимъ). Эту бесконечно малую обозначимъ черезъ d^2y и поэтому напишемъ:

$$y + dy + (dy + d^2y) = f(x + 2dx),$$

или:

$$d^2y = f(x + 2dx) - 2f(x + dx) + f(x);$$

но съ другой стороны, по формулѣ Тейлора, откидывая члены начиная съ третьяго порядка:

$$f(x + dx) = f(x) + dx \cdot f'(x) + \frac{dx^2}{2} f''(x),$$

и также:

$$f(x + 2dx) = f(x) + 2dx \cdot f'(x) + 2dx^2 f''(x).$$

Подставляемъ и сокращаемъ, тогда получается:

$$d^2y = f''(x) dx^2.$$

Съ одной стороны эта формула показываетъ, что d^2y бесконечно-малая второго порядка, и съ другой стороны она дѣлаетъ понятнымъ, почему вторую производную обозначаютъ черезъ

$$\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Но здѣсь надо устранить еще одно сомнѣніе: при составленіи dy мы откинули бесконечно-малыя высшихъ, чѣмъ перваго, порядковъ; не слѣдовало ли ихъ снова ввести въ вычисленія, если мы подставляемъ dy въ выраженія, которыя даютъ величины только второго порядка?

На это можно замѣтить слѣдующее: d^2y получено нами посредствомъ вычитанія двухъ значеній dy ; если бы въ выраженіе для dy мы включили члены второго порядка малости, то въ разности появились бы отъ этого члены только третьяго порядка, которые можно пропустить, когда остаются члены второго порядка.

Тѣмъ же способомъ, какъ мы получили дифференціалы второго порядка, можно составить дифференціалы высшихъ порядковъ. При этомъ мы будемъ считать, что всѣ приращенія dx , которыя придется взять для этой цѣли, равны между собой. Это выражаютъ тѣмъ, что говорятъ: дифференціалъ независимой переменнѣй постоянной, высшіе дифференціалы ея равны нулю.

«Та переменная, дифференціалъ которой постоянна, называется независимой»—это положеніе обратное предыдущему и можетъ служить опредѣленіемъ независимой переменнѣй.

Отсюда слѣдуетъ, что, пока дѣло касается дифференціаловъ перваго порядка, нѣтъ надобности рѣшать, которую изъ переменныхъ принять за независимую; но какъ только мы переходимъ къ диф-

дифференціаламъ высшихъ порядковъ, надо выбрать независимую переменную.

Правило § 40 для получения второй производной произведения получается посредствомъ вычисленийъ съ безконечно-малыми очень просто:

$$y = uv,$$

$$dy = u dv + v du,$$

$$d^2y = (u d^2v + du dv) + (v d^2u + dv du) = u d^2v + 2du dv + v d^2u.$$

Такъ же легко получить правило (еще не приведенное выше) для нахождения второй производной функции отъ функции. Мы имѣемъ:

$$y = f(z), \quad z = \varphi(x),$$

$$dy = f'(z) dz, \quad dz = \varphi'(x) dx.$$

При новомъ дифференцированіи слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что z не есть независимая переменная; значить, нельзя считать, что dz есть постоянная, а нужно его дифференцировать. Это даетъ:

$$d^2y = f''(z) dz^2 + f'(z) d^2z, \quad d^2z = \varphi''(x) dx^2,$$

т. е. въ результатѣ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(z) \varphi'(x)^2 + f'(z) \varphi''(x).$$

Отсюда ясно, что обозначеніе d^2y только тогда имѣетъ опредѣленный смыслъ, когда указано, какую величину принимать за независимую переменную.

§ 64. Перемѣна независимой переменной.

Иногда во время выкладокъ обнаруживается, что полезно отнять роль независимой переменной у той переменной, которая первоначально была принята за независимую, и другую переменную принять за независимую. Для того, чтобы такое измѣненіе было возможно безъ возобновленія всѣхъ выкладокъ, надо установить нѣкоторыя формулы, которыя позволяютъ отъ производныхъ разныхъ порядковъ, взятыхъ по одной переменной, перейти къ производнымъ взятымъ по другой переменной. Легче всего получить эти формулы посредствомъ вычисленийъ съ безконечно-малыми; притомъ нѣтъ надобности считать одну изъ встрѣчающихся переменныхъ за независимую, а лучше всѣ переменныя разсматривать, какъ функции новой вспомогательной переменной t , которую затѣмъ можно отождествить съ любой изъ данныхъ переменныхъ. Вѣдь, вообще зависимость между двумя переменными x и y можно всегда представить аналитически тѣмъ, что выразить каждую изъ переменныхъ посредствомъ вспомогательной величины t и притомъ считать соответствующими

такія значенія x и y , которыя получаются при томъ же значеніи t . Напр., уравненіе:

$$x^2 + y^2 = 1 \dots \dots \dots (1)$$

удовлетворяется, если положить:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2} \dots \dots \dots (2)$$

Можно считать, что координаты точки опредѣляются равенствами:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \dots \dots \dots (3)$$

Если исключить t изъ этихъ равенствъ, то получимъ уравненіе, выражающее связь между x и y ; это уравненіе будетъ уравненіемъ кривой, на которой въ любой моментъ находится рассматриваемая точка, т. е. она представляетъ траекторію движенія точки. Изъ уравненій (3) получаемъ:

$$dx = \varphi'(t) dt, \quad dy = \psi'(t) dt, \dots \dots \dots (4)$$

независимо отъ того, которую изъ переменныхъ принять за независимую. Когда мы переходимъ къ высшимъ дифференціаламъ, то часто бываетъ полезно не условливаться относительно независимой переменной, а принимать во вниманіе дифференціалы высшихъ порядковъ всѣхъ трехъ переменныхъ x , y и t ; формулы, полученные такимъ образомъ, справедливы, какую бы переменную ни принять за независимую, и могутъ быть легко упрощены при любомъ выборѣ ея. Поступая такимъ образомъ, получаемъ:

$$d^2x = \varphi''(t) dt^2 + \varphi'(t) d^2t, \quad d^2y = \psi''(t) dt^2 + \psi'(t) d^2t \dots (5)$$

Если за независимую переменную принять t , то надо положить $d^2t = 0$, тогда эти уравненія просто даютъ зависимость между дифференціалами и производными высшихъ порядковъ отъ y и x по t . Но если выбрать x за независимую переменную, то надо позаботиться о томъ, чтобы во всѣхъ формулахъ было принято во вниманіе условіе $d^2x = 0$, тогда

$$d^2t = -\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} dt^2 \dots \dots \dots (6)$$

Если подставимъ это выраженіе въ выраженіе для d^2y , то получимъ:

$$d^2y = \left(\psi''(t) - \frac{\psi'(t) \varphi''(t)}{\varphi'(t)} \right) dt^2; \dots \dots \dots (7)$$

послѣ приведенія къ одному знаменателю и раздѣленія на dx^2 , получаемъ эту формулу въ такомъ видѣ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t) \varphi'(t) - \psi'(t) \varphi''(t)}{\varphi'(t)^3} \dots \dots \dots (8)$$

Наконецъ, если хотимъ, чтобы y было независимой переменнoй, то мы должны въ послѣдней формулѣ вездѣ обмѣнить x на y и наоборотъ, тогда получаемъ:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{\psi'(t)^3} \dots \dots \dots (9)$$

Чтобы выразить $\frac{d^2y}{dx^2}$ черезъ производныя отъ x по y , надо связать равенства (8) и (9) и воспользоваться равенствомъ (4), тогда получаемъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 \dots \dots \dots (10)$$

и такъ же обратно:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = - \frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \dots \dots \dots (11)$$

Примѣръ:

$$x = t - t^3, \quad y = 1 - t^2,$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 3t^2, \quad \frac{dy}{dt} = -2t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -6t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2(1-3t^2) - 2t \cdot 6t}{(1-3t^2)^3} = \frac{-2-6t^2}{(1-3t^2)^3},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{-2-6t^2}{8t^3} = \frac{-1-3t^2}{4t^3}.$$

Для исключенія t можно посредствомъ дѣленія найти значеніе $\frac{x}{y}$ и подставить это значеніе въ одно изъ уравненій; получимъ: $y = 1 - \frac{x^2}{y^2}$, или $x = \sqrt{y^2 - y^3}$ (нахожденіе y требуетъ рѣшенія уравненія третьей степени).

Дифференцированіе даетъ:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \frac{2y - 3y^2}{\sqrt{y^2 - y^3}} = \frac{1 - \frac{3}{2}y}{\sqrt{1-y}},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{1-y}} - \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{3}{2}y\right)(-1)}{(\sqrt{1-y})^3} =$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{1-y})^3} \left(-3(1-y) + 1 - \frac{3}{2}y\right) = \frac{-1 + \frac{3}{4}y}{(\sqrt{1-y})^3}.$$

Если здѣсь подставить вмѣсто y его выраженіе $(1-t^2)$, то снова получится для $\frac{d^2x}{dy^2}$ выраженіе, выписанное выше.

Г Л А В А IX.

Функции двухъ переменныхъ величинъ.

§ 65. Частныя производныя.

До сихъ поръ намъ приходилось имѣть дѣло съ двумя переменными величинами, между которыми существуетъ какая-нибудь зависимость, такъ что каждую изъ нихъ мы можемъ разсматривать, какъ функцію другой.

Немногимъ отличается отъ этого случая тотъ, когда n переменныхъ величинъ связаны между собою $(n - 1)$ уравненіями. Ибо въ этомъ случаѣ отъ этихъ уравненій мы можемъ перейти къ другимъ, которыя будутъ содержать только двѣ переменныхъ. И тогда всѣ переменныя, за исключеніемъ одной, могутъ быть разсматриваемы какъ функціи этой послѣдней.

Если же число зависимостей болѣе, чѣмъ на единицу меньше числа переменныхъ, то вообще отъ этихъ уравненій нельзя перейти къ уравненіямъ, которыя бы содержали только двѣ переменныхъ; такъ что, если мы дадимъ одной изъ переменныхъ определенное значеніе, то этимъ еще не будутъ определены значенія остальныхъ переменныхъ. Мы тутъ будемъ заниматься простѣйшимъ изъ сюда относящихся случаевъ, который однако обниметъ все существенное въ этомъ вопросѣ; а именно, мы будемъ заниматься случаемъ, когда между тремя переменными существуетъ одна зависимость. Физическимъ примѣромъ на такого рода зависимость является газъ. Состояніе ограниченнаго количества газа можетъ быть определено заданіемъ трехъ величинъ: объемомъ v , который занимаетъ данный газъ, его абсолютной температурой T и наконецъ упругостью p (давленіемъ, которое газъ производитъ на 1 кв. см.).

Между этими величинами существуетъ зависимость, которая для случая «идеальнаго газа» выражаетъ собою комбинацію законовъ Бойля и Гэ-Люссака:

$$pv = RT \dots \dots \dots (1)$$

Причемъ R (для даннаго количества газа) представляетъ изъ себя величину постоянную. Для обыкновенныхъ газовъ этотъ законъ имѣетъ болѣе сложный видъ, на которомъ мы тутъ не будемъ подробно останавливаться.

Изъ данныхъ величинъ p , v , T мы можемъ мѣнять произвольно не одну только величину, а двѣ; напримѣръ, одновременно повышать температуру и увеличивать упругость (давленіе). Третья величина опредѣлится тогда изъ уравненія (1). Словами это мы такъ вы-

разимъ: изъ трехъ величинъ двѣ въ настоящемъ случаѣ могутъ считаться переменными независимыми, третья же будетъ ихъ функцией.

Въ отвлеченныхъ математическихъ изслѣдованіяхъ принято независимыя переменныя обозначать буквами x и y , а функцию ихъ черезъ z .

Если мы хотимъ выразить, что z есть функция переменныхъ x и y , не задавая самаго вида зависимости, а только указывая на нее, мы пишемъ:

$$z = f(x, y).$$

(Тутъ необходимо между x и y поставить запятую, чтобы не смѣшавъ неопредѣленной функции отъ x и y съ функцией отъ произведения xy , что будетъ изъ себя представлять гораздо болѣе частный видъ зависимости).

Теперь возникаетъ вопросъ, какая зависимость существуетъ между бесконечно-малыми измѣненіями x и y и соответственнымъ измѣненіемъ функции z ?

Чтобы дать общій отвѣтъ на этотъ вопросъ, рассмотримъ сначала два частныхъ случая.

1. Измѣнимъ сначала x на бесконечно-малую величину dx ; y же оставимъ безъ переменны; z , въ тѣхъ случаяхъ, съ которыми мы имѣемъ дѣло, тоже измѣнится на бесконечно малую величину. Эту величину мы назовемъ «частнымъ дифференціаломъ z по x » и обозначимъ его черезъ

$$\partial_x z \dots \dots \dots (3)$$

Если мы его раздѣлимъ на dx , то мы получимъ «частную производную z по x », которую принято обозначать черезъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} \dots \dots \dots (4)$$

(Круглыя ∂ , вмѣсто прямыхъ d , какъ это принято было писать нами). Причемъ индексъ x при z опускается, такъ какъ въ этомъ случаѣ знаменатель дроби указываетъ на соответственную переменную. Можно эту частную производную значить, опредѣлить такимъ образомъ:

Составимъ разностное отношеніе:

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \dots \dots \dots (5)$$

и затѣмъ посмотримъ, во что обратится оно, когда мы положимъ $\Delta x = 0$. Для составленія такихъ частныхъ производныхъ намъ не нужно никакихъ новыхъ правилъ; какъ это слѣдуетъ изъ самого опредѣленія, y въ уменьшаемомъ и вычитаемомъ сохраняемъ одно

и то же значеніе, т. е. другими словами, его можно разсматривать какъ величину постоянную.

Это обстоятельство мы такъ формулируемъ словами:

Если намъ нужно сдѣлать частное дифференцирование по x некоторой функции отъ переменныхъ независимыхъ x и y , то намъ нужно при этомъ поступать такъ, какъ будто бы y было числомъ постояннымъ, а z было бы только функцией одного x .

2. Совершенно подобнымъ же образомъ мы можемъ разсмотрѣть вопросъ о томъ, что сдѣлается съ функцией z , когда переменная x останется безъ переменны, а y измѣнится на бесконечно-малую величину dy . Мы получимъ въ этомъ случаѣ частный дифференціалъ ∂_z функции z по x , а также соотвѣтственную частную производную:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left\{ \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

$\Delta y = 0.$

3. Наконецъ, мы можемъ спросить себя, какъ измѣнится z , если мы одновременно измѣнимъ — x на бесконечно-малую величину dx ; y бесконечно малую величину dy . Эти двѣ бесконечно малыя величины совершенно другъ отъ друга независимы и совершенно произвольны; мы не можемъ сказать, будутъ ли эти бесконечно-малыя одного и того же порядка или будетъ ли одна изъ нихъ бесконечно-малой величиной какого-нибудь опредѣленнаго порядка по отношенію къ другой; но именно въ силу того, что эти величины произвольны, предположимъ величины dx и dy бесконечно-малыми одного и того же порядка. Предположимъ эти величины бесконечно-малыми перваго порядка (ибо отъ насъ совершенно зависитъ выборъ порядка бесконечно-малыхъ величинъ). Въ этомъ случаѣ мы можемъ приближенно (пренебрегая бесконечно-малыми высшихъ порядковъ) опредѣлить соотвѣтственное (для тѣхъ функций, которыми мы занимаемся, вообще бесконечно-малое) измѣненіе z .

Примѣнимъ для этой цѣли дважды теорему о среднемъ значеніи (§ 41).

Введемъ для простоты обозначенія:

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f_2(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \dots \dots \dots (7)$$

Тогда мы получимъ:

$$f(x + dx, y + dy) - f(x + dx, y) = f_2(x + dx, y) dy + dy^2 =$$

$$= f_2(x, y) dy + (dx \cdot dy) + dy^2,$$

$$f(x + dx, y) - f(x, y) = f_1(x, y) dx + dx^2.$$

Значить, пренебрегая безконечно-малыми второго и высшихъ порядковъ, будемъ имѣть:

$$f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy.$$

Правую часть этого равенства называютъ полнымъ дифференціаломъ функции z . Нужно тутъ, впрочемъ, еще замѣтить, что мы примѣнили теорему о среднемъ значеніи не только къ функции f , но и къ функции f_1 (или f_2); такъ, что по крайней мѣрѣ, одна изъ этихъ функцийъ должна удовлетворять условіямъ, необходимымъ для примѣненія къ ней теоремы о среднемъ значеніи.

66. Производныя высшихъ порядковъ функцийъ отъ двухъ переменныхъ.

Если мы продифференцируемъ обѣ частныхъ производныхъ еще разъ по x и y , то мы получимъ вторыя частныя производныя, которыя обыкновенно обозначаются такъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= f_{11}, & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= f_{12}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= f_{21}, & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= f_{22}. \end{aligned}$$

Однако, эти четыре частныхъ производныхъ для всѣхъ тѣхъ функцийъ, которыми мы занимаемся, не всѣ между собою различны; двѣ изъ нихъ равны между собою, а именно:

$$f_{12} = f_{21} \dots \dots \dots (1)$$

Для этихъ двухъ величинъ употребляется еще обозначеніе:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Доказательство этого послѣдняго замѣчанія не представляетъ никакого затрудненія, если мы $f(x + h, y + k)$ приближенно выразимъ цѣлой рациональной функцией второй степени относительно величинъ h и k ; мы получимъ тогда черезъ повторное примѣненіе теоремы о среднемъ значеніи слѣдующее:

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) &= f(x, y + k) + h f_1(x, y + k) + \frac{h^2}{2} f_{11}(x, y + k) + (h^3) = (2) \\ &= f(x, y) + k f_2(x, y) + \frac{k^2}{2} f_{22}(x, y) + (k^3) + \\ &\quad + h f_1(x, y) + hk f_{12}(x, y) + (hk^2) + \\ &\quad + \frac{h^2}{2} f_{22}(x, y) + (h^2 k) + \\ &\quad + (h^3). \end{aligned}$$

Если бы мы начали разложение сначала по степенямъ k , а потомъ отдѣльные члены стали бы разлагать по степенямъ h , то мы получили бы совершенно тотъ же результатъ; только f_{21} на мѣстѣ f_{12} . Отсюда слѣдуетъ:

$$hk f_{12}(x, y) - hk f_{21}(x, y) = (hk)^3, \dots \dots \dots (3)$$

гдѣ $(hk)^3$ обозначаетъ сумму членовъ, которые по отношенію къ h и k по крайней мѣрѣ третьяго порядка. Если мы теперь предположимъ h и k бесконечно-малыми величинами перваго порядка, то въ уравненіи (3) члены низшаго порядка, а именно втораго, сами по себѣ должны быть равны нулю. Это же возможно, при совершенно произвольныхъ бесконечно-малыхъ h и k , лишь тогда, когда

$$f_{12} = f_{21}$$

что и требовалось доказать.

Пусть, напримѣръ,

$$f(x, y) = \log(x + y) - \log(x - y).$$

Тогда

$$f_1(x, y) = \frac{1}{x + y} - \frac{1}{x - y},$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y}$$

$$f_{11}(x, y) = -\frac{1}{(x + y)^2} + \frac{1}{(x - y)^2}$$

$$f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y) = -\frac{1}{(x + y)^2} - \frac{1}{(x - y)^2}$$

$$f_{22}(x, y) = -\frac{1}{(x + y)^2} - \frac{1}{(x - y)^2}.$$

§ 67. Неявные функции.

Очень часто случается, что законъ зависимости между переменными x и y данъ въ видѣ уравненія:

$$F(x, y) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

рѣшить которое относительно y -ка вообще или невозможно или рѣшеніе котораго представляется въ очень неудобной формѣ.

Въ этихъ случаяхъ весьма желателенъ способъ, при помощи котораго можно было бы найти производныя y по x безъ того, чтобы нужно было рѣшить уравненіе (1) относительно y -ка.

Такой способъ дѣйствительно существуетъ и вытекаетъ изъ соображеній § 65.

Ибо, если переменныя x и y связаны равенствомъ (1), т. е. могутъ получать только такія соотвѣтствующія другъ другу значенія, при которыхъ $F(x, y)$ постоянно сохраняетъ значеніе нуль, то приращеніе функціи (полный дифференціалъ) для всѣхъ приращеній dx и dy , удовлетворяющихъ данному условію, должно быть всегда равно нулю, т. е. должно имѣть мѣсто равенство:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Это можно высказать и обратно: соотвѣтственныя значенія приращеній x и y , dx и dy , постоянно должны удовлетворять условію (2), или, что то же самое:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \dots \dots \dots (3)$$

Такъ какъ отношенія соотвѣтственныхъ дифференціаловъ y и x даетъ намъ производную y по x , то уравненіе (3) какъ разъ и даетъ намъ искомую производную безъ всякой необходимости въ рѣшеніи уравненія.

При этомъ надо замѣтить, что въ выраженіе этой производной входитъ теперь не одно только x , какъ во всѣхъ ранѣе изученныхъ нами случаяхъ, но обѣ переменныя x и y .

Но это совершенно дѣлу не вредить. Ибо если мы хотимъ, напримеръ, построить касательную къ кривой въ определенной точкѣ ея (для чего намъ и нужно знать $\frac{dy}{dx}$), то мы должны раньше всего знать эту точку, т. е. ея координаты. Вычисленіе же y по данному численному значенію x , какъ мы видѣли это въ §§ 46 и 47, есть задача, которую во многихъ случаяхъ можно рѣшить съ любой степенью точности и въ тѣхъ случаяхъ, когда мы не имѣемъ общихъ формулъ рѣшенія уравненія.

Для примѣра возьмемъ такое уравненіе, которое мы умѣемъ рѣшить въ общемъ видѣ, для того, чтобы сравнить результаты, которые мы получимъ, идя двумя различными путями.

Пусть дано:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Тогда дифференцированіе по способу дифференц. неявн. функцій дастъ намъ:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2x}{2y} = - \frac{x}{y}.$$

Рѣшеніе уравненія относительно y дастъ намъ:

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

отсюда

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Чтобы изъ перваго найденнаго нами значенія для $\frac{dy}{dx}$ получить второе, нужно только въ первомъ y замѣнить его значеніемъ $\sqrt{1-x^2}$.

Тѣмъ же способомъ можно получать и производныя высшихъ порядковъ.

Продифференцируемъ равенство (2) еще разъ, мы получимъ тогда:

$$(F_{11} dx + F_{12} dy) dx + F_1 d^2x + (F_{21} dx + F_{22} dy) dy + F_2 d^2y = 0.$$

Если разсматривать x , какъ переменную независимую, то мы должны положить:

$$d^2x = 0.$$

Тогда мы получимъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{1}{F_2} \left\{ F_{11} + 2F_{12} \frac{dy}{dx} + F_{22} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}$$

или, принимая во вниманіе ур-ніе (2), будемъ имѣть:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{F_{11} F_2^2 - 2F_{12} F_1 F_2 + F_{22} F_1^2}{F_2^3}$$

и т. д.

§ 68. Функции отъ функций двухъ переменныхъ.

Пусть переменная z зависитъ отъ двухъ переменныхъ u и v , которыя въ свою очередь суть функции переменныхъ x и y ; очевидно, что z въ этомъ случаѣ есть функция переменныхъ независимыхъ x и y .

Формулами это выражается такъ:

$$z = f(u, v), \quad u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y) \dots \dots (1)$$

Намъ нужно выразить производныя z по x и y черезъ производныя z по переменнымъ u и v и производныя переменныхъ u и v по переменнымъ x и y .

Отвѣтъ на подобный же вопросъ для случая функции отъ одной переменной независимой мы уже нашли въ § 24.

Подобный же способъ и тутъ приведетъ насъ къ цѣли, причемъ удобнѣе всего будетъ намъ прибѣгнуть къ составленію полныхъ дифференціаловъ. Мы будемъ имѣть:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \dots \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Однако, во избѣжаніе возможныхъ ошибокъ, намъ надо хорошенько отдать себѣ отчетъ въ томъ, что обозначаютъ встрѣчающіяся въ этихъ формулахъ величины.

Въ уравненіи (2) du и dv выражаютъ произвольныя безконечно-малыя приращенія u и v . dz выражаетъ то измѣненіе z , которое оно получаетъ, когда u и v получаютъ приращеніе du и dv . Въ уравненіи же (3) dx и dy обозначаютъ произвольныя измѣненія x и y , а du и dv —тѣ измѣненія u и v , которыя соотвѣтствуютъ измѣненіямъ x и y на dx и dy .

Значитъ, въ уравненіи (2) du и dv имѣютъ болѣе широкій смыслъ (какъ величины совершенно произвольныя), чѣмъ въ уравненіи (3)

Но именно въ силу полной общности ихъ значеній въ ур-ніи (2), обнимающей собой всѣ частные случаи, мы и можемъ съ помощью ур-нія (2) рѣшить нашу задачу, т. е. найти то измѣненіе, которое получаетъ z , когда u и v получаютъ приращенія du и dv , соотвѣтствующія измѣненіямъ x и y на dx и dy .

А именно, подставляя въ выраженіе (2) для dz значенія (3) для du и dv , мы получимъ:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy (4) \end{aligned}$$

Съ другой стороны, мы имѣемъ:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy (5)$$

Если мы желаемъ, чтобы выраженія (4) и (5) были равны другъ другу для любыхъ значеній dx и dy , то мы должны имѣть равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} (6)$$

Этимъ самымъ мы и нашли искомыя выраженія для частныхъ производныхъ функций z по x и y ; формула § 24 получится отсюда, какъ частный случай, если мы предположимъ, что z зависитъ только отъ u , а u только отъ x .

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Одинъ частный случай имѣетъ особенный интересъ. Пусть нѣкоторая величина, которая разсматривалась сначала какъ функция

двухъ переменныхъ u и v , рассматривается затѣмъ, какъ функція двухъ переменныхъ x и y , причемъ x тождественно совпадаетъ съ u ; другая же величина y остается неопредѣленной; намъ извѣстно лишь, что функція v сама есть функція отъ x (или что то же самое u) и y .

Въ этомъ случаѣ $\frac{\partial z}{\partial u}$ не равно тождественно $\frac{\partial z}{\partial x}$, но изъ формулы (6) мы будемъ имѣть (въ силу того, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Если мы въ такихъ случаяхъ хотимъ въ нашихъ формулахъ сохранить только одну изъ буквъ u или x , то необходимо, когда дѣло идетъ о производной z по x , прибавлять еще, которая изъ переменныхъ v или y при этомъ рассматривается, какъ вторая переменная независимая.

Намъ приходится отличать частную производную z по x «при постоянномъ y » отъ частной производной z по x «при постоянномъ v », для чего служатъ оба значенія:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y = \text{const}}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{v = \text{const}},$$

или еще короче, но менѣе опредѣленно, можно отличать между собою оба эти случая, если условиться при знакѣ $\frac{\partial z}{\partial x}$ для одного изъ этихъ случаевъ сохранить скобку; на примѣръ, писать, вмѣсто первой изъ упомянутыхъ производныхъ, просто $\frac{\partial z}{\partial x}$, а для второй уже тогда $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$, или наоборотъ.

Очень важныя примѣненія находятъ эти формулы, когда мы изучаемъ функціи состоянія нѣкотораго газа.

Состояніе газа, какъ было уже сказано въ § 65, опредѣляется тремя переменными: упругостью p , абсолютной температурой T и объемомъ v , между которыми существуетъ упомянутая зависимость:

$$pv = RT, \dots \dots \dots (9)$$

такъ что изъ этихъ трехъ переменныхъ только двѣ могутъ рассматриваться, какъ независимыя переменныя. Мы можемъ какую-нибудь величину, зависящую отъ состоянія газа, на примѣръ, количество тепла, содержащагося въ этомъ газѣ, Q , рассматривать, какъ функцію T и p или какъ функцію T и v . Небольшому измененію тем-

пературы dT соотвѣтствуетъ тогда небольшое измѣненіе dQ ; чтобы повысить температуру на dT , мы должны придать газу dQ тепла, пропорціональное dT , т. е. равное cdT .

Величину c , на которую нужно умножить увеличеніе температуры dT , мы назовемъ теплоемкостью (специфической теплотой) газа. Эту величину мы можемъ также, на основаніи вышесказаннаго, опредѣлить, какъ частную производную отъ количества тепла, взятую по температурѣ, т. е.

$$c = \frac{\partial Q}{\partial T} \dots \dots \dots (10)$$

Но это опредѣленіе лишь тогда получаетъ опредѣленный смыслъ, когда мы укажемъ, какая изъ двухъ переменныхъ p или v , рядомъ съ температурой, рассматривается какъ переменная независимая.

И то и другое само по себѣ возможно. Мы можемъ говорить о «теплоемкости при постоянномъ давленіи» и о «теплоемкости при постоянномъ объемѣ».

Мы имѣемъ дѣло съ первой изъ нихъ, когда мы, увеличивая количество тепла, сохраняемъ упругость (давленіе) газа постоянной; со второй—когда объемъ газа остается постояннымъ.

Пользуясь выведенными нами формулами, мы получимъ:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{p=const} = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{v=const} + \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_{T=const} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=const} \dots (11)$$

Тутъ, на основаніи ур-нія (9):

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=const} = \frac{R}{p} \dots \dots \dots (12)$$

Далѣе, для случая идеальнаго газа, количество тепла, которое ему надо придать для того, чтобы увеличить его объемъ на dv при постоянной температурѣ, равно $p dv$; значить:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_{T=const} = p \dots \dots \dots (13)$$

Если мы для обѣихъ теплоемкостей введемъ обычныя обозначенія: c_p и c_v , то уравненіе (11) можетъ быть переписано такъ:

$$c_p - c_v = R \dots \dots \dots (14)$$

Это значить, что разность между обѣими теплоемкостями равняется для даннаго газа величинѣ постоянной.

Тутъ нужно замѣтить, что все разсужденіе относится къ единицѣ массы газа, а за единицу тепла выбрано то количество тепла, которое эквивалентно единицѣ работы.



Г Л А В А X.

Тригонометрическія и круговыя функціи.

§ 69. Определеіе тригонометрическихъ функцій.

Нѣкоторыя изъ тѣхъ зависимостей, которыя просто опредѣляются геометрически или механически, нельзя выразить посредствомъ вышеупотреблявшихся обозначеній. Къ этому роду зависимостей принадлежатъ всѣ законы, относящіеся къ періодическимъ явленіямъ, т. е. къ такимъ явленіямъ, которыя, какъ на примѣръ, астрономическія и метеорологическія, повторяются черезъ нѣкоторые промежутки времени (періоды). Свѣтovyя, звуковыя и электрическія явленія также обнаруживаютъ такого рода періодичность; но періодъ ихъ гораздо короче, что, впрочемъ, для математическаго изслѣдованія не имѣетъ значенія.

Для представленія такого рода явленій нуженъ новый классъ функцій. Чтобы ввести такія функціи, мы разберемъ одинъ простой вопросъ кинематики (ученія о движеніи). Представимъ себѣ, что (фиг. 32) нѣкоторая точка P перемѣщается равномерно по кругу, радіусъ котораго для простоты примемъ равнымъ единицѣ длины. Пусть черезъ центръ круга проходятъ оси ортогональныхъ (составляющихъ между собой прямой уголъ) координатъ. Вообразимъ кромѣ того, что съ точкой P связаны точки Q и R , перемѣщающіяся первая по оси x -овъ, вторая по оси y -овъ такъ, что первая служитъ основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ точки P на ось x -овъ, а вторая — основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго на ось y -овъ. Легко понять, что обѣ точки будутъ совершать каждая по своей оси періодическое колебательное движеніе туда и назадъ, т. е. движеніе будетъ каждый разъ начинаться снова послѣ того, какъ точка P опишетъ полную окружность. Тѣ законы, которые связываютъ абсциссу точки Q и ординату точки R съ временемъ, мы будемъ считать простѣйшими періодическими функціями и будемъ выражать другія періодическія функціи посредствомъ этихъ.

Знаки для этихъ функцій уже введены въ тригонометрію; дѣйствительно, такъ какъ радіусъ принятъ равнымъ единицѣ, то QP или OR есть синусъ, а OQ или RP есть косинусъ угла QOP . Примемъ за начало счета времени тотъ моментъ, когда точка P проходитъ черезъ положительное направленіе оси x -овъ; такъ какъ уголъ QOP возрастаетъ, согласно нашему допущенію, въ равныя времена на одинаковыя величины, то уголъ пропорціоналенъ времени, и мы можемъ, принимая во вниманіе начало счета времени, выразить уголъ QOP черезъ ωt , гдѣ ω — коэффициентъ пропорціональности. Тогда по-

лучается: $OQ = \cos \omega t, OR = \sin \omega t.$

Эти равенства справедливы не только численно, но и по знаку, гдѣ бы точка P ни находилась (это уже было выяснено въ § 10) и это потому, что соглашенія относительно знаковъ координатъ и знаковъ синуса и косинуса соотвѣтствуютъ другъ другу.

Относительно угловъ слѣдуетъ принять другія соглашенія; въ тригонометріи углы измѣряются обыкновенно въ градусахъ, минутахъ и секундахъ; за основной уголъ принимаютъ прямой уголъ, который раздѣляютъ на 90 градусовъ, а градусъ на 60 минутъ, но для нашихъ цѣлей лучше ввести другую единицу: за единицу измѣренія угловъ мы примемъ такой центральный уголъ, длина дуги котораго равна радіусу.

Величину этого угла легко найти изъ слѣдующихъ соображеній. Центральный уголъ, длина дуги котораго при радіусѣ равномъ единицѣ равна π , т. е. равна полуокружности, равенъ суммѣ двухъ прямыхъ угловъ и содержитъ 180° ; если обозначить черезъ α_1 число градусовъ, содержащихся въ нашей единицѣ измѣренія угловъ, то должно быть:

$$\alpha_1 : 180 = 1 : \pi.$$

Значитъ,

$$\alpha_1 = \frac{180}{\pi},$$

или съ точностью до минутъ

$$\alpha_1 = 57^\circ 18'.$$

Уголъ, который измѣряется въ этихъ дуговыхъ единицахъ числомъ x , заключаетъ число градусовъ, выраженныхъ формулой

$$\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ,$$

или

$$x \cdot 57^\circ 18'.$$

Обратно: уголъ въ α градусовъ измѣряется въ дуговыхъ единицахъ числомъ

$$\frac{\alpha \pi}{180} = 0,01745 \alpha.$$

Для облегченія этихъ переходовъ отъ одного измѣренія къ другому въ логариѳическихъ таблицахъ большею частью помѣщаются вспомогательныя таблички, въ которыхъ съ одной стороны приведены кратныя числа 0,0174533, соотвѣтствующаго углу въ одинъ градусъ, и кратныя числа 0,0002909, соотвѣтствующаго углу въ одну минуту, съ другой стороны кратныя $57^\circ 18' = 3438'$. При пользованіи такими табличками нужно для перехода отъ одного измѣренія къ другому выполнить только сложеніе.

Положимъ, требуется выразить уголъ въ $14^\circ 24'$ (уголъ правильнаго 25-ти угольника) въ дуговой мѣрѣ; тогда надо выполнить та-

кое вычисленіе:	10°	$= 0,17453$
	4°	$= 0,06981$
	$20'$	$= 0,00582$
	$4'$	$= 0,00116$
	$14^\circ 24'$	$= 0,25132.$

Если съ другой стороны требуется найти, сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ, имѣющій въ дуговой мѣрѣ измѣреніе 0,14286, то надо выполнить слѣдующее вычисленіе:

0,1	$= 343',78$
0,04	$= 137',51$
0,002	$= 6',88$
0,0008	$= 2',75$
0,00006	$= 0',21$
0,14286	$= 491',1 = 8^\circ 11',1.$

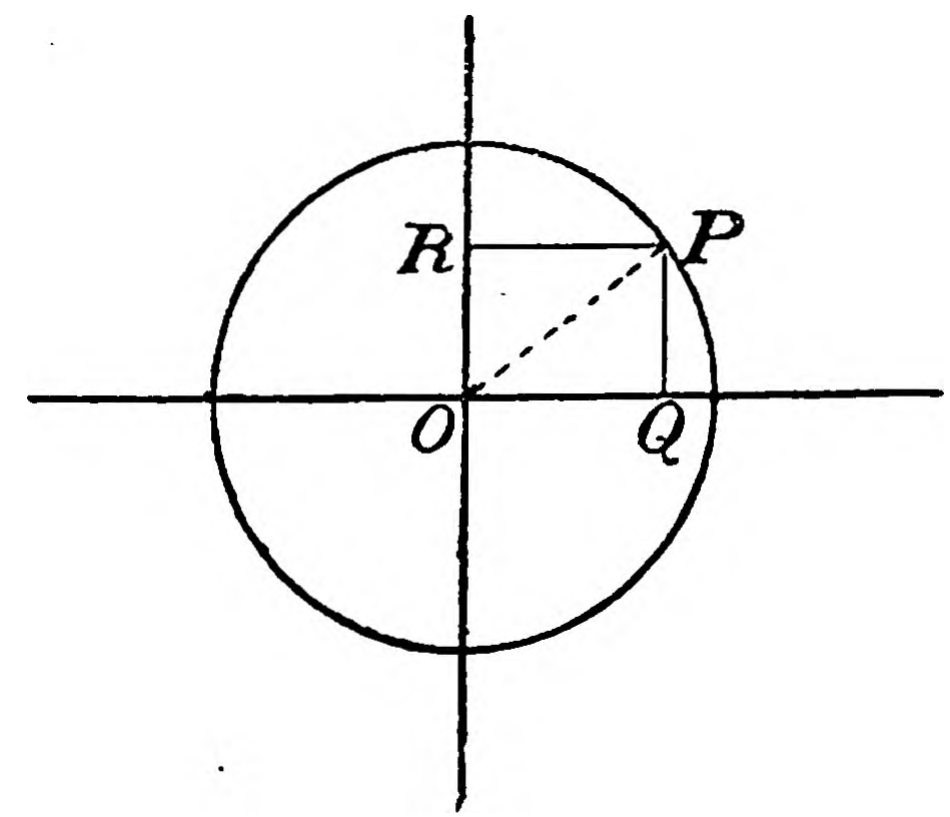
Когда мы далѣе будемъ говорить о $\sin x$, подъ этимъ будемъ разумѣть синусъ того угла, дуговая мѣра котораго x . Напримѣръ, $\sin 1$ есть синусъ угла въ $57^\circ 17' 7$, слѣдовательно, его логарифмъ равенъ

$$9,92502 \text{ (— } 10).$$

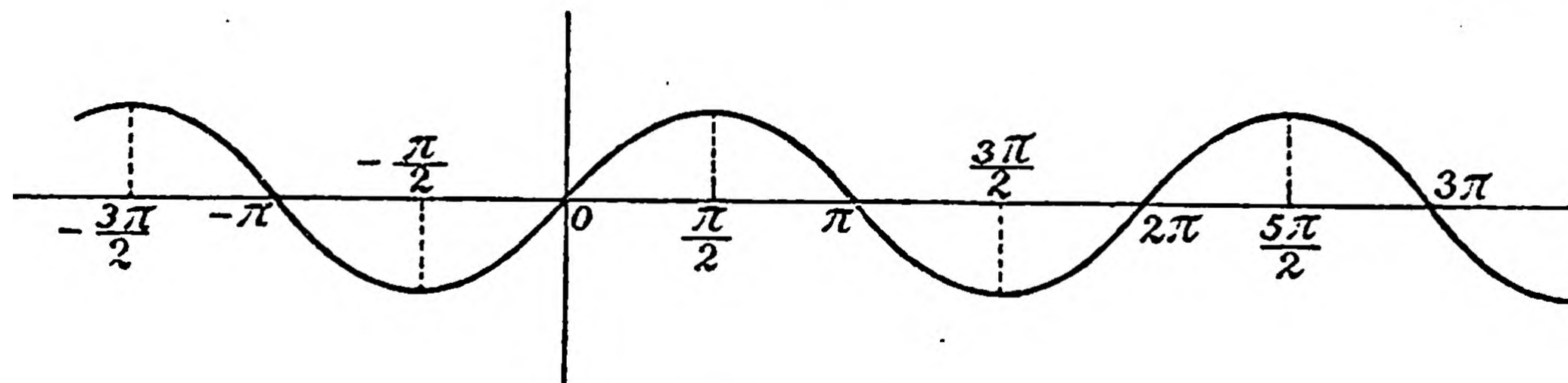
Приведемъ маленькую таблицу тригонометрическихъ функцій \sin , \cos , \tan и \cot , причемъ выразимъ углы въ дуговыхъ единицахъ. Знакъ ∞ надо понимать въ томъ же смыслѣ, какъ въ § 20.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0	0	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	∞
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
2π	0	1	0	∞

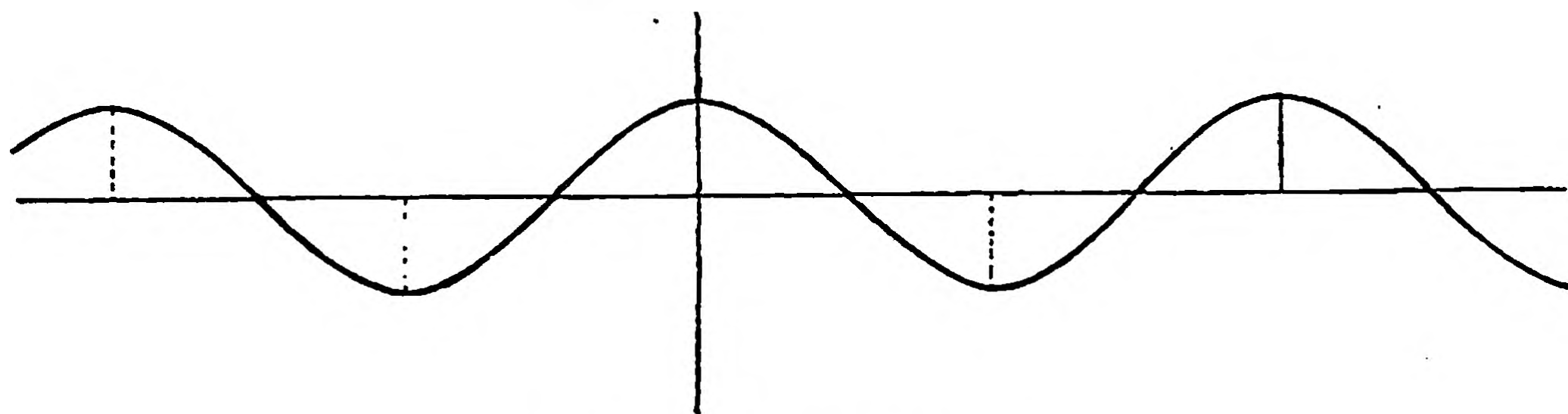
На основаніи этой таблицы и болѣе подробной численной таблицы можно построить графическое представленіе тригонометрическихъ функцій въ видѣ кривыхъ, отнесенныхъ къ прямоугольной декартовой системѣ координатъ; это геометрическое изображеніе приведено на чертежѣ.



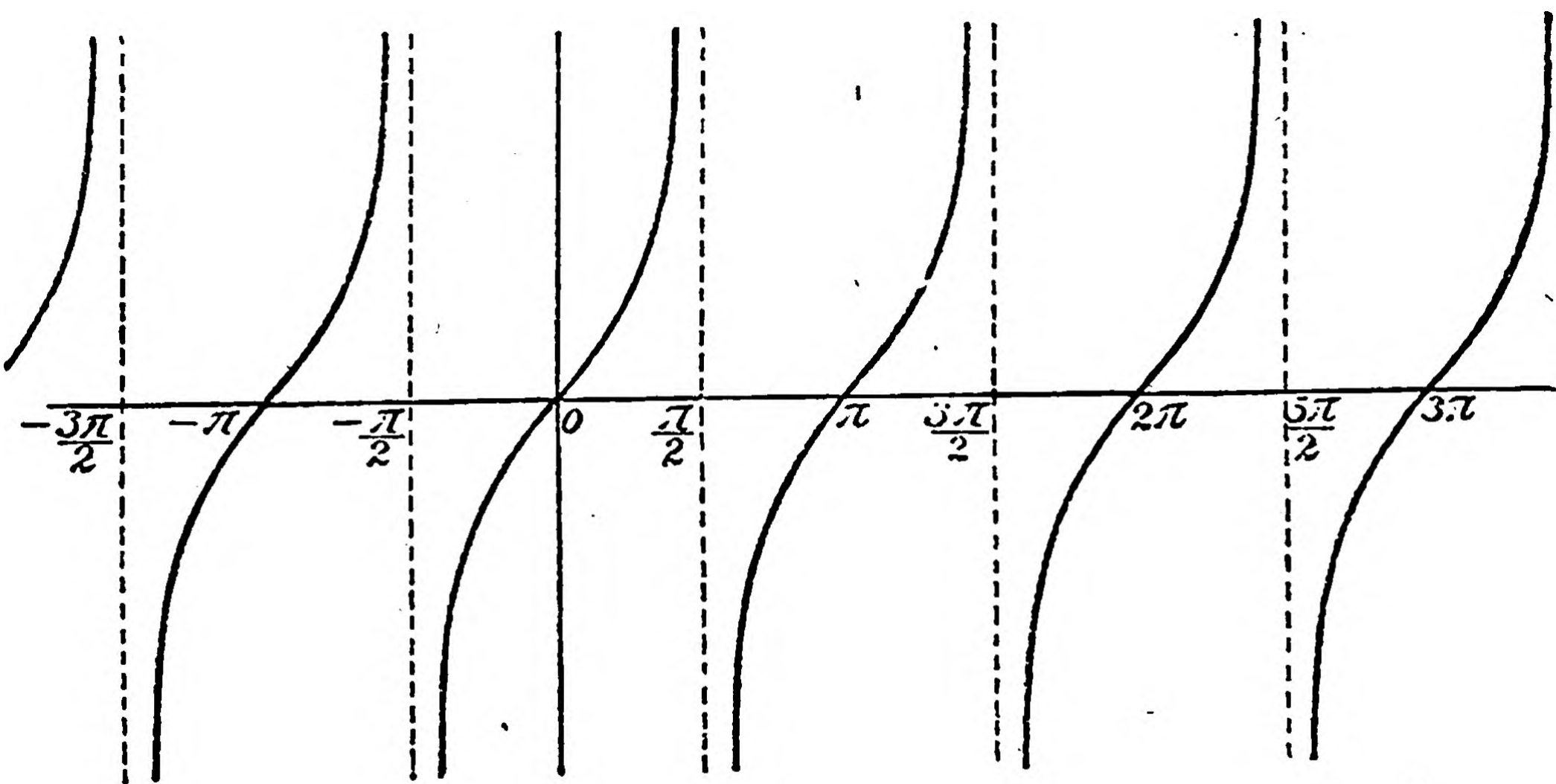
Черт. 32.



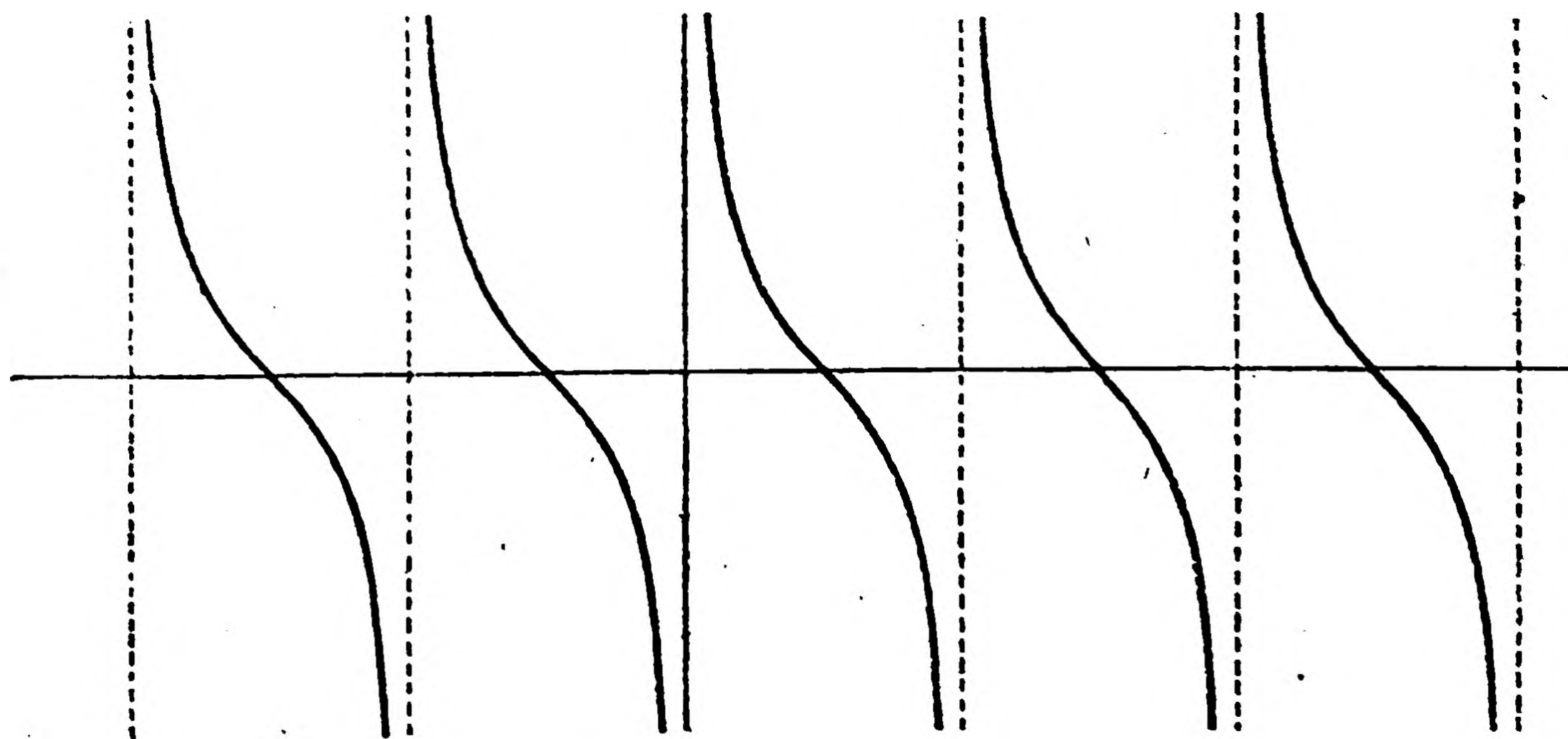
Фиг. 33. $y = \sin x$



Фиг. 34. $y = \cos x$



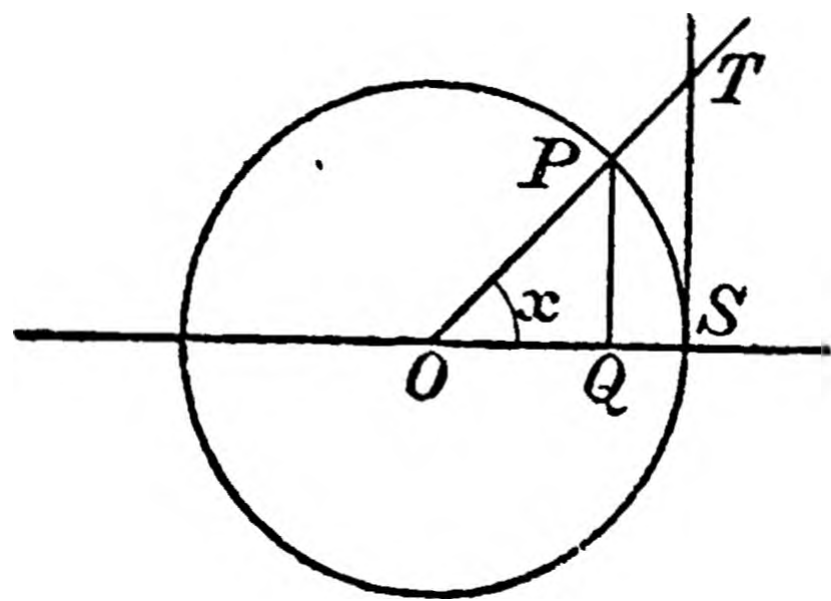
Фиг. 35. $y = \text{tg } x$



Фиг. 36. $y = \text{cot } x$.

§ 70. Дифференцирование функции синусъ.

Для опредѣленія производной $\sin x$ по x мы выведемъ сначала теорему, выражающуюся двумя неравенствами.



Фиг. 37.

Возьмемъ опять кругъ радіуса равнаго единицѣ, въ которую точку P этого круга соединимъ съ центромъ и обозначимъ уголъ, который эта прямая образуетъ съ осью x -овъ черезъ x . Черезъ точку пересѣченія положительнаго направленія оси x -овъ съ окружностью проведемъ касательную и продолжимъ ее до пересѣченія съ OP въ точкѣ T .

Тогда изъ чертежа видно, что

пл. треуг. $SOT >$ пл. сектора $POS >$ пл. треуг. POQ .

Выразимъ площади этихъ фигуръ на основаніи теоремъ элементарной геометріи, а именно:

$$\text{пл. треуг. } SOT = \frac{1}{2} OS \cdot ST = \frac{1}{2} tg x$$

$$\text{пл. сектора } POS = \frac{1}{2} OS \cdot SP = \frac{1}{2} x$$

$$\text{пл. треуг. } POQ = \frac{1}{2} OQ \cdot OP = \frac{1}{2} \sin x \cos x,$$

такъ что получается:

$$tg x > x > \sin x \cos x,$$

или

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > \cos x,$$

или еще такъ:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Но $\cos x$ и $\frac{1}{\cos x}$ при достаточно маломъ x сколь угодно близки къ единицѣ; слѣдовательно, отношеніе $\frac{\sin x}{x}$, которое всегда лежитъ между этими значеніями, тоже сколь угодно мало отличается отъ единицы. При $x = 0$ отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ не имѣетъ опредѣленнаго значенія; однако совершенно такъ же, какъ мы дѣлали въ аналогичныхъ вопросахъ § 55, мы дадимъ этому отношенію при $x = 0$ такое значеніе, которое бы непрерывно примыкало къ остальнымъ значеніямъ этого отношенія; для этого надо положить, что это отношеніе при $x = 0$ равно единицѣ. Мы записываемъ это въ такомъ видѣ:

$$\left. \frac{\sin x}{x} \right|_{x=0} = 1,$$

или еще лучше такъ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Послѣднее обозначеніе выражаетъ, что отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ тѣмъ меньше отличается отъ единицы, чѣмъ меньше само x .

Чтобы теперь получить производную функціи $y = \sin x$ по x , составимъ сначала отношеніе приращеній

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h};$$

это выраженіе по формуламъ тригонометріи преобразовывается въ такое:

$$\frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Пусть теперь уголъ h неограниченно убываетъ, тогда $\frac{h}{2}$ и по-давно убываетъ неограниченно, причемъ по указанной теоремѣ отношеніе:

$$\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

неограниченно приближается къ единицѣ; итакъ, мы получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Здѣсь намъ пришлось трактовать понятіе о производной иначе, чѣмъ въ § 13. Тамъ мы считали за производную «то, что получается изъ отношенія

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

если послѣ всѣхъ преобразованій положить h равнымъ нулю». Въ данномъ случаѣ никакимъ преобразованиемъ нельзя достигнуть того, чтобы можно было выполнить дѣленіе, и поэтому мы вынуждены воспользоваться представленіемъ §§ 54 и 55 и дать опредѣленіе въ видѣ такого равенства:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

т. е. разумѣть подъ производной или значеніемъ этой дроби для $h = 0$ то значеніе, которое заключено между двумя значеніями этой дроби, взятыми для сколь угодно малыхъ отрицательныхъ и поло-

жительныхъ значеній h , если только вообще такое среднее значеніе существуетъ. Раньше производило впечатлѣніе, будто формула даетъ больше, чѣмъ разсужденіе; теперь видно, что формула сама по себѣ все-таки не даетъ всего.

§ 71. Дифференцированіе остальныхъ тригонометрическихъ функцій.

Послѣ того, какъ мы вывели правило дифференцированія синуса, дифференцированіе остальныхъ тригонометрическихъ функцій уже не представляетъ затрудненія. Правило дифференцированія косинуса можно вывести способомъ, совершенно аналогичнымъ тому, который былъ примѣненъ для дифференцированія синуса, или же можно привести эту задачу къ дифференцированію синуса такимъ образомъ:

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right),$$

слѣдовательно:

$$\frac{d \cos x}{dx} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \frac{d \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{dx} = - \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = - \sin x.$$

Для дифференцированія тангенса и котангенса можно просто воспользоваться формулой, приведенной въ § 19; она даетъ:

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 x} \left(\cos x \frac{d \sin x}{dx} - \sin x \frac{d \cos x}{dx} \right) = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{cot} x}{dx} &= \frac{1}{\sin^2 x} \left(\sin x \frac{d \cos x}{dx} - \cos x \frac{d \sin x}{dx} \right) = \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} (-\sin^2 x - \cos^2 x) = - \frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Эти и другія ранѣе приведенныя формулы даютъ возможность продифференцировать любую функцію, которая рационально выражается черезъ показательныя, логарифмическія и тригонометрическія функціи. Мы удовольствуемся нѣсколькими примѣрами, а затѣмъ предложимъ читателю обратиться къ сборникамъ задачъ. Примѣры мы сдѣлали, пользуясь дифференціалами:

$$d(x \sin x) = x d \sin x + \sin x dx = (x \cos x + \sin x) dx;$$

$$d(\sin 2x) = \cos 2x d(2x) = 2 \cos 2x dx,$$

или:

$$\begin{aligned} d(\sin 2x) &= d(2 \sin x \cos x) = 2(\sin x d \cos x + \cos x d \sin x) = \\ &= 2(-\sin^2 x + \cos^2 x) dx = 2 \cos 2x dx; \end{aligned}$$

$$d \cos^2 x = 2 \cos x d \cos x = -2 \sin x \cos x dx = -\sin 2x dx;$$

или:

$$d \cos^2 x = d \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} d \cos 2x = -\frac{1}{2} 2 \sin 2x dx = -\sin 2x dx;$$

$$d(e^x \sin x) = e^x d \sin x + \sin x de^x = e^x (\cos x + \sin x) = \sqrt{2} e^x \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

§ 72. Интегрирование тригонометрическихъ функций.

Изъ формулъ дифференцированія, приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, получаемъ слѣдующія формулы интегрированія:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

Эти формулы въ связи съ теоремами, приведенными въ § 27, даютъ возможность проинтегрировать очень многія изъ функций, въ выраженіе которыхъ входятъ тригонометрическія функции. Мы разберемъ только слѣдующіе примѣры.

1. Если положимъ въ формулѣ (4) § 27:

$$z = \varphi(x) = 2x, \text{ значитъ, } \frac{dz}{dx} = 2 \text{ и } f(z) = \sin z,$$

то получимъ:

$$\int \sin 2x \cdot 2dx = \int \sin z dz = -\cos z + C,$$

слѣдовательно:

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C,$$

и такимъ же образомъ:

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

2) Интегралы:

$$\int \sin^2 x dx, \quad \int \cos^2 x dx$$

можно привести къ предыдущимъ посредствомъ формулъ:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

3) Всякая рациональная функция отъ $\cos x$ и $\sin x$ можетъ быть обращена въ рациональную функцию отъ переменной z посредствомъ подстановки

$$z = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

тогда получаемъ:

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} (1+z^2).$$

Напримѣръ,

$$y = \int \frac{dx}{a + b \cos x}$$

можно преобразовать въ

$$\int \frac{(1+z^2) dx}{a(1+z^2) + b(1-z^2)},$$

а это по формулѣ (4) § 27 равно:

$$2 \int \frac{dz}{a+b+(a-b)z^2}.$$

Если $(a+b)$ и $(a-b)$ разныхъ знаковъ, то можно положить:

$$z = u \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}, \quad dz = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} du$$

и тогда получимъ:

$$y = \frac{2}{b+a} \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{1+u}{1-u} + C$$

(ср. § 34).

4) Интегралъ вида:

$$\int x \sin x dx$$

можетъ быть взятъ при помощи интегрированія по частямъ; пусть:

$$x = u, \quad \sin x dx = dv,$$

тогда

$$du = dx, \quad v = -\cos x,$$

и, слѣдовательно,

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

5) Въ интегралѣ:

$$\int e^{ax} \sin bx dx$$

интегрированіе по частямъ не сразу приводитъ къ цѣли; дѣйстви-
тельно, полагая

$$u = e^{ax}, \quad dv = \sin bx dx,$$

$$du = ae^{ax} dx, \quad v = -\frac{\cos bx}{b},$$

получаемъ:

$$\int e^{ax} \sin bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx, \quad | -ab | b^2.$$

Такимъ образомъ предложенный интеграль выраженъ черезъ другой интеграль, который не проще предложеннаго. Мы достигнемъ цѣли если въ новомъ интеграль произведемъ такія же преобразованія. Пусть:

$$u = e^{ax}, \quad dv = \cos bx \, dx$$

$$du = ae^{ax} \, dx, \quad v = \frac{\sin bx}{b},$$

тогда получаемъ:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx; \quad |b^2| ab.$$

Рѣшая эти два уравненія относительно искомымъ интеграловъ, получаемъ:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (-b \cos bx + a \sin bx).$$

§ 73. Круговыя функціи.

Если двѣ переменныя x и y связаны уравненіемъ:

$$x = \sin y, \quad \dots \dots \dots (1)$$

то y есть дуга, синусъ которой равенъ x .

Прежде это записывали такимъ образомъ:

$$y = \text{arc}(\sin = x), \quad \dots \dots \dots (2)$$

но затѣмъ стали писать просто

$$y = \text{arc} \sin x \quad \dots \dots \dots (3)$$

Уравненіе (3) имѣеть совершенно такое же значеніе, какъ уравненіе (1); зависимость между x и y принято писать въ видѣ уравненія (1), если считаютъ x и въ видѣ уравненія (3), если считаютъ y за независимую переменную; здѣсь слѣдуетъ вспомнить, что было сказано о произвольности выбора независимой переменной въ § 13.

Вводя новый знакъ $\text{arc} \sin$ для изображенія нѣкоторой функціональной зависимости, мы должны раньше всего рассмотреть однозначна ли функція, изображенная этимъ знакомъ, т. е. соответствуетъ ли данному значенію синуса только одно значеніе дуги. Уже въ элементарной алгебрѣ встрѣчаются примѣры многозначныхъ функцій; если, на примѣръ, $x = y^2$, то, представляя рѣшеніе этого уравненія въ видѣ:

$$y = \sqrt{x},$$

мы находимъ, что y есть двузначная функція x и что вообще $\sqrt{\quad}$ обозначаетъ двузначную функцію, такъ какъ каждому значенію x соотвѣтствуютъ два значенія y ; оба значенія обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что квадратъ cadaго изъ нихъ равенъ x и связаны слѣдующей простой зависимоcтью: они численно равны, но противоположны по знаку.

Функція arc sin есть примѣръ бесконечно-многозначной функціи; каждому значенію x , взятому между границами -1 и $+1$ соотвѣтствуетъ не одна дуга, а безчисленное множество дугъ, синусы которыхъ равны x . Изъ опредѣленія непосредственно слѣдуетъ, что, если y_0 есть нѣкоторая дуга, синусъ которой равенъ x , то не только всѣ дуги вида:

$$y_0 + 2k\pi, \quad \dots \dots \dots (4)$$

но и всѣ дуги вида:

$$\pi - y_0 + 2k\pi, \quad \dots \dots \dots (5)$$

гдѣ k —любое цѣлое положительное или отрицательное число, имѣютъ тотъ же синусъ. И такъ, мы можемъ высказать слѣдующее положеніе:

Функція, обозначенная черезъ $\text{arc sin } x$ бесконечно многозначна для всѣхъ значеній x , взятыхъ въ области $(-1 \dots +1)$ значенія этой функціи, соотвѣтствующія одному опредѣленному значенію аргумента, распадаются на два ряда: значенія одного ряда можно получить изъ одного какого-нибудь значенія посредствомъ формулы (4), подставляя вмѣсто k всевозможныя цѣлыя, какъ положительныя, такъ и отрицательныя числа, а значенія другого ряда такимъ же образомъ изъ формулы (5).

(Если за y_0 принять одно изъ значеній второго ряда, то изъ формулы (4) получились бы тѣ значенія, которыя теперь дала формула (5) и наоборотъ).

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ полезно выбрать и принять за главное одно изъ бесконечнаго числа значеній, которыя принимаетъ бесконечно-многообразная функція при опредѣленномъ аргументѣ. При извлеченіи квадратнаго корня можно положительное значеніе принять за главное; для функціи arc sin можно принять за главное значеніе наименьшее по абсолютной величинѣ; въ такомъ случаѣ главное значеніе измѣняется, возрастая отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ въ то время, какъ x растетъ отъ -1 до $+1$. Слѣдуетъ впрочемъ обратить вниманіе на то, что выборъ главнаго значенія совершенно произволенъ. Геометрическое представленіе функціи $y = \text{arc sin } x$ въ видѣ кривой въ декартовыхъ координатахъ получается, если чертежъ § 69 повернуть въ той же плоскости на 90° вокругъ начала и затѣмъ повер-

нуть плоскость чертежа на 180° вокругъ оси y -овъ. Обведя еще разъ часть полученной кривой, соответствующей главному значенію, мы убѣждаемся, что такимъ образомъ выдѣляется нѣкоторая совершенно произвольная часть геометрически неограниченной кривой.

Такимъ же образомъ можно трактовать функціи, обратныя остальнымъ тригонометрическимъ функціямъ. Что касается функціи:

$$y = \arccos x, \dots \dots \dots (6)$$

то всѣ ея значенія для даннаго x получаются изъ одного значенія y_0 изъ формулы:

$$y_0 + 2k\pi \dots \dots \dots (7)$$

и формулы

$$- y_0 + 2k\pi, \dots \dots \dots (8)$$

при чемъ k можно давать всевозможныя цѣлыя положительныя и отрицательныя значенія. Какъ видно изъ этихъ формулъ нельзя при помощи такого же соглашения, какъ для синуса, выдѣлить здѣсь одно главное значеніе, потому что среди различныхъ значеній $\arccos x$ есть два, которыя являются наименьшими и при томъ равными по абсолютной величинѣ; но можно условиться считать за главное то изъ этихъ двухъ, которое оказывается положительнымъ; при такомъ выборѣ главное значеніе убываетъ отъ π до 0, когда x растеть отъ -1 до $+1$.

Функціи $\arctg x$ и $\operatorname{arccotg} x$ опредѣлены для всѣхъ значеній x ; эти функціи также безконечно многозначны, но всѣ значенія, которыя онѣ принимаютъ при опредѣленномъ аргументѣ, получаются изъ одного значенія y_0 посредствомъ одной формулы

$$y_0 + k\pi, \dots \dots \dots (9)$$

гдѣ опять-таки k можно давать всевозможныя цѣлыя, положительныя и отрицательныя значенія. За главное значеніе $\arctg x$ примемъ наименьшее по абсолютной величинѣ; оно возрастаетъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ въ то время, какъ x растеть отъ $-\infty$ до $+\infty$. Примѣнить то же соглашение къ $\operatorname{arccotg} x$ неудобно, потому что этимъ была бы опредѣлена функція, которая убываетъ отъ 0 до $-\frac{\pi}{2}$, когда x растеть отъ $-\infty$ до 0, затѣмъ вдругъ перескакиваетъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ къ $\frac{\pi}{2}$ и снова убываетъ до 0, когда x возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$; слѣдовательно, $\operatorname{arccotg} x$ при такомъ опредѣленіи главнаго значенія претерпѣвало бы разрывъ при $x = 0$. Если мы хотимъ избѣжать этого, то надо принять за главное значеніе то, которое лежитъ между 0 и π .

Всѣ эти функціи, обратныя тригонометрическимъ, называются круговыми. Если требуется найти ихъ значеніе для даннаго аргумента, то надо во первыхъ розыскать въ логариѳмическихъ табли-

цахъ логариѳмъ этого аргумента, во вторыхъ, найти этотъ логариѳмъ въ таблицѣ логариѳмомъ соотвѣтствующей тригонометрической величины (принимая, конечно, во вниманіе прибавку десяти единицъ, которую дѣлаютъ въ опредѣленныхъ случаяхъ въ этихъ логариѳмахъ); наконецъ, остается выписать изъ этихъ таблицъ требуемый уголъ въ градусахъ, минутахъ и секундахъ и перевести при помощи вспомогательныхъ табличекъ эту угловую мѣру въ дуговую, какъ объяснено въ § 69.

§ 74. Дифференцірованіе круговыхъ функций.

Такъ какъ круговыя функции являются обратными тригонометрическимъ, правила дифференцірованія которыхъ мы уже дали, то правила дифференцірованія круговыхъ функций можно вывести на основаніи § 22. Особеннаго вниманія требуетъ только выборъ опредѣленнаго значенія изъ различныхъ значеній многозначной функции.

Изъ равенства:

$$\frac{dx}{dy} \equiv \frac{d \sin y}{dy} = \cos y,$$

получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} \equiv \frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\cos y},$$

или если выразить $\cos y$ черезъ $\sin y$, который равенъ x , то:

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \dots \dots \dots (1)$$

Остается рѣшить, какой изъ двухъ знаковъ при корнѣ слѣдуетъ взять.

Если подъ $\operatorname{arc} \sin x$ разумѣть главное значеніе, т. е. то значеніе, которое заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, то вопросъ рѣшается сразу; вѣдь, при этихъ значеніяхъ дуги косинусъ положителенъ. Слѣдовательно:

Въ уравненіи (1) слѣдуетъ взять корень со знакомъ $+$, если только подъ $\operatorname{arc} \sin$ разумѣть главное значеніе этой безконечно-многообразной функции.

Отсюда видно, что это же самое правило примѣнимо для всѣхъ значеній $\operatorname{arc} \sin$, которыя получаютъ изъ главнаго посредствомъ формулы (4) § 73; напротивъ того, знакъ минусъ слѣдуетъ взять для всѣхъ значеній, получающихся изъ главнаго по формулѣ (5) того же параграфа. Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ функция $\operatorname{arc} \sin$ возрастающая, во второмъ убывающая.

Подобнымъ же образомъ получается изъ

$$\frac{d \cos y}{dy} = - \sin y$$

производныя обратной функціи:

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \dots \dots \dots (2)$$

Но здѣсь уже слѣдуетъ брать корень отрицательнымъ*), если подѣ $\operatorname{arc} \cos x$ разумѣть главное значеніе или одно изъ тѣхъ, которыя получаютъ изъ главнаго посредствомъ формулы (6) § 73; напротивъ того, корень слѣдуетъ брать положительнымъ, если подѣ $\operatorname{arc} \cos$ разумѣть одно изъ значеній, получающихся на основаніи формулы (7); это видно изъ того, что первый рядъ убываетъ, а второй возрастаетъ при возрастаніи x .

Для $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ и $\operatorname{arc} \operatorname{cot}$ не требуется такого различенія знаковъ; при дифференцированіи получается просто:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}, \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{cot} x}{dx} = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+x^2} \dots \dots \dots (4)$$

§ 75. Обращеніе этихъ правилъ. Интегрированіе новаго класса алгебраическихъ функцій.

Формулы дифференцированія, приведенныя въ предыдущемъ параграфѣ, даютъ слѣдующія формулы интегрированія:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C_1 = -\operatorname{arc} \cos x + C_2 \dots \dots (1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C_1 = -\operatorname{arc} \operatorname{cot} x + C_2 \dots \dots (2)$$

На первый взглядъ кажется страннымъ, что для каждаго изъ интеграловъ получаютъ по два совершенно различныхъ значенія. Но нетрудно убѣдиться, что эти результаты совершенно согласуются съ общей теоремой § 26, по которой двѣ функціи, имѣющія одинаковыя производныя, отличаются другъ отъ друга только на произвольную постоянную. Дѣйствительно, такъ какъ косинусъ и котангенсъ служатъ соотвѣтственно синусомъ и тангенсомъ дополнительнаго угла, то:

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{cot} x = \frac{\pi}{2},$$

*) Поэтому обыкновенно пишутъ:

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

слѣдовательно:

$$\begin{aligned} - \operatorname{arc} \cos x &= \operatorname{arc} \sin x - \frac{\pi}{2}, \\ - \operatorname{arc} \cot x &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пользуясь этими формулами интегрированія, можно проинтегрировать функции, которыхъ раньше не удавалось интегрировать, потому что знаменатель дроби разлагался только на мнимые множители. Мы ограничимся тѣмъ случаемъ, когда числитель интегрируемой функции первой, а знаменатель второй степени; пусть предложенъ интегралъ:

$$J = \int \frac{(gx + h) dx}{ax^2 + 2bx + c}.$$

Если примѣнить къ знаменателю тотъ же приемъ разложенія на два слагаемыхъ, которымъ пользуются при рѣшеніи квадратнаго уравненія, то можно предложенный интегралъ переписать въ видѣ:

$$J = \int \frac{a(gx + h) dx}{(ax + b)^2 + (ac - b^2)}.$$

Случай

$$ac - b^2 \leq 0$$

уже разобранъ (§ 33—36); остается разсмотрѣть случай

$$ac - b^2 > 0.$$

Въ этомъ случаѣ введемъ для интегрированія вспомогательную переменную:

$$u = \frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}}, \quad x = \frac{-b + u\sqrt{ac - b^2}}{a},$$

тогда получаемъ:

$$J = \frac{g}{a} \int \frac{u du}{1 + u^2} + \frac{ah - bg}{a\sqrt{ac - b^2}} \int \frac{du}{1 + u^2}.$$

Второй изъ полученныхъ здѣсь интеграловъ по формулѣ (2) равенъ $\operatorname{arc} \operatorname{tg} u$, а первый легко можетъ быть взятъ посредствомъ подстановки

$$1 + u^2 = v,$$

тогда онъ обращается въ

$$\frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \log v.$$

Подобнымъ же образомъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

приводится къ одному изъ слѣдующихъ:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}, \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}};$$

первый изъ этихъ интеграловъ равенъ по формулѣ (1) $\text{arc sin } u + C$, а для второго и третьяго мы уже нашли въ § 31 значеніе

$$\log (u + \sqrt{u^2 \pm 1}) + C.$$

§ 76. Еще нѣкоторыя теоремы, относящіяся къ тригонометрическимъ функціямъ.

1. Обозначимъ черезъ C_n сумму:

$$C_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx \dots \dots (1)$$

Умножимъ обѣ части на $2 \sin \frac{x}{2}$ и замѣнимъ произведенія черезъ разности синусовъ, тогда получимъ:

$$2C_n \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} + \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) + \left(\sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \right) + \dots + \\ + \left(\sin \frac{2n+1}{2} x - \sin \frac{2n-1}{2} x \right).$$

Здѣсь всѣ члены, кромѣ предпоследняго, сокращаются и поэтому:

$$C_n = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \dots \dots \dots (2)$$

2. Если положимъ

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx, \dots \dots \dots (3)$$

то аналогичнымъ способомъ получимъ:

$$2S_n \sin \frac{x}{2} = \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) + \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \dots + \\ + \left(\cos \frac{2n-1}{2} x - \cos \frac{2n+1}{2} x \right) = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x = \\ = 2 \sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}$$

и слѣдовательно:

$$S_n = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \dots \dots \dots (4)$$

3. Взявъ въ первой формулѣ для x частное значеніе

$$x = \frac{2m\pi}{n},$$

гдѣ будемъ считать m цѣлымъ, получимъ:

$$C_n = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{(2n+1)m\pi}{n}}{\sin \frac{m\pi}{n}} \dots \dots \dots (5)$$

Если m не дѣлится на n , то эта дробь равна $\frac{1}{2}$ значитъ, имѣемъ:

$$\cos \frac{2m\pi}{n} + \cos \frac{4m\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-2)m\pi}{n} + \cos 2m\pi = 0 \quad (6)$$

Если же m дѣлится на n , то дробь принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. Если для нахождения истиннаго значенія этого выраженія мы примѣнимъ правила § 55 или просто будемъ почленно разсматривать сумму (1), каждый членъ которой кромѣ первого равенъ 1, то получимъ формулу:

$$\cos \frac{2m\pi}{n} + \cos \frac{4m\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-2)m\pi}{n} + \cos 2m\pi = n \quad (7)$$

4. Вторая формула при той же подстановкѣ даетъ:

$$\sin \frac{2m\pi}{n} + \sin \frac{4m\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(2n-2)m\pi}{n} + \sin 2m\pi = 0 \quad (8)$$

причемъ эта формула справедлива и для того случая, когда m дѣлится на n , потому что тогда каждый членъ суммы (3) обращается въ нуль.

§ 77. Тригонометрическое интерполированіе.

Положимъ, дана конечная сумма вида:

$$y = \left. \begin{aligned} &\frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_m \cos mx \\ &+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_m \sin mx \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$\left(m \leq \frac{n}{2} \right).$$

Обозначимъ черезъ y_k то значеніе, которое эта сумма принимаетъ, если замѣнить x черезъ $\frac{2k\pi}{n}$. Выпишемъ и сложимъ равенства, которые получаются, если давать k всевозможныя цѣлыя значенія, начиная съ 0 до $n-1$, тогда:

$$y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} = \frac{n}{2} A_0 + A_1 \sum_k \cos \frac{2k\pi}{n} +$$

$$+ A_2 \sum_k \cos \frac{4k\pi}{n} + \dots + B_1 \sum_k \sin \frac{2k\pi}{n} + B_2 \sum_k \sin \frac{4k\pi}{n} + \dots$$

Во второй части этого равенства всѣ члены, кромѣ перваго, обращаются на основаніи формулъ (6) и (8) въ нуль, слѣдовательно:

$$\frac{1}{2} A_0 = \frac{y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}}{n}, \dots \dots \dots (2)$$

т. е. въ формулѣ вида (1) членъ, въ который не входятъ тригонометрическія функціи, есть среднее арифметическое тѣхъ значеній, которыя функція принимаетъ для точекъ, равномерно распределенныхъ между 0 и 2π . (Отсюда можно заключить, что періодическая функція только тогда можетъ быть представлена въ видѣ суммы (1), когда это среднее арифметическое не зависитъ отъ выбора начала дугъ).

При помощи простого искусственнаго приема можно на основаніи опредѣленія A_0 найти и остальные коэффициенты. Помножимъ обѣ части равенства (1) на $\cos rx$ ($r \equiv m$) и замѣнимъ снова произведенія тригонометрическихъ величинъ черезъ суммы и разности, тогда:

$$\begin{aligned} y \cos rx = & \frac{1}{2} A_0 \cos rx + \frac{1}{2} A_1 \{ \cos (r + 1) x + \cos (r - 1) x \} + \dots \\ & + \frac{1}{2} A_r \{ \cos 2 rx + 1 \} + \dots \\ & + \frac{1}{2} B_1 \{ \sin (r + 1) x + \sin (r - 1) x \} + \dots \\ & + \frac{1}{2} B_r \sin 2rx + \dots \end{aligned}$$

Отсюда мы заключаемъ слѣдующее; если y можно представить формулой вида (1), то $y \cos rx$ представляется формулой того же вида, въ которой однако уже членъ $\frac{1}{2} A_r$, а не членъ $\frac{1}{2} A_0$, не содержитъ тригонометрическихъ функцій. Если воспользуемся въ этой формулѣ прежнимъ результатомъ, то найдемъ:

$$\frac{1}{2} A_r = \frac{1}{n} \left\{ y_0 + y_1 \cos \frac{2r\pi}{n} + y_2 \cos \frac{4r\pi}{n} + \dots \right\} \dots \dots (3)$$

и такимъ же образомъ

$$\frac{1}{2} B_r = \frac{1}{n} \left\{ y_1 \sin \frac{2r\pi}{n} + y_2 \sin \frac{4r\pi}{n} + \dots \right\} \dots \dots (4)$$

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: если періодическую функцію надо представить въ видѣ (1), то коэффициенты этой формулы должны быть связаны равенствами (2), (3) и (4) съ

значеніями, которыя эта функція принимаетъ при

$$x = 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{(2n-2)\pi}{n}.$$

Если требуется найти такую функцію вида (1), которая бы принимала при этихъ значеніяхъ x напередъ заданныя значенія y_k , то должны быть удовлетворены равенства:

$$y_k = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{2k\pi}{n} + A_2 \cos \frac{4k\pi}{n} + \dots + B_1 \sin \frac{2k\pi}{n} + B_2 \sin \frac{4k\pi}{n} + \dots$$

Это уравненіе первой степени относительно неизвѣстныхъ коэффиціентовъ, и число ихъ равно числу неизвѣстныхъ. Дѣйствительно, если n —нечетное число, равное $2r + 1$, то кромѣ A_0 имѣется еще r коэффиціентовъ A и r коэффиціентовъ B , значить, всего $2r + 1$; а если n —четное число, равное $2r$, то B_r совсѣмъ не входитъ въ эти уравненія, потому что $\sin \frac{2rk\pi}{2r}$ при любомъ цѣломъ k равно нулю; такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ число неизвѣстныхъ равно числу уравненій. Эти уравненія или даютъ одно рѣшеніе для каждой системы значеній y_k , или для нѣкоторыхъ системъ значеній y_k не допускаютъ рѣшеній, а для другихъ даютъ бесконечно-большое число рѣшеній. Но изъ предыдущаго видно, что эта система уравненій никогда не даетъ бесконечно-большого числа рѣшеній, значить, они должны давать для любой системы y одно рѣшеніе, а именно то, которое дается равенствами (2), (3) и (4).

Итакъ, мы получаемъ слѣдующій результатъ: коэффиціенты формулы (1) можно всегда опредѣлить при помощи равенствъ (2), (3) и (4) такъ, чтобы функція при значеніяхъ аргумента $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{(2n-2)\pi}{n}$ пріобрѣтала значенія y_0, y_1, \dots, y_{n-1} ; слѣдовательно, всякую періодическую функцію можно при помощи интерполированія представить въ видѣ формулы (1).

Если, дѣйствительно, желаютъ найти численныя значенія коэффиціентовъ A и B , то надо выбрать для n , по возможности, какое-нибудь четное число и лучше всего кратное четырехъ. Возьмемъ $n = 8$; такъ какъ B_4 пропадаетъ, то мы имѣемъ формулу:

$$y = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + A_4 \cos 4x + \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x.$$

Коэффиціенты этой формулы надо вычислить по значеніямъ функціи, которыя она принимаетъ при

$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4};$$

получаемъ:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \frac{1}{2} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
 y_1 + y_7 &= A_0 + 2A_1 \cos \frac{\pi}{4} + 2A_3 \cos \frac{3\pi}{4} - 2A_4 \\
 y_2 + y_6 &= A_0 - 2A_2 + 2A_4 \\
 y_3 + y_5 &= A_0 + 2A_1 \cos \frac{3\pi}{4} + 2A_3 \cos \frac{\pi}{4} - 2A_4 \\
 y_1 - y_7 &= 2B_1 \sin \frac{\pi}{4} + 2B_2 + 2B_3 \sin \frac{3\pi}{4} \\
 y_2 - y_6 &= 2B_1 \qquad \qquad \qquad - 2B_3 \\
 y_3 - y_5 &= 2B_1 \sin \frac{3\pi}{4} - 2B_2 + 2B_3 \sin \frac{\pi}{4} \\
 y_4 &= \frac{1}{2} A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4.
 \end{aligned}$$

Если еще принять во вниманіе, что

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4}, \quad \sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4},$$

то получается:

$$\begin{aligned}
 y_0 + y_4 &= A_0 + 2A_2 + 2A_4 \\
 y_0 - y_4 &= 2A_1 + 2A_3 \\
 (y_1 + y_7) + (y_3 + y_5) &= 2A_0 - 4A_4 \\
 (y_1 + y_7) - (y_3 + y_5) &= (4A_1 - 4A_3) \cos \frac{\pi}{4} \\
 (y_1 - y_7) + (y_3 - y_5) &= (4B_1 + 4B_3) \sin \frac{\pi}{4} \\
 (y_1 - y_7) - (y_3 - y_5) &= 4B_2 \\
 (y_0 + y_4) + (y_2 + y_6) &= 2A_0 + 4A_4 \\
 (y_0 + y_4) - (y_2 + y_6) &= 4A_2.
 \end{aligned}$$

Положимъ, дано:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 4, \quad y_4 = 3, \quad y_5 = 2, \quad y_6 = 0, \quad y_7 = -4,$$

тогда выпишемъ значенія функции въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\begin{array}{cccccc}
 y_0 = 0 & y_1 = 2 & y_2 = 3 & y_3 = 4 & y_4 = 3 & \\
 & & & & & y_7 = -4 \\
 & & & & & y_6 = 0 \\
 & & & & & y_5 = 2
 \end{array}$$

и составимъ сумму каждаго двухъ y , стоящихъ другъ подъ другомъ:

$$s_0 = 0, \quad s_1 = -2, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 6, \quad s_4 = 3$$

и такимъ же образомъ выпишемъ разности:

$$d_1 = 6 \quad d_2 = 3 \quad d_3 = 2.$$

Для того, чтобы найти члены, содержащіе косинусъ, напишемъ аналогичнымъ образомъ:

$$\begin{aligned} s_0 &= 0 & s_1 &= -2 & s_2 &= 3 \\ s_4 &= 3 & s_3 &= 6 \end{aligned}$$

опять составимъ суммы членовъ, стоящихъ одинъ подъ другимъ:

$$S_0 = 3 \quad S_1 = 4 \quad S_2 = 3$$

и такимъ же образомъ разности:

$$D_0 = -3 \quad D_1 = -8.$$

Тогда получаемъ:

$$\begin{aligned} 4A_0 &= S_0 + S_1 + S_2 = 10 & \frac{1}{2} A_0 &= \frac{5}{4} \\ 8A_4 &= S_0 - S_1 + S_2 = 2 & A_4 &= \frac{1}{4} \\ 4A_2 &= S_0 - S_2 = 0 & A_2 &= 0 \\ 2A_1 + 2A_3 &= D_0 = -3 & A_1 + A_3 &= -1,5 \\ (4A_1 - 4A_3) \cos \frac{\pi}{4} &= D_1 = -8 & A_1 - A_3 &= -2,82 \\ & & \hline & & A_1 &= -2,16 \\ & & & & A_3 &= +0,66. \end{aligned}$$

Тѣмъ же приемомъ находимъ члены, содержащіе синусъ:

$$\begin{aligned} d_1 &= 6 & d_2 &= 3 \\ d_3 &= 2 \\ \hline \text{Сумма} &= 8 \\ \text{Разность} &= 4 \\ 2B_1 - 2B_3 &= d_2 = 3 & B_1 - B_3 &= 1,5 \\ (4B_1 + 4B_3) \sin \frac{\pi}{4} &= d_1 + d_3 = 8 & B_1 + B_3 &= 2,82 \\ 4B_2 &= d_1 - d_3 = 4 & B_1 &= 2,16 \\ & & B_3 &= 0,66 \\ & & B_2 &= 1. \end{aligned}$$

Слѣдовательно искомая формула пріобрѣтаетъ видъ:

$$\begin{aligned} y &= 1,25 - 2,16 \cos x & + 0,66 \cos 3x & + 0,25 \cos 4x \\ & + 2,16 \sin x + \sin 2x & + 0,66 \sin 3x = \\ & = 1,25 + 3,05 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) & + \sin 2x + 0,93 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) & + 0,25 \cos 4x. \end{aligned}$$

§ 78. Гармоническія колебанія.

Очень часто приходится имѣть дѣло съ движеніями, которыя происходятъ по закону:

$$x = R \sin \omega t, \quad \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ t обозначаетъ время, x —какую-нибудь величину, измѣняющуюся во времени, какъ напримѣръ, разстояніе подвижной точки отъ положенія равновѣсія, R и ω —постоянныя. Такое движеніе называется простымъ гармоническимъ колебаніемъ; замѣтимъ, что колебанія маятника, по крайней мѣрѣ, приближенно происходятъ по этому закону. Постоянная R называется амплитудой колебанія; это наибольшее значеніе, котораго достигаетъ x , такъ какъ синусъ по большей мѣрѣ равняется единицѣ. При возрастаніи t на $\frac{2\pi}{\omega}$, x получаетъ снова то же самое значеніе, которое оно имѣло раньше, значитъ $\frac{2\pi}{\omega}$ — продолжительность или періодъ колебанія; обратная величина этой дроби $\frac{\omega}{2\pi}$ есть число періодовъ или число колебаній въ единицу времени (въ одну секунду).

Формула (1) написана въ предположеніи, что начало счета времени отнесено къ одному изъ тѣхъ моментовъ, когда $x = 0$ и притомъ, если R положительно, къ такому, когда x переходитъ отъ отрицательныхъ къ положительнымъ значеніямъ. Если мы разсматриваемъ одно такое движеніе, то мы всегда можемъ достигнуть этого; но если мы имѣемъ дѣло съ нѣсколькими движеніями, въ которыхъ переходъ черезъ нуль совершается не одновременно, то нельзя достигнуть того, чтобы всѣ движенія одновременно были представлены формулой вида (1). Въ этомъ случаѣ надо замѣнить t черезъ $t - t_0$, причемъ t_0 , одинъ изъ тѣхъ моментовъ, когда x переходитъ отъ отрицательныхъ къ положительнымъ значеніямъ. Тогда уравненіе (1) переписывается въ видѣ:

$$x = R \sin [\omega (t - t_0)]; \quad \dots \dots \dots (2)$$

здѣсь часто опускаютъ квадратныя скобки. Если положить

$$-\omega t_0 = \varphi, \quad \dots \dots \dots (3)$$

то можно написать вмѣсто (2):

$$x = R \sin (\omega t + \varphi) \quad \dots \dots \dots (4)$$

Выраженіе

$$\omega t + \varphi, \quad \dots \dots \dots (5)$$

представляющее собой линейную функцію отъ t , называется фазой движенія во время t . Разность фазъ двухъ простыхъ гармоническихъ колебаній съ одинаковымъ періодомъ не зависитъ отъ времени и равна разности значеній φ .

Если развернуть выраженіе (4) и положить:

$$R \sin \varphi = A, \quad R \cos \varphi = B, \quad \dots \dots \dots (6)$$

то уравненіе (4) принимаетъ видъ:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \dots \dots \dots (7)$$

Если уравненіе движенія дано въ формѣ (7), то обратно, его можно переписатьъ въ видѣ (4), для чего надо воспользоваться равенствомъ (6); получаемъ:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B} \dots \dots \dots (8)$$

При этомъ слѣдуетъ однако обратить вниманіе на то, что уголь не вполне опредѣляется тангенсомъ: углы, имѣющіе равные тангенсы, отличаются другъ отъ друга на числа кратныя π (а не на 2π), и поэтому для полнаго опредѣленія четверти, въ которой лежитъ искомый уголь, надо воспользоваться еще однимъ изъ равенствъ:

$$\sin \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \dots \dots \dots (9)$$

въ которыхъ при корнѣ надо взять знакъ плюсъ. Отсюда слѣдуетъ, что всегда возможно опредѣлить R и φ , значитъ уравненіе (7) всегда представляетъ собой уравненіе простого гармоническаго колебанія.

Если мы интересуемся вопросомъ о силахъ, которыя въ состояніи вызвать такое движеніе, то мы должны дифференцировать; мы находимъ:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t, \dots \dots \dots (10)$$

и посредствомъ второго дифференцированія:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \dots \dots \dots (11)$$

Такимъ образомъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \dots \dots \dots (12)$$

т. е. ускореніе въ каждый моментъ пропорціонально разстоянію отъ положенія равновѣсія. Чтобы матеріальная точка перемѣщалась по напередъ указанному закону, на нее должна дѣйствовать сила пропорціональная ускоренію; поэтому сила, дѣйствующая на точку, совершающую простое гармоническое колебательное движеніе, пропорціональна удаленію точки отъ положенія равновѣсія:

$$f = -m\omega^2 x \dots \dots \dots (13)$$

Множитель, на который надо помножить отклоненіе точки отъ положенія равновѣсія, чтобы получить силу, называется коэффиціен-

томъ упругости; уравненіе (13) показываетъ, что онъ равенъ произведенію массы на квадратъ числа колебаній.

Итакъ, мы имѣемъ право утверждать: Всегда, когда мы наблюдаемъ простое гармоническое колебаніе точки, можно заключить, что на точку дѣйствуетъ нѣкоторая сила упругости, и найти эту силу на основаніи наблюденія числа колебаній.

Но движеніе не вполне опредѣлено силами, дѣйствующими на матеріальную точку; чтобы вполне опредѣлить его, нужно еще знать начальное положеніе и начальную скорость точки. Этими величинами опредѣляются значенія, которыя слѣдуетъ придать въ общихъ формулахъ постояннымъ A и B или R и φ . Мы остановимся на разборѣ двухъ случаевъ.

1) Если точка находится въ моментъ $t = 0$ въ положеніи равновѣсія въ нѣкоторой точкѣ x_0 , но не имѣетъ начальной скорости, то уравненія (7) и (10), которыя должны быть удовлетворены и для момента $t = 0$, даютъ:

$$A = x_0, \quad B = 0 \dots \dots \dots (14)$$

Подстановка этихъ значеній въ (7) и (10) даетъ:

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin \omega t \dots \dots \dots (15)$$

2) Если точка въ моментъ $t = 0$ находится въ положеніи равновѣсія и имѣетъ начальную скорость v_0 , то получаемъ:

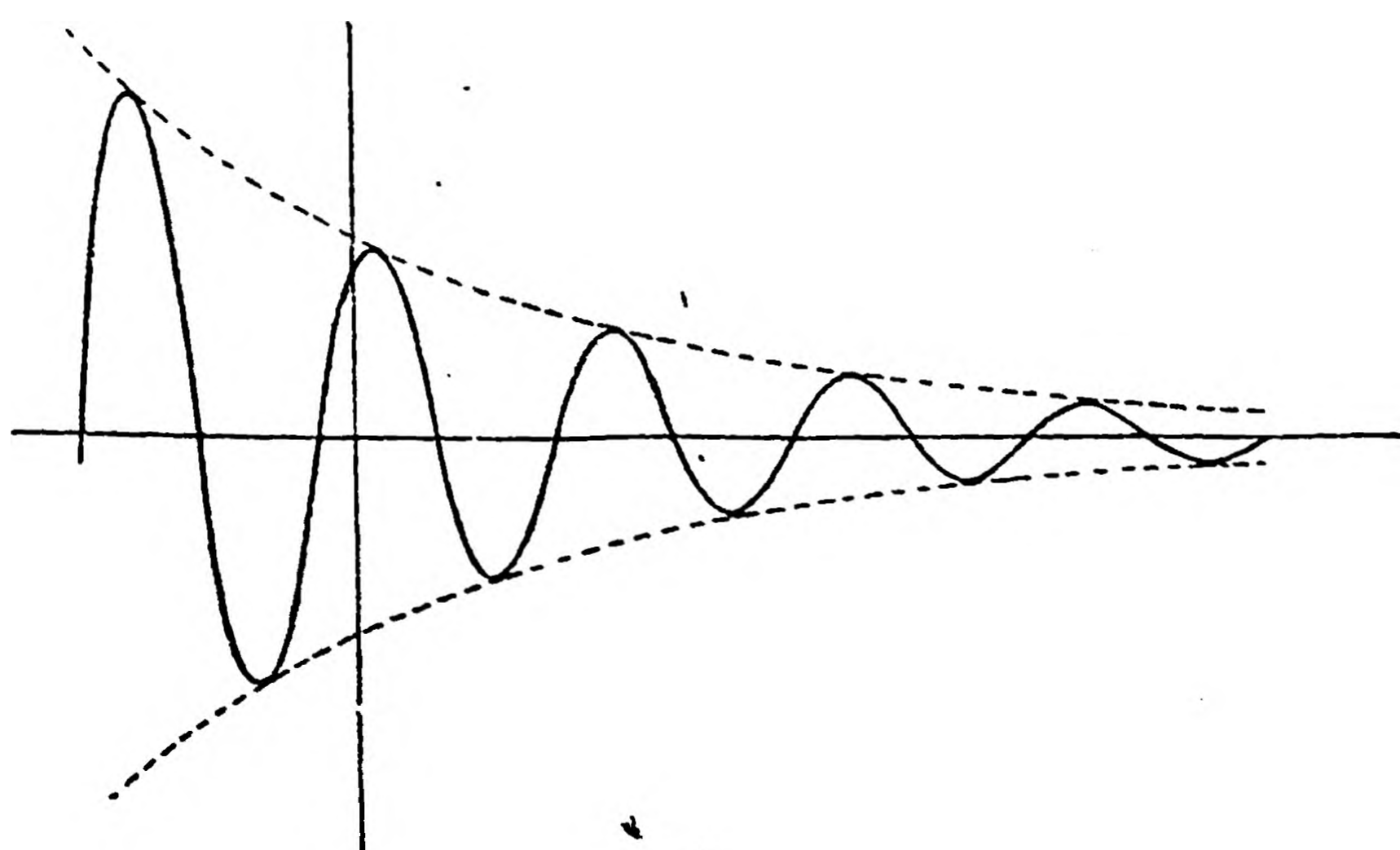
$$A = 0, \quad B\omega = v_0 \dots \dots \dots (16)$$

Подстановка этихъ значеній въ (7) и (10) даетъ:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad v = v_0 \cos \omega t \dots \dots \dots (17)$$

§ 79. Затухающія колебанія.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы разсмотрѣли такія колебанія, въ которыхъ амплитуду можно было считать постоянной. Въ дѣйствительности, амплитуда большею частью не постоянна, но убываетъ во времени и притомъ такъ, что отношеніе двухъ слѣдующихъ другъ за другомъ максимальныхъ отклоненій постоянно. Чтобы представить это въ видѣ формулы, напишемъ сначала:



Фиг. 38.

$$x = f(t) (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \dots \dots \dots (1)$$

Тогда надо опредѣлить функцію $f(t)$ такъ, чтобы при

$$t = 0, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega}, \frac{6\pi}{\omega}, \dots \dots \dots (2)$$

она принимала значенія

$$a, ab, ab^2, ab^3, \dots \dots \dots (3)$$

Множитель a можно пропустить; для этого вмѣсто Aa и Ba напишемъ A и B ; введемъ еще «логариѳмическій декрементъ», т. е. логариѳмъ отношенія двухъ слѣдующихъ другъ за другомъ максимальныхъ отклоненій въ одну сторону, и обозначимъ его черезъ α .

$$\alpha = -\log b \dots \dots \dots (4)$$

Тогда вмѣсто ряда (3) получаемъ:

$$1, e^{-\alpha}, e^{-2\alpha}, e^{-3\alpha}, \dots \dots \dots (5)$$

Опредѣленіе функціи $f(t)$ такъ, чтобы она принимала для значеній t , данныхъ рядомъ (2), значенія (5) — есть задача интерполированія (§ 58); ея простѣйшее рѣшеніе

$$f(t) = e^{-\frac{\alpha\omega}{2\pi}t} \dots \dots \dots (6)$$

Положивъ еще для упрощенія:

$$\frac{\alpha\omega}{2\pi} = \lambda, \dots \dots \dots (7)$$

получаемъ уравненіе движенія въ такомъ видѣ:

$$x = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \dots \dots \dots (8)$$

Движеніе, происходящее по этому закону, называется затухающимъ гармоническимъ колебательнымъ движеніемъ.

Чтобы разсмотрѣть, какія силы вызываютъ такое движеніе, продифференцируемъ (по правилу дифференцированія произведенія, приведенному въ § 18). Мы получаемъ:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\lambda t} (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) - \lambda e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

и если соединимъ члены, заключающіе синусъ, и члены, заключающіе косинусъ, то:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\lambda t} \{(-A\lambda + B\omega) \cos \omega t + (-A\omega - B\lambda) \sin \omega t\} \dots (9)$$

Вторичное дифференцированіе даетъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = e^{-\lambda t} \{ & -(-A\lambda + B\omega) \omega \sin \omega t + (-A\omega - B\lambda) \omega \cos \omega t\} - \\ & - \lambda e^{-\lambda t} \{(-A\lambda + B\omega) \cos \omega t + (-A\omega - B\lambda) \sin \omega t\}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-\lambda t} \{ [A(\lambda^2 - \omega^2) - 2B\lambda\omega] \cos \omega t + [2A\lambda\omega + B(\lambda^2 - \omega^2)] \sin \omega t \}. \quad (10)$$

Мы видимъ, что здѣсь нѣтъ простой зависимости между ускореніемъ и удаленіемъ точки отъ положенія равновѣсія; но можно указать такую зависимость между этими двумя величинами и скоростью; а именно, можно такъ подобрать значенія m , L и R , чтобы равенство:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -L \frac{dx}{dt} - Rx \quad (11)$$

было удовлетворено тождественно, т. е. для любого момента времени; для этого нужно, чтобы было:

$$\left. \begin{aligned} m [A(\lambda^2 - \omega^2) - 2B\lambda\omega] &= L(A\lambda - B\omega) - RA \\ m [2A\lambda\omega + B(\lambda^2 - \omega^2)] &= L(A\omega + B\lambda) - RB \end{aligned} \right\} . . . (12)$$

Замѣчательно, что эти равенства удовлетворяются значеніями m , L , R , не зависящими отъ начальнаго состоянія, а именно:

$$L = 2m\lambda, \quad R = m(\lambda^2 + \omega^2) \quad (13)$$

Такимъ образомъ, мы пришли къ слѣдующему результату: Точка совершаетъ затухающее гармоническое колебаніе, если на нее кромѣ силы, пропорціональной разстоянію точки отъ положенія равновѣсія, дѣйствуетъ сила, пропорціональная скорости и направленная въ обратную сторону, т. е. сила, вызывающая затуханіе колебаній.

Величины силы упругости и затуханія опредѣляются изъ уравненій (13) по продолжительности періода колебанія $\frac{2\pi}{\omega}$ и логарифмическому декременту, равному, какъ видно изъ равенства (7), $\frac{2\pi\lambda}{\omega}$.

Если мы, наоборотъ, зададимся вопросомъ, всегда ли получаютъ движенія описаннаго рода при дѣйствіи нѣкоторой силы упругости и затуханія, то на этотъ вопросъ слѣдуетъ отвѣтить отрицательно, потому что, если по даннымъ значеніямъ R и L хотимъ опредѣлить изъ уравненій (13) продолжительность одного колебанія и логарифмическій декрементъ, то не всегда получается вещественное значеніе для ω , а только тогда, когда

$$4Rm - L^2 > 0 \quad (14)$$

Слѣдовательно, затухающее гармоническое колебаніе получается только тогда, когда сила, вызывающая затуханіе, не слишкомъ велика по сравненію съ силой упругости; въ противномъ случаѣ уравненіе (11) удовлетворяется

$$x = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}, \quad (15)$$

гдѣ
$$\lambda_1 = \frac{1}{2m} (L + \sqrt{L^2 - 4Rm}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2m} (L - \sqrt{L^2 - 4Rm}), \quad (16)$$

а числа A и B произвольны. При такомъ сильномъ затуханіи точка неограниченно приближается къ положенію равновѣсія послѣ того, какъ она по большей мѣрѣ одинъ разъ прошла черезъ положеніе равновѣсія.

§ 80. Вынужденныя колебанія.

Мы еще разсмотримъ случай, когда на точку кромѣ силы упругости и затуханія дѣйствуетъ еще внѣшняя сила, не зависящая отъ положенія точки, а только отъ времени. Общее рѣшеніе этой задачи не можетъ быть дано въ предѣлахъ тѣхъ средствъ, которыми мы располагаемъ, но одинъ случай, а именно тотъ, когда внѣшняя сила есть гармоническая функція времени, — легко разобрать. Въ этомъ случаѣ движеніе происходитъ по закону:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -L \frac{dx}{dt} - Rx + E \sin \omega t (1)$$

Этому уравненію можно удовлетворить, полагая, что x есть функція времени, имѣющая тотъ же періодъ, какъ внѣшняя сила; но при этомъ нельзя принимать, что точка проходитъ черезъ положеніе равновѣсія въ тотъ самый моментъ, когда внѣшняя сила равна нулю; при такомъ допущеніи нельзя было бы удовлетворить уравненію; поэтому надо принять, что между внѣшней силой и движеніемъ точки существуетъ нѣкоторая разность фазъ. Мы положимъ:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t (2)$$

Для того, чтобы уравненіе (1) было удовлетворено, нужно, чтобы было:

$$\begin{aligned} -A m \omega^2 \cos \omega t - B m \omega^2 \sin \omega t &= A L \omega \sin \omega t - B L \omega \cos \omega t - \\ &- A R \cos \omega t - B R \sin \omega t + E \sin \omega t (3) \end{aligned}$$

и дѣйствительно, уравненіе (3) удовлетворяется для всякаго момента, если коэффиціенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ по обѣ стороны равны, т. е. если A и B служатъ рѣшеніями уравненій:

$$\begin{aligned} -A m \omega^2 &= -B L \omega - A R & \left| \begin{array}{c} R - m \omega^2 \\ -L \omega \end{array} \right| & L \omega \\ -B m \omega^2 &= A L \omega - B R + E & \left| \begin{array}{c} R - m \omega^2 \\ -L \omega \end{array} \right| & R - m \omega^2. \end{aligned}$$

Посредствомъ умноженія на множители, приписанные съ правой стороны, и сложенія получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} A \{(R - m \omega^2)^2 + L^2 \omega^2\} &= -E L \omega \\ B \{(R - m \omega^2)^2 + L^2 \omega^2\} &= E (R - m \omega^2) \end{aligned} \right\} . . . (4)$$

Если подставить въ равенство (2) значенія для A и B , получен-

ныя отсюда, то получаемъ:

$$x = E \frac{-L\omega \cos \omega t + (R - m\omega^2) \sin \omega t}{(R - m\omega^2)^2 + L^2\omega^2} \dots \dots \dots (5)$$

Это выраженіе можно переписатьъ въ видѣ:

$$x = \frac{E}{R_1} \sin (\omega t - \varphi),$$

для этого нужно только положить:

$$\frac{\cos \varphi}{R_1} = \frac{R - m\omega^2}{(R - m\omega^2)^2 + L^2\omega^2}, \quad \frac{\sin \varphi}{R_1} = \frac{L\omega}{(R - m\omega^2)^2 + L^2\omega^2} \cdot (7)$$

Если раздѣлить эти равенства почленно другъ на друга, то получается:

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{L\omega}{R - m\omega^2} \dots \dots \dots (8)$$

По возвышеніи равенства (7) въ квадратъ и сложеніи имѣемъ:

$$R_1 = \sqrt{(R - m\omega^2)^2 + L^2\omega^2} \dots \dots \dots (9)$$

Равенство (8) даетъ разность фазъ между внѣшней силой и получающимся періодическимъ колебаніемъ; равенство (9) даетъ отношеніе наибольшаго численнаго значенія внѣшней силы къ наибольшему численному значенію удаленія точки отъ положенія равновѣсія. Итакъ, мы заключаемъ слѣдующее: точка, находящаяся подъ дѣйствіемъ силы упругости, пропорціональной отклоненію точки, силы затуханія пропорціональной скорости, и внѣшней силы, представляющей гармоническую функцію времени, можетъ совершать простыя гармоническія колебанія; притомъ періодъ этихъ колебаній равенъ періоду измѣненія внѣшней силы, фаза ихъ отстаетъ отъ фазы внѣшней силы на величину, даваемую выраженіемъ (8), и амплитуда ихъ получается изъ амплитуды внѣшней силы посредствомъ дѣленія на выраженіе (9).

Рѣшеніе задачи, полученное нами, не есть общее рѣшеніе: точка не всегда будетъ двигаться по приведенному закону, а только тогда, когда существуетъ опредѣленная зависимость между ея начальнымъ положеніемъ и ея начальной скоростью. Мы упомянемъ только, не приводя доказательства, что движеніе, возникающее при другихъ условіяхъ, съ возрастаніемъ времени все болѣе и болѣе приближается по характеру къ описанному и притомъ тѣмъ скорѣе, чѣмъ быстрѣе происходитъ затуханіе.

Три случая заслуживаютъ особаго вниманія:

1) Если $L = 0$, то затуханіемъ можно пренебречь; тогда разность фазъ равна 0, и выраженіе (9), на которое приходится дѣлить,

приводится къ виду:

$$R_1 = R - m\omega^2,$$

т. е. амплитуда вынужденныхъ колебаній дѣлается тѣмъ больше, чѣмъ ближе періодъ измѣненія внѣшней силы къ періоду свободныхъ колебаній, который опредѣляется согласно § 78. Если періодъ вынужденныхъ колебаній, то $R_1 = 0$, а φ дѣлается неопредѣленнымъ; рѣшеніе, которое мы нашли, непримѣнимо къ этому случаю. Подробное изслѣдованіе показываетъ, что въ этомъ случаѣ амплитуда колебаній точки растетъ сверхъ всякаго предѣла.

2) Если періоды вынужденныхъ и свободныхъ колебаній равны между собой, а затуханіе не равно нулю, то φ дѣлается равнымъ 0, а R_1 дѣлается равнымъ $L\omega$, т. е. наибольшее дѣйствіе наступаетъ какъ разъ тогда, когда внѣшняя сила равна нулю.

3) Если массою m можно пренебречь, то получается:

$$\varphi = \text{arc tg } \frac{L\omega}{R} \dots \dots \dots (10)$$

$$R_1 = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2};$$

значитъ, въ этомъ случаѣ тангенсъ разности фазъ пропорціоналенъ числу колебаній внѣшней силы.

Выкладки послѣднихъ двухъ параграфовъ находятъ примѣненіе не только къ движенію точки, подверженной дѣйствію нѣкоторой силы упругости, но и ко многимъ явленіямъ, которыя можно разсматривать какъ колебанія около точки равновѣсія. Въ особенности формулы (10) служатъ основаніемъ теоріи переменныхъ токовъ.

Впрочемъ, въ заключеніе слѣдуетъ обратить вниманіе еще на одно обстоятельство, которое въ предшествующихъ изслѣдованіяхъ было преднамѣренно опущено. Сила, дѣйствующая на движущуюся точку, исходитъ отъ другихъ тѣлъ; но движущаяся точка оказываетъ противодѣйствіе на эти тѣла, и вслѣдствіе этого силы, оказываемыя ими, не будутъ вполнѣ независимы отъ движенія точки, какъ мы это принимали. При болѣе подробномъ изслѣдованіи слѣдовало бы принимать во вниманіе и это вліяніе, но практически оно часто столь мало, что имъ можно пренебречь.



ДОПОЛНЕНИЕ.

Интерполирование при помощи показательной функции.

Если желаютъ представить наблюденныя значенія нѣкоторой величины x , зависящей отъ t , въ видѣ:

$$x = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t},$$

гдѣ не только A и B , но и λ и μ неизвѣстныя, то для опредѣленія ихъ нужно произвести по крайней мѣрѣ четыре наблюденія величины x . Мы остановимся только на случаѣ равноудаленныхъ наблюденій, т. е. будемъ считать, что разности всякихъ двухъ ближайшихъ значеній t равны между собой; обозначимъ разности t между каждыми двумя наблюденіями черезъ δ и пусть начало счета t совпадаетъ съ первымъ наблюденіемъ, тогда получаемъ значенія для t :

$$0, \delta, 2\delta, 3\delta,$$

и значенія для x :

$$x_0, x_1, x_2, x_3.$$

Слѣдовательно требуется рѣшить четыре уравненія:

$$x_k = Ae^{-\lambda k\delta} + Be^{-\mu k\delta} \dots \dots \dots (2)$$

относительно четырехъ неизвѣстныхъ. Если положимъ для сокращенія:

$$e^{-\lambda\delta} = u, \quad e^{-\mu\delta} = v, \quad \dots \dots \dots (3)$$

то эти уравненія переписываются въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A + B \\ x_1 &= Au + Bv \\ x_2 &= Au^2 + Bv^2 \\ x_3 &= Au^3 + Bv^3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Для рѣшенія этихъ уравненій составимъ слѣдующія выраженія:

$$a = x_0x_2 - x_1^2, \quad b = x_0x_3 - x_1x_2, \quad c = x_1x_3 - x_2^2 \dots \dots (5)$$

Подставляя вмѣсто x -овъ значенія, даваемыя равенствами (4), и собирая члены съ одинаковыми степенями A и B , убѣждаемся, что члены, содержащіе A^2 и B^2 , сокращаются, и получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} a &= AB(u^2 + v^2 - 2uv) = AB(u - v)^2 \\ b &= AB(u^3 + v^3 - u^2v - uv^2) = AB(u - v)^2(u + v) \\ c &= AB(u^3v + uv^3 - 2u^2v^2) = AB(u - v)^2 uv \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

Посредствомъ дѣленія имѣемъ:

$$u + v = \frac{b}{a}, \quad uv = \frac{c}{a} \dots \dots \dots (7)$$

и слѣдовательно:

$$u = \frac{1}{2a} (b + \sqrt{b^2 - 4ac}), \quad v = \frac{1}{2a} (b - \sqrt{b^2 - 4ac}) \dots \dots (8)$$

Когда такимъ образомъ найдены u и v и тѣмъ самымъ опредѣлены λ и μ , то A и B можно найти по способамъ, указаннымъ въ главѣ седьмой.

Если $a = b = c = 0$, то слѣдуетъ заключить, что наблюденія можно представить одночленной формулой:

$$x = Ae^{-\lambda t};$$

если же $b^2 - 4ac = 0$, но a, b, c въ отдѣльности не равны нулю, то наблюденій нельзя представить формулой вида (1), а слѣдуетъ изобразить формулой:

$$x = (A + Bt) e^{-\lambda t} \dots \dots \dots (10)$$

Совершенно аналогичнымъ образомъ можно поступить, если требуется представить наблюденія формулой вида:

$$x = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \dots \dots \dots (11)$$

(Ср. § 79). Въмѣсто уравненій (4) получаются теперь уравненія:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \\ x_1 &= e^{-\lambda \delta} (A \cos \omega \delta + B \sin \omega \delta) \\ x_2 &= e^{-2\lambda \delta} (A \cos 2\omega \delta + B \sin 2\omega \delta) \\ x_3 &= e^{-3\lambda \delta} (A \cos 3\omega \delta + B \sin 3\omega \delta). \end{aligned}$$

Посредствомъ простыхъ преобразованій получаемъ:

$$\begin{aligned} a &= -(A^2 + B^2) u^2 \sin^2 \omega \delta \\ b &= -(A^2 + B^2) u^3 \sin \omega \delta \sin 2\omega \delta \\ c &= -(A^2 + B^2) u^4 \sin^2 \omega \delta \end{aligned}$$

и слѣдовательно:

$$\frac{b}{a} = 2u \cos \omega \delta, \quad \frac{c}{a} = u^2.$$

Послѣднія равенства опредѣляютъ λ и ω . Правда, одному значенію $\cos \omega \delta$ соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній ω ; но только съ помощью пятого {наблюденія, отдѣленнаго отъ первыхъ числомъ некратнымъ δ , можно рѣшить, которое изъ этихъ значеній ω надо взять.



АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Абсолютная точность 15.
Абсолютный членъ 46.
Абсцисса 24.
Алгебраическія функціи 66.
— —, неопредѣленныя формы 149.
Амплитуда 219.
Анализъ бесконечно-малыхъ 8.
Аналитическая геометрія 23.
Ассимптоты 57.

Безграничное приближеніе 16.
Бесконечно-малыя 178.
—, анализъ 8.
—, порядокъ 179.
—, высшихъ порядковъ 183.
Бернуллі Иванъ 122.
Биномъ Ньютона 122.
Бойль 188.

Величины, измѣняемость 2.
— переменныя 9.
— — связанныя 39.
— малыя 126.
— бесконечно малыя 178.
Вогнутый 111.
Вспомогательныя условія 70.
Вторыя разности 167.
Вынужденныя колебанія 224.
Выпуклый 111.
Высшихъ порядковъ бесконечно-малыя 183.
— — производныя 109, 191.
Вычисленіе площади приближенное 76.
— логарифмовъ 124.

Гармоническое колебаніе 220.
Геометрія аналитическая 23.
Гипербола 57.
Главное значеніе 208.
Граммолекула 19.
Графическое изображеніе 174.
— представленіе 19.
Гэ-Люссакъ 188.

Давленіе постоянное 197.
Двойное ложное допущеніе 130.

Декрементъ логарифмическій 222.
Дифференцирование степени съ цѣлымъ показателемъ 46.
— постоянной 48.
— суммы 49.
— разности 49.
— произведенія 51.
— частнаго 52.
— степени съ цѣлымъ отрицательнымъ показателемъ 57.
— обратныхъ функцій 59.
— степени съ любымъ показателемъ 61.
— корня 61.
— функціи отъ функціи 64.
— неявныхъ функцій 192.
— функціи синусъ 202.
— остальныхъ тригонометрическихъ функцій 204.
— круговыхъ функцій 210.
Дифференцировать 43.
Дифференцируемый 181.
Дифференціалъ 181.
— частный 189.
— полный 191.
Дифференціальное исчисленіе 8.
Допущеніе, двойное ложное 130.
Дуговая мѣра 200.
Дѣйствія надъ малыми величинами 126.
— надъ бесконечно-малыми величинами 178.

Зависимая переменная 10, 40.
Зависимость функціональная 80.
Законъ паденія 69.
— дѣйствія массъ 99.
— Бойля и Гэ-Люссака 188.
Затуханіе 223.
Затухающія колебанія 221.
Значенія соотвѣтственныя 9.
— отрицательныя координаты 26.
— интерполированія 164.
— главное 208.

Измѣняемость величинъ 2.
Измѣреніе угловъ 199.

Изгибъ, точка 149.
 Изображеніе графическое 174.
 Инверсія сахарная 98.
 Интеграль 70.
 — неопредѣленный 70.
 — опредѣленный 74.
 Интегральное исчисленіе 8.
 — —, формулы приведенія 72.
 Интегрированіе, постоянная 69.
 —, задачи 70.
 —, по частямъ 73.
 — посредствомъ подстановки 73.
 — цѣлыхъ рациональныхъ функцийъ 74.
 — тригонометрическихъ функцийъ 205.
 — дробныхъ рациональныхъ функцийъ 87, 212.
 Интерполированіе 154.
 — посредствомъ цѣлой рациональной функции 154.
 —, его значеніе 164.
 — посредствомъ исчисленія разностей 165.
 — на основаніи большого числа наблюденій 173.
 — по методу Коши 174.
 — тригонометрическое 214.
 — при помощи показательной функции 227.
 Исчисленіе интегральное 8.
 — разностей, интерполированіе 165.
 Касательная, проведеніе ея 34.
 Квадрантъ 23.
 Квадраты, наименьшая сумма 174.
 Колебанія гармоническія 219, 220.
 — маятника 219.
 — періодъ 219.
 — затухающія 221.
 — вынужденныя 224.
 Координаты 24.
 —, отрицательныя значенія 26.
 Корень, дифференцированіе 61.
 Корни кратные 92.
 Косинусъ 198.
 Коши 174.
 Коэффициенты 46.
 — упругости 220, 221.
 Кратные корни 92.
 Кривая, уравненіе 25.
 — вогнутая 111.
 — выпуклая 111.
 Круговыя функции 207.
 —, дифференцированіе 210.
 Лейбницъ 9, 112.
 Линейная дробная функция 53.

Логарифмическій декрементъ 222.
 Логарифмы, вычисленіе 124.
 — натуральные 79.
 —, теорема сложения 81.
 Маклоренъ 116, 140.
 Малыя величины 126.
 Массы, законы дѣйствія 99.
 Махіма 144.
 Маятникъ, колебанія 219.
 Меркаторъ 123.
 Minima 144.
 Многократные корни 97.
 Моментъ, скорость въ данный 12.
 Наименьшая сумма квадратовъ 174.
 Натуральный логарифмъ 79.
 Натуральная показательная функция 84.
 Напряженность 1.
 Начало координатной системы 23.
 Независимая переменная 10, 40, 184.
 Нейль 63.
 Неопредѣленность задачъ интегрированія 70.
 Неопредѣленный интеграль 70.
 Неопредѣленные формы алгебраическихъ функцийъ 149.
 — — трансцендентныхъ функцийъ 152.
 Неполныя химическія реакціи 106.
 Непрерывный 113, 181.
 Неявныя функции 40, 192.
 Ньютонъ 9, 112, 122, 131.
 Обобщенная теорема о среднемъ значеніи 140.
 Обратныя функции 59.
 — —, дифференцированіе 59.
 Обращеніе приближенныхъ формулъ 138.
 Окружность, уравненіе 33.
 Опредѣленный интеграль 74.
 — —, геометрическое значеніе 74.
 Ордината 24.
 —, ось 23.
 Остаточный членъ формулы Маклорена 140.
 Ось абсциссъ 23.
 — ординатъ 23.
 — х-овъ 23.
 — у-овъ 23.
 Отношеніе приращеній 42.
 Отрицательныя значенія координатъ 26.
 Паденіе тѣлъ 11, 69.
 Парабола 33.
 — Апполонія 33.

- Нейля 63.
- Перемѣна переменнѣй 185.
- Перемѣнныя независимыя 10, 40, 184.
 - зависимыя 10, 40.
 - связанныя 39.
 - , перемѣна 185.
 - , функціи отъ двухъ 188.
 - , функціи отъ функціи отъ двухъ 194.
- Періодъ колебанія 219.
- Періодическія явленія 198.
- Площадь, приближенное вычисленіе 76.
- Подстановка, интегрированіе посредствомъ 73.
- Показательная функція 84.
 - —, формула 122.
 - —, интерполированіе 227.
- Полный дифференціалъ 191.
- Полныя химическія реакціи 103.
- Порядокъ цѣлой функціи 46.
 - бесконечно малой 179.
- Послѣдовательныя приближенія 133.
- Постоянная 10.
 - дифференцированія 48.
 - интегрированія 69.
- Представленіе, графическое 19.
- Приближеніе безграничное 16.
 - послѣдовательное 123.
- Приближенное вычисленіе площади 76.
 - способы рѣшенія уравненій 128.
 - формулы дѣленія 136.
 - — обращенія 138.
- Приведеніе, формулы 72.
- Проведеніе касательной 34.
- Произведеніе, дифференцированіе 51.
- Производныя 43, 181.
 - высшихъ порядковъ 109, 191.
 - частныя 189, 191.
- Простое гармоническое колебаніе 220.
- Прямая, уравненіе 32.
- Прямоугольники, формула 78.
- Разности перваго и втораго порядка 166, 167.
- Разность, дифференцированіе 49.
- Распространеніе, скорость 19.
- Рациональныя функціи 45.
 - — цѣлыя, дифференцированіе 45.
 - — дробныя, дифференцированіе 46.
 - — цѣлыя, интегрированіе 74.
 - — дробныя, интегрированіе 87, 212.
 - — цѣлыя, интерполированіе 154.
- Реакціи, скорость 19.
 - химическія полныя 103.
 - — неполныя 106.
- Роль 112.
- Рѣшеніе уравненій, приближенные способы 128.
- Сахарная инверсія 98.
- Связанныя переменныя 39.
- Синусъ 198.
 - , дифференцированіе 202.
- Скорость 9.
 - средняя 12.
 - въ данный моментъ 12.
 - угловая 18.
 - распространенія 19.
 - реакціи 19.
- Соотвѣтственныя значенія 9.
- Способы приближенного рѣшенія уравненій 128, 133.
- Среднее значеніе, теорема 113.
 - —, обобщенная теорема 140.
- Степень цѣлой функціи 46.
 - съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ, дифференцированіе 46.
 - съ цѣлымъ отрицательнымъ показателемъ, дифференцированіе 57.
 - съ любымъ показателемъ, дифференцированіе 61.
- Сумма, дифференцированіе 49.
- Суммированіе, формула 69.
- Тайлоръ 121.
- Теорема сложенія логарифмическимъ функціямъ 81.
 - о среднемъ значеніи 113.
 - обобщенная о среднемъ значеніи 140.
- Теплоемкость 197.
 - при постоянномъ давленіи 197.
 - при постоянномъ объемѣ 197.
- Точка изгиба 149.
- Точность абсолютная 15.
- Трансцендентныя функціи 152.
- Трапеціи, формула 78.
- Тригонометрическія функціи 198.
 - —, дифференцированіе 202, 204.
 - —, интегрированіе 205.
 - —, нѣкоторыя теоремы 213.
- Тригонометрическое интерполированіе 214.
- Угловая скорость 18.
- Углы, измѣреніе 199.
- Упругость, коэффициентъ 220, 221.
- Уравненіе кривой 25.
 - прямой 32.
 - окружности 33.
 - параболы 33.
 - , приближенные способы рѣшенія 128, 133.
- Ускореніе 112.
- Условія вспомогательныя 70.

Фаза 219.

Формула суммирования 69.

- подстановки, интегрирование 73.
- прямоугольниковъ 78.
- трапецій 78.
- Маклорена 116.
- Тайлора 121.
- биннома Ньютона 122.
- для показательной функции 122.
- Меркатора 123.
- дѣленія, приближенная 136.
- Маклорена, остаточный членъ 140.

Формы неопредѣленные алгебраическихъ функций 149.

- — — — — трансцендентныхъ функций 152.

Функции 10.

- явныя 40.
- неявныя 40.
- рациональныя 45.
- рациональныя цѣлыя 45.
- рациональныя дробныя 45.
- , степень или порядокъ 46.
- линейныя дробныя 53.
- обратныя, дифференцирование 59.
- , дифференцирование функций отъ 64.
- алгебраическія 66.
- , интегрирование цѣлыхъ рациональныхъ ф. 74.
- логарифмическія, теорема сложения 81.
- натуральная показательная 84.
- , интегрирование дробныхъ рациональныхъ ф. 87, 211.
- производная 109.

- алгебраическія, неопредѣленные формы 149.
- трансцендентныя, неопредѣленные формы 152.
- интерполирование при помощи цѣлыхъ рациональныхъ ф. 154.
- непрерывная 113, 181.
- двухъ переменныхъ 188.
- — — — —, производныя высшихъ порядковъ 191.
- отъ функции двухъ переменныхъ 194.
- тригонометрическія 198.
- , дифференцирование тригонометрическихъ ф. 202, 204.
- , интегрирование тригонометрическихъ ф. 205.
- круговыя 207.
- — — — —, дифференцирование 210.
- , некоторыя теоремы о тригонометрическихъ ф. 213.

Функциональная зависимость 80.

Химическія реакція полныя 103.

- — — — — неполныя 106.

Цѣлая рациональная функция 45.

Частное, дифференцирование 52.

Частный дифференціалъ 189.

Членъ, остаточный формулы Маклорена 140.

Экстраполирование 165.

Явленія періодическія 198.

Явная функция 40.

Изданія К. Л. Риккера, въ С.-Петербургѣ.

Невскій проспектъ, 14.

Начала статики. Лекціи, читанныя слушательницамъ женско-строительныхъ курсовъ проф. А. Н. Митинскимъ. Съ 85 рис. 1906, ц. 90 к.

Термодинамика съ приложеніями къ газамъ, парамъ и тепловымъ машинамъ. Сост. А. Пюдингъ. 2-ое дополненн. изданіе. Съ 65 рис. 1905, ц. 3 р. въ перепл. 3 р. 50 к.

Конструированіе и расчеты. Пособіе при практическихъ работахъ конструкторовъ и обучающихся инж. Г. Гедера. Перев. съ 2-го нѣмецк. изд. инж.-мех. Л. Я. Бершадскаго. Съ 970 фиг. и 9 табл. черт. 1904, ц. 5 р., въ перепл. 5 р. 80 к.

Книга эта является въ видѣ краткаго учебника или пособія; она можетъ служить одновременно молодымъ техникамъ руководствомъ въ школѣ при проектированіи и пособіемъ и совѣтникомъ, берегающимъ время, для старыхъ техниковъ на поприщѣ ихъ практической дѣятельности.

Такъ какъ книга эта съ другой стороны имѣетъ свою цѣлью не только сообщать знанія, но сообщать умѣнье учиться, то она даетъ возможность и лицамъ, не получившимъ спеціальнаго технического образованія, дополнить свои познанія и научить ихъ въ то же время относиться сознательно къ выполняемымъ ими работамъ.

Лишь тотъ техникъ, который пользуется опытомъ другихъ и который въ то же время не пренебрегаетъ и коммерческой стороною дѣла, быстро достигаетъ успѣховъ и сокращаетъ неизбѣжный для каждаго начинающаго «періодъ разочарованія».

Парораспредѣленіе. Справ. книга при проектированіи и практическое пособіе при изученіи парораспредѣленій вентильнаго, золотниковаго, реверсирнаго и Корлиса инж. Г. Гедера. Перев. съ 6 нѣм. изд. и дополн. инж.-тех. Л. Я. Бершадскій. Текстъ и отд. атл. съ 42 листами черт. 1903, ц. 3 р. 20 к.

Этотъ трудъ имѣетъ главною цѣлью проектированіе, то-есть, здѣсь предполагаются уже извѣстными тѣ теорет. обоснованія и кинемат. условія, которымъ долженъ удовлетворять предложенный къ проектированію типъ машины. Въ этомъ и заключается отличіе книги Гедера отъ другихъ курсовъ механики, въ которыхъ разсматриваются уже существующія системы парораспредѣленія. Книга издана прекрасно и изложеніе не оставляетъ желать ничего лучшаго въ смыслѣ ясности и полноты разработки предмета. Какъ справочная книга она положительно незаменима при всякомъ проектированіи машинъ. «Московскія Вѣдомости» 1903, № 38.

Паровыя машины. Справочная книга при проектированіи и практическое пособіе при расчетахъ паровыхъ машинъ и деталей ихъ, инж. Г. Гедера. Перев. съ 7 нѣм. изд. и дополниль инж.-мех. Л. Я. Бершадскій. Текстъ съ атласомъ въ 70 лист. чертеж. 1904, ц. 6 р., въ перепл. 7 р. 60 к.

Н. Haeder указываетъ въ предисловіи къ 6 нѣм. изд., что цѣль этой книги—сплавить по возможности теорію съ практикой до того предѣла, пока получаемые результаты для непосредственнаго практическаго пользованія дадутъ значенія, наиболее отвѣчающія теоретическимъ требованіямъ. Тѣмъ самымъ, что на русскомъ языкѣ появился перев. съ 4 нѣм. и 2 перевода съ 6 нѣм. изд. ясно указывается, что и у насъ имѣется много сторонниковъ цѣли, которую ставилъ себѣ авторъ, что и у насъ многіе довольствуются достаточно близкими къ теоріи результатами, получаемыми при наименьшей затратѣ времени и труда. А этой цѣли книга достигаетъ вполне, она является весьма подходящей справочной книгой при расчетахъ и практическ. пособіемъ при исполненіи тонкостей проектированія паровыхъ машинъ и ихъ деталей.

Справочная книга по машиностроенію для инженеровъ, техниковъ и студентовъ высшихъ технич. учебн. заведеній, проф. Фр. Фрейтага. Разрѣшенный переводъ съ нѣм. подъ редакціей и съ примѣч. проф. Н. А. Быкова. Съ 167 фиг. и 6 табл. 1907, ц. въ пер. 5 р.

Отдѣлы справочника, трактующіе о машинахъ и ихъ деталяхъ, заключаютъ всѣ новости послѣдняго времени, каковы напр. паровыя турбины, центробѣжныя помпы высокаго давленія, автодвигатели и проч. Заслуживаютъ вниманія и многочисленныя примѣры на примѣненіе формулъ и приемовъ конструированія, а также и подробное описаніе и строительныя чертежи новѣйшихъ механизмовъ и устройствъ; кромѣ того книга богата библиографическими указаніями. Подстрочныя примѣчанія редактора русскаго перевода, переработавшаго кореннымъ образомъ одинъ изъ отдѣловъ книги, содержатъ помимо поправокъ и измѣненій неудачныхъ мѣстъ нѣмецк. текста еще и много весьма цѣнныхъ дополненій. «Прав. Вѣстникъ» 1906, № 83.

Двигатели малой силы для промышленности и сельскаго хозяйства (паровые, газовые, керосиновые, водяные и вѣтряные двигатели). Практ. руков. для владельцевъ двигателей. Сост. Инженеръ Механ. Д. Головъ. 2-ое переработанн. и дополн. изданіе. Съ 104 рис. 1904, ц. 2 р., въ перепл. 2 р. 50 к.