С. С. БЮШГЕНС

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

КОНЦЕНТРЫ ВТОРОЙ и ТРЕТИЙ

ОНТИ • НКТП • ССР • 19

Проф. С. С. БЮШГЕНС

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

КОНЦЕНТРЫ ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1937 ЛЕНИНГРАД

Т—24-5-2

Ответственный редактор: **Н. А. Талицких.** Техн. ред: **Е. Г. Шпак.**
Корректор: **Т. К. Эрнст.**

Сдано в набор 4/VII 1937 г. Подписано к печати 5/VIII 1937 г.
Печ. л. $24^3/_4$. Учетно-авт. л. 32. Бум. л. $12^3/_8$. Формат бум 62×94.
Ленгорлит 3870. Тираж 7000. Тип. зн. в 1 бум. листе 106624. Заказ № 2193.

2-я типография ОНТИ им. Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава XII.

Общее уравнение линий 2-го порядка.

Исследование общего уравнения 2-й степени относительно обыкновенных декартовых координат x, y на плоскости или трех однородных координат $x:y:z$ имеет прежде всего целью выяснить, *какого рода линии* могут изображаться таким уравнением с любыми произвольными значениями коэфициентов. Это исследование показывает, что общее уравнение может изображать, если не считать пары прямых (когда левая часть уравнения распадается на два линейных множителя) и мнимых линий, только линии трех уже изученных нами предварительно типов, именно эллипсы, гиперболы и параболы.

Основным приемом последующего исследования нам будет служить рассмотрение пересечения линии, изображаемой данным уравнением, с прямыми пучка, центр которого мы будем помещать относительно линии в том или ином месте, в зависимости от надобности. Это исследование устанавливает *ряд общих геометрических свойств* линий 2-го порядка, имеющих самостоятельную геометрическую ценность для изучения линий; вместе с тем эти свойства позволяют найти путь для упрощения общего уравнения линии выбором подходящей системы координат, именно путь для приведения общего уравнения к каноническому виду.

1. Общее уравнение 2-й степени.

Общее уравнение 2-й степени с двумя переменными x и y (двумя декартовыми координатами) должно содержать *шесть членов*, а именно: три члена второй степени относительно координат:

$$x^2,\ xy,\ y^2,$$

затем два члена первой степени с x и y и, наконец, свободный член.

Это уравнение мы будем писать в следующем виде:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

обозначая все его коэфициенты одной и той же буквой a с двумя значками; индексы при коэфициентах выбраны так, чтобы они указывали, какие из переменных x или y входят в соответствующий член и в какой степени. Так, коэфициент первого члена a_{11} должен напоминать, что в этот член первое переменное x входит множителем дважды (т. е. во 2-й степени); подобным образом коэфициент $2a_{12}$ показывает, что в соответствующий член левой части уравнения каждое из переменных x и y (первое и второе) входит множителем по одному разу. В коэфициентах при членах первой степени или в свободном члене значок 3 можно было бы опустить совсем, но тогда у нас обозначение вышло бы пестрым: одни коэфициенты были бы с двумя значками, другие (члены 1-й степени)—с одним значком, а свободный член оказался бы вовсе без индекса. Во всех этих членах мы ставим дополнительный значок 3, введение которого получает свое оправдание при переходе к так называемым однородным координатам.

Будем обозначать каждую из декартовых координат x, y через отношение одной из двух переменных x', y' к третьему переменному z', т. е. положим

$$x = \frac{x'}{z'}, \quad y = \frac{y'}{z'};$$

отношения двух из трех чисел $x' : y' : z'$ к третьему (последнему), обратно, можно всегда истолковать как декартовы координаты точки. Эти три числа $x' : y' : z'$ определяют, следовательно, относительно данной декартовой системы координат точку, а потому они сами могут быть названы координатами точки. Эти координаты называются *однородными*, так как важны лишь их отношения, и две тройки $x' : y' : z'$ и $mx' : my' : mz'$, где m — любой множитель, отличный от нуля, будут определять одну и ту же точку. Однородными они называются еще и потому, что уравнение каждой алгебраической линии при переходе к этим координатам становится однородным, например, уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0$$

или уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

при указанной замене перейдут в однородные уравнения:

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$

$$x'^2 + y'^2 + 2ax'z' + 2by'z' + cz'^2 = 0.$$

Каждой из однородных координат можно условиться давать лишь конечные значения; так, при z', отличном от нуля, мы будем получать точки на конечном расстоянии, при $z' = 0$ получим точки бесконечно удаленные. В частности, если принять $z' = 1$, то

$$x = x', \ y = y'.$$

В дальнейшем мы будем однородные координаты обозначать без штрихов сверху, через $x : y : z$.

Итак, введем однородные координаты, заменив в уравнении (1)

$$x \text{ на } \frac{x}{z}, \quad y \text{ на } \frac{y}{z},$$

после чего умножим уравнение на z^2; тогда его левая часть будет однородной относительно трех переменных x, y, z:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0, \qquad (2)$$

и значок 3 в коэфициентах будет как-раз соответствовать в том или ином члене левой части наличию третьего переменного z, подобно тому как индексы 1 и 2 указывают на переменные x и y.

Обращаем особенное внимание на то, что для удобства и симметрии дальнейших преобразований мы коэфициенты при парных произведениях координат обозначили через

$$2a_{12},\ 2a_{13},\ 2a_{23};$$

таким образом самые a_{12}, a_{13}, a_{23} будут равны *половинам соответствующих коэфициентов.*

Например, если дано уравнение:

$$3x^2 - 4xy - 5y^2 + 7x - 8y + 13 = 0,$$

то

$$a_{11} = 3,\quad 2a_{12} = -4,\quad a_{22} = -5,\quad 2a_{13} = 7,\quad 2a_{23} = -8,\quad a_{33} = 13,$$

или

$$\begin{aligned} &a_{11} = 3; \quad &&a_{22} = -5; \quad &&a_{33} = 13; \\ &a_{12} = -2; \quad &&a_{13} = 3{,}5; \quad &&a_{23} = -4. \end{aligned}$$

Условимся в дальнейшем для коэфициентов с двумя различными индексами допускать их перестановку, если это нам понадобится для симметрии записи; согласно этому условию будем считать, что

$$a_{23} = a_{32},\quad a_{31} = a_{13},\quad a_{12} = a_{21}.$$

Однородный многочлен какой-либо степени называют в алгебре *формою*: форма с двумя переменными называется *бинарной*, форма с тремя переменными — *троичной*; форма 1-й степени называется *линейною*, форма 2-й степени — *квадратичною*. Левая часть уравнения (2) будет согласно этим наименованиям квадратичною троичною формой; мы ее обозначим для краткости через $2F(x, y, z)$ или просто через $2F$. Составим половины частных производных от этой функции по каждому из переменных x, y, z, считая каждый раз остальные постоянными; тогда

$$\begin{aligned} F'_x &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ F'_y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ F'_z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь при записи этих производных использовано условие возможности перестановки индексов у коэфициентов, благодаря чему вся схема получилась весьма симметричной и закономерной.

Между найденными частными производными, как это легко проверить, существует следующее тождественное соотношение:

$$xF'_x + yF'_y + zF'_z = 2F. \tag{4}$$

Написанное соотношение является частным случаем (для однородных функций 2-й степени) общей теоремы Эйлера об однородных функциях измерения m, именно теоремы

$$x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z\frac{\partial \Phi}{\partial z} = m\Phi.$$

Полагая здесь $\Phi = 2F$ и $m = 2$, мы и получим соотношение (4). Тождественным соотношением (4) нам в дальнейшем придется неоднократно пользоваться.

Уравнение 2-й степени относительно переменных x и y, понимаемых как две декартовы координаты, будет уравнением линии 2-го порядка. Это уравнение содержит шесть коэфициентов, относительно которых оно однородно.

Каждый раз, как мы потребуем, чтобы наша линия 2-го порядка проходила через некоторую заданную точку $(x_1; y_1)$, мы, выражая это условие, получим одно соотношение между коэфициентами:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} = 0.$$

Таким образом, если мы желаем определить пять отношений между шестью коэфициентами, мы должны иметь пять аналогичных соотношений, иначе говоря, *чтобы определить линию 2-го порядка, мы должны дать пять точек*, через которые она проходит; тогда из пяти уравнений:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} = 0,\\
a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{13}x_2 + 2a_{23}y_2 + a_{33} = 0,\\
a_{11}x_3^2 + 2a_{12}x_3y_3 + a_{22}y_3^2 + 2a_{13}x_3 + 2a_{23}y_3 + a_{33} = 0,\\
a_{11}x_4^2 + 2a_{12}x_4y_4 + a_{22}y_4^2 + 2a_{13}x_4 + 2a_{23}y_4 + a_{33} = 0,\\
a_{11}x_5^2 + 2a_{12}x_5y_5 + a_{22}y_5^2 + 2a_{13}x_5 + 2a_{23}y_5 + a_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

мы определим отношения пяти из коэфициентов $a_{11} : a_{12} : a_{22} : a_{13} : a_{23} : a_{33}$ к шестому и подставим эти отношения в уравнение линии (1). Результат исключения указанных коэфициентов из шести однородных уравнений (1) и (5), как известно, можно написать в виде равенства нулю определителя, составленного из коэфициентов при a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}:

$$\begin{vmatrix}
x^2 & xy & y^2 & x & y & 1\\
x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\
x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\
x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\\
x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1\\
x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1
\end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Таково будет уравнение линии 2-го порядка, проходящей через пять заданных различных точек.

Заметим, между прочим, что когда даны пять точек числовыми значениями координат, может оказаться проще составить и разрешить систему уравнений (5) для определения коэфициентов уравнения (1) искомой линии, чем развертывать определитель 6-го порядка (6) для получения окончательного уравнения линии.

При некоторых частных расположениях данных пяти точек уравнение (6) может оказаться тождественно исчезающим; это будет обозначать, что система уравнений (5) недостаточна для определения всех коэфициентов a_{ik} и через данные пять точек возможно провести бесчисленное множество линий 2-го порядка.

Упражнения. 576. Показать, что линия 2-го порядка, проходящая через пять точек $(-2;\ 0)$, $(0;\ -1)$, $(3;\ 0)$, $(0;\ 2)$, $(4;\ 3)$, будет изображаться уравнением:

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - x - 3y - 6 = 0.$$

577. Показать, что линия 2-го порядка, проходящая через пять точек: $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$, $(2;\ -2)$, $(-3;\ 3)$, $(2;\ 3)$, проходит также и через шестую точку

$$\left(\frac{16}{5};\ -\frac{17}{5}\right).$$

2. Перенос начала координат; его инварианты.

Возьмем общее уравнение линии 2-го порядка:

$$2F = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

и преобразуем его к новой системе координат, перенося начало координат в какую-либо произвольную точку $(x_1;\ y_1)$ с сохранением направления осей. Нам, следовательно, в уравнении (1) придется сделать подстановку:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + X, \\ y &= y_1 + Y, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

где через X, Y обозначены новые координаты какой-либо точки M, которая в старой системе определялась координатами $(x;\ y)$. Итак, уравнение нашей линии относительно новой системы координат будет:

$$a_{11}(X + x_1)^2 + 2a_{12}(X + x_1)(Y + y_1) + a_{22}(Y + y_1)^2 + 2a_{13}(X + x_1) + \\ + 2a_{23}(Y + y_1) + a_{33} = 0$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2\ (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13})X + \\ + 2\ (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23})\ Y + a_{11}x_1{}^2 + 2a_{12}x_1y_1 + \\ + a_{22}y_1{}^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} = 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

Полученное уравнение мы можем записать сокращенно на основании нижеследующих замечаний.

После преобразования три старших члена сохранили свои коэфициенты; затем свободный член преобразованного уравнения оказался равным значению левой части начального уравнения, в которую вместо текущих координат $(x;\ y)$ подставлены координаты нового начала $(x_1;\ y_1)$, этот свободный член поэтому можно коротко обозначить через $2F(x_1;\ y_1)$, или еще проще — через $2F_1$. Что касается коэфициентов при первых степенях X и Y, то они представляют собой значения частных производных от левой части уравнения $2F$, в которые (производные) вместо текущих координат опять подставлены координаты нового начала; мы их обозначим соответственно через $2F_{x_1}$ и $2F_{y_1}$.

Итак, преобразованное уравнение может быть написано следующим образом:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2F_{x_1}X + 2F_{y_1}Y + 2F_1 = 0. \qquad (8')$$

Напишем преобразованное уравнение в виде:

$$a'_{11}X^2+2a'_{12}XY+a'_{22}Y^2+2a'_{13}X+2a'_{23}Y+a'_{33}=0,$$

произведя указанную подстановку (7). Мы теперь знаем, как выражаются новые коэфициенты через прежние и параметры преобразования x_1, y_1; именно, мы нашли, что:

$$\begin{aligned} &a'_{11}=a_{11}, \quad a'_{12}=a_{12}, \quad a'_{22}=a_{22}, \\ &a'_{13}=F_{x_1}, \quad a'_{23}=F_{y_1}, \quad a'_{33}=2F_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как мы здесь имеем шесть уравнений между старыми и новыми коэфициентами и параметрами преобразования x_1, y_1, то, исключая из этих уравнений два параметра подстановки x_1, y_1, мы должны получить четыре соотношения между старыми и новыми коэфициентами.

Три из этих соотношений непосредственно видны — это три первых уравнения системы (9), они уже не содержат x_1, y_1; остается найти лишь четвертое соотношение, не содержащее x_1, y_1.

Составим определитель из всех коэфициентов общего уравнения, сохраняя то их расположение, которое они имеют в таблице (3) частных производных левой части уравнения, т. е. определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

и назовем его дискриминантом из всех коэфициентов уравнения или функции $2F$.

Составим теперь дискриминант преобразованного уравнения:

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix};$$

подставив в него выражения (9) новых коэфициентов, имеем:

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & F_{x_1} \\ a_{21} & a_{22} & F_{y_1} \\ F_{x_1} & F_{y_1} & 2F_1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Пользуясь элементарными свойствами определителя, произведем в этом определителе следующее преобразование: вычтем из элементов третьего столбца соответственные элементы первого столбца, умножив их на x_1, и соответственные элементы второго столбца, умножив их на y_1; тогда получим:

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ F_{x_1} & F_{y_1} & F_{z_1} \end{vmatrix}, \tag{11'}$$

так как в силу соотношений (3) и (4) при $z_1 = 1$:

$$F_{x_1} - a_{11}x_1 - a_{12}y_1 = a_{13},$$
$$F_{y_1} - a_{21}x_1 - a_{22}y_1 = a_{23},$$
$$2F_1 - x_1F_{x_1} - yF_{y_1} = F_{z_1}.$$

Теперь в определителе (11′) проделаем аналогичное преобразование по строкам, а именно вычтем из элементов последней строки соответственные элементы первой строки, умножив их на x_1, и соответственные элементы второй строки, умножив их на y_1; тогда получим:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

т. е.

$$\Delta' = \Delta; \tag{11″}$$

это и будет искомое четвертое соотношение.

Итак, старые коэфициенты связаны с коэфициентами уравнения, преобразованного переносом начала, четырьмя соотношениями:

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \ a'_{22} = a_{22},$$
$$\Delta' = \Delta. \tag{12}$$

Эти соотношения не зависят от координат x_1, y_1 нового начала, поэтому они будут сохраняться неизменными (инвариантными) при любом переносе начала в какую угодно точку. Самый вид этих соотношений показывает, что каждая из четырех функций коэфициентов начального уравнения:

$$\begin{aligned} i_1 &= a_{11}, \\ i_2 &= a_{12}, \\ i_3 &= a_{22}, \\ i_4 &= \Delta \end{aligned} \tag{13}$$

сохраняет одно и то же свое значение при любом переносе начала; поэтому эти четыре функции называются *инвариантами* преобразования, состоящего из переноса начала координат.

Таким образом *относительно преобразования переноса начала общее уравнение имеет четыре инварианта, а именно три коэфициента старших членов и дискриминант из всех коэфициентов.*

Четыре инвариантных соотношения (12) можно использовать для определения новых коэфициентов преобразованного уравнения, *не производя самого преобразования* переноса начала, если даны два дополнительных условия, характеризующие преобразование. Эти два дополнительных условия вместе с четырьмя соотношениями (12) и определят все шесть новых коэфициентов.

Упражнения. 578. Начало координат переносится для линии 2-го порядка

$$3x^2-4xy+y^2+4x+6y-39=0$$

в такую точку, что в преобразованном уравнении пропадает член с 1-й степенью ординаты и свободный член; найти остальные коэфициенты преобразованного уравнения.

Указание. В преобразованном уравнении коэфициенты старших членов должны сохраниться, коэфициенты a'_{23} и a'_{33} по условию обращаются в нули, поэтому преобразованное уравнение должно иметь вид:

$$3x^2-4xy+y^2+2a'_{13}x=0.$$

Неизвестный коэфициент a'_{13} определится на основании инвариантности дискриминанта, т. е. из условия, что дискриминант из всех коэфициентов старого уравнения должен равняться дискриминанту из коэфициентов преобразованного уравнения:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -39 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & a'_{13} \\ -2 & 1 & 0 \\ a'_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

откуда

$$-16=-a'^2_{13}$$

или

$$a'_{13}=\pm 4.$$

579. Начало координат переносится для линии 2-го порядка

$$5x^2+8xy+3y^2+10x-12y-400=0$$

в такую точку, что в преобразованном уравнении пропадают члены с первыми степенями координат; найдите преобразованное уравнение.

3. Распадение линии 2-го порядка на пару прямых.

Если левая часть уравнения (1) распадается на два линейных множителя:

$$(Ax+By+C)(A'x+B'y+C')=0, \tag{14}$$

то говорят, что линия, изображаемая уравнением (1), распадается на пару прямых, ибо уравнение (14) изображает совокупность двух прямых, именно прямой:

$$Ax+By+C=0$$

и прямой

$$A'x+B'y+C'=0.$$

Если уравнение (1) может быть представлено в виде (14), т. е. $2F$ распадается на два линейных множителя, то легко убедиться, что дискриминант Δ обращается в нуль. В самом деле, развернем левую часть уравнения (14):

$$AA'x^2+(AB'+A'B)\,xy+BB'y^2+(AC'+A'C)x+(BC'+B'C)y+ \\ +CC'=0 \tag{14'}$$

и составим его дискриминант:

$$\Delta = \begin{vmatrix} AA' & \frac{AB'+A'B}{2} & \frac{AC'+A'C}{2} \\ \frac{AB'+A'B}{2} & BB' & \frac{BC'+B'C}{2} \\ \frac{AC'+A'C}{2} & \frac{BC'+B'C}{2} & CC' \end{vmatrix},$$

или

$$\Delta = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} AA'+A'A & BA'+B'A & CA'+C'A \\ AB'+A'B & BB'+B'B & CB'+C'B \\ AC'+A'C & BC'+B'C & CC'+C'C \end{vmatrix}.$$

Если его написать в виде суммы двух определителей:

$$\Delta = \frac{A}{8}\begin{vmatrix} A' & BA'+B'A & CA'+C'A \\ B' & BB'+B'B & CB'+C'B \\ C' & BC'+B'C & CC'+C'C \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{A'}{8}\begin{vmatrix} A & BA'+B'A & CA'+C'A \\ B & BB'+B'B & CB'+C'B \\ C & BC'+B'C & CC'+C'C \end{vmatrix},$$

то мы можем выкинуть в каждом из них во вторых и третьих столбцах слагаемые, соответственно пропорциональные элементам первого столбца:

$$\Delta = \frac{A}{8}\begin{vmatrix} A' & B'A & C'A \\ B' & B'B & C'B \\ C' & B'C & C'C \end{vmatrix} + \frac{A'}{8}\begin{vmatrix} A & BA' & CA' \\ B & BB' & CB' \\ C & BC' & CC' \end{vmatrix},$$

и мы увидим, что элементы двух последних столбцов в каждом из полученных определителей пропорциональны, а потому:

$$\Delta = 0.$$

Итак, если линия 2-го порядка распадается на пару прямых, то дискриминант Δ ее уравнения обращается в нуль. Тот же результат можно получить и другим способом, из которого легко извлечь доказательство и обратного предложения.

Возьмем уравнение линии 2-го порядка в виде:

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_{23})y + a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$$

и, предполагая $a_{22} \neq 0$, разрешим его относительно y:

$$y = \frac{-(a_{12}x + a_{23}) \pm \sqrt{\Phi}}{a_{22}}, \tag{15}$$

где принято

$$\Phi = (a_{12}x + a_{23})^2 - a_{22}(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}).$$

Чтобы уравнение (1) или (15) изображало пару прямых, нужно, чтобы выражение Φ, стоящее под радикалом, было полным квадратом линейной функции относительно x. Трехчлен 2-й степени относительно x:

$$\Phi = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\,x^2 + 2\,(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\,x + (a_{23}^2 - a_{22}a_{33})$$

будет полным квадратом, если произведение его крайних коэфициентов равно квадрату половины среднего (и только в этом случае), т. е. если

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\,(a_{23}^2 - a_{22}a_{33}) - (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 = 0.$$

Развертывая это последнее условие, мы убедимся, что оно равносильно условию $\Delta = 0$.

Обратно, если дискриминант Δ обращается в нуль, тогда трехчлен Φ будет полным квадратом; из уравнения (1) для y мы найдем выражение (15) в виде линейной функции относительно x, т. е. линия (1) будет распадаться на пару прямых.

Выше мы предполагали $a_{22} \neq 0$; если же $a_{22} = 0$, но $a_{11} \neq 0$, мы могли бы разрешить уравнение (1) относительно x и получили бы аналогичное заключение.

Если, наконец, и $a_{11} = 0$, и $a_{22} = 0$, но $a_{12} \neq 0$, то уравнение (1) примет вид:

$$2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{16}$$

а его дискриминант, как легко сосчитать, будет

$$\Delta = a_{12}\,(2a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}).$$

Умножим уравнение (16) на $2a_{12}$, тогда его левую часть можно написать в следующей форме:

$$(2a_{12}x + 2a_{23})\,(2a_{12}y + 2a_{13}) - 2\,(2a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) = 0, \tag{16'}$$

откуда прямо видно, что если $\Delta = 0$, то уравнение изображает пару прямых.

Итак, во всех случаях *равенство нулю дискриминанта* Δ *есть условие необходимое и достаточное для того, чтобы уравнение* (1) *изображало пару прямых.*

Предыдущее предложение является геометрическим истолкованием доказанной нами в сущности алгебраической теоремы: необходимым и достаточным условием распадения квадратичной троичной формы на два линейных множителя является обращение в нуль ее дискриминанта.

Упражнения. 580. Распадается ли линия, изображаемая уравнением

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x - 14y + 5 = 0,$$

на пару прямых?

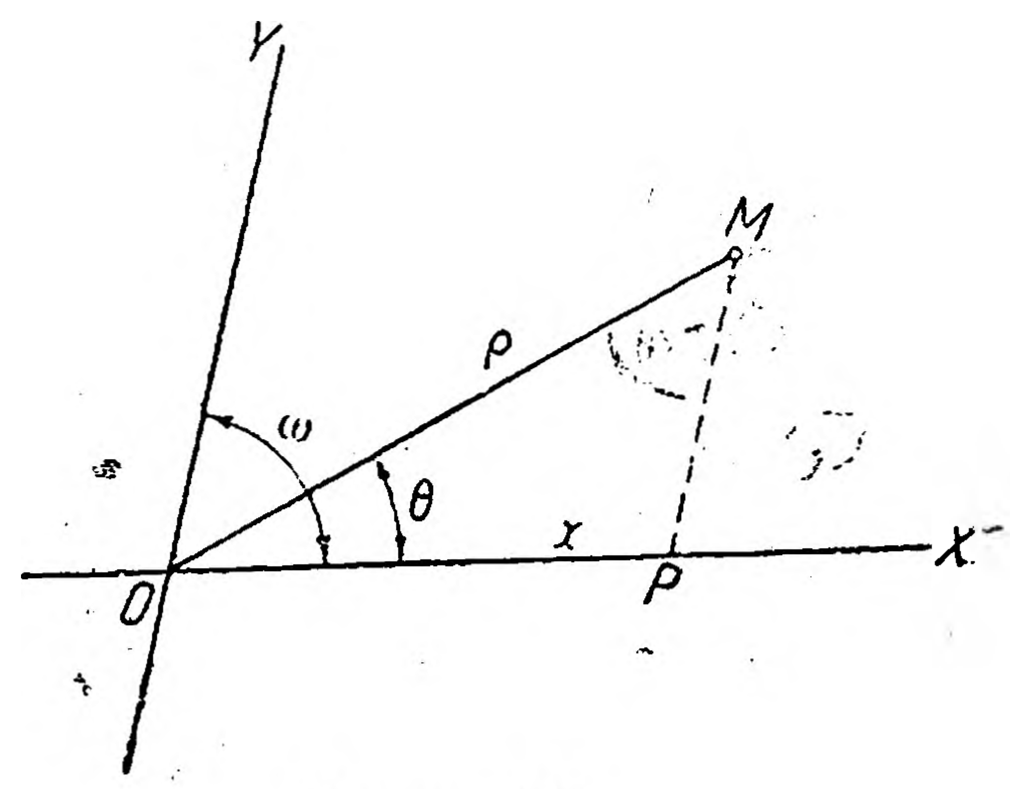
581. Для уравнения:

$$6xy - 3y^2 + 10x - 8y + m = 0$$

определить свободный член так, чтобы оно изображало пару прямых.

4. Косоугольная декартова система координат.

Так как в дальнейшем исследовании мы будем предполагать, что общее уравнение линии 2-го порядка может быть задано относительно произвольной декартовой системы координат, то уместно будет здесь указать некоторые основные формулы относительно косоугольной системы координат.



Черт. 145.

Пусть точка M определяется координатами x, y относительно какой-либо косоугольной системы координат, оси которой OX и OY составляют между собой угол ω (черт. 145). В таком случае в треугольнике OPM мы имеем соотношение:

$$OM^2 = OP^2 + PM^2 - 2OP \cdot PM \cdot \cos(OPM),$$

или

$$OM^2 = \rho^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\pi - \omega),$$

что окончательно дает:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega; \qquad (17)$$

так выражается по координатам точки квадрат ее расстояния от начала координат в косоугольной системе. Нетрудно убедиться, что полученная формула (17) будет общей формулой, справедливой для любого расположения точки относительно данной координатной системы; когда $\omega = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos\omega = 0$, то мы получим известное нам выражение для квадрата расстояния точки от начала в прямоугольной системе, именно:

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Обозначим теперь угол луча OM с осью ox через θ; в треугольнике OPM внешний угол MPX равен, как мы выше отметили, координатному углу ω; поэтому его внутренний угол будет:

$$OMP = \omega - \theta.$$

В силу свойства пропорциональности сторон синусам противолежащих углов, мы можем для треугольника OPM написать:

$$\frac{x}{\sin(\omega - \theta)} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{\rho}{\sin(\pi - \omega)} \qquad (18)$$

или

$$\frac{x}{\sin(\omega - \theta)} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{\rho}{\sin\omega}.$$

Из предыдущих соотношений мы можем определить x и y через ρ и θ, т. е. через полярные координаты в виде:

$$x = \rho\frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin\omega}, \quad y = \rho\frac{\sin\theta}{\sin\omega}. \qquad (19)$$

Эти соотношения мы дальше будем писать так:

$$x = m\rho, \quad y = n\rho, \tag{19'}$$

где принято для краткости

$$m = \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin\omega}, \quad n = \frac{\sin\theta}{\sin\omega}.$$

Соотношения (19) при $\omega = \frac{\pi}{2}$ обращаются естественно в обычные формулы перехода от полярных в декартовы прямоугольные координаты:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

Из соотношений (18) следует также, что уравнение прямой, проходящей через начало координат, будет:

$$y = kx, \tag{20}$$

где угловой коэфициент k получит следующее выражение:

$$k = \frac{n}{m} \tag{21}$$

или

$$k = \frac{\sin\theta}{\sin(\omega - \theta)}; \tag{21'}$$

в косоугольной системе координат угловой коэфициент k не совпадает с тангенсом угла прямой с осью x.

Определим из соотношения (21') тангенс угла θ через угловой коэфициент; с этой целью, освободившись от знаменателя в уравнении (21'), развернем затем синус разности, тогда

$$k(\sin\omega\cos\theta - \cos\omega\cdot\sin\theta) = \sin\theta. \tag{21''}$$

Разделив теперь обе части этого равенства на $\cos\theta$, мы получим:

$$k(\sin\omega - \cos\omega\cdot\operatorname{tg}\theta) = \operatorname{tg}\theta,$$

откуда окончательно:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k\sin\omega}{1 + k\cos\omega}. \tag{22}$$

Возьмем две каких-нибудь прямых, составляющих с осью x соответственно углы θ и θ' и имеющих угловые коэфициенты, соответственно равные k и k'. Эти две прямые будут взаимно перпендикулярны, если:

$$\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\theta' = -1.$$

Подставим в это условие вместо тангенсов соответствующие их выражения через угловые коэфициенты каждой из прямых по формуле (22); оно примет вид:

$$\frac{k\sin\omega}{1 + k\cos\omega}\cdot\frac{k'\cdot\sin\omega}{1 + k'\cos\omega} = -1$$

или по освобождении от знаменателей и после переноса всех членов в одну сторону:

$$1 + (k + k')\cos\omega + kk' = 0. \tag{23}$$

Таково будет *условие перпендикулярности двух прямых по их угловым коэфициентам для косоугольной системы координат*: в частности при $\omega = \frac{\pi}{2}$ оно обращается в известное условие (для прямоугольной системы координат):

$$1 + kk' = 0.$$

Упражнения. 582. Доказать, что квадрат расстояния d двух точек $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ относительно косоугольной системы будет определяться по формуле:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega,$$

где ω — координатный угол.

583. Параметры m и n, определяющие направление прямой, связаны между собой соотношением:

$$m^2 + n^2 + 2mn\cos\omega = 1.$$

Указание. В соотношение (17) подставим вместо декартовых координат x и y их выражения (19′) через ρ, m, n, тогда после сокращения на ρ^2 и получим указанную зависимость между m и n.

584. Каковы будут значения коэфициентов направления m и n для оси x-ов или для оси y-ов?

585. Уравнение окружности с центром в точке $(a;\ b)$ и радиусом r относительно косоугольной системы координат напишется в виде:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\omega - r^2 = 0$$

или

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2(a + b\cos\omega)x - 2(a\cos\omega + b)y + \\ + (a^2 + 2ab\cos\omega + b^2 - r^2) = 0.$$

586. Уравнение 2-й степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

будет изображать окружность относительно косоугольной системы координат, если его коэфициенты удовлетворяют *двум* условиям:

$$\frac{a_{11}}{1} = \frac{a_{12}}{\cos\omega} = \frac{a_{22}}{1}. \tag{α}$$

Указание. Если мы хотим, чтобы уравнение (1) было равносильно уравнению общего вида окружности, тогда их коэфициенты должны быть пропорциональны:

$$\frac{a_{11}}{1} = \frac{a_{12}}{\cos\omega} = \frac{a_{22}}{1} = \frac{a_{13}}{-(a + b\cos\omega)} = \frac{a_{23}}{-(a\cos\omega + b)} = \\ = \frac{a_{33}}{a^2 + 2ab\cos\omega + b^2 - r^2}. \tag{β}$$

Равенства трех первых отношений дадут нам условия (α), они, следовательно, необходимы, но тогда оставшиеся соотношения (β) дадут три уравнения:

$$t = \frac{a_{13}}{-(a + b\cos\omega)} = \frac{a_{23}}{-(a\cos\omega + b)} = \frac{a_{33}}{a^2 + 2ab\cos\omega + b^2 - r^2},$$

где через t обозначено значение равных отношений (α). Этих уравнений вполне достаточно для определения величин a, b, r, т. е. координат центра и радиуса окружности. Равносильность уравнения (1) уравнению общего вида окружности будет установлена, а потому выполнение условий (α) и достаточно для того, чтобы уравнение (1) изображало окружность.

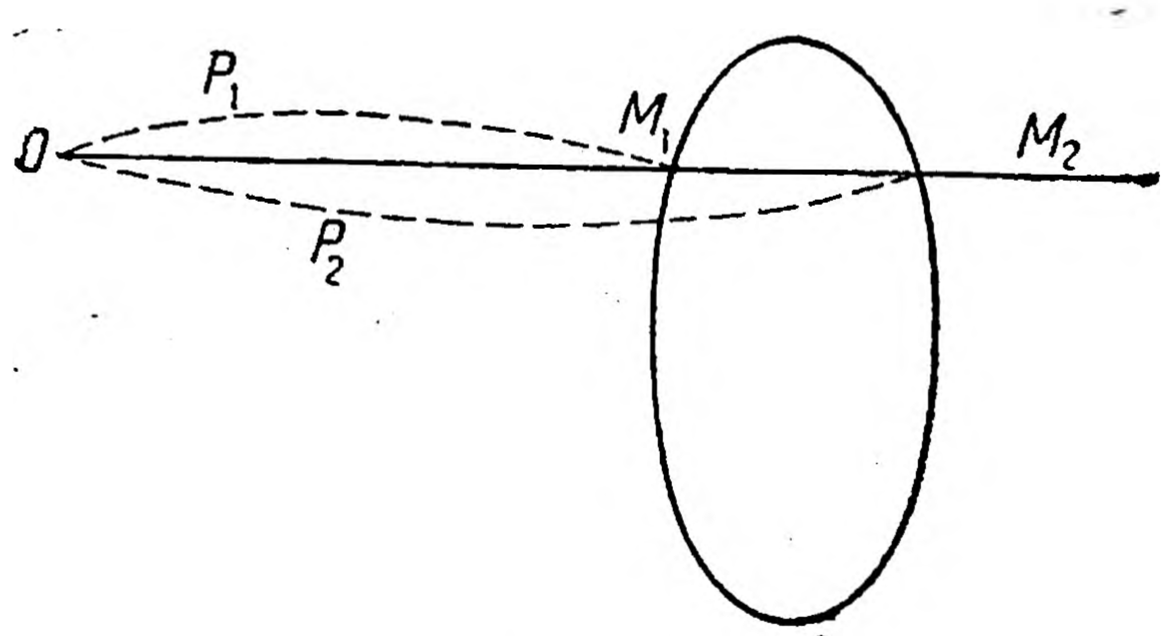
587. Общее уравнение 2-й степени изображает окружность относительно прямоугольной системы координат (тогда и только тогда), если в нем нет члена с произведением координат, а коэфициенты при квадратах координат одинаковы.

588. Найти координаты центра и радиус окружности, изображаемой относительно прямоугольной системы координат уравнением:

$$x^2+y^2-4x+6y-3=0.$$

5. Полярное уравнение линии 2-го порядка.

Для исследования вида линий 2-го порядка и их геометрических свойств мы будем рассматривать пересечение линии с прямыми пучка, проходящими через какую-либо произвольную точку плоскости. Меняя расположение выбранного центра пучка и направление его лучей, мы можем выяснить те или иные особенности линии, ее отношение к тем или другим точкам плоскости или к направлениям лучей.



Черт. 146.

Чтобы подготовить такое исследование, мы перенесем начало координат в какую-либо точку O_1 $(x_1; y_1)$ и, получив уравнение линии в виде (§ 2):

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2F_{x_1}X+2F_{y_1}Y+2F_1=0, \qquad (8')$$

перейдем затем к полярным координатам, полагая

$$X=m\rho, \quad Y=n\rho; \qquad (19')$$

полюс, следовательно, принят в точке O_1 $(x_1; y_1)$, и полярная ось совпадает с осью O_1X. В таком случае уравнение (8′) после указанной замены (19′) преобразуется в следующее:

$$(a_{11}m^2+2a_{12}mn+a_{22}n^2)\rho^2+2(mF_{x_1}+nF_{y_1})\rho+2F_1=0.$$

Введем для сокращения обозначения:

$$\begin{aligned} M&=a_{11}m^2+2a_{12}mn+a_{22}n^2,\\ N&=mF_{x_1}+nF_{y_1}, \qquad\qquad (24)\\ R&=2F_1, \end{aligned}$$

тогда окончательно уравнение линии 2-го порядка в полярных координатах (короче: „полярное уравнение линии 2-го порядка“) напишется следующим образом:

$$M\rho^2+2N\rho+R=0. \qquad (25)$$

Уравнение (25) равносильно уравнению (8) или (8′), стало быть, оно определяет точки, лежащие на нашей линии. Смысл его таков: если мы возьмем какую-либо точку $(x_1; y_1)$ и через нее проведем прямую, направление которой определяется коэфициентами m, n, то коэфициенты уравнения (25) будут известны, и оно определит нам расстояние ρ от точки $(x_1;\ y_1)$ до каждой из точек, лежащих одновременно на нашей линии и на выбранной прямой, т. е. до точек их пересечения (черт. 146). Так как уравнение (25) квадратное, то оно, вообще говоря, будет каждый раз давать два решения ρ_1 и ρ_2, действительных (различных или совпадающих) или мнимых.

Отсюда заключаем, что *каждая прямая встречает линию 2-го порядка в двух точках*, которые могут быть действительными (различными или совпадающими) или мнимыми.

6. Исследование полярного уравнения.

Исследуем теперь полярное уравнение (25) линии 2-го порядка, разобрав случаи, когда те или иные из его коэфициентов обращаются в нуль, и установив геометрическое истолкование каждого из этих случаев.

Если старший коэфициент квадратного уравнения (25) неограниченно убывает, приближаясь к нулю, то один из его корней, именно

$$\frac{-N-\sqrt{N^2-MR}}{M},$$

будет неограниченно расти; поэтому мы будем говорить, что если старший коэфициент квадратного уравнения обращается в нуль, то один из его корней становится бесконечным, и наоборот, если один из его корней бесконечен, то старший коэфициент обращается в нуль.

Итак, *если старший коэфициент* M уравнения (25) *обращается в нуль*, то один из его корней бесконечен; геометрически это обозначает, что если направление выбранной прямой через точку $(x_1;\ y_1)$ удовлетворяет условию:

$$M \equiv a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0, \tag{26}$$

то она встречает нашу линию в бесконечно удаленной точке (и может быть в другой точке на конечном расстоянии). Наоборот, если мы хотим из пучка прямых, проходящих через точку $(x_1; y_1)$, выбрать прямые, встречающие линию в бесконечно удаленной точке, то мы должны непременно взять прямые, направления которых удовлетворяют условию (26). Легко видеть, что прямые, параллельные указанным, встречаясь с ними в бесконечно удаленной точке, там же встречают и нашу линию, поэтому выбор точки $(x_1;\ y_1)$, здесь не играет роли. Направления прямых, встречающих линию 2-го порядка в бесконечно удаленной точке, называются *асимптотическими* (приближающимися) *направлениями* данной линии.

Предположим теперь, что *обращается в нуль средний коэфициент* N уравнения (25); так как в квадратном уравнении сумма корней, взятая с обратным знаком, равна отношению среднего коэфициента к старшему коэфициенту:

$$-(\rho_1+\rho_2)=\frac{2N}{M},$$

то при $N=0$ мы имеем:

$$\rho_1+\rho_2=0,$$

т. е. корни уравнения (25) равнопротивоположны:

$$\rho_1 = -\rho_2.$$

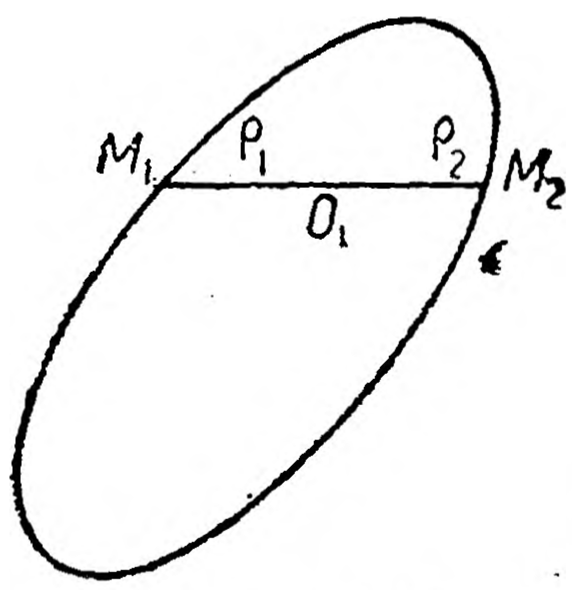
Это значит, что точка $O_1(x_1;\ y_1)$ является серединою хорды, соединяющей точки пересечения выбранной прямой с нашей линией (черт. 147). Обратно, если мы хотим, чтобы хорда пересечения в точке $O_1(x_1;\ y_1)$ делилась пополам, тогда

$$\rho_1 + \rho_2 = 0,$$

и, следовательно, необходимо:

$$N = 0.$$

Подробное исследование этого условия приводит к целому ряду геометрических следствий, которые мы и рассмотрим в дальнейших параграфах.



Черт. 147.

Когда *обращается в нуль свободный член* уравнения (25):

$$R = 0,$$

то один из его корней будет нулем, расстояние ρ_1 точки $O_1(x_1;y_1)$ до одной из точек линии, лежащих на выбранной прямой, равно нулю; короче говоря, точка $(x_1,\ y_1)$ лежит на нашей линии. И действительно, условие $R = 0$ обозначает, что:

$$2F(x_1;y_1) = 0,$$

т. е. что координаты x_1, y_1 удовлетворяют уравнению нашей линии.

Пользуясь предыдущими соображениями, рассмотрим теперь случай, когда два из коэфициентов уравнения (25) обращаются в нули.

Если $N = 0$ и $R = 0$, то точка $(x_1;\ y_1)$ является серединою хорды пересечения и лежит на нашей линии; следовательно, обе точки пересечения совпадают с точкою $(x_1;\ y_1)$, выбранная прямая пересекает нашу линию в двух совпавших точках, т. е. касается ее. Обратно, если мы хотим, чтобы прямая направления $(m:n)$, проходящая через точку $(x_1;\ y_1)$ на нашей линии, касалась последней, то прямая должна пересекать линию в двух совпавших точках, и уравнение (25) должно иметь два нулевых корня, следовательно:

$$N = 0,\quad R = 0;$$

при таких условиях квадратное уравнение (25) примет вид:

$$M\rho^2 = 0$$

и на самом деле будет иметь два равных нулевых корня.

Если $M = 0$ и $R = 0$, то выбранная прямая имеет асимптотическое направление (ибо $M = 0$), а точка $(x_1;\ y_1)$ лежит на нашей линии (ибо $R = 0$); следовательно, прямая встречает линию в бесконечно удаленной точке и в точке $(x_1;\ y_1)$; в этом случае полярное уравнение дает два решения:

$$\rho_1 = \infty,\ \rho_2 = 0.$$

Если $M=0$ и $N=0$, то выбранная прямая имеет асимптотическое направление (ибо $M=0$) и встречает линию в бесконечно удаленной точке; точка же $(x_1;y_1)$ является серединою хорды пересечения (ибо $N=0$), следовательно, другая точка пересечения будет бесконечно удаленной точкой. Но на прямой имеется одна бесконечно удаленная точка, поэтому мы должны сказать, что прямая встречает линию в двух совпавших бесконечно удаленных точках или, иначе, прямая касается линии в бесконечно удаленной точке. Такая прямая, касающаяся линии в бесконечно удаленной точке, называется *асимптотой* линии 2-го порядка; параметры асимптоты должны удовлетворять условиям:

$$M=0,\quad N=0.$$

Наконец, может случиться, что для выбранной точки $(x_1;\ y_1)$ и определенного направления прямой, через нее проходящей, все *три коэфициента* уравнения (25) обращаются в нули:

$$M=0,\quad N=0,\quad R=0,$$

тогда собственно уравнению (25) будет удовлетворять любое ρ, т. е. все точки выбранной прямой принадлежат нашей линии. Такой случай возможен, когда линия 2-го порядка распадается на пару прямых.

В дальнейшем мы подробно остановимся на рассмотрении тех из перечисленных случаев, которые связаны с наиболее интересными геометрическими следствиями.

7. Асимптотические направления. Классификация линий.

Коэфициенты направления прямой, встречающей линию 2-го порядка в бесконечно удаленной точке, должны удовлетворять условию:

$$a_{11}m^2+2a_{12}mn+a_{22}n^2=0. \tag{26}$$

Введем в это соотношение угловой коэфициент прямой, разделив уравнение на m^2 и положив:

$$k=\frac{n}{m},$$

тогда

$$a_{11}+2a_{12}k+a_{22}k^2=0; \tag{26'}$$

таково будет окончательное *уравнение, определяющее асимптотические направления*. Так как полученное уравнение есть уравнение 2-й степени относительно k, то каждая линия 2-го порядка имеет два асимптотических направления, которые могут быть действительными (различными или совпадающими) или мнимыми в зависимости от значений коэфициентов уравнения (26').

Решая это уравнение, мы получим:

$$k=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{22}};$$

выражение

$$\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2, \tag{27}$$

составленное из коэфициентов уравнения (26′) или, можно сказать иначе, из коэфициентов старших членов уравнения (1) нашей линии, назовем *дискриминантом из старших коэфициентов*, ибо от его знака зависит характер решения уравнения (26) и, как увидим, характер самой линии.

Уравнение (26′) будет иметь мнимые (сопряженные) корни, если $\delta > 0$; в этом случае нет действительных асимптотических направлений, в которых наша линия встречалась бы прямыми в бесконечно удаленных точках. Следовательно, линия может быть либо мнимою, либо действительною, но тогда без ветвей, уходящих в бесконечность, целиком расположенною на конечном расстоянии. Такой тип линии 2-го порядка ($\delta > 0$) мы назовем эллиптическим; в частности если линия действительна, она, как увидим дальше, будет эллипсом.

Уравнение (26′) имеет действительные равные корни, если $\delta = 0$; тогда существует одно направление или два совпавших, в которых прямые встречают линию в бесконечно удаленной точке. Такие линии ($\delta = 0$) назовем линиями параболического типа; как мы увидим дальше, в этом случае линия может распадаться на пару параллельных прямых или представлять собою собственно кривую с ветвями, уходящими в бесконечность в одном направлении; эта последняя кривая будет, как покажет дальнейший подробный анализ, параболой.

Наконец, уравнение (26′) будет иметь действительные различные корни, если $\delta < 0$; для линии будут существовать два различных действительных направления, в которых прямые будут ее встречать в бесконечно удаленных точках. Такую линию назовем линией гиперболического типа; она может распадаться на пару прямых (не параллельных между собой) или представлять собой собственно кривую с ветвями, уходящими в бесконечность по двум различным направлениям (это будет гипербола).

Нашу классификацию типов линий 2-го порядка мы резюмируем в следующей таблице:

эллиптический тип:	$\delta > 0$,	асимптотические направления мнимые,
параболический тип:	$\delta = 0$,	асимптотические направления действительные, совпадающие,
гиперболический тип:	$\delta < 0$,	асимптотические направления действительные и различные.

Отметим, между прочим, что для линий параболического типа совокупность старших членов уравнения (1):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

представляет собою полный квадрат некоторого линейного относительно координат x и y выражения. В самом деле, условие $\delta = 0$ мы можем написать в виде:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \alpha,$$

обозначив через α эти равные отношения; отсюда:

$$a_{12} = \alpha \cdot a_{22},$$
$$a_{11} = \alpha \cdot a_{12} = \alpha^2 a_{22}$$

и, следовательно:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=a_{22}(\alpha^2x^2+2\alpha xy+y^2)=[\sqrt{a_{22}}(\alpha x+y)]^2.$$

Если мы через прежнее начало координат проведем прямую асимптотического направления $(m:n)$, тогда для точек этой прямой:

$$x=m\rho, \quad y=n\rho,$$

где m и n связаны условием (26). Умножая последнее на ρ^2 и производя указанную замену, мы получим уравнение пары таких прямых:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0.$$

Таким образом мы можем сказать, что, *приравняв нулю совокупность старших членов уравнения данной линии 2-го порядка, мы получим уравнение пары прямых, проходящих через начало координат и имеющих асимптотические направления* или, иначе, уравнение пары прямых, проходящих через начало координат и встречающих линию 2-го порядка в бесконечно удаленных точках.

Из предыдущего ясно, что угловой коэфициент асимптотических направлений (совпадающих) параболы будет:

$$k=-\alpha=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Если линия 2-го порядка гиперболического типа, она имеет два различных и действительных асимптотических направления; таковые могут быть приняты за направления осей новой (вообще говоря, косоугольной) системы координат.

Посмотрим, каковы будут признаки, что линия отнесена к этой системе координат. Ось x-ов имеет угловые коэфициенты:

$$m'=1, \quad n'=0;$$

если ее направление асимптотическое, то эти значения должны удовлетворять уравнению (26); подставляя их в указанное уравнение, мы убедимся, что a_{11} необходимо должен обратиться в нуль.

Ось y-ов имеет угловые коэфициенты:

$$m''=0, \quad n''=1,$$

и эти значения должны удовлетворять уравнению (26), если направление оси y — асимптотическое; следовательно, $a_{22}=0$. Итак, если каждая из координатных осей имеет асимптотическое направление, то должны быть выполнены условия:

$$a_{11}=0, \quad a_{22}=0. \tag{28}$$

Легко видеть и обратно, что если условия (28) выполнены, то уравнение (26) примет вид:

$$2a_{12}mn=0,$$

и оно удовлетворяется каждым из предположений:

$$m'=1, \quad n'=0,$$

или

$$m'' = 0, \quad n'' = 1,$$

т. е. оси координат имеют асимптотические направления. Тот же результат можно получить, использовав предыдущее замечание о группе старших членов уравнения линии 2-го порядка.

Упражнения. 589. Определить тип линий 2-го порядка, каждая из которых изображается одним из нижеследующих уравнений:

1) $3x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 14y + 13 = 0$,
2) $5x^2 + 7xy - 3y^2 + 10y + 3 = 0$,
3) $3x^2 + 7xy - 6y^2 - 7x + 34y - 40 = 0$,
4) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 10x + 15 = 0$,
5) $9x^2 - 30xy + 25y^2 + 21x - 35y + 12 = 0$,
6) $x^2 + xy + y^2 - 2x + 4y + \frac{28}{3} = 0$,
7) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 16x + 12y + 4 = 0$;

установить, какие из этих линий распадаются.

590. Определите тангенс угла между асимптотическими направлениями линии

$$6x^2 + xy - 12y^2 + 8x = 0,$$

отнесенной к прямоугольной системе координат.

591. Доказать, что асимптотические направления гиперболы, изображаемой уравнением

$$5x^2 + 22xy + 6y^2 + 10x - 14y = 0$$

относительно косоугольной системы с координатным углом $\omega = \frac{\pi}{3}$, взаимно перпендикулярны.

592. Найти координаты точек пересечения гиперболы:

$$-2x^2 + xy + 6y^2 + 14x + 7y - 27 = 0$$

с парою прямых, проходящих через начало координат и имеющих асимптотические направления.

8. Центр.

Мы видели, что, если точка $O_1(x_1;\ y_1)$ является серединою хорды, соединяющей точки пересечения прямой с нашей линией, то должно выполняться условие:

$$N = 0$$

или подробнее:

$$mF_{x_1} + nF_{y_1} = 0. \tag{29}$$

Это условие содержит как координаты x_1, y_1 точки O_1, так и коэфициенты m и n, определяющие направление хорды; ему можно давать различные геометрические истолкования в зависимости от того, какие из этих параметров $(x_1;\ y_1)$ или $(m;\ n)$ считать данными и какие искомыми.

Если предположим, что *дана точка* O_1 своими координатами x_1, y_1, то соотношение (29) будет определять то направление $(m : n)$, в котором следует провести хорду, чтобы она в точке O_1 делилась пополам. Если $F_{x_1} = 0$, $F_{y_1} \neq 0$, то уравнение (29) даст $n = 0$, т. е. хорда, проходящая через точку $O_1(x_1;\ y_1)$ и делящаяся в ней пополам, должна быть параллельна оси x-ов. Если $F_{x_1} \neq 0$, $F_{y_1} = 0$, то уравнение (29) даст $m = 0$; следовательно, в этом случае хорда, проходящая через точку $O_1(x_1;\ y_1)$ и делящаяся в ней пополам, должна быть параллельна оси y-ов.

Если $F_{y_1} \neq 0$, а F_{x_1} имеет любое значение, то хорда, делящаяся в точке $O_1(x_1;\ y_1)$ пополам, должна иметь направление, определяемое условием:

$$\frac{n}{m} = -\frac{F_{x_1}}{F_{y_1}}$$

или

$$k = -\frac{F_{x_1}}{F_{y_1}}.$$

В каждом из этих случаев мы имеем одно определенное направление, в котором можно провести хорду, делящуюся точкой $(x_1;\ y_1)$ пополам. Особый интерес представляет случай, когда координаты x_1, y_1 точки O_1 выбраны так, что удовлетворяются условия:

$$F_{x_1} = 0, \quad F_{y_1} = 0; \tag{30}$$

в этом случае соотношение (29) удовлетворяется уже при всяких значениях $m:n$, т. е. *хорда любого направления в точке* O_1 будет делиться пополам. Такая точка, в которой всякая хорда, через нее проходящая, делится пополам, называется *центром* линии 2-го порядка. В следующем параграфе мы увидим, что уравнениям (30) можно дать другое геометрическое истолкование, что дает новое определение центра линии 2-го порядка. Во всяком случае координаты точки, называемой центром линии 2-го порядка, удовлетворяют двум уравнениям (30).

Напишем теперь эти уравнения полностью, вставив в них значения частных производных и отбросив для упрощения индексы (значки) у координат x_1 и y_1:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,\\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{aligned} \tag{30'}$$

К этой системе уравнений мы можем применить результаты исследования задачи о пересечении двух прямых, которое нами дано подробно в главе V.

Если $\delta \neq 0$, то написанные уравнения дадут единственные определенные и конечные значения для координат x и y:

$$\begin{aligned} x = -\frac{a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},\\ y = -\frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \end{aligned} \tag{31'}$$

Таким образом линии 2-го порядка эллиптического и гиперболического типа имеют единственный определенный центр на конечном расстоянии.

Посмотрим теперь, может ли центр в этом случае принадлежать самой линии 2-го порядка. Если центр лежит на самой линии, то одновременно должны удовлетворяться условия:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad 2F(x, y) = 0,$$

равносильные лишь двум уравнениям, определяющим центр. В силу тождества Эйлера:

$$xF_x + yF_y + zF_z \equiv 2F$$

последняя система может быть заменена (при $z \neq 0$) равносильной ей системой:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0. \tag{32}$$

Итак, *центр (на конечном расстоянии) принадлежит линии 2-го* порядка, если система (32) содержит лишь два независимых между собой уравнения, а это будет, как известно из теории линейных уравнений, в том случае, когда определитель системы (32):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

обращается в нуль, оставаясь ранга, равного двум. Но если $\Delta = 0$, то, как мы знаем, *линия 2-го порядка распадается на пару прямых*; впрочем, это последнее значение здесь можно получить независимо от вывода, данного в § 3. В самом деле, в § 2 мы доказали тождество (относительно x, y):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & F_x \\ a_{21} & a_{22} & F_y \\ F_x & F_y & 2F \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

или в развернутом виде:

$$\delta\, 2F \equiv a_{22}(F_x)^2 - 2a_{12}F_xF_y + a_{11}(F_y)^2 + \Delta. \tag{33}$$

Если центр (на конечном расстоянии; $\delta \neq 0$) принадлежит линии, то его координаты x_1, y_1, удовлетворяют условиям:

$$F_{x_1} = 0, \quad F_{y_1} = 0, \quad 2F(x_1, y_1) = 0,$$

и тождество (33) показывает прежде всего, что $\Delta = 0$. Далее то же тождество (при $\delta \neq 0$) показывает, что при $\Delta = 0$ уравнение линии:

$$2F(x, y) = 0 \tag{1}$$

равносильно уравнению:

$$a_{22}(F_x)^2 - 2a_{12}F_yF_x + a_{11}(F_y)^2 = 0, \tag{34}$$

а последнее, очевидно, изображает пару прямых, так как может быть легко разрешено относительно отношения $F_y : F_x$.

Если линия распадается на пару прямых ($\Delta = 0$), то уравнение линии (1) равносильно уравнению (34), но последнее удовлетворяется при условиях (30), и, следовательно, *линия содержит центр*, который, очевидно, будет точкой пересечения двух прямых (34). Точка пересечения двух прямых, на которые распадается линия 2-го порядка, может быть рассматриваема как центр, ибо всякая прямая, проходящая через эту точку, с совокупностью этих прямых пересекается в двух совпавших точках; соответствующая хорда обращается в нуль, ее середина будет та же точка пересечения пары прямых.

Возвратимся к уравнениям (30′); если $\delta = 0$, но оба числителя дробей (31) не обращаются в нуль одновременно, то центр будет бесконечно удаленной точкой.

В силу тождества Эйлера при $z = 0$ и при условиях (30′) мы получим

$$2F = 0;$$

поэтому бесконечно удаленный центр следует считать принадлежащим самой линии.

Если, наконец $\delta = 0$ и оба числителя дробей (31) одновременно обращаются в нули, иначе говоря, матрица

$$D \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}$$

будет ранга, равного единице, то выражения (31) становятся неопределенными; обращаясь к первоначальной системе уравнений (30′), которым должны удовлетворять координаты центра, мы видим, что в этом случае коэфициенты двух указанных уравнений пропорциональны, система (30′) содержит лишь одно независимое уравнение. В этом случае мы имеем для линий 2-го порядка целое геометрическое место центров, именно прямую, изображаемую одним из уравнений (30′), а другое будет следствием его. Так как здесь $\delta = 0$ и оба числителя дробей (31) одновременно обращаются в нули, то, разложив Δ по элементам последней строки или последнего столбца, легко заметим, что дискриминант Δ обращается в нуль, а потому линия распадается на пару прямых, причем эти прямые должны быть параллельны, ибо при $\delta = 0$ асимптотические направления линии совпадают. Итак, *если линия 2-го порядка имеет прямую центров, эта линия распадается на пару параллельных прямых* (различных или совпадающих).

Тот же результат можно получить и *другим способом*. Пусть линия 2-го порядка имеет прямую центров, причем последнюю мы возьмем за ось x-ов, уравнение которой

$$y = 0;$$

к такому уравнению, по нашему предположению, должна сводиться система уравнений (30′). Итак, каждое из уравнений (30′) не может содержать ни абсциссы x, ни свободного члена, следовательно:

$$a_{11} = 0, \quad a_{13} = 0,$$
$$a_{21} = 0, \quad a_{23} = 0.$$

Посмотрим теперь, к чему же сведется общее уравнение линии 2-го порядка; при указанных условиях оно будет:

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

или

$$y = \pm\sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{22}}},$$

и, стало быть, оно изображает пару прямых, параллельных и одинаково отстоящих от оси x-ов (прямой центров в нашем случае); если же $a_{33}=0$, то мы получим пару прямых, совпадающих в одну, последняя в то же время будет прямою центров. Ясно, что если мы имеем две параллельных прямых, то прямая, им параллельная и проходящая между ними по середине, будет играть роль геометрического места центров, ибо всякая точка этой средней прямой будет делить пополам хорды, через нее проходящие. Если общее уравнение изображает пару прямых, совпавших в одну, то, рассматривая этот случай как предельный, мы эту же прямую можем считать за прямую центров такой линии 2-го порядка; при этом в последнем случае прямая центров оказывается принадлежащей самой линии 2-го порядка.

Указанный выше вывод требует некоторого дополнения; прямая центров может оказаться бесконечно удаленною прямою, в таком случае ее нельзя будет взять за ось x-ов обыкновенной декартовой системы координат. Но тогда, пользуясь однородными координатами, мы можем требовать, чтобы система (30′) сводилась к одному уравнению (бесконечно удаленной прямой):

$$z=0;$$

следовательно, здесь окажется, что

$$\begin{aligned} a_{11}&=0, & a_{12}&=0,\\ a_{21}&=0, & a_{22}&=0, \end{aligned}$$

и общее уравнение приведется к виду:

$$2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2=0$$

или

$$z\,(2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}z)=0,$$

т. е. оно будет изображать либо бесконечно удаленную прямую и прямую обыкновенную (если по крайней мере один из коэфициентов a_{13} и a_{33} отличен от нуля) либо пару прямых, совпавших с бесконечно удаленною прямою, если $a_{13}=0$ и $a_{23}=0$. Так как бесконечно удаленная прямая имеет неопределенное направление, то и в первом из этих случаев, когда линия состоит из обыкновенной прямой и прямой бесконечно удаленной, мы можем говорить, что соответствующее уравнение 2-го порядка изображает пару параллельных прямых.

Когда центр линии 2-го порядка будет определенною точкою на конечном расстоянии, то общее уравнение линии можно упростить, поместив новое начало координат в центре линии. В самом деле, если мы перенесем начало координат в точку $(x_1;\ y_1)$, то общее уравнение примет вид:

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2F_{x_1}X+2F_{y_1}Y+2F_1=0. \tag{8′}$$

Пусть точка $(x_1;\ y_1)$ будет центром линии, тогда:

$$F_{x_1}=0,\quad F_{y_1}=0;$$

следовательно, в уравнении линии пропадают члены с первыми степенями текущих координат, и оно принимает вид:

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2F_1=0. \qquad (\alpha)$$

Легко видеть, что, обратно, если в уравнении линии 2-го порядка нет членов с первыми степенями координат:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{33}=0,$$

то начало координат является центром линии; действительно, в этом случае, если какая-нибудь пара значений x, y удовлетворяет уравнению, то ему удовлетворяет одновременно и пара значений $-x$, $-y$, т. е. в начале координат всякая хорда делится пополам. Можно отметить, что уравнения, определяющие центр, в этом случае будут:

$$a_{11}x+a_{12}y=0,$$
$$a_{21}x+a_{22}y=0$$

и при $\delta \neq 0$ они дают решения:

$$x=0, \quad y=0,$$

т. е. начало координат. Если же $\delta=0$, то вышеуказанные уравнения дадут прямую центров, но опять проходящую через начало координат.

Когда начало координат перенесено в центр линии 2-го порядка, то в преобразованном уравнении (α) остается лишь определить его свободный член $2F_1$ или $2F(x_1;\ y_1)$; конечно, здесь можно определить координаты x_1, y_1 центра линии из уравнений (30′) и затем сосчитать значение $2F(x_1,\ y_1)$, но гораздо быстрее можно получить нужный результат, если воспользоваться теоремой о неизменности (инвариантности) дискриминанта Δ при переносе начала. Сравнивая значения дискриминанта для старого и нового уравнения, мы получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2F_1 \end{vmatrix}$$

или

$$\Delta=\delta\cdot 2F_1,$$

откуда значение $2F_1$ найдется непосредственно в виде

$$2F_1=\frac{\Delta}{\delta}, \qquad (\beta)$$

без определения самих координат центра.

Полученные выше при исследовании центра результаты можно свести в следующую таблицу:

Ранг			Место центров	Место центров линии	Тип линии
D	δ	Δ			
2	2	3	Точка обыкнов.	Не принадлежит	$\delta > 0$ Эллипс или мнимая линия $\delta < 0$ Гипербола
2	2	2	Точка обыкнов.	Принадлежит	Пара обыкн. прямых
2	1	3	Точка бесконеч. удаленная	Принадлежит	Парабола
1	1	2	Прямая обыкн.	Не принадлежит	Пара параллельных прямых
1	1	1	Прямая обыкн.	Принадлежит	Пара совпад. прямых
1	0	2	Прямая бескон. удаленная	Принадлежит	Пара прямых, одна обыкн., вторая бескон. удаленная
0	0	1	—	—	Сдвоенные бесконеч. удаленные прямые

Упражнения. 593. Для линии, изображаемой уравнением:

$$x^2 - 2xy + 5y^2 - 8x + 16y = 0,$$

найти угловой коэфициент хорды, которая в точке (1; 2) делится пополам.

594. Для линии, изображаемой уравнением:

$$4x^2 - 12xy + 7y^2 + 12x - 2y + 17 = 0,$$

найти угловые коэфициенты хорд, которые в одной из точек (2; 1), или (0; 1), или (1; 1) делятся пополам.

595. Найти координаты центра линии:

$$x^2 - 4xy + 5y^2 + 10x + 16y + 7 = 0.$$

596. Определить центр или его место для каждой линии, определяемой одним из уравнений:

1) $3x^2 + 8xy + 10y^2 - 12x + 44y + 37 = 0,$
2) $x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 2y + 3 = 0,$
3) $4x^2 + 20xy + 25y^2 - 18x - 45y + 20 = 0,$
4) $12x^2 + 7xy - 12y^2 + x + 43y - 35 = 0,$
5) $x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0.$

597. Найти уравнения каждой из прямых в отдельности, на которые распадается линия:

$$12x^2 + 11xy - 5y^2 - x + 32y - 35 = 0.$$

598. Распадаются ли следующие линии на пары прямых (и на какие именно):

1) $5x^2 + 13xy - 6y^2 - 23x - y + 12 = 0,$
2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 8 = 0,$
3) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 18x + 12y + 9 = 0.$

599. Для каждой из линий:

1) $x^2 + 4xy + 9y^2 - 2x - 24y + 13 = 0,$
2) $3x^2 - 8xy + y^2 + 38x - 16y + 20 = 0,$
3) $6x^2 - 7xy - 20y^2 - 26x - 68y - 60 = 0$

найти уравнение, преобразованное к новой системе координат, началом которой является центр линии, а оси координат параллельны прежним осям.

9. Диаметры.

В начале предыдущего параграфа мы дали одно геометрическое истолкование условию:

$$mF_{x_1}+nF_{y_1}=0, \tag{29}$$

считая, что дается точка $(x_1;\ y_1)$ и ищется направление хорды, делящейся в этой точке пополам. Сделаем теперь другое предположение, именно, что нам *дается направление* $m:n$ пучка параллельных прямых и спрашивается, где лежат середины этих хорд. Для координат середины любой хорды данного направления должно выполняться соотношение (29); следовательно, это соотношение и является уравнением геометрического места середин хорд данного направления. Разделив уравнение (29) на m и вводя угловой коэфициент $k=\frac{n}{m}$, мы получим (кстати отбросим индексы у координат):

$$F_x+kF_y=0 \tag{29'}$$

или полностью:

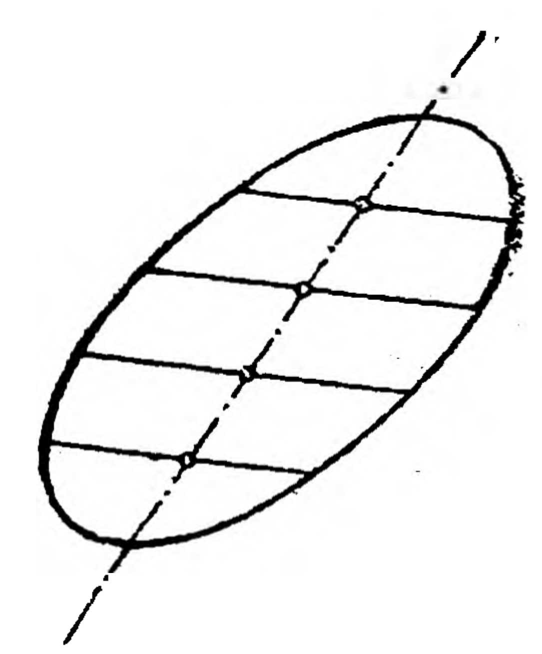
$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+k(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})=0. \tag{29''}$$

Это уравнение есть уравнение 1-й степени и изображает прямую. Геометрическое место середин хорд данного направления называют *диаметром* линии (черт. 148).

Итак, для линии 2-го порядка геометрическое место середин хорд данного направления (диаметр) будет прямая, она изображается уравнением (29″).

Меняя значение k, мы будем получать различные диаметры, так что уравнение (29″) при разных k дает целый пучок диаметров. Уравнение диаметра при любом k будет удовлетворено, если x и y выбрать так, чтобы каждая из частных производных F_x и F_y обращалась в нуль, т. е. если:

$$F_x=0,\ F_y=0;$$



Черт. 148.

но последние соотношения характеризуют центр линии 2-го порядка. Поэтому *всякий диаметр линии 2-го порядка проходит через ее центр*. Мы могли бы определить центр линии 2-го порядка как такую точку, через которую проходят все ее диаметры. Так как для параболы уравнения $F_x=0$, $F_y=0$ удовлетворяются лишь для бесконечно удаленной точки, то естественно говорить, что ее центр, определенный именно указанным способом, находится в бесконечно удаленной точке, отсюда тотчас следует, что все диаметры параболы параллельны между собой. Если линия 2-го порядка распадается на пару параллельных прямых, то линейные функции F_x и F_y будут отличаться лишь постоянным множителем, поэтому уравнение (29′) независимо от k сведется к уравнению:

$$F_x=0$$

или

$$F_y = 0,$$

т. е. в этом случае диаметры будут совпадать с местом центров.

Упражнения. 600. Написать уравнение пучка диаметров линии:

$$x^2 - xy + y = 0.$$

601. Найти для линии:

$$3x^2 - 5xy + y^2 + 8x = 0$$

уравнение диаметра, делящего пополам хорды с угловым коэфициентом

$$k = -\frac{2}{3}.$$

602. Для линии, изображаемой уравнением:

$$6x^2 - 9xy + 13y^2 + 2x + 4y + 13 = 0,$$

найти диаметр, проходящий через точку $(1; -2)$.

603. Для линии:

$$x^2 + xy - 2y^2 + 4x + 6y = 0$$

найти диаметры, параллельные осям координат.

604. Для линии:

$$4x^2 + 8xy + 11y^2 - 18x + 10y + 13 = 0$$

найти диаметр, делящий пополам хорды, параллельные оси x-ов или оси y-ов.

605. Написать уравнение пучка диаметров для эллипса или гиперболы, определяемых своими каноническими уравнениями.

10. Сопряженные направления.

Если нам даются хорды направления k, то диаметр

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0, \tag{29''}$$

делящий их пополам, называется *диаметром сопряженным* по отношению к этим хордам. Определим направление этого диаметра; для этой цели разрешим его уравнение относительно ординаты y:

$$y = -\frac{a_{11} + ka_{21}}{a_{12} + ka_{22}}x - \frac{a_{13} + ka_{23}}{a_{12} + ka_{22}}.$$

Следовательно, его угловой коэфициент, назовем его k', будет:

$$k' = -\frac{a_{11} + a_{12}k}{a_{12} + a_{22}k}. \tag{35}$$

Освободимся в последнем соотношении от знаменателя и перенесем все члены в одну сторону; оно примет вид:

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0; \tag{35'}$$

таково условие, связывающее направление k хорд и направление k' диаметра, им сопряженного.

Первое, что бросается в глаза в этом соотношении (35'), — это его симметрия относительно угловых коэфициентов k и k'; соотношение не изменяется, если переставить взаимно k и k', а это обозначает, что роли направлений k и k' могут быть взаимно переставлены. Итак, если диаметр одного направления делит пополам хорды другого направления, то диаметр второго направления будет делить пополам хорды первого направления. Два таких направления называются *сопряженными*; мы можем вместо направлений говорить о сопряженных диаметрах, тогда предыдущее свойство формулируется следующим образом: хорды, параллельные одному (безразлично какому) из сопряженных диаметров, другим делятся пополам. Отношение сопряженности двух диаметров есть, таким образом, отношение взаимное или обратимое.

Остановим внимание на некоторой особенности указанного отношения сопряженности для параболы. Для параболы мы можем принять:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \alpha$$

или

$$a_{11} = \alpha a_{12}, \quad a_{12} = \alpha a_{22}.$$

В таком случае соотношение (35), определяющее направление k' диаметра, сопряженного хордам направления k, примет вид:

$$k' = -\frac{a_{12}(\alpha + k)}{a_{22}(\alpha + k)};$$

если $\alpha + k \neq 0$, то

$$k' = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}},$$

если же

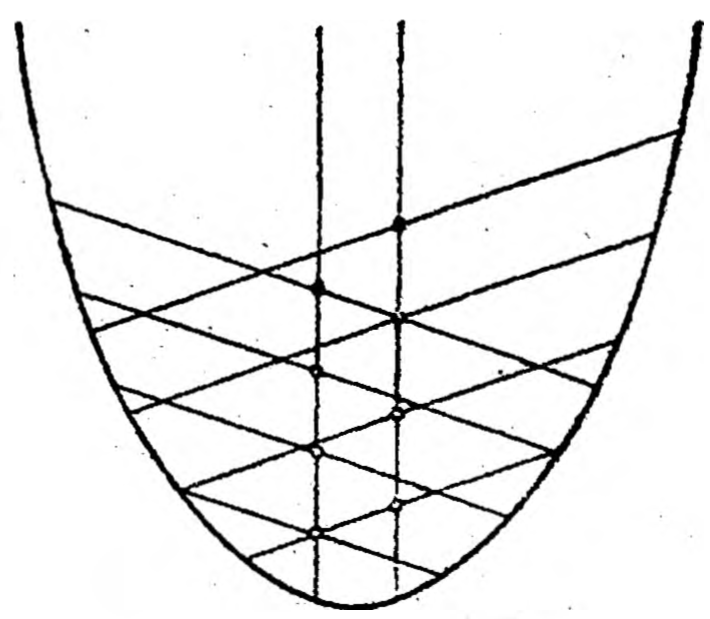
$$k + \alpha = 0,$$

т. е.

$$k = -\alpha = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}},$$

то k' неопределенно.

Таким образом для параболы, если хорды имеют любое направление, кроме $k = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$, то сопряженные им диаметры будут одного и того же направления (параллельны) $k' = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$; если же хорды имеют направление $k = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$, то диаметр, им сопряженный, будет направления неопределенного. Эти положения находят себе разъяснение в том, что центр параболы помещается в бесконечно удаленной точке, все диаметры ее проходят через центр, стало быть, они параллельны между собой, поскольку они принадлежат к обыкновенным прямым (черт. 149), но к ним же принадлежит и особая прямая, именно бесконечно удаленная, направление которой неопределенно. Бесконечно удаленная



Черт. 149.

прямая и будет диаметром, сопряженным хордам направления

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}};$$

последнее замечание легко проверить, подставляя указанное значение в уравнение (29″) сопряженного диаметра:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) - \frac{a_{11}}{a_{12}}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Здесь коэфициент при x пропадает тождественно, коэфициент при y пропадает в силу условия $\delta = 0$, и остается:

$$a_{13} - \frac{a_{11}}{a_{12}} a_{23} = 0,$$

т. е. уравнение бесконечно удаленной прямой ($C = 0$).

Сопряженных пар диаметров (или пар направлений) существует бесконечное множество, так как два угловых коэфициента k и k' сопряженной пары удовлетворяют лишь одному условию (35′); взяв одно направление произвольно, мы определим из уравнения (35′) угловой коэфициент направления ему сопряженного.

Если сопряженные направления совпадают: $k = k'$, то соотношение (35′) обратится в уравнение:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0, \tag{26'}$$

т. е. уравнение, определяющее асимптотические направления; итак, диаметр, сам себе сопряженный, имеет одно из асимптотических направлений (то или другое, если последние различны).

Пару сопряженных направлений можно взять за направления координатных осей, и притом это можно сделать разнообразными способами, выбирая произвольно направление одной из осей координат. Посмотрим, как отразится такой выбор осей на уравнении линии 2-го порядка.

В соотношении (35′) примем:

$$k = \frac{n}{m}, \quad k' = \frac{n'}{m'},$$

тогда условие сопряженности двух направлений будет:

$$a_{11}mm' + a_{12}(mn' + m'n) + a_{22}nn' = 0. \tag{35''}$$

Если оси координат предположить имеющими сопряженные направления, то предыдущему соотношению должны удовлетворять значения:

$$m = 1, \quad n = 0,$$
$$m' = 0, \quad n' = 1;$$

подставив эти значения в уравнение (35″), получим:

$$a_{12} = 0;$$

наоборот, если последнее условие выполнено, то оси координат будут иметь сопряженные направления.

Таким образом *если за оси координат выбрать два направления, сопряженные между собой, то в уравнении линии 2-го порядка про-*

падает член с произведением координат, и, наоборот, если указанный член отсутствует в уравнении, то это обозначает, что оси координат имеют сопряженные между собой направления.

Упражнения. 606. Определить угловой коэфициент диаметра линии:

$$7x^2+8xy+13y^2+24x-18y+17=0,$$

сопряженного направлению с угловым коэфициентом $k=-\frac{2}{3}$.

607. Найти сопряженные диаметры линии:

$$5x^2+6xy+11y^2+10x+8y-40=0,$$

из которых один проходит через точку $(1; -2)$.

608. Написать условие сопряженности двух направлений относительно эллипса или гиперболы, заданных своими каноническими уравнениями.

609. Найти направление диаметров параболы:

$$4x^2-20xy+25y^2+26x+10y-7=0.$$

610. Для параболы:

$$9x^2-30xy+25y^2+18x+12y-34=0,$$

отнесенной к прямоугольной системе координат, найти диаметры:

1) проходящий через точку (1; 1),

2) сопряженный хордам с угловым коэфициентом $k=\frac{1}{5}$,

3) перпендикулярный к сопряженным хордам,

4) составляющий с сопряженными ему хордами угол, тангенс которого равен $-\frac{1}{4}$.

611. Относительно некоторой прямоугольной системы координат линия определяется уравнением:

$$2x^2-3xy+y^2+4x+6y+17=0.$$

Найти два сопряженных направления, составляющие между собою угол, тангенс которого равен $\frac{2}{9}$.

612. Для линии, заданной своим уравнением:

$$x^2+4xy-5y^2+6x-3y=0$$

относительно некоторой прямоугольной системы координат, найти два направления, сопряженные и одновременно ортогональные между собой.

11. Главные направления.

Выбирая для осей координат сопряженные направления, мы можем добиться некоторого упрощения уравнения линии 2-го порядка, именно уничтожить член с произведением координат. Однако пара сопряженных направлений может образовать произвольный угол, и мы вообще получим косоугольную систему координат. Посмотрим, нет ли такой пары сопряженных направлений, которые вместе с тем были бы и ортогональны.

Итак, будем искать пару сопряженных направлений, удовлетворяющих условию:

$$a_{11}+a_{12}(k+k')+a_{22}kk'=0 \qquad (35')$$

и вместе с тем ортогональных, т. е. в то же время удовлетворяющих условию:

$$1+(k+k')\cos\omega+kk'=0. \tag{23}$$

Таким образом для определения двух неизвестных угловых коэфициентов k и k' мы получаем, вообще говоря, два уравнения.

Отметим прежде всего частный случай, когда поставленная задача оказывается неопределенной и имеет, следовательно, бесчисленное множество решений. Уравнения (35′) и (23) могут свестись к одному условию, если коэфициенты этих уравнений окажутся пропорциональными, т. е. если:

$$\frac{a_{11}}{1}=\frac{a_{12}}{\cos\omega}=\frac{a_{22}}{1}; \tag{36}$$

тогда условие сопряженности двух направлений равносильно условию их ортогональности, т. е. если два направления ортогональны, то они будут и сопряжены. Соотношения (36), как мы знаем (см. упражнение 586), характеризуют окружность; в окружности, действительно, хорды, параллельные одному из любой пары взаимно перпендикулярных диаметров, другим делятся пополам.

Итак, исключая случай окружности, система уравнений (35′) и (23) будет содержать два независимых между собой уравнения, достаточных для определения угловых коэфициентов.

Направления, ортогональные и одновременно сопряженные, называются *главными направлениями линии 2-го порядка.*

Разрешим уравнения (35′) и (23) относительно суммы и произведения угловых коэфициентов:

$$k+k'=-\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}-a_{22}\cos\omega},$$

$$kk'=\frac{a_{11}\cos\omega-a_{12}}{a_{12}-a_{22}\cos\omega};$$

теперь составим квадратное уравнение, которому удовлетворяют k и k', пользуясь найденными суммой и произведением его корней. Это уравнение будет:

$$k^2+\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}-a_{22}\cos\omega}k+\frac{a_{11}\cos\omega-a_{12}}{a_{12}-a_{22}\cos\omega}=0$$

или

$$(a_{12}-a_{22}\cos\omega)k^2+(a_{11}-a_{22})k+(a_{11}\cos\omega-a_{12})=0. \tag{37}$$

Уравнение это даст два решения k_1 и k_2, которые и будут искомыми угловыми коэфициентами (единственной, если не считать случай окружности) пары главных направлений.

В случае прямоугольной системы координат $(\omega=\frac{\pi}{2})$ уравнение, определяющее угловые коэфициенты главных направлений, примет вид:

$$a_{12}k^2+(a_{11}-a_{22})k-a_{12}=0. \tag{37′}$$

Упражнения. 613. Определить угловые коэфициенты главных направлений для линии, изображаемой относительно прямоугольной системы координат уравнением:

$$3x^2 - 12xy + 8y^2 + 14x = 0.$$

614. Определить угловые коэфициенты главных направлений для линии, изображаемой уравнением:

$$x^2 + xy + y^2 - 10y = 0,$$

относительно косоугольной системы координат, угол осей которой равен $\frac{\pi}{3}$.

615. *Всякая линия 2-го порядка имеет пару действительных главных направлений*, иначе говоря, *уравнение* (37') *или* (37) *всегда имеет действительные корни*, если коэфициенты уравнения линии действительны.

Указание 1. В случае прямоугольной системы координат уравнение (37') имеет решения:

$$k = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}},$$

которые всегда действительны, ибо под радикалом оказалась сумма квадратов, всегда положительная.

Указание 2. В случае косоугольной системы координат выражение, стоящее под радикалом решения уравнения (37), можно привести к виду,

$$(a_{22} - a_{11})^2 \sin^2 \omega + (a_{11} \cos \omega - 2a_{12} + a_{22} \cos \omega)^2,$$

т. е. оно опять будет суммою квадратов.

Дадим другой способ решения системы уравнений (35') и (23), поставив его в связь с так называемым характеристическим уравнением, которое играет важную роль при упрощении общего уравнения линии 2-го порядка.

Перепишем уравнения (35') и (23) в нижеследующем виде:

$$(a_{11} + a_{12}k) + (a_{12} + a_{22}k)\, k' = 0,$$
$$(1 + \cos \omega \cdot k) + (\cos \omega + k)\, k' = 0;$$

так как эти уравнения относительно k' должны давать для него одно и то же значение, то их коэфициенты должны быть пропорциональны:

$$\frac{a_{11} + a_{12}k}{1 + \cos \omega \cdot k} = \frac{a_{12} + a_{22}k}{\cos \omega + k}.$$

Обозначим теперь каждое из полученных равных отношений через s:

$$\frac{a_{11} + a_{12}k}{1 + \cos \omega \cdot k} = \frac{a_{12} + a_{22}k}{\cos \omega + k} = s$$

и выпишем раздельно два уравнения, которым должны удовлетворять k и s:

$$\begin{aligned} (a_{11} - s) + (a_{12} - s \cos \omega)\, k &= 0, \\ (a_{12} - s \cos \omega) + (a_{22} - s)\, k &= 0. \end{aligned} \qquad (38)$$

Условием совместности этих уравнений относительно k будет уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} - s \cos \omega \\ a_{12} - s \cos \omega & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0, \qquad (39)$$

определяющее вспомогательное неизвестное s; это последнее уравнение и называется *характеристическим уравнением* данной линии 2-го порядка; в развернутом виде оно может быть написано следующим образом:

$$s^2 - \frac{a_{11} - 2a_{12}\cos\omega + a_{22}}{\sin^2\omega}\cdot s + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\sin^2\omega} = 0. \qquad (39')$$

Для прямоугольной системы координат $(\omega = \frac{\pi}{2})$ характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0 \qquad (40)$$

или

$$s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \qquad (40')$$

Упражнения. 616. Характеристическое уравнение имеет всегда действительные корни, если коэфициенты уравнения данной линии действительны.

Указание 1. В случае прямоугольной системы решение уравнения (40′) может быть приведено к виду:

$$s = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2},$$

где под радикалом стоит сумма квадратов.

Указание 2. В случае косоугольной системы выражение, стоящее под радикалом решения уравнения (39), может быть опять приведено к сумме квадратов, именно к виду:

$$(a_{11} - a_{22})^2\sin^2\omega + (a_{11}\cos\omega - 2a_{12} + a_{22}\cos\omega)^2.$$

617. Характеристическое уравнение имеет равные корни при действительных коэфициентах уравнения линии только в случае окружности.

Указание. При действительных коэфициентах уравнения линии выражение, стоящее под радикалом в решении характеристического уравнения, может обратиться в нуль только в случае окружности.

Вследствие симметрии системы (35′) и (23) относительно k и k' угловой коэфициент k' удовлетворяет тем же уравнениям (38), что и k, лишь при другом значении s. Поэтому, разрешив характеристическое уравнение относительно s, мы с помощью одного из уравнений системы (38) найдем угловые коэфициенты обоих главных направлений, подставляя по очереди корни s_1 и s_2 характеристического уравнения.

Для облегчения запоминания уравнений, определяющих угловые коэфициенты главных направлений, отметим, что коэфициентами в каждом из этих уравнений (38) являются элементы строк характеристического уравнения (39).

Если главные направления принять за направления координатных осей, то мы получим прямоугольную систему координат, относительно которой уравнение линии 2-го порядка не будет содержать члена с произведением координат.

Диаметр, делящий пополам перпендикулярные к нему хорды, а потому имеющий одно из главных направлений, называется *главною осью* линии 2-го порядка.

У эллипса и гиперболы имеется по две главных оси: парабола имеет одну главную ось, так как ее диаметры параллельны между собой (но два главных направления); наконец, главные оси неопределенны для окружности или, что то же самое, любой из ее диаметров может быть назван главною осью.

Упражнения. 618. Решая характеристическое уравнение, найти угловые коэфициенты главных направлений линий заданных уравнениями:

1) $3x^2+4xy+5y^2+10x-14y+17=0$,
2) $x^2+6xy-7y^2-23=0$,
3) $x^2+4xy+4y^2+12x+18y=0$,
4) $x^2+y^2-4x+6y-51=0$

относительно прямоугольной системы координат.

619. С помощью решения характеристического уравнения найти угловые коэфициенты главных направлений линий, заданных относительно косоугольной системы координат $\left(\omega=\frac{\pi}{3}\right)$ уравнениями:

1) $45x^2-240xy-19y^2+16x=0$,
2) $19x^2-2xy+3y^2+24y=0$.

620. Найти уравнение главной оси параболы $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$x^2+4xy+4y^2-12x=0.$$

Указание. Все диаметры параболы параллельны между собой и имеют в данном случае угловой коэфициент $k=-\frac{1}{2}$; диаметр, сопряженный хордам *другого* главного направления (перпендикулярного первому) и будет главною осью параболы.

621. Составить уравнения главных осей для линий $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$:

1) $5x^2+24xy+75y^2-36x+6y+13=0$,
2) $7x^2+26xy+7y^2+42x=0$.

12. Касательная в точке кривой.

Если координаты точки $(x_1;\ y_1)$ и направление прямой, через нее проходящей, удовлетворяют условиям:

$$N=0,\quad R=0,$$

то выбранная прямая касается (§ 6) линии 2-го порядка; обратно, если возьмем точку $(x_1;\ y_1)$, принадлежащую линии 2-го порядка, то:

$$2F(x_1,\ y_1)=R=0,$$

и в полярном уравнении линии не будет свободного члена:

$$M\rho^2+2N\rho=0;$$

один из его корней равен нулю, а потому, чтобы прямая направления $(m:n)$, проходящая через точку $(x_1;\ y_1)$, касалась линии необходимо, чтобы и второй корень полярного уравнения обратился в нуль, т. е. необходимо, чтобы

$$N=0$$

или

$$mF_{x_1}+nF_{y_1}=0. \tag{29}$$

Последнее условие при выбранной точке $M_1(x_1;\ y_1)$ определяет угловой коэфициент касательной, проходящей через эту точку:

$$\frac{n}{m}=k=-\frac{F_{x_1}}{F_{y_1}}.$$

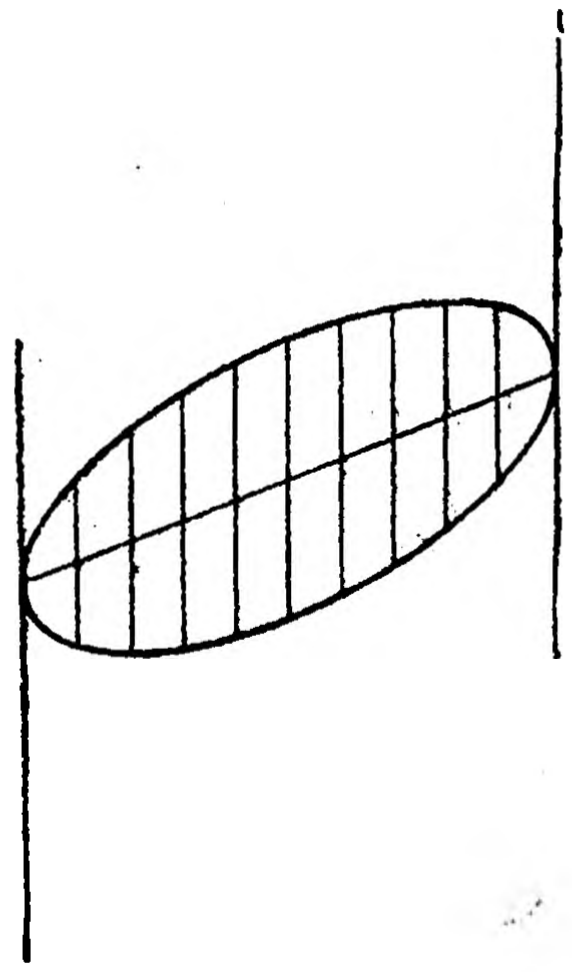
Этому результату можно дать следующее истолкование. Возьмем уравнение диаметра, сопряженного хордам направления k:

$$F_x+kF_y=0,$$

и выразим, что этот диаметр проходит через некоторую точку $M_1(x_1;\ y_1)$ линии, тогда:

$$k=-\frac{F_{x_1}}{F_{y_1}}$$

будет угловым коэфициентом хорд, сопряженных с диаметром, проходящим через $M_1(x_1;\ y_1)$, и он, как видим, одинаков с угловым коэфициентом касательной, проходящей через ту же точку. Таким образом *касательная в конце какого-либо диаметра параллельна сопряженным ему хордам* (черт. 150); так оно, конечно, и должно быть, если касательную представлять себе как предельное положение хорды, перемещающейся параллельно самой себе до совпадения точек пересечения с линией.



Черт. 150.

Что касается уравнения самой касательной, то его можно получить как уравнение прямой, проходящей через точку $(x_1;\ y_1)$ и имеющей найденный угловой коэфициент; оно будет:

$$y-y_1=-\frac{F_{x_1}}{F_{y_1}}(x-x_1).$$

Можно также его получить преобразованием соотношения (29).

В самом деле, пусть x, y будут текущие координаты точки касательной, тогда коэфициенты направления последней будут:

$$m=\frac{x-x_1}{\rho},\quad n=\frac{y-y_1}{\rho},$$

где ρ — расстояние точек $(x;\ y)$ и $(x_1;\ y_1)$. Подставляя эти значения m и n в уравнение (29) и умножая его на ρ, получим уравнение касательной в виде:

$$(x-x_1)F_{x_1}+(y-y_1)F_{y_1}=0, \qquad (41)$$

т. е. то же, что и выше.

Перейдем в уравнении (41) к однородным координатам, т. е. совершим замены

$$x\,\Big|\,\frac{x}{z},\quad y\,\Big|\,\frac{y}{z},$$

$$x_1\,\Big|\,\frac{x_1}{z_1},\quad y_1\,\Big|\,\frac{y_1}{z_1},$$

тогда уравнение примет вид:

$$(z_1x - x_1z) F_{x_1} + (z_1y - y_1z) F_{y_1} = 0, \qquad (41')$$

где F_{x_1}, F_{y_1} будут уже линейными однородными функциями координат x_1, y_1, z_1.

Так как по теореме Эйлера

$$x_1 F_{x_1} + y_1 F_{y_1} + zF_{z_1} \equiv 2F(x_1, y_1, z_1),$$

и для точки, лежащей на данной линии,

$$2F(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

то

$$x_1F_{x_1} + y_1F_{y_1} + z_1F_{z_1} = 0;$$

умножив последнее соотношение на z, прибавим его к уравнению касательной (41'), тогда уравнение касательной в данной точке $(x_1 : y_1 : z_1)$ линии 2-го порядка напишется окончательно в следующей симметричной форме:

$$xF_{x_1} + yF_{y_1} + zF_{z_1} = 0. \qquad (41'')$$

Итак, чтобы составить уравнение касательной в данной точке кривой, надо, восстановив однородность уравнения, найти половины частных производных от левой части уравнения кривой по x, y, z и подсчитать их значения для координат заданной точки. Эти значения и будут коэфициентами уравнения касательной.

Положим, нам требуется составить уравнение касательной к линии

$$x^2 + 6xy + 4y^2 + 10x + 2y - 14 = 0$$

в некоторой ее точке $(2; -1)$. Найдем половины частных производных от левой части уравнения и определим их значения для $x = 2, y = -1$:

$$\begin{array}{l|r} F_x = x + 3y + 5 & 4 \\ F_y = 3x + 4y + 1 & 3 \\ F_z = 5x + y - 14 & -5 \end{array}$$

эти значения и будут коэфициентами уравнения касательной:

$$4x + 3y - 5 = 0.$$

Вместо того, чтобы находить F_{z_1} и вычислять его, мы могли бы найти это последнее по значениям F_{x_1} и F_{y_1}, пользуясь указанным выше соотношением, вытекающим из теоремы Эйлера:

$$x_1F_{x_1} + y_1F_{y_1} + z_1F_{z_1} = 0$$

для точки $(x_1; y_1)$, лежащей на данной линии.

Упражнения. 622. Найти угловой коэфициент касательной к линии:

$$3x^2 - 12xy + 5y^2 + 8x + 6y - 131 = 0.$$

в ее точке $(3; -2)$.

623. Составить уравнение касательной к линии:

$$4x^2+8xy-11y^2+2x-6y-23=0$$

в ее точке $(-2; \ -1)$.

624. Прямая, изображаемая уравнением:

$$13x+y-16=0$$

касается линии:

$$x^2+xy+y^2+8x-6y-3=0.$$

Найти координаты ее точки прикосновения.

625. Для кривой, заданной своим уравнением:

$$5x^2+6xy+7y^2+4x-7=0,$$

найти касательные, параллельные прямой:

$$5x-y=0.$$

626. Пользуясь уравнением (41″) общего вида касательной, составить уравнение касательных эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям.

13. Тангенциальное уравнение линии 2-го порядка.

Возьмем некоторую прямую, общее уравнение которой в однородных координатах $x:y:z$ напишем следующим образом:

$$ux+vy+wz=0. \tag{42}$$

Посмотрим, при каком условии она будет касаться данной линии 2-го порядка. Уравнение (42) в таком случае должно быть равносильно уравнению касательной в некоторой точке $(x_1:y_1:z_1)$:

$$xF_{x_1}+yF_{y_1}+zF_{z_1}=0, \tag{41″}$$

стало быть, их коэфициенты должны быть пропорциональны:

$$\frac{F_{x_1}}{u}=\frac{F_{y_1}}{v}=\frac{F_{z_1}}{w}. \tag{43}$$

Кроме того, прямая (42) должна содержать точку $M_1(x_1:y_1:z_1)$ и последняя должна находиться на заданной линии; мы сейчас увидим, что эти два требования при наличии условий (43) равносильны.

Итак, напишем первое из этих двух условий, что прямая (42) содержит точку $M_1(x_1:y_1:z_1)$:

$$ux_1+vy_1+wz_1=0; \tag{44}$$

в силу соотношений (43) последнее условие можно также написать в виде:

$$x_1F_{x_1}+y_1F_{y_1}+z_1F_{z_1}=0,$$

или на основании теоремы Эйлера в виде:

$$2F(x_1, \ y_1, \ z_1)=0,$$

что обозначает, что точка $(x_1:y_1:z_1)$ лежит на данной линии, если условия (43) и (44) выполнены. Итак, займемся только последними;

обозначив каждое из равных отношений (43) через t, мы будем иметь систему:

$$F_{x_1} = tu,$$
$$F_{y_1} = tv,$$
$$F_{z_1} = tw,$$
$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 - tu &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 - tv &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 - tw &= 0, \\ ux_1 + vy_1 + wz_1 &= 0. \end{aligned} \tag{43'}$$

Выразим теперь, что эта система, однородная относительно $x_1 : y_1 : z_1 : (-t)$, допускает для этих неизвестных решения, неравные нулю одновременно, тогда:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0; \tag{45}$$

полученное соотношение и будет *условием того, что прямая* (42) *касается данной линии* 2-го порядка.

Когда даны отношения коэфициентов $u : v : w$ общего уравнения (42) прямой, то можно считать заданным уравнение прямой, а следовательно, и самую прямую; в этом смысле, поскольку числа $u : v : w$ определяют прямую, их можно называть *координатами* (однородными) *прямой*. Уравнению (45) на основании нашего вывода удовлетворяют координаты $u : v : w$ всех тех прямых, которые *касаются* выбранной линии 2-го порядка, поэтому уравнение (45) называют *тангенциальным уравнением* этой линии, а отсюда и самые координаты $u : v : w$ прямой называют тангенциальными координатами (прямой).

Определитель левой части уравнения (45) по отношению к определителю Δ из коэфициентов уравнения (1) данной линии (в декартовых координатах), который входит ядром в первый определитель, называется *окаймленным* определителем.

Обозначим наш окаймленный определитель левой части уравнения (45) через ∇ и разложим его по элементам последнего столбца, тогда:

$$\nabla = -u \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ u & v & w \end{vmatrix} + v \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ u & v & w \end{vmatrix} - w \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

Назовем через a^{ik} (i, k — не степени, а индексы) адъюнкту определителя Δ, соответствующую его элементу a_{ik}, и развернем далее каждый из определителей 3-го порядка правой части предыдущего соотношения по элементам их последней строки, мы получим:

$$\nabla = -u\,(a^{11}u + a^{12}v + a^{13}w) + v\,(-a^{21}u - a^{22}v - a^{23}w) - w\,(a^{31}u + a^{32}v + a^{33}w).$$

Итак, мы имеем следующее разложение окаймленного определителя 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = -(a^{11}u^2 + a^{22}v^2 + a^{33}w^2 + 2a^{23}vw + 2a^{31}wu + 2a^{12}uv), \tag{46}$$

где a^{ik} — адъюнкта его ядра, соответствующая элементу a_{ik}, причем $a^{ik} = a^{ki}$; аналогичное разложение легко получить и для окаймленного определителя любого порядка.

Обозначим функцию, стоящую в скобках правой части соотношения (46), через $2\Phi(u, v, w)$ или короче 2Φ; это будет квадратичная троичная форма по переменным u, v, w. Теперь тангенциальное уравнение данной линии 2-го порядка мы можем записать в виде:

$$2\Phi(u, v, w) = 0; \tag{45'}$$

оно является также уравнением 2-й степени, как и точечное уравнение линии. Рассмотрим прямые, проходящие через заданную точку $(x_0 : y_0 : z_0)$; их координаты u, v, w должны удовлетворять условию:

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0. \tag{47}$$

Если среди этих прямых мы захотим выбрать те, которые касаются данной линии, нам придется совместно решать (относительно, например, $\frac{u}{w}$ и $\frac{v}{w}$) уравнения (45′) и (47); число таких прямых, проходящих через данную точку и касающихся рассматриваемой линии, равно, очевидно, степени тангенциального уравнения линии и называется *классом* последней.

Мы можем теперь сказать, что *линии 2-го порядка являются также и линиями 2-го класса*; вообще же для других линий порядок и класс могут изображаться различными между собой числами.

Рассуждение, подобное тому, которым мы пользовались в § 1, покажет нам, что линия 2-го класса (или, что то же, 2-го порядка) может быть, вообще говоря, определена *пятью* своими касательными.

Если условие (45) или (45′) прикосновения для данной прямой (42) выполнено, то легко найти координаты $(x_1 : y_1 : z_1)$ той точки, в которой эта прямая касается заданной линии.

В самом деле, умножим три первых уравнения (43′) соответственно на a^{11}, a^{21}, a^{31} и сложим их, тогда:

$$\Delta x_1 = t\,(a^{11}u + a^{21}v + a^{31}w),$$

аналогично получим:

$$\Delta y_1 = t\,(a^{12}u + a^{22}v + a^{32}w),$$
$$\Delta z_1 = t\,(a^{13}u + a^{23}v + a^{33}w).$$

Легко видеть, что скобки в правых частях только что полученных соотношений будут частными производными Φ_u, Φ_v, Φ_w; следовательно:

$$\frac{x_1}{\Phi_u} = \frac{y_1}{\Phi_v} = \frac{z_1}{\Phi_w}\left(= \frac{t}{\Delta}\right).$$

Из этих соотношений, совершенно аналогичных соотношениям (43), мы можем определить координаты $(x_1 : y_1 : z_1)$ точки прикосновения данной прямой. Если, например, нам требуются обыкновенные декартовы координаты x_1, y_1 точки прикосновения, то они будут выражаться следующим образом $(z_1 = 1)$:

$$x_1 = \frac{\Phi_u}{\Phi_w}, \quad y_1 = \frac{\Phi_v}{\Phi_w}.$$

Заметим, что, если нам дано тангенциальное уравнение (45′) линии 2-го класса, то легко составить ее уравнение в точечных координатах. Для этого достаточно из уравнений (43″) и (44) исключить $u : v : w : -\frac{\Delta}{t}$ и мы получим точечное уравнение данной линии в виде

$$\begin{vmatrix} a^{11} & a^{21} & a^{31} & x \\ a^{12} & a^{22} & a^{32} & y \\ a^{13} & a^{23} & a^{33} & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Упражнения. 627. Найти условие касания прямой:

$$ux + vy + wz = 0$$

к линии 2-го порядка, изображаемой уравнением:

$$x^2 + xy - 2y = 0.$$

628. Составить тангенциальное уравнение линии, изображаемой в декартовых координатах уравнением:

$$x^2 + 4xy + 2y^2 + x - \frac{1}{2}y + 1 = 0,$$

и найти затем касательные к ней, проходящие через точку

$$\left(\frac{5}{2};\ -5\right).$$

629. Составить тангенциальные уравнения кривых 2-го порядка по их каноническим уравнениям в декартовых координатах.

630. Найти точку прикосновения прямой, заданной тангенциальными координатами $(1 : 3 : 1)$, к кривой 2-го класса:

$$2u^2 + v^2 + w^2 + 2vw - 6uv = 0.$$

14. Асимптоты.

Асимптотами мы назвали прямые, касающиеся данной линии 2-го порядка в бесконечно удаленных точках. Если прямая направления $(m : n)$, проходящая через точку $(x_1 ; y_1)$, касается линии в бесконечно удаленной точке, т. е. встречает ее в двух совпавших бесконечно удаленных точках, то полярное уравнение линии:

$$M\rho^2 + 2N\rho + R = 0$$

должно иметь два равных бесконечных корня, что будет при условиях:

$$M = 0,$$

$$N = 0,$$

или подробнее:

$$a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0, \qquad (26)$$

$$mF_{x_1} + nF_{y_1} = 0. \qquad (29)$$

Первое из них означает, что наша асимптота имеет одно из тех направлений, которые мы назвали асимптотическими, что, конечно, и понятно, так как прямая, *касающаяся* линии в бесконечно удаленной точке, должна находиться среди тех прямых, которые вообще *встречают* линию в бесконечно удаленных точках. При этом, так как уравнение (26) второй степени, таких асимптотических направлений имеется два, и асимптот будет две. Второе из полученных условий, именно условие (29), удовлетворяется координатами любой точки асимптоты, оно будет собственно уравнением асимптоты, когда отношение $m : n$ имеет то или другое значение, определяемое первым условием (26); это уравнение асимптоты показывает, что она проходит через центр.

Таким образом асимптоты, будучи параллельны прямым асимптотических направлений, имеют среди них ту специальную особенность, что они проходят через центр.

Если мы желаем получить окончательное уравнение асимптот, то при числовом решении задачи проще определить сначала из уравнения (26) угловой коэфициент $k = \frac{n}{m}$ асимптотических направлений и затем подставить то или иное из его значений в уравнение (29). Если же мы желаем получить уравнение асимптот в общем виде, то удобнее поступить обратно, именно из уравнения (29) определить отношение $m : n$ через текущие координаты точек асимптоты x, y (отбросив индексы):

$$\frac{m}{F_y} = \frac{n}{-F_x},$$

а затем эти значения подставить в уравнение (26). Тогда уравнение пары асимптот получится в виде:

$$a_{11}(F_y)^2 - 2a_{12}F_yF_x + a_{22}(F_x)^2 = 0.$$

Вернемся к прежней форме условий, определяющих асимптоты (26) и (29); угловой коэфициент асимптотических направлений (совпадающих) параболы будет:

$$k = \frac{n}{m} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}. \qquad (48)$$

Подставляя это значение в уравнение (29), мы получим уравнение асимптоты параболы:

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)-\frac{a_{11}}{a_{12}}(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)=0$$

или

$$z\left(a_{13}-\frac{a_{11}}{a_{12}}a_{23}\right)=0,$$

т. е. асимптотой параболы является бесконечно удаленная прямая.

Упражнения. 631. Найти уравнения каждой из асимптот гиперболы:

$$3x^2+8xy-3y^2+6x+12y=0.$$

632. Составить уравнение пары асимптот гиперболы:

$$6x^2+11xy+4y^2-10x+14y-25=0.$$

633. Вычислить тангенс угла между асимптотами гиперболы:

$$3x^2+5xy+2y^2-10=0.$$

634. Доказать, что тангенс угла между асимптотами линии

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

отнесенной к прямоугольной системе координат, определяется соотношением:

$$\operatorname{tg}\varphi=\pm\frac{2\sqrt{-\delta}}{a_{11}+a_{22}},$$

где $\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$.

Замечание. Гипербола называется равностороннею, если ее асимптоты взаимно перпендикулярны; гипербола будет равностороннею, если коэфициенты ее уравнения относительно прямоугольной системы координат удовлетворяют условию:

$$a_{11}+a_{22}=0 \qquad \left(\omega=\frac{\pi}{2}\right),$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

К § 1.

1. Сколько членов и какие именно должно содержать общее уравнение 2-й степени относительно координат x и y?
2. Как изображается общее уравнение линии 2-го порядка в декартовых обыкновенных координатах?
3. Как пишется общее уравнение линии 2-го порядка в декартовых однородных координатах?
4. Что называется в алгебре „формою“?
5. Как подразделяются формы по их степеням и по числу содержащихся в них переменных?
6. С помощью какой формы изображается уравнение линии 2-го порядка в однородных декартовых координатах?
7. В чем состоит теорема (или тождество) Эйлера для квадратичной тройчной формы?
8. Сколькими точками определяется линия 2-го порядка?

К § 2.

9. К какому виду преобразуется общее уравнение линии 2-го порядка при переносе начала координат с сохранением направлений координатных осей?
10. Какие коэфициенты общего уравнения при указанном преобразовании сохраняют свои значения?

11. Что называется дискриминантом из всех коэфициентов общего уравнения?

12. Какое значение имеет дискриминант преобразованного уравнения при переносе начала координат?

13. Какие соотношения между коэфициентами двух различных уравнений одной и той же линии называются инвариантными?

14. Сколько должно быть (и почему именно) инвариантных соотношений между коэфициентами прежнего и нового уравнений линии 2-го порядка при переносе начала?

15. Что называется инвариантами уравнения линии 2-го порядка относительно переноса начала и каковы они?

16. Как могут быть использованы инварианты при нахождении преобразованного уравнения линии?

К § 3.

17. В каком случае линия 2-го порядка называется распадающейся?

18. Какое значение имеет дискриминант линии 2-го порядка, если она распадается?

19. Будет ли обращение в нуль дискриминанта уравнения линии 2-го порядка достаточным условием ее распадения?

К § 4.

20. Как изображается квадрат расстояния точки от начала координат косоугольной системы по координатам точки?

21. Как изображается по координатам двух точек квадрат их расстояния в косоугольной системе координат?

22. Какое выражение имеют коэфициенты m, n направления луча через угол его с осью x-ов и координатный угол?

23. Каковы связи между полярными и декартовыми координатами точки для косоугольной системы, если полюс и полярная ось полярной системы совпадают соответственно с началом и осью x-ов декартовой системы?

24. Какая зависимость существует между коэфициентами m, n направления луча?

25. Как пишется условие перпендикулярности двух лучей по их угловым коэфициентам в косоугольной системе координат?

26. Каково будет в косоугольной декартовой системе координат уравнение окружности с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r?

27. При каких условиях общее уравнение линии 2-го порядка изображает окружность? Как в таком случае определить координаты ее центра и радиус?

К § 5.

28. Какой вид имеет полярное уравнение линии 2-го порядка? Каковы выражения его трех коэфициентов?

29. Как показать, что каждая прямая встречает линию 2-го порядка в двух точках?

К § 6.

30. Какое геометрическое значение имеет обращение в нуль каждого в отдельности из коэфициентов полярного уравнения линии 2-го порядка?

31. Что называется асимптотическими направлениями линии 2-го порядка?

32. Какое геометрическое значение имеет обращение в нуль одновременно вух коэфициентов полярного уравнения линии 2-го порядка?

33. Могут ли все три коэфициента полярного уравнения одновременно обращаться в нули и в каком случае?

К § 7.

34. Каким уравнением определяются угловые коэфициенты асимптотических направлений линии 2-го порядка?

35. Что называется дискриминантом старших членов уравнения линии 2-го порядка?

36. Каким образом значение дискриминанта старших членов уравнения линии 2-го порядка связывается с характером самой линии?

37. Что изображает уравнение, которое мы получаем приравнивая нулю совокупность старших членов уравнения линии 2-го порядка?

38. Каковы асимптотические направления линии параболического типа?

39. Какой вид принимает уравнение линии 2-го порядка, если оси координат взяты по асимптотическим (различным) ее направлениям?

К § 8.

40. Что называется центром линии 2-го порядка?

41. Какими уравнениями определяются координаты центра линии 2-го порядка?

42. Линии какого типа имеют единственный центр на конечном расстоянии?

43. Может ли центр, находящийся на конечном расстоянии, принадлежать самой линии 2-го порядка и когда это будет?

44. Где находится центр параболы?

45. В каком случае линия 2-го порядка имеет прямую центров?

46. Как упрощается уравнение линии 2-го порядка, если начало координат принять в ее центре (на конечном расстоянии)?

47. Как определяется свободный член уравнения линии 2-го порядка, преобразованного к центру?

К § 9.

48. Каково будет для линии 2-го порядка геометрическое место середин хорд данного направления (диаметр)?

49. Каким уравнением изображается диаметр линии 2-го порядка, сопряженный хордам с данным угловым коэфициентом?

50. Через какую точку проходят все диаметры линии 2-го порядка?

К § 10.

51. Какие направления называются сопряженными относительно линии 2-го порядка?

52. Каким уравнением связаны угловые коэфициенты двух сопряженных направлений?

53. Каков (необходимый и достаточный) признак того, что уравнение линии 2-го порядка отнесено к координатным осям, имеющим сопряженные направления?

К § 11.

54. Какие направления называются главными для линии 2-го порядка?

55. Какими двумя уравнениями определяются угловые коэфициенты главных направлений?

56. Для какой линии 2-го порядка главные направления неопределенны и что это означает?

57. Какое уравнение называется характеристическим уравнением линии 2-го порядка и как оно связывается с определением ее главных направлений?

58. Как показать, что характеристическое уравнение при действительных коэфициентах уравнения линии всегда имеет действительные корни?

59. Когда характеристическое уравнение имеет равные корни?

К § 12.

60. Как пишется уравнение касательной к линии 2-го порядка в данной ее точке?

61. Если данная прямая касается заданной линии 2-го порядка, как найти координаты ее точки прикосновения?

К § 13.

62. Как пишется условие касания прямой к линии 2-го порядка?

63. Что называется координатами прямой?

64. Что такое тангенциальное уравнение данной линии 2-го порядка?

65. Что называется окаймленным определителем и как он развертывается?
66. Что называется классом линии и каково его геометрическое значение?
67. Какого класса будут линии 2-го порядка?

К § 14.

68. Что называется асимптотами линии 2-го порядка?
69. Через какую точку проходят обе асимптоты линии 2-го порядка?
70. Каким уравнением можно изобразить обе асимптоты линии 2-го порядка?
71. Каковы будут асимптоты параболы?
72. Какая гипербола называется равностороннею?

Упражнения. 635. Составить уравнение линии 2-го порядка, касающейся осей координат в точках (1; 0), (0; 2) и проходящей через точку (2; 1).

Указание. Абсциссы точек пересечения линии, изображаемой уравнением (1), с осью x-ов определяются уравнением:

$$a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33}=0;$$

так как искомая линия должна *касаться* оси x-ов в точке (1; 0) (т. е. пересекать ее в двух совпавших точках), то:

$$-\frac{2a_{13}}{a_{11}}=2, \qquad \frac{a_{33}}{a_{11}}=1,$$

откуда

$$a_{11}=a_{33}, \quad a_{13}=-a_{33}.$$

Подобным же рассуждением, используя касание оси ординат в точке (0; 2) к искомой линии, мы найдем:

$$a_{22}=\frac{a_{33}}{4}, \qquad a_{23}=-\frac{a_{33}}{2}.$$

Наконец, из условия, что искомая линия проходит через *пятую* точку (2; 1), мы определим отношение $a_{12}:a_{33}$.

636. Составить уравнение *параболы*, касающейся осей координат в точках (a; 0) и (0; b).

Замечание. Условие, что искомая линия *касается* осей координат в соответствующих двух точках, равносильно заданию *четырех* точек искомой линии; условие, что искомая линия должна быть *параболой*, дает *пятое* соотношение для коэфициентов общего уравнения.

637. Составить уравнение линии 2-го порядка, проходящей через точки (4; 6), (3; 8), $\left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right)$ и касающейся каждой из осей координат.

638. Линия 2-го порядка определяется относительно некоторой системы координат уравнением:

$$x^2-4xy+3y^2-8x+6y=0.$$

Начало координат переносится в новую точку с сохранением направления осей, причем в преобразованном уравнении новые коэфициенты имеют значения $a'_{13}=-1$, $a'_{23}=-2$.

Определить свободный член преобразованного уравнения линии, а затем найти координаты нового начала по старой системе.

639. При каких значениях параметра λ уравнение:

$$(Ax+By+C)(A'x+B'y+C')-\lambda xy=0$$

изображает пару прямых.

640. Найти координаты центра и радиус окружности, изображаемой относительно прямоугольной системы координат уравнением:

$$L(x^2+y^2)+Px+Qy+S=0.$$

641. Произведение отрезков хорды, проходящей через любую точку и параллельной оси x-ов, относится к произведению отрезков хорды, проходящей через ту же точку параллельно оси y-ов, как $a_{22}:a_{11}$ (т. е. как коэфициенты при квадратах координат уравнения кривой 2-го порядка).

642. Найти условие, при котором асимптоты кривой, заданной общим уравнением относительно косоугольной системы координат, взаимно перпендикулярны.

Указание. Условие перпендикулярности двух направлений изображается для косоугольной системы координат в виде:

$$1 + (k + k') \cos \omega + kk' = 0,$$

но из уравнения (26′), определяющего угловые коэфициенты асимптотических направлений

$$k + k' = -\frac{2a_{12}}{a_{11}}, \quad kk' = \frac{a_{22}}{a_{11}}.$$

Подставляя эти значения суммы и произведения угловых коэфициентов в предыдущее условие перпендикулярности, получим искомое соотношение (для равносторонней гиперболы) в виде:

$$a_{11} - 2a_{12} \cos \omega + a_{22} = 0.$$

643. Найти место центров кривых 2-го порядка, проходящих через четыре заданных точки: $(a_1;\ 0)$, $(a_2;\ 0)$, $(0;\ b_1)$, $(0;\ b_2)$.

644. Каковы будут главные направления линии, распадающейся на пару прямых?

645. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $(x_1;\ y_1)$ и имеющей своими асимптотами пару прямых:

$$A'x + B'y + C' = 0,$$
$$A''x + B''y + C'' = 0.$$

Указание. Уравнение гиперболы, имеющей своими асимптотами оси координат $x = 0$, $y = 0$, будет:

$$xy - m = 0,$$

поэтому уравнение гиперболы, имеющей асимптотами заданные прямые, будет:

$$(A'x + B'y + C')(A''x + B''y + C'') + \lambda = 0,$$

где неизвестный параметр λ определится из дополнительного условия, что линия проходит через заданную точку.

Глава XIII.

Теория поляр.

Из одной точки (например вне эллипса) можно провести к линии 2-го порядка вообще две касательных; прямая, соединяющая их точки прикосновения, называется *полярою* первой точки. Если мы составим уравнение поляры данной точки относительно заданной линии 2-го порядка, то это уравнение будет оставаться действительным независимо от того, можно ли из данной точки провести к кривой пару действительных касательных или нельзя. Это обстоятельство показывает, что связь между точкой и ее полярою может быть геометрически определена и другим способом помимо построения касательных, которое не всегда возможно; такой способ действительно существует и связан с так называемыми гармоническими четверками точек. Свойства линии 2-го порядка, связанные с отношениями точек к своим полярам, называются полярными свойствами линий 2-го порядка. Замечательно, что значительное число геометрических свойств линий 2-го порядка может быть рассматриваемо в числе полярных свойств. С этой точки зрения свойства линий 2-го порядка оказываются свойствами, общими всем трем типам линий 2-го порядка (эллипсу, гиперболе и параболе) без различия их вида; как только какое-либо специальное свойство той или другой линии (например окружности или эллипса) мы представим как полярное свойство, мы тем самым находим общую формулировку этого свойства, приложимую и к остальным типам линий 2-го порядка. На этом основании можно сказать, что изучение полярных свойств линий 2-го порядка есть изучение их общих свойств независимо от их формы, размера или положения (относительно координатной системы).

1. Уравнение пары касательных из данной точки.

Предположим, что нам даны две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, и мы хотим найти точки пересечения данной линии 2-го порядка:

$$2F \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

с прямой, соединяющей две заданные точки.

Координаты какой-либо точки M на прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, могут быть выражены через отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ в следующем виде:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

или, если пользоваться однородными координатами и принять $\mu = \lambda \frac{z_1}{z_2}$, в виде:

$$\frac{x}{x_1 + \mu x_2} = \frac{y}{y_1 + \mu y_2} = \frac{z}{z_1 + \mu z_2}. \qquad (2)$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), мы, значит, требуем, чтобы точка $M(x:y:z)$ лежала на данной линии; результат подстановки будет:

$$\begin{aligned}a_{11}(x_1+\mu x_2)^2+a_{22}(y_1+\mu y_2)^2+a_{33}(z_1+\mu z_2)^2+\\+2a_{23}(y_1+\mu y_2)(z_1+\mu z_2)+2a_{31}(z_1+\mu z_2)(x_1+\mu x_2)+\\+2a_{12}(x_1+\mu x_2)(y_1+\mu y_2)=0.\end{aligned}\qquad(3)$$

Развертывая левую часть этого уравнения по степеням μ, легко видеть, что ее крайние коэфициенты будут $2F(x_1, y_1, z_1)$ и $2F(x_2, y_2, z_2)$; обозначим их короче через

$$2F_1 \text{ и } 2F_2.$$

Половина же коэфициента при первой степени μ будет:

$$\begin{aligned}P=a_{11}x_1x_2+a_{22}y_1y_2+a_{33}z_1z_2+a_{23}(y_1z_2+y_2z_1)+\\+a_{31}(z_1x_2+z_2x_1)+a_{12}(x_1y_2+x_2y_1);\end{aligned}$$

последнее выражение называется *полярною формою* по отношению к первоначальной форме $2F(x, y, z)$; если две тройки $(x_1:y_1:z_1)$ и $(x_2:y_2:z_2)$ совпадают, то полярная форма обращается в первоначальную форму $2F$. Выражение P вследствие своей симметрии может быть представлено в двух видах:

$$\begin{aligned}P\equiv x_1F_{x_2}+y_1F_{y_2}+z_1F_{z_2}\equiv\\\equiv x_2F_{x_1}+y_2F_{y_1}+z_2F_{z_1};\end{aligned}$$

отмеченной особенности мы в дальнейшем дадим геометрическое истолкование. Итак, уравнение (3) относительно μ может быть написано в следующем виде:

$$2F_1+2P\mu+2F_2\mu^2=0,\qquad(3')$$

и оно *) дает два значения для μ, как и следует, ибо всякая прямая должна пересекать линию 2-го порядка в двух точках. Зная μ, мы найдем по формулам (2) координаты двух точек M' и M'' (черт. 151) пересечения нашей линии с прямой, проходящей через точки M_1 и M_2. В силу происхождения формул (2), обозначая корни уравнения (3′) через μ' и μ'', будем иметь:

$$\frac{M_1M'}{M'M_2}=\mu'\frac{z_2}{z_1},\quad \frac{M_1M''}{M''M_2}=\mu''\frac{z_2}{z_1}.\qquad(4)$$

Если мы теперь хотим, чтобы прямая, проходящая через M_1 и M_2, касалась нашей линии, необходимо требовать, чтобы точки пересече-

*) Возвращаясь к прежнему параметру $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$, это уравнение можно также написать в виде

$$2F_1z_2^2+2Pz_2z_1\lambda+2F_2z_1^2\lambda^2=0.$$

ния совпадали (черт. 152), т. е. чтобы уравнение (3') имело равные корни. Тогда условие:

$$P^2 - 2F_1 \cdot 2F_2 = 0$$

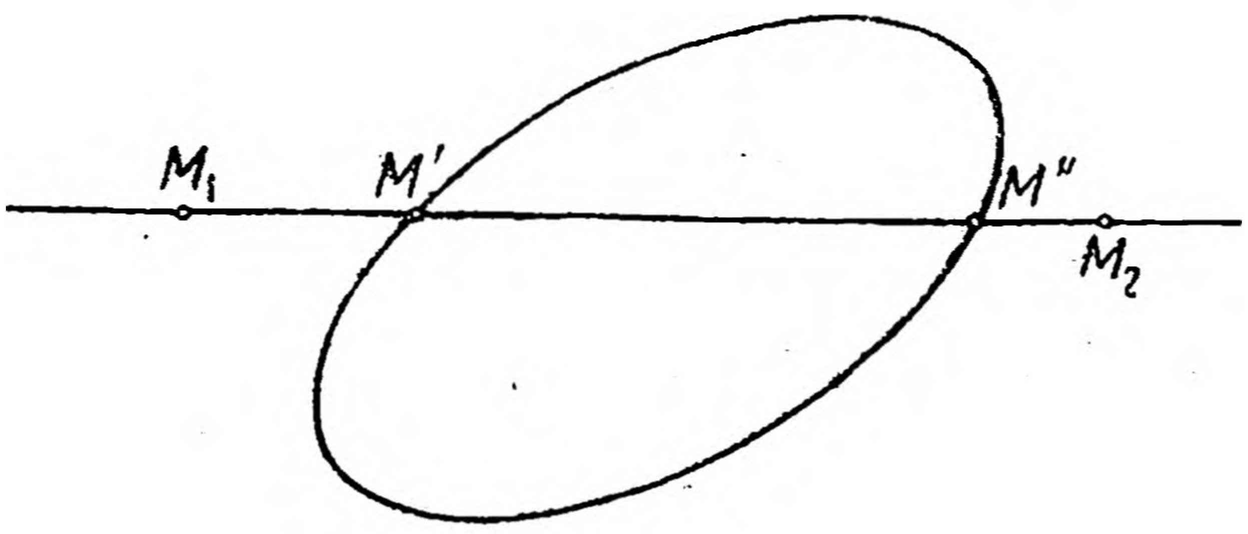
будет связывать координаты точек M_1 и M_2; если мы закрепим точку M_1, точка M_2 будет перемещаться по прямой, проходящей через точку M_1 и касательной к линии (1): предыдущее соотношение при переменных координатах x_2, y_2 обратится в уравнение геометрического места точек M_2. Таким образом уравнение этого геометрического места будет (отбросим индексы у координат второй точки M_2):

$$P^2 - 2F_1 \cdot 2F = 0, \tag{5}$$

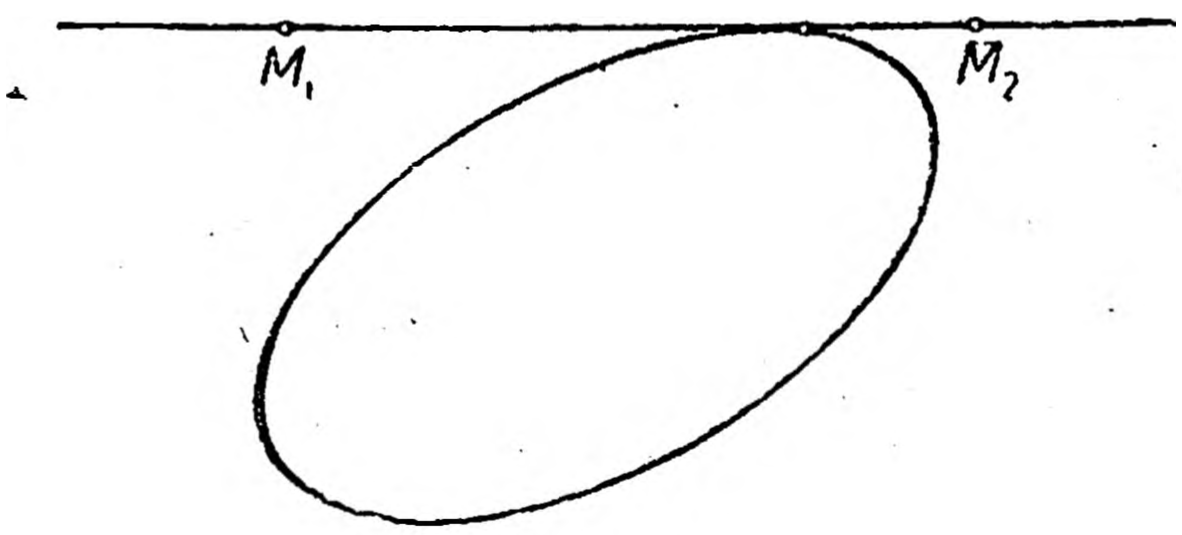
где

$$P \equiv xF_{x_1} + yF_{y_1} + zF_{z_1} \equiv x_1F_x + y_1F_y + z_1F_z; \tag{6}$$

т. к. уравнение (5) оказывается 2-ой степени, то оно будет изображать пару касательных из точки M_1 к данной линии 2-го порядка.



Черт. 151.



Черт. 152.

Пара любых прямых линию 2-го порядка будет пересекать вообще в четырех точках, координаты которых будут определяться двумя уравнениями, каждое из которых 2-й степени. Если же пара секущих обращается в пару касательных, то их общие с линией точки совпадают по две. И на самом деле, если мы желаем определить точки прикосновения пары касательных (5), мы должны совместно решать два уравнения: уравнение пары касательных (5) и уравнение самой линии (1); эти два уравнения

$$P^2 - 2F_2 \cdot 2F = 0,$$

$$2F = 0$$

как следствие дадут нам:

$$P^2 = 0,$$

т. е. уравнение линии, содержащей искомые точки прикосновения. Последнее уравнение изображает сдвоенную прямую:

$$P = 0, \tag{7}$$

на которой лежат точки прикосновения, сочтенные выше вдвойне. Прямая, изображаемая уравнением (7), может быть названа хордою прикосновения пары касательных из точки $M_1(x_1 : y_1 : z_1)$ к данной линии. Замечательно то, что касательные из точки $M_1(x_1 : y_1 : z_1)$ могут оказаться мнимыми [уравнение (5) пары касательных может иметь действительные коэфициенты, но изображать пару мнимых прямых], точки прикосновения будут мнимыми (сопряженными), а прямая (7), проходящая через точки прикосновения, во всяком случае действительна, если, конечно, действительны коэфициенты начального уравнения (1) и координаты данной точки $(x_1 : y_1 : z_1)$.

Каждой точке $M_1 (x_1 : y_1 : z_1)$ плоскости таким образом соответствует определенная действительная прямая (7); ввиду неудобства говорить о хорде прикосновения в тех случаях, когда на самом деле действительных касательных не имеется, прямую (7) называют также *полярою* точки M_1; ниже мы увидим, что она может быть определена геометрически и притом действительным свойством при всяком положении точки M_1. Точка M_1 по отношению к прямой (7) называется ее *полюсом*.

Упражнения. 646. Составить уравнение пары касательных из точки M_1 $(x_1; y_1)$ к линии (1), пользуясь ее полярным уравнением.

Указание. Если прямая направления $(m : n)$, проходящая через точку $M_1 (x_1; y_1)$, касается данной линии (пересекает ее в двух совпавших точках), то необходимо, чтобы полярное уравнение линии:

$$M\rho^2 + 2N\rho + R = 0,$$

определяющее точку пересечения выбранной прямой с данной линией, имело равные корни, т. е. необходимо:

$$N^2 - MR = 0. \tag{8}$$

Таково условие, определяющее направление $(m : n)$ касательной из точки $(x_1; y_1)$ к данной линии; так как это условие 2-й степени относительно углового коэфициента $k = \frac{n}{m}$ (оно однородно относительно m и n) касательной, то мы заключаем, что из каждой точки плоскости к данной линии 2-го порядка можно провести пару касательных (действительных или мнимых).

Подставляя в уравнение (8)

$$m = \frac{x - x_1}{\rho}, \quad n = \frac{y - y_1}{\rho},$$

где x, y — координаты какой-либо точки касательной, а ρ — расстояние этой точки от точки $(x_1; y_1)$, сокращая затем уравнение на $\frac{1}{\rho^2}$ и производя упрощения, получим окончательное уравнение пары касательных из точки $(x_1; y_1)$ в виде ранее полученного уравнения (5).

647. Составить уравнение пары касательных из точки $(-1; 2)$ к линии, изображаемой уравнением:

$$x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 6y = 0.$$

648. Составить уравнение пары касательных для каждой из данных линий из указанной точки:

1) для линии $3x^2 + 4xy + 7y^2 - 4x + 1 = 0$ из точки $(1; -1)$,
2) „ „ $x^2 + 10xy + y^2 - 8x + 2y + 3 = 0$ „ „ $(-2; 1)$,
3) „ „ $x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$ „ „ $(1; 2)$,

649. Составить уравнение пары касательных к линии:

$$x^2 - 6xy + 8y = 0$$

из точки $(1; 2)$ и найти координаты их точек прикосновения.

2. Ангармоническое отношение.

Возьмем четыре точки A, B, C, D на одной прямой; точки C и D второй пары будут делить расстояние от первой точки A до точки B в отношениях:

$$\frac{AC}{CB} \text{ и } \frac{AD}{DB};$$

отношение этих простых отношений, именно:

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB},$$

называют *сложным* или *ангармоническим* отношением четырех точек A, B, C, D; точки, принадлежащие одной паре, как A и B или C и D, будем называть сопряженными. Сложное отношение будем обозначать символом $(ABCD)$, ставя наименования точек в заданном порядке между круглыми скобками, так что:

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}. \tag{9}$$

Упражнения. 650. Ангармоническое отношение положительно, если обе точки C и D второй пары находятся между точками A и B первой пары или обе точки C и D одновременно вне отрезка AB (и обратно); ангармоническое отношение отрицательно, если точки C и D второй пары *разделяются* точками A и B первой пары, т. е. если одна точка второй пары внутри отрезка AB, другая же вне его; обратно, если ангармоническое отношение отрицательно, то точки одной пары разделяются точками другой пары.

651. *Ангармоническое отношение не меняет своего значения*, если 1) переставить сопряженные точки одновременно в обеих парах или 2) переменить места обеих пар, т. е.

1) $(ABCD) = (BADC)$,

2) $(ABCD) = (CDAB)$.

Указание. Доказательство этих предложений легко получить, если в сложном отношении (9) переставлять буквы так, чтобы не менялось само сложное отношение, помня при этом, что перестановка букв отрезка меняет его знак, например:

$$(ABCD) = \frac{AC\cdot DB}{CB\cdot AD} = \frac{BD\cdot CA}{DA\cdot BC} = \frac{BD}{DA}:\frac{BC}{CA} = (BADC) \text{ и т. д.}$$

652*. Перестановка двух точек в одной паре меняет значение ангармонического отношения на обратное, т. е.

$$(BACD) = \frac{1}{(ABCD)},$$

$$(ABDC) = \frac{1}{(ABCD)}.$$

653*. Перестановка двух средних (или двух крайних) точек меняет значение ангармонического отношения на его дополнение к единице, т. е.

$$(ACBD) = 1 - (ABCD),$$

$$(DBCA) = 1 - (ABCD).$$

Указание. При всяком расположении четырех точек A, B, C, D на прямой их расстояния удовлетворяют (см. упражнение 36) соотношению:

$$AB\cdot CD + AC\cdot DB + AD\cdot BC = 0$$

или

$$AB \cdot DC = AC \cdot DB + AD \cdot BC;$$

разделив последнее на произведение $BC \cdot AD$, мы получим:

$$\frac{AB \cdot DC}{BC \cdot AD} = 1 - \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD}$$

или

$$(ACBD) = 1 - (ABCD);$$

аналогичным приемом можно получить изменение ангармонического отношения при перестановке крайних точек.

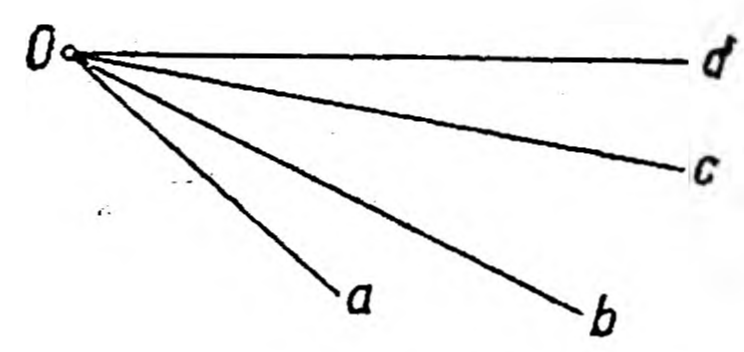
634*. Ангармоническое отношение четырех точек A, B, C, D при всех 24 изменениях их порядка (при 24 перестановках четырех букв) может иметь лишь *шесть* различных значений, а именно:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = w,$$
$$(BACD) = (ABDC) = (CDBA) = (DCAB) = \frac{1}{w},$$
$$(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - w,$$
$$(BCAD) = (CBDA) = (ADBC) = (DACB) = 1 - \frac{1}{w},$$
$$(CABD) = (ACDB) = (BDCA) = (DBAC) = \frac{1}{1-w},$$
$$(CBAD) = (BCDA) = (ADCB) = (DABC) = \frac{1}{1-\frac{1}{w}} = 1 - \frac{1}{1-w} = \frac{w}{w-1}.$$

Если нам даны четыре луча a, b, c, d, *лежащих в одной* плоскости и выходящих из одной точки, например точки 0 (черт. 153), то сложное отношение синусов углов между этими лучами, составленное по образцу сложного отношения (9) четырех точек, именно:

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}, \qquad (10)$$

называется *сложным или ангармоническим отношением* четырех данных *лучей*.



Черт. 153.

Когда пучок пересекается какой-либо прямой, то мы будем говорить, что *сечение* лучей пучка дает на прямой *перспективный пучку ряд точек*; наоборот, если какую-нибудь точку 0 плоскости мы будем соединять с точками ряда на прямой и получим таким способом пучок лучей, выходящих из точки 0, то мы скажем, что *проектирование* ряда точек на прямой из точки 0 дает *перспективный ему пучок лучей* (или „ряд“ лучей).

Два ряда (одноименных или разноименных, точек или лучей — безразлично) называются друг другу *проективными*, если один из них получается из другого последовательностью проектирований и сечений. Пусть сечение пучка $a, b, c, d, \ldots$ некоторою прямою дает ряд соответственных точек $A, B, C, D, \ldots$ (черт. 154); проектирование этого ряда из точки $0'$ дает новый пучок лучей $a', b', c', d', \ldots$; сечение этого пучка какою-либо прямою дает ряд точек $A', B', C', D', \ldots$; проектирование последнего дает пучок лучей $a'', b'', c'', d'', \ldots$, сечение которого даст ряд точек $A'', B'', C'', D'', \ldots$ и т. д.

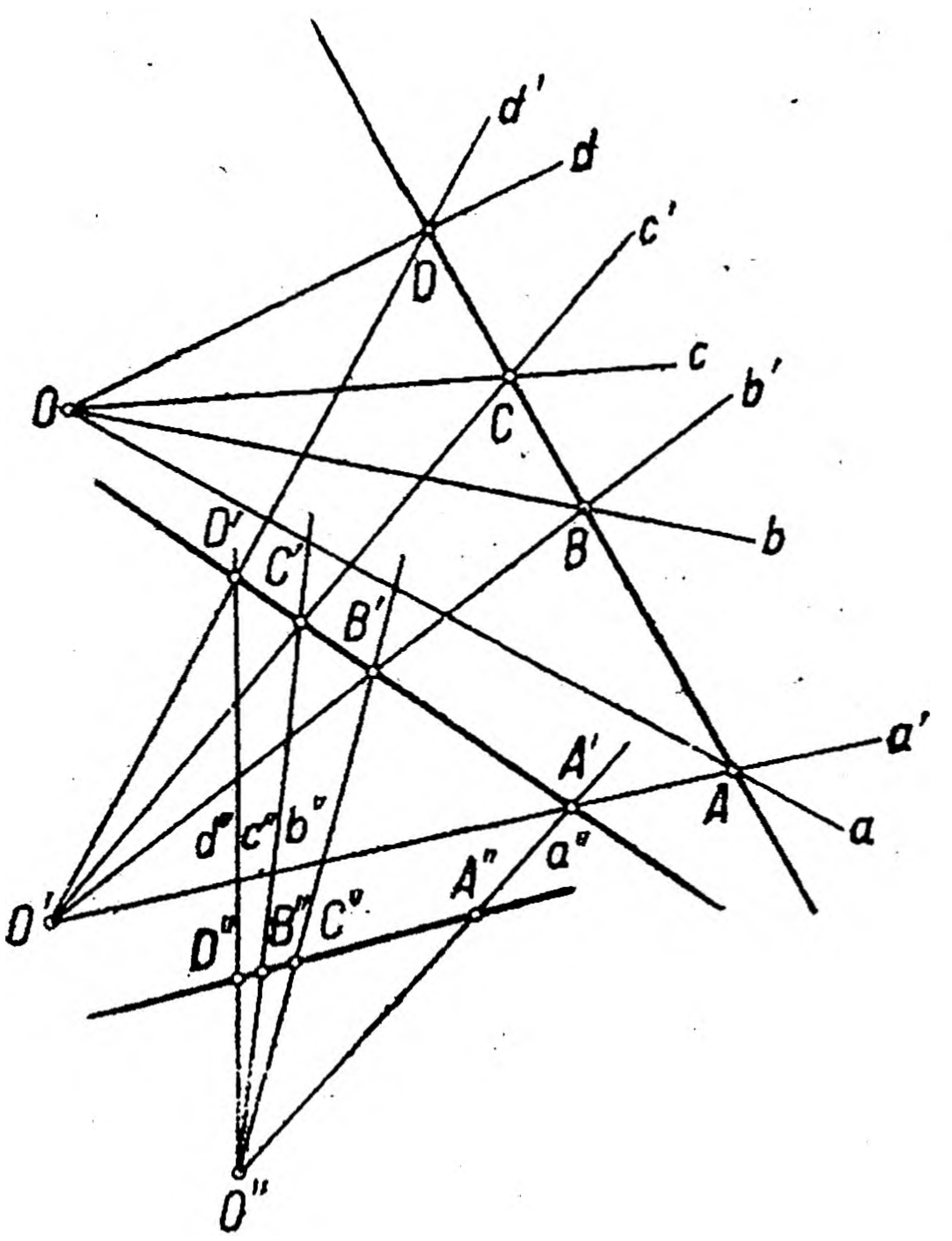
Тогда ряды $a, b, c, d, \ldots$ и a'', b'', c'', d'' или ряды $a, b, c, d,$ и $A'', B'', C'', D'', \ldots$ будут проективны между собой.

Проективные ряды обладают геометрическим свойством, которое и дает ценность их исследованию: *ангармоническое отношение четырех элементов какого-либо ряда равно ангармоническому отношению четырех соответственных элементов любого ряда, проективного первому*, т. е.

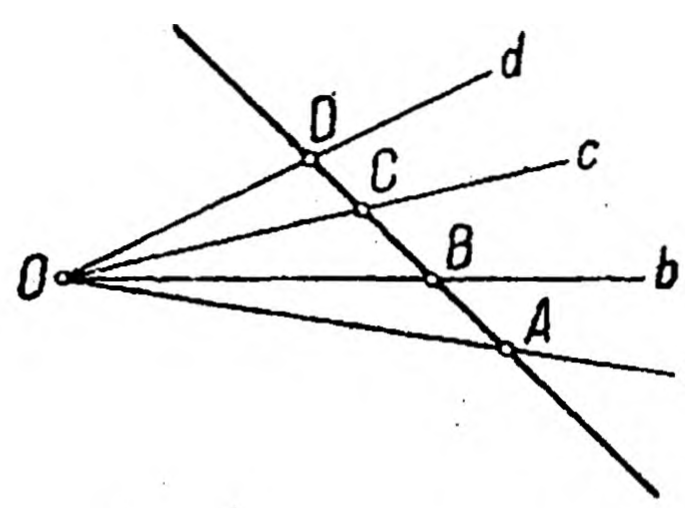
$$(abcd) = (ABCD) = (a'b'c'd') = (A'B'C'D') = (a''b''c''d'') = \\ = (A''B''C''D'') = \ldots;$$

то же свойство можно формулировать и иначе: *сечение или проектирование рядов не меняет ангармонического отношения четверок соответствующих элементов.*

Возьмем два перспективных ряда лучей $a, b, c, d, \ldots$ и перспективных им точек $A, B, C, D, \ldots$ (черт. 155); двойная площадь каждого из треугольников данной фигуры может быть определена, с одной стороны, произведением основания на высоту (из вершины 0), с другой стороны, произведением двух сторон треугольника на синус угла между ними, поэтому:



Черт. 154.



Черт. 155.

$$\frac{h \cdot AC}{h \cdot CB} = \frac{OA \cdot OC \sin(ac)}{OC \cdot OB \sin(cb)}, \quad \frac{h \cdot AD}{h \cdot DB} = \frac{OA \cdot OD \sin(ad)}{OD \cdot OB \sin(db)},$$

откуда:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)};$$

нетрудно установить, что полученное равенство будет иметь место не только по абсолютной величине, но и по знаку, если брать направленные значения отрезков и углов. Итак, для двух перспективных рядов мы имеем:

$$(ABCD) = (abcd),$$

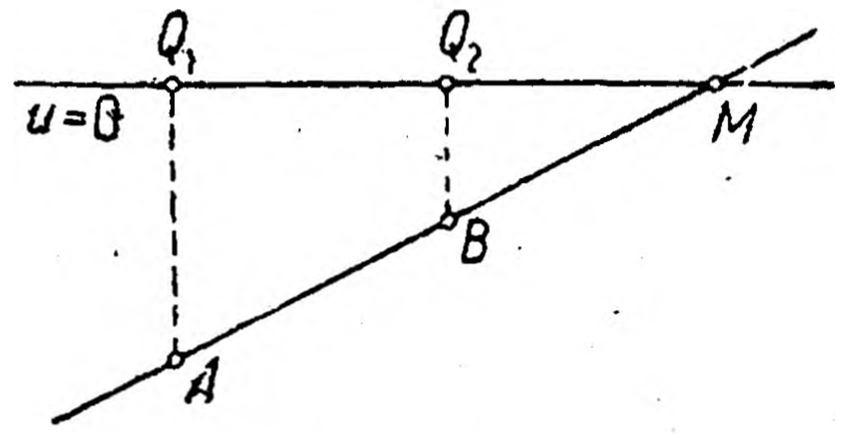
а отсюда уже легко получается и общая теорема для двух проективных рядов, указанная выше. Нижеследующие упражнения содержат другое (аналитическое) доказательство той же теоремы.

Упражнения. 655*. Пусть уравнение какой-либо прямой сокращенно пишется в виде: $u=0$; тогда отношение, в котором какой-либо отрезок AB делится точкою M пересечения его с данной прямой, изобразится в виде:

$$\frac{AM}{MB}=-\frac{u_1}{u_2},$$

где u_1 и u_2 — соответственно результаты подстановок координат точек A и B в левую часть u уравнения данной прямой.

Указание. Предположим сначала, что точка M пересечения данной прямой с отрезком AB находится вне последнего; опустим из точек A и B перпендикуляры AQ_1 и BQ_2 на данную прямую (черт. 156); направленные расстояния AQ_1 и BQ_2 будут одинаковых знаков, так как точки A и B находятся в этом случае по одну сторону от данной прямой. Следовательно, из подобия треугольников AQ_1M и BQ_2M, принимая во внимание знаки отрезков, мы получим:



Черт. 156.

$$\frac{AM}{MB}=-\frac{AQ_1}{BQ_2}. \qquad (\alpha)$$

Если обозначить через m нормирующий множитель уравнения данной прямой, тогда: $AQ_1=mu_1$, $BQ_2=mu_2$ где u_1 и u_2 — соответственно результаты подстановок координат точек A и B в левую часть u уравнения прямой. Таким образом соотношение (α) после подстановки значений AQ_1 и BQ_2 даст нам:

$$\frac{AM}{MB}=-\frac{u_1}{u_2}.$$

Нетрудно убедиться, что тот же результат получится и в том случае, когда точка M пересечения прямой с отрезком находится внутри последнего.

656*. Пусть уравнения двух прямых будут:

$$u=0, \qquad \text{(a)}$$

$$v=0. \qquad \text{(b)}$$

Уравнения двух каких-либо других прямых (c) и (d), проходящих через точку пересечения двух первых, можно написать в виде:

$$u-kv=0, \qquad \text{(c)}$$

$$u-k'v=0; \qquad \text{(d)}$$

тогда ангармоническое отношение четырех выбранных лучей (a), (b), (c), (d) будет:

$$(abcd)=\frac{k}{k'}.$$

Указание. Пусть нормирующий множитель для уравнения $u=0$ будет m и для уравнения $v=0$ будет n, тогда уравнение луча (c) можно написать в виде:

$$(mu)-\frac{mk}{n}(nv)=0,$$

но если уравнения основных прямых взяты в нормальном виде, тогда параметр третьей прямой выражается через простое отношение синусов их углов (см. упражнения 223, 237 и 850):

$$\frac{mk}{n}=-\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)},$$

аналогично для четвертой прямой:

$$\frac{mk'}{n} = -\frac{\sin(ad)}{\sin(db)},$$

откуда

$$\frac{k}{k'} = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)} = (abcd).$$

657*. Пользуясь решением двух предыдущих задач, доказать теперь аналитически равенство ангармонических отношений четырех лучей и четырех точек, находящихся друг относительно друга в перспективном положении.

3. Гармонические четверки точек или лучей.

Когда сложное или ангармоническое *отношение* четырех точек или лучей *равно* — 1 (отрицательной единице), то говорят, что они образуют *гармоническую четверку*. Например, четыре точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку, если:

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1$$

или

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}. \tag{11}$$

В гармонической четверке два элемента одной пары обязательно *разделяются* двумя элементами другой пары. На основании общей теоремы предыдущего параграфа о сохранении ангармонического отношения очевидно, что при проектировании и сечении гармоничность соответствующих четверок сохраняется.

Предположим, что точка C является в частности серединою отрезка AB, тогда простое отношение $\frac{AC}{CB}$ равно единице, а потому соотношение (11) даст:

$$\frac{AD}{DB} = -1,$$

т. е. точка D будет бесконечно удаленной точкой на прямой, содержащей отрезок AB; наоборот, если точка D есть бесконечно удаленная точка, тогда $\frac{AD}{DB} = -1$, и из соотношения (11) получим, что

$$\frac{AC}{CB} = 1,$$

т. е. точка C есть середина отрезка AB. Итак, *середина отрезка гармонически сопряжена с бесконечно удаленною точкою (и наоборот) относительно его концов*.

Назовем расстояния точек C, B, D от точки A соответственно через ρ_1, ρ и ρ_2, тогда (черт. 157):

$$AC = \rho_1, \quad CB = \rho - \rho_1,$$

$$AD = \rho_2, \quad DB = \rho - \rho_2,$$

и соотношение (11) даст нам:

$$\frac{\rho_1}{\rho-\rho_1}+\frac{\rho_2}{\rho-\rho_2}=0.$$

Освободившись от знаменателей и перенося часть членов в правую сторону, получим:

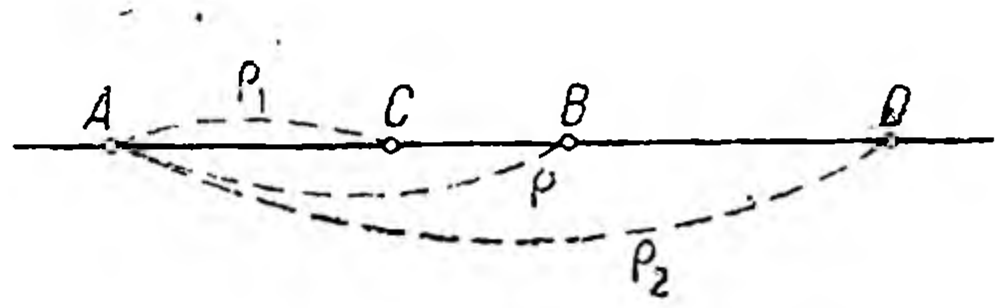
$$\rho\rho_1+\rho\rho_2=2\rho_1\rho_2,$$

наконец, разделив это равенство на произведение $\rho\rho_1\rho_2$, найдем

$$\frac{2}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$$

или

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right). \qquad (12)$$



Черт. 157.

Это соотношение определяет нам положение точки B, четвертой гармонической к начальной точке A относительно пары точек C и D; выражение $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)$, т. е. полусумма обратных величин данных расстояний, называется *средним гармоническим* этих расстояний; таким образом обратная величина расстояния точки B от точки A равна среднему гармоническому расстояний точек C и D второй пары, считая от начальной точки A. В нижеследующих упражнениях дается свойство четырехсторонника (т. е. фигуры, образованной четырьмя данными прямыми), которое позволяет с помощью лишь линейки строить по трем данным точкам четвертую гармоническую.

Упражнения. 658*. Пусть нам даны уравнения трех прямых, не сходящихся (все три) в одной точке:

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0,$$

тогда уравнение всякой четвертой прямой может быть написано в виде:

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

Замечание 1. Пусть некоторая прямая изображается уравнением $\delta=0$, и та же прямая изображается уравнением $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$, где $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ — уравнения трех прямых, не сходящихся в одной точке; отсюда следует, что левые части двух указанных уравнений (одной и той же прямой) могут отличаться лишь числовым множителем, т. е. должно существовать соотношение, тождественное относительно координат x и y:

$$a\alpha+b\beta+c\gamma\equiv-d\delta$$

или

$$a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta\equiv 0.$$

Замечание 2. Когда левые части уравнений четырех прямых связаны указанным тождественным соотношением:

$$a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta\equiv 0,$$

то, умножая уравнение каждой из четырех данных прямых на подходящий множитель, мы можем считать, что коэфициенты a, b, c, d сведены к единицам, и соотношение приведено к виду:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta\equiv 0.$$

659*. Каждая из диагоналей четырехсторонника (т. е. прямая, соединяющая две его противоположных вершины) гармонически разделяется двумя другими диагоналями.

Указание. Возьмем четырехсторонник $ABCD$ (черт. 158), уравнениями сторон которого будут:

$$(AB) \qquad \alpha = 0,$$
$$(BC) \qquad \beta = 0,$$
$$(CD) \qquad \gamma = 0,$$
$$(DA) \qquad \delta = 0;$$

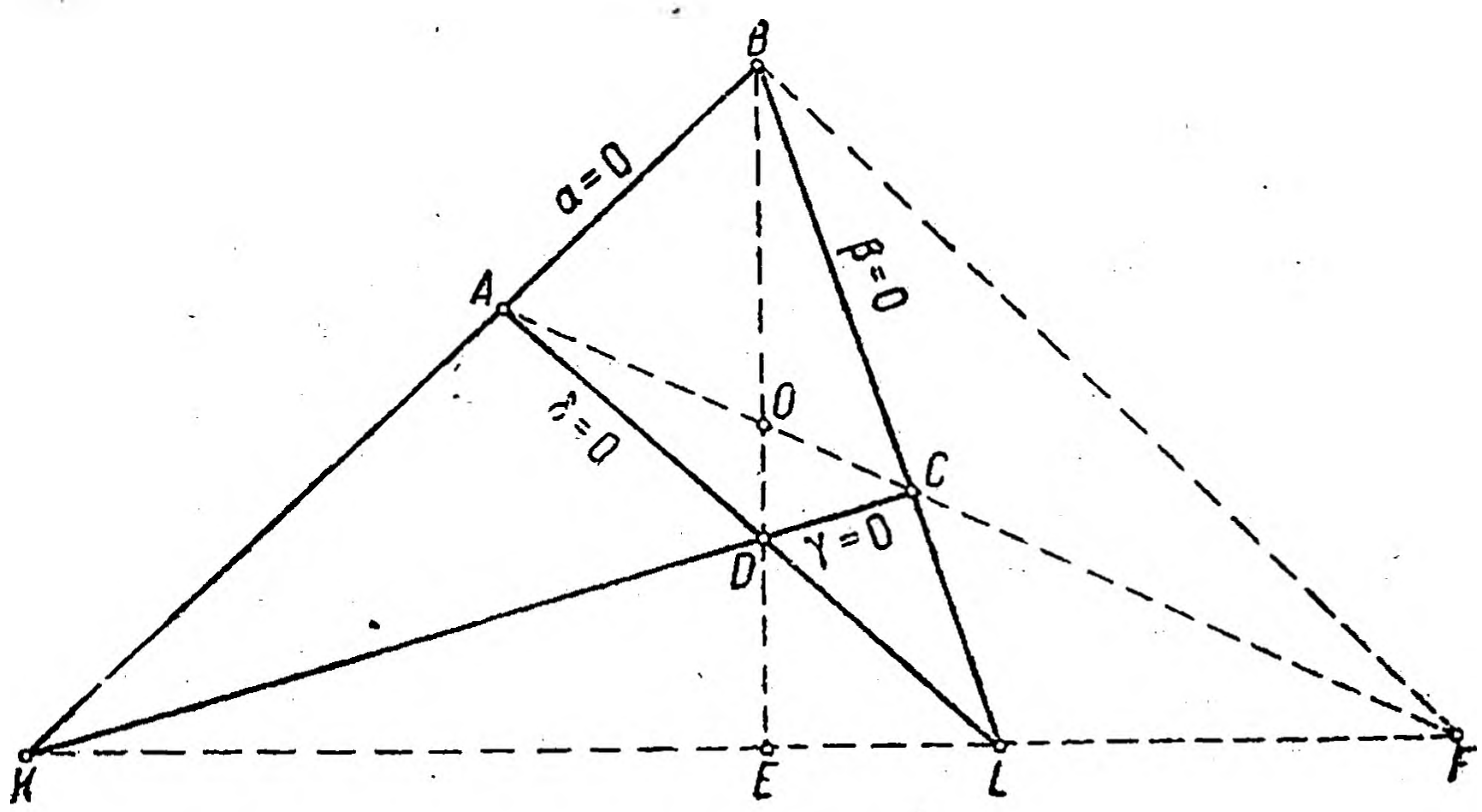
между левыми частями этих уравнений на основании предыдущего мы можем предполагать существование тождественного соотношения:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0.$$

Из этого тождества вытекает, что два уравнения:

$$(BD) \qquad \alpha + \beta = 0 \text{ и } \gamma + \delta = 0$$

изображают одну и ту же прямую. Но форма первого из них показывает, что эта прямая проходит через точку пересечения прямых $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, т. е.



Черт. 158.

через точку B; форма же второго показывает, что та же прямая проходит через точку D. Итак, каждое из этих уравнений изображает диагональ BD.

Аналогичным образом убеждаемся, что диагональ AC изображается одним из двух равносильных между собой уравнений:

$$(AC) \qquad \alpha + \delta = 0 \text{ или } \beta + \gamma = 0,$$

диагональ же KL — любым из уравнений:

$$(KL) \qquad \alpha + \gamma = 0 \text{ или } \beta + \delta = 0.$$

Уравнение:

$$\alpha - \beta = 0$$

можно написать также в виде:

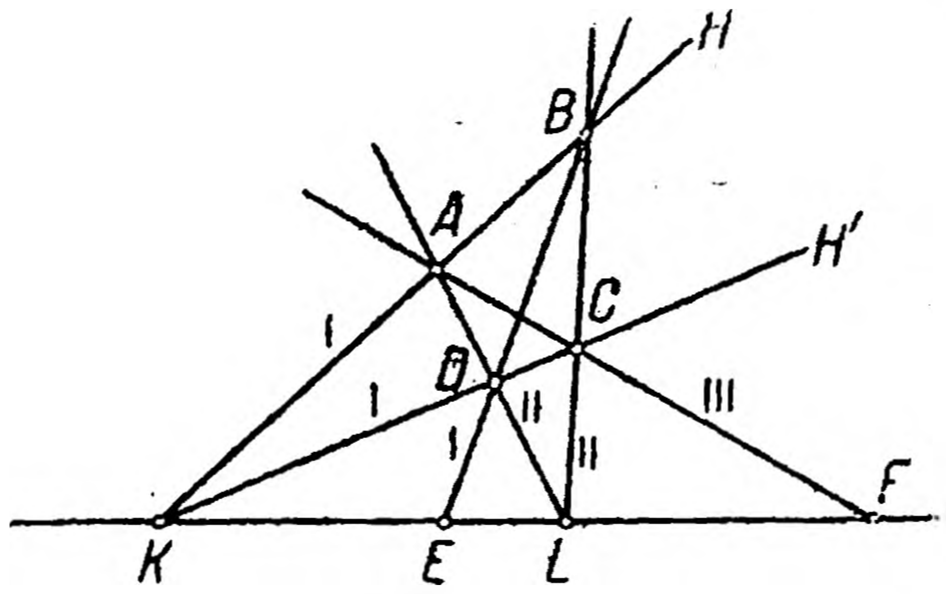
$$(\alpha + \delta) - (\beta + \delta) = 0,$$

поэтому эти уравнения изображают одну и ту же прямую, с одной стороны проходящую через точку B, с другой стороны проходящую через точку пересечения прямых AC и KL, т. е. через точку F; итак, каждое из этих двух уравнений изображает прямую BF.

Таким образом мы имеем четыре прямых BA, BC, BD и BF, выходящих из одной точки B и изображаемых соответственно уравнениями:

$$(BA) \qquad \alpha = 0,$$
$$(BC) \qquad \beta = 0,$$
$$(BD) \qquad \alpha + \beta = 0,$$
$$(BF) \qquad \alpha - \beta = 0,$$

а поэтому эти прямые образуют гармоническую четверку. Следовательно, $(ACOF)$ или $(KLEF)$ будут гармоническими четверками точек. Из точки K четверка $(ACOF)$ проектируется на диагональ BD гармоническою четверкою $(BDOE)$, и тем самым теорема доказана: каждая из диагоналей четырехсторонника гармонически разделяется двумя другими диагоналями.



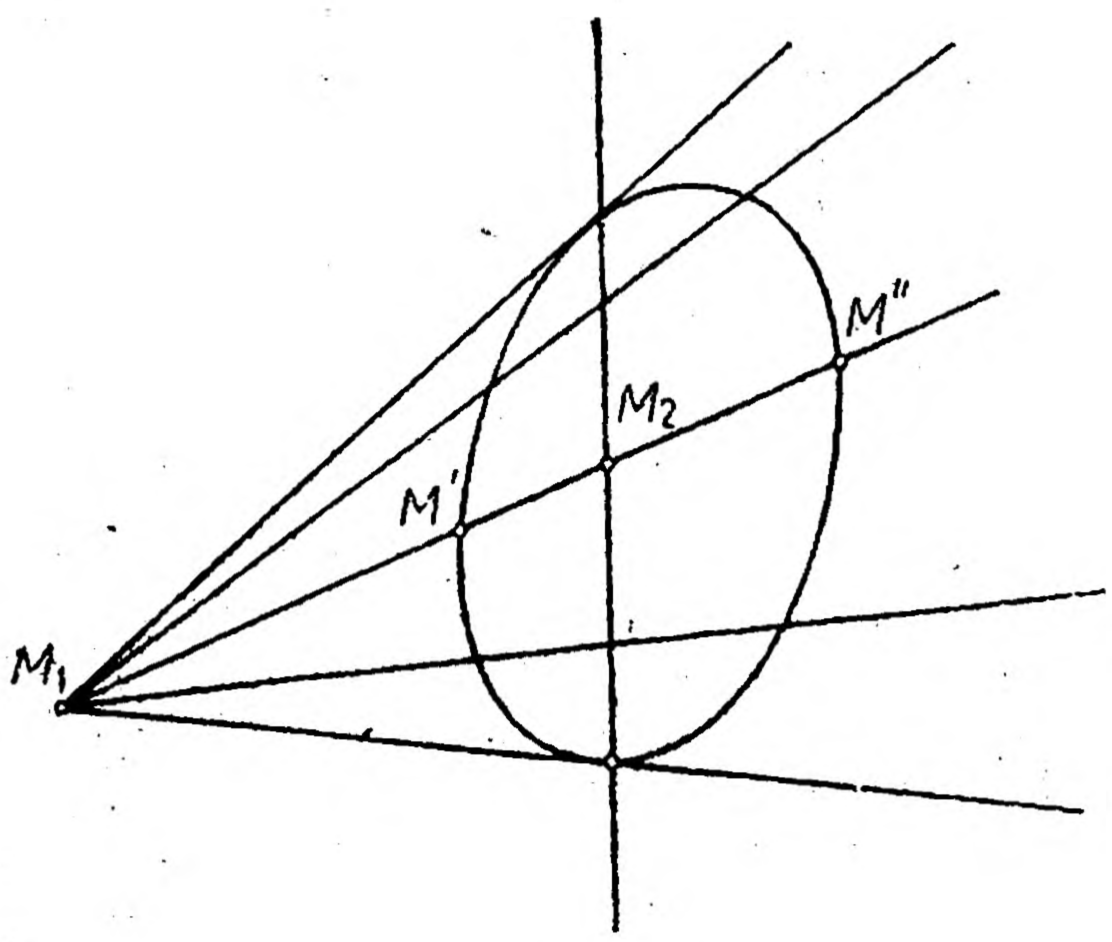
Черт. 159.

Замечание. Гармоническим свойством четырехсторонника можно воспользоваться для построения четвертой гармонической точки к трем данным, пользуясь при этом только линейкой. Пусть нам даны на прямой три точки K, L, E (черт. 159); проведем через точку K две любых прямых KH и KH', а через точку E — также произвольную прямую, пересекающую две первых в точках B и D.

Соединим точки B и D с точкой L прямыми BL и DL, и пусть первая пересекает KH' в точке C, а вторая пересекает KH в точке A; в таком случае прямая AC пересечет продолжение KL в точке F, которая вместе с точкой E гармонически будет делить отрезок KL. На чертеже римскими цифрами обозначен порядок проведения прямых.

4. Поляра.

Вернемся теперь к линии 2-го порядка и рассмотрим пучок прямых, выходящих из точки M_1: каждая из этих прямых будет пересекать линию 2-го порядка в двух точках. Геометрическое место точек, вместе с точкою M_1 гармонически разделяющих точки пересечения прямых пучка с линией 2-го порядка, назовем полярою точки M_1. Пусть на какой-нибудь прямой пучка точки M' и M'' будут ее точками пересечения с линией 2-го порядка (черт. 160), а M_2 — искомая четвертая гармоническая к трем точкам M', M'', M_1, тогда:



Черт. 160.

$$\frac{M_1M'}{M'M_2} : \frac{M_1M''}{M''M_2} = -1,$$

$$\frac{M_1M'}{M'M_2} + \frac{M_1M''}{M''M_2} = 0. \qquad (13)$$

Если мы обозначим через λ' и λ'' отношения, в которых каждая из точек M' и M'' делит отрезок M_1M_2, тогда предыдущее условие требует, чтобы:

$$\lambda' + \lambda'' = 0. \qquad (13')$$

Но, с другой стороны, соображения § 1 показывают, что λ' и λ'', определяющие точки пересечения прямой, проходящей через M_1 и M_2, с линией 2-го порядка, являются корнями квадратного уравнения:

$$2F_1 z_2^2 + 2Pz_1 z_2 \lambda + 2F_2 z_1^2 \lambda^2 = 0. \qquad (3')$$

Так как по условию (13′) сумма корней этого уравнения равна нулю, то соотношение:

$$P = 0$$

или

$$xF_{x_1} + yF_{y_1} + zF_{z_1} = 0 \qquad (7)$$

при данных $(x_1 : y_1 : z_1)$ и будет определять геометрическое место точек M_2 (индексы отброшены в уравнении), четвертых гармонических к точке M_1 и точкам пересечения прямых пучка с данной линией.

Таким образом для линии 2-го порядка поляра есть прямая. Ее уравнение (7) тождественно с ранее полученным уравнением хорды прикосновения касательных из той же точки M_1 к линии 2-го порядка. Впрочем, как только установлено, что поляра есть прямая, необходимость совпадения этой прямой с хордой прикосновения касательных становится геометрически очевидной. В самом деле, когда прямая пучка поворачивается около точки M_1 и становится касательною к данной линии, ее точки пересечения совпадают в одну точку, с последней совпадает и точка M_2 (четвертая гармоническая), как находящаяся между точками пересечения. Таким образом поляра точки M_1 проходит через точки прикосновения касательных к линии, выходящих из точки M_1. Если точка $(x_1 : y_1 : z_1)$ лежит на линии 2-го порядка, уравнение поляры становится вместе с тем уравнением касательной, поэтому поляра точки, принадлежащей линии 2-го порядка, есть касательная к линии и проходит через выбранную точку. Легко видеть, что, обратно, если поляра какой-либо точки проходит через последнюю, то точка лежит на линии 2-го порядка; в самом деле, из условия (что поляра содержит свой полюс):

$$x_1 F_{x_1} + y_1 F_{y_1} + z_1 F_{z_1} = 0$$

вытекает по теореме Эйлера:

$$2F(x_1 : y_1 : z_1) = 0,$$

т. е. что точка лежит на кривой.

Упражнения. 660. Вывести уравнение поляры данной точки

$$M_1 \ (x_1 : y_1 : z_1),$$

пользуясь полярным уравнением линии 2-го порядка.

Указание. Пусть прямая, проходящая через M_1, пересекает кривую в точках M' и M'', расстояния которых от M_1 будут ρ_1 и ρ_2; тогда эти последние будут корнями полярного уравнения линии:

$$M\rho^2 + 2N\rho + R = 0,$$

причем

$$\rho_1+\rho_2=-\frac{2N}{M}, \qquad \rho_1\rho_2=\frac{R}{M}.$$

Обозначим через ρ расстояние от M_1 до точки M_2, четвертой гармонической к трем точкам M', M'', M_1; тогда, как мы видели:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right) \tag{12}$$

или

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_1\rho_2};$$

подставляя сюда значения суммы и произведения корней полярного уравнения кривой, мы получим:

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{N}{R}$$

или

$$\rho\,(mF_{x_1}+nF_{y_1})+2F\,(x_1:y_1:z_1)=0.$$

Полученное уравнение поляры после замены:

$$\rho m=x-x_1, \qquad \rho n=y-y_1$$

можно привести к виду (7).

661*. С помощью линейки построить к данной вычерченной кривой поляру точки M_1 и касательные к кривой из точки M_1.

5. Свойства поляр и полюсов.

Возьмем какую-нибудь точку A и проведем через нее любую прямую, пересекающую кривую в точках M' и M''; пусть далее точка B будет четвертой гармонической к точкам M', M'', A.

В таком случае поляра a точки A пройдет через точку B; но и точка A гармонически отделяется от точки B точками M' и M'', стало быть, поляра b точки B проходит через A. Итак, *если из двух точек первая лежит на поляре второй, то и вторая лежит на поляре первой.*

Аналитически этот результат есть просто следствие симметрии уравнения поляры и легко может быть обнаружен. Если мы выразим, что точка $(x_1:y_1:z_1)$ лежит на поляре:

$$xF_{x_2}+yF_{y_2}+zF_{z_2}=0$$

точки $(x_2:y_2:z_2)$, то мы получим соотношение:

$$x_1F_{x_2}+y_1F_{y_2}+z_1F_{z_2}=0; \tag{14}$$

если же написать, что точка $(x_2:y_2:z_2)$ лежит на поляре

$$xF_{x_1}+yF_{y_1}+zF_{z_1}=0$$

точки $(x_1:y_1:z_1)$, то получится соотношение:

$$x_2F_{x_1}+y_2F_{y_1}+z_2F_{z_1}=0, \tag{14'}$$

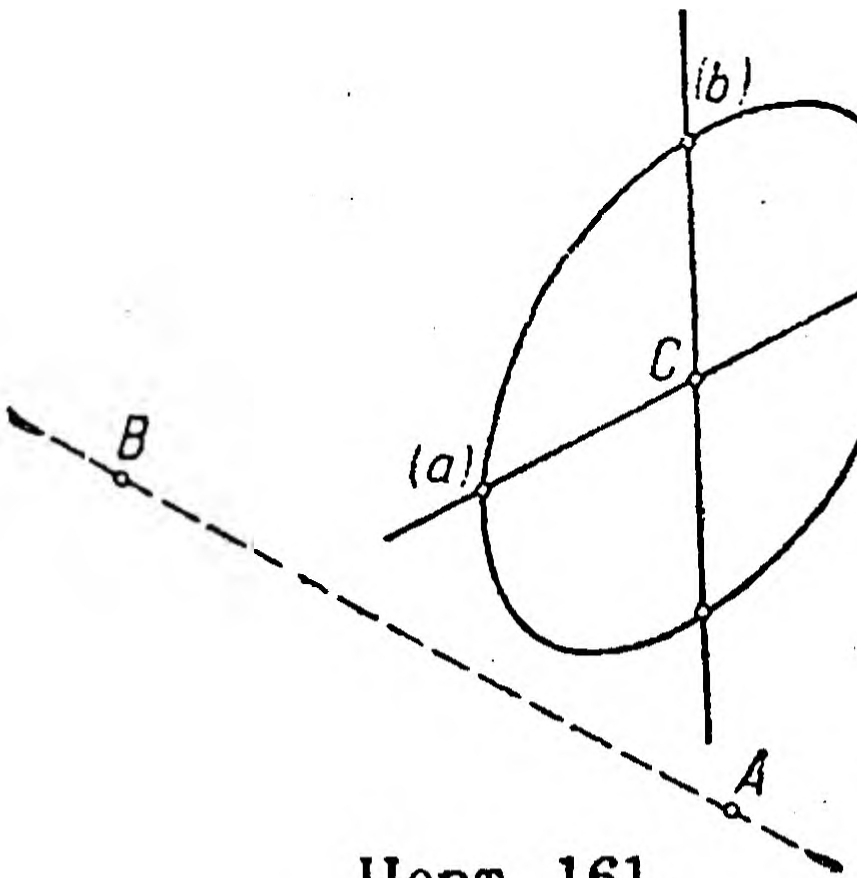
равносильное (вследствие симметрии полярной формы) прежнему.

Две точки, из которых каждая лежит на поляре другой, называются точками полярно-сопряженными относительно данной линии 2-го порядка;

условие полярной сопряженности двух точек будет выражаться соотношением (14) или (14'); с какой-либо данной точкой, очевидно, сопряжены все точки ее поляры.

Свойства взаимности точек A и B, составляющих гармоническую четверку с точками M' и M'', можно формулировать и в следующем виде: *если из двух прямых первая проходит через полюс второй, то и вторая проходит через полюс первой.* Такие две прямые называются *полярно-сопряженными*; с какой-либо данной прямой сопряжены все прямые, проходящие через полюс первой.

Из двух указанных предложений следует, что если точка перемещается по какой-либо прямой, то ее поляры постоянно проходят через неподвижную точку, именно полюс первой прямой; равным образом, когда прямая вращается около какой-либо точки, то ее полюсы пробегают некоторую прямую, именно поляру этой точки.



Черт. 161.

Возьмем две какие-либо точки A и B, и пусть их поляры a и b пересекаются в точке C (черт. 161). Так как C лежит на поляре (a) точки A, то ее поляра должна проходить через точку A; равным образом, раз C лежит на поляре (b) точки B, то ее поляра должна проходить через точку B. Итак, поляра точки C проходит и через A и через B, она есть прямая, содержащая обе эти точки; таким образом прямая, соединяющая две произвольные точки плоскости, является полярою точки пересечения поляр этих точек относительно данной линии 2-го порядка или, иначе, точка пересечения двух произвольных прямых является полюсом прямой, соединяющей полюсы этих прямых.

Аналитически предыдущее предложение подтверждается следующим образом. Условие, что точка C $(x_3:y_3:z_3)$ принадлежит полярам (a) и (b) точек A $(x_1:y_1:z_1)$ и $B(x_2:y_2:z_2)$, выражается соотношениями:

$$x_3F_{x_1}+y_3F_{y_1}+z_3F_{z_1}=0,$$
$$x_3F_{x_2}+y_3F_{y_2}+z_3F_{z_2}=0;$$

но эти последние тождественны соотношениям:

$$x_1F_{x_3}+y_1F_{y_3}+z_1F_{z_3}=0,$$
$$x_2F_{x_3}+y_2F_{y_3}+z_2F_{z_3}=0,$$

выражающим, что точки A и B принадлежат поляре точки C:

$$xF_{x_3}+yF_{y_3}+zF_{z_3}=0.$$

Упражнения. 662. Найти полюс прямой, изображаемой уравнением

$$ux+vy+wz=0,$$

относительно данной линии 2-го порядка $2F=0$.

Указание. Координаты полюса данной прямой можно определить тем способом, каким мы в § 13 гл. XII определили координаты точки прикосновения, с тою лишь разницей, не влияющей на окончательный результат, что здесь полюс может не лежать на самой данной прямой или на самой линии 2-го порядка. Координаты полюса определятся соотношениями:

$$\frac{x_1}{\Phi_u} = \frac{y_1}{\Phi_v} = \frac{z_1}{\Phi_w},$$

где $2\Phi(u, v, w)$ — левая часть тангенциального уравнения данной линии.

663*. Найти условие полярной сопряженности двух прямых:

$$u_1x + v_1y + w_1z = 0,$$

$$u_2x + v_2y + w_2z = 0$$

относительно данной линии 2-го порядка.

Указание. Две данные прямые будут полярно-сопряженными, если полюс одной из них:

$$\frac{x_1}{\Phi_{u_1}} = \frac{y_1}{\Phi_{v_1}} = \frac{z_1}{\Phi_{w_1}}$$

лежит на другой прямой, т. е. если выполняется условие:

$$u_2\Phi_{u_1} + v_2\Phi_{v_1} + w_2\Phi_{w_1} = 0. \tag{15}$$

Замечание 1. Условие (15) полярной сопряженности двух прямых изображается равенством нулю полярной формы левой части тангенциального уравнения линии, т. е. оно по тангенциальному уравнению пишется так же, как условие полярной сопряженности двух точек пишется по точечному уравнению линии.

Замечание 2. Условие полярной сопряженности двух прямых, следуя подробному выводу § 13 гл. XII, может быть написано также в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{15'}$$

Оно обращается в тангенциальное уравнение линии (почему?), если данные прямые совпадают.

Известно, что середина отрезка гармонически сопряжена с бесконечно удаленною точкой относительно концов отрезка. Поэтому, если мы рассмотрим пучок лучей, выходящих из центра линии 2-го порядка, то на каждом луче относительно его точек пересечения с линией центру будет гармонически сопряжена бесконечно удаленная точка; следовательно, *центр линии 2-го порядка есть полюс бесконечно удаленной прямой.*

Возьмем теперь пучок параллельных хорд, пересекающихся, следовательно, в некоторой бесконечно удаленной точке; тогда диаметр, делящий их пополам, будет полярою этой бесконечно удаленной точки; каждая из хорд проходит через полюс диаметра, а потому мы можем сказать, что два направления, сопряженные относительно линии 2-го порядка (в прежнем смысле слова), суть направления *полярно-сопряженные* относительно данной линии. В частности перпендикулярность двух направлений есть их полярная сопряженность относительно окружности.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

К § 1.

1. Как составить уравнение, определяющее отношение, в котором данный отрезок разделяется точкой пересечения его прямой с линией 2-го порядка?

2. Как составить уравнение пары касательных к линии 2-го порядка из какой-либо точки ее плоскости?

3. Что называется полярною формой для данной квадратичной троичной формы?

4. Каким уравнением изображается прямая, проходящая через точки прикосновения касательных к линии 2-го порядка, проведенных из данной точки $(x_1 : y_1 : z_1)$?

К § 2.

5. Что называется сложным или ангармоническим отношением четырех точек на прямой?

6. При каких перестановках порядка данных четырех точек их ангармоническое отношение сохраняет свое значение?

7. Как меняется ангармоническое отношение при перемене порядка точек в одной паре?

8. Как меняется ангармоническое отношение при перестановке двух средних точек или двух крайних?

9. Сколько различных значений может иметь ангармоническое отношение при всевозможных изменениях порядка четырех данных точек?

10. Что называется ангармоническим отношением четырех лучей, выходящих из одной точки и лежащих в одной плоскости?

11. Какие ряды точек или лучей называются перспективными?

12. Какие ряды точек или лучей называются проективными?

13. Каким свойством обладают ангармонические отношения соответственных четверок элементов двух перспективных или вообще двух проективных рядов?

К § 3.

14. Какие четверки точек на одной прямой или четверки лучей в одной плоскости, исходящие из одной точки, называются гармоническими?

15. Как расположены гармонически сопряженные точки одной пары относительно точек другой пары?

16. Где будет находиться четвертая гармоническая к середине отрезка относительно его концов?

17. Что называется средним гармоническим двух величин?

18. Как определить расстояние четвертой гармонической от первой точки по расстояниям от той же точки точек другой пары?

19. Каким гармоническим свойством обладает четырехсторонник?

20. Как строится четвертая гармоническая к трем данным точкам?

К § 4.

21. Что называется полярою точки относительно линии 2-го порядка?

22. Каким уравнением изображается поляра данной точки относительно заданной линии 2-го порядка?

К § 5.

23. Какие две точки называются полярно-сопряженными относительно линии 2-го порядка?

24. В чем выражается взаимность полярной сопряженности двух точек?

25. Каким условием связаны координаты двух полярно-сопряженных точек относительно данной линии 2-го порядка?

26. Какие прямые называются относительно данной линии 2-го порядка полярно-сопряженными?

27. Каким условием связаны координаты двух прямых, полярно-сопряженных относительно данной линии 2-го порядка?

28. Какою прямой будет поляра точки пересечения поляр двух точек?

29. Где будет полюс прямой, соединяющей две точки?

30. Каким образом определение центра данной линии 2-го порядка или ее сопряженных направлений может быть сведено к гармоническим свойствам?

Упражнения. 664. Составить уравнение поляры точки $(2; -1)$ относительно линии

$$x^2 + 4xy + 5y^2 + 10x - 16y - 4 = 0.$$

665. Найти координаты полюса прямой

$$2x - 5y - 33 = 0$$

относительно линии:

$$4x^2 + 6xy + 7y^2 + 8x + 12y - 25 = 0.$$

666. На прямой

$$2x + 3y + 5 = 0$$

найти точку, полярно-сопряженную с точкой $(-10; 2)$ относительно линии

$$5x^2 + 4xy - 7y^2 + 2x + 4y = 0.$$

667. Через точку $(1; 1)$ провести прямую, полярно-сопряженную с прямой

$$x + y - 3 = 0$$

относительно линии

$$3x^2 - 10xy + 7y^2 + 6x + 8y = 0.$$

668. Доказать, что каждый из фокусов эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

имеет своей полярой соответствующую директрису.

Замечание. Аналогичное свойство имеется для гиперболы и параболы.

669. Две полярно-сопряженные прямые, проходящие через фокус линии 2-го порядка, всегда взаимно перпендикулярны.

Указание. Доказать это свойство, пользуясь каноническим уравнением линии 2-го порядка того или иного типа.

670. Найти такую точку, что каждые две взаимно перпендикулярные прямые, через нее проходящие, полярно сопряжены относительно эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

671. Поляра любой точки асимптоты гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

параллельна этой асимптоте.

672. Если две точки полярно сопряжены относительно окружности

$$x^2 + y^2 = r^2$$

и находятся на одном радиусе, то их расстояния ρ_1 и ρ_2 от центра окружности удовлетворяют условию:

$$\rho_1\rho_2 = r^2.$$

673. Найти геометрическое место полюсов относительно эллипса

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

всех касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1.$$

Глава XIV

Приведение общего уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду.

Геометрическое исследование линий 2-го порядка по их общим уравнениям относительно произвольной декартовой системы координат обнаружило существование таких специальных декартовых систем координат относительно которых уравнение линии получает то или иное упрощение. Например, если за направления координатных осей принять два сопряженных относительно линии направления, то в ее уравнении должен пропасть член с произведением координат; если за направления осей координат принять главные направления линии, то мы получим прямоугольную систему координат, относительно которой уравнение линии не будет содержать члена с произведением координат; если за начало координат принять центр линии (когда он находится на конечном расстоянии), то уравнение линии не должно содержать членов с первыми степенями координат.

Нашей ближайшей задачей будет теперь приведение уравнения линии к тому или иному простейшему виду, в частности к каноническому виду с помощью подходящего изменения системы координат, т. е. преобразованием координат. Однако, поскольку нас часто интересует лишь вид кривой и ее размеры, характеризующиеся ее основными параметрами (например длинами полуосей для эллипса или гиперболы, параметром параболы), нам нет надобности знать в подробностях, как преобразуется координатная система; для указанных целей достаточно знать лишь коэфициенты преобразованного (например, канонического) уравнения.

Когда уравнение линии преобразуется с помощью замены координатной системы, то отдельные его коэфициенты изменяются, но некоторые выражения, составленные из коэфициентов уравнения линии, сохраняют свой вид и значения при любом преобразовании координатной системы; такие выражения называются *инвариантами* уравнения линии. С помощью этих инвариантов могут быть вычислены коэфициенты преобразованного уравнения: поэтому мы прежде всего должны установить число и вид инвариантов уравнения линии 2-го порядка относительно любого преобразования координат.

Изучение инвариантов уравнения линии представляет интерес еще и потому, что обращение какого-нибудь из них в нуль или вообще какая-либо зависимость между ними должны выражать собой некоторое геометрическое свойство линии, не зависящее от выбранной системы координат.

1. Инварианты.

Если мы преобразуем общее уравнение линии 2-го порядка:

$$2F \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

к какой-либо новой декартовой системе координат, то уравнение линии примет аналогичный вид с новыми коэфициентами:

$$2F' = a'_{11}X^2 + 2a'_{12}XY + a'_{22}Y^2 + 2a'_{13}X + 2a'_{23}Y + a'_{33} = 0; \qquad (2)$$

при этом, производя в уравнении (1) замену старых координат их выражениями через новые по соответствующим формулам преобразования (§ 7 гл. IV), мы сможем все коэфициенты уравнения (2) выразить через коэфициенты прежнего уравнения (1) и параметры преобразования аналогично тому, как это мы делали при переносе начала координат (§ 2 гл. XII). Таким путем мы получим *шесть* (по числу коэфициентов нового уравнения) соотношений между старыми и новыми коэфициентами и тремя параметрами общего преобразования координат; исключая из этих соотношений три параметра преобразования, мы получим три соотношения между старыми и новыми коэфициентами; эти соотношения, как не содержащие параметров преобразования координат, останутся неизменными (инвариантными) при любом преобразовании координат.

Итак, для коэфициентов старого и нового уравнения линии 2-го порядка существуют три соотношения, инвариантные при любом преобразовании координат (декартовых в декартовы).

Нашей ближайшей задачей будет найти эти инвариантные соотношения.

Упражнения. 674. Вычислить коэфициенты преобразованного уравнения (2) линии по коэфициентам прежнего уравнения (1), если оси координат первоначальной прямоугольной системы повернуты на угол α около начала.

Указание. Уравнение (1) следует преобразовать к новому виду заменой:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha;$$

новые коэфициенты получат выражения:

$$\left.\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{12} &= -a_{11}\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha, \\ a'_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_{13} &= a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha, \\ a'_{23} &= -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha, \\ a'_{33} &= a_{33}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

675. Для указанного в предыдущей задаче преобразования вычислить два выражения из новых коэфициентов:

$$a'_{11} + a'_{22} \quad \text{и} \quad a'_{11}a'_{22} - a'^2_{22}$$

через старые коэфициенты.

676. Вычислить дискриминант Δ' из всех коэфициентов преобразованного уравнения через коэфициенты старого уравнения.

Указание. При развертывании определителя Δ' надо воспользоваться результатом предыдущего упражнения, именно, что:

$$a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Замечание 1. Три выражения:

$$a'_{11} + a'_{22},$$
$$a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12},$$
$$\Delta'$$

не меняют своих значений при повороте прямоугольной системы координат; но они будут сохранять свои значения и при переносе начала координат (для Δ' это доказано в § 2 гл. XII, коэфициенты же старших членов при переносе начала не меняются). Поэтому указанные три выражения будут инвариантами при переходе от одной прямоугольной системы координат к любой другой системе, тоже прямоугольной.

Замечание 2. Исключая из шести уравнений (3) один параметр α, мы получим собственно пять соотношений, не зависящих от α, именно соотношения:

$$a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22},$$

$$a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}=a_{11}a_{22}-a^2_{12},$$

$$\Delta'=\Delta,$$

$$a'_{33}=a_{33},$$

$$a'^2_{13}+a'^2_{23}=a'^2_{13}+a^2_{23}.$$

Это будут инвариантные соотношения лишь для поворота прямоугольной системы координат. Два последних из этих соотношений не будут сохраняться при переносе начала координат.

Получение инвариантов непосредственным вычислением коэфициентов преобразованного уравнения и исключением параметров преобразования довольно сложно, в особенности при переходе от одной косоугольной системы координат к другой косоугольной. Поэтому в дальнейшем для вывода инвариантов мы воспользуемся другим способом, который состоит в подмене самого преобразования координат рассмотрением такого выражения (именно, квадрата расстояния точки от начала), которое не меняется только при повороте осей координат; неизменность этого выражения характеризует, следовательно, выбранное преобразование координат.

Предположим сначала, что мы производим поворот осей; так как это преобразование является однородным преобразованием, то при соответствующей замене переменных совокупность трех старших членов уравнения (1) перейдет в совокупность трех старших членов уравнения (2):

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2\equiv a'_{11}X^2+2a'_{12}XY+a'_{22}Y^2; \tag{4}$$

вместе с тем при повороте осей с сохранением начала координат не должен меняться квадрат расстояния точки от начала, поэтому:

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2\equiv X^2+2XY\cos\omega'+Y^2, \tag{5}$$

где ω и ω' — координатные углы старой и новой системы. Написанные соотношения (4) и (5) следует понимать в том смысле, что они должны быть тождественны относительно X, Y, если в левых частях мы заменим x, y их выражениями через X, Y по формулам преобразования координат (поворота осей); можно сказать, что соотношения (4) и (5) имеют место тождественно для всякой точки плоскости при условии, что x, y — старые координаты, а X, Y — новые координаты той же точки.

Из тождественных соотношений (4) и (5) следует соотношение, тождественное в том же указанном смысле:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2-s\ (x^2+2xy\cos\omega+y^2)\equiv$$
$$\equiv a'_{11}X^2+2a'_{12}XY+a'_{22}Y^2-\ s(X^2+2XY\cos\omega'+Y^2)$$

или, что то же самое:

$$(a_{11}-s)\ x^2+2\ (a_{12}-s\cos\omega)\ xy+(a_{22}-s)\ y^2\equiv$$
$$\equiv(a'_{11}-s)\ X^2+2\ (a'_{12}-s\cos\omega')\ XY+(a'_{22}-s)\ Y^2, \qquad (6)$$

справедливое при всяком значении параметра s.

Выберем теперь значение s так, чтобы трехчлен левой части соотношения (6) был полным квадратом; для этого необходимо (и достаточно), чтобы дискриминант этого трехчлена обратился в нуль, т. е. чтобы выполнялось условие:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12}-s\cos\omega \\ a_{21}-s\cos\omega & a_{12}-s \end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

Если же трехчлен левой части соотношения (6) представляет собой полный квадрат некоторого линейно-однородного выражения относительно x и y:

$$(a_{11}-s)\ x^2+2\ (a_{12}-s\cos\omega)\ xy+(a_{22}-s)\ y^2\equiv(Px+Qy)^2,$$

то ясно, что он останется полным квадратом после линейного преобразования координат, так как линейная функция $Px+Qy$ после такого преобразования перейдет в линейную функцию $P'X+Q'Y$. Короче говоря, если левая часть соотношения (6) будет полным квадратом, то при том же значении s и правая часть будет полным квадратом. А в таком случае дискриминант трехчлена правой части тоже будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-s & a'_{12}-s\cos\omega' \\ a'_{21}-s\cos\omega' & a'_{22}-s \end{vmatrix}=0. \qquad (7')$$

Итак, одни и те же значения параметра s удовлетворяют как квадратному уравнению (7), так и квадратному уравнению (7'); эти уравнения должны быть равносильны между собой, или, что то же, коэфициенты этих уравнений должны быть пропорциональны.

Развертывая то и другое из этих уравнений, мы получим:

$$\sin^2\omega\cdot s^2-(a_{11}-2a_{12}\cos\omega+a_{22})\ s+a_{11}a_{22}-a_{12}^{\ 2}=0,$$

$$\sin^2\omega'\cdot s^2-(a'_{11}-2a'_{12}\cos\omega'+a'_{22})\ s+a'_{11}a'_{22}-a'^{\ 2}_{12}=0.$$

Следовательно:

$$\frac{\sin^2\omega'}{\sin^2\omega}=\frac{a'_{11}-2a'_{12}\cos\omega'+a'_{22}}{a_{11}-2a_{12}\cos\omega+a_{22}}=\frac{a'_{11}a'_{22}-a'^{\ 2}_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^{\ 2}};$$

разбивая на два соотношения, мы найдем:

$$\frac{a'_{11}-2a'_{12}\cos\omega'+a'_{22}}{\sin^2\omega'}=\frac{a_{11}-2a_{12}\cos\omega+a_{22}}{\sin^2\omega},$$

$$\frac{a'_{11}a'_{22}-a'^{2}_{12}}{\sin^2\omega'}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\sin^2\omega}; \tag{8}$$

полученный результат показывает, что два выражения:

$$I_1=\frac{a_{11}-2a_{12}\cos\omega+a_{22}}{\sin^2\omega}, \tag{9}$$

$$I_2=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\sin^2\omega}$$

не будут менять своего вида и значения при любом повороте координатных осей; но так как эти выражения составлены из коэфициентов лишь старших членов уравнения линии, которые, как мы знаем, не меняются при переносе начала координат, то эти же выражения будут неизменны (инвариантны) при любом преобразовании декартовой системы координат в другую декартову же систему.

Итак, мы нашли два инварианта уравнения линии при любом преобразовании координат; остается найти третий инвариант. Для получения последнего мы воспользуемся приемом, аналогичным тому, который мы употребили выше. Рассмотрим опять сначала поворот осей, тогда преобразование не будет менять квадрата расстояния точки от начала. Если для краткости принять:

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2=d^2,$$

$$X^2+2XY\cos\omega'+Y^2=d'^2,$$

то в силу формул преобразования мы будем иметь два тождества:

$$2F\equiv 2F',$$

$$d^2\equiv d'^2,$$

а следовательно, при любом s и тождественное равенство:

$$2F-sd^2\equiv 2F'-sd'^2.$$

Последнее тождество должно геометрически обозначать, что уравнение:

$$2F-sd^2=0 \tag{10}$$

и уравнение

$$2F'-sd'^2=0 \tag{10'}$$

изображают одну и ту же линию, лишь отнесенную в первом случае к старой, во втором к новой системе координат.

Пользуясь произволом параметра s, потребуем, чтобы уравнение (10) изображало линию, распадающуюся на пару прямых; в таком случае дискриминант этого уравнения (10) должен обращаться в нуль:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12}-s\cos\omega & a_{13} \\ a_{21}-s\cos\omega & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

Но тогда и уравнение (10′) изображает ту же пару прямых, — его дискриминант тоже обращается в нуль при том же значении s:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-s & a'_{12}-s\cos\omega' & a'_{13} \\ a'_{21}-s\cos\omega' & a'_{22}-s & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}=0. \qquad (11')$$

Так как уравнения (11) и (11′) должны удовлетворяться теми же самыми значениями s, то они равносильны и коэфициенты их пропорциональны.

Развертывая левые части этих уравнений, мы получим:

$$a_{33}\sin^2\omega\cdot s^2-(\cdot\;\cdot\;\cdot)s+\Delta=0, \qquad (11_1)$$

$$a'_{33}\sin^2\omega'\cdot s^2-(\cdot\;\cdot\;\cdot)'s+\Delta'=0, \qquad (11'_1)$$

следовательно, между прочим, должно существовать соотношение:

$$\frac{a_{33}\sin^2\omega}{a'_{33}\sin^2\omega'}=\frac{\Delta}{\Delta'}$$

или

$$\frac{\Delta'}{a'_{33}\sin^2\omega'}=\frac{\Delta}{a_{33}\sin^2\omega}.$$

Но раз мы произвели пока только поворот осей, т. е. однородное преобразование, свободный член уравнения линии не должен меняться:

$$a'_{33}=a_{33},$$

поэтому предыдущее соотношение даст нам окончательно:

$$\frac{\Delta'}{\sin^2\omega'}=\frac{\Delta}{\sin^2\omega}.$$

Таким образом выражение:

$$I_3=\frac{\Delta}{\sin^2\omega}$$

является инвариантом поворота осей; но мы раньше доказали (§ 2 гл. XII), что дискриминант Δ не меняется при переносе начала; следовательно, I_3 будет инвариантом не только поворота осей, но и для переноса начала, короче, для любого преобразования координат.

Так как I_1, I_2, I_3, очевидно, независимы друг от друга при произвольных значениях коэфициентов, то они и будут теми тремя инвариантами уравнения линии 2-го порядка, в существовании которых мы убедились предварительным рассуждением.

Упражнения. 677. Уравнение, отнесенное к прямоугольной системе координат:

$$x^2+4xy+3y^2+6x-8y=0,$$

преобразуется подстановкой:

$$x=\frac{-3X+4Y+7}{5},$$

$$y=\frac{4X+3Y+13}{5}.$$

Доказать, что инварианты преобразованного уравнения будут равны соответственным инвариантам данного уравнения.

678. Два уравнения:

$$3x^2+4xy+5y^2-8x=0$$

и

$$6x^2-2xy+2y^2+(22-4\sqrt{2})\,x-4\sqrt{2}y+(22-12\sqrt{2})=0,$$

отнесенные к *одной* и *той* же прямоугольной системе координат, имеют соответственно равные инварианты. Проверить это обстоятельство и указать его геометрическое истолкование.

Указание. Движение координатной системы относительно линии (фигуры) можно заменить движением фигуры относительно координатной системы, поэтому две линии, отнесенные к общей координатной системе и имеющие соответственно равные инварианты, тождественны между собой, различаясь лишь своим расположением относительно координатной системы.

2. Характеристическое уравнение.

Уравнение (7) на основании обозначений (9) может быть приведено к виду:

$$s^2-I_1s+I_2=0; \qquad (7'')$$

таким образом совершенно безразлично, как формулировать результаты предыдущего параграфа: сказать ли, что выражение I_1 и I_2 являются инвариантами уравнения линии 2-го порядка, или сказать, что уравнение (7) или (7″) инвариантно (так как его коэфициенты суть инварианты). Для приложений последняя формулировка выгоднее, как мы сейчас увидим.

Уравнение (7) мы уже встречали в связи с определением главных направлений и назвали его тогда характеристическим уравнением (§ 11 гл. XII). Напомним еще раз, что оно имеет всегда действительные корни, если коэфициенты уравнения данной линии действительны.

Установим теперь, какое значение имеют корни характеристического уравнения. Так как оно инвариантно при всяком преобразовании координат, то совершенно безразлично, к какой именно координатной системе мы отнесем уравнение данной линии 2-го порядка. Выберем же за направления координатных осей главные направления нашей линии; в таком случае мы будем иметь прямоугольную систему координат $\left(\omega'=\frac{\pi}{2}\right)$, относительно которой уравнение линии напишется в виде:

$$a'_{11}X^2+a'_{22}Y^2+2a'_{13}X+2a'_{23}Y+a'_{33}=0,$$

не содержащем члена с произведением координат $(a'_{12}=0)$.

Тогда характеристическое уравнение будет:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-s & 0 \\ 0 & a'_{22}-s \end{vmatrix}=0$$

или

$$(a'_{11}-s)\,(a'_{22}-s)=0.$$

Следовательно, его корнями будут:

$$s_1 = a'_{11}, \quad s_2 = a'_{22};$$

при этом в силу инвариантности характеристического уравнения его корни сохраняют свои значения, хотя бы мы взяли уравнение и в любом первоначальном виде (7). Итак, корнями характеристического уравнения являются коэфициенты при квадратах координат в уравнении линии, отнесенной к такой системе координат, оси которой имеют главные направления.

Уравнение линии, отнесенной к главным направлениям, напишется, следовательно, в виде:

$$s_1 X^2 + s_2 Y^2 + 2a'_{13} X + 2a'_{23} Y + a'_{33} = 0, \tag{12}$$

где s_1 и s_2 — корни характеристического уравнения (7); остальные коэфициенты a'_{13}, a'_{23}, a'_{33} будут зависеть от того, куда мы поместим новое начало координат.

Предположим для примера, что мы за ось Ox взяли главную ось линии (одна, по крайней мере, главная ось существует для всех линий, включая и параболу), а за ось Oy — другое главное направление, поместив начало координат в точке линии (на пересечении с главною осью, т. е. в вершине). Раз за оси координат мы взяли главные направления, новое уравнение линии должно быть вида (12); линия проходит через новое начало координат, следовательно:

$$a'_{33} = 0.$$

Составим далее уравнения, определяющие центр линии:

$$F_x \equiv s_1 X + a'_{13} = 0,$$

$$F_y \equiv s_2 Y + a'_{23} = 0;$$

так как ось Ox, как главная ось, проходит через центр, то эти уравнения должны удовлетворяться при $Y = 0$, поэтому

$$a'_{23} = 0.$$

Итак, остается найти лишь один коэфициент a'_{13}.

Для определения последнего мы воспользуемся третьим инвариантом и напишем, что его значения для прежнего уравнения (1) линии и для уравнения (12), преобразованного к новым осям, равны:

$$\frac{1}{\sin^2 \omega} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & a'_{13} \\ 0 & s_2 & 0 \\ a'_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \left(\omega' = \frac{\pi}{2}\right),$$

или короче:

$$I_3 = -s_2 a'^{2}_{13}, \tag{13}$$

где под I_3 подразумевается значение третьего инварианта, вычисленное по первоначальному уравнению линий. В случае параболы один из корней характеристического уравнения обращается в нуль; мы предполагаем, что это $s_1 = 0$, а $s_2 \neq 0$ (так как мы желаем иметь центр на оси x-ов).

Итак, s_1 и s_2 определяются с помощью характеристического уравнения (7), коэфициент a'_{13} определится с помощью соотношения (13), и уравнение линии будет:

$$s_1X^2 + s_2Y^2 + 2a'_{13}X = 0; \tag{14}$$

здесь начало координат помещается в одной из вершин, оси координат имеют главные направления, из них ось x-ов есть ось линии.

Разрешим уравнение (14) относительно квадрата ординаты:

$$y^2 = -\frac{2a'_{13}}{s_2}X - \frac{s_1}{s_2}X^2;$$

положим затем:

$$-\frac{a'_{13}}{s_2} = p, \quad -\frac{s_1}{s_2} = q,$$

причем параметр p можем считать всегда положительным, меняя в случае надобности направление оси x-ов на обратное, тогда окончательное уравнение линии, отнесенной к вершине и главным направлениям, примет вид:

$$y^2 = 2px + qx^2. \tag{14'}$$

Если здесь q окажется отрицательным, то уравнение изображает эллипс; если q положительно, то оно изображает гиперболу; наконец, если q равно нулю, уравнение будет изображать параболу (см. § 10 гл. VI).

Упражнения. 679. Для линии, изображаемой относительно некоторой прямоугольной системы координат уравнением:

$$91x^2 + 24xy + 84y^2 - 166x + 88y + 21 = 0,$$

найти ее уравнение, отнесенное к вершине и главным направлениям.

680. Привести нижеследующие уравнения линий $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$:

1) $31x^2 + 24xy + 21y^2 - 86x - 66y + 72 = 0$,

2) $x^2 + 12xy + y^2 + (9 + 13\sqrt{2})x + (19 - 13\sqrt{2})y +$
$$+\left(\frac{23}{2} + 13\sqrt{2}\right) = 0,$$

3) $3x^2 + 8xy + 3y^2 - 2y + 2 = 0$

к уравнениям этих линий, отнесенных к вершине и главным направлениям.

3. Канонические уравнения центральных линий.

Положим, мы имеем уравнение линии:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

для которого $\delta \neq 0$. В таком случае линия имеет определенный центр на конечном расстоянии, который может быть принят за новое начало координат, за направление осей возьмем главные направления.

Тогда в преобразованном уравнении пропадут члены с первыми степенями координат ($a'_{13} = a'_{23} = 0$) и член с произведением координат ($a'_{12} = 0$), следовательно, уравнение относительно новой системы координат будет вида:

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 + a'_{33} = 0, \tag{15}$$

где s_1 и s_2 — корни характеристического уравнения (7), а свободный член может быть вычислен с помощью третьего инварианта:

$$I_3 = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} \qquad \left(\omega' = \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда

$$I_3 = s_1 s_2 a'_{33}.$$

Но произведение корней характеристического уравнения (приведенного) равно его свободному члену:

$$s_1 s_2 = \frac{\delta}{\sin^2 \omega},$$

с другой стороны:

$$I_3 = \frac{\Delta}{\sin^2 \omega},$$

поэтому, сравнивая значение третьего инварианта для старого и нового уравнений, имеем соотношение:

$$\frac{\Delta}{\sin^2 \omega} = \frac{\delta}{\sin^2 \omega} \cdot a'_{33},$$

откуда определится свободный член искомого уравнения:

$$a'_{33} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Итак, окончательное уравнение центральной линии (т. е. имеющей центр на конечном расстоянии), отнесенной к главным осям, будет:

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{15'}$$

Если $\Delta = 0$, то уравнение

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 = 0$$

будет изображать пару прямых (действительных или мнимых, смотря по знакам корней s_1 и s_2), проходящих через новое начало координат.

Если же $\Delta \neq 0$, то полученное уравнение (15′) мы можем разделить на свободный член, перенеся его предварительно в правую сторону:

$$\frac{\frac{s_1}{\Delta}}{\delta} X^2 + \frac{\frac{s_2}{\Delta}}{\delta} Y^2 = 1 . \qquad (15'')$$

В дальнейшем значение уравнения будет зависеть от знаков его коэфициентов. Если оба коэфициента уравнения (15″) положительны, то, вводя новые обозначения, мы можем его написать в виде:

$$\frac{x_2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

и оно будет каноническим уравнением эллипса. Если коэфициенты уравнения (15″) имеют разные знаки, один положительный, другой отрицательный, то, меняя в случае надобности названия координатных осей, мы всегда можем написать уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

и оно будет каноническим уравнением гиперболы.

Наконец, когда оба кооэфициента уравнения (15″) будут отрицательны, оно запишется в виде:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

ни при каких действительных значениях x, y уравнение не будет удовлетворяться, поэтому оно изображает мнимую линию.

Упражнения. 681. Уравнение линии, отнесенное к некоторой прямоугольной системе координат:

$$x^2 + xy + y^2 + x + y = 0,$$

привести к каноническому виду.

682. Привести к каноническому виду уравнения линий:

1) $83x^2 - 24xy + 73y^2 + 104x - 26y - 362 = 0,$
2) $66x^2 - 120xy + 2y^2 - 42x - 2y + 101 = 0,$
3) $5x^2 + 6xy + 7y^2 - 10x + 8y + 15 = 0,$
4) $3x^2 - 14xy + 5y^2 + 6x - 1 = 0,$

заданных относительно некоторой прямоугольной системы координат.

4. Упрощение уравнения параболы.

Предположим, что нам дано уравнение (1) линии параболического типа, т. е. уравнение, для которого $\delta = 0$. Отнесем нашу линию к главным направлениям, сохраняя прежнее начало координат, тогда ее преобразованное уравнение будет:

$$s_2 y^2 + 2a'_{13} x + 2a'_{23} y + a'_{33} = 0, \qquad (16)$$

причем

$$a'_{33} = a_{33}$$

в силу однородности преобразования координат (состоящего лишь из поворота осей). Сравнение значений третьего инварианта дает нам:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & s_2 & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

или

$$I_3 = -s_2 a'^2_{13}.$$

Если $I_3 = 0$, или, что то же самое, $\Delta = 0$, то и $a'_{13} = 0$, и уравнение (16) изображает пару параллельных прямых; его левая часть будет функцией только y, новой ординаты, а следовательно, левая часть первоначального уравнения (1) будет функцией некоторого линейного выражения относительно старых координат x и y, что легко подметить и непосредственно, если уравнения даны с числовыми коэфициентами. Например, для уравнения

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 - 6x - 15y + 2 = 0$$

оба дискриминанта обращаются в нули: $\delta = 0$, $\Delta = 0$; следовательно, данное уравнение изображает пару параллельных прямых. И действительно, его можно представить в виде:

$$(2x + 5y)^2 - 3(2x + 5y) + 2 = 0,$$

откуда

$$2x + 5y = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Вернемся к исследованию уравнения (16) и предположим, что $\Delta \neq 0$, тогда и $a'_{13} \neq 0$. Перенесем начало координат в какую-нибудь точку $(x_1; y_1)$; тогда уравнение (16) преобразуется к виду:

$$s_2 y^2 + 2F_{x_1} x + 2F_{y_1} y + 2F_1 = 0, \tag{16'}$$

где

$$F_{x_1} = a'_{13},$$

$$F_{y_1} = s_2 y_1 + a'_{23},$$

$$2F_1 = s_2 y_1^2 + 2a'_{13} x_1 + 2a'_{23} y_1 + a'_{33}.$$

Как и следовало ожидать при $\delta = 0$, здесь нельзя выбрать конечных значений для x_1, y_1 так, чтобы одновременно обратились в нуль F_{x_1} и F_{y_1}; но мы всегда можем выбрать такие значения x_1, y_1, чтобы в уравнении (16') пропал коэфициент при первой степени y и свободный член, т. е. чтобы:

$$s_2 y_1 + a'_{23} = 0,$$

$$s_2 y_1^2 + 2a'_{13} x_1 + 2a'_{23} y_1 + a'_{33} = 0.$$

В самом деле, первое из этих условий определит нам y_1, второе же (при $a'_{13} \neq 0$) определит x_1.

Итак, выбором подходящей системы координат мы можем добиться того, что в уравнении параболы пропадут все члены кроме квадрата одной из координат и первой степени другой, т. е. оно будет вида:

$$s_2 y^2 + 2a''_{13} x = 0. \tag{17}$$

Коэфициент a''_{13} определится непосредственно по коэфициентам первоначального уравнения (1) с помощью третьего инварианта:

$$I_3 = -s_2 a''^2_{13}, \tag{18}$$

откуда

$$a''_{13} = \pm \sqrt{-\frac{I_3}{s_2}}.$$

Разделим уравнение (17) на s_2 и перенесем один из его членов в другую сторону, тогда:

$$Y^2 = -\frac{2a''_{13}}{s_2} X. \tag{17'}$$

При определении коэфициента a''_{13} с помощью соотношения (18) остается неопределенным его знак, но, меняя в случае нужды X на $-X$ в уравнении (17), мы всегда можем добиться того, что коэфициент правой части этого уравнения будет положительным. Тогда мы получим каноническое уравнение параболы в известной уже нам форме:

$$Y^2 = 2pX. \tag{17''}$$

Упражнения. 683. Привести к каноническому виду уравнение параболы:

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 6y + 3 = 0,$$

данное относительно прямоугольной системы координат.

684. Привести к каноническому виду нижеследующие уравнения парабол:

1) $49x^2 + 336xy + 576y^2 - 282x - 74y - 781 = 0$,

2) $64x^2 + 240xy + 225y^2 - 1036x + 514y - 203 = 0$,

3) $x^2 + 4xy + 4y^2 + (6 - 8\sqrt{3})x + (12 + 4\sqrt{3})y + (9 - 4\sqrt{3}) = 0$,

данные относительно прямоугольной системы координат.

Общее уравнение параболы можно привести к каноническому виду и другим способом, без помощи инвариантов, причем выгода этого *второго способа* будет заключаться в том, что здесь попутно определяется и положение новых координатных осей относительно прежней системы координат. Обратим внимание на то обстоятельство, что в уравнении параболы три старших члена всегда представляют собой полный квадрат некоторого линейного выражения; поэтому уравнение параболы может быть написано в виде:

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{19}$$

Если мы будем искать точки пересечения параболы с прямой:

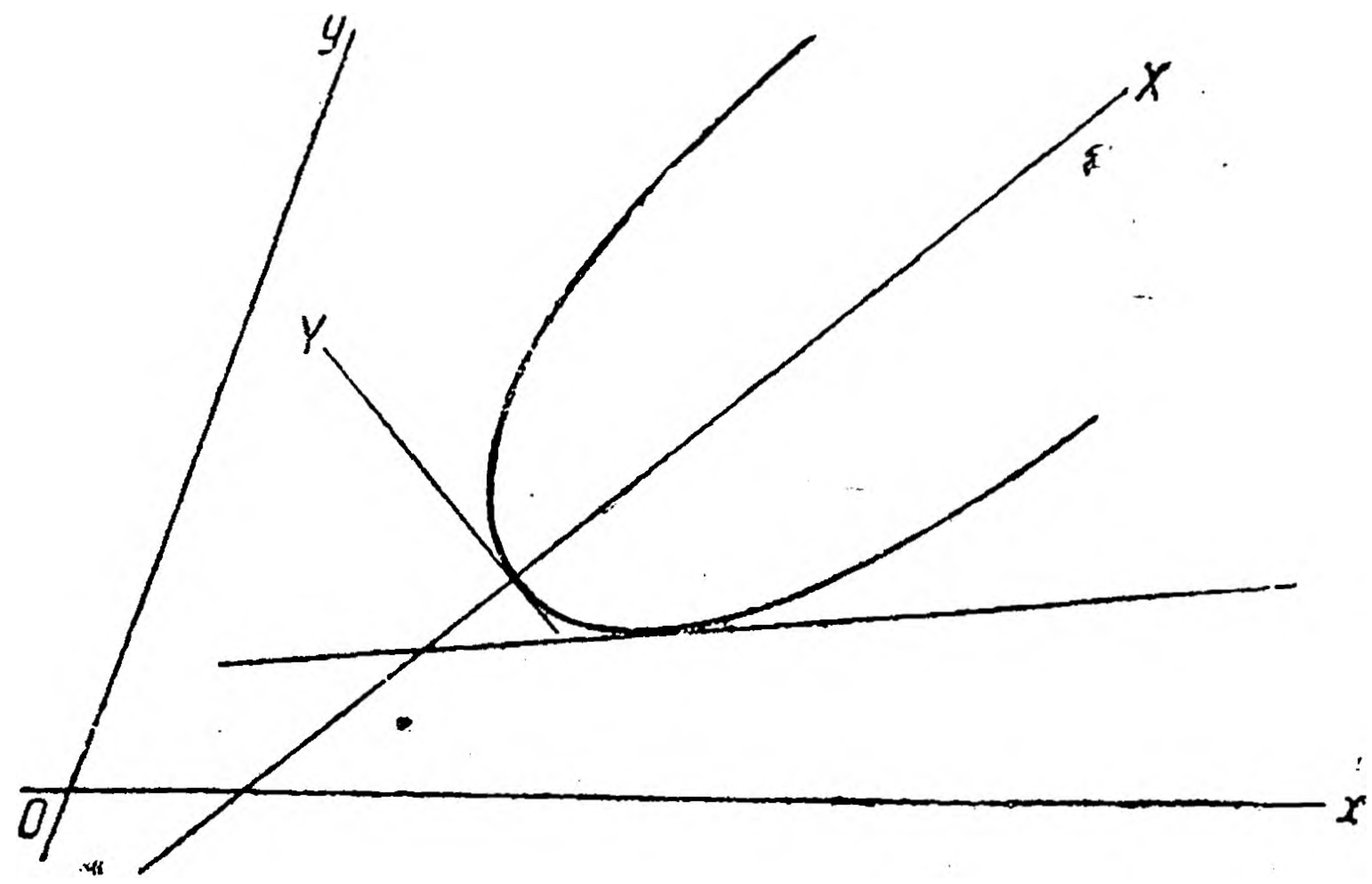
$$2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{20}$$

то мы найдем, что эти точки лежат на сдвоенной прямой:

$$(\alpha x + \beta y)^2 = 0,$$

т. е. на прямой:

$$\alpha x + \beta y = 0. \tag{21}$$



Черт. 162.

Таким образом прямая (20) пересекает параболу в двух совпавших точках, т. е. касается ее, и точка касания лежит на диаметре параболы (21), проходящем через начало координат. Если мы указанные прямые примем за оси координат, то направления осей будут сопряжены, но мы, вообще говоря, еще не получим прямоугольной системы координат.

Преобразуем наше уравнение (19), добавив к скобке свободный член m и вычитая затем излишне добавленные члены:

$$(\alpha x + \beta y + m)^2 + 2(a_{13} - m\alpha)x + 2(a_{23} - m\beta)y + \\ + (a_{33} - m^2) = 0; \tag{19'}$$

этим преобразованием мы сохранили внешний вид и смысл уравнения (19), т. е. прямая:

$$2(a_{13} - m\alpha)x + 2(a_{23} - m\beta)y + (a_{33} - m^2) = 0 \tag{20'}$$

опять будет касаться данной параболы, а прямая:

$$\alpha x + \beta y + m = 0 \tag{21'}$$

будет одним из ее диаметров.

Меняя параметр m, мы диаметр (21′) передвигаем параллельно самому себе, при этом изменяется направление касательной (20′) в конце этого диаметра (черт. 162). Выберем же m так, чтобы эти две прямые имели главные направления, т. е. чтобы диаметр (21′) был ортогонален к сопряженной ему касательной (20′); для этого необходимо выполнение условия (перпендикулярности):

$$\alpha(a_{13} - m\alpha) + \beta(a_{23} - m\beta) = 0,$$

что и дает нам соответствующее значение m:

$$m = \frac{a_{13}\alpha + a_{23}\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Теперь эти две прямые мы возьмем за новые оси координат; новыми координатами X, Y будут расстояния какой-либо точки параболы до прямых (20') и (21') при выбранном m; поэтому мы должны принять:

$$X=\frac{2(a_{13}-m\alpha)x+2(a_{23}-m\beta)y+a_{33}-m^2}{\sqrt{4(a_{13}-m\alpha)^2+4(a_{23}-m\beta)^2}},$$

$$Y=\frac{\alpha x+\beta y+m}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

С помощью этих соотношений уравнение примет вид:

$$a'_{22}Y^2+2a'_{13}X=0, \tag{19}$$

откуда легко получить ее каноническое уравнение.

Упражнения. 685. Указанным способом привести к каноническому виду уравнение параболы $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$x^2+4xy+4y^2+(6-8\sqrt{3})x+(12+4\sqrt{3})y+(9-4\sqrt{3})=0.$$

686. Этим же способом привести к каноническому виду уравнения парабол $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$:

1) $9x^2+12xy+4y^2+8x+14y+3=0$,
2) $x^2+6xy+9y^2-12x+24y+15=0$,
3) $25x^2+30xy+9y^2+68y+29=0$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

К § 1.

1. Сколько параметров содержит общее преобразование координат при переходе от одной декартовой системы к другой декартовой же системе координат и какие именно?

2. Сколькими соотношениями новые коэфициенты преобразованного уравнения линии 2-го порядка определяются по старым коэфициентам при общем преобразовании координат (декартовых в декартовы)?

3. Какие соотношения между старыми коэфициентами и коэфициентами преобразованного уравнения называются инвариантными при общем преобразовании координат? Сколько таких соотношений должно существовать?

4. Что называется инвариантами уравнения линии 2-го порядка относительно общего преобразования координат? Сколько их?

5. Каковы будут эти инварианты и как они могут быть получены?

К § 2.

6. Что называется характеристическим уравнением линии 2-го порядка и каковы его свойства (четыре)?

7. Как определить коэфициенты уравнения линии 2-го порядка, отнесенной к вершине и главным направлениям, по коэфициентам ее общего уравнения, отнесенного к произвольной системе координат?

К § 3.

8. Как определить коэфициенты уравнения центральной линии 2-го порядка, отнесенной к ее главным осям, по коэфициентам ее общего уравнения, отнесенного к произвольной системе координат?

9. Какие виды линий 2-го порядка могут изображаться общим уравнением 2-й степени при условии, что $\delta \neq 0$?

К § 4.

10. Какие виды линий 2-го порядка могут изображаться общим уравнением 2-й степени при условии, что $\delta = 0$?

11. Какая система координат выбирается для упрощения уравнения параболы?

12. Как определяются с помощью инвариантов коэфициенты уравнения параболы, отнесенной к ее вершине и ее главным направлениям, по коэфициентам ее уравнения, отнесенного к произвольной системе координат?

13. В чем заключается второй способ приведения уравнения параболы к каноническому виду?

14. Каково геометрическое истолкование этого второго способа?

15. Какие преимущества имеет этот второй способ перед первым?

Упражнения. 687. Гипербола изображается относительно некоторой системы координат с углом между осями, равным ω, уравнением:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (\delta < 0).$$

Каково будет ее уравнение, отнесенное к асимптотам, и как с помощью инвариантов вычислить его коэфициенты, а также угол между асимптотами?

Указание. Если начало координат для преобразованного уравнения кривой принято в ее центре, то:

$$a'_{13} = 0, \quad a'_{23} = 0;$$

если за оси координат приняты асимптотические направления, то

$$a'_{11} = 0, \quad a'_{22} = 0.$$

Поэтому уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам, будет вида:

$$2a'_{12}XY + a'_{33} = 0,$$

причем сравнение инвариантов данного и искомого уравнений дает:

$$I_1 = \frac{-2a'_{12}\cos\omega'}{\sin^2\omega'},$$

$$I_2 = \frac{-a'^2_{12}}{\sin^2\omega'},$$

$$I_3 = -\frac{a'^2_{12}a'_{33}}{\sin^2\omega},$$

где ω' — угол асимптот (т. е. угол новой координатной системы). Из этих уравнений два первых определят a'_{12} и ω', последнее же определит a'_{33}.

688. В некоторой прямоугольной системе координат гиперболы изображаются уравнениями:

1) $6x^2 + 19xy + 15y^2 + 2x + y - 463 = 0$,

2) $x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x + 14y - 2 = 0$.

Найти их уравнения, отнесенные к асимптотам.

689. По данному каноническому уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

найти его уравнение, отнесенное к двум равным и сопряженным диаметрам; определить угол между последними.

690. По каноническому уравнению параболы:

$$y^2 - 2px = 0$$

найти ее уравнение, отнесенное к равным и взаимно перпендикулярным касательным.

Указание. Оба уравнения:

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{13}x + a'_{33} = 0,$$

$$a'_{22}y^2 + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0,$$

каждое из которых определяет точки пересечения новых координатных осей (которые по условию касаются параболы) с параболой, должны быть тождественны с уравнениями:

$$(x - t)^2 = 0,$$

$$(y - t)^2 = 0,$$

где t — длина каждой из равных касательных. Поэтому:

$$\frac{a'_{11}}{1} = \frac{a'_{13}}{-t} = \frac{a'_{33}}{t^2},$$

$$\frac{a'_{22}}{1} = \frac{a'_{23}}{-t} = \frac{a'_{33}}{t^2}$$

или

$$a'_{11} = \frac{a'_{33}}{t^2}, \quad a'_{13} = -\frac{a'_{33}}{t},$$

$$a'_{22} = \frac{a'_{33}}{t^2}, \quad a'_{23} = -\frac{a'_{33}}{t}.$$

Теперь a'_{33}, a'_{12}, t определяются сравнением значений инвариантов для данного и искомого уравнений параболы.

691. Дано каноническое уравнение параболы:

$$y^2 - 2px = 0.$$

Составить уравнение этой параболы, если за новые оси координат приняты ее диаметр и касательная в его конце, составляющие между собой угол ω.

692. Обращение в нуль инварианта I_1 означает, что асимптоты линии 2-го порядка взаимно перпендикулярны; обращение в нуль инварианта I_2 означает, что линия не имеет определенного центра на конечном расстоянии (т. е. либо центр будет бесконечно удаленной точкой, либо существует прямая центров); наконец, обращение в нуль инварианта I_3 означает, что линия распадается на пару прямых.

693. Сохранение вида выражения:

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2$$

характеризует поворот осей координат или, иначе, из всех линейных и однородных преобразований координат только для преобразования поворота осей сохраняется вид выражения:

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2.$$

694. Уравнение эллипса, отнесенного к двум сопряженным диаметрам, длины которых $2a'$ и $2b'$, будет:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0.$$

Сравнением инвариантов этого уравнения с инвариантами канонического уравнения докажите, что: 1) площадь параллелограма, построенного на двух любых сопряженных полудиаметрах, постоянна и равна площади прямоугольника, построенного на его полуосях, 2) сумма квадратов двух любых сопряженных полудиаметров постоянна и равна сумме квадратов его полуосей (две теоремы Аполлония).

Глава XV.

Прямолинейная косоугольная система координат в пространстве.

В этой главе мы дадим ряд общих формул и соотношений, определяющих расстояние двух точек, угол двух лучей, условия их параллельности или перпендикулярности относительно прямолинейной косоугольной системы координат в пространстве; вместе с тем мы разберем и преобразование координат, связанное с переходом от одной системы декартовых координат к другой декартовой же системе координат. Решением указанных вопросов подводится основание к исследованию общего уравнения поверхностей 2-го порядка в предположении, что они могут быть отнесены к произвольной декартовой системе координат. Переход от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой декартовой прямоугольной системе с тем же началом называется ортогональным преобразованием (координат) или ортогональной подстановкой; при этом преобразовании, очевидно, сохраняется квадрат расстояния какой-либо точки от (неподвижного) начала координат; последнее свойство может служить характеристикой ортогонального преобразования. Определитель из коэфициентов ортогонального преобразования, короче называемый определителем ортогонального преобразования (или ортогональной подстановки), обладает рядом специальных свойств, заслуживающих внимания. Поворот прямоугольной системы как целого, т. е. ортогональное преобразование, зависит от трех параметров; формулы Эйлера, которыми заканчивается глава, и дают изображение ортогональной подстановки в зависимости от трех таких параметров.

1. Направление луча. Представим себе, что мы имеем в пространстве косоугольную декартову систему координат, и обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 косинусы координатных углов, полагая:

$$\cos(yOz)=\omega_1, \quad \cos(zOx)=\omega_2, \quad \cos(xOy)=\omega_3.$$

Рассмотрим далее луч, соединяющий начало координат с какою-нибудь точкою $M(x;\ y;\ z)$; пусть он с осями координат образует углы, косинусы которых будут α, β, γ („направляющие косинусы“), так что:

$$\cos(MOx)=\alpha, \quad \cos(MOy)=\beta, \quad \cos(MOz)=\gamma,$$

наконец, расстояние точки M от начала координат обозначим через ρ.

Построим координаты точки M следующим образом (черт. 163): через точку M проведем прямую, параллельную оси Oz, до встречи с плоскостью xOy в точке P; через точку P — параллель оси Oy до встречи с осью Ox в точке Q. Тогда:

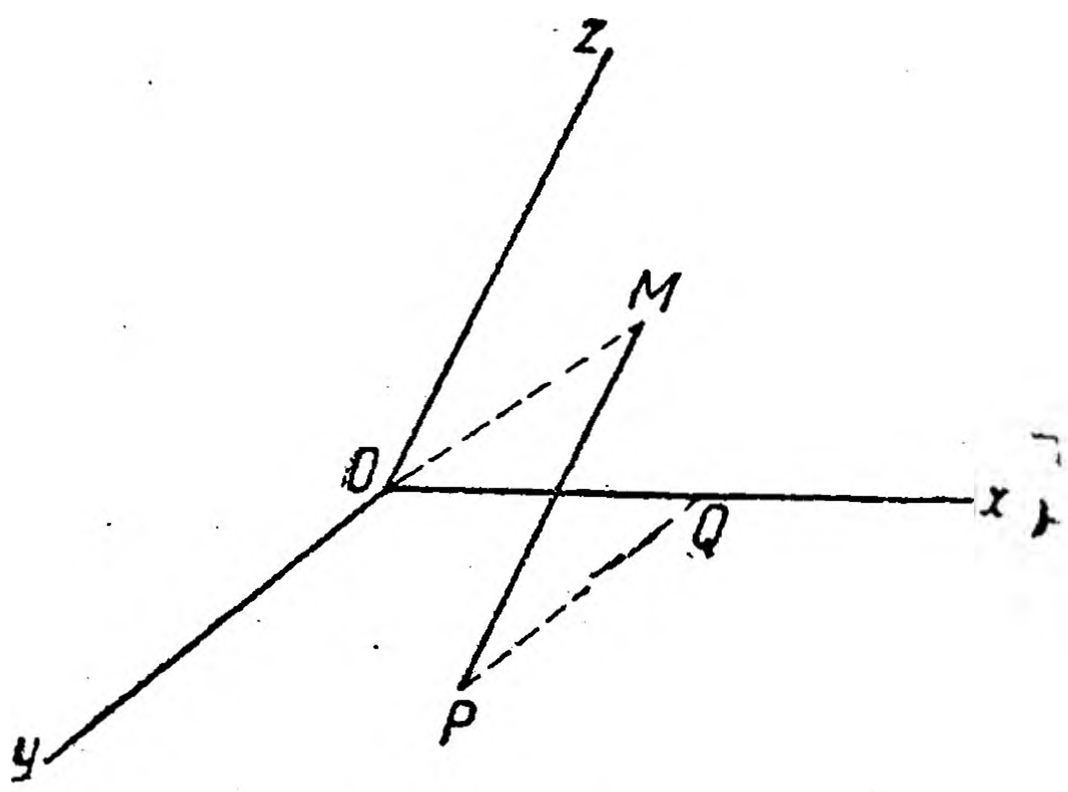
$$OQ=x, \quad QP=y, \quad PM=z;$$

для (координатной) ломаной $OQPM$ отрезок OM будет замыкающим, следовательно, проекции этих ломаной и отрезка на какую-нибудь ось равны между собой.

Будем проектировать ортогонально ломаную и ее замыкающий отрезок последовательно на оси Ox, Oy, Oz, OM; тогда получим:

$$\begin{aligned} x + y\omega_3 + z\omega_2 &= \rho\alpha, \\ x\omega_3 + y + z\omega_1 &= \rho\beta, \\ x\omega_2 + y\omega_1 + z &= \rho\gamma, \\ x\alpha + y\beta + z\gamma &= \rho. \end{aligned} \tag{1}$$

Из соотношений (1) мы можем получить ряд следствий. Прежде всего система (1) представляет собой четыре соотношения, однородных относительно x, y, z, ρ, причем эти последние вообще не равны нулю одновременно, так как $M(x; y; z)$ — произвольная точка в пространстве. Таким образом для совместности уравнений (1) необходимо осуществление условия:



Черт. 163.

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \alpha \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \beta \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Итак, три косинуса α, β, γ углов какого-либо луча с осями координат связаны условием (2) или в развернутом виде:

$$(1 - \omega_1^2)\alpha^2 + (1 - \omega_2^2)\beta^2 + (1 - \omega_3^2)\gamma^2 + 2(\omega_2\omega_3 - \omega_1)\beta\gamma + \\ + 2(\omega_3\omega_1 - \omega_2)\gamma\alpha + 2(\omega_1\omega_2 - \omega_3)\alpha\beta = \Omega, \tag{2}$$

где через Ω (заглавная греческая буква, читается „омега большая") обозначен определитель:

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

В частности, для прямоугольной системы координат ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$) соотношения (1) примут простой вид:

$$\begin{aligned} x &= \rho\alpha, \\ y &= \rho\beta, \\ z &= \rho\gamma, \\ x\alpha + y\beta + z\gamma &= \rho, \end{aligned} \tag{4}$$

и условие, связывающее косинусы углов данного луча с осями координат, будет:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{5}$$

Упражнения. 695. Найти направляющие косинусы луча, составляющего с осями координат равные углы, если каждый из координатных углов равен $\frac{\pi}{3}$.

696. Назовем через ω''' угол координатных осей Ox и Oy, а через ψ — угол с осью Oz перпендикуляра к плоскости xOy, тогда:

$$\Omega = \sin^2 \omega''' \cos^2 \psi. \tag{6}$$

Указание. Перпендекуляр к плоскости xOy с осями координат составляет углы, направляющие косинусы которых имеют значения:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \cos \psi.$$

Применяя соотношение (2) к данному случаю, мы и получим указанное значение для определителя Ω.

Замечание. Из соотношения (6) следует, что определитель Ω есть величина существенно положительная и не превышающая единицы.

697. Если на осях координат произвольной косоугольной системы отложить, считая от начала, отрезки a, b, c, то объем параллелепипеда, построенного на этих отрезках, равен:

$$V = abc \sqrt{\Omega}. \tag{7}$$

Указание. Объем параллелепипеда, равный произведению площади его основания на высоту, имеет значение:

$$V = ab \sin \omega''' \cdot c \cos \psi = abc \sin \omega''' \cos \psi.$$

Из соотношения (6) мы получим: $\sin \omega''' \cos \psi = \sqrt{\Omega}$, что и дает окончательное выражение для объема параллелепипеда в виде (7).

2. Угловые коэфициенты луча.

Разрешая три первых уравнения системы (1) относительно x, y, z, мы получим:

$$x = \rho \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \omega_3 & \omega_2 \\ \beta & 1 & \omega_1 \\ \gamma & \omega_1 & 1 \end{vmatrix}}{\Omega}, \quad y = \rho \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \omega_2 \\ \omega_3 & \beta & \omega_1 \\ \omega_2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}}{\Omega}, \quad z = \rho \frac{\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \alpha \\ \omega_3 & 1 & \beta \\ \omega_2 & \omega_1 & \gamma \end{vmatrix}}{\Omega}, \tag{8}$$

что короче можно записать в виде:

$$x = \rho \frac{\Omega_1}{\Omega}, \quad y = \rho \frac{\Omega_2}{\Omega}, \quad z = \rho \frac{\Omega_3}{\Omega}, \tag{8'}$$

если под Ω_1, Ω_2, Ω_3 разуметь определитель Ω, в котором последовательно элементы первого (для Ω_1), второго (для Ω_2), третьего (для Ω_3) столбцов заменяются элементами α, β, γ. Итак, мы можем положить:

$$x = l\rho, \quad y = m\rho, \quad z = n\rho \tag{9}$$

и величины l, m, n назовем *угловыми коэфициентами* данного луча, поскольку ими определяется направление луча; согласно предыдущему угловые коэфициенты l, m, n луча через косинусы α, β, γ его углов с осями и через косинусы ω_1, ω_2, ω_3 координатных углов выражаются следующим образом:

$$l = \frac{\Omega_1}{\Omega}, \quad m = \frac{\Omega_2}{\Omega}, \quad n = \frac{\Omega_3}{\Omega}. \tag{10}$$

Назовем через Ω^{ik} адъюнкту определителя Ω, соответствующую его элементу i-й строки и k-го столбца; тогда развертывая числители дробей (10), мы получим:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\alpha\Omega^{11}+\beta\Omega^{21}+\gamma\Omega^{31}}{\Omega}, \\ m &= \frac{\alpha\Omega^{12}+\beta\Omega^{22}+\gamma\Omega^{32}}{\Omega}, \\ n &= \frac{\alpha\Omega^{13}+\beta\Omega^{23}+\gamma\Omega^{33}}{\Omega}. \end{aligned} \tag{10'}$$

Заменяя в соотношениях (1) отношения $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$ соответственно через l, m, n, мы получим также:

$$\begin{aligned} &l+m\omega_3+n\omega_2=\alpha, \\ &l\omega_3+m+n\omega_1=\beta, \\ &l\omega_2+m\omega_1+n=\gamma, \\ &l\alpha+m\beta+n\gamma=1. \end{aligned} \tag{11}$$

Первые три из этих соотношений определяют косинусы α, β, γ углов луча с осями координат через угловые коэфициенты l, m, n луча; если же в последнее соотношение системы (11) подставить значения α, β, γ из первых трех, то мы получим *зависимость между угловыми* коэфициентами l, m, n данного луча:

$$l^2+m^2+n^2+2mn\omega_1+2nl\omega_2+2lm\omega_3=1. \tag{12}$$

Отметим, что для прямоугольной системы координат (когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$) соотношения (11) примут вид:

$$l=\alpha, \quad m=\beta, \quad n=\gamma,$$

т. е. угловые коэфициенты луча соответственно равны косинусам его углов с осями координат.

Весьма часто направление луча определяется не самыми угловыми коэфициентами l, m, n, а некоторыми величинами $\overline{l}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$, пропорциональными первым, так что:

$$\frac{\overline{l}}{l}=\frac{\overline{m}}{m}=\frac{\overline{n}}{n}; \tag{13}$$

к этим отношениям присоединим производное отношение:

$$\frac{\overline{l}}{l}=\frac{\sqrt{\overline{l}^2+\overline{m}^2+\overline{n}^2+2\overline{m}\,\overline{n}\omega_1+2\overline{n}\,\overline{l}\omega_2+2\overline{l}\,\overline{m}\omega_3}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2+2mn\omega_1+2nl\omega_2+2lm\omega_3}}$$

или сокращенно:

$$\frac{\overline{l}}{l}=\frac{\overline{R}}{R},$$

где через $\overline{R}$ и R обозначены соответственно входящие радикалы. Второй из них в силу соотношения (12) равен единице, поэтому:

$$\frac{\overline{l}}{l}=\frac{\overline{m}}{m}=\frac{\overline{n}}{n}=\frac{\overline{R}}{1}, \tag{13'}$$

откуда

$$l=\frac{\bar{l}}{\bar{R}},\quad m=\frac{\bar{m}}{\bar{R}},\quad n=\frac{\bar{n}}{\bar{R}}. \tag{13''}$$

Выражение:

$$\frac{1}{\bar{R}}=\frac{1}{\sqrt{\bar{l}^2+\bar{m}^2+\bar{n}^2+2\bar{m}\bar{n}\omega_1+2\bar{n}\bar{l}\omega_2+2\bar{l}\bar{m}\omega_3}}$$

будем называть нормирующим множителем коэфициентов $\bar{l}:\bar{m}:\bar{n}$. Величины $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ часто также называют угловыми коэфициентами луча; так как для определения направления луча важны лишь их отношения между собой, то их можно изменять, умножая все три на какой-либо числовой множитель. Для различения вполне определенных для данного луча угловых коэфициентов l, m, n от угловых коэфициентов $\bar{l}:\bar{m}:\bar{n}$ условимся первые из них называть нормированными угловыми коэфициентами; вторые тогда можно называть ненормированными.

Формулы (11) и (13″) дадут выражения косинусов α, β, γ углов луча с осями через ненормированные угловые коэфициенты $\bar{l}:\bar{m}:\bar{n}$ в виде:

$$\alpha=\frac{\bar{l}+\bar{m}\omega_3+\bar{n}\omega_2}{\bar{R}},$$

$$\beta=\frac{\bar{l}\omega_3+\bar{m}+\bar{n}\omega_1}{\bar{R}}, \tag{14}$$

$$\gamma=\frac{\bar{l}\omega_2+\bar{m}\omega_1+\bar{n}}{\bar{R}}.$$

Упражнения. 698. Покажите, что нормированные угловые коэфициенты самой оси x-ов будут: 1, 0, 0; для оси y-ов: 0, 1, 0; наконец для оси z они имеют значения: 0, 0, 1.

Указание. Ось x-ов сама с собой, с осью Oy и с осью Oz составляет углы, косинусы которых соответственно равны 1, ω_3, ω_2, поэтому по формулам (10) получим значения ее нормированных угловых коэфициентов: 1, 0, 0. Тот же результат вытекает из формул (9); если точка M находится на оси x-ов, то ее координаты будут (x; 0; 0), а расстояние ее от начала $\rho=x$, следовательно, по формулам (9) значения ее нормированных угловых коэфициентов будут:

$$l=1,\quad m=0,\quad n=0.$$

699. Даны координатные углы косоугольной декартовой системы:

$$\angle yOz=\frac{\pi}{3},\quad \angle zOx=\frac{\pi}{2},\quad \angle xOy=\frac{2\pi}{3}$$

и ненормированные угловые коэфициенты $3:1:2$ некоторого луча. Вычислите нормированные угловые коэфициенты луча, а затем и косинусы его углов с осями координат.

700. Когда общее уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

относится к косоугольной системе координат, то его *коэфициенты* A, B, C *при координатах* (как это было и для прямоугольной системы координат) *пропорциональны косинусам углов с осями перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость*:

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma},$$

угловые же коэфициенты этого перпендикуляра будут определяться соотношениями:

$$\frac{l+m\omega_3+n\omega_2}{A}=\frac{l\omega_3+m+n\omega_1}{B}=\frac{l\omega_2+m\omega_1+n}{C};$$

можно сказать и наоборот: эти соотношения по угловым коэфициентам l, m, n перпендикуляра к плоскости определяют числа A, B, C, пропорциональные косинусам его углов с осями.

Указание. Наш прежний вывод нормального уравнения плоскости для прямоугольной системы координат остается без изменения для косоугольной системы координат, сохраняется и вид нормального уравнения, вот почему значение отношений $A:B:C$ остается прежнее.

3. Расстояние точки от начала. Расстояние двух точек.

Умножим первое соотношение системы (1) на x, второе на y, третье на z и результаты сложим, тогда найдем:

$$x^2+y^2+z^2 2yz\omega_1+2zx\omega_2+2xy\omega_3=\rho(\alpha x+\beta y+\gamma z).$$

Выражение, стоящее в скобках в правой части, будет равно ρ на основании четвертого уравнения системы (1). Итак:

$$x^2+y^2+z^2+2yz\omega_1+2zx\omega_2+2xy\omega_3=\rho^2. \tag{15}$$

Эта формула дает квадрат расстояния ρ точки $M(x;\ y;\ z)$ *от начала координат.*

Пусть нам даны две точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ относительно какой-либо косоугольной системы координат. Перенесем начало координат в точку M_1, сохраняя направления координатных осей; тогда координатами второй точки M_2 по отношению к новой системе будут выражения:

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1,\quad Z=z_2-z_1. \tag{16}$$

Расстояние d двух точек в старой системе есть то же самое, что в новой системе расстояние точки M_2 от начала M_1. Следовательно, мы можем воспользоваться формулой (15) и для перехода к старой системе заменить X, Y, Z их значениями из таблицы (16). Тогда *квадрат расстояния двух точек* по их координатам будет определяться следующей формулой:

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+2(y_2-y_1)(z_2-z_1)\omega_1+\\+2(z_2-z_1)(x_2-x_1)\omega_2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\omega_3, \tag{17}$$

каковая в случае прямоугольной системы координат $(\omega_1=\omega_2=\omega_3=0)$ приводится к известному нам виду:

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

Если применить соотношения (1) к точке M_2, отнесенной к указанной новой системе координат с началом в точке M_1, то получим:

$$
\begin{aligned}
&(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\omega_3+(z_2-z_1)\omega_2=d\alpha,\\
&(x_2-x_1)\omega_3+(y_2-y_1)+(z_2-z_1)\omega_1=d\beta,\\
&(x_2-x_1)\omega_2+(y_2-y_1)\omega_1+(z_2-z_1)=d\gamma,\\
&(x_2-x_1)\alpha+(y_2-y_1)\beta+(z_2-z_1)\gamma=d.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Разрешение первых трех из этих соотношений даст:

$$
\begin{aligned}
x_2-x_1&=ld,\\
y_2-y_1&=md,\\
z_2-z_1&=nd.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Определив расстояние двух точек d, мы с помощью только что указанных формул можем найти величины, характеризующие направление отрезка, заданного координатами начала и координатами конца. Так, формулы (18) дадут косинусы углов отрезка с осями координат:

$$
\begin{aligned}
\alpha&=\frac{x_2-x_1}{d}+\frac{y_2-y_1}{d}\omega_3+\frac{z_2-z_1}{d}\omega_2,\\
\beta&=\frac{x_2-x_1}{d}\omega_3+\frac{y_2-y_1}{d}+\frac{z_2-z_1}{d}\omega_1,\\
\gamma&=\frac{x_2-x_1}{d}\omega_2+\frac{y_2-y_1}{d}\omega_1+\frac{z_2-z_1}{d},
\end{aligned}
\tag{18'}
$$

а формулы (19) определят нормированные угловые коэфициенты отрезка:

$$
l=\frac{x_2-x_1}{d},\quad m=\frac{y_2-y_1}{d},\quad n=\frac{z_2-z_1}{d}. \tag{19'}
$$

Упражнения. 701. Определить расстояние от начала координат до точки $(-3;\ 2;\ -1)$, отнесенной к декартовой косоугольной системе, каждый из координатных углов которой равен $\frac{\pi}{3}$.

702. Определить расстояние двух точек $M_1\ (-1;\ -2;\ 1)$ и $M_2\ (2;\ -5;\ 3)$, отнесенных к декартовой косоугольной системе, координатные углы которой соответственно равны:

$$\angle yOz=\frac{\pi}{3},\quad \angle zOx=\frac{\pi}{2},\quad \angle xOy=\frac{2\pi}{3}.$$

703. Определить нормированные угловые коэфициенты, а затем и косинусы углов с осями координат отрезка, соединяющего точку $M_1\ (1;\ -3;\ -2)$, с точкой $M_2\ (3;\ -4;\ 1)$, если углы между осями координатной системы имеют значения:

$$\angle yOz=\frac{\pi}{3},\quad \angle zOx=\frac{3\pi}{4},\quad \angle xOy=\frac{\pi}{2}.$$

4. Угол двух лучей.

Возьмем два направления, и пусть первое из них составляет с осями координат углы, косинусы которых соответственно равны $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, второе же составляет с осями углы, косинусы которых $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Поставим себе задачей определить угол φ этих двух лучей. Возьмем теперь два луча, исходящих из начала координат и соответственно параллельных двум данным направлениям; на первом из них выберем какую-нибудь точку $M(x; y; z)$, отстоящую от начала координат на расстоянии ρ. Проекция ломаной $OQPM$, составленной из координат точки M, и проекция замыкающего отрезка OM на второй луч должны быть равны между собой, так что для ортогональной проекции:

$$x\alpha_2 + y\beta_2 + z\gamma_2 = \rho \cos\varphi. \tag{20}$$

Если к этому соотношению присоединить три первых уравнения системы (1):

$$\begin{aligned} x + y\omega_3 + z\omega_2 &= \rho\alpha_1, \\ x\omega_3 + y + z\omega_1 &= \rho\beta_1, \\ x\omega_2 + y\omega_1 + z &= \rho\gamma_1, \end{aligned}$$

то исключение из этих четырех уравнений величин x, y, z, ρ даст условие:

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \alpha_1 \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \beta_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cos\varphi \end{vmatrix} = 0, \tag{21}$$

определяющее искомый угол φ.

Пусть нормированные угловые коэфициенты данных двух лучей будут l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2. Заменим в формуле (20) отношения $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$ через их значения: l_1, m_1, n_1, тогда:

$$\cos\varphi = l_1\alpha_2 + m_1\beta_2 + n_1\gamma_2. \tag{20'}$$

Очевидно, по аналогии можно также написать:

$$\cos\varphi = \alpha_1 l_2 + \beta_1 m_2 + \gamma_1 n_2. \tag{20''}$$

Если мы хотим получить $\cos\varphi$ через угловые коэфициенты данных направлений, то в формуле (20') надо α_2, β_2, γ_2 заменить их значениями согласно соотношениям (11):

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= l_2 + m_2\omega_3 + n_2\omega_2, \\ \beta_2 &= l_2\omega_3 + m_2 + n_2\omega_1, \\ \gamma_2 &= l_2\omega_2 + m_2\omega_1 + n_2, \end{aligned}$$

тогда получим:

$$\cos\varphi = l_1(l_2 + m_2\omega_3 + n_2\omega_2) + m_1(l_2\omega_3 + m_2 + n_2\omega_1) + \\ + n_1(l_2\omega_2 + m_2\omega_1 + n_2)$$

или в окончательном виде:

$$\cos\varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\omega_1 + (n_1 l_2 + n_2 l_1)\omega_2 + \\ + (l_1 m_2 + l_2 m_1)\omega_3. \tag{22}$$

Если лучи совпадают, то $\varphi = 0$, его косинус равен единице, и соотношение (22) обращается в соотношение (12) между нормированными угловыми коэфициентами одного направления; правая часть формулы (22) будет, очевидно, полярною формой по отношению к квадратичной троичной форме, стоящей в левой части соотношения (12); если угодно, можно сказать также: по отношению к форме, изображающей квадрат расстояния точки от начала координат. Очевидно, через ненормированные угловые коэфициенты косинус угла двух направлений выразится следующим образом:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{l}_1\overline{l}_2 + \overline{m}_1\overline{m}_2 + \overline{n}_1\overline{n}_2 + (\overline{m}_1\overline{n}_2 + \overline{m}_2\overline{n}_1)\omega_1 + (\overline{n}_1\overline{l}_2 + \overline{n}_2\overline{l}_1)\,\omega_2 + (\overline{l}_1\overline{m}_2 + \overline{l}_2\overline{m}_1)\,\omega_3}{\sqrt{\overline{l}_1^2 + \overline{m}_1^2 + \overline{n}_1^2 + 2\overline{m}\;\overline{n}_1\omega_1 + 2\overline{n}_1\overline{l}_1\omega_2 + 2\overline{l}_1\overline{m}_1\omega_3}\;\sqrt{\overline{l}_2^2 + \overline{m}_2^2 + \overline{n}_2^2 + 2\overline{m}_2\overline{n}_2\omega_1 + 2\overline{n}_2\overline{l}_2\omega_2 + 2\overline{l}_2\overline{m}_2\omega_3}} \cdot \qquad (22')$$

Если данные лучи параллельны, то их углы с осями координат или соответственно равны или разнятся на числа, кратные π, а потому их косинусы соответственно равны или равнопротивоположны:

$$\alpha_2 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \beta_1, \quad \gamma_2 = \gamma_1$$

или

$$\alpha_2 = -\alpha_1, \quad \beta_2 = -\beta_1, \quad \gamma_2 = -\gamma_1;$$

угловые коэфициенты их (ненормированные) в случае параллельности направлений должны быть пропорциональными:

$$\frac{\overline{l}_2}{\overline{l}_1} = \frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1} = \frac{\overline{n}_2}{\overline{n}_1}.$$

Обратно, *если последние условия выполнены*, то, нормируя обе тройки угловых коэфициентов, их можно сделать соответственно равными, но тогда формула (22) даст $\cos\varphi = 1$, т. е. $\varphi = 0$ и лучи будут параллельны. Если два данных направления взаимно перпендикулярны, то угол φ между ними равен прямому, его косинус равен нулю и формула (21) дает условие:

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \alpha_1 \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \beta_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (23)$$

Легко видеть справедливость и обратного предложения, т. е. если условие (23) выполнено, то два данных направления взаимно перпендикулярны. В самом деле, пусть α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2 связаны условием (23); тогда угол φ этих направлений определится формулой (21). Два определителя (21) и (23) имеют по три первых столбца одинаковых и отличаются лишь последним столбцом; поэтому можно составить разность равенств (21) и (23), вычитая соответственно элементы последних столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & 0 \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & 0 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cos\varphi \end{vmatrix} = 0$$

или, разлагая левую часть по элементам последнего столбца:

$$\Omega\cos\varphi = 0,$$

т. е. $\cos\varphi = 0$, так как $\Omega \neq 0$. Итак, *соотношение* (23) *есть необходимое и достаточное условие для перпендикулярности двух направлений.* Условие перпендикулярности двух направлений по их угловым коэфициентам (нормированным или ненормированным — безразлично) на основании формул (22) и (22') будет таково:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\,\omega_1 + (n_1 l_2 + n_2 l_1)\,\omega_2 + \\ + (l_1 m_2 + l_2 m_1)\,\omega_3 = 0. \qquad (24)$$

Упражнения. 704. Определить косинус угла двух направлений по их угловым коэфициентам $2:-3:1$ и $3:1:-2$, если каждый из координатных углов равен $\frac{\pi}{3}$.

705. Углы осей координатной системы имеют значения:

$$\angle yOz = \frac{\pi}{3}, \quad \angle zOx = \frac{\pi}{2}; \quad \angle xOy = \frac{\pi}{2}.$$

Показать, что два направления, для которых:

$$\alpha_1 = \frac{3}{\sqrt{70}}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{7}{10}}, \quad \gamma_1 = \frac{13}{2\sqrt{70}},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = -\frac{3}{2\sqrt{7}},$$

между собой взаимно перпендикулярны.

706. Углы осей координатной системы имеют значения:

$$\angle yOz = \frac{\pi}{4}, \quad \angle zOx = \frac{\pi}{2}, \quad \angle xOy = \frac{2\pi}{3}.$$

Показать, что два направления, одно из которых определяется угловыми коэфициентами $1:2:-1$, а другое косинусами углов с осями, соответственно равными $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{4}\sqrt{10-\sqrt{2}}$, $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, между собою параллельны.

707. Косинусы координатных углов имеют значения $\omega_1 = \frac{1}{2}$, $\omega_2 = \frac{2}{3}$, $\omega_3 = \frac{3}{4}$; относительно такой координатной системы даны два направления своими угловыми коэфициентами $3:2:-4$ и $1:-3:2$. Найти угловые коэфициенты луча, перпендикулярного к обоим данным направлениям.

5. Преобразование координат.

Перенесем прежде начало координат в точку $(a;\ b;\ c)$, сохраняя направление координатных осей; пусть координаты какой-нибудь точки M по старой системе будут x, y, z, а по новой X, Y, Z.

Тогда очевидно

$$\begin{aligned} x &= X + a, \\ y &= Y + b, \\ z &= Z + c. \end{aligned} \qquad (25)$$

Таковы будут формулы преобразования координат, соответствующие переносу начала.

Положим теперь, что мы сохраняем начало координат и изменяем направления осей; пусть новая ось OX составляет с прежними осями Ox, Oy, Oz углы, косинусы которых соответственно равны α_1, β_1, γ_1; пусть ось OY составляет с прежними осями углы, косинусы которых α_2, β_2, γ_2; наконец, ось OZ составляет со старыми осями углы, косинусы которых соответственно равны α_3, β_3, γ_3. Все эти косинусы мы можем расположить в таблице, в которой показаны косинусы углов от оси в вертикальном боковом ряду к оси в верхнем горизонтальном ряду:

	Ox	Oy	Oz	OX	OY	OZ
Ox	1	ω_3	ω_2	α_1	α_2	α_3
Oy	ω_3	1	ω_1	β_1	β_2	β_3
Oz	ω_2	ω_1	1	γ_1	γ_2	γ_3

Возьмем какую-нибудь точку M и построим ее старые координаты так, чтобы они составили обычную ломаную $OQPM$, для которой замыкающим отрезком будет OM; подобным же образом построим соответствующую ломаную $OQ'P'M$ из новых координат. Так как эти две ломаные линии имеют общую замыкающую, то их проекции, например, на каждую из старых осей должны быть равны между собой:

$$\begin{aligned} x + y\omega_3 + z\omega_2 &= X\alpha_1 + Y\alpha_2 + Z\alpha_3, \\ x\omega_3 + y + z\omega_1 &= X\beta_1 + Y\beta_2 + Z\beta_3, \\ x\omega_2 + y\omega_1 + z &= X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3. \end{aligned} \tag{26}$$

Пусть l_1, m_1, n_1 будут нормированными угловыми коэфициентами новой оси OX относительно старых осей; l_2, m_2, n_2 будут угловыми коэфициентами новой оси OY и l_3, m_3, n_3 — угловыми коэфициентами новой оси OZ. На основании соотношений (10′) мы имеем:

$$l_1 = \frac{\alpha_1\Omega^{11} + \beta_1\Omega^{21} + \gamma_1\Omega^{31}}{\Omega},$$

$$m_1 = \frac{\alpha_1\Omega^{12} + \beta_1\Omega^{22} + \gamma_1\Omega^{32}}{\Omega},$$

$$n_1 = \frac{\alpha_1\Omega^{13} + \beta_1\Omega^{23} + \gamma_1\Omega^{33}}{\Omega}.$$

Аналогичным образом определяется l_2, m_2, n_2 и l_3, m_3, n_3, по соответствующим им косинусам α_2, β_2, γ_2 и α_3, β_3, γ_3. Умножим теперь уравнения (26) соответственно на Ω^{11}, Ω^{21}, Ω^{31} и сложим, затем второй раз умножим на Ω^{12}, Ω^{22}, Ω^{32}, наконец, на Ω^{13}, Ω^{23}, Ω^{33} и каждый раз опять складываем; этим способом система (26) будет разрешена относительно старых координат:

$$\begin{aligned} x &= l_1 X + l_2 Y + l_3 Z, \\ y &= m_1 X + m_2 Y + m_3 Z, \\ z &= n_1 X + n_2 Y + n_3 Z. \end{aligned} \tag{27}$$

В этих формулах преобразования координат, соответствующего повороту осей, входит всего девять коэфициентов, однако последние связаны между собой рядом соотношений.

Так, прежде всего, каждая из троек (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) представляет собой нормированные угловые коэфициенты новых осей, следовательно, в силу соотношения (12) между коэфициентами каждой тройки имеются зависимости:

$$\begin{aligned} &l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 + 2m_1n_1\omega_1 + 2n_1l_1\omega_2 + 2l_1m_1\omega_3 = 1, \\ &l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 + 2m_2n_2\omega_1 + 2n_2l_2\omega_2 + 2l_2m_2\omega_3 = 1, \\ &l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 + 2m_3n_3\omega_1 + 2n_3l_3\omega_2 + 2l_3m_3\omega_3 = 1. \end{aligned} \tag{28}$$

С другой стороны, если мы назовем через ω_1', ω_2', ω_3' косинусы координатных углов новой системы, то каждый из этих углов может быть определен, как угол соответствующих новых осей, по их угловым коэфициентам относительно старых осей [т. е. по формуле (22)]:

$$\begin{aligned} &l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 + (m_2n_3 + m_3n_2)\,\omega_1 + (n_2l_3 + n_3l_2)\,\omega_2 + \\ &\qquad + (l_2m_3 + l_3m_2)\,\omega_3 = \omega_1', \\ &l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1 + (m_3n_1 + m_1n_3)\,\omega_1 + (n_3l_1 + n_1l_3)\,\omega_2 + \\ &\qquad + (l_3m_1 + l_1m_3)\,\omega_3 = \omega_2', \\ &l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 + (m_1n_2 + m_2n_1)\,\omega_1 + (n_1l_2 + n_2l_1)\,\omega_2 + \\ &\qquad + (l_1m_2 + l_2m_1)\,\omega_3 = \omega_3'. \end{aligned} \tag{29}$$

Итак, между девятью коэфициентами преобразования (27) имеется *шесть* вышеуказанных соотношений (28) и (29), а потому только *три* из этих коэфициентов могут быть выбраны произвольно, шесть же остальных определятся через три выбранных. Таким образом, *линейное однородное преобразование координат* (27), *соответствующее повороту осей, зависит от трех существенных параметров*. Чтобы не производить подробного исследования системы (28) и (29), это заключение можно подтвердить геометрическими соображениями. Заметим прежде всего, что когда выбраны направления двух осей, например OX и OY, то третью ось OZ, составляющую с каждою из первых соответственно заданные углы, можно провести лишь определенным образом; в самом деле, два круговых конуса с осями по OX и OY и с заданными углами осевых сечений могут пересекаться лишь по вполне определенным образующим. Таким образом вопрос сводится к тому, от какого числа параметров зависит определение двух лучей в пространстве, составляющих между собой заданный угол. Плоскости этих лучей мы можем придать любое направление (зависящее от двух параметров) в пространстве; затем, сохраняя угол между этими лучами, мы можем произвольно их поворачивать на любой угол в их плоскости; следовательно, направление двух осей в пространстве, составляющих заданный между собою угол, зависит от трех параметров.

Упражнения. 708. Углы координатной системы соответственно равны $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$; три луча, составляющие с осями координат углы, косинусы которых равны:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{10}, \quad \beta_1 = \frac{1}{5}, \quad \gamma_1 = \frac{4}{5},$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{10}, \quad \beta_2 = \frac{1}{10}, \quad \gamma_2 = \frac{9}{10},$$
$$\alpha_3 = \frac{3}{14}, \quad \beta_3 = \frac{1}{7}, \quad \gamma_3 = \frac{20}{21},$$

принимаются за новые оси координат. Составить формулы преобразования координат и определить косинусы координатных углов новой системы.

709. Общими формулами преобразования координат (перенос начала и поворот осей) будут:

$$\begin{aligned} x &= l_1X + l_2Y + l_3Z + a, \\ y &= m_1X + m_2Y + m_3Z + b, \\ z &= n_1X + n_2Y + n_3Z + c. \end{aligned} \tag{30}$$

Оно зависит от шести параметров.

710. Называя через Ω и Ω' определители косинусов координатных углов старой и новой системы и через Δ определитель из коэфициентов подстановки (27), доказать соотношение:

$$\Omega' = \Omega\Delta^2. \tag{31}$$

Указание. Перемножая определители (столбцы на столбцы):

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Omega = \begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 \end{vmatrix},$$

мы получим:

$$\Delta\Omega = \begin{vmatrix} l_1 + m_1\omega_3 + n_1\omega_2 & l_2 + m_2\omega_3 + n_2\omega_2 & l_3 + m_3\omega_3 + n_3\omega_2 \\ l_1\omega_3 + m_1 + n_1\omega_1 & l_2\omega_3 + m_2 + n_2\omega_1 & l_3\omega_3 + m_3 + n_3\omega_1 \\ l_1\omega_2 + m_1\omega_1 + n_1 & l_2\omega_2 + m_2\omega_1 + n_2 & l_3\omega_2 + m_3\omega_1 + n_3 \end{vmatrix}$$

или в силу соотношений (11):

$$\Delta\Omega = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Обе части полученного соотношения умножим еще раз на Δ:

$$\Delta^2\Omega = \begin{vmatrix} \alpha_1 l_1 + \beta_1 m_1 + \gamma_1 n_1 & \alpha_2 l_1 + \beta_2 m_1 + \gamma_2 n_1 & \alpha_3 l_1 + \beta_3 m_1 + \gamma_3 n_1 \\ \alpha_1 l_2 + \beta_1 m_2 + \gamma_1 n_2 & \alpha_2 l_2 + \beta_2 m_2 + \gamma_2 n_2 & \alpha_3 l_2 + \beta_3 m_2 + \gamma_3 n_2 \\ \alpha_1 l_3 + \beta_1 m_3 + \gamma_1 n_3 & \alpha_2 l_3 + \beta_2 m_3 + \gamma_2 n_3 & \alpha_3 l_3 + \beta_3 m_3 + \gamma_3 n_3 \end{vmatrix},$$

что по формулам (20') даст:

$$\Delta^2\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \omega_3' & \omega_2' \\ \omega_3' & 1 & \omega_1' \\ \omega_2' & \omega_1' & 1 \end{vmatrix}$$

или

$$\Delta^2\Omega = \Omega'.$$

Замечание. Пусть координатные углы новой и старой системы соответственно равны, тогда $\Omega' = \Omega$, и, следовательно, $\Delta = \pm 1$. Так как значение Δ, как мы убедились, постоянно и не зависит от поворота осей, то при непрерывном вращении новой координатной системы как целого около их общего начала координат значение Δ будет оставаться все время одним и тем же, либо равным $+1$, либо равным -1.

Предположим, что надлежащим поворотом мы достигли совмещения новой оси X-ов со старой осью x-ов и новой оси Y-ов со старой осью y-ов, что, очевидно, всегда возможно; в таком случае новая ось Z может либо совпасть с прежнею осью z, либо оказаться противоположного с ней направления. Когда все три оси соответственно совпадают, тогда преобразование (27) приводится к преобразованию:

$$x = X, \qquad y = Y, \qquad z = Z,$$

и определитель из его коэфициентов будет $\Delta = +1$; но совмещение соответственных осей после поворота обозначает, что тройки координатных осей новых и старых либо обе левые, либо обе правые.

Если же при совмещении двух пар осей оси третьей пары (например Oz и OZ) получают противоположные направления, то преобразование (27) сводится к преобразованию:

$$x = X,\ y = Y,\ z = -Z$$

с определителем отрицательным и равным -1 ($\Delta = -1$); но когда две пары осей совпадают, и оси третьей пары имеют противоположные направления, это значит, что тройка старых осей и тройка новых осей разноименны, именно, если одна из них левая, то другая будет правой. Итак, определитель подстановки (27) имеет положительное значение, если координатная тройка новых осей одноименна с тройкой старых осей; этот же определитель имеет отрицательное значение, если тройки старых и новых осей разноименны.

6. Ортогональная подстановка.

Если старая система координат прямоугольна, тогда, как известно, нормированные угловые коэфициенты (l, m, n) какого-либо луча совпадают соответственно с косинусами (α, β, γ) углов этого луча с осями, а потому формулы преобразования координат (26) или (27) примут вид:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \\ y &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \\ z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z, \end{aligned} \tag{32}$$

причем

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned} \tag{33}$$

Если сверх того и новая система координат будет прямоугольной, тогда оси последней попарно ортогональны, и следовательно:

$$\begin{aligned} \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0, \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Таким образом девять косинусов каждого из углов новых осей со старыми должны удовлетворять *шести* указанным соотношениям (33) и (34), а следовательно, эти девять коэфициентов зависят от трех параметров. Подстановка (32), переводящая координаты какой-либо точки относительно одной прямоугольной системы в координаты той же точки относительно другой прямоугольной системы, называется *ортогональной* *подстановкой*; квадрат определителя из коэфициентов ортогональной подстановки

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

в силу соотношений (33) и (34) будет равен единице:

$$\Delta^2 = 1.$$

Сам же определитель Δ будет равен $+1$, если тройки новых и старых осей одноименны, или -1, если эти тройки разноименны.

Величины $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ будут косинусами углов старой оси x-ов с тремя новыми осями OX, OY, OZ, равным образом $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ будут косинусами углов старой оси y с соответствующими новыми осями; наконец $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ будут косинусами старой оси z относительно новых; вследствие ортогональности осей каждой из систем эти девять величин удовлетворяют также соотношениям:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1; \end{aligned} \tag{33'}$$

$$\begin{aligned} \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0, \\ \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0. \end{aligned} \tag{34'}$$

Итак, если для определителя Δ выполняются условия (33) и (34), то обязательно выполняются и условия (33') и (34'), т. е. *если в каком-либо определителе* (3-го порядка) *сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов двух любых столбцов равна нулю, то аналогичным условиям удовлетворяют и элементы строк.*

Предположим, что $\Delta = +1$, т. е. новая и старая координатные тройки одноименны; так как, например, ось OZ ортогональна к осям OX и OY, то:

$$\frac{\alpha_3}{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1} = \frac{\beta_3}{\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1} = \frac{\gamma_3}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}.$$

Обозначая эти отношения через λ, мы получим:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \lambda(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1), \\ \beta_3 &= \lambda(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1), \\ \gamma_3 &= \lambda(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \end{aligned}$$

и тогда

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = \alpha_3 \cdot \lambda(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + \beta_3 \cdot \lambda(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + \\ + \gamma_3 \cdot \lambda(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 1$$

или

$$\lambda\Delta = 1,$$

откуда

$$\lambda = 1.$$

Итак:

$$\alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1,$$
$$\beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1,$$
$$\gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Аналогичные соотношения мы получим круговой перестановкой индексов 1, 2, 3, а это означает, что в *определителе ортогональной подстановки, когда он равен положительной единице, каждая адъюнкта равна соответствующему элементу определителя.*

Геометрически очевидно, что ортогональная подстановка не меняет квадрата расстояния точки от начала координат, иначе говоря, ортогональная подстановка сумму квадратов старых координат преобразует в сумму квадратов новых координат, т. е.

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \tag{35}$$

Нетрудно доказать и обратное предложение: из всех линейных и однородных преобразований вида (32) только ортогональная подстановка сохраняет сумму квадратов координат, т. е. удовлетворяет условию (35). Свойства определителя 3-го порядка ортогональной подстановки мы выше обнаружили частью геометрическими соображениями, но их можно было бы доказать и аналитически, притом для определителя ортогональной подстановки любого порядка.

Упражнения. 711. Условимся сумму

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$$

или

$$b^{(1)} + b^{(2)} + b^{(3)} + \ldots + b^{(n)}$$

короче изображать символически через b_α или через b^α, т. е. одним слагаемым с греческим индексом, предполагая, что именно по нему производится суммирование от 1 до n; далее вместо каких-либо n соотношений:

$$x_1 = a_1^{\alpha} y_\alpha,$$
$$x_2 = a_2^{\alpha} y_\alpha,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$x_n = a_n^{\alpha} y_\alpha$$

будем короче писать:

$$x_i = a_i^{\alpha} y_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пользуясь этими сокращенными обозначениями, доказать предложение: если подстановка

$$x_i = a_i^{\alpha} y_\alpha$$

сохраняет сумму квадратов, т. е.:

$$x_\alpha^2 = y_\alpha^2,$$

то ее коэфициенты удовлетворяют условиям:

$$a_\alpha^k a_\alpha^k = 1, \quad a_\alpha^p a_\alpha^q = 0 \text{ при } p \neq q. \tag{36}$$

Такая подстановка (преобразование) называется ортогональной; ее определитель Δ равен ± 1.

Указание. В выражение x_α^2 подставим значения x_i; мы получим:

$$x_\alpha^2 = a_\alpha^\beta y_\beta \cdot a_\alpha^\gamma y_\gamma = a_\alpha^\beta a_\alpha^\gamma y_\beta y_\gamma.$$

Это выражение должно быть тождественно равным y_α^2, поэтому коэфициент при квадрате какого-либо y_k должен равняться единице, а коэфициент при каком-либо произведении $y_p y_q$ должен обращаться в нуль, следовательно:

$$a_\alpha^k a_\alpha^k = 1, \quad a_\alpha^p a_\alpha^q = 0 \text{ при } p \neq q.$$

С помощью этих соотношений мы легко найдем, что $\Delta^2 = 1$.

712. В определителе ортогональной подстановки каждый из его элементов равен соответствующей адъюнкте, если $\Delta = 1$ или равнопротивоположен адъюнкте, если $\Delta = -1$.

Указание. Из системы соотношений (36) выделим уравнения:

$$\begin{aligned} a_\alpha^k \cdot a_\alpha^1 &= 0, \\ a_\alpha^k \cdot a_\alpha^2 &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ a_\alpha^k \cdot a_\alpha^k &= 1 \\ &\cdots\cdots \\ a_\alpha^k \cdot a_\alpha^n &= 0; \end{aligned}$$

решая их относительно a_i^k, мы получим по обычному правилу для линейной системы:

$$a_i^k = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & 0 & a_{i+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & 0 & a_{i+1}^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & 1 & a_{i+1}^k & \cdots & a_n^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & 0 & a_{i+1}^n & \cdots & a_k^n \end{vmatrix}}{\Delta}$$

или

$$a_i^k = \frac{(-1)^{i+k} M_i^k}{\Delta},$$

где M_i^k — минор определителя Δ, соответствующий элементу a_i^k. Обозначим через b_i^k адъюнкту, соответствующую элементу a_i^k, тогда предыдущее отношение даст:

$$a_i^k = \frac{b_i^k}{\Delta}, \tag{36}$$

где $\Delta^2 = 1$.

713. В ортогональном определителе сумма квадратов элементов каждой строки равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов двух разных строк равна нулю.

Указание. Возьмем сумму квадратов $a_i^\alpha \cdot a_i^\alpha$ элементов какой-либо строки определителя; на основании предыдущего положения $a_i^k = b_i^k$ при $\Delta = 1$, поэтому:

$$a_i^\alpha \cdot a_i^\alpha = a_i^\alpha \cdot b_i^\alpha,$$

но полученное выражение есть разложение определителя Δ по элементам строки номера i, поэтому:

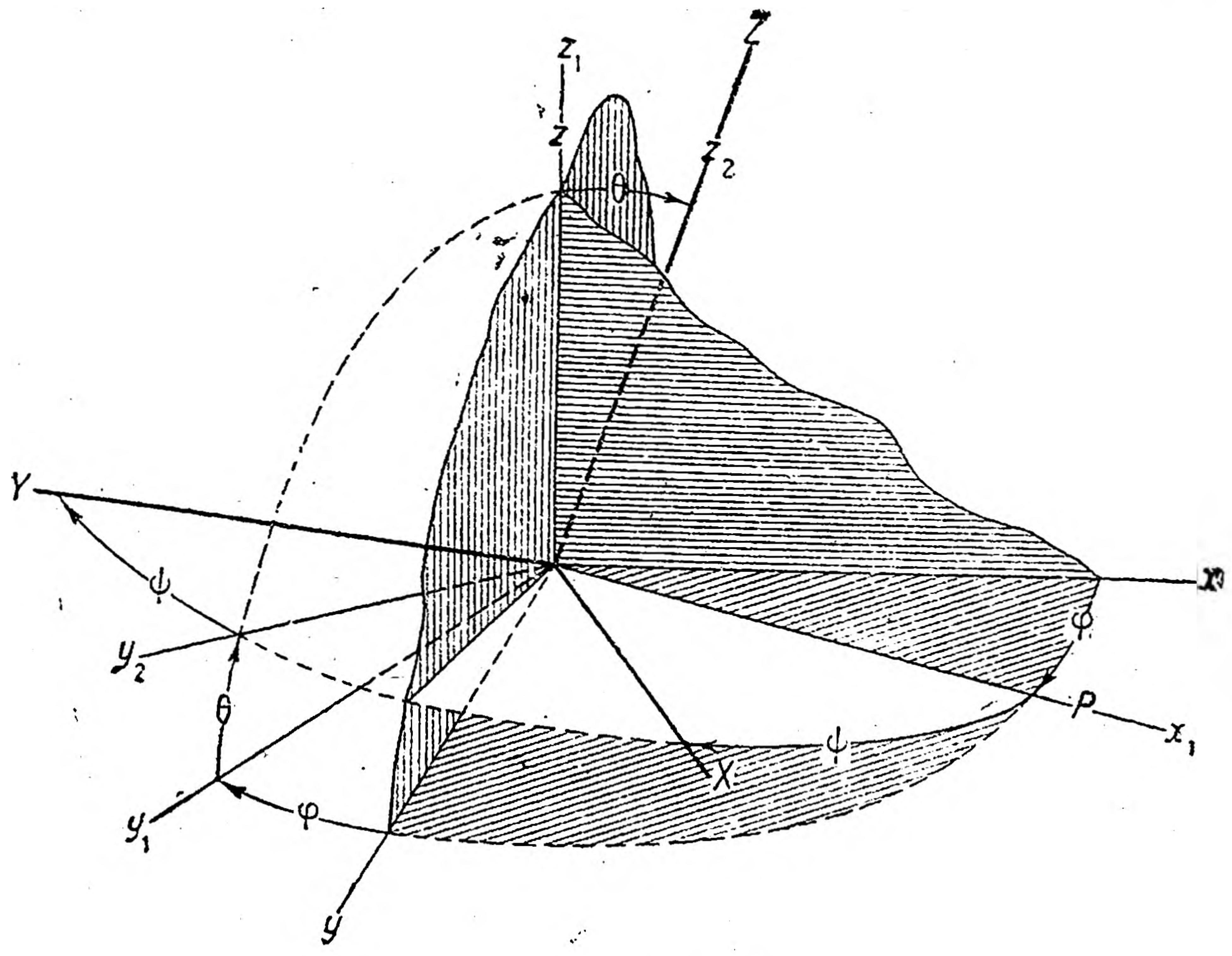
$$a_i^\alpha \cdot a_i^\alpha = a_i^\alpha \cdot b_i^\alpha = \Delta = 1.$$

Аналогичным образом для суммы произведений соответствующих элементов двух разных строк имеем:

$$a_p^\alpha a_q^\alpha = a_p^\alpha b_q^\alpha = 0 \text{ при } p \neq q.$$

7. Формулы Эйлера.

Выше говорилось о том, что девять коэфициентов линейного однородного преобразования координат, соответствующего повороту осей, зависят от трех существенных параметров; ниже мы получим так называемые формулы Эйлера, дающие выражения девяти таких коэфициентов через три параметра для случая, когда ортогональная тройка старых осей преобразуется в одноименную ортогональную тройку новых осей (например левая в левую). Условимся поворот на некоторый угол около оси, на которой отмечено положительное направление, считать поло-



Черт. 164.

жительным в сторону от левой руки к правой для наблюдателя, становящегося по оси головой в положительном направлении. Согласно этому условию, например, при повороте около вертикальной оси Oz наблюдателя надо поставить на плоскость xOy головой вверх, и поворот слева направо (от оси x-ов к оси y-ов) будет считаться положительным.

Пусть старая координатная тройка (ортогональная) будет $Oxyz$ (черт. 164), новая (тоже ортогональная) $OXYZ$; на прямой пересечения плоскостей xOy и XOY возьмем полупрямую OP так, чтобы наблюдатель, расположенный по OP (ногами к началу координат), видел ось Oz слева, а ось OZ справа, при этом угол от Oz до OZ назовем через θ: угол θ может изменяться от 0 до π. Обозначим далее через φ угол OP с осью Ox, а через ψ угол OX с осью OP; углы φ и ψ могут меняться от 0 до 2π. От старой системы к новой, очевидно, можно перейти тремя последовательными поворотами координатной тройки как целого: 1) сначала поворачиваем координатную тройку

$Oxyz$ около оси Oz на угол φ; получим новую координатную систему, назовем ее $Ox_1y_1z_1$, 2) затем поворачиваем тройку $Ox_1y_1z_1$ около оси $OP \equiv Ox_1$ на угол θ, получим вторую координатную тройку $Ox_2y_2z_2$, 3) наконец, тройку $Ox_2y_2z_2$ поворачиваем около оси $Oz_2 \equiv OZ$ на угол ψ, тогда получим тройку $OXYZ$. При каждом из этих поворотов одна из координат сохраняется, две же других преобразуются ортогональной подстановкой в *плоскости*; поэтому мы имеем следующие последовательные переходы:

$$\begin{aligned} z &= z_1 \\ x &= x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi \\ y &= x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2, \\ y_1 &= y_2 \cos\theta - z_2 \sin\theta, \\ z_1 &= y_2 \sin\theta + z_2 \cos\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= Z, \\ x_2 &= X\cos\psi - Y\sin\psi, \\ y_2 &= X\sin\psi + Y\cos\psi. \end{aligned}$$

Если исключить вспомогательные координаты, то получим формулы Эйлера в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)\,X - (\cos\varphi\sin\psi + \\ &\quad + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta)\,Y + \sin\varphi\sin\theta\cdot Z, \\ y &= (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta)\,X + (-\sin\varphi\sin + \\ &\quad + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta)\,Y - \cos\varphi\sin\theta\cdot Z, \\ z &= \sin\psi\sin\theta\,X + \cos\psi\sin\theta\,Y + \cos\theta\,Z, \end{aligned} \tag{37}$$

и здесь коэфициенты ортогональной подстановки выражены через три параметра, именно три угла поворота φ, ψ, θ.

Указанные формулы Эйлера, равно как и самое разложение перемещения тройки осей $OXYZ$ на три последовательных указанных поворота, применяются в механике при изучении движения твердого тела с одной неподвижной точкой.

Упражнения. 714. Составить формулы Эйлера преобразования координат для случая

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \psi = \frac{2\pi}{3}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

и проверить, что оно сохраняет сумму квадратов.

715. Хотя формулы преобразования координат Эйлера представляют собой *три* уравнения между старыми и новыми координатами точки и тремя параметрами преобразования, однако, если считать данными старые и новые координаты некоторой точки, то из этих уравнений три параметра поворота осей не могут быть определены. Разъяснить это обстоятельство аналитически и геометрически.

Указание. Параметры φ, ψ, θ не могут быть определены из трех уравнений (37), потому что эти *уравнения* относительно φ, ψ, θ *не будут независимы* между собой, ибо из них вытекает соотношение:

$$x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

не содержащее этих параметров.

С другой стороны, когда даны старые координаты (x; y; z) некоторой точки M и ее новые координаты (X; Y; Z), то мы можем построить две координатных ломаных $OQPM$ и $OQ'P'M'$, имеющих общий замыкающий отрезок OM; ломаную $OQ'P'M$ мы можем как целое вращать около оси OM, сохраняя тем самым значения старых и новых координат, но меняя относительное расположение старых и новых координатных осей. Отсюда следует, что значения старых и новых координат одной точки еще не определяют относительного расположения старых и новых осей.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

К § 1.

1. Что называется направляющими косинусами луча?

2. Какая зависимость существует между тремя направляющими косинусами луча? Показать, как она переходит в обычное соотношение в случае прямоугольной системы координат.

К § 2.

3. Что называется нормированными и ненормированными угловыми коэфициентами луча?

4. Каким образом направляющие косинусы луча определяются через его нормированные угловые коэфициенты, и обратно?

5. Какая зависимость существует между нормированными угловыми коэфициентами луча?

6. Как нормировать угловые коэфициенты луча?

7. Какой геометрический смысл имеют отношения коэфициентов при координатах общего уравнения плоскости, отнесенной к косоугольной системе координат?

К § 3.

8. Как выражается расстояние точки от начала по ее координатам?

9. Как выражается расстояние двух точек по их координатам?

10. Как определяются нормированные угловые коэфициенты или направляющие косинусы отрезка, соединяющего две точки, по их координатам?

К § 4.

11. Как определяется угол двух лучей: a) по их направляющим косинусам, b) по направляющим косинусам одного луча и нормированным угловым коэфициентам другого, c) по их (нормированным) угловым коэфициентам?

12. Каковы будут условия параллельности двух лучей?

13. Каково будет условие перпендикулярности двух лучей?

К § 5.

14. Как составляются формулы для преобразования координат, состоящего из переноса начала с сохранением направления координатных осей?

15. Как составляются формулы для преобразования координат, состоящего из поворота осей с сохранением начала?

16. От какого числа параметров зависит преобразование координат, состоящее из поворота осей с сохранением начала координат?

17. От какого числа параметров зависит общее преобразование одной системы координат в другую?

18. Какое значение имеет определитель из коэфициентов однородного преобразования координат?

К § 6.

19. Что называется ортогональной подстановкой?

20. Каково характерное свойство ортогональной подстановки?

21. Какие соотношения существуют между коэфициентами ортогональной подстановки? Сколько между этими соотношениями независимых между собой и какие из них вытекают как следствия предыдущих?

22. Какие значения имеют адъюнкты элементов ортогонального определителя?

23. Чему равен сам ортогональный определитель?

К § 7.

24. Какими углами определяется в формулах Эйлера перемещение одной координатной тройки относительно другой?

25. Как пишутся формулы Эйлера и что они дают?

Упражнения. 716. Показать, что общее преобразование координат не меняет расстояния двух точек.

717. Назовем через ω', ω'', ω''' координатные углы yOz, zOx, xOy, а через φ', φ'', φ''' — двугранные углы координатных плоскостей, тогда определитель Ω из косинусов координатных углов представится в одном из следующих видов:
$\Omega = \sin^2\omega'' \sin^2\omega''' \sin^2\varphi' = \sin^2\omega''' \sin^2\omega' \sin^2\varphi'' = \sin^2\omega' \sin^2\omega'' \cdot \sin^2\varphi'''$.

718. При указанных обозначениях доказать равенство:

$$\Omega = 4\sin\frac{\omega'+\omega''+\omega'''}{2}\sin\frac{\omega''+\omega'''-\omega'}{2}\sin\frac{\omega'''+\omega'-\omega''}{2}\sin\frac{\omega'+\omega''-\omega'''}{2}.$$

719. Каковы будут функции координат пары точек M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, не меняющие своего вида и значения при повороте осей координат? Сколько существует таких функций, не зависящих друг от друга?

Указание. Так как соотношений между старыми и новыми координатами двух точек будет шесть и они содержат *три* параметра преобразования, то число соотношений, не содержащих параметров, между координатами двух точек будет *три*. Геометрически очевидно, что этими тремя инвариантами будут: 1) квадрат расстояния первой точки от начала, 2) квадрат расстояния второй точки от начала и 3) квадрат расстояния между двумя точками.

720. Уравнение шара радиуса r с центром в точке $(a;\ b;\ c)$, отнесенного к косоугольной системе координат, напишется в виде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2(y-b)(z-c)\,\omega_1+ \\ +2(z-c)(x-a)\,\omega_2+2(x-a)(y-b)\,\omega_3=r^2. \qquad (38)$$

721. Найти условия, при которых общее уравнение 2-й степени относительно декартовых координат x, y, z косоугольной системы изображает шар; указать, как определить координаты его центра и радиус.

Указание. Общее уравнение 2-й степени:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+ \\ +2a_{34}z+a_{44}=0$$

изображает шар, если его коэфициенты пропорциональны коэфициентам уравнения (38). Если условия:

$$\frac{a_{11}}{1}=\frac{a_{22}}{1}=\frac{a_{33}}{1}=\frac{a_{23}}{\omega_1}=\frac{a_{31}}{\omega_2}=\frac{a_{12}}{\omega_3}$$

выполнены, то соотношения:

$$\frac{a_{11}}{1}=\frac{a_{14}}{-(a+b\omega_3+c\omega_2)}=\frac{a_{24}}{-(a\omega_3+b+c\omega_1)}=\frac{a_{34}}{-(a\omega_2+b\omega_1+c)}= \\ =\frac{a_{44}}{a^2+b^2+c^2+2bc\omega_1+2ca\omega_2+2ab\omega_3-r^2}$$

определят координаты его центра и радиус. При условии $a_{11} \neq 0$ для координат центра получатся конечные значения, ибо определитель из их коэфициентов в предыдущих уравнениях равен $\Omega \neq 0$.

722. Найти направляющие косинусы или угловые коэфициенты луча, перпендикулярного к двум лучам, заданным своими направляющими косинусами или угловыми коэфициентами.

723. Три луча, параллельные одной плоскости, удовлетворяют условию:

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0;$$

обратно, если одно из этих условий выполняется, то три луча параллельны одной плоскости.

Указание. Эти условия можно получить из указанного в предыдущей задаче условия перпендикулярности двух лучей. Развернув определитель левой части, мы сейчас же заметим, что каждое из данных условий выражает, что луч, перпендикулярный к двум из данных лучей, перпендикулярен и к третьему, откуда и получается обратная теорема.

724. Для общего уравнения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

в косоугольной системе координат нормирующим множителем будет выражение:

$$M = \frac{\sqrt{\Omega}}{\sqrt{(1-\omega_1^2)A^2+(1-\omega_2^2)B^2+(1-\omega_3^2)C^2+2(\omega_2\omega_3-\omega_1)BC+2(\omega_3\omega_1-\omega_2)CA+2(\omega_1\omega_2-\omega_3)AB}}.$$

725. Формулы Эйлера дают элементы ортогонального определителя через *тригонометрические* (трансцендентные) функции трех параметров, но можно для элементов ортогонального определителя (притом любого порядка) дать и рациональные выражения через независимые между собою параметры. Решение этой задачи, принадлежащее английскому геометру Кэли (Cayley), состоит в следующем. Возьмем косой определитель с равными между собой элементами по диагонали:

$$B = \begin{vmatrix} b & b_{12} & b_{13} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b & b_{23} \dots b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \dots b \end{vmatrix},$$

т. е. определитель, элементы которого удовлетворяют условиям:

$$b_{ik} = -b_{ki} \quad b_{ii} = b;$$

назовем его адъюнкты через B_{ik} и положим:

$$a_{ik} = \frac{2bB_{ik}}{B}, \quad a_{ii} = \frac{2bB_{ii}}{B} - 1.$$

Тогда определитель из элементов a_{ik} будет ортогональным определителем. В частности для $n = 3$ можем положить:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & \mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ -\mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix};$$

тогда ортогональный определитель будет:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{2(\nu-\lambda\mu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{2(\mu+\lambda\nu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ \dfrac{-2(\nu+\lambda\mu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{1+\mu^2-\lambda^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{2(\lambda-\mu\nu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ \dfrac{-2(\mu-\lambda\nu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{-2(\lambda+\mu\nu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} & \dfrac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \end{vmatrix}$$

726. Координаты $(x;\ y;\ z)$ и $(X;\ Y;\ Z)$ в формулах преобразования (27) можно относить к одной и той же системе координат, тогда эти формулы будут давать переход от одной точки M' $(X;\ Y;\ Z)$ фигуры к точке M $(x;\ y;\ z)$ другой фигуры, т. е. они будут давать „преобразование фигуры".

727. Преобразование фигуры или пространства, определяемого формулами (27) при условиях $\omega'_1 = \omega_1$, $\omega'_2 = \omega_2$, $\omega'_3 = \omega_3$ или при условии, что эта подстановка ортогональная дает поворот фигуры как целого около некоторой оси; найдите эту ось вращения.

Указание. Что преобразование (27) при условия $\omega'_1 = \omega_1$, $\omega'_2 = \omega_2$, $\omega'_3 = \omega_3$ или при условии, что эта подстановка ортогональная, дает *движение фигуры как целого,* ясно из того обстоятельства, что указанное преобразование не меняет расстояния двух любых точек.

Пусть для простоты наша подстановка (27) будет ортогональной: будем искать теперь точки, остающиеся неизменными при этом преобразовании; координаты этих точек $(x = X;\ y = Y;\ z = Z)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} (l_1-1)\,x + l_2 y + l_3 z &= 0, \\ m_1 x + (m_2-1)\,y + m_3 z &= 0, \\ n_1 x + n_2 y + (n_3-1)\,z &= 0. \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Третье из этих соотношений есть следствие двух первых, ибо, как легко проверить:

$$\begin{vmatrix} l_1-1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2-1 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Действительно, развертывая этот определитель и помня, что определитель ортогональной подстановки (одноименной) равен $+1$, мы получим:

$$-m_2 n_3 - l_1 n_3 - l_1 m_2 + (l_1 + m_2 + n_3) + n_1 l_3 + n_2 m_3 + m_1 l_2 = 0,$$

что выполняется тождественно в силу соотношений:

$$\begin{aligned} l_1 &= m_2 n_3 - m_3 n_2, \\ m_2 &= l_1 n_3 - l_3 n_1, \\ n_3 &= l_1 m_2 - l_2 m_1. \end{aligned}$$

Два первых же из указанных выше уравнений (α) относительно x, y, z определяют прямую, проходящую через начало координат. Итак, преобразование (27) есть такое движение фигуры как целого, при котором сохраняется неизменной некоторая прямая, проходящая через начало координат, а потому это движение есть поворот (вращение) фигуры около этой прямой.

Уравнениями оси вращения будут:

$$\frac{x}{n_1 + l_3} = \frac{y}{n_2 + m_3} = \frac{z}{n_3 - m_2 - l_1 + 1}.$$

Глава XVI.

Исследование общего уравнения поверхностей 2-го порядка.

Исследование общего уравнения 2-й степени между тремя декартовыми координатами x, y, z, уравнения, как мы будем говорить, поверхностей 2-го порядка, имеет своей задачей прежде всего установить общие свойства того геометрического места точек, которое изображается данным уравнением, поскольку эти свойства непосредственно вытекают из геометрического истолкования алгебраических особенностей данного уравнения. Попутно и в связи с этой первой задачей нами будет разрешен второй существенный вопрос о том, какие именно виды или типы геометрических мест могут изображаться уравнением 2-й степени относительно декартовых координат x, y, z при различных частных значениях коэфициентов уравнения.

Исследование покажет нам, что уравнение 2-й степени относительно декартовых координат x, y, z в зависимости от значений его коэфициентов может изображать только одно из нижеследующих геометрических мест: 1) пару плоскостей, 2) цилиндр или конус (2-го порядка), 3) поверхность одного из тех пяти типов (эллипсоид, однополостный или двуполостный гиперболоид, эллиптический или гиперболический параболоид), которые мы уже подробно изучали по их простейшим (каноническим) уравнениям.

Для исследования общего уравнения поверхностей 2-го порядка мы применим прием, аналогичный тому, которым мы пользовались для линий 2-го порядка на плоскости (гл. XII), а именно, мы будем рассматривать всевозможные прямые, проходящие через ту или другую точку пространства, и исследовать их пересечение с данною поверхностью. Предстоящее исследование будет во многих отношениях аналогично исследованию общего уравнения линий 2-го порядка, многие рассуждения будут повторением рассуждений, применявшихся там; все это позволит нам сделать изложение более сжатым и не развивать его во всех подробностях в каждом отдельном случае.

1. Общее уравнение.

Общее уравнение 2-й степени относительно координат x, y, z, изображающее поверхность 2-го порядка, будет иметь десять членов: 1) три члена с квадратами каждой из координат, 2) три члена с их произведениями попарно (всего шесть членов второго измерения), 3) три члена с первыми степенями координат и, наконец, 4) свободный член — член, не зависящий от координат.

Общее уравнение 2-й степени мы будем писать в следующем виде:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \qquad (1)$$

предполагая, что оно относится к какой-либо произвольной, хотя бы косоугольной системе координат.

Все коэфициенты обозначены одной и той же буквой a с двумя индексами (значками), соответствующими тем переменным, которые входят множителями в соответствующий член левой части.

Индекс 4 принят для членов первой степени и свободного члена ради симметрии при переходе к однородным координатам. В самом деле, если мы в уравнении (1) сделаем замену:

$$x\left|\frac{x}{t}\right., \quad y\left|\frac{y}{t}\right., \quad z\left|\frac{z}{t}\right.$$

и умножим затем уравнение на t^2, оно примет вполне симметричный вид с однородным обозначением всех коэфициентов:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}t^2+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_{12}xy+2a_{14}xt+ \\ +2_{24}yt+2a_{34}zt=0; \qquad (2)$$

полагая здесь $t=1$, легко перейти обратно к уравнению (1).

Левую часть уравнения (2) будем обозначать через $2F(x, y, z, t)$; половины частных производных от этой левой части по каждой из координат будут:

$$\begin{aligned} F'_x &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t, \\ F'_y &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t, \\ F'_z &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t, \\ F'_t &= a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t. \end{aligned} \qquad (3)$$

Между этими частными производными существует, как легко проверить, следующее тождественное соотношение:

$$xF'_x+yF'_y+zF'_z+tF'_t=2F(x, y, z, t), \qquad (4)$$

выражающее собой теорему Эйлера об однородных функциях.

Каждый раз как нам дается точка, принадлежащая поверхности второго порядка, мы, выражая, что ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности, получим одно соотношение между ее координатами и коэфициентами уравнения. Так как общее уравнение поверхности второго порядка содержит всего десять коэфициентов и определяется отношениями девяти из них к какому-либо десятому, то для определения поверхности второго порядка необходимо дать девять точек. Таким образом, вообще говоря, мы можем найти поверхность второго порядка, проходящую через девять данных точек; при некоторых частных расположениях данных девяти точек поверхность может оказаться, конечно, неопределенной.

Упражнения. 728. Составить уравнение поверхности 2-го порядка, проходящей через девять заданных точек:

(3; 0; 0), (—3; 0; 0); (0; 2; 0), (0; —2; 0), (0; 0; 1), (0; 0, —2),
(2; 1; 0), (2; —1; 1), (2; 1; —1).

729. Составить уравнение поверхности 2-го порядка, проходящей через девять точек:

(0; 0; 0), (2; 0; 0), (0; 1; 0), (3; 1; 0), (1; 3; 0), (0; 0; 1), (2; 0; 1),
(0; 1; 1), (3; 3; —2).

2. Перенос начала и его инварианты.

Перенесем начало координат, сохраняя направление осей, в какую-нибудь точку $(x_1; y_1; z_1)$; если обозначить новые координаты через X, Y, Z, то в общем уравнении поверхности второго порядка надо будет сделать подстановку:

$$\begin{aligned} x &= X + x_1, \\ y &= Y + y_1, \\ z &= Z + z_1, \end{aligned} \tag{5}$$

и оно примет вид:

$$\begin{gathered} a_{11}(X+x)^2 + a_{22}(Y+y)^2 + a_{33}(Z+z)^2 + 2a_{23}(Y+y)(Z+z) + \\ + 2a_{31}(Z+z)(X+x) + 2a_{12}(X+x)(Y+y) + 2a_{14}(X+x) + \\ + 2a_{24}(Y+y) + 2a_{34}(Z+z) + a_{44} = 0. \end{gathered}$$

Здесь индексы у координат x, y, z нового начала после подстановки в уравнение опущены. Развернем предыдущее уравнение по степеням новых текущих координат:

$$\begin{gathered} a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY + \\ + 2X(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + 2Y(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \\ + 2Z(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) + (a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}) = 0. \end{gathered}$$

Относительно преобразованного уравнения можно сделать несколько замечаний. Во-первых, от переноса начала коэфициенты членов второго измерения („старших членов“) не изменились; во-вторых, свободный член преобразованного уравнения равен левой части начального уравнения, в которую лишь вместо текущих координат подставлены координаты нового начала. Наконец, коэфициенты при первых степенях координат X, Y, Z суть частные производные от левой части начального уравнения, в которые опять вместо текущих координат подставлены координаты нового начала.

Таким образом преобразованное уравнение можно немного короче записать в виде:

$$\begin{gathered} a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY + \\ + 2XF'_x + 2YF'_y + 2ZF'_z + 2F = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Определитель четвертого порядка, составленный из всех коэфициентов уравнения поверхности:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

будем называть дискриминантом всех коэфициентов; он не меняет своего значения, если над уравнением поверхности произвести преобразование (5), соответствующее переносу начала координат с сохранением направления координатных осей. В самом деле, для преобразованного уравнения (6) дискриминант будет:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & F'_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & F'_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & F'_z \\ F'_x & F'_y & F'_z & 2F \end{vmatrix}.$$

Вычтем в нем из элементов последнего столбца элементы первого, умножив их на x, элементы второго, умноженные на y, и элементы третьего, умноженные на z; тогда получим:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ F'_x & F'_y & F'_z & F'_t \end{vmatrix};$$

при этом мы воспользовались выражением производных F'_x, F'_y, F'_z по формулам (3) и сооотношением (4), выражающим теорему Эйлера.

В полученном определителе сделаем аналогичное преобразование: из элементов последней строки вычтем элементы первой, умноженные на x, элементы второй, умноженные на y, и элементы третьей, умноженные на z; тогда:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель равен первоначальному, следовательно:

$$\Delta' = \Delta. \tag{8}$$

Обозначая коэфициенты преобразованного (при переносе начала) уравнения поверхности 2-го порядка через a'_{ik}, мы можем написать выражения этих новых коэфициентов через старые коэфициенты и параметры преобразования x_1, y_1, z_1 (т. е. координаты нового начала) в сдедующем виде:

$$\begin{gathered} a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{22} = a_{22}, \quad a'_{33} = a_{33}, \\ a'_{23} = a_{23}, \quad a'_{31} = a_{31}, \quad a'_{12} = a_{12}, \\ a'_{14} = F_{x_1}, \quad a'_{24} = F_{y_1}, \quad a'_{34} = F_{z_1}, \\ a'_{44} = 2F(x_1, y_1, z_1). \end{gathered} \tag{9}$$

Исключая из этих десяти уравнений три параметра преобразования x_1, y_1, z_1, мы получим семь соотношений между старыми и новыми коэфициентами, соотношений, не содержащих параметров преобразования, следовательно, инвариантных при любом переносе начала.

Шесть соотношений между старыми и новыми коэфициентами руавнения поверхности, не содержащих параметров преобразования, будут, очевидно:

$$a'_{11}=a_{11},\quad a'_{22}=a_{22},\quad a'_{33}=a_{33},$$
$$a'_{23}=a_{23},\quad a'_{31}=a_{31},\quad a'_{12}=a_{12},$$

далее мы только что доказали, что:

$$\Delta'=\Delta,$$

и это соотношение не содержит x_1, y_1, z_1, следовательно, оно и будет седьмым соотношением, которое получится исключением параметров преобразования x_1, y_1, z_1 из системы (9).

Все семь указанных соотношений имеют замечательный вид: каждое из них показывает, что некоторая функция старых коэфициентов равна такой же функции из соответствующих новых коэфициентов. Поэтому мы можем сказать, что эти функции не меняют своего вида и значения при любом переносе начала, т. е. являются инвариантами указанного преобразования.

Итак, уравнение поверхности 2-го порядка по отношению к преобразованию координат, соответствующему переносу начала, имеет семь инвариантов, именно шесть коэфициентов старших членов и дискриминант из всех коэфициентов:

$$\begin{array}{lll} i_1=a_{11}, & i_2=a_{22}, & i_3=a_{33}, \\ i_4=a_{23}, & i_5=a_{31}, & i_6=a_{12}, \\ & i_7=\Delta. & \end{array} \tag{10}$$

3. Полярное уравнение поверхности.

Преобразуем теперь уравнение (6) к полярным координатам, полюс которых находится в точке $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, т. е. положим в уравнении (6)

$$X=l\rho,\qquad Y=m\rho,\qquad Z=n\rho, \tag{11}$$

причем l, m, n будут, следовательно, нормированными угловыми коэфициентами луча, соединяющего полюс с точкой $(X;\ Y;\ Z)$. Уравнение (6) примет вид:

$$M\rho^2+2N\rho+R=0, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} M&=a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{23}mn+2a_{31}nl+2a_{12}lm,\\ N&=lF'_{x_1}=mF'_{y_1}+nF'_{z_1},\\ R&=2F(x_1,\ y_1,\ z_1). \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнение (12), как уравнение квадратное относительно ρ, показывает, что каждый луч, определяемый направлением $(l:m:n)$, пересекает поверхность вообще в двух точках (действительных или мнимых, различных или совпадающих).

Обозначим корни уравнения (12) через ρ_1 и ρ_2; это будут расстояния точек пересечения поверхности с рассматриваемым лучом от точки $(x_1;\ y_1;\ z_1)$; по свойству квадратного уравнения эти расстояния удовлетворяют условиям:

$$\rho_1+\rho_2=-\frac{2N}{M}, \quad \rho_1\rho_2=+\frac{R}{M}. \tag{14}$$

Упражнения. 730. Найти координаты точек пересечения прямой, определяемой уравнениями:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{1}$$

с поврхностью, заданной своим уравнением:

$$x^2+2y^2+3z^2+4yz-6zx+2x-8y=0.$$

731. Найти координаты точек пересечения прямой:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+1}{2}$$

с поверхностью:

$$5x^2+y^2+8z^2+6yz-2zx+2xy+4x+2y=0.$$

4. Исследование полярного уравнения.

Займемся теперь исследованием полярного уравнения поверхности и дадим предварительное геометрическое истолкование случаев, когда те или иные из его коэфициентов обращаются в нуль. В дальнейшем мы особо и подробнее остановимся на тех из этих случаев, которые дают наиболее интересные геометрические свойства как самой поверхности, так и связанных с ней точек, прямых или плоскостей.

Если старший *коэфициент* M уравнения (12) обращается в нуль, то один из корней полярного уравнения (12) бесконечен; следовательно, прямая, угловые коэфициенты $(l;\ m;\ n)$ которой удовлетворяют условию:

$$M=0,$$

или, подробнее, условию:

$$a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{23}mn+2a_{31}nl+2a_{12}lm=0, \tag{15}$$

встречает поверхность в бесконечно удаленной точке (другая же точка пересечения поверхности с этим лучом может быть на конечном расстоянии). Обратно, чтобы прямая некоторого направления пересекала поверхность в бесконечно удаленной точке, необходимо, чтобы угловые коэфициенты ее направления обращали в нуль старший коэфициент полярного уравнения, т. е. чтобы они удовлетворяли условию (15).

Когда выбранная прямая направления $(l:m:n)$ проходящая через точку $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ встречает поверхность в бесконечно удаленной точке, то всякая другая прямая, расположенная где угодно в пространстве, но параллельная первой, с ней будет пересекаться в одной бесконечно удаленной точке, принадлежащей первой прямой и лежащей на поверхности; таким образом все прямые, параллельные первой, будут также встречать поверхность в бесконечно удаленной точке, а потому положение точки M_1 несущественно [ее координаты и не входят в условие (15)]; характерным для пересечения прямых с поверхностью в бесконечно удаленной точке является направление этих прямых.

Направления прямых, встречающих поверхность в той или иной бесконечно удаленной точке, назовем *асимптотическими направлениями* данной поверхности.

Если обращается в нуль *средний коэфициент* N полярного уравнения, то его корни удовлетворяют условию:

$$\rho_1 + \rho_2 = 0,$$

т. е. равнопротивоположны. Это означает, что на выбранной прямой точка M_1 оказывается серединою между точками пересечения прямой с поверхностью. Обратно, для того чтобы хорда пересечения прямой с поверхностью в точке $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ делилась пополам, необходимо, чтобы

$$\rho_1 + \rho_2 = 0,$$

а следовательно:

$$N = 0.$$

Этот случай дает целый ряд геометрических следствий, которые мы рассмотрим подробно позднее.

Если обращается в нуль *свободный член* R полярного уравнения, то один из его корней будет нулем, расстояние, скажем ρ_1, точки M_1 до одной из точек поверхности, лежащих на выбранной прямой, равно нулю, значит, точка M_1 как раз и принадлежит поверхности. И на самом деле, условие

$$R = 0$$

обозначает, что

$$2F(x_1,\ y_1,\ z_1) = 0,$$

т. е. что точка M_1 принадлежит поверхности.

Разберем теперь случаи, когда два из коэфициентов полярного уравнения обращаются в нули; геометрическое истолкование этих случаев, очевидно, получится комбинированием по два случаев, разобранных выше. *Если* $N = 0$ *и* $R = 0$, то корни уравнения равнопротивоположны и один из них обращается в нуль, а потому и другой равен нулю, следовательно, обе точки пересечения прямой с поверхностью совпадают с точкой M_1. Выбранная прямая пересекает поверхность в двух совпадающих точках, т. е. касается поверхности. Обратно, если потребовать, чтобы прямая касалась поверхности в точке M_1, то она должна пересекать поверхность в двух точках, совпадающих с M_1 и уравнение (12) должно иметь два нулевых корня, следовательно, необходимо, чтобы:

$$N = 0, \qquad R = 0.$$

Если $M = 0$ *и* $R = 0$, то выбранная прямая имеет асимптотическое направление, а точка M_1 лежит на поверхности; следовательно, прямая встречает поверхность в бесконечно удаленной точке ($\rho_1 = \infty$) и в точке $M_1(\rho_2 = 0)$.

Если $M = 0$ *и* $N = 0$, то полярное уравнение может быть (после разделения его на ρ^2) написано в виде:

$$\frac{R}{\rho^2} = 0,$$

и оно имеет два равных бесконечных корня; следовательно, прямая касается поверхности в бесконечно удаленной точке. Такое толкование согласуется с соображениями, высказанными выше по поводу случаев, когда тот или другой из этих коэфициентов в отдельности обращается в нуль. В самом деле, $M=0$ означает, что прямая имеет одно из асимптотических направлений и встречает поверхность в бесконечно удаленной точке; если далее $N=0$, то точка M_1 будет серединою хорды пересечения, а раз одна точка пересечения бесконечно удаленная, то и другая также должна быть бесконечно удаленной; но на прямой одна бесконечно удаленная точка, поэтому мы должны считать, что в данном случае прямая встречает поверхность в двух совпавших бесконечно удаленных точках, короче, касается поверхности в бесконечно удаленной точке. Если считать, что точка M_1 дана, то условия $M=0$ и $N=0$ будут двумя уравнениями для определения $l:m:n$, причем одно из этих уравнений 2-й степени, другое линейное относительно угловых коэфициентов; следовательно, через каждую точку M_1 вообще проходят две прямых (действительных или мнимых), касающихся поверхности в бесконечно удаленных точках. Прямые, касающиеся поверхности в бесконечно удаленной точке, называются ее асимптотами, их параметры, следовательно, удовлетворяют условиям:

$$M=0, \qquad N=0.$$

Наконец, может случиться, что для координат x_1, y_1, z_1 выбранной точки M_1 и угловых коэфициентов $(l:m:n)$ направления луча, проведенного через точку M_1, *все три коэфициента* полярного уравнения обращаются в нули:

$$M=0, \quad N=0, \quad R=0, \tag{16}$$

тогда уравнение (12) будет удовлетворяться при любом ρ, т. е. любые точки выбранной прямой принадлежат поверхности, следовательно, вся прямая целиком лежит на поверхности. Обратим внимание на то обстоятельство, что прямая вообще определяется *четырьмя* существенными *параметрами*, здесь же, чтобы прямая целиком лежала на поверхности, она должна удовлетворять *трем условиям* (16). Отсюда следует, что на любой поверхности 2-го порядка существует бесчисленное множество прямых [зависящих от одного произвольного параметра, так как три остальных определятся через один параметр из условий (16)], целиком принадлежащих нашей поверхности. Поверхности, на которых имеется бесчисленное множество прямых, называются *линейчатыми поверхностями*. Таким образом из сказанного следует, что всякая поверхность 2-го порядка есть поверхность линейчатая (в том числе, например, и шар), однако для некоторых типов поверхностей 2-го порядка уравнения (16) могут не иметь действительных решений, и тогда прямые на поверхности (ее образующие) будут мнимые. Какие из поверхностей 2-го порядка имеют действительные прямолинейные образующие и какие имеют мнимые образующие, мы разберем позднее.

Сейчас мы остановимся более подробно на геометрическом и аналитическом исследовании некоторых из случаев, отмеченных выше.

5. Асимптотические направления.

Уравнение (12) имеет бесконечный корень, если его старший коэфициент обращается в нуль:

$$M=0,$$

или подробнее:

$$a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{23}mn+2a_{31}nl+2a_{12}lm=0. \qquad (15)$$

Лучи, имеющие направление, которое определяется угловыми коэфициентами $(l:m:n)$, удовлетворяющими условию (15), выше названы нами асимптотическими лучами (или асимптотическими направлениями) для данной поверхности. Так как три угловых коэфициента l, m, n связаны лишь одним условием (15), то асимптотических лучей существует бесчисленное множество; если мы будем проводить эти лучи через какую-нибудь точку, то получим поверхность, образованную прямыми, проходящими через одну точку, т. е. конус. Этот конус мы можем называть конусом асимптотических лучей (или направлений); его уравнение получим из условия (15), если с помощью формул (5) и (11) сделаем обратную подстановку:

$$l=\frac{x-x_1}{\rho}, \qquad m=\frac{y-y_1}{\rho}, \qquad n=\frac{z-z_1}{\rho}. \qquad (17)$$

В частности, например, уравнение конуса асимптотических направлений с вершиною в начале координат $(x_1=y_1=z_1=0)$ будет:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy=0, \qquad (15')$$

т. е. левая часть его уравнения представляет просто совокупность старших членов уравнения данной поверхности.

Таким образом, приравнивая нулю совокупность старших членов уравнения поверхности, мы получим уравнение конуса асимптотических направлений с вершиною в начале координат, т. е. конуса, образующие которого встречают поверхность в бесконечно удаленных точках.

Как мы видели в первой части курса, однородная функция с тремя переменными распадается на два линейных множителя, если ее дискриминант обращается в нуль, и обратно. Итак, чтобы левая часть однородного уравнения (15') распадалась на два линейных множителя, т. е. чтобы конус асимптотических направлений распадался на пару плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого уравнения (15') обращался в нуль:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0;$$

но этот дискриминант уравнения (15') по отношению к уравнению самой поверхности (1) является дискриминантом его старших коэфициентов. Следовательно, мы можем сказать: если конус асимптотических направлений поверхности распадается на пару плоскостей, то дискриминант старших коэфициентов уравнения поверхности обращается в нуль, и обратно, если $\delta = 0$, то конус асимптотических направлений распадается на пару плоскостей. Два конуса асимптотических направлений с вершинами в разных точках пространства по самому определению этих конусов содержат образующие соответственно одних и тех же направлений (асимптотических), т. е. образующие, соответственно параллельные; отсюда следует, очевидно, что если один из асимптотических конусов с вершиною в какой-либо точке пространства (например с вершиною в начале координат) распадается на пару плоскостей, то и всякий другой асимптотический конус (с вершиною в другой точке) для той же поверхности будет распадаться на пару плоскостей.

Посмотрим, в каком частном виде представится уравнение поверхности, если направления трех координатных осей принадлежат к числу асимптотических направлений поверхности.

Если ось x имеет асимптотическое направление, то ее угловые коэфициенты:

$$l = 1, \quad m = 0, \quad n = 0$$

должны удовлетворять условию (15), следовательно,

$$a_{11} = 0;$$

подобным же образом, если ось y принадлежит к числу асимптотических направлений, то:

$$a_{22} = 0,$$

и если ось z, то:

$$a_{33} = 0.$$

Очевидно и обратно, если $a_{11} = 0$, то уравнение (15) удовлетворяется при

$$l = 1, \qquad m = 0, \qquad n = 0,$$

т. е. ось x принадлежит к числу асимптотических направлений, и т. д.

Итак, если общее уравнение поверхности 2-го порядка не содержит члена с квадратом какой-либо кординаты, то ось, соответствующая недостающей координате, будет принадлежать к числу асимптотических направлений.

Упражнения. 732. Написать уравнение конуса асимптотических направлений с вершиною в точке (1; —1; 2) для поверхности:

$$2x^2 - y^2 + 3yz - 6zx + xy + 8x + 6y - 7 = 0$$

и установить, распадается ли он на пару плоскостей.

733. Написать уравнение конуса асимптотических направлений с вершиною в начале координат для поверхности:

$$x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 6yz + 4zx + 12xy - 10x + 8y + 14z - 17 = 0.$$

Будет ли этот конус распадаться на пару плоскостей?

734. Составить уравнение конуса асимптотических направлений с вершиною в точке (—2; 1; —3) для поверхности:

$$yz + zx + xy - 6x + 8y = 0.$$

735. Для поверхности, изображаемой уравнением:

$$-4x^2+12y^2+7z^2+8yz+10zx+2xy+2x+4y=0$$

найти асимптотические направления, лежащие в плоскости $z=0$.

Указание. Для определения таких направлений можно найти пересечение конуса асимптотических направлений, имеющего вершину в начале координат, с плоскостью $z=0$.

6. Центр плоского сечения.

Если обращается в нуль средний коэфициент полярного уравнения, именно:

$$N=0$$

или подробнее:

$$lF_{x_1}+mF_{y_1}+nF_{z_1}=0, \tag{18}$$

то, как мы уже говорили, хорда направления $(l:m:n)$ в точке $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ делится пополам. Такому условию (18) должны удовлетворять угловые коэфициенты $l:m:n$ хорд, чтобы последние в данной точке M_1 делились пополам. Обозначим координаты какой-нибудь произвольной точки на такой хорде через x, y, z, тогда направление хорды будет определяться угловыми коэфициентами:

$$l=\frac{x-x_1}{\rho},\qquad m=\frac{y-y_1}{\rho},\qquad n=\frac{z-z_1}{\rho}. \tag{17}$$

Следовательно, если мы в условии (18) вместо l, m, n подставим указанные их значения и при этом освободимся от знаменателя ρ, то мы получим уравнение геометрического места таких хорд, делящихся в точке M_1 пополам, в виде:

$$(x-x_1)F_{x_1}+(y-y_1)F_{y_1}+(z-z_1)F_{z_1}=0. \tag{18$'$}$$

Так как полученное уравнение 1-й степени относительно x, y, z, то оно изображает плоскость, и мы можем сказать, что *все хорды поверхности, которые в данной точке M_1 делятся пополам, лежат в некоторой плоскости* (черт. 165), изображаемой уравнением (18′). Мы пока предполагаем, что уравнение (18′) на самом деле существует, и координаты x_1, y_1, z_1 данной точки не обращают в нуль одновременно все три его коэфициента F_{x_1}, F_{y_1}, F_{z_1}.

Если в уравнение (18′) ввести однородные координаты, то оно примет вид:

$$(t_1x-x_1t)F_{x_1}+(t_1y-y_1t)F_{y_1}+(t_1z-z_1t)F_{z_1}=0,$$

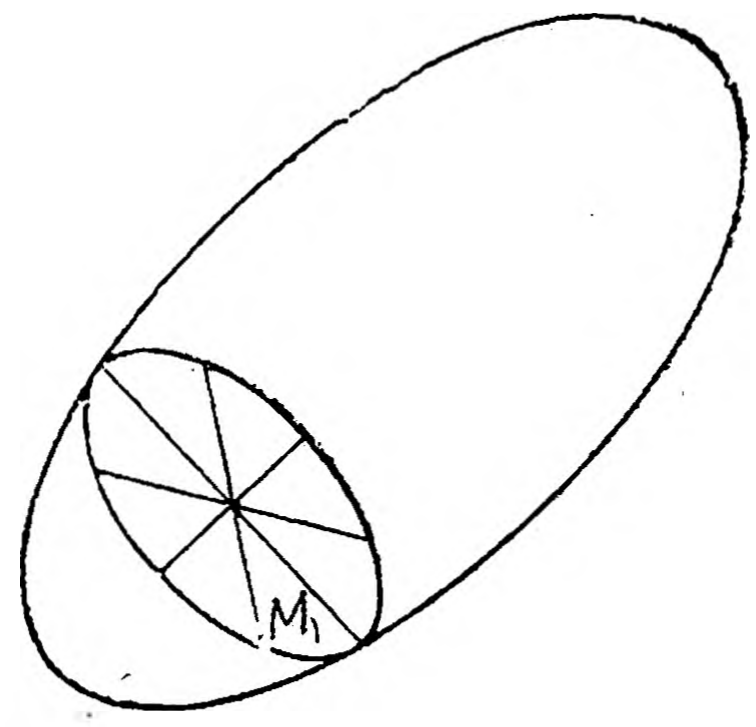
где уже F_{x_1}, F_{y_1}, F_{z_1} будут линейными однородными функциями координат $x_1:y_1:z_1:t_1$. Прибавив к обеим частям предыдущего уравнения тождественное равенство

$$t(x_1F_{x_1}+y_1F_{y_1}+z_1F_{z_1}+t_1F_{t_1})\equiv t2F(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1),$$

полученный результат можно написать в более симметричной форме, именно в виде:

$$xF_{x_1}+yF_{y_1}+zF_{z_1}+tF_{t_1}=2F(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)\frac{t}{t_1}. \tag{18$''$}$$

Таково будет уравнение той плоскости, в которой лежат все хорды поверхности, делящиеся в точке M_1 пополам. Какая-нибудь плоскость пересекает поверхность 2-го порядка по линии 2-го порядка, и хорды поверхности, лежащие в данной плоскости, будут хордами линии пересечения поверхности и плоскости; раз все хорды, лежащие в данной плоскости, в точке M_1 делятся пополам, значит, точка M_1 будет центром той линии 2-го порядка, которая получается в сечении поверхности рассматриваемой плоскостью.



Черт. 165.

Поэтому мы можем также сказать, что уравнение (18′) или (18″) изображает ту плоскость, для которой точка M_1 является центром кривой сечения. Этим результатом мы можем воспользоваться и для решения обратной задачи: *дана какая-либо плоскость своим уравнением:*

$$Ax + By + Cz + Dt = 0,$$

найти центр кривой пересечения этой плоскости с данной поверхностью 2-го порядка.

Обозначим через $x_1 : y_1 : z_1 : t_1$ координаты искомого центра сечения; в таком случае уравнение плоскости, имеющей центр сечения в точке $M_1 (x_1 : y_1 : z_1 : t_1)$, на основании предыдущего рассуждения будет вида (18″), и оно должно быть тождественно с данным уравнением, поэтому их коэфициенты пропорциональны:

$$\frac{F_{x_1}}{A} = \frac{F_{y_1}}{B} = \frac{F_{z_1}}{C} = \frac{F_{t_1} \left(- \frac{1}{t_1} 2F_1 \right.}{D};$$

здесь три уравнения, вообще говоря, достаточные для определения трех неизвестных координат x_1, y_1, z_1. Но при этом вместо того уравнения, которое получается сравнением одного из предыдущих отношений с последним, уравнения несколько сложного, мы можем взять более простое уравнение, выразив, что точка M_1 лежит в заданной плоскости и, стало быть:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Dt_1 = 0.$$

Итак, центр сечения поверхности заданною плоскостью определится из уравнений:

$$\frac{F_{x_1}}{A} = \frac{F_{y_1}}{B} = \frac{F_{z_1}}{C}, \tag{19}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Dt_1 = 0. \tag{19′}$$

Эти уравнения легко разрешить относительно $x_1 : y_1 : z_1 : t_1$, так как они линейны по отношению к указанным неизвестным.

Упражнения. 736. Для поверхности

$$4x^2 + 24y^2 + 20z^2 - 3yz + 64y + 48z = 0$$

составить уравнение плоскости, в которой точка (0; -1; -2) будет центром сечения.

737. Для поверхности:

$$5x^2+7y^2-3z^2+4yz+6zx-2xy+10x+8y+4z=0$$

составить уравнение плоскости, в которой точка (2; 3; -1) будет центром сечения.

738. Дана плоскость своим уравнением:

$$3x+5y-4z+11=0.$$

Найти центр линии ее пересечения с поверхностью:

$$x^2+2y^2-z^2+4yz-6zx+2xy+22x-2y+14z=0.$$

739. Дана плоскость своим уравнением:

$$x-y+3z=0.$$

Найти центр линии ее пересечения с поверхностью:

$$3x^2+5y^2+z^2+8yz+2zx+4xy+10x+18y+34z=0.$$

7. Касательная плоскость.

Если луч направления $l:m:n$, проходящий через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, касается поверхности, то должны выполняться условия:

$$N=0, \qquad R=0;$$

последнее из них выражает требование, чтобы точка M_1 принадлежала поверхности, и оно будет выполнено, как только мы возьмем точку M_1 заведомо на поверхности. Таким образом угловые коэфициенты $l:m:n$ луча, проходящего через некоторую точку M_1 поверхности и касающегося последней, должны удовлетворять одному условию $N=0$ или:

$$lF_{x_1}+mF_{y_1}+nF_{z_1}=0. \tag{20}$$

Если мы обозначим через x, y, z координаты какой-нибудь точки касательного луча, отличной от M_1, то

$$l=\frac{x-x_1}{\rho}, \qquad m=\frac{y-y_1}{\rho}, \qquad n=\frac{z-z_1}{\rho},$$

и, произведя эту замену в соотношении (20), мы получим, следовательно, уравнение геометрического места лучей, проходящих через точку M_1 и касательных к поверхности в виде:

$$(x-x_1)F_{x_1}+(y-y_1)F_{y_1}+(z-z_1)F_{z_1}=0. \tag{20'}$$

Это уравнение 1-й степени, оно, следовательно, изображает плоскость. Уравнение (20) существует, если все три коэфициента F_{x_1}, F_{y_1}, F_{z_1} не обращаются в нуль для координат x_1, y_1, z_1 точки M_1, лежащей притом на самой поверхности; если эти условия выполняются, то такая точка поверхности называется *обыкновенной*. Если же координаты x_1, y_1, z_1 точки M_1 удовлетворяют одновременно четырем условиям:

$$F_{x_1}=0, \quad F_{y_1}=0, \quad F_{z_1}=0, \quad 2F(x_1, y_1, z_1)=0,$$

то такая точка, если она существует на данной поверхности, называется двойной точкою поверхности. Соотношение (20) в этом случае выполняется для всяких значений l, m, n угловых коэфициентов луча, т. е. всякий луч (любого направления), проходящий через эту *особую* точку поверхности, пересекает поверхность в двух совпавших точках (отсюда и название „двойная“ точка). Вышенаписанные условия для двойной точки представляют собой четыре уравнения между тремя координатами x_1, y_1, z_1, а потому они могут быть выполнены не для всякой поверхности. Между прочим, вершина конуса, очевидно, играет роль такой двойной точки; равным образом, если поверхность распадается на пару плоскостей, то прямая пересечения этих плоскостей будет геометрическим местом таких двойных точек; наконец, если поверхность представляет собою пару совпадающих плоскостей, то каждая ее точка будет двойной точкой. Позднее мы покажем, что за исключением этих трех случаев поверхность 2-го порядка не имеет вовсе двойных точек.

Возвращаясь к геометрическому истолкованию уравнения (20′), мы можем сказать, *что все прямые, проходящие через какую-нибудь обыкновенную точку поверхности и касающиеся последней, лежат в некоторой плоскости, определяемой уравнением* (20′). Эта плоскость, содержащая все касательные прямые к поверхности в точке M_1, называется *касательною плоскостью* поверхности для заданной точки M_1. За исключением трех указанных выше случаев вырождения поверхности 2-го порядка, во всех остальных случаях она в каждой своей точке будет иметь единственную определенную касательную плоскость.

Из уравнения (20′) видно, что перпендикуляр к касательной плоскости через точку M_1 имеет направляющие косинусы, пропорциональные величинам:

$$F_{x_1} : F_{y_1} : F_{z_1};$$

этот перпендикуляр к касательной плоскости, проведенный через точку M_1, называется нормалью поверхности в точке M_1.

Уравнению (20′) можно дать другой вид; на основании тождества Эйлера для однородных функций имеем:

$$x_1F_{x_1} + y_1F_{y_1} + z_1F_{z_1} + t_1F_{t_1} = 2F(x_1, y_1, z_1, t_1),$$

но так как точка $(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит поверхности и

$$2F(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0,$$

то

$$x_1F_{x_1} + y_1F_{y_1} + z_1F_{z_1} + t_1F_{t_1} = 0;$$

это последнее равенство прибавим почленно к уравнению (20′), преобразованному к однородным координатам:

$$(t_1x - x_1t)F_{x_1} + (t_1y - y_1t)F_{y_1} + (t_1z - z_1t)F_{z_1} = 0;$$

тогда получим:

$$xF_{x_1} + yF_{y_1} + zF_{z_1} + t_1F_{t_1} = 0$$

или $(t = t_1 = 1)$ в более симметричном виде:

$$xF_{x_1} + yF_{y_1} + zF_{z_1} + tF_{t_1} = 0. \tag{20''}$$

Таково будет уравнение касательной плоскости в точке

$$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1),$$

принадлежащей заданной поверхности второго порядка.

Упражнения. 740. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности:

$$4x^2+24y^2+20z^2-3yz+64y+48z-146=0$$

в ее точке (1; —1; 2).

741. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности:

$$5x^2+7y^2-3z^2+4yz+6zx-2xy+10x+8y+4z-43=0$$

в ее точке (2; —1; 0).

742. Составить уравнения касательных плоскостей к поверхности:

$$3x^2+2y^2+z^2+4yz+2xy-3x-2y+14z-6=0$$

в ее точках пересечения с осью Ox.

8. Тангенциальное уравнение поверхности.

Пусть нам дана некоторая плоскость своим уравнением:

$$ux+vy+wz+pt=0. \tag{21}$$

Найдем, при каком условии она будет касаться данной поверхности 2-го порядка.

Предположим, что данная плоскость касается поверхности в точке $x_1:y_1:z_1:t_1$, тогда уравнение плоскости может быть написано в виде:

$$xF_{x_1}+yF_{y_1}+zF_{z_1}+tF_{t_1}=0,$$

и последнее должно быть тождественно с уравнением (21), следовательно:

$$\frac{F_{x_1}}{u}=\frac{F_{y_1}}{v}=\frac{F_{z_1}}{w}=\frac{F_{t_1}}{p}. \tag{22}$$

Обозначим каждое из этих отношений через s, тогда

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1+a_{14}t_1-su&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1+a_{24}t_1-sv&=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1+a_{34}t_1-sw&=0,\\ a_{41}x_1+a_{42}y_1+a_{43}z_1+a_{44}t_1-sp&=0. \end{aligned}\right\} \tag{22'}$$

Если мы сюда присоединим условие, что точка касания $(x_1:y_1:z_1:t_1)$ лежит в заданной плоскости (21):

$$ux_1+vy_1+wz_1+pt_1=0, \tag{23}$$

то исключение из пяти однородных уравнений (22) и (23) переменных $x_1:y_1:z_1:t_1:-s$ приводит к равенству нулю определителя этой системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & p\\ u & v & w & p & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{24}$$

Таково будет условие, при котором плоскость $u:v:w:p$ касается заданной поверхности. Отношения $u:v:w:p$ коэфициентов уравнения (21) плоскости, когда они заданы, вполне определяют плоскость; поэтому величины u, v, w, p могут быть названы однородными *координатами плоскости* или плоскостными координатами. Следовательно, уравнение (24) будет для заданной поверхности 2-го порядка уравнением поверхности в плоскостных координатах $u:v:w:p$. Так как в этом случае элементами, образующими поверхность, являются касательные плоскости (огибающие поверхность), то уравнение (24) называется *тангенциальным* уравнением поверхности, а самые координаты u, v, w, p отсюда получили название *тангенциальных координат* плоскости.

Уравнение (24) относительно тангенциальных координат $u:v:w:p$ 2-й степени, поэтому соответствующая поверхность, им изображаемая, называется поверхностью 2-го класса.

Рассмотрим пучок плоскостей, проходящих через две заданные точки M_1 и M_2:

$$\begin{aligned} ux_1+vy_1+wz_1+pt_1&=0,\\ ux_2+vy_2+wz_2+pt_2&=0 \end{aligned}$$

или, что то же самое, пучок плоскостей проходящих через прямую M_1M_2; если мы будем решать эти два линейные уравнения совместно с уравнением 2-й степени (24), то мы найдем в пучке две плоскости, касающиеся поверхности.

Подобно тому как поверхность называется поверхностью 2-го порядка, когда на любой прямой имеются две точки, принадлежащие поверхности, так и здесь поверхность будет поверхностью 2-го класса, если через всякую прямую проходят две плоскости, касающиеся поверхности. Указанное выше рассуждение показало нам, что поверхность 2-го порядка является вместе с тем поверхностью 2-го класса.

Окаймленный определитель (24) легко развертывается следующим образом[1] (изменяя знак левой части уравнения):

$$\begin{aligned} a^{11}u^2+a^{22}v^2+a^{33}w^2+a^{44}p^2+2a^{23}vw+2a^{31}wu+2a^{12}uv+2a^{14}up+\\ +2a^{24}vp+2a^{34}wp=0, \end{aligned} \tag{24'}$$

[1] В самом деле, развернем определитель D левой части уравнения (24) по элементам последнего столбца; мы получим:

$$D=u\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\\ u & v & w & p \end{vmatrix} - v\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\\ u & v & w & p \end{vmatrix} +$$

$$+w\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\\ u & v & w & p \end{vmatrix} - p\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ u & v & w & p \end{vmatrix};$$

затем, развертывая каждый из полученных определителей 4-го порядка по элементам последней его строки, мы получим однородный многочлен 2-й степени где через a^{ik} обозначена адъюнкта определителя Δ, соответствующая элементу a_{ik}, или алгебраическое дополнение элемента a_{ik}. Будем обозначать левую часть тангенциального уравнения через

$$2\Phi(u, v, w, p) = 0, \qquad (24'')$$

а через Φ_u, Φ_v, Φ_w, Φ_p — половины производных этой левой части по соответствующим аргументам u, v, w, p. Легко в таком случае определить координаты точки прикосновения данной плоскости (21); в самом деле, умножим уравнения (22′) соответственно на a^{11}, a^{21}, a^{31}, a^{41} и сложим их почленно, тогда:

$$\Delta x_1 = s(a^{11}u + a^{21}v + a^{31}w + a^{41}p)$$

или короче:

$$\Delta x_1 = s\Phi_u;$$

аналогичным образом получим:

$$\Delta y_1 = s\Phi_u,$$
$$\Delta z_1 = s\Phi_w,$$
$$\Delta t_1 = s\Phi_p,$$

откуда координаты точки касания заданной плоскости (21) определятся отношениями:

$$\frac{x_1}{\Phi_u} = \frac{y_1}{\Phi_v} = \frac{z_1}{\Phi_w} = \frac{t_1}{\Phi_p}. \qquad (25)$$

Последние соотношения взаимны соотношениям (22), определяющим координаты $u : v : w : p$ плоскости, касательной к поверхности по координатам точки прикосновения.

Если нам дано тангенциальное уравнение поверхности (24′), то по нему легко составить уравнение поверхности в точечных координатах. В самом деле, если мы из уравнений (23) и (25) исключим $u : v : w : p$, то получим уравнение поверхности в точечных коорди-

---

относительно переменных u, v, w, p, коэфициентами которого будут, очевидно, миноры M_{ik} определителя Δ, взятые с надлежащими знаками. Сообразим эти знаки для каждого из миноров M_{ik}; когда мы разлагаем определитель D по элементам последнего столбца, то при элементе номера i минор (т. е. один из определителей 4-го порядка, написанных выше) должен быть взят с множителем $(-1)^{i+5}$, когда же этот последний минор разлагается по элементам своей последней строки, то из него минор берется с множителем $(-1)^{k+4}$. Итак минор M_{ik} войдет коэфициентом соответствующего члена указанного многочлена с множителем $(-1)^{i+k+9} = (-1)^{i+k+1} = -(-1)^{i+k}$; на основании соотношения $a^{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ коэфициентами многочлена, полученного разложением D, будут $-a^{ik}$, при этом, так как $a^{ik} = a^{ki}$, то члены с парными произведениями координат u, v, w, p будут повторяться по два раза с одинаковыми коэфициентами, следовательно:

$$D = -a^{11}u^2 - a^{22}v^2 - a^{33}w^2 - a^{44}p^2 - 2a^{23}vw - 2a^{31}wu - 2a^{12}uv - 2a^{14}up - 2a^{24}vp - 2a^{34}wp.$$

Этот результат легко проверить, развертывая подробно указанные выше определители четвертого порядка по элементам их последней строки.

натах, именно:

$$\begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} & a^{14} & x \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} & a^{24} & y \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} & a^{34} & z \\ a^{41} & a^{42} & a^{43} & a^{44} & t \\ x & y & z & t & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

таким образом точечное уравнение поверхности по ее тангенциальному уравнению составляется тем же способом, как тангенциальное уравнение по точечному.

Упражнения. 743. Плоскость:

$$2x + 3y + 5 = 0$$

касается поверхности:

$$x^2 + 2yz + 4y + 6z + 8 = 0.$$

Найти координаты ее точки прикосновения.

744. Плоскость:

$$3x + y - 9z - 28 = 0$$

касается поверхности:

$$x^2 + 2y^2 + 4yz + 6zx + 2y - 4z + 23 = 0.$$

Найти координаты ее точки прикосновения.

745. Составить тангенциальное уравнение поверхности, заданной своим уравнением в декартовых координатах:

$$x^2 + 2yz + 4y + 6z + 8 = 0.$$

746. Для поверхности, заданной своим уравнением в тангенциальных координатах:

$$u^2 + 2v^2 + 4vw + 6wu + 2vp - 4wp + 23p^2 = 0,$$

составить уравнение в точечных координатах.

9. Описанный конус.

Если луч, проходящий через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и имеющий направление $l : m : n$, встречает поверхность в двух совпавших точках (касается), то корни полярного уравнения:

$$M\rho^2 + 2N\rho + R = 0 \qquad (12)$$

должны быть равными, что случится при условии:

$$N^2 - MR = 0. \qquad (26)$$

Обратно, при выполнении этого условия лучи направления $l : m : n$, проходящие через точку M_1, встречают поверхность в двух совпавших точках, т. е. касаются данной поверхности. Эти прямые, проходящие через заданную точку и касающиеся поверхности, образуют, очевидно, конус, который может быть назван конусом, описанным около данной поверхности из заданной точки M_1. Составим уравнение этого конуса по отношению к первоначальной системе координат с помощью обратной подстановки:

$$l=\frac{x-x_1}{\rho}, \quad m=\frac{y-y_1}{\rho}, \quad n=\frac{z-z_1}{\rho},$$

для чего мы уравнение (26) умножим на ρ^2; при этом нам придется преобразовать два из нижеследующих выражений:

$$\begin{aligned}\rho^2 M &= a_{11}(x-x_1)^2+a_{22}(y-y_1)^2+a_{33}(z-z_1)^2+\\&+2a_{23}(y-y_1)(z-z_1)+2a_{31}(z-z_1)(x-x_1)+\\&+2a_{12}(x-x_1)(y-y_1),\\ \rho N &= (x-x_1)F_{x_1}+(y-y_1)F_{y_1}+(z-z_1)F_{z_1}.\end{aligned}$$

Примем для краткости

$$\begin{aligned}P=xF_{x_1}+yF_{y_1}+zF_{z_1}+tF_{t_1}&=a_{11}xx_1+a_{22}yy_1+a_{33}zz_1+a_{44}tt_1+\\+a_{23}(yz_1+y_1z)&+a_{31}(zx_1+z_1x)+a_{12}(xy_1+x_1y)+\\+a_{14}(xt_1+x_1t)&+a_{24}(yt_1+y_1t)+a_{34}(zt_1+z_1t),\end{aligned} \tag{27}$$

считая при этом $t=t_1=1$; это выражение называется полярною формою по отношению к лѣвой части уравнения поверхности, оно симметрично и может быть также написано в виде:

$$P=x_1F_x+y_1F_y+z_1F_z+t_1F_t. \tag{27'}$$

Развертывая выражение $\rho^2 M$, получим:

$$\begin{aligned}\rho^2 M&=2F(x,\ y,\ z)+2F(x_1,\ y_1,\ z_1)-2a_{14}x-2a_{24}y-2a_{34}z-a_{44}-\\&-2a_{14}x_1-2a_{24}y_1-2a_{34}z_1-a_{44}-2a_{11}xx_1-2a_{22}yy_1-2a_{33}zz_1-\\&-2a_{23}(yz_1+y_1z)-2a_{31}(zx_1+z_1x)-2a_{12}(xy_1+x_1y),\end{aligned}$$

или короче

$$\rho^2 M=2F+2F_1-2P;$$

подобным образом

$$\rho N=P-2F_1.$$

Умножая условие (26) на ρ^2 и заменяя $\rho^2 M$ и ρN полученными для них выражениями, будем иметь:

$$(P-2F_1)^2-2F_1(2F+2F_1-2P)=0$$

или по раскрытии скобок и приведении:

$$P^2-2F_1\cdot 2F=0. \tag{28}$$

Таково уравнение конуса, образованного лучами, касательными к нашей поверхности и проходящими через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$.

Уравнение (28) конуса, описанного около данной поверхности, можно получить и более симметричным способом. Какая-нибудь точка на прямой, соединяющей точки M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и M $(x;\ y;\ z)$, будет иметь координаты

$$\frac{x_1+\lambda x}{1+\lambda}, \quad \frac{y_1+\lambda y}{1+\lambda}, \quad \frac{z_1+\lambda z}{1+\lambda}; \tag{29}$$

выразим, что эта точка лежит на данной поверхности 2-го порядка, т. е. напишем, что координаты (29) удовлетворяют уравнению поверхности (1):

$$\begin{aligned}a_{11}(x_1+\lambda x)^2+a_{22}(y_1+\lambda y)^2+a_{33}(z_1+\lambda z)^2+\\+2a_{23}(y_1+\lambda y)(z_1+\lambda z)+2a_{31}(z_1+\lambda z)(x_1+\lambda x)+\\+2a_{12}(x_1+\lambda x)(y_1+\lambda y)+2a_{14}(x_1+\lambda x)(1+\lambda)+\\+2a_{24}(y_1+\lambda y)(1+\lambda)+2a_{34}(z_1+\lambda z)(1+\lambda)+a_{44}(1+\lambda)^2=0.\end{aligned} \tag{30}$$

Развертывая это уравнение по степеням λ, мы получим уравнение:

$$2F(x_1, y_1, z_1)+2\lambda P+\lambda^2 2F(x, y, z)=0, \tag{30^1}$$

где P имеет значение, указанное формулой (27).

Уравнение (30′), будучи квадратным относительно λ, дает два значения для λ, каждое из которых определяет точку пересечения с поверхностью прямой, проходящей через точки M_1 и M. Если квадратное уравнение (30′) имеет равные корни, т. е. если

$$P^2-2F_1\cdot 2F=0, \tag{28}$$

то точки пересечения прямой M_1M с нашей поверхностью совпадают. Таким образом соотношение (28) есть уравнение геометрического места таких точек $M(x; y; z)$, для которых прямые M_1M являются касательными к нашей поверхности; следовательно, уравнение (28) есть уравнение конуса с вершиною в точке $M_1(x_1; y_1; z_1)$, описанного около данной поверхности 2-го порядка.

Если мы будем искать пересечение этого конуса с данною поверхностью, т. е. искать геометрическое место точек его прикосновения с поверхностью, то мы должны совместно решать уравнение (28) и уравнение поверхности

$$2F=0;$$

внеся это последнее условие в уравнение (28), найдем:

$$P^2=0;$$

это и показывает, что точки им общие будут двойными точками (точками касания). Итак, точки касания с поверхностью лучей, проведенных через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, удовлетворяют условию:

$$P=0; \tag{31}$$

Это уравнение 1-й степени, поэтому оно изображает плоскость; она называется полярною плоскостью точки M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ относительно данной поверхности.

Следовательно, точки прикосновения с поверхностью лучей, выходящих из точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, лежат в полярной плоскости, уравнение которой будет вида (31). Замечательно что эта плоскость действительна во всех случаях, хотя бы через точку $(x_1; y_1; z_1)$ и нельзя было провести лучей, касающихся данной поверхности в действительных точках, как то будет, например, для всех внутренних точек шара. Более подробно геометрические свойства этой плоскости будут нами разобраны в одной из ближайших глав.

Вернемся к общему уравнению (28) конуса, имеющего вершину в точке $(x_1; y_1; z_1)$ и описанного около данной поверхности 2-го порядка; в этом уравнении мы должны принять $t=t_1=1$.

Пусть теперь вершина конуса лежит на прямой с угловыми коэфициентами l, m, n, проходящей через начало координат; обозначая через d расстояние от начала координат до вершины конуса, мы можем положить:

$$x_1 = ld, \; y_1 = md, \; z_1 = nd,$$

и тогда уравнение конуса будет:

$$[d(lF_x + mF_y + nF_z) + F_t]^2 - 2F \cdot [d^2M + 2d(a_{14}l + a_{24}m + \\ + a_{34}n) + a_{44}] = 0,$$

где M представляет собою выражение, указываемое первою из формул (13). Разделим обе части полученного уравнения конуса на d^2; в таком случае уравнение примет вид:

$$\left(lF_x + mF_y + nF_z + \frac{F_t}{d}\right)^2 - \\ - 2F\left[M + \frac{2}{d}(a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n) + \frac{a_{44}}{d^2}\right] = 0.$$

Представим себе теперь, что вершина конуса по прямой направления $l:m:n$ неограниченно удаляется. В пределе (при $d = \infty$) предыдущее уравнение обратится в уравнение:

$$(lF_x + mF_y + nF_z)^2 - 2F(a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + \\ + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl + 2a_{12}lm) = 0. \qquad (32)$$

Последнее будет изображать описанный около данной поверхности конус с вершиною в бесконечно удаленной точке, находящейся на прямой направления $l:m:n$. Так как все образующие такого конуса (касательные к нашей поверхности) проходят через его вершину — бесконечно удаленную точку, то они все будут параллельны между собой и будут иметь направление $l:m:n$, т. е. описанный конус обращается в описанный цилиндр. Итак, уравнение (32) изображает описанный около данной поверхности цилиндр, образующие которого имеют направление, заданное угловыми коэфициентами $l:m:n$; так как уравнение (32) однородно относительно l, m, n, то эти угловые коэфициенты могут быть в нем и ненормированными.

Упражнения. 747. Составить уравнение конуса с вершиною в точке $(-1;\ 2;\ -3)$, описанного около поверхности:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4yz - 8x = 0.$$

748. Составить уравнение конуса с вершиною в точке $(2;\ -1;\ 1)$, описанного около поверхности:

$$3x^2 + 5y^2 + 7z^2 + 8yz + 4zx - 12xy - 4x + 2y = 0.$$

749. Составить уравнение плоскости, содержащей точки прикосновения конуса с вершиною в точке $(-2;\ -1;\ 3)$, описанного около поверхности:

$$x^2 + y^2 - 3z^2 + 4zx - 6xy + 2y + 8z = 0.$$

750. Составить уравнение плоскости, содержащей точки прикосновения конуса с вершиною в точке $(3;\ -2;\ -1)$, описанного около поверхности:

$$x^2 + 2yz + 4zx - 6xy + 10x + 12y - 14z + 13 = 0.$$

751. Составить уравнение цилиндра с образующими направления (1 : 2 : — 1), описанного около поверхности:

$$x^2 + 2y^2 + 4yz + 8zx + 2x - 10y = 0.$$

752. Составить уравнение цилиндра с образующими, параллельными оси Oz, описанного около поверхности:

$$3x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 8yz - 6zx + 10xy + 12x - 14y + 6z + 17 = 0.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

К § 1.

1. Сколько членов имеет левая часть общего уравнения поверхности 2-го порядка в декартовых координатах?

2. Как пишется общее уравнение поверхности 2-го порядка относительно декартовой системы координат?

3. Как напишется тождество Эйлера для многочлена, представляющего собой левую часть общего уравнения поверхности 2-го порядка (в однородных декартовых координатах)?

4. Каким числом точек может быть определена поверхность 2-го порядка?

К § 2.

5. Как напишется уравнение поверхности 2-го порядка после преобразования координат, состоящего из „переноса начала“?

6. Что называется дискриминантом из всех коэфициентов уравнения поверхности 2-го порядка?

7. Каковы будут инварианты уравнения поверхности 2-го порядка относительно преобразования координат, состоящего из „переноса начала“?

К § 3.

8. Как получается из общего уравнения поверхности 2-го порядка в декартовых координатах ее полярное уравнение и каковы будут коэфициенты последнего?

К § 4.

9. Какие направления для поверхности называются асимптотическими и каким условием связаны угловые коэфициенты такого направления?

10. Какое геометрическое значение имеет обращение в нуль среднего коэфициента полярного уравнения поверхности?

11. Какое геометрическое истолкование связывается с обращением в нуль той или другой пары коэфициентов полярного уравнения поверхности?

12. В каком смысле поверхности 2-го порядка могут быть названы линейчатыми поверхностями?

К § 5.

13. Что называется конусом асимптотических направлений поверхности 2-го порядка?

14. Как получить уравнение конуса асимптотических направлений поверхности с вершиною в начале координат?

15. При каком условии, связывающем коэфициенты уравнения поверхности, ее конус асимптотических направлений распадается на пару плоскостей?

16. Какие особенности имеет уравнение поверхности 2-го порядка в декартовых координатах, если та или другая из осей координат имеет асимптотическое направление для данной поверхности?

К § 6.

17. Как пишется уравнение геометрического места всех хорд поверхности 2-го порядка, делящихся в данной точке пополам? Что собой представляет это геометрическое место?

18. Какими уравнениями определяется центр сечения поверхности 2-го порядка заданной плоскостью?

К § 7.

19. Что называется касательною плоскостью поверхности в данной ее точке и каким уравнением изображается эта плоскость?

К § 8.

20. Как пишется условие прикосновения плоскости к поверхности 2-го порядка?

21. В каком смысле указанное условие называется тангенциальным уравнением поверхности?

22. Что называется классом поверхности?

23. Какого класса будет поверхность 2-го порядка?

К § 9.

24. Как пишется уравнение конуса с вершиною в данной точке, описанного около поверхности 2-го порядка, заданной своим уравнением в декартовых координатах?

25. Как пишется уравнение плоскости прикосновения поверхности с описанным около нее конусом, имеющим вершину в данной точке?

26. Как пишется уравнение цилиндра с образующими данного направления, описанного около поверхности 2-го порядка?

Упражнения. 753. Составить уравнение поверхности 2-го порядка, проходящей через девять точек, заданных своими координатами $(x_i;\ y_i;\ z_i)$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

754. Составить условие, при котором десять заданных своими координатами точек лежат на одной поверхности 2-го порядка.

755. Дано уравнение поверхности 2-го порядка:

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4yz - 6zx + 2xy + 4x - 4y + 8z - 3 = 0;$$

начало координат с сохранением направления осей переносится в такую точку, что в преобразованном к новой системе координат уравнении поверхности пропадают члены с первыми степенями координат x, y и свободный член. Найти преобразованное уравнение поверхности.

756. Найти точки пересечения поверхности:

$$yz + zx + xy - ax - ay + az + a^2 = 0$$

с каждою из координатных осей.

757. Касательная плоскость к конусу (или цилиндру) будет одна и та же вдоль ее образующей.

758. Может ли касательная плоскость поверхности 2-го порядка в какой-либо ее точке быть неопределенной?

759. Найти условие, при котором прямая

$$u_1x + v_1y + w_1z + p_1t = 0,$$
$$u_2x + v_2y + w_2z + p_2t = 0$$

касается поверхности 2-го порядка, заданной своим общим уравнением.

760. Составить тангенциальные уравнения поверхностей:

1) $\dfrac{x^2}{A} + \dfrac{y^2}{B} + \dfrac{z^2}{C} - 1 = 0,$

2) $\dfrac{x^2}{A} + \dfrac{y^2}{B} - 2z = 0.$

761. Составить уравнение цилиндра, описанного около поверхности 2-го порядка, заданной своим каноническим уравнением, если образующие цилиндра имеют направление с угловыми коэфициентами $l : m : n$.

Глава XVII.

Диаметральные плоскости, диаметры и центр поверхностей 2-го порядка.

Содержанием этой главы является *изучение симметрии* поверхностей 2-го порядка.

Под симметрией в обычном и притом общем смысле слова разумеют правильное чередование одинаковых частей в каком-либо целом. Геометрическая симметрия или симметрия фигуры (плоской или пространственной) является понятием сложным и трудно поддающимся точному и исчерпывающему определению. Наиболее простым случаем пространственной симметрии является симметрия пространственной фигуры относительно плоскости; если каждой точке фигуры соответствует другая точка той же фигуры так, что отрезок, соединяющий эти две точки, перпендикулярен к данной плоскости и делится ею пополам, то говорят, что фигура обладает *плоскостью ортогональной симметрии* (или главною плоскостью симметрии); если же каждые две соответственные точки фигуры лежат на параллельных прямых, одинаково наклоненных к некоторой плоскости и на одинаковых от нее расстояниях, то говорят, что фигура обладает *плоскостью косой симметрии.* Центром симметрии плоской фигуры называют такую точку плоскости, в которой делится пополам каждая хорда, соединяющая две соответственные точки фигуры; центром симметрии пространственной фигуры называют точку, в которой делятся пополам все хорды, каждая из которых соединяет две соответственные точки фигуры.

С помощью плоскостей симметрии или с помощью центров симметрии плоских параллельных сечений фигуры можно получить понятие об оси симметрии пространственной фигуры.

При исследовании поверхностей 2-го порядка мы получаем простейшие примеры плоскостей, осей и центра симметрии, которые называются диаметральными плоскостями, диаметрами и центром поверхности; в этом случае построение диаметральных плоскостей, диаметра и центра поверхности и их свойства связываются с делением хорд поверхности на равные части, иначе говоря, указанные свойства поверхности выводятся в этом случае как ее *метрические свойства*, т. е. свойства, связанные с измерением отрезков.

Те же самые свойства поверхности 2-го порядка, те же понятия о ее диаметральных плоскостях, диаметрах и центре можно получить, опираясь на полярные свойства поверхности, т. е. в сущности говоря, опираясь на ее гармонические (проективные свойства).

1. Диаметральные плоскости.

Возьмем условие:

$$N=0, \tag{1}$$

которое мы уже рассматривали и которое показывает, что точка M_1 с координатами x_1, y_1, z_1 является серединою хорды поверхности, хорды, имеющей направление, определяемое угловыми коэфициентами $l:m:n$. Это условие подробнее пишется в виде:

$$lF_{x_1}+mF_{y_1}+nF_{z_1}=0 \tag{1'}$$

и связывает угловые коэфициенты $l:m:n$ хорды и координаты x_1, y_1, z_1, точки M_1, ее середины.

Будем считать, что нам дается направление хорд $l:m:n$; тогда соотношение (1') будет уравнением геометрического места точек M_1, являющихся серединами хорд заданного направления.

Опустив индексы координат, уравнение это напишем в виде:

$$lF_x+mF_y+nF_z=0; \tag{2}$$

оно первой степени и изображает плоскость. Итак, *геометрическое место середин хорд поверхности, имеющих заданное направление $l:m:n$, есть плоскость*, изображаемая уравнением (2). Эта плоскость называется *диаметральною плоскостью* поверхности, *сопряженной* хордам направления $l:m:n$; диаметральная плоскость поверхности 2-го порядка будет, очевидно, плоскостью косой симметрии поверхности.

Уравнение (2) диаметральной *плоскости, сопряженной* хордам направления $l:m:n$, в развернутом виде напишется так:

$$l(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14})+m(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24})+n(a_{31}x+ \\ +a_{32}y+a_{33}z+a_{34})=0 \tag{2'}$$

или после перегруппировки членов:

$$(a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n)x+(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)y+ \\ +(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)z+(a_{41}l+a_{42}m+a_{43}n)=0. \tag{2''}$$

В частности каждое из уравнений:

$$F_x=0, \quad F_y=0, \quad F_z=0$$

получится из уравнения (2) диаметральной плоскости при специальном выборе значений $l:m:n$ угловых коэфициентов тех хорд, которые диаметральною плоскостью делятся пополам.

Так, при $l=1$, $m=0$, $n=0$ уравнение (2) принимает вид:

$$F_x=0;$$

следовательно, это уравнение изображает диаметральную плоскость, сопряженную хордам, параллельным оси x-ов; равным образом (при $l=0$, $m=1$, $n=0$) уравнение:

$$F_y=0$$

будет изображать диаметральную плоскость, сопряженную направлению оси y; наконец, уравнение:

$$F_z=0$$

изображает диаметральную плоскость, сопряженную оси z. Каковы бы ни были $l:m:n$, уравнение (2) во всяком случае удовлетворяется, если:

$$F_x=0, \quad F_y=0, \quad F_z=0. \tag{3}$$

Точка, координаты которой одновременно удовлетворяют этим трем условиям, называется центром поверхности. Итак, *центром поверхности называется точка, через которую проходят все диаметральные плоскости.*

Так как условие (1) или (2) обозначает, что хорда направления $l:m:n$ делится в точке $(x;\ y;\ z)$ пополам, а для центра, определяемого уравнениями (3), это условие (2) выполнено при любых $l:m:n$, то *центр является такой точкой, в которой все хорды поверхности делятся пополам.* Уравнения (3), определяющие центр, мы подробно исследуем в дальнейшем.

Упражнения. 762. Для поверхности, определяемой уравнением:

$$3x^2-5y^2+6z^2-8yz+12zx-18xy+10x+4y+6z=0,$$

составить уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению с угловыми коэфициентами $2:1:3$.

763. Для поверхности, заданной уравнением:

$$ayz+bzx+cxy-2bcx-2cay-2abz=0,$$

составить уравнение диаметральной плоскости, проходящей через две точки:

$$(a;\ -b;\ -c) \text{ и } (-a;\ b;\ c).$$

764. Для каждой из поверхностей:

1) $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}+\dfrac{z^2}{C}-1=0,$

2) $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}-2z=0$

составить уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению с угловыми коэфициентами $l:m:n$.

2. Диаметры.

Диаметром поверхности 2-го порядка назовем прямую пересечения двух каких-либо ее диаметральных плоскостей. Все диаметры поверхности, очевидно, проходят через центр поверхности. Возьмем две любых диаметральных плоскости, изображаемых уравнениями:

$$\begin{aligned} l'F_x+m'F_y+n'F_z&=0,\\ l''F_x+m''F_y+n''F_z&=0; \end{aligned} \tag{4}$$

совокупность этих двух уравнений, определяющих прямую пересечения двух диаметральных плоскостей, т. е. один из диаметров поверхности, может быть заменена равносильными им уравнениями:

$$\frac{F_x}{m'n''-m''n'}=\frac{F_y}{n'l''-n''l'}=\frac{F_z}{l'm''-l''m'}\,. \tag{4'}$$

Полагая для краткости

$$m'n''-m''n'=A,\quad n'l''-n''l'=B,\quad l'm''-l''m'=C,$$

мы можем уравнения (4′) диаметра написать в виде:

$$\frac{F_x}{A}=\frac{F_y}{B}=\frac{F_z}{C}\,. \tag{4''}$$

Допустим, что уравнение:

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5}$$

изображает некоторую диаметральную плоскость данной поверхности; если эта плоскость сопряжена хордам направления $l:m:n$, то она должна изображаться также уравнением (2″), а потому

$$\frac{a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n}{A}=\frac{a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n}{B}=\frac{a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n}{C}. \tag{6}$$

Таковы будут условия, определяющие угловые коэфициенты $l:m:n$ направления, сопряженного данной диаметральной плоскости (5). Назовем через x, y, z координаты какой-нибудь точки диаметра направления $l:m:n$ и через x_1, y_1, z_1 координаты центра поверхности; в таком случае

$$l=\frac{x-x_1}{\rho},\qquad m=\frac{y-y_1}{\rho},\qquad n=\frac{z-z_1}{c}.$$

Подставим эти значения l, m, n в предыдущие члены отношений (6); для первого из них, например, мы получим:

$$a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n=$$
$$=\frac{1}{\rho}\ (a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}-a_{11}x_1-a_{12}y_1-a_{13}z_1-a_{14})$$

или

$$a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n=\frac{1}{\rho}\,(F_x-F_{x_1});$$

но для координат x_1, y_1, z_1 центра поверхности мы имеем $F_{x_1}=0$, следовательно:

$$a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n=\frac{1}{\rho}\,F_x;$$

аналогично найдем:

$$a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n=\frac{1}{\rho}\,F_y,$$

$$a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n=\frac{1}{\rho}\,F_z.$$

Подставляя найденные выражения в соотношения (6), мы получим:

$$\frac{F_x}{A}=\frac{F_y}{B}=\frac{F_z}{C},$$

т. е. уравнения самого диаметра, сопряженного заданной диаметральной плоскости (5). Этим уравнениям (4″) можно дать и следующее геометрическое истолкование; в § 6 главы XVI мы видели, что центр сечения поверхности какою-либо заданною плоскостью (5) определяется уравнениями:

$$\frac{F_x}{A}=\frac{F_y}{B}=\frac{F_z}{C},$$

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Отбросим в этой системе последнее уравнение; тогда два первых уравнения, тождественные с уравнениями (4″), будут определять геометрическое место центров сечений поверхности параллельными плоскостями направления $A : B : C$, ибо в эти уравнения уже не войдет свободный член D уравнения плоскости. Итак, мы можем сказать, что *диаметр поверхности 2-го порядка является местом центров сечений поверхности параллельными плоскостями определенного направления.* Пусть диаметральная плоскость, проходящая через центр $(x_1; y_1; z_1)$ поверхности, дана своим уравнением:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{5'}$$

Возьмем какой-либо диаметр направления $l' : m' : n'$, лежащий в данной диаметральной плоскости (5'); обозначая координаты какой-либо его точки M' через x', y', z', мы получим:

$$l'=\frac{x'-x_1}{\rho'}, \quad m'=\frac{y'-y_1}{\rho'}, \quad n'=\frac{z'-z_1}{\rho'},$$

и так как этот диаметр по условию лежит в плоскости (5'), то его точка $M'(x', y', z')$ тоже лежит в плоскости (5'), и

$$Al'+Bm'+Cn'=0. \tag{7}$$

Подставляя в предыдущее условие значения (6) коэфициентов A, B, C через угловые коэфициенты $l : m : n$ сопряженного направления, мы получим:

$$\begin{aligned}(a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n)\,l'+(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)\,m'+\\+(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)\,n'=0;\end{aligned} \tag{7'}$$

это условие выражает, следовательно, что направление $l' : m' : n'$ параллельно диаметральной плоскости, сопряженной направлению $l : m : n$. Но это условие (7') симметрично относительно угловых коэфициентов обоих направлений и может быть написано также в виде:

$$\begin{aligned}(a_{11}l'+a_{12}m'+a_{13}n')\,l+(a_{21}l'+a_{22}m'+a_{23}n')\,m+\\+(a_{31}l'+a_{32}m'+a_{33}n')\,n=0,\end{aligned} \tag{7''}$$

что означает, что направление $l : m : n$ параллельно диаметральной плоскости, сопряженной направлению $l' : m' : n'$. Таким образом отношение между указанными двумя направлениями $l : m : n$ и $l' : m' : n'$ есть отношение взаимное и симметричное. Следовательно, если одно направление параллельно диаметральной плоскости, сопряженной другому направлению, то второе направление параллельно диаметральной плоскости, сопряженной первому направлению; два таких направления называются *направлениями сопряженными.* Если для указания направления луча брать диаметр, то согласно предыдущему определению мы можем сказать: два диаметра называются сопряженными, если хорды, параллельные одному из них, делятся пополам диаметральною плоскостью, содержащею второй диаметр (отношение сопряженности есть отношение взаимное).

Указанная сопряженность двух направлений будет характеризоваться условием (7'), или (7''), или, наконец, в развернутом виде условием:

$$\begin{aligned}a_{11}ll'+a_{22}mm'+a_{33}nn'+a_{23}(mn'+m'n)+a_{31}(nl'+n'l)+\\+a_{12}(lm'+l'm)=0.\end{aligned} \tag{7'''}$$

Если $l=l'$, $m=m'$, $n=n'$, то последнее соотношение обращается в условие:

$$a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{23}mn+2a_{31}nl+2a_{12}lm=0,$$

определяющее асимптотические направления; поэтому мы можем сказать, что асимптотические направления суть направления сами себе сопряженные.

Условимся для краткости последнее соотношение, выражающее собою сопряженность двух направлений $l:m:n$ и $l':m':n'$, символически писать в виде:

$$C(l,\ l')=0.$$

Решим теперь вопрос, можно ли выбрать три направления так, чтобы каждые два из них были между собой сопряжены.

Если угловые коэфициенты искомых трех направлений обозначить соответственно через $l:m:n$, $l':m':n'$, $l'':m'':n''$, то последние должны удовлетворять условиям:

$$C(l,\ l')=0,\ C(l',\ l'')=0,\ C(l'',\ l)=0. \tag{8}$$

Так как каждое из направлений определяется лишь двумя параметрами (двумя отношениями двух из угловых коэфициентов к третьему), то для нахождения шести параметров, определяющих три искомых направления, мы будем иметь три уравнения (8) и, следовательно, можем этим уравнениям удовлетворить самыми разнообразными способами.

Уравнениям (8) можно удовлетворить выбором трех направлений так: 1) первое направление $l:m:n$ выберем совершенно произвольно, 2) второе направление $l':m':n'$ выберем так, чтобы удовлетворялось *одно* условие:

$$C(l,\ l')=0,$$

3) в таком случае третье направление $l'':m'':n''$ будет вполне определено двумя условиями:

$$C(l,\ l'')=0,\ C(l',\ l'')=0.$$

Геометрически, очевидно, этот выбор можно сделать следующим образом: 1) первое направление $l:m:n$ выбираем совершенно произвольно; 2) за второе направление берем какое-нибудь направление $l':m':n'$, параллельное диаметральной плоскости, сопряженной с первым направлением $l:m:n$, 3) наконец, за третье направление берем направление прямой пересечения двух диаметральных плоскостей, из которых одна сопряжена первому направлению $l:m:n$, а другая сопряжена второму выбранному направлению $l':m':n'$.

Итак, существует бесчисленное множество троек направлений таких, что в каждой из этих троек два любых ее направления сопряжены друг другу.

Посмотрим в частности, при каких условиях две координатных оси, например ось x-ов и ось y-ов, будут иметь направления, сопряженные друг другу. Ось x-ов имеет угловые коэфициенты:

$$l=1,\quad m=0,\ n=0, \tag{9}$$

ось y-ов имеет угловые коэфициенты:

$$l' = 0, \quad m' = 1, \quad n' = 0; \tag{9'}$$

если эти две оси имеют сопряженные направления, то указанные угловые коэфициенты должны удовлетворять соотношению ($7'''$); последнее будет выполняться при условии:

$$a_{12} = 0. \tag{10}$$

Обратно, если условие (10) выполнено, то соотношению ($7'''$) можно удовлетворить, между прочим, значениями (9) и (9′), т. е. ось x-ов и ось y-ов будут иметь сопряженные направления.

Подобным образом, если:

$$a_{23} = 0,$$

то оси y и z будут сопряжены, наконец, если

$$a_{31} = 0,$$

то оси z и x будут сопряжены.

Итак, для того чтобы три координатные оси имели попарно сопряженные направления, необходимо (и достаточно) выполнение трех условий:

$$a_{23} = 0, \; a_{31} = 0, \; a_{12} = 0,$$

т. е. обращение в нуль всех трех коэфициентов при парных произведениях координат в общем уравнении поверхности.

Выше мы видели, что бесконечным числом способов можно выбрать такую тройку направлений, что каждые два из этих направлений будут сопряжены; если мы такую сопряженную тройку выберем за тройку координатных осей, то в этой новой координатной системе уравнение поверхности 2-го порядка напишется проще, именно в нем пропадут все члены с парными произведениями координат. Итак, выбирая подходящим образом направления координатных осей (именно взяв за оси одну из сопряженных троек), мы всегда можем добиться исчезновения в общем уравнении поверхности трех членов с парными произведениями координат. И обратно, каждый раз как в общем уравнении поверхности 2-го порядка будут отсутствовать члены с парными произведениями координат, это должно означать, что за оси координат выбраны три направления попарно сопряженные. Такая тройка попарно сопряженных направлений, вообще говоря, будет давать косоугольную систему координат.

Упражнения. 765. Составить уравнения диаметра поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} - \frac{2y}{b} - \frac{2z}{c} = 0,$$

проходящего через точку

$$(-a;\; b;\; c).$$

766. Для поверхности:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 8yz + 4x + 2y - 27 = 0$$

составить уравнения диаметра с угловыми коэфициентами $3:2:4$.

767. Относительно поверхности:

$$3x^2+5y^2+4z^2-6yz+8zx+4xy-2x-10y+8z=0$$

два диаметра с угловыми коэфициентами $2:1:-1$ и $2:-1:4$ являются сопряженными. Найти угловые коэфициенты третьего диаметра, сопряженного с каждым из данных.

768. Найти направления главных осей линии пересечения поверхности

$$x^2+4yz-4y-6z=0$$

с плоскостью

$$3x+y-z=0.$$

Система координат предполагается прямоугольной.

3. Главные плоскости.

Диаметральная плоскость поверхности называется ее главною плоскостью, если она перпендикулярна к сопряженному ей направлению, т. е. перпендикулярна к тем хордам поверхности, которые она делит пополам; следовательно, она будет главною плоскостью симметрии поверхности.

Уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению $l:m:n$, будет:

$$\begin{aligned}(a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n)\,x+(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)\,y+\\+(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)\,z+a_{41}l+a_{42}m+a_{43}n=0;\end{aligned} \qquad (2'')$$

здесь коэфициенты при координатах, т. е.

$$\begin{aligned}&a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n,\\&a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n,\\&a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n,\end{aligned}$$

будут величинами, пропорциональными косинусам углов с осями перпендикуляра к плоскости. Этот перпендикуляр к плоскости по условию параллелен хордам, направление которых определяется угловыми коэфициентами $l:m:n$. Косинусы углов с осями направления $l:m:n$, как известно, пропорциональны величинам (в косоугольной системе координат):

$$\begin{aligned}&l+m\omega_3+n\omega_2,\\&l\omega_3+m+n\omega_1,\\&l\omega_2+m\omega_1+n.\end{aligned}$$

Следовательно, хорды направления $l:m:n$ будут параллельны перпендикуляру к диаметральной плоскости, если выполняются условия:

$$\frac{a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n}{l+m\omega_3+n\omega_2}=\frac{a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n}{l\omega_3+m+n\omega_1}=\frac{a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n}{l\omega_2+m\omega_1+n}. \qquad (11)$$

Эти условия определяют, следовательно, угловые коэфициенты $l:m:n$ перпендикуляра к главной диаметральной плоскости.

Для разрешения системы (11) обозначим каждое из входящих в нее отношений через s, т. е. положим:

$$\frac{a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n}{l+m\omega_3+n\omega_2}=\frac{a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n}{l\omega_3+m+n\omega_1}=\frac{a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n}{l\omega_2+m\omega_1+n}=s;$$

в таком случае, приравнивая каждое из этих отношений s и освобождаясь от знаменателей, мы получим три уравнения:

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-s)\,l+(a_{12}-s\omega_3)\,m+(a_{13}-s\omega_2)\,n&=0,\\
(a_{21}-s\omega_3)\,l+(a_{22}-s)\,m+(a_{23}-s\omega_1)\,n&=0,\\
(a_{31}-s\omega_2)\,l+(a_{32}-s\omega_1)\,m+(a_{33}-s)\,n&=0.
\end{aligned}
\tag{11'}
$$

Три полученных однородных уравнения относительно $l:m:n$ будут давать для l, m, n решения, не равные нулю одновременно, если:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}-s & a_{12}-s\omega_3 & a_{13}-s\omega_2\\
a_{21}-s\omega_3 & a_{22}-s & a_{23}-s\omega_1\\
a_{31}-s\omega_2 & a_{32}-s\omega_1 & a_{33}-s
\end{vmatrix}=0.
\tag{12}
$$

Последнее уравнение с s называется характеристическим уравнением или уравнением Бине (Binet); это уравнение 3-й степени относительно s. Когда мы знаем какое-либо значение s, удовлетворяющее уравнению Бине, то для этого значения s три уравнения системы (11′) будут совместны, не считая решения $l=m=n=0$, и следовательно, два каких-либо уравнения этой системы определят нам угловые коэфициенты $l:m:n$ нормали некоторой главной плоскости.

В дальнейшем мы подробно исследуем характеристическое уравнение и, между прочим, докажем одно его свойство, весьма важное для разбираемой задачи, именно: характеристическое уравнение имеет всегда действительные корни (при действительных коэфициентах a_{ik} уравнения поверхности). Таким образом в систему (11′) нам придется подставлять всегда действительные значения для s, а так как эта система линейна относительно $l:m:n$, то она даст для $l:m:n$ всегда действительные значения. Следовательно, всякая поверхность 2-го порядка, изображаемая уравнением с действительными коэфициентами, имеет действительные главные плоскости.

4. Главные направления.

Назовем главным направлением направление, сопряженное (или перпендикулярное) к главной плоскости; следовательно, угловые коэфициенты $l:m:n$ главного направления будут определяться системой (11′), где s — один из корней характеристического уравнения.

Предположим, что характеристическое уравнение имеет два неравных корня s_1 и s_2; тогда первому из них s_1 будет соответствовать некоторое главное направление $l_1:m_1:n_1$, определяемое системой:

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-s_1)\,l_1+(a_{12}-s_1\omega_3)\,m_1+(a_{13}-s_1\omega_2)\,n_1&=0,\\
(a_{21}-s_1\omega_3)\,l_1+(a_{22}-s_1)\,m_1+(a_{23}-s_1\omega_1)\,n_1&=0,\\
(a_{31}-s_1\omega_2)\,l_1+(a_{32}-s_1\omega_1)\,m_1+(a_{33}-s_1)\,n_1&=0,
\end{aligned}
\tag{11$_1$}
$$

второму же s_2 будет соответствовать главное направление $l_2:m_2:n_2$, определяемое системой:

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-s_2)\,l_2+(a_{12}-s_2\omega_3)\,m_2+(a_{13}-s_2\omega_2)\,n_2&=0,\\
(a_{21}-s_2\omega_3)\,l_2+(a_{22}-s_2)\,m_2+(a_{23}-s_2\omega_1)\,n_2&=0,\\
(a_{31}-s_2\omega_2)\,l_2+(a_{32}-s_2\omega_1)\,m_2+(a_{33}-s_2)\,n_2&=0.
\end{aligned}
\tag{11$_2$}
$$

Подобно тому как мы для условия сопряженности двух направлений $l_1 : m_1 : n_1$ и $l_2 : m_2 : n_2$ ввели символическое обозначение

$$C(l_1,\ l_2) = 0,$$

будем условие ортогональности этих направлений, т. е. условие

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\,\omega_1 + (n_1 l_2 + n_2 l_1)\,\omega_2 + \\ + (l_1 m_2 + l_2 m_1)\,\omega_3 = 0,$$

записывать сокращенно в символическом виде:

$$P(l_1,\ l_2) = 0.$$

Умножим теперь уравнения системы (11_1) соответственно на l_2, m_2 n_2 и затем сложим их, тогда получим:

$$C(l_1,\ l_2) - s_1 P(l_1\ l_2) = 0. \tag{12$_1$}$$

Если же уравнения системы (11_2) умножить соответственно на l_1, m_1, n_1 и затем сложить, то получим:

$$C(l_1,\ l_2) - s_2 P(l_1,\ l_2) = 0. \tag{12$_2$}$$

Вычитая теперь из уравнения (12_1) уравнение (12_2), найдем:

$$(s_2 - s_1)\ P(l_1,\ l_2) = 0,$$

а так как по условию $s_2 \neq s_1$, то отсюда следует, что:

$$P(l_1,\ l_2) = 0, \tag{13}$$

но тогда любое из соотношений (12_1) или (12_2) дает:

$$C(l_1,\ l_2) = 0. \tag{14}$$

Соотношение (13) обозначает, что направления $l_1 : m_1 : n_1$ и $l_2 : m_2 : n_2$ ортогональны, соотношение (14) показывает, что те же направления сопряжены. Итак, мы получили следующее предложение: *два главных направления, соответствующих двум различным корням характеристического уравнения, суть направления между собой ортогональные и сопряженные.*

Отметим, между прочим, что предыдущее заключение остается правильным и в том случае, когда одна из систем, например система (11_2), будет неопределенной, т. е. будет содержать лишь одно условие, связывающее коэфициенты $l_2 : m_2 : n_2$. Посмотрим теперь, в каком случае система $(11')$ будет неопределенной в указанном смысле; если она содержит лишь одно условие, связывающее коэфициенты $l : m : n$, тогда определитель системы, т. е.

$$F(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} - s\omega_3 & a_{13} - s\omega_2 \\ a_{21} - s\omega_3 & a_{22} - s & a_{23} - s\omega_1 \\ a_{31} - s\omega_2 & a_{32} - s\omega_1 & a_{33} - s \end{vmatrix}$$

будет ранга 1, т. е. все его определители 2-го порядка обратятся в нули.

Составим производную по s от определителя $F(s)$:

$$F'(s) = -\begin{vmatrix} 1 & a_{12}-s\omega_3 & a_{13}-s\omega_2 \\ \omega_3 & a_{22}-s & a_{23}-s\omega_1 \\ \omega_2 & a_{32}-s\omega_1 & a_{33}-s \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11}-s & \omega_3 & a_{13}-s\omega_2 \\ a_{21}-s\omega_3 & 1 & a_{23}-s\omega_1 \\ a_{31}-s\omega_2 & \omega_1 & a_{33}-s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12}-s\omega_3 & \omega_2 \\ a_{21}-s\omega_3 & a_{22}-s & \omega_1 \\ a_{31}-s\omega_2 & a_{32}-s\omega_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Если $F(s)$ ранга 1, то все его определители 2-го порядка обращаются в нули и очевидно, $F'(s)$ обращается в нуль одновременно; это означает, что характеристическое уравнение

$$F(s) = 0$$

имеет по крайней мере два равных корня.

Итак, если система (11′) неопределенна и содержит лишь одно уравнение, то характеристическое уравнение имеет два равных корня.

Легко видеть и обратное: если два корня характеристического уравнения становятся равными, то соответствующие им главные направления становятся неопределенными. В самом деле, пока $s_1 \neq s_2$, мы видели, необходимо выполняется условие:

$$P(l_1, l_2) = 0; \qquad (13)$$

пусть теперь коэфициенты уравнения поверхности непрерывно изменяются так, что два корня s_1 и s_2 стремятся к совпадению; соответствующие им главные направления, *если бы они оставались определенными*, также стремились бы к совпадению, и условие (13) дало бы нам:

$$P(l_1, l_1) = 0,$$

т. е. предельное направление $l_1 : m_1 : n_1$ оказалось бы само себе перпендикулярным, что невозможно для направления, определяемого действительными угловыми коэфициентами. Итак, когда корни s_1 и s_2 в пределе становятся равными, соответствующие им главные направления становятся неопределенными.

Рассмотрим теперь случай, когда уравнения системы (11′) пропадают тождественно, т. е. когда все коэфициенты этой системы обращаются в нули:

$$\begin{aligned} a_{11} = s, \quad a_{12} = s\omega_3, \quad & a_{13} = s\omega_2, \\ a_{22} = s, \quad & a_{23} = s\omega_1, \\ & a_{33} = s. \end{aligned}$$

В этом случае уравнение поверхности может быть написано в виде:

$$s(x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\omega_1 + 2zx\omega_2 + 2xy\omega_3) + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

а в таком случае это уравнение будет изображать шар. Итак, система уравнений (11′) пропадает в том лишь случае, когда поверхность изображает шар; нетрудно сообразить, что в этом случае все три корня характеристического уравнения будут равны между собой. Пользуясь указанными соображениями, мы теперь можем доказать, что для всякой поверхности 2-го порядка всегда можно выбрать три главных направления так, что они будут попарно ортогональны и попарно сопряжены.

Если характеристическое уравнение имеет три корня s_1, s_2, s_3, различных между собой, то каждому из этих корней будет соответствовать свое главное направление $(l_1 : m_1 : n_1)$, $(l_2 : m_2 : n_2)$, $(l_3 : m_3 : n_3)$, причем эти главные направления, как соответствующие различным корням уравнения Бине, будут попарно ортогональны и сопряжены; в этом случае мы получим единственную тройку главных направлений, попарно ортогональных и сопряженных.

Пусть теперь уравнение Бине имеет три корня s_1, s_2, s_3, из которых два последних равны между собой $(s_2 = s_3)$; система (11′) даст для $s = s_1$ вполне определенное главное направление $l_1 : m_1 : n_1$, та же система для $s = s_2 = s_3$ будет неопределенной. В этом случае за направления $(l_2 : m_2 : n_2)$ и $(l_3 : m_3 : n_3)$ возьмем два каких-нибудь направления, между собой ортогональные и параллельные главной плоскости π, сопряженной направлению $(l_1 : m_1 : n_1)$; три выбранных направления будут попарно ортогональны, кроме того, первое и второе, а также первое и третье, попарно сопряжены. Остается доказать, что направления второе и третье будут сопряжены между собой.

Выберем оси координат Ox, Oy, Oz соответственно по первому, второму и третьему из указанных направлений; такая система координат будет прямоугольной, поэтому

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0;$$

кроме того, так как оси Ox и Oy, оси Ox и Oz попарно сопряжены, то в уравнении поверхности, отнесенной к выбранной системе координат, пропадут коэфициенты:

$$a_{12} = 0, \ a_{13} = 0.$$

В таком случае характеристическое уравнение напишется в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - s & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - s \end{vmatrix} = 0;$$

один из корней здесь будет $s_1 = a_{11}$, два других определятся уравнением:

$$(a_{22} - s)\ (a_{33} - s) - a_{23}{}^2 = 0$$

или

$$s^2 - s\ (a_{22} + a_{33}) + a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2 = 0.$$

Это последнее уравнение должно иметь равные корни[1] $(s_2 = s_3)$, следовательно:

$$(a_{22} + a_{33})^2 - 4\ (a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2) = 0$$

[1] Ниже будет доказано, что характеристическое уравнение инвариантно, а потому его корни сохраняют значения при любом преобразовании координат.

или

$$(a_{22}-a_{33})^2+4a_{23}{}^2=0.$$

Но последнее условие при действительных коэфициентах может выполняться только в случае:

$$a_{22}=a_{33}, \quad a_{23}=0,$$

полученное условие $a_{23}=0$ и показывает, что оси y и z имеют сопряженные друг другу направления. Наше предложение доказано: три выбранных направления образуют тройку направлений, попарно ортогональных и попарно сопряженных, при этом в данном случае ($s_1 \neq s_2 = s_3$) таких троек можно выбрать бесчисленное множество, ибо у нас определялось вполне лишь первое направление, за второе и третье были взяты два любых направления, друг другу ортогональных и параллельных плоскости, сопряженной первому направлению.

Если теперь система (11′) тождественно пропадает и характеристическое уравнение имеет три равных корня, то данное уравнение поверхности изображает шар; в этом случае три любых, попарно ортогональных направления, очевидно, и будут направлениями попарно сопряженными, ибо для шара хорды любого направления делятся пополам диаметральною плоскостью, им перпендикулярною.

Итак, во всех случаях мы для любой заданной поверхности можем выбрать три направления, попарно ортогональных и попарно-сопряженных; но если мы выберем оси координат по этим направлениям, мы получим такую прямоугольную систему координат, по отношению к которой уравнение поверхности получит упрощенный вид; именно в него не будут входить члены с парными произведениями координат, а следовательно, из членов второй степени останутся в уравнении лишь члены, содержащие квадраты координат.

5. Характеристическое уравнение.

Докажем теперь, что характеристическое уравнение с действительными коэфициентами имеет непременно действительные корни. Ограничимся случаем, когда поверхность отнесена к прямоугольной системе координат и, стало быть, $\omega_1=\omega_2=\omega_3=0$, и будем доказывать, что характеристическое уравнение не может иметь мнимых корней.

В самом деле, если характеристическое уравнение имеет мнимый корень:

$$s_1=p+qi,$$

то при действительных коэфициентах a_{ik} оно должно иметь другой мнимый корень, сопряженный первому:

$$s_2=p-qi.$$

Так как эти корни различны, то каждому из них будет соответствовать свое главное направление $(l_1:m_1:n_1)$ и $(l_2:m_2:n_2)$, причем для соответствующих угловых коэфициентов мы получим значения попарно сопряженные, так как они определяются из одной и той же системы (11′)

в которую поочередно вместо s подставляются сопряженные корни s_1 и s_2. Итак, эти угловые коэфициенты будут иметь вид:

$$l_1 = a_1 + ia_2,\ m_1 = b_1 + ib_2,\ n_1 = c_1 + ic_2,$$
$$l_2 = a_1 - ia_2,\ m_2 = b_1 - ib_2,\ n_2 = c_1 - ic_2,$$

при этом соответствующие главные направления должны быть ортогональны, т. е. должно выполняться условие:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Если мы в это соотношение подставим указанные значения угловых коэфициентов, то получим:

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 = 0,$$

что, конечно, не может выполняться, если a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 действительны и не равны нулю все одновременно. Итак, предположение, что характеристическое уравнение имеет мнимые корни, недопустимо и оно должно обязательно иметь действительные корни.

Указанное предложение мы доказали лишь для характеристического уравнения относительно прямоугольной системы; дальше мы покажем, что характеристическое уравнение инвариантно относительно любого преобразования координат и имеет, следовательно, одни и те же корни, по отношению к какой бы системе координат мы его ни писали.

Следовательно, уравнение Бине имеет всегда действительные корни [1].

6. Центр.

Центром поверхности 2-го порядка мы назвали такую точку, через которую проходят все диаметральные плоскости поверхности; все диаметры поверхности также проходят через ее центр. Вместе с тем центр является такой точкой, в которой делятся пополам все проходящие через нее хорды поверхности.

Мы видели, что центр поверхности 2-го порядка определяется уравнениями (3), или, что то же самое, уравнениями:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0. \end{aligned} \tag{3'}$$

Если эти уравнения имеют конечные и определенные решения, то последние с помощью определителей можно представить в следующем виде:

$$x = -\frac{\delta_1}{\delta},\quad y = -\frac{\delta_2}{\delta},\quad z = -\frac{\delta_3}{\delta}, \tag{14}$$

где

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

[1] Упражнения на решения характеристического уравнения и определение главных направлений поверхности будут даны позднее там, где они будут использованы для упрощения общего уравнения поверхностей 2-го порядка.

а δ_1, δ_2, δ_3 — те определители, которые получаются из δ заменой элементов первого, второго или третьего столбца свободными членами уравнений (3).

Определитель δ, составленный из коэфициентов лишь старших членов уравнения поверхности, будем называть сокращенно дискриминантом старших коэфициентов.

Упражнения. 769. Определить координаты центра поверхности:

$$3x^2+5y^2+6z^2+4yz-6zx+8xy+28x-22z+32=0.$$

770. Найти координаты центра поверхности:

$$ayz+bzx+cxy-bcx-cay-abz=0.$$

771. Найти геометрическое место центров семейства поверхностей, изображаемых уравнением:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}+\frac{(z-c)^2}{c^2}-1-\lambda\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right]=0,$$

где λ — переменный параметр, принимающий какое-либо определенное значение для каждой из поверхностей.

7. Исследование уравнений центра поверхности.

Возьмем уравнения, определяющие центр поверхности 2-го порядка в однородных координатах:

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t&=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t&=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t&=0. \end{aligned} \qquad (3'')$$

Характер решений этой системы зависит от ранга матрицы из всех коэфициентов системы:

$$D\equiv\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix}$$

и от ранга определителя системы $(3'')$ из коэфициентов при неизвестных

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

т. е. дискриминанта старших коэфициентов уравнения поверхности.

При ранге D, равном 3, и при $\delta \neq 0$ система $(3'')$ будет содержать три независимых между собой уравнения и для отношений $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ даст конечные определенные значения: поверхность при этих условиях будет иметь единственный определенный центр на конечном расстоянии.

При ранге D, равном 3, и при $\delta=0$ система $(3'')$ содержит три независимых между собой уравнения и будет удовлетворяться для последней однородной координаты только значением $t=0$; поверхность имеет определенный центр (в том смысле, что его координаты определяются тремя независимыми уравнениями), но этот центр будет в бесконечно удаленной точке.

При ранге D, равном 2, система (3″) содержит лишь два независимых между собой уравнения, поэтому их совокупность изображает прямую; поверхность будет иметь бесчисленное множество центров, расположенных на прямой, причем, если ранг δ равен 2, то эта прямая будет на конечном расстоянии, если же ранг δ равен 1, то прямая центров будет бесконечно удаленной.

Наконец, при ранге D, равном 1, система (3″) содержит лишь одно уравнение, поверхность имеет бесчисленное множество центров, расположенных в плоскости; эта плоскость центров будет на конечном расстоянии при ранге δ, равном 1, и она будет бесконечно удаленною плоскостью при ранге δ, равном 0.

Заключения эти, вытекающие из исследования системы трех линейных уравнений, мы можем резюмировать в следующей таблице:

Ранг D	Ранг δ	Место центров
3	3	Точка на конечном расстоянии
3	2	„ бесконечно удаленная
2	2	Прямая обыкновенная
2	1	„ бесконечно удаленная
1	1	Плоскость обыкновенная
1	0	„ бесконечно удаленная

Прежде чем давать более подробную таблицу, отметим следующие соображения. Из тождества

$$xF_x + yF_y + zF_z + tF_t \equiv 2F(x, y, z, t)$$

для точек, координаты которых удовлетворяют системе (3″), вытекает:

$$tF_t = 2F(x, y, z, t);$$

если $t = 0$ удовлетворяет системе (3″), то

$$2F(x, y, z, t) = 0,$$

т. е. всякая бесконечно удаленная точка места центров (будет ли это место точкой, прямой или плоскостью) принадлежит самой поверхности. В частности, если место центров будет бесконечно удаленной прямой, то последняя целиком принадлежит поверхности; то же самое будет, если место центров будет бесконечно удаленной плоскостью.

Если же мы имеем обыкновенную (не бесконечно удаленную) точку места центров, то для того чтобы:

$$2F(x, y, z, t) = 0,$$

т. е. чтобы точка принадлежала самой поверхности, необходимо, чтобы:

$$F_t = 0.$$

Итак, чтобы обыкновенная точка места центров принадлежала поверхности, необходимо, чтобы уравнение $F_t=0$ было совместно с уравнениями системы (3″); если потребовать, чтобы всякая обыкновенная точка места центров принадлежала поверхности, то уравнение $F_t=0$ должно быть следствием системы уравнений (3″), а потому ранг матрицы, составленной из коэфициентов четырех уравнений:

$$F_x=0, \quad F_y=0, \quad F_z=0, \quad F_t=0,$$

т. е. определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

не должен превышать ранга матрицы D.

Если поверхность имеет центр на конечном расстоянии и лежащий на самой поверхности, то:

$$F_x=0, \quad F_y=0, \; F_z=0, \quad 2F=0; \tag{15}$$

перенеся начало координат в эту точку, мы получим для поверхности однородное уравнение:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy=0, \tag{16}$$

изображающее конус. Система (15), как замечено выше, может быть для обыкновенной точки заменена системой четырех совместных уравнений:

$$F_x=0, \quad F_y=0, \quad F_z=0, \quad F_t=0, \tag{15'}$$

а потому

$$\Delta=0.$$

Обратно, если $\Delta=0$, то уравнения (15′) будут совместны, не считая решения $x=y=z=t=0$, а тогда уравнение поверхности выбором начала может быть приведено к виду (16), т. е. будет изображать конус.

Итак, условия: „D ранга 3, $\delta \neq 0$, $\Delta=0$“ характеризуют конус; при этом ранг Δ здесь не может быть меньше 3, так как среди его миноров находятся все определители матрицы D.

Пусть далее поверхность имеет прямую центров на конечном расстоянии, ей не принадлежащую; примем две какие-либо плоскости, проходящие через прямую центров, за плоскости:

$$x=0 \text{ и } y=0,$$

тогда уравнения (3″), определяющие место центров, должны быть равносильны системе этих двух уравнений и, следовательно, могут быть лишь линейными их комбинациями, поэтому они не должны содержать ни членов с z, ни членов с t, так что

$$a_{13}=a_{14}=0,$$
$$a_{23}=a_{24}=0,$$
$$a_{33}=a_{34}=0.$$

Что касается уравнения

$$F_t = a_{44}t = 0,$$

то раз прямая (обыкновенная) не принадлежит к поверхности, то оно не должно ни пропадать, ни быть следствием уравнений, определяющих прямую центров, а потому

$$a_{44} \neq 0.$$

Уравнение поверхности при этим условиях приводится к виду:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{44} = 0 \tag{17}$$

и изображает эллиптический или гиперболический цилиндр, ибо

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0;$$

в противном случае система уравнений

$$\begin{aligned} F_x &\equiv a_{11}x + a_{12}y = 0, \\ F_y &\equiv a_{21}x + a_{22}y = 0, \\ F_z &\equiv 0 \qquad\qquad\;\; = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

свелась бы к одному уравнению. Итак, поверхность, имеющая местом центров обыкновенную прямую, не принадлежащую поверхности, представляет собой либо эллиптический, либо гиперболический цилиндр.

Если поверхность имеет местом центров обыкновенную прямую, принадлежащую самой поверхности, то в предыдущем рассуждении мы должны внести лишь одно изменение: теперь уравнение:

$$F_t = a_{44}t = 0$$

должно быть или следствием уравнений, определяющих центр, или пропадать тождественно; следствием уравнений (18) оно быть не может, так как эти уравнения не содержат t, а потому оно должно пропадать тождественно, и следовательно,

$$a_{44} = 0;$$

но тогда уравнение (17) будет изображать пару плоскостей (непараллельных), пересекающихся по оси z, т. е. по прямой центров. Обращаясь к любому расположению координатных плоскостей, мы скажем, что этот случай характеризуется тем, что присоединение к системе (содержащей два независимых уравнения):

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0$$

уравнения

$$F_t = 0$$

не повышает ранга системы. Следовательно, когда каждый из рангов D, δ, Δ равен 2, поверхность, изображаемая данным уравнением, распадается на пару непараллельных плоскостей.

Пусть теперь место центров будет бесконечно удаленной прямой, уравнения системы (3″) будут изображать параллельные между собой плоскости; возьмем какую-нибудь плоскость им параллельную (или одну из них) за координатную плоскость $z = 0$, тогда система (3″)

должна быть равносильна уравнениям:

$$z=0, \quad t=0,$$

а потому

$$\begin{aligned} a_{11}&=a_{12}=0,\\ a_{21}&=a_{22}=0,\\ a_{31}&=a_{32}=0. \end{aligned}$$

Сама система ($3''$) в этом случае будет:

$$\begin{aligned} F_x &\equiv a_{14}t=0,\\ F_y &\equiv a_{24}t=0,\\ F_z &= a_{33}z+a_{34}t=0, \end{aligned}$$

и так как она должна содержать два независимых уравнения, то

$$a_{33} \neq 0$$

и, кроме того, по крайней мере один из коэфициентов, a_{14} или a_{24}, отличен от нуля. Уравнение поверхности будет в этом случае:

$$a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,$$

и оно изображает параболический цилиндр; в самом деле, когда $a_{14} \neq 0$ или $a_{24} \neq 0$, то плоскость

$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

во всяком случае не параллельна плоскости $z=0$, а потому она может быть взята за вторую координатную плоскость, скажем $x'=0$, тогда уравнение поверхности будет вида:

$$a_{33}z^2+2a'_{14}x'=0.$$

Итак, если место центров есть бесконечно удаленная прямая, то поверхность будет параболическим цилиндром.

Предположим далее, что место центров есть обыкновенная плоскость, не принадлежащая поверхности; возьмем ее за координатную плоскость

$$z=0;$$

к такому уравнению должна свестись система ($3''$), а потому

$$\begin{aligned} a_{11}&=a_{12}=a_{14}=0,\\ a_{21}&=a_{22}=a_{24}=0, \qquad a_{33} \neq 0.\\ a_{31}&=a_{32}=a_{34}=0, \end{aligned}$$

Так как место центров не принадлежит поверхности, то уравнение

$$F_t=a_{44}t=0$$

не должно пропадать (или быть следствием уравнения $z=0$), поэтому

$$a_{44} \neq 0.$$

Уравнение поверхности при этих условиях будет:

$$a_{33}z^2+a_{44}=0,$$

и оно изображает пару параллельных, не совпадающих плоскостей. Обращаясь к общей координатной системе, мы можем характеризовать этот случай тем, что, присоединяя к системе (3″) уравнение

$$F_t = 0,$$

мы ранг системы повышаем на единицу, следовательно, в этом случае ранг Δ будет 2. Когда же местом центров будет плоскость, принадлежащая поверхности, в предыдущем рассуждении отпадает условие $a_{44} \neq 0$, уравнение поверхности будет:

$$a_{33}z^2 = 0,$$

и оно изображает пару совпавших плоскостей. Здесь ранг Δ одинаков с рангом D и равен единице.

Наконец, когда местом центров будет бесконечно удаленная плоскость, система (3″) должна сводиться к одному уравнению:

$$t = 0,$$

а потому

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0,$$
$$a_{21} = a_{22} = a_{23} = 0,$$
$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0.$$

Уравнение поверхности будет:

$$2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0,$$

и оно изображает пару плоскостей, одна из которых будет бесконечно удаленная.

Полученные результаты сведены в таблице, приведенной на стр. 153. Более подробное различение поверхностей, центральных или без центра, поверхностей цилиндрических будет указано в дальнейшем на основании некоторых других дополнительных признаков.

Упражнения. 772. Определить характер места центров для каждой из поверхностей:

1) $x^2 - y^2 + z^2 - yz + 2xy - 2x + y - 2z + 1 = 0,$
2) $x^2 + 2y^2 + 3yz - 2xy - 6x + 7y + 6z + 7 = 0,$
3) $4x^2 + 3y^2 + z^2 - 4zx + y - 3z - 2 = 0.$

773. Определить характер места центров для каждой из поверхностей:

1) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6x - 12y = 0,$
2) $x^2 - yz - zx + xy + y + z - 1 = 0,$
3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2zx - 2xy + x - 2y + z = 0.$

774. Что изображает каждое из последующих уравнений:

1) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 12yz - 6zx + 4xy + x + 2y - 3z - 12 = 0,$
2) $9x^2 + y^2 + 16z^2 - 8yz + 24zx - 6xy + 30x - 10y + 40z + 25 = 0.$

775. Какую поверхность изображает каждое из следующих уравнений:

1) $5x^2 + 10y^2 + 17z^2 - 26yz - 4zx + 2xy + 18x - 12y - 62z + 26 = 0,$
2) $13x^2 + 5y^2 + 17z^2 + 14yz + 20zx + 16xy - 20x - 18y - 78z + 13 = 0,$
3) $x^2 + 2y^2 + 3yz - 2xy - 6x + 7y + 6z + 7 = 0,$
4) $16x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 30yz + 24zx - 40xy - 32x + 40y - 24z - 84 = 0,$
5) $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2x + y - 2z + 1 = 0,$
6) $25x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12yz - 20zx + 30xy + 60x + 36y - 24z + 36 = 0,$
7) $x^2 - yz - zx + xy + y + z - 1 = 0,$
8) $9x^2 + 25y^2 + 16z^2 - 40yz + 24zx - 30xy + 2x - 5y + 36z - 11 = 0.$

Ранг D	δ	Δ	Место центров	Место центров поверхности	Поверхность
3	3	4	Обыкн. точка	Не принадл.	Собств. центр. поверхность
3	3	3	„ „	Принадлежит	Конус
3	2	4*)	Беск. удаленная точка	„	Собств. поверхн. без центра (на кон. расст.)
2	2	3	Обыкн. прямая	Не принадл.	Эллипт. или гипербол. цилиндр
2	2	2	„ „	Принадлежит	Пара непараллельн. плпскостей
2	1	3	Беск. удаленная прямая	„	Параболический цилиндр
1	1	2	Обыкн. плоскость	Не принадл.	Пара параллельн. не совп. плоскостей
1	1	1	„ „	Принадлежит	Пара совп. плоскостей
1	0	2	Беск. удаленная плоскость	„	Пара плоск., из них одна беск. удаленная
0	0	1			Сдвоенная бескон. удаленная плоскость

8. Уравнение поверхности, отнесенной к центру.

Мы видели, что если за начало координат принять некоторую точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, сохраняя направление старых осей, то уравнение поверхности, отнесенной к новой системе координат, напишется в виде:

$$a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{23}YZ+2a_{31}ZX+2a_{12}XY+2XF_{x_1}+ \\ +2YF_{y_1}+2ZF_{z_1}+2F(x_1, y_1, z_1)=0. \tag{19}$$

Пусть данная поверхность имеет определенный центр на конечном расстоянии ($\delta \neq 0$), координаты которого удовлетворяют условиям:

$$F_{x_1}=0, \quad F_{y_1}=0, \quad F_{z_1}=0.$$

*) Если центр — бесконечно удаленная точка, то подходящим выбором системы координат уравнения, его определяющие, можно привести к виду:

$$x=0, \quad y=0, \quad t=0; \tag{α}$$

в таком случае

$$a_{13}=0, \quad a_{23}=0, \quad a_{33}=0, \quad a_{34}\neq 0.$$

Но тогда уравнение $F_t=0$ будет

$$a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t=0$$

и при $a_{34}\neq 0$ оно не может ни пропадать, ни быть следствием уравнений (α), поэтому Δ обязательно ранга, равного 4.

Если мы примем центр за новое начало координат, тогда в силу предыдущих условий в преобразованном уравнении поверхности пропадут члены, содержащие координаты в первых степенях, и оно примет вид:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY + a'_{44} = 0, \quad (20)$$

где

$$a'_{44} = 2F(x_1, y_1, z_1).$$

Что касается свободного члена a'_{44} в этом уравнении, то мы могли бы найти координаты центра, а затем подсчитать $2F(x_1, y_1, z_1)$, т. е. значение левой части первоначального уравнения поверхности для координат центра. Но можно a'_{44} подсчитать и непосредственно, не определяя координат центра, если мы воспользуемся доказанным ранее предложением, что дискриминант Δ из всех коэфициентов уравнения поверхности сохраняет свое значение при переносе начала координат. Дискриминант Δ' для преобразованного уравнения (20) будет:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{44} \end{vmatrix}$$

или

$$\Delta' = \delta a'_{44}.$$

Таким образом на основании упомянутой теоремы мы имеем:

$$\Delta = \delta\, a'_{44},$$

откуда

$$a'_{44} = \frac{\Delta}{\delta}, \quad (21)$$

и свободный член преобразованного уравнения найден без вычисления координат центра, в который мы переносим начало координат.

Итак, уравнение центральной поверхности ($\delta \neq 0$), отнесенной к системе координат, начало которой находится в центре, имеет вид:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (20')$$

Предположим теперь, что поверхность имеет прямую центров на конечном расстоянии; это будет в том случае, когда матрица

$$D \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix}$$

будет ранга 2, и следовательно, все ее определители 3-го порядка обращаются в нуль.

Возьмем какую-нибудь точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ прямой центров за начало координат; преобразованное уравнение (19) опять примет вид (20), и нам остается подсчитать свободный член его a'_{44} для этого случая; указанный выше способ здесь будет неприменим, ибо $\Delta=0$ и $\delta=0$ и выражение (21) становится неопределенным.

Возьмем уравнения, определяющие прямую центров:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1+a_{14}&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1+a_{24}&=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1+a_{34}&=0. \end{aligned} \tag{3'}$$

Так как прямая центров на конечном расстоянии, то определитель δ должен быть ранга 2 и, следовательно, один из его миноров (определитель 2-го порядка) должен быть отличным от нуля; это значит, что система (3′) может быть разрешена относительно каких-нибудь двух из трех координат $x_1,\ y_1,\ z_1$, смотря по тому, какой именно из этих миноров отличен от нуля.

Для точки места центров мы имеем:

$$a'_{44}=2F(x_1,\ y_1,\ z_1)=x_1F_{x_1}+y_1F_{y_1}+z_1F_{z_1}+t_1F_{t_1},$$

или

$$a'_{44}=F_{t_1}.$$

Так как уравнения (3′) разрешаются относительно двух координат (через третью), то эти значения мы можем подставить в предыдущее соотношение и таким образом можем исключить из него с помощью уравнений (3′) две из координат места центров.

Предположим, например, что минор определителя δ, отличный от нуля, будет:

$$\delta_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,$$

тогда два уравнения из системы (3′) можно разрешить относительно $x_1,\ y_1$ и исключить эти координаты из соотношения:

$$a_{14}x_1+a_{24}y_1+a_{34}z_1+a_{44}-a'_{44}=0. \tag{22}$$

Итак, исключая $x_1,\ y_1$ из двух первых уравнений системы (3′) и уравнения (22), мы найдем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}z_1+a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}z_1+a_{24}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}z_1+a_{44}-a'_{44}\end{vmatrix}=0;$$

разложим полученный определитель в сумму трех определителей:

$$z_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{24}\\ a_{41} & a_{42} & a_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{41} & a_{42} & a'_{44}\end{vmatrix}=0.$$

Первый из этих определителей обращается в нуль, так как он принадлежит матрице D. Следовательно:

$$a'_{44} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \qquad (23)$$

обозначая индексами внизу адъюнкты определителей Δ и δ, мы можем написать:

$$a'_{44} = \frac{\Delta_{33}}{\delta_{33}}. \qquad (23')$$

Очевидно, если отличным от нуля будет определитель δ_{ik} (где i и k могут принимать одно из значений 1, 2, 3), то мы получим:

$$a'_{44} = \frac{\Delta_{ik}}{\delta_{ik}}. \qquad (23'')$$

Таким образом уравнение поверхности, имеющей прямую центров на конечном расстоянии, переносом начала координат в какую-нибудь точку этой прямой может быть приведено к виду:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + a'_{44} = 0,$$

где a'_{44} имеет указанное выше значение.

Упражнения. 776. Уравнение поверхности

$$3x_2 + 5y^2 - z^2 + 8yz + 6zx - 4xy - 22x - 2y + 6z = 0$$

преобразовать к осям, соответственно параллельным прежним осям, поместив начало координат в центре поверхности.

777. Уравнение поверхности:

$$16x^2 + 18y^2 + 64z^2 + 60yz + 8zx - 12xy + 68x - 106y - 144z + 81 = 0$$

преобразовать к уравнению, отнесенному к центру с сохранением направлений прежних осей координат.

778. Нижеследующие уравнения поверхностей преобразовать к центру:

1) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2zx + 4y - 3z = 0$,
2) $2x^2 - z^2 + yz - zx - xy + 2x - y + z = 0$,
3) $x^2 - y^2 + z^2 + 2yz - 4zx - 2x = 0$,
4) $4x^2 - 18y^2 + 9yz + 6zx - 6xy - 2x + 9y - 4z - 4 = 0$.

9. Асимптотический конус центральной поверхности.

Если лучи, проходящие через точку M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, касаются поверхности в бесконечно удаленной точке, то должны выполняться условия:

$$M = 0, \quad N = 0$$

или подробнее:

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl + 2a_{12}lm = 0, \qquad (24)$$

$$lF_{x_1} + mF_{y_1} + nF_{z_1} = 0. \qquad (25)$$

Если точка $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — какая-либо произвольная точка пространства, уравнение (25) не пропадает; в таком случае уравнения (24) и (25) определят только два луча (действительных или мнимых) асимптотического направления, проходящих через точку M_1 и касающихся поверхности. Если же мы хотим, чтобы все прямые асимптотического направления, проходящие через точку M_1, касались поверхности в бесконечно удаленных точках, то необходимо, чтобы одно из указанных выше уравнений, именно уравнение (25), пропадало; в таком случае

$$F_{x_1}=0, \quad F_{y_1}=0, \quad F_{z_1}=0, \tag{3}$$

т. е. точка M_1 должна быть центром поверхности.

Обратно, если точка M_1 есть центр поверхности и условия (3) выполнены, то соотношения (24) и (25) выполняются для луча любого асимптотического направления, т. е. прямые асимптотического направления, проходящие через центр поверхности, касаются последней в бесконечно удаленных точках.

Конус асимптотических направлений с вершиною в центре поверхности, образующие которого, как доказано, касаются поверхности в бесконечно удаленных точках, назовем коротко асимптотическим конусом поверхности. Уравнение асимптотического конуса получится из уравнения (24), если мы в последнем сделаем замену:

$$l=\frac{x-x_1}{\rho}, \quad m=\frac{y-y_1}{\rho}, \quad n=\frac{z-z_1}{\rho},$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты центра.

Но мы уже видели, что $\rho^2 M$ может быть приведено к виду:

$$\rho^2 M=2F(x,\ y,\ z)+2F(x_1,\ y_1,\ z_1)-2P,$$

где

$$P=xF_{x_1}+yF_{y_1}+zF_{z_1}+tF_{t_1}.$$

Очевидно, для координат x_1, y_1, z_1 центра поверхности

$$P=F_{t_1};$$

с другой стороны, из соотношения:

$$x_1F_{x_1}+y_1F_{y_1}+z_1F_{z_1}+t_1F_{t_1}=2F(x_1,\ y_1,\ z_1)$$

для координат центра мы имеем [в силу условий (3)]:

$$F_{t_1}=2F(x_1,\ y_1,\ z_1).$$

Сопоставляя эти результаты, находим:

$$P=2F(x_1,\ y_1,\ z_1),$$

после чего $\rho^2 M$ принимает вид:

$$\rho^2 M=2F(x,\ y,\ z)-2F(x_1,\ y_1,\ z_1).$$

Таким образом уравнение асимптотического конуса будет

$$2F(x,\ y,\ z)=2F(x_1,\ y_1,\ z_1), \tag{26}$$

где в правой части стоят координаты центра поверхности.

Если поверхность имеет единственный определенный центр на конечном расстоянии ($\delta \neq 0$), тогда, как было показано в предыдущем параграфе:

$$2F(x_1, y_1, z_1) = \frac{\Delta}{\delta},$$

а потому окончательно уравнение асимптотического конуса для центральных поверхностей напишется в виде:

$$2F(x, y, z) = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{26'}$$

Между прочим, при исследовании полярного уравнения мы видели, что прямые, целиком лежащие на поверхности, удовлетворяют условиям:

$$M = 0, \quad N = 0, \quad R = 0,$$

из которых первое показывает, что такие прямые имеют асимптотические направления, стало быть в частности для каждой из них найдется соответствующая параллельная образующая асимптотического конуса. Итак, прямолинейные образующие поверхности 2-го порядка параллельны соответствующим образующим асимптотического конуса; образующие асимптотического конуса, так сказать, показывают направления прямолинейных образующих поверхности. Вследствие этого асимптотический конус поверхности 2-го порядка называют также *направляющим конусом* поверхности.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

К § 1.

1. Что называется диаметральною плоскостью, сопряженною данному направлению?

2. Как пишется уравнение диаметральной плоскости поверхности 2-го порядка?

3. Что называется центром поверхности 2-го порядка?

К § 2.

4. Что называется диаметром поверхности 2-го порядка?

5. Каково будет геометрическое место центров сечений поверхности 2-го порядка параллельными плоскостями?

6. Как пишется уравнение какого-либо диаметра поверхности 2-го порядка?

7. Как составить уравнение диаметра, сопряженного данной диаметральной плоскости?

8. Какие два направления называются сопряженными относительно поверхности 2-го порядка и каким условием связаны их угловые коэфициенты?

9. Как выбрать три направления, попарно сопряженных относительно данной поверхности 2-го порядка?

10. Каков необходимый и достаточный признак для уравнения поверхности 2-го порядка, что две из осей координат имеют сопряженные направления?

11. Как отражается на уравнении поверхности 2-го порядка выбор за оси координат трех направлений, попарно сопряженных?

К § 3.

12. Какие диаметральные плоскости поверхности 2-го порядка называются ее главными плоскостями?

13. Как пишется характеристическое уравнение (уравнение Бине) для поверхности 2-го порядка?

14. Каким образом характеристическое уравнение связывается с определением главных плоскостей поверхности 2-го порядка?

К § 4.

15. Что называется главными направлениями поверхности 2-го порядка?

16. Каковы свойства главных направлений поверхности и можно ли выбрать три главных направления для любой поверхности 2-го порядка?

К § 5.

17. Может ли характеристическое уравнение иметь мнимые корни?

К § 6.

18. Какими уравнениями определяется центр поверхности 2-го порядка?

К § 7.

19. Как рангами матрицы D и дискриминанта δ определяется характер места центров поверхности 2-го порядка?

20. Как решается вопрос о том, принадлежит ли место центров самой поверхности 2-го порядка или не принадлежит?

21. Как строится классификация поверхностей 2-го порядка по характеру места центров и по его отношению (принадлежит или не принадлежит) к самой поверхности? Какими рангами D, δ, Δ характеризуется каждый из возможных здесь случаев?

К § 8.

22. Как пишется уравнение поверхности, отнесенной к центру, и как определяется свободный член преобразованного уравнения?

К § 9.

23. Что называется асимптотическим конусом поверхности 2-го порядка?

24. Как пишется уравнение асимптотического конуса поверхности 2-го порядка?

25. В каком смысле асимптотический конус поверхности 2-го порядка называется ее направляющим конусом?

Упражнения. 779. При каких условиях плоскость:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

будет диаметральною плоскостью данной поверхности 2-го порядка?

780. При каких условиях плоскость:

$$Ax+By+Cz+D=$$

будет главною плоскостью данной поверхности 2-го порядка?

781. Считая, что общее уравнение поверхности отнесено к прямоугольной системе координат, определить угол какого-либо направления $l:m:n$ с диаметральною плоскостью, ему сопряженною.

782. Каковы будут направления, которые одновременно сопряжены как по отношению к данной поверхности 2-го порядка, так и по отношению к какому-нибудь шару?

783. Определить диаметральные плоскости двух поверхностей 2-го порядка, между собою параллельные и сопряженные одному и тому же направлению.

784. Составить уравнение одной из главных плоскостей данной поверхности 2-го порядка.

785. Каковы будут главные плоскости для поверхности, изображаемой уравнением:

$$x^2-k^2y^2=0$$

в прямоугольной системе координат?

786. Пусть уравнение центральной поверхности 2-го порядка будет:

$$2F(x,\ y,\ z)=0;$$

для точек какой области пространства $2F(x, y, z)$ положительна и для какой отрицательна?

787. Для поверхности 2-го порядка найти геометрическое место точек, делящих хорды данного направления в заданном отношении.

788. Найти геометрическое место хорд поверхности 2-го порядка, которые в некоторой данной точке делятся в заданном отношении.

789. Составить уравнение поверхности 2-го порядка, имеющей центр в точке $(-1; -1; -1)$ и касающейся осей координат в точках:

$$(1;\ 0;\ 0),\ (0;\ 1;\ 0)\ \text{и}\ (0;\ 0;\ 1).$$

790. Найти геометрическое место центров поверхностей 2-го порядка проходящих через оси Ox и Oy и через две точки $(0; 1; 1)$ и $(1; 0; -1)$.

791. Две плоскости, из которых каждая параллельна направлению сопряженному другой, называются плоскостями, сопряженными относительно заданной поверхности 2-го порядка. Найти условие, при котором две плоскости:

$$u_1x + v_1y + w_1z + p_1t = 0,$$
$$u_2x + v_2y + w_2z + p_2t = 0$$

будут сопряженными относительно заданной поверхности 2-го порядка.

Глава XVIII.

Полярные свойства поверхностей 2-го порядка.

Полярное соответствие точек и плоскостей относительно поверхности 2-го порядка, соответствие какой-либо точки ее полярной плоскости или соответствие какой-либо плоскости ее полюсу может быть установлено с помощью гармонических четверок точек, подобно тому как это делалось для кривых 2-го порядка.

Из такого построения полярного соответствия вытекает, что полярные свойства поверхностей 2-го порядка не зависят ни от типа поверхности, ни от взаимоотношений между линейными их размерами, короче, эти свойства являются проективными, а не метрическими свойствами поверхностей. Тем самым всякое геометрическое свойство поверхности 2-го порядка, которое может быть формулировано как полярное свойство, будет принадлежать всем поверхностям 2-го порядка. Следовательно, изображение какого-либо свойства частного вида поверхностей (например шара или пары плоскостей) как свойства полярного является приемом обобщения данного свойства на все поверхности 2-го порядка. Диаметральные плоскости, диаметры, центр поверхности 2-го порядка могут быть получены как элементы, полярно соответствующие несобственным элементам (бесконечно удаленным точкам, бесконечно удаленным прямым и бесконечно удаленной плоскости) пространства, поэтому свойства диаметральных плоскостей, диаметров, центра могут быть описаны как полярные свойства поверхностей 2-го порядка; в этой последней своей форме они одинаково принадлежат всем поверхностям 2-го порядка.

1. Полярно-сопряженные точки.

Две точки называются сопряженными (или полярно-сопряженными) относительно поверхности 2-го порядка, если они гармонически разделяются точками пересечения поверхности прямою, соединяющей две данные точки.

Пусть нам даны две точки $M_1(x_1:y_1:z_1:t_1)$ и $M_2(x_2:y_2:z_2:t_2)$; тогда какая-нибудь точка на прямой, соединяющей две данные точки, будет иметь координаты (см. § 1 гл. XIII):

$$x_1+\mu x_2, \qquad y_1+\mu y_2, \qquad z_1+\mu z_2, \qquad t_1+\mu t_2 \tag{1}$$

и эта последняя точка будет принадлежать поверхности

$$2F(x,\ y,\ z,\ t)=0, \tag{2}$$

если

$$2F(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)+2\mu P+\mu^2\cdot 2F(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)=0, \tag{3}$$

где

$$P=x_1F_{x_2}+y_1F_{y_2}+z_1F_{z_2}+t_1F_{t_2}=x_2F_{x_1}+y_2F_{y_1}+z_2F_{z_1}+t_2F_{t_1}. \tag{4}$$

Уравнение (3) даст два значения для μ, каждое из которых определит пересечение прямой M_1M_2 с поверхностью, причем координаты точек пересечения будут определены выражениями (1), где надо принять $\mu = \mu_1$ или $\mu = \mu_2$.

Если мы хотим, чтобы точки пересечения прямой M_1M_2 гармонически разделяли точки M_1 и M_2, тогда необходимо:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = -1$$

или

$$\mu_1 + \mu_2 = 0,$$

т. е. сумма корней уравнения (3) обращается в нуль, следовательно:

$$P = 0. \tag{5}$$

Соотношение (5), которое может быть распространенно написано либо в виде:

$$x_1F_{x_2} + y_1F_{y_2} + z_1F_{z_2} + t_1F_{t_2} = 0, \tag{5'}$$

либо в виде:

$$x_2F_{x_1} + y_2F_{y_1} + z_2F_{z_1} + t_2F_{t_1} = 0, \tag{5''}$$

и представляет собою условие сопряженности двух точек M_1 и M_2 относительно выбранной поверхности 2-го порядка.

2. Полярная плоскость.

Возьмем какую-нибудь точку M_1 и будем искать геометрическое место точек, полярно-сопряженных с точкой M_1 относительно данной поверхности 2-го порядка; координаты x, y, z, t точек, полярно-сопряженных с данной, на основании предыдущего должны удовлетворять соотношению:

$$xF_{x_1} + yF_{y_1} + zF_{z_1} + tF_{t_1} = 0. \tag{6}$$

Последнее уравнение, как уравнение 1-й степени, изображает плоскость. Следовательно, геометрическое место точек полярно-сопряженных точке M_1 относительно некоторой поверхности 2-го порядка, есть плоскость, изображаемая уравнением (6); эта плоскость называется полярной плоскостью точки M_1, последняя же называется полюсом указанной плоскости.

Когда дается точка M_1 своими координатами $x_1 : y_1 : z_1 : t_1$, то уравнение полярной плоскости точки M_1 напишется в виде (6), следовательно, координаты плоскости $u : v : w : p$ будут определяться соотношениями:

$$\frac{u}{F_{x_1}} = \frac{v}{F_{y_1}} = \frac{w}{F_{z_1}} = \frac{p}{F_{t_1}}. \tag{7}$$

Эти последние уравнения позволят нам определить полюс M_1 $(x_1 : y_1 : z_1 : t_1)$, соответствующий данной плоскости $u : v : w : p$; с этой целью придется уравнения (7) разрешить относительно $x_1 : y_1 : z_1 : t_1$. Обозначим обратные отношения (7) через σ, т. е. положим:

$$\frac{F_{x_1}}{u} = \frac{F_{y_1}}{v} = \frac{F_{z_1}}{w} = \frac{F_{t_1}}{p} = \sigma, \qquad (7')$$

и развернем эти уравнения:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 + a_{14}t_1 &= \sigma u, \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 + a_{24}t_1 &= \sigma v, \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 + a_{34}t_1 &= \sigma w, \\ a_{41}x_1 + a_{42}y_1 + a_{43}z_1 + a_{44}t_1 &= \sigma p. \end{aligned}$$

Умножим теперь эти уравнения соответственно на a^{11}, a^{21}, a^{31}, a^{41} (где a^{ik} — адъюнкта определителя Δ, соответствующая элементу a_{ik}) и сложим их почленно, тогда:

$$\Delta x_1 = \sigma \Phi_u,$$

где $2\Phi(u, v, w, p)$ — левая часть тангенциального уравнения поверхности. Аналогично будем иметь:

$$\Delta y_1 = \sigma \Phi_v,$$
$$\Delta z_1 = \sigma \Phi_w,$$
$$\Delta t_1 = \sigma \Phi_p,$$

следовательно, координаты $x_1 : y_1 : z_1 : t_1$ полюса M_1 данной плоскости $u : v : w : p$ определятся при $\Delta \neq 0$ отношениями:

$$\frac{x_1}{\Phi_u} = \frac{y_1}{\Phi_v} = \frac{z_1}{\Phi_w} = \frac{t_1}{\Phi_p}. \qquad (8)$$

Уравнение полярной плоскости (6) того же вида, как и уравнение касательной плоскости, с той лишь разницей, что уравнение (6) полярной плоскости пишется для любой точки пространства, а уравнение касательной плоскости (того же вида) пишется для точки M_1, принадлежащей поверхности.

Если полярная плоскость (6) содержит свой полюс, то:

$$x_1F_{x_1} + y_1F_{y_1} + z_1F_{z_1} + t_1F_{t_1} = 0$$

или на основании теоремы Эйлера об однородных функциях:

$$2F(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0,$$

т. е. точка $M_1(x_1 : y_1 : z_1 : t_1)$ принадлежит поверхности; следовательно, полярная плоскость в этом случае обращается в касательную плоскость.

К тому же результату приводят и соотношения (8). Если плоскость:

$$ux + vy + wz + pt = 0$$

содержит свой полюс, тогда

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + pt_1 = 0$$

или на основании (8):

$$u\Phi_u + v\Phi_v + w\Phi_w + p\Phi_p = 0,$$

что по теореме Эйлера дает:

$$2\Phi(u,\ v,\ w,\ p) = 0,$$

т. е. данная плоскость касается поверхности.

Если полярная плоскость точки M_1

$$xF_{x_1} + yF_{y_1} + zF_{z_1} + tF_{t_1} = 0$$

содержит некоторую точку $M_2(x_2 : y_2 : z_2 : t_2)$, то

$$x_2F_{x_1} + y_2F_{y_1} + z_2F_{z_1} + t_2F_{t_1} = 0, \tag{9}$$

т. е. точки M_1 и M_2 полярно-сопряжены; легко видеть, что то же самое условие мы получим, если выразим, что полярная плоскость точки M_2:

$$xF_{x_2} + yF_{y_2} + zF_{z_2} + tF_{t_2} = 0$$

содержит точку M_1, т. е.

$$x_1F_{x_2} + y_1F_{y_2} + z_1F_{z_2} + t_1F_{t_2} = 0. \tag{9'}$$

Соотношения (9) и (9′) тождественны друг другу вследствие симметрии полярной формы. Итак, *если полярная плоскость точки M_1 содержит точку M_2, то полярная плоскость точки M_2 содержит точку M_1*; эти две точки будут полярно-сопряженными.

Две плоскости, из которых каждая проходит через полюс другой, называются плоскостями, полярно-сопряженными относительно данной поверхности; легко получить условие полярной сопряженности двух плоскостей, каждая из которых определяется своими координатами $(u_1 : v_1 : w_1 : p_1)$ и $(u_2 : v_2 : w_2 : p_2)$. В самом деле, для плоскости $(u_1 : v_1 : w_1 : p_1)$ полюсом будет точка:

$$\frac{x_1}{\Phi_{u_1}} = \frac{y_1}{\Phi_{v_1}} = \frac{z_1}{\Phi_{w_1}} = \frac{t_1}{\Phi_{p_1}};$$

если полюс первой плоскости принадлежит второй плоскости, то

$$u_2x_1 + v_2y_1 + w_2z_1 + p_2t_1 = 0,$$

откуда, подставляя сюда значения координат полюса, получим:

$$u_2\Phi_{u_1} + v_2\Phi_{v_1} + w_2\Phi_{w_1} + p_2\Phi_{p_1} = 0.$$

Очевидно, то же самое условие полярной сопряженности двух плоскостей может быть написано также в виде:

$$u_1\Phi_{u_2} + v_1\Phi_{v_2} + w_1\Phi_{w_2} + p_1\Phi_{p_2} = 0.$$

Мы видим, что условие полярной сопряженности двух плоскостей относительно тангенциального уравнения поверхности пишется так же, как условие полярной сопряженности двух точек пишется относительно точечного уравнения поверхности.

Так как с данной точкой полярно-сопряжена любая точка, лежащая в полярной плоскости первой точки, и, с другой стороны, касательная плоскость содержит свой полюс (точку прикосновения), то отсюда следует, что любая точка касательной плоскости полярно-сопряжена с ее точкой прикосновения. Указанное свойство является просто геометрическим истолкованием уравнения касательной плоскости:

$$xF_{x_1}+yF_{y_1}+zF_{z_1}+tF_{t_1}=0,$$

ибо это уравнение в силу условия (9) выражает собою как раз то обстоятельство, что любая точка $M(x;\ y;\ z)$ касательной плоскости полярно-сопряжена с точкой прикосновения

$$M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1).$$

В силу взаимности полярной сопряженности точек полюсы всех плоскостей, проходящих через какую-либо данную точку, будут точками, сопряженными с данной, а потому они лежат на ее полярной плоскости; равным образом полярные плоскости всех точек, лежащих на какой-либо плоскости, проходят через полюс последней.

3. Полярно-сопряженные прямые.

Заметим, что для точки $M_3\ (x_3 : y_3 : z_3 : t_3)$ уравнение полярной плоскости:

$$xF_{x_3}+yF_{y_3}+zF_{z_3}+tF_{t_3}=0$$

вследствие его симметрии может быть также написано в виде:

$$x_3F_x+y_3F_y+z_3F_z+t_3F_t=0.$$

Возьмем теперь две точки $M_1\ (x_1 : y_1 : z_1 : t_1)$ и $M_2\ (x_2 : y_2 : z_2 : t_2)$; какая-нибудь точка M_3 на прямой, их соединяющей, будет иметь координаты:

$$(x_1+\lambda x_2) : (y_1+\lambda y_2) : (z_1+\lambda z_2) : (t_1+\lambda t_2),$$

причем, когда меняется λ, точка M_3 движется по прямой M_1M_2.

Составим теперь уравнение полярной плоскости точки M_3, оно будет вида:

$$(x_1+\lambda x_2)F_x+(y_1+\lambda y_2)F_y+(z_1+\lambda z_2)F_z+(t_1+\lambda t_2)F_t=0$$

или

$$(x_1F_x+y_1F_y+z_1F_z+t_1F_t)+\lambda(x_2F_x+y_2F_y+z_2F_z+t_2F_t)=0.$$

Последнее уравнение при переменном λ изображает пучок плоскостей, проходящих через прямую пересечения плоскостей:

$$\begin{aligned} x_1F_x+y_1F_y+z_1F_z+t_1F_t=0,\\ x_2F_x+y_2F_y+z_2F_z+t_2F_t=0, \end{aligned} \tag{10}$$

т. е. прямую пересечения полярных плоскостей точек M_1 и M_2. Таким образом, *если точка движется по некоторой прямой L_1, то ее поляр-*

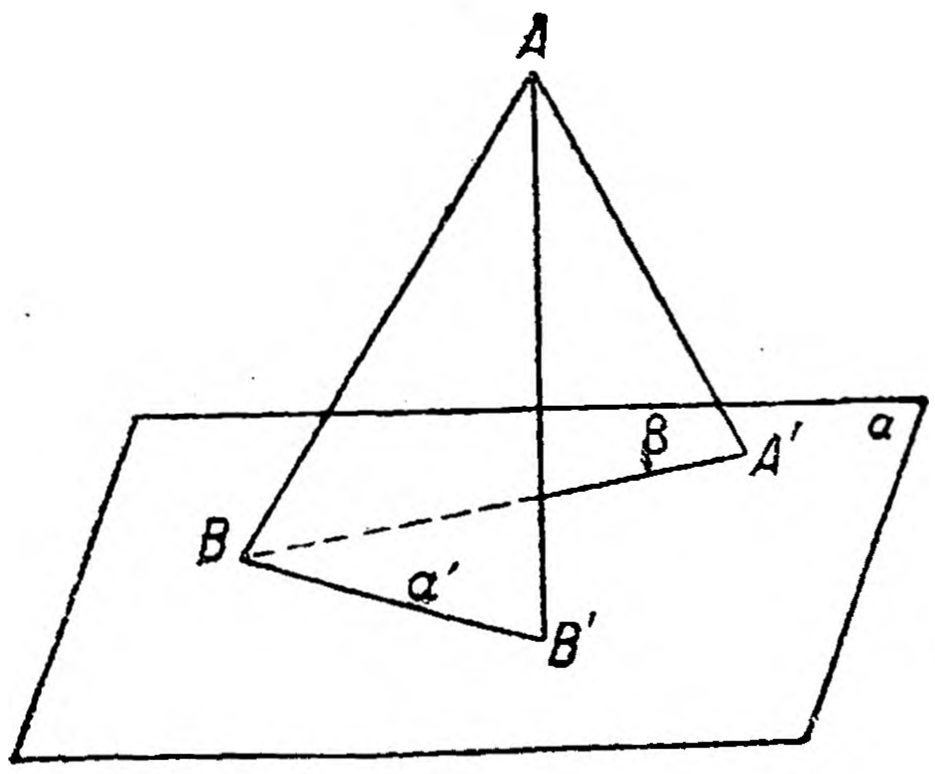
ные плоскости проходят через некоторую другую прямую L_2. Пусть вторая прямая L_2 определяется двумя точками

$$M_3(x_3 : y_3 : z_3 : t_3) \text{ и } M_4(x_4 : y_4 : z_4 : t_4);$$

каждая из них лежит на пересечении плоскостей (10), следовательно:

$$x_1F_{x_3} + y_1F_{y_3} + z_1F_{z_3} + t_1F_{t_3} = 0,$$
$$x_2F_{x_3} + y_2F_{y_3} + z_2F_{z_3} + t_2F_{t_3} = 0,$$
$$x_1F_{x_4} + y_1F_{y_4} + z_1F_{z_4} + t_1F_{t_4} = 0,$$
$$x_2F_{x_4} + y_2F_{y_4} + z_2F_{z_4} + t_2F_{t_4} = 0.$$

Первое и третье из этих соотношений означают, что точка M_1 лежит на пересечении полярных плоскостей точек M_3 и M_4; равным образом второе и четвертое соотношения означают, что точка M_2 лежит на пересечении полярных плоскостей точек M_3 и M_4. Таким образом отношения между прямыми L_1 и L_2 взаимны, т. е. *если полярные плоскости точек прямой L_1 проходят через прямую L_2, то и полярные плоскости точек прямой L_2 проходят через прямую L_1.*



Черт. 166.

Две прямые называются полярно-сопряженными, если полярные плоскости точек одной из них проходят через другую, или, иначе, если полюсы плоскостей, проходящих через одну из прямых, расположены на другой прямой. Чтобы найти прямую, полярно-сопряженную с данной прямой, достаточно взять две точки на данной прямой, тогда полярные плоскости выбранных точек своим пересечением и определят полярно-сопряженную прямую. В частности, прямая, соединяющая две точки поверхности, и прямая, по которой пересекаются касательные плоскости этих точек, будут прямыми полярно-сопряженными.

Если две полярно-сопряженные прямые пересекаются между собой, то точка их пересечения будет полюсом плоскости, содержащей эти прямые, следовательно, эта плоскость как содержащая свой полюс будет касательной плоскостью поверхности.

В силу определения полярно-сопряженных прямых ясно, что каждая точка A одной из прямых будет полярно-сопряженной с любой точкой A' другой прямой, ибо полярная плоскость точки A первой прямой содержит вторую прямую, а следовательно, и любую ее точку A'.

Пусть A будет любая точка пространства и α — ее полярная плоскость относительно некоторой поверхности 2-го порядка (черт. 166); возьмем в этой плоскости произвольную точку A', а затем на прямой пересечения плоскости α и полярной плоскости α' точки A' возьмем произвольную точку B'. Две точки A' и B' будут полярно-сопряженными (ибо α' проходит через B'), в таком случае полярная плоскость β' точки B' пройдет через точку A'.

Точку пересечения трех плоскостей α, α', β' назовем через B. Точка B будет, очевидно, полюсом плоскости $AA'B'$; в таком случае тетраэдр $ABA'B'$ обладает тем свойством, что каждая из его вершин является, полюсом противолежащей грани; вместе с тем два противоположных ребра тетраэдра будут полярно-сопряженными. Такой тетраэдр называется *автополярным тетраэдром* данной поверхности 2-го порядка; очевидно, что для каждой поверхности 2-го порядка существует бесчисленное множество автополярных тетраэдров.

4. Полярные свойства центра, диаметральных плоскостей, диаметров.

Так как четвертая гармоническая для середины отрезка есть точка бесконечно удаленная и центр поверхности есть середина любой хорды, то на лучах, проходящих через центр поверхности, четвертой гармонической для центра будет всегда бесконечно удаленная точка. Отсюда следует, что полярная плоскость центра поверхности (когда он будет определенной точкой на конечном расстоянии) будет плоскость бесконечно удаленная. И на самом деле, уравнение полярной плоскости точки $(x_1 : y_1 : z_1 : t_1)$ может быть написано в виде:

$$xF_{x_1} + yF_{y_1} + zF_{z_1} + tF_{t_1} = 0;$$

если $(x_1 : y_1 : z_1 : t_1)$ — центр поверхности, не принадлежащий последней, то

$$F_{x_1} = 0, \quad F_{y_1} = 0, \quad F_{z_1} = 0, \quad F_{t_1} = 0,$$

и уравнение полярной плоскости центра примет вид:

$$t = 0,$$

т. е. это будет бесконечно удаленная плоскость.

Возьмем теперь какую-нибудь диаметральную плоскость, сопряженную направлению $(l : m : n)$, и пучок параллельных хорд указанного направления; на каждой хорде четвертой гармонической для точки ее пересечения с плоскостью относительно точек пересечения этой хорды с поверхностью будет бесконечно удаленная точка; все указанные хорды пересекаются в одной бесконечно удаленной точке, поэтому последняя и будет полюсом диаметральной плоскости. Итак, *диаметральная плоскость, сопряженная хордам направления $l : m : n$, будет полярною плоскостью бесконечно удаленной точки, в которой пересекаются хорды выбранного направления.* Можно также сказать, что диаметральная плоскость есть полярная плоскость бесконечно удаленной точки сопряженного ей диаметра.

Возьмем на диаметре направления l, m, n (нормированные угловые коэфициенты) некоторую точку, ее координаты будут:

$$x_1 + l\rho, \quad y_1 + m\rho, \quad z_1 + n\rho,$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты центра; полярная плоскость какой-либо точки диаметра будет:

$$(x_1 + l\rho) F_x + (y_1 + m\rho) F_y + (z_1 + n\rho) F_z + t_1 F_t = 0$$

или

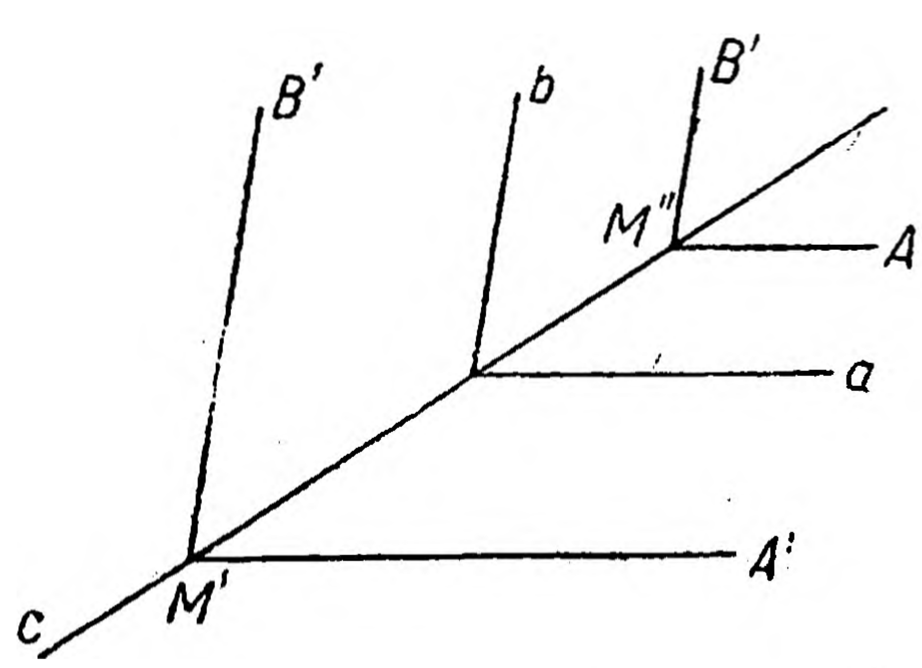
$$lF_x + mF_y + nF_z + \frac{x_1F_x + y_1F_y + z_1F_z + t_1F_t}{\rho} = 0.$$

Предположим, что ρ неограниченно растет и, следовательно, выбранная точка перемещается по диаметру в точку бесконечно удаленную; в пределе ($\rho = \infty$) для бесконечно удаленной точки диаметра уравнение полярной плоскости примет вид:

$$lF_x + mF_y + nF_z = 0,$$

т. е. это будет уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению $l : m : n$.

Какова будет прямая, взаимно-полярная какому-нибудь диаметру? Для ее определения надо взять полярные плоскости двух каких-либо точек диаметра; тогда пересечение этих полярных плоскостей и определит прямую, взаимно-полярную выбранному диаметру. Возьмем на диаметре центр и бесконечно удаленную точку. Полярная плоскость первой его точки будет бесконечно удаленная плоскость, полярная плоскость второй точки есть диаметральная плоскость, сопряженная выбранному диаметру. Поэтому прямою, взаимно-полярною данному диаметру, будет бесконечно удаленная прямая, лежащая в диаметральной плоскости, сопряженной с этим диаметром.



Черт. 167.

Возьмем три диаметра a, b, c (черт. 167) попарно сопряженных, и на диаметре c две точки M' и M'', гармонически-сопряженных относительно двух точек пересечения этого диаметра с поверхностью.

Проведем затем через точку M' два луча $M'A'$ и $M'B'$, параллельных соответственно диаметрам a и b; хорда направления $M'A'$ делится пополам плоскостью bc в точке M', поэтому на луче $M'A'$ точке M' гармонически сопряжена бесконечно удаленная точка; равным образом на луче $M'B'$ точке M' гармонически сопряжена бесконечно удаленная точка. Итак, для точки M' на лучах $M'A'$ и $M'B'$ гармонически-сопряженными точками будут бесконечно удаленные точки, а на луче $M'M''$ точке M' гармонически сопряжена точка M'', поэтому для точки M' полярною плоскостью будет плоскость $B''M''A''$, параллельная плоскости ba; для бесконечно удаленной точки на луче $M'A'$ полярною плоскостью будет плоскость bc, или, что то же самое, плоскость $M'M''B''$. Отсюда следует, что прямые $M'A'$ и $M''B''$, соответственно параллельные сопряженным диаметрам a и b, суть прямые полярно-сопряженные. Таким образом два диаметра сопряженных суть два диаметра, соответственно параллельные двум полярно-сопряженным прямым.

Итак, сопряженность хорд и диаметральной плоскости, делящей их пополам, сопряженность диаметров — это все отношения полярной сопряженности относительно данной поверхности 2-го порядка. Далее диаметральная плоскость есть полярная плоскость некоторой бесконечно удаленной точки, центр есть полюс бесконечно удаленной плоскости, диаметр есть прямая, полярно-сопряженная некоторой бесконечно удаленной прямой; иначе говоря, диаметральные плоскости, диаметры, центр являются элементами полярно-сопряженными соответствующих несобственных (бесконечно удаленных) элементов (точек, прямых, плоскости). Пусть мы имеем три попарно сопряженных диаметральных плоскости поверхности 2-го порядка с центром на конечном расстоянии, и пусть эти плоскости по две пересекаются по диаметрам (попарно сопряженным) a, b, c. Присоединим к этим трем диаметральным плоскостям бесконечно удаленную плоскость; тогда эти четыре плоскости образуют автополярный тетраэдр. В самом деле, точка пересечения трех выбранных диаметральных плоскостей (центр поверхности) будет полюсом четвертой грани, именно бесконечно удаленной плоскости; плоскость, например ab, будет полярною плоскостью бесконечно удаленной точки, находящейся на диаметре c. Таким образом каждая из вершин такого тетраэдра (из которых три будут бесконечно удаленными точками на диаметрах a, b, c) является полюсом противоположной грани, т. е. тетраэдр автополярный.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

К § 1.

1. Какие две точки называются полярно-сопряженными относительно поверхности 2-го порядка?

2. Каким условием связаны координаты двух полярно-сопряженных точек?

К § 2.

3. Что называется полярною плоскостью данной точки относительно поверхности 2-го порядка? Каким уравнением изображается полярная плоскость данной точки?

4. Как находятся координаты полюса данной плоскости? В каком случае данной плоскости соответствует единственный определенный полюс относительно заданной поверхности 2-го порядка?

5. В каком случае полярная плоскость обращается в касательную плоскость поверхности?

6. Каким свойством обладают полярные плоскости двух полярно-сопряженных точек?

7. Какие две плоскости называются полярно-сопряженными относительно поверхности 2-го порядка?

К § 3.

8. Какие две прямые называются полярно-сопряженными относительно поверхности 2-го порядка?

9. Как располагаются относительно поверхности 2-го порядка две полярно-сопряженные прямые, если они пересекаются между собой?

10. Что называется автополярным тетраэдром поверхности 2-го порядка?

К § 4.

11. Каковы полярные свойства диаметральных плоскостей, диаметров и центра поверхностей 2-го порядка?

Упражнения. 792. Вывести условие полярной сопряженности двух точек (или, что то же самое, уравнение полярной плоскости), исходя из общего полярного уравнения поверхности 2-го порядка:

$$M\rho^2 + 2N\rho + R = 0.$$

793. Дана поверхность 2-го порядка своим уравнением:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0$$

и три точки $(0;\ b;\ c)$, $(a;\ 0;\ c)$, $(a;\ b;\ 0)$. Найти точку, которая была бы сопряженной относительно заданной поверхности с каждой из заданных точек.

794. Найти координаты полюса плоскости:

$$ux+vy+wz+pt=0$$

относительно каждой из поверхностей:

1) $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}+\dfrac{z^2}{C}-1=0,$

2) $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}-2z=0.$

795. Найти условия, при которых две прямые:

$$\frac{x-x'}{l'}=\frac{y-y'}{m'}=\frac{z-z'}{n'}$$

и

$$\frac{x-x''}{l''}=\frac{y-y''}{m''}=\frac{z-z''}{n''}$$

будут полярно-сопряженными относительно поверхности 2-го порядка.

796. Прямые, полярно-сопряженные относительно шара, взаимно перпендикулярны.

797. Если вершины одного тетраэдра служат полюсами граней другого тетраэдра относительно какой-либо поверхности 2-го порядка, то вершины второго тетраэдра будут полюсами граней первого. Два таких тетраэдра называются взаимно-полярными относительно заданной поверхности 2-го порядка; если два взаимно-полярных тетраэдра совпадают в один, то последний будет сам себе взаимно-полярным, или иначе, — автополярным.

798. Составить уравнение поверхностей 2-го порядка, для которых координатные плоскости и бесконечно удаленная плоскость образуют автополярный тетраэдр.

799. Геометрическое место полюсов касательных плоскостей поверхности S' относительно поверхности 2-го порядка S называется взаимно-полярною поверхностью S'' поверхности S' относительно S. Для поверхности:

$$\frac{x^2}{A'}+\frac{y^2}{B'}+\frac{z^2}{C'}-1=0 \qquad (S')$$

найти взаимно-полярную поверхность S'' относительно поверхности S:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0. \qquad (S)$$

Глава XIX.

Инварианты уравнения поверхности 2-го порядка и приведение его к каноническому виду.

Настоящая глава, последняя глава второго концентра, содержит прежде всего вывод инвариантов общего уравнения поверхности 2-го порядка относительно любого преобразования координатной системы, состоящей из произвольного изменения направлений координатных осей (короче: поворота осей) и из переноса начала координат в любую как угодно заданную точку.

Геометрическое изучение свойств поверхностей 2-го порядка показало нам для поверхности каждого определенного класса существование особой координатной системы, по отношению к которой уравнение данной поверхности может быть написано в наиболее простой форме.

Зная наперед вид такого упрощенного уравнения, мы для определения значений его коэфициентов можем не производить преобразования координат к новой системе; эти коэфициенты преобразованного уравнения могут быть определены из условий равенства соответствующих инвариантов для старого и нового уравнений поверхности.

Вместе с тем приведением общего уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду уже окончательно определяется тип поверхности, чего мы не могли достичь одним лишь исследованием центра или места центров поверхности.

1. Инварианты.

Пусть нам дана поверхность 2-го порядка, относительно некоторой декартовой системы координат своим общим уравнением:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+\\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0; \end{aligned} \tag{1}$$

перейдем теперь к какой-либо новой системе координат, произведя в уравнении (1) замену (§ 5 гл. XV):

$$\begin{aligned} x&=l_1X+l_2Y+l_3Z+x_1,\\ y&=m_1X+m_2Y+m_3Z+y_1,\\ z&=n_1X+n_2Y+n_3Z+z_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Преобразованное уравнение поверхности примет аналогичный вид:

$$\begin{aligned} a'_{11}X^2+a'_{22}Y^2+a'_{33}Z^2+2a'_{23}YZ+2a'_{31}ZX+2a'_{12}XY+2a'_{14}X+\\ +2a'_{24}Y+2a'_{34}Z+a'_{44}=0, \end{aligned} \tag{3}$$

где каждый из новых коэфициентов a'_{ik} определенным образом выразится через старые коэфициенты a_{ik} уравнения поверхности и через коэфициенты преобразования (2). Известно, что общее преобразование (2) координат зависит от шести существенных параметров (если считать заданными координатные углы новых осей), именно трех параметров, характеризующих поворот осей, и трех параметров, характеризующих перенос начала (последними будут x_1, y_1, z_1).

Итак, каждый из новых коэфициентов a'_{ik} будет выражен через старые коэфициенты a_{ik} и через шесть параметров преобразования; между всеми этими величинами мы, таким образом, будем иметь десять соотношений, по числу новых коэфициентов. Если из указанных десяти уравнений между новыми и старыми коэфициентами уравнений поверхности и шестью параметрами, характеризующими самое преобразование координат, исключить шесть указанных параметров преобразования, то мы получим четыре соотношения только между новыми и старыми коэфициентами уравнений поверхности (1) и (3). Эти четыре соотношения, как не содержащие параметров преобразования, будут оставаться неизменными, куда бы мы ни переносили новое начало координат и как бы новая тройка координатных осей (с заданными координатными углами между ними) ни была расположена относительно старых осей. Поэтому четыре таких соотношения между старыми и новыми коэфициентами называются инвариантными (неизменными) соотношениями между этими коэфициентами.

Будем искать эти инвариантные соотношения. Рассмотрим предварительно поворот осей, предполагая начало координат неизменным; такое преобразование определится однородными выражениями старых координат через новые:

$$\begin{aligned} x &= l_1X + l_2Y + l_3Z, \\ y &= m_1X + m_2Y + m_3Z, \\ z &= n_1X + n_2Y + n_3Z; \end{aligned} \tag{2'}$$

при этом группа членов второй степени уравнения (1) преобразуется отдельно в группу членов второй степени уравнения (3)

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \equiv \\ &\equiv a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + 2a'_{23}YZ + 2a'_{31}ZX + 2a'_{12}XY. \end{aligned} \tag{4}$$

Запишем это соотношение символически в виде:

$$F_2 \equiv F'_2. \tag{4'}$$

Указанное соотношение тождественно в том смысле, что оно выполняется для любых координат x, y, z при условии, что X, Y, Z связаны с ними соотношениями (2'); иначе можно сказать, что соотношение (4) выполняется тождественно для любой точки пространства, если x, y, z — ее координаты по старой системе, а X, Y, Z — координаты той же точки по новой системе.

Вместо того чтобы в группе членов 2-й степени уравнения (1) производить сложное преобразование (2'), мы возьмем некоторое тождественное соотношение, характеризующее это преобразование. Такое соотношение мы получим, если напишем, что квадрат расстояния точки M от начала сохраняет свое значение, т. е. что:

$$x^2+y^2+z^2+2yz\,\omega_1+2zx\,\omega_2+2xy\,\omega_3\equiv$$
$$\equiv X^2+Y^2+Z^2+2YZ\omega_1'+2ZX\omega_2'+2XY\omega_3', \tag{5}$$

где ω_1, ω_2, ω_3 — косинусы углов координатных осей старой системы, а ω_1', ω_2', ω_3' — косинусы соответствующих углов новых координатных осей. Тождество (5) надо понимать в том же смысле, как и тождество (4), т. е. что оно выполняется для любой точки пространства.

Соотношение (5) будем для краткости писать в виде:

$$d^2\equiv d'^2. \tag{5'}$$

Из двух тождеств (4′) и (5′) вытекает тождество:

$$F_2-sd^2\equiv F_2'-sd'^2, \tag{6}$$

где s — пока любое число.

Уравнение

$$F_2-sd^2=0, \tag{7}$$

как уравнение однородное относительно координат, изображает в прежней системе координат конус или пару плоскостей; из тождества (6) следует, что уравнение

$$F_2'-sd'^2=0 \tag{7'}$$

изображает ту же поверхность, как и (7′), только в новой системе координат. Выберем параметр s так, чтобы уравнение (7) изображало пару плоскостей; для этого необходимо, чтобы дискриминант этого уравнения был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12}-s\omega_3 & a_{13}-s\omega_2 \\ a_{21}-s\omega_3 & a_{22}-s & a_{23}-s\omega_1 \\ a_{31}-s\omega_2 & a_{32}-s\omega_1 & a_{33}-s \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Но в таком случае и уравнение (7′) при том же значении s изображает пару плоскостей, т. е. его дискриминант тоже равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}'-s & a_{12}'-s\omega_3' & a_{13}'-s\omega_2' \\ a_{21}'-s\omega_3' & a_{22}'-s & a_{23}'-s\omega_1' \\ a_{31}'-s\omega_2' & a_{32}'-s\omega_1' & a_{33}'-s \end{vmatrix}=0. \tag{8'}$$

Так как уравнения (8) и (8′) должны давать равные значения для s, то коэфициенты их при соответствующих степенях s должны быть пропорциональны. Пусть δ будет дискриминант старших членов уравнения (1) данной поверхности:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и через Ω обозначим определитель:

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Назовем через δ_1 определитель, полученный из δ заменой его первого столбца первым столбцом определителя Ω, т. е. положим:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ \omega_3 & a_{22} & a_{23} \\ \omega_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Подобным образом δ_2 пусть обозначает определитель δ, в котором второй столбец заменен вторым столбцом определителя Ω; наконец, δ_3 получен из δ заменой его третьего столбца третьим столбцом определителя Ω.

Далее пусть δ_{23}, δ_{31}, δ_{12} обозначают те определители, которые получаются из δ заменой двух столбцов, отмеченных индексами, соответствующими столбцами определителя Ω.

Условившись в этих обозначениях, разложим определитель (8) в сумму определителей и соберем затем члены с одинаковыми степенями s, тогда получим уравнение:

$$\delta - s(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + s^2(\delta_{23} + \delta_{31} + \delta_{12}) - s^3\Omega = 0, \tag{9}$$

совершенно так же поступим с уравнением (8'); получим:

$$\delta' - s(\delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3) + s^2(\delta'_{23} + \delta'_{31} + \delta'_{12}) - s^3\Omega' = 0. \tag{9'}$$

Как сказано, коэфициенты этих уравнений должны быть пропорциональны:

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3} = \frac{\delta_{23} + \delta_{31} + \delta_{12}}{\delta'_{23} + \delta'_{31} + \delta'_{12}} = \frac{\Omega}{\Omega'},$$

что дает три отдельных соотношения:

$$\frac{\delta_{23} + \delta_{31} + \delta_{12}}{\Omega} = \frac{\delta'_{23} + \delta'_{31} + \delta'_{12}}{\Omega'},$$

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\Omega} = \frac{\delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3}{\Omega'},$$

$$\frac{\delta}{\Omega} = \frac{\delta'}{\Omega'}.$$

Эти равенства показывают, что некоторые выражения, составленные из коэфициентов уравнения данной поверхности (и косинусов координатных углов), сохраняют свои значения в любой системе координат (перенос начала не меняет старших коэфициентов); такие выражения называются инвариантами уравнения поверхности. Выше мы получили три таких инварианта:

$$I_1 = \frac{\delta_{23} + \delta_{31} + \delta_{12}}{\Omega},$$

$$I_2 = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\Omega},$$

$$I_3 = \frac{\delta}{\Omega}.$$

Следуя такому же приему и взяв вместо старших членов уравнения поверхности полностью его левую часть, мы можем получить тождество:

$$2F(x, y, z) - sd^2 \equiv 2F'(X, Y, Z) - sd'^2.$$

Выберем теперь параметр s так, чтобы уравнение

$$2F(x, y, z) - sd^2 = 0$$

изображало конус, т. е. чтобы его дискриминант равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} - s\omega_3 & a_{13} - s\omega_2 & a_{14} \\ a_{21} - s\omega_3 & a_{22} - s & a_{23} - s\omega_1 & a_{24} \\ a_{31} - s\omega_2 & a_{32} - s\omega_1 & a_{33} - s & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Развернем это уравнение по степеням s и выпишем его два крайних члена:

$$\Delta - s(\quad) + s^2(\quad) - s^3 \cdot a_{44}\Omega = 0.$$

Рассуждением, подобным предыдущему, легко обнаружить справедливость равенства:

$$\frac{\Delta}{a_{44}\Omega} = \frac{\Delta'}{a'_{44}\Omega'};$$

так как мы поворачивали лишь оси координат, не изменяя начала, то свободный член уравнения при таком преобразовании не меняется:

$$a_{44} = a'_{44},$$

следовательно:

$$\frac{\Delta}{\Omega} = \frac{\Delta'}{\Omega'},$$

что показывает, что выражение:

$$I_4 = \frac{\Delta}{\Omega}$$

является новым инвариантом поворота осей.

Коэфициенты старших членов уравнения, входящие в три первых инварианта, не изменяются при переносе начала координат; с другой стороны, Δ, как было доказано в § 2 главы XVI, сохраняет свое значение при переносе начала. Таким образом четыре выражения:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\delta_{23} + \delta_{31} + \delta_{12}}{\Omega}, \\
I_2 &= \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\Omega}, \\
I_3 &= \frac{\delta}{\Omega}, \\
I_4 &= \frac{\Delta}{\Omega}
\end{aligned} \tag{10}
$$

не изменяют своих значений при переходе к любой новой системе координат (декартовой же), короче говоря, они являются инвариантами уравнения поверхности. Уравнение (8) или (9), которое теперь может быть написано в виде:

$$
s^3 - I_1 s^2 + I_2 s - I_3 = 0, \tag{11}
$$

мы уже встречали при определении главных направлений поверхности; тогда мы его назвали характеристическим уравнением и упомянули, что оно всегда имеет действительные корни; как следовало ожидать еще в той прежней задаче, это уравнение не меняет своего вида от преобразования координат.

Весьма важное значение имеют корни этого характеристического уравнения; предположим, что за оси координат берутся главные направления поверхности (т. е. оси попарно сопряжены и попарно взаимно перпендикулярны), тогда в новой системе координат будем иметь:

$$
a'_{23} = 0, \qquad a'_{31} = 0, \qquad a'_{12} = 0,
$$

и характеристическое уравнение примет вид:

$$
\begin{vmatrix}
a'_{11} - s & 0 & 0 \\
0 & a'_{22} - s & 0 \\
0 & 0 & a'_{33} - s
\end{vmatrix} = 0
$$

или

$$
(a'_{11} - s)(a'_{22} - s)(a'_{33} - s) = 0,
$$

т. е. корни его будут

$$
s_1 = a'_{11}, \qquad s_2 = a'_{22}, \qquad s_3 = a'_{33}, \tag{12}
$$

но коэфициенты характеристического уравнения суть инварианты, потому его корни не зависят от выбора координатной системы, следовательно, они всегда будут иметь указанные значения (12). Итак, корни характеристического уравнения суть коэфициенты при квадратах координат уравнения поверхности, отнесенной к главным направлениям.

Ниже мы укажем применение полученных инвариантов к упрощению уравнения поверхностей 2-го порядка.

2. Упрощение уравнения центральных поверхностей.

Уравнение поверхностей, имеющих центр на конечном расстоянии ($\delta \neq 0$), может быть приведено к своему простейшему виду следующим образом.

За начало координат примем центр поверхности; тогда в преобразованном уравнении члены с первою степенью координат пропадут:

$$a'_{14} = a'_{24} = a'_{34} = 0;$$

далее за оси координат возьмем главные направления поверхности, в таком случае:

$$a'_{23} = a'_{3} = a'_{12} = 0,$$

и уравнение поверхности, отнесенное к прямоугольной системе координат, будет вида:

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{13}$$

причем коэфициенты при квадратах координат будут корнями характеристического уравнения (8).

Так как свободный член характеристического уравнения равен

$$-I_3 = -\frac{\delta}{\Omega}$$

и отличен от нуля в нашем случае, то ни один из корней характеристического уравнения не равен нулю. Если $\Delta = 0$, то уравнение (13) изображает конус того или другого вида, смотря по знакам коэфициентов при квадратах координат.

Если $\Delta \neq 0$, то в уравнении (13) можно свободный член перенести в правую сторону и затем все уравнение на него разделить, тогда:

$$-\frac{s_1\delta}{\Delta}X^2 - \frac{s_2\delta}{\Delta}Y^2 - \frac{s_3\delta}{\Delta}Z^2 = 1. \tag{14}$$

В дальнейшем все будет зависеть от знаков корней s_1, s_2 и s_3 и выражения $\frac{\Delta}{\delta}$. Если все три корня одинаковых знаков, то коэфициенты уравнения (14) будут или все положительны (если корни и $\frac{\Delta}{\delta}$ имеют противоположные знаки) или все отрицательны (если корни и $\frac{\Delta}{\delta}$ имеют одинаковые знаки); таким образом уравнение (14) будет или вида:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \tag{15}$$

или вида:

$$-\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1. \tag{15'}$$

Если корни характеристического уравнения имеют разные знаки, то или два из них положительны, третий отрицательный, или, наоборот, один положительный, два отрицательны; в первом случае коэфициенты уравнения (14) могут иметь знаки:

$$\text{при } \frac{\Delta}{\delta} < 0 \qquad + + -,$$

$$\text{при } \frac{\Delta}{\delta} > 0 \qquad - - +,$$

во втором случае они будут иметь знаки:

$$\text{при } \frac{\Delta}{\delta} < 0 \qquad + - -,$$

$$\text{при } \frac{\Delta}{\delta} > 0 \qquad - + +.$$

Итак, если характеристическое уравнение имеет корни разных знаков, то уравнение (14) представляет в отношении знаков коэфициентов лишь два случая: два его коэфициента положительны, третий отрицателен или, наоборот, один коэфициент положительный, два других отрицательны; какой из корней приставить коэфициентом к той или другой координате, не имеет значения, так как мы всегда можем изменить наименование осей. Таким образом в случае корней разных знаков мы приходим к двум видам уравнения (14):

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1, \tag{16}$$

$$-\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1. \tag{17}$$

Поверхность, изображаемая уравнением (15), называется эллипсоидом; уравнение (15′) не удовлетворяется ни при каких действительных значениях координат, поэтому говорят, что оно изображает мнимую поверхность.

Поверхности, изображаемые уравнениями (16) и (17), называются гиперболоидами, первый из них однополостным (или гиперболоидом первого рода), второй — двуполостным (или гиперболоидом второго рода).

Знаки корней характеристического уравнения (9) могут быть определены до его решения по следующему правилу Декарта. Будем говорить, что два рядом стоящие коэфициента уравнения представляют перемену, если они разных знаков, и последовательность, если они одинаковых знаков; правило Декарта в применении к характеристическому уравнению будет таково: так как все корни уравнения действительны, то число положительных его корней равно числу перемен среди его коэфициентов; остальные корни будут отрицательными.

Пример 1. Определим вид поверхности, заданной относительно прямоугольной системы координат уравнением:

$$25x^2+18y^2+11z^2-8yz+8xy+\frac{26}{3}x+\frac{28}{3}y-\frac{4}{3}z+\frac{14}{9}=0.$$

С этой целью составляем и вычисляем оба дискриминанта уравнения:

$$\delta=\begin{vmatrix}25 & 4 & 0\\ 4 & 18 & -4\\ 0 & -4 & 11\end{vmatrix}=6\cdot 9^3,\quad \Delta=\begin{vmatrix}25 & 4 & 0 & \frac{13}{3}\\ 4 & 18 & -4 & \frac{14}{3}\\ 0 & -4 & 11 & -\frac{2}{3}\\ \frac{13}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{14}{9}\end{vmatrix}=-6\cdot 9^2.$$

Затем составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}25-s & 4 & 0\\ 4 & 18-s & -4\\ 0 & -4 & 11-s\end{vmatrix}=0.$$

Развернув его левую часть хотя бы по правилу Сарруса, находим:

$$(25-s)(18-s)(11-s)-16(25-s)-16(11-s)=0$$

или по приведении двух последних скобок:

$$(25-s)(18-s)(11-s)-32(18-s)=0.$$

Здесь становится очевидным один из корней характеристического уравнения

$$s_1=18,$$

два других определятся затем из квадратного уравнения:

$$(25-s)(11-s)-32=0$$

или

$$243-36s+s^2=0.$$

Следовательно:

$$s_2=9,\ s_3=27.$$

Таким образом каноническое уравнение (13) для нашего случая будет:

$$9x^2+18y^2+27z^2-\frac{1}{9}=0,$$

и оно изображает эллипсоид.

Пример 2. Пусть нам дано уравнение:

$$x^2+2y^2+3z^2+3yz-4zx-2xy-10x+13y+16z=0$$

по отношению к прямоугольной системе координат. Вычисляем его дискриминанты

$$\delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & \frac{3}{2}\\ -2 & \frac{3}{2} & 3\end{vmatrix}=-\frac{5}{4},\quad \Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2 & -5\\ -1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{13}{2}\\ -2 & \frac{3}{2} & 3 & 8\\ -5 & \frac{13}{2} & 8 & 0\end{vmatrix}=\frac{65}{2}$$

и составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-s & -1 & -2 \\ -1 & 2-s & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} & 3-s \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув левую часть последнего по правилу Сарруса:

$$(1-s)(2-s)(3-s)+6-4(2-s)-\frac{9}{4}(1-s)-(3-s)=0,$$

сделаем приведение четырех последних членов, тогда:

$$(1-s)(2-s)(3-s)-\frac{29}{4}(1-s)=0,$$

таким образом один из его корней будет:

$$s_1 = 1,$$

а два других найдутся из уравнения:

$$(2-s)(3-s)-\frac{29}{4}=0,$$

так что

$$s_2 = \frac{\sqrt{30}+5}{2}, \quad s_3 = -\frac{\sqrt{30}-5}{2}.$$

Итак, уравнение поверхности, отнесенной к главным осям и центру, будет:

$$x^2+\frac{\sqrt{30}+5}{2}y^2-\frac{\sqrt{30}-5}{2}z^2-26=0,$$

и оно изображает однополостный гиперболоид.

Пример 3. Возьмем теперь уравнение (относительно прямоугольной системы координат):

$$-3x^2+y^2+2z^2-8xy-4xz+12yz-4x-2y-\frac{4}{3}=0;$$

вычисляем его дискриминанты:

$$\delta = \begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 162, \quad \Delta = \begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & 6 & -1 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = -54.$$

Развернув характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -3-s & -4 & -2 \\ -4 & 1-s & 6 \\ -2 & 6 & 2-s \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$(-3-s)(1-s)(2-s)+56(3+s)=0,$$

мы видим, что оно имеет корень:

$$s_1 = -3;$$

тогда, сократив его левую часть на $-(3+s)$, из уравнения

$$-54-3s+s^2=0$$

определим два его других корня:

$$s_2 = 9,\ s_3 = -6.$$

Поэтому уравнение поверхности, отнесенной к главным осям и центру, будет:

$$-6x^2 - 3y^2 + 9z^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

и оно изображает двуполостный гиперболоид.

Пример 4. Наконец, возьмем уравнение:

$$5x^2 + 14y^2 - z^2 - 28xy - 32xz - 4yz + 14x - 8y - 10z + 4 = 0;$$

его дискриминанты будут:

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & -14 & -16 \\ -14 & 14 & -2 \\ -16 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 9^3,\quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & -14 & -16 & 7 \\ -14 & 14 & -2 & -4 \\ -16 & -2 & -1 & -5 \\ 7 & -4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Первый из них отличен от нуля, второй же равен нулю; следовательно, уравнение изображает конус.

Характеристическое уравнение, если предполагать систему координат прямоугольной, будет:

$$\begin{vmatrix} 5-s & -14 & -16 \\ -14 & 14-s & -2 \\ -16 & -2 & -1-s \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув его и сделав приведение, получим:

$$-6 \cdot 9^3 + 405s + 18s^2 - s^3 = 0;$$

так как его коэфициенты кратны 9, то положим $s = 9t$, тогда:

$$-6 + 5t + 2t^2 - t^3 = 0,$$

и корни последнего, очевидно, будут:

$$t_1 = 3,\ t_2 = 1,\ t_3 = -2.$$

Итак, приведенное уравнение конуса напишется в виде:

$$27X^2 + 9Y^2 - 18Z^2 = 0$$

или

$$3X^2 + Y^2 - 2Z^2 = 0.$$

Упражнения. 800. Привести[1]) к каноническому виду каждое из уравнений:

1) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2zx + 4y - 3z = 0,$
2) $x^2 + y^2 - xz - 1 = 0,$
3) $y^2 + 4z^2 - 2zx + 2y + 5 = 0,$
4) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - yz + zx - xy + 12x - 4y + 12z + 26 = 0.$
5) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 3yz - 2xy - 6x + 7y + 6z + \frac{26}{5} = 0.$

801. Привести к каноническому виду уравнения:

1) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2x = 0,$
2) $yz + zx + xy + 1 = 0$

и найти, кроме того, центр и главные плоскости каждой из поверхностей.

---

[1]) Во всех последующих упражнениях на упрощение уравнений поверхностей или на определение их типа, если не сделано специального указания, систему координат надлежит считать прямоугольной.

3. Поверхности без центра.

Если поверхность не имеет центра на конечном расстоянии ($\delta = 0$), то нельзя выбрать начало координат так, чтобы в уравнении поверхности пропали все члены с первыми степенями координат.

Сохраняя пока начало, возьмем за оси координат главные направления, тогда уравнение поверхности будет:

$$s_1x^2 + s_2y^2 + 2\bar{a}_{14}x + 2\bar{a}_{24}y + 2\bar{a}_{34}y + a_{44} = 0; \tag{18}$$

один из корней характеристического уравнения равен нулю, так как $\delta = 0$. Далее перенесем начало координат в точку (x_1; y_1; z_1), тогда преобразованное уравнение будет:

$$s_1x^2 + s_2y^2 + 2a'_{14}x + 2a'_{24}y + 2a'_{34}z + a'_{44} = 0,$$

причем:

$$a'_{14} = s_1x_1 + \bar{a}_{14},$$

$$a'_{24} = s_2y_1 + \bar{a}_{24},$$

$$a'_{34} = \bar{a}_{34},$$

$$a'_{44} = s_1x_1^2 + s_2y_1^2 - 2\bar{a}_{14}x_1 + 2\bar{a}_{24}y_1 + 2\bar{a}_{34}z_1 + a_{44}.$$

Здесь ясно, что ни при каких конечных значениях (x_1; y_1, z_1) коэфициент при z не обращается в нуль, но новое начало координат мы можем выбрать так, что

$$a'_{14} = a'_{24} = a'_{44} = 0.$$

Если $\bar{a}_{34} = 0$, то уравнение (18) будет изображать цилиндр, у которого имеется прямая центров (ось), так что, если мы желаем иметь в виду собственно поверхность с центром в бесконечно удаленной точке, мы должны считать $\bar{a}_{34} \neq 0$, равным образом и $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$. В указанном случае легко видеть, что предыдущим условиям мы можем удовлетворить, выбирая для нового начала конечные значения координат x_1, y_1, z_1. В самом деле, уравнения:

$$a'_{14} = s_1x_1 + \bar{a}_{14} = 0,$$

$$a'_{24} = s_2y_1 + \bar{a}_{24} = 0,$$

$$a'_{44} = s_1x_1^2 + s_2y_1^2 + 2\bar{a}_{14}x_1 + 2\bar{a}_{24}y_1 + 2\bar{a}_{34}z_1 + a_{44} = 0$$

дадут при $\bar{a}_{34} \neq 0$, $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$ конечные значения:

$$x_1 = -\frac{\bar{a}_{14}}{s_1},$$

$$y_1 = -\frac{\bar{a}_{24}}{s_2},$$

$$z_1 = -\frac{s_1x_1^2 + s_2y_1^2 + 2\bar{a}_{14}x_1 + 2\bar{a}_{24}y_1 + a_{44}}{2\bar{a}_{34}}.$$

В таком случае окончательное уравнение поверхности будет:

$$s_1x^2+s_2y^2+2a'_{34}z=0. \qquad (19)$$

К такому виду можно привести уравнение поверхности без центра; что касается коэфициента a'_{34}, то его можно вычислить с помощью 4-го инварианта:

$$I_4=\begin{vmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{34} & 0 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$I_4=-s_1s_2a'^2_{34},$$

откуда

$$a'_{34}=\pm\sqrt{-\frac{I_4}{s_1s_2}}. \qquad (20)$$

Если в уравнении (19) коэфициент a'_{34} не обращается в нуль (это будет, если $I_4\neq 0$ или $\Delta\neq 0$), то на него можно разделить все уравнение:

$$\frac{s_1}{a'_{34}}x^2+\frac{s_2}{a'_{34}}y^2=-2z. \qquad (19')$$

Коэфициенту a'_{34} можно по желанию придать любой знак подстановкой $-z$ вместо z, т. е. изменением направления оси z; если оба корня s_1 и s_2 будут одинаковых знаков, то уравнению (19′) можно придать вид:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z; \qquad (21)$$

если же s_1 и s_2 имеют разные знаки, то уравнение (19′) будет вида:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z. \qquad (22)$$

В обоих случаях (21) и (22) мы считаем параметры p и q положительными; первая поверхность (21) называется эллиптическим параболоидом, вторая (22) называется гиперболическим параболоидом.

Пример 1. Для приведения уравнения:

$$12x^2+6y^2+9z^2-12xz+12yz+14x-40y-20z+28=0$$

к каноническому виду составим прежде всего дискриминант старших коэфициентов и дискриминант всех коэфициентов:

$$\delta=\begin{vmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{vmatrix}, \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 12 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 6 & 6 & -20 \\ -6 & 6 & 9 & -10 \\ 7 & -20 & -10 & 28 \end{vmatrix}$$

Первый из них равен нулю, второй же отличен от нуля и равен $-2\cdot 81^2$, уравнение изображает какой-то параболоид. Составим далее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 12-s & 0 & -6 \\ 0 & 6-s & 6 \\ -6 & 6 & 9-s \end{vmatrix} = 0;$$

так как дискриминант старших коэфициентов равен нулю, то один из корней характеристического уравнения равен нулю; развернув его, найдем два других корня:

$$s_1 = 9,\ s_2 = 18;$$

они одинаковых знаков, следовательно, данное выше уравнение изображает эллиптический параболоид; третий коэфициент его приведенного уравнения определится по формуле (20):

$$a'_{34} = \pm\sqrt{\frac{2\cdot 81^2}{9\cdot 18}} = \pm 9.$$

Итак, уравнение поверхности будет:

$$9x^2 + 18y^2 = 2\cdot 9\cdot z,$$

или

$$x^2 + 2y^2 = 2z.$$

Пример 2. Возьмем теперь уравнение:

$$-32x^2 + 82y^2 + 31z^2 + 176xy - 80xz - 104yz + 20x + 44y + 340z - 166 = 0,$$

его дискриминанты будут:

$$\delta = \begin{vmatrix} -32 & 88 & -40 \\ 88 & 82 & -52 \\ -40 & -52 & 31 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta = \begin{vmatrix} -32 & 88 & -40 & 10 \\ 88 & 82 & -52 & 22 \\ -40 & -52 & 31 & 170 \\ 10 & 22 & 170 & -166 \end{vmatrix} = +8\cdot 81^4,$$

следовательно, характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -32-s & 88 & -40 \\ 88 & 82-s & -52 \\ -40 & -52 & 31-s \end{vmatrix} = 0$$

имеет один корень, равный нулю; два же других корня легко найдутся и будут:

$$s_1 = 162,\ s_2 = -81;$$

по ним и дискриминанту всех коэфициентов определится третий коэфициент:

$$a'_{34} = \pm\sqrt{\frac{8\cdot 81^4}{162\cdot 81}} = \pm 162.$$

Следовательно, приведенное уравнение поверхности будет:

$$162x^2 - 81y^2 = 324z$$

или

$$x^2 - \frac{y^2}{2} = 2z.$$

Упражнения. 802. Привести к каноническому виду уравнения:

1) $4x^2 + 3y^2 + z^2 - 4zx + y - 3z - 2 = 0,$

2) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6zx + 2x + 4y + 6z - 8 = 0.$

803. Привести к каноническому виду уравнение:

$$2y^2 + z^2 - 5yz + 4x + z = 0$$

и определить главные плоскости поверхности.

4. Цилиндры, пары плоскостей.

Если данное уравнение 2-й степени изображает поверхность с прямою центров на конечном расстоянии, то, перенося начало координат в какую-либо точку прямой центров, мы уничтожим в уравнении члены с первыми степенями координат; выбирая затем за направления новых осей координат главные направления поверхности, мы группу старших членов приведем к сумме (в алгебраическом смысле) квадратов координат. Таким образом преобразованное уравнение примет вид:

$$s_1X^2+s_2Y^2+a'_{44}=0; \tag{23}$$

однако, так как I_4 для прежнего уравнения, а следовательно, и для преобразованного, обращается в нуль, то сравнение прежнего и нового выражений этого инварианта не *даст* нам уравнения для определения коэфициента a'_{44}.

В этом случае нам придется итти несколько иным путем; предположим, что мы прежде перенесли начало координат, тогда преобразованное уравнение будет:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+a'_{44}=0, \tag{24}$$

причем коэфициент a'_{44} определится способом, указанным в конце § 8 главы XVII, именно по формуле:

$$a'_{44}=\frac{\Delta_{ik}}{\delta_{ik}}. \tag{25}$$

Когда мы затем будем изменять только направление осей для уравнения (24), то свободный член последнего не изменит своего значения; итак, окончательное уравнение будет вида (23), причем свободный член должен быть вычислен по формуле (25). Если в уравнении (23) окажется, что $a'_{44}=0$, то оно будет изображать пару плоскостей, пересекающихся по оси Oz (прямой центров); если же $a'_{44}\neq 0$, то уравнение можно привести к виду:

$$-\frac{s_1}{a'_{44}}X^2-\frac{s_2}{a'_{44}}Y^2=1. \tag{23'}$$

Если s_1 и s_2 имеют одинаковые знаки, но противоположные знаку a'_{44}, то уравнение изображает эллиптический цилиндр; если s_1, s_2 и a'_{44} имеют одинаковые знаки, уравнение изображает мнимый цилиндр; наконец, когда s_1 и s_2 имеют разные знаки, то уравнение будет изображать гиперболический цилиндр. Если данное уравнение (23) изображает (при $a'_{44}=0$) пару плоскостей, действительных, когда s_1 и s_2 разных знаков, то уравнения каждой из этих плоскостей в отдельности могут быть написаны в виде:

$$\sqrt{-\frac{s_1}{s_2}}X+Y=0,$$

$$-\sqrt{-\frac{s_1}{s_2}}X+Y=0,$$

причем здесь под X и Y разумеются левые части нормированных уравнений двух главных диаметральных плоскостей поверхности. Гораздо проще получить *отдельные уравнения плоскостей, на которые распадается поверхность, разрешая уравнение последней относительно одной из координат через другие*; выбранная координата в этом случае должна выразиться линейной функцией двух других.

Пример 1. Уравнение:

$$x^2+4y^2+9z^2+4xy-6x-12y=0$$

изображает поверхность, имеющую на конечном расстоянии прямую центров:

$$x+2y-3=0,$$
$$(2x+4y-6=0),$$
$$9z=0,$$

притом не принадлежащую поверхности, следовательно, последняя будет эллиптическим или гиперболическим цилиндром. Составим оба дискриминанта:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix},$$

тогда, например, получим:

$$a'_{44}=\frac{\Delta_{11}}{\delta_{11}}=-\frac{9\cdot 36}{36}=-9.$$

Составляя и решая характеристическое уравнение, найдем: $s_1=5$, $s_2=9$, $s_3=0$; следовательно, упрощенное уравнение поверхности будет:

$$5x^2+9y^2-9=0,$$

оно изображает эллиптический цилиндр.

Пример 2. Для уравнения:

$$25x^2+10y^2+73z^2-64yz+94zx-32xy-52x+40y-44z-20=0$$

составим оба дискриминанта:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 25 & -16 & 47 & -26 \\ -16 & 10 & -32 & 20 \\ 47 & -32 & 73 & -22 \\ -27 & 20 & -22 & -20 \end{vmatrix}, \qquad \delta=\begin{vmatrix} 25 & -16 & 47 \\ -16 & 10 & -32 \\ 47 & -32 & 73 \end{vmatrix},$$

вычтем из элементов третьей строки определителя Δ семикратную сумму соответствующих элементов двух первых строк, а к элементам четвертой строки прибавим десятикратную такую же сумму, тогда мы получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 25 & -16 & 47 & -26 \\ -16 & 10 & -32 & 20 \\ -16 & 10 & -32 & 20 \\ 64 & -40 & 128 & -80 \end{vmatrix}.$$

Теперь видно, что определитель Δ будет ранга 2, дискриминант δ тоже ранга 2; поэтому данное уравнение изображает пару плоскостей, пересекающихся по прямой на конечном расстоянии. Чтобы получить уравнения каждой из этих плоскостей в отдельности, разрешим данное уравнение хотя бы относительно x, рассматривая его как квадратное уравнение:

$$25x^2+2x(-16y+47z-26)+(10y^2+73z^2-64yz+40y-44z-20)=0,$$

тогда мы получим:

$$x=\frac{16y-47z+26\pm\sqrt{6}(y+8z-14)}{25}$$

или

$$25x-(16\pm\sqrt{6})\,y+(47\mp 8\sqrt{6})\,z-26\pm 14\sqrt{6}=0.$$

Если поверхность имеет бесконечно удаленную прямую центров, то она, как было показано, представляет собой параболический цилиндр; в этом случае дискриминант δ должен быть ранга, равного единице, все его миноры-определители 2-го порядка должны обращаться в нуль; поэтому соответствующие элементы его строк пропорциональны

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}},$$
$$\frac{a_{21}}{a_{31}}=\frac{a_{22}}{a_{32}}=\frac{a_{23}}{a_{33}}. \tag{26}$$

Из этих соотношений следует, что:

$$a_{23}=\sqrt{a_{22}a_{33}},\quad a_{12}=\sqrt{a_{11}a_{22}},\quad a_{13}=\frac{a_{12}a_{23}}{a_{22}}=\sqrt{a_{11}a_{33}}, \tag{26'}$$

где радикалы правых частей подразумеваются взятыми со знаком соответствующей левой части; в таком случае группа старших членов уравнения:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy,$$

равная:

$$(\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y+\sqrt{a_{33}}z)^2,$$

представляет собою полный квадрат линейной функции координат x, y, z. При условиях (26′) приведение общего уравнения параболического цилиндра к каноническому виду нетрудно сделать способом, аналогичным тому, который мы применяли к параболе на плоскости. В самом деле, уравнение параболического цилиндра можно написать в виде:

$$(\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y+\sqrt{a_{33}}z)^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \tag{27}$$

откуда следует, что плоскость

$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

пересекает поверхность по двум совпадающим прямым, т. е. она касается поверхности; плоскость

$$\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y+\sqrt{a_{33}}z=0$$

будет одной из диаметральных плоскостей цилиндра.

Прибавим внутри скобки левой части уравнения (27) некоторую величину m, поправив соответственным образом остальные члены уравнения, тогда оно примет вид:

$$(\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y+\sqrt{a_{33}}z+m)^2+2(a_{14}-m\sqrt{a_{11}})x+$$
$$+2(a_{24}-m\sqrt{a_{22}})y+2(a_{34}-m\sqrt{a_{33}})z+a_{44}-m^2=0,$$

и выберем теперь m так, чтобы новая касательная плоскость была перпендикулярна к диаметральной плоскости, проходящей через прямую касания, т. е. положим, считая координатную систему прямоугольной, что:

$$(a_{14}-m\sqrt{a_{11}})\sqrt{a_{11}}+(a_{24}-m\sqrt{a_{22}})\sqrt{a_{22}}+(a_{34}-m\sqrt{a_{33}})\sqrt{a_{33}}=0.$$

Полагая теперь

$$Y=\frac{\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y+\sqrt{a_{33}}z+m}{\sqrt{a_{11}+a_{22}+a_{33}}},$$

$$X=\pm\frac{2(a_{14}-m\sqrt{a_{11}})x+2(a_{24}-m\sqrt{a_{22}})y+2(a_{34}-m\sqrt{a_{33}})z+a_{44}-m^2}{2\sqrt{(a_{14}-m\sqrt{a_{11}})^2+(a_{24}-m\sqrt{a_{22}})^2+(a_{34}-m\sqrt{a_{33}})^2}},$$

мы приведем уравнение цилиндра к виду:

$$Y^2=2pX;$$

где p — некоторый коэфициент, причем диаметральная плоскость $Y=0$ и касательная плоскость $X=0$ будут между собой перпендикулярны, т. е. они будут главными плоскостями.

В этом способе нам известно, как расположены новые координатные плоскости $Y=0$ и $X=0$ относительно прежней системы координат.

Пример 1. Уравнение:

$$9x^2+4y^2+36z^2-24yz+36zx-12xy-92x+56y-164z+128=0$$

можно представить в виде:

$$(3x-2y+6z+m)^2=(92+6m)x+(-56-4m)y+$$
$$+(164+12m)-128+m^2.$$

Выберем параметр m под условием:

$$3(92+6m)-2(-56-4m)+6(164+12m)=0,$$

что даст нам:

$$m=-14.$$

Теперь полагаем:

$$Y=\frac{3x-2y+6z-14}{-7},$$

$$X=\frac{8x-4z+68}{4\sqrt{5}},$$

тогда каноническое уравнение цилиндра будет:

$$49Y^2=4\sqrt{5}X.$$

Наконец, в том случае, когда уравнение изображает поверхность с местом центров в виде плоскости, матрица D (см. § 7 гл. XVII) должна быть ранга, равного единице, к условиям (26) присоединяются еще соотношения:

$$\frac{a_{41}}{a_{11}}=\frac{a_{42}}{a_{12}}=\frac{a_{43}}{a_{13}}=u.$$

Тогда общее уравнение поверхности можно представить в виде:

$$(\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y+\sqrt{a_{33}}z)^2+$$
$$+2u\sqrt{a_{11}}(\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y+\sqrt{a_{33}}z)+a_{44}=0,$$

оно будет изображать пару параллельных плоскостей:

$$\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y+\sqrt{a_{33}}z=-u\sqrt{a_{11}}\pm\sqrt{a_{11}u^2-a_{44}}.$$

Пример 2. Например, уравнение:

$$25x^2+4y^2+9z^2-12yz-30zx+20xy+55x+22y-33z+28=0$$

можно написать следующим образом:

$$(5x+2y-3z)^2+11(5x+2y-3z)+28=0,$$

откуда

$$5x+2y-3z=\frac{-11\pm3}{2}.$$

Следовательно, данное уравнение изображает пару параллельных плоскостей:

$$5x+2y-3z+7=0,$$
$$5x+2y-3z+4=0.$$

Упражнения. 804. Привести к каноническому виду уравнения:

1) $10x^2+50y^2+29z^2+66yz+2zx-20xy+18x+34y+46z+24=0$,

2) $15y^2+24z^2+38yz+36zx+30xy+18x+64y+78z+20=0$.

805. Какую поверхность изображает каждое из уравнений:

1) $3x^2-4y^2+3z^2-4yz+10zx+4xy+6x-20y-14z-24=0$,

2) $12x^2-15y^2-20z^2+37yz+zx-11xy-14x-54y+64z-48=0$?

806. Какую поверхность изображает каждое из уравнений:

1) $16x^2+9y^2+z^2+6yz+8zx+24xy+10x+22y-2z-4=0$,

2) $4x^2+49y^2+z^2-14yz+4zx-28xy+8x-28y+4z+3=0$,

3) $16x^2+9y^2+100z^2+60yz+80zx+24xy+56x+42y+140z+49=0$?

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

К § 1.

1. Что называется инвариантом уравнения поверхности 2-го порядка относительно преобразования координатной системы?

2. Сколько независимых между собою инвариантов относительно преобразования координатной системы имеет уравнение поверхности 2-го порядка?

3. Каковы будут эти инварианты?

4. Что дают корни характеристического уравнения какой-либо поверхности 2-го порядка?

К § 2.

5. К какому простейшему виду может быть приведено уравнение поверхности 2-го порядка с определённым центром на конечном расстоянии?

6. Как вычисляются коэфициенты указанного упрощенного уравнения?

7. Какие типы поверхностей могут здесь встретиться?

К § 3.

8. К какому простейшему виду приводится уравнение поверхностей с бесконечно удаленным центром и как вычисляются его коэфициенты?

К § 4.

9. Как приводится к каноническому виду уравнение эллиптического или гиперболического цилиндра?

10. Как приводится к каноническому виду уравнение параболического цилиндра?

11. Если общее уравнение 2-й степени изображает пару плоскостей, то как найти уравнение каждой из этих плоскостей в отдельности?

Упражнения. 807. Каковы будут инварианты уравнения поверхности 2-го порядка для преобразования координат, состоящего лишь из произвольных изменений направлений осей?

808. Если за начало координат поверхности 2-го порядка, имеющей центром точку, взять одну из ее вершин, а за оси — главные направления, то уравнение поверхности напишется в виде:

$$s_1x^2 + s_2y^2 + s_3z^2 + 2a'_{34}\,z = 0$$

(если предполагать, что корни s_1 и s_2 отличны от нуля). Определить коэфициент a'_{34} по коэфициентам уравнения данной поверхности, отнесенной к любой системе координат.

809. Уравнение данной поверхности 2-го порядка (центральной):

$$2F = 0$$

в некоторой новой системе координат преобразуется к виду:

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + a'_{44} = 0.$$

Можно ли по этим двум уравнениям найти координатные углы новой системы?

810. Найти длину такого диаметра центральной поверхности, который с двумя диаметрами, равными ему, образует сопряженную тройку.

Глава XX.

Простейшие преобразования многообразия и его инварианты.

Совокупность бесчисленного множества каких-либо геометрических элементов (точек, прямых, плоскостей и т. д.) называется вообще многообразием. Если мы имеем два многообразия, например многообразие точек на одной прямой и многообразие точек на другой прямой, или многообразие точек на одной прямой и многообразие прямых, проходящих через заданную точку, или многообразие всех точек плоскости и многообразие всех прямых плоскости и т. д., то мы можем установить определенный геометрический переход (например, с помощью какого-либо „построения") от элементов одного многообразия к элементам другого многообразия; такой переход от элементов одного многообразия к элементам другого называется *преобразованием многообразия.*

В каждом многообразии мы можем выбрать ту или другую координатную систему и определять затем элемент многообразия координатами (или координатою); тогда указанный переход от одного однообразия к другому аналитически изобразится зависимостями между текущими координатами элемента одного многообразия и текущими координатами соответствующего элемента другого многообразия.

В координатной геометрии эту аналитическую зависимость между текущими координатами двух многообразий, наравне с ее геометрическим истолкованием как перехода от одного многообразия к другому, принято также называть преобразованием многообразия.

Изучение преобразований представляет значительный интерес по следующим трем наиболее существенным основаниям. Прежде всего, связывая геометрическое истолкование с аналитическими свойствами преобразования, мы устанавливаем известный параллелизм между геометрией и алгеброй; не считая наглядного геометрического истолкования алгебраических предложений, мы в этом параллелизме имеем мощное средство расширения одной из этих областей (алгебры или геометрии) за счет успехов, полученных в другой. Далее, устанавливая переход от элементов одного многообразия к элементам другого, мы по свойствам и строению (структуре) одного многообразия можем составить себе представление о свойствах и строении другого; здесь опять, с одной стороны, мы имеем средство для расширения области наших конкретных геометрических знаний, с другой стороны, этот же переход дает нам организующий принцип в общей массе частных геометрических свойств отдельных многообразий. Связывая свойства двух многообразий их преобразованием, мы приучаемся рассматривать их с более общей точки зрения, считать их как бы равносильными и меньше ценить их частную форму в данном многообразии.

Наконец, изучение преобразований многообразий представляет интерес еще и в том отношении, что оно (в тесной связи алгебры и геометрии) ведет к двум основным и важнейшим понятиям, именно понятию об инвариантах и о группе; эти же последние понятия приводят к наиболее широким и общим современным точкам зрения на геометрии различных многообразий.

Настоящая глава ставит себе целью изучение простейших преобразований и развертывание на их примере тех общих соображений, которые указаны выше; однако предлагаемый материал помимо этого, так сказать, теоретического своего значения имеет еще и непосредственное значение для приложений, как материал, дающий конкретные свойства тех или иных многообразий.

1. Преобразование многообразия.

Преобразованием координат вообще называют переход от одних координат к другим; такой переход, например, от координаты x какого-либо элемента к координате x' будет даваться одним соотношением вида:

$$x' = f(x). \tag{1}$$

Это соотношение можем назвать формулой преобразования; оно позволяет по координате x вычислить соответствующее значение координаты x' и, обратно, по значению x' найти одно или несколько [относительно x уравнение (1) может быть не первой степени и иметь несколько решений при данном x'] соответствующих значений x. При этом в соотношении (1) под x и x' мы можем подразумевать координаты элементов относительно любых систем, даже неодинаковых; например, можем предполагать, что x есть абсцисса точки на прямой, а x' есть барицентрическая координата точки на прямой.

Соотношению (1) можно давать двоякое истолкование. Во-первых, мы можем предполагать, что координаты x и x' определяют *один и тот же элемент в различных*, следовательно, *координатных системах*; в таком случае формула (1) будет определять по координате x любого элемента в одной системе координату x' того же элемента относительно другой координатной системы; тогда мы скажем, что формула (1) дает *преобразование системы координат*.

Если x — абсцисса точки M на прямой относительно начала O и x' — абсцисса той же точки относительно начала O', то эти координаты будут связаны соотношением:

$$x' = x - a, \tag{2}$$

где a есть абсцисса O' относительно начала O; в этом толковании соотношение (2) является формулой преобразования одной системы координат в другую, полученную из первой переносом начала. Допустим далее, что начало координат остается неизменным, но в то время как в первой системе координат мы *за единицу масштаба берем отрезок m, во второй системе за единицу масштаба примем отрезок m'*; тогда зависимость между координатами x' и x одной и той же точки в этих двух системах представится соотношением:

$$x' = kx, \tag{3}$$

где $k = \frac{m}{m'}$ есть отношение длин отрезков, выбранных за единицы масштаба.

Наконец, с этой же точки зрения более общее соотношение

$$x' = kx - a$$

мы можем истолковать как формулу преобразования системы координат, составленного из переноса начала и изменения единицы масштаба. Соотношение:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \text{ или } x' = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

можно, очевидно, истолковать как формулу преобразования системы координат, состоящего в переходе от прямолинейной системы к системе барицентрической.

Во-вторых, относительно соотношения (1) мы можем предполагать, что x и x' обозначают координаты элементов, вообще говоря, двух различных многообразий, каждое из которых отнесено к своей системе координат; в таком случае соотношение (1) будет давать переход от элементов одного многообразия к элементам другого многообразия и может быть поэтому названо формулой *преобразования многообразия* (одного в другое). Возьмем, например, прямоугольную декартову систему xOy и рассмотрим многообразие точек на оси Ox и многообразие прямых, проходящих через точку $(0; b)$; относительно первых можно считать, что каждая из них определяется своей абсциссою x, прямые пучка можно определять их угловыми коэфициентами $k = x'$. Допустим, что каждой точке оси Ox соответствует прямая пучка, проходящая через эту точку, тогда соотношение:

$$k = -\frac{b}{x} \text{ или } x' = -\frac{b}{x} \tag{4}$$

будет давать переход от точек прямой к лучам пучка, т. е. будет давать преобразование линейного многообразия точек в многообразие лучей пучка.

В частности, если предполагать, что x и x' — координаты двух элементов относительно одной и той же системы, то преобразованием (1) будет устанавливаться соответствие одних элементов данного многообразия другим элементам того же многообразия; можно говорить в этом случае, что многообразие преобразуется само в себя. Если в этом последнем случае иметь в виду, что мы лишь некоторую совокупность элементов („фигуру“) данного многообразия преобразуем в совокупность соответствующих элементов (в другую фигуру) того же многообразия, то удобнее и нагляднее говорить здесь *о преобразовании фигур* данного многообразия. Возьмем, например, преобразование

$$x' = kx, \tag{3}$$

в котором x' и x будем толковать как абсциссы точек относительно одной и той же системы координат; это будет преобразование прямой (как многообразия точек) самой в себя. Каждой точке M с координатой x будет соответствовать точка M' с координатою x', в k раз большею (если $k > 0$); можно сказать, что данное преобразование есть растяжение или сжатие фигуры (или всей прямой). Из соотношений (3) следует, что для двух пар точек:

$$x_2' - x_1' = k(x_2 - x_1),$$

т. е. любое расстояние $x_2 - x_1$ первой фигуры будет соответствовать всегда расстоянию $x'_2 - x'_1 = k(x_2 - x_1)$ второй фигуры, в k раз большему. Таким образом соотношение (3) дает *подобное* преобразование фигуры (при $k > 0$).

Если же $k < 0$, то подобное преобразование соединяется с переходом каждой точки в положение, симметричное относительно начала, можно сказать с зеркальным отображением фигуры относительно начала.

2. Аффинное преобразование.

Аффинным преобразованием многообразия точек называется преобразование, линейное относительно декартовых координат; для многообразия точек на прямой аффинное преобразование изобразится соотношением:

$$x' = ax + b \qquad (a \neq 0). \tag{5}$$

Преобразованием, „обратным" данному, называется преобразование:

$$x = \frac{x'}{a} - \frac{b}{a}.$$

Таким образом аффинное преобразование устанавливает взаимно-однозначное соответствие точек прямой точкам другой (или той же самой) прямой; когда преобразуются точки прямой в точки той же прямой, то для наглядности удобно представлять себе прямую как бы сдвоенною и тогда можно говорить, что аффинное преобразование устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками одной прямой и точками другой прямой, совпадающей с первой; впрочем, можно обе прямые и разъединить, установив на каждой из них свою декартову систему координат.

Общее аффинное преобразование (5), очевидно, может быть разложено на два последовательных преобразования:

$$x'' = ax,$$
$$x' = x'' + b.$$

Первое из них, как мы видим, обозначает подобное преобразование, соединенное при $a < 0$ с зеркальным отображением; второе же обозначает перенос фигуры (или же всей прямой) на расстояние b. Поэтому общее аффинное преобразование может быть разложено на подобное преобразование и перенос (при $a < 0$ сверх того обращение фигуры относительно начала). Нетрудно видеть, что, наоборот, если мы определим геометрически аффинное преобразование как сочетание подобных преобразований фигуры и ее переносов (а также и обращений), то такое преобразование многообразия точек на прямой аналитически определится соотношением вида (5).

Когда в формуле (5) координата x принимает значение $x = \pm\infty$, то x' получит, очевидно, такое же значение, т. е. бесконечно удаленной точке в аффинном преобразовании соответствует бесконечно удаленная точка, или, иначе, бесконечно удаленная точка сохраняется (при совмещении прямых) в аффинном преобразовании.

Посмотрим теперь, нет ли на прямой еще какой-либо точки, которая сохранялась бы или сама себе соответствовала бы при данном аффинном преобразовании; мы, следовательно, желаем найти такую точку, для которой $x' = x$. Координата такой точки определится уравнением:

$$x = ax + b,$$

которое при $a \neq 1$ имеет конечное определенное решение:

$$x_0 = \frac{b}{1-a}.$$

Итак, кроме бесконечно удаленной точки аффинное преобразование (при $a \neq 1$) сохраняет еще некоторую точку на конечном расстоянии.

Упражнения. 811. Аффинное преобразование будет вполне определено, если мы для пары точек (не совпадающих) $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ назначим соответствующие (не совпадающие) точки $M_1'(x_1')$ и $M_2'(x_2')$. Показать, что аффинное преобразование изобразится в этом случае соотношением:

$$x' = \frac{x_1' - x_2'}{x_1 - x_2}\, x + \frac{x_1 x_2' - x_2 x_1'}{x_1 - x_2}.$$

812. Как изобразится аффинное преобразование прямой самой в себя, если за начало координат принять точку, сохраняющуюся в данном преобразовании?

813. Аффинное преобразование точек плоскости изображается соотношениями:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2. \end{aligned} \qquad (6)$$

Оно будет взаимно-однозначным при условии $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$; каждую прямую первой плоскости аффинное преобразование переводит в прямую другой плоскости, иначе говоря, точкам, лежащим на одной прямой, в аффинном преобразовании (6) соответствуют точки, тоже лежащие на одной прямой. Аффинное преобразование (6) точек плоскости вполне определяется, если для трех точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$, не лежащих на одной прямой, мы назначим любые соответствующие точки $M_1'(x_1'; y_1')$, $M_2'(x_2'; y_2')$, $M_3'(x_3'; y_3')$, не лежащие на одной прямой.

814. При аффинном преобразовании плоскости ее бесконечно удаленным точкам соответствуют бесконечно удаленные же точки другой или совмещенной плоскости; однако при этом бесконечно удаленные точки, так сказать, переставляются между собой, ибо бесконечно удаленной точке на прямой $y = kx$ будет соответствовать бесконечно удаленная точка на прямой с угловым коэфициентом:

$$k' = \frac{a_2 + b_2 k}{a_1 + b_1 k}.$$

Бесконечно удаленная прямая (как целое) переходит в бесконечно удаленную прямую.

Из этих замечаний следует, что параллельные прямые, как прямые, пересекающиеся в бесконечно удаленной точке, переходят при аффинном преобразовании в прямые параллельные.

3. Проективное преобразование.

Рассмотрим теперь для многообразия точек на прямой преобразование, изображаемое дробнолинейным соотношением:

$$x' = \frac{cx + d}{ax + b}, \tag{7}$$

относительно коэфициентов которого будем предполагать, что $cb - ad \neq 0$; если $a = 0$, то это преобразование обращается в аффинное:

$$x' = \frac{c}{b} x + \frac{d}{b},$$

поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $a \neq 0$. Такое преобразование называют также *проективным*. Так как числитель и знаменатель правой части соотношения (7) можно разделить или умножить на любое число, то можно сказать, что для указанного преобразования существенны не четыре коэфициента a, b, c, d, а только отношения трех из них к четвертому. Когда даны три точки $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$ одной прямой (или „ряда") и соответствующие им точки $M'_1(x'_1)$, $M'_2(x'_2)$ $M'_3(x'_3)$ той же или другой прямой, то из уравнений:

$$x'_1 = \frac{cx_1 + d}{ax_1 + b},$$

$$x'_2 = \frac{cx_2 + d}{ax_2 + b},$$

$$x'_3 = \frac{cx_3 + d}{ax_3 + b}$$

можно определить отношения коэфициентов a, b, c, d, т. е. коэфициентов соотношения (7), устанавливающего проективное соответствие между точками обоих рядов. Поэтому мы можем сказать, что проективное соответствие двух рядов определяется тремя парами соответственных точек.

Предположим, что оба „ряда" точек, между которыми установлено проективное соответствие с помощью соотношения (7), находятся на одной и той же прямой. Соответствующие точки таких наложенных рядов совпадают, если $x' = x$; такие элементы рядов называются *двойными элементами*, и они, очевидно, будут определяться квадратным уравнением:

$$ax^2 + (b - c)\,x - d = 0;$$

следовательно, в проективном соответствии наложенных рядов два двойных элемента (действительных различных, или действительных совпадающих, или мнимых). Легко видеть, что

$$\frac{cx + d}{ax + b} - \frac{c}{a} = \frac{ad - bc}{a(ax + b)}$$

или

$$\frac{cx + d}{ax + b} - \frac{c}{a} = \frac{ad - bc}{a^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{b}{a}};$$

поэтому соотношение (7) можно представить в виде:

$$x' = \frac{c}{a} + \frac{ad - bc}{a^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{b}{a}}. \qquad (7')$$

Таким образом указанное преобразование может быть получено последовательным соединением следующих преобразований:

$$\begin{aligned} x'' &= x + \frac{b}{a}, \\ x''' &= \frac{ad - bc}{a^2} \cdot \frac{1}{x''}, \\ x' &= \frac{c}{a} + x'''; \end{aligned} \qquad (8)$$

из коих первое и последнее, как мы знаем, обозначают сдвиг прямой вдоль нее самой. Остановимся подробнее на втором.

Рассмотрим преобразование:

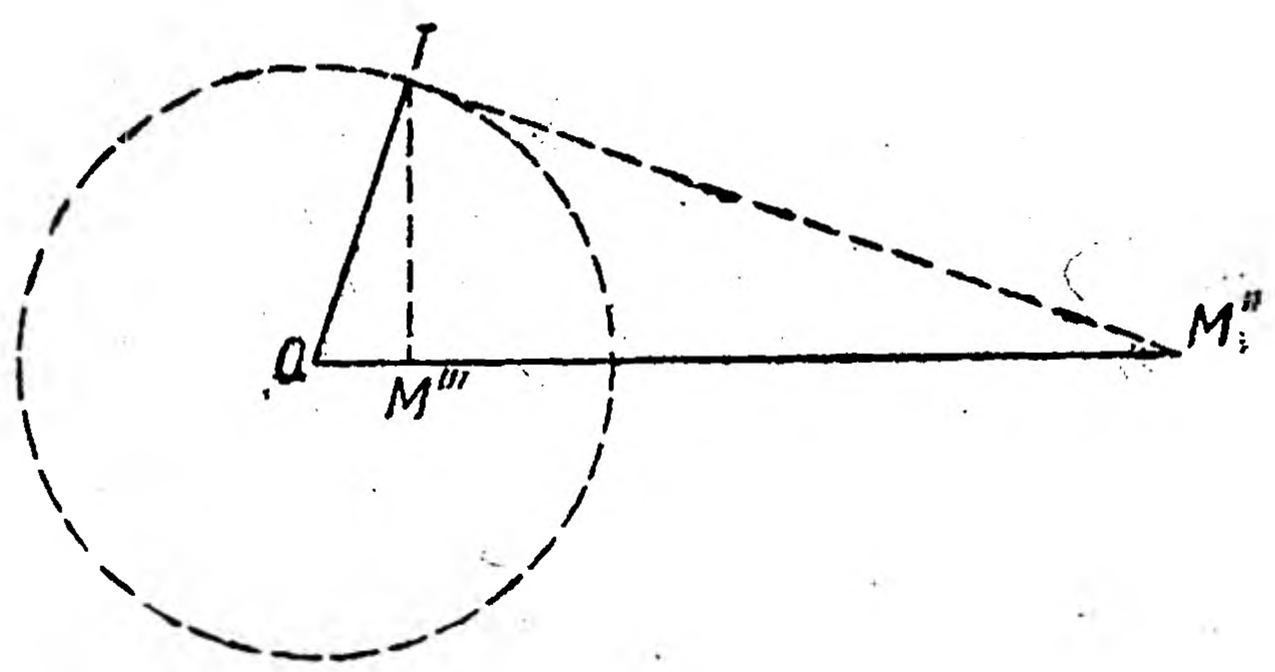
$$x''' = \frac{m^2}{x''}; \qquad (9)$$

оно называется инверсией („обращением“) и геометрически может быть истолковано следующим образом. Построим круг радиуса m с центром в начале координат (черт. 168); пусть $x'' > m$ и определяет точку M'' вне круга. Проведем касательную $M''T$ и из точки касания T опустим перпендикуляр TM''' на прямую OM''. Так как треугольник, OTM'' прямоугольный, то по известному свойству (катет есть среднее пропорциональное между всей гипотенузой и прилежащим отрезком) получим:

$$OT^2 = OM'' \cdot OM''',$$

откуда

$$x''' = \frac{m^2}{x''}.$$



Черт. 168.

Аналогичный результат мы получим, если точка M'' вне круга, но слева от центра (т. е. $x'' < -m$), тогда и M''' будет слева ($-m < x''' < 0$); если же точка M'' внутри круга, то роли M'' и M''' в предыдущем построении переменятся.

Таким образом инверсия есть такое преобразование, в котором точкам внутри отрезка $(-m; m)$ соответствуют точки вне этого отрезка и, обратно, точкам вне указанного отрезка будут соответствовать точки внутри отрезка. Очевидно при этом началу координат соответствует бесконечно удаленная точка и, обратно, бесконечно удаленной точке соответствует начало координат. Здесь имеется еще раз основание, чтобы принять существование одной бесконечно удаленной точки на прямой для сохранения взаимно-однозначности рассматриваемого преобразования.

Если в средней формуле (8) коэфициент $\frac{ad-bc}{a^2}$ будет положительным, то это преобразование, очевидно, равносильно преобразованию (9), т. е. инверсии. Если же указанный коэфициент отрицательный, то второе преобразование (8) может быть получено из инверсии (9), если ее соединить с обращением или зеркальным отображением относительно начала.

Итак, дробнолинейное или проективное преобразование (7) разлагается на следующие последовательные преобразования: перенос, инверсию (при $ad-bc<0$, соединенную с зеркальным отображением) и опять перенос. Начальный или конечный перенос (или оба вместе) отпадут, если один из коэфициентов b или c обратится в нуль (или оба).

Упражнения. 815. Показать, что проективное преобразование, определяемое тремя парами соответствующих точек:

$$M_1(x_1) \text{ и } M_1'(x_1'),\ M_2(x_2) \text{ и } M_2'(x_2'),\ M_3(x_3) \text{ и } M_3'(x_3'),$$

изобразится соотношением:

$$\frac{x'-x_1'}{x_2'-x'}:\frac{x_3'-x_1'}{x_2'-x_3'}=\frac{x-x_1}{x_2-x}:\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}, \tag{10}$$

которое для x' дает дробнолинейное выражение через x.

816. Какие точки в проективном преобразовании

$$x'=\frac{cx+d}{ax+b}$$

соответствуют точкам:

$$x_1=0,\quad x_2=\infty,\quad x_3=-\frac{b}{a},\quad x_4=-\frac{d}{c}.$$

817. Проективное соответствие между двумя рядами точек может быть изображено билинейным (т. е. линейным относительно обоих координат) соотношением:

$$Axx'+Bx'+Cx+D=0, \tag{11}$$

разрешение которого относительно x' даст для последнего дробнолинейное выражение через x вида (7).

4. Группа преобразований и ее инварианты.

Каждое общее преобразование

$$x'=f(x) \tag{1}$$

характеризуется, с одной стороны, видом функции $f(x)$, с другой стороны, числом существенных параметров (буквенных коэфициентов), входящих в эту функцию. Параметры, входящие в эту функцию, мы назовем существенными, когда число их не может быть уменьшено заменой их другими, которые являются функциями первых.

Например, преобразование:

$$x'=(a_1+a_2)x+a_3a_4$$

содержит только два существенных параметра, ибо, полагая

$$a_1+a_2=c_1,\quad a_3a_4=c_2,$$

мы можем привести его к виду:

$$x' = c_1 x + c_2,$$

где уже, очевидно, число параметров (без нарушения общности преобразования) не может быть уменьшено. Соотношение (1), если мы желаем подчеркнуть наличие в нем параметров a_1, $a_2, \ldots, a_m$, можем написать в виде:

$$x' = f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m). \tag{12}$$

Преобразование переноса

$$x' = x + a$$

будет линейным преобразованием с одним существенным параметром a, преобразование аффинное

$$x' = ax + b$$

будет линейным преобразованием с двумя существенными параметрами; наконец, проективное преобразование:

$$x' = \frac{cx + d}{ax + b}$$

содержит три существенных параметра, именно:

$$a_1 = \frac{c}{a}, \quad a_2 = \frac{d}{a}, \quad a_3 = \frac{b}{a}.$$

Преобразование одного многообразия в другое назовем *взаимно-однозначным*, если в силу этого преобразования каждому элементу первого многообразия будет соответствовать свой единственный элемент второго многообразия и, наоборот, каждому элементу второго многообразия будет соответствовать свой единственный элемент первого многообразия. Таким образом в случае взаимно-однозначного преобразования (или соответствия) как функция $f(x)$, так и функция ей обратная должны быть однозначными функциями.

Возьмем $m+1$ произвольных точек, абсциссы которых пусть будут $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}$; тогда в силу соотношения (12) абсциссы соответственных точек в данном преобразовании будут определяться уравнениями:

$$\begin{aligned} x'_1 &= f(x_1;\ a_1, a_2, \ldots, a_m), \\ x'_2 &= f(x_2;\ a_1, a_2, \ldots, a_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_m &= f(x_m;\ a_1, a_2, \ldots, a_m), \\ x'_{m+1} &= f(x_{m+1};\ a_1, a_2, \ldots, a_m). \end{aligned} \tag{13}$$

Из этих $m+1$ уравнений мы можем исключить m параметров, например, определим $a_1, a_2, \ldots, a_m$ из первых m уравнений через $x_1, x_2, \ldots, x_m, x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ и подставим полученные их значения в последнее уравнение. В таком случае мы получим некоторое соотношение вида:

$$F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{m+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) = 0 \tag{14}$$

между координатами $m+1$ пар соответствующих точек. Это соотношение (14), конечно, зависит только от вида функции (12), и следовательно, оно будет выполняться для координат $m+1$ пар соответствующих точек для всякого преобразования вида (12), какие бы мы ни брали в нем частные значения параметров. Соотношение (14), обладающее таким свойством, называется инвариантным. Преобразование переноса содержит один параметр, следовательно, для исключения последнего достаточно взять два уравнения:

$$x_1' = x_1 + a, \quad x_2' = x_2 + a;$$

вычитая из второго уравнения первое, мы исключим параметр a и получим инвариантное соотношение:

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1, \tag{15}$$

которое будет выполняться для *всякого* преобразования переноса (т. е каково бы ни было значение параметра a). Так как разность $x_2 - x$ выражает расстояние двух точек, равно как $x_2' - x_1'$ будет расстоянием двух точек, соответствующих первым, то соотношение (15) имеет простой геометрический смысл; оно выражает определенное свойство рассматриваемого преобразования, именно, что *расстояние двух точек при переносе* (или сдвиге) *прямой не меняется*.

Преобразование аффинное содержит два параметра; следовательно, для их исключения надо взять три уравнения:

$$x_1' = ax_1 + b,$$
$$x_2' = ax_2 + b,$$
$$x_3' = ax_3 + b.$$

Почленным вычитанием этих уравнений мы исключим b и получим два независимых соотношения:

$$x_3' - x_1' = a(x_3 - x_1),$$
$$x_2' - x_3' = a(x_2 - x_3);$$

наконец, разделив одно из полученных соотношений на другое, мы исключим a и найдем инвариантное соотношение:

$$\frac{x_3' - x_1'}{x_2' - x_3'} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} \tag{16}$$

для аффинного преобразования. Соотношение (16), очевидно, выражает следующее свойство аффинного преобразования: *отношение двух любых отрезков одной фигуры равно отношению соответственных отрезков другой фигуры* (подобие соответствующих фигур). Этот же результат можно формулировать и таким образом: *аффинное преобразование сохраняет простое отношение трех любых точек.*

Каждое из инвариантных соотношений (15) или (16) имеет специальный вид, а именно: правая часть является функцией координат произвольно выбранных точек первой фигуры, левая часть представляет собой такую же функцию от координат соответствующих точек второй фигуры (преобразованной). Таким образом эти инвариантные соотношения выражают собой то свойство, что некоторая функция координат сохраняет свое значение при замене координат точек одной фигуры координатами соответствующих точек любой преобразованной фигуры. Такая функция координат, которая сохраняет свое значение при данном преобразовании, называется инвариантом этого преобразования. Следовательно, расстояние двух любых точек $x_2 - x_1$ будет инвариантом переноса; отношение двух любых отрезков:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3}$$

будет инвариантом аффинного преобразования.

Посмотрим теперь, каков же будет инвариант дробнолинейного преобразования:

$$x' = \frac{cx + d}{ax + b}. \tag{7}$$

В упражнении 815 мы видели, что исключение параметров $a:b:c:d$ из уравнений, аналогичных уравнениям (13), приводит к соотношению:

$$\frac{x'_3 - x'_1}{x'_2 - x'_3} : \frac{x'_4 - x'_1}{x'_2 - x'_4} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}. \tag{10}$$

Следовательно, выражение:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} \tag{17}$$

и будет инвариантом дробнолинейного преобразования для многообразия точек на прямой.

Пусть A, B, C, D будут четыре точки прямой, координаты которых x_1, x_2, x_3, x_4; тогда инвариант (17) изобразится в следующем виде:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

т. е. это есть сложное или ангармоническое отношение четырех выбранных точек прямой.

Итак, мы можем сказать, что инвариантом *дробнолинейного преобразования* (декартовых координат) *будет ангармоническое отношение любых четырех точек на прямой.* Иначе говоря, если одно многообразие точек на прямой получается из другого дробнолинейным преобразованием, то ангармоническое отношение любых четырех точек первого ряда равно ангармоническому отношению четырех соответствующих точек второго ряда. Предположим теперь, наоборот, что между двумя многообразиями точек (лежащих на разных прямых или на одной и той же прямой) установлено такое соответствие, что ангармоническое отношение любых четырех точек первого ряда всегда равно ангармоническому отношению четырех соответствующих точек второго ряда; тогда такое соответствие собственно и называют проективным в геометрическом смысле. Пусть точки первого ряда определяются координатами x_1, x_2, x_3, x, соответствующие точки второго ряда определяются координатами x_1', x_2', x_3', x'; в таком случае:

$$\frac{x'-x_1'}{x_2'-x'} : \frac{x_3'-x_1'}{x_2'-x_3'} = \frac{x-x_1}{x_2-x} : \frac{x_3-x_1}{x_2-x_3},$$

отсюда

$$\frac{x'-x_1'}{x_2'-x'} = m\,\frac{x-x_1}{x_2-x},$$

где

$$m = \frac{x_3'-x_1'}{x_2'-x_3'} : \frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}$$

или, разрешив относительно x', найдем:

$$x' = \frac{mx_2'(x-x_1)+x_1'(x_2-x)}{m(x-x_1)+x_2-x},$$

т. е. мы получим для x' выражение дробнолинейное относительно x. Итак, если при установленном соответствии точек двух многообразий (на двух прямых или на одной) ангармоническое отношение сохраняется, то такое проективное преобразование одного многообразия в другое аналитически изображается дробнолинейным преобразованием вида (7).

Будем называть два преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= f(x;\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m), \\ x' &= f(x;\ b_1,\ b_2, \ldots,\ b_m) \end{aligned} \tag{12'}$$

преобразованиями одного типа, если они определяются функцией f одного и того же вида и различаются между собой лишь значениями параметров.

Упражнения. 818. Разрешая соотношение:

$$x' = x + a$$

относительно x, мы получим преобразование:

$$x = x' - a,$$

обратное первоначальному; оно, очевидно, того же типа, как и прямое преобразование.

Показать, что a) преобразование, обратное аффинному преобразованию:

$$x' = ax + b,$$

будет того же типа, и b) преобразование, обратное проективному преобразованию:

$$x' = \frac{cx+d}{ax+b},$$

будет также проективным преобразованием.

819. Перейдем от многообразия (M) к многообразию (M') с помощью преобразования:

$$x' = a_1x + b_1, \tag{s_1}$$

а затем от многообразия (M') к многообразию (M'') с помощью преобразования

$$x'' = a_2x' + b_2, \tag{s_2}$$

тогда переход от (M) к (M'') с помощью двух последовательных аффинных преобразований s_1 и s_2 равносилен переходу от (M) к (M'') с помощью преобразования:

$$x'' = a_2(a_1x + b_1) + b_2$$

или

$$x'' = a_2a_1x + (a_2b_1 + b_2).$$

Последнее преобразование будет того же типа, как и первоначальное. Аналогичным способом покажите, что два последовательных проективных преобразования дают преобразование также проективное.

Когда новое преобразование получается последовательным проведением двух преобразований s_1 и s_2, оно называется произведением данных преобразований и обозначается символом s_2s_1.

820. Преобразование, обратное преобразованию:

$$x' = ax^2 + bx + c,$$

не будет того же типа, как данное.

821. Преобразование, обратное преобразованию (с двумя параметрами):

$$x' = \frac{ax - b}{x - a}, \qquad (s)$$

будет не только того же типа, как данное, но и просто тождественным с ним, ибо

$$x = \frac{ax' - b}{x' - a}.$$

Однако произведение двух *любых* преобразований s_1 и s_2 данного типа:

$$x' = \frac{a_1x - b_1}{x - a_1}, \qquad (s_1)$$

$$x'' = \frac{a_2x' - b_2}{x' - a_2} \qquad (s_2)$$

вообще (при произвольных a_1, b_1, a_2, b_2) не дает преобразования того же типа s.

Совокупность взаимно-однозначных преобразований (12), соответствующих различным системам значений параметров $a_1, a_2, \ldots, a_m$, называют группою, если эта совокупность преобразований удовлетворяет двум условиям: 1) преобразование, обратное любому из преобразований рассматриваемой совокупности, принадлежит той же совокупности и 2) произведение двух любых преобразований s_a и s_b дает некоторое преобразование s_c той же совокупности.

Мы видели, что каждое из преобразований: переноса, аффинное, проективное образует свою группу; каждой из этих групп соответствует свой инвариант; на примере этих простейших преобразований мы убедились также, что инвариант вполне характеризует группу, ибо с его помощью можно получить преобразования группы.

Упражнения 822. Проективное преобразование многообразия точек плоскости определяется дробнолинейными соотношениями:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \qquad (18)$$

$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}.$$

Общее проективное преобразование плоскости зависит от восьми существенных параметров.

Показать, что при проективном преобразовании плоскости прямая линия переходит в прямую же линию; поэтому, если какие-либо точки расположены на одной прямой, то соответственные им точки тоже располагаются на одной прямой; на этом основании проективное соответствие точек двух плоскостей называют также *коллинеарным* соответствием.

823. Показать, что проективное или коллинеарное соответствие (18) двух плоскостей вполне определяется, если дать четыре пары соответственных точек, при условии, что никакая тройка точек из каждой выбранной четверки не лежит на одной прямой.

824. Доказать, что аффинные преобразования плоскости:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2$$

образуют группу.

825. Доказать, что проективные преобразования плоскости:

$$x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}$$
$$y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}$$

образуют группу.

826. Ангармоническое отношение четырех лучей с угловыми коэфициентами k_1, k_2, k_3, k_4 равно

$$\frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} : \frac{k_4 - k_1}{k_2 - k_4}.$$

Указание. Проведем какую-нибудь прямую $x = a$, параллельную оси Oy, тогда четыре луча, выходящих из начала координат, пересекут эту прямую в точках, ординаты которых будут соответственно:

$$y_1 = k_1a, \quad y_2 = k_2a, \quad y_3 = k_3a, \; y_4 = k_4a;$$

так как ангармоническое отношение четырех точек равно ангармоническому отношению четырех лучей, им перспективных, то ангармоническое отношение последних равно:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} : \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_4} = \frac{k_3a - k_1a}{k_2a - k_3a} : \frac{k_4a - k_1a}{k_2a - k_4a},$$

или, как было указано:

$$\frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} : \frac{k_4 - k_1}{k_2 - k_4}.$$

827. Ангармоническое отношение четырех лучей не меняется при проективном (или аффинном) преобразовании плоскости.

Указание. Возьмем прямую, проходящую через начало координат:

$$y' = k'x',$$

при проективном преобразовании она перейдет в прямую:

$$a_2x + b_2y + c_2 = k'(a_1x + b_1y + c_1),$$

угловой коэфициент которой:

$$k = \frac{a_2 - a_1k'}{-b_2 + b_1k'}.$$

Итак, при проективном преобразовании плоскости угловые коэфициенты прямых преобразуются дробнолинейной подстановкой; но последняя не меняет ангармонического отношения четырех элементов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

1. Что называется преобразованием многообразия?
2. Какое преобразование многообразия точек на прямой называется аффинным?

3. Какие точки прямой сохраняются при каком-либо заданном аффинном преобразовании?

4. Как изображается аффинное преобразование плоскости?

5. Какая прямая сохраняется при любом аффинном преобразовании плоскости?

6. Какое преобразование прямой в самое себя называется проективным и как оно изображается?

7. Соответствием скольких пар точек определяется проективное преобразование ряда точек на прямой?

8. На какие простейшие преобразования распадается проективное преобразование ряда точек на прямой?

9. В каком случае преобразование многообразия называется взаимнооднозначным?

10. Как получается соотношение, инвариантное для такого преобразования многообразия, которое содержит некоторое число параметров?

11. Что называется инвариантом преобразования?

12. Каковы будут инварианты преобразований: 1) переноса, 2) аффинного, 3) проективного для ряда точек на прямой?

13. Каково геометрическое истолкование каждого из вышеуказанных инвариантов?

14. Что называется группою преобразований?

Упражнения. 828. Пусть дано проективное соответствие точек двух рядов, установленное соотношением (11); назовем главной точкой каждого ряда ту точку, которая соответствует бесконечно удаленной точке другого ряда; абсциссами главных точек будут:

$$x_{\infty} = -\frac{B}{A}, \quad x'_{\infty} = -\frac{C}{A};$$

если в каждом из проективных рядов за начало координат принять его главную точку, то соотношение (11) преобразуется к виду:

$$\xi\xi' = \frac{BC - AD}{A^2}.$$

829. Показать, что для совмещенных проективных рядов, т. е. находящихся на одной прямой, середина расстояния двойных точек совпадает с серединою расстояний главных точек.

830. Если в двух совмещенных рядах пары соответственных точек будут взаимно соответственными, т. е. если точке M, рассматриваемой как принадлежащей первому ряду, соответствует во втором ряду точка M', и той же точке M, рассматриваемой как принадлежащей второму ряду, соответствует в первом ряду точка M', то такое проективное соответствие называется *инволюцией*.

Показать, что a) проективное соответствие (11) обращается в инволюцию, если $B = C$, т. е. инволюция изображается билинейным соотношением:

$$Axx' + B(x + x') + D = 0,$$

симметричным относительно текущих координат; b) главные точки инволюции совпадают („центр инволюции"); c) две соответственных точки инволюции будут гармонически-сопряженными с двойными ее точками; d) инволюция вполне определяется двумя парами соответственных точек.

831. Кроме бесконечно удаленной прямой данное аффинное преобразование плоскости сохраняет (всегда действительную) точку и пару прямых (которые могут оказаться мнимыми).

832. Показать, что проективное преобразование (18) плоскости самой в себя сохраняет неизменными три прямых (две из которых могут оказаться мнимыми).

833. Аффинные преобразования пространства:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \end{aligned}$$

образуют группу; аффинное преобразование пространства зависит от 12 параметров.

834. Проективные преобразования пространства:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4},$$

$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4},$$

$$z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4}$$

образуют группу (с 15 существенными параметрами).

Глава XXI.

Квадратичные формы и аффинное преобразование.

Если мы приравняем нулю бинарную квадратичную форму (§ 1, гл. XII), содержащую, например, декартовы координаты x и y, то мы получим уравнение пары прямых, проходящих через начало координат; эти прямые совпадают, если дискриминант формы обращается в нуль. Рассмотрим теперь однородное аффинное преобразование плоскости; первоначальная квадратичная форма преобразуется в новую форму, и, приравняв нулю последнюю, мы получим уравнение пары новых прямых, соответствующих паре прежних прямых. Очевидно, при аффинном преобразовании паре совпадающих прямых будет соответствовать пара совпадающих прямых, и следовательно, дискриминант первоначальной квадратичной формы обращается в нуль одновременно с дискриминантом формы преобразованной. Таким образом хотя коэфициенты квадратичной формы меняются при аффинном преобразовании переменных, однако существуют такие функции этих коэфициентов, которые обращаются в нуль одновременно с обращением в нуль таких же функций коэфициентов преобразованной квадратичной формы. Эти функции коэфициентов квадратичных форм мы назовем инвариантами квадратичной формы при аффинном преобразовании; нетрудно видеть, что равенство нулю инварианта формы выражает собою некоторое свойство геометрического образа, не изменяющееся при аффинном преобразовании (например, как было указано, пара совпадающих прямых переходит при аффинном преобразовании в пару совпадающих прямых).

В настоящей главе мы займемся изысканием инвариантов квадратичных форм (при аффинном преобразовании) и их геометрическим истолкованием.

1. Однородное уравнение 2-й степени с двумя переменными.

Возьмем бинарную квадратичную форму:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{1}$$

приравняем ее нулю и будем под x и y подразумевать декартовы координаты точки $M(x; y)$ плоскости; тогда уравнение:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \tag{2}$$

будет изображать пару прямых, проходящих через начало координат.

Разделив это уравнение на x^2 и вводя угловой коэфициент $k = \frac{y}{x}$, мы получим уравнение:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0, \tag{3}$$

определяющее направления этих прямых.

Назовем выражение:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \tag{4}$$

дискриминантом формы (1); тогда при $\delta < 0$ уравнение (2) или (3) будет изображать пару действительных и различных прямых, при $\delta = 0$ — пару действительных совпадающих прямых, наконец при $\delta > 0$ — пару мнимых прямых. При $\delta > 0$ квадратичная форма (1) распадается на два линейных относительно x и y множителя с комплексными сопряженными коэфициентами, поэтому в этом случае мы говорим, что уравнение (2) изображает пару мнимых сопряженных прямых.

Особый интерес между мнимыми прямыми представляет пара прямых, изображаемых в любой прямоугольной системе координат уравнением:

$$x^2 + y^2 = 0, \tag{5}$$

которое распадается на два отдельных уравнения:

$$ix - y = 0; \quad ix + y = 0.$$

Прямые плоскости, параллельные этим прямым, т. е. имеющие с ними одинаковые угловые коэфициенты, называются изотропными прямыми; угловыми коэфициентами изотропных прямых будут числа:

$$k = i, \quad k' = -i.$$

Эти две прямые должны считаться сами себе перпендикулярными, так как каждый из их угловых коэфициентов удовлетворяет условию:

$$1 + k \cdot k = 0.$$

Возьмем две точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, лежащих на одной из изотропных прямых; в таком случае

$$y_2 - y_1 = i(x_2 - x_1),$$

а следовательно:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0,$$

т. е. расстояние двух любых точек изотропной прямой равно нулю; по этой причине изотропные прямые называют также *прямыми нулевой длины.*

В косоугольной системе координат уравнение пары изотропных прямых, проходящих через начало координат, будет:

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 = 0. \tag{5'}$$

Оно распадается на два отдельных уравнения:

$$x(\cos\omega + i\sin\omega) + y = 0,$$
$$x(\cos\omega - i\sin\omega) + y = 0,$$

которые, как легко проверить, будут сохранять свой вид при переходе к любой другой прямолинейной системе координат с тем же началом.

Изотропные прямые могут быть названы также прямыми асимптотических направлений окружности, ибо левая часть уравнения (5) или уравнения (5′) представляет собою группу старших членов уравнения окружности, в первом случае для прямоугольной, во втором случае для косоугольной системы координат.

Возьмем четыре луча, угловые коэфициенты которых соответственно равны k_1, k_2, k_3, k_4; ангармоническое их отношение будет равно:

$$\frac{k_3-k_1}{k_2-k_3} : \frac{k_4-k_1}{k_2-k_4}. \tag{6}$$

Если пара лучей k_1 и k_2 гармонически разделяется парою k_3, k_4, тогда предыдущее отношение равно -1:

$$\frac{k_3-k_1}{k_2-k_3} : \frac{k_4-k_1}{k_2-k_4} = -1. \tag{7}$$

Соотношение (7) легко привести к виду:

$$2(k_1k_2+k_3k_4) = (k_1+k_2)(k_3+k_4); \tag{7'}$$

это и будет соотношение между угловыми коэфициентами двух пар лучей, гармонически разделяющих друг друга.

Пусть направления одной пары лучей даются уравнением:

$$a_{11}+2a_{12}k+a_{22}k^2=0, \tag{3}$$

тогда

$$k_3+k_4=-\frac{2a_{12}}{a_{22}}, \quad k_3k_4=\frac{a_{11}}{a_{22}};$$

подставляя эти значения в соотношение (7′), мы для другой пары найдем зависимость:

$$2k_1k_2+\frac{2a_{11}}{a_{22}}=-\frac{2a_{12}}{a_{22}}(k_1+k_2)$$

или

$$a_{11}+a_{12}(k_1+k_2)+a_{22}k_1k_2=0; \tag{8}$$

таково будет соотношение между угловыми коэфициентами k_1 и k_2 двух лучей, гармонически разделяемых парою лучей, угловые коэфициенты которых определяются уравнением (3); будем короче говорить, что направления k_1 и k_2 гармонически сопряжены относительно пары направлений (3).

Так как уравнение (3) можно истолковать как уравнение асимптотических направлений некоторой кривой 2-го порядка, то мы можем сказать, что условие (8) связывает угловые коэфициенты k_1 и k_2 пары лучей, гармонически разделяющих (или разделяемых) пару асимптотических направлений заданной кривой 2-го порядка.

Положим в частности, что пара лучей (3) является парою изотропных направлений, т. е. она определяется уравнением:

$$1+2k\cos\omega+k^2=0; \tag{9}$$

угловые коэфициенты k_1 и k_2 пары лучей, гармонически-сопряженных относительно пары лучей (9), должны в таком случае удовлетворять условию:

$$1+(k_1+k_2)\cos\omega+k_1k_2=0, \tag{10}$$

но последнее является вместе с тем условием перпендикулярности лучей с угловыми коэфициентами k_1 и k_2. Таким образом мы можем сказать: два луча, гармонически-сопряженные относительно пары изотропных прямых (или, что то же самое, относительно асимптотических направлений окружности) будут взаимно перпендикулярны.

Вернемся теперь к соотношению (8) и предположим, что в то время как пара лучей k_3 и k_4 определяется уравнением (3), пара лучей k_1 и k_2 определяется уравнением:

$$b_{11}+2b_{12}k+b_{22}k^2=0, \tag{3'}$$

так что

$$k_1+k_2=-\frac{2b_{12}}{b_{22}}, \quad k_1k_2=\frac{b_{11}}{b_{22}}.$$

Подставляя в условие (8) эти выражения, мы получим:

$$a_{11}-2a_{12}\frac{b_{12}}{b_{22}}+a_{22}\frac{b_{11}}{b_{22}}=0$$

или

$$a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}=0; \tag{11}$$

это будет условием того, что пара лучей (3) гармонически разделяется парою лучей (3').

В частности, если вторая пара будет изотропною, то соотношение

$$a_{11}-2a_{12}\cos\omega+a_{22}=0 \tag{12}$$

будет означать, что пара лучей (3) взаимно перпендикулярна.

При аффинном или проективном преобразовании плоскости две совпадающих прямых перейдут в две совпадающих прямых; далее, при аффинном (или проективном) преобразовании плоскости ангармоническое отношение четырех лучей будет равно ангармоническому отношению четырех преобразованных лучей; в частности, если четверка лучей была гармоническою, то она перейдет в четверку лучей гармонически-сопряженных.

Отсюда следует, что каждое из условий

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0,$$

$$a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}=0$$

выражает собою геометрическое свойство тех или иных пар лучей, не зависящее от выбранной координатной системы и не изменяющееся при аффинном преобразовании плоскости; поэтому эти условия должны сохранять свой вид во всякой прямолинейной системе координат или вообще после всякого аффинного преобразования плоскости. Отсюда естественно ожидать, что левые части указанных уравнений будут входить в состав (множителями) некоторых выражений, не меняющих своего вида („инвариантов“) при аффинном преобразовании. Отысканием этих инвариантов мы и займемся ниже.

2. Совместные инварианты двух бинарных квадратичных форм.

Пусть мы имеем бинарную квадратичную форму:

$$f \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2; \tag{1}$$

произведем в ней над переменными x и y линейную однородную подстановку (или однородное аффинное преобразование):

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y', \\ y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y'; \end{aligned} \tag{13}$$

в таком случае форма f примет вид:

$$f \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2, \tag{1'}$$

где для краткости принято:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\alpha_1{}^2 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\alpha_2{}^2, \\ a'_{12} &= a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{22}\alpha_2\beta_2, \\ a'_{22} &= a_{11}\beta_1{}^2 + 2a_{12}\beta_1\beta_2 + a_{22}\beta_2{}^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Эти коэфициенты a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} преобразованной квадратичной формы. будем называть новыми или преобразованными коэфициентами формы

Если у нас имеется какое-либо соотношение между старыми и новыми коэфициентами одной или нескольких форм, не зависящее от коэфициентов подстановки (преобразования) и имеющее место для всякого преобразования данного вида, то такое соотношение не будет меняться при изменении коэфициентов подстановки; мы его назовем инвариантным соотношением преобразований данного вида („группы“).

Из трех уравнений (14) нельзя исключить четырех коэфициентов подстановки α_1, α_2, β_1, β_2, нельзя, следовательно, получить соотношение между старыми и новыми коэфициентами формы (1), не зависящее от коэфициентов подстановки, а потому в случае однородного аффинного преобразования для одной квадратичной формы не будет инвариантного соотношения.

Если вычислить дискриминант преобразованной формы, то после несколько длинных, но простых преобразований получим:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

результат этот можно формулировать следующим образом: *при линейно-однородной замене переменных дискриминант квадратичной формы* (бинарной в нашем случае) *получает множителем квадрат определителя из коэфициентов подстановки.*

Применим одно и то же преобразование (13′) одновременно к двум квадратичным бинарным формам, к форме (1) и к форме:

$$\varphi \equiv b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2; \tag{15}$$

в таком случае преобразованные коэфициенты этой последней формы будут:

$$
\begin{aligned}
b'_{11} &= b_{11}\alpha_1^2 + 2b_{12}\alpha_1\alpha_2 + b_{22}\alpha_2^2, \\
b'_{12} &= b_{11}\alpha_1\beta_1 + b_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + b_{22}\alpha_2\beta_2, \qquad (16)\\
b'_{22} &= b_{11}\beta_1^2 + 2b_{12}\beta_1\beta_2 + b_{22}{}^2\beta_2^2.
\end{aligned}
$$

Теперь из шести уравнений (14) и (16) мы можем исключить коэфициенты подстановки α_1, α_2, β_1, β_2, и как результат исключения получим два соотношения между старыми и новыми коэфициентами обеих форм (два инвариантных соотношения).

В самом деле, возьмем дискриминанты обеих преобразованных форм и для них же выражение, которое у нас встречалось в левой части уравнения (11), а именно:

$$
\begin{aligned}
&a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}, \\
&a'_{11}b'_{22} - 2a'_{12}b'_{12} + a'_{22}b'_{11}, \\
&b'_{11}b'_{22} - b'^2_{12},
\end{aligned}
$$

и подставим в эти выражения значения новых коэфициентов (14) и (16). Тогда получим:

$$
\begin{aligned}
a'_{11}a'_{22} - a'_{12}{}^2 &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \\
a'_{11}b'_{22} - 2a'_{12}b'_{12} + a'_{22}b'_{11} &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2(a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12} + a_{22}b_{11}), \qquad (17)\\
b'_{11}b'_{22} - b'_{12}{}^2 &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2).
\end{aligned}
$$

Разделяя почленно два из этих соотношений на третье, мы окончательно исключим коэфициенты преобразования (13) и найдем:

$$
\frac{a'_{11}b'_{22} - 2a'_{12}b'_{12} + a'_{22}b'_{11}}{b'_{11}b'_{22} - b'_{12}{}^2} = \frac{a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12} + a_{22}b_{11}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2},
$$

$$
\frac{a'_{11}a'_{22} - a'_{12}{}^2}{b'_{11}b'_{22} - b'_{12}{}^2} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}.
$$

Эти соотношения обозначают, что два выражения из коэфициентов двух форм:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12} + a_{22}b_{11}}{b_{11}b_{22} - b_{12}}, \\
I_2 &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

не меняют своего значения при всяком линейно-однородном преобразовании (13) аргументов. На этом основании указанные выражения I_1 и I_2 называют *совместными инвариантами* двух форм (1) и (15).

Предыдущий вывод инвариантов (исключением параметров преобразований), очень простой по мысли, требует, однако, длинных алгебраических преобразований, сложность которых будет возрастать с увеличением числа аргументов форм. Поэтому мы дадим еще другой вывод, который может быть однообразно применяем при любом числе аргументов квадратичных форм.

Предположим, что в формах f и φ мы производим линейно-однородную подстановку (13), и мы получим следующие тождественные соотношения:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2 &\equiv a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2, \\ b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2 &\equiv b'_{11}x'^2+2b'_{12}x'y'+b'_{22}y'^2 \end{aligned} \tag{19}$$

при связях (13); написанные соотношения следует понимать в том смысле, что они должны быть тождественны относительно x' и y', если мы в левых частях заменим x и y их выражениями (13) через x' и y'. Из тождественных соотношений (19) следует соотношение, тождественное в том же указанном смысле:

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2-s\,(b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2)\equiv \\ &\equiv a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2-s\,(b'_{11}x'^2+2b'_{12}x'y'+b'_{22}y'^2), \end{aligned}$$

или, что то же самое:

$$\begin{aligned} &(a_{11}-sb_{11})\,x^2+2\,(a_{12}-sb_{12})\,xy+(a_{22}-sb_{22})\,y^2\equiv \\ &\equiv(a'_{11}-sb'_{11})\,x'^2+2\,(a'_{12}-sb'_{12})\,x'y'+(a'_{22}-sb'_{22})\,y'^2, \end{aligned} \tag{20}$$

справедливое при этом для всякого значения параметра s. Выберем теперь значение s так, чтобы форма $f-s\varphi$, т. е. левая часть соотношения (20), была полным квадратом; для этого необходимо (и достаточно), чтобы дискриминант этой формы $f-s\varphi$ обратился в нуль, т. е. чтобы:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-sb_{11} & a_{12}-sb_{12} \\ a_{21}-sb_{21} & a_{22}-sb_{22} \end{vmatrix}=0; \tag{21}$$

если же форма $f-s\varphi$ представляет собою полный квадрат некоторого линейного однородного выражения относительно x и y:

$$f-s\varphi\equiv(Px+Qy)^2,$$

то ясно, что она останется полным квадратом после подстановки (13), так как линейная функция $Px+Qy$ после линейной подстановки (13) останется линейной же функцией

$$P'x'+Q'y'.$$

Короче говоря, если форма $f-s\varphi$ есть полный квадрат, то и преобразованная форма $f'-s\varphi'$ при том же значении параметра s будет полным квадратом. А в таком случае дискриминант последней формы $f'-s\varphi'$ также равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-sb'_{11} & a'_{12}-sb'_{12} \\ a'_{21}-sb'_{21} & a'_{22}-sb'_{22} \end{vmatrix}=0. \tag{21'}$$

Итак, одни и те же значения параметра s удовлетворяют квадратному уравнению (21) и квадратному уравнению (21'); эти уравнения должны быть равносильны между собой, или, что то же, коэфициенты этих уравнений должны быть пропорциональны.

Развертывая то и другое из уравнений, мы получим:

$$(b_{11}b_{22}-b_{12}^2)\,s^2-(a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11})\,s+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0, \tag{22}$$

$$(b'_{11}b'_{22}-b'^2_{12})\,s^2-(a'_{11}b'_{22}-2a'_{12}b'_{12}+a'_{22}b'_{11})\,s+a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}=0, \tag{22'}$$

откуда [1])

$$\frac{b'_{11}b'_{22}-b'^2_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}=\frac{a'_{11}b'_{22}-2a'_{12}b'_{12}+a'_{22}b'_{11}}{a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}}=\frac{a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},$$

или, разбивая на два соотношения:

$$\frac{a'_{11}b'_{22}-2a'_{12}b'_{12}+a'_{22}b'_{11}}{b'_{11}b'_{22}-b'^2_{12}}=\frac{a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2},$$

$$\frac{a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}}{b'_{11}b'_{22}-b'^2_{12}}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}.$$

Итак, мы получили тот же результат, как и первым способом. Уравнение (22) мы можем написать в виде:

$$s^2-I_1s+I_2=0, \tag{23}$$

т. е. так, что коэфициентами его явятся совместные инварианты двух форм, по этой причине уравнение (23) может быть названо инвариантным. Его корни, следовательно, имеют одни и те же значения независимо от того, по отношению к каким преобразованным [линейно-однородной подстановкой (13)] формам мы его напишем; то же заключение относится к уравнению (21), которое мы назовем характеристическим уравнением двух форм f и φ. Следовательно, характеристическое уравнение (21) двух данных квадратичных форм есть уравнение инвариантное, его корни имеют одни и те же значения, как бы мы ни меняли формы линейно-однородной подстановкой.

Бинарная квадратичная форма не имеет инварианта для любого линейно-однородного преобразования, так как последнее зависит вообще от четырех параметров и эти параметры нельзя исключать из трех соотношений (14), связывающих старые и новые коэфициенты формы. Но если мы возьмем какое-либо частное линейно-однородное преобразование, зависящее от меньшего числа параметров (только одного или двух), тогда исключение последних из указанных соотношений окажется возможным, и форма будет иметь инварианты для этого специального преобразования. К числу таких специальных преобразований, практически особо интересных, принадлежит линейное преобразование, связанное

[1]) К тому же заключению можно притти непосредственно, применяя к форме (20) доказанное выше предложение об изменении дискриминанта квадратичной формы при аффинном преобразовании.

с преобразованием системы координат, именно, с поворотом осей. Последнее, как мы знаем, зависит только от одного параметра, исключение которого из трех соотношений (14) дает два инвариантных соотношения. Вместо того чтобы пользоваться самими формулами преобразования системы координат и производить упомянутые исключения, мы можем инварианты для этого случая получить иначе.

Обратим внимание на то, что сохранение вида выражения (квадрата расстояния точки от начала):

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2$$

является обстоятельством, характеризующим наше преобразование (поворот осей). Отсюда следует, что инварианты данной квадратичной формы:

$$f \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

при любом линейном преобразовании, соответствующем повороту осей координат, будут в сущности совместные инварианты двух бинарных квадратичных форм:

$$\begin{aligned} f &\equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \\ \varphi &\equiv x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 \end{aligned}$$

при любом линейно-однородном преобразовании, сохраняющем вид второй квадратичной формы.

Эти последние инварианты мы таким образом получим из общих выражений (18), полагая в них $b_{11} = 1$, $b_{12} = \cos\omega$, $b_{22} = 1$; итак выражения:

$$I_1 = \frac{a_{11} - 2a_{12}\cos\omega + a_{22}}{\sin^2\omega},$$

$$I_2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2}{\sin^2\omega}$$

и будут инвариантами данной бинарной квадратичной формы при всяком линейном преобразовании, соответствующем повороту осей.

Принимая во внимание соображения, указанные выше, мы могли бы также сказать, что характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} - s\cos\omega \\ a_{21} - s\cos\omega & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0$$

является уравнением инвариантным при всяком преобразовании формы, соответствующем повороту осей. Именно, этими предложениями мы и пользовались в теории кривых 2-го порядка.

Упражнения. 835. Дискриминант троичной квадратичной формы

$$f \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy$$

при любом однородном аффинном преобразовании

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned} \qquad (24)$$

получает множителем квадрат определителя подстановки, т. е.

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

836. Совместными инвариантами двух троичных квадратичных форм:

$$f \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy,$$
$$\varphi \equiv b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{23}yz + 2b_{31}zx + 2b_{12}xy$$

при любом аффинном преобразовании (24) будут отношения коэфициентов характеристического уравнения (инвариантного):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - sb_{11} & a_{12} - sb_{12} & a_{13} - sb_{13} \\ a_{21} - sb_{21} & a_{22} - sb_{22} & a_{23} - sb_{23} \\ a_{31} - sb_{31} & a_{32} - sb_{32} & a_{33} - sb_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Указание. Доказательство этого предложения может быть проведено аналогично доказательству, данному для бинарных форм.

Пусть формы f и φ после аффинного преобразования переходят в формы f' и φ', тогда получим тождество:

$$f - s\varphi \equiv f' - s\varphi',$$

справедливое при всяких x', y', z', если x, y, z заменены их выражениями по формулам (24).

Уравнение $f - s\varphi = 0$ изображает конус; если этот конус распадается на пару плоскостей, то дискриминант левой части его уравнения обращается в нуль, и мы получим условие (25). Но при аффинном преобразовании пара плоскостей перейдет в пару плоскостей; поэтому дискриминант левой части уравнения $f' - s\varphi' = 0$ тоже должен обращаться в нуль при тех же значениях s и т. д.

То же заключение можно получить и алгебраически на основании предложения, указанного в упражнении 835. Действительно, если дискриминант начальной формы $f - s\varphi$ обращается в нуль при некотором значении s, то дискриминант преобразованной формы $f - s\varphi$ при том же значении s должен обратиться в нуль, ибо он отличается от первого лишь множителем, равным квадрату определителя подстановки.

837. Преобразование координат, соответствующее повороту осей, будет таким линейно однородным преобразованием, которое сохраняет вид квадратичной формы (квадрат расстояния точки от начала):

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\omega_1 + 2zx\omega_2 + 2xy\omega_3,$$

поэтому инвариантами троичной квадратичной формы при любом преобразовании координат будут отношения коэфициентов (инвариантного) уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} - s\omega_3 & a_{13} - s\omega_2 \\ a_{21} - s\omega_3 & a_{22} - s & a_{23} - s\omega_1 \\ a_{31} - s\omega_2 & a_{32} - s\omega_1 & a_{33} - s \end{vmatrix} = 0.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

1. Что изображает однородное уравнение 2-й степени относительно x и y?

2. Какие прямые называются изотропными? Почему они называются также линиями нулевой длины?

3. Каким условием связаны угловые коэфициенты k_1 и k_2 прямых, гармонически разделяющих пару прямых, изображаемых уравнением:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0?$$

4. Какой геометрический смысл имеет соотношение:

$$a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12} + a_{22}b_{11} = 0$$

для двух пар прямых, изображаемых соответственно уравнениями:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0,$$
$$b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2=0?$$

5. Какое иное геометрическое истолкование можно дать условию перпендикулярности двух лучей, определяемых угловыми коэфициентами k_1 и k_2?

6. Как изменяется дискриминант квадратичной формы при аффинном преобразовании ее переменных?

7. Что называется совместным инвариантом квадратичных форм для аффинного преобразования?

8. Каковы будут совместные инварианты двух квадратичных (бинарных или троичных) форм при аффинном преобразовании?

9. Как получить инварианты квадратичной формы для преобразования координат в виде специального случая аффинного преобразования?

Упражнения. 838. Найти два направления, гармонически разделяющие прямые каждой из двух пар, изображаемых уравнениями:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0,\\ b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2=0. \end{aligned} \tag{26}$$

Указание. Угловые коэфициенты искомой пары прямых должны удовлетворять условиям:

$$a_{11}+a_{12}(k_1+k_2)+a_{22}k_1k_2=0,$$
$$b_{11}+b_{12}(k_1+k_2)+b_{22}k_1k_2=0.$$

Исключая один из угловых коэфициентов, мы получим условие:

$$\frac{a_{11}+a_{12}k_1}{b_{11}+b_{12}k_1}=\frac{a_{21}+a_{22}k_1}{b_{21}+b_{22}k_1}; \tag{27}$$

поэтому мы можем сказать, что каждый из угловых коэфициентов искомых прямых определится одним из уравнений:

$$(a_{11}-sb_{11})+(a_{12}-sb_{12})\,k=0$$
$$(a_{21}-sb_{21})+(a_{22}-sb_{22})\,k=0,$$

где s — один из корней характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-sb_{11} & a_{12}-sb_{12} \\ a_{21}-sb_{21} & a_{22}-sb_{22} \end{vmatrix}=0.$$

839. Составить уравнение пары прямых, гармонически разделяющих каждую из двух пар, изображаемых уравнениями (26).

840. Пусть нам дан конус, изображаемый уравнением:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy=0. \tag{28}$$

Найти условие, при котором два луча с угловыми коэфициентами $l_1:m_1:n_1$ и $l_2:m_2:n_2$ гармонически сопряжены с двумя образующими конуса, лежащими в одной плоскости с данными лучами.

841. Для данного луча $l_1:m_1:n_1$ найти луч, гармонически-сопряженный одновременно относительно каждого из конусов:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy=0,\\ b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+2b_{23}yz+2b_{31}zx+2b_{12}xy=0. \end{aligned} \tag{29}$$

Замечание. Для произвольно заданного луча $l_1:m_1:n_1$, вообще говоря, найдется один луч, гармонически-сопряженный относительно двух конусов. Однако если данный луч $l_1:m_1:n_1$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{a_{11}l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1}{b_{11}l_1+b_{12}m_1+b_{13}n_1}=\frac{a_{21}l_1+a_{22}m_1+a_{23}n_1}{b_{21}l_1+b_{22}m_1+b_{23}n_1}=\frac{a_{31}l_1+a_{32}m_1+a_{33}n_1}{b_{31}l_1+b_{32}m_1+b_{33}n_1}, \tag{30}$$

то для него будет существовать гармонически-сопряженная плоскость, следовательно, бесчисленное множество гармонически-сопряженных лучей одновременно относительно обоих заданных конусов. Такие особые лучи можем назвать главными лучами двух конусов; нетрудно видеть, что угловые коэфициенты этих лучей (их будет три) определятся двумя из трех уравнений:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-sb_{11})\,l+(a_{12}-sb_{12})\,m+(a_{13}-sb_{13})\,n=0,\\
&(a_{21}-sb_{21})\,l+(a_{22}-sb_{22})\,m+(a_{23}-sb_{23})\,n=0,\\
&(a_{31}-sb_{31})\,l+(a_{32}-sb_{32})\,m+(a_{33}-sb_{33})\,n=0,
\end{aligned} \tag{30}$$

где s — один из корней кубического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-sb_{11} & a_{12}-sb_{12} & a_{13}-sb_{13} \\ a_{21}-sb_{21} & a_{22}-sb_{22} & a_{23}-sb_{23} \\ a_{31}-sb_{31} & a_{32}-sb_{32} & a_{33}-sb_{33} \end{vmatrix}=0.$$

842. Конус, изображаемый в прямоугольной системе координат уравнением:

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

а в косоугольной системе уравнением:

$$x^2+y^2+z^2+2yz\omega_1+2zx\omega_2+2xy\omega_3=0$$

называется изотропным или конусом асимптотических направлений шара. Два луча, гармонически-сопряженные относительно изотропного конуса, будут взаимно перпендикулярны. Главные направления поверхности 2-го порядка (как мы их определили в гл. XVII) будут направления гармонически-сопряженные относительно асимптотического конуса поверхности и изотропного конуса; угловые коэфициенты этих главных направлений определятся двумя из уравнений:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-s)\,l+(a_{12}-s\omega_3)\,m+(a_{13}-s\omega_2)\,n=0,\\
&(a_{21}-s\omega_3)\,l+(a_{22}-s)\,m+(a_{23}-s\omega_1)\,n=0,\\
&(a_{31}-s\omega_2)\,l+(a_{32}-s\omega_1)\,m+(a_{33}-s)\,n=0,
\end{aligned}$$

где s — один из корней характеристического уравнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12}-s\omega_3 & a_{13}-s\omega_2 \\ a_{21}-s\omega_3 & a_{22}-s & a_{23}-s\omega_1 \\ a_{31}-s\omega_2 & a_{32}-s\omega_1 & a_{33}-s \end{vmatrix}=0.$$

843. Дискриминант квадратичной формы, преобразованной линейной однородной заменой переменных, равен дискриминанту первоначальной формы, умноженному на квадрат определителя подстановки.

Замечание. Из этого предложения следует, что если дискриминант данной квадратичной формы равен нулю, то дискриминант формы, преобразованной линейно-однородной подстановкой, тоже обращается в нуль.

844. Найти совместные инварианты двух квадратичных форм с одинаковым числом переменных при линейной однородной замене последних.

Глава XXII.

Метод сокращенных обозначений в применении к образам 1-го порядка.

Допустим, что мы имеем какое-либо сложное сочетание точек и прямых на плоскости, положение которых определяется нами по отношению к некоторым трем основным прямым. Исследование фигуры координатным методом сейчас же покажет нам, что уравнение любой прямой плоскости может быть получено в виде линейной комбинации уравнений трех прямых, принятых за основные. Мы можем поэтому не выписывать каждый раз полностью эти повторяющиеся левые части основных уравнений; а сокращенно обозначать каждую из них буквою; в таком случае все результаты наших вычислений будут выражены через эти буквы. Этот метод сокращенных обозначений становится удобно применимым благодаря наличию геометрического истолкования левой части нормированного уравнения прямой (как расстояния от точки до прямой); указанное обстоятельство позволяет пользоваться геометрическими соображениями при выводе уравнений различных прямых, оно же ведет и к геометрическому истолкованию получаемых результатов.

При употреблении метода сокращенных обозначений все элементы плоскости выражаются через три основных величины — левые части уравнений трех выбранных прямых, следовательно, эти основные величины играют роль координат в такой системе, в которой базисом служат три прямых; эта система координат называется поэтому „трилинейной".

Метод сокращенных обозначений может быть применяем и к исследованию пространственных фигур, если мы выберем некоторые четыре плоскости за основные; его геометрическое истолкование приводит к так называемой тетраэдрической системе координат.

Для всякой плоской фигуры согласно теории полюсов и поляр (созданной Понселе) можно получить относительно кривой 2-го порядка взаимно-полярную фигуру, в которой точкам первой фигуры будут соответствовать их поляры (прямые), а прямым первой фигуры — полюсы (точки). Отсюда Жергонн формулировал общий принцип („принцип двойственности"); с помощью этого принципа из всякого предложения об относительном расположении точек и прямых на плоскости можно получить взаимное предложение, в котором роли точек и прямых переставлены.

Принцип двойственности совершенно естественным образом от обычной системы координат на плоскости, где точки определяются координатами, прямые — уравнениями, приводит к новой системе, где координатами определяется прямая, а уравнением — точка. Как принцип двойственности, так и построение взаимной системы координат могут быть применены к пространственным образам 1-го порядка.

1. Метод сокращенных обозначений на плоскости.

При решении целого ряда вопросов часто бывает, что некоторые прямые, фигурирующие в задаче, совершенно произвольны, и речь идет о разнообразных их отношениях к ряду других прямых. Раз эти основные прямые произвольны, то тот или иной частный вид их уравнений не должен в задаче играть роли; поэтому становится возможным левую часть каждой из этих основных прямых сокращенно обозначать одной буквой. Так, вместо уравнений

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0 \text{ и т. д.}$$

будем короче писать:

$$u = 0,$$
$$v = 0 \text{ и т. д.},$$

подразумевая под u, $v, \ldots$ линейные выражения, содержащие координаты x, y по отношению к какой-либо прямолинейной системе координат. Такой прием служит основанием так называемого метода сокращенных обозначений, введенного французским геометром Бобилье (Bobillier) (1828 г.). В дальнейшем мы дадим целый ряд примеров, иллюстрирующих применение этого метода.

Упражнения 845. Пусть какая-нибудь прямая пересекает стороны треугольника ABC соответственно в точках A', B', C', тогда:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1,$$

т. е. произведение трех отношений (взятых с соблюдением кругового порядка), в которых произвольная прямая делит стороны треугольника, равно отрицательной единице (теорема Менелая, греческого геометра I в. н. э.).

Указание. При доказательстве следует использовать результат, указанный в задаче 655; именно, прямая, изображаемая уравнением $u = 0$, делит отрезок M_1M_2 точкою пересечения M в отношении:

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{u_1}{u_2}, \tag{1}$$

где u_1 и u_2 — соответственно результаты подстановок координат точек M_1 и M_2 в левую часть уравнения данной прямой.

846. Пусть даны две прямых, изображаемых соответственно уравнениями:

$$u = 0,$$
$$v = 0.$$

Прямая, проходящая через точку M' и через точку пересечения данных прямых, изобразится уравнением:

$$\frac{u}{u'} - \frac{v}{v'} = 0, \tag{2}$$

где u' и v' — значения u и v для точки M' (сравните задачу 234).

847. Произведение трех отношений, в которых стороны треугольника делятся прямыми, соединяющими его вершины с произвольною точкою, равно положительной единице (теорема Чевы, 1678 г.).

Предположим, что нам даны две прямых своими нормальными уравнениями:

$$\alpha = 0,$$
$$\beta = 0,$$

тогда уравнение

$$\alpha - m\beta = 0 \tag{3}$$

будет изображать при выбранном значении m одну из прямых, проходящих через точку пересечения двух первых прямых. Посмотрим, какое геометрическое значение имеет параметр m. Возьмем на прямой (3) какую-нибудь точку M, ее координаты должны удовлетворять уравнению (3), а потому для этой точки мы имеем из указанного уравнения:

$$m = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Но мы знаем, что α, т. е. результат подстановки в левую часть нормального уравнения прямой координат какой-либо точки M, дает величину расстояния от точки M до этой прямой; аналогично β будет расстоянием точки M до прямой $\beta = 0$ (черт. 169):

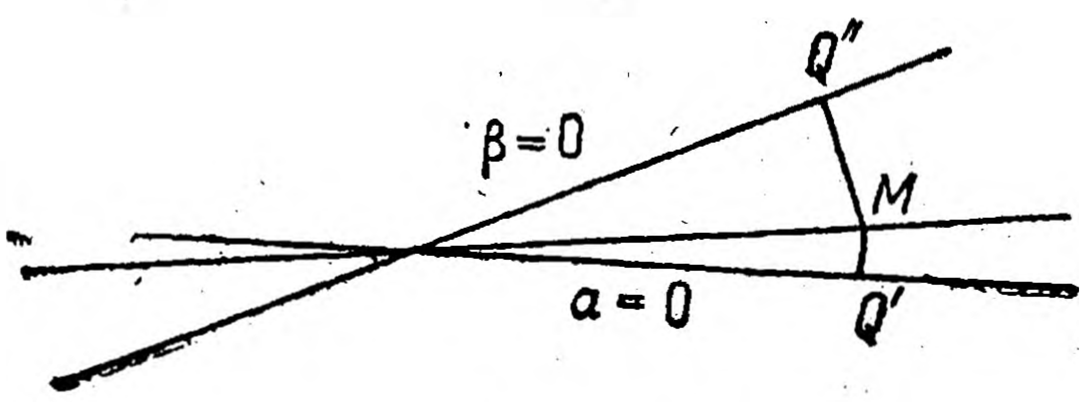
$$\alpha = MQ',$$
$$\beta = MQ''.$$

Следовательно, параметр m прямой (3) пучка есть отношение расстояний какой-либо точки этой прямой до двух основных прямых.

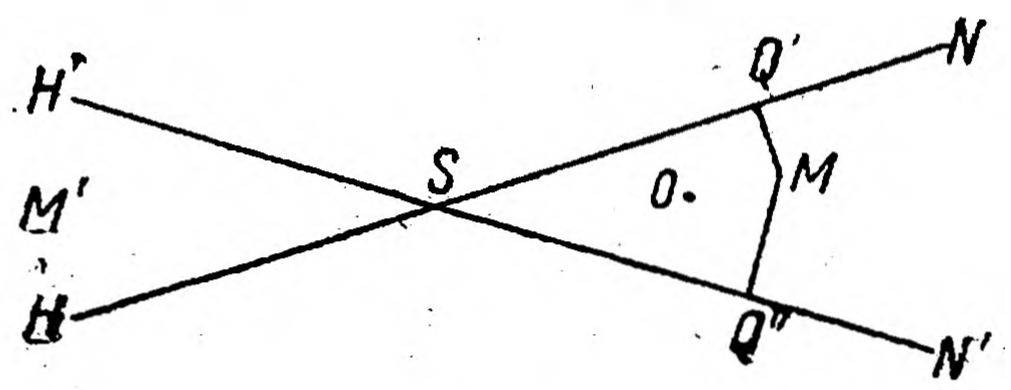
Таким образом геометрическое истолкование уравнения (3) позволяет сказать: геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до двух заданных прямых постоянно, есть прямая, проходящая через точку пересечения этих последних.

Так как расстояния MQ' и MQ'' являются величинами направленными и могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, то и параметр m пучка (их отношение) может иметь различные знаки.

Пусть данные прямые будут HN и $H'N'$, и пусть начало координат той системы, относительно которой мы пишем уравнения наших прямых, находится в одном из четырех углов, образованных данными прямыми, например в углу NSN' (черт. 170). Если точка M находится в указанном углу, тогда оба расстояния MQ' и MQ'' положительны и их отношение m тоже положительно; в углу HSH', вертикальном с первым, оба расстояния какой-либо точки M' до основных прямых отрицательны, следовательно, их отношение опять положительно.



Черт. 169.



Черт. 170.

Легко усмотреть, что в двух других углах, смежных с первыми двумя, одно из расстояний какой-либо точки до основных прямых будет положительно, другое же отрицательно, поэтому для точек, лежащих в этих углах, отношение m этих расстояний будет отрицательно. Применяя эти соображения к уравнению прямой пучка и замечая, что прямая, расположенная в одном из углов двух прямых, при своем продолжении проходит и в вертикальный угол, мы скажем:

уравнение (3) изображает ту из прямых пучка, которая при m положительном расположена в углу, содержащем начало координат, а при m отрицательном расположена в (вертикальных) углах, не содержащих начала координат.

Если три прямых проходят через одну точку, то между левыми частями их уравнений должно существовать некоторое линейное соотношение, которое легко установить следующем образом. Пусть нам даны уравнения:

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= 0, \\ w &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

трех прямых, проходящих через одну точку. Уравнение всякой прямой, проходящей через точку пересечения двух первых прямых, напишется в виде:

$$u - mv = 0, \tag{3'}$$

а так как третья из данных прямых, проходя через точку пересечения двух первых, принадлежит пучку (3′), то уравнение этой третьей прямой должно получиться из общего уравнения пучка (3′) при специальном выборе параметра m; пусть оно будет:

$$u - m'v = 0. \tag{5}$$

Итак, одна и та же прямая (третья), с одной стороны, изображается уравнением (5), с другой стороны — уравнением $w = 0$, но раз эти уравнения изображают одну и ту же прямую, то левые их части могут отличаться лишь постоянным множителем. Поэтому необходимо должно существовать тождественное (относительно подразумеваемых координат x и y) соотношение:

$$u - m'v \equiv nw \tag{6}$$

или, полагая $m' = -\frac{\mu}{\lambda}$, $n = -\frac{\nu}{\lambda}$ (здесь $\lambda \neq 0$) тождественное соотношение:

$$\lambda u + \mu v + \nu w \equiv 0, \tag{7}$$

т. е. если три прямых, изображаемых уравнениями $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, пересекаются в одной точке, то между левыми частями этих уравнений должно существовать некоторое тождественное линейное соотношение вида (7), где λ, μ, ν — специально выбранные коэфициенты, не равные нулю все три одновременно.

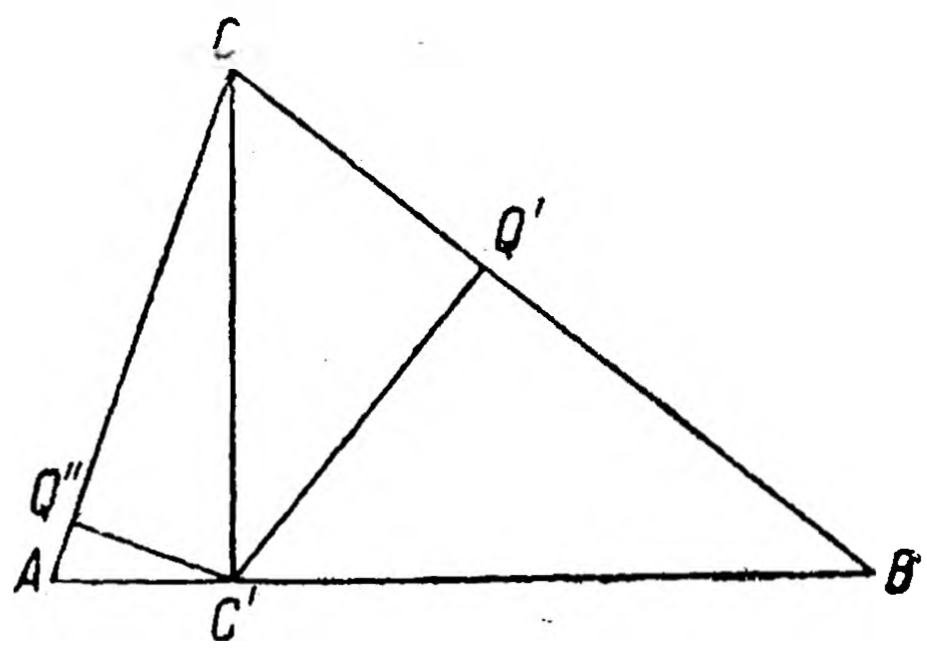
Обратно, предположим, что для левых частей уравнений трех прямых существует некоторое тождественное соотношение (7), в котором все три коэфициента не обращаются в нуль одновременно, например $\nu \neq 0$. Тождество (7) можно написать в виде:

$$\lambda u + \mu v \equiv -\nu w, \tag{7'}$$

а при $\nu \neq 0$ последнее обозначает, что два уравнения

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v &= 0, \\ w &= 0 \end{aligned}$$

равносильны друг другу, т. е. изображают одну и ту же прямую. Но уравнение $\lambda u + \mu v = 0$ изображает некоторую прямую, проходящую через точку пересечения прямых $u = 0$ и $v = 0$, и она должна совпадать с прямою $w = 0$; следовательно, три прямых (4) проходят через одну точку. Итак, *если между левыми частями уравнений* (4) *трех прямых существует некоторое линейное тождественное соотношение* (7) *то эти три прямые проходят через одну точку.*



Черт. 171.

Упражнения. 848. Три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке; биссектрисы двух внешних углов треугольника и третьего внутреннего пересекаются в одной точке (см. упражнение 220).

849. Три высоты треугольника пересекаются в одной то[illegible] нение 237).

Указание. Пусть высота из вершины C пересекает (черт. 171) противоположную сторону треугольника в точке C'; расстояния последней до сторон треугольника будут:

$$C'Q' = CC' \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right),$$

$$C'Q'' = CC' \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right),$$

откуда

$$\frac{C'Q'}{C'Q''} = \frac{\cos B}{\cos A},$$

поэтому уравнение прямой CC' будет:

$$\alpha - \frac{\cos B}{\cos A}\beta = 0$$

или

$$\alpha \cos A - \beta \cos B = 0.$$

Аналогично напишутся и уравнения других высот. Это решение наталкивает на мысль, что параметр пучка может быть выражен в зависимости от углов выбранной прямой с основными прямыми.

850. Если две прямых даны своими нормальными уравнениями $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то в уравнении прямой

$$\alpha - m\beta = 0,$$

проходящей через их точку пересечения, параметр m имеет значение:

$$m = -\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)}, \qquad (8)$$

где $(\alpha\gamma)$ — угол от первой из данных прямых до прямой пучка, а $(\gamma\beta)$ — угол от прямой пучка до второй из данных прямых.

851. Ангармоническое отношение четырех лучей, изображаемых уравнениями:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ \beta &= 0, \\ \gamma \equiv \alpha - m\beta &= 0, \\ \delta \equiv \alpha - m'\beta &= 0, \end{aligned}$$

равно:

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\gamma\beta)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\delta\beta)} = \frac{m}{m'}.$$

852. Ангармоническое отношение четырех точек на одной прямой равно ангармоническому отношению четырех перспективных им лучей (т. е. лучей, соединяющих эти четыре точки с какой-нибудь пятой точкой).

Указание. Пусть уравнения четырех лучей, проходящих через одну точку, будут:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ \beta &= 0, \\ \gamma \equiv \alpha - m\beta &= 0, \\ \delta \equiv \alpha - m'\beta &= 0; \end{aligned}$$

тогда их ангармоническое отношение [обозначим его через $(\alpha\beta\gamma\delta)$] будет иметь значение:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\gamma\beta)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\delta\beta)} = \frac{m}{m'}.$$

Проведем теперь какую-нибудь пятую прямую HN, не принадлежащую пучку, и пусть ее точки пересечения с выбранными четырьмя лучами будут соответственно A, B, C, D. Пучок лучей с центром в точке S называется перспективным к ряду точек на прямой HN, если каждой точке ряда соответствует луч, проходящий через эту точку.

Вычислим ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек A, B, C, D. По формуле (1) отношение, в котором отрезок AB разделяется точкою C, т. е. точкой пересечения с прямою γ, будет выражаться следующим образом:

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

равным образом

$$\frac{AD}{DB} = -\frac{\delta_1}{\delta_2}.$$

Здесь γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 обозначают соответственно результаты подстановок координат первой точки A или второй точки B в левые части γ и δ уравнений третьего и четвертого из лучей пучка.

При этом выражения:

$$\gamma_1 = \alpha_1 - m\beta_1, \qquad \delta_1 = \alpha_1 - m'\beta_1,$$
$$\gamma_2 = \alpha_2 - m\beta_2, \qquad \delta_2 = \alpha_2 - m'\beta_2$$

упрощаются, если мы примем во внимание, что прямая $\alpha = 0$ проходит через точку A, прямая $\beta = 0$ проходит через точку B, следовательно:

$$\alpha_1 = 0, \qquad \beta_2 = 0,$$

а потому

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{m\beta_1}{\alpha_2},$$
$$\frac{AD}{DB} = -\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{m'\beta_1}{\alpha_2}.$$

Отсюда ангармоническое отношение четырех точек получает значение:

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{m}{m'},$$

но таково же было ангармоническое отношение и четырех перспективных им лучей. Итак,

$$(ABCD) = (\alpha\beta\gamma\delta).$$

До сих пор мы рассматривали прямые пучка; пусть теперь нам даны уравнения:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \tag{9}$$

трех прямых, не проходящих через одну точку. В таком случае, как было показано в решении упражнения 658, уравнение всякой прямой плоскости может быть написано в виде:

$$au + bv + cw = 0,$$

где a, b, c, — коэфициенты, определяющие эту прямую. Отсюда далее следует, что если четыре прямых изображаются уравнениями:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$$

то между их левыми частями необходимо должно существовать (см. замечание 1 к упражнению 658) линейное тождественное соотношение:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta \equiv 0.$$

Допустим, что по отношению к трем основным прямым (9) нам даны две прямых:

$$\begin{aligned} au + bv + cw &= 0, \\ a'u + b'v + c'w &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Эти последние пересекаются в некоторой точке, декартовы координаты которой мы могли бы получить, если бы решили совместно уравнения (10), подставив в них предварительно развернутые выражения для u, v, w. Но поскольку мы пользуемся методом сокращенных обозначений, нам нет надобности итти так далеко в этих вычислениях, — мы можем остановиться на том, что система уравнений (10) определяет точку пересечения соответствующих прямых. При употреблении метода сокращенных обозначений представляется лишь выгодным заменить систему (10) системой уравнений ей равносильных, именно, определив из нее отношения $u:v:w$, т. е. представить ее в виде:

$$\frac{u}{l} = \frac{v}{m} = \frac{w}{n}, \tag{10'}$$

при этом числа l, m, n могут быть заменены другими, соответственно пропорциональными первым. Каждый раз, как мы получим систему вида (10), будем говорить, что ею определяется точка $(l:m:n)$; речь, следовательно, здесь идет о том, что точка определяется *значениями* (координатами) u, v, w или числами, пропорциональными этим значениям.

Пусть нам даны две точки, одна с координатами $(u_1 : v_1 : w_1)$, другая с координатами $(u_2 : v_2 : w_2)$; составим уравнение прямой, через них проходящей. Пусть ее уравнение будет:

$$au + bv + cw = 0.$$

Так как каждая из данных точек лежит на искомой прямой, то координаты той или другой из этих точек должны удовлетворять ее уравнению.

Итак:

$$au_1 + bv_1 + cw_1 = 0,$$
$$au_2 + bv_2 + cw_2 = 0,$$

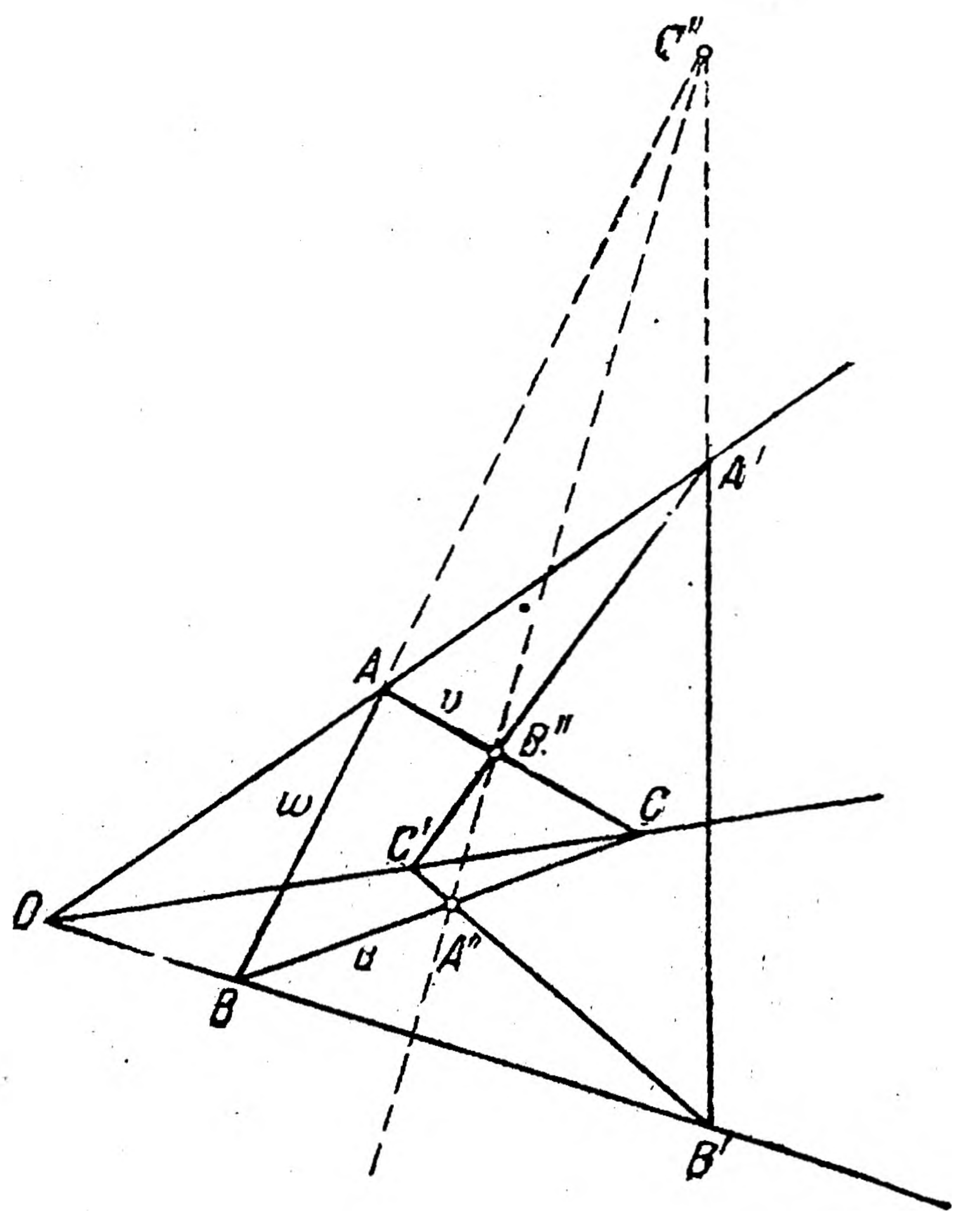
и следовательно, уравнение искомой прямой напишется в виде:

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (11)$$

Из предыдущего ясно, что три точки $(u_1:v_1:w_1)$, $(u_2:v_2:w_2)$, $(u_3:v_3;w_3)$ лежат на одной прямой, если их координаты удовлетворяют условию:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Воспользуемся этими замечаниями для доказательства теоремы Дезарга (Desargues, 1593—1662 гг.): *если два треугольника расположены так, что прямые, соединяющие их соответственные вершины*[1], *сходятся в одной точке, то три точки пересечения их соответственных сторон лежат на одной прямой* (и обратно).



Черт. 172.

Один из треугольников ABC (черт. 172) возьмем за основной треугольник; уравнения его сторон пусть будут:

$$(BC) \quad u = 0,$$
$$(CA) \quad v = 0,$$
$$(AB) \quad w = 0.$$

Второй треугольник пусть будет $A'B'C'$; прямые AA', BB', CC' по условию сходятся в некоторой точке O.

Назовем через $u_0:v_0:w_0$ координаты точки O; если угодно, это будут соответственные результаты подстановок в выражения u, v, w декартовых координат точки O.

Так как прямая OA проходит через точку пересечения прямых $v=0$, $w=0$ и через точку O, то ее уравнение должно быть написано в виде:

$$\frac{v}{v_0} - \frac{w}{w_0} = 0.$$

[1] Две фигуры называются гомологичными (подобными), если все прямые, соединяющие по две соответственные точки обеих фигур, проходят через одну точку („центр гомологии“).

Аналогично получатся уравнения двух других прямых OB и OC. Итак, эти три прямые будут изображаться уравнениями:

$$(OA)\quad \frac{v}{v_0}-\frac{w}{w_0}=0,$$

$$(OB)\quad \frac{w}{w_0}-\frac{u}{u_0}=0,$$

$$(OC)\quad \frac{u}{u_0}-\frac{v}{v_0}=0.$$

Вершина A' второго треугольника лежит на прямой OA, вдоль которой известно уже отношение $v:w=v_0:w_0$; следовательно, чтобы определить точку A', надо задать число, пропорциональное третьей координате u, пусть это будет число a, так что координаты этой точки A' будут $(a:v_0:w_0)$; аналогично определятся координаты двух других точек B' и C'. Итак, координаты вершин второго треугольника могут быть заданы в следующем виде:

$$A'\,(a:v_0:w_0),$$
$$B'\,(u_0:b:w_0),$$
$$C'\,(u_0:v_0:c).$$

Простые выкладки по вышеуказанным принципам позволят теперь провести доказательство теоремы Дезарга. Составим уравнения сторон треугольника $A'B'C'$ по приведенным выше координатам его вершин:

$$(B'C')\quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & b & w_0 \\ u_0 & v_0 & c \end{vmatrix}=0,$$

$$(C'A')\quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & v_0 & c \\ a & v_0 & w_0 \end{vmatrix}=0,$$

$$(A'B')\quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & v_0 & w_0 \\ u_0 & b & w_0 \end{vmatrix}=0.$$

Найдем теперь координаты точек A'', B'', C'' пересечения соответственных сторон треугольников. Например, для определения координат точки A'', разрешая совместно уравнения сторон BC и $B'C'$, мы получим:

$$(A'')\quad \frac{u}{0}=\frac{v}{v_0-b}=\frac{w}{-(w_0-c)},$$

и аналогично:

$$(B'')\quad \frac{u}{-(u_0-a)}=\frac{v}{0}=\frac{w}{w_0-c},$$

$$(C'')\quad \frac{u}{u_0-a}=\frac{v}{-(v_0-b)}=\frac{w}{0}.$$

Теперь легко убедиться, что эти три точки лежат на одной прямой, ибо определитель из их координат обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} 0 & v_0 - b & -(w_0 - c) \\ -(u_0 - a) & 0 & w_0 - c \\ u_0 - a & -(v_0 - b) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Предыдущее доказательство теоремы Дезарга, немного длинное, имело, однако, целью показать, что при употреблении метода сокращенных обозначений применимы те же приемы расчленения задачи на задачи элементарные (проведение прямой через две точки, определение пересечения двух прямых и т. д.), которыми мы систематически пользуемся при употреблении обычных координат.

Не ставя себе такой специальной цели, теорему Дезарга можно доказать и другими, более короткими способами, между которыми, пожалуй, наиболее изящен нижеследующий способ Дарбу.

Пусть уравнения трех сторон одного из данных треугольников будут:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

причем множители их левых частей подобраны так, что уравнениями прямых OA, OB, OC будут соответственно [сравните уравнение (2)]:

$$v - w = 0, \quad w - u = 0, \quad u - v = 0.$$

Равным образом пусть уравнения сторон второго треугольника будут:

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = 0,$$

причем опять уравнениями прямых OA', OB', OC' будут:

$$v' - w' = 0, \quad w' - u' = 0, \quad u' - v' = 0.$$

Так как уравнения $v - w = 0$ и $v' - w' = 0$ изображают одну и ту же прямую OA, то между их левыми частями должно существовать тождественное соотношение:

$$v - w \equiv \lambda (v' - w');$$

аналогично для других двух прямых имеем:

$$w - u \equiv \mu (w' - u'),$$
$$u - v \equiv \nu (u' - v').$$

Складывая полученные тождества, найдем:

$$\lambda (v' - w') + \mu (w' - u') + \nu (u' - v') \equiv 0,$$

но три прямые $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$ не пересекаются в одной точке, поэтому необходимо, чтобы

$$\lambda = \mu = \nu.$$

Если так, то указанные выше тождества сводятся к следующим тождественным равенствам:

$$u - \lambda u' \equiv v - \lambda v' \equiv w - \lambda w',$$

которые обозначают, что три уравнения:

$$\begin{aligned} u-\lambda u' &= 0, \\ v-\lambda v' &= 0, \\ w-\lambda w' &= 0 \end{aligned}$$

изображают одну и ту же прямую, именно прямую, содержащую точки пересечения соответственных сторон двух данных треугольников.

2. Трилинейные координаты.

Подведем вкратце итоги с точки зрения метода, к чему мы пришли в предыдущем параграфе при употреблении способа сокращенных обозначений.

Каждым из уравнений

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= 0, \\ w &= 0 \end{aligned}$$

определяется одна из сторон некоторого произвольного треугольника Какая-либо точка плоскости определяется отношениями трех чисел:

$$u_1 : v_1 : w_1.$$

Любая прямая плоскости изображается уравнением вида:

$$\lambda u + \mu v + \nu w = 0.$$

Наконец, та или другая из основных задач относительно взаимоотношения данных точек или прямых разрешается аналитически соотношениями или уравнениями между переменными u, v, w или их значениями.

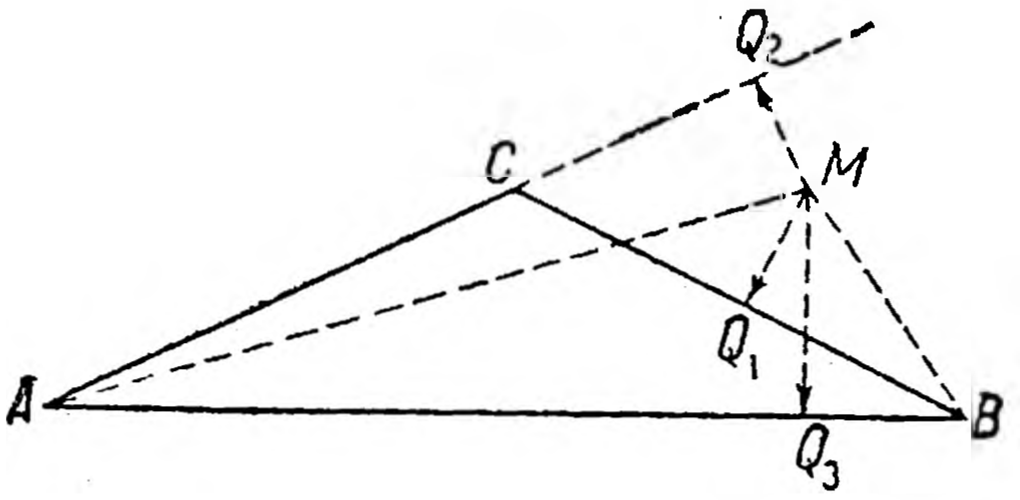
Таким образом эти переменные u, v, w играют вполне роль координат, мы их так поэтому и будем называть.

Так как в этой системе роль базиса играют три прямых (стороны основного треугольника), то такие координаты называются *трилинейными* координатами. Эти трилинейные координаты сверх того могут быть названы однородными, так как и точка определяется лишь их отношениями между собой, и все уравнения, какие мы для них получали, однородны относительно этих координат. До сих пор эти трилинейные координаты были определены нами как левые части уравнений основных трех прямых относительно некоторой декартовой системы координат; но так как эти левые части уравнений для какой-либо точки пропорциональны расстояниям точки до основных прямых, то, опираясь на это геометрическое истолкование, мы можем дать самостоятельное определение трилинейных координат независимо от какой-либо декартовой системы.

За трилинейные координаты мы можем взять числа x_1, x_2, x_3, пропорциональные расстояниям α, β, γ точки до каждой из сторон базисного треугольника:

$$\frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta} = \frac{x_3}{\gamma}. \qquad (13)$$

Условимся при этом расстояние точки до стороны базисного треугольника считать положительным, когда перпендикуляр из точки на сторону имеет направление, одинаковое с направлением высоты треугольника, опущенной на ту же сторону, а в противоположном случае будем считать указанное расстояние отрицательным.



Черт. 173.

Возьмем какую-нибудь точку M с координатами α, β, γ; тогда (черт. 173):

$$\alpha = MQ_1,$$
$$\beta = MQ_2,$$
$$\gamma = MQ_3.$$

Легко видеть, что при расположении на нашем чертеже

$$\text{пл. } (ABC) = \text{пл. } (MAB) + \text{пл. } (MCA) - \text{пл. } (MCB).$$

Отсюда, обозначив стороны базисного треугольника через a_1, a_2, a_3, а его площадь через Δ, получим:

$$2\Delta = a_3 \cdot MQ_3 + a_2 \cdot MQ_2 - a_1(-MQ_1),$$

т. е.

$$2\Delta = a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma. \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что такое же соотношение будет иметь место и при всяком другом положении точки M относительно базисного треугольника. Итак, направленные расстояния точки до сторон базисного треугольника для любой точки будут удовлетворять соотношению (14).

С помощью этого соотношения могут быть определены расстояния точки до сторон базисного треугольника, а следовательно, и ее положение по данным трилинейным координатам точки $x_1 : x_2 : x_3$. В самом деле, из (13) следует, что

$$\frac{\alpha}{x_1} = \frac{\beta}{x_2} = \frac{\gamma}{x_3} = \frac{a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}$$

или на основании соотношения (14):

$$\alpha = \frac{2\Delta x_1}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3},$$
$$\beta = \frac{2\Delta x_2}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}, \tag{15}$$
$$\gamma = \frac{2\Delta x_3}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}.$$

Из указанных выражений, между прочим, вытекает геометрическое истолкование особого уравнения 1-й степени в трилинейных координатах, именно уравнения:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \tag{16}$$

Из предыдущего ясно, что это соотношение имеет место лишь для координат таких точек, для которых расстояния до сторон базисного треугольника бесконечны, т. е. для бесконечно удаленных точек. Поэтому, мы скажем, уравнение (16) есть уравнение бесконечно удаленной прямой. Это замечание позволяет нам сейчас же написать условие параллельности двух прямых, определяемых уравнениями:

$$\begin{aligned} u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0, \\ v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=0, \end{aligned} \tag{17}$$

в трилинейных координатах. Если две прямые (17) параллельны, то они пересекаются в бесконечно удаленной точке, т. е. некоторой точке, принадлежащей прямой (16). Итак, если две прямых (17) параллельны, то три прямых (17) и (16) пересекаются в одной точке, а это будет в том случае, когда коэфициенты этих трех уравнений удовлетворяют условию:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0.$$

Вместо того, чтобы брать за трилинейные координаты числа, пропорциональные расстояниям точки до сторон базисного треугольника, мы можем взять их пропорциональными произведениям этих расстояний соответственно на любые наперед заданные числа λ_1, λ_2, λ_3, т. е. принять:

$$\frac{x_1}{\lambda_1\alpha}=\frac{x_2}{\lambda_2\beta}=\frac{x_3}{\lambda_3\gamma}. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что этот выбор трилинейных координат в их прежнем истолковании равносилен употреблению левых частей общих уравнений основных прямых взамен левых частей нормированных уравнений этих прямых.

Употребляя такие обобщенные трилинейные координаты, мы можем в каждом цикле данных вопросов выбирать значения λ_1, λ_2, λ_3 по произволу, как нам окажется удобнее.

Преимущества этих обобщенных трилинейных координат заключаются в нижеследующем: 1) эти координаты суть отвлеченные числа и совершенно не зависят от единицы масштаба, выбираемой для измерения отрезков, 2) при их употреблении алгебраические линии изображаются однородными уравнениями, вследствие чего алгебраические преобразования и формулы получают особую симметрию и простоту, наконец, 3) выбором как базисного треугольника, так и множителей λ_1, λ_2, λ_3 можно пользоваться, чтобы придать уравнениям некоторых прямых или коо́рдинатам некоторых точек фигуры особо простые выражения.

Покажем для примера два способа выбора множителей λ_1, λ_2, λ_3. Мы можем, например, *произвольной* точке плоскости, находящейся от сторон базисного треугольника на расстояниях α_0, β_0, γ_0, приписать равные трилинейные координаты:

$$x_1=x_2=x_3,$$

в таком случае соотношения (18) дадут нам:

$$\lambda_1\alpha_0 = \lambda_2\beta_0 = \lambda_3\gamma_0$$

или

$$\frac{\lambda_1}{\frac{1}{\alpha_0}} = \frac{\lambda_2}{\frac{1}{\beta_0}} = \frac{\lambda_3}{\frac{1}{\gamma_0}}.$$

Возьмем, в частности, точку $(\alpha_0:\beta_0:\gamma_0)$ в центре тяжести треугольника, тогда:

$$\alpha_0 = \frac{h_1}{3}, \quad \beta_0 = \frac{h_2}{3}, \quad \gamma_0 = \frac{h_3}{3},$$

где h_1, h_2, h_3 будут высотами основного треугольника. Следовательно:

$$\lambda_1 h_1 = \lambda_2 h_2 = \lambda_3 h_3$$

или так как

$$2\Delta = a_1 h_1 = a_2 h_2 = a_3 h_3,$$

то

$$\frac{\lambda_1}{a_1} = \frac{\lambda_2}{a_2} = \frac{\lambda_3}{a_3}, \tag{19}$$

т. е. коэфициенты λ_1, λ_2, λ_3 пропорциональны сторонам треугольника. При этом условии получим:

$$\frac{x_1}{a_1\alpha} = \frac{x_2}{a_2\beta} = \frac{x_3}{a_3\gamma}, \tag{18'}$$

т. е. трилинейные координаты точки в данном случае пропорциональны площадям трех треугольников, имеющих общую вершину в выбранной точке, а основаниями — стороны треугольника. Эти последние координаты называются барицентрическими (Möbius).

Уравнение бесконечно удаленной прямой для обобщенных трилинейных координат будет:

$$\frac{a_1x_1}{\lambda_1} + \frac{a_2x_2}{\lambda_2} + \frac{a_3x_3}{\lambda_3} = 0. \tag{16'}$$

В частности, для барицентрических координат коэфициенты λ_1, λ_2, λ_3 определяются соотношениями (19); таким образом в барицентрической системе Мебиуса уравнение бесконечно удаленной прямой будет вида:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{16''}$$

Выбор коэфициентов λ_1, λ_2, λ_3 можно сделать и другими способами, например, точке, находящейся на равных расстояниях до сторон основного треугольника (т. е. центру круга, вписанного в треугольник)

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\Delta}{a_1 + a_2 + a_3},$$

приписать произвольно выбранные трилинейные координаты $x_1^0 : x_2^0 : x_3^0$; в этом случае из соотношения (18) получим:

$$\frac{x_1^0}{\lambda_1} = \frac{x_2^0}{\lambda_2} = \frac{x_3^0}{\lambda_3},$$

т. е. определим отношения коэфициентов $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$.

В заключение отметим отношение обыкновенных декартовых или обыкновенных однородных координат к координатам трилинейным.

Так как обыкновенные декартовы координаты x и y являются отношениями отрезков, то весьма удобным представляется изображать их также в виде отношений двух чисел, скажем ξ и η, к некоторому третьему числу ζ, т. е. принять

$$x=\frac{\xi}{\zeta}, \quad y=\frac{\eta}{\zeta}. \tag{20}$$

В таком случае точка будет определяться отношениями $\xi:\eta:\zeta$. Эти координаты называют обыкновенными однородными (или просто „однородными") координатами, так как уравнение любой алгебраической линии в этих координатах будет однородным уравнением.

Число ζ может быть принято равным любому числу; если его принять равным единице ($\zeta=1$), то численные значения декартовых координат и двух первых из однородных будут совпадать:

$$x=\xi, \quad y=\eta \text{ при } \zeta=1.$$

Чтобы не усложнять обозначений, однородные координаты обозначают через x, y, z.

В трилинейных координатах, приравнивая нулю одну из координат, мы получаем уравнение одной из сторон базисного треугольника. В однородных обыкновенных координатах уравнение

$$x=0$$

будет на основании соотношения (20) равносильно уравнению $x=0$ в декартовых координатах и изображает, следовательно, ось oy; уравнение

$$y=0$$

изображает аналогичным образом ось ox. Наконец уравнение

$$z=0$$

в однородных координатах равносильно уравнению:

$$1=0$$

в декартовых координатах, т. е. уравнению бесконечно удаленной прямой.

Итак, в однородных координатах, приравнивая нулю ту или другую из координат, мы получаем каждый раз уравнение прямой, именно оси Oy, оси Ox и бесконечно удаленной прямой. Таким образом обыкновенную однородную систему координат мы можем рассматривать как частный случай трилинейной системы, в которой одна из сторон базисного треугольника является бесконечно удаленной прямой.

3. Проективное или коллинеарное преобразование.

Пусть нам даны уравнения трех каких-либо прямых в обыкновенных однородных координатах:

$$\begin{gathered}a_1x+b_1y+c_1z=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z=0,\end{gathered}$$

тогда на основании соотношения (18) трилинейные координаты могут быть определены следующим образом:

$$\frac{x_1}{a_1x+b_1y+c_1z}=\frac{x_2}{a_2x+b_2y+c_2z}=\frac{x_3}{a_3x+b_3y+c_3z}. \tag{21}$$

Эти соотношения являются формулами преобразования обыкновенных однородных координат $x:y:z$ в трилинейные $x_1:x_2:x_3$ для той же точки.

Введем вместо $x_1:x_2:x_3$ для симметрии обозначения $x':y':z'$; соотношения (21) примут вид:

$$\frac{x'}{a_1x+b_1y+c_1z}=\frac{y'}{a_2x+b_2y+c_2z}=\frac{z'}{a_3x+b_3y+c_3z}. \tag{21'}$$

Применим теперь к этим соотношениям другое истолкование, аналогичное тому, которым мы пользовались уже в главе XX, а именно, будем считать, что координаты $x:y:z$ и $x':y':z'$ определяют различные точки, отнесенные к одной и той же системе координат (трилинейной или обыкновенной однородной). В таком случае с помощью уравнений (21') будет установлено соответствие между двумя многообразиями точек, принадлежащими одной плоскости либо двум плоскостям, на каждой из которых выбран свой базисный треугольник. Каждой точке $M(x:y:z)$ одного многообразия будет соответствовать определенная точка $M'(x':y':z')$ другого многообразия. Обозначим отношения (21') через $\frac{1}{\mu}$, тогда:

$$\begin{aligned}\mu x'&=a_1x+b_1y+c_1z,\\ \mu y'&=a_2x+b_2y+c_2z,\\ \mu z'&=a_3x+b_3y+c_3z.\end{aligned} \tag{22}$$

Если определитель этой системы

$$\delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

отличен от нуля, тогда уравнения (22) могут быть разрешены относительно x, y, z, так что:

$$\begin{aligned}x&=\mu(A_1x'+A_2y'+A_3z'),\\ y&=\mu(B_1x'+B_2y'+B_3z'),\\ z&=\mu(C_1x'+C_2y'+C_3z'),\end{aligned} \tag{22'}$$

и в этом случае ($\delta \neq 0$) каждой точке $M'(x':y':z')$ второго многообразия будет соответствовать определенная точка $M(x:y:z)$ первого многообразия; соответствие будет взаимнооднозначным.

Указанное преобразование (21') или (22) называется коллинеарным или проективным. Коллинеарным оно называется потому, что точки лежащие на одной прямой переходят после преобразования в точки, лежащие на одной прямой, или, иначе; прямая преобразуется в прямую. В самом деле, возьмем какую-нибудь прямую первого многообразия:

$$Ax+By+Cz=0;$$

во втором многообразии ей будет соответствовать линия, изображаемая уравнением:

$$A\mu(A_1x'+B_1y'+C_1z')+B\mu(B_1x'+B_2y'+B_3z')+ \\ +C\mu(C_1x'+C_2y'+C_3z')=0$$

или

$$A'x'+B'y'+C'z'=0,$$

т. е. прямая.

Коллинеарное преобразование называется также проективным, потому что при таком преобразовании сохраняется ангармоническое отношение точек и прямых. В самом деле, возьмем две любых прямых первого многообразия, уравнения которых будут:

$$u=0, \quad v=0, \tag{23}$$

и назовем через u' и v' те линейные функции от x', y', z', в которые обращаются u и v после подстановки (22'), так что

$$u\equiv u', \quad v\equiv v' \tag{24}$$

при соотношениях (22). Тогда прямым (23) первого многообразия во втором многообразии будут соответствовать прямые

$$u'=0, \quad v'=0. \tag{23'}$$

Но из соотношений (24) следует, что двум прямым первого многообразия

$$u-mv=0, \quad u-nv=0 \tag{25}$$

во втором многообразии будут соответствовать прямые:

$$u'-mv'=0, \; u'-nv'=0. \tag{25'}$$

Ангармоническое отношение четырех лучей (23) и (25) первого многообразия $\frac{m}{n}$ будет в таком случае одинаково с ангармоническим отношением соответствующих лучей второго многообразия.

Нетрудно сообразить, что при коллинеарном преобразовании сохраняется перспективность точек и лучей, т. е. точка, лежащая на какой-либо прямой, перейдет в соответствующую точку, лежащую на соответствующей прямой. А так как ангармоническое отношение четырех точек на одной прямой равно ангармоническому отношению четырех перспективных им лучей, то из сохранения при коллинеарном преобразовании ангармонического отношения четырех лучей вытекает и сохранение при том же преобразовании ангармонического отношения четырех точек.

Предположим для простоты, что коллинеарное преобразование мы относим к обыкновенным однородным координатам; в таком случае бесконечно удаленной прямой первого многообразия

$$z=0$$

во втором многообразии будет соответствовать прямая

$$C_1x' + C_2y' + C_3z' = 0,$$

т. е., вообще говоря, прямая на конечном расстоянии; и наоборот, бесконечно удаленной прямой второго многообразия

$$z' = 0$$

будет соответствовать прямая

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0,$$

т. е. прямая тоже на конечном расстоянии.

Посмотрим теперь, имеются ли точки, сохраняющие свое положение при коллинеарном преобразовании, т. е. точки, координаты которых и в том и в другом многообразии одинаковы (собственно, пропорциональны):

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

Соотношения (21′) дадут нам для определения таких точек уравнения:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z}{x} = \frac{a_2x + b_2y + c_2z}{y} = \frac{a_3x + b_3y + c_3z}{z}.$$

Обозначая эти отношения через s, мы получим:

$$\begin{gathered}(a_1 - s)\,x + b_1y + c_1z = 0,\\ a_2x + (b_2 - s)\,y + c_2z = 0,\\ a_3x + b_3y + (b_3 - s)\,z = 0,\end{gathered}$$

где s должно удовлетворять условию:

$$\begin{vmatrix} a_1 - s & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - s & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - s \end{vmatrix} = 0,$$

которое является уравнением 3-й степени. Таким образом каждое данное коллинеарное преобразование, вообще говоря, сохраняет неизменными три точки, которые могут оказаться частью совпавшими или мнимыми.

Подобным же образом мы могли бы поставить вопрос о тех прямых, которые сохраняются при данном коллинеарном преобразовании; очевидно, это будут те прямые, которые соединяют по две неподвижные точки преобразования.

Коллинеарным преобразованием можно пользоваться для преобразования какой-либо линии или фигуры к линии или фигуре более простого типа; изучив свойства этой последней, мы обратным преобразованием могли бы получить соответствующие свойства первоначальной фигуры.

Упражнения. 853. Найти коллинеарные преобразования, сохраняющие вершины базисного треугольника, и показать, что они 1) сохраняют и его стороны, 2) образуют группу.

854. Найти в декартовых координатах коллинеарные преобразования, сохраняющие изотропные прямые, выходящие из начала координат, и показать, что они образуют группу.

4. Принцип двойственности на плоскости.

Отношения двух основных элементов плоскости — точек и прямых — устанавливаются в началах геометрии, в сущности говоря, взаимно друг другу. Так, „две точки определяют одну прямую, через них проходящую“ и „две прямых определяют (своим пересечением) одну точку, им обоим принадлежащую“. Эта взаимность несколько маскируется лишь различием терминов, характеризующих отношения. Мы говорим: „прямая проходит через точку“ и „точка лежит на прямой“, хотя здесь речь идет об одной фигуре из точки и прямой в некотором особом их положении.

Если бы мы ввели какой-либо новый термин, например „инцидентность“ для обозначения этого особого положения, тогда указанная взаимность выступила бы еще явственнее в самих формулировках, мы могли бы сказать: „две точки определяют одну прямую им инцидентную“ и „две прямые определяют одну точку, им инцидентную“. Теперь эти предложения отличаются друг от друга лишь перестановкой роли точек и прямых; вводя и для последних какой-либо общий термин, например „элемент“, мы два указанных предложения могли бы формулировать в виде одного общего предложения: „два элемента одного рода определяют один элемент другого рода, им инцидентный“.

Поскольку основные отношения элементов двух родов взаимны между собой и поскольку речь идет лишь об их относительных положениях, естественно ожидать, что такая взаимность будет сохраняться. Этот принцип взаимности или *принцип двойственности*, выдвинутый Жергонном и Понселе можно формулировать следующим образом: *наряду с каждым предложением об относительном положении точек и прямых существует другое предложение, в котором основные элементы — точки и прямые — взаимно меняют свои роли.*

Два предложения, получающиеся одно из другого перестановкой терминов „точка“, „прямая“, называются взаимными или *коррелятивными*; также коррелятивными называются и соответствующие им фигуры. Один из наиболее замечательных примеров такой коррелятивности теорем положения представляет собой теорема Дезарга (см. § 1): если три прямых, соединяющих соответственные вершины двух треугольников, сходятся в одной точке, то три точки пересечения соответственных сторон треугольника лежат на одной прямой, взаимное или коррелятивное предложение будет: если три точки пересечения соответственных сторон треугольника лежат на одной прямой, то три прямых, соединяющих соответственные вершины треугольника, проходят через одну точку.

Принцип двойственности был обоснован Понселе на полярных свойствах кривых 2-го порядка. Допустим, что мы имеем какую-нибудь плоскую фигуру из точек и прямых; возьмем кривую 2-го порядка в той же плоскости и построим для точек фигуры их поляры, а для прямых их полюсы относительно выбранной кривой. Мы знаем, что отношения инцидентности сохраняются при преобразовании взаимными полярами, т. е. точки, лежащие на одной прямой, перейдут в прямые, проходящие через одну точку, именно полюс прямой; равным образом прямые, проходящие через одну точку, перейдут в точки, лежащие на одной прямой, именно на поляре первой точки. Таким образом полярное преобразование переводит данную фугуру в фигуру ей коррелятивную, и инцидентность основных элементов (точек и прямых) сохраняется; поэтому всякое предложение, высказывающее какое-либо свойство первой фигуры об относительном расположении ее элементов, дает соответствующее предложение о фигуре коррелятивной.

Доказав принцип двойственности в общем виде, мы тем самым освобождаемся от обязанности отдельно доказывать предложения, взаимные каким-либо данным предложениям.

Упражнения. 855. Возьмем какую-нибудь прямую, изображаемую уравнением:

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0, \tag{α}$$

относительно базисного треугольника ABC, и пусть A', B', C' будут точки пересечения этой прямой со сторонами треугольника. Пусть далее точки A'', B'', C'' будут четвертыми гармоническими для троек BCA', CAB', ABC' на сторонах треугольника, тогда прямые AA'', BB'', CC'' пройдут через одну точку.

Как формулировать коррелятивное предложение?

Если за прямую (α) взять бесконечно удаленную прямую, то указанное предложение обратится в теорему о пересечении медиан в одной точке; если за прямую (α) взять геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний от сторон треугольника равна нулю, то получим теорему о биссектрисах.

856. Каково будет предложение, коррелятивное теореме о полном четырехстороннике (упражнение 659)?

Принцип двойственности, выступающий в теоремах положения, должен, конечно, найти себе соответствующее выражение и в аналитической геометрии, ибо последняя устанавливает всевозможные геометрические предложения, в том числе и теоремы положения.

До сих пор при употреблении метода координат у нас точка определялась координатами, прямая — уравнением; естественно в силу принципа двойственности поставить себе вопрос, нельзя ли расширить метод координат так, чтобы взаимно прямая определялась координатами, а точка — уравнением между ними. Такие координаты прямой и были введены Шалем (Chasles) и Плюкером (Plücker).

Возьмем уравнение прямой в однородных координатах:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \tag{26}$$

Достаточно знать два отношения $u_1 : u_2 : u_3$ трех коэфициентов u_1, u_2, u_3 уравнения, чтобы написать это уравнение, т. е. чтобы определить эту прямую. Таким образом отношения $u_1 : u_2 : u_3$, как числа определяющие положение прямой, мы можем назвать координатами прямой; самые же числа u_1, u_2, u_3 можно назвать однородными координатами прямой.

Если мы возьмем уравнение прямой (26) в виде:

$$ux + vy - 1 = 0,$$

то на осях координат она отсекает отрезки, измеряемые числами $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$; величины, обратные последним, т. е. u и v, будут координатами прямой. Координаты точки $x_1 : x_2 : x_3$ называются иначе „точечными" координатами, координаты прямой $u_1 : u_2 : u_3$ называются „тангенциальными" координатами по причине, которая будет выяснена позднее.

Уравнение (26) совершенно симметрично относительно тех и других координат; ему можно дать двойное истолкование.

С одной стороны, можно считать данными $u_1 : u_2 : u_3$ (отметим это обстоятельство индексом нуль сверху), тогда уравнение:

$$\overset{0}{u}_1 x_1 + \overset{0}{u}_2 x_2 + \overset{0}{u}_3 x_3 = 0 \tag{26'}$$

в качестве текущих (переменных) координат содержит точечные координаты $x_1 : x_2 : x_3$, и оно изображает *совокупность всех точек*, координаты которых удовлетворяют этому условию (26'), т. е. прямую, как „носителя", как „место" этих точек. Итак, уравнение (26') в точечных координатах есть уравнение прямой, как мы все время и говорили.

С другой стороны, можно считать данными $x_1 : x_2 : x_3$ (отметим это обстоятельство опять индексом нуль сверху), тогда уравнение:

$$\overset{0}{x}_1 u_1 + \overset{0}{x}_2 u_2 + \overset{0}{x}_3 u_3 = 0 \tag{26''}$$

в качестве текущих (переменных) координат будет содержать уже тангенциальные координаты $u_1 : u_2 : u_3$, и стало быть, мы его должны толковать как уравнение, *изображающее совокупность всех прямых*, координаты которых удовлетворяют условию (26''), или как уравнение „носителя" всех этих прямых, т. е. точки, общей им. И на самом деле, соотношение (26'') представляет ведь собой условие, что какая-то прямая (26) проходит через точку $M_0(\overset{0}{x}_1 : \overset{0}{x}_2 : \overset{0}{x}_3)$. Итак, с этой точки зрения уравнение (26'') в тангенциальных координатах есть уравнение точки.

Пусть далее мы имеем соотношение:

$$\overset{0}{u}_1 \overset{0}{x}_1 + \overset{0}{u}_2 \overset{0}{x}_2 + \overset{0}{u}_3 \overset{0}{x}_3 = 0. \tag{27}$$

На основании сказанного ему можно дать двоякое истолкование.

Или мы скажем, что соотношение (27) обозначает, что прямая, изображаемая уравнением (26'), проходит через точку $\overset{0}{x}_1 : \overset{0}{x}_2 : \overset{0}{x}_3$, или же что точка, изображаемая уравнением (26''), принадлежит прямой $\overset{0}{u}_1 : \overset{0}{u}_2 : \overset{0}{u}_3$. То и другое утверждение, изображающее в сущности одно расположение, можно объединить в одно предложение, пользуясь термином, введенным выше; именно, мы можем сказать: соотношение (27) обозначает, что точка $\overset{0}{x}_1 : \overset{0}{x}_2 : \overset{0}{x}_3$ и прямая $\overset{0}{u}_1 : \overset{0}{u}_2 : \overset{0}{u}_3$ инцидентны.

Благодаря введению (и притом симметричному) тангенциальных координат мы всяким соотношениям или уравнениям (однородным) между тройками переменных или их значений можем давать двоякое истолкование, принимая эти тройки либо за точечные, либо за тангенциальные координаты.

Пусть нам дается уравнение:

$$a\varphi + b\psi + c\theta = 0, \tag{28}$$

где a, b, c — постоянные, а φ, ψ, θ — переменные; спросим себя, что оно обозначает? Конечно, уравнение (28) вообще может иметь самые разнообразные значения; но если φ, ψ, θ принимать за однородные точечные координаты, то уравнение (28) будет уравнением прямой; если же φ, ψ, θ принимать за тангенциальные координаты, уравнение (28) будет уравнением точки.

Далее, например, соотношение:

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = 0$$

обозначает, что три точки $(x_1' : x_2' : x_3')$, $(x_1'' : x_2'' : x_3'')$, $(x_1''' : x_2''' : x_3''')$ лежат на одной прямой; равным образом соотношение:

$$\begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{vmatrix} = 0$$

представляет собою условие, что три прямых $(u_1' : u_2' : u_3')$, $(u_1'' : u_2'' : u_3'')$, $(u_1''' : u_2''' : u_3''')$ проходят через одну точку.

Два предыдущих соотношения различаются лишь обозначениями и истолкованиями входящих в них букв; мы могли бы их соединить в одно и сказать, что условие:

$$\begin{vmatrix} \varphi' & \psi' & \theta' \\ \varphi'' & \psi'' & \theta'' \\ \varphi''' & \psi''' & \theta''' \end{vmatrix} = 0$$

обозначает, что три элемента $(\varphi' : \psi' : \theta')$, $(\varphi'' : \psi'' : \theta'')$, $(\varphi''' : \psi''' : \theta''')$ одного рода инцидентны одному элементу второго рода.

Таким образом каждому соотношению, аналитически изображающему то или иное относительное расположение основных элементов (точек или прямых), мы можем давать двоякое геометрическое истолкование: первый раз, принимая одну тройку за точечные координаты, другую за тангенциальные, второй раз, принимая первые за тангенциальные координаты, вторые за точечные. Если обе пары троек входят в соотношение симметрично, как например в соотношении (27), то мы получим лишь одно утверждение, само себе взаимное.

Координатами прямой можно пользоваться для изображения и исследования линий любого порядка.

Возьмем, например, точечное уравнение окружности с центром в начале координат:

$$x^2+y^2-z^2=0. \tag{29}$$

Прямая

$$ux+vy-1=0, \tag{30}$$

как известно, будет касаться окружности, если ее расстояние от центра окружности будет равно радиусу, т. е. если

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}=r.$$

Таким образом соотношение:

$$u^2+v^2-\frac{1}{r^2}=0 \tag{31}$$

является условием, что прямая (30) касается данной окружности (29) Мы можем сказать, что уравнение (31) изображает совокупность всех прямых, касательных к окружности, или что оно изображает „носителя" всех этих касательных, т. е. окружность. Итак, уравнение (31) есть уравнение окружности в тангенциальных координатах. Так как здесь элементы совокупности — прямые, — образуя окружность, ее касаются и элемент является тангенциальным, то координаты этого элемента (прямой) и названы по этой причине тангенциальными координатами.

Степень уравнения линии в точечных координатах мы назвали порядком линий; порядок линии обозначает число точек пересечения (действительных или мнимых) линии с любой произвольной прямой. Аналогичным образом степень уравнения линии в тангенциальных координатах называется классом линии; класс линии обозначает число касательных к линии, выходящих из какой-либо произвольной точки плоскости. Порядок и класс линии могут быть неодинаковы между собой.

Упражнения. 857. Координаты $(x_1'+\mu x_1'':x_2'+\mu x_2'':x_3'+\mu x_3'')$ изображают некоторую точку на прямой, соединяющей две точки:

$$(x_1':x_2':x_3') \quad \text{и} \quad (x_1'':x_2'':x_3'').$$

Как расположена прямая $(u_1'+\mu u_1''):(u_2'+\mu u_2''):(u_3'+\mu u_3'')$ по отношению к двум прямым $(u_1':u_2':u_3')$ и $(u_1'':u_2'':u_3'')$?

858. Уравнение $x_3=0$ (в обыкновенных однородных координатах) изображает бесконечно удаленную прямую; уравнение $u_3=0$ изображает начало координат. Что будет изображать каждое из уравнений:

$$u_1=0 \quad \text{или} \quad u_2=0?$$

859. При построении трилинейной системы координат за базис мы принимаем три прямых, каждая из которых изображается соответственно одним из уравнений: $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, тогда точка определяется координатами $x_1:x_2:x_3$, причем можно считать, что числа x_1, x_2, x_3 пропорциональны расстояниям точки от сторон базисного треугольника. Аналогично можно построить трехточечную систему координат, приняв за базис три точки, каждая из которых будет изображаться соответственно одним из уравнений $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$; тогда прямая определится координатами $u_1:u_2:u_3$, причем можно считать, что числа u_1, u_2, u_3 пропорциональны расстояниям прямой от вершин базисного треугольника.

860. Какое геометрическое место изображает уравнение:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

если u_1, u_2, u_3, как координаты прямой, пропорциональны расстояниям прямой от вершин базисного треугольника.

Указание. Уравнение изображает точку пересечения медиан базисного треугольника; в самом деле, возьмем прямую, параллельную одной из сторон базисного треугольника, тогда $u_1 = u_2$, и следовательно, $2u_1 + u_3 = 0$. Таким образом эта прямая, параллельная стороне базисного треугольника и проходящая через точку, изображаемую данным уравнением, делит соответствующую высоту треугольника в отношении $2:1$.

5. Коррелятивное преобразование.

В § 3 мы рассматривали коллинеарное преобразование одного многообразия в другое, преобразование, которое устанавливалось с помощью билинейных соотношений между точечными координатами:

$$\frac{x_1'}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3} = \frac{x_2'}{b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3} = \frac{x_3'}{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3}.$$

Введя тангенциальные координаты, мы могли бы так же рассматривать взаимное преобразование, устанавливаемое с помощью билинейных соотношений между тангенциальными координатами элементов двух многообразий:

$$\frac{u_1'}{\bar{a}_1u_1 + \bar{a}_2u_2 + \bar{a}_3u_3} = \frac{u_2'}{\bar{b}_1u_1 + \bar{b}_2u_2 + \bar{b}_3u_3} = \frac{u_3'}{\bar{c}_1u_1 + \bar{c}_2u_2 + \bar{c}_3u_3}.$$

В этом преобразовании прямой первого многообразия будет, очевидно, соответствовать прямая второго многообразия; равным образом, вследствие линейности преобразования, линейное уравнение точки первого многообразия преобразуется в линейное же уравнение, т. е. уравнение точки второго многообразия. Короче говоря, последнее преобразование тоже коллинеарно, как и первое.

При наличии двух родов координат, точечных и тангенциальных, мы можем составить преобразование, устанавливаемое с помощью билинейных соотношений между теми и другими координатами, т. е. преобразование вида:

$$\frac{u_1'}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3} = \frac{u_2'}{b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3} = \frac{u_3'}{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3}. \tag{32}$$

Обозначим каждое из этих отношений через $\frac{1}{\mu}$, тогда:

$$\begin{aligned} \mu u_1' &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \\ \mu u_2' &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \\ \mu u_3' &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3; \end{aligned} \tag{32'}$$

этими соотношениями устанавливается соответствие каждой точки $(x_1 : x_2 : x_3)$ первого многообразия с некоторою прямою $u'_1 : u'_2 : u'_3$ второго многообразия. Разрешая уравнения (32′) в предположении, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

мы получим:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \mu (A_1 u'_1 + B_1 u'_2 + C_1 u'_3), \\ x_2 &= \mu (A_2 u'_1 + B_2 u'_2 + C_2 u'_3), \\ x_3 &= \mu (A_3 u'_1 + B_3 u'_2 + C_3 u'_3), \end{aligned}\right\} \qquad (32'')$$

т. е. и обратно, каждой прямой второго многообразия будет соответствовать некоторая точка первого многообразия (соответствие взаимно-однозначное).

Возьмем какую-нибудь точку $x'_1 : x'_2 : x'_3$ второго многообразия; ее уравнение в тангенциальных координатах будет:

$$x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3 = 0$$

(здесь $u'_1 : u'_2 : u'_3$ считаются текущими координатами). Преобразуем это уравнение с помощью соотношений (32′), мы получим:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) x'_1 + (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) x'_2 + \\ + (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) x'_3 = 0$$

или

$$(a_1 x'_1 + b_1 x'_2 + c_1 x'_3) x_1 + (a_2 x'_1 + b_2 x'_2 + c_2 x'_3) x_2 + \\ + (a_3 x'_1 + b_3 x'_2 + c'_3 x'_3) x_3 = 0.$$

Так как по предположению мы взамен переменных (текущих) координат $u'_1 : u'_2 : u'_3$ поставили [из формулы (32′)] переменные $x_1 : x_2 : x_3$, то последнее уравнение будет изображать (в точечных координатах $x_1 : x_2 : x_3$) прямую первого многообразия, соответствующую точке $x'_1 : x'_2 : x'_3$ второго многообразия; обозначая через $u_1 : u_2 : u_3$ координаты этой прямой, мы, следовательно, имеем тангенциальные ее координаты, пропорциональные, по определению, коэфициентам ее точечного уравнения:

$$\frac{u_1}{a_1 x'_1 + b_1 x'_2 + c_1 x'_3} = \frac{u_2}{a_2 x'_1 + b_2 x'_2 + c_2 x'_3} = \frac{u_3}{a_3 x'_1 + b_3 x'_2 + c_3 x'_3}, \qquad (33)$$

откуда, разрешая относительно $x'_1 : x'_2 : x'_3$, найдем:

$$\frac{x'_1}{A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3} = \frac{x'_2}{B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3} = \frac{x'_3}{C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3}. \qquad (33')$$

Полученные соотношения (33) и (33′) устанавливают однозначное соответствие каждой точки второго многообразия с некоторою прямою первого многообразия и любой прямой первого многообразия с некоторою точкою второго.

Итак, мы можем сказать, что билинейное преобразование (32) или равносильное ему преобразование (33) устанавливают коррелятивное соответствие между двумя многообразиями; каждой точке одного многообразия (безразлично — первого или второго) соответствует определенная прямая другого и, взаимно, каждой прямой одного из них соответствует определенная точка другого. Таким образом указанное соответствие преобразует какую-либо фигуру в фигуру ей взаимную или коррелятивную.

Упражнения. 861. Полярное преобразование относительно кривой 2-го порядка:

$$2F \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

дает одно из коррелятивных преобразований.

862. Пусть в преобразовании (32) координаты $x_1:x_2:x_3$ обозначают обыкновенные однородные координаты и $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$; тогда это общее преобразование может быть разложено на смещение фигуры и полярное ее преобразование относительно некоторой кривой 2-го порядка.

6. Метод сокращенных обозначений в пространстве.

По аналогии с геометрией на плоскости и в аналитической геометрии пространства может быть применен метод сокращенных обозначений, причем здесь мы будем опираться на уравнение плоскости и геометрическое истолкование левой его части, когда оно дается в нормальном виде.

Итак, условимся уравнения ряда заданных плоскостей сокращенно записывать в виде:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \ldots$$

обозначая левые части каждого из них одною буквою; под каждою из букв α, β, $\gamma, \ldots$ подразумевается некоторая линейная функция от декартовых координат x, y, z. Если указанные уравнения написаны в нормальной форме, то α, β, $\gamma, \ldots$, содержащие координаты x, y, z какой-либо точки M $(x; y; z)$ пространства, будут обозначать направленные расстояния от точки M до соответствующей плоскости, изображаемой одним из этих уравнений. При этом условии два уравнения:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

рассматриваемые совместно, будут уравнениями прямой пересечения двух плоскостей, три же уравнения:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

будут определять, вообще говоря, точку пересечения трех плоскостей. Всякое равенство вида:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots) \equiv 0 \tag{34}$$

будем понимать в том смысле, что оно выполняется тождественно относительно координат x, y, z, когда функции α, β, γ, ... заменены соответствующими своими выражениями через эти координаты; в частности, равенство вида (34) может оказаться тождественно выполненным и относительно α, β, γ до подстановки их значений, как, например, соотношение:

$$(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta)\equiv 0.$$

Если тождество (34) выполняется только после подстановки значений α, β, γ, ... через координаты x, y, z, оно в этом случае предполагает наличие некоторых зависимостей между коэфициентами этих функций. Например, тождество

$$\alpha-m\beta\equiv 0, \tag{35}$$

где m — некоторый числовой множитель, выполнимо, очевидно, только в том случае, если коэфициенты уравнений двух плоскостей:

$$\alpha=0, \quad \beta=0 \tag{36}$$

пропорциональны, т. е. эти уравнения изображают одну и ту же плоскость. Итак, тождество (35) означает, что две плоскости, изображаемые уравнениями (36), совпадают.

Предположим теперь, что плоскости (36) различны; тогда равенство

$$\alpha-m\beta=0 \tag{37}$$

будет уравнением и притом уравнением 1-ой степени; следовательно, оно изображает некоторую третью плоскость.

Уравнение (37) удовлетворяется, если координаты x, y, z выбраны так, что они обращают в нуль каждую из функций α и β, т. е. когда

$$\alpha=0, \quad \beta=0;$$

но такие координаты принадлежат точкам, общим двум плоскостям (36), и эти общие точки лежат на прямой пересечения двух данных плоскостей. Поэтому мы скажем, что уравнение (37) изображает плоскость, *проходящую через прямую пересечения двух данных плоскостей*, изображаемых уравнениями (36).

При изменении параметра m мы получим пучок плоскостей, проходящих через прямую пересечения двух данных плоскостей.

Если мы возьмем какую-либо точку M (x; y; z) в *плоскости* (37), то для этой точки

$$m=\frac{\alpha}{\beta},$$

причем α и β будут расстояниями выбранной точки до основных плоскостей (36); вследствие этого относительно уравнения (37) мы можем сказать: оно изображает плоскость как геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до двух основных плоскостей постоянно.

Параметр m будет, очевидно, положительным для всех точек того угла двух данных плоскостей, в котором находится начало координат, и для угла, вертикального первому; m будет отрицательным в углах, смежных с указанными.

Значение параметра m может быть, например, определено из условия, что плоскость (37) проходит через некоторую заданную точку M_1, тогда

$$m = \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

и, подставив это значение в уравнение (37), мы получим (если $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$):

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} - \frac{\beta}{\beta_1} = 0,$$

что будет уравнением плоскости, проходящей через прямую (36) и через заданную точку M_1.

Пусть теперь нам даны уравнения трех плоскостей:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \tag{38}$$

и пусть между левыми частями их существует *тождественное* соотношение:

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma \equiv 0, \tag{39}$$

где λ, μ, ν — некоторые числовые коэфициенты; посмотрим, какое геометрическое значение имеет это тождество. Мы предполагаем здесь, что ни один из коэфициентов λ, μ, ν не обращается в нуль, в противном случае мы бы вернулись к тождеству (35), нами уже рассмотренному. Тождество (39) или

$$\lambda\alpha + \mu\beta \equiv -\nu \cdot \gamma \tag{39'}$$

собственно означает, что *два уравнения*, именно:

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0$$

и

$$\gamma = 0,$$

друг другу равносильны, ибо их левые части отличаются друг от друга в силу (39′) только числовыми множителями. Но раз указанные уравнения равносильны, то они изображают одну и ту же плоскость; первое из них:

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0$$

изображает некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения двух плоскостей

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0;$$

другое же уравнение $\gamma = 0$ из указанной пары равносильных уравнений изображает последнюю плоскость из данной тройки (38). Мы получаем таким образом следующее заключение: некоторая плоскость

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0,$$

проходящая через прямую пересечения двух из данных плоскостей, оказывается третьей плоскостью из заданной тройки, или, что то же самое: тождество (39) означает, что три плоскости (38) проходят через одну прямую.

Итак, *если между левыми частями уравнений трех плоскостей существует линейно-однородное тождественное соотношение, то три плоскости проходят через одну прямую.*

Возьмем теперь уравнение:

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0; \tag{40}$$

оно изображает плоскость, так как это уравнение линейное; это уравнение, между прочим, выполняется для координат x, y, z, удовлетворяющих *одновременно* трем уравнениям:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0;$$

следовательно, уравнение (40) изображает плоскость, проходящую через точку (или, может быть, точки), общую трем данным плоскостям.

Таким образом если три заданные плоскости (38) пересекаются в одной лишь точке, то уравнение (40) изображает какую-либо плоскость (в зависимости от значений $\lambda : \mu : \nu$), проходящую через эту точку пересечения трех данных плоскостей.

Если же заданные плоскости (38) проходят через одну прямую, в таком случае при некоторых определенных значениях $\lambda : \mu : \nu$ равенство (40) может оказаться тождеством, при всех же других значениях $\lambda : \mu : \nu$ (когда оно не тождество) оно будет уравнением плоскости, проходящей через прямую пересечения трех данных плоскостей (через все их общие точки).

Возьмем для примера три координатных плоскости:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

они имеют общую точку, именно начало координат; уравнение

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

будет изображать плоскость, проходящую через начало, т. е. через точку, общую трем данным плоскостям. Если мы теперь возьмем три плоскости:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x - y = 0, \tag{α}$$

проходящие через одну прямую (ось z), то равенство

$$\lambda x + \mu y + \nu (x - y) = 0$$

будет выполняться тождественно, когда

$$\frac{\lambda}{-1} = \frac{\mu}{1} = \frac{\nu}{1},$$

при всех же других значениях $\lambda : \mu : \nu$ это равенство будет уравнением, изображающим плоскость, проходящую через ось z, т. е. через прямую, общую трем выбранным плоскостям (α).

Перейдем теперь к рассмотрению линейных соотношений между левыми частями уравнений каких-либо четырех плоскостей:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0. \tag{41}$$

Соотношение тождественное:

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma+\rho\delta\equiv 0 \tag{42}$$

или, предполагая $\rho \neq 0$:

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma\equiv-\rho\delta \tag{42'}$$

означает, что два *уравнения*:

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0, \quad \delta=0$$

равносильны друг другу, т. е. изображают *одну и ту же* плоскость. Но первое из этих уравнений, именно:

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0,$$

изображает некоторую плоскость, проходящую через точку (или точки), общую трем плоскостям $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$; другое же $\delta=0$ изображает последнюю плоскость из данной четверки.

Итак, *тождественное линейное соотношение между левыми частями уравнений четырех данных плоскостей означает, что эти плоскости имеют по крайней мере одну общую точку.*

Уравнение

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma+\rho\delta=0 \tag{43}$$

изображает плоскость, проходящую через точки, общие четырем плоскостям (41), если таковые общие точки имеются.

Если четыре плоскости (41) не имеют ни одной общей точки (образуют тетраэдр), то уравнение (43) при подходящем выборе коэфициентов λ, μ, ν, ρ может изображать любую плоскость пространства. В самом деле, пусть данные четыре плоскости изображаются уравнениями:

$$\begin{aligned}
\alpha &= A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\
\beta &= A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\
\gamma &= A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\
\delta &= A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0.
\end{aligned}$$

Если уравнение (43) изображает любую пятую заданную плоскость

$$A_5x+B_5y+C_5z+D_5=0,$$

то

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma+\rho\delta\equiv\sigma(A_5x+B_5y+C_5z+D_5),$$

где σ — некоторый множитель пропорциональности. Сравнивая коэфициенты при x, y, z и свободный член в предыдущем тождественном соотношении, мы получим:

$$\begin{aligned}
\lambda A_1+\mu A_2+\nu A_3+\rho A_4&=\sigma A_5,\\
\lambda B_1+\mu B_2+\nu B_3+\rho B_4&=\sigma B_5,\\
\lambda C_1+\mu C_2+\nu C_3+\rho C_4&=\sigma C_5,\\
\lambda D_1+\mu D_2+\nu D_3+\rho D_4&=\sigma D_5.
\end{aligned} \tag{44}$$

Так как четыре заданных плоскости не пересекаются в одной точке, то

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0,$$

и уравнения (44) относительно $\frac{\lambda}{\sigma}$, $\frac{\mu}{\sigma}$, $\frac{\nu}{\sigma}$, $\frac{\rho}{\sigma}$ допускают конечное определенное решение. Таким образом мы доказали, что отношения $\lambda : \mu : \nu : \rho$ всегда могут быть выбраны так, чтобы уравнение (43) изображало любую заданную плоскость пространства, если четыре начальных плоскости не имеют общей точки.

При этом последнем условии уравнение, например, вида:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} = 0$$

будет, очевидно, изображать плоскость, проходящую через три заданные точки:

$$M_1(\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1), \quad M_2(\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 : \delta_2) \quad \text{и} \quad M_3(\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 : \delta_3).$$

В качестве примера на применение указанных выше соображений докажем обобщение теоремы Дезарга для пространства, именно предложение: если соответственные вершины двух тетраэдров лежат на прямых, сходящихся в одной точке, то соответственные грани пересекаются по прямым (а соответственные ребра пересекаются в точках), лежащим в одной плоскости.

Пусть уравнения граней одного тетраэдра $ABCD$ будут:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$$

а уравнения соответственных граней другого тетраэдра $A'B'C'D'$:

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \delta' = 0,$$

при этом мы будем предполагать, что левая часть каждого из этих уравнений взята так (выбором подходящего множителя), что для точки O, через которую проходят прямые, соединяющие соответственные вершины, эти левые части обращаются в единицу. Уравнение плоскости OCD как плоскости, проходящей через прямую CD пересечения граней $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и через точку O, будет:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} - \frac{\beta}{\beta_0} = 0$$

или, на основании условия $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, короче:

$$\alpha - \beta = 0;$$

уравнение той же плоскости, как совпадающей с плоскостью $OC'D'$, напишется в виде:

$$\alpha' - \beta' = 0,$$

следовательно, необходимо должно существовать тождественное соотношение

$$\alpha' - \beta' \equiv a_{12}(\alpha - \beta),$$

где a_{12} — некоторый числовой коэфициент. Аналогичные соотношения будут иметь место и для остальных ребер. Итак:

$$\begin{aligned} \alpha' - \beta' &\equiv a_{12}(\alpha - \beta), & \beta' - \gamma' &\equiv a_{23}(\beta - \gamma), \\ \alpha' - \gamma' &\equiv a_{13}(\alpha - \gamma), & \beta' - \delta' &\equiv a_{24}(\beta - \delta), \\ \alpha' - \delta' &\equiv a_{14}(\alpha - \delta), & \gamma' - \delta' &\equiv a_{34}(\gamma - \delta); \end{aligned} \tag{45}$$

отсюда вытекают как следствие тождества:

$$\begin{aligned} a_{13}(\alpha - \gamma) - a_{12}(\alpha - \beta) &\equiv a_{23}(\beta - \gamma), \\ a_{14}(\alpha - \delta) - a_{12}(\alpha - \beta) &\equiv a_{24}(\beta - \delta), \\ a_{14}(\alpha - \delta) - a_{13}(\alpha - \gamma) &\equiv a_{34}(\gamma - \delta); \end{aligned}$$

а так как α, β, γ, δ не могут быть связаны по три линейным тождественным соотношением, то необходимо:

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{13} = a_{23}, \\ a_{14} &= a_{12} = a_{24}, \\ a_{14} &= a_{13} = a_{34}, \end{aligned}$$

или

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = m;$$

при последних условиях тождества (45) приводятся к виду:

$$\alpha' - m\alpha \equiv \beta' - m\beta \equiv \gamma' - m\gamma \equiv \delta' - m\delta.$$

Полученные тождественные соотношения означают, что уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha' - m\alpha &= 0, \\ \beta' - m\beta &= 0, \\ \gamma' - m\gamma &= 0, \\ \delta' - m\delta &= 0 \end{aligned}$$

изображают одну и ту же плоскость, но различные формы этих уравнений показывают, что плоскость содержит прямые пересечения любых двух соответственных граней. Нетрудно подметить полную аналогию предыдущего доказательства с тем методом, которым мы пользовались для доказательства теоремы Дезарга на плоскости.

Такое соответсвие двух фигур пространства, при котором прямые, соединяющие соответственные точки, сходятся в одной точке, а прямые пересечения соответсвенных плоскостей лежат в одной плоскости, называется гомологией, самые же фигуры называются гомологичными (Poncelet).

Упражнения. 863. Предположим, что начало координат помещается внутри трехгранного угла, образованного тремя плоскостями:

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = 0.$$

Доказать, что три биссектрисы внутренних двугранных углов пересекаются по одной прямой.

864. Все плоскости, делящие пополам внутренние двугранные углы тетраэдра, проходят через одну точку.

865. Отношение λ, в котором отрезок между точками M_1 и M_2 делится точкою пересечения с плоскостью $\alpha = 0$, равно:

$$\lambda = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

где α_1 и α_2 — значения α для точек M_1 и M_2.

866. Для плоскости

$$\gamma \equiv \alpha - m\beta = 0,$$

проходящей через прямую пересечения двух плоскостей $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, параметр m имеет значение:

$$m = -\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\lambda\beta)},$$

где $(\alpha\gamma)$ и $(\beta\gamma)$ — углы одноименных сторон соответствующих плоскостей.

867. Ангармоническое отношение

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\gamma\beta)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\delta\beta)}$$

четырех плоскостей

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma \equiv \alpha - m\beta = 0, \ \delta \equiv \alpha - m'\beta = 0,$$

проходящих через одну прямую, равно $\frac{m}{m'}$.

Отсюда способом, аналогичным тому, который мы применяли на плоскости, можно показать, что ангармоническое отношение четырех точек на одной прямой равно ангармоническому отношению четырех плоскостей, им перспективных и проходящих через одну прямую.

7. Тетраэдрические координаты.

Метод сокращенных обозначений и его применения показывают, что и в пространстве по аналогии с трилинейными координатами на плоскости может быть введена особая система координат (тетраэдрические координаты).

Возьмем некоторый тетраэдр $ABCD$ и будем определять положение какой-либо точки пространства относительно этого тетраэдра ее расстояниями α, β, γ, δ до соответствующих граней тетраэдра; при этом условимся считать все эти расстояния положительными для любой внутренней точки тетраэдра, соответствующие расстояния будем считать отрицательными, если точка находится с внешней стороны той или иной грани. Числа α, β, γ, δ не могут быть все четыре выбраны произвольно, между ними всегда имеет место некоторое соотношение.

В самом деле, для каждой точки M пространства мы можем построить четыре тетраэдра так, что вершиной каждого из них будет точка M, а основаниями будут грани тетраэдра BCD, CDA, DAB

и ABC; объем основного тетраэдра будет равен алгебраической сумме названных тетраэдров (считая высоты последних направленными). Таким образом, если площади треугольников BCD, CDA, DAB, ABC назвать через Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, а объем всего тетраэдра через V, тогда расстояния α, β, γ, δ до граней тетраэдра любой точки пространства будут всегда связаны соотношением:

$$\Delta_1\alpha + \Delta_2\beta + \Delta_3\gamma + \Delta_4\delta = 3V. \tag{46}$$

При наличии такого соотношения для определения положения точки достаточно давать отношения четырех из этих расстояний к одному из них или числа им пропорциональные $\alpha : \beta : \gamma : \delta$.

При этих условиях каждое из уравнений

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 0, \tag{41}$$

в отдельности взятое, будет уравнением той или иной из граней базисного тетраэдра; два из написанных уравнений, рассматриваемых совместно, будут определять одно из его ребер; наконец, три уравнения определят одну из вершин тетраэдра. Вершины последнего будут, таким образом, определяться нижеследующими координатами:

$$A\,(1:0:0:0),\ B\,(0:1:0:0),\ C\,(0:0:1:0),\ D\,(0:0:0:1).$$

Уравнение любой плоскости, как было доказано выше, напишется в виде:

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \rho\delta = 0.$$

Если мы вместо обыкновенных декартовых координат x, y, z введем отношения

$$\frac{x}{t},\ \frac{y}{t},\ \frac{z}{t},$$

то

$$x : y : z : t$$

будет *однородными* координатами точки; их можно рассматривать как частный случай тетраэдрических координат. Каждое из уравнений:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

будет определять ту или иную из трех координатных плоскостей обыкновенной декартовой системы, что же касается уравнения

$$t = 0,$$

то оно будет определять бесконечно удаленную плоскость, образующую с тремя первыми тетраэдр.

Вместо того чтобы определять положение точки расстояниями до граней тетраэдра или числами, пропорциональными этим расстояниям, мы можем задавать положение точки числами $X : Y : Z : T$, пропорциональными не самим расстояниям α, β, γ, δ, а произведениям их на какие-нибудь произвольно выбранные, но фиксированные для всего рассматриваемого исследования числа λ, μ, ν, ρ, так что:

$$\frac{X}{\lambda\alpha} = \frac{Y}{\mu\beta} = \frac{Z}{\nu\gamma} = \frac{T}{\rho\delta}. \tag{47}$$

Такие числа $X:Y:Z:T$ можем назвать обобщенными тетраэдрическими координатами; что же касается множителей $\lambda:\mu:\nu:\rho$, то их можно выбирать различными способами при условии, как указано, сохранения их значения в данном исследовании.

Пусть нам даны обобщенные тетраэдрические координаты $X:Y:Z:T$ некоторой точки M; с помощью соотношений (47) и (46) мы можем определить расстояния этой точки до граней тетраэдра в виде:

$$\alpha=\frac{3V\frac{X}{\lambda}}{\frac{X\Delta_1}{\lambda}+\frac{Y\Delta_2}{\mu}+\frac{Z\Delta_3}{\nu}+\frac{T\Delta_4}{\rho}},$$

$$\beta=\frac{3V\frac{Y}{\mu}}{\frac{X\Delta_1}{\lambda}+\frac{Y\Delta_2}{\mu}+\frac{Z\Delta_3}{\nu}+\frac{T\Delta_4}{\rho}},$$

$$\gamma=\frac{3V\frac{Z}{\nu}}{\frac{X\Delta_1}{\lambda}+\frac{Y\Delta_2}{\mu}+\frac{Z\Delta_3}{\nu}+\frac{T\Delta_4}{\rho}},$$

$$\delta=\frac{3V\frac{T}{\rho}}{\frac{X\Delta_1}{\lambda}+\frac{Y\Delta_2}{\mu}+\frac{Z\Delta_3}{\nu}+\frac{T\Delta_4}{\rho}}.$$

Отсюда следует, что уравнение

$$\frac{X\Delta_1}{\lambda}+\frac{Y\Delta_2}{\mu}+\frac{Z\Delta_3}{\nu}+\frac{T\Delta_4}{\rho}=0$$

будет в обобщенных тетраэдрических координатах изображать бесконечно удаленную плоскость.

Имея уравнение бесконечно удаленной плоскости, мы можем получить условия параллельности плоскостей, прямых и т. д.

Употребление тетраэдрических координат при исследовании каких-либо пространственных образов представляет значительные преимущества: 1) эти координаты и все соотношения между ними однородны, вследствие чего получается бо́льшая симметрия, чем при пользовании обыкновенными координатами, 2) четыре плоскости исследуемой фигуры могут быть приняты за основные плоскости базисного тетраэдра и изображаются, следовательно, уравнениями в наипростейшей форме, 3) наконец, имеется еще произвол в выборе множителей $\lambda:\mu:\nu:\rho$, которыми можно распорядиться так, чтобы некоторые другие плоскости и координаты некоторых точек получили свое простейшее выражение; сверх того эти координаты суть отвлеченные числа и не зависят от выбора единицы масштаба для измерения расстояний.

Упражнения. 868. Пусть уравнения граней основного тетраэдра относительно какой-нибудь обыкновенной декартовой системы координат будут:

$$\begin{aligned}\lambda\alpha &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\\ \mu\beta &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\\ \nu\gamma &\equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,\\ \rho\delta &\equiv A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0,\end{aligned}$$

тогда соотношения (47), написанные в виде:

$$\begin{aligned}X &= \sigma(A_1x + B_1y + C_1z + D_1),\\ Y &= \sigma(A_2x + B_2y + C_2z + D_2),\\ Z &= \sigma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3),\\ T &= \sigma(A_4x + B_4y + C_4z + D_4),\end{aligned} \tag{47'}$$

будут давать переход от обыкновенной декартовой системы координат к обобщенным тетраэдрическим (формулы преобразования координат).

Возьмем, например, координаты центра тяжести системы точек (x_i, y_i, z_i) с массами m_i:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \ \overline{y} = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}; \ \overline{z} = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m};$$

если преобразовать эти соотношения по формулам (47′), то легко видеть, что в тетраэдрических координатах центр тяжести будет определяться следующими выражениями:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma mX}{\Sigma m}, \ \overline{Y} = \frac{\Sigma mY}{\Sigma m}; \ \overline{Z} = \frac{\Sigma mZ}{\Sigma m}; \ \overline{T} = \frac{\Sigma mT}{\Sigma m}.$$

869. Применим эти формулы для определения центра тяжести масс m_1, m_2, m_3, m_4, размещенных в вершинах базисного тетраэдра координатами которых будут:

$$A(\lambda h_1 : 0 : 0 : 0), \ B(0 : \mu h_2 : 0 : 0), \ C(0 : 0 : \nu h_3 : 0), D(0 : 0 : 0 : \rho h_4),$$

где h_1, h_2, h_3, h_4 — высоты тетраэдра.

Координаты центра тяжести этих масс будут:

$$\frac{X}{\lambda h_1 m_1} = \frac{Y}{\mu h_2 m_2} = \frac{Z}{\nu h_3 m_3} = \frac{T}{\rho h_4 m_4},$$

откуда

$$\frac{\dfrac{X\Delta_1}{\lambda}}{m_1} = \frac{\dfrac{Y\Delta_2}{\mu}}{m_2} = \frac{\dfrac{Z\Delta_3}{\nu}}{m_3} = \frac{\dfrac{T\Delta_4}{\rho}}{m_4},$$

где Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 — площади граней тетраэдра; эти площади обратно пропорциональны высотам, ибо

$$h_1\Delta_1 = h_2\Delta_2 = h_3\Delta_3 = h_4\Delta_4.$$

Полученный выше результат позволяет сказать, что точка $M(X : Y : Z : T)$ является центром тяжести масс

$$\frac{X\Delta_1}{\lambda} : \frac{Y\Delta_2}{\mu} : \frac{Z\Delta_3}{\nu} : \frac{T\Delta_4}{\rho},$$

размещенных в вершинах базисного тетраэдра. В частности, если выбрать множители $\lambda : \mu : \nu : \rho$ по условиям:

$$\frac{\lambda}{\Delta_1} = \frac{\mu}{\Delta_2} = \frac{\nu}{\Delta_3} = \frac{\rho}{\Delta_4}, \tag{48}$$

тогда

$$\frac{X}{m_1}=\frac{Y}{m_2}=\frac{Z}{m_3}=\frac{T}{m_4}$$

или

$$\frac{X}{\alpha\Delta_1}=\frac{Y}{\beta\Delta_2}=\frac{Z}{\gamma\Delta_3}=\frac{T}{\delta\Delta_4}.$$

Первые из этих соотношений показывают, что точка $M(X:Y:Z:T)$ есть центр тяжести масс $X:Y:Z:T$, размещенных в вершинах базисного тетраэдра; выражения $\alpha\Delta_1$, $\beta\Delta_2$, $\gamma\Delta_3$, $\delta\Delta_4$ представляют собою тройные объемы пирамид, имеющих вершину в точке M, а основаниями грани тетраэдра; тетраэдрические координаты пропорциональны этим объемам. Такие тетраэдрические координаты, соответствующие специальному выбору (48) множителей $\lambda:\mu:\nu:\rho$, называются барицентрическими координатами (Möbius).

870. Бесконечно удаленная плоскость в барицентрических координатах Möbius'а изобразится уравнением:

$$X+Y+Z+T=0.$$

8. Координаты плоскости.

Когда нам дается уравнение плоскости в обыкновенных однородных или тетраэдрических координатах:

$$ux+vy+wz+pt=0, \tag{49}$$

то это последнее, а вместе с тем и сама плоскость, определяется отношениями $u:v:w:p$; поэтому коэфициенты уравнения можно считать за (однородные) координаты плоскости.

Если взять уравнение плоскости по отрезкам на осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

то за координаты плоскости можно считать величины

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}:-1,$$

т. е. величины, обратные числам, измеряющим отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Итак, отношение $u:v:w:p$ будем называть координатами плоскости. Уравнение между этими координатами

$$F(u,\ v,\ w,\ p)=0 \tag{50}$$

можно толковать как уравнение, изображающее совокупность (двумерное многообразие) всех плоскостей, координаты которых этому условию (50) удовлетворяют, или как уравнение носителя этой совокупности плоскостей — поверхности, ими огибаемой; отдельные плоскости этой двумерной совокупности будут *касаться* огибаемой поверхности, вот почему координаты плоскости называют также тангенциальными координатами.

Уравнение (49) совершенно симметрично и равноправно относительно координат точки $x:y:z:t$ (точечных координат) и координат плоскости $u:v:w:p$ (тангенциальных координат); этому уравнению можно давать различные истолкования в зависимноти от того, какие из этих величин считать данными, какие переменными.

Условимся для большей ясности отмечать величины, значение которых задано, индексом нуль сверху.

Если заданы координаты плоскости $u^0 : v^0 : w^0 : p^0$, уравнение (49) примет вид:

$$u^0x + v^0y + w^0z + p^0t = 0 \tag{49'}$$

и будет изображать совокупность всех точек $x : y : z : t$, координаты которых написанному условию удовлетворяют, или „носителя“ всех этих точек — плоскость.

В этом случае уравнение (49′) будет уравнением плоскости в точечных координатах. Пусть теперь в уравнении (49) считаются заданными координаты некоторой точки $x^0 : y^0 : z^0 : t^6$; тогда уравнение принимает вид:

$$x^0u + y^0v + z^0w + t^0p = 0, \tag{49''}$$

и оно будет изображать совокупность всех плоскостей, координаты которых $u : v : w : p$ этому условию (49″) удовлетворяют, или „носителя“ этой двумерной совокупности плоскостей — точку. Здесь уравнение (49) является уравнением точки в тангенциальных координатах.

Из сказанного следует, что соотношение:

$$x^0u^0 + y^0v^0 + z^0w^0 + t^0p^0 = 0 \tag{51}$$

может быть прочитано либо как условие, выражающее, что точка $x^0 : y^0 : z^0 : t^0$ принадлежит плоскости, изображаемой уравнением (49′), либо как условие, выражающее, что плоскость $u^0 : v^0 : w^0 : t^0$ принадлежит к совокупности изображаемой уравнением (49″), т. е. что плоскость $u^0 : v^0 : w^0 : t^0$ проходит через точку, изображенную в тангенциальных координатах уравнением (49″).

Можно сказать, что соотношение (51), симметричное и равноправное относительно координат точки $M^0(x^0 : y^0 : z^0 : t^0)$, и координат плоскости $m^0(u^0 : v^0 : w^0 : t^0)$, выражает отношение „инцидентности“ между точкой M^0 и плоскостью m^0.

Пусть уравнение (49) изображает какую-либо плоскость в обобщенных тетраэдрических координатах; после замены (47) оно примет вид:

$$u\lambda\alpha + v\mu\beta + w\nu\gamma + p\rho\delta = 0; \tag{49}$$

расстояние d какой-либо точки пространства до этой плоскости пропорционально левой части ее уравнения, следовательно:

$$d = \sigma(u\lambda\alpha + v\mu\beta + w\nu\gamma + p\rho\delta).$$

Применим эту формулу для определения расстояний d_1, d_2, d_3, d_4 вершин базисного тетраэдра до заданной плоскости (49):

$$d_1 = \sigma u\lambda h_1,\quad d_2 = \sigma v\mu h_2,\quad d_3 = \sigma w\nu_{h_3},\quad d_4 = \sigma p\rho h_4$$

или

$$\frac{u}{\dfrac{d_1}{\lambda h_1}} = \frac{v}{\dfrac{d_2}{\mu h_2}} = \frac{w}{\dfrac{d_3}{\nu h_3}} = \frac{p}{\dfrac{d_4}{\rho h_4}},$$

т. е. в тетраэдрической системе координат тангенциальные координаты плоскости пропорциональны произведениям расстояний этой плоскости от вершин тетраэдра на некоторые числовые множители

$$\frac{1}{\lambda h_1} : \frac{1}{\mu h_2} : \frac{1}{\nu h_3} : \frac{1}{\rho h_4};$$

в частности при $\lambda h_1 = \mu h_2 = \nu h_3 = \rho h_4$ (т. е. для барицентрической системы Мебиуса).

$$\frac{u}{d_1} = \frac{v}{d_2} = \frac{w}{d_3} = \frac{p}{d_4},$$

т. е. тангенциальные координаты плоскости в этом случае пропорциональны расстояниям плоскости от вершин тетраэдра.

Вместо точечных координат при аналитическом исследовании геометрических образов мы можем пользоваться тангенциальными координатами плоскости, при этом за основной элемент пространства, образующий фигуры или многообразия более сложные, принимается, следовательно, не точка, а плоскость.

9. Принцип двойственности.

Подобно принципу двойственности на плоскости, аналогичный принцип будет иметь место и в пространстве. При этом в пространстве взаимными элементами будут точка и плоскость, ибо в пространстве плоскость определяется тремя точками (на ней лежащими, ей инцидентными), точка же определяется тремя плоскостями, через нее проходящими. Прямая в пространстве будет взаимна сама себе, ибо две точки определяют прямую, равно как и две плоскости определяют прямую их пересечения.

Пусть мы имеем линейное преобразование, переводящее плоскости одной фигуры в соответствующие точки другой фигуры:

$$\begin{aligned}&\frac{u}{a_1x' + a_2y' + a_3z' + a_4t'} = \frac{v}{b_1x' + b_2y' + b_3z' + b_4t'} = \\ &= \frac{w}{c_1x' + c_2y' + c_3z' + c_4t'} = \frac{p}{d_1x' + d_2y' + d_3z' + d_4t'};\end{aligned} \tag{52}$$

возьмем далее уравнение точки первого многообразия:

$$xu + yv + zw + tp = 0 \tag{53}$$

(здесь переменными считаются $u:v:w:p$), и произведем в нем замену переменных с помощью формул (52):

$$\begin{aligned}&x(a_1x' + a_2y' + a_3z' + a_4t') + y(b_1x' + b_2y' + b_3z' + b_4t') + \\ &+ z(c_1x' + c_2y' + c_3z' + c_4t') + t(d_1x' + d_2y' + d_3z' + d_4t') = 0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&(a_1x + b_1y + c_1z + d_1t)x' + (a_2x + b_2y + c_2z + d_2t)y' + \\ &+ (a_3x + b_3y + c_3z + d_3t)z' + (a_4x + b_2y + c_4z + d_4t)t' = 0.\end{aligned}$$

Полученное уравнение относительно $x':y':z':t'$ будет уравнением плоскости второй фигуры, той плоскости, которая соответствует точке $(x:y:z:t)$ первой фигуры. Если мы обозначим координаты этой плоскости через $u':v':w':p'$, тогда

$$\frac{u'}{a_1x+b_1y+c_1z+d_1t}=\frac{v'}{a_2x+b_2y+c_2z+d_2t}=$$
$$=\frac{w'}{a_3x+b_3y+c_3z+d_3t}=\frac{p'}{a_4x+b_4y+c_4z+d_4t}; \tag{54}$$

разрешив эти соотношения относительно x, y, z, t, мы получим:

$$\frac{x}{A_1u'+A_2v'+A_3w'+A_4p'}=\frac{y}{B_1u'+B_2v'+B_3w'+B_4p'}=$$
$$=\frac{z}{C_1u'+C_2v'+C_3w'+C_4p'}=\frac{t}{D_1u'+D_2v'+D_3w'+D_4p'}, \tag{54'}$$

где A_1, $A_2, \ldots$, B_1, $B_2, \ldots$ суть адъюнкты элементов определителя из коэфициентов подстановки (52). Таким образом соотношения (52) и (54′) будут давать переход от плоскостей и точек первой фигуры к точкам и плоскостям второй фигуры; при этом уравнение (53) в силу самого нашего вывода формул (54) преобразуется в уравнение:

$$u'x'+v'y'+w'z'+p't'=0, \tag{53'}$$

т. е. отношение инцидентности элементов первой фигуры (точек и плоскостей) переходит в отношение инцидентности соответствующих элементов второй фигуры. Преобразование, устанавливаемое с помощью формул (52) и (54′), т. е. преобразование, переводящее точки первой фигуры в плоскости второй и плоскости первой в точки второй с сохранением притом инцидентности в соответствующих элементах, называется преобразованием взаимным или коррелятивным.

Ясно, что такое преобразование из всякого свойства фигуры, касающегося относительного расположения точек и плоскостей дает возможность получить двойственное свойство коррелятивной фигуры, касающееся относительного расположения плоскостей и точек. Выше мы доказали, например, обобщенную теорему Дезарга: если два тетраэдра расположены так, что прямые, соединяющие соответственные вершины, сходятся в одной точке, то прямые пересечения соответственных граней их лежат в одной плоскости; по принципу двойственности (т. е. в силу коррелятивного преобразования) мы имеем также обратную теорему: если прямые пересечения соответственных граней двух тетраэдров лежат в одной плоскости, то прямые, соединяющие их соответственные вершины, сходятся в одной точке. Наиболее простое коррелятивное преобразование мы получим, если соотношения (52) возьмем в виде:

$$\frac{u}{x'}=\frac{v}{y'}=\frac{w}{z'}=\frac{p}{t'}. \tag{52''}$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае соотношения (54) или (54′) примут вид:

$$\frac{x}{u'}=\frac{y}{v'}=\frac{z}{w'}=\frac{t}{p'}, \tag{54''}$$

т. е. данное коррелятивное преобразование просто сводится к обмену мест точечных и тангенциальных координат. Это обозначает, что всякому соотношению или выражению, аналитически (в координатах) выражающему то или иное свойство фигуры, мы можем давать двоякое истолкование: одни переменные мы можем считать за точечные координаты, другие за тангенциальные или, наоборот, первые переменные считать за тангенциальные координаты, вторые за точечные. Каждый раз, как выбранное соотношение или выражение несимметрично относительно обеих групп переменных, мы будем получать два различных взаимных свойства фигуры. Соотношение, например:

$$|x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4| = 0$$

будет выражать собой условие, при котором четыре точки

$(x_1 : y_1 : z_1 : t_1)$, $(x_2 : y_2 : z_2 : t_2)$, $(x_3 : y_3 : z_3 : t_3)$, $(x_4 : y_4 : z_4 : t_4$

лежат в одной плоскости; взаимное соотношение:

$$|u_1 \; u_2 \; u_3 \; u_4| = 0$$

будет выражать условие, при котором четыре плоскости

$(u_1 : v_1 : w_1 : p_1)$, $(u_2 : v_2 : w_2 : p_2)$, $(u_3 : v_3 : w_3 : p_3)$ и $(u_4 \cdot v_4 : w_4 \cdot p_4)$

проходят через одну точку.

Выражения $x + \lambda x'$, $y + \lambda y'$, $z + \lambda z'$, $t + \lambda t'$ будут координатами любой точки (при произвольном λ), лежащей на прямой, соединяющей две данных точки $A(x : y : z : t)$ и $B(x' : y' : z' : t')$; подобным образом $u + \lambda u'$, $v + \lambda v'$, $w + \lambda w'$, $p + \lambda p'$ будут координатами любой плоскости, проходящей через прямую пересечения двух данных плоскостей

$$a(u : v : w : p) \text{ и } b(u' : v' : w' : p')$$

и т. д.

Упражнения. 871. Подобно тому как уравнение

$$|x \; x_1 \; x_2 \; x_3| = 0$$

изображает плоскость, проходящую через три точки

$$M_1(x_1 : y_1 : z_1 : t_1), \quad M_2(x_2 : y_2 : z_2 : t_2), \quad M_3(x_3 : y_3 : z_3 : t_3),$$

уравнение

$$|u \; u_1 \; u_2 \; u_3| = 0$$

будет изображать точку, принадлежащую трем плоскостям

$$m_1(u_1 : v_1 : w_1 : p_1), \quad m_2(u_2 : v_2 : w_2 : p_2), \quad m_3(u_3 : v_3 : w_3 : p_3).$$

872. Сформулировать по принципу двойственности предложения, коррелятивные тем, которые разобраны в § 6.

Указание. Пусть $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ будут уравнения точек M_1, M_2, M_3, M_4 в плоскостных координатах.

Уравнение $\alpha - m\beta = 0$ изображает точку, лежащую на прямой, соединяющей точки M_1 и M_2.

Уравнение $\frac{\alpha}{\alpha_1} - \frac{\beta}{\beta_1} = 0$ изображает точку, лежащую на прямой M_1M_2 и принадлежащую плоскости m_1, координаты которой подставлены в выражения α и β, т. е. точку пересечения прямой M_1M_2 и данной (своими координатами) плоскости.

Наличие тождества $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma\equiv 0$ означает, что три точки M_1, M_2, M_3 лежат на одной прямой. Уравнение $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ изображает точку, лежащую в плоскости трех данных точек M_1, M_2, M_3.

Тождество $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma+\rho\delta\equiv 0$ означает, что четыре данных точки M_1, M_2, M_3, M_4 лежат в одной плоскости и т. д.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

К § 1.

1. В чем состоит метод сокращенных обозначений в применении к фигурам на плоскости?

2. Какое элементарное предложение об уравнении прямой играет наиболее существенную роль в методе сокращенных обозначений?

3. Какое геометрическое значение имеет наличие тождественного линейного однородного соотношения между левыми частями уравнений трех прямых?

4. Как может быть написано уравнение любой прямой плоскости, когда даны уравнения трех прямых, не проходящих через одну точку?

5. Каково содержание теоремы Дезарга о гомологичных треугольниках?

К § 2.

6. К какому выводу приводит метод сокращенных обозначений?

7. Как определяются трилинейные координаты точки относительно основного треугольника?

8. Каковы преимущества трилинейной системы координат?

9. Можно ли обыкновенную декартову систему координат рассматривать как частный случай трилинейной системы?

К § 3.

10. Что называется проективным или коллинеарным преобразованием?

11. Почему указанное преобразование называется коллинеарным и почему оно называется проективным?

К § 4.

12. В чем состоит принцип двойственности для плоских фигур?

13. Какие фигуры называются коррелятивными? Какие предложения называются коррелятивными друг другу?

14. Как принцип двойственности может быть обоснован на полярных свойствах линий 2-го порядка?

15. Как определяются координаты прямой?

16. Какое геометрическое истолкование имеет линейное уравнение между координатами прямой?

17. Какое геометрическое истолкование имеет любое уравнение между координатами прямой?

18. Почему координаты прямой иначе называются тангенциальными ее координатами?

19. Каким образом (и почему) мы можем давать двоякое истолкование всякому соотношению, выражающему относительное расположение элементов плоскости?

К § 5.

20. Какое преобразование фигуры называется коррелятивным и как оно изображается аналитически?

21. Как показать, что всякое коррелятивное преобразование плоскости разлагается на смещение фигуры и на взаимно-полярное преобразование относисительно некоторой кривой 2-го порядка?

К § 6.

22. В чем состоит метод сокращенных обозначений применительно к пространству?

23. Какое геометрическое истолкование может быть дано тождественному линейному (однородному) соотношению между левыми частями уравнений двух, или трех, или четырех плоскостей?

24. Какое геометрическое истолкование может быть дано линейному (однородному) уравнению между левыми частями уравнений двух, или трех, или четырех плоскостей?

25. В чем состоит обобщенная теорема Дезарга о гомологичных тетраэдрах?

К § 7.

26. Какой вывод дает метод сокращенных обозначений с точки зрения обобщения понятия о координатах?

27. Как определяются тетраэдрические координаты точки относительно основного тетраэдра?

28. Каковы преимущества тетраэдрической системы координат?

К § 8.

29. Как могут быть определены координаты плоскости относительно основного тетраэдра?

30. Какое геометрическое истолкование в пространстве имеет уравнение (в частности, линейное) между тангенциальными координатами?

К § 9.

31. Какие из основных элементов пространства будут взаимными друг другу? Какой из основных элементов пространства будет взаимным самому себе?

32. Как формулировать принцип двойственности для пространства?

33. Какое преобразование пространства называется коррелятивным и как оно изображается аналитически?

Упражнения. 873. Уравнения сторон треугольника $u=0$, $v=0$, $w=0$ Через его вершины проводятся прямые, сходящиеся в одной точке и своим пересечением с противоположными сторонами определяющие вершины нового треугольника. Найти уравнения сторон последнего.

874. Стороны треугольника проходят через три заданные точки, а две из его вершин скользят по заданным двум прямым. Найти геометрическое место третьей вершины треугольника.

875. Какое геометрическое истолкование можно дать уравнению:

$$\frac{u}{u_0}+\frac{v}{v_0}+\frac{w}{w_0}=0, \qquad (\alpha)$$

если $u=0$, $v=0$, $w=0$ — уравнения трех сторон треугольника, а u_0, v_0 w_0 — значение левых частей этих уравнений для координат некоторой заданной точки M_0.

Указание. Уравнение $\frac{u}{u_0}-\frac{v}{v_0}=0$ изображает прямую CM_0, а потому уравнение $\frac{u}{u_0}+\frac{v}{v_0}=0$ изображает луч, четвертый гармонический к трем лучам CA, CB, CM_0. Данная прямая (α) проходит через точку пересечения прямой $\frac{u}{u_0}+\frac{v}{v_0}=0$ и прямой $w=0$.

Проведем через каждую вершину треугольника луч, четвертый гармонический к двум сторонам треугольника и к лучу, соединяющему вершину с точкой M_0; эти три луча пересекут противоположные стороны треугольника в трех точках, лежащих на одной прямой (α) (сравнить с упражнением 855).

876. Центр тяжести (точка пересечения медиан) базисного треугольника имеет трилинейные координаты $(1:1:1)$. Каковы будут координаты центра круга, вписанного в треугольник?

877. Центр круга, вписанного в базисный треугольник, имеет трилинейные координаты $(1:1:1)$. Каковы будут координаты центра тяжести треугольника?

878. Если коллинеарное преобразование сохраняет неизменными три действительных (различных) точки плоскости, то, принимая их за вершины базисного треугольника, мы приведем преобразование к виду:

$$\frac{x'}{s_1 x} = \frac{y'}{s_2 y} = \frac{z'}{s_3 z}.$$

Если коллинеарное преобразование сохраняет неизменными одну действительную точку и две мнимых, то, принимая первую за вершину базисного треугольника, и прямую, соединяющую две последних точки, за его противоположную сторону, мы можем преобразование привести к виду:

$$\frac{x'}{a_1 x} = \frac{y'}{\alpha y - \beta z} = \frac{z'}{\beta y + \alpha z}.$$

879. Для аналитического изображения какого-либо произвольного коррелятивного преобразования примем за базисный треугольник такой треугольник, каждая вершина которого данным преобразованием переводится в противолежащую сторону, тогда преобразование изобразится соотношениями:

$$\frac{u'}{ax} = \frac{v'}{by} = \frac{w'}{cz}.$$

Указание. Вершине $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, должна соответствовать прямая $u_1' = 1$, $v_1' = 0$, $w_1' = 0$, поэтому в соотношении (32) необходимо $b_1 = 0$, $c_1 = 0$; аналогично из соответствия других вершин противолежащим сторонам заключаем, что $a_2 = 0$, $c_2 = 0$ и $a_3 = 0$, $b_3 = 0$. Полученное преобразование является преобразованием взаимными полярами относительно кривой 2-го порядка $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, отнесенной к автополярному треугольнику.

880. Геометрическим местом точек, лежащих на соответствующих им прямых в данном коррелятивном преобразовании (32), будет кривая 2-го порядка, изображаемая уравнением

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)\,x_1 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)\,x_2 + (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)\,x_3 = 0.$$

881. Коррелятивное преобразование, в котором каждая точка плоскости инцидентна соответствующей ей прямой, изобразится соотношениями:

$$\frac{u_1'}{cx_2 - bx_3} = \frac{u_2'}{-cx_1 + ax_3} = \frac{u_3'}{bx_1 - ax_2}.$$

Указание. Для искомого преобразования условие инцидентности точки и соответствующей прямой должно выполняться тождественно (для всякой точки плоскости), поэтому:

$$a_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_3 = 0,$$
$$a_2 + b_1 = 0, \quad a_3 + c_1 = 0, \quad b_3 + c_2 = 0.$$

882. Уравнения граней тетраэдра $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$; через его вершины проводятся прямые, сходящиеся в точке $M_0(x_0 : y_0 : z_0 : t_0)$ и своим пересечением с противоположными гранями определяющие вершины второго тетраэдра. Найти уравнения граней последнего.

883. Через каждое ребро тетраэдра и через какую-нибудь точку $M_0(x_0 : y_0 : z_0 : t_0)$ проведем плоскость, затем возьмем для нее плоскость, четвертую гармоническую относительно граней тетраэдра, сходящихся на выбранном ребре; каждая из полученных шести плоскостей пересечет противолежащее ребро. Шесть точек, построенных указанным образом, лежат в одной плоскости изображаемой уравнением:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} + \frac{t}{t_0} = 0.$$

884. Два последовательных коррелятивных преобразования (плоскости или пространства) дают преобразование коллинеарное.

885. Коррелятивное преобразование, при котором каждая точка пространства инцидентна соответствующей ей плоскости, изобразится соотношениями

$$\frac{u'}{a_2y+a_3z+a_4t}=\frac{v'}{-a_2x+b_3z+b_4t}=$$
$$=\frac{w'}{-a_3x-b_3y+c_4t}=\frac{p'}{-a_4x-b_4y-c_4z}.$$

Указание. Условием того, что точка инцидентна соответствующей плоскости при данном коррелятивном преобразовании (52), будет соотношение:

$$(a_1x+a_2y+a_3z+a_4t)\,x+(b_1x+b_2y+b_3z+b_4t)\,y+$$
$$+(c_1x+c_2y+c_3z+c_4t)\,z+(d_1x+d_2y+d_3z+d_4t)\,t=0;$$

для искомого коррелятивного преобразования это соотношение должно выполняться тождественно, поэтому:

$$\begin{array}{llll} a_1=0, & b_2=0, & c_3=0, & d_4=0. \\ b_1+a_2=0, & c_1+a_3=0, & d_1+a_4=0, & \\ c_2+b_3=0, & d_3+c_4=0, & d_2+b_4=0. & \end{array}$$

886. Пусть нам даны две точки $(x_1:y_1:z_1:t_1)$ и $(x_2:y_2:z_2:t_2)$; тогда прямая, проходящая через эти точки, может быть изображена двумя любыми из четырех уравнений:

$$\begin{aligned} p_{34}y-p_{24}z+p_{23}t&=0,\\ -p_{34}x+p_{14}z+p_{31}t&=0,\\ p_{24}x-p_{14}y+p_{12}t&=0,\\ p_{23}x+p_{31}y+p_{12}z&=0, \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

где

$$\frac{p_{23}}{y_1z_2-y_2z_1}=\frac{p_{31}}{z_1x_2-z_2x_1}=\frac{p_{12}}{x_1y_2-x_2y_1}=$$
$$=\frac{p_{14}}{x_1t_2-x_2t_1}=\frac{p_{24}}{y_1t_2-y_2t_1}=\frac{p_{34}}{z_1t_2-z_2t_1}.$$

Величины $p_{23}:p_{31}:p_{12}:p_{14}:p_{24}:p_{34}$ зависят от четырех отношений, ибо они связаны соотношением:

$$p_{23}p_{14}+p_{31}p_{24}+p_{12}p_{34}=0. \qquad (\beta)$$

Они называются радиальными однородными координатами прямой (Плюкер).

Аналогично, если прямая задана пересечением двух плоскостей

$$u_1:v_1:w_1:p_1 \quad \text{и} \quad u_2:v_2:w_2:p_2,$$

то величины

$$\frac{q_{23}}{v_1w_2-v_2w_1}=\frac{q_{31}}{w_1u_2-w_2u_1}=\frac{q_{12}}{u_1v_2-u_2v_1}=$$
$$=\frac{q_{14}}{u_1p_2-u_2p_1}=\frac{q_{24}}{v_1p_2-v_2p_1}=\frac{q_{34}}{w_1p_2-w_2p_1},$$

связанные соотношением:

$$q_{23}q_{14}+q_{31}q_{24}+q_{12}q_{34}=0,$$

называются аксиальными однородными координатами прямой (Плюкер).

Покажите, что условием пересечения двух прямых является соотношение:

$$p_{23}p'_{14}+p_{14}p'_{23}+p_{31}p'_{24}+p_{24}p'_{31}+p_{12}p'_{34}+p_{34}p'_{12}=0 \qquad (\gamma)$$

или соотношение:

$$q_{23}q'_{14}+q_{14}q'_{23}+q_{31}q'_{24}+q_{24}q'_{31}+q_{12}q'_{34}+q_{34}q'_{12}=0.$$

Указание. 1) Легко проверить подстановкой, что каждое из четырех уравнений (α) изображает плоскость, проходящую через две заданных точки;

далее, в силу условия (β) два любых из уравнений (α) являются следствиями двух других; поэтому прямая, проходящая через две данных точки, изображается двумя из уравнений (α).

2) Условиям пересечения прямой, изображаемой уравнениями:

$$p_{34}y - p_{24}z + p_{23}t = 0,$$
$$-p_{34}x + p_{14}z + p_{31}t = 0,$$

с прямой, изображаемой уравнениями:

$$p'_{34}y - p'_{24}z + p'_{23}t = 0,$$
$$-p'_{34}x + p'_{14}z + p'_{31}t = 0,$$

будет соотношение:

$$\begin{vmatrix} 0 & p_{34} & -p_{24} & p_{23} \\ -p_{34} & 0 & p_{12} & p_{31} \\ 0 & p'_{34} & -p'_{24} & p'_{23} \\ -p'_{34} & 0 & p'_{12} & p'_{31} \end{vmatrix} = 0,$$

которое с помощью условия (β) может быть приведено к виду (γ).

3) Прямая, определяемая координатами p_{ik}, будет тождественна с прямой, определяемой координатами q_{ik}, если:

$$\frac{q_{23}}{p_{14}} = \frac{q_{31}}{p_{24}} = \frac{q_{12}}{p_{34}} = \frac{q_{14}}{p_{23}} = \frac{q_{24}}{p_{31}} = \frac{q_{34}}{p_{12}}.$$

В самом деле, прямая, заданная уравнениями:

$$p_{34}y - p_{24}z + p_{23}t = 0,$$
$$-p_{34}x + p_{14}z + p_{31}t = 0,$$

будет иметь своими плоскостными координатами определители 2-го порядка из матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 0 & p_{34} & -p_{24} & p_{23} \\ -p_{34} & 0 & p_{14} & p_{31} \end{Vmatrix},$$

что и дает указанные значения для q_{ik}.

Глава XXIII.

Метод сокращенных обозначений в применении к образам 2-го порядка.

Эта последняя глава содержит простейшие применения метода сокращенных обозначений к образам 2-го порядка, главным образом имея в виду лишь разъяснение сущности метода. Хотя только для левой части нормированного уравнения окружности или сферы можно дать простое геометрическое истолкование (квадрат длины касательной), однако отсутствие аналогичного истолкования для левой части общего уравнения кривой 2-го порядка или поверхности 2-го порядка не служит препятствием для применения к исследованию последних образов метода сокращенных обозначений. Действительно, геометрическое истолкование тождественных соотношений между левыми частями данных уравнений, линейных соотношений между ними, распадения этих левых частей на множители и т. д. уже само по себе дает целый ряд интересных и важных свойств указанных геометрических образов.

Наиболее существенными примерами приложений метода сокращенных обозначений являются для кривых 2-го порядка вывод теорем Паскаля и Брианшона и обобщенная теория фокусов, для поверхностей же 2-го порядка — изыскание их круговых сечений, и изучение фокальных свойств.

1. Окружность.

Возьмем центр окружности в точке $(a; b)$ по отношению к некоторой косоугольной системе координат с координатным углом ω, и пусть радиус окружности будет r; тогда уравнение окружности мы получим, если выразим, что расстояние любой ее точки $(x; y)$ от центра равно радиусу, следовательно:

$$(x-a)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega+(y-b)^2-r^2=0 \qquad (1)$$

или в развернутом виде:

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2-2(a+b\cos\omega)x-2(a\cos\omega+b)+$$
$$+(a^2+2ab\cos\omega+b^2-r^2)=0. \qquad (1')$$

Уравнение окружности в прямоугольной декартовой системе координат $\left(\text{при } \omega=\frac{\pi}{2}\right)$ будет иметь вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0 \qquad (2)$$

или

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0. \qquad (2')$$

Уравнение 2-й степени относительно координат x и y будет изображать окружность по отношению к какой-либо прямоугольной системе координат, если в этом уравнении коэфициенты при квадратах координат будут одинаковы, члена же с произведением координат не будет. В общем случае относительно косоугольной системы координат уравнение 2-й степени будет изображать окружность, когда коэфициенты трех старших его членов x^2, $2xy$, y^2 будут пропорциональны числам:

$$1 : \cos\omega : 1.$$

Если нам дано относительно прямоугольной системы координат уравнение 2-й степени вида:

$$x^2 + y^2 + 2Mx + 2Ny + P = 0, \qquad (3)$$

то его можно привести к виду (2) или (2′), если принять:

$$-a = M,$$

$$-b = N,$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = P.$$

Тогда последнее уравнение этой системы определит квадрат радиуса окружности:

$$r^2 = M^2 + N^2 - P.$$

Указанное выражение для r^2 может дать для него положительное, нулевое или отрицательное значение; в двух последних случаях уравнение (3) не будет собственно изображать действительной окружности. Однако, поскольку в нем нет члена с произведением координат и коэфициенты при квадратах координат одинаковы, поскольку, следовательно, уравнение (3) может быть приведено к виду (2) или (2′), мы будем говорить, что оно всегда изображает окружность. Когда для r^2 мы получим отрицательное значение, а следовательно, для r мнимое, мы будем говорить, что уравнение (3) изображает окружность мнимого радиуса или мнимую окружность: когда r окажется равным нулю, будем говорить, что уравнение (3) изображает окружность нулевого радиуса.

Окружность нулевого радиуса изобразится уравнением:

$$(x - a)^2 + (v - b)^2 = 0;$$

этому уравнению удовлетворяет одна пара действительных значений координат $x = a$, $y = b$, т. е. эта окружность имеет одну действительную точку.

Вместе с тем левая часть ее уравнения распадается на два линейных множителя:

$$[i(x - a) + y - b][-i(x - a) + y - b] = 0,$$

а потому уравнение окружности нулевого радиуса можно истолковать также как уравнение пары изотропных прямых:

$$y - b = -i(x - a),$$

$$y - b = i(x - a),$$

пересекающихся в точке $(a; b)$.

Так как в общем уравнении (1) окружности содержатся три параметра, то окружность будет вполне определяться тремя условиями, например требованием, чтобы окружность проходила через три данных точки.

Будем называть уравнение окружности (1) или (2), т. е. уравнение окружности, в котором каждый из коэфициентов при квадратах координат равен единице, *нормальным* уравнением окружности; левую часть его обозначим сокращенно через C, так что:

$$C \equiv (x-a)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\omega + (y-b)^2 - r^2 = 0. \qquad (4)$$

Пусть $M(x;\ y)$ будет любая точка плоскости, тогда выражение

$$(x-a)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\omega + (y-b)^2$$

будет квадратом расстояния этой точки от центра окружности, а потому левая часть нормального уравнения окружности представится в виде:

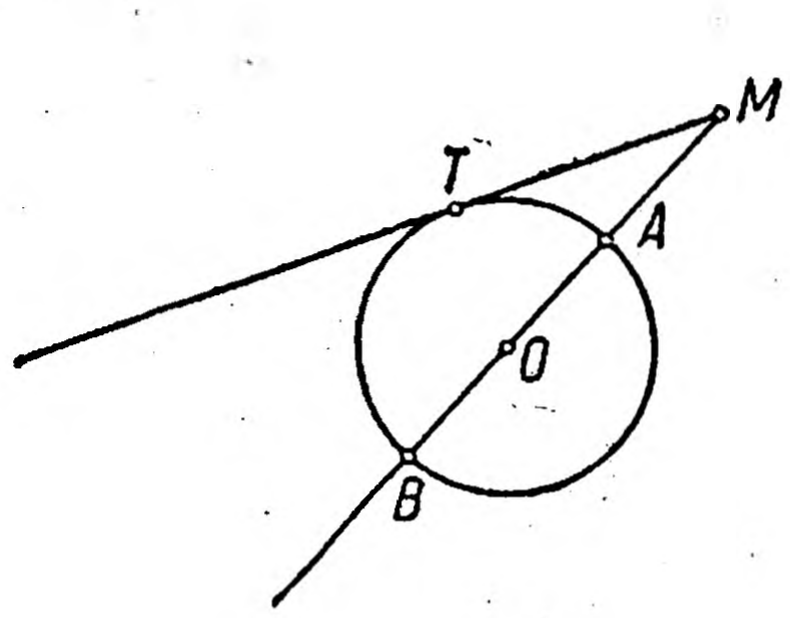
$$C = MO^2 - r^2 = (MO + r)(MO - r).$$

Проведем через точку M и центр окружности секущую, и пусть она пересечет окружность в двух точках A и B.

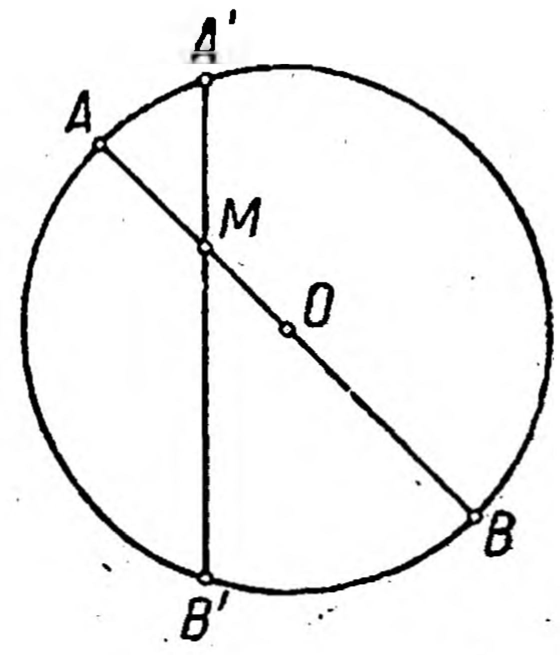
Если точка M находится вне окружности (черт. 174), то

$$MO + r = MB,$$

$$MO - r = MA,$$



Черт. 174.



Черт. 175.

и следовательно,

$$C = MA \cdot MB.$$

Если точка M находится внутри окружности (черт. 175), то

$$MO + r = MB,$$

$$MO - r = -(r - MO) = -|AM| = MA,$$

поэтому опять:

$$C = MA \cdot MB.$$

Итак, в обоих случаях левая часть нормального уравнения окружности равна произведению отрезков секущей, проходящей через выбранную точку M, отрезков от точки M до точек пересечения секущей с окружностью. Наша секущая, собственно, проходит через центр окружности, но, как известно, для окружности произведение отрезков любой секущей, проходящей через выбранную точку, постоянно, например:

$$MA \cdot MB = MA' \cdot MB',$$

поэтому мы можем не упоминать о том, что первоначальная секущая проведена нами через центр.

Если точка M взята вне окружности, из нее можно провести касательную длиною MT, и тогда

$$C = MT^2.$$

Произведение отрезков (направленных) секущей, проходящей через какую-либо точку плоскости, называется *степенью точки относительно данной окружности.*

Таким образом *левая часть нормального уравнения окружности для координат какой-либо точки плоскости дает степень этой точки относительно окружности.*

Легко видеть, что степень точки положительна для точки вне окружности, отрицательна для точки внутри окружности и обращается в нуль для точек самой окружности.

Указанное геометрическое истолкование левой части нормального уравнения окружности, подобно геометрическому значению левой части нормального уравнения прямой, служит основанием для геометрического истолкования многих результатов, получаемых методом сокращенных обозначений.

Обозначим левые части нормальных уравнений двух окружностей относительно какой-либо прямоугольной системы координат соответственно через C и C', так что уравнения этих окружностей сокращенно запишутся в виде:

$$C = 0, \ C' = 0; \tag{5}$$

в таком случае уравнение:

$$C - mC' = 0 \tag{6}$$

будем изображать некоторую третью окружность, ибо если развернуть это уравнение, то в нем не будет члена с произведением координат, а коэфициенты при квадратах координат будут одинаковы. Эта третья окружность проходит через точки пересечения двух первых окружностей, так как ее уравнение удовлетворяется, как только точка $(x; y)$ выбрана так, чтобы одновременно удовлетворялись уравнения (5).

При этом мы будем говорить, что две окружности должны пересекаться в *четырех* точках, так как система двух уравнений (5), каждое из которых 2-й степени относительно x и y, должна быть вообще равносильна одному уравнению 4-й степени с одним неизвестным, а потому должна давать четыре решения.

Пусть $M(x; y)$ будет какая-нибудь точка третьей окружности, тогда для нее уравнение (6) можно написать в виде:

$$\frac{C}{C'} = m,$$

которое показывает, что отношение степеней этой точки относительно двух данных окружностей постоянно.

Таким образом мы можем сказать: геометрическое место таких точек, степени каждой из которых относительно двух заданных окружностей находятся в постоянном отношении, есть окружность, при этом последняя проходит через точки пересечения двух данных окружностей.

Меняя значение параметра m в уравнении (6), мы будем получать уравнения различных окружностей, проходящих через точки пересечения двух данных; поэтому принято говорить, что уравнение (6) *есть уравнение пучка окружностей*, проходящих через точки пересечения двух данных окружностей.

Особенно интересные заключения мы получим, если примем в уравнении (6) параметр $m=1$, тогда

$$C - C' = 0; \tag{7}$$

из предыдущего следует, что это уравнение изображает геометрическое место точек, для каждой из которых ее степени относительно двух данных окружностей равны между собой, или место таких точек, что из каждой из них к двум данным окружностям можно провести равные касательные. Если мы в первоначальных уравнениях (5) восстановим однородность, а затем развернем уравнение (7), то оно примет вид:

$$C - C' \equiv [(x - az)^2 + (y - bz)^2 - r^2z^2] - \\ - [(x - a'z)^2 + (y - b'z)^2 - r'^2z^2] = 0$$

или

$$z\,[2\,(a' - a)\,x + 2\,(b' - b)\,y + (a^2 + b^2 - r^2 - a'^2 - b'^2 + r'^2)\,z] = 0.$$

Таким образом уравнение (7) изображает совокупность двух прямых, одной

$$z = 0,$$

т. е. бесконечно удаленной прямой, и другой

$$2\,(a' - a)\,x + 2\,(b' - b)\,y + \\ + (a^2 + b^2 - r^2 - a'^2 - b'^2 + r'^2)\,z = 0; \tag{8}$$

каждая из них проходит через две (из четырех) точки пересечения двух данных окружностей.

Итак, прежде всего две из (четырех) точек пересечения двух любых окружностей лежат на бесконечно удаленной прямой.

Полагая $z=0$ в уравнении любой окружности:

$$C \equiv (x - az)^2 + (y - bz)^2 - r^2z^2 = 0,$$

мы получим:

$$x^2 + y^2 = 0, \tag{9}$$

т. е. всегда одну и ту же пару изотропных прямых. Следовательно, все окружности плоскости проходят через одну и ту же пару мнимых точек, которые являются пересечением бесконечно удаленной прямой с парою изотропных прямых (9). Эти точки называются *циклическими* точками плоскости.

Уравнение:

$$x^2 + y^2 + z\,(a_1x + b_1y + c_1z) = 0$$

есть общий вид уравнения линии 2-го порядка, проходящей через циклические точки, и оно изображает непременно окружность; поэтому мы можем сказать обратно: линии 2-го порядка, проходящие через цилиндрические точки плоскости, суть непременно окружности. Линия 2-го порядка определяется пятью точками, а всякая окружность проходит через две циклических точки; поэтому, не упоминая о последних, обычно и говорят, что окружность определяется тремя точками.

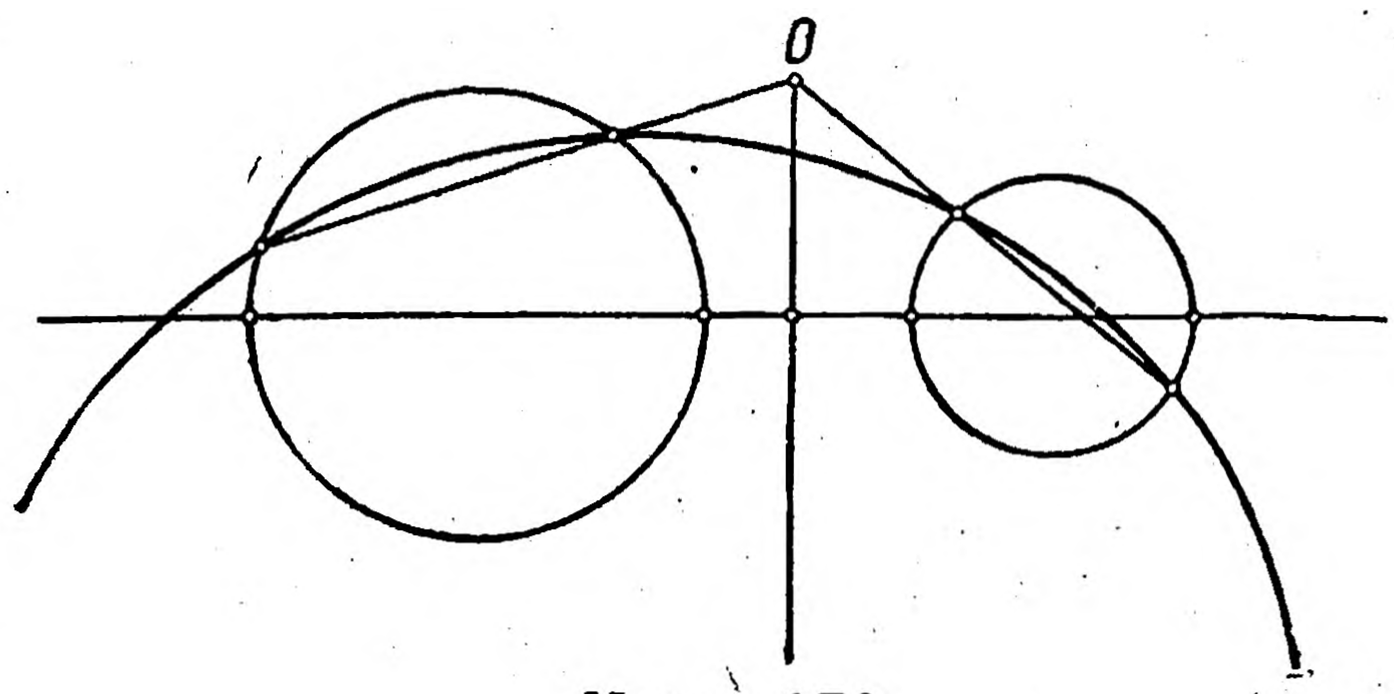
Обратимся теперь к рассмотрению уравнения (8) второй прямой, проходящей через две другие точки пересечения двух данных окружностей; эти точки пересечения могут быть действительными или мнимыми, однако прямая (8) всегда действительна, если действительны коэфициенты уравнений данных окружностей. Прямую (8) называют *радикальною осью* данных двух окружностей; как мы видели, она представляет собою геометрическое место точек, для каждой из которых касательные к двум данным окружностям имеют равные длины. Составим уравнение прямой, соединяющей центры данных окружностей:

$$\frac{x-a}{a'-a}=\frac{y-b}{b'-b}$$

или в развернутом виде:

$$(b'-b)x-(a'-a)y+a'b-ab'=0;$$

легко видеть, что эта прямая центров перпендикулярна к радикальной оси. Итак, *радикальная ось двух окружностей перпендикулярна к прямой, соединяющей их центры.*



Черт. 176.

Возьмем три окружности, уравнения которых будут:

$$C=0,\ C'=0,\ C''=0;$$

радикальная ось первой и второй будет:

$$C-C'=0;$$

радикальная ось первой и третьей будет:

$$C''-C=0;$$

наконец, радикальная ось второй и третьей окружности изобразится уравнением:

$$C'-C''=0;$$

так как сумма левых частей этих трех уравнений тождественно равна нулю, то мы заключаем: *радикальные оси трех любых окружностей пересекаются в одной точке.* Эта точка называется *их радикальным центром.* Длины касательных, проведенных из радикального центра к каждой из трех окружностей, очевидно, равны между собой.

Если две окружности пересекаются в действительных двух точках (кроме циклических точек), то радикальною осью будет прямая, проходящая через эти точки пересечения. Если же две окружности не пересекаются в действительных двух точках, то для построения их радикальной оси можно воспользоваться вышеуказанными свойствами следующим образом; проведем какую-нибудь третью окружность, пересекающую каждую из данных в действительных точках (черт. 176), и пусть O будет точкой пересечения радикальных осей третьей окружности с каждою из данных. Точка O будет радикальным центром трех окружностей; тогда прямая, проходящая через точку O и перпендикулярная к прямой центров двух первоначальных окружностей и будет радикальною осью последних.

Упражнения. 887. Если данная окружность изображается уравнением $C=0$, то уравнение концентрических с нею окружностей будет: $C-m=0$, где m — постоянное.

Указание. Уравнения $C=0$ и $C-m=0$ двух окружностей отличаются между собой лишь свободными членами, а так как координаты центра окружности определяются коэфициентами первых степеней x и y, то эти две окружности имеют общий центр.

888. Если три окружности определяются соответственно уравнениями $C'=0$. $C''=0$, $C'''=0$, то тождественное соотношение (относительно координат x и y):

$$\lambda C'+\mu C''+\nu C'''\equiv 0,$$

где λ, μ, ν — некоторые коэфициенты, означает, что три данных окружности имеют общую радикальную ось.

Указание. Действительно, из данного тождества следует, что третья окружность проходит через точки пересечения двух первых.

889. Тождественное соотношение

$$\lambda C+\mu C'+\nu C''+\rho C'''\equiv 0$$

между левыми частями уравнений четырех окружностей $C=0$, $C'=0$, $C''=0$, $C'''=0$ означает, что эти четыре окружности имеют общий радикальный центр.

890. Преобразование плоскости называется инверсией относительно данной окружности радиуса r или преобразованием обратными радиусами-векторами, если соответствующие точки лежат на одном луче, выходящем из центра O данной окружности, и удовлетворяют условию:

$$OM\cdot OM'=r^2.$$

Показать, что формулами указанного преобразования будут:

$$\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{r^2}{x^2+y^2};$$

инверсия преобразует прямую в окружность, проходящую через точку O, и произвольную окружность, не проходящую через точку O, — в окружность же.

2. Пучок линий 2-го порядка.

Обозначим левые части уравнений двух линий 2-го порядка относительно какой-либо декартовой системы координат соответственно через s и s', так что их уравнения сокращенно можем записать в виде:

$$\begin{aligned} s&=0,\\ s'&=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда уравнение

$$s-ks'=0 \tag{2}$$

будет изображать некоторую линию 2-го порядка, проходящую через четыре точки пересечения двух данных линий (1), ибо уравнение (2), очевидно, удовлетворяется такими значениями координат, которые одновременно удовлетворяют каждому из уравнений (1).

Меняя в уравнении (2) значение параметра k, мы будем получать различные линии 2-го порядка, проходящие через точки пересечения двух первоначальных линий; поэтому говорят, что уравнение (2) изображает пучок линий 2-го порядка, проходящих через точки пересечения двух данных.

Какая-нибудь линия, принадлежащая пучку, вполне определится, если мы дадим еще одну точку, на ней лежащую; так оно и должно быть, ибо линия 2-го порядка, как известно, определяется пятью точками.

Пусть уравнения двух данных линий s и s' пишутся подробно в виде:

$$\begin{aligned} s &\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \\ s' &\equiv a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+a'_{22}y^2+2a'_{13}x+2a'_{23}y+a'_{33}=0; \end{aligned} \tag{1'}$$

тогда уравнение пучка линий 2-го порядка, проходящих через четыре точки пересечения данных линий, будет:

$$\begin{aligned} &(a_{11}-ka'_{11})\,x^2+2\,(a_{12}-ka'_{12})\,xy+(a_{22}-ka'_{22})\,y^2+ \\ &+\;2(a_{13}+ka'_{13})x+2\,(a_{23}-ka'_{23})\,y+(a_{33}-ka'_{33})=0. \end{aligned} \tag{2'}$$

Последнее уравнение будет изображать линию, распадающуюся на пару прямых, если дискриминант уравнения обращается в нуль, иначе говоря, если параметр k удовлетворяет условию;

$$\begin{vmatrix} a_{11}-ka'_{11} & a_{12}-ka'_{12} & a_{13}-ka'_{13} \\ a_{21}-ka'_{21} & a_{22}-ka'_{22} & a_{23}-ka'_{23} \\ a_{31}-ka'_{31} & a_{32}-ka'_{32} & a_{33}-ka'_{33} \end{vmatrix}=0.$$

Это условие представляет собой относительно k уравнение 3-й степени и будет давать для k вообще три решения, которые могут оказаться действительными или частью мнимыми, различными или частью совпадающими. Таким образом в *пучке* (2) *линий 2-го порядка, проходящих через четыре точки пересечения двух данных линий, вообще говоря, имеются три пары прямых*; каждая такая пара прямых проходит через четыре основных точки данного пучка и должна рассматриваться как линия 2-го порядка, принадлежащая пучку. Указанные три пары прямых будут вместе с тем тремя парами общих хорд двух основных линий пучка.

Положим теперь, что многочлен s' распадается на два линейных множителя u и v (т. е. вторая из данных линий распадается на пару прямых), в таком случае уравнение:

$$s-kuv=0 \tag{3}$$

будет изображать пучок линий 2-го порядка, проходящих через четыре точки пересечения прямых (черт. 177):

$$u = 0, \qquad v = 0$$

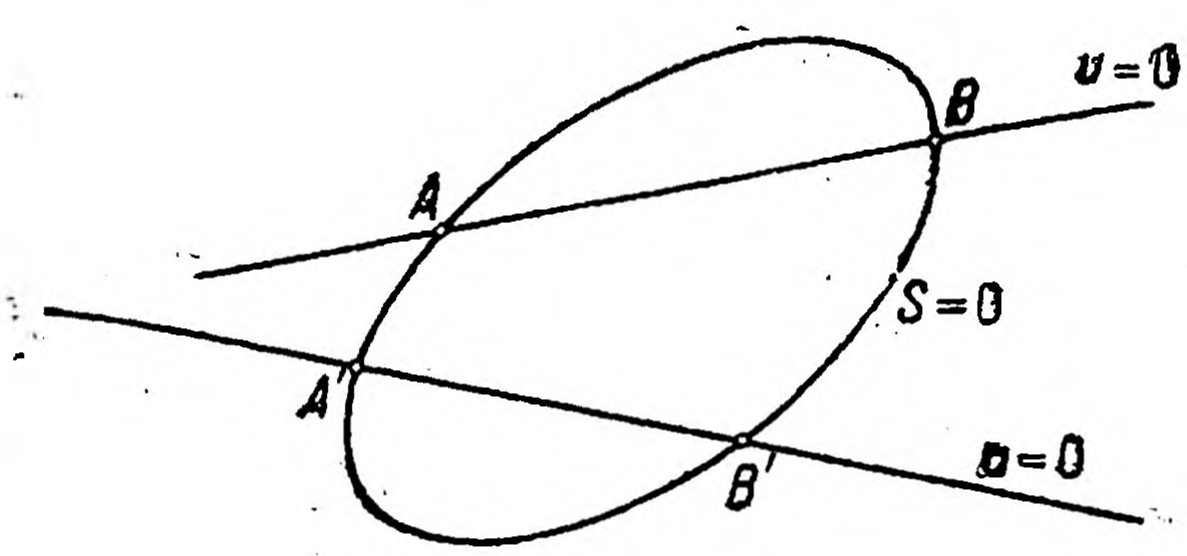
с линией $s = 0$.

Представим себе, что прямая $v = 0$, пересекающая линию s в точках A' и B', передвигается, стремясь к совпадению с прямой $u = 0$, пересекающей линию s в точках A и B. Все линии 2-го порядка, проходящие через две совпавших точки A и A', будут иметь в этой точке общую касательную, а потому будут касаться друг друга.

Таким образом уравнение:

$$s - ku^2 = 0 \tag{4}$$

будет уравнением пучка линий 2-го порядка, имеющих с основною линией $s = 0$ касание в двух точках A и B, именно в точках пересечения линии $s = 0$ и прямой $u = 0$.



Черт. 177.

Далее, уравнение

$$s - ku = 0 \tag{5}$$

будет также частным случаем уравнения (3), именно, когда v обращается в постоянное; в этом случае уравнение $v = 0$ будет изображать бесконечно удаленную прямую. Таким образом уравнение (5) изображает пучок линий 2-го порядка, проходящих через четыре точки, а именно через две точки пересечения прямой $u = 0$ с линией $s = 0$ и через две точки пересечения этой же линии с бесконечно удаленной прямой.

Наконец, уравнение

$$s - k = 0 \tag{6}$$

можно истолковать как частный случай уравнения (4), когда прямая $u = 0$ обращается в бесконечно удаленную прямую; уравнение (6) изображает, следовательно, пучок линий 2-го порядка, касающихся линий $s = 0$ в двух ее точках пересечения с бесконечно удаленной прямой.

Предположим теперь, что каждая из основных линий (1) распадается на пару прямых; в таком случае уравнение:

$$\alpha\gamma - k\beta\delta = 0, \tag{7}$$

где α, β, γ, δ суть линейные выражения относительно декартовых координат, будет изображать пучок линий 2-го порядка, проходящих через каждую из четырех точек пересечения прямых по две:

$$\left.\begin{array}{r|l} \alpha = 0, & \beta = 0; \\ \alpha = 0, & \delta = 0; \\ \gamma = 0, & \beta = 0; \\ \gamma = 0, & \delta = 0; \end{array}\right. \tag{8}$$

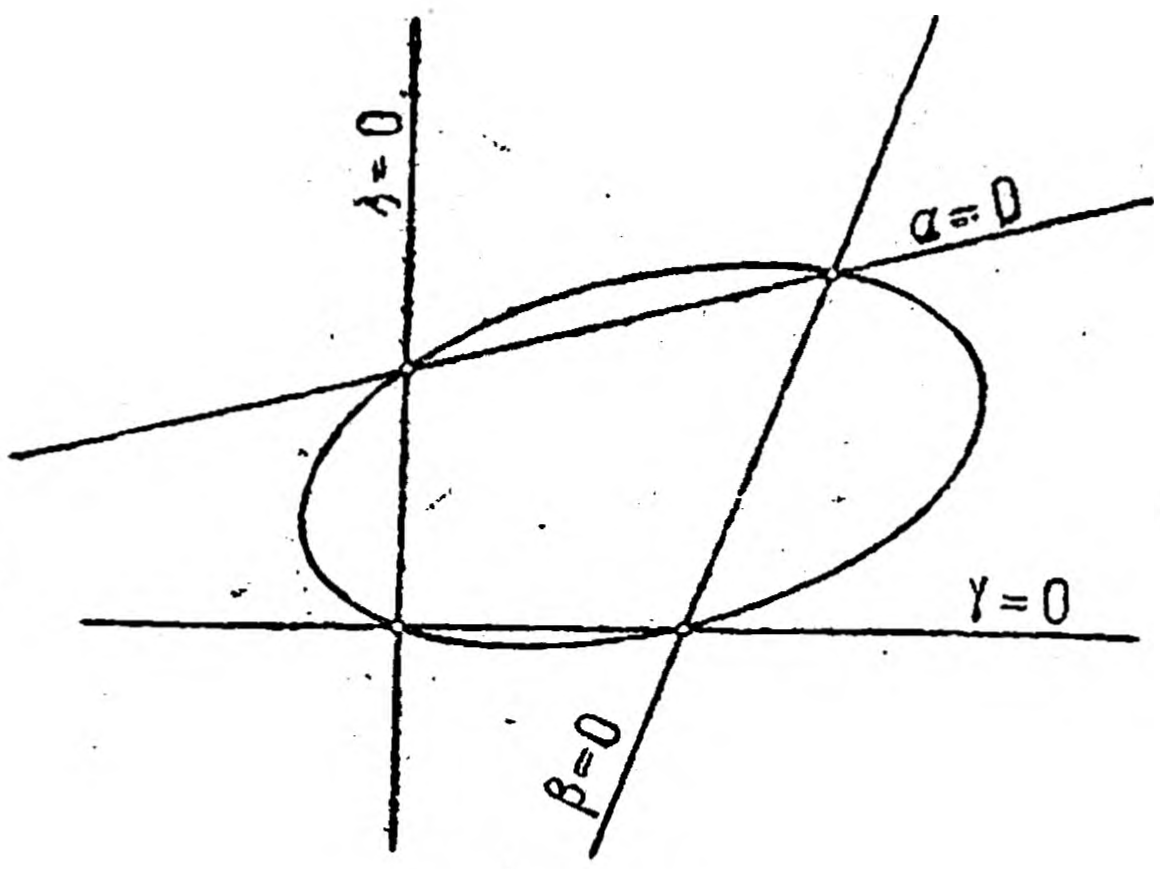
иначе говоря, линии пучка описаны около четырехугольника, стороны которого изображаются последовательно уравнениями (черт. 178):

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = 0. \tag{9}$$

Уравнение какой-либо линии пучка можно представить в виде:

$$k = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}, \tag{7'}$$

и так как левые части уравнений прямых (9) пропорциональны расстояниям взятой точки до этих прямых, то мы можем сказать: геометрическое место точек, для каждой из которых произведение расстояний от двух противоположных сторон четырехугольника находится в постоянном отношении с произведением расстояний от двух других (противоположных) сторон, есть линия 2-го порядка, притом проходящая через вершины данного четырехугольника.



Черт. 178.

Из уравнения (7) можно получить и другие геометрические свойства линий 2-го порядка, им изображаемых. Рассмотрим два пучка прямых:

$$\begin{aligned} \alpha - m\beta &= 0, \\ \gamma - \frac{k}{m}\delta &= 0; \end{aligned} \tag{10}$$

так как параметр m входит в оба эти уравнения, то это означает, что между прямыми обоих пучков установлено взаимно-однозначное соответствие, так что каждому лучу первого пучка соответствует определенный луч второго пучка, и обратно. Ангармоническое отношение каких-нибудь четырех лучей первого пучка будет равно:

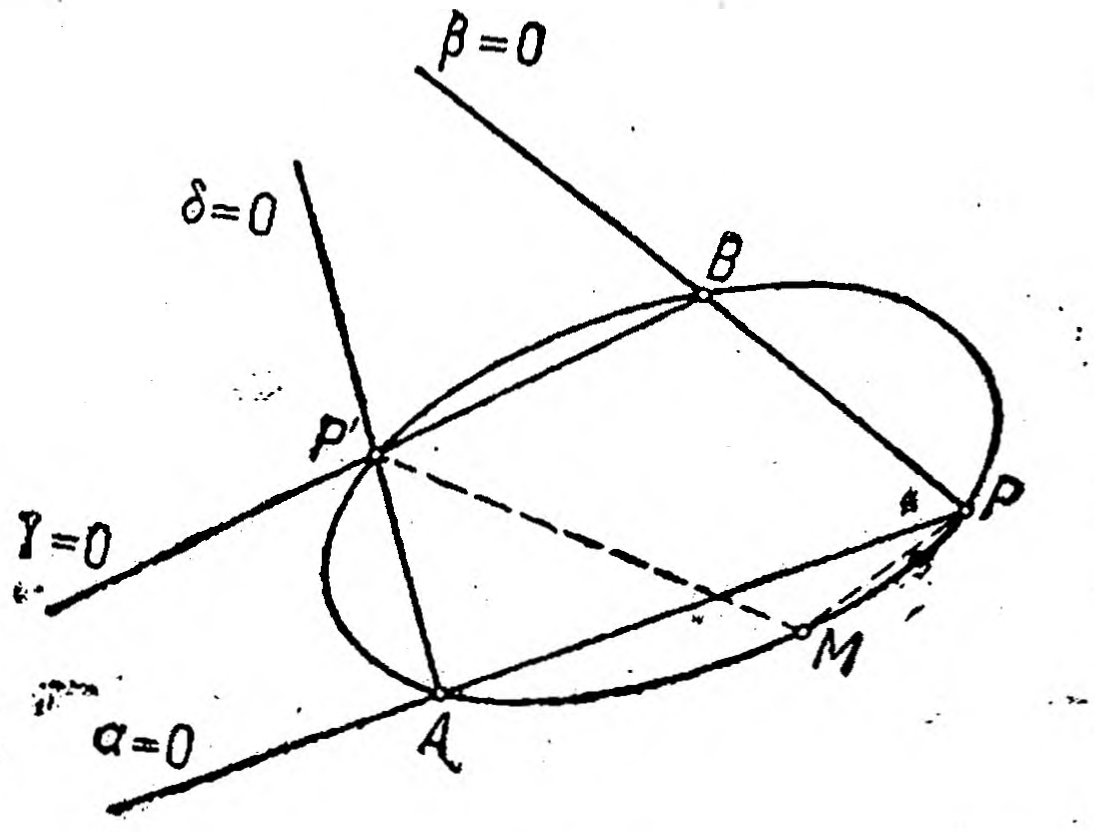
$$\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_3} : \frac{m_4 - m_1}{m_2 - m_4};$$

ангармоническое отношение четырех соответственных лучей второго пучка будет:

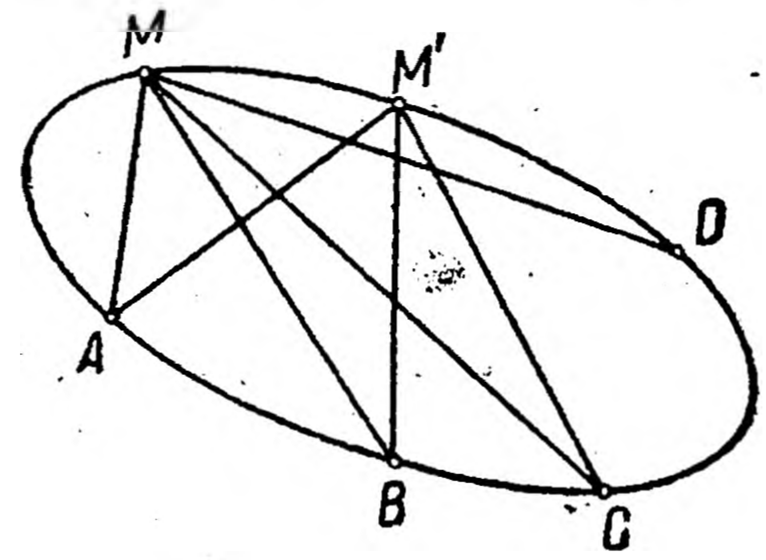
$$\frac{\frac{k}{m_3} - \frac{k}{m_1}}{\frac{k}{m_2} - \frac{k}{m_3}} : \frac{\frac{k}{m_4} - \frac{k}{m_1}}{\frac{k}{m_2} - \frac{k}{m_4}}.$$

Легко видеть, что два указанных ангармонических отношения равны между собой; поэтому соответствие лучей двух пучков будет соответствием проективным.

Два соответствующих луча в этих пучках будут пересекаться в некоторой точке M (черт. 179), координаты которой должны удовлетворять обоим уравнениям (10); но легко видеть, что, исключая параметр m из уравнений (10), мы как раз получим уравнение (7), т. е. точка пересечения любой пары соответственных лучей двух пучков (10) принадлежит нашей кривой 2-го порядка (7). Центром первого пучка является точка пересечения прямых $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, центром второго пучка является точка пересечения прямых $\gamma = 0$ и $\delta = 0$; обе эти точки лежат на любой линии (7). Итак, *геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух проективных прямолинейных пучков есть линия 2-го порядка, проходящая через центры обоих пучков* (теорема Штейнера).



Черт. 179.



Черт. 180.

Выше было указано, что ангармоническое отношение четырех лучей первого пучка равно ангармоническому отношению четырех соответствующих лучей второго пучка, причем соответственные лучи двух пучков пересекаются в четырех точках, лежащих на нашей кривой. Пусть центры двух пучков находятся в точках M и M' кривой, а соответственные лучи пересекаются в точках A, B, C, D на кривой, тогда (черт. 180):

$$\frac{\sin(AMC)}{\sin(CMB)} : \frac{\sin(AMD)}{\sin(DMB)} = \frac{\sin(AM'C)}{\sin(CM'B)} : \frac{\sin(AM'D)}{\sin(DM'B)}.$$

Когда дана кривая 2-го порядка, то для нее можно построить указанным образом два проективных пучка с центрами в двух любых ее точках M и M', и тогда предыдущее соотношение позволяет нам сказать: *ангармоническое отношение четырех лучей, проведенных из любой точки кривой к четырем ее точкам* A, B, C, D, постоянно (теорема Шаля).

Раз это отношение определяется четырьмя точками A, B, C, D кривой, а пятая точка — центр пучка — не меняет ангармонического отношения, то иногда вместо: „ангармоническое отношение четырех лучей, проведенных из любой точки кривой к четырем ее точкам" короче говорят: „ангармоническое отношение четырех точек на кривой".

Вернемся к уравнению (7) и отметим некоторые частные случаи расположения четырех прямых, через точки пересечения которых проходит кривая.

Если прямые $\beta = 0$ и $\delta = 0$ совпадают, то четыре точки (8) совпадают по две; поэтому

$$\alpha\gamma - k\beta^2 = 0 \qquad (11)$$

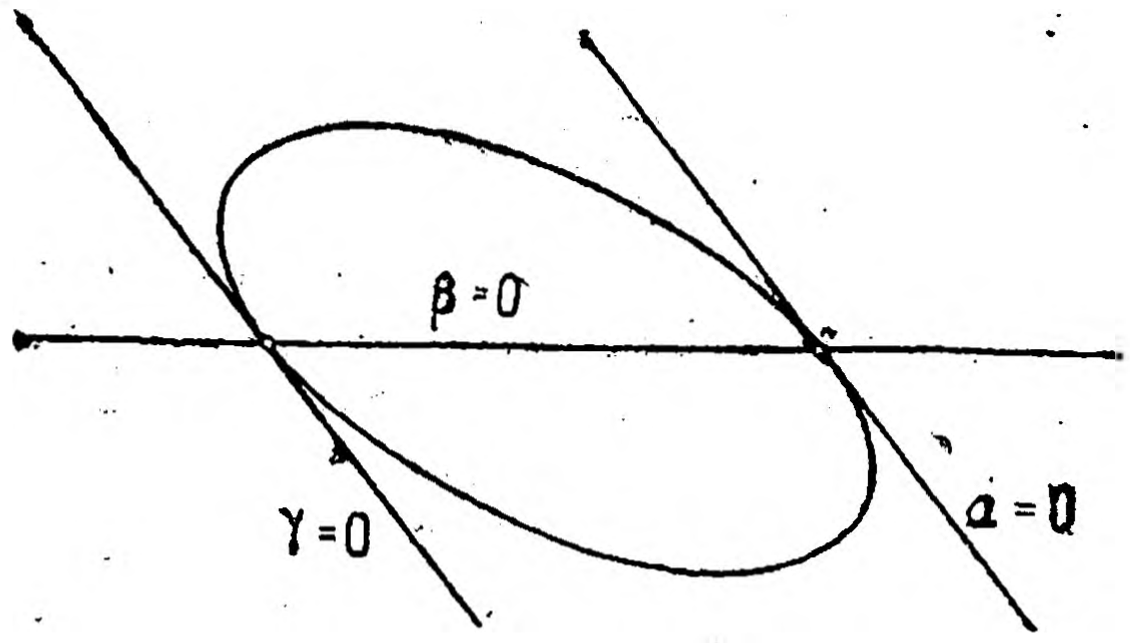
будет уравнением пучка линий, касающихся прямых

$$\alpha = 0, \qquad \gamma = 0, \tag{12}$$

прямая же $\beta = 0$ будет проходить через точки прикосновения (хорда касания, черт. 181).

Предположим далее, что β обращается в постоянное, тогда прямая $\beta = 0$ будет бесконечно удаленной прямой; следовательно уравнение

$$\alpha\gamma - k = 0$$



Черт. 181.

будет изображать линию 2-го порядка, касающуюся прямых (12) в бесконечно удаленных точках, т. е. это будет гипербола, асимптоты которой изображаются уравнениями (12) (сравните с уравнением гиперболы $xy = k$).

Наконец, предположим, что в уравнении (11) обращается в постоянное γ, т. е. одна из касательных будет бесконечно удаленною прямою; в таком случае уравнение:

$$\beta^2 - \frac{\alpha}{k} = 0$$

будет изображать пучок линий 2-го порядка, касающихся прямой $\alpha = 0$ и бесконечно удаленной прямой, причем прямая $\beta = 0$ будет хордою касания (сравните с уравнением параболы $y^2 = 2px$).

Упражнения. 891. Даны уравнения четырех прямых:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ \beta &= a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ \gamma &= a_3x + b_3y + c_3 = 0, \\ \delta &= a_4x + b_4y + c_4 = 0. \end{aligned}$$

Найти те значения параметра k, для каждого из которых уравнение:

$$\alpha\gamma - k\beta\delta = 0$$

изображает пару прямых.

892. Если за основные кривые пучка взять две окружности, то каковы будут три пары их общих хорд?

893. Уравнение линии, проходящей через точки пересечения двух кривых $s = 0$ и $s' = 0$ и через пятую точку (не лежащую ни на одной из двух данных кривых) M_0, будет:

$$\frac{s}{s_0} - \frac{s'}{s_0'} = 0,$$

где s_0 и s_0' — результаты подстановки координат точки M_0 в левые части уравнений данных линий.

894. Если $\Sigma = 0$ и $\Sigma' = 0$ — тангенциальные уравнения двух линий 2-го класса (т. е. уравнения в координатах прямой), то уравнение:

$$\Sigma - k\,\Sigma' = 0$$

будет изображать линию 2-го класса, касающуюся четырех прямых, которые являются четырьмя общими касательными данных линий.

895. Пусть $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ будут тангенциальными уравнениями четырех точек A, B, C, D; тогда уравнение

$$\alpha\gamma - m\beta\delta = 0$$

будет изображать линии (пучка), касающиеся сторон данного четырехугольника; короче говоря, указанное уравнение изображает пучок линий 2-го класса, вписанных в данный четырехугольник. Какой геометрический смысл имеет уравнение $\alpha\gamma - m\beta^2 = 0$ в тангенциальных координатах?

3. Теоремы Паскаля и Брианшона.

Легко получить обобщение для любых линий 2-го порядка указанного в § 1 свойства системы трех кругов, согласно которому радикальные оси их пересекаются в одной точке. Все круги проходят через циклические точки, т. е. имеют общею хордою бесконечно удаленную прямую; поэтому, если мы желаем получить аналогичное свойство для любых линий 2-го порядка, мы должны исследовать систему трех линий 2-го порядка с какой-либо общей хордой.

Пусть мы имеем три линии 2-го порядка с общею хордою, уравнение которой:

$$u = 0;$$

предполагая, что уравнение первой линии будет:

$$s = 0,$$

легко видеть, что уравнение второй линии может быть написано в виде:

$$s' \equiv s - uv = 0,$$

а уравнение третьей в виде:

$$s'' \equiv s - uw = 0,$$

где v и w — выражения линейные относительно декартовых координат. Линии s и s' имеют общие хорды $u = 0$ и $v = 0$; линии s и s'' имеют общие хорды $u = 0$ и $w = 0$; что касается линии s' и s'', то линия

$$s' - s'' \equiv u(w - v) = 0$$

проходит через точки их пересечения и распадается на пару прямых

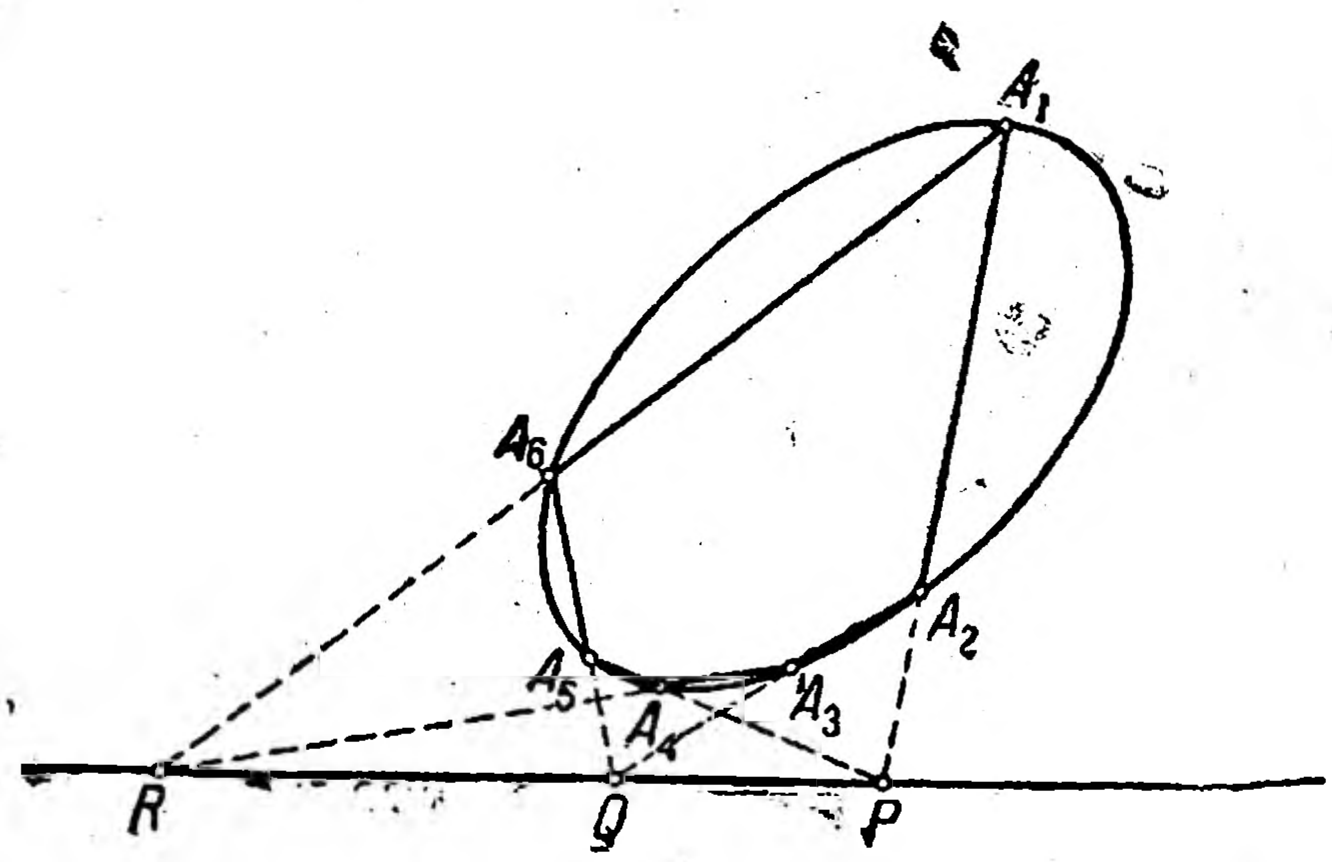
$$u = 0, \qquad w - v = 0.$$

Итак, три наших линии s, s', s'' имеют общую хорду $u = 0$, а кроме того каждая пара их имеет соответственно следующие хорды:

$$v = 0, \qquad w = 0, \qquad w - v = 0;$$

последние три прямые проходят, очевидно, через одну точку, и мы доказали теорему: *для трех линий 2-го порядка, имеющих общую хорду, три других хорды каждой пары линий проходят через одну точку* (теорема Штурма).

Возьмем шесть точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, лежащих на данной кривой 2-го порядка; если мы их соединим в какой либо последовательности, то получим шестиугольник, вписанный в кривую. Будем называть противоположными его сторонами те, между которыми лежит по одной свободной вершине; такими парами противоположных сторон будут пары A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, наконец, A_3A_4 и A_6A_1. Пусть эти пары пересекаются соответственно в точках P, Q, R; полученная фигура обладает следующим свойством: *во всяком шестиугольнике, вписанном в линию 2-го порядка, противоположные стороны пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой* (теорема Паскаля).



Черт. 182.

Для доказательства этой теоремы мы можем воспользоваться предложением Штурма и с этою целью рассмотрим три линии 2-го порядка, имеющих общую хорду. Примем за общую хорду прямую A_1A_4, за первую линию s — данную линию 2-го порядка (черт. 182), за вторую линию s' — пару прямых A_1A_2 и A_3A_4, за третью линию s'' — пару прямых A_1A_6 и A_4A_5. Линии s и s', кроме хорды A_1A_4, имеют общую хорду A_2A_3; линии s и s'', кроме A_1A_4, имеют общую хорду A_5A_6; наконец, для линий s' и s'', кроме A_1A_4, общей хордой будет служить PR. Из теоремы Штурма следует, что три прямых A_2A_3, A_5A_6 и PR должны пересекаться в одной точке, скажем Q; но, очевидно, P, Q, R как раз и будут точками пересечения пар противоположных сторон шестиугольника; таким образом теорема Паскаля доказана.

Дадим для теоремы Паскаля еще одно доказательство, аналитическое, принадлежащее Дарбу (Darboux).

Пусть стороны шестиугольника A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 изображаются соответственно уравнениями:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

стороны же A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1 изображаются соответственно уравнениями:

$$\alpha' = 0, \qquad \beta' = 0, \qquad \gamma' = 0;$$

наконец предположим, что уравнение хорды A_3A_6 будет:

$$\delta = 0.$$

Данная кривая 2-го порядка s описана около четырехугольника $A_6A_1A_2A_3$, поэтому ее уравнение может быть написано в виде:

$$\alpha\delta + \beta\gamma' = 0,$$

та же кривая описана около четырехугольника $A_3A_4A_5A_6$, поэтому ее уравнение может быть написано в виде:

$$\alpha'\delta + \beta'\gamma = 0.$$

Если два указанных уравнения изображают одну и ту же линию, то левые их части тождественно равны (считая множитель пропорциональности сведенным к единице):

$$\alpha\delta+\beta\gamma'\equiv\alpha'\delta+\beta'\gamma$$

или

$$(\alpha-\alpha')\,\delta\equiv\beta'\gamma-\beta\gamma';$$

последнее тождество обозначает, что два уравнения:

$$(\alpha-\alpha')\,\delta=0,$$
$$\beta'\gamma-\beta\gamma'=0$$

изображают одну и ту же линию, распадающуюся на пару прямых

$$\alpha-\alpha'=0,$$
$$\delta=0.$$

Линия, изображаемая уравнением

$$\beta\gamma'-\beta'\gamma=0,$$

содержит четыре точки:

$$\begin{array}{lll} \beta=0, & \gamma=0, & (A_3) \\ \gamma'=0, & \beta'=0, & (A_6) \\ \beta=0, & \beta'=0, & (Q) \\ \gamma'=0, & \gamma=0; & (R) \end{array}$$

две первых из них лежат на прямой $\delta=0$, следовательно, две последних лежат на прямой

$$\alpha-\alpha'=0,$$

содержащей также точку P. Итак, доказано, что три точки P, Q, R лежат на одной прямой.

Теоремой Паскаля можно воспользоваться для построения любого числа точек линии 2-го порядка по пяти заданным ее точкам.

В самом деле, предположим, что нам даны пять точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, принадлежащих линии 2-го порядка; построим точку P пересечения прямых A_1A_2 и A_4A_5; затем через точку P проведем *какую-нибудь* прямую, и пусть последняя пересекает прямые A_2A_3 и A_3A_4 соответственно в точках Q и R; если мы теперь проведем прямые QA_5 и RA_1, то они пересекутся в некоторой точке A_6, принадлежащей по теореме Паскаля той линии 2-го порядка, которая определяется пятью заданными точками A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Указанное построение требует лишь проведения прямых и может быть, следовательно, выполнено с помощью только линейки.

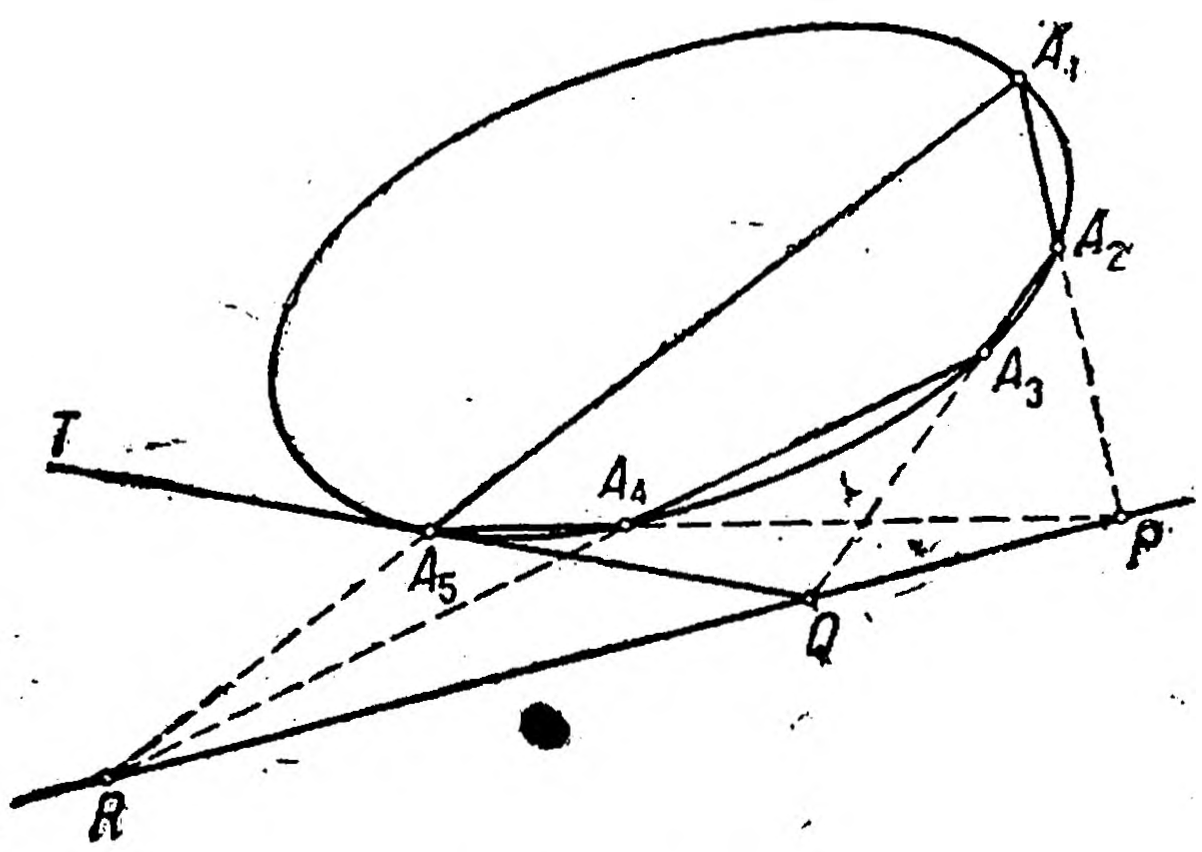
Рассмотрим теперь некоторые, так сказать, вырождения теоремы Паскаля, когда одна пара вершин шестиугольника или две или три сливаются. Если одна точка кривой неограниченно приближается к другой, то соответствующая хорда, их соединяющая, стремится к определенному положению, именно к положению касательной в неподвижной точке; этим соображением мы будем руководствоваться при рассмотрении специальных случаев теоремы Паскаля. В шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, вписанном в кривую, три пары противоположных сторон пересекаются в соответственных точках P, Q, R, а именно:

$$\begin{array}{lll} A_1A_2, & A_4A_5 & (P) \\ A_2A_3, & A_5A_6, & (Q) \\ A_3A_4, & A_6A_1. & (R) \end{array}$$

Предположим, что точка A_6 стремится к совпадению с точкой A_5; тогда сторона A_5A_6 будет приближаться к касательной A_5T к кривой в точке A_5, и в пределе для пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ мы получим такую схему:

$$\begin{array}{lll} A_1A_2, & A_4A_5 & (P) \\ A_2A_3, & A_5T, & (Q) \\ A_3A_4, & A_5A_1. & (R) \end{array}$$

Следовательно, две пары несмежных сторон вписанного в кривую 2-го порядка пятиугольника пересекаются в двух точках, лежащих на одной прямой с точкой пересечения пятой стороны и касательной в противоположной вершине (черт. 183).



Черт. 183.

Когда даны пять точек на кривой, то с помощью указанной теоремы можно построить касательную в любой из этих пяти точек. Положим, мы желаем найти касательную в точке A_5. Пусть прямые A_1A_2 и A_4A_5 пересекаются в точке P, а прямые A_3A_4 и A_5A_1 — в точке R; соединим эти две точки прямою PR и пусть она прямую A_2A_3 пересекает в точке Q; тогда, очевидно, прямая QA_5 и будет касательною в точке A_5 к кривой, заданной пятью точками.

Предположим теперь, что мы имеем четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, вписанный в данную кривую; две его, например, противоположных вершины A_1 и A_3 можно рассматривать как точки, в которых совпали по две ближайших из шести вершин вписанного в кривую шестиугольника; тогда сторонами, дополняющими данный четырехугольник до шестиугольника, будут касательные A_1T_1 и A_3T_3 в этих точках A_1 и A_3. Пусть эти касательные пересекаются в точке R, а пары противоположных сторон четыреугольника A_1A_2 и A_3A_4, A_2A_3 и A_4A_1 пересекаются соответственно в точках P и Q (черт. 184). Тогда для нашего шестиугольника мы имеем схему:

$$\begin{array}{lll} A_1A_2, & A_3A_4, & (P) \\ A_2A_3, & A_4A_1, & (Q) \\ A_3T_3, & A_1T_1, & (R) \end{array}$$

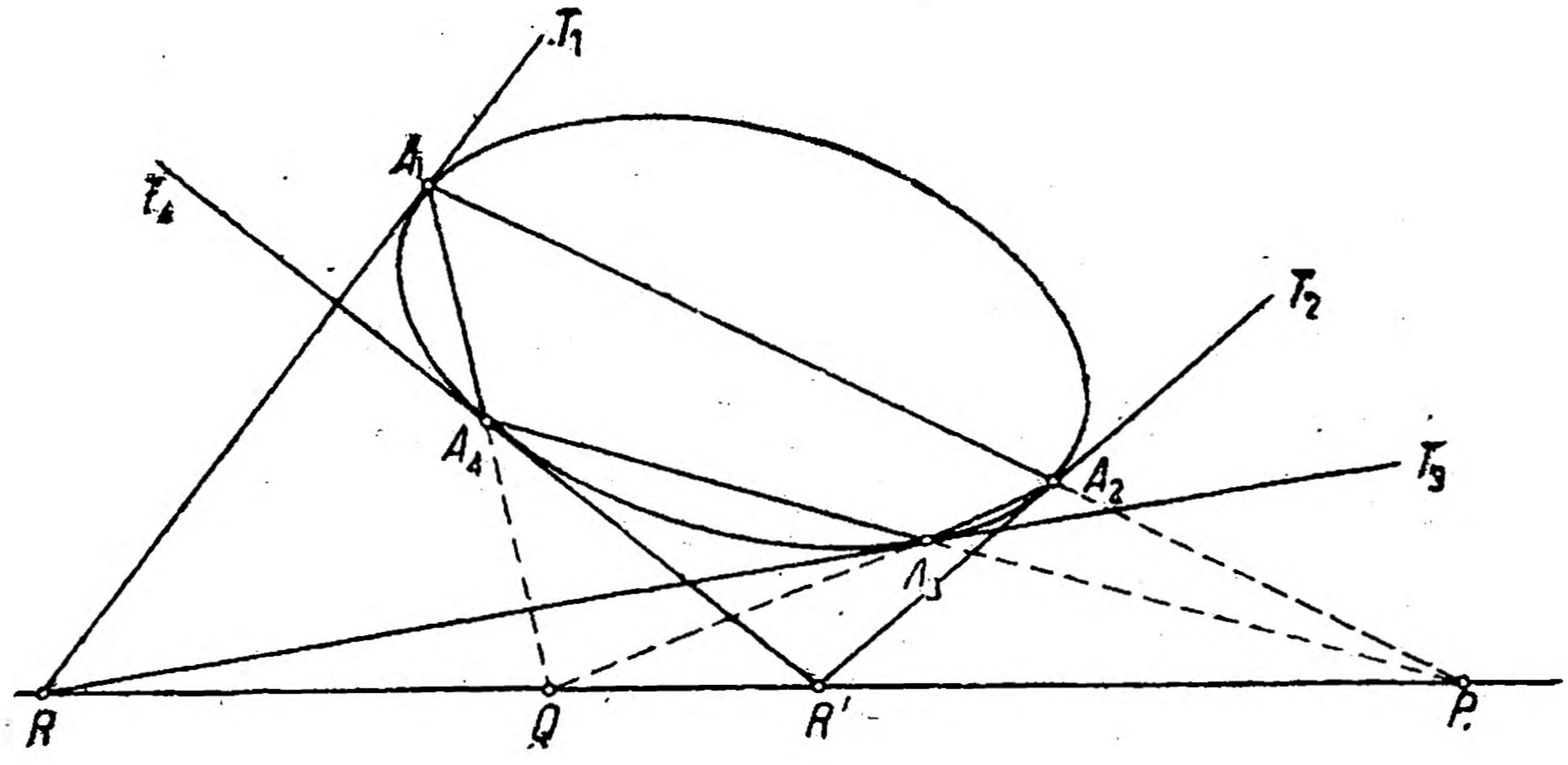
и три точки P, Q, R лежат на одной прямой.

С другой стороны, для того же четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ можно вершины A_2 и A_4 рассматривать как точки, в которых совпали по две из вершин шестиугольника; в этом случае сторонами, дополняющими данный четырехугольник до шестиугольника, будут касательные A_2T_2 и A_4T_4 в этих точках A_2 и A_4.

Схема последнего шестиугольника будет:

$$\begin{array}{lll} A_1A_2, & A_3A_4 & (P) \\ A_2A_3, & A_4A_1, & (Q) \\ A_2T_2, & A_4T_4 & (R') \end{array}$$

и три точки P, Q, R' лежат на одной прямой.



Черт. 184.

Из сказанного следует, что четыре точки P, Q, R, R' лежат на одной прямой.

Таким образом в четырехугольнике, вписанном в кривую 2-го порядка, противоположные стороны и касательные в противоположных вершинах пересекаются между собой в четырех точках, лежащих на одной прямой.

Наконец, предположим, что нам дан треугольник $A_1A_2A_3$, вписанный в кривую 2-го порядка. Каждую из вершин этого треугольника можно рассматривать как точку, в которой совпали две из вершин шестиугольника; сторонами, дополняющими данный треугольник до шестиугольника, будут касательные к кривой A_1T_1, A_2T_2, A_3T_3 в вершинах треугольника, причем касательная A_1T_1 будет стороной шестиугольника, противоположной стороне A_2A_3, и т. д.

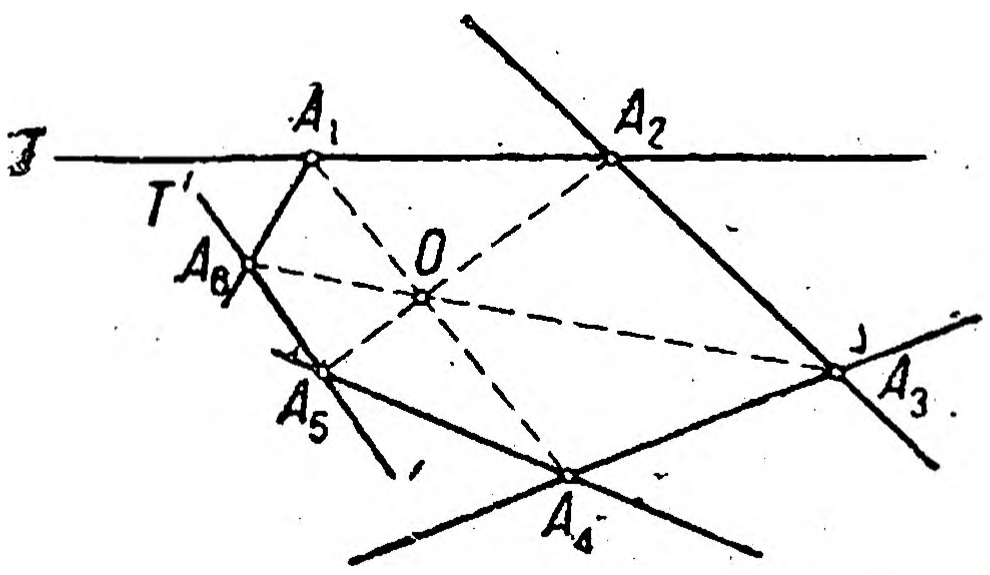
Поэтому мы можем сказать: в треугольнике, вписанном в кривую 2-го порядка, пересечения каждой из сторон с касательной в противоположной вершине дают три точки, лежащие на одной прямой.

Теорема Паскаля говорит об относительном расположении некоторых точек и прямых, связанных с кривою 2-го порядка, поэтому по принципу двойственности ей будет соответствовать коррелятивная теорема о расположении прямых и точек, связанных с кривою 2-го класса, — теорема, которую мы получим из теоремы Паскаля, переменив в ней роли точек и прямых.

Кривая 2-го класса, как известно, является кривою 2-го порядка, поэтому теорема, взаимная теореме Паскаля (она называется теоремой Брианшона), будет относиться также к кривой 2-го порядка. Если в теореме Паскаля обменять роли прямых и точек, то мы получим, очевидно, следующее предложение: *во всяком шестистороннике, описанном около кривой 2-го порядка, три диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке* (теорема Брианшона).

Для получения теоремы Брианшона из теоремы Паскаля можно воспользоваться методом взаимных поляр (методом Понселе). Возьмем фигуру Паскаля и построим ей коррелятивную фигуру, именно заменим каждую точку или прямую первой фигуры соответствующими им полярой и полюсом относительно заданной кривой 2-го порядка; при этом, как было доказано, инцидентность элементов первой фигуры сохраняется для фигуры коррелятивной.

Полярами точек, лежащих на кривой 2-го порядка, т. е. вершин шестиугольника Паскаля, будут касательные к кривой в этих точках; поэтому шестиугольник, вписанный в кривую, при полярном преобразовании обратится в шестисторонник, описанный около той же кривой.



Черт. 185.

Сторонам шестиугольника Паскаля будут соответствовать вершины (их полюсы) шестисторонника описанного; точкам пересечения противоположных сторон шестиугольника Паскаля будут соответствовать их поляры, т. е. прямые, соединяющие противоположные вершины шестисторонника (диагонали). Наконец, прямой Паскаля, содержащей три точки пересечения противоположных сторон, будет соответствовать ее полюс, через который должны проходить прямые, соединяющие противоположные вершины шестисторонника. Так полярным преобразованием из теоремы Паскаля получается теорема Брианшона.

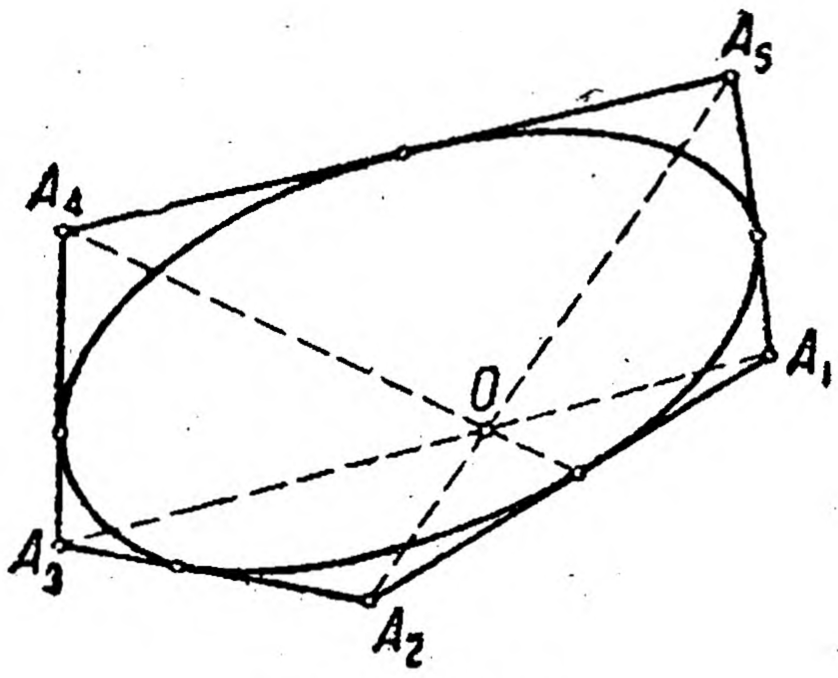
Теорема Брианшона дает возможность с помощью простого построения находить сколько угодно касательных к кривой 2-го класса, когда даны ее пять касательных.

Положим, нам даны (черт. 185) пять касательных TA_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5T', причем точки A_2, A_3, A_4, A_5 будут точками пересечения пар последовательных касательных. На касательной TA_2 возьмем *какую-нибудь* точку A_1 и соединим ее с точкой A_4; пусть точка O будет пересечением прямых A_1A_4 и A_2A_5; проведя прямую A_3O до пересечения в некоторой точке A_6 с касательной A_5T', мы затем построим и шестую касательную к кривой, соединив точки A_1 и A_6. Меняя точку A_1 на первой касательной TA_2, мы получим любое число касательных к кривой, определяемой пятью заданными касательными.

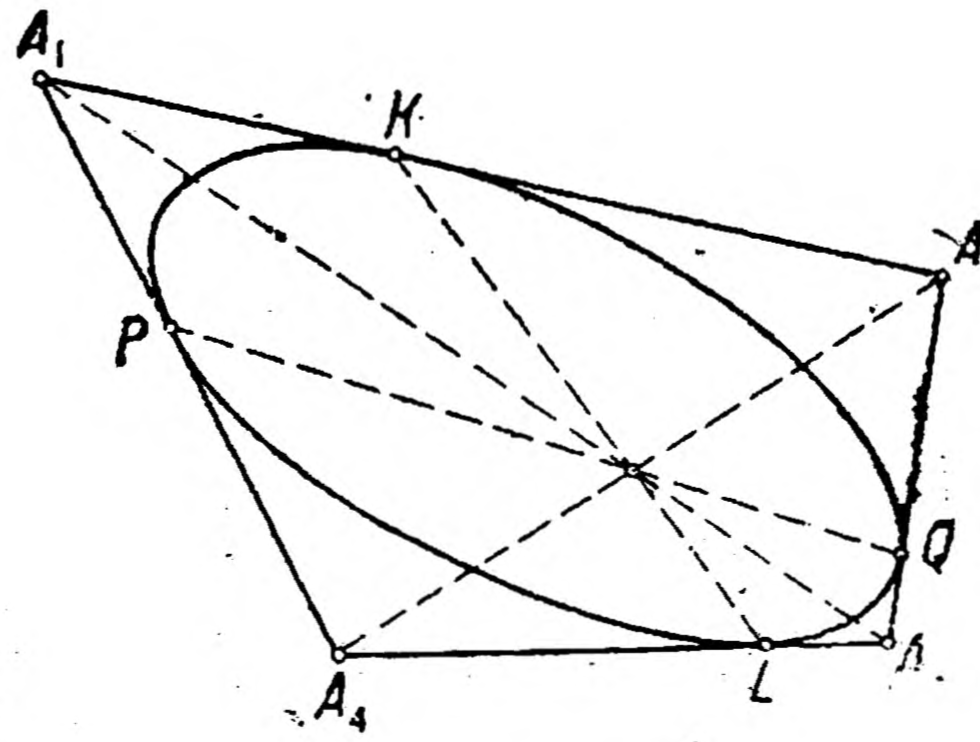
Когда две касательных к кривой неограниченно сближаются, то сближаются их точки прикосновения, а на плавной выпуклой кривой, каковою является кривая 2-го порядка, точки прикосновения касательных, очевидно, сближаются и с точкою их пересечения. Таким образом мы можем принять, что при неограниченном сближении касательных точки их касания и точка пересечения самих касательных стремятся к совпадению в точке прикосновения одной из касательных, остающейся неподвижною.

Пользуясь этим соображением, мы можем получить предельные случаи теоремы Брианшона, предполагая, что две касательных, четыре или даже шесть сливаются по две.

Пусть мы имеем пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$, описанный около кривой; мы можем предполагать, что его сторона A_1A_2 представляет собою две слившихся касательных, тогда точка прикосновения этой касательной



Черт. 186.

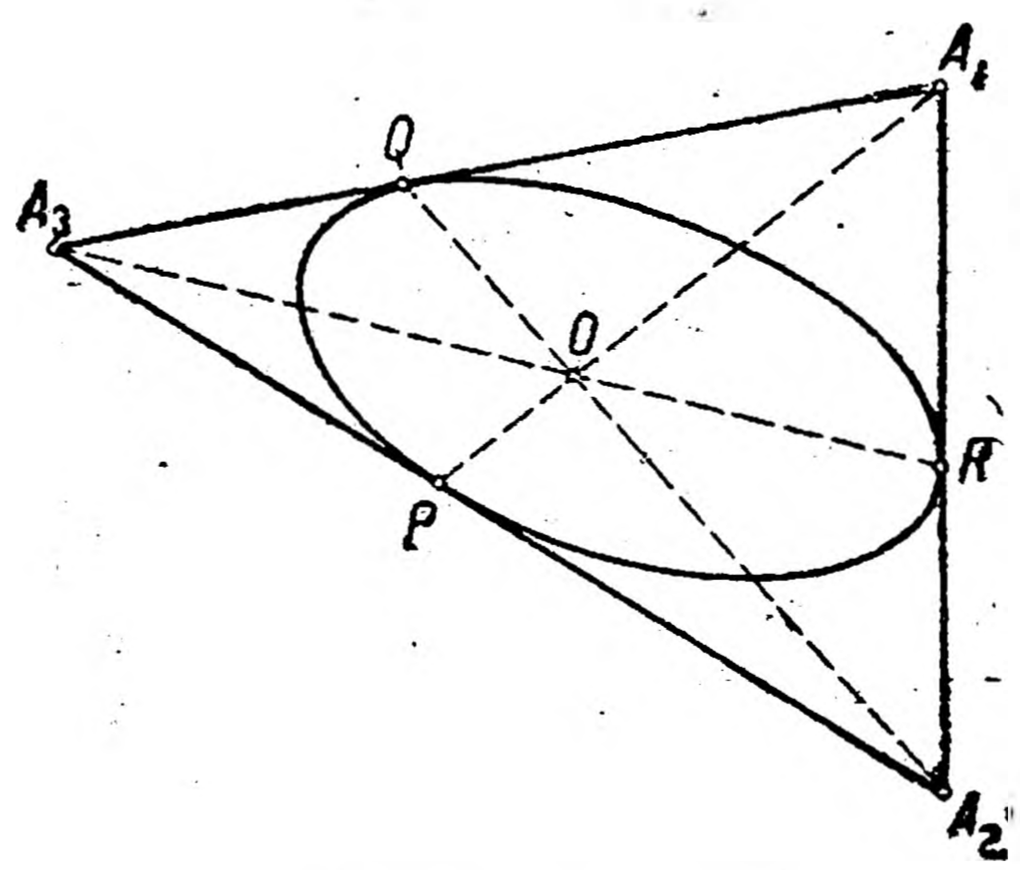


Черт. 187.

и будет шестою вершиною описанного шестиугольника. Поэтому прямая, соединяющая одну из вершин пятиугольника с точкою касания противоположной стороны, и две диагонали, соединяющие остальные несмежные вершины по две, пересекутся в одной точке (черт. 186).

Возьмем далее четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, описанный около кривой, и пусть K, Q, L, P будут его точки касания (черт. 187).

Будем считать, что каждая из двух сторон A_1A_4 и A_2A_3 представляет собой пару слившихся касательных. В таком случае сторонами описанного шестиугольника будут A_1A_2, A_2A_3, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, A_4A_1; пересечения двух смежных сторон дадут вершины шестиугольника A_2, Q, A_3, A_4, P, A_1, его диагоналями будут A_2A_4, QP, A_3A_1; эти диагонали должны сходиться в одной точке.



Черт. 188.

Но мы могли бы также считать каждую из сторон A_1A_2 и A_3A_4 за пары слившихся касательных, тогда прямые A_2A_4, A_1A_3, KL, соединяющие точки касания сторон A_1A_2, A_3A_4, должны сходиться в одной точке, той же точке, как и в первом случае.

Следовательно, в четырехугольнике, описанном около кривой 2-го порядка, две диагонали и две прямых, соединяющих точки прикосновения противоположных сторон, все пересекаются в одной точке.

Наконец, возьмем треугольник $A_1A_2A_3$, описанный около кривой, и пусть P, Q, R (черт. 188) будут точками касания его соответственно противоположных сторон. Каждую из сторон треугольника можно рассматривать как две слившихся касательных; вершинами описанного шестиугольника будут

$$A_1,\ R,\ A_2,\ P,\ A_3,\ Q.$$

Поэтому во всяком треугольнике, описанном около кривой 2-го порядка, три прямых, соединяющих вершины с точками касания противолежащих сторон, сходятся в одной точке.

Теорему об описанном пятиугольнике, очевидно, можно использовать для нахождения точки касания любой из его сторон. Равным образом каждый из предельных случаев теоремы Брианшона можно использовать для построения любого числа касательных к кривой 2-го порядка, когда последняя определяется не пятью касательными, а четырьмя касательными и точкой прикосновения одной из них или тремя касательными и точками прикосновения двух из них.

Упражнения. 896. *Способ проекций.* Центральной проекцией какой-либо фигуры называется сечение плоскостью системы прямых, соединяющих какую-либо точку пространства с точками данной фигуры. Нетрудно видеть, что: 1) всякая точка проектируется точкою, 2) всякая прямая проектируется прямою, 3) отношения инцидентности точек и прямых сохраняются при проектировании. Далее, всякая плоская кривая проектируется кривою того же порядка; в частности, так как конус 2-го порядка имеет всегда круговые сечения, то можно сказать, что всякая кривая 2-го порядка может быть получена центральной проекцией окружности.

Свойства фигуры, общие всем ее проекциям, называются проективными свойствами фигуры; для доказательства проективных свойств фигуры достаточно доказать эти свойства для наиболее простой проекции этой фигуры.

Например, если взять правильный шестиугольник, вписанный в круг, то пары его противоположных сторон будут пересекаться в трех точках, лежащих на одной прямой (бесконечно удаленной); проектированием этой фигуры можно получить теорему Паскаля для любой кривой 2-го порядка; таким же методом может быть получена теорема Брианшона.

4. Фокусы кривых 2-го порядка.

Все три типа кривых 2-го порядка: эллипсы, гиперболы, параболы могут быть, как известно, определены одним и тем же геометрическим свойством, а именно: кривая 2-го порядка есть геометрическое место точек, для каждой из которых отношение расстояния от заданной точки (фокуса) и от заданной прямой (директрисы) постоянно; указанное отношение называется эксцентриситетом кривой.

Пусть данная точка F (фокус) имеет координаты x_0, y_0, а уравнение заданной прямой (директрисы):

$$Ax + By + C = 0;$$

тогда геометрическое место точек, удовлетворяющих упомянутому условию:

$$\frac{MF}{MD} = e,$$

будет изображаться уравнением:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = e\,\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (12)$$

или уравнением:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=a_1x+b_1y+c_1, \tag{12'}$$

если принять:

$$\frac{eA}{\sqrt{A^2+B^2}}=a_1, \quad \frac{eB}{\sqrt{A^2+B^2}}=b_1, \quad \frac{eC}{\sqrt{A^2+B^2}}=c_1.$$

Расстояние какой-либо точки плоскости $M_1(x_1;\ y_1)$ до точки $M(x;\ y)$ кривой 2-го порядка:

$$MM_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

будет вообще иррациональной функцией координат x, y, но если за точку M_1 взять фокус $F(x_0;\ y_0)$ кривой, то, как показывает уравнение (12′), это расстояние будет рациональной функцией текущих координат точек кривой. Именно это свойство фокуса может быть взято за его определение, и следовательно, мы скажем: фокусом кривой 2-го порядка называется такая точка плоскости, расстояние которой до любой точки кривой есть целая рациональная (линейная) функция координат точки кривой (определение Эйлера).

Упражнения. 897. Найти фокусы эллипса по его каноническому уравнению, пользуясь определением Эйлера.

898. Указанным выше приемом найти фокусы гиперболы.

899. Тем же способом найти четыре фокуса параболы.

Уравнение (12′) освобождением от радикала может быть преобразовано к виду:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(a_1x+b_1y+c_1)^2; \tag{12''}$$

уравнение

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0 \tag{13}$$

изображает круг нулевого радиуса; его четыре точки пересечения с кривой 2-го порядка, изображаемой уравнением (12″), лежат на сдвоенной прямой:

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2=0,$$

следовательно, сливаются по две. Итак, уравнение (12″) можно истолковать следующим образом: *фокус кривой 2-го порядка есть центр окружности нулевого радиуса, имеющей с кривой касание в двух точках*; *прямая, соединяющая точки прикосновения (хорда касания), является директрисой*, соответствующей выбранному фокусу.

Уравнение (13) изображает также две изотропных прямых; эти прямые, встречая кривую (12″) в четырех точках, совпадающих по две, касаются кривой; таким образом фокус будет также точкою пересечения изотропных касательных кривой.

Упражнения. 900. Найти изотропные касательные эллипса, заданного своим каноническим уравнением, а затем фокусы как точки пересечения этих касательных (различных направлений).

Кривые 2-го порядка, имеющие общие фокусы, называются софокусными или конфокальными.

Если нам даны две точки F и F' на конечном расстоянии, которые принимаются за фокусы, то конфокальными кривыми могут быть только эллипсы или гиперболы, но не параболы, так как последние имеют лишь один фокус на конечном расстоянии. Легко видеть, что через каждую точку M плоскости проходят две кривых, имеющих точки F и F' фокусами, один эллипс и одна гипербола; в самом деле, если точка M дана, MF и MF' известны, то мы можем принять или

$$F'M + MF = 2a, \quad a^2 - b^2 = \left(\frac{FF'}{2}\right)^2 \tag{14}$$

или же

$$F'M - MF = 2a, \quad a^2 + b^2 = \left(\frac{FF'}{2}\right)^2. \tag{14'}$$

В первом случае мы найдем полуоси эллипса, проходящего через точку M, во втором случае найдутся полуоси гиперболы, проходящей через ту же точку.

Касательная в точке M к эллипсу одинаково наклонена к фокальным радиусам-векторам этой точки и является внешней равноделящей их угла; касательная к гиперболе в той же точке M будет внутренней равноделящей угла фокальных расстояний $F'M$ и MF; отсюда следует, что в точке M касательные к эллипсу и гиперболе между собой ортогональны. Такие две кривые, касательные к которым в общей точке линий взаимно перпендикулярны, называются ортогональными кривыми.

Соотношения (14) или (14′) показывают, что, когда выбрано $2a$, другая полуось определяется через расстояние фокусов, иначе говоря, две заданные точки F и F' могут быть фокусами бесчисленного множества кривых, зависящих от одного параметра ($2a$); в этом случае говорят, что мы имеем семейство кривых, зависящее от одного параметра.

Итак, кривые 2-го порядка с общими двумя фокусами (конфокальные) образуют семейство эллипсов и гипербол; через каждую точку плоскости проходит один эллипс и одна гипербола, ортогональные между собой; все эти линии (с заданными фокусами) образуют на плоскости ортогональную сеть, которая может быть принята за координатную сеть, и тогда положение каждой точки будет определяться пересечением определенного эллипса и определенной гиперболы.

Положим, нам дается некоторый основной эллипс, уравнение которого:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{15}$$

Чтобы получить кривые, ему софокусные, мы должны изменить квадраты полуосей так, чтобы разность между ними сохраняла прежнее значение; для этого, очевидно, достаточно квадраты полуосей данного эллипса увеличить на одну и ту же произвольную величину λ; в самом деле,

$$(a^2 + \lambda) - (b^2 + \lambda) = a^2 - b^2.$$

Итак, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} - 1 = 0 \tag{16}$$

будет изображать при переменном λ семейство кривых, софокусных с данным эллипсом (15); при $\lambda = 0$ оно дает нам уравнение первоначального эллипса (15).

Положим, нам дана какая-либо точка $M(x;\ y)$; чтобы установить, какие из софокусных линий проходят через эту точку, мы должны решить уравнение (16), считая x и y заданными. Освобождаясь в нем от знаменателей, мы получим квадратное уравнение:

$$x^2(b^2+\lambda)+y^2(a^2+\lambda)-(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)=0. \qquad (17)$$

Можно было бы легко решить это уравнение, однако мы исследуем его корни другим способом, применимым в более общем случае при изучении конфокальных поверхностей 2-го порядка.

Обозначим левую часть уравнения (17) через $f(\lambda)$, так что

$$f(\lambda) \equiv x^2(b^2+\lambda)+y^2(a^2+\lambda)-(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)=0; \qquad (17')$$

и предположим в дальнейшем, что $a^2 > b^2$. Принимая различные предположения относительно значений λ, мы увидим, что трехчлен $f(\lambda)$ имеет разные знаки, указываемые следующей таблицей:

$$\begin{array}{ll} \lambda = -a^2 & f(\lambda) = x^2(b^2-a^2) < 0, \\ \lambda = -b^2 & f(\lambda) = y^2(a^2-b^2) > 0, \\ \lambda = \infty & f(\lambda) = -\infty \qquad\quad < 0. \end{array}$$

Итак, наш трехчлен меняет знаки в двух случаях: когда λ переходит от значения $\lambda = -a^2$ к значению $\lambda = -b^2$ и когда оно переходит от значения $\lambda = -b^2$ к значению $\lambda = \infty$. Это обстоятельство указывает, что в этих двух промежутках трехчлен обращается в нуль, т. е. уравнение (17) имеет два действительных корня, один λ_1 в интервале:

$$-a^2 < \lambda_1 < -b^2$$

и другой λ_2 в интервале:

$$-b^2 < \lambda_2 < \infty.$$

Итак, через данную точку $M(x;\ y)$ проходят две действительных кривых из семейства (16). Но легко видеть, что

$$\begin{array}{ll} a^2+\lambda_1 > 0, & b^2+\lambda_1 < 0, \\ a^2+\lambda_2 > 0, & b^2+\lambda_2 > 0, \end{array}$$

следовательно, кривая

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}-1=0$$

будет гиперболой, а кривая

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}-1=0$$

будет эллипсом.

Проследим, как изменяется кривая, изображаемая уравнением (16), когда параметр λ принимает всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Если $\lambda < -a^2$, тогда

$$a^2+\lambda < 0, \quad b^2+\lambda < 0,$$

и уравнение (16) не будет изображать действительной кривой; когда $-a^2 < \lambda < -b^2$, то

$$a^2+\lambda > 0, \quad b^2+\lambda < 0,$$

и уравнение (16) изображает гиперболу; при $\lambda = -a^2$ мы, освобождаясь в уравнении (16) от знаменателей, получим:

$$x^2(b^2-a^2)=0,$$

т. е. оно будет изображать сдвоенную ось y как предел гипербол, действительная ось которых неограниченно убывает. Если $\lambda > -b^2$, то

$$a^2+\lambda > 0, \quad b^2+\lambda > 0,$$

и уравнение (16) будет давать эллипсы. Наконец, при $\lambda = -b^2$ уравнение (16) примет вид:

$$y^2(a^2-b^2)=0$$

и будет изображать сдвоенную ось x-ов; этот случай можно рассматривать как предельный случай гипербол, действительная ось которых растет от нуля до $\sqrt{a^2-b^2}$, и тогда мы получим сдвоенную ось x-ов за исключением отрезка между фокусами; или же его можно рассматривать как предельный случай эллипсов, действительная ось которых убывает до величины $\sqrt{a^2-b^2}$, и тогда мы получим сдвоенный отрезок между фокусами.

Вернемся теперь к квадратному (относительно λ) трехчлену $f(\lambda)$; такой трехчлен может быть разложен в произведение старшего коэфициента и разностей между переменным λ и корнями трехчлена; следовательно, мы имеем тождество:

$$x^2(b^2+\lambda)+y^2(a^2+\lambda)-(a^2+\lambda)(b^2+\lambda) \equiv -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2). \quad (18)$$

Положим в этом тождестве сначала $\lambda = -a^2$, затем $\lambda = -b^2$, тогда

$$x^2(b^2-a^2) = -(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2),$$
$$y^2(a^2-b^2) = -(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}{a^2-b^2}, \\ y^2 &= -\frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{a^2-b^2}; \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

здесь правые части обе положительны в силу сделанных выше замечаний относительно значений λ_1 и λ_2.

Формулы (19) дают выражения для декартовых координат точки M по параметрам λ_1 и λ_2 тех конфокальных кривых (эллипса и гиперболы), которые пересекаются в этой точке; таким образом эти формулы служат для перехода от так называемых эллиптических координат λ_1 и λ_2 к обыкновенным декартовым x и y.

Соотношения (19) определяют лишь квадраты декартовых координат, поэтому для каждой пары значений λ_1 и λ_2 (причем $-a^2 < \lambda_1 < -b^2$, $-b^2 < \lambda_2 < \infty$) мы получим по четыре точки, как и следовало ожидать, так как две кривых 2-го порядка пересекаются в четырех точках. Если значения λ_1 и λ_2 будут вне указанных пределов, то соответствующие точки пересечения координатных линий будут мнимыми.

Пусть нам даны две точки F и F' и какая-нибудь линия 2-го порядка C, имеющая эти точки фокусами; как было указано, из фокусов можно провести к кривой C две изотропных касательных, которые пересекутся по две в некоторых точках Φ и Φ', не считая двух циклических бесконечно удаленных точек; точки Φ и Φ' дадут вторую пару фокусов кривой C, ибо из каждой из них к кривой C имеется опять по две изотропных касательных. Все кривые, конфокальные с кривой C, будут иметь с ней четыре общих изотропных касательных; поэтому семейство конфокальных линий 2-го порядка можно рассматривать как семейство линий, вписанных в данный четырехугольник, составленный из изотропных прямых.

Упражнения. 901. Тангенциальное уравнение семейства софокусных эллипсов и гипербол будет [см. уравнение (45) гл. XII]:

$$(a^2+\lambda)u^2+(b^2+\lambda)v^2-w^2=0$$

или

$$a^2u^2+b^2v^2-w^2+\lambda(u^2+v^2)=0. \qquad (\alpha)$$

Замечание. Предыдущее уравнение прямо показывает, что оно изображает семейство линий, конфокальных с эллипсом

$$a^2u^2+b^2v^2-w^2=0;$$

действительно, уравнение

$$u^2+v^2=0$$

изображает два пучка изотропных прямых, именно, пучок параллельных изотропных прямых с угловым коэфициентом i и пучок параллельных изотропных прямых с угловым коэфициентом $-i$. Поэтому уравнение (α) изображает семейство линий 2-го порядка, имеющих общие изотропные касательные с данным эллипсом, т. е. семейство линий с ним софокусных.

902. Возьмем две софокусных линии:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda'}+\frac{y^2}{b^2+\lambda'}-1=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2+\lambda''}+\frac{y^2}{b^2+\lambda''}-1=0;$$

эти уравнения выполняются одновременно для координат их точек пересечения. Вычитая из первого уравнения почленно второе, мы получим опять соотношение, удовлетворяющееся для координат точек пересечения взятых линий, именно соотношение:

$$\frac{x}{a^2+\lambda'}\cdot\frac{x}{a^2+\lambda''}+\frac{y}{b^2+\lambda''}\cdot\frac{y}{b^2+\lambda''}=0.$$

Но это последнее условие обозначает, что касательные к двум выбранным линиям в их общей точке взаимно перпендикулярны.

903. Пусть нам дана парабола своим уравнением в декартовых координатах:

$$y^2-2px=0,$$

тогда ее тангенциальное уравнение будет:

$$pv^2 - 2uw = 0;$$

поэтому уравнение семейства софокусных парабол будет:

$$pv^2 - 2uw + \lambda(u^2 + v^2) = 0.$$

Уравнение софокусных парабол в декартовых координатах будет:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & x \\ 0 & \lambda + p & 0 & y \\ -1 & 0 & 0 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$y^2 - 2(\lambda + p)\left(xz + \frac{\lambda}{2} z^2\right) = 0.$$

Через каждую точку плоскости проходят две параболы этого семейства, пересекаясь между собой под прямым углом.

5. Шар и его свойства.

Общее уравнение шара радиуса r с центром в точке $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ относительно косоугольной системы будет:

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 + 2(y-\beta)(z-\gamma)\omega_1 + \\ + 2(z-\gamma)(x-\alpha)\omega_2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\omega_3 - r^2 = 0\end{aligned} \tag{20}$$

или в прямоугольной системе:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - r^2 = 0. \tag{20'}$$

Общее уравнение 2-й степени относительно декартовых координат x, y, z:

$$\begin{aligned}a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0\end{aligned} \tag{21}$$

будет изображать шар, если оно окажется тождественным с уравнением (20), т. е. если их коэфициенты при соответствующих членах будут пропорциональны:

$$\begin{aligned}\frac{a_{11}}{1} = \frac{a_{22}}{1} = \frac{a_{33}}{1} = \frac{a_{23}}{\omega_1} = \frac{a_{31}}{\omega_2} = \frac{a_{12}}{\omega_3} = \frac{a_{14}}{-\alpha - \beta\omega_3 - \gamma\omega_2} = \\ = \frac{a_{24}}{-\alpha\omega_3 - \beta - \gamma\omega_1} = \frac{a_{34}}{-\alpha\omega_2 - \beta\omega_1 - \gamma} = \\ = \frac{a_{44}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\omega_1 + 2\gamma\alpha\omega_2 + 2\alpha\beta\omega_3 - r^2}.\end{aligned}$$

Эти соотношения распадаются на две группы; первая из них

$$\frac{a_{11}}{1} = \frac{a_{22}}{1} = \frac{a_{33}}{1} = \frac{a_{23}}{\omega_1} = \frac{a_{31}}{\omega_2} = \frac{a_{12}}{\omega_3} \tag{22}$$

содержит лишь коэфициенты общего уравнения 2-й степени и, следовательно, представляет собою совокупность условий, выполнение которых необходимо и достаточно, чтобы общее уравнение (21) изображало шар. Что касается уравнений второй группы:

$$\frac{a_{11}}{1}=\frac{a_{14}}{-\alpha-\beta\omega_3-\gamma\omega_2}=\frac{a_{24}}{-\alpha\omega_3-\beta-\gamma\omega_1}=\frac{a_{34}}{-\alpha\omega_2-\beta\omega_1-\gamma}=$$
$$=\frac{a_{44}}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\omega_1+2\gamma\alpha\omega_2+2\alpha\beta\omega_3-r^2}, \qquad (23)$$

то здесь имеются четыре уравнения, вполне достаточных для определения по коэфициентам общего уравнения (21) координат центра шара и радиуса, если условия (22) выполнены.

Заметим, что в трех первых уравнениях системы (23) определителем из коэфициентов при α, β, γ будет определитель Ω из косинусов координатных углов, отличный от нуля; стало быть, относительно α, β, γ система во всяком случае (при $a_{11} \neq 0$) имеет конечные решения; равным образом в конечном виде определится и r^2 из четвертого уравнения этой системы (опять при $a_{11} \neq 0$).

Если уравнение (21) дано относительно прямоугольной системы, то условия (22) примут вид:

$$\frac{a_{11}}{1}=\frac{a_{22}}{1}=\frac{a_{33}}{1}=\frac{a_{23}}{0}=\frac{a_{31}}{0}=\frac{a_{12}}{0}$$

или

$$\begin{gathered} a_{11}=a_{22}=a_{33}, \\ a_{23}=a_{31}=a_{12}=0, \end{gathered} \qquad (22')$$

и можно сказать: *общее уравнение 2-й степени относительно прямоугольных декартовых координат x, y, z изображает шар, если коэфициенты при квадратах координат равны между собой, и члены с парными произведениями координат отсутствуют.*

На основании сказанного нетрудно сообразить, что условие того, что общее уравнение (21) изображает шар (в любой системе декартовых координат), можно формулировать и так: характеристическое уравнение имеет все три корня равных.

Уравнение шара вида (20) или (20′), т. е. когда каждый из коэфициентов при квадратах координат равен единице, будем называть нормальным уравнением шара и левую его часть условимся обозначать через C. Так как группа членов

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+2(y-\beta)(z-\gamma)\omega_1+$$
$$+2(z-\gamma)(x-\alpha)\omega_2+2(x-\alpha)(y-\beta)\omega_3$$

для любой точки M пространства с координатами (x; y; z) дает квадрат расстояния этой точки от центра шара, то левая часть нормального уравнения шара для любой точки (x; y; z) будет иметь значение:

$$C \equiv MO^2-r^2,$$

т. е. будет давать квадрат длины касательной из точки M к шару:

$$C=MT^2. \qquad (24)$$

Возьмем полярное уравнение шара (21) с полюсом в точке $M(x; y; z)$:

$$M\rho^2 + 2N\rho + R = 0,$$

где

$$M = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl + 2a_{12}lm,$$
$$R = 2F(x, y, z).$$

Коэфициент M при условиях (22) примет вид:

$$M = a_{11}(l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\omega_1 + 2nl\omega_2 + 2lm\omega_3)$$

или просто

$$M = a_{11},$$

так как нормированные угловые коэфициенты l, m, n удовлетворяют условию:

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\omega_1 + 2nl\omega_2 + 2lm\omega_3 = 1.$$

Пусть луч произвольного направления $(l : m : n)$, проходящий через точку M, пересекает поверхность шара в двух точках M' и M''; тогда произведение корней приведенного выше полярного уравнения шара будет:

$$MM' \cdot MM'' = \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{R}{M}$$

или

$$MM' \cdot MM'' = \frac{2F(x, y, z)}{a_{11}};$$

здесь левая часть уравнения шара, в которую подставлены координаты точки M, делится на старший коэфициент a_{11}, следовательно, результат будет равен левой части нормированного уравнения шара. Итак, независимо от направления выбранного луча, проведенного через точку M, мы имеем:

$$C = MT^2 = MM' \cdot MM'', \tag{24'}$$

т. е. левая часть нормального уравнения шара, в которую подставлены координаты любой точки пространства, дает либо квадрат касательной, проведенной к шару из выбранной точки, либо произведение расстояний от выбранной точки до точек пересечения с шаром луча любого направления, проведенного через заданную точку. Если точка M — внутри шара, то для ее координат левая часть C уравнения шара будет отрицательна; действительной касательной из этой точки к шару провести будет нельзя, однако для выражения C остается другое реальное геометрическое истолкование как величины, дающей произведение отрезков MM' и MM'' (в этом случае противоположных знаков, раз точка M — между точками M' и M'').

Произведение отрезков (любого направления) $MM' \cdot MM''$, равное левой части нормального уравнения шара, называется *степенью точки M* относительно данного шара.

Уравнение конуса асимптотических направлений для шара получится, если, как и вообще для поверхности 2-го порядка, мы приравняем нулю совокупность старших членов уравнения, именно:

$$x^2+y^2+z^2+2yz\omega_1+2zx\omega_2+2xy\omega_3=0 \tag{25}$$

в косоугольной системе или

$$x^2+y^2+z^2=0 \tag{25'}$$

для системы координат прямоугольной; этот конус будет, очевидно, мнимый. Как уравнение (25), так и уравнение (25′) не зависят ни от координат центра шара, ни от его радиуса, поэтому мы можем сказать: конус асимптотических направлений с вершиною в начале координат будет один и тот же для всех шаров пространства.

Этот общий всем шарам конус асимптотических направлений называется *изотропным конусом*. Мнимые прямые, на нем лежащие, называются *изотропными прямыми*; плоскости, касающиеся изотропного конуса, называются *изотропными плоскостями*. Между прочим, уравнение (25) или (25′) можно также истолковать как уравнение шара нулевого радиуса с центром в начале координат. Ограничимся в дальнейшем для упрощения прямоугольною системою координат; уравнение изотропного конуса с вершиною в произвольной точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ напишется в виде:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=0. \tag{26}$$

Это соотношение будет выполняться для двух любых точек $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и $M(x;\ y;\ z)$ изотропной прямой, ибо одну из них, например M_0, всегда можно считать за вершину изотропного конуса, на котором лежит изотропная прямая; в таком случае, уравнение (26) означает, что квадрат расстояния двух точек изотропной прямой равен нулю. По этой причине изотропные прямые иногда называются линиями (прямыми) нулевой длины.

Пусть уравнение изотропной прямой будет:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n};$$

так как ее точки $M(x;\ y;\ z)$ и $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ принадлежат конусу (26), то, подставляя в последнее уравнение вместо разностей координат пропорциональные им угловые коэфициенты, получим:

$$l^2+m^2+n^2=0; \tag{27}$$

таково соотношение между угловыми коэфициентами (мнимыми) изотропной прямой. Условие (27), написанное в виде:

$$l\cdot l+m\cdot m+n\cdot n=0,$$

позволяет сказать, что изотропная прямая сама себе перпендикулярна. Пусть уравнение изотропной плоскости будет:

$$ux+vy+wz+p=0;$$

она должна быть касательной плоскостью в некоторой точке $(x';\ y';\ z')$ к изотропному конусу (26), поэтому ее уравнение также напишется в виде:

$$(X-x')(x'-x_0)+(Y-y')(y'-y_0)+(Z-z')(z'-z_0)=0, \tag{28}$$

и следовательно:

$$\frac{u}{x'-x_0}=\frac{v}{y'-y_0}=\frac{w}{z'-z_0},$$

а так как обе точки: (x', y', z') и (x_0, y_0, z_0) принадлежат изотропному конусу, то

$$u^2+v^2+w^2=0, \tag{29}$$

т. е. нормаль к изотропной плоскости есть изотропная прямая.

Уравнение нормали к касательной плоскости (28) будет:

$$\frac{X-x'}{x'-x_0}=\frac{Y-y'}{y'-y_0}=\frac{Z-z'}{z'-z_0};$$

легко видеть, что для точек этой нормали уравнение (28) выполняется в силу соотношения:

$$(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2+(z'-z_0)^2=0.$$

Таким образом *нормаль изотропной плоскости лежит в самой плоскости.*

К уравнению (25′) можно притти и другим способом. Какой-либо шар:

$$(x-\alpha t)^2+(y-\beta t)^2+(z-\gamma t)^2-r^2t^2=0$$

с бесконечно удаленною плоскостью $t=0$ пересекается по кругу, который вместе с тем будет пересечением поверхностей:

$$x^2+y^2+z^2=0$$

и

$$t=0,$$

т. е. изотропного конуса и бесконечно удаленной плоскости. Отсюда следует, что *все шары проходят через один и тот же мнимый круг бесконечно удаленной плоскости.* Изотропные прямые могут быть определены как прямые, пересекающие мнимый круг бесконечно удаленной плоскости; равным образом, очевидно, изотропные плоскости суть плоскости, касающиеся мнимого круга в бесконечности.

Пусть нам даны два шара своими нормальными уравнениями, скажем, в прямоугольной системе координат:

$$C=0 \tag{30}$$

и

$$C'=0. \tag{30′}$$

Уравнение

$$C'-mC=0 \tag{31}$$

будет также изображать шар, так как в этом уравнении коэфициенты при квадратах координат одинаковы (каждый из них равен $1-m$); шар (31), очевидно, проходит через полное пересечение двух данных шаров, включая и мнимый круг в бесконечности, общий всем шарам.

При различных значениях параметра m уравнение (31) будет изображать пучок шаров, проходящих через пересечение двух данных шаров;

для координат какой-нибудь точки, удовлетворяющей уравнению (31), мы можем написать:

$$\frac{C'}{C} = m,$$

т. е. шар, изображаемый уравнением (31), представляет собой геометрическое место точек, *степени* которых относительно двух данных шаров находятся в постоянном между собой отношении, равном m.

Если мы в уравнении (31) примем $m = 1$, то оно обратится в следующее:

$$C' - C = 0; \tag{32}$$

в этом уравнении пропадают члены с квадратами координат, оно остается первой степени и изображает, следовательно, плоскость (если отбросить множитель t), проходящую через пересечение (круг) двух начальных шаров, не считая мнимого круга в бесконечности. Эта плоскость называется *радикальною плоскостью* двух шаров.

Если мы развернем уравнение (32):

$$[(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2 - r'^2] -$$
$$-[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - r^2] = 0,$$

то оно примет вид:

$$(\alpha-\alpha')x + (\beta-\beta')y + (\gamma-\gamma')z +$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 - r'^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + r^2) = 0. \tag{32'}$$

Это уравнение показывает, что нормаль радикальной плоскости имеет угловые коэфициенты, пропорциональные разностям:

$$(\alpha-\alpha') : (\beta-\beta') : (\gamma-\gamma'),$$

т. е., эта нормаль параллельна прямой, соединяющей центры двух данных шаров.

Итак, радикальная плоскость двух шаров перпендикулярна к прямой, соединяющей их центры; вместе с тем из указанного выше толкования уравнения (31) следует, что радикальная плоскость есть геометрическое место таких точек, степени которых относительно обоих данных шаров одинаковы. Это последнее свойство радикальной плоскости двух шаров можно принять за определение радикальной плоскости, ввиду того, что оно не теряет своего реального геометрического значения и в том случае, когда данные шары не пересекаются по действительному кругу.

Пусть теперь мы имеем три шара, заданных своими нормальными уравнениями:

$$C = 0, \quad C' = 0, \quad C'' = 0;$$

уравнениями радикальных их плоскостей попарно будут соответственно:

$$\begin{aligned} C' - C'' &= 0, \\ C'' - C &= 0, \\ C - C' &= 0; \end{aligned}$$

так как сумма левых частей уравнений этих плоскостей тождественно равна нулю, то три указанных плоскости пересекаются по одной прямой, уравнение которой можно представить в виде:

$$C = C' = C''.$$

Итак, *радикальные плоскости каждой пары шаров из трех данных проходят через одну прямую*; эта прямая называется *радикальною осью трех шаров*; очевидно, радикальная ось трех шаров есть геометрическое место таких точек, степени которых относительно каждого из трех шаров одинаковы. Нетрудно сообразить, что радикальная ось перпендикулярна к плоскости, содержащей три центра данных шаров. Вместе с тем радикальная ось содержит точки, общие всем трем шарам (не считая мнимого круга в бесконечности).

Возьмем теперь четыре любых шара, нормальные уравнения которых:

$$C = 0, \ C' = 0, \ C'' = 0, \ C''' = 0.$$

Выкидывая из этой четверки поочереди тот или другой шар, мы будем получать тройки с общей радикальной осью.

Выбрасывая первый шар, для оставшейся тройки получим радикальную ось:

$$C' = C'' = C''';$$

для второй тройки радикальная ось будет:

$$C = C'' = C''',$$

для третьей:

$$C = C' = C''';$$

наконец, для четвертой тройки, когда мы выкинем четвертый шар, радикальная ось будет:

$$C = C' = C''.$$

Легко видеть, что все четыре радикальных оси имеют общую точку, удовлетворяющую условиям (трем уравнениям):

$$C = C' = C'' = C'''.$$

Итак, *радикальные оси четырех шаров по три проходят через одну и ту же точку*; эта точка называется *радикальным центром четырех шаров*. Радикальный центр четырех шаров есть точка, степени которой относительно каждого из четырех шаров одинаковы; можно также сказать, что радикальный центр есть точка, из которой к четырем шарам можно провести равные касательные.

Упражнения. 904. Определить радиус шара, заданного своим общим уравнением:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

относительно некоторой косоугольной системы координат.

905. Показать, что всякая поверхность 2-го порядка, проходящая через мнимый круг в бесконечности, есть непременно шар.

Указание. Всякая поверхность 2-го порядка, проходящая через мнимый круг, лежащий в бесконечно удаленной плоскости, должна в прямоугольной системе координат изображаться уравнением:

$$x^2+y^2+z^2+t(Ax+By+Cz+D)=0;$$

но это уравнение, очевидно, изображает шар.

906. Определить радиус сечения шара

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

907. Преобразование фигуры (или многообразия) в другую фигуру называется инверсией относительно данной точки O (полюс инверсии) или преобразованием обратными радиусами-векторами, если соответствующие точки обеих фигур, будучи на одной прямой с полюсом, удовлетворяют условию:

$$OM \cdot OM' = k,$$

где k — некоторое постоянное.

Показать, что если за полюс инверсии принять начало координат, то формулами указанного преобразования будут:

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=\frac{k}{x'^2+y'^2+z'^2};$$

инверсия преобразует плоскость в шар, проходящий через полюс инверсии, и произвольный шар, не проходящий через полюс, преобразуется в шар.

6. Круговые сечения поверхности 2-го порядка.

Сечение поверхности 2-го порядка какою-либо плоскостью будет вообще линией 2-го порядка, которая в частности может оказаться и кругом при надлежащем выборе секущей плоскости; такое сечение поверхности будем называть круговым сечением. Ниже мы определим круговые сечения различных поверхностей 2-го порядка.

Прежде всего отметим, что гиперболический параболоид не может иметь круговых сечений; в самом деле, какой-либо круг плоскости содержит две мнимых циклических точки этой плоскости, которые должны принадлежать и поверхности, если круг принадлежит поверхности; между тем бесконечно удаленная плоскость $t=0$ пересекает гиперболический параболоид:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2tz$$

по паре действительных прямых:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0, \quad t=0,$$

и следовательно, мнимые циклические точки не могут принадлежать гиперболическому параболоиду, а потому на этой поверхности не может быть круга.

Предположим, что две поверхности 2-го порядка

$$F(x, y, z)=0 \tag{33}$$

и

$$\Phi(x, y, z)=0 \tag{33'}$$

имеют некоторую общую кривую 2-го порядка, лежащую в плоскости:

$$u \equiv z + ax + by + c = 0.$$

Разделим многочлен F на многочлен u первой степени относительно z; пусть частное будет $Q(x, y, z)$ [оно первой степени относительно координат x, y, z, а остаток $R(x, y)$ второй степени относительно x, y, но не содержит z], тогда

$$F \equiv uQ + R. \tag{34}$$

Пусть подобным же образом Q_1 будет частное и R_1 — остаток от деления Φ на u, так что:

$$\Phi \equiv uQ_1 + R_1. \tag{34'}$$

Предыдущие тождества показывают, что линия пересечения $F = 0$ и $u = 0$ лежит на цилиндре

$$R(x, y) = 0;$$

та же самая линия, как линия пересечения $\Phi = 0$ и $u = 0$, лежит на цилиндре

$$R_1(x, y) = 0.$$

Эти два цилиндра должны быть, следовательно, тождественны, и левые части их уравнений могут отличаться лишь некоторым постоянным множителем m:

$$R \equiv mR_1.$$

Заменим R и R_1 их выражениями из равенств (34) и (34′), тогда

$$F - uQ \equiv m(\Phi - uQ_1)$$

или

$$F - m\Phi \equiv u(Q - mQ_1).$$

Это последнее тождество обозначает: поверхность

$$F - m\Phi = 0,$$

проходящая через полное пересечение поверхностей (33) и (33′) (линию 4-го порядка), распадается на пару плоскостей:

$$u = 0$$

и

$$Q_1 - mQ = 0.$$

Таким образом линия пересечения 4-го порядка двух данных поверхностей распадается на две плоских линии 2-го порядка.

Итак, мы можем сказать: *если две поверхности 2-го порядка имеют одну общую плоскую линию, то они имеют и другую общую им плоскую линию.* В этом случае некоторая поверхность 2-го порядка, проходящая через пересечение двух данных, распадается на пару плоскостей, т. е. можно выбрать такой постоянный множитель m, что

$$F - m\Phi \equiv uv,$$

где u и v — линейные функции относительно координат.

Пусть теперь нам дана некоторая поверхность 2-го порядка своим общим уравнением:

$$F(x, y, z) = 0; \tag{33}$$

ее круговые сечения будут принадлежать некоторому шару, уравнение которого пусть будет:

$$\Phi(x, y, z) = 0. \tag{33''}$$

Если их пересечение содержит круг, то оно будет содержать и другую плоскую кривую, и, следовательно, должно иметь место тождество:

$$F - s\Phi \equiv uv, \tag{35}$$

где s — некоторый числовой множитель, а u и v — линейные функции. Между прочим, предыдущее соотношение показывает, что и вторая плоская кривая пересечения (F) и (Φ) будет тоже круг. Так как тождество (35) имеет место для всяких x, y, z, то группа членов левой части второй степени относительно координат должна тождественно быть равной группе членов второй степени правой части, следовательно:

$$F_2 - s\Phi_2 \equiv u_1 v_1, \tag{35'}$$

где F_2 и Φ_2 — группы членов второй степени из многочленов F и Φ, а u_1 и v_1 — группы членов первой степени из линейных функций u и v.

Уравнение

$${}_1 = 0$$

отличается от уравнения

$$u = 0$$

только тем, что в первом из них нет свободного члена, который может быть, входит во второе уравнение; поэтому эти уравнения изображают плоскости, между собой параллельные.

То же самое надлежит сказать и о плоскостях, изображаемых уравнением

$$v_1 = 0$$

й уравнением

$$v = 0.$$

Уравнение

$$F_2 = 0$$

изображает конус асимптотических направлений с вершиною в начале координат для данной поверхности; если же мы приравняем нулю совокупность членов второй степени из общего уравнения шара, то получим уравнение

$$\Phi_2 = 0,$$

которое, можно сказать, изображает либо конус асимптотических направлений любого шара (изотропный конус), либо, что то же самое, шар нулевого радиуса с центром в начале координат.

Соотношение (35′), очевидно, выражает собою условие, что две плоских линии пересечения конуса (F_2) и шара нулевого радиуса (Φ_2)

лежат в плоскостях $u_1 = 0$ и $v_1 = 0$ или, иначе, круговые сечения конуса асимптотических направлений данной поверхности лежат в указанных плоскостях, которые параллельны плоскостям

$$u = 0 \text{ и } v = 0.$$

Итак, *круговые сечения конуса асимптотических направлений поверхности 2-го порядка лежат в плоскостях, соответственно параллельных плоскостям круговых сечений самой поверхности.*

Отсюда следует, что вместо определения плоскостей круговых сечений поверхности 2-го порядка мы можем искать, что короче, плоскости круговых сечений конуса асимптотических направлений.

Тождеству (35′) можно дать следующее геометрическое истолкование: конус

$$F_2 - s\Phi_2 = 0$$

распадается на пару плоскостей, а потому дискриминант левой части его уравнения должен обращаться в нуль, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} - s\omega_3 & a_{13} - s\omega_2 \\ a_{21} - s\omega_3 & a_{22} - s & a_{23} - s\omega_1 \\ a_{31} - s\omega_2 & a_{32} - s\omega_1 & a_{33} - s \end{vmatrix} = 0;$$

но это есть характеристическое уравнение начальной поверхности. Таким образом множитель s в тождестве (35) или (35′) должен быть корнем (притом отличным, конечно, от нуля) характеристического уравнения.

Отнесем теперь нашу поверхность к главным направлениям; тождество (35′) примет вид:

$$s_1x^2 + s_2y^2 + s_3z^2 - s(x^2 + y^2 + z^2) \equiv \overline{u}_1\overline{v}_1, \tag{35''}$$

где $\overline{u}_1$ и $\overline{v}_1$ — преобразованные к новой системе координат функции u_1 и v_1, а s есть один из корней характеристического уравнения (отличный от нуля).

Поверхность, изображаемая уравнением:

$$s_1x^2 + s_2y^2 + s_3z^2 - s(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

распадается на две действительных плоскости только в том случае, если мы для s примем значение среднего по величине из трех корней характеристического уравнения, притом значение, отличное от нуля.

Итак, действительные плоскости круговых сечений мы получим только в том случае, когда в соотношении (35) или (35′) возьмем для s средний по величине корень характеристического уравнения; два же других корня дадут мнимые плоскости круговых сечений.

Применим теперь полученные соображения к поверхностям 2-го порядка, определенным своими каноническими уравнениями.

Возьмем уравнение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

предполагая, что

$$a > b > c;$$

его характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}-s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2}-s & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2}-s \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни:

$$s_1 = \frac{1}{a^2}, \quad s_2 = \frac{1}{b^2}, \quad s_3 = \frac{1}{c^2},$$

причем средним по величине будет корень $s_2 = \frac{1}{b^2}$; он и даст действительные плоскости круговых сечений.

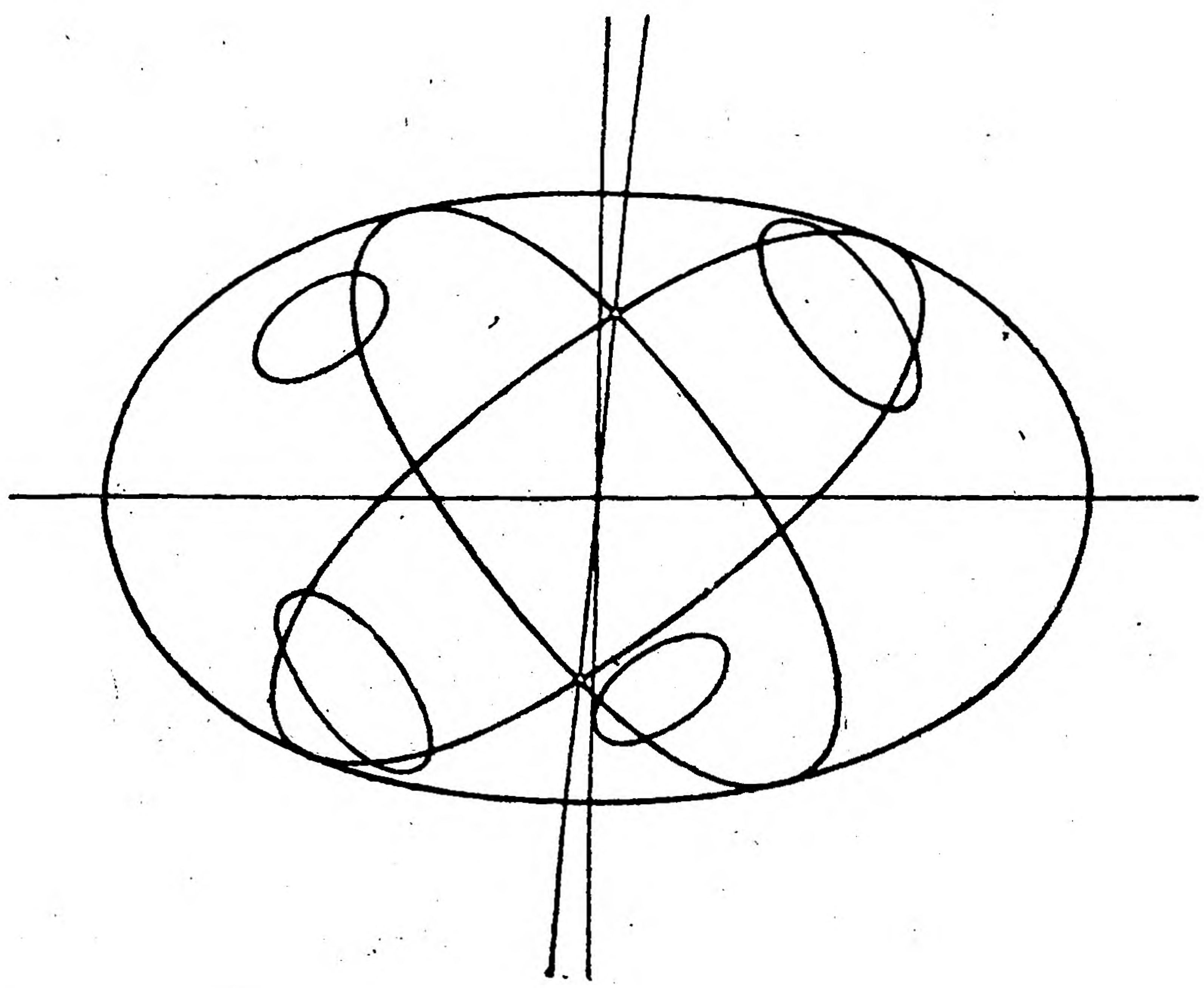
Итак, действительные плоскости круговых сечений будут:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

или по упрощении:

$$x\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}\, z = 0; \tag{36}$$

эти две плоскости проходят через среднюю ось y, и обе они одинаково наклонены к другим осям (черт. 189). Плоскости, параллельные той или другой из полученных плоскостей (36), будут пересекать эллипсоид также по кругам, причем по мере того как мы будем отступать от начальных плоскостей, радиусы кругов сечений будут уменьшаться и, наконец, обратятся в нуль, когда секущая площадь обратится в плоскость касательную. Эти точки касания к поверхности 2-го порядка плоскостей, параллельных плоскостям круговых сечений, называются точками *округления*.



Черт. 189.

Точки округления эллипсоида легко определить; пусть x', y', z' — координаты одной из них, тогда касательная плоскость в ней будет:

$$\frac{Xx'}{a^2}+\frac{Yy'}{b^2}+\frac{Zz'}{c^2}=1,$$

и она должна быть параллельна одной из плоскостей круговых сечений, следовательно,

$$\frac{\dfrac{x'}{a^2}}{\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}}=\frac{\dfrac{y'}{b^2}}{0}=\frac{\dfrac{z'}{c^2}}{\pm\dfrac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}};$$

обозначая эти отношения через σ, получим:

$$\frac{x'}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\sigma,\quad \frac{y'}{b}=0,\quad \frac{z'}{c}=\pm\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b}\sigma.$$

Сверх того эти координаты должны удовлетворять уравнению эллипсоида, откуда

$$\sigma=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

Таким образом четыре точки округления эллипсоида будут определяться координатами:

$$x'=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}a,\ y'=0,\quad z'=\pm\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}c.$$

Так как однополостный и двуполостный гиперболоиды имеют общий конус асимптотических направлений, то направления плоскостей их круговых сечений будут одинаковы.

Для этого общего их конуса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

характеристическое уравнение будет иметь корни:

$$s_1=\frac{1}{a^2},\quad s_2=\frac{1}{b^2},\quad s_3=-\frac{1}{c^2};$$

средним по величине из них будет (в предположении, что $a>b$) корень

$$s_1=\frac{1}{a^2},$$

ибо

$$-\frac{1}{c^2}<\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}.$$

Следовательно, действительные плоскости круговых сечений будут:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{1}{a^2}(x^2+y^2+z^2)=0$$

или

$$\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=0; \tag{37}$$

само собою разумеется, что уравнения эти можно было бы получить из уравнений (мнимых) круговых плоскостей эллипсоида заменою c^2 на $-c^2$.

Плоскости, изображаемые уравнениями (37), будут, как нетрудно проверить, пересекать двуполостный гиперболоид по мнимым линиям, но если мы возьмем плоскости, им параллельные и достаточно удаленные от центра (или начала координат), то они будут пересекать поверхность по действительным кругам. Однополостный гиперболоид, очевидно, не будет иметь точек округления, плоскости (37) и им параллельные все пересекают поверхность по кругам радиуса, отличного от нуля и притом неограниченно возрастающего по мере удаления плоскости сечения от центра поверхности.

Определим теперь точки округления двуполостного гиперболоида; уравнение его касательной плоскости в точке $(x'; y'; z')$ будет:

$$-\frac{Xx'}{a^2}-\frac{Yy'}{b^2}+\frac{Zz'}{c^2}=1;$$

если она параллельна одной из плоскостей круговых сечений, тогда:

$$\frac{\frac{x'}{a^2}}{0}=\frac{-\frac{y'}{b^2}}{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}}=\frac{\frac{z'}{c^2}}{\pm\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}}.$$

Полагая

$$\frac{\frac{x'}{a}}{0}=\frac{-\frac{y'}{b}}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\frac{z'}{c}}{\pm\sqrt{a^2+c^2}}=\sigma$$

и подставляя определяемые отсюда координаты x', y', z' в уравнение самой поверхности, мы получим:

$$\sigma=\pm\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Таким образом четыре точки округления двуполостного гиперболоида будут определяться координатами:

$$\frac{x'}{a}=0,\ \frac{y'}{b}=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad \frac{z'}{c}=\pm\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}};$$

эти же значения можно было бы получить из соответствующих выражений для координат точек округления эллипсоида заменою a^2 и b^2 соответственно на $-a^2$ и $-b^2$.

Определим, наконец, круговые сечения эллиптического параболоида или, что то же самое, его конуса асимптотических направлений. Для уравнения конуса:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0$$

корнями характеристического уравнения будут:

$$s_1=\frac{1}{p},\quad s_2=\frac{1}{q},\quad s_3=0;$$

если считать, что $p > q$, то средним по величине корнем будет:

$$s_1 = \frac{1}{p}.$$

Поэтому действительные плоскости круговых сечений здесь будут определяться уравнением:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - \frac{1}{p}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

или же

$$y\sqrt{p-q} \pm z\sqrt{q} = 0. \tag{38}$$

Для определения точек округления (здесь их будет, очевидно, только две) пользуемся прежним методом; возьмем уравнение касательной плоскости параболоида:

$$\frac{Xx'}{p} + \frac{Yy'}{q} - (Z + z') = 0$$

и выберем ее параллельною одной из плоскостей круговых сечений (38) так, чтобы:

$$\frac{\frac{x'}{p}}{0} = \frac{\frac{y'}{q}}{\sqrt{p-q}} = \frac{-1}{\pm\sqrt{q}}.$$

Определим затем координаты $(x'; y'; z')$, удовлетворяющие этим условиям, так, чтобы они сверх того удовлетворяли уравнению самой поверхности; тогда координаты точек округления будут:

$$x' = 0,\ y' = \pm\sqrt{q(p-q)},\ z' = \frac{p-q}{2}. \tag{39}$$

Упражнения. 908. Определить радиус кругового сечения эллипсоида, заданного своим каноническим уравнением, если плоскость сечения отстоит от центра эллипсоида на расстоянии, равном d.

909. Радиус кругового сечения эллиптического параболоида, заданного своим каноническим уравнением, определится по формуле:

$$r^2 = p\left(p - q - 2d\sqrt{\frac{p}{q}}\right),$$

где d — расстояние плоскости сечения от вершины параболоида.

7. Фокальные линии поверхностей 2-го порядка.

Для кривой 2-го порядка мы определили фокус как центр окружности нулевого радиуса, имеющей с кривой касание в двух точках. Аналогичное определение можно дать и для фокусов поверхностей 2-го порядка. В. Amiot (1843 г.) определяет фокус как такую точку с координатами α, β, γ, относительно которой уравнение поверхности может быть приведено к виду:

$$2F \equiv m[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] - VU = 0, \tag{40}$$

где U и V — линейные функции координат x, y, z.

Прямую пересечения плоскостей, изображаемых уравнениями:

$$U=0, \quad V=0, \tag{41}$$

Amiot назвал *директрисой*, соответствующей данному фокусу.

Геометрическое истолкование формы уравнения (40) было затем указано Шалем и Плюкером.

Плоскость $U=0$ пересекает данную поверхность $2F=0$ по кривой, лежащей на шаре нулевого радиуса:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=0, \tag{42}$$

т. е. по кругу; равным образом плоскость $V=0$ пересекает поверхность $2F=0$ по кругу, лежащему на том же шаре. Поэтому прямая пересечения этих плоскостей (41) пересекает данную поверхность в двух точках, в которых шар (42) касается поверхности. Таким образом фокус поверхности 2-го порядка может быть определен как центр шара нулевого радиуса, имеющего с данною поверхностью касание в двух точках, и тогда директриса есть прямая, соединяющая эти точки касания. Две плоскости (41) очевидно, суть плоскости, параллельные плоскостям круговых сечений данной поверхности.

Пусть

$$U \equiv ax+by+cz+d,$$
$$V \equiv a'x+b'y+c'z+d';$$

составим для поверхности, определяемой уравнением (40), уравнение описанного конуса с вершиною в точке $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ по правилу, указанному в § 9 главы XVI.

Обозначим через $\overline{U}$ и $\overline{V}$ результаты подстановки координат α, β, γ в функции U и V, тогда

$$2P=-U\overline{V}-V\overline{U},$$

и уравнение описанного конуса будет:

$$(U\overline{V}+\overline{U}V)^2+4\overline{U}\overline{V}[m(x-\alpha)^2+m(y-\beta)^2+m(z-\gamma)^2-UV]=0$$

или

$$m'\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]+(U\overline{V}-\overline{U}V)^2=0. \tag{43}$$

Легко видеть, что полученный конус будет конусом вращения; в самом деле, преобразуем координатную систему так, чтобы плоскость

$$U\overline{V}-\overline{U}V=0$$

была параллельна одной из новых координатных плоскостей; если новая система координат прямоугольна, то выражение, стоящее в квадратных скобках левой части (43), сохраняет свой вид. В новой системе координат уравнению (43) можно дать вид:

$$m'\ [(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]+(z-\gamma')^2=0;$$

это же последнее уравнение изображает конус вращения с вершиною в точке $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$, так как в нем коэфициенты при квадратах двух координат одинаковы.

Итак, фокус поверхности 2-го порядка может быть определен как вершина конуса вращения, описанного около данной поверхности (определение Штейнера).

Если плоскости круговых сечений действительны, то будут действительны и им параллельные плоскости (41); при этом для точек нашей поверхности 2-го порядка выражения U и V пропорциональны расстояниям выбранной точки поверхности до плоскостей, изображаемых уравнениями (41). Поэтому уравнение (40) может быть прочитано следующим образом: поверхность 2-го порядка есть геометрическое место такой точки, для которой квадрат расстояния от фокуса находится в постоянном отношении к произведению расстояний этой точки до двух плоскостей, проходящих через директрису и параллельных плоскостям круговых сечений.

При исследовании круговых сечений поверхности нами уже было разъяснено, что для того чтобы уравнение поверхности $2F=0$ можно было привести к виду (40), необходимо множитель m выбрать равным одному из корней характеристического уравнения поверхности.

Найдем теперь фокусы центральных поверхностей 2-го порядка, каноническое уравнение которых, чтобы не различить пока отдельных случаев, напишем в виде:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1. \tag{44}$$

Чтобы привести это уравнение к виду (40), мы должны положить:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1-s\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]\equiv UV, \tag{45}$$

где U и V — некоторые подходящие линейные функции.

На основании тождества (45) мы можем сказать, что уравнение:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1-s\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]=0 \tag{46}$$

изображает пару плоскостей, поэтому для уравнения (46) система уравнений

$$F_x=0, \quad F_y=0, \quad F_z=0, \tag{47}$$

определяющих центр, должна сводиться к двум только уравнениям, дающим прямую центров [т. е. прямую пересечения двух плоскостей (46)], притом эта прямая должна принадлежать самой поверхности, изображаемой уравнением (46). Итак, три уравнения

$$\frac{x}{A}-s(x-\alpha)=0, \quad \frac{y}{B}-s(y-\beta)=0, \quad \frac{z}{C}-s(z-\gamma)=0 \tag{47'}$$

должны сводиться лишь к двум уравнениям, а так как каждое из них содержит различные координаты и не может быть следствием двух других уравнений, то одно из этих уравнений должно пропадать.

Таким образом нам приходится рассмотреть три случая, предполагая, что в системе (47′) пропадает либо первое, либо второе, либо третье уравнение. Итак, положим в системе (47′) пропадает первое уравнение; тогда

$$s = \frac{1}{A}, \quad \alpha = 0,$$

прямая же центров будет определяться условиями:

$$\frac{y}{B} = \frac{y-\beta}{A} = \frac{\beta}{B-A},$$

$$\frac{z}{C} = \frac{z-\gamma}{A} = \frac{\gamma}{C-A};$$

эти значения y и z должны удовлетворять уравнению (46), следовательно:

$$\alpha = 0, \quad \frac{\beta^2}{B-A} + \frac{\gamma^2}{C-A} - 1 = 0; \tag{48}$$

таково будет геометрическое место фокусов, деректрисы которых параллельны оси x-ов. Получённая фокальная линия (место фокусов) представляет собой центральную кривую 2-го порядка, лежащую в плоскости yOz.

Если в системе (47′) пропадает второе уравнение, то

$$s = \frac{1}{B}, \quad \beta = 0,$$

и по аналогии получим вторую фокальную линию в плоскости xOz:

$$\beta = 0, \quad \frac{\alpha^2}{A-B} + \frac{\gamma^2}{C-B} - 1 = 0 \tag{49}$$

как место фокусов, соответствующие деректрисы которых параллельны оси y. Наконец, третье предположение дает третью фокальную линию в плоскости xOy:

$$\gamma = 0 \quad \frac{\alpha^2}{A-C} + \frac{\beta^2}{B-C} - 1 = 0. \tag{50}$$

Сечение данной поверхности главною плоскостью $z = 0$ будет кривая

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1;$$

очевидно, кривая (50) конфокальна с этим главным сечением. Таким образом каждая из фокальных линий представляет собой кривую, конфокальную с линией сечения поверхности соответствующею главною плоскостью.

Для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

и однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

очевидно,

$$A > B > C.$$

Поэтому для эллипсоида и однополостного гиперболоида фокальная кривая (48) в плоскости $x=0$ будет мнимой, фокальная кривая (49) в плоскости $y=0$ будет гиперболой, третья же фокальная линия (50) в плоскости $z=0$ будет эллипсом.

Для двуполостного гиперболоида

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

мы будем иметь:

$$A<B<C.$$

Поэтому для двуполостного гиперболоида первая фокальная линия (48) в плоскости $x=0$ будет эллипсом, вторая фокальная линия (49) в плоскости $y=0$ будет опять гиперболой, третья же (50) в плоскости $z=0$ будет мнимою кривою.

Итак, для всякой центральной поверхности 2-го порядка одна из фокальных линий будет эллипсом, другая — гиперболой, а третья — мнимой кривой, причем гипербола во всяком случае лежит в средней главной плоскости ($y=0$) по нашему наименованию.

Применим тот же метод к нахождению фокусов параболоидов, заданных своим каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0, \tag{51}$$

причем чтобы охватить сразу оба случая — и эллиптического и гиперболического параболоида — для коэфициента q будем допускать как положительные, так и отрицательные значения.

Согласно указанному выше приему мы должны найти случай, когда уравнение:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z-s\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]=0 \tag{52}$$

изображает пару плоскостей.

Следовательно, из трех уравнений:

$$\frac{x}{p}-s(x-\alpha)=0, \quad \frac{y}{q}-s(y-\beta)=0, \quad -1-s(z-\gamma)=0$$

одно должно тождественно пропадать. Очевидно, последнее из них пропадать не может, поэтому здесь приходится рассмотреть лишь два случая. Если пропадает первое из указанных уравнений, тогда

$$s=\frac{1}{p}, \quad \alpha=0$$

и прямая пересечения двух плоскостей (52) определится условиями:

$$\frac{y}{q}=\frac{y-\beta}{p}=\frac{\beta}{q-p},$$
$$z=\gamma-p;$$

эта прямая принадлежит поверхности, определяемой уравнением (52), если

$$\alpha=0, \quad \frac{\beta^2}{q-p}-2\gamma+p=0; \tag{53}$$

таковы будут уравнения первой фокальной линии параболоидов.

Если пропадает второе из указанных выше трех уравнений, тогда:

$$s=\frac{1}{q}, \quad \beta=0,$$

и аналогично получим вторую фокальную линию параболоидов:

$$\beta=0, \quad \frac{\alpha^2}{p-q}-2\gamma+q=0. \tag{54}$$

Каждая из фокальных линий представляет собой параболу.

8. Конфокальные центральные поверхности.

Возьмем некоторый начальный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

так как его фокальные линии определяются по разностям квадратов полуосей a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-a^2, то, если мы каждый из квадратов полуосей увеличим на одно и то же число λ, эти разности сохранят свое значение, и всякая поверхность, определяемая уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0, \tag{56}$$

где λ имеет любое заданное значение, будет иметь те же фокальные линии, как и начальный эллипсоид.

При различных значениях λ уравнение (56) даст нам семейство центральных поверхностей 2-го порядка, имеющих общие фокальные линии, а потому и называемых софокусными или конфокальными.

Возмем две какие-нибудь поверхности из этого семейства:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_1}-1=0, \tag{56'}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_2}-1=0. \tag{56''}$$

Для всякой точки, общей этим поверхностям (точки на линии их пересечения), будет удовлетворяться нижеследующее соотношение, которое получается вычитанием почленно уравнений (56′) и (56″):

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}=0; \tag{57}$$

это соотношение можно переписать в виде:

$$\frac{x}{a^2+\lambda_1}\cdot\frac{x}{a^2+\lambda_2}+\frac{y}{b^2+\lambda_1}\cdot\frac{y}{b^2+\lambda_2}+\frac{z}{c^2+\lambda_1}\cdot\frac{z}{c^2+\lambda_2}=0 \tag{57'}$$

и дать ему следующее истолкование.

Составим уравнения плоскостей, касательных к поверхностям (56′) и (56″) в некоторой их общей точке $(x;\ y;\ z)$; уравнения эти будут:

$$\frac{Xx}{a^2+\lambda_1}+\frac{Yy}{b^2+\lambda_1}+\frac{Zz}{c^2+\lambda_1}-1=0,$$

$$\frac{Xx}{a^2+\lambda_2}+\frac{Yy}{b^2+\lambda_2}+\frac{Zz}{c^2+\lambda_2}-1=0.$$

Теперь очевидно, что соотношение (57′) обозначает, что эти касательные плоскости в их общей точке ортогональны. Когда касательные плоскости двух поверхностей во всякой их общей точке взаимно перпендикулярны, то говорят, что эти поверхности пересекаются под прямым углом или ортогонально. Итак, мы можем сказать, что две любых поверхности из семейства конфокальных центральных поверхностей пересекаются ортогонально.

Пусть нам дана какая-нибудь точка пространства $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$; посмотрим, какие поверхности из нашего конфокального семейства проходят через эту точку. Чтобы найти такие поверхности, надо определить λ, удовлетворяющее условию:

$$\frac{x_1^2}{a^2+\lambda}+\frac{y_1^2}{b^2+\lambda}+\frac{z_1^2}{c^2+\lambda}-1=0. \tag{58}$$

Легко видеть что полученное уравнение для λ представляет собой уравнение третьей степени; если в нем освободиться от знаменателей, то его можно привести к виду:

$$f(\lambda)\equiv x_1^2(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)+y_1^2(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)+$$
$$+z_1^2(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)-(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)=0. \tag{58′}$$

Левая его часть, т. е. функция $f(\lambda)$, имеет нижеследующие частные значения

$$\lambda=-a^2,\ f(\lambda)=x_1^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)>0,$$
$$\lambda=-b^2,\ f(\lambda)=y_1^2(c^2-b^2)(a^2-b^2)<0,$$
$$\lambda=-c^2\ \ f(\lambda)=z_1^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)>0,$$
$$\lambda=+\infty, f(\lambda)<0.$$

Так как в интервалах $(-a^2,\ -b^2)$, $(-b^2,\ -c^2)$, $(-c^2,\ +)\infty$ функция $f(\lambda)$ меняет каждый раз знак, то уравнение (58) имеет три действительных корня:

$$-a^2<\lambda_1<-b^2,$$
$$-b^2<\lambda_2<-c^2,$$
$$-c^2<\lambda_3<+\infty;$$

следовательно, через каждую точку пространства проходят три поверхности из нашего конфокального семейства. Посмотрим, какая из поверхностей соответствует каждому из указанных корней.

Для первого корня мы имеем:

$$a^2+\lambda_1>0,$$
$$b^2+\lambda_1<0,$$
$$c^2+\lambda_1<c^2-b^2<0,$$

следовательно, поверхность, изображаемая уравнением (56), при $\lambda=\lambda_1$ будет двуполостным гиперболоидом.

Для второго корня:

$$0<a^2-b^2<a^2+\lambda_2,$$
$$0<b^2+\lambda_2,$$
$$c^2+\lambda_2<0,$$

поэтому соответствующая поверхность будет однополостным гиперболоидом.

Наконец, для третьего корня:

$$0<a^2-c^2<a^2+\lambda_3,$$
$$0<b^2-c^2<b^2+\lambda_3,$$
$$0<c^2+\lambda_3,$$

следовательно, поверхность, соответствующая этому корню, будет эллипсоидом.

Итак, через каждую точку пространства из семейства конфокальных поверхностей (центральных) проходят три поверхности, из которых одна будет обязательно эллипсоидом, другая однополостным гиперболоидом и третья гиперболоидом двуполостным, причем все три эти поверхности в указанной точке пересекаются под прямым углом.

Из сказанного следует, что каждую точку пространства можно определить пересечением трех поверхностей из конфокального семейства, а так как каждая из этих поверхностей определяется соответствующим параметром λ_1, или λ_2, или λ_3, то эти последние можно рассматривать как координаты точки пространства („эллиптические координаты"). Указанная координатная система может быть названа ортогональною системою, так как две любых координатных поверхности пересекаются ортогонально.

Чтобы получить значения эллиптических координат λ_1, λ_2, λ_3 по декартовым координатам данной точки M_1, надо решить уравнение (58'); наоборот, выражения декартовых координат x_1, y_1, z_1 через эллиптические λ_1, λ_2, λ_3 получить нетрудно следующим способом.

Так как λ_1, λ_2, λ_3 суть корни уравнения (58'), то его левая часть может быть представлена в виде произведения старшего коэфициента -1 на разности между переменным λ и корнями:

$$f(\lambda)\equiv-(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3),$$

где $f(\lambda)$ имеет значение, указанное формулой (58'). Полагая в отмеченном тождестве по очереди $\lambda=-a^2$, $\lambda=-b^2$, $\lambda=-c^2$, мы получим:

$$x_1^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)=(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3),$$
$$y_1^2(c^2-b^2)(a^2-b^2)=(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3),$$
$$z_1^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)=(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3),$$

откуда

$$x_1^2 = \frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y_1^2 = \frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)},$$

$$z_1^2 = \frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}. \tag{59}$$

Таковы выражения декартовых координат любой точки пространства через ее эллиптические координаты.

Если для примера принять в предыдущих формулах $\lambda_3 = 0$, то они, очевидно, будут давать точки, принадлежащие нашему основному эллипсоиду (55); таким образом выражения:

$$x^2 = \frac{a^2(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y^2 = \frac{b^2(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)},$$

$$z^2 = \frac{c^2(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

будут давать точки эллипсоида (55), что и легко проверить непосредственно подстановкой этих выражений в уравнение (55). При этом линии $\lambda_1 = \text{const}$ и линии $\lambda_2 = \text{const}$ будут на эллипсоиде (55) пересекаться под прямым углом; таким образом мы на эллипсоиде получаем ортогональную сеть линий 4-го порядка, ибо эти линии суть линии пересечения эллипсоида с конфокальными ему двуполостными гиперболоидами.

9. Конфокальные параболоиды.

Для параболоида

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \tag{60}$$

фокальные линии будут:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{q-p} - 2z + p = 0$$

и

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{p-q} - 2z + q = 0;$$

сюда входят не только разность $p - q$, но еще и самые коэфициенты p и q в свободных членах уравнений. Поэтому уравнения конфокальных параболоидов мы будем искать в виде:

$$\frac{x^2}{p+\lambda} + \frac{y^2}{q+\lambda} - 2z - m = 0,$$

сместив начало координат по оси z; если принять

$$z' = z + \frac{m}{2},$$

то предыдущее уравнение примет канонический вид:

$$\frac{x^2}{p+\lambda}+\frac{y^2}{q+\lambda}-2z'=0,$$

и его фокальными линиями будут:

$$x=0,\quad \frac{y^2}{q-p}-2z'+p+\lambda=0,$$
$$y=0,\quad \frac{x^2}{p-q}-2z'+q+\lambda=0$$

или в старой системе:

$$x=0,\quad \frac{y^2}{q-p}-2z-m+p+\lambda=0,$$
$$y=0,\quad \frac{x^2}{p-q}-2z-m+q+\lambda=0;$$

очевидно, чтобы эти фокальные линии совпадали с прежними, надо принять

$$m=\lambda.$$

Итак, параболоиды, конфокальные с прежним параболоидом (60), а также и между собой, будут изображаться уравнением:

$$\frac{x^2}{p+\lambda}+\frac{y^2}{q+\lambda}-2z-\lambda=0. \tag{61}$$

Возьмем опять две поверхности из этого семейства:

$$\frac{x^2}{p+\lambda_1}+\frac{y^2}{q+\lambda_1}-2z-\lambda_1=0,$$
$$\frac{x^2}{p+\lambda_2}+\frac{y^2}{q+\lambda_2}-2z-\lambda_2=0;$$

для точек, общих этим поверхностям, будет выполняться соотношение:

$$\frac{x^2}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)}+\frac{y^2}{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)}+1=0,$$

которое, как нетрудно убедиться, означает, что касательные плоскости к выбранным поверхностям в каждой их общей точке ортогональны. Если нам дана точка $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ то через эту точку из семейства (61) проходят те поверхности, для которых параметр λ удовлетворяет условию:

$$\frac{x_1^2}{p+\lambda}+\frac{y_1^2}{q+\lambda}-2z_1-\lambda=0. \tag{62}$$

Это уравнение третьей степени относительно λ и может быть написано в виде:

$$f(\lambda)\equiv x_1^2(q+\lambda)+y_1^2(p+\lambda)-(2z_1+\lambda)(p+\lambda)(q+\lambda)=0. \tag{62'}$$

Независимо от того, будет ли q отрицательным или положительным, можно считать, что

$$p>q,$$

а следовательно,

$$-p < -q,$$

$$p - q > 0.$$

При этих условиях уравнение (62′) будет иметь три действительных корня:

$$\lambda_1 < -p < \lambda_2 < -q < \lambda_3.$$

Для первого корня

$$p + \lambda_1 < 0,$$

$$q + \lambda_1 < q - p < 0,$$

и соответствующая поверхность (60) будет эллиптическим параболоидом. Для второго корня

$$0 < p + \lambda_2,$$

$$q + \lambda_2 < 0$$

параболоид будет гиперболическим.

Наконец, для третьего корня

$$0 < p - q < \lambda_3 + p,$$

$$0 < \lambda_3 + q,$$

параболоид будет эллиптическим.

Итак, *через каждую точку пространства проходят три конфокальных параболоида, из которых один гиперболический, два других эллиптические*; эти поверхности пересекаются между собой ортогонально.

Полагая, как и раньше:

$$x_1^2(q+\lambda) + y_1^2(p+\lambda) - (2z_1 + \lambda)(p+\lambda)(q+\lambda) \equiv$$

$$\equiv -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),$$

мы получим:

$$= \frac{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)(p+\lambda_3)}{q-p},$$

$$y_1^2 = \frac{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)(q+\lambda_3)}{p-q},$$

$$z_1 = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + p + q}{2}.$$

Упражнения. 910. Точечное уравнение семейства конфокальных центральных поверхностей

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0$$

в тангенциальных координатах приводится к виду:

$$(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - p^2) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0;$$

дать геометрическое истолкование последнего.

911. Каждая из фокальных линий конуса 2-го порядка распадается на пару прямых.

912. На двух конфокальных поверхностях одного и того же вида точки координаты которых пропорциональны соответствующим осям этих поверхностей, т. е. точки $M(x;\ y;\ z)$ и $M'(x';\ y';\ z')$, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$\frac{x^2}{x^2+\lambda_3}=\frac{x'^2}{a^2+\lambda'_3},\qquad \frac{y^2}{b^2+\lambda_3}=\frac{y'^2}{b^2+\lambda'_3},\qquad \frac{z^2}{c^2+\lambda_3}=\frac{z'^2}{c^2+\lambda'_3}$$

называются соответствующими точками [аффинное соответствие Айвори (Jvory)]. С помощью формул, выражающих декартовы координаты через эллиптические, показать:

a) что соответствующие точки находятся на одной линии (4-го порядка) пересечения двух конфокальных поверхностей разных видов, ортогональных к двум данным;

b) разность квадратов расстояний соответствующих точек на двух поверхностях от общего центра этих конфокальных поверхностей постоянна:

$$MO^2-M'O^2=\lambda_3-\lambda'_3;$$

c) если M и N — две точки первой поверхности, а M' и N' — им соответственные точки второй поверхности, конфокальной и одноименной с первой, то

$$MN'=M'N.$$

Указание. а) Формулы (59) при постоянных λ_1 и λ_2 и при переменном λ_3 дают кривую пересечения двух конфокальных поверхностей (56), соответствующих значениям $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$. Так как при аффинном соответствии Айвори:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_3}=\frac{x'^2}{a^2+\lambda'_3}=\frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

т. е. эти выражения зависят только от λ_1 и λ_2, то соответствующие точки лежат на линии пересечения конфокальных поверхностей $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$.

b) Пользуясь формулами (59), мы найдем:

$$MO^2-M'O^2=(\lambda_3-\lambda'_3)\sum\frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}$$

или

$$MO^2-M'O^2=(\lambda_3-\lambda'_3)\left[\sum\frac{a^4}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}+\right.$$
$$\left.+(\lambda_1+\lambda_2)\sum\frac{a^2}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}+\lambda_1\lambda_2\sum\frac{1}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right].$$

Теперь нетрудно убедиться, развертывая указанные суммы, что:

$$\sum\frac{a^4}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}=1,\qquad \sum\frac{a^2}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}=0,$$
$$\sum\frac{1}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}=0.$$

c) Пусть x, y, z будут координаты точки M, а x_1, y_1, z_1 — координаты точки N, тогда M' будет иметь координаты:

$$x\sqrt{\frac{a^2+\lambda'_3}{a^2+\lambda_3}},\qquad y\sqrt{\frac{b^2+\lambda'_3}{b^2+\lambda_3}},\qquad z\sqrt{\frac{c^2+\lambda'_3}{c^2+\lambda_3}},$$

а точка N' — координаты:

$$x_1\sqrt{\frac{a^2+\lambda'_3}{a^2+\lambda_3}},\qquad y_1\sqrt{\frac{b^2+\lambda'_3}{b^2+\lambda_3}},\qquad z_1\sqrt{\frac{c^2+\lambda'_3}{c^2+\lambda_3}},$$

поэтому:

$$MN'^2 = \sum (x - x_1')^2 = \sum \frac{\left(x\sqrt{a^2+\lambda_3} - x_1\sqrt{a^2+\lambda_3'}\right)}{a^2+\lambda_3}.$$

$$M'N^2 = \sum (x' - x_1)^2 = \sum \frac{\left(x\sqrt{a^2+\lambda_3'} - x_1\sqrt{a^2+\lambda_3}\right)^2}{a^2+\lambda_3};$$

следовательно:

$$MN'^2 - M'N^2 = (\lambda_3 - \lambda_3') \sum \frac{x^2}{a^2+\lambda_3} - (\lambda_3 - \lambda_3') \sum \frac{x_1^2}{a^2+\lambda_3}.$$

Но так как обе точки M и N лежат на одном эллипсоиде, то

$$\sum \frac{x^2}{a^2+\lambda_3} = 1, \quad \sum \frac{x_1^2}{a^2+\lambda_3} = 1$$

и

$$MN'^2 - M'N^2 = 0 \text{ или } MN' = M'N.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

К § 1.

1. При каких условиях общее уравнение 2-й степени изображает окружность? Как определить координаты ее центра и радиус?
2. Что называется степенью точки относительно заданной окружности?
3. Каково геометрическое значение левой части нормального уравнения окружности?
4. Что называется радикальною осью двух окружностей и каковы ее свойства?
5. Что называется радикальным центром трех окружностей и каковы его свойства?

К § 2.

6. Как изображается уравнение пучка линий 2-го порядка, проходящих через точки пересечения двух данных линий того же порядка?
7. Сколько пар прямых имеется в каждом пучке линий 2-го порядка?
8. Как пишется уравнение пучка линий 2-го порядка, проходящих через вершины четырехугольника, для которого даны уравнения его сторон?
9. В чем состоит теорема Штейнера о двух проективных пучках прямых?
10. Как формулируется теорема Шаля об ангармоническом отношении четырех точек линии 2-го порядка?

К § 3.

11. Как формулируется теорема Паскаля о шестиугольнике, вписанном в линию 2-го порядка? Какой вид принимает теорема Паскаля для пятиугольника, для четырехугольника или треугольника?
12. В чем состоит теорема Брианшона, коррелятивная теореме Паскаля? Какой вид она принимает для пятиугольника, четырехугольника или треугольника, описанных около кривой 2-го порядка?
13. Как используются теоремы Паскаля и Брианшона для построения линии 2-го порядкя по данным ее точкам или касательным?

К § 4.

14. Как определяется фокус линии 2-го порядка Эйлером?
15. Сколько фокусов имеет линия 2-го порядка?
16. Какое геометрическое определение можно дать фокусам линий 2-го порядка?
17. Как пишется уравнение семейства линий, софокусных с данным эллипсом?

18. Из каких линий состоит семейство линий 2-го порядка, софокусных с данным эллипсом? Сколько таких линий проходит через каждую точку плоскости и как они в ней пересекаются?

19. Что такое эллиптические координаты точки плоскости и как они связаны с ее декартовыми координатами?

К § 5.

20. При каких условиях общее уравнение поверхностей 2-го порядка изображает шар? Как определить координаты его центра и радиус?

21. Что называется степенью точки относительно данного шара и как эта степень определяется по нормальному уравнению шара?

22. Через какую (мнимую) линию проходят все шары пространства?

23. Что называется радикальною плоскостью двух шаров и каковы ее свойства?

24. Что называется радикальною осью трех шаров и каковы ее свойства?

25. Что называется радикальным центром четырех шаров и каковы его свойства?

К § 6.

26. Если две поверхности 2-го порядка имеют общую плоскую линию, то какова будет их дополнительная линия пересечения?

27. Как находятся плоскости круговых сечений поверхности 2-го порядка?

28. Сколько будет действительных плоскостей круговых сечений для каждой из поверхностей 2-го порядка?

29. Что называется точками округления поверхностей 2-го порядка и как они находятся? Сколько точек округления имеет каждая из поверхностей 2-го порядка?

К § 7.

30. Как определяется геометрически фокус и директриса поверхности 2-го порядка?

31. Как находятся фокальные линии поверхностей 2-го порядка, что они собой представляют и как они расположены?

К § 8.

32. Как пишется уравнение семейства поверхностей 2-го порядка, конфокальных с данным эллипсоидом?

33. Каковы свойства семейства софокусных поверхностей 2-го порядка?

34. Что называется эллиптическими координатами точки пространства? Как они связаны с ее декартовыми координатами?

К § 9.

35. Как пишется уравнение семейства поверхностей 2-го порядка, конфокальных с данным параболоидом? Из каких поверхностей состоит это семейство?

Упражнения. 913. Пусть дан пучок окружностей $C_1 + \lambda C_2 = 0$, определяемый двумя основными окружностями:

$$C_1 \equiv (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$C_2 \equiv (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2 = 0,$$

доказать, что:

1) координаты центра какой-либо окружности пучка и ее радиус будут определяться соотношениями:

$$a = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1+\lambda}, \qquad b = \frac{b_1 + \lambda b_2}{1+\lambda}, \qquad r^2 = \frac{r_1^2 + (r_1^2 + r_2^2 - d^2)\lambda + r_2^2\lambda^2}{(1+\lambda)^2},$$

а потому центры всех окружностей пучка расположены на прямой, соединяющей центры основных данных окружностей;

2) между окружностями пучка найдутся две окружности нулевого радиуса (сводящиеся к своим центрам), их центры называются предельными точками пучка; предельные точки определяются координатами:

$$a = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda}, \qquad b = \frac{b_1 + \lambda b_2}{1 + \lambda},$$

где λ есть один из корней уравнения:

$$r_1^2 + (r_1^2 + r_2^2 - d^2)\lambda + r_2^2\lambda^2 = 0;$$

3) предельные точки действительны, если две основных окружности не пересекаются в действительных точках; они будут мнимыми, если две первоначальных окружности пересекаются в действительных точках;

4) все окружности пучка имеют одну и ту же радикальную ось;

5) степень какой-либо точки радикальной оси одинакова отнотносительно всех окружностей пучка.

914. Пусть радикальная ось двух окружностей $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ пересекает прямую их центров в точке O и пусть степень точки O относительно каждой из этих (непересекающихся) окружностей равна k^2; построим окружность C' с центром в точке O радиусом, равным k, тогда:

1) если касательная TM к окружности C' пересекает прямую центров данных окружностей в точке M, то окружность с центром в точке M и с радиусом, равным MT, будет принадлежать пучку (ибо степень точки O относительно этой окружности равна k^2);

2) окружность C' пересекает прямую центров в двух предельных точках (назовем их A и B);

3) окружности, проходящие через точки A и B и имеющие центры на радикальной оси первого пучка окружностей, образуют второй пучок, радикальною осью которого будет прямая центров первого пучка;

4) каждая окружность второго пучка пересекает любую окружность первого пучка ортогонально.[1]

915. Если три окружности $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ не принадлежат одному пучку, то уравнение:

$$\lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3 = 0$$

будет (при различных λ, μ, ν) изображать окружности, имеющие с тремя данными окружностями общий радикальный центр („связка окружностей“).

1) Связка окружностей содержит бесчисленное множество пучков окружностей: при этом, если две какие-либо окружности принадлежат связке, то ей принадлежат и все окружности пучка, определяемого двумя первыми окружностями.

2) Радикальные оси пучков, входящих в состав связки, образуют пучок прямых:

$$(C_1 - C_3) + m\,(C_2 - C_3) = 0;$$

все они, конечно, проходят через радикальный центр связки.

3) Степень радикального центра окружностей связки будет одна и та же относительно всех окружностей данной связки.

4) Пусть степень радикального центра относительно окружностей связки равна k^2, тогда все окружности связки ортогональны к окружности радиуса k с центром в радикальном центре.

---

[1] Если ограничиться рассмотрением области внутри окружности круга C', то сеть обоих пучков даст нам изображение меридианов и параллелей земного полушария на так называемой стереографической его карте. Пусть, например, A будет северный полюс, B — южный, а C и D — концы того диаметра шара, который перпендикулярен к большому кругу AQB, проходящему через точки A и B; если из точки C проектировать точки противоположного полушария на плоскость AQB, то мы и получим стереографическую проекцию этого полушария (его карту).

916. Уравнение, определяющее те значения параметра k, при которых линия $s - ks' = 0$ распадается на пару прямых, будет уравнением инвариантным при всяком коллинеарном преобразовании основных кривых $s = 0$ и $s' = 0$.

917. Какова будет теорема, коррелятивная теореме Штейнера?

918. Как формулировать теорему, коррелятивную теореме Шаля?

919. Доказать теорему Брианшона аналитически, пользуясь методом сокращенных обозначений.

920. В пучке поверхностей 2-го порядка

$$s - ks' = 0,$$

проходящих через линию пересечения двух поверхностей 2-го порядка $s = 0$ и $s' = 0$, имеется четыре конуса 2-го порядка; уравнение одного из этих конусов мы получим, если примем k равным одному из корней уравнения 4-й степени:

$$\left| a_{ik} - ka'_{ik} \right| = 0,$$

где a_k и a'_{ik} — коэфициенты уравнений данных поверхностей.

921. Уравнение

$$s - kuv = 0$$

изображает пучок поверхностей 2-го порядка, проходящих через две плоских линии пересечения данной поверхности 2-го порядка $s = 0$ и плоскостей $u = 0$ и $v = 0$.

922. Уравнение

$$s - ku^2 = 0$$

изображает пучок поверхностей 2-го порядка, имеющих с данною поверхностью, 2-го порядка $s = 0$ касание по линии ее пересечения с плоскостью $u = 0$.

923. Если $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ — уравнения четырех данных плоскостей, то уравнение:

$$\alpha\gamma - k\beta\delta = 0$$

изображает пучок поверхностей 2-го порядка, проходящих через четыре прямых:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & \beta &= 0; \\ \alpha &= 0, & \delta &= 0; \\ \gamma &= 0, & \beta &= 0; \\ \gamma &= 0, & \delta &= 0. \end{aligned}$$

Можно сказать, что это есть пучок поверхностей 2-го порядка, проходящих через косой (не плоский) четырехугольник $ABCDA$.

924. Геометрическое место прямых пересечения соответственных плоскостей двух проективных плоскостных пучков

$$\alpha - m\beta = 0 \text{ и } \gamma - \frac{k}{m}\delta = 0$$

есть поверхность 2-го порядка:

$$\alpha\gamma - k\beta\delta = 0,$$

проходящая через оси пучков. Кроме указанной серии прямых, поверхность содержит вторую серию прямых пересечения соответственных плоскостей двух пучков:

$$\alpha - m'\delta = 0 \text{ и } \gamma - \frac{k}{m'}\beta = 0.$$

925. Если три поверхности 2-го порядка проходят через одну кривую 2-го порядка, то три плоскости, содержащие дополнительные пересечения каждой пары поверхностей, проходят через одну прямую (сравните с теоремой Штурма для кривых 2-го порядка и с теоремой о радикальной оси трех шаров).

926. Если четыре поверхности 2-го порядка проходят через кривую 2-го порядка, то четыре плоскости, содержащие дополнительные пересечения каждой

пары поверхностей, проходят через одну точку (сравните с теоремой о радикальном центре четырех шаров).

927. Пусть α, β, γ, δ будут линейными функциями однородных декартовых координат $x:y:z:t$, тогда каждое из уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta) &= \beta(a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta), \\ \alpha(a_1'\alpha + b_1'\beta + c_1'\gamma + d_1'\delta) &= \beta(a_2'\alpha + b_2'\beta + c_2'\delta + d_2'\delta) \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

изображает поверхность 2-го порядка, проходящую через прямую $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Поэтому кривая 4-го порядка пересечения этих двух поверхностей распадается на прямую и линию 3-го порядка. Полагая $\beta = \lambda\alpha$ и *сокращая* предыдущие уравнения на α, мы получим для изображения кривой 3-го порядка уравнения (с параметром λ):

$$\begin{gathered} \lambda\alpha - \beta = 0, \\ (a_1 + \overline{b_1 - a_2}\lambda - b_2\lambda^2)\,\alpha + (c_1 - c_2\lambda)\,\gamma + (d_1 - d_2\lambda)\,\delta = 0, \\ (a_1' + \overline{b_1' - a_2'}\lambda - b_2'\lambda^2)\,\alpha + (c_1' - c_2'\lambda)\,\gamma + (d_1' - d_2'\lambda)\,\delta = 0, \end{gathered}$$

откуда легко найдем, что α, β, γ, δ (или же координаты x, y, z, t) пропорциональны функциям 3-й степени относительно параметра λ.

Обратно, если однородные координаты x, y, z, t пропорциональны заданным функциям 3-й степени некоторого параметра λ, то при изменении λ точка $M(x:y:z:t)$ будет описывать линию 3-го порядка, лежащую на поверхности 2-го порядка. В самом деле, положим, что

$$\begin{aligned} x &= \sigma(a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3), \\ y &= \sigma(b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3), \\ z &= \sigma(c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3), \\ t &= \sigma(d_0\lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3), \end{aligned}$$

где σ — множитель пропорциональности; эти уравнения будут определять кривую 3-го порядка, ибо, определяя ее точки пересечения с какою-нибудь плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

мы получим для λ уравнение 3-й степени. Разрешая указанные выше уравнения относительно $\sigma\lambda^3$, $\sigma\lambda^2$, $\sigma\lambda$, σ, мы получим:

$$\begin{aligned} \sigma\lambda^3 &= A_0x + B_0y + C_0z + D_0t \equiv u_0, \\ \sigma\lambda^2 &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1t \equiv u_1, \\ \sigma\lambda &= A_2x + B_2y + C_2z + D_2t \equiv u_2, \\ \sigma &= A_3x + B_3y + C_3z + D_3t \equiv u_3; \end{aligned}$$

наконец, исключая из этих уравнений σ и λ, мы найдем, что данная кривая лежит на каждой из поверхностей 2-го порядка:

$$\begin{aligned} u_0u_3 &= u_1u_2, \\ u_0u_2 &= u_1^2, \\ u_2^2 &= u_1u_3; \end{aligned}$$

каждая пара этих поверхностей имеет общую прямую. Так, первая и вторая поверхности имеют общую прямую $u_0 = 0$, $u_1 = 0$; первая и третья имеют общую прямую $u_2 = 0$, $u_3 = 0$; вторая и третья имеют общую прямую $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.

Каждое из уравнений (a) содержит шесть существенных параметров; в самом деле, например, в первом из них излишне требовать определения каждого из коэфициентов b_1 и a_2 в отдельности, достаточно знать лишь разность их; кроме того, это уравнение однородно относительно a_1, $b_1 - a_2$, c_1, d_1, b_2, c_2, d_2. Поэтому мы можем сказать, что пространственная кривая 3-го порядка, вообще говоря, определяется шестью точками.

Ответы и решения упражнений.

К главе XII.

576. Подставляя поочередно координаты данных точек в общее уравнение линии 2-го порядка, мы для коэфициентов уравнения искомой линии получим условия:

$$4a_{11} - 4a_{13} + a_{33} = 0, \qquad a_{22} - 2a_{23} + a_{33} = 0,$$
$$9a_{11} + 6a_{13} + a_{33} = 0, \qquad 4a_{22} + 4a_{23} + a_{33} = 0.$$
$$16a_{11} + 24a_{12} + 9a_{22} + 8a_{13} + 6a_{23} + a_{33} = 0.$$

Определяя из первых четырех уравнений входящие в них коэфициенты через a_{33}, получим:

$$a_{11} = -\frac{1}{6}a_{33}, \qquad a_{22} = -\frac{1}{2}a_{33},$$
$$2a_{13} = \frac{1}{6}a_{33}, \qquad 2a_{23} = \frac{1}{2}a_{33},$$

после чего из пятого уравнения найдем:

$$2a_{12} = \frac{1}{3}a_{33}.$$

Подставляя все найденные значения коэфициентов в общее уравнение и сокращая его затем на a_{33}, получим уравнение искомой линии в виде:

$$-\frac{x^2}{6} + \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{x}{6} + \frac{y}{2} + 1 = 0,$$

что после освобождения от знаменателей дает уравнение в тексте.

577. Коэфициенты уравнения линии, проходящей через пять заданных точек, удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned}
a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + 2a_{13} + 2a_{23} + a_{33} &= 0,\\
a_{11} + 2a_{12} + a_{22} - 2a_{13} - 2a_{23} + a_{33} &= 0,\\
4a_{11} - 8a_{12} + 4a_{22} + 4a_{13} - 4a_{23} + a_{33} &= 0,\\
9a_{11} - 18a_{12} + 9a_{22} - 6a_{13} + 6a_{23} + a_{33} &= 0,\\
4a_{11} + 12a_{12} + 9a_{22} + 4a_{13} + 6a_{23} + a_{33} &= 0.
\end{aligned}$$

Из двух первых сейчас же следуют соотношения:

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + a_{33} = 0,$$
$$a_{13} + a_{23} = 0;$$

упрощая остальные с помощью предыдущих, получим:

$$16a_{12} + 8a_{23} + 3a_{33} = 0,$$
$$9a_{12} + 3a_{13} + 2a_{33} = 0,$$
$$4a_{12} + 5a_{22} - 2a_{13} - 3a_{33} = 0.$$

Из этих пяти соотношений легко выразить все коэфициенты через a_{33}, и тогда уравнение линии, проходящей через пять заданных точек, найдем в виде

$$16x^2 + 5xy - 9y^2 + x - y - 12 = 0;$$

легко далее проверить, что координаты шестой точки этому уравнению удовлетворяют.

579. Преобразованное уравнение должно иметь вид:

$$5x^2 + 8xy + 3y^2 + a'_{33} = 0;$$

свободный его член определится из условия инвариантности дискриминанта:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & -6 \\ 5 & -6 & -400 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}' \end{vmatrix}$$

или

$$-95 = -a_{33}'.$$

Следовательно, искомое преобразованное уравнение будет:

$$5x^2 + 8xy + 3y^2 + 95 = 0.$$

580. Дискриминант из всех коэфициентов данного уравнения будет:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -7 \\ 2 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -168;$$

так как он отличен от нуля, то данное уравнение изображает линию, *не распадающуюся* на пару прямых.

581. Если уравнение изображает пару прямых, то его дискриминант должен обращаться в нуль:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & -3 & -4 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$m = -5.$$

582. Передвинем начало координат в точку M_1, сохраняя направления осей; в таком случае координаты точки M_2 относительно новой системы будут:

$$x' = x_2 - x_1, \qquad y' = y_2 - y_1.$$

Расстояние точки M_2 от нового начала M_1, определяемое формулой (17)

$$d^2 = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos \omega,$$

и будет расстоянием двух заданных точек M_1 и M_2; заменяя в предыдущем выражении координаты x' и y' их указанными значениями через старые координаты, окончательно получим:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \omega.$$

584. Для оси Ox угол $\theta = 0$, поэтому ее угловые коэфициенты будут:

$$m' = 1, \quad n' = 0;$$

для оси Oy угол $\theta = \omega$, следовательно:

$$m'' = 0, \quad n'' = 1.$$

588. Условия пропорциональности коэфициентов данного уравнения коэфициентам общего уравнения окружности, взятого по отношению к прямоугольной системе координат:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0,$$

дадут нам соотношения:

$$\frac{1}{1} = \frac{-2a}{-4} = \frac{-2b}{6} = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{-3}.$$

или

$$2a = 4,$$
$$-2b = 6,$$
$$a^2 + b^2 - r^2 = -3,$$

откуда найдем координаты центра данной окружности;

$$a = 2, \qquad b = -3$$

и ее радиус

$$r = 4.$$

589. В каждом из данных случаев вычислим дискриминант старших членов и дискриминант из всех коэфициентов; их значениями и определится тип линии:

1) $\delta = 11$, $\Delta = -196$; нераспадающаяся линия эллиптического типа (эллипс).

2) $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$: нераспадающаяся линия гиперболического типа (гипербола).

3) $\delta < 0$, $\Delta = 0$; распадающаяся линия гиперболического типа (пара непараллельных прямых).

4) $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$; нераспадающаяся линия параболического типа (парабола).

5) $\delta = 0$, $\Delta = 0$; распадающаяся линия параболического типа (пара параллельных прямых).

6) $\delta > 0$, $\Delta = 0$; распадающаяся линия эллиптического типа (пара мнимых прямых).

7) $\delta = 0$, $\Delta = 0$; пара параллельных (совпадающих) прямых.

590. Угловые коэфициенты асимптотических направлений данной линии определяются уравнением:

$$6 + k - 12k^2 = 0,$$

откуда $k_1 = -\frac{2}{3}$, $k_2 = \frac{3}{4}$. Следовательно, тангенс угла этих направлений будет:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}} = \frac{17}{6}.$$

591. Угловые коэфициенты k_1 и k_2 асимптотических направлений определяются уравнением:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0; \tag{26'}$$

тогда по свойству квадратного уравнения:

$$k_1 + k_2 = -\frac{2a_{12}}{a_{22}}, \quad k_1 k_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}}.$$

Условие перпендикулярности двух направлений, отнесенных к косоугольной системе координат, пишется в виде:

$$1 + (k_1 + k_2)\cos\omega + k_1 k_2 = 0;$$

подставляя сюда найденные выше значения для суммы и произведения угловых коэфициентов асимптотических направлений, мы получим условие перпендикулярности последних в виде соотношения:

$$a_{11} - 2a_{12}\cos\omega + a_{22} = 0.$$

Нетрудно видеть, что для данной линии это условие выполняется, ибо:

$$5 - 22\cos\frac{\pi}{3} + 6 = 0.$$

592. Координаты искомых точек пересечения определятся уравнениями:

$$-2x^2+xy+6y^2+14x+7y-27=0,$$
$$-2x^2+xy+6y^2=0$$

или, что то же самое, равносильными им уравнениями:

$$-2x^2+xy+6y^2=0,$$
$$14x+7y-27=0. \qquad (\alpha)$$

Решая первое из них относительно отношения $\frac{y}{x}$, мы получим:

$$\frac{y_1}{x_1}=-\frac{2}{3}, \qquad \frac{y_2}{x_2}=\frac{1}{2},$$

откуда с помощью второго из уравнений (α) найдем:

$$x_1=\frac{81}{28}, \qquad y_1=-\frac{27}{14},$$
$$x_2=\frac{54}{35}, \qquad y_2=\frac{27}{35}.$$

Каждая из указанных прямых сверх того пересекает данную линию в бесконечно удаленной точке.

593. Угловой коэфициент хорды, делящейся в точке $(x_1;\ y_1)$ пополам, определится по формуле:

$$k=-\frac{F_{x_1}}{F_{y_1}};$$

в данном случае он будет:

$$k=-\left(\frac{x-y-4}{-x+5y+8}\right)_{\substack{x=1\\ y=2}}=\frac{5}{17}.$$

594. Для первой точки

$$k_1=-\left(\frac{4x-6y+6}{-6x+7y-1}\right)_{\substack{x=2\\ y=1}}=\frac{4}{3},$$

для второй точки $k_2=0$, для третьей $k_3=\infty$.

595. Координаты центра будут:

$$x=-41, \quad y=-18.$$

596. 1)

$$x=\frac{74}{7}, \quad y=-\frac{45}{7};$$

2) бесконечно удаленная точка;

3) прямая центров, изображаемая уравнением:

$$4x+10y-9=0;$$

4) $x=-\frac{13}{25}$, $y=\frac{41}{25}$; заданное уравнение изображает пару прямых;

5) прямая центров, изображаемая уравнением: $x+y-5=0$; заданное уравнение изображает пару совпадающих прямых.

597. Уравнение каждой из двух прямых в отдельности, на которые распадается линия, определяемая данным уравнением, можно составить как уравнение прямой, проходящей через центр линии и имеющей одно из асимптотических направлений. Угловые коэфициенты асимптотических направлений найдутся из уравнения:

$$12+11k-5k^2=0;$$

они будут $k_1 = 3$, $k_2 = -\frac{4}{5}$. Координаты центра определятся из уравнений:

$$12x + \frac{11}{2}y - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\frac{11}{2}x - 5y + 16 = 0;$$

они имеют значения:

$$x = -\frac{18}{19}, \quad y = \frac{41}{19}.$$

Теперь уравнения искомых прямых напишутся в виде:

$$y - \frac{41}{19} = 3\left(x + \frac{18}{19}\right),$$

$$y - \frac{41}{19} = -\frac{4}{5}\left(x + \frac{18}{19}\right)$$

или

$$3x - y + 5 = 0,$$

$$4x + 5y - 7 = 0.$$

Нетрудно проверить, что левая часть уравнения данной линии является произведением левых частей найденных уравнений.

Тот же результат можно получить и немного скорее; в тексте было показано, что уравнение распадающейся линии может быть приведено к виду (34); это же последнее можно разрешить относительно отношения $F_x : F_y$, и тогда уравнения прямых, на которые распадается данная линия, получатся в виде

$$F_x + k_1 F_y = 0,$$

$$F_x + k_2 F_y = 0,$$

где k_1 и k_2 — угловые коэфициенты асимптотических направлений.

Итак, в нашем случае уравнения искомых прямых будут;

$$\left(12x + \frac{11}{2}y - \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{11}{2}x - 5y + 16\right) = 0,$$

$$\left(12x + \frac{11}{2}y - \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{5}\left(\frac{11}{2}x - 5y + 16\right) = 0;$$

их легко привести к тому же виду, в каком мы получили эти уравнения первым способом.

598. В каждом случае мы сначала вычислим дискриминант из всех коэфициентов; при обращении его в нуль линия распадается; уравнения самих прямых, на которые распадается данная линия, в первом случае найдем способами, указанными в решении предыдущей задачи:

1) $\Delta = 0, \qquad (5x - 2y - 3)(x + 3y - 4) = 0.$

2) Данное уравнение можно представить в виде:

$$(x + 2y)^2 - 2(x + 2y) - 8 = 0,$$

следовательно, его левая часть может быть разложена на множители:

$$(x + 2y + 2)(x + 2y - 4) = 0;$$

уравнение изображает пару параллельных прямых.

3) В этом случае уравнение представится в виде:

$$(3x + 2y)^2 + 6(3x + 2y) + 9 = 0$$

или же

$$(3x+2y+3)^2=0;$$

следовательно, оно изображает пару совпадающих прямых.

599. Согласно разъяснению в тексте надо подсчитать дискриминанты Δ и δ; тогда преобразованное уравнение напишется в виде (35), где свободный член определяется по формуле (36).

1) $\delta=5,\ \Delta=-40;\ x^2+4xy+9y^2-8=0;$

2) $\delta=-13,\ \Delta=403;\ 3x^2-8xy+y^2-31=0;$

3) $\delta=-\dfrac{529}{4},\ \Delta=1\,285;\quad 6x^2-7xy-20y^2-\dfrac{5\,140}{529}=0.$

600. *Ответ*:

$$2x-y+k(-x+1)=0.$$

601. На основании формулы (29′) получим:

$$3x-\frac{5}{2}y+4-\frac{2}{3}\left(-\frac{5}{2}x+y\right)=0$$

или же

$$28x-19y+24=0.$$

602. Диаметр

$$6x-\frac{9}{2}y+1+k\left(-\frac{9}{2}x+13y+2\right)=0$$

проходит через точку (1; -2), если координаты последней удовлетворяют его уравнению, т. е. если

$$16-\frac{57}{2}k=0,$$

откуда $k=\dfrac{32}{57}$. Поэтому уравнение искомого диаметра будет:

$$36x+29y+22=0.$$

603. Уравнение пучка диаметров будет:

$$x+\frac{1}{2}y+2+k\left(\frac{1}{2}x-2y+3\right)=0$$

или

$$(2+k)x+(1-4k)y+(4+6k)=0.$$

Для диаметра, параллельного оси Ox, имеем: $2+k'=0$ или $k'=-2$, следовательно, он изобразится уравнением:

$$9y-8=0.$$

Для диаметра, параллельного оси Oy, необходимо $1-4k''=0$ или $k''=\dfrac{1}{4}$, следовательно, его уравнение будет:

$$9x+22=0.$$

604. Возьмем уравнение диаметра по формуле (29):

$$m(4x+4y-9)+n(4x+11y+5)=0;$$

если он делит пополам хорды, параллельные оси Ox, то $m'=1$, $n'=0$, и его уравнение будет:

$$4x+4y-9=0;$$

если он делит хорды, параллельные оси Oy, то $m''=0$, $n''=1$, и его уравнение примет вид:

$$4x+11y+5=0.$$

605. Для эллипса:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{ky}{b^2} = 0,$$

для гиперболы:

$$\frac{x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 0,$$

наконец, для параболы:

$$-p + ky = 0.$$

606. Из условия сопряженности:

$$7 + 4(k + k') + 13kk' = 0$$

при $k = -\frac{2}{3}$ найдем:

$$k' = \frac{13}{14}.$$

607. Если диаметр

$$(5x + 3y + 5) + k(3x + 11y + 4) = 0 \qquad (\alpha$$

проходит через точку (1, —2), то координаты последней удовлетворяют его уравнению, следовательно:

$$4 - 15k = 0,$$

откуда $k = \frac{4}{15}$; это и будет угловой коэфициент сопряженного направления. Угловой коэфициент самого диаметра (α) будет:

$$k' = -\frac{5 + 3k}{3 + 11k} = -\frac{87}{89}.$$

608. Для эллипса или гиперболы условие сопряженности будет:

$$\frac{1}{a^2} \pm \frac{kk'}{b^2} = 0.$$

609. По формуле:

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$$

найдем:

$$k = \frac{2}{5}.$$

610. Уравнение пучка диаметров данной параболы будет:

$$9x - 15y + 9 + k(-15x + 25y + 6) = 0.$$

1) Если диаметр проходит через точку (1; 1), то $k = -\frac{3}{16}$, и его уравнение будет: $3x - 5y + 2 = 0$; для параболы можно было бы не пользоваться этим общим приемом, применимым для любых линий 2-го порядка; в самом деле, угловой коэфициент диаметра параболы равен

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{9}{-15} = \frac{3}{5},$$

и диаметр в данном случае проходит через точку (1 ; 1), поэтому его уравнение будет

$$y - 1 = \frac{3}{5}(x - 1)$$

или попрежнему:

$$3x - 5y + 2 = 0.$$

2) Диаметр, сопряженный хордам направления $k=\frac{1}{5}$, изобразится уравнением:

$$3x-5y+\frac{51}{10}=0.$$

3) Угловой коэфициент хорд, перпендикулярных к сопряженному им диаметру, определится из условия:

$$k=-\frac{1}{k'}=-\frac{5}{3},$$

где $k'=\frac{3}{5}$ угловой коэфициент диаметров данной параболы; поэтому уравнение диаметра, перпендикулярного к сопряженным хордам, будет:

$$3x-5y-\frac{3}{34}=0.$$

4) Угловой коэфициент хорд по данному условию определится из соотношения:

$$\frac{\frac{3}{5}-k}{1+\frac{3}{5}k}=-\frac{1}{4},$$

откуда $k=1$, следовательно, искомый диаметр изобразится уравнением:

$$3x-5y-\frac{15}{2}=0.$$

611. Угловые коэфициенты сопряженных направлений связаны для данной линии условием:

$$2-\frac{3}{2}(k+k')+kk'=0;$$

эти направления составляют между собой заданный угол, если:

$$\frac{k'-k}{1+kk'}=\frac{2}{9}.$$

Решая полученные уравнения совместно, мы найдем две пары сопряженных направлений:

$$k_1=\frac{5}{3}, \qquad k_1'=3.$$

$$k_2=\frac{3}{4}, \qquad k_2'=\frac{7}{6}.$$

612. Аналогично предыдущему мы составим два уравнения:

$$1+2(k+k')-5kk'=0.$$

$$1+kk'=0;$$

решая их, найдем одну пару сопряженных и ортогональных направлений:

$$k=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, \qquad k'=\frac{-3-\sqrt{13}}{2},$$

ибо другое решение:

$$k=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \qquad k'=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$$

дает ту же пару, как и первое.

613. Уравнение, определяющее угловые коэфициенты главных направлений данной линии, можем сразу написать по формуле (37'):

$$6k^2 - 5k - 6 = 0,$$

откуда

$$k_1 = \frac{3}{2}, \quad k_2 = -\frac{2}{3}.$$

614. По формуле (37) угловые коэфициенты главных направлений $\left(\cos\omega = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right)$ должны определяться из уравнения:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)k^2 + (1 - 1)\,k + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

которое в данном случае обращается в тождество; следовательно, главные направления данной линии неопределенны, т. е. линия оказывается окружностью. Действительно, данное уравнение можно написать в виде:

$$\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{20}{3}\right)^2 + 2\left(x + \frac{10}{3}\right)\left(y - \frac{20}{3}\right)\cos\omega - \frac{100}{3} = 0,$$

поэтому относительно данной косоугольной системы координат $\left(\cos\omega = \frac{1}{2}\right)$ оно изображает окружность радиуса, равного $\frac{10}{\sqrt{3}}$, с центром в точке $\left(-\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right)$.

618. 1) Характеристическое уравнение будет:

$$\begin{vmatrix} 3 - s & 2 \\ 2 & 5 - s \end{vmatrix} = 0$$

или

$$s^2 - 8s + 11 = 0,$$

откуда

$$s_1 = 4 + \sqrt{5}, \quad s_2 = 4 - \sqrt{5}.$$

Угловые коэфициенты главных направлений могут быть найдены, например, с помощью первого из уравнений (38):

$$3 - s + 2k = 0,$$

где поочередно s мы должны принимать равным одному из найденных значений. Таким способом мы получим:

$$k_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad k_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

2) $s_1 = -8, \quad s_2 = 2; \quad k_1 = -3, \quad k_2 = \frac{1}{3}.$

3) $s_1 = 0, \quad s_2 = 5; \quad k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = 2.$

4) $s_1 = s_2 = 1$; угловые коэфициенты главных направлений неопределенны (окружность).

619. 1) $s^2 - \frac{584}{3}s - 20340 = 0, \quad s_1 = 270, \quad s_2 = -\frac{226}{3};$

$$k_1 = -\frac{15}{17}, \quad k_2 = \frac{19}{13}.$$

$$2)\quad s^2-\frac{92}{3}s+\frac{224}{3}=0, \qquad s_1=28,\ s_2=\frac{8}{3};$$

$$k_1=-\frac{3}{5},\quad k_2=7.$$

620. Ось параболы изобразится уравнением:

$$5x+10y-6=0.$$

621. Главная ось линии есть один из диаметров, изображаемых уравнением

$$F_x+kF_y=0,$$

где k — угловой коэфициент другого главного направления, определяемый уравнением (в прямоугольной системе координат):

$$a_{11}-s-a_{12}k=0.$$

Исключая из этих уравнений k, мы получим уравнение осей в виде:

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ a_{11}-s & a_{12} \end{vmatrix}=0,$$

где s мы должны поочередно заменять корнями характеристического уравнения. Применим эти соображения к данным случаям:

1) $s_1=3$, $s_2=77$, поэтому для первой линии уравнения осей будут:

$$\begin{vmatrix} 5x+12y-18 & 2 \\ 12x+75y+3 & 12 \end{vmatrix}=0 \text{ и } \begin{vmatrix} 5x+12y-18 & -72 \\ 12x+75y+3 & 12 \end{vmatrix}=0$$

или же

$$6x-y-37=0,$$
$$x+6y=0.$$

2) $s_1=20$, $s_2=-6$, поэтому для второй линии уравнения осей будут:

$$\begin{vmatrix} 7x+13y+21 & -13 \\ 13x+7y & 13 \end{vmatrix}=0 \text{ и } \begin{vmatrix} 7x+13y+21 & 13 \\ 13x+7y & 13 \end{vmatrix}=0$$

или же

$$x+y+\frac{21}{20}=0,$$

$$-x+y+\frac{7}{2}=0.$$

622. Угловой коэфициент касательной в данной точке линии будет:

$$k=-\left(\frac{3x-6y+4}{-6x+5y+3}\right)_{\substack{x=3\\y=-2}}=1.$$

623. Уравнение касательной будет:

$$x+2=0.$$

624. Если данная прямая касается заданной линии, то уравнение этой прямой должно быть тождественно с уравнением (41′) касательной в некоторой точке $(x_1;\ y_1)$. Поэтому координаты $(x_1;\ y_1)$ точки прикосновения должны удовлетворять уравнению самой прямой

$$13x_1+y_1-16=0$$

и условиям:

$$\frac{F_{x_1}}{13}=\frac{F_{y_1}}{1}=\frac{F_{z_1}}{-16}$$

или же условиям:

$$\frac{x_1+\frac{1}{2}y_1+4}{13}=\frac{\frac{1}{2}x_1+y_1-3}{1}=\frac{4x_1-3y_1-3}{-16}.$$

Нетрудно убедиться, что все эти уравнения удовлетворяются при $x=1$, $y=3$; таковы будут, следовательно, координаты точки прикосновения данной прямой к заданной линии.

Можно воспользоваться и следующим соображением: если прямая касается линии, то она должна ее пересекать в двух совпавших точках. Решая совместно уравнения данной прямой и заданной линии, мы получим координаты точки соприкосновения: $x=1$, $y=3$.

625. Угловой коэфициент искомой касательной должен быть одинаков с угловым коэфициентом заданной прямой, поэтому:

$$-\frac{5x+3y+2}{3x+7y}=5;$$

решая это уравнение совместно с уравнением самой кривой, мы найдем координаты точек прикосновения двух касательных:

$$x_1=-2,\ y_1=1;\ x_2=\frac{12}{13},\ y_2=-\frac{7}{13}.$$

Соответствующие касательные изобразятся уравнениями:

$$y-1=5(x+2),$$

$$y+\frac{7}{13}=5\left(x-\frac{12}{23}\right)$$

или же

$$5x-y+11=0,$$

$$5x-y-\frac{67}{13}=0,$$

626. Для эллипса:

$$\frac{Xx_1}{a^2}+\frac{Yy_1}{b^2}-1=0,$$

для гиперболы:

$$\frac{Xx_1}{a^2}-\frac{Yy_1}{b^2}-1=0,$$

для параболы:

$$Yy_1=p(X+x_1).$$

627. Условие касания будет:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & u \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & v \\ 0 & -1 & 0 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=0$$

или

$$u^2+\frac{1}{4}w^2-2vw+uw=0.$$

628. Тангенциальное уравнение будет:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & u \\ 2 & 2 & -\frac{1}{4} & v \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=0.$$

или

$$31u^2 + 12v^2 - 32w^2 - 68uv - 48uw + 40vw = 0.$$

Если касательная проходит через точку $\left(\frac{5}{2}; -5\right)$, то ее координаты $u : v :$ [redacted]жны быть связаны соотношениями:

$$\frac{5}{2}u - 5v + w = 0;$$

решая это последнее уравнение совместно с тангенциальным уравнением линии, имеем два решения:

$$\frac{u_1}{6} = \frac{v_1}{1} = \frac{w^1}{-10},$$

$$\frac{u_2}{2} = \frac{v_2}{1} = \frac{w_2}{0};$$

и следовательно, получим две касательные:

$$6x + y - 10 = 0,$$

$$2x + y \qquad = 0;$$

первая из них, как нетрудно убедиться, касается кривой в точке $(2; -2)$, вторая же в точке $(-1; 2)$.

629. Для эллипса: $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$, для гиперболы: $a^2u^2 - b^2v^2 - w^2 = 0$, для параболы: $pv^2 - 2uw = 0$.

630. По формулам, указанным в конце § 13, координаты точки прикосновения определяются в виде:

$$\frac{x_1}{2u - 3v} = \frac{y_1}{-3u + v + w} = \frac{z_1}{v + w},$$

где надо принять $u = 1$, $v = 3$, $w = 1$. Итак:

$$\frac{x_1}{-7} = \frac{y_1}{1} = \frac{z_1}{4}.$$

631. Угловые коэфициенты асимптотических направлений будут $k_1 = 3$, $k_1 = -\frac{1}{3}$, поэтому уравнения асимптот напишутся в виде:

$$(3x + 4y + 3) + 3(4x - 3y + 6) = 0,$$

$$(3x + 4y + 3) - \frac{1}{3}(4x - 3y + 6) = 0,$$

или же

$$15x - 5y + 21 = 0,$$

$$5x + 15y + 3 = 0.$$

632. По формуле (48) получим:

$$6\left(\frac{11}{2}x + 4y + 7\right)^2 - 11\left(\frac{11}{2}x + 4y + 7\right)\left(6x + \frac{11}{2}y - 5\right) + $$

$$+ 4\left(6x + \frac{11}{2}y - 5\right)^2 = 0$$

или по упрощении:

$$6x^2 + 11xy + 4y^2 - 10x + 14y - \frac{3116}{25} = 0.$$

633. Угловые коэфициенты асимптот будут:

$$k_1 = -1, \; k_2 = -\frac{3}{2},$$

поэтому тангенс угла между асимптотами равен:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{3}{2}+1}{1+\frac{3}{2}} = -\frac{1}{5}.$$

634. Угловые коэфициенты асимптот из уравнения:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

найдутся в виде:

$$k_1 = \frac{-a_{12} - \sqrt{-\delta}}{a_{22}}, \quad k_2 = \frac{-a_{12} + \sqrt{-\delta}}{a_{22}},$$

поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{2\sqrt{-\delta}}{a_{11} + a_{22}}.$$

635. *Ответ*:

$$x^2 - \frac{xy}{8} + \frac{y^2}{4} - 2x - y + 1 = 0.$$

636. *Ответ*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

637. Условиями того, что линия касается каждой из осей координат, будут соотношения:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{33} - a_{13}{}^2 &= 0, \\ a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2 &= 0; \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

сверх того линия проходит через три заданные точки, поэтому

$$\begin{aligned} 16a_{11} + 48a_{12} + 36a_{22} + 8a_{13} + 12a_{23} + a_{33} &= 0, \\ 9a_{11} + 48a_{12} + 64a_{22} + 6a_{13} + 16a_{23} + a_{33} &= 0, \\ a_{11} + 12a_{12} + 36a_{22} + 14a_{13} + 84a_{23} + 49a_{33} &= 0; \end{aligned} \qquad (\beta)$$

все эти уравнения мы и должны разрешить относительно отношений пяти коэфициентов *к шестому*. Чтобы удовлетворить два первых уравнения, положим:

$$\frac{a_{11}}{a_{13}} = \frac{a_{13}}{a_{33}} = u,$$

$$\frac{a_{22}}{a_{23}} = \frac{a_{23}}{a_{33}} = v$$

или же

$$a_{11} = u^2 a_{33}, \quad a_{13} = u a_{33},$$

$$a_{22} = v^2 a_{33}, \quad a_{23} = v a_{33}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (β), получим:

$$\begin{aligned} 16u^2 + 48\frac{a_{12}}{a_{33}} + 36v^2 + 8u + 12v + 1 &= 0, \\ 9u^2 + 48\frac{a_{12}}{a_{33}} + 64v^2 + 6u + 16v + 1 &= 0, \\ u^2 + 12\frac{a_{12}}{a_{33}} + 36v^2 + 14u + 84v + 49 &= 0. \end{aligned} \qquad (\beta')$$

Исключим из этих уравнений отношение $\frac{a_{12}}{a_{33}}$, тогда:

$$\begin{aligned} 7u^2 - 28v^2 + 2u - 4v &= 0, \\ 4u^2 - 36v^2 - 16u - 108v - 65 &= 0; \end{aligned} \qquad (\beta'')$$

левая часть первого из этих уравнений распадается на два линейных множителя в виде:

$$(7u + 14v + 2)(u - 2v) = 0;$$

таким образом система уравнений (β'') распадается на две отдельных системы, именно систему:

$$u + 2v + \frac{2}{7} = 0,$$

$$4u^2 - 36v^2 - 16u - 108v - 65 = 0,$$

и систему:

$$u - 2v = 0,$$

$$4u^2 - 36v^2 - 16u - 108v - 65 = 0.$$

Решения обеих систем дадут нам:

$$u_1 = \frac{29}{7}, \quad u^2 = \frac{17}{7}, \quad u_3 = -1, \quad u_4 = -13,$$

$$v_1 = -\frac{31}{14}, \quad v_2 = -\frac{19}{14}, \quad v_3 = -\frac{1}{2}, \quad v_4 = -\frac{13}{2},$$

и мы получим четыре уравнения линий, удовлетворяющих поставленным условиям:

1) $841x^2 - \frac{1\,873}{2}xy + \frac{961}{4}y^2 + 406x - 217y + 49 = 0,$

2) $289x^2 - \frac{673}{2}xy + \frac{361}{4}y^2 + 238x - 133y + 49 = 0,$

3) $x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - 2x - y + 1 = 0,$

4) $169x^3 - \frac{337}{2}xy + \frac{169}{4}y^2 - 26x - 13y + 1 = 0.$

638. Свободный член преобразованного уравнения определится из условия равенства дискриминантов прежнего и нового уравнений:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & a_{33}' \end{vmatrix},$$

откуда

$$a_{33}' = -6.$$

Координаты нового начала можно определить по заданным коэфициентам членов с первыми степенями координат в новом уравнении [см. § 2, формула (9)]:

$$F_{x_1} = -1, \quad F_{y_1} = -2$$

или

$$x_1 - 2y_1 - 4 = -1,$$
$$-2x_1 + 3y_1 + 3 = -2,$$

откуда

$$x_1 = 1, \quad y_1 = -1.$$

639. При условии, что дискриминант данного уравнения обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} AA' & \frac{AB' + A'B - \lambda}{2} & \frac{AC' + A'C}{2} \\ \frac{AB' + A'B - \lambda}{2} & BB' & \frac{BC' + B'C}{2} \\ \frac{AC' + A'C}{2} & \frac{BC' + B'C}{2} & CC' \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -\frac{(AC' - A'C)(BC' - B'C)}{CC'}.$

Очевидно также, что данное уравнение изображает пару прямых и в случае, когда $\frac{1}{\lambda_3} = 0$.

640. Разделением уравнения на старший коэфициент оно должно приводиться к каноническому уравнению окружности, поэтому:

$$\frac{1}{L} = \frac{-2a}{P} = \frac{-2b}{Q} = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{S}.$$

откуда

$$a = -\frac{P}{2L}, \quad b = -\frac{Q}{2L}, \; r^2 = \frac{P^2 + Q^2 - 4SL}{4L^2}.$$

641. В общем полярном уравнении линии (25) (см. § 5) мы должны принять 1) для хорды, параллельной оси ox:

$$m' = 1, \quad n' = 0,$$

тогда длины отрезков хорды определятся уравнением:

$$a_{11}\rho^2 + 2F_{x_1}\rho + 2F_1 = 0, \quad \rho_1'\rho_2' = \frac{2F_1}{a_{11}};$$

2) для хорды, параллельной оси oy:

$$m'' = 0, \quad n'' = 1,$$

тогда длины ее отрезков найдутся из уравнения:

$$a_{22}\rho^2 + 2F_{y_1}\rho + 2F_1 = 0, \quad \rho_1''\rho_2'' = \frac{2F_1}{a_{22}},$$

отсюда получим:

$$\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_1''\rho_2''} = \frac{a_{22}}{a_{11}}.$$

643. Нетрудно установить, что линия 2-го порядка, проходящая через четыре данных точки, будет изображаться уравнением:

$$\frac{x^2}{a_1a_2} + 2a_{12}xy + \frac{y^2}{b_1b_2} - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)x - \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)y + 1 = 0,$$

где коэфициент a_{12} остается неопределенным, так как через четыре данных точки можно провести бесчисленное множество линий 2-го порядка.

Исключая коэфициент a_{12} из уравнений, определяющих центр какой-либо из этих линий:

$$\frac{x}{a_1a_2} + a_{12}y - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) = 0,$$

$$a_{12}x + \frac{y}{b_1b_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right) = 0,$$

мы получим уравнение:

$$\frac{x^2}{a_1a_2} - \frac{y^2}{b_1b_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)y = 0$$

искомого геометрического места центров всех линий 2-го порядка, проходящих через четыре заданных точки.

644. Главные направления линии, распадающейся на пару прямых, очевидно, располагаются по биссектрисам этих прямых, ибо две биссектрисы пары прямых взаимно перпендикулярны и хорды, параллельные одной из биссектрис, другой будут делиться пополам.

645. *Ответ*:

$$(A'x + B'y + C')(A''x + B''y + C'') -$$
$$-(A'x_1 + B'y_1 + C')(A''x_1 + B''y_1 + C'') = 0.$$

646. Покажем, как преобразуется уравнение (8) указанной заменой коэфициентов m и n. Возьмем прежде всего коэфициент N; после замены он примет вид:

$$N = mF_{x_1} + nF_{y_1} = \frac{(x-x_1)F_{x_1} + (y-y_1)F_{y_1}}{\rho};$$

добавим и вычтем в числителе (при $z = z_1 = 1$) равные выражения zF_{z_1} и $z_1F_{z_1}$, тогда:

$$N = \frac{(xF_{x_1} + yF_{y_1} + zF_{z_1}) - (x_1F_{x_1} + y_1F_{y_1} + z_1F_{z_1})}{\rho}$$

или

$$N = \frac{P - 2F_1}{\rho}.$$

Развернем теперь выражение $\rho^2 M$, оно будет:

$$\rho^2 M = a_{11}(x-x_1)^2 + 2a_{12}(x-x_1)(y-y_1) + a_{22}(y-y_1)^2 =$$
$$= (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) + (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2) -$$
$$- 2(a_{11}xx_1 + a_{12}\overline{xy_1 + x_1y} + a_{22}yy_1);$$

дополним первую скобку правой части членами $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$, вторую же скобку — членами $2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33}$, а затем вычтем обе эти суммы; тогда, легко видеть, получим:

$$\rho^2 M = 2F + 2F_1 - 2P.$$

Теперь по умножении на ρ^2 уравнение (8) примет вид:

$$(P - 2F_1)^2 - 2F_1(2F + 2F_1 - 2P) = 0$$

или после упрощения:

$$P^2 - 2F_1 \cdot 2F = 0.$$

647. Составим прежде всего половины частных производных от левой части данного уравнения и определим их значения и значение левой части уравнения для координат данной точки:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= x + y - 2, \\ F_y &= x + 3y - 3, \\ F_z &= -2x - 3y, \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &-1 + 2 - 2 = -1, \\ &-1 + 6 - 3 = 2, \qquad 2F_1 = 1; \\ &2 - 6 = -4; \end{aligned}$$

теперь находим сначала:

$$P = -x + 2y - 4,$$

а затем и самое уравнение искомой пары касательных в виде:

$$(-x + 2y - 4)^2 - (x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 6y) = 0$$

или

$$-6xy + y^2 + 12x - 10y + 16 = 0.$$

Дискриминант Δ из всех коэфициентов последнего уравнения обращается в нуль, что подтверждает, что уравнение изображает пару прямых; представив это уравнение по указанию, данному в § 8 согласно формуле (34), в виде:

$$(\overline{F}_x)^2 + 6\overline{F}_x\overline{F}_y = 0,$$

где $2\overline{F}$ — левая часть полученного уравнения пары касательных, мы получим раздельно уравнения искомых касательных:

$$-y + 2 = 0,$$
$$6x - y + 8 = 0;$$

произведение их левых частей действительно дает полученное выше уравнение пары этих касательных.

648. *Ответ*:

$$1)\ (x+5y+1)^2-3(3x^2+4xy+7y^2-4x+1)=0$$

или

$$4x^2+xy-2y^2-7x-5y+1=0.$$

$$2)\ (x+8y-12)^2-6(x^2+10xy+y^2-8x+2y+3)=0$$

или

$$-5x^2-44xy+58y^2+24x-204y+126=0.$$

$$3)\ (8x+5y+14)^2-32(x^2+4xy+y^2+6x+2y+9)=0$$

или

$$32x^2-48xy-7y^2+32x+76y-92=0.$$

649. Уравнение пары касательных будет:

$$(5x-y-8)^2-5(x^2-6xy+8y)=0$$

или

$$20x^2+20xy+y^2-80x-24y+64=0.$$

Для определения точек касания надо искать пересечение поляры:

$$5x-y-8=0$$

с данной кривой; для пары этих точек координаты найдутся в виде:

$$x_1=\frac{4(11+\sqrt{5})}{29},\quad y_1=\frac{4(-3+5\sqrt{5})}{29},$$

$$x_2=\frac{4(11-\sqrt{5})}{29},\quad y_2=\frac{4(-3-5\sqrt{5})}{29}.$$

657. Пусть четыре луча a, b, c, d изображаются соответственно уравнениями:

$$u=0,\quad v=0,\quad u-kv=0,\quad u-k'v=0,$$

тогда по предыдущему их ангармоническое отношение имеет значение:

$$(abcd)=\frac{k}{k'}.$$

Пусть далее какая-нибудь прямая в пересечении с этими лучами дает соответственно точки A, B, C, D; луч (c), пересекая отрезок AB в точке C, разделит его в отношении:

$$\frac{AC}{CB}=-\frac{u_1-kv_1}{u_2-kv_2},$$

подобным образом

$$\frac{AD}{DB}=-\frac{u_1-k'v_1}{u_2-k'v_2},$$

где u_1, v_1, u_2, v_2 — результаты подстановок координат точек A и B в левые части u и v уравнений прямых (a) и (b).

Но точка A лежит на луче $u=0$, поэтому $u_1=0$, по аналогичной причине $v_2=0$, в таком случае:

$$\frac{AC}{CB}=k\frac{v_1}{u_2},\quad \frac{AD}{DB}=k'\frac{v_1}{u_2},$$

откуда ангармоническое отношение четырех точек получит значение:

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{k}{k'},$$

т. е. то же самое, что и ангармоническое отношение четырех перспективных лучей.

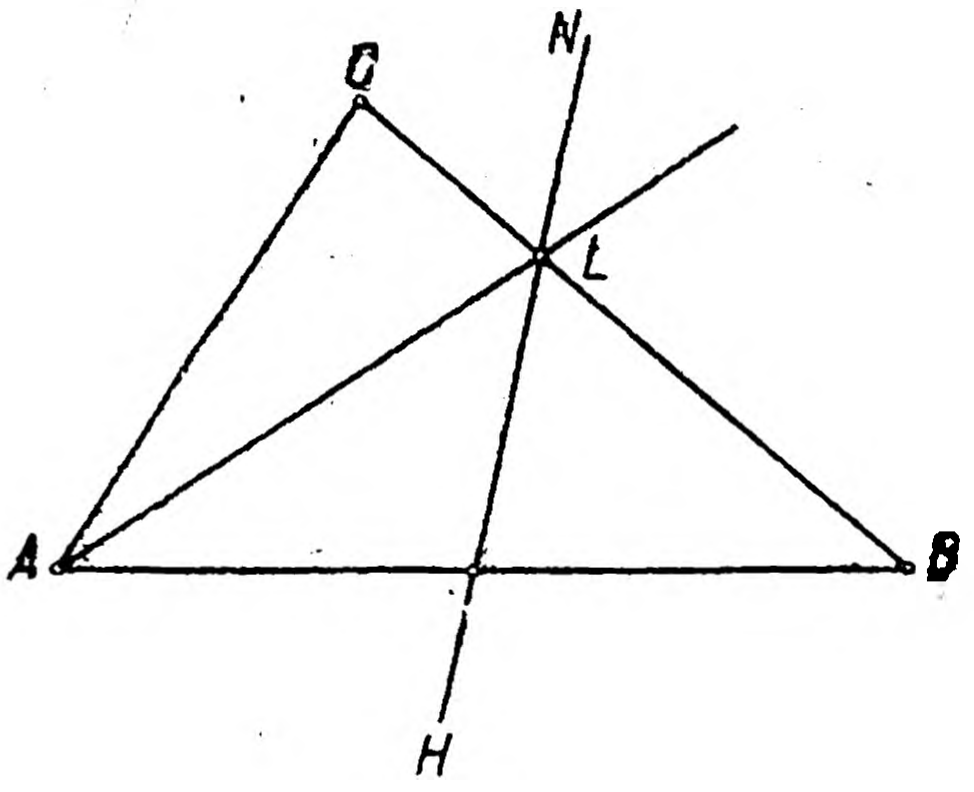
658. Три данные прямые, как не проходящие через одну точку, образуют треугольник; назовем его треугольником ABC. Четвертая прямая HN пересечет по крайней мере две из сторон треугольника на конечном расстоянии (черт. 190); пусть она пересекает, например, сторону BC в точке L.

Уравнение прямой AL, как проходящей через точку пересечения прямых $\beta = 0$ и $\gamma = 0$, напишется в виде:

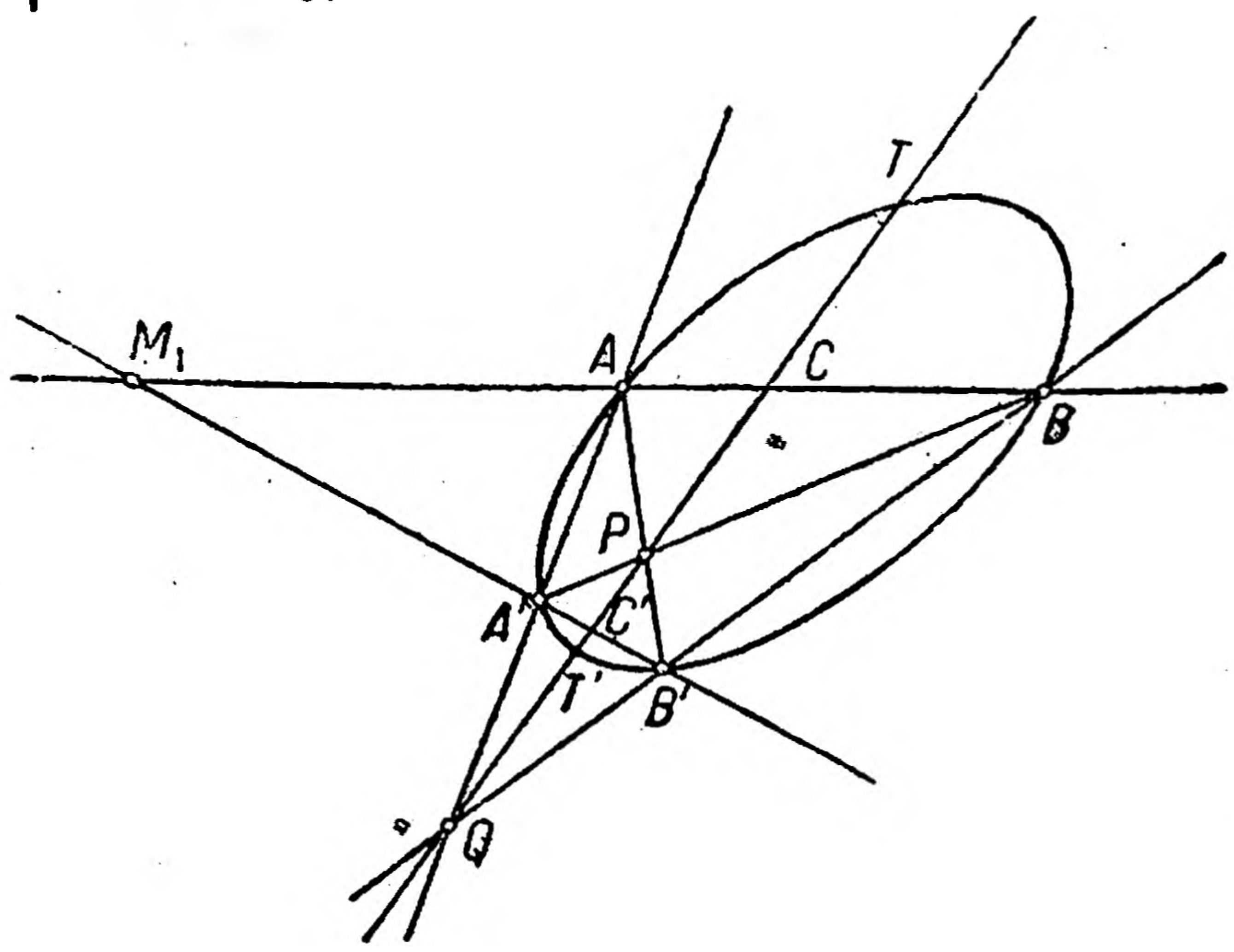
$$\beta - m\gamma = 0;$$

в таком случае уравнение прямой HN, как проходящей через точку пересечения прямых BC $(\alpha = 0)$ и AL, будет вида:

$$\beta - m\gamma - n\alpha = 0.$$



Черт. 190



Черт. 191.

Меняя обозначения коэфициентов m и n, именно полагая $n = -\frac{a}{b}$ и $m = -\frac{c}{b}$, мы получим для прямой HN уравнение:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

661. Построение опирается на гармонические свойства полного четырехсторонника. Проведем из точки M_1 две прямых, из которых одна пересечет линию в точках A и B, другая же — в точках A' и B' (черт. 191). Пусть далее прямые AA' и BB' пересекаются в точке Q, а прямые AB' и $A'B$ — в точке P, тогда прямая PQ и будет полярою точки M_1.

В самом деле, если мы возьмем четырехсторонник $QA'PB'$, то каждая из диагоналей M_1B и M_1B' диагональю QP будет делиться гармонически в точках C и C'. Поляра точки M_1 должна проходить через точки C и C', а потому она и есть прямая QP.

Если прямая QP пересекает кривую в точках T' и T, то последние будут точками прикосновения касательных M_1T' и M_1T, проведенных из точки M_1.

664. *Ответ*:

$$5x - 9y + 14 = 0.$$

665. Координаты полюса данной прямой найдутся из уравнений:

$$\frac{4x + 3y + 4}{2} = \frac{3x + 7y + 6}{-5} = \frac{4x + 6y - 25}{-33};$$

они имеют значения: $x = 1$, $y = -2$.

666. Точки, полярно-сопряженные с точкой $(-10;\ 2)$, находятся на поляре последней:

$$45x + 32y + 6 = 0;$$

чтобы найти ту точку, которая сверх того лежит на заданной прямой, надо предыдущее уравнение поляры разрешить совместно с уравнением данной прямой; так, мы получим: $x = 2$, $y = -3$.

667. Прямая полярно-сопряженная с данной прямой:

$$x + y - 3 = 0.$$

должна проходить через полюс последней, координаты которого определятся из уравнений:

$$\frac{3x-5y+3}{1}=\frac{-5x+7y+4}{1}=\frac{3x+4y}{-3}$$

и будут иметь значения: $x=-\frac{17}{8}$, $y=-\frac{3}{2}$. Теперь искомая прямая определится как прямая, проходящая через две точки $\left(-\frac{17}{8};\ -\frac{3}{2}\right)$ и (1; 1); ее уравнение будет:

$$4x-5y+1=0.$$

668. Поляра фокуса (c; 0) получится из общего уравнения поляры:

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b_2}-1=0$$

при подстановке $x=c$, $y=0$, что даст: $x=\frac{a^2}{c}$ или $x=\frac{a}{e}$, а это и есть уравнение директрисы, соответствующей выбранному фокусу.

669. Две прямые:

$$u'x+v'y+w'=0,$$
$$u''x+v''y+w''=0$$

будут полярно-сопряженными относительно эллипса (см. упражнение **629**)

$$a^2u^2+b^2v^2-w^2=0,$$

если коэфициенты их уравнений удовлетворяют условию [формула (15) § 5];

$$a^2u'u''+b^2v'v''-w'w''=0. \qquad (\alpha)$$

Выразим теперь, что каждая из данных прямых проходит через фокус (c; 0) эллипса, тогда:

$$cu'+w'=0,$$
$$cu''+w''=0;$$

если мы с помощью последних соотношений исключим w' и w'' из условия (α), оно примет вид:

$$(a^2-c^2)\,u'u''+b^2v'v''=0$$

или

$$u'u''+v'v''=0,$$

а это и есть условие перпендикулярности двух выбранных прямых.

670. Две прямые:

$$u'x+v'y+w'z=0,$$
$$u''x+v''y+w''z=0$$

будут полярно-сопряженными относительно данного эллипса, если они удовлетворяют условию:

$$a^2u'u''+b^2v'v''-w'w''=0.$$

Условием того, что две взаимно перпендикулярные прямые:

$$kx-y+(y_1-kx_1)=0,$$
$$-\frac{x}{k}-y+\left(y_1+\frac{x_1}{k}\right)=0,$$

проходящие через точку (x_1; y_1), будут полярно-сопряженными, является соотношение:

$$-a^2+b^2-(y_1-kx_1)\left(y_1+\frac{x_1}{k}\right)=0$$

$$x_1^2 - y_1^2 + x_1 y_1 \left(k - \frac{1}{k}\right) - c^2 = 0;$$

это условие должно удовлетворяться при всяком k, поэтому:

$$x_1 y_1 = 0, \quad x_1^2 - y_1^2 - c^2 = 0.$$

Последние соотношения определяют два действительных фокуса на большей оси эллипса:

$$x_1 = \pm c, \quad y_1 = 0$$

и два мнимых фокуса на его малой оси:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \pm ci.$$

671. Для точки $(x_1; y_1)$ асимптоты:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

имеем соотношение:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{y_1}{b};$$

поэтому поляра этой точки:

$$\frac{Xx_1}{a^2} - \frac{Yy_1}{b^2} - 1 = 0$$

может быть написана в виде:

$$\frac{x_1}{a}\left(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\right) - 1 = 0.$$

Нетрудно видеть, что она действительно параллельна взятой асимптоте.

672. Координаты точек $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, полярно-сопряженных относительно данной окружности, должны удовлетворять условию:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2 = 0;$$

преобразуем последнее соотношение, переходя к полярным координатам и полагая (точки на одном радиусе-векторе):

$$x_1 = \rho_1 \cos\theta, \quad y_1 = \rho_1 \sin\theta,$$

$$x_2 = \rho_2 \cos\theta, \quad y_2 = \rho_2 \sin\theta,$$

тогда и получим:

$$\rho_1 \rho_2 = r^2.$$

673. Уравнение касательной ко второму эллипсу в точке (x_1, y_1) будет:

$$\frac{xx_1}{a_2^2} + \frac{yy_1}{b_2^2} - 1 = 0,$$

причем

$$\frac{x_1^2}{a_2^2} + \frac{y_1^2}{b_2^2} - 1 = 0. \qquad (\alpha)$$

Полюсом этой касательной относительно первого эллипса будет точка $(x; y)$, координаты которой удовлетворяют условиям:

$$\frac{\frac{x}{a_1^2}}{\frac{x_1}{a_2^2}} = \frac{\frac{y}{b_1^2}}{\frac{y_1}{b_2^2}} = \frac{-1}{-1}. \qquad (\beta)$$

Исключая из соотношений (α) и (β) координаты x_1, y_1, мы получим уравнение искомого геометрического места:

$$\frac{a_2^2x^2}{a_1^4}+\frac{b_2^2y^2}{b_1^4}-1=0;$$

это будет линия (эллипс), полученная из второго данного эллипса *полярным преобразованием* относительно первого эллипса.

К главе XIV.

675. *Ответ*:

$$a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22},$$

$$a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2.$$

676. Дискриминант Δ' представим в виде:

$$\Delta'=a'_{13}(a'_{12}a'_{23}-a'_{22}a'_{13})+a'_{23}(a'_{12}a'_{13}-a'_{11}a'_{23})+a'_{33}(a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}).$$

Вычислим предварительно две первых скобки правой части; первая из них будет:

$$\begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{22} & a'_{23} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -(a_{11}\sin\alpha-a_{12}\cos\alpha)\cos\alpha-(a_{12}\sin\alpha-a_{22}\cos\alpha)\sin\alpha & a_{13}\cos\alpha+a_{23}\sin\alpha \\ (a_{11}\sin\alpha-a_{12}\cos\alpha)\sin\alpha-(a_{12}\sin\alpha-a_{22}\cos\alpha)\cos\alpha & -a_{13}\sin\alpha+a_{23}\cos\alpha \end{vmatrix}=$$

$$=(a_{12}\sin\alpha-a_{22}\cos\alpha)a_{13}-(a_{11}\sin\alpha-a_{12}\cos\alpha)a_{23}=$$

$$=(a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23})\sin\alpha+(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})\cos\alpha;$$

аналогично:

$$\begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{23} \\ a'_{11} & a'_{13} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -(a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha)\sin\alpha+(a_{12}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha)\cos\alpha & -a_{13}\sin\alpha+a_{23}\cos\alpha \\ (a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha)\cos\alpha+(a_{12}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha)\sin\alpha & a_{13}\cos\alpha+a_{23}\sin\alpha \end{vmatrix}=$$

$$=(a_{12}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha)a_{13}-(a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha)a_{23}=$$

$$=(a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23})\cos\alpha+(a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23})\sin\alpha.$$

Подставляя эти выражения в дискриминант Δ', теперь легко убедимся что $\Delta'=\Delta$.

677. Преобразованное уравнение будет:

$$\frac{9}{25}x^2+\frac{76}{25}xy+\frac{91}{25}y^2-\frac{24}{25}x+\frac{582}{25}y+\frac{122}{5}=0,$$

теперь легко проверить вычислением, что соотношения:

$$a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22},\quad a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2,\quad \Delta''=\Delta$$

выполняются.

679. По данному уравнению линии составляем ее характеристическое уравнение $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{vmatrix} 91-s & 12 \\ 12 & 84-s \end{vmatrix}=0$$

или

$$s^2-175s+7\,500=0;$$

его корнями будут:

$$s_1 = 75, \quad s_2 = 100.$$

Вычисляем третий инвариант данного уравнения или $\left(\text{при } \omega = \frac{\pi}{2}\right)$ его дискриминант:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 12 & -83 \\ 12 & 84 & 44 \\ -83 & 44 & -21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 91 & 12 & 8 \\ 12 & 84 & 56 \\ -83 & 44 & -104 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 91 & 12 & 8 \\ 12 & 84 & 56 \\ 8 & 56 & -96 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем из элементов второй строки соответственные элементы первой строки, умноженные на 7, тогда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 12 & 8 \\ -625 & 0 & 0 \\ 8 & 56 & -96 \end{vmatrix} = 625 \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 56 & -96 \end{vmatrix} = -625 \cdot 1\,600.$$

Применяя соотношение (13), получим:

$$-625 \cdot 1\,600 = -100 a_{13}'^{2},$$

откуда

$$a_{13}' = \pm 100.$$

Следовательно, искомое уравнение линии примет вид:

$$75x^2 + 100y^2 \pm 200x = 0,$$

оно может быть сокращено на 25:

$$3x^2 + 4y^2 \pm 8x = 0.$$

680. *Ответ*:

1) $13x^2 + 39y^2 \pm 4\sqrt{13}x = 0$,
2) $-5x^2 + 7y^2 \pm 26x = 0$,
3) $-x^2 + 7y^2 \pm 2\sqrt{\frac{17}{7}}\,x = 0$.

681. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-s & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-s \end{vmatrix} = 0$$

или по упрощении:

$$s^2 - 2s + \frac{3}{4} = 0, \qquad \delta = \frac{3}{4} \text{ (эллипс)};$$

его корнями будут:

$$s_1 = \frac{1}{2}, \qquad s_2 = \frac{3}{2}.$$

Дискриминант из всех коэфициентов имеет значение:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4};$$

Следовательно, уравнение линии после преобразования его к осям примет вид:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

а каноническим уравнением эллипса будет уравнение:

$$\frac{x^2}{\frac{2}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2}{9}} = 1,$$

так что квадраты его полуосей имеют значения:

$$a^2 = \frac{2}{3}, \qquad b^2 = \frac{2}{9}.$$

682. *Ответ*:

1) $65x^2 + 91y^2 - 395 = 0$,

2) $-34x^2 + 102y^2 + 102 = 0$ или $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$;

3) $(6 + \sqrt{10})\,x^2 + (6 - \sqrt{10})\,y^2 + \frac{15}{26} = 0$;

4) $(4 - 5\sqrt{2})\,x^2 + (4 + 5\sqrt{2})\,y^2 + \frac{11}{34} = 0$.

683. Вычисляем инварианты уравнения:

$$\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right) \quad \begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} = 5, \\ I_2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \end{aligned}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -4;$$

следовательно:

$$s_2 = 5,$$

$$a_{13}'^2 = -\frac{-4}{5} = \frac{4}{5},$$

или

$$s_2 = 5,$$

$$a_{13}' = \pm\frac{2}{\sqrt{5}},$$

Упрощенное уравнение параболы, отнесенное к вершине и главным направлениям, будет:

$$5Y^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}X,$$

а каноническое ее уравнение:

$$Y^2 = \frac{4}{5\sqrt{5}}X \quad \left(p = \frac{2}{5\sqrt{5}}\right).$$

684. 1) $s_2 = 49 + 576 = 625$, $\delta = 0$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 49 & 168 & -141 \\ 168 & 576 & -37 \\ -141 & -37 & -781 \end{vmatrix} = 2 \cdot 168 \cdot 37 \cdot 141 - 576 \cdot 141^2 - 49 \cdot 37^2 =$$

$$= -[24 \cdot 141 - 7 \cdot 37]^2 = -3\,125^2;$$

коэфициент a'_{13} определится из соотношения:

$$-3\,125^2 = -625 \cdot a'^2_{13},$$

откуда

$$a'_{13} = \frac{3\,125}{25} = 125.$$

Уравнение параболы будет:

$$625y^2 = 250x$$

или по упрощении:

$$y^2 = \frac{2}{5}x.$$

2) $289y^2 = 2 \cdot 578x$ или $y^2 = 4x$.

3) $5y^2 = 4\sqrt{15}x$.

685. Сдвинем (параллельно) диаметр параболы и касательную в его конце Уравнение параболы примет вид:

$$(x + 2y + m)^2 + (6 - 8\sqrt{3} - 2m)x + (12 + 4 \cdot \sqrt{3} - 4m)y +$$
$$+ (9 - 4\sqrt{3} - m^2) = 0.$$

Выберем теперь диаметр, перпендикулярный к сопряженной ему касательной, т. е. поставим условие:

$$(6 - 8\sqrt{3} - 2m) + 2(12 + 4\sqrt{3} - 4m) = 0,$$

откуда

$$m = 3.$$

Теперь полагаем, подставив значение m:

$$X = \frac{-8\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}y - 4\sqrt{3}}{-\sqrt{(-8\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2}},$$

$$Y = \frac{x + 2y + 3}{\sqrt{5}}$$

или

$$-8\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}y - 4\sqrt{3} = -4\sqrt{15}X,$$

$$x + 2y + 3 = \sqrt{5}Y.$$

Тогда данное уравнение параболы примет вид:

$$5Y^2 - 4\sqrt{15}X = 0,$$

откуда ее каноническое уравнение будет:

$$Y^2 = 4\sqrt{\frac{3}{5}}X, \quad p = 2\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Попутно здесь обнаружилось, что уравнениями новых координатных осей (т. е. главной оси и касательной в вершине параболы) относительно прежней координатной системы будут.

$$x + 2y + 3 = 0,$$
$$-2x + y - 1 = 0.$$

686. 1) Данное уравнение может быть приведено к виду ($m = 2$):

$$(3x + 2y + 2)^2 = 4x - 6y + 1;$$

следовательно, каноническое уравнение будет: $y^2 = \dfrac{2}{\sqrt{13}}x$.

2) $(x+3y+3)^2=18x-6y-6$; каноническое уравнение:

$$y^2=\frac{6}{\sqrt{10}}\,x.$$

3) $(5x+3y+3)^2=30x-50y-20$; каноническое уравнение:

$$y^2=\frac{10}{\sqrt{34}}\,x.$$

687. Разделим квадрат первого инварианта на учетверенный второй инвариант, взятый притом с обратным знаком, тогда:

$$\frac{I_1^2}{-4I_2}=\frac{\cos^3\omega'}{\sin^2\omega'};$$

заменяя $\cos^2\omega'$ через $1-\sin^2\omega'$, мы получим:

$$\sin^2\omega'=\frac{-4I_2}{I_1^2-4I_2},$$

откуда легко найти:

$$\cos\omega'=\pm\frac{I_1}{\sqrt{I_1^2-4I_2}}.$$

Теперь легко найти коэфициенты преобразованного уравнения:

$$2a'_{12}=\pm\frac{4I_2}{\sqrt{I_1^2-4I_2}},$$

$$a'_{33}=\frac{I_3}{I_2}=\frac{\Delta}{\delta}.$$

688. Применяя формулы, указанные в решении предыдущей задачи, получим:

1) $\pm\dfrac{xy}{\sqrt{442}}-435=0,$ 2) $\pm\dfrac{2xy}{\sqrt{5}}-10=0.$

689. Искомое уравнение, отнесенное к центру и сопряженным диаметрам, не должно содержать члена с произведением координат и членов с первыми их степенями; далее, так как начало координат сохраняется, то свободный член в уравнении остается прежним, и оно должно иметь вид:

$$a'_{11}X^2+a'_{22}Y^2-1=0.$$

При $Y=0$ мы получим:

$$X=\pm\frac{1}{\sqrt{a'_{11}}},$$

а при $X=0$ найдем:

$$Y=\pm\frac{1}{\sqrt{a'_{22}}};$$

это и будут длины полудиаметров, которые по условию задачи должны быть равными. Обозначая длины равных полудиаметров через l, уравнение эллипса можно написать в виде:

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{l^2}-1=0,$$

и тогда величина l и угол ω' между равными диаметрами определяются сравнением значений инвариантов искомого и данного канонического уравнения:

$$l^2=\frac{a^2+b^2}{2},\quad \sin\omega=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

690. Инварианты канонического уравнения параболы имеют значения:

$$I_1=1,\qquad I_2=0,\qquad I_3=-p^2;$$

инварианты уравнения параболы, преобразованного по данным условиям, будут:

$$I_1=\frac{2a'_{33}}{t^2},\qquad I_2=\left(\frac{a'_{33}}{t^2}\right)^2-a'^2_{12},\qquad I_3=2a'_{12}\left(\frac{a'_{33}}{t}\right)^2-2\frac{a'^3_{33}}{t^4}.$$

Сравнением их значений мы определим коэфициенты преобразованного уравнения:

$$\frac{a'_{33}}{t^2}=\frac{1}{2},\qquad a'_{12}=-\frac{a'_{33}}{t^2}=-\frac{1}{2},\qquad -p^2=-\frac{4a'^3_{33}}{t^4},$$

откуда

$$a'_{12}=-\frac{1}{2},\qquad a'_{33}=p^2,\qquad t^2=2p^2.$$

Поэтому, преобразованное уравнение будет вида:

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{2}-p\sqrt{2}\,x-p\sqrt{2}\,y+p^2=0.$$

691. Пусть уравнение параболы, отнесенное к новым осям, будет:

$$a'_{11}X^2+2a'_{21}XY+a'_{22}Y^2+2a'_{13}X+2a'_{23}Y+a'_{33}=0;$$

в нем не должно быть свободного члена, так как за начало координат принята точка на параболе (пересечение диаметра и касательной в его конце), поэтому:

$$a'_{33}=0.$$

При $Y=0$ мы должны получить точки пересечения параболы с диаметром; следовательно, уравнение:

$$a'_{11}X^2+2a'_{13}X=0$$

должно иметь один корень, равный нулю, другой — бесконечный, что осуществится при условии:

$$a'_{11}=0;$$

но так как дискриминант старших членов уравнения параболы должен быть равен нулю, то при $a'_{11}=0$ необходимо и

$$a'_{12}=0.$$

Далее при $X=0$ уравнение:

$$a'_{22}Y^2+2a'_{23}Y=0$$

должно давать для Y совпадающие корни (нулевые), ибо ось Y касается параболы, откуда следует, что

$$a'_{23}=0.$$

Итак, преобразованное к новым осям уравнение параболы должно быть вида:

$$a'_{22}Y^2-2a'_{13}X=0;$$

его инварианты имеют значения:

$$I_1=\frac{a'_{22}}{\sin^2\omega},\ I_2=0,\qquad I_3=-\frac{a'_{22}a'^2_{13}}{\sin^2\omega}.$$

Сравнивая эти значения с их значениями для канонического уравнения параболы (см. упражнение 690), мы получим:

$$1 = \frac{a'_{22}}{\sin^2 \omega}, \qquad -p^2 = -\frac{a'_{22} a'^2_{13}}{\sin^2 \omega},$$

откуда

$$a'_{22} = \sin^2 \omega, \qquad a'_{13} = \pm p.$$

693. Предположим, что для всякой точки плоскости имеем:

$$x^2 + 2xy \cos \omega + y^2 \equiv X^2 + 2XY \cos \omega' + Y^2 \qquad (\alpha)$$

при условиях:

$$x = a_1 X + b_1 Y,$$
$$y = a_2 X + b_2 Y. \qquad (\beta)$$

Подставляя значения x, y по формулам преобразования (β) в соотношение (α) и требуя, чтобы последнее выполнялось тождественно для всяких X, Y, мы получим:

$$\begin{aligned} &a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos \omega + a_2^2 = 1, \\ &a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos \omega + a_2 b_2 = \cos \omega', \qquad (\gamma) \\ &b_1^2 + 2b_1 b_2 \cos \omega + b_2^2 = 1. \end{aligned}$$

Разрешая первое и последнее уравнения, найдем:

$$a_2 = -a_1 \cos \omega \pm \sqrt{1 - a_1^2 \sin^2 \omega},$$
$$b_2 = -b_1 \cos \omega \pm \sqrt{1 - b_1^2 \sin^2 \omega}.$$

Так как для действительности преобразования необходимо:

$$a_1^2 \sin^2 \omega \leqslant 1,$$
$$b_1^2 \sin^2 \omega \leqslant 1,$$

то мы можем принять:

$$a_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \omega},$$
$$b_1 = \frac{\sin \beta}{\sin \omega}$$

и тогда найдем, что

$$a_2 = \frac{\sin (\omega - \alpha)}{\sin \omega},$$
$$b_2 = \frac{\sin (\omega - \beta)}{\sin \omega},$$

т. е. как-раз преобразование, изображающее поворот осей.

694. Сравнение инвариантов для канонического уравнения эллипса и для уравнения эллипса, отнесенного к двум сопряженным диаметрам с углом ω' между ними, дает:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}}{\sin^2 \omega'},$$

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{\frac{1}{a'^2} \cdot \frac{1}{b'^2}}{\sin^2 \omega'}. \qquad (\alpha)$$

Последнее уравнение дает:

$$a'b' \sin \omega' = ab.$$

Если же первое из соотношений (α) разделим почленно на второе, то получим:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

К главе XV.

695. Полагая в формуле (2′) $\alpha = \beta = \gamma$ и $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, получим:

$$\alpha = \beta = \gamma = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

699. Для данного луча:

$$l = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}, \qquad m = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}, \qquad n = \pm\frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\alpha = \pm\frac{5}{2\sqrt{13}}, \qquad \beta = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad \gamma = \pm\frac{5}{2\sqrt{13}}.$$

701. $\rho = 3$.

702. $d = 5$.

703. $$d = 3 - \sqrt{2};$$

$$l = \frac{2(3+\sqrt{2})}{7}, \qquad m = -\frac{3+\sqrt{2}}{7}, \qquad n = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7};$$

$$\alpha = \frac{6-5\sqrt{2}}{14}, \qquad \beta = \frac{3+\sqrt{2}}{14}, \qquad \gamma = \frac{11-\sqrt{2}}{14}$$

704. $\cos\varphi = \frac{1}{6\sqrt{7}}$.

707. $198 : -320 : -357$.

708. Формулы данного преобразования напишутся в виде:

$$x = -\frac{4}{5}X - \frac{3}{5}Y - \frac{8}{21}Z,$$

$$y = -\frac{1}{5}X - \frac{1}{5}Y - \frac{1}{21}Z,$$

$$z = \frac{6}{5}X + \frac{6}{5}Y + \frac{8}{7}Z;$$

косинусы новых координатных углов будут:

$$\omega_1' = \frac{69}{70}, \qquad \omega_2' = \frac{33}{35}, \qquad \omega_3' = \frac{49}{50}.$$

714. Формулы преобразования будут:

$$x = -\frac{2+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}X - \frac{2\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}Y + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}Z,$$

$$y = \frac{\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}}X - \frac{1+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}Y - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}Z,$$

$$z = \frac{3}{4}X - \frac{\sqrt{3}}{4}Y + \frac{1}{2}Z.$$

716. По общим формулам преобразования координат имеем:

$$\begin{aligned}x_2-x_1&=l_1(X_2-X_1)+l_2(Y_2-Y_1)+l_3(Z_2-Z_1),\\ y_2-y_1&=m_1(X_2-X_1)+m_2(Y_2-Y_1)+m_3(Z_2-Z_1),\\ z_2-z_1&=n_1(X_2-X_1)+n_2(Y_2-Y_1)+n_3(Z_2-Z_1);\end{aligned}\qquad(\alpha)$$

умножим соответственно эти соотношения на 1, ω_3, ω_2 и сложим их, затем второй раз умножим эти же соотношения на ω_3, 1, ω_1 и третий раз на ω_2, ω_1, 1 и, каждый раз складывая, мы получим:

$$(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\omega_3+(z_2-z_1)\omega_2=(l_1+m_1\omega_3+n_1\omega_2)(X_2-X_1)+$$
$$+(l_2+m_2\omega_3+n_2\omega_2)(Y_2-Y_1)+(l_3+m_3\omega_3+n_3\omega_2)(Z_2-Z_1),$$

$$(x_2-x_1)\omega_3+(y_2-y_1)+(z_2-z_1)\omega_1=(l_1\omega_3+m_1+n_1\omega_1)(X_2-X_1)+$$
$$+(l_2\omega_3+m_2+n_2\omega_1)(Y_2-Y_1)+(l_3\omega_3+m_3+n_3\omega_1)(Z_2-Z_1),$$

$$(x_2-x_1)\omega_2+(y_2-y_1)\omega_1+(z_2-z_1)=(l_1\omega_2+m_1\omega_1+n_1)(X_2-X_1)+$$
$$+(l_2\omega_2+m_2\omega_1+n_2)(Y_2-Y_1)+(l_3\omega_2+m_3\omega_1+n_3)(Z_2-Z_1).$$

Умножая теперь полученные соотношения соответственно на x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, причем для правой части эти выражения мы заменим их значениями по формулам (α), и затем, складывая результаты, мы в силу соотношений (28) и (29) найдем:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+2(y_2-y_1)(z_2-z_1)\omega_1+$$
$$+2(z_2-z_1)(x_2-x_1)\omega_2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\omega_3=$$
$$=(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2+(Z_2-Z_1)^2+2(Y_2-Y_1)(Z_2-Z_1)\omega_1'+$$
$$+2(Z_2-Z_1)(X_2-X_1)\omega_2'+2(X_2-X_1)(Y_2-Y_1)\omega_3'.$$

717. Угол между двумя перпендикулярами ($\cos\psi'$, 0, 0) и (0, $\cos\psi''$, 0) к плоскостям yOz и zOx будет равен дополнению до π двугранного угла φ''' между этими плоскостями, поэтому:

$$\begin{vmatrix}1 & \omega_3 & \omega_2 & \cos\psi'\\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & 0\\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & 0\\ 0 & \cos\varphi'' & 0 & -\cos\varphi'''\end{vmatrix}=0$$

или

$$(\omega_3-\omega_1\omega_2)\cos\psi'\cos\psi''=\Omega\cos\varphi'''.$$

Возведем последнее соотношение в квадрат и заменим (см. упражнение 696)

$$\cos^2\psi'=\frac{\Omega}{\sin^2\omega'},\qquad \cos^2\psi''=\frac{\Omega}{\sin^2\omega''},$$

тогда

$$\omega_3^2-2\omega_1\omega_2\omega_3+\omega_1^2\omega_2^2=\sin^2\omega'\sin^2\omega''\cos^2\varphi'''.$$

Прибавив теперь к этому соотношению почленно равенство:

$$1-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+2\omega_1\omega_2\omega_3=\Omega,$$

после небольших преобразований получим нужную формулу:

$$\Omega=\sin^2\omega'\sin^2\omega''\sin^2\varphi'''.$$

718. В выражении

$$\Omega=1-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+2\omega_1\omega_2\omega_3$$

произведем замены:

$$\omega_2^2 = \cos^2 \omega'' = \frac{1 + \cos 2\omega''}{2},$$

$$\omega_3^2 = \cos^2 \omega''' = \frac{1 + \cos 2\omega'''}{2},$$

$$2\omega_2\omega_3 = 2\cos\omega''\cos\omega''' = \cos(\omega'' + \omega''') + \cos(\omega'' - \omega'''),$$

тогда оно примет вид:

$$\Omega = -\cos^2\omega' - \cos(\omega'' + \omega''')\cos(\omega'' - \omega''') + \\ + \cos\omega' [\cos(\omega'' + \omega''') + \cos(\omega'' - \omega''')]$$

или

$$\Omega = [\cos\omega' - \cos(\omega'' + \omega''')][\cos(\omega'' - \omega''') - \cos\omega'],$$

откуда и получается указанное выражение после преобразования разностей косинусов.

722. Если пользоваться формулой (20′), то условие перпендикулярности двух лучей $(l : m : n)$ и $(\alpha' : \beta' : \gamma')$ может быть взято в виде:

$$l\alpha' + m\beta' + n\gamma' = 0.$$

Пусть два луча даны своими направляющими косинусами $(\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1)$ и $(\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2)$, тогда угловые коэфициенты $l : m : n$ луча, к ним перпендикулярного, будут удовлетворять условиям:

$$l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = 0,$$

$$l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2 = 0,$$

и потому они определятся в следующем виде:

$$\frac{l}{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1} = \frac{m}{\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1} = \frac{n}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1};$$

если же два луча заданы своими угловыми коэфициентами $l_1 : m_1 : n_1$ и $l_2 : m_2 : n_2$, то направляющие косинусы α, β, γ луча, к ним перпендикулярного, определятся из условий:

$$\frac{\alpha}{m_1n_2 - m_2n_1} = \frac{\beta}{n_1l_2 - n_2l_1} = \frac{\gamma}{l_1m_2 - l_2m_1}.$$

724. Коэфициенты A, B, C уравнения плоскости пропорциональны косинусам α, β, γ углов перпендикуляра к плоскости с осями координат:

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C} = M.$$

Обозначив нормирующий множитель через M, получим:

$$\alpha = MA, \qquad \beta = MB, \qquad \gamma = MC.$$

Но косинусы α, β, γ связаны соотношением (2′), поэтому:

$$M^2[(1 - \omega_1^2)A^2 + (1 - \omega_2^2)B^2 + (1 - \omega_3^2)C^2 + 2(\omega_2\omega_3 - \omega_1)BC + \\ + 2(\omega_3\omega_1 - \omega_2)CA + 2(\omega_1\omega_2 - \omega_3)AB] = \Omega,$$

откуда и определится нормирующий множитель.

К главе XVI.

728. Выразим, что искомая поверхность, изображаемая уравнением вида (1), проходит через девять заданных точек, иначе говоря, напишем условия, при которых координаты каждой из данных точек удовлетворяют указанному уравнению. Тогда мы получим девять уравнений для определения отношений коэфициентов:

$$9a_{11}+6a_{14}+a_{44}=0,\qquad 4a_{22}+4a_{24}+a_{44}=0,$$
$$9a_{11}-6a_{14}+a_{44}=0,\qquad 4a_{22}-4a_{24}+a_{44}=0,$$
$$a_{33}+2a_{34}+a_{44}=0,$$
$$4a_{33}-4a_{34}+a_{44}=0,$$
$$4a_{11}+a_{22}+4a_{12}+4a_{14}+2a_{24}+a_{44}=0,$$
$$4a_{11}+a_{22}+a_{33}-2a_{23}+4a_{13}-4a_{12}+4a_{14}-2a_{24}+2a_{34}+a_{44}=0,$$
$$4a_{11}+a_{22}+a_{33}-2a_{23}-4a_{13}+4a_{12}+4a_{14}+2a_{24}-2a_{34}+a_{44}=0.$$

Решение шести первых уравнений, взятых по два, даст нам:

$$a_{11}=-\frac{1}{9}a_{44},\qquad a_{22}=-\frac{1}{4}a_{44},\qquad a_{33}=-\frac{1}{2}a_{44},$$
$$a_{14}=0,\qquad a_{24}=0,\qquad 2a_{34}=-\frac{1}{2}a_{44}.$$

Подставляя значения найденных коэфициентов в седьмое уравнение, мы получим из него:

$$2a_{12}=-\frac{11}{72}a_{44}.$$

Наконец, подставляя значения уже найденных коэфициентов в два последних уравнения написанной выше системы, мы получим два уравнения для определения коэфициентов a_{13} и a_{23} через a_{44}, именно уравнения:

$$2a_{13}-a_{23}=\frac{7}{36}a_{44},$$
$$2a_{13}+a_{23}=0,$$

откуда следует, что

$$2a_{13}=\frac{7}{72}a_{44},\qquad 2a_{23}=-\frac{7}{36}a_{44}.$$

Если мы теперь подставим в уравнение (1) все найденные выражения коэфициентов через a_{44}, уравнение может быть сокращено на a_{44}; умножая его сверх того на -72, мы получим окончательное уравнение поверхности (2-го порядка), проходящей через девять данных точек, в следующем виде:

$$8x^2+18y^2+36z^2+14yz-7zx+11xy+36z-72=0.$$

Подстановкой координат каждой из данных точек нетрудно *проверить*, что поверхность действительно проходит через все заданные точки.

729. $3x^2+2y^2+z^2-3xy-6x-2y-z=0.$

730. Для определения координат точек пересечения прямой с поверхностью надо совместно решить три уравнения: два уравнения прямой и уравнение поверхности. Чтобы это решение было более симметрично, мы введем вспомогательное неизвестное u, полагая:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{1}=u,$$

после чего координаты любой точки прямой можем выразить через параметр u в виде:

$$x=-3+2u,\qquad y=2(-1+u),\qquad z=-1+u;\qquad (\alpha)$$

выберем теперь значение u так, чтобы эта точка лежала на данной поверхности, т. е. чтобы указанные координаты удовлетворяли уравнению поверхности; после подстановки их в уравнение поверхности мы получим условие для u:

$$11u^2-32u+20=0,$$

откуда

$$u_1=2, \qquad u_2=\frac{10}{11}.$$

Поверхность 2-го порядка пересекается прямою в двух точках, в данном случае координаты этих точек пересечения мы определим при помощи выражений (α) по найденным значениям u:

$$x_1=1, \qquad y_1=2, \qquad z_1=1,$$
$$x_2=-\frac{13}{11}, \qquad y_2=-\frac{2}{11}, \qquad z_2=-\frac{1}{11}.$$

Если данная поверхность отнесена к прямоугольной системе координат, то данная прямая, проходя через точку $(-3;\ -2;\ -1)$, имеет направляющие косинусы, соответственно равные $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, поэтому для определения точек пересечения поверхности с заданной прямой мы могли бы составить уравнение (12), вычислив его коэфициенты по формулам (13):

$$M=l^2+2m^2+3n^2+4mn-6nl,$$
$$N=l(x_1-3z_1+1)+m(2y_1+2z_1-4)+n(-3x_1+2y_1+3z_1),$$
$$R=x_1^2+2y_1^2+3z_1^2+4y_1z_1-6z_1x_1+2x_1-8y_1,$$

где мы должны принять $x_1=-3$, $y_1=-2$, $z_1=-1$, $l=m=\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$; тогда уравнение (12) будет:

$$\frac{11}{9}\rho^2=\frac{32}{3}\rho+20=0,$$

откуда $\rho_1=6$, $\rho_1=\frac{30}{11}$, это будут уже расстояния от точки $(-3;\ -2;\ -1)$ до точек пересечения прямой с поверхностью. Самые координаты точек пересечения найдутся по формулам:

$$x=-3+\frac{2}{3}\rho, \qquad y=-2+\frac{2}{3}\rho, \qquad z=-1+\frac{1}{3}\rho$$

и получат указанные выше значения.

Переход от результатов первого способа ко второму легко получить, заметив, что в данном случае $\rho=3u$.

731. $(2;\ -4;\ 1)$ и $\left(-\frac{4}{7};\ \frac{8}{7};\ -\frac{5}{7}\right)$.

732. Дискриминант из коэфициентов старших членов уравнения данной поверхности обращается в нуль:

$$\delta=\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -3 & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix}=-\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+9-\frac{9}{2}=0,$$

поэтому любой конус асимптотических направлений (с вершиною в произвольной точке) данной поверхности распадается на пару плоскостей.

Угловые коэфициенты асимптотических направлений удовлетворяют условию (15), в данном случае условию:

$$2l^2-m^2+3mn-6nl+lm=0;$$

чтобы получить уравнение конуса асимптотических направлений с вершиною в точке (1; —1; 2), надо в предыдущее соотношение сделать подстановку (17), т. е. положить:

$$l=\frac{x-1}{\rho},\qquad m=\frac{y+1}{\rho},\qquad n=\frac{z-2}{\rho},$$

тогда искомое уравнение (после его умножения на ρ^2) будет:

$$2(x-1)^2-(y+1)^2+3(y+1)(z-2)-6(z-2)(x-1)+(x-1)(y+1)=0$$

или окончательно:

$$2x^2-y^2+3yz-6zx+xy+9x-9y+9z-18=0.$$

733. $x^2+3y^2+5z^2-6yz+4zx+12xy=0$, $\delta\neq 0$, конус не распадается на пару плоскостей.

734. $yz+zx+xy+2x+5y+z+1=0$.

735. Уравнение, определяющее асимптотические направления данной поверхности, будет:

$$-4l^2+12m^2+7n^2+8mn+10nl+2lm=0;$$

для тех из них, которые лежат в плоскости $z=0$, один из угловых коэфициентов, именно n, обращается в нуль, поэтому отношение двух других найдется из уравнения:

$$-4l^2+2lm+12m^2=0,$$

откуда

$$\frac{l}{m}=\frac{1\pm 7}{4}.$$

Итак, мы получим два асимптотических направления, лежащих в плоскости $z=0$:

$$\frac{l_1}{2}=\frac{m_1}{1}=\frac{n_1}{0},$$

$$\frac{l_2}{3}=\frac{m_2}{-2}=\frac{n_2}{0}.$$

736. Составим половины частных производных по x, y, z от левой части уравнения поверхности и вычислим их значения для координат данной точки:

$F_x=4x$	0
$F_y=24y-\frac{3}{2}z+32$	11
$F_z=-\frac{3}{2}y+20z+24$	$-\frac{29}{2}$

Уравнение искомой плоскости напишется по формуле (18′) в виде:

$$11(y+1)-\frac{29}{2}(z+2)=0;$$

по упрощении окончательно:

$$22y-29z-36=0.$$

737. $9x+21y+17z-64=0$.

738. Координаты центра данного сечения поверхности определятся уравнениями (19) и (19′), каковые в нашем случае будут:

$$\frac{x+y-3z+11}{3}=\frac{x+2y+2z-1}{5}=\frac{-3x+2y-z+7}{-4},$$

$$3x+5y-4z+11=0.$$

Решая эту систему уравнений, мы найдем:

$$x=2, \qquad y=-1, \qquad z=3.$$

739. (1; -2; -1).

740. Перепишем данное уравнение поверхности в однородных координатах:

$$4x^2+24y^2+20z^2-3yz+64yt+48zt-146t^2=0;$$

затем составим для левой его части половины частных производных по x, y, z, t и определим значения этих производных для $x=1$, $y=-1$, $z=2$, $t=1$:

$$\begin{array}{l|l}
F_x=4x & 4 \\
F_y=24y-\frac{3}{2}z+32t & 5 \\
F_z=-\frac{3}{2}y+20z+24t & \frac{131}{2} \\
F_t=32y+24z-146t & -130.
\end{array}$$

Согласно формуле (20″) найденные числовые значения производных и будут коэфициентами уравнения касательной плоскости; последнее в нашем случае примет вид:

$$4x+5y+\frac{131}{2}z-130=0$$

или

$$8x+10y+131z-260=0.$$

741. $16x-5y+6z-37=0$.

742. 1) $15x+6y-14z+6=0$ и 2) $15x+4y+14z-21=0$.

743. Если плоскость касается данной поверхности, то координаты x, y, z ее точки прикосновения должны удовлетворять уравнениям (22) и (23), в нашем примере уравнениям:

$$\frac{x}{2}=\frac{z+2}{3}=\frac{y+3}{0}=\frac{2y+3z+8}{5},$$

$$2x+3y+5=0$$

или, что то же самое, уравнениям (если их написать раздельно):

$$\begin{aligned}
3x-2z-4&=0,\\
y+3&=0,\\
5x-4y-6z-16&=0,\\
2x+3y+5&=0.
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что эти уравнения совместны и удовлетворяются при $x=2$, $y=-3$, $z=1$, следовательно, для данной плоскости точка прикосновения к поверхности будет (2; -3; 1).

744. (3; 1; -2).

745. По формуле (24) тангенциальное уравнение поверхности будет:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & u \\
0 & 0 & 1 & 2 & v \\
0 & 1 & 0 & 3 & w \\
0 & 2 & 3 & 8 & p \\
u & v & w & p & 0
\end{vmatrix}=0.$$

Если развернуть определитель левой части по обычным правилам, уравнение примет вид:

$$-4u^2+9v^2+4w^2+p^2+4vw-6vp-4wp=0.$$

Вернемся теперь к упражнению 743. Данная в нем плоскость касается поверхности, ибо полученное тангенциальное уравнение поверхности удовлетворяется при $u=2$, $v=3$, $w=0$, $p=5$. Координаты точки прикосновения данной плоскости определятся из соотношений (25), т. е.:

$$\frac{x}{-4u}=\frac{y}{9v+2w-3p}=\frac{z}{2v+4w-2p}=\frac{t}{-3v-2w+p},$$

в которых следует принять $u=2$, $v=3$, $w=0$, $p=5$, что дает нам:

$$\frac{x}{-8}=\frac{y}{12}=\frac{z}{-4}=\frac{t}{-4},$$

откуда $\frac{x}{t}=2$, $\frac{y}{t}=-3$, $\frac{z}{t}=1$, как это было найдено и первым способом.

746. $108x^2+211y^2-45z^2+22t^2+96yz+270zx-288xy+36xt-10yt-$ $-12zt=0.$

747. Описанный конус изображается уравнением (28); чтобы подготовить составление полярной формы:

$$P=xF_{x_1}+yF_{y_1}+zF_{z_1}+tF_{t_1},$$

мы прежде всего находим выражения для половин частных производных по x, y, z, t от левой части данного уравнения поверхности и определяем их значения для координат вершины конуса $x=-1$, $y=2$, $z=-3$:

$F_x=x-4$	-5
$F_y=2y-2z$	10
$F_z=-2y+3z$	-13
$F_t=-4x$	4

Следовательно, в нашем случае

$$P=-5x+10y-13z+4.$$

Тут же на основании теоремы Эйлера

$$2F(x,y,z)=xF_x+yF_y+zF_z+tF_t$$

мы можем через значения F_x, F_y, F_z, F_t найти и значения левой части $2F$ данного уравнения поверхности для координат вершины конуса, именно:

$$2F_1=-1\cdot(-5)+2\cdot10+(-3)\cdot(-13)+1\cdot4=68.$$

Теперь искомое уравнение конуса мы напишем в виде:

$$(-5x+10y-13z+4)^2-68(x^2+2y^2+3z^2-4yz-8x)=0$$

или по упрощении:

$$-43x^2-36y^2-35z^2+12yz+130zx-100xy+504x+$$
$$+80y-104z+16=0.$$

748. $30x^2-46y^2-217z^2-472yz+16zx+168xy+32x+44y-70z+25=0.$

749. Как указано в тексте, уравнение плоскости, содержащей точки прикосновения описанного конуса, будет уравнение (31) или подробнее:

$$xF_{x_1}+yF_{y_1}+zF_{z_1}+tF_{t_1}=0,$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты вершины конуса и $t_1=1$. Поэтому составим половины частных производных по x_1, y_1, z_1, t от левой части данного уравнения, поверхности и определим их значения для координат вершин конуса:

$$\begin{array}{l|r} F_x = x - 3y + 2z & 7 \\ F_y = -3x + y + 1 & 6 \\ F_z = 2x - 3z + 4 & -9 \\ F_t = y + 4z & 11 \end{array}$$

Найденные числа и будут коэфициентами уравнения искомой плоскости, которое напишется в виде:

$$7x + 6y - 9z + 11 = 0.$$

750. $12x - 4y - 3z + 23 = 0.$

751. Уравнение цилиндра надо составить по образцу уравнения (32), полагая в нем $l = 1$, $m = 2$, $n = -1$ и $2F$ равным левой части данного уравнения поверхности. Вычисляем сначала выражение M или в данном случае

$$l^2 + 2m^2 + 4mn + 8nl;$$

для $l = 1$, $m = 2$, $n = -1$ оно оказывается равным -7. Далее составляем половины частных производных от левой части данного уравнения поверхности и затем выражение $lF_x + mF_y + nF_z$:

$$\begin{array}{l|r} F_x = x + 4z + 1 & 1 \\ F_y = 2y + 2z - 5 & 2 \\ F_z = 4x + 2y & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$lF_x + mF_y + nF_z = -3x + 2y + 8z - 9$$

Теперь уравнение искомого цилиндра напишется в виде:

$$(-3x + 2y + 8z - 9)^2 + 7(x^2 + 2y^2 + 4yz + 8zx + 2x - 10y) = 0$$

или по упрощении:

$$16x^2 + 18y^2 + 64z^2 + 60yz + 8zx - 12xy + 68x + 106y - 144z + 81 = 0.$$

752. $3x^2 + 4y^2 + 16xy + 66x - 32y + 59 = 0.$

753. Задача решается аналогично задаче о линии 2-го порядка, проходящей через пять заданных точек. Если из уравнения (1) и тех девяти соотношений, которые из него получаются заменою текущих координат последовательно координатами каждой из заданных точек, мы исключим отношения всех коэфициентов a_{ik}, то получим уравнение искомой поверхности в виде:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & yz & zx & xy & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & z_2x_2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & y_9z_9 & z_9x_9 & x_9y_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где левая часть представляет собой определитель 10-го порядка.

754. Условием будет равенство нулю определителя 10-го порядка, аналогичного указанному в предыдущем упражнении, причем элементы каждой строки этого определителя составятся из координат одной из заданных десяти точек.

755. Коэфициенты старших членов сохраняются в преобразованном уравнении, далее $a'_{14} = a'_{24} = a'_{44} = 0$, коэфициент же a'_{34} определится из равенства дискриминантов $\Delta = \Delta'$ первоначального и преобразованного уравнения, что даст $a'_{34} = \pm 7$.

756. Так как в уравнении нет членов с квадратами координат, то каждая из координатных осей имеет асимтотическое направление и пересекает поверхность в одной точке бесконечно удаленной и в другой на конечном расстоянии. Действительно для определения абсциссы точки пересечения поверхности с осью Ox мы должны принять $y = 0$, $z = 0$, тогда получим неполное квадратное уравнение:

$$-ax + a^2 = 0,$$

корни которого будут $x_1 = \infty$, $x_2 = a$. Ось Ox пересекает поверхность в бесконечно удаленной точке и в точке (a; 0; 0); ось Oy пересекает поверхность кроме бесконечно удаленной точки еще и в точке (0; a; 0); наконец ось Oz кроме бесконечно удаленной точки пересекает поверхность в точке (0; 0; $-a$).

757. Если вершина конуса помещена в начале координат, то конус изобразится однородным уравнением относительно x, y, z:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0.$$

Уравнение его касательной плоскости в точке (x', y', z') будет:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\,x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\,y + \\ + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\,z = 0.$$

Это уравнение не меняется, если x', y', z' заменить соответственно через kx', ky', kz', т. е. если точку касания сдвинуть по образующей конуса. Если ось Oz, например, выбрана параллельно образующим цилиндра, то уравнение цилиндра не должно содержать координаты z и будет вида:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0.$$

Уравнение касательной плоскости в точке ($x' : y' : z'$) будет:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{14})\,x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{24})\,y + (a_{41}x' + a_{42}y' + a_{44})\,t = 0;$$

так как оно не содержит координаты z', то уравнение (а следовательно, и сама касательная плоскость) не меняется при изменении z', т. е. когда точка прикосновения перемещается по образующей цилиндра.

758. Касательная плоскость будет неопределенной, если для выбранной точки касания все коэфициенты уравнения касательной плоскости обращаются в нули, т. е. если

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0,\\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0,\\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0,\\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} &= 0; \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

эти условия совместны относительно x, y, z, если $\Delta = 0$, т. е. в случае конуса.

759. Если прямая касается поверхности в некоторой точке, то через эту точку можно провести (одну) касательную плоскость; эта касательная плоскость как плоскость, содержащая данную прямую, должна изображаться уравнением:

$$u_1x + v_1y + w_1z + p_1t + \lambda\,(u_2x + v_2y + w_2z + p_2t) = 0$$

или же уравнением:

$$(u_1 + \lambda u_2)\,x + (v_1 + \lambda v_2)\,y + (w_1 + \lambda w_2)\,z + (p_1 + \lambda p_2)\,t = 0. \qquad (\alpha)$$

Напишем условие, что плоскость (α) касается данной поверхности, т. е. напишем, что координаты плоскости $u_1 + \lambda u_2$, $v_1 + \lambda v_2$, $w_1 + \lambda w_2$, $p_1 + \lambda p_2$ удовлетворяют тангенциальному уравнению поверхности (24′); если это условие развернуть, то [по аналогии с уравнением (30) или (30′)] оно примет вид:

$$2\Phi\,(u_1, v_1, w_1, p_1) + 2\lambda\Pi + \lambda^2 2\Phi\,(u_2, v_2, w_2, p_2) = 0, \qquad (\beta)$$

где Π — полярная форма формы 2Φ.

Уравнение (β) квадратное относительно λ, и оно собственно определяет две касательные плоскости к поверхности, проходящие через заданную прямую, как угодно расположенную относительно поверхности. Если прямая касается поверхности, то касательная плоскость, содержащая эту прямую, должна быть одна, поэтому уравнение (β) должно в этом случае иметь равные корни, что будет при условии:

$$П^2 - 2\Phi_1 \cdot 2\Phi_2 = 0;$$

последнее условие и будет условием касания данной прямой.

760. По формуле (24) получим:

1) $Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - p^2 = 0$,

2) $Au^2 + Bv^2 - 2pw = 0$.

761. Уравнение цилиндра (32) получено уже нами в тексте, здесь мы дадим его вывод другим способом.

Пусть x, y, z будут координаты какой-либо точки цилиндра; через эту точку должна проходить образующая цилиндра направления $l:m:n$, касающаяся данной поверхности 2-го порядка. Координаты какой-либо точки образующей можно представить в виде:

$$x + ul, \qquad y + um, \qquad z + un;$$

если точка принадлежит поверхности, то ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности, следовательно:

$$a_{11}(x+ul)^2 + a_{22}(y+um)^2 + a_{33}(z+un)^2 + 2a_{23}(y+um)(z+un) + \\ + 2a_{31}(z+un)(x+ul) + 2a_{12}(x+ul)(y+um) + \\ + 2a_{14}(x+ul) + 2a_{23}(y+um) + 2a_{34}(z+un) + a_{44} = 0$$

или

$$2F(x, y, z) + 2u(lF_x + mF_y + nF_z) + \\ + u^2(a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl + 2a_{12}lm) = 0.$$

Но так как образующая касается поверхности, то это уравнение относительно u должно иметь равные корни, поэтому

$$2F(x, y, z) \cdot (a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl + 2a_{12}ml) - \\ - (lF_x + mF_y + nF_z)^2 = 0.$$

Последнее соотношение и будет искомым уравнением цилиндра. Например, для поверхности:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0$$

описанный цилиндр с образующими данного направления $l:m:n$ изобразится уравнением:

$$\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1\right)\left(\frac{l^2}{A} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{C}\right) - \left(\frac{lx}{A} + \frac{my}{B} + \frac{nz}{C}\right)^2 = 0.$$

К главе XVII.

762. $15x - 35y + 26z + 21 = 0$.

763. Уравнение диаметральной плоскости данной поверхности будет:

$$l(cy + bz - 2bc) + m(cx + az - 2ac) + n(bx + ay - 2ab) = 0.$$

Потребуем, чтобы этому уравнению удовлетворяли координаты каждой из заданных точек; мы получим два условия:

$$2bcl + acm + abn = 0,$$
$$acm + abn = 0,$$

из которых получим:

$$\frac{l}{0} = \frac{m}{-b} = \frac{n}{c}.$$

Подставляя эти значения в приведенное выше уравнение диаметральной плоскости, мы найдем ее уравнение в окончательном виде:

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0.$$

764. 1) $\frac{lx}{A}+\frac{my}{B}+\frac{nz}{C}=0,\qquad$ 2) $\frac{lx}{A}+\frac{my}{B}-n=0.$

765. Уравнения диаметра данной поверхности по формулам (4″) могут быть написаны в виде:

$$\frac{\frac{2x}{a^2}+\frac{y}{ab}+\frac{z}{ac}}{A}=\frac{\frac{x}{ab}+\frac{z}{bc}-\frac{2}{b}}{B}=\frac{\frac{x}{ac}+\frac{y}{bc}-\frac{2}{c}}{C}.$$

Потребуем, чтобы этот диаметр проходил через точку $(-a,\ b,\ c)$, т. е. подставляем координаты последней в это уравнение; мы получим соотношения, определяющие отношения $A:B:C$, именно:

$$\frac{0}{A}=\frac{-\frac{2}{b}}{B}=\frac{-\frac{2}{c}}{C}.$$

Следовательно, уравнения искомого диаметра напишутся в виде:

$$\frac{\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{0}=\frac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-2}{1}=\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-2}{1}$$

или же

$$\frac{x}{-a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

766. Задачу можно решить двумя способами. 1) Определим центр поверхности, решив уравнения:

$$x+2=0,$$
$$2y-4z+1=0,$$
$$-4y+3z=0,$$

откуда $x=-2$, $y=\frac{3}{10}$, $z=\frac{2}{5}$. Тогда уравнения диаметра напишутся как уравнения прямой с данными угловыми коэфициентами, проходящей через центр поверхности:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-\frac{3}{10}}{2}=\frac{z-\frac{2}{5}}{4}.$$

2) Составим уравнение диаметральной плоскости, сопряженной данному направлению $3:2:4$; оно будет:

$$3(x+2)+2(2y-4z+1)+4(-4y+3z)=0$$

или

$$3x-12y+4z+8=0;$$

тогда уравнения диаметра, сопряженного этой плоскости, напишутся по формулам (4″) в виде:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{2y-4z+1}{-12}=\frac{-4y+3z}{4};$$

эти уравнения легко привести к виду, полученному первым способом.

767. Угловые коэфициенты третьего диаметра, сопряженного с каждым из данных, определятся из условий:

$$C(l,\ l'')=0,\quad C(l',\ l'')=0,$$

которые для данной поверхности напишутся в виде:

$$(3l+2m+4n)\,l''+(2l+5m-3n)\,m''+(4l-3m+4n)\,n''=0,$$
$$(3l'+2m'+4n')\,l''+(2l'+5m'-3n')\,m''+(4l'-3m'+4n')\,n''=0.$$

Полагая в них $l=2,\ m=1,\ n=-1$, и $l''=2,\ m''=-1,\ n''=4$, получим:

$$4l''+12m''+n''=0,$$
$$20l''-13m''+27n''=0,$$

откуда

$$\frac{l''}{337}=\frac{m''}{-88}=\frac{n''}{-292}.$$

768. Главные направления линии пересечения будут вместе с тем направлениями таких двух диаметров данной поверхности, которые 1) параллельны заданной плоскости, 2) между собой сопряжены и 3) взаимно перпендикулярны; поэтому угловые их коэфициенты $l':m':n'$ и $l'':m'':n''$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$3l'+m'-n'=0,$$
$$3l''+m''-n''=0,$$
$$l'l''+2(m'n''+m''n')=0,$$
$$l'l''+m'm''+n'n''=0.$$

Исключая из трех последних $l'':m'':n''$, мы получим уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ l' & 2n' & 2m' \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0,$$

которое и решим совместно с первым из вышенаписанных уравнений. Таким способом мы получим для угловых коэфициентов первого направления решения:

$$\frac{l_1'}{0}=\frac{m_1'}{1}=\frac{n_1'}{1},$$
$$\frac{l_2'}{2}=\frac{m_2'}{-3}=\frac{n_2'}{3},$$

по которым на основании исходных уравнений легко вычислим и угловые коэфициенты второго направления:

$$\frac{l_1''}{2}=\frac{m_1''}{-3}=\frac{n_1''}{1},$$
$$\frac{l_2''}{0}=\frac{m_2''}{1}=\frac{n_2''}{1}.$$

Таким образом, не считая перемены обозначений, мы, собственно, получаем одну пару направлений:

$$\frac{l'}{0}=\frac{m'}{1}=\frac{n'}{1},$$
$$\frac{l''}{2}=\frac{m''}{-3}=\frac{n''}{3}.$$

769. $x=1,\quad y=-2,\quad z=3.$

770. $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, $z=\frac{c}{2}$.

771. При каком-либо выбранном значении λ центр соответствующей поверхности определяется уравнениями:

$$\frac{x-a}{a^2}-\frac{\lambda x}{a^2}=0,$$
$$\frac{y-b}{b^2}-\frac{\lambda y}{b^2}=0,$$
$$\frac{z-c}{c^2}-\frac{\lambda z}{c^2}=0.$$

Исключая из этих уравнений параметр λ, мы получим уравнения геометрического места центров всех поверхностей данного семейства в виде:

$$\frac{x-a}{x}=\frac{y-b}{y}=\frac{z-c}{z},$$

или, вычитая из этих отношений по единице и оборачивая их, мы дадим им вид:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

Место центров есть прямая, проходящая через начало координат.

772. 1) Составляем и вычисляем прежде всего дискриминант из коэфициентов старших членов:

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=-\frac{9}{4};$$

так как он отличен от нуля, то поверхность имеет центр (точку) на конечном расстоянии. Чтобы решить, не будет ли это конус, вычисляем определитель из всех коэфициентов;

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{5}{4};$$

так как $\Delta \neq 0$, центр поверхности не лежит на самой поверхности, и она не будет конусом. Итак, данное уравнение изображает собственно центральную поверхность (с центром в конечной определенной точке); координаты центра легко найти, решая уравнения:

$$F_x \equiv x+y-1=0,$$
$$F_y \equiv x-y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}=0,$$
$$F_z \equiv -\frac{1}{2}y+z-1=0,$$

откуда получим:

$$x=\frac{5}{9},\quad y=\frac{4}{9},\quad z=\frac{11}{9}.$$

2) Вычисляем, как и выше, определители δ и Δ:

$$\delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & \frac{3}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & 0\end{vmatrix}=-\frac{9}{4},\quad \Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & -3\\ -1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3\\ -3 & \frac{7}{2} & 3 & 7\end{vmatrix}=0.$$

Центр (точка) — на конечном расстоянии, но принадлежит поверхности; следовательно, данное уравнение изображает конус. Координаты вершины конуса определятся из уравнений:

$$F_x\equiv x-y-3=0,$$
$$F_y\equiv -x+2y+\frac{3}{2}z+\frac{7}{2}=0,$$
$$F_z\equiv\frac{3}{2}y+3=0;$$

они будут:

$$x=1,\ y=-2,\ z=1.$$

3) Для третьего из данных уравнений найдем:

$$\delta=\begin{vmatrix}4 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0;$$

так как $\delta=0$, то мы должны определить ранг матрицы

$$D\equiv\begin{Vmatrix}4 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 0 & \frac{1}{2}\\ -2 & 0 & 1 & -\frac{3}{2}\end{Vmatrix},$$

чтобы установить число независимых между собой уравнений, определяющих центр поверхности. Пропуская в матрице D хотя бы первый столбец, получим определитель:

$$\delta=\begin{vmatrix}0 & -2 & 0\\ 3 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2}\end{vmatrix}=-9,$$

отличный от нуля, поэтому ранг D равен 3. Итак, поверхность имеет центром бесконечно удаленную точку, следовательно, она будет параболоидом (но каким, пока не знаем).

773. Находим дискриминант старших коэфициентов:

$$\delta\equiv\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{vmatrix}=0,$$

так как он равен нулю, то приходится определять ранг матрицы D:

$$D\equiv\begin{Vmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 2 & 4 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 9 & 0\end{Vmatrix};$$

здесь прямо видно, что в ней соответственные элементы двух первых строк пропорциональны, поэтому все ее определители 3-го порядка будут нулями; но в этой матрице существуют определители 2-го порядка, не обращающиеся в нуль, например:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36,$$

поэтому ранг матрицы D равен 2. Поверхность имеет прямую центров и притом на конечном расстоянии, так как ранг δ равен 2; определим ранг Δ, чтобы узнать, принадлежит ли прямая центров самой поверхности; этот определитель имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим его миноры 3-го порядка, не содержащие двух первых строк одновременно; например, определитель:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -324$$

отличен от нуля, поэтому Δ будет ранга, равного 3. Прямая центров поверхности не принадлежит. Следовательно, данное уравнение определяет цилиндр с осью на конечном расстоянии (эллиптический или гиперболический цилиндр).

2) Для второго из данных уравнений находим:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Составляем матрицу D, она будет:

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix};$$

нетрудно заметить, что, вычитая из элементов второй строки соответственные элементы первой строки, мы получим в точности соответственные элементы третьей строки. Отсюда мы заключаем, что все определители 3-го порядка из этой матрицы обращаются в нули. Но так как матрица D содержит определители 2-го порядка, не равные нулю, то она будет ранга, равного 2, равно как и определитель δ; поверхность имеет прямую центров. Составим теперь определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix},$$

и рассмотрим те из его миноров 3-го порядка, которые не содержат трех его первых строк одновременно (следовательно, содержат обязательно четвертую его строку). Легко проверить, что каждый из этих миноров обращается в нуль, остальные и подавно равны нулю. Поэтому определитель Δ будет тоже ранга, равного 2; поверхность содержит прямую центров, находящуюся на конечном расстоянии. Итак, данное уравнение изображает поверхность, распадающуюся на пару непараллельных плоскостей; действительно, его левая часть может быть представлена в виде произведения двух линейных множителей:

$$(x+y-1)(x-z+1)=0.$$

3) Для третьего из данных уравнений получим:

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

притом все миноры 2-го порядка этого определителя будут нулями, так как элементы второй и третьей его строки пропорциональны элементам первой; определитель δ имеет ранг, равный 1.

Матрица:

$$D\equiv\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$$

имеет ранг, равный 2; отсюда следует, что поверхность имеет прямую центров, притом бесконечно удаленную. Итак, данное уравнение изображает параболический цилиндр.

774. 1) Для первого из данных уравнений дискриминант старших коэфициентов:

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{vmatrix}=0,$$

притом он ранга, равного 1, так как соответственные элементы его строк пропорциональны; матрица:

$$D\equiv\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ -3 & -6 & 9 & -\frac{3}{2} \end{Vmatrix}$$

будет тоже ранга, равного 1, так как элементы каждой пары ее строк пропорциональны; поверхность имеет плоскость центров. Если мы составим определитель из всех коэфициентов данного уравнения:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ -3 & -6 & 9 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & -12 \end{vmatrix},$$

то увидим, что он будет ранга, равного 2, так как элементы последней строки не пропорциональны всем соответственным элементам какой-либо из предыдущих строк, и следовательно, Δ содержит определитель 2-го порядка (нижний, угловой):

$$\begin{vmatrix} 9 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -12 \end{vmatrix},$$

отличный от нуля. Итак, данное уравнение изображает поверхность, имеющую плоскость центров, не принадлежащую самой поверхности, а потому данное уравнение изображает пару параллельных несовпадающих плоскостей. Действительно, данное уравнение может быть представлено в виде:

$$(x+2y-3z+4)(x+2y-3z-3)=0.$$

2) Составляем для второго из данных уравнений дискриминант старших коэфициентов:

$$\delta=\begin{vmatrix} 9 & -3 & 12 \\ -3 & 1 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{vmatrix};$$

этот определитель будет ранга, равного 1. Матрица

$$D\equiv\begin{Vmatrix} 9 & -3 & 12 & 15 \\ -3 & 1 & -4 & -5 \\ 12 & -4 & 16 & 20 \end{Vmatrix}$$

имеет тоже ранг, равный 1. Наконец, определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 & 15 \\ -3 & 1 & -4 & -5 \\ 12 & -4 & 16 & 20 \\ 15 & -5 & 20 & 25 \end{vmatrix}$$

имеет опять ранг, равный 1. Данное уравнение изображает поверхность, имеющую плоскость центров, которая принадлежит самой поверхности. Следовательно, данное уравнение изображает пару совпадающих плоскостей; действительно, оно может быть представлено в виде:

$$(3x-y+4z+5)^2=0.$$

775. 1) параболоид, 2) цилиндр с осью на конечном расстоянии, 3) конус, 4) пара параллельных плоскостей, 5) центральная поверхность, 6) пара совпадающих плоскостей, 7) пара непараллельных плоскостей, 8) параболический цилиндр.

776. Вычисляем определители Δ и δ для данного уравнения поверхности:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & -11 \\ -2 & 5 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \\ -11 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=608,$$

$$\delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=-152.$$

Тогда на основании результатов § 8 преобразованное уравнение будет:

$$3x^2+5y^2-z^2+8yz+6zx-4xy-4=0.$$

777. Вычислив определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -6 & 4 & 34 \\ -6 & 18 & 30 & -53 \\ 4 & 30 & 64 & -72 \\ 34 & -53 & -72 & 81 \end{vmatrix}; \quad \delta = \begin{vmatrix} 16 & -6 & 4 \\ -6 & 18 & 30 \\ 4 & 30 & 64 \end{vmatrix},$$

мы обнаружим, что каждый из них равен нулю, причем D и δ ранга, равного 2; это обозначает, что поверхность имеет прямую центров на конечном расстоянии. Вычисляя какую-нибудь пару адъюнкт с одинаковыми индексами этих определителей, мы получим:

$$a'_{44} = \frac{\Delta_{11}}{\delta_{11}} = \frac{-4 \cdot 77^2}{4 \cdot 9 \cdot 7} = -\frac{847}{9}$$

или, например,

$$a'_{44} = \frac{\Delta_{12}}{\delta_{12}} = \frac{-8 \cdot 77^2}{24 \cdot 21} = -\frac{847}{9}.$$

Уравнение поверхности, отнесенной к новой системе координат с прежними направлениями осей и с началом координат в какой-либо точке прямой центров, будет:

$$16x^2 + 18y^2 + 64z^2 + 60yz + 8zx - 12xy - \frac{847}{9} = 0.$$

778. 1) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2zx - \frac{25}{4} = 0.$

2) $2x^2 - z^2 + yz - zx - xy = 0$, пара плоскостей.

3) $x^2 - y^2 + z^2 + 2yz - 4zx + 1 = 0.$

4) $4x^2 - 18y^2 + 9yz + 6zx - 6xy - \frac{32}{9} = 0.$

779. Плоскость, определяемая заданным уравнением, будет диаметральною плоскостью, если коэфициенты ее уравнения пропорциональны коэфициентам уравнения (2″) диаметральной плоскости, т. е. если:

$$\frac{a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n}{A} = \frac{a_{21}l + a_{23}m + a_{22}n}{B} = \frac{a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n}{C} = \\ = \frac{a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n}{D};$$

приравнивая каждое из этих отношений вспомогательному неизвестному u и исключая из четырех полученных таким образом однородных уравнений неизвестные l, m, n, u, мы найдем нужное условие в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & D \end{vmatrix} = 0.$$

780. Угловые коэфициенты $l : m : n$ направления, сопряженного данной диаметральной плоскости, должны удовлетворять соотношениям:

$$\frac{a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n}{A} = \frac{a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n}{B} = \frac{a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n}{C} = \\ = \frac{a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n}{D} \qquad (\alpha)$$

Если данная плоскость главная, то направление ей сопряженное должно быть перпендикулярно к плоскости, т. е. иметь косинусы, пропорциональные

$A : B : C$, а потому его угловые коэфициенты будут:

$$\frac{l}{A\Omega^{11}+B\Omega^{21}+C\Omega^{31}}=\frac{m}{A\Omega^{12}+B\Omega^{22}+C\Omega^{32}}=\frac{n}{A\Omega^{13}+B\Omega^{23}+C\Omega^{33}}. \qquad (\beta)$$

Подставляя в соотношения (α) вместо $l : m : n$ величины, им пропорциональные из соотношений (β), мы получим искомые условия.

781. Речь идет о нахождении угла прямой направления $l : m : u$ с плоскостью:

$$(a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n)\,x+(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)\,y+(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)\,z+$$
$$+(a_{41}l+a_{42}m+a_{43}n)=0.$$

Синус этого угла φ определится по формуле:

$$\sin\varphi=\pm\frac{l\,(a_{11}\,l+a_{12}m+a_{13}n)+m\,(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)+n(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{(a_{11}l+a_{12}m+a_{31}n)^2+(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)^2+(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)^2}}.$$

782. Два направления сопряжены относительно какого-либо шара, если они взаимно перпендикулярны, поэтому условиям задачи будут удовлетворять пары главных направлений данной поверхности.

783. Пусть уравнения данных поверхностей будут соответственно:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+\ldots=0,$$
$$b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+2b_{23}yz+2b_{31}zx+2b_{12}xy+\ldots=0;$$

диаметральные плоскости каждой из них, сопряженные одному и тому же направлению, определятся уравнениями:

$$(a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n)\,x+(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)\,y+(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)\,z+$$
$$+a_{41}l+a_{42}m+a_{43}n=0,$$
$$(b_{11}l+b_{12}m+b_{13}n)\,x+(b_{21}l+b_{22}m+b_{23}n)\,y+(b_{31}l+b_{32}m+b_{33}n)\,z+$$
$$+b_{41}l+b_{42}m+b_{43}n=0.$$

Эти плоскости параллельны, если выполняются условия:

$$\frac{a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n}{b_{11}l+b_{12}m+b_{13}n}=\frac{a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n}{b_{21}l+b_{22}m+b_{23}n}=\frac{a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n}{b_{31}l+b_{32}m+b_{33}n};$$

приравнивая каждое из этих отношений вспомогательному неизвестному σ, мы получим для определения $l : m : n$ уравнения:

$$(a_{11}-\sigma b_{11})\,l+(a_{12}-\sigma b_{12})\,m+(a_{13}-\sigma b_{13})\,n=0,$$
$$(a_{21}-\sigma b_{21})\,l+(a_{22}-\sigma b_{22})\,m+(a_{23}-\sigma b_{23})\,n=0,$$
$$(a_{31}-\sigma b_{31})\,l+(a_{32}-\sigma b_{32})\,m+(a_{33}-\sigma b_{33})\,n=0,$$

причем σ определится условием:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\sigma b_{11} & a_{12}-\sigma b_{12} & a_{13}-\sigma b_{13} \\ a_{21}-\sigma b_{21} & a_{22}-\sigma b_{22} & a_{23}-\sigma b_{23} \\ a_{31}-\sigma b_{31} & a_{32}-\sigma b_{32} & a_{33}-\sigma b_{33} \end{vmatrix}=0.$$

Последнее уравнение обращается в уравнение Бине, если за вторую из заданных поверхностей выбран шар.

784. Диаметральная плоскость:

$$lF_x+mF_y+nF_z=0$$

будет главною плоскостью, если $l : m : n$ определяются уравнениями (при условии, что ни одно из них не пропадает тождественно и они различны):

$$(a_{11}-s)\,l+(a_{12}-s\omega_3)\,m+(a_{13}-s\omega_2)\,n=0,$$
$$(a_{21}-s\omega_3)\,l+(a_{22}-s)\,m+(a_{23}-s\omega_1)\,n=0.$$

Исключая из трех написанных уравнений $l : m : n$, мы получим уравнение главной плоскости в виде:

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ a_{11}-s & a_{12}-s\omega_3 & a_{13}-s\omega_2 \\ a_{21}-s\omega_3 & a_{22}-s & a_{23}-s\omega_1 \end{vmatrix}=0,$$

где s — один из корней характеристического уравнения.

785. Данное уравнение изображает пару плоскостей, пересекающихся по оси Oz; все диаметральные плоскости такой „поверхности" должны проходить через ось Oz. Поэтому поверхность будет иметь лишь две диаметральных плоскости, сопряженных и взаимно перпендикулярных, а следовательно, и два главных направления, соответственно сопряженных этим плоскостям. Третье главное направление может быть взято просто как направление, перпендикулярное к каждому из двух первых; соответственным образом определится и третья главная плоскость, которая, однако, не будет диаметральною плоскостью. Характеристическое уравнение в данном случае будет:

$$\begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & -k^2-s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0,$$

его корни: $s_1 = 1$, $s_2 = -k^2$, $s_3 = 0$; по ним определим три главных направления:

$$\begin{array}{lll} l_1 = 1, & m_1 = 0, & n_1 = 0, \\ l_2 = 0, & m_2 = 1, & n_2 = 0, \\ l_3 = 0, & m_3 = 0, & n_3 = 1, \end{array}$$

а затем и три главных плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, из которых две первых будут диаметральными плоскостями поверхности, а третья — плоскость (не диаметральная), ортогональная к каждой из двух первых.

786. Как известно, для координат x_1, y_1, z_1 центра поверхности мы имеем:

$$2F(x_1, y_1, z_1) = \frac{\Delta}{\delta};$$

с другой стороны, функция $2F(x, y, z)$ при изменении координат x, y, z может менять знак, когда она переходит через нулевое значение, т. е. когда соответствующая точка $M(x; y; z)$ попадает на самую поверхность. Поэтому $2F(x, y, z)$ имеет знак выражения $\frac{\Delta}{\delta}$ (мы исключаем конус) для точек той области пространства (разделенного поверхностью), в которой находится центр поверхности; $2F(x, y, z)$ имеет знак, противоположный знаку выражения $\frac{\Delta}{\delta}$ для точек той области пространства, которая не содержит центра поверхности. Например, для эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

у которого центр находится внутри поверхности, мы, очевидно, имеем $\frac{\Delta}{\delta} = -1$; поэтому левая часть написанного выше уравнения эллипсоида отрицательна для внутренних точек эллипсоида и положительна для внешних.

787. При решении этой задачи мы будем исходить из полярного уравнения (12):

$$M\rho^2 + 2N\rho + R = 0,$$

данного в § 3 главы XVI, где

$$\begin{aligned} M &= a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl + 2a_{12}lm, \\ N &= lF_x + mF_y + Fn_z, \\ R &= 2F(x, y, z); \end{aligned}$$

здесь $M(x; y; z)$ — точка, через которую проведен луч направления $l : m : n$, пересекающий поверхность в точках M_1 и M_2. Корнями данного уравнения будут:

$$MM_1 = \rho_1, \quad MM_2 = \rho_2.$$

По нашему условию должно быть

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$$

или

$$\frac{-\rho_1}{\rho_2} = \lambda.$$

Но с другой стороны:

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{2N}{M},$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{R}{M};$$

исключая из трех последних соотношений ρ_1 и ρ_2, мы получим:

$$4\lambda N^2 + (1-\lambda)^2 RM = 0. \qquad (\alpha)$$

Если считать, что $l:m:n$ даны, то полученное соотношение (α) будет условием, которому должны удовлетворять координаты x, y, z точки M; оно будет уравнением искомого геометрического места точек M, делящих хорды данного направления в заданном отношении. Это уравнение (α) изображает некоторую новую поверхность 2-го порядка; при $\lambda = 1$ уравнение (α) будет изображать сдвоенную диаметральную плоскость, сопряженную данному направлению $l:m:n$; сдвоенной она получена потому, что в нашем выводе нет различия между точками M_1 и M_2, и каждая точка M геометрического места будет являться как серединою отрезка M_1M_2, так и серединою отрезка M_2M_1.

788*. Пользуясь начальными соображениями предыдущего решения, мы опять получим соотношение:

$$4\lambda N^2 + (1-\lambda)^2 RM = 0, \qquad (\alpha)$$

но теперь в нем мы должны рассматривать координаты x, y, z прежней точки M как данные, угловые же коэфициенты $l:m:n$ — переменными. Изменим обозначения и координаты данной точки назовем через x_1, y_1, z_1, а координаты какой-нибудь точки прямой направления $l:m:n$, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) обозначим через x, y, z, тогда:

$$l = \frac{x-x_1}{\rho}, \quad m = \frac{y-y_1}{\rho}, \ n = \frac{z-z_1}{\rho},$$

и нам придется соотношение (α) преобразовать подобно тому, как мы это делали в § 9 главы XVI с уравнением (26). Мы найдем:

$$\rho^2 M = 2F + 2F_1 - 2P$$
$$\rho N = P - 2F_1.$$

Уравнение (α) примет вид:

$$4\lambda\,(P-2F_1)^2 + (1-\lambda)^2\, 2F_1\,(2F + 2F_1 - 2P) = 0,$$

где

$$P = xF_x + yF_y + zF_z + tF_t;$$

геометрически очевидно, что полученное уравнение будет изображать конус с вершиною в данной точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

789. Уравнения (3′) § 6 должны удовлетворяться координатами заданной точки $(-1, \ -1, \ -1)$; поэтому:

$$-a_{11} - a_{12} - a_{13} + a_{14} = 0,$$
$$-a_{21} - a_{22} - a_{23} + a_{24} = 0,$$
$$-a_{31} - a_{32} - a_{33} + a_{34} = 0.$$

Пересечение поверхности с осью Ox определяется уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0.$$

Так как поверхность касается оси Ox в точке (1; 0; 0), то каждый из корней этого уравнения равен единице, следовательно:

$$-\frac{2a_{14}}{a_{11}} = 2,$$

$$\frac{a_{44}}{a_{11}} = 1,$$

или

$$a_{11}+a_{14}=0,$$
$$a_{11}-a_{44}=0;$$

аналогично из условий касания других осей мы получим:

$$a_{22}+a_{24}=0,\ a_{33}+a_{34}=0,$$
$$a_{22}-a_{44}=0,\ a_{33}-a_{44}=0.$$

Выражая с помощью полученных соотношений все коэфициенты через a_{44}, мы найдем:

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=-a_{23}=-a_{31}=-a_{12}=-a_{14}=-a_{24}=-a_{34}=a_{44},$$

а потому искомое уравнение поверхности будет:

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy-2x-2y-2z+1=0.$$

790. Пересечение поверхности с осью Ox определяется вообще уравнением, которое получается из общего уравнения поверхности при $y=0$ и $z=0$:

$$a_{11}x^2+2a_{14}x+a_{44}=0;$$

но в данном случае поверхность целиком содержат ось Ox. и это уравнение должно удовлетворяться при всяком x, поэтому:

$$a_{11}=0,\ a_{14}=0,\ a_{44}=0.$$

Так как поверхность содержит и ось Oy, то аналогично получим:

$$a_{22}=0,\ a_{24}=0,\ (a_{44}=0);$$

таким образом уравнение поверхности, содержащей оси Ox и Oy, пишется в виде:

$$a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{34}z=0.$$

Выразим теперь, что эти поверхность, проходит через две данных точки $(0;\ 1;\ 1)$ и $(1;\ 0;\ -1)$; мы получим еще два условия для коэфициентов, именно:

$$a_{33}+2a_{23}+2a_{34}=0,$$
$$a_{33}-2a_{31}-2a_{34}=0.$$

Определяя $2a_{23}$ и $2a_{31}$ через a_{33} и $2a_{34}$, мы напишем уравнение поверхностей, удовлетворяющих данным условиям, в виде:

$$a_{33}z^2-(a_{33}+2a_{34})\,yz+(a_{33}-2a_{34})\,zx+2a_{12}xy+2a_{34}z=0.$$

Уравнения, определяющие центр какой-либо из этих поверхностей, будут:

$$2a_{12}y+(a_{33}-2a_{34})\,z=0,$$
$$2a_{12}x-(a_{33}+2a_{34})\,z=0,$$
$$(a_{33}-2a_{34})\,x-(a_{33}+2a_{34})\ y+2a_{33}z+2a_{34}=0;$$

исключая из этих уравнений $2a_{12}$, a_{33}, $2a_{34}$, мы получим уравнение геометрического места центров в виде:

$$\begin{vmatrix} y & z & -z \\ x & -z & -z \\ 0 & x-y+2z & -x-y+1 \end{vmatrix}=0$$

или

$$z\,(\,2yz-2zx+4xy-x-y)=0.$$

Не считая того случая, когда рассматриваемые поверхности распадаются на пары плоскостей, пересекающихся по прямым, лежащим в плоскости $z=0$ место центров будет:

$$2yz-2zx+4xy-x-y=0.$$

791. Если первая плоскость сопряжена направлению $l:m:n$, тогда:

$$\frac{a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n}{u_1}=\frac{a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n}{v_1}=\frac{a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n}{w_1};$$

это направление параллельно второй плоскости при условии:

$$u_2 l + v_2 m + w_2 n = 0.$$

Приравнивая каждое из написанных выше соотношений вспомогательному переменному σ и исключая $l:m:n:\sigma$ из уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n - \sigma u_1 &= 0, \\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n - \sigma v_1 &= 0, \\ a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n - \sigma w_1 &= 0, \\ u_2 l + v_2 m + w_2 n &= 0, \end{aligned}$$

мы и получим условие сопряженности двух плоскостей в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

К главе XVIII.

792. Пусть $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — две полярно-сопряженные точки, а M' и M'' — две точки пересечения прямой M_1M_2 с данною поверхностью; в таком случае расстояния $\rho' = M_1M'$ и $\rho'' = M_1M''$ будут корнями полярного уравнения поверхности:

$$M\rho^2 + 2N\rho + R = 0,$$

и следовательно:

$$\rho' + \rho'' = -\frac{2N}{M},$$

$$\rho'\rho'' = \frac{R}{M}.$$

Назовем расстояние M_1M_2 через ρ; тогда, так как четыре точки M_1, M_2, M', M'' образуют гармоническую четверку, то (§ 3 гл. XIII):

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}$$

или

$$\frac{2}{\rho} = \frac{\rho' + \rho''}{\rho'\rho''};$$

подставляя сюда значения $\rho' + \rho''$ и $\rho'\rho''$, найдем:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{N}{R}$$

или же подробнее:

$$\rho\,(lF_{x_1} + mF_{y_1} + nF_{z_1}) + (2F\,(x_1,\ y_1,\ z_1) = 0.$$

Заменяя теперь

$$\rho l = x_2 - x_1,\quad \rho m = y_2 - y_1,\quad \rho n = z_2 - z_1,$$

после небольших преобразований мы и получим условие (5″) сопряженности двух данных точек.

793. Условие сопряженности двух точек $(x,\ y,\ z)$ и $(x',\ y',\ z')$ относительно заданной поверхности напишется в виде:

$$\frac{xx'}{A} + \frac{yy'}{B} + \frac{zz'}{C} - 1 = 0.$$

Таким образом координаты x, y, z точки полярно-сопряженной с каждой из трех заданных точек, определяются из условий:

$$\frac{by}{B}+\frac{cz}{C}-1=0,$$
$$\frac{ax}{A}+\frac{cz}{C}-1=0,$$
$$\frac{ax}{A}+\frac{by}{B}-1=0;$$

разрешая эти уравнения, мы найдем:

$$x=\frac{A}{2a},\quad y=\frac{B}{2b},\quad z=\frac{C}{2c}.$$

794. 1) $x_1=-\frac{Au}{p},\ y_1=-\frac{Bv}{p},\ z_1=-\frac{Cw}{d};$

2) $x_1=-\frac{Au}{w},\ y_1=-\frac{Bv}{w},\ z_1=\frac{p}{w}.$

795. Полярные плоскости:

$$(x'+\rho l')F_x+(y'+\rho m')F_y+(z'+\rho n')F_z+t'F_t=0$$

точек $(x'+\rho l';\ y'+\rho m';\ z'+\rho n')$ первой прямой пересекаются по прямой, изображаемой уравнениями:

$$x'F_x+y'F_y+z'F_z+t'F_t=0,$$
$$l'F_x+m'F_y+n'F_z=0$$

или же уравнениями:

$$xF_{x'}+yF_{y'}+zF_{z'}+tF_{t'}=0,$$
$$x(a_{11}l'+a_{12}m'+a_{13}n')+y(a_{21}l'+a_{22}m'+a_{23}n')+$$
$$+z(a_{31}l'+a_{32}m'+a_{33}n')+(a_{41}l'+a_{42}m'+a_{43}n')=0.$$

Эта последняя прямая и должна совпадать со второю из данных прямых; поэтому двум предыдущим уравнениям должны удовлетворять координаты $x''+\rho l'', y''+\rho m'', z''+\rho n''$ любой точки второй прямой (при произвольном ρ). Выразив это последнее требование, мы получим четыре условия:

$$x''F_{x'}+y''F_{y'}+z''F_{z'}+t''F_{t'}=0,$$
$$l''F_{x'}+m''F_{y'}+n''F_{z'}=0,$$
$$l'F_{x''}+m'F_{y''}+n'F_{z''}=0,$$
$$C(l',\ l'')=0.$$

Последнее из них записано сокращенно на основании соглашения § 2 главы XVII. Более симметричный результат мы получили бы (притом, очевидный), если бы первую прямую мы задали уравнениями:

$$u_1x+v_1y+w_1z+p_1t=0,$$
$$u_2x+v_2y+w_2z+p_2t=0,$$

а вторую уравнениями:

$$u_3x+v_3y+w_3z+p_3t=0,$$
$$u_4x+v_4y+w_4z+p_4t=0.$$

Тогда условия полярной сопряженности этих прямых напишутся в виде:

$$u_3\Phi_{u_1}+v_3\Phi_{v_1}+w_3\Phi_{w_1}+p_3\Phi_{p_1}=0,$$
$$u_3\Phi_{u_2}+v_3\Phi_{v_2}+w_3\Phi_{w_2}+p_3\Phi_{p_2}=0,$$
$$u_4\Phi_{u_1}+v_4\Phi_{v_1}+w_4\Phi_{w_1}+p_4\Phi_{p_1}=0,$$
$$u_4\Phi_{u_2}+v_4\Phi_{v_2}+w_4\Phi_{w_2}+p_4\Phi_{p_2}=0.$$

796. Вершина какого-либо конуса, описанного около данного шара, находится на прямой, проходящей через центр шара перпендикулярно к плоскости касания конуса с шаром; отсюда легко видеть, что полярная плоскость какой-либо точки относительно шара перпендикулярна к прямой, соединяющей центр шара с данной точкой. Пусть теперь нам дана какая-нибудь прямая l'; проведем через нее и центр шара плоскость α; тогда полярные плоскости различных точек прямой l' будут перпендикулярны к плоскости α, следовательно, пересекутся между собой на прямой l'', перпендикулярной как к плоскости α, так и к прямой l'; но прямая l'' и есть прямая, полярно-сопряженная прямой l'.

Тот же результат можно получить на основании решения предыдущей задачи. Последнее из полученных там условий, именно условие:

$$C(l', l'') = 0,$$

для шара равносильно условию перпендикулярности двух прямых.

797. Указанное свойство есть следствие свойства взаимности полярно-сопряженных точек: если полярная плоскость одной из двух точек проходит через другую, то полярная плоскость второй точки проходит через первую. В самом деле пусть вершины одного тетраэдра будут A, B, C, D, его противолежащие грани α', β', γ', δ', вершины второго тетраэдра A', B', C', D', его противолежащие грани α, β, γ, δ; нам дано, что грани второго тетраэдра α, β, γ, δ, являются полярными плоскостями вершин A, B, C, D первого тетраэдра.

Вершина A' является пересечением плоскостей β, γ, δ, поэтому ее полярною плоскостью будет плоскость α', содержащая полюсы B, C, D этих плоскостей; аналогичное получим и для других вершин второго тетраэдра.

798. Однородные координаты бесконечно удаленной вершины тетраэдра, расположенной на оси Ox, можно взять в виде (1; 0; 0; 0); полярная плоскость этой точки изобразится уравнением:

$$F_x = 0$$

или уравнением:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = 0;$$

но эта плоскость должна быть координатной плоскостью yOz, уравнение которой:

$$x = 0,$$

поэтому необходимо, чтобы:

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0;$$

аналогично, рассматривая другие бесконечно удаленные вершины тетраэдра, расположенные на осях Oy и Oz, мы получим условия:

$$a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0,$$
$$a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0.$$

Тогда уравнение поверхности напишется в виде:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 = 0,$$

причем начало координат (центр) будет полюсом четвертой грани тетраэдра, именно, бесконечно удаленной плоскости.

799. Касательная плоскость к поверхности S' в ее точке (x', y', z') изобразится уравнением:

$$\frac{xx'}{A'} + \frac{yy'}{B'} + \frac{zz'}{C'} - 1 = 0.$$

Уравнение полярной плоскости точки (x_1, y_1, z_1) относительно поверхности S будет:

$$\frac{xx_1}{A} + \frac{yy_1}{B} + \frac{zz_1}{C} - 1 = 0.$$

Если эти две плоскости тождественны, тогда:

$$\frac{\frac{x'}{A'}}{\frac{x_1}{A}} = \frac{\frac{y'}{B'}}{\frac{y_1}{B}} = \frac{\frac{z'}{C'}}{\frac{z_1}{C}} = \frac{-1}{-1}; \qquad (\alpha)$$

точка M' принадлежит поверхности S', поэтому:

$$\frac{x'^2}{A'}+\frac{y'^2}{B'}+\frac{z'^2}{C'}-1=0. \qquad (\beta)$$

Исключая из уравнений (α) и (β) координаты x', y', z', мы получим условие, которому должны удовлетворять координаты x_1, y_1, z_1 полюса (относительно S) произвольной касательной плоскости поверхности S', т. е. получим уравнение:

$$\frac{A'x_1^2}{A^2}+\frac{B'y_1^2}{B^2}+\frac{C'z_1^2}{C^2}-1=0, \qquad (s'')$$

которое и будет уравнением искомой поверхности S''.

К главе XIX.

800. 1) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}x^2+y^2+\frac{3+\sqrt{5}}{2}z^2-\frac{25}{4}=0$; эллипсоид.

2) $x^2+\frac{\sqrt{2}+1}{2}y^2-\frac{\sqrt{2}-1}{2}z^2-1=0$; однополостный гиперболоид.

3) $x^2+(\sqrt{5}+2)y^2-(\sqrt{5}-2)z^2+4=0$; двуполостный гиперболоид.

4) Характеристическое уравнение $-s^3+9s^2-\frac{101}{4}s+22=0$ согласно признаку Декарта имеет три положительных корня; отношение $\frac{\Delta}{\delta}=\frac{61}{22}$ тоже положительно, поэтому данное уравнение изображает мнимую поверхность.

5) $x^2+\frac{\sqrt{14}+3}{2}y^2-\frac{\sqrt{14}-3}{2}z^2=0$; конус.

801. 1) $\frac{1}{2}x^2+y^2+\frac{3}{2}z^2-\frac{4}{3}=0$; эллипсоид. Как находятся главные плоскости, см. решение задачи 784; в данном случае они будут: $x-y+2=0$, $3x+3y+2=0$, $z=0$; координаты центра $(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0)$.

2) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+z^2+1=0$; однополостный гиперболоид. Центр (0; 0; 0), главная плоскость $x+y+z=0$, две других неопределенны, так как поверхность представляет собой поверхность вращения.

802. 1) $3x^2+5y^2=\frac{6}{\sqrt{5}}z$; эллиптический параболоид.

2) $7x^2-2y^2=4\sqrt{\frac{2}{7}}z$; гиперболический параболоид.

803. $\left(\frac{\sqrt{26}+3}{2}\right)x^2-\left(\frac{\sqrt{26}-3}{2}\right)y^2=4z$; гиперболический параболоид. Две его главных плоскости:

$$(15+5\sqrt{26})y-(23+2\sqrt{26})z+1-\sqrt{26}=0 \text{ и}$$
$$(15-5\sqrt{26})y-(23-2\sqrt{26})z+1+\sqrt{26}=0;$$

третья плоскость будет бесконечно-удаленной плоскостью.

804. 1) $14x^2+75y^2-1=0$; 2) $50x^2-11y^2-13=0$.

805. 1) Пара плоскостей: $(x+2y+3z+4)(3x-2y+z-6)=0$.

2) Пара плоскостей: $(4x+3y-5z+6)(3x-5y+4z-8)=0$.

806. 1) Параболический цилиндр.

$$\left(\frac{4x+3y+z+2}{\sqrt{26}}\right)^2=\frac{\sqrt{43}}{13}\left(\frac{3x-5y+3z+4}{\sqrt{43}}\right).$$

2) Пара параллельных плоскостей

$$(2x-7y+z+1)(2x-7y+z+3)=0.$$

3) Пара совпадающих плоскостей:

$$(4x+3y+10z+7)^2=0.$$

807. Из десяти соотношений, связывающих старые и новые коэфициенты первоначального и преобразованного уравнений поверхности, надо исключить три параметра поворота осей; таким образом мы должны получить семь инвариантов.

Эти семь инвариантов будут: 1) I_1, I_2, I_3, I_4 и 2) отношения трех коэфициентов уравнения с s

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12}-s\omega_3 & a_{13}-s\omega_2 & a_{14} \\ a_{21}-s\omega_3 & a_{22}-s & a_{23}-s\omega_1 & a_{24} \\ a_{31}-s\omega_2 & a_{32}-s\omega_1 & a_{33}-s & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0$$

к четвертому.

808. Так как за начало координат берется точка на *поверхности*, то $a_{44}=0$; далее оси взяты по главным направлениям, поэтому $a'_{23}=0$, $a'_{31}=0$, $a'_{12}=0$. Если поверхность с центром в определенной точке (на конечном расстоянии или бесконечно удаленной точке), то можно считать, что центр расположен на оси Oz, тогда $a'_{14}=0$, $a'_{24}=0$.

Коэфициент a'_{34} определится с помощью четвертого инварианта из соотношения:

$$I_4=-s_1s_2a'^2_{34}.$$

809. Если мы сравним выражения инвариантов по первоначальному и преобразованному уравнению, то мы получим:

$$I_1=\frac{a'_{11}(1-\omega'^2_1)+a'_{22}(1-\omega'^2_2)+a'_{33}(1-\omega'^2_3)}{\Omega'},$$

$$I_2=\frac{a'_{22}a'_{33}-a'_{33}a'_{11}+a'_{11}a'_{22}}{\Omega'},$$

$$I_3=\frac{a'_{11}a'_{22}a'_{33}}{\Omega'},\qquad I_4=\frac{a'_{11}a'_{22}a'_{33}a'_{44}}{\Omega'}.$$

Теперь видно, что, считая коэфициенты преобразованного уравнения данными, мы для трех косинусов ω'_1, ω'_2, ω'_3 новых углов имеем собственно *два уравнения*, например:

$$a'_{11}(1-\omega'^2_1)+a'_{22}(1-\omega'^2_2)+a'_{33}(1-\omega'^2_3)=a'_{11}a'_{22}a'_{33}\frac{I_1}{I_3},$$

$$\Omega'=\frac{I_3}{a'_{11}a'_{22}a'_{33}},$$

из которых эти все три косинуса *не могут быть* определены. Когда дано преобразованное уравнение:

$$a'_{11}x^2+a'_{22}y^2+a'_{33}z^2+a'_{44}=0$$

без указания, к какой координатной системе оно отнесено, то геометрически это означает, что оно относится к какой-то тройке сопряженных попарно диаметров, для каждого из которых дана его длина, ибо, например, при $y=0$,

$z=0$ мы получим $2x=\sqrt{-\frac{a'_{44}}{a'_{11}}}$; следовательно, как показывает предыдущ

соображение, таких троек мы можем подобрать бесчисленное множество.

810. Уравнение поверхности, отнесенное к равным и сопряженным диаметрам, может быть написано в виде:

$$s(x^2+y^2+z^2)+a'_{44}=0;$$

поэтому из уравнений:

$$I_2=\frac{3s^2}{\Omega'},\quad I_3=\frac{s^3}{\Omega'},\quad I_4=\frac{s^3}{\Omega'}a'_{44}$$

найдем:

$$\frac{3I_3}{I_2}=s,\quad \frac{I_4}{I_3}=a'_{44}\,.$$

Длина полудиаметра будет:

$$x=\sqrt{-\frac{a'_{44}}{s}}=\sqrt{-\frac{I_2I_4}{3I_3^2}}\,.$$

К главе XX.

812. Так как соотношение $x'=ax+b$ должно при $x=0$ давать $x'=0$, то необходимо, чтобы $b=0$. Следовательно, искомое преобразование будет:

$$x'=ax,$$

где коэфициент a может иметь любое значение.

813. Из условий:

$$\begin{aligned} x'_1&=a_1x_1+b_1y_1+c_1, & y'_1&=a_2x_1+b_2y_1+c_2,\\ x'_2&=a_1x_2+b_1y_2+c_1, & y'_2&=a_2x_2+b_2y_2+c_2,\\ x'_3&=a_1x_3+b_1y_3+c_1, & y'_3&=a_2x_3+b_2y_3+c_2 \end{aligned}$$

мы найдем для a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 конечные определенные значения, так как по предположению точки M_1, M_2, M_3 не лежат на одной прямой и

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ y_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

По теореме о перемножении определителей, имеем:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1\\ x'_2 & y'_2 & 1\\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Так как по условию три точки M'_3, M'_2. M'_3 тоже не лежат на одной прямой, то предыдущее соотношение показывает, что

$$a_1b_2-a_2b_1\neq 0,$$

т. е. что полученное выше преобразование обратимо.

815. Из соотношений:

$$x'=\frac{cx+d}{ax+b},$$

$$x'_1=\frac{cx_1+d}{ax_1+b},$$

$$x'_2=\frac{cx_2+d}{ax_2+b},$$

$$x'_3=\frac{cx_3+d}{ax_3+b}$$

следует:

$$x' - x'_1 = \frac{(bc - ad)(x - x_1)}{(ax + b)(ax_1 + b)}, \qquad x'_3 - x'_1 = \frac{(bc - ad)(x_3 - x_1)}{(ax_3 + b)(ax_1 + b)},$$

$$x'_2 - x' = \frac{(bc - ad)(x_2 - x)}{(ax_2 + b)(ax + b)}, \qquad x'_2 - x'_3 = \frac{(bc - ad)(x_2 - x_3)}{(ax_2 + b)(ax_3 + b)};$$

разделив первое соотношение на второе и третье на четвертое, мы получим:

$$\frac{x' - x'_1}{x'_2 - x'} = \frac{ax_2 + b}{ax_1 + b} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

$$\frac{x'_3 - x'_1}{x'_2 - x'_3} = \frac{ax_2 + b}{ax_1 + b} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3}.$$

Наконец, разделив первое из этих соотношений на второе, мы окончательно исключим параметры $a:b:c:d$ и получим:

$$\frac{x' - x'_1}{x'_2 - x} : \frac{x'_3 - x'_1}{x'_2 - x'_3} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} : \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3}.$$

816. $x'_1 = \frac{d}{b}, \ x'_2 = \frac{c}{a}, \ x'_3 = \infty, \ x'_4 = 0.$

822. Указанное преобразование изображается функциями *однородными* относительно девяти коэфициентов:

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, \end{matrix}$$

поэтому его существенными параметрами будут отношения *восьми* из этих коэфициентов к девятому.

Уравнение прямой

$$A'x' + B'y' + C' = 0$$

преобразуется в уравнение:

$$A'(a_1x + b_1y + c_1) + B'(a_2x + b_2y + c_2) + C'(a_3x + b_3y + c_3) = 0$$

или

$$(A'a_1 + B'a_2 + C'a_3)x + (A'b_1 + B'b_2 + C'b_3)y + \\ + A'c_1 + B'c_2 + C'c_3 = 0,$$

т. е. в уравнение прямой.

823. Обозначим значения знаменателей преобразования для координат каждой из данных точек через σ_1, σ_2, σ_3, σ_4; тогда для определения отношений коэфициентов преобразования через координаты четырех пар собственных точек нам придется решить уравнения:

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = x'_1\sigma_1, \quad a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = y'_1\sigma_1,$$
$$a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 = x'_2\sigma_2, \quad a_2x_2 + b_2y_2 + c_2 = y'_2\sigma_2,$$
$$a_1x_3 + b_1y_3 + c_1 = x'_3\sigma_3, \quad a_2x_3 + b_2y_3 + c_2 = y'_3\sigma_3,$$
$$a_1x_4 + b_1y_4 + c_1 = x'_4\sigma_4, \quad a_2x_4 + b_2y_4 + c_2 = y'_4\sigma_4,$$

$$a_3x_1 + b_3y_1 + c_3 = \sigma_1,$$
$$a_3x_2 + b_3y_2 + c_3 = \sigma_2,$$
$$a_3x_3 + b_3y_3 + c_3 = \sigma_3,$$
$$a_3x_4 + b_3y_4 + c_3 = \sigma_4.$$

Теперь видно, что для искомых отношений коэфициентов мы получим конечные определенные значения, если ни один из определителей 3-го порядка матрицы

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{matrix}\right\|$$

не обращается в нуль, т. е. если никакая тройка точек из данной четверки M_1, M_2, M_3, M_4 не лежит на одной прямой. Чтобы искомое преобразование было обратимым, необходимо также, чтобы матрица

$$\left\|\begin{matrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \\ x_4' & y_4' & 1 \end{matrix}\right\|$$

была ранга, равного 3, т. е. чтобы из соответствующих четырех точек M_1', M_2', M_3', M_4' никакая тройка не попадала на одну прямую.

824. Преобразование, обратное аффинному, будет, очевидно, тоже аффинным; далее, если мы после аффинного преобразования:

$$x'' = a_1'x' + b_1'y' + c_1',$$
$$y'' = a_2'x' + b_2'y' + c_2'$$

произведем аффинное преобразование:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2,$$

то получим преобразование:

$$x'' = a_1'(a_1x + b_1y + c_1) + b_1'(a_2x + b_2y + c_2) + c_1',$$
$$y'' = a_2'(a_1x + b_1y + c_1) + b_2'(a_2x + b_2y + c_2) + c_2',$$

т. е. тоже аффинное. Эти два свойства аффинных преобразований и позволяют заключить, что рассматриваемые преобразования составляют группу.

825. Задача решается аналогично предыдущей.

828. Разделив соотношение (11) на x, получим:

$$Ax' + C + \frac{Bx' + D}{x} = 0,$$

оттуда, полагая, что x неограниченно растет, получим в пределе абсциссу главной точки второго ряда $x_\infty' = -\frac{C}{A}$; аналогично получим $x_\infty = -\frac{B}{A}$. Внесем теперь в соотношение (11) вместо B и C их значения через найденные абсциссы главных точек. Мы можем его привести его к виду:

$$Ax(x' - x_\infty') - Ax_\infty(x' - x'_\infty) - Ax_\infty x'_\infty + D = 0$$

или же к виду:

$$(x' - x'_\infty)(x - x_\infty) = \frac{BC - AD}{A^2}.$$

Называя для соответствующих точек абсциссы, отсчитанные в каждом случае от главной точки, через ξ' и ξ, т. е. полагая:

$$\xi' = x' - x_\infty', \quad \xi = x - x_\infty,$$

мы и получим соотношение проективности:

$$\xi'\xi = \frac{BC - AD}{A^2},$$

указанное выше.

829. Абсцисса середины расстояния главных точек для преобразования

$$Axx' + Bx' + Cx + D = 0$$

будет:

$$\frac{1}{2} \cdot (x_\infty + x'_\infty) = \frac{1}{2}\left(-\frac{B}{A} - \frac{C}{A}\right) = -\frac{B+C}{2A};$$

абсциссы x_1 и x_2 двойных точек определятся уравнением:

$$Ax^2 + (B + C)x + D = 0,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{B+C}{2A}.$$

830. a) Преобразование

$$Axx' + Bx' + Cx + D = 0$$

дает для точки x соответствующую точку x'; если это инволюция, то точке x' должна соответствовать точка x, поэтому

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0.$$

Вычитая из первого соотношения второе, мы найдем, что в этом случае $B = C$.

b) Из условия $B = C$ следует, что $x_\infty = x'_\infty$, т. е. главные точки совпадают.

c) Допустим для простоты, что центр инволюции принят за начало координат, тогда инволюционное соответствие изобразится соотношением:

$$\xi\xi' = m,$$

а его двойные точки будут иметь абсциссы $\xi_1 = \sqrt{m}$ и $\xi_2 = -\sqrt{m}$. Нетрудно теперь проверить, что точки $M_1(\xi_1)$, $M_2(\xi_2)$, $M(\xi)$ и $M'\left(\frac{\xi}{m}\right)$ образуют гармоническую четверку.

d) Когда даны абсциссы x_1, x'_1, x_2, x'_2 двух пар соответственных точек, то могут быть определены отношения коэфициентов соотношения:

$$Axx' + B(x + x') + D = 0,$$

устанавливающего инволюционное соответствие.

831. Координаты точки, не изменяющейся при аффинном преобразовании (6) определятся из уравнений:

$$x = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y = a_2x + b_2y + c_2;$$

эта точка будет на конечном расстоянии, если

$$a_1b_2 - a_2b_1 - a_1 - b_2 + 1 \neq 0.$$

Прямая, изображаемая уравнением:

$$Ax' + By' + C = 0,$$

при аффинном преобразовании (6) перейдет в прямую, изображаемую уравнением:

$$A(a_1x + b_1y + c_1) + B(a_2x + b_2y + c_2) + C = 0;$$

если мы хотим, чтобы преобразованная прямая совпадала с первоначальною, мы должны удовлетворить условиям:

$$\frac{Aa_1 + Ba_2}{A} = \frac{Ab_1 + Bb_2}{B} = \frac{Ac_1 + Bc_2 + C}{C}.$$

Сравнивая два первых выражения, мы получим *квадратное уравнение*:

$$a_2\left(\frac{B}{A}\right)^2+(a_1-b_2)\frac{B}{A}-b_1=0$$

для определения углового коэфициента $k=-\frac{B}{A}$ искомой прямой (следовательно, два решения).

832. Прямая, изображаемая уравнением:

$$Ax'+By'+C=0,$$

проективно преобразуется в прямую, изображаемую уравнением:

$$A(a_1x+b_1y+c_1)+B(a_2x+b_2y+c_2)+C(a_3x+b_3y+c_3)=0;$$

для тождественности последней с первой необходимы (и достаточны) условия:

$$\frac{Aa_1+Ba_2+Ca_3}{A}=\frac{Ab_1+Bb_2+Cb_3}{B}=\frac{Ac_1+Bc_2+Cc_3}{C}.$$

Обозначая каждое из этих равных отношений через u, мы получим для определения отношений $A:B:C$ уравнения:

$$\begin{aligned}A(a_1-u)+Ba_2+Ca_3&=0,\\ Ab_1+B(b_2-u)+Cb_3&=0,\\ Ac_1+Bc_2+C(c_3-u)&=0,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{vmatrix}a_1-u & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2-u & b_3\\ c_1 & c_2 & c_2-u\end{vmatrix}=0,$$

т. е. u удовлетворяет уравнению 3-й степени, что и дает нам три искомых прямых.

833. См. решение упражнения 824.

834. См. решение упражнения 824.

К главе XXI.

835. Если форму f преобразовать указанной подстановкой (24), то коэфициенты, например, a'_{11} и a'_{23} преобразованной формулы f' получат значения:

$$\begin{aligned}a'_{11}&=a_{11}\alpha_1^2+a_{22}\beta_1^2+a_{33}\gamma_1^2+2a_{23}\beta_1\gamma_1+2a_{31}\gamma_1\alpha_1+2a_{12}\alpha_1\beta_1,\\ a'_{23}&=a_{11}\alpha_2\alpha_3+a_{22}\beta_2\beta_3+a_{33}\gamma_2\gamma_3+a_{23}(\beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2)+a_{31}(\gamma_2\alpha_3+\gamma_3\alpha_2)+\\ &\quad+a_{12}(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2),\end{aligned}$$

остальные коэфициенты a'_{22}, a'_{33}, a'_{31}, a'_{12} получаются из указанных круговою перестановкою номеров 1, 2, 3 у коэфициентов α_i, β_k, γ_m подстановки.

Теперь нетрудно проверить, что, умножая дискриминант начальной формы на квадрат определителя подстановки, мы получим дискриминант преобразованной формы.

839. Направления искомых прямых определятся уравнением (27) или уравнением:

$$\begin{vmatrix}a_{11}+a_{12}k & a_{21}+a_{22}k\\ b_{11}+b_{12}k & b_{21}+b_{22}k\end{vmatrix}=0;$$

полагая $k=\frac{y}{x}$, мы получим уравнение самих прямых в виде:

$$\begin{vmatrix}a_{11}x+a_{12}y & a_{21}x+a_{22}y\\ b_{11}x+b_{12}y & b_{21}x+b_{22}y\end{vmatrix}=0. \qquad (27')$$

Обозначая левые части уравнений (26) через f и φ, мы можем последнее уравнение представить в виде:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \qquad (\gamma')$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

называется функциональным определителем или определителем Якоби (короче „якобиан“) для двух функций; таким образом мы скажем, что уравнение двух прямых, гармонически разделяющих каждую пару прямых $f=0$ и $\varphi=0$, получится, если мы приравняем нулю якобиан двух квадратичных форм f и φ.

840. Возьмем две точки $M_1(l_1:m_1:n_1)$ и $M_2(l_2:m_2:n_2)$, лежащие соответственно на данных лучах, и две точки

$$M'\left(\frac{l_1+\lambda' l_2}{1+\lambda'};\ \frac{m_1+\lambda' m_2}{1+\lambda'};\ \frac{n_1+\lambda' n_2}{1+\lambda'}\right),$$

$$M''\left(\frac{l_1+\lambda'' l_2}{1+\lambda''};\ \frac{m_1+\lambda'' m_2}{1+\lambda''};\ \frac{n_1+\lambda'' n_2}{1+\lambda''}\right);$$

две последние точки, очевидно, лежат на одной прямой с точками M_1 и M_2. Ангармоническое отношение четырех выбранных точек (а следовательно, и четырех лучей OM_1, OM_2, OM', OM'') будет равно

$$\frac{x'-x_1}{x_2-x'} : \frac{x''-x_1}{x_2-x''} = \frac{\lambda'}{\lambda''};$$

если четыре выбранных луча OM_1, OM_2, OM', OM'', лежащие в одной плоскости, образуют гармоническую четверку, тогда

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = -1,$$

или

$$\lambda' + \lambda'' = 0.$$

Если мы теперь потребуем, чтобы лучи OM' и OM'' или, что все равно, точки M' и M'' лежали на данном конусе (28), то мы найдем, что λ' и λ'' должны быть корнями квадратного уравнения:

$$\begin{gathered}(a_{11}l_1^2 + a_{22}m_1^2 + a_{33}n_1^2 + 2a_{23}m_1n_1 + 2a_{31}n_1l_1 + 2a_{12}l_1m_1) + \\ + 2\lambda\,[a_{11}l_1l_2 + a_{22}m_1m_2 + a_{33}n_1n_2 + a_{23}(m_1n_2 + m_2n_1) + \\ + a_{31}(n_1l_2 + n_2l_1) + a_{12}(l_1m_2 + l_2m_1)] + \\ + \lambda^2(a_{11}l_2^2 + a_{22}m_2^2 + a_{33}n_2^2 + 2a_{23}m_2n_2 + 2a_{31}n_2l_2 + 2a_{12}l_2m_2) = 0.\end{gathered}$$

Таким образом, чтобы лучи OM_1 и OM_2 с образующими конуса OM' и OM'' составляли гармоническую четверку, необходимо выполнение условия:

$$\begin{gathered}a_{11}l_1l_2 + a_{22}m_1m_2 + a_{33}n_1n_2 + a_{23}(m_1n_2 + m_2n_1) + a_{31}(n_1l_2 + n_2l_1) + \\ + a_{12}(l_1m_2 + l_2m_1) = 0.\end{gathered}$$

Такие два луча OM_1 и OM_2 короче будем называть гармонически-сопряженными относительно данного конуса. Луч $l_2:m_2:n_2$, гармонически-сопряженный с лучом $l_1:m_1:n_1$ относительно данного конуса, удовлетворяет условию:

$$\begin{gathered}(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)\,l_2 + (a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)m_2 + \\ + (a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)\,n_2 = 0,\end{gathered}$$

т. е. лежит в плоскости, изображаемой уравнением:

$$(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)\,x + (a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)\,y + \\ + (a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)\,z = 0$$

или уравнением:

$$l_1 \frac{\partial f}{\partial x} + m_1 \frac{\partial f}{\partial y} + n_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

если $2f = 0$ есть уравнение данного конуса (28). Указанную плоскость можно назвать плоскостью, гармонически-сопряженною с лучом $l_1 : m_1 : n_1$ относительно заданного конуса в том смысле, что каждый луч этой плоскости, выходящий из начала координат, будет гармонически сопряжен с лучом $l_1 : m_1 : n_1$ относительно конуса.

841. Луч гармонически-сопряженный с лучом $l_1 : m_1 : n_1$, относительно каждого из данных конусов определится пересечением двух плоскостей:

$$(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)\,x + (a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)\,y + \\ + (a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)\,z = 0,$$

$$(b_{11}l_1 + b_{12}m_1 + b_{13}n_1)\,x + (b_{21}l_1 + b_{22}m_1 + b_{23}n_1)\,y + \\ + (b_{31}l_1 + b_{32}m_1 + b_{33}n_1)\,z = 0.$$

843. Допустим, что мы имеем n переменных $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(n)}$, тогда квадратичную форму:

$$2F = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x^{(i)} x^{(k)} \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

будем символически записывать в виде:

$$2F = a_{ik} x^{(i)} x^{(k)},$$

подразумевая, что каждый раз, как в каком-либо произведении дважды встречается один и тот же индекс (один раз внизу, другой раз вверху), мы должны брать *сумму* аналогичных произведений, давая индексу все значения от 1 до n.

Пользуясь этим символическим обозначением, мы линейно однородную подстановку вместо аргументов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ новых аргументов $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \ldots \overline{x}^{(n)}$ изобразим в виде:

$$x^{(i)} = \alpha_p^i \overline{x}^{(p)}. \qquad (\alpha)$$

Указанной заменой данная форма $2F$ преобразуется к виду:

$$2F = a_{ik} \alpha_p^i \overline{x}^{(p)} \alpha_p^k \overline{x}^{(q)};$$

обозначая через $\overline{a}_{ik}$ коэфициенты преобразованной формы, мы найдем:

$$\overline{a}_{pq} = a_{ik} \alpha_p^i \alpha_q^k.$$

Определитель из коэфициентов a_{ik} данной формы, в которой каждый коэфициент ставится в строке, соответствующей его первому индексу, и в столбце, соответствующем его второму индексу, назовем дискриминантом формы и коротко обозначим через

$$a = | a_{ik} |;$$

относительно определителя подстановки (α)

$$\alpha = \left| \alpha_k^i \right|$$

будем предполагать, что он отличен от нуля (для обратимости подстановки).

Умножая теперь определитель a на определитель α мы получим:

$$a \cdot \alpha = \left| a_{ik} \right| \cdot \left| \alpha_k^i \right| = \left| c_{kp} \right|,$$

где по правилу перемножения определителей

$$c_{kp} = a_{ik} \alpha_p^i;$$

полученный результат умножим еще раз на определитель α, тогда

$$a\alpha^2 = \left| c_{kp} \right| \cdot \left| \alpha_q^k \right| = \left| c_{kp} \alpha_q^k \right|;$$

но элементы полученного определителя дают коэфициенты преобразованной формы, ибо

$$c_{kp}\, \alpha_q^k = a_{ik}\, \alpha_p^i\, \alpha_q^k = \overline{a}_{pq}.$$

Следовательно,

$$a\alpha^2 = \overline{a},$$

что как раз и требовалось доказать.

844. Пусть даны две квадратичных формы:

$$f = a_{ik} x^{(i)} x^{(k)}, \quad \varphi = b_{ik} x^{(i)} x^{(k)};$$

при линейной подстановке (α) они перейдут в формы:

$$\overline{f} = \overline{a}_{ik}\, \overline{x}^{(i)}\, \overline{x}^{(k)}, \qquad \overline{\varphi} = \overline{b}_{ik}\, \overline{x}^{(i)}\, \overline{x}^{(k)},$$

поэтому форма $f - s\varphi$ подстановкой (α) преобразуется в форму $\overline{f} - s\overline{\varphi}$.

На основании предыдущей теоремы мы заключаем, что, если значение s выбрано так, чтобы дискриминант формы $f - s\varphi$ обращался в нуль:

$$| a_{ik} - s b_{ik} | = 0, \tag{β}$$

то при таком же значении s обращается в нуль и дискриминант

$$| \overline{a}_{ik} - s\overline{b}_{ik} | = 0$$

преобразованной формы $\overline{f} - s\overline{\varphi}$. Иначе говоря, уравнение (β) инвариантно при линейной однородной замене переменных в данных формах, т. е. отношения коэфициентов уравнения (β) друг к другу будут совместными инвариантами двух данных форм f и φ.

К главе XXII.

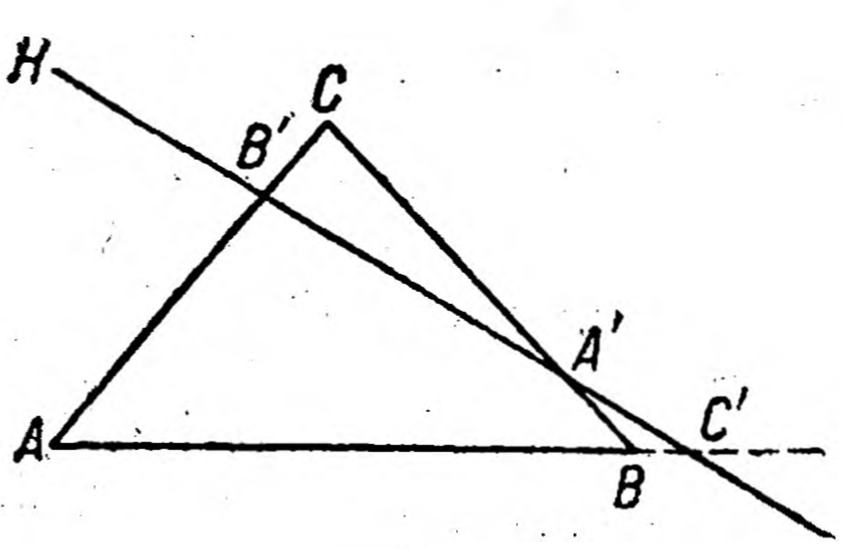
845. Пусть прямая HN, изображаемая уравнением $u = 0$, пересекает стороны BC, CA, AB (черт. 192) данного треугольника (или их продолжения) соответственно в точках A', B', C'; обозначим соответственно через u_1, u_2, u_3 результаты подстановки в левую часть u координат вершин треугольника; тогда по формуле (1) найдем:

$$\frac{BA'}{A'C} = -\frac{u_2}{u_3}, \qquad \frac{CB'}{B'A} = -\frac{u_3}{u_1}, \qquad \frac{AC'}{C'B} = -\frac{u_1}{u_2},$$

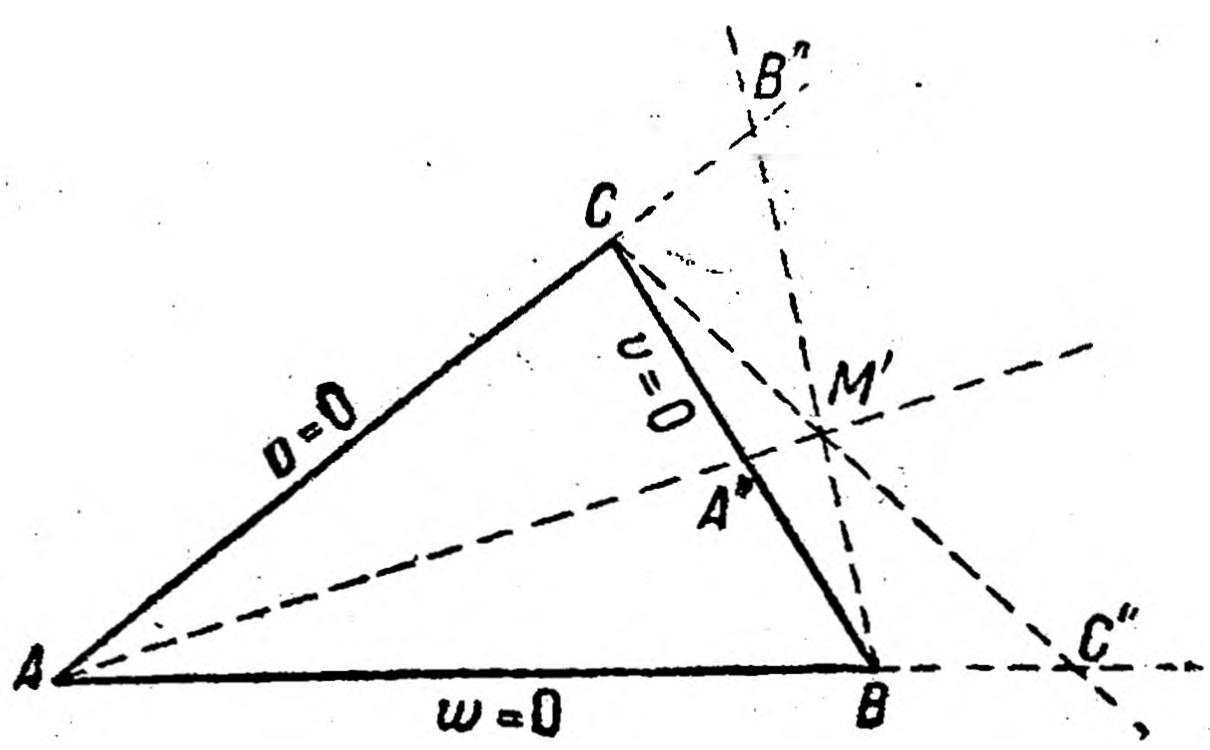
откуда почленным перемножением всех отношений получим указанный результат.

846. Какая-либо прямая, проходящая через точку пересечения двух данных прямых, изобразится уравнением:

$$u - mv = 0.$$



Черт. 192.



Черт. 193.

Выберем из этого пучка прямую, проходящую через точку M', тогда координаты этой последней должны удовлетворять этому уравнению, следовательно:

$$u' - mv' = 0,$$

если через u' и v' обозначить результаты подстановки координат точки M' в левые части уравнений двух данных прямых. Определяя m из последнего уравнения и подставляя его значение в уравнение $u - mv = 0$, мы получим уравнение искомой прямой в виде (2).

847. Возьмем какой-нибудь треугольник ABC, уравнения сторон которого BC, CA, AB будут соответственно

$$u = 0,$$
$$v = 0,$$
$$w = 0,$$

и какую-нибудь точку M' (черт. 193). Через каждую из вершин треугольника и точку M' проведем прямые AM', BM', CM'; эти прямые изобразим уравнениями:

$$(AM') \qquad \frac{v}{v'} - \frac{w}{w'} = 0,$$

$$(BM') \qquad \frac{w}{w'} - \frac{u}{u'} = 0,$$

$$(CM') \qquad \frac{u}{u'} - \frac{v}{v'} = 0.$$

Пусть построенные прямые пересекают стороны BC, CA, AB в точках A'', B'', C''; тогда, отмечая нижним индексом результат подстановки в выражения u, v, w координат той или другой вершины и применяя формулу (1) к каждой из прямых AM', BM', CM', мы найдем:

$$\frac{BA''}{A''C} = -\frac{\dfrac{v_2}{v'} - \dfrac{w_2}{w'}}{\dfrac{v_3}{v'} - \dfrac{w_3}{w'}},$$

$$\frac{CB''}{B''A} = -\frac{\dfrac{w_3}{w'} - \dfrac{u_3}{u'}}{\dfrac{w_1}{w'} - \dfrac{u_1}{u'}},$$

$$\frac{AC''}{C''B} = -\frac{\dfrac{u_1}{u'} - \dfrac{v_1}{v'}}{\dfrac{u_2}{u_1} - \dfrac{v_2}{v_1}}.$$

Предыдущие выражения упрощаются, если принять во внимание, что вершины B и C лежат на прямой $u = 0$, поэтому каждый из результатов подстановки координат второй или третьей вершины в левую часть уравнения первой стороны треугольника BC (т. е. наши выражения u_2 и u_3) будут нулями; аналогичное значение мы должны сделать и относительно других выражений, индекс которых не совпадает с номером буквы. Итак:

$$u_2 = u_3 = 0,$$
$$v_3 = v_1 = 0,$$
$$w_1 = w_2 = 0.$$

Вследствие этого найденные выше выражения для отношений упростятся:

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{v_2}{v'} : \frac{w_3}{w'}, \qquad \frac{CB''}{B'''A} = \frac{w_3}{w'} : \frac{u_1}{u'}, \qquad \frac{AC''}{C''B} = \frac{u_1}{u'} : \frac{v_2}{v'}.$$

перемножая эти равенства, мы окончательно получим:

$$\frac{BA''}{A''C}\cdot\frac{CB''}{B''A}\cdot\frac{AC''}{C''B}=+1.$$

848. Пусть начало координат лежит внутри треугольника, стороны которого изображаются нормальными уравнениями:

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0;$$

тогда уравнения трех внутренних биссектрис будут:

$$\beta-\gamma=0,\ \gamma-\alpha=0,\ \alpha-\beta=0.$$

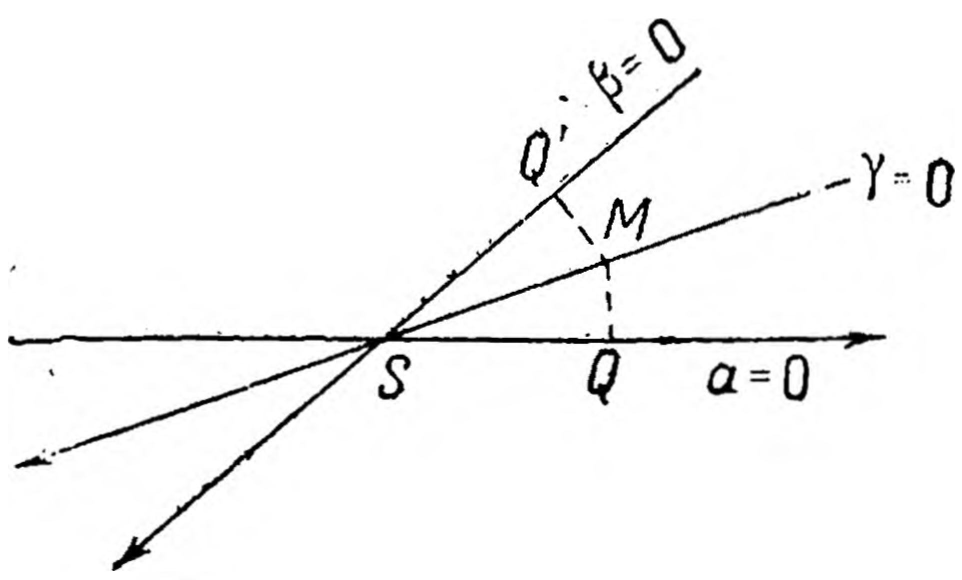
В силу тождества

$$(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta)\equiv 0$$

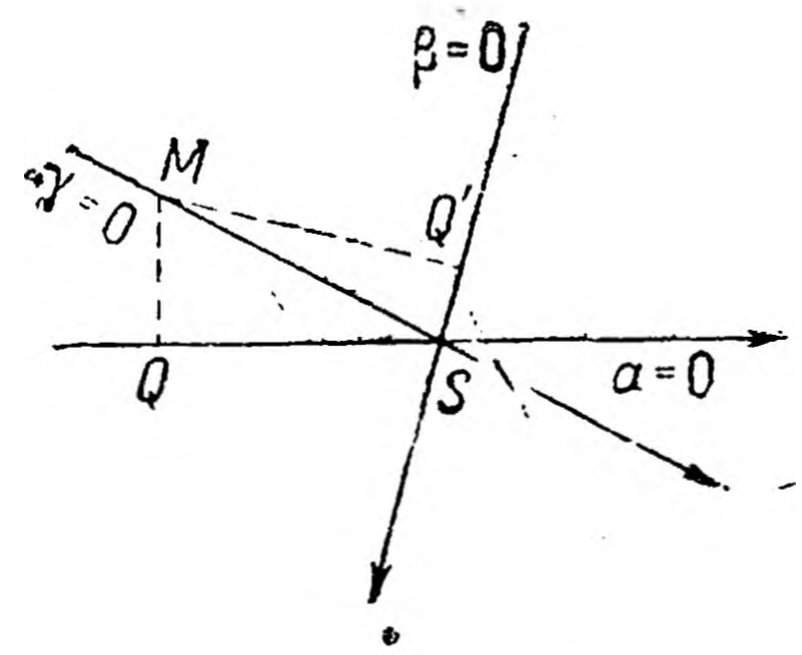
мы заключаем, что указанные три биссектрисы пересекаются в одной точке.

Две внешних и третья внутренняя биссектрисы изобразятся уравнениями:

$$\beta+\gamma=0,\ \gamma+\alpha=0,\ \alpha-\beta=0;$$



Черт. 194.



Черт. 195.

они опять пересекаются в одной точке, ибо

$$(\beta+\gamma)-(\gamma+\alpha)+(\alpha-\beta)\equiv 0.$$

850. Рассмотрим сначала такое положение прямой γ пучка, когда она лежит в угле данных прямых, содержащем начало координат (черт. 194), и из какой-нибудь точки прямой γ опустим перпендикуляры MQ и MQ' на данные прямые.

В таком случае

$$MQ=SM\sin(QSM),\quad MQ'=SM\sin(MSQ'),$$
$$\angle QSM=(\alpha\gamma)-\pi,\quad \angle MSQ'=(\gamma\beta);$$

следовательно, параметр пучка равен:

$$m=\frac{MQ}{MQ'}=-\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\gamma\beta)}.$$

Пусть далее прямая γ пучка расположена в том угле двух основных прямых, который не содержит начала координат (черт. 195). Возьмем опять какую-либо точку M на прямой γ и опустим из нее перпендикуляры MQ и MQ' на наши основные прямые; при подсчете расстояний MQ и MQ' надлежит помнить, что они в данном случае разных знаков. Итак:

$$MQ=+SM\cdot\sin(MSQ),\quad MQ'=-SM\cdot\sin(Q'SM),$$

при этом

$$\angle MSQ=2\pi-(\alpha\gamma),\quad \angle Q'SM=2\pi-(\gamma\beta).$$

Следовательно, окончательное выражение для параметра m будет, как и в предыдущем случае:

$$m=-\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\gamma\beta)}.$$

Примените этот результат для вывода уравнений высот треугольника.

851. Если предполагать уравнения двух первых прямых $\alpha=0$ и $\beta=0$ данными в нормальной форме, то

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\gamma\beta)}=-m, \quad \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\delta\beta)}=-m',$$

откуда и получаем указанный результат.

Если каждая из двух основных прямых дается своим общим уравнением:

$$u=0,$$
$$v=0,$$

то для какой-либо прямой пучка

$$u-mv=0$$

параметр m будет пропорционален отношению синусов, именно:

$$m=-\mu\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\gamma\beta)},$$

где μ будет отношением нормирующих множителей для уравнений $u=0$ и $v=0$ двух первых прямых. Для второй прямой δ того же пучка

$$u-m'v=0$$

аналогично получим:

$$m'=-\mu\frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\delta\beta)},$$

отсюда попрежнему:

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\gamma\beta)}:\frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\delta\beta)}=\frac{m}{m'}$$

независимо от того, в какой форме берутся уравнения двух основных прямых (нормальной или общей).

853. В преобразовании (21′) вершине базисного треугольника $(1:0:0)$ должна соответствовать та же вершина, поэтому, полагая в формулах (21′), что $x=1$, $y=0$, $z=0$, $x'=1$, $y'=0$, $z'=0$, мы получим:

$$\frac{1}{a_1}=\frac{0}{a_2}=\frac{0}{a_3},$$

откуда следует:

$$a_2=a_3=0.$$

Из условия сохранения второй вершины $(0:1:0)$ найдем:

$$\frac{0}{b_1}=\frac{1}{b_2}=\frac{0}{b_3}$$

или

$$b_1=b_3=0;$$

наконец, из условия сохранения третьей вершины $(0:1:0)$ получим:

$$\frac{0}{c_1}=\frac{0}{c_2}=\frac{1}{c_3}$$

или

$$c_1=c_2=0.$$

Таким образом искомое преобразование будет вида:

$$\frac{x'}{ax}=\frac{y'}{by}=\frac{z'}{cz},$$

где коэфициенты a, b, c могут иметь любые значения (кроме нулевых). В таком преобразовании сохраняются и стороны базисного треугольника, ибо, например, уравнение $x=0$ перейдет в силу данного преобразования в уравнение $x'=0$.

Найденные преобразования образуют группу, ибо два последовательных преобразования

$$\frac{x''}{a'x'} = \frac{y''}{b'y'} = \frac{z''}{c'z'}, \quad \frac{x'}{ax} = \frac{y'}{by} = \frac{z'}{cz},$$

сохраняющих вершины базисного треугольника, дают преобразование

$$\frac{x''}{aa'x} = \frac{y''}{bb'y} = \frac{z''}{cc'z}$$

того же типа, т. е. сохраняющие вершины базисного треугольника.

854. Преобразование (21′), относящееся к однородным декартовым координатам, прямые

$$x' + iy' = 0 \text{ и } x' - iy' = 0$$

переводит в прямые:

$$(a_1x + b_1y + c_1z) + i(a_2x + b_2y + c_2z) = 0,$$
$$(a_1x + b_1y + c_1z) - i(a_2x + b_2y + c_2z) = 0.$$

Так как мы желаем получить прямые

$$x + iy = 0, \qquad x - iy = 0,$$

то искомые коэфициенты должны быть связаны условиями:

$$\frac{a_1 + ia_2}{1} = \frac{b_1 + ib_2}{i} = \frac{c_1 + ic_2}{0}, \qquad \frac{a_1 - ia_2}{1} = \frac{b_1 - ib_2}{-i} = \frac{c_1 - ic_2}{0},$$

откуда

$$b_1 = -a_2, \quad b_2 = a_1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Следовательно, искомое преобразование можно написать в виде:

$$\frac{x'}{ax - by} = \frac{y'}{bx + ay} = \frac{z'}{a_1x + b_1y + c_1z}.$$

855. Тогда A' лежит на пересечении прямой $\mu y + \nu z = 0$ со стороною $x = 0$; для прямых $y = 0$, $z = 0$, $\mu y + \nu z = 0$ четвертым гармоническим будет луч AA'', изображаемый уравнением $\mu y - \nu z = 0$. Аналогично, прямая BB'' изобразится уравнением $\nu z - \lambda x = 0$ и прямая CC'' — уравнением $\lambda x - \mu y = 0$; три прямых:

$$\mu y - \nu z = 0, \quad \nu z - \lambda x = 0, \quad \lambda x - \mu y = 0,$$

очевидно, проходят через одну точку.

Коррелятивное предложение можно формулировать так: пусть a', b', c' будут прямые, соединяющие произвольную точку плоскости с каждой из вершин базисного треугольника ABC, пусть далее прямые a'', b'', c'' будут лучами четвертыми гармоническими для троек bca', cab', abc' (где a, b, c — стороны треугольника), тогда точки пересечения лучей a и a'', b и b'', c и c'' будут лежать на одной прямой.

857. Она проходит через точку их пересечения.

858. Уравнение $u_1 = 0$ изображает бесконечно удаленную точку на оси Ox, уравнение $u_2 = 0$ изображает бесконечно удаленную точку на оси Oy.

861. Точке $x_1 : x_2 : x_3$ соответствует поляра:

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) X_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) X_2 +$$
$$+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) X_3 = 0,$$

следовательно:

$$\frac{u_1'}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3} = \frac{u_2'}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3} = \frac{u_3'}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3};$$

это есть специальное коррелятивное преобразование, ибо

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

862. Возьмем перемещение фигуры, определяемое соотношениями:

$$x_1 = \bar{x}_1 \cos\alpha - \bar{x}_2 \sin\alpha + a\bar{x}_3,$$
$$x_2 = \bar{x}_1 \sin\alpha + \bar{x}_2 \cos\alpha + b\bar{x}_3,$$
$$x_3 = \bar{x}_3,$$

тогда преобразование:

$$\mu u'_1 = a_1(\bar{x}_1 \cos\alpha - \bar{x}_2 \sin\alpha + a\bar{x}_3) + a_2(\bar{x}_1 \sin\alpha + \bar{x}_2 \cos\alpha + b\bar{x}_3) + a_3\bar{x}_3,$$
$$\mu u'_2 = b_1(\bar{x}_1 \cos\alpha - \bar{x}_2 \sin\alpha + a\bar{x}_3) + b_2(\bar{x}_1 \sin\alpha + \bar{x}_2 \cos\alpha + b\bar{x}_3) + b_3\bar{x}_3,$$
$$\mu u_3' = c_1(\bar{x}_1 \cos\alpha - \bar{x}_2 \sin\alpha + a\bar{x}_3) + c_2(\bar{x}_1 \sin\alpha + \bar{x}_2 \cos\alpha + b\bar{x}_3) + c_3\bar{x}_3$$

будет полярным преобразованием относительно кривой:

$$(a_1 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha)\bar{x}_1^2 + (-b_1 \sin\alpha + b_2 \cos\alpha)\bar{x}_2^2 +$$
$$+ (c_1 a + c_2 b + c_3)\bar{x}_3^2 + 2(-c_1 \sin\alpha + c_2 \cos\alpha)\bar{x}_2\bar{x}_3 +$$
$$+ 2(c_1 \cos\alpha + c_2 \sin\alpha)\bar{x}_3\bar{x}_1 + 2(b_1 \cos\alpha + b_2 \sin\alpha)\bar{x}_1\bar{x}_2 = 0,$$

если выполняются условия ($a_{23} = a_{32}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{12} = a_{21}$):

$$-a_1 \sin\alpha + a_2 \cos\alpha = b_1 \cos\alpha + b_2 \sin\alpha,$$
$$b_1 a + b_2 b + b_3 = -c_1 \sin\alpha + c_2 \cos\alpha,$$
$$a_1 a + a_2 b + a_3 = c_1 \cos\alpha + c_2 \sin\alpha;$$

эти последние и определяют нам нужное перемещение фигуры.

863. Плоскости, делящие пополам двугранные углы, изобразятся уравнениями $\beta - \gamma = 0$, $\gamma - \alpha = 0$; $\alpha - \beta = 0$; эти три плоскости проходят через одну прямую, ибо

$$(\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) + (\alpha - \beta) \equiv 0.$$

864. Они проходят через одну точку, определяемую условиями:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta.$$

871. Вывод уравнения точки, общей трем данным плоскостям, строится коррелятивно обычному выводу уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки. Пусть искомая точка изображается в плоскостных координатах уравнением:

$$Au + Bv + Cw + Dp = 0,$$

где отношения $A:B:C:D$ подлежат определению. Выразим, что искомая точка принадлежит (инцидентна) каждой из данных плоскостей $(u_1 : v_1 : w_1 : p_1)$, $(u_2 : v_2 : w_2 : p_2)$, $(u_3 : v_3 : w_3 : p_3)$; координаты каждой из последних должны удовлетворять искомому уравнению:

$$Au_1 + Bv_1 + Cw_1 + Dp_1 = 0,$$
$$Au_2 + Bv_2 + Cw_2 + Dp_2 = 0,$$
$$Au_3 + Bv_3 + Cw_3 + Dp_3 = 0;$$

полученные уравнения и определяют отношения $A:B:C:D$. Исключая A, B, C, D из четырех написанных уравнений, мы и получим искомое уравнение точки:

$$\begin{vmatrix} u & v & w & p \\ u_1 & v_1 & w_1 & p_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & p_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0,$$

или сокращенно в виде:

$$| u\, u_1\, u_2\, u_3 | = 0.$$

873. Уравнение прямой AM_0, соединяющей вершину A с данной точкой M_0, будет:

$$\frac{v}{v_0} - \frac{w}{w_0} = 0;$$

точка A' пересечения этой прямой с противоположной стороны определится условиями:

$$(A') \quad \frac{u}{0} = \frac{v}{v_0} = \frac{w}{w_0}.$$

Аналогично точка B' пересечения прямой BM_0 со стороною AC определится условиями

$$(B') \quad \frac{u}{u_0} = \frac{v}{0} = \frac{w}{w_0};$$

равным образом для третьей точки получим:

$$(C') \quad \frac{u}{u_0} = \frac{v}{v_0} = \frac{w}{0}.$$

Стороны искомого треугольника определятся как прямые, проходящие через каждые две из указанных точек:

$$(B'C') \qquad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & 0 & w_0 \\ u_0 & v_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$-\frac{u}{u_0} + \frac{v}{v_0} + \frac{w}{w_0} = 0,$$

$$(C'A') \quad \frac{u}{u_0} - \frac{v}{v_0} + \frac{w}{w_0} = 0,$$

$$(A'B') \quad \frac{u}{u_0} + \frac{v}{v_0} - \frac{w}{w_0} = 0.$$

874. Пусть две заданных прямых изображаются уравнениями $u = 0$, $v = 0$, а прямая через две из данных точек изображается уравнением $w = 0$; тогда заданные три точки определятся соотношениями:

$$(A') \qquad \frac{u}{a_1} = \frac{v}{b_1} = \frac{w}{0},$$

$$(B') \qquad \frac{u}{a_2} = \frac{v}{b_2} = \frac{w}{0},$$

$$(C') \qquad \frac{u}{a_3} = \frac{v}{b_3} = \frac{w}{c_3}.$$

Пусть вершина A треугольника, лежащая на прямой $u = 0$, определится соотношениями:

$$\frac{u}{0} = \frac{v}{\mu} = \frac{w}{1},$$

а вершина B, лежащая на прямой $v = 0$, соотношениями:

$$\frac{u}{\lambda} = \frac{v}{0} = \frac{w}{1}.$$

Условимся, что сторона AB проходит через точку C', тогда:

$$a_3\mu + b_3\lambda - c_3\lambda\mu = 0;$$

далее уравнения сторон BC и AC напишутся в виде:

$$(BC) \qquad -b_1u + a_1v + \lambda b_1 w = 0,$$
$$(AC) \qquad +b_2u - a_2v + \mu a_2 w = 0.$$

Исключая из трех последних соотношений λ и μ, мы получим уравнение геометрического места третьей вершины треугольника:

$$a_3b_1w(-b_2u + a_2v) + b_3a_2w(b_1u - a_1v) + c_3(b_2u - a_2v)(b_1u - a_1v) = 0,$$

которое будет изображать некоторую линию 2-го порядка.

876. Центр тяжести треугольника от его сторон находится на расстоянии $\frac{h_1}{3}$, $\frac{h_2}{3}$, $\frac{h_3}{3}$; соотношение (18) дает:

$$\frac{1}{\lambda_1 \frac{h_1}{3}} = \frac{1}{\lambda_2 \frac{h_2}{3}} = \frac{1}{\lambda_3 \frac{h_3}{3}},$$

откуда следует, что множители λ_1, λ_2, λ_3 пропорциональны сторонам треугольника:

$$\frac{\lambda_1}{a_1} = \frac{\lambda_2}{a_2} = \frac{\lambda_3}{a_3};$$

координаты центра вписанного круга будут:

$$\frac{x_1}{\lambda_1 r} = \frac{x_2}{\lambda_2 r} = \frac{x_3}{\lambda_3 r}$$

или

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3}.$$

877. Для центра круга имеем:

$$\frac{1}{\lambda_1 r} = \frac{1}{\lambda_2 r} = \frac{1}{\lambda_3 r},$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, а тогда координаты центра тяжести будут:

$$(h_1 : h_2 : h_3).$$

878. Если преобразование сохраняет одну из вершин базисного треугольника $(1:0:0)$, то уравнения

$$\begin{aligned} (a_1 - s)x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + (b_2 - s)y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + (c_3 - s)z &= 0. \end{aligned} \tag{α}$$

должны при $s = s_1$ допускать решения $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; следовательно:

$$s_1 = a_1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = 0;$$

если сверх того преобразование сохраняет две различных точки $(0:y_1:z_1)$ и $(0:y_2:z_2)$ на противоположной стороне, то прежде всего для этих координат должно удовлетворяться первое из уравнений (α):

$$b_1y_1 + c_1z_1 = 0, \qquad b_1y_2 + c_1z_2 = 0,$$
$$\frac{y_1}{y_2} \neq \frac{z_1}{z_2},$$

а потому $b_1 = 0$, $c_1 = 0$.

Предположим теперь, что две неизменных точки на стороне $x = 0$ будут:

$$y_1 = p + iq, \qquad z_1 = p' + iq',$$
$$y_2 = p - iq, \qquad z_2 = p' - iq';$$

примем тогда за стороны базисного треугольника вместо прямых $y=0$ и $z=0$ прямые $q'y-qz=0$ и $p'y-pz=0$; в таком случае за новые координаты неизменных точек можно принять:

$$Y_1=1, \quad Z_1=-i; \quad Y_2=1, \quad Z_2=i.$$

Пусть соответствующие корни характеристического уравнения будут:

$$s_2=\alpha+i\beta, \quad s_3=\alpha-i\beta,$$

тогда указанные выше уравнения (α) дадут:

$$b_2=\alpha, \quad c_2=-\beta; \quad b_3=\beta, \quad c_3=\alpha.$$

882. Две плоскости

$$\frac{y}{y_0}-\frac{t}{t_0}=0, \qquad \frac{z}{z_0}-\frac{t}{t_0}=0$$

проходят через первую вершину тетраэдра и точку M_0, поэтому они пересекаются по прямой, соединяющей точки A и M_0; точка A' пересечения этой прямой с противолежащей гранью данного тетраэдра определится координатами:

$$(A') \qquad \frac{x}{0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}=\frac{t}{t_0}.$$

Аналогичным образом получим координаты двух вершин искомого тетраэдра:

$$(B') \qquad \frac{x}{x_0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{z_0}=\frac{t}{t_0},$$

$$(C') \qquad \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{0}=\frac{t}{t_0},$$

$$(D') \qquad \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}=\frac{t}{0},$$

и тогда легко составить уравнения его граней как уравнения плоскостей, проходящих через три заданных точки; грань — $B'C'D'$, например, изобразится уравнением:

$$-\frac{2x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}+\frac{t}{t_0}=0.$$

884. Возьмем два последовательных коррелятивных преобразования плоскости:

$$\frac{u''}{a_1x'+a_2y'+a_3z'}=\frac{v''}{b_1x'+b_2y'+b_3z'}=\frac{w''}{c_1x'+c_2y'+c_3z'},$$

$$\frac{u'}{\bar{a}_1x+\bar{a}_2y+\bar{a}_3z}=\frac{v'}{\bar{b}_1x+\bar{b}_2y+\bar{b}_3z}=\frac{w'}{\bar{c}_1x+\bar{c}_2y+\bar{c}_3z}.$$

Прямой $u':v':w'$ в первом преобразовании будет соответствовать точка $x'':y'':z''$, определяемая соотношениями:

$$\frac{a_1x''+b_1y''+c_1z''}{u'}=\frac{a_2x''+b_2y''+c_2z''}{v'}=\frac{a_3x''+b_3y''+c_3z''}{w'};$$

поэтому точке $x'':y'':z''$ после двух последовательных коррелятивных преобразований будет соответствовать точка $x:y:z$ в силу соотношений:

$$\frac{a_1x''+b_1y''+c_1z''}{\bar{a}_1x+\bar{a}_2y+\bar{a}_3z}=\frac{a_2x''+b_2y''+c_2z''}{\bar{b}_1x+\bar{b}_2y+\bar{b}_3z}=\frac{a_3x''+b_3y''+c_3z''}{\bar{c}_1x+\bar{c}_2y+\bar{c}_3z};$$

но эти последние, очевидно, определяют коллинеарное преобразование.

Аналогичное доказательство может быть проведено и для пространства.

К главе XXIII.

889. В силу данного тождества нормированное уравнение четвертой окружности (если уравнения данных окружностей уже нормированы) можно написать в виде:

$$\frac{\lambda C+\mu C'+\nu C''}{\lambda+\mu+\nu}=0;$$

тогда радикальные оси каждой из первых трех окружностей с последней

$$C-\frac{\lambda C+\mu C'+\nu C''}{\lambda+\mu+\nu}=0,\quad C'-\frac{\lambda C+\mu C'+\nu C''}{\lambda+\mu+\nu}=0,\quad C''-\frac{\lambda C+\mu C'+\nu C''}{\lambda+\mu+\nu}=0,$$

очевидно, проходят через радикальный центр трех первых окружностей, который определяется соотношениями:

$$C=C'=C''.$$

890. Так как соответствующие точки лежат на одном луче, выходящем из центра O данной окружности, то, принимая последний за начало координат мы получим:

$$\frac{x^1}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{OM'}{OM}$$

или в силу соотношений

$$OM'\cdot OM=r^2,\quad OM^2=x^2+y^2$$

окончательно:

$$\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{r^2}{x^2+y^2}.$$

Прямая

$$Ax'+By'+C=0,$$

преобразуется в линию, изображаемую уравнениями:

$$(Ax+By)\,r^2+C\,(x^2+y^2)=0,$$

т. е. в окружность, проходящую через точку O.

Уравнение окружности

$$x'^2+y'^2+Mx'+Ny'+P=0,$$

не проходящей через точку O (т. е. при $P\neq 0$), преобразуется в уравнение:

$$r^4+r^2(Mx+Ny)+P\,(x^2+y^2)=0,$$

т. е. в уравнение окружности.

891. Уравнение 3-й степени относительно k, указанное в тексте, в данном случае примет вид:

$$-k^2\,|a_1a_2a_4|\;|a_3a_2a_4|+k\;|a_1a_3a_2|\;|a_1a_3a_4|=0,$$

где символ $|a_pa_qa_r|$ обозначает определитель:

$$\begin{vmatrix} a_p & a_q & a_r\\ b_p & b_q & b_r\\ c_p & c_q & c_r\end{vmatrix}$$

Полученное уравнение имеет три решения:

$$k_1=\infty,\ k_2=\frac{|a_1a_3a_2|\;|a_1a_3a_4|}{|a_1a_2a_4|\;|a_3a_2a_4|},\quad k=0.$$

892. Две окружности пересекаются в двух точках на конечном расстоянии A', A'' (действительных или мнимых) в двух циклических точках C', C'', три пары их общих хорд будут: 1) $A'A''$ (радикальная ось) и $C'C''$ (бесконечно удаленная прямая), 2) $A'C'$ и $A''C''$, 3) $A'C''$ и $A''C'$.

895. Уравнение $\alpha\gamma - m\beta^2 = 0$ изображает пучок линий 2-го класса, касающихся в точках α и γ прямых, выходящих из точки β.

897. Развернем уравнение (12):

$$(1 - a_1^2) x^2 - 2a_1b_1xy + (1 - b_1^2) y^2 - 2(x_0 + a_1c_1) x - 2(y_0 + b_1c_1) y + \\ + x_0^2 + y_0^2 - c_1^2 = 0$$

и потребуем, чтобы оно было тождественно с уравнением эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

тогда коэфициенты этих уравнений должны быть пропорциональны:

$$\frac{1 - a_1^2}{\frac{1}{a^2}} = \frac{-2a_1b_1}{0} = \frac{1 - b_1^2}{\frac{1}{b^2}} = \frac{2(x_0 + a_1c_1)}{0} = \frac{2(y_0 + b_1c_1)}{0} = \frac{x_0^2 + y_0^2 - c_1^2}{-1}.$$

Таким образом должны удовлетворяться нижеследующие условия:

$$a^2(1 - a_1^2) = b^2(1 - b_1^2) = -x_0^2 - y_0^2 + c_1^2,$$
$$a_1b_1 = 0,\ x_0 + a_1c_1 = 0,\ y_0 + b_1c_1 = 0;$$

решим полученную систему уравнений, найдя все параметры x_0, y_0, a_1, b_1, c_1, определяющие как искомый фокус заданного эллипса, так и соответствующую директрису.

Если принять $b_1 = 0$, то мы получим, полагая $c^2 = a^2 - b^2$:

$$x_0 = \pm c,\quad y_0 = 0,$$
$$a_1 = \pm e,\quad b_1 = 0,\quad c_1 = a;$$

если же предположить $a_1 = 0$, то указанные выше уравнения дадут:

$$x_0 = 0,\quad y_0 = \pm ci,$$
$$a_1 = 0,\quad b_1 = \pm \frac{c}{b} i,\quad c_1 = b.$$

Таким образом эллипс имеет четыре фокуса: два действительных на большей его оси и два мнимых на малой оси; каждому фокусу соответствует своя директриса.

898. См. предыдущее решение.

899. Для определения фокусов параболы будем ее рассматривать как предельный вид центральной кривой 2-го порядка, взяв уравнение последней, отнесенное к ее вершине:

$$qx^2 + y^2 - 2px = 0.$$

В таком случае

$$\frac{1 - a_1^2}{q} = \frac{-2a_1b_1}{0} = \frac{1 - b_1^2}{1} = \frac{-2(x_0 + a_1c_1)}{-2p} = \frac{-2(y_0 + b_1c_1)}{0} = \\ = \frac{x_0^2 + y_0^2 - c_1^2}{0},$$

откуда

$$\frac{1 - a_1^2}{q} = 1 - b_1^2 = \frac{x_0 + a_1c_1}{p},$$
$$a_1b_1 = 0,\quad y_0 + b_1c_1 = 0,\quad x_0^2 + y_0^2 - c_1^2 = 0.$$

Предполагая сначала $b_1 = 0$, мы получим:

$$a_1 = \sqrt{1 - q},\ x_0 = \varepsilon c_1,\ y_0 = 0,\ c_1 = \frac{p}{\sqrt{1 - q} + \varepsilon},$$

где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$.

Когда $q \to 0$, эти решения дадут нам в пределе два фокуса на оси параболы, один на конечном расстоянии $x_0 = \frac{p}{2}$, другой — бесконечно удаленный.

Предположим далее $a_1 = 0$, тогда

$$x_0 = \frac{p}{q}, \quad y_0 = -b_1 c_1, \quad b_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{q}}, \quad c_1 = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{q}};$$

здесь при $q \to 0$ мы получим ($\varepsilon = \pm 1$) два мнимых бесконечно удаленных фокуса; заметим, что в последнем случае

$$\frac{y_0}{x_0} = -\frac{b_1 c_1 q}{p} = -\varepsilon \sqrt{q-1};$$

при $q \to 0$ получим $\lim \frac{y_0}{x_0} = -\varepsilon i$, т. е. эти два фокуса совпадают с циклическими точками на бесконечно удаленной прямой.

900. Угловой коэфициент касательной эллипса должен быть равен i, поэтому

$$-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = i.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением эллипса, мы найдем координаты точек прикосновения:

$$x = \pm\frac{a^2}{c}, \quad y = \pm\frac{b^2 i}{c}$$

и затем еще две точки касания изотропных касательных с угловым коэфициентом $-i$:

$$x = \pm\frac{a^2}{c}, \quad y = \mp\frac{b^2 i}{c}.$$

Нетрудно убедиться, что касательные с различными угловыми коэфициентами пересекаются по две в четырех фокусах эллипса.

904. Уравнения (23) определяют координаты центра и радиус шара:

$$\alpha + \omega_3\beta + \omega_2\gamma = -\frac{a_{14}}{a_{11}}, \quad \omega_3\alpha + \beta + \omega_1\gamma = -\frac{a_{24}}{a_{11}}, \quad \omega_2\alpha + \omega_1\beta + \gamma = -\frac{a_{34}}{a_{11}},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\omega_1\beta\gamma + 2\omega_2\gamma\alpha + 2\omega_3\alpha\beta - r^2 = \frac{a_{44}}{a_{11}};$$

последнее из них на основании трех первых можно представить в виде:

$$a_{14}\alpha + a_{24}\beta + a_{34}\gamma + a_{11}r^2 + a_{44} = 0.$$

Исключая из указанных четырех уравнений α, β, γ, мы получим соотношение:

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 & \frac{a_{24}}{a_{11}} \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 & \frac{a_{34}}{a_{11}} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{11}r^2 + a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда легко найти r^2.

Результат можно представить и в другом виде, если использовать соотношения (22); тогда предыдущее уравнение будет:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{11}r^2 + a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$r^2 = -\frac{\Delta}{a_{11}\delta}.$$

906. Возьмем шар

$$(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2-r'^2=0,$$

проходящий через круг пересечения данного шара и заданной плоскости; его радиус будет равен радиусу круга пересечения, если его центр лежит в данной плоскости, т. е. если

$$Aa'+Bb'+Cc'+D=0. \qquad (\alpha)$$

Данная плоскость должна быть радикальною плоскостью двух шаров: данного и выбранного, поэтому

$$\frac{a-a'}{A}=\frac{b-b'}{B}=\frac{c-c'}{C}=\frac{a'^2+b'^2+c'^2-a^2-b^2-c^2-r'^2+r^2}{2D}. \qquad (\beta)$$

Исключая из соотношений (α) и (β) координаты a', b', c', мы получим:

$$r'^2=r^2-\frac{(Aa+Bb+Cc+D)^2}{A^2+B^2+C^2};$$

полученный результат и непосредственно очевиден, ибо радиус r' искомого круга и расстояние центра данного шара от заданной плоскости образуют прямоугольный треугольник, гипотенузой которого служит радиус r данного шара.

908. Плоскость кругового сечения эллипсоида, отстоящая от центра на расстоянии d, изобразится нормальным уравнением:

$$\varepsilon\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}x+\varepsilon'\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}z+d=0,$$

где ε и ε' принимают значения, равные либо $+1$, либо -1.

Поверхность, изображаемая уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+$$

$$+\left(\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{x}{a}+\varepsilon'\sqrt{b^2-c^2}\,\frac{z}{c}+\frac{b\sqrt{a^2-c^2}}{ac}\,d\right)(Ax+By+Cz+D)=0,$$

будет проходить через выбранное круговое сечение эллипсоида; она будет шаром, изображаемым уравнением:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2=0,$$

если выполняются условия:

$$\frac{1}{a^2}+\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{A}{a}=\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}=\sqrt{b^2-c^2}\,\frac{C}{c}=$$

$$=\frac{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}\,\dfrac{D}{a}+\dfrac{b\sqrt{a^2-c^2}}{ac}\,dA}{-2\alpha}=$$

$$=\frac{\varepsilon'\sqrt{b^2-c^2}\,\dfrac{D}{c}+\dfrac{b\sqrt{a^2-c^2}}{ac}\,dC}{-2\gamma}=\frac{-1+\dfrac{b\sqrt{a^2-c^2}}{ac}\,dD}{\alpha^2+\gamma^2-r^2},$$

$$B=0,\qquad \beta=0,\qquad \varepsilon'\sqrt{b^2-c^2}\,\frac{A}{c}+\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{C}{a}=0.$$

Этот шар будет иметь радиус, равный радиусу кругового сечения, если центр шара лежит в плоскости кругового сечения, т. е. если

$$\varepsilon \sqrt{a^2-b^2}\,\frac{\alpha}{a}+\varepsilon' \sqrt{b^2-c^2}\,\frac{\gamma}{c}+\frac{b\sqrt{a^2-c^2}}{ac}\,d=0.$$

Из приведенных выше соотношений радиус искомого кругового сечения определится в виде:

$$r^2=b^2\left(1-\frac{b^2d^2}{a^2c^2}\right).$$

909. Результат получится применением метода, указанного для решения предыдущей задачи.

910. Уравнение изображает пучок поверхностей, каждая из которых имеет изотропные касательные плоскости, общие с первоначальною поверхностью.

911. Для нахождения фокальных линий конуса можно применить тот же метод, который в тексте указан для центральных поверхностей.

913. Из указанного квадратного уравнения для λ мы получим действительные решения, если

$$(r_1^2+r_2^2-d^2)^2-4r_1^2r_2^2 \geqslant 0$$

или, разлагая левую часть на множители:

$$(r_1-r_2+d)(r_1-r_2-d)(r_1+r_2-d)(r_1+r_2+d)\geqslant 0.$$

Если окружности не пересекаются, то они $0<d<|r_1-r_2|$ или $d>r_1+r_2$; в обоих случаях указанное неравенство выполняется, и корни λ_1 и λ_2 действительны; если же окружности пересекаются, то

$$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2,$$

и неравенство не выполняется, т. е. λ_1 и λ_2 мнимы. Если окружности касаются внешним или внутренним образом, то предельные точки действительны и совпадают с точками касания.

Радикальная ось двух окружностей $C_1+\lambda' C_2=0$ и $C_1+\lambda'' C_2=0$ данного пучка изобразится уравнением:

$$\frac{C_1+\lambda' C_2}{1+\lambda'}-\frac{C_1+\lambda'' C_2}{1+\lambda''}=0$$

или по упрощении:

$$C_1-C_2=0.$$

917. Прямые, соединяющие соответственные точки двух проективных рядов (точек), касаются линии 2-го класса; прямые, содержащие данные проективные ряды, также принадлежат к числу касательных этой линии.

918. Ангармоническое отношение четырех точек, в которых какая-либо касательная линия 2-го класса пересекается четырьмя другими ее касательными, постоянно.

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По вине
72	13 сверху	$= a'_{13}{}^2 + a_{23}^2$	$= a_{13}^2 + a_{23}^2$	типогр.
80	4 сверху	$\frac{s_1}{\frac{\Delta}{\delta}} X^2 + \frac{s_2}{\frac{\Delta}{\delta}} Y^2 = 1$	$\frac{s_1}{-\frac{\Delta}{\delta}} X^2 + \frac{s_2}{-\frac{\Delta}{\delta}} Y^2 = 1$	типогр.
114	9 снизу	$N = lF'_{x_1} = mF'_{y_1} + nF'_{z_1}$	$N = lF'_{x_1} + mF_{y'_1} + nF'_{z_1}$	типогр.
299	20 сверху	$_1 = 0$	$u_1 = 0$	типогр.
305	13 снизу	m' (	m' [(	типогр.
356	3 снизу	a_4	$a_{14}' =$	типогр.
360	7 снизу	$= \frac{n_1''}{1}$	$= \frac{n_1''}{3}$	типогр.

Бюшгенс С. С.