

ЖОЗЕФЪ БЕРТРАНЪ,

членъ Института, профессоръ Политехнической школы и
Французской Коллегии

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Ptolomaeus rex quaesisse ex Euclide dicitur, essetne aliqua regia ad Mathesin via, id est plana facilisque: negavit Euclides, sed eam hodie novis detectis methodis aperuimus.

G.-G. Leibnitz

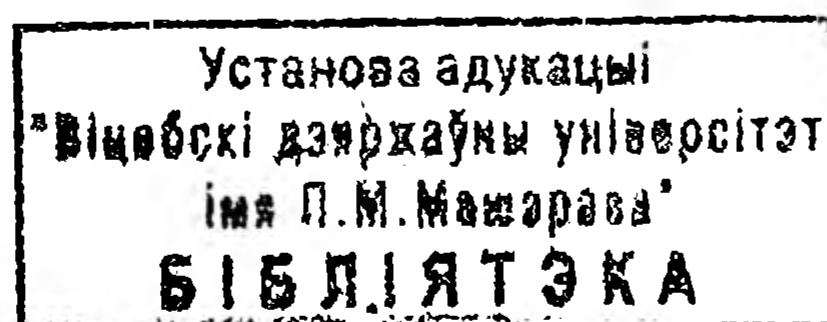
524007

СЪ ПОРТРЕТОМЪ АВТОРА

ПЕРЕВОДЪ БЕЗЪ ИЗМѢНЕНІЙ СЪ ПОСЛѢДНЯГО ФРАНЦУЗСКАГО ИЗДАНІЯ

М. В. ПИРОЖКОВА,

БЫВШАГО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ С.-ПЕТЕРБУРГСКОЙ 10-ОЙ ГИМНАЗИИ



Издательство и книжный складъ «Наука и Жизнь»

В. Д. Дорнбергъ

(Спб., Пет. стор., Большой пр., д. 32)

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

1911



4242

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРВАЯ КНИГА

Дифференциалы и производныя

	Стран.
ГЛАВА ПЕРВАЯ.—Безконечно-малыя различныхъ порядковъ, ихъ употребленіе въ геометріи. . .	1
Опредѣленія (§§ 1—10)	1
Замѣна безконечно-малыхъ (§§ 11—12)	7
Употребленіе безконечно-малыхъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ.—Опредѣленіе касательной къ нѣкоторымъ кривымъ (§§ 13—14)	8
Опредѣленіе нѣкоторыхъ касательныхъ плоскостей (§§ 15—17)	13
Длина дугъ нѣкоторыхъ кривыхъ (§§ 18—22)	18
Упражненія	22
ГЛАВА ВТОРАЯ.—Производныя и дифференциалы перваго порядка.	24
Опредѣленіе производной (§§ 23—24)	24
Производныя отъ простыхъ функцій (§§ 25—31)	24
Производныя отъ обратныхъ функцій (§ 32—35)	27
Производныя функцій отъ функцій (§§ 36—38)	30
Производная отъ произведенія (§ 39)	32
Производная отъ частнаго (§ 40)	33
Производная отъ степени (§ 41)	33
Производная отъ u^v (§ 42)	34
Нѣкоторыя приложенія (§ 43)	34
Употребленіе производныхъ при изслѣдованіи функцій (§ 44)	36
Порядокъ величины безконечно-малой производной (§ 45)	37
Дифференціалъ функцій отъ одной переменнѣй (§§ 46—49)	38
Частныя производныя функцій отъ нѣсколькихъ переменныхъ (§§ 50—52)	41
Дифференціалъ функцій отъ нѣсколькихъ переменныхъ (§§ 53—57)	43
Производныя отъ сложныхъ функцій (§§ 58—59)	46
Производныя отъ неявныхъ функцій (§§ 60—67)	48
Упражненія	53

	Стран.
ГЛАВА ТРЕТЬЯ.—Функциональный определитель	55
Определение определителей (§§ 68—70)	55
Определение функционального определителя (§§ 71—72)	56
Случай, когда определитель равен нулю (§§ 73—74)	58
Определитель системы функций от функций (§ 75)	60
Определитель системы обратных функций (§ 76)	61
Приведение определителя къ одночлену (§ 77)	62
Упражнения	64
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.—Аналитическая теорія касательныхъ линий и касательныхъ плоскостей	66
Уравненія касательной и нормали къ плоской кривой (§§ 78—82)	66
Определение нѣкоторыхъ касательныхъ (§§ 83—86)	70
Замѣчаніе, относящееся къ предыдущимъ задачамъ (§ 87)	78
Касательныя къ кривымъ, отнесеннымъ къ полярнымъ координа- татамъ (§§ 88—90)	79
Касательныя къ кривымъ двойкой кривизны (§§ 91—92)	81
Кривыя на шарѣ (§ 93)	83
Уравненіе плоскости, касательной къ поверхности (§ 94)	84
Уравненіе нормали (§§ 95—97)	86
Определение нѣкоторыхъ касательныхъ плоскостей (§§ 98—103)	88
Огибающія кривыя и поверхности (§§ 104—108)	100
Приложеніе къ нѣкоторымъ примѣрамъ (§§ 109—113)	104
Упражнения	109
ГЛАВА ПЯТАЯ.—Дифференціалы нѣкоторыхъ функций, заданныхъ геометрически	110
Дифференціалъ площади, взятой на плоскости (§§ 114—117)	110
Дифференціалъ дуги кривой (§§ 118—122)	112
Дифференціалъ дуги кривой въ криволинейныхъ координа- тахъ (§§ 123—131)	117
Упражнения	123
ГЛАВА ШЕСТАЯ.—Производныя и дифференціалы порядка выше перваго	125
Определение производныхъ высшаго порядка (§ 132)	125
Определение дифференціаловъ высшаго порядка (§§ 133—138)	125
Определение послѣдовательныхъ производныхъ отъ функций (§§ 139—145)	128
Числовое значеніе нѣкоторыхъ производныхъ, когда пере- мѣнная обращается въ нуль (§§ 146—153)	136
Производныя и дифференціалы высшаго порядка для функций отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ.—Принятое при этомъ обозначеніе (§ 159)	150
Возможность мѣнять порядокъ дифференцированій (§§ 160—161)	150
Дифференціалы различныхъ порядковъ для функций отъ нѣ- сколькихъ переменныхъ (§§ 162—164)	152
Производныя высшаго порядка отъ неявныхъ функций (§§ 165—166)	155
Упражнения	158
ГЛАВА СЕДЬМАЯ.—Замѣна переменныхъ	160
Вліяніе независимой переменной на дифференціалы порядка выше перваго (§§ 167—168)	160

	Стран.
Замѣна независимой переменнѣной (§§ 169—172).	161
Одновременная замѣна всѣхъ переменныхъ (§§ 173—175).	164
Случай многихъ независимыхъ переменныхъ (§§ 176—178).	167
Случай замѣны функций (§ 179).	170
Примѣры (§§ 180—185).	171
Упражненія	181
ГЛАВА ВОСЬМАЯ.—Составленіе дифференціальныхъ уравненій	183
Опредѣленіе дифференціальныхъ уравненій (§§ 186—187).	183
Исключеніе постоянныхъ (§§ 188—190).	185
Исключеніе постоянныхъ въ уравненіяхъ съ нѣсколькими независимыми переменными (§§ 191—196).	187
Исключеніе произвольныхъ функций (§§ 197—201).	193
Уравненія въ частныхъ производныхъ различныхъ классовъ поверхностей (§§ 202—213).	198
Замѣчательное введеніе дифференціальнаго уравненія въ одну ариметическую задачу (§ 214).	211
Полныя дифференціальныя уравненія (215—219).	213
Упражненія	217

ВТОРАЯ КНИГА

Развертываніе въ ряды

ГЛАВА ПЕРВАЯ—Общее ученіе о рядахъ	220
Опредѣленія (§ 220).	220
Примѣры рядовъ (§§ 221—227).	220
Необходимость изслѣдованія сходимости употребляемыхъ въ математикѣ рядовъ (§ 228).	225
Теоремы о сходимости рядовъ съ положительными членами (§§ 229—241).	227
Правило Гаусса (§ 242).	237
Методъ Куммера (§§ 243—245).	241
Ряды съ членами попеременно положительными и отрицатель- ными (§§ 246—248).	244
Мнимые ряды (§ 249).	246
Преобразованіе Эйлера (§§ 250—252).	248
Методъ Стирлинга (§§ 253—254).	254
Методъ Куммера (§§ 255—257).	256
Ряды, расположенные по степенямъ переменнѣной (§§ 258—262).	262
Непрерывность рядовъ (§§ 263—268).	265
Перемноженіе двухъ рядовъ (§§ 269—271).	271
Упражненія	273
ГЛАВА ВТОРАЯ.—Теорема Тэйлора	275
Доказательство Тэйлора (§ 272).	275
Выраженіе остатка ряда (§ 273).	276
Второй видъ остатка (§ 274).	278

	Стран.
Третій видъ остатка (§ 275).	279
Безконечно-малое приращеніе функціи (§ 276)	280
Замѣчаніе относительно ряда Тэйлора (§ 277).	280
Формула Маклорена (§§ 278—279).	282
Нѣкоторыя разложенія въ ряды (§§ 280—306)	283
Нѣкоторыя приложенія теоремы Тэйлора (§§ 307—308)	301
Упражненія	303
ГЛАВА ТРЕТЬЯ.—Нѣкоторыя разложенія въ ряды	304
Рядъ Бернулли (§§ 309—310).	304
Формула Лагранжа (§§ 311—313).	306
Второе доказательство формулы Лагранжа (§ 314).	311
Приложенія формулы Лагранжа (§§ 315—320)	313
Рядъ Бурмана (§§ 321—322).	317
Рядъ Абеля (§ 323).	318
Методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ (§§ 324—336)	319
Теорія производящихъ функцій (§§ 337—342)	332
О символическомъ обозначеніи (343—346).	339
О числахъ Бернулли (§§ 347—353).	343
О функціяхъ, названныхъ Лежандромъ X_n (§§ 354—358)	351
Упражненія	355
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.—Функціи отъ мнимой перемѣнной	358
Опредѣленіе мнимой функціи (§§ 356—364)	358
Опредѣленіе нѣкоторыхъ простыхъ функцій (§§ 365—37)	362
О функціяхъ недостаточно опредѣленныхъ (§§ 373—377)	369
Разложеніе въ рядъ мнимыхъ функцій (§§ 378—380).	376
Разложеніе $K(1+z)$ (§§ 381—383)	377
Разложеніе $(1+z)^m$ (§§ 384—386)	380
Нѣкоторыя разложенія въ рядъ, выведенныя изъ разсмотрѣннѣи мнимыхъ функцій (§§ 387—390)	386
Упражненія	388
ГЛАВА ПЯТАЯ.—Разложеніе функцій отъ многихъ перемѣнныхъ	390
Распространеніе теоремы Тэйлора на функцію отъ двухъ перемѣнныхъ (§§ 391—395)	390
Символическое выраженіе теоремы Тэйлора (§ 396).	394
Распространеніе формулы Лагранжа на функціи отъ двухъ перемѣнныхъ (§ 397).	394
Доказательство Якоби (§§ 398—399)	399
ГЛАВА ШЕСТАЯ.—Разложенія въ произведенія съ безконечнымъ числомъ множителей	404
Условіе сходимости безконечныхъ произведеній (§§ 400—403).	404
Выраженіе нѣкоторыхъ функцій въ видѣ безконечныхъ произведеній (§§ 404—405)	408
Выраженіе нѣкоторыхъ другихъ функцій (§§ 406—408).	411
О нѣкоторыхъ рядахъ, вытекающихъ изъ предыдущихъ формулъ (§§ 409—415).	414
Формула Валлиса (§§ 416—418)	419
Упражненія	422

	Стран.
ГЛАВА СЕДЬМАЯ.—Разложенія въ непрерывныя дроби	425
Опредѣленіе непрерывныхъ дробей (§ 419)	425
Преобразование ряда въ непрерывную дробь (§§ 420—425)	425
Выраженіе функціи подъ видомъ непрерывной дроби (§§ 426—433)	430
Упражненія	440
ГЛАВА ВОСЬМАЯ.—Теорія вычетовъ	442
<i>Предварительныя замѣчанія</i> (§§ 434—435)	442
Нахожденіе вычета (§§ 436—437)	443
Обозначенія Коши (§ 438)	445
Теоремы, относящіяся къ вычетамъ (§§ 439—441)	447
Сумма вычетовъ раціональной функціи (§§ 442—443)	449
Измѣненіе независимой переменнѣй (§§ 444—446)	452
Нѣкоторыя приложенія теоріи вычетовъ (§ 447)	456
Вычисленіе симметрическихъ функцій (§§ 448—450)	457
Упражненія	464
ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.—Выраженія неопредѣленнаго вида и теорія особенныхъ точекъ	466
Дроби, принимающія видъ $\frac{0}{0}$ (§§ 451—452)	466
Дроби, принимающія видъ $\frac{\infty}{\infty}$ (§§ 453—455)	468
Другіе виды неопредѣленностей (§ 456)	470
Нѣкоторые примѣры (§§ 457—461)	470
Теорія особенныхъ точекъ	475
Опредѣленія (§ 462)	475
Аналитическій признакъ особенныхъ точекъ (§§ 463—468)	476
Особенныя точки поверхностей (§§ 469—471)	483
Упражненія	487
ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.—Теорія значеній maxima и minima	489
Maxima и minima функцій отъ одной переменнѣй (§§ 472—478)	489
Геометрическое рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ (§ 479)	496
Maxima и minima функцій отъ двухъ переменныхъ (§§ 480—481)	496
Функціи отъ большаго числа переменныхъ (§§ 482—483)	498
Maxima и minima неявныхъ функцій (§§ 484—487)	500
Разысканіе выраженія даннаго вида, которое, въ извѣст- ныхъ предѣлахъ, наименѣе уклоняется отъ данной функціи (§§ 488—491)	505
Упражненія	514

ТРЕТЬЯ КНИГА

Геометрическія приложенія.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.—Кривизна плоскихъ линій	516
Что такое кривизна (§ 492)	516
Опредѣленіе кривизны и радіуса кривизны (§§ 493—494)	517

	Стран.
Выраженіе для радіуса кривизны (§ 495)	518
Кругъ кривизны пересѣкаетъ кривую (§ 496)	519
Различныя выраженія для радіуса кривизны (§§ 497—503)	519
Приложеніе къ нѣкоторымъ примѣрамъ (§ 504)	524
Геометрическое опредѣленіе нѣкоторыхъ радіусовъ кривизны (505—506)	526
Кривизна ортогональныхъ линій (§§ 507—515)	530
Приближенное выраженіе нѣкоторыхъ безконечно-малыхъ величинъ (§§ 515—518)	543
Разность касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ дуги и оканчивающихся въ точкѣ ихъ встрѣчи (§§ 519—521)	547
Теорія эволютъ (§§ 522—526)	549
Примѣры эволютъ (§§ 527—532)	553
Соприкосновенія различныхъ порядковъ	585
Опредѣленіе порядка касанія (§§ 533—538)	558
Соприкасающаяся кривая (§ 539)	561
Соприкасающійся кругъ (§§ 540—541)	562
Упражненія	563
ГЛАВА ВТОРАЯ.—Кривизна линій, нанесенныхъ на сферѣ	565
Опредѣленіе геодезической кривизны (§ 542)	565
Кривизна малаго круга (§ 543)	565
Кругъ кривизны (§ 544)	566
Полюсъ круга кривизны (§ 545)	566
Различныя выраженія геодезической кривизны сферической линіи (§§ 546—552)	568
Теорія сферическихъ эволютъ (§§ 553—555)	574
Кривизна ортогональныхъ траекторій на сферѣ (555—561)	576
Упражненія	585
ГЛАВА ТРЕТЬЯ.—Соприкасающаяся плоскость кривой двойной кривизны	586
Опредѣленіе соприкасающейся плоскости (§§ 562—570)	586
Огибающая поверхность для соприкасающихся плоскостей (§§ 571—573)	591
Уравненіе соприкасающейся плоскости (§§ 574—577)	595
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.—Двѣ кривизны кривой, соприкасающійся кругъ и соприкасающійся шаръ или сфера (sphère osculatrice)	599
Опредѣленіе кривизны (§§ 578—579)	599
Опредѣленіе второй кривизны (§ 580)	600
Отношеніе обѣихъ кривизнъ (§ 581)	600
Кругъ кривизны (§ 582)	601
Соприкасающійся кругъ (§ 583)	601
Вычисленіе радіуса кривизны (§§ 584—586)	602
Главная нормаль (§§ 587—588)	605
Выраженіе второй кривизны (§ 589)	607
Формулы Серре (§§ 590—592)	602
Ось соприкасающейся плоскости (§ 593—595)	612

	Стран.
Поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ главныхъ нормалей (§§ 596—600)	613
Соприкасающаяся сфера (§§ 601—602)	617
Опредѣленіе соприкасающейся сферы (§§ 603—607)	619
Опредѣленіе нѣкоторыхъ безконечно-малыхъ величинъ (§ 608—609).	622
Опредѣленіе эволюты (§ 610)	625
Длина дуги эволюты (§§ 611—614).	625
Поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ эволютъ (§§ 615—621).	628
Уравненіе эволютъ (§§ 622—623).	633
Упражненія	634
ГЛАВА ПЯТАЯ.—Теорія кривизны поверхностей.	635
Кривизна нормальныхъ сѣченій (§§ 624—628)	635
Кривизна наклоннаго сѣченія (§ 629)	639
Кривизна линіи двойкой кривизны (§ 630)	641
Геодезическая линія (ligne minima) на какой-угодно поверхности (§ 631).	641
Болѣе общія формулы, относящіяся къ какимъ-угодно осямъ координатъ (§§ 632—637).	642
Геометрическое доказательство предыдущихъ теоремъ	649
Индикатриса (§§ 638—639)	649
Законъ кривизны нормальныхъ сѣченій (§§ 640—642)	651
Кривизна наклоннаго сѣченія (§ 643)	653
Сопряженные касательныя (§§ 644—645)	653
Упражненія	654
ГЛАВА ШЕСТАЯ.—Ученіе о нормаляхъ къ одной и той же поверхности	655
Не существуетъ, вообще, поверхности, нормальной къ прямому пучку (§§ 646—647)	655
Необходимое условіе для существованія поверхности (§§ 648—662)	656
Упражненія	673
ГЛАВА СЕДЬМАЯ.—Теорія линій кривизны	674
Опредѣленіе линій кривизны (§§ 663—664)	674
Дифференціальное уравненіе линій кривизны (§§ 665—672)	675
Поверхность, касательная къ нормалямъ данной поверхности (§§ 673—677)	683
Линія кривизны, общая для двухъ поверхностей (§§ 678—680)	685
Ортогональныя поверхности (§§ 681—683)	687
Опредѣленіе линій кривизны въ нѣкоторыхъ простыхъ случаяхъ (§§ 684—706)	691
ГЛАВА ВОСЬМАЯ.—Ученіе о линіяхъ, нанесенныхъ на поверхности.	710
Геодезическія линіи (§§ 707—713)	710
Геодезическая кривизна (§§ 714—719)	715

	Стран.
Полная кривизна части поверхности (§§ 720—721)	720
Мѣра кривизны (§§ 722—723)	721
Теорія развертыванія поверхностей (§§ 724—729)	722
Условіе, чтобы двѣ поверхности были наертываемы (<i>applicables</i>) одна на другую (§§ 730—738)	730
Кривизна ортогональныхъ траекторій на какой-угодно поверхности (§§ 739—741)	737
Алфавитный указатель	742
<i>Опечатки</i>	756

ПЕРВАЯ КНИГА

Дифференціалы и производныя

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Безконечно-малыя различныхъ порядковъ, ихъ употребленіе въ геометріи

ОПРЕДѢЛЕНІЯ

§ 1. *Безконечно-малою* или *безконечно-малымъ количествомъ* называется такое число или такая переменная величина, которая, неопредѣленно уменьшаясь, приближается къ нулю какъ-угодно близко, никогда его не достигая.

Если одновременно разсматривается нѣсколько безконечно-малыхъ, то одна изъ нихъ по произволу принимается за *главную безконечно-малую*, при чемъ вводятся слѣдующія опредѣленія.

Безконечно-малою перваго порядка называется всякая безконечно-малая, отношеніе которой къ главной безконечно-малой стремится къ конечному предѣлу въ то время, когда обѣ онѣ неопредѣленно приближаются къ нулю.

Безконечно-малою втораго порядка называется всякая безконечно-малая, отношеніе которой къ квадрату главной безконечно-малой стремится къ конечному предѣлу.

Вообще, *безконечно-малою n -ю порядка* называется безконечно-малая, отношеніе которой къ n -ой степени главной безконечно-малой стремится къ конечному предѣлу.

Не слѣдуетъ думать, что всякая безконечно-малая непремѣнно будетъ опредѣленнаго порядка; въ самомъ дѣлѣ, мы встрѣтимся съ такими безконечно-малыми, что порядокъ одной изъ нихъ не совпадетъ съ порядкомъ какой-либо степени другой.

Пусть α и β будутъ такія безконечно-малыя; отношеніе $\frac{\alpha}{\beta}$ не можетъ имѣть конечнаго предѣла, потому что въ противномъ случаѣ онѣ были бы одного и того же порядка. Если этотъ предѣлъ есть нуль, то говорятъ, что α — *высшаго порядка*, чѣмъ β , и — наоборотъ, если этотъ предѣлъ равенъ безконечности.

Изъ предыдущихъ опредѣленій, очевидно, вытекаетъ, что если двѣ безконечно-малыя соотвѣтственно порядковъ n и n' , то ихъ произведеніе $\alpha\beta$ порядка $n+n'$.

высшаго, чѣмъ приращеніе функціи. Не трудно замѣтить, что послѣдній выводъ тождественъ съ предыдущимъ. Въ самомъ дѣлѣ, при одновременномъ разсмотрѣніи функціи $\varphi(x)$ и переменнѣй x , отъ которой она зависитъ, мы можемъ самую функцію обозначить одною буквою y и принять ее за переменную, отъ которой x будетъ уже функціею $\psi(y)$. Чтобы вполне убѣдиться въ этомъ, стоитъ только $\varphi(x)$ считать ординатою кривой, заданной уравненіемъ: $y = \varphi(x)$; дѣйствительно, построивъ эту кривую, мы тотчасъ замѣтимъ, что абсциссу какой-нибудь ея точки можно принять за функцію отъ ординаты совершенно такъ же, какъ раньше мы принимали ординату за функцію отъ абсциссы; а такъ какъ у насъ доказано въ общемъ видѣ, для одной изъ этихъ величинъ, что ея бесконечно-малое приращеніе не можетъ быть высшаго порядка, чѣмъ для другой, то наше предложеніе непремѣнно будетъ справедливо для каждой изъ нихъ, т.-е. что оба приращенія должны быть одного и того же порядка.

§ 3. Какова бы ни была функція $\varphi(x)$, отношеніе $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$, по предыдущему, имѣетъ конечный предѣлъ при h , стремящемся къ нулю; этотъ предѣлъ есть новая функція отъ x и называется *производною функціи* φ ; ее часто обозначаютъ тѣмъ же символомъ, что и данную функцію, только со значкомъ наверху; такъ, напр., $\varphi'(x)$ есть производная $\varphi(x)$.

Разысканіе и изслѣдованіе производныхъ весьма важно въ исчисленіи бесконечно-малыхъ; мы посвятимъ этому нѣсколько главъ. Ближайшая же наша цѣль—дать нѣсколько примѣровъ бесконечно-малыхъ различныхъ порядковъ.

Непосредственно мы приведемъ нѣкоторыя геометрическія слѣдствія изъ предыдущаго предложенія.

§ 4. Если координаты точекъ кривой выражены въ функціи отъ переменнѣй α , что, очевидно, можетъ быть выполнено для какой-нибудь кривой безчисленнымъ множествомъ способовъ, то разстояніе двухъ бесконечно-близкихъ точекъ этой кривой есть бесконечно-малая того же порядка, что и разность соответственныхъ значеній α .

Въ самомъ дѣлѣ, пусть x и y обозначаютъ координаты одной изъ точекъ, $(x+h)$ и $(y+k)$ — координаты другой и δ — приращеніе для α ; тогда, такъ какъ x и y суть функціи отъ α , изъ общей теоремы вытекаетъ, что ихъ приращенія, какъ h , такъ и k , будутъ одного и того же порядка съ δ . Съ другой же стороны,

$$\frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\delta} = \sqrt{\left(\frac{h}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{k}{\delta}\right)^2},$$

откуда слѣдуетъ, что это отношеніе имѣетъ конечный предѣлъ, что и доказываетъ наше предложеніе, потому что $\sqrt{h^2 + k^2}$ есть разстояніе между двумя разсматриваемыми точками.

Это предложеніе справедливо и для кривыхъ двойкой кривизны; если x , y , z координаты какой-нибудь точки такой кривой и выражены въ функціи отъ одной и той же переменнѣй α , то при бесконечно-маломъ приращеніи δ для величины α , координаты x , y и z перейдутъ соответственно въ $x+h$, $y+k$, $z+l$, при чемъ h , k и l будутъ одного порядка съ δ . Съ другой же стороны,

$$\frac{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}{\delta} = \sqrt{\left(\frac{h}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{k}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{l}{\delta}\right)^2},$$

откуда слѣдуетъ, что отношеніе разстоянія двухъ бесконечно-близкихъ точекъ къ соответственному приращенію α стремится къ конечному предѣлу.

§ 5. *Если точкамъ одной кривой соответствуютъ точки другой кривой такимъ образомъ, что для точки, выбранной на одной изъ нихъ, найдется ей соответственная на другой кривой вполне определенная, то разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками на одной изъ кривыхъ будетъ того же порядка, что и разстояніе между двумя соответственными точками на другой кривой.*

Въ самомъ дѣлѣ, если предположить, что координаты x, y, z точки первой кривой выражены въ функціи отъ переменнѣй α , то и координаты x_1, y_1, z_1 соответственной точки второй кривой также выразятся въ функціи отъ α . Поэтому, если желательнѣе разсмотрѣть двѣ бесконечно-близкія точки на одной изъ кривыхъ и имѣть соответственныя на другой, то достаточно приписать α два бесконечно-близкихъ значенія: α и $\alpha + \delta$. По предыдущему, разстоянія между полученными такимъ образомъ точками будутъ оба одного порядка съ δ ; значить, они суть бесконечно-малыя одного и того же порядка.

Поэтому, какъ только будетъ доказано, въ какомъ-нибудь частномъ случаѣ, что разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками на второй кривой постоянно остается бесконечно-малою высшаго порядка относительно разстоянія между соответственными точками на первой кривой, то необходимо заключить, что координаты точекъ второй кривой суть постоянныя и что самая кривая приводится къ точкѣ.

§ 6. *Если прямая линія перемѣщается въ пространство по какому-нибудь непрерывному закону такимъ образомъ, что каждое изъ ея положеній соответствуетъ одному изъ значеній переменнѣй α , то уголъ между двумя бесконечно-близкими положеніями этой прямой есть того же порядка, что и разность между соответственными значеніями α .*

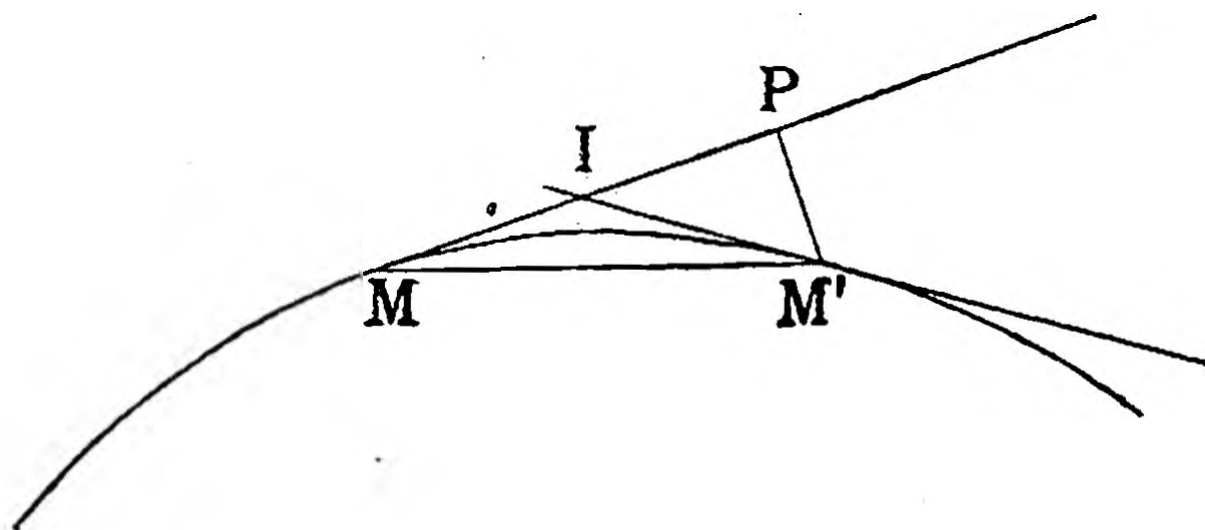
Для доказательства предположимъ, что черезъ начало координатъ O проведены параллельныя различнымъ разсматриваемымъ прямымъ; углы между ними, очевидно, будутъ такіе же, какъ и между нашими прямыми. Такимъ образомъ мы получимъ конусъ, производящія котораго соответствуютъ различнымъ значеніямъ переменнѣй α . Если пересѣчь этотъ конусъ шаровою концентрическою поверхностью радіуса, равнаго единицѣ, то каждому значенію α будетъ соответствовать точка кривой пересѣченія. Поэтому, разсматривая два бесконечно-близкихъ значенія этой переменнѣй, α и $\alpha + \delta$, замѣтимъ, что соответствующія имъ точки M и M' на кривой относительно разстоянія того же порядка (§ 4), что и δ , и слѣдовательно, въ равнобедренномъ треугольникѣ OMM' уголъ O такого же порядка, какъ и δ , такъ какъ $\sin \frac{O}{2} = \frac{MM'}{2}$.

§ 7. *Если точки какой-нибудь одной поверхности соответствуютъ точкамъ другой поверхности такимъ образомъ, что для точки, выбранной на одной изъ нихъ, найдется ей соответственная на другой поверхности вполне определенная, то разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками на одной изъ поверхностей будетъ того же порядка, что и разстояніе между соответственными имъ точками на другой поверхности.*

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ двѣ точки A и B на первой поверхности и имѣть соответственныя P и Q на второй поверхности. Предположимъ, что B приближается

къ A по нѣкоторой кривой на первой поверхности; въ такомъ случаѣ Q въ то же время будетъ приближаться къ P по соответственной кривой. Если мы обратимъ исключительно наше вниманіе на эти двѣ кривыя, то встрѣтимся съ случаемъ, уже разсмотрѣннымъ выше, и можемъ вывести изъ сказаннаго тамъ (§ 5), что разстоянія AB и PQ —безконечно-малыя одного порядка.

§ 8. Приведемъ теперь примѣръ безконечно-малой второго порядка. Разсмотримъ какую-нибудь плоскую кривую и касательную къ ней въ точкѣ M . Если изъ точки M' , взятой на кривой на безконечно-маломъ разстояніи перваго порядка отъ точки M , опустимъ перпендикуляръ $M'R$ на эту касательную, то $M'R$ будетъ безконечно-малою второго порядка (черт. 1).



Черт. 1.

Прежде всего, разсматривая треугольникъ $MM'R$, не трудно замѣтить, что $M'R$ есть безконечно-малая порядка выше перваго; въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ треугольникѣ

$$\frac{M'R}{MM'} = \sin PMM',$$

и такъ какъ уголъ PMM' , очевидно, безконечно-малъ, а MM' —перваго порядка, то $M'R$ есть безконечно-малая высшаго порядка (§ 1). Намъ остается доказать, что $\sin PMM'$ или, что все равно, уголъ PMM' есть безконечно-малая перваго порядка, потому что тогда перпендикуляръ $M'R$ явится произведеніемъ двухъ безконечно-малыхъ перваго порядка и, слѣдовательно, самъ будетъ второго порядка. Чтобы это доказать, разсмотримъ касательную къ данной кривой въ точкѣ M' . Пусть I обозначаетъ точку встрѣчи обѣихъ касательныхъ; называя черезъ ϵ уголъ между этими двумя касательными, мы можемъ, очевидно, написать:

$$\epsilon = IMM' + IM'M,$$

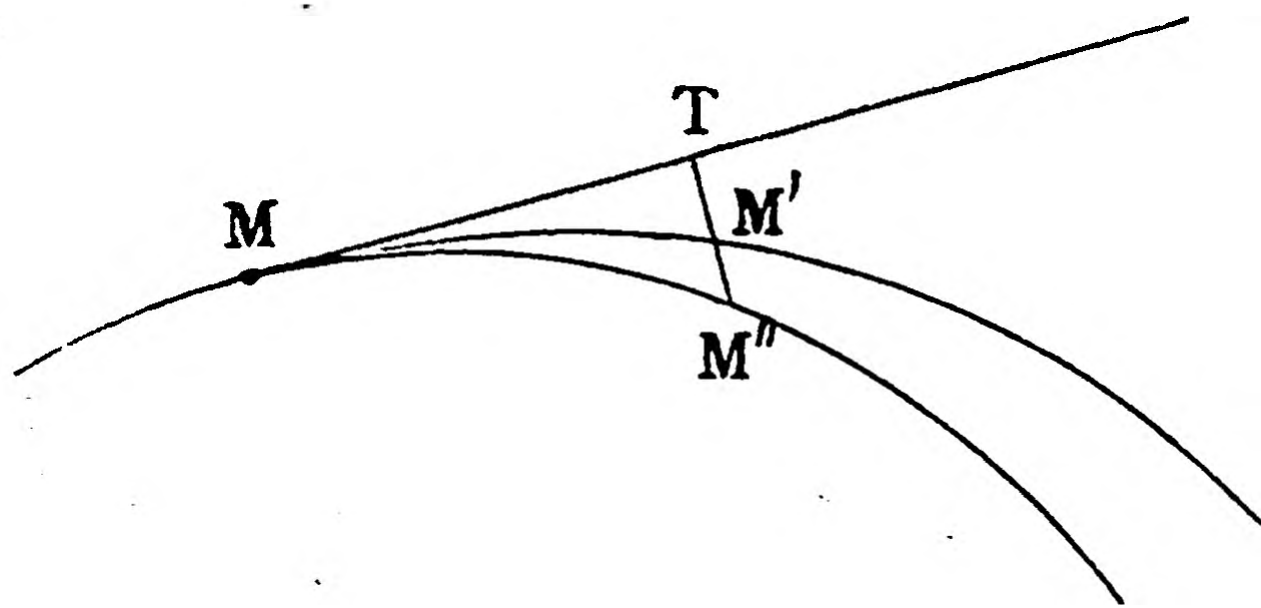
откуда слѣдуетъ, что ϵ того же порядка, что и углы IMM' и $IM'M$; поэтому достаточно установить, что уголъ ϵ —перваго порядка, а это не трудно сдѣлать, основываясь на § 6-мъ. Въ самомъ дѣлѣ, направленіе касательной въ точкѣ M опредѣляется абсциссою точки M ; значитъ, если эта абсцисса увеличится на безконечно-малую величину перваго порядка, то касательная пойдетъ по новому направленію, образуя съ прежнимъ угломъ перваго порядка, равный точно величинѣ ϵ .

Отмѣтимъ непосредственное слѣдствіе изъ предыдущаго предложенія. Если изъ нѣкоторой точки O опустить перпендикуляръ OP на прямую AB и затѣмъ соединить точку O съ точкою P' на той же прямой, отстоящей отъ точки P на безконечно-близкомъ разстояніи, то, принимая PP' за главную безконечно-малую, увидимъ, что разность $OP' - OP$ будетъ второго порядка; дѣйствительно, она равна отрезку линіи OP' , заключенному между кругомъ, описаннымъ изъ точки O , какъ изъ центра, радіусомъ OP и касательною PP' къ этому кругу.

§ 9. Это предположеніе справедливо и для кривыхъ двойкой кривизны. Если въ точкѣ M нѣкоторой кривой двойкой кривизны провести касательную къ этой кривой, то разстояніе касательной до точки M' , находящейся на нашей кривой на бесконечно-близкомъ разстояніи отъ M , есть бесконечно-малая второго порядка относительно отрезка MM' , принимаемаго за главную бесконечно-малую. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что разстояніе точки до прямой того же порядка, что и разстояніе между проэціями этой точки и прямой на произвольную плоскость. Поэтому, данную кривую можно замѣнить ея проэціею на нѣкоторую плоскость, не измѣняя порядка разсматриваемаго нами разстоянія, а это значитъ, что это разстояніе по теоремѣ, относящейся къ плоскимъ кривымъ, есть второго порядка.

§ 10. Геометрія даетъ намъ также простые примѣры бесконечно-малыхъ порядка выше второго.

Разсмотримъ какую-нибудь плоскую кривую и ея касательную въ точкѣ M (черт. 2). Если на этой касательной взять бесконечно-малую длину MT и возставить въ T перпендикуляръ TM' , пересекающій кривую въ M' , то TM' будетъ бесконечно-



Черт. 2.

малая второго порядка (§ 8); поэтому, полагая $MT = h$, мы можемъ написать: $TM' = Kh^2$, гдѣ K имѣетъ конечный предѣлъ при h , стремящемся къ нулю. Ведемъ теперь кругъ радиуса R , касательный въ M къ данной кривой и расположенный вмѣстѣ съ кривою по одну сторону отъ касательной. Продолжая линію TM' до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ M'' , находимъ, по извѣстному свойству круга, что

$$TM'' = \frac{\overline{MT}^2}{2R - TM''} = \frac{h^2}{2R - TM''}$$

и, слѣдовательно,

$$M'M'' = TM'' - TM' = h^2 \left(\frac{1}{2R - TM''} - K \right).$$

Отсюда слѣдуетъ, что если опредѣлить R такимъ образомъ, чтобы $\left(\frac{1}{2R - TM''} - K \right)$ въ предѣлѣ равнялось нулю, т.-е. если положить $R = \frac{1}{2K_1}$, гдѣ K_1 есть предѣлъ K , то разстояніе $M'M''$ будетъ бесконечно-малою порядка выше второго.

Итакъ, существуетъ въ каждой точкѣ плоской кривой такой касательный кругъ, который около точки касанія бесконечно болѣе близокъ къ кривой, чѣмъ касательная прямая. Этотъ кругъ, играющій большую роль при изученіи кривыхъ, называется соприкасающимся кругомъ.

Замѣчаніе. — Предыдущія теоремы могутъ быть неприменимы къ особннымъ точкамъ; это бываетъ въ томъ случаѣ, если отношеніе $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$, предѣлъ котораго

не может постоянно равняться нулю, может стремиться къ нулю при частномъ значеніи переменнѣй.

ЗАМѢНА БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ

§ 11. Безконечно-малыя почти всегда употребляются, какъ посредствующія величины, и входятъ въ разсужденія то въ видѣ отношеній, имѣющихъ конечные предѣлы, то въ видѣ суммы безпредѣльно возрастающаго числа слагаемыхъ. Когда, такимъ образомъ, имѣется въ виду разысканіе предѣла отношенія или предѣла суммы, то часто вопросъ можно упростить при помощи слѣдующаго принципа:

При разысканіи предѣла отношенія или предѣла суммы можно замѣнить одну безконечно-малую другою, отношеніе которой къ первой въ предѣлѣ равно единицѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть α , β и α' , β' двѣ пары такихъ безконечно-малыхъ, что

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1, \quad \lim \frac{\beta}{\beta'} = 1.$$

Пишемъ тождество:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta};$$

имѣя въ виду, что $\frac{\alpha}{\alpha'}$ и $\frac{\beta'}{\beta}$ имѣютъ предѣломъ единицу, переходимъ къ предѣлу:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Разсмотримъ теперь стремящуюся къ конечному предѣлу сумму

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \tag{A}$$

безконечно-малыхъ, число которыхъ n безпредѣльно увеличивается, по мѣрѣ того какъ онѣ сами стремятся къ нулю. Пусть $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ будутъ другія безконечно-малыя такія, что

$$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1, \quad \lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1, \quad \dots, \quad \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1.$$

Докажемъ, что сумма (A) будетъ стремиться къ тому же предѣлу, что и сумма:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n. \tag{B}$$

Дѣйствительно, написавъ равенства:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \epsilon_1, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \epsilon_2, \quad \dots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1 + \epsilon_n,$$

гдѣ $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$; по предположенію, безконечно-малыя, выводимъ изъ нихъ:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_1 \epsilon_1 + \alpha_2 \epsilon_2 + \dots + \alpha_n \epsilon_n.$$

Далѣе, обозначая черезъ η наибольшее по абсолютной величинѣ изъ количествъ: $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ (само η — безконечно-мало), находимъ:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) < \eta(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$

Во второй части неравенства первый множитель η стремится къ нулю, а второй множитель, по предположенію, имѣетъ конечный предѣлъ; значитъ, обѣ суммы, (A) и (B), имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ.

§ 12. Чтобы двѣ безконечно-малыя α и β могли замѣнять одна другую, достаточно, по предыдущему, чтобы предѣлъ отношенія $\frac{\beta}{\alpha}$ былъ равенъ единицѣ; другими словами, достаточно, чтобы существовало равенство:

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon,$$

гдѣ ε — безконечно-мало, или, что одно и то же, чтобы

$$\beta - \alpha = \alpha\varepsilon,$$

т.-е. чтобы разность $\beta - \alpha$ была бы безконечно-малою относительно α . Слѣдовательно, теорема § 11-го можетъ быть прочитана слѣдующимъ образомъ.

При разысканіи предѣла отношенія или предѣла суммы двѣ безконечно-малыя α и β можно замѣнить одна другою, не обращая вниманія на ихъ разность, лишь бы только эта разность была безконечно-малою относительно одной изъ нихъ.

Эта теорема выражается различнымъ образомъ и имѣетъ большое примѣненіе въ исчисленіи безконечно-малыхъ.

УПОТРЕБЛЕНІЕ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ ПРИ РѢШЕНІИ НѢКОТОРЫХЪ ЗАДАЧЪ.

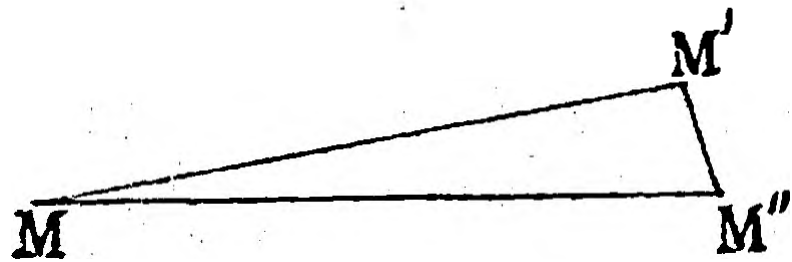
ОПРЕДѢЛЕНІЕ КАСАТЕЛЬНОЙ КЪ НѢКОТОРЫМЪ КРИВЫМЪ

§ 13. Мы покажемъ непосредственно пользу безконечно-малыхъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ геометрическихъ задачъ и сначала опредѣлимъ касательную къ нѣкоторымъ кривымъ.

Чтобы опредѣлить въ нѣкоторой точкѣ касательную къ кривой, необходимо, какъ извѣстно, соединить данную точку касанія съ какою-нибудь близъ лежащею точкою на той же кривой и отыскать предѣлъ направленія, къ которому стремится построенная такимъ образомъ хорда, по мѣрѣ того какъ вторая точка безпредѣльно приближается къ первой; короче говоря, нужно соединить данную точку касанія съ *безконечно ей близкою* точкою на кривой, при чемъ выраженіе *безконечно-близкій* достаточно для обозначенія безпредѣльнаго сближенія двухъ разсматриваемыхъ точекъ.

Слѣдующая теорема часто оказывается весьма полезною при опредѣленіи касательныхъ.

Если на кривой даны двѣ точки: M и M' , расположенная отъ M на безконечно-маломъ разстояніи перваго порядка, то предѣльное положеніе MM' не измѣнится, если



Черт. 3.

подставить на мѣсто точки M' другую точку M'' , находящуюся въ кривой и отстоящую отъ точки M на безконечно-маломъ разстояніи высшаго порядка относительно перваго разстоянія.

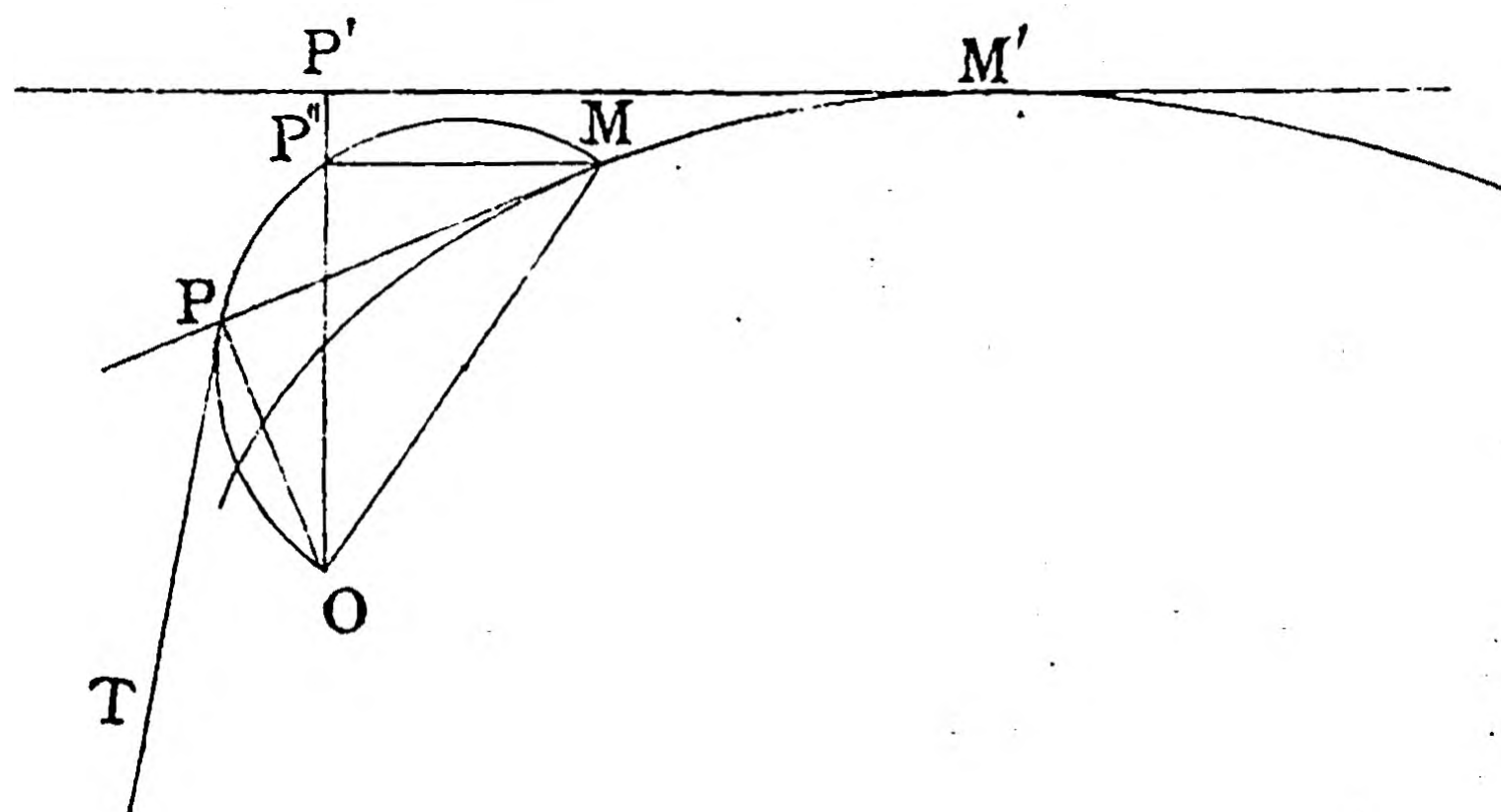
Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ треугольникъ $MM'M''$ (черт. 3). Такъ какъ стороны треугольника пропорціональны синусамъ противолежащихъ угловъ, то

$$M'M'' = MM' \frac{\sin M}{\sin M''};$$

поэтому, если $M'M''$ бесконечно-малая высшаго порядка относительно MM' , то $\sin M$ непремѣнно бесконечно-малая, а слѣдовательно, и уголъ M —бесконечно-малъ. Отсюда заключаемъ, что оба направленія, MM' и MM'' , въ предѣлѣ совпадаютъ, что и требовалось доказать.

§ 14. Приложимъ предыдущій принципъ къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ.

Задача I. — Изъ неподвижной точки O (черт. 4) опущены перпендикуляры на касательныя къ плоской кривой; найти касательную къ кривой, изображающей геометрическое мѣсто оснований этихъ перпендикуляровъ.

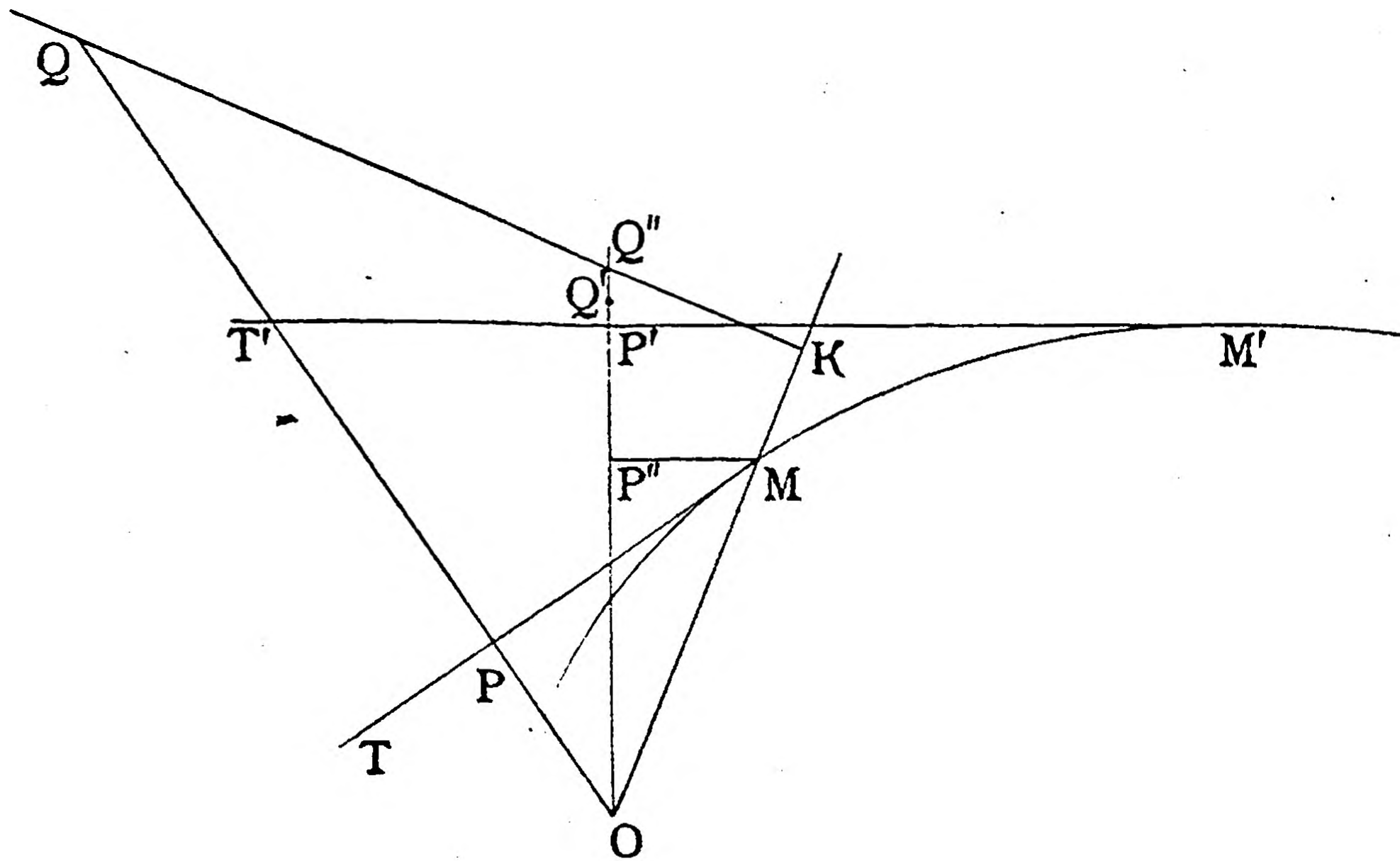


Черт. 4.

Пусть OP и OP' будутъ перпендикуляры, опущенные изъ точки O на касательныя въ двухъ смежныхъ точкахъ M и M' ; тогда (§ 5) линия PP' явится бесконечно-малою того же порядка, что и MM' , которую мы будемъ считать за главную бесконечно-малую. Поэтому, при опредѣленіи направленія PP' можно подставить (§ 13) вмѣсто точки P' другую точку, находящуюся на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка. Итакъ, ведемъ черезъ точку M прямую, параллельную касательной $M'P'$; эта параллельная пересѣчетъ OP' въ точкѣ P'' , которая можетъ быть подставлена вмѣсто P' , потому что $P'P''$ равно разстоянію точки M до касательной въ точкѣ M' и есть (§ 8) бесконечно-малая второго порядка. Далѣе, такъ какъ точки P и P'' расположены на окружности круга, описаннаго на OM , какъ на діаметрѣ, то направленіе PP'' въ предѣлѣ обратится въ касательную къ этой окружности. Значитъ, искомая касательная есть въ то же время касательная къ кругу, проходящему черезъ точки O , M , P , а перпендикуляръ къ этой касательной, называемый *нормалью*, будетъ прямая, соединяющая точку P съ серединою OM .

Можно еще замѣтить, что радіусы векторы OM и OP , проведенные изъ точки O къ обѣимъ кривымъ, служащимъ геометрическими мѣстами точекъ M и P , пересѣкутъ эти кривыя соответственно подъ углами OMP и OPT , равными между собою, такъ какъ они измѣряются половиною одной и той же дуги въ кругѣ MPO .

Задача II.—Изъ некоторой точки O опущены перпендикуляры на касательныя къ плоской кривой и каждый изъ нихъ OP (черт. 5) продолженъ до такой точки Q , что $OP \cdot OQ = a^2$, гдѣ a есть постоянная величина; найти касательную къ кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ Q .



Черт. 5.

Пусть Q и Q' будутъ двѣ бесконечно-близкія точки разсматриваемаго геометрическаго мѣста, соответствующія двумъ касательнымъ MT и $M'T'$, точки касанія которыхъ суть M и M' . Известно (§ 5), что разстояніе QQ' есть бесконечно-малая того же порядка, что и MM' , которую мы примемъ за главную бесконечно-малую. Такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ, вѣдемъ черезъ точку M прямую MP'' , параллельную касательной $M'R'$, и назовемъ черезъ P'' точку пересѣченія этой параллели съ OM . Отрѣзокъ $P'R''$ будетъ, какъ мы замѣтили (§ 8), бесконечно-малая второго порядка. Далѣе, опредѣлимъ точку Q'' такъ, чтобы $OP'' \cdot OQ'' = a^2$; $Q'Q''$ есть бесконечно-малая второго порядка, потому что OQ' есть функція отъ OP' , а OQ'' есть такая же функція отъ OP'' ; поэтому переходимъ отъ одной изъ этихъ линій къ другой, приписывая переменнѣйшей OP' , въ этой функціи, бесконечно-малое приращеніе второго порядка $P'R''$, — функція тогда возрастетъ (§ 2) на бесконечно-малую $Q'Q''$ того же порядка, т.-е. второго.

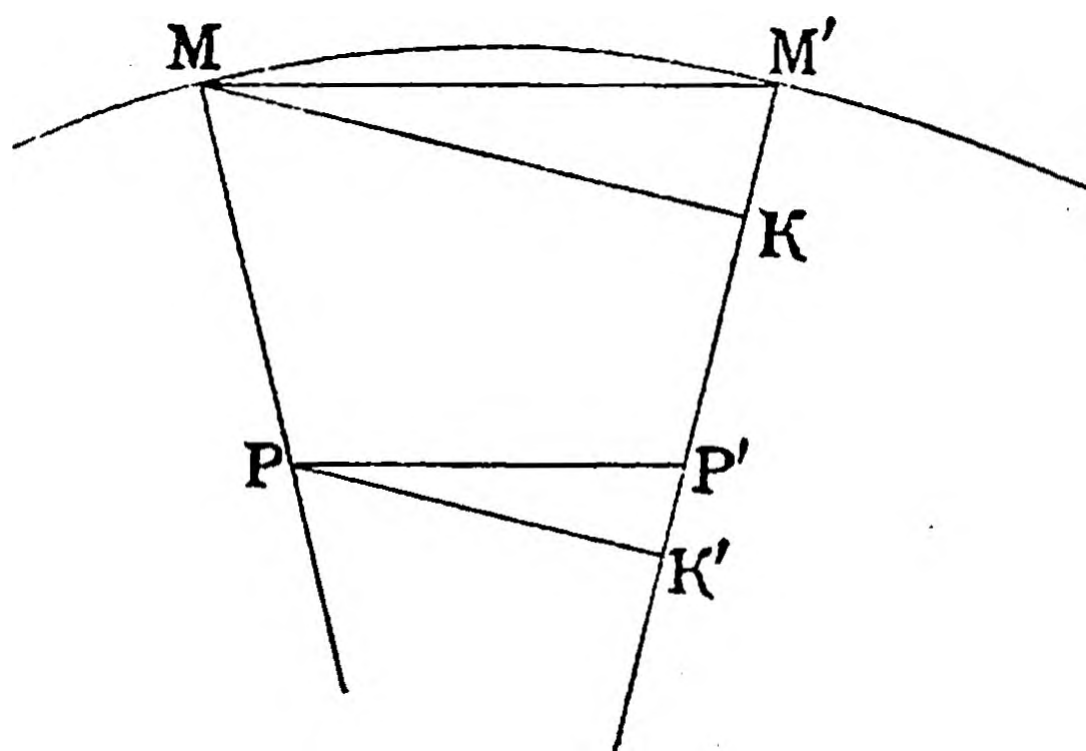
На основаніи сказаннаго можно подставить вмѣсто точки Q' точку Q'' , и искомою касательною явится предѣльное направленіе линіи QQ'' . Замѣтимъ теперь, что точки P и P'' расположены на окружности круга, описаннаго на OM , какъ на діаметрѣ, и примѣнимъ теорему: если нанести на хордахъ круга, проведенныхъ изъ конца діаметра, длины, обратно-пропорціональныя самимъ хордамъ, то геометрическимъ мѣстомъ концовъ этихъ длинъ будетъ прямая линія, перпендикулярная въ данному діаметру; въ такомъ случаѣ мы можемъ сказать, что Q и Q'' лежатъ на прямой, перпендикулярной къ OM , и слѣдовательно, искомая касательная совпадетъ съ перпендикуляромъ QK , опущеннымъ изъ точки Q на OM . Изъ подобія треугольниковъ OQK и OMP слѣдуетъ, что

$$OM \cdot OK = OP \cdot OQ = a^2;$$

отсюда заключаемъ, что если поступить съ кривою, являющеюся геометрическимъ мѣстомъ точекъ Q , такъ же, какъ мы поступили съ данною кривою, то получимъ эту послѣднюю, а это значитъ, что обѣ кривыя можно разсматривать, какъ сопряженныя.

Задача III. — На каждой нормали къ плоской кривой отъ точки ея встрѣчи съ кривою отложена постоянная длина; найти касательную къ геометрическому мѣсту концовъ этихъ длинъ.

Пусть M и M' (черт. 6) будутъ двѣ бесконечно-близкія точки на данной кривой, а P и P' соотвѣтственныя имъ точки, полученныя вышеуказаннымъ путемъ, т.-е.



Черт. 6.

такія, что если MP и $M'P'$ представляютъ нормали, то $MP = M'P' = l$. Соединяемъ M съ M' и P съ P' и опускаемъ изъ точекъ M и P перпендикуляры MK и $P'K'$ на $M'P'$; тогда

$$KK' = MP \cos \varphi = l \cos \varphi,$$

гдѣ φ есть уголъ между двумя разсматриваемыми нормальми; слѣдовательно,

$$M'P' - KK' = M'K - P'K' = l(1 - \cos \varphi) = 2l \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

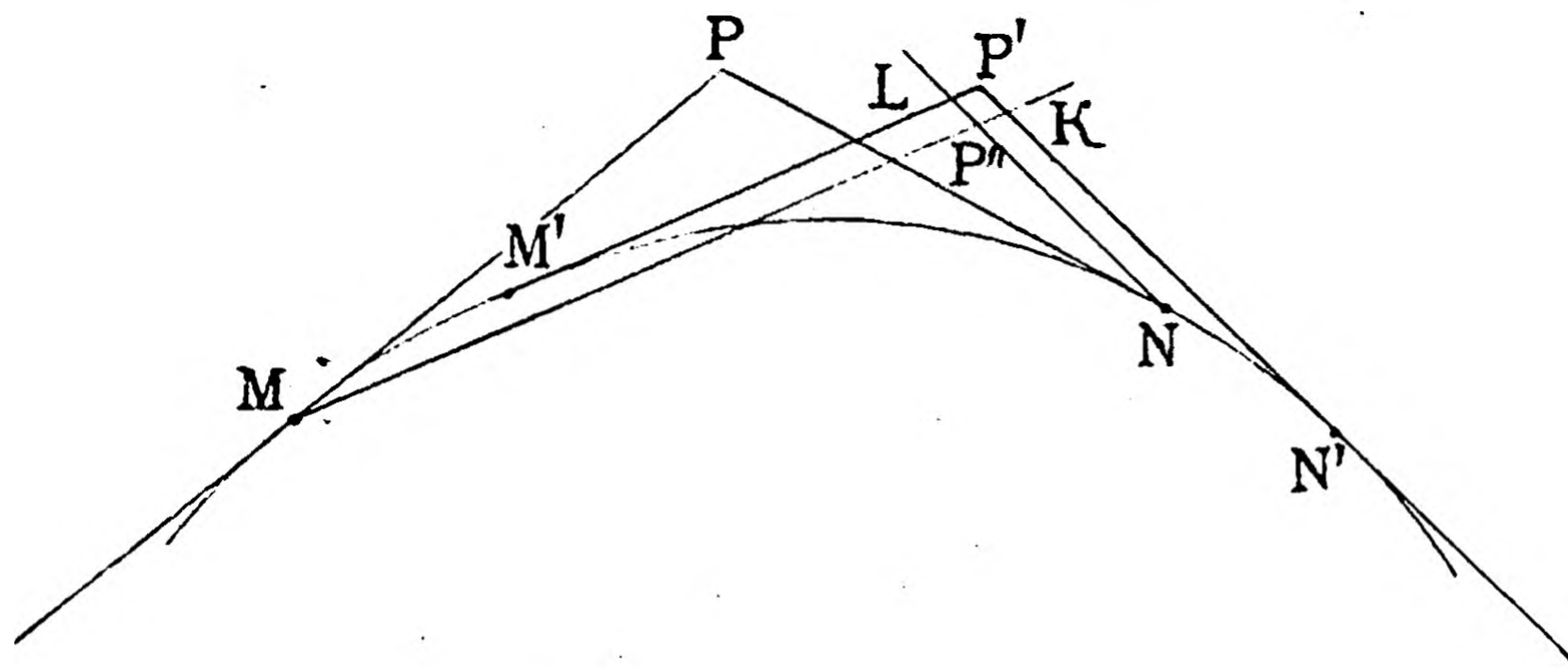
Такъ какъ уголъ φ есть бесконечно-малая перваго порядка (§ 6), то $M'K - P'K'$ будетъ бесконечно-малою втораго порядка. Замѣчая же, что $M'K = MM' \cos \angle MM'K$, гдѣ MM' — бесконечно-малая перваго порядка и уголъ $\angle MM'K$ бесконечно-мало отличается отъ прямого, выводимъ, что $M'K$ — бесконечно-малая порядка выше перваго, а это показываетъ, что и бесконечно-малая $P'K'$ — порядка выше перваго, такъ какъ разность между нею и $M'K$ — втораго порядка. Отсюда, на основаніи равенства:

$$P'K' = PP' \cos \angle PP'K,$$

мы должны заключить, что или PP' — бесконечно-малая порядка выше перваго, или что $\angle PP'K$ бесконечно мало отличается отъ прямого угла. При первомъ предположеніи (§ 5) кривая приводится къ точкѣ и, слѣдовательно, линія MM' есть кругъ радіуса l . При второмъ предположеніи, которое, въ общемъ случаѣ, является единственно допустимымъ, т.-е. когда уголъ $\angle PP'K$ стремится къ прямому, PP' обратится въ перпендикуляръ къ $K'P'$ и, значитъ, къ линіи $M'P'$, которая въ предѣлѣ не отличается отъ MP ; слѣдовательно, касательная къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто точекъ P , будетъ параллельна касательной въ соотвѣтственной точкѣ на данной кривой, т.-е. обѣ кривыя будутъ имѣть однѣ и тѣ же нормали; ихъ называютъ *параллельными кривыми*.

Задача IV. — Около данной кривой описать угол постоянной величины; найти касательную къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто положеній его вершины.

Пусть P (черт. 7) одна изъ точекъ геометрическаго мѣста, а M и N — соответственныя точки касанія двухъ касательныхъ, пересѣкающихся въ точкѣ P ; пусть P' — вторая точка геометрическаго мѣста, бесконечно-близкая къ P , а M' и N' — точки касанія, соответствующія этой второй точкѣ. Такъ какъ координаты точки P суть опредѣленныя функціи отъ абсциссы точки M , то разстоянія PP' и MM' будутъ (§ 5) бесконечно-малыми одного и того же порядка; примемъ ихъ за бесконечно-малыя перваго порядка. Ведемъ теперь черезъ точки M и N линіи, параллельныя ка-



Черт. 7.

сательнымъ въ M' и N' , — получимъ параллелограммъ $P''KP'L$, стороны котораго суть бесконечно-малыя второго порядка (§ 8), и потому мы можемъ (§ 13) подставить вмѣсто P' противоположную вершину P'' этого параллелограмма. Наконецъ, принимая во вниманіе, что P и P'' расположены на сегментѣ, вмѣщающемъ уголъ P и описанномъ на MN , какъ на хордѣ, и что PP'' въ предѣлѣ есть касательная къ этому сегменту, заключаемъ, что искомая кривая имѣетъ въ точкѣ P ту же самую касательную, что и этотъ сегментъ, описанный около треугольника MNP .

Задача V. — Провести касательную къ циклоиду.

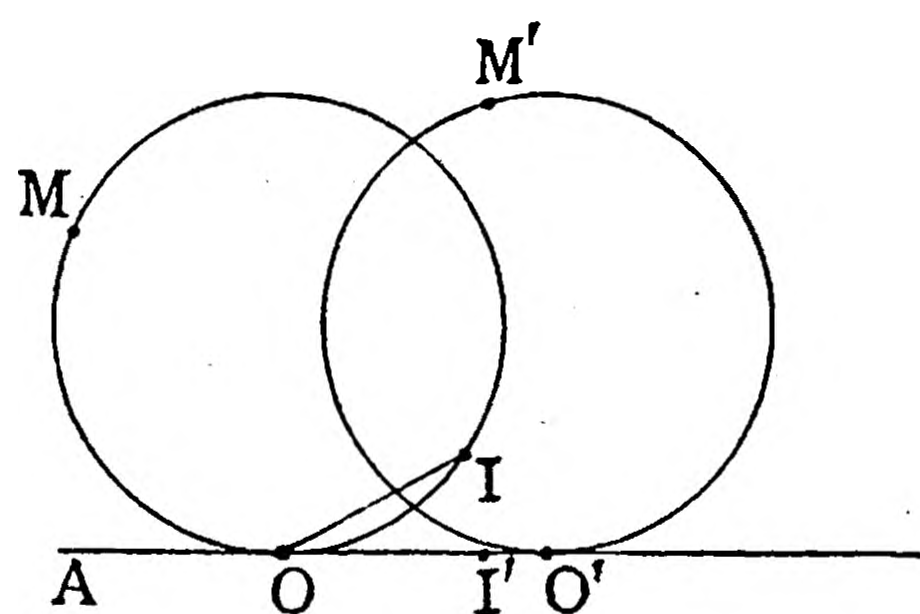
Циклоида представляетъ весьма замѣчательную кривую; мы часто будемъ ею пользоваться, какъ примѣромъ, при приложеніи общихъ методовъ. Начнемъ съ ея опредѣленія.

Циклоиду описываетъ точка окружности, катящейся безъ скольженія по одной изъ своихъ касательныхъ, остающейся все время неподвижною *).

Пусть OM (черт. 8) есть положеніе производящаго круга и M положеніе точки, описывающей циклоиду. Разсмотримъ кругъ въ смежномъ положеніи $O'M'$, при чемъ точка M переходитъ въ точку M' и дуга OI , коснувшись прямой послѣдовательно всѣми своими точками, будетъ равна отрѣзку OO' ; такимъ образомъ, этотъ послѣдній

*) Говорятъ, что подвижная кривая катится безъ скольженія по неподвижной линіи, если эта кривая перемѣщается, оставаясь постоянно касательною въ неподвижной линіи и притомъ касалась этой послѣдней своими различными точками такимъ образомъ, что каждая дуга подвижной кривой равна по длинѣ той дугѣ неподвижной линіи, которая пройдева точками окружности. На основаніи законовъ физики, приводить которые здѣсь не мѣсто, мы говоримъ, что колесо кареты катится почти безъ скольженія, и если дорога прямолинейна, то кривая, описываемая какою-нибудь точкою колеса, будетъ циклоида.

равенъ разности $O'M' - OM$. Точка I окружности MOI должна при движеніи перейти въ точку O' , такъ какъ она является точкою касанія прямой и круга; можно заставить окружность MO перейти изъ первоначальнаго положенія въ новое положеніе $O'M'$ при помощи трехъ послѣдовательныхъ движеній:



Черт. 8.

1. Вращеніе вокругъ первоначальной точки касанія O , при чемъ уголъ вращенія IOO' таковъ, что точка I перемѣстится въ I' на прямой OO' .

2. Вслѣдствіе этого перваго движенія подвижная окружность станетъ пересѣкать прямую AOO' и дастъ на ней хорду OI' ; вращеніе около точки I' , равное первому, сдѣлаетъ окружность снова касательною къ этой прямой.

3. Наконецъ, чтобы привести подвижную окружность въ желаемое положеніе, достаточно заставить всѣ ея точки перемѣститься на разстоянія, равныя и параллельныя отрѣзку $I'O'$; тогда точка, находившаяся первоначально въ I , перейдетъ въ O' и станетъ, очевидно, точкою касанія прямой и круга.

Итакъ, точка M , чтобы занять на циклоидѣ смежное положеніе M' , должна будетъ пройти двѣ дуги круга, вмѣщающихъ одинъ и тотъ же уголъ, соотвѣтственно около центровъ O и I' , и прямую, равную и параллельную $I'O'$.

Эта послѣдняя прямая $I'O'$, равная разности между бесконечно-малою дугою и ея хордою, есть бесконечно-малая третьяго порядка *) и, слѣдовательно, не вліяетъ (§ 13) на предѣльное направленіе MM' .

Что же касается до обѣихъ дугъ круга, то такъ какъ нормали ихъ направлены къ двумъ бесконечно-близкимъ точкамъ O и I' , то уголъ между ними стремится къ нулю, и линія, соединяющая первый конецъ одной изъ нихъ со вторымъ концомъ другой, въ предѣлѣ обратится въ перпендикуляръ къ общей нормали, т.-е. совпадетъ съ линіею MO .

Итакъ, нормаль къ циклоидѣ направлена въ точку касанія производящаго круга и прямой, по которой онъ катится.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ КАСАТЕЛЬНЫХЪ ПЛОСКОСТЕЙ

§ 15. Плоскостью касательною къ поверхности въ нѣкоторой точкѣ называется такая плоскость, на которой лежатъ касательныя въ этой точкѣ ко всѣмъ кривымъ,

*) Въ Тригонометріи доказывается, что разность между дугою и ея синусомъ меньше шестой части куба этой дуги и что разность между дугою и ея хордою равна удвоенному избытку половины дуги надъ соотвѣтственнымъ синусомъ.

нанесеннымъ на данной поверхности. Докажемъ сначала существованіе такой плоскости. Пусть M будетъ точка на данной поверхности, а MP и MQ двѣ какія-нибудь кривыя, пересѣкающіяся на этой поверхности въ точкѣ M . Въ такомъ случаѣ касательныя къ этимъ кривымъ въ точкѣ M находятся въ одной и той же плоскости съ касательною въ той же точкѣ къ третьей кривой MR , проведенной произвольно на той же поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ эту третью кривую MR , какъ предѣльное положеніе такой кривой $R'R''$, которая, постоянно находясь на данной поверхности и пересѣкая MP и MQ соответственно въ A и B , приближается непрерывно къ своему предѣльному положенію MR . Прямыя MA , MB и AB лежатъ всегда въ одной плоскости, проходящей черезъ три точки M , A и B ; поэтому, и ихъ предѣльныя направленія будутъ въ той же плоскости. А такъ какъ предѣльное направленіе MA есть касательная къ кривой MP , предѣльное направленіе MB есть касательная къ кривой MQ , а AB , соединяющая двѣ бесконечно-близкія точки кривой $R'R''$, будетъ касательною къ этой кривой въ предѣлѣ, т.-е. къ кривой MR , то теорема, такимъ образомъ, и доказана. Однако не трудно замѣтить, что могутъ быть исключенія для нѣкоторыхъ точекъ, такъ какъ линія, соединяющая двѣ бесконечно-близкія точки кривой, можетъ и не быть касательною, если одна изъ этихъ точекъ не вполне опредѣленная; слѣдовательно, линія AB въ предѣлѣ не всегда окажется касательною къ MR . Подобное исключеніе не лишаетъ, конечно, доказательства силы, потому что въ тѣхъ отдѣльныхъ случаяхъ, когда теорема не оправдывается, изъ самаго доказательства легко усматривается возможность такихъ случаевъ.

§ 16. Плоскость касательная къ поверхности S находится на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ всякой точки M' , находящейся на той же поверхности и расположенной на бесконечно-маломъ разстояніи перваго порядка отъ точки касанія M . Въ самомъ дѣлѣ, если провести плоскость P черезъ прямую MM' перпендикулярно къ касательной плоскости въ точкѣ M , то эта плоскость пересѣчетъ поверхность S по кривой MM' и разстояніе точки M' до касательной плоскости въ точкѣ M , очевидно, будетъ то же, что и разстояніе до касательной къ этой кривой MM' ; значить (§ 8), оно будетъ бесконечно-малою второго порядка.

§ 17. Чтобы опредѣлить плоскость касательную къ поверхности въ точкѣ M на этой поверхности, необходимо разсматривать одновременно съ этою точкою M двѣ другія бесконечно-близкія точки N и P и искать предѣлъ для плоскости MNP . Дѣйствительно, MN и MP въ предѣлѣ будутъ касательными къ двумъ кривымъ, проведеннымъ на данной поверхности черезъ точку M и, слѣдовательно, плоскость, проходящая чрезъ нихъ, будетъ плоскостью, касательною въ точкѣ M .

Замѣтимъ, что точно такъ же, какъ и въ § 13-мъ, можно точки N и P , расположенныя отъ M на бесконечно-малыхъ разстояніяхъ перваго порядка, замѣнить другими точками N' и P' , если разстоянія NN' и PP' — бесконечно-малыя высшаго порядка. Такая подстановка, не измѣняя предѣльнаго направленія прямыхъ MN и MP , не измѣнитъ также предѣльнаго положенія плоскости MNP .

Задача I.—Изъ нѣкоторой точки O опущены перпендикуляры на плоскости, касательныя къ данной поверхности; найти плоскость, касательную къ геометрическому мѣсту оснований этихъ перпендикуляровъ.

Пусть OP будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки O на плоскость, ка-

касательную въ точкѣ A , а OQ и OR — перпендикуляры, опущенные изъ той же точки O на плоскости, касательныя соответственно въ точкахъ B и C , бесконечно-близкихъ къ A . На разсматриваемой поверхности три точки P , Q и R будутъ бесконечно-близкими, и плоскость, проходящая черезъ нихъ, въ предѣлѣ явится искомою касательною плоскостью.

Если разстоянія AB и AC — бесконечно-малыя перваго порядка, то такими же бесконечно-малыми (§ 7) будутъ и разстоянія PQ и PR , а слѣдовательно, можно точки Q и R замѣнить другими Q_1 и R_1 , если QQ_1 и RR_1 — бесконечно-малыя втораго порядка.

Мы получимъ эти точки Q_1 и R_1 , если проведемъ черезъ точку A плоскости, параллельныя плоскостямъ, касательнымъ въ B и C , и опустимъ на эти плоскости перпендикуляры OQ_1 и OR_1 . Дѣйствительно (§ 16), каждая изъ этихъ новыхъ плоскостей находится на бесконечно-маломъ разстояніи втораго порядка отъ той касательной плоскости, параллельно которой она проведена, и общій перпендикуляръ къ этимъ плоскостямъ пересѣчетъ ихъ въ двухъ точкахъ, которыя можно замѣнять одна другою; слѣдовательно, искомая касательная плоскость есть предѣлъ плоскости PQ_1R_1 , когда точки Q_1 и R_1 бесконечно приближаются къ точкѣ P . Принимая же во вниманіе, что геометрическимъ мѣстомъ оснований перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки O на всевозможныя плоскости, проведенныя черезъ точку A , есть шаровая поверхность, описанная на OA , какъ на діаметрѣ, а плоскость PQ_1R_1 , проведенная черезъ три бесконечно-близкія точки на этой поверхности, есть касательная къ ней въ предѣлѣ, заключаемъ, что искомая касательная плоскость касательна въ точкѣ P къ шаровой поверхности, описанной на OA , какъ на діаметрѣ.

Задача II. — Изъ некоторой неподвижной точки O опущены перпендикуляры на плоскости, касательныя къ данной поверхности, и каждый перпендикуляръ OP продолженъ до такой точки Q , что произведение $OP \cdot OQ$ равно данному квадрату a^2 ; найти плоскость, касательную къ поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ Q .

Разсуждая совершенно такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ, найдемъ, что искомая касательная въ точкѣ Q плоскость перпендикулярна къ прямой OA , соединяющей точку O съ точкою касанія той касательной плоскости, къ которой OQ перпендикулярна, и притомъ пересѣкаетъ прямую OA въ такой точкѣ B , что $OA \cdot OB = a^2$. Такимъ образомъ, данная поверхность и поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ точекъ Q , могутъ замѣнять одна другую, т.-е. если мы поступимъ со второю поверхностью такъ же, какъ съ первою, то получимъ эту послѣднюю; такія поверхности называются сопряженными.

Мы не станемъ приводить подробно всѣхъ разсужденій, не представляющихъ никакого затрудненія для тѣхъ, кто хорошо понялъ начало этой главы.

Задача III. — Дана поверхность S и построена друия поверхность S' такая, каждая точка которой связана съ соответственной ей касательною плоскостью къ поверхности S по одному определенному закону. Найти плоскость касательную въ некоторой точкѣ къ поверхности S' .

Пусть A есть точка на поверхности S , MN — касательная плоскость въ этой точкѣ и P — точка на поверхности S' , связанная съ плоскостью MN по определенному закону.

Искомая касательная плоскость проходитъ черезъ точку P и черезъ двѣ точки, Q и R , связанныя по тому же закону, какъ и точка P , съ плоскостями, касательными къ поверхности S въ двухъ точкахъ B и C , бесконечно-близкихъ къ A . Въмѣсто этихъ плоскостей, касательныхъ въ точкахъ B и C , можно взять плоскости, вмѣ параллельныя, проведенныя черезъ точку A и находящіяся отъ первыхъ (§ 16) на бесконечно-малыхъ разстоянїяхъ второго порядка, и замѣнить Q и R точками Q_1 и R_1 , соотвѣтствующими этимъ новымъ плоскостямъ. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что координаты какой-нибудь изъ этихъ точекъ при какомъ-угодно построенїи зависятъ отъ коэффициентовъ уравненїя той плоскости, съ которой эта точка связана, и что если эти коэффициенты измѣняются на бесконечно-малую величину второго порядка, то и соотвѣтственное измѣненїе координатъ будетъ бесконечно-малая того же порядка (§ 2).

А такъ какъ P , Q_1 , R_1 — три бесконечно-близкія точки, расположенныя на поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ, связанныхъ однимъ и тѣмъ же опредѣленнымъ построенїемъ со *всеми* плоскостями, проведенными черезъ точку A , то искомая касательная плоскость есть не что иное, какъ касательная плоскость къ этой послѣдней поверхности.

Отсюда видно, что плоскость, касательная къ поверхности S' , можетъ быть опредѣлена при помощи замѣны касательныхъ плоскостей къ поверхности S плоскостями, проходящими черезъ неподвижную точку. Такая замѣна устраняетъ всѣ трудности, проистекающія отъ бѣльшей или меньшей сложности данной поверхности.

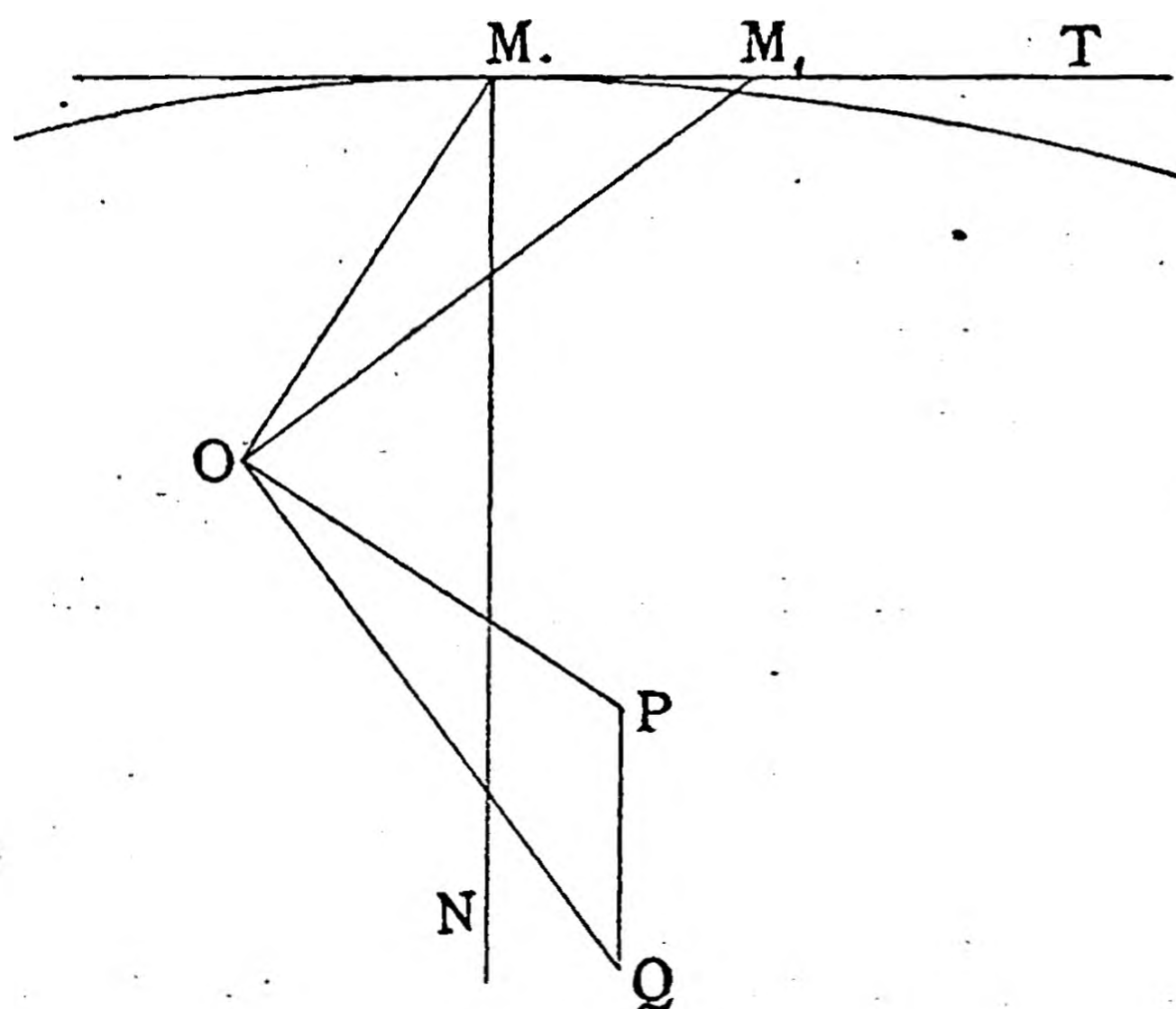
Это общее замѣчанїе содержитъ въ себѣ неявно рѣшенїе I и II задачъ и множества другихъ въ томъ же родѣ. Не мѣшаетъ всякій разъ имѣть въ виду, что совершенно произвольное построенїе, при помощи котораго получаютъ точки разсматриваемаго геометрическаго мѣста, не должно, однако, зависѣть отъ положенїя точки касанїя.

Если опустить, напр., изъ точки O перпендикуляръ OP на плоскость, касательную къ данной поверхности, и отложить на этомъ перпендикулярѣ длину OQ , равную разстоянїю OM точки O до точки касанїя, то плоскость, касательная къ геометрическому мѣсту построенныхъ такимъ образомъ точекъ Q , не можетъ быть получена по предыдущему способу, такъ какъ положенїе точки Q зависитъ не только отъ положенїя касательной плоскости, служащей для ея опредѣленїя, но также и отъ положенїя точки M , въ которой эта плоскость касается поверхности.

Задача IV.—Изъ неподвижной точки O проведенъ къ некоторой точкѣ M на данной поверхности S радиусъ векторъ OM (черт. 9), черезъ точку M проведена нормаль MN къ поверхности S и черезъ точку O , въ плоскости OMN , проведена прямая OP , перпендикулярная къ OM и равная ей по длине. Найти плоскость, касательную къ поверхности Σ , служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ P .

Пусть MT есть проэкция OM на плоскость, касательную къ поверхности S въ точкѣ M . Эта линїя, очевидно, касательна къ кривой пересѣченїя поверхности S плоскостью OMN . Предположимъ, что точка M перемѣщается по этой кривой; въ такомъ случаѣ можно допустить, пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, что она перейдетъ въ точку M_1 , расположенную на MT . Если бы нормаль въ M_1 къ поверхности S находилась въ плоскости OMN , то соотвѣтственная точка поверхности Σ лежала бы въ той же самой плоскости и была бы концомъ прямой PQ , пер-

пендикулярной къ MM_1 и равной ей по длинѣ. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что треуголь-
ники OMM_1 и OPQ были бы равны и имѣли бы взаимно-перпендикулярныя стороны.
А такъ какъ обѣ точки M и M_1 расположены на поверхности S , на бесконечно-ма-
ломъ разстояніи перваго порядка одна отъ другой, то нормаль въ M_1 составитъ какъ
съ нормалью въ M , такъ и съ плоскостью OMN , вообще, бесконечно-малый уголъ
перваго порядка; такимъ образомъ точка P_1 поверхности Σ , соответствующая M_1 , не
совпадетъ съ Q : она получится, если возставитъ къ OM_1 перпендикуляръ въ плоскости,
проходящей черезъ OM_1 и образующей съ плоскостью $OMNPQ$ бесконечно-малый



Черт. 9.

уголъ, и отложить на этомъ перпендикулярѣ $OP_1 = OM_1$. Ясно, что для полученія
этой прямой достаточно повернуть OQ , не измѣняя ея длины, на бесконечно-малый
уголъ вокругъ OM_1 ; при этомъ вращеніи точка Q опишетъ бесконечно-малую дугу
круга QP_1 , которая можетъ быть замѣнена, если пренебrecь бесконечно-малыми вто-
рого порядка, ея тангенсомъ, перпендикулярнымъ къ плоскости $QROMM_1$; слѣдова-
тельно, плоскость P_1QP перпендикулярна къ MT , а, значитъ, перпендикулярна къ
 MT и линія PP_1 , которая, соединяя двѣ бесконечно-близкія точки поверхности Σ , есть
касательная къ этой поверхности.

Докажемъ, что кака-нибудь вторая касательная къ поверхности Σ перпендику-
лярна къ MT .

Чтобы найти эту вторую касательную, предположимъ, что точка M перемѣ-
щается по поверхности S и приходитъ въ точку M_2 , служащую концомъ перпенди-
куляра MM_2 беконечно-малой длины, возставленнаго въ M къ плоскости OMM_1 .
Пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, можно допустить, что опредѣленная
такимъ образомъ точка M_2 принадлежитъ поверхности S , потому что линія MM_2 ,
будучи перпендикулярна къ плоскости OMN , перпендикулярна также къ нормали MN
и, значитъ, расположена въ касательной плоскости.

Чтобы построить точку поверхности Σ , соответствующую M_2 , нужно соединить
точку O съ M_2 и возставитъ къ OM_2 въ точкѣ O , въ неизвѣстной плоскости, про-
ходящей черезъ OM_2 и черезъ нормаль M_2N_2 къ поверхности S , перпендикуляръ
равный по длинѣ OM_2 . Каково бы ни было неизвѣстное направленіе нормали M_2N_2

этотъ перпендикуляръ, который мы назовемъ черезъ OP_2 , расположенъ въ плоскости Π , проведенной черезъ точку O перпендикулярно къ OM_2 ; далѣе, эта плоскость содержитъ OP и образуетъ съ плоскостью ROM уголъ, бесконечно-мало отличающійся отъ прямого; сверхъ того (§ 8), пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, имѣемъ:

$$OM_2 = OM,$$

и, слѣдовательно,

$$OP_2 = OP.$$

Такимъ образомъ точки P_2 и P лежатъ на окружности круга, описаннаго изъ точки O , какъ изъ центра, въ плоскости Π ; значитъ, бесконечно-малая линія PP_2 есть, въ этой плоскости, перпендикуляръ къ радіусу OP , и такъ какъ плоскость Π образуетъ съ плоскостью ROM уголъ, бесконечно-мало отличающійся отъ прямого, то направленіе PP_2 въ предѣлѣ перпендикулярно къ плоскости ROM и, слѣдовательно, перпендикулярно къ MT , что мы и высказали выше.

Итакъ, мы нашли двѣ касательныя къ поверхности Σ , перпендикулярныя къ MT ; поэтому, искомая касательная плоскость, проходящая чрезъ нихъ, также перпендикулярна къ MT .

Въ заключеніе можно сдѣлать одно любопытное замѣчаніе. Двѣ поверхности S и Σ могутъ замѣнять одна другую; иначе говоря, если мы рассмотримъ поверхность Σ какъ данную и поступимъ съ нею такъ же, какъ поступили съ поверхностью S , то получимъ эту послѣднюю. Въ самомъ дѣлѣ, ведя радіусъ векторъ OP и черезъ точку P нормаль къ поверхности Σ , замѣтимъ, что эта нормаль параллельна MT и что, поэтому, плоскость, проходящая черезъ эти двѣ линіи, есть какъ-разъ плоскость ROM ; значитъ, перпендикуляръ въ этой плоскости къ OP въ точкѣ M есть OM , и если мы отложимъ на немъ длину, равную OP , то получимъ точку M .

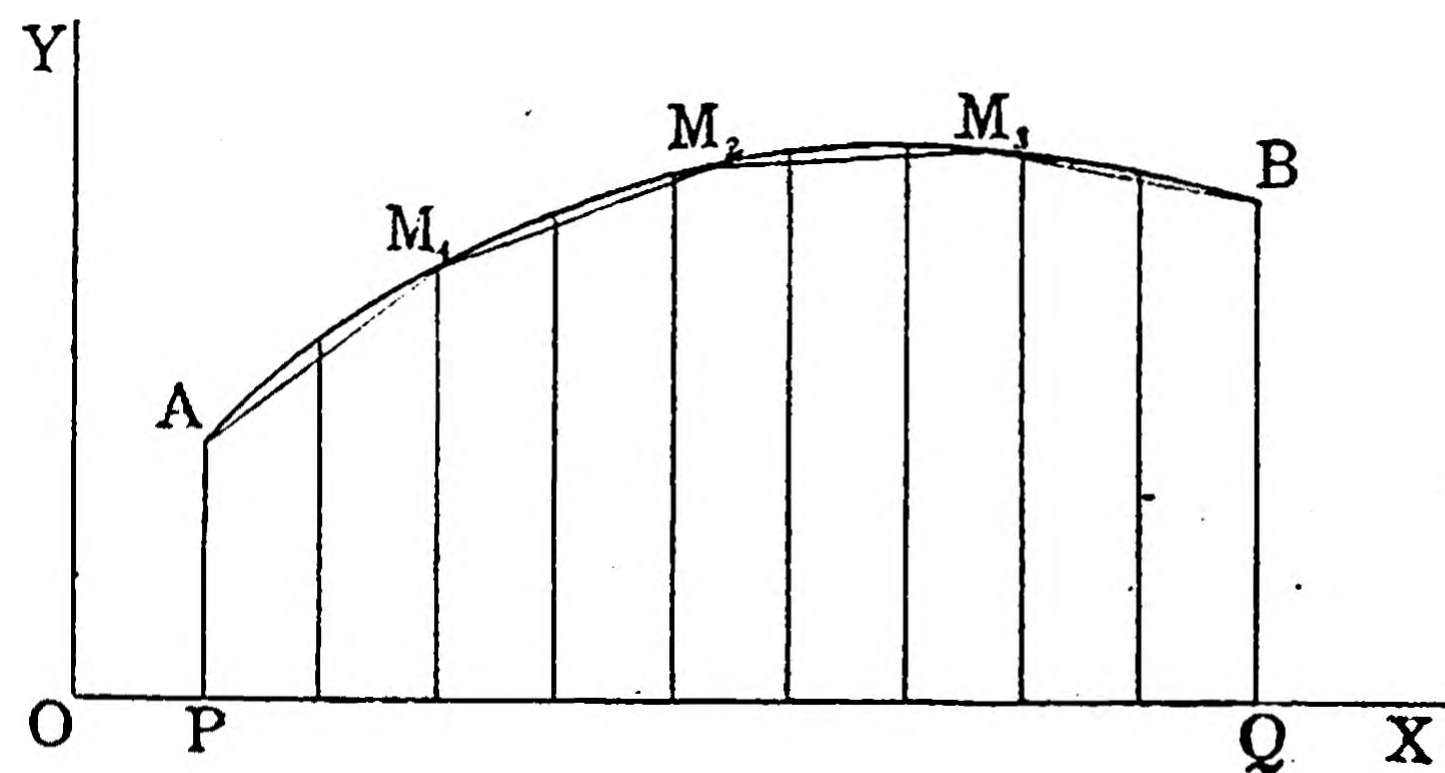
Длина дугъ нѣкоторыхъ кривыхъ

§ 18. При вычисленіи суммы бесконечно-малыхъ можно, не измѣняя предѣла (§ 11), отбрасывать бесконечно малыя порядка высшаго, чѣмъ каждая изъ разсматриваемыхъ величинъ. Этотъ принципъ часто употребляется въ исчисленіи бесконечно-малыхъ. Приложимъ его къ опредѣленію длины дугъ нѣкоторыхъ кривыхъ.

Разсмотримъ длину дуги нѣкоторой кривой, какъ предѣлъ, къ которому приближается периметръ вписаннаго многоугольника при безпредѣльномъ уменьшеніи его сторонъ. Не трудно замѣтить, что такое опредѣленіе вполне справедливо и что предѣлъ не зависитъ отъ закона, по которому увеличивается число сторонъ вписаннаго многоугольника.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть AB (черт. 10) есть дуга нѣкоторой кривой. Отнесемъ ее къ двумъ прямоугольнымъ осямъ OX , OY и раздѣлимъ на бесконечно-большое число равныхъ частей отрѣзокъ PQ оси X -овъ, на которую она проектирована. Если вписать въ дугу AB два различныхъ многоугольника, но оканчивающихся оба въ точкахъ A и B , то предѣлы периметровъ этихъ многоугольниковъ будутъ равны, потому что отношеніе бесконечно-малыхъ частей между двумя параллелями оси Y -овъ, проведенными черезъ двѣ послѣдовательныя точки дѣленія, въ предѣлѣ равно еди-

ницѣ. Дѣйствительно, эти двѣ бесконечно-малыя части многоугольниковъ имѣютъ однѣ и тѣ же проэкции на оси X -овъ и каждая изъ этихъ проэцій, очевидно, равна суммѣ проэктированныхъ длинъ, умноженной на нѣкоторое среднее значеніе косинусовъ угловъ, образуемыхъ съ осью различными сторонами или частями сторонъ, составляющими рассматриваемую часть периметра; углы же эти бесконечно-мало отли-



Черт. 10.

чаются отъ угловъ, образуемыхъ съ осью касательными, проведенными въ соответственной точкѣ дуги AB . Итакъ, отношеніе длинъ, которыя, будучи умножены хотя и на конечные косинусы, но между собою различающіеся на бесконечно-малую величину, даютъ одно и то же произведеніе, въ предѣлѣ, очевидно, равно единицѣ.

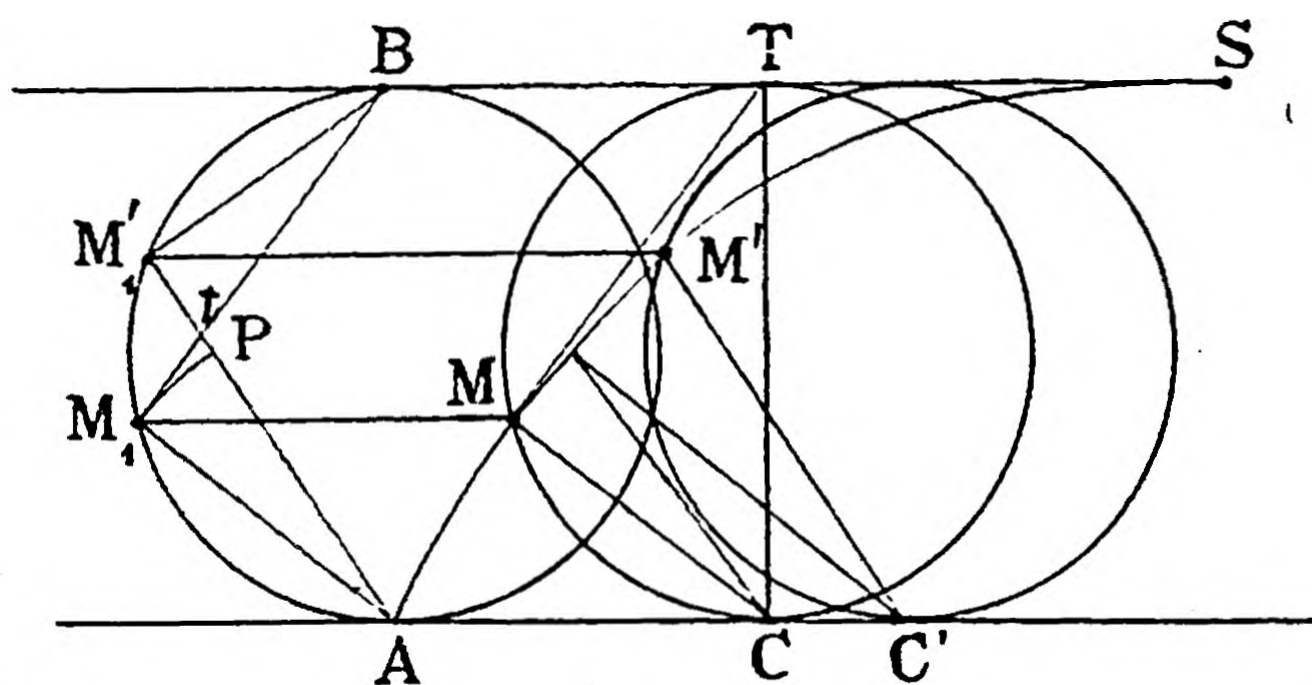
§ 19. Разность между дугою нѣкоторой кривой и ея хордою, на основаніи предыдущаго, есть бесконечно-малая третьяго порядка, когда самая дуга принимается за бесконечно-малую перваго порядка.

Чтобы доказать это, рассмотримъ бесконечно-малую дугу AMB и ея хорду AB . Дуга AMB , по опредѣленію, есть предѣлъ вписаннаго многоугольника, число сторонъ котораго возрастаетъ безпредѣльно. Если спроектировать каждую изъ этихъ сторонъ на хорду AB , то сумма проэцій будетъ сама хорда AB ; но такъ какъ проэція каждой стороны равна длинѣ этой стороны, умноженной на косинусъ угла, образуемаго ею съ AB , и такъ какъ этотъ уголъ есть бесконечно-малая перваго порядка и, слѣдовательно, разность между его косинусомъ и единицею есть бесконечно-малая втораго порядка, что, очевидно, вытекаетъ изъ формулы $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2}x$, то, замѣняя вписанный многоугольникъ его проэціею AB , мы слѣлаемъ ошибку, равную суммѣ его сторонъ, умноженныхъ соответственно на бесконечно-малыя втораго порядка. Итакъ, эта ошибка равна бесконечно-малому периметру многоугольника, умноженному на нѣкоторую среднюю величину изъ бесконечно-малыхъ втораго порядка; значитъ, сама она есть бесконечно-малая третьяго порядка.

§ 20. Дуга циклоиды.—Разсужденія, съ помощію которыхъ мы сумѣемъ опредѣлить тангенсъ въ любой точкѣ циклоиды, дадутъ намъ возможность вычислить длину какой-угодно дуги этой кривой.

Пусть AB (черт. 11) есть положеніе катящагося круга въ тотъ моментъ, когда производящая точка находится на неподвижной прямой, а M и M' —двѣ бесконечно-близкія точки, соответствующія положеніямъ подвижнаго круга въ тѣ моменты, когда онъ касается неподвижной прямой соответственно въ точкахъ C и C' . Мы ви-

дѣли (§ 14), что для перемѣщенія точки M циклоиды въ точку M' можно подвергнуть ее двумъ послѣдовательнымъ вращеніямъ на одинъ и тотъ же уголъ, 1) вокругъ точки C и 2) вокругъ точки, находящейся на бесконечно-маломъ разстояніи третьяго порядка отъ точки C' , а затѣмъ перенести ее на бесконечно-малое разстояніе третьяго порядка параллельно CC' . Изъ доказанныхъ выше теоремъ вытекаетъ, что бесконечно-малымъ перемѣщеніемъ третьяго порядка можно пренебречь и что обѣ круговыя дуги можно разсматривать какъ дуги одного радіуса и, слѣдовательно, считать ихъ равными; измѣняя такимъ образомъ длину пути MM' , мы на самомъ дѣлѣ отбрасываемъ только бесконечно-малую часть ея истиннаго значенія, и предѣлъ суммы бесконечно-малыхъ дугъ остается безъ измѣненія. Итакъ, вычислимъ круговую дугу радіуса CM , соответственный центральный уголъ которой (§ 14, Задача V) измѣряется, въ производящемъ кругѣ, половиною дуги, равной CC' . Проведемъ, теперь, черезъ точки M и M' прямыя, параллельныя основанію: онѣ встрѣтятъ первоначальное положеніе производящаго круга въ такихъ двухъ точкахъ M_1 и M_1' , что дуга M_1M_1' , по самому образованію циклоиды, окажется равной CC' и, значитъ, уголъ M_1AM_1' будетъ равнымъ



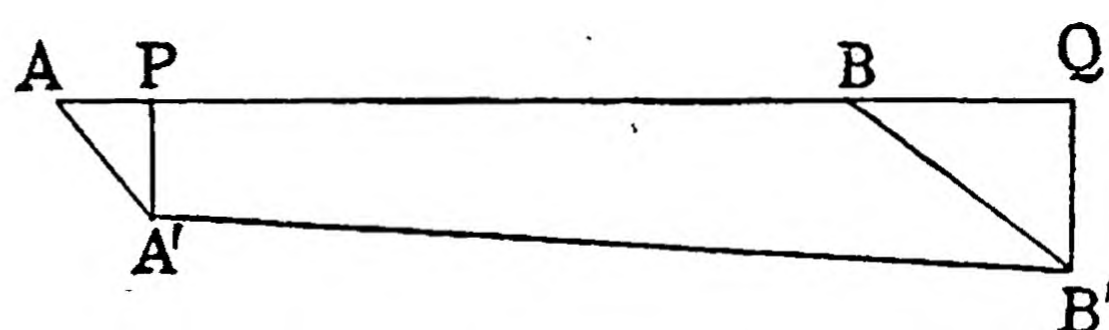
Черт. 11.

центральному углу дуги, которую мы хотимъ вычислить; кромѣ того, замѣчая, что радіусъ этой дуги равенъ M_1A , мы можемъ замѣнить бесконечно-малую дугу MM' циклоиды удвоенною дугою M_1P , описанною изъ точки A , какъ изъ центра, и заключающеюся между AM_1 и AM_1' . Соединяя точку M_1 съ точкою B , діаметрально противоположною точкѣ A на производящемъ кругѣ, увидимъ, что BM_1 есть касательная къ M_1P и что часть M_1t этой прямой, заключенная между AM_1 и AM_1' , можетъ замѣнить дугу M_1P . А такъ какъ прямая BM_1' , перпендикулярная къ AM_1' , равна Bt (§ 8), если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка, то отрезокъ M_1t можетъ быть замѣненъ разностью $BM_1 - BM_1'$ и дугу циклоиды можно считать равною удвоенной этой разности. Отсюда слѣдуетъ, что если мы станемъ такимъ же образомъ вычислять бесконечно-малыя дуги, содержащіяся между точкою M и высшею точкою S разсматриваемой кривой, то ихъ сумма, т.-е. дуга MS , будетъ равна удвоенной суммѣ послѣдовательныхъ уменьшеній, претерпѣваемыхъ линіей BM_1 при ея измѣненіи отъ BM_1 до нуля, иначе говоря, будетъ равна $2BM_1$, или, что то же самое, удвоенной части касательной MT , заключающейся между точкою M и касательною въ вершинѣ.

§ 21. Измѣненіе длины прямой линіи.—Когда прямая перемѣщается въ пространствѣ и заняла какое-нибудь новое положеніе, то измѣненіе ея длины есть сумма измѣненій,

претерпѣваемыхъ ею при каждомъ изъ бесконечно-малыхъ перемѣщеній, изъ которыхъ въ ихъ послѣдовательномъ порядкѣ и можетъ бѣть составлено все перемѣщеніе. Мы сейчасъ изложимъ одну весьма полезную теорему, при помощи которой можно получить выраженіе для такихъ бесконечно-малыхъ измѣненій, пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка.

Пусть AB и $A'B'$ (черт. 12) два бесконечно-близкихъ положенія, образующихъ (§ 6) между собою бесконечно-малый уголъ перваго порядка, косинусъ котораго отличается отъ единицы на бесконечно-малую второго порядка. Пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, мы можемъ прямую $A'B'$ считать равною ея проэкции PQ на AB и, слѣдовательно, разность $A'B' - AB$ считать равною $PQ - AB$, т.-е. $QB - AP$,



Черт. 12.

или $BB' \cos B'BQ - AA' \cos A'AP$, или, наконецъ, *сумма* перемѣщеній прямыхъ AA' и BB' , при вращеніи ихъ около точекъ A и B , умноженныхъ соответственно на косинусы угловъ, образуемыхъ ими съ прямою AB , причемъ направленіе AB принимается отъ A къ B для перемѣщенія BB' и отъ B къ A для перемѣщенія AA' .

Отмѣтимъ два замѣчательныхъ случая.

Когда прямая остается постоянно нормальною къ линіи, пробѣгаемой однимъ изъ ея концовъ, то членъ, пропорціональный перемѣщенію этого конца, будетъ содержать множителемъ косинусъ прямого угла и, слѣдовательно, будетъ равенъ нулю; отсюда заключаемъ, что бесконечно-малое приращеніе длины въ этомъ случаѣ приведетъ къ одному только члену.

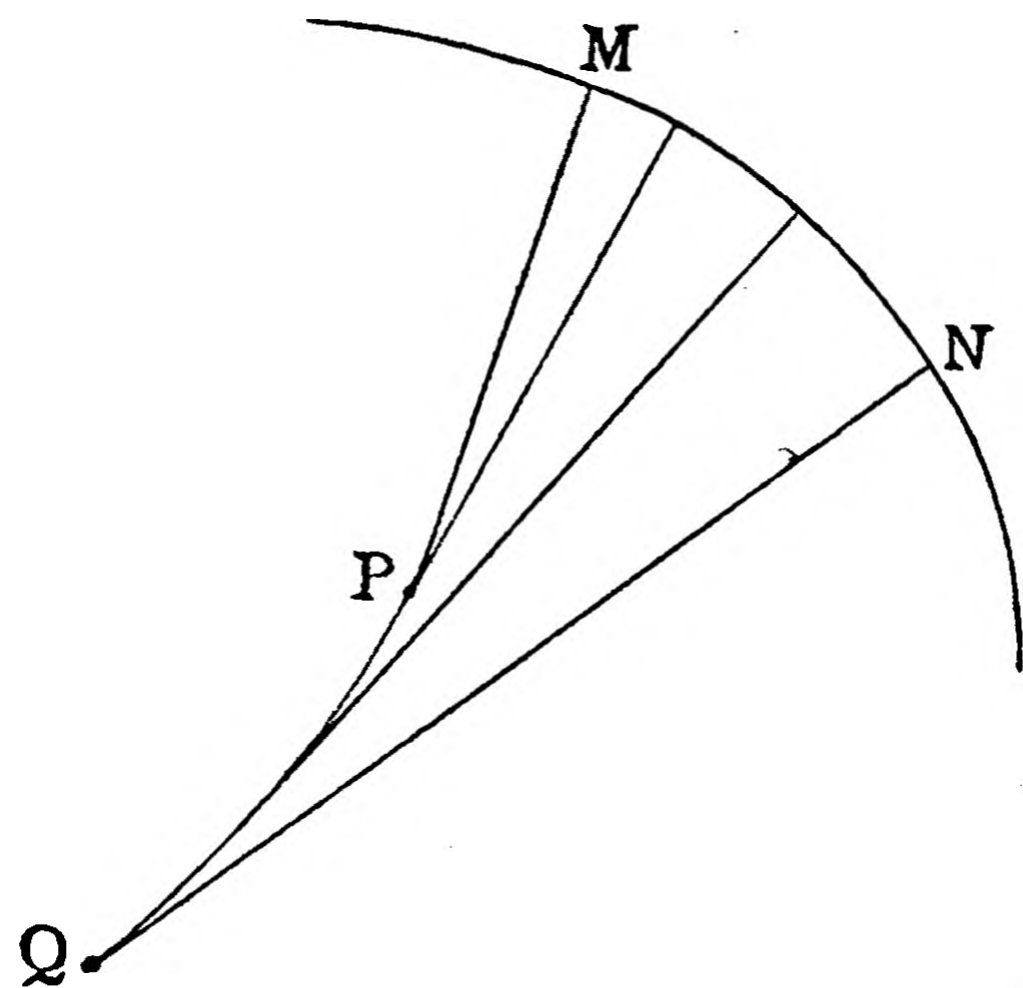
Когда прямая остается постоянно касательною къ кривой, пробѣгаемой однимъ изъ ея концовъ, то членъ, пропорціональный перемѣщенію этого конца будетъ содержать множителемъ косинусъ угла, равнаго нулю, и приведетъ, слѣдовательно, къ самому перемѣщенію, т.-е. къ бесконечно-малой дугѣ кривой, къ которой разсматриваемая прямая остается касательною.

§ 22. Дуга эволюты. — Два предыдущихъ случая могутъ представиться одновременно. Разсмотримъ такія двѣ кривыя, что касательныя къ одной изъ нихъ будутъ нормальными къ другой; прямая MP (черт. 13), оставаясь нормальною къ первой кривой и касательною ко второй, перемѣщается изъ положенія MP въ положеніе NQ такимъ образомъ, что ея приращеніе, равное, по предыдущему, суммѣ элементарныхъ дугъ, составляющихъ дугу PQ , будетъ сама дуга PQ ; слѣдовательно,

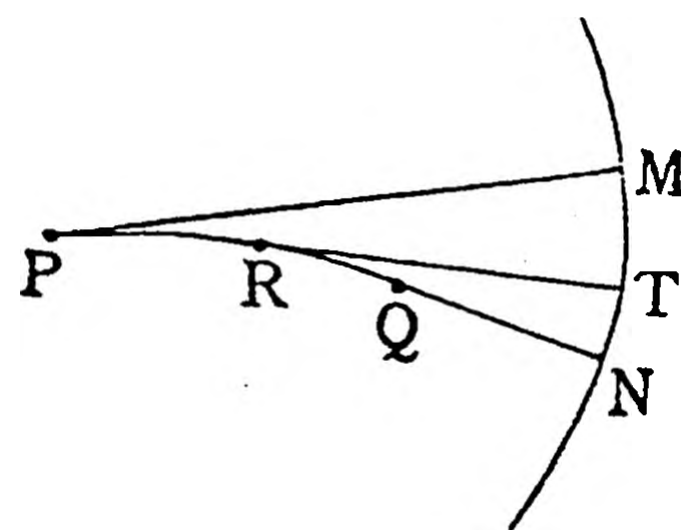
$$\text{дуга } PQ = NQ - MP.$$

Обратно, если мы рассмотримъ какую-нибудь кривую PQ (черт. 14) и отложимъ на каждой касательной RT длину RT , равную нѣкоторой постоянной, увеличенной на дугу RQ , отдѣляющей точку касанія отъ неподвижной точки Q , то всѣ касательныя къ разсматриваемой кривой будутъ нормальными къ кривой MTN , представляющей

геометрическое мѣсто точекъ T . Дѣйствительно, когда линия QN , совпадая последовательно съ различными касательными определенной длины, займетъ конечное положеніе RT , все ея приращеніе будетъ равно, по предположенію, дугѣ RQ , т.-е. суммѣ бесконечно-малыхъ членовъ, пропорціональныхъ перемѣщенію конца Q , въ общемъ выраженіи элементарнаго приращенія. Отсюда слѣдуетъ, что остальные члены, про-



Черт. 13.



Черт. 14.

порціональные перемѣщеніямъ конца N , въ суммѣ постоянно должны давать нуль и, слѣдовательно, должны быть равными нулю; для этого же необходимо, чтобы былъ равенъ нулю косинусъ, на который умножается перемѣщеніе точки N и, значить, чтобы подвижная прямая составляла постоянно прямой уголъ съ тою кривою, которую описываетъ ея конецъ.

Изученіе такихъ кривыхъ, какъ PRQ и MTN , для первой изъ которыхъ служатъ касательными всѣ нормали второй, играетъ весьма важную роль въ геометріи. Мы разсматриваемъ ихъ здѣсь, какъ простой примѣръ *спрямляемыхъ* кривыхъ. Прибавимъ еще, что первая изъ нихъ, PRQ , называется *эволютою* второй кривою MTN , а кривая MTN называется *эвольвентою* PRQ . Изъ предыдущаго, очевидно, вытекаетъ, что кривая имѣетъ только одну эволюту и, наоборотъ, безчисленное множество эвольвентъ. Мы вернемся впослѣдствіи къ этой важной теоріи и остановимся на ней тогда болѣе подробно.

УПРАЖНЕНІЯ

1. Какова бы ни была функція $\varphi(x)$ отъ переменной x , выраженіе

$$\varphi(x + 2h) - 2\varphi(x + h) + \varphi(x),$$

гдѣ h —бесконечно-малая первого порядка, есть бесконечно-малая второго порядка.

2. Дана плоская кривая и соприкасающійся съ нею кругъ въ вѣкоторой точкѣ; доказать, что отрѣзокъ прямой, параллельной общей касательной, заключенный между обѣими кривыми, есть бесконечно-малая второго порядка, если разстоянія точки касанія до обѣихъ точекъ пересѣченія—бесконечно-малыя первого порядка.

3. Если изъ точки O , расположенной въ плоскости вѣкоторой плоской кривой, опустить перпендикуляры на касательныя къ этой кривой и на каждомъ изъ нихъ отложить отъ точки O лѣвую, пропорціональную его длинѣ, если точно такъ же поступить съ вновь полученною кривою и повторить это построеніе неопредѣленное число разъ, то предѣльная кривая, соответствующая безчислен-

ному множеству такихъ дѣйствій, пересѣчетъ всѣ радіусы-векторы, исходящіе изъ точки O , подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

4. Изъ точки O , расположенной въ плоскости нѣкоторой плоской кривой, проведены радіусы-векторы къ точкамъ этой кривой и каждый изъ нихъ продолженъ за данную кривую на постоянную длину. Найти касательную къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ, и доказать, что нормаль къ этой кривой, нормаль въ соотвѣтственной точкѣ къ данной кривой и перпендикуляръ къ радіусу-вектору, проведенному черезъ точку O , сходятся въ одной точкѣ.

5. Изъ точки O , расположенной въ плоскости нѣкоторой плоской кривой, проведены радіусы-векторы къ различнымъ точкамъ этой кривой и на каждомъ изъ нихъ отъ точки O отложена длина, обратно-пропорціональная длинѣ радіуса; найти касательную къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ. Доказать, что если двѣ данныя кривыя пересѣкаются подъ какимъ-нибудь угломъ, то подъ тѣмъ же угломъ пересѣкаются и кривыя, построенныя по указанному способу.

6. Если всѣ касательныя плоскости къ нѣкоторой поверхности касаются ея по линіямъ, то эти линіи непремѣнно прямыя.

7. Изъ неподвижной точки O проведены радіусы-векторы къ различнымъ точкамъ нѣкоторой поверхности и на каждомъ изъ нихъ отложена отъ точки O длина обратно-пропорціональная длинѣ радіуса-вектора; найти плоскость, касательную къ поверхности, представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ.

Нормали въ соотвѣтственныхъ точкахъ къ обѣимъ поверхностямъ пересѣкаются между собою.

Если двѣ данныя поверхности пересѣкаются подъ нѣкоторымъ угломъ, то подъ тѣмъ же угломъ пересѣкаются и поверхности, построенныя по указанному способу.

8. Разсматриваются на плоскости двѣ какія-нибудь кривыя и за соотвѣтственныя точки приняты точки, въ которыхъ касательныя параллельны; если черезъ неподвижную точку провести прямыя, равныя и параллельныя прямымъ, соединяющимъ двѣ соотвѣтственныя точки, то касательная къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ, параллельна касательнымъ къ даннымъ кривымъ въ соотвѣтственныхъ точкахъ, и дуга этой кривой есть сумма или разность дугъ, соотвѣтствующихъ ей на данныхъ кривыхъ.

9. Доказать посредствомъ рассужденій, подобныхъ тѣмъ, какими мы пользовались (§ 20) при нахожденіи дуги циклоиды, что площадь, заключенная между циклоидою и ея основаніемъ, втрое больше площади производящаго круга.

10. Если какая-нибудь плоская кривая катится безъ скольженія по неподвижной прямой, то точка плоскости, связанная неизмѣнно съ этою кривою и увлекаемая послѣднею въ ея движеніи, описываетъ такую кривую, нормаль къ которой въ какой-нибудь точкѣ проходитъ черезъ точку касанія неподвижной прямой съ соотвѣтственнымъ положеніемъ катящейся кривой.

11. Если изъ точки O , расположенной въ плоскости нѣкоторой кривой, опустить перпендикуляры на касательныя къ этой кривой, то длина дуги кривой, представляющей геометрическое мѣсто основаній этихъ перпендикуляровъ, равна длинѣ дуги кривой, описываемой точкою O , связанной неизмѣнно съ данною кривою, въ то время какъ соотвѣтственная дуга послѣдней катится безъ скольженія по неподвижной прямой.

ГЛАВА ВТОРАЯ

Производныя и дифференціалы перваго порядка

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 23. Мы уже видѣли (§ 2), что если $\varphi(x)$ обозначаетъ какую-нибудь функцію отъ переменнѣй x , то выраженіе

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

т.-е. отношеніе приращенія функціи къ приращенію переменнѣй, имѣетъ, при h безконечно-маломъ, опредѣленный предѣлъ для каждаго значенія x . Этотъ предѣлъ, представляющій также функцію отъ x , называется производною отъ $\varphi(x)$ и часто обозначается такъ же, какъ и первообразная функція, но только со значкомъ наверху. Итакъ,

$\varphi'(x)$ есть производная отъ $\varphi(x)$.

§ 24. Если разсматривать функцію $\varphi(x)$, какъ ординату нѣкоторой кривой, заданной въ прямолинейныхъ координатахъ посредствомъ уравненія $y = \varphi(x)$, то производная $\varphi'(x)$ есть угловой коэффициентъ касательной къ этой кривой. Въ самомъ дѣлѣ, отношеніе

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

есть угловой коэффициентъ хорды, соединяющей двѣ точки, абсциссы которыхъ суть x и $x+h$; слѣдовательно, предѣлъ этого отношенія есть коэффициентъ касательной, служащей предѣльнымъ положеніемъ упомянутой хорды.

Покажемъ, какъ можно вычислять производныя отъ функцій, заданныхъ явно посредствомъ знаковъ, обычно употребляемыхъ въ элементарномъ анализѣ.

Производныя отъ простыхъ функцій

§ 25. Нѣкоторыя изъ функцій, употребляемыхъ въ анализѣ, носятъ названіе *простыхъ* функцій. Число ихъ можетъ быть увеличено или уменьшено, до нѣкоторой

степени, по нашему произволу. Дѣйствительно, эти простыя функціи таковы, что къ нимъ приводятся другія и посредствомъ комбинированія ихъ образуются *сложныя* функціи; поэтому, можетъ случиться, смотря по точкѣ зрѣнія, что одна и та же функція разсматривается то какъ простая, то какъ сложная. Приведемъ для примѣра функціи $\sin x$ и $\cos x$, которыя весьма часто разсматриваются въ анализѣ и которыя мы сами будемъ разсматривать, какъ простыя; тѣмъ не менѣе, каждая изъ формулъ:

$$\begin{aligned}\cos x &= \sqrt{1 - \sin^2 x}, \\ \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\end{aligned}$$

выражающая $\cos x$ посредствомъ дѣйствій, куда входитъ символъ *sinus*, даетъ возможность разсматривать косинусъ не какъ простую функцію. Какъ бы то ни было, мы будемъ принимать за простыя слѣдующія функціи: x^m (при m цѣломъ), a^x , $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ и $\tan x$. Отыщемъ сначала ихъ производныя, а затѣмъ дадимъ общія теоремы, посредствомъ которыхъ можно было бы выводить производныя отъ всѣхъ явныхъ функцій.

§ 26. Производная отъ x^m . — Первая изъ простыхъ функцій, встрѣчающаяся въ алгебрѣ, есть x^m ; отъ нея мы прежде всего и отыщемъ производную, предполагая, что показатель m — цѣлый и положительный. Функція x^m при m дробномъ можетъ быть разсматриваема такъ же, какъ простая функція, но для насъ будетъ выгоднѣе свести этотъ болѣе общій случай къ случаю, когда m — цѣлое.

Производная отъ x^m , по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

при h стремящемся къ нулю; но такъ какъ m — цѣлое, то эта дробь равна

$$\frac{m h x^{m-1} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} h^2 x^{m-2} + \dots}{h}$$

Выполняя дѣленіе на h и полагая затѣмъ $h=0$, находимъ, что предѣлъ этой дроби есть $m x^{m-1}$. Итакъ, *производная отъ x^m есть $m x^{m-1}$.*

§ 27. Производная отъ a^x . — Производная отъ a^x , по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

при h стремящемся къ нулю, но такъ какъ, очевидно,

$$a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1),$$

то производная есть предѣлъ отношенія

$$a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}. \quad (A)$$

Полагаемъ $a^h - 1 = \alpha$ и, слѣдовательно, $a^h = 1 + \alpha$, $h \log a = \log(1 + \alpha)$; выраженіе (A) преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$a^x \frac{a \log a}{\log(1 + \alpha)} = \frac{a^x \log a}{\frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha)} = \frac{a^x \log a}{\log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (B)$$

Когда h стремится къ нулю, α , равное $a^h - 1$, стремится также къ нулю; значитъ, $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ въ предѣлѣ есть основаніе неперовыхъ логарифмовъ, обозначаемое обыкновенно буквою e ; такимъ образомъ, выраженіе (B) имѣетъ предѣломъ $a^x \frac{\log a}{\log e}$ и производная отъ a^x есть $a^x \frac{\log a}{\log e}$.

Основаніе системы, въ которой взяты оба логарифма, произвольно и не вліяетъ на ихъ отношеніе, въ какомъ видѣ они только и входятъ въ полученное выраженіе. Если a равно e , то отношеніе логарифмовъ будетъ единица, и, значитъ, производная отъ e^x есть e^x .

§ 28. Производная отъ $\log x$. — Производная отъ функціи $\log x$, по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія $\frac{\log(x+h) - \log x}{h}$ при h стремящемся къ нулю. Пишемъ:

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}. \quad (C)$$

Полагаемъ $\frac{h}{x} = \alpha$, $h = \alpha x$; предыдущее выраженіе преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\log(1 + \alpha)}{\alpha x} = \frac{1}{x} \log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

При h стремящемся къ нулю $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ въ предѣлѣ дастъ e и выраженіе (C) будетъ имѣть предѣломъ $\frac{\log e}{x}$; итакъ, производная отъ $\log x$ есть $\frac{\log e}{x}$.

Логарифмъ, взятый по основанію e , обозначаютъ обыкновенно черезъ $\ln x$; въ такомъ случаѣ производная отъ $\ln x$ есть $\frac{1}{x}$.

§ 29. Производная отъ $\sin x$. — Производная отъ $\sin x$, по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Преобразовываемъ это выраженіе:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

и замѣчаемъ, что по известной теоремѣ предѣломъ $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ при h стремящемся къ нулю

будетъ единица, а второй множитель въ предѣлѣ обратится въ $\cos x$; слѣдовательно, производная отъ $\sin x$ есть $\cos x$.

§ 30. Производная отъ $\cos x$. — Производная отъ $\cos x$, по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}.$$

Преобразовываемъ это выраженіе:

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \sin \left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

и замѣчаемъ, что предѣлъ $\frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h}$ есть единица, а слѣдовательно, предѣлъ всего выраженія есть $-\sin x$; итакъ, производная отъ $\cos x$ есть $-\sin x$.

§ 31. Производная отъ $\tan x$. — Такъ какъ функція $\tan x$ равна $\frac{\sin x}{\cos x}$, то ее можно не причислять къ простымъ функціямъ, но можно ее производную получить и непосредственно, болѣе легкимъ путемъ. Эта производная, по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія

$$\frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \frac{\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x}{h} = \frac{\tan h (1 + \tan^2 x)}{h (1 - \tan x \tan h)},$$

зная же, что предѣлъ $\frac{\tan h}{h}$ при h стремящемся къ нулю есть единица, заключаемъ, что это послѣднее выраженіе стремится къ $1 + \tan^2 x$ или, что одно и то же, къ $\frac{1}{\cos^2 x}$; итакъ, производная отъ $\tan x$ есть $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Производныя отъ обратныхъ функцій

§ 32. Когда двѣ переменныя связаны уравненіемъ, то каждая изъ нихъ можетъ быть рассматриваема какъ функція отъ другой. Если, напр., дано, что

$$x = \psi(y),$$

то можно, рѣшивъ это уравненіе относительно y , представить его въ видѣ:

$$y = \varphi(x),$$

гдѣ знакъ φ обозначаетъ функцію обратную той, которая была обозначена знакомъ ψ . Поэтому, если мы возьмемъ какую-нибудь функцію отъ переменной, а затѣмъ обратную отъ результата, то эти два дѣйствія взаимно уничтожатся и мы придемъ снова къ самой переменной. Такимъ образомъ, удерживая предыдущія обозначенія, можемъ написать:

$$\begin{aligned} \varphi[\psi(y)] &= \varphi(x) = y, \\ \psi[\varphi(x)] &= \psi(y) = x. \end{aligned}$$

Примѣры. — Если дано, что

$$x = y^2,$$

то

$$y = \sqrt{x};$$

слѣдовательно, квадратный корень есть обратная функція отъ второй степени; кромѣ того, очевидно, что эти два дѣйствія взаимно уничтожаются, если ихъ выполнить въ послѣдовательномъ порядкѣ.

Если дано, что

$$x = e^y,$$

то

$$y = \ln x;$$

слѣдовательно, логарифмъ есть обратная функція степени; кромѣ того, согласно съ общимъ замѣчаніемъ,

$$\ln e^x = x.$$

§ 33. Зная производную отъ нѣкоторой функціи, можно найти производную и отъ функціи, ей обратной. Пусть x есть функція отъ y , опредѣляемая уравненіемъ

$$x = \varphi(y),$$

и предположимъ, что это уравненіе даетъ:

$$y = \psi(x).$$

Производная $\varphi'(y)$, т.-е. производная отъ x , взятая по y , есть предѣлъ отношенія приращенія x къ соответственному приращенію y , иначе говоря, производная $\varphi'(y)$ есть предѣлъ отношенія $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, гдѣ Δx обозначаетъ приращеніе x , а Δy —соответственное приращеніе y ; этими обозначеніями мы будемъ пользоваться весьма часто.

Производная $\psi'(x)$, т.-е. производная отъ y , взятая по x , есть предѣлъ отношенія приращенія y къ соответственному приращенію x , иначе говоря, есть предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, и такъ какъ переменныя x и y тѣ же самыя, что и въ предыдущемъ случаѣ, то отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ имѣютъ предѣлы, обратные другъ другу; итакъ,

$$\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Это равенство даетъ намъ производную отъ функціи ψ .

§ 34. Покажемъ, какъ вышеизложенное примѣняется на примѣрахъ.

Пусть

$$x = y^m;$$

отсюда

$$y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}.$$

Слѣдовательно, производная отъ функціи $x^{\frac{1}{m}}$, взятая по x , есть обратная производной отъ y^m , взятой по y , т.-е. равна $\frac{1}{my^{m-1}}$; замѣняя здѣсь y его величиной, находимъ,

что эта производная есть $\frac{1}{mx^{\frac{m-1}{m}}}$, или, что одно и то же, $\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$.

Итакъ, производная отъ $x^{\frac{1}{m}}$ есть $\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$, гдѣ m есть какое-угодно цѣлое число.

Разсмотримъ еще

$$x = \sin y.$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ:

$$y = \arcsin x;$$

поэтому производная отъ $\arcsin x$, взятая по x , есть обратная производной отъ $\sin y$, взятой по y , т.-е. равна $\frac{1}{\cos y}$, или, что одно и то же, $\frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Полагая

$$x = \cos y,$$

мы точно также нашли бы, что производная отъ $\arccos x$ есть $\frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Этотъ весьма важный результатъ требуетъ нѣкоторыхъ поясненій.

Функция $\sin x$ есть вполне опредѣленная функция, т.-е. такая функция, которая для каждаго значенія x имѣетъ единственное и опредѣленное значеніе; нельзя того же сказать про функцию $\arcsin x$. Дѣйствительно, одному и тому же синусу соотвѣтствуетъ безчисленное множество различныхъ дугъ и если α обозначаетъ одну изъ нихъ, то остальные заключаются въ формулахъ $2K\pi + \alpha$ и $(2K+1)\pi - \alpha$, гдѣ K есть произвольное цѣлое число; изъ сказаннаго заключаемъ, что въ общемъ выраженіи ихъ производной долженъ стоять двойной знакъ \pm . Если же приходится, въ частномъ случаѣ, разсматривать одну изъ дугъ, выражаемыхъ символомъ $\arcsin x$, то опредѣленіе знака производной не представляетъ никакой трудности. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$x = \sin y,$$

находимъ, что производная отъ y , взятая по x , есть $\frac{1}{\cos y}$ и что въ этомъ выраженіи нѣтъ никакой двойственности. Вопросъ о двойномъ знакѣ \pm можетъ представиться только въ томъ случаѣ, когда $\cos y$ замѣняется черезъ $\pm \sqrt{1-x^2}$, причемъ видно, что знакъ радикала долженъ совпадать со знакомъ $\cos y$. Точно такъ же, если

$$x = \cos y,$$

то

$$y = \arccos x,$$

и производная отъ y , взятая по x , есть $-\frac{1}{\sin y}$, т.-е. $-\frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$, причемъ знакъ этого выраженія противоположенъ знаку $\sin y$.

Пусть

$$x = \tan y$$

и, значитъ,

$$y = \arctan x.$$

Производная отъ y , взятая по x , есть, слѣдовательно,

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Здѣсь нѣтъ двойственности, такъ какъ дуги съ однимъ и тѣмъ же тангенсомъ содержатся въ общемъ выраженіи $K\pi + \alpha$ и, значитъ, отличаются одна отъ другой на постоянную величину, что на производную не вліяетъ.

§ 35. Введеніе обратныхъ функцій даетъ возможность производныя отъ функцій a^x и $\log x$, полученные отдѣльно, вывести одну изъ другой.

Если

$$x = a^y,$$

то

$$y = \log x.$$

Слѣдовательно, производная отъ $\log x$, взятая по x , есть обратная производной отъ a^y , взятой по y , т. е., если логарифмы взяты по основанію a , то

$$\frac{\log e}{a^y} = \frac{\log e}{x}.$$

Производныя функцій отъ функцій

§ 36. Если буква u обозначаетъ данную функцію отъ переменнѣй x , то всякая функція отъ u будетъ функціей отъ x ; поэтому, такія функціи получили названіе *функцій отъ функцій*.

Такъ, напр., если

$$u = \varphi(x), \quad y = F(u),$$

то y , разсмотрѣнная въ зависимости отъ x , есть *функція отъ функцій*.

Покажемъ, что если функціи φ и F таковы, что мы можемъ составить ихъ производныя, то мы можемъ также составить производную отъ y по x .

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что переменнѣй x придано приращеніе Δx и что вслѣдствіе этого получилось

для u приращеніе Δu ,

для y приращеніе Δy .

Пишемъ тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

и переходимъ къ предѣлу, приближая Δx къ нулю; первая часть этого равенства, по опредѣленію, въ предѣлѣ дастъ производную отъ y по x , два же множителя второй части будутъ стремиться соотвѣтственно къ производной отъ u по x и къ производной отъ y по u . Обозначая эти производныя черезъ $\varphi'(x)$ и $F'(u)$, заключаемъ, что производная отъ y по x есть

$$\varphi'(x) F'(u).$$

Этотъ результатъ можно прочесть слѣдующимъ образомъ:

Производная функцій отъ функцій есть произведеніе производныхъ отъ составляющихъ ее простыхъ функцій, причемъ каждая изъ послѣднихъ берется по той переменнѣй, отъ которой она непосредственно зависитъ.

Примѣры. — Пусть дана функція $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Это выраженіе можетъ быть разсматриваемо, какъ функція отъ функціи. Дѣйствительно, полагая

$$\frac{\pi}{2} - x = u,$$

мы можемъ написать, что

$$y = \sin u.$$

Прилагая общее правило, находимъ для производной отъ y по x

$$(-1) \cos u = -\sin x,$$

что согласно съ найденнымъ раньше (§ 30).

Пусть дана функція $y = \cot x = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Полагая

$$\frac{\pi}{2} - x = u,$$

мы можемъ написать, что

$$y = \text{tang } u.$$

Прилагая общее правило, находимъ для производной отъ y

$$(-1) \frac{1}{\cos^2 u} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пусть будетъ дана еще функція $l x^5$. Полагаемъ:

$$x^5 = u,$$

$$y = l u.$$

По общему правилу находимъ для производной отъ y

$$\frac{1}{u} \cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{x^5} = \frac{5}{x};$$

и, дѣйствительно, $l x^5 = 5 l x$, откуда ясно, что производная отъ заданной функціи должна быть равна производной $l x$, взятой пять разъ.

§ 37. Какъ послѣдній примѣръ, составимъ производную отъ функціи $y = x^{\frac{m}{n}}$, гдѣ m и n обозначаютъ цѣлыя числа. Эта функція можетъ быть разсматриваема, какъ функція отъ функціи. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$x^{\frac{1}{n}} = u,$$

напишемъ:

$$y = u^m.$$

По общему правилу и на основаніи результатовъ, полученныхъ въ §§ 26-мъ и 34-мъ, находимъ для производной отъ y

$$y' = m u^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1};$$

Слѣдовательно, производная отъ $x^{\frac{m}{n}}$ получается по той же самой формулѣ, какъ если бы показатель $\frac{m}{n}$ былъ цѣлымъ числомъ.

§ 38. Предыдущее правило можно распространить на составленіе производной функціи отъ функціи, связанной съ переменною x посредствомъ нѣсколькихъ промежуточныхъ функцій. Дѣйствительно, полагая

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(u), \quad w = f(v), \quad y = F(w),$$

найдемъ производную отъ y по x . Пусть Δx есть приращеніе x , а Δu , Δv , Δw , Δy — соотвѣтственные приращенія u , v , w , y ; пишемъ тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

и замѣчаемъ, что когда Δx стремится къ нулю, то первая часть этого равенства въ предѣлѣ даетъ производную отъ y по x , а множители второй части стремятся къ производнымъ отъ y , w , v , u , причемъ каждая изъ этихъ послѣднихъ берется по той переменной, отъ которой она непосредственно зависитъ. Отсюда заключаемъ, что производная отъ y есть произведеніе производныхъ отъ отдѣльныхъ функцій y , w , v , u , причемъ каждая изъ производныхъ взята по той переменной, отъ которой она непосредственно зависитъ.

Производная отъ произведенія

§ 39. Пусть u , v , w будутъ данныя функціи отъ одной и той же переменной x ; назовемъ черезъ y ихъ произведеніе, отъ котораго и требуется найти производную. Пишемъ:

$$y = u \cdot v \cdot w;$$

беремъ отъ обѣихъ частей этого равенства неперовы логариѳмы:

$$\ln y = \ln u + \ln v + \ln w;$$

теперь переходимъ къ производнымъ отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, применяя правило функцій отъ функцій и обозначая черезъ y' , u' , v' , w' производныя отъ y , u , v , w :

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{u} u' + \frac{1}{v} v' + \frac{1}{w} w';$$

отсюда

$$y' = \frac{y}{u} u' + \frac{y}{v} v' + \frac{y}{w} w' = vwu' + uvw' + uvw'.$$

Такимъ образомъ, производная отъ произведенія есть сумма произведеній, получаемыхъ отъ послѣдовательнаго умноженія производныхъ каждаго множителя на произведеніе всѣхъ остальныхъ.

ПРОИЗВОДНАЯ ОТЪ ЧАСТНАГО

§ 40. Пусть u и v будутъ двѣ функціи отъ одной и той же переменнѣй x ; назовемъ черезъ y ихъ частное, отъ котораго и требуется найти производную. Пишемъ:

$$y = \frac{u}{v};$$

беремъ отъ обѣихъ частей этого равенства неперовы логариѣмы:

$$\lg y = \lg u - \lg v;$$

теперь переходимъ къ производнымъ отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, пользуясь тѣми же обозначеніями, что и въ предыдущемъ случаѣ:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v};$$

отсюда

$$y' = \frac{yu'}{u} - \frac{yv'}{v} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

По этой формулѣ и составляется производная отъ частнаго $\frac{u}{v}$, если извѣстны производныя u' и v' отъ дѣлимаго и дѣлителя.

ПРОИЗВОДНАЯ ОТЪ СТЕПЕНИ

§ 41. Пусть u есть функція отъ x , а m —какой-нибудь показатель, положительный или отрицательный. Полагая

$$y = u^m,$$

беремъ логариѣмы отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\lg y = m \lg u;$$

переходимъ теперь къ производнымъ по x отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, пользуясь прежними обозначеніями:

$$\frac{y'}{y} = \frac{mu'}{u};$$

отсюда

$$y' = \frac{myu'}{u} = mu^{m-1}u'.$$

Замѣчаніе.—Если положить $u = x$, то $u' = 1$, и предыдущая формула покажетъ, что производная отъ функціи x^m есть mx^{m-1} . Этотъ результатъ былъ полученъ для показателя цѣлаго (§ 26) или дробнаго (§ 37) и притомъ положительнаго. Теперь же мы можемъ считать его вполнѣ общимъ, потому что предыдущее доказательство прилагается ко всѣмъ безъ исключенія положительнымъ или отрицательнымъ значеніямъ m .

Производная отъ u^v

§ 42. Разсмотримъ, наконецъ, сложное выраженіе w^v , гдѣ u и v обозначаютъ функціи отъ переменной x . Полагаемъ

$$y = u^v$$

и беремъ логариемы отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\lg y = v \lg u;$$

дальше, переходимъ къ производнымъ отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, пользуясь правиломъ (§ 39) для производной отъ произведенія; получаемъ:

$$\frac{y'}{y} = v' \lg u + \frac{v}{u} u',$$

откуда

$$y' = y \left(v' \lg u + \frac{v u'}{u} \right).$$

Если предположить, напр., что

$$v = x, \quad u = x,$$

то

$$v' = 1, \quad u' = 1,$$

и производная отъ x^x будетъ

$$x^x (1 + 1).$$

Нѣкоторыя приложенія

§ 43. Полученные въ этой главѣ результаты даютъ возможность найти производную отъ какой-угодно явной функціи, составленной посредствомъ простыхъ дѣйствій. Важно освоиться съ этими первыми принципами на примѣрахъ.

1. Производная отъ $\operatorname{arctang} \frac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)} = y$.

Полагаемъ

$$\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)} = u;$$

тогда

$$y = \operatorname{arctang} u$$

и y есть функція отъ функціи, производная отъ которой равна произведенію $\frac{1}{1+u^2}$ на производную отъ u . Примѣняя правило § 40-го, находимъ для производной отъ u

$$\frac{3(a^4 + 2a^2x^2 + x^4)}{a(a^2 - 3x^2)^2} = \frac{3(a^2 + x^2)^2}{a(a^2 - 3x^2)^2};$$

кромѣ того,

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{a^2(a^2 - 3x^2)^2}{(a^2 + x^2)^3};$$

значитъ, искомая производная, послѣ всѣхъ упрощеній, будетъ

$$\frac{3a}{a^2 + x^2}.$$

Этотъ результатъ не трудно было предвидѣть, такъ какъ по извѣстнымъ формуламъ тригонометрии функція y равна $3a \operatorname{ctang} \frac{x}{a}$, и если бы мы стали составлять производную отъ послѣдняго выраженія, то нашли бы непосредственно полученное выше значеніе.

2. Производная отъ $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = y$.

Разсматривая y , какъ степень отъ дроби $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ съ показателемъ $\frac{1}{2}$, и применяя къ этой функціи правило, данное въ § 41-мъ, находимъ для производной отъ нея

$$y' = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}} \cdot \frac{\cos x(1 - \sin x) + \cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{2 \cos x}{2(1 - \sin x) \sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

Къ тому же результату можно придти, замѣтивъ, что

$$\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right);$$

дѣйствительно, производная отъ $\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$ равна $\frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)}$, что равносильно предыдущему выраженію.

3. Изъ формулы

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

вывести выраженіе для суммы

$$\cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx.$$

Для этого достаточно взять производныя отъ обѣихъ частей:

$$\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \dots + n \cos nx = \frac{\frac{n+1}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{n+1}{2} x}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

4. Изъ формулы

$$\sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{m} \right) \sin \left(x + \frac{2\pi}{m} \right) \dots \sin \left(x + \frac{(m-1)\pi}{m} \right) = \frac{\sin mx}{2^{m-1}}$$

вывести выраженіе для суммы

$$\cot x + \cot \left(x + \frac{\pi}{m} \right) + \dots + \cot \left(x + \frac{m-1}{m} \pi \right).$$

Для этого достаточно взять отъ обѣихъ частей даннаго равенства сначала дифференциалы, а потомъ производныя; найдемъ:

$$\cot x + \cot \left(x + \frac{\pi}{m} \right) + \dots + \cot \left(x + \frac{m-1}{m} \pi \right) = m \cot mx.$$

УПОТРЕБЛЕНІЕ ПРОИЗВОДНЫХЪ ПРИ ИЗСЛѢДОВАНИИ ФУНКЦІЙ

§ 44. Если безконечно-малое приращеніе функціи совпадаетъ по знаку съ безконечно-малымъ приращеніемъ переменнѣй, то говорятъ, что такая функція — возрастающая; въ противномъ случаѣ она — убывающая. Слѣдовательно, на основаніи этихъ опредѣленій, выраженіе, напр., такое, какъ «функція — возрастающая» означаетъ, что она возрастаетъ *вмѣстѣ съ переменною*.

Когда функція — возрастающая, ея производная — положительна, такъ какъ дробь $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$, дающая въ предѣлѣ эту производную, постоянно положительна; наоборотъ, если функція — убывающая, ея производная — отрицательна. Эти, очевидно, справедливыя замѣчанія часто бываютъ полезны при изученіи послѣдовательныхъ значеній функціи; приведемъ нѣсколько примѣровъ.

1. Разсмотримъ функцію

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

производная отъ которой есть

$$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Такъ какъ въ предѣлахъ отъ $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$ всегда $x < \tan x$ и, значитъ, $x \cos x - \sin x < 0$, то эта производная отрицательна: функція $\frac{\sin x}{x}$, поэтому, убывающая; кромѣ того, эта функція равна единицѣ при $x = 0$ и $\frac{2}{\pi}$ при $x = \frac{\pi}{2}$. Слѣдовательно, она для всякаго промежуточнаго значенія x меньше единицы и больше $\frac{\pi}{2}$.

2. Дана функція

$$y = 1(1+x) - x;$$

ея производная

$$y' = \frac{1}{1+x} - 1.$$

Эта послѣдняя отрицательна при положительныхъ значеніяхъ x ; слѣдовательно, данная функція — убывающая и, такъ какъ она равна нулю при $x = 0$, то при всякомъ положительномъ значеніи x

$$1(1+x) - x < 0.$$

3. Разсмотримъ, наконецъ, функцію

$$y = 1(1+x) - x + \frac{x^2}{2},$$

производная отъ которой

$$y' = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}.$$

Эта послѣдняя положительна при положительныхъ значеніяхъ x ; слѣдовательно, данная функція — возрастающая и, такъ какъ она равна нулю при $x = 0$, то она постоянно положительна, т.-е.

$$l(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0.$$

Такимъ образомъ, для всякаго положительнаго значенія x функція $l(1+x)$ содержится между x и $x - \frac{x^2}{2}$; отсюда заключаемъ, что ее можно представить посредствомъ $x - \frac{\theta x^2}{2}$, гдѣ θ меньше единицы.

Порядокъ величины безконечно-малой производной

§ 45. Разсмотримъ функцію отъ x , $\varphi(x)$, обращающуюся въ нуль при $x = 0$. Производная $\varphi'(x)$ при значеніи переменнѣй, равномъ нулю, по опредѣленію есть $\lim \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$, т.-е. предѣлъ отношенія $\frac{\varphi(x)}{x}$. слѣдовательно, она обращается въ нуль, всякій разъ какъ $\varphi(x)$ при весьма малыхъ значеніяхъ x есть безконечно-малая высшаго порядка относительно x .

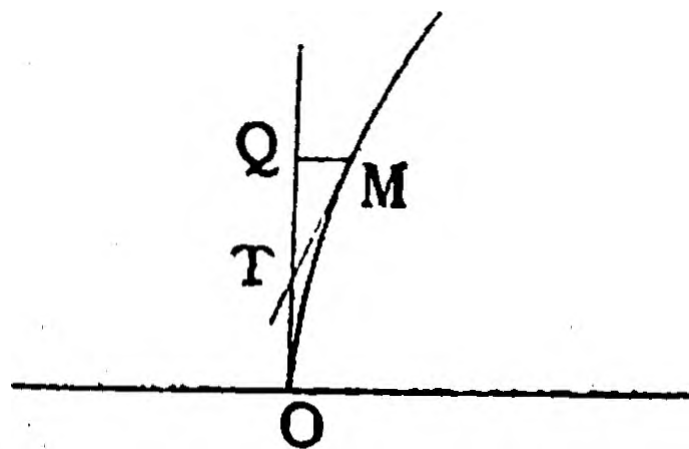
Можно итти дальше: если $\varphi(x)$ есть безконечно-малая n -го порядка относительно x , т.-е. когда x принимается за безконечно-малую перваго порядка, то $\varphi'(x)$ будетъ безконечно-малую $(n-1)$ -го порядка. Въ самомъ дѣлѣ, представляя $\varphi(x)$ въ видѣ

$$\varphi(x) = x^n (A + \epsilon), \quad (1)$$

гдѣ A есть постоянная, а ϵ — функція отъ x , обращающаяся въ нуль вмѣстѣ съ переменнѣй, и называя производную отъ ϵ черезъ ϵ' , выводимъ:

$$\varphi'(x) = nx^{n-1} (A + \epsilon) + x^n \epsilon'. \quad (2)$$

Можно утверждать, что $x\epsilon'$ стремится къ нулю. Это — очевидно, если ϵ' не безпре-



Черт. 15.

дѣльно возрастаетъ; поэтому изслѣдуемъ только тотъ случай, когда ϵ' обращается въ безконечность при x равномъ нулю; строимъ кривую, уравненіе которой есть $y = \epsilon$; такая кривая пройдетъ черезъ начало (черт. 15) и въ этой точкѣ ось y -овъ будетъ

къ ней касательною. Пусть MT есть касательная къ этой кривой въ точкѣ M , безконечно-близкой къ O , а MQ —абсцисса точки M . Производная ε' есть тангенсъ угла QMT ; значитъ, $x\varepsilon'$ равно QT и, слѣдовательно, меньше QO , т.-е. меньше ε ; а такъ какъ ε стремится къ нулю вмѣстѣ съ x , то и выходитъ, что $x\varepsilon'$ также стремится къ нулю. Отсюда заключаемъ, что $x^n\varepsilon'$ есть безконечно-малая относительно x^{n-1} и выраженіе (2) для $\varphi'(x)$ есть безконечно-малая $(n-1)$ -го порядка. Также видно, что отношеніе $\frac{\varphi'(x)}{x^{n-1}}$ имѣетъ предѣломъ nA .

Этимъ замѣчаніемъ пользовался О. Боннэ (O. Bonnet) при доказательствѣ многихъ важныхъ теоремъ, о которыхъ мы будемъ говорить ниже.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬ ФУНКЦІИ ОТЪ ОДНОЙ ПЕРЕМѢННОЙ

§ 46. Пусть $\varphi(x)$ есть функція отъ переменнѣй x , а $\varphi'(x)$ —ея производная; въ такомъ случаѣ

$$\varphi'(x) = \lim \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

гдѣ h —безконечно-малая. Слѣдовательно,

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h[\varphi'(x) + \varepsilon] = h\varphi'(x) + h\varepsilon,$$

при чемъ ε обозначаетъ другую безконечно-малую. Такъ какъ $\varphi'(x)$ конечная величина, то $h\varepsilon$ есть безконечно-малая относительно $h\varphi'(x)$ и разность $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ равна $h\varphi'(x)$, если отброситъ безконечно-малую часть ея значенія.

Итакъ, на основаніи § 11-го, произведеніе $h\varphi'(x)$, при h безконечно-маломъ, можетъ быть поставлено вмѣсто приращенія $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ во всякой задачѣ, гдѣ рѣчь идетъ о вычисленіи отношенія или суммы безконечно-малыхъ; это произведеніе называютъ дифференціаломъ $\varphi(x)$ и обозначаютъ его, ставя букву d передъ функціею.

По этому обозначенію дифференціалъ отъ x есть не что иное, какъ само приращеніе этой переменнѣй, такъ какъ производная въ этомъ случаѣ равна единицѣ. Слѣдовательно, при замѣнѣ буквы h равносильнымъ ей выраженіемъ dx дифференціалъ функціи $\varphi(x)$ приметъ видъ

$$d\varphi(x) = \varphi'(x) dx,$$

которымъ мы и будемъ теперь часто пользоваться.

Этотъ дифференціалъ $d\varphi(x)$ не равняется строго, какъ только-что объяснено, приращенію $\varphi(x)$, но оно можетъ его замѣнять, если послѣднее безконечно-мало, и отъ этого не произойдетъ никакой ошибки при разысканіи предѣловъ суммъ или отношеній, куда входитъ такое приращеніе.

§ 47. Поясняя почти всегда получаемые результаты, для ясности, геометрически, считаемъ не лишнимъ и здѣсь, для дифференціала, указать на его геометрическое значеніе.

Разсмотримъ кривую, уравненіе которой въ прямолинейныхъ координатахъ есть

$$y = \varphi(x);$$

угловой коэффициентъ касательной въ точкѣ, координаты которой суть x и y , есть (§ 24) $\varphi'(x)$ и, слѣдовательно, уравненіе касательной будетъ

$$u - y = \varphi'(x)(t - x),$$

гдѣ u и t —текуція координаты этой прямой, т.-е. координаты какой-угодно ея точки. Если, поэтому, мы припишемъ, начиная отъ точки касанія, координаты которой суть x и y , абсциссѣ точки касательной приращеніе $t - x = h$, то соответственное приращеніе ординаты будетъ

$$u - y = \varphi'(x)h,$$

и дифференціалъ $h\varphi'(x)$ явится приращеніемъ ординаты y , соответствующимъ приращенію h абсциссы при переходѣ отъ кривой къ ея касательной. Итакъ, замѣна приращенія $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ функции $\varphi(x)$ дифференціаломъ $\varphi'(x)h$ то же самое, что замѣна бесконечно-малой дуги кривой ея касательною. Обѣ эти подстановки равнозначны и допустимы при однихъ и тѣхъ же обстоятельствахъ.

§ 48. Казалось бы, что употребленіе дифференціала, представляющаго, по предыдущему, произведеніе производной $\varphi'(x)$ на приращеніе dx переменнѣй, будетъ тождественно съ употребленіемъ производной и не дастъ ни малѣйшей спеціальной выгоды.

Слѣдующее замѣчаніе покажетъ однако, что это не такъ и что употребленіе дифференціаловъ можетъ быть болѣе выгоднымъ, чѣмъ употребленіе производныхъ.

Изъ соотношенія

$$y = \varphi(x)$$

вытекаетъ, что

$$dy = \varphi'(x) dx; \quad (A)$$

здѣсь dx и dy одинаково произвольны, одно только отношеніе $\frac{dy}{dx}$ опредѣленно и равно производной $\varphi'(x)$. Поэтому, можно сказать, что такъ какъ y является функциею отъ x , то одинъ изъ дифференціаловъ, dy или dx , произволенъ и отношеніе его къ другому равно отношенію бесконечно-малыхъ приращеній, какія могутъ принять одновременно x и y .

Это опредѣленіе, очевидно, равносильное опредѣленію, принятому нами вначалѣ, имѣетъ весьма существенное преимущество въ томъ случаѣ, если оба количества, x и y , входятъ одинаковымъ образомъ. Разовьемъ это подробнѣе.

Если y есть функция отъ x , то x этимъ самымъ есть функция отъ y , и ничто не обязываетъ насъ считать одну изъ этихъ переменныхъ или какую бы то ни было функцию отъ той или другой изъ нихъ за главную переменную. Введеніе же производныхъ требуетъ безусловно подобнаго выбора, потому что производная имѣетъ опредѣленный смыслъ только тогда, когда указана и та переменная, отъ которой она взята, и та главная переменная, по которой она взята. Наоборотъ, изъ уравненія:

$$dy = \varphi'(x) dx, \quad (A)$$

опредѣляющаго дифференціалъ отъ y , мы узнаемъ отношеніе дифференціаловъ dy и dx , т.-е. отношеніе бесконечно-малыхъ приращеній, какія можно приписать одно-

временно x и y ; одинъ изъ этихъ дифференціаловъ произволенъ, но какой именно, dx или dy , изъ соотношенія (А) не видно; дѣйствительно, послѣднее можетъ быть написано въ видѣ:

$$dx = \frac{1}{\varphi'(x)} dy$$

и, слѣдовательно, дифференціалъ отъ переменнѣй x можетъ быть рассмотрѣнъ какъ функція отъ переменнѣй y , соответствующая произвольному значенію dy .

Болѣе того, дифференціалъ функціи всегда одинъ и тотъ же, какова бы ни была переменная, по которой эта функція выражена. Въ самомъ дѣлѣ, пусть y есть функція отъ u , а u , въ свою очередь, есть функція отъ x , т.-е. пусть

$$y = \psi(u)$$

и

$$u = \varphi(x).$$

Дифференціалъ отъ y , если разсматривать y , какъ функцію отъ x , есть произведеніе dx на производную отъ y (§ 36), равную $\psi'(u)\varphi'(x)$; значить,

$$dy = \psi'(u)\varphi'(x) dx.$$

Съ другой же стороны, дифференціалъ отъ y , если разсматривать y , какъ функцію отъ u , есть

$$dy = \psi'(u) du,$$

что вполне совпадетъ съ предыдущимъ выраженіемъ, стоитъ только въ этомъ послѣднемъ равенствѣ дифференціалъ du замѣнить его значеніемъ

$$du = \varphi'(x) dx,$$

вытекающимъ изъ самаго опредѣленія u , какъ функціи отъ x .

Здѣсь такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, изъ соотношеній:

$$\begin{aligned} du &= \varphi'(x) dx, \\ dy &= \psi'(u) du, \end{aligned}$$

связывающихъ дифференціалы dx , dy , du трехъ переменныхъ x , y , u , изъ которыхъ каждая выражается черезъ двѣ другія, видно, что одинъ изъ этихъ дифференціаловъ произволенъ и что отсюда мы можемъ узнавать только отношенія безконечно-малыхъ приращеній, какія могутъ получить одновременно x , y и u ; при этомъ не указывается, какую изъ переменныхъ принимать за главную.

§ 49. То же самое замѣчаніе распространяется на какое-угодно число переменныхъ x , y , z , u , v , w , лишь бы только онѣ были связаны между собою такимъ образомъ, чтобы всѣ ихъ можно было разсматривать, какъ функціи отъ одной изъ нихъ. Принимая x за главную переменную, получимъ для dy , dz , du , dv , dw значенія:

$$dy = y'dx, \quad dz = z'dx, \quad du = u'dx, \quad dv = v'dx, \quad dw = w'dx,$$

или, что то же самое,

$$\frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{du}{u'} = \frac{dv}{v'} = \frac{dw}{w'} = \frac{dx}{1};$$

не дѣлая новыхъ вычисленій, мы можемъ за главную переменную принять другую изъ данныхъ, хотя бы u : отношенія дифференціаловъ dy, dz, du, dv, dw, dx останутся тѣ же, — достаточно будетъ считать du получающимъ произвольное значеніе взаменъ dx .

Чтобы вычислить производныя различныхъ переменныхъ, взятыя по главной переменной u , достаточно раздѣлить на du дифференціалы отъ этихъ переменныхъ. Слѣдовательно, производныя будутъ:

$$\frac{dy}{du} = \frac{y'}{u'}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{z'}{u'}, \quad \frac{dv}{du} = \frac{v'}{u'}, \quad \frac{dw}{du} = \frac{w'}{u'}, \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{u'};$$

точно такіе же результаты мы получили бы на основаніи теоріи функцій отъ функцій.

Частныя производныя функцій отъ нѣсколькихъ переменныхъ

§ 50. Если функція зависитъ отъ нѣсколькихъ переменныхъ, независимыхъ другъ отъ друга, то производную отъ нея можно брать по каждой изъ этихъ переменныхъ, считая при этомъ всѣ остальные за постоянныя. Взятая такимъ образомъ производная называется *частною производною*.

Разысканіе частной производной точно такое же, какъ и производной отъ одной только переменной, и не требуетъ, поэтому, новаго изложенія.

Если $\varphi(x, y, z)$ есть функція отъ трехъ переменныхъ x, y, z , то частныя производныя по этимъ тремъ переменнымъ напишутся слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz}.$$

Смыслъ этихъ символовъ ясенъ изъ предыдущаго: $\frac{d\varphi}{dx}$ есть предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія φ къ соответственному приращенію x , при чемъ y и z остаются постоянными; также, при вычисленіи $\frac{d\varphi}{dy}$ постоянными будутъ x и z , а при вычисленіи $\frac{d\varphi}{dz}$ постоянными будутъ x и y .

§ 51. Разсматриваемая функція φ можетъ быть выражена безчисленнымъ количествомъ способовъ, потому что вмѣсто переменныхъ x, y, z можно подставить три новыхъ переменныхъ, которыя были бы опредѣленными функціями отъ первыхъ. Полагая, напр.,

$$\begin{aligned} u &= \psi_1(x, y, z), \\ v &= \psi_2(x, y, z), \\ w &= \psi_3(x, y, z), \end{aligned}$$

мы можемъ функцію φ выразить въ зависимости отъ u, v, w и, значитъ, можемъ разсуждать о частныхъ производныхъ $\frac{d\varphi}{du}, \frac{d\varphi}{dv}, \frac{d\varphi}{dw}$. Далѣе мы увидимъ, что можно вычислять эти производныя, не выражая явно функцію φ въ зависимости отъ новыхъ переменныхъ. Слѣдуетъ, однако, замѣтить теперь же, что для опредѣленія значенія $\frac{d\varphi}{du}$ недостаточно знать функцію φ и переменную u . Эта производная зависитъ

также отъ выбора двухъ другихъ переменныхъ v и w , которыя необходимы, кромѣ u , для выраженія φ и которыя должны при дифференцированіи оставаться постоянными.

Разсмотримъ, для примѣра, функцію

$$\varphi = x^2(x + y + z)yz;$$

пишемъ:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2x(x + y + z)yz + x^2yz.$$

Полагая же

$$x + y + z = u, \quad yz = v,$$

придаемъ функціи φ видъ:

$$\varphi = x^2uv$$

и находимъ:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2xuv = 2x(x + y + z)yz.$$

Отсюда заключаемъ, что одна и та же функція φ можетъ имѣть весьма различныя частныя производныя, взятая по одной и той же переменной x , и что эти производныя зависятъ отъ выбора переменныхъ, служащихъ вмѣстѣ съ x для выраженія φ и остающихся при дифференцированіи постоянными.

§ 52. Предыдущій примѣръ не оставляетъ никакого сомнѣнія относительно вѣрности высказаннаго предложенія. Мы считаемъ, однако, полезнымъ прибавить нѣсколько поясненій для лучшаго усвоенія отмѣченнаго нами различія.

Разсмотримъ, для ясности, функцію отъ двухъ только переменныхъ:

$$z = \varphi(x, y); \tag{1}$$

эта функція z можетъ быть выражена равнымъ образомъ черезъ x и какую-нибудь новую переменную, связанную съ двумя первыми даннымъ соотношеніемъ. Пусть эта новая переменная u опредѣляется уравненіемъ:

$$u = \psi(x, y); \tag{2}$$

изъ уравненій (1) и (2) можно исключить y и получить соотношеніе вида:

$$z = F(x, u). \tag{3}$$

Производная $\frac{dz}{dx}$ изъ уравненія (1) есть предѣлъ отношенія приращенія z къ приращенію x , когда y остается постояннымъ.

Производная $\frac{dz}{dx}$ изъ уравненія (3) есть предѣлъ отношенія приращенія z къ приращенію x , когда u остается постояннымъ.

Съ другой же стороны ясно, что при y постоянномъ u — переменная, а при u постоянномъ y — переменная; слѣдовательно, оба значенія $\frac{dz}{dx}$, выведенныя изъ уравненій (1) и (3), не тождественны по опредѣленію и, понятно, не равны между собою.

Если рассматривать уравнение (1), какъ представляющее поверхность, то $\frac{dz}{dx}$ явится предѣломъ отношенія приращенія z къ приращенію x , когда перемѣщеніе по поверхности происходитъ безъ измѣненія y , т.-е. происходитъ по части, параллельной плоскости ZX . Наоборотъ, вывести $\frac{dz}{dx}$ изъ уравненія (3) значитъ найти отношеніе приращенія z къ приращенію x , когда перемѣщеніе по поверхности происходитъ при u , сохраняющемъ постоянное значеніе, т.-е. по нѣкоторой кривой, зависящей отъ природы функціи u ; отношеніе же приращенія z къ приращенію x , вообще говоря, различно для разнаго рода кривыхъ, какія можно нанести на одной и той же поверхности отъ данной точки. Это настолько справедливо, что выбирая кривую, получаемую отъ пересѣченія поверхности съ плоскостью, параллельною плоскости XU , для которой z —постоянно, мы можемъ всегда это отношеніе привести къ нулю. Когда же z содержитъ двѣ переменныя и нѣтъ указаній для выбора той переменной, которую нужно присоединить къ x и предположить постоянною при разысканіи производной, тогда $\frac{dz}{dx}$ является неопредѣленнымъ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬ ФУНКЦІИ ОТЪ НѢСКОЛЬКИХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ

§ 53. Безконечно-малое приращеніе функціи отъ нѣсколькихъ переменныхъ можетъ быть представлено, подобно безконечно-малому приращенію функціи отъ одной только переменной, въ видѣ весьма простаго выраженія, отличающагося отъ истиннаго значенія на безконечно-малую величину высшаго порядка. Разсмотримъ сначала функцію $\varphi(x, y)$ отъ двухъ переменныхъ, независимыхъ одна отъ другой. Придадимъ каждой изъ этихъ переменныхъ безконечно-малыя приращенія перваго порядка h и k , тогда приращеніе для φ будетъ:

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y) = \varphi(x + h, y + k) - \varphi(x + h, y) + \varphi(x + h, y) - \varphi(x, y).$$

Но разность

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x + h, y)$$

можетъ быть рассмотрѣна, какъ приращеніе функціи $\varphi(x + h, y)$, въ которой переменная y получаетъ приращеніе k . Въ такомъ случаѣ, пренебрегая (§ 46) безконечно-малыми втораго порядка, пишемъ:

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x + h, y) = k\varphi'_y(x + h, y).$$

Точно такъ же, отбрасывая безконечно-малыя втораго порядка, находимъ:

$$\varphi(x + h, y) - \varphi(x, y) = h\varphi'_x(x, y).$$

Здѣсь φ'_x и φ'_y обозначаютъ производныя отъ φ , взятая соответственно по x и по y . Итакъ, пренебрегая вездѣ безконечно-малыми втораго порядка, имѣемъ:

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y) = k\varphi'_y(x + h, y) + h\varphi'_x(x, y).$$

А такъ какъ $\varphi'_y(x+h, y)$ бесконечно-мало отличается отъ $\varphi'_y(x, y)$, то произведение на k разности этихъ выраженій можетъ быть отброшено и, пренебрегая вездѣ бесконечно-малыми порядка выше перваго, можно написать:

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = h\varphi'_x(x, y) + k\varphi'_y(x, y).$$

§ 54. Предыдущее выраженіе весьма замѣчательно: оно показываетъ, что для значеній переменныхъ бесконечно-мало отличающихся отъ данныхъ значеній x и y приращеніе функціи есть функція первой степени относительно приращеній h и k , приписанныхъ соответственно x и y . При этомъ, понятно, всегда отбрасываются бесконечно-малыя второго порядка.

Если назвать черезъ dx и dy произвольныя приращенія h и k и замѣнить въ то же время производныя φ'_x и φ'_y принятыми обозначеніями $\frac{d\varphi}{dx}$ и $\frac{d\varphi}{dy}$, то выраженіе приращенія функціи φ будетъ

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy.$$

Это выраженіе называется полнымъ дифференціаломъ отъ φ , который принято обозначать черезъ $d\varphi$, такъ что, по опредѣленію,

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy.$$

Этотъ дифференціалъ $d\varphi$, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка, есть приращеніе функціи φ , соответствующее бесконечно-малымъ приращеніямъ dx и dy , приписаннымъ соответственно x и y .

Необходимо при этомъ замѣтить, что во второй части предыдущаго уравненія числители дробей $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$ представляютъ различные символы и что ни одинъ изъ нихъ не должно смѣшивать съ полнымъ дифференціаломъ $d\varphi$, который пишется точно такъ же.

Числитель въ $\frac{d\varphi}{dx}$ есть дифференціалъ отъ φ , взятый по одной только переменной x .

Числитель въ $\frac{d\varphi}{dy}$ есть дифференціалъ отъ φ , взятый по одной только переменной y .

Наконецъ, первая часть уравненія есть полный дифференціалъ, представляющій сумму двухъ другихъ.

Неудобно, конечно, писать одинаково количества существенно различныя, но предупреденный читатель не найдетъ въ этомъ серьезнаго затрудненія.

§ 55. Совершенно такія же разсужденія показываютъ, что бесконечно-малое приращеніе функціи отъ трехъ переменныхъ $\varphi(x, y, z)$, когда x, y, z получаютъ бесконечно-малыя приращенія перваго порядка h, k, l , можетъ быть представлено, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка, въ видѣ

$$\frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k + \frac{d\varphi}{dz} l;$$

эта сумма называется *полным* дифференціаломъ при $h = dx$, $k = dy$, $l = dz$; итакъ, по опредѣленію,

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{d\varphi}{dy} dy = \frac{d\varphi}{dz} dz. \quad (1)$$

Когда dx , dy , dz —безконечно-малыя перваго порядка, то $d\varphi$ представляетъ, если пренебечь безконечно-малыми втораго порядка, приращеніе φ , соотвѣтствующее безконечно-малымъ приращеніямъ dx , dy , dz трехъ переменныхъ.

Здѣсь нужно сдѣлать то же замѣчаніе, какъ и въ случаѣ функцій отъ двухъ переменныхъ, именно, что выраженіе $d\varphi$ въ уравненіи (1) имѣетъ четыре различныхъ значенія.

§ 56. Предыдущая теорема и опредѣленіе распространяются безъ труда на случай какого-угодно числа переменныхъ. Безконечно-малое приращеніе функціи $\varphi(x, y, z, u, v)$, соотвѣтствующее безконечно-малымъ приращеніямъ h, k, l, m, n переменныхъ, равно, если пренебечь безконечно-малыми втораго порядка,

$$\frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k + \frac{d\varphi}{dz} l + \frac{d\varphi}{du} m + \frac{d\varphi}{dv} n;$$

обозначая въ этой суммѣ приращенія h, k, l, m, n соотвѣтственно черезъ dx, dy, dz, du, dv , получаемъ выраженіе:

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz + \frac{d\varphi}{du} du + \frac{d\varphi}{dv} dv,$$

которое называется полнымъ дифференціаломъ отъ φ и обозначается черезъ $d\varphi$; этотъ дифференціалъ можетъ замѣнять приращеніе функціи, если dx, dy, dz, du, dv —безконечно-малы.

§ 57. Пусть u обозначаетъ функцію отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ и, чтобы остановиться на чемъ-нибудь опредѣленномъ, предположимъ, напр., отъ трехъ независимыхъ переменныхъ. Приписывая этимъ послѣднимъ безконечно-малыя приращенія dx, dy, dz и отбрасывая безконечно-малыя втораго порядка, приращеніе отъ u мы выразимъ, по предыдущему, формулою:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz,$$

гдѣ $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$ суть три функціи отъ x, y, z , независящія отъ dx, dy и dz . Этотъ результатъ можно изложить еще слѣдующимъ образомъ: придавая x, y, z и u одновременно четыре безконечно-малыхъ приращенія и пренебрегая безконечно-малыми втораго порядка, получаемъ уравненіе первой степени относительно этихъ четырехъ приращеній, изъ которыхъ какія-нибудь три будутъ произвольными.

Очень важно замѣтить, что при такомъ изложеніи исчезаетъ всякое различіе между функціею u и переменными, отъ которыхъ она зависитъ: x, y, z, u являются четырьмя переменными, связанными однимъ уравненіемъ, и каждая изъ нихъ можетъ быть рассматриваема, какъ функція трехъ остальныхъ.

Уравнение первой степени, связывающее dx , dy , dz и du , будучи решено последовательно относительно каждого из этих дифференциаловъ, дастъ производныя для соответственной переменнй, взятыя по тремъ остальнымъ переменнымъ, разсмотрѣннымъ какъ независимыя. Если, напр.,

$$du = Pdx + Qdy + Rdz, \quad (1)$$

гдѣ u разсматривается какъ функція отъ x , y и z , то

$$P = \frac{du}{dx}, \quad Q = \frac{du}{dy}, \quad R = \frac{du}{dz}.$$

Но уравнение (1) даетъ также:

$$dy = \frac{1}{Q} du - \frac{P}{Q} dx - \frac{R}{Q} dz;$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}, \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{du}{dy}}.$$

Первое изъ трехъ послѣднихъ равенствъ очевидно, потому что оба частныя $\frac{dy}{du}$ и $\frac{du}{dy}$ выражаютъ отношеніе безконечно-малыхъ приращеній, которыя могутъ принимать одновременно (§ 48) y и u , въ то время какъ z и x остаются постоянными.

Производныя отъ сложныхъ функцій

§ 58. Изъ самаго названія: «сложная функція» слѣдуетъ, что это такая функція, которая требуетъ предварительнаго выполненія нѣкоторыхъ дѣйствій надъ другими функціями.

Пусть u и v будутъ двѣ функціи отъ переменнй x . Всякая функція вида

$$y = \varphi(u, v)$$

есть сложная функція отъ x .

Разыщемъ теперь производную отъ сложной функціи. Такая задача была бы болѣе у мѣста сейчасъ послѣ правилъ, относящихся къ нахожденію производныхъ, еслибы рѣшеніе ея не облегчалось тѣми упрощеніями, какія вносятъ теоремы, доказанныя въ предыдущихъ параграфахъ.

Придавая x безконечно-малое приращеніе Δx , получимъ для u и v соответственно приращенія Δu и Δv ; пренебрегая же безконечно-малыми второго порядка, мы выразимъ приращеніе Δy функціи y (§ 54) въ видѣ:

$$\Delta y = \frac{d\varphi}{du} \Delta u + \frac{d\varphi}{dv} \Delta v, \quad (1)$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d\varphi}{du} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

пределы обѣихъ частей послѣдняго уравненія, при Δx стремящемся къ нулю, строго равны между собою, потому что въ уравненіи (1) мы отбросили только безконечно-малыя второго порядка; слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dx}.$$

Точно такъ же, обозначая черезъ u , v , w три функціи отъ x , для производной отъ сложной функціи $y = \varphi(u, v, w)$ мы составимъ формулу:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dx} + \frac{d\varphi}{dw} \frac{dw}{dx}.$$

Вообще, производная сложной функціи отъ какого-угодно числа функцій

$$y = \varphi(u, v, w, z, t)$$

выразится формулою:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dx} + \frac{d\varphi}{dw} \frac{dw}{dx} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dx},$$

что можно прочесть слѣдующимъ образомъ: производная отъ сложной функціи есть сумма производныхъ отъ данной функціи, получаемыхъ въ послѣдовательномъ порядкѣ, при чемъ всякій разъ за измѣняющуюся одновременно съ x принимается только одна изъ функцій, отъ которыхъ зависитъ данная, а остальные разсматриваются какъ постоянныя; каждая производная отъ данной функціи сводится, такимъ образомъ, на производную функціи отъ функціи.

§ 59. Предыдущая теорема можетъ быть приложена къ составленію уже полученныхъ производныхъ отъ произведенія или отъ выраженія вида u^v .

Разсмотримъ сначала произведеніе:

$$y = u \cdot v \cdot w,$$

гдѣ u , v , w обозначаютъ функціи отъ переменнѣй x . Это произведеніе можно принять за сложную функцію отъ u , v и w и воспользоваться предыдущею теоремою:

$$\frac{dy}{dx} = vw \frac{du}{dx} + uv \frac{dv}{dx} + uv \frac{dw}{dx},$$

что совпадаетъ съ полученнымъ раньше (§ 39) результатомъ.

Точно такъ же, полагая

$$y = u^v,$$

гдѣ u и v обозначаютъ функціи отъ x , можно y разсмотрѣть какъ сложную функцію и составить формулу:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx},$$

что вполне согласуется съ полученнымъ раньше (§ 42) результатомъ.

Производныя отъ неявныхъ функций

§ 60. Подъ именемъ *неявной* функции разумѣютъ всякую, вполне опредѣленную функцию, аналитическое выраженіе которой не дано.

Изъ неявныхъ функций мы рассмотримъ здѣсь только такія, которыя опредѣляются не рѣшенными уравненіями.

Разсмотримъ сначала простѣйшій случай, когда функция y опредѣляется уравненіемъ между этою функцией и переменною x ,

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (1)$$

Чтобы вывести изъ такого уравненія производную, или, что то же самое, дифференціалъ отъ y , замѣтимъ, что функция φ будетъ тождественно равна нулю, если предположить y замѣненнымъ его значеніемъ черезъ x , а въ такомъ случаѣ дифференціалъ отъ φ будетъ равенъ нулю:

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy = 0, \quad (2)$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}},$$

и задача рѣшена.

Непремѣнно слѣдуетъ замѣтить, что уравненіе (2) есть строгое слѣдствіе уравненія (1). Такъ какъ при недостаточно полномъ разсужденіи можно было бы допустить противное, то мы остановимся на этомъ важномъ пунктѣ.

Такъ какъ уравненіе

$$\varphi(x, y) = 0$$

обращается въ тождество при замѣнѣ y его значеніемъ чрезъ x , то приращеніе функции φ будетъ строго равно нулю; поэтому, казалось бы, его значеніе

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy,$$

въ которомъ отброшены (§ 53) бесконечно-малыя второго порядка, нельзя принять равнымъ нулю, а только бесконечно-малой второго порядка, такъ что строго было бы

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy = \varepsilon, \quad (3)$$

гдѣ ε — бесконечно-малая второго порядка. Этого уравненія достаточно для нахождения значенія $\frac{dy}{dx}$, потому что $\frac{\varepsilon}{dx}$ въ предѣлѣ обращается въ нуль, но можно доказать, что ε строго равно нулю и что уравненіе (2) имѣетъ мѣсто безъ всякой ошибки. Дѣйствительно, такъ какъ y есть функция отъ x (все равно, извѣстная или неизвѣстная), то dy есть вида Kdx , а въ такомъ случаѣ первая часть уравненія (2) представляетъ про-

изведеіе dx на нѣкоторый коэффициентъ-функцию отъ x ; съ другой же стороны, только при условіи, что этотъ коэффициентъ есть нуль, произведеіе будетъ безконечно-малою порядка выше перваго,—значитъ, онъ строго равенъ нулю.

§ 61. Дано, напр., уравненіе:

$$f(x, y) = 4y^3 - 3y + \sin x = 0; \quad (1)$$

пишемъ:

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \cos x, \quad \frac{df(x, y)}{dy} = 12y^2 - 3,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3(1 - 4y^2)}. \quad (2)$$

Этотъ результатъ легко повѣрить. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія (1) находимъ $y = \sin \frac{1}{3} x$, и, слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{3} x,$$

такъ что уравненіе (2) равносильно

$$\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3} x = \frac{\cos x}{3(1 - 4 \sin^2 \frac{1}{3} x)} = \frac{\cos x}{3[1 - 4(1 - \cos^2 \frac{1}{3} x)]} = \frac{\cos x}{3(4 \cos^2 \frac{1}{3} x - 3)},$$

т.-е.

$$\cos x = 4 \cos^3 \frac{1}{3} x - 3 \cos \frac{1}{3} x,$$

а это — известная формула для косинуса тройной дуги черезъ степени косинуса простой дуги.

§ 62. Переходимъ къ болѣе сложному случаю. Предположимъ, что y и z двѣ функции отъ x , связанные съ переменною уравненіями:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Если бы эти уравненія были рѣшены относительно y и z , то подставляя въ нихъ вмѣсто y и z найденныя значенія, представляющія функции отъ x , мы получили бы тождества, первыя части которыхъ имѣли бы, поэтому, дифференціалы строго равные нулю; слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz &= 0, \\ \frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dy} dy + \frac{d\psi}{dz} dz &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dy}} = \frac{dy}{\frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dz}} = \frac{dz}{\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}},$$

а эти уравнения дают дифференциалы dy , dz , или, что одно и то же, производные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dz}}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dy}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dy}}.$$

§ 63. Ходъ разсуждений остается тотъ же и для большаго числа уравнений, но равнаго всегда числу неизвѣстныхъ функций. Отношенія дифференциаловъ въ каждомъ случаѣ получаются посредствомъ рѣшенія системы уравнений первой степени, и ничего другого, какъ только эти отношенія, узнать изъ такихъ системъ нельзя, потому что одинъ изъ дифференциаловъ непремѣнно произволенъ.

Если, напр.,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, u, v) &= 0, \\ \varphi_2(x, y, z, u, v) &= 0, \\ \varphi_3(x, y, z, u, v) &= 0, \\ \varphi_4(x, y, z, u, v) &= 0, \end{aligned}$$

то дифференциалы будутъ связаны уравненіями:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dx} dx + \frac{d\varphi_1}{dy} dy + \frac{d\varphi_1}{dz} dz + \frac{d\varphi_1}{du} du + \frac{d\varphi_1}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi_2}{dx} dx + \frac{d\varphi_2}{dy} dy + \frac{d\varphi_2}{dz} dz + \frac{d\varphi_2}{du} du + \frac{d\varphi_2}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi_3}{dx} dx + \frac{d\varphi_3}{dy} dy + \frac{d\varphi_3}{dz} dz + \frac{d\varphi_3}{du} du + \frac{d\varphi_3}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi_4}{dx} dx + \frac{d\varphi_4}{dy} dy + \frac{d\varphi_4}{dz} dz + \frac{d\varphi_4}{du} du + \frac{d\varphi_4}{dv} dv &= 0, \end{aligned}$$

и эти уравненія, опредѣляя отношеніе двухъ какихъ-нибудь изъ этихъ дифференциаловъ, даютъ возможность вычислить производную отъ одной изъ переменныхъ по другой, принимаемой за главную.

§ 64. Разсужденія остаются тѣ же и въ случаѣ неявныхъ функций, зависящихъ отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ. При вычисленіи производной отъ функции по одной изъ переменныхъ всѣ остальные независимыя переменныя будутъ постоянными, иначе говоря, онѣ будутъ входить въ вычисленія, какъ постоянные параметры.

Пусть, напр., двѣ функции u и v отъ x и y опредѣляются уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, u, v) &= 0, \\ \varphi(x, y, u, v) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При вычисленіи производныхъ $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$ переменную y можно принять за постоянную, а это значитъ, что обѣ заданныя функции будутъ отъ одной только переменной. Точно такъ же, при x постоянномъ, получимъ $\frac{du}{dy}$ и $\frac{dv}{dy}$.

Производныя $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ получатся изъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{du} du + \frac{dF}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{du} du + \frac{d\varphi}{dv} dv &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а производныя $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dy}$ изъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{du} du + \frac{dF}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{du} du + \frac{d\varphi}{dv} dv &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Понятно, что въ уравненіяхъ (2) du и dv обозначаютъ не то же самое, что въ уравненіяхъ (3); въ первыхъ дифференціалы взяты по x , а во вторыхъ—по y . То, что сказано въ § 48-мъ, здѣсь не приложимо: дифференціалъ функціи не зависитъ отъ переменной, по которой онъ берется, если функція зависитъ отъ одной только переменной и эта послѣдняя замѣнена новою переменной, зависящей отъ нея; здѣсь же обѣ переменныя x и y —независимыя и ихъ дифференціалы dx и dy находятся въ отношеніи вполнѣ неопредѣленномъ.

§ 65. Можно поступить иначе и вычислить заразъ четыре производныя $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$; для этого нужно принять за неизвѣстныя полные дифференціалы du и dv . Если въ уравненіяхъ (1) придать одновременно x и y приращенія dx и dy , то для u и v получатся приращенія, которыя можно, пренебрегая безконечно-малыми второго порядка, принять равными du и dv (§ 54); не измѣняя при этомъ функцій F и φ и пренебрегая вездѣ безконечно-малыми второго порядка, напишемъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{du} du + \frac{dF}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{du} du + \frac{d\varphi}{dv} dv &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Можно, кромѣ того, доказать, что эти уравненія, принятые нами за точныя, съ приближеніемъ до безконечно-малыхъ второго порядка, суть строго вѣрны. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ du и dv —дифференціалы, то оба они, по опредѣленію, вида $Mdx + Ndy$ и, слѣдовательно, первыя части уравненій (4) суть вида

$$Pdx + Qdy,$$

гдѣ P и Q будутъ функціями отъ x и y ; далѣе, такъ какъ dx и dy независимы одинъ отъ другого, то подобная сумма можетъ быть безконечно-малою порядка выше перваго только въ томъ случаѣ, если $P = 0$, $Q = 0$, а въ такомъ случаѣ она строго равна нулю.

Рѣшая уравненія (4) относительно du и dv , мы получимъ для этихъ дифференціаловъ значенія вида

$$\begin{aligned} du &= A dx + B dy, \\ dv &= A' dx + B' dy, \end{aligned}$$

откуда по § 57-му

$$\frac{du}{dx} = A, \quad \frac{du}{dy} = B, \quad \frac{dv}{dx} = A', \quad \frac{dv}{dy} = B'.$$

Выполняя вычисленія, находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\frac{d\varphi}{dx} \frac{dF}{dv} - \frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{dx}}{\frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{du} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dv}}, & \frac{du}{dy} &= \frac{\frac{d\varphi}{dy} \frac{dF}{dv} - \frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{dy}}{\frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{du} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dv}}, \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{\frac{dF}{dx} \frac{d\varphi}{du} - \frac{dF}{du} \frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{du} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dv}}, & \frac{dv}{dy} &= \frac{\frac{d\varphi}{dy} \frac{dF}{du} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dy}}{\frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{du} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dv}}. \end{aligned}$$

§ 66. Равнымъ образомъ можно вывести изъ уравненій (4) dx и dy въ функціяхъ отъ du и dv , и если

$$\begin{aligned} dx &= A_1 du + B_1 dv, \\ dy &= A'_1 du + B'_1 dv, \end{aligned}$$

то

$$\frac{dx}{du} = A_1, \quad \frac{dx}{dv} = B_1, \quad \frac{dy}{du} = A'_1, \quad \frac{dy}{dv} = B'_1.$$

Необходимо замѣтить, что здѣсь не имѣеть мѣста, какъ въ § 33-мъ, равенство:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, приращенія, отношеніе которыхъ выражается черезъ $\frac{dx}{du}$, не одинаковы съ тѣми, которыя входятъ въ $\frac{du}{dx}$. При вычисленіи частной производной $\frac{du}{dx}$ измѣняются u и x , а y остается постояннымъ. Когда же вычисляется $\frac{dx}{du}$, то x разсматривается какъ функція отъ u и v , и, слѣдовательно, измѣняются x и u , а v остается постояннымъ; но чтобы v оставалось постояннымъ, необходимо, чтобы y измѣнялся, — значитъ, разсматриваемыя измѣненія другія, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ.

Это замѣчаніе очень важно и ошибки, въ которыя можно впасть, не обращая на него вниманія, весьма тяжелы. Приведемъ примѣръ.

Пусть будутъ

$$\begin{aligned} x &= u + v, \\ y &= u - v \end{aligned}$$

данныя соотношенія между x , y , u , v ; выводимъ:

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2};$$

слѣдовательно,

$$\frac{dx}{du} = 1, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

и равенство:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}$$

не имѣетъ мѣста.

§ 67. Впрочемъ, существуютъ простыя соотношенія, въ случаѣ функцій отъ двухъ переменныхъ, связывающія производныя $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$ съ обратными имъ производными $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dy}$. Эти соотношенія суть слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{dx}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dx}, \\ 1 &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dy} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dy}, \\ 0 &= \frac{dx}{du} \frac{du}{dy} + \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dy}, \\ 0 &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Доказательство ихъ крайне просто; если предположить x и y выраженными въ функціяхъ отъ u и v , и затѣмъ замѣнить въ этихъ выраженіяхъ u и v ихъ значеніями въ функціяхъ отъ x и y , то мы получимъ два тождества, равносильныхъ $x = x$, $y = y$, вторыя части которыхъ представляютъ сложныя функціи, содержащія u и v , которыя, въ свою очередь, содержатъ x и y . Беря, теперь, производныя отъ этихъ тождествъ сначала по x , потомъ по y , мы въ первыхъ частяхъ получимъ соотвѣтственно $\frac{dx}{dx} = 1$, $\frac{dy}{dy} = 1$, $\frac{dx}{dy} = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, вторыя же части дадутъ точно вторыя части формулъ (1).

Не трудно составить подобныя соотношенія для какого-угодно числа функцій, зависящихъ отъ такого же числа переменныхъ.

УПРАЖНЕНІЯ

1. Не рассматривая $\arcsin x$ и $\arctang x$, какъ обратныя функціи, найти отъ нихъ производныя посредствомъ формулъ:

$$\begin{aligned} \arcsin(x+h) - \arcsin x &= \arcsin [(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}], \\ \arctang(x+h) - \arctang x &= \arctang \frac{h}{1+hx+x^2}. \end{aligned}$$

2. Доказать, что если P и Q обозначаютъ двѣ цѣлыя функціи отъ x , удовлетворяющія уравненію:

$$\sqrt{1-P^2} = Q\sqrt{1-x^2},$$

то

$$\frac{dP}{\sqrt{1-P^2}} = n \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

гдѣ n обозначаетъ цѣлое число.

3. Полагая $y = \frac{1}{x}$, находимъ:

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0.$$

4. Полагая $x = \frac{y\sqrt{2}}{1-y^4}$, находимъ:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

5. Обозначая через φ функцию отъ четырехъ переменныхъ x, y, u, v , однородную и второй степени относительно u и v , полагая

$$\frac{d\varphi}{du} = p, \quad \frac{d\varphi}{dv} = q$$

и рассматривая φ какъ функцию отъ x, y, p и q , находимъ:

$$\frac{d\varphi}{dp} = u, \quad \frac{d\varphi}{dq} = v, \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \quad \frac{d\varphi}{dy} = -\left(\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

при чемъ $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ и $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$ суть производныя отъ φ по x и по y , когда функция выражена въ x, y, u и v .

6. *Обобщение предыдущей теоремы.* Пусть φ обозначаетъ функцию отъ $2n$ переменныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n$, однородную и второй степени относительно n послѣднихъ изъ этихъ переменныхъ; если положить

$$\frac{d\varphi}{du_1} = p_1, \quad \frac{d\varphi}{du_2} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{d\varphi}{du_n} = p_n$$

и выразить φ въ функции отъ $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$, то при всякомъ цѣломъ k

$$\frac{d\varphi}{dp_k} = u_k, \quad \frac{d\varphi}{dx_k} = -\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\right).$$

7. Если z есть функция отъ x и y , опредѣляемая двумя уравненіями:

$$z = \frac{[y - \varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)},$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)},$$

то, какова бы ни была функция $\varphi(\alpha)$,

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} = z.$$

8. Если z есть функция отъ x и y , опредѣляемая двумя уравненіями:

$$[z - \varphi(\alpha)]^2 = x^2 (y^2 - \alpha^2),$$

$$[z - \varphi(\alpha)] \varphi'(\alpha) = \alpha x^2,$$

то, какова бы ни была функция $\varphi(\alpha)$,

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} = xy.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Функциональный определитель

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

§ 68. При рѣшеніи такой системы уравненій первой степени, гдѣ число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, значенія для этихъ послѣднихъ получатся въ видѣ дробей съ общимъ знаменателемъ, который называется *опредѣлителемъ* системы коэффициентовъ. По этому опредѣленію, всякій разъ какъ система изъ n^2 количествъ расположена группами въ n строкъ, каждая изъ которыхъ содержитъ n изъ этихъ количествъ, представляется случай разсматривать *опредѣлитель* системы. Для обозначенія определителя поступаютъ обыкновенно такъ: коэффициенты, служащіе для его составленія, размѣщаютъ въ видѣ квадрата и съ лѣвой стороны послѣдняго ставятъ букву D; напр.,

$$D \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba';$$

$$D \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' - ac'b'' + bc'a'' - ba'c'' + ca'b'' - cb'a''.$$

Теорія определителей входитъ въ алгебраическій анализъ. Мы напомнимъ только основныя теоремы, которыя понадобятся намъ въ этой главѣ.

§ 69. Чтобы *опредѣлитель* равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы существовала одна и та же линейная зависимость между всеми членами въ каждой изъ строкъ или въ каждомъ изъ столбцовъ.

Такъ, напр., чтобы

$$0 = D \begin{vmatrix} a''' & b''' & c''' & d''' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ a & b & c & d \end{vmatrix},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали четыре множителя, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, удовлетворяющих системѣ:

$$\begin{aligned}\lambda_1 a + \lambda_2 a' + \lambda_3 a'' + \lambda_4 a''' &= 0, \\ \lambda_1 b + \lambda_2 b' + \lambda_3 b'' + \lambda_4 b''' &= 0, \\ \lambda_1 c + \lambda_2 c' + \lambda_3 c'' + \lambda_4 c''' &= 0, \\ \lambda_1 d + \lambda_2 d' + \lambda_3 d'' + \lambda_4 d''' &= 0.\end{aligned}$$

§ 70. Произведение двухъ определителей, составленныхъ изъ одного и того же числа буквъ, выражается также определителемъ.

Пусть, напр., даны два определителя:

$$D \begin{vmatrix} a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_n^1 \\ a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_n^2 \\ \dots \\ a_1^n, a_2^n, a_3^n, \dots, a_n^n \end{vmatrix}, \quad D \begin{vmatrix} b_1^1, b_2^1, b_3^1, \dots, b_n^1 \\ b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots, b_n^2 \\ \dots \\ b_1^n, b_2^n, b_3^n, \dots, b_n^n \end{vmatrix};$$

ихъ произведение равно определителю

$$D \begin{vmatrix} c_1^1, c_2^1, c_3^1, \dots, c_n^1 \\ c_1^2, c_2^2, c_3^2, \dots, c_n^2 \\ \dots \\ c_1^n, c_2^n, c_3^n, \dots, c_n^n \end{vmatrix},$$

въ которомъ каждый изъ элементовъ дается уравненіемъ:

$$c_i^k = a_1^k b_i^1 + a_2^k b_i^2 + a_3^k b_i^3 + \dots + a_n^k b_i^n$$

при соответственныхъ значеніяхъ i и k , равныхъ послѣдовательно $1, 2, \dots, n$.

Объ предыдущія теоремы мы считаемъ хорошо извѣстными и не будемъ, по этому, останавливаться на ихъ доказательствахъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ФУНКЦИОНАЛЬНАГО ОПРЕДѢЛИТЕЛЯ

§ 71. Даны n функций отъ n независимыхъ переменныхъ:

$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$; составляя производныя отъ этихъ функций по каждой изъ переменныхъ:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_1}{dx_2}, & \frac{d\varphi_1}{dx_3}, & \dots, & \frac{d\varphi_1}{dx_n}, & & \\ \frac{d\varphi_2}{dx_1}, & \frac{d\varphi_2}{dx_2}, & \frac{d\varphi_2}{dx_3}, & \dots, & \frac{d\varphi_2}{dx_n}, & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1}, & \frac{d\varphi_n}{dx_2}, & \frac{d\varphi_n}{dx_3}, & \dots, & \frac{d\varphi_n}{dx_n}, & & \end{array}$$

замѣчаемъ, что всѣхъ производныхъ будетъ n^2 .

Определитель системы изъ этихъ n^2 производныхъ названъ Якоби функциональнымъ определителемъ; по примѣру нѣкоторыхъ математиковъ мы будемъ обозначать его посредствомъ

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}.$$

Если, напр., $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ двѣ функции отъ x и y , то по этому обозначенію

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}.$$

§ 72. Функциональный определитель играетъ, при одновременномъ изученіи нѣсколькихъ функций отъ такого же числа переменныхъ, роль подобную той, какую играетъ производная при изученіи функции отъ одной только переменной. Цѣль этой главы указать на эту аналогію, которая ярче раскроется впоследствии.

Производная отъ функции есть предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія этой функции къ соответственному приращенію переменной.

Функциональный определитель можетъ получить аналогичное опредѣленіе на основаніи слѣдующей теоремы:

Разсматривая n функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$, каждая изъ которыхъ содержитъ n переменныхъ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, и приписывая каждой переменной безконечно-малое приращеніе, мы получимъ для каждой функции соответственное приращеніе. Выбирая произвольно n различныхъ системъ приращеній для переменныхъ, мы получимъ n системъ соответственныхъ приращеній для функций. Функциональный определитель равенъ отношенію определителя системы приращеній функций къ определителю соответственной системы приращеній переменныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\begin{matrix} d_1x_1, d_1x_2, \dots, d_1x_n, \\ d_2x_1, d_2x_2, \dots, d_2x_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ d_nx_1, d_nx_2, \dots, d_nx_n \end{matrix}$$

будутъ n системъ безконечно-малыхъ приращеній, приписанныхъ послѣдовательно n переменнымъ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; приращеніе функции $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будетъ вида (§ 56):

$$d_n\varphi_i = \frac{d\varphi_i}{dx_1} d_kx_1 + \frac{d\varphi_i}{dx_2} d_kx_2 + \dots + \frac{d\varphi_i}{dx_n} d_kx_n,$$

что дастъ всѣ разсматриваемыя приращенія, стоитъ только въ этомъ послѣднемъ равенствѣ придать указателямъ k и i всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до n въ послѣдовательномъ порядкѣ; но по этому выраженію для $d_n\varphi_i$ видно (§ 70), что определитель системы:

$$\left. \begin{matrix} d_1\varphi_1, d_1\varphi_2, \dots, d_1\varphi_n, \\ d_2\varphi_1, d_2\varphi_2, \dots, d_2\varphi_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ d_n\varphi_1, d_n\varphi_2, \dots, d_n\varphi_n \end{matrix} \right\} \quad (A)$$

есть произведение двух других определителей слѣдующих системъ:

$$\left. \begin{array}{cccc} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_1}{dx_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_1}{dx_n}, \\ \frac{d\varphi_2}{dx_1}, & \frac{d\varphi_2}{dx_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_2}{dx_n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1}, & \frac{d\varphi_n}{dx_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{array} \right\} \quad (B)$$

и

$$\left. \begin{array}{cccc} d_1x_2, & d_1x_3, & \dots, & d_1x_n, \\ d_2x_1, & d_2x_2, & \dots, & d_2x_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_nx_1, & d_nx_2, & \dots, & d_nx_n. \end{array} \right\} \quad (C)$$

Отсюда заключаемъ, что определитель системы (B), т.-е. функциональный определитель данной системы функций, есть отношеніе определителя системы (A) къ определителю системы (C), иначе говоря, отношеніе определителя системы безконечно-малыхъ приращеній функций къ определителю соответственной системы приращеній переменныхъ. Итакъ, теорема доказана.

СЛУЧАЙ, КОГДА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ РАВЕНЪ НУЛЮ

§ 73. Когда функція отъ переменнѣной является постоянною величиною, ея производная равна нулю. Для системы функций существуетъ аналогичная теорема:

Когда нѣсколько функций не вполне независимы одна отъ другой, т.-е. когда существуетъ между ними постоянное соотношеніе, ихъ определитель равенъ нулю.

Покажемъ сначала, въ чемъ заключается аналогія этихъ двухъ столь различно выраженныхъ теоремъ.

Когда функція $\varphi(x)$ отъ одной только переменнѣной не есть постоянная, то каждому значенію функціи соответствуетъ определенное значеніе переменнѣной, и уравненіе

$$\varphi(x) = y \quad (1)$$

можетъ быть рѣшено относительно x . Наоборотъ, если функція φ есть величина постоянная, то, задавая ея значеніе, мы не определяемъ x , отъ котораго это значеніе не зависитъ, и уравненіе (1) не можетъ быть рѣшено относительно x .

Разсмотримъ теперь двѣ функціи $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$, при чемъ положимъ

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2) = y_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2) = y_2; \end{array} \right\} \quad (2)$$

оба эти уравненія могутъ быть рѣшены относительно x_1 и x_2 , лишь бы только функціи φ_1 и φ_2 были различны и независимы; но если между ними существуетъ постоянное соотношеніе, то одно изъ уравненій явится слѣдствіемъ другого, или же

Определитель системы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, составленный по u_1, u_2, \dots, u_n , равен отношению определителя системы (C) къ определителю системы (B).

Наконецъ, определитель системы u_1, u_2, \dots, u_n , составленный по x_1, x_2, \dots, x_n , равен отношению определителя системы (B) къ определителю системы (A). Отсюда очевидно, что первый изъ этихъ трехъ определителей равенъ произведенію двухъ другихъ. Такимъ образомъ теорема доказана.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ СИСТЕМЫ ОБРАТНЫХЪ ФУНКЦІЙ

§ 76. Производная отъ функціи $\varphi(x)$, взятая по x , есть обратная (§ 33) производной отъ x , взятой по φ .

Эта теорема обобщается слѣдующимъ образомъ.

Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ суть функціи отъ x_1, x_2, \dots, x_n , то x_1, x_2, \dots, x_n , обратно, могутъ быть разсматриваемы какъ функціи отъ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Определитель функцій $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, составленный по x_1, x_2, \dots, x_n , равенъ единицѣ, раздѣленной на определитель функцій x_1, x_2, \dots, x_n , составленный по переменнымъ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ,

$$\left. \begin{array}{cccc} d_1 x_1, & d_1 x_2, & \dots, & d_1 x_n, \\ d_2 x_1, & d_2 x_2, & \dots, & d_2 x_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ d_n x_1, & d_n x_2, & \dots, & d_n x_n \end{array} \right\} \quad (A)$$

$$\left. \begin{array}{cccc} d_1 \varphi_1, & d_1 \varphi_2, & \dots, & d_1 \varphi_n, \\ d_2 \varphi_1, & d_2 \varphi_2, & \dots, & d_2 \varphi_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ d_n \varphi_1, & d_n \varphi_2, & \dots, & d_n \varphi_n \end{array} \right\} \quad (B)$$

будутъ n системъ приращеній переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n и n системъ соответственныхъ приращеній $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Определитель системы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, составленный по переменнымъ x_1, x_2, \dots, x_n , равенъ (§ 71) отношению определителя системы (B) къ определителю системы (A); определитель же системы x_1, x_2, \dots, x_n , составленный по $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ какъ переменнымъ, равенъ отношению определителя системы (A) къ определителю системы (B), что и доказываетъ нашу теорему.

Примѣръ. — Если изъ двухъ заданныхъ уравненій:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x, y) = u, \\ \varphi_2(x, y) = v \end{array} \right\} \quad (1)$$

выводятся два слѣдующихъ:

$$\left. \begin{array}{l} x = \psi_1(u, v), \\ y = \psi_2(u, v), \end{array} \right\} \quad (2)$$

то существуетъ соотношеніе:

$$\frac{\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dx}}{\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du}} = 1. \quad (3)$$

Эту формулу можно повѣрить непосредственно при помощи правилъ, данныхъ (§ 64) для дифференцированія неявныхъ функцій.

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы вычислить $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$, исходя изъ уравненій (1), беремъ производныя отъ этихъ уравненій сначала по u , принимая v за постоянную, а затѣмъ по v , принимая u за постоянную. Находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{dy}{du} &= 1, \\ \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{d\varphi_2}{dy} \frac{dy}{du} &= 0, \\ \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{dy}{dv} &= 0, \\ \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{d\varphi_2}{dy} \frac{dy}{dv} &= 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{\frac{d\varphi_2}{dy}}{\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dx}}, & \frac{dx}{dv} &= \frac{-\frac{d\varphi_1}{dy}}{\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dx}}, \\ \frac{dy}{du} &= \frac{-\frac{d\varphi_2}{dx}}{\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dx}}, & \frac{dy}{dv} &= \frac{\frac{d\varphi_1}{dx}}{\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dx}}; \end{aligned}$$

подставляя, наконецъ, эти значенія въ формулу (3), получаемъ тождество.

ПРИВЕДЕНІЕ ОПРЕДѢЛИТЕЛЯ КЪ ОДНОЧЛЕНУ

§ 77. Теорема, посредствомъ которой было преобразовано (§ 71) опредѣленіе опредѣлителя, оставляетъ произвольными n системъ безконечно-малыхъ приращеній, приписываемыхъ переменнымъ x_1, x_2, \dots, x_n ; отсюда слѣдуетъ, что опредѣлителю можно придать нѣсколько различныхъ видовъ: мы ограничимся наиболѣе замѣчательнымъ случаемъ, когда опредѣлитель приводится къ одночлену.

Изъ $2n$ количествъ, $x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_n$, по своему произволу можно выбрать n , остальные опредѣляются. Если, поэтому, предположить, что $n-1$ изъ нихъ остаются постоянными, то всѣ остальные должны будутъ измѣняться одновременно и отношенія ихъ безконечно-малыхъ приращеній будутъ опредѣленными. Пользуясь этимъ замѣчаніемъ, предположимъ, что n системъ одновременныхъ приращеній, приписываемыхъ переменнымъ, будутъ взяты въ слѣдующей таблицѣ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 d_1x_1, & d_1x_2, & \dots, & d_1x_n, & d_1f_1, & 0, & 0, \dots, 0, \\
 0, & d_2x_2, & \dots, & d_2x_n, & d_2f_1, & d_2f_2, & 0, \dots, 0, \\
 0, & 0, & d_3x_3, & \dots, & d_3x_n, & d_3f_1, & d_3f_2, & d_3f_3, \dots, 0, \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & d_nx_n, & d_nf_1, & d_nf_2, & d_nf_3, \dots, d_nf_n.
 \end{array} \quad (A)$$

Первая строка этой таблицы показывает, что первые бесконечно-малыя приращения, приписываемыя x_1, x_2, \dots, x_n , таковы, что f_2, f_3, \dots, f_n не изменяются, а это, какъ обыкновенно говорятъ, опредѣляетъ вполнѣ ихъ отношенія. Вторая строка показываетъ, что вторыя выбранныя приращения, т.-е. $d_2x_1, d_2x_2, \dots, d_2x_n$, таковы, что f_3, f_4, \dots, f_n не изменяются; при этомъ, сверхъ того, предполагается, что $d_2x_1 = 0$. Это также опредѣляетъ отношенія всѣхъ приращеній, потому что, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, $n - 1$ разсматриваемыхъ количествъ предполагаются постоянными. Наконецъ, послѣдняя строка показываетъ, что въ n -ой системѣ приращеній x_1, x_2, \dots, x_{n-1} остаются постоянными.

Воспользовавшись свободою выбора одновременныхъ приращеній именно такъ, какъ сейчасъ показано, мы получимъ (§ 71) выраженіе для опредѣлителя системы, дѣля опредѣлитель количествъ, содержащихся въ квадратѣ справа, на опредѣлитель количествъ, содержащихся въ квадратѣ слѣва; вслѣдствіе же нулевыхъ членовъ каждый изъ этихъ опредѣлителей приводится, очевидно, къ произведенію членовъ, расположенныхъ по діагонали; отсюда, ихъ отношеніе равно

$$\frac{d_1f_1}{d_1x_1} \frac{d_2f_2}{d_2x_2} \frac{d_3f_3}{d_3x_3} \dots \frac{d_nf_n}{d_nx_n} = \left(\frac{d_1f_1}{d_1x_1} \right) \left(\frac{d_2f_2}{d_2x_2} \right) \dots \left(\frac{d_nf_n}{d_nx_n} \right). \quad (1)$$

Итакъ, опредѣлитель приводится къ одночлену, что и требовалось показать.

Чтобы понять значеніе отношеній $\left(\frac{d_1f_1}{d_1x_1} \right), \left(\frac{d_2f_2}{d_2x_2} \right), \dots, \left(\frac{d_nf_n}{d_nx_n} \right)$, нужно вернуться къ таблицѣ (A). Изъ этой таблицы видно, что $\frac{d_1f_1}{d_1x_1}$ есть отношеніе приращенія f_1 къ приращенію x_1 , когда f_2, f_3, \dots, f_n предполагаются постоянными,—поэтому необходимо, для вычисленія, выразить f_1 въ функціи переменныхъ $x_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ и отъ полученнаго результата взять производную по x_1 ; точно такъ же, $\frac{d_2f_2}{d_2x_2}$ есть отношеніе приращенія f_2 къ приращенію x_2 , когда $x_1, f_3, f_4, \dots, f_n$ остаются постоянными,—поэтому необходимо, для вычисленія, выразить f_2 въ функціи отъ переменныхъ $x_1, x_2, f_3, \dots, f_n$ и отъ полученнаго результата взять производную по x_2 . Продолжая такимъ образомъ, увидимъ, что для вычисленія множителей произведенія (1) нужно представить уравненія, связывающія $2n$ переменныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_n$, въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= F_1(x_1, f_2, f_3, \dots, f_n), \\
 f_2 &= F_2(x_1, x_2, f_3, \dots, f_n), \\
 f_3 &= F_3(x_1, x_2, x_3, f_4, \dots, f_n), \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 f_n &= F_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),
 \end{aligned}$$

и произведеніе производныхъ $\frac{df_1}{dx_1}, \frac{df_2}{dx_2}, \dots, \frac{df_n}{dx_n}$ будетъ тогда искомый опредѣлитель.

Какъ приложение, разыщемъ опредѣлитель слѣдующей системы:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta, \\y &= \rho \sin \theta \sin \psi, \\z &= \rho \sin \theta \cos \psi,\end{aligned}$$

гдѣ ρ , θ и ψ — независимыя переменныя.

Изъ этихъ уравненій выводимъ:

$$\begin{aligned}z &= \sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}, \\x &= \rho \cos \theta, \\y &= \rho \sin \theta \sin \psi;\end{aligned}$$

въ этомъ видѣ они даютъ выраженіе для z только съ одною изъ переменныхъ ρ , θ , ψ , для x — съ двумя и, наконецъ, для y со всѣми тремя. Слѣдовательно, опредѣлитель, въ силу предыдущей теоремы, будетъ

$$\frac{dz}{d\rho} \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{dy}{d\psi} = \frac{\rho}{z} \cdot (-\rho \sin \theta) \rho \sin \theta \cos \psi = -\rho^2 \sin \theta.$$

УПРАЖНЕНІЯ

1. Чтобы двѣ функціи отъ какого-угодно числа переменныхъ зависѣли одна отъ другой, необходимо и достаточно, чтобы ихъ частныя производныя, взятая по тѣмъ же переменнымъ, были пропорціональны.

2. Чтобы n функцій отъ $n + p$ переменныхъ имѣли между собою соотношеніе, не зависящее отъ этихъ переменныхъ, необходимо и достаточно, чтобы опредѣлители n функцій, составленные по n какому-угодно изъ этихъ переменныхъ, были равны нулю.

3. Если два угла u и v связаны съ двумя другими углами θ и ψ и съ тремя постоянными m , n , p уравненіями:

$$\frac{\cos u}{m \cos \theta} = \frac{\sin u \cos v}{n \sin \theta \cos \psi} = \frac{\sin u \sin v}{p \sin \theta \sin \psi},$$

то опредѣлитель функцій u и v , составленный по θ и ψ , равенъ

$$\frac{mnp \sin \theta}{\sin u (m^2 \cos^2 \theta + n^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + p^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi)^{3/2}}.$$

4. Пусть u_1, u_2, \dots, u_n будутъ n различныхъ функцій отъ n переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n . Если установить между этими функціями соотношеніе

$$F_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

то можно будетъ, въ силу этого соотношенія, выразить одну изъ переменныхъ, напр. x_n , въ функціи отъ $n - 1$ остальныхъ и рассмотреть u_1, u_2, \dots, u_{n-1} , какъ функціи отъ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , тогда получимъ:

$$\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} = \frac{\frac{dF_1}{du_n}}{\frac{dF_1}{dx_n}} \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

при чемъ производную $\frac{dF_1}{dx_n}$ нужно брать, имѣя въ виду, что u_1, u_2, \dots, u_n суть функціи отъ x_n .

5. Если при тѣхъ же данныхъ, что и въ предыдущей задачѣ, дается второе соотношеніе

$$F_2(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

и, слѣдовательно, рассматриваются u_1, u_2, \dots, u_{n-2} , какъ функціи отъ x_1, x_2, \dots, x_{n-2} , то будетъ:

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x_n, x_{n-1})} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_{n-2})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})} = \frac{D(F_1, F_2)}{D(u_n, u_{n-1})} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

6. Если положить

$$u_1 = \frac{x_1}{x_n}, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_n}, \quad \dots, \quad u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n},$$

гдѣ x_n есть функція отъ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , опредѣляемая уравненіемъ:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1,$$

то

$$\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} = \frac{1}{x_n^{n+1}}.$$

7. Если положить

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \varphi_1, \\ x_2 &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ x_3 &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ &\dots, \\ x_{n-1} &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_n, \end{aligned}$$

то

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)} = \sin^n \varphi_1 \sin^{n-1} \varphi_2 \sin^{n-2} \varphi_3 \dots \sin^2 \varphi_{n-1} \sin \varphi_n.$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Аналитическая теорія касательныхъ линій и касательныхъ плоскостей

УРАВНЕНІЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ КЪ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

§ 78. Когда плоская кривая опредѣляется заданнымъ уравненіемъ въ прямолинейныхъ координатахъ x и y ея точекъ, то можно найти (§ 24) уравненіе касательной къ этой кривой. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что угловой коэффициентъ этой касательной въ точкѣ, координаты которой суть x и y , есть производная $\frac{dy}{dx}$ отъ y , взятая по x , и въ предыдущихъ главахъ данъ способъ для ея вычисленія.

Называя черезъ t и u координаты какой-угодно точки касательной, точка касанія которой имѣетъ координаты x и y , составимъ для этой касательной уравненія:

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x). \quad (1)$$

Для нормали, которая перпендикулярна къ касательной и также проходитъ черезъ точку, координаты которой суть x и y , уравненіе будетъ:

$$u - y = -\frac{dx}{dy}(t - x), \quad (2)$$

или, что одно и то же,

$$(u - y) dy + (t - x) dx = 0. \quad (3)$$

§ 79. Уравненіе нормали можно получить болѣе непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, пусть t и u будутъ координаты точки на нормали; принимая эту точку за центръ круга, проходящаго черезъ основаніе x , y нормали, получимъ для него уравненіе вида:

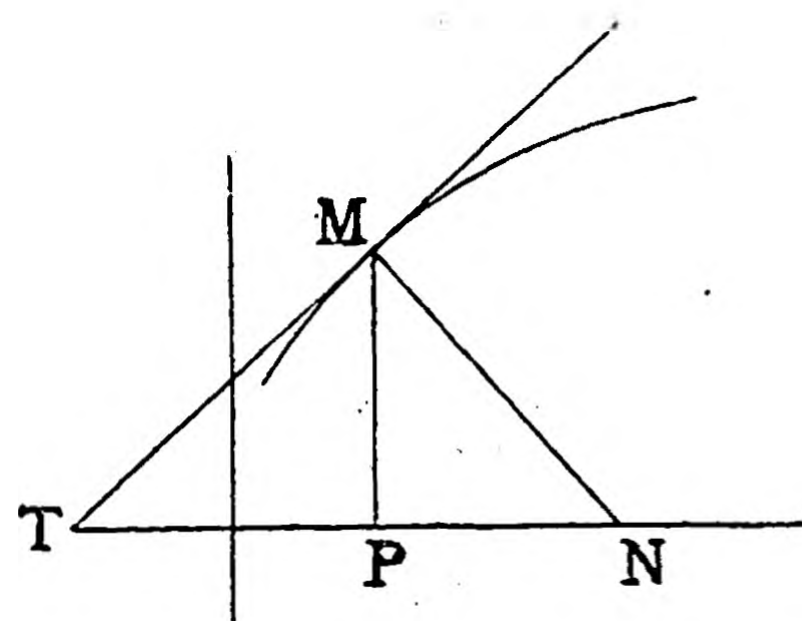
$$(y - u)^2 + (x - t)^2 = R^2, \quad (1)$$

гдѣ x и y обозначаютъ координаты какой-угодно изъ его точекъ. Дифференцируя это уравненіе, находимъ:

$$(y - u) dy + (x - t) dx = 0, \quad (2)$$

и такъ какъ этотъ кругъ, очевидно, касается данной кривой въ точкѣ, координаты которой суть x и y , то отношеніе $\frac{dy}{dx}$ въ этой точкѣ будетъ одинаково какъ для круга, такъ и для кривой; поэтому, dy и dx въ уравненіи (2) можно относить къ кривой, а въ такомъ случаѣ оно ничѣмъ не отличается отъ найденнаго выше (§ 78) уравненія между l и u .

§ 80. Опуская, при прямоугольныхъ осяхъ, изъ точки касанія M ординату MP , получаемъ линію PT (черт. 16), заключенную между точкою P и точкою пересѣченія касательной съ осью X -овъ; эта линія называется *подкасательною*. Ее сокращенно обо-



Черт. 16.

значаютъ черезъ S_t . Также, если MN —нормаль, то PN —*поднормаль*; мы будемъ ее обозначать черезъ S_n . Наконецъ, MT и MN называются соответственно *касательною* и *нормальною*. Выраженія для этихъ четырехъ линій получаются непосредственно по уравненіямъ касательной и нормали и будутъ:

$$PT = S_t = y \frac{dx}{dy}, \quad MT = t = \sqrt{y^2 + y^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

$$PN = S_n = y \frac{dy}{dx}, \quad MN = N = \sqrt{y^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Подкасательная и поднормаль имѣютъ точно тотъ знакъ, который даютъ предыдущія формулы, если согласиться считать подкасательную за положительную, когда линія TP направлена въ сторону положительныхъ X -овъ, и поднормаль за положительную, когда PN направлена въ ту же сторону. Мы не будемъ останавливаться на этомъ изслѣдованіи, не представляющемъ ни затрудненій, ни интереса.

§ 81. Часто бываетъ нужно вводить въ вычисленія углы, составленные касательною или нормальною къ кривой съ осями координатъ, при чемъ необходимо избѣгать всякой двусмысленности въ выборѣ направленія, въ которомъ отсчитываются эти углы.

Угловой коэффициентъ уравненія касательной есть $\frac{dy}{dx}$; поэтому, если α обозначаетъ уголъ, составленный положительнымъ направленіемъ оси X -овъ съ направленіемъ касательной выше этой оси, то

$$\text{tang } \alpha = \frac{dy}{dx}. \quad (1)$$

Направление нормали опредѣлится углами λ и μ , которые составляетъ съ осями перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на касательную. Такъ какъ перпендикуляръ можетъ быть взятъ въ томъ или другомъ направленіи, то углы λ и μ будутъ нѣсколько неопредѣленны, и ихъ можно будетъ замѣнить, *оба одновременно*, ихъ пополненіями ¹⁾. Отношеніе $\frac{\cos \lambda}{\cos \mu}$, тѣмъ не менѣе, вполне опредѣленно, и будетъ равно, какое бы мы ни выбрали изъ двухъ противоположныхъ направленій,

$$\frac{\cos \mu}{\cos \lambda} = - \frac{dx}{dy}, \quad (2)$$

что приводится къ равенству:

$$\cos \lambda dx + \cos \mu dy = 0. \quad (3)$$

По уравненію кривой

$$F(x, y) = 0$$

составляемъ для опредѣленія отношенія $\frac{dy}{dx}$ уравненіе:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = 0; \quad (4)$$

отсюда также заключаемъ, что уравненіе (2) равносильно

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\cos \lambda} = \frac{\frac{dF}{dy}}{\cos \mu}, \quad (5)$$

т.-е. что косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью къ плоской кривой съ осями координатъ, пропорціональны частнымъ производнымъ отъ первой части уравненія кривой.

Такъ какъ сумма квадратовъ этихъ косинусовъ, для какой-угодно прямой, равна единицѣ, то

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \pm \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}, \\ \cos \mu &= \mp \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

при чемъ знаки въ силу уравненія (5) должны быть взяты или заразъ верхніе, или заразъ нижніе.

¹⁾ До 180°. *Прим. перев.*

§ 82. Иногда на нормали къ кривой различаютъ направленія внѣшнее и внутреннее по отношенію къ этой кривой. Чтобы опредѣлить эти два направленія, нужно представить себѣ, что кривая, уравненіе которой есть

$$F(x, y) = 0,$$

дѣлитъ плоскость на двѣ части: внѣшнюю по отношенію къ кривой, опредѣляемую условіемъ $F(x, y) > 0$, и внутреннюю по отношенію къ кривой, опредѣляемую условіемъ $F(x, y) < 0$. Называя теперь *внѣшней* ту нормаль, которая направлена къ части плоскости, внѣшней относительно кривой, для угловъ λ и μ , составляемыхъ этою нормалью съ положительными направленіями осей, всегда будемъ имѣть:

$$\cos \lambda = + \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos \mu = + \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если мы отложимъ на внѣшней нормали бесконечно-малую длину ε , то координаты ея конца будутъ:

$$x + \varepsilon \cos \lambda, \quad y + \varepsilon \cos \mu.$$

А такъ какъ по § 53-му, пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, мы можемъ написать:

$$F(x + \varepsilon \cos \lambda, \quad y + \varepsilon \cos \mu) = F(x, y) + \frac{dF}{dx} \varepsilon \cos \lambda + \frac{dF}{dy} \varepsilon \cos \mu,$$

и такъ какъ $F(x, y) = 0$, то вторая часть приведется къ

$$\varepsilon \left(\frac{dF}{dx} \cos \lambda + \frac{dF}{dy} \cos \mu \right),$$

а это, послѣ замѣны $\cos \lambda$ и $\cos \mu$ ихъ значеніями (§ 81), дастъ:

$$F(x + \varepsilon \cos \lambda, \quad y + \varepsilon \cos \mu) = \pm \varepsilon \left[\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}} \right] =$$

$$= \pm \varepsilon \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}.$$

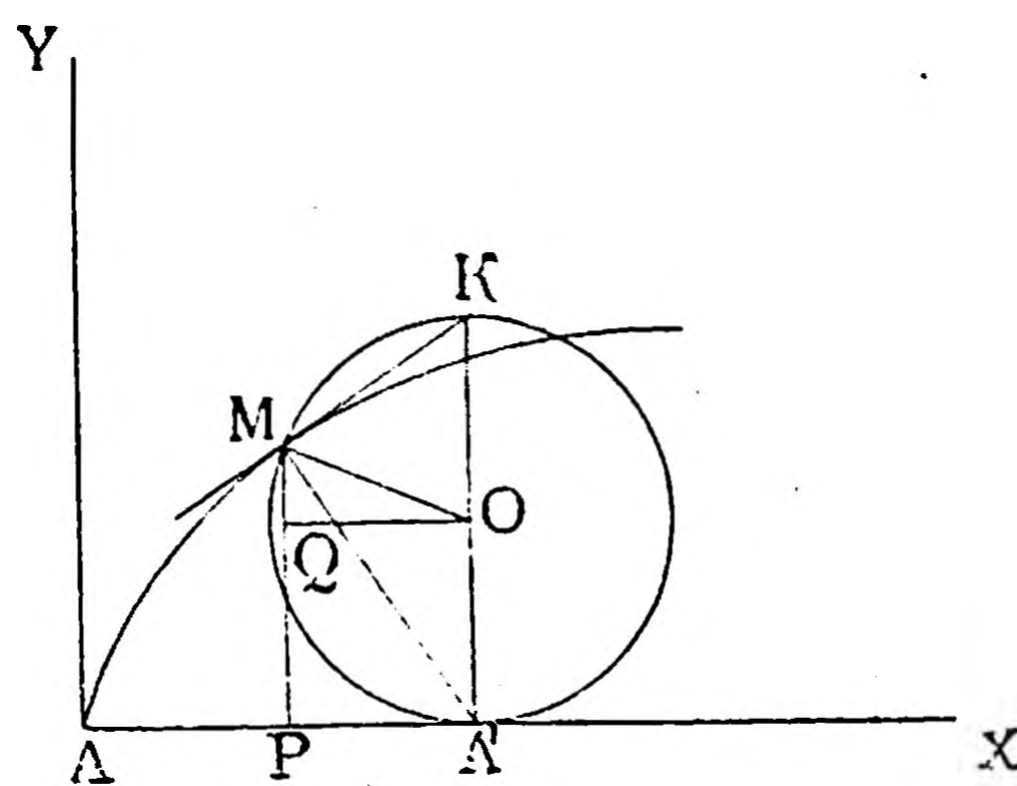
По предположенію конецъ длины ε занимаетъ внѣшнее положеніе относительно кривой и, слѣдовательно, соответственное значеніе F положительно. Отсюда заключаемъ, что во второй части нужно выбрать верхній знакъ, а это, въ свою очередь, требуетъ, чтобы были выбраны верхніе знаки и въ значеніяхъ $\cos \lambda$ и $\cos \mu$.

ОПРЕДЛЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ КАСАТЕЛЬНЫХЪ

§ 83. Приведемъ нѣсколько примѣровъ опредѣленія касательныхъ, выбирая, по преимуществу, задачи уже разсмотрѣнныя съ геометрической точки зрѣнія.

Задача I. — *Касательная къ циклоидѣ.*

Пусть будутъ: AH (черт. 17) прямая, по которой катится производящій кругъ, A —точка касанія этого круга въ его первоначальномъ положеніи, A' —точка касанія



Черт. 17.

круга въ слѣдующемъ его положеніи, M —соотвѣтственное положеніе производящей точки. По самому опредѣленію движенія

$$A'M = A'A.$$

Если взять за ось X -овъ линію AH , а за ось Y -овъ перпендикуляръ, возставленный въ точкѣ A , то координаты точки M будутъ:

$$MP = y, \quad PA = x;$$

далѣе, обозначая черезъ a радиусъ круга и черезъ u уголъ MOA' , находимъ:

$$\begin{aligned} y &= QP + MQ = a - a \cos u, \\ x &= AA' - OQ = au - a \sin u. \end{aligned}$$

Два уравненія:

$$y = a(1 - \cos u), \quad (1)$$

$$x = a(u - \sin u) \quad (2)$$

дадутъ, по исключеніи u , уравненіе циклоиды. Это исключеніе затрудненій не представитъ; дѣйствительно, изъ перваго уравненія находимъ значеніе для u :

$$u = \arccos \left(1 - \frac{y}{a} \right),$$

и вносимъ его во второе уравненіе, замѣчая при этомъ, что

$$\sin u = \sqrt{\frac{2y}{a} - \frac{y^2}{a^2}}.$$

Но гораздо проще непосредственно дифференцировать уравнения (1) и (2). Выводимъ:

$$\begin{aligned} dy &= a \sin u \, du, \\ dx &= a(1 - \cos u) \, du, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \cot \frac{1}{2} u.$$

Касательная, имѣющая угловой коэффициентъ $\cot \frac{1}{2} u$, образуетъ съ осью X -овъ уголъ, равный $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} u$, а нормаль съ тою же осью образуетъ уголъ $\frac{1}{2} u$. Отсюда заключаемъ, согласно сказанному въ § 14-омъ, что нормаль есть MA' , а касательная MK .

Изъ уравненія:

$$\frac{dy}{dx} = \cot \frac{1}{2} u$$

можно вывести выраженіе $\frac{dy}{dx}$ въ функціи отъ y , что намъ понадобится дальше. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{a - y}{a}, \\ \sin u &= \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}, \\ 1 - \cos u &= \frac{y}{a}; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \cot \frac{1}{2} u = \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}.$$

Это уравненіе приметъ другой видъ, если, проведя новыя оси, параллельныя старымъ, и измѣнивъ направленіе оси Y -овъ на обратное, мы перенесемъ начало координатъ въ вершину кривой, ордината которой есть $2a$. Формулы перехода будутъ:

$$y = 2a - y_1, \quad x = x_1 + \pi a,$$

и мы можемъ написать, опуская указатель при y ,

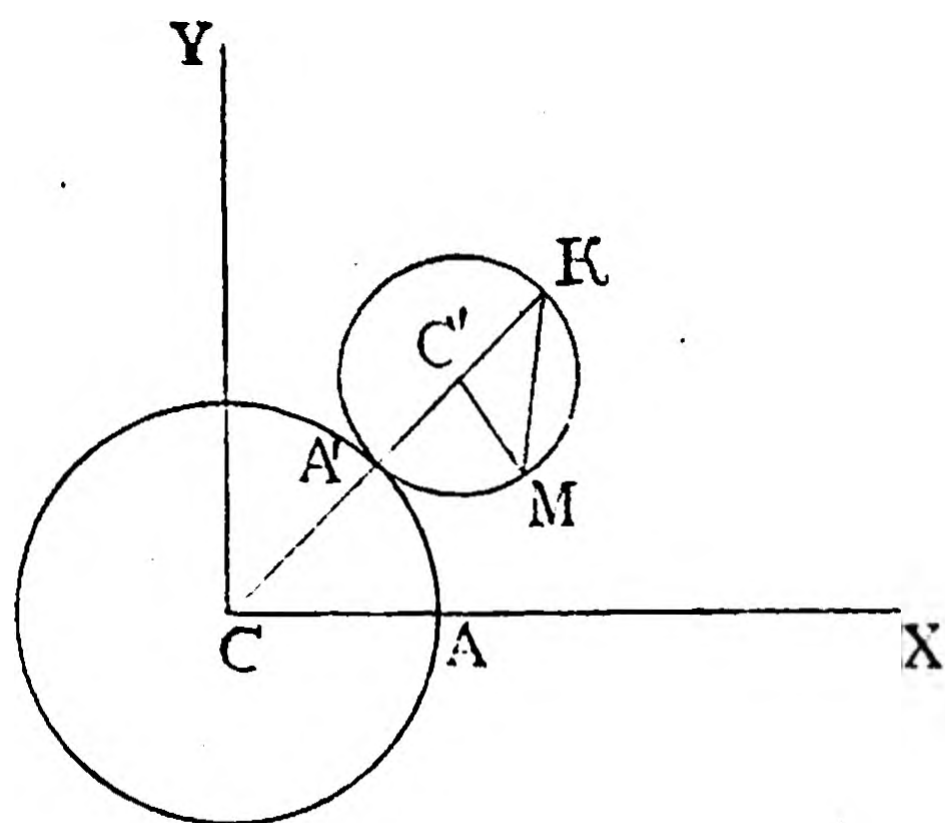
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}.$$

Задача II. — Касательная къ эпициклоидѣ.

Эпициклоида есть кривая, описываемая точкою окружности подвижнаго круга, катящагося по неподвижному такимъ образомъ, что дуги двухъ окружностей, точки которыхъ послѣдовательно соприкасаются, постоянно равны по длинѣ.

Разсмотримъ кругъ радіуса r , катящійся по неподвижной окружности радіуса R . Пусть A (черт. 18) есть начальное положеніе одной изъ точекъ катящейся окружности; когда эта окружность при своемъ движеніи коснется неподвижной окружности въ

точкѣ A' , точка A совпадетъ съ точкою M въ концѣ дуги $A'M$, равной по длинѣ $A'A$. Если за оси координатъ принять два прямоугольныхъ діаметра CX и CY неподвижной



Черт. 18.

окружности, первый изъ которыхъ CX проходитъ черезъ точку A , и положить $A'CA = \varphi$, а, значить, $A'C'M = \varphi \frac{R}{r}$, то для координатъ x, y точки M получимъ выраженія:

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \cos \varphi - r \cos \left(\varphi + \frac{R\varphi}{r} \right), \\ y &= (R + r) \sin \varphi - r \sin \left(\varphi + \frac{R\varphi}{r} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} dy &= (R + r) \left[\cos \varphi - \cos \left(\varphi + \frac{R\varphi}{r} \right) \right] d\varphi, \\ dx &= (R + r) \left[-\sin \varphi + \sin \left(\varphi + \frac{R\varphi}{r} \right) \right] d\varphi \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \varphi - \cos \left(\varphi + \frac{R\varphi}{r} \right)}{\sin \left(\varphi + \frac{R\varphi}{r} \right) - \sin \varphi} = \operatorname{tang} \left(\varphi + \frac{R\varphi}{2r} \right).$$

Соединивъ теперь точки K и M , замѣчаемъ, что прямая KM составляетъ съ осью X -овъ точно уголъ $\varphi + \frac{R\varphi}{2r}$, иначе говоря, она есть касательная въ точкѣ M , нормаль же будетъ направлена въ точку A' .

Задача III. — Изъ некоторой точки O опущены перпендикуляры на касательныя къ плоской кривой; определить касательную къ кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ оснований этихъ перпендикуляровъ.

Чтобы рѣшить эту задачу, геометрическое рѣшеніе которой уже дано въ § 14-омъ, возьмемъ за начало координатъ точку O ; пусть x и y будутъ координаты точки M плоской кривой. Пишемъ уравненіе касательной MP :

$$u - y = \frac{dy}{dx} (t - x) \quad (1)$$

и уравнение перпендикуляра OP :

$$u = -\frac{dx}{dy}t. \quad (2)$$

Если изъ этихъ двухъ уравненій и уравненія данной кривой исключить y и x , то получится уравненіе кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ P , но для опредѣленія касательной это исключеніе не необходимо. Въ самомъ дѣлѣ, исключаемъ изъ уравненій (1) и (2) отношеніе $\frac{dy}{dx}$ и находимъ между координатами u и t точки P слѣдующее соотношеніе:

$$u - y = -\frac{t}{u}(t - x),$$

или, что одно и то же,

$$u^2 + t^2 = uy + tx; \quad (3)$$

дифференцируемъ это уравненіе:

$$2udu + 2tdt = udy + tdx + ydu + xdt. \quad (4)$$

А такъ какъ по уравненію (2)

$$udy + tdx = 0,$$

то уравненіе (4) приметъ видъ:

$$2udu + 2tdt = ydu + xdt,$$

откуда

$$\frac{du}{dt} = \frac{\frac{x}{2} - t}{u - \frac{y}{2}}.$$

Итакъ, искомая касательная, угловой коэффициентъ которой выраженъ черезъ $\frac{du}{dt}$, есть перпендикуляръ къ линіи, соединяющей точку P съ серединою OM , координаты которой суть $\frac{x}{2}$ и $\frac{y}{2}$. Это равносильно найденному результату (§ 14).

Задача IV. — Изъ нѣкоторой точки O опущены перпендикуляры на касательныя къ плоской кривой, и каждый изъ нихъ OP продолженъ до такой точки Q , что

$$OP \cdot OQ = a^2,$$

гдѣ a есть данная длина. Найти касательную къ кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ Q .

Геометрическое рѣшеніе этой задачи дано въ § 14-мъ. Анализъ безъ труда приводитъ къ тому же результату. Называя черезъ x и y координаты точки касанія M , составляемъ уравненіе касательной MT :

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x) \quad (1)$$

и уравненіе перпендикуляра OP :

$$u = -\frac{dx}{dy}t. \quad (2)$$

Кромѣ того, называя черезъ x_1, y_1 координаты точки Q , пишемъ:

$$OQ^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^4}{OP^2} = \frac{a^4 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\left(y - x \frac{dy}{dx} \right)^2}$$

и, замѣняя $\frac{dy}{dx}$ на $-\frac{x_1}{y_1}$ въ силу уравненія (2), которому удовлетворяютъ $u = y_1, t = x_1$, получаемъ:

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^4 \left(1 + \frac{x_1^2}{y_1^2} \right)}{\left(y_1 + x \frac{x_1}{y_1} \right)^2},$$

или, послѣ упрощеній,

$$yy_1 + xx_1 = a^2. \quad (3)$$

Дифференцируемъ это уравненіе:

$$ydy_1 + y_1dy + xdx_1 + x_1dx = 0; \quad (4)$$

но такъ какъ точка Q лежитъ на прямой, выражаемой уравненіемъ (2), то

$$y_1dy + x_1dx = 0,$$

и уравненіе (4) приметъ видъ:

$$ydy_1 + xdx_1 = 0,$$

откуда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x}{y},$$

т.-е. что искомая касательная перпендикулярна къ прямой OM ; точно такой же результатъ былъ найденъ въ § 14-мъ.

§ 84. При рѣшеніи двухъ предыдущихъ задачъ нѣкоторые члены исчезли сами изъ полученнаго уравненія черезъ дифференцированіе, что значительно упростило вычисленія. Такое упрощеніе тѣсно связано съ однимъ геометрическимъ обстоятельствомъ, общимъ обѣимъ задачамъ; равнымъ образомъ, оно можетъ представиться во множествѣ аналогичныхъ случаевъ. Вотъ общая задача, для которой оно имѣетъ мѣсто и для которой обѣ предыдущія задачи являются частными случаями.

Задача V. — *Опредѣлить касательную къ некоторой кривой, точки которой выводятся, по заданному закону, изъ касательныхъ къ другой данной кривой.*

Пусть будетъ

$$\varphi(x, y) = 0$$

уравнение данной кривой; одна изъ ея касательныхъ имѣеть уравненіе:

$$u - y = \frac{dy}{dx} (t - x).$$

Координаты x_1 , y_1 соответственной точки искомой кривой суть данныя функціи отъ коэффициентовъ этого уравненія и представляютъ, слѣдовательно, выраженія вида:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1 \left(\frac{dy}{dx}, y - x \frac{dy}{dx} \right), \\ y_1 &= F_2 \left(\frac{dy}{dx}, y - x \frac{dy}{dx} \right). \end{aligned}$$

Чтобы вывести изъ этихъ уравненій угловой коэффициентъ $\frac{dy_1}{dx_1}$ искомой касательной, полагаемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u, \quad y - x \frac{dy}{dx} = v, \\ x_1 &= F_1(u, v), \\ y_1 &= F_2(u, v) \end{aligned}$$

и находимъ:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{dF_1}{du} du + \frac{dF_1}{dv} dv, \\ dy_1 &= \frac{dF_2}{du} du + \frac{dF_2}{dv} dv; \end{aligned}$$

кромѣ того,

$$dv = d(y - ux) = dy - udx - xdu.$$

Въ силу же уравненія $\frac{dy}{dx} = u$ это значеніе dv приводится къ $-xdu$; въ такомъ случаѣ

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{dF_1}{du} du - x \frac{dF_1}{dv} du, \\ dy_1 &= \frac{dF_2}{du} du - x \frac{dF_2}{dv} du, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{dF_2}{du} - x \frac{dF_2}{dv}}{\frac{dF_1}{du} - x \frac{dF_1}{dv}},$$

что и служитъ рѣшеніемъ нашей задачи. Упрощеніе результата происходитъ отъ того, что du является общимъ множителемъ и определеніе отношенія $\frac{dy_1}{dx_1}$ перестаетъ быть необходимымъ для нахождения производной $\frac{dy}{dx}$; въ противномъ случаѣ его нужно было бы вычислять.

Мы видимъ, что въ выраженіяхъ dx_1 и dy_1 члены съ dy и съ dx уничтожаются и остаются только члены съ множителемъ du . Слѣдовательно, вычисленія точно такія же, какъ и въ томъ случаѣ, если бы мы при переходѣ отъ одной какой-нибудь каса-

тельной къ другой, бесконечно-близкой, удовольствовались измѣненіемъ углового коэффициента, не измѣняя координатъ x и y точки касанія; равнымъ образомъ, искомая касательная точно такая же, какъ и въ томъ случаѣ, еслибы прямая, которая служитъ для опредѣленія различныхъ точекъ кривой, вращалась вокругъ неподвижной точки. Это мы уже видѣли въ § 14-мъ.

§ 85. Задача VI. — *Отъ различныхъ точекъ данной плоской кривой отложена по нормалямъ къ этой кривой постоянная длина; найти касательную къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ.*

Пусть x и y будутъ координаты въ некоторой точкѣ на данной кривой, а t и u — координаты соответственной точки на новой кривой; кромѣ того, пусть λ и μ будутъ углы, составляемые нормалью съ осями. Въ такомъ случаѣ, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} t &= x + l \cos \lambda, \\ u &= y + l \cos \mu, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

откуда посредствомъ дифференцированія находимъ

$$\left. \begin{aligned} dt &= dx + l d \cos \lambda, \\ du &= dy + l d \cos \mu. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Умножаемъ первое изъ этихъ уравненій на $\cos \lambda$, второе на $\cos \mu$, и полученные результаты складываемъ:

$$\cos \lambda dt + \cos \mu du = dx \cos \lambda + dy \cos \mu + l (\cos \lambda d \cos \lambda + \cos \mu d \cos \mu). \quad (3)$$

Зная же, что

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu = 1,$$

выводимъ посредствомъ дифференцированія:

$$\cos \lambda d \cos \lambda + \cos \mu d \cos \mu = 0, \quad (4)$$

и, кромѣ того, по § 81-му имѣемъ:

$$dx \cos \lambda + dy \cos \mu = 0; \quad (5)$$

поэтому уравненіе (3) приметъ видъ:

$$\cos \lambda dt + \cos \mu du = 0. \quad (6)$$

Изъ уравненій же (5) и (6) выводимъ:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dx},$$

т.-е. что касательныя къ обѣимъ кривымъ параллельны.

То же самое мы нашли выше (§ 14) геометрически.

§ 86. Задача VII. — Когда угол постоянной величины движется таким образом, что стороны его постоянно касаются данной плоской кривой, то вершина его P опишет такую кривую, нормалью къ которой будетъ прямая, соединяющая точку P съ центромъ круга, проходящаго черезъ эту точку и черезъ точки A и B , въ которыхъ стороны подвижнаго угла касаются данной кривой.

Пусть

$$y = \varphi(x)$$

будетъ уравненіе данной кривой; назовемъ черезъ α , β и α' , β' координаты обѣихъ точекъ касанія и черезъ a тангенсъ даннаго угла. Имѣя, кромѣ того, равенства: $\beta = \varphi(\alpha)$, $\beta' = \varphi(\alpha')$, мы можемъ опредѣлить координаты x , y точки P изъ слѣдующихъ уравненій:

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha} (x - \alpha), \quad (1)$$

$$y - \beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha'} (x - \alpha'), \quad (2)$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{d\beta'}{d\alpha'} = a \left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{d\beta'}{d\alpha'} \right). \quad (3)$$

Исключая $\frac{d\beta}{d\alpha}$ и $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$ изъ этихъ уравненій, находимъ:

$$a [(y - \beta)(y - \beta') + (x - \alpha)(x - \alpha')] + (y - \beta')(x - \alpha) - (y - \beta)(x - \alpha') = 0 \quad (4)$$

Это равенство, если принять за переменныя только x и y , представитъ кругъ, проходящій черезъ точку P и черезъ точки (α, β) , (α', β') .

Продифференцируемъ это уравненіе:

$$\begin{aligned} & [2ay - a(\beta + \beta') + (\alpha' - \alpha)] dy + [2ax - a(\alpha + \alpha') + (\beta - \beta')] dx + \\ & + \left\{ [(y - \beta) - a(x - \alpha)] - [(x - \alpha) + a(y - \beta)] \frac{d\beta'}{d\alpha'} \right\} d\alpha' - \\ & - \left\{ [(y - \beta') + a(x - \alpha')] - a[(y - \beta') + (x - \alpha')] \frac{d\beta}{d\alpha} \right\} d\alpha = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Если теперь въ уравненіе (5) подставить значенія $y - \beta$ и $y - \beta'$, выведенныя изъ уравненій (1) и (2), то коэффициенты при $d\alpha$ и $d\alpha'$ исчезнутъ въ силу уравненій (1), (2) и (3).

Итакъ, выраженіе дифференціального коэффициента $\frac{dy}{dx}$ одно и то же, будемъ ли мы разсматривать, въ уравненіи (4), α и α' какъ переменныя, или какъ постоянныя. Отсюда слѣдуетъ, что касательная къ геометрическому мѣсту точекъ P совпадаетъ съ касательною къ кругу, представляемому уравненіемъ (4), когда въ этомъ послѣднемъ α , β , α' , β' принимаются за постоянныя

Замѣчаніе, относящееся къ предыдущимъ задачамъ

§ 87. Всѣмъ предыдущимъ задачамъ можно придать одну общую форму: точки одной кривой Σ выводятся посредствомъ нѣкотораго опредѣленнаго построенія изъ точекъ и касательныхъ другой кривой S ; зная касательную въ данной точкѣ кривой S , найти касательную въ соотвѣтственной точкѣ кривой Σ .

Задача рѣшена въ частныхъ случаяхъ, приведенныхъ въ качествѣ примѣровъ, но изъ этого не слѣдуетъ, что рѣшеніе всегда возможно. При случайномъ выборѣ построенія, съ помощью котораго точки кривой Σ выводятся изъ точекъ и касательныхъ кривой S , касательная къ кривой Σ не будетъ опредѣлена, когда будутъ даны только соотвѣтственная точка S и касательная въ этой точкѣ. Если это и было возможно въ разсмотрѣнныхъ частныхъ примѣрахъ, то только потому, что примѣры были выбраны надлежащимъ образомъ.

Въ § 84-мъ для двухъ задачъ было разъяснено, къ чему относится то упрощеніе, которое появилось въ рѣшеніи; покажемъ, почему искомый результатъ невозможенъ вообще.

Пусть x, y будутъ координаты нѣкоторой точки кривой S и p —угловой коэффициентъ касательной въ этой точкѣ; называя черезъ x_1, y_1 координаты соотвѣтственной точки кривой Σ , можемъ написать, по опредѣленію этой кривой, что

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= F(x, y, p), \\ y_1 &= \varphi(x, y, p), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ F и φ суть двѣ функціи, вытекающія изъ данныхъ условій. Изъ равенствъ (1) выводимъ:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dp} dp, \\ dy_1 &= \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dp} dp; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dp} \frac{dp}{dx}}{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dp} \frac{dp}{dx}} = \frac{\frac{d\varphi}{dx} + p \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dp} \frac{dp}{dx}}{\frac{dF}{dx} + p \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dp} \frac{dp}{dx}}.$$

Отсюда видно, что $\frac{dy_1}{dx_1}$, угловой коэффициентъ искомой касательной, содержитъ не только x, y и p , какъ въ разсмотрѣнныхъ частныхъ примѣрахъ, но еще и $\frac{dp}{dx}$, а это значитъ, что когда задается точка кривой S и касательная въ этой точкѣ, то касательная въ соотвѣтственной точкѣ кривой Σ всё-таки останется, вообще, неопредѣленною.

КАСАТЕЛЬНЫЯ КЪ КРИВЫМЪ, ОТНЕСЕННЫМЪ КЪ ПОЛЯРНЫМЪ КООРДИНАТАМЪ

§ 88. Когда кривая задана уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ:

$$F(\omega, \rho) = 0,$$

то можно легко опредѣлить въ каждой точкѣ направленіе ея касательной. Пусть M будетъ данная точка на кривой, имѣющая координаты ω и ρ , а M' —ближайшая къ ней точка на той же кривой. Ведемъ радіусы-векторы OM , OM' и изъ точки O , какъ изъ центра, радіусомъ OM описываемъ дугу круга MP , оканчивающуюся на радіусъ-векторѣ OM' . Очевидно, можемъ написать:

$$OM = \rho, \quad \text{arc } MP = \rho d\omega.$$

Кромѣ того, такъ какъ $M'P$ есть безконечно-малое приращеніе ρ , то оно можетъ быть принято (§ 46) за $d\rho$. Далѣе, изъ треугольника $MM'P$ видно, что

$$\frac{MP}{M'P} = \frac{\sin \angle MM'P}{\sin \angle M'MP};$$

въ предѣлѣ же, когда $\frac{MP}{M'P}$ равно $\rho \frac{d\omega}{d\rho}$ и треугольникъ $MM'P$ —прямоугольный, отношеніе $\frac{\sin \angle MM'P}{\sin \angle M'MP}$ обратится въ тангенсъ угла V , составляемаго радіусомъ-векторомъ съ направленіемъ касательной въ сторону увеличенія угла ω . Итакъ.

$$\text{tang } V = \rho \frac{d\omega}{d\rho}.$$

Когда кривая отнесена къ полярнымъ координатамъ, то иногда, подъ именемъ касательной, нормали, подкасательной, поднормали подразумеваютъ четыре слѣдующихъ линіи.

Проведемъ черезъ полюсъ O перпендикуляръ къ радіусу-вектору OM ; пусть T есть пересѣченіе этого перпендикуляра съ касательной и N —пересѣченіе его съ нормалью, построенными въ точкѣ M ; тогда MT называется *касательной*, MN —*нормалью*, OT —*подкасательной* и ON —*поднормалью*.

Вычисленіе этихъ четырехъ линій не представляетъ никакихъ затрудненій. Пишемъ:

$$OT = S_t = \rho \text{ tang } V = \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}, \quad MT = t = \sqrt{\rho^2 + \rho^4 \frac{d\omega^2}{d\rho^2}},$$

$$ON = S_n = \frac{\rho^2}{OT} = \frac{d\rho}{d\omega}, \quad MN = N = \sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}}.$$

§ 89. Какъ приложеніе предыдущихъ формулъ, опредѣлимъ касательную къ логарифмической спирали, уравненіе которой есть

$$\rho = ae^{m\omega}.$$

Пишемъ:

$$\operatorname{tang} V = \rho \frac{d\omega}{d\rho} = ae^{m\omega} \frac{1}{mae^{m\omega}} = \frac{1}{m};$$

слѣдовательно, уголъ V — постоянный, имѣющій тангенсъ $\frac{1}{m}$. Такимъ образомъ, логарифмическая спираль пересѣкаетъ подъ постояннымъ угломъ радиусы-векторы, исходящія изъ неподвижной точки. При $m = 0$ уголъ V — прямой и логарифмическая спираль обращается въ кругъ.

Воспользуемся полярными координатами для рѣшенія еще слѣдующей задачи.

Задача VIII. — Изъ неподвижной точки O , находящейся въ плоскости кривой S , проведены къ этой кривой радиусы-векторы и продолжены, каждый, на постоянную длину l ; найти касательную къ кривой Σ , представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ.

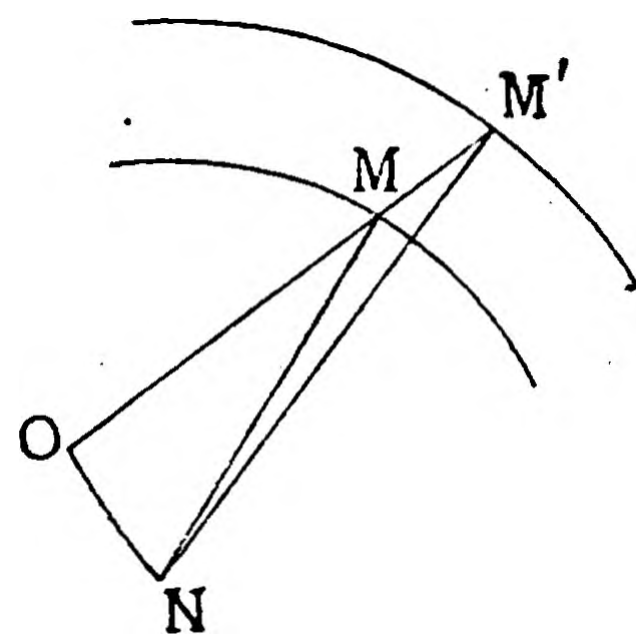
Отнесемъ къ полярнымъ координатамъ и примемъ за полюсъ неподвижную точку O . Если уравненіе данной кривой есть

$$\rho = \varphi(\omega),$$

то уравненіе кривой, получаемой изъ данной, будетъ:

$$\rho = \varphi(\omega) + l.$$

Очевидно, что поднормаль S_n , выражающаяся черезъ $\frac{d\rho}{d\omega}$, имѣетъ одно и то же значеніе для обѣихъ кривыхъ, такъ что нормали въ соответственныхъ точкахъ сходятся.



Черт. 19.

на перпендикулярѣ къ радиусу-вектору, проведенному черезъ точку O ; отсюда вытекаетъ весьма простое построеніе для нормали, а, слѣдовательно, и для касательной.

Въ самомъ дѣлѣ, для полученія нормали въ точкѣ M' кривой Σ достаточно провести нормаль въ точкѣ M къ кривой S и соединить M' съ точкою пересѣченія этой нормали съ перпендикуляромъ ON къ радиусу-вектору OMM' .

§ 90. Вилліамъ Робертсъ (William Roberts) замѣтилъ, что если положить

$$\rho' = \rho^n \quad \text{и} \quad \omega' = n\omega,$$

гдѣ ρ и ω представляютъ полярныя координаты точекъ кривой, то

$$\rho \frac{d\omega}{d\rho} = \rho' \frac{d\omega'}{d\rho'}$$

и, слѣдовательно, кривая, точки которой имѣютъ координаты ρ' и ω' , и предположенная кривая пересекаютъ соответственные радіусы-векторы подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Отсюда вытекаетъ способъ получать изъ двухъ данныхъ кривыхъ двѣ другія кривыя, пересекающіяся подъ тѣмъ же угломъ, какъ и первыя.

Напр., прямыя, уравненія которыхъ суть

$$\rho \cos \omega = \alpha, \quad \rho \cos(\omega - \varphi) = \beta,$$

гдѣ α и β —произвольны, а φ обозначаетъ постоянный уголъ, очевидно, пересекаются подъ угломъ φ . Отсюда заключаемъ, что кривыя, представляемыя уравненіями:

$$\rho^n \cos n\omega = \alpha^n, \quad \rho^n \cos(n\omega - \varphi) = \beta^n,$$

всегда пересекаются подъ угломъ φ , каковы бы ни были значенія, приписываемыя α и β . Полагая $n = 2$, получаемъ слѣдующую теорему:

Система равнобочныхъ, концентрическихъ и сходственно расположенныхъ гиперболъ пересѣкается другою системою такихъ же гиперболъ подъ постояннымъ угломъ, вдвое большимъ угла, образуемаго осями обѣихъ системъ.

При $n = \frac{1}{2}$ кривыя обращаются въ параболы съ однимъ и тѣмъ же фокусомъ и мы получаемъ слѣдующую теорему:

Всѣ параболы съ однимъ и тѣмъ же фокусомъ и общею осью пересѣкаются параболою съ тѣмъ же фокусомъ, но съ другою осью, подъ угломъ, равнымъ половинѣ угла, составляемаго осями обѣихъ системъ кривыхъ.

Робертсъ вывелъ изъ своего замѣчанія большое число теоремъ; нѣкоторыя изъ нихъ приведены въ качествѣ упражненій въ концѣ этой главы.

КАСАТЕЛЬНЫЯ КЪ КРИВЫМЪ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

§ 91. Пусть $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ будутъ уравненія кривой двойкой кривизны; отыщемъ касательную къ ней въ данной точкѣ.

Касательная есть предѣлъ прямой, соединяющей двѣ бесконечно-близкія точки, и мы знаемъ (§ 13), что можно безъ измѣненія этого предѣла замѣнить одну изъ разсматриваемыхъ точекъ другою, находящеюся отъ первой на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка. Итакъ, если x, y, z —координаты первой точки, то можно координаты второй принять равными $x + dx, y + dy, z + dz$; въ самомъ дѣлѣ, известно (§ 46), что dy и dz отличаются отъ истинныхъ приращеній y и z только на бесконечно-малыя второго порядка.

Если t, u, v обозначают координаты какой-нибудь точки прямой, соединяющей двѣ точки, координаты которыхъ суть $x, y, z, x + dx, y + dy, z + dz$, то уравненія этой прямой будутъ:

$$\frac{t-x}{dx} = \frac{u-y}{dy} = \frac{v-z}{dz}.$$

Итакъ, чтобы получить въ конечномъ видѣ уравненія касательной, достаточно найти три конечныхъ количества, пропорціональныхъ dx, dy, dz , и написать, что эти количества также пропорціональны $t-x, u-y, v-z$. Но мы уже выше (§ 62) нашли, что

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz}} = \frac{dy}{\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dx}} = \frac{dz}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy}};$$

слѣдовательно, уравненія касательной будутъ:

$$\frac{t-x}{\frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz}} = \frac{u-y}{\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dx}} = \frac{v-z}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy}}.$$

Иногда этимъ уравненіямъ придаютъ другой видъ, съ которымъ не мѣшаетъ ознакомиться. Они выражаютъ пропорціональность между разностями $t-x, u-y, v-z$ и дифференціалами dx, dy, dz ; съ другой же стороны, извѣстно, что эти дифференціалы удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz &= 0, \\ \frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dy} dy + \frac{d\psi}{dz} dz &= 0; \end{aligned}$$

поэтому, уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} (t-x) + \frac{d\varphi}{dy} (u-y) + \frac{d\varphi}{dz} (v-z) &= 0, \\ \frac{d\psi}{dx} (t-x) + \frac{d\psi}{dy} (u-y) + \frac{d\psi}{dz} (v-z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

выражаютъ, что разности $t-x, u-y, v-z$ имѣютъ тѣ же отношенія, какъ и дифференціалы dx, dy, dz ; иначе говоря, что эти разности и дифференціалы соотвѣтственно пропорціональны. Отсюда заключаемъ, что уравненія (1), представляющія двѣ плоскости, будутъ въ то же время и уравненіями касательной.

§ 92. Уравненія касательной къ кривой приводятъ безъ затрудненій къ уравненію нормальной плоскости. Чтобы получить эту плоскость, достаточно, въ самомъ дѣлѣ, замѣтить, что она проходитъ черезъ точку, координаты которой суть x, y, z , и что

она перпендикулярна къ касательной. Слѣдовательно, уравненіе этой плоскости мы напишемъ, по формуламъ аналитической геометріи, въ такомъ видѣ:

$$(t - x)dx + (u - y)dy + (v - z)dz = 0,$$

гдѣ dx , dy , dz должны быть замѣнены функціями имъ пропорціональными. Это уравненіе можно доказать и непосредственно. Пусть t , u , v будутъ координаты какой-нибудь точки пространства; разности $t - x$, $u - y$, $v - z$ пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ съ осями прямою, соединяющею эту точку съ данною точкою на кривой, координаты которой суть x , y , z . Но dx , dy , dz пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ касательною къ кривой съ тѣми же осями; слѣдовательно, условіе, чтобы эти два направленія были взаимно-перпендикулярны, т.-е. чтобы точка t , u , v принадлежала нормальной плоскости, выражается какъ разъ уравненіемъ:

$$(t - x)dx + (u - y)dy + (v - z)dz = 0.$$

Кривыя на шарѣ

§ 93. Изученіе кривыхъ, нанесенныхъ на шарѣ, привело математиковъ къ интереснымъ результатамъ, аналогія которыхъ со свойствами плоскихъ кривыхъ достойна замѣчанія. Мы ограничимся здѣсь указаніемъ на систему обычно употребляемыхъ координатъ для опредѣленія точекъ шаровой поверхности и на способъ полученія касательной къ кривой, заданной уравненіемъ въ двухъ координатахъ произвольной ея точки.

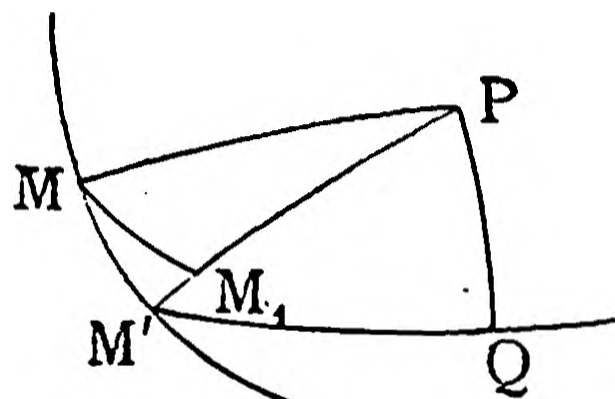
Выбираемъ на шарѣ точку P и называемъ ее *полюсомъ*; тогда большой кругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ радіусу, проведенному въ точку P , получаетъ названіе *экватора*; большіе круги, проходящіе черезъ точку P , получаютъ названіе *меридіановъ*, а малые круги, плоскости которыхъ параллельны экватору, названіе *параллелей*. Точки шаровой поверхности будутъ опредѣляться меридіаномъ и параллелью, на которыхъ онѣ находятся; меридіанъ задается угломъ φ , который онъ составляетъ съ неподвижнымъ меридіаномъ, а параллель—ея разстояніемъ до полюса, считая по дугѣ большого круга. При измѣненіи φ отъ 0 до 2π и θ отъ 0 до π будутъ опредѣлены всѣ точки шаровой поверхности. Эта система, очевидно, равносильна употребленію географическихъ широты и долготы на земной поверхности, при чемъ φ будетъ обозначать долготу и θ —дополненіе до широты.

Пусть нѣкоторая кривая задана соотношеніемъ $F(\theta, \varphi) = 0$ между координатами ея точекъ. Назовемъ двѣ смежныя (*черт.* 20) точки черезъ M и M' ; изъ точки P , какъ полюса, сферическимъ радіусомъ PM (т.-е. $R\theta$) опишемъ малый кругъ MM_1 . Треугольникъ $MM'M_1$ можетъ быть принятъ за плоскій и, слѣдовательно,

$$\text{tang } M' = \frac{MM_1}{M_1M'}.$$

гдѣ M' есть уголъ, составляемый кривою съ дугою большого круга PM' . Далѣе,

$$\begin{aligned} M_1M' &= R d\theta, \\ MM_1 &= R \sin \theta d\varphi; \end{aligned}$$



Черт. 20.

первое изъ этихъ уравненій—очевидно, второе же вытекаетъ изъ того, что MM_1 есть дуга, соответствующая углу $d\varphi$ въ кругѣ радиуса $R \sin \theta$. Значить,

$$\operatorname{tang} M' = \frac{R d\theta}{R \sin \theta d\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\varphi}.$$

Если черезъ M' проведемъ большой кругъ $M'Q$, нормальный къ разсматриваемой кривой, и опустимъ на него изъ точки P перпендикулярную дугу большого круга PQ , то сферическій треугольникъ PQM' дастъ:

$$\sin \frac{PQ}{R} = \sin \theta \cos M'.$$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНОЙ КЪ ПОВЕРХНОСТИ

§ 94. Дано уравненіе поверхности въ прямолинейныхъ координатахъ:

$$z = \varphi(x, y).$$

Исходя изъ точки этой поверхности, имѣющей координаты x, y, z , припишемъ x и y безконечно-малыя приращенія dx и dy ; тогда соответственное приращеніе z , какъ мы видѣли (§ 54), можетъ быть принято, если отбросить безконечно-малыя второго порядка, равнымъ

$$\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

гдѣ $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ — частныя производныя отъ z , когда x и y принимаются въ послѣдовательномъ порядкѣ за постоянныя.

Поэтому, вокругъ точки, координаты которой суть x, y, z , и на безконечно-маломъ разстояніи отъ этой точки приращеніе для z можетъ быть разсматриваемо, какъ линейная функція отъ приращеній x и y ; итакъ, называя черезъ t, u, v координаты

точки, находящейся на поверхности въ бесконечно-маломъ разстояніи отъ точки x, y, z и отбрасывая бесконечно-малыя второго порядка, пишемъ:

$$v - z = \frac{dz}{dx}(t - x) + \frac{dz}{dy}(u - y). \quad (1)$$

Это уравненіе, будучи первой степени относительно t, u, v , представитъ плоскость, которая, очевидно, проходитъ черезъ точку x, y, z и для бесконечно-близкихъ точекъ находится на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ разсматриваемой поверхности.

Докажемъ, что эта плоскость содержитъ касательную ко всякой кривой, нанесенной на поверхности и проходящей черезъ данную точку. Черезъ эту точку M , координаты которой суть x, y, z , ведемъ по поверхности кривую P , и пусть на этой кривой точка M' будетъ смежная точкѣ M , координаты которой суть t, u, v . Касательная къ линіи P есть предѣлъ прямой MM' , но мы видѣли (§ 13), при опредѣленіи этого предѣла, что точку M' можно замѣнить всякою другою точкою, находящеюся отъ нея на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка, и, слѣдовательно, замѣнить точку M' поверхности точкою плоскости (1), координаты которой, параллельныя x и y , суть t и u ; третья координата v , на основаніи предыдущаго, измѣнится лишь на бесконечно-малую второго порядка. Но послѣ такого перенесенія точки M' прямая MM' будетъ строго расположена въ плоскости (1), то же относится и къ ея предѣлу; значитъ, касательная въ M къ кривой P , т.-е. къ какой-угодно кривой, проведенной по поверхности черезъ эту точку, расположена въ плоскости (1).

Если уравненіе поверхности задано въ видѣ:

$$F(x, y, z) = 0,$$

то нужно, чтобы воспользоваться уравненіемъ (1), вычислить сначала $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ при помощи формулъ:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} &= 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} &= 0; \end{aligned}$$

тогда уравненіе касательной плоскости приметъ видъ:

$$\frac{dF}{dx}(t - x) + \frac{dF}{dy}(u - y) + \frac{dF}{dz}(v - z) = 0. \quad (2)$$

Тотъ же самый результатъ можно получить съ помощью формулъ, данныхъ въ § 91-мъ при опредѣленіи касательной къ кривой двойкой кривизны. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ на данной поверхности, уравненіе которой есть $F(x, y, z) = 0$, кривую, получающуюся отъ пересѣченія этой поверхности съ другою, которая проходитъ черезъ разсматриваемую точку (x, y, z) и уравненіе которой есть $\varphi(x, y, z) = 0$. Мы

видѣли (§ 91), что касательная къ этой кривой можетъ быть выражена системою уравненій:

$$(t-x) \frac{dF}{dx} + (u-y) \frac{dF}{dy} + (v-z) \frac{dF}{dz} = 0, \quad (1)$$

$$(t-x) \frac{d\varphi}{dx} + (u-y) \frac{d\varphi}{dy} + (v-z) \frac{d\varphi}{dz} = 0. \quad (2)$$

Если вторую поверхность замѣнить другою, подчиненною лишь тому условію, что она проходитъ черезъ данную точку, то кривая пересѣченія можетъ принять всѣ положенія на первой поверхности и касательная станетъ перемѣщаться; уравненіе же (1), оставаясь безъ измѣненія, представитъ плоскость, изъ которой эта касательная не выходитъ, а такая плоскость есть именно касательная плоскость, найденная выше другимъ путемъ.

УРАВНЕНІЕ НОРМАЛИ

§ 95. Когда извѣстно уравненіе касательной плоскости, то не трудно составить уравненія нормали. При прямоугольныхъ осяхъ нормаль образуетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны коэффициентамъ уравненія касательной плоскости; эта прямая проходитъ черезъ точку (x, y, z) и уравненія ея, поэтому, будутъ:

$$\frac{t-x}{\frac{dF}{dx}} = \frac{u-y}{\frac{dF}{dy}} = \frac{v-z}{\frac{dF}{dz}}. \quad (1)$$

Если уравненіе поверхности задается подъ видомъ:

$$z = \varphi(x, y),$$

то уравненія нормали выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{t-x}{\left(\frac{dz}{dx}\right)} = \frac{u-y}{\left(\frac{dz}{dy}\right)} = -\frac{v-z}{1}, \quad (2)$$

т.-е.

$$\left. \begin{aligned} t-x + (v-z) \frac{dz}{dx} &= 0, \\ u-y + (v-z) \frac{dz}{dy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

§ 96. Въ каждой точкѣ поверхности, уравненіе которой есть $F(x, y, z) = 0$, можно различать для нормали два противоположныхъ другъ другу направленія: внѣшнее и внутреннее. *Внѣшнее направленіе* есть направленіе къ точкамъ пространства, для которыхъ

$$F(x, y, z) > 0,$$

а *внутреннее направленіе* есть направленіе къ тѣмъ точкамъ, для которыхъ, наоборотъ,

$$F(x, y, z) < 0.$$

Для угловъ λ , μ , ν внешней нормали съ осями координатъ всегда

$$\cos \lambda = \frac{+\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos \mu = \frac{+\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos \nu = \frac{+\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненій (1) § 95-го ясно, что всѣ три косинуса пропорціональны $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$, а такъ какъ сумма ихъ квадратовъ равна единицѣ, то ихъ значенія или равны, или равны, но противоположны по знаку, значеніямъ, которыя мы только-что выписали. Назовемъ теперь черезъ ε бесконечно-малую длину, отложенную на внешней нормали. Координаты конца этой длины будутъ:

$$x + \varepsilon \cos \lambda, \quad y + \varepsilon \cos \mu, \quad z + \varepsilon \cos \nu,$$

и мы можемъ написать, пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка,

$$\begin{aligned} F(x + \varepsilon \cos \lambda, y + \varepsilon \cos \mu, z + \varepsilon \cos \nu) - F(x, y, z) &= \\ &= \frac{dF}{dx} \varepsilon \cos \lambda + \frac{dF}{dy} \varepsilon \cos \mu + \frac{dF}{dz} \varepsilon \cos \nu. \end{aligned}$$

Но по предположенію

$$F(x, y, z) = 0$$

и кромѣ того

$$\cos \lambda = \frac{\pm \frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos \mu = \frac{\pm \frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos \nu = \frac{\pm \frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}};$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned} F(x \pm \varepsilon \cos \lambda, y \pm \varepsilon \cos \mu, z \pm \varepsilon \cos \nu) &= \pm \varepsilon \left[\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}} \right] = \\ &= \pm \varepsilon \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}. \end{aligned}$$

Если нормаль имѣетъ внѣшнее направленіе, то первая часть послѣдняго равенства положительна и, значить, во второй части надо взять верхній знакъ, а это требуетъ того же знака и въ предыдущихъ уравненіяхъ.

§ 97. Такъ какъ формулы, дающія направленіе нормали къ поверхности, имѣютъ весьма важное значеніе, то не будетъ бесполезнымъ доказать ихъ прямо, независимо отъ уравненія касательной плоскости.

Пусть

$$F(x, y, z) = 0$$

будетъ уравненіе поверхности. Такъ какъ при переходѣ отъ точки этой поверхности, координаты которой суть x, y, z , къ смежной точкѣ, координаты которой суть $x + dx, y + dy, z + dz$, функція F должна оставаться равною нулю, то бесконечно-малое приращеніе F будетъ равно нулю, и мы можемъ написать:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0. \quad (1)$$

Въ этомъ уравненіи отброшены бесконечно-малыя второго порядка, и оно справедливо, если dx, dy, dz строго равны, какъ мы предположили, бесконечно-малымъ приращеніямъ x, y и z ; но оно строго точно, если при dx и dy , представляющихъ приращенія x и y , dz равенъ дифференціалу отъ z , который отличается, какъ мы знаемъ (§ 53), отъ приращенія z лишь на бесконечно-малую второго порядка.

Итакъ, уравненіе (1), которое вполнѣ точно, доказываетъ, что прямая, образуемая съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$, перпендикулярна къ прямой, образующей углы, косинусы которыхъ пропорціональны dx, dy, dz ; такъ какъ это послѣднее направленіе представляетъ прямую, соединяющую двѣ бесконечно-близкія точки поверхности, то оно тѣмъ самымъ будетъ направленіемъ какой-угодно изъ ея касательныхъ; слѣдовательно, первое направленіе есть направленіе прямой, перпендикулярной ко всѣмъ касательнымъ, т.-е. направленіе нормали.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ КАСАТЕЛЬНЫХЪ ПЛОСКОСТЕЙ

§ 98. Приложимъ предыдущія формулы къ нѣкоторымъ примѣрамъ.

Примѣръ I. — Ищемъ касательную плоскость къ поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$x - az - \varphi(y - bz) = 0. \quad (1)$$

Уравнение касательной плоскости, по предыдущимъ формуламъ, будетъ:

$$t - x - (u - y)\varphi'(y - bz) - [a - b\varphi'(y - bz)](v - z) = 0.$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью съ осями координатъ, пропорціональны

$$1, \quad -\varphi', \quad -a + b\varphi'$$

и такъ какъ

$$a + (-\varphi')b + (b\varphi' - a) = 0,$$

то нормаль къ поверхности перпендикулярна къ прямой, уравненія которой суть

$$x = az, \quad y = bz,$$

и, слѣдовательно, касательная плоскость параллельна этой прямой.

Уравненіе (1) представляетъ, дѣйствительно, цилиндрическую поверхность, производящая которой параллельна прямой $x = az$, $y = bz$, и касательная плоскость, содержащая всегда производящую, должна быть, какъ мы и нашли, параллельна этой прямой.

Примѣръ II.—Разсмотримъ, во-вторыхъ, поверхность, уравненіе которой есть

$$ax + by + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2). \quad (1)$$

Касательная плоскость выразится уравненіемъ:

$$(t - x)(a - 2x\varphi') + (u - y)(b - 2y\varphi') + (v - z)(1 - 2z\varphi') = 0.$$

Уравненія нормали будутъ:

$$\frac{t - x}{a - 2x\varphi'} = \frac{u - y}{b - 2y\varphi'} = \frac{v - z}{1 - 2z\varphi'}. \quad (2)$$

Поверхность, представляемая уравненіемъ (1), есть поверхность вращенія вокругъ прямой, уравненія которой суть

$$t = av, \\ u = bv.$$

Геометрія показываетъ, что эта прямая пересѣкается со всѣми нормальми къ поверхности. Это, впрочемъ, не трудно повѣрить по ихъ общему уравненію, найденному выше.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіяхъ (2) замѣнить t черезъ av и u черезъ bv , то они примутъ видъ:

$$\frac{av - x}{a - 2x\varphi'} = \frac{bv - y}{b - 2y\varphi'} = \frac{v - z}{1 - 2z\varphi'}$$

и будутъ удовлетворяться при

$$v = \frac{1}{2\varphi'}.$$

§ 99. Рѣшимъ, наконецъ, нѣсколько задачъ, въ которыхъ требуется найти касательную плоскость къ достаточно опредѣленной поверхности, уравненіе которой, однако, не задано.

Задача 1.—Опустивъ изъ точки O перпендикуляръ OP на касательную плоскость къ поверхности S , заданной ея уравненіемъ; найти касательную плоскость къ поверхности Σ , описанной основаніемъ P этого перпендикуляра.

Пусть x, y, z будутъ координаты точки поверхности S ; уравненіе плоскости, касательной въ этой точкѣ, будетъ:

$$v - z = \frac{dz}{dx}(t - x) + \frac{dz}{dy}(u - y); \quad (1)$$

перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на эту плоскость, выразится уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} t + v \frac{dz}{dx} &= 0, \\ u + v \frac{dz}{dy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если изъ уравненій (1) и (2) исключить $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, то получится соотношеніе

$$(v - z)v + (t - x)t + (u - y)u = 0 \quad (3)$$

между координатами x, y, z точки M поверхности S и координатами t, u, v соответственной точки P поверхности Σ .

Дифференцируя это уравненіе, находимъ:

$$(2v - z)dv + (2t - x)dt + (2u - y)du - vdz - tdx - udy = 0. \quad (4)$$

Кромѣ того,

$$tdx + udy + vdz = 0.$$

Дѣйствительно, t, u, v пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ съ осями перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ начала координатъ на плоскость, касательную къ поверхности S въ точкѣ M , а dx, dy, dz пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ съ осями линіей, соединяющей, на этой поверхности, точку x, y, z съ бесконечно-близкою точкою, и ясно, что эти два направленія взаимно-перпендикулярны. Уравненіе (4) приводится, слѣдовательно, къ

$$(2t - x)dt + (2u - y)du + (2v - z)dv = 0. \quad (5)$$

Полученное уравненіе доказываетъ, что прямая, составляющая съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны dt, du, dv , т.-е. всякая касательная къ поверхности Σ въ точкѣ P , перпендикулярна къ прямой, составляющей углы, косинусы которыхъ пропорціональны $(2t - x), (2u - y), (2v - z)$, т.-е. къ прямой, соединяющей точку, координаты которой суть t, u, v , съ точкою, координаты которой суть $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$. Отсюда

вытекаетъ, что нормаль къ поверхности Σ проходитъ, какъ было доказано въ § 14-мъ, черезъ середину прямой OM , координаты которой суть $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$.

Задача II.—Опуститъ изъ точки O перпендикуляръ на плоскость, касательную къ поверхности S , заданной ея уравненіемъ и этотъ перпендикуляръ OP продолжитъ до точки Q такой, что

$$OP \cdot OQ = a^2,$$

гдѣ a есть данная линія. Найти плоскость, касательную къ поверхности Σ , геометрическому мѣсту точекъ Q .

Пусть M есть точка касанія плоскости, касательной къ поверхности S , и x, y, z — ея координаты. Уравненіе касательной плоскости будетъ:

$$v - z = (t - x) \frac{dz}{dx} + (u - y) \frac{dz}{dy}; \quad (1)$$

перпендикуляръ OP , какъ и въ предыдущей задачѣ, выразится уравненіями:

$$t + v \frac{dz}{dx} = 0, \quad u + v \frac{dz}{dy} = 0. \quad (2)$$

Слѣдовательно, называя черезъ x_1, y_1, z_1 координаты точки Q , будемъ имѣть:

$$x_1 + z_1 \frac{dz}{dx} = 0, \quad y_1 + z_1 \frac{dz}{dy} = 0,$$

$$OQ^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{a^4}{OP^2} = \frac{a^4 \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right]}{\left(x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} - z \right)^2}.$$

Исключая изъ полученныхъ уравненій $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, находимъ:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = a^2. \quad (3)$$

Какъ сейчасъ увидимъ, достаточно одного этого уравненія для опредѣленія искомой касательной плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцированіе даетъ:

$$0 = xdx_1 + ydy_1 + zdz_1 + x_1dx + y_1dy + z_1dz, \quad (4)$$

но

$$x_1dx + y_1dy + z_1dz = 0,$$

потому что линія OP составляетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны x_1, y_1, z_1 и, кромѣ того, будучи перпендикулярной къ плоскости, касательной къ данной поверхности, она образуетъ прямой уголъ съ линіей, касательной къ поверхности S , а эта послѣдняя линія составляетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны dx, dy, dz .

Слѣдовательно, уравненіе (4) приметъ видъ:

$$0 = xdx_1 + ydy_1 + zdz_1 \quad (5)$$

и выразить, что прямая, составляющая съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны dx_1, dy_1, dz_1 , перпендикулярна къ прямой, косинусы угловъ которой съ осями пропорціональны x, y, z , т.-е. что всякая касательная къ поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ Q , перпендикулярна къ прямой OM , соединяющей начало O съ соответственной точкою M поверхности S . Значитъ, искомая касательная плоскость перпендикулярна къ линіи OM , что вполне согласуется съ найденнымъ раньше (§ 14) результатомъ.

§ 100. Рѣшеніе двухъ предыдущихъ задачъ представляютъ замѣчательное упрощеніе, тѣсно связанное съ однимъ общимъ для нихъ геометрическимъ обстоятельствомъ; это упрощеніе также имѣетъ мѣсто во всѣхъ задачахъ, заключающихся въ слѣдующей общей задачѣ:

Задача III. — Точки поверхности Σ выводятся по некоторому произвольному, но вполне определенному, закону изъ касательныхъ плоскостей къ данной поверхности S ; найти касательную плоскость въ точкѣ поверхности Σ .

Пусть x, y, z будутъ координаты точки поверхности S ; уравненіе плоскости, касательной въ этой точкѣ, будетъ:

$$v - z = (t - x) \frac{dz}{dx} + (u - y) \frac{dz}{dy}.$$

Координаты x_1, y_1, z_1 соответственной точки поверхности Σ являются, по предположенію, заданными функциями отъ коэффициентовъ этого уравненія; слѣдовательно, полагая

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= p, & \frac{dz}{dy} &= q, \\ z - px - qy &= u, \end{aligned}$$

будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(p, q, u), \\ y_1 &= \varphi_2(p, q, u), \\ z_1 &= \varphi_3(p, q, u), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{d\varphi_1}{dp} dp + \frac{d\varphi_1}{dq} dq + \frac{d\varphi_1}{du} du, \\ dy_1 &= \frac{d\varphi_2}{dp} dp + \frac{d\varphi_2}{dq} dq + \frac{d\varphi_2}{du} du, \\ dz_1 &= \frac{d\varphi_3}{dp} dp + \frac{d\varphi_3}{dq} dq + \frac{d\varphi_3}{du} du. \end{aligned}$$

Но изъ уравненія:

$$u = z - px - qy$$

выводимъ:

$$du = dz - p dx - q dy - x dp - y dq,$$

т.-е. (§ 54)

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q dy, \\ du &= -x dp - y dq; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} dx_1 &= \left(\frac{d\varphi_1}{dp} - \frac{x d\varphi_1}{du} \right) dp + \left(\frac{d\varphi_1}{dq} - \frac{y d\varphi_1}{du} \right) dq, \\ dy_1 &= \left(\frac{d\varphi_2}{dp} - \frac{x d\varphi_2}{du} \right) dp + \left(\frac{d\varphi_2}{dq} - \frac{y d\varphi_2}{du} \right) dq, \\ dz_1 &= \left(\frac{d\varphi_3}{dp} - \frac{x d\varphi_3}{du} \right) dp + \left(\frac{d\varphi_3}{dq} - \frac{y d\varphi_3}{du} \right) dq. \end{aligned}$$

Исключая изъ этихъ уравненій dp и dq , находимъ соотношеніе вида:

$$A dx_1 + B dy_1 + C dz_1 = 0,$$

изъ котораго заключаемъ такъ же, какъ мы это сдѣлали для уравненій (5) въ задачахъ I и II, что нормаль къ поверхности Σ въ точкѣ x_1, y_1, z_1 составляетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны A, B, C .

Успѣхъ метода, какъ видимъ, зависитъ отъ того, что можно безъ новыхъ дифференцированій составить соотношеніе первой степени между dx_1, dy_1, dz_1 , потому что du выражается въ функции отъ dp и dq . Можно замѣтить, что такъ какъ значенія dx_1, dy_1, dz_1 содержатъ только dp и dq , то плоскость, касательная къ поверхности Σ , будетъ та же, какъ и въ томъ случаѣ, еслибы плоскость, изъ которой выводятся точки этой поверхности, измѣняла бы свое направленіе, постоянно проходя черезъ одну и ту же точку M ; дѣйствительно, p и q суть угловые коэффициенты уравненія плоскости, а измѣненія dx, dy, dz координатъ точки касанія совершенно исчезли въ окончательномъ результатѣ.

Этотъ результатъ согласуется съ тѣмъ, что уже было сказано въ § 14-мъ.

§ 101. Когда точки поверхности выводятся изъ точекъ и касательныхъ плоскостей въ этихъ точкахъ другой поверхности, то касательная плоскость въ какой-нибудь точкѣ составленной такимъ образомъ поверхности не всегда можетъ быть выведена изъ заданныхъ точки и касательной въ ней плоскости къ первообразной поверхности. Впрочемъ, мы приведемъ два примѣра, гдѣ это возможно.

Задача IV.—*На нормаляхъ къ данной поверхности S отъ различныхъ точекъ этой поверхности отложена постоянная длина l ; найти нормаль къ поверхности Σ , представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ.*

Пусть x, y, z будутъ координаты точки поверхности S ; α, β, γ —углы, которые нормаль въ этой точкѣ образуетъ съ осями, и x_1, y_1, z_1 —координаты конца длины l , отложенной на этой нормали; очевидно, что

$$\begin{aligned} x_1 &= x + l \cos \alpha, \\ y_1 &= y + l \cos \beta, \\ z_1 &= z + l \cos \gamma. \end{aligned}$$

дифференцируя, находимъ:

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx + l \cos \alpha, \\ dy_1 &= dy + l \cos \beta, \\ dz_1 &= dz + l \cos \gamma. \end{aligned}$$

Умножая первое изъ этихъ уравненій на $\cos \alpha$, второе на $\cos \beta$, третье на $\cos \gamma$ и складывая, получаемъ:

$$\begin{aligned} \cos \alpha dx_1 + \cos \beta dy_1 + \cos \gamma dz_1 &= \cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz + \\ &+ l(\cos \alpha d \cos \alpha + \cos \beta d \cos \beta + \cos \gamma d \cos \gamma). \end{aligned} \quad (1)$$

А такъ какъ

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

что послѣ дифференцированія даетъ:

$$\cos \alpha d \cos \alpha + \cos \beta d \cos \beta + \cos \gamma d \cos \gamma = 0,$$

и, кромѣ того,

$$\cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz = 0,$$

что вытекаетъ изъ взаимной перпендикулярности направленій нормали и касательной во всякой точкѣ поверхности S , то уравненіе (1) приметъ видъ:

$$\cos \alpha dx_1 + \cos \beta dy_1 + \cos \gamma dz_1 = 0,$$

откуда заключаемъ, что нормаль къ поверхности Σ въ точкѣ x_1, y_1, z_1 образуетъ съ осями углы, равные α, β, γ , и, слѣдовательно, совпадаетъ съ нормалью въ соответственной точкѣ поверхности S . Это уже было доказано въ § 14-мъ.

Задача V.—Дана точка O и поверхность S ; соединяемъ точку O съ произвольною точкою M поверхности S ; черезъ радіусъ OM и нормаль MN къ поверхности въ точкѣ M ведемъ плоскость; въ плоскости OMN возставаемъ въ точкѣ O перпендикуляръ OP къ радіусу OM , равный по длинѣ этому радіусу. Найти плоскость, касательную къ поверхности, представляющей геометрическое мѣсто точекъ P .

Пересѣкаемъ поверхность S шаровою поверхностью радіуса OM изъ центра O ; не трудно замѣтить, что заданный въ условіи задачи радіусъ OP , на которомъ требуется отложить длину $OP = OM$, перпендикуляренъ къ плоскости, касающейся по производящей OM конуса, вершина котораго находится въ O и основаніемъ котораго служитъ кривая пересѣченія.

Пусть x, y, z будутъ координаты точки M , а x_1, y_1, z_1 —координаты точки P ; въ силу взаимной перпендикулярности радіусовъ-векторовъ OM и OP можемъ написать:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0. \quad (1)$$

Кромѣ того, такъ какъ линия OP перпендикулярна къ производящей конуса, бесконечно-близкой къ OM , то

$$x_1 dx + y_1 dy + z_1 dz = 0, \quad (2)$$

гдѣ dx , dy , dz обозначаютъ дифференціалы отъ x , y , z , если оставаться на кривой пересѣченія шара съ поверхностью S . Если уравненіе поверхности S есть

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

то dx , dy , dz будутъ опредѣляться уравненіями:

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = 0, \quad (3)$$

$$x dx + y dy + z dz = 0; \quad (4)$$

наконецъ,

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (5)$$

Дифференцируя уравненія (1) и (5) и просоединяя къ нимъ уравненіе (3), пишемъ:

$$\left. \begin{aligned} -(x dx_1 + y dy_1 + z dz_1) &= x_1 dx + y_1 dy + z_1 dz, \\ 0 &= \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz, \\ x_1 dx_1 + y_1 dy_1 + z_1 dz_1 &= x dx + y dy + z dz. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравненія же (2), (3) и (4), будучи совмѣстны, показываютъ, что *опредѣлитель* изъ коэффициентовъ при dx , dy , dz во вторыхъ частяхъ уравненій (6) равенъ нулю; иначе говоря, существуютъ такихъ три множителя, l , n , m , что вторыя части, умноженныя на этихъ множителяхъ, даютъ сумму, тождественно равную нулю; значитъ, тоже относится и къ первымъ частямъ уравненій, т.-е.

$$(mx_1 - x) dx_1 + (my_1 - y) dy_1 + (mz_1 - z) dz_1 = 0, \quad (7)$$

при чемъ m опредѣляется изъ уравненій:

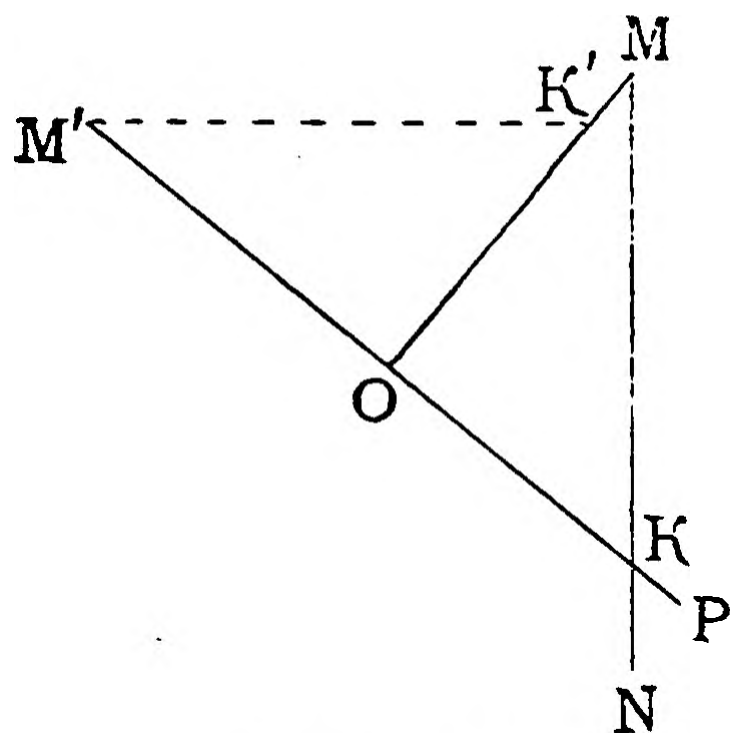
$$\left. \begin{aligned} x_1 + mx + n \frac{d\varphi}{dx} &= 0, \\ y_1 + my + n \frac{d\varphi}{dy} &= 0, \\ z_1 + mz + n \frac{d\varphi}{dz} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

каждое изъ которыхъ есть слѣдствіе двухъ другихъ.

Какъ и въ предыдущихъ задачахъ, мы увидимъ, что, по уравненію (7), нормаль къ поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ x_1 , y_1 , z_1 , образуетъ съ

осями углы, косинусы которых пропорциональны $mx_1 = x$, $my_1 = y$, $mz_1 = z$. Таким образом, предложенная задача решена. Покажем, на сколько изящно может быть истолкованъ этотъ результатъ.

Разсмотримъ треугольникъ OMK (черт. 21), составленный прямою OM , нор-



Черт. 21.

малью MN и линією OP . Такъ какъ сумма проекцій боковъ треугольника на оси координатъ равна нулю, то

$$\frac{OKx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{KM \frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} - \frac{xOM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

$$\frac{OKy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{KM \frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} - \frac{yOM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

$$\frac{OKz_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{KM \frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} - \frac{zOM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0;$$

отсюда видно, что мы, принимая во вниманіе равенство $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$, удовлетворимъ уравненіямъ (8), выбравъ

$$m = -\frac{OM}{OK}, \quad n = \pm \frac{KM}{OK} \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}.$$

Косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью въ точкѣ P съ осями, пропорциональны

$$x_1OM + xOK, \quad y_1OM + yOK, \quad z_1OM + zOK.$$

Отлагая же на OM длину $OK' = OK$ и на продолженіи OP длину $OM' = OM$, видимъ, что эти три выраженія пропорциональны проекціямъ на оси линіи $K'M'$, соединяющей полученныя такимъ образомъ точки. Слѣдовательно эта линія $K'M'$ параллельна иско-мой нормали, а изъ элементарной геометріи ясно, что она же въ плоскости MOP перпендикулярна къ MK . Точно такой же результатъ мы нашли въ § 14-мъ.

§ 102. Приложимъ, наконецъ, теорію касательныхъ плоскостей къ опредѣленію закона, по которому перемѣщается касательная плоскость къ линейчатой поверхности въ различныхъ точкахъ одной и той же прямолинейной производящей.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} x &= z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ y &= zf(\alpha) + F(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

будутъ уравненія производящей; при измѣненіи параметра α эта производящая займетъ въ пространствѣ рядъ положеній, совокупность которыхъ даетъ рассматриваемую поверхность. Не измѣняя ни въ чемъ закона, который мы разыскиваемъ, предположимъ, для упрощенія, что при какомъ-нибудь значеніи α , напр. $\alpha = 0$, производящая совпадаетъ съ осью z -овъ; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, & \psi(0) &= 0, \\ f(0) &= 0, & F(0) &= 0. \end{aligned}$$

Поискемъ, какъ измѣняются плоскости, касающіяся поверхности въ различныхъ точкахъ оси z -овъ. Въ уравненія этихъ плоскостей, какъ содержащихъ ось z -овъ, не войдетъ координата, параллельная этой оси, и нельзя будетъ воспользоваться формулою:

$$v - z = (t - x) \frac{dz}{dx} + (u - y) \frac{dz}{dy},$$

потому что коэффициенты $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ необходимо являются бесконечно-огромными. Поэтому слѣдуетъ однѣ координаты замѣнить другими, что возможно, такъ какъ отъ этого ничего существенно не измѣнится; итакъ, возьмемъ формулу:

$$u - y = (t - x) \frac{dy}{dx} + (v - z) \frac{dy}{dz}.$$

Уравненіе не должно содержать буквы v , координаты, параллельной оси z -овъ; значитъ, $\frac{dy}{dz} = 0$. Посредствомъ вычисленія приходимъ къ тому же заключенію.

Чтобы вычислить $\frac{dy}{dx}$, дифференцируемъ уравненія (1), рассматривая z , какъ постоянную; находимъ:

$$\begin{aligned} dx &= [z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)] d\alpha, \\ dy &= [zf'(\alpha) + F'(\alpha)] d\alpha, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{zf'(\alpha) + F'(\alpha)}{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)}, \end{aligned}$$

при чемъ нужно считать $\alpha = 0$.

Чтобы вычислить $\frac{dy}{dz}$ и доказать, что она равна нулю, дифференцируем оба уравнения (1), рассматривая x , какъ постоянную; находимъ:

$$\begin{aligned} 0 &= [z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)] d\alpha + \varphi(\alpha) dz, \\ dy &= [zf'(\alpha) + F'(\alpha)] d\alpha + f(\alpha) dz, \end{aligned}$$

а отсюда, по исключеніи $d\alpha$,

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{\varphi(\alpha) [zf'(\alpha) + F'(\alpha)]}{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)} + f'(\alpha),$$

что при $\alpha = 0$ обращается въ нуль вслѣдствіе сдѣланныхъ предположеній: $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 0$.

Въ такомъ случаѣ уравненіе искомой касательной плоскости будетъ:

$$u - y = (t - x) \frac{zf'(0) + F'(0)}{z\varphi'(0) + \psi'(0)};$$

полагая

$$\begin{aligned} f'(0) &= a, & F'(0) &= b, \\ \varphi'(0) &= m, & \psi'(0) &= n, \end{aligned}$$

видимъ, что уголъ θ , образуемый этою плоскостью съ плоскостью ZX , выразится формулою:

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{az + b}{mz + n}.$$

Если подставить вмѣсто плоскости ZX новую плоскость, образующую съ ZX уголъ φ , то наклоненіе θ' къ этой новой плоскости выразится формулою:

$$\operatorname{tang}\theta' = \operatorname{tang}(\theta - \varphi) = \frac{(az + b) - \operatorname{tang}\varphi(mz + n)}{(mz + n) + (az + b)\operatorname{tang}\varphi},$$

и если уголъ φ выбранъ такъ, что

$$m + a\operatorname{tang}\varphi = 0,$$

то

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{(a - m\operatorname{tang}\varphi)z}{(n + b\operatorname{tang}\varphi)} + \frac{(b - n\operatorname{tang}\varphi)}{(n + b\operatorname{tang}\varphi)}.$$

Такимъ образомъ тангенсъ угла, образуемаго касательною плоскостью съ неподвижною плоскостью, проведенною черезъ производящую, выражается функциею вида

$$Gz + H,$$

а если перенести начало координатъ въ точку оси z -овъ, ордината которой по этой оси есть

$$z' = -\frac{H}{G},$$

то z нужно будетъ замѣнить суммою $z + z'$ и выраженіе $\text{tang} \theta'$ превратится просто въ

$$Gz.$$

Итакъ, мы видимъ, что тангенсъ угла, составляемаго касательною плоскостью съ неподвижною пропорціоналенъ разстоянію точки касанія до точки, надлежащимъ образомъ выбранной на производящей.

§ 103. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ постоянная G равна нулю и самая плоскость есть касательная во всѣхъ точкахъ производящей.

Поищемъ для этого необходимое условіе и, притомъ, не только для отдѣльной производящей, но для всѣхъ производящихъ поверхности.

Вернемся снова къ уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ y &= zf(\alpha) + F(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

представляющимъ собою какую-угодно производящую. Чтобы касательная плоскость была касательною вдоль всей этой производящей, необходимо, чтобы оба дифференціальныя коэффициента, $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, были функциями отъ одной только переменнй α и сохраняли бы одно и то же значеніе, пока не измѣняется α .

Вычислимъ, напр., $\frac{dz}{dx}$; для этого дифференцируемъ оба уравненія (1), рассматривая y , какъ постоянную. Находимъ:

$$\begin{aligned} dx &= dz\varphi(\alpha) + [z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)]d\alpha, \\ 0 &= dzf(\alpha) + [zf'(\alpha) + F'(\alpha)]d\alpha, \end{aligned}$$

откуда, по исключеніи $d\alpha$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\varphi(\alpha) + \frac{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)}{zf'(\alpha) + F'(\alpha)}f(\alpha)}.$$

Чтобы эта функція зависѣла только отъ α и не зависѣла отъ z , должно существовать равенство:

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\psi'(\alpha)}{F'(\alpha)},$$

выражая, что $\frac{dz}{dx}$ не зависитъ отъ z , мы нашли бы то же самое условіе, которое, слѣдовательно, и представляетъ собою рассматриваемое свойство.

Это условіе получаетъ замѣчательное геометрическое истолкованіе: оно показываетъ, что производящая, уравненія которой

$$\left. \begin{aligned} x &= z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ y &= zf(\alpha) + F(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

пересѣкаетъ безконечно-близкую производящую, представляемую уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} x &= z \varphi(\alpha) + z \varphi'(\alpha) d\alpha + \psi(\alpha) + \psi'(\alpha) d\alpha, \\ y &= z f(\alpha) + z f'(\alpha) d\alpha + F(\alpha) + F'(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Мы не будемъ здѣсь останавливаться на слѣдствіяхъ изъ полученнаго результата и на томъ, какъ его нужно понимать; наша цѣль въ настоящій моментъ—дать приложеніе теоріи касательныхъ плоскостей къ одному весьма важному классу поверхностей.

Огибающія кривыя и поверхности

§ 104. Когда въ уравненіе кривой входитъ произвольный параметръ, то получается безчисленное множество формъ и различныхъ положеній этой кривой. *Огибающею кривою* для такой подвижной кривой называется неподвижная линія, къ которой подвижная кривая остается касательною во всѣхъ своихъ положеніяхъ. Подвижная кривая, къ которой огибающая постоянно касательна, получаетъ въ такомъ случаѣ названіе *огibaемой кривой*.

Не трудно усмотрѣть изъ чертежа, что огибающая представляетъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія каждой подвижной кривой съ безконечно ей близкою кривою.

Въ самомъ дѣлѣ, придавая переменному параметру послѣдовательно весьма малыя приращенія, мы получаемъ рядъ огибаемыхъ кривыхъ, точки пересѣченія которыхъ съ соотвѣтственно смежною каждой изъ нихъ кривою образуютъ вершины криволинейнаго многоугольника, каждая сторона котораго представитъ собою небольшую дугу одной изъ кривыхъ. Предѣлъ этого многоугольника коснется, очевидно, всѣхъ разсматриваемыхъ нами кривыхъ и пройдетъ чрезъ точки пересѣченія каждой изъ нихъ съ безконечно ей близкою кривою.

Поэтому, чтобы найти уравненіе огибающей кривой, предположимъ, что

$$\varphi(x, y, a) = 0 \quad (1)$$

есть уравненіе огибаемой подвижной кривой въ одномъ изъ ея положеній; уравненіе той же кривой въ безконечно-близкомъ положеніи будетъ

$$\varphi(x, y, a + da) = 0. \quad (2)$$

Чтобы получить координаты точки огибающей, нужно рѣшить совмѣстно уравненія (1) и (2). Вычитая ихъ другъ изъ друга и дѣля результатъ на da , мы получаемъ такое уравненіе

$$\frac{d\varphi(x, y, a)}{da} = 0, \quad (3)$$

которымъ можемъ замѣнить одно изъ двухъ предыдущихъ. Уравненіе же геометриче-

скаго мѣста полученныхъ такимъ образомъ точекъ касанія, т.-е. уравненіе искомой огибающей, мы найдемъ, исключая a изъ уравненій (1) и (3).

Итакъ, уравненіе огибающей кривыхъ, выражаемыхъ уравненіемъ $\varphi(x, y, a) = 0$, находится посредствомъ исключенія постоянной a изъ ихъ уравненія и его производной, взятой по этой постоянной.

§ 105. Можно доказать аналитически, что результатъ исключенія a изъ уравненій:

$$\varphi(x, y, a) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi(x, y, a)}{da} = 0 \quad (2)$$

выразить собою кривую, касательную къ каждой изъ предположенныхъ огибаемыхъ кривыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что въ уравненіи (1) a замѣнено его значеніемъ изъ уравненія (2); исключеніе, такимъ образомъ, будетъ сдѣлано и получится уравненіе вида

$$\varphi(x, y, A) = 0, \quad (3)$$

гдѣ A обозначаетъ функцію отъ x и y . Можно утверждать, что касательная къ кривой, выражаемой уравненіемъ (3), въ каждой ея точкѣ есть въ то же время касательная къ огибаемой кривой, проходящей черезъ эту точку. Дѣйствительно, угловой коэффициентъ $\frac{dy}{dx}$, для кривой (3), опредѣляется изъ уравненія:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dA} \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} \right) = 0;$$

для кривой же, выражаемой уравненіемъ (1), въ которомъ количеству a придается численное значеніе, принимаемое величиною A въ рассматриваемой точкѣ, угловой коэффициентъ получится изъ уравненія:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} = 0,$$

которое вполне совпадаетъ съ предыдущимъ вслѣдствіе условія $\frac{d\varphi}{dA} = 0$, справедливаго во всѣхъ точкахъ огибающей кривой.

§ 106. Когда въ уравненіе поверхности входитъ произвольный параметръ, то эта поверхность можетъ принять, вслѣдствіе измѣненій такого параметра, безчисленное множество формъ и различныхъ положеній. Геометрическое мѣсто пересѣченій каждой поверхности съ бесконечно ей близкою поверхностью касается, по нѣкоторой кривой, каждой изъ рассматриваемыхъ поверхностей и называется *огибающею поверхностью* относительно этихъ послѣднихъ, которыя въ такомъ случаѣ получаютъ названіе *огибаемыхъ поверхностей*.

Въ самомъ дѣлѣ, приписывая произвольному параметру рядъ послѣдовательныхъ весьма малыхъ приращеній, мы получимъ рядъ поверхностей, изъ которыхъ каждая

пересѣчеть предыдущую, и на каждой изъ нихъ будемъ имѣть по двѣ смежныхъ кривыхъ, происшедшихъ отъ пересѣченій этой поверхности съ предыдущею и съ послѣдующею; между каждыми двумя такими кривыми содержится зона,—совокупность же этихъ зонъ дастъ въ предѣлѣ поверхность, представляющую геометрическое мѣсто послѣдовательныхъ пересѣченій разсматриваемыхъ нами поверхностей, которыхъ она будетъ касаться, всѣхъ безъ исключенія, по нѣкоторымъ кривымъ, такъ какъ такая поверхность служитъ предѣломъ совокупности зонъ, взятыхъ соотвѣтственно съ каждой изъ нихъ.

§ 107. Кривая пересѣченія двухъ бесконечно-близкихъ поверхностей, соотвѣтствующихъ значеніямъ a и $a + da$ параметра a , выразится двумя уравненіями:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, a) &= 0, \\ \varphi(x, y, z, a + da) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

которыя можно замѣнить точно такъ же, какъ и въ § 104-мъ, системою:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, a) &= 0, \\ \frac{d\varphi(x, y, z, a)}{da} &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Можно доказать аналитически, что поверхность, уравненіе которой получается посредствомъ исключенія a изъ уравненій (1) и (2), касательна ко всѣмъ разсматриваемымъ поверхностямъ. Дѣйствительно, допустимъ, что въ уравненіи (1) a замѣнено его значеніемъ изъ (2); исключеніе, такимъ образомъ, будетъ сдѣлано и получится уравненіе вида

$$\varphi(x, y, z, A) = 0,\tag{3}$$

гдѣ A обозначаетъ функцію отъ x, y, z . Можно утверждать, что въ каждой точкѣ эта поверхность имѣетъ съ огибаемою поверхностью, проходящею черезъ эту точку, общую касательную плоскость. Въ самомъ дѣлѣ, оба коэффициента $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ уравненія касательной плоскости опредѣляются, для кривой (3), изъ уравненій:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{dA} \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} \frac{dz}{dx} \right) &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dy} + \frac{d\varphi}{dA} \left(\frac{dA}{dy} + \frac{dA}{dz} \frac{dz}{dy} \right) &= 0;\end{aligned}$$

для той же изъ огибаемыхъ поверхностей, для которой постоянная равна численному значенію A въ разсматриваемой точкѣ, оба коэффициента касательной плоскости получатся изъ уравненій:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dx} &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dy} &= 0,\end{aligned}$$

которыя вполнѣ согласуются съ предыдущими вслѣдствіе условія $\frac{d\varphi}{dA} = 0$, справедливаго во всѣхъ точкахъ огибающей поверхности. Значитъ, обѣ касательныя плоскости совпадаютъ.

§ 108. Можно также искать огибающую поверхностей, выражаемыхъ уравненіемъ:

$$F(x, y, z, a, b) = 0,$$

гдѣ a и b —двѣ произвольныя постоянныя. Чтобы получить уравненіе такой огибающей, нужно исключить a и b изъ трехъ уравненій:

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{db} = 0. \quad (2)$$

Результатъ исключенія представитъ собою поверхность, касающуюся каждой изъ разсматриваемыхъ поверхностей въ одной точкѣ, чѣмъ этотъ случай и будетъ отличаться отъ предыдущаго, гдѣ каждая огибаемая соприкасалась съ огибающею по кривой. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что при данныхъ значеніяхъ a и b уравненія (1) и (2) имѣютъ определенное число рѣшеній, представляющихъ собою тѣ точки, въ которыхъ поверхность, соответствующая выбраннымъ значеніямъ a и b , соприкасается съ огибающею. Не трудно замѣтить, что въ каждой изъ такихъ точекъ обѣ поверхности имѣютъ общую касательную плоскость.

Дѣйствительно, уравненіе первой изъ нихъ есть

$$F(x, y, z, a, b) = 0; \quad (1)$$

уравненіе же второй отличается тѣмъ, что a и b замѣнены двумя функціями A и B отъ x, y, z , представляющими собою значенія a и b изъ уравненій (2). Чтобы вычислить коэффициенты уравненія плоскости, касательной къ поверхности (1), нужно воспользоваться уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} &= 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

такіе же коэффициенты для плоскости, касательной къ поверхности

$$F(x, y, z, A, B) = 0,$$

мы получимъ изъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{dF}{dA} \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} \frac{dz}{dx} \right) + \frac{dF}{dB} \left(\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dx} \right) &= 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} + \frac{dF}{dA} \left(\frac{dA}{dy} + \frac{dA}{dz} \frac{dz}{dy} \right) + \frac{dF}{dB} \left(\frac{dB}{dy} + \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dy} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

А такъ какъ въ каждой точкѣ огибающей поверхности $\frac{dF}{dA} = 0$, $\frac{dF}{dB} = 0$, то $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, выведенныя изъ уравненій (3), ничѣмъ не отличаются отъ значеній, выведенныхъ изъ уравненій (4).

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ НѢКОТОРЫМЪ ПРИМѢРАМЪ

§ 109. Огибающая эллипсовъ, выражаемыхъ уравненіемъ:

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k-a)^2} = 1,$$

въ которомъ k — постоянная и a — произвольный параметръ. — Уравненіе $\frac{du}{da} = 0$ здѣсь будетъ:

$$\frac{x^2}{a^3} - \frac{y^2}{(k-a)^3} = 0,$$

откуда

$$a = \frac{kx^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}},$$

$$k - a = \frac{ky^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}};$$

подставляя эти значенія въ данное уравненіе, получаемъ для огибающей уравненіе:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

§ 110. Огибающая прямой постоянной длины, скользящей по прямоугольнымъ осямъ. — Принимая данныя оси за оси координатъ, пишемъ уравненіе подвижной прямой:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (1)$$

гдѣ a и b связаны равенствомъ:

$$a^2 + b^2 = l^2. \quad (2)$$

Уравненіе подвижной прямой заключаетъ здѣсь два переменныхъ параметра a и b , между которыми, однако, существуетъ извѣстное соотношеніе; поэтому, можно разсмотрѣть b , какъ данную функцію отъ a , и примѣнить общій методъ. Дифференцируя уравненія (1) и (2) по a , находимъ:

$$\frac{x da}{a^2} + \frac{y db}{b^2} = 0, \quad (3)$$

$$a da + b db = 0. \quad (4)$$

Нужно исключить db изъ этихъ уравненій и затѣмъ приравнять нулю коэффициентъ при da . Очевидно, мы придемъ къ тому же результату, если умножимъ первое изъ нихъ на неопредѣленный множитель — λ , сложимъ его затѣмъ со вторымъ и приравняемъ нулю коэффициенты при da и db . Такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{\lambda x}{a^2} = a, \quad \frac{\lambda y}{b^2} = b. \quad (5)$$

Умножая эти уравненія соотвѣтственно на a и b и складывая, получаемъ:

$$\lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = a^2 + b^2,$$

откуда, на основаніи уравненій (1) и (2),

$$\lambda = l^2. \quad (6)$$

Слѣдовательно, уравненія (5) даютъ:

$$a^3 = l^2 x, \quad b^3 = l^2 y; \quad (7)$$

наконецъ, исключаемъ a и b изъ уравненій (2) и (7):

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Полученное геометрическое мѣсто того же характера, что и въ предыдущемъ примѣрѣ. Это можно было предвидѣть, замѣтивъ, что если прямая постоянной длины вписана въ прямой уголъ, то ея различныя точки описываютъ эллипсы, общее уравненіе которыхъ разсмотрѣно въ предыдущей задачѣ. Дѣйствительно, совокупность эллипсовъ и совокупность прямыхъ покрываютъ въ такомъ случаѣ одну и ту же часть плоскости и, значитъ, предѣльныя точки для обѣихъ группъ намѣчаются одною и тою же огибающею.

§ III. Поверхность свѣтовыхъ волнъ. — Данъ эллипсоидъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Черезъ центръ этой поверхности проведена произвольная плоскость P , пересѣкающая ее по эллипсу E ; параллельно плоскости P проведена вторая плоскость P' на разстояніи обратно-пропорціональномъ одной изъ осей эллипса E . Огибающая поверхность плоскостей P' играетъ весьма важную роль въ теоріи свѣта. Отыщемъ ея уравненіе.

Обѣ оси эллипса, по которому эллипсоидъ пересѣченъ плоскостью будутъ корнями уравненія:

$$\frac{l^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u^2}} + \frac{m^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{u^2}} + \frac{n^2}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{u^2}} = 0,$$

гдѣ l , m , n суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями нормалю къ этой плоскости *); такимъ образомъ, если положить $\frac{1}{u} = v$, $\frac{1}{a} = a'$, $\frac{1}{b} = b'$, $\frac{1}{c} = c'$, то уравненіе огибаемой плоскости, разстояніе которой отъ начала равно $\frac{1}{u}$, будетъ

$$lx + my + nz = v,$$

при чемъ

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

$$\frac{l^2}{v^2 - a'^2} + \frac{m^2}{v^2 - b'^2} + \frac{n^2}{v^2 - c'^2} = 0.$$

Уравненіе подвижной плоскости содержитъ здѣсь четыре параметра l , m , n , v , связанныхъ между собою двумя равенствами, а такой случай былъ уже рассмотрѣнъ выше (§ 108). Итакъ, намъ нужно было бы исключить два изъ этихъ параметровъ и приравнять нулю производныя отъ уравненія подвижной плоскости, взятая по остальнымъ параметрамъ, а это, очевидно, то же самое, что продифференцировать по четыремъ параметрамъ какъ переменнымъ и исключить два изъ четырехъ дифференціаловъ, чтобы затѣмъ въ окончательномъ уравненіи приравнять нулю коэффициенты при двухъ остальныхъ.

Дифференцируя уравненіе подвижной плоскости и оба равенства, связывающія параметры, находимъ:

$$xdl + ydm + zdn = dv, \quad (1)$$

$$ldl + m dm + n dn = 0, \quad (2)$$

$$\frac{ldl}{v^2 - a'^2} + \frac{m dm}{v^2 - b'^2} + \frac{n dn}{v^2 - c'^2} = v dv \left[\frac{l^2}{(v^2 - a'^2)^2} + \frac{m^2}{(v^2 - b'^2)^2} + \frac{n^2}{(v^2 - c'^2)^2} \right]. \quad (3)$$

Умноживъ первое изъ этихъ равенствъ на λ , второе на μ и третье на -1 , складываемъ ихъ и приравниваемъ нулю коэффициенты при dl , dm , dn и dv :

$$\lambda x + \mu l = \frac{l}{v^2 - a'^2}, \quad (4)$$

$$\lambda y + \mu m = \frac{m}{v^2 - b'^2}, \quad (5)$$

$$\lambda z + \mu n = \frac{n}{v^2 - c'^2}, \quad (6)$$

$$\lambda = v \left[\frac{l^2}{(v^2 - a'^2)^2} + \frac{m^2}{(v^2 - b'^2)^2} + \frac{n^2}{(v^2 - c'^2)^2} \right]. \quad (7)$$

*) Мы выведемъ это уравненіе въ теоріи максима и минима. Можно составить его непосредственно, замѣчая, что въ эллипсоидѣ произведеніе двухъ осей діаметрального сѣченія на перпендикуляръ, опущенный на параллельную касательную плоскость, равно произведенію трехъ осей и что сумма квадратовъ величинъ, обратныхъ тремъ взаимно-перпендикулярнымъ діаметрамъ, постоянна и равна суммѣ квадратовъ величинъ, обратныхъ осямъ.

Умноживъ равенства (4), (5) и (6) на l , m и n и сложивъ, получаемъ:

$$\lambda v + \mu = 0; \quad (8)$$

съ другой стороны, умноживъ тѣ же равенства на x , y , z и положивъ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, найдемъ:

$$\lambda r^2 + \mu v = \frac{lx}{\sqrt{v^2 - a'^2}} = \frac{my}{\sqrt{v^2 - b'^2}} + \frac{nz}{\sqrt{v^2 - c'^2}}, \quad (9)$$

или, въ силу равенства (8),

$$\lambda(r^2 - v^2) = \frac{lx}{\sqrt{v^2 - a'^2}} + \frac{my}{\sqrt{v^2 - b'^2}} + \frac{nz}{\sqrt{v^2 - c'^2}}. \quad (10)$$

Перенеся въ равенствахъ (4), (5) и (6) вторые члены во вторую часть, возвышаемъ ихъ въ квадратъ и складываемъ:

$$\lambda^2 r^2 = \mu^2 + \frac{l^2}{(v^2 - a'^2)^2} + \frac{m^2}{(v^2 - b'^2)^2} + \frac{n^2}{(v^2 - c'^2)^2};$$

отсюда, на основаніи равенствъ (7) и (8),

$$\lambda^2 (r^2 - v^2) = \frac{\lambda}{v}, \quad (11)$$

$$\lambda = \frac{1}{v(r^2 - v^2)} \quad (12)$$

и, слѣдовательно,

$$\mu = \frac{1}{v^2 - r^2}. \quad (13)$$

Подставляя значенія λ и μ въ уравненіе (4), находимъ:

$$\frac{x}{v(r^2 - v^2)} = l \left[\frac{1}{r^2 - v^2} + \frac{1}{v^2 - a'^2} \right],$$

откуда

$$\frac{x}{r^2 - a'^2} = \frac{vl}{v^2 - a'^2};$$

такъ же

$$\frac{y}{r^2 - b'^2} = \frac{vm}{v^2 - b'^2},$$

$$\frac{z}{r^2 - c'^2} = \frac{vn}{v^2 - c'^2}.$$

Полученныя уравненія умножаемъ на x , y , z и складываемъ; тогда, на основаніи равенствъ (10) и (12),

$$\frac{x^2}{r^2 - a'^2} + \frac{y^2}{r^2 - b'^2} + \frac{z^2}{r^2 - c'^2} = 1.$$

Это и есть уравнение поверхности волны. Не слѣдуетъ забывать, что r^2 представляетъ здѣсь $x^2 + y^2 + z^2$.

§ 112. Развертывающіяся поверхности. — Если плоскость движется по опредѣленному закону и уравнение ея содержитъ только одинъ произвольный параметръ, огибающая различныхъ положеній этой плоскости называется *развертывающеюся поверхностью*.

Такъ какъ огибающая поверхность служитъ геометрическимъ мѣстомъ послѣдовательныхъ пересѣченій каждаго положенія огибаемой плоскости съ безконечно-близкимъ ему положеніемъ, то развертывающаяся поверхность представить геометрическое мѣсто ряда прямыхъ линій и, кромѣ того, каждая касательная плоскость касается по одной изъ этихъ прямолинейныхъ производящихъ.

Если уравнение подвижной плоскости есть

$$z = x\varphi(\alpha) + yf(\alpha) + F(\alpha),$$

то уравнение развертывающейся поверхности получится по исключеніи α изъ этого уравненія и уравненія:

$$0 = x\varphi'(\alpha) + yf'(\alpha) + F'(\alpha).$$

§ 113. Каналообразныя поверхности. — *Каналообразною поверхностью* называется огибающая различныхъ положеній сферы постояннаго радіуса, центръ которой движется по данной кривой. Такая поверхность представляетъ геометрическое мѣсто пересѣченій двухъ безконечно-близкихъ сферъ.

Такъ какъ очевидно, что двѣ безконечно-близкія сферы пересѣкаются по большому кругу, лежащему въ плоскости перпендикулярной къ линіи центровъ, то каналообразная поверхность можетъ быть разсматриваема, какъ геометрическое мѣсто различныхъ положеній круга постояннаго радіуса, плоскость котораго остается перпендикулярною къ кривой, описываемой его центромъ. Кромѣ того, въ каждой точкѣ этого круга поверхность касательна къ одной и той же сферѣ и, слѣдовательно, всѣ нормали проходятъ черезъ одну и ту же точку — центръ круга.

Уравнение подвижной сферы постояннаго радіуса, содержащее произвольный параметръ, будетъ вида:

$$[x - \varphi(\alpha)]^2 + [y - \psi(\alpha)]^2 + [z - F(\alpha)]^2 = R^2,$$

и уравнение огибающей получится по исключеніи α изъ этого уравненія и его производной, взятой по α :

$$[x - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) + [y - \psi(\alpha)]\psi'(\alpha) + [z - F(\alpha)]F'(\alpha) = 0.$$

УПРАЖНЕНІЯ

1. Геометрическое мѣсто такихъ точекъ, что сумма квадратовъ длинъ нормалей, проведенныхъ изъ нихъ къ одной или нѣсколькимъ даннымъ кривымъ, есть величина постоянная, имѣетъ нормалью, въ каждой точкѣ, линію, направленную къ центру среднихъ разстояній основаній всѣхъ нормалей, опущенныхъ изъ этой точки на данныя кривыя.

2. Геометрическое мѣсто такихъ точекъ, что сумма длинъ двухъ нормалей, проведенныхъ изъ нихъ къ одной и той же кривой или къ двумъ даннымъ кривымъ, есть величина постоянная, имѣетъ касательную биссектрису угла между двумя нормальями.

3. Геометрическое мѣсто такихъ точекъ, что соотношеніе между длинами нормалей, опущенныхъ изъ нихъ на одну или нѣсколько данныхъ кривыхъ, представляетъ данную величину, имѣетъ ту же самую касательную, какъ и геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ существуетъ такое же соотношеніе между разстояніями до неподвижныхъ точекъ, служащихъ основаніями нормалей, соответствующихъ разсматриваемой точкѣ.

4. Въ треугольникѣ, образуемомъ тремя дугами равнобочныхъ гиперболъ съ общимъ центромъ или тремя дугами параболъ съ общимъ фокусомъ, сумма угловъ равна двумъ прямымъ.

5. Если уравненіе $\varphi(x, y) = C$ при измѣненіи постоянной C даетъ рядъ параллельныхъ кривыхъ, то

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = F(\varphi),$$

гдѣ $F(\varphi)$ есть функція отъ $\varphi(x, y)$.

6. Если уравненіе $\varphi(x, y, z) = C$ при измѣненіи постоянной C даетъ рядъ параллельныхъ поверхностей, то

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = F(\varphi),$$

гдѣ $F(\varphi)$ есть функція отъ $\varphi(x, y, z)$.

7. Если поверхность, уравненіе которой есть

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = 1,$$

пересѣчь сферами и эллипсоидами, выражаемыхъ уравненіями:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 &= P, \end{aligned}$$

то, каковы бы ни были постоянныя P и R , кривыя пересѣченія пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

8. Найти огибающую плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку и пересѣкающихъ двѣ данныя плоскости по взаимно-перпендикулярнымъ прямымъ.

9. Когда кругъ катится по прямой, огибающая одного изъ его діаметровъ есть циклонда.

10. Когда какой-нибудь кругъ катится по другому кругу, огибающая одного изъ его діаметровъ есть энциклоида.

11. Когда плоскость перемѣщается такимъ образомъ, что сумма квадратовъ ея разстояній до неподвижныхъ точекъ есть величина постоянная, то она огибаетъ эллипсоидъ, центръ котораго совпадаетъ съ центромъ среднихъ разстояній данныхъ точекъ.

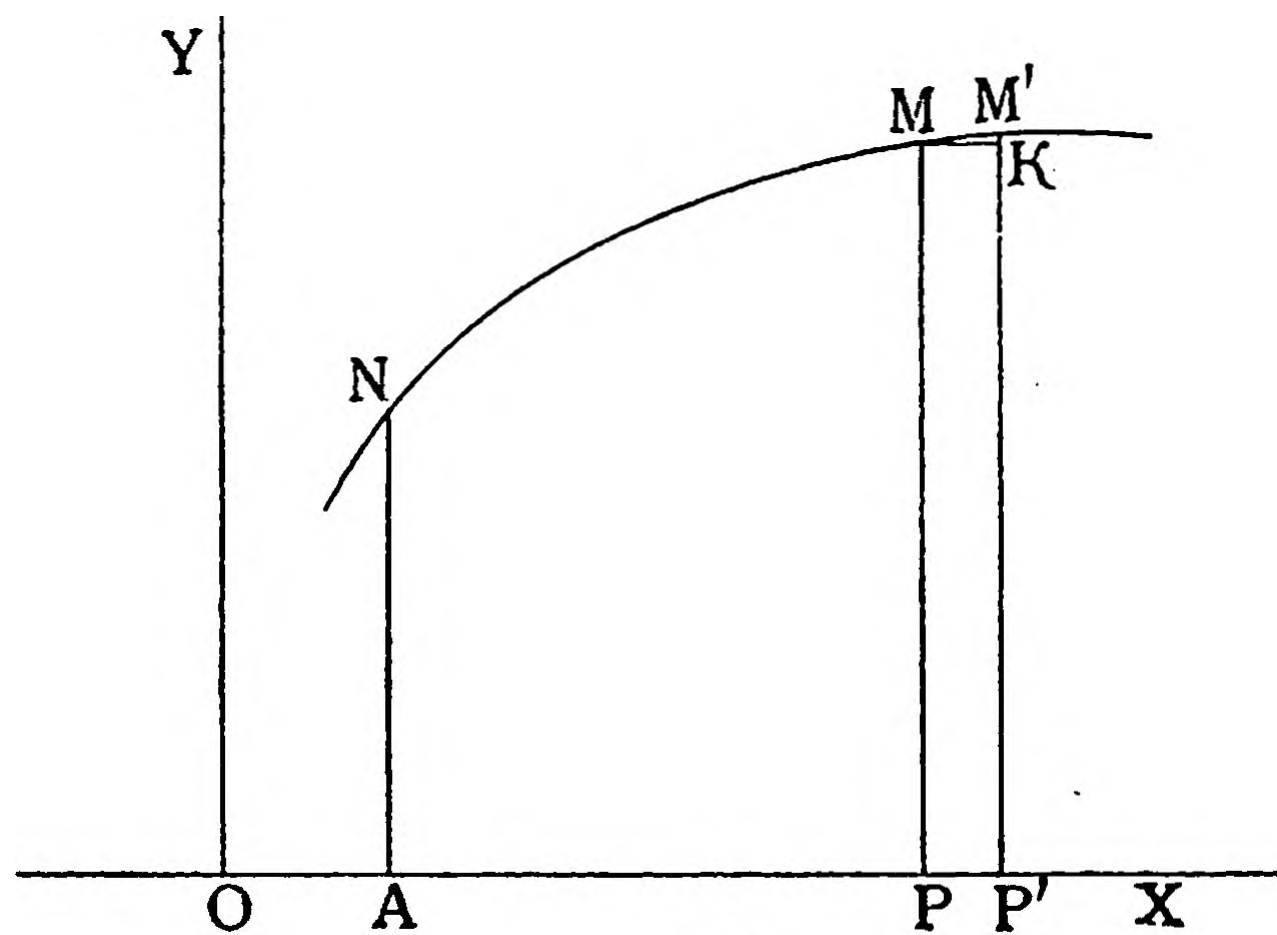
ГЛАВА ПЯТАЯ

Дифференциалы некоторых функций, заданных геометрически

Дифференциалъ площади, взятой на плоскости

§ 114. Невозможно рассмотреть все неявные функции. Мы видели (§ 60), как дифференцируются функции, получающиеся из решения данных уравнений; в этой главе мы остановимся только на площади данной кривой и на длине дуги кривой.

Разсмотрим сначала площадь, заключенную между плоскою кривою, осью X -овъ и двумя ординатами, изъ которыхъ одна — неподвижная, а другая — переменная.



Черт. 22.

Такая площадь $NAMP$ (черт. 22) есть неявная функция отъ x , дифференциалъ отъ которой мы и будемъ искать, предполагая, конечно, что кривая NM задана уравненіемъ.

Если приписать x бесконечно-малое приращеніе dx , представленное на чертежѣ отрезкомъ PP' , то рассматриваемая площадь возрастетъ на криволинейную трапецію $MPM'P'$, которую можно замѣнить прямоугольникомъ $MKPP'$, такъ какъ при

этомъ отбрасывается безконечно-малый треугольникъ второго порядка MKM' . Называя ординату MP черезъ y , можемъ написать:

$$MKPP' = ydx.$$

Значитъ, искомый дифференціалъ есть ydx , а производная отъ площади, взятая по x , есть y .

§ 115. Предыдущій результатъ даетъ непосредственное доказательство слѣдующей важной теоремы:

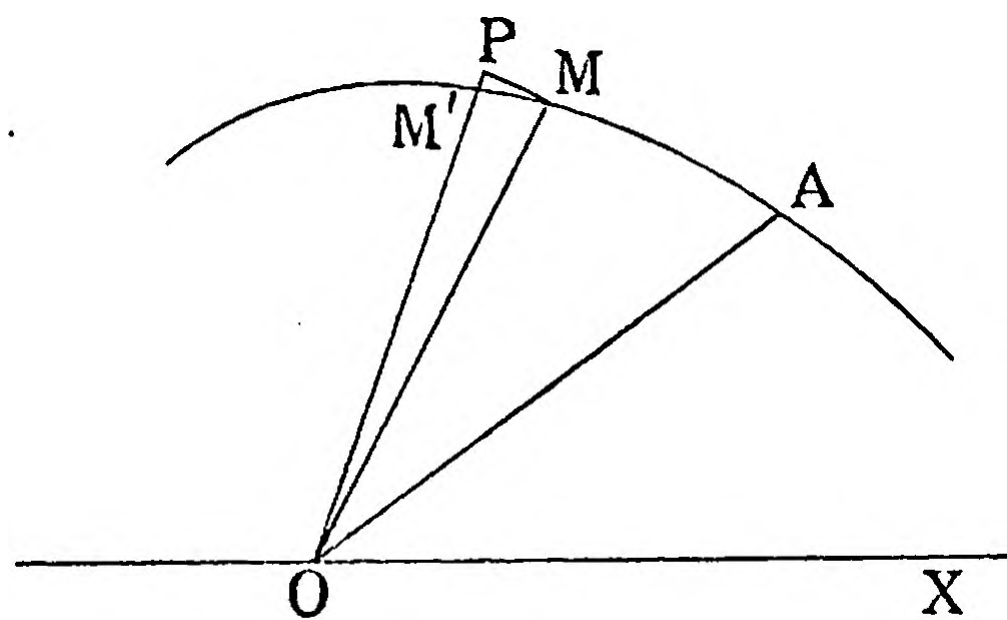
Всегда найдется такая функція, производная отъ которой равна данной функціи $\varphi(x)$.

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы отыскать такую функцію, достаточно разсмотрѣть кривую, уравненіе которой въ прямоугольныхъ координатахъ есть

$$y = \varphi(x);$$

площадь, заключенная между неподвижною ординатою и ординатою, соответствующею абсциссѣ x , есть опредѣленная функція, производная отъ которой, по предыдущей теоремѣ, равна $\varphi(x)$.

§ 116. Разсмотримъ, во-вторыхъ, плоскую кривую, отнесенную къ полярнымъ координатамъ, и отыщемъ дифференціалъ площади, заключенной между этою кривою (черт. 23), неподвижнымъ радіусомъ-векторомъ OA и радіусомъ OM , соответствующимъ углу ω .



Черт. 23.

Если приписать углу ω безконечно-малое приращеніе MOM' , обозначаемое посредствомъ $d\omega$, то площадь возрастетъ на секторъ MOM' ; изъ точки O , какъ центра, описываемъ радіусомъ OM дугу круга MP и замѣняемъ OMM' секторомъ OMP , пренебрегая безконечно-малымъ треугольникомъ второго порядка $MM'P$. Секторъ OMP равенъ $\rho^2 \frac{d\omega}{2}$, что и будетъ дифференціаломъ разсматриваемой площади; производная же отъ этой площади, взятая по ω есть $\frac{\rho^2}{2}$.

§ 117. Иногда требуется выразить предыдущій дифференціалъ въ прямолинейныхъ координатахъ, что не трудно вывести изъ только-что полученнаго результата.

Въ самомъ дѣлѣ, принимая за начало новыхъ координатъ полюсъ O и за ось X -овъ полярную ось, на основаніи извѣстныхъ формулъ перехода можемъ написать:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{y}{x}, \quad \omega = \operatorname{arctang} \frac{y}{x};$$

отсюда

$$d\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

и, на основаніи равенства $x^2 + y^2 = \rho^2$,

$$\rho^2 d\omega = xdy - ydx;$$

такимъ образомъ, дифференціалъ площади $\triangle OМ$ есть

$$dA = \frac{xdy - ydx}{2}.$$

Эта формула можетъ дать для dA отрицательную величину; для этого достаточно, чтобы

$$xdy - ydx < 0,$$

т.-е. чтобы, при положительныхъ x и dx ,

$$\frac{dy}{dx} < \frac{y}{x},$$

а это значитъ, что параллель черезъ точку O для касательной въ точкѣ M , направленной въ сторону увеличенія x , проходитъ подъ радіусомъ-векторомъ OM и, слѣдовательно, уголъ ω уменьшается, въ то время какъ радіусъ OM вращается вокругъ точки O при своемъ переходѣ въ положеніе OM' .

Итакъ, выраженіе $xdy - ydx$, какъ и слѣдовало ожидать, отрицательно въ томъ же смыслѣ, какъ и равносильное ему выраженіе $\rho^2 d\omega$.

Дифференціалъ дуги кривой

§ 118. Непосредственное сравненіе дуги кривой съ прямою линіей, принятой за единицу, невозможно,—необходимо опредѣленіе. Вводимъ слѣдующее опредѣленіе: длина дуги кривой есть предѣлъ, къ которому приближается периметръ вписаннаго многоугольника, когда его стороны безпредѣльно уменьшаются. Было доказано (§ 18), что

такое опредѣленіе вполне законно и что бесконечно-малая дуга отличается (§ 19) отъ своей хорды на бесконечно-малую третьяго порядка.

Пусть AM есть дуга плоской кривой, отнесенной къ прямоугольнымъ координатамъ OX и OY . Если при неподвижномъ концѣ A абсцисса конца M получить бесконечно-малое приращеніе, обозначаемое Δx , то дуга приметъ бесконечно-малое приращеніе MM' . Это послѣднее можетъ быть замѣнено (§ 19) его хордою, отличающеюся на бесконечно-малую третьяго порядка и равною

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Отсюда заключаемъ, что отношеніе этой хорды къ Δx равно

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2},$$

а предѣлъ этого отношенія, т.-е. производная отъ дуги, есть

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Дифференціалъ дуги s выразится произведеніемъ этой производной на dx , т.-е.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Если заданная кривая есть плоская, то относя ее къ двумъ координатнымъ осямъ въ ея плоскости, очевидно, найдемъ:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

§ 119. Приложимъ предыдущую формулу къ дугѣ циклоиды. Принимая за начало координатъ вершину, а за ось X -овъ касательную къ кривой, мы нашли (§ 83):

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

откуда

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2 \left[1 + \frac{2a-y}{y}\right] = \frac{2ady^2}{y}.$$

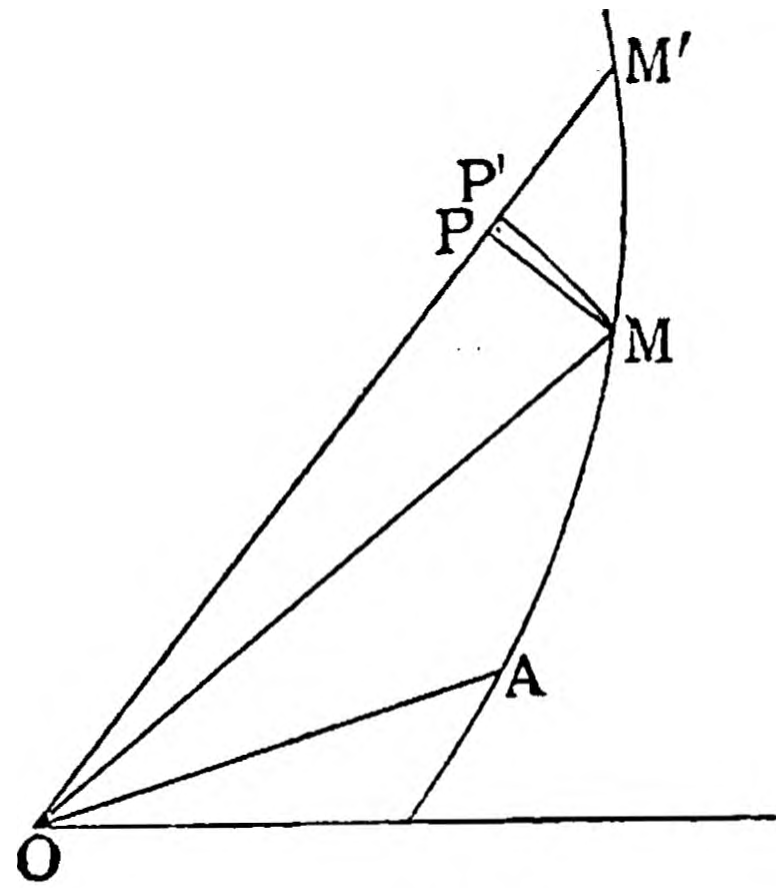
Замѣчая, что $dy\sqrt{\frac{2a}{y}}$ есть дифференціалъ отъ $2\sqrt{2ay}$, выводимъ, что разность $s - 2\sqrt{2ay}$ представить собою постоянную, такъ какъ ея дифференціалъ равенъ нулю. Отсчитывая дугу s отъ вершины циклоиды, видимъ, что оба члена равенности обра-

щаются одновременно въ нуль при $y=0$; слѣдовательно, эта постоянная равна нулю и

$$s = 2\sqrt{2ay}.$$

Не трудно признать тождественность этого результата съ найденнымъ въ § 20-мъ.

§ 120. Рассмотримъ теперь плоскую кривую AM (черт. 24), отнесенную къ полярнымъ координатамъ. Если конецъ A остается неподвижнымъ, а ρ и ω обозначаютъ



Черт. 24.

координаты конца M , то дуга s есть функция отъ ω , дифференціалъ которой мы и будемъ отыскивать.

Придаемъ ω приращеніе $\Delta\omega$, представленное на чертежѣ угломъ MOM' ; тогда соответственное приращеніе дуги будетъ MM' . Предполагая $\Delta\omega$ бесконечно-малымъ, мы можемъ дугу MM' замѣнить ея хордою, отличающеюся отъ нея на бесконечно-малую третьяго порядка. Опуская изъ точки M перпендикуляръ MP на радіусъ-векторъ OM' , находимъ:

$$\overline{MM'}^2 = \overline{M'P}^2 + \overline{MP}^2.$$

Описываемъ изъ начала O , какъ центра, радіусомъ OM дугу круга MP' , заключающуюся между радіусами-векторами OM и OM' ; тогда, пренебрегая вездѣ бесконечно-малыми порядка выше перваго, мы можемъ замѣнить $M'P$ отрѣзкомъ $M'P'$ и MP дугою MP' . Дѣйствительно, ошибка въ первой подстановкѣ равна PP' , т.-е. разности между длиною OM и ея проэціей на направленіе, образующее съ нею бесконечно-малый уголъ; подстановка же дуги MP' на мѣсто прямой MP равносильна замѣнѣ бесконечно-малаго синуса соответственной дугою.

Очевидно, имѣемъ:

$$\begin{aligned} M'P' &= \Delta\rho, \\ MP' &= \rho\Delta\omega. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, пренебрегая безконечно-малыми порядка выше второго, можемъ написать:

$$\overline{MM'}^2 = \Delta\rho^2 + \rho^2\overline{\Delta\omega}^2.$$

Отсюда заключаемъ, что предѣлъ отношенія $\frac{MM'}{\Delta\omega}$, или, что одно и то же, производная отъ дуги s равна

$$\frac{ds}{d\omega} = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 + \rho^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}, \\ ds^2 &= d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2. \end{aligned}$$

Было найдено, что въ прямолинейныхъ координатахъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

въ полярныхъ же координатахъ

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega.$$

Эти выраженія равносильны и не трудно перейти отъ одного къ другому. Въ самомъ дѣлѣ,

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega,$$

откуда

$$\begin{aligned} dx &= \cos \omega d\rho - \rho \sin \omega d\omega, \\ dy &= \sin \omega d\rho + \rho \cos \omega d\omega; \end{aligned}$$

возвышая въ квадратъ обѣ части двухъ послѣднихъ уравненій и складывая ихъ, находимъ:

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

§ 121. Точки въ пространствѣ иногда опредѣляютъ при помощи координатъ, аналогичныхъ полярнымъ: если OX , OY , OZ три прямоугольныхъ оси, то точка M задается ея разстоянiемъ ρ до начала, угломъ θ , который составляетъ этотъ радиусъ-векторъ съ осью Z -овъ, и угломъ ψ между плоскостью ZX и плоскостью, проходящею черезъ ось Z -овъ и радиусъ ρ .

Чтобы выразить дифференціалъ дуги кривой, отнесенной къ такой системѣ координатъ, рассмотримъ, во-первыхъ, кривую на поверхности сферы радіуса ρ . Точки этой кривой опредѣлятся координатами θ и ψ . Точки на сферѣ, соотвѣтствующія одному и тому же значенію ψ , расположатся по большому кругу, лежащему въ плоскости, проходящей черезъ ось Z -овъ и составляющей съ плоскостью ZX уголъ ψ ; точки, соотвѣтствующія одному и тому же значенію θ , расположатся по малому кругу, представляющему пересѣченіе сферы съ конусомъ вращенія около оси Z -овъ подъ угломъ θ : радіусъ этого малаго круга, очевидно, равенъ $\rho \sin \theta$. Точка, опредѣляемая на сферѣ координатами θ и ψ , будетъ пересѣченіемъ двухъ рассмотрѣнныхъ круговъ, первый изъ которыхъ можно принять за *меридіанъ* сферической поверхности, а второй за *параллель*.

Четыре круга, соотвѣтствующіе двумъ бесконечно-близкимъ точкамъ, имѣющимъ координаты θ и ψ для одной изъ нихъ и $\theta + d\theta$ и $\psi + d\psi$ для другой, образуютъ бесконечно-малый прямоугольникъ, въ которомъ діагональ выразитъ разстояніе между этими двумя точками и можетъ быть рассмотрѣна, какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника. Такъ какъ двѣ остальные стороны послѣдняго представляютъ бесконечно-малыя круговыя дуги, то его можно принять за прямолинейный. Одинъ изъ катетовъ этого треугольника есть дуга круга радіуса ρ и соотвѣтствуетъ углу $d\theta$, — значитъ, онъ равенъ $\rho d\theta$; другой есть дуга круга радіуса $\rho \sin \theta$ и соотвѣтствуетъ углу $d\psi$, — значитъ, онъ равенъ $\rho \sin \theta d\psi$. Отсюда заключаемъ, что разстояніе ds между двумя разсматриваемыми точками выразится формулою:

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2.$$

Разсмотримъ теперь какую-нибудь кривую въ пространствѣ. Каждая точка этой кривой опредѣляется тремя координатами ρ , θ и ψ . Величина первой изъ нихъ ρ даетъ сферу, на которой находится точка; величина второй θ даетъ конусъ, на которомъ также находится разсматриваемая точка; наконецъ, величина третьей изъ нихъ ψ даетъ плоскость, пересѣченіе которой со сферой и конусомъ и опредѣляетъ окончательно точку. Эти три поверхности, сфера, конусъ и плоскость, пересѣкаются попарно подъ прямыми углами; поэтому, шесть поверхностей, опредѣляющихъ двѣ бесконечно-близкія точки, составятъ прямоугольный бесконечно-малый параллелепипедъ, діагональ котораго выразитъ разстояніе между такими точками. Слѣдовательно, квадратъ послѣдняго, ds^2 , есть сумма квадратовъ трехъ реберъ параллелепипеда, т.-е.

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2.$$

§ 122. Предыдущая формула можетъ быть выведена изъ уравненія:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$z = \rho \cos \theta, \quad x = \rho \sin \theta \cos \psi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \psi,$$

то

$$\begin{aligned} dz &= -\rho \sin \theta d\theta + \cos \theta d\rho, \\ dx &= \rho \cos \theta d\theta \cos \psi - \rho \sin \theta \sin \psi d\psi + \sin \theta \cos \psi d\rho, \\ dy &= \rho \cos \theta d\theta \sin \psi + \rho \sin \theta \cos \psi d\psi + \sin \theta \sin \psi d\rho; \end{aligned}$$

возводя эти равенства въ квадратъ и складывая, находимъ:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬ ДУГИ КРИВОЙ ВЪ КРИВОЛИНЕЙНЫХЪ КООРДИНАТАХЪ

§ 123. Самая общая система координатъ для опредѣленія точекъ въ пространствѣ получается отъ пересѣченія трехъ данныхъ поверхностей какого-угодно вида; каждая изъ нихъ находится черезъ приписываніе параметру, входящему въ ея уравненіе, нѣкотораго значенія. Предположимъ, что уравненія этихъ трехъ поверхностей рѣшены относительно переменныхъ параметровъ и приняты слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi(x, y, z), \\ \beta &= \psi(x, y, z), \\ \gamma &= F(x, y, z). \end{aligned}$$

Придать α нѣкоторое значеніе значитъ указать поверхность, на которой находится разсматриваемая точка; если придать заразъ α и β нѣкоторыя значенія, то точка расположится уже на двухъ данныхъ поверхностяхъ, т.-е. расположится на кривой ихъ пересѣченія; окончательное положеніе точки опредѣлится пересѣченіемъ этой кривой съ поверхностью, соотвѣтствующею значенію, выбранному для γ .

Не трудно вычислить разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками, координаты которыхъ суть $\alpha, \beta, \gamma, \alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma$. Въ самомъ дѣлѣ, называя черезъ ds это разстояніе, можемъ написать:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

А такъ какъ x, y, z могутъ быть приняты за три функціи отъ α, β, γ и, слѣдовательно, можно написать равенства:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{d\alpha} d\alpha + \frac{dx}{d\beta} d\beta + \frac{dx}{d\gamma} d\gamma, \\ dy &= \frac{dy}{d\alpha} d\alpha + \frac{dy}{d\beta} d\beta + \frac{dy}{d\gamma} d\gamma, \\ dz &= \frac{dz}{d\alpha} d\alpha + \frac{dz}{d\beta} d\beta + \frac{dz}{d\gamma} d\gamma, \end{aligned}$$

то выраженіе для ds^2 будетъ вида:

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2 + C d\gamma^2 + D d\alpha d\beta + E d\alpha d\gamma + F d\beta d\gamma.$$

§ 124. Если поверхности, заданныя уравненіями, пересѣкаются подъ прямыми углами при всевозможныхъ значеніяхъ α , β , γ , то коэффициенты D , E , F въ предыдущей формулѣ исчезаютъ и выраженіе для ds^2 приводится къ виду:

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2 + C d\gamma^2.$$

Дѣйствительно, при такомъ допущеніи шесть поверхностей, соответствующихъ значеніямъ α , β , γ , $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ координатъ, составятъ прямоугольный параллелепипедъ, квадратъ діагонали котораго ds^2 будетъ равенъ суммѣ квадратовъ трехъ его реберъ; замѣчая же, что ребра обратятся въ соответственныя значенія ds при $d\beta = 0$, $d\gamma = 0$, затѣмъ при $d\alpha = 0$, $d\gamma = 0$ и, наконецъ, при $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, мы найдемъ ихъ длины изъ общаго выраженія для ds^2 въ слѣдующемъ видѣ:

$$d\alpha \sqrt{A}, \quad d\beta \sqrt{B}, \quad d\gamma \sqrt{C}.$$

Отсюда выводимъ, что

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2 + C d\gamma^2,$$

и, значитъ, D , E , F равны нулю.

§ 125. Равнымъ образомъ, рассматривая прямоугольный безконечно-малый параллелепипедъ, мы можемъ получить простое выраженіе для коэффициентовъ A , B , C ; такъ, напр., $A d\alpha^2$ есть квадратъ разстоянія между безконечно-близкими точками, соответствующими координатамъ α , β , γ , $\alpha + d\alpha$, β , γ . Назовемъ это разстояніе черезъ ϵ ; его проэкции на оси координатъ соответственно равны произведеніямъ ϵ на косинусы угловъ, образуемыхъ его направлениемъ съ осями; такъ какъ послѣднее совпадаетъ съ направлениемъ нормали къ поверхности, уравненіе которой есть

$$\alpha = \varphi(x, y, z),$$

то всѣ три проэкции выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$dx = \frac{\epsilon \frac{d\alpha}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}}, \quad dy = \frac{\epsilon \frac{d\alpha}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}},$$

$$dz = \frac{\epsilon \frac{d\alpha}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}},$$

и, слѣдовательно, уравненіе:

$$d\alpha = \frac{d\alpha}{dx} dx + \frac{d\alpha}{dy} dy + \frac{d\alpha}{dz} dz$$

перейдетъ въ

$$dx = \varepsilon \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2},$$

откуда

$$\varepsilon^2 = \frac{d\alpha^2}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}.$$

Черезъ ε^2 было обозначено произведеніе $A d\alpha^2$,—значитъ,

$$A = \frac{1}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2};$$

точно такъ же

$$B = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2}, \quad C = \frac{1}{\left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dz}\right)^2},$$

и выраженіе для ds^2 будетъ:

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2} + \frac{d\beta^2}{\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2} + \frac{d\gamma^2}{\left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dz}\right)^2}.$$

§ 126. Для изученія точекъ поверхности можно ее принять за одну изъ координатныхъ поверхностей, какъ соответствующую данному значенію одного изъ трехъ параметровъ, напр., γ . Въ предыдущемъ выраженіи нужно тогда положить $d\gamma = 0$, и квадратъ разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками приметъ видъ:

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2,$$

гдѣ α и β суть параметры двухъ системъ кривыхъ, пересекающихся подъ прямымъ угломъ на данной поверхности.

§ 127. Предыдущія формулы даютъ, какъ частный случай, формулу § 121-го для разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками въ полярныхъ координатахъ, задаваемыхъ уравненіями:

$$z = \rho \cos \theta, \quad x = \rho \sin \theta \cos \psi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \psi,$$

или, что одно и то же, уравненіями:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctang \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \psi = \arctang \frac{y}{x}.$$

Здѣсь ρ , θ и ψ суть три параметра, обозначенные въ общей формулѣ буквами α , β , γ ; подставляя въ послѣднюю эти параметры, находимъ полученный въ § 122-мъ результатъ:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2.$$

Для разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками на одной и той же сферѣ радиуса ρ слѣдуетъ въ предыдущей формулѣ положить $d\rho = 0$; тогда

$$ds^2 = \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2),$$

что вполне совпадаетъ съ найденнымъ уже результатомъ.

§ 128. Послѣ полярной системы координатъ наиболѣе употребительная изъ криволинейныхъ та, въ которой каждая точка опредѣляется пересѣченіемъ трехъ однофокусныхъ поверхностей второй степени.

Пусть точка опредѣляется значеніями въ этой же точкѣ трехъ корней слѣдующаго уравненія относительно μ :

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} - 1 = 0, \quad (1)$$

гдѣ b и c данныя величины.

Для каждой точки пространства три корня этого уравненія—вещественны. Чтобы убѣдиться въ этомъ, напр. при $b^2 < c^2$, достаточно сдѣлать послѣдовательно $\mu^2 = +\epsilon$, $\mu^2 = b^2 - \epsilon$, $\mu^2 = b^2 + \epsilon$, $\mu^2 = c^2 - \epsilon$, $\mu^2 = c^2 + \epsilon$, гдѣ ϵ —бесконечно-мало и положительно. Первая часть уравненія приметъ слѣдующіе знаки:

$$\begin{cases} \mu^2 = \epsilon & \dots \dots \dots + \\ \mu^2 = b^2 - \epsilon & \dots \dots \dots - \\ \mu^2 = b^2 + \epsilon & \dots \dots \dots + \\ \mu^2 = c^2 - \epsilon & \dots \dots \dots - \\ \mu^2 = c^2 + \epsilon & \dots \dots \dots + \\ \mu^2 = +\infty & \dots \dots \dots - 1 \end{cases}$$

и такъ какъ она не обращается въ бесконечность для значеній μ , лежащихъ между значеніями каждой изъ выписанныхъ паръ, то она необходимо обратится въ нуль въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ, и, слѣдовательно, уравненіе будетъ имѣть три корня: одинъ между 0 и b^2 , другой между b^2 и c^2 , третій между c^2 и $+\infty$. При первомъ корнѣ поверхность, выражаемая уравненіемъ (1), представитъ двуполый гиперболоидъ, при второмъ корнѣ—однополый гиперболоидъ и при третьемъ—эллипсоидъ. Называя корни черезъ μ , ν , ρ и предполагая $\mu^2 > \nu^2 > \rho^2$, получаемъ для всѣхъ трехъ поверхностей уравненія:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho^2} &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Не трудно замѣтить, что онѣ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

§ 129. Разсматривая, какъ координаты точки, соответственныя для нея значенія μ , ν , ρ , мы получимъ для разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками замѣчательное выраженіе. Начнемъ съ рѣшенія трехъ уравненій (2). Для этого разлагаемъ на простѣйшія дроби выраженіе:

$$\frac{(\lambda - \rho^2)(\lambda - \mu^2)(\lambda - \nu^2)}{\lambda(\lambda - b^2)(\lambda - c^2)}.$$

По извѣстному методу изъ элементарной алгебры эта дробь будетъ равна

$$1 - \frac{x^2}{\lambda} - \frac{y^2}{\lambda - b^2} - \frac{z^2}{\lambda - c^2},$$

гдѣ

$$x^2 = \frac{\rho^2 \mu^2 \nu^2}{b^2 c^2}, \quad y^2 = \frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{b^2(b^2 - c^2)}, \quad z^2 = \frac{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{c^2(c^2 - b^2)}. \quad (1)$$

Поэтому, если

$$1 - \frac{x^2}{\lambda} - \frac{y^2}{\lambda - b^2} - \frac{z^2}{\lambda - c^2} = 0,$$

то для λ будутъ три значенія, $\lambda = \rho^2$, $\lambda = \mu^2$, $\lambda = \nu^2$, и формулы (1) дадутъ x , y , z въ функціи отъ трехъ соответственныхъ имъ параметровъ. Беря логарифмы отъ обѣихъ частей формулъ (1) и дифференцируя ихъ, находимъ:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{x d\rho}{\rho} + \frac{x d\mu}{\mu} + \frac{x d\nu}{\nu}, \\ dy &= \frac{y \rho d\rho}{\rho^2 - b^2} + \frac{y \mu d\mu}{\mu^2 - b^2} + \frac{y \nu d\nu}{\nu^2 - b^2}, \\ dz &= \frac{z \rho d\rho}{\rho^2 - c^2} + \frac{z \mu d\mu}{\mu^2 - c^2} + \frac{z \nu d\nu}{\nu^2 - c^2}; \end{aligned}$$

отсюда, послѣ нѣкоторыхъ упрощеній,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} + d\mu^2 \frac{(\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 - \rho^2)}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} + \\ + d\nu^2 \frac{(\nu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \mu^2)}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}.$$

При $d\rho = 0$, т.-е. когда обѣ безконечно-близкія точки лежатъ на эллипсоидѣ, уравненіе котораго $\rho = \text{const.}$, послѣдняя формула перейдетъ въ слѣдующую:

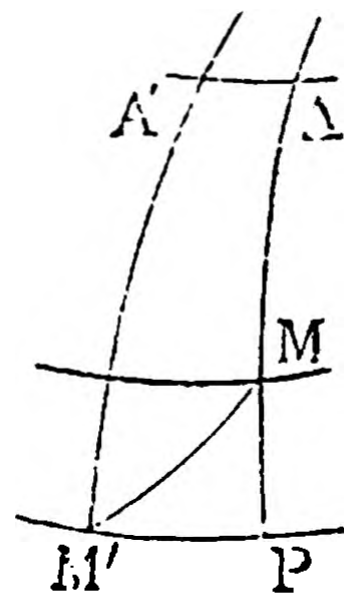
$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2) \left[\frac{(\mu^2 - \rho^2) d\mu^2}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} + \frac{(\rho^2 - \nu^2) d\nu^2}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)} \right].$$

§ 130. На каждой поверхности и для каждой системы переменныхъ соотвѣтствуетъ своя особая форма выраженія ds^2 . Изученіе этихъ формъ, какъ увидимъ ниже, очень важно для теоріи поверхностей; здѣсь мы ограничимся поверхностями вращенія.

Поверхности вращенія.—Беря за координаты точекъ поверхности вращенія длину σ , отсчитанную по меридіану отъ неподвижной параллели до разсматриваемой точки, и уголъ ω между неподвижнымъ меридіаномъ и меридіаномъ точки, замѣчаемъ непосредственно, что выраженіе для ds^2 будетъ вида:

$$ds^2 = d^2\sigma + \varphi(\sigma) d\omega^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть M и M' (черт. 25) двѣ безконечно-близкія точки; AM ,



Черт. 25.

$A'M'$ — соотвѣтственные имъ меридіаны; $AM = \sigma$, $A'M' = \sigma + d\sigma$. Изъ треугольника $MM'P$ можемъ написать:

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{M'P}^2;$$

такъ какъ \overline{MP}^2 равно $d\sigma^2$, а дуга $M'P$ соотвѣтствуетъ углу $d\omega$ между меридіанами и описана радіусомъ параллели, зависящей отъ σ по закону, измѣняющемуся вмѣстѣ

съ природою поверхности, то выраженіе для квадрата дуги будетъ имѣть какъ разъ вышеприведенный видъ:

$$ds^2 = d\sigma^2 + \varphi(\sigma) d\omega^2.$$

§ 131. Только-что выведенныя общія формулы встрѣчаются особенно въ общей теоріи географическихъ картъ. Если предположить, что земная поверхность (какова бы ни была при этомъ ея форма) пересѣчена двумя рядами взаимно-перпендикулярныхъ кривыхъ, которымъ мы дадимъ названіе меридіановъ и параллелей, и притомъ такихъ, что чрезъ каждую точку поверхности проходитъ кривая каждаго вида, опредѣляемая параметромъ α для меридіановъ (долготою) и параметромъ β для параллелей (широтою), то чтобы нанести на плоскости рядъ точекъ, расположенныхъ на земной поверхности, нужно установить зависимость между координатами x, y точекъ на плоскости и значеніями α, β параметровъ, относящихся къ соотвѣтственнымъ точкамъ поверхности. Если разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками на земной поверхности задано формулою:

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2,$$

то разстояніе между соотвѣтственными точками на картѣ выразится слѣдующимъ образомъ:

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2,$$

и карта была бы совершенною, еслибы отношеніе $\frac{ds}{ds'}$ было постоянно. Къ несчастію, такое условіе было бы возможно только въ томъ случаѣ, еслибы земная поверхность принадлежала къ классу такъ называемыхъ развертывающихся поверхностей, чего въ дѣйствительности нѣтъ.

Если отношеніе $\frac{ds}{ds'}$, не будучи постояннымъ, сохраняетъ свою величину во всѣхъ направленіяхъ вокругъ одной и той же точки, то малыя части поверхности не будутъ искажены, и карта для страны небольшого протяженія должна считаться удовлетворительною. Мы еще вернемся къ этой важной теоріи и докажемъ, что всегда существуетъ бесконечное множество системъ, выполняющихъ это условіе.

УПРАЖНЕНІЯ

1. Даны на плоскости двѣ какія-нибудь кривыя и точки этихъ кривыхъ, въ которыхъ касательныя параллельны, соединены прямыми линіями; для полученныхъ такимъ образомъ длинъ проведены равныя и параллельныя прямыя черезъ нѣкоторую неподвижную точку. Доказать, что дуга кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ концовъ послѣднихъ прямыхъ, есть сумма или разность соотвѣтственныхъ дугъ данныхъ кривыхъ.

2. На лемнискатѣ, уравненіе которой $r^2 = a^2 \cos 2\omega$, даны двѣ точки P и Q , соответствующія такимъ значеніямъ, ω' и ω'' , угла ω , что

$$\cos \omega' \cos \omega'' = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

доказать, что дуга, заключенная между точкою P и полюсомъ, равна дугѣ, отдѣляющей точку Q отъ вершины, соответствующей $\omega = 0$.

3. На параболѣ, уравненіе которой $2y = x^2$, взяты три дуги, отсчитанныя всеѣ отъ вершины; абсциссами ихъ концовъ служатъ три корня уравненія:

$$X^3 - aX^2 + \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)X - a = 0;$$

доказать, что алгебраическая сумма дугъ равна суммѣ абсциссъ ихъ концовъ, т.-е. a .

4. Если считать *соответственными* такія точки на кривой, выражаемой уравненіемъ $y^3 = 27a^2x$, произведеніе абсциссъ которыхъ равно a^2 , то разность между какою-угодно дугою и дугою, ей соответствующею, равна избытку разности касательныхъ въ концахъ первой дуги надъ разностью касательныхъ въ концахъ второй, при чемъ касательныя берутся между точкою касанія и точкою ихъ пересѣченія съ осью X -овъ.

5. Прямая движется, оставаясь параллельной основанію цилиндра вращенія, къ которому она постоянно касательна, при чемъ точка касанія описываетъ данную винтовую линію. Найти уравненіе поверхности, которую описываетъ эта прямая, и доказать, что существуетъ такой гиперболоидъ вращенія, что всякая взятая на немъ кривая будетъ равна по длинѣ соответственной кривой на некоей поверхности, при чемъ слѣдуетъ руководиться надлежащимъ закономъ соответствія между производящими и точками обѣихъ поверхностей.

6. Если представить всеѣ точки линейчатой поверхности посредствомъ двухъ переменныхъ u и v , изъ которыхъ одна была бы постоянною на производящей, а другая равнялась бы разстоянію, отсчитанному на производящей между разсматриваемою точкою и неподвижною кривою, перпендикулярною ко всеѣмъ производящимъ, то разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками поверхности выразится уравненіемъ вида:

$$ds^2 = dv^2 + \varphi(v, u) du^2,$$

гдѣ $\varphi(v, u)$ есть многочленъ второй степени относительно переменной v .

ГЛАВА ШЕСТАЯ

Производныя и дифференціалы порядка выше перваго

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ПРОИЗВОДНЫХЪ ВЫСШАГО ПОРЯДКА

§ 132. Методы, изложенные въ предыдущихъ главахъ, даютъ возможность составить производную какой-угодно данной функціи отъ переменнѣной x . Эта производная есть функція отъ той же переменнѣной, и по тѣмъ же правиламъ отъ нея можно взять также производную, которая называется второю производною отъ первоначальной функціи. Производная отъ второй производной есть третья производная, и т. д. Подобно первой производной, обозначаемой однимъ значкомъ надъ функціей, вторая производная обозначается двумя значками, третья—тремя, и т. д. Такимъ образомъ послѣдовательныя производныя функціи $\varphi(x)$ будутъ:

$$\varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x), \varphi^{IV}(x), \dots, \varphi^n(x).$$

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛОВЪ ВЫСШАГО ПОРЯДКА

§ 133. Обозначая черезъ $\varphi(x)$ функцію y отъ переменнѣной x , имѣемъ (§ 46), по опредѣленію,

$$dy = \varphi'(x) dx. \quad (1)$$

Разсматривая dx , какъ постоянную, мы видимъ, что дифференціалъ dy есть функція отъ одной только переменнѣной x , и его можно, поэтому, продифференцировать. Дифференціалъ отъ dy называется вторымъ дифференціаломъ отъ y и обозначается черезъ d^2y ; очевидно,

$$d^2y = \varphi''(x) dx^2. \quad (2)$$

Разсматривая всегда dx , какъ постоянную, замѣчаемъ, что и d^2y есть также функція отъ одной только переменнѣй x . Дифференціалъ отъ d^2y называется третьимъ дифференціаломъ отъ y и обозначается черезъ d^3y ; очевидно,

$$d^3y = \varphi'''(x) dx^3. \quad (3)$$

Продолжая писать по аналогіи, замѣтимъ, что n -ый дифференціалъ отъ y , $d^n y$, есть

$$d^n y = \varphi^n(x) dx^n. \quad (n)$$

Уравненія (1), (2), (3), ..., (n) даютъ послѣдовательныя производныя въ функціи отъ соответственныхъ дифференціаловъ:

$$\varphi'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad \varphi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \varphi'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \quad \varphi^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

§ 134. Если приписывать переменнѣй x бесконечно-малыя равныя между собою приращенія, обозначаемыя посредствомъ Δx , то функція $\varphi(x)$ будетъ принимать послѣдовательныя значенія: $\varphi(x)$, $\varphi(x + \Delta x)$, $\varphi(x + 2\Delta x)$, ..., $\varphi(x + n\Delta x)$, которыя мы назовемъ черезъ y , y_1 , y_2 , ..., y_n . Полагаемъ, пользуясь извѣстнымъ обозначеніемъ,

$$\begin{aligned} y_1 - y &= \Delta y, & y_2 - y_1 &= \Delta y_1, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & y_n - y_{n-1} &= \Delta y_{n-1}, \\ \Delta y_1 - \Delta y &= \Delta^2 y, & \Delta y_2 - \Delta y_1 &= \Delta^2 y_1, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} &= \Delta^2 y_{n-2}, \\ \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y &= \Delta^3 y, & \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 &= \Delta^3 y_1, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3} &= \Delta^3 y_{n-3}, \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y &= \Delta^n y, \end{aligned}$$

гдѣ $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... суть вторыя, третьи, и т. д. разности отъ y .

При Δx бесконечно-маломъ Δy можетъ быть замѣнено черезъ dy . Покажемъ, что также можно замѣнить $\Delta^2 y$ черезъ $d^2 y$, $\Delta^3 y$ черезъ $d^3 y$, и т. д., отбрасывая при каждой изъ такихъ подстановокъ бесконечно-малую часть вычисляемаго количества. Но прежде мы должны доказать слѣдующую теорему.

§ 135. Если функція $\psi(x, a)$ содержитъ кромѣ переменнѣй x букву a , не зависящую отъ x , и если эта функція обращается въ нуль при $a = 0$, каково бы ни было x , то при тѣхъ же условіяхъ обращается въ 0 и производная $\frac{d\psi(x, a)}{dx}$.

Это предложеніе — очевидно, если замѣтить, что такъ какъ буква a при дифференцированіи принимается за постоянную и значеніе этой постоянной остается неопредѣленнымъ, то безразлично, придать ли этой буквѣ опредѣленное значеніе раньше или послѣ дифференцированія. При $a = 0$ до дифференцированія функція и, слѣдовательно, ея производная обращаются въ нуль; поэтому, произойдетъ то же самое, если положимъ $a = 0$ послѣ дифференцированія.

Отсюда очевидно, что если функція $\psi(x, a)$ бесконечно-мала при бесконечно-маломъ a , каково бы ни было x , то то же будетъ справедливо и для ея производной $\frac{d\psi(x, a)}{dx}$.

§ 136. Разсмотримъ теперь функцію:

$$y = \varphi(x); \quad (1)$$

пользуясь обозначеніемъ предыдущаго параграфа, пишемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'(x) + \varepsilon, \quad (2)$$

при чемъ ε есть функція отъ x и Δx , обращающаяся въ нуль одновременно съ Δx . Если въ обѣихъ частяхъ уравненія (2) измѣнить x на $x + \Delta x$, то ихъ приращенія, раздѣленные на Δx , будутъ равны, и мы можемъ написать:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\Delta \varphi'(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}.$$

Но при Δx , стремящемся къ нулю, $\frac{\Delta \varphi'(x)}{\Delta x}$, очевидно, обратится въ предѣлъ въ $\varphi''(x)$, а $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}$ — въ нуль; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ ε при всякомъ x бесконечно-мало по сравненію съ Δx , то то же относится (§ 135) и къ его производной, а слѣдовательно, и къ отношенію $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}$, которое бесконечно мало отличается отъ этой производной. Отсюда вытекаетъ, что при Δx бесконечно-маломъ мы будемъ имѣть, пренебрегая бесконечно-малыми третьяго порядка,

$$\Delta^2 y = \varphi''(x) \Delta x^2,$$

т.-е. что при Δx бесконечно-маломъ $\Delta^2 y$ равно $d^2 y$, если пренебречь бесконечно-малыми третьяго порядка.

§ 137. Изъ предыдущаго доказательства вытекаетъ, что при Δx , стремящемся къ нулю, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ имѣетъ предѣломъ вторую производную, $\varphi''(x)$, отъ y ; поэтому полагаемъ:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \varphi''(x) + \varepsilon_1, \quad (1)$$

гдѣ ε_1 есть функція отъ x и Δx , обращающаяся въ нуль одновременно съ Δx . Если въ обѣихъ частяхъ уравненія (1) измѣнить x на $x + \Delta x$, то ихъ приращенія, раздѣленные на Δx , будутъ равны, и мы можемъ написать:

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{\Delta \varphi''(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}.$$

Но при Δx , стремящемся къ нулю, $\frac{\Delta \varphi''(x)}{\Delta x}$, очевидно, обратится въ предѣлъ въ $\varphi'''(x)$, а $\frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}$ — въ нуль на томъ же основаніи, какъ и въ предыдущемъ случаѣ; отсюда

отсюда вытекает, что при Δx бесконечно-маломъ мы будемъ имѣть, пренебрегая бесконечно-малыми четвертаго порядка,

$$\Delta^3 y = \varphi'''(x) \Delta x^3.$$

Точно такъ же найдемъ, что $\Delta^4 y$ можетъ быть замѣнено черезъ $\varphi^{IV}(x) \Delta x^4$ и что, вообще, $\Delta^n y$ равно $\varphi^n(x) \Delta x^n$, если пренебречь бесконечно-малыми $(n + 1)$ -го порядка; такимъ образомъ $\Delta^n y$ и $d^n y$ суть двѣ бесконечно-малыя n -го порядка, отношеніе которыхъ въ предѣлѣ равно 1.

§ 138. Есть существенное различіе между дифференціалами высшаго порядка и дифференціалами перваго порядка. Когда нѣсколько переменныхъ связаны между собою такимъ образомъ, что всѣ зависятъ отъ одной изъ нихъ, то отношенія ихъ дифференціаловъ перваго порядка являются вполне определенными (§ 57). Нельзя того же сказать про дифференціалы высшаго порядка, пока не сдѣланъ выборъ независимой переменной; это происходитъ отъ того, что при составленіи разностей $\Delta^2 y, \Delta^3 y, \dots$, которыя можно замѣнить, когда онѣ бесконечно-малы, черезъ $d^2 y, d^3 y, \dots$, нужно придавать главной переменной x послѣдовательныя приращенія, равныя между собою, что отличаетъ эту переменную отъ всѣхъ другихъ, соответственныя приращенія которыхъ, вообще, не равны. Когда же, напротивъ, рассматриваются разности и дифференціалы только перваго порядка, то переменная x получаетъ только одинъ разъ приращеніе Δx , которое, поэтому, ничѣмъ не будетъ отличаться отъ соответственныхъ приращеній другихъ переменныхъ.

Замѣтимъ, наконецъ, что дифференціалы порядка выше перваго равны нулю для главной или, что одно и то же, независимой переменной, т.-е. что

$$d^2 x = 0, \quad d^3 x = 0, \quad \dots,$$

если x есть эта переменная.

Определеніе послѣдовательныхъ производныхъ отъ функции

§ 139. Чтобы составить послѣдовательныя производныя отъ какой-нибудь функции, достаточно примѣнить надлежащее число разъ извѣстные методы, по которымъ вычисляются производныя перваго порядка. Къ несчастію, вычисленія часто чѣмъ далѣе, тѣмъ все болѣе усложняются, и почти невозможно обойтись безъ особыхъ приѣмовъ, чтобы получить *на самомъ дѣлѣ* производныя болѣе или менѣе высокаго порядка.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ такихъ приѣмовъ.

Производныя отъ произведенія.—Называя черезъ P и Q двѣ функции отъ одной и той же переменной x , по извѣстнымъ правиламъ находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d(PQ)}{dx} &= P \frac{dQ}{dx} + Q \frac{dP}{dx}, \\ \frac{d^2(PQ)}{dx^2} &= P \frac{d^2Q}{dx^2} + 2 \frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dx} + Q \frac{d^2P}{dx^2}, \\ \frac{d^3(PQ)}{dx^3} &= P \frac{d^3Q}{dx^3} + 3 \frac{dP}{dx} \frac{d^2Q}{dx^2} + 3 \frac{d^2P}{dx^2} \frac{dQ}{dx} + Q \frac{d^3P}{dx^3}, \end{aligned} \tag{1}$$

и, заключая по индукціи, пишемъ слѣдующую формулу:

$$\begin{aligned} \frac{d^n(PQ)}{dx^n} &= P \frac{d^n Q}{dx^n} + n \frac{dP}{dx} \frac{d^{n-1} Q}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2 P}{dx^2} \frac{d^{n-2} Q}{dx^{n-2}} + \dots \\ &+ \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \frac{d^k P}{dx^k} \frac{d^{n-k} Q}{dx^{n-k}} + \dots + \frac{d^n P}{dx^n} Q. \end{aligned} \quad (2)$$

Чтобы доказать эту формулу, допустимъ, что она справедлива для числа n , и покажемъ, что въ такомъ случаѣ она справедлива для числа $n+1$ непосредственно высшаго. Дифференцируя обѣ части уравненія (2), находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}(PQ)}{dx^{n+1}} &\left(\frac{dP}{dx} \frac{d^n Q}{dx^n} + P \frac{d^{n+1} Q}{dx^{n+1}} \right) + n \left(\frac{d^2 P}{dx^2} \frac{d^{n-1} Q}{dx^{n-1}} + \frac{dP}{dx} \frac{d^n Q}{dx^n} \right) + \dots \\ &+ \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \left(\frac{d^{k+1} P}{dx^{k+1}} \frac{d^{n-k} Q}{dx^{n-k}} + \frac{d^k P}{dx^k} \frac{d^{n-k+1} Q}{dx^{n-k+1}} \right) + \dots \\ &+ \left(\frac{d^{n+1} P}{dx^{n+1}} Q + \frac{d^n P}{dx^n} \frac{dQ}{dx} \right). \end{aligned}$$

Соединяя второй членъ каждой скобокъ съ первымъ членомъ предыдущихъ скобокъ и замѣчая, что сумма двухъ коэффициентовъ n -ой степени бинорма есть коэффициентъ $(n+1)$ -ой степени, переписываемъ это уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}(PQ)}{dx^{n+1}} &= P \frac{d^{n+1} Q}{dx^{n+1}} + (n+1) \frac{dP}{dx} \frac{d^n Q}{dx^n} + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} \frac{d^2 P}{dx^2} \frac{d^{n-1} Q}{dx^{n-1}} + \dots \\ &+ \frac{(n+1)n \dots (n+1-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \frac{d^k P}{dx^k} \frac{d^{n+1-k} Q}{dx^{n+1-k}} + \dots + Q \frac{d^{n+1} P}{dx^{n+1}}, \end{aligned}$$

а это есть не что иное, какъ формула (2), въ которой n измѣнено на $(n+1)$, и общность которой такимъ образомъ доказана.

§ 140. Производныя функции отъ функций.—Пусть u есть функция отъ x , а $\varphi(u)$ —функция отъ функции, которую мы обозначимъ черезъ y . Дифференцируя послѣдовательно и выражая послѣдовательныя производныя функции $\varphi(u)$ черезъ $\varphi'(u)$, $\varphi''(u)$, $\varphi'''(u)$, ..., находимъ:

$$y = \varphi(u), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \varphi'(u), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} \varphi'(u) + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \varphi''(u), \quad (3)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 u}{dx^3} \varphi'(u) + 3 \frac{du}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} \varphi''(u) + \left(\frac{du}{dx} \right)^3 \varphi'''(u); \quad (4)$$

отсюда заключаемъ, что выраженіе $\frac{d^n y}{dx^n}$ будетъ вида:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A_1 \varphi'(u) + A_2 \varphi''(u) + \dots + A_n \varphi^n(u),$$

гдѣ A_1, A_2, \dots, A_n зависятъ отъ u и его производныхъ, но не измѣняются съ измѣненіемъ вида функціи φ .

Чтобы получить эти коэффициенты, полагаемъ:

$$A_k = \frac{B_k}{1.2 \dots k},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = B_1 \varphi'(u) + \frac{B_2}{1.2} \varphi''(u) + \dots + \frac{B_k}{1.2 \dots k} \varphi^k(u) + \dots + \frac{B_n}{1.2 \dots n} \varphi^n(u). \quad (5)$$

Коэффициенты B_1, B_2, B_n, \dots , не зависятъ отъ вида φ , — поэтому ихъ можно опредѣлять, дѣлая частныя предположенія относительно этой функціи. Положимъ послѣдовательно

$$\varphi(u) = u, \quad \varphi(u) = u^2, \quad \dots, \quad \varphi(u) = u^n;$$

примѣняя каждый разъ уравненіе (5), получаемъ между неизвѣстными B_1, B_2, \dots, B_n слѣдующихъ n зависимостей:

$$\begin{aligned} \frac{d^n u}{dx^n} &= B_1, \\ \frac{d^n (u^2)}{dx^n} &= 2B_1 u + B_2, \\ \frac{d^n (u^3)}{dx^n} &= 3B_1 u^2 + 3B_2 u + B_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^n (u^n)}{dx^n} &= nB_1 u^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} B_2 u^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} B_3 u^{n-3} + \dots + B_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы рѣшить эти уравненія и вычислить какой-нибудь изъ коэффициентовъ, напр. B_k , сложимъ первыхъ k уравненій, предварительно умноживъ первое изъ нихъ на $k \cdot \frac{1}{u}$, второе на $-\frac{k(k-1)}{1.2} \frac{1}{u^2}$, третье на $\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} \frac{1}{u^3}$, четвертое на $-\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4} \frac{1}{u^4}$, и т. д.; неизвѣстныя B_1, B_2, \dots, B_{k-1} исчезнутъ, оста-

нется только B_k . Действительно, если k' какое-нибудь число меньше k , то коэффициент при $B_{k'}$ послѣ сложения будетъ

$$\begin{aligned} & (-1)^{k'-1} \frac{1}{u^{k'}} \left[\frac{k(k-1) \dots (k-k'+1)}{1.2.3 \dots k'} - \frac{k(k-1) \dots (k-k')}{1.2.3 \dots (k'+1)} (k'+1) + \right. \\ & \quad + \frac{k(k-1) \dots (k-k'-1)}{1.2.3 \dots (k'+2)} \frac{(k'+1)(k'+2)}{1.2} - \dots \\ & \quad \left. + \frac{k(k-1) \dots 1}{1.2 \dots k} \frac{(k'+1)(k'+2) \dots k}{1.2 \dots (k-k')} \right], \end{aligned}$$

т.-е.

$$\begin{aligned} & (-1)^{k'+1} \frac{1}{u^{k'}} \cdot \frac{k(k-1) \dots (k-k'+1)}{1.2.3 \dots k'} \left[1 - (k-k') + \frac{(k-k')(k-k'-1)}{1.2} - \dots + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(k-k')(k-k'-1) \dots 1}{1.2 \dots (k-k')} \right], \end{aligned}$$

или, наконецъ,

$$\pm \frac{1}{u^{k'}} \left[\frac{k(k-1) \dots (k-k'+1)}{1.2.3 \dots k'} (1-1)^{k-k'} \right] = 0.$$

При $k=k'$ сумма будетъ $(-1)^{k+1} \frac{1}{u^k}$. Такимъ образомъ, уравненіе, полученное отъ сложения уравненій (6), умноженныхъ предварительно на указанныхъ множителей, приметъ видъ:

$$\frac{1}{u^k} B_k = (-1)^{k+1} \left[\frac{k}{u} \frac{d^n u}{dx^n} - \frac{k(k-1)}{1.2} \frac{1}{u^2} \frac{d^n u^2}{dx^n} + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} \frac{1}{u^3} \frac{d^n u^3}{dx^n} - \dots + \frac{1}{u^k} \frac{d^n u^k}{dx^n} \right].$$

Отсюда слѣдуетъ, что формула (5) даетъ n -ую производную отъ $\varphi(u)$ въ функціи отъ n -ыхъ производныхъ всѣхъ степеней u , показатель которыхъ не превышаетъ n .

§ 141. Найденное выраженіе для $\frac{B_k}{u^k}$ можетъ быть преобразовано слѣдующимъ образомъ. Пишемъ:

$$\left(\frac{u}{\alpha} - 1 \right)^k = (-1)^k \left(1 - \frac{u}{\alpha} \right)^k = (-1)^k \left[1 - \frac{ku}{\alpha} + \frac{k(k-1)}{1.2} \frac{u^2}{\alpha^2} - \dots + \frac{u^k}{\alpha^k} \right].$$

Дифференцируемъ обѣ части этого равенства n разъ по x , рассматривая α , какъ постоянную:

$$\frac{d^n \left(\frac{u}{\alpha} - 1 \right)^k}{dx^n} = (-1)^k \left[-\frac{k}{\alpha} \frac{d^n u}{dx^n} + \frac{k(k-1)}{1.2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^n u^2}{dx^n} + \dots + \frac{1}{\alpha^k} \frac{d^n u^k}{dx^n} \right].$$

Положивъ во второй части полученнаго равенства $\alpha = u$, увидимъ, что она совпадетъ съ выраженіемъ для $\frac{B_k}{u^k}$; значитъ

$$B_k = u^k \frac{d^n \left(\frac{u}{\alpha} - 1 \right)^k}{dx^n}$$

при условіи, что буква α , разсматриваемая при всѣхъ дифференцированіяхъ, какъ постоянная, должна быть замѣнена въ окончательномъ результатѣ буквою u .

Такимъ образомъ выраженіе для $\frac{d^n \varphi(u)}{dx^n}$ приметъ видъ:

$$\frac{d^n \varphi(u)}{dx^n} = \sum \frac{u^k}{1.2.3\dots k} \varphi^k(u) \cdot \frac{d^n \left(\frac{u}{\alpha} - 1 \right)^k}{dx^n},$$

гдѣ суммирование распространено на всѣ цѣлыя значенія k отъ 1 до n , а буква α , входящая во вторую часть, должна быть замѣнена послѣ дифференцированія буквою u .

§ 142. Положимъ въ общей формулѣ $u = x^2$; тогда

$$\frac{d^n \varphi(x^2)}{dx^n} = B_1 \varphi'(x^2) + \frac{B_2}{1.2} \varphi''(x^2) + \dots + \frac{B_k}{1.2\dots k} \varphi^k(x^2) + \dots + \frac{B_n}{1.2\dots n} \varphi^n(x^2),$$

при чемъ выраженіе для B_k будетъ:

$$\frac{1}{x^{2k}} B_k = (-1)^{k+1} \left[\frac{k}{x^2} \frac{d^n x^2}{dx^n} - \frac{k(k-1)}{1.2} \frac{1}{x^4} \frac{d^n x^4}{dx^n} - \dots + \frac{1}{x^{2k}} \frac{d^n x^{2k}}{dx^n} \right].$$

Вмѣсто упрощенія этой формулы будетъ выгоднѣе вычислить непосредственно нѣсколько послѣдовательныхъ производныхъ отъ $\varphi(x^2)$, чтобы, заключая по индукціи, замѣтить законъ ихъ составленія. Полагая

$$y = \varphi(x^2), \quad (1)$$

находимъ посредствомъ послѣдовательныхъ дифференцированій:

$$\frac{dy}{dx} = 2x\varphi'(x^2), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (2x)^2 \varphi''(x^2) + 2\varphi'(x^2), \quad (3)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = (2x)^3 \varphi'''(x^2) + 6(2x) \varphi''(x^2), \quad (4)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = (2x)^4 \varphi^{IV}(x^2) + 12(2x)^2 \varphi'''(x^2) + 12\varphi''(x^2), \quad (5)$$

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = (2x)^5 \varphi^V(x^2) + 20(2x)^3 \varphi^{IV}(x^2) + 60(2x) \varphi'''(x^2), \quad (6)$$

что приводитъ къ общей формулѣ:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} = & (2x)^n \varphi^n(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2} \varphi^{n-1}(x^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} \varphi^{n-2}(x^2) + \dots \\ & + \frac{n(n-1) \dots (n-2p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} (2x)^{n-2p} \varphi^{n-p}(x^2) + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

гдѣ вторая часть оканчивается сама собою, когда по очевидному закону составленія членовъ коэффициенты при нихъ начинаютъ обращаться въ нуль.

Для доказательства замѣченной такимъ образомъ формулы достаточно убѣдиться въ томъ, что если она справедлива для значенія n , то въ такомъ случаѣ она справедлива и для значенія непосредственно высшаго. Но, вѣдь, если формула (7) имѣетъ мѣсто, то коэффициентъ при $\varphi^{n+1-p}(x^2)$ въ $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$, очевидно, будетъ

$$\frac{n(n-1) \dots (n-2p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} (2x)^{n-2p+1} + \frac{n(n-1) \dots (n-2p+3)}{2 \cdot 2 \dots (p-1)} (n-2p+2) 2 (2x)^{n-2p+1},$$

т.-е.

$$\begin{aligned} (2x)^{n-2p+1} \frac{n(n-1) \dots (n-2p+3)(n-2p+2)}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} \left[\frac{n-2p+1}{p} + 2 \right] = \\ = (2x)^{n-2p+1} \frac{(n+1)n \dots (n+1-2p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}, \end{aligned}$$

а это доказываетъ вполнѣ нашу формулу.

§ 143. Приложимъ предыдущую формулу къ разысканію

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}},$$

выраженіе для которой, замѣчательное по своей простотѣ, было дано и использовано въ своихъ приложеніяхъ Якоби. Предыдущая формула, примѣненная къ этому случаю, даетъ непосредственно:

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = & (-1)^{m-1} \left[(2x)^{m-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{3}{2} - \right. \\ & - \frac{(m-1)(m-2)}{1} (2x)^{m-3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{5}{2} + \\ & \left. + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{m-5} (1-x^2)^{\frac{5}{2}} \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{7}{2} - \dots \right], \end{aligned}$$

т.-е.

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{m} \left[mx^{m-1} \sqrt{1-x^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} (\sqrt{1-x^2})^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{m-5} (\sqrt{1-x^2})^5 \dots \right].$$

Если положить $x = \cos u$, то это выражение, въ силу известной тригонометрической формулы, которая къ тому же будетъ доказана въ одной изъ слѣдующихъ главъ, обратится въ

$$(-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{m} \sin mu.$$

Итакъ, при $x = \cos u$ имѣемъ:

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{m} \sin mu.$$

§ 144. Производная отъ $\arctang x$. — Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d \arctang x}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}, \\ \frac{d^2 \arctang x}{dx^2} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \\ \frac{d^3 \arctang x}{dx^3} &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Не трудно продолжать эти дѣйствія, но результаты все болѣе и болѣе усложняются и общій законъ не открывается самъ собою. Чтобы его найти, замѣтимъ, что при $u = \arctang x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \left[\frac{1}{x+\sqrt{-1}} - \frac{1}{x-\sqrt{-1}} \right],$$

откуда

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (-1)^n \left[\frac{1}{(x+\sqrt{-1})^{n+1}} - \frac{1}{(x-\sqrt{-1})^{n+1}} \right].$$

Приводя обѣ дроби въ скобкахъ къ одному знаменателю, увидимъ, что мнимыя количества исчезнутъ и выражение для производной приметъ вещественный видъ.

Изящный результатъ получается при

$$u = \frac{\pi}{2} - y.$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ

$$\begin{aligned}\cos y &= \sin u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \sin y &= \cos u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\ x + \sqrt{-1} &= \sqrt{1+x^2} [\cos y + \sqrt{-1} \sin y], \\ x - \sqrt{-1} &= \sqrt{1+x^2} [\cos y - \sqrt{-1} \sin y];\end{aligned}$$

зная же, что по теоремѣ Муавра для всякаго положительнаго или отрицательнаго значенія m

$$\begin{aligned}(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^m &= \cos mx + \sqrt{-1} \sin mx, \\ (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^m &= \cos mx - \sqrt{-1} \sin mx,\end{aligned}$$

пишемъ:

$$\frac{1}{(x + \sqrt{-1})^{n+1}} - \frac{1}{(x - \sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{-2\sqrt{-1}}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} [\sin(n+1)y],$$

а такъ какъ при этомъ

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \sin^{n+1} y,$$

то окончательно

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (-1)^{n+1} \sin^{n+1} y \sin(n+1)y.$$

§ 145. Производная отъ $\arcsin x$. — Имѣемъ:

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d^{n+1} \arcsin x}{dx^{n+1}} = \frac{d^n (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2}}}{dx^n};$$

примѣняя, наконецъ, общую формулу § 139-го, находимъ:

$$\frac{d^{n+1} \arcsin x}{dx^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(1-x)^n} \left[1 - \frac{n}{2n-1} \frac{1-x}{1+x} + \frac{1 \cdot 3 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}}{(2n-1)(2n-3)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 \pm \dots \right. \\ \left. \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2p+1)} \frac{n(n-1)(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^p \mp \dots \pm \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \right].$$

Полезно замѣтить, что коэффициенты при различныхъ степеняхъ $\frac{1-x}{1+x}$ въ скобкахъ всѣ меньше единицы. Въ самомъ дѣлѣ, отношеніе коэффициента при $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{p+1}$ къ коэффициенту при $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^p$ равно

$$\frac{(2p+1)(n-p)}{(2n-2p-1)(p+1)} = \frac{2 - \frac{1}{p+1}}{2 - \frac{1}{n-p}}.$$

Это же отношеніе меньше единицы, когда $n-p > p+1$, т.-е. когда $n > 2p+1$, и, наоборотъ, больше единицы, когда $n < 2p+1$. Такимъ образомъ, коэффициенты идутъ, уменьшаясь, съ перваго коэффициента до минимальнаго, а затѣмъ увеличиваются до послѣдняго. Слѣдовательно, крайніе коэффициенты, равные оба единицѣ, больше всѣхъ остальныхъ.

Числовое значеніе нѣкоторыхъ производныхъ, когда переменная обращается въ нуль

§ 146. Часто требуется вычислить, во что обратится производная при нѣкоторомъ числовомъ значеніи переменной, и въ особенности въ томъ случаѣ, когда, послѣ выполненія дѣйствій для полученія производной, переменная полагается равною нулю. Вопросы этого рода рѣшаются иногда при помощи особыхъ приѣмовъ; приведемъ нѣсколько примѣровъ.

Производная отъ $\arctang x$ при $x=0$.—Нѣтъ необходимости прибѣгать къ общему виду производной для опредѣленія значенія, какое она приметъ при $x=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $u = \arctang x$, пишемъ:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

откуда

$$(1 + x^2) \frac{d^2u}{dx^2} + 2x \frac{du}{dx} = 0.$$

Дифференцируя это уравнение $n - 1$ разъ и пользуясь известной теоремою (§ 139), находимъ:

$$(1 + x^2) \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + 2(n-1)x \frac{d^nu}{dx^n} + (n-1)(n-2) \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + 2x \frac{d^nu}{dx^n} + 2(n-1) \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = 0;$$

полагая $x = 0$, получаемъ:

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} \right)_0 + \left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \right)_0 n(n-1) = 0.$$

Отсюда, замѣчая, что $\left(\frac{du}{dx} \right)_0 = 1$, выводимъ при $n + 1$ нечетномъ:

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} \right)_0 = (-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n;$$

полагая же $n + 1$ четнымъ и замѣчая, что $\left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_0 = 0$, изъ того же уравненія выводимъ:

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} \right)_0 = 0.$$

§ 147. Производныя отъ $\arcsin x$ при $x = 0$.—Если положить

$$u = \arcsin x,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \sqrt{1-x^2} \frac{du}{dx} &= 1, \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{du}{dx} + \sqrt{1-x^2} \frac{d^2u}{dx^2} &= 0, \end{aligned}$$

и, по освобожденіи отъ знаменателя,

$$(1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} = 0.$$

Дифференцируя это уравненіе $n - 1$ и пользуясь известною теоремою (§ 139), находимъ:

$$(1 - x^2) \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} - 2(n - 1) x \frac{d^n u}{dx^n} - (n - 1)(n - 2) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} - x \frac{d^n u}{dx^n} - (n - 1) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} = 0;$$

полагая $x = 0$, получаемъ:

$$\left(\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} \right)_0 - (n - 1)^2 \left(\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} \right)_0 = 0.$$

Отсюда, замѣчая, что $\left(\frac{du}{dx} \right)_0 = 1$, выводимъ при $n + 1$ нечетномъ:

$$\left(\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} \right)_0 = 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (n - 1)^2,$$

а при $n + 1$ четномъ:

$$\left(\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} \right)_0 = 0.$$

§ 148. Производная отъ $(\arcsin x)^2$ при $x = 0$.—Полагая $(\arcsin x)^2 = u$, выводимъ:

$$\frac{du}{dx} = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{1 - x^2} + \frac{2x \arcsin x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1 - x^2} + \frac{x}{1 - x^2} \frac{du}{dx};$$

слѣдовательно,

$$(1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} = 2.$$

Дифференцируемъ это уравненіе $n - 1$ разъ:

$$(1 - x^2) \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} - 2(n - 1) x \frac{d^n u}{dx^n} - (n - 1)(n - 2) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} - x \frac{d^n u}{dx^n} - (n - 1) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} = 0$$

и полагаемъ $x = 0$:

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 - (n-1)^2 \left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right)_0 = 0;$$

это соотношеніе даетъ возможность вычислять послѣдовательныя производныя и при $n+1$ нечетномъ

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = 0,$$

а при $n+1$ четномъ

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = 2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (n-1)^2.$$

§ 149. Производныя отъ $x \cot x$ при $x = 0$.—Полагаемъ $x \cot x = u$; очевидно,

$$x \cos x = u \sin x. \quad (1)$$

Дифференцируемъ обѣ части этого уравненія n разъ, пользуясь при этомъ правиломъ, относящимся къ производной отъ произведения; находимъ:

$$\begin{aligned} x \frac{d^n \cos x}{dx^n} + n \frac{d^{n-1} \cos x}{dx^{n-1}} &= u \frac{d^n \sin x}{dx^n} + n \frac{du}{dx} \frac{d^{n-1} \sin x}{dx^{n-1}} + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^{n-2} \sin x}{dx^{n-2}} + \dots + \sin x \frac{d^n u}{dx^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если въ этомъ уравненіи положить $x = 0$, то членъ съ $\frac{d^n u}{dx^n}$ исчезнетъ и $\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}$ выразится въ функціи отъ всѣхъ предыдущихъ производныхъ; дѣлая послѣдовательно $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., получаемъ:

$$u = 1, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0, \dots:$$

когда эти первыя значенія уже вычислены, изъ уравненія (2) можно вывести и другія производныя въ послѣдовательномъ порядкѣ.

Замѣтимъ, что всѣ производныя нечетнаго порядка равны нулю. Дѣйствительно, функція $x \cot x$ есть четная функція, т.-е. не измѣняется ни по величинѣ, ни по знаку при замѣнѣ x на $-x$; иначе говоря, если обозначить ее черезъ $\varphi(x)$, то

$$\varphi(x) = \varphi(-x).$$

Беря послѣдовательныя производныя отъ этого уравненія, находимъ:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\varphi'(-x), \\ \varphi''(x) &= +\varphi''(-x), \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi^n(x) &= (-1)^n \varphi^n(-x).\end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ, что при $x = 0$ для всякаго нечетнаго значенія n

$$\varphi^n(0) = -\varphi^n(0)$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi^n(0) = 0.$$

Производя численныя выкладки, получаемъ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dx}\right)_0 &= 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = -\frac{2}{3}, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)_0 = -\frac{8}{15}, \quad \left(\frac{d^5u}{dx^5}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^6u}{dx^6}\right)_0 = -\frac{238}{189}, \\ \left(\frac{d^7u}{dx^7}\right)_0 &= 0, \quad \left(\frac{d^8u}{dx^8}\right)_0 = -\frac{8064}{945}.\end{aligned}$$

§ 150. Производныя отъ $\frac{x}{e^x - 1}$ при $x = 0$. — Полагаемъ $\frac{x}{e^x - 1} = u$, тогда

$$x = ue^x - u \tag{1}$$

и послѣ дифференцированія

$$1 = e^x \frac{du}{dx} + ue^x - \frac{du}{dx}.$$

Дифференцируя n разъ подъ рядъ обѣ части уравненія (1), находимъ:

$$0 = e^x \frac{d^n u}{dx^n} + ne^x \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^x \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \dots + ue^x - \frac{d^n u}{dx^n},$$

откуда при $x = 0$

$$0 = n \left(\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}\right)_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}}\right)_0 + \dots + n \left(\frac{du}{dx}\right)_0 + (u)_0.$$

Это соотношеніе даетъ возможность вычислить какую-угодно изъ производныхъ, если всѣ предыдущія извѣстны; u_0 равно 1. Въ самомъ дѣлѣ, отношеніе $\frac{e^x - 1}{x}$ при x

безконечно-маломъ является производною отъ e^x и приводится къ единицѣ при $x=0$; очевидно, то же самое справедливо и для обратнаго отношенія $\frac{x}{e^x-1}$. Выполняя вычисления, получаемъ:

$$\begin{aligned} u_0 = 1, \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = -\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{6}, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)_0 = -\frac{1}{30}, \quad \left(\frac{d^5u}{dx^5}\right)_0 = 0, \\ \left(\frac{d^6u}{dx^6}\right)_0 = \frac{1}{42}, \quad \left(\frac{d^7u}{dx^7}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^8u}{dx^8}\right)_0 = -\frac{1}{30}, \quad \left(\frac{d^9u}{dx^9}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^{10}u}{dx^{10}}\right)_0 = \frac{5}{66}, \quad \left(\frac{d^{11}u}{dx^{11}}\right)_0 = 0, \\ \left(\frac{d^{12}u}{dx^{12}}\right)_0 = -\frac{691}{2730}, \quad \left(\frac{d^{13}u}{dx^{13}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^{14}u}{dx^{14}}\right)_0 = \frac{7}{6}, \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Всѣ производныя нечетнаго порядка, исключая первой $\frac{du}{dx}$, равны нулю. Это можно утверждать *à priori*, независимо отъ предыдущихъ вычислений. Дѣйствительно, функція

$$\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2}, \quad (2)$$

какъ легко видѣть, есть четная функція отъ x , а выше мы видѣли, что при этомъ условіи для $x \cos x$ производныя нечетнаго порядка равнялись нулю при $x=0$; производныя же отъ функціи (2) совпадаютъ всѣ, за исключеніемъ первой, съ производными отъ $\frac{x}{e^x-1}$.

§ 151. Производныя отъ $\cos(m \arcsin x)$ при $x=0$. — Полагаемъ

$$u = \cos(m \arcsin x);$$

дифференцируемъ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\frac{m \sin(m \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{-mx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \sin(m \arcsin x) - \frac{m^2 \cos(m \arcsin x)}{(1-x^2)}; \end{aligned}$$

отсюда

$$(1-x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + m^2 u = 0.$$

Дифференцируемъ p разъ это уравненіе:

$$(1-x^2) \frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} - 2px \frac{d^{p+1}u}{dx^{p+1}} - p(p-1) \frac{d^p u}{dx^p} - x \frac{d^{p+1}u}{dx^{p+1}} - p \frac{d^p u}{dx^p} + m^2 \frac{d^p u}{dx^p} = 0,$$

что при $x = 0$ даетъ:

$$\left(\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}}\right)_0 = (p^2 - m^2) \left(\frac{d^p u}{dx^p}\right)_0.$$

Кромѣ того, при $x = 0$ имѣемъ $u = 1$, $\frac{du}{dx} = 0$. Слѣдовательно, предыдущее уравненіе показываетъ, что всѣ производныя нечетнаго порядка равны нулю. Что же касается производныхъ четнаго порядка, то всѣ онѣ выводятся одна изъ другой въ послѣдовательномъ порядкѣ, такъ какъ каждая изъ нихъ связана съ производною порядка на двѣ единицы низшаго. Такимъ образомъ

$$\left(\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}}\right)_0 = (-1)^{n+1} m^2 (m^2 - 4)(m^2 - 16) \dots (m^2 - 4n^2).$$

Чтобы изученіе разсматриваемой функціи не представило тяжелыхъ затрудненій, остановимся на нѣкоторомъ опредѣленномъ толкованіи полученнаго результата.

Функція $\cos(m \arcsin x)$ —не вполне опредѣленная и, подъ однимъ и тѣмъ же символомъ, представляетъ въ дѣйствительности нѣсколько различныхъ функцій, число которыхъ можетъ возрасти до безконечности. Въ самомъ дѣлѣ, дуга, синусъ которой есть x , не единственная; напротивъ, такихъ дугъ безчисленное множество. Произведенія этихъ дугъ на какое-угодно m будутъ имѣть, вообще, различные косинусы, число которыхъ будетъ равно удвоенному знаменателю числа m , если m —соизмѣримо, и безчисленному множеству, если m —несоизмѣримо.

Будутъ ли имѣть всѣ эти различныя функціи однѣ и тѣ же производныя?

Только-что полученный результатъ, повидимому, рѣшаетъ вопросъ,—по крайней мѣрѣ, для частнаго значенія $x = 0$, а такъ какъ мы нашли только одно значеніе, то невольно можемъ придти къ заключенію, что и существуетъ только одно. Однако это было бы большою ошибкою. Предыдущее вычисленіе основано на двухъ предположеніяхъ, выдѣляющихъ опредѣленную функцію, къ которой оно и относится. Во-первыхъ, положивъ

$$u = \cos m(\arcsin x),$$

мы вывели равенство:

$$\frac{du}{dx} = -m \frac{\sin(m \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

а это возможно только при допущеніи, что производная отъ $\arcsin x$ есть $\frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}$. По-

добное же допущеніе, въ свою очередь, требуетъ (§ 34), чтобы косинусъ разсматриваемой дуги былъ положителенъ; въ противномъ случаѣ

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

и пришлось бы написать:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= + m \frac{\sin(m \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{mx \sin(m \arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - m^2 \frac{\cos(m \arcsin x)}{1-x^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$(1-x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + m^2 u = 0;$$

это уравненіе тождественно съ прежде полученнымъ, при другомъ предположеніи, и приводитъ къ тому же соотношенію:

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2) \frac{d^p u}{dx^p}.$$

Но, во-вторыхъ, мы допустили, что при $x=0$ функція $u=0$, $\frac{du}{dx}=0$. Это справедливо только въ томъ случаѣ, если, при $x=0$, $\arcsin x=0$; на самомъ же дѣлѣ это значеніе есть первое изъ цѣлаго ряда, но не единственное, такъ какъ, для $x=0$, $\arcsin x = k\pi$, гдѣ k — какое-угодно цѣлое число, и, слѣдовательно,

$$u = \cos(m \arcsin x) = \cos mk\pi.$$

Точно такъ же, если $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$ равна нулю, то только въ силу того же предположенія; если же принять $\arcsin x = k\pi$, то для $\frac{du}{dx}$ придется принять одно изъ слѣдующихъ значеній:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= - m \sin mk\pi, \\ \frac{du}{dx} &= m \sin mk\pi. \end{aligned}$$

Слѣдуетъ замѣтить, что первое изъ нихъ относится къ случаю, когда k — четное, потому что тогда $\cos k\pi$ положителенъ, второе же — къ случаю, когда k — нечетное.

Итакъ, значеніе, найденное для $\left(\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}}\right)_0$, относится только къ той функціи $\cos m(\arcsin x)$, въ которой за $\arcsin x$ принята дуга, обращающаяся въ нуль при $x = 0$ и являющаяся всегда, въ силу своего непрерывнаго измѣненія, наименьшею изъ положительныхъ или отрицательныхъ дугъ съ общимъ синусомъ x . Косинусъ такой дуги всегда положителенъ.

§ 152. Чтобы придать функціи $u = \cos(m \arcsin x)$ снова всю ея общность, стоитъ только вычислить общее выраженіе ея производныхъ при $x = 0$, что сдѣлать не трудно. Во всѣхъ случаяхъ

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2) \frac{d^p u}{dx^p}.$$

Кромѣ того, при $x = 0$

$$u = \cos(m \arcsin 0) = \cos mk\pi,$$

$$\frac{du}{dx} = \pm m \sin(m \arcsin 0) = \pm m \sin mk\pi,$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^{n+1} m^2(m^2 - 4)(m^2 - 16) \dots (m^2 - 4n^2) \cos mk\pi,$$

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = \mp (-1)^n (m^2 - 1)(m^2 - 9) \dots [m^2 - (2n - 1)^2] m \sin mk\pi,$$

при чемъ знакъ — соответствуетъ случаю, когда k — четное.

§ 153. Производныя отъ $\sin(m \arcsin x)$ при $x = 0$. — Вычисленіе производныхъ отъ функціи $(\sin m \arcsin x)$ совершается по тому же способу и приводитъ къ аналогичному изслѣдованію. Полагаемъ

$$u = \sin(m \arcsin x),$$

откуда

$$\frac{du}{dx} = \frac{m \cos(m \arcsin x)}{\pm \sqrt{1-x^2}};$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{mx \cos(m \arcsin x)}{\pm (1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{m^2 \sin(m \arcsin x)}{1-x^2};$$

знакъ $+$ передъ радикаломъ долженъ быть взятъ тогда, когда $\arcsin x$ имѣетъ положительный косинусъ, и знакъ $-$ въ противномъ случаѣ. Изъ этихъ формулъ выводится уравненіе:

$$\frac{d^2u}{dx^2}(1-x^2) - x \frac{du}{dx} + m^2 u = 0,$$

справедливое во всѣхъ случаяхъ. Дифференцируя p разъ это уравненіе, ничѣмъ не отличающееся отъ полученнаго выше, также найдемъ, при $x=0$, что

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2) \frac{d^p u}{dx^p}.$$

Кромѣ того, при $x=0$

$$u = \sin(m \arcsin 0) = \sin mk\pi$$

и

$$\frac{du}{dx} = \pm m \cos(m \arcsin 0) = \pm m \cos mk\pi,$$

при чемъ знакъ $+$ соотвѣтствуетъ случаю, когда $\cos \arcsin x$ положителенъ и, слѣдовательно, случаю, когда k — четное. Замѣтивъ это, легко найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2p+2}u}{dx^{2p+2}} &= (-1)^p m^2(m^2 - 4) \dots (m^2 - 4p^2) \sin mk\pi, \\ \frac{d^{2p+1}u}{dx^{2p+1}} &= \pm (-1)^p (m^2 - 1)(m^2 - 5) \dots [m^2 - (2p - 1)^2] m \cos mk\pi, \end{aligned}$$

гдѣ k — произвольное цѣлое число, а знакъ $+$ во второй формулѣ соотвѣтствуетъ случаю, когда k — четное. Если предположить, что $\arcsin 0 = 0$, т.-е. если $\arcsin x$ есть наименьшая, положительная или отрицательная, дуга, синусъ которой x , то $k=0$ и, слѣдовательно,

$$\frac{d^{2p+2}u}{dx^{2p+2}} = 0, \quad \frac{d^{2p+1}u}{dx^{2p+1}} = -(-1)^p (m^2 - 1)(m^2 - 5) \dots [m^2 - (2p - 1)^2] m.$$

§ 154. Производныя отъ $\cos(m \arccos x)$ при $x=0$. — Полагая

$$\cos(m \arccos x) = u,$$

находимъ:

$$\frac{du}{dx} = \pm \frac{m \sin(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \pm \frac{mx \sin(m \arccos x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{m^2 \cos(m \arccos x)}{1-x^2},$$

откуда

$$(1-x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} \mp m^2 u = 0;$$

это уравненіе было уже получено два раза и изъ него прежнимъ же способомъ, при $x=0$, выводимъ:

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2) \frac{d^p u}{dx^p}.$$

Кромѣ того, при $x=0$

$$u = \cos m(\arccos 0) = \cos m(2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{du}{dx} = \pm m \sin m(2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

при чемъ k обозначаетъ какое-угодно цѣлое число; знакъ \mp соотвѣтствуетъ, какъ легко видѣть, случаю, когда k —нечетное, а знакъ $+$, когда k —четное. Далѣе находимъ:

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^n m^2(m^2 - 4)(m^2 - 16) \dots (m^2 - 4n^2) \cos(2k + 1)m \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = \pm (-1)^n (m^2 - 1)(m^2 - 5) \dots [m^2 - (2n - 1)^2] m \sin(2k + 1)m \frac{\pi}{2},$$

при чемъ во второй формулѣ знакъ \mp долженъ быть взятъ въ случаѣ k четнаго и знакъ $+$ въ случаѣ k нечетнаго.

Если изъ дугъ, косинусы которыхъ равны нулю, требуется взять только $\frac{\pi}{2}$, то надо положить $k=0$.

§ 155. Производныя отъ $\sin(m \arccos x)$ при $x=0$. — Полагая

$$u = \sin(m \arccos x),$$

найдемъ, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, уравненіе:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + m^2 u = 0,$$

изъ котораго, при $x = 0$, выводимъ:

$$\frac{d^{p+2} u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2) \frac{d^p u}{dx^p}.$$

А такъ какъ при $x = 0$

$$u = \sin(m \arccos 0) = \sin(2k + 1)m \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{du}{dx} = \mp m \cos m(\arccos 0) = \mp m \cos(2k + 1)m \frac{\pi}{2},$$

гдѣ k — произвольное цѣлое число и знакъ — во второмъ уравненіи соотвѣтствуетъ четному k , то при помощи этихъ значеній найдемъ:

$$\frac{d^{2n+2} u}{dx^{2n+2}} = (-1)^n m^2 (m^2 - 4)(m^2 - 16) \dots (m^2 - 4n^2) \sin(2k + 1)m \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{d^{2n+1} u}{dx^{2n+1}} = \mp (-1)^n m (m^2 - 1)(m^2 - 9) \dots [m^2 - (2n - 1)^2] \cos(2k + 1)m \frac{\pi}{2}.$$

§ 156. Производныя отъ $(1 + x^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \arctang x)$ при $x = 0$. — Полагая

$$u = (1 + x^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \arctang x)$$

и составляя производныя $\frac{du}{dx}$ и $\frac{d^2 u}{dx^2}$, находимъ, посредствомъ исключенія $\sin(m \arctang x)$ и $\cos(m \arctang x)$ изъ трехъ полученныхъ уравненій, слѣдующее соотношеніе между u , $\frac{du}{dx}$ и $\frac{d^2 u}{dx^2}$:

$$(1 + x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2(m - 1)x \frac{du}{dx} + m^2 u - mu = 0.$$

Дифференцируемъ p разъ:

$$(1 + x^2) \frac{d^{p+2} u}{dx^{p+2}} + 2px \frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} + p(p - 1) \frac{d^p u}{dx^p} - 2(m - 1)x \frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} - 2(m - 1)p \frac{d^p u}{dx^p} +$$

$$+ m^2 \frac{d^p u}{dx^p} - m \frac{d^p u}{dx^p} = 0;$$

полагаемъ $x = 0$:

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = -\frac{d^p u}{dx^p} (m-p)(m-p-1).$$

Кромѣ того, при $x = 0$ (предполагая, что $\arctang 0 = 0$) имѣемъ:

$$u = 0, \quad \frac{du}{dx} = m,$$

откуда заключаемъ:

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = 0, \quad \frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = (-1)^n m(m-1)(m-2)\dots(m-2n+1)(m-2n).$$

Беря $\arctang x$ во всей его общности, пишемъ:

$$\arctang 0 = k\pi$$

и, при $x = 0$,

$$u = \sin mk\pi, \quad \frac{du}{dx} = m \cos mk\pi;$$

въ такомъ случаѣ

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} &= (-1)^n m(m-1)\dots(m-2n)(m-2n-1)\sin mk\pi, \\ \frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} &= (-1)^n m(m-1)\dots(m-2n)\cos mk\pi, \end{aligned}$$

гдѣ k —произвольное цѣлое число.

§ 157. Производная отъ $(1+x^2)^{\frac{m}{2}} \cos(m \arctang x)$ при $x = 0$. — Полагая

$$u = (1+x^2)^{\frac{m}{2}} \cos(m \arctang x),$$

находимъ посредствомъ такого же вычисленія, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, равенство:

$$(1+x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - 2(m-1)x \frac{du}{dx} + m^2 u - mu = 0,$$

откуда

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = -\frac{d^p u}{dx^p} (m-p)(m-p-1).$$

Зная же n и $\frac{du}{dx}$ при $x=0$ и предполагая $\text{arctang } 0 = 0$, выводимъ:

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = 0, \quad \frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^n m(m-1)\dots(m-2n-1).$$

§ 158. Производная отъ $\frac{\cos(m \text{arctang } x)}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}$ при $x=0$. — Полагая

$$u = \frac{\cos(m \text{arctang } x)}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}$$

и вычисляя u и $\frac{du}{dx}$, легко приходимъ къ соотношенію:

$$(1+x^2) \frac{d^2u}{dx^2} + (2m+2)x \frac{du}{dx} + m(m+1)u = 0,$$

откуда, дифференцируя p разъ и приравнивая x нулю, выводимъ:

$$\left(\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}}\right)_0 + (m+p)(m+p+1) \frac{d^p u}{dx^p} = 0$$

и, слѣдовательно, можемъ писать:

$$\frac{d^{2k+1}u}{dx^{2k+1}} = 0$$

при p нечетномъ, равномъ $2k+1$, и

$$\frac{d^{2k}u}{dx^{2k}} = m(m+1)\dots(m+2k-1)(-1)^k$$

при p четномъ, равномъ $2k$.

Производныя и дифференціалы высшаго порядка для функцій
отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ.
Принятое при этомъ обозначеніе.

§ 159. Когда функція содержитъ нѣсколько независимыхъ переменныхъ, то можно составить производную по какой-нибудь одной изъ нихъ; обозначеніе для такой производной одинаково съ обозначеніемъ производной отъ функціи съ одною независимой переменною. Если

$$u = \varphi(x, y, z),$$

то производныя отъ u по x, y, z обозначаются (§ 50) черезъ $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$. Производныя второго, третьяго, и т. д. порядка по одной изъ этихъ переменныхъ будутъ обозначаться также, согласно обозначеніямъ, приведеннымъ выше, черезъ $\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dz^2}, \dots$

Если берется производная отъ u по x , а затѣмъ отъ полученной производной производная по y , или, въ болѣе общемъ случаѣ, сначала m разъ производная по переменной x , а затѣмъ n разъ по переменной y , то конечный результатъ обозначается черезъ $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$.

Точно такъ же, производную, взятую сначала m разъ по x , затѣмъ n разъ по y и, наконецъ, p разъ по z , будемъ обозначать черезъ $\frac{d^{m+n+p}u}{dx^m dy^n dz^p}$.

Возможность мѣнять порядокъ дифференцірованій

§ 160. Изученіе производныхъ, взятыхъ въ послѣдовательномъ порядкѣ по различнымъ переменнымъ, приводитъ къ важному результату. *Порядокъ дѣйствій не вліяетъ на результатъ.*

Чтобы начать съ простѣйшаго случая, къ которому приводятся всѣ остальные, возьмемъ производную отъ функціи u сначала по x , а затѣмъ отъ полученнаго результата производную по y , и докажемъ, что къ тому же придемъ, взявъ сначала производную по y , а затѣмъ по x . Короче говоря, докажемъ, что

$$\frac{d^2u}{xdy} = \frac{d^2u}{dydx}.$$

Пусть

$$u = \varphi(x, y);$$

по опредѣленію

$$\frac{du}{dx} = \lim \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} + \varepsilon,$$

гдѣ ε безконечно-мало одновременно съ Δx . Если въ этомъ равенствѣ придать y приращеніе Δy и раздѣлить соотвѣтственные приращенія обѣихъ частей на Δy , то

$$\frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y + \Delta y) + \varphi(x, y)}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta y}. \quad (1)$$

Точно такъ же имѣемъ:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta y} + \varepsilon_1,$$

гдѣ ε_1 стремится къ нулю вмѣстѣ съ Δy ; измѣняя x на $x + \Delta x$, дѣлимъ соотвѣтственные приращенія обѣихъ частей этого равенства на Δx и полученные частныя приравниваемъ другъ другу:

$$\frac{\Delta \frac{du}{dy}}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y + \Delta y) + \varphi(x, y)}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}. \quad (2)$$

Въ этихъ формулахъ на основаніи тѣхъ же соображеній, какъ и въ § 136-мъ, $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta y}$ и $\frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}$ въ предѣлѣ равны нулю; кромѣ того, первые члены во вторыхъ частяхъ уравненій (1) и (2) тождественно одни и тѣ же,—слѣдовательно, первая части этихъ уравненій стремятся къ общему предѣлу. Итакъ,

$$\lim \frac{\Delta \frac{du}{dy}}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y},$$

т.-е.

$$\frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx},$$

что и требовалось доказать.

§ 161. Такъ какъ порядокъ двухъ послѣдовательныхъ дифференцированій по различнымъ переменнымъ можетъ быть измѣненъ, то отсюда ясно, что и для какого угодно числа послѣдовательныхъ дифференцированій порядокъ, въ которомъ они будутъ выполнены, безразличенъ. Доказательство тождественно съ доказательствомъ

въ ариметикѣ теоремы, что въ произведеніи всѣ множители можно расположить въ какомъ-угодно порядкѣ; тамъ оно также основано только на томъ, что въ произведеніи можно переставить два послѣдовательныхъ множителя.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЫ РАЗЛИЧНЫХЪ ПОРЯДКОВЪ ДЛЯ ФУНКЦІЙ ОТЪ НѢСКОЛЬКИХЪ
ПЕРЕМѢННЫХЪ

§ 162. Пусть $u = \varphi(x, y)$ будетъ функція отъ двухъ независимыхъ переменныхъ. Если приписать каждой переменной безконечно-малое приращеніе, то для функціи $\varphi(x, y)$ получится также безконечно-малое приращеніе, которое можно замѣнить всякимъ другимъ безконечно-малымъ количествомъ, имѣющимъ съ первымъ отношеніе, стремящееся въ предѣлѣ къ единицѣ. Мы видѣли (§ 54), что, обозначая черезъ dx и dy безконечно-малыя приращенія двухъ переменныхъ, мы можемъ соответственное приращеніе функціи выразить черезъ

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy.$$

Если приписать снова x и y приращенія, равныя предыдущимъ, то дифференціалъ du , представляющій функцію отъ x и y , будетъ самъ имѣть дифференціалъ, который обозначается черезъ d^2u ; такимъ образомъ

$$d^2u = d\left(\frac{du}{dx}\right) dx + d\left(\frac{du}{dy}\right) dy = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} dxdy + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2.$$

Приписывая снова x и y приращенія, равныя dx и dy , находимъ, что дифференціалъ d^2u , представляющій функцію отъ x и y , будетъ имѣть дифференціалъ d^3u , выражаемый формулою:

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3} dx^3 + 3 \frac{d^3u}{dx^2dy} dx^2dy + 3 \frac{d^3u}{dxdy^2} dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3} dy^3.$$

Продолжая составлять послѣдовательные дифференціалы, соответствующіе постояннымъ приращеніямъ, приписываемымъ x и y , получимъ, заключая по индукціи, формулу:

$$d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + n \frac{d^n u}{dx^{n-1}dy} dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^n u}{dx^{n-2}dy^2} dx^{n-2}dy^2 + \dots + \frac{d^n u}{dy^n} dy^n,$$

которая символически пишется слѣдующимъ образомъ:

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right)^n.$$

Во второй части этой формулы необходимо замѣнять различныя степени du дифференціалами порядковъ, равныхъ соотвѣтственнымъ показателямъ; такимъ образомъ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^p \left(\frac{du}{dy}\right)^q$$

должно быть замѣнено черезъ

$$\frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q}.$$

Эта формула доказана для частныхъ значеній 1, 2, 3, ... числа n . Чтобы доказать ее вообще, достаточно вывести, что если справедливо символическое равенство:

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^n,$$

то будетъ справедливо, при тѣхъ же обозначеніяхъ, равенство:

$$d^{n+1} u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^{n+1}.$$

Для этого замѣтимъ, что такъ какъ $d^n u$ есть функція отъ x и y , то его дифференціалъ выразится формулою:

$$d^{n+1} u = \frac{d}{dx} (d^n u) dx + \frac{d}{dy} (d^n u) dy;$$

значитъ, приходится взять производную по x отъ выраженія, которое пишется символически

$$\left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^n,$$

умножить эту производную на dx , затѣмъ взять производную отъ того же выраженія по y и умножить ее на dy . Но если умножить то же выраженіе на

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$$

и написать

$$\left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^{n+1},$$

то пришлось бы произвести точно такія же выкладки и самыя результаты писать

абсолютно въ томъ же видѣ. Въ самомъ дѣлѣ, беря производную по x отъ какого-нибудь члена

$$A \frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q} dx^p dy^q$$

и умножая эту производную на dx , находимъ

$$A \frac{d^{p+q+1}u}{dx^{p+1} dy^q} dx^{p+1} dy^q,$$

что тождественно по виду съ членомъ, который мы получимъ, умноживъ символически

$$A \frac{d^p u}{dx^p} \frac{d^q u}{dy^q}$$

на $\frac{du}{dx} dx$. Точно такъ же, беря производную по y и умножая ее на dy , замѣтимъ, что получаемые при этомъ члены будутъ имѣть тотъ же видъ, что и члены, получаемые при умноженіи предыдущаго выраженія на $\frac{du}{dy} dy$; такимъ образомъ, выполняя дѣйствіе для полученія полного дифференціала $d^{n+1}u$, мы пишемъ такіе же члены, какъ и при умноженіи на

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy.$$

Итакъ, допуская символическое равенство:

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right)^n,$$

заключаемъ, что равнымъ образомъ справедливо символическое равенство:

$$d^{n+1}u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right)^{n+1}.$$

§ 163. То же самое правило прилагается къ дифференціаламъ функціи отъ какого-угодно числа переменныхъ. Такъ напр., если

$$u = \varphi(x, y, z, t),$$

то совершенно такимъ же образомъ находимъ:

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dt} dt \right)^n,$$

при чемъ степень, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, понимается символически.

§ 164. Необходимо замѣтить, что если функція зависитъ отъ нѣсколькихъ переменныхъ, которыя сами извѣстныя функціи отъ другихъ переменныхъ, принимаемыхъ за независимыя, то предыдущія формулы не приложимы.

Дѣйствительно, пусть, напр.,

$$u = \varphi(p, q),$$

гдѣ p и q —извѣстныя функціи отъ двухъ переменныхъ x и y . Имѣемъ:

$$du = \frac{du}{dp} dp + \frac{du}{dq} dq. \quad (1)$$

На первыя дифференціалы выборъ независимыхъ переменныхъ не вліяетъ: между ними существеннаго различія нѣтъ (§ 138); слѣдовательно, можно предположить, что p и q замѣняютъ x и y . Но если требуется вычислить d^2u , то не нужно забывать, что такимъ образомъ обозначается дифференціалъ отъ du , когда x и y приписываются снова безконечно-малыя приращенія, равныя тѣмъ, которыя они уже получили. Этимъ равнымъ приращеніямъ соотвѣтствуютъ, вообще говоря, неравныя приращенія какъ для p , такъ и для q , и, значитъ, при дифференцированіи выраженія (1) для составленія d^2u нельзя разсматривать dp и dq , какъ постоянныя; иначе говоря,

$$d^2u = \frac{d^2u}{dp^2} dp^2 + 2 \frac{d^2u}{dpdq} dpdq + \frac{d^2u}{dq^2} dq^2 + \frac{du}{dp} d^2p + \frac{du}{dq} d^2q.$$

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, придемъ къ сложнымъ и рѣдко употребляющимся формуламъ.

Производныя высшаго порядка отъ неявныхъ функцій

§ 165. Предыдущія разсужденія даютъ возможность вычислять производныя высшаго порядка отъ неявныхъ функцій съ нѣсколькими переменными; наиболее простой и употребительный методъ заключается въ составленіи полного дифференціала той функціи, отъ которой желательно имѣть частныя производныя: этими производными будутъ коэффициенты при различныхъ степеняхъ дифференціаловъ независимыхъ переменныхъ, раздѣленные соотвѣтственно на извѣстные численные множители.

Достаточно одного примѣра, чтобы вполне разъяснить этотъ методъ. Пусть

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x, \alpha), \\ y &= \psi(x, \alpha). \end{aligned}$$

Требуется вывести изъ этихъ уравненій $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$. Для этого вычисляемъ d^2z , принимая dx и dy за постоянныя; получится выраженіе вида:

$$d^2z = Adx^2 + 2Bdx dy + Cdy^2,$$

и, слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2z}{dx dy} = B, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = C.$$

Замѣчая, что d^2x и d^2y равны нулю, а $d^2\alpha$ не нуль, изъ данныхъ уравненій выводимъ:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{d\alpha} d\alpha, \\ dy &= \frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{d\alpha} d\alpha, \\ d^2z &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2\varphi}{dx d\alpha} dx d\alpha + \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} d\alpha^2 + \frac{d\varphi}{d\alpha} d^2\alpha, \\ 0 &= \frac{d^2\psi}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2\psi}{dx d\alpha} dx d\alpha + \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} d\alpha^2 + \frac{d\psi}{d\alpha} d^2\alpha. \end{aligned}$$

Исключая изъ этихъ уравненій $d\alpha$ и $d^2\alpha$, получимъ для d^2z выраженіе искомаго вида, и задача будетъ рѣшена. Такимъ образомъ находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2 \frac{d^2\varphi}{dx d\alpha} \left(\frac{d\psi}{dx} \right) + \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} \frac{d\psi}{d\alpha} - \frac{d\varphi}{d\alpha} \left[\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2 \frac{d^2\psi}{dx d\alpha} \frac{d\psi}{d\alpha} + \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} \left(\frac{d\psi}{d\alpha} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2z}{dy^2} &= \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} - \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d^2\psi}{d\alpha^2}, \\ \frac{d^2z}{dx dy} &= 2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} \frac{d\psi}{d\alpha} - 2 \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d^2\psi}{dx d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} \left(\frac{d\psi}{d\alpha} \right)^2. \end{aligned}$$

Тотъ же методъ можно примѣнить къ вычисленію производныхъ болѣе высшаго порядка, но результаты будутъ получаться все сложнѣе и сложнѣе.

§ 166. Также можно искать производныя отъ z въ послѣдовательномъ порядкѣ, выводя ихъ одну изъ другой. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя оба данныхъ уравненія по x и рассматривая y , какъ постоянную, находимъ.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= p = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx}, \\ 0 &= \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx}, \end{aligned}$$

откуда, по исключеніи $\frac{d\varphi}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dx} \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}} = \varphi_1(x, \alpha).$$

Тѣ же уравненія, дифференцированныя по y , даютъ:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy} = q &= \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dy}, \\ 1 &= \frac{d\psi}{dx} \frac{dx}{dy}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dz}{dy} = q = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\psi}{dx}} = \varphi_2(x, \alpha).$$

Такъ какъ p и q —извѣстныя функціи отъ x и α , то достаточно замѣнить въ последовательномъ порядкѣ въ этихъ формулахъ функцію φ на φ_1 и затѣмъ на φ_2 , чтобы получить $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dq}{dx}$ и $\frac{dq}{dy}$, т.-е. вторыя производныя отъ z . Такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dx} - \frac{d\psi}{dx} \frac{\frac{d\varphi_1}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{d\varphi_1}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}},$$

$$\frac{dq}{dy} = \frac{\frac{d\varphi_2}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}},$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{d\psi}{dx} \frac{\frac{d\varphi_2}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}}.$$

Замѣтимъ, что производныя $\frac{dp}{dy}$ и $\frac{dq}{dx}$ представляютъ, и та, и другая, $\frac{d^2z}{dx dy}$; слѣдовательно, онѣ равны. Это есть необходимая зависимость между производными отъ функцій φ_1 и φ_2 .

Если бы изъ этихъ формулъ мы пожелали вывести результаты, полученные выше, то нужно было бы выполнить лишь указанные здѣсь дифференцированія по x и по α функцій φ_1 и φ_2 .

УПРАЖНЕНІЯ

1. Если въ функціи $y = \varphi(x)$ давать переменнѣй x послѣдовательныя значенія: $x, x + h_1, x + h_1 + h_2, x + h_1 + h_2 + h_3, \dots$ и обозначать при этомъ соотвѣтственныя значенія y черезъ y, y_1, y_2, \dots, y_n , то предѣломъ отношенія $\frac{\Delta^n y}{h_1 h_2 h_3 \dots h_n}$ будетъ n -ая производная отъ y , когда h_1, h_2, \dots, h_n стремятся одновременно къ нулю.

2. Если конечная и непрерывная функція отъ x обращается въ нуль при значеніяхъ: $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$, расположенныхъ въ возрастающемъ или убывающемъ порядкѣ, то для всякаго значенія x , содержащагося между x_1 и x_n ,

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \frac{\varphi^n(x)}{1.2.3 \dots n},$$

гдѣ $\varphi^n(x)$ есть значеніе n -ой производной отъ функціи φ при нѣкоторомъ среднемъ значеніи x между x_1 и x_n . Для доказательства этой теоремы замѣчаютъ, что n -ая производная отъ первой части уравненія:

$$\varphi(x) - A(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0,$$

имѣющаго при всякомъ A корни x_1, x_2, \dots, x_n , равная

$$\varphi^n(x) - 1.2.3 \dots n A,$$

обращается въ нуль для нѣкотораго значенія x , лежащаго между x_1 и x_n , если A таково, что допускаетъ еще $(n + 1)$ -ый корень для этого уравненія въ тѣхъ же предѣлахъ.

3. Представить выраженіе $\frac{d^n \varphi(e^x)}{dx^n}$ подъ видомъ:

$$A_1 \varphi'(e^x) + A_2 \varphi''(e^x) + \dots + A_n \varphi^n(e^x),$$

т.-е. вычислить коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n , не зависящіе отъ вида функціи φ .

4. Вычислить выраженіе $\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{e^x - 1}$ и представить его подъ видомъ:

$$A_1 \frac{1}{e^x - 1} + A_2 \frac{1}{(e^x - 1)^2} + \dots + A_{n+1} \frac{1}{(e^x - 1)^{n+1}},$$

т.-е. опредѣлить постоянныя A_1, A_2, \dots, A_{n+1} .

5. Выраженіе $\frac{d^n x^n (lx)^n}{dx^n}$ есть вида:

$$1 + A_1 lx + \frac{A_2}{1.2} (lx)^2 + \dots + \frac{A_n}{1.2 \dots n} (lx)^n;$$

найти постоянныя A_1, A_2, \dots, A_n .

6. Полагая

$$z = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

имѣемъ:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2.3 \dots n \cos \left[(n+1) \operatorname{arctang} \frac{y}{x} \right]}{(x^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

$$\frac{d^{2n} z}{dy^{2n}} = (-1)^n \frac{1.2.3 \dots 2n \cos \left[(2n+1) \operatorname{arctang} \frac{y}{x} \right]}{(x^2 + y^2)^{\frac{2n+1}{2}}},$$

$$\frac{d^{2n+1} z}{dy^{2n+1}} = (-1)^{n+1} \frac{1.2.3 \dots (2n+1) \sin \left[(2n+2) \operatorname{arctang} \frac{y}{x} \right]}{(x^2 + y^2)^{n+1}}.$$

7. Если z есть функция отъ x и y , опредѣляемая двумя уравненіями:

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + F(\alpha),$$

$$0 = x + y\varphi'(\alpha) + F'(\alpha),$$

то, каковы бы ни были функции $\varphi(\alpha)$ и $F(\alpha)$,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d^2 z}{dy^2} = \left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right)^2.$$

8. Если

$$\alpha = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\beta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\gamma = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

и $\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, и если функция ν , рассматриваемая какъ функция отъ x, y, z , удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{d^2 \nu}{dx^2} + \frac{d^2 \nu}{dy^2} + \frac{d^2 \nu}{dz^2} = 0,$$

то, рассматривая ν какъ функцию отъ α, β, γ , будемъ имѣть:

$$\frac{d^3 \left(\frac{\nu}{\rho} \right)}{d\alpha^2} + \frac{d^3 \left(\frac{\nu}{\rho} \right)}{d\beta^2} + \frac{d^3 \left(\frac{\nu}{\rho} \right)}{d\gamma^2} = 0.$$

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

Замѣна переменныхъ

ВЛІЯНІЕ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМѢННОЙ НА ДИФФЕРЕНЦІАЛЫ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВАГО

§ 167. Когда рассматриваютъ дифференціалы перваго порядка, выборъ независимой переменнѣй безразличенъ, и нѣтъ никакой необходимости говорить о немъ. Если приходится замѣнить эту переменную другою, связанною съ нею какимъ-нибудь образомъ, то дифференціальныя выраженія не измѣнятся. Иное дѣло — дифференціалы высшаго порядка; чтобы второй дифференціалъ d^2y имѣлъ определенный смыслъ, необходимо указать независимую переменную, вслѣдствіе чего часто пишутъ, если x есть эта переменная, $\frac{d^2y}{dx^2}dx^2$ вмѣсто болѣе простаго, но менѣе яснаго d^2y .

Возьмемъ для примѣра функцію $y = x^4$; считая x за независимую переменную, имѣемъ:

$$dy = 4x^3dx, \quad d^2y = 12x^2dx^2.$$

Принимая теперь за независимую переменную x^2 и обозначая ее черезъ u , будемъ имѣть:

$$y = u^2, \quad dy = 2ud u, \quad d^2y = 2du^2.$$

Отсюда, замѣняя u и du ихъ значеніями черезъ x и dx , находимъ:

$$dy = 4x^3dx, \quad d^2y = 8x^2dx^2.$$

Итакъ, dy осталось безъ переменнѣй, а d^2y уже измѣнилось.

§ 168. Смыслъ только-что отмѣченнаго факта очень простъ. Когда принимается x за независимую переменную, dx — постоянная величина, а когда вводится, вмѣсто прежней новая независимая переменная, дифференціалъ которой рассматри-

вається какъ постоянная, dx является переменною и дифференціалъ произведе-
нія $\varphi'(x)dx$ будетъ другою.

Въ выбранномъ выше примѣрѣ мы положили $x^2 = u$ и, слѣдовательно, $x = \sqrt{u}$;
въ такомъ случаѣ $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$, $d^2x = -\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{2}} du^2$. Значить, если продифференцировать
выраженіе:

$$dy = 4x^3 dx,$$

то будемъ имѣть:

$$d^2y = 12x^2 dx^2 + 4x^3 d^2x = 8x^2 dx^2,$$

что совпадаетъ съ полученнымъ выше результатомъ; кромѣ того, отсюда усматри-
вается яснѣе, почему d^2y не равно болѣе $12x^2 dx^2$ и въ чемъ его отличие отъ прежняго.

ЗАМѢНА НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМѢННОЙ

§ 169. Если разсматривается функція y отъ переменнѣй x и эта переменная
принимается за независимую, то дифференціалы dy , d^2y , d^3y являются вполне опре-
дѣленными (§ 133) Предположимъ теперь, что за независимую переменную требуется
принять нѣкоторую новую переменную t , связанную съ x известнымъ образомъ; ка-
ковы будутъ соотношенія, связывающія дифференціалы dy , d^2y , ..., d^ny съ диффе-
ренціалами y , взятыми при этомъ нсвомъ предположеніи? Чтобы отвѣтить на этотъ
вопросъ, условимся обозначать дифференціалы, взятые при dx постоянномъ, черезъ
 $d_x y$, $d_x^2 y$, $d_x^3 y$, ..., $d_x^n y$, а дифференціалы, взятые по независимой переменнѣй t , по-
прежнему, буквою d безъ всякаго указателя, такъ что $d^n y$ будетъ выражать n -ый
дифференціалъ при dt постоянномъ. Производная отъ y по x выразится, какъ мы ви-
дѣли (§ 48), черезъ $\frac{dy}{dx}$, какова бы ни была независимая переменная. Пусть t бу-
детъ эта переменная; ищемъ вторую производную отъ y по x . Для этого нужно диф-
ференцировать предыдущую дробь и ея дифференціалъ раздѣлить на dx ; такимъ
образомъ, для этой второй производной находимъ выраженіе:

$$\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}$$

Точно такъ же, чтобы получить третью производную $\frac{d^3y}{dx^3}$, беремъ, какова бы ни была
независимая переменная, дифференціалъ отъ второй производной и дѣлимъ его на dx :

$$\frac{dx^4 d^3y - dx^3 dy d^3x - 3dx^3 d^2y d^2x + 3dy dx^2 (d^2x)^2}{dx^7}$$

слѣдовательно, искомыя формулы будутъ:

$$d^2y = \frac{d^2ydx - d^2xdy}{dx},$$

$$d^3y = \frac{d^3ydx^2 - dx dy d^3x - 3dx d^2y d^2x + 3dy (d^2x)^2}{dx^2}.$$

Эти формулы даютъ возможность выбрать независимую переменную по своему желанію, или, что не рѣдко болѣе выгодно, оставить независимую переменную неопределенною.

§ 170. Въ каждомъ приложеніи необходимо пользоваться уравненіемъ, связывающимъ съ x новую независимую переменную, и вычислять дифференціалы d^2x , d^3x , ... въ функціи отъ этой новой переменной, вполнѣ произвольной по нашимъ формуламъ. Разсмотримъ, напр., уравненіе:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0, \quad (1)$$

въ которомъ требуется положить $x = \cos t$ и t принять за независимую переменную.

По общей формулѣ это уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{d^2ydx - d^2xdy}{dx^3} - \frac{x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0,$$

и независимая переменная станетъ произвольною. Полагая $x = \cos t$ и замѣчая, что $d^2t = 0$, выводимъ:

$$dx = -\sin t dt, \quad d^2x = -\cos t dt^2;$$

слѣдовательно, уравненіе (1), послѣ небольшихъ упрощеній, перейдетъ въ слѣдующее:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

§ 171. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ общіе методы привели бы къ сложнымъ выкладкамъ, которыхъ можно избѣгать съ помощію частныхъ приѣмовъ. Въ качествѣ примѣра приведемъ преобразование выраженія $x^n \frac{d^n y}{dx^n}$, когда вмѣсто x вводится независимая переменная t , опредѣляемая изъ уравненія $x = e^t$, дающаго $\frac{dx}{dt} = x$.

Имѣемъ:

$$\frac{d}{dt} \left(x^n \frac{d^n y}{dx^n} \right) = \frac{d}{dx} \left(x^n \frac{d^n y}{dx^n} \right) \frac{dx}{dt} = \left(nx^{n-1} \frac{d^n y}{dx^n} + x^n \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} \right) x = nx^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n+1} \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \left(x^n \frac{d^n y}{dx^n} \right) - nx^n \frac{d^n y}{dx^n} = x^{n+1} \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}},$$

что для краткости можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$\left(\frac{d}{dt} - n \right) x^n \frac{d^n y}{dx^n} = x^{n+1} \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}.$$

Полагая $n = 1$, выводимъ:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) x \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dy}{dt};$$

значитъ, полагая послѣдовательно $n = 2$, $n = 3, \dots$, легко приходимъ къ общей формулѣ:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left[\frac{d}{dt} - (n-1) \right] \left[\frac{d}{dt} - (n-2) \right] \dots \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dy}{dt};$$

напр., при $n = 3$, получаемъ:

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} = \left(\frac{d}{dt} - 2 \right) \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dy}{dt} = \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt}.$$

§ 172. Сдѣлаемъ здѣсь одно замѣчаніе, полезное во многихъ случаяхъ. Когда независимая переменная остается неопредѣленною, мы сохраняемъ право выбрать ее послѣ и, притомъ, совершенно произвольно. Поэтому, если въ найденныхъ формулахъ положимъ $d^2 x = 0$, то мы получимъ выраженія, къ которымъ пришли бы непосредственно, принявъ x за независимую переменную; далѣе, вводя въ этихъ формулахъ вмѣсто независимой переменной x произвольную переменную t , мы должны снова придти къ первоначальнымъ формуламъ; если этого не случится, то навѣрное въ вычисленіяхъ сдѣлана ошибка.

Пусть, напр., при рѣшеніи задачи на кривую, заданную уравненіемъ $y = \varphi(x)$, мы нашли для нѣкоторой длины, опредѣляемой геометрически, выраженіе:

$$\frac{1}{a} = \frac{dx d^2 y + dy d^2 x}{dx^3 + dy^3},$$

при чемъ еще не сдѣланъ выборъ независимой переменной. Положивъ теперь $d^2 x = 0$, получимъ:

$$\frac{1}{a} = \frac{dx d^2 y}{dx^3 + dy^3}.$$

Чтобы отсюда вернуться къ общей формулѣ, когда независимая переменная какая-угодно, нужно замѣнить $dx d^2y$ черезъ $dx d^2y - dy d^2x$; въ такомъ случаѣ найдемъ:

$$\frac{1}{a} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3 + dy^3}.$$

Этотъ результатъ не совпадаетъ съ первоначальной формулою, что невозможно; значитъ, не точны тѣ, неизвѣстныя намъ, выкладки, которыя привели къ ней.

Одновременная замѣна всѣхъ переменныхъ

§ 173. Иногда представляется случай сдѣлать въ формулѣ замѣну всѣхъ переменныхъ и поставить вмѣсто нихъ другія, находящіяся съ первыми въ данной зависимости; это, напр., случается въ задачахъ при переходѣ отъ прямолинейныхъ координатъ къ полярнымъ. Въ такихъ случаяхъ вопросъ сводится къ рѣшенію слѣдующей общей задачи:

дано, что y есть функція отъ x ; подставить вмѣсто этихъ переменныхъ двѣ новыя u и v , представляющія извѣстныя функціи отъ первыхъ, и выразить дифференціалы x и y въ функціи отъ дифференціаловъ новыхъ переменныхъ u и v .

Для рѣшенія этого вопроса необходимо сначала приготовить данную формулу къ преобразованію такимъ образомъ, чтобы независимая переменная была бы произвольна; для этой цѣли достаточно вычислить dx , dy , d^2x , d^2y , ...

Очевидно имѣемъ:

$$dx = \frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dv} dv, \quad dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv. \quad (1)$$

Эти уравненія даютъ дифференціалы перваго порядка dx и dy ; дѣйствительно, такъ какъ x и y даны въ функціи отъ u и v , то можно $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$ разсматривать, какъ извѣстныя, полученныя или непосредственнымъ дифференцированіемъ, или съ помощью метода дифференцированія неявныхъ функцій въ томъ случаѣ, когда u и v задаются двумя уравненіями, не рѣшенными относительно x и y .

Дифференцируя уравненія (1), находимъ:

$$d^2x = \frac{d^2x}{du^2} du^2 + 2 \frac{d^2x}{du dv} du dv + \frac{d^2x}{dv^2} dv^2 + \frac{dx}{du} d^2u + \frac{dx}{dv} d^2v,$$

$$d^2y = \frac{d^2y}{du^2} du^2 + 2 \frac{d^2y}{du dv} du dv + \frac{d^2y}{dv^2} dv^2 + \frac{dy}{du} d^2u + \frac{dy}{dv} d^2v,$$

и т. д. Значенія $\frac{d^2x}{du^2}$, $\frac{d^2x}{du dv}$, $\frac{d^2x}{dv^2}$, $\frac{d^2y}{du^2}$, $\frac{d^2y}{du dv}$, $\frac{d^2y}{dv^2}$ вычисляются непосредственно, если x и y даны явно въ функціи отъ u и v ; въ противномъ же случаѣ—при помощи извѣстныхъ методовъ дифференцированія неявныхъ функцій.

Особенно эта теорія имѣетъ примѣненіе въ приложеніи дифференціального исчисления къ геометріи. Пусть, напр.,

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y - dy d^2x}$$

есть выраженіе нѣкоторой длины; требуется найти выраженіе, въ которое обратится R послѣ замѣны въ немъ x и y новыми переменными ρ и ω , опредѣляемыми изъ уравненій:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \omega, \\ y &= \rho \sin \omega. \end{aligned}$$

Принимая ω за независимую переменную, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} dx &= d\rho \cos \omega - \rho \sin \omega d\omega, & dy &= d\rho \sin \omega + \rho \cos \omega d\omega, \\ d^2x &= d^2\rho \cos \omega - 2d\rho \sin \omega d\omega - \rho \cos \omega d\omega^2, \\ d^2y &= d^2\rho \sin \omega + 2d\rho \cos \omega d\omega - \rho \sin \omega d\omega^2 \end{aligned}$$

и, послѣ подстановки,

$$R = \frac{(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 d\omega^3 + 2d\rho^2 d\omega - \rho d^2\rho d\omega}$$

§ 174. Пусть требуется въ формулѣ принять переменную, которая все время разсматривалась какъ неопредѣленная, за независимую; въ такомъ случаѣ, если она представляетъ одну изъ буквъ, входящихъ въ вычисленія, всѣ ея дифференціалы порядка выше перваго приравняются нулю, а если эта новая переменная входитъ въ вычисленія неявно, то нужно поступить иначе.

Въ послѣднемъ случаѣ составляютъ второй дифференціалъ отъ этой независимой переменной и приравняютъ его нулю; тогда между различными дифференціалами буквъ, входящихъ въ разсматриваемое выраженіе, получится зависимость, съ помощью которой можно его подвергнуть безчисленному множеству преобразованій. Возьмемъ, напр., выраженіе:

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy d^2x - dx d^2y} \quad (1)$$

и примемъ за независимую переменную функцію s отъ x и y , опредѣляемую уравненіемъ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2; \quad (2)$$

s , какъ известно (§ 118), есть дуга кривой, координатами точекъ которой служатъ x и y . Приравнивая d^2s нулю, находимъ равенство:

$$0 = dx d^2x + dy d^2y, \quad (3)$$

при помощи котораго можно многими способами преобразовать выраженіе (1), послѣ чего это послѣднее приметъ видъ:

$$\frac{1}{R} = \frac{dy d^2x}{ds ds^2} - \frac{dx d^2y}{ds ds^2} = \frac{dx}{ds} \left(\frac{dx d^2x}{ds ds^2} \right) + \frac{dy d^2x}{ds ds^2} = \frac{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \frac{d^2x}{ds^2} + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}$$

Для бѣльшаго изящества возвышаютъ $\frac{1}{R}$ въ квадратъ:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 - 2 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \frac{d^2y}{ds^2},$$

а такъ какъ въ силу соотношенія (3)

$$- 2 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \frac{d^2y}{ds^2} = 2 \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 = 2 \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 = \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2,$$

то

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2,$$

или

$$\frac{1}{R^2} = \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 \right] = \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2.$$

Должно замѣтить, что выраженіе R въ функціи производныхъ отъ x и y , взятыхъ по s , неопредѣленно; въ самомъ дѣлѣ, между этими производными существуютъ соотношенія, и два выраженія, содержащія ихъ, могутъ быть равносильными, не будучи тождественными.

§ 175. Когда получена формула, въ которой за независимую все время принималась переменная, опредѣленная такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ, то можно поставить себѣ задачу перейти, съ помощью этой формулы, къ общему случаю, гдѣ независимая переменная была бы совершенно произвольною. Этотъ вопросъ отличается отъ рѣшеннаго въ § 169-мъ. Въ самомъ дѣлѣ, здѣсь производныя взяты по переменной s , которая вмѣстѣ со своими дифференціалами должна исчезнуть изъ окончательнаго результата. Если дано, напр., уравненіе:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2, \quad (1)$$

гдѣ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

то по формуламъ § 169-го получится:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(d^2x ds - dx d^2s)^2 + (d^2y ds - dy d^2s)^2}{ds^5}, \quad (2)$$

мы же хотимъ получить выраженіе для $\frac{1}{R}$ безъ s , въ функции исключительно отъ x и y .

Относительно выбраннаго примѣра ограничимся указаніемъ хода необходимыхъ выкладокъ.

Чтобы преобразовать формулу (2), достаточно вычислить $\frac{d^2x}{ds^2}$ и $\frac{d^2y}{ds^2}$; но, такъ какъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \\ \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right) = \frac{d^2x \sqrt{dx^2 + dy^2} - \frac{dx(dx d^2x + dy d^2y)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}}{ds(dx^2 + dy^2)} = \frac{d^2x dy^2 - dx dy d^2y}{(dx^2 + dy^2)^2}; \end{aligned}$$

точно такъ же

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2y dx^2 - dx dy d^2x}{(dx^2 + dy^2)^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 &= \frac{(d^2x dy^2 - dx dy d^2y)^2 + (d^2y dx^2 - dx dy d^2x)^2}{(dx^2 + dy^2)^4} = \\ &= \frac{d^2x^2 dy^2 (dx^2 + dy^2) + d^2y^2 dx^2 (dx^2 + dy^2) - 2 dx d^2x dy d^2y (dx^2 + dy^2)}{(dx^2 + dy^2)^4} = \\ &= \frac{(dx d^2y - dy d^2x)^2}{(dx^2 + dy^2)^3}, \end{aligned}$$

что представляетъ весьма извѣстную формулу.

СЛУЧАЙ МНОГИХЪ НЕЗАВИСИМЫХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ

§ 176. Если въ функции отъ многихъ переменныхъ эти послѣднія замѣняются новыми, то производныя отъ преобразованной такимъ образомъ функции могутъ быть

вычислены при помощи соотношений, съ которыми мы сейчас познакомимся и которыя даютъ возможность вывести изъ нихъ производныя отъ функціи въ ея первоначальномъ видѣ.

Разсмотримъ сначала, для большей простоты, функцію z отъ двухъ переменныхъ:

$$z = \varphi(x, y).$$

Пусть u и v будутъ двѣ новыя переменныя, связанныя съ x и y двумя данными уравненіями, при чемъ не исключается, конечно, случай, когда одно изъ этихъ уравненій есть $u = x$ или $v = y$ и, слѣдовательно, будетъ замѣнена только одна изъ переменныхъ, отъ которыхъ зависитъ функція z .

Если x и y — независимыя переменныя, дифференціалы dz , d^2z , d^3z , ... являются вполне определенными и ихъ выраженіе было дано какъ въ функціи отъ dx и dy , такъ и въ функціи отъ дифференціаловъ du , dv , d^2u , d^2v , ... Отождествленіе этихъ выраженій дастъ намъ искомыя соотношенія.

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy, \\ dz &= \frac{dz}{du} du + \frac{dz}{dv} dv. \end{aligned}$$

Эти два выраженія dz должны быть тождественны послѣ замѣны du и dv ихъ значеніями:

$$\begin{aligned} du &= \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy, \\ dv &= \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy. \end{aligned}$$

Дѣйствительно, тогда оба выраженія dz будутъ вида $Pdx + Qdy$ и такъ какъ оба они представляютъ, съ точностью до бесконечно-малыхъ второго порядка, приращеніе функціи z , то ихъ разность должна быть бесконечно-малою второго порядка. Замѣчая же, что dx и dy — двѣ бесконечно-малыя перваго порядка, не зависящія одна отъ другой, выводимъ, что эта разность строго равна нулю.

Изъ такого тождества вытекаетъ:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv} \frac{dv}{dx}, \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{dz}{du} \frac{du}{dy} + \frac{dz}{dv} \frac{dv}{dy}. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти уравненія рѣшаютъ вопросъ для случая производныхъ перваго порядка. Производныя $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, входящія сюда, должны быть рассматриваемы, какъ извѣстныя; получаютъ онѣ изъ данныхъ уравненій, связывающихъ u и v съ x и y .

Замѣтимъ, что каждое изъ уравненій (1) можетъ быть выписано, какъ прямое слѣдствіе изъ правила дифференцированія (§ 58) сложныхъ функцій.

§ 177. Сравненіе двухъ различныхъ выраженій d^2z дастъ производныя второго порядка $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ въ функціи отъ производныхъ, взятыхъ по переменнымъ u и v .

Разсматривая dx и dy , какъ постоянныя, имѣемъ:

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2z}{dxdy} dxdy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2, \quad (1)$$

$$d^2z = \frac{d^2z}{du^2} du^2 + 2 \frac{d^2z}{dudv} dudv + \frac{d^2z}{dv^2} dv^2 + \frac{dz}{du} d^2u + \frac{dz}{dv} d^2v; \quad (2)$$

кромѣ того,

$$\begin{aligned} du &= \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy, & dv &= \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy, \\ d^2u &= \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} dxdy + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2, & d^2v &= \frac{d^2v}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2v}{dxdy} dxdy + \frac{d^2v}{dy^2} dy^2. \end{aligned}$$

Уравненіе (2) послѣ подстановки въ него этихъ значеній приметъ видъ:

$$d^2z = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2;$$

сравнивая съ уравненіемъ (1), заключаемъ, что

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = B, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = C,$$

гдѣ A , B , C — извѣстныя функціи отъ $\frac{d^2z}{du^2}$, $\frac{d^2z}{dudv}$, $\frac{d^2z}{dv^2}$, $\frac{dz}{du}$, $\frac{dz}{dv}$ и отъ производныхъ u и v , взятыхъ по x и y .

Тотъ же методъ, очевидно, распространяется на производныя третьяго и высшихъ порядковъ.

§ 178. По предыдущему методу опредѣляются за-разъ, изъ одного равенства, всѣ производныя одного и того же порядка. Впрочемъ, можетъ понадобится выраженіе только одной производной, — тогда находятъ болѣе удобнымъ опредѣлять ее непосредственно и отдѣльно.

Предположимъ, напр., что при данныхъ предыдущаго параграфа требуется вычислить $\frac{d^2z}{dxdy}$.

Сначала, по теоріи сложныхъ функцій, пишемъ:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Чтобы получить $\frac{d^2z}{dxdy}$, нужно взять производныя отъ обѣихъ частей этого равенства по y , т.-е. написать:

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dz}{du} \right) \frac{du}{dx} + \frac{dz}{du} \frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d}{dy} \left(\frac{dz}{dv} \right) \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dv} \frac{d^2v}{dxdy};$$

при этомъ $\frac{d}{dy} \left(\frac{dz}{du} \right)$ и $\frac{d}{dy} \left(\frac{dz}{dv} \right)$ могутъ быть вычислены по общей формулѣ:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dy} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dy};$$

такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{du^2} \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} + \frac{d^2z}{dudv} \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dy} + \frac{du}{dy} \frac{dv}{dx} \right) + \frac{d^2z}{dv^2} \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dy} + \frac{dz}{du} \frac{d^2u}{dxdy} + \frac{dz}{dv} \frac{d^2v}{dxdy}.$$

Тѣ же принципы прилагаются къ преобразованію производныхъ отъ функции съ большимъ числомъ независимыхъ переменныхъ; нѣтъ никакой необходимости останавливаться на этомъ. Приложенія въ дальнѣйшихъ параграфахъ не оставляютъ мѣста какимъ-либо затрудненіямъ.

СЛУЧАЙ ЗАМѢНЫ ФУНКЦІИ

§ 179. Когда уравненіе связываетъ нѣсколько переменныхъ, каждая изъ нихъ можетъ быть рассмотрѣна, какъ функция отъ всѣхъ остальныхъ, и часто въ теченіи одной и той же выкладки считается полезнымъ замѣнить не только независимыя переменныя, но еще и функции, которыя отъ нихъ зависятъ и вмѣсто которыхъ вводятся въ такомъ случаѣ новыя функции, связанныя съ первыми данными соотношеніями.

Пусть z есть функция отъ x и y . Предположимъ сначала, что требуется подставить сюда новую функцию w отъ двухъ новыхъ переменныхъ u и v , при чемъ u , v , w связаны, конечно, съ x , y , z тремя данными уравненіями.

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} dw &= \frac{dw}{du} du + \frac{dw}{dv} dv, \\ du &= \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} \left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \right), \\ dv &= \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz = \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} \left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \right); \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned} dw &= \left[\frac{dw}{du} \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} \right) + \frac{dw}{dv} \left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dx} \right) \right] dx + \\ &+ \left[\frac{dw}{du} \left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} \right) + \frac{dw}{dv} \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dy} \right) \right] dy, \end{aligned}$$

съ другой же стороны

$$dw = \frac{dw}{dx} dx + \frac{dw}{dy} dy + \frac{dw}{dz} dz = \left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dx} \right) dx + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dy} \right) dy.$$

Приравнивая другъ другу коэффициенты при dx и dy въ этихъ двухъ значеніяхъ dw , получаемъ уравненія:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dx} &= \frac{dw}{du} \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} \right) + \frac{dw}{dv} \left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dx} \right), \\ \frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dy} &= \frac{dw}{du} \left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} \right) + \frac{dw}{dv} \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dy} \right), \end{aligned}$$

дающія возможность выразить $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ въ функціи отъ $\frac{dw}{du}$ и $\frac{dw}{dv}$. Другія производныя, входящія въ ихъ выраженія, именно $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dz}$, ..., должны быть разсматриваемы какъ данныя, такъ какъ u , v , w — извѣстныя функціи отъ x , y и z .

Такъ же составляемъ двѣ формулы для d^2w :

$$\begin{aligned} d^2w &= \frac{d^2w}{du^2} du^2 + 2 \frac{d^2w}{dudv} dudv + \frac{d^2w}{dv^2} dv^2 + \frac{dw}{du} d^2u + \frac{dw}{dv} d^2v, \\ d^2w &= \frac{d^2w}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2w}{dxdy} dxdy + \frac{d^2w}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2w}{dz^2} dz^2 + 2 \frac{d^2w}{dzdx} dzdx + 2 \frac{d^2w}{dydz} dydz + \frac{dw}{dz} dz^2. \end{aligned}$$

Если замѣнить du , dv , d^2u , d^2v и d^2z ихъ выраженіями въ функціи отъ dx и dy , то обѣ формулы примутъ видъ:

$$d^2w = Pdx^2 + 2Qdxdy + Rdy^2.$$

Пользуясь теперь ихъ тождественностью, напишемъ три уравненія, изъ которыхъ $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$ и $\frac{d^2z}{dy^2}$ могутъ быть вычислены въ функціи отъ производныхъ w ; взятыхъ по u и v . Мы не будемъ останавливаться на этихъ слишкомъ сложныхъ и не интересныхъ выкладкахъ.

Примѣры

§ 180. Преобразовать выраженіе:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2},$$

замѣнивъ въ немъ три прямоугольныя координаты x , y , z тремя новыми прямоугольными координатами x' , y' , z' , связанными съ первыми посредствомъ равенствъ:

$$x' = ax + by + cz, \quad y' = a'x + b'y + c'z, \quad z' = a''x + b''y + c''z,$$

при чемъ девять коэффициентовъ $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ связаны между собою известными соотношеніями, которымъ удовлетворяютъ косинусы угловъ, образуемыхъ попарно осями обѣихъ прямоугольныхъ системъ. Замѣтимъ, что соотношенія, связывающія прежнія переменныя съ новыми, всѣ первой степени, — поэтому dx', dy', dz' будутъ постоянными одновременно съ dx, dy, dz ; значитъ, мы въ правѣ писать:

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2v}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2v}{dz^2} dz^2 + 2 \frac{d^2v}{dxdy} dx dy + 2 \frac{d^2v}{dxdz} dx dz + 2 \frac{d^2v}{dydz} dy dz,$$

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx'^2} dx'^2 + \frac{d^2v}{dy'^2} dy'^2 + \frac{d^2v}{dz'^2} dz'^2 + 2 \frac{d^2v}{dx'dy'} dx' dy' + 2 \frac{d^2v}{dx'dz'} dx' dz' + 2 \frac{d^2v}{dy'dz'} dy' dz';$$

кромѣ того,

$$dx' = a dx + b dy + c dz, \quad dy' = a' dx + b' dy + c' dz, \quad dz' = a'' dx + b'' dy + c'' dz.$$

Подставляемъ эти значенія во вторую часть предыдущаго уравненія и приравниваемъ другъ другу коэффициенты при подобныхъ членахъ въ обоихъ выраженіяхъ d^2v , тождественно равныхъ между собою вслѣдствіе произвольности dx, dy, dz ; находимъ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = a^2 \frac{d^2v}{dx'^2} + a'^2 \frac{d^2v}{dy'^2} + a''^2 \frac{d^2v}{dz'^2} + 2aa' \frac{d^2v}{dx'dy'} + 2aa'' \frac{d^2v}{dx'dz'} + 2a'a'' \frac{d^2v}{dz'dy'},$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} = b^2 \frac{d^2v}{dx'^2} + b'^2 \frac{d^2v}{dy'^2} + b''^2 \frac{d^2v}{dz'^2} + 2bb' \frac{d^2v}{dx'dy'} + 2bb'' \frac{d^2v}{dx'dz'} + 2b'b'' \frac{d^2v}{dz'dy'},$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = c^2 \frac{d^2v}{dx'^2} + c'^2 \frac{d^2v}{dy'^2} + c''^2 \frac{d^2v}{dz'^2} + 2cc' \frac{d^2v}{dx'dy'} + 2cc'' \frac{d^2v}{dx'dz'} + 2c'c'' \frac{d^2v}{dz'dy'}.$$

Слѣдовательно, принимая во вниманіе соотношенія, связывающія девять коэффициентовъ, имѣемъ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2v}{dx'^2} + \frac{d^2v}{dy'^2} + \frac{d^2v}{dz'^2}.$$

§ 181. Преобразовать выраженіе:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2},$$

въ которомъ v обозначаетъ какую-угодно функцію отъ x и y , замѣнивъ x и y переменными r и θ , связанными съ первыми посредствомъ равенствъ:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

равносильныхъ

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctang \frac{y}{x}.$$

Имѣемъ.

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2v}{dxdy} dx dy + \frac{d^2v}{dy^2} dy^2,$$

$$d^2v = \frac{d^2v}{dr^2} dr^2 + 2 \frac{d^2v}{drd\theta} dr d\theta + \frac{d^2v}{d\theta^2} d\theta^2 + \frac{dv}{dr} d^2r + \frac{dv}{d\theta} d^2\theta;$$

кромѣ того,

$$dr = \frac{xdx + ydy}{r}, \quad d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

$$d^2r = \frac{(dx^2 + dy^2)r - \frac{(xdx + ydy)^2}{r}}{r^2} = \frac{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) - (xdx + ydy)^2}{r^3} = \frac{(xdy - ydx)^2}{r^3},$$

$$d^2\theta = \frac{-2(xdx + ydy)(xdy - ydx)}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \frac{(y^2 - x^2) dx dy - xy(dy^2 - dx^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

и, слѣдовательно,

$$d^2v = \frac{d^2v}{dr^2} \frac{(xdx + ydy)^2}{r^2} + 2 \frac{d^2v}{drd\theta} \frac{(x^2 - y^2) dx dy + xy(dy^2 - dx^2)}{r^3} +$$

$$+ \frac{d^2v}{d\theta^2} \frac{(xdy - ydx)^2}{r^4} + \frac{dv}{dr} \frac{(xdy - ydx)^2}{r^3} + \frac{dv}{d\theta} 2 \frac{(y^2 - x^2) dx dy - xy(dy^2 - dx^2)}{r^4}.$$

Приравнивая другъ другу коэффициенты при dx^2 и dy^2 въ обоихъ выраженіяхъ d^2v , пишемъ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v}{dr^2} \frac{x^2}{r^2} - \frac{2xy}{r^3} \frac{d^2v}{drd\theta} + \frac{d^2v}{d\theta^2} \frac{y^2}{r^4} + \frac{dv}{dr} \frac{y^2}{r^3} + \frac{2xy}{r^4} \frac{dv}{d\theta},$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{dr^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{2xy}{r^3} \frac{d^2v}{drd\theta} + \frac{d^2v}{d\theta^2} \frac{x^2}{r^4} + \frac{dv}{dr} \frac{x^2}{r^3} - \frac{2xy}{r^4} \frac{dv}{d\theta},$$

откуда

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{d^2v}{d\theta^2} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr}.$$

§ 182. Преобразовать выраженіе:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2},$$

сдѣлавъ переходъ отъ координатъ x, y, z къ полярнымъ ρ, θ, ψ , связаннымъ съ первыми посредствомъ равенствъ:

$$z = \rho \cos \theta, \quad x = \rho \sin \theta \cos \psi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \psi.$$

Вводимъ сначала вспомогательную переменную r , равную произведению $\rho \sin \theta$; тогда ρ и ψ замѣнятъ вполнѣ x и y , и такъ какъ

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi,$$

то по предыдущему получимъ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2v}{d\psi^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr};$$

значить, заданное выраженіе приметъ видъ:

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2v}{d\psi^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dz^2}.$$

Замѣтимъ теперь, что r и z , при данномъ ψ , будутъ двумя прямоугольными координатами, относительно которыхъ ρ и θ можно принять за полярныя, т.-е. написать:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{d^2v}{dr^2} = \frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\rho}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2v}{d\psi^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\rho}. \quad (A)$$

Остается вычислить $\frac{dv}{dr}$; не слѣдуетъ забывать, что при вычисленіи этой производной ψ и z разсматриваются какъ постоянныя; v въ такомъ случаѣ зависитъ отъ ρ и θ и

$$\frac{dv}{dr} = \frac{dv}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dr}.$$

Далѣе, такъ какъ z постоянно, уравненіе $\rho \cos \theta = z$ даетъ:

$$-\rho \sin \theta d\theta + \cos \theta d\rho = 0.$$

откуда

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \tan \theta.$$

Кромѣ того, изъ уравненія $\rho \sin \theta = r$ выводимъ:

$$d\rho \sin \theta + \rho \cos \theta d\theta = dr,$$

что на основаніи предыдущаго равенства можетъ быть написано въ видѣ:

$$d\rho \sin\theta + \frac{\cos\theta d\rho}{\operatorname{tang}\theta} = dr, \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dr} = \sin\theta.$$

Наконецъ, заключаемъ:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\sin\theta}{\rho \operatorname{tang}\theta} = \frac{\cos\theta}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{dv}{dr} \sin\theta + \frac{dv \cos\theta}{d\theta \rho};$$

уравненіе (A), послѣ замѣны въ немъ r и $\frac{dv}{dr}$ ихъ значеніями, переходитъ въ уравненіе:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{d^2v}{d\psi^2} + \frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dv}{d\rho}.$$

§ 183. Приложимъ общіе методы къ тому случаю, когда прямолинейные координаты x, y, z замѣняются тремя переменными ρ, ρ_1, ρ_2 , которымъ Лямэ, часто и плодотворно ими пользовавшійся, далъ названіе *системы криволинейныхъ координатъ*.

Пусть

$$\varphi(x, y, z) = \rho, \quad \varphi_1(x, y, z) = \rho_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = \rho_2$$

будутъ уравненія трехъ системъ поверхностей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ и дѣлящихъ пространство на безчисленное множество безконечно-малыхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ; каждой системѣ значеній параметровъ ρ, ρ_1, ρ_2 соответствуютъ три поверхности, которыя, по предположенію, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ въ точкѣ, такъ же хорошо опредѣляемой значеніями ρ, ρ_1, ρ_2 , какъ и значеніями x, y, z . Эти параметры образуютъ *систему криволинейныхъ координатъ*.

Лямэ съ большою пользою ввелъ въ вычисленія, относящіяся къ этой теоріи, три функціи h, h_1, h_2 , опредѣляемыя изъ уравненій:

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2, \\ h_1^2 &= \left(\frac{d\rho_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dz} \right)^2, \\ h_2^2 &= \left(\frac{d\rho_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dz} \right)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти функціи не измѣняются, въ чемъ не трудно убѣдиться, отъ замѣны координатъ x, y, z другими прямолинейными прямоугольными координатами. Это, впрочемъ, вытекаетъ непосредственно изъ того, что $\frac{d\rho}{h}, \frac{d\rho_1}{h_1}, \frac{d\rho_2}{h_2}$ представляютъ (§ 125) ребра параллелепипеда, ограниченнаго шестью поверхностями, соответствующими значеніямъ $\rho, \rho + d\rho, \rho_1, \rho_1 + d\rho_1, \rho_2, \rho_2 + d\rho_2$ нашихъ параметровъ; измѣренія же такого параллелепипеда не могутъ измѣняться вмѣстѣ съ направленіемъ осей.

Замѣтивъ это, постараемся сначала выразить производныя отъ x, y, z , взятыя по ρ, ρ_1, ρ_2 , въ функции отъ производныхъ ρ, ρ_1, ρ_2 , взятыхъ по x, y, z . Пишемъ:

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{d\rho}{dx} dx + \frac{d\rho}{dy} dy + \frac{d\rho}{dz} dz, \\ d\rho_1 &= \frac{d\rho_1}{dx} dx + \frac{d\rho_1}{dy} dy + \frac{d\rho_1}{dz} dz, \\ d\rho_2 &= \frac{d\rho_2}{dx} dx + \frac{d\rho_2}{dy} dy + \frac{d\rho_2}{dz} dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Чтобы вывести изъ этихъ уравненій производныя отъ x, y, z , взятыя по ρ, ρ_1, ρ_2 , рѣшаемъ ихъ относительно дифференціаловъ dx, dy, dz . Если принять во вниманіе, что $\frac{1}{h} \frac{d\rho}{dx}, \frac{1}{h} \frac{d\rho}{dy}, \frac{1}{h} \frac{d\rho}{dz}, \frac{1}{h_1} \frac{d\rho_1}{dx}, \dots$ суть косинусы угловъ, составляемыхъ (§ 96) съ осями координатъ нормальми къ тремъ нашимъ поверхностямъ, которыя, по предположенію, образуютъ прямоугольную систему, то увидимъ, что для рѣшенія уравненій (2) достаточно ихъ сложить, предварительно умноживъ въ послѣдовательномъ порядкѣ сначала на $\frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dx}, \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dx}, \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dx}$, затѣмъ на $\frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dy}, \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dy}, \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dy}$ и, наконецъ, на $\frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dz}, \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dz}, \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dz}$. Такимъ образомъ находимъ:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dx} d\rho + \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dx} d\rho_1 + \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dx} d\rho_2, \\ dy &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dy} d\rho + \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dy} d\rho_1 + \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dy} d\rho_2, \\ dz &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dz} d\rho + \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dz} d\rho_1 + \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dz} d\rho_2 \end{aligned}$$

и, слѣдовательно, по § 57-му

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\rho} &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dx}, & \frac{dx}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dx}, & \frac{dx}{d\rho_2} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dx}, \\ \frac{dy}{d\rho} &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dy}, & \frac{dy}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dy}, & \frac{dy}{d\rho_2} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dy}, \\ \frac{dz}{d\rho} &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dz}, & \frac{dz}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dz}, & \frac{dz}{d\rho_2} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dz}. \end{aligned}$$

Впрочемъ, эти формулы можно доказать непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, замѣчаемъ, что произведеніе $\frac{dx}{d\rho} d\rho$ представляетъ безконечно-малое приращеніе переменной x , когда при ρ_1 и ρ_2 постоянныхъ ρ получаетъ приращеніе $d\rho$. Значитъ, это произведеніе есть проекція на ось X -овъ безконечно-малой нормали, содержащейся между поверхностями, соответствующими параметрамъ ρ и $\rho + d\rho$, и равной (§ 125) по длинѣ $\frac{d\rho}{h}$. А такъ

какъ косинусъ угла, составляемаго этою нормалью съ осью X-овъ, выражается (§ 96) произведеніемъ $\frac{1}{h} \frac{d\rho}{dx}$; то

$$\frac{dx}{d\rho} d\rho = \frac{1}{h^2} d\rho \frac{d\rho}{dx},$$

или, по сокращеніи на $d\rho$,

$$\frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dx}$$

§ 184. Вычислимъ теперь въ функціи отъ координатъ ρ , ρ_1 , ρ_2 сумму

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2},$$

которой Лямэ далъ названіе *параметра второго порядка функціи v*.

Прежде всего этотъ параметръ выражается легко черезъ такіе же параметры отъ переменныхъ ρ , ρ_1 , ρ_2 . Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{dv}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dv}{d\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dv}{d\rho_2} \frac{d\rho_2}{dx}, \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{d^2v}{d\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\rho_1^2} \left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\rho_2^2} \left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 + 2 \frac{d^2v}{d\rho_1 d\rho_2} \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d\rho_2}{dx} + 2 \frac{d^2v}{d\rho_2 d\rho} \frac{d\rho_2}{dx} \frac{d\rho}{dx} + \\ &+ 2 \frac{d^2v}{d\rho d\rho_1} \frac{d\rho}{dx} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dv}{d\rho} \frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{dv}{d\rho_1} \frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{dv}{d\rho_2} \frac{d^2\rho_2}{dx^2}, \end{aligned}$$

такъ же составляемъ $\frac{d^2v}{dy^2}$ и $\frac{d^2v}{dz^2}$; складывая всѣ эти вторыя производныя и принимая во вниманіе, что поверхности взаимно-перпендикулярны, находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} &= h^2 \frac{d^2v}{d\rho^2} + h_1^2 \frac{d^2v}{d\rho_1^2} + h_2^2 \frac{d^2v}{d\rho_2^2} + \frac{dv}{d\rho} \left(\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2}\right) + \\ &+ \frac{dv}{d\rho_1} \left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right) + \frac{dv}{d\rho_2} \left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2}\right); \end{aligned}$$

слѣдовательно, параметръ второго порядка функціи v выраженъ въ функціи отъ ρ , ρ_1 , ρ_2 и отъ параметровъ этихъ трехъ функцій, которые мы теперь и постараемся отыскать.

§ 185. Поверхности, выражаемыя уравненіями: $\rho = \text{const.}$, $\rho_1 = \text{const.}$, $\rho_2 = \text{const.}$, пересѣкаются взаимно подъ прямымъ угломъ, независимо отъ значеній тѣхъ постоянныхъ, которымъ приравнены ρ , ρ_1 , ρ_2 , и косинусы угловъ, образуемыхъ тремя ихъ нормальми въ какой-нибудь точкѣ съ осями X, Y, Z, будутъ:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{h} \frac{d\rho}{dx}, & \frac{1}{h} \frac{d\rho}{dy}, & \frac{1}{h} \frac{d\rho}{dz}, \\ \frac{1}{h_1} \frac{d\rho_1}{dx}, & \frac{1}{h_1} \frac{d\rho_1}{dy}, & \frac{1}{h_1} \frac{d\rho_1}{dz}, \\ \frac{1}{h_2} \frac{d\rho_2}{dx}, & \frac{1}{h_2} \frac{d\rho_2}{dy}, & \frac{1}{h_2} \frac{d\rho_2}{dz}. \end{array}$$

Между этими девятью количествами, какъ между косинусами угловъ, образуемыхъ попарно осями двухъ прямоугольныхъ системъ, существуютъ слѣдующія весьма извѣстныя соотношенія:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dx} &= \frac{h}{h_1 h_2} \left(\frac{d\rho_1}{dz} \frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d\rho_2}{dz} \right), \\ \frac{d\rho}{dy} &= \frac{h}{h_1 h_2} \left(\frac{d\rho_1}{dx} \frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d\rho_2}{dx} \right), \\ \frac{d\rho}{dz} &= \frac{h}{h_1 h_2} \left(\frac{d\rho_1}{dy} \frac{d\rho_2}{dx} - \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d\rho_2}{dy} \right), \\ \frac{d\rho_1}{dx} &= \frac{h_1}{h h_2} \left(\frac{d\rho_2}{dz} \frac{d\rho}{dy} - \frac{d\rho_2}{dy} \frac{d\rho}{dz} \right), \\ \frac{d\rho_1}{dy} &= \frac{h_1}{h h_2} \left(\frac{d\rho_2}{dx} \frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_2}{dz} \frac{d\rho}{dx} \right), \\ \frac{d\rho_1}{dz} &= \frac{h_1}{h h_2} \left(\frac{d\rho_2}{dy} \frac{d\rho}{dx} - \frac{d\rho_2}{dx} \frac{d\rho}{dy} \right), \\ \frac{d\rho_2}{dx} &= \frac{h_2}{h h_1} \left(\frac{d\rho}{dz} \frac{d\rho_1}{dy} - \frac{d\rho}{dy} \frac{d\rho_1}{dz} \right), \\ \frac{d\rho_2}{dy} &= \frac{h_2}{h h_1} \left(\frac{d\rho}{dx} \frac{d\rho_1}{dz} - \frac{d\rho}{dz} \frac{d\rho_1}{dx} \right), \\ \frac{d\rho_2}{dz} &= \frac{h_2}{h h_1} \left(\frac{d\rho}{dy} \frac{d\rho_1}{dx} - \frac{d\rho}{dx} \frac{d\rho_1}{dy} \right).\end{aligned}$$

Выводимъ изъ этихъ формулъ $\frac{d^2\rho}{dydx}$ и $\frac{d^2\rho}{dxdy}$, дифференцируя $\frac{d\rho}{dx}$ по y , а затѣмъ $\frac{d\rho}{dy}$ по x , и полученные результаты приравняемъ другъ другу:

$$\begin{aligned}& \frac{h}{h_1 h_2} \left(\frac{d^2\rho_1}{dzdy} \frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d^2\rho_1}{dy^2} \frac{d\rho_2}{dz} + \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d^2\rho_2}{dy^2} - \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d^2\rho_2}{dydz} \right) + \frac{d}{dy} \frac{h}{h_1 h_2} \left(\frac{d\rho_1}{dz} \frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d\rho_2}{dz} \right) = \\ &= \frac{h}{h_1 h_2} \left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} \frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d^2\rho_1}{dzdx} \frac{d\rho_2}{dx} + \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d^2\rho_2}{dx dz} - \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d^2\rho_2}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \frac{h}{h_1 h_2} \left(\frac{d\rho_1}{dx} \frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d\rho_2}{dx} \right),\end{aligned}$$

или же, перенеся всѣ члены въ первую часть и придавъ и вычтя, для большей симметріи, еще нѣкоторыя, взаимно уничтожающіеся, напомнимъ:

$$\begin{aligned}& \frac{h}{h_1 h_2} \left[\frac{d\rho_1}{dz} \left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right) - \frac{d\rho_2}{dz} \left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) \right] + \\ & + \frac{h}{h_1 h_2} \left[\left(\frac{d\rho_2}{dx} \frac{d}{dz} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\rho_2}{dy} \frac{d}{dz} \frac{d\rho_1}{dy} + \frac{d\rho_2}{dz} \frac{d}{dz} \frac{d\rho_1}{dz} \right) - \left(\frac{d\rho_1}{dx} \frac{d}{dz} \frac{d\rho_2}{dx} + \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d}{dz} \frac{d\rho_2}{dy} + \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d}{dz} \frac{d\rho_2}{dz} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{d\rho_1}{dz} \left(\frac{d\rho_2}{dx} \frac{d}{dx} \frac{h}{h_1 h_2} + \frac{d\rho_2}{dy} \frac{d}{dy} \frac{h}{h_1 h_2} + \frac{d\rho_2}{dz} \frac{d}{dz} \frac{h}{h_1 h_2} \right) - \frac{d\rho_2}{dz} \left(\frac{d\rho_1}{dx} \frac{d}{dx} \frac{h}{h_1 h_2} + \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d}{dy} \frac{h}{h_1 h_2} + \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d}{dz} \frac{h}{h_1 h_2} \right) \right] = 0;\end{aligned}$$

на основаніи же формуль § 183-го, а также равенства:

$$\frac{d \frac{d\rho_1}{dz} dx}{dx d\rho_2} + \frac{d \frac{d\rho_1}{dz} dy}{dy d\rho_2} + \frac{d \frac{d\rho_1}{dz} dz}{dz d\rho_2} = \frac{d \frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2}$$

это уравнение перейдетъ въ слѣдующее:

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_1 h_2} \left[\frac{d\rho_1}{dz} \left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right) - \frac{d\rho_2}{dz} \left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) + h_2^2 \frac{d \frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2} - h_1^2 \frac{d \frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1} \right] + \\ + \frac{d\rho_1}{dz} h_2^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dz} h_1^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_1} = 0. \end{aligned}$$

Точно такъ же получимъ два другихъ:

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_1 h_2} \left[\frac{d\rho_1}{dy} \left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right) - \frac{d\rho_2}{dy} \left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) + h_2^2 \frac{d \frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2} - h_1^2 \frac{d \frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1} \right] + \\ + \frac{d\rho_1}{dy} h_2^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dy} h_1^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_1 h_2} \left[\frac{d\rho_1}{dx} \left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right) - \frac{d\rho_2}{dx} \left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) + h_2^2 \frac{d \frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2} - h_1^2 \frac{d \frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1} \right] + \\ + \frac{d\rho_1}{dx} h_2^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dx} h_1^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_1} = 0. \end{aligned}$$

Умноживъ эти три уравненія соотвѣтственно на $\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dy}$, $\frac{d\rho_1}{dz}$ и сложивъ, найдемъ, послѣ всѣхъ упрощеній,

$$\frac{1}{h_2^2} \left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right) + \frac{d \log \frac{h h_1}{h_2}}{d\rho_2} = 0.$$

Такъ же, умноживъ ихъ на $\frac{d\rho_2}{dz}$, $\frac{d\rho_2}{dy}$, $\frac{d\rho_2}{dx}$, найдемъ:

$$\frac{1}{h_1^2} \left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) + \frac{d \log \frac{h h_2}{h_1}}{d\rho_1} = 0;$$

точно такимъ же образомъ:

$$\frac{1}{h^2} \left(\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2} \right) + \frac{d \log \frac{h_1 h_2}{h}}{d\rho} = 0.$$

Принимая во вниманіе эти уравненія, можемъ теперь выраженіе $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}$, найденное въ § 184-мъ, написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = h^2 \left(\frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{dv}{d\rho} \frac{h_1 h_2}{h} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{h}{h_1 h_2} \right) \right) + h_1^2 \left(\frac{d^2v}{d\rho_1^2} + \frac{dv}{d\rho_1} \frac{h_2 h}{h_1} \frac{d}{d\rho_1} \left(\frac{h_1}{h_2 h} \right) \right) + h_2^2 \left(\frac{d^2v}{d\rho_2^2} + \frac{dv}{d\rho_2} \frac{h h_1}{h_2} \frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{h_2}{h h_1} \right) \right),$$

или, что то же самое, въ видѣ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = h h_1 h_2 \left(\frac{d}{d\rho} \frac{h}{h_1 h_2} \frac{dv}{d\rho} + \frac{d}{d\rho_1} \frac{h_1}{h_2 h} \frac{dv}{d\rho_1} + \frac{d}{d\rho_2} \frac{h_2}{h h_1} \frac{dv}{d\rho_2} \right).$$

Если ρ , ρ_1 , ρ_2 — полярныя координаты, такъ что взаимно-перпендикулярныя поверхности суть сферы, то, замѣняя ρ_1 и ρ_2 черезъ θ и ψ , которыми обыкновенно выражаются двѣ угловыя координаты, имѣемъ:

$$\begin{aligned} z &= \rho \cos \theta, \\ x &= \rho \sin \theta \cos \psi, \\ y &= \rho \sin \theta \sin \psi; \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ \psi &= \arctang \frac{y}{x}, \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Такъ какъ разстояніе между двумя безконечно-близкими точками есть

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2,$$

то

$$h = 1, \quad h_1 = \frac{1}{\rho}, \quad h_2 = \frac{1}{\rho \sin \theta}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \sin^2 \theta \frac{dv}{d\rho} \right) + \frac{d}{d\theta} \left(\sin^2 \theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \frac{d}{d\psi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dv}{d\psi} \right) \right],$$

что вполне совпадаетъ съ результатомъ, найденнымъ въ § 182-мъ.

УПРАЖНЕНІЯ

1. Доказать, что при $x = \cos t$ уравнение $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + a^2 y = 0$ перейдетъ въ $\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y = 0$.
2. Преобразовать уравненіе:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dy^2},$$

полагая $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$ и рассматривая z какъ функцію отъ α и β .

3. Если z есть функція отъ x и y , то, полагая

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2 z}{dx dy} = s, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = t, \quad u = px + qy - z$$

и принимая p и q за независимыя переменныя, будемъ имѣть:

$$\frac{du}{dp} = x, \quad \frac{du}{dq} = y, \quad \frac{d^2 u}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2 u}{dp dq} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2 u}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

4. Если $\varphi(x, y, z) = \rho$, $\varphi_1(x, y, z) = \rho_1$, $\varphi_2(x, y, z) = \rho_2$ — уравненія трехъ группъ взаимно-перпендикулярныхъ поверхностей и, слѣдовательно, ρ , ρ_1 , ρ_2 , образуютъ систему криволинейныхъ координатъ, то определитель системы функцій ρ , ρ_1 , ρ_2 , составленный по переменнымъ x , y , z , отъ которыхъ онѣ зависятъ, равенъ произведенію $h_1 h_2$, въ которомъ буквы имѣютъ значеніе, указанное въ § 183-мъ.

5. Если ρ^2 , ρ_1^2 , ρ_2^2 — три всегда вещественныхъ корня уравненія:

$$1 = \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2},$$

то, полагая

$$du = \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}, \quad du_1 = \frac{d\rho_1}{\sqrt{-(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}}, \quad du_2 = \frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2^2 - b^2)(\rho_2^2 - c^2)}},$$

заключаемъ, что уравненіе:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

равносильно

$$(\rho_1^2 - \rho_2^2) \frac{d^2 v}{du^2} + (\rho^2 - \rho_2^2) \frac{d^2 v}{du_1^2} + (\rho^2 - \rho_1^2) \frac{d^2 v}{du_2^2} = 0.$$

6. Если положить

$$\sqrt{l+x} + \frac{y}{2} = u, \quad \sqrt{l-x} - \frac{y}{2} = v, \quad z = \frac{z_1}{\sqrt{l-x}},$$

182

то уравнение:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = (l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}$$

перейдетъ въ

$$\frac{d^2 z_1}{du dv} = -\frac{z_1}{4(u+v)}.$$

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

Составленіе дифференціальныхъ уравненій

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ

§ 186. Всякое уравненіе, представляющее зависимость между функціею и ея производными, называютъ *дифференціальнымъ уравненіемъ*. Мы уже имѣли случай (§ 146) пользоваться дифференціальными уравненіями для разысканія производныхъ отъ нѣкоторыхъ функцій. Уравненія этого рода есть одинъ изъ важнѣйшихъ отдѣловъ математики, подлежащихъ нашему изслѣдованію.

Тѣмъ, что функція отъ нѣкоторой переменнѣй дана, еще не опредѣляется дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ эта функція. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дано уравненіе $y = \varphi(x)$; дифференцируя его, пишемъ: $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$; всякая комбинація этихъ двухъ уравненій дастъ соотношеніе между x , y и $\frac{dy}{dx}$, т.-е. дифференціальное уравненіе, которому y удовлетворитъ. Такъ, напр., дифференцируя функцію:

$$y = e^{2x},$$

находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x};$$

эти же два уравненія даютъ соотношенія:

$$\frac{dy}{dx} = 2y, \quad \frac{dy}{dx} + y = 3e^{2x}, \quad y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5ye^{2x}, \quad y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{5}{2} y \frac{dy}{dx},$$

къ которымъ можно, очевидно, прибавить безчисленное множество другихъ. Если въ этихъ уравненіяхъ принимать y за неизвѣстную, то они будутъ имѣть общее рѣ-

шеніе $y = e^{2x}$; кромѣ того, каждое изъ нихъ можетъ имѣть и, дѣйствительно, имѣеть безчисленное множество другихъ рѣшеній.

§ 187. Можно поставить себѣ задачею комбинировать уравненіе, опредѣляющее функцію, съ уравненіемъ, изъ котораго узнается производная этой самой функціи, такимъ образомъ, чтобы удовлетворить нѣкоторому условію, имѣющемуся въ виду при дальнѣйшемъ изслѣдованіи. Неопредѣленностью подобнаго дѣйствія пользуются, напр., для удаленія изъ даннаго выраженія функціи, не желательной въ дифференціальномъ уравненіи, какъ-то радикала, синуса, показательной функціи, и т. п.

Пусть, напр., дано уравненіе:

$$y = [\varphi(x)]^m.$$

Выводимъ:

$$\frac{dy}{dx} = m\varphi'(x) [\varphi(x)]^{m-1};$$

слѣдовательно, по исключеніи $\varphi(x)^m$,

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{m\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Если дано, напр., уравненіе:

$$y = \sqrt{1-x^2},$$

то

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = -\frac{x}{1-x^2},$$

гдѣ уже нѣтъ радикала.

Пусть будетъ еще

$$y = \sin \varphi(x).$$

Выводимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x);$$

исключая тригонометрическія функціи $\sin \varphi(x)$ и $\cos \varphi(x)$, находимъ:

$$y^2 + \frac{1}{\varphi'(x)^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$$

Можно много привести подобныхъ примѣровъ, но мы здѣсь лишь еще разъ напомнимъ, что дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ данная функція, по самой природѣ своей неопредѣленно. Вотъ почему, какъ мы только-что видѣли, можно самый видъ его подчинить извѣстнымъ условіямъ.

ИСКЛЮЧЕНІЕ ПОСТОЯННЫХЪ

§ 188. Если функція содержитъ въ своемъ выраженіи произвольную постоянную, то можно составить дифференціальное уравненіе безъ этой постоянной, которому данная функція будетъ однако удовлетворять. Задача всегда возможна и опредѣленна. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дано уравненіе:

$$F(x, y, a) = 0, \quad (1)$$

въ которомъ a обозначаетъ произвольную постоянную. Дифференцируемъ его:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} = 0; \quad (2)$$

исключая a изъ уравненій (1) и (2), находимъ искомое дифференціальное уравненіе. Это уравненіе можно найти и другимъ путемъ: стоитъ только, напр., рѣшить уравненіе (1) относительно a и, представивъ его подъ видомъ:

$$\varphi(x, y) = a,$$

продифференцировать; тогда постоянная исключится непосредственно и получится уравненіе:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Вообще, прежде чѣмъ приступить къ дифференцированію, данное уравненіе можно преобразовать какимъ-угодно образомъ; исключеніе постоянной a можетъ быть произведено посредствомъ весьма различныхъ выкладокъ, но конечный результатъ будетъ одинъ и тотъ же во всѣхъ случаяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, когда намъ дано:

$$F(x, y, a) = 0, \quad (1)$$

гдѣ a —произвольно, мы въ правѣ выбрать по своему желанію значеніе для x и соотвѣтственное значеніе для y , а разъ выборъ сдѣланъ, уравненіе (1) опредѣлитъ a и не будетъ болѣе ничего произвольнаго въ выраженіи y черезъ x ; значитъ, $\frac{dy}{dx}$ является вполне опредѣленнымъ. Такъ какъ производная $\frac{dy}{dx}$ опредѣлена при данныхъ x и y , то соотношеніе, связывающее x , y и $\frac{dy}{dx}$, очевидно, также опредѣленное и должно являться однимъ и тѣмъ же при всякомъ способѣ полученія.

§ 189. Когда уравнение съ двумя переменными x и y содержитъ нѣсколько произвольныхъ постоянныхъ, ихъ можно исключить и составить дифференціальное уравненіе, въ которое онѣ болѣе не входятъ, но за то придется ввести ровно столько послѣдовательныхъ производныхъ отъ y , сколько было постоянныхъ.

Пусть будетъ дано уравненіе:

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (1)$$

гдѣ C_1, C_2, \dots, C_n обозначаютъ произвольныя постоянныя. Дифференцируя n разъ подъ рядъ, составимъ n новыхъ уравненій, которыя вмѣстѣ съ даннымъ дадутъ возможность исключить n постоянныхъ. Но той же цѣли мы можемъ достигнуть многими другими путями. Въ самомъ дѣлѣ, можно преобразовать уравненіе (1) до дифференцированія; можно также преобразовать какимъ-угодно способомъ тѣ изъ уравненій, которыя вытекаютъ изъ дифференцированія уравненія (1), подставляя до новаго еще дифференцированія на мѣсто какого-нибудь одного изъ нихъ результатъ его комбинированія со всѣми предшествующими. Можно, напр., исключить постоянную C_1 изъ уравненія (1) и его производной, затѣмъ исключить C_2 изъ полученнаго такимъ образомъ дифференціального уравненія и его производной, и такъ продолжать до тѣхъ поръ, пока не будутъ исключены всѣ постоянныя. Весьма замѣчательно, что всѣ эти методы хотя и требуютъ сильно различающихся между собою выкладокъ, но приводятъ къ одному и тому же конечному результату. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ уравненіе (1) содержитъ n различныхъ постоянныхъ произвольныхъ, то можно, при данномъ значеніи x , выбрать по своему желанію соответственныя значенія для y и его $(n-1)$ первыхъ производныхъ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Но эти n условій опредѣляютъ n постоянныхъ, и y является опредѣленною функціею отъ x ; слѣдовательно, производная $\frac{d^ny}{dx^n}$ — опредѣленна. Такъ какъ эта n -ая производная опредѣленна при данныхъ $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, то уравненіе, связывающее ее съ этими количествами, также опредѣленно и должно являться однимъ и тѣмъ же при всякомъ способѣ его полученія.

§ 190. Чтобы дать примѣръ исключенія постоянныхъ, составимъ дифференціальное уравненіе третьяго порядка, которому удовлетворяетъ функція y , опредѣляемая изъ уравненія:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

выражающаго всѣ круги, нанесенные на плоскости.

Дифференцируемъ три раза:

$$(y - b) \frac{dy}{dx} + x - a = 0,$$

$$(y - b) \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0,$$

$$(y - b) \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

исключая изъ двухъ послѣднихъ уравненій ($y - b$), находимъ:

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \frac{d^3y}{dx^3} - 3 \frac{dy}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0,$$

что и представляетъ искомое дифференціальное уравненіе.

ИСКЛЮЧЕНІЕ ПОСТОЯННЫХЪ ВЪ УРАВНЕНІИ СЪ НѢСКОЛЬКИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМѢННЫМИ

§ 191. Дифференцирование даетъ возможность точно такъ же исключить постоянныя изъ уравненія, въ которое входитъ функція отъ нѣсколькихъ переменныхъ, какъ и въ случаѣ только съ одною независимою переменною.

Пусть будетъ дано уравненіе:

$$\varphi(x, y, a, b, z) = 0,$$

опредѣляющее z , какъ функцію отъ x , y и отъ двухъ постоянныхъ произвольныхъ. Дифференцируя по x , затѣмъ по y , получаемъ два уравненія, которыя вмѣстѣ съ даннымъ даютъ возможность исключить a и b .

Вводя производныя второго порядка, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, мы можемъ исключить пять постоянныхъ; введя производныя третьяго порядка, исключили бы девять постоянныхъ, и т. д.

§ 192. Существуетъ весьма важное различіе между уравненіями, полученными такъ, какъ только что указано, и уравненіями, вытекающими изъ исключенія постоянныхъ въ уравненіяхъ только съ одною независимою переменною. Дѣйствительно, въ этомъ послѣднемъ случаѣ полученное уравненіе имѣетъ ту же степень общности, какъ и данное, и можетъ всецѣло его замѣнять. Точно такъ же, какъ оно было выведено изъ перваго, это послѣднее можетъ быть выведено изъ него, какъ изъ исходнаго. Это—теорема интегральнаго исчисленія, доказательства которой здѣсь привести мы не можемъ, но которая будетъ разобрана нами позднѣе; впрочемъ, можно видѣть теперь же, что все это совершенно иначе въ случаѣ двухъ или нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ: уравненіе въ частныхъ производныхъ отъ функціи гораздо болѣе общее, чѣмъ то, изъ котораго оно получено.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ уравненіе вида:

$$\varphi(x, y, a, b, z) = 0. \quad (1)$$

Беря послѣдовательныя производныя по x и по y , мы можемъ составить два уравненія перваго порядка, три втораго, четыре третьяго, и т. д. Такимъ образомъ, если понадобится ввести производныя втораго порядка, то у насъ будетъ шесть уравненій между x , y , z , $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, которыя, по исключеніи постоян-

ныхъ a и b , дадутъ четыре уравненія между этими различными количествами. Изъ дифференціального же уравненія между $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, наоборотъ, мы можемъ получить только два уравненія второго порядка, дифференцируя по x и по y . Присоединивъ сюда данное, будемъ имѣть только три уравненія вмѣсто четырехъ; слѣдовательно, рассматривая производныя до второго порядка включительно, видимъ, что уравненіе (1) подчиняетъ ихъ большому числу условій, чѣмъ дифференціальное уравненіе, выводимое изъ (1). Различіе усилится, если перейдемъ къ производнымъ третьяго порядка. Данное уравненіе, дифференцированное по x и по y до третьяго порядка включительно, дастъ десять соотношеній между $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^3z}{dx^3}, \frac{d^3z}{dx^2 dy}, \frac{d^3z}{dy^2 dx}, \frac{d^3z}{dy^3}$ и двумя постоянными; такимъ образомъ будетъ восемь соотношеній, независимыхъ отъ постоянныхъ, между x, y, z и производными отъ z до третьяго порядка включительно. Беря же за исходную точку дифференціальное уравненіе, освобожденное отъ постоянныхъ, выводимъ два уравненія второго порядка и три третьяго, что составитъ всего шесть соотношеній между тѣми же производными, которыя первообразное уравненіе подчиняетъ восьми соотношеніямъ. Одно это сближеніе показываетъ, что дифференціальное уравненіе предоставляетъ функціи z болѣе просторъ, чѣмъ первообразное.

§ 193. Можно доказать другимъ путемъ, что уравненіе, полученное посредствомъ исключенія обѣихъ постоянныхъ a и b изъ уравненія:

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0 \quad (1)$$

и его производныхъ, допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, не содержащихся въ первообразномъ уравненіи. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0 \quad (2)$$

будетъ такое дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ, по предположенію, функція z , выведенная изъ уравненія (1), каковы бы ни были значенія постоянныхъ a и b . Прежде всего замѣтимъ, что поверхности, представляемыя уравненіемъ (1), имѣютъ огибающую, которой каждая изъ нихъ касается въ точкѣ; уравненіе этой огибающей поверхности получается чрезъ исключеніе a и b изъ уравненія (1) и его производныхъ по постояннымъ a и b . Пусть

$$\psi(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

есть результатъ такого исключенія. Уравненіе (3) даетъ для z выраженіе въ x и y , удовлетворяющее уравненію (2), потому что въ каждой точкѣ огибающей поверхности количества $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ имѣютъ тѣ же значенія, какъ и для той изъ огибаемыхъ поверхностей, которой она касается въ этой точкѣ, а потому соотношеніе (2), имѣющее мѣсто для всѣхъ точекъ всѣхъ огибаемыхъ поверхностей, будетъ имѣть мѣсто и для огибающей поверхности.

Но можно получить безчисленное множество другихъ уравненій, которыя точно такъ же будутъ обладать свойствомъ уравненія (3). Въ самомъ дѣлѣ, зададимъ между постоянными a и b произвольное соотношеніе $b = f(a)$, тогда уравненіе (1) приметъ видъ:

$$\varphi[x, y, z, a, f(a)] = 0 \quad (4)$$

и будетъ содержать всего одинъ параметръ a , вслѣдствіе чего оно представитъ рядъ поверхностей, огибающая которыхъ касается каждой изъ нихъ не въ одной только точкѣ, а по нѣкоторой линіи. Уравненіе этой огибающей явится результатомъ исключенія a изъ уравненія (4) и его производной по a , и очевидно, что такимъ образомъ получится уравненіе новой поверхности, для каждой точки которой $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ будутъ тѣ же, что и для соотвѣтственно выбранной точки на одной изъ первоначально данныхъ поверхностей; слѣдовательно, уравненіе (2) удовлетворится функціею z , выведенною изъ этого новаго соотношенія. А такъ какъ введеніе произвольной функціи $f(a)$ даетъ возможность получить безчисленное множество различныхъ результатовъ, то, значить, уравненіе (1) очень далеко, какъ мы и предвидѣли, отъ общаго рѣшенія дифференціального уравненія, которое изъ него выводится.

§ 194. Пусть, напр., дано:

$$z = ax + by; \quad (1)$$

выводимъ:

$$\frac{dz}{dx} = a, \quad \frac{dz}{dy} = b;$$

слѣдовательно,

$$z = x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy}. \quad (2)$$

Чтобы найти другія рѣшенія уравненія (2), полагаемъ $b = \varphi(a)$ и исключаемъ a изъ уравненія:

$$z = ax + y\varphi(a) \quad (3)$$

и его производной:

$$0 = x + y\varphi'(a). \quad (4)$$

Изъ уравненія (4) заключаемъ, что a есть функція отъ $\frac{y}{x}$ и, слѣдовательно, исключеніе a приводитъ уравненіе (3) къ виду:

$$z = x F\left(\frac{y}{x}\right), \quad (5)$$

гдѣ F есть функція, видъ которой зависитъ отъ функціи φ ; въ самомъ дѣлѣ, легко показать, что, какова бы ни была функція F , уравненіе (5) удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (2). Дѣйствительно, выводимъ изъ уравненія (5):

$$\frac{dz}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} F'\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{dz}{dy} = F'\left(\frac{y}{x}\right),$$

и, слѣдовательно,

$$z = x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy}.$$

Поверхности, представляемая уравненіемъ (1), будутъ здѣсь плоскости, проходящія черезъ начало. Задавая соотношеніе между обѣими постоянными, получаемъ уравненіе плоскости, движущейся вокругъ начала по произвольному закону и эта плоскость огибаетъ конусъ, уравненіе котораго удовлетворяетъ дифференціальному уравненію совокупности его касательныхъ плоскостей.

§ 195. Предыдущее рѣшеніе всецѣло покоится на геометрическихъ разсужденіяхъ, но можно доказать непосредственно, не обращаясь къ теоріи поверхностей, что уравненіе, получаемое чрезъ исключеніе a изъ

$$F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0 \quad (1)$$

и

$$\frac{dF[x, y, z, a, \varphi(a)]}{da} = 0, \quad (2)$$

дастъ, между $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, x , y , z , то же самое соотношеніе, что и уравненіе:

$$F(x, y, z, a, b) = 0.$$

Чтобы на самомъ дѣлѣ исключить a изъ уравненій (1) и (2), нужно вывести изъ втораго значеніе a въ функціи отъ x , y , z и подставить его въ первое, а чтобы получить въ уравненіи, вытекающемъ изъ такого исключенія, $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, нужно продифференцировать уравненіе (1) по x и по y , принявъ во вниманіе, что a , бывшее постояннымъ, является теперь переменнымъ. Такимъ образомъ будетъ:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{dF}{da} \frac{da}{dx} &= 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} + \frac{dF}{da} \frac{da}{dy} &= 0, \end{aligned}$$

но выраженіе для a таково, что мы имѣемъ тождественно $\frac{dF}{da} = 0$, и предыдущія уравненія приводятся, поэтому, къ уравненіямъ:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} = 0;$$

точно такія же уравненія получаются и при a постоянномъ. Два же эти уравненія можно такъ скомбинировать, чтобы исключить изъ нихъ и изъ даннаго оба количества a и $\varphi(a)$, являющіяся переменными. Вычисленія будутъ абсолютно тѣ же самыя, какъ и въ томъ случаѣ, когда эти количества были постоянными и назывались a и b ; значитъ, и результатъ будетъ точно такой же, что и требовалось доказать.

§ 196. Предыдущія разсужденія могутъ быть обобщены. Если разсматривать функцію отъ n независимыхъ переменныхъ, связанную съ этими n переменными уравненіемъ, содержащимъ n постоянныхъ произвольныхъ, то можно исключить эти n постоянныхъ изъ даннаго уравненія и производныхъ перваго порядка, взятыхъ по n независимымъ переменнымъ; такимъ образомъ составитъ дифференціальное уравненіе перваго порядка, которое, каковы бы ни были постоянныя, будетъ удовлетворяться функціей, опредѣляемой даннымъ уравненіемъ, и, кромѣ того, безчисленнымъ множествомъ другихъ выводимыхъ изъ нея функцій.

Пусть будетъ дано уравненіе:

$$0 = F(u, x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (1)$$

Предположимъ, что между n постоянными C_1, C_2, \dots, C_n выбрано произвольное ихъ число p и что эти выбранныя разсматриваются, какъ произвольныя функціи отъ всѣхъ остальныхъ, такъ что уравненіе (1) содержитъ только $n - p$ постоянныхъ; если продифференцировать это уравненіе по этимъ $n - p$ постояннымъ, въ послѣдовательномъ порядкѣ, то можно исключить эти постоянныя изъ составленныхъ такимъ образомъ уравненій и даннаго; результатъ такого исключенія будетъ уравненіе между u, x_1, x_2, \dots, x_n ; функція u , опредѣляемая изъ этого соотношенія, видъ котораго зависитъ отъ введенныхъ нами произвольныхъ функцій, удовлетворитъ тому же дифференціальному уравненію, какъ и первоначально данная функція, содержащая n постоянныхъ.

Дѣйствительно, разсмотримъ C_1, C_2, \dots, C_p въ уравненіи (1) какъ произвольныя функціи отъ остальныхъ постоянныхъ и продифференцируемъ его по постояннымъ $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$; такимъ образомъ у насъ будетъ $n - p$ уравненій. Изъ этихъ уравненій выводимъ $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$, чтобы подставить ихъ въ данное уравненіе, которое будетъ тогда содержать только u, x_1, x_2, \dots, x_n . Можно утверждать, что производныя $\frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \dots, \frac{du}{dx_n}$ и функція u будутъ имѣть, для данныхъ значеній переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , точно такія же выраженія въ функціи отъ $x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_n$, какъ и въ томъ случаѣ, когда буквы C_1, C_2, \dots, C_n были постоянными. Въ самомъ дѣлѣ, если мы послѣ замѣны въ уравненіи (1) $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$ ихъ значеніями станемъ его дифференцировать для полученія $\frac{du}{dx_1}$, то намъ придется

принять во вниманіе, что буквы C_1, C_2, \dots, C_n не обозначаютъ болѣе постоянныхъ, но представляютъ функціи отъ $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$, которыя сами содержатъ x_1, x_2, \dots, x_n . Уравненіе, полученное посредствомъ дифференцірованія по x_1 , будетъ тогда:

$$\frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{du} \frac{du}{dx_1} + \frac{dF}{dC_{p+1}} \frac{dC_{p+1}}{dx_1} + \dots + \frac{dF}{dC_n} \frac{dC_n}{dx_1} = 0,$$

но, по предположенію, выраженія $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$ даютъ тождественно:

$$\frac{dF}{dC_{p+1}} = 0, \quad \frac{dF}{dC_{p+2}} = 0, \dots, \quad \frac{dF}{dC_n} = 0,$$

и уравненіе приводится къ

$$\frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{du} \frac{du}{dx_1} = 0;$$

совершенно то же самое получается при C_1, C_2, \dots, C_n постоянныхъ.

Поэтому, соотношенія между $u, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \dots, \frac{du}{dx_n}, C_1, C_2, \dots, C_n$ тѣ же самыя, что и при C_1, C_2, \dots, C_n постоянныхъ, и, слѣдовательно, хотя C_1, C_2, \dots, C_p являются функціями отъ $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$, а эти послѣднія количества, въ свою очередь, функціями отъ x_1, x_2, \dots, x_n , ихъ можно исключить совершенно одинаково въ обоихъ случаяхъ, потому что результатъ исключенія не зависитъ отъ обозначенія исключаемой буквы. Итакъ, всегда будетъ одно и то же соотношеніе между функціею u , переменными, отъ которыхъ она зависитъ, и ея производными по этимъ переменнымъ.

Чтобы придать результату наибольшую степень возможной общности, полагаютъ произвольное число p равнымъ $n - 1$.

Пусть, напр., дана функція отъ трехъ переменныхъ:

$$u = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3; \quad (1)$$

исключая постоянныя изъ этого уравненія и его производныхъ по x_1, x_2 и x_3 , находимъ:

$$x_1 \frac{du}{dx_1} + x_2 \frac{du}{dx_2} + x_3 \frac{du}{dx_3} = u. \quad (2)$$

Пусть

$$C_2 = \varphi(C_1), \quad C_3 = \psi(C_1);$$

если исключимъ C_1 изъ уравненій:

$$\begin{aligned} u &= C_1 x_1 + x_2 \varphi(C_1) + x_3 \psi(C_1), \\ 0 &= x_1 + x_2 \varphi'(C_1) + x_3 \psi'(C_1), \end{aligned} \quad (3)$$

то получимъ уравненіе между x_1 , x_2 , x_3 и u , содержащее двѣ произвольныя функціи φ и ψ , и притомъ такое, что функція u , опредѣляемая изъ него, удовлетворяетъ уравненію (2).

Каковы бы ни были функціи φ и ψ , изъ (3) выводимъ:

$$C_1 = F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right);$$

слѣдовательно, u есть однородная функція первой степени вида:

$$u = x_1 F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right);$$

легко убѣдиться, что эта функція удовлетворяетъ уравненію (2).

ИСКЛЮЧЕНІЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХЪ ФУНКЦІЙ

§ 197. Предыдущіе выводы позволяютъ думать, что дифференцированіе даетъ возможность не только исключить постоянныя, но и избавиться отъ произвольныхъ функцій въ уравненіи, которое ихъ содержитъ. Сейчасъ мы докажемъ, что это дѣйствительно такъ, и сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній относительно такого исключенія.

Здѣсь не можетъ быть и рѣчи о функціяхъ съ одною только переменною. Присутствіе въ уравненіи, опредѣляющемъ такую функцію, еще нѣкоторой произвольной функціи превратило бы первую въ совершенно произвольную и, значитъ, не было бы мѣста спеціальному изслѣдованію.

Разсмотримъ случай, гдѣ функція z зависитъ отъ двухъ независимыхъ переменныхъ x и y . Произвольныя функціи, входящія въ уравненіе, связывающее x , y и z , могутъ быть двухъ сортовъ. Разсматриваемое уравненіе можетъ заключать, подъ знакомъ произвольной функціи, данную функцію отъ x , y и z ; такъ, напр., въ уравненіи:

$$x + y + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

φ обозначаетъ произвольную функцію отъ суммы $x^2 + y^2 + z^2$. Въ другихъ случаяхъ уравненіе содержитъ одну или нѣсколько произвольныхъ функцій отъ количествъ, выраженіе которыхъ въ x , y , z измѣняется вмѣстѣ съ самимъ видомъ функцій, такъ какъ они опредѣляются изъ прочихъ уравненій, куда входятъ тѣ же функціи съ своими производными; такъ, напр., въ системѣ:

$$\begin{aligned} z &= (x + \alpha)[y + \varphi(\alpha)], \\ x + \varphi(\alpha) + (y + \alpha)\varphi'(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

исключеніе α дастъ между x , y и z соотношеніе, которое, очевидно, зависитъ отъ вида, выбраннаго для произвольной функціи $\varphi(\alpha)$, но α можетъ быть выражено въ

функція отъ x , y и z только въ томъ случаѣ, если задана эта функція φ . Такъ, напр., полагая $\varphi(x) = \alpha$, находимъ:

$$\alpha = \frac{x + y}{2},$$

а принимая $\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}$, выводимъ:

$$\alpha = \sqrt{\frac{y}{x}};$$

значитъ, функція φ ведетъ, въ обоихъ случаяхъ, къ весьма различнымъ выраженіямъ.

Ясно, что если уравненіе, связывающее z съ x и y , содержитъ n произвольныхъ функцій $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, ..., $\varphi_n(x_n)$, то нужно для ихъ исключенія имѣть еще n другихъ уравненій, содержащихъ тѣ же самыя функціи, при чемъ туда могутъ входить какъ ихъ производныя, такъ и самыя переменныя α_1 , α_2 , ..., α_n .

Напр., три уравненія:

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x)\psi'(\beta) + \psi(\beta)\varphi'(x), \\ x &= \varphi(x) + \psi(\beta), \\ y &= \varphi'(x) + \psi'(\beta) \end{aligned}$$

даютъ, между x , y и z , соотношеніе, зависящее отъ вида функцій φ и ψ .

§ 198. Разсмотримъ сначала простѣйшій случай, когда произвольная функція берется отъ данной функціи переменныхъ x , y и z и когда заданное уравненіе имѣетъ видъ:

$$v = \varphi(u), \tag{1}$$

при чемъ v и u данныя функціи отъ x , y и z , а φ —произвольная функція.

Беря производную отъ уравненія (1) по x , затѣмъ по y , находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dx} &= \varphi'(u) \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} \right), \\ \frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dy} &= \varphi'(u) \left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} \right); \end{aligned}$$

цѣля первое изъ этихъ уравненій на второе, пишемъ:

$$\frac{\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dx}}{\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dy}} = \frac{\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx}}{\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy}},$$

или

$$\frac{dz}{dx} \left(\frac{du}{dy} \frac{dv}{dz} - \frac{du}{dz} \frac{dv}{dy} \right) + \frac{dz}{dy} \left(\frac{dv}{dx} \frac{du}{dz} - \frac{dv}{dz} \frac{du}{dx} \right) = \frac{du}{dx} \frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy} \frac{dv}{dx}.$$

Итакъ, каковы бы ни были функции u и v , это уравненіе содержитъ частныя производныя $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ въ первой степени.

§ 199. Разсмотримъ, во-вторыхъ, болѣе общій случай, когда функция z опредѣляется системою $k+1$ уравненій между x, y, z и k произвольными функциями, которыя должны быть исключены вмѣстѣ съ переменными, отъ которыхъ онѣ зависятъ.

Пусть $\varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2), \dots, \varphi_k(\alpha_k)$ будутъ тѣ k произвольныхъ функций, которыя могутъ входить вмѣстѣ со своими производными въ $k+1$ данныхъ уравненій; начнемъ съ вычисленія частныхъ производныхъ $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \dots$, въ функции отъ x, y, z , и функций $\varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2), \dots, \varphi_k(\alpha_k)$ съ ихъ производными. Для этого продифференцируемъ сначала всѣ уравненія по x , затѣмъ по y , и составимъ такимъ образомъ $2(k+1)$ новыхъ уравненій, содержащихъ, вмѣстѣ съ $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, производныя по x и по y отъ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Значитъ, мы можемъ исключить эти производныя и вычислить $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$. Производныхъ второго порядка отъ $k+1$ данныхъ уравненій будетъ $3(k+1)$; онѣ содержатъ, сверхъ $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dx dy}$, производныя перваго и втораго порядка отъ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Если замѣнить въ нихъ производныя перваго порядка, $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d\alpha_1}{dx}, \frac{d\alpha_1}{dy}, \dots$, ихъ значеніями, выведенными изъ предыдущихъ уравненій, и затѣмъ исключить $3k$ производныхъ втораго порядка $\frac{d^2\alpha_1}{dx^2}, \frac{d^2\alpha_1}{dx dy}, \frac{d^2\alpha_1}{dy^2}, \dots$, то останется три уравненія, изъ которыхъ можно вывести $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx dy}$ и $\frac{d^2z}{dy^2}$. Точно такъ же можно опредѣлить производныя отъ z какого-угодно порядка. Ихъ выраженія будутъ содержать, вмѣстѣ съ x, y, z , функции $\varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2), \dots, \varphi_k(\alpha_k)$ и производныя отъ этихъ функций, которыя войдутъ посредствомъ дифференцированія. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что если уравненіе содержитъ функцию $\varphi(\alpha)$, то производная отъ этого уравненія, по той или по другой изъ независимыхъ переменныхъ x и y , будетъ содержать $\varphi'(\alpha)$; второе дифференцированіе введетъ $\varphi''(\alpha)$, и т. д. Слѣдовательно, вычисленныя по этому способу производныя отъ z до n -го порядка включительно будутъ содержать k функций $\varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2), \dots, \varphi_k(\alpha_k)$ и ихъ производныя порядка ниже $(n+1)$ -го, что составитъ всего $(n+1)k$ функций, подлежащихъ исключенію для полученія искомага соотношенія между z и его производными. Всѣхъ производныхъ функций отъ z , до n -го порядка, вмѣстѣ съ самою функциею z будетъ $\frac{n(n+1)}{2}$ и, слѣдовательно, каково бы ни было k , можно выбрать n достаточно большимъ, чтобы

$$\frac{n(n+1)}{2} > (n+1)k.$$

Въ такомъ случаѣ число уравненій превзойдетъ число исключаемыхъ количествъ и самое исключеніе всегда будетъ возможно.

§ 200. Если функция $\varphi(\alpha)$ входитъ въ уравненіе, производная отъ этого уравненія по x или по y всегда содержитъ $\varphi'(\alpha)$. Отсюда вытекаетъ, что, вообще, всякая

производная отъ z будетъ содержать такую производную отъ функции φ , которая не входитъ въ производныя низшаго порядка. Но въ нѣкоторыхъ исключительныхъ случаяхъ эта новая функция, введенная посредствомъ дифференцированія, исчезаетъ при исключеніяхъ и не входитъ уже въ конечный результатъ.

Пусть будутъ даны, напр., уравненія:

$$z = \frac{|y - \varphi(x)|^2}{\varphi'(x)},$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(x)}{\varphi'(x)}.$$

Дифференцируя эти уравненія по x , затѣмъ по y , пишемъ:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-2[y - \varphi(x)]\varphi'(x)^2 - \varphi''(x)[y - \varphi(x)]^2}{\varphi'(x)^2} \frac{dx}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2[y - \varphi(x)] \left[1 - \varphi'(x) \frac{dx}{dy} \right] \varphi'(x) - [y - \varphi(x)]^2 \varphi''(x) \frac{dx}{dy}}{\varphi'(x)^2},$$

$$1 + \frac{dx}{dx} = \frac{-\varphi'(x)^2 \frac{dx}{dx} - \varphi''(x)[y - \varphi(x)] \frac{dx}{dx}}{\varphi'(x)^2},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\left[1 - \varphi'(x) \frac{dx}{dy} \right] \varphi'(x) - \varphi''(x) \frac{dx}{dy} [y - \varphi(x)]}{\varphi'(x)^2}.$$

Изъ двухъ послѣднихъ равенствъ выводимъ:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{\varphi'(x)^2}{-2\varphi'(x)^2 - [y - \varphi(x)]\varphi''(x)},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\varphi'(x)}{2\varphi'(x)^2 + [y - \varphi(x)]\varphi''(x)},$$

а послѣ подстановки этихъ значеній въ остальные два равенства получаемъ:

$$\frac{dz}{dx} = y - \varphi(x),$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y - \varphi(x)}{\varphi'(x)}.$$

Итакъ, производная $\varphi''(x)$ хотя и входитъ въ уравненія, служащія для опредѣленія производныхъ перваго порядка $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, но однако исчезаетъ въ окончательномъ ихъ выраженіи.

§ 201. Важно отмѣтить, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, особый случай, когда вычисленіе производныхъ отъ z не вводитъ новыхъ производныхъ отъ произвольныхъ функций, содержащихся въ данныхъ уравненіяхъ. Чтобы понять, какія слѣдствія

включить за собою это обстоятельство въ занимающей насъ теоріи, докажемъ слѣдующую теорему:

Если функція z опредѣляется двумя уравненіями вида:

$$\left. \begin{aligned} y &= F_1[x, \alpha, \varphi(x), \varphi'(x)], \\ z &= F_2[x, \alpha, \varphi(x), \varphi'(x)], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ F_1 и F_2 —данныя функціи, а $\varphi(x)$ —произвольная функція и исключеніе функціи $\varphi(x)$ возможно между производными перваго порядка $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, то уравненіе между $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, къ которому оно приводитъ, первой степени относительно $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, всякій разъ какъ производныя $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ содержатъ въ своемъ выраженіи функцію $\varphi''(x)$.

Для упрощенія положимъ $\frac{dz}{dx} = p, \frac{dz}{dy} = q$, имѣя въ виду отличить такимъ образомъ производную p отъ частной производной $\frac{dF_2}{dx}$, въ которой α рассматривается какъ постоянная, тогда какъ при вычисленіи p за постоянную принимается y .

Уравненія (1), дифференцірованныя по x при y постоянномъ, даютъ:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx}, \\ p &= \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

гдѣ $\frac{dF_1}{d\alpha}$ и $\frac{dF_2}{d\alpha}$ представляютъ производныя отъ F_1 и F_2 по буквѣ α , рассматриваемой какъ переменная всюду, куда она входитъ въ ихъ выраженіяхъ, т.-е. одинаково какъ въ тѣхъ членахъ, гдѣ она встрѣчается одна, такъ и подъ знаками $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$.

Приравнивая другъ другу значенія частной производной $\frac{d\alpha}{dx}$, выведенныя изъ уравненій (2), находимъ:

$$p = \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_2}{d\alpha} \cdot \frac{\frac{dF_1}{d\alpha}}{\frac{dF_1}{dx}};$$

дифференцируя уравненія (1) по y при x постоянномъ, получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{dF_1}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy}, \\ q &= \frac{dF_2}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy} \end{aligned} \right\}$$

и, слѣдовательно,

$$q = -\frac{\frac{dF_2}{dx}}{\frac{dF_1}{dx}}.$$

Вообще, эти выраженія для p и q будутъ содержать $\varphi''(x)$, такъ какъ эта производная *обязательно* входитъ и въ $\frac{dF_1}{dx}$, и въ $\frac{dF_2}{dx}$: она можетъ исчезнуть только случайно, являясь общимъ множителемъ для обѣихъ производныхъ. Но если этого нѣтъ, то $\varphi''(x)$ можно исключить не иначе, какъ вмѣстѣ съ дробью $-\frac{\frac{dF_2}{dx}}{\frac{dF_1}{dx}}$, которая только одна и содержитъ эту производную; результатъ такого исключенія необходимо будетъ:

$$p = \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dx} q.$$

Если существуетъ соотношеніе между x, y, z, p, q , то возможно далѣе исключить $x, \varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ между этимъ уравненіемъ и двумя заданными, не содержащими ни p , ни q , такъ что результатъ необходимо будетъ линейнымъ относительно p и q .

Уравненія:

$$z = \frac{[y - \varphi(x)]^2}{\varphi'(x)},$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(x)}{\varphi'(x)}$$

приводятъ къ соотношенію:

$$r = pq,$$

не линейному относительно p и q . Дѣйствительно, производныя $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, которыя мы изъ нихъ выводимъ, не содержатъ $\varphi''(x)$, какъ того и требуетъ предыдущая теорема.

УРАВНЕНІЯ ВЪ ЧАСТНЫХЪ ПРОИЗВОДНЫХЪ РАЗЛИЧНЫХЪ КЛАССОВЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 202. Мы рассмотримъ послѣдовательно главные классы поверхностей, изслѣдованныхъ геометрами. Приложение методовъ, которымъ посвящена эта глава, даетъ возможность исключать произвольныя функціи, входящія въ общее уравненіе поверхностей, и получать такимъ образомъ дифференціальное уравненіе, характеризующее каждый классъ.

Цилиндрическія поверхности.—Цилиндрическая поверхность образуется движениемъ прямой параллельно нѣкоторой неподвижной прямой. Пусть

$$\left. \begin{aligned} x &= az + \alpha, \\ y &= bz + \beta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

будутъ уравненія движущейся прямой, гдѣ a и b —двѣ постоянныя, а α и β —двѣ переменныя, связанныя уравненіемъ, такъ какъ безъ этого условія прямая могла бы проходить черезъ всѣ точки пространства и законъ ея движенія пересталъ бы быть опредѣленнымъ.

Итакъ, предположимъ, что

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad (2)$$

при чемъ функція φ —вполнѣ произвольна и частный видъ ея отличаетъ одну цилиндрическую поверхность отъ другой. Исключая α и β изъ уравненій (1) и (2), получаемъ:

$$y - bz = \varphi(x - az); \quad (3)$$

это — общее уравненіе цилиндрическихъ поверхностей.

Дифференцируя это уравненіе по x , затѣмъ по y , находимъ:

$$\begin{aligned} -b \frac{dz}{dx} &= \varphi'(x - az) \left(1 - a \frac{dz}{dx}\right), \\ 1 - b \frac{dz}{dy} &= -a \varphi'(x - az) \frac{dz}{dy}; \end{aligned}$$

исключая же произвольную функцію $\varphi'(x - az)$ и дѣлая приведеніе, выводимъ:

$$a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} = 1, \quad (4)$$

что представляетъ дифференціальное уравненіе всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей, производящія которыхъ — параллельны данной прямой. Оно выражаетъ, въ чемъ не трудно убѣдиться, что касательная плоскость въ каждой точкѣ — параллельна этой прямой.

Чтобы исключить a и b и получить свойство, общее всѣмъ цилиндрическимъ поверхностямъ и не зависящее отъ направленія производящихъ, нужно продифференцировать уравненіе (4) по x , затѣмъ по y ; находимъ:

$$a \frac{d^2z}{dx^2} + b \frac{d^2z}{dx dy} = 0, \quad a \frac{d^2z}{dx dy} + b \frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

и, слѣдовательно,

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2} \frac{d^2z}{dy^2};$$

это уравненіе соотвѣтствуетъ всѣмъ цилиндрическимъ поверхностямъ, но оно соотвѣтствуетъ также, какъ мы увидимъ, и безчисленному множеству другихъ поверхностей.

§ 203. Коническія поверхности. — Коническая поверхность образуется движеніемъ прямой, проходящей черезъ неподвижную точку. Если α , β , γ — координаты такой точки, то уравненія вращающейся прямой будутъ вида:

$$\left. \begin{aligned} x - \alpha &= m(z - \gamma), \\ y - \beta &= n(z - \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ m и n связаны уравненіемъ, такъ какъ безъ этого условія прямая могла бы проходить черезъ всѣ точки пространства и законъ ея движенія пересталъ бы быть опредѣленнымъ. Итакъ, предположимъ, что

$$m = \varphi(n), \quad (2)$$

при чемъ функція φ — произвольна и видъ ея отличаетъ одну коническую поверхность отъ другой. Исключая m и n изъ (1) и (2), находимъ общее уравненіе коническихъ поверхностей:

$$\frac{x - \alpha}{z - \gamma} = \varphi\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right); \quad (3)$$

дифференцируемъ это уравненіе по x , затѣмъ по y :

$$\begin{aligned} \frac{(z - \gamma) - \frac{dz}{dx}(x - \alpha)}{(z - \gamma)^2} &= -\varphi'\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right) \frac{dz}{dx} \frac{y - \beta}{(z - \gamma)^2}, \\ -\frac{(x - \alpha) \frac{dz}{dy}}{(z - \gamma)^2} &= \varphi'\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right) \frac{(z - \gamma) - \frac{dz}{dy}(y - \beta)}{(z - \gamma)^2}; \end{aligned}$$

исключивъ отсюда $\varphi'\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right)$ и сдѣлавъ приведенія, получимъ:

$$(x - \alpha) \frac{dz}{dx} + (y - \beta) \frac{dz}{dy} = z - \gamma. \quad (4)$$

что представляетъ уравненіе въ частныхъ производныхъ коническихъ поверхностей, вершина которыхъ имѣетъ координатами α , β , γ ; оно выражаетъ; въ чемъ не трудно убѣдиться, что всѣ касательныя плоскости проходятъ черезъ вершину конуса.

Чтобы исключить α , β , γ и получить свойство, общее всѣмъ коническимъ поверхностямъ и не зависящее отъ положенія вершины, нужно продифференцировать уравненіе (4) по x , затѣмъ по y ; находимъ:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dx} + (y - \beta) \frac{d^2z}{dydx} + (x - \alpha) \frac{d^2z}{dx^2}, \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{dz}{dy} + (x - \alpha) \frac{d^2z}{dx dy} + (y - \beta) \frac{d^2z}{dy^2},\end{aligned}$$

и, слѣдовательно, по уничтоженіи общихъ членовъ и исключеніи отношенія $\frac{y - \beta}{x - \alpha}$,

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2} \frac{d^2z}{dy^2};$$

это уравненіе уже было найдено для цилиндрическихъ поверхностей.

§ 204. Поверхности вращения. — Поверхности вращения образуются вращеніемъ линіи, безъ измѣненія ея вида, вокругъ неподвижной прямой такимъ образомъ, что каждая изъ ея точекъ описываетъ кругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ этой прямой и центръ его расположенъ на ней.

Пусть

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

будутъ уравненія неподвижной прямой, служащей осью поверхности. Любой изъ этихъ круговъ можетъ быть разсмотрѣнъ, какъ пересѣченіе съ плоскостью, перпендикулярною къ прямой, сферы съ центромъ въ произвольной точкѣ этой прямой (напр., въ точкѣ, координаты которой $x = m$, $y = n$, $z = 0$). Значитъ уравненія такого круга будутъ вида:

$$\left. \begin{aligned}(x - m)^2 + (y - n)^2 + z^2 &= R^2, \\ ax + by + z &= k,\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при чемъ существуетъ зависимость между k и R , безъ которой кругъ могъ бы проходить черезъ всякую точку пространства и никакой поверхности не получилось бы. Итакъ, предположимъ, что

$$k = \varphi(R^2); \quad (2)$$

исключеніе k и R изъ уравненій (1) и (2) даетъ:

$$ax + by + z = \varphi[(x - m)^2 + (y - n)^2 + z^2], \quad (3)$$

что представляетъ общее уравненіе поверхностей вращения.

Дифференцируемъ это уравненіе по x , затѣмъ по y :

$$\begin{aligned} a + \frac{dz}{dx} &= 2\varphi'[(x-m)^2 + (y-n)^2 + z^2] \left[(x-m) + z \frac{dz}{dx} \right], \\ b + \frac{dz}{dy} &= 2\varphi'[(x-m)^2 + (y-n)^2 + z^2] \left[(y-n) + z \frac{dz}{dy} \right]; \end{aligned}$$

исключая φ' и дѣлая приведенія, находимъ:

$$a(y-n) - b(x-m) + (y-n - bz) \frac{dz}{dx} + (az - x + m) \frac{dz}{dy} = 0,$$

что представляетъ дифференціальное уравненіе поверхностей вращенія; оно выражаетъ, что нормаль встрѣчаетъ ось. Если предположить ось поверхности совпадающей съ осью z -овъ, то

$$a = 0, \quad b = 0, \quad m = 0, \quad n = 0,$$

и дифференціальное уравненіе приметъ видъ:

$$y \frac{dz}{dx} - x \frac{dz}{dy} = 0;$$

уравненіе въ конечномъ видѣ, въ этомъ случаѣ, есть

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

§ 205. Конюиды. — Конюидъ есть поверхность, образуемая движеніемъ нѣкоторой прямой, скользящей по данной прямой параллельно неподвижной плоскости.

Примемъ за неподвижную плоскость, параллельно которой должна перемѣщаться производящая, плоскость XU и зададимъ уравненіями $x = mz$, $y = nz$ ту прямую, по которой она скользитъ. Уравненія производящей будутъ вида:

$$z = \gamma, \quad y = \alpha x + \beta;$$

чтобы она встрѣчала направляющую, должно существовать равенство:

$$n\gamma = \alpha m\gamma + \beta,$$

и, слѣдовательно, уравненія производящей примутъ видъ

$$z = \gamma, \quad y - n\gamma = \alpha(x - m\gamma); \quad (1)$$

чтобы движеніе было опредѣленнымъ, необходима зависимость между α и γ , — напр., пусть

$$\gamma = \varphi(\alpha); \quad (2)$$

исключая α и γ изъ уравненій (1) и (2), получаемъ общее уравненіе коноидовъ:

$$z = \varphi\left(\frac{y - nz}{x - mz}\right).$$

Дифференцируя его по x , затѣмъ по y , находимъ:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-n \frac{dz}{dx}(x - mz) - (y - nz)\left(1 - m \frac{dz}{dx}\right)}{(x - mz)^2} \varphi'\left(\frac{y - nz}{x - mz}\right),$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\left(1 - n \frac{dz}{dy}\right)(x - mz) + m \frac{dz}{dy}(y - nz)}{(x - mz)^2} \varphi'\left(\frac{y - nz}{x - mz}\right),$$

откуда, по исключеніи φ' и нѣкоторыхъ приведеній,

$$(x - mz) \frac{dz}{dx} + (y - nz) \frac{dz}{dy} = 0,$$

что представляетъ дифференціальное уравненіе коноидовъ. Если принять за директрису ось z -овъ, то $m = 0$, $n = 0$; уравненіе въ конечномъ видѣ будетъ:

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

а дифференціальное:

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 0.$$

§ 206. Дифференціальныя уравненія разсмотрѣнныхъ поверхностей до сихъ поръ были перваго порядка; тѣ поверхности, которыя намъ остается еще изслѣдовать, имѣютъ дифференціальныя уравненія втораго и третьаго порядка; для упрощенія введемъ слѣдующее обозначеніе, обычное въ вопросахъ, относящихся къ теоріи поверхностей.

Если уравненіе поверхности есть

$$z = \varphi(x, y),$$

то будемъ полагать

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t$$

и, слѣдовательно,

$$dz = p dx + q dy,$$

$$d^2z = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2,$$

$$\frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{dq}{dy} = t.$$

§ 207. Поверхность, образуемая движением некоторой прямой, скользящей по неподвижной прямой.—Примем за неподвижную прямую ось z -овъ; уравнения производящей—вида:

$$y = \gamma x, \quad z = ax + b.$$

Чтобы эта прямая образовала определенную поверхность, нужно, чтобы a и b были данными функциями отъ γ ; полагая

$$a = \varphi(\gamma), \quad b = \psi(\gamma),$$

пишемъ уравнения производящей въ видѣ:

$$y = \gamma x, \quad z = x\varphi(\gamma) + \psi(\gamma), \quad (1)$$

откуда, по исключеніи γ ,

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right); \quad (2)$$

это—общее уравненіе разсматриваемыхъ поверхностей; оно содержитъ двѣ произвольныя функціи. Для исключенія φ и ψ можно было бы, согласно изложенному методу, составить производныя отъ уравненія (2) по x и по y , но проще и изящнѣе продифференцировать уравненія (1), считая x и y за переменныя, а γ за постоянную. Это приводитъ къ разсмотрѣнію на поверхности двухъ бесконечно-близкихъ точекъ, расположенныхъ на одной и той же производящей; такимъ образомъ получаемъ:

$$dy = \gamma dx, \quad dz = \varphi(\gamma) dx. \quad (3)$$

Въ послѣднемъ уравненіи замѣняемъ dz черезъ $pdx + qdy$, затѣмъ дѣлимъ на dx и, замѣчая, что, по уравненіямъ (3), $\frac{dy}{dx} = \gamma = \frac{y}{x}$, находимъ:

$$p + q \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4)$$

Чтобы двѣ функціи, $p + q \frac{y}{x}$ и $\frac{y}{x}$, зависѣли одна отъ другой, необходимо и достаточно (§ 73), чтобы ихъ опредѣлитель равнялся нулю, а это сводится къ пропорціональности ихъ производныхъ, такъ какъ здѣсь дѣло идетъ о двухъ функціяхъ отъ двухъ переменныхъ; такимъ образомъ, уравненіе (4) равносильно слѣдующему:

$$\frac{d\left(p + q \frac{y}{x}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{dx},$$

$$\frac{d\left(p + q \frac{y}{x}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{dy},$$

т.-е.

$$\frac{r + s \frac{y}{x} - q \frac{y}{x^2}}{s + t \frac{y}{x} + \frac{q}{x}} = -\frac{y}{x},$$

или, послѣ приведенія,

$$ty^2 + 2sxy + rx^2 = 0;$$

это—дифференціальное уравненіе разсматриваемыхъ поверхностей: r, s, t обозначаютъ здѣсь производныя второго порядка, опредѣленныя выше.

§ 208. Косыя поверхности съ направляющею плоскостью.—Косою поверхностью съ направляющею плоскостью называется поверхность, образуемая движеніемъ прямой параллельно неподвижной плоскости.

Принимаемъ за плоскость xy неподвижную плоскость, носящую названіе *направляющей плоскости*; уравненія производящей:

$$z = \gamma, \quad y = \alpha x + \beta,$$

гдѣ α и β —функціи отъ γ , видъ которыхъ опредѣляетъ частную поверхность. По этому можно положить

$$\alpha = \varphi(\gamma), \quad \beta = \psi(\gamma);$$

и, значить, общее уравненіе косыхъ поверхностей съ направляющими плоскостями будетъ

$$y = x\varphi(z) + \psi(z); \tag{1}$$

дифференцируемъ это уравненіе, оставляя z постояннымъ,

$$dy = dx\varphi'(z); \tag{2}$$

кромѣ того, при z постоянномъ

$$0 = p dx + q dy$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q},$$

а это придастъ уравненію (2) слѣдующій видъ:

$$p + q\varphi'(z) = 0.$$

По этому равенству отношеніе $\frac{p}{q}$ есть функція отъ z ; для этого необходимо и

достаточно, какъ мы только-что говорили въ предыдущемъ параграфѣ, чтобы ихъ производныя были пропорціональны, т.-е. чтобы

$$\frac{\frac{d}{dx} \frac{p}{q}}{\frac{d}{dy} \frac{p}{q}} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}},$$

или

$$\frac{qr - sp}{sq - tp} = \frac{p}{q},$$

а по освобожденіи отъ знаменателей

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0;$$

это—дифференціальное уравненіе косыхъ поверхностей съ направляющею плоскостью.

§ 209. Развертывающіяся поверхности.— Мы опредѣлимъ развертывающуюся поверхность, какъ огибающую положеній подвижной плоскости. Мы уже нашли (§ 112), что уравненіе такой поверхности получается по исключеніи α изъ двухъ уравненій слѣдующаго вида:

$$z = x\varphi(\alpha) + y\psi(\alpha) + F(\alpha), \quad (1)$$

$$0 = x\varphi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + F'(\alpha). \quad (2)$$

Чтобы исключить произвольныя функціи, дифференцируемъ первое изъ нихъ по x и принимаемъ во вниманіе второе:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(\alpha); \quad (3)$$

дифференцируя то же уравненіе по y и принимая во вниманіе второе, находимъ:

$$\frac{dz}{dy} = \psi(\alpha); \quad (4)$$

такъ какъ $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ — функціи отъ одной и той же переменнй α , то можно исключить α изъ двухъ уравненій (3) и (4) и тогда получится соотношеніе вида:

$$\frac{dz}{dx} = F\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

т.-е., по принятому нами обозначенію,

$$p = F(q). \quad (5)$$

Чтобы исключить функцию F , дифференцируемъ уравнение (5) по x , затѣмъ по y :

$$\begin{aligned} r &= F'(q)s, \\ s &= F'(q)t, \end{aligned}$$

откуда

$$r't = s^2;$$

это—уравнение въ частныхъ производныхъ развертывающихся поверхностей.

§ 210. Всякая развертывающаяся поверхность есть геометрическое мѣсто касательныхъ къ кривой, называемой ребромъ возврата этой поверхности. Принимая это свойство за опредѣленіе, можно придти къ тому же самому дифференціальному уравненію.

Дѣйствительно, уравненія касательной къ какой-нибудь кривой будутъ:

$$\left. \begin{aligned} v - z &= \frac{dz}{dx}(t - x), \\ u - y &= \frac{dy}{dx}(t - x), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ z и y суть функціи отъ x , опредѣляемыя уравненіями кривой. Такъ какъ буква x обозначаетъ здѣсь параметръ, то замѣняемъ ее буквою α ; кромѣ того, для полной аналогіи съ предыдущими задачами замѣняемъ t, u, v , координаты точки поверхности, буквами x, y, z , а z и y функціями $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$; пишемъ:

$$\left. \begin{aligned} z - \varphi(\alpha) &= \varphi'(\alpha)(x - \alpha), \\ y - \psi(\alpha) &= \psi'(\alpha)(x - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Отсюда нужно исключить α и произвольныя функціи φ и ψ .

Дифференцируя оба уравненія (2) по x , находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} - \varphi'(\alpha) \frac{d\alpha}{dx} &= \varphi'(\alpha) \left(1 - \frac{d\alpha}{dx}\right) + \varphi''(\alpha)(x - \alpha) \frac{d\alpha}{dx}, \\ - \psi'(\alpha) \frac{d\alpha}{dx} &= \psi'(\alpha) \left(1 - \frac{d\alpha}{dx}\right) + \psi''(\alpha)(x - \alpha) \frac{d\alpha}{dx}; \end{aligned}$$

изъ этихъ двухъ уравненій исключаемъ $\frac{d\alpha}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(\alpha) - \frac{\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \psi'(\alpha);$$

такимъ образомъ, $\frac{dz}{dx}$ зависитъ только отъ α . Такъ же увидимъ, что $\frac{dz}{dy}$ зависитъ тоже только отъ α . Изъ этого заключаемъ, что существуетъ, какъ и въ § 209-мъ соотношеніе вида:

$$\frac{dz}{dx} = F\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

изъ котораго выводимъ, подобно предыдущему,

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2} \frac{d^2z}{dy^2}.$$

§ 211. Последнее уравненіе можно получить еще и другимъ путемъ. Касательная плоскость къ развертывающейся поверхности — одна и та же по всей длинѣ производящей. Ищемъ, вообще, условія, при которыхъ одна и та же касательная плоскость къ поверхности имѣла бы безчисленное множество точекъ соприкосновенія.

Уравненіе касательной плоскости въ точкѣ, координаты которой x, y, z , есть

$$v - z = p(t - x) + q(u - y);$$

при безконечно-маломъ измѣненіи x, y, z , чтобы плоскость оставалась тою же самою, необходимо, чтобы $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ не измѣнялись, т.-е. чтобы ихъ дифференціалы равнялись нулю; слѣдовательно, будутъ одновременно равенства:

$$0 = \frac{d^2z}{dx^2} dx - \frac{d^2z}{dx dy} dy, \quad 0 = \frac{d^2z}{dx dy} dx + \frac{d^2z}{dy^2} dy;$$

приравнивая другъ другу оба значенія $\frac{dy}{dx}$, находимъ:

$$\frac{d^2z}{dx^2} \frac{d^2z}{dy^2} = \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2. \quad (1)$$

Такимъ образомъ, если касательная плоскость касается поверхности по непрерывной линіи, то предыдущее уравненіе будетъ удовлетворено во всѣхъ точкахъ этой линіи. Съ другой стороны, если поверхность есть геометрическое мѣсто ряда линій, вдоль которыхъ касательная плоскость остается одною и тою же, однимъ словомъ если она — огибающая положеній подвижной плоскости, то уравненіе (1) должно имѣть мѣсто въ какой-угодно точкѣ поверхности, иначе говоря, оно будетъ дифференціальнымъ уравненіемъ этой послѣдней.

Замѣтимъ при этомъ, что геометрическое истолкованіе уравненія (1) весьма просто; въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе можетъ быть написано въ видѣ:

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t},$$

т.-е.

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dp}{dy}} = \frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dq}{dy}};$$

слѣдовательно, оно выражаетъ, что производныя функцій p и q пропорціональны и, значить, зависятъ одна отъ другой, иными словами, существуетъ соотношеніе вида:

$$p = \varphi(q).$$

Изъ этого соотношенія между двумя коэффициентами уравненія касательной плоскости видно, что если требуется провести къ такой поверхности касательную плоскость параллельно данной, то задача становится вообще невозможною.

§ 212. *Линейчатая поверхность.* — Болѣе общее уравненіе поверхностей, образуемыхъ движеніемъ прямой, является, очевидно, слѣдствіемъ исключенія параметра α изъ двухъ уравненій вида:

$$\left. \begin{aligned} z &= x\varphi(\alpha) + \alpha, \\ y &= x\psi(\alpha) = \omega(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Дифференцируемъ оба эти уравненія, оставляя α постоянною; находимъ:

$$\left. \begin{aligned} dz &= \varphi(\alpha)dx, \\ dy &= \psi(\alpha)dx. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

А такъ какъ

$$dz = pdx + qdy, \quad (3)$$

то первое изъ этихъ уравненій, по раздѣленіи на dx и замѣнѣ производной $\frac{dy}{dx}$ ея значеніемъ $\psi(\alpha)$, перейдетъ въ слѣдующее:

$$p + q\psi(\alpha) = \varphi(\alpha); \quad (4)$$

дифференцируемъ вновь, оставляя α по-прежнему постоянною; находимъ:

$$dp + dq\psi(\alpha) = 0, \quad (5)$$

т.-е.

$$rdx + sdy + \psi(\alpha)(sdx + tdy) = 0, \quad (6)$$

или, по раздѣленіи на dx и замѣнѣ производной $\frac{dy}{dx}$ ея значеніемъ,

$$r + s\psi(\alpha) + \psi(\alpha)[s + t\psi(\alpha)] = 0; \quad (7)$$

дифференцируемъ еще разъ, оставляя α постоянною и замѣчая при этомъ, что

$$\begin{aligned} dr &= \frac{d^3z}{dx^3} dx + \frac{d^3z}{dx^2dy} dy, \\ ds &= \frac{d^3z}{dx^2dy} dx + \frac{d^3z}{dx dy^2} dy, \\ dt &= \frac{d^3z}{dy^2 dx} dx + \frac{d^3z}{dy^3} dy; \end{aligned}$$

находимъ:

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3} dx + \frac{d^3z}{dx^2 dy} dy\right) + 2\psi(\alpha) \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy} dx + \frac{d^3z}{dx dy^2} dy\right) + \\ + \psi(\alpha)^2 \left(\frac{d^3z}{dy^2 dx} dx + \frac{d^3z}{dy^3} dy\right) = 0; \quad (8)$$

замѣняя производную $\frac{dy}{dx}$ ея значеніемъ $\psi(\alpha)$ и исключая затѣмъ $\psi(\alpha)$ изъ уравненій (7) и (8), получаемъ дифференціальное уравненіе линейчатыхъ поверхностей; это уравненіе—третьяго порядка.

§ 213. Каналообразныя поверхности.—Каналообразною поверхностью называется огибающая поверхность различныхъ положеній сферы постояннаго радіуса, центръ которой движется по какой-нибудь кривой. Мы видѣли (§ 113), что уравненіе такой поверхности получается посредствомъ исключенія параметра α изъ уравненій:

$$(z - \alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + [x - \psi(\alpha)]^2 = a^2, \quad (1)$$

$$z - \alpha + [y - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) + [x - \psi(\alpha)]\psi'(\alpha) = 0. \quad (2)$$

Чтобы исключить произвольныя функціи φ и ψ , дифференцируемъ сначала уравненіе (1) по x , оставляя y постояннымъ, затѣмъ по y , оставляя x постояннымъ. При этихъ обоихъ дифференцированіяхъ члены, происходящіе отъ измѣненія α , исчезнутъ въ силу уравненія (2).

Такимъ образомъ мы получимъ:

$$(z - \alpha) \frac{dz}{dx} + x - \psi(\alpha) = 0, \quad (3)$$

$$(z - \alpha) \frac{dz}{dy} + y - \varphi(\alpha) = 0; \quad (4)$$

отсюда, замѣчая, что $\varphi(\alpha)$ необходимо есть функція отъ $\psi(\alpha)$, выводимъ:

$$(z - \alpha) \frac{dz}{dx} + x = F \left[(z - \alpha) \frac{dz}{dy} + y \right], \quad (5)$$

гдѣ F есть новая произвольная функція, видъ которой зависитъ отъ вида $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$. А такъ какъ уравненія (3) и (4), совместно съ первымъ, даютъ:

$$z - \alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

то уравненіе (5) можетъ быть переписано въ видѣ:

$$\frac{a \frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} + x = F \left[\frac{a \frac{dz}{dy}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} + y \right]. \quad (6)$$

Чтобы исключить эту функцию F , нужно продифференцировать предыдущее уравнение по x , затѣмъ по y ; исключая же F' изъ двухъ полученныхъ уравненій и принимая во вниманіе предыдущія обозначенія, получаемъ:

$$a^2(rt - s^2) + a\sqrt{1+p^2+q^2}[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] + (1+p^2+q^2)^2 = 0. \quad (7)$$

Уравненіе (6) выражаетъ геометрическое свойство поверхности, вытекающее непосредственно изъ опредѣленія; въ самомъ дѣлѣ, $x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $y + \frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ представляютъ координаты точки на нормали въ разстояніи, равномъ a , отъ соотвѣтственной точки поверхности. Выведенное соотношеніе между этими двумя координатами показываетъ, что геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ есть кривая, а не поверхность, какъ непремѣнно случилось бы, если бы такое построеніе было произведено на поверхности другого рода.

ЗАМѢЧАТЕЛЬНОЕ ВВЕДЕНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ ВЪ ОДНУ
АРИѦМЕТИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ

§ 214. Разсмотримъ два какихъ-нибудь числа m и n . Составляемъ изъ нихъ два другихъ m_1 и n_1 , служащихъ для первыхъ соотвѣтственно среднимъ ариѦметическимъ и среднимъ геометрическимъ; другими словами, полагаемъ:

$$m_1 = \frac{m+n}{2},$$

$$n_1 = \sqrt{mn};$$

надъ m_1 и n_1 производимъ тѣ же дѣйствія, что и надъ m и n , и полагаемъ:

$$m_2 = \frac{m_1+n_1}{2},$$

$$n_2 = \sqrt{m_1n_1};$$

продолжая бесконечно эти дѣйствія, составляемъ рядъ чиселъ $m_3, n_3, m_4, n_4, \dots$, которыя, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться, идутъ непрерывно сближаясь; требуется найти предѣлъ при бесконечномъ повтореніи предыдущихъ дѣйствій.

Эта любопытная задача въ первый разъ была рѣшена Гауссомъ. Впослѣдствіи Борхардтъ связалъ ее весьма изящно съ дифференціальнымъ уравненіемъ при помощи разсужденій, съ которыми мы сейчасъ и познакомимся.

Пусть ω есть искомый предѣлъ; ω , очевидно, зависитъ отъ m и n . Полагаемъ, поэтому,

$$\omega = f(m, n);$$

изъ опредѣленія ω вытекаетъ также, что

$$\omega = f(m_1, n_1);$$

кромѣ того, если умножить m и n на одно и то же число k , то всѣ послѣдовательно выведенныя числа $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$, не исключая и ω , умножатся на k ; значить, ω есть однородная функція первой степени отъ m и n и, слѣдовательно,

$$\omega = mf\left(\frac{n}{m}\right) = m_1 f\left(\frac{n_1}{m_1}\right) \dots$$

Полагаемъ $\frac{n}{m} = x$, $\frac{n_1}{m_1} = x_1, \dots$ и обозначаемъ функцію $f\left(\frac{n}{m}\right)$ черезъ $\frac{1}{y}$; обозначая подобнымъ же образомъ $f\left(\frac{n_1}{m_1}\right)$ черезъ $\frac{1}{y_1}$, имѣемъ, очевидно,

$$y = y_1 \frac{m}{m_1} = \frac{2y_1}{1+x}; \quad (1)$$

далѣе, такъ какъ x_1 связано съ x уравненіемъ:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}, \quad (2)$$

то изъ уравненія (2) выводимъ:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{1-x}{(1+x)^2 \sqrt{x}} = \frac{(x_1 - x_1^3)(1+x)^2}{2(x-x^3)},$$

и изъ (1):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(1+x)^2} y_1 + \frac{2}{1+x} \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dx}.$$

замѣняя производную $\frac{dx_1}{dx}$ ея значеніемъ и освобождаясь отъ знаменателя $x - x^3$, получаемъ:

$$(x - x^3) \frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-1)}{1+x} y_1 + (1+x)(x_1 - x_1^3) \frac{dy_1}{dx_1},$$

откуда, взявъ производныя отъ обѣихъ частей по x , найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d(x-x^3)}{dx} \frac{dy}{dx} &= 2y_1 \frac{d\left(\frac{x(x-1)}{1+x}\right)}{dx} + \frac{2x(x-1)}{1+x} \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dx} + (x_1 - x_1^3) \frac{dy_1}{dx_1} + \\ &+ (1+x) \frac{d(x_1 - x_1^3)}{dx_1} \frac{dx_1}{dx}. \end{aligned}$$

Не трудно замѣтить, что по замѣнѣ производной $\frac{dx_1}{dx}$ ея значеніемъ два члена, содер-

жакіе множителемъ $\frac{dy_1}{dx_1}$, взаимно уничтожаются; вычитая xy изъ обѣихъ частей, переписываемъ это уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d(x-x^3)\frac{dy}{dx}-xy}{dx} = \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{x}} \left[\frac{d(x_1-x_1^3)\frac{dy_1}{dx_1}-x_1y_1}{dx_1} \right].$$

Если, въ этомъ уравненіи, x измѣнить на x_1 , то x_1 перейдетъ въ x_2 ; если затѣмъ x_1 измѣнить на x_2 , то x_2 перейдетъ въ x_3 , и т. д.; поэтому, полагая

$$\frac{d(x-x^3)\frac{dy}{dx}-xy}{dx} = \tilde{\omega}(y),$$

будемъ имѣть:

$$\tilde{\omega}(y) = \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{x}} \frac{1-x}{(1+x_1)\sqrt{x_1}} \frac{1-x_2}{(1+x_2)\sqrt{x_2}} \dots \frac{1-x_n}{(1+x_n)\sqrt{x_n}} \tilde{\omega}(y_n);$$

но если n увеличивается безпредѣльно, $1-x_n$ стремится, очевидно, къ нулю; въ такомъ случаѣ

$$\tilde{\omega}(y) = 0$$

и, слѣдовательно, y удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$(x-x^3)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Не имѣя возможности останавливаться здѣсь на слѣдствіяхъ изъ полученнаго результата, мы всё-же полагали невозможнымъ пропустить столь замѣчательное приложеніе анализа въ главѣ, посвященной составленію дифференціальныхъ уравненій.

Полныя дифференціальныя уравненія

§ 215. Дифференціальныя уравненія, которымъ удовлетворяютъ функціи отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ, имѣютъ мѣсто между функціями и ихъ частными производными. Иногда изслѣдованіе приводится къ другому виду уравненій, имѣющимъ мѣсто между дифференціалами независимыхъ переменныхъ и дифференціаломъ зависящей отъ нихъ функціи. Мы видѣли (§ 57), что если z есть функція отъ x и y , то существуетъ уравненіе первой степени между дифференціалами dx , dy , dz , изъ которыхъ два остаются произвольными и опредѣляютъ третій; уравненіе этого вида

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \quad (1)$$

гдѣ P , Q , R — данныя функціи отъ x , y , z , называется полнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ.

Дифференціальное уравненіе (1) очевидно отличается отъ уравненія въ частныхъ дифференціалахъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ уравненіи (1) dx и dy — произвольны, ихъ можно предположить равными послѣдовательно нулю и тогда

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R};$$

такимъ образомъ, изъ уравненія (1), изъ одного, могутъ быть узнаны обѣ частныя производныя $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$, между которыми уравненіе въ частныхъ производныхъ даетъ только одно соотношеніе.

§ 216. Введеніе частныхъ производныхъ перваго порядка отъ функции съ двумя переменными позволяетъ, какъ мы видѣли (§ 197), исключить произвольную функцию; разысканіе же уравненія между дифференціалами даетъ возможность исключить только постоянную.

Пусть $F(x, y, z, C) = 0$ есть соотношеніе между x, y, z и произвольною постоянною C . Отсюда выводимъ, между дифференціалами, единственное соотношеніе:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0,$$

которому они подчинены; результатъ исключенія C изъ этого и даннаго уравненій есть вполнѣ опредѣленное уравненіе вида:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

§ 217. Уравненіе вида:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1}$$

не всегда соотвѣтствуетъ какой-нибудь зависимости между x, y, z . Не трудно замѣтить, что для этой цѣли функции P, Q, R должны удовлетворить нѣкоторому необходимому условію. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія (1) выводимъ:

$$dz = -\frac{P}{R} dx - \frac{Q}{R} dy, \tag{2}$$

откуда

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R} \tag{3}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d\frac{P}{R}}{dy} = \frac{d\frac{Q}{R}}{dx}, \tag{4}$$

а такъ какъ P, Q и R содержатъ z , предположенное функцией отъ x и y , то

$$\frac{d\frac{P}{R}}{dy} + \frac{d\frac{P}{R}}{dz} \frac{dz}{dy} = \frac{d\frac{Q}{R}}{dx} + \frac{d\frac{Q}{R}}{dz} \frac{dz}{dx};$$

замѣняя $\frac{dz}{dy}$ и $\frac{dz}{dx}$ ихъ значеніями (3) и упрощая, находимъ:

$$P\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0; \quad (5)$$

это уравненіе должно имѣть мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x , y и z , удовлетворяющихъ данному уравненію. Могутъ представиться два случая: или уравненіе (5) — тождество и тогда условіе, очевидно, выполнено, или оно устанавливаетъ нѣкоторое соотношеніе между x , y и z , которое должно быть искомымъ, и если уравненіе (1) не есть слѣдствіе уравненія (5), то, значитъ, оно невозможно.

Пусть, напр., дано уравненіе:

$$(6xy^2z - 5yz^3)dx + (5x^2yz - 4xz^3)dy + (4x^2y^2 - 6xyz^3)dz = 0; \quad (6)$$

составляя уравненіе (5), видимъ, что оно — тождество. По предыдущей теоріи тогда можно поставить вопросъ, какому соотношенію между x , y и z соотвѣтствуетъ уравненіе (6).

Пусть еще дано уравненіе:

$$(z - y)dx + xdy + (y - z)dz = 0; \quad (A)$$

уравненіе (5) будетъ:

$$z - x - y = 0. \quad (B)$$

Отсюда выводимъ:

$$dz = dx + dy, \quad (C)$$

и такъ какъ значенія z и dz изъ уравненій (B) и (C) обращаютъ уравненіе (A) въ тождество, то изъ этого должно заключить, что уравненіе (A) возможно и что оно имѣетъ единственное рѣшеніе:

$$z = x + y.$$

Пусть, наконецъ, дано уравненіе:

$$zdx - ydy + ydz = 0;$$

уравненіе (5) въ этомъ случаѣ будетъ:

$$-2z = 0,$$

и такъ какъ $z = 0$ не представляетъ рѣшенія даннаго уравненія, то это послѣднее невозможно и не соотвѣтствуетъ никакой зависимости между x , y и z .

§ 218 Предыдущіе выводы могутъ быть обобщены. Уравненіе между четырьмя переменными x, y, z, u и произвольною постоянною даетъ, черезъ исключеніе постоянной, полное дифференціальное уравненіе вида:

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdu = 0, \quad (1)$$

но, при этомъ, между функциями P, Q, R, S должны существовать нѣкоторыя необходимыя соотношенія. Въ самомъ дѣлѣ, разсматриваемъ въ уравненіи (1) u , какъ функцію отъ независимыхъ переменныхъ x, y, z , и замѣняемъ du его значеніемъ:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz;$$

такъ какъ dx, dy, dz — произвольны, то коэффициенты при нихъ должны быть по нулю и, слѣдовательно, уравненіе (1) заключаетъ въ себѣ три слѣдующихъ:

$$P + S \frac{du}{dx} = 0,$$

$$Q + S \frac{du}{dy} = 0,$$

$$R + S \frac{du}{dz} = 0.$$

Рѣшаемъ эти уравненія относительно частныхъ производныхъ отъ u и полученные значенія вносимъ въ равенства:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dy} \right),$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dz} \right),$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dx} \right);$$

опуская взаимно-уничтожающіеся члены, находимъ:

$$S \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) + Q \left(\frac{dS}{dx} - \frac{dP}{du} \right) + P \left(\frac{dQ}{du} - \frac{dS}{dy} \right) = 0,$$

$$S \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + R \left(\frac{dS}{dy} - \frac{dQ}{du} \right) + Q \left(\frac{dR}{du} - \frac{dS}{dz} \right) = 0,$$

$$S \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + P \left(\frac{dS}{dz} - \frac{dR}{du} \right) + R \left(\frac{dP}{du} - \frac{dS}{dx} \right) = 0;$$

эти три уравненія должны удовлетворяться тождественно, чтобы уравненіе (1) могло быть выведено изъ соотношенія между x, y, z, u и произвольною постоянною.

§ 219. Когда p переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_p связаны n соотношеніями, содержащими $2n - 1$ произвольныхъ постоянныхъ, то можно исключить эти постоянныя

между данными уравнениями и их полными дифференциалами; результат такого исключения, очевидно, будет вида:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_p dx_p = 0. \quad (1)$$

Обратно, если дано подобное уравнение, то, рассматривая в нем $p - n$ переменных, какъ неизвестныя функции отъ n остальныхъ, можно написать непосредственно n уравнений, представляющихъ необходимое слѣдствіе, какъ бы въ нѣкоторомъ родѣ видоизмѣненіе уравненія (1). Если, напр., x_1, x_2, \dots, x_{p-n} суть функции отъ $x_{p-n+1}, x_{p-n+2}, \dots, x_p$, то

$$dx_1 = \frac{dx_1}{dx_{p-n+1}} dx_{p-n+1} + \frac{dx_1}{dx_{p-n+2}} dx_{p-n+2} + \dots + \frac{dx_1}{dx_p} dx_p;$$

замѣчая, что и другіе дифференциалы выразятся такимъ же образомъ, мы можемъ замѣнить ихъ въ данномъ уравненіи этими значеніями и приравнять нулю коэффициенты при n произвольныхъ дифференциалахъ $dx_{p-n+1}, dx_{p-n+2}, \dots, dx_p$,—получится n уравнений между $p - n$ неизвестными. Если n равно или меньше $p - n$, то нѣтъ никакого необходимаго условія между коэффициентами X_1, X_2, \dots, X_p ; въ противномъ же случаѣ эти функции подчиняются условіямъ, къ которымъ мы еще вернемся.

УПРАЖНЕНІЯ

1. Исключить постоянныя a и b и составить дифференціальное уравненіе второго порядка, которому удовлетворяетъ функция y , заданная уравненіемъ:

$$xy = ae^x + be^{-x}.$$

2. Исключить a, b, c, d и составить дифференціальное уравненіе третьяго порядка, которому удовлетворяетъ функция y , заданная уравненіемъ:

$$ae^y + be^{-y} = ce^x + de^{-x}.$$

Отв.

$$\left[\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - \frac{dy}{dx} \right] \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right] = 3 \frac{dy}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2.$$

3. Исключить произвольную функцию изъ уравненія:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \varphi \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)$$

и вывести уравненіе въ частныхъ производныхъ:

$$x^2 \frac{dz}{dx} + y^2 \frac{dz}{dy} = z^2.$$

4. Исключить произвольныя функціи изъ уравненія:

$$z = x\varphi(ax + by) + y\psi(ax + by)$$

и вывести уравненіе:

$$a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} - 2ab \frac{d^2 z}{dxdy} + b^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$$

5. Уравненіе:

$$z = \varphi[x + f(y)],$$

въ которомъ φ и f — произвольныя функціи, заключаетъ въ себѣ уравненіе:

$$\frac{d^2 z}{dxdy} \frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} \frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$$

6. Исключить произвольныя функціи изъ уравненія:

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{y^n} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Отв.

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2xy \frac{d^2 z}{dxdy} + y^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = n^2 z.$$

7. Исключить произвольныя функціи изъ уравненія:

$$z = \varphi(x + y) + xy\psi(x - y).$$

Отв.

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{d^3 z}{dx^2 dy} - \frac{d^3 z}{dxdy^2} - \frac{d^3 z}{dy^3} = \frac{2}{x + y} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{d^2 z}{dy^2} \right).$$

8. Дано:

$$\begin{aligned} z &= \varphi(\alpha) - x\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) + x\psi'(\beta), \\ y &= \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ x &= \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Исключить произвольныя функціи φ и ψ и составить дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{d^2 z}{dy^2} - \frac{2}{x} \frac{dz}{dx} = 0,$$

которому удовлетворяетъ z .

9. Дано:

$$\begin{aligned} y + \alpha x &= \varphi(\alpha), \\ z &= x + \frac{y}{\alpha} \end{aligned}$$

Составить дифференциальное уравнение в частных производных: (взять:

$$\left(1 + \frac{dz}{dx}\right) \left(1 + \frac{dz}{dy}\right) z = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] x + \left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] y,$$

которому удовлетворяет z .

10. Из уравнений:

$$z = \frac{\psi(\alpha)}{(x + \alpha)^2 \psi'(\alpha)} + \frac{1}{x + \alpha},$$

$$y + 1[(x + \alpha)^2 \psi'(\alpha)] = 0$$

через исключение произвольной функции $\psi(\alpha)$ вытекает:

$$\left(z - \frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{dz}{dx} = 0.$$

