В. М. БРАДИС

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

УЧПЕДГИЗ
МОСКВА
1935

В. БРАДИС

ТЕОРИЯ и ПРАКТИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

ПОСОБИЕ
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Издание четвертое
переработанное и дополненное

Утверждено Наркомпросом РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1935

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ I.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕХНИКЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

Глава I.

Общие сведения о числовых расчетах.

Глава II.

Вспомогательные средства вычислений.

Глава III.

Счетная логарифмическая линейка.

Стр.

Глава VIII.

Решение численных уравнений.

Глава IX.

Интерполяция.

Глава X.

Диференцирование и интегрирование функций, заданных таблицей значений или графиком.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Выпуск I учебника по курсу „Теория и практика вычислений“ вышел в 1933 г. Ввиду последовавших за истекшее время изменений в числе часов, отведенных на этот курс учебным планом педвузов, издательство предпочло вместо отдельного выпуска II дать одну книгу, содержащую и переработанный применительно к последней программе материал выпуска I („Элементарные сведения по технике вычислений“), и материал выпуска II („Специальные вычисления“).

Ограничиваясь лишь основными вопросами техники вычислений, предусмотренными программой НКП для педвузов 1934 г., настоящий учебник рассматривает некоторые из этих вопросов подробнее, чем это можно сделать, располагая лишь теми 70 часами, которые отведены на проработку настоящего курса. Соответствующие места учебника набраны мелким шрифтом (в заголовках параграфов знак *). Их можно пропустить без ущерба для связности изложения, используя их для дополнительных занятий с более сильными и интересующимися.

Приношу благодарность А. И. Иванову, предоставившему мне обработку лекций по „Приближенным вычислениям“, читанных мною в 1932 г. на одногодичных аспирантских курсах при Московском институте математики и механики, и А. Н. Попову, положившему много труда на изготовление чертежей.

В. Брадис.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕХНИКЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

ГЛАВА I.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЧИСЛОВЫХ РАСЧЕТАХ.

§ 1. Расчеты буквенные и числовые.

Расчеты, или вычисления, производятся над величинами, которые либо даны в общем виде и изображены буквами, либо имеют определенные числовые значения и изображены цифрами. В первом случае мы имеем дело с *буквенными расчетами*, во втором — с *расчетами числовыми*. Только эти последние и рассматриваются в настоящей книге. Вместо термина „числовые расчеты", краткости ради мы будем употреблять термин „вычисления", понимая его в указанном более узком смысле.

Почти каждая математическая задача практического содержания в заключительной части своего решения требует более или менее сложного вычисления (числового расчета). Для успешного выполнения таких вычислений, как оказывается, недостаточно тех знаний и навыков, какие до недавнего времени давала средняя школа. Дать необходимые дополнительные сведения, чтобы обеспечить вполне сознательное, быстрое и достаточно точное выполнение вычислений, и является задачей настоящего руководства (в его I части).

Стремясь к *рационализации* вычислительной работы, мы должны, прежде всего, изучить важнейшие из современных *вспомогательных средств вычисления*: счетные приборы и машины, таблицы, графики, приближенные формулы. В этом и заключается первая основная задача настоящего курса; в главах II и III мы займемся только ею.

Второй основной задачей курса является *учет погрешностей* чисел, получаемых в результате измерений и вычислений. Необходимость изучения методов учета погрешностей, которым мы будем заниматься в главах IV—VI, вытекает из следующих соображений.

Данные вычислений могут быть *точными*, но могут быть (и в громадном большинстве случаев действительно бывают) *неточными*, приближенными. В зависимости от характера данных вычисления можно подразделить на *вычисления с точными данными* и *вычисления с приближенными данными*. Не следует, однако, думать, что всякое вычисление с точными данными непременно приводит к точному же результату.

Это имеет место лишь в тех случаях, когда вычисление сводится к производству действий I ступени (сложения и вычитания) и прямых действий II и III ступеней (умножения и возведения в степень), да и то не всегда. После ряда, например, умножений цифровой состав числа, получаемого в результате, часто становится столь сложным, числа приобретают такие длинные „хвосты", что обращение с ними становится весьма затруднительным. Тогда их „округляют", т. е. отбрасывают одну или несколько последних цифр, сознательно заменяя точные, но неудобные результаты неточными, но зато удобными, и следя за тем, чтобы вводимая погрешность („погрешность от округления") была допустима с точки зрения практического использования этих результатов. Действие деления, если избегать громоздких простых дробей, в громадном большинстве случаев приводит к приближенным результатам. Совершенно неустранима неточность результатов обратных действий III ступени — извлечения корня и логарифмирования (за редкими исключениями).

Погрешность в результате вычисления с точными данными мы будем называть „*вычислительною погрешностью*". Учет такой погрешности, т. е. решение вопроса о ее величине, или, вернее, о верхней ее границе (о наибольшем возможном ее значении), если речь идет о выполнении отдельных арифметических действий, затруднений не представляет. Если же мы имеем дело с рядом операций, причем приближенные результаты некоторых действий служат данными для последующих действий, то мы переходим уже к *вычислениям с неточными данными*, и совершенно необходимым становится знакомство с методами учета погрешностей в результатах вычислений, производимых над неточными данными.

Этими двумя основными задачами, а именно изучением важнейших вспомогательных средств вычисления и ознакомлением с методами учета погрешностей, и исчерпывается содержание части I настоящего курса. По своему элементарному характеру и по своей важности не только для специалистов-математиков, но и для всех вообще людей, имеющих дело с вычислениями, эта часть I должна войти в курс средней школы, что, несомненно, и произойдет, как только сами преподаватели-математики средней школы будут с ней ознакомлены.

Прежде чем переходить к рассмотрению вспомогательных средств вычисления, разберем несколько вопросов, относящихся, главным образом, к упорядочению записи вычислений на бумаге.

§ 2. Некоторые замечания о записи чисел.

При записи многозначных чисел пользоваться каким-либо значком (запятой, точкой) для разделения числа на классы отнюдь не рекомендуется (во избежание смешения этого значка со знаком дробности). Если желательно облегчить чтение такого числа, можно отделить группы по 3, или 4, или 5 цифр небольшими интервалами. Это относится как к целым числам, так и к десятичным дробям. Вот, например, приближенное значение числа π с 24 десятичными знаками:

$$\pi = 3{,}1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ldots$$

Читать такую запись удобнее всего, произнося зараз по 2 цифры и делая короткие паузы после каждых 4 цифр: три целых; четырнадцать, пятнадцать; девяносто два, шестьдесят пять и т. д.

Многоточие, поставленное после числа, показывает, что число не дописано до конца. В данном случае дописать его и невозможно, так как число π есть число иррациональное.

Знаком дробности, отделяющим целую часть числа от дробной его части, у нас в СССР (а также в Германии и Франции) служит запятая, в Англии же и в Америке — точка, которую, для отличия от точки как знака умножения, иногда ставят высоко (на половине высоты цифры и даже выше). Впрочем, обычаи эти соблюдаются не всегда, особенно в таблицах. Если целой части у числа нет, то нуль целых, который мы обыкновенно ставим, часто пропускают. Так, для обозначения двадцати пяти сотых употребляются следующие способы записи:

0,25, или 0.25, или 0•25, или •25.

О числах, изображаемых одним и тем же рядом цифр, не считая нулей слева или справа, будем говорить, что они имеют одинаковый цифровой состав. Таковы, например, числа:

27,83; 2,783; 0,0002783; 278 300 000.

Вычисление часто слагается из двух операций, причем первая дает только цифровой состав искомого результата, а вторая — положение знака дробности. Если грубо-приближенное значение результата наперед известно, то вторая операция становится излишней.

Каждая цифра числа есть цифра определенного его разряда. Говорят о разряде единиц, десятков, сотен и т. д. и — в другую сторону — о разрядах десятых, сотых, тысячных и т. д. Цифру десятых часто называют первым *десятичным знаком*, сотых — вторым десятичным знаком и т. д.

Цифру старшего имеющегося в числе разряда называют первой *значащей цифрой* числа. Далее направо идут его вторая, третья, четвертая и т. д. значащие цифры; крайняя справа цифра есть цифра последнего разряда, или последняя значащая цифра. В счет значащих цифр никогда не идут нули, написанные в начале числа (например, число 0,0023 имеет лишь две значащие цифры 2 и 3), а также в конце числа, если они поставлены взамен неизвестных цифр. Так, в числе 135 500 000, которое выражает (в квадратных километрах) площадь всей суши земного шара, мы имеем лишь *четыре* значащие цифры. Число это лучше записать в „нормальном" виде $1{,}355 \cdot 10^8$, т. е. в виде произведения числа, имеющего лишь одну значащую цифру левее запятой, на соответствующую степень числа 10.

Напротив, нули, написаннные в конце числа и означающие отсутствие единиц соответствующих разрядов, в счет значащих цифр идут. Так, узаконенное отношение аршина к метру выражается числом 0,711200, в котором *шесть* значащих цифр (7, 1, 1, 2, 0, 0).

Мы будем называть *однозначным*, *двузначным*, вообще *k-значным* всякое число, имеющее 1, 2, вообще k значащих цифр.

При записи чисел с рядом нулей постоянно пользуются указанным выше приемом, т. е. введением степеней 10, как положительных, так и отрицательных. Так, число 5980000000000000000000, выражающее в тоннах массу земного шара, проще записать в виде $5{,}98 \cdot 10^{21}$, а коэфициент теплового расширения железа, равный 0,0000123, в виде $1{,}23 \cdot 10^{-5}$. Знак дробности в таких случаях обыкновенно ставят после первой значащей цифры числа, но, конечно, его можно ставить где угодно, соответственно меняя показатель при 10.

Этот прием упрощает запись и многих других громоздких чисел. Так, число 1,000038 лучше изобразить в виде суммы $1+3{,}8\cdot10^{-5}$, а число 0,99999472 — в виде разности $1-5{,}28\cdot10^{-6}$.

Чтобы различать числа точные и приближенные, мы будем наряду со знаком точного равенства (две параллельные черточки) пользоваться также знаком приближенного равенства $\approx$, установленным общесоюзным стандартом математических обозначений (ОСТ 573).

Так, запись $x\approx26$ *см* обозначает, что x приближенно равен 26 *см*.

Сомнительные цифры приближенных чисел рекомендуется писать в уменьшенном размере. Так, запись 284_3 означает, что в этом приближенном числе последняя цифра (3) сомнительна, остальные точны.

§ 3. Двоякий смысл цифры нуль.

Цифра 0 в следующих двух записях: 1) 1 *кг* = 1000 *г*, 2) на земном шаре в настоящее время живет 1 700 000 000 человек — имеет существенно различный смысл. В первом случае нули означают отсутствие единиц соответствующих разрядов (в одном кило содержится одна тысяча граммов и ни одной сотни, ни одного десятка, ни одного отдельного грамма), во втором они только указывают на наше незнание цифр этих разрядов и поставлены взамен этих неизвестных нам цифр. Такое смешение функций одного символа крайне нежелательно, и давно уже делались предложения о введении особого знака для обозначения неизвестной цифры. Иногда для этой цели употребляется знак вопроса (?), но вообще эта идея, к сожалению, не привилась. Чрезвычайно желательно избегать употребления нуля как замены неизвестной цифры, применяя в соответствующих случаях либо словесное название одного из высших разрядов изображаемого числа, либо степень 10, либо, наконец, особые приемы записи сомнительных цифр. Так, число 1 700 000 000, где все нули стоят вместо неизвестных цифр, следует писать так: 17 сотен миллионов, или 1,7 миллиарда, или $17\cdot10^8$, или $1{,}7\cdot10^9$, или $17_{00\,000\,000}$.

Итак, мы будем писать нули лишь тогда, когда будем знать, что единиц данного разряда в числе нет. Например, запись $x\approx14{,}60$ указывает, что в числе x, имеющем 14 целых и 6 десятых, нет ни одной сотой, а цифра тысячных и следующие нам неизвестны. Отбросить этот нуль здесь нельзя, так как запись $x\approx14{,}6$ указала бы, что цифры сотых мы не знаем.

§ 4. Округление чисел.

В вычислительной практике постоянно приходится прибегать к *округлению* чисел, т. е. к уменьшению числа значащих их цифр, что всегда бывает связано с введением некоторой *погрешности от округления*. Рассмотрим приемы округления, считая пока все округляемые числа известными точно.

Простое округление состоит в отбрасывании всех цифр числа, расположенных направо от одной из них. Следует различать округление до k-го десятичного знака и до k-й *значащей цифры*. Округление до k-го десятичного знака состоит в отбрасывании всех цифр числа, начиная с цифры $(k+1)$-го десятичного знака (последняя сохраняемая цифра есть цифра k-го десятичного знака). Округление до k-й значащей цифры состоит в отбрасывании всех цифр числа, начиная с $(k+1)$-й значащей цифры (последняя сохраняемая цифра есть k-я значащая цифра числа). Если отбрасываются цифры левее запятой, то их, конечно, следует заменять нулями, придерживаясь, однако, записи, рекомендованной выше (стр. 10).

Пример. Простое округление числа 263,84

до десятых долей дает	263,8
„ целых	263
„ десятков	$260=2{,}6\cdot10^2$
„ сотен	$200=2\cdot10^2$
„ 4-й значащей цифры	263,8
„ 3-й „ „	263
„ 2-й „ „	$260=2{,}6\cdot10^2$
„ 1-й „ „	$200=2\cdot10^2$

Простое округление уменьшает точное значение числа, но не более, как на одну единицу последнего сохраненного разряда. Уменьшение это равно как раз единице этого разряда, если отбрасывается бесконечный ряд девяток. Говорят, что простое округление всегда дает *недостаточное* приближенное значение округляемого числа.

Округление с усилением тем отличается от простого, что последняя сохраняемая цифра всегда усиливается, т. е. увеличивается на 1. В только что рассмотренном примере на простое округление округление с усилением дало бы числа:

$$263{,}9;\ 264;\ 2{,}7\cdot10^2;\ 3\cdot10^2.$$

Округление с усилением увеличивает точное значение числа, но всегда менее, чем на одну единицу последнего сохраненного разряда. Здесь мы получаем избыточные приближенные значения округленных чисел.

Округление с поправкой отличается от округления с усилением тем, что усиление последней сохраняемой цифры производится здесь лишь в том случае, если первая отбрасываемая цифра больше 4.

Пример. Округление с поправкой числа 263,84

до десятых долей (или до 4-й значащей цифры) дает	263,8
„ целых (или до 3-й значащей цифры)	264
„ десятков (или до 2-й значащей цифры)	$2{,}6\cdot10^2$
„ сотен (или до 1-й значащей цифры)	$3\cdot10^2$

Округление с поправкой иногда увеличивает точное значение числа, но не более как на половину единицы последнего сохраненного разряда; иногда уменьшает его, тоже не более как на половину единицы этого разряда. Таким образом, округление с поправкой может давать и недостаточное и избыточное значения округляемого числа. *Граница* погрешности от округления при округлении с поправкой вдвое меньше, чем при простом округлении или при округлении с усилением. Округление с поправкой употребляется поэтому на практике несравненно чаще, чем два других вида округления, а потому в дальнейшем, говоря об округлении, мы всегда будем подразумевать, если не будет особой оговорки, *округление с поправкой*.

Погрешность от округления достигает своего наибольшего значения, равного половине единицы последнего сохраненного разряда, в том случае, если отбрасывается лишь одна цифра 5. Легко видеть, что усиление в этом *исключительном случае* никакой выгоды не дает. Пусть, например, надо округлить до целых число 263,5. Простое округление дает недостаточное приближенное значение, равное 263; оно меньше точного на 263,5—263=0,5. Округление с усилением дает избыточное приближенное значение, равное 264, которое больше истинного на столько же (264——263,5=0,5). В этом случае либо вовсе отказываются от округления, которое здесь не очень и нужно, либо применяют следующее „правило четной цифры“:

Если округление сводится к отбрасыванию одной единственной цифры 5, то последнюю сохраняемую цифру оставляют без изменения, если она четная, и усиливают, если она нечетная.

Согласно этому правилу округление до целых числа 263,5 дает 264, а числа 268,5 дает 268.

Правило это диктуется понятным желанием избежать односторонних погрешностей округления. Выбор между приведенным правилом четной цифры и противоположным (усилением последней цифры, если она четная) делается только на основании того соображения, что для вычисления иметь последнюю цифру числа четной иногда бывает удобнее (например, при делении на 2).

§ 5. Формула и алгоритм.

В большинстве случаев вычисление производится по определенной, заранее составленной буквенной ф о р м у л е и состоит в подстановке вместо букв соответствующих числовых значений и в производстве указанных в формуле действий. Первый шаг всякого такого вычисления состоит в рассмотрении этой формулы и в таком ее преобразовании, которое, при наличных вспомогательных средствах, обеспечивало бы наиболее экономное производство вычисления. Примером может служить то разложение на множители многочленного выражения, какое стараются сделать, прежде чем приступить к вычислению посредством логарифмов. Так, вычисляя x по формуле $x=\sqrt{a^2-b^2}$ посредством логарифмов, предварительно преобразуют эту формулу к виду $x=\sqrt{(a+b)(a-b)}$. Однако такое преобразование совершенно излишне, если у нас имеется достаточно обширная таблица квадратов, которая дает по данным числам a и b их квадраты a^2 и b^2. Дать какие бы то ни было общие правила таких предварительных преобразований совершенно невозможно: все зависит от характера предложенной формулы, от выбора вычислительных средств и даже от индивидуальных особенностей самого вычислителя. Следует, однако, иметь в виду, что более или менее длительная работа по преобразованию формулы окупается лишь тогда, когда эта формула служит для „массовых“ вычислений, т. е. для повторных вычислений с различными значениями входящих в нее букв.

Иногда порядок вычисления трудно выразить формулой. Тогда его выражают словами, в виде более или менее пространного правила, которое носит название *алгоритма* (или алгорифма). Так, например, известны алгоритмы для решения уравнений высших степеней и уравнений трансцендентных. Процесс получения последовательных цифр квадратного корня тоже представляет собой применение некоторого алгоритма. Конечно, из различных вариантов одного и того же алгоритма следует выбрать такой, при котором достигается наибольшая экономия в получении искомого результата.

§ 6. Схема.

За подготовкой формулы (или выбором алгоритма) следует второй шаг всякого вычисления: составление схемы. Так называется такая разметка приготовленного для записи вычисления листа бумаги, при которой каждое входящее в вычисление число записывается на особом, заранее для него отведенном месте.

Положим, требуется найти значения z по формуле $z = x^2 + xy + y^2$ для нескольких пар значений x и y, выраженных многозначными числами. Имея в своем распоряжении таблицу квадратов, преобразуем формулу к виду

$$z = 3 \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

и устраняем тем самым необходимость умножения многозначных чисел x и y. Схеме для вычисления z по этой последней формуле удобно в данном случае придать следующий вид:

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$					
$\frac{x+y}{2}$					
$x+y$					
x					
y					
$x-y$					
$\frac{x-y}{2}$					
$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$					
$3 \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$					
z					

Сперва записываются данные числовые значения аргументов x и y (4-я и 5-я строки всех столбцов), далее — суммы соответствующих значений x и y (3-я строка), полусуммы (2-я строка), квадраты полусумм (1-я строка). Затем переходим на 6-ю строку где записываются разности аргументов, потом на 7-ю (полуразности) и на 8-ю (квадраты полуразностей). На 9-й строке записываются утроенные числа 1-й строки и на 10-й — искомые значения z, получаемые сложением чисел 8-й и 9-й строк. Деления на 2 и умножения на 3 делаются, конечно, в уме, возведение в квадрат — посредством таблицы квадратов, поэтому все наше вычисление целиком укладывается в указанную схему; нигде никаких дополнительных записей не требуется. Если бы они понадобились, для них следовало бы отвести особый листок („листок для вспомогательных вычислений") или, еще лучше, особое место на том же листе, где помещена схема.

Выгода схемы заключается в *механизации* вычислительного процесса. Хорошо продумав схему, мы освобождаем себя в дальнейшем от всякой работы по обдумыванию хода вычислений и выполняем только элементарные операции, указываемые схемой, притом несколько однородных операций подряд. Вторая, не менее важная выгода от применения схемы — *легкость контроля* уже произведенного вычисления как самим вычислителем, так и другими лицами. Как показал опыт, составление схемы совершенно необходимо при всяком более или менее сложном вычислении. В тех случаях, когда однородные вычисления повторяются много раз, схемы вырабатываются раз навсегда и печатаются. Такие *формуляры* в большом ходу у геодезистов и астрономов.

Для составления схемы (и для вычисления вообще) выгодно пользоваться бумагой, разграфленной на квадраты или, еще лучше, на прямоугольники. Прямые, отделяющие друг от друга различные столбцы схемы, а также горизонтальные прямые, ограничивающие столбцы чисел, подлежащих сложению или вычитанию, выделяются из числа других прямых сетки достаточно резкими штрихами. Перехода через строки (например, сложения чисел, написанных в двух строках, разделенных несколькими другими) надо вообще избегать. Часто это удается сделать путем надлежащего приспособления схемы. Если же это оказывается невозможным, рекомендуется прикрывать промежуточные строки полоской бумаги подходящих размеров. Если во всех столбцах одной строки фигурирует некоторое постоянное число, то его пишут обыкновенно только *один* раз, но на особой полоске бумаги, которую при вычислении помещают последовательно на надлежащее место каждого столбца.

§ 7. Поверка.

Основное требование, предъявляемое ко всякому вычислению, — это его *правильность*, обусловливаемая отсутствием *ошибок*. Ошибки следует отличать от *погрешностей*, неустранимых в подавляющем большинстве случаев, незначительных по своей величине и наперед более или менее точно учитываемых. Об этом учете погрешностей речь будет впереди. Здесь же мы говорим о тех ошибках, которые обусловливаются недостаточной внимательностью вычислителя. Таковы ошибки при переписывании чисел, ошибки в выполнении элементарных арифметических операций, ошибки от замены одного действия другим (сложение вместо вычитания), ошибки от смешения двух таблиц (натуральный синус вместо логарифма синуса) и так далее без конца. Все такие ошибки, безусловно, должны быть устранены. Внимательное отношение ко всякой выполняемой операции, пусть самой мелкой, неторопливая, спокойная работа, прекращение ее при первых признаках утомления с тем, чтобы возобновить ее после отдыха со свежими силами, применение счетных приборов и других вспомогательных средств вычисления, облегчающих и упрощающих работу, — все это весьма способствует устранению ошибок, но отнюдь не гарантирует полного их отсутствия. *Без особой поверки результат вычисления ненадежен* — этого никогда не следует забывать. Поэтому поверка является совершенно необходимой частью всякого вычисления. Пока поверка не произведена, вычисление нельзя считать законченным.

Простейшая форма поверки, быстро обнаруживающая наиболее грубые ошибки вычисления, — это *грубо-приближенная оценка* результата: все данные округляются до первой значащей цифры, и весь расчет делается в уме; результат получается тоже с одной значащей цифрой, да и то далеко не вполне надежной, но зато устанавливается *порядок* результата, т. е. разряд старшей его цифры. Например, при вычислении по формуле $z = x^2 + xy + y^2$ при $x = 44{,}3$ и $y = 18{,}7$ берем $x \approx 40$, $y \approx 20$ и находим, что $z = 1600 + 800 + 400$, т. е. около 3000. Вычисление с неокругленными данными (по схеме § 6) дает $z = 3140{,}59$, и наша оценка показывает, что порядок результата установлен верно. *Подобную оценку результата надо производить всегда*, и притом *до полного вычисления.* В задачах геометрических роль такой оценки часто играет чертеж, быстро выполняемый без особой тщательности.

Лучшей формой поверки является повторение всего вычисления другим лицом, притом совершенно независимо от первого. С очень высокой степенью вероятности можно считать правильными результаты, полученные при таком вычислении „в две руки“, если они совпадают. В случае расхождения надо сравнивать оба вычисления шаг за шагом. Ошибка обнаруживается в том месте, откуда начинается расхождение. После этого необходимо довести до конца то вычисление, в котором она была обнаружена, опять-таки независимо от другого. Нередко случается, что этим способом последовательно вскрывается несколько ошибок, допущенных обоими вычислителями. Результат становится еще более надежным, если вычисления были проведены „в три руки“, „в четыре руки“.

Если вычислитель работает один, нужную уверенность в правильности результата он получает либо путем применения особых контрольных формул, либо путем повторного производства вычисления. Контрольную формулу дает всякая зависимость, которую часто заранее можно установить между искомыми результатами, при условии, конечно, что эта зависимость не используется в процессе их получения. Так, правильность вычисления трех углов треугольника по трем данным его сторонам контролируется путем разыскания суммы этих углов; правильность вычисления всех корней алгебраического уравнения — использованием соотношений между корнями и коэфициентами и т. п. В случае, когда удобной контрольной формулы нет, остается вторичное, совершенно не зависимое от первого вычисление того же результата. Чтобы избежать бессознательного повторения одной и той же случайной ошибки, второе вычисление рекомендуется делать не сразу после первого, а лишь по истечении некоторого времени, по меньшей мере на другой день, или же иным способом, нежели первое.

Если контрольная формула или какие-нибудь иные соображения указывают на ошибку в вычислении, ее надо разыскать и исправить. Для этого или просматривают внимательно все вычисление, проверяя каждый его шаг, или делают его заново. Первый способ требует меньшей работы, но зато менее надежен, так как ошибку легко проглядеть. Если, несмотря ни на что, ошибка не обнаруживается, следует заподозрить правильность данных (возможны ошибки при переписке), или правильность тех табличных значений, какие участвовали в вычислении, или исправность применяемых счетных приборов, или, наконец, правильность самого указания на ошибку. Отметим, что ошибка, упорно ускользающая от самого вычислителя, нередко легко обнаруживается, когда его работу проверяет другое лицо. Когда ошибка обнаружена, ее исправляют; исправляют также последующие части вычисления. При этом либо перечеркивают неверные цифры и сверху записывают верные (лучше — другими, например красными чернилами), либо заклеивают все испорченное место полоской бумаги и записывают на ней исправленное вычисление заново.

Большое значение в смысле устранения случайных ошибок имеет аккуратная запись цифр. Каждую цифру следует писать так, чтобы характерные ее особенности ясно выступали. Нередки случаи, когда при несоблюдении этого правила вычислитель смешивает цифры 0 и 6, 2 и 9, 3 и 5, даже написанные им самим.

§ 8. Примеры вычислений с применением схем.

Чтобы иллюстрировать сказанное выше, приведем полностью решение двух вычислительных задач.

Задача 1. Вычислить объем воронки, получаемой при свертывании в конус бумажного кружка радиусом $R=5{,}4$ *см*, если из этого кружка предварительно вырезан сектор с центральным углом в α°, при следующих значениях угла α:

$$55^\circ;\ 60^\circ;\ 65^\circ;\ 70^\circ;\ 75^\circ;\ 80^\circ.$$

Предполагается, что два радиуса, ограничивающие сектор, при свертывании кружка приведены к совпадению и что полученный конус — круговой.

Задача решается по формуле, получение которой затруднений не представляет:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^3\left(1-\frac{\alpha}{360}\right)^2\sqrt{1-\left(1-\frac{\alpha}{360}\right)^2}.$$

Формулу эту предварительно преобразуем, полагая $\frac{1}{3}\pi R^3=k$ и $1-\alpha:360=t$ и приводя подкоренное выражение к виду, удобному для логарифмирования:

$$V=kt^2\sqrt{(1+t)(1-t)}.$$

Вычисление выполняем посредством таблицы четырехзначных логарифмов, кроме вычисления дроби $\alpha:360$, значения которой находим непосредственным делением и последовательным сложением. Весь ход вычислений понятен из приводимой ниже схемы.

I. Вычисление $\lg k$.

$\lg R$	0,7324
$\lg R^3$	2,1972
$\lg \pi$	0,4971
$-\lg 3$	1,5229
$-\lg k$	2,2172

II. Вычисление $\alpha:360$.

$1:72=0,01389$
$55:360=11:72=0,15278$
$60:360=12:72=0,16667$
$65:360=13:72=0,18056$
$70:360=14:72=0,19445$
$75:360=15:72=0,20834$
$80:360=16:72=0,22223$

Найдя делением $55:360=0,15278$, последовательно прибавляем 0,01389, выписав это последнее число на край особого кусочка бумаги, постепенно передвигаемого. В заключение — поверка: $80:360=2:9=$ $=0,22222$. Расхождение в 1 единицу разряда последней цифры вполне допустимо: оно является результатом округления дроби $1:72$ до 5 десятичных знаков.

III. Вычисление V.

α	55°	60°	65°	70°	75°	80°
$\alpha:360=1-t$	0,1528	0,1667	0,1806	0,1944	0,2083	0,2222
t	0,8472	0,8333	0,8194	0,8056	0,7917	0,7778
$1+t$	1,8472	1,8333	1,8194	1,8056	1,7917	1,7778
$\lg(1+t)$	0,2665	0,2633	0,2599	0,2566	0,2532	0,2499
$\lg(1-t)$	$\bar{1},1841$	$\bar{1},2219$	$\bar{1},2567$	$\bar{1},2887$	$\bar{1},3187$	$\bar{1},3467$
$\lg(1-t^2)$	$\bar{1},4506$	$\bar{1},4852$	$\bar{1},5166$	$\bar{1},5453$	$\bar{1},5719$	$\bar{1},5966$
$\lg t$	$\bar{1},9280$	$\bar{1},9208$	$\bar{1},9135$	$\bar{1},9061$	$\bar{1},8986$	$\bar{1},8909$
$\lg k$	2,2172	—	—	—	—	—
$\lg t^2$	$\bar{1},8560$	$\bar{1},8416$	$\bar{1},8270$	$\bar{1},8122$	$\bar{1},7972$	$\bar{1},7818$
$\lg\sqrt{1-t^2}$	$\bar{1},7253$	$\bar{1},7426$	$\bar{1},7583$	$\bar{1},7726$	$\bar{1},7860$	$\bar{1},7983$
$\lg V$	1,7985	1,8014	1,8025	1,8020	1,8004	1,7973
V	62,88	63,30	63,46	63,38	63,16	62,70

Для поверки выполняем все вычисление по той же схеме еще раз, но применяя уже пятизначные логарифмы. Получаем следующие значения:

62,878; 63,299; 63,464; 63,403; 63,139; 62,697.

Сравнивая эти числа с полученными ранее, замечаем, что ошибки этих последних составляют 1 или 2 единицы разряда последней их цифры (четвертой значащей). Как мы увидим далее, при вычислении посредством таблицы четырехзначных логарифмов четвертые значащие цифры результатов получаются вообще не вполне надежные.

Задача 2. Найти дугу сегмента, площадь которого равна половине площади полукруга, т. е. одной четверти площади круга.

Прежде всего, производим грубо-приближенную оценку искомого результата и убеждаемся, что искомая дуга меньше 180° (так как сегмент с дугой в 180° есть полукруг) и больше 90° (так как сектор с центральным углом в 90° равновелик четверти круга, а соответствующий сегмент, следовательно, меньше).

Обозначая радиус круга буквой r, а искомую дугу (в градусах) буквой x, получаем уравнение:

$$\pi r^2 x : 360 - 0{,}5 r^2 \sin x = 0{,}25\, \pi r^2, \qquad \text{(I)}$$

которое легко приводится к такому:

$$\cos t - \operatorname{arc} t = 0, \qquad \text{(II)}$$

где $t = x - 90°$, а $\operatorname{arc} t$ означает радианную меру дуги в t градусов.

Замечая, что наше уравнение (I) имеет один, и только один, корень между 90 и 180°, а уравнение (II), следовательно, тоже один корень, но заключенный между 0 и 90°, приступаем к решению уравнения (II), постепенно сужая промежуток, заключающий искомый корень. Пользуемся при этом тем обстоятельством, что при значениях t, меньших корня, левая часть уравнения (II) получает положительные значения, бóльших корня — отрицательные. Весь ход решения ясен из приводимой схемы. При решении пользуемся четырехзначной таблицей натуральных косинусов и таблицей для перевода градусной меры в радианную. Останавливаемся тогда, когда четырехзначная таблица отказывается служить. Если достигнутая точность недостаточна, надо взять таблицу с бóльшим числом знаков и продолжать работу.

t	0°	90°	40°	45°	42°	43°	42°20′	42°24′	42°21′
$\cos t$ $\operatorname{arc} t$	1 0	0 1,5708	0,7660 0,6981	0,7071 0,7854	0,7431 0,7330	0,7314 0,7505	0,7392 0,7389	0,7385 0,7400	0,7390 0,7391
$\cos t - \operatorname{arc} t$	1	—1,5708	0,0679	—0,0783	0,0101	—0,0191	0,0003	—0,0015	—0,0001
Заключение о том, где лежит корень	Между 0° и 90°, ближе к 0°		Между 40° и 90°, ближе к 40°	Между 40° и 45°, ближе к 40°	Между 42° и 45°, ближе к 42°	Между 42° и 43°, ближе к 42°	Между 42°20′ и 43°, ближе к 42°20′	Между 42°20′ и 42°24′, ближе к 42°20′	Между 42°20′ и 42°21′, ближе к 42°21′

Как видим, искомый корень t лежит между 42° 20′ и 42°21′, ближе к последнему значению. Следовательно, дуга $x = t + 90°$ заключается между 132° 20′ и 132° 21′, тоже ближе к последнему значению. Для поверки найдем площадь соответствующего сегмента при $r = 1$:

x	132°20′	132°21′
x (в градусах)	132, 33	132, 35
x:360	0,36759	0,36764
(x:360)·π	1,1548	1,1550
$\sin x$	0,7392	0,7390
0,5 $\sin x$	0,3696	0,3695
πx:360 — 0,5 $\sin x$	0,7852	0,7855

Площадь четверти круга при $r = 1$ равна $0{,}25\pi = 0{,}7854$, и площадь сегмента с дугой в 132°20′ действительно меньше, а с дугой в 132°21′ больше площади четверти круга. Можно принять, с погрешностью меньшей полуминуты, что $x = 132°21′$.

Продолжая вычисление далее посредством семизначных таблиц, мы нашли бы для x значение 132°20′47″.

§ 9. Некоторые практические указания.

В заключение настоящей вводной главы приводим несколько советов вычислителю, которые дает немецкий специалист по вычислительной технике, профессор Шрутка[1]).

„Вычислять следует на листах, не слишком малых, чтобы не страдала легкость обзора всего вычисления, и не слишком больших, чтобы не испытывать неудобств в обращении с ними. Лист обыкновенного канцелярского формата (21×32 *см*) следует считать уже довольно крупным. Ради удобства хранения листы должны быть одинаковых размеров. При более обширных вычислениях их хорошо нумеровать. Писать рекомендуется лишь на одной стороне листа.

Мелкие вспомогательные вычисления выполняют на особых листках, которые обыкновенно не сохраняют. Однако здесь надо иметь в виду вопрос о поверке. То же относится и к вычислениям, выполняемым в уме. В сомнительных случаях лучше записывать вычисления на главном листе.

При переписывании чисел или рядов чисел хорошо отмечать посредством мелких значков или каких-нибудь небольших предметов то место оригинала, до которого доведено переписывание.

Поверять правильность переписанного удобнее всего вдвоем, причем один читает по оригиналу, другой следит по копии, или наоборот. При этом копию берет не тот, кто ее снимал, а другой: это приводит к более строгому отношению ко всем неясностям записи. Если такая поверка вдвоем невозможна, то стараются, во избежание непрестанного перевода взгляда с одного места на другое, так сложить оригинал или копию, чтобы одинаковые числа оказались непосредственно друг около друга.

Если число приходится переписывать несколько раз, то каждый раз возвращаются к первоначальному источнику. Если требуется несколько копий, лучше вместо переписывания прибегать к механическим средствам воспроизведения.

Если желательно выделить некоторые числа, как особо важные, их подчеркивают чернилами или цветным карандашом, или пишут другими чернилами. У кого очень ровный почерк, тот может применить более крупный размер цифр. Имеют применение также и цифры уменьшенного размера, чтобы выделить менее важные или менее надежные части чисел. Если некоторое вычисление лишь немногим отличается от другого, уже проведенного, то в целях экономии можно только добавить другими чернилами те цифры, в которых есть разница (так бывает, например, при исправлении незначительных ошибок).

Никогда не следует экономить на поверках. Более пространные вычисления следует поверять по частям, чтобы, допустив ошибку в каком-нибудь промежуточном результате, не испортить всей дальнейшей работы его применением.

Производя вычисление наспех, очень легко ошибаются. Исправление ошибок обыкновенно отнимает гораздо больше времени, чем удается сберечь благодаря ускоренному темпу вычисления. С другой стороны, однако, и слишком большая осторожность и медлительность могут привести к некоторым ошибкам.

---

[1]) Prof. L. Schrutka, Zahlenrechnen, S. 11—12 (Sammlung Math.-Physik. Lehrbücher, № 20, Leipzig — Berlin, 1923).

*

В начале работы, на свежую голову, выполняют более трудные а затем уже более механические части вычисления.

Если в вычисление вкралась ошибка, и оно заменено другим, то первое вычисление уничтожают, чтобы впоследствии по недосмотру не смешать его со вторым".

ГЛАВА II.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ.

§ 10. Математические таблицы.

Из разнообразнейших существующих вспомогательных средств вычислений наибольшее значение по своей распространенности, простоте и удобству имеют в настоящее время математические таблицы.

В вычислительной практике постоянно употребляются разного рода математические таблицы, представляющие собой прекрасное вспомогательное средство вычислений, чрезвычайно простое по своему устройству и употреблению, вполне общедоступное по своей дешевизне, в высокой степени гарантирующее от ошибок, доставляющее громадную экономию времени и сил.

Наибольшее распространение имеют таблицы, дающие зависимость между *двумя переменными величинами* (из них одна является *аргументом*, другая — *функцией*). Таковы, например, таблицы логарифмов, квадратов, кубов и т. д. Таблицы, дающие зависимость между тремя переменными („таблицы функций двух аргументов"), а тем более между большим числом их, встречаются гораздо реже, и мы коснемся их лишь вскользь, рассматривая почти исключительно функции одного аргумента.

Понимание полной теории математических таблиц невозможно без знакомства с особой ветвью математического анализа, носящей название „Исчисления конечных разностей". Поэтому, оставляя в стороне более строгое доказательство устанавливаемых предложений [1]), мы займемся исключительно выяснением практических приемов обращения с таблицами.

Рассмотрим три приведенные ниже таблицы (взяты только начала таблиц I и II):

I

d	C	Δ
1,00	3,142	
		31
1,01	3,173	
		31
1,02	3,204	
		32
1,03	3,236	
		31
1,04	3,267	
		32
1,05	3,299	
		31
1,06	3,330	
		32
1,07	3,362	
		31
1,08	3,393	

II

x	x^2	Δ
10	100	
		21
11	121	
		23
12	144	
		25
13	169	
		27
14	196	
		29
15	225	
		31
16	256	
		33
17	289	
		35
18	324	

III

A	$\sin A$	Δ
0°	0,000	
15°	0,259	259
30°	0,500	241
45°	0,707	207
60°	0,866	159
75°	0,966	100
90°	1,000	34
—	—	—
—	—	—

Таблица I дает длину окружности C диаметра d. Значения диаметра d (аргумента) взяты через 0,01. Это число 0,01, т. е. разность между двумя смежными табличными значениями аргумента, называется *ступенью*

[1]) К некоторым из них мы вернемся в гл. IX.

таблицы. Приведенные в таблице значения для длины окружности C (функции) вычислены до тысячных по формуле $C=\pi d$. Образуем разности между каждыми двумя смежными значениями функции и убеждаемся, что они равны то 31, то 32 тысячным (разности эти помещены в столбце с заголовком Δ против промежутков между соответствующими значениями функции). Формула $C=\pi d$ показывает, что приращению d в 0,01 соответствует постоянное приращение C, равное $0{,}01\pi$, и что, следовательно, небольшое наблюдаемое колебание табличных разностей (то 31, то 32 тысячных) обусловлено исключительно округлением табличных значений функции. Мы здесь имеем, таким образом, таблицу с *равномерным изменением функции.*

Подобные таблицы с равномерным изменением функции применяются довольно часто. Таковы переводные таблицы мер (например, старых русских в метрические), таблицы для перевода градусной меры угла в радианную и т. д. Зависимость между функцией (y) и аргументом (x) выражается в таких таблицах либо формулой $y=ax$ (пропорциональность), либо формулой $y=ax+b$ (линейная зависимость). Пример таблицы, где зависимость выражается последней формулой, дает таблица для перевода показаний термометра Фаренгейта (x) в градусы термометра Цельсия (y). Здесь

$$y=\frac{5}{9}(x-32)=\frac{5x}{9}-17\frac{7}{9}.$$

В таблице II, дающей квадраты последовательных целых чисел, ступень равна 1, а табличные разности (см. столбец Δ) меняются от 21 (в начале таблицы) до 39 (в конце приведенного ее отрывка). Но, рассматривая три смежных значения функции и два соответствующих смежных значения табличной разности, мы видим, что смежные табличные разности лишь немного отличаются друг от друга, а потому мы имеем здесь таблицу с *почти равномерным изменением функции.*

Именно этого рода таблицы чаще всего встречаются, и ими главным образом мы и будем заниматься в дальнейшем. В рассмотренной таблице квадратов имел место почти равномерный рост функции и вполне равномерный рост табличной разности. Последнее обстоятельство несущественно, и мы будем считать изменение функции почти равномерным всякий раз, когда две смежные табличные разности на всем протяжении таблицы отличаются одна от другой менее, чем на 4 единицы (разряда последней цифры). Почему мы остановились именно на этом числе 4, выяснится в § 84.

В таблице III даны значения синусов с 3 десятичными знаками для углов, кратных 15°. Ступень таблицы, таким образом, 15°. Табличные разности (столбец Δ) меняются здесь настолько быстро, что изменение функции приходится признать *резко неравномерным.*

Различие между таблицами трех рассмотренных типов (с равномерным, почти равномерным и резко неравномерным изменением функции) весьма наглядно выясняется посредством графиков. На рисунке 1a имеем графическое изображение таблицы длины окружности в зависимости от ее диаметра. Табличные значения функции (отмеченные кружками) расположены на одной прямой. Рисунок 1b дает графическое изображение таблицы квадратов целых чисел от 10 до 20. Здесь табличные значения расположены уже не на прямой, а на кривой линии, но на протяжении одной ступени, т. е. в промежутке между каждыми двумя табличными значениями эта кривая линия без заметной погрешности может быть принята за прямую. Наконец, изображенный на рисунке 1с график синуса заметно отклоняется от прямой линии даже на протяжении одной ступени (кроме первых двух ступеней, где неравномерность изменения функции на графике не заметна).

Одна и та же таблица в разных своих частях может давать и резко неравномерное и почти равномерное изменение функции. Возьмем, например, таблицу квадратных корней, вычисленных с 4 десятичными знаками, из всех целых чисел от 1 до 1000, обычно приводимую в технических справочниках. В начале таблицы изменение функции резко неравномерно:

$$\sqrt{1}=1{,}0000;\ \sqrt{2}=1{,}4142;\ \sqrt{3}=1{,}7321,$$

табличные разности 4142 и 3179 (десятитысячных). Далее табличные разности изменяются все медленнее и медленнее. Так, для чисел

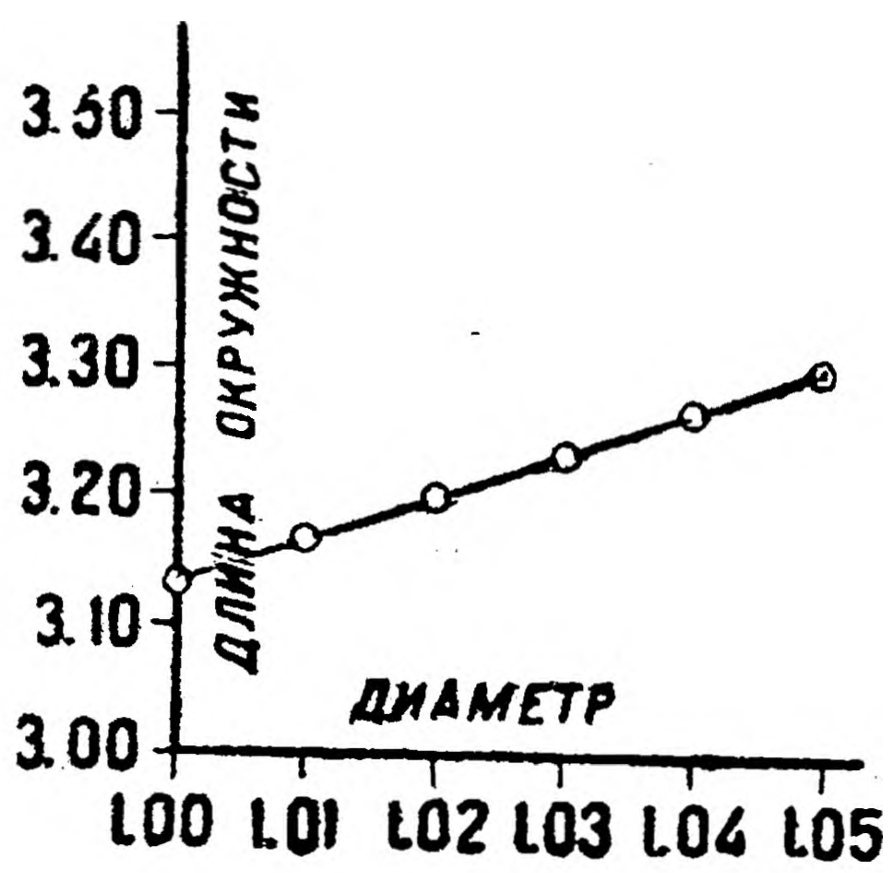


Рис. 1a.

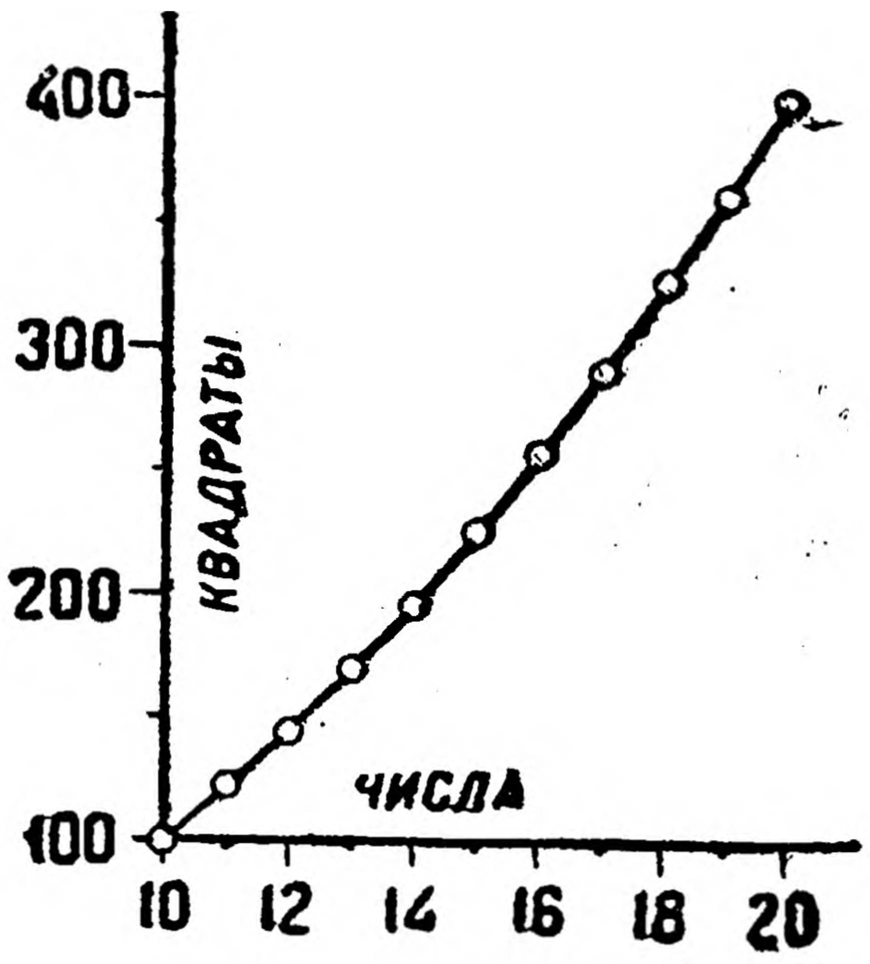


Рис. 1b.

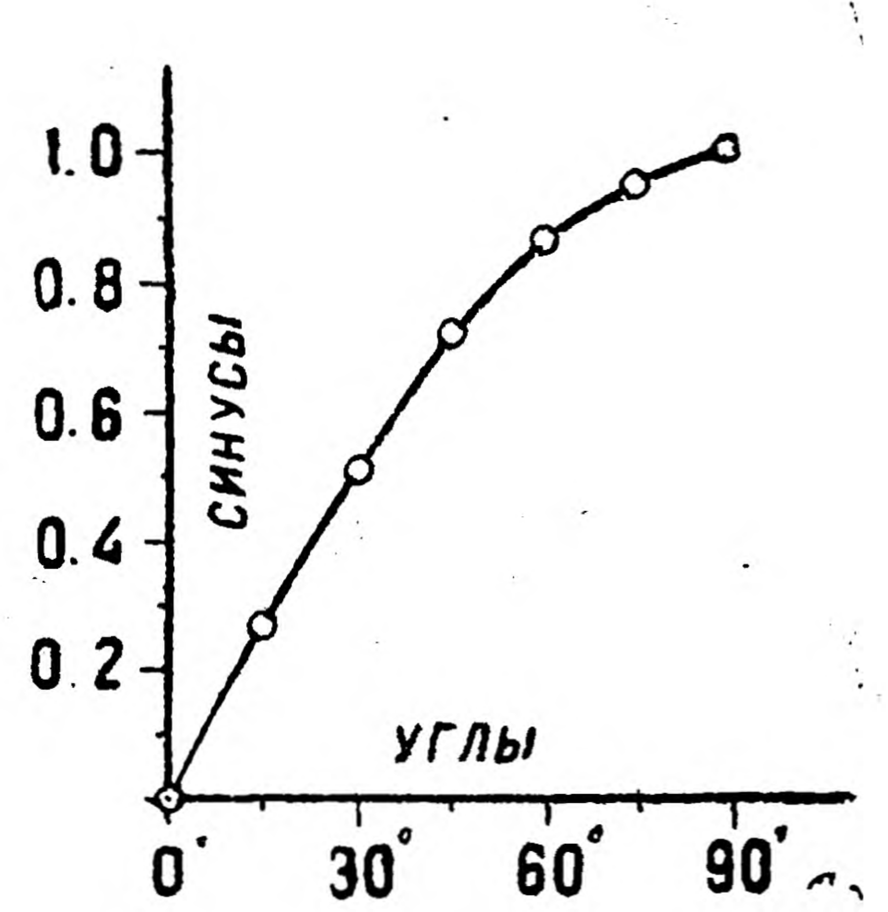


Рис. 1c.

49; 50; 51 значение корня 7,0000; 7,0711; 7,1414, а табличные разности 711 и 703. Начиная с 80, изменение функции становится уже почти равномерным (числам 80; 81; 82 соответствуют табличные разности 557 и 554). В конце таблицы числам 998; 999; 1000 соответствуют табличные разности 159 и 160.

Таблицу с резко неравномерным изменением функции часто бывает возможно превратить в таблицу с почти равномерным изменением функции путем надлежащего *округления* табличных значений, т. е. жертвуя ее точностью. Так, приведенную выше таблицу синусов, дающую резко неравномерное изменение функции при наличности 3 десятичных знаков в табличных значениях, можно превратить в таблицу с почти равномерным изменением функции от 0° до 45°, если округлить эти значения до 2 десятичных знаков.

Другой способ устранения резкой неравномерности изменения функции заключается в замене данной таблицы другой таблицей (той же функции) с *меньшей ступенью*. Так, взяв в таблице синусов ступень не в 15°, как выше, а только в 1°, мы при тех же десятичных знаках получим уже почти равномерное изменение функции на всем протяжении таблицы. Действительно, в начале таблицы мы будем иметь $\sin 0° = 0{,}000$; $\sin 1° = 0{,}017$; $\sin 2° = 0{,}035$ и разности 17 и 18, а в конце $\sin 88° = 0{,}999$; $\sin 89° = 1{,}000$; $\sin 90° = 1{,}000$ и разности 1 и 0.

Подобная замена одной таблицы другой, более подробной, конечно далеко не так легко осуществима, как округление (надо либо *иметь* в своем распоряжении такую более подробную готовую таблицу, либо самому ее *составить*).

Все табличные значения функций принято вычислять с такой точностью, чтобы погрешность каждого такого значения ни в коем случае не превосходила половины единицы разряда последней его цифры. Поэтому построение математической таблицы даже при равномерности изменения функции не так просто, как может показаться с первого взгляда.

При пользовании всякой таблицей возникает ряд вопросов, из которых одни касаются устройства и расположения каждой таблицы (соответствующие указания обыкновенно даются в каждом сборнике математических таблиц), другие же имеют более принципиальный характер и разрешаются более или менее одинаково в отношении всех таблиц. Вот важнейшие из таких вопросов.

1. Как получить значение функции для значения аргумента, содержащегося между двумя смежными табличными значениями аргумента (задача *интерполяции*)?

2. Как получить значение аргумента, при котором функция принимает данное значение, заключенное между двумя смежными табличными ее значениям (задача *обратной интерполяции*)?

§ 11. Линейная интерполяция.

Получение значений функции для таких значений аргумента, которые содержатся между двумя смежными табличными значениями аргумента, или, так сказать, *чтение между строками таблицы*, производится особенно просто в случае таблицы с равномерным изменением функции. Желая, например, найти длину C окружности диаметра $d=1{,}034$ и пользуясь таблицей § 10 (стр. 20), рассуждаем так:

$$\text{при } d=1{,}03 \quad C=3{,}236,$$

при увеличении d на $0{,}01=10$ тысячных C возрастает на $\Delta=31$ (тысячных); при увеличении d на 1 тысячную C возрастает на $\frac{31}{10}=3{,}1$ (возрастание C равномерно); при увеличении d на 4 тысячных C возрастает на $3{,}1\cdot 4=12{,}4$.

Округляя последнее число 12,4, получаем искомую поправку 12 (тысячных), которую надо прибавить к ближайшему меньшему табличному значению функции (3,236), чтобы получить искомое ее значение (3,248).

Замечая, что в случае равномерного изменения функции приращение аргумента *пропорционально* приращению функции, поправку v можно найти из пропорции;

$$v:31=0{,}004:0{,}01,$$

которая содержит в левой части отношение искомой поправки к табличной разности, а в правой — отношение *избытка* данного значения аргумента над ближайшим меньшим табличным его значением к ступени таблицы.

Пропорциональность приращений аргумента и функции, которая уясняется вообще не так легко, полезно иллюстрировать посредством чертежа, рассматривая „интерполяционный треугольник“ ADE (рис. 2). Здесь AB — часть графика функции, заключающаяся между двумя табличными ее значениями (изображены точками A и B), AC — ступень таблицы h, BC — табличная разность Δ, AE — избыток аргумента u (над ближайшим меньшим табличным его значением), или приращение аргумента, DE — искомая поправка v (приращение функции). Подобие треугольников ADE и ABC и дает пропорцию:

$$v:\Delta = u:h.$$

Если разность между данным значением аргумента и ближайшим меньшим табличным его значением, т. е. избыток аргумента u, больше половины ступени, то вместо ближайшего меньшего табличного значения аргумента выгодно взять ближайшее большее табличное его значение (вместо „избытка“ аргумента взять его „недостаток“) и *вычитать* соответствующую поправку (функция предполагается возрастающей). Так, если надо найти длину окружности диаметра 1,038, то поправку v находим из пропорции $v:31 = 0{,}002:0{,}1$ и, вычитая ее, получаем для искомого значения функции число $3{,}267 - 0{,}006 = 3{,}261$.

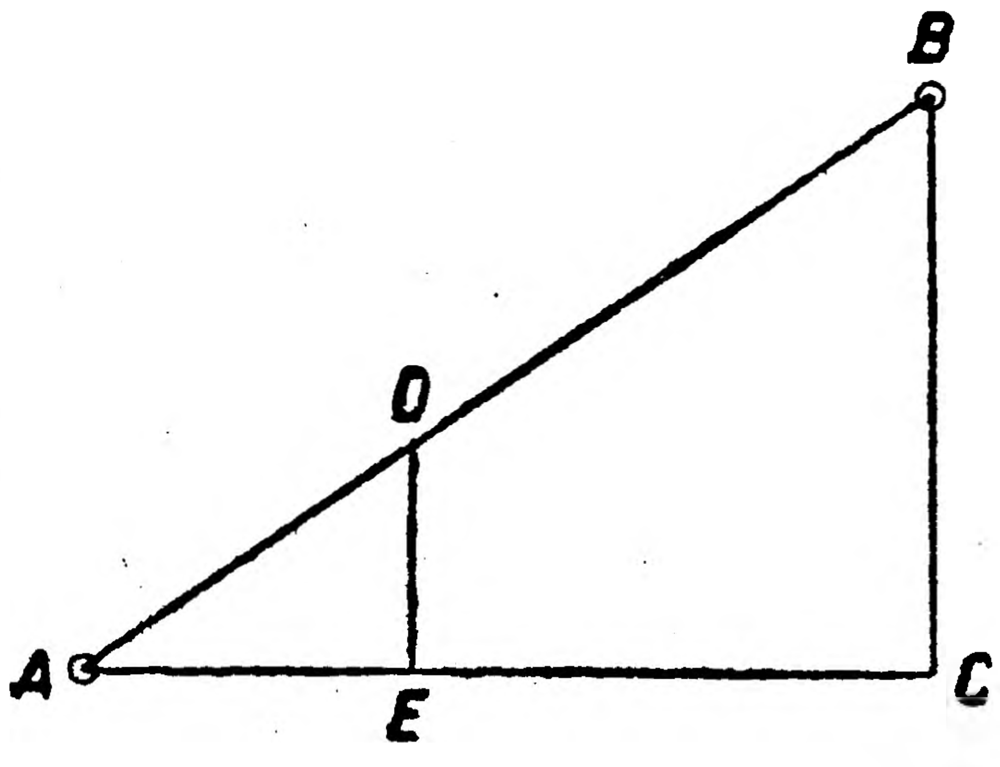


Рис. 2.

Какова точность значений функции, доставляемых этим процессом *линейной интерполяции*? Погрешность каждого табличного значения функции никогда не превосходит половины единицы (разряда последней цифры). Погрешность поправки, выражаемой в единицах того же разряда и округляемой до целых, тоже не превосходит половины единицы. Окончательный результат, получаемый после прибавления поправки к ближайшему меньшему табличному значению функции, имеет погрешность, которая может приближаться уже к целой единице разряда последней цифры, но никогда не превосходит это *предельное* значение.

Здесь уместно предостеречь от одной довольно распространенной ошибки: в поправке сохраняют один лишний десятичный знак и думают, что это приведет к более точному значению функции. Это, конечно, заблуждение. Если в примере, приведенном в начале этого параграфа, мы оставим поправку 12,4 без округления и прибавим ее к табличному значению функции:

$$\begin{array}{r} 3{,}236? \\ 124 \\ \hline 3{,}2484 \end{array},$$

то последняя цифра результата (4), как полученная от сложения 4 с неизвестной цифрой табличного значения функции (эта цифра отмечена знаком вопроса), никакого доверия не заслуживает и должна быть отброшена. Сохранять лишние цифры поправок стоило бы только в случае полной точности табличных значений функции.

Мы ответили на вопрос 1-й § 10 в отношении любой таблицы с равномерным изменением функции. При работе с таблицами с почти равномерным изменением функции пользуются тем же способом линейной интерполяции, но теперь к рассмотренным двум источникам погрешностей (погрешности табличных значений функции и погрешности от округления поправки) присоединяется еще третий источник: неравномерность изменения функции. Геометрически это иллюстрируется заменой дуги криволинейного графика функции через хорду этой дуги. Учесть соответствующую погрешность довольно трудно, и мы займемся этим вопросом далее, в § 84, где будет показано, что наибольшая возможная погрешность результата линейной интерполяции, происходящая от неравномерности изменения функции y, приближенно равна $0{,}125\,\Delta^2 y$, где $\Delta^2 y$ означает *вторую разность*, т. е. разность двух смежных табличных разностей (в рассматриваемом месте таблицы).

Таблицы функций обыкновенно стараются составлять так, чтобы смежные табличные разности отличались друг от друга не более как на одну единицу. Тогда влияние погрешностей от неравномерного изменения функции на результаты линейной интерполяции делается едва заметным, и предельную погрешность этих результатов можно принимать равной *одной единице* разряда последней цифры.

До сих пор мы брали поправку лишь на первую цифру аргумента: избыток данного значения аргумента выражался у нас однозначным числом. Легко понять, что поправки можно брать и на следующие цифры, но что не всегда стоит это делать. Пусть, например, надо найти четырехзначный логарифм числа 817,347. Берем из таблицы $\lg 817 = 2{,}9122$; $\lg 818 = 2{,}9128$; $\lg 819 = 2{,}9133$. Изменение функции почти равномерно: табличные разности 6 и 5. Поправка на первую цифру избытка данного числа (3) равна $0{,}3 \cdot 6 = 1{,}8$, поправка на вторую его цифру (4) равна $0{,}04 \cdot 6 = 0{,}24$, поправка на третью цифру (7) равна $0{,}007 \cdot 6 = 0{,}042$. При округлении до целых поправки на вторую и третью цифры исчезают, поэтому логарифм числа 817,347 оказывается равным (в пределах четырех десятичных знаков) логарифму числа 817,3. Таким образом, данное значение аргумента можно предварительно округлить и интерполировать только на одну его цифру. Это возможно в тех случаях, когда табличная разность невелика. Чем больше табличная разность, тем больше цифр избытка аргумента следует принимать во внимание.

Можно руководствоваться правилом: принимать во внимание только первую цифру избытка аргумента, т. е. десятые доли ступени, если $\Delta < 20$, и две первые цифры избытка, т. е. десятые и сотые доли ступени, если $\Delta \geqq 20$. При $\Delta < 20$ погрешность округления аргумента до десятых долей ступени, которая никогда не может быть больше 0,05 ступени, вызывает погрешность поправки во всяком случае меньшую, чем $0{,}05 \cdot 20 = 1$. Тысячные доли ступени приходится принимать во внимание при $\Delta \geqq 200$, но такие большие табличные разности в таблицах с почти равномерным изменением функции на практике почти никогда не встречаются.

Напомним, что все изложенное о линейной интерполяции относится только к таблицам с равномерным или почти равномерным изменением функции. Необходимо самым решительным образом предостеречь от линейной интерполяции в случае резко неравномерного изменения функции, так как здесь возможны значительные погрешности в результатах. Попробуем, например, найти посредством линейной интерполяции $\operatorname{tg} 89°33'$, зная что $\operatorname{tg} 89°30' = 114{,}6$, а $\operatorname{tg} 89°36' = 143{,}2$. Здесь $\Delta = 28{,}6$, избыток аргумента $3'$ равен половине ступени, поправка $28{,}6 : 2 = 14{,}3$, что дает $\operatorname{tg} 89°33' = 114{,}6 + 14{,}3 = 128{,}9$. Между тем по справке в более подробной таблице устанавливаем, что $\operatorname{tg} 89°33' = 127{,}3$.

Значительная погрешность интерполированного значения, равная 1,6 или 16 единицам разряда последней его цифры, произошла вследствие резко неравномерного изменения функции:

	разности
$\operatorname{tg} 89^\circ 30' = 114{,}6$	
	28,6
$\operatorname{tg} 89^\circ 36' = 143{,}2$	
	47,8
$\operatorname{tg} 89^\circ 42' = 191{,}0$	

§ 12. Обратная линейная интерполяция.

В предыдущем параграфе мы предполагали, что значение аргумента известно, а значение функции надо определить. Теперь рассмотрим обратную задачу: дано значение функции, надо посредством таблицы найти соответствующее значение аргумента. Если данное значение функции имеется в таблице, мы просто выписываем из нее соответствующее значение аргумента. В противном случае мы встречаемся с задачей обратной *интерполяции* (2-й вопрос § 10). В таблицах с равномерным или почти равномерным изменением функции опять пользуемся пропорциональностью между приращением (избытком) аргумента и приращением (избытком) функции; говорят, что здесь применяется *обратная линейная интерполяция.*

Пусть, например, надо найти диаметр окружности, длина которой $C = 3{,}343$. Пользуясь табличкой § 10 (стр. 20) замечаем, что искомый диаметр d больше 1,06 ($C = 3{,}330$) и меньше 1,07 ($C = 3{,}362$). Избыток данного значения функции (3,343) над ближайшим меньшим табличным ее значением равен 13, табличная разность 32. Поправку u, которую надо прибавить к 1,06, находим из пропорции $u : 0{,}01 = 13 : 32$. Ограничиваясь одной цифрой поправки, получаем искомое значение $d = 1{,}06 + 0{,}004 = 1{,}064$.

Если данное значение функции ближе к ближайшему большему табличному ее значению, чем к ближайшему меньшему, то выгоднее вместо его „избытка" пользоваться его „недостатком", т. е. разностью между ближайшим большим табличным значением функции и данным ее значением, и вычитать соответствующую поправку (предполагается, что функция возрастающая). Так, если требуется найти диаметр окружности, длина которой 3,260, то, замечая, что избыток данного значения (3,260—3,236) равен 24, а его недостаток (3,267—3,260) равен только 7, вычисляем поправку из пропорции $u : 0{,}01 = 7 : 31$. Отсюда $u = 0{,}002$, искомое значение аргумента $1{,}04 - 0{,}002 = 1{,}038$.

С какой точностью получается в результате обратной интерполяции значение аргумента? С какой бы точностью ни было дано значение функции, его избыток (или недостаток) не может быть найден точнее, чем до половины единицы разряда последней цифры табличных значений. Обозначая через x то приращение аргумента, которое соответствует приращению функции в половину единицы, получаем пропорцию $x : h = 0{,}5 : \Delta$, откуда $x = 0{,}5h : \Delta = h : (2\Delta)$.

Такова предельная погрешность аргумента, обусловленная неточностью табличных значений (предполагается, что данное значение функции точно). Эта предельная погрешность тем меньше, чем больше Δ. Она равна $0{,}1h$ при $\Delta = 5$ и $0{,}01h$ при $\Delta = 50$. При $\Delta < 5$ обратная линейная интерполяция не дает даже одной вполне надежной цифры поправки; при $5<\Delta<50$ получается одна вполне надежная цифра, которою обыкновенно и ограничиваются. Округляя поправку аргумента до одной цифры, т. е. до десятых долей ступени, мы вносим в окончательный результат еще погрешность от округления, не превышающую $0{,}05h$, которая прибавляется к погрешности от неточности табличных значений функции, не превышающей $h:(2\Delta)$.

Определяя выше диаметр окружности по данной ее длине $C=3{,}343$, мы получили поправку $u=13h:32$ с погрешностью, не превосходящей $h:(2\Delta)=h:64<0{,}02h$. Вычисляя одну цифру этой поправки, мы вносим в нее погрешность от округления, не превосходящую $0{,}05h$. Полная погрешность поправки (и окончательного результата) не превосходит $0{,}02h+$ $+0{,}05h=0{,}07h=0{,}0007$ (здесь $h=0{,}01$).

Так обстоит дело при пользовании таблицами с равномерным изменением функции. Тот же способ обратной линейной интерполяции употребляется и при почти равномерном изменении функции. При учете полной погрешности ее результата, кроме погрешностей от неточности табличных данных и погрешностей от округления поправок, следует еще принять во внимание и погрешность от неравномерности изменения функции. В § 84 мы увидим, что предельная погрешность в определении аргумента, обусловленная неравномерностью изменения функции, приближенно равна $0{,}125\Delta^2y:\Delta y$.

Относительно таблиц с резко неравномерным изменением функции приходится повторить то же самое, что о них было сказано в § 11: обратная линейная интерполяция здесь недопустима.

§ 13. Влияние погрешностей данных значений.

До сих пор мы предполагали, что данные значения аргумента (при разыскании значений функции) и данные значения функции (при разыскании значений аргумента) вполне точны, и учитывали только погрешности, вносимые в результаты самими таблицами (эти погрешности можно называть „табличными погрешностями“). Однако в громадном большинстве случаев данные бывают только приближенными, и возникает вопрос, какое влияние имеют погрешности данных на точность результатов, получаемых посредством таблиц. Вопрос этот можно решать общими способами учета погрешностей, но при употреблении линейной интерполяции возможен также следующий простой прием. Пусть дано значение аргумента x с погрешностью в ту или другую сторону, не превышающей α. С какой предельной погрешностью β получим мы значение функции y?

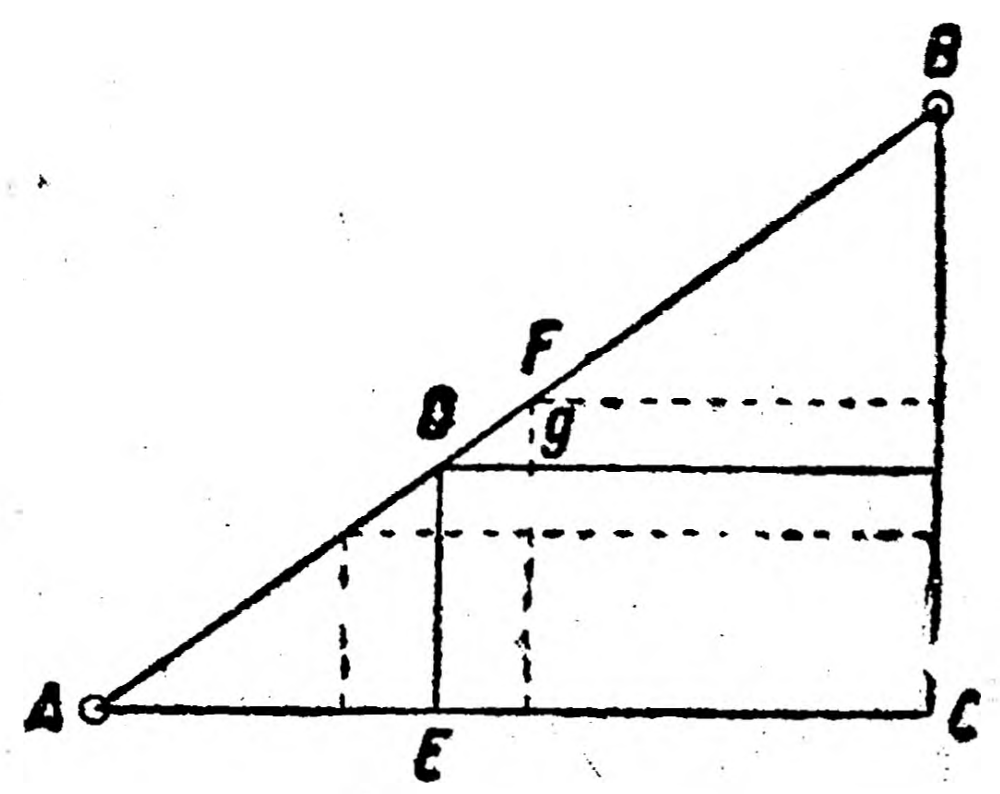


Рис. 3.

В интерполяционном треугольнике (рис. 3) мы теперь получим уже не две прямые, а две *полосы*: одну—между двумя вертикальными прямыми, соответствующими значениям аргумента $x-\alpha$ и $x+\alpha$, другую — между двумя горизонтальными прямыми, соответствующими значениям функции $y-\beta$, $y+\beta$. Из подобия треугольников ABC и DFg получаем соотношение $\alpha:h=\beta:\Delta$.

Таким образом, *погрешность значения функции составляет такую часть табличной разности, какую часть ступени составляет погрешность аргумента.* Посредством этого простого правила легко оценивается погрешность от неточности данных.

Установив тем или другим способом, какое влияние на точность результатов имеют погрешности данных, и желая получить эти результаты посредством таблицы, мы должны поставить вопрос о том, соответствует ли точность таблицы точности искомого результата. При этом возможны три следующих случая. Допустим, прежде всего, что погрешность результата, происходящая от неточности данных, не превосходит 1 и что результат этот может быть вычислен посредством таблицы с табличной погрешностью, не превосходящей 0,1. Этот случай является *нормальным*: погрешность, вносимая в результат вычисления самим процессом вычисления, не повышает сколько-нибудь заметно неустранимой погрешности результата, обусловленной неточностью данных. Можно мириться и с таким положением, когда табличные погрешности приблизительно равны погрешностям от неточности данных. Но случай, когда табличная погрешность оказывается в несколько раз больше погрешности от неточности данных, надо признать уже ненормальным: таблица в этом случае *недостаточно точна*, ее применение *портит* точность результата. Нужно либо применить другую, более точную таблицу, либо выполнить вычисление без таблицы. Наконец, ненормальным является и такой случай, когда погрешность от неточности данных равняется, например, 1, а табличная погрешность, например, 0,01. Здесь таблица *слишком точна*, и нет надобности вычислять результат с той наибольшей точностью, какую может дать данная таблица (например, можно не интерполировать).

§ 14. Вспомогательные средства линейной интерполяции.

Для вычислений, связанных с выполнением линейной интерполяции, употребляются три следующих вспомогательных средства:

1) между каждыми двумя табличными значениями функции помещают значение соответствующей табличной разности; таким образом устраняется необходимость делать вычитание;

2) на каждой странице таблицы помещают (сбоку) произведения десятой части каждой встречающейся на этой странице табличной разности на последовательные целые числа 1, 2...9; это всем известные таблички P. P. (Partes proportionales, пропорциональные части), весьма упрощающие производство как умножения (при прямой интерполяции), так и деления (при интерполяции обратной); если аргументом таблицы служит угол и ступень таблицы равна, скажем, $0,1° = 6'$, то берут произведение одной шестой табличной разности на числа 1, 2, 3, 4, 5;

3) для ряда последовательных табличных значений функции, расположенных на одной строке, вычисляют *среднее значение* табличной разности и соответствующие произведения располагают на этой же строке, обыкновенно справа; такие произведения представляют собой те же пропорциональные части, только особым образом расположенные; мы будем называть их *готовыми поправками*.

Готовые поправки дают значительно бóльшую экономию в вычислительной работе, чем обыкновенные P. P. Распространение они получили лишь в самое последнее время, а потому остановимся на них несколько подробнее. Покажем, прежде всего, как их вычисляют.

Возьмем четырехзначные мантиссы логарифмов чисел от 100 до 999 и расположим их по 10 на каждой строке, занимая таким образом всего 99 строк. Такая таблица занимает обыкновенно две печатные страницы. Рассмотрим разности логарифмов, расположенных на двух каких-либо последовательных строках, например на 30-й и 31-й, приведенных ниже (*n*-й строкой будем называть строку, имеющую в заголовке, т. е. слева, число *n*):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051									

На 30-й строке табличные разности равны то 14, то 15; на 31-й— то 14, то 13. Чтобы получить *среднее значение* табличной разности для 30-й строки, возьмем разность lg 310 — lg 300 и разделим ее на 10 (так как эта разность равна сумме 10 табличных разностей). Пользуясь пятизначными логарифмами, найдем среднее значение 14,24 (десятитысячных). Составляя произведения десятой части этого числа на числа 1, 2, 3,...9 получим (после округления до целых) числа:

1 3 4 6 7 9 10 11 13.

Точно так же для 31-й строки получим произведения:

1 3 4 6 7 8 10 11 12.

Эти „готовые поправки" и помещают в конце каждой строки таблицы, получая, таким образом, „таблицу с готовыми поправками":

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051																		

Наличность готовых поправок чрезвычайно упрощает пользование таблицей, так как позволяет выполнять интерполяцию (как прямую, так и обратную) в уме. Пусть, например, требуется найти lg 3,154. Из таблицы берем мантиссу 3,15, а именно 4983 („31-я строка, 5-й столбец"), и поправку на цифру 4 (на той же строке, в „4-м столбце поправок"), равную 6. Остается только прибавить поправку 6 к найденному табличному значению 4983. Получаем lg 3,154 = 0,4989. Если четвертая цифра числа больше 5, лучше брать ближайшее большее табличное значение логарифма и *вычитать* соответствующую поправку на четвертую цифру. Так, для получения lg 3,158 берем табличную мантиссу lg 3,16 и отнимаем поправку на 2, равную 3. Получается $\lg 3{,}158 = 0{,}4997 - 0{,}0003 = 0{,}4994$. Тот же результат получается и при пользовании ближайшим меньшим табличным значением ($4\,983 + 11 = 4\,994$). Иногда, однако, эти два способа дают результаты, разнящиеся на 1 единицу (разряда последней цифры). Большего доверия заслуживает, вообще говоря, тот результат, который найден посредством меньшей поправки. Итак, поправок на цифры 6; 7; 8; 9 можно никогда не брать, заменяя их поправками на цифры 4; 3; 2; 1. Поэтому в таблице иногда только эти последние поправки и помещают, отчасти по соображениям экономии места, отчасти желая избежать погрешностей, которые тем больше, чем больше поправки.

Если избыток данного значения аргумента (над табличным его значением) содержит не 1, а 2 цифры, то поправку можно брать на каждую цифру отдельно, уменьшая взятую из таблицы вторую поправку в десять раз. Желая, например, найти $\lg 3{,}1416$, берем табличную мантиссу, соответствующую числу 314, затем поправку на четвертую цифру (1), равную 1, и наконец, поправку на пятую цифру (6), равную 8. Уменьшая последнюю поправку в десять раз и округляя ее до целых, получаем окончательно $4969 + 1 + 1 = 4971$. В большинстве случаев поправка на пятую цифру числа (при разыскании четырехзначного его логарифма) получается настолько малой, что лучше предварительно округлить пятизначное число до четырех цифр, а затем уже искать логарифм.

При обратной интерполяции мы, пользуясь готовыми поправками, легко *подбираем* значение аргумента, которому соответствует данное значение функции. Например, если $\lg x = 0{,}4875$, то, замечая, что ближайшая табличная мантисса (4871) соответствует значению аргумента 307 и отличается от данной мантиссы (4875) на 4 единицы, смотрим в графе поправок, какому избытку в числе соответствует поправка в 4 единицы. Убедившись, что такую поправку дает избыток 3, заключаем, что искомое число есть 3073, или, принимая во внимание характеристику данного логарифма, 3,073.

Применение готовых поправок, несомненно, увеличивает погрешности интерполированных значений, и притом тем больше, чем быстрее изменяется на протяжении строки табличная разность, т. е. чем больше разница между табличной разностью в начале и в конце строки. Если эта разница близка к двум единицам (разряда последней цифры табличных значений функции), то погрешность, вызываемая применением готовых поправок, может при самом неблагоприятном стечении обстоятельств достигать одной единицы (разряда последней цифры), и полная табличная погрешность интерполированного значения функции может приближаться в самом неблагоприятном случае к 2 единицам разряда последней цифры.

Однако в громадном большинстве случаев действительные погрешности интерполированных значений далеко не достигают этой границы. Убедиться в этом позволяет простой опыт. Возьмем, например числа 3,121; 3,122; 3,123... 3,129 и найдем четырехзначные мантиссы их логарифмов посредством вышеприведенного отрывка таблицы с готовыми поправками, а затем возьмем мантиссы логарифмов тех же чисел по пятизначным таблицам. Сравнивая результаты, обнаруживаем, что погрешности четырехзначных мантисс составляют (в долях единицы четвертого десятичного знака):

0,1 0,7 0,3 0,9 0,5 0,1 0,7 0,3 0,1,

что дает в среднем $\frac{3,7}{9}=0,41$ и не достигает даже половины единицы (разряда последней цифры табличных мантисс).

Если разница табличных разностей в начале и в конце строки больше двух единиц, то готовые поправки вносят уже заметную погрешность. Тогда строку разбивают на две и более частей и дают готовые поправки для каждой такой части („уступа“) отдельно. Вот, например, какой вид должна иметь первая строка четырехзначной таблицы логарифмов, чтобы погрешности от применения готовых поправок были совершенно незаметны:

	0	1	2		4	5	6		8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043									4	9	13	17	22	26	30	35	39
			0086	0128	0170						4	9	13	17	21	25	30	34	38
						0212	0253				4	8	12	16	21	25	29	33	37
								0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36

Если в таблице тригонометрических функций ступень равна $0,1^\circ = 6'$, то готовые поправки даются на $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ или же только на $1'$, $2'$, $3'$, так как поправки на $4'$ и $5'$ можно с выгодой заменять поправками на $1'$ и $2'$.

§ 15. Расположение таблиц.

Если таблица расположена в два параллельных столбца (или две параллельные строки), причем первый столбец содержит последовательные значения аргумента, а второй — функции, то говорят, что таблица имеет *один вход*. Таково, например, расположение таблиц логарифмов академика С. П. Глазенапа[1]). Меньше места занимают, при том же объеме, т. е. при том же количестве табличных значений, таблицы, расположенные в *два входа*; так называют таблицы, в которых каждое табличное значение функции находят в пересечении строки, имеющей в заголовке (слева) несколько первых цифр значения аргумента, и столбца, имеющего в заголовке (сверху) последнюю цифру этого значения аргумента. В два входа расположены, например, общеизвестные „Пятизначные таблицы логарифмов“ Е. Пржевальского (однако логарифмо-тригонометрические таблицы этого сборника имеют один вход). Таблица четырехзначных логарифмов с готовыми поправками, отрывок которой приведен в предыдущем параграфе, представляет собой пример таблицы с *тремя входами*: здесь третий вход служит для получения поправок на четвертую цифру. Существуют таблицы и с большим числом входов (четыре, пять, шесть входов).

Размеры таблицы можно уменьшать, увеличивая ее ступень. Но это возможно лишь до известного предела, а именно — до тех пор, пока

---

1) С. П. Глазенап (почетный член Академии наук СССР), Пятизначные таблицы логарифмов с приложением других таблиц, упрощающих вычисления. Изд. 7-е, исправленное и дополненное; издательство Академии наук СССР, Ленинград 1932.

соблюдаются условия допустимости линейной интерполяции. Таблицы с резко неравномерным изменением функции, при употреблении которых нужно интерполировать с высшими разностями (см. гл. IX), для школ, конечно, совершенно непригодны. Они применяются, однако, в астрономии, навигации, страховых вычислениях, математической статистике и т. д.

Как мы видели, всякая таблица значений некоторой функции служит также и для решения обратного вопроса, т. е. для получения значений обратной функции. Так как, однако, процесс обратной интерполяции несколько сложнее чем прямой, то рядом с таблицами более употребительных функций часто помещают и таблицы соответствующих обратных функций: рядом с таблицей логарифмов (десятичных) помещают таблицу антилогарифмов, т. е. значений функции 10^x, рядом с таблицей квадратов — таблицу квадратных корней. Необходимости в этом нет, но некоторое удобство такие таблицы обратных функций представляют. Например, наличность таблицы антилогарифмов имеет ту выгоду, что вместо двух правил (одно для разыскания логарифма, другое для разыскания числа по логарифму) приходится усваивать только одно: оба вопроса решаются совершенно одинаково. Однако при этом возникает опасность смешения двух различных таблиц, обыкновенно устроенных совершенно одинаково. Чтобы устранить такое смешение, можно покрыть таблицу антилогарифмов какой-нибудь прозрачной краской.

Различные подробности расположения таблицы бывают обыкновенно рассмотрены в объяснениях к ней. С внимательного чтения объяснений и следует начинать ознакомление со всякой новой таблицей.

§ 16. Обзор важнейших таблиц.

Среди таблиц первенствующую роль играют таблицы *логарифмов чисел и логарифмов тригонометрических функций.* В широких кругах даже самое понятие математической таблицы отождествляется с понятием таблицы логарифмов. Объем таблицы логарифмов чисел быстро меняется с изменением числа десятичных знаков в табличных мантиссах. Таблица четырехзначных логарифмов содержит обыкновенно логарифмы всех целых чисел от 100 до 999 и занимает всего две печатных страницы. Таблица пятизначных логарифмов содержит уже логарифмы всех целых чисел от 1000 до 9999 и имеет объем, примерно в десять раз больший, чем таблица четырехзначных логарифмов. Таблица семизначных логарифмов содержит уже логарифмы всех целых чисел от 10 000 до 99 999 и представляет собой уже целый том. Чем объемистее таблица, тем дороже она стоит, и тем больше времени требует каждое в ней подыскание. Поэтому таблицу надо выбирать соответственно точности данных и искомых. В подавляющем большинстве случаев вполне достаточно той точности, какую дает таблица четырехзначных логарифмов, так как данные, полученные путем измерения, содержат обыкновенно не больше 3—4 значащих цифр. Правда, встречаются задачи, где требуется точность в 5 и более цифр, например многие задачи на денежные расчеты (сложные проценты, срочные уплаты). Поэтому, постоянно применяя таблицу четырехзначных логарифмов как основное пособие, необходимо уметь обращаться и с более подробными пяти-и семизначными таблицами (таблицы шестизначные мало употребительны). Интересно отметить, что несколько десятков лет назад в школах употреблялись исключительно семизначные таблицы, вытесненные к концу XIX в. таблицами пятизначными. Эти последние в свою очередь вытесняются таблицами четырехзначными. Получается выигрыш и в цене таблиц, и в простоте обращения с ними, и в скорости вычислительной работы (по свидетельству известного астронома Энке, время, нужное для проведения одного и того же вычисления посредством семи-, шести- и пятизначных таблиц логарифмов, пропорционально числам 3, 2, 1). Все это покупается ценой уменьшения точности доставляемых таблицами результатов, но, повторяем, точность в 4 значащие цифры в большинстве случаев является даже слишком большой, и результаты округляются до 3 значащих цифр. В дальнейшем, с распространением счетных линеек, дающих ту же точность, что и таблицы трехзначных логарифмов, но представляющих целый ряд выгод сравнительно с таблицами, эти линейки, можно думать, займут в вычислительной практике то положение, какое в настоящее время занимают четырехзначные таблицы.

Из функций углов прежние таблицы отдавали решительное предпочтение логарифмо-тригонометрическим функциям. В настоящее время, с развитием других методов вычисления, кроме логарифмического, все большее и большее значение начинают иметь таблицы *натуральных тригонометрических функций*. В особых таблицах косинусов и котангенсов надобности нет, достаточно обычной второй нумерации в таблицах синусов и тангенсов. Таблицы секансов и косекансов желательны, так как позволяют заменять деление (на косинус и синус) умножением, но особой необходимости в них нет. В четырехзначных логарифмо-тригонометрических таблицах, равно как и в таблицах натуральных тригонометрических функций, ступень берут обыкновенно в $0°,1 = 6'$. Тогда таблицы получают удобный небольшой объем и линейная интерполяция допустима на всем их протяжении, кроме начала таблиц логарифмов синусов и тангенсов, конца таблицы логарифмов тангенсов и конца таблицы натуральных тангенсов. Поэтому желательно иметь особые таблицы $\lg \sin$ и $\lg \operatorname{tg}$ углов, близких к $0°$, а также $\lg \operatorname{tg}$ и tg углов, близких к $90°$, таблицы, которые давали бы значения соответствующих функций для углов через $1'$ без интерполяции.

Очень полезны, хотя менее распространены, таблицы *квадратов* и *кубов*. Расположенная в три входа четырехзначная таблица квадратов дает квадрат любого четырехзначного числа с 4 значащими цифрами и, обратно, — четырехзначный квадратный корень из любого четырехзначного числа. Занимает такая таблица всего две страницы. Аналогичная таблица кубов занимает, вследствие более быстрого изменения разностей в начале таблицы, уже не две, а четыре страницы, и дает, кроме кубов, также кубические корни.

Большое применение при решении задач геометрического и физического содержания имеют таблицы *длины окружности и площади круга* в зависимости от радиуса или, лучше, диаметра. При расположении в три входа каждая такая таблица, заключая в себе только две страницы, позволяет находить (с 4 значащими цифрами) длину окружности и площадь круга для всех значений диаметра, выраженных четырехзначными числами, а также решать обратную задачу, т. е. находить (с 4 значащими цифрами) значение диаметра по данному значению длины окружности или площади круга. Задачи на окружности встречаются так часто, что все технические справочники содержат таблицы длины окружности и площади круга, обыкновенно для значений диаметра от 1 до 1 000. Но там без нужды дают значения функций с большим числом цифр, а именно с 5 или даже с 6, чем затрудняют интерполяцию и решение обратного вопроса.

Таблица *для перевода градусной меры в радианную* прилагается ко всякой более подробной таблице логарифмов.

Имея сравнительно малое значение для задач, связанных с элементарным курсом математики, такая таблица находит постоянное применение в приложениях математического анализа и в задачах технического характера.

Таблица обратных значений могла бы приносить существенную пользу при всевозможных расчетах, начиная от простейших арифметических, так как позволяет заменять всякое деление умножением и наоборот. Такая таблица для каждого числа n, взятого с определенным числом значащих цифр, дает значение дроби $1:n$, т. е. так называемое „обратное число".

Многие технические справочники содержат значение дроби $1:n$ для всех значений n от 1 до 100 или даже до 1000. Удобнее иметь таблицы для значений n от 1,000 до 9,999 через 0,001 (такие таблицы имеются во многих иностранных, особенно английских сборниках математических таблиц).

Существует еще множество других полезных таблиц, перечислить которые невозможно.

Табулированию, т. е. расположению в таблицу, легко поддаются всевозможные функции одного аргумента. Труднее табулировать функцию двух аргументов (для них удобнее пользоваться *номограммами*, о которых будет речь в гл. VII). Однако есть функция двух аргументов, для которой создано множество таблиц. Это — функция $z = xy$, таблицы которой существенно облегчают выполнение умножения и деления многозначных чисел. Опыт показывает, что умножение или деление одной пары многозначных чисел скорее выполняется при помощи подходящей таблицы произведений, чем при помощи таблицы логарифмов: в первом случае нужно всего лишь одно подыскание в таблице, тогда как во втором—целых три. Из очень многих таблиц произведений упомянем только изданные Гостехиздатом „Таблицы умножения" О'Рурка, дающие точные произведения всех трехзначных чисел на все двузначные, а также „Таблицы умножения четырехзначных чисел на двузначные", выпущенные под ред. проф. Подтягина в 1932 г. Таблицы эти находят себе применение даже при наличности счетной линейки и арифмометра.

Маленькую таблицу произведений, содержащую произведения определенного числа на все однозначные числа, выгодно составлять самому всегда, когда это число фигурирует несколько раз как множитель или делитель. Такая табличка быстро получается последовательным прибавлением взятого числа.

Прибавление следует вести до получения десятикратного значения, так как тогда мы получаем хороший контроль правильности всей таблички.

Таблицы длины окружности, перевода градусов в радианы, перевода мер и некоторые другие представляют собой не что иное, как таблицы произведений.

§ 17. Счеты. Палочки Непера.

Стремление облегчить и ускорить выполнение арифметических и вообще математических выкладок привело к созданию целого ряда разнообразнейших счетных приборов и счетных машин, в более или менее значительной степени механизирующих работу вычисления. Мы ограничимся рассмотрением трех важнейших: палочек Непера, арифмометра, счетной логарифмической линейки (последней посвящена вся гл. III), но упомянем и о таком примитивном приборе, как *счеты*, значение которых для вычислительной практики отнюдь не следует недооценивать.

Русские торговые счеты в значительной степени механизируют выполнение действий сложения и вычитания. Уже при небольшом навыке эти действия выполняются на счетах почти столь же быстро, как и на арифмометре. Не останавливаясь на приемах работы на счетах, отметим только, что этот простой и широко распространенный прибор облегчает не только выполнение сложения и вычитания, но и других действий. Большие удобства представляют соединение счетов с таблицей логарифмов при вычислении одночленного выражения. Записав формулу, по которой проводится вычисление, и числовые значения входящих в нее букв, можно обойтись без всякой дальнейшей записи, „кладя“ на счеты логарифмы всех сомножителей числителя и „сбрасывая“ логарифмы всех сомножителей знаменателя. Многочленное выражение вычисляется, конечно, по частям. Отрицательные характеристики, когда они встречаются, можно класть на особой, специально для них отводимой проволоке (например на крайней верхней) или же устранять их вовсе прибавлением к характеристике 10 единиц.

0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

Рис. 4.

Крайне простой прибор, настолько простой, что каждый может его себе изготовить из куска плотной бумаги или картона, представляют собой „*палочки Непера*“. Несмотря на эту свою простоту, палочки Непера оказывают очень существенную помощь при вычислении, облегчая выполнение умножения и деления многозначных чисел почти в такой же мере, в какой торговые счеты облегчают выполнение сложения и вычитания.

Палочки Непера изображены на рисунке 4. Каждая из этих палочек представляет собой не что иное, как таблицу произведений одного из чисел от 0 до 9 на все однозначные числа от 1 до 9. В каждом произведении цифра десятков отделена от цифры единиц наклонной чертой.

Имея по нескольку экземпляров каждой из изображенных на рисунке 4 палочек, мы легко получим произведения любого многозначного числа на все однозначные. Например, если нужны произведения числа 73 244, уложим рядом палочки, соответствующие всем цифрам этого числа, как показано на рисунке 5. Горизонтальные строки полученной таким образом таблицы и дают эти произведения, а именно:

$73\,244 \cdot 1 = 73\,244$	$73\,244 \cdot 6 = 439\,464$
$73\,244 \cdot 2 = 146\,488$	$73\,244 \cdot 7 = 512\,708$
$73\,244 \cdot 3 = 219\,732$	$73\,244 \cdot 8 = 585\,952$
$73\,244 \cdot 4 = 292\,976$	$73\,244 \cdot 9 = 659\,196$
$73\,244 \cdot 5 = 366\,220$	

При чтении этих произведений необходимо складывать цифры смежных полосок, оказавшиеся между каждыми двумя смежными наклонными линиями, что соответствует, как легко видеть, переносу десятков, получающихся при умножении цифры какого-нибудь разряда, в следующий, высший разряд.

0/7	0/3	0/2	0/4	0/4
1/4	0/6	0/4	0/8	0/8
2/1	0/9	0/6	1/2	1/2
2/8	1/2	0/8	1/6	1/6
3/5	1/5	1/0	2/0	2/0
4/2	1/8	1/2	2/4	2/4
4/9	2/1	1/4	2/8	2/8
5/6	2/4	1/6	3/2	3/2
6/3	2/7	1/8	3/6	3/6

Рис. 5.

Имея дело с палочками Непера впервые, лучше читать произведения справа налево, но в дальнейшем надо привыкнуть читать их слева направо.

Заменяя таблицу произведений любого многозначного числа на все однозначные, палочки Непера существенно облегчают труд выполнения действий умножения и деления любых многозначных чисел. Чтобы перемножить два многозначных числа, составляют посредством палочек произведения одного из них, а именно того, в котором больше цифр, на все однозначные числа, берут его произведения на все цифры второго и складывают, на бумаге или на счетах, эти частные произведения. Чтобы разделить одно многозначное число на другое, составляют посредством палочек произведения делителя на все однозначные числа и сводят дело к ряду последовательных вычитаний (на бумаге или на счетах).

Палочки Непера не дают, таким образом, полной механизации действий умножения и деления. Однако, как показывает опыт, применение палочек все же сокращает время, нужное для выполнения этих действий, от двух до четырех раз, а также заметно понижает шансы сделать случайную ошибку. Наконец, и это далеко не маловажно, работа с палочками Непера утомляет вычислителя гораздо меньше, чем выполнение действий умножения и деления обыкновенным письменным способом. Выгода от применения палочек тем значительнее, чем больше цифр содержат данные. При умножении и делении двузначных чисел пользоваться ими не стоит.

Этот простой и остроумный прибор придуман Д ж о н о м Н е п е р о м, знаменитым изобретателем логарифмов, в конце XVI в. и описан им в книге, вышедшей в 1617 г. в Эдинбурге (в Шотландии), под названием „счетных палочек". С тех пор и до настоящего времени не прекращаются попытки изобретателей усовершенствовать прибор Непера. Дело в том, что палочки Непера в их описанном выше виде имеют три недостатка. Первый заключается в том, что перенос десятков не механизирован: нужно все время выполнять в уме сложения чисел (правда, только однозначных). Второй недостаток — необходимость при выполнении каждого действия выбирать из пачки палочек те, которые соответствуют цифрам множителя или делителя. Наконец, третий недостаток — неудобная для обращения внешняя форма прибора: он не представляет собой чего-то целого, а состоит из многих отдельных, друг с другом не связанных частей.

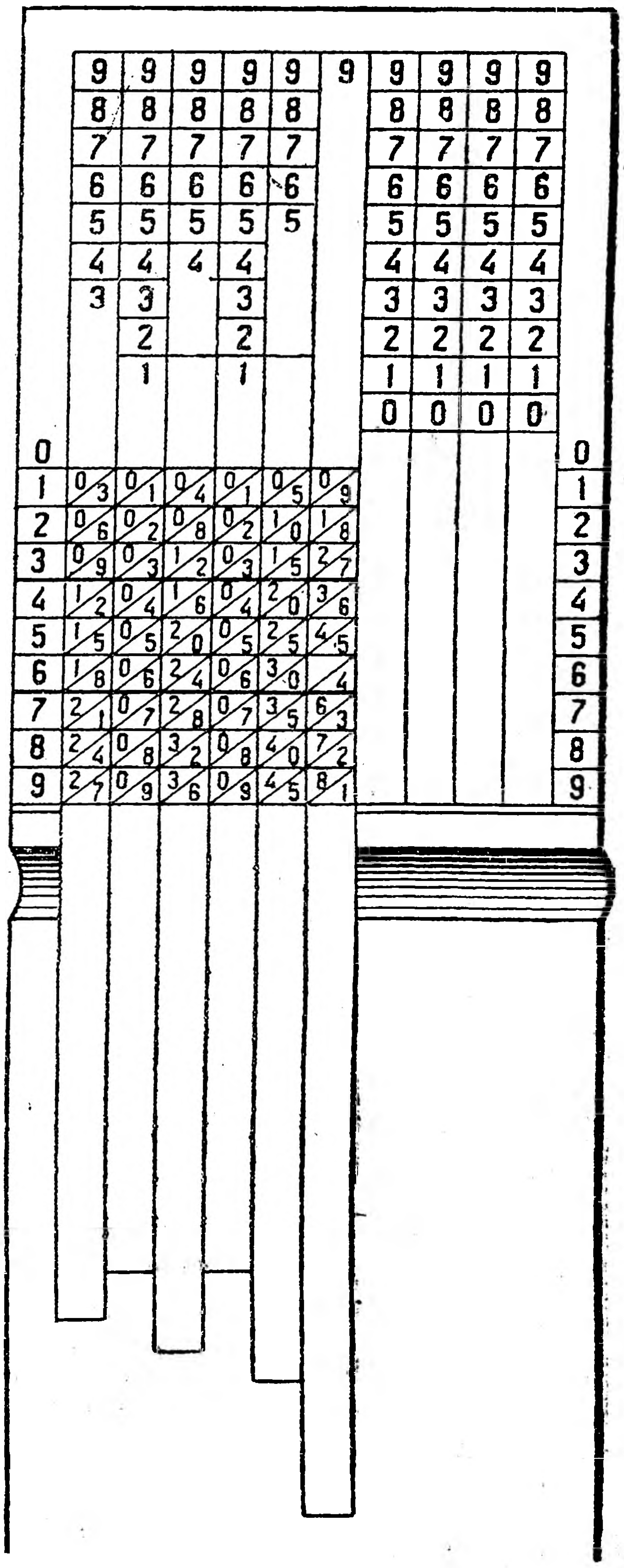


Рис. 6.

Последние два недостатка полностью устранены в следующем видоизмененном приборе, имеющем вид блокнота (рис. 6). Десять полосок, образующих один комплект палочек Непера, положены друг на друга в одну стопку и прикреплены нижними своими концами к корешку переплета. Другой конец каждой полоски выступает из-под следующей верхней полоски и имеет цифру, показывающую, произведения какого числа помещены на этой полоске. Сверху вся стопка покрыта белой полоской, не закрывающей, однако, выступающих концов. Отогнув вниз эту белую полоску, мы увидим под ней полоску с произведениями 0; отогнув эту последнюю, увидим полоску с произведениями 1; ниже идут полоски с произведениями чисел 2, 3 и т. д. — до 9.

Выступающие концы полосок позволяют сразу открывать ту, какая требуется. Прибор содержит десять таких стопок, устроенных совершенно одинаково и расположенных рядом, и позволяет составлять произведения любого многозначного числа, имеющего не более десяти цифр.

На рисунке 6 прибор изображен в том виде, в каком он дает произведения числа 314 159. Отгибаемые полоски в силу упругости материала, из которого они сделаны, стремятся закрыться, и их приходится придерживать левой рукой, правая же остается свободной для записи получаемых с прибора произведений. По краям внутренней стороны переплета видны цифры от 0 до 9, облегчающие разыскание нужной строки. При небольшом навыке в переплетном деле прибор легко изготовить самому; можно взять просто готовый блокнот, расчертив его листики надлежащим образом и аккуратно разрезав их. Для повышения прочности листики надо предварительно склеить по два или по три.

§ 18. Арифмометр.

Торговые счеты частично механизируют труд выполнения действий сложения и вычитания, палочки Непера — умножения и деления. Механизация всех четырех действий в гораздо более полной форме осуществляется посредством более сложных счетных машин — *арифмометров*. Из большого числа арифмометров различных систем, употребляющихся в настоящее время в вычислительной практике, рассмотрим только арифмометр системы *Однера*, как единственный, имеющий широкое распространение у нас в СССР и изготовляемый на наших заводах. Работа на арифмометрах этой системы очень проста: научиться выполнять четыре основных арифметических действия можно в каких-нибудь 15 — 20 минут. Скорость, с которой арифмометр выполняет вычисления, раз в 10 — 12 превосходит скорость обычного вычисления на бумаге: вычисление, требующее без применения арифмометра целого часа работы, с его помощью выполняется в 5 — 6 минут, притом с несравненно меньшими шансами сделать ошибку.

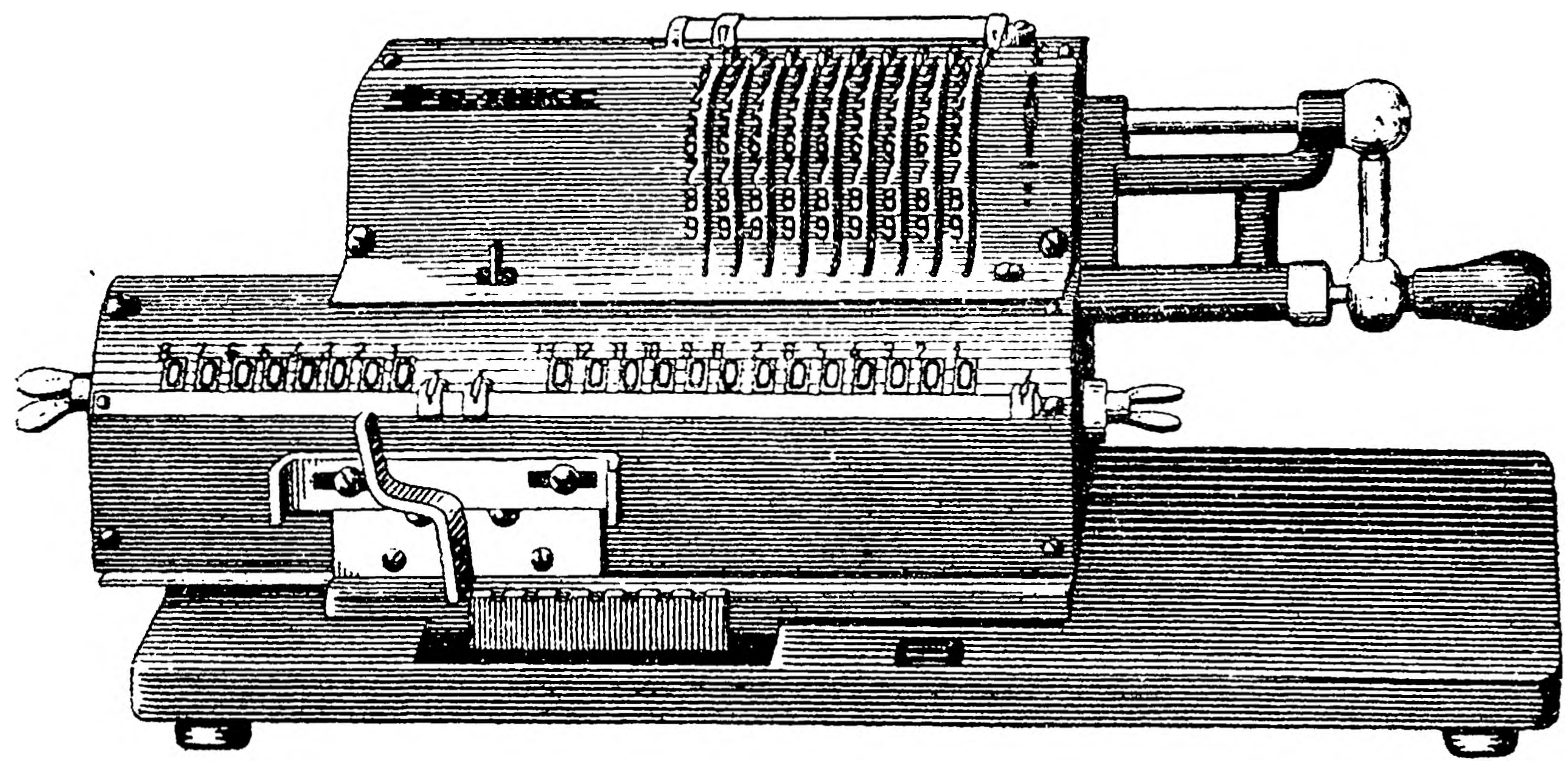


Рис. 7.

На рисунке 7 изображен арифмометр „Феликс", выпускаемый Московским государственным заводом счетных машин имени Дзержинского. Верхнюю часть машины составляет *установочный механизм*. На рисунке видны концы девяти *спиц*, принадлежащих установочному механизму и способных перемещаться вдоль девяти прорезов. На левом краю каждого прореза имеются цифры от 0 до 9 (идут сверху вниз). Двигая (рукой) спицы, мы можем установить посредством их любое девятизначное число, целое или дробное десятичное (знаком дробности служит металлическая „запятая", которую можно устанавливать между верхними концами любых двух соседних прорезов). Направо от установочного механизма имеется рукоятка с ручкой. Чтобы повернуть рукоятку, надо сперва оттянуть ручку немного вправо, сделать далее требуемое число полных оборотов, а затем обязательно привести рукоятку в то „нормальное" положение, какое показано на рисунке. Ниже установочного механизма и спереди его находится *каретка*, снабженная двумя рядами окошек: справа мы видим 13 окошек, которые будем называть *ответными окошками* (в них появляются результаты действий сложения, вычитания, умножения), а слева — 8 окошек *счетчика оборотов*, которые будем называть *счетными окошками*. На левом и правом концах каретки видны две ласточки, вращение которых заменяет нулями („гасит“) те цифры, какие появляются в счетных и ответных окошках. По планке под окошками скользят металлические запятые (знаки дробности), а ниже планки находится приспособление (транспортер), позволяющее передвигать каретку либо на величину одного только интервала между соседними прорезами установочного механизма, либо на несколько таких интервалов сразу.

Прежде чем вращать рукоятку, надо всегда убедиться, приведены ли обе ласточки каретки в горизонтальное положение (достигая этого положения, ласточка щелкает) и находится ли средняя планка транспортера против промежутка между двумя зубцами расположенной ниже гребенки (транспортер тоже должен щелкнуть). Если хотя бы одно из этих условий не соблюдено, рукоятка вращаться не будет, а попытка все же повернуть ее немедленно поведет к поломке машины. На уровне нижних концов прорезов установочного механизма и несколько левее их видна кнопка, назначение которой — ускорять приведение спиц в нулевое положение: подвинув эту кнопку влево и одновременно осторожно вращая рукоятку (к себе), мы после возвращения рукоятки к нормальному положению будем иметь все спицы на нулях. Надо только помнить, что после одной трети оборота рукоятки, когда все спицы будут „выравнены“, кнопку надо отпускать. Правее крайнего правого (первого) прореза на кожухе машины видны две стрелки, направленные в противоположные стороны и снабженные знаками действий (одна $+$ и $\times$, другая — и :). Эти стрелки указывают те направления, в каких надо вращать рукоятку при выполнении различных действий. Будем называть эти направления положительным (из нормального положения ручки к себе) и отрицательным (от себя).

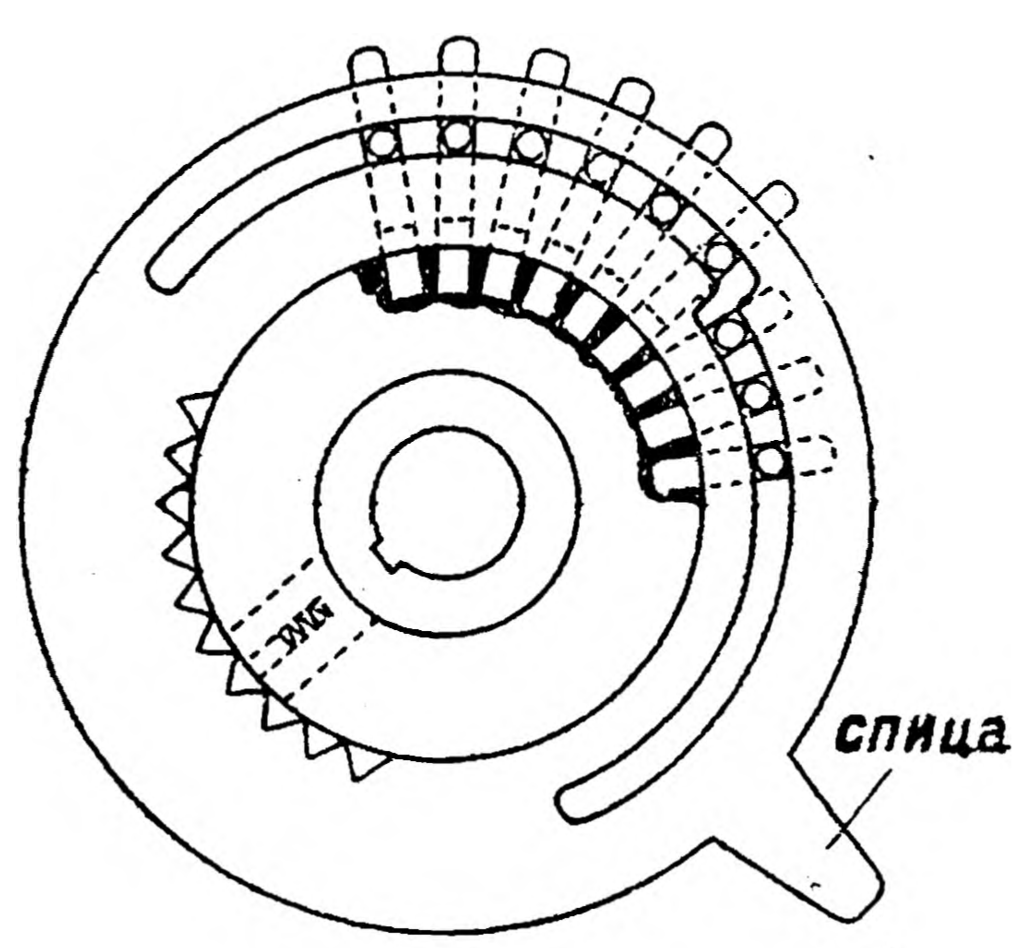


Рис. 8.

Мы рассмотрели все части машины, с которыми приходится иметь дело во время вычисления. Внутреннего ее устройства рассматривать не будем, укажем только, что основным ее элементом является „зубчатка Однера“, изображенная на рисунке 8. Эта зубчатка имеет переменное числов зубцов, а именно — столько, на сколько делений своего прореза опущена соответствующая спица. На рисунке 8 зубчатка имеет шесть выступающих зубцов, остальные спрятаны. Двигая спицу, мы меняем число зубцов в той зубчатке, которая с этой спицей связана, от 0 до 9. Число зубчаток равно числу спиц; таким образом, в рассматриваемой машине их девять.

Поставив в первом (крайнем правом) прорезе спицу на цифру 3 и сделав поворот рукоятки в положительном направлении, мы повернем на три зубца другое колесо, на ободе которого нанесены цифры, видные через первое (крайнее правое) ответное окошко. Вместо цифры 0 в этом окошке теперь появится цифра 3. Второй поворот рукоятки в том же направлении повернет это колесо еще на три зубца, и вместо цифры 3 мы увидим в ответном окошке уже цифру 6, — мы выполнили сложение $3+3$, или, что то же, умножение 3×2. Новый поворот рукоятки дает уже $6+3=9$, или $3\times 3=9$. При четвертом повороте рукоятки в первом ответном окошке пройдут последовательно цифры 9; 0; 1; 2 (колесо сделало полный оборот и начинает делать второй), а затем во втором ответном окошке (рядом) появится цифра 1; здесь приходит в действие механизм передачи десятков, являющийся самой деликатной частью всякой счетной машины. В итоге получаем $9+3=12$, или $3\times4=12$.

Теперь нетрудно понять, как выполняются на рассамтриваемой машине четыре основных действия. Чтобы *сложить* два числа, надо: 1) поставить нули в ответных окошках (вращая до щелчка правую ласточку), 2) установить на спицах первое слагаемое (последнюю его цифру обычно ставят посредством первой, т. е. крайней правой спицы, но это не обязательно), 3) перевести это слагаемое в ответные окошки (одним поворотом рукоятки — к себе), 4) установить на спицах второе слагаемое, 5) сделать еще один поворот рукоятки (к себе). Теперь в ответных окошках появится искомая сумма. Те же пять операций производятся и для выполнения вычитания, но рукоятка вращается в обратном направлении — не к себе, а от себя. Понятно, что к полученной сумме или разности можно прибавить (или от нее отнять) сколько угодно новых чисел.

Умножение на однозначное число выполняется *как повторное сложение*: чтобы умножить, например, на 9, вращаем рукоятку 9 раз (к себе). Для умножения на двузначное число, например 39, используется возможность перемещения каретки относительно верхней части машины, содержащей установочный механизм: переместив каретку посредством транспортера на один интервал вправо, вращаем рукоятку 3 раза к себе и получаем в ответных окошках произведение взятого числа на 30. Теперь остается вернуть каретку в нормальное положение (когда первое ответное окошко находится под первым прорезом) и сделать еще девять оборотов рукоятки (к себе). В ответных окошках получим искомое произведение на 39.

Число сделанных оборотов рукоятки регистрируется в счетных окошках (слева). Выполняя умножение, надо предварительно привести к нулям все цифры счетных окошек (вращением до щелчка левой ласточки). Таким образом, правило умножения можно формулировать так: установив множимое на спицах, комбинируй движение каретки и вращение рукоятки так, чтобы в счетных окошках получить множитель; тогда в ответных окошках получишь произведение. Понятно, что правило это относится не только к двузначному, а к любому многозначному множителю.

Умножение на 39 описанным способом требует $3+9=12$ оборотов рукоятки; это число уменьшится до пяти, если при сдвинутой направо каретке сделать не 3, а 4 оборота, т. е. умножить на 40, а затем, вернув каретку в нормальное положение, сделать 1 оборот в обратную сторону (от себя). Этот прием постоянно употребляется на практике и позволяет никогда не вращать рукоятку больше пяти раз под ряд в одну сторону, так как умножение на 9, 8, 7, 6 заменяется умножением на 10 и вычитанием 1-, 2-, 3-, 4-кратного множимого. Но нужно иметь в виду, что при применении этого приема в счетных окошках делитель будет появляться в особой форме: так, при умножении на 39 мы увидим в счетных окошках число 4**1**, где знаком **1** мы условно обозначаем красную цифру 1; при умножении на число 8376 мы получим в счетных окошках число 1-**2**-4-**2**-**4**, где **2** и **4** — опять условное обозначение красных цифр 2 и 4. Пользуясь красными цифрами, мы в этом случае должны будем повернуть рукоятку $1+2+4+2+4=13$ раз, тогда как без них понадобилось бы $8+3+7+6=24$ оборота.

Выполняя на арифмометре умножение как повторное сложение, мы можем выполнить на нем *деление как повторное вычитание*: разделить, например, 17 на 3 значит — узнать, сколько раз можно отнимать от 17 число 3 (до получения остатка, меньшего делителя). Поэтому делимое устанавливают в ответных окошках, делитель — на спицах, и начинают вычитать. Частное, как число сделанных оборотов, получается в счетных окошках. При делении многозначного числа, как и при умножении, для уменьшения числа оборотов рукоятки используется движение каретки. Пусть, например, требуется разделить 243 558 на 913. Устанавливаем делимое 243 558 в крайних левых ответных окошках (конечно, посредством спиц); в остальных ответных окошках, как и во всех счетных окошках, должны быть нули. Отделяя посредством металлической запятой первые три цифры делимого (по числу цифр делителя), мы замечаем, что получилось число 243, меньшее делителя; поэтому берем еще одну цифру, т. е. отделяем число 2435. Сдвинув каретку до отказа вправо, устанавливаем делитель 913 на спицах так, чтобы его можно было отнимать от 2435 (цифра 9 должна быть над цифрой 4), и делаем вычитание столько раз, сколько можно, т. е. пока не получим в остатке числа, меньшего делителя. Получив после 2 оборотов рукоятки в остатке число 609, смещаем каретку на одно место влево, а запятую — на одно место вправо и повторяем операцию последовательного вычитания до тех пор, пока в остатке не получим (этот раз после шести оборотов) числа 617, меньшего делителя. Смещая каретку еще на одно место влево, а запятую еще на одно место вправо, вновь делаем последовательное вычитание, пока не получим (после 6 оборотов) остатка 700. Деление в целых числах окончено: частное (266) получено в счетных окошках, остаток (700) — в ответных окошках. Продолжая те же операции, мы получили бы десятые, сотые и т. д. доли частного.

Выполняя деление, можно не следить за последовательно получаемыми при вычитании остатками, а крутить рукоятку (от себя) до звонка, который машина дает при первом лишнем обороте, и затем делать один оборот (к себе), уничтожая сделанный лишний оборот.

Теперь рассмотрим *извлечение квадратного корня.*

Наиболее употребительный способ извлечения квадратного корня посредством арифмометра основан на легко проверяемом тождестве:

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2,$$

говорящем, что *сумма n первых последовательных нечетных чисел равна квадрату этого числа.* Поэтому, чтобы извлечь из какого-нибудь числа квадратный корень, надо вычитать из него последовательно числа 1; 3; 5... до тех пор, пока не получим в остатке число, меньшее очередного вычитаемого. Число сделанных вычитаний и будет искомым квадратным корнем (точнее, квадратным корнем из наибольшего точного квадрата, заключающегося в данном числе). Надлежащее перемещение каретки арифмометра и здесь позволяет во много раз уменьшить необходимое число вычитаний. Рассмотрим детали способа на примере.

Пусть требуется найти $\sqrt{523{,}4}$. Установив подкоренное, как и делимое при делении, в крайних левых ответных окошках (в остальных —

нули) и погасив имеющиеся цифры в счетных окошках, смещаем каретку до отказа вправо и отделяем запятой старшую грань подкоренного (в данном случае цифру 5; грани берутся, начиная от запятой, в обе стороны по две цифры в каждой). Начинаем вычитать из 5 нечетные числа и останавливаемся после двух вычитаний: $5-1-3=1$, дальше вычитать нельзя. Смещаем далее каретку на одно место влево, а запятую — на два места вправо. Последнее вычитаемое (3) увеличиваем на 1, и ближайшую справа спицу ставим на 1. Продолжаем вычитать нечетные числа, начиная с 41. После двух оборотов останавливаемся, так как получится число $123-41-43=39$, из которого следующее нечетное число (45) отнять уже нельзя. Опять смещаем каретку на одно место влево, а запятую — на два места вправо; увеличиваем на 1 последнее вычитаемое (43) и рядом с ним ставим (справа) 1. Вычитаем далее нечетные числа, начиная с 441 и кончая 455 (восемь вычитаний). Продолжать эти операции можно до тех пор, пока не дойдем до крайней правой спицы. В счетных окошках получим при этом искомый корень 22,8779, в ответных окошках — остаток 0,00169159. Если точность полученного результата недостаточна, простое деление полученного остатка на удвоенное найденное значение корня даст еще 5 цифр корня[1]), и мы получим в конце концов, что $\sqrt{523{,}4}=22{,}877936969$ (с точностью до 11 значащих цифр по недостатку).

Извлечение корня степени выше второй производится на арифмометре по правилам численного решения уравнений.

* § 19. Особые приемы устного и письменного производства действий.

Существует большое число таких приемов. Их часто переоценивают. Большого значения в деле упрощения вычислительной работы они не имеют, далеко уступая таким вспомогательным средствам вычисления, как счетные приборы и математические таблицы. Однако с некоторыми из этих приемов все же стоит ознакомиться.

Возьмем так называемые *сокращенные* приемы производства действий умножения, деления и извлечения квадратного корня и ограничимся рассмотрением только тех из них, которые оказываются на практике наиболее удобными.

Положим, требуется найти первые 4 значащие цифры произведения 29,97·2,738. Выполним умножение сперва обычным способом:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{29{,}97\cdot 2{,}738} \\
\hline
23 & 976 \\
89 & 91 \\
20\,97 & 9 \\
59\,94 & \\
\hline
82{,}05 & 786 \\
\hline
82{,}06 &
\end{array}$$

Тот же (или почти тот же) результат можно получить, ограничивая вычисление лишь цифрами, расположенными левее вертикальной черты. Вот запись этого „сокращенного“ умножения:

$$\begin{array}{r}
29{,}97\cdot 2{,}738 \\
83\,72 \\
\hline
59\,94 \\
20\,98 \\
90 \\
24 \\
\hline
82{,}06
\end{array}$$

---

1) Подробности этого правила см. в § 19, стр. 44.

Цифры множителя подписываются под цифрами множимого в *обратном* порядке, причем, раз требуется четыре значащих цифры произведения, то цифра старшего разряда множителя подписывается под четвертой (считая слева направо) значащей цифрой множимого. Каждое частное произведение получается путем умножения (на соответствующую цифру множителя) лишь тех цифр множимого, которые *выше* и *левее* этой цифры множителя. Так, на 2 умножается число 2997, на 7 — только 299, на 3 — уже лишь 29 и на 8 — только 2. На отбрасываемые цифры множимого берется приближенная *поправка*. Например, при получении второго частного произведения замечаем прежде всего, что отбрасываемая цифра 7 при умножении на 7 дает около 5 десятков. Запоминая эту поправку 5, умножаем 9 на 7 и к произведению 63 прибавляем 5. Получив 68, записываем 8 под крайней правой цифрой первого частного произведения, цифру же 6 запоминаем. Получение остальных цифр частного произведения идет обычным порядком.

Для определения положения знака дробности можно дать особое правило, но проще произвести *грубо-приближенную оценку* произведения. В данном случае, получив в произведении цифры 8206 и замечая, что сомножители близки к 30 и 3, видим, что произведением может быть только число 82,06, а никак не 8,206 или 820,6.

Записывая сомножитель так, как указано выше, мы получим либо как раз столько цифр, сколько требуется, либо одной больше. В последнем случае эту лишнюю цифру отбрасываем.

Объяснение этого приема не представляет затруднений. Надо только сопоставить частные произведения при полном и сокращенном умножении. Погрешность результата сокращенного умножения (при точных сомножителях) не превосходит полуединицы последнего разряда произведения, умноженной на число цифр множителя.

Переходя к сокращенному делению, рассмотрим такой пример: требуется найти 4 первые значащие цифры частного от деления 81,3747 на 0.377264. Выполняя деление обычным способом, имеем:

```
  81,37|4700:0,377264 = 215,6..
  75,45|28            ≈ 215,7
  -----|---
    592|190
    377|264
  -----|----
    214|9260
    188|6320
  -----|-----
     26|29400
     22|63584
  -----|------
      3|658160
```

Здесь тоже можно устранить из вычисления все цифры правее вертикальной черты. Для этого отделяем в делителе столько цифр, сколько их требуется в частном, т. е. в данном случае 4 значащие цифры, и начинаем деление обычным способом, не обращая внимания на знаки дробности в делимом и в делителе, с той лишь разницей, что после получения каждой цифры частного отбрасываем по одной (последней) цифре делителя, а последующих цифр делимого не сносим. Вот вся запись сокращенного деления:

```
813747:377264 = 2157
7545
----
 592
 377
 ---
 215
 189
 ---
  26
  26
  --
   0
```

Разделив 8137 на 3772, получаем первую цифру частного 2. Умножив 2 на 3772 с поправкой на отброшенные цифры делителя, получаем произведение 7545 и первый остаток 592. Теперь отбрасываем последнюю цифру делителя и делим 592 уже только на 377. Получаем вторую цифру частного 1, умножаем ее на 377 и находим второй остаток 215. Делим его на 37, получаем третью цифру частного 5, произведение которой на 37 с поправкой на отброшенные цифры делителя есть 189. Это дает третий остаток 26. Остается разделить 26 на 3. Если возьмем в частном 8, то произведение 8 на 3 с поправкой на отброшенные цифры делителя даст 30 и остаток 4. Если же взять в частном не 8, а 7, то произведение 7 на 3 (с поправкой) даст как раз 26.

Итак, цифровой состав частного установлен. Остается выяснить положение знака дробности. Берем грубо-приближенные значения делимого и делителя и замечаем, что частное должно быть близким к $80:0{,}4 = 800:4 = 200$. Поэтому ставим запятую после третьей значащей цифры и получаем окончательно в частном 215,7.

Правило сокращенного деления становится вполне понятным, если сопоставить шаг за шагом весь процесс при полном и сокращенном делении.

При сокращенном делении возможно появление, в качестве одной из *цифр* частного, *числа* 10. Это указывает на необходимость усиления на 1 предшествующей цифры частного. Вот пример:

$$\begin{array}{rl}
2097:1049 & = 1{,}99(10) \\
\underline{1049} & = 2{,}000 \\
\underline{1048} & \\
\underline{944} & \\
\underline{104} & \\
\underline{94} & \\
10 &
\end{array}$$

Обычный способ деления дает для частного значение 1,99947...

Остается рассмотреть сокращенный способ извлечения квадратного корня. Он основан на следующей теореме:

Если по вычислении n значащих цифр квадратного корня остаток от извлечения разделить на удвоенное найденное значение корня, то частное дает $n-1$ недостающих цифр корня.

Для доказательства предположим, что подкоренное b имеет целую часть из n граней. Пусть найдено n первых цифр корня, образующих собой число a, и надо найти дробную часть корня, которую обозначим буквой x. Таким образом, $\sqrt{b} = a + x$, $b = a^2 + 2ax + x^2$, $\frac{b-a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}$. Разность $b - a^2$ есть не что иное, как остаток, получаемый после разыскания n цифр корня, а дробь $\frac{b-a^2}{2a}$ представляет собой то самое частное, о котором говорится в тексте теоремы. Отсюда заключаем, что $x = \frac{b-a^2}{2a} - \frac{x^2}{2a}$. Принимая $x \approx \frac{b-a^2}{2a}$, мы допускаем погрешность, равную $\frac{x^2}{2a}$. Но $x < 1$, $a \geqslant 10^{n-1}$, а потому $\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2 \cdot 10^{(n-1)}} = 0{,}5 \cdot 10^{-(n-1)}$.

Если, выполняя деление $b - a^2$ на $2a$, мы остановимся, найдя $n-1$ десятичный знак частного, и округлим его как обычно, то к выше найденной погрешности прибавится еще погрешность от округления, и полная погрешность приближенного значения корня в самом неблагоприятном случае может приблизиться к целой единице разряда $(n-1)$-го десятичного знака, но никогда не достигнет этого предельного значения.

Если знак дробности в подкоренном стоит не там, где мы его предполагали, его всегда можно перенести на надлежащее место, производя умножение (или деление) подкоренного на некоторую степень 10 с четным показателем, с тем, чтобы потом разделить (или умножить) найденный корень на степень 10 с показателем, вдвое меньшим. На практике делать это преобразование не нужно.

Рассмотрим пример. Положим, требуется найти $\sqrt{10}$ с 7 значащими цифрами. Обычным способом найдем первые 4 цифры; деление остатка на удвоенный корень даст следующие 3. Для сравнения рядом помещаем запись процесса получения всех 7 цифр обычным способом:

$\sqrt{10} = 3{,}162277$

	9
61	10'0
1	6 1
626	3 90'0
6	3 75 6
6322	1 4 40'0
2	1 26 4 4
	1756:6324
	1265
	491
	443
	48
	44
	4

$\sqrt{10} = 3{,}162277...$

	9
61	10'0
1	6 1
626	390'0
6	375 6
6322	144 0'0
2	126 4 4
63242	17 5 60'0
2	12 6 48 4
632447	4 9 11 60'0
7	4 4 27 12 9
632,547	4 8447110
7	4 4271829
	4175271

Остаток 1756 мы считали целым и делили его на удвоенное найденное число, тоже считая его целым, а полученные цифры частного просто приписали к найденной ранее части корня. В самом деле, остаток у нас равен $1756 \cdot 10^{-6}$, удвоенное найденное число $6324 \cdot 10^{-3}$, частное $0{,}277 \cdot 10^{-3}$, и оно записано у нас на надлежащем месте.

§ 20. Употребительнейшие приближенные формулы.

Очень часто все числа, участвующие в вычислении, бывает возможно разбить на две категории, относя к первой числа, значительно бо́льшие по своей абсолютной величине, чем к другой. Если разница эта настолько велика, что при вычислении многочленов, члены которых представляют собой произведения чисел обеих категорий, оказывается возможным пренебречь членами второго и высших измерений относительно чисел второй категории, т. е. членами, содержащими произведения, квадраты, кубы и т. д. этих чисел, то числа второй категории мы будем называть *весьма малыми* по отношению к числам первой категории. Всякий член, содержащий сомножителем квадрат весьма малого числа или произведение двух весьма малых чисел, будем называть членом *второго порядка малости*. Понятно что́ называют членами *третьего*, *четвертого* и других *высших порядков малости*.

Вопрос о том, считать ли некоторое данное число весьма малым или нет, нельзя, таким образом, решить один раз навсегда: его приходится решать каждый раз заново в зависимости от величины других чисел, участвующих в вычислении, и от требуемой точности. Например, ограничиваясь точностью до сотых долей и вычисляя $5{,}628^2 = (5{,}62 + 0{,}008)^2 = 5{,}62^2 + 2 \cdot 5{,}62 \cdot 0{,}008 + 0{,}008^2$, мы можем пренебречь членом $0{,}008^2$, т. е. считать 0,008 числом весьма малым. Если же требуется и цифра стотысячных долей числа $5{,}628^2$, то членом $0{,}008^2$ пренебречь нельзя, и число 0,008 не будет весьма малым.

Если в какую-нибудь формулу входит число x, весьма малое в только что указанном смысле, то, сохраняя члены линейные относительно x и отбрасывая члены высшего порядка малости, т. е. члены, содержащие x^2, x^3 и т. д., мы получим некоторую *приближенную формулу*. Так, из формулы для куба двучлена $1 + x$ получается приближенная формула:

$$(1 + x)^3 \approx 1 + 3x.$$

Здесь мы отбросили число $\varepsilon = 3x^2 + x^3$ в правой части первоначальной (точной) формулы. Число ε называют *погрешностью*, или *остаточным членом* приближенной формулы. Ясно, что с приближением x к 0 (как со стороны положительных, так и со стороны отрицательных значений x) погрешность ε стремится к 0.

Чтобы вполне уверенно пользоваться приближенной формулой, надо знать, в каком интервале можно брать x при условии, что число ε не должно превосходить по абсолютному своему значению некоторой, наперед заданной величины. Решим этот вопрос по отношению к формуле $(1+x)^3 \approx 1+3x$, а именно выясним, в каком интервале можно брать x при условии, что формула должна давать 2, 3, 4 точных десятичных знака, т. е. что разность между правой и левой частями должна быть не более 0,005, 0,0005, 0,00005. Легко убедиться непосредственной подстановкой, что при $-0{,}04 \leqq x \leqq +0{,}04$ имеет место неравенство $0 < \varepsilon = 3x^2 + x^3 < 0{,}005$, а при $x = \pm 0{,}05$ $\varepsilon = 3x^2 + x^3 = 0{,}0075 \pm \pm 0{,}000125 > 0{,}005$. Отсюда заключаем, что формулой $(1+x)^3 \approx 1+3x$ можно пользоваться при вычислении с двумя десятичными знаками в том случае, когда x не превосходит по абсолютному своему значению числа 0,04. Точно так же убеждаемся, что при вычислении с тремя десятичными знаками этой формулой можно пользоваться, если $|x| \leqq 0{,}012$, а при вычислении с четырьмя знаками, если $|x| \leqq 0{,}004$.

Точность приближенной формулы увеличится, если мы сохраним не только члены с первой степенью x, но и члены с квадратом x, отбрасывая члены с x^3, x^4 и т. д. Так, точная формула $1:(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-x)^n : (1+x)$, где $x \neq -1$, n — любое натуральное число, приводит нас после отбрасывания членов x^3, $x^4, \ldots$ и т. д. к формуле:

$$1:(1+x) \approx 1 - x + x^2,$$

дающей 2 точных десятичных знака, если $-0{,}16 < x < +0{,}18$; 3 знака, если $-0{,}077 < x < +0{,}081$; 4 знака, если $-0{,}036 < x < +0{,}037$. Эта формула значительно более точна, чем более простая формула

$$1:(1+x) \approx 1 - x.$$

Действительно, эта последняя формула обеспечивает то же число точных десятичных знаков лишь в более узких интервалах, а именно: 2 знака при $-0{,}06 < x < +0{,}07$; 3 знака при $-0{,}022 < x < +0{,}022$; 4 знака при $-0{,}007 < x < +0{,}007$.

На стр. 47 приведена таблица употребительнейших приближенных формул, содержащая 22 формулы с указанием тех интервалов, в которых следует брать x, чтобы получить по этим формулам результаты, верные до 2, 3, 4 десятичных знаков. Вывод формул (V — XXII) производится проще всего на основе разложения функций, фигурирующих в левых частях формул, в степенные ряды. Так, известное из курса „Математического анализа" разложение $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$ дает формулы (XI) и (XII). Погрешность формулы ε полагаем приближенно равной первому из отброшенных членов $\left(\varepsilon = \frac{1}{6}x^3\right.$ для формулы (XI), $\varepsilon = \frac{1}{120}x^5$ для формулы (XII)$\left.\right)$ и производим поверку, сравнивая при найденных предельных значениях x обе части каждой приближенной формулы.

Таблица употребительнейших приближенных формул.

№	Приближенная формула	Дает kK точных десятичных знаков, если x в интервале					
		$kK=2$		$kK=3$		$kK=4$	
		от	до	от	до	от	до
I	$(1+x)(1+y)\approx 1+x+y$ $\lvert x\rvert \geqq \lvert y\rvert$	$-0{,}07$	$+0{,}07$	$-0{,}022$	$+0{,}022$	$-0{,}007$	$+0{,}007$
II	$(1+x)(1+y)(1+z)\approx$ $\approx 1+x+y+z$ $\lvert x\rvert \geqq \lvert y\rvert \geqq \lvert z\rvert$	$-0{,}04$	$+0{,}04$	$-0{,}012$	$+0{,}012$	$-0{,}004$	$+0{,}004$
III	$(1+x)^2\approx 1+2x$	$-0{,}07$	$+0{,}07$	$-0{,}022$	$+0{,}022$	$-0{,}007$	$+0{,}007$
IV	$(1+x)^3\approx 1+3x$	$-0{,}04$	$+0{,}04$	$-0{,}012$	$+0{,}012$	$-0{,}004$	$+0{,}004$
V	$1:(1+x)\approx 1-x$	$-0{,}06$	$+0{,}07$	$-0{,}022$	$+0{,}022$	$-0{,}007$	$+0{,}007$
VI	$1:(1+x)\approx 1-x+x^2$	$-0{,}16$	$+0{,}18$	$-0{,}077$	$+0{,}081$	$-0{,}036$	$+0{,}037$
VII	$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$	$-0{,}19$	$+0{,}21$	$-0{,}062$	$+0{,}064$	$-0{,}020$	$+0{,}020$
VIII	$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$	$-0{,}39$	$+0{,}46$	$-0{,}19$	$+0{,}20$	$-0{,}09$	$+0{,}09$
IX	$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x$	$-0{,}20$	$+0{,}22$	$-0{,}065$	$+0{,}068$	$-0{,}021$	$+0{,}021$
X	$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$	$-0{,}39$	$+0{,}47$	$-0{,}19$	$+0{,}21$	$-0{,}09$	$+0{,}09$
XI	$\sin x\approx x$	-17°	$+17^\circ$	$-8^\circ{,}2$	$+8^\circ{,}2$	$-3^\circ{,}8$	$+3^\circ{,}8$
XII	$\sin x\approx x-\frac{1}{6}x^3$	-51°	$+51^\circ$	-32°	$+32^\circ$	-20°	$+20^\circ$
XIII	$\cos x\approx 1$	$-5^\circ{,}7$	$+5^\circ{,}7$	$-1^\circ{,}8$	$+1^\circ{,}8$	$-0^\circ{,}5$	$+0^\circ{,}5$
XIV	$\cos x\approx 1-\frac{1}{2}x^2$	-33°	$+33^\circ$	-18°	$+18^\circ$	-10°	$+10^\circ$
XV	$\operatorname{tg} x\approx x$	-14°	$+14^\circ$	$-6^\circ{,}4$	$+6^\circ{,}4$	$-3^\circ{,}0$	$+3^\circ{,}0$
XVI	$\operatorname{tg} x\approx x+\frac{1}{3}x^3$	-29°	$+29^\circ$	-18°	$+18^\circ$	-11°	$+11^\circ$
XVII	$\ln(1+x)\approx x$	$-0{,}09$	$+0{,}10$	$-0{,}030$	$+0{,}031$	$-0{,}009$	$+0{,}010$
XVIII	$\lg(1+x)\approx 0{,}4343x$	$-0{,}14$	$+0{,}15$	$-0{,}047$	$+0{,}048$	$-0{,}015$	$+0{,}015$
XIX	$e^x\approx 1+x$	$-0{,}10$	$+0{,}09$	$-0{,}031$	$+0{,}031$	$-0{,}010$	$+0{,}010$
XX	$10^x\approx 1+2{,}303x$	$-0{,}04$	$+0{,}04$	$-0{,}014$	$+0{,}014$	$-0{,}004$	$+0{,}004$
XXI	$\ln\frac{1+x}{1-x}\approx 2x$	$-0{,}19$	$+0{,}19$	$-0{,}090$	$+0{,}090$	$-0{,}042$	$+0{,}042$
XXII	$\lg\frac{1+x}{1-x}\approx 0{,}8686x$	$-0{,}25$	$+0{,}25$	$-0{,}119$	$+0{,}119$	$-0{,}055$	$+0{,}055$

Укажем еще одну приближенную формулу для $\sin x$, относящуюся уже не только к малому, но и ко всякому острому углу и весьма полезную при грубо-приближенных оценках:

$$\sin \alpha^\circ \approx \frac{\alpha^\circ}{60} \text{ при } 0 \leq \alpha^\circ < 60^\circ,$$

$$\sin \alpha^\circ \approx 1 \text{ при } 60^\circ \leq \alpha^\circ \leq 90^\circ.$$

Чтобы убедиться в приближенной справедливости этой формулы, достаточно начертить график синуса и график функции, стоящей в правой части (рис. 9).

Формулы (I — XXII) оказывают серьезные услуги при вычислениях. В качестве примера найдем $\ln 1{,}08$ без помощи таблицы логарифмов. Применяя формулу (XVII), находим $\ln 1{,}08 \approx 0{,}08$ и на основании данных таблицы стр. 47 заключаем, что в полученном значении верны 2 первых десятичных знака. Более точные результаты дает формула (XXI). Полагая $\frac{1+x}{1-x} = 1{,}08$, находим $x = 0{,}08:2{,}08 = 1:26 = 0{,}038461\ldots$, откуда по формуле (XXI) $\ln 1{,}08 \approx 2 \cdot 0{,}038461\ldots \approx$ $\approx 0{,}076922\ldots$, причем согласно данным таблицы здесь верны уже 4 десятичных знака (x меньше 0,042). Итак, окончательно имеем $\ln 1{,}08 \approx 0{,}0769_2$ с гарантией, что погрешность не превосходит 0,00005. Наводя для поверки справку в таблице пятизначных натуральных логарифмов, устанавливаем, что $\ln 1{,}08 \approx 0{,}07696$, и убеждаемся, что погрешность нашего приближенного результата действительно только 0,00004.

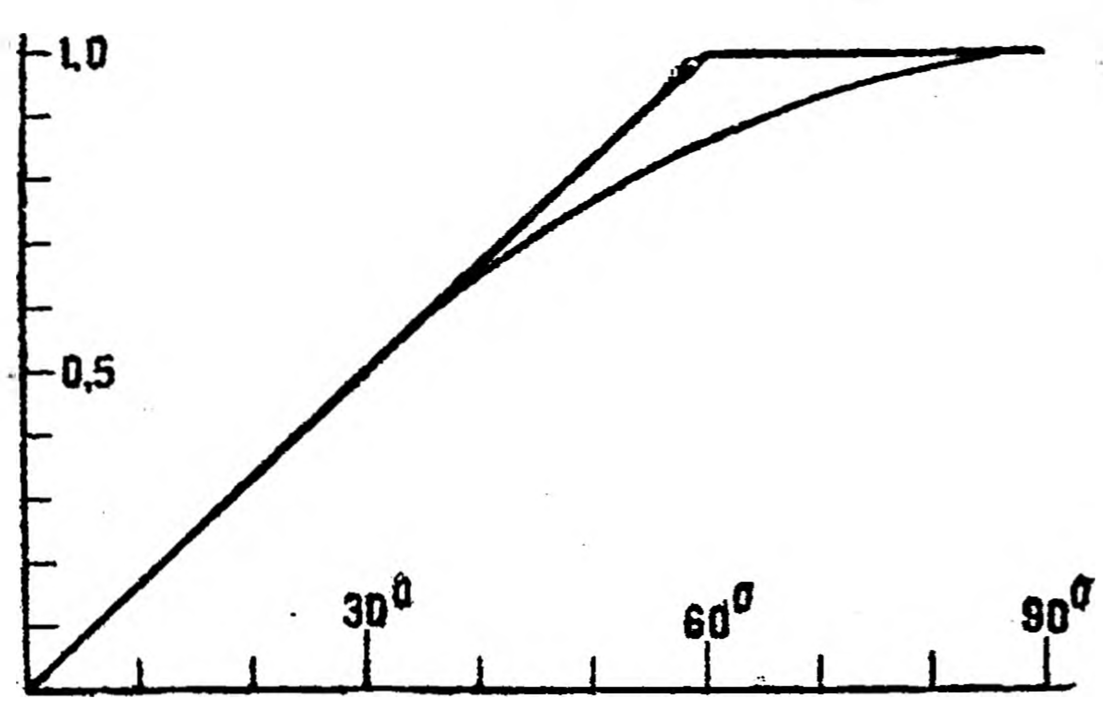


Рис. 9.

Комбинируя разными способами формулы (I — XXII), легко получить множество других, упрощающих вычисления в более сложных случаях. Таковы, например, следующие формулы (везде предполагается, что x — число весьма малое):

$$1)\ \frac{1}{(1+x)^2} \approx \frac{1}{1+2x} \approx 1 - 2x;\quad 2)\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} \approx 1 + \frac{1}{2}x;$$

$$3)\ \sqrt[3]{(1+x)^2} \approx \sqrt[3]{1+2x} \approx 1 + \frac{2}{3}x;$$

$$4)\ \sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}} \approx \sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-y-z).$$

В последней формуле, предполагая весьма малым не только x, но также и y и z, окончательный результат получаем после применения формул (I, V, I, VII).

Чтобы судить об экономии, доставляемой применением подобных формул, решим несколько задач посредством этих формул и без них.

Пример 1. Зная, что сила земного тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра Земли, найти, насколько легче станет человек, весящий на поверхности Земли (на уровне океана) $p_0 \approx 65$ *кг*, если он поднимется на высоту $h \approx 10$ *км*. Радиус Земли примем равным $R \approx 6370$ *км*.

Обозначая вес человека на высоте h через $p_0 - \Delta p$, имеем для вычисления Δp формулу:

$$p_0 - \Delta p = \frac{p_0 R^2}{(R+h)^2},$$

которая после деления числителя и знаменателя правой части на R^2 и применения первой из полученных выше (см. стр. 47) формул (число $\frac{h}{R}$ весьма мало!) принимает следующий вид:

$$p_0 - \Delta p = \frac{p_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \approx p_0\left(1 - \frac{2h}{R}\right) \approx p_0 - \frac{2hp_0}{R},$$

откуда

$$\Delta p \approx \frac{2hp_0}{R}.$$

Так как $\frac{h}{R} \approx \frac{10}{6370} < 0{,}002$, то приближенная формула (III), позволяющая заменить $\left(1+\frac{h}{R}\right)^2$ через $1+\frac{2h}{R}$, дает не меньше 4 точных десятичных знаков (см. табл. на стр. 47). Далее, замечая, что $\frac{2h}{R} < 0{,}004$, убеждаемся, что и формула (V), приводящая к разности $1 - \frac{2h}{R}$, тоже дает по крайней мере 4 точных десятичных знака. С такой же точностью определяется и отношение $\frac{\Delta p}{p_0} \approx \frac{2h}{R}$; его погрешность не превосходит 0,00005. Умножение обеих частей последнего равенства на $p_0 = 65$ приводит к значению $\Delta p \approx \frac{2hp_0}{R}$, определяемому с погрешностью, не большей $0{,}00005 \cdot 65 = 0{,}00325$, т. е. с 2 точными десятичными знаками. Окончательно имеем $\Delta p \approx \frac{2 \cdot 10 \cdot 65}{6370} \approx 0{,}204\ldots \approx 0{,}20$. Это и есть искомая убыль веса (0,20 *кг*).

Как видим, применение приближенных формул чрезвычайно упростило числовые выкладки: в данном случае все свелось к одному делению (130 на 637). Зато, конечно, приходится тратить некоторое время на преобразование буквенных выражений и особенно на рассуждения, связанные с учетом погрешностей. Последнего, впрочем, часто вовсе не делают, что связано, конечно, с риском применить приближенную формулу тогда, когда она ввиду требуемой точности результатов не может быть применена.

Вычисление того же результата посредством семизначных логарифмов без применения приближенных формул дает $\Delta p = 0{,}2036$.

Пример 2. Вычислить, на сколько увеличится поверхность шара, объем которого $V \approx 856$ *м*^{3}, если увеличить этот объем на 1, 2, 3, 4, 5%?

Исключая R из формул для поверхности и объема шара

$$S = 4\pi R^2 \text{ и } V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

получаем зависимость между поверхностью и объемом:

$$S = \sqrt[3]{36\pi V^2}. \qquad \text{(A)}$$

Далее, обозначая приращения V и S через ΔV и ΔS, заключаем, что

$$S+\Delta S=\sqrt[3]{36\pi(V+\Delta V)^2}=S\sqrt[3]{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^2}=S\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta V}{V}\right),$$

откуда

$$\Delta S=\frac{2}{3}\cdot S\cdot\frac{\Delta V}{V} \text{ или } \frac{\Delta S}{S}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta V}{V}.$$

Поставленный в задаче вопрос получает теперь такое решение: если объем увеличить на

$$1\%;\ 2\%;\ 3\%;\ 4\%;\ 5\%,$$

то поверхность увеличится на

$$0{,}7\%;\ 1{,}3\%;\ 2{,}0\%;\ 2{,}7\%;\ 3{,}3\%.$$

Не прибегая к приближенным формулам, искомое увеличение поверхности проще всего получить, вычисляя по формуле (А) поверхность S для объема $V=856$ *м*³ и для объемов, увеличенных на соответствующее число процентов. Проводя вычисление, например, для 5%, и применяя четырехзначные логарифмы, получим:

$$\Delta S=450{,}4-436{,}0=14{,}4\ \text{м}^2, \text{ или } 3{,}30\% \text{ от } S=436{,}0\ \text{м}^2.$$

Итак, в результатах, полученных посредством приближенных формул, точными оказались не только целые проценты, но и десятые их доли (вычисление посредством приближенных формул при меньших значениях ΔS даст еще более точные результаты).

Упражнение.

1. Масса *1 куб. дм* чистой воды при температуре наибольшей плотности и под нормальным атмосферным давлением равна 0,999973 *кг*. Найти объем чистой воды при тех же условиях.

2. Показать возможность замены формулы

$$x=r\left(\sqrt{\frac{R+p}{R-p}}-1\right),$$

где p значительно меньше R, формулой $x=\frac{rp}{R}$. Выяснить, как велико расхождение между результатами вычисления по обеим формулам при $\frac{p}{R}$, равном 0,01; 0,05; 0,1; 0,5.

3. Секундный маятник имеет в Ленинграде длину $l\approx 99{,}482$ *см*, соответствующую ускорению силы тяжести $g=981{,}93$ *см/сек*². Вычислить, пользуясь формулой $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где T — время одного колебания в секундах, сколько колебаний в час сделает в Ленинграде маятник, на 0,5 *см* более длинный, и маятник, на 0,5 *см* более короткий. Вывести формулу, дающую изменение числа колебаний в час в зависимости от изменения длины.

4. Если в прямоугольном треугольнике один из катетов (a) значительно меньше другого (b), то гипотенузу (c) можно вычислить по формуле: $c\approx b+\frac{a^2}{2b}$. Вывести эту формулу и оценить ее погрешность.

5. Чтобы исключить влияние неравенства плеч коромысла весов, применяют „двойное взвешивание“ (груз взвешивается сперва на одной, потом на другой чашке весов). Обозначая результаты обоих взвешиваний через p_1 и p_2, имеем для вычисления искомого веса x формулу: $x=\sqrt{p_1p_2}$. Показать, что при малой разнице между p_1 и p_2 возможно применение формулы $x\approx\frac{1}{2}(p_1+p_2)$, и оценить погрешность, ей доставляемую.

Указание. Положить $p_2=p_1(1+\alpha)$.

6. Если два шкива с поперечниками D и d и с расстоянием между центрами, равным a, соединены бесконечным ремнем, то в случае неперекрестной передачи длина ремня l определяется формулой (провисание не учтено!):

$$l=2a\sqrt{1-\frac{(D-d)^2}{4a^2}}+\frac{1}{2}\pi(D+d)+(D-d)\operatorname{arc}\alpha,$$

$$\text{где } \alpha=\arcsin\frac{D-d}{2a}.$$

Показать, что при малой по сравнению с a разнице между D и d возможно вычисление l по более простой формуле:

$$l\approx 2a+\pi\cdot\frac{D+d}{2}+\frac{(D-d)^2}{4a},$$

или по еще более простой:

$$l\approx 2a+\pi\cdot\frac{D+d}{2}.$$

ГЛАВА III.

СЧЕТНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА.

§ 21. Принцип счетной линейки.

Если, как в большинстве технических расчетов, достаточно знать лишь немногие первые значащие цифры результата, то выгодно применять так называемую „счетную логарифмическую линейку". Прибор этот, гораздо более дешевый и портативный, чем арифмометр, позволяет получать первые 3, иногда 4 цифры результатов действий II и III ступени *скорее, чем на арифмометре*. При вычислении посредством линейки результата нескольких действий, выполняемых последовательно, в большинстве случаев нет нужды фиксировать промежуточные результаты: на линейке они получаются, но тратить время на их прочтение и тем более на запись не надо. Посредством линейки выполняется ряд операций (вычисления с логарифмами и тригонометрическими функциями), которые посредством одного арифмометра (без специальных таблиц) невыполнимы. Наконец, и это особенно важно, линейка во многих случаях позволяет посредством *одной* установки получить результат вычисления по формуле, содержащей *несколько* действий. Все эти преимущества обеспечили линейке чрезвычайно широкое распространение, и в настоящее время уменье работать на линейке требуется от каждого инженера и техника. Можно думать, что недалеко то время, когда таблицы логарифмов с 3 и 4 знаками будут совершенно вытеснены логарифмическими линейками, которые в школьном курсе математики займут место, принадлежащее сейчас таблицам логарифмов.

Соединение линейки с другими средствами вычисления позволяет с выгодой применять ее и в тех случаях, когда требуется более высокая точность результата. Кроме того, линейкой пользуются для предварительной приближенной *оценки* результата, а также для приближенной его *поверки*.

Если взять две сантиметровые шкалы, нанесенные одна на верхнем краю одной линейки, другая на нижнем краю другой линейки, то, перемещая эти две шкалы друг относительно друга, мы можем механически выполнять сложение и вычитание небольших чисел. На рисунке 10 нулевой штрих нижней шкалы поставлен против штриха с меткой 2,8 верхней шкалы. В таком положении прибор дает суммы числа 2,8 с разными числами. Например, чтобы сложить 2,8 и 7,3, надо найти штрих с меткой 7,3 на нижней шкале и „прочесть" противостоящую метку 10,1 верхней шкалы. Это и будет искомая сумма.

Легко сообразить, как при помощи этого же прибора выполняется вычитание чисел.

Конечно, этот прибор (его можно назвать „счетной метрической линейкой") никакого практического значения иметь не может, так как во многом будет уступать даже счетам. Однако развитие той же идеи приводит к созданию той самой счетной логарифмической линейки, с которой мы должны ознакомиться.

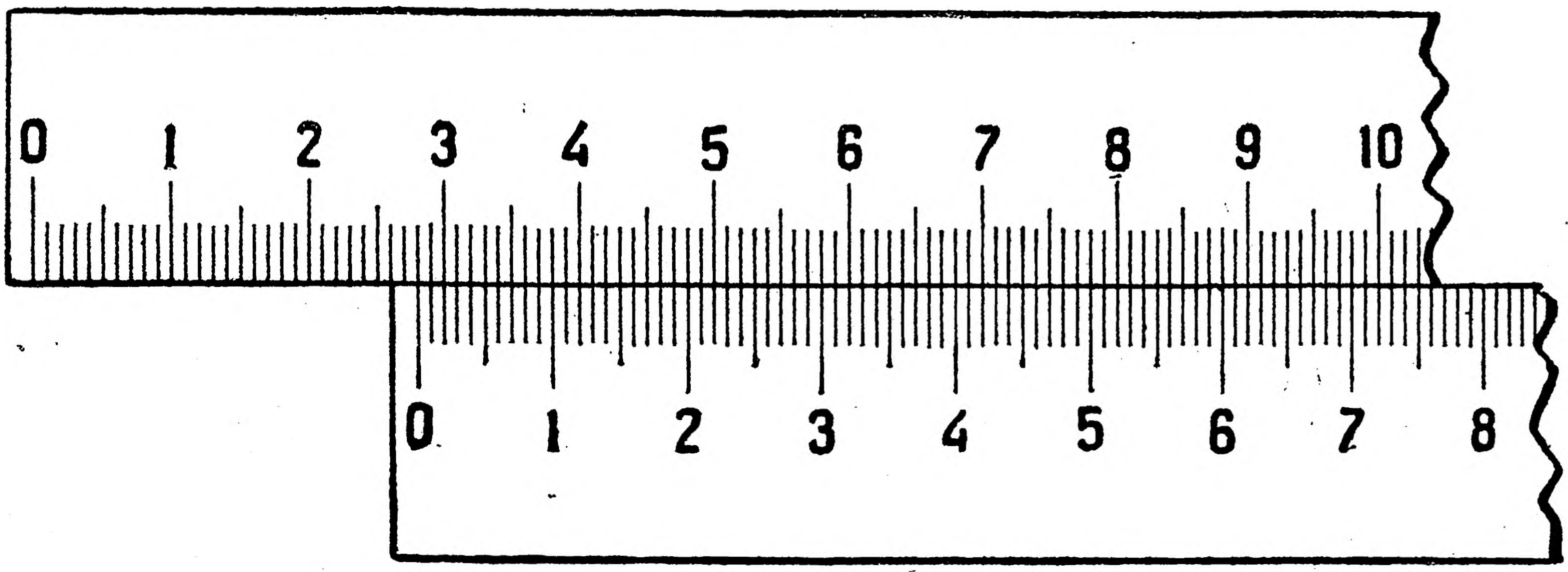


Рис. 10.

Чтобы уяснить принцип счетной линейки, необходимо ввести понятие *функциональной шкалы*. Возьмем функцию $f(x)$, которую будем предполагать однозначной, непрерывной, монотонной (например возрастающей) в интервале от $x=a$ до $x=b>a$. Разделим этот интервал на n равных частей и составим табличку значений аргумента и функции полагая $h=(b-a):n$; это число h называется *ступенью* таблицы.

x	$x_0=a$	$x_1=a+h$	$x_2=a+2h$	......	$x_{n-1}=a+(n-1)h$	$x_n=a+nh=b$
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	......	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

Взяв некоторое постоянное число m в качестве так называемого „модуля" шкалы (как выбрать m, будет показано ниже), откладываем по прямой линии („оси" шкалы), начиная от некоторой определенной ее точки O („начала" шкалы), отрезки, длина которых в миллиметрах выражается числами $mf(x_0)$, $mf(x_1)$, $mf(x_2)$,..., $mf(x_n)$, и у конца каждого такого отрезка ставим „метку", выражающую соответствующее значение аргумента x. Каждая метка состоит из штриха, проведенного перпендикулярно оси шкалы, и цифры (последняя опускается, если об ее значении можно догадаться по соседним „цифровым меткам“).

Совокупность таких меток и образует *функциональную шкалу* для данной функции $f(x)$ (рис. 11).

Рис. 11.

Длину отрезка шкалы от ее начала (точки O) до метки x, выраженную в миллиметрах, мы будем обозначать символом $\bar{x}$, т. е. той же буквой, что и аргумент, но с черточкой сверху. Уравнение $\bar{x}=mf(x)$, выражающее закон расстановки штрихов функциональной шкалы и, следовательно, вполне эту шкалу характеризующее, носит название *уравнения шкалы*.

Та „равномерная“ сантиметровая шкала, которая изображена на рис. 10, есть функциональная шкала с уравнением $\bar{x}=10x$. Здесь начало шкалы (точка O) совпадает с первой ее меткой, соответствующей значению аргумента $x=0$, модуль $m=10$. Для шкалы миллиметровой имеем еще более простое уравнение $\bar{x}=x$. На рис. 12 изображена *логарифмическая* шкала с модулем 100 *мм*. Ее уравнение $\bar{x}=100\lg x$ ясно указывает закон расстановки ее меток: метку 1 надо поставить на расстоянии $100\lg 1=0$ от начала, т. е. в самом начале; метку 2 — на расстоянии $100\lg 2=30{,}10$ *мм* от начала; метку 3 — на расстоянии $100\lg 3=47{,}12$ *мм* и т. д. до метки 10 на расстоянии $100\lg 10=100$ *мм*.

Рис. 12.

Кроме меток, соответствующих целым значениям x от 1 до 10, на рис. 12 мы видим метки без цифр („немые“): длинные, соответствующие значениям 1,5; 2,5;...; 4,5, и короткие, соответствующие значениям 1,1; 1,2;...; 4,8; 4,9; 5,5; 6,5; 7,5; 8,5; 9,5. Разность значений аргумента, соответствующих двум смежным штрихам, носит название *цены деления* шкалы.

На рис. 12 цена деления шкалы на участке от 1 до 5 есть 0,1, а на участке от 5 до 10 — уже 0,5 (сохранение той же цены деления 0,1 до конца шкалы потребовало бы трудно осуществимого сгущения штрихов).

Желая построить функциональную шкалу заданной функции $f(x)$ при заданных пределах изменения аргумента x $(a\leq x\leq b)$, мы должны исходить из желательных размеров „рабочей части“ шкалы, т. е. той ее части, которая заключена между метками a и b. Назначая длину l этой рабочей части, получаем уравнение:

$$m[f(b)-f(a)]=l, \tag{1}$$

из которого и определяется модуль m. Найденное значение m нередко грубо округляют, несколько отступая от запроектированной длины шкалы, но обеспечивая большее удобство расчетов.

Возьмем теперь две функции $f(x)$ и $F(y)$ и построим для них шкалы по уравнениям $\bar{x} = m_x f(x)$ и $\bar{y} = m_y F(y)$. Одну из этих шкал нанесем по нижней кромке одной линейки, вторую по верхней кромке второй линейки, допускающей скольжение вдоль первой, причем эти кромки обеих линеек плотно прилегают друг к другу, так что обе функциональные шкалы имеют общую ось. Эта совокупность двух функциональных шкал, допускающих взаимное скольжение, и образует „счетную линейку“. Из рис. 13, схематически изображающего эту пару шкал при некотором произвольном смещении начала одной из них относительно начала другой, легко выводим следующее *основное уравнение счетной линейки* (общего вида);

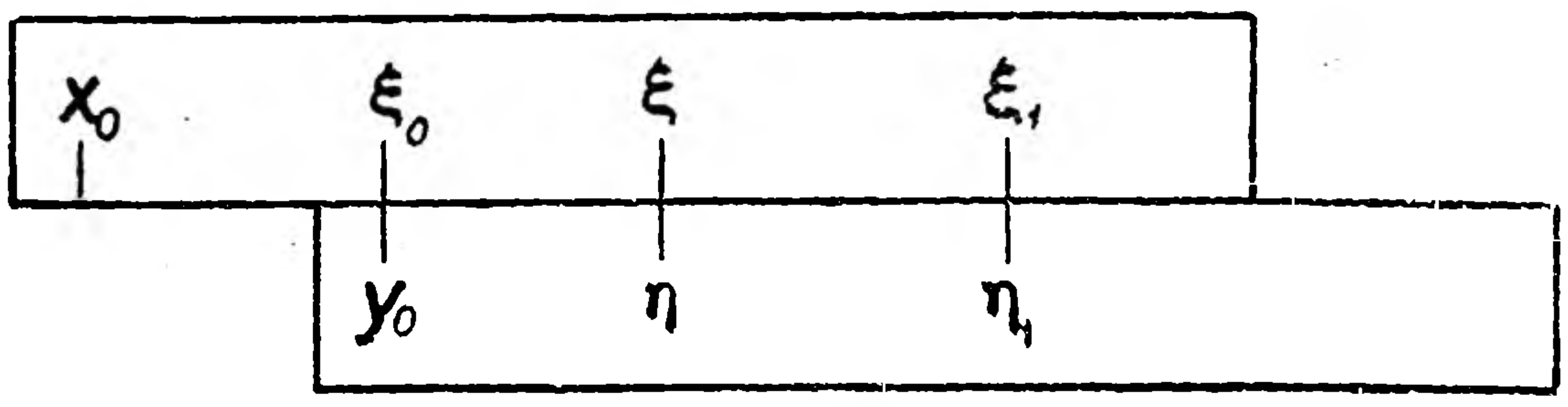


Рис. 13.

$$m_x f(\xi_1) - m_x f(\xi) = m_y F(\eta_1) - m_y F(\eta), \tag{2}$$

где ξ и ξ_1 — две любые метки верхней шкалы, т. е. два любых значения аргумента первой функции $f(x)$, а η и η_1 — две противолежащие им метки нижней шкалы, т. е. два значения аргумента второй функции. Действительно, отрезки от начала верхней шкалы до ее меток ξ и ξ_1 равны соответственно $m_x f(\xi)$ и $mf(\xi_1)$, а потому длина отрезка этой шкалы от метки ξ до метки ξ_1 равна (в миллиметрах) $m_x f(\xi_1) - m_x f(\xi)$. Подобным же образом находим длину соответствующего отрезка нижней шкалы $m_y F(\eta_1) - m_y F(\eta)$. Приравнивая эти отрезки друг другу, мы и получим уравнение (2). Задавая произвольно значения трех из величин ξ, ξ_1, η, η_1, мы можем по уравнению (2) найти значение четвертой.

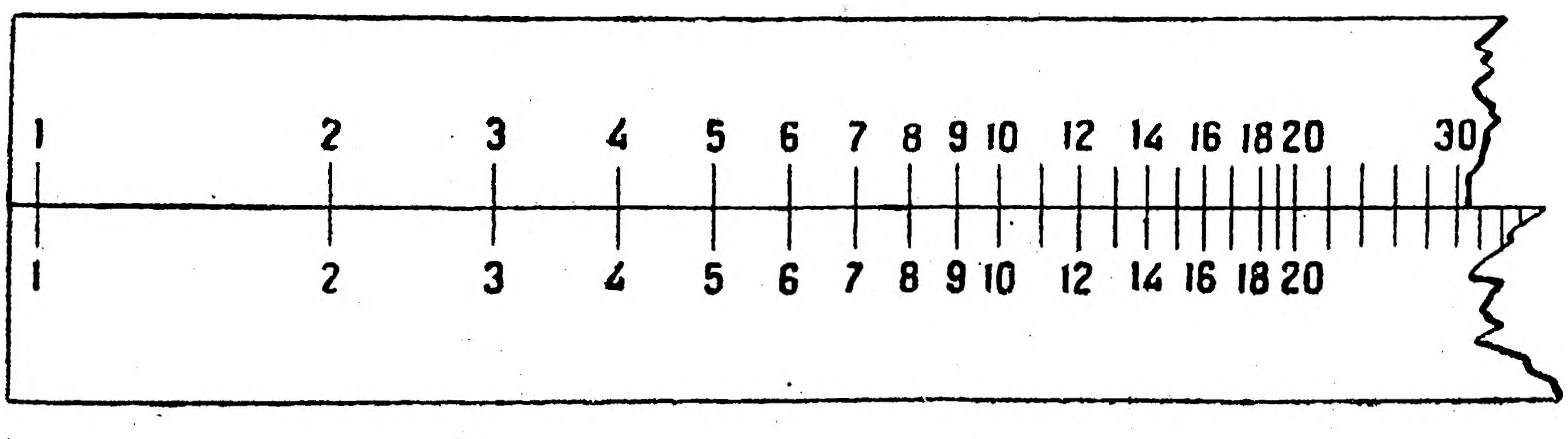


Рис. 14.

Счетная линейка позволяет находить это неизвестное значение механически, простым отсчетом по соответствующей шкале — к этому в конечном итоге и сводится польза, приносимая линейкой. Выбирая надлежащим образом функции $f(x)$ и $F(y)$ и модули m_x и m_y, можно построить линейки, предназначенные для самых разнообразных расчетов.

Теперь перейдем от счетной линейки общего вида к важнейшему частному ее виду — к *счетной логарифмической линейке*. Для этого возьмем $f(x) = \lg x$, $F(y) = \lg y$, а модули m_x и m_y примем одинаковыми и равными хотя бы 100 *мм*. Положим, что мы нанесли метки шкал по уравнениям $\bar{x} = 100 \lg x$ и $\bar{y} = 100 \lg y$ для значений аргументов от

1 до 100. Так как шкалы тождественны, то строим их на общей оси, как показано на рис. 14, а затем разрезаем взятую полоску бумаги вдоль этой оси. Цену деления для значений от 1 до 20 можно взять равной 1, от 20 до 50 — равной 2, от 50 до 100 — равной 5. Основное уравнение (2) принимает теперь такой вид:

$$100 \lg \xi_1 - 100 \lg \xi = 100 \lg \eta_1 - 100 \lg \eta,$$

или после упрощений:

$$\xi_1 : \eta_1 = \xi : \eta. \qquad (3)$$

Итак, *отношение любой метки верхней шкалы логарифмической линейки к противостоящей ей метке нижней шкалы есть величина постоянная,* зависящая от взаимного расположения обеих шкал. При том расположении, какое мы имеем на рис. 15, это отношение равно 2.

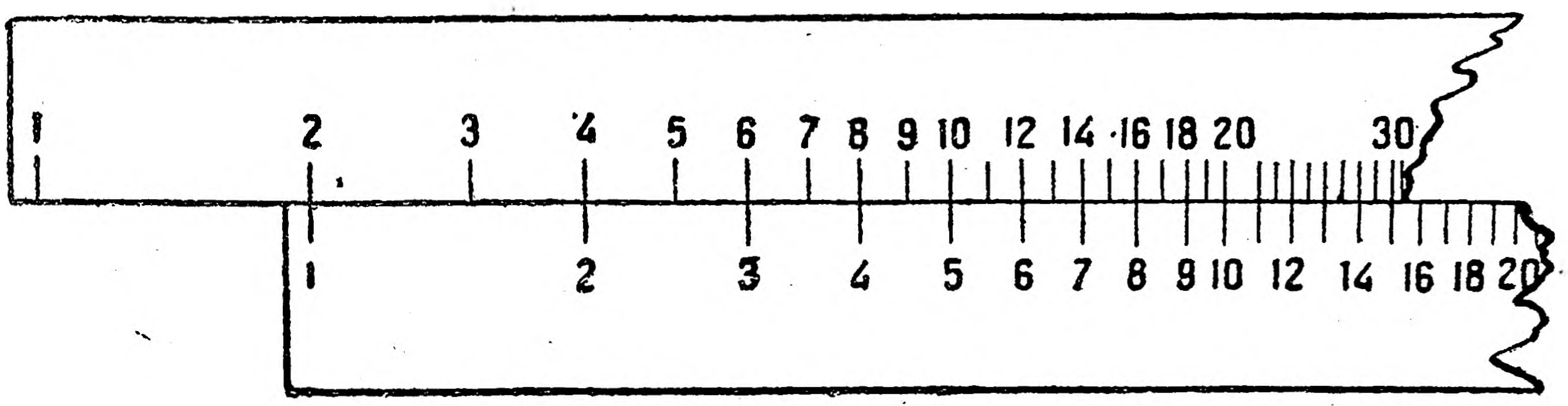


Рис. 15.

Можно рассматривать любую метку верхней шкалы как числитель дроби, а противостоящую метку нижней шкалы как ее знаменатель; общая ось обеих шкал образует при этом ту черту, которая в обычном обозначении отделяет числитель дроби от ее знаменателя. Только что установленное свойство логарифмической линейки можно теперь формулировать так: *при произвольном расположении шкал логарифмическая линейка дает бесчисленное множество дробей, числителями которых служат метки верхней, а знаменателями — противостоящие метки нижней шкалы, причем все эти дроби равны друг другу.*

Таким образом, линейка (логарифмическая) позволяет легко находить числа, пропорциональные данным. Так получаем правило I:

I. *Чтобы найти неизвестное x из пропорции $x:a = b:c$, надо:* 1) *найти метку b верхней шкалы*; 2) *поставить против нее метку c нижней шкалы;* 3) *найти метку a нижней шкалы*; 4) *прочесть противостоящую метку x верхней шкалы.* Читателю предлагается самому формулировать правило решения пропорции вида $a:x = b:c$ и решить несколько числовых примеров, пользуясь той самодельной бумажной линейкой, об изготовлении которой речь была выше.

Легко видеть, что умножение и деление чисел сводится к решению пропорций. Действительно, переписывая равенства $x = ab$ и $x = a:b$ в виде пропорций $x:b = a:1$, $x:1 = a:b$, мы приходим к следующим правилам II и III:

II. *Чтобы получить произведение двух чисел, надо:* 1) *найти метку множимого a на одной из шкал*; 2) *поставить против нее единицу второй шкалы;* 3) *найти метку множителя b на этой второй шкале*; 4) *прочесть противостоящую метку $x = ab$ первой шкалы.*

III. *Чтобы получить частное двух чисел, надо*: 1) *найти метку a делимого на первой шкале*; 2) *поставить против нее метку b*

делителя на второй шкале; 3) *прочесть метку $x = a:b$ первой шкалы, оказавшуюся против единицы второй шкалы.*

Читателю рекомендуется выполнить решение нескольких числовых примеров. О тех затруднениях, какие могут при этом иногда получиться (например, когда произведение оказывается за пределами шкалы или когда делимое меньше делителя), речь будет в § 26. Пока ограничимся только выяснением принципов, лежащих в основе работы на логарифмической линейке, и простейшими примерами, их иллюстрирующими.

Отметим, что к правилам II и III нетрудно притти и независимо от решения пропорций. Действительно, располагая шкалы логарифмической линейки, как показано на рис. 16, мы выполняем сложение отрезков (верхний рисунок) $(1,a)+(1,b)=(1,x)$ и вычитание отрезков (нижний рисунок) $(1,a)-(1,b)=(1,x)$.

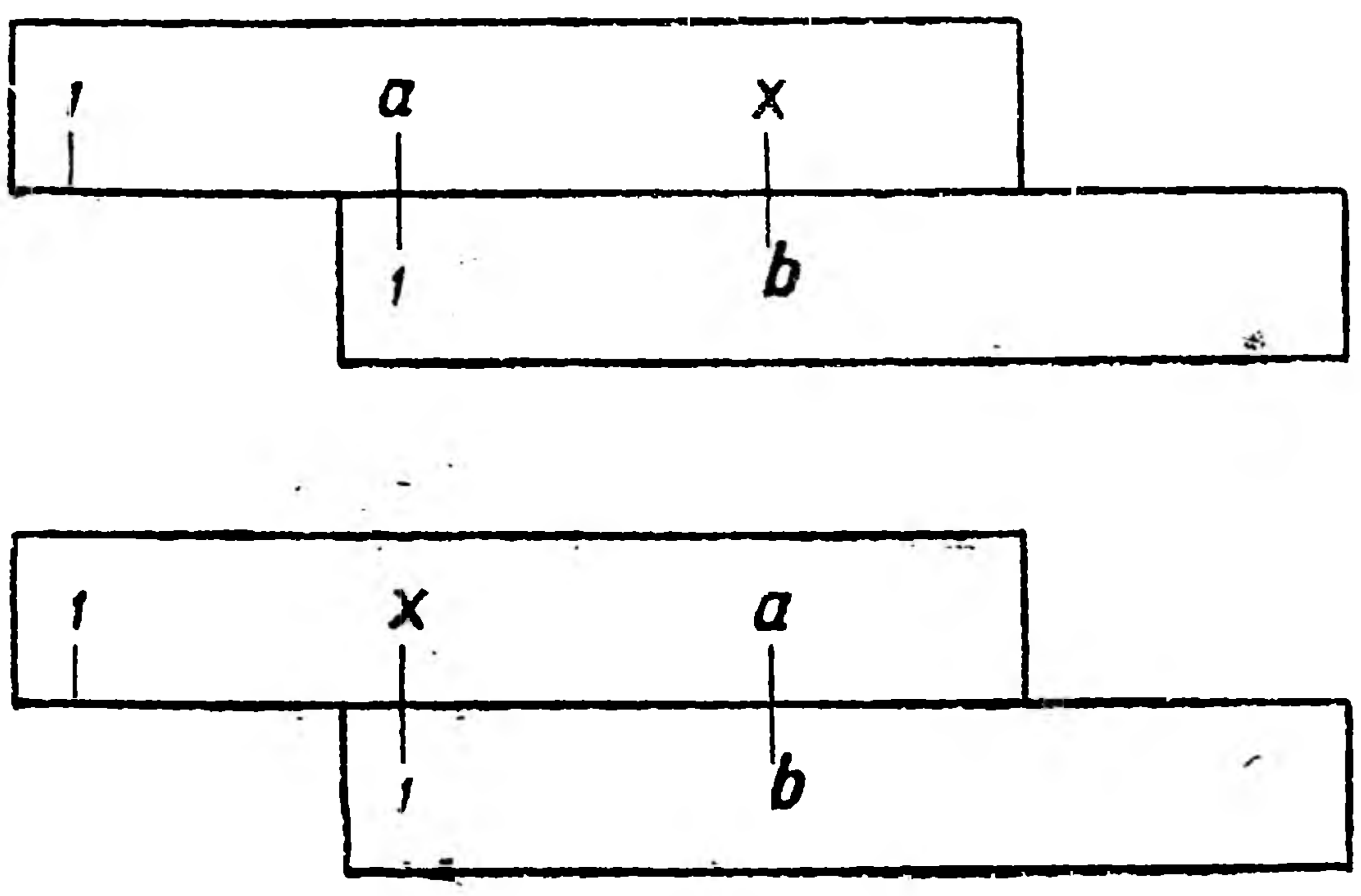


Рис. 16.

Здесь символ $(1,a)$ означает длину отрезка от метки 1 до метки a (по верхней шкале), символ $(1,b)$ — длину отрезка от метки 1 до метки b (по нижней шкале), символ $(1,x)$ — длину отрезка от 1 до x (по верхней шкале). Принимая во внимание, что $(1,a)=\overline{a}=m\lg a$; $(1,b)=\overline{b}=m\lg b$; $(1,x)=\overline{x}=m\lg x$, приходим к уравнениям $m\lg a+m\lg b=m\lg x$; $m\lg a-m\lg b=m\lg x$, которые после упрощения дают $x=ab$; $x=a:b$. Можно сказать, что умножение чисел на линейке достигается в результате сложения отрезков логарифмических шкал, а деление — в результате их вычитания. Рекомендуется обратить внимание на ту аналогию, какая существует между сложением и вычитанием посредством метрической линейки (рис. 10), с одной стороны, и умножением и делением — посредством логарифмической линейки — с другой.

§ 22. Устройство счетной логарифмической линейки.

Счетная логарифмическая линейка фабричного изготовления отличается от рассмотренной самодельной большим количеством весьма тщательно нанесенных штрихов, некоторыми добавочными шкалами, прочностью материала. Переходим к изучению линейки наиболее распространенного типа — к линейке „системы Риц“, изготовляемой многими заграничными и советскими фирмами. Для определенности остановимся на линейке „системы Риц“ нормальной длины (около 288 *мм*), выпускаемой советской фирмой „Прометей“, которую и будем предполагать имеющейся в руках читателя. Линейки других фирм и других систем имеют отличия, о которых будет речь в § 36.

Линейка состоит из трех частей: *корпуса* линейки, *движка* и *ползунка*. Корпус линейки имеет продольный паз, расположенный на лицевой стороне корпуса параллельно длинным его ребрам. В этом пазу помещается, свободно в нем двигаясь, вторая, более узкая линейка, так называемый движок. Плоскости верхних поверхностей корпуса линейки и движка совпадают. По этой их общей поверхности свободно перемещается ползунок, представляющий собой прямоугольный кусочек стекла в оправе, обеспечивающей скольжение ползунка вдоль линейки.

На лицевой стороне корпуса нанесены четыре функциональные шкалы: сверху *шкала кубов* (К-шкала), осью которой служит верхнее ребро корпуса; ниже *шкала квадратов* (А-шкала), осью которой служит верхний край паза; нижний край паза служит осью для третьей *основной шкалы* (D-шкала). Наконец, вдоль нижнего ребра корпуса линейки расположена четвертая шкала — *шкала логарифмов* (L-шкала).

На лицевой стороне движка имеются две шкалы — В-шкала и С-шкала, осями которых служат верхнее и нижнее ребра движка и метки которых совпадают с метками шкал А и D, если вдвинуть движок в паз до совпадения его концов с концами корпуса линейки.

Таким образом на лицевой стороне линейки (корпуса и движка) имеется всего шесть шкал. Буквы, которыми мы их обозначили, на линейке отсутствуют (у концов шкалы D имеются метки Q + 1 и P — 1, значение которых выяснится в § 27). Приступая к изучению линейки, полезно поставить эти буквы у левых концов шкал, как показано на рис. 17. Писать их можно карандашом, а затем, по миновании надобности, стереть (резинкой или влажной тряпочкой).

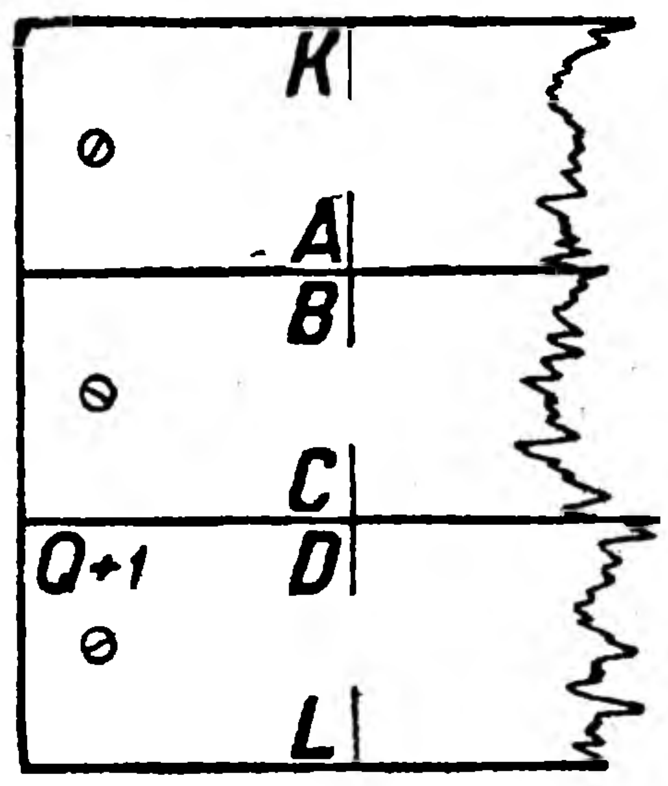


Рис. 17.

На оборотной стороне корпуса помещают табличку наиболее употребительных в инженерной практике постоянных. На его узких и длинных боковых гранях наносят деления на сантиметры и миллиметры (иногда на дюймы и их доли), и линейка кроме прямого своего назначения служит также для измерения длины.

Если вынем движок из паза и повернем его обратной стороной, то увидим на нем еще три шкалы: *шкалу синусов*, обозначенную на движке буквой S и расположенную вдоль верхнего ребра, *шкалу тангенсов* (буква T), расположенную вдоль нижнего ребра, и *шкалу синусов и тангенсов малых дуг* (знак S & T) между ними.

На стекле ползунка мы видим *индекс* — тонкий штрих, нанесенный перпендикулярно к осям корпуса линейки и движка. Иногда вместо одного делают три индекса. Их назначение выяснится в § 33. Пока, говоря об индексе, мы всегда будем иметь в виду *средний* индекс.

В заключение настоящего параграфа дадим несколько практических указаний.

Приобретая линейку, надо обратить внимание на ясность делений, на совпадение меток шкал А и В и шкал С и D при вдвинутом движке, на правильность хода движка. Он должен входить в паз достаточно плотно, без заметной щели, но двигаться в нем плавно и без усилий. Так же плавно и легко должен двигаться ползунок, пружина которого должна быть достаточно сильной, чтобы не допускать самопроизвольного его перемещения. При перемещении движка ползунок должен оставаться в полном покое, а при перемещении ползунка индекс должен перемещаться перпендикулярно к осям шкал, что проверяется наведением индекса на начальные и конечные штрихи шкал К и L. Индекс должен быть очень тонок и нанесен на нижней (прилегающей к линейке) поверхности стекла.

При работе с линейкой надо располагать ее относительно источника света (окна, лампы) так, чтобы индекс не давал тени, сильно понижающей точность отсчетов. Для этого линейку надо держать перпендикулярно к вертикальной плоскости, проходящей через источник света и глаз вычислителя.

Перемещая движок, надо избегать сжимать боковые грани корпуса линейки, так как иначе движок защемляется и туго ходит. Корпус линейки следует брать так, чтобы большой палец руки оказывался внутри паза, а другие придерживали корпус снизу.

Линейка представляет собой очень точный прибор и требует бережного обращения. Ее нельзя ронять, поверхность ее нельзя царапать. Пользоваться ребром счетной линейки для проведения линий ни в каком случае не следует. Держать линейку нельзя ни во влажном, ни в очень сухом месте. Загрязнившуюся поверхность линейки можно протирать слегка влажной тряпкой, или, лучше, винным спиртом. Если движок ходит слишком туго, полезно посыпать поверхность трения *тальком*; если это не помогает, надо осторожно пройтись по тем местам, где „заедает“, стеклянной шкуркой.

При бережном обращении линейка служит много лет и остается как новая. В плохих же руках она скоро начинает давать результаты с пониженной точностью, а то и вовсе отказывается служить.

§ 23. Основные шкалы и шкалы квадратов.

Основными шкалами линейки мы будем называть D-шкалу корпуса и тождественную с ней C-шкалу движка. Это не что иное, как уже известная нам функциональная логарифмическая шкала, выполненная с модулем $m = 250$ *мм*. Обозначая буквами c и d произвольные метки этих шкал, а буквами $\bar{c}$ и $\bar{d}$ расстояния в миллиметрах от левого конца каждой из шкал до этих меток, получаем уравнения основных шкал C (на движке) и D (на корпусе):

$$\bar{c} = 250 \lg c; \quad \bar{d} = 250 \lg d.$$

Согласно этим уравнениям метка 1 движка находится у левого конца шкалы, принимаемого за ее начало; метка 2 — на расстоянии $250 \lg 2 = 75,25$ *мм*; метка 3 — на расстоянии $250 \lg 3 = 119,3$ *мм* и т. д. до метки 10, которая должна находиться на расстоянии $250 \lg 10 = 250$ *мм*, т. е. у правого конца шкалы.

Кроме меток 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, обозначенных на шкалах крупными цифрами, на шкале D имеются еще цифровые метки 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9, обозначенные мелкими цифрами от 1 до 9, и большое количество меток немых, значения которых легко устанавливаются по значениям ближайших цифровых меток и по цене деления на этом участке шкалы. Внимательное рассмотрение шкал показывает, что цена деления на участке от 1 до 2 есть 0,01, на участке от 2 до 4 — 0,02, на участке от 4 до 10 — 0,05. *Важнейшей задачей для начинающего работать на линейке является именно приобретение хорошего навыка в чтении этих немых меток.*

Умея прочесть метку каждого штриха шкалы, легко прочесть и метку любой точки промежутка между двумя соседними штрихами, подразделяя этот промежуток на-глаз на десятые доли там, где он соответствует одной или двум сотым, т. е. при отсчете в левой части шкалы (между метками 1 и 4), и на пятые доли там, где он соответствует пяти сотым, т. е. при отсчете в правой части шкалы (между метками 4 и 10). При этом всегда начинают с того, что выясняют, какие метки имеют ближайшие штрихи (слева и справа).

Большею частью приходится читать метку точки, получаемой в пересечении оси шкалы с индексом ползунка. На рис. 18 изображены в увеличенном виде три отрезка шкалы D и три положения индекса. В первом случае он находится между штрихами с метками 1,12 и 1,13, немного ближе ко второму, чем к первому. Промежуток между метками 1,12 и 1,13, соответствующий одной сотой, делим на-глаз на 10 равных частей, из которых каждая соответствует уже одной тысячной. Метка индекса есть в этом случае 1,126.

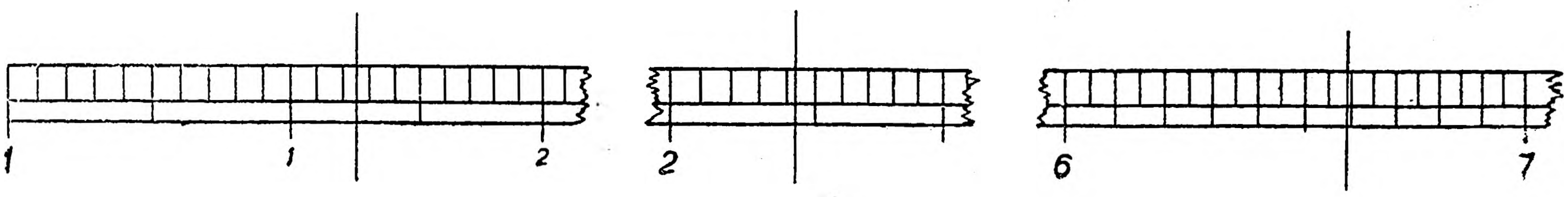


Рис. 18.

Во втором случае промежуток между двумя соседними штрихами соответствует уже двум сотым, и индекс установлен между штрихами с метками 2,08 и 2,10. Промежуток этот делим на-глаз на 10 равных частей, причем каждая часть соответствует одной десятой от двух сотых, т. е. двум тысячным. Оценивая в данном случае расстояние от левого штриха (метка 2,08) до индекса в три десятых промежутка, получаем для метки индекса число 2,086. В третьем случае промежуток между двумя соседними штрихами соответствует пяти сотым, пятая его часть — одной сотой. Индекс находится между штрихами с метками 6,55 и 6,60. Оценивая его расстояние от левого штриха в четыре пятых промежутка, имеем для него метку 6,59.

То, что мы сейчас делали, есть не что иное, как хорошо нам известная интерполяция, притом *интерполяция на-глаз*.

Шкалы квадратов, а именно А-шкала (на корпусе) и тождественная с ней В-шкала (на движке), подобно основным шкалам C и D, являются шкалами логарифмическими, но с модулем, вдвое меньшим. Их уравнения

$$\bar{a} = 125 \lg a; \quad \bar{b} = 125 \lg b.$$

Так как длина каждой из этих шкал 250 *мм*, то они охватывают уже числа не от 1 до 10, как основные шкалы, а от 1 до 100, так как

$$125 \lg 100 = 125 \cdot 2 = 250 \text{ мм}.$$

Шкала квадратов состоит из двух *подшкал*: первой, соответствующей числам от 1 до 10, и второй, соответствующей числам от 10 до 100. Если сдвинуть движок налево так, чтобы его метка 100 шкалы B оказалась против метки 10 шкалы A, то мы увидим, что метки обеих подшкал шкалы квадратов совпадают: метки 20, 30, 40 и т. д. шкалы B совпадают с метками 2, 3, 4 и т. д. шкалы A. Действительно,

$$125 \lg 10a = 125 (\lg 10 + \lg a) = 125 + 125 \lg a,$$

а потому метка $10a$ находится на таком же расстоянии от начала второй подшкалы, т. е. от метки 10, на каком метка a находится от начала первой подшкалы, т. е. от метки 1.

Необходимо хорошо ознакомиться со всеми метками шкал A и B. Здесь цена деления уже не такова, как на шкалах C и D. Внимательное рассмотрение показывает, что на участке от 1 до 2 цена деления 0,02, на участке от 2 до 5—0,05, на участке от 5 до 10 — уже 0,1. Далее, на второй подшкале, имеем то же самое, но все числа должны быть увеличены в 10 раз: на участке от 10 до 20 цена деления 0,2, от 20 до 50—0,5, от 50 до 100—1.

Чтобы приобрести навык в чтении меток штрихов основных шкал и шкал квадратов и научиться выполнять интерполяцию на глаз, совершенно необходимо проделать приведенные ниже упражнения.

Если бы мы продолжили шкалу A далее вправо, то для меток от *100* до *1000* получили бы *третью подшкалу* A, тождественную с двумя первыми. Действительно, метку в a сотен надо поставить на расстоянии $125 \lg 100a = 125 \lg a + 250$ *мм* от начальной единицы шкалы A, т. е. правее конечной единицы шкалы A на такое расстояние, какое отделяет метку a первой подшкалы от начальной единицы.

Четвертая подшкала содержит уже метки от *1000* до *10 000*, *пятая* — от *10 000* до *100 000* и т. д. Каждая следующая подшкала тождественна со всеми предыдущими и смещена вправо на 125 *мм*. Метки правильных дробей от 0,1 до 1 расположатся на продолжении нашей шкалы A *влево*, занимая опять отрезок в 125 *мм*, так как $125 \lg 0{,}1 = -125$ *мм*, и образуют новую подшкалу, метки которой будем читать уже как десятые. Метки дробей от 0,01 до 0,1 займут следующий влево отрезок длиной в 125 *мм*, и метки этой новой подшкалы придется читать уже как сотые и т. д. Таким образом, шкалу A надо представлять как состоящую из *бесчисленного множества тождественных подшкал* длиной в 125 *мм* каждая. Если метки одной подшкалы означают единицы, то метки ближайшей справа подшкалы означают десятки, следующей — сотни, следующей — тысячи и т. д., а ближайшей слева — десятые, следующей — сотые и т. д. На линейке помещены две смежные подшкалы и, понятно, нет никакой необходимости читать метки первой как единицы: их можно читать и как десятки, и как сотни, и как тысячи, и как десятые и т. д. Но раз выбор значений меток первой подшкалы сделан, значит сделан выбор и значений меток второй подшкалы: они будут означать единицы, в десять раз большие, чем единицы первой подшкалы. Так, метки первой подшкалы можно читать как тысячные доли; тогда метки второй подшкалы будут означать сотые. Считая метки первой подшкалы сотыми, мы должны будем метки второй подшкалы читать как десятые и т. д.

Таким образом, каждая метка логарифмической шкалы имеет не одно, а множество значений, отличающихся одно от другого положением запятой. Например, метку *1,56* можно читать и как *15,6*, и как *156*, и как *1560*, и как *0,156*, и как *0,0156* и т. д. без конца. Поэтому при установках и отсчетах обыкновенно не предрешают выбора значения каждой метки, и читают ее, называя последовательно цифру каждого разряда, например один, пять, шесть.

Эта периодичность строения логарифмической шкалы составляет характерное ее свойство, и все сказанное о шкалах A и B можно с надлежащими изменениями повторить и о шкалах D и C. Каждую из этих последних тоже следует представлять неограниченно продолженной в обе стороны и состоящей из бесконечного ряда тождественных подшкал длиной уже по 250 *мм* каждая. На линейке помещена только одна из этих подшкал. Если ее метки читать как единицы, то непосредственно справа следует представлять другую подшкалу, метки которой означают уже десятки, слева — подшкалу, метки которой означают десятые доли.

Необходимо хорошо уяснить себе эту периодичность логарифмической шкалы, так как в дальнейшем нам часто придется ею пользоваться.

Упражнения.

1. Наводите индекс последовательно на штрихи шкалы A, указанные ниже в строке, имеющей в заголовке букву a, и читайте соответствующие (т. е. указываемые индексом) метки шкалы D. При этом должны получаться числа, указанные в строке с буквой d в заголовке (что это за числа, выяснится в следующем параграфе).

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90
d	1,414	1,732	2,000	2,236	2,45	2,65	2,83	3,00	3,16	4,47	5,48	6,32	7,07	7,75	8,37	8,94	9,49

2. Наводите индекс последовательно на штрихи шкалы D, указанные ниже в строке d, и читайте соответствующие метки шкалы A. Должны получиться числа строки a.

d	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
a	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,81	4,00	4,41	4,84	5,29	5,76	6,25	6,76	7,29

§ 24. Возведение в квадрат и извлечение квадратного корня.

Займемся теперь совместным рассмотрением шкал A и D, игнорируя пока шкалы B и C. Движок можно совсем вынуть из паза и отложить или привести его в такое положение, при котором штрихи шкал A и B, а также шкал C и D совпадают. Установив индекс на метку 2 шкалы D видим, что на шкале A индекс дает метку 4. Будем говорить, что метке 2 шкалы D противостоит метка 4 шкалы A. Передвигая индекс, убедимся, что меткам $d = 3, 4, 5, 6, \ldots$ шкалы D противостоят соответственно метки $a = 9, 16, 25, 36, \ldots$ шкалы A, причем всегда $a = d^2$. Объяснить это обстоятельство легко, если исходить из уравнений обеих шкал и принять во внимание, что начала их (т. е. начальные их единицы) противостоят друг другу. Если метки a и d противостоят друг другу, то их расстояния от начала шкал $\bar{a}$ и $\bar{d}$ равны между собой; но $\bar{a} = 125 \lg a$; $\bar{d} = 250 \lg d$, а потому $250 \lg d = 125 \lg a$, откуда $d^2 = a$. Теперь мы имеем правило для возведения в квадрат любого числа:

Чтобы возвести в квадрат число d, надо найти на шкале D *метку d и прочесть противостоящую метку a шкалы* A.

Если при этом данное число d имеет только одну значащую цифру левее запятой, т. е. заключается между 1 и 10, то его квадрат заключается между 1 и 100. Метки первой подшкалы A читаются как единицы, второй — как десятки. Если же данное число d меньше единицы или больше 10, его предварительно приводят к „нормальному“ виду и возводят в квадрат каждый сомножитель отдельно (один — посредством линейки, другой — в уме). Так, чтобы возвести в квадрат число $d=455$, пишут его в виде $4{,}55 \cdot 10^2$, затем находят квадрат 4,55 посредством линейки (20,7), квадрат 10^2 в уме. Искомый квадрат d^2 равен $20{,}7 \cdot 10^4 = 207\,000$. Если требуется вычислить $0{,}00135^2$, поступаем так:

$$0{,}00135^2 = (1{,}35 \cdot 10^{-3})^2 = 1{,}822 \cdot 10^{-6} = 0{,}000001822.$$

При небольшом навыке промежуточные результаты можно не писать, сразу записывая окончательный результат.

Извлекая квадратный корень из обеих частей выведенной выше формулы $d^2 = a$, получим формулу $a = \sqrt{d}$, дающую правило извлечения квадратного корня:

Чтобы извлечь квадратный корень из числа a, надо найти на шкале A *метку a и прочесть противостоящую метку d шкалы* D.

Случай, когда a заключается между 1 и 100 и имеет, следовательно, одну или две значащих цифры левее запятой, является самым простым. Результат имеет одну значащую цифру левее знака дробности. Подкоренное меньшее 10 берется на первой подшкале A, большее 10 (но меньшее 100) — на второй подшкале A. Если же подкоренное меньше 1 или больше 100, его надо предварительно привести к нормальному виду с четным показателем при 10. Например, чтобы найти квадратный корень из числа 85 620, поступаем так:

$$\sqrt{85\,620} = \sqrt{8{,}562 \cdot 10^4} = \sqrt{8{,}562} \cdot 10^2 = 2{,}925 \cdot 10^2 = 292{,}5$$

(более точное извлечение дает 292,62 ...). Необходимость записи промежуточных результатов уже при небольшом навыке отпадает, и окончательный результат пишется сразу.

Главной целью проработки настоящего параграфа является приобретение навыка в чтении меток шкал A и D, а также в установке индекса на заданные метки. Поэтому надо самым внимательным образом отнестись к указанным ниже упражнениям и проделать их два-три раза, добиваясь безошибочности и быстроты в их выполнении. Число этих упражнений легко увеличить, используя для поверки таблицы квадратов и квадратных корней.

Упражнения.

1. Возведите посредством линейки в квадрат числа n и сравните полученные результаты с помещенными ниже числами n^2. Линейка дает трех- и четырехзначные числа, совпадающие или почти совпадающие с теми, какие получаются при надлежащем округлении чисел n^2.

n	1,47	2,16	3,02	3,48	4,35	4,70	5,95	2,18	3,28	4,95
n^2	2,1609	4,6656	9,1204	12,110	18,922	22,090	35,402	4,7524	10,758	24,502

n	5,09	6,53	9,81	1,465	1,204	1,163	2,057	2,685	3,17	4,56
n^2	25,908	42,641	96,236	2,1462	1,4496	1,3526	4,2312	7,2092	10,049	20,794

n	5,346	6,13	8,55	52,3	496	1128	7670	0,81	0,0916	0,00339
n^2	28,580	37,577	73,102	2735,3	246 016	1 272 384	58 828 900	0,6561	0,0083906	0,00114921

2. Ниже приведены квадратные корни из некоторых чисел, вычисленные с 5 значащими цифрами. Найдите эти корни посредством линейки и сравните свои результаты с приведенными числами. Линейка должна давать трех- и четырехзначные значения корней, совпадающие или почти совпадающие с теми, какие получатся при надлежащем округлении чисел $\sqrt{n}$.

n	2,5	3,20	0,037	5,5	7,6	8,9	11	170 000	35,5	0,0078
$\sqrt{n}$	1,5811	1,7889	0,19235	2,3452	2,7568	2,9833	3,3166	412,31	5,9582	0,088318

n	1,985	617	6170	1,062	0,771	29,3	9,25	3,14	567	8760
$\sqrt{n}$	1,4089	24,841	78,549	1,0305	0,87807	5,4130	3,0414	1,7720	23,812	93,595

§ 25. Возведение в куб и извлечение кубического корня.

Рассматривая шкалу К, легко замечаем, что она тоже логарифмическая, но с модулем уже втрое меньшим, чем у шкалы D. Ее уравнение $\bar{k} = \frac{250}{3} \lg k$, и состоит она из трех одинаковых подшкал. Если цифровые метки первой читать как единицы, т. е. от 1 до 10, то метки второй придется читать как десятки (от 10 до 100), а третьей — как сотни (от 100 до 1000). Нули в цифровых метках всегда опускаются.

Сопоставление шкал D и К приводит к равенству $\bar{d} = \bar{k}$, откуда на основании уравнений обеих шкал получаем соотношение $d^3 = k$, или, по извлечении кубического корня из обеих частей, $\sqrt[3]{k} = d$. Отсюда два правила:

Чтобы возвести в куб число d, надо найти на шкале D *метку d и прочесть противостоящую метку шкалы* К.

Чтобы извлечь кубический корень из числа k, надо найти на шкале К *метку k и прочесть противостоящую метку шкалы* D.

Если возводимое в куб число больше 1 и меньше 10, то положение запятой определяется сразу в зависимости от того, на которой из трех подшкал К мы читаем $k = d^3$: если на первой, то куб имеет одну значащую цифру левее знака дробности (например $1{,}6^3 = 4{,}10$), если на второй — то две (например $2{,}5^3 = 15{,}62$), если на третьей — три (например $7{,}3^3 = 422$). При возведении в куб числа, меньшего 1 или большего 10, его лучше всего предварительно привести к нормальному виду.

Например: $265^3 = (2{,}65 \cdot 10^2)^3 = 2{,}65^3 \cdot 10^6 = 18{,}6 \cdot 10^6 = 18\,600\,000;$

$$0{,}65^3 = (6{,}5 \cdot 10^{-1})^3 = 6{,}5^3 \cdot 10^{-3} = 275 \cdot 10^{-3} = 0{,}275.$$

Конечно, эти преобразования надо привыкнуть выполнять в уме и сразу писать окончательный результат.

При извлечении кубического корня подкоренное, заключающееся между 1 и 10, берется на первой подшкале К, заключающееся между 10 и 100 — на второй, между 100 и 1000 — на третьей. Если подкоренное меньше 1 или больше 1000, его предварительно надо привести к нормальному виду, пользуясь при этом *исключительно степенями 10 с показателем степени, кратным 3.* Например:

$$\sqrt[3]{81000} = \sqrt[3]{81 \cdot 10^3} = 4{,}33 \cdot 10 = 43{,}3;$$

$$\sqrt[3]{0{,}00073} = \sqrt[3]{730 \cdot 10^{-6}} = \sqrt[3]{730} \cdot 10^{-2} = 9{,}00 \cdot 10^{-2} = 0{,}0900.$$

Таким образом, извлекая посредством линейки кубический корень, мы всегда будем иметь в подкоренном, после его приведения к нормальному виду, либо 1, либо 2, либо 3 значащие цифры до знака дробности и будем его брать в зависимости от этого либо на первой, либо на второй, либо на третьей подшкале К.

Цена делений на шкале К уже не та, что была на шкале D или на шкале A, а потому для успешной работы на этой шкале надо сперва хорошо ознакомиться со всеми ее штрихами.

Упражнения.

1. Возведите посредством линейки в куб числа n и сравните полученные результаты с помещенными ниже числами n^3.

n	1,2	2,8	9,5	16,5	53,2	0,27	0,032	44	53	0,92
n^3	1,728	21,952	857,375	4492,1	150 569	0,019683	0,000032768	85 184	148 877	0,778688

n	1,71	2,52	8,96	51,5	51,6	51,7	51,8	51,9	52,0	1,442
n^3	5,0002	16,003	719,32	136 591	137 388	138 188	138 992	139 798	140 608	2,9984

2. Ниже приведены кубические корни из некоторых чисел, вычисленные с 5 значащими цифрами. Найдите корни из этих же чисел посредством линейки и сравните результаты.

n	2	20	200	0,2	0,02	0,002	0,0002	0,00002	2000	20 000
$\sqrt[3]{n}$	1,2599	2,7144	5,8480	0,58480	0,27144	0,12599	0,058480	0,027144	12,599	27,144

n	3,5	350	0,035	4096	262,1	0,387	19,68	531	3,14	0,0314
$\sqrt[3]{n}$	1,5183	7,0473	0,32710	16	6,3996	0,72874	2,6999	8,0987	1,4643	0,31548

§ 26. Умножение и деление.

Приобретая навык в отсчетах по логарифмическим шкалам, вернемся к важнейшим, чаще всего выполняемым посредством линейки действиям — к умножению и делению.

Умножение чисел, как мы уже видели в § 21, сводится к сложению отрезков логарифмических шкал, а деление — к вычитанию. Посмотрим, как выполняются эти два действия посредством основных шкал линейки, т. е. шкал C и D, предполагая сперва, что данные числа заключены между 1 и 10.

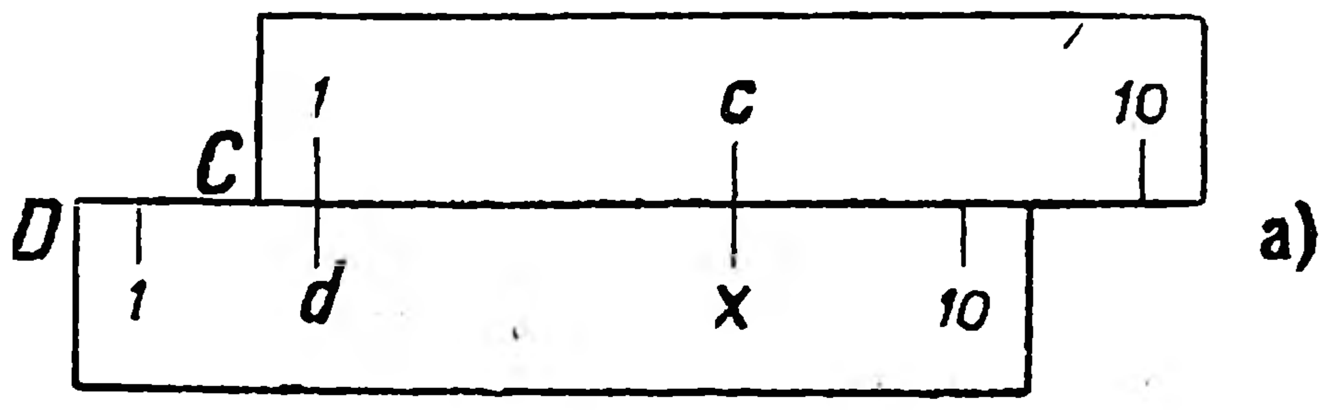


Рис. 19а.

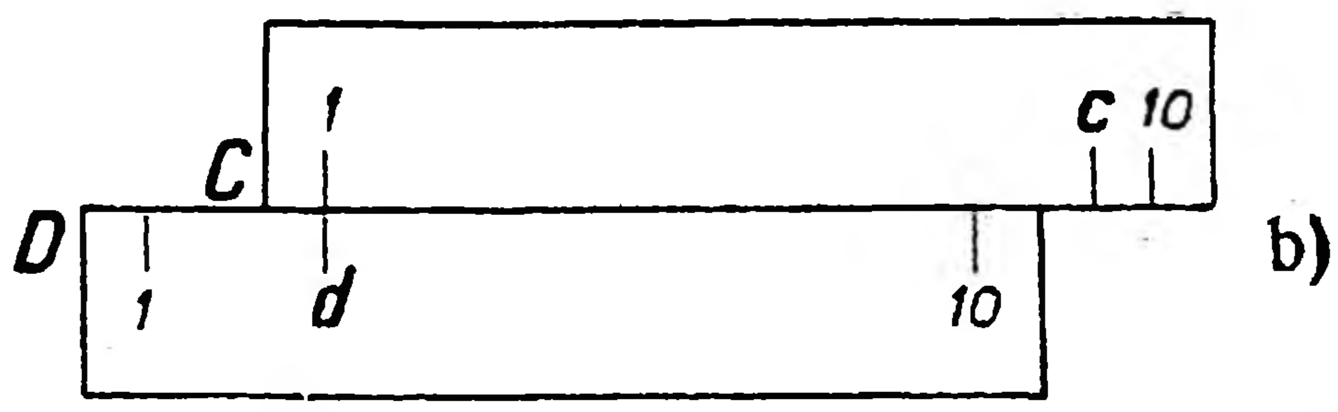


Рис. 19b.

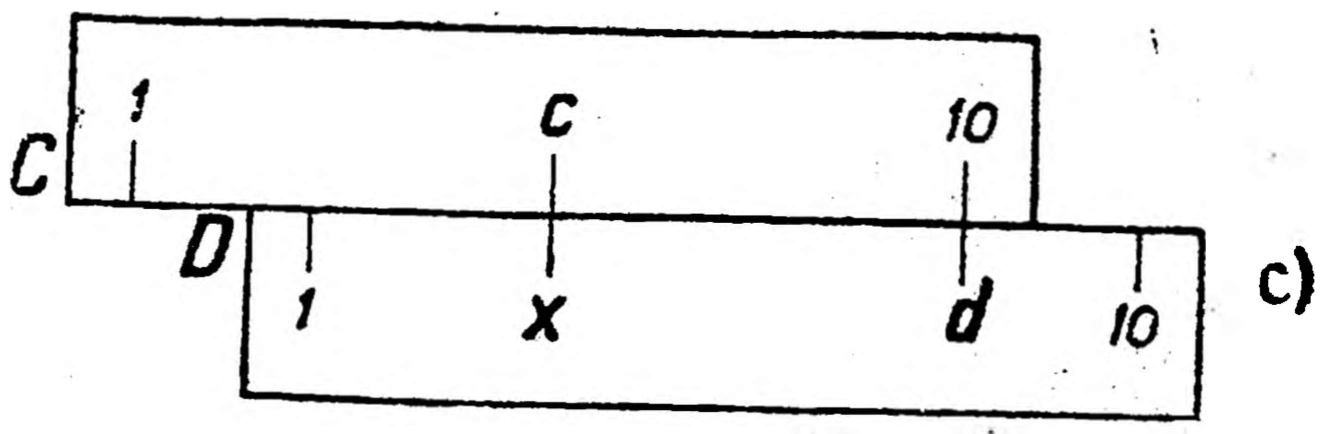


Рис. 19с.

Если каждое из двух данных чисел d и c заключено между 1 и 10, то их произведение dc заключено либо между 1 и 10, либо между 10 и 100. Рассмотрим каждый из этих двух случаев порознь.

В первом случае, когда $1 < d < 10$, $1 < c < 10$, а $1 < dc < 10$, то искомое произведение получается посредством установки, показанной на рис. 19а. Здесь мы выполняем сложение отрезков $c = 250 \lg \bar{c}$ и $d = 250 \lg \bar{d}$ и получаем сумму в виде отрезка $\bar{x} = 250 \lg x$. Соотношение $250 \lg c + 250 \lg d = 250 \lg x$ после упрощения дает $cd = x$, откуда видно, что метка x действительно выражает искомое произведение.

Дело обстоит иначе во втором случае, когда при $1 < c < 10$, $1 < d < 10$ имеем $10 < dc < 100$: метка c шкалы C оказывается здесь за пределами шкалы D (рис. 19b). Но установим против метки d шкалы D не начало, а конец шкалы C, как показано на рис. 19с, и выясним, что за метка x окажется при этом на шкале D против метки c шкалы C:

$$(1, x) = (1, d) - (x, d) = (1, d) - (c, 10) = (1, d) - [(1, 10) - (1, c)];$$
$$250 \lg x = 250 \lg d - [250 \lg 10 - 250 \lg c] = 250 \lg (dc : 10), \qquad x = dc : 10.$$

Итак, в этом случае метка x дает произведение, уменьшенное в 10 раз.

Например, при умножении 2 на 3 мы имеем первый случай: установив против метки 2 шкалы D начало шкалы C, видим, что метка 3 шкалы C находится против метки 6 шкалы D. При умножении же 2 на 8, опять, установив против метки 2 шкалы D начало шкалы C, видим, что метка 8 шкалы C вышла за пределы шкалы D. Следовательно, движок в этом случае надо сместить не направо, а налево, установив против метки 2 шкалы D не начало, а конец (метку 10) шкалы C. Против метки 8 шкалы C при этом оказывается метка 1,6 шкалы D.

Искомое произведение равно $1{,}6 \cdot 10 = 16$.

При умножении чисел произвольной величины можно было бы привести их предварительно к нормальному виду и свести вопрос к одному из двух только что рассмотренных случаев. Но дело еще упрощается в силу того, что положение знака дробности в произведении легко определить либо грубо-приближенной оценкой, либо посредством особого правила, о котором речь будет ниже. Поэтому посредством линейки достаточно найти лишь цифровой состав произведения. *Чтобы перемножить два числа, надо предположить, что запятая в каждом из них поставлена после первой значащей цифры, найти произведение* (пользуясь либо началом, либо концом шкалы C), как показано выше, *но записать это произведение без запятой*, а затем *найти положение запятой грубо-приближенной оценкой.*

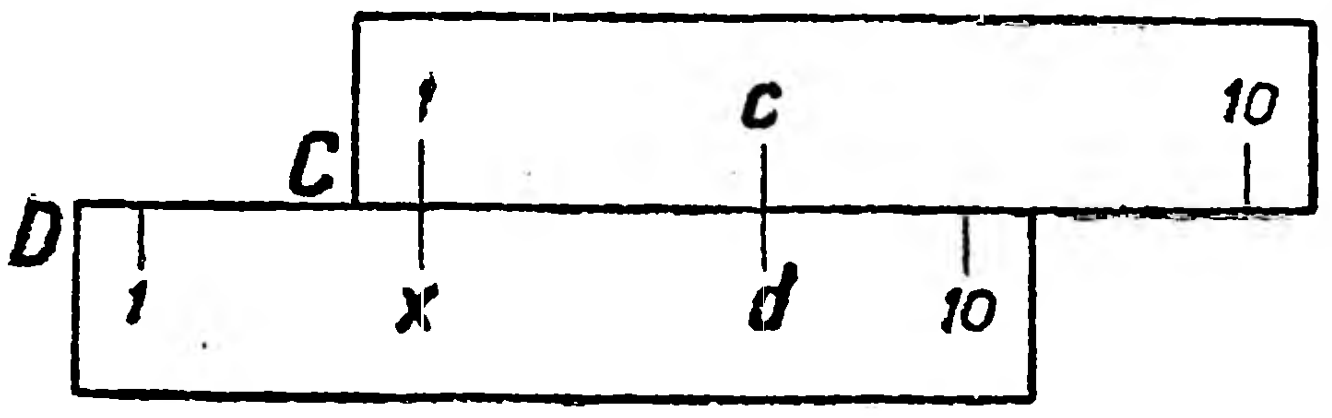


Рис. 20a.

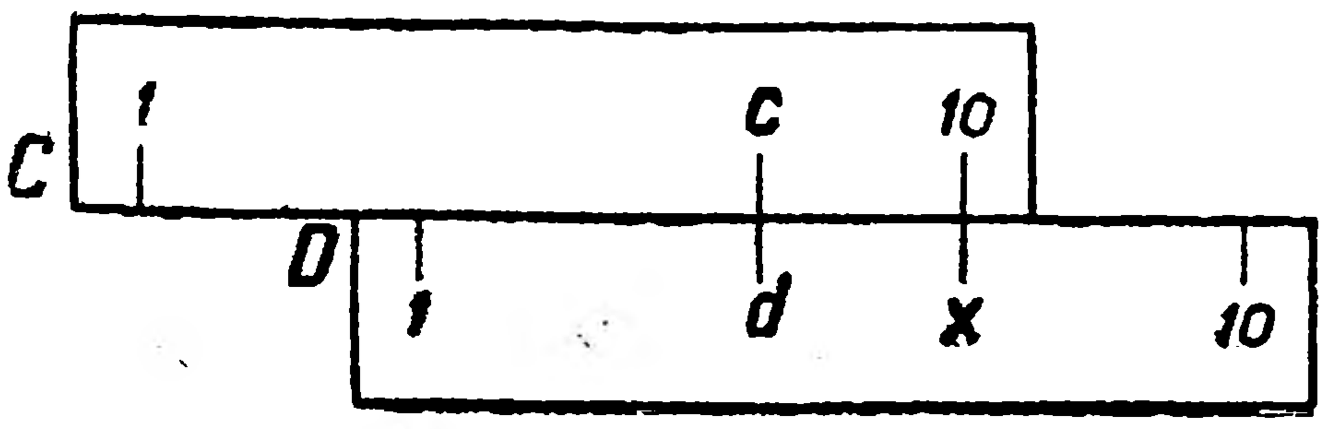


Рис. 20b.

Например, чтобы умножить 184 на 33,5, находим произведение чисел 1,84 и 3,35, равное 6,16 (пользуясь при этом началом шкалы C), но пишем это произведение без запятой (616). Замечая, что множимое 184 близко к 200, а множитель 33,5 близок к 30, находим, что произведение близко к $200 \cdot 30 = 6000$, а потому равно 6160. Точно так же для умножения 0,00184 на 7350 находим сперва цифровой состав произведения 1352 (пользуясь концом шкалы C), а затем соображаем, что это произведение должно быть близко к $0{,}002 \cdot 7000 = 14$, а потому оно равно 13,52.

Переходя к делению, предположим сперва, что делимое d и делитель c опять заключены между 1 и 10, и рассмотрим два случая: $d > c$ и $d < c$. Соответствующие установки движка показаны на рис. 20a и 20b. При $d > c$ приходится пользоваться началом шкалы C, и противостоящая метка x дает, как легко видеть, искомое частное ($x = d : c$); при $d < c$ приходится пользоваться концом шкалы C, и противостоящая метка x дает искомое частное, увеличенное в 10 раз ($x = 10d : c$). Так как грубо-приближенная оценка и здесь позволяет легко найти положение запятой, то приходим к правилу: *чтобы разделить одно число на другое, надо предположить, что запятая в каждом из них поставлена после первой значащей цифры, найти частное* (пользуясь либо началом, либо концом шкалы C), *записать его цифровой состав*, а затем *найти положение знака дробности грубо-приближенной оценкой.*

Например, чтобы найти частное 53,8:2,75, находим по линейке цифровой его состав 1956 (пользуясь началом шкалы C), а затем замечаем, что это частное близко к $50:3 \approx 17$, а потому оно равно 19,56. Точно так же, но пользуясь уже концом шкалы C, найдем цифровой состав частного 2,75:53,8, а именно 511; далее, замечая, что оно близко к $3:50 = 0{,}06$, заключаем, что оно равно 0,0511.

Выполняя умножение, мы устанавливаем сперва движок, противопоставляя его начало или конец метке множимого на шкале D и не пользуясь при этом ползунком, а затем, наводя индекс ползунка на метку делителя на шкале C, читаем на шкале D цифровой состав произведения. При делении же мы устанавливаем сперва ползунок, наводя его индекс на метку делимого на шкале D, а затем подводим метку делителя на шкале C движка под индекс и читаем на шкале D метку, противостоящую началу или концу шкалы C на движке. Итак, *при умножении сперва работает движок, потом ползунок; при делении, наоборот — сперва ползунок, потом движок.*

На практике нередко встречаются случаи, когда одно и то же число приходится умножать на ряд других чисел. Такое *серийное умножение* совершается на линейке особенно выгодно, так как требует лишь одной установки движка, все же остальное сводится лишь к чтению результатов (перемещается лишь индекс). Например, желая найти значение $y = 1{,}27x$ при $x = 6$; 6,5; 7; 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5, противопоставляем начальную единицу шкалы C метке 1,27 шкалы D и наводим индекс последовательно на метки 6; 6,5 и т. д. шкалы C. Противостоящие метки шкалы D дадут искомые значения для y, а именно: 7,62; 8,25; 8,89; 9,52; 10,16; 10,80; 11,43; 12,06. После получения первых 4 значений y здесь пришлось выполнить „перекидывание движка", т. е. передвинуть движок на всю его длину налево, помещая его конец в ту точку, где раньше было его начало.

Серийное деление может быть двух видов: 1) при постоянном делимом и 2) при постоянном делителе. Пока рассмотрим только последнее, т. е. вычисление по формуле $y = x : a$ при ряде заданных значений x (серийное деление при постоянном делимом рассмотрено в § 30). Переписав эту формулу в виде $y = (1 : a) \cdot x$ и найдя частное $1 : a$, мы опять встречаемся с серийным умножением. Значение $1 : a$ надо найти посредством линейки, но его не надо ни прочитывать, ни тем более записывать. Противопоставляем метку a шкалы C началу или концу шкалы D. При этом против 1 шкалы C на шкале D окажется метка $1 : a$. Не читая ее, отыскиваем на шкале C метки данных значений x, а против них на шкале D читаем искомые значения y. Например, чтобы получить значения $y = x : 565$ при $x = 400$, 500, 600, 700, 800, ставим метку 565 шкалы C против метки 10 шкалы D и читаем метки шкалы D против меток 400 и 500 шкалы C. Получив числа 708 и 885, перекидываем движок так, чтобы метка 565 шкалы C оказалась против начальной единицы шкалы D и продолжаем отсчеты. Грубо приближенная оценка результатов показывает, что искомые значения y имеют запятую сперва левее первой значащей цифры, затем правее ее: $y = 0{,}708$; 0,885; 1,062; 1,239; 1,416.

Мы выяснили, как выполняется умножение и деление на основных шкалах линейки. Действия эти можно выполнить и по шкалам квадратов (A и B), причем точность результатов будет несколько ниже, так как эти последние шкалы выполнены в более мелком масштабе. Зато при работе на них почти вовсе исключается надобность в том „перекидывании движка", с которым мы встретились выше. Поэтому надо уметь пользоваться при умножении и делении и теми и другими шкалами.

Упражнения.

1. Выполнить следующее упражнение сперва на основных шкалах, потом на шкалах квадратов. Указанные здесь произведения имеют по 4 точные значащие цифры. Линейка должна давать 3, а в некоторых случаях все 4 цифры.

12,71·8,92 = 113,4	1,838·4790 = 8804
1276·0,00492 = 6,278	14,16·0,3641 = 5,156
21,76·29,75 = 647,4	0,3966·0,953 = 0,3780
0,2016·67,3 = 13,57	11,85·0,683 = 8,094
0,03265·4,74 = 0,1548	205,7·40,6 = 8351

2. Та же задача, но на деление:

480:36 = 13,33	8,22:50,1 = 0,1641
66,6:185 = 0,3600	37,2:0,00069 = 53910
7000:4375 = 1,600	997,8:2,69 = 371,0
8,66:2,236 = 3,873	0,782:12,9 = 0,06062
0,1594:0,0729 = 2,187	6720:0,875 = 7680

3. Вычислите длины C окружностей диаметров, указанных ниже в строке d, применяя формулу $C = \pi d$. Воспользуйтесь особой меткой для $\pi = 3,1415\ldots$, нанесенной на каждой из шкал A, B, C, D. Работайте сперва на шкалах A и B (одна установка движка!), затем проделайте те же вычисления на шкалах C и D (опять одна установка, но затем перекидывание!).

d	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4
$C = \pi d$	7,854	8,168	8,482	8,796	9,111	9,425	9,739	10,05	10,37	10,68

4. Вычислите одной установкой движка 15,5% чисел: 268; 4570; 85 100; 194 600.

5. Составьте таблицу значений функции $y = x:5,76$ для значений x от 5 до 7 через каждые 0,2 (одна установка движка!).

6. Вычислите значения функции $y = 2,18x + 0,52$ для значений x от 2,5 до 3,2 через 0,1. На линейке выполняются, конечно, только умножения.

§ 27. Определение положения запятой в произведениях и частных.

Как мы убедились на ряде примеров, положение запятой в результате легко определяется посредством грубо-приближенной его оценки. Однако при работе на основных шкалах C и D можно пользоваться особым правилом, делающим такую оценку ненужной. Правило это основано на понятии *порядка* десятичного числа.

Порядком десятичного числа, большего 1, называется число его цифр налево от запятой. Порядком десятичного числа, меньшего 1 (но большего 0), называется отрицательное число, равное по абсолютной величине числу нулей между запятой и первой значащей цифрой числа. Например,

порядок	1,802	есть	1	порядок	0,1802	есть	0
	18,02	„	2		0,01802	„	—1
	180,2	„	3		0,001802	„	—2
	1802	„	4		0,0001802	„	—3
	18 020	„	5		0,00001802	„	—4
	и т. д.				и т. д.		

Как видим, порядок числа есть не что иное, как характеристика его логарифма (десятичного), увеличенная на 1. Порядок числа, приведенного к нормальному виду, на 1 больше показателя степени при 10. Так, порядок числа $825 = 8,25 \cdot 10^2$ есть $2 + 1 = 3$, порядок числа $0,0006 = 6 \cdot 10^{-4}$ есть $-4 + 1 = -3$.

Возьмем теперь два числа a_1 и b_1 первого порядка, т. е. имеющие по 1 значащей цифре левее запятой. Из неравенств $1 \leq a_1 < 10$; $1 \leq b_1 < 10$ вытекает неравенство $1 \leq a_1 b_1 < 100$, а потому *при умножении двух чисел первого порядка получается либо число первого порядка, либо число второго порядка*. Находя произведение $c = a_1 b_1$ посредством линейки, мы в I случае (когда произведение 2 чисел первого порядка есть тоже число первого порядка) против метки a_1 шкалы D устанавливаем начало шкалы C и делаем отсчет произведения $c = a_1 b_1$ *правее* метки множимого; во II случае (когда произведение 2 чисел первого порядка есть число второго порядка) против метки a_1 шкалы D устанавливаем конец шкалы C и делаем отсчет произведения $c = a_1 b_1$ *левее* метки множимого. Те же два случая надо различать при умножении 2 чисел произвольной величины. Действительно, представив 2 числа a и b в нормальном виде $a = a_1 \cdot 10^{\alpha}$; $b = b_1 \cdot 10^{\beta}$, где a_1 и b_1 — числа первого порядка, видим, что $ab = a_1 b_1 \cdot 10^{\alpha+\beta}$. Замечая, что числа a и b имеют порядок соответственно $\alpha + 1$ и $\beta + 1$ и что число ab есть число либо порядка $\alpha + \beta + 1$, когда $a_1 b_1 < 10$, т. е. когда отсчет произведения делается по линейке *правее* метки множимого, либо порядка $\alpha + \beta + 2$, когда $a_1 b_1 \geq 10$, т. е. когда отсчет произведения делается *левее* метки множимого, убеждаемся в справедливости следующего правила: *если произведение двух сомножителей, разыскиваемое посредством шкал* C *и* D, *получается левее метки множимого, то порядок произведения равен сумме порядков сомножителей, если же правее ее — то этой сумме без единицы.*

Руководствуясь этим правилом о порядке произведения, легко определяем положение запятой в произведении двух чисел. Об этом правиле напоминает знак P—1, поставленный у правого конца шкалы D (буква „P“ — первая буква немецкого слова Produkt, означающего произведение).

Разобрав во всех деталях правило о порядке произведения двух чисел, рекомендуем читателю самому доказать справедливость следующего правила о порядке частного двух чисел: *если частное двух сомножителей, разыскиваемое посредством шкал* C *и* D, *получается правее меток делимого и делителя, то порядок частного равен разности порядков делимого и делителя, если же левее, то этой же разности, увеличенной на 1.*

Об этом правиле напоминает знак Q+1, поставленный у левого конца шкалы D (буква „Q“ — первая буква немецкого слова Quotient, означающего частное).

Упражнения.

Выполните еще раз умножения и деления, указанные в упражнениях § 26, применяя правила настоящего параграфа (не упускайте из виду, что правила эти применимы лишь при работе на основных шкалах C и D линейки!).

§ 28. Последовательное умножение и деление.

До сих пор речь шла у нас лишь об отдельных операциях умножения и деления. На практике, однако, очень часто приходится выполнять целый ряд этих действий так, что результат первого действия является одним из данных для второго, результат второго — одним из данных для третьего и т. д. На линейке все эти действия приходится выполнять порознь, но промежуточные результаты вовсе не читаются (и тем более не записываются). Кроме того, целесообразный выбор порядка действий во многих случаях позволяет уменьшить количество установок движка и тем самым ускорить вычисление.

Если требуется вычислить произведение нескольких сомножителей, например $x = abcde...$, то сперва получают рассмотренным в § 26 способом, хотя бы на основных шкалах линейки C и D, произведение ab. Затем, *не читая* соответствующей метки шкалы D, противопоставляют ей начало или конец шкалы C и находят на этой последней метку c. Противостоящая метка шкалы D дает произведение abc. Опять-таки, *не читая* этой метки, устанавливаем против нее начало или конец шкалы C и выполняем умножение числа abc на d. Операции эти повторяются до тех пор, пока все сомножители искомого произведения не будут исчерпаны. Последнюю полученную метку записывают, определяя положение запятой либо грубо-приближенной оценкой с округлением всех данных до первой значащей цифры, либо применяя правило о порядке произведения. В последнем случае необходимо при выполнении последовательных умножений где-нибудь записывать -1 всякий раз, когда произведение получается правее метки множимого, а затем подсчитать сумму порядков всех сомножителей и уменьшить эту сумму на столько единиц, сколько раз у нас было записано -1. Остаток и даст порядок произведения.

Последовательный ряд делений выполняется аналогичным образом: промежуточные результаты не читаются, положение запятой в окончательном результате определяется либо грубо-приближенной оценкой, либо по правилу о порядке частного (записывается $+1$ всякий раз, когда частное получается левее меток делимого и делителя, и разность между порядком делимого и суммой порядков всех делителей увеличивается на сумму всех записанных положительных единиц).

При вычислении выражения вида $x = \frac{ab}{c}$ *выгоднее сперва делать деление* (a на c), *а затем умножение* $\left(\frac{a}{c} \cdot b\right)$, а не наоборот. Действительно, для деления a на c устанавливаем движок так, чтобы частное получилось на шкале D. Затем, не читая этого частного и не трогая движка, находим метку b на шкале C и читаем противостоящую метку шкалы D. Это и будет искомое значение x. Для его получения понадобились, как легко видеть, одна установка движка и две установки ползунка. Если же делать сперва умножение a на b, затем деление ab на c, то понадобятся две установки движка и две ползунка.

Соответственно этому и вычисление более сложных выражений вида $x = \frac{abcd...}{efg...}$ выгоднее вести так, чтобы сперва шло действие деления, потом умножение, далее опять деление и снова умножение и так далее, пока такое чередование будет возможным.

Вычислим для примера значение $x = \frac{4{,}8 \cdot 12{,}5 \cdot 642}{2{,}5 \cdot 5{,}6 \cdot 0{,}144}$. Установив ползунок на метку 4,8 шкалы D, перемещаем движок так, чтобы метка 2,5 шкалы C оказалась под индексом. Метка частного 4,8:2,5 окажется при этом на шкале D против начала шкалы C. Не читая ее, наводим ползунок на метку 12,5 шкалы C, на шкале D при этом получается метка числа $\frac{4,8\cdot 12,5}{2,5}$. Не читая ее, перемещаем движок так, чтобы под индексом оказалась метка 5,6 шкалы C, а затем наводим ползунок на метку 642 шкалы C. Теперь под индексом на шкале D оказывается метка числа $\frac{4,8\cdot 12,5\cdot 642}{2,5\cdot 5,6}$. Остается сделать деление этого числа на 0,144. Перемещаем движок так, чтобы под индексом оказалась метка 0,144 шкалы C; тогда против начала шкалы C читаем на шкале D метку 1911, дающую цифровой состав искомого x. Грубо-приближенная оценка $\left(x \approx \frac{5\cdot 12\cdot 600}{2\cdot 6\cdot 0,1}\right)$ показывает, что x близок к числу 30 000, а потому имеем окончательно $x = 19\,110$.

Может случиться, что, выполняя одну пару действий (деление с последующим умножением), мы придем к метке множителя на шкале C за пределами шкалы D $\left(\text{например при вычислении } \frac{6\cdot 8}{3} \text{ или } \frac{2\cdot 8}{4}\right)$. В этих случаях надо применять „перекидывание" движка, т. е. установить конец движка там, где было его начало („перекидывание влево"), или, наоборот, начало там, где был его конец („перекидывание вправо"), а затем делать умножение обычным порядком.

Порядок числа, получаемого в результате выполнения такой пары действий (деление — умножение), равен порядку делимого минус порядок делителя плюс порядок множителя, если при выполнении операции не понадобилось перекидывания движка. *При наличности перекидывания влево порядок результата надо увеличить на 1, при наличности перекидывания вправо — уменьшить на 1.* Избежать путаницы в применении этого правила легко, если запомнить искусственное слово „конаплю", представляющее собой сокращение фразы: конец вместо начала дает плюс единицу.

Для обоснования этого правила надо рассмотреть следующие четыре единственно возможных случая.

I. Метка частного $a:c$ левее метки делимого и делителя, метка произведения $(a:c)\cdot b$ правее метки множимого $a:c$.

Операция совершается без перекидывания; правила о порядке произведения и частного показывают, что порядок результата равен порядку a минус порядок c плюс порядок b, так как $+1-1=0$. Пример: $\frac{5\cdot 30}{0,02} = 7500$.

II. Метка частного $a:c$ опять левее меток множимого и множителя, но метка произведения $(a:c)\cdot b$ левее метки множимого $a:c$.

Операция совершается с перекидыванием движка влево (конец вместо начала), правила о порядке дают поправку $+1$. Пример: $\frac{5\cdot 60}{0,02} = 15\,000$.

III. Метка частного $a:c$ уже не левее, а правее метки делимого и делителя, метка произведения $(a:c)\cdot b$ правее метки множимого $a:c$.

Здесь перекидывания движка нет, правила о порядке показывают, что никаких поправок не требуется. Пример: $\frac{5\cdot 30}{0,06} = 2500$.

IV. Метка частного $a:c$ правее меток делимого и делителя, метка произведения $(a:c)\cdot b$ левее метки множимого.

В этом случае приходится применять перекидывание движка вправо начало вместо конца), правила о порядке указывают на необходимость поправки — 1. Пример: $\frac{2 \cdot 16}{50} = 0{,}64$.

Как видим, приведенное выше правило о порядке числа, получаемого в результате выполнения пары действий (деление — умножение), оправдывается во всех четырех случаях; других же случаев быть не может.

Итак, в конце концов мы приходим к следующему правилу вычисления выражений вида $x = \frac{abcd\ldots}{efg\ldots}$ на основных шкалах линейки: выполняем сперва все пары действий деления — умножения, отмечая знаком $+1$ каждый случай перекидывания движка влево (конец вместо начала) и знаком -1 каждый случай перекидывания его вправо (начало вместо конца); далее выполняем остающиеся деления или умножения, ставя знак -1 каждый раз, когда произведение отсчитывается правее множимого, и знак $+1$, когда частное отсчитывается левее делимого и делителя; подсчитываем алгебраическую сумму порядков всех множителей числителя и знаменателя и придаем к ней поправку, равную алгебраической сумме всех записанных положительных и отрицательных единиц; полученное число есть порядок окончательного результата.

Например, при вычислении выражения $x = \frac{0{,}56 \cdot 720 \cdot 0{,}012}{2{,}4 \cdot 14 \cdot 0{,}6 \cdot 300 \cdot 0{,}0025}$ выполняем две пары действий и три деления. В результате получаем цифровой состав искомого x (320) и запись поправок $+1+1$ (одно перекидывание движка влево и одно частное левее делимого). Алгебраическая сумма порядков сомножителей делимого и делителя равна в настоящем случае $0+3+(-1)-1-2-0-3-(-2)=-2$. Прибавляя поправки, получаем порядок x, равный 0. Следовательно, $x = 0{,}320$.

Отметим, что все сказанное об определении порядка результата относится лишь к работе на основных шкалах C и D. Вычислять выражения рассмотренного вида можно и на шкалах квадратов A и B, что имеет даже некоторые преимущества (потребность в перекидывании движка встречается реже), но положение запятой в результате надо в этом случае определять путем грубо-приближенной оценки.

Упражнения.

1. Вес P (в граммах) стойки с сечением в виде эллипса выражается формулой $P = \pi abhd$, где a и b — полуоси эллипса, h — высота стойки (в сантиметрах), d — плотность материала. Вычислить P при $a = 2{,}65$; $b = 1{,}25$; $h = 93$; $d = 7{,}85$.
2. Вычислить $w = spfy$ при $s = 1700$; $p = 0{,}5$; $f = 1{,}125$; $y = 0{,}067$.
3. Найти $x = \frac{5{,}82 \cdot 43{,}5}{217{,}5}$; $y = \frac{48{,}2 \cdot 16}{19{,}5}$; $z = \frac{0{,}036 \cdot 2{,}7}{3{,}18}$ (разными способами, учитывая число потребовавшихся установок движка и ползунка).
4. Вычислить $P = \frac{2250N}{\pi rn}$ при $r = 67$; $N = 24$; $n = 45$.
5. Вычислить $x = \frac{13{,}99 \cdot 55 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 0{,}75}{13 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2}$.

§ 29. Вычисление значений, прямо пропорциональных данным.

Вернемся к установленному в § 21 предложению о равенстве всех дробей, получаемых при произвольном положении двух логарифмических шкал с общей осью, если метки одной из них читать как числители, а противостоящие метки другой — как знаменатели этих дробей. Как мы видели, из этого предложения непосредственно вытекает правило для получения четвертого пропорционального к трем данным числам (правило 1, стр. 55). Посредством этого правила легко решается задача вычисления значений, прямо пропорциональных данным, при условии, что известно одно из них. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. За 5,23 *кг* товара уплачено 82 р. 70 к. Предполагая пропорциональность между количеством товара и его стоимостью, найти стоимость 16,5 *кг*; 25,1 *кг*; 30 *кг*, а также количество товара, которое можно приобрести за 38 руб.; 52 р. 50 к.; 103 руб.

Здесь мы имеем прямую пропорциональность между количеством товара x *кг* и его стоимостью y руб., и вопрос заключается в разыскании неизвестных членов в следующем ряду равных отношений:

$$\frac{5{,}23}{82{,}7}=\frac{16{,}5}{y_1}=\frac{25{,}1}{y_2}=\frac{30}{y_3}=\frac{x_4}{38}=\frac{x_5}{52{,}5}=\frac{x_6}{103}.$$

Установив против метки 827 шкалы D метку 523 шкалы C, читаем против меток 165, 251, 300 шкалы C метки 261, 397, 474 шкалы D, а против меток 380, 525, 103 шкалы D метки 240, 332, 651 шкалы C (для прочтения последней метки необходимо перекидывание движка влево). Принимая во внимание положение запятой в данных, посредством грубо-приближенной оценки устанавливаем положение запятой в полученных числах и окончательно имеем:

$$y_1=261 \text{ руб.};\ y_2=397 \text{ руб.};\ y_3=474 \text{ руб.};\ x_4=2{,}40 \text{ кг};\ x_5=3{,}32 \text{ кг};$$
$$x_6=6{,}51 \text{ кг}.$$

Важно то, что как бы ни был длинен ряд неизвестных, все они получаются в задачах такого типа сразу посредством одной лишь установки движка (не считая его перекидывания, в котором иногда встречается надобность). Вся работа получения значений неизвестных сводится лишь к их прочтению.

Задача 2. Распределить плату за электроэнергию в сумме 10 р. 27 к. между тремя потребителями пропорционально мощности, потребляемой каждым из них, если первый берет 45 ватт, второй 40, третий 65.

Найдя сумму $45+40+65=150$, пишем ряд равных отношений:

$$\frac{150}{10{,}27}=\frac{45}{x_1}=\frac{40}{x_2}=\frac{65}{x_3}$$

и находим все три неизвестных по шкале D против меток 45, 40, 65 шкалы C, предварительно установив метку 150 шкалы C против метки 1027 шкалы D (положение запятой определяется опять-таки простой оценкой). Получаем $x_1=3$ р. 08 к.; $x_2=2$ р. 74 к.; $x_3=4$ р. 45 к.; и для поверки находим сумму $x_1+x_2+x_3=10$ р. 27 к.

Задача 3. Имея числа 2, 6, 18, 54, 72, найти, сколько процентов их общей суммы составляет каждое из них.

Дело сводится к определению неизвестных в ряду равных отношений

$$\frac{2}{x_1}=\frac{6}{x_2}=\frac{18}{x_3}=\frac{54}{x_4}=\frac{72}{x_5}=\frac{152}{100}.$$

Установив против метки 1 шкалы D метку 152 шкалы C, читаем метки неизвестных на шкале D против меток 2, 6, 18, 54, 72 шкалы C.

После постановки запятых на основании грубо-приближенной оценки и округления всех чисел до десятых, имеем: $x_1 = 1{,}3^0/_0$; $x_2 = 4{,}0^0/_0$; $x_3 = 11{,}8^0/_0$; $x_4 = 35{,}5^0/_0$; $x_5 = 47{,}4^0/_0$. Для поверки находим сумму $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100{,}0^0/_0$.

Подобное вычисление значений, прямо пропорциональных данным, есть по существу не что иное, как вычисление значений функции $y = \frac{a}{b}x$ по ряду данных значений аргумента x при постоянных a и b, т. е. то самое *серийное умножение*, о котором шла речь в § 26. Разница лишь в том, что коэфициент пропорциональности там предполагался известным, здесь же он задан в виде отношения двух чисел. Как мы только что видели, нет надобности находить этот коэфициент; надо лишь представить данное уравнение $y = \frac{b}{a}x$ в виде пропорции, притом такой, чтобы постоянные числа a и b составляли одно из ее отношений, переменные же, из которых значения одного (x) даны, а другого (y) разыскиваются, — второе ($a:b = y:x$, или $b:a = x:y$).

Отметим, что вместо шкал C и D можно для решения рассмотренных задач пользоваться шкалами квадратов (A и B), что даст несколько меньшую точность результатов, но избавит от перекидывания движка.

Для устранения случайных ошибок от смешения шкал полезно *шкалы брать соответственно записи*, а именно: если разыскиваются значения y по данным значениям x из пропорции $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$, то значения x и b, записанные *внизу*, брать на шкале D (или шкале B), т. е. *внизу*, а значения y и a, записанные *выше*, брать на шкале C (или шкале A), т. е. *сверху*.

Упражнения.

1. Отрезки 2,65 *см*; 3,62 *см*; 4,11 *см*; 10,80 *см*; 14,69 *см* надо увеличить в отношении 28:13.

Эта задача, как и три последующие, решается одной установкой движка.

2. В августе было 14 солнечных дней, 8 пасмурных, 9 с дождем. Вычислить в градусах центральные углы секторов, изображающих солнечные, пасмурные и дождливые дни на круговой диаграмме, если весь месяц изображается полным кругом.

3. Имеется 35,9 *т* товара, на который сделаны заявки четырьмя покупателями: A на 12,5 *т*, B на 16,0 *т*, C на 8,75 *т*, D на 6,8 *т*. Распределить между ними товар пропорционально заявкам.

4. Сколько процентов их общей суммы составляют числа 324, 810, 165, 902, 617?

Каждую из приведенных задач желательно решить два раза — сперва на шкалах квадратов, потом на основных.

§ 30. Вычисление значений, обратно пропорциональных данным.

Вычисление значений, обратно пропорциональных данным, сводится к решению уравнения $xy = ab$ относительно y при переменном x. Уравнение это легко преобразуется в пропорцию, но переменные x и y оказываются при этом в обеих частях пропорции, а потому способ, рассмотренный в предыдущем параграфе, здесь неприменим. Однако и эта задача решается одной установкой движка, если воспользоваться *шкалой обратных значений* (шкалой R) с уравнением $\bar{r} = 250 \lg(10:r)$. Эта шкала на некоторых линейках помещается на движке, между шкалами B и C, но если ее нет, ее легко получить из шкалы C, просто вынув движок из корпуса, а затем вставив его опять правым концом налево, но той же лицевой стороной к себе, что и раньше. Шкала C, метки которой окажутся теперь „вверх ногами", будет теперь иметь общую ось со шкалой A (см. рис. 21, где эта „перевернутая" шкала C обозначена буквой R). Обозначая расстояние от начала этой шкалы R, т. е. от той ее точки, где стоит метка 10, до метки r знаком $\bar{r}$, легко находим, что $\bar{r} = 250 - 250 \lg r = 250 \lg 10 - 250 \lg r = 250 \lg(10 : r)$.

Сопоставив шкалы D и R при произвольном положении последней и пользуясь основным уравнением (2) счетной линейки (§ 21), легко приходим к зависимости между двумя парами меток этих шкал: $rd = r_1 d_1$. Таким образом, *произведение всяких двух противостоящих меток шкал R и D есть величина постоянная* (для данного положения движка).

Решим задачу: переменные p и v связаны зависимостью $pv = c$, где c постоянно, причем известно, что $v = 0{,}36$ при $p = 15{,}3$; найти значения v, соответствующие значениям $p = 1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Дело сводится к решению уравнения $pv = 15{,}3 \cdot 0{,}36$ относительно v при ряде значений p. Найдем на шкале D метку 153 и противопоставим ей метку 36 шкалы R. Теперь остается только последовательно наводить индекс на метки 1, 2, 3,... шкалы D и читать противостоящие метки шкалы R. При этом метки 6, 7, 8, 9, 10 шкалы оказываются правее правого конца движка, и его надо перекинуть вправо: фиксировав посредством индекса конечную единицу шкалы, передвинуть движок так, чтобы под индексом оказалась начальная единица этой шкалы.

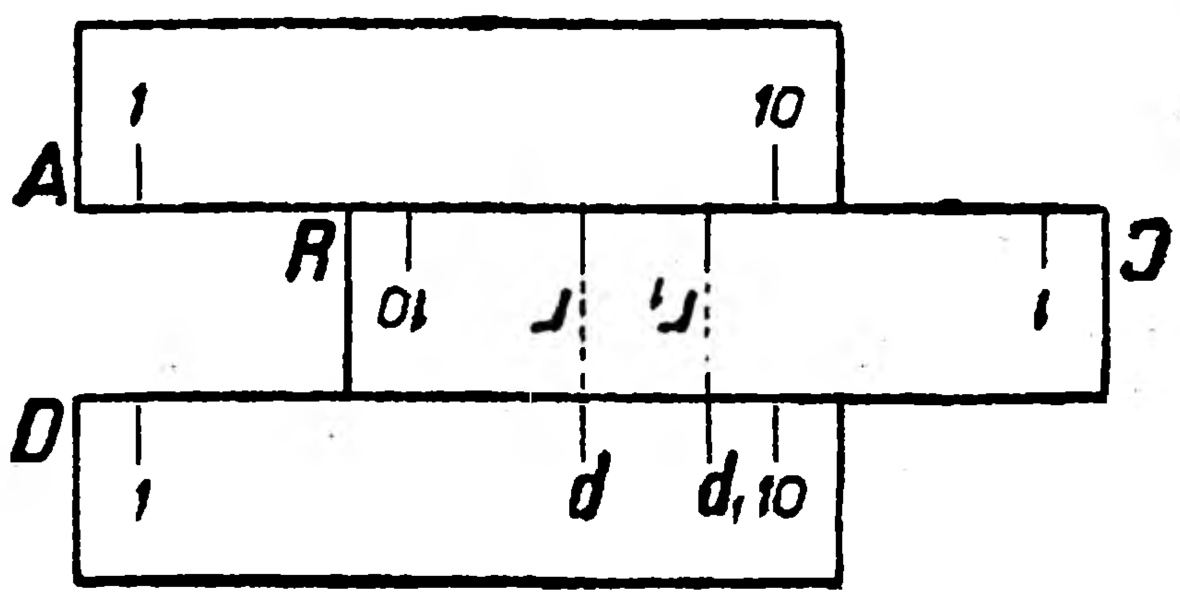


Рис. 21.

После этого перекидывания движка доводим отсчеты до конца и, замечая, что при возрастании p значения v убывают, определяем положение запятой. В результате получаем, что

при $p = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v = 5{,}51$	2,754	1,837	1,377	1,102	0,918	0,787	0,688	0,612	0,551

Таким образом, шкала R позволяет находить значения обратно пропорциональных величин так же просто, как обыкновенные шкалы — значения прямо пропорциональных величин. Надо только не забывать, что метки шкалы R идут в обратном порядке, и не ошибаться в их чтении при интерполяции на-глаз. На некоторых линейках движок имеет кроме обычных шкал B и C еще и шкалу R. Тогда, разумеется, надобность в „переворачивании" движка отпадает.

Вместо шкалы C можно при том же „перевернутом" движке воспользоваться шкалой B, но тогда вместо шкалы D надо будет взять шкалу A.

Вычисляя значения, обратно пропорциональные данным, мы тем самым выполняем *серийное деление* при постоянном делимом и переменном делителе, т. е. вычисляем значение $y = a : x$ при ряде данных значений x $(x \cdot y = a \cdot 1)$.

Упражнения.

1. Вычислите значения $y = 24 : x$ для значений x от 2,0 до 3,0 через 0,1 двумя способами: на шкалах D и C (при перевернутом движке), на шкалах A и B (тоже при перевернутом движке).

2. Найдите обратные значения следующих чисел: 0,046; 0,18; 7,4; 28; 56; 140 разными способами (дело сводится к вычислению значений функции $y = 1:x$).

3. Укажите способ получения значений функции $y = ab:x$ одной установкой движка и примените его к вычислению y при $a = 1,45$ и $b = 7,33$ для x, изменяющегося от 6 до 16 через 1.

4. На вал насажен шкив для приводного ремня диаметром в 324 *мм* и вал делает 152 оборота в минуту. Какое число оборотов даст вал при диаметрах шкива в 200; 250; 300; 350; 400 *мм*?

* § 31. Решение системы линейных уравнений.

Линейка существенно ускоряет работу по решению системы уравнений первой степени. При этом применяется общеизвестный способ сложения и вычитания, но коэфициенты при одном и том же неизвестном в двух уравнениях приводятся не к их общему наименьшему кратному, как обычно, а к одному из них. Ход работы лучше всего выясняется на примере. Рассмотрим сперва решение системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Дана система:

$$2,70x + 0,35y = 3,75; \qquad \text{(I)}$$
$$0,78x - 1,33y = 0,47. \qquad \text{(II)}$$

Разделим все коэфициенты уравнения (I) на 2,70 и умножим их затем на —0,78 (одна установка движка: против метки 78 на шкале D ставим метку 270 шкалы C и читаем метки шкалы D, оказавшиеся против меток 35 и 375 шкалы C; здесь не что иное, как вычисление значений, пропорциональных данным, рассмотренное в § 29). Под уравнением (II) пишем преобразованное уравнение (I), обозначая его номером (III):

$$0,78x - 1,33y = 0,47;$$
$$-0,78x - 0,101y = -1,081, \qquad \text{(III)}$$

и складываем уравнения (II) и (III) почленно. В результате имеем:

$$-1,431y = -0,611,$$

или после деления

$$y = +0,427. \qquad \text{(IV)}$$

При той же установке движка, которая дала (IV), работая только ползунком, находим значение $0,35y = 0,35 \cdot 0,427 = 0,149$, подписываем его под свободным членом уравнения (I) и после вычитания переписываем уравнение (I) в таком виде:

$$2,70x = 3,601,$$

откуда находим значение

$$x = 1,333. \qquad \text{(V)}$$

Для поверки подставляем найденные значения (IV) и (V) в уравнения (I) и (II). При этом одной установкой движка получаем $2,70x$ и $0,78x$, второй его установкой $0,35y$ и $1,33y$:

I уравнение:	II уравнение:
$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 3,601 \\ 0,149 \end{array} \\ \hline 3,750 \end{array}$	$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 1,038 \\ 0,570 \end{array} \\ \hline 0,468 \end{array}$

Как видим, значения обеих частей уравнения (I) оказались тождественными, в уравнении (II) оказалась разница в 0,002 (2 единицы разряда третьей значащей цифры), что допустимо.

В данном случае легко узнать точные значения корней $x = 4:3$ и $y = 3:7$, дающие те же первые значащие цифры: $x = 1,333...$, $y = 0,4\ 857...$

Вместо шкал C и D все вычисление можно было бы вести на шкалах A и B. Тогда отпали бы перекидывания движка, но зато точность результатов была бы несколько ниже.

Если коэфициенты данных уравнений известны, как это обыкновенно и бывает, лишь приближенно, то как показывает более детальное рассмотрение вопроса, более точные результаты при применении рассмотренного метода получаются тогда, когда на первое место ставится уравнение, в котором коэфициент при исключаемом неизвестном (в нашем примере при x) известен с бо́льшей точностью, т. е. с бо́льшим числом значащих цифр.

При решении системы трех уравнений с тремя неизвестными x,y,z надо сперва преобразовать первое уравнение так, чтобы коэфициент при одном из его неизвестных (например, при x) стал равен по величине и противоположен по знаку коэфициенту при том же неизвестном во втором уравнении. Тогда сложение первого и второго уравнений даст уравнение без x. Затем преобразовываем первое уравнение еще раз с таким расчетом, чтобы, складывая его с третьим, получить второе уравнение без x. Дальше дело сводится к известному уже решению системы двух уравнений с двумя неизвестными. Найдя y и z, подставляем их значения в первое уравнение и находим x. Как и раньше, преобразование всех коэфициентов каждого уравнения, а именно, умножение и деление их на одни и те же числа, выполняется одной установкой движка, что дает значительную экономию в работе.

Решим для примера систему:

$$4{,}17x - 2{,}13y + 1{,}17z = -2{,}55; \qquad (I)$$
$$-1{,}03x + 3{,}71y + 0{,}65z = -1{,}15; \qquad (II)$$
$$1{,}32x - 1{,}06y + 4{,}58z = 2{,}11. \qquad (III)$$

Преобразуем уравнение (I) два раза, первый раз „превращая" коэфициент при первом его члене в 1,03, второй раз в —1,32, и складываем полученные уравнения (IV) и (V) с уравнениями (II) и (III):

$$\begin{array}{rl} -1{,}03x + 3{,}71y + 0{,}65z = -1{,}15 & (II) \\ 1{,}03x - 0{,}53y + 0{,}29z = -0{,}63 & (IV) \\ \hline 3{,}18y + 0{,}94z = -1{,}78; & (VI) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1{,}32x - 1{,}06y + 4{,}58z = 2{,}11 & (III) \\ -1{,}32x + 0{,}67y - 0{,}37z = 0{,}81 & (V) \\ \hline -0{,}39y + 4{,}21z = 2{,}92. & (VII) \end{array}$$

Для решения системы уравнений (VI) и (VII) умножаем первое из них на 0,39:3,18, „превращая" его коэфициент при x в 0,39. Получаем уравнение (VIII), которое складываем с (VII):

$$\begin{array}{rl} -0{,}39y + 4{,}21z = 2{,}92 & (VII) \\ 0{,}39y + 0{,}12z = -0{,}22 & (VIII) \\ \hline 4{,}33z = 2{,}70. & (IX) \end{array}$$

Деление 2,70 на 4,33 дает значение $z = 0{,}623$.

Используя ту же установку движка, умножаем 0,623 на 0,94 и на 1,17 (коэфициенты при z в уравнениях (VI) и (I)). Из уравнения (VI) находим:

$$y = -2{,}37:3{,}18 = -0{,}745.$$

Используя последнюю установку движка, умножаем —0,745 на —2,13 (коэфициент при y в уравнении (I)) и находим x из уравнения (I):

$$x = -4{,}87:4{,}17 = -1{,}168.$$

Поверка требует трех установок движка: первой для вычисления членов, содержащих x, сразу для всех трех уравнений, второй — с y, третьей — с z.

I уравнение:	II уравнение:	III уравнение:
—4,87	1,20	—1,54
1,59	—2,76	0,79
0,73	0,41	2,86
—2,55	—1,15	2,11

Итак, данная система имеет корни:

$$x = -1{,}168; \quad y = -0{,}745; \quad z = 0{,}623.$$

С целью экономии в записи целесообразно уже с самого начала оставить место для записи произведений 0,623·0,94; 0,623·1,17; 0,745·2,13 непосредственно под свободными членами уравнений (VI) и (I), а уравнения (II), (III), (VII) писать только по разу.

Ясно, что рассмотренный метод применим в случае любой системы линейных уравнений (при числе неизвестных, равном числу уравнений).

Упражнения.

1. Решить систему уравнений:

$$3{,}21x - 1{,}743y = 4{,}68; \quad 2{,}58x + 6{,}14y = 10{,}31.$$

2. Решить систему уравнений:

$$2{,}86x - 4{,}74y + 3{,}19z = 1{,}375; \quad 6{,}32x + 2{,}47y - 5{,}64z = 4{,}12; \quad 3{,}03x - 5{,}91y + \\ + 1{,}553z = 1{,}362.$$

§ 32. Решение квадратного и кубического уравнений.

Всякое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ делением всех его коэфициентов на a можно привести к виду $x^2 + px + q = 0$ и решить по известной формуле: $x = -0{,}5p \pm \sqrt{0{,}25p^2 - b}$, применяя линейку.

Вот подробная запись решения уравнения:

$$x^2 - 3{,}28x - 2{,}165 = 0:$$

$-0{,}5p$	1,64
$0{,}25p^2$	2,69
$-q$	2,165
$R^2 = 0{,}25p^2 - q$	4,855
R	2,20
$x_1 = -0{,}5p + R$	3,84
$x_2 = -0{,}5p - R$	−0,56

То же вычисление, проведенное посредством четырехзначной таблицы квадратов, дает $x_1 = 3{,}843$; $x_2 = -0{,}563$.

При решении квадратного уравнения возможно также применение способа *систематических проб*, посредством которого решается любое уравнение с численными коэфициентами. Здесь дело сводится к подстановке в левую часть уравнения ряда числовых значений для x. Если подстановка двух близких друг другу чисел дает в результате числа разных знаков, то один из корней уравнения находится между взятыми значениями x. Сближая испытуемые значения, можно получить корни с достаточной точностью. Линейка существенно облегчает выполнение испытаний.

Чтобы решить этим способом взятое выше квадратное уравнение, перенесем в нем свободный член направо. Задача теперь сводится к тому, чтобы подобрать такое значение x, при котором двучлен $x^2 - 3{,}28x$ был бы равен 2,165. Найдем такую установку движка, при которой линейка по данному значению x сразу давала бы значения как x^2, так и $3{,}28x$. Такую установку мы получим, если против начала или конца шкалы D поставим метку 328 шкалы C: взяв метку шкалы D, соответствующую данному x, прочтем противостоящие метки шкал C и A; первая даст $3{,}28x$, вторая x^2, и нам останется только сделать вычитание.

Приняв во внимание свойства корней квадратного уравнения

$$x_1 + x_2 = -p = 3{,}28; \quad x_1 x_2 = q = -2{,}165,$$

замечаем, что один из корней больше, другой меньше нуля, и ищем положительный корень, подставляя вместо x числа 1; 2; 3; 4. Так как при $x = 3$ двучлен $x^2 - 3{,}28x$ оказывается равным $-0{,}84$, а при $x = 4$ равным 2,88, то дальше испытываем уже промежуточные между 3 и 4 значения x. Найдя $x_1=3{,}84$, для получения x_2x_α используем зависимость $x_1+x_2=3{,}28$, а затем опять-таки систематическими пробами (при той же установке движка) получаем более точное значение x_2x_α. Приводим подробную запись всего решения, которое на практике осуществляется, конечно, без всякой записи:

x	1	2	3	4	3,8	3,84	3,85	—0,56	—0,564	—0,563
x^2 $-3{,}28x$	1 — 3,28	4 —6,56	9 —9,84	16 —13,12	14,44 —12,46	14,75 —12,60	14,82 —12,63	0,314 1,835	0,318 1,850	0,317 1,847
$x^2-3{,}28x$	—2,28	—2,56	—0,84	+2,88	+1,98	+2,15	+2,19	+2,149	+2,168	+2,164

Как видим, левая часть данного уравнения оказывается ближе всего к нулю при $x=3{,}84$ и $x=-0{,}563$, так как двучлен $x^2-3{,}28x$ при этих значениях x ближе всего к значению 2,165. Эти числа 3,84 и $-0{,}563$ и следует принять за приближенные значения корней.

Чтобы при испытаниях не пользоваться шкалой А, дающей несколько меньшую точность, можно было бы преобразовать уравнение к виду $x-2{,}165:x=3{,}28$ и подбирать, пользуясь шкалами D и R, такие значения x, при которых двучлен $x-2{,}165:x$ оказался бы близким к 3,28. Этот способ выгоднее предыдущего еще и в том отношении, что там мы делали отсчеты по трем шкалам, здесь же только по двум. Если шкалы R на движке нет, можно перевернуть движок и воспользоваться шкалой С.

Для решения кубического уравнения вида $x^3+px+q=0$ можно воспользоваться шкалами D, С и К и вычислять значения двучлена x^3+px, но лучше преобразовать уравнение к виду $x^2+q:x=-p$ и вычислять значения двучлена $x^2+q:x$ посредством шкал D, С и А при перевернутом движке. Движок при этом устанавливается так, чтобы метка $|q|$ шкалы С оказалась против одной из единиц шкалы D. Тогда против метки $|x|$ шкалы D читаем метку $|q:x|$ шкалы С и метку x^2 шкалы А. При решении такого кубического уравнения полезно иметь в виду, что оно имеет три вещественных корня, если $R=(q:2)^2+(p:3)^3<0$; один вещественный корень и два комплексных, если $R>0$; два вещественных корня, из которых один двойной, если $R=0$. Кроме того, в таком уравнении сумма всех трех корней есть 0, а их произведение $-q$.

Приводим подробное решение уравнения:

$$x^3-5{,}73x-2{,}528=0,$$

в котором

$$p=-5{,}73; \quad q=-2{,}528.$$

Вычисление: $R=(q:2)^2+(p:3)^3$;

$q:2=-1{,}264$; $(q:2)^3=1{,}60$;

$p:3=-1{,}91$; $(p:3)^3=-6{,}97$; $R=-5{,}37$;

$R<0$, все три корня вещественны; $x_1x_2x_3=-q=2{,}528>0$, а $x_1+x_2+x_3=0$; следовательно, один корень положительный; два других отрицательны.

Вычисление x по уравнению.

x	2,528	2,60	2,59	2,58	−2,528	−2	−2,2	−2,1	−2,13	−2,12
x^2 $x^2 - 2{,}528 : x$	6,40 −1	6,76 −0,97	6,71 −0,975	6,66 −0,978	6,40 1	4 1,284	4,84 1,15	4,41 1,20	4,54 1,196	4,49 1,192
$x^2 - 2{,}528 : x$	5,40	5,79	5,735	5,682	7,40	5,264	5,99	5,61	5,736	5,682

Определив $x_1 = 2{,}59$ и $x_2 = -2{,}13$, находим $x_3 = -0{,}46$ без всяких проб из соотношения $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Пробами (при той же установке движка) легко устанавливаем, что $x_3 = -0{,}460$.

Упражнения.

1. Решите, пользуясь способом систематических проб и применяя разные шкалы линейки, уравнения:

$$x^2 - 2{,}11x + 1{,}062 = 0; \quad x^2 - 3{,}51x - 18{,}12 = 0; \quad x^2 + 4{,}78x + 4{,}66 = 0.$$

2. Решите посредством линейки уравнения (ограничиваясь лишь вещественными их корнями):

$$x^3 - 0{,}380x - 0{,}065 = 0; \quad x^3 - 18{,}21x + 27{,}12 = 0; \quad x^3 + 1{,}157x - 0{,}1416 = 0.$$

3. Укажите удобный способ решения уравнения вида $x^3 + px^2 + q = 0$: 1) используя шкалу кубов; 2) не используя шкалы кубов.

§ 33. Логарифмическая линейка как замена таблиц.

Мы уже видели в §§ 24—25, что линейка может заменять таблицы квадратов, квадратных корней, кубов, кубических корней. Кроме того, линейка заменяет еще ряд таблиц. Некоторые случаи такой замены мы сейчас и рассмотрим.

Установив начало или конец шкалы C против метки $\pi = 3{,}141\ldots$ шкалы D, мы получим *таблицу для определения длины окружности C по ее диаметру d и для определения диаметра окружности d по ее длине C*: метку диаметра d надо взять на шкале D, противостоящая метка шкалы C даст длину окружности $C = \pi d$.

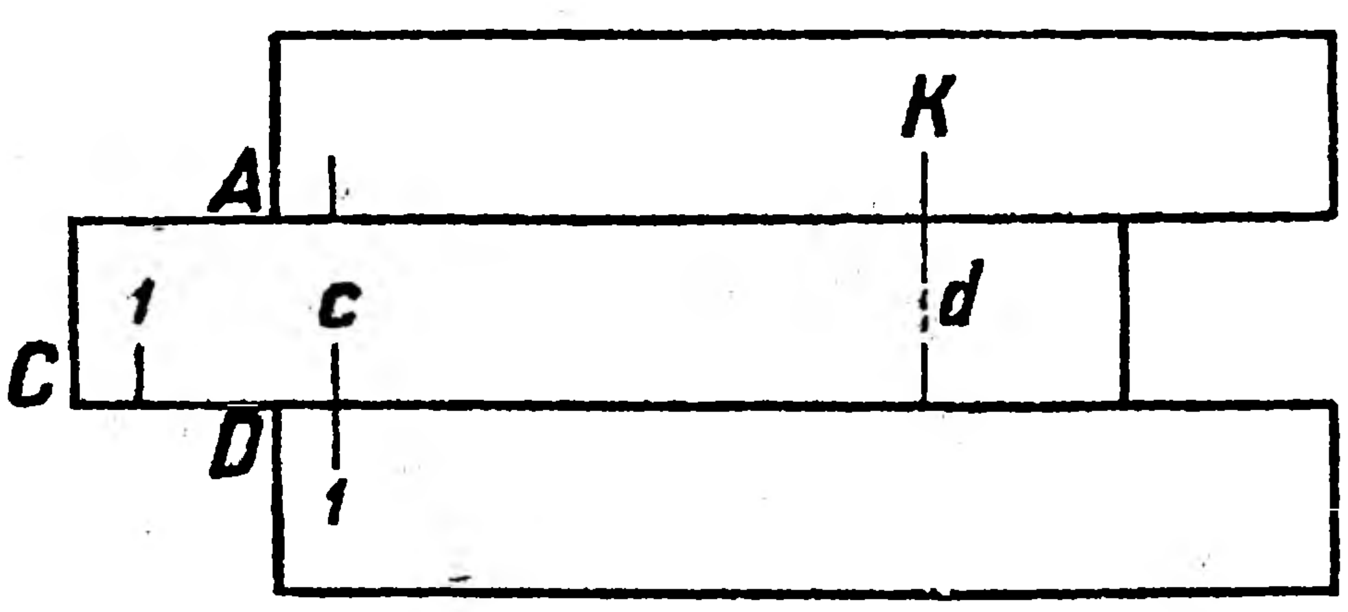


Рис. 22.

На шкалах C и D есть особая метка, обозначенная буквой c и находящаяся недалеко от начала этих шкал. Это метка числа $\sqrt{4:\pi} = 1{,}128$. Установив эту метку c шкалы C против начала шкалы D, мы получаем на шкалах C и A *таблицу площади круга K* в зависимости от ее диаметра d. Действительно, обозначая буквой d произвольную метку шкалы C, приведенной в указанное положение, и буквой K противостоящую метку шкалы A, из рис. 22 легко замечаем, что $\overline{d} - \overline{c} = \overline{K}$, или, принимая во внимание уравнения шкал, $125 \lg K = 250 \lg d - 250 \lg \sqrt{4:\pi}$, откуда по упрощении получаем соотношение $K = \frac{1}{4}\pi d^2$. Если значка $c = \sqrt{4:\pi}$

на шкале C нет, можно обойтись и без него, установив метку 2 шкалы C против метки π шкалы A. Если диаметр d изображается меткой левее метки c, необходимо перекидывание движка вправо, что сводится к установке метки c шкалы C против конца шкалы D. Иногда на стекле ползунка делают не один, а три параллельных индекса с промежутком между каждыми двумя, равным $250 \lg \sqrt{4:\pi}$. Тогда задача на вычисление площади круга по его диаметру и ей обратная решаются без применения движка: средний индекс надо установить на метку d шкалы D и прочесть метку K шкалы A, указываемую левым индексом (эти два индекса, конечно, можно заменить метками c и 1 шкалы C).

У самого нижнего края лицевой стороны корпуса линейки находится шкала L, внешний вид которой резко отличается от вида остальных шкал линейки. Это — шкала *равномерная*: расстояние между каждыми двумя соседними штрихами на протяжении всей шкалы одно и то же и равно 0,5 *мм*. У левого конца шкалы должен стоять 0, у правого 1 (эти две цифры обыкновенно опускаются), промежуточные цифровые метки (от 1 до 9) читаются как десятые. На середине расстояний между каждыми двумя цифровыми метками имеется длинный штрих, обозначающий метку, на 0,05 бо́льшую, чем ближайшая слева цифровая метка, и восемь штрихов средней длины, метки которых идут через 0,01. Промежуток между каждыми двумя штрихами, обозначающими сотые, содержит пять самых мелких делений. Цена такого деления, следовательно, 0,002. Обозначая произвольную метку шкалы L буквой l, а ее расстояние (в миллиметрах) от начала шкалы, т. е. от левого ее конца, той же буквой, но с черточкой сверху, пишем уравнение нашей шкалы L в виде $\overline{l} = 250 l$.

Сопоставим шкалы L и D. Наводя индекс на какую-нибудь метку l шкалы L и на противостоящую метку d шкалы D, из равенства $\overline{l} = \overline{d}$, вспоминая уравнение шкалы D, получаем зависимость между метками l и d в виде уравнения $250 l = 250 \lg d$, откуда $l = \lg d$. Итак, метки шкалы L являются логарифмами (десятичными) противостоящих меток шкалы D. При этом цифровые метки шкалы L надо читать как десятые, цифровые метки (крупные) шкалы D — как целые единицы. Отсюда правило: *чтобы найти десятичный логарифм данного числа* d, заключающегося между 1 и 10, *надо найти на шкале* D *метку* d, *и прочесть противостоящую ей метку* l *шкалы* L. Если число d меньше 1 или больше 10, то шкала L даст лишь мантиссу его логарифма, характеристику же находят по известным правилам без линейки. Ясно, что разыскание антилогарифма требует обратного перехода от шкалы L, на которой берем метку, выражающую мантиссу данного логарифма, к шкале D, дающей цифровой состав антилогарифма. Положение запятой в антилогарифме определяется по характеристике данного логарифма без линейки. Например логарифмы чисел 2; 30; 400; 0,055, определяемые посредством линейки, оказываются равными 0,301; 1,477; 2,602; $\overline{2}$,740. Точно так же, имея $\lg x = 0{,}345$; $\lg y = 1{,}456$; $\lg z = 2{,}508$; $\lg t = \overline{1}{,}864$, находим, что $x = 2{,}21$; $y = 28{,}6$; $z = 322$; $t = 0{,}321$. Сравнение полученных результатов с тем, что дает таблица логарифмов, показывает, что линейка дает 3 верные значащие цифры в антилогарифмах (если антилогарифм получается около левого конца шкалы D, то возможно получение также четвертой значащей цифры).

Пользуясь шкалой L, можем выполнять возведение числа в степень с произвольным показателем, а также извлекать корень любой степени. При этом применяются известные свойства логарифмов: логарифм степени равен логарифму возводимого в степень числа, умножен ому на показатель степени, а логарифм корня равен логарифму подкоренного, разделенному на показатель корня.

* На оборотной стороне движка имеются шкалы S, S & T, T, уравнения которых $\overline{s} = 250 \lg (10 \sin s)$; $\overline{\alpha} = 250 \lg (100 \operatorname{arc} \alpha)$; $\overline{t} = 250 \lg (10 \operatorname{tg} t)$, где углы s, α, t выражены в градусах, а arc α есть радианная мера угла α.

Сопоставляя шкалу S со шкалой C, имеем для двух противостоящих меток s и c этих двух шкал зависимость $10 \sin s = c$, или $\sin s = 0{,}1c$. Следовательно, если читать цифровые метки шкалы C как десятые, то каждая метка шкалы C даст значение синуса угла, градусная мера которого равна противостоящей метке шкалы S. Чтобы осуществить это противопоставление меток шкал C и S, находящихся на разных сторонах движка, пользоваться ползунком нельзя. Здесь прибегают к особому *выре у*, сделанному на задней стороне корпуса линейки у правого его конца. На вырезе имеются сверху и снизу штрихи, находящиеся в одной плоскости (перпендикулярной к плоскости лицевой стороны корпуса) с концами шкал A и C. Повернув линейку оборотной стороной и выдвинув движок направо настолько, чтобы верхний штрих выреза оказался против метки шкалы S, выражающей данный угол в градусах, поворачиваем линейку лицевой стороной и читаем ту метку шкалы C, которая окажется при этом против конца шкалы D. Так, установив против верхнего штриха выреза метку 30° шкалы S, видим, что против конца шкалы D находится метка 5 шкалы C, и заключаем отсюда, что $\sin 30° = 0{,}5$. Точно так же легко находим, что $\sin 40° = 0{,}643$; $\sin 12°30' = 0{,}216$ и т. д. Конечно, надо внимательно относиться к чтению штрихов шкалы S, выясняя цену деления на разных участках шкалы. Ясно, что при решении обратного вопроса, т. е. при разыскании угла, имеющего данный синус, мы должны против конца шкалы D поставить метку шкалы C, выражающую данный синус, а затем, повернув линейку, прочесть метку шкалы S, оказавшуюся против верхней черты правого выреза. Так, если $\sin s = 0{,}450$, то $s = 26°42'$; если $\sin s_1 = 0{,}855$, то $s_1 = 58°45'$ (в последнем отсчете минуты очень сомнительны, так как цена деления полградуса).

Этот способ получения синусов неприменим, если данный угол меньше 5°44', так как этим значением заканчивается слева шкала S и так как шкала эта непериодическая. Но у таких малых углов как синус, так и тангенс весьма мало отличаются от радианной меры, притом тем меньше, чем меньше угол, а потому для разыскания синуса и тангенса угла, меньшего 5°44', пользуются шкалой *радианной меры*, находящейся в середине движка на обратной его стороне и обозначенной буквами S & T. Сопоставляя уравнение этой шкалы $\overline{\alpha} = 250 \lg (100 \operatorname{arc} \alpha)$ с уравнением шкалы C, выводим соотношение $100 \operatorname{arc} \alpha = c$, или $\operatorname{arc} \alpha = 0{,}01 c$, справедливое для любых двух противостоящих меток этих шкал. Чтобы найти радианную меру данного угла α, меньшего 5°44', надо метку α шкалы S & T поставить против *нижнего* штриха выреза (на правом конце оборотной стороны линейки) и прочесть метку шкалы C, оказавшуюся против конца шкалы D (теперь цифровые метки шкалы C читаются уже как сотые). Так $\operatorname{arc} 3° = 0{,}0524$, а потому и $\sin 3° = 0{,}0524$ и $\operatorname{tg} 3° = 0{,}0524$.

Но и этот способ отказывается служить, если данный угол меньше 0°35', так как этим углом оканчивается слева шкала S & T. Радианную меру, а следовательно, и синус с тангенсом таких весьма малых углов находят на линейке посредством меток ρ' и ρ'', имеющихся на лицевой стороне линейки, обычно на шкалах C и D, и дающих число минут и секунд в 1 радиане ($\rho' = 3438$; $\rho'' = 206\,265$). Поэтому радианная мера угла в 1' есть $1 : 3438$, угла в 1" — $1 : 206\,265$, и узнать радианную меру дуги в любое число минут или секунд можно одним делением, выполняемым на нижних шкалах линейки. Так, радианная мера угла в 0°0'8" равна $8 : 206\,265 = 8 : \rho'' = 0{,}0000388$; угла в $0°16'30'' = 16',5$ равна $16{,}5 : \rho' = 0{,}00480$.

Кроме меток ρ' и ρ'' на линейку часто наносят метку $\rho_{\prime}$ или $\rho_{\prime\prime}$, из которых первая выражает число минут, вторая — число секунд в 1 радиане при *десятичном делении квадранта*, т. е. когда квадрант делится на 100°, 1°; на 100', 1'; на 100" ($\rho_{\prime} = 6366$, $\rho_{\prime\prime} = 636\,618$). Иногда эти метки относятся к *смешанному* *делению квадранта*, когда обычный градус делится на 100 десятичных минут, а десятичная минута на 100 десятичных секунд. Тогда $\rho_{,} = 5730$, $\rho_{,,} = 572\,956$.

Теперь мы знаем, как находить посредством линейки синус любого острого угла. Косинус угла находят как синус дополнительного, пользуясь соотношением: $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

Переходим к разысканию тангенсов. Тангенсы очень малых углов, а именно, углов, меньших 0°35′, определяются посредством меток ρ' и ρ'' по радианной мере этих углов на основании формулы $\operatorname{tg}\alpha \approx \operatorname{arc}\alpha$. Тангенсы углов, больших 0°35′, но меньших 5°44′, определяются, как и их синусы, путем сопоставления шкал S & T и C, т. е. тоже по радианной мере. Для углов от 5°44′ до 45°0′ служит уже особая шкала T, находящаяся на нижнем краю оборотной стороны движка. Сопоставляя приведенное выше уравнение этой шкалы с уравнением шкалы C, выводим соотношение $\operatorname{tg} t = 0{,}1t$, которое говорит, что, если читать цифровые метки шкалы C как десятые, то каждая метка шкалы C даст значение тангенса угла, градусная мера которого равна противостоящей метке шкалы T. Для сопоставления меток шкалы T с метками шкалы C служит штрих на нижней стороне второго выреза, сделанного на задней стороне корпуса линейки у левого его конца. Чтобы найти, например, $\operatorname{tg} 20^\circ$, берем линейку задней стороной к себе, сдвигаем движок влево до тех пор, пока против штриха левого выреза не окажется метка 20 шкалы T, и, повернув линейку лицевой стороной, читаем на шкале C против начальной единицы шкалы D метку 0,362. Если же острый угол больше 45°, то используются формулы $\operatorname{tg} t = \operatorname{ctg}(90^\circ - t) = 1 : \operatorname{tg}(90^\circ - t)$. Установив против штриха левого выреза метку дополнительного угла $90^\circ - t$, читаем искомый тангенс на шкале D против конца шкалы C. В самом деле, из рис. 23 заключаем, что $\overline{d} = 250 - \overline{c}$, а так как $\overline{d} = 250 \lg d$; $\overline{c} = 250 \lg\,[10 \operatorname{tg}(90^\circ - t)]$, то после упрощений получаем: $d = \operatorname{ctg}(90^\circ - t) = \operatorname{tg} t$.

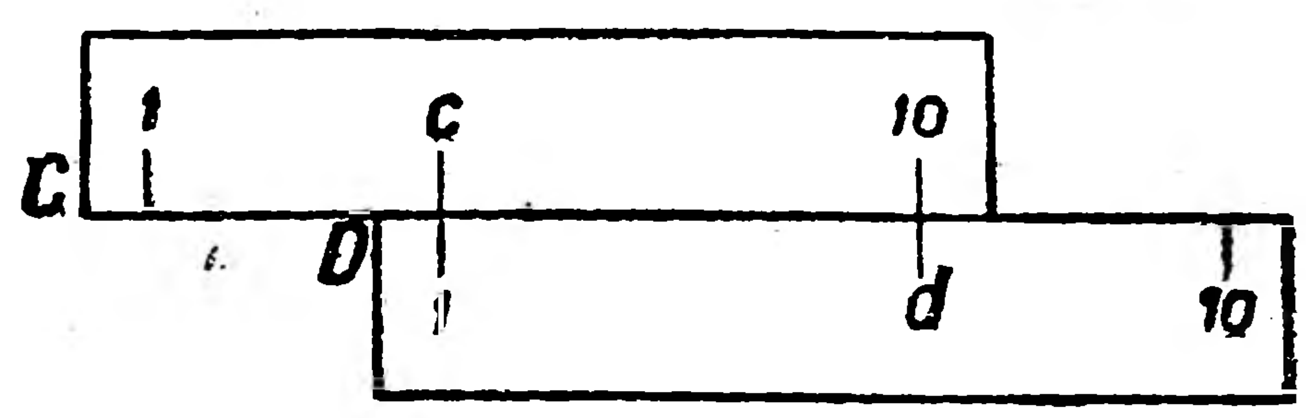


Рис. 23.

Вместо того чтобы пользоваться вырезами на задней стороне корпуса линейки, можно вынуть движок вовсе из паза и вставить его обратно лицевой стороной внутрь паза, а обратной (со шкалами S и T) наружу, но так, чтобы деления его шкал возрастали слева направо. Такое положение движка будем называть *опрокинутым* (не смешивать с *перевернутым*, о котором была речь в § 30). Совместив концы шкал опрокинутого движка и линейки, мы можем находить значения синусов, сопоставляя шкалы S и D, и значения тангенсов (углов до 45°), сопоставляя шкалы T и D.

Упражнения.

1. Найти длину окружности диаметра 5,6; 8,5; 11,2; 24,3 *см* и диаметры окружности длины 15,0; 28,4; 35,7; 92,3 *м*.

Сделать поверку по четырехзначным таблицам (это замечание относится и ко всем последующим задачам).

2. Найти площадь круга с диаметром 2; 4; 6; 8; 12 *см* и диаметр круга площадью 8; 15; 50; 120; 180 *см*.

3. Найти посредством линейки десятичные логарифмы чисел 2; 14; 43; 8; 0,0555; 9460, а также числа, логарифмы которых равны 0,246; 2,543; $\overline{1},328$; 1,907.

4. Вычислить посредством линейки $2{,}138^5$; $1{,}4^6$; $8{,}5^{0,172}$; $\sqrt[5]{44{,}7}$; $0{,}035^{2,73}$.

5. Найти посредством линейки натуральные логарифмы целых чисел первого десятка. Напоминаем, что между десятичным логарифмом числа N ($\lg N$) и натуральным его логарифмом ($\ln N$) существует зависимость, выражаемая формулами $\ln N = 2{,}303 \lg N$; $\lg N = 0{,}4343 \ln N$.

6. Найти числа, натуральные логарифмы которых равны 3,185 и 0,892.

7. Найти значения синусов следующих углов: 0°0′27″; 0°16′; 0°55′; 2°37′; 4°18′; 9°42′; 20°15′; 32°30′; 62°45′; 73°0′; 80°0′, 85°0′.

8. Найти углы x, y, z. ... по следующим данным значения их тригонометрических функций: $\sin x \approx 0{,}0045$: $\operatorname{tg} y \approx 0{,}000097$; $\sin z = 0{,}0395$; $\sin t = 0{,}123$; $\sin u = 0{,}900$; $\cos v - 0{,}625$; $\sec w = 2{,}40$; $\operatorname{cosec} r = 1{,}84$; $\operatorname{tg} s \approx 0{,}455$; $\operatorname{ctg} t = 0{,}600$.

§ 34. Некоторые другие вычисления, легко выполнимые посредством линейки.

Рассмотрев ряд применений линейки, мы далеко не исчерпали всех возможностей, в ней заключенных. Сопоставление каждых двух шкал линейки приводит к некоторой формуле, вычисление по которой выполнимо посредством этих двух шкал. Но лицевая сторона линейки и движка имеет 6 шкал да обратная сторона движка 3 шкалы; сюда следует присоединить еще 2 шкалы „перевернутого“ движка и 3 шкалы „опрокинуто-перевернутого“ движка. Всего получаем 14 шкал, которые можно комбинировать попарно 91 различным способом. Выше мы рассмотрели лишь немногие из этих комбинаций. Можно указать еще ряд других, весьма полезных при вычислении. Например, установив начало шкалы С против метки a шкалы А, мы будем иметь против любой метки x шкалы С метку y шкалы А, связанную с x соотношением $y = ax^2$, и будем иметь возможность легко получать *значения, прямо пропорциональные квадратам данных*. В качестве второго примера возьмем шкалы D и S при „опрокинутом“ движке. Если против метки d шкалы D установить какую-нибудь метку s шкалы S, то против любой другой метки d_1 шкалы D окажется некоторая метка s_1 шкалы S, и уравнения шкал показывают, что четыре числа d, d_1, s, s_1 связаны пропорцией $\sin s : d = \sin s_1 : d_1$. Таким образом, эти две шкалы позволяют решать все задачи, решение которых основано на применении теоремы синусов (решение треугольника по двум углам и стороне, по двум сторонам и углу против одной из них, решение прямоугольного треугольника по гипотенузе и углу и др.).

Сейчас мы говорили о сопоставлении двух шкал линейки. Еще больше и разнообразнее те возможности, которые заключаются в сопоставлении трех и более шкал. Так, установив метку b шкалы В против начала шкалы А, возьмем метку c шкалы С, оказавшуюся против метки k шкалы К. Легко видеть, что зависимость между этими метками выражается уравнением $250 \lg c = 125 \lg b + \frac{250}{3} \lg k$, или $c^2 = b\sqrt[3]{k^2}$, а потому вычисление выражения вида $c = \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{k}$ весьма удобно вести посредством этого сопоставления шкал В, К, С.

Читателя, желающего подробнее ознакомиться с разнообразными применениями счетной линейки, отсылаем к специальным руководствам, из большого числа которых отметим следующие четыре: П. С. Радецкий и В. А. Никитин, Логарифмическая счетная линейка; А. М. Донде, Логарифмическая счетная линейка; Б. С. Абольник, Руководство к логарифмической линейке; Д. Ю. Панов, Счетная линейка.

Линейка приспособлена для выполнения преимущественно операций II и III ступеней; однако возможно и ее использование для выполнения действий I ступени, так, сложение чисел a и b можно произвести путем деления a на b, прибавления к частному $a:b$ 1 (в уме) и умножения суммы на b. Конечно, так делать невыгодно. Однако тот же прием, примененный к вычислению выражения $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, дает уже хорошие результаты. Переписав эту формулу в виде $x = b\sqrt{1 + (b:a)^2}$, делим b на a на основных шкалах, но читаем метку шкалы А, дающую сразу $(b:a)^2$, затем прибавляем 1 (в уме), берем соответствующую метку шкалы А, устанавливаем против нее начало шкалы С, находим по шкале С метку b

и читаем противостоящую метку шкалы D. Легко сообразить, как вести посредством счетной линейки вычисление по формулам $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; $x = a : \sqrt{b^2 + c^2}$ и т. д.

§ 35. Погрешности результатов, доставляемых применением линейки.

Работая с линейкой, мы много раз имели случай убедиться, что она позволяет получать результаты с 3, иногда 4 значащими цифрами, причем последняя не вполне надежна. Результат получался с 4 значащими цифрами тогда, когда первой его цифрой была цифра 1 или 2.

Следующее рассуждение позволяет лучше оценить точность доставляемых линейкой результатов.

Вся работа с линейкой сводится в конечном счете к повторному использованию зависимостей, существующих между каждой меткой любой шкалы и расстоянием этой метки от начала шкалы, т. е. для шкалы D, например, между меткой d и расстоянием $\bar{d} = 250 \lg d$. При работе невооруженным глазом расстояние $\bar{d}$ оценивается с погрешностью, которую можно считать в среднем равной 0,1 *мм*. Является вопрос: какое влияние на величину d имеет погрешность в $\bar{d}$, равная 0,1 *мм*? Другими словами: *какая средняя погрешность отсчета вызывается средней погрешностью установки в 0,1 мм*? Дело сводится к решению уравнения $\bar{d} + 0{,}1 = 250 \lg (d + \Delta d)$, где символом Δd обозначена искомая средняя погрешность отсчета метки d. Вычитая из этого уравнения почленно уравнение шкалы D, получаем: $0{,}1 = 250 \lg (d + \Delta d) - 250 \lg d$, откуда узнаем, что $0{,}0004 = \lg \left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)$. Применяя таблицу пятизначных логарифмов, находим $1 + \frac{\Delta d}{d} = 1{,}00092$; $\frac{\Delta d}{d} = 0{,}00092$. Полученный важный результат можно формулировать так: *средней абсолютной погрешности установки, равной 0,1 мм, соответствует на протяжении всей шкалы* D *одна и та же средняя относительная погрешность отсчета, равная 0,00092, или приблизительно 0,1%*.

Для выполнения умножения (или деления) двух чисел нужны три операции: установка множимого (или делимого), установка множителя (или делителя), отсчет результата. Две установки вместе дают среднюю погрешность, равную, как учит теория ошибок, произведению средней погрешности каждой установки на корень квадратный из числа их, т. е. на $\sqrt{2}$. Вычисляя среднюю погрешность отсчета, сделанного после этих двух установок, тем же способом, что и выше, получим уравнение: $\bar{d} + 0{,}1 \sqrt{2} = 250 \lg (d + \Delta d)$, откуда $\Delta d : d = 0{,}0013$, или около 0,13%.

Такова средняя погрешность каждого произведения или частного пары чисел, полученного на основных шкалах. При постоянстве средней относительной погрешности на протяжении всей шкалы средняя абсолютная погрешность результатов, прочитанных на разных участках шкалы, будет, конечно, различной. Так результат, равный 1, будет получаться с погрешностью около 1,3 единиц разряда четвертой значащей цифры, результат 2 — около 3 единиц, результат 3 — около 4 единиц разряда (той же четвертой значащей цифры) и т. д. до результата 9, получаемого со средней погрешностью в $0{,}0013 \cdot 9 = 0{,}0117$, или немного более 1 единицы разряда третьей значащей цифры.

Шкалы квадратов, имеющие вдвое более мелкий масштаб, дают результаты с погрешностью, вдвое большей. Средняя относительная погрешность результата умножения или деления, выполненного на шкалах A и B, равна поэтому 0,0026, или около $0{,}3\%$.

Однако придавать этим числам большое значение не приходится: точность результатов, доставляемых линейкой, сильно колеблется в зависимости от искусства вычислителя, остроты его зрения, качества линейки. Каждому, работающему на линейке, надо выяснить точность получаемых им результатов путем сравнения их с результатами того же вычисления, но проведенного более точными способами. Один подобный опыт, весьма обстоятельно проведенный, описан в книге Runge-König [1]). Брались произвольные трех-и четырехзначные числа, определялись их произведения по линейке, а именно, по шкалам C и D, затем посредством арифмометра. Результаты сравнивались. Средняя относительная погрешность произведения оказалась близкой к $0{,}06\%$, т. е., примерно, вдвое меньше установленного выше теоретического значения $0{,}13\%$. Отсюда можно сделать вывод, что при выполнении установок допускалась средняя погрешность не в 0,1 *мм*, как мы предполагали выше, а только в 0,05 *мм*.

Шкалы S и T не дают того постоянства средней относительной погрешности, которое характерно для логарифмических шкал A и B, C и D. Особенно плохо определяется по своему синусу угол, близкий к 90°. Такого „неблагополучного“ участка на шкале T нет, а потому вообще угол лучше определять по его тангенсу, чем по синусу.

*§ 36. Линейки других систем. Линейка с „ломаной“ шкалой (прецизионная).

Говоря о линейке, мы все время имели в виду линейку системы Риц, притом нормальной длины, т. е. со шкалами в 250 *мм*. Существует большое количество линеек других типов, различающихся между собой некоторыми деталями. Основной принцип всех таких линеек один и тот же — сопоставление различных функциональных шкал, большею частью логарифмических, с разными модулями и разными началами. Приступая к работе с линейкой иного, нежели описан у нас, типа, надо, прежде всего, выяснить уравнения всех ее шкал. Располагая этими уравнениями, легко вывести правила различного рода вычислений, выполняемых на этой линейке. При этом большую помощь обыкновенно оказывают пояснительные брошюры, прилагаемые к каждому экземпляру линейки.

Наибольшее распространение имеют линейки описанной системы Риц и других типов, отличающихся от линеек системы Риц лишь некоторыми второстепенными деталями. Так, часто попадаются линейки без кубической шкалы, т. е. без шкалы K. Возведение в куб без шкалы K проще всего делается как умножение числа на его собственный квадрат: возводимое в куб число берется на шкале D, ему противопоставляется одна из единиц шкалы C; далее это же число берется на шкале B и против него на шкале A читается искомый куб x. Если обозначить данное число через a, то окажется, что здесь мы выполняем не что иное, как сложение $250 \lg a + 125 \lg a = 375 \lg a = 125 \lg a^3 = 125 \lg x$, откуда $x = a^3$.

Извлечение кубического корня из данного числа b при отсутствии шкалы K выполняется подбором, что равносильно решению уравнения $x^3 = b$ способом систематических проб. Чтобы найти, например, кубический корень из числа 456, замечаем, прежде всего, что этот корень больше 7 и меньше 8. Возводя в куб только что указанным способом различные числа между 7 и 8, подбираем такое, куб которого весьма мало отличается от 456, и получаем $\sqrt[3]{456} = 7{,}70$.

[1]) C. Runge und H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen (1924).

Есть линейки, отличающиеся от описанной лишь размером, а именно: короткие линейки со шкалами длиною 125 *мм* и длинные линейки со шкалами длиной 500 *мм* и даже 1000 *мм*. Короткие линейки свободно умещаются в кармане, но дают меньшую точность отсчетов (иногда деления на них делают очень мелкими и прилагают к линейке лупу, пользование которой значительно замедляет работу). Длинные линейки дают, естественно, повышенную точность, но зато вовсе непортативны. Работа на них идет заметно медленнее, чем на линейках нормальной длины.

Довольно часто встречаются так называемые *прецизионные* линейки (линейки с ломаной шкалой). Такая линейка состоит в основном из двух логарифмических шкал длиной по 500 *мм* каждая, но разрезанных пополам и помещенных одна под другой. Таким образом, шкала A (на корпусе линейки) имеет метки от 1 до $\sqrt{10} = 3{,}162$ (или немного дальше), расположенные согласно уравнению $\bar{a} = 500 \lg a$. Шкала B (на движке) тождественна шкале A. Шкала C (на движке) и шкала D (на корпусе линейки) имеют метки от $\sqrt{10} = 3{,}162$ до 10 и уравнения: $\bar{c} = 500 \lg (c : \sqrt{10}) = 500 \lg c - 250$; $\bar{d} = 500 \lg d - 250$. Цель такого устройства ясна: совместить выгоды длинных шкал (повышенная точность) и короткой линейки (портативность, быстрота работы). Однако эти преимущества покупаются ценой некоторого усложнения в работе. Так, при умножении здесь могут встретиться 6 случаев:

1) множимое на A, множитель на B, произведение на A (движок справа);
2) множимое на A, множитель на B, произведение на D (движок слева);
3) множимое на A, множитель на C, произведение на D (движок справа);
4) множимое на A, множитель на C, произведение на A (движок слева);
5) множимое на D, множитель на C, произведение на A (движок справа);
6) множимое на D, множитель на C, произведение на D (движок слева).

Случай 1 имеет место тогда, когда как множимое a, так и множитель b заключены между 1 и $\sqrt{10}$ при условии, что и их произведение ab тоже не превосходит $\sqrt{10}$. Этот случай пояснений не требует. Если при $1 < a < \sqrt{10}$ и $1 < a < \sqrt{10}$ произведение $ab > \sqrt{10}$ (случай 2), то движок приходится перекидывать, т. е. против метки a шкалы A ставить не начальную единицу шкалы B, а ее метку $\sqrt{10}$ (часто обозначается крестиком или звездочкой). Против метки b шкалы B мы прочтем на шкале A метку числа, в $\sqrt{10}$ раз меньшего искомого произведения. Действительно, $500 \lg a - 250 + 500 \lg b = 500 \lg (ab : \sqrt{10})$. Переходя со шкалы A на шкалу D, мы выполним умножение на $\sqrt{10}$ (если $\bar{a} = \bar{d}$, то $500 \lg a = 500 \lg c - 250$, откуда $c = a\sqrt{10}$), и получим как раз то, что требуется.

В случае 3: $1 < a < \sqrt{10}$; $\sqrt{10} < b < 10$; $\sqrt{10} < ab < 10$. Здесь мы имеем $500 \lg a + 500 \lg (b : \sqrt{10}) = 500 \lg (ab : \sqrt{10})$ (так как a берем на шкале A, b — на шкале C). Отсчет по шкале A дал бы результат, в $\sqrt{10}$ раз меньший искомого, отсчет же по шкале D дает правильный результат.

Разобраться в остальных случаях предоставляется читателю самому. При этом полезно иллюстрировать каждый случай простенькими числовыми примерами ($1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$; $1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$; $4 \cdot 2 = 8$; $4 \cdot 3 = 12$; $4 \cdot 5 = 20$; $4 \cdot 9 = 36$).

Легко заметить, что всякая установка числа на шкале B при движке, смещенном влево, а также всякая установка числа на шкале C, смещенной вправо, равно как и всякая установка числа на шкале D, вводит множитель $\sqrt{10}$ (деление на $\sqrt{10}$ можно рассматривать как умножение на $\sqrt{10} : 10$). Будем называть каждую из этих трех установок *искажающей*, а все остальные — *неискажающими*. Ясно, что четное число искажающих установок дает в результате лишь изменение положения знака дробности, т. е. не влияет на цифровой состав произведения, нечетное же их число дает произведение, увеличенное или уменьшенное в $\sqrt{10}$ раз (не считая возможного перенесения запятой). Отсюда простое правило, применимое не только к умножению, а и к делению и к любой комбинации этих двух действий: *после четного числа искажающих установок отсчет результата делается на шкале* A, *после нечетного — на шкале* D.

Так, умножая 4 на 9, устанавливаем индекс на метку 4 шкалы D (искажающая установка), противопоставляем ей конец шкалы C и устанавливаем индекс на метку 9 шкалы C (движок влево — установка неискажающая). Так как число искажающих установок нечетное (1), то результат читаем против метки 9 шкалы C на шкале D (36). При умножении же 4 на 5 приходится делать две искажающие установки: множимого 4 — на шкале D и множителя 5 — на шкале C при движке справа, а потому результат (20) читаем на шкале A. При делении 200 на 1,6 отсчет частного 125 надо сделать на шкале A, так как здесь применяются только неискажающие установки. При делении 200 на 25 отсчет на шкале D (8), так как была произведена одна искажающая установка (на шкале B при движке слева). При делении 200 на 50 отсчет 4 на шкале D (одна искажающая установка на шкале C при движке справа). При делении 200 на 8 отсчет 25 на шкале A (искажающих установок нет). При делении 500 на 4 отсчет 125 на шкале A (две искажающие установки — одна на шкале D, другая на шкале C при движке справа), а при делении 500 на 8 отсчет 62,5 на шкале D (одна искажающая установка на шкале D).

Выполняя посредством такой *прецизионной* линейки ряд умножений и делений, пишем где-нибудь знак минус при первой искажающей установке, а при второй — его перечеркиваем; при третьей — новый минус, при четвертой — снова его перечеркиваем. Если придем к концу со знаком плюс, результат читаем на шкале A, если со знаком минус, то на шкале D.

Как видим, все сводится к тому, чтобы запомнить три искажающие установки. Ими являются: 1) установка на нижней шкале линейки (шкале D), 2) на верхней шкале движка (шкале B) при движке, сдвинутом влево, 3) на нижней шкале движка (шкале C) при движке, сдвинутом вправо. Конец верхней шкалы движка (шкалы B) и начало нижней его шкалы (шкалы C) отмечены крестиком или звездочкой (метка числа $\sqrt{10} = 3{,}162$). *Искажающими являются, кроме установки на нижней шкале линейки*, как легко видеть, *еще те установки на шкалах движка, при которых звездочка соответствующей шкалы находится в пределах линейки.* Это правило, указанное В. И. Баталиным, существенно облегчает запоминание искажающих установок.

Дальнейшее развитие идеи дробления шкал, использованной в прецизионной линейке, приводит к построению *счетного цилиндра*, имеющего большое число кусков очень длинной (до 16 *м*) логарифмической шкалы. Эти куски шкалы расположены по образующим цилиндра. Такой цилиндр дает результаты с точностью, уже значительно превышающей точность нормальной линейки и почти достигающей (при длине шкалы в 16 *м*) точности таблицы пятизначных логарифмов.

В некоторых линейках имеется иное расположение шкал, нежели в описанной линейке системы Риц. Так, некоторые линейки имеют равномерную шкалу L не внизу, а вверху лицевой стороны линейки, некоторые на обороте движка, вместо шкалы S & T. Иногда шкала S строится так, что значения синусов получаются путем ее сопоставления не со шкалой D или C, а со шкалой A или B. Бывают линейки специального назначения: для вычислений, связанных с мореходным делом (такие линейки имеют две тождественные шкалы синусов — одна на движке, другая на корпусе — и позволяют быстро решать пропорции вида $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = \sin\beta_1 : \sin\beta_2$), для электротехников (у них обычно бывает так называемая шкала Перри, существенно облегчающая возведение числа в любую степень), для радиотехников и многие другие.

ГЛАВА IV.

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ.

§ 37. Низшая и высшая границы.

Очень часто случается, что, не зная точного значения величины x, мы, однако, знаем два числа, между которыми содержится x. Обозначая эти числа буквами l и L, имеем двойное неравенство:

$$l < x < L. \tag{A}$$

Число l называется *низшей границей* x, число L — *высшей* его *границей*. Сокращенно будем записывать это так:

$$\text{НГ}x = l, \quad \text{ВГ}x = L.$$

Границы всегда можно расширять, заменяя НГ любым меньшим, ВГ — любым большим числом, так как неравенство (А) от этого только усилится. Такое расширение границ вообще невыгодно, но иногда к нему все же прибегают.

Приближенным значением числа x называют произвольное число a, заключенное в интервале (l, L), т. е. число, удовлетворяющее двойному неравенству:

$$l \leqslant a \leqslant L.$$

Иногда в качестве приближенного значения для x берут число, лежащее вне границ. Будем это понимать как результат предварительного расширения границ. Так, если, зная, что $0{,}7102 < x < 0{,}7105$, мы берем для x приближенное значение 0,710, то будем считать, что низшая граница предварительно была понижена, т. е. что мы имели неравенство $0{,}710 < x < 0{,}7105$.

Связь приближенного значения a с числом x будем отмечать, пользуясь знаком *приближенного равенства*. Имеем запись:

$$x \approx a,$$

означающую, что a является приближенным значением для x. Когда приближенный характер равенства ясен и без того, употребляется обыкновенный знак равенства.

Различают *недостаточное* приближенное значение (случай $a < x$) и *избыточное* приближенное значение (случай $a > x$). Говорят также о приближенном значении, взятом по *недостатку* и по *избытку*.

Число a, рассматриваемое как приближенное значение числа x, будем называть, краткости ради, просто приближенным числом. В противоположность ему число x следует называть точным числом.

Пример. Пусть известно, что некоторое число x заключается между 8,45 и 8,48. Следовательно

$$8{,}45 < x < 8{,}48, \quad \text{или} \quad \text{НГ}x = 8{,}45; \quad \text{ВГ}x = 8{,}48.$$

Приближенным значением x может служит и 8,45 и 8,46, и 8,47, и 8,48 и любое другое число между 8,45 и 8,48, например среднее между ними (8,465). При этом 8,45 будет недостаточным приближением, 8,48 — избыточным; характер остальных неизвестен.

Расширяя границы, можно получить и другие приближенные значения. Взяв, например, $\text{НГ}x = 8{,}4$ и $\text{ВГ}x = 8{,}5$, имеем:

$$x \approx 8{,}4 \text{ (по недостатку)},$$
$$x \approx 8{,}5 \text{ (по избытку)}.$$

Напомним, что часто приходится брать приближенное значение числа, известного точно, но изображаемого слишком большим числом цифр, т. е. округлять точное число.

§ 38. Абсолютная погрешность и ее граница.

Истинной абсолютной погрешностью числа a, как приближенного значения числа x, или, короче, *абсолютной погрешностью* приближенного числа a будем называть разность $x - a$. Таким образом, сказать, чему равна абсолютная погрешность, можно лишь в тех редких случаях, когда само число x нам известно [1]).

Полагая $x - a = \alpha$, имеем, что $x = a + \alpha$. В случае недостаточного приближенного значения, т. е. при $a < x$, абсолютная погрешность положительна, в случае избыточного, т. е. при $a > x$, отрицательна.

Обыкновенно точное число x остается неизвестным, а потому неизвестной остается и абсолютная погрешность приближенного числа a. Для целей учета погрешностей достаточно знать лишь *границу абсолютной погрешности*, которую мы будем обозначать буквами Δa. Границей абсолютной погрешности числа a, представляющего собой приближенное значение числа x, называют такое положительное число Δa, вычитание которого из a дает низшую границу x, а прибавление к a — высшую границу x: число Δa есть граница абсолютной погрешности приближенного числа a, если

$$a - \Delta a < x < a + \Delta a. \tag{A}$$

Записывать это сокращенно будем следующим образом:

$$x \approx a\,(\pm \Delta a). \tag{B}$$

Если в неравенстве (A) заменим x через $a + \alpha$, где α есть истинная абсолютная погрешность a, и вычтем из всех членов неравенства (A) число a, то получим неравенство:

$$-\Delta a < \alpha < +\Delta a,$$

или, что то же,

$$|\alpha| < \Delta a.$$

Таким образом, истинная абсолютная погрешность всегда меньше границы абсолютной погрешности. Это свойство границы абсолютной погрешности часто принимают за ее определение.

Равенство (B) будем читать так: „x приближенно равен a с погрешностью меньшей $\pm \Delta a$“.

Отметим следующие, почти очевидные свойства границы абсолютной погрешности:

I. *Границу абсолютной погрешности всегда можно повысить, заменяя ее любым большим числом.*

Действительно, увеличивая границу абсолютной погрешности, мы уменьшаем низшую границу и увеличиваем высшую границу, что, как мы видели, всегда возможно (хотя, вообще говоря, невыгодно).

Так, зная, что $x \approx 2{,}73(\pm 0{,}008)$, мы имеем право сказать, что $x \approx 2{,}73\,(\pm 0{,}01)$.

II. *В качестве границы абсолютной погрешности числа a, заключающегося между низшей и высшей границами (l и L), можно взять большую из разностей $a - l$ и $L - a$.*

---

[1]) Иногда разность $x - a$ называют *поправкой* приближенного числа a, абсолютной же его погрешностью называют разность $a - x$.

Переходя от двойного неравенства $l<x<L$ к неравенству $l-a<x-a<L-a$, или $-(a-l)<\alpha<L-a$, заменим меньшую из разностей $a-l$ и $L-a$ большей, что всегда возможно, так как неравенство от этого только усилится. Тогда будем иметь:

$$\text{либо } -(a-l)<\alpha<a-l, \quad \text{если } a-l>L-a;$$

$$\text{либо } -(L-a)<\alpha<L-a, \quad \text{если } L-a>a-l.$$

В первом случае $\Delta a=a-l$, во втором случае $\Delta a=L-a$.

III. *Граница абсолютной погрешности Δa получает, при данных границах l и L числа x, наименьшее значение, равное их полуразности, если за приближенное значение x взять число, равное их полусумме.*

Если $a=(l+L):2$, то $a-l=L-a=(L-l):2=\Delta a$.

Выбирая в качестве приближенного значения другое число a_1, отличное от $(l+L):2$, мы увеличиваем одну из разностей, а именно: $a-l$, если $a_1>a$, или $L-a$, если $a_1<a$, и увеличиваем, следовательно, границу абсолютной погрешности Δa.

Из двух приближенных значений a и a_1 одного и того же точного числа x более точным естественно считать то, которому соответствует меньшая граница абсолютной погрешности. Однако за приближенное значение для x далеко не всегда берут полусумму границ $(l+L):2$, хотя здесь Δa, как мы только что видели, достигает своего минимума. Дело в том, что приходится считаться также с *простотой изображения*, и часто более точному приближенному числу предпочитают менее точное, но изображаемое меньшим числом цифр. Так, если $8{,}45<x<8{,}48$, то наиболее точное приближение дает число $(8{,}45+8{,}48):2=8{,}465$, которому соответствует граница абсолютной погрешности $(8{,}48-8{,}45):2=$ $=0{,}015$. Но на практике предпочтительнее взять $x\approx 8{,}46$ или $8{,}47$, хотя граница абсолютной погрешности будет уже не 0,015, а 0,02. Кроме того немаловажного обстоятельства, что эти два последних приближения изображаются тремя значащими цифрами каждое вместо 4 цифр числа 8,465, наличность цифры разряда тысячных в этом последнем числе представляет то неудобство, что создает ложное впечатление, будто мы о цифре тысячных что-то знаем.

Наряду с записью $x\approx a(\pm\Delta a)$ будем в случае надобности применять запись $x\approx a(-\Delta a)$, равносильную неравенству $a-\Delta a<x<a$, а также запись $x\approx a(+\Delta a)$, равносильную неравенству $a<\Delta a<a+\Delta a$. В последнем случае будем говорить, что „x приближенно равен a с погрешностью, не превосходящей *плюс* Δa“.

Теперь ясно, как, зная НГx и ВГx, выбрать a и указать Δa, и обратно, как, зная a и Δa, указать НГx и ВГx.

Обозначая приближенное значение вместо $\hat{a}$ какой-либо другой буквой (b, c, d, ...), мы будем и соответствующие границы абсолютной погрешности обозначать уже не Δa, а Δb, Δc, Δd, ...

Имеет ли применение границы абсолютной погрешности какие-либо преимущества сравнительно с простым указанием границ x? В обоих случаях для обозначения x мы пользуемся двумя числами (a и Δa или l и L). Разница в том, что запись $x\approx a(\pm\Delta a)$ более компактна, чем запись $l<x<L$. Кроме того, в первом случае одно число (Δa) обычно бывает значительно меньше другого (a), тогда как во втором имеем два числа, мало разнящихся одно от другого.

§ 39. Относительная погрешность и ее граница.

Из двух приближенных значений *одного и того же* числа x мы считаем более точным то, у которого граница абсолютной погрешности меньше. Для сравнения же точности приближенных значений *двух* различных чисел границы абсолютной погрешности уже недостаточно, так как, например, нельзя признать одинаково точными два измерения длины, результаты которых имеют одну и ту же границу абсолютной погрешности, положим 1 *см*, если первая длина составляет всего 20 *см*, а вторая 1 *км*: первое измерение надо признать крайне грубым, второе чрезвычайно точным. Возникает, таким образом, вопрос о том, какую часть всей измеряемой величины составляет абсолютная погрешность, и мы приходим к понятию *относительной погрешности*. Относительной погрешностью приближенного числа a называют отношение абсолютной его погрешности к самому приближенному числу a. Подобно абсолютной погрешности, относительная погрешность в большинстве случаев остается неизвестной, и довольствуются разысканием ее границы. *Границей относительной погрешности* числа a, рассматриваемого как приближенное значение другого числа x, мы будем называть отношение границы абсолютной погрешности этого приближенного числа a к самому приближенному числу a (предполагается, что $a > 0$).

Итак, если $x \approx a(\pm \Delta a)$, то граница относительной погрешности числа a есть дробь $\Delta a : a$.

Как и граница абсолютной погрешности, граница относительной погрешности всегда выражается положительным числом. Ее можно повышать, заменяя найденное значение $\Delta a : a$ любым бо̀льшим числом, если это по каким-либо соображениям (например в целях сокращения записи) желательно.

Обыкновенно границу относительной погрешности выражают в процентах числа a.

Имея приближенное число a и зная границу его абсолютной погрешности Δa, мы находим границу относительной его погрешности в процентах путем деления $100\Delta a$ на a, причем частное берется с 1 или 2 значащими цифрами, непременно по избытку. Запись одинакова с записью границы абсолютной погрешности, но сопровождается для отличия знаком $^0/_0$.

Пример 1. Зная, что $x \approx 8{,}46\,(\pm 0{,}02)$, найти границу относительной погрешности для $a = 8{,}46$.

Здесь $\Delta a = 0{,}02$, $100\Delta a : a = 100 \cdot 0{,}02 : 8{,}46 = 0{,}23\ldots < 0{,}3$.

Значит, $x \approx 8{,}46\,(\pm 0{,}3^0/_0)$, что читается так: „$x$ приближенно равен 8,46, с погрешностью, не превосходящей плюс или минус 0,3 процента".

Пример 2. Взвешивание некоторого предмета показало, что он тяжелее 43 *г* и легче 43,5 *г*. Найти границу относительной погрешности веса p, принимая его равным 43 *г*.

Здесь

$$p \approx 43\,(+0{,}5) = 43\,(+100 \cdot 0{,}5 : 43) = 43\,(+1{,}1\ldots{}^0/_0) = 43\,(+1{,}2^0/_0).$$

Если приближенное число имеет границу абсолютной погрешности в одну единицу последнего разряда, то граница относительной его погрешности равна дроби с числителем 1 и знаменателем, равным числу, имеющему тот же цифровой состав, что и a, но без знака дробности.

Возьмем, например, $x = 2,65\ (\pm 0,01)$.

Здесь $\Delta a : a = 0,01 : 2,65 = 1 : 265$. Остается умножить эту дробь на 100, чтобы получить границу относительной погрешности в процентах.

Иногда границу относительной погрешности не выражают в процентах, а представляют ее в виде обыкновенной дроби с числителем 1, изменяя знаменатель (уменьшая его, чтобы увеличить границу) так, чтобы он выражался числом с 1—2 значащими цифрами. Так, в только что рассмотренном примере:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{265} < \frac{1}{200}; \quad x = 2,65\left(\pm\frac{1}{200}\right),$$

или

$$\frac{\Delta a}{a} < \frac{1}{250}; \quad x = 2,65\left(\pm\frac{1}{250}\right).$$

Так вычисляется граница относительной погрешности по известной границе абсолютной погрешности. Обратная задача тоже не вызывает никаких затруднений, и достаточно рассмотреть два примера.

Пример 3. Зная, что $x \approx 184,3\ (\pm 0,1\%)$, указать границу абсолютной погрешности и границы для x.

Решение. $100\Delta a : a = 0,1$; $a = 184,3$; $100\Delta a = 0,1a = 18,43$; $\Delta a = 0,1843 < 0,2$; $x \approx 184,3\ (\pm 0,2)$; $\text{НГ}x = 184,1$; $\text{ВГ}x = 184,5$.

Пример 4. Измерение некоторой длины x дало число 457 *м*, причем известно, что примененный способ измерения дает погрешность, не превышающую $\frac{1}{200}$, или $^1/_2\%$, в ту или другую сторону. Найти границы для x.

Здесь $x = 457\ (\pm {}^1/_2\%)$; $\Delta a = \frac{1}{2}\cdot 4,57 = 2,285 < 3$; $\text{НГ}\,x = 454$; $\text{ВГ}\,x = 460$.

Если взять для Δa не однозначное число 3, а двузначное число 2,3, то при этом границы получаются более тесные ($\text{НГ}\,x = 454,7$; $\text{ВГ}\,x = 459,3$), но зато они выражаются менее удобными числами.

§ 40. Округление приближенных чисел.

Оно выполняется по правилам § 4, но надо выяснить, как влияет округление на границу абсолютной погрешности.

Пусть дано, что $x = a\ (\pm \Delta a)$, что равносильно неравенству:

$$a - \Delta a < x < a + \Delta a. \qquad \text{(A)}$$

Если при округлении число a заменяется числом $a_1 < a$, то после вычитания a_1 из всех членов неравенства (A) будем иметь:

$$a - a_1 - \Delta a < x - a_1 < a - a_1 + \Delta a. \qquad \text{(B)}$$

Заменим положительную разность $a - a_1$ в первом члене неравенства отрицательным числом $-(a - a_1)$, от чего неравенство только усилится. Теперь имеем:

$$-(a - a_1) - \Delta a < x - a_1 < (a - a_1) + \Delta a,$$

или

$$-[(a - a_1) + \Delta a] < x - a_1 < [(a - a_1) + \Delta a],$$

откуда видно, что граница абсолютной погрешности числа a_1 равна сумме $(a - a_1) + \Delta a$. Если $a_1 > a$, то опять берем неравенство (В) и заменяем отрицательную разность $a - a_1 = -(a_1 - a)$ в третьем члене неравенства положительным числом $a_1 - a$, от чего неравенство только усилится. Теперь имеем:

$$-(a_1 - a) - \Delta a < x - a_1 < (a_1 - a) + \Delta a,$$

или

$$-[(a_1 - a) + \Delta a] < x - a_1 < [(a_1 - a) + \Delta a],$$

что показывает, что здесь граница абсолютной погрешности числа a_1 равна сумме $(a_1 - a) + \Delta a$. Объединяя оба случая, получаем следующее правило:

При замене одного приближенного значения a другим a_1 граница абсолютной погрешности первого увеличивается на абсолютное значение разности $a - a_1$.

Пример 1. Округлить до 3 десятичных знаков $\lg 43 = 1{,}6335\ (\pm 0{,}00005)$. Здесь $a = 1{,}6335$, $a_1 = 1{,}633$; $\Delta a = 0{,}00005$; $\Delta a + (a - a_1) = 0{,}00055$, $\lg 43 = 1{,}633\ (\pm 0{,}00055)$.

К той же границе абсолютной погрешности приводит округление с усилением, а именно, получается $\lg 43 \approx 1{,}634\ (\pm 0{,}00055)$. Здесь следует применить правило четной цифры и взять $\lg 43 = 1{,}634$, или вовсе не делать округления.

Пример 2. Округлить до 3, 2, 1 значащей цифры приближенное значение для x:

$$x \approx 8{,}256\ (\pm 0{,}007).$$

До 3 значащих цифр: $x \approx 8{,}26\ (\pm 0{,}011)$; здесь $0{,}007 + 0{,}004 = 0{,}011$.
До 2 значащих цифр: $x \approx 8{,}3\ (\pm 0{,}051)$; здесь $0{,}007 + 0{,}044 = 0{,}051$.
До 1 значащей цифры: $x \approx 8\ (\pm 0{,}263)$; здесь $0{,}007 + 0{,}256 = 0{,}263$.

Заменяя полученные многозначные границы абсолютной погрешности однозначными, получаем такие результаты:

$$x \approx 8{,}26\ (\pm 0{,}02); \quad x \approx 8{,}3\ (\pm 0{,}06); \quad x \approx 8\ (\pm 0{,}3).$$

§ 41. Точные цифры приближенного числа.

Очень удобный и постоянно применяемый на практике способ учета погрешностей приближенных чисел дает *подсчет точных их цифр*. Он позволяет оценивать точность приближенных чисел по самому их начертанию, без всяких дополнительных указаний. Термин „точные цифры" определяется различно. Мы будем говорить, что *все цифры* данного приближенного числа *точны*, если граница абсолютной его погрешности не превосходит полуединицы последнего его разряда. Таким образом, применяя к точному числу округление (с поправкой), мы всегда получаем в результате приближенное число, все цифры которого точны. Установив, например, что $\sqrt{200} \approx 14{,}14\ (\pm 0{,}005)$, мы тем самым получим значение этого корня с 4 точными значащими цифрами (или с 2 точными десятичными знаками). В числе 18 400 (± 50) мы имеем 3 точные значащие цифры. Математические таблицы всегда дают приближенные значения, все цифры которых точны.

Если граница абсолютной погрешности больше полуединицы, но не больше целой единицы последнего разряда числа, то мы будем говорить, что все цифры числа точны, кроме последней, которая *почти точна* (некоторые авторы применяют в этом случае термин „верные цифры"). Так, в числе 0,654 ($\pm$0,001) две значащие цифры точны, третья почти точна. Отбросив ее, получаем число 0,65 ($\pm$0,005), где все цифры точны. Заметим, что отбрасывание последней почти точной цифры не всегда дает число, все цифры которого точны. Примером может служить число 231,65 ($\pm$0,01), которое после отбрасывания последней почти точной цифры дает число 231,6 ($\pm$0,06), т. е. число, где последняя цифра опять-таки лишь почти точна. Отбрасывая еще одну цифру, приходим к числу 232 ($\pm$0,46), где все цифры точны. Отбрасывание сразу двух последних цифр первоначально данного приближенного числа приводит к тому же округленному приближенному числу, но дает меньшую границу абсолютной погрешности, именно 232 ($\pm$0,36).

Условившись, что̀ разуметь под „точными" цифрами приближенного числа, мы можем оценивать его точность, указывая, сколько точных цифр оно содержит. Таким образом, можно говорить о приближенных числах с 1, 2, 3, 4 и т. д. точными значащими цифрами. В большинстве случаев числа, получаемые в результате измерения обычно применяемыми на практике способами, содержат *не более трех-четырех* точных значащих цифр.

Если граница абсолютной погрешности больше единицы последнего разряда, но меньше 10 единиц этого разряда, мы будем говорить, что все цифры числа точны, кроме последней, которая *сомнительна*. Например, в числе 38,45 ($\pm$0,04) последняя цифра сомнительна. Отбрасывая ее, получаем число 38,4 ($\pm$0,09), где последняя цифра уже почти точна. Отбрасывание сомнительной последней цифры далеко не всегда дает число, свободное от сомнительных цифр. Так, из числа 8,756 ($\pm$0,007) с сомнительной последней цифрой мы получаем, отбрасывая ее, число 8,76 ($\pm$0,011), где последняя цифра опять-таки сомнительна. Нужно отбросить сразу 2 последние цифры данного числа, чтобы освободиться от сомнительных цифр; действительно, в числе 8,8 ($\pm$0,051) последняя цифра почти точна.

Если, наконец, граница абсолютной погрешности числа превосходит 10 единиц последнего его разряда, то мы будем так округлять число, чтобы эта граница сделалась меньше 10 единиц последнего его разряда. Действительно, совершенно бессмысленно выписывать, скажем, сотые и тысячные доли числа, если его погрешность выражается десятыми долями и может доходить до 10 десятых, т. е. до целой единицы. Поэтому, имея, например, число 35,672 ($\pm$0,856), мы обязательно округлим его до десятых и получим 35,7 ($\pm$0,884), или, выражая границу однозначным числом, 35,7 ($\pm$0,9). Отступления от этого правила мы будем делать только в том случае, когда погрешность, большая 10 единиц (разряда последней цифры), возможна, но крайне мало вероятна (см. подробности об этом в гл. V).

§ 42. Вычисления со строгим учетом погрешностей и без него.

Говорят, что вычисление выполнено *со строгим учетом погрешностей*, если оно привело к совершенно определенному заключению о тех границах, между которыми заключен искомый результат. Таким образом, если в результате вычисления установлены НГ и ВГ искомого числа или получено приближенное его значение вместе с границей абсолютной или относительной погрешности, то вычисление выполнено со строгим учетом погрешностей. Если же вычисление привело к приближенному значению искомого, причем граница погрешности этого найденного результата остается неизвестной, то говорят, что вычисление проведено *без строгого учета погрешностей.*

Строгий учет погрешностей осуществим более или менее легко лишь в простейших случаях, и во всяком случае заметно усложняет работу вычислителя. Поэтому его применяют сравнительно редко, в таких наиболее „ответственных" вычислениях, как составление математических таблиц, вычисление физических и астрономических постоянных и т. п., когда требуется полная гарантия того, что искомое число действительно заключено в указанных границах. Так, в отношении математических таблиц (таблицы логарифмов, тригонометрических функций и т. п.) со времен К. Ф. Гаусса выполняется требование, чтобы табличные значения функций отличались от истинных их значений не более, чем на половину единицы разряда последней написанной цифры. Например, значения табличных логарифмов, данных с 4 десятичными знаками, не должны отличаться от истинных их значений более как на половину десятитысячной. Следовательно, составитель таблицы должен вести строгий учет погрешностей. Он должен иметь полную уверенность в том, что погрешность результата его вычисления действительно не выходит из допускаемых границ.

Строгий учет погрешностей производится на практике сравнительно редко. Обыкновенно довольствуются тем, что ведут вычисление *с определенным числом цифр.* Последняя цифра результата бывает при этом более или менее *сомнительна*, но большая погрешность в этой цифре всегда бывает менее вероятна, чем малая. Оказывается, что для целей практики эта сомнительность последней цифры никакого значения в подавляющем большинстве случаев не имеет. Так, в расчетах технического характера обыкновенно вычисляют лишь 3 первые значащие цифры результата, причем третья цифра может быть и сомнительной. Значительные „коэфициенты прочности", назначаемые при всяких технических расчетах в известных границах более или менее произвольно, делают совершенно несущественной погрешность в 1 или даже несколько единиц третьей значащей цифры.

ГЛАВА V.

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ В РЕЗУЛЬТАТАХ ИЗМЕРЕНИЙ.

§ 43. Погрешности систематические и случайные.

Всякое число, выражающее значение какой-нибудь существующей независимо от нашего сознания величины, получается либо в результате счета, либо в результате измерения, либо, наконец, в результате математических операций над другими числами, полученными посредством счета или измерения. *Точным* число может быть (но далеко не всегда бывает) в результате *счета.* Всякое же число, полученное в результате измерения, дает лишь *приближенное* значение измеряемой величины вследствие несовершенства наших измерительных приборов, несовершенства наших органов чувств и, наконец, некоторой неопределенности самих измеряемых объектов. Так, например, длина отрезка прямой, заключенного между двумя точками, является вещью вполне определенной, если мы имеем две *математические* точки; на практике же мы всегда имеем дело лишь с более или менее грубыми *пометками* на концах измеряемого отрезка, только приблизительно его собой определяющими. Отрезок, длина которого в точности равна a единицам, можно только мыслить. Его можно запроектировать, но построить или указать его в действительности можно лишь с бо́льшим или меньшим приближением.

Сохраняя, как и раньше, термин „ошибка" для обозначения таких легко устранимых отклонений приближенных результатов измерений от точных значений, которые происходят вследствие недостатка внимательности, мы будем называть *погрешностями* те неустранимые отклонения, какие присущи результату всякого измерения, будучи обусловлены указанными выше причинами [1]).

Погрешности можно разделить на две группы: погрешности *систематические* и погрешности *случайные*.

Систематическими называют те погрешности, какие обусловлены определенными и постоянно действующими в одном и том же направлении причинами. Так, если для измерения длины мы пользуемся миллиметровой линейкой, деления которой несколько короче нормальных, то мы постоянно будем получать *преувеличенные* результаты (пример так называемой *инструментальной* систематической погрешности). Если мы взвешиваем тело в воздухе, то вследствие потери в весе от вытесненного воздуха (закон Архимеда о газах) вес тела будет получаться либо *больше*, либо *меньше* истинного в зависимости от того, будет ли его плотность больше или меньше плотности разновесок, посредством которых взвешивание производилось (пример *теоретической* систематической погрешности). Понятно, что такого рода погрешности, искажающие результаты измерений, должны быть устранены при последующей их обработке введением надлежащих *поправок*. Так, установив, что 100 делений нашей масштабной линейки равны не 100 *мм*, а лишь 98,5 *мм*, мы должны полученные результаты (в делениях нашего масштаба) умножить на 0,985, чтобы получить эти результаты в миллиметрах.

По устранении систематических погрешностей остаются погрешности случайные, обусловленные непостоянными и не поддающимися точному учету причинами. Существование их доказывается тем обстоятельством, что результаты нескольких повторных измерений одного и того же объекта, выполненных одним и тем же лицом, одним и тем же инструментом и, казалось бы, при одинаковых условиях, все же оказываются различными. Так, измеряя какое-нибудь более или менее значительное расстояние мерной 20-метровой цепью, мы получим при повторении измерений одно и то же число сотен и десятков метров, быть может, одно и то же число метров; но число дециметров будет получаться каждый раз новое, не говоря уже о сантиметрах [2]). Для объяснения этой разницы можно указать на неровности местности, отклонения от прямолинейного направления, неравномерность натяжения цепи и т. д.

---

[1]) Часто и эти неустранимые погрешности тоже именуют „ошибками", называя ошибки от недостаточной внимательности „грубыми ошибками".

[2]) При измерении мерной лентой отрезков до 200—300 *м* колебания, при благоприятных условиях (опытный работник, ровная местность), выражаются лишь немногими сантиметрами.

§ 44. Учет погрешностей при измерениях малой точности.

Итак, всякое измерение дает лишь приближенный результат. Как же учесть его погрешность? В очень многих измерениях, когда не ставят себе задачей получить наивысшую возможную точность, сделать это легко, прибегая к *способу границ*; производя измерение, устанавливают два числа: одно — заведомо меньшее, другое — заведомо большее истинного значения. Рассмотрим, например, процесс взвешивания.

Обыкновенный способ взвешивания состоит в том, что взвешиваемый предмет кладут на одну чашку весов, разновески — на другую, и систематическими пробами устанавливают, сколько разновесок надо взять, чтобы перевешивала чашка с предметом и чтобы после добавления к разновескам еще одного, возможно меньшего, перевешивала чашка с разновесками. Положим, при нагрузке чашки с разновесками 183 *г* перевешивает чашка с предметом, а при добавлении к разновескам 0,5 *г* перевешивает чашка с разновесками. Таким образом, обозначая через x вес предмета, мы имеем для него *низшую* и *высшую границы*:

$$183 < x < 183{,}5,$$

что можно записать короче одним из следующих трех способов:

$$x \approx 183\,(+0{,}5);\quad x \approx 183{,}5\ (-0{,}5);\quad x \approx 183{,}25\ (\pm 0{,}25).$$

Если при некоторой нагрузке чашки с разновесками нет заметного перевешивания ни той, ни другой чашки, что иногда бывает, то надо выяснить, какая наименьшая прибавка к каждой чашке заставляет эту чашку перевешивать. Пусть, например, такое равновесие наблюдается, когда взято 183 *г* разновесок, причем прибавка к разновескам 0,2 *г* вызывает перевешивание чашки с разновесками, а такая же прибавка к предмету — перевешивание чашки с предметом, прибавка же 0,1 *г* равновесия не нарушает. Тогда имеем границы для x:

$$183 - 0{,}2 < x < 183 + 0{,}2,\ \text{или}\ 182{,}8 < x < 183{,}2,$$

$$x \approx 183\,(\pm 0{,}2).$$

Такое указание границ точного значения и последующий вывод приближенного значения возможны в большинстве случаев непосредственных измерений: при измерении длины (линейкой, рулеткой, мерной цепью), когда не требуется многократного прикладывания измерительного прибора, при измерении углов транспортиром (на бумаге) или каким-либо более сложным угломерным прибором (на местности), при измерении температуры, давления, времени, силы тока и т. д. Каждый раз мы устанавливаем два числа: одно — заведомо меньшее искомого значения, другое — заведомо большее. Разность этих двух границ характеризует точность измерения. Она зависит, прежде всего, от точности примененного измерительного прибора. Употребляя, например, миллиметровую линейку со скошенной кромкой для измерения на плане, мы легко будем указывать для каждого измеряемого отрезка границы с разностью в 0,5 *мм*. Употребляя транспортир, разделенный на градусы и полуградусы, можно указывать для каждого измеряемого угла границы с разностью в 0°,25. Вообще, если приходится делать отсчет по некоторой шкале и если наименьшие деления этой шкалы не очень мелки не меньше 1 *мм*), то вполне возможно заключение измеряемого объекта в границы с разностью в половину наименьшего деления [1]). Эта разность границ очень расширяется, если самый измеряемый объект не обладает достаточной определенностью. Измеряя, например, на так называемой „оптической скамье“ расстояние от линзы до изображения, даваемого ею на подвижном экране, скользящем вдоль линейки с делениями, мы имеем не одно, а несколько последовательных положений экрана, дающих изображение одной и той же — на наш глаз — резкости. Приходится двигать экран в одном направлении до тех пор, пока резкость изображения не станет заметно меньшей: отсчет в этом положении даст одну из границ искомого расстояния. Двигая далее экран в противоположном направлении, остановимся, когда изображение, сделавшееся сперва снова резким, не станет опять ухудшаться. Новый отсчет даст другую границу. Чем искуснее и внимательнее наблюдатель, тем теснее при данных измерительных приборах те границы, в какие он заключает измеряемую величину.

При вычислениях без строгого учета погрешностей точность получаемого приближенного значения измеряемой величины характеризуют просто числом цифр, имея в виду, что некоторая неопределенность последней цифры числа вполне допустима. Здесь надо твердо держаться правила — *никогда не писать больше, чем одну сомнительную цифру*. Тогда сама запись числа даст характеристику его точности без каких бы то ни было дополнительных указаний. Записав, например, что предмет весит 183 *г*, мы тем самым утверждаем, что знаем его вес до целых граммов: цифра 3 не вполне надежна, но если и содержит погрешность, то небольшую. Запись 183,0 *г* означала бы, что цифра целых граммов (3) установлена точно и что погрешность может быть лишь в десятых долях грамма (цифра десятых 0 не вполне надежна).

§ 45. Среднее арифметическое результатов многократных равноточных измерений.

При тех же самых приборах нередко есть возможность получить более точные результаты, оценивая на-глаз более мелкие доли наименьшего деления. Например, при измерении длины отрезка миллиметровой линейкой, в случае достаточной определенности концов этого отрезка, можно при некотором навыке отсчитывать десятые доли миллиметра. Отсчет долей наименьшего деления облегчается при наличности поперечного десятичного масштаба или равноценного ему нониуса (верньера), например на штангенциркуле или на круге угломерного прибора. Назначение этих вспомогательных приборов — давать доли наименьшего деления, имеющегося на данном измерительном приборе. Равным образом точность взвешивания повышается наблюдением отклонений от положения равновесия стрелки, соединенной с коромыслом весов и движущейся вдоль небольшой шкалы, которая имеется на всяких весах, предназначенных для более точных измерений.

Когда, таким образом, прибор дает наибольшую точность отсчета, какую он только может давать, повторный отсчет обыкновенно дает несколько иной результат. Тут уже начинают сказываться случайные погрешности измерений. При многократном одинаково тщательном

[1]) При некотором навыке возможно указание и более тесных границ.

повторении одного и того же измерения мы получаем целую серию довольно близких друг другу, но все же не совпадающих результатов, и является вопрос, как их использовать для получения результата, наиболее близкого к истинному, и как оценить его погрешность.

Та же задача возникает иногда и при измерениях малой точности. Например, желая узнать расстояние между двумя отдаленными друг от друга пунктами и измеряя его рулеткой, мы при повторении измерения получим несколько различные результаты.

Положим, все измерения сделаны одинаково тщательно, все заслуживают поэтому одинакового доверия, все *равноточны*. В этом случае берут среднее арифметическое всех полученных результатов, как *вероятнейшее* значение искомой величины. Обосновать это можно следующими соображениями. Если систематические погрешности устранены, то естественно сделать два следующих основных допущения: 1) случайные погрешности некоторых результатов положительны, некоторых отрицательны, т. е. одни измерения дают результаты меньшие истинного, другие — большие истинного; 2) если при этом измерений произведено много, то каждой положительной случайной погрешности соответствует приблизительно равная ей по абсолютной величине отрицательная погрешность. Обозначая истинное значение искомой величины через x, а результаты первого, второго, третьего и т. д. измерений буквами a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$, мы будем иметь n равенств, где n — число сделанных измерений: $\alpha_i = x - a_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Число α_i, т. е. разность между точным значением x и приближенным значением a_i, называется истинной абсолютной погрешностью, или, короче, абсолютной погрешностью этого приближенного значения. Если все эти равенства сложить почленно, то в левой части получим, согласно второму допущению, нуль, в правой же — многочлен $nx - \sum_{i=1}^{n} a_i$. Отсюда заключаем, что $nx = \sum a_i$, или $x = \sum a_i : n$, т. е. что x равен среднему арифметическому результатов всех измерений. Обозначая это среднее буквой L, имеем $L = \sum a_i : n$.

Арифметическое среднее давало бы совершенно точное значение измеряемой величины, если бы наше второе основное допущение вполне соответствовало действительности. Но так как это соответствие лишь приблизительное, притом тем меньшее, чем меньше произведено измерений, то и арифметическое среднее дает лишь приближенное значение измеряемой величины, а именно, только *вероятнейшее* ее значение, и необходимо установить способ оценки погрешности этого приближения.

Вопрос этот очень просто решается при вычислениях без строгого учета погрешностей: найдя среднее, его округляют, сравнивая его с результатами отдельных измерений и отбрасывая явно ненадежные его цифры (как и всегда, одну сомнительную цифру сохраняют). Пусть, например, некоторое расстояние было измерено пять раз, причем получились такие результаты (в метрах):

763,8; 764,5; 761,8; 763,4; 762,7;

сумма их 3816,2, среднее 763,24.

Разности между этим средним и результатом каждого отдельного измерения равны:

$$-0{,}56; -1{,}26; +1{,}44; -0{,}16; +0{,}54.$$

Как видим, эти разности в двух случаях несколько превосходят единицу. Поэтому среднее надо округлить до *целых*. Итак, искомое расстояние приближенно равно 763 *м* (приближенное число с 3 значащими цифрами).

Заключение о том, какие цифры среднего нужно сохранить, какие отбросить, большею частью можно сделать и не находя разностей между результатами отдельных измерений и средним.

Если же требуется строгий учет погрешностей, то оценить точность среднего арифметического гораздо труднее. Сперва выясним, каким образом можно сравнить точность двух рядов результатов измерения одной и той же величины.

§ 46. Средняя и средняя квадратическая погрешность.

Положим, два наблюдателя измеряют углы треугольника и находят их сумму. Один повторяет все измерения шесть раз, другой — восемь раз, и оба получают такие результаты:

1-й наблюдатель	180°5′	180°3′	179°55′	180°8′	179°51′	179°58′		
2-й наблюдатель	180°1′	179°58′	179°59′	180°2′	179°59′	179°58′	180°0′	179°59′

Таким образом, истинные погрешности измерений первого наблюдателя равны соответственно:

$$-5', -3', +5', -8', +9', +2',$$

а второго:

$$-1', +2', +1', -2', +1', +2', 0', +1'.$$

С первого взгляда видно, что второй наблюдатель получил более точные результаты. Но как оценить эту большую точность числом? Попробуем вычислить среднее арифметическое истинных погрешностей для каждого. Для первого наблюдателя:

$$\frac{1}{6}[(-5)+(-3)+(+5)+(-8)+(+9)+(+2)]=0,$$

а для второго:

$$\frac{1}{8}[(-1)+(+2)+(+1)+(-2)+(+1)+(+2)+(+1)]=+\frac{1}{2}.$$

Таким образом, среднее арифметическое истинных погрешностей оказалось в данном случае меньше у того ряда измерений, который явно менее точен. Следовательно, среднее арифметическое истинных погрешностей для нашей цели непригодно.

Попробуем далее брать суммы абсолютных значений истинных погрешностей и опять найдем среднее:

для первого наблюдателя:

$$\frac{1}{6}[5+3+5+8+9+2]=5\frac{1}{3},$$

для второго наблюдателя:

$$\frac{1}{8}[1+2+1+2+1+2+1]=1\frac{1}{4}.$$

Полученные числа называются *средними линейными* погрешностями, или, короче, просто *средними* погрешностями. Как видим, в данном случае они хорошо характеризуют точность обоих рядов измерений: у более точного второго ряда значительно меньшая средняя погрешность. Обыкновенно так бывает и в других случаях, а потому средними погрешностями нередко пользуются, особенно в школьной практике. Однако употребление средних погрешностей не всегда дает удовлетворительные результаты. Так, предположим, что то же измерение углов треугольника и вычисление их суммы выполнил еще третий наблюдатель, получивший такие числа:

$$180°1', \ 180°13', \ 179°59', \ 180°0', \ 179°48',$$

которым соответствуют истинные погрешности:

$$-1, \ -13, \ +1, \ 0, \ +12.$$

Вычисляя среднюю погрешность, находим, что она здесь равна

$$\frac{1}{5}[1+13+1+0+12]=5\frac{2}{5}.$$

Как видим, она почти одинакова со средней погрешностью результатов, полученных первым наблюдателем. Между тем, сравнивая ряды полученных ими результатов непосредственно, мы должны признать, что измерения третьего наблюдателя вообще менее надежны, так как в двух случаях дают такие большие погрешности, каких вовсе не было у первого.

Чтобы придать бо́льшее значение бо́льшим погрешностям, вычисляют среднее не самых погрешностей, а их *квадратов*, и из этого среднего извлекают квадратный корень. Получаемое число носит название *средней квадратической погрешности* и постоянно употребляется для сравнения точности результатов измерений. Для его обозначения обыкновенно пользуются греческой буквой σ („сигма малая“).

Итак,

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2}. \qquad (A)$$

Для трех рассматриваемых рядов измерений имеем такие средние квадратические погрешности:

Для I .....$\sigma=\sqrt{\frac{1}{6}(25+9+25+64+81+4)}=5{,}89.$

Для II .....$\sigma=\sqrt{\frac{1}{8}(1+4+1+4+1+4+1)}=1{,}41.$

Для III .....$\sigma=\sqrt{\frac{1}{5}(169+1+144+1)}=7{,}94.$

В огромном большинстве случаев истинное значение x измеряемой личины неизвестно, а потому остаются неизвестными и истинные погрешности $\alpha_i = x - a_i$. Вычисление средней квадратической погрешности σ по формуле (A), таким образом, невозможно. Ее вычисляют посредством так называемых *уклонений от среднего*.

Уклонением результата каждого отдельного измерения a_i от их среднего арифметического L называется разность $L - a_i$, т. е. разность между средним арифметическим всех результатов и данным результатом. Обозначая уклонение для a_i буквой v_i, имеем равенство $v_i = L - a_i$, где значок i принимает все значения от $i = 1$ до $i = n$. Легко установить два следующих свойства уклонений от среднего:

I свойство: *сумма всех уклонений от среднего равна* 0.

Действительно, написав равенство $v_i = L - a_i$ для каждого значения указателя i и сложив все n полученных равенств, имеем $\sum v_i = nL - \sum a_i$. Но $L = \sum a_i : n$, $nL = \sum a_i$, а потому $\sum v_i = 0$.

II свойство: *сумма квадратов уклонений от среднего меньше суммы квадратов истинных погрешностей.*

Вычитая из истинной погрешности $\alpha_i = x - a_i$ уклонение $v_i = L - a_i$, получаем равенство:

$$\alpha_i - v_i = x - L,$$

или, после перенесения v_i направо, равенство:

$$\alpha_i = v_i + (x - L).$$

Возведя это равенство в квадрат, получаем:

$$\alpha_i^2 = v_i^2 + 2v_i(x - L) + (x - L)^2.$$

Написав последнее равенство для каждого из n значений i, сложим полученные n равенств почленно. Приходим к равенству:

$$\sum \alpha_i^2 = \sum v_i^2 + 2(x - L)\sum v_i + n(x - L)^2.$$

В силу I свойства член $2(x - L)\sum v_i$ равен нулю. Остается:

$$\sum \alpha_i^2 = \sum v_i^2 + n(x - L)^2.$$

Так как второй член правой части всегда положителен, то сумма квадратов истинных погрешностей всегда больше суммы квадратов уклонений. Отсюда вытекает II свойство.

Если мы для вычисления средней квадратической погрешности σ в формуле (A) заменим сумму квадратов истинных погрешностей $\alpha_i = x - a_i$ через сумму квадратов уклонений $v_i = L - a_i$, то мы числитель подкоренного, согласно II свойству, уменьшим. Чтобы оставить подкоренное неизменным, необходимо соответственно уменьшить и его знаменатель. В теории уравновешивания доказывается, что для этого достаточно уменьшить знаменатель на 1, т. е. заменить в знаменателе n через $n - 1$. Для вычисления σ мы получаем теперь формулу:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(L - a_i)^2}, \tag{B}$$

которая и употребляется постоянно на практике.

Средняя квадратическая погрешность σ вполне удовлетворяет цели сравнительной оценки точности различных рядов наблюдений, но она непригодна для характеристики точности тех средних выводов, какие мы из этих рядов получаем, вычисляя среднее арифметическое L всех результатов, содержащихся в каждом ряду. Действительно, с возрастанием числа наблюдений среднее арифметическое их результатов становится все более и более надежным; среднее из десяти одинаково точных наблюдений заслуживает бо́льшего доверия, чем среднее арифметическое из четырех таких же наблюдений, так как второе основное допущение о случайных погрешностях, сделанное в § 39, тем ближе к истине, чем больше число этих погрешностей. Между тем, достаточно одного взгляда на формулу (В), чтобы убедиться, что при возрастании числа наблюдений (n) числитель и знаменатель подкоренного растут приблизительно одинаково быстро (конечно, предполагается, что новые добавочные наблюдения делаются при тех же условиях, что и первые).

Ввиду этого средняя квадратическая погрешность σ является характеристикой точности *всего ряда измерений*, для которого она вычислена. Для характеристики же точности среднего арифметического употребляют другую величину, к рассмотрению которой и переходим.

Отметим, что число σ часто называют средней квадратической погрешностью *каждого отдельного измерения* из данного их ряда, но надо помнить, что оно неразрывно связано со *всем этим рядом*.

§ 47. Средняя квадратическая погрешность арифметического среднего.

Предварительно докажем два свойства средней квадратической погрешности ряда измерений.

I свойство. Если по наблюдаемым значениям величины x вычисляется величина y, связанная с x соотношением:

$$y = kx,$$

где k — точно известный множитель пропорциональности, то, зная среднюю квадратическую погрешность ряда измерений, равную σ_x, можно получить среднюю квадратическую погрешность ряда соответствующих значений y, которую обозначим символом σ_y, по формуле:

$$\sigma_y = k\sigma_x.$$

В самом деле, обозначая результаты отдельных измерений величины x, как и раньше, через $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, а соответствующие значения величины y через $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, имеем, согласно формуле (А), § 46:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x - a_i)^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y - b_i)^2}.$$

Заменяя y в выражении для σ_y через kx, b_1 — через ka_1, b_2 — через ka_2 и т. д., заключаем, что

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum k(x - a_i)^2} = k\sigma_x,$$

что и требовалось доказать.

II свойство. Если по наблюденным значениям двух величин x и y вычисляется третья величина z, связанная с двумя первыми соотношением $z=x+y$, то, зная среднюю квадратическую погрешность ряда измерений x, равную σ_x, и среднюю квадратическую погрешность ряда измерений y, равную σ_y, можем вычислить среднюю квадратическую погрешность ряда соответствующих значений z, которую обозначим через σ_z, по формуле:

$$\sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2.$$

Действительно, предполагая, что величина x была измерена n раз, а величина y m раз, обозначим результаты отдельных измерений для x через a_i ($i=1,2,\ldots,n$), а для y через b_k ($k=1,2,3,\ldots,m$). Комбинируя каждое a_i с каждым b_k, получим всего nm значений суммы $z=x+y$, каждое из которых обозначим через $c_{ik}=a_i+b_k$. Возьмем равенство $z-c_{ik}=(x+y)-(a_i+b_k)=(x-a_i)+(y-b_k)$ и возведем обе его части в квадрат:

$$(z-c_{ik})^2=(x-a_i)^2+(y-b_k)^2+2(x-a_i)(y-b_k).$$

Имея всего nm таких равенств, возьмем сперва те из них, в которых $i=1$, и сложим их (в первом из них $k=1$; во втором $k=2$ и т. д. до $k=m$). Получим:

$$\sum(z-c_{1k})^2=m(x-a_1)^2+\sum(y-b_k)^2+2(x-a_1)\sum(y-b_k).$$

Но, согласно второму основному допущению § 39, $\sum(y-b_k)=0$, а потому

$$\sum(z-c_{1k})^2=m(x-a_1)^2+\sum(y-b_k)^2.$$

Точно так же

$$\sum(z-c_{2k})^2=m(x-a_2)^2+\sum(y-b_k)^2;$$
$$\sum(z-c_{3k})^2=m(x-a_3)^2+\sum(y-b_k)^2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum(z-c_{nk})^2=m(x-a_n)^2+\sum(y-b_k)^2.$$

Складывая эти n равенств почленно, имеем:

$$\sum(z-c_{ik})=m\sum(x-a_i)^2+n\sum(y-b_k)^2,$$

или, после деления обеих частей на $m\cdot n$:

$$\sum(z-c_{ik})^2:(m\cdot n)=\sum(x-a_i)^2:n+\sum(y-b_k)^2:m,$$

т. е. в силу формул

$$\sigma_x^2=\sum(x-a_i)^2:n;\quad \sigma_y^2=\sum(y-b_k)^2:m;\quad \sigma_z^2=\sum(z-c_{ik})^2:(m\cdot n);$$
$$\sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2,$$

что и требовалось доказать.

Если имеется сумма не двух, а трех величин $u=x+y+z$, то полагаем $y+z=v$ и имеем $\sigma_v^2=\sigma_y^2+\sigma_z^2$; $\sigma_u^2=\sigma_x^2+\sigma_v^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2$. Продолжая тем же путем, обобщаем II свойство на случай произвольного числа слагаемых и формулируем его так:

Квадрат средней квадратической погрешности суммы нескольких величин равен сумме квадратов средних квадратических погрешностей слагаемых.

Вернемся к характеристике точности среднего арифметического.

Пусть, как и раньше, имеется ряд равноточных измерений a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$, среднее арифметическое которых L, а средняя квадратическая погрешность всего ряда измерений есть σ. Представим себе дело так, что результат каждого отдельного измерения $a_i\,(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ получен как среднее из ряда измерений $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, $a_i^{(3)}, \ldots, a_i^{(m)}$, и у нас имеется, следовательно, всего n таких рядов по m чисел в каждом ряду, причем среднюю квадратическую погрешность каждого ряда предположим равной σ. В силу только что доказанного II свойства квадрат средней квадратической погрешности суммы $\sum a_i$ равен $\sigma^2+\sigma^2+\ldots+\sigma^2=n\sigma^2$, а самая средняя квадратическая погрешность этой суммы равна $\sqrt{n\sigma^2}=\sigma\sqrt{n}$. Но $L=\sum a_i : n=\frac{1}{n}\sum a_i$. Если заменить L через y, $1:n$ через k, $\sum a$ через x, то получим зависимость $y=kx$, рассмотренную в I свойстве. Прилагая сюда это последнее, имеем, что средняя квадратическая погрешность среднего арифметического L равна $\frac{1}{n}\cdot\sigma\sqrt{n}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Обозначая ее через M, получаем формулу для вычисления *средней квадратической погрешности арифметического среднего* (или средней квадратической погрешности среднего вывода):

$$M=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad \text{(C)}$$

Как видим, число M убывает с возрастанием n, но медленнее, чем это последнее. Чтобы уменьшить среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического *вдвое*, надо сделать *вчетверо* больше измерений.

Вычислив M, записывают результат в виде $x \approx L \pm M$, причем здесь M служит для характеристики точности среднего арифметического L, но *не есть граница абсолютной погрешности этого последнего приближенного числа*. Чтобы избежать смешения средней квадратической погрешности среднего арифметического и границы его абсолютной погрешности, будем писать $\pm M$ без скобки.

Итак, число M, т. е. средняя квадратическая погрешность среднего вывода, отнюдь не является границей погрешности среднего вывода, как не является ею и число σ, т. е. средняя квадратическая погрешность одного измерения. Теория вероятностей показывает, что при очень большом числе повторных равноточных измерений в каждой тысяче случайных погрешностей будет средним числом 680 погрешностей, заключенных между $-\sigma$ и $+\sigma$, 950 погрешностей, заключенных между -2σ и $+2\sigma$, 997 погрешностей, заключенных между -3σ и $+3\sigma$. Таким образом, в каждой тысяче измерений встречаются в среднем только *три* измерения, погрешность которых превосходит по абсолютному значению утроенную среднюю квадратическую погрешность. *Это число* 3σ *и считают границей случайных погрешностей*, отбрасывая как ошибочные результаты, содержащие погрешности, превосходящие эту границу. Число 3σ часто называют *предельной* погрешностью или *максимальной* погрешностью.

Границей абсолютной погрешности среднего вывода можно поэтому считать утроенную среднюю квадратическую его погрешность, т. е. число $3M$.

Итак,

$$x \approx L(\pm 3M). \tag{D}$$

Необходимо, однако, иметь в виду несколько условный характер последней формулы; мы не ручаемся за то, что L отличается от x не больше, чем на $3M$; мы утверждаем только, что так будет в громадном большинстве случаев.

Приведем пример обработки результатов многократных равноточных измерений.

Желая узнать расстояние между двумя точками, взятыми на полу комнаты, измерили это расстояние шесть раз посредством последовательного приложения линейки длиной 20 *см*. Получены такие результаты (в сантиметрах):

389,47; 389,54; 389,48; 389,35; 389,46; 389,56.

Если строгого учета погрешностей не требуется, мы просто сравниваем все эти результаты и замечаем, что цифры целых везде одинаковы, цифры же десятых немного колеблются (4—5—4—3—4—5). Поэтому берем среднее и округляем его до десятых. Полученное число 389,5 *см* и будет приближенно выражать искомое расстояние. Таким образом мы узнали это расстояние с точностью до десятых долей сантиметра. Можно также сказать, что мы выразили его приближенным числом с 4 значащими цифрами (приближенным четырехзначным числом). Последняя цифра числа 389,5, как всегда при вычислении без строгого учета погрешностей, не вполне надежна, но малая погрешность в ней значительно более вероятна, чем большая.

Если требуется более определенный ответ на вопрос о точности результата нашего измерения, вычисляем σ, M и $3M$ по формулам (B), (C), (D) §§ 46 и 47.

Вычисления располагаем по следующей схеме:

i	a_i	$L-a_i$	$(L-a_i)^2$
1	389,47	$+0,007$	0,000049
2	389,54	$-0,063$	3969
3	389,48	$-0,003$	9
4	389,35	$+0,127$	16129
5	389,46	$+0,017$	289
6	389,56	$-0,083$	6889
Сумма	2336,86	—	0,027334
Среднее	389,477	—	0,005467

$$\sigma = \sqrt{0,005467} = 0,0739,$$

$$M = \frac{0,0739}{\sqrt{6}} = 0,0302,$$

$$3M = 0,0906 < 0,10.$$

Искомое расстояние

389,48 (± 0,10).

Закончив второй столбец схемы, полезно произвести контроль, найдя отдельно сумму всех положительных разностей $L - a_i$ и сумму всех отрицательных. Согласно I свойству уклонения от среднего (§ 46) эти две суммы должны быть по абсолютной величине равны. В рассматриваемом примере сумма всех положительных уклонений $+0,151$, сумма всех отрицательных $-0,149$. Разница в 0,002 объясняется тем, что среднее (389,4766...) округлено нами до тысячных.

§ 48. Упрощенный способ учета погрешностей результатов измерений.

В школьной практике обыкновенно употребляется упрощенный способ оценки точности среднего арифметического результатов многократных равноточных измерений, а именно: вычисляют разности $L - a_i$ между средним арифметическим и результатами отдельных измерений, т. е. так называемые уклонения от среднего, и находят среднее арифметическое их абсолютных значений. Полученное число, близкое к средней линейной погрешности (§ 46), называют *средним уклонением от арифметического среднего*, или просто *средним уклонением*.

Это среднее уклонение и принимают за границу абсолютной погрешности среднего арифметического L.

Естественно, что вычисление границы абсолютной погрешности посредством этого упрощенного способа дает результаты, отличные от тех, какие получаются посредством средней квадратической погрешности, но разница обычно бывает очень незначительна. Так, возвращаясь к примеру § 47, находим среднее уклонение $0{,}300:6 = 0{,}050$. Следовательно, упрощенный способ дает для искомого расстояния число 389,477 ($\pm 0{,}050$), или, после отбрасывания явно ненадежных тысячных долей, 389,48 ($\pm 0{,}053$), или, наконец, 389,48 ($\pm 0{,}06$).

Упражнения.

1. Три группы школьников вычерчивали равносторонний треугольник со стороной $a = 122$ *мм* и измеряли его высоту. Результаты показаны ниже:

I группа:	105,3	105,8	105,6	105,4	105,25;
II „	105,5	105,7	105,5	105,6	105,9;
III „	105,6	105,6	105,8	105,7	105,6.

Найти средние результаты для каждой группы и сравнить их точность, вычисляя σ и M.

2. На клетчатой миллиметровой бумаге начертили 11 кругов радиусом 20 *мм*, затем сосчитали, сколько квадратных миллиметров находится внутри каждого круга (неполные квадратики, меньшие половины, отбрасывались, большие половины засчитывались как полные, приблизительно разделенные пополам засчитывались как половины). Были получены такие числа:

1266; 1240; 1255; 1252; 1281; 1270; 1258; 1264; 1236; 1280; 1256.

Найти их среднее и учесть его погрешность. Сравнить результаты с тем, что дает формула площади круга, считая радиус известным точно.

ГЛАВА VI.

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ В РЕЗУЛЬТАТАХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

§ 49. Способ границ.

В случае приближенных данных даже при отсутствии вычислительной погрешности результат вычислений не может быть точным, так как в него *переносятся* погрешности данных. Полная погрешность результата слагается вообще из двух частей: вычислительной погрешности, которую всегда можно сделать как угодно малой, и погрешности от неточности данных, уменьшить которую вычислитель может лишь в исключительных случаях, но всегда должен более или менее точно *учесть*.

К рассмотрению способов учета погрешностей результатов вычислений мы теперь и переходим. Мы ознакомимся с тремя способами учета погрешностей: *способом границ*, основанном на непосредственном вычислении низшей и высшей границ искомого; *способом границ погрешностей*, в котором вычисляется по известным границам погрешностей данных граница погрешности искомого; *способом подсчета цифр*, позволяющим по числу цифр в данных непосредственно заключать о числе тех цифр в искомых, которые стоит вычислять.

Хотя для вычислительной практики наибольшее значение имеет способ подсчета цифр, но мы начнем со способа *границ*, или, иначе, способа *двойных вычислений*, который дает наиболее строгий учет погрешностей и теоретическая сторона которого наиболее проста. Состоит он в том, что всякое действие над приближенными значениями производится дважды: один раз получается число, заведомо меньшее искомого точного результата; другой раз получается число, заведомо бо́льшее. Выполнив все требуемые вычисления, мы в конце концов получим низшую и высшую границы результата, и тогда в качестве вероятнейшего значения искомого возьмем полусумму этих границ или число к ней близкое и укажем соответствующую границу абсолютной погрешности, как это мы делали в § 38. Таким образом, особого учета вычислительной погрешности и погрешности от неточности данных делать не приходится: вычисление границ сразу дает полную погрешность результата.

Вся теоретическая сторона способа границ сводится к выяснению того, как изменяется результат того или другого действия при изменении его компонентов, т. е. чисел, участвующих в вычислении.

Будем рассматривать приближенные значения двух точных неизвестных чисел x_1 и x_2, границы которых предположим данными. Пусть

$$\text{НГ}x_1 = l_1, \quad \text{ВГ}x_1 = L_1, \quad \text{НГ}x_2 = l_2, \quad \text{ВГ}x_2 = L_2,$$

тогда

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & l_1 + l_2 < x_1 + x_2 < L_1 + L_2 \\ \text{II.} & l_1 - L_2 < x_1 - x_2 < L_1 - l_2 \end{array}\right\} \text{ при всех значениях чисел } l_1,\ l_2,\ L_1,\ L_2;$$

$$\text{III.}\quad l_1 l_2 < x_1 x_2 < L_1 L_2 \;\ldots\ldots\; \text{при } l_1 \geqslant 0,\ l_2 \geqslant 0;$$

$$\text{IV.}\quad \frac{l_1}{L_2} < \frac{x_1}{x_2} < \frac{L_1}{l_2} \;\ldots\ldots\ldots\; \text{»} \quad l_1 \geqslant 0,\ l_2 > 0;$$

$$\text{V.}\quad l_1^{l_2} < x_1^{x_2} < L_1^{L_2} \;\ldots\ldots\ldots\; \text{»} \quad l_1 \geqslant 1;$$

$$\text{VI.}\quad \sqrt[L_2]{l_1} < \sqrt[x_2]{x_1} < \sqrt[l_2]{L_1} \;\ldots\ldots\; \text{»} \quad l_1 \geqslant 1,\ l_2 > 0;$$

$$\text{VII.}\quad \lg_{L_2} l_1 < \lg_{x_2} x_1 < \lg_{l_2} L_1 \;\ldots\ldots\; \text{»} \quad l_1 \geqslant 0,\ l_2 > 1.$$

Все эти формулы можно объединить в следующие два правила, справедливые при тех ограничениях, какие выше наложены на данные границы:

Для результатов прямых действий НГ *составляется посредством* НГ *компонентов,* ВГ — *посредством их* ВГ.

Для результатов обратных действий НГ *составляется посредством* НГ *первого компонента и* ВГ — *второго,* ВГ — *посредством* ВГ *первого и* НГ — *второго.*

При этом надо условиться, что первым компонентом считается: при вычитании — уменьшаемое, при делении — делимое, при извлечении корня — подкоренное, при логарифмировании — число, логарифм которого берется.

Эти два правила можно изложить еще более сжато:

Границы результатов прямых действий получаются при нормальном порядке границ обоих компонентов; обратных — при нормальном порядке для первого компонента и обратном нормальному для второго.

Доказательство формул (I—VII) сводится к применению основных законов арифметических действий, и мы на нем не останавливаемся. Если в формуле, по которой производится вычисление, встречаются трансцендентные, например тригонометрические функции, то для получения соответствующих теорем о границах достаточно выяснить, как изменяется функция при возрастании аргумента. Так, для углов I четверти

$$\text{НГ} \sin x = \sin(\text{НГ}x), \quad \text{ВГ} \sin x = \sin(\text{ВГ}\, x);$$

$$\text{НГ} \cos x = \cos(\text{ВГ}\, x), \quad \text{ВГ} \cos x = \cos(\text{НГ}x).$$

При практическом осуществлении вычисления границ мы, прежде всего, встречаемся с вопросом о том, со сколькими значащими цифрами или сколькими десятичными знаками следует вычислять каждую границу. Главный интерес имеют только совпадающие („согласные“) цифры обеих границ, но, чтобы судить о точности полученного результата, необходимо вычислять и некоторые „несогласные“ цифры. При этом, остановившись на первой несогласной цифре каждой границы, мы рискуем получить совершенно неправильное представление о действительной разности обеих границ. Например, при НГ$x = 5{,}39996$ и ВГ$x = 5{,}40005$, ограничившись первой несогласной цифрой, мы имели бы НГ$x = 5{,}3$; ВГ$x = 5{,}5$, откуда $x = 5{,}4$ $(\pm 0{,}1)$. Между тем, взяв границы без округления, т. е. с 5 несогласными цифрами каждую, мы будем иметь $x = 5{,}40001$ $(\pm 0{,}00005)$. Вообще разности границ, равной 1—2 единицам разряда последней цифры, доверять рискованно, так как она почти целиком может происходить от округления границ. Как правило, *вычислять границы надо с таким расчетом, чтобы разность между ними выражалась двузначным числом* (т. е. числом с 2 значащими цифрами).

Так как границы вычисляются последовательно, сперва одна, потом другая, то полезно заранее хотя бы приблизительно наметить разряд, до которого следует вычислять каждую. Здесь большую помощь оказывают „правила подсчета цифр“, с которыми ознакомимся в § 55. Их применение значительно ускоряет работу по вычислению границ.

Если для получения искомого результата требуется выполнить несколько действий, то вычисление границ *промежуточных* результатов сопровождается *округлением*. При вычислении НГ употребляется *простое* округление, при вычислении ВГ — округление с *усилением*, так как НГ можно только уменьшать, ВГ — только увеличивать.

При записи вычислений удобно пользоваться схемой, содержащей два столбца: один для вычисления НГ, другой — ВГ. Выполняя какое-либо обратное действие, мы должны перевернуть нормальный порядок границ второго компонента. Чтобы напомнить об этом, полезно ставить на соответствующей строке какой-нибудь знак, например знак восклицания (!).

Вот образец схемы для вычисления границ при определении плотности d по формуле:

$$d = \frac{p - p_2}{p_1 - p_2},$$

где p — вес пикнометра с жидкостью, p_1 — с водой, p_2 — вес пустого пикнометра. Предполагая, что границы для p, p_1, p_2 известны, вычисляем границы для d по такой схеме:

	нг	вг
p		
p_1		
p_2		
(!) $p - p_2$		
(!) $p_1 - p_2$		
(!) $d = \frac{p - p_2}{p_1 - p_2}$		

Положим, измерения дали, что $34{,}69 < p < 34{,}70$ *г*; $39{,}81 < p_1 < 39{,}82$ *г*; $16{,}44 < p_2 < 16{,}45$ *г*. Производя выкладки, получаем следующее:

	нг	вг
p	34,69	34,70
p_1	39,81	39,82
p_2	16,44	16,45
(!) $p - p_2$	18,24	18,26
(!) $p_1 - p_2$	23,36	23,38
(!) $d = \frac{p - p_2}{p_1 - p_2}$	0,78015...	0,78167..

$$x = (0{,}7801 + 0{,}7817):2 = 0{,}7809$$
$$\Delta x = (0{,}7817 - 0{,}7801):2 = 0{,}0008$$
$$\underline{x \approx 0{,}7809\ (\pm 0{,}0008)}$$

Мы ручаемся, что при указанных границах для p, p_1, p_2 истинное значение числа $d = \frac{p - p_2}{p_1 - p_2}$ отличается от 0,7809 менее, чем на 0,0008, и мы, следовательно, выполнили вычисление d со строгим учетом погрешностей.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Вычислить объем ведра, имеющего форму усеченного конуса, если измерения, сделанные для определения поперечников нижнего и верхнего оснований (D и d) и высоты (h), дали следующие результаты (в сантиметрах):

$D = 29{,}3$	$d = 21{,}7$	$h = 27{,}5$
29,1	22,0	27,9
29,5	21,9	27,7
29,3	21,8	27,6
29,4	21,9	27,4

Считая все эти результаты равноточными, вычисляем средние и границы погрешностей этих средних упрощенным способом (§ 48). Получаем:

$$D \approx 29{,}32\ (\pm 0{,}11); \quad d \approx 21{,}86\ (\pm 0{,}09); \quad h \approx 27{,}62\ (\pm 0{,}15).$$

Искомый объем найдем по известной формуле гемоетрии:

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + Rr), \text{ или } V = \frac{1}{12}\pi h (D^2 + d^2 + Dd).$$

Так как в данных по 3 значащие цифры, все вычисление ведем с 4 значащими цифрами.

	нг	вг
D	29,21	29,43
d	21,77	21,95
D^2	853,2	868,2
d^2	473,9	481,9
Dd	635,9	646,0
$s = D^2 + d^2 + Dd$	1963,0 1963	1996,1 1997

	нг	вг
π	3,141	3,142
h	27,47	27,77
πh	86,28	87,23
$\frac{1}{12}\pi h$	7,190	7,270
$V = \frac{1}{12}\pi hs$	14 113	14 519

14 519
14 113
$\overline{28\,632}:2 = 14\,316$
406 : 2 = 203

$V \approx 14\,300\ (\pm 219)$ *см*³
или $V \approx 14{,}3\ (\pm 0{,}22)$ *л*

Пример 2. Зная стороны треугольника $a \approx 15{,}3\ (\pm 0{,}05)$ *м* и $b \approx 26{,}4\ (\pm 0{,}05)$ *м* и лежащий против стороны b угол $B \approx 37°15'\ (\pm 1')$, найти угол A, лежащий против стороны a.

Вычисление ведем по формуле $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$, пользуясь четырехзначной таблицей логарифмов и логарифмов синусов и пренебрегая погрешностями табличных значений. Чтобы показать, что эти погрешности в данном случае никакого практического значения не имеют, рядом проведено то же вычисление посредством семизначной таблицы:

	нг	вг	нг	вг
a	15,25	15,35		
b	26,35	26,45		
B	37°14′	37°16′		
$\lg a$	1,1833	1,1861	1,1382698	1,1861084
$\lg \sin B$	$\overline{1},7818$	$\overline{1},7821$	$\overline{1},7818002$	$\overline{1},7821324$
$\lg a \sin B$	0,9651	0,9682	0,9650700	0,9682408
$\lg b$	1,4208	1,4224	1,4207806	1,4224257
(!) $\lg \sin A = \lg \frac{a \sin B}{b}$	$\overline{1},5427$	$\overline{1},5474$	$\overline{1},5426443$	$\overline{1},5474602$
A	20°25′	20°39′	20°25′0″	20°39′20″

Вычисление по четырехзначной таблице приводит, таким образом, к ответу 20°32′ ($\pm$ 7′), а по семизначной — к ответу 20°32′10″ ($\pm$ 7′10″), или, по округлении, 20°32′ ($\pm$ 7′20″), т. е. практически к тому же.

Пример 3. Требуется найти значение y по формуле:

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{x+8}} \tag{A}$$

при $x = 1{,}1$ (точно), пользуясь таблицей квадратных корней с тремя десятичными знаками.

Подставляя вместо x данное его значение, получаем:

$$y=\frac{0{,}1}{\sqrt{9{,}2}-\sqrt{9{,}1}}$$

и берем из таблицы $\sqrt{9{,}2}\approx 3{,}033$, $\sqrt{9{,}1}\approx 3{,}017$ (все цифры этих двух приближенных значений точны). Выполняя вычитание и деление, устанавливаем, что НГ$y=5{,}88$, ВГ$y=6{,}67$, откуда $y=6{,}3$ ($\pm 0{,}5$).

Итак, точность результата оказалась весьма невысокой: в нем всего 2 значащие цифры, да и то вторая очень сомнительна; граница относительной его погрешности около $0{,}5\cdot 100:6{,}3=8\%$. Здесь мы встречаемся с явлением так называемой „потери точности при вычитании“: *при вычитании двух мало разнящихся друг от друга чисел результат получается с относительной погрешностью, много большей, чем у каждого из данных (уменьшаемого и вычитаемого) в отдельности.*

Иногда эту потерю точности удается устранить и получить результат с большей точностью, не прибегая к увеличению точности данных. В настоящем случае для этой цели достаточно преобразовать формулу (A) так, чтобы иррациональность в знаменателе исчезла. Умножая числитель и знаменатель правой части на сумму корней, разность которых стоит в знаменателе, получаем:

$$y=\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8}=\sqrt{9{,}2}+\sqrt{9{,}1}.$$

Теперь, пользуясь теми же приближенными значениями корней, находим, что НГ$y=6{,}049$, ВГ$y=6{,}051$, откуда $y\approx 6{,}050$ ($\pm 0{,}001$). Итак, вместо 2 значащих цифр, из которых вторая была сомнительна, мы имеем теперь в результате 4 цифры, из которых последняя почти точна. Граница относительной погрешности результата с 8% уменьшилась до $0{,}02\%$, т. е. в 400 раз.

Пример 4. Вычислить $\lg 1{,}5$, пользуясь следующим бесконечным рядом, выводимым в курсе „Математического анализа“:

$$\lg\frac{1+x}{1-x}=2\mathrm{M}\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9+\ldots\right),$$

где $\mathrm{M}=0{,}4342944\ldots$, причем ограничиться лишь первыми тремя его членами.

Приравняем, прежде всего, дробь $\frac{1+x}{1-x}$ данному числу 1,5 и найдем x. Оказывается, что $x=0{,}2$.

Далее найдем границы *остаточного члена* ρ, равного совокупности всех отброшенных членов бесконечного ряда, а именно, обозначая сумму трех первых членов через s:

$$\rho=\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9+\frac{1}{11}x^{11}+\ldots,\qquad \lg\frac{1+x}{1-x}=2\mathrm{M}(s+\rho)$$

Так как $x>0$, то $\rho>x^7:7$. С другой стороны, заменяя коэфициенты всех членов выражения для ρ, начиная со второго, через $1:7$, мы их увеличиваем, а потому

$$\rho<\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{7}x^9+\frac{1}{7}x^{11}+\ldots$$

Имея теперь в правой части неравенства геометрическую прогрессию со знаменателем $x^2 < 1$, мы воспользуемся формулой для предела суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и получим высшую границу для ρ:

$$\rho < \frac{x^7:7}{1-x^2} = \frac{x^7}{7(1-x^2)}.$$

Итак

$$\text{НГ}\rho = x^7:7, \quad \text{ВГ}\rho = \frac{x^7}{7(1-x^2)}.$$

Теперь переходим к вычислению искомого логарифма:

	НГ	ВГ
x	0,200 0000	0,200 0000
$x^3:3$	2 6666	2 6667
$x^5:5$	640	640
s	0,202 7306	0,202 7307
ρ	18	19
$s+\rho$	0,202 7324	0,202 7326
M	0,434 2944	0,434 2945
M $(s+\rho)$	0,088 0454	0,088 0457
2M $(s+\rho)$	0,176 0908	0,176 0914

Вспомогательные вычисления

x	0,2
x^2	0,04
x^3	0,008
$x^2 \cdot x^3 = x^5$	0,00032
$x^2 \cdot x^5 = x^7$	0,0000128
$x^7:7$	0,00000182...
$1-x^2$	0,96
$\frac{x^7}{7(1-x^2)}$	0,00000189...

$\lg 1{,}5 \approx 0{,}1760911 \ (\pm 0{,}0000003)$
$\lg 1{,}5 \approx 0{,}176091 \ \ (\pm 0{,}0000004)$

Таким образом наше вычисление дало семизначный логарифм с сомнительной последней цифрой, шестизначный — со всеми цифрами точными. Табличное значение семизначного логарифма 1,5 есть 0,1760913 и действительно заключается в указанных нами границах.

§ 50. Вычисления с наперед назначенной точностью результата.

До сих пор мы применяли вычисление границ для учета погрешности результатов вычислений по известным границам погрешностей данных. Переходим теперь к разысканию наибольших допустимых погрешностей данных при условии, что граница погрешности результата назначена заранее. Предполагается, что границы погрешностей данных могут быть произвольно (или, по крайней мере, в некоторых пределах) уменьшаемы.

Способ границ не дает прямого решения этой задачи. Приходится *пробовать* компоненты, взятые с тем или иным числом десятичных знаков или значащих цифр, вычисляя каждый раз границы погрешности результата изложенным выше способом. Вычисление границ показывает либо достаточность той точности, с какой взяты компоненты, либо недостаточность ее, либо ее избыточность. Во втором случае вычисление границ следует повторить, взяв компоненты с большей точностью. В третьем случае в повторении вычислений, конечно, надобности нет.

Большую помощь при такого рода пробах оказывают „правила подсчета цифр", о которых будет речь в § 55. Пока заметим только то обстоятельство, что для получения суммы или разности с определенным числом десятичных знаков надо начинать пробы с таких значений компонентов, при которых они имеют 1 десятичным знаком больше, а для получения произведения, частного, степени и корня — с таких значений компонентов, при которых они имеют 1 значащей цифрой более, чем требуется в результате.

Чтобы несколько примирить читателя со столь несовершенным способом, укажем, что в одном очень важном случае, а именно, когда требуется получить приближенное значение, все цифры которого точны, т. е. когда граница абсолютной погрешности результата не должна превосходить полуединицы последнего сохраненного разряда, *никакой способ* решения нашей задачи не дает сразу вполне надежных результатов. Всегда необходима поверка, и всегда может оказаться, что принятой на основании сделанного расчета точности данных недостаточно для получения требуемой точности результата. Причиной этого является неизбежное округление результата, вычисляемого всегда с одной или несколькими запасными цифрами. Погрешность от округления может приближаться к полуединице последнего разряда, а так как эта погрешность вместе с накопившейся вычислительной погрешностью и погрешностью от неточности данных тоже не должна превышать, согласно заданию, полуединицы этого же разряда, то заранее сказать, какая погрешность от неточности данных является допустимой, совершенно невозможно.

Переходим к примерам.

Пример 1. Найти с 3 десятичными знаками сумму

$$s=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}.$$

Берем каждое слагаемое с $3+1=4$ десятичными знаками и вычисляем границы. Оказывается, что НГ$s=0{,}5670$, ВГ$s=0{,}5673$, откуда $s=0{,}567\,(+\,0{,}0003)$. Требуемая точность достигнута. Если бы мы взяли в компонентах только по 3 десятичных знака, то результатом было бы НГ$s=0{,}565$, ВГ$s=0{,}568$, и третий десятичный знак результата $s=0{,}566\,(\pm\,0{,}0015)$ был бы сомнителен.

Пример 2. Найти произведение $p=\sqrt{91}\cdot\sqrt{5}$ с 3 точными значащими цифрами.

Попробуем взять каждый сомножитель с $3+1=4$ точными значащими цифрами, т. е., принимая во внимание, что целая часть каждого сомножителя выражается однозначным числом с 3 десятичными знаками:

$$\text{НГ}\sqrt{91}=9{,}539,\quad \text{ВГ}\sqrt{91}=9{,}540,\quad \text{НГ}\sqrt{5}=2{,}236,\quad \text{ВГ}\sqrt{5}=2{,}237,$$

что дает

$$\text{НГ}p=21{,}329,\quad \text{ВГ}p=21{,}341,$$

следовательно

$$p\approx 21{,}335\,(\pm\,0{,}006),$$

или, окончательно

$$p\approx 21{,}3\,(+\,0{,}05).$$

Пример 3. Вычислить с 4 точными десятичными знаками $\sin 72^\circ$ по формуле: $\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Напишем вместо $2\sqrt{5}$ для устранения лишнего умножения $\sqrt{20}$ и будем вести все вычисления с 5 десятичными знаками:

	НГ	ВГ
$\sqrt{20}$	4,47213	4,47214
$10+\sqrt{20}$	14,47213	14,47214
$\sqrt{10+\sqrt{20}}$	3,80422	3,80423
$\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+\sqrt{20}}$	0,95105	0,95106

$\sin 72^\circ \approx 0{,}9511\ (-0{,}00005)$

Требуемая точность достигнута.

Чтобы иметь пример более сложного вычисления с наперед заданной точностью, найдем число π с семью точными десятичными знаками, воспользовавшись формулой:

$$0{,}25\,\pi = 4\,\mathrm{arctg}\,0{,}2 - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right). \tag{A}$$

Формулу эту не трудно вывести. Обозначая $\mathrm{arctg}\,0{,}2$ через x, $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}$ через y, имеем: $\mathrm{tg}\,x = 0{,}2$, $\mathrm{tg}\,y = \frac{1}{239}$, причем x и y — дуги первой четверти и должны быть выражены в радианах. Применяя известные формулы для тангенса двойной дуги и для тангенса разности двух дуг, последовательно получаем:

$$\mathrm{tg}\,2x = \frac{5}{12}, \qquad \mathrm{tg}\,4x = \frac{120}{119}, \qquad \mathrm{tg}\,(4x-y) = \frac{120\cdot 239 - 119}{119\cdot 239 + 120} = 1.$$

Общий вид всех дуг, имеющих тангенс 1, есть $0{,}25\pi + k\pi$, где k — произвольное целое. Вычисляя $4x - y$ посредством таблицы натуральных тангенсов, получаем значение, близкое к 45°, или $0{,}25\pi$, откуда заключаем, что $k=0$. Тем самым формула (А) доказана. Для вычисления $\mathrm{arctg}\,t$ удобнее всего воспользоваться бесконечным рядом:

$$\mathrm{arctg}\,t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \ldots$$

В курсе „Математического анализа" доказывается, что, вычислив несколько первых членов этого ряда и взяв их сумму, мы получим значение $\mathrm{arctg}\,t$ с погрешностью, меньшей первого из отброшенных членов и одного с ним знака. Так, останавливаясь на втором члене, имеем равенство: $\mathrm{arctg}\,t = s + \rho$, где $s = t - \frac{1}{3}t^3$, $0 < \rho < \frac{1}{5}x^5$. Останавливаясь на третьем члене, имеем уже $\mathrm{arctg}\,t = s - \rho$, где $s = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$; $0 < \rho < \frac{1}{7}t^7$.

Ввиду сложности вычисления ведем его уже не с одной, а с тремя лишними (запасными) цифрами, т. е. с $7+3=10$ десятичными знаками:

Вычисление $x = \mathrm{arctg}\, 0{,}2$.

t	0,2 000 0000 0
t^2	400 0000 00
t^3	80 0000 00
t^5	3 2000 00
t^7	1280 00
t^9	51 20
t^{11}	2 04...
t^{13}	8...

$$s' = t + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{9}t^9$$

$$s'' = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{11}t^{11}$$

$$\mathrm{arctg}\, t = s' - s'' + \rho$$

$$0 < \rho < \frac{1}{13}t^{13}$$

	НГ	ВГ
t	0,2000 0000 00	0,2000 0000 00
$\frac{1}{5}t^5$	6400 00	6400 00
$\frac{1}{9}t^9$	5 69	5 70
s'	2000 6405 69	2000 6405 70
$\frac{1}{3}t^3$	26 6666 66	26 6666 67
$\frac{1}{7}t^7$	182 85	182 86
$\frac{1}{11}t^{11}$	18	19
s''	26 6849 69	26 6849 72
(!) $s' - s''$	197 3955 97	1973 9556 01
ρ	0	1
$x = \mathrm{arctg}\, t$	0,1973 9555 97	0,1973 9556 02

Вычисление $y = \mathrm{arctg}\, \frac{1}{239}$.

t	0,0041 8410 04...
t^2	1750 66...
t^3	7 32...
t^4	3...
t^5	0...

$$s' = t, \quad s'' = \frac{1}{3}t^3$$

$$\mathrm{arctg}\, t = s' - s'' + \rho$$

$$0 < \rho < \frac{1}{5}t^5$$

	НГ	ВГ
t	0,0041 8410 04	0,0041 8410 05
$\frac{1}{3}t^3$	2 44	2 45
(!) $t - \frac{1}{3}t^3$	41 8407 59	41 8407 61
ρ	0	1
$y = \mathrm{arctg}\, t$	0,0041 8407 59	0,0041 8407 72

Вычисление π.

	НГ	ВГ
x	0,1973 9555 97	0,1973 9556 02
$4x$	7895 8223 88	7895 8224 08
y	41 8407 59	41 8407 62
(!) $4x - y$	7853 9816 26	7853 9816 69
$\pi = 4(4x - y)$	3,1415 9265 04	3,1415 9266 76

$$\begin{array}{r} 676 \\ 504 \\ \hline 1\,180:2=590 \\ 172:2=\ \ 86 \\ \pi \approx 3{,}1415\,9265\,90\ (\pm\,0{,}00000000\,86) \\ \pi \approx 3{,}1415\,927\ (-\,0{,}0000\,000\,5) \end{array}$$

Семь точных десятичных знаков мы получили. Сравнивая найденные результаты с более точным значением π, приведенным в § 2, замечаем, что и восьмой десятичный знак найденного значения (до его округления) был точен.

При вычислении $\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ последовательные степени t удобнее всего находить делением на 239. Работу эту весьма облегчает применение легко составляемой таблички произведений числа 239 на числа от 1 до 9:

$239\cdot 1 = 239$	$239\cdot 6 = 1434$
$2 = 478$	$7 = 1673$
$3 = 717$	$8 = 1912$
$4 = 956$	$9 = 2151$
$5 = 1195$	$10 = 2390$

В заключение одно замечание. Находя НГ и ВГ способом, указанным в § 49, мы всегда получим числа, между которыми содержится истинное значение искомой величины. Однако в некоторых случаях получаемые этим способом границы можно бывает заменить другими, более тесными. Так, в примере на определение плотности посредством пикнометра по формуле $d=\frac{p-p_2}{p_1-p_2}$, где p_2 встречается и в числителе и в знаменателе, мы при вычислении НГd брали в числителе ВГp_2, а в знаменателе НГp_2. Между тем, как показывает выражение для производной от d по p_2 $\frac{\partial d}{\partial p_2}=\frac{p-p_1}{(p_1-p_2)^2}$, в случае $p<p_1$ (испытуемая жидкость легче воды) величина d растет при убывании p_2, а потому при вычислении НГd можно взять и в числителе и в знаменателе ВГp_2, при вычислении ВГd — НГp_2. Итак, ведем вычисления по формулам:

$$\text{НГ}d=\frac{\text{НГ}p-\text{ВГ}p_2}{\text{ВГ}p_1-\text{ВГ}p_2};\quad \text{ВГ}d=\frac{\text{ВГ}p-\text{НГ}p_2}{\text{НГ}p_1-\text{НГ}p_2}$$

и получаем

$$0{,}78048<d<0{,}78134,$$

откуда

$$d\approx 0{,}78091\ (\pm\,0{,}00043),$$

или

$$d\approx 0{,}7809\ (\pm\,0{,}0005),$$

т. е., примерно, вдвое меньшую границу погрешности, чем в § 49.

Подобное сближение границ возможно лишь в тех случаях, когда одно и то же приближенное данное фигурирует в формуле более одного раза.

§ 51. Способ границ погрешностей.

Указание низшей и высшей границ числа совершенно равноценно указанию приближенного его значения и границы погрешности (абсолютной или относительной) этого последнего. Является вопрос: нельзя

ли вместо вычисления порознь НГ и ВГ искомого результата ограничиться лишь вычислением приближенного его значения, но отдельно установить границу погрешности по известным границам погрешностей данных? Оказывается, что это и возможно и выгодно. Вычисление границ погрешностей результатов вычислений осуществляется довольно просто благодаря тому, что погрешности данных почти всегда бывают *числами весьма малыми* (в смысле § 20) по сравнению с самыми данными. Это значит, что погрешности данных настолько невелики, что их квадратами, кубами, произведениями и т. д. — при избранной точности вычисления — можно пренебречь.

Положим, мы вычислили значение $f(x_0, y_0)$ функции двух аргументов $f(x, y)$ по двум данным приближенным значениям x_0 и y_0 этих аргументов и знаем границы абсолютных погрешностей этих последних Δx и Δy. Как велика граница абсолютной погрешности числа $f(x_0, y_0)$? Обозначив буквами α и β неизвестные нам истинные погрешности данных чисел x_0 и y_0, т. е. полагая $x = x_0 + \alpha$, $y = y_0 + \beta$, причем $|\alpha| < \Delta x$, $|\beta| < \Delta y$, мы можем формулировать нашу задачу так: указать наибольшее (по абсолютной величине) значение разности между точным значением функции $f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$, которого мы не знаем, и известным нам приближенным ее значением $f(x_0, y_0)$, т. е. наибольшее (по абсолютной величине) значение *приращения* функции

$$f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - f(x_0, y_0)$$

при условии, что $|\alpha| < \Delta x$, $|\beta| < \Delta y$.

Как известно из курса „Анализа“, приращение

$$f(x_0 + \alpha, \quad y_0 + \beta) - f(x_0, y_0)$$

состоит из двух частей: во-первых, из *главной* части, которая называется *полным диференциалом* функции и содержит члены, пропорциональные α и β; ее вычисляют по формуле $df = \frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta$ (после диференцирования x и y заменяются через x_0 и y_0); во-вторых, из членов, пропорциональных вторым и выше степеням чисел α и β и их произведениям; если Δx и Δy — числа весьма малые, что мы и будем в дальнейшем предполагать, то числа α и β тоже весьма малые, и всеми этими членами можно пренебречь. Приходим к заключению, что

$$f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta.$$

Пользуясь известной теоремой о модуле суммы („модуль суммы не больше суммы модулей слагаемых“) и замечая, что модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, преобразуем полученное равенство заменой $|\alpha|$ и $|\beta|$ через Δx и Δy; имеем:

$$\begin{aligned} |f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - f(x_0, y_0)| &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot |\alpha| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot |\beta|; \\ &< \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y. \end{aligned}$$

Число $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y$ больше (по модулю) всех возможных при данных условиях значений разности между неизвестным точным значением функции $f(x_0+\alpha, y_0+\beta)$ и известным приближенным ее значением, а потому может быть принято в качестве границы абсолютной погрешности числа $f(x_0, y_0)$. Заключение это легко обобщается на функцию любого числа аргументов, и мы имеем формулу:

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0, \ldots) = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot \Delta z + \ldots, \qquad \text{(A)}$$

по которой и вычисляется граница абсолютной погрешности найденного значения функции $f(x_0, y_0, z_0 \ldots,)$. Отдельные члены правой части указывают ту долю общей погрешности, которая обусловлена погрешностями отдельных данных.

В качестве примера рассмотрим задачу.

Вычислить сторону t треугольника, зная две другие его стороны $x \approx 25{,}0\,(\pm 0{,}2)$ мм и $y \approx 30{,}0\,(\pm 0{,}2)$ мм и противолежащий неизвестной стороне угол $z \approx 60°{,}0\,(\pm 0°{,}5)$.

Пользуясь формулой $t^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos z$ и применяя четырехзначные таблицы, находим приближенное значение искомой стороны $t \approx 27{,}84$. Диференцирование дает

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{x - y\cos z}{t}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{y - x\cos z}{t}, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{xy\sin z}{t}$$

и для границы абсолютной погрешности найденного приближенного значения t получаем:

$$\Delta t = 0{,}359 \cdot 0{,}2 + 0{,}628 \cdot 0{,}2 + 23{,}3 \cdot 0{,}00873 = \\ = 0{,}072 + 0{,}126 + 0{,}204 = 0{,}402.$$

Здесь Δz должно быть выражено в радианах (0,00873). Окончательно имеем

$$t \approx 27{,}84\,(\pm 0{,}40) \text{ мм}.$$

Тот же результат получится и при применении способа границ, если принять во внимание замечание конца § 50: искомая величина u растет с возрастанием x и y, как показывают выражения для производных от u по x и по y, ввиду того, что $x > y\cos z$; $y > x\cos z$, а потому при вычислении НГt берем НГx и НГy, а при вычислении ВГt — ВГx и ВГy.

Формула (А) легко позволяет доказать следующие теоремы, постоянно применяемые на практике (теоремы эти можно доказать и вполне элементарно, но при этом потребуется гораздо больше выкладок).

Теорема 1. *Граница абсолютной погрешности алгебраической суммы равна арифметической сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых.*

Теорема 2. *Граница относительной погрешности произведения равна сумме границ относительных погрешностей сомножителей.*

Теорема 3. *Граница относительной погрешности частного равна сумме границ относительных погрешностей делимого и делителя.*

Следствие 1. *Граница относительной погрешности результата любого числа действий II ступени равна сумме границ относительных погрешностей всех сомножителей и делителей.*

Следствие 2. *При умножении или делении приближенного числа на точное граница его относительной погрешности не изменяется.*

Теорема 4. Граница относительной погрешности степени с произвольным положительным показателем равна произведению границы относительной погрешности возводимого в степень числа на показатель степени.

Следствие. *Граница относительной погрешности корня равна частному от деления границы относительной погрешности подкоренного на показатель корня.*

Ограничимся доказательством одной лишь теоремы 3. Доказательства остальных проводятся аналогично.

Берем $f(x, y) = x:y$ и находим частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1:y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x:y^2, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 1:y, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = x:y^2$$

(предполагается, что $x > 0$; $y > 0$).

Формула (A) дает:

$$\Delta(x:y) = (1:y)\Delta x + (x:y^2)\Delta y.$$

Делим обе части на частное $x:y$ и после упрощений получаем:

$$\frac{\Delta(x:y)}{x:y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y},$$

чем доказывается теорема 3.

Покажем на нескольких примерах применение этих теорем.

Пример 1. Вычислить $d = \frac{p - p_2}{p_1 - p_2}$, если $p \approx 34{,}695\ (\pm 0{,}005)$; $p_1 \approx \approx 39{,}815\ (\pm 0{,}005)$; $p_2 \approx 16{,}445\ (\pm 0{,}005)$, применяя учет погрешностей по способу границ погрешностей.

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta(p - p_2)}{p - p_2} + \frac{\Delta(p_1 - p_2)}{p_1 - p_2}; \qquad \text{(по теореме 3)}$$

$$= \frac{\Delta p + \Delta p_2}{p - p_2} + \frac{\Delta p_1 + \Delta p_2}{p_1 - p_2}; \qquad \text{(по теореме 1)}$$

$$= \frac{0{,}005 + 0{,}005}{34{,}695 - 16{,}445} + \frac{0{,}005 + 0{,}005}{39{,}815 - 16{,}445};$$

$$= \frac{0{,}01}{18{,}25} + \frac{0{,}01}{23{,}37} = 0{,}0005480 + 0{,}0004279;$$

$$= 0{,}0009759.$$

Но

$$d = \frac{34{,}695 - 16{,}445}{39{,}815 - 16{,}445} = \frac{18{,}25}{23{,}37} = 0{,}780916\ldots$$

и

$$\Delta d = d \cdot 0{,}0009759 = 0{,}000762 \approx 0{,}0008.$$

Окончательно $d \approx 0{,}7809\ (\pm 0{,}0008)$ — результат, совпадающий с полученным в § 49 по способу границ. Как мы видели (см. замечание в конце § 50), более тонкое исследование вопроса позволяет понизить границу погрешности до 0,0005 (для этого достаточно применить формулу (A) непосредственно).

Пример 2. Вычислить объем ведра, имеющего форму усеченного конуса, если известны поперечники его оснований $D \approx 29{,}32\ (\pm 0{,}11)$ *см*; $d \approx 21{,}86\ (\pm 0{,}09)$ *см* и высота $h \approx 27{,}62\ (\pm 0{,}15)$ *см*.

Применяя формулы

$$V=\frac{1}{12}\pi hs; \quad s=D^2+d^2+Dd.$$

Здесь

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta\pi}{\pi}+\frac{\Delta h}{h}+\frac{\Delta s}{s}; \qquad \text{(по теореме 2)}$$

$$\Delta s=\Delta(D^2)+\Delta(d^2)+\Delta(Dd); \qquad \text{(по теореме 1)}$$

$$\frac{\Delta(D^2)}{D^2}=2\cdot\frac{\Delta D}{D}, \quad \frac{\Delta(d^2)}{d^2}=2\cdot\frac{\Delta d}{d}, \quad \frac{\Delta(Dd)}{Dd}=\frac{\Delta D}{D}+\frac{\Delta d}{d};$$

(по теоремам 4 и 2)

$$\Delta(D^2)=2D\Delta D, \quad \Delta(d^2)=2d\Delta d, \quad \Delta(Dd)=d\Delta D+D\Delta d$$

(из формул предыдущей строки).

Вычисление Δs

D	29,32	d	21,86	$D\Delta d$	2,639	$\Delta(D^2)$	6,45
ΔD	0,11	Δd	0,09	$d\Delta D$	2,400	$\Delta(d^2)$	3,93
$D\Delta D$	3,225	$d\Delta d$	1,967	$\Delta(Dd)$	5,04	$\Delta(Dd)$	5,04
$2D\Delta D$	6,45	$2d\Delta d$	3,93			Δs	15,42

Вычисление s.

D^2	859,7
d^2	477,8
Dd	640,9
s	1978,4

Вычисление V.

$\lg\pi$	0,4971
$\lg h$	1,4412
$\lg s$	3,2963
$-\lg 12$	2,9208
$\lg V$	4,1554
V	14,300 $см^3$ = 14,3 $л$

Вычисление ΔV.

$\Delta\pi$	0,0005
Δh	0,15
Δs	15,42

$\Delta\pi:\pi$	0,02 %
$\Delta h:h$	0,56 %
$\Delta s:s$	0,78 %
$\Delta V:V$	1,36 %

$$\Delta V=\frac{\Delta V}{V}\cdot V=1{,}36\,\% \text{ от } 14{,}3$$

$$=0{,}195\approx 0{,}2 \text{ л}$$

$$V\approx 14{,}3\,(\pm 0{,}2) \text{ л}$$

Получился результат, весьма близкий к тому, который дало применение способа границ в § 49.

Пример 3. Найти среднюю плотность d дубового вала, имеющего форму круглого цилиндра, если радиус окружности его основания $r\approx 12{,}3\,(\pm 0{,}05)$ *см*, а высота (длина вала) $h\approx 43{,}8\,(\pm 0{,}1)$ *см*, вес же вала $P\approx 17{,}1\,(\pm 0{,}05)$ *кг*.

Искомое d получим по формулам: $d=\frac{P}{V}$; $V=\pi r^2 h$, где P должно быть выражено в граммах. Границу относительной погрешности d вычисляем по теоремам 2, 3, 4:

$$\frac{\Delta d}{d}=\frac{\Delta P}{P}+\frac{\Delta V}{V}; \quad \frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta\pi}{\pi}+\frac{2\Delta r}{r}+\frac{\Delta h}{h}.$$

Вычисление V и d проведем посредством таблицы четырехзначных логарифмов. Значение π возьмем 3,142 ($\pm$ 0,0005).

$\lg r$	1,0899
$2\lg r$	2,1798
$\lg \pi$	0,4971
$\lg h$	1,6415
$\lg V$	4,3184
$\lg P$	4,2330
$-\lg V$	$\bar{5}$,6816
$\lg d$	$\bar{1}$,9146
d	0,8216

$\frac{\Delta r}{r}$	0,407 %
$\frac{2\Delta r}{r}$	0,814 %
$\frac{\Delta \pi}{\pi}$	0,016 %
$\frac{\Delta h}{h}$	0,229 %
$\frac{\Delta P}{P}$	0,293 %
$\frac{\Delta d}{d}$	1,352 %

$$\Delta d = \frac{\Delta d}{d}\cdot d = 0{,}0111$$

$$d \approx 0{,}8216\ (\pm 0{,}0111)$$

$$d \approx 0{,}82\ (\pm 0{,}02)$$

Переходим теперь к задачам на вычисление с наперед указанной точностью результата и возьмем сперва простейший случай, а именно, тот, когда формула, служащая для вычисления результата, точность которого назначена заранее, содержит лишь *одно* приближенное число. Пользуясь теоремами 1—4, выражаем зависимость между границей погрешности (абсолютной или относительной) результата и границей погрешности этого единственного приближенного данного. После этого остается решить полученное уравнение относительно границы погрешности приближенного данного. Эту границу вычисляем *по недостатку*. Действительно, ее можно только уменьшать, так как если некоторое ее значение гарантирует требуемую точность результата, то всякое меньшее значение и подавно обеспечит эту точность, но большее значение может ее и не дать.

Здесь, как и вообще при вычислениях по способу границ погрешностей, учитываем только погрешности от неточности данных.

Пример 4. Со сколькими десятичными знаками надо взять значение π, чтобы найти длину окружности радиуса $r = 149{,}5\cdot 10^6$ *км* с погрешностью, не превышающей 0,1 *мм*? Предполагается, что радиус круга известен точно.

Из формулы $C = 2\pi r$ находим, что $\Delta C = 2r\Delta\pi$ (см. следствие 2 теоремы 3), откуда $\Delta\pi = \frac{\Delta C}{2r}$. Здесь $\Delta C = 0{,}1$ *мм* $= 10^{-2}$ *см* $= 10^{-7}$ *км*; $r = 149{,}5\cdot 10^6$ *км*. Поэтому $\Delta\pi = \frac{10^{-7}}{2\cdot 149{,}5\cdot 10^6} = \frac{1}{299}\cdot 10^{-13} = 3{,}3\ldots 10^{-16}$. Следовательно, взяв $\Delta\pi = 0{,}5\cdot 10^{-16}$, т. е. взяв значение π с 16 точными десятичными знаками, мы нужную точность результата вполне обеспечиваем.

Переходим к общему случаю, когда формула, по которой вычисляется число, точность которого назначена заранее, содержит несколько приближенных чисел. Выразив зависимость между данной границей погрешности результата и искомыми границами погрешностей этих приближенных чисел, мы получаем одно уравнение со многими неизвестными. Чтобы сделать задачу определенной, вводят дополнительные условия: либо требуют равенства границ относительных погрешностей приближенных чисел, либо равенства границ их абсолютных погрешностей, либо, напротив, считаясь с различной точностью измерительных приборов, или с удобством получения лишних десятичных знаков в различных приближенных числах, назначают для некоторых приближенных чисел границы погрешностей, превосходящие в определенное число раз границы погрешностей других чисел. Детали применения этого способа выясняются при решении примеров.

Пример 5. С какой точностью надо взять вес p (в граммах) и объем V (в кубических сантиметрах) куска свинца, чтобы получить его плотность d по формуле $d=\frac{p}{V}$ с погрешностью, не большей полупроцента?

На основании теоремы 3 пишем:

$$\frac{\Delta d}{d}=\frac{\Delta p}{p}+\frac{\Delta V}{V}$$

Таким образом, сумма границ относительных погрешностей чисел p и V должна быть, согласно заданию, не больше $0{,}5\,\%$. Так как при взвешивании большая точность достигается гораздо легче, чем при измерении объема, то отнесем на погрешность в определении веса только десятую часть этой погрешности, т. е. $0{,}05\,\%$, а остальные $0{,}45\,\%$ отнесем на погрешность в определении объема. Если вес взятого куска свинца, определенный грубо-приближенно, оказывается близким к 400 *г*, а его объем — близким к 40 *см*³, то вес надо определить с погрешностью, не превосходящей $0{,}05\,\%$ от 400, т. е. 0,2 *г*, а объем — с погрешностью, не превосходящей 0,18 *см*³. Имея в своем распоряжении весы, чувствующие 0,2 *г* при нагрузке в 400 *г*, и прибор для измерения объема, позволяющий делать отсчеты до 0,1 *см*³, мы достигнем требуемой точности в определении искомой плотности.

Пример 6. Требуется найти объем V цилиндра, грубо-приближенные размеры которого таковы: поперечник основания $d\approx 3$ *см*, высота $h\approx 16$ *см*. С какой точностью надо произвести измерение d и h, а также с какой точностью следует взять число π, чтобы получить объем цилиндра с погрешностью не выше $1\,\%$?

Формула объема круглого цилиндра $V=\pi r^2h=0{,}25\pi d^2h$ дает следующую зависимость между границами относительных погрешностей чисел V, π, d, h:

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta\pi}{\pi}+\frac{2\Delta d}{d}+\frac{\Delta h}{h}.$$

Так как π легко взять с какой угодно точностью, положим $\frac{\Delta\pi}{\pi}\leq 0{,}01\,\%$, что будет обеспечено, если взять $\pi=3{,}1416\ (-0{,}00001)$ $\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\text{ даже меньше }\frac{1}{3}\cdot 0{,}001\,\%\right)$. Если остальную часть погрешности V, т. е. $0{,}99\,\%$, распределить поровну на оба остающихся члена, т. е. положить $\frac{2\Delta d}{d}=0{,}495\,\%$ и $\frac{\Delta h}{h}=0{,}495\,\%$, то d придется измерить с погрешностью, не превосходящей $0{,}25\,\%$, что при $d\approx 3$ *см* соответствует абсолютной погрешности, не превышающей 0,075 *мм*. Такую точность обеспечить не так просто. Поэтому попробуем назначить одинаковые границы относительных погрешностей для d и h, т. е. положить $\frac{\Delta d}{d}=\frac{\Delta h}{h}$. Тогда $\frac{\Delta d}{d}=0{,}33\,\%$, откуда $\Delta d=0{,}1$ *мм*, и $\frac{\Delta h}{h}=0{,}33\,\%$, откуда $\Delta h=0{,}5$ *мм*. Точность в определении поперечника до 0,1 *мм* получится при употреблении штангенциркуля, высоту же цилиндра можно измерить просто миллиметровой линейкой.

Предположим, что измерения дали

$$d \approx 3{,}17\,(\pm 0{,}01)\ \text{см};\quad h \approx 15{,}85\,(\pm 0{,}05)\ \text{см},$$

тогда

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{0{,}001}{3} + \frac{2}{3{,}17} + \frac{5}{15{,}85} < 0{,}95\,\%.$$

Вычисление V ведем посредством таблицы пятизначных логарифмов (значение π мы взяли с пятью значащими цифрами) и после обычных округлений получаем $V \approx 125{,}1\,(\pm 1{,}2)$ *см*^{3}. Лучше было бы округлить до целых. Но тогда граница относительной погрешности V несколько (очень незначительно) перейдет $1\,\%$:

$$V \approx 125\,(\pm 1{,}3)\ \text{см}^3.$$

Вычислительная погрешность, кроме погрешности окончательного округления, здесь не учтена. Но если вычислить НГ и ВГ, сохраняя в промежуточных результатах по четыре значащие цифры, то мы придем к тому же самому окончательному результату.

Рассмотрим в заключение две задачи, где вопрос ставится о наивыгоднейших условиях измерения величин; подобные задачи обычно гораздо легче решаются на основании формул, связывающих границы погрешностей данных и искомых, т. е. по способу границ погрешностей.

Задача 1. Коэфициент полезного действия трансформатора η можно определить либо по формуле $\eta = \frac{a}{b}\cdot 100$ (в процентах), где a — количество энергии, полученной от трансформатора, b — количество энергии, подведенной к нему; либо по формуле $\eta = \frac{a}{a+c}\cdot 100$, где c — количество энергии, поглощенной трансформатором. Значения a и b получаются с погрешностями не выше $1\,\%$, значение же c нельзя измерить с погрешностью менее $20\,\%$. Какой способ определения η следует предпочесть как более точный, если $\eta > 95\,\%$?

Решение. Если $\eta = \frac{a}{b}\cdot 100$, то $\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \leqq 2\,\%$.

Если же

$$\eta = \frac{a}{a+c}\cdot 100 = \frac{100}{1+(c:a)},\quad \text{то}\quad \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta\,[1+(c:a)]}{1+c:a} = \frac{\Delta\,(c:a)}{1+c:a} =$$
$$= \frac{\Delta\,(c:a)}{c:a}\cdot\frac{c:a}{1+c:a} = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta c}{c}\right)\cdot\left(1 - \frac{a}{a+c}\right) \leqq (1\,\% +$$
$$+ 20\,\%)\cdot(1 - 0{,}95) \leqq 21\,\%\cdot 0{,}05 \leqq 1{,}05\,\%.$$

Итак, при высоких значениях коэфициента полезного действия выгоднее вычислять его по формуле $\eta = \frac{a}{a+c}\cdot 100$, хотя измерение c дает значительно менее точные результаты, чем измерение b.

Задача 2. При измерении электрического сопротивления r по способу мостика Уитстона пользуются формулой $r = \frac{ax}{l-x}$, где a — данное сопротивление, l — длина проволоки, x — отсчет по ней. Значения a и l предполагаются известными точно, значение x получается с абсолютной погрешностью, граница которой постоянна и равна Δx. Выбор того или иного значения сопротивления a зависит от экспериментатора (имеется набор эталонов сопротивления). При каком a получается наибольшая точность в определении r?

Решение. Пользуясь формулой (А) стр. 120, получаем выражения для границ абсолютной и относительной погрешностей искомого r:

$$\Delta r = \frac{la}{(l-x)^2}\Delta x, \quad \frac{\Delta r}{r} = \frac{l}{x(l-x)} \cdot \Delta x.$$

Последнее выражение показывает, что граница относительной погрешности достигает своего минимума, когда произведение $x(l-x)$ достигает своего максимума. Но функция $x(l-x) = lx - x^2$ (x аргумент, l постоянно) имеет максимум при $x = \frac{1}{2}l$. Следовательно, сопротивление a выгодно брать таким, чтобы отсчет x был по возможности ближе к середине проволоки, а для этого надо брать a по возможности ближе к r.

§ 52. Сравнительная оценка способа границ и способа границ погрешностей.

Очевидными преимуществами способа границ являются: 1) чрезвычайная его простота, сводящая всю его теорию к одному основному принципу, применение которого на практике не вызывает никаких затруднений даже у мало подготовленного вычислителя; 2) его универсальность, так как применять его можно ко всяким числовым расчетам, от самых простых до самых сложных, лишь бы только был известен закон изменения всех входящих в формулу функций; 3) его строгость, позволяющая получать безусловно достоверные результаты благодаря возможности учитывать как погрешности от неточности данных, так и вычислительные погрешности; 4) контроль правильности вычислений, получающийся при сравнении результатов двух параллельных рядов операций. Способ границ погрешностей превосходит способ границ в том отношении, что 1) позволяет заранее учитывать погрешность от неточности данных и дает тем самым более или менее надежное указание о той точности, с какой надо вести вычисление; 2) выясняет, какая доля общей погрешности результата обусловлена погрешностью каждого приближенного данного; 3) уменьшает (но не сводит к нулю) число случаев, когда при вычислении с наперед назначенной точностью приходится применять последовательные пробы. Способ границ погрешностей не отличается той безусловной строгостью, какая присуща способу границ как вследствие отбрасывания членов высшего порядка малости, так и в силу того, что учитываются только погрешности от неточности данных.

С первого взгляда кажется, что существенным недостатком способа границ является необходимость дважды повторять все вычисление. Однако, сравнивая два решения одной и той же задачи, одно с учетом погрешностей по способу границ, другое — по способу границ погрешностей, убеждаемся, что общее количество выкладок в обоих случаях почти одинаково. Дело в том, что вычисление границы погрешности тоже требует некоторого труда. Правда, вычисление это можно упростить, пользуясь грубыми приближениями, но тогда либо получаются весьма ненадежные результаты, либо излишне увеличиваются границы погрешностей. Необходимо отметить, что при вычислении по формуле, содержащей только действия второй и третьей ступени, вычисление по способу границ погрешностей выполняется определенно скорее, чем по способу границ. Иначе обстоит дело, если в формулу наряду с действиями II и III ступеней входят также действия I ступени.

В случаях, когда требуется не абсолютная достоверность, а лишь более или менее высокая вероятность, как это обыкновенно бывает при обработке данных опыта и наблюдения, чаще пользуются вычислением границ погрешностей. В случаях же, когда такая абсолютная достоверность необходима (и, по существу дела, возможна), например, при составлении математических таблиц, лучше употреблять способ границ.

В дидактическом отношении способ границ имеет очевидные преимущества перед способом границ погрешностей, и именно способ границ надо рекомендовать для первого ознакомления со способами строгого учета погрешностей.

§ 53. Малая вероятность больших погрешностей.

В тех случаях, когда мы имеем возможность, кроме границы погрешности, т. е. наибольшего возможного ее значения, установить также и истинную погрешность результата, мы каждый раз видим, что эта *истинная погрешность значительно меньше наибольшей возможной*. Явление это бывает выражено тем ярче, чем больше приближенных чисел участвует в вычислении. Возьмем, например, сумму четырехзначных логарифмов 20 последовательных целых чисел от 11 до 30 включительно. Граница абсолютной погрешности каждого такого логарифма есть 0,00005 суммы 20 логарифмов — $0{,}5 \cdot 20 = 10$ десятитысячных. Произведя сложение логарифмов, получим сумму 25,8638, причем ручаться можем только за то, что истинное значение этой суммы больше, чем 25,8628, и меньше, чем 25,8648. Если же взять восьмизначные логарифмы тех же 20 чисел и опять произвести сложение, то получим сумму 25,86389705. Как видим, истинная погрешность первой суммы не достигает даже одной десятитысячной и составляет, таким образом, примерно десятую часть своей теоретической границы.

Такое расхождение между истинной и наибольшей возможной погрешностями объясняется, прежде всего, тем, что при разыскании этой наибольшей возможной погрешности мы всегда предполагаем самое неблагоприятное стечение обстоятельств. Так, в только что разобранном примере мы считаем границей погрешности каждого слагаемого полуединицу разряда последней его цифры. Между тем, истинные погрешности этих слагаемых могут принимать, и на самом деле принимают, всевозможные значения от $-0{,}5$ до $+0{,}5$ единицы этого разряда. Далее, положительные погрешности, встречаясь, примерно, одинаково часто с отрицательными, в более или менее значительной степени их уравновешивают, процесс накопления погрешностей идет параллельно процессу взаимной их компенсации, и в результате вероятность того, что погрешность суммы примет *большое*, т. е. близкое к границе значение, становится крайне малой. Конечно, подбирая слагаемые исскуственно, можно получить погрешность суммы, как угодно близкую к границе. При отсутствии же такого искусственного подбора это становится весьма мало вероятным. Методами теории вероятностей можно установить, как часто должно встречаться то или иное значение погрешности суммы. Результаты теоретического исследования подтверждаются и прямым опытом.

Так, в 80-х годах прошлого века Г. Штадтхаген (в Германии), вычислив теоретически, как часто должны встречаться различные значения погрешности суммы 20 слагаемых, взятых с одинаковым числом точных десятичных знаков, проверил свои выводы следующим опытом. Он взял 440 сумм по 20 логарифмов каждая, сперва с пятью, затем с семью десятичными знаками, и определил разности этих сумм, т. е. приближенные значения погрешностей сумм пятизначных логарифмов. Нижеприведенная табличка показывает, насколько хорошо этот опыт подтвердил теоретические выводы.

Погрешность суммы лежит между	Число случаев в процентах: по теории	в действительности
0 и 100,5	56	65
100,5 „ 200,5	32	28
200,5 „ 300,5	10	6
300,5 „ 400,5	2	1
400,5 „ 1 000	0,2	0

Здесь погрешности выражены в десятимиллионных долях, т. е. в единицах разряда последней цифры семизначных логарифмов.

Это явление компенсации погрешностей наблюдается в большей или меньшей мере также и при выполнении других действий.

§ 54. Практические требования к точности результатов вычислений. Основной принцип обыкновенных вычислений.

Строгий учет погрешностей результатов вычислений, требующий, как мы видели в § 49—52, немалой дополнительной работы, применяется на практике очень редко. Обыкновенно вычислители довольствуются тем, что ведут вычисление с определенным числом значащих цифр (или десятичных знаков), сохраняя в окончательном результате 1, иногда 2 сомнительные цифры. Так, в только что рассмотренном примере вычисления суммы 20 слагаемых последнюю цифру результата при строгом учете погрешностей приходится признать сомнительной. Между тем, ввиду крайне малой вероятности погрешности, сколько-нибудь приближающейся к границе, мы, конечно, эту цифру сохраним и никакого округления суммы производить не будем.

Иногда выставляют требование, чтобы употребляемые на практике приближенные числа имели погрешности, не превосходящие единицы разряда последней их цифры. Вот, например, что говорит в своих „Лекциях о приближенных вычислениях“ (издание Академии наук, Ленинград 1933) академик А. Н. Крылов: „Результат всякого вычисления и измерения выражается числом; условимся писать эти число так, чтобы по самому их начертанию можно было судить о степени точности: для этого стоит только принять за правило писать число так, чтобы в нем *все* значащие цифры, *кроме последней*, были верны, и лишь последняя цифра была бы сомнительна и притом не более как на одну единицу“. Если понимать это требование буквально, то оно весьма трудно исполнимо. Действительно, чтобы его соблюсти, необходим, во-первых, постоянный строгий учет погрешностей и, во-вторых, на каждом почти шагу приходилось бы сильно округлять результаты. Например, четырехзначный логарифм, полученный в результате сложения трех четырехзначных же логарифмов, имеет границу погрешности в $1^1/_2$ единицы разряда последней цифры, а потому, придерживаясь этого правила, его пришлось бы округлить до трех десятичных знаков. Однако стоит только добавить в вышеприведенном правиле одно лишь слово „в среднем", и мы получаем основной важности принцип, который позволяет рационально обосновать целый ряд практических правил вычисления с приближенными числами. Этот „основной принцип обыкновенных вычислений", т. е. вычислений без строгого учета погрешностей (его можно назвать „принципом А. Н. Крылова"), формулируем в окончательном виде так: „Приближенное число надо писать так, чтобы в нем *все* значащие цифры, *кроме последней*, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительна, и притом *в среднем* не более, как на одну единицу".

Это добавление „в среднем" мы будем понимать в том смысле, что здесь речь идет не о границе погрешности, а о *средней квадратической погрешности*. С этого рода погрешностью мы уже встречались в гл. V. Чтобы яснее ее себе представить, решим такую задачу: найти среднюю квадратическую погрешность округления, состоящего в отбрасывании одной только цифры, считая все возможные значения этой цифры равновероятными, т. е. встречающимися (при большом числе округлений) одинаково часто. Следовательно, равновероятны следующие значения погрешности округления (в единицах разряда последней цифры): $-0{,}5$; $-0{,}4$; $-0{,}3$; $-0{,}2$; $-0{,}1$; $0{,}0$; $0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$; $0{,}5$.

Всего здесь 11 значений погрешности. Возьмем их квадраты, найдем сумму этих квадратов, разделим сумму на 11 и извлечем из частного квадратный корень. Это и даст искомую среднюю квадратическую погрешность округления, равную:

$$\sqrt{\frac{2}{11}(0{,}25+0{,}16+0{,}09+0{,}04+0{,}01)}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}55}{11}}=\sqrt{0{,}1}=0{,}316.$$

Если округление состоит в отбрасывании не одной, а двух цифр, то будем иметь уже не 11, а 101 значение погрешности (от $-0{,}50$ до $+0{,}50$), и средняя квадратическая погрешность округления оказывается равной 0,292. При ее вычислении, во избежание сложения длинного ряда чисел, можно воспользоваться формулой:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Если, наконец, округление состоит в отбрасывании бесконечно длинного ряда цифр, то, как показывает расчет, основанный на переходе к пределу или на применении интегрального исчисления, средняя квадратическая погрешность округления оказывается равной числу $\sqrt{3}:6=0{,}289$.

Взяв за основу указанный выше принцип А. Н. Крылова, выводим из него несколько правил, указывающих, сколько цифр следует сохранить в результате каждого действия. Правила эти можно назвать „Правилами подсчета цифр". Вывод их весьма громоздок, а потому приведем их без доказательства, ограничиваясь только некоторыми разъясняющими замечаниями и поверкой на примерах.

§ 55. Правила подсчета цифр.

I. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Примечание. „Десятичными знаками“ числа называются те его цифры, которые расположены справа от знака дробности.

II. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.

Примечание. „Значащими цифрами“ числа называются все его цифры, кроме нулей, расположенных левее первой, отличной от нуля его цифры.

III. При возведении в квадрат и в куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число.

Примечание. Последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания.

IV. При извлечении квадратного и кубического корня в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное.

Примечание. Последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надежна, чем последняя цифра подкоренного.

V. При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила.

Примечание. В окончательном результате эта „запасная цифра“ отбрасывается. Писать ее рекомендуется в уменьшенном размере.

VI. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при действиях I ступени) **или больше значащих цифр** (при действиях II и III ступеней), **чем другие, их предварительно следует округлять, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.**

VII. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое дает, согласно правилам I—IV, $k+1$ цифру в результате.

VIII. При вычислении посредством логарифмов одночленного выражения следует подсчитать число значащих цифр в приближенном данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и взять таблицу логарифмов с числом десятичных знаков, на один большим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

Примечание. При применении всех правил подсчета цифр следует избегать нулей, помещенных в конце приближенных чисел взамен неизвестных их цифр. Так, если число 25 400 имеет границу абсолютной погрешности, равную 100, то его надо писать в виде $254 \cdot 10^2$, или лучше в виде $2{,}54 \cdot 10^4$, или, наконец, в виде 254_{00}.

Вычислять результаты с бо́льшим числом цифр, чем указывают эти правила, — потерянный труд. Сохранять в них эти лишние, лишенные всякого реального значения цифры — значит вводить в заблуждение тех, кто будет этими результатами пользоваться. Проф. Перри квалифицирует подобное сохранение незаслуживающих никакого доверия цифр как „нечестное“ обращение с цифрами („Практическая математика“, перевод под ред. В. В. Лермантова, 1909 г., стр. 14).

Прежде чем перейти к детальному рассмотрению отдельных правил, приведем таблицу, содержащую значения предельной и средней квадратической погрешностей результатов различных действий (те и другие выражены в единицах разряда последней цифры результатов, округленных согласно „Правилам подсчета цифр“). Предполагается, что приближенное значение каждого данного числа имеет погрешность, не превосходящую половины единицы разряда последней его цифры, и что все значения погрешностей от $-0{,}5$ до $+0{,}5$ равновероятны, т. е. могут встречаться одинаково часто.

Действие	Результат	Предельная погрешность	Средняя квадратическая погрешность
Сложение и вычитание	Алгебраическая сумма n слагаемых	$0{,}5(n+1)$	$0{,}289\sqrt{n}$
Умножение	Произведение двух k-значных приближенных чисел	6,0	0,626
	Произведение k-значного приближенного на точное	5,5	0,442
	Произведение k-значного приближенного на $(k+1)$-значное приближенное	5,55	0,445
Деление	Частное от деления k-значного приближенного числа на k-значное приближенное число	10,5	0,576
	Частное от деления k-значного приближенного числа на точное	5,5	0,389
	Частное от деления k-значного приближенного на $(k+1)$-значное приближенное	6,0	0,391
	Частное от деления точного на k-значное приближенное	5,72	0,425
	Частное от деления $(k+1)$-значного приближенного на k-значное приближенное	6,0	0,427
Возведение в степень	Квадрат k-значного приближенного числа	4,0	0,705
	Куб k-значного приближенного числа	8,0	1,059
Извлечение корня	Квадратный корень из k-значного приближенного числа	1,31	0,221
	Кубический корень из k-значного приближенного числа	1,29	0,185

Вычисление некоторых приведенных в таблице результатов приводится в § 56—60. Вычисление остальных, требующее применения математического анализа, можно найти в работе автора „Опыт обоснования, некоторых практических правил действий над приближенными числами", напечатанной в „Известиях тверского педагогического института" за 1927 г. (вып. III).

Как видим, средняя квадратическая погрешность везде меньше 1, кроме случая возведения в куб, когда она очень незначительно превосходит 1. Средняя крадратическая погрешность суммы n слагаемых, равная, согласно указанной выше таблице, $0{,}289\sqrt{n}$, не превосходит 1 при $n \leqq 12$.

Переходим к рассмотрению отдельных правил.

§ 56. Сложение и вычитание.

Вычисляя алгебраическую сумму ряда приближенных слагаемых, имеющих одно и то же число десятичных знаков, мы сохраняем, как было показано в § 53, все десятичные знаки этой суммы, если только число слагаемых, как это обыкновенно и бывает на практике, не чрезмерно велико. Как мы убедились в конце предшествующего параграфа, основной принцип будет при этом вполне соблюден при числе слагаемых, не большем 12. Однако на практике это число 12 часто превосходят, и результаты, полученные Штадтхагеном (§ 53), показывают, что даже при 20 слагаемых стоит сохранять все знаки суммы.

Если же слагаемые имеют различное число десятичных знаков, то число надежных десятичных знаков суммы определяется числом десятичных знаков наименее точного слагаемого, т. е. слагаемого, имеющего наименьшее число десятичных знаков.

Действительно, граница абсолютной погрешности суммы равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых (теорема I, § 51), а потому, если наименее точное слагаемое имеет k десятичных знаков, из которых последний почти точен, и его граница абсолютной погрешности равна, следовательно, 10^{-k}, то граница абсолютной погрешности суммы, как бы точны ни были остальные слагаемые, будет непременно больше этого числа 10^{-k}. Сохранять в результате больше чем k десятичных знаков нет никакого смысла, так как о цифрах, следующих за k-м десятичным знаком, мы *ничего не знаем*.

Если все приближенные слагаемые (или по крайней мере некоторые из них) — числа целые и говорить об их десятичных знаках в точном смысле этого слова не приходится, то можно перенести знак дробности во всех слагаемых на несколько мест (одинаково для всех) влево, вводя множитель в виде надлежащей степени 10. Например, имея сумму

$$546{\scriptstyle 00} + 27{\scriptstyle 000} - 12\,634,$$

где нули в первых двух слагаемых поставлены взамен неизвестных цифр, перепишем ее в виде:

$$5{,}46 \cdot 10^4 + 2{,}7 \cdot 10^4 - 1{,}2634 \cdot 10^4.$$

Наименьшее число десятичных знаков имеет второе слагаемое — только 1. Столько же следует сохранить и в сумме.

Для лучшего уяснения целесообразности I правила подсчета цифр рассмотрим три примера.

Пример 1. Вычислить сумму $x=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{5}+\sqrt{6}$, имея в своем распоряжении таблицу квадратных корней с 3 десятичными знаками.

Складывая члены со знаком $+$ и $-$ порознь, получаем:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2} & 1,414 \\ \sqrt{4} & 2,000 \\ \sqrt{6} & 2,449 \\ \hline s_1 & 5,863 \\ s_2 & 3,968 \\ \hline x\approx s_1-s_2 & 1,895 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{3} & 1,732 \\ \sqrt{5} & 2,236 \\ \hline s_2 & 3,968 \end{array}$$

Здесь мы имеем случай, когда все члены алгебраической суммы даны с одним и тем же числом десятичных знаков (3). Столько же знаков сохраняем и в сумме. Если бы мы взяли вместо 3 по 5 десятичных знаков в каждом слагаемом, то получили бы $x=1,89558$. Истинная погрешность суммы 1,895, следовательно, лишь немного превосходит половину единицы последнего ее разряда.

Пример 2. Вычислить сумму $x=2,4-0,3509+13,85+0,04747$, где первое слагаемое точно, остальные — приближенные.

Перепишем слагаемые друг под другом, но вместо неизвестных их цифр (в менее точных слагаемых) поставим знаки вопроса и выполним сложение и вычитание.

$$\begin{array}{r} 2,40000 \\ +\,13,85??? \\ 0,04747 \\ \hline 16,29747 \\ -\;\;0,3509? \\ \hline x\approx 15,94657 \end{array}$$

Последние три цифры могли бы быть совсем другими, если бы были известны цифры, замененные знаками вопроса. Доверять этим цифрам, таким образом, совершенно невозможно; их надо отбросить, что дает, по округлении, $x\approx 15,95$. Последняя сохраненная цифра тоже не вполне надежна, но погрешность в ней не может быть значительной.

Мы сделали именно то, что рекомендует правило I.

Лишние десятичные знаки более точных слагаемых (0,3509 и 0,04747) остаются, следовательно, неиспользованными и дают только лишнюю вычислительную работу. Поэтому рекомендуется подобные более точные слагаемые заранее округлять, сохраняя в них только по 1 лишнему (сравнительно с наименее точным слагаемым) десятичному знаку.

$$\begin{array}{r} 2,400 \\ +\,13,85 \\ 0,047 \\ \hline 16,297 \\ -\;\;0,351 \\ \hline 15,946 \\ \hline 15,95 \end{array}$$

Применяя в настоящем случае это „предварительное округление" (о нем говорится в правиле VI), получаем то же самое, что и раньше.

Для записи ненадежных цифр здесь, как и в других случаях, пользуемся цифрами уменьшенного размера.

Пример 3. Найти сумму $s=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{17}$ до сотых долей.

Предварительно надо обратить все слагаемые в десятичные дроби. С каким числом десятичных знаков вести вычисление? Очевидно, не менее, чем с двумя, т. е. до сотых. Один лишний знак, однако, желательно ввести, чтобы уменьшить влияние погрешностей округления. Именно это и рекомендует правило VII.

Проведем для поверки сделанного заключения вычисление с 2, 3, 4, 5 десятичными знаками:

$\frac{1}{3}$	0,33	0,333	0,3333	0,33333	$\frac{1}{5}$	0,20	0,200	0,2000	0,20000
$\frac{1}{7}$	0,14	0,143	0,1429	0,14286	$\frac{1}{9}$	0,11	0,111	0,1111	0,11111
$\frac{1}{11}$	0,09	0,091	0,0909	0,09091	$\frac{1}{13}$	0,08	0,077	0,0769	0,07692
$\frac{1}{15}$	0,07	0,067	0,0667	0,06667	$\frac{1}{17}$	0,06	0,059	0,0588	0,05882
s_1	0,63	0,634	0,6338	0,63377	s_2	0,45	0,447	0,4468	0,44685
s_2	0,45	0,447	0,4468	0,44685					
$s = s_1 - s_2$	0,18	0,187	0,1870	0,18692					

После округления до сотых получаем:

$$0{,}18;\ 0{,}19;\ 0{,}19;\ 0{,}19.$$

Итак, введение более одной запасной цифры ничего не дало, но без этой запасной цифры результат получился несколько худший. Вычислять одну запасную цифру, таким образом, стоит, больше одной — бесполезно.

§ 57. Умножение.

Граница относительной погрешности произведения равна сумме границ относительных погрешностей сомножителей (см. теорему 2, § 51). Граница относительной погрешности приближенного числа приблизительно пропорциональна числу значащих его цифр. Эти два обстоятельства и приводят ко II правилу подсчета цифр в той его части, которая касается умножения. Правило это получает достаточное обоснование после доказательства нижеследующей теоремы о предельной погрешности произведения и после вычисления средней квадратической его погрешности.

Теорема. **Если перемножаются два числа, имеющие k точных значащих цифр каждое, то k-я значащая цифра произведения сомнительна, и, после отбрасывания всех последующих цифр, абсолютная погрешность произведения может приблизиться в самом неблагоприятном случае к 6 единицам разряда k-й значащей цифры, но никогда не достигает этого предельного значения.**

Вот пример умножения, когда погрешность произведения оказывается действительно близкой к указанной в теореме предельной погрешности. Произведение чисел 999,499 и 1,00499 равно 1004,48650001. Взяв приближенные значения этих двух точных сомножителей с 3 точными значащими цифрами каждое, получаем произведение $999 \cdot 1{,}00 = 999$.

Его погрешность равна $1004{,}48650001 - 999 = 5{,}48650001$, т. е. почти $5\frac{1}{2}$ единицам разряда третьей значащей цифры.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Если x растет от 0 до $+\infty$, то $y = x + \frac{p^2}{x}$ убывает, пока x растет от 0 до p, и возрастает, пока x растет от p до $p = +\infty$.

Для доказательства достаточно принять во внимание знак производной $y = 1 - \frac{p^2}{x^2}$ в каждом из указанных интервалов.

Переходя к доказательству теоремы, ограничимся случаем $k = 3$. В общем случае доказательство проводится совершенно так же, как и в этом частном, требуя лишь более сложной записи. Для определенности будем считать, что приближенное множимое a_1 выражается трехзначным целым числом, а приближенный множитель a_2 — трехзначным числом, имеющим одну значащую цифру левее знака дробности.

Пусть точные значения сомножителей будут $x_1 = a + \alpha_1$, $x_2 = a_1 + \alpha_2$, где α_1 и α_2 — погрешности приближенных значений a_1 и a_2. Согласно условиям имеем, что $100 \leqq a_1 \leqq 999$; $1{,}00 \leqq a \leqq 9{,}99$. Погрешность произведения $a_1 a_2$ равна абсолютному значению разности $x_1 x_2 - a_1 a_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) - a_1 a_2$. Раскрывая скобки и замечая, что $\alpha_1 \leqq 0{,}5$; $\alpha_2 \leqq 0{,}005$, имеем неравенство:

$$|x_1 x_2 - a_1 a_2| \leqq 0{,}005 a_1 + 0{,}5 a_2 + 0{,}0025. \qquad (A)$$

Рассмотрим порознь случаи, когда произведение $a_1 a_2$ имеет: 1) три и 2) четыре значащие цифры до знака дробности. Неравенство $100 \cdot 1 \leqq a_1 a_2 \leqq 999 \cdot 9{,}99$ показывает, что только эти два случая и возможны.

В первом случае $a_1 a_2 \leqq 999$; $a_2 \leqq 999 : a_1$. Переписываем неравенство (A) в таком виде:

$$|x_1 x_2 - a_1 a_2| \leqq 0{,}005\,(a_1 + 99\,900 : a_1) + 0{,}0025.$$

Применяем к двучлену $a_1 + 99\,900 : a_1$ доказанную выше лемму, причем берем $p^2 = 99\,900$; $p = 316{,}06\ldots$ Число a может принимать все целые значения от 100 до 999. При $a_1 = 100$ $a_1 + 99\,900 : a_1 = 1099$. При возрастании a_1 от 100 до 316 сумма $a_1 + 99\,900 : a_1$ убывает, при возрастании a_1 от 317 до 999 — возрастает, принимая при $a_1 = 999$ снова значение 1099. Итак, наибольшее значение выражения $a_1 + 99\,900 : a_1$ есть 1099. Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned}|x_1 x_2 - a_1 a_2| &\leqq 0{,}005 \cdot 1099 + 0{,}0025.\\ &\leqq 5{,}4975\\ &< 5{,}5\end{aligned}$$

Округляя произведение $a_1 a_2$ до трех значащих цифр, т. е. в данном случае до целых, мы допускаем еще погрешность от округления максимум в 0,5. Следовательно, погрешность окончательного результата будет во всяком случае менее, чем $5{,}5 + 0{,}5 = 6$ единицам.

Во втором случае, когда произведение $a_1 a_2$ имеет не три, а четыре цифры до знака дробности, наибольшее возможное значение его погрешности вычисляется гораздо проще. Действительно, теперь

$$|x_1 x_2 - a_1 a_2| \leqq 0{,}005 \cdot 999 + 0{,}5 \cdot 9{,}99 + 0{,}0025.$$
$$\leqq 9{,}9925$$
$$< 10$$

При четырех цифрах до знака дробности третья значащая цифра есть цифра *десятков*. Округление до трех значащих цифр дает погрешность максимум 5 единиц, и полная погрешность округленного произведения оказывается во всяком случае меньшей 15 единиц, или 1,5 десятка, т. е. 1,5 единицы разряда третьей значащей цифры, а следовательно, и подавно меньше 6 единиц этого разряда.

Теорема доказана.

Итак, в произведении 2 k-значных приближенных чисел k-я значащая цифра сомнительна и может содержать погрешность (до округления) до 5,5 единицы. Ясно, что все цифры произведения, начиная с $(k+1)$-й, никакого доверия не заслуживают и должны быть отброшены. Возникает далее вопрос, стоит ли сохранять k-ю значащую цифру, раз в ней возможна столь значительная погрешность? Ответ на этот вопрос дает вычисление средней квадратической погрешности, которого по его сложности не приводим. Как уже было указано в таблице на стр. 131, эта средняя квадратическая погрешность составляет 0,626. Следовательно, малые значения погрешности k-й значащей цифры встречаются гораздо чаще, чем большие, т. е. близкие к предельной погрешности 5,5, а потому k-ю значащую цифру произведения сохранять следует. Это заключение еще подтверждается, если исследовать *распределение* погрешностей, т. е. выяснить, как часто встречаются погрешности разной величины. Оказывается, что в 83,1% всех случаев k-я значащая цифра содержит погрешность, абсолютная величина которой содержится между 0 и 0,5, в 8,4% всех случаев — между 0,5 и 1, в 6,1% всех случаев — между 1 и 2, в 1,9% всех случаев — между 2 и 3, в 0,4% — между 3 и 4, в 0,1% — между 4 и 5,5, причем погрешность между 5 и 5,5 встречается лишь в 0,001% всех случаев, т. е. один раз на 100 000 случаев умножения.

Эти числа, доставляемые теорией, хорошо согласуются с результатами следующего опыта. Были взяты 200 пар произвольных пятизначных чисел, образованных посредством вынимания билетов с отдельными цифрами, и найдены их точные произведения. Далее эти пятизначные числа были округлены до 3 значащих цифр каждое и снова перемножены. Затем были образованы разности соответствующих произведений, причем разности эти были выражены в единицах k-й значащей цифры произведения приближенных чисел. Наконец, было подсчитано, сколько раз встречается разность, заключенная в определенных пределах. Результаты опыта содержатся в приведенной ниже таблице, где для сравнения указаны еще раз и результаты теоретического исследования.

Если приближенные произведения округлять до 3 значащих цифр, то разности между ними и точными произведениями несколько изменяются, но общая картина распределения погрешностей остается почти

Погрешность (по абс. вел.)	от 0 до 0,5	от 0,5 до 1	от 1 до 2	от 2 до 3	от 3 до 4	от 4 до 5
Число погрешностей в опыте	162	24	10	3	1	0
То же в процентах	81	12	5	1,5	0,5	0
Теоретическое число	83,1%	8,4%	6,1%	1,9%	0,4%	0,1%

той же. Взамен чисел, приведенных во второй строке таблицы, будем тогда иметь такие:

40; 45; 10; 4; 0; 1[1]).

Итак, перемножая 2 приближенных k-значных числа, все цифры которых точны, мы получаем в произведениях k заслуживающих доверия цифр, но не более. Если в приближенных k-значных сомножителях последняя значащая цифра не точна, а только почти точна или даже сомнительна, то граница погрешности произведения соответственно повышается, но вероятность малых значений погрешности в k-й значащей цифре произведения остается все же много большей, чем больших.

Переходим теперь к случаю, когда приближенное k-значное число, все цифры которого точны, умножается на точное число. Тогда, как можно показать, предельная погрешность произведения (до округления) равна 5 единицам разряда k-й значащей цифры, а средняя квадратическая его погрешность — 0,442 единицы разряда той же k-й значащей цифры. Следовательно, и здесь надо сохранять только k первых значащих цифр произведения. Предельная погрешность от этого округления увеличивается до 5,5 единицы, распределение же погрешностей заметного изменения не претерпевает.

Почти те же значения предельной и средней квадратической погрешностей получаются в случае, когда один из сомножителей имеет k точных значащих цифр, а другой — одной больше, т. е. $k+1$ точную значащую цифру. Здесь предельная погрешность (до округления) равна 5,05, средняя квадратическая 0,445. Округляя произведение и в этом случае до k значащих цифр, повышаем предельную погрешность до 5,55.

Сравнивая предельные и средние квадратические погрешности в последних двух случаях, приходим к заключению, что, имея приближенные сомножители с различным числом точных значащих цифр, мы можем, без всякого ущерба для точности результата, предварительно округлить более точный сомножитель, сохраняя в нем лишь одну лишнюю цифру сравнительно с другим менее точным сомножителем.

Целесообразность правил II и VI в той их части, какая касается умножения, теперь показана. Рассмотрим примеры.

---

[1]) Вопрос о влиянии округления на распределение погрешностей рассмотрен О. А. Вольбергом. См. его исследование, напечатанное в „Известиях тверского педагогического института“ за 1929 г. (вып. V).

Пример 1. Найти $x=\sqrt{6}\cdot\sqrt{0{,}0096}$ и $y=\sqrt{6}\cdot\sqrt{0{,}015}$, взяв значение каждого корня с 4 точными значащими цифрами, а именно:

$$\sqrt{6}\approx 2{,}449;\quad \sqrt{0{,}0096}\approx 0{,}09798;\quad \sqrt{0{,}015}\approx 0{,}1224.$$

Выполняя умножение обычным порядком, округляем произведение до 4 значащих цифр и получаем:

$$x=0{,}23995302\approx 0{,}2400;\quad y=0{,}2997576\approx 0{,}2998.$$

Здесь легко указать истинные погрешности найденных результатов, так как $x=\sqrt{6}\cdot\sqrt{0{,}0096}=\sqrt{0{,}0576}=0{,}24$ и $y=\sqrt{6}\cdot\sqrt{0{,}015}=$ $=\sqrt{0{,}090}=0{,}3$ (точно). Значит истинная погрешность первого приближенного результата (0,2400) есть нуль, а второго (0,2998) 0,0002, т. е. 2 единицы четвертой значащей цифры. Сравнивая неокругленные приближенные произведения с их точными значениями, убеждаемся, что округление, выполненное согласно правилу II подсчета цифр, было здесь вполне целесообразно.

Пример 2. Найти произведения приближенных сомножителей:

$$x\approx 2{,}449\cdot 0{,}1;\quad y\approx 2{,}449\cdot 0{,}12;\quad z\approx 2{,}449\cdot 0{,}122;\quad t\approx 2{,}449\cdot 0{,}12247.$$

Здесь мы имеем произведения *неравноточных* сомножителей (четырехзначного на однозначный, четырехзначного на двузначный, четырехзначного на трехзначный, четырехзначного на пятизначный) и, согласно правилу II, округляем их до того числа значащих цифр, какое имеет менее точный сомножитель (считая здесь менее точным то число, в котором меньше значащих цифр), т. е. x — до одной значащей цифры, y — до двух, z — до трех, t — до четырех и получаем:

$$x=0{,}2449\approx 0{,}2;\quad y=0{,}29388\approx 0{,}29;\quad z=0{,}298778\approx 0{,}299;$$
$$t=0{,}299929\ldots\approx 0{,}2999.$$

Здесь первый сомножитель представляет собой приближенное значение $\sqrt{6}$, второй — различные приближения $\sqrt{0{,}015}$. Точное произведение равно $\sqrt{6}\cdot\sqrt{0{,}015}=\sqrt{0{,}09}=0{,}3$, а потому истинные погрешности полученных четырех приближенных произведений равны соответственно 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001, или 1 единице разряда последней значащей цифры во всех случаях. Рассматривая неокругленные приближенные произведения, замечаем, что нами отброшены действительно неверные цифры.

Пример 3. Найти $a\sqrt{6}$, если точное значение сомножителя a есть 160, а $\sqrt{6}$ взят с четырьмя значащими цифрами ($\sqrt{6}\approx 2{,}449$).

Здесь точное число умножается на приближенное число с 4 значащими цифрами. В произведении сохраняем столько цифр, сколько их имеет менее точный сомножитель, т. е. 4, и получаем $391{,}840\approx 391{,}8$.

Чтобы установить истинную погрешность результата, вычислим его еще раз, взяв $\sqrt{6}$ с шестью значащими цифрами:

$$\sqrt{6}=2{,}44949\cdot 160=391{,}918\ldots$$

Истинная погрешность полученного выше произведения 391,8 близка, таким образом, к одной единице разряда последней цифры.

Пример 4. Найти с тремя значащими цифрами длину окружности диаметра $d=\sqrt{2}$ *см*, т. е. $C=\pi d$.

Берем в сомножителях произведения последовательно по 2, 3, 4, 5 значащих цифр и округляем произведения до трех значащих цифр.

$$\pi=3{,}14159...;\ \sqrt{2}=1{,}41421...$$

$$3{,}1\cdot 1{,}4=4{,}34;\ 3{,}14\cdot 1{,}41\approx 4{,}4274\approx 4{,}43;\ 3{,}142\cdot 1{,}414\approx 4{,}442788\approx 4{,}44;$$
$$3{,}1416\cdot 1{,}4142\approx 4{,}4428...\approx 4{,}44.$$

Здесь мы получаем подтверждение правила VII в той его части, какая касается умножения: при умножении с наперед заданной точностью в приближенных данных следует брать одну запасную значащую цифру.

Пример 5. Найти произведение дробей $1\frac{3}{7}$, $\frac{1}{45}$, $\frac{21}{11}$, $\frac{11}{12}$, предварительно обратив их в десятичные с четырьмя десятичными знаками в каждой. Выполняя это обращение, имеем:

$$1\frac{3}{7}\approx 1{,}4286;\ \frac{1}{45}\approx 0{,}0222;\ \frac{21}{11}\approx 1{,}9091;\ \frac{11}{12}\approx 0{,}9167.$$

Наименьшее число значащих цифр имеет второй сомножитель. Округляя первый и третий сомножители до 4 значащих цифр каждый, перемножаем последовательно все полученные десятичные дроби, сохраняя в промежуточных результатах по 4 цифры (одна запасная), в окончательном же только 3.

$$1{,}429\cdot 0{,}0222=0{,}0317238\approx 0{,}0317_{2};\quad 0{,}0317_{2}\cdot 1{,}9091=0{,}06055348\approx$$
$$\approx 0{,}0605_{5};$$
$$0{,}0605_{5}\cdot 0{,}9167=0{,}055506185\approx \underline{0{,}0555.}$$

Для определения истинной погрешности полученного результата выполним умножение до обращения данных дробей в десятичные:

$$1\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{45}\cdot\frac{21}{11}\cdot\frac{11}{12}=\frac{1}{18}=0{,}055555...$$

Как видим, полученное с применением правил подсчета цифр приближенное произведение отличается от точного немного больше, чем на половину единицы последнего своего разряда.

Пример 6. Найти вес P (в килограммах) медного провода, диаметр которого $2r\approx 4{,}0$ *мм*, а длина $l\approx 235$ *м*, если известно, что плотность меди $d\approx 8{,}8$.

Вычисляем P по формулам: $P=Vd$; $V=\pi r^2 l=0{,}25\pi(2r)^2 l$. Для получения P в килограммах V должно быть выражено в кубических дециметрах, $2r$ и l в дециметрах: $2r\approx 0{,}040$ *дм*, $l\approx 235_0$ *дм*. В формуле для вычисления V мы имеем один точный сомножитель 0,25, один сомножитель, точность которого может быть сделана как угодно высокой (π), один сомножитель приближенный с двумя значащими цифрами ($2r$) и один сомножитель приближенный с двумя значащими цифрами (l). Таким образом, произведение V можно получить только с двумя значащими цифрами. Умножая V на d, известное тоже только с двумя значащими цифрами, получим для P приближенное значение с двумя значащими цифрами. Промежуточные результаты, с целью уменьшения погрешности от округления, берем везде с одной запасной цифрой, т. е.

с тремя $(2+1=3)$ значащими цифрами (правило V). Для π, согласно правилу VI, возьмем значение 3,14.

Вот примерная схема вычисления:

π	3,14
$0{,}25\ \pi$	0,785
$2r$	0,040
$(2r)^2$	0 0016o
$0{,}25\pi\,(2r)^2$	0 0012б
l	235o
$0{,}25\pi\,(2r)^2 l = V$	2,9б
d	8,8
$P = Vd$	26

$P \approx 26$ *кг*

Обе значащие цифры окончательного результата заслуживают доверия. Действительно, выполнив вычисление границ при $\pi \approx 3{,}142$ $(-0{,}001)$; $2r \approx 4{,}0\,(\pm 0{,}1)$ *мм*; $l \approx 235\,(\pm 1)$ *м*; $d \approx 8{,}8\,(\pm 0{,}1)$, мы получим $P \approx 26\,(\pm 1{,}7)$ *кг*.

Пример 7. Гипотенуза прямоугольного треугольника, по измерении ее миллиметровой линейкой, оказалась равной 9,6 *см*, а один из его острых углов, по измерении его транспортиром, равным 61°. Найти катеты.

Вычисление производим по формулам: $a = c \cos B$; $b = c \sin B$. Здесь $c \approx 9{,}6$ *см* (приближенное число с 2 значащими цифрами); $B \approx 61°$. Из таблицы узнаем, что $\cos B \approx 0{,}4848$. Чтобы выяснить, какие цифры здесь надежные, какие нет, возьмем из таблицы еще $\cos 61°30'$ и $\cos 60°30'$ (транспортир дает точность до полуградуса!). Получив числа 0,4772 и 0,4924, сопоставляем эти три значения косинусов и замечаем, что в значении $\cos 61°$ надежными являются только 2 десятичных знака. Сохраняя 1 запасную (ненадежную) цифру, берем $\cos B \approx 0{,}48^5$. Таким же путем устанавливаем, что $\sin B \approx 0{,}87^5$. Теперь выполняем умножение, округляя результаты, согласно правилу II, до 2 значащих цифр:

$$9{,}6 \cdot 0{,}48^5 = 4{,}6560 \approx 4{,}7; \qquad 9{,}6 \cdot 0{,}87^5 = 8{,}4000 \approx 8{,}4.$$

Итак, катеты оказываются равными 4,7 *см* и 8,4 *см*. Интересно посмотреть, что даст в настоящем случае строгий учет погрешностей. Считая, что $c \approx 9{,}6\,(\pm 0{,}05)$ *см* и $B \approx 61°\,(\pm 0°{,}5)$, вычислим границы для катетов:

	нг	вг
c	9,55	9,65
B	61°30′	60°30′
$\sin B$	0,8704	0,8788
(!) $\cos B$	0,4774	0,4924
$a = c \cos B$	4,55	4,75
$b = c \sin B$	8,31	8,48

$$\begin{array}{l} 4{,}75 \\ \underline{4{,}55} \\ 9{,}30:2 = 4{,}65 \\ 0{,}20:2 = 0{,}10 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8{,}48 \\ \underline{8{,}31} \\ 16{,}79:2 = 8{,}395 \\ 0{,}17:2 = 0{,}085 \end{array}$$

$a = 4{,}65\,(\pm 0{,}10)$

$b = 8{,}40\,(\pm 0{,}09)$

Если бы мы захотели провести контроль правильности результатов (полученных при вычислении без строгого учета погрешностей), применяя теорему Пифагора, то возник бы вопрос, какое расхождение между квадратом гипотенузы и суммой квадратов катетов считать здесь допустимым. Руководствуясь правилом III, мы скажем, что при правильности всех произведенных вычислений сколько-нибудь значительное расхождение во второй значащей цифре весьма мало вероятно. Производим этот контроль:

a	4,7
b	8,4
a^2	$22,_1$
b^2	$70,_6$
a^2+b^2	$92,_7$

c	9,6
c^2	$92,_2$

Разница между a^2+b^2 и c^2 составляет, таким образом, примерно половину единицы разряда второй значащей цифры и целиком объясняется погрешностями данных.

§ 58. Деление.

Рассмотрев вопрос об умножении весьма подробно, можем несколько сократить изложение вопроса о делении.

Граница относительной погрешности частного, как и граница относительной погрешности произведения, равна сумме границ относительных погрешностей компонентов. Принимая во внимание, что граница относительной погрешности приближенного числа приблизительно пропорциональна числу значащих его цифр, заключаем, что при делении приближенных чисел, как и при умножении, надо сосчитать значащие цифры в менее точном данном и столько же значащих цифр оставлять в результате.

Более убедительное доказательство целесообразности правила II подсчета цифр в отношении действия деления дает вычисление предельной и средней квадратической погрешностей частного. Рассмотрим сперва случай деления двух k-значных приближенных чисел, все цифры которых точны $(k > 1)$.

Теорема. *Если делимое и делитель содержат по k $(k > 1)$ точных значащих цифр, то в частном k-я значащая цифра сомнительна, и после отбрасывания всех последующих цифр абсолютная погрешность частного может приблизиться к 10,5 единицам разряда k-й значащей его цифры, но никогда не достигает этого значения.*

Вот пример деления, где погрешность частного оказывается близкой к указанному в теореме предельному значению. Разделив 100,499 на 1,00501, получаем 99,99801... Если же округлить эти два числа до трех значащих цифр каждое, то получим частное $100:1{,}01 = 99{,}00990...$, или, после округления до трех значащих цифр, 99,0. Разность между точным частным 99,99801... и приближенным частным 99,0 оказывается близкой к 10 единицам разряда третьей значащей цифры (0,998... целых, или 9,98 десятых).

При доказательстве теоремы ограничимся случаем $k=3$, так как общий случай требует лишь более подробной записи. Подчиним приближенные данные (делимое и делитель) a_1 и a_2 и их абсолютные погрешности α_1 и α_2 тем же условиям, что и при доказательстве теоремы о предельной погрешности произведения:

$$100 \leqq a_1 \leqq 999; \quad 1{,}00 \leqq a_2 \leqq 9{,}99; \quad |\alpha_1| \leqq 0{,}5; \quad |\alpha_2| \leqq 0{,}005.$$

Здесь $x_1 = a_1 + \alpha_1$, $x_2 = a_2 + \alpha_2$. Абсолютная погрешность частного $a_1 : a_2$, которую мы обозначим буквой α, равна:

$$\alpha = \frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2(a_1 + \alpha_1) - a_1(a_2 + \alpha_2)}{a_2(a_2 + \alpha_2)} = \frac{a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2}{a_2(a_2 + \alpha_2)}$$

и удовлетворяет при сделанных условиях неравенству:

$$|\alpha| \leqq \frac{0{,}5a_2 + 0{,}005a_1}{a_2(a_2 - 0{,}005)}. \qquad (A)$$

Определяя границы частного $a_1 : a_2$ находим, что

$$\frac{100}{9{,}99} \leqq \frac{a_1}{a_2} \leqq \frac{9{,}99}{1{,}00}, \quad \text{или} \quad 10 < \frac{a_1}{a_2} < 999$$

и что это частное может иметь либо две, либо три значащие цифры левее знака дробности. Рассмотрим эти два случая порознь.

Если частное имеет три значащие цифры левее знака дробности, то наибольшее его значение есть 999. Представляя неравенство (А) в виде:

$$|\alpha| \leqq \frac{0{,}5 + 0{,}005\,(a_1 : a_2)}{a_2 - 0{,}005},$$

заменим частное $a_1 : a_2$ в числителе наибольшим его значением 999, а делитель a_2 (в знаменателе) наименьшим его значением 1. Получаем, что

$$|\alpha| \leqq \frac{0{,}5 + 0{,}005 \cdot 999}{1 - 0{,}005} \leqq 5{,}52\ldots$$

Округляя частное $a_1 : a_2$ до 3 значащих цифр, вводим погрешность от округления максимум в 0,5, и полная погрешность округленного частного в самом неблагоприятном случае будет равна 6,02... (в единицах разряда третьей значащей цифры).

Если частное имеет не три, а только две цифры левее знака дробности, то $a_1 : a_2 < 100$, $a_1 < 100a_2$. Заменяя в неравенстве (А) число a_1 через $100a_2$, от чего неравенство только усилится, получим:

$$|\alpha| < \frac{0{,}5\,a_2 + 0{,}005 \cdot 100\,a_2}{a_2(a_2 - 0{,}005)} < \frac{1}{a_2 - 0{,}005}. \qquad (B)$$

Из условия $a_1 < 100a_2$ следует, что $a_2 > a_1 : 100$. Наименьшее значение a_1 есть 100, а потому $a_2 > 1$. Так как a_2 есть число трехзначное, то наименьшее его значение (вообще и в рассматриваемом случае) есть 1,01. Заменяя в неравенстве (В) a_2 через 1,01, мы усиливаем это неравенство и получим:

$$|\alpha| < \frac{1}{1{,}01 - 0{,}005} < 1.$$

В рассматриваемом случае третья значащая цифра частного есть цифра десятых. Округляя частное до десятых, допускаем погрешность от округления, не превышающую 0,05. Полная погрешность округленного частного меньше 1,05, т. е. меньше 10,5 единиц разряда третьей значащей цифры.

Сопоставляя заключения, сделанные в обоих случаях, убеждаемся, что теорема доказана полностью.

Доказанная теорема с полной определенностью показывает необходимость отбрасывания всех цифр частного после k-й значащей, но остается открытым вопрос, стоит ли сохранять и эту k-ю значащую цифру частного, еще более сомнительную, если принимать во внимание только предельную погрешность, чем в случае умножения: там погрешность могла доходить до 6, здесь же до 10 единиц разряда k-й значащей цифры. Однако значение средней квадратической погрешности, равной, согласно табличке на стр. 131 0,576, показывает, что истинная погрешность большею частью бывает гораздо меньше своего предельного значения, и мы, таким образом, имеем основание сохранять и k-ю значащую цифру частного. В том же нас убеждает и исследование *распределения* погрешностей частного. Нижеприведенная таблица содержит результаты опыта, поставленного аналогично опыту с произведениями приближенных чисел, а также результаты теоретического исследования:

Погрешность (по абс. вел.)	от 0 до 0,2	от 0,2 до 0,4	от 0,4 до 0,6	от 0,6 до 0,8	от 0,8 до 1,0	от 1 до 2	от 2 до 4	от 4 до 6	от 6 до 10
Число погрешностей в опыте	86	39	26	18	14	15	2	0	0
То же в процентах	43	19,5	13	9	7	7,5	1	0	0
Теоретическое число	46,6%	20,8%	13,4%	7,7%	4,2%	5,9%	1,3%	0,1%	0,0%

Числа в табличке относятся к неокругленным частным, поэтому предельная погрешность не 10,5, а только 10. Если все частные, полученные в опыте, округлить согласно правилу II подсчета цифр, то числа второй строки таблички заменятся такими:

61; 54; 30; 18; 16; 14; 5; 2; 0.

Таким образом, наше правило о необходимости сохранения в частном (двух k-значных приближенных чисел) первых k значащих цифр, но не более, получает полное обоснование.

Переходим теперь к случаю, когда один из компонентов — число точное. Как показывают числа таблички на стр. 131, и предельная и средняя квадратическая погрешности становятся значительно меньше, чем в предыдущем случае, но не настолько, чтобы в частном можно было сохранить цифры после k-й значащей: и здесь приходится округлять частное до k значащих цифр. Случай, когда один из компонентов есть приближенное число с k значащими цифрами, а другой — приближенное число с $k+1$ значащей цифрой, как показывают опять-таки числа той же таблички, практически ничем не отличаются от случая, когда один из компонентов — число точное. Отсюда делаем два заключения: 1) число значащих цифр частного, заслуживающих доверия, а потому подлежащих сохранению, всегда одинаково с числом значащих цифр менее точного компонента, причем менее точным компонентом здесь, как и при умножении, считается тот, у которого меньше значащих цифр; 2) более точный компонент без ущерба для точности результата можно подвергнуть предварительному округлению с таким расчетом, чтобы в нем оставалось только одной значащей цифрой больше, чем в менее точном компоненте.

Приведенные соображения выясняют целесообразность правил II и VI в отношении деления. Переходим к примерам.

Пример 1. Разделить $\sqrt{2400} \approx 48,99$ на $\sqrt{0,08} \approx 0,2828$.

Оба компонента даны с четырьмя значащими цифрами, столько же цифр сохраняем в частном:

$$48,99:0,2828 = 173,22... \approx 173,2.$$

Точное частное есть $\sqrt{2400:0,08} = \sqrt{30\,000} = 173,20...$

Как видим, четыре первые значащие цифры приближенного частного точны, пятая уже не верна, и мы поступили правильно, округляя это приближенное частное до четырех значащих цифр.

Пример 2. Найти tg 89°42′, зная табличные четырехзначные значения sin 89°42′ $\approx$ 1,0000 и cos 89°42′ $\approx$ 0,0052.

Здесь надо делить приближенное число с пятью значащими цифрами на приближенное число только с двумя значащими цифрами. Согласно правилу II подсчета цифр, в результате будем иметь только две заслуживающие доверия цифры:

$$1,0000:0,0052 = 192,3... \approx 19_0.$$

Табличное значение tg 89°42′ есть 191,0. Как видим, две первые значащие цифры приближенного частного точны, третья же не верна, и мы поступили правильно, округлив его до двух значащих цифр.

Пример 3. Найти градусную меру угла в 1 радиан, взяв $\pi \approx 3,14$.

Здесь надо делить точное число 180 на приближенное число с 3 значащими цифрами. В частном получаем тоже три заслуживающие доверия цифры:

$$180:3,14 = 57,324... \approx 57,3.$$

Более точное значение π приводит к частному 57,2957...

Пример 4. Найти частное от деления $\frac{3}{7} \approx 0,428571...$на $\frac{4}{7} \approx 0,571428...$ с тремя точными значащими цифрами.

Сколько цифр следует брать в каждом компоненте?

Если взять по три, то три значащие цифры в частном будут заслуживать доверия, но последняя из них все же может содержать погрешность и даже довольно значительную (вспомним, что предельная погрешность частного двух приближенных k-значных компонентов есть 10,5 единиц разряда k-й значащей цифры). Поэтому компоненты лучше взять с четырьмя значащими цифрами, т. е. с одной запасной цифрой, как это и рекомендует правило VII подсчета цифр. Проверим это заключение, проводя вычисление с 3, 4, 5 значащими цифрами:

$$0,429:0,571 = 0,7527... \approx 0,753$$
$$0,4286:0,5714 = 0,75008... \approx 0,750$$
$$0,42857:0,57143 = 0,74999... \approx 0,750.$$

Как видим, одна запасная цифра в компонентах действительно повысила точность последней цифры результата. Дальнейшее же повышение точности компонентов бесполезно.

§ 59. Возведение в степень.

Действие возведения в степень с натуральным показателем, будучи частным случаем умножения, невыгодно отличается от последнего по точности получаемых результатов. Происходит это вследствие того, что той компенсации погрешностей, какая обыкновенно имеет место при умножении, при возведении в степень вовсе не бывает, если не считать той весьма незначительной, какую может дать округление. Граница относительной погрешности числа при возведении его в степень с показателем k увеличивается в k раз (см. теорему 4, стр. 121), а потому от возведения в степень число значащих цифр должно уменьшаться. При возведении в квадрат и куб увеличение границы относительной погрешности еще не так значительно, а потому здесь можно сохранять в результате столько же значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень число, имея, однако, в виду, что последняя цифра округленного таким образом квадрата (куба) заслуживает меньшего доверия, чем последняя цифра возводимого в степень числа.

Прежде всего выясним, какова при возведении в квадрат и в куб предельная погрешность результата.

Теорема. *Если возвести в квадрат (в куб) приближенное число с k точными значащими цифрами, причем $k > 1$, то, по округлении результата до k значащих цифр, погрешность его может приблизиться к 4 единицам разряда последней цифры (8 единицам этого разряда для куба), но никогда не достигает этого предельного значения.*

Вот примеры возведения в квадрат и в куб, когда погрешности результатов действительно оказываются близкими к указанным предельным значениям.

Возьмем число $x = 3{,}15501$, квадрат которого равен $x^2 = 9{,}954088\ldots$, и округлим x до трех значащих цифр. Полученное число $a = 3{,}16$ тоже возведем в квадрат: $a^2 = 9{,}9856$, или, по округлении до трех значащих цифр, $9{,}99$. Разность $x^2 - a^2$ равна по абсолютной величине $0{,}0359\ldots$, т. е. $3{,}59$ единицы разряда третьей значащей цифры приближенного квадрата $9{,}99$.

Округляя далее точное число $x = 2{,}14501$, куб которого равен $9{,}8693\ldots$, до трех значащих цифр и возводя полученное приближенное значение $a = 2{,}15$ в куб, получаем приближенное значение куба $a^3 = 9{,}938\ldots$, или, по округлении до трех значащих цифр, $9{,}94$. Истинная погрешность этого последнего значения равна $0{,}0706\ldots$, или $7{,}06\ldots$ единицы разряда третьей значащей цифры.

При доказательстве теоремы примем $k = 3$ (доказательство в общем случае требует лишь более громоздкой записи) и предположим, что данное приближенное число a имеет только одну значащую цифру до знака дробности. Таким образом

$$1 \leqq a \leqq 9{,}99; \quad |\alpha| \leqq 0{,}005; \quad x = a + \alpha.$$

Из равенства $x^2 = a^2 + 2a\alpha + \alpha^2$ получаем границу погрешности приближенного квадрата:

$$x^2 - a^2 = 2a\alpha + \alpha^2, \quad |x^2 - a^2| \leqq 2a \cdot 0{,}005 + 0{,}25 \cdot 10^{-4}.$$

Необходимо различать два случая: 1) когда a^2 имеет 1 значащую цифру до знака дробности и третья значащая цифра квадрата есть цифра сотых; 2) когда a^2 имеет две значащие цифры до знака дробности и третья значащая цифра квадрата есть цифра десятых.

В первом случае $a^2 < 10$, $a < \sqrt{10} = 3{,}162\ldots$ Наибольшее значение, какое может иметь трехзначное число a, есть $3{,}162\ldots$ Наибольшее значение погрешности a^2 есть $2a \cdot 0{,}005 + 0{,}25 \cdot 10^{-4} = 0{,}0316 + 0{,}25 \cdot 10^{-4} = 0{,}031625$. Прибавляя сюда наибольшую возможную погрешность от округления, равную $0{,}005$, получаем для полной погрешности квадрата число $0{,}036625$, или $3{,}6625 < 4$ единиц разряда третьей значащей цифры.

Во втором случае $a^2 > 10$, но согласно условию $a \leq 9{,}99$. Наибольшее возможное значение a есть $9{,}99$, а потому наибольшее возможное значение погрешности a^2 есть $2 \cdot 9{,}99 \cdot 0{,}005 + 0{,}25 \cdot 10^{-4} = 0{,}099925$. Погрешность от округления не превосходит $0{,}05$, полная погрешность результата не больше $0{,}149925$, или $1{,}5$ единицы разряда третьей значащей цифры и подавно меньше 4 единиц этого разряда.

Для квадрата теорема доказана. Для куба она доказывается аналогичным образом, но требуется рассмотрение уже трех отдельных случаев.

Таковы предельные погрешности квадрата и куба приближенного числа. Соответствующие средние квадратические погрешности (см. табличку § 55, стр. 131) показывают, что истинные их погрешности в большинстве случаев бывают значительно меньше предельных своих значений, а потому k-ю значащую цифру квадрата и куба приближенного числа сохранять все же следует.

Что касается возведения в более высокую степень, чем третья, то возрастание относительной погрешности результата, пропорциональной, как показывает теорема 4 (стр. 121), показателю степени, уменьшает число заслуживающих доверия его цифр. Так, у приближенного числа с 4 точными значащими цифрами граница относительной погрешности заключается между $0{,}005\%$ и $0{,}05\%$. При его возведении, например, в 20-ю степень граница относительной погрешности результата будет заключаться уже между $0{,}1\%$ и 1%, и в результате будет уже только две или три точные цифры. Установить определенное правило подсчета цифр для возведения приближенного числа в более высокую степень трудно, а потому в этих случаях надо применять строгий учет погрешностей (по способу границ или границ погрешностей)

§ 60. Извлечение корня.

В противоположность возведению в степень действие извлечения корня с точки зрения точности получаемых результатов весьма выгодно. Компенсации погрешностей (при точном показателе корня) здесь, правда, тоже нет, но зато граница относительной погрешности квадратного корня вдвое, кубического втрое, k-й степени — в k раз меньше границы относительной погрешности подкоренного (см. следствие теоремы 4, стр. 121). При извлечении квадратного и кубического корней это возрастание точности еще не столь значительно, а потому здесь следует сохранять в результате столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное подкоренное. В целесообразности этого правила убеждает, как и раньше, вычисление предельной и средней квадратической погрешностей результата.

Теорема. *Если извлечь квадратный (кубический) корень из приближенного числа с k точными значащими цифрами, то, по округлении* *результата до k значащих цифр, погрешность его может приблизиться к 1,31 единицы разряда последней цифры (к 1,29 единицы этого разряда для кубического корня), но никогда не достигает этого предельного значения* (предполагается, что $k > 1$).

При доказательстве рассмотрим только квадратный корень, полагая $k = 3$ и считая, что корень имеет знак дробности после первой значащей цифры. Необходимо различать два случая соответственно тому, будет ли подкоренное иметь одну или две значащие цифры левее знака дробности. В первом случае подкоренное a заключено между 1,00 и 9,99. Пусть точное подкоренное есть $x = a + \alpha$, где $|\alpha| \leqq 0{,}005$. Составляем выражение для абсолютной погрешности корня и преобразуем его:

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{a+\alpha} - \sqrt{a} = \frac{\alpha}{\sqrt{a+\alpha} + \sqrt{a}};$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leqq \frac{0{,}005}{\sqrt{a - 0{,}005} + \sqrt{a}} \leqq \frac{0{,}005}{\sqrt{0{,}995} + \sqrt{1{,}00}} < 0{,}0026.$$

Прибавляя сюда еще наибольшую возможную погрешность от округления, равную 0,005, видим, что полная погрешность корня в рассматриваемом случае меньше 0,0076, или 0,76 единицы разряда третьей значащей цифры.

Во втором случае подкоренное a заключается между 10,0 и 99,9. Точное подкоренное $x = a + \alpha$, $|\alpha| \leqq 0{,}05$. Повторяя те же рассуждения, что и в первом случае, приходим к заключению, что теперь $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < 0{,}00792$. Прибавляя сюда погрешность от округления, равную опять 0,005, получаем полную погрешность 0,01292, или 1,292 единицы разряда третьей значащей цифры.

Сопоставляя оба случая, заключаем, что при $k = 3$ предельная погрешность квадратного корня может быть принята равной 1,3. В общем случае, при любом $k > 1$, эта предельная погрешность возрастает, как нетрудно убедиться, до 1,31.

Предельная погрешность для кубического корня получается тем же путем, но приходится рассматривать отдельно уже не два, а три случая.

Итак, погрешность квадратного и кубического корня из приближенного k-значного числа даже в самом неблагоприятном случае не достигает и 1,5 единицы разряда k-й значащей цифры. Принимая во внимание значение средней квадратической погрешности, равной 0,221 для квадратного корня и 0,185 для кубического (см. табличку § 55, стр. 131), окончательно убеждаемся, что сохранять надо k-значащих цифр корня, но не более.

В случае извлечения корня более высокой степени, чем третья, уменьшение границы относительной погрешности может привести к тому, что в корне надо будет сохранить больше значащих цифр, чем было в подкоренном. Дать соответствующее правило подсчета цифр, однако, здесь трудно, и в таких случаях надо прибегать к строгому учету погрешностей.

§ 61. Употребление запасной цифры.

Рассматривая в § 56—60 выполнение отдельных действий над приближенными числами, мы уже упоминали о необходимости сохранения запасной цифры в промежуточных результатах: всякий раз, когда какое-либо действие над приближенными числами дает результат, над которым придется производить еще действия (чтобы получить искомый окончательный результат), в этом *промежуточном* (неокончательном) результате лучше брать не столько цифр, сколько их следует взять согласно правилам подсчета цифр I—IV, а *одной больше* (правило V). Действительно, округляя какое-нибудь приближенное число, мы к той погрешности, какая была в нем ранее, добавляем еще погрешность от округления. Хотя в некоторых случаях может произойти частичная или даже полная компенсация этих двух погрешностей и округленное число может оказаться даже точнее неокругленного, однако доказано, что *в среднем* округление все же уменьшает точность приближенных чисел[1]). Поэтому приходится позаботиться о том, чтобы сделать это уменьшение точности от округления практически неощутимым. Опыт показывает, что при небольшом числе действий (5—10) влияние округлений промежуточных результатов на результат окончательный будет совершенно незаметным, если в каждом промежуточном результате сохранять одну лишнюю (запасную) цифру. При более сложных вычислениях надо брать уже две запасные цифры. К сожалению, теоретически этот вопрос разработан еще недостаточно, и дать более определенное правило пока невозможно.

Эта запасная цифра промежуточных результатов, вообще говоря, доверия не заслуживает, и, чтобы не смешать ее с надежными цифрами, ее надо как-нибудь отмечать (например, писать ее в уменьшенном виде).

Рассмотрим один пример.

При решении уравнения

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0$$

найден один из корней, а именно $x_1 = -3{,}71$, и требуется проверить правильность решения посредством подстановки, т. е. вычислением $f(x_1)$.

Проведем вычисление (с применением правил подсчета цифр) три раза: без запасной цифры, с одной запасной цифрой, с двумя запасными цифрами.

x	$-3{,}71$	$-3{,}71$	$-3{,}71$
x^2	$13{,}8$	$13{,}7{\scriptstyle 6}$	$13{,}7{\scriptstyle 64}$
x^3	$-51{,}1{\scriptstyle 6}$	$-51{,}0{\scriptstyle 6}$	$-51{,}0{\scriptstyle 64}$
$2x^3$	-102	$-102{,}{\scriptstyle 1}$	$-102{,}{\scriptstyle 13}$
$-5x^2$	$-69{,}0$	$-68{,}8{\scriptstyle 0}$	$-68{,}8{\scriptstyle 20}$
$3x$	$-11{,}1$	$-11{,}1{\scriptstyle 3}$	$-11{,}1{\scriptstyle 30}$
-7	$-7{,}0$	$-7{,}00$	$-7{,}000$
$2x^3-5x^2+3x-7$	-189	$-189{,}{\scriptstyle 0}$	$-189{,}{\scriptstyle 08}$
x^4	190	$189{,}{\scriptstyle 2}$	$189{,}{\scriptstyle 45}$
$f(x)$	$+1$	$+0{,}{\scriptstyle 2}$	$+0{,}{\scriptstyle 31}$
То же по отбрасывании запасных цифр	$+1$	0	0

[1]) См. упомянутое выше исследование О. А. Вольберга.

Как видим, сохранение одной запасной цифры несколько изменило окончательный результат. Вторая же запасная цифра никакого нового изменения этого результата не вызвала.

Другой случай употребления запасных цифр мы имеем тогда, когда данные для вычисления являются приближенными числами *разной* точности, т. е. с разным числом десятичных знаков (при действиях I ступени) или с разным числом значащих цифр (при действиях II и III ступеней). Как мы не раз уже убеждались, большая сравнительная точность некоторых данных будет вполне использована, если оставить в них всего лишь по одной лишней (запасной) цифре сравнительно с наименее точным данным. Сохранение более чем одной запасной цифры только осложняет вычислительную работу, но не дает никакого выигрыша в точности окончательного результата.

Отметим, что это „правило предварительного округления более точных данных“ (правило VI подсчета цифр) вполне решает вопрос о том, с какой точностью надо брать часто встречающиеся в вычислении постоянные, например, число π. Если π надо умножить или разделить на приближенное число с k значащими цифрами, мы должны предварительно округлить π до $k+1$ значащей цифры, т. е. взять $\pi \approx 3{,}1$, или $3{,}14$, или $3{,}142$, или $3{,}1416$ и т. д., при k, соответственно равном 1, 2, 3, 4 и т. д.

Остается указать еще на один случай употребления запасных цифр — на вычисления с наперед заданной точностью. Если данные можно брать с более или менее произвольным числом цифр, а точность результата наперед указана, то, взяв данные с таким числом цифр, какое даст согласно правилам I—V как раз требуемое число цифр в результате, т. е. взяв эти данные, так сказать, „в обрез“, мы никогда не можем ручаться за точность последней цифры результата: правила подсчета цифр говорят только то, что значительная погрешность в этой последней цифре гораздо менее вероятна, чем малая. Эта сомнительность последней цифры исчезает, если взять в приближенных данных по одной запасной цифре. Большее число запасных цифр, как оказывается, выигрыша в точности уже не дает, доставляя лишь добавочную вычислительную работу (конечно, в случае особо сложного вычисления лучше брать две запасные цифры).

Особого упоминания требует явление „потери точности при вычитании“, с которым мы уже встретились в примере 3, § 49: при вычитании двух близких друг к другу приближенных чисел, имеющих поровну десятичных знаков, в разности получается столько же десятичных знаков, число же значащих цифр получается меньше, чем было в каждом компоненте. Поэтому, желая получить такую разность с определенным числом значащих цифр, мы должны вычислить компоненты с числом знаков, значительно большим.

Пусть, например, требуется получить значение $x = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{(\operatorname{Arc} \alpha)^3}$ при $\alpha = 5^\circ$ с тремя значащими цифрами. Для получения частного с тремя значащими цифрами делимое и делитель надо взять, согласно правилу VII подсчета цифр, с четырьмя значащими цифрами. Чтобы получить разность $\operatorname{tg} 5^\circ - \sin 5^\circ = 0{,}0875 - 0{,}0872$ с четырьмя значащими цифрами, значения tg и sin надо взять не с четырьмя десятичными знаками, как мы сейчас их взяли, а с семью. Значение Arc 5° достаточно взять с пятью десятичными знаками.

Вычисление понятно из приводимой схемы:

Arc 5°	0,08727
tg 5°	0,0874887
sin 5°	0,0871557
tg 5° — sin 5°	0,0003330
(Arc 5°)^3	0,0006646
$x=\frac{\operatorname{tg} 5^\circ - \sin 5^\circ}{(\operatorname{Arc} 5^\circ)^3}$	0,501

В настоящем случае тот же результат можно получить гораздо скорее, если предварительно преобразовать числитель данного выражения к виду, удобному для логарифмирования, и воспользоваться таблицей четырехзначных логарифмов. Тогда

$$x=\frac{\sin 5^\circ\cdot(1-\cos 5^\circ)}{\cos 5^\circ\cdot(\operatorname{Arc} 5^\circ)^3}=\frac{2\sin 5^\circ \sin^2 2^\circ 30'}{\cos 5^\circ\cdot(\operatorname{Arc} 5^\circ)^3}=\frac{2\operatorname{tg} 5^\circ \sin^2 2^\circ 30'}{(\operatorname{Arc} 5^\circ)^3}=\frac{2\operatorname{tg} 5^\circ \sin^2 2^\circ 30'}{(\pi:36)^3}$$

и $x=0{,}5012$, или, по округлении до трех десятичных знаков, 0,501.

Подобное преобразование, устраняющее вычитание близких чисел и связанную с ним потерю точности, надо применять всегда, если к тому есть возможность.

§ 62. Вычисления посредством логарифмов.

Вычисляя посредством логарифмов одночленное выражение, содержащее *только точные компоненты*, мы получим результат с вычислительной погрешностью, тем меньшей, чем больше десятичных знаков имеют табличные мантиссы. Причина появления погрешности ясна: все табличные мантиссы логарифмов, кроме логарифмов чисел 1, 10, 100 и т. д., числа приближенные. Чтобы видеть, как велика эта вычислительная погрешность, вносимая применением логарифмов, вычислим, например, значение частного $x=104:11$ посредством таблиц логарифмов с $k=3$, 4, 5, 6, 7 десятичными знаками. Результаты показывает следующая табличка:

k	3	4	5	6	7
lg 104	2,017	2,1070	2,01703	2,017033	2,0170333
lg 11	1,041	1,0414	1,04139	1,041393	1,0413927
lg x	0,976	0,9756	0,97564	0,975640	0,9756406
x	9,46	9,454	9,4545	9,45455	9,454544

Сравнивая полученные значения x с тем его значением, какое дает непосредственное деление,

$$x=9{,}45454545\ldots,$$

убеждаемся в том, что *таблица k-значных логарифмов дает результат с k значащими цифрами, причем последняя не вполне надежна.* Другими словами, *вычислительная погрешность, вносимая в результат* *вследствие применения таблицы k-значных логарифмов, делает не вполне надежной k-ю значащую его цифру.*

Для практически полного устранения вычислительной погрешности, обусловленной применением логарифмов, надо пользоваться таблицей логарифмов *с одним лишним* (запасным) *десятичным знаком*: для получения результата с тремя значащими цифрами — употреблять четырехзначные логарифмы, для получения результата с четырьмя значащими цифрами — пятизначные и т. д. Однако эта погрешность от применения логарифмов вообще настолько невелика, что часто запасного десятичного знака не берут и вычисляют k-значный результат посредством таблицы k-значных логарифмов. Доказано, что, вычисляя k-значный результат посредством k-значных логарифмов, мы получаем в нем среднюю квадратическую погрешность не больше единицы разряда последней цифры, если число складываемых (и вычитаемых) логарифмов не более трех[1]).

Переходя к случаю, когда посредством логарифмов вычисляется одночленное выражение, содержащее *приближенные* данные, замечаем прежде всего, что такое выражение надо вычислить согласно правилам II, III, IV подсчета цифр с таким числом значащих цифр, сколько их имеет приближенный компонент с наименьшим числом значащих цифр. Обозначая это число буквой k, видим, что для вычисления окончательного результата надо воспользоваться таблицей логарифмов с $k+1$ десятичным знаком, так как хотя таблица k-значных логарифмов и дает k первых значащих цифр результата, но вычислительная погрешность, происходящая от применения логарифмов, ляжет на последнюю (k-ю) значащую цифру результата и сделает ее менее надежной, чем она была бы при непосредственном вычислении. Поэтому при всяком более или менее сложном вычислении рекомендуется для получения результата с k значащими цифрами применять таблицу логарифмов с $k+1$ десятичным знаком, округляя доставляемый ею результат до k значащих цифр. Если число подыскиваемых логарифмов не больше 3, можно обходиться и без запасной цифры.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти произведение приближенных чисел 9,539 и 2,236.

Применяя таблицы логарифмов с 4, 5, 7 десятичными знаками, получим такие значения этого произведения:

$$21{,}33;\ 21{,}329;\ 21{,}32920.$$

После округления до четырех значащих цифр, что мы обязаны сделать в силу правила II подсчета цифр, мы получаем во всех трех случаях одно и то же число, а именно 21,33.

Взятые сомножители представляют собой приближенные значения $\sqrt{91}$ и $\sqrt{5}$. Точное произведение равно $\sqrt{455}=21{,}3307\ldots$

Пример 2. Найти произведение дробей $1\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{45}\cdot\frac{21}{11}\cdot\frac{11}{12}$, предварительно обратив их в десятичные с четырьмя десятичными знаками.

Выполняя это обращение, имеем:

$$1\frac{3}{7}\approx 1{,}4286;\qquad \frac{1}{45}\approx 0{,}0222;\qquad \frac{21}{11}\approx 1{,}9091;\qquad \frac{11}{12}\approx 0{,}9167.$$

---

[1]) См. резюме работы Н. Ф. Гуляева „О точности логарифмических вычислений“ в „Известиях Тверского педагогического института“ за 1929 г. (вып. 5-й).

Выполняя вычисление посредством таблиц трех-, четырех- и семизначных логарифмов, получаем следующие результаты:

$$0{,}0555;\quad 0{,}05550;\quad 0{,}05550339.$$

Точное произведение равно здесь $1:18=0{,}055555...$ Погрешность от неточности данных сказывается, как и следовало ожидать согласно правилу II подсчета цифр, на четвертой значащей цифре результата. Здесь, как и в предшествующем примере, даже один запасной десятичный знак в логарифмах оказался бесполезным.

Пример 3. Найти с точностью до копеек сумму, в которую обратится через 12 лет вклад в 30 руб., на который начисляется 5% (сложных).

Вычисление ведется по формуле $A=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, где $a=30$, $p=5$, $n=12$. Искомый наращенный вклад не достигнет 100 руб., а потому выразится (с копейками) четырехзначным числом. Все компоненты здесь точны, результат будет иметь только вычислительную погрешность. Чтобы сделать ее незаметной, будем вычислять посредством таблицы логарифмов с пятью $(4+1=5)$ десятичными знаками. Для сравнения то же вычисление проводим посредством таблиц логарифмов с 4 и 7 десятичными знаками:

lg 1,05	0,02119	0,0212	0,0211893
12 lg 1,05	0,25428	0,2544	0,2542716
lg 30	1,47712	1,4771	1,4771213
lg A	1,73140	1,7315	1,73113929
A	53,877	53,89	53,87570
	53 р. 88к.	53 р. 89 к.	53 р. 88 к.

Один запасной десятичный знак в логарифмах, следовательно, немного повысил точность результата, большее же их число влияния на окончательный результат не оказывает.

§ 63. Примеры более сложных вычислений без строгого учета погрешностей, но с применением правила подсчета цифр.

Пример 1. Найти вычислением объем обрезка стальной оси, состоящего из цилиндрической части (поперечник $d_1\approx 4{,}68$ *см*, высота $h_1\approx 9{,}40$ *см*) с цилиндрической же головкой ($d_2\approx 5{,}63$ *см*, $h_2\approx 0{,}88$ *см*). Ось имеет канал для шпильки диаметром $d_3\approx 0{,}89$ *см* (считаем его цилиндром с высотой, равной поперечнику оси d_1) и шпонку (выступ) в виде призмы с основанием в форме трапеции, основания которой $a\approx 1{,}62$ *см*, $b\approx 1{,}18$ *см*, а высота $c\approx 0{,}50$ *см*, высота призмы $l\approx 0{,}41$ *см*.

Искомый объем V вычислим по формуле: $V=V_1+V_2-V_3+V_4$, где V_1 — объем тела оси, V_2 — ее головки, V_3 — канала для шпильки, V_4 — выступа, причем $V_1=0{,}25\pi d_1^2h_1$; $V_2=0{,}25\pi d_2^2h_2$; $V_3=0{,}25\pi d_3^2d_1$; $V_4=0{,}5(a+b)cl$.

Значения d_1 и h_1 известны с тремя значащими цифрами, а потому, согласно правилу VI, при вычислении V_1, берем π с четырьмя значащими цифрами (3,142) и вычисляем V_1 как промежуточный результат, тоже с четырьмя значащими цифрами. Число V_2 вычисляем уже только с тремя значащими цифрами, так как хотя d_2 известно с тремя цифрами, но h_2 — только с двумя; здесь π можно взять уже с тремя значащими цифрами. Числа V_3 и V_4 вычисляем тоже с тремя значащими цифрами.

Вычисление V_1, V_2, V_3.

	V_1	V_2	V_3
d	4,68	5,63	0,89
d^2	$21{,}9_{0}$	31,7	$0{,}79_{0}$
h	9,40	0,88	4,68
d^2h	$205{,}_{9}$	$27{,}_{9}$	$3{,}7_{1}$
π	3,142	3,14	3,14
πd^2h	$646{,}_{9}$	$87{,}_{6}$	$11{,}_{6}$
$\frac{1}{4}\pi d^2h$	$161{,}_{7}$	$21{,}_{9}$	$2{,}9_{0}$

Вычисление V_4.

a	1,62
b	1,18
$a+b$	2,80
c	0,50
$(a+b)c$	$1{,}4_{0}$
l	0,41
$(a+b)cl$	$0{,}57_{4}$
$\frac{1}{2}(a+b)cl$	$0{,}28_{7}$

Вычисление $V = V_1 + V_2 - V_3 + V_4$.

V_1	$161{,}_{7}$
V_2	$21{,}_{6}$
V_4	0,3
$V_1 + V_2 + V_4$	$183{,}_{9}$
V_3	2,9
V	$181{,}_{10}$

$V \approx 181\ см^3$.

При вычислении V мы имели четыре слагаемых с разным числом десятичных знаков (V_1 и V_2 известны до целых, V_3 — до десятых, V_4 — до сотых). Поэтому V_4 предварительно округляем, сохраняя только десятые доли. В окончательном результате цифра десятых сомнительна, и мы округляем его до целых.

Оказалось, что мы воспользовались лишь одной значащей цифрой числа V_4 и двумя числа V_3. Если бы мы предусмотрели это обстоятельство, заранее грубо-приближенно оценив значения отдельных членов суммы $V = V_1 + V_2 - V_3 + V_4$, то, при вычислении V_3 и V_4, можно было бы ограничиться еще меньшей точностью.

Пример 2. Зная, что экваториальный и полярный радиусы земного сфероида равны (по Кларку) соответственно $a = 6378{,}2492$ *км* и $b = 6356{,}5150$ *км*, найти с тремя значащими цифрами знаменатель дроби $\frac{1}{x} = \frac{a-b}{a}$, т. е. число $x = \frac{a}{a-b}$ (дробь $\frac{a-b}{a}$ выражает „сжатие" земного сфероида).

Для получения частного $\frac{a}{a-b}$ с тремя значащими цифрами берем делимое и делитель с одной лишней цифрой (правило VII), т. е. с четырьмя значащими цифрами. Для получения разности $a-b$ с четырьмя значащими цифрами a и b приходится брать уже с шестью значащими цифрами („потеря точности при вычитании").

a	6373,25
b	6356,52
$a-b$	21,73
a	6378
$x=\dfrac{a}{a-b}$	293,5

Сжатие земли $\frac{1}{294}$.

При этом вычислении пришлось дважды применять правило „округления до четной цифры" (§ 4).

Пример 3. Найти толщину x, какую следует придать стенкам трубы из сварочного железа, если труба, имея внутренний диаметр $2r \approx 35$ *мм*, должна выдерживать внутреннее давление $p \approx 200$ *ат*. Воспользоваться формулой Лямэ:

$$x = r\left(\sqrt{\frac{R+p}{R-p}} - 1\right),$$

где R — допускаемое напряжение материала, равное для сварочного железа 900—1000 *кг* на 1 *см*^{2}. Давление p (считаем его известным точно) должно быть выражено в тех же единицах, что и R, т. е. в килограммах на квадратные сантиметры (1 *ат* $\approx 1{,}033$ *кг*/*см*^{2}).

Для R возьмем значение 950, среднее между двумя указанными границами. Это число 950 приходится писать в виде 9_{50}, так как в нем всего одна надежная цифра. Число $p \approx 200 \cdot 1{,}033 \approx 206{,}6$ округляем, согласно правилу VI, так, чтобы в нем была одна лишняя цифра сравнительно с другим слагаемым ($R \approx 9_{50}$), т. е. берем $p \approx 21_0$.

Вычисляя дробь $\frac{R+p}{R-p}$, мы ее получим при данных значениях R и p с одной лишь значащей цифрой. Точность повышается, если эту дробь предварительно преобразовать к виду:

$$\frac{R-p+2p}{R-p} = 1 + \frac{2p}{R-p}.$$

p	21_0	$\sqrt{1+q}$	$1{,}2_5$
$2p$	42_0	$\sqrt{1+q}-1$	$0{,}2_5$
R	95_0	$r=2r:2$	$17{,}_5$
$R-p$	74_0	$x=r(\sqrt{1+q}-1)$	$4{,}_4$
$q=2p:(R-p)$	$0{,}5_7$		
$1+q$	$1{,}5_7$		

$x \approx 5$ *мм*

Итак, в результате мы получили значение x с одной только заслуживающей доверия значащей цифрой. Как всегда, в такого рода технических расчетах, берем избыточное приближенное значение (применяем *округление с усилением*).

Пример 4. Пользуясь бесконечным рядом

$$\lg(1+x) = M\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots\right),$$

где $-1 < x \leqslant +1$, $M = 0{,}43429448\ldots$, найти четырехзначный логарифм числа 7.

Взять $x=6$, чтобы сразу получить $\lg 7$, невозможно, так как ряд „сходится" и может быть использован для целей вычисления лишь при значениях x, меньших (по абсолютному значению) единицы. Поэтому найдем сперва $\lg 0,7$, для чего возьмем $x=-0,3$. Вычисление будем вести с одним запасным десятичным знаком, т. е. с пятью $(4+1=5)$ десятичными знаками, и возьмем все члены ряда, не обращающиеся в нуль при округлении до пяти десятичных знаков:

x	$-0,30000$	x	$-0,30000$
x^2	$0,09000$	$-\frac{1}{2}x^2$	$-0,04500$
x^3	$-0,02700$	$+\frac{1}{3}x^3$	$-0,00900$
$x^4=(x^2)^2$	$0,00810$	$-\frac{1}{4}x^4$	$-0,00202$
$x^5=x^2\cdot x^3$	$-0,00243$	$+\frac{1}{5}x^5$	$-0,00049$
$x^6=(x^3)^2$	$0,00073$	$-\frac{1}{6}x^6$	$-0,00012$
$x^7=x^3\cdot x^4$	$-0,00022$	$+\frac{1}{7}x^7$	$-0,00003$
$x^8=(x^4)^2$	$0,00007$	$-\frac{1}{8}x^8$	$-0,00001$
$x^9=x^4\cdot x^5$	$-0,00002$	$+\frac{1}{9}x^9$	$-0,00000$
$x^{10}=(x^5)^2$	$0,00001$	S	$-0,35667$
	$M\approx 0,434294$	MS	$-0,15489$

Итак, по отбрасывании запасной цифры $\lg 0,7\approx -0,1549$, откуда

$$\lg 7=\lg(0,7\cdot 10)=-0,1549+1=0,8451.$$

Именно это значение $\lg 7$ мы и находим в таблице четырехзначных логарифмов. Напомним, что, желая привести то же вычисление со строгим учетом погрешностей, мы должны были бы принять во внимание еще и „остаточный член".

Упражнения.

1. Измерения сторон прямоугольника, начерченного на плане, показали, что его длина заключается между 84,0 и 84,5 *мм*, а ширина между 37,5 и 38,0 *мм*. Найти границы для площади прямоугольника и указать приближенное ее значение, а также границу его абсолютной погрешности.

2. Найти высоту сплошного медного цилиндра весом в 765 (± 1) *г*, если поперечник его основания 3,25 ($\pm 0,02$) *см*. Плотность меди примем равной 8,8 ($\pm 0,05$).

3. Найти площадь треугольного участка со сторонами 38,3 *м*; 44,9 *м*; 61,5 *м*, предполагая, что погрешность в определении длины каждой из этих сторон не превосходит 0,1 *м*. Применить формулу $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $2p=a+b+c$.

4. Начертить как можно точнее круг радиуса $r=5$ *см* и вписанный в него правильный треугольник. Найти непосредственным измерением длину основания и высоту этого треугольника и вычислить его площадь с учетом погрешностей по способу границ. Вычислить ту же площадь по формуле $S=0,75\,r^2\sqrt{3}$, взяв $\sqrt{3}\approx 1,73205$ ($\pm 0,000005$) и считая r известным точно. Сравнить результаты.

5. Найти разность высот (над уровнем моря) двух пунктов, в которых одновременные показания барометра и термометра оказались следующими:

$B = 679{,}6$ *мм*, $T = 20^\circ{,}7$ C (для нижнего пункта);
$b = 654{,}7$ *мм*, $t = 15^\circ{,}3$ C (для верхнего),

пользуясь приближенной формой Бабине:

$$h = 16\,010\,[1 + 0{,}002\,(T + t)] \cdot \frac{B - b}{B + b},$$

предполагая числа 16 010 и 0,002 точными.

6. Определить площадь, заключенную между двумя концентрическими окружностями радиусов $r \approx 8{,}3\ (\pm 0{,}05)$ *см* и $R \approx 9{,}7\ (\pm 0{,}05)$ *см* с учетом погрешностей сперва по способу границ, потом по способу границ погрешностей.

7. Найти диаметр медного провода, если кусок этого провода длиной $l \approx 123{,}0\ (\pm 0{,}1)$ *м* весит $115\ (\pm 0{,}5)$ *г*. Плотность меди принимаем равной $d \approx 8{,}8\ (\pm 0{,}05)$. Провод считаем круглым цилиндром. Погрешность учитывается двумя способами.

8. Вершина радиомачты, установленной вертикально на горизонтальной площадке, видна с расстояния $a \approx 65{,}3\ (\pm 0{,}2)$ *м* под углом $\alpha \approx 48^\circ 14'\ (\pm 2')$ к горизонтальной плоскости. Найти высоту мачты, зная, что высота угломерного прибора равна $b \approx 1{,}12\ (\pm 0{,}01)$ *м*. Учесть погрешность результата по способу границ погрешностей, прибегая, где необходимо, к способу границ.

9. С какой абсолютной погрешностью надо взять радиус круга, чтобы его площадь отличалась от 500 *см*^{2} не более, как на 1 *см*^{2}?

10. Вычислить сумму $\sqrt{11} + \sqrt{13} + \sqrt{15} + \sqrt{17} + \sqrt{19} + \sqrt{21} + \sqrt{23}$, пользуясь таблицей корней, сперва взяв значения корней до десятых долей, потом до тысячных долей. Сравнить действительную погрешность приближенной суммы полученной первый раз, с границей ее погрешности, равной $0{,}05 \cdot 8 = 0{,}4$.

11. Вычислить $x = \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{10} : \sqrt{30}$, взяв значения корней с 2 значащими цифрами и применяя правила II и V подсчета цифр. Замечая, что точное значение x есть 4, установить истинную погрешность результата и сравнить ее с теоретической границей его погрешности, вычисленной по способу границ погрешностей.

В следующих задачах произвести вычисления без строгого учета погрешностей, но применяя правила подсчета цифр.

12. Вычислить значение выражения $x = \dfrac{1 - \cos\alpha}{(\operatorname{arc}\alpha)^2}$ при $\alpha = 6^\circ$, пользуясь четырехзначной таблицей, сперва взяв выражение в том виде, в каком оно дано, затем — после предварительного преобразования к виду, удобному для логарифмирования. Сравнить точность полученных оба раза результатов.

13. Применяя правила подсчета цифр, найти площадь треугольника, сторона которого оказалась по измерении равной $a \approx 56{,}3$ *м*, а углы $B \approx 57^\circ 45'$ и $C \approx 48^\circ 37'$.

14. Найти толщину x нити в лампочке накаливания, если длина этой нити $l \approx 46$ *см*, а вес ее $p \approx 0{,}0038$ *г*, считая ее цилиндром и принимая плотность материала $d \approx 19{,}1$ (вольфрам).

15. На площади в 387 482 *км*^{2} живет 12 806 455 чел. Найти до десятых среднюю плотность населения (на 1 *км*^{2}). Результат, полученный при применении правила VII подсчета цифр, сравнить с результатом, который получится при делении данных чисел без предварительного округления.

16. Вычислить с пятью точными десятичными знаками $\sin x$ посредством ряда:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \ldots$$

при $x = 0{,}394$ (радиана). Останавливаясь на каком-нибудь члене этого ряда, мы делаем ошибку, численно меньшую первого из отброшенных членов и одного с ним знака. Обратить внимание на поставленное требование точности пяти десятичных знаков и действительно добиться того, чтобы абсолютная погрешность результата была меньше 0,000005.

17. Вычислить значение дуги x по формуле: $\sin x = \sin b \sin c + \cos b \cos c \sin A$, если $b \approx 44^\circ 33'\ (\pm 1')$, $c \approx 63^\circ 12'\ (\pm 1')$, $A \approx 118^\circ 33'\ (\pm 1')$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

ГЛАВА VII.

ЭЛЕМЕНТЫ НОМОГРАФИИ.

§ 64. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ.

Наряду с таблицами и счетными приборами в качестве вспомогательного средства вычисления широко применяются различного рода *графические* построения, позволяющие заменять вычисление простым *отсчетом* по чертежу. Особенно выгодно применять этот графический способ решения вычислительных задач в тех случаях, когда результаты достаточно получить с двумя-тремя значащими цифрами.

В качестве простейшего примера можно указать графическое решение треугольников и фигур, составленных из прямых линий и дуг окружностей. Применяя основные чертежные приборы, легко получить решение многих геометрических задач, просто вычерчивая соответствующие фигуры на бумаге.

Пусть, например, требуется найти расстояние между двумя недоступными точками A и B на местности. Измерив подходящий *базис* CD, найдем измерением же четыре угла ACD, BCD, ADC, BDC. Искомую длину AB можно вычислить, решая по правилам тригонометрии три треугольника: из $\triangle ACD$ находим сторону AC, из $\triangle BCD$ — сторону BC, из $\triangle ABC$ — сторону AB. Но графическое решение даст искомую длину AB значительно скорее: надо лишь аккуратно начертить в подходящем масштабе базис CD и построить посредством транспортира углы при точках C и D. Пересечения двух пар прямых дадут положения точек A и B на чертеже, и останется только измерить на чертеже отрезок AB, принимая во внимание масштаб. Правда, точность результата, полученного графическим способом, будет значительно ниже, чем результата вычисления хотя бы посредством четырехзначных таблиц. Но необходимо принимать во внимание и точность данных. Если в нашей задаче углы на местности измерены с помощью самодельного угломерного прибора с точностью до полуградуса, то более высокая точность тригонометрического способа будет здесь совершенно бесполезна, и графический способ нужно будет предпочесть.

Так как всякую зависимость между величинами можно истолковать геометрически, то всякую вычислительную задачу, с большей или меньшей выгодой, можно превратить в задачу геометрическую и решать ее графическим способом. Положим, имеется ряд чисел:

$$18;\ 23;\ 38;\ 57;\ 85;\ 92,$$

выражающих цены различных товаров в копейках. Требуется снизить цены на 26,5%. Найти сниженные цены, округляя их до полукопеек.

Вместо того чтобы решать эту задачу вычислением, возьмем кусочек миллиметровой бумаги и начертим на нем прямоугольный треугольник с катетами 100 *мм* и 73,5 *мм* (рис. 24). Проводя параллели меньшему катету через точки большего катета, отстоящие от вершины острого угла на расстоянии 18 *мм*, 23 *мм* и т. д., мы получим отрезки, длины которых (в миллиметрах) и дадут в силу подобия треугольников искомые сниженные цены.

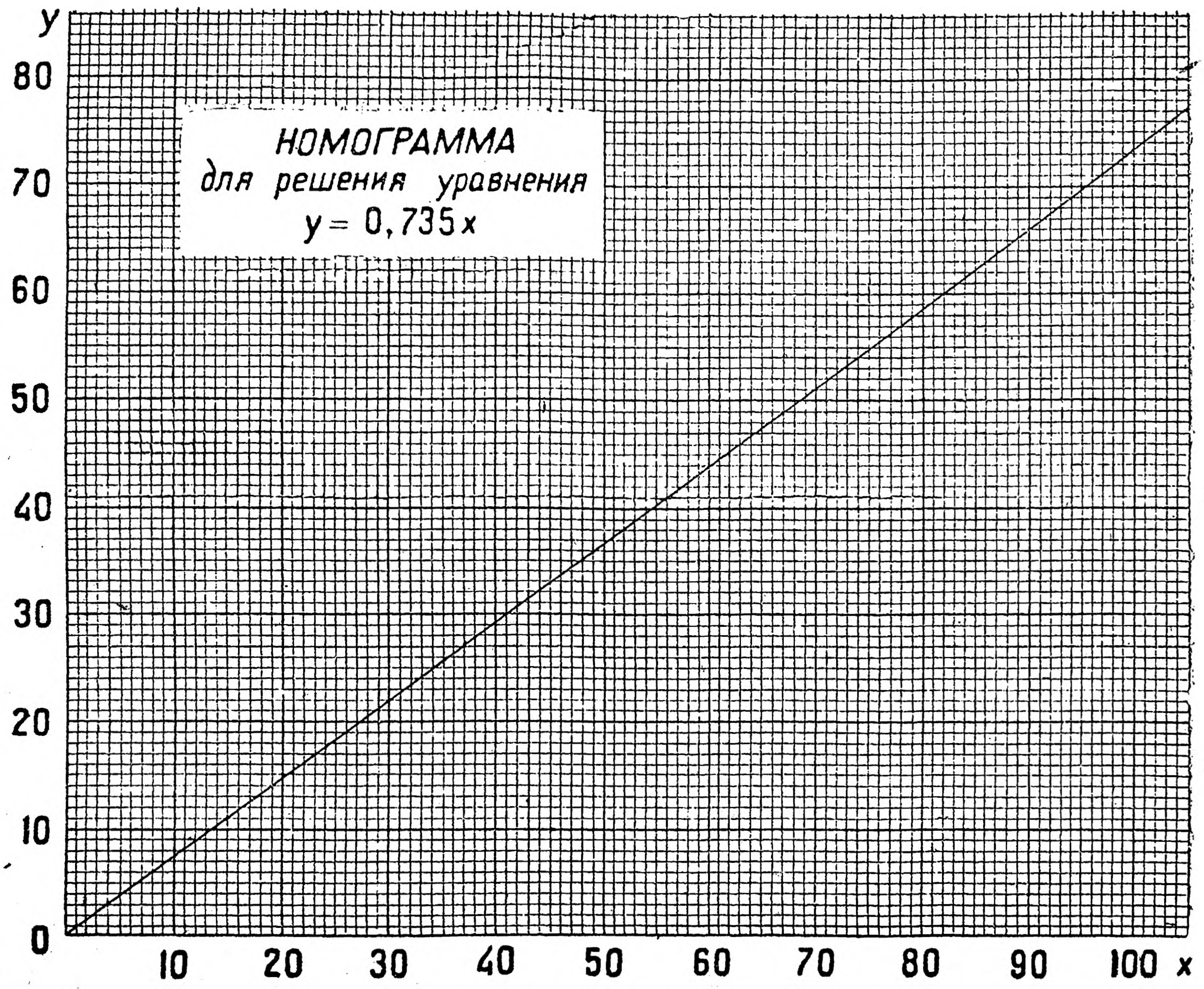


Рис. 24.

Проводить эти параллели карандашом, конечно, не надо: достаточно лишь *проследить* их глазом и, пользуясь линиями сетки, сделать отсчет. Рисунок дает такие результаты:

13; 17, 28; 42; 62; 67,5.

Точные значения искомых величин таковы:

13,23; 16,905; 27,93; 41,895; 62,475; 67,26.

Если под руками нет ни таблицы произведений, ни счетной линейки, ни другого подходящего счетного прибора, указанный графический способ можно рекомендовать как наиболее удобный.

При решении этой задачи, как и любой другой на разыскание значений величины, пропорциональной данной величине, с выгодой используется клетчатая миллиметровая бумага. Еще более серьезные услуги оказывает логарифмическая бумага, один из типов которой (двойная логарифмическая бумага) изображен на рис. 25. Здесь на осях X и Y нанесены логарифмические шкалы с уравнениями $\bar{\xi} = 100 \lg \xi$, $\bar{\eta} = 100 \lg \eta$ (§ 21), и положение каждой точки на плоскости характеризуется парой ее *логарифмических координат* ξ и η, связанных с декартовыми координатами той же точки формулами $x = 100 \lg \xi$, $y = 100 \lg \eta$ (оси декартовой системы предполагаются совпадающими с осями X и Y).

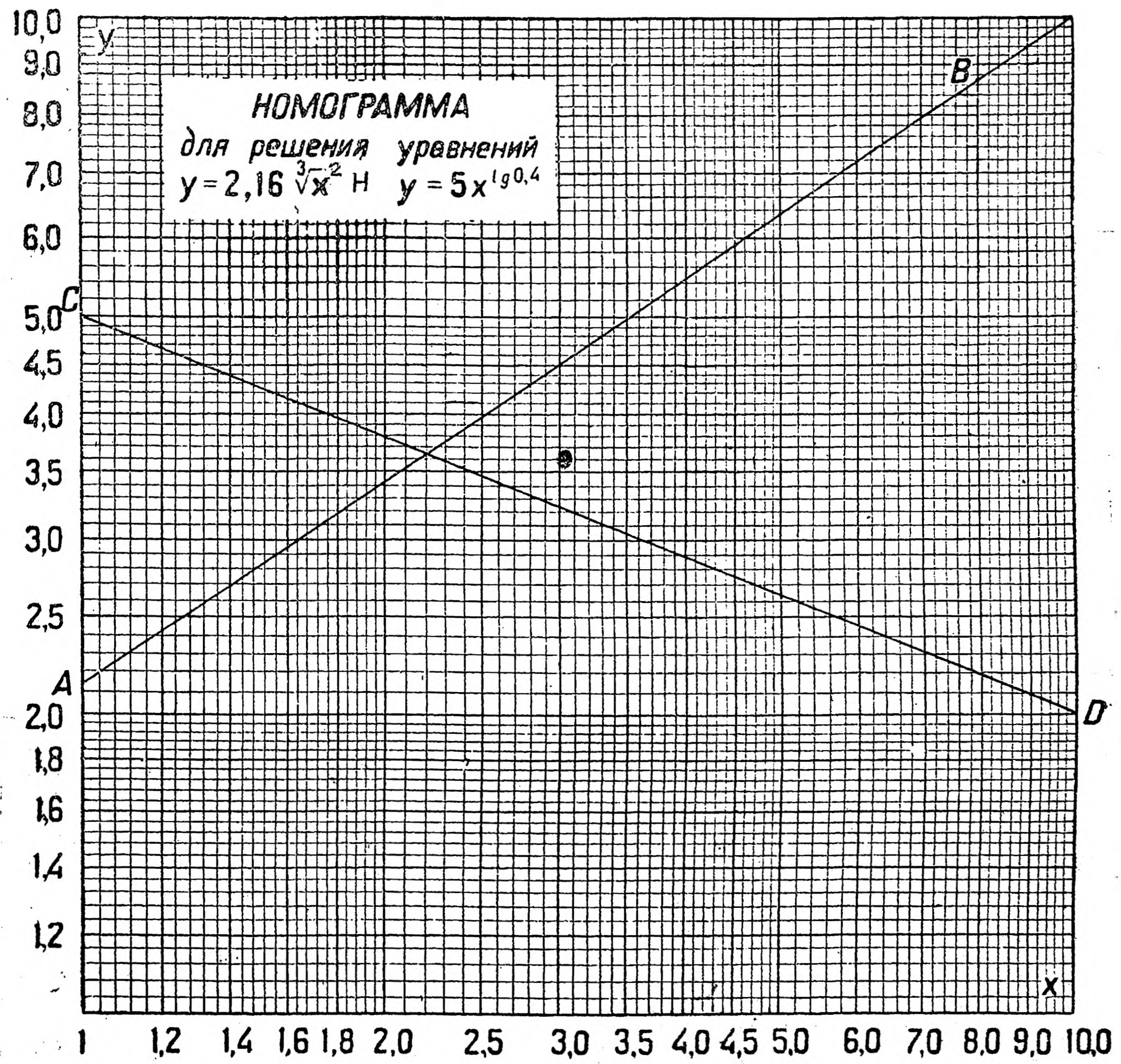


Рис. 25.

Как известно, прямоугольные координаты точки, движущейся по какой-нибудь прямой, связаны линейной зависимостью вида $ax + by = c$, где a, b, c — константы, характеризующие положение прямой. Какой же зависимостью связаны логарифмические координаты ξ и η точки, движущейся по этой же прямой? Простая подстановка приводит к уравнению $100 a \lg \xi + 100 b \lg \eta = c$, или $\eta = k\xi^{\alpha}$, где k и α — постоянные. Все задачи на зависимость этого вида решаются посредством логарифмической бумаги проведением одних лишь прямых линий, т. е. столь же просто, как задачи на прямую пропорциональность посредством миллиметровой бумаги. Если, например, требуется вычислить значения η по формуле $\eta = 2{,}16 \sqrt[3]{\xi^2}$ для различных значений ξ от 1 до 10, достаточно вычислить η для каких-нибудь двух значений ξ и провести прямую через две соответствующие точки, взятые на логарифмической бумаге. Простые отсчеты по чертежу дадут искомые значения η. На рисунке 25 прямая проведена через точку A с логарифмическими координатами $\xi = 1$, $\eta = 2{,}16$ и точку B ($\xi = 8$, $\eta = 8{,}64$). Далее приведены несколько пар значений ξ и η: значения ξ заданы произвольно, значения η взяты с графика; ниже для сравнения помещены значения η, вычисленные по таблице логарифмов:

ξ	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
η (по графику)	2,44	2,70	2,95	3,19	3,42	3,64	3,86	4,09
η (по таблице)	2,440	2,703	2,955	3,197	3,430	3,655	3,873	4,085

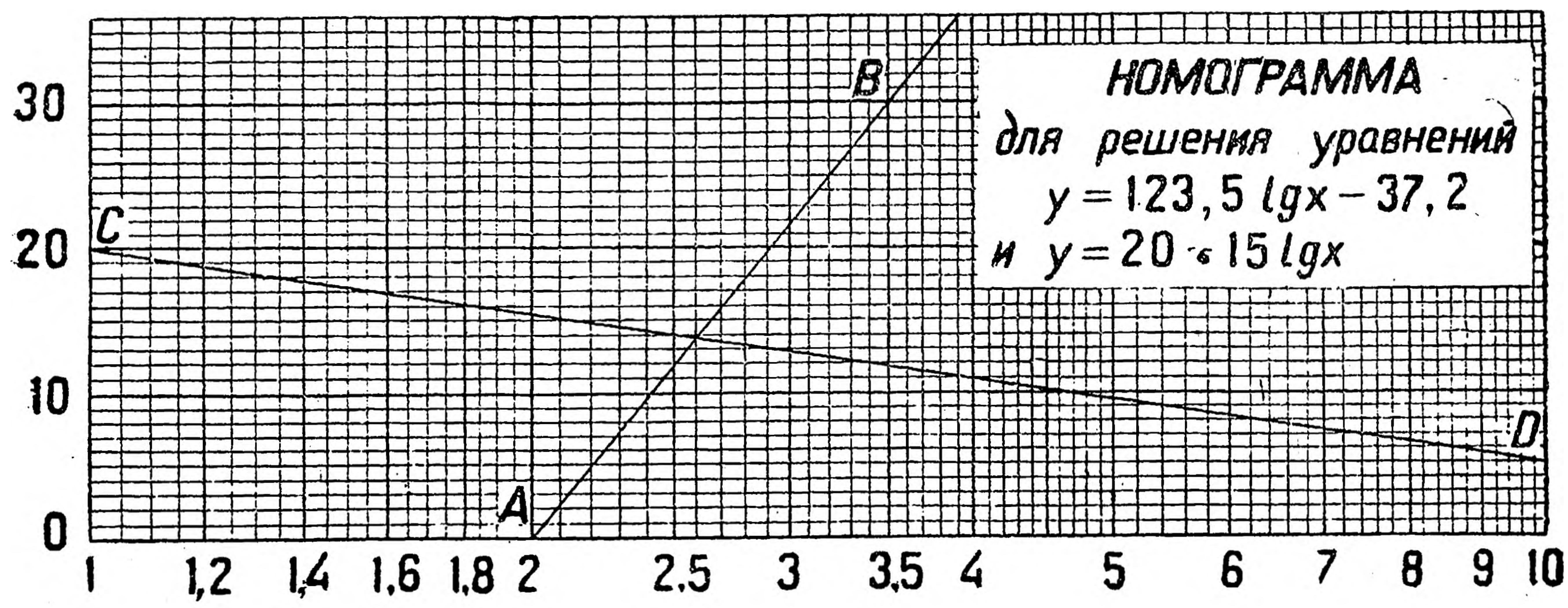


Рис. 26.

Упомянем еще о другом типе логарифмической бумаги („полулогарифмическая бумага“), кусок которой изображен на рис. 26. Здесь по оси X построена логарифмическая шкала с уравнением $\bar{\xi} = 100 \lg \xi$, а по оси Y — обыкновенная миллиметровая шкала (уравнение $\bar{\eta} = \eta$), и всякая прямая, проведенная на этой бумаге, изображает зависимость вида $a \lg \xi + b\eta = c$, где a, b, c — константы. К этой зависимости легко сводятся и зависимости вида $\eta = ke^{\alpha\xi}$, $\eta = ka^{\alpha\xi}$.

Упражнения.

1. В колхозе выдача на 100 трудодней составляет 835 *кг* хлеба и 1240 *кг* картофеля. Построить график, позволяющий находить выдачу на любое число дней от 1 до 100, и сравнить результаты, полученные по графику, с результатами вычисления посредством таблицы произведений.

2. Показать, что между логарифмическими координатами точки, движущейся по прямой CD на рис. 25, имеется зависимость $\eta = 5\xi^{\lg 0,4}$, и найти значения η для $\xi = 2, 4, 5, 8$ по графику и посредством таблицы логарифмов.

3. Указать зависимости, соответствующие графикам AB и CD на рис. 26, и сделать посредством этих графиков несколько расчетов (с поверкой).

§ 65. Что такое номограмма?

Особую и весьма важную группу графических приемов решения вычислительных задач рассматривает так называемая *номография* (от греческих слов νόμος — закон и γράφειν — писать), дающая методы построения и употребления *номограмм*. Номограммой называется такое графическое изображение определенной зависимости между двумя или большим числом переменных величин, которое позволяет находить числовые значения каждой из них, коль скоро указаны значения остальных, притом с применением лишь самых простых операций: прикладывания линейки или угольника, или особого „транспаранта“, или натягивания нити и т. д. Таким образом, номограммами являются и те два графика, какие мы рассмотрели в § 64: первый из них является номограммой уравнения $y = 0{,}735x$, второй — уравнения $y = 2{,}16\sqrt[3]{x^2}$. Очень простой и всем известный пример номограммы представляет собой шкала термометра, если на ней указаны, с одной стороны, градусы Реомюра (R), а с другой — градусы Цельсия (C). Действительно, простой переход с одной стороны шкалы на другую сторону позволяет находить значение $C = 1{,}25R$ по данному значению R и обратно.

В качестве примера номограммы, изображающей зависимость уже не между двумя, а между тремя переменными, и позволяющей, следовательно, находить значение функции двух аргументов по данным значениям этих последних, возьмем рис. 27. На нем мы видим три равномерные шкалы, сходящиеся в одной точке. Средняя шкала (Z) — сантиметровая; ее уравнение $\bar{z} = 10z$. Уравнения двух других шкал $\bar{x} = 5x\sec\alpha$; $\bar{y} = 5y\sec\alpha$, где α — угол между шкалой Z и каждой из шкал X и Y. Эта совокупность шкал X, Y, Z есть не что иное, как номограмма для решения уравнения:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}, \qquad (1)$$

часто встречаемого в вопросах оптики и электричества. Чтобы найти, например, значение z, соответствующее значениям $x = 5{,}2$ и $y = 4{,}2$, разыскиваем на двух крайних шкалах точки, имеющие метки 5,2 и 4,2, и проводим через эти две точки секущую прямую (показана пунктиром). Секущая пересекает среднюю шкалу в точке, имеющей, как видим, метку 2,3. Это и есть искомое значение z. Более точное его значение, найденное (с целью поверки) без помощи номограммы (вычислением), равно $5{,}2 \cdot 4{,}2 : (5{,}2 + 4{,}2) = 2{,}323\ldots$ Подобным же образом разыскивается x (или y) по данным значениям z и y (или x): данные значения берутся на средней и одной из крайних шкал, искомое получаем на другой крайней шкале. Чтобы не загрязнять чертежа, секущих не проводят, а ограничиваются прикладыванием линейки (лучше прозрачной) или натягиванием тонкой нити.

Доказать, что эта номограмма действительно дает решение уравнения (1), проще всего следующим образом. Обозначив точки пересечения секущей с двумя крайними шкалами через A и C, а со средней через B и полагая $AO = \bar{x}$, $CO = \bar{y}$, $BO = \bar{z}$, имеем соотношение: площадь $\triangle AOB$ + площадь $\triangle BOC$ = площади $\triangle AOC$, откуда

$$\frac{1}{2}\,\bar{x}\bar{z}\sin\alpha + \frac{1}{2}\,\bar{y}\bar{z}\sin\alpha = \frac{1}{2}\,\bar{x}\bar{y}\sin 2\alpha,$$

или

$$xz\sec\alpha\sin\alpha + yz\sec\alpha\sin\alpha = xy\sec^2\alpha\sin\alpha\cos\alpha,$$

что и дает после простых преобразований уравнение (1).

[ ] Всякая номограмма предназначается для выполнения расчетов по некоторой определенной формуле, т. е. ею дается решение некоторого

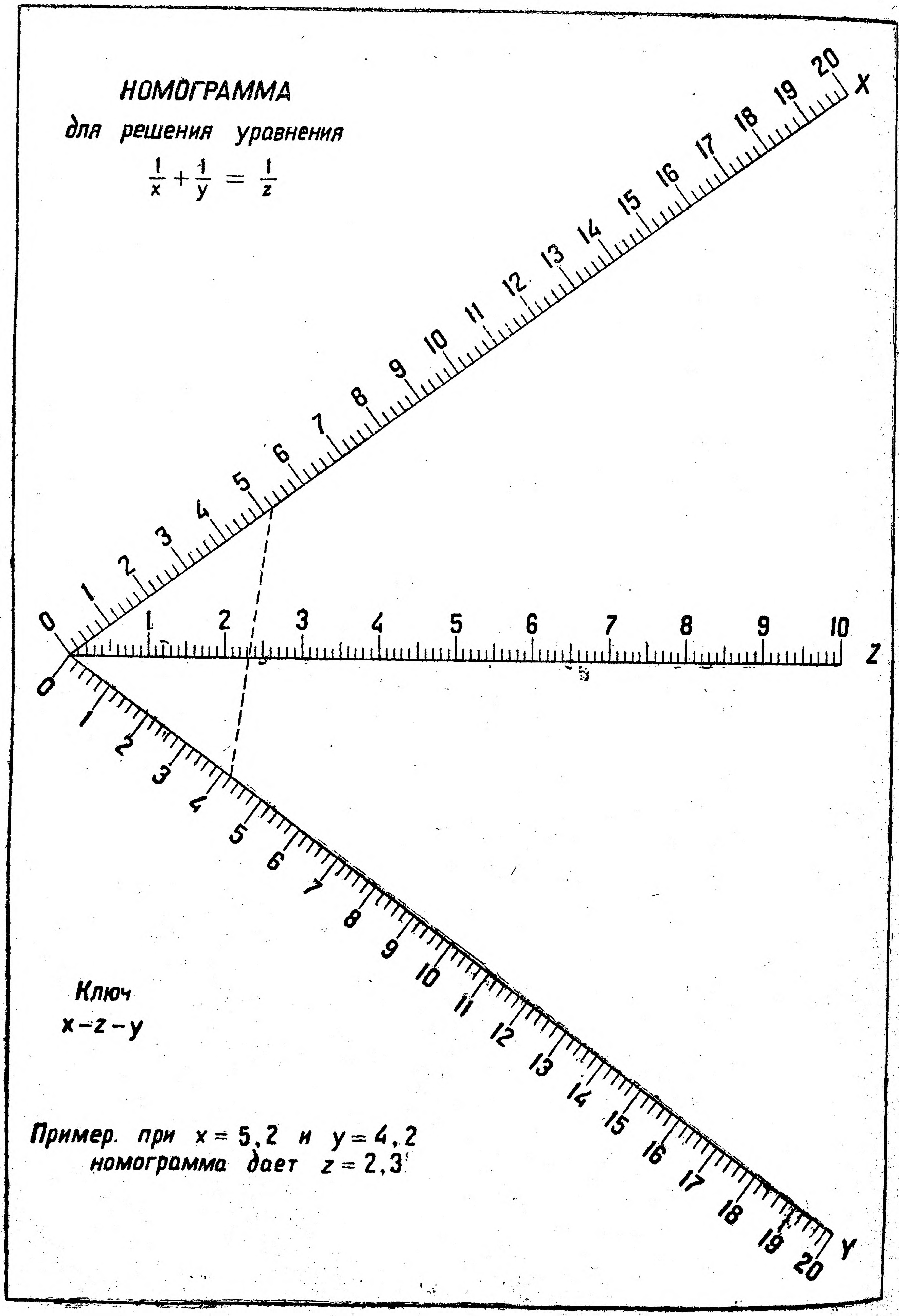

НОМОГРАММА
для решения уравнения
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$
X
Z
Y
Ключ
x–z–y
Пример. при x = 5,2 и y = 4,2
номограмма дает z = 2,3

Рис. 27.

определенного уравнения, содержащего две или более переменных, относительно любого из этих переменных. В этом отношении номограммы сходны с таблицами. Есть и другой пункт сходства: как таблицы, так и номограммы обеспечивают громадную быстроту производства расчетов, причем выгоды, ими доставляемые, тем значительнее, чем сложнее зависимость между переменными. В одном отношении номограммы имеют большое преимущество перед таблицами: в то время как таблицы функций двух и более аргументов весьма громоздки, номограммы при увеличении числа переменных хотя и усложняются, но в несравненно меньшей степени. Таблицы и номограммы хорошо дополняют друг друга: таблицы выгоднее в случае функции одного аргумента, т. е. в случае зависимости между двумя переменными; номограммы выгоднее для функций двух и более аргументов, т. е. для зависимости между тремя и более переменными. С другой стороны, в отношении точности результатов номограммы много уступают таблицам. Обычно результаты, доставляемые номограммами, имеют лишь три значащие цифры; точность эта может быть повышена путем увеличения масштаба чертежа лишь с трудом. Однако, как показывает опыт, эта точность вполне достаточна для большинства технических расчетов, и номограммы получили в настоящее время самое широкое распространение в инженерной практике, хотя систематическое их изучение, создание самой науки „номографии“ насчитывает не более 50 лет.

В изучении номографии следует различать три ступени. Первая — это ознакомление со способами употребления готовых номограмм, имеющихся в различных руководствах, справочниках, специальных атласах. Это практическое овладение готовыми номограммами вполне доступно даже лицам, имеющим лишь самые незначительные сведения по математике. Оно весьма облегчается тем, что на номограмме почти всегда указывают и способ ее употребления („ключ“). Вторая ступень заключается в выяснении того, почему данная номограмма при указанном способе ее употребления дает решение данного уравнения. Подобное „объяснение“ готовой номограммы требует уже некоторых (очень небольших) знаний по номографии. Наконец, третья, высшая ступень изучения номографии состоит в овладении методами построения номограмм. В настоящем руководстве мы не имеем возможности охватить все эти три ступени и ограничимся лишь первыми двумя: задача наша — научиться пользоваться готовыми номограммами, притом пользоваться *сознательно*.

§ 66. Номограммы для зависимости между двумя переменными. Функциональные шкалы.

Имея зависимость между двумя переменными x и y, выраженную уравнением $F(x, y)=0$, или $y=f(x)$, т. е. имея функцию y одного аргумента x (или, наоборот, функцию x одного аргумента y), мы можем, как известно из курса „Аналитической геометрии“, изобразить эту зависимость геометрически, пользуясь хотя бы прямоугольными декартовыми координатами. При непрерывности y как функции от x мы получим на плоскости некоторую линию, прямую или кривую. Наличность такой линии, аккуратно вычерченной на куске миллиметровой бумаги, позволяет указывать значения y по данным значениям x и значения x по данным значениям y без каких бы то ни было вычислений, путем простого *отсчета* по чертежу. Следовательно, всякий такой „декартов график“ функции одного аргумента есть ее *номограмма*.

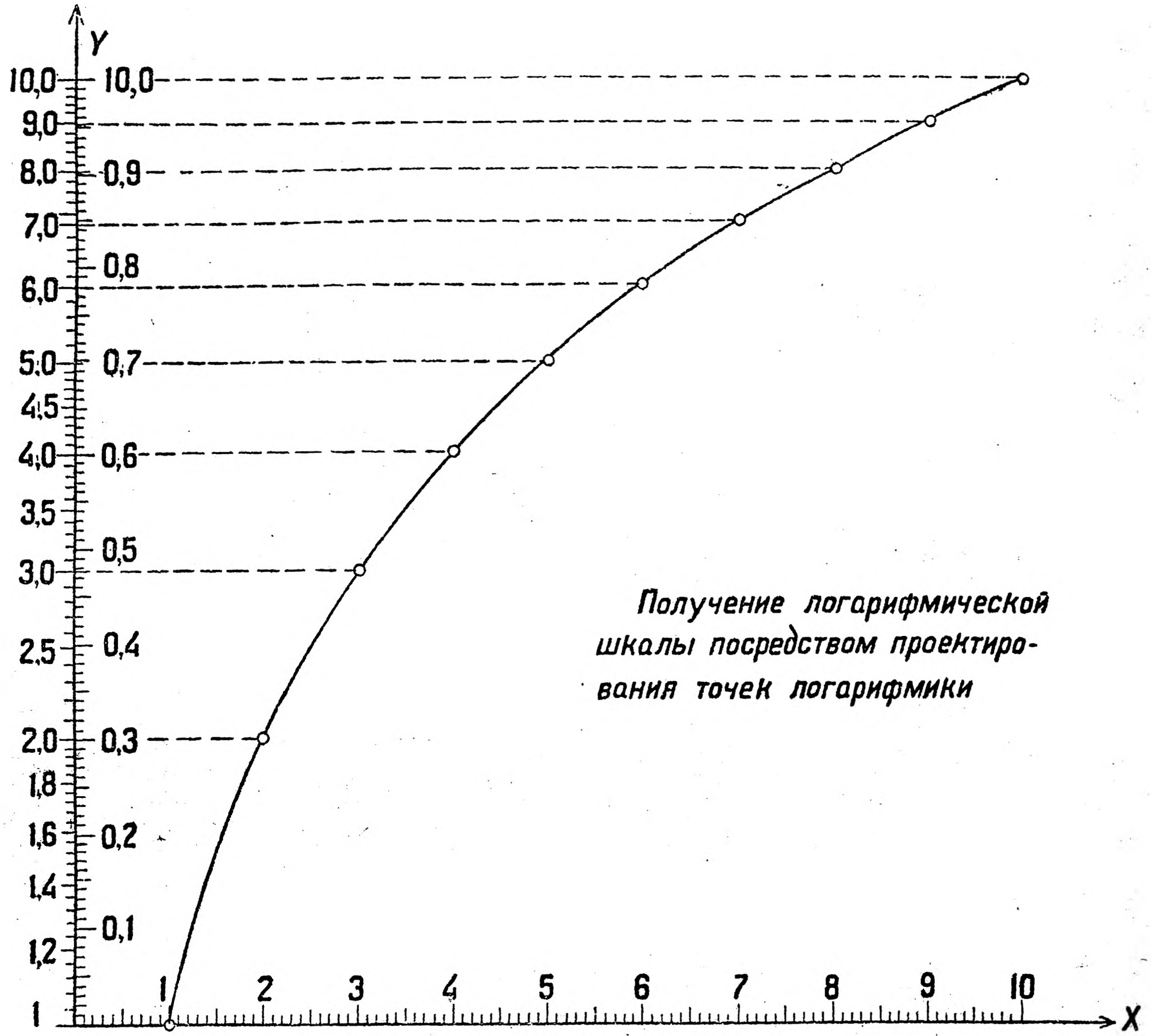


Рис. 28.

Однако совершенно тот же эффект в смысле возможности вычисления значения функции мы получим, если спроектируем ряд точек графика на одну из координатных осей. На рисунке 28, изображающем график функции $y = \lg x$ (в масштабе 1 единица равна 10 *мм* по оси X и 1 единица равна 100 *мм* по оси Y), взяты точки кривой, соответствующие значениям аргумента 1,2,..., 9,10 (точки эти отмечены кружками) и спроектированы на ось Y, затем такое же проектирование выполнено с рядом промежуточных точек кривой. Все эти проекции отмечены штрихами, нанесенными слева от оси Y, причем около некоторых штрихов поставлены „цифровые метки“, которые указывают значения аргумента, соответствующие спроектированным точкам. Теперь по обеим сторонам оси Y мы имеем две серии штрихов, образующих пару так называемых *функциональных шкал* (соединенных или сдвоенных). Эта пара функциональных шкал позволяет находить значения y по данному значению x (и обратно) из уравнения $y = \lg x$, вовсе не пользуясь декартовым графиком, и тоже, следовательно, представляет собой номограмму. Мы, так сказать, уплотнили декартов график функции $y = \lg x$, сжав его до одной прямой (оси Y) и выгадав тем самым много места, которое может быть использовано для других целей. Кроме того, номограмма из двух сдвоенных функциональных шкал удобнее номограммы в виде декартова графика в том отношении, что отсчеты на первой не требуют того проведения более или менее длинных прямолинейных отрезков (или прослеживания их взглядом), которое необходимо при отсчетах по декартову графику. Чтобы в этом убедиться, достаточно найти сперва по графику рисунка 28, затем по паре соединенных шкал на том же чертеже, например $\lg 8{,}73$, равный 0,941, или антилогарифм числа 0,658, равный 4,55.

При построении функциональной шкалы нет необходимости предварительно строить декартов график, а потом проектировать его точки на ось, как это мы только что делали. Достаточно бывает установить уравнение этой шкалы, т. е. воспользоваться формулой, выражающей зависимость метки каждого штриха от расстояния этой метки от начала шкалы (в миллиметрах). Можно сказать, что уравнение функциональной шкалы выражает закон расстановки ее штрихов. Так, обозначая буквой x метку некоторого штриха, нанесенного слева от оси Y на рисунке 28, а той же буквой x с черточкой сверху ($\bar{x}$) расстояние этого штриха от начала шкалы (в данном случае от начала координат), выраженное в миллиметрах, мы получим уравнение шкалы в виде $\bar{x} = 100 \lg x$, и можем легко построить эту логарифмическую шкалу, не прибегая к проектированию. Функциональная шкала, образуемая штрихами справа от оси Y, имеет уравнение $\bar{y} = 100y$. Здесь буква y означает метку любого ее штриха, буква $\bar{y}$ — расстояние этой метки от начала шкалы в миллиметрах. Сопоставление обеих шкал, т. е переход от какого-нибудь штриха одной шкалы к противостоящему штриху другой, есть не что иное, как решение уравнения $\bar{y} = \bar{x}$, или $100y = 100 \lg x$, или $y = \lg x$. Желая найти значение логарифма данного числа x, мы должны найти метку x на левой шкале и прочесть противостоящую метку y на правой шкале (например при $x = 3$ получаем $y = \lg x = 0{,}48$). Чтобы найти число x, имеющее заданный логарифм y, нужен обратный переход — справа налево (например при $y = \lg x = 0{,}75$ $x = 5{,}62$).

Переходя от рассмотренного частного примера к общему случаю, можем сказать, что всякой функции $f(x)$, рассматриваемой для значений аргумента x от $x_0 = a$ до $x_n = b$, где $a < b$, соответствует некоторая функциональная шкала с уравнением $\bar{x} = mf(x)$, где m — постоянное число („модуль" шкалы), выражающее (в миллиметрах) длину отрезка от начала шкалы до той ее точки, которая соответствует значению $f(x)$, равному 1. Выбор того или иного значения для m делается более или менее произвольно на основании соображений о желательном размере шкалы. Символ $\bar{x}$ в уравнении шкалы означает расстояние (в миллиметрах) от начала шкалы до того ее штриха, у которого стоит метка x. Если аргумент обозначен какой-нибудь другой буквой (y, z, t и т. д.), то для обозначения этого расстояния мы будем пользоваться той же буквой, но с черточкой сверху ($\bar{y}$, $\bar{x}$, $\bar{t}$ и т. д.). Штрихи шкалы соответствуют значениям аргумента $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h, \ldots$, $x_n = a + nh = b$, возрастающим по закону арифметической прогрессии, причем постоянная разность h носит название „ступени" шкалы, а расстояние между двумя соседними ее штрихами называется „графическим интервалом" шкалы. Графический интервал имеет постоянное значение в случае, когда $f(x)$ есть линейная функция $a+bx$; тогда получается

„равномерная“ (или „метрическая“) функциональная шкала. Примером может служить обыкновенная линейка с делениями на миллиметры (уравнение $\bar{x} = x$) или на сантиметры (уравнение $\bar{x} = 10x$). В общем случае графический интервал есть величина переменная. Чтобы не делать его ни слишком большим, ни слишком малым и обеспечить тем самым наиболее удобное пользование шкалой, ступень шкалы берут иногда на разных участках шкалы различной, но обыкновенно равной 1, 2, 5 единицам некоторого разряда. Так, на шкале, изображенной на рисунке 28, на участке от $x = 1$ (начало шкалы) до $x = 2$ ступень h равна 0,02; дальше от $x = 2$ до $x = 5$ имеем $h = 0{,}05$; наконец, от $x = 5$ до $x = 10$ имеем $h = 0{,}1$.

Штрихи с метками a и b, равными наименьшему и наибольшему из рассматриваемых значений аргумента, называются „концами“ шкалы (левым и правым или нижним и верхним), отрезок же от метки a до метки b — „рабочей частью“ шкалы. Начало шкалы чаще всего совмещают с одним из концов ее, но его можно взять, конечно, где угодно. Если начало взять вне рабочей части шкалы, то на готовой функциональной шкале его опускают.

Следует твердо помнить, что метки x_0, x_1, x_2,... являются значениями аргумента x, а соответствующие значения функции $f(x)$ пропорциональны расстояниям тех штрихов, около которых они поставлены, от начала шкалы; согласно уравнению шкалы расстояния эти равны $mf(x)$. В гл. III, изучая логарифмическую линейку, мы имели дело с целым рядом функциональных шкал. Мы видели, что при работе с ними все время приходится решать две задачи: во-первых, делать по функциональной шкале *отсчет*, т. е. указывать метку определенной данной на шкале точки, и, во-вторых, делать на шкале *установку*, т. е. находить на шкале точку с данной меткой. При решении обеих задач постоянно употребляется „интерполяция на-глаз“: берутся два штриха шкалы, между которыми находится интересующая нас точка шкалы, и интервал между ними делится на-глаз на 2 или 5 или 10 равных частей. Пренебрегая, таким образом, неравномерностью функциональной шкалы, мы допускаем погрешность, тем меньшую, чем меньше графический интервал шкалы.

Существует много практических приемов, упрощающих дело построения функциональных шкал: применение особых „логарифмических шаблонов“, позволяющих простым копированием получать логарифмические шкалы любого модуля, различные виды проектирования, дающие возможность по одной готовой функциональной шкале строить ряд других, более сложных, и т. д. Каждый, желающий строить новые номограммы, должен этими приемами овладеть. Мы же, преследуя лишь цель научиться сознательно пользоваться готовыми номограммами, рассматривать их вовсе не будем.

От рассмотрения отдельно взятой функциональной шкалы переходим к рассмотрению номограммы из пары соединенных функциональных шкал.

Если на одной общей оси нанесены две функциональные шкалы X и Y с уравнениями $\bar{x} = mf(x)$ и $\bar{y} = mF(y)$, имеющие общее начало (рис. 29), то простой переход с одной шкалы на другую дает решение уравнения $f(x) = F(y)$. Действительно, взяв на шкале X некоторую метку x и прочтя противостоящую ей метку y на шкале Y, мы в силу равенства отрезков $\bar{x}$ и $\bar{y}$ имеем уравнение $mf(x) = mF(y)$, или

$f(x) = F(y)$, где x — данное значение аргумента, y — искомое значение функции. Ясно, что переход со шкалы Y на шкалу X позволяет решать то же уравнение относительно x.

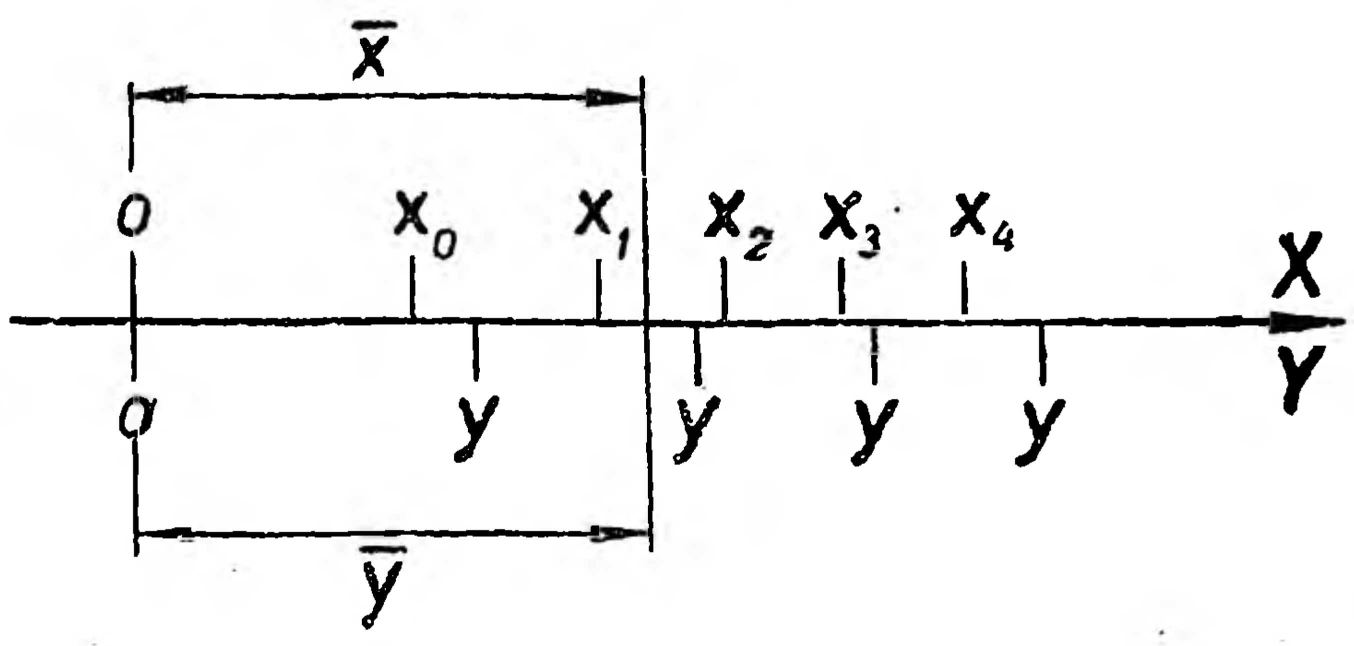


Рис. 29.

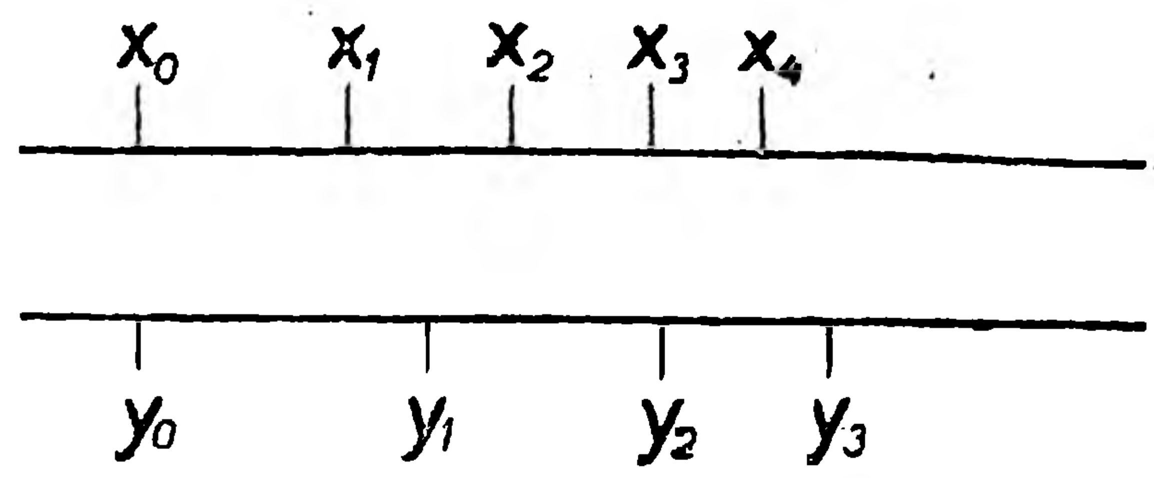


Рис. 30.

Функциональные шкалы такой номограммы из двух соединенных шкал могут быть нанесены не на одной прямой, а на паре параллельных прямых, но пользование ею тогда несколько осложняется: необходим подвижной „индекс“, позволяющий проводить перпендикуляры к обеим прямым. Таким индексом может служить прозрачная пластинка с нанесенной на ней парой взаимно-перпендикулярных прямых: одну из них совмещают с осью одной из шкал, другую устанавливают так, чтобы она проходила через штрих, соответствующий заданному значению аргумента (рис. 30). При отсутствии такого индекса можно пользоваться простым угольником (лучше из прозрачного материала).

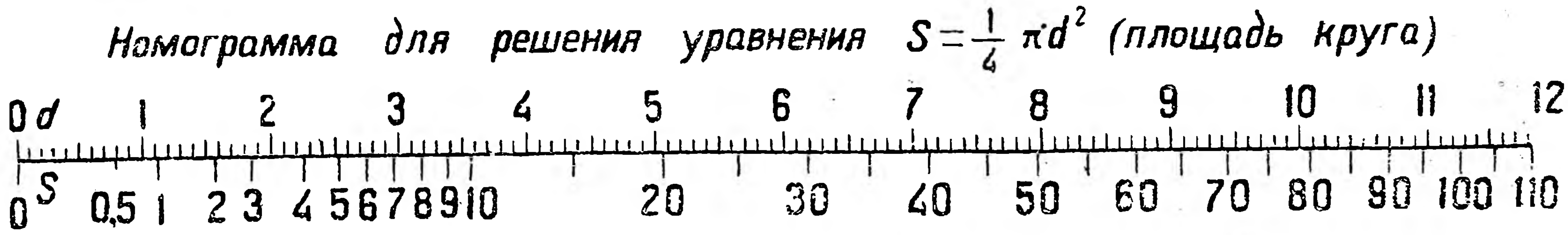


Рис. 31.

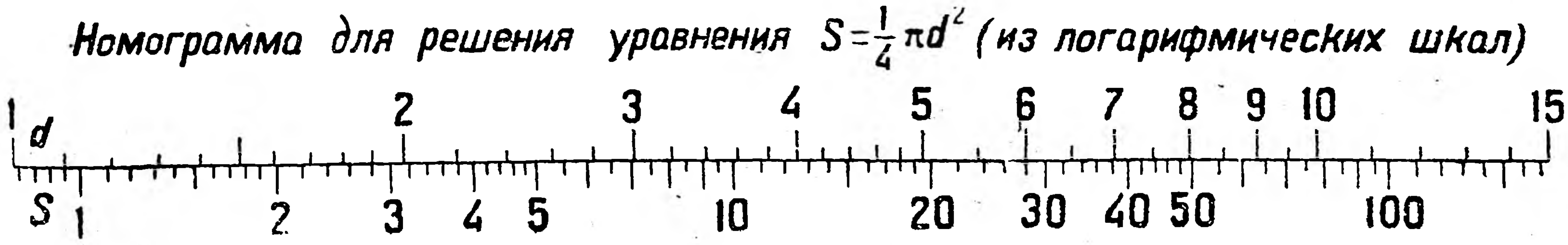


Рис. 32.

На рисунке 31 приведена номограмма для решения уравнения $S = \frac{1}{4}\pi d^2$, позволяющая определять площадь S круга по его диаметру d и диаметр круга d по его площади S. Здесь уравнения шкал $\overline{S} = 100\sqrt{4:\pi\cdot S}$; $\overline{d} = 100d$, началом служит точка с меткой 0. На рисунке 32 изображена номограмма, служащая для решения той же задачи, но построенная посредством других функциональных шкал, а именно шкал $\overline{S} = 50\left(\lg S - \lg\frac{1}{4}\pi\right)$; $\overline{d} = 100\lg d$ (начало помещено в точке $d = 1$). Последняя номограмма, как показывает более детальное рассмотрение, имеет целый ряд преимуществ (ее легче строить, применяя готовый логарифмический шаблон, она дает на всех участках постоянную относительную погрешность отсчета и др.). Этим и объясняется самое широкое употребление в номографии логарифмических шкал.

Читателю предлагается решить посредством номограмм несколько задач на определение площади круга по его диаметру и им обратных, проверяя получаемые результаты по таблице. Номограмма должна правильно давать две первые значащие цифры результатов.

Работая со счетной логарифмической линейкой, мы все время имели дело с подобными номограммами из соединенных функциональных шкал. Поэтому и самую счетную линейку считают особого рода номограммой, а именно *номограммой с подвижной частью.*

Упражнения.

1. Осуществить номограмму рисунка 32 посредством шкал A и C (или B и D) логарифмической линейки.

2. Установив метку $c_0 = 3$ шкалы C логарифмической линейки против метки $k_0 = 36\pi = 113{,}1$ шкалы K, доказать, что соединенные функциональные шкалы C и K образуют при этом номограмму для решения задач на зависимость между объемом шара V и его радиусом R $\left(V = \frac{4}{3}\pi R^3\right)$. Формулировать правило для вычисления V по R и R по V и решить несколько задач (с контрольным вычислением по таблицам).

3. Посредством надлежащего сопоставления шкал A и S создать номограмму для вычисления по формуле $y = a\sin^2 x$, где a — постоянное, x — переменное.

§ 67. Сетчатые номограммы для зависимости между тремя переменными.

Всякую зависимость между тремя переменными можно изобразить геометрически посредством некоторой поверхности в пространстве. Можно, однако, получить геометрическое изображение этой зависимости и не выходя за пределы плоскости. Действительно, имея зависимость $f(x, y, z) = 0$, дадим одной из переменных, хотя бы z, ряд значений $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ и полученный ряд зависимостей между двумя переменными x и y [$f(x, y, z_1) = 0$; $f(x, y, z_2) = 0$ и т. д.] изобразим на одном и том же рисунке посредством обычных декартовых графиков. Каждую линию построенного „семейства", или „сетки", отмечаем числом, показывающим, какому значению z она соответствует. Подобный рисунок позволяет по данным значениям двух переменных (x и y, или x и z, или y и z) находить соответствующее значение третьей переменной (z, или y, или x), а потому он представляет собой номограмму, а именно „сетчатую" номограмму для зависимости $f(x, y, z) = 0$.

На рисунке 33 мы имеем номограмму для зависимости $y = z\sin x$, представляющую собой семейство синусоид. Она позволяет решать три задачи: 1) находить катет y прямоугольного треугольника по данному противолежащему острому углу x и гипотенузе z (например при $x = 30°$ и $z = 8$ находим по номограмме $y = 4$ как ординату точки пересечения кривой $z = 8$ и прямой $x = 30°$); 2) находить гипотенузу z прямоугольного треугольника по данному его катету y и противолежащему острому углу x (например при $y = 4$ и $x = 30°$ получаем по номограмме $z = 8$ как метку той кривой семейства, которая проходит через точку пересечения прямых $x = 30°$ и $y = 4$); 3) находить острый угол x прямоугольного треугольника по данному противолежащему его катету y и гипотенузе z

(например при $y=4$ и $z=8$ имеем по номограмме $x=30^\circ$ как абсциссу точки пересечения прямой $y=4$ и кривой $z=8$).

Увеличив или уменьшив в 10, 100, ... раз метки шкалы Y, мы должны, как показывает уравнение $y=z\sin x$, во столько же раз увеличить или уменьшить и метки x. Таким образом, номограммой рис. 33 можно пользоваться для любых значений x и y (и для значений z от 0 до 90°).

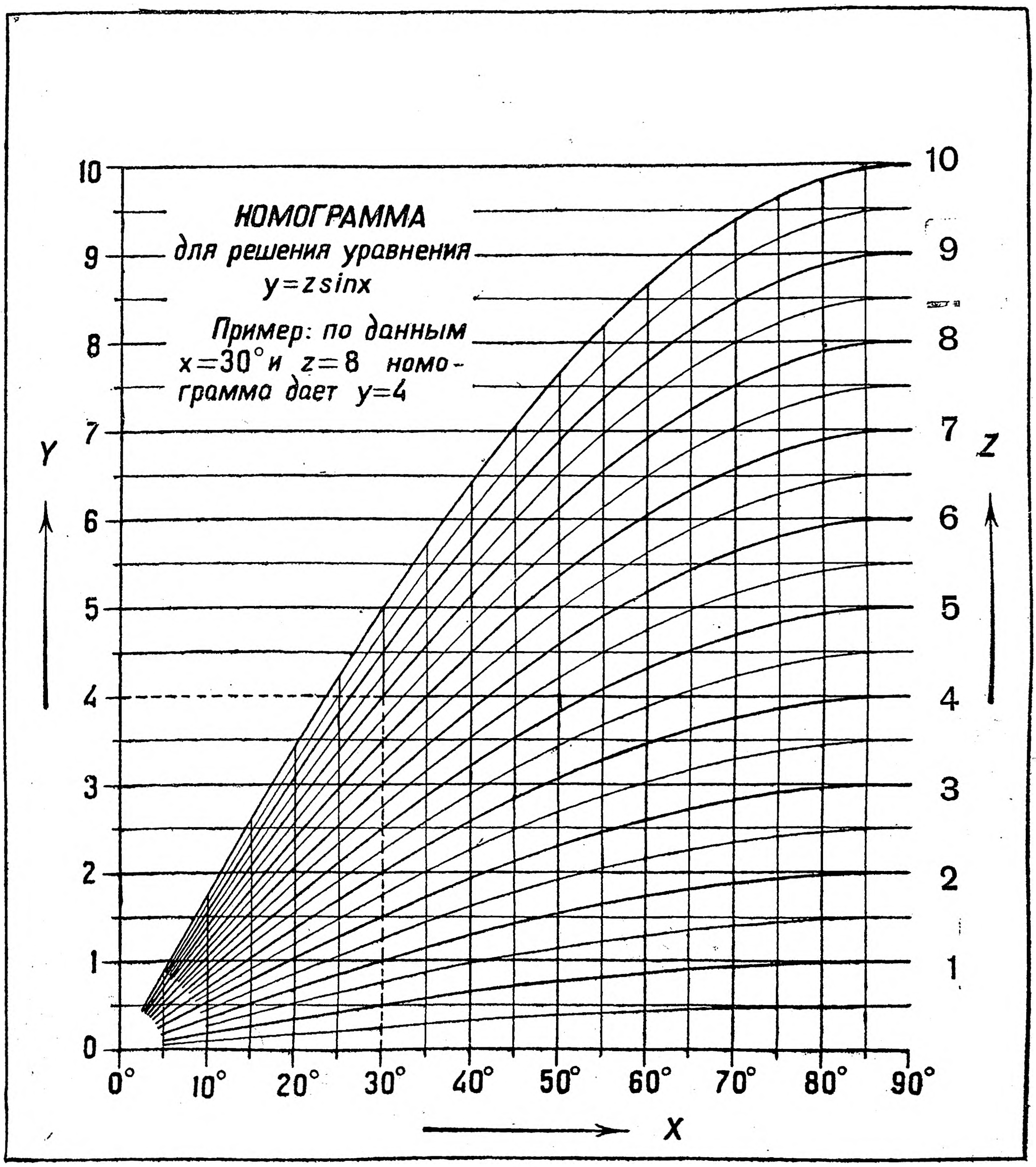


Рис. 33.

Если в качестве параметра, значение которого характеризует каждую линию семейства, мы возьмем не величину гипотенузы, как это было сделано в номограмме рис. 33, а величину острого угла, то для той же зависимости между элементами прямоугольного треугольника мы получим другую номограмму, а именно номограмму в виде семейства прямых, изображенную на рисунке 34. Она позволяет решать те же три задачи, что и номограмма рис. 33, но построение ее проще.

Рассмотрим еще номограмму для умножения и деления, т. е. номограмму уравнения $xy = z$. Приняв за параметр произведение z, получим семейство гипербол. Приняв за параметр z один из сомножителей и переписав уравнение $xy = z$ в виде $y = zx$, получим номограмму того же „радиантного“ типа, как и номограмма рис. 34. Более удобная номограмма получается, если подвергнуть номограмму из семейства гипербол так называемой „анаморфозе“, превращая гиперболы в прямые. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что всякая прямая линия, начерченная на логарифмической бумаге, является графиком уравнения вида $y = kx^a$

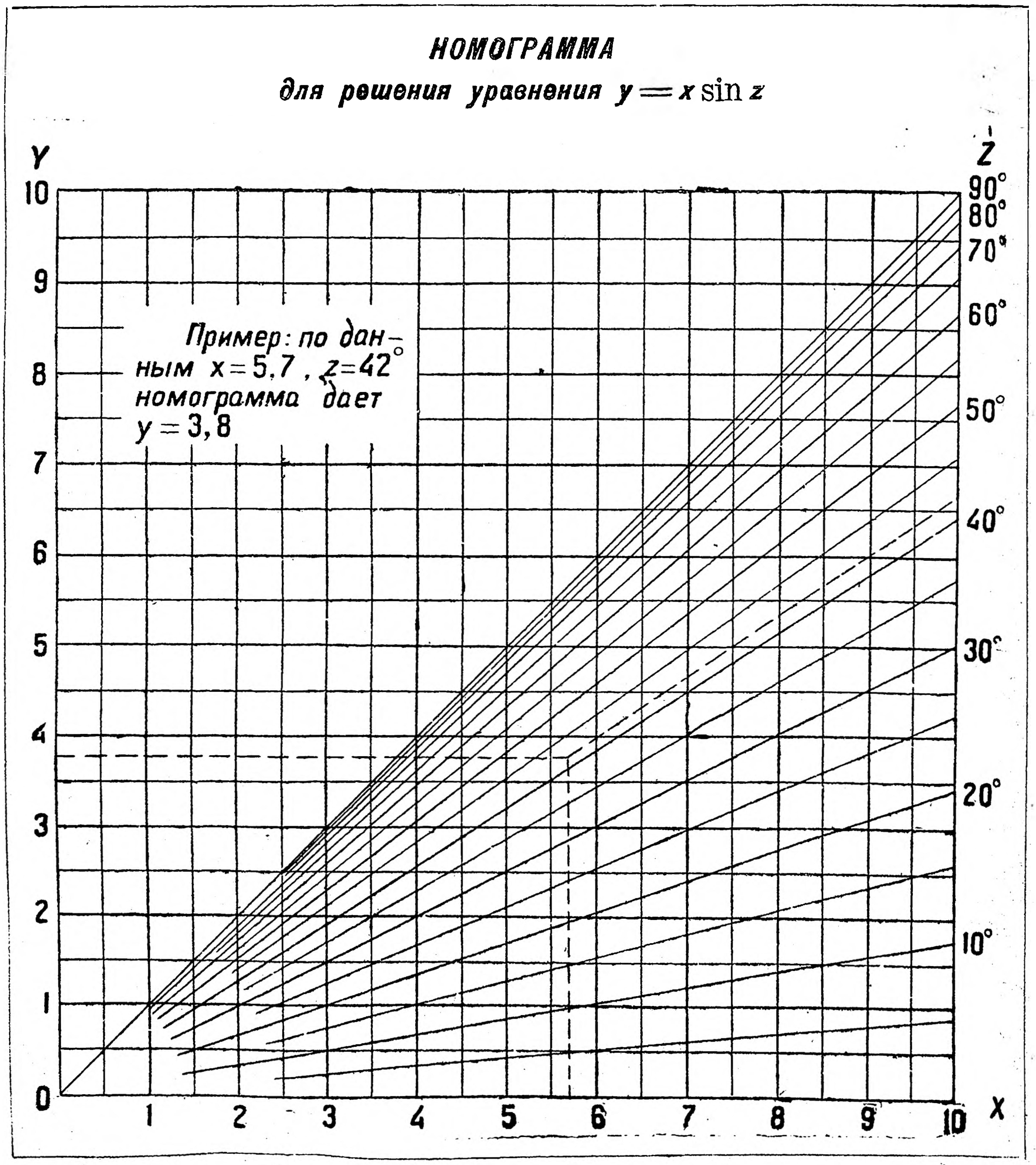


Рис. 34.

(§ 64). Так как уравнение $xy = z$ есть частный случай уравнения этого вида (при $k = z$, $a = -1$), то с переходом от миллиметровой бумаги к бумаге логарифмической мы заменим семейство гипербол семейством прямых и получим номограмму, весьма удобную и для построения и для использования (рис. 35). Здесь каждая прямая характеризуется постоянством значения суммы координат (логарифмических) движущейся по этой прямой точки. Действительно, на шкалах X и Y мы имеем функциональные шкалы с уравнениями $\bar{x} = m \lg x$; $\bar{y} = m \lg y$, и для всякой прямой нашей номограммы, проведенной через точки $\bar{x} = m \lg a$, $\bar{y} = 0$ и $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = m \lg a$, имеем уравнение $\frac{\bar{x}}{m \lg a} + \frac{\bar{y}}{m \lg a} = 1$, или $x + y = m \lg a$, откуда $m \lg x + m \lg y = m \lg a$, или $xy = a$. Интересно, что на этой номограмме нет надобности иметь метки значений z: ими служат метки каждой из шкал X и Y.

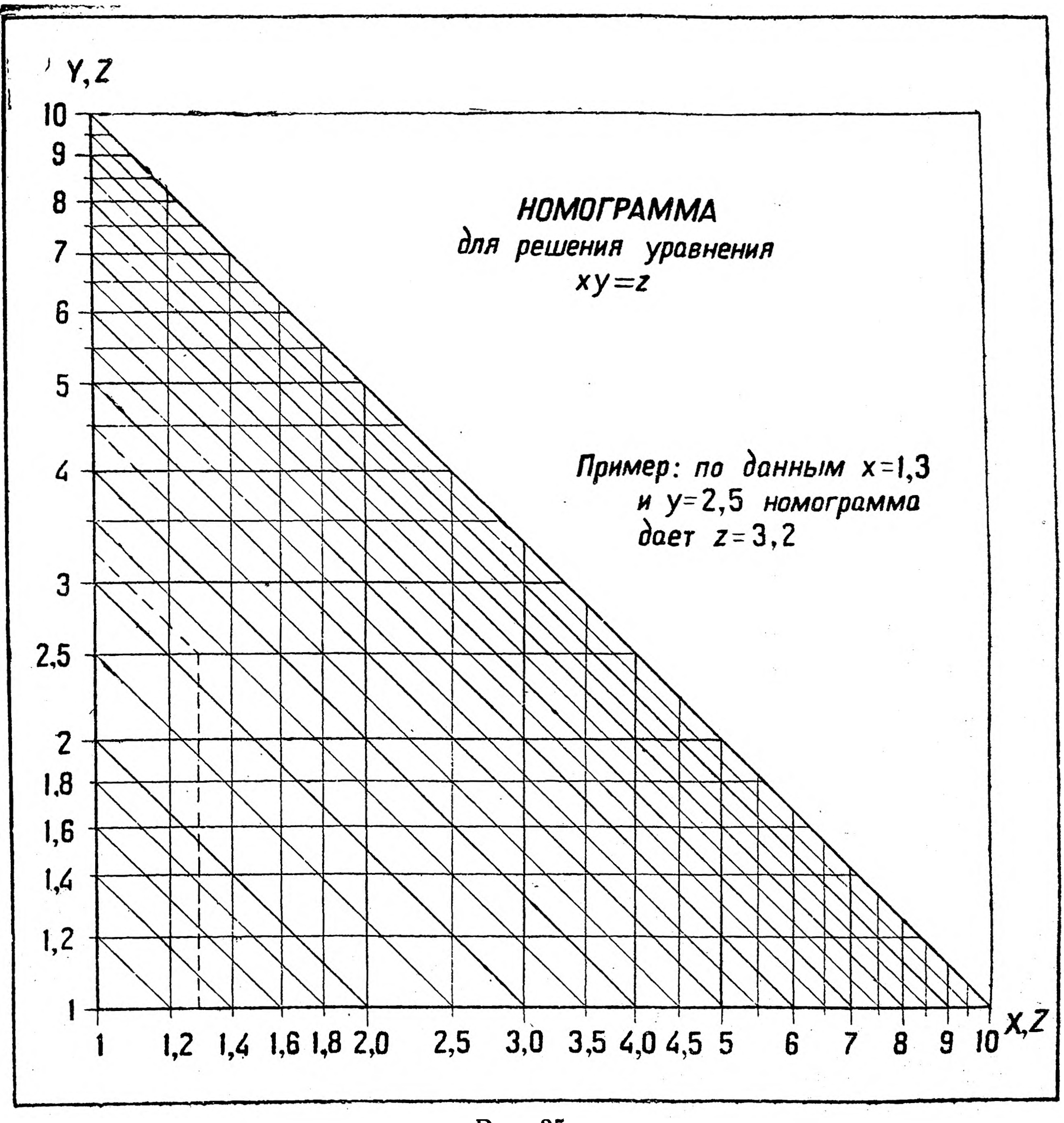


Рис. 35.

Читателю предлагается формулировать правила умножения и деления числа посредством номограммы рис. 35 и сделать несколько примерных расчетов.

Упражнения.

1. Показать, что координаты x, y каждой точки номограммы рис. 36 связаны с меткой z окружности, проходящей через эту точку, уравнением $x^2 + y^2 = z^2$, и выяснить, как посредством этой номограммы решаются задачи на применение теоремы Пифагора. Как быть, если значение хотя бы одной из величин x, y, z выходит за пределы шкал?

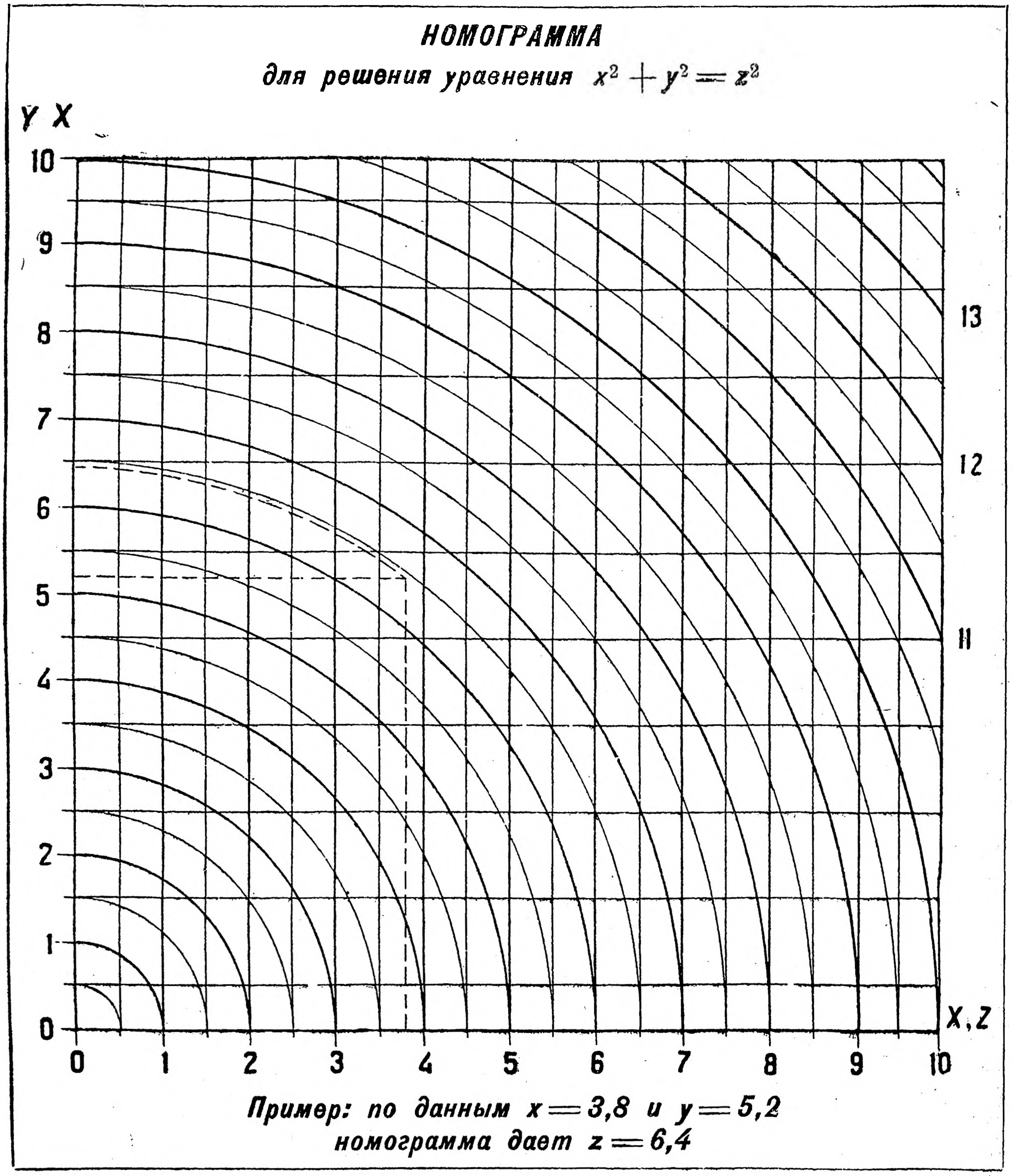


Рис. 36.

2. На рисунке 37 уравнения шкал h и V есть $\bar{h}=10h$, $\bar{V}=0{,}1V$. Прямые с метками d от 1 до 11 проведены через точку с координатами $h=0$, $V=0$ и через точки с координатами $h=40:\pi=12{,}74$, $V=10d^2$, а прямые с метками $d>11$ — через точки $h=0$, $V=0$ и $h=1000d^{-2}$, $V=250\pi$. Доказать, что метки V, h каждой точки номограммы связаны с меткой d прямой, проходящей через начало ($h=0$, $V=0$) и через эту точку, уравнением $V=\frac{1}{4}\pi d^2h$, и установить способ решения посредством этой номограммы трех задач на объем цилиндра (вычисление V по d и h; вычисление d по V и h; вычисление h по V и d). Как быть, если данные или искомые значения d, h, V выходят за пределы шкал?

3. На рисунке 38 шкала h имеет уравнение $\bar{h}=50\lg h$, шкала d — уравнение $\bar{d}=100\lg d$. Номограмма состоит из трех семейств прямых линий: прямые первого семейства горизонтальны и имеют метки шкалы d, прямые второго семейства вертикальны и имеют метки шкалы h, прямые третьего семейства наклонены под углом 135° к горизонтальной оси и отсекают от каждой из осей h и d отрезки,

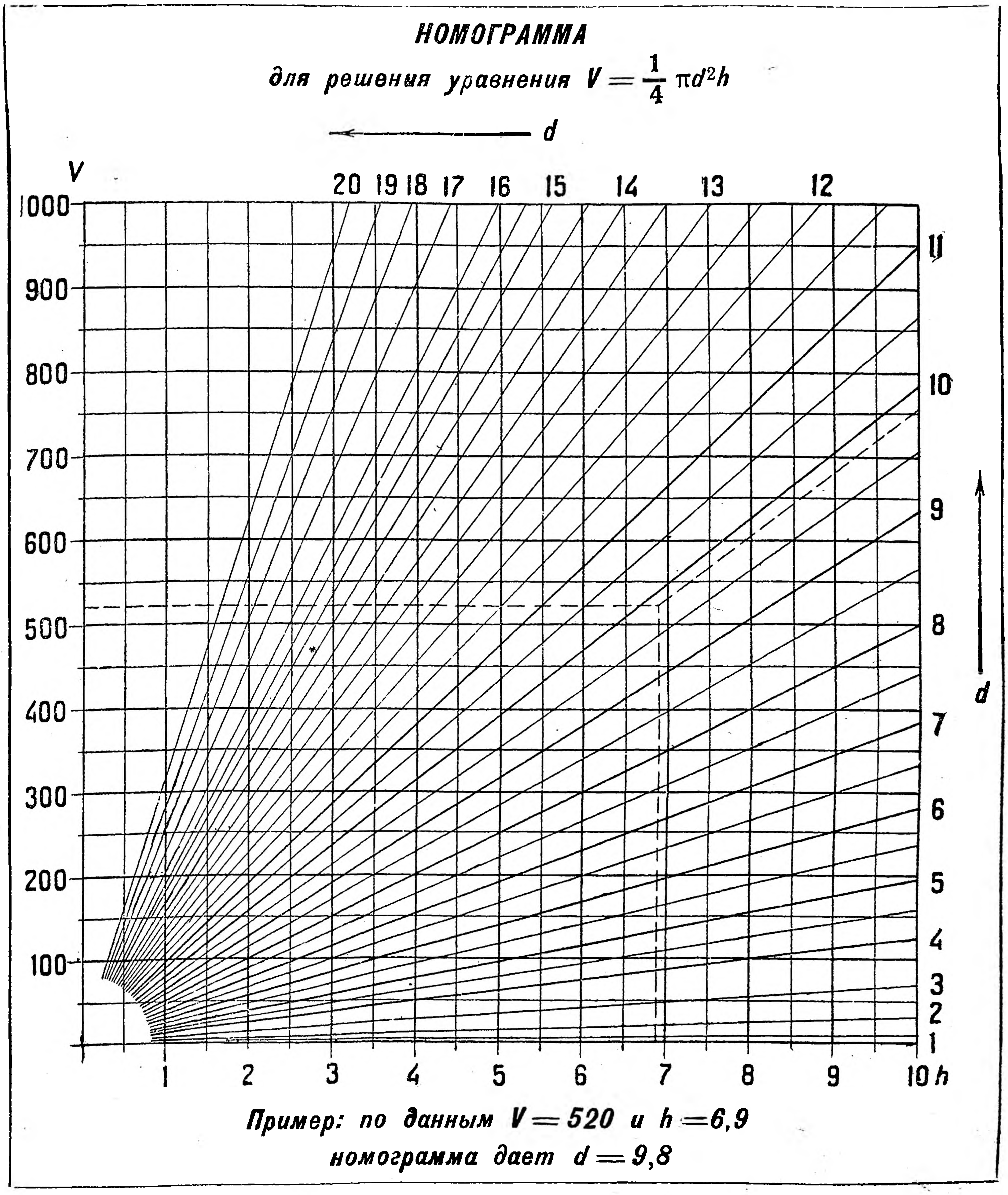


Рис. 37.

равные $\overline{V} = 50 \lg V + 50 \lg (4:\pi)$, где V — метка наклонной прямой (например наклонная прямая с меткой 1 отсекает от каждой из осей h и d отрезки, равные $50 \lg 1 + 50 \lg (4:\pi) = 5,25$ *мм*). Показать, что координаты d, h любой точки номограммы связаны с меткой V той прямой семейства, которая проходит через эту точку, зависимостью $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$, и что эта номограмма позволяет решать те же три задачи, что и номограмма рис. 37. В чем преимущество номограммы рис. 38 перед номограммой рис. 37?

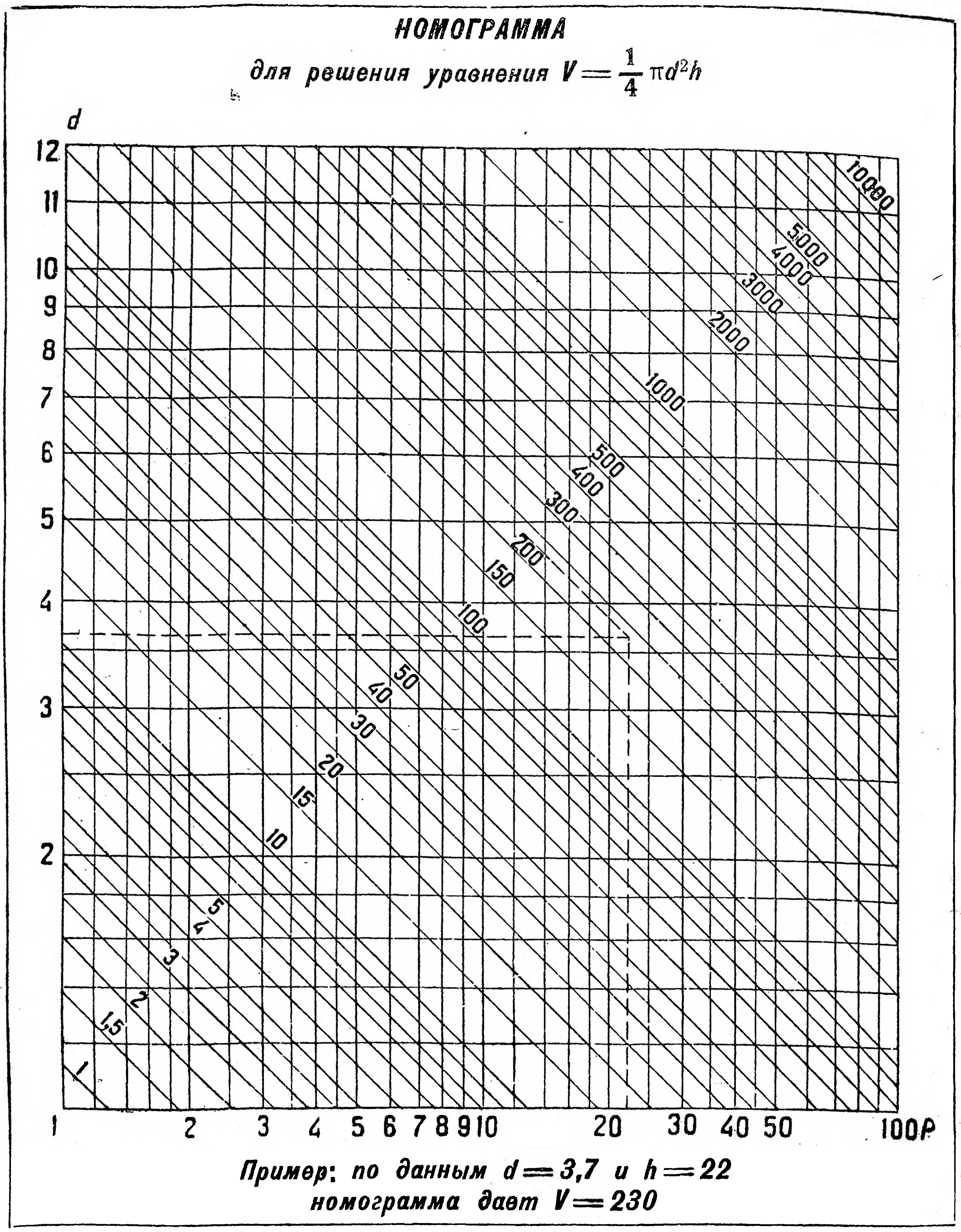


Рис. 38.

§ 68. Номограммы из выравненных точек с параллельными шкалами.

Сетчатые номограммы, которыми мы занимались в предшествующем параграфе, можно строить и для уравнений, связывающих более чем три переменных. Однако более выгодными оказываются номограммы из *выравненных точек*. Некоторыми типами таких номограмм мы и займемся в настоящем и следующем параграфах.

Возьмем три функциональные шкалы $\bar{x}=m_1f_1(x)$; $\bar{y}=m_2f_2(y)$; $\bar{z}=$ $=m_3f_3(z)$, расположенные на трех параллельных прямых O_1X, O_2Y, O_3Z

(рис. 39), удаленных друг от друга на расстояния a *мм* и b *мм*. Начала всех трех шкал O_1, O_2, O_3 будем предполагать расположенными на одной прямой. Проведем какую-нибудь прямую, пересекающую три оси в точках A, B, C с метками x, y, z (это и есть три „выравненные“ точки). Какая зависимость существует между этими тремя метками? Проводя AB_1 и BC_1 параллельно O_1O_3, получим пару подобных треугольников ABB_1 и BCC_1 с высотами a и b и пишем пропорцию $B_1B : C_1C = a : b$. Но $B_1B = O_2B - O_1A = \bar{y} - \bar{x}$; $C_1C = O_3C - O_2B = \bar{z} - \bar{y}$, а потому $(\bar{y} - \bar{x}) : (\bar{z} - \bar{y}) = a : b$, откуда и получаем искомую зависимость в виде уравнения:

$$\frac{\bar{x}}{a} + \frac{\bar{z}}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\bar{y}, \qquad \text{(A)}$$

где

$$\bar{x} = m_1 f_1(x); \quad \bar{y} = m_2 f_2(y); \quad \bar{z} = m_3 f_3(z).$$

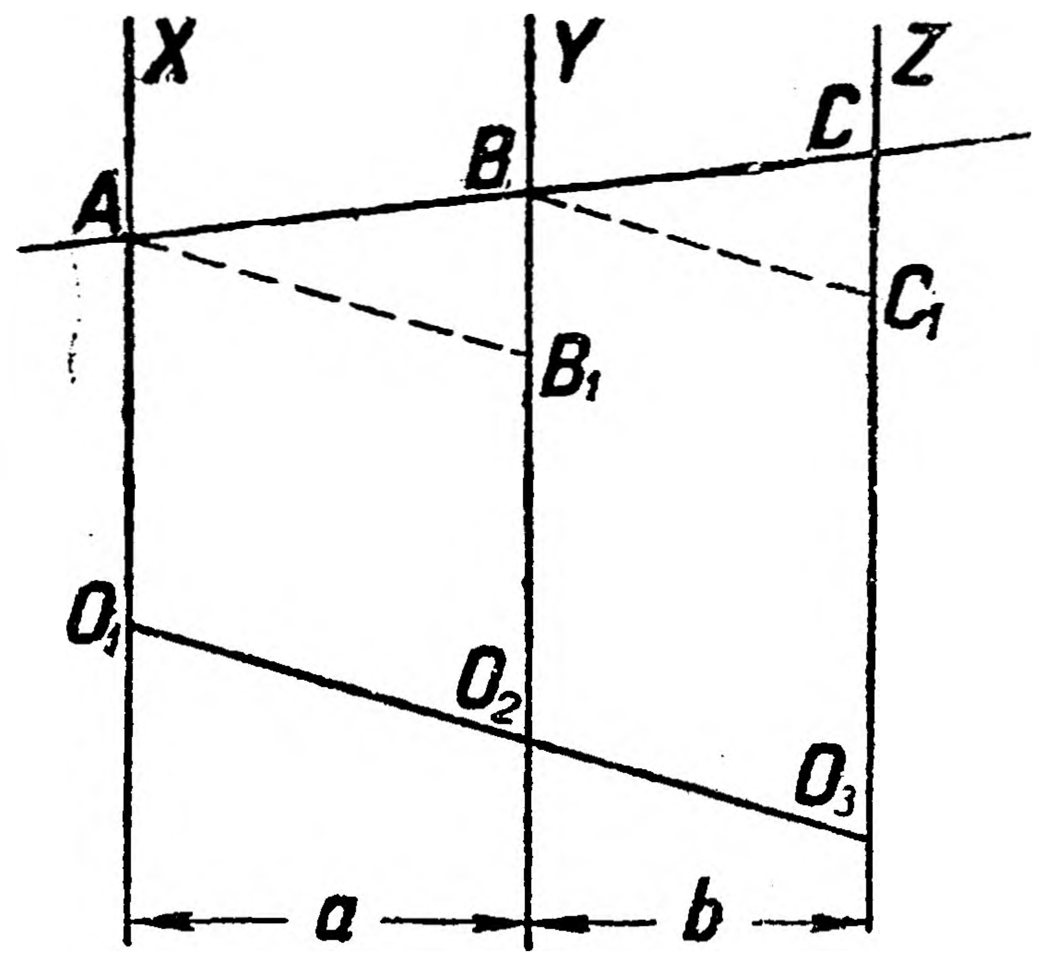


Рис. 39.

Таким образом, рассматриваемая номограмма позволяет решать уравнение (А): взяв значения двух переменных из числа трех x, y, z, находим соответствующее значение третьей посредством проведения прямой, проходящей через метки двух шкал, соответствующие данным значениям переменных, и отсчета по третьей шкале. Эту прямую линию, чтобы не загрязнить чертежа, не проводят карандашом, а осуществляют посредством натягивания тонкой нити или прикладывания прозрачной линейки.

Для примера рассмотрим номограмму рис. 40. Здесь $a = 40$ *мм*; $b = 80$ *мм*, левая шкала вычерчена по уравнению $\bar{d} = 100 \lg d$, правая по уравнению $\bar{h} = 100 \lg h$, средняя (левая) — по уравнению

$$\bar{V_ц} = \frac{100}{3} \lg \frac{4V_ц}{\pi}.$$

Уравнение (А) сводится в данном случае к такому:

$$\frac{100}{40} \lg d + \frac{100}{80} \lg h = \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{80}\right) \cdot \frac{100}{3} \lg \frac{4V_ц}{\pi},$$

или после упрощений:

$$d^2h = \frac{4}{\pi} V_ц, \qquad \text{или} \qquad V_ц = \frac{1}{4}\pi d^2 h.$$

Таким образом, номограмма рис. 40 позволяет решать задачу на определение объема круглого цилиндра $V_ц$ по данному поперечнику его основания d и данной высоте h, а также две обратные задачи (определение d по $V_ц$ и h; h по $V_ц$ и d). Положим, требуется найти объем цилиндра с поперечником 2,8 *см* и высотой 5,1 *см*. Проводя прямую через метку 2,8 левой шкалы и метку 5,1 правой шкалы, читаем в пересечении этой прямой со средней (левой) шкалой метку 31,5 и заключаем, что искомый объем равен 31,5 *см*^{3}. Контрольное вычисление по четырехзначной таблице логарифмов дает для объема 31,41 *см*^{3}. Точно так же для цилиндра объема 100 *см*^{3} и высоты 4,5 *см* находим по номограмме поперечник 5,35 *см* (контрольное вычисление дает 5,320 *см*); для цилиндра

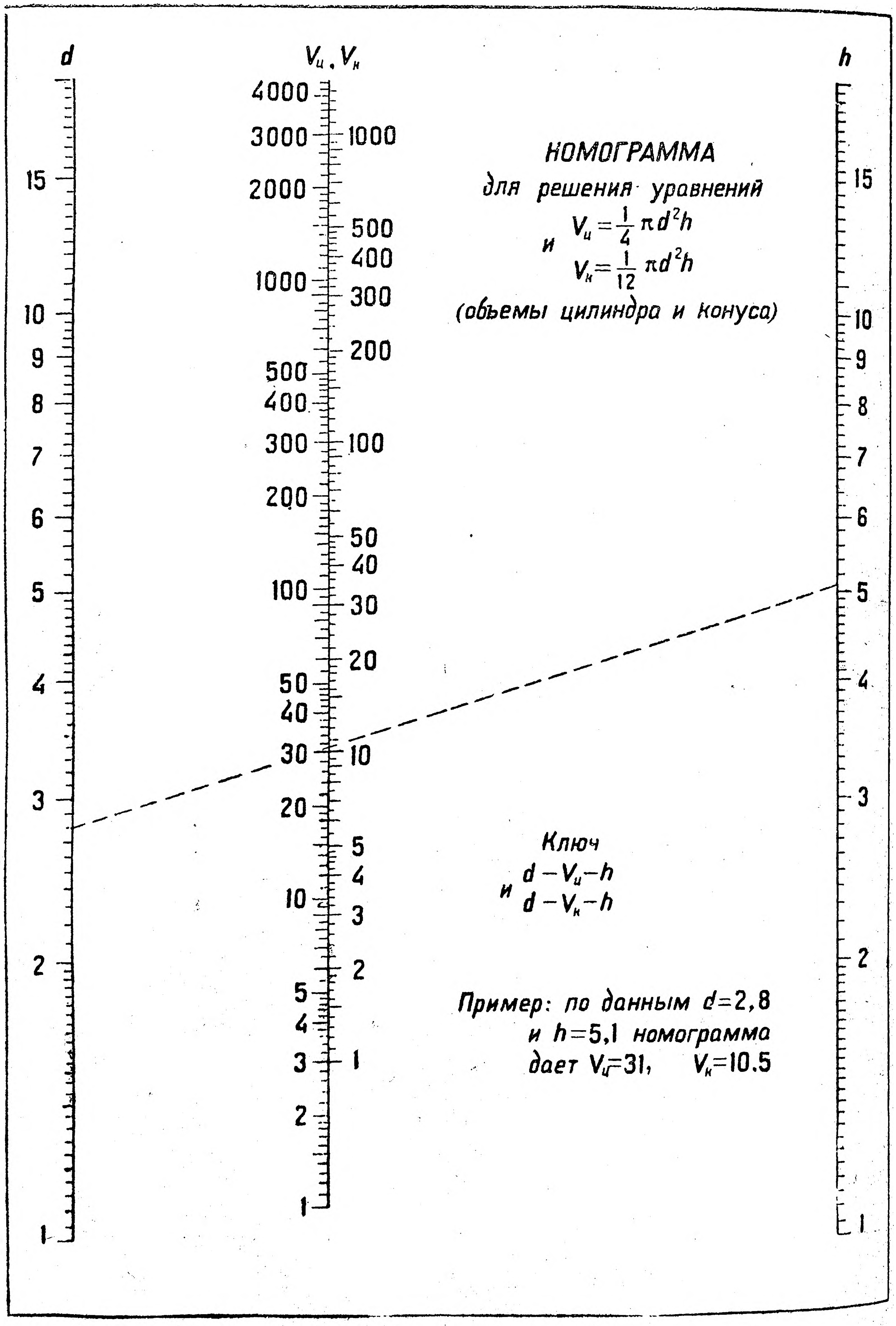

d
$V_ц, V_к$
h
НОМОГРАММА
для решения уравнений
$V_ц = \frac{1}{4}\pi d^2 h$
и
$V_к = \frac{1}{12}\pi d^2 h$
(объемы цилиндра и конуса)
Ключ
$d - V_ц - h$
и $d - V_к - h$
Пример: по данным $d=2{,}8$ и $h=5{,}1$ номограмма дает $V_ц=31$, $V_к=10.5$

Рис. 40.

объема 15 $см^3$ с поперечником 4,0 *см* номограмма дает значение высоты 1,20 *см* (контрольное вычисление 1,194 *см*).

Если хотя бы одно из данных или искомых выходит за пределы шкал, нужно изменить надлежащим образом одно или оба данных, проще всего произвести увеличение или уменьшение в 10, 100, ... раз, принимая во внимание, что объем пропорционален высоте и квадрату поперечника. Так, желая найти объем цилиндра высоты 50 *см* и поперечника 15 *см*, мы будем искать по номограмме объем цилиндра высоты 5,0 и поперечника 1,5 и найденное число 8,8 увеличим в $10\cdot 10^2 = 1000$ раз; искомый объем цилиндра 8800 $см^3$ (контрольное вычисление дает 8836 $см^3$).

На правой стороне средней оси номограммы (рис. 40) имеется шкала с уравнением $\overline{V_к} = \frac{100}{3}\lg\frac{12V_к}{\pi}$, метки которой ровно втрое меньше противостоящих меток шкалы объема цилиндра. Эта шкала служит, как легко убедиться, для расчетов, связанных с формулой объема конуса.

На рисунке 41 изображена номограмма, дающая вес p однородного цилиндрического круглого стержня в зависимости от его поперечника d (в миллиметрах), длины l (в метрах) и плотности δ, а также позволяющая решать и обратные задачи. Здесь имеется уже пять шкал. Пунктирные прямые указывают способ употребления („ключ") номограммы. Чтобы по данным d, l, δ найти p, проводят прямую через метки d и l шкал II и V и замечают точку пересечения со шкалой IV. Затем через эту точку шкалы IV и через точку с меткой δ шкалы I проводят новую прямую и в точке ее пересечения с III прямой читают искомый вес p. Так, если круглый стержень имеет длину $l = 0{,}25$ *м* и поперечник $d = 22$ *мм* и сделан из железа ($\delta = 7{,}8$), то номограмма дает его вес $p = 740$ *г* (контрольное вычисление дает $p = 741$ *г*).

В устройстве номограммы легко разобраться. Все ее пять шкал параллельны друг другу, причем между шкалами δ и l расстояние втрое больше, чем между шкалами l и p; p и V; V и d. Шкалы l, V, d представляют собой номограмму для определения объема цилиндра V по формуле $V = \frac{1}{4}\pi d^2 l$ (если d выражено в миллиметрах, а l в метрах, то V получается, как нетрудно убедиться, в кубических сантиметрах), шкалы же δ, p, V составляют вторую номограмму, а именно номограмму для вычисления p по формуле $p = V\delta$. Уравнения шкал таковы:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{l} &= 120\lg(10l) = 120\lg l + 120;\\
\overline{d} &= 120\lg(d:5) = 120\lg d - 120\lg 5;\\
\overline{V} &= 40\lg(8V:5\pi) = 40\lg V + 40\lg(1{,}6:\pi);\\
\overline{\delta} &= 120\lg(5\pi\delta:8) = 120\lg\delta + \lg(5\pi:8);\\
\overline{p} &= 30\lg p.
\end{aligned}\right\} \qquad (В)$$

Убедившись в том, что шкалы номограммы построены действительно по уравнениям (В), для чего достаточно найти положение нескольких меток шкал по этим уравнениям, без труда докажем, пользуясь формулой (А), что номограмма рис. 41 действительно выражает зависимость $p = 0{,}25\pi d^2 l\delta$, подобно тому, как мы доказывали, что номограмма рис. 40 выражает зависимость $v = 0{,}25\pi d^2 h$. Если цель номограммы — давать только значения p, а не V, то шкалу для V можно оставить без меток („немой").

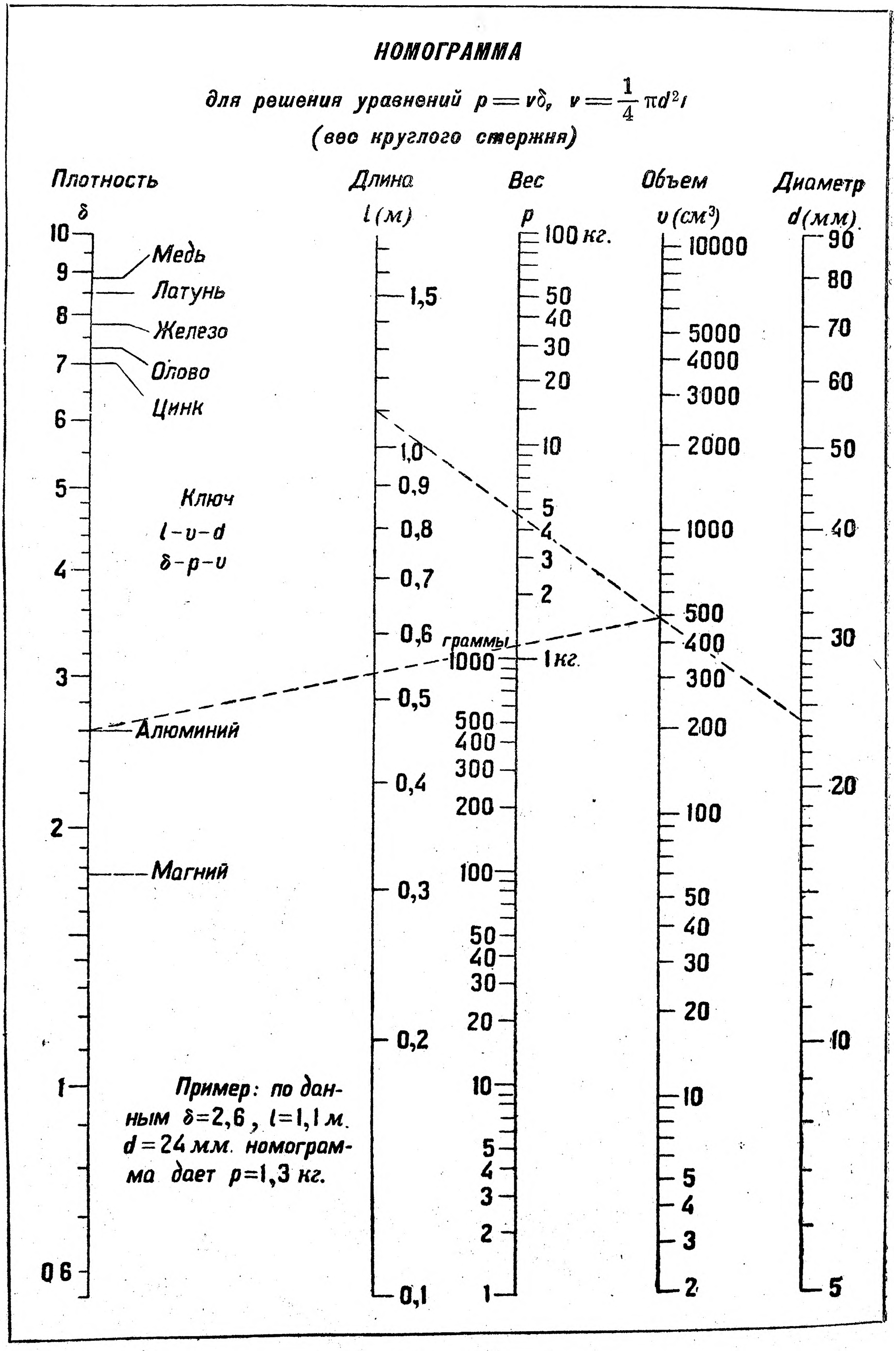

НОМОГРАММА
для решения уравнений $p = v\delta$, $v = \frac{1}{4}\pi d^2 l$
(вес круглого стержня)
Плотность δ
Длина l (м)
Вес p
Объем v (см³)
Диаметр d (мм)
100 кг.
1 кг.
граммы
Медь
Латунь
Железо
Олово
Цинк
Алюминий
Магний
Ключ
$l - v - d$
$\delta - p - v$
Пример: по данным $\delta = 2{,}6$, $l = 1{,}1$ м. $d = 24$ мм. номограмма дает $p = 1{,}3$ кг.

Рис. 41.

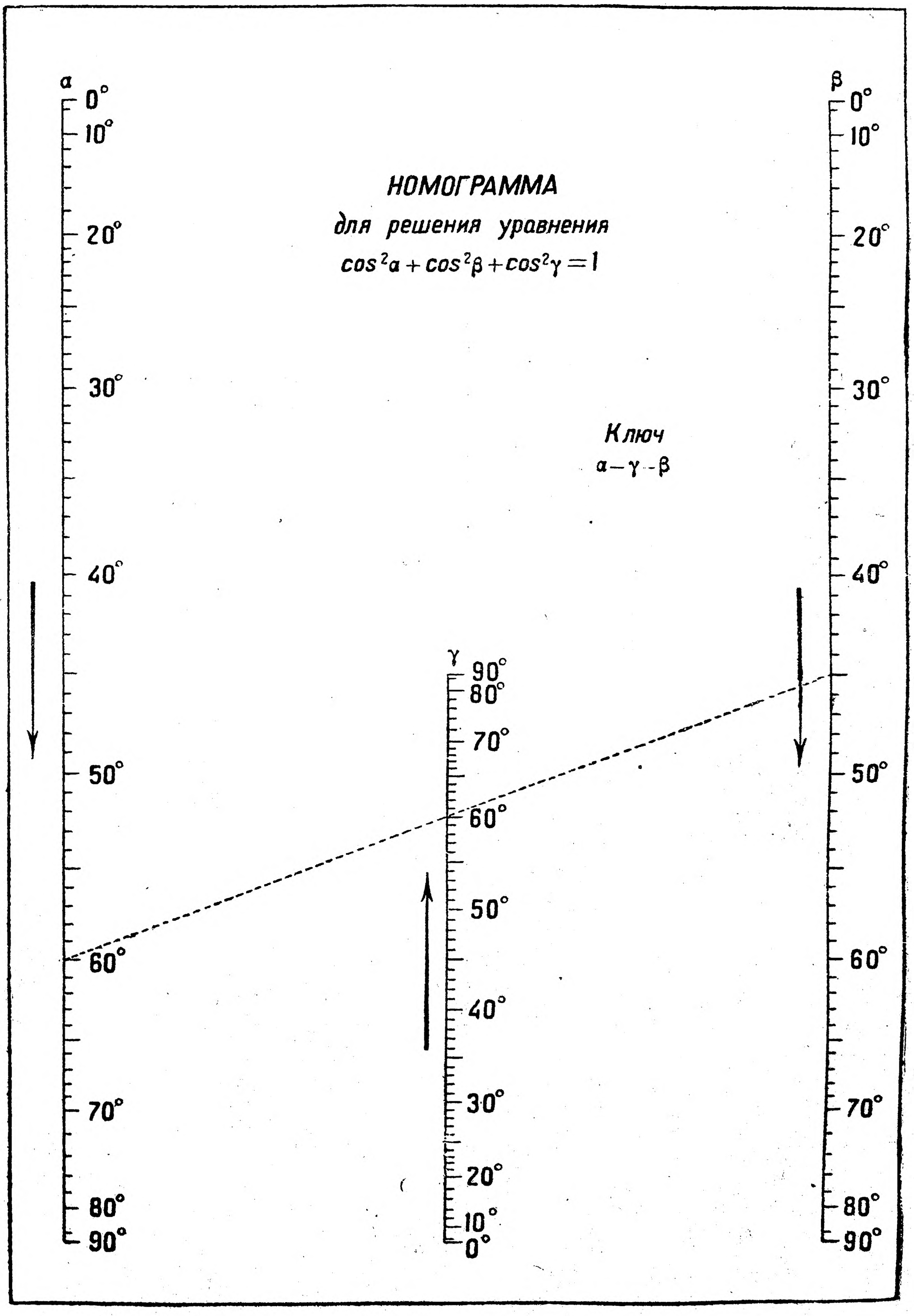

НОМОГРАММА
для решения уравнения
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
Ключ
α—γ—β
α
0° 10° 20° 30° 40° 50° 60° 70° 80° 90°
γ
90° 80° 70° 60° 50° 40° 30° 20° 10° 0°
β
0° 10° 20° 30° 40° 50° 60° 70° 80° 90°

Рис. 42.

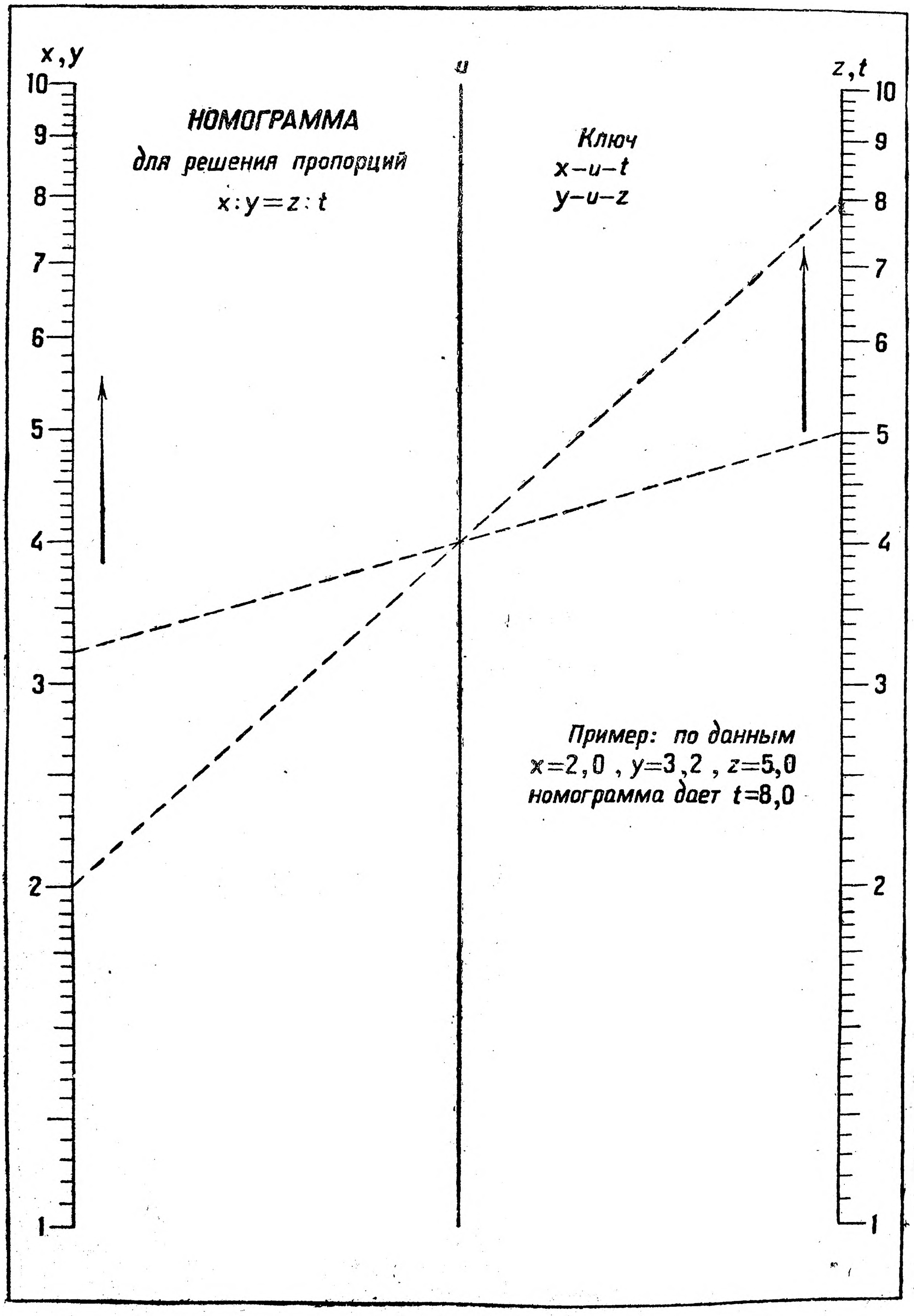
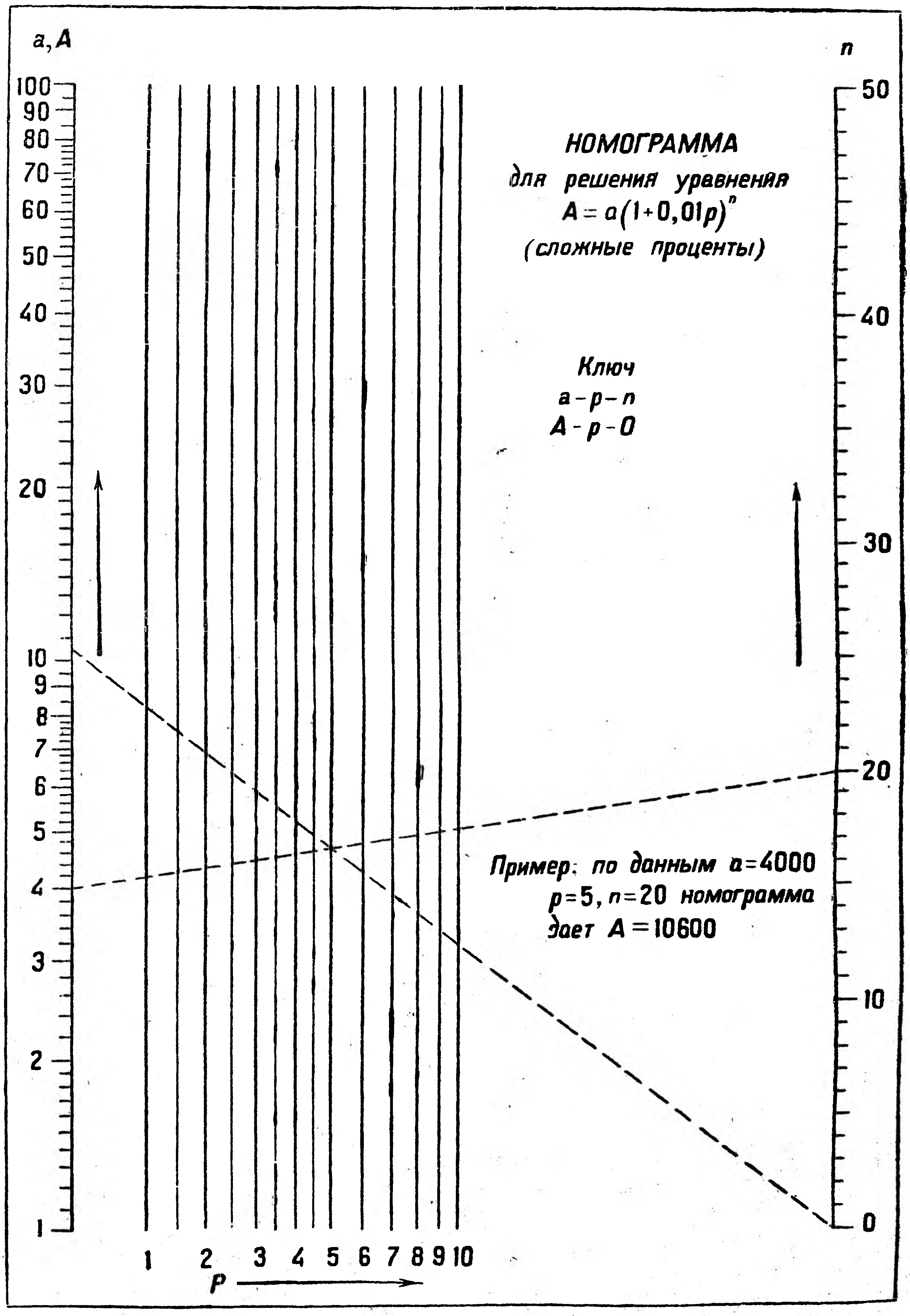

x, y
u
z, t
НОМОГРАММА
для решения пропорций
x:y=z:t
Ключ
x–u–t
y–u–z
Пример: по данным
x=2,0 , y=3,2 , z=5,0
номограмма дает t=8,0
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Рис. 43.



a, A
n
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
50
40
30
20
10
0
НОМОГРАММА
для решения уравнения
A = a(1+0,01p)^n
(сложные проценты)
Ключ
a - p - n
A - p - 0
Пример: по данным a=4000
p=5, n=20 номограмма
дает A=10600
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
p

Рис. 44.

Вопроса о том, как получены уравнения шкал (В), мы касаться не будем, так как этот вопрос относится уже к построению номограммы, а мы условились, что ограничимся лишь вопросами, связанными с пользованием готовыми номограммами. Отметим только, что все шкалы номограммы рис. 41 — логарифмические, отличающиеся друг от друга лишь масштабом и положением начала; на практике они строятся не посредством вычисления положения отдельных меток, а посредством копирования готовых логарифмических шкал („шаблонов").

Упражнения.

1. Научиться пользоваться номограммой рис. 42, решив посредством нее несколько задач (с контрольным вычислением по таблице); доказать, исходя из уравнений шкал:

$$\bar{\alpha} = 100 \cos^2 \alpha; \quad \bar{\beta} = 100 \cos^2 \beta; \quad \gamma = 50 \sin^2 \gamma; \quad a = b = 50 \text{ мм},$$

что эта номограмма действительно дает решение уравнения:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

2. Разобраться в устройстве и употреблении номограммы для решения пропорции $x:y = z:t$, изображенной на рисунке 43.

3. На рисунке 44 изображена номограмма для расчетов по формуле сложных процентов $A = a(1 + 0{,}01p)^n$, где a — первоначальная сумма, p — число процентов (или „процентная такса") за единицу времени (обычно за год), n — число лет, A — наращенная сумма. Научиться пользоваться этой номограммой для разыскания каждой из четырех величин A, a, p, n по трем остальным. Принимая во внимание, что общая шкала для a и A вычерчена по уравнению $\bar{a} = 75 \lg a$, шкала n по уравнению $\bar{n} = 3n$ и что расстояние между этими шкалами 100 *мм*, а расстояние от шкалы a до каждой „немой" шкалы с меткой p равно $\bar{p} = \dfrac{100 \lg (1 + 0{,}01p)}{\lg (1 + 0{,}01p) + 0{,}04}$, показать, что при указанном в ключе построении номограмма действительно дает зависимость $A = a(1 + 0{,}01p)^n$.

Указание: исходить из равенства $(\bar{A} - \bar{a}):\bar{n} = \bar{p}:(100 - p)$, выражающего пропорциональность сторон и высот подобных треугольников, образованных пунктирными прямыми.

§ 69. Z-номограммы.

Переходим к рассмотрению другого важного вида номограмм из выровненных точек, а именно к номограммам из трех прямолинейных шкал, из которых две параллельны, а третья пересекает обе первые. Если точки пересечения лежат в пределах рабочей части номограммы, то три шкалы образуют фигуру, похожую на опрокинутую на бок букву Z, откуда и название: зет-номограммы (рис. 45). Допустим, что на прямых AB, CD, AC построены функциональные шкалы $\bar{x} = m_1 f_1(x)$; $\bar{y} = m_2 f_2(y)$; $\bar{z} = m_3 f_3(z)$, причем началом первой и третьей шкал служит точка A, а началом второй — точка C; длину отрезка AC назовем буквой l. Пересечем все три шкалы какой-нибудь прямой и обозначим буквами E, F, G точки пересечения; если этим точкам соответствуют метки x, y, z, то какая зависимость существует между этими метками?

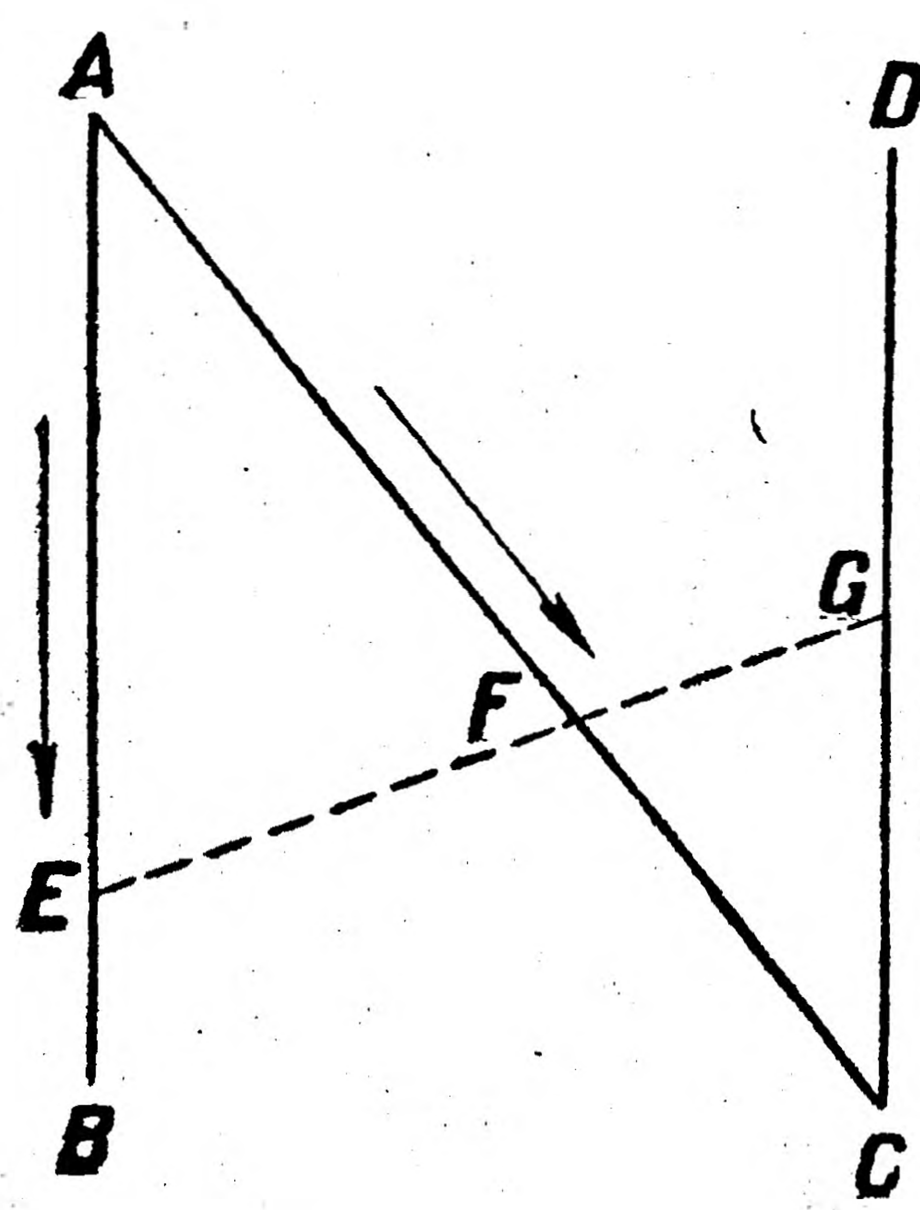


Рис. 45.

Подобие треугольников AEF и CGF дает пропорцию $AE:CG = AF:FC$ или, принимая во внимание, что $AE = \bar{x}$; $CG = \bar{y}$; $AF = \bar{z}$; $FC = l - \bar{z}$, пропорцию:

$$\bar{x}:\bar{y} = \bar{z}:(l - \bar{z}), \tag{C}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ надо заменить через $m_1 f_1(x)$, $m_2 f_2(y)$, $m_3 f_3(z)$. Уравнение (C) и есть уравнение искомой зависимости. Способ употребления Z-номограммы тот же, что и номограммы с тремя параллельными шкалами.

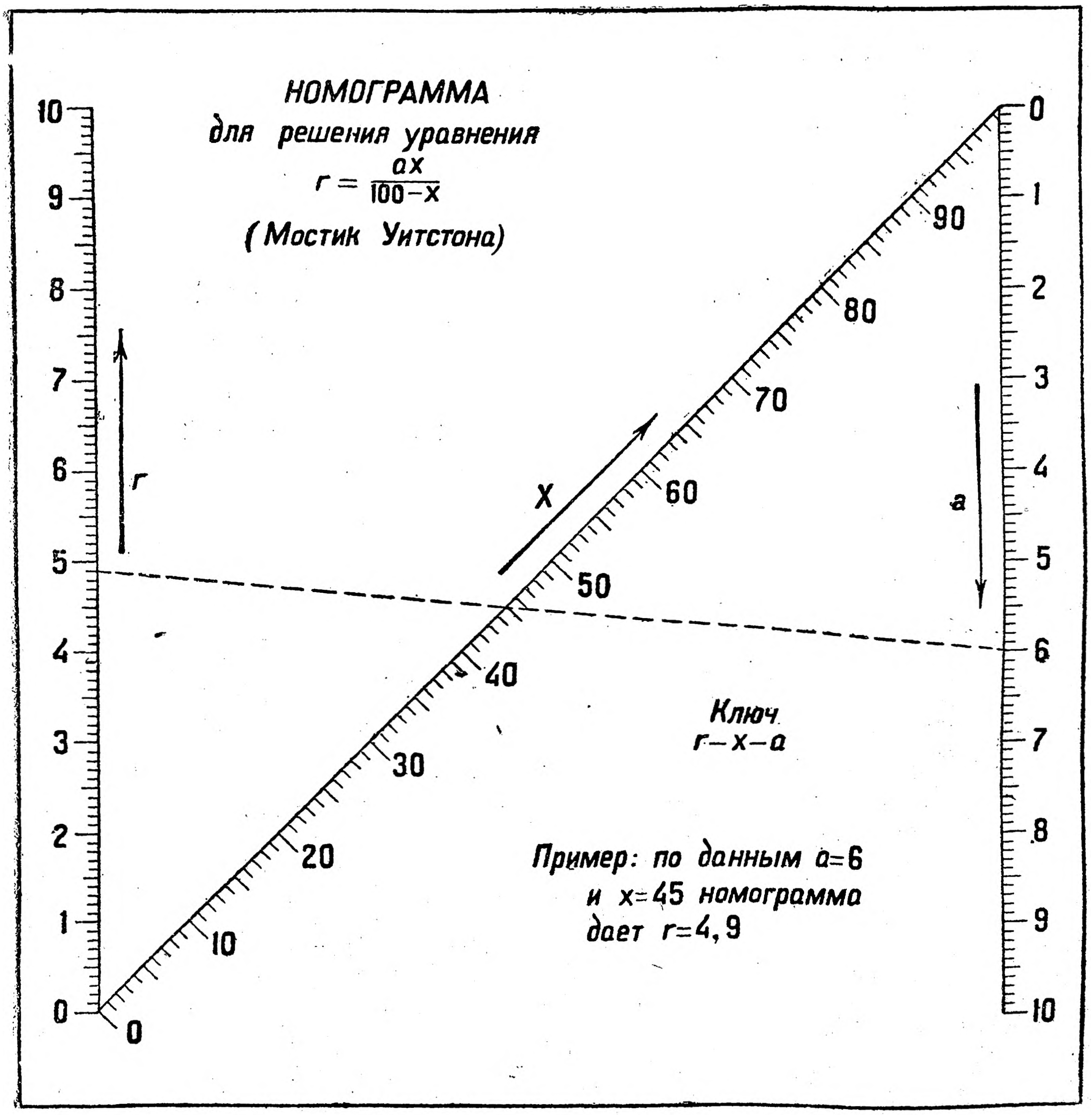


Рис. 46.

В качестве простейшего примера рассмотрим номограмму для вычислений по формуле $r = \frac{ax}{100 - x}$, с которой приходится иметь дело при работе с мостиком Уитстона. Номограмма эта изображена на рисунке 46, где мы имеем три равномерные шкалы: слева шкалу r с уравнением $\bar{r} = 10r$ (начало в нижнем конце); справа шкалу a с уравнением $\bar{a} = 10a$

(начало в верхнем конце); в середине шкалу x с уравнением $\bar{x}=x\sqrt{2}=$ $=1{,}414x$ (начало совпадает с началом шкалы r), причем расстояние между параллельными шкалами равно 100 *мм*, а потому длина наклонной шкалы l равна $100\sqrt{2}=141{,}4$ *мм*. Уравнение (С), которое в применении к этой номограмме напишется в виде $\bar{r}:\bar{a}=\bar{x}:(100\sqrt{2}-\bar{x})$, действительно приводит к зависимости $r=\frac{ax}{100-x}$. Чтобы найти значение r по данным значениям a и x, достаточно провести прямую (натягивая нить!) через точки шкал a и x с соответствующими метками и прочесть ту метку шкалы r, которая окажется в пересечении. Так, при $a=6$ и $x=45$ номограмма рис. 44 дает $r=4{,}9$ (контрольное вычисление приводит к $r=4{,}91$); при $a=6$ и $r=9{,}5$ номограмма дает $x=61{,}3$ (по вычислению $x=61{,}39$).

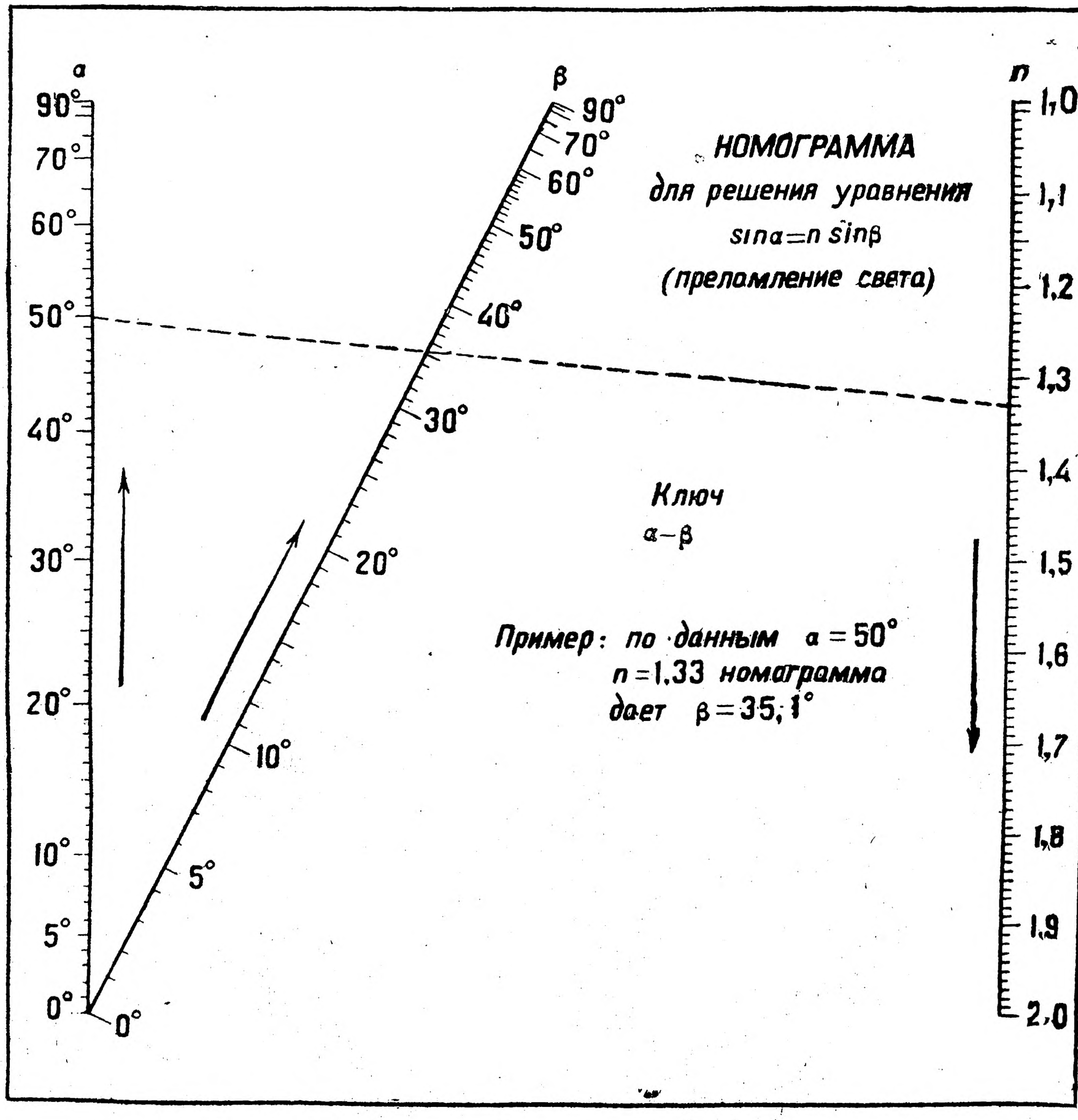


Рис. 47.

Отметим, что логарифмирование уравнения $r=\frac{ax}{100-x}$ приводит его к виду $\lg r=\lg a+\lg x:(100-x)$], откуда видно, что для него можно построить и номограмму из трех параллельных шкал. Однако в ней все шкалы были бы неравномерными, в то время как в рассматриваемой Z-номограмме все они равномерны, а потому их легче строить и ими удобнее пользоваться.

Упражнение.

Научиться пользоваться номограммой (рис. 47), предназначенной для решения трех задач на преломление светового луча, переходящего из пустоты в среду с показателем преломления n при угле падения α и угле преломления β: определение n по α и β, определение α по n и β, определение β по α и n. Принимая во внимание, что шкалы α, n и β вычерчены по уравнениям $\bar{\alpha}=100\sin\alpha$; $\bar{n}=100n$; $\bar{\beta}=100\sqrt{5}\sin\beta:(1+\sin\beta)$, причем за начало шкалы n принята ее точка пересечения со шкалой β, находящаяся за пределами чертежа, и что длина наклонной шкалы $l=100\sqrt{5}$, показать, что между метками α, β, n трех точек, получаемых в пересечении этих шкал любой прямой, существует зависимость $\sin\alpha=n\sin\beta$, выражающая известный закон преломления света.

§ 70. Номограммы с криволинейными шкалами.

До сих пор мы пользовались исключительно прямолинейными функциональными шкалами. Но если построить кривую линию, пользуясь уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, выражающими координаты любой ее точки в зависимости от значения параметра t, и отнести каждой точке кривой то значение параметра t, которое было взято при вычислении ее координат, то мы получим *криволинейную функциональную шкалу*. Прямолинейная функциональная шкала является частным случаем криволинейной и получается тогда, когда уравнения шкалы могут быть приведены к виду: $x=\varphi(t)$, $y=k\varphi(t)+n$, где k и n — постоянные.

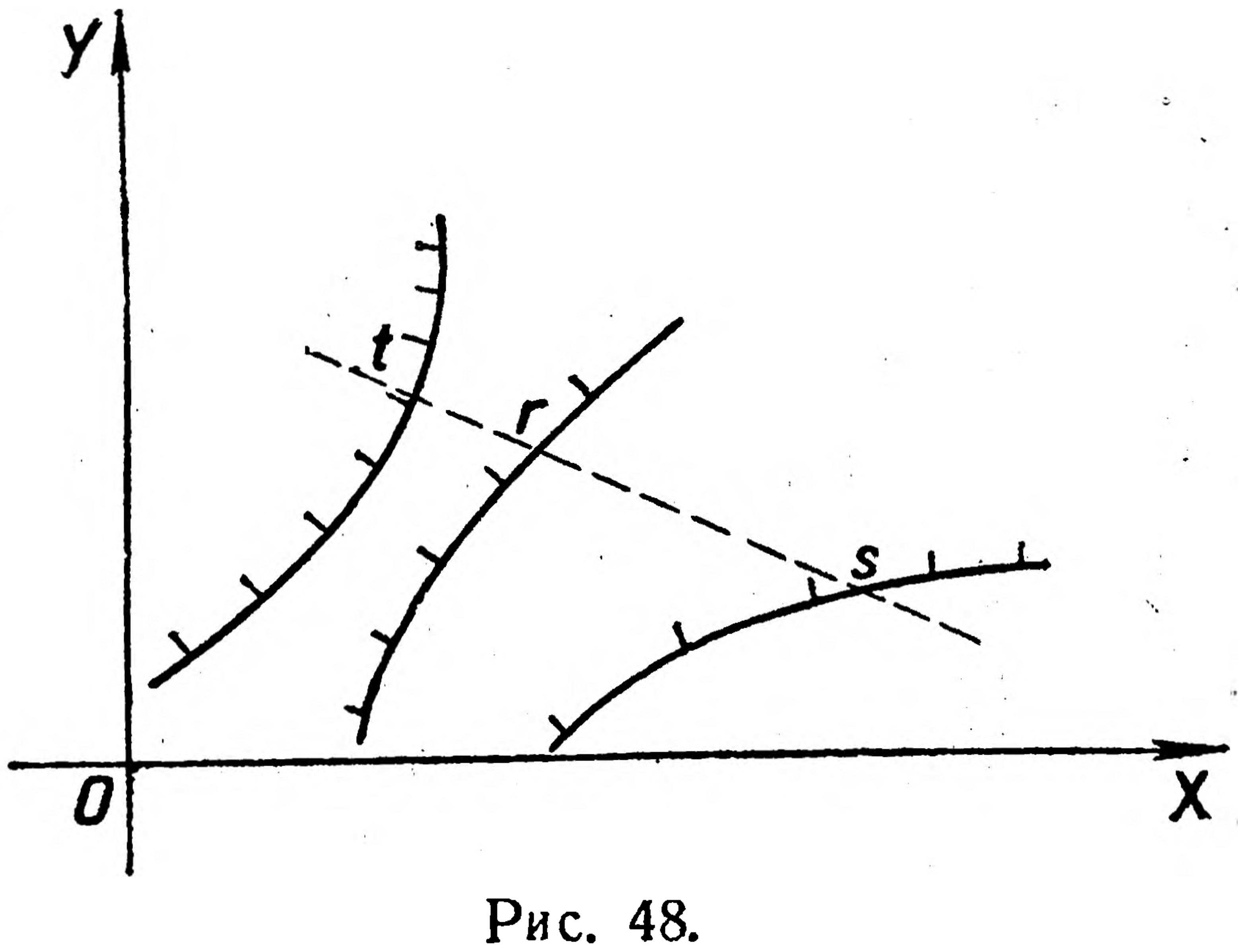


Рис. 48.

Рассмотрим номограмму, состоящую из трех функциональных шкал, построенных по уравнениям: 1) $x=\varphi_1(t)$, $y=\psi_1(t)$; 2) $x=\varphi_2(r)$, $y=\psi_2(r)$; 3) $x=\varphi_3(s)$, $y=\psi_3(s)$. Какой зависимостью связаны метки t, r, s трех выровненных точек этих шкал, т. е. трех их точек, лежащих на какой-нибудь прямой (рис. 48)? Как известно из курса „Аналитической геометрии", необходимым и достаточным условием того, что три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежат на одной прямой, является обращение в нуль определителя, первую строку которого составляют элементы: x_1, y_1, 1; вторую: x_2, y_2, 1; третью: x_3, y_3, 1. Ввиду этого искомая зависимость выражается уравнением:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t), & \psi_1(t), & 1 \\ \varphi_2(r), & \psi_2(r), & 1 \\ \varphi_3(s), & \psi_3(s), & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad \text{(D)}$$

Всякое уравнение между двумя переменными t, r, s, приводимое к виду (D), можно изобразить посредством номограммы с тремя криволинейными функциональными шкалами (в частных случаях одна, две или даже все три шкалы могут быть прямолинейными). Разыскание значения одной из переменных t, r, s по данным значениям двух других требует простого проведения прямой линии.

На рисунке 49 изображена номограмма для решения квадратного уравнения $z^2+pz+q=0$. Значение коэфициента p надо найти на левой шкале, имеющей метки от -10 до $+10$, значение коэфициента q — на правой. Проведя через метки p и q прямую, в пересечении с криволинейной шкалой прочтем метку z, дающую положительный корень уравнения. Если оба корня уравнения положительны, то получим две точки пересечения и найдем оба корня. Так, находим по номограмме, что уравнение $z^2-9z+8=0$ имеет корни 1 и 8 и что уравнение $z^2+3z-10=0$ имеет положительный корень $z_1=2$. Отрицательные корни можно находить по той же номограмме, разыскивая положительные корни уравнения $(-z)^2+p(-z)+q=0$, или $z^2-pz+q=0$. Уравнение $z^2+3z-10=0$, единственный положительный корень $z_1=2$ которого мы уже нашли, имеет отрицательный корень $z_2=-5$, который находим, решая посредством номограммы уравнение $(-z)^2+3(-z)-10=0$, или $z^2-3z-10=0$.

Желая решить по номограмме уравнение $z^2-42z+80=0$, мы встречаемся с затруднением: метки -42 и $+80$ на шкалах p и q отсутствуют. Преобразуем уравнение, полагая $z=10u$, и получаем новое уравнение $u^2-4{,}2u+0{,}8=0$, для которого номограмма дает корни $u_1=4u_2=0{,}2$. Таким образом, корни искомого уравнения $z_1=10\cdot 4=40$, $z_2=10\cdot 0{,}2=2$. Подобное преобразование применяют всегда, когда коэфициенты p и q оказываются слишком большими или слишком малыми по абсолютной величине.

Найдя по номограмме первый корень, второй можно найти простым вычитанием ($z_2=-p-z_1$) или делением ($z_2=q:z_1$). Так делать выгодно всякий раз, когда один из корней уравнения значительно меньше другого по абсолютной величине, так как этот меньший корень определяется по номограмме менее точно.

Чтобы объяснить устройство номограммы, примем точку O шкалы p за начало координат, ось Y направим по шкале p, ось X по перпендикуляру к ней вправо. Тогда имеем уравнения шкалы p: $x=0$, $y=10p$ (здесь p параметр) и шкалы q: $x=100$, $y=10q$ (здесь параметр q). Каковы же должны быть уравнения $x=\varphi_3(z)$ и $y=\psi_3(z)$ третьей (криволинейной) шкалы, чтобы наша номограмма действительно служила для решения уравнения $z^2+pz+q=0$? Пользуясь условием (D), имеем:

$$\begin{vmatrix} 0 & 10p & 1 \\ 100 & 10q & 1 \\ \varphi_3(z) & \psi_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или после упрощений: $10\psi_3(z)+p[\varphi_3(z)-100]-q\varphi_3(z)=0$. Разделив обе части этого равенства на $-\varphi_3(z)$, получаем равенство $-10\psi_3(z):\varphi_3(z)+p\cdot[100-\varphi_3(z)]:\varphi_3(z)+q=0$, которое отождествляем с уравнением $z^2+pz+q=0$, полагая $-10\psi_3(z):\varphi_3(z)=z^2$; $[100-\varphi_3(z)]:\varphi_3(z)=z$.

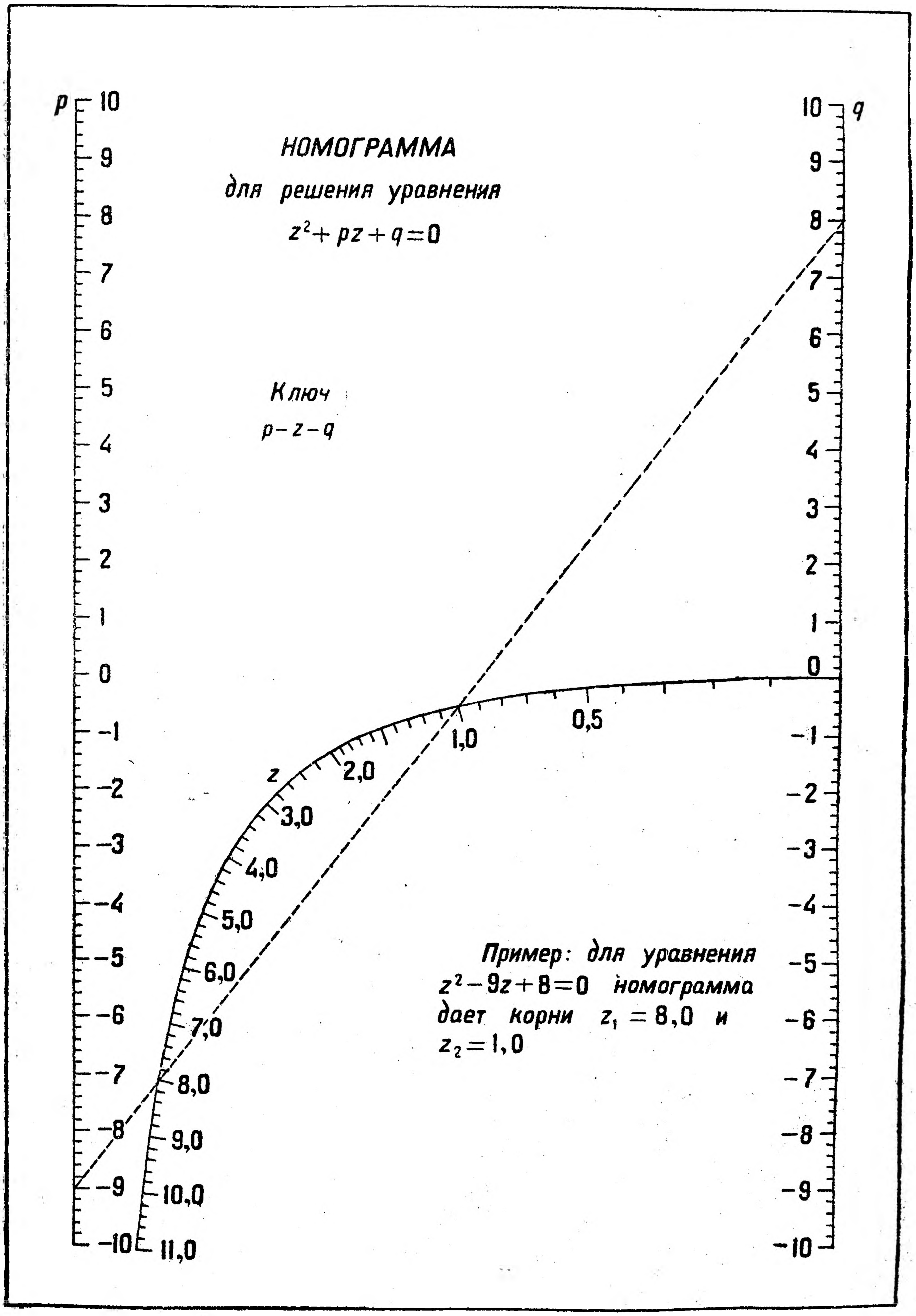

НОМОГРАММА
для решения уравнения
$z^2+pz+q=0$
Ключ
p – z – q
Пример: для уравнения
$z^2-9z+8=0$ номограмма
дает корни $z_1=8{,}0$ и
$z_2=1{,}0$
p
q
z

Рис. 49.

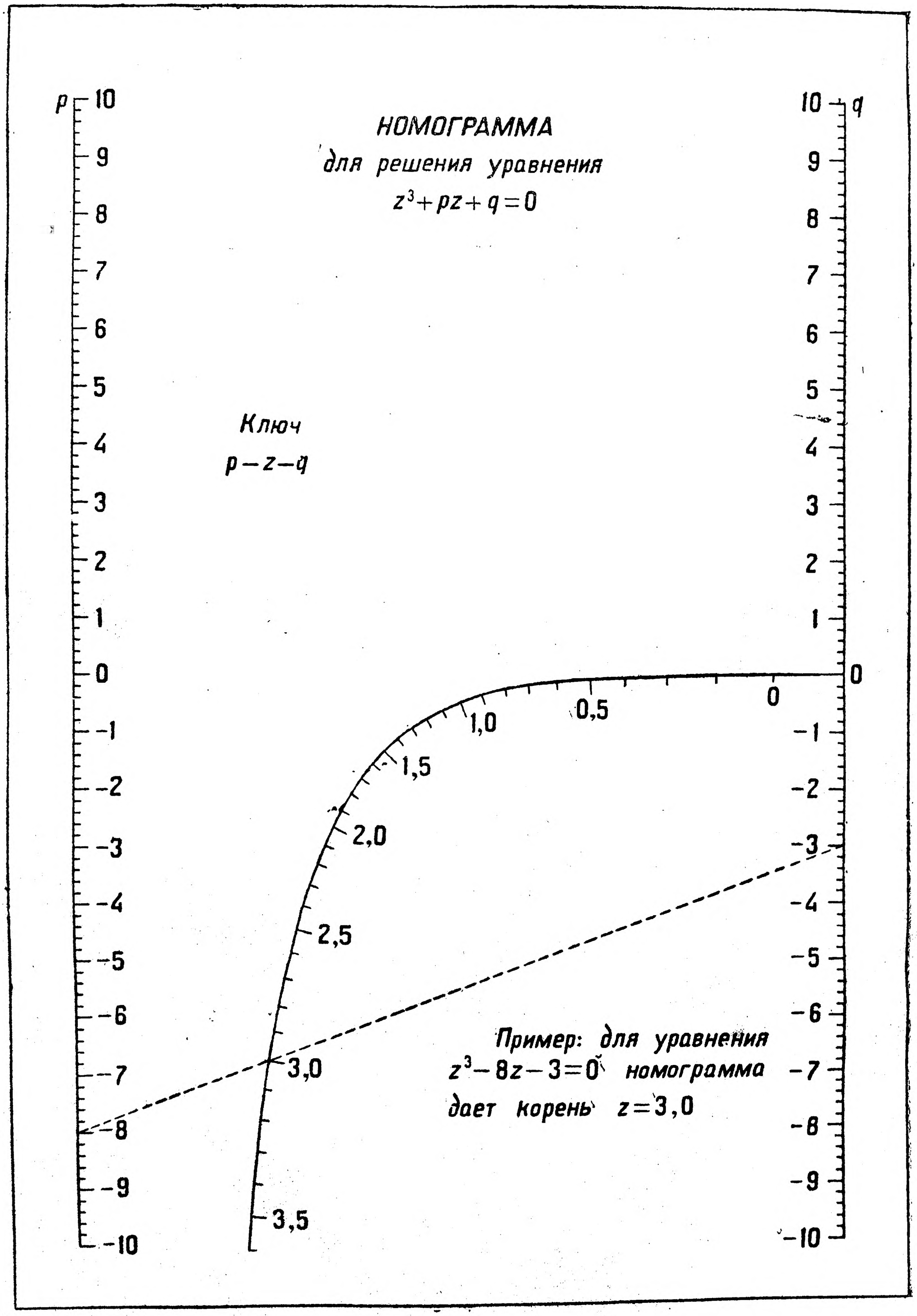

НОМОГРАММА
для решения уравнения
$z^3+pz+q=0$
Ключ
$p-z-q$
Пример: для уравнения
$z^3-8z-3=0$ номограмма
дает корень $z=3,0$
p
q
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5

Рис. 50.

Решая последние два уравнения относительно $\varphi_3(z)$ и $\psi_3(z)$, находим искомые параметрические уравнения криволинейной шкалы:

$$x=\varphi_3(z)=100:(1+z); \quad y=\psi_3(z)=-10z^2:(1+z).$$

Нетрудно убедиться, найдя по этим уравнениям координаты точек, соответствующих нескольким произвольным значениям z, что криволинейная шкала номограммы (рис. 49) вычерчена действительно по этим уравнениям. Исключая z из двух параметрических уравнений, получаем уравнение кривой линии, по которой расположена шкала z:

$$10xy+(100-x)^2=0,$$

и убеждаемся, что эта кривая — гипербола.

Упражнение.

Ознакомиться с номограммой на рисунке 50, позволяющей решать кубическое уравнение вида $z^3+pz+q=0$; решить посредством нее уравнения $x^3-2x-5=0$; $x^3+2x-5=0$; $x^3-3x-1=0$, решенные другими способами в § 73, и показать, что криволинейная шкала должна быть вычерчена по уравнениям:

$$x=\varphi_3(z)=100:(1+z); \; y=\psi_3(z)=-10z^3:(1+z).$$

§ 71. Некоторые другие виды номограмм.

Кроме рассмотренных выше видов номограмм существует еще множество других их видов, изучаемых в специальных курсах „Номографии". Впрочем, имея и те небольшие сведения по номографии, которые даны выше, нетрудно разобраться в устройстве и употреблении всякой готовой номограммы.

Рассмотрим для примера номограмму для решения уравнения $z^2+pz-q=0$, изображенную на рисунке 51. Здесь мы видим две равномерные шкалы z и p, нанесенные на общей (вертикальной) оси. Их уравнения $\bar{z}=-15z$ и $\bar{p}=7{,}5p$ (за начало принимаем точку с меткой O, положительное направление считаем вверх). Третья шкала q тоже прямолинейная, но не равномерная. Легко видеть, что она и не логарифмическая. Сделать заключение об ее уравнении на основании внешнего ее вида невозможно, поэтому запишем ее уравнение временно в виде $\bar{q}=f(q)$, считая ее началом точку ее пересечения со шкалами p и z. Способ употребления номограммы указан в ключе: имея приведенное квадратное уравнение с отрицательным свободным членом, а именно уравнение $z^2+pz-q=0$, ставим острие циркуля в точку шкалы p с меткой p, а его карандаш в точку шкалы q с меткой q. Проводя окружность, отмечаем точки ее пересечения со шкалой z; метки z_1 и z_2 этих точек и дадут искомые корни (конечно, чтобы не пачкать номограммы, окружности в действительности не проводят). Если один из корней оказывается за пределами шкалы z, его можно найти по другому корню на основании формулы $z_1+z_2=-p$. Если за пределами шкалы z оказались оба корня, уравнение надо преобразовать, полагая $z=au$, где a — подходящее постоянное (например 2 или 5, или 10, или 100 и т. д.), к виду $u^2+(p:a)u-q:a^2=0$, и решить это последнее, а затем по найденным корням u_1 и u_2 найти $z_1=au_1$, $z_2=au_2$. Например, для решения уравнения $z^2-36z-1200=0$ берем $z=10u$ и решаем

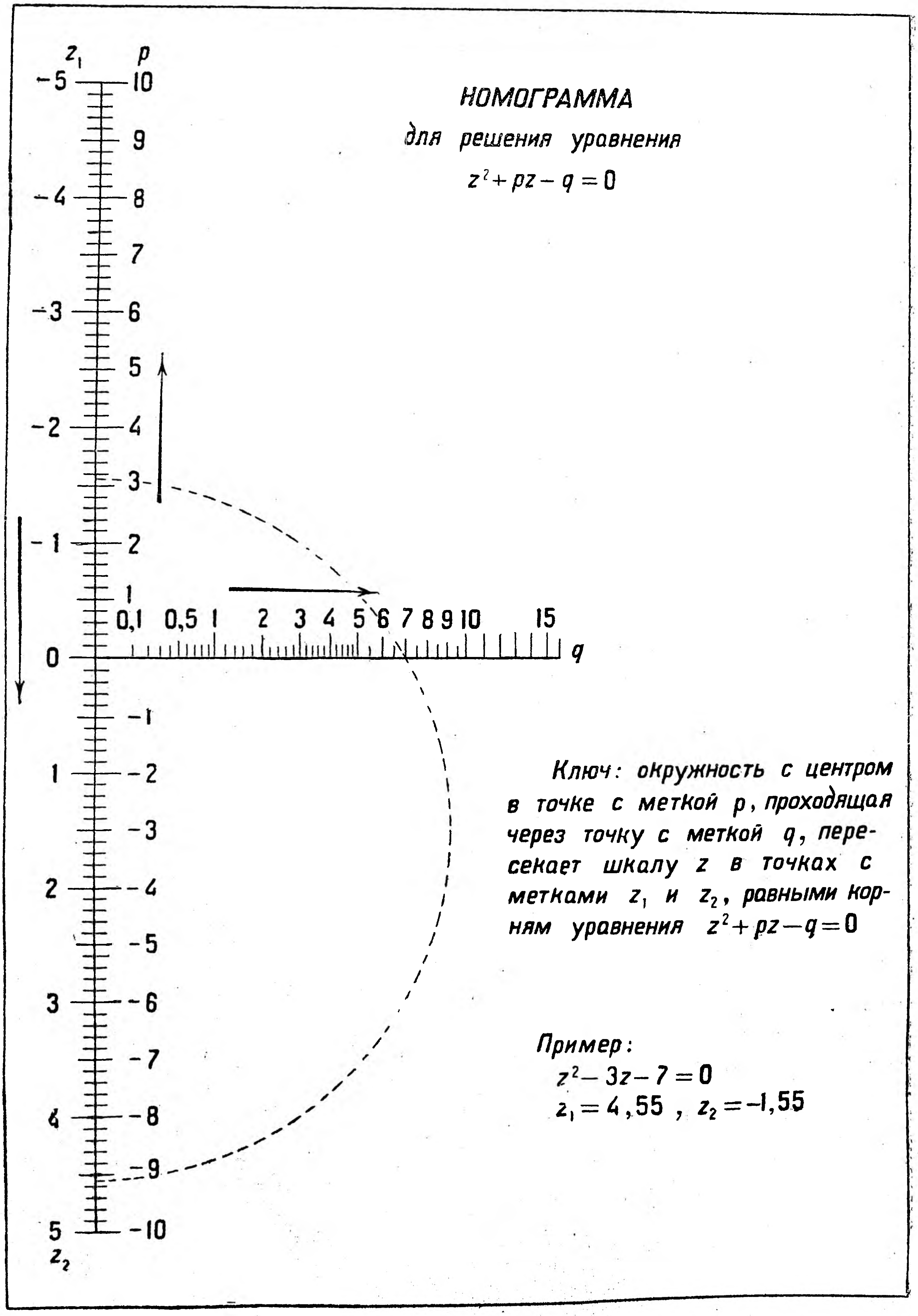

НОМОГРАММА
для решения уравнения
$z^2 + pz - q = 0$
Ключ: окружность с центром в точке с меткой p, проходящая через точку с меткой q, пересекает шкалу z в точках с метками z_1 и z_2, равными корням уравнения $z^2 + pz - q = 0$
Пример:
$z^2 - 3z - 7 = 0$
$z_1 = 4{,}55$, $z_2 = -1{,}55$
z_1
p
q
z_2

Рис. 51.

посредством номограммы уравнение $u^2 - 3{,}6u - 12 = 0$. Получив корень $u_1 = -2{,}10$, находим $z_1 = -21{,}0$ и $z_2 = 36 - (-21{,}0) = 57{,}0$.

Чтобы объяснить устройство этой номограммы, возьмем систему прямоугольных координат, совместив оси X и Y с осями q и p. Центр окружности берется в точке с координатами $x = 0$; $y = \bar{p} = 7{,}5p$, окружность проводится через точку с координатами $x = \bar{q} = f(q)$; $y = 0$, а потому уравнение окружности таково: $x^2 + (y - \bar{p})^2 = \bar{q}^2 + \bar{p}^2$. Ось Z, совпадающая с осью Y, пересекает окружность в точках с координатами $x_1 = 0; y_1 = \bar{z}_1 = -15z_1$ и $x_2 = 0; y_2 = \bar{z}_2 = -15z_2$, и между отрезками $\bar{z}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ имеем соотношение $(\bar{z} - \bar{p})^2 = \bar{p}^2 + \bar{q}^2$, или $\bar{z}^2 - 2\bar{p}\bar{z} - \bar{q}^2 = 0$. Заменяя $\bar{z}$ через $-15z$, $\bar{p}$ — через $7{,}5p$, $\bar{q}$ — через $f(q)$, получаем уравнение: $z^2 + pz - [f(q)]^2 : 225 = 0$, которое совпадает с уравнением $z^2 + pz - q = 0$, если взять $f(q) = 15\sqrt{q}$. Шкала q построена именно по этому уравнению (в этом легко убедиться, вычислив координаты нескольких меток шкалы q и измерив расстояние последних от начала шкалы).

Номограмма рис. 51 принадлежит к числу *номограмм со специальным индексом* (этим индексом служит здесь окружность). Сюда же относятся номограммы, требующие проведения пары параллелей, или пары перпендикулярных прямых, или трех прямых, пересекающихся под углами в 120°. В устройстве каждой такой номограммы легко разобраться, основываясь на том соотношении между различными имеющимися на ней отрезками, которое дается проведением вспомогательных линий.

Рассмотрим в заключение еще номограмму рис. 52, принадлежащую к числу *номограмм с бинарным полем* и представляющую собой сочетание номограммы сетчатой и номограммы из выровненных точек. Эта номограмма предназначена для вычисления площади s равнобедренной трапеции с меньшим основанием b, высотой h и острым углом $\varphi \geqq 45°$ по формуле: $s = bh + h^2 \operatorname{ctg} \varphi$, и для решения трех обратных задач. На ней мы видим две прямолинейные равномерные шкалы s и b и бинарное поле, представляющее собой сетку из двух семейств помеченных линий: семейства h, состоящего из прямых, параллельных оси s и имеющих метки от 1 до 10, и семейства φ, состоящего из кривых с метками от 45° до 90°. Чтобы найти значение s по данным значениям h, φ, b, надо взять точку пересечения прямой с меткой h и кривой с меткой φ и соединить ее прямой линией с той точкой шкалы b, которая имеет метку b. В пересечении этой прямой со шкалой s читаем метку s, дающую искомую площадь. Аналогично решаются и три другие задачи: разыскание b по данным s, φ, h, разыскание h по данным s, φ, b, разыскание φ по данным s, b, h.

Для объяснения номограммы надо выяснить, по какому закону вычерчены линии h и φ бинарного поля. Приняв за ось X прямую, проходящую через нижние концы шкал s и b (слева направо), а за ось Y — ось шкалы s (снизу вверх) и принимая во внимание размеры номограммы, вводим следующие обозначения для координат трех выравниваемых точек:

$x_1 = f(h)$, $y_1 = F(h, \varphi)$ (точка бинарного поля с метками h и φ);
$x_2 = 0$, $y_2 = 0{,}75s$ (точка шкалы s с меткой s);
$x_3 = 50$, $y_3 = 15b$ (точка шкалы b с меткой b).

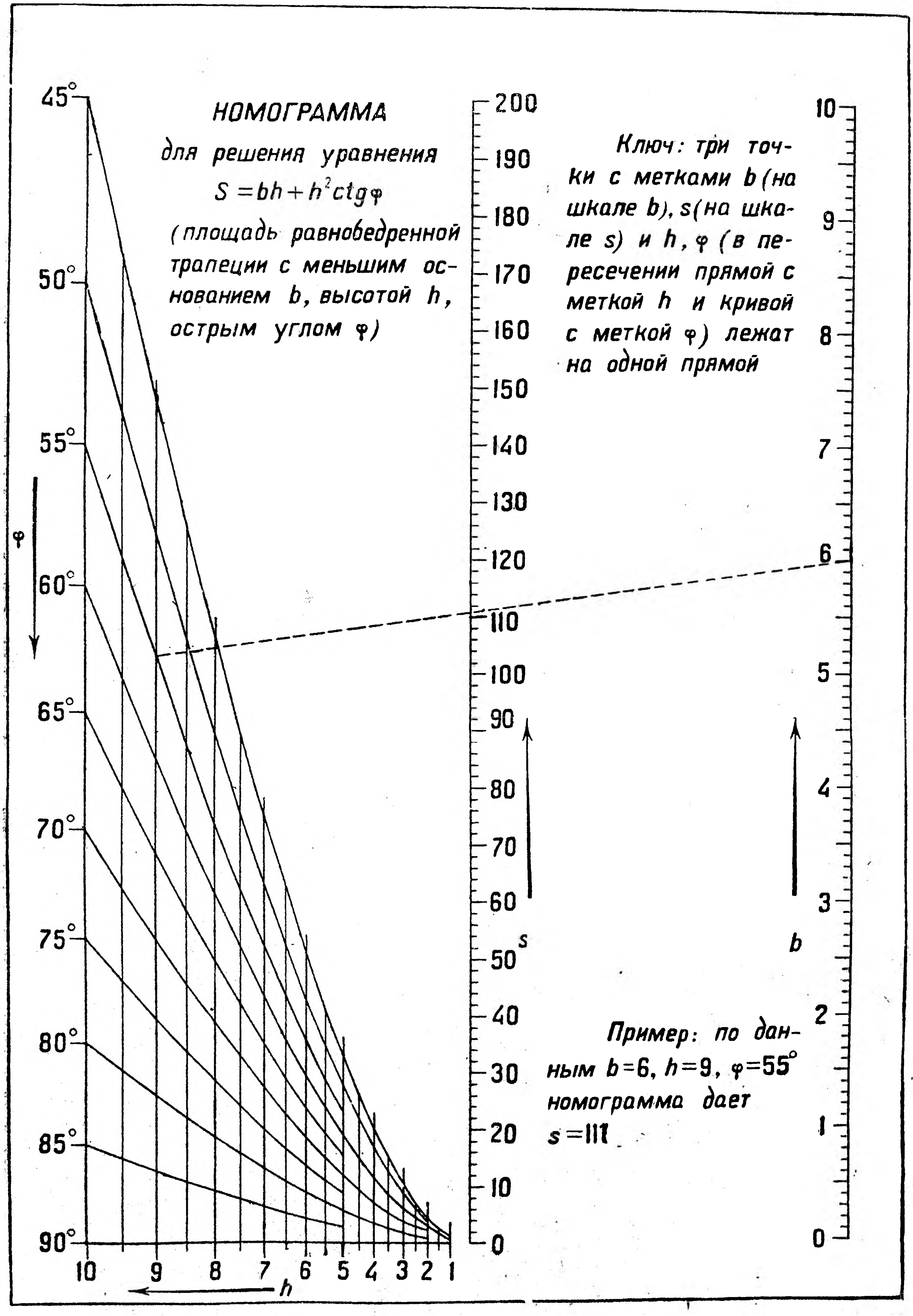

НОМОГРАММА
для решения уравнения
$S = bh + h^2 ctg\varphi$
(площадь равнобедренной трапеции с меньшим основанием b, высотой h, острым углом φ)
Ключ: три точки с метками b (на шкале b), s (на шкале s) и h, φ (в пересечении прямой с меткой h и кривой с меткой φ) лежат на одной прямой
Пример: по данным $b=6$, $h=9$, $\varphi=55°$ номограмма дает $s=111$
45°
50°
55°
60°
65°
70°
75°
80°
85°
90°
φ
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
h
200
190
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
s
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
b

Рис. 52.

Уравнение

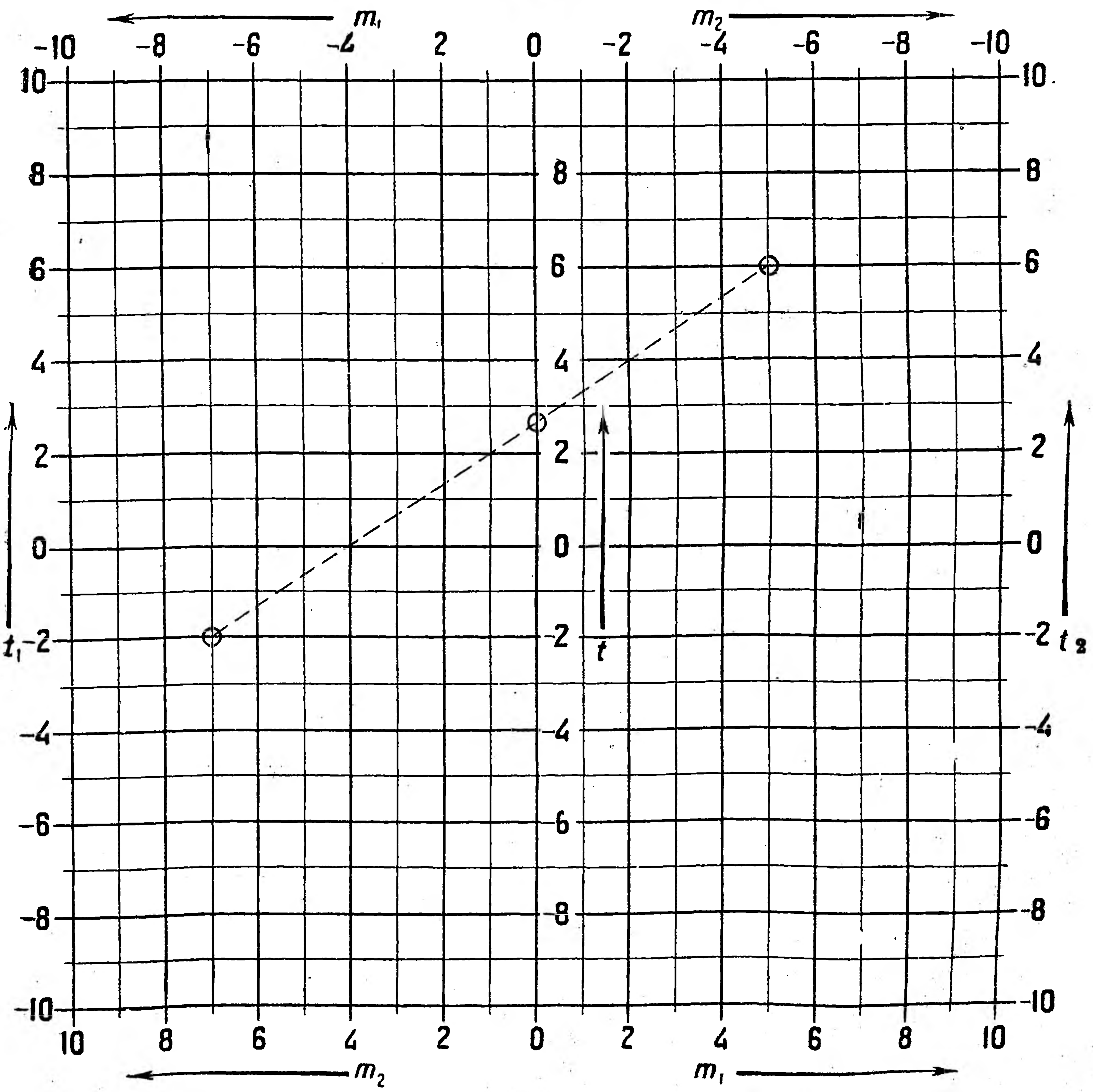
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

выражающее условие расположения трех точек на одной прямой, после упрощений принимает вид:

$$s = b \cdot 20 f(h) : [f(h) - 50] - 200 F(h, \varphi) : 3[f(h) - 50].$$

НОМОГРАММА

для решения уравнения $(m_1 + m_2)\, t = m_1 t_1 + m_2 t_2$



***Ключ:** точка с метками m_1, t_2, точка с метками m_2, t_1 и точка с меткой t лежат на одной прямой. Внимание значкам и значкам!*

***Пример:** по данным $m_1 = 5$, $t_1 = -2$, $m_2 = 7$, $t_2 = 6$ номограмма $t = 2{,}7$*

Рис. 53.

Чтобы оно совпало с уравнением

$$s = bh + h^2 \operatorname{ctg} \varphi,$$

надо взять

$$20f(h):[f(h)-50]=h; \quad -200F(h,\varphi):3[f(h)-50]=h^2\operatorname{ctg}\varphi,$$

что дает

$$f(h) = -50h:(20-h); \quad F(h,\varphi) = 15h^2\operatorname{ctg}\varphi:(20-h).$$

Последние две формулы показывают, как строить линии бинарного поля, чтобы номограмма действительно давала те результаты, какие надо. Нетрудно убедиться, что рисунок 52 выполнен в соответствии с этими формулами.

Упражнение.

Разобраться в устройстве и употреблении номограммы рисунка 53, принадлежащей к номограммам с бинарным полем и предназначенной для решения различных задач на „правило смешения"; например, если смешиваются массы m_1 и m_2 одинаковой теплоемкости, но с температурами t_1 и t_2, то получается смесь температуры t, определяемой по уравнению:

$$(m_1 + m_2)\, t = m_1 t_1 + m_2 t_2.$$

В этом уравнении пять переменных. Номограмма (рис. 53) дает значение любой из этих пяти переменных по данным значениям остальных четырех.

ГЛАВА VIII.

РЕШЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 72. Основные методы решения численных уравнений.

Численным уравнением с одной неизвестной называется уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ означает функцию от x, не зависящую ни от каких буквенных параметров. Таким образом, предполагаются известными численные значения всех коэфициентов уравнения. Например, так называемое уравнение Кеплера $x - e\sin x = a$, которое приходится решать относительно x астрономам при определении положения планеты при ее движении по эллиптической орбите, является уравнением численным, если указаны значения e и a.

Для решения численных уравнений существует четыре основных метода.

I. *Метод аналитический,* предполагающий наличность формулы, которая дает значение корня уравнения в зависимости от значений коэфициентов этого уравнения, т. е. предполагающий, что уравнение решено в общем виде. Такие общие решения, как известно из курса „Высшей алгебры", существуют для алгебраических уравнений степени 1, 2, 3, 4. Для уравнений же более высоких степеней, а также для уравнений трансцендентных общие решения найдены лишь для некоторых частных видов. Решение численного уравнения, для которого известно решение в общем виде, сводится к подстановке данных значений коэфициентов уравнения в формулу, выражающую его корень, и к вычислению по этой формуле. В § 73 мы рассмотрим один пример решения уравнения аналитическим методом, во всех подробностях изучаемым в курсе Алгебры.

II. *Метод графический*, использующий некоторый чертеж, выполненный или специально для данного численного уравнения, или для всех уравнений определенного вида. Последнее имеет место при употреблении номограмм: всякая номограмма, изображая зависимость между двумя или более переменными, представляет собой средство графического решения уравнения некоторого определенного вида. Графический метод имеет в большинстве случаев достоинство быстроты, простоты и наглядности решения, но дает результаты сравнительно грубые. Поэтому он употребляется для получения первого приближения к искомому корню с тем, чтобы в случае, когда доставляемой им точности недостаточно, воспользоваться другими методами для уточнения полученного результата. В дальнейшем мы увидим несколько простейших примеров применения графического метода.

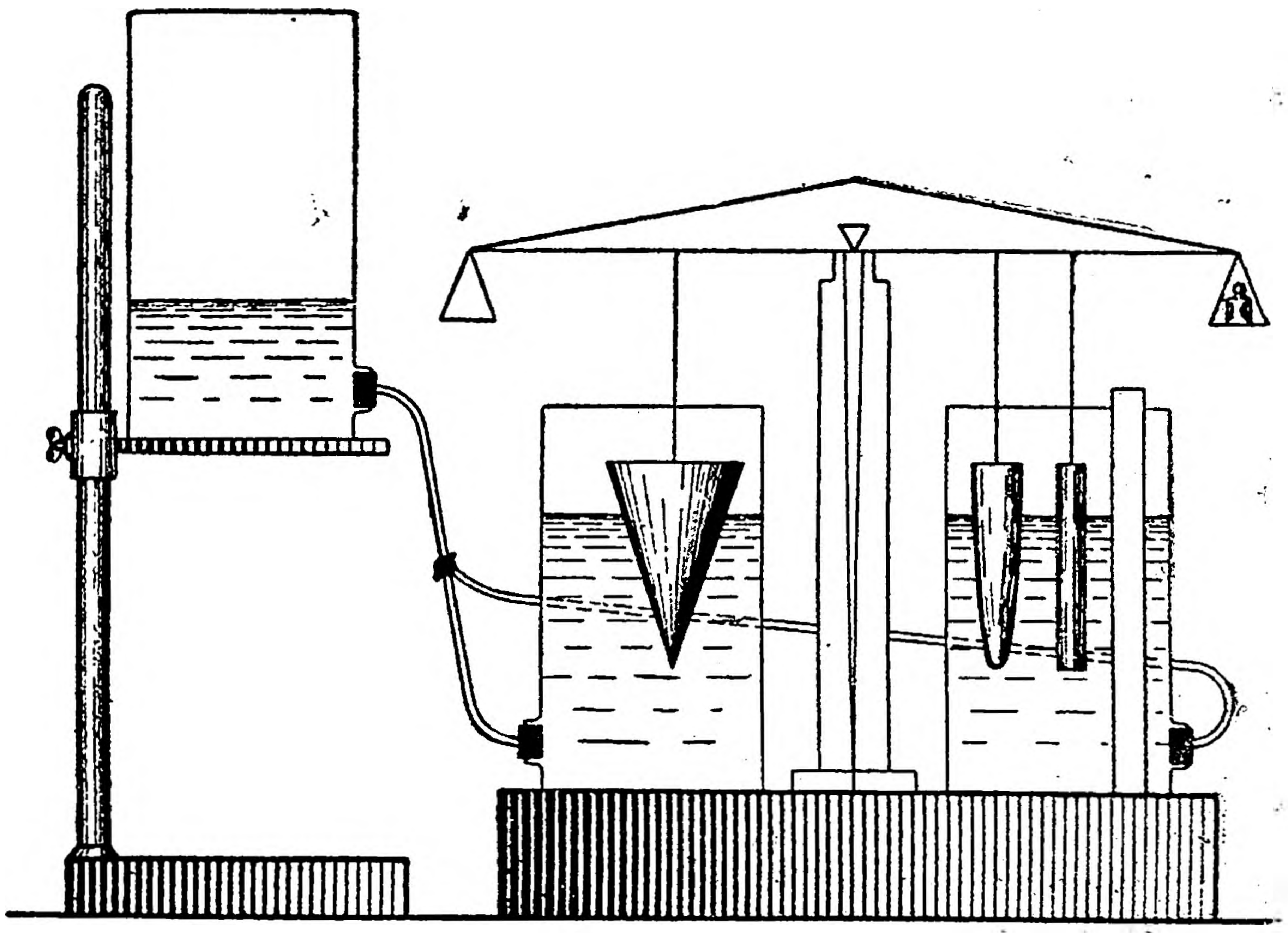


Рис. 54.

III. *Метод численного решения*, позволяющий получить значение искомого корня с произвольно высокой точностью (если коэфициенты уравнения известны точно). Для численного решения уравнений предложено большое количество различных способов, имеющих свои достоинства. В § 75—78 мы рассмотрим четыре наиболее ценных способа, из которых два пригодны для решения любого численного уравнения, остальные же два предназначены для решения алгебраических уравнений любой степени, т. е. уравнений вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где n — натуральное число, а коэфициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — произвольные вещественные числа. При этом будем большею частью предполагать, что корни уравнения отделены, т. е. что известны интервалы, заключающие по одному и только по одному корню уравнения (способы отделения корней рассматривает Алгебра).

IV. *Механический метод*, основанный на применении некоторых приборов (механизмов), автоматически дающих корни уравнения после того, как его коэфициенты определенным образом установлены на приборе. Известен целый ряд таких приборов: „универсальный конструктор уравнений“ Роунинга, „весы для решения уравнений“ нескольких систем, „алгебраическая машина Торреса“ и много других. Все эти приборы пока еще очень несовершенны и далеко уступают приборам, предназначенным для выполнения арифметических операций, как арифмометр и счетная линейка.

На рисунке 54 изображен один из простейших приборов для механического решения алгебраических уравнений, а именно так называемые „гидростатические весы для решения уравнений“. Здесь мы видим круглый конус, параболоид вращения и цилиндр, подвешенные к коромыслу весов так, что их низшие точки находятся на одной горизонтали. Этих трех тел достаточно для решения любого кубического уравнения. Надо выбрать для каждого из трех тел определенную точку подвеса на коромысле, определяемую величиной коэфициентов данного уравнения, а затем достичь равновесия коромысла, загружая одну из чашек на его концах. После этого на одну из этих чашек кладется добавочный груз, определяемый величиной свободного члена уравнения, а в сосуды, расположенные под коромыслом, пускается вода, в которую постепенно погружаются три подвешенных тела. Равновесие системы, нарушенное добавочным грузом, постепенно восстанавливается благодаря неодинаковому давлению воды на тела (по закону Архимеда). Наступает момент равновесия, причем глубина погружения тел в воду в этот момент и даст корень уравнения. Продолжая доливание жидкости, мы сперва вновь нарушим равновесие, а потом опять его достигнем, причем глубина погружения тел в воду в этот момент даст второй положительный корень уравнения (если он есть). Также получается и третий положительный корень (если он есть). Обозначая буквой α угол между осью конуса и образующей, буквой p — параметр параболы, вращение которой дало параболоид, и буквой r — радиус цилиндра, а буквами a, b, c — расстояния от точки опоры коромысла до точек закрепления нитей, на которых висят тела (все в сантиметрах), имеем следующее условие равновесия (для показанного на рисунке расположения тел):

$$\frac{1}{3}\pi \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot x^3 + lq = b\pi p x^2 + c\pi r^2 x, \tag{A}$$

где x — глубина погружения, q — добавочный груз на правую чашку (в граммах), l — плечо коромысла от точки опоры до точки подвеса чашки. Выбирая подходящим образом расстояния a, b, c и груз q, мы можем привести к виду (A) любое уравнение вида $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, а затем решить его посредством весов. Вместо параболоида вращения можно взять тело в виде клина, обращенного узкой стороной вниз, широкой вверх (объем погруженной части такого клина пропорционален квадрату глубины погружения x), а вместо конуса можно взять любую пирамиду, обращенную вершиной вниз (объем погруженной части пропорционален кубу глубины погружения x). Добавив тела, у которых объем погруженной части пропорционален четвертой, пятой и т. д. степеням x, мы получим возможность решать посредством весов и уравнения более высоких степеней.

Конечно, точность результатов, доставляемых весами, невелика.

§ 73. Решение кубического уравнения.

Всякое уравнение вида $a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0$ можно привести подстановкой $z = x - a_1 : (3a_0)$ к виду:

$$x^3 = 3px + 2q, \tag{1}$$

где $p = (a_1^2 - 3a_0a_2) : (9a_0^2)$; $q = (9a_0a_1a_2 - 2a_1^3 - 27a_0^2a_3) : (54a_0^3)$. Поэтому, чтобы решить любое кубическое уравнение, достаточно уметь решить уравнение вида (1). При этом достаточно ограничиться предположением, что $p \neq 0$, так как в случае $p = 0$ уравнение (1) имеет корень $x_1 = \sqrt[3]{2q}$, (для получения остальных двух корней достаточно решить квадратное уравнение) и что $q > 0$, так как при $q = 0$ имеем корень $x_1 = 0$, а при $q < 0$ подстановка $x = -\xi$ переводит уравнение (1) в уравнение $\xi^3 = 3p\xi + (-q)$ с положительным свободным членом.

Мы уже видели в § 70 номограмму, позволяющую находить вещественные корни этого уравнения. Другой весьма удобный способ графического его решения состоит в следующем. Заменим уравнение (1) системой $y = x^3$; $y = 3px + 2q$ и построим кубическую параболу по уравнению $y = x^3$ для значений x от 0 до X. Построив на том же чертеже прямую $y = 3px + 2q$ и найдя абсциссы точек пересечения прямой и параболы, мы и получим искомые корни уравнения (1), заключенные между O и X. Выбирая X достаточно большим и строя параболу в подходящем масштабе, мы найдем все положительные корни уравнения (1). Для получения его отрицательных корней полагаем $x = -\xi$ и вместо уравнения (1) получаем уравнение $\xi^3 = 3p\xi - 2q$. Найдя посредством того же чертежа его положительные корни (один или два) и взяв их с обратными знаками, мы и получим отрицательные корни уравнения (1).

Пусть, например, требуется решить уравнения $x^3 = 2x + 5$ (I); $x^3 = -2x + 5$ (II); $x^3 = 3x + 1$ (III). Замечая, что левая часть каждого из этих уравнений уже при $x = 2,5$ превосходит правую ($2,5^3 = 15,625$) и при дальнейшем возрастании x растет быстрее правой, строим кубическую параболу $y = x^3$ для значений x от 0 до 2,5 (рис. 55, где по оси X взят масштаб — единица в 20 *мм*, по оси Y — единица в 5 *мм*), а затем три прямые $y = 2x + 5$; $y = -2x + 5$; $y = 3x + 1$ и находим абсциссы точек пересечения, т. е. искомые корни уравнений: $x = 2,10$ (для I); $x = 1,33$ (для II); $x = 1,87$ (для III)[1].

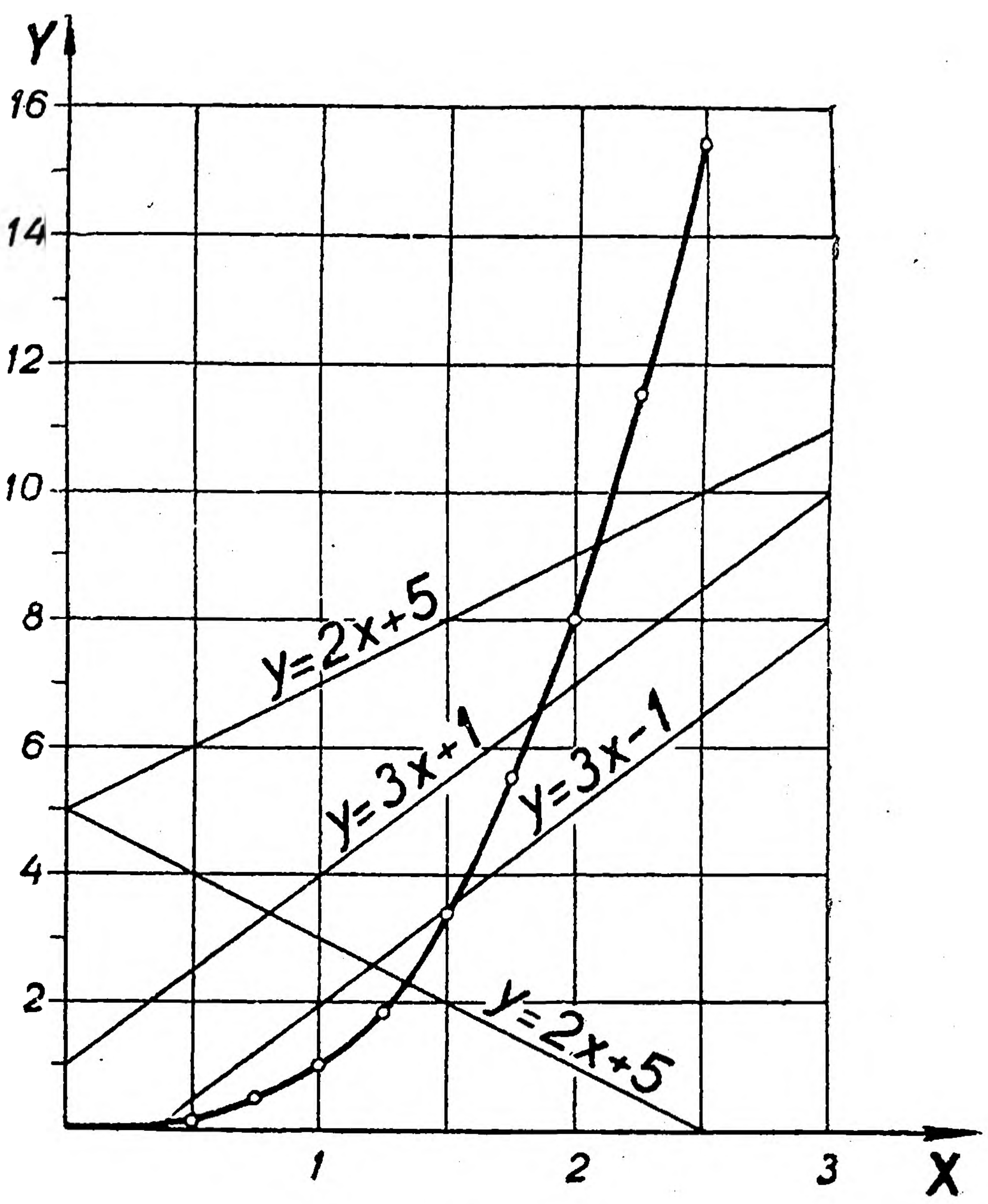


Рис. 55.

Для получения отрицательных корней данных уравнений, т. е. положительных корней уравнений $x^3 = 2x - 5$; $x^3 = -2x - 5$; $x^3 = 3x - 1$, строим прямые $y = 2x - 5$; $y = -2x - 5$; $y = 3x - 1$. Первые две из них параболы не пересекают и на рисунке 55 не показаны, третья же пересекает ее в точках с абсциссами 0,35 и 1,53, а потому уравнение $x^3 = 3x + 1$ кроме положительного корня $x_1 = 1,87$ имеет еще пару отрицательных корней: $x_2 = -0,35$; $x_3 = -1,53$. Для поверки находим сумму корней $x_1 + x_2 + x_3$, которая оказывается равной $-0,01$, а должна равняться 0, так как член с x^2 отсутствует. Как видим, можно с доверием отнестись даже к цифрам сотых, найденным по графику посредством оценки долей миллиметра на глаз.

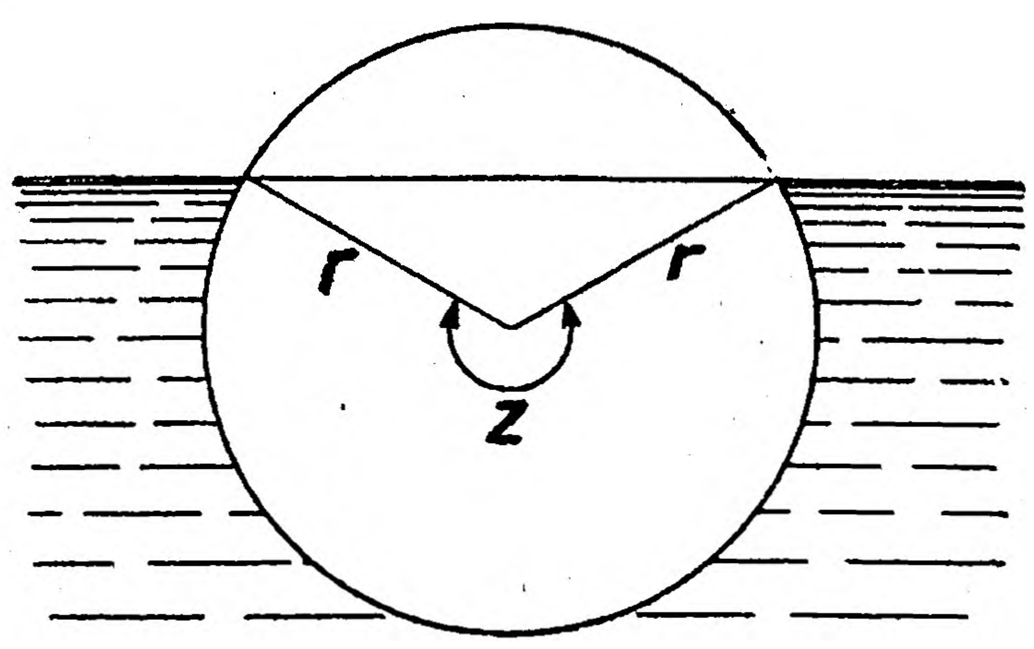


Рис. 56.

Если требуется более высокая точность, можно прибегнуть к вычерчиванию надлежащих частей графика в более крупном масштабе или к одному из рассмотренных далее (в § 75—78) численных способов, но в данном случае проще обратиться к решению аналитическим методом. Алгебра дает решение кубического уравнения в виде известной формулы Кардана, совсем неудобной для случая, когда все три корня вещественны, так как каждый корень выражается в виде суммы двух радикалов от комплексных чисел. Покажем

[1] На рисунке 55 уравнение прямой, направленной вниз, ошибочно показано $y = 2x + 5$; должно быть $y = -2x + 5$. Рисунок уменьшен до $^3/_4$ натуральной величины, кроме того, опущена миллиметровая сетка.

вывод более удобных формул, основанный на известной из тригонометрии „формуле косинуса тройного угла“: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, или, что то же, „формуле трисекции угла“: $\cos\varphi = 4\cos^3\frac{1}{3}\varphi - 3\cos\frac{1}{3}\varphi$, которую перепишем, полагая $t = 2\cos\frac{1}{3}\varphi$, в виде

$$t^3 = 3t + 2\cos\varphi. \qquad (2)$$

Мы получили, таким образом, уравнение (2), корень которого есть $t = 2\cos\frac{1}{3}\varphi$. Но уравнение (2) не изменится, если взять вместо угла φ углы $\varphi + 360^\circ$ и $\varphi + 720^\circ$, а потому кроме корня $t_1 = 2\cos\frac{1}{3}\varphi$ оно имеет еще корни $t_2 = 2\cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 120^\circ\right)$ и $t_3 = 2\cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 240^\circ\right)$.

„Приведенное“ кубическое уравнение (1) легко преобразовать так, что оно совпадет с „трисекционным“ уравнением (2), все корни которого мы знаем. Для этого полагаем $x = \lambda t$, где λ — числовой коэфициент, значение которого сейчас определится, и вместо уравнения (1) получаем уравнение $t^3 = (3p:\lambda^2)\,t + (2q:\lambda^3)$, которое приводится к трисекционному, если взять $\lambda^2 = p$, $\lambda^3\cos\varphi = q$. Соотношение $x = \lambda t$ позволит найти и корни уравнения (1):

$$x_1 = 2\lambda\cos\frac{1}{3}\varphi;\quad x_2 = 2\lambda\cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 120^\circ\right);$$

$$x_3 = 2\lambda\cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 240^\circ\right), \qquad (3)$$

где

$$\lambda = +\sqrt{p};\quad \cos\varphi = q:\lambda^3. \qquad (4)$$

Всегда ли можно найти λ и φ по формулам (4)? Очевидно, только тогда, когда $p > 0$ (иначе мы получим для λ мнимое значение) и когда $q:\lambda^3 = q:\sqrt{p^3} \leqq 1$, так как косинус не может быть больше 1 по модулю. Последнее условие переписывается в виде $q^2 \leqq p^3$, или $R = q^2 - p^3 \leqq 0$ и заключает в себе первое ($p > 0$), так как при $p < 0$ было бы $R = q^2 + (-p)^3 > 0$. Если же $R \leqq 0$, то ввиду условия $q > 0$ всегда можно подобрать острый угол φ, удовлетворяющий условию

$$\cos\varphi = q:\lambda^3.$$

Для примера возьмем уравнение $x^3 = 3x + 1$, решенное выше графическим методом. Здесь $3p = 3$; $2q = 1$; $p = 1$; $q = 0{,}5$; $R = -0{,}75$, а потому возможно применение формул (3) и (4). Находим по ним $\lambda = 1$; $\cos\varphi = 0{,}5$; $\varphi = 60^\circ$; $x_1 = 2\cos 20^\circ = 1{,}879386$; $x_2 = 2\cos 140^\circ = -2\cos 40^\circ = -1{,}532088$; $x_3 = 2\cos 260^\circ = -2\cos 80^\circ = -0{,}347296$ [1]). Для поверки находим $x_1 + x_2 + x_3 = 0{,}000002$.

В случае $R = q^2 - p^3 > 0$ этот весьма удобный „трисекционный“ способ неприменим, и надо обратиться к формуле Кардана. Вычисления по ней очень упрощаются, если ввести в нее „вспомогательные углы“.

---

[1]) Использованы „Шестизначные таблицы тригонометрических функций“ И. Петерса, ГТТИ, 1932.

Итак, возьмем уравнение $x^3=3px+2q$, где $q>0$, $R=q^2-p^3>0$, и, предполагая сперва $p>0$, положим $x=u+v$. Переписав данное уравнение в виде $u^3+v^3+3(uv-p)(u+v)=2q$, распорядимся числами u и v, одно из которых произвольно, так, чтобы было $uv=p$, после чего уравнение сводится к такому: $u^3+v^3=2q$. Последнее уравнение удовлетворяется, если взять $u^3=2q\cos^2\omega$; $v^3=2q\sin^2\omega$, где ω — вспомогательный угол, определяемый из условия $uv=p$, или $u^3v^3=p^3$, что дает $\sin^2 2\omega=p^3:q^2$. Так как по условию $R=q^2-p^3>0$, то $0<p^3:q^2<1$, и всегда возможно получение острого угла ω, удовлетворяющего условию: $\sin^2 2\omega=p^3:q^2$. Вычисление вещественного корня x_1 заканчиваем по формуле $x_1=u+v$, причем оказывается выгодным ввести еще один вспомогательный угол φ:

$$x_1=u+v=\sqrt[3]{2q\cos^2\omega}+\sqrt[3]{2q\sin^2\omega}=\sqrt[3]{2q\cos^2\omega}\cdot(1+\operatorname{tg}^2\varphi),$$

где

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega};\quad \sin 2\omega=\sqrt{p^3:q^2};\quad 0<2\omega<90^\circ;\quad 0<\varphi<90^\circ;\qquad (5)$$

$$x_1=\sqrt[3]{2q\cos^2\omega}\cdot\sec^2\varphi=\sqrt[3]{2\cos^2\omega\sqrt{p^3:\sin^2 2\omega}}\cdot\sec^2\varphi=2\sqrt{p}\operatorname{cosec}2\varphi.\ (6)$$

Два других корня уравнения (1) при $R=q^2-p^3$, как известно из курса „Алгебры“, комплексны и выражаются формулами $x_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v$; $x_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v$, где ε — один из двух комплексных корней кубических из 1, хотя бы $\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ=-0{,}5+0{,}5i\sqrt{3}$. Подставляя, имеем

$$x_2=-0{,}5(u+v)+0{,}5i\sqrt{3}(u-v);$$
$$x_3=-0{,}5(u+v)-0{,}5i\sqrt{3}(u-v).$$

Значение $u+v=x_1$ найдено выше, а для значения $u-v$ легко получаем выражение $u-v=2\sqrt{p}\operatorname{ctg}2\varphi$, а потому для комплексных корней имеем формулы:

$$x_2=-\sqrt{p}\operatorname{cosec}2\varphi+i\sqrt{3p}\operatorname{ctg}2\varphi;$$
$$x_3=-\sqrt{p}\operatorname{cosec}2\varphi-i\sqrt{3p}\operatorname{ctg}2\varphi.\qquad (7)$$

Остается рассмотреть случай, когда $p<0$ (предполагается, как и в предыдущем случае, что $q>0$).

Чтобы удовлетворить системе $uv=p$; $u^3+v^3=2q$, полагаем $u=-\sqrt{-p}\cdot\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega}$; $v=+\sqrt{-p}\cdot\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\omega}$. Уравнение $uv=p$ удовлетворяется при этом само собой, а чтобы удовлетворить уравнению $u^3+v^3=2q$, надо взять $\operatorname{tg}2\omega=\sqrt{-p^3}:q$. Действуя, как в предыдущем случае, получаем формулы:

$$x_1=2\sqrt{-p^3}\operatorname{ctg}2\varphi;\quad x_{2,3}=-\sqrt{-p^3}\operatorname{ctg}2\varphi\pm i\sqrt{-3p^3}\operatorname{cosec}2\varphi,\qquad (8)$$

где

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega};\quad \operatorname{tg}2\omega=\sqrt{-p^3:q^2};\quad 0^\circ<2\omega<90^\circ;\quad 0^\circ<\varphi<90^\circ.\qquad (9)$$

Приводим сводку всех полученных результатов:

Уравнение $a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0$ *подстановкой* $z=x-a_1:(3a_0)$ *приводится к виду* $x^3=3px+2q$, где $p=(a_1^2-3a_0a_2):9a_0^2$; $q=(9a_0a_1a_2-2a_1^3-27a_0^2a_3):54a_0^2$. *При* $p=0$ *или* $q=0$ *приведенное уравнение решается непосредственно. Случай* $q<0$ *приводится к случаю* $q>0$ *подстановкой* $x=-\xi$. *Поэтому можно считать* $p\neq 0$, $q>0$.

Случай I. $R=q^2-p^3\leqq 0$; $p>0$, $q>0$.

$$\lambda=+\sqrt{p};\quad \cos\varphi=q:\lambda^3;\quad 0<\varphi<90^\circ;$$
$$x_1=2\lambda\cos\frac{1}{3}\varphi;\quad x_2=2\lambda\cos\left(\frac{1}{3}\varphi+120^\circ\right);$$
$$x_3=2\lambda\cos\left(\frac{1}{3}\varphi+240^\circ\right).$$

Случай II. $R=q^2-p^3>0$; $p>0$, $q>0$.

$$\sin 2\omega=+\sqrt{p^3}:q;\quad 0<2\omega<90^\circ;\quad \operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega};\quad 0<\varphi<90^\circ;$$
$$x_1=2\sqrt{p}\operatorname{cosec}2\varphi;\quad x_{2,3}=-\sqrt{p}\operatorname{cosec}2\varphi\pm i\sqrt{3p}\operatorname{ctg}2\varphi.$$

Случай III. $R=q^2-p^3>0$; $p<0$, $q>0$.

$$\operatorname{tg}2\omega=+\sqrt{-p^3}:q,\quad 0^\circ<2\omega<90^\circ;\quad \operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega},\quad 0^\circ<\varphi<90^\circ.$$
$$x_1=2\sqrt{-p^3}\cdot\operatorname{ctg}2\varphi;\quad x_{2,3}=-\sqrt{-p^3}\cdot\operatorname{ctg}2\varphi\pm i\sqrt{-3p^3}\cdot\operatorname{cosec}2\varphi.$$

Для примера решим, пользуясь семизначными логарифмо-тригонометрическими таблицами, уравнение $x^3=2x+5$, решенное выше графическим методом.

Решение уравнения $x^3=2x+5$.

$p=2:3$; $q=2,5$; $R=2,5^2-(2:3)^3>0$; случай II.

$\lg p$	$\bar{1},8239087$
$\lg\sqrt{p}$	$\bar{1},9119544$
$\lg\sqrt{p^3}=\lg p+\lg\sqrt{p}$	$\bar{1},7358631$
$\lg q$	$0,3979400$
$\lg\sin 2\omega=\lg(\sqrt{p^3}:q)$	$\bar{1},3379231$
2ω	$12^\circ34'33'',18$
ω	$6^\circ17'16'',59$

$\lg\operatorname{tg}\omega$	$\bar{1},0421344$
$\lg\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega}=\lg\operatorname{tg}\varphi$	$\bar{1},6807115$
φ	$25^\circ36'49'',50$
2φ	$51^\circ13'39'',00$
$\lg 2$	$0,3010300$
$\lg\sqrt{p}$	$\bar{1},9119544$
$\lg\operatorname{cosec}2\varphi$	$0,1081067$
$\lg x_1$	$0,3210911$
x_1	$2,09455$

$\lg\sqrt{3}$	$0,2385606$
$\lg\sqrt{p}$	$\bar{1},9119544$
$\lg\operatorname{ctg}2\varphi$	$\bar{1},9048403$
$\lg\sqrt{3p}\operatorname{ctg}2\varphi$	$0,0553553$
$\sqrt{3p}\operatorname{ctg}2\varphi$	$1,135940$

Ответ: $x_1=2,094552$
$x_2=-1,047276+1,135940i$
$x_3=-1,047276-1,135940i$

Поверка корня x_1

$$\lg x_1^3 = 0{,}9632733; \quad x_1^3 = 9{,}189106; \quad 2x_1 + 5 = 9{,}189104.$$

Разница: 2 единицы седьмой значащей цифры.

Поверка корней x_2 и x_3 (через вычисление $x_1 x_2 x_3 = x_1(\alpha^2 + \beta^2)$, где α и β — абсолютные значения вещественной и мнимой частей корней x_2 и x_3).

$\lg \alpha$	0,0200611	α^2	1,096787
$\lg \alpha^2$	0,0401222	β^2	1,290359
$\lg \beta$	0,0553553	$\alpha^2 + \beta^2$	2,387146
$\lg \beta^2$	0,1107106	$\lg(\alpha^2 + \beta^2)$	0,3778790
		$\lg x_1$	0,3210911
		$\lg x_1(\alpha^2 + \beta^2)$	0,6989701
		$x_1(\alpha^2 + \beta^2)$	5,000001

$x_1(\alpha^2 + \beta^2) = x_1 x_2 x_3$ должно равняться $q = 5$, получается 5,000001.

Разница: 1 единица седьмой значащей цифры.

Вещественный корень этого уравнения известен с огромной точностью (со 102 значащими цифрами). Оказывается, что $x_1 = 2{,}0945514815$. К решению этого уравнения мы вернемся еще раз в § 76.

Читателю рекомендуется решить этим же способом и уравнение $x^3 = -2x + 5$, тоже решенное выше графическим методом, и сделать в заключение поверку.

§ 74. Уравнение с одной неизвестной. Получение корня в первом приближении.

Имея уравнение с одной неизвестной $f(z) = 0$, которое требуется решить, прежде всего стараются придать этому уравнению наиболее простой вид. Часто уже простое умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же постоянное число вносит некоторое упрощение. Большую помощь может оказать замена неизвестной z новой неизвестной x, связанной с z каким-нибудь более или менее простым соотношением. Например, как мы видели в начале § 73, линейная подстановка $z = x - a_1 : (3a_0)$ уничтожает в кубическом уравнении член с квадратом неизвестной.

Упростив данное уравнение и получив в результате новое уравнение $F(x) = 0$, выполняют *отделение корней* последнего, т. е. устанавливают те интервалы значений x, в каждом из которых содержится один и только один корень этого уравнения. При отделении корней надо руководствоваться известными из курса Алгебры теоремами о пределах корней и о связи между коэфициентами и корнями. Основное значение имеет теорема: *если числа $F(a)$ и $F(b)$ имеют разные знаки, причем при изменении x от a до b функция $F(x)$ остается непрерывной и изменяется монотонно, т. е. только растет или только убывает, то между $x = a$ и $x = b$ заключается один и только один корень уравнения $F(x) = 0$.*

Большую помощь оказывает почти во всех случаях составление производной $F'(x)$ и выяснение ее знака для разных значений x: по знаку $F'(x)$ можно судить, как известно из курса Анализа, о том, растет или убывает $F(x)$ при изменении x от значений, меньших x_0, к значениям, большим x_0. Необходимо выяснение общего хода изменения функции $F(x)$, причем особое внимание надо обращать на разрывы непрерывности, если они имеются.

Если выполнено отделение корней, то тем самым значения корней в первом приближении уже определены. Действительно, раз мы знаем, что $a < x_1 < b$, то $x_1 \approx \frac{1}{2}(a+b)$, причем граница абсолютной погрешности этого приближенного значения x_1 равна $\frac{1}{2}(b-a)$. Лучше, однако, непосредственно вслед за отделением корней *составить таблицу значений функции* $F(x)$ и вычертить график функции $y=F(x)$, который и позволит установить значительно более точно искомые корни, как абсциссы точек пересечения графика функции $y=F(x)$ с осью X. Составлять таблицу значений и вычерчивать график до отделения корней не рекомендуется, так как заключения, сделанные на основе одной только таблицы значений и графика, могут быть и неверными. Например, имея при $x=a$ и $x=b$ одинаковые по знаку значения $F(x)$ и заключая отсюда, что между a и b корней нет, мы можем сделать ошибку: между a и b могут быть два корня (или вообще четное их число), или один двукратный корень, или разрыв непрерывности функции $F(x)$ и т. д. Таким образом, *исследование хода изменения функции $F(x)$ должно предварять всякую вычислительную и чертежную работу* [1]).

Если в процессе такого исследования выясняется, что уравнение имеет *кратный* корень, его надо отделить, пользуясь известным из курса Алгебры методом.

Во многих случаях той точности, какую дает графическое решение, бывает уже достаточно, и поставленная задача, следовательно, разрешена (если первоначально данное уравнение было преобразовано путем замены переменной, надо, конечно, по найденным корням преобразованного уравнения вычислить корни первоначального уравнения). Если же этой точности недостаточно, найденные приближенные значения корней уточняют, либо просто составляя таблицу значений $F(x)$ с меньшим интервалом (для значений x, близких к найденным приближениям) и вычерчивая в более крупном масштабе соответствующие части графика функции $F(x)$, либо обращаются к способам уточнения корней, рассмотренным в § 75—77.

Поясним высказанные выше соображения двумя примерами.

Задача 1. Однородный круглый цилиндр плотности $d=0{,}673$, основания которого перпендикулярны к его оси, плавает по воде так, что его ось параллельна поверхности воды (предполагается, что высота цилиндра h больше поперечника его основания $2r$). Найти (в градусах) погруженную в воду дугу каждого основания цилиндра (рис. 56).

Обозначая радианную меру искомой дуги через z и выражая равенство веса плавающего цилиндра и вытесненной им воды (закон Архимеда), получаем уравнение:

$$\left[\frac{1}{2}r^2z+\frac{1}{2}r^2\sin(2\pi-z)\right]\cdot h=\pi r^2hd,$$

[1]) Отметим, что такого рода предварительное исследование не нужно, если решать алгебраическое уравнение по *способу квадрирования*, о котором будет речь в § 78.

принимающее после упрощения такой вид: $f(z) = z - \sin z - 2\pi d = 0$. По условиям задачи z может изменяться от 0 до 2π. Замечая, что $f(0) = -2\pi d < 0$; $f(2\pi) = 2\pi - 2\pi d = 2\pi(1-d) = 2\pi \cdot 0{,}327 > 0$ и что $f'(z) = 1 - \cos z \geq 0$, убеждаемся, что между 0 и 2π существует один, и только один корень. Так как

$$f(\pi) = \pi(1-2d) < 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \left(\frac{3}{2} - 2d\right)\pi + 1 > 0,$$

то

$$\pi < z < \frac{3}{2}\pi.$$

Полагая $z = \pi + x$, сводим вопрос к разысканию единственного острого угла x, удовлетворяющего уравнению $F(x) = \sin x + x - \pi(2d-1) = 0$. Вместо того чтобы вычерчивать кривую, представляющую собой график функции $y = F(x)$, заменяем уравнение $F(x) = 0$ системой уравнений $y = \sin x$; $y = \pi(2d-1) - x$ и ищем по графику абсциссу точек пересечения синусоиды $y = \sin x$ и прямой $y = 1{,}0870 - x$. Построение показано на рисунке 57 и дает для искомого корня значение $x \approx 32°$, или

$$x \approx 0{,}558 \text{ (радиана)},$$

откуда

$$z = \pi + x \approx 3{,}142 + 0{,}558 = 3{,}700,$$

или в градусах

$$z \approx 180° + 32° = 212°.$$

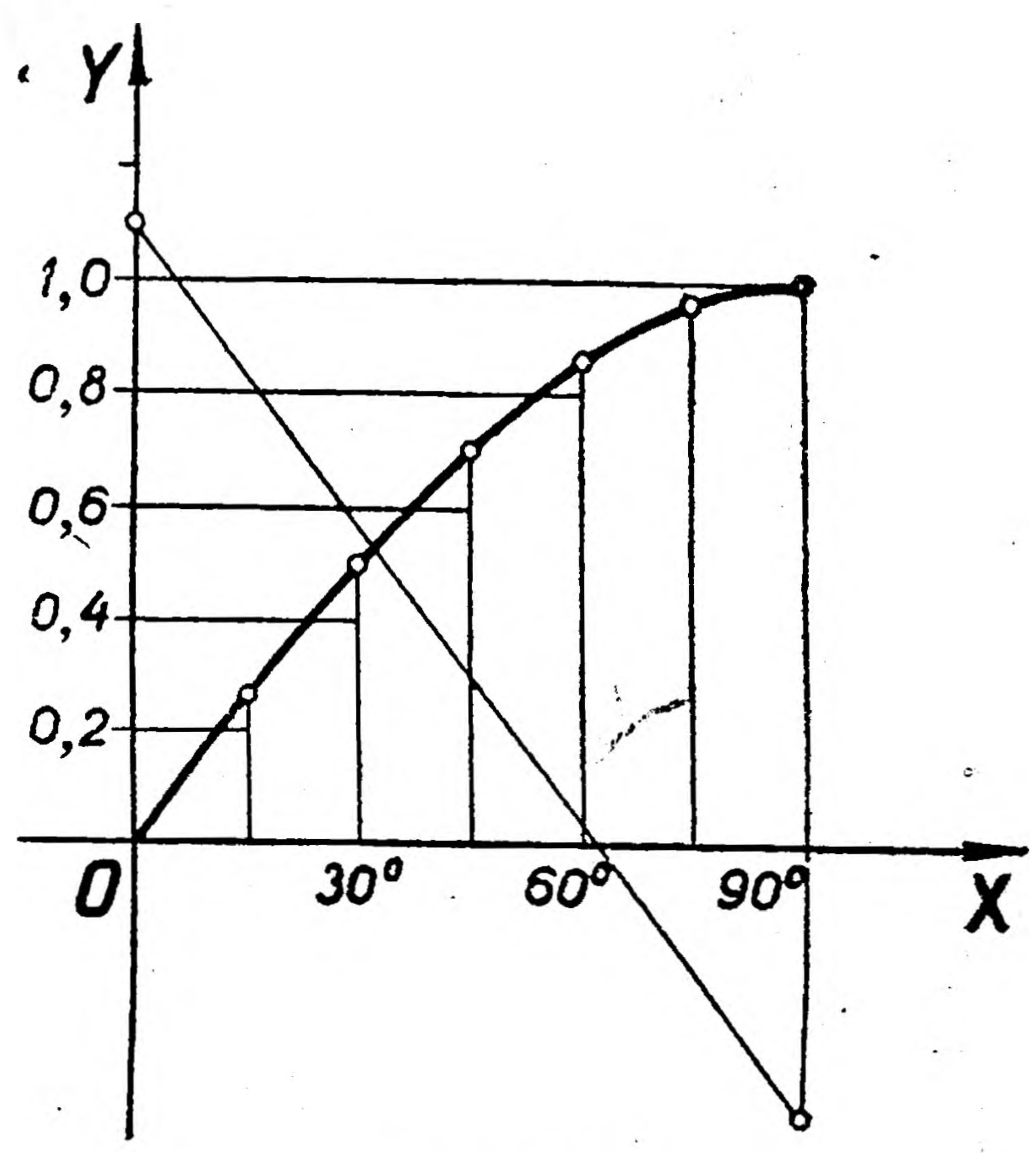


Рис. 57.

Принимая во внимание масштаб рисунка 57 (по оси X в 1 *мм* 3°) и возможную неточность построения, заключаем, что найденные значения x и z отличаются от точных своих значений вряд ли более, чем на 1° (на рис. 57 не показана миллиметровая сетка).

Если этой точности недостаточно, вычисляем значения $F(x)$ для значений x от 30° до 33° через 1°.

$x°$	30°	31°	32°	33°
$\sin x$ x (радианы) $-\pi(2d-1)$	0,5000 0,5236 $-$ 1,0870	0,5150 0,5411	0,5299 0,5585	0,5446 0,5760
$F(x)$	$-$ 0,0634	$-$ 0,0309	+ 0,0014	+ 0,0336
$\Delta F(x)$		+ 0,0325	+ 0,0323	+ 0,0322

В последней строке схемы, а именно в строке с заголовком $\Delta F(x)$, приведены разности вычисленных в предыдущей строке значений $F(x)$. Вычисление таких разностей является простым и весьма действительным средством контроля правильности вычисления таблицы значений непрерывной функции: ошибки в найденных значениях функции сразу сказались бы в виде скачков в ходе изменения разностей.

Как видим, искомый корень уравнения находится между 31° и 32°. Незначительная разница в значениях $\Delta F(x)$ говорит о том, что мы получили таблицу с почти равномерным изменением функции, а потому возможна линейная интерполяция (§ 11). Применяя ее, находим, что

$$F(x) = 0$$

при

$$x \approx 32° - \frac{14}{323} \cdot 60' = 32° - 3' = 31°57'.$$

Вычисляя для контроля $F(31°57') = -0{,}0002$ и $F(31°58') = +0{,}0003$, убеждаемся, что найденное значение отличается от точного менее, чем на 1'. Дальнейшее уточнение требует уже применения более точных таблиц, чем те четырехзначные, которыми мы сейчас пользовались.

Задача 2. Для определения частоты колебаний, испытываемых валом некоторой машины, требуется найти все положительные корни уравнения:

$$z^3 - 407z^2 + 34492z - 296230 = 0$$

(проф. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, ГНТИ, 1932, стр. 142—143). Вычислить эти корни с 3 значащими цифрами.

Здесь возможно применение аналитического способа, рассмотренного в § 73, но можно обойтись и без него.

Прежде всего, во избежание неудобных многозначных целых чисел, полагаем $z = 100x$ и переписываем данное уравнение в таком виде:

$$10^{-6} f(100x) = F(x) = x^3 - 4{,}07x^2 + 3{,}4492x - 0{,}29623 = 0.$$

Замечая, что совокупность первых двух членов $x^3 - 4{,}07x^2 = x^2(x - 4{,}07)$ обращается в 0 при $x = 4{,}07$ и принимает исключительно положительные значения при $x > 4{,}07$ и что совокупность двух последних членов при $x > 4{,}07$ тоже дает значение, большее нуля, заключаем, что все положительные корни данного уравнения находятся между 0 и 4,07. Так как $F(0) < 0$, $F(4{,}07) > 0$ и функция $F(x)$ непрерывна, то в этом интервале находится по крайней мере один корень уравнения (но возможно, что их и больше — два или три).

Составляем производную $F'(x)$ и приравниваем ее нулю. Решая уравнение

$$\frac{1}{3} F'(x) = x^2 - 2{,}71x + 1{,}1497 = 0,$$

находим абсциссы тех точек графика функции $y = F(x)$, где касательная к кривой параллельна оси X; это точки с абсциссами $x_1 = 2{,}15$ и $x_2 = 0{,}56$ (ограничиваемся той точностью, какую дает вычисление посредством счетной линейки). Замечая, что $F'(x) = 3(x - 0{,}56)(x - 2{,}15)$ и вычисляя (опять-таки посредством линейки) $F(0{,}56) = +0{,}537$, $F(2{,}15) = -1{,}74$, $F(4{,}07) = 13{,}5$, составляем следующую „ведомость" (знаки $\nearrow$ и $\searrow$ означают рост и убывание):

x	0	$\nearrow$	0,56	$\nearrow$	2,15	$\nearrow$	4,07
$F'(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$F(x)$	− 0,30	$\nearrow$	+ 0,54	$\searrow$	− 1,74	$\nearrow$	+ 13,50

Последняя строка, легко заполняемая при наличности первых двух, позволяет установить, что в каждом из интервалов (0; 0,56); (0,56; 2,15); (2,15; 4,07) имеется по одному корню уравнения $F(x)=0$.

Отделение корней выполнено.

Чтобы получить значения корней с требуемой точностью, составляем таблицу значений функции $F(x)$ для значений x от $x=0,0$ до $x=4,0$ через 0,5.

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
x^3	0	0,125	1,000	3,375	8,00	15,62	27,00	42,88	64,00
$3,45x$	0	1,725	3,450	5,175	6,90	8,62	10,35	12,08	13,80
$A=x^3+3,45x$	0	1,850	4,450	8,550	14,90	24,24	37,35	54,96	77,80
$4,07x^2$	0	1,018	4,070	9,158	16,28	25,44	36,63	49,86	65,12
$B=4,07x^2+0,296$	0,296	1,314	4,366	9,454	16,58	25,74	36,93	50,16	65,42
$F(x)=A-B$	− 0,30	+ 0,54	+ 0,08	− 0,90	− 1,68	− 1,50	+ 0,42	+ 4,80	+ 12,38
$\Delta F(x)$	+0,84	−0,46	−0,98	−0,78	+0,18	1,92	4,38	7,58	
$\Delta^2 F(x)$	− 1,30	− 0,52	+ 0,20	0,96	1,74	2,46	3,20		
$\Delta^3 F(x)$	0,78	0,72	0,76	0,78	0,72	0,74			

Здесь последние три строки представляют собой значения разностей $\Delta F(x)$, разностей этих разностей, или вторых разностей $\Delta^2 F(x)$, и разностей вторых разностей, или третьих разностей $\Delta^3 F(x)$. Как мы увидим в гл. IX, при вычислении значений кубической функции $F(x)$ с коэфициентом при x^3, равным 1, и при ступени $h=0,5$ должны получиться постоянные третьи разности $\Delta^3 F(x)=6h^2=0,75$. У нас же третьи разности постоянными не оказались. Можно ли объяснить замечаемые отклонения полученных у нас третьих разностей от этого теоретического значения 0,75 влиянием погрешностей округления $F(x)$ до сотых долей?

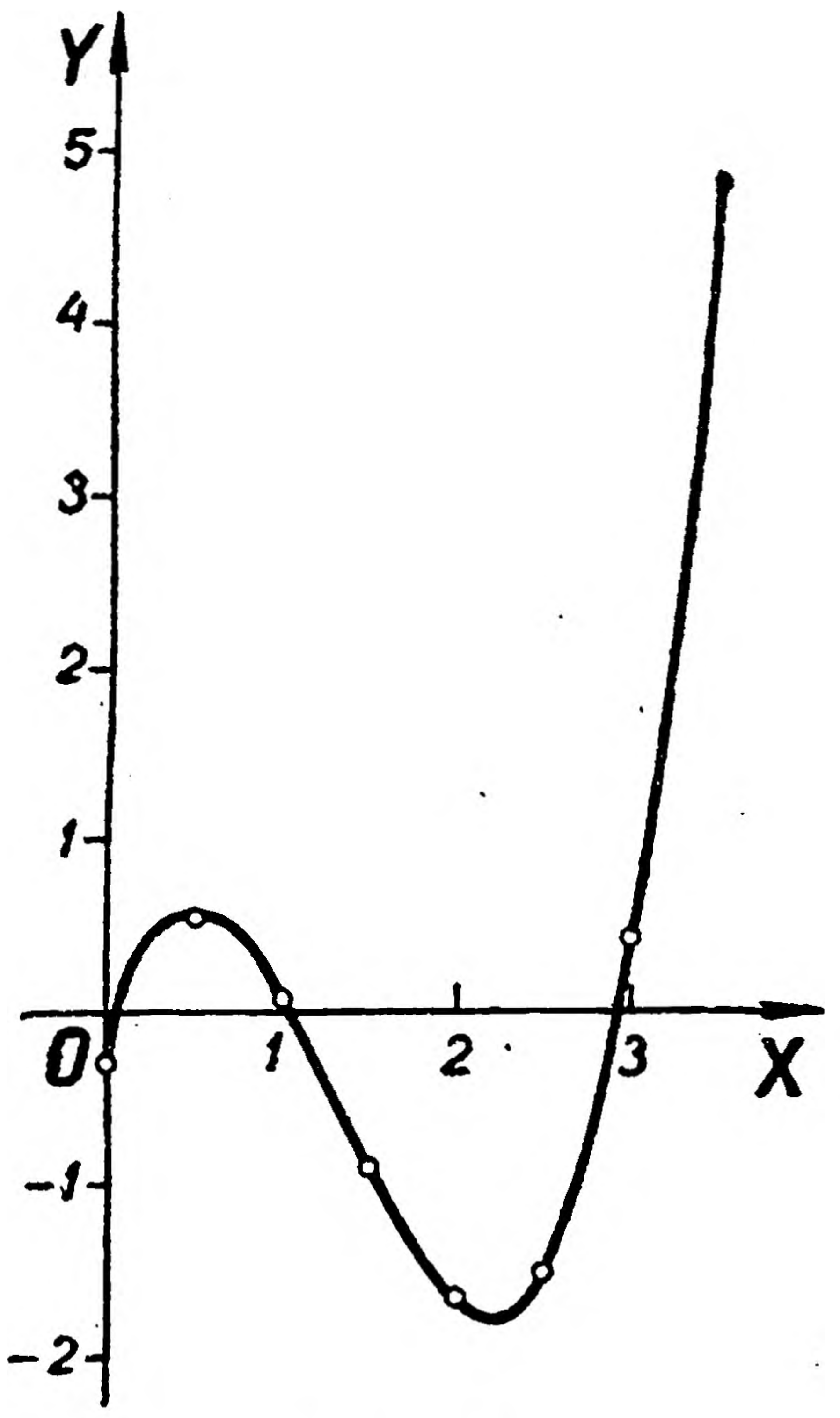


Рис. 58.

Вычисляя среднее значение всех полученных третьих разностей, получаем

$$(0{,}78+0{,}72+0{,}76+0{,}78+0{,}72+0{,}74):6= \\ =4{,}50:6=0{,}75,$$

т. е. точно теоретическое значение. Это позволяет заключить, что колебания $\Delta^3 F(x)$ действительно вызваны только неизбежными погрешностями в значениях $F(x)$.

Нанеся результаты вычисления на график (рис. 58), находим отсчетами по графику, что $x_1 \approx 0{,}10$; $x_2 \approx 1{,}05$; $x_3 \approx 2{,}9$. Здесь вторые значащие цифры не вполне надежны, а потому вычисляем по три значения $F(x)$ в окрестностях каждого найденного корня. Располагая вычисления, как и выше, получаем такие результаты:

x	0,09		0,10		0,11	0,9		1,0		0,1	2,8		2,9		3,0
$F(x)$	− 0,018		+ 0,009		+ 0,036	+ 0,23		+ 0,08		− 0,07	− 0,6		− 0,1		+ 0,4
$\Delta F(x)$		0,027		0,027			− 0,15		− 0,15			+ 0,5		+ 0,5	

Итак, искомые корни лежат в интервалах (0,09; 0,10); (1,0; 1,1); (2,9; 3,0). Ввиду постоянства табличных разностей можно воспользоваться обратной линейной интерполяцией, что дает:

$$x_1 \approx 0{,}0967; \quad x_2 \approx 1{,}053; \quad x_3 \approx 2{,}92.$$

Для корней заданного уравнения имеем по формуле $z=100x$ значения:

$$z_1=9{,}67; \quad z_2=105{,}3; \quad z_3=292.$$

В книге проф. Тимошенко найдены значения корней 9,664; 105; 292. Мы еще раз вернемся к решению этого уравнения в § 78.

*§ 75. Решение алгебраического уравнения посредством применения схемы Хорнера.

Самая тягостная часть работы по решению уравнения способом, рассмотренным в предшествующем параграфе, заключается в вычислении ряда значений функции $F(x)$, образующей левую часть уравнения $F(x)=0$. Если это уравнение алгебраическое, то эту часть работы можно существенно упростить, применяя *схему Хорнера* для деления многочлена $F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots$ $\ldots+a_{n-1}x+a_n$ на двучлен $x-a$. В силу известного равенства

$$F(x)=(x-a)F_1(x)+F(a),$$

выражающего так называемую „теорему Безу", значение $F(x)$ при $x=a$, т. е. число $F(a)$, есть не что иное, как остаток от деления многочлена $F(x)$ на $x-a$. Остаток этот удобнее всего находить по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots a_{n-1} & & a_n \\ & a_0 a & a'_1 a \ldots\ldots a'_{n-2} a & & a'_{n-1} a \\ \hline a_0 & a'_1 & a'_2 \ldots\ldots a'_{n-1} & & a'_n \end{array}.$$

Написав коэфициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, берем число a_0 и умножаем его на a. Произведение $a_0 a$ пишем под числом a_1. Складывая a_1 и $a_0 a$, сумму, обозначенную для краткости буквой a'_1, подписываем ниже (под чертой). Далее умножаем a'_1 на a, произведение $a'_1 a$ записываем под a_2, сумму a_2 и $a'_1 a$ ниже. Продолжаем эти умножения и сложения, пока не дойдем до последнего коэфициента a'_n. Легко видеть, что эта „схема Хорнера" представляет собой удобную запись обычного процесса деления многонлена на двучлен. Последнее число третьей строки и есть искомый остаток, т. е. число $F(a)$, а числа $a_0, a'_1, a'_2, \ldots$ $\ldots a'_{n-1}$ суть не что иное, как последовательные коэфициенты многочлена $F_1(x)$ степени $n-1$, получающегося в частном.

Например, чтобы вычислить значение $F(x)=x^4-6x^3+13x^2-14x+5$ при $x=3$, применяем схему Хорнера и получаем:

$$a=3 \qquad \begin{array}{r} 1-6+13-14+5 \\ 3-\ 9+12-6 \\ \hline 1-3+\ 4-\ 2-1 \end{array}.$$

Следовательно, $F(3)=-1$, а целая часть частного от делении $F(x)$ на $x-3$ есть x^3-3x^2+4x-2.

Однако применение схемы Хорнера этим не ограничивается. Выполнив деление $F(x)$ на $x-a$ и получив равенство $F(x)=(x-a)F_1(x)+F(a)$, делим далее тем же способом $F_1(x)$ на $x-a$ и получаем равенство $F_1(x)=(x-a)F_2(x)+$ $+F_1(a)$. Повторяя эту операцию, придем в конце концов к равенству $F_{n-1}(x)=$ $=(x-a)F_n(x)+F_{n-1}(a)$, где $F_n(x)$ есть не что иное, как a_0. Исключая последовательно $F_{n-1}(x)$; $F_{n-2}(x), \ldots, F_2(x)$; $F_1(x)$, мы придем к тождеству:

$$F(x)=a_0(x-a)^n+F_{n-1}(a)\cdot(x-a)^{n-1}+F_{n-2}(a)\cdot(x-a)^{n-2}+\ldots+$$
$$+F_2(a)\cdot(x-a)^2+F_1(a)\cdot(x-a)+F(a).$$

Таким образом, *последовательное применение схемы Хорнера дает коэфициенты разложения $f(x)$ по степеням $(x-a)$.*

Например, чтобы получить разложение $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-14x+5$ по степеням $x-3$, выполняем вычисление, приведенное ниже:

$$a=3 \qquad \begin{array}{rrrrr} 1 & -6 & 13 & -14 & 5 \\ & 3 & -9 & 12 & -6 \\ \hline 1 & -3 & 4 & -2 & \multicolumn{1}{|r}{-1} \\ & 3 & 0 & 12 & \\ \hline 1 & 0 & 4 & \multicolumn{1}{|r}{10} & \\ & 3 & 9 & & \\ \hline 1 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{13} & & \\ & 3 & & & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{|r}{6} & & & \end{array}$$

Получаем, что $f(x)=(x-3)^4+6(x-3)^3+13(x-3)^2+10(x-3)-1$.

Если a есть приближенное значение корня уравнения $f(x)=0$, то, разлагая $f(x)$ по степеням $x-a=h_1$, мы получим уравнение для определения *поправки* h_1:

$$f(x)=a_0h_1^n+f_{n-1}(a)h_1^{n-1}+f_{n-2}(a)h_1^{n-2}+\ldots+f_2(a)h_1^2+$$
$$+f_1(a)h_1+f(a)=0. \qquad (1)$$

Если h_1 мало по абсолютной величине, то всеми членами этого последнего уравнения, кроме двух последних, можно пренебречь, и получить для приближенного определения поправки h_1 линейное уравнение $f_1(a)h_1 + f(a) = 0$, которое дает $h_1 \approx -f(a):f_1(a)$. Установив таким образом более точное приближенное значение $a + h_1$ корня уравнения (1), мы можем искать для этого приближенного значения поправку h_2 тем же самым способом. Повторяя описанную операцию, легко получить приближенное значение корня данного уравнения с произвольно высокой точностью. Благодаря тому что последовательные поправки h_1, h_2, $h_3, \ldots$ убывают по абсолютной величине, возможны некоторые упрощения, которые выяснятся при рассмотрении примера.

Найдем этим способом тот из корней уравнения $f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 5 = 0$, который близок к 3, с точностью до 6 десятичных знаков. Полагая $x = 3 + h_1$, или $x - 3 = h_1$, получаем для определения поправки h_1 уравнение:

$$h_1^4 + 6h_1^3 + 13h_1^2 + 10h_1 - 1 = 0 \tag{2}$$

(выкладки приведены выше).

Отбрасывая все члены, кроме двух последних, получаем в качестве приближенного значения поправки h_1 корень линейного уравнения $10h_1 - 1 = 0$, т. е. число 0,1. Полагаем $h_1 = 0{,}1 + h_2$ и преобразуем уравнение (2), разлагая левую его часть по степеням $h_1 = 0{,}1 + h_2$:

$a = 0{,}1$	1	6	13	10	−1
		0,1	0,61	1,361	1,1361
	1	6,1	13,61	11,361	0,1361
		0,1	0,62	1,423	
	1	6,2	14,23	12,784	
		0,1	0,63		
	1	6,3	14,86		
		0,1			
	1	6,4			

Таким образом, получаем уравнение:

$$h_2^4 + 6{,}4h_2^3 + 14{,}86h_2^2 + 12{,}784h_2 + 0{,}1361 = 0 \tag{3}$$

и находим приближенное значение $h_2 \approx -0{,}1361:12{,}784 \approx -0{,}01$. Взяв $h_2 = -0{,}01 + h_3$, преобразуем уравнение (3):

$a = -0{,}01$	1	6,4	14,86	12,784	0,1361
		−0,01	−0,0639	−0,147961	−0,12636039
	1	6,39	14,7961	12,636039	0,00973961
		−0,01	−0,0638	−0,147323	
	1	6,38	14,7323	12,488716	
		−0,01	−0,0637		
	1	6,37	14,6686		
		−0,01			
	1	6,36			

Новое уравнение

$$h_3^4 + 6{,}36h_3^3 + 14{,}6686h_3^2 + 12{,}488716h_3 + 0{,}00973961 = 0 \tag{4}$$

дает приближенное значение $h_3 \approx -0{,}00973961:12{,}488716 \approx -0{,}0008$.

Вместо того чтобы вводить дальше поправки $h_4, h_5, h_6, \ldots$, найдем более точное значение h_3 из уравнения (4), что проще всего сделать следующим образом. Переписав это уравнение в виде

$$12{,}488716h_3 = -0{,}00973961 - 14{,}6686h_3^2 - 6{,}36h_3^3 - h_3^4 \tag{5}$$

замечаем, что при $h_3 \approx -0{,}0008$ имеем в правой части равенство (5) $14{,}6686h_3^2 \approx 94 \cdot 10^{-7}$; $6{,}36h_3^3 \approx 3 \cdot 10^{-9}$; $h_3^4 \approx 4 \cdot 10^{-13}$. Принимая во внимание, что значение h_3 известно с 1 надежной значащей цифрой, заключаем, что значение члена с h_3^2 получается с 6 надежными десятичными знаками и что с таким же числом десятичных знаков получается и вся правая часть равенства (5), которое можно переписать так:

$$12{,}489h_3 \approx -0{,}009749_0.$$

Отсюда получаем $h_3 = -0{,}0007806$ с 4 надежными значащими цифрами, или 8 надежными десятичными знаками.

Теперь вычисляем $h_2 = -0{,}01 + h_3 = -0{,}0107806$, $h_1 = 0{,}1 + h_2 = 0{,}0892194$. Требуемая точность достигнута с превышением, так как все 7 найденных десятичных знаков точны.

Если в правую часть уравнения (5) подставить вместо h_3 не $-0{,}0008$, а найденное более точное значение h_3, равное $-0{,}0007806$, то мы получим новое, еще более точное значение h_3, а именно $h_3 = -0{,}000780588$, где все 9 десятичных знаков точны. Это дает корень $x = 3{,}089219412$ с 9 точными десятичными знаками. Легко видеть, что, продолжая эти операции, мы можем получить значение корня с произвольно высокой точностью.

Способ Хорнера выгодно применять тогда, когда требуется получить с большой точностью один из вещественных корней алгебраического уравнения. Если же задача заключается в том, чтобы найти все его корни, как вещественные, так и комплексные, выгоднее пользоваться способом квадрирования, рассмотренным в § 78.

§ 76. Уточнение корня по способам ложного положения и Ньютона.

Если искомый корень уравнения $f(x) = 0$ отделен, т. е. если известен интервал $(a;\ b)$, $a < b$, внутри которого лежит один, и только один, корень уравнения, то дальнейшее уточнение можно вести либо по *способу ложного положения* (Regula falsi positionis или просто Regula falsi), основанном на замене дуги графика функции $y = f(x)$ стягивающей эту дугу хордой, либо по *способу Ньютона*, основанному на замене этой дуги касательной к ней, проведенной через один из ее концов, либо применяя оба эти способа. Последний „комбинированный" способ выгоднее в том отношении, что он одновременно дает для корня две границы — низшую и высшую, в то время как каждый из первых двух способов дает непосредственно лишь одну из границ — другую приходится определять пробами. Поэтому мы и рассмотрим сразу именно этот комбинированный способ.

Допустим, что $f(a) < 0$; $f(b) > 0$, причем во всем интервале $(a;\ b)$ $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$ [функция $f(x)$ предполагается дважды диференцируемой в интервале $(a;\ b)$]. График функции $y = f(x)$ в интервале $(a;\ b)$ имеет вид, указанный на рисунке 59(а), где $OA = a$; $OB = b$; $AC = f(a)$; $BD = f(b)$. Задача заключается в том, чтобы найти $x = AE$, т. е. абсциссу точки пересечения кривой $y = f(x)$ с осью X. Проводим хорду CD и касательную DG. Написав уравнения этих двух прямых

$$(x - a):(b - a) = [y - f(a)]:[f(b) - f(a)];\quad y - f(b) = f'(b)\,(x - b)$$

и полагая $OF = a_1$, $OG = b_1$, легко приходим к формулам:

$$a_1 = a - (b - a) f(a) : [f(b) - f(a)];\qquad b_1 = b - f(b) : f'(b), \tag{1}$$

причем $a < a_1 < x < b_1 < b$. Формулы (1) заменяют интервал $(a;\ b)$, содержащий искомый корень x, другим, более узким интервалом $(a_1;\ b_1)$, содержащимся внутри интервала $(a;\ b)$ и содержащим тот же корень. Применяя далее формулу (1) к интервалу $(a_1;\ b_1)$, получим новый, еще более узкий интервал $(a_2;\ b_2)$, содержащий искомый корень. Значения чисел a_2 и b_2 получаются по формулам:

$$a_2 = a_1 - (b_1 - a_1) f(a_1) : [f(b_1) - f(a_1)]; \quad b_2 = b_1 - f(b_1) : f'(b_1).$$

Повторяя операцию, мы получим последовательно ряд интервалов: $(a;\ b)$; $(a_1;\ b_1)$; $(a_2;\ b_2)$; $(a_3;\ b_3)$, ..., каждый из которых содержится во всех предшествующих и содержит искомый корень. Разности $b - a$, $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, ... быстро убывают: можно показать, что каждая разность равна приблизительно квадрату предыдущей. Поэтому получить этим способом высокую степень точности довольно легко.

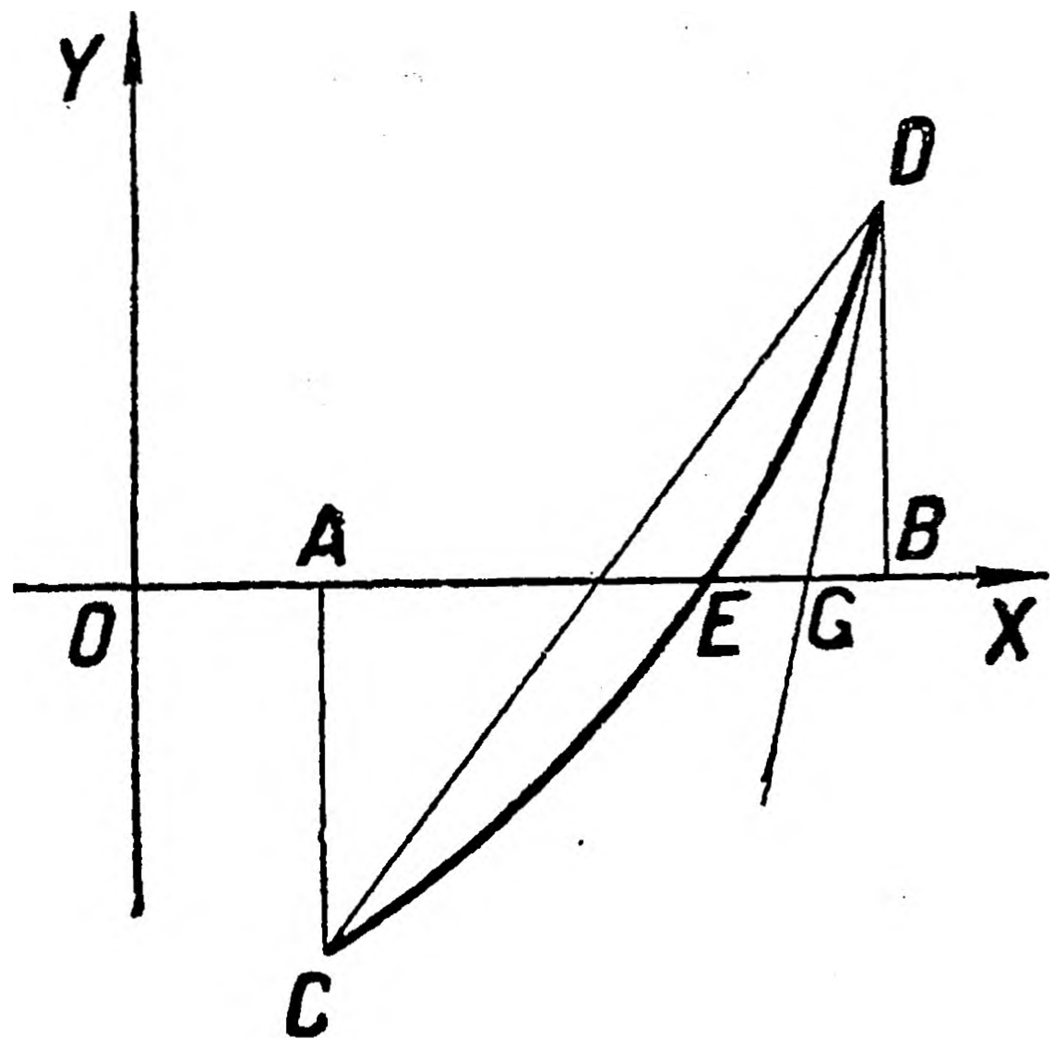


Рис. 59а.

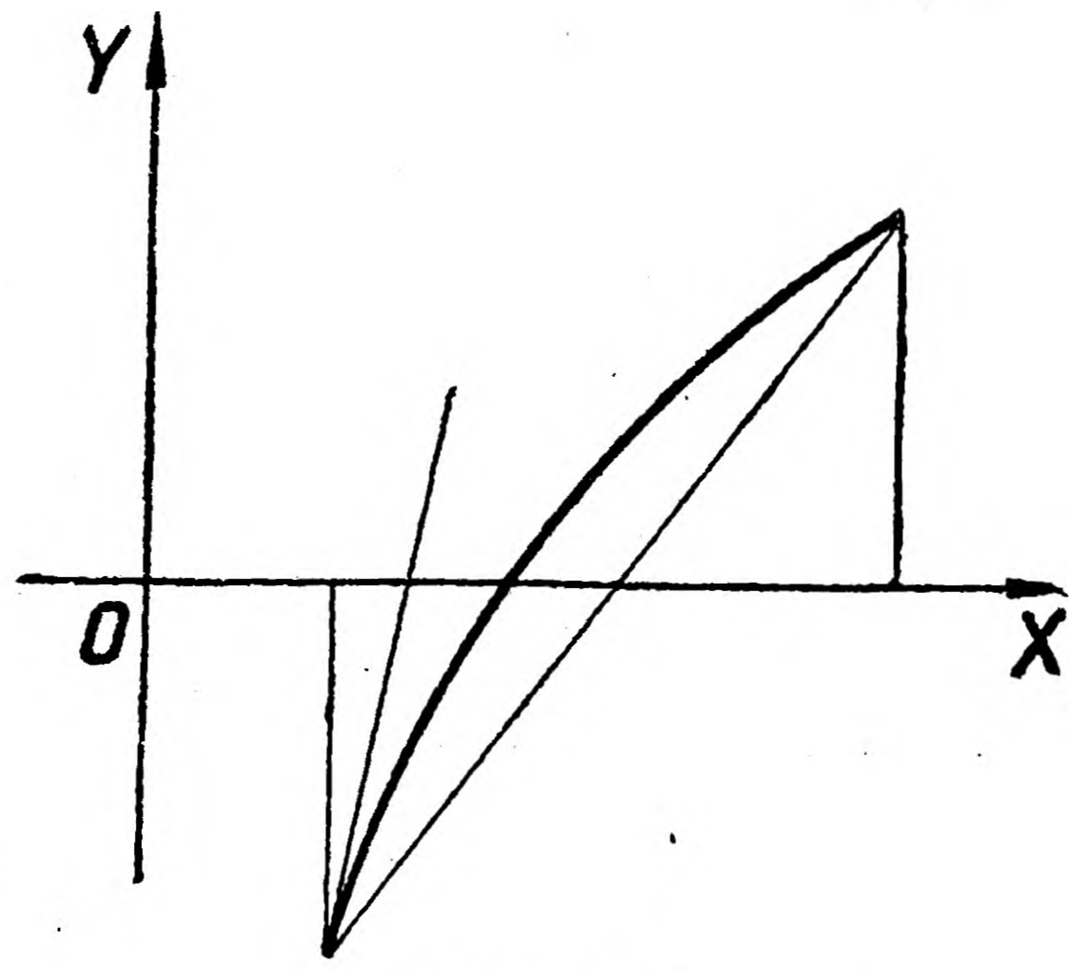


Рис. 59b.

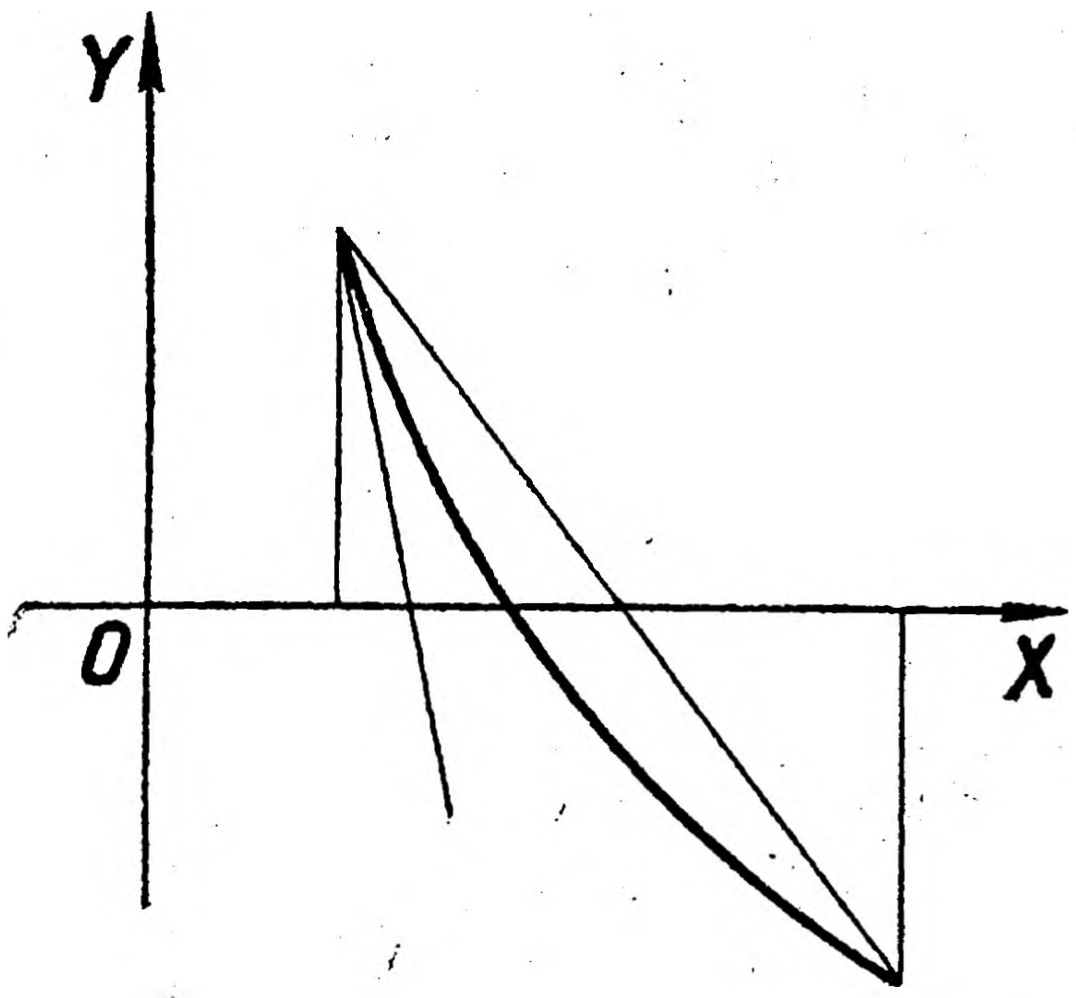


Рис. 59c.

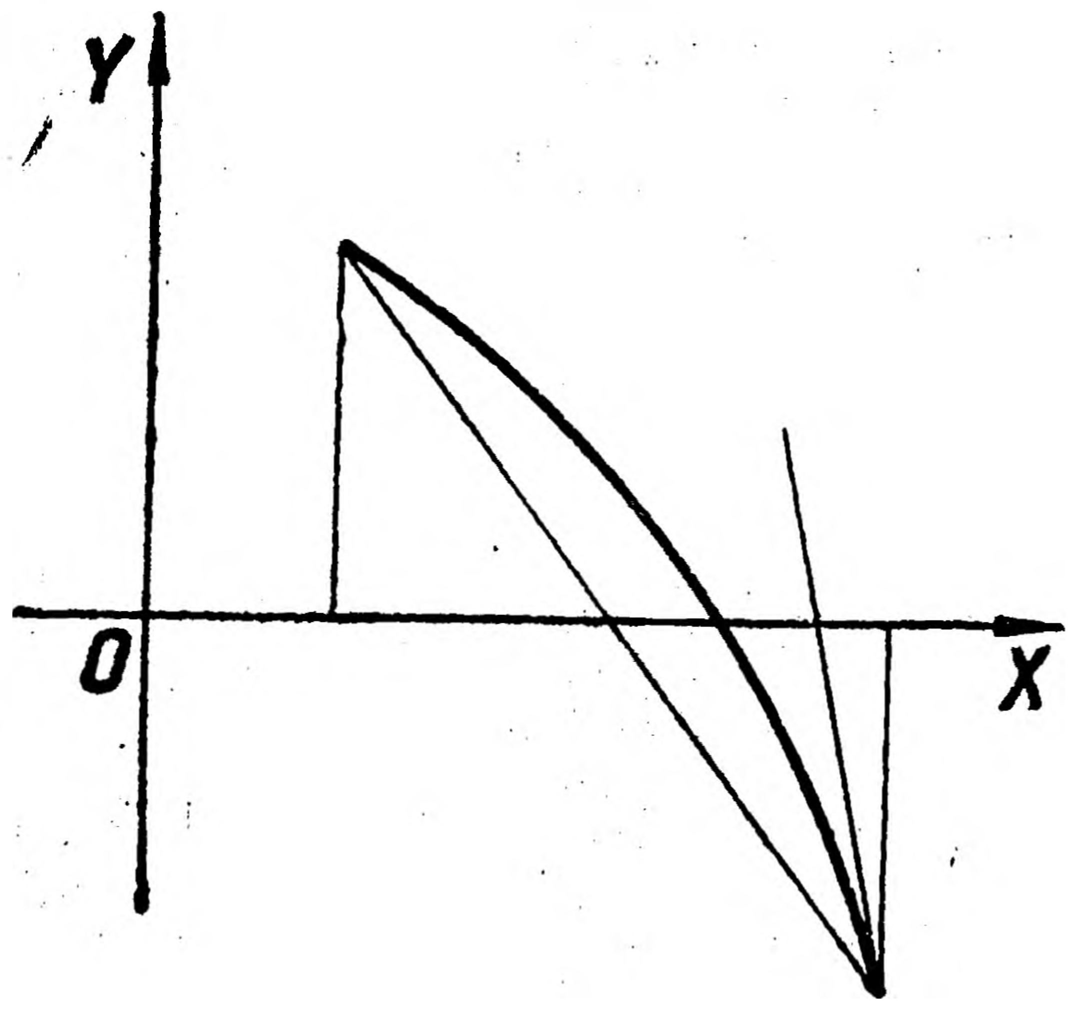


Рис. 59d.

При выводе формулы (1) мы предполагали, что $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$ во всем интервале $(a;\ b)$. Если в интервале $(a;\ b)$ содержится один, и только один, корень функции $f(x)$, но нет корней ни первой, ни второй производных, т. е. если в нем кривая не имеет ни точки с горизонтальной касательной, ни точки перегиба, то возможны четыре следующих предположения о знаках: $f'(x)$; $f''(x)$; $f(a)$; $f(b)$:

I. $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$; $f(a) < 0$; $f(b) > 0$; рис. 59(a);
II. $f'(x) > 0$; $f''(x) < 0$; $f(a) < 0$; $f(b) > 0$; рис. 59(b);
III. $f'(x) < 0$; $f''(x) > 0$; $f(a) > 0$; $f(b) < 0$; рис. 59(c);
IV. $f'(x) < 0$; $f''(x) < 0$; $f(a) > 0$; $f(b) < 0$; рис. 59(d).

Случай I мы разобрали. Рассуждая аналогичным образом, получим для случая IV ту же формулу (1), что и для случая I, а для случая II и III формулу:

$$a_1 = a - f(a):f'(a); \quad b_1 = b - (b - a)f(b):[f(b) - f(a)], \qquad (2)$$

причем окажется, что $a < a_1 < x < b_1 < b$.

Если обозначить буквой α то из чисел a, b, для которого значение $f(\alpha)$ имеет иной знак, чем значение $f''(x)$, а буквой β другое из них, т. е. то, для которого знаки $f(\beta)$ и $f''(x)$ одинаковы, то формулы (1) и (2) заменяются одной следующей:

$$\alpha_1 = \alpha - (\beta - \alpha)f(\alpha):[f(\beta) - f(\alpha)], \quad \beta_1 = \beta - f(\beta):f'(\beta), \qquad (3)$$

которой удобнее всего и пользоваться.

Чтобы иметь пример применения этого комбинированного способа, уточним посредством него найденное графическим методом значение $x \approx 2,1$ для корня уравнения $x^3 = 2x + 5$, или $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ (§ 73). Замечая, что $f(2) = -1$; $f(2,1) = +0,061$, будем исходить из интервала (2; 2,1), внутри которого как $f'(x) = 3x^2 - 2$, так и $f''(x) = 6x$ сохраняют постоянный знак плюс. Так как $f''(2) = -1$ и $f''(2)$ — числа разных знаков, а числа $f(2,1)$ и $f''(2,1)$ — одного знака, то берем $\alpha = 2$, $\beta = 2,1$.

Первое приближение: $2,0 < x < 2,1$.

$$\alpha_1 = 2,0 - 0,1 \cdot (-1):1,061 = 2,0 + 0,0942\ldots = 2,0942\ldots$$
$$\beta_1 = 2,1 - 0,061:11,23 = 2,1 - 0,0054\ldots = 2,0945\ldots$$

Второе приближение: $2,094 < x < 2,095$.

$$\alpha_2 = 2,094 > 0,001 \cdot (-0,006153\ldots):0,011160\ldots = 2,094 + {} + 0,0005513\ldots = 2,0945513\ldots$$
$$\beta_2 = 2,095 - 0,0050073\ldots:11,167\ldots = 2,095 - 0,0004484\ldots = {} = 2,0945515\ldots$$

Третье приближение: $2,0945513 < x < 2,0945516$.

Очевидно, что этим способом можно идти как угодно далеко.

Комбинированный способ применим не только к алгебраическим, но и трансцендентным уравнениям.

§ 77. Способ итерации.

Термин „итерация“ означает повторение. Способом итерации можно назвать всякий способ, позволяющий путем повторения одной и той же операции переходить от некоторого приближенного значения искомой величины к другому более точному приближенному ее значению, т. е. всякий „способ последовательных приближений“. Таким образом, и рассмотренный в § 75 способ решения алгебраического уравнения посредством схемы Хорнера, и комбинированный способ § 76 представляют собой различные видоизменения способа итерации. Обычно, однако, способом итерации называют способ, дающий более точное значение искомой величины путем *простой подстановки* менее точного ее значения в уравнение, ее определяющее, предварительно надлежащим образом преобразованное. Именно в этом более узком смысле мы и будем употреблять термин „способ итерации“ в дальнейшем.

В применении к задаче решения численного уравнения с одной неизвестной

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

способ итерации заключается в следующем. Определив каким-нибудь способом приближенное значение x_0 искомого корня, хотя бы по графику, приводят это уравнение к виду

$$x = f(x), \tag{2}$$

что легко сделать, притом бесчисленным множеством способов. Функцию правой части $f(x)$ выбирают с таким расчетом, чтобы при значениях x, близких к x_0, функция $f(x)$ менялась при изменении x по возможности медленнее, и во всяком случае медленнее, чем меняется x (в дальнейшем это требование будет формулировано более точно). Взятое „исходное значение" x_0 подставляем в правую часть уравнения (2) и получаем „первое приближение" $x_1 = f(x_0)$. Подставляя x_1 в правую часть уравнения (2), получаем „второе приближение" $x_2 = f(x_1)$, затем тем же порядком третье, четвертое, ... k-е приближения:

$$x_3 = f(x_2),\ x_4 = f(x_3), \ldots,\ x_k = f(x_{k-1}), \ldots \tag{3}$$

При *надлежащем выборе* функции $f(x)$ неограниченный ряд чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots$ стремится к пределу $\xi = \lim x_k$, который и является корнем данного уравнения (1). На практике приходится вести вычисление, т. е. повторять подстановки, до тех пор, пока два последовательных приближенных значения не окажутся равными в пределах тех десятичных знаков, с какими ведется вычисление. Заметим, что значительный произвол в переходе от данного уравнения (1) к уравнению (2) всегда позволяет дать функции $f(x)$ такой вид, при котором последовательность (3) быстро сходится.

Для примера уточним тот корень уравнения $x^3 = 3x + 1$, который близок к 2. Взяв $x_0 = 2$, перепишем это уравнение в виде $x = \sqrt[3]{3x+1}$ и выполняем итерации, пользуясь для извлечения кубических корней таблицей кубов. Получаем:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= \sqrt[3]{3x_0+1} = \sqrt[3]{7} &&= 1,9129 \\
x_2 &= \sqrt[3]{3x_1+1} = \sqrt[3]{6,7387} &&= 1,8888 \\
x_3 &= \sqrt[3]{3x_2+1} = \sqrt[3]{6,6664} &&= 1,8820 \\
x_4 &= \sqrt[3]{3x_3+1} = \sqrt[3]{6,6460} &&= 1,8801 \\
x_5 &= \sqrt[3]{3x_4+1} = \sqrt[3]{6,6403} &&= 1,8795 \\
x_6 &= \sqrt[3]{3x_5+1} = \sqrt[3]{6,6385} &&= 1,8794 \\
x_7 &= \sqrt[3]{3x_6+1} = \sqrt[3]{6,6382} &&= 1,8794
\end{aligned}$$

Итак, искомый корень найден с 4 десятичными знаками. Применяя таблицу семизначных логарифмов, получим далее:

$$x_8 = 1,879390; \quad x_9 = 1,879387; \quad x_{10} = 1,879386; \quad x_{11} = 1,879386.$$

Применяя способ итерации, можно встретиться и с такими случаями, когда ряд значений x_1, x_2. $x_3, \ldots$ ни к какому пределу не стремится. Возьмем, например, уравнение $x^3 + x - 1 = 0$ и попробуем найти тот его корень, который близок к $x_0 = 0$, преобразуя это уравнение к виду $x = \sqrt[3]{1 - x}$. Получаем $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$ и т. д. без конца: $x_{2n} = 0$; $x_{2n+1} = 1$. Этот ряд чисел никакого предельного значения не дает, что указывает на неудачный выбор функции $f(x) = \sqrt[3]{1 - x}$. Преобразовав же данное уравнение к виду $x = 0{,}4\,(1 + 1{,}5x - x^3)$ и взяв то же исходное значение $x_0 = 0$, получаем $x_1 = 0{,}4$; $x_2 = 0{,}6144$; $x_3 = 0{,}6758$; $x_4 = 0{,}6820$; $x_5 = 0{,}6823$; $x_6 = 0{,}6823$.

Как видим, сходимость ряда чисел x_0, x_1, x_2, $x_3, \ldots$ оказалась хорошей: уже пятое приближение дало искомый корень с 4 десятичными знаками.

Процесс решения уравнения по способу итерации хорошо уясняется, если применить следующее геометрическое его истолкование.

Имея уравнение $x = f(x)$, заменим его системой

$$y = x; \quad y = f(x). \tag{4}$$

Корень ξ уравнения (2) определяется, как абсцисса точки пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = f(x)$. На рисунке 60 изображены четыре различных случая взаимного расположения этих двух линий.

Выбрав исходное значение $x = x_0$, вычисляем $f(x_0)$, что геометрически означает переход от точки с абсциссой x_0 на оси X по перпендикуляру к этой оси до пересечения с кривой $y = f(x)$. Из этой точки пересечения по прямой, параллельной оси X, двигаемся до пересечения с прямой $y = x$. Абсцисса этой последней точки дает первое приближение x_1. Повторяя операцию, мы будем либо приближаться к точке пересечения кривой $y = f(x)$ и прямой $y = x$, как это показано на рисунках 60(a) и 60(d), либо удаляться от этой точки, что имеет место в случаях, изображенных на рисунках 60(b) и 60(c). Приближение и удаление могут происходить либо по „лестнице“, как на рисунках 60(a) и 60(c), либо по „спирали“, как на рисунках 60(b) и 60(d).

Если через точку пересечения кривой $y = f(x)$ и прямой $y = x$ провести перпендикуляр к этой последней, то плоскость будет разделена (прямой $y = x$ и перпендикуляром к ней) на четыре квадранта: левый, правый, верхний, нижний. Рассматривая рисунок 60, мы легко придем к заключению, что итерация дает последовательное приближение к искомому корню в случаях, когда кривая $y = f(x)$ расположена в левом и правом квадрантах, т. е. когда $-1 < f'(\xi) < +1$. В случаях же, когда кривая расположена в верхнем и нижнем квадрантах, т. е. когда $f'(\xi) > +1$ или $f'(\xi) < -1$, итерация дает ряд чисел x_1, x_2, $x_3, \ldots$, не приближающихся к искомому корню, а удаляющихся от него.

Рассмотрим теперь теорему, на применении которой основан способ итерации.

Теорема. Если уравнение $x = f(x)$ имеет в интервале $(a;\ b)$ один, и только один, корень ξ, приближенное значение которого x_0, лежащее в этом интервале, известно, и если для всех значений x внутри этого интервала имеет место неравенство $|f'(x)| \leq m$, где m — некоторая постоянная правильная положительная дробь, то последовательность чисел x_0, x_1, x_2, $x_3, \ldots$, вычисляемых по формуле $x_{i+1} = f(x_i)$, сходится к пределу ξ.

Доказательство. Берем равенства $x_{i+1}=f(x_i)$ и $\xi=f(\xi)$ и вычитаем из первого второе почленно. Применяя формулу Лагранжа, имеем:

$$x_{i+1}-\xi_i=f(x_i)-f(\xi)=(x_i-\xi)\cdot f'(\eta_i),$$

где число η_i заключается между x_i и ξ. При $i=0$ получаем формулу:

$$x_1-\xi=(x_0-\xi)f'(\eta_0),$$

где η_0 заключается между x_0 и ξ и, следовательно, лежит в интервале $(a;\ b)$. Поэтому в силу условия $|f'(\eta_0)|\leqq m<1$; $|x_1-\xi|\leqq|x_0-\xi|\cdot m<|x_0-\xi|$. Таким образом, число x_1 тоже лежит в интервале $(a;\ b)$, притом ближе к ξ, чем к x_0. Далее при $i=2$ имеем $x_2-\xi=(x_1-\xi)\cdot f'(\eta_1)$, где η_1 — между ξ и x_1, откуда $|x_2-\xi|\leqq|x_1-\xi|\cdot m\leqq|x_0-\xi|\cdot m^2$. Продолжая те же рассуждения, заключаем, что $|x_{i+1}-\xi|\leqq|x_0-\xi|\cdot m^{i+1}$. Так как правильная дробь m при неограниченном увеличении показателя степени $i+1$ стремится к пределу 0, то разность $x_{i+1}-\xi$ стремится при неограниченном возрастании i к 0, а число x_{i+1} к ξ, что и доказывает теорему.

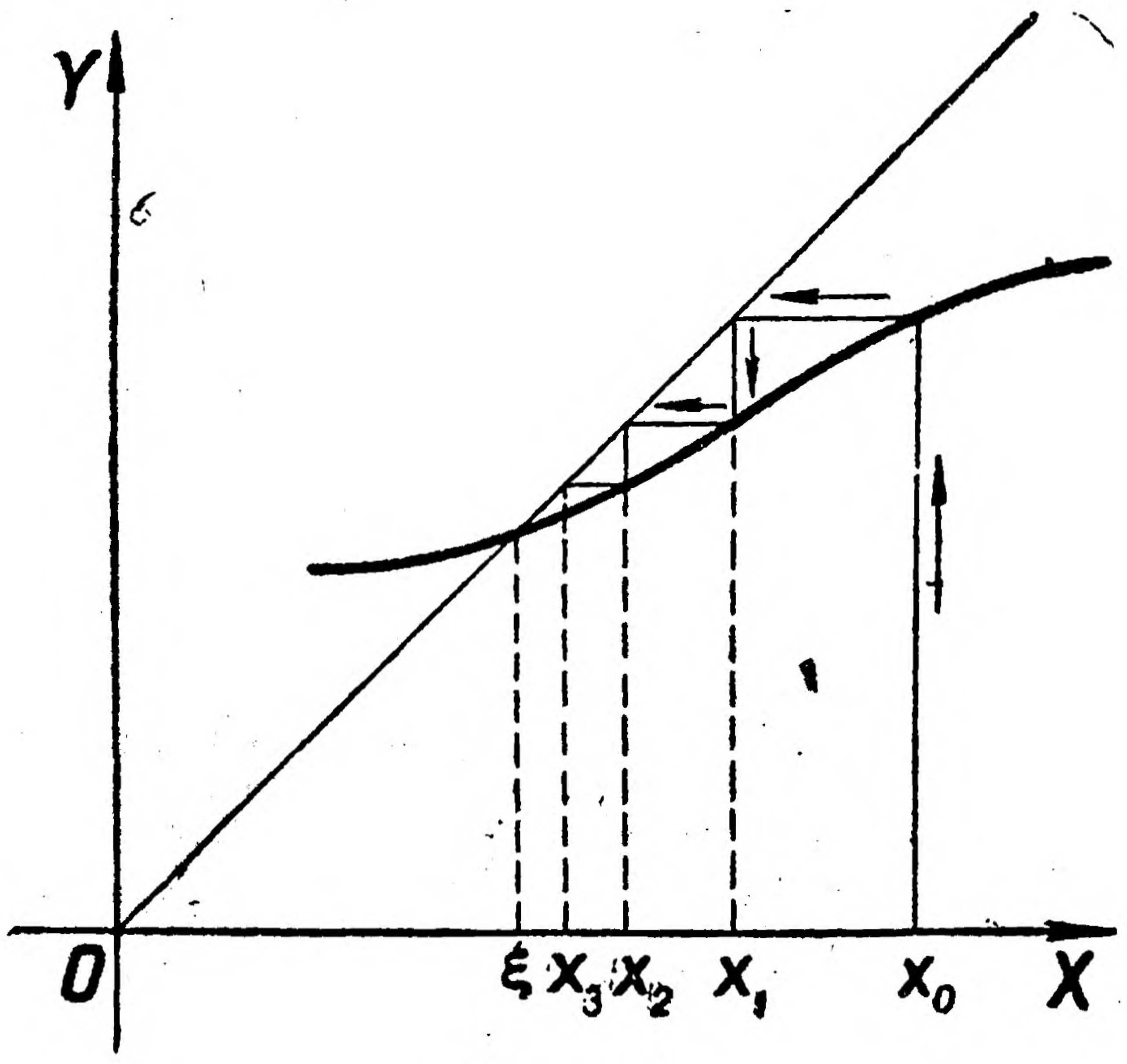


Рис. 60a.

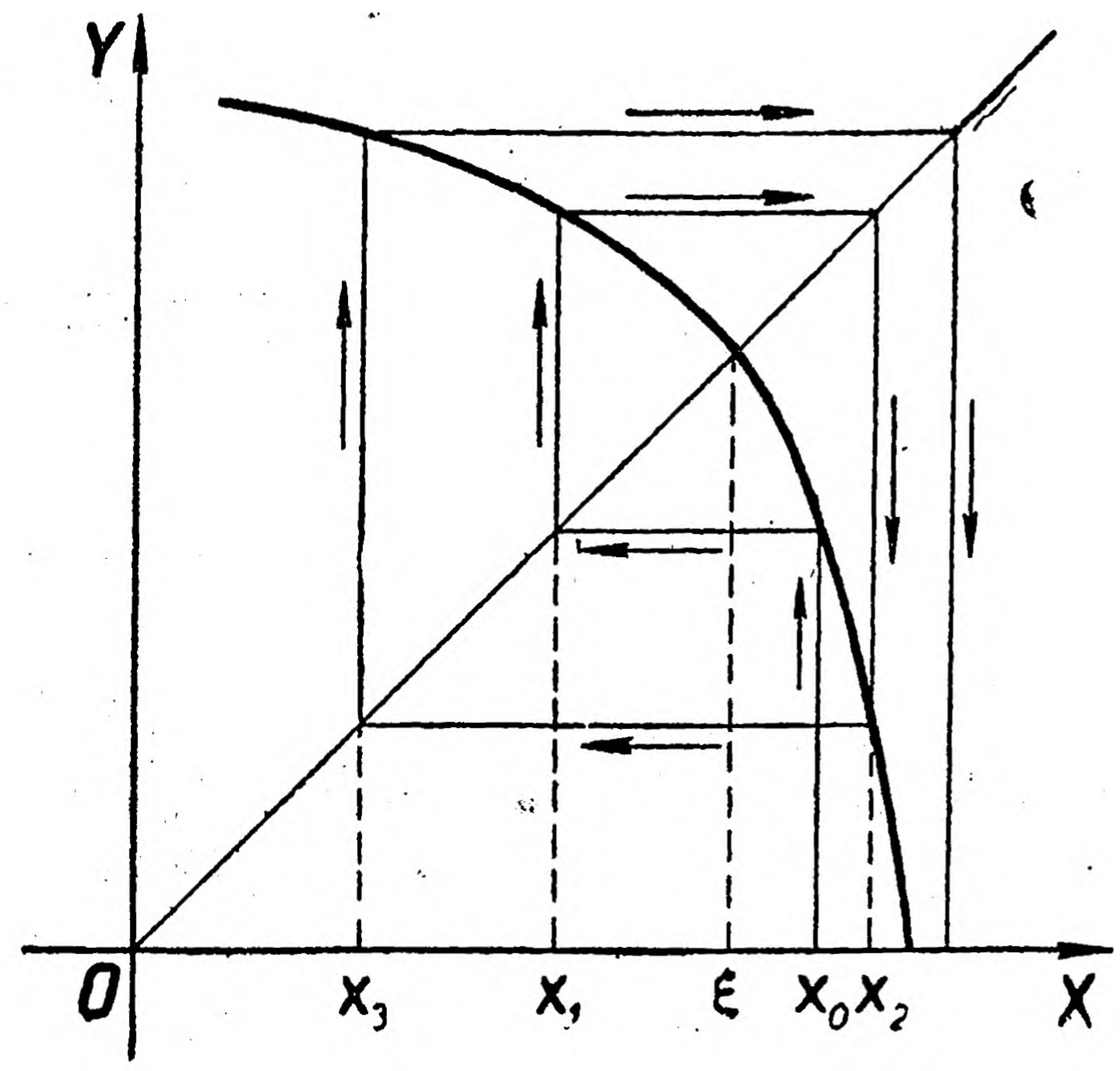


Рис. 60c.

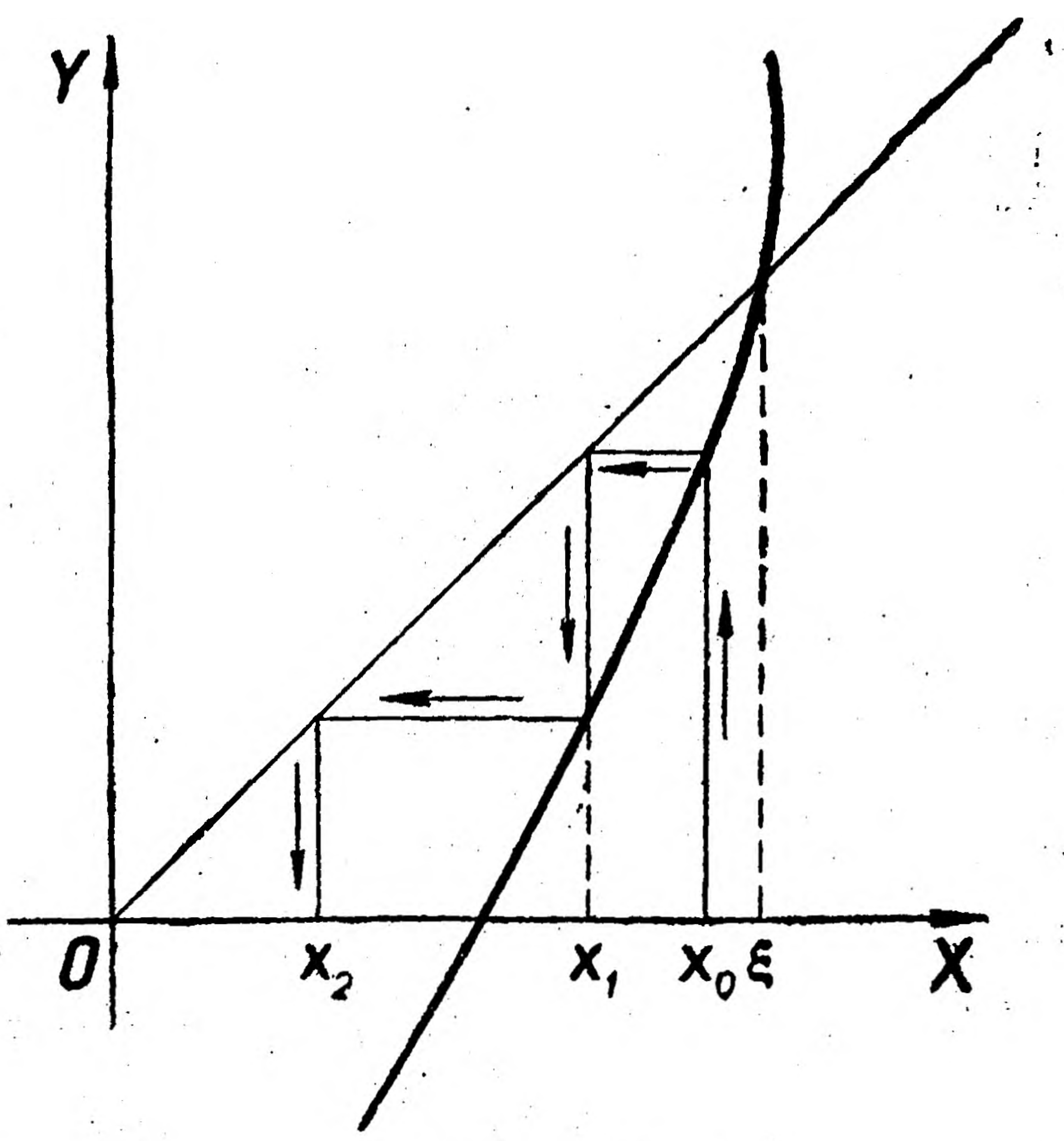


Рис. 60b.

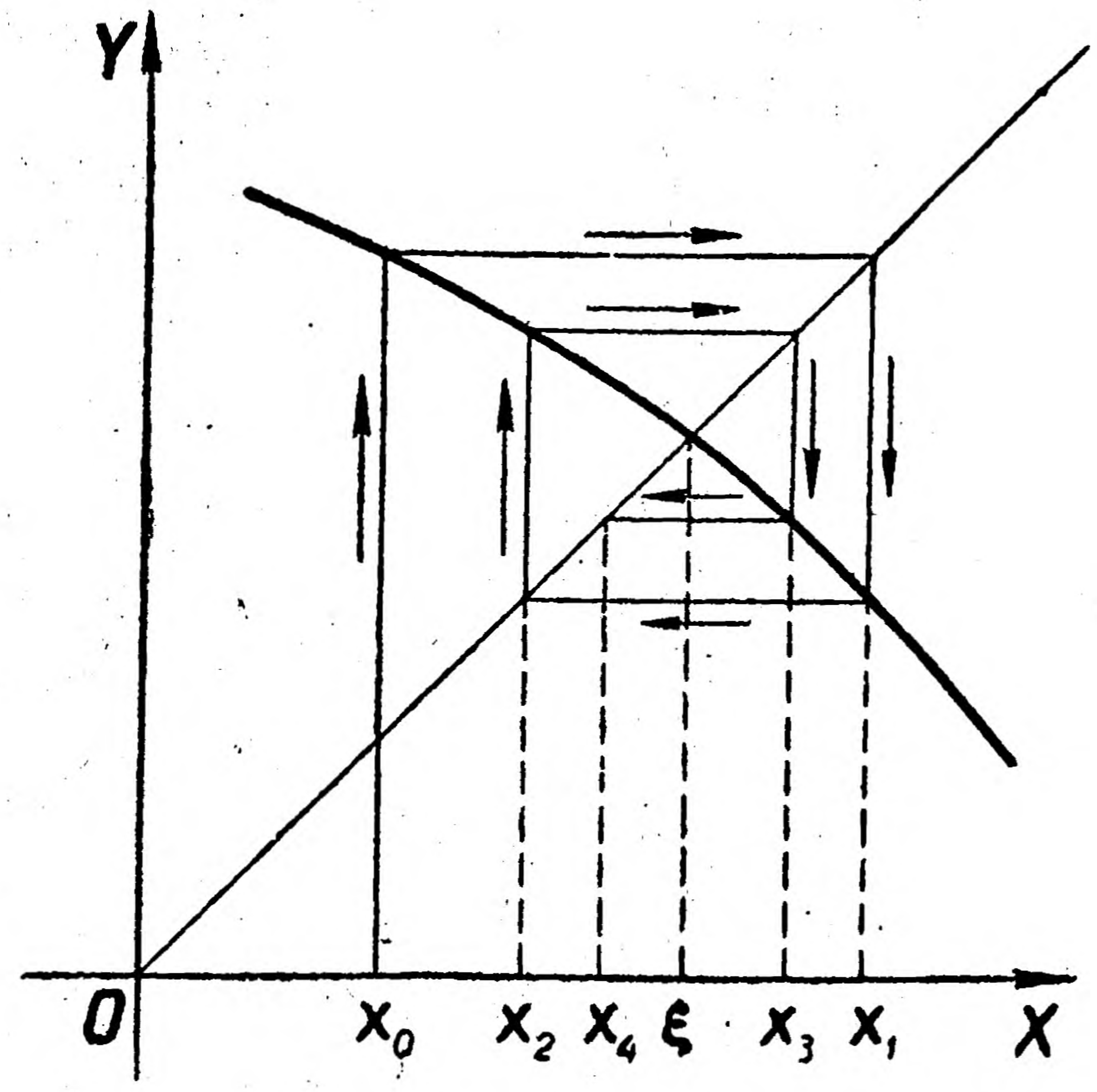


Рис. 60d.

Приведенное доказательство позволяет в каждом отдельном случае судить о быстроте сходимости. Для этого можно положить приближенно $m\approx|f'(x_0)|$ и на основании формулы $x_{i+1}-\xi=(x_i-\xi)\cdot f'(\eta_i)\approx(x_i-\xi)\cdot f'(x_0)$ заключить о том, что погрешность каждого нового приближения равна погрешности предшествующего приближения, умноженной на правильную дробь $m\approx|f'(x_0)|$.

Если $m \approx |f(x_0)| > 1$, то способ итерации все же может быть применен, но лишь после предварительного преобразования уравнения $x = f(x)$ к виду $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — функция, обратная функции $f(x)$. Действительно, $|\varphi'(x_0)| = |1:f'(x_0)| < 1:m < 1$. Так, имея, например, уравнение $x = \operatorname{tg} x$, наименьший положительный корень которого близок, как легко видеть по графику (лучше всего построить графики уравнений $y = x$, $y = \operatorname{tg} x$), к $x_0 = 260°$, и замечая, что $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$ дает $m \approx \sec^2 260° \approx 30$, заключаем, что для решения уравнения $x = \operatorname{tg} x$ его надо предварительно переписать в виде $x = \operatorname{arc\,tg} x$ и находить последовательные приближения по формуле $x_{i+1} = \operatorname{arc\,tg} x_i$. Каждое последующее приближение будет при этом, примерно, в 30 раз ближе к искомому корню, чем предыдущее. Действительно, пользуясь сперва четырехзначными таблицами, потом семизначными, получаем:

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	260°	257°34′	257°27′	257°27′	257°27′12″	257°27′12″,2	257°27′12″,2
x_i (рад.)	4,538	4,495	4,493	4,4933502	4,4934084	4,4934093	
$\operatorname{arc\,tg} x_i - 180°$	77°34′	77°27′	77°27′	77°27′12″	77°27′12″,2	77°27′12″,2	

Если в процессе вычисления последовательных приближений будет допущена какая-нибудь ошибка, не выводящая, однако, очередного приближения из интервала $(a;\ b)$, то при продолжении вычислений в конце концов правильный результат все же будет получен, только не так скоро, как он получился бы при отсутствии ошибки. Это „автоматическое" исправление ошибок представляет собой своеобразную и очень ценную особенность способа итерации.

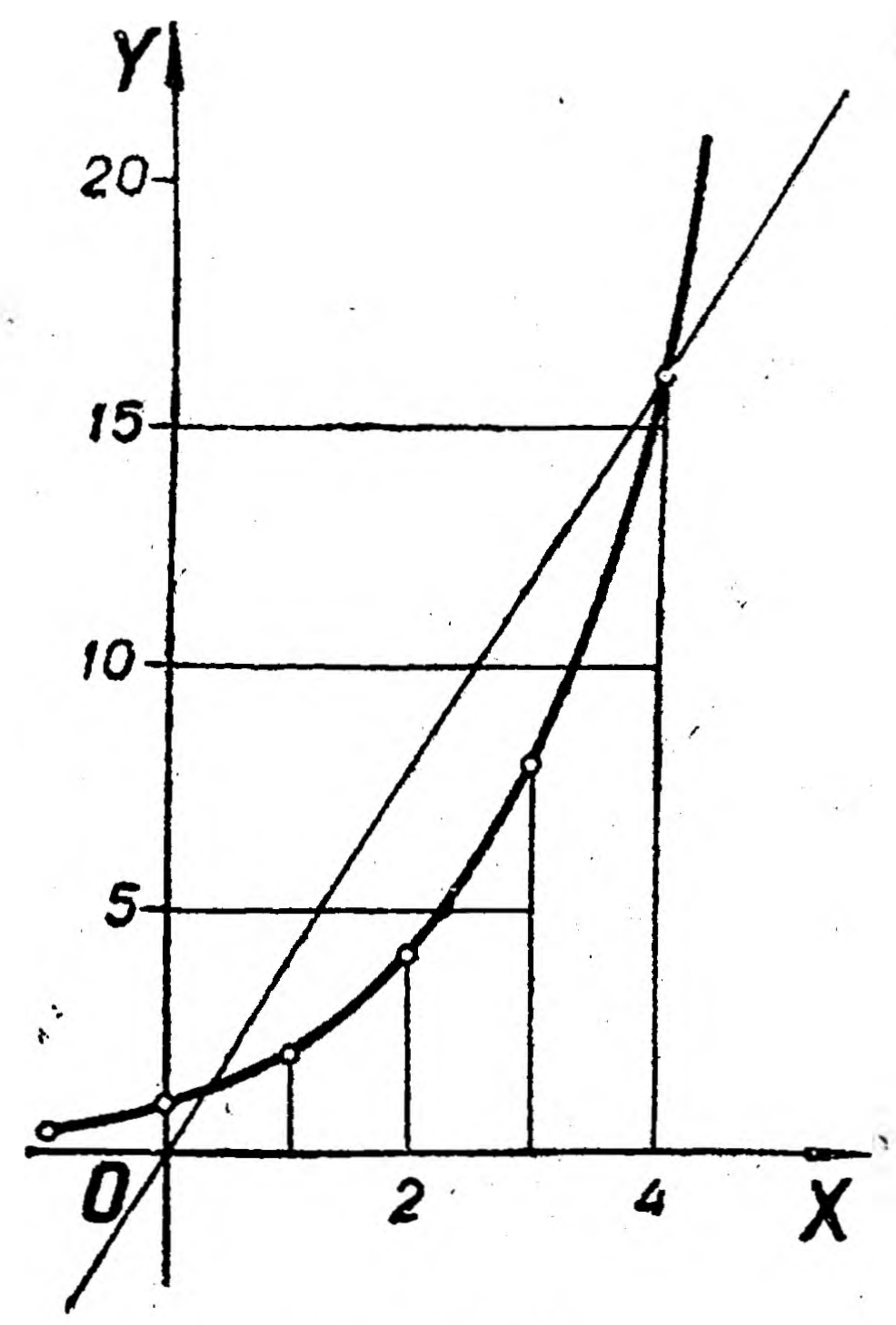


Рис. 61.

Быстрота сходимости процесса тем выше, чем меньше $m \approx |f'(x_0)|$. Поэтому выгодно преобразовать данное уравнение $x = f(x)$ так, чтобы сделать m по возможности меньше. Для этого уравнение $x = f(x)$ можно переписать в виде $x = x + A\,[x - f(x)]$, где A — постоянное число, значение которого сейчас будет установлено. Диференцируя правую часть последнего уравнения, берем в ней $x = x_0$ и полагаем производную равной 0. Получаем уравнение $1 + A\,[1 - f'(x_0)] = 0$, откуда и определяем A. Прилагая способ итерации к уравнению $x = x + A\,[x - f(x)]$, мы получим весьма быстро сходящуюся последовательность чисел x_0, x_1, $x_2, \ldots$

Поясним сказанное примером, решая уравнение $2^x = 4x$. Заменяя его системой $y = 2^x$, $y = x$ и применяя графический метод, легко устанавливаем, что один из его корней равен 4 (точно), другой заключен между $a = 0{,}2$ и $b = 0{,}4$ и может быть приближенно положен равным $x_0 = 0{,}3$ (рис. 61). Переписываем данное уравнение в виде $x = \frac{1}{4}\cdot 2^x = 2^x : 2^2 = 2^{x-2}$, берем $f(x) = 2^{x-2}$ и находим $f'(x) = 2^{x-2}\ln 2$. При изменении x от 0,2 до 0,4 $f'(x)$ изменяется монотонно от $2^{-1{,}8}\ln 2 = 0{,}199$ до $2^{-1{,}6}\ln 2 \approx 0{,}229$, а потому сходимость процесса обеспечена: погрешность каждого последующего приближения равна, примерно, одной пятой погрешности предыдущего приближения.

Применяя таблицу четырехзначных логарифмов, легко получаем 4 значащие цифры искомого корня.

	0	1	2	3
x_i	0,3	0,3078	0,3094	0,3098
$x_i - 2$	−1,7	−1,6922	−1,6906	−1,6902
$(x_i - 2)\lg 2$	−0,5117	−0,5094	−0,5089	−0,5088
$\lg x_{i+1}$	$\bar{1}$,4883	$\bar{1}$,4906	$\bar{1}$,4911	$\bar{1}$,4912
x_{i+1}	0,3078	0,3094	0,3098	0,3098

Продолжая вычисления посредством таблицы семизначных логарифмов, мы придем к числу $x_8 = 0{,}3099069$, которое в дальнейшем не изменяется.

Сходимость процесса значительно увеличивается, если переписать уравнение в виде $x = x + A(x - 2^{x-2})$. Диференцируя правую часть и полагая $x = x_0 = 0{,}3$, находим из уравнения $1 + A(1 - 2^{-1,7}\ln 2) = 0$ значение $A = -1:0{,}787 = -1{,}271$, а потому для вычисления последовательных приближений получаем формулу $x_{i+1} = x_i - 1{,}271\cdot(x_i - 2^{x_i-2}) = 1{,}271\cdot 2^{x_i-2} - 0{,}271 x_i$. Начинаем вычисления сразу посредством таблицы семизначных логарифмов и убеждаемся, что уже второе приближение в дальнейшем не изменяется.

i	0	1	2
x_i	0,3	0,3099052	0,3099070
$x_i - 2$	−1,7	−1,6900948	−1,6900930
$(x_i - 2)\lg 2$	−0,5117510	−0,5087692	−0,5087687
$\lg 1{,}271$	0,1041456	0,1041456	0,1041456
$\lg M$	$\bar{1}$,5924046	$\bar{1}$,5953764	$\bar{1}$,5953759
$M = 1{,}271\cdot 2^{x_i-2}$	0,3912052	0,3938913	0,3938918
$N = 0{,}271 x_i$	0,0813000	0,0839843	0,0839848
$x_{i+1} = M - N$	0,3099052	0,3099070	0,3099070

Итак, искомый корень уравнения $2^x = 4x$ есть, с точностью до 7 десятичных знаков, 0,3099070.

Способом итерации мы уже пользовались в § 75, когда уточняли корень уравнения, найденный посредством схемы Хорнера.

Отметим в заключение, что способ итерации обладает замечательной гибкостью и общностью. Он с большой выгодой применим не только в случае решения одного уравнения с одной неизвестной, но и в случае решения системы уравнений, а также в случае решения диференциальных, интегральных и других уравнений.

*§ 78. Способ квадрирования.

Если данное уравнение—алгебраическое и если надо найти все его корни, как вещественные, так и комплексные, выгоднее пользоваться взамен рассмотренных выше способов так называемым „способом квадрирования" (его называют также „способом Греффе"). Открыли его около ста лет назад независимо друг от друга три математика: бельгиец Данделен (1826 г.), русский ученый Лобачевский (1834 г.), швейцарец Греффе (1837 г.). Способ этот применим к алгебраическому уравнению любой степени и не требует предварительного отделения корней. Ознакомимся с сущностью этого способа на примере уравнения четвертой степени, а затем обобщим полученные результаты.

1°. Допустим сперва, что имеется уравнение четвертой степени с четырьмя вещественными корнями, *отличными друг от друга по модулю,* а именно уравнение

$$f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \tag{1}$$

где все коэфициенты — числа вещественные и $a_0 > 0$. Обозначив корни буквами α_1, α_2, α_3, α_4, предположим, что $|\alpha_1| > |\alpha_2| > |\alpha_3| > |\alpha_4|$. Задача заключается в том, чтобы, зная коэфициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, найти корни α_1, α_2, α_3, α_4 с погрешностью, не большей некоторого данного числа $\varepsilon > 0$.

Задача решается весьма просто, если корни различаются друг от друга по модулю настолько резко, что отношения $\alpha_2:\alpha_1$; $\alpha_3:\alpha_2$; $\alpha_4:\alpha_3$ все меньше ε (по модулю) и, следовательно, могут быть отброшены. Действительно, берем известные соотношения между корнями и коэфициентами уравнения:

$$\begin{gathered}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -a_1:a_0; \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = a_2:a_0;\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -a_3:a_0; \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = a_4:a_0.\end{gathered} \tag{2}$$

Переписав первое из них в виде $\alpha_1(1 + \alpha_2:\alpha_1 + \alpha_3:\alpha_1 + \alpha_4:\alpha_1) = -a_1:a_0$ и замечая, что $|\alpha_2:\alpha_1| < \varepsilon$; $|\alpha_3:\alpha_1| < |\alpha_3:\alpha_2| < \varepsilon$; $|\alpha_4:\alpha_1| < |\alpha_4:\alpha_3| < \varepsilon$, отбрасываем все эти отношения и получаем первую из формул (3):

$$\alpha_1 = -a_1:a_0; \quad \alpha_1\alpha_2 = a_2:a_0; \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_3:a_0; \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = a_4:a_0. \tag{3}$$

Точно так же выводятся и остальные формулы (3). Корень α_1, таким образом, уже найден. Почленное деление каждого из равенств (3) на предыдущее дает возможность выразить все остальные корни через коэфициенты:

$$\alpha_1 = -a_1:a_0; \quad \alpha_2 = -a_2:a_1; \quad \alpha_3 = -a_3:a_2; \quad \alpha_4 = -a_4:a_3. \tag{4}$$

Итак, в случае, когда корни уравнения (1) резко различны по модулю (в указанном выше смысле), для получения их приближенных значений достаточно разделить каждый из коэфициентов уравнения, начиная со второго, на предшествующий и взять частное с обратным знаком.

Отметим, что из равенств (3) можно получить выражения коэфициентов a_1, a_2, a_3, a_4 через a_0 и корни и привести уравнение (1) к виду

$$f(x) = a_0(x^4 - \alpha_1x^3 + \alpha_1\alpha_2x^2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = 0. \tag{5}$$

2°. Если корни уравнения (1) различны по модулю, но не настолько, чтобы можно было отбрасывать их отношения, то это уравнение надо заменить таким, корнями которого являются квадраты корней данного уравнения. Сделать это, как мы сейчас увидим, совсем нетрудно. Повторяя такое преобразование достаточное количество раз, мы получим уравнение, корни которого будут отличаться друг от друга по модулю настолько резко, что станет возможным применение рассмотренного в п. 1° приема.

Итак, надо по коэфициентам данного уравнения (1) найти коэфициенты нового (преобразованного) уравнения

$$F(y) = a_0'y^4 - a_1'y^3 + a_2'y^2 - a_3'y + a_4' = 0, \tag{6}$$

корнями которого служат числа α_1^2, α_2^2, α_3^2, α_4^2. Так как все эти числа положительны, то знаки коэфициентов уравнения (6) чередуются, и все числа a_0', a_1', a_2', a_3', a_4' положительны.

Представляя первую часть уравнения (6) в виде произведения линейных множителей и заменяя временно y через x^2, имеем, полагая $b_0 = a_0^2$:

$$\begin{gathered}F(x^2) = b_0(x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2)(x^2 - \alpha_3^2)(x^2 - \alpha_4^2) =\\ = [a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)] \cdot [(a_0(x + \alpha_1)(x + \alpha_2)(x + \alpha_3)(x + \alpha_4)] = 0.\end{gathered}$$

Выражение в первой скобке 2-го рода есть не что иное, как $f(x)$, а во второй $f(-x)$. Итак, имеем

$$F(x^2)=f(x)\cdot f(-x)=(a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)(a_0x^4-a_1x^3+ \\ +a_2x^2-a_3x+a_4)=0.$$

Выполняя умножение, убеждаемся, что остаются только четные степени x, Заменяя x^2 через y, получим уравнение:

$$F(y)=a_0^2y^4-(a_1^2-2a_0a_2)y^3+(a_2^2-2a_1a_3+2a_0a_4)y^2-(a_3^2-2a_2a_4)y+a_4^2=0.$$

Его сопоставление с уравнением (6) приводит к простому правилу вычисления коэфициентов преобразованного уравнения: *чтобы получить каждое из чисел* $a'_i (i=0, 1, 2, 3, 4)$, *надо взять квадрат соответствующего коэфициента данного уравнения* a_i^2, *вычесть из него удвоенное произведение двух ближайших* (слева и справа) *коэфициентов* a_{i-1} и a_{i+1}, *прибавить удвоенное произведение двух следующих* (слева и справа) *коэфициентов* a_{i-1} и a_{i+1}. По этому правилу получаются все коэфициенты уравнения (6), если считать, что левее a_0 и правее a_4 в данном уравнении имеются коэфициенты, равные нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} a'_0&=a_0^2-2\cdot 0a_1+2\cdot 0a_2=a_0^2;\\ a'_1&=a_1^2-2\cdot a_0a_2+2\cdot 0\cdot a_3=a_1^2-2a_0a_2;\\ a'_2&=a_2^2-2a_1a_3+2a_0a_4=a_2^2-2a_1a_3+2a_0a_4;\\ a'_3&=a_3^2-2a_2a_4+2a_1\cdot 0=a_3^2-2a_2a_4;\\ a'_4&=a_4^2-2a_3\cdot 0+2a_2\cdot 0=a_4^2. \end{aligned} \tag{7}$$

3°. Выполняя только что рассмотренное преобразование несколько раз, мы получим ряд уравнений с корнями, все более и более отличающимися друг от друга. Положим, что после m преобразований мы пришли к уравнению:

$$a'_0z^4-a'_1z^3+a'_2z^2-a'_3z+a'_4=0. \tag{8}$$

Его корнями служат числа $z_i=\alpha_i^k$, где $k=2^m$, $i=1, 2, 3, 4$. Если корни этого уравнения удалены друг от друга настолько, что имеет место положение, рассмотренное в п. 1°, то уравнению (8), согласно формулам (3), можно придать вид уравнения (5), а именно:

$$a'_0(z^4-\alpha_1^kz^3+\alpha_1^k\alpha_2^kz^2-\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^kz+\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k\alpha_4^k)=0. \tag{9}$$

Следующее преобразование даст уравнение, корнями которого будут служить числа α_i^{2k}, еще более различающиеся по величине, а потому это новое уравнение будет иметь вид

$$a_0'^2(u^4-\alpha_1^{2k}u^3+\alpha_1^{2k}\alpha_2^{2k}u^2-\alpha_1^{2k}\alpha_2^{2k}\alpha_3^{2k}u+\alpha_1^{2k}\alpha_2^{2k}\alpha_3^{2k}\alpha_4^{2k})=0,$$

т. е. *его коэфициенты будут равны квадратам коэфициентов предшествующего уравнения* (9), взятым с чередующимися знаками. Те удвоенные произведения, которые фигурируют в формулах (7), оказываются при достаточно большом удалении корней друг от друга настолько малыми по сравнению с соответствующими квадратами, что их можно при допущенной точности вычисления просто отбрасывать: получается *независимый ход изменения* каждого из коэфициентов.

4°. Когда в процессе последовательных преобразований достигнут этот независимый ход изменения каждого из коэфициентов, т. е. когда коэфициенты членов нового уравнения оказываются равными по абсолютной величине квадратам коэфициентов предшествующего уравнения, преобразования прекращают и корни уравнения (8) находят, согласно формулам (4), простым делением:

$$\alpha_1^k=a'_1:a'_0;\quad \alpha_2^k=a'_2:a'_1;\quad \alpha_3^k=a'_3:a'_2;\quad \alpha_4^k=a'_4:a'_3. \tag{10}$$

Здесь $k=2^m$, где m — число сделанных преобразований. После этого надо извлечением корня найти модули корней α_1, α_2, α_3, α_4 и выяснить их знаки. Последнее делается на основании формул, выражающих зависимость между коэфициентами и корнями, или просто пробами: вычислением значений $f(+\alpha_i)$ и $f(-\alpha_i)$.

5°. Если данное уравнение не четвертой, а какой угодно степени n, но все его корни вещественны и различны по модулю, то процесс решения ничем не отличается от того, какой мы имели в случае уравнения четвертой степени, только в формулах (7) появятся новые члены, следующие, однако, тому же закону:

$$a_0'=a_0^2;\quad a_1'=a_1^2-2a_0a_2;\quad a_2'=a_2^2-2a_1a_3+2a_0a_4;$$

$$a_3'=a_3^2-2a_2a_4+2a_1a_5-2a_0a_6;\quad a_4'=a_4^2-2a_3a_5+2a_2a_6-3a_1a_7+2a_0a_8,\ldots$$

Решим в качестве примера следующее кубическое уравнение:

$$f(x)=x^3+5x^2-3x-1=0,$$

находя все его корни с той точностью, какую может дать вычисление коэфициентов преобразованных уравнений посредством четырехзначной таблицы квадратов и счетной линейки (для получения удвоенных произведений).

k	a_0	a_1	a_2	a_3
1	1	5	-3	-1
2	1	25 $+6$ 31	9 $+10$ 19	1
$2^2=4$	1	961 -38 923	361 -62 299	1
$2^3=8$	1	$8{,}519\cdot10^5$ $-0{,}006$ $8{,}513\cdot10^5$	$8{,}940\cdot10^4$ $-0{,}185$ $8{,}755\cdot10^4$	1
$2^4=16$	1	$7{,}247\cdot10^{11}$ $-0{,}000$ $7{,}247\cdot10^{11}$	$7{,}665\cdot10^9$ $-0{,}002$ $7{,}663\cdot10^9$	1
$2^5=32$	1	$5{,}252\cdot10^{23}$ $-0{,}000$ $5{,}252\cdot10^{23}$	$5{,}873\cdot10^{19}$ $-0{,}000$ $5{,}873\cdot10^{19}$	1

$k=16$, $a_0'=1$, $a_1'=7{,}247\cdot10^{11}$,
$a_2'=7{,}663\cdot10^9$, $a_3'=1$

$\lg a_1$	11,8602
$\lg a_0$	0,0000
$\lg \alpha_1^{16}$	11,8602
$\lg\lvert\alpha_1\rvert$	0,7413
$\lvert\alpha_1\rvert$	5,512

$\lg a_3$	0,0000
$\lg a_2$	9,8844
$\lg \alpha_3^{16}$	$\overline{10},1156$
$\lg\lvert\alpha_3\rvert$	$\overline{1},3822$
$\lvert\alpha_3\rvert$	0,2411

$\lg a_2$	9,8844
$\lg a_1$	11,8602
$\lg \alpha_2^{16}$	$\overline{2},0242$
$\lg\lvert\alpha_2\rvert$	$\overline{1},8765$
$\lvert\alpha_2\rvert$	0,7525

После выполнения всех указанных в схеме выкладок мы получили абсолютные значения корней, а именно $|\alpha_1|=5{,}512$; $|\alpha_2|=0{,}7525$; $|\alpha_3|=0{,}2411$. Остается выяснить их знаки. Произведение всех трех корней кубического уравнения связано с коэфициентами формулой $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-a_3:a_0$, в данном случае $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1$, а потому уравнение имеет либо три положительных корня, либо только один. В силу соотношения $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a_1:a_0=-5$ первое предположение отпадает, остается второе. Корень α_1, наибольший по модулю, не может быть положительным, так как тогда мы имели бы $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=5{,}5\ldots-0{,}75\ldots-0{,}24=+4{,}5\ldots$ Точно так же не годится и предположение $\alpha_3>0$, так как тогда мы имели бы $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-6{,}0\ldots$ Остается только одна возможность: $\alpha_1<0$, $\alpha_2>0$; $\alpha_3<0$. Итак, данное уравнение имеет корни $\alpha_1=-5{,}512$; $\alpha_2=0{,}7525$; $\alpha_3=-0{,}2411$. Здесь сумма корней $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ оказывается равной $-5{,}0006$ (последняя цифра ненадежна). Для контроля находим $f(-5{,}512)=-0{,}020$; $f(-5{,}511)=+0{,}013$; $f(0{,}7525)=-0{,}0001$; $f(0{,}7526)=+0{,}0005$; $f(-0{,}2411)=-0{,}0001$; $f(-0{,}2412)=+0{,}0005$.

6°. Предположим теперь, что процесс последовательного преобразования уравнений не дает независимого хода всех коэфициентов. Это указывает на то, что среди корней данного уравнения имеются корни с равными модулями, т. е. либо равные по величине и по знаку, либо равные по величине, но имеющие противоположные знаки, либо комплексные сопряженные (как известно из курса „Высшей алгебры", алгебраическое уравнение с вещественными коэфициентами, имеющее комплексный корень $\alpha+\beta i$, где α и β — числа вещественные, имеет также корень $\alpha-\beta i$, притом той же кратности). Рассмотрим, например, случай, когда уравнение четвертой степени имеет две пары равных по модулю вещественных корней, т. е. когда $|\alpha_1|=|\alpha_2|>|\alpha_3|=|\alpha_4|$. Преобразованное уравнение (8) тоже имеет две пары равных по модулю корней: $|\alpha_1|^k=|\alpha_2|^k>|\alpha_3|^k=|\alpha_4|^k$. Если процесс преобразования проведен достаточно далеко, то отношениями $\alpha_3^k:\alpha_1^k$; $\alpha_4^k:\alpha_1^k$; $\alpha_3^k:\alpha_2^k$; $\alpha_4^k:\alpha_2^k$; можно пренебречь. Зависимость между коэфициентами a_0', a_1', a_2', a_3', a_4' и корнями α_1^k, α_2^k, α_3^k α_4^k, уравнения (8) выразится ввиду этого следующими формулами:

$$a_1':a_0'=\alpha_1^k+\alpha_2^k;\quad a_2':a_0'=\alpha_1^k\alpha_2^k;\quad a_3':a_0'=\alpha_1^k\alpha_2^k(\alpha_3^k+\alpha_4^k);$$
$$a_4':a_0'=\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k\alpha_4^k, \tag{11}$$

показывающими, что первые два корня можно найти, решая квадратное уравнение

$$a_2'z^2-a_1'z+a_2'=0. \tag{12}$$

Вторую пару корней получим, решая квадратное уравнение

$$a_2'z^2-a_3'z+a_4'=0. \tag{13}$$

Итак, в рассматриваемом случае уравнение (8) *распалось* на два более простых уравнения (12) и (13).

Переписывая уравнение (8) и пользуясь формулами (11), получим уравнение

$$a_0'[z^4-(\alpha_1^k+\alpha_2^k)z^3+\alpha_1^k\alpha_2^kz^2-\alpha_1^k\alpha_2^k(\alpha_3^k+\alpha_4^k)z+\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k\alpha_4^k]=0, \tag{14}$$

которое после следующего преобразования заменяется уравнением:

$$a_0'^2[u^4-(\alpha_1^{2k}+\alpha_2^{2k})u^3+\alpha_1^{2k}\alpha_2^{2k}u^2-\alpha_1^{2k}\alpha_2^{2k}(\alpha_3^{2k}+\alpha_4^{2k})u+$$
$$+\alpha_1^{2k}\alpha_2^{2k}\alpha_3^{2k}\alpha_4^{2k}]=0. \tag{15}$$

Сравнивая уравнения (14) и (15), замечаем, что коэфициент при u^2 равен квадрату коэфициента при z^2, т. е. что третий коэфициент уравнения (14) обнаруживает *независимый ход изменения*. Это обстоятельство и является практически пригодным признаком возможности замены рассматриваемого уравнения (8) двумя квадратными уравнениями (12) и (13). Можно показать, что всякий раз, когда в процессе последовательных преобразований какой-либо из средних коэфициентов данного уравнения a_n' обнаруживает независимый ход изменения, возможна замена данного уравнения двумя другими низшей степени; коэфициентами первого уравнения служат первые коэфициенты данного уравнения до a_n' включительно, коэфициентами второго — коэфициенты данного уравнения, начиная от a_n' и до свободного члена включительно. Если независимый ход изменения обнаруживают два средних коэфициента, уравнение распадается на три. Можно сказать, что в случае независимого хода изменения всех коэфициентов уравнение распадается на столько линейных уравнений, сколько единиц в его показателе степени. Так, уравнение четвертой степени (8) в случае независимого хода коэфициентов a_1', a_2', a_3' распадается на четыре уравнения:

$$a_0'z-a_1'=0;\quad a_1'z-a_2'=0;\quad a_2'z-a_3'=0;\quad a_3'z-a_4'=0,$$

дающие все четыре корня уравнения согласно формулам (10).

Рассмотрим два примера.

I. Решить уравнение $x^4-7{,}5x^3-7x^2+22{,}5x+12=0$.

k	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	1	$-7{,}5$	-7	$+22{,}5$	$+12$
2	1	$56{,}25$ $+14$ $70{,}35$	49 $+337{,}5$ $+24$ $410{,}5$	$506{,}25$ $+168$ $674{,}25$	144
4	1	$4{,}935\cdot 10^3$ $-0{,}821$ $4{,}114\cdot 10^3$	$1{,}6851\cdot 10^5$ $-0{,}9473$ $+0{,}0029$ $0{,}7407\cdot 10^5$	$4{,}547\cdot 10^5$ $-1{,}182$ $3{,}365\cdot 10^5$	$2{,}074\cdot 10^4$
8	1	$1{,}692\cdot 10^7$ $-0{,}015$ $1{,}677\cdot 10^7$	$5{,}487\cdot 10^9$ $-2{,}769$ $+0{,}000$ $2{,}718\cdot 10^9$	$1{,}132\cdot 10^{11}$ $-0{,}031$ $1{,}101\cdot 10^{11}$	$4{,}301\cdot 10^8$
16	1	$2{,}812\cdot 10^{14}$ $-0{,}000$ $2{,}812\cdot 10^{14}$	$7{,}387\cdot 10^{18}$ $-3{,}693$ $+0{,}000$ $3{,}694\cdot 10^{18}$	$1{,}212\cdot 10^{22}$ $-0{,}000$ $1{,}212\cdot 10^{22}$	$1{,}850\cdot 10^{17}$
32	1	$7{,}907\cdot 10^{28}$ $-0{,}000$ $7{,}097\cdot 10^{28}$	$1{,}365\cdot 10^{37}$ $-0{,}682$ $+0{,}000$ $0{,}683\cdot 10^{37}$	$1{,}469\cdot 10^{44}$ $-0{,}000$ $1{,}469\cdot 10^{44}$	$3{,}423\cdot 10^{34}$

Начиная с 16-х степеней, имеет место, как видим, независимый ход изменения коэфициентов a_1 и a_3, коэфициент же a_2 такого независимого хода не обнаруживает. Закон изменения a_2 оказывается иным: каждое новое значение a_2 равно, начиная с 16-х степеней, половине квадрата предыдущего его значения. При вычислении значения a_2 для уравнения, соответствующего $k=4$, пришлось взять квадрат числа 410,5 не с 4, а с 5 значащими цифрами, так как иначе, вследствие потери о ной значащей цифры при ближайшем вычитании, мы получили бы коэфициент a_2 лишь с тремя значащими цифрами. Подобная же потеря значащей цифры имеет место при вычислении значения a_2 для уравнения, соответствующего $k=32$, и если бы мы должны были продолжать процесс квадрирования, пришлось бы взять квадрат числа 3,694 не с 4, а с 5 значащими цифрами.

Согласно сделанным выше выводам уравнение, дающее восьмые степени искомых корней, можно заменить тремя уравнениями:

$$z-1{,}677\cdot 10^7=0;\quad 1{,}677\cdot 10^7\cdot z^2-2{,}718\cdot 10^9\cdot z+1{,}101\cdot 10^{11}=0;$$
$$1{,}101\cdot 10^{11}\cdot z-4{,}301\cdot 10^8=0.$$

Первое и последнее из этих трех уравнений дают значения α_1^8 и α_4^8, т. е. восьмые степени наибольшего и наименьшего (по модулю) из корней данного уравнения. Второе из этих трех уравнений дает значения α_2^8 и α_3^8.

$\lg\alpha_1^8$	$7{,}2245$
$\lg\lvert\alpha_1\rvert$	$0{,}9031$
$\lvert\alpha_1\rvert$	$8{,}000$

$\lg 4{,}301\cdot 10^8$	$8{,}6336$
$\lg 1{,}101\cdot 10^{11}$	$11{,}0418$
$\lg\alpha_4^8$	$\bar{3}{,}5918$
$\lg\lvert\alpha_4\rvert$	$\bar{1}{,}6990$
$\lvert\alpha_4\rvert$	$0{,}5000$

Подстановка найденных значений для $|\alpha_1|$ и $|\alpha_4|$ в данное уравнение показывает, что $\alpha_1 = +8$; $\alpha_4 = -0{,}5$.

Вместо того, чтобы решать приведенное выше квадратное уравнение, проще и точнее использовать для разыскания α_2 и α_3 зависимости

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 7{,}5 \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 12,$$

откуда

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0; \quad \alpha_2\alpha_3 = 3; \quad \alpha_2 = +\sqrt{3}; \quad \alpha_3 = -\sqrt{3}.$$

Итак, все четыре корня уравнения найдены. Как видим, два его корня оказались равными по модулю. Нетрудно показать, что характерным признаком равенства (по модулю) двух вещественных корней уравнения является именно указанная выше особенность хода изменения одного из коэфициентов: один из коэфициентов нового уравнения равен половине квадрата соответствующего коэфициента предшествующего уравнения.

II. Найти все корни, как вещественные, так и комплексные, уравнения $x^3 = 2x + 5$.

k	a_0	a_1	a_2	a_3
1	1	0	-2	-5
2	1	0 $+4$ 4	4 $+0$ 4	25
4	1	16 -8 8	16 -200 -184	625
8	1	$+64$ 368 432	$3{,}386 \cdot 10^4$ $-1{,}000$ $2{,}386 \cdot 10^4$	$3{,}906 \cdot 10^5$
16	1	$1{,}866 \cdot 10^5$ $-0{,}477$ $1{,}389 \cdot 10^5$	$5{,}693 \cdot 10^8$ $-3{,}375$ $2{,}318 \cdot 10^8$	$1{,}526 \cdot 10^{11}$
32	1	$1{,}929 \cdot 10^{10}$ $-0{,}046$ $1{,}883 \cdot 10^{10}$	$5{,}373 \cdot 10^{16}$ $-4{,}239$ $1{,}134 \cdot 10^{16}$	$2{,}329 \cdot 10^{22}$
64	1	$3{,}545 \cdot 10^{20}$ $-0{,}000$ $3{,}545 \cdot 10^{20}$	$1{,}286 \cdot 10^{32}$ $-8{,}771$ $-7{,}485 \cdot 10^{32}$	$5{,}424 \cdot 10^{44}$

$\lg \alpha_1^{32}$	10,2749
$\lg \lvert\alpha_1\rvert$	0,3211
$\lvert\alpha_1\rvert$	2,094
α_1	$+2{,}094$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0;$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = -2{,}094;$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = +5;$$
$$\alpha_2\alpha_3 = 5 : 2{,}094 = 2{,}388.$$
$$x^2 + 2{,}094x + 2{,}388 = 0.$$
$$x = -1{,}047 \pm \sqrt{-1{,}291} = -1{,}047 \pm 1{,}136i.$$

Ответ:

$\alpha_1 = 2{,}094$

$\alpha_2 = -1{,}047 + 1{,}136i$

$\alpha_3 = -1{,}047 - 1{,}136i.$

При решении этой задачи мы встречаемся с отрицательным значением одного из коэфициентов (a_2'). Как легко видеть, это является указанием на наличность комплексных корней: если все корни данного уравнения вещественны, то все корни каждого из преобразованных уравнений положительны, а потому положительны и все коэфициенты a_1', a_2', a_3', ... (если только $a_0' > 0$).

Как только один из коэфициентов (a_1') преобразованного уравнения обнаружил при решении данной задачи независимый ход изменения, заменяем уравнение третьей степени двумя уравнениями:

$$z - 1{,}883 \cdot 10^{10} = 0; \quad z^2 - 1{,}134 \cdot 10^{16} z + 2{,}329 \cdot 10^{22} = 0,$$

корни которых равны корням данного уравнения, возведенным в 32-ю степень.

Найдя из первого из этих уравнений α_1^{32} и $|\alpha_1|$, устанавливаем знак α_1 простой подстановкой значений $+2{,}094$ и $-2{,}094$ в данное уравнение. Установив, что $\alpha_1 = +2{,}904$, мы можем вместо того, чтобы решать квадратное уравнение, дающее 32-е степени корней α_2 и α_3, составить и решить квадратное уравнение, дающее сразу искомые корни $\alpha_2 = -1{,}047 + 1{,}136\,i$; $\alpha_3 = -1{,}047 - 1{,}136\,i$.

Для поверки полученных результатов достаточно сравнить их с найденными в § 73 корнями этого же уравнения.

7°. Итак, в случаях, когда алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет все корни различные по модулю или когда среди них имеется одна или более пар, равных по модулю, способ квадрирования сводит его решение к решению нескольких линейных и квадратных уравнений. Если же среди корней уравнения имеется три, четыре и т. д. равных по модулю, то для их определения приходится решать уравнение соответственно третьей, четвертой и т. д. степени. Так, если уравнение имеет две пары комплексных сопряженных корней с равными модулями, то их надо найти из уравнения четвертой степени. Существуют приемы, существенно упрощающие работу и в подобных случаях, но мы не можем на них останавливаться и отсылаем читателя к книге академика А. И. Крылова „Лекции по приближенным вычислениям“ (изд. 2, 1933 г.).

§ 79. Решение системы уравнений.

Систему уравнений с несколькими неизвестными (число уравнений предполагаем равным числу неизвестных) во многих случаях удается решить по *способу исключения*: исключая все неизвестные, кроме одной, получают одно уравнение с одной неизвестной и решают его одним из рассмотренных выше способов, а затем находят и остальные неизвестные. Однако часто удается обойтись и без исключения, требующего обычно большей вычислительной работы.

Имея систему из двух уравнений с двумя неизвестными

$$f_1(x, y) = 0; \quad f_2(x, y) = 0, \tag{1}$$

находим сперва грубо-приближенные значения искомых корней. Сделать это проще всего посредством вычерчивания кривых, изображающих каждое из данных уравнений в какой-нибудь системе координат. Определив по графику координаты всех точек пересечения обеих кривых, мы и получим первые (обыкновенно довольно грубые) приближения к искомым корням, и остается уточнить эти первые приближения.

Уточнение проще всего выполняется по следующему *способу Ньютона*.

Пусть x_0, y_0 — приближенные значения корней уравнения (1). Обозначая буквами ξ и η те поправки (положительные или отрицательные), какие надо прибавить к числам x_0 и y_0, чтобы получить точные значения искомых корней, заменим в уравнениях (1) числа x и y равными им суммами $x_0 + \xi$ и $y_0 + \eta$ и разложим левые части уравнений (1) в ряды по степеням поправок ξ и η. Предполагая, что числа ξ и η настолько малы по сравнению с числами x_0 и y_0, что всеми степенями ξ и η выше первой, а также произведениями чисел ξ и η можно пренебречь, получаем для определения ξ и η систему двух линейных уравнений:

$$f_1(x_0, y_0) + \xi \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 + \eta \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 = 0;$$

$$f_2(x_0, y_0) + \xi \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0 + \eta \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Решив эту систему, получаем более точные значения искомых корней

$$x_1 = x_0 + \xi; \quad y = y_0 + \eta.$$

Повторяя всю эту операцию достаточное число раз, получим искомые корни с произвольно высокой точностью.

Для примера возьмем систему:

$$(x-1)^2+(y-0{,}5)^2=1; \quad 4x^2+9y^2=1.$$

Исключение одной из неизвестных привело бы нас к уравнению четвертой степени. Вместо того чтобы составлять и решать это уравнение, вычертим на куске миллиметровой бумаги кривые, соответствующие обоим данным уравнениям (рис. 62). Графиком первого уравнения является круг радиуса 1 с центром в точке (1; 0,5), графиком второго — эллипс с полуосями $a=0{,}5$; $b=1:3$, причем оси симметрии эллипса направлены по координатным осям. Для вычерчивания эллипса берем круг радиуса 0,5 с центром в начале координат и подвергаем его равномерному сжатию в направлении оси Y в отношении $2:3$ (пользуясь логарифмической линейкой, уменьшаем в этом отношении несколько ординат круга, отсчитываемых по чертежу).

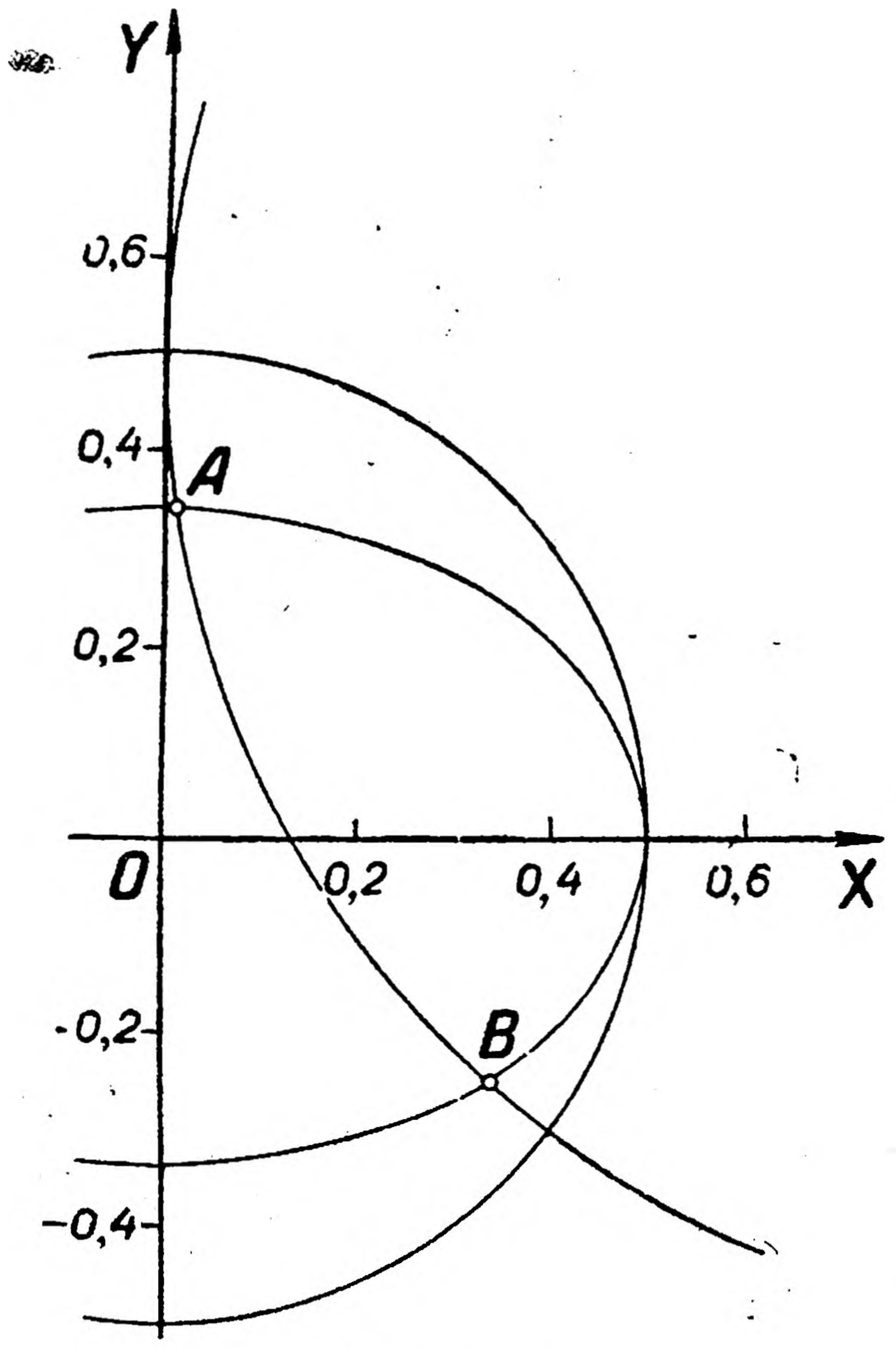


Рис. 62.

Чертеж показывает, что данная система уравнений имеет две, и только две, системы корней: первую, соответствующую точке A (0,02; 0,33), и вторую, соответствующую точке B (0,34; — 0,24).

Уточняем значения корней первой системы. Для этого берем $x=0{,}02+\xi$, $y=0{,}33+\eta$ и подставляем эти значения в данные уравнения. Простое раскрытие скобок и отбрасывание членов, содержащих ξ^2 и η^2, приводит к системе линейных уравнений:

$$1{,}96\xi+0{,}34\eta=-0{,}0107; \quad 0{,}17\xi+5{,}94\eta=0{,}0183,$$

которая дает $\xi=-0{,}00602$, $\eta=0{,}00324$ (ограничиваемся той точностью, какую можно получить, применяя счетную линейку). Теперь находим новые, более точные значения корней первой системы:

$$x_1=0{,}02-0{,}00602=0{,}01398; \quad y_1=0{,}33+0{,}00324=0{,}33324.$$

Полагая опять $x=x_1+\xi$; $y=y_1+\eta$, приходим к новой системе для определения поправок

$$1{,}972\xi+0{,}334\eta=0{,}00005; \quad 0{,}112\xi+5{,}998\eta=-0{,}00022,$$

дающей $\xi=0{,}00003$; $\eta=-0{,}00004$ (ограничиваемся стотысячными долями), откуда

$$x_2=0{,}01398+0{,}00003=0{,}01401; \quad y_2=0{,}33324-0{,}00004=0{,}33320.$$

Следующая подстановка, если ограничиваться стотысячными долями, приводит к системе

$$1{,}972\xi+0{,}334\eta=0{,}00000; \quad 0{,}112\xi+5{,}998\eta=+0{,}00001,$$

из которой видно, что новые поправки не достигают половины единицы пятого десятичного знака. Итак, с точностью до стотысячных

$$x = 0{,}01401; \quad y = 0{,}33320.$$

Предлагаем читателю убедиться, что корни второй системы, вычисленные с той же точностью, равны $x = 0{,}33541$ и $y = -0{,}24723$.

Рассмотренный способ уточнения корней применим и в том случае, когда число уравнений и число неизвестных больше двух.

Упражнения.

1. Найти все корни уравнений:

$$x^3 - 12x - 60 = 0; \quad x^3 + 12x - 60 = 0; \quad x^3 - 12x + 10 = 0$$

с 4 значащими цифрами.

2. Найти вещественные корни уравнения $x^3 - 4x^2 + 7 = 0$ с 4 значащими цифрами.

3. Указать с точностью до тысячных число, превосходящее свой десятичный логарифм ровно на единицу.

4. Длина дуги круга $2l = 84{,}2$ *мм*, длина стягивающей ее хорды $2a = 64{,}3$ *мм*. Найти до сотых миллиметра длину радиуса этого круга.

Указание. Свести вопрос к решению уравнения $\sin\alpha = \frac{a}{l}\alpha$, где α — радианная мера половины дуги.

5. Требуется натянуть провод между двумя точками A и B, расположенными на равной высоте на расстоянии 50 *м* друг от друга, причем провес допускается в 10% этого расстояния, т. е. 5 *м*. Предполагая, что провод располагается по цепной линии $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, указать с точностью до десятых метра его длину между точками A и B.

6. Дуга AB цепной линии $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ имеет данную длину $2l = 75$ *м*. Зная, что точки A и B симметричны относительно оси Y, и что расстояние между ними равно $2b = 50$ *м*, найти значение a с 4 значащими цифрами.

7. Решить с точностью до минут уравнение $x - 0{,}12\sin x = 1{,}23$.

8. Найти вещественные корни уравнения $x^5 - x - 1 = 0$ с 5 значащими цифрами.

9. Вычислить с точностью до сотых долей единицы вещественные корни уравнения:

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 30x - 49 = 0.$$

10. Система уравнений $20x^2 = 1 - 2x^3 + 4y^2$; $10y = 5 + 2x^2 - 3y^3$ имеет систему корней, близких к $x = 0{,}3$ и $y = 0{,}5$. Уточнить эти корни до 4 десятичных знаков.

11. Циклоида $x = r(1 - \cos t)$; $y = r(t - \sin t)$ проходит через точку с координатами $x_0 = 50$ *мм*; $y_0 = 43$ *мм*. Найти с точностью до сотых миллиметра значение r, если известно, что между началом координат и точкой (x_0, y_0) ордината y возрастает.

ГЛАВА IX.
ИНТЕРПОЛЯЦИЯ.

§ 80. Задача интерполяции. Параболическая интерполяция. Интерполяционная формула Лагранжа.

Зная аналитическое выражение функции $y = f(x)$, мы можем по данным частным значениям аргумента x_0, x_1, x_2, ... найти соответствующие частные значения функции $y_0 = f(x_0)$; $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$, ...

Задачей *интерполяции* называется обратная задача: даны несколько пар частных значений аргумента x_i и функции y_i, где $i=0, 1, 2, \ldots, n$, найти аналитическое выражение для $y=f(x)$, считая y непрерывной функцией от x.

В такой постановке задача интерполяции является задачей неопределенной. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять геометрическое истолкование: каждой паре значений x_i, y_i соответствует определенная точка плоскости XY; через $n+1$ данных на плоскости точек можно провести сколько угодно кривых линий; следовательно, существует сколько угодно непрерывных функций, удовлетворяющих требованиям задачи.

Чтобы сделать задачу интерполяции определенной, нужны дополнительные условия. Обычно в качестве искомой („интерполирующей") функции берется многочлен степени n, и задача сводится к разысканию $n+1$ коэфициента этого многочлена. Так, при задании трех пар значений x и y ставят задачей разыскание трехчлена $F(x)=a_0x^2+bx+c$, который при $x=x_i$ принимал бы значение $y_i (i=0, 1, 2)$. Для определения a_0, a_1, a_2 мы получаем систему из трех линейных уравнений $a_0x_i^2+a_1x_i+$ $+a_2=y_i$ $(i=0, 1, 2)$, определитель которой Δ, как легко видеть, равен $(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)$, и в случае, когда все данные значения x_i различны (что можно предполагать), отличен от 0. Следовательно, система уравнений имеет единственную систему корней. Нетрудно показать, что то же самое имеет место и при любом n.

Графиком функции $F(x)=a_0x^n+a_1x^{n+1}+\ldots+a_n$ является, как известно, *парабола порядка n* (при $n=1$ получается прямая, которую следует рассматривать как параболу 1-го порядка, при $n=2$ — обыкновенная парабола). Задача интерполяции при сделанном ограничении выбора интерполирующей функции геометрически истолковывается так: через $n+1$ данных на плоскости различных точек надо провести параболу порядка n. Задача эта всегда разрешима и имеет лишь одно решение.

Интерполяция посредством многочленов носит название „параболической интерполяции". Кроме параболической интерполяции, которой мы только и будем заниматься, применяется еще интерполяция посредством тригонометрических функций (ее изучает „Гармонический анализ"), а также посредством показательных, шаровых и других функций.

Иногда термин „интерполяция" употребляется в более узком смысле. Положим, имеется таблица значений аргумента x_i и соответствующих значений функции y_i, где $i=0, 1, 2, \ldots, n$, и требуется для некоторого данного значения аргумента x, заключенного между двумя табличными значениями аргумента, указать соответствующее значение функции y. Эта операция, которую можно назвать „чтением между строками таблицы", тоже носит название „интерполяции" (в более узком смысле). Конечно, если известна интерполирующая функция $y=F(x)$, то это „чтение между строками таблицы" сводится к простой подстановке.

Задача интерполяции (в узком смысле) может быть приближенно решена и *графически*, без построения интерполирующей функции. Для этого достаточно построить точки, изображающие данные пары значений аргумента и функции, принимая x за абсциссу, y за ординату, а затем соединить все эти точки от руки „плавной" кривой, которая и позволит находить значение y для любого данного промежуточного значения x, а также решать обратную задачу. При проведении кривой возможен довольно значительный произвол, а потому такая *графическая интерполяция* дает результаты весьма неточные. Тем не менее, на практике ею нередко пользуются, так как способ этот очень прост и быстро дает решение вопроса.

Если, располагая таблицей значений функций y для значений x от x_0 до x_n, мы поставим вопрос о том, какие значения функция y принимает при значениях x, меньших x_0 или больших x_n, то мы от задачи интерполяции перейдем к задаче *экстраполяции*. Легко понять, что и эта задача допускает решение графическим методом, но результаты получатся еще менее надежные.

Вернемся к точному решению задачи параболической интерполяции, т. е. к разысканию многочлена степени n, принимающего при данных значениях аргумента x_i наперед заданные значения функции y_i, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Вместо того чтобы составлять и решать систему уравнений, определяющих неизвестные коэфициенты многочлена, можно воспользоваться общей формулой, указанной Лагранжем и сразу решающей задачу. Покажем вывод этой „интерполяционной формулы Лагранжа“ для случая $n = 3$, т. е. когда заданы четыре пары значений аргумента и функции: x_0 и y_0; x_1 и y_1; x_2 и y_2; x_3 и y_3.

Возьмем четыре дроби:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}; \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)};$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}; \quad L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

составленные по одному общему правилу: для составления $L_i(x)$, где $i = 0, 1, 2, 3$, берется произведение всех разностей $x - x_0$; $x - x_1$; $x - x_2$; $x - x_3$ кроме той, в которую входит x_i; это произведение служит числителем $L_i(x)$; знаменателем служит это же произведение, но с заменой переменной x ее частным значением x_i. Каждая из дробей $L_i(x)$ принимает значение 1, если заменить x через x_i, и значение 0, если заменить x через любое из остальных данных значений аргумента.

Рассмотрим далее функцию $F(x)$, определяемую формулой:

$$F(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2 + L_3(x) \cdot y_3.$$

Легко видеть, что $F(x_0) = y_0$; $F(x_1) = y_1$; $F(x_2) = y_2$; $F(x_3) = y_3$. Так как функция $F(x)$ есть многочлен третьей степени относительно x, то эта функция и есть та единственная интерполирующая функция, которую мы ищем.

Для общего случая, когда задана $n + 1$ пара значений аргумента и функции и ищется многочлен степени n, интерполяционная формула Лагранжа может быть записана в таком виде:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \cdot y_i;$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Например, если надо найти многочлен четвертой степени, обращающийся в 19, 1, 1, 15, 79 при $x=-2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$, то формула Лагранжа дает:

$$F(x)=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{120}\cdot 19+\frac{(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)}{-12}\cdot 1+$$
$$+\frac{(x+2)x(x-2)(x-3)}{6}\cdot 1+\frac{(x+2)x(x-1)(x-3)}{-8}\cdot 15+$$
$$+\frac{(x+2)x(x-1)(x-2)}{30}\cdot 79,$$

или, после упрощений, $F(x)=x^4-x+1$. Подстановка с целью поверки показывает, что всем требованиям задачи функция x^4-x+1 действительно удовлетворяет.

При сколько-нибудь значительном n формула Лагранжа требует тягостных выкладок, а потому на практике употребляется редко.

Чтобы ознакомиться с другими, более удобными для целей вычисления формулами, надо рассмотреть некоторые свойства „конечных разностей", чем мы и займемся в следующем параграфе.

§ 81. Разностная схема. Свойства конечных разностей.

Возьмем серию *равноотстоящих* значений аргумента x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h, \ldots, x_n=x_0+(n-1)h$, где h — „ступень" таблицы, и соответствующие значения функции $y=f(x)$, которые обозначим через $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$. Расположив эти числа в два вертикальных столбца, образуем *первые (конечные) разности* данных значений y_i, а именно, числа $\Delta y_0=y_1-y_0$, $\Delta y_1=y_2-y_1$, $\Delta y_2=y_3-y_2, \ldots, \Delta y_{n-1}=y_n-y_{n-1}$, и записываем их в виде нового столбца, помещая каждую разность Δy_i на строке, находящейся между строками, на которых записаны числа y_i и y_{i+1}. Поступая с числами Δy_i точно так же, как с числами y_i, мы получим столбец *вторых (конечных) разностей* $\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i$, далее таким же образом столбец *третьих (конечных) разностей* $\Delta^3 y_i=\Delta^2 y_{i+1}-\Delta^2 y_i$ и т. д. Каждый последующий столбец имеет одним числом меньше, чем предыдущий, а потому процесс закончится, когда мы получим единственную *разность порядка n*, а именно $\Delta^n y_0$. В конце концов у нас получится так называемая *разностная схема*, которую приводим для случая $n=6$:

x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$				
x_5	y_5	Δy_5					
x_6	y_6						

Символ $\Delta^k y_i$ указывает и порядок разности (верхний значок k) и место этой разности в вертикальном столбце (нижний значок i): разность $\Delta^k y_i$ получается при вычитании числа $\Delta^{k-1} y_i$ от числа $\Delta^{k-1} y_{i-1}$, а потому находится на строке, промежуточной между теми, на которых записаны эти два числа.

Числа $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ тоже называются разностями, а именно *разностями нулевого порядка.*

Легко показать справедливость следующих предложений.

I. Сумма всех разностей, записанных в схеме в некотором столбце, равна разности между самым нижним и самым верхним числами, записанными в схеме в ближайшем левом столбце:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta y_i = y_n - y_0, \quad \sum_{i=0}^{n-2} \Delta^2 y_i = \Delta y_{n-1} - \Delta y_0$$

и т. д.

Для доказательства достаточно сложить равенства, определяющие разности взятого столбца; например, сложение $n-1$ равенств $y_1 - y_0 = \Delta y_0$, $y_2 - y_1 = \Delta y_1$, $y_3 - y_2 = \Delta y_2, \ldots, y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}$ приводит к формуле $y_n - y_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} \Delta y_i$.

Этим свойством конечных разностей постоянно пользуются для контроля правильности разностной схемы.

II. Разности произведения $cf(x)$, где c — постоянное, равны произведениям c на разности $f(x)$.

Действительно, $\Delta [cf(x)] = cf(x+h) - cf(x) = c[f(x+h) - f(x)] = c\Delta f(x)$.

III. Разности суммы $f(x) + F(x)$ равны суммам разностей $f(x)$ и $F(x)$. Доказательство очевидно.

IV. Если порядок, в котором идут в разностной схеме числа x_i и y_i, заменить на обратный, т. е. если переписать столбцы x_i и y_i „вверх ногами", то все столбцы с разностями четного порядка тоже перепишутся „вверх ногами", а столбцы с разностями нечетного порядка перепишутся „вверх ногами" и с обратными знаками. Если ступень прежней схемы была равна h, то ступень новой „перевернутой" схемы равна $-h$.

Доказательство этого свойства дается простым составлением разностной схемы для „перевернутой" таблицы значений x_i и y_i и сравнением новой схемы со старой. Вот „перевернутая" схема для случая $n = 6$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_6 & y_6 & & & & & & & & & & & \\
 & & -\Delta y_5 & & & & & & & & & & \\
x_5 & y_5 & & \Delta^2 y_4 & & & & & & & & & \\
 & & -\Delta y_4 & & -\Delta^3 y_3 & & & & & & & & \\
x_4 & y_4 & & \Delta^2 y_3 & & \Delta^4 y_2 & & & & & & & \\
 & & -\Delta y_3 & & -\Delta^3 y_2 & & -\Delta^5 y_1 & & & & & & \\
x_3 & y_3 & & \Delta^2 y_2 & & \Delta^4 y_1 & & \Delta^6 y_0 & & & & & \\
 & & -\Delta y_2 & & -\Delta^3 y_1 & & -\Delta^5 y_0 & & & & & & \\
x_2 & y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 & & & & & & & \\
 & & -\Delta y_1 & & -\Delta^3 y_0 & & & & & & & & \\
x_1 & y_1 & & \Delta^2 y_0 & & & & & & & & & \\
 & & -\Delta y_0 & & & & & & & & & & \\
x_0 & y_0 & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

На первом месте в столбце первых разностей здесь должно быть написано число $y_5 - y_6$. Но согласно обозначению в основной схеме $y_6 - y_5 = \Delta y_5$, а потому $y_5 - y_6 = -\Delta y_5$. Точно так же ниже пишем $y_4 - y_5 = -(y_5 - y_4) = -\Delta y_4$ и т. д. На первом месте в столбце вторых разностей надо написать $(-\Delta y_4) - (-\Delta y_5) = \Delta y_5 - \Delta y_4 = \Delta^2 y_4$, что и сделано, и т. д.

Переходим теперь к рассмотрению разностей целой рациональной функции, но предварительно разберем один частный пример; составим разностную схему значений функции $y=x^4$, приняв $x_0=-2$, $h=1$:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
-2	16					
		-15				
-1	1		14			
		-1		-12		
0	0		2		24	
		$+1$		12		0
1	1		14		24	
		15		36		0
2	16		50		24	
		65		60		0
3	81		110		24	
		175		84		
4	256		194			
		369				
5	625					

Все разности 4-го порядка оказались здесь одинаковыми и равными 24, а потому разности 5-го порядка, как и все разности более высокого порядка, оказались нулями. Взяв какую-нибудь целую рациональную функцию второй степени (например x^2), мы увидели бы, что у ней постоянными оказываются разности 2-го порядка, у функции третьей степени — разности 4-го порядка и т. д. Мы приходим к общему заключению: *разности порядка k у целой рациональной функции степени k постоянны*. Чтобы доказать его, возьмем целую рациональную функцию степени k в общем виде: $f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k$, и образуем разности $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$. Ограничиваясь лишь старшим членом, легко установить, что $\Delta f(x)=ka_0hx^{k-1}+\ldots$, т. е. что первая разность целой рациональной функции степени k есть целая рациональная функция степени $k-1$, причем старший ее член имеет коэфициент, равный коэфициенту старшего члена функции $f(x)$, умноженному на показатель степени k этой функции и на ступень таблицы h. Пользуясь этим обстоятельством, находим, что

$$\Delta^2 f(x)=k(k-1)h^2a_0x^{k-2}+\ldots;$$

$$\Delta^3 f(x)=\Delta[k(k-1)h^2a_0x^{k-2}\ldots]=k(k-1)(k-2)h^3a_0x^{k-3}+\ldots;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^{k-2}f(x)=k(k-1)(k-2)\ldots4\cdot3h^{k-2}a_0x^2+\ldots;$$

$$\Delta^{k-1}f(x)=k(k-1)(k-2)\ldots4\cdot3\cdot2h^{k-1}a_0x+\ldots;$$

$$\Delta^k f(x)=k(k-1)(k-2)\ldots4\cdot3\cdot2\cdot1h^ka_0=k!\,h^ka_0.$$

V. *Разности порядка k у целой рациональной функции степени k с коэфициентом a_0 при старшем члене постоянны и равны $k!\,h^ka_c$, где h — ступень таблицы* (пятое свойство разностей).

Это свойство разностей дает удобный способ составления таблицы значений любой целой рациональной функции. Например, чтобы составить таблицу значений функции $y=f(x)=2x^3-2x^2+3x-1$ для значений x от 0 до 10, берем только три значения аргумента, например -1, 0, 1, и вычисляем для них $f(x)$ непосредственной подстановкой. Получив $f(-1)=-8$; $f(0)=-1$; $f(1)=2$ и заметив, что $\Delta^3 f(x)=3!\,1^3\cdot2=12$, выписываем первые числа столбцов y, Δy, $\Delta^2 y$ приведенной ниже разностной схемы, которую *продолжаем дальше посредством одних лишь сложений*:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
—1	—8	7	—4	12
0	—1	3	8	12
1	2	11	20	12
2	13	31	32	12
3	44	63	44	12
4	107	107	56	12
5	214	163	68	12
6	377	231	80	12
7	608	311	92	12
8	919	403	104	
9	1322	507		
10	1829			

Действительно, ввиду постоянства значений $\Delta^3 y$, каждое значение $\Delta^2 y_{i+1}$ на 12 больше значения $\Delta^2 y_i$: $-4+12=8$; $8+12=20$ и т. д. Имея же значения $\Delta^2 y_i$, мы можем продолжить вниз столбец Δy: $3+8=11$; $11+20=31$ и т. д., а затем продолжить и столбец значений y: $2+11=13$; $13+31=44$ и т. д. Дойдя до „удобного" значения $x=10$, производим контроль правильности полученного значения $f(10)=1829$ непосредственной подстановкой: $f(10)=2\cdot 10^3-2\cdot 10^2+3\cdot 10-1=$ $=1829$.

Рассмотрим еще разности так называемой *факториальной функции* (или *факториала*) *порядка* n. Так называется произведение $\varphi_n(x)=$ $=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})$, где числа x_0, x_1, x_2, ... образуют арифметическую прогрессию с разностью h, равной ступени таблицы. Легко видеть, что

$$\Delta\varphi_n(x)=\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)=(x+h-x_0)(x+h-x_1)(x+h-x_2)\ldots$$
$$\ldots(x+h-x_{n-2})(x+h-x_{n-1})-(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots$$
$$(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})=(x+h-x_0)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})-$$
$$-(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})=$$
$$=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})[(x+h-x_0)-(x-x_{n-1})]=$$
$$=\varphi_{n-1}(x)\cdot(x_{n-1}+h-x_0)=nh\varphi_{n-1}(x),$$

где

$$\varphi_{n-1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2}).$$

VI. *Чтобы найти первую разность факториальной функции некоторого порядка, надо взять факториальную функцию порядка на 1 меньшего и умножить ее на порядок данной факториальной функции и на ступень таблицы* h (шестое свойство разностей).

Так как факториальная функция $\varphi_n(x)$ есть целая рациональная функция порядка n, то ее разность порядка n сводится к постоянному. Легко видеть, что $\Delta^n\varphi_n(x)=n!\,h^n$.

VII. *Если некоторая функция $y=f(x)$ при произвольной ступени h дает разностную схему с постоянными разностями порядка k, то эта функция есть целая рациональная функция степени k.*

Оговорка о произвольности ступени h существенна, так как прибавление к функции члена с периодом h, например члена $\sin(2\pi x:h)$, ничего не меняет в значениях разностей.

Из этого седьмого свойства разностей, которое примем без доказательства, вытекает следствие:

если при неограниченном продолжении разностной схемы не получается постоянных чисел ни в одном столбце разностей, то функция $f(x)$ не есть целая рациональная.

Хотя рассмотренные свойства разностной схемы проводят резкую грань между разностными схемами целых рациональных и всех других функций, однако, на практике этой резкой грани провести нельзя в силу двух обстоятельств: с одной стороны, разностная схема любой целой рациональной функции, значения которой найдены лишь приближенно, не обнаруживает строгого постоянства разностей ни в одном столбце; с другой стороны, всякую непрерывную функцию $f(x)$ можно заменить многочленом $F(x)$, значения которого отличаются от соответствующих значений $f(x)$ для любого x в данном интервале от $x=a$ до $x=b>a$ меньше, чем на произвольно малое число ε (теорема Вейерштрасса).

Чтобы иллюстрировать указание на первое обстоятельство, возьмем, например, функцию $y=x^3$ и составим для нее разностную схему, приняв $x_0=0{,}10$; $h=0{,}06$ и округляя значения x^3 до 4 значащих цифр. Значения y_i мы получим с погрешностями, не большими 0,5 единицы разряда четвертой значащей цифры, значения $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$ с погрешностями, не большими $2\cdot 0{,}5=1$, значения $\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i$ с погрешностями, не большими 2, значения $\Delta^3 y_i$ с погрешностями, не большими 4 и т. д. (все в единицах четвертой значащей цифры). Все третьи разности при точных значениях кубической функции y_i равнялись бы в данном случае $6\cdot 0{,}06^3=0{,}001296$, или 13 единицам, а благодаря неточности этих значений будут колебаться между границами $13-4=9$ и $13+4=17$. Разности высших порядков, теоретически равные нулю, покажут на практике еще большие колебания: разности 4-го порядка от -8 до $+8$, разности 5-го порядка от -16 до $+16$, разности 6-го порядка от -32 до $+32$ и т. д.

Вот эта схема, доведенная до разностей 10-го порядка. Все значения разностей ради экономии места записаны без нулей спереди, т. е. умножены на 10^4.

x	$y=x^3$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\Delta^7 y$	$\Delta^8 y$	$\Delta^9 y$	$\Delta^{10} y$
0,10	0,0010	31	34	15	−5	+10	−18	+31	−53	+91	−155
0,16	0,0041	65	49	10	+5	−8	+13	−22	+38	−64	
0,22	0,0106	114	59	15	−3	+5	−9	+16	−26		
0,28	0,0220	173	74	12	+2	−4	+7	−10			
0,34	0,0393	247	86	14	−2	+3	−3				
0,40	0,0640	333	100	12	+1	0					
0,46	0,0973	433	112	13	+1						
0,52	0,1406	545	125	14							
0,58	0,1951	670	139								
0,64	0,2621	809									
0,70	0,3430										

Разности 3-го порядка действительно колеблются между 10 и 15 (мы указали выше возможные границы их колебаний 9 и 17), но среднее значение всех этих разностей, записанных в схеме, равно $105:8=13{,}1$, т. е. очень близко к теоретическому постоянному их значению 12,96, указанному выше. Все разности порядка выше 3-го, все возрастающие по абсолютной своей величине, происходят исключительно от погрешностей округления значений y_i и должны быть отброшены.

Для второго примера возьмем таблицу значений функции $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-x^2} dx$ („интеграл вероятностей") при $x_0 = 0$, $h = 0{,}2$, вычисленных с 4 десятичными знаками, и составим для них разностную схему:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\Delta^7 y$	$\Delta^8 y$	$\Delta^9 y$	$\Delta^{10} y$	$\Delta^{11} y$
0,0	0,0000	2227	−170	−132	61	+7	−26	+24	−27	+51	−116	+268
0,2	0,2227	2057	−302	−71	68	−19	−2	−3	+24	−65	+152	
0,4	0,4284	1755	−373	−3	49	−21	−5	+21	−41	+87		
0,6	0,60 9	1382	−376	+46	28	−26	+16	−20	+46			
0,8	0,7421	1006	−330	74	2	−10	−4	+26				
1,0	0,8427	676	−256	76	−8	−14	+22					
1,2	0,9103	420	−180	68	−22	+8						
1,4	0,9523	240	−112	46	−14							
1,6	0,9763	128	−66	32								
1,8	0,9891	62	−34									
2,0	0,9953	28										
2,2	0,9981											

Среднее значение 6-й разности $+1:6 \approx 0{,}2$.

Хотя здесь мы взяли функцию, весьма отличную от целой рациональной, но общий характер разностной схемы имеем тот же, что и в предыдущем случае: сперва идут разности, имеющие „правильный ход" (плавное изменение), далее получаем разности (начиная с $\Delta^6 y$), в которых этого правильного хода нет: значения этих разностей „скачут", притом, чем выше порядок разности, тем больше и чаще ее „скачки". Среднее значение разностей 6-го порядка есть $1:6 = 0{,}2$, разностей 7-го порядка уже $48:5 = 9{,}6$, а потому вполне возможно сделать заключение о том, что *рассматриваемый интеграл вероятностей в пределах точности нашей таблицы и для значений x от 0 до 2,2 приближенно выражается целой рациональной функцией шестой степени.* Все разности 7-го порядка и выше, как происходящие почти исключительно от погрешностей значений y_i, можно положить равными 0.

Упражнения.

1. Составить таблицу значений функции $f(x) = x^4 - x + 1$ для значений x от 0 до 5 через 0,5, вычисляя непосредственно лишь $f(-0{,}5)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(1)$ и пользуясь постоянством разностей 4-го порядка. При $x = 5$ сделать поверку.

2. Составить разностную схему для значений функции $K = \frac{1}{4}\pi d^2$ от $d = 1$ до $d = 10$, округляя табличные значения K до целых и доводя вычисление до 10-х разностей. Сравнить теоретические значения 2-й разности со средним ее значением в схеме. Установить границы колебаний разностей различных порядков и поверить сделанные заключения на схеме.

3. Составить разностную схему для значений функции $y = \sin x$ от $x = 0°$ до $x = 90°$ при $h = 10°$, взяв значения $\sin x$ с 4 десятичными знаками. Какие разности следует сохранить в схеме и какие отбросить, как происходящие почти целиком от погрешностей взятых значений $\sin x$?

§ 82. Интерполяционные формулы Ньютона.

Положим, нам даны $(n+1)$ пар значений аргумента x_i и функции y_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$, причем значения аргумента предположим равноотстоящими (ступень h). Составим разностную схему, доводя ее до разностей порядка n, и поставим себе задачей найти целую рациональную функцию $F(x)$ степени n, принимающую при $x=x_i$ значение y_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Сперва решим эту задачу для простейших случаев, когда $n=1,\ 2,\ 3$, а затем в общем виде.

Случай $n=1$. Пишем искомый многочлен в виде $F(x)=A_0+A_1(x-x_0)$ и полагаем $x=x_0$, затем $x=x_1$. Получаем два уравнения:

$$y_0=A_0;\ y_1=A_0+A_1h,$$

почленное вычитание которых дает $\Delta y_0=A_1h$, и находим неизвестные коэфициенты: $A_0=y_0$; $A_1=\frac{1}{h}\cdot\Delta y_0$. Искомая интерполирующая функция:

$$F(x)=y_0+\frac{1}{h}(x-x_0)\Delta y_0 \tag{1}$$

(формула „линейной интерполяции").

Случай $n=2$. Искомая интерполирующая функция берется в виде $F(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)(x-x_1)$; подстановка $x=x_0$; $x=x_1$; $x=x_2$ приводит к системе уравнений:

$$y_0=A_0;\ y_1=A_0+A_1h;\ y_2=A_0+2A_1h+2A_2h^2.$$

Почленное вычитание первого из второго и второго из третьего уравнений дает:

$$\Delta y_0=A_1h,\quad \Delta y_1=A_1h+2A_2h^2.$$

Новое почленное вычитание приводит к уравнению $\Delta^2y_0=2A_2h^2$.

Теперь легко находим $A_0=y_0$; $A_1=\frac{1}{h}\Delta y_0$; $A_2=\frac{1}{2h^2}\Delta^2y_0$ и пишем искомую интерполирующую функцию:

$$F(x)=y_0+\frac{1}{h}(x-x_0)\Delta y_0+\frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2y_0 \tag{2}$$

(формула „квадратической интерполяции", или „интерполяции со вторыми разностями").

Случай $n=3$. Взяв искомую функцию в виде $F(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)(x-x_1)+A_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$, составим для определения $A_i\ (i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ систему уравнений (правее записаны уравнения, выводимые из них почленным вычитанием):

$$\begin{array}{ll}
\underline{y_0=A_0} & \underline{\Delta y_0=hA_1} \\
y_1=A_0+hA_1 & \Delta y_1=hA_1+2h^2A_2 \\
y_2=A_0+2hA_1+2h^2A_2 & \Delta y_2=hA_1+4h^2A_2+6h^3A_3 \\
y_3=A_0+3hA_1+6h^2A_2+6h^3A; & \\
 & \underline{\Delta^2y_0=2h^2A_2} \\
 & \Delta^2y_1=2h^2A_2+6h^3A_3 \\
 & \underline{\Delta^3y_0=6h^3A_3}
\end{array}$$

Неизвестные коэфициенты находим из подчеркнутых уравнений и пишем искомое выражение для $F(x)$:

$$F(x)=y_0+\frac{1}{h}(x-x_0)\Delta y_0+\frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2y_0+$$
$$+\frac{1}{6h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta^3y_0 \tag{3}$$

(формула „интерполяции с третьими разностями").

Чтобы получить решение для общего случая, когда значение n произвольно, выгоднее действовать несколько иным путем.

Напишем искомую интерполирующую функцию степени n, принимающую при $x = x_i$ значение y_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ в виде суммы факториальных функций (до порядка n включительно), умноженных на подлежащие определению коэфициенты A_i:

$$F(x) = A_0 + A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + A_n\varphi_m(x) = \\ = \sum_{i=0}^{n} A_i\varphi_i(x),$$

полагая

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1}).$$

Найдем $\Delta F(x) = F(x + h) - F(x)$, пользуясь третьим, вторым, шестым свойствами § 81. Получим $\Delta F(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i h i \varphi_{i-1}(x)$. Точно так же найдем последующие разности:

$$\Delta^2 F(x) = \sum_{i=2}^{n} A_i h^2 i(i-1)\varphi_{i-2}(x);$$

$$\Delta^3 F(x) = \sum_{i=3}^{n} A_i h^3 i(i-1)(i-2)\varphi_{i-3}(x);$$

. . . .

$$\Delta^{n-1} F(x) = \sum_{i=n-1}^{n} A_i h^{n-1} i(i-1)(i-2)\ldots 3\cdot 2 h^{n-1}\varphi_{i-(n-1)}(x);$$

$$\Delta^n F(x) = A_n h^n n!$$

Полагая во всех этих равенствах $x = x_0$, получим систему уравнений: $F(x_0) = A_0$; $\Delta F(x_0) = A_1 h$; $\Delta^2 F(x_0) = A_2 h^2 \cdot 2!$; $\Delta^3 F(x_0) = A_3 h^3 \cdot 3!, \ldots$;

$$\Delta^{n-1} F(x_0) = A_{n-1} h^{n-1}(n-1)!; \quad \Delta^n F(x_0) = A_0 h^n n!$$

Но

$$F(x_0) = y_0; \quad \Delta F(x_0) = F(x_0 + h) - F(x_0) = F(x_1) - F(x_0) = \\ = y_1 - y_0 = \Delta y_0; \quad \Delta^2 F(x_0) = \Delta F(x_0 + h) - \Delta F(x_0) = \Delta F(x_1) - \Delta F(x_0) = \\ = \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0; \quad \Delta^3 F(x_0) = \Delta^3 y_0, \ldots; \\ \Delta^{n-1} F(x_0) = \Delta^{n-1} y_0, \quad \Delta^n F(x_0) = \Delta^n y_0.$$

Подставляя, находим значения A_i и получаем искомую интерполирующую функцию

$$F(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{ih^i}\varphi_i(x)\Delta^i y_0,$$

или в развернутом виде:

$$F(x) = y_0 + \frac{1}{h}(x - x_0)\Delta y_0 + \frac{1}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 y_0 + \\ + \frac{1}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta^3 y_0 + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{(n-1)!h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-2})\Delta^{n-1} y_0 + \\ + \frac{1}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})\Delta^n y_0.$$

Эта формула, частными случаями которой были написанные выше формулы (1), (2), (3), называется *первой интерполяционной формулой Ньютона*. В нее входят разности, образующие в разностной схеме наклонную линию, идущую направо и вниз (см. схему на стр. 228, где эти разности подчеркнуты).

Полагая $x = x_0 + th$, где t — новая переменная (так называемая „фаза" значения аргумента x), перепишем нашу формулу в новом, более удобном виде:

$$F(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{1}{2!} t(t-1)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!} t(t-1)(t-2)\Delta^3 y_0 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!} t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+2)\Delta^{n-1}y_0 +$$
$$+ \frac{1}{n!} t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+2)(t-n+1)\Delta^n y_0. \qquad (N_I)$$

При значениях $t = 0, 1, 2, \ldots, n$ функция $F(x_0 + th)$ даст исходные значения $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Изменяя t от 0 до n непрерывно, мы получим промежуточные значения $F(x)$, которые являются приближенными значениями для первоначально взятой функции $f(x)$. Если эта функция $f(x)$ есть многочлен степени n или ниже, то вместо приближенного имеем точное равенство $F(x) = f(x)$. Если $f(x)$ не есть многочлен степени n или ниже, то приближенное равенство $F(x) \approx f(x)$, как можно показать, тем точнее, чем меньше h и чем меньше t (по абсолютному своему значению). Так как за x_0 можно принять любое значение аргумента x_i, то, желая найти $f(x)$ при некотором x, заключенном между двумя табличными значениями x_k и x_{k+1}, принимают x_k за x_0, x_{k+1} за x_1 и т. д. Тогда $0 < th < h$, $0 < t < 1$. Приняв $x_{k+1} = x_0$, будем иметь $-h < th < 0$, $-1 < t < 0$. Из двух значений x_k и x_{k+1} за x_0 выгоднее брать ближайшее: тогда $|t| < 0,5$.

Чтобы иметь пример применения формулы (N_I), найдем посредством записанных на стр. 233 значений интеграла вероятности его значение при $x = 0,385$, т. е. $\Phi(0,385)$. Здесь $h = 0,2$; $0,2 < 0,385 < 0,4$. Приняв $x_0 = 0,2$, имеем $0,385 = 0,2 + 0,2t$, откуда фаза $t = 0,925$. Теперь $x_0 = F(x_0) = F(0,2) = 0,2227$. Ограничиваясь 6-ми разностями, так как остальные в данном случае происходят главным образом от погрешностей y_i (§ 81), выписываем из схемы на стр. 233 нужные нам значения разностей (они в схеме подчеркнуты):

$$y_0 = 2227,\ \Delta y_0 = 2057,\ \Delta^2 y_0 = -302,\ \Delta^3 y_0 = -71,\ \Delta^4 y_0 = 68,$$
$$\Delta^5 y_0 = -19, \quad \Delta^6 y_0 = +0,2$$

(нули спереди везде опущены, значение $\Delta^6 y_0 = -2$ заменено средним значением $\Delta^6 y$, равным 0,2), и вычисляем значения коэфициентов первых шести членов формулы (N_I) при $t = 0,925$. Получаем, применяя линейку:

$$t = 0,925; \quad \frac{1}{2} t(t-1) = -0,0347;$$
$$\frac{1}{3!} t(t-1)(t-2) = -0,0347 \cdot \frac{-1,075}{3} = 0,01243;$$
$$\frac{1}{4!} t(t-1)(t-2)(t-3) = 0,01243 \cdot \frac{-2,075}{4} = -0,00644;$$
$$\frac{1}{5!}(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) = -0,00644 \cdot \frac{-3,075}{5} = 0,00396;$$
$$\frac{1}{6!} t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5) = 0,00396 \cdot \frac{-4,075}{6} = -0,00269.$$

Теперь переписываем формулу (N_I), ограничиваясь первыми шестью членами и подставляя найденные значения коэфициентов и разностей, и производим умножения (для всех умножений, кроме первого, достаточно линейки) и сложения:

$$\begin{aligned} 10^4F(0{,}385) &= 2227 + 0{,}925\cdot 2057 - 0{,}0347\cdot(-302) + \\ &+ 0{,}01243\cdot(-71) - 0{,}00644\cdot 68 + \\ &+ 0{,}00396\cdot(-19) - 0{,}00269\cdot(+0{,}2) = 2227 + 1902{,}_7 + \\ &+ 10{,}5 - 0{,}9 - 0{,}5 - 0{,}1 - 0{,}0 = 4138{,}7 \end{aligned}$$

Отбрасывая запасную цифру, имеем окончательно:

$$\Phi(0{,}385) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0{,}385} e^{-x^2}dx = 0{,}4139.$$

Именно это значение $\Phi(0{,}385)$ мы и находим в более подробной таблице интеграла вероятности (см., например, Я. Н. Шпильрейн, „Таблицы специальных функций“, ч. I, стр. 19).

Читателю рекомендуется вычислить $\Phi(0{,}385)$ еще раз, приняв за x_0 значение 0,4 (при этом окажется $t = -0{,}075$ и численные значения членов интерполяционной формулы будут меньше, чем в предшествующем вычислении).

Формула (N_I) неприменима, если приходится интерполировать в конце таблицы (например между x_{n-1} и x_n), так как тогда нельзя составить разностей, идущих по наклонной линии вниз. В этом случае применяется *вторая интерполяционная формула Ньютона*, выводом которой мы и займемся.

Обозначим последнее число в первом столбце разностной схемы через x_0, а предыдущие буквами x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, ..., причем $x_{-1} = x_0 - h$; $x_{-2} = x_0 - 2h$; $x_{-3} = x_0 - 3h$, ..., и составим разностную схему:

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{-3} & y_{-3} & & & \\ & & \Delta y_{-3} & & \\ x_{-2} & y_{-2} & & \Delta^2 y_{-3} & \\ & & \Delta y_{-2} & & \Delta^3 y_{-3} \\ x_{-1} & y_{-1} & & \Delta^2 y_{-2} & \\ & & \Delta y_{-1} & & \\ x_0 & y_0 & & & \end{array}$$

имеющую на нижних концах столбцов числа y_0, Δy_{-1}, $\Delta^2 y_{-2}$, $\Delta^3 y_{-3}$ и т. д. Перевернем эту схему „вверх ногами“, как это мы делали, рассматривая IV свойство § 81. Получим новую таблицу значений x_i и y_i (со ступенью $-h$) и новую разностную схему:

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & y_0 & & & \\ & & -\Delta y_{-1} & & \\ x_{-1} & y_{-1} & & \Delta^2 y_{-2} & \\ & & -\Delta y_{-2} & & -\Delta^3 y_{-3} \\ x_{-2} & y_{-2} & & \Delta^2 y_{-3} & \\ & & -\Delta y_{-3} & & \\ x_{-3} & y_{-3} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots, \end{array}$$

в которой разности $y_0, -\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-2}, -\Delta^3 y_{-3}, \ldots$ образуют линию, идущую направо и вниз. Образуем посредством этих разностей интерполирующую функцию $F(x)$, принимающую при $x = x_i$ значение $y = y_i$, где $i = 0, -1, -2, -3, \ldots, -n$, и воспользуемся для этого формулой (N_I), в которой надо заменить h на $-h$, так как такова ступень нашей новой схемы, а кроме того t на $-t$, чтобы слева было $F(x_0 + th)$, а не $F(x_0 - th)$. Принимая во внимание обозначение нужных нам разностей в перевернутой схеме и производя упрощения, получаем формулу:

$$F(x_0+th)=y_0+t\Delta y_{-1}+\frac{1}{2!}t(t+1)\Delta^2 y_{-2}+\frac{1}{3!}t(t+1)(t+2)\Delta^3 y_{-3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(n-1)!}t(t+1)(t+2)\ldots(t+n-2)\Delta^{n-1}y_{n+1}+$$
$$+\frac{1}{n!}t(t+1)(t+2)\ldots(t+n-2)(t+n-1)\Delta^n y_{-n}. \qquad (N_{II})$$

Переворачивание схемы послужило нам для вывода формулы (N_{II}), а для ее применения достаточно иметь лишь обыкновенную разностную схему.

Чтобы видеть, как формула (N_{II}) применяется на практике, найдем значение интеграла вероятностей $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-x^2}dx$ при $x=2{,}1$, используя опять таблицу и схему на стр. 233. Теперь $x_0=2{,}2$, $h=0{,}2$, фаза $t=-0{,}5$ (из уравнения $x=x_0+th$). Выписываем из схемы числа $y_0=9981$; $\Delta y_{-1}=28$; $\Delta^2 y_{-2}=-34$; $\Delta^3 y_{-3}=32$; $\Delta^4 y_{-4}=-14$; $\Delta^5 y_{-5}=+8$; $\Delta^6 y_{-6}=0{,}2$ и вычисляем коэфициенты:

$$t=-0{,}5,\ \frac{1}{2}t(t+1)=-\frac{1}{8};\ \frac{1}{3!}t(t+1)(t+2)=-\frac{1}{16};$$
$$\frac{1}{4!}t(t+1)(t+2)(t+3)=-\frac{5}{128};\ \frac{1}{5!}t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)=$$
$$=-\frac{7}{256};\ \frac{1}{6!}t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)=-\frac{21}{1024}.$$

Подставляя все полученные числа в формулу (N_{II}), получим:

$$10^4\cdot\Phi(2{,}1)=9981-0{,}5\cdot 28+\frac{1}{8}\cdot 34-\frac{1}{16}\cdot 32+\frac{5}{128}\cdot 14-\frac{7}{256}\cdot 8-$$
$$-\frac{21}{1024}\cdot 0{,}2=9981-14{,}0+4{,}25-2{,}0+0{,}55-0{,}2-0{,}0=9969{,}6,$$

или окончательно: $\Phi(2{,}1)=0{,}9970$. Именно это значение мы и находим в таблице Шпильрейна.

Упражнения.

1. Пользуясь таблицей значений $\sin x$ для x от 0° до 90° через 10°, вычисленных с 4 десятичным знаками, найти sin 8°, sin 11°30′, sin 79°.

2. Пользуясь приведенным ниже отрывком семизначной таблицы логарифмов, вычислить lg 52,34567 (применить арифмометр, так как точности линейки недостаточно).

x	$\lg x$	x	$\lg x$
51	1,7075702	56	1,7481880
52	1,7160033	57	1,7558749
53	1,7242759	58	1,7634280
54	1,7323938	59	1,7708520
55	1,7403627	60	1,7781513

3. Пользуясь приведенным ниже отрывком таблицы тангенсов, найти tg 80°42′ tg 83°20′; tg 86°10′.

x	$\operatorname{tg} x$	x	$\operatorname{tg} x$	x	$\operatorname{tg} x$
80°	5,67	82°30′	7,60	85°	11,43
80°30′	5,98	83°	8,14	85°30′	12,71
81°	6,31	83°30′	8,78	86°	14,30
81°30′	6,69	84°	9,51	86°30′	16,35
82°	7,11	84°30′	10,39	87°	19,08

§ 83. Интерполяционные формулы Стирлинга и Бесселя.

Применяя интерполяционные формулы Ньютона, мы пользуемся данными значениями функции, лежащими по одну сторону интервала (x_0, x_1), в котором производится интерполяция. Когда этот интервал находится близко к началу или к концу таблицы, эта особенность формул Ньютона является их достоинством. Если же по обе стороны интервала интерполяции имеется достаточно значений x_i и y_i, формулы Ньютона приходится признать не вполне подходящими, так как они используют или только последующие, или только предшествующие значения x_i и y_i. Если бы, имея на плоскости пять принадлежащих кривой точек $A_{-2}(x_{-2}, y_{-2})$; $A_{-1}(x_{-1}, y_{-1})$; $A_0(x_0, y_0)$; $A_1(x_1, y_1)$; $A_2(x_2, y_2)$ и желая построить эту кривую, чтобы интерполировать в интервале между A_0 и A_1, мы стали делать это, используя лишь точки A_0, A_1, A_2 и совершенно игнорируя точки A_{-2}, A_{-1}, мы заслужили бы упрек в том, что не используем всех данных. Но именно это и происходит при применении формул Ньютона для интерполирования в средних интервалах таблицы. Формулы Ньютона хороши, когда интервал интерполяции близок к началу или к концу таблицы; для других случаев нужны формулы, использующие и последующие, и предшествующие значения x_i и y_i — так называемые „интерполяционные формулы с центральными разностями". Рассмотрим важнейшие из них.

Пусть дано $2n+1$ пар значений x_i и y_i от x_{-n}, y_{-n} до x_n, y_n. Построим целую рациональную функцию, принимающую при данных значениях x_i соответствующие данные значения y_i и дающую наибольшие удобства интерполяции в интервале (x_0, y_0). Для этого возьмем опять сумму факториалов, но при их составлении будем брать значения x_i не в порядке их номеров, как мы это делали при выводе формулы $(\mathrm{N_I})$, а в следующем: сперва x_0 и x_1, потом x_{-1}, далее x_2, после этого x_{-2}, затем x_3 и x_{-3} и т. д. до x_n и x_{-n}. Применяя те же выкладки, что и при выводе формулы $(\mathrm{N_I})$, мы придем к *первой формуле Гаусса*:

$$F(x) = y_0 + \frac{1}{h}(x-x_0)\Delta y_0 + \frac{1}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 y_{-1} +$$
$$+ \frac{1}{3!\,h^3}(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\Delta^3 y_{-1} +$$
$$+ \frac{1}{4!\,h^4}(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta^4 y_{-2} +$$
$$+ \frac{1}{5!\,h^5}(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta^5 y_{-2} + \ldots$$

После замены переменной по формуле $x = x_0 + th$ эта формула Гаусса перепишется так:

$$F(x_0+th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{1}{2!}t(t-1)\Delta^2 y_{-1} + \frac{1}{3!}(t+1)t(t-1)\Delta^3 y_{-1} +$$
$$+ \frac{1}{4!}(t+1)t(t-1)(t-2)\Delta^4 y_{-2} +$$
$$\frac{1}{5!}(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)\Delta^5 y_{-2} + \ldots \qquad (\mathrm{G_I})$$

Заканчивается она членом с $\Delta^{2n} y_{-n}$.

Сейчас мы двигались по ряду значений x_i так: после шага вперед (от x_0 к x_1) шаг назад (от x_1 к x_{-1}) к ближайшему неиспользованному значению x_i и т. д. Делая сперва шаг назад (от x_0 к x_{-1}), а потом шаг вперед (от x_{-1} к x_1) и повторяя эту операцию (от x_1 к x_{-2}, затем от x_{-2} к x_2 и т. д.), мы получим тем же способом *вторую формулу Гаусса*, имеющую, если перейти от x к t, следующий вид:

$$F(x_0+th)=y_0+t\Delta y_{-1}+\frac{1}{2!}t(t+1)\Delta^2 y_{-1}+\frac{1}{3!}(t+1)t(t-1)\Delta^3 y_{-2}+$$
$$+\frac{1}{4!}(t+1)(t+1)t(t-1)\Delta^4 y_{-2}+$$
$$+\frac{1}{5!}(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)\Delta^5 y_{-3}+\ldots \qquad (\mathrm{G_{II}})$$

Формулы Гаусса на практике неупотребительны. Вместо них пользуются *формулой Стирлинга* (формула S), которая получается от почленного сложения формул ($\mathrm{G_I}$) и ($\mathrm{G_{II}}$) и деления результатов пополам. При этом выгодно ввести особые обозначения для полусумм разностей, одинаково удаленных от горизонтали, проведенной в разностной схеме через числа x_0, y_0: число $\frac{1}{2}(\Delta y_{-1}+\Delta y_1)$ обозначается знаком $\Delta y_{-0,5}$, число $\frac{1}{2}(\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2})$ знаком $\Delta^3 y_{-1,5}$ и т. д. При этих обозначениях формула S напишется так:

$$F(x_0+th)=y_0+t\Delta y_{-0,5}+\frac{1}{2!}t^2\Delta^2 y_{-1}+\frac{1}{3!}(t+1)t(t-1)\Delta^3 y_{-1,5}+$$
$$+\frac{1}{4!}(t+1)t^2(t-1)\Delta^4 y_{-2}+\frac{1}{5!}(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)\Delta^5 y_{-2,5}+$$
$$+\frac{1}{6!}(t+2)(t+1)t^2(t-1)(t-2)\Delta^6 y_{-3}+$$
$$+\frac{1}{7!}(t+3)(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)\Delta^7 y_{-3,5}+\ldots \qquad (\mathrm{S})$$

Если вписать только что введенные нами „дополнительные разности“ $\Delta y_{-0,5}$, $\Delta^3 y_{-1,5}$, $\Delta^5 y_{-2,5}$, ... в разностную схему между каждыми двумя разностями, полусуммами которых они являются, то окажется, что в формуле (S) используются разности (обыкновенные и дополнительные), записанные в схеме на той же горизонтали, что и числа x_0, y_0:

$$\begin{array}{llllllll}
x_{-3} & y_{-3} & & & & & & \\
 & & \Delta y_{-3} & & & & & \\
x_{-2} & y_{-2} & & \Delta^2 y_{-3} & & & & \\
 & & \Delta y_{-2} & & \Delta^3 y_{-3} & & & \\
x_{-1} & y_{-1} & & \Delta^2 y_{-2} & & \Delta^4 y_{-3} & & \\
 & & \Delta y_{-1} & & \Delta^3 y_{-2} & & \Delta^5 y_{-3} & \\
x_0 & y_0 & \Delta y_{-0,5} & \Delta^2 y_{-1} & \Delta^3 y_{-1,5} & \Delta^4 y_{-2} & \Delta^5 y_{-2,5} & \Delta^6 y_{-3} \\
 & & \Delta y_0 & & \Delta^3 y_{-1} & & \Delta^5 y_{-2} & \\
x_1 & y_1 & & \Delta^2 y_0 & & \Delta^4 y_{-1} & & \\
 & & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & & & \\
x_2 & y_2 & & \Delta^2 y_1 & & & & \\
 & & \Delta y_2 & & & & & \\
x_3 & y_3 & & & & & &
\end{array}$$

Наряду с формулой (S) употребительна также *формула Бесселя* („формула В“), в которой используются обыкновенные и дополнительные разности, записанные в разностной схеме на одной горизонтали с числом Δy_0. Дополнительные разности этой горизонтали определяются формулами:

$$y_{0,5}=\frac{1}{2}(y_0+y_1);\quad \Delta^2 y_{-0,5}=\frac{1}{2}(\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0);\quad \Delta^4 y_{-1,5}=$$
$$=\frac{1}{2}(\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1})$$

и т. д.

Для вывода формулы Бесселя возьмем формулу (G_{II}) и заменим в ней x_0 через $x_1=x_0+h$, а t через $t-1$. Тогда в левой части получим $F(x_0+h+th-h)=F(x_0+th)$, т. е. то же, что и раньше, в правой же части увеличатся на 1 все нижние значки у разностей (замена x_0 на x_1 равносильна тому, что мы спускаемся по схеме вниз на один интервал) и изменятся коэфициенты.

Полученную формулу

$$F(x_0+th)=y_1+(t-1)\Delta y_0+\frac{1}{2!}t(t-1)\Delta^2 y_0+$$
$$+\frac{1}{3!}t(t-1)(t-2)\Delta^3 y_{-1}+\frac{1}{4!}(t+1)t(t-1)(t-2)\Delta^4 y_{-1}+$$
$$+\frac{1}{5!}(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)\Delta^5 y_{-2}+\ldots$$

надо сложить почленно с формулой (G_{II}); вводя указанные выше дополнительные разности $y_{0,5}$, $\Delta^2 y_{-0,5}$, $\Delta^3 y_{-1,5}$, ... получим формулу Бесселя:

$$F(x_0+th)=y_{0,5}+(t-0,5)\Delta y_0+\frac{1}{2!}t(t-1)\Delta^2 y_{-0,5}+$$
$$+\frac{1}{3!}t(t-1)(t-0,5)\Delta^3 y_{-1}+\frac{1}{4!}(t+1)t(t-1)(t-2)\Delta^4 y_{-2,5}+$$
$$+\frac{1}{5!}(t+1)t(t-1)(t-2)(t-0,5)\Delta^5 y_{-2}+$$
$$+\frac{1}{6!}(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)\Delta^6 y_{-2,5}+\ldots,$$

которую чаще пишут в несколько ином виде, преобразуя первые члены $y_{0,5}+(t-0,5)\Delta y_0$ к виду $\frac{1}{2}(y_0+y_1)+t\Delta y_0-\frac{1}{2}(y_1-y_0)$ или y_0+ $+t\Delta y_0$, а именно:

$$F(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{1}{2!}t(t-1)\Delta^2 y_{-0,5}+$$
$$+\frac{1}{3!}t(t-1)(t-0,5)\Delta^3 y_{-1}+\frac{1}{4!}(t+1)t(t-1)(t-2)\Delta^4 y_{-1,5}+$$
$$+\frac{1}{5!}(t+1)t(t-1)(t-2)(t-0,5)\Delta^5 y_{-2}+$$
$$+\frac{1}{6!}(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)\Delta^6 y_{-2,5}+$$
$$+\frac{1}{7!}(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)(t-0,5)\Delta^7 y_{-3}+\ldots \quad \text{(B)}$$

Формула (B) принимает особенно простой вид при „интерполяции на середину“, т. е. при фазе $t=0{,}5$. Действительно, члены с разностями Δ^3, Δ^5, Δ^7 и т. д. при этом исчезают, и мы получаем следующую формулу:

$$F(x_0+0{,}5h)=y_0+0{,}5\Delta y_0-\frac{1}{8}\Delta^2 y_{-0,5}+$$
$$+\frac{3}{128}\Delta^4 y_{-1,5}-\frac{5}{1024}\Delta^6 y_{-2,5}+\ldots \qquad \text{(B bis)}$$

Если фаза не равна 0,5, но близка к 0,5, то хотя члены с разностями нечетного порядка и не исчезают, но значения их весьма малы, и формулой (B) пользоваться в этом случае выгоднее, чем какой-либо другой. Формула S, содержа множитель t в коэфициентах всех членов, начиная со второго, удобнее тогда, когда t ближе к 0, чем к 0,5.

Более детальное рассмотрение формул (N), (S), (B) показывает, что последние две формулы дают результаты точнее и с меньшими выкладками, чем формулы (N). Поэтому формулы (N) надо применять лишь тогда, когда формул (B) и (S) применять нельзя.

Резюмируя, приходим к следующему практическому правилу:

применять формулу (B), если интерполяция производится внутри таблицы при фазе t от 0,25 до 0,75;

применять формулу (S), если интерполяция производится внутри таблицы при фазе t от —0,25 до +0,25;

применять формулу (N_I), если интерполяция производится в начале таблицы и центральных разностей нехватает;

применять формулу (N_{II}), если интерполяция производится в конце таблицы и центральных разностей нехватает.

Вычислим по формулам (S) и (B) значение интеграла вероятности для $x=1{,}09$ и $x=1{,}19$ посредством таблицы на стр. 233. Приводим только выкладки (без пояснений).

Вычисление Φ (1,09).

$x_0=1{,}0$, $h=0{,}2$, $t=0{,}45$. Формула (B).

$$y_0=8427;\ \Delta y_0=676;\ \Delta^2 y_{-0,5}=-\frac{1}{2}(330+256)=-293;$$
$$\Delta^3 y_{-1}=74;\ \Delta^4 y_{-1,5}=\frac{1}{2}(28+2)=15;\ \Delta^5 y_{-2}=-26,\ \Delta^6 y_{-2,5}=0{,}2.$$
$$t=0{,}45;\ \frac{1}{2!}t(t-1)=-0{,}1238;\ \frac{1}{3!}t(t-1)(t-0{,}5)=0{,}00206;$$
$$\frac{1}{4!}(t+1)t(t-1)(t-2)=0{,}0232;$$
$$\frac{1}{5!}(t+1)t(t-1)(t-2)(t-0{,}5)=-0{,}000232;$$
$$\frac{1}{6!}(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)=0{,}00174;$$
$$10^4\cdot\Phi(1{,}09)=8427+304{,}_2+36{,}_3+0{,}_1+0{,}_3+0{,}_0+$$
$$+0{,}_0=8767{,}_9;\ \mathbf{\Phi(1{,}09)=0{,}8768.}$$

Вычисление Φ (1,19).

$$x_0 = 1{,}2,\ h = 0{,}2,\ t = -0{,}05. \text{ Формула (S)}.$$

$$y_0 = 9103;\ \Delta y_{-0,5} = \frac{1}{2}(676 + 420) = 548;\ \Delta^2 y_{-1} = -256;$$

$$\Delta^3 y_{-1,5} = \frac{1}{2}(74 + 76) = 75;\ \Delta^4 y_{-2} = 2,$$

$$\Delta^5 y_{-2,5} = \frac{1}{2}(-26 - 10) = -18;\ \Delta^6 y_{-3} = 0{,}2;$$

$$t = -0{,}05;\ \frac{1}{2!}t^2 = 0{,}00125;\ \frac{1}{3!}(t+1)t(t-1) = +0{,}00827;$$

$$\frac{1}{4!}(t+1)t^2(t-1) = 0{,}00827 \cdot \frac{-0{,}05}{4} = -0{,}0001034;$$

$$\frac{1}{5!}(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2) = 0{,}00827 \cdot \frac{-3{,}9925}{20} =$$

$$= -0{,}00165;\ \frac{1}{6!}(t+2)(t+1)t^2(t-1)(t-2) =$$

$$= 0{,}00165 \cdot \frac{0{,}05}{6} = 0{,}0000137;$$

$$10^4\Phi(1{,}19) = 9103 - 27{,}_4 - 0{,}_3 + 0{,}_6 - 0{,}_0 + 0{,}_0 + 0{,}_0 = 9075{,}_9;$$

$$\mathbf{\Phi(1{,}19) = 0{,}9076.}$$

Как видим, наибольший труд при интерполяции с высшими разностями требуется для вычисления коэфициентов. Труд этот может быть значительно облегчен, если под руками имеется таблица этих коэфициентов. Такие таблицы можно найти в книге Зандена, „Элементы прикладного анализа“, ГТТИ, 1932, в сборниках таблиц проф. М. Ф. Субботина, „Формулы и таблицы для вычисления орбит и эфемерид“, Ташкент, 1929; академика С. П. Глазенапа, „Математические и астрономические таблицы“, Академия наук СССР, 1932 и др.

Упражнения.

1. Пользуясь таблицей и схемой, составленной при выполнении упражнения 3, § 81, найти $\sin 32°$ и $\sin 36°$.

2. По значениям $\lg x$, приведенным в таблице упражнения 2, § 82, найти $\lg 54{,}5$ и $\lg 54{,}9$.

3. Найти $\mathrm{tg}\, 83°10'$ и $\mathrm{tg}\, 83°25'$ посредством значений $\mathrm{tg}\, x$, приведенных в упражнении 3, § 82.

§ 84. Некоторые применения интерполяционных формул.

1°. *Погрешность линейной интерполяции и условие ее допустимости.*

Допустим, что мы имеем таблицу значений функции y аргумента x со ступенью h, причем уже вторые разности могут быть приняты за постоянные, а третьи и высшие разности можно, следовательно, вовсе отбросить. Интерполяционная формула Ньютона (N_I) принимает тогда следующий вид:

$$F(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{1}{2}t(t-1)\Delta^2 y_0.$$

Если мы отбросим здесь последний член правой части, то придем к формуле линейной интерполяции:

$$F(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0,$$

допуская при этом погрешность, равную $\frac{1}{2}t(t-1)\Delta^2 y_0$. При изменении t от $-0{,}5$ до $+0{,}5$ коэфициент $\frac{1}{2}t(t-1)$ сперва убывает от $+0{,}125$ до 0, затем возрастает от 0 до 0,125 (при дальнейшем возрастании t от $+0{,}5$ до $+1$ он снова убывает до 0). Поэтому наибольшее абсолютное значение погрешности формулы линейной интерполяции есть $0{,}125\,|\Delta^2 y_0|$. Если поставить требование, чтобы формула линейной интерполяции давала погрешность не выше 0,5 (в единицах разряда последней цифры табличных значений y), то окажется, что пользоваться ею можно только тогда, когда $|\Delta^2 y_0| \leqq 4$. В этом и заключается условие допустимости линейной интерполяции, указанное в § 11.

Если $|\Delta^2 y_0| > 4$, надо либо интерполировать с высшими разностями, либо ограничиваться меньшим числом десятичных знаков в значениях y, округляя их так, чтобы $|\Delta^2 y_0|$ выражалось числом, не большим 4 единиц разряда последней цифры. Так, рассматривая таблицу кубических корней чисел 1—99 в сборнике „Четырехзначных математических таблиц" В. Брадиса, изд. 1935 г., стр. 17, убеждаемся, что в начале таблицы линейная интерполяция возможна лишь при округлении до десятых, а в конце таблицы она дает хорошие результаты даже в десятитысячных долях: при $x_0=1$ $\Delta^2 y_0=0{,}18333$, а при $x_0=90$ $\Delta^2 y_0=$ $=0{,}00012$.

2°. *Субтабулирование.*

Если, располагая таблицей значений функции y, зависящей от аргумента x, мы находим ступень этой таблицы h по тем или иным причинам слишком большой и желаем составить таблицу той же функции с меньшей ступенью $\frac{h}{m}$, где m — некоторое положительное целое число (например, если желаем сделать возможной линейную интерполяцию), то это *субтабулирование* выгодно вести на основе найденных выше интерполяционных формул.

Если ступень первоначальной таблицы надо уменьшить вдвое, то проще всего воспользоваться *формулой интерполяции на середину* (B bis), приведенной на стр. 242. Положим, мы имеем таблицу интеграла вероятности $\Phi(x)$ со ступенью $h=0{,}2$ и желаем построить таблицу значений $\Phi(x)$ со ступенью 0,1. Пользуясь формулой (B bis) и схемой стр. 233, имеем:

$$\Phi\left(x_0+\frac{1}{2}h\right)=y_0+\frac{1}{2}\Delta y_0-\frac{1}{8}\Delta^2 y_{-0,5}+\frac{3}{128}\Delta^4 y_{-1,5}$$

(член $-\frac{5}{1024}\Delta^6_{-2,5}=-\frac{5}{1024}\cdot 0{,}2$ отбрасываем, как далеко недостигающий десятой доли единицы разряда последней цифры):

$$10^4\cdot\Phi(0{,}5)=4284+\frac{1}{2}\cdot 1755-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(-302-373)+\frac{3}{128}\cdot\frac{1}{2}(68+61)$$

$$=4284+877{,}_5+42{,}_2+1{,}_5$$

$$=5205{,}_5 \qquad \Phi(0{,}5)=0{,}5205$$

$$10^4\cdot\Phi(0{,}7)=6039+691{,}_0+46{,}_8+1{,}_3=6778{,}_1 \qquad \Phi(0{,}7)=0{,}6778$$

$$10^4\cdot\Phi(0{,}9)=7421+503{,}_0+44{,}_1+0{,}_9=7969{,}_0 \qquad \Phi(0{,}9)=0{,}7969$$

и т. д.

При вычислении значений Φ (0,1) и Φ (0,3) центральных разностей нехватает. Можно воспользоваться формулой (N_I), но проще *экстраполировать* разности вверх, пользуясь подмеченным постоянством разности $\Delta^6 y$ (стр. 233), среднее значение которой есть 0,2. Полагая $\Delta^6 y = 0$, находим одними сложениями и вычичаниями разности, подчеркнутые в нижеприведенной схеме:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0,0	0,0000		+16		47		
		2227		−186		7	
0,2	0,2227		−170		54		0
		2057		−132		7	
0,4	0,4284		−302		61		0
		1755		−71		7	
0,6	0,6039		−373		68		
		1382		−3			
08,	0,7421		−376				
		1006					
1,0	0,8427						

Хотя экстраполирование дает результаты вообще мало надежные, но в настоящем случае экстраполированные разности приходится умножать на малые коэфициенты, а потому окончательные результаты оказываются удовлетворительными:

$10^4 \cdot \Phi(0{,}1) = 0000 + 1113{,}5 + 9{,}_6 + 1{,}_2 = 1124{,}_3$ $\qquad \Phi(0{,}1) = 0{,}1124$ (табличное значение 0,11246)

$10^4 \cdot \Phi(0{,}3) = 2227 + 1028{,}_5 + 29{,}_5 + 1{,}_3 = 3286{,}_3$ $\qquad \Phi(0{,}3) = 0{,}3286$ (табличное значение 0,32863)

Повторяя интерполяцию на середину несколько раз, мы можем уменьшить ступень таблицы в 2, 4, 8, 16 и т. д. раз. Однако здесь выгоднее применить другой способ, основанный на применении формул, выражающих разности различных порядков при уменьшенной в определенное число раз ступени через разности при первоначальной ступени.

Пусть ступень имеющейся таблицы есть h, и мы желаем построить таблицу той же функции при ступени в m раз меньшей. Обозначим начальные разности таблицы (т. е. первые числа каждого столбца) при ступени h, как обычно, через $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \ldots$ и предположим, что все разности 5-го порядка постоянны и что все разности 6-го порядка и выше, следовательно, нули. Начальные разности таблицы той же функции при ступени $\frac{h}{m}$ и при том же начальном значении x_0 обозначим символами $\delta y_0, \delta^2 y_0, \delta^3 y_0, \delta^4 y_0, \delta^5 y_0$ (разности 5-го порядка в силу сделанного предположения постоянны). Значение $F(x) = F(x_0 + th)$ можно выразить посредством формулы Ньютона и через разности $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \ldots$ и через разности $\delta y_0, \delta^2 y_0, \delta^3 y_0, \ldots$, но во втором случае надо будет, чтобы компенсировать уменьшение ступени в m раз, во столько же раз увеличить фазу t $\left(\text{в силу соотношения } x_0 + th = x_0 + tm \cdot \frac{h}{m}\right)$. Получаем тождество:

$$\begin{aligned}
&y_0 + t\Delta y_0 + \frac{1}{2!} t(t-1)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!} t(t-1)(t-2)\Delta^3 y_0 + \\
&+ \frac{1}{4!} t(t-1)(t-2)(t-3)\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5!} t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\Delta^5 y_0 = \\
&= y_0 + tm\delta y_0 + \frac{1}{2!} tm(tm-1)\delta^2 y_0 + \frac{1}{3!} tm(tm-1)(tm-2)\delta^3 y_0 + \\
&+ \frac{1}{4!} tm(tm-1)(tm-2)(tm-3)\delta^4 y_0 + \\
&+ \frac{1}{5!} tm(tm-1)(tm-2)(tm-3)(tm-4)\delta^5 y_0.
\end{aligned} \qquad -1)$$

Полагая в нем последовательно $t = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \frac{4}{m}, \frac{5}{m}$, выведем из него пять равенств, из которых легко найти следующие выражения δy_0, $\delta^2 y_0, \ldots$ через Δy_0, $\Delta^2 y_0, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\delta y_0 &= \frac{1}{m}\Delta y_0 - \frac{m-1}{2m^2}\Delta^2 y_0 + \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^3}\Delta^3 y_0 - \\
&- \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{24m^4}\Delta^4 y_0 + \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)(4m-1)}{120m^5}\Delta^5 y_0; \\
\delta^2 y_0 &= \frac{1}{m^2}\Delta^2 y_0 - \frac{m-1}{m^3}\Delta^3 y_0 + \frac{(m-1)(11m-7)}{12m^4}\Delta^4 y_0 - \\
&- \frac{(m-1)(2m-1)(5m-3)}{12m^5}\Delta^5 y_0; \\
\delta^3 y_0 &= \frac{1}{m^3}\Delta^3 y_0 - \frac{3(m-1)}{2m^4}\Delta^4 y_0 + \frac{(m-1)(7m-5)}{4m^5}\Delta^5 y_0; \\
\delta^4 y_0 &= \frac{1}{m^4}\Delta^4 y_0 - \frac{2(m-1)}{m^5}\Delta^5 y_0; \\
\delta^5 y_0 &= \frac{1}{m^5}\Delta^5 y_0.
\end{aligned} \tag{I}$$

Зная начальные значения разностей новой схемы и пользуясь постоянством 5-х разностей, легко (одними сложениями и вычитаниями) строим всю эту схему и получаем искомые промежуточные значения функции. Так как разности новой схемы значительно меньше разностей первоначальной схемы, то в новой схеме возможно бывает принять за постоянные разности низшего порядка, чем 5-го, что существенно упростит выкладки. Надо только иметь в виду неизбежное накопление погрешностей и вести вычисление с запасными цифрами.

Рассмотрим пример субтабулирования при $m = 10$. Из написанных выше формул получаем для этого случая:

$$\begin{aligned}
\delta y_0 &= 0{,}1\Delta y_0 - 0{,}045\Delta^2 y_0 + 0{,}0285\Delta^3 y_0 - 0{,}0206625\Delta^4 y_0 + 0{,}01611675\Delta^5 y_0 \\
\delta^2 y_0 &= 0{,}01\Delta^2 y_0 - 0{,}009\Delta^3 y_0 + 0{,}007725\Delta^4 y_0 - 0{,}0066975\Delta^5 y_0 \\
\delta^3 y_0 &= 0{,}001\Delta^3 y_0 - 0{,}00135\Delta^4 y_0 + 0{,}0014625\Delta^5 y_0 \\
\delta^4 y_0 &= 0{,}0001\Delta^4 y_0 - 0{,}00018\Delta^5 y_0 \\
\delta^5 y_0 &= 0{,}00001\Delta^5 y_0
\end{aligned} \tag{II}$$

Задача. Имея таблицу девятизначных десятичных логарифмов чисел от 1500 до 1570 через 10, составить таблицу девятизначных же логарифмов чисел от 1500 до 1570 через 1.

Составим схему для первоначальной таблицы:

x	$y = \lg x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1500	3,176091259					
		2885688				
1510	3,178976947		— 19047			
		2866641		249		
1520	3,181843588		— 18798		— 4	
		2847843		245		— 1
1530	3,184691431		— 18553		— 5	
		2829290		240		+ 1
1540	3,187520721		— 18313		— 4	
		2810977		236		— 1
1550	3,190331698		— 18077		— 5	
		2792900		231		
1560	3,193124598		— 17846			
		2775054				
1570	3,195899652					

Четвертые разности, как видим, можно считать постоянными (среднее значение $\Delta^4 y = -4{,}5$), а пятые и выше — нулями.

Вычисляем δy_0, $\delta^2 y_0$, $\delta^3 y_0$, $\delta^4 y_0$ по формулам (II), сохраняя в δy_0 один запасной (десятый) десятичный знак, в $\delta^2 y_0$ и $\delta^3 y_0$ по два запасных знака, в $\delta^4 y$ три запасных знака.

$$\delta^4 y_0 = 0{,}0001 \cdot (-4{,}5) = -0{,}00045 \approx 0;$$

$$\delta^3 y_0 = 0{,}001 \cdot 249 - 0{,}00135 \cdot (-4) = 0{,}2544 \approx 0{,}25;$$

$$\delta^2 y^0 = 0{,}01 \cdot (-19047) - 0{,}009 \cdot 249 + 0{,}007725 \cdot (-4) = -192{,}74;$$

$$\delta y_0 = 0{,}1 \cdot 2885688 - 0{,}045 \cdot (-19047) + 0{,}0285 \cdot 249 - 0{,}0206625 \cdot (-4) = 289433{,}1.$$

Теперь приступаем к заполнению приведенной ниже схемы, записывая сперва начальные разности всех столбцов, затем все остальные числа каждого столбца, начиная с последнего и двигаясь справа налево. Совпадение последнего числа в столбце y (после его округления до 9 знаков) с данным значением lg 1510 дает достаточный контроль правильности всего вычисления. Справа для сравнения приведены последние две цифры десятизначных логарифмов, взятых по готовой более точной таблице. Как видим, округляя полученные нами интерполированные логарифмы до 9 десятичных знаков, мы получаем либо табличные их значения, либо значения, отличающиеся от табличных на единицу разряда последнего знака:

x	$(y-3)\cdot 10^9$	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	Табличный 10-значный lg оканчивается цифрами:
1500	176091259,0	289433,1			91
1501	176380692,1	289240,4	$-192{,}74$		22
1502	176669932,5	289047,9	$-192{,}49$	0,25	27
1503	176958980,4	288855,6	$-192{,}24$	0,25	06
1504	177247836,0	288663,6	$-191{,}99$	0,25	63
1505	177536499,6	288471,9	$-191{,}74$	0,25	99
1506	177824971,5	288230,4	$-191{,}49$	0,25	19
1507	178113251,9	288089,2	$-191{,}24$	0,25	23
1508	178401341,1	287898,2	$-190{,}99$	0,25	15
1509	178689239,3	287707,4	$-190{,}74$	0,25	98
1510	178976946,7				73

Чтобы продолжать вычисление, надо вновь вычислить δy_0, $\delta^2 y_0$, $\delta^3 y_0$, $\delta^4 y_0$, взяв за x_0 число 1510.

3°. *Обратная интерполяция.*

Как известно, задачей обратной интерполяции называется задача разыскания значения аргумента x, соответствующего данному значению $y=f(x)$; если это последнее содержится в таблице, нам остается только выписать из таблицы соответствующее значение аргумента; если же этого значения y в таблице нет, надо искать значение $x=x_0+th$, где x_0 — ближайшее к искомому табличное значение аргумента, вычисляя фазу t, как корень уравнения:

$$y=y_0+t\Delta y_0+\frac{1}{2!}t(t-1)\Delta^2 y_0+\frac{1}{3!}t(t-1)(t-2)\Delta^3 y_0+\ldots \qquad \text{(III)}$$

Уравнение это оканчивается членом, содержащим ту разность, которую в разностной схеме принимаем за постоянную. Вместо формулы ($\mathrm{N_I}$), которой мы сейчас воспользовались, можно взять любую другую интерполяционную формулу.

Так как члены первой части уравнения (III) обычно быстро убывают, то уравнение это удобнее всего решать по способу итерации (§ 77), переписав его в виде

$$t=\frac{1}{\Delta y_0}\left[(y-y_0)-\frac{1}{2!}t(t-1)\Delta^2 y_0-\frac{1}{3!}t(t-1)(t-2)\Delta^3 y_0-\ldots\right] \qquad \text{(IV)}$$

и взяв в качестве исходного значения $t=0$, что дает первое приближение $t_1=(y-y_0):\Delta y_0$. Подставив t_1 в уравнение (IV), получаем t_2, которое снова подставляем и получаем t_3 и т. д. Вычисление ведем до „стабилизации" процесса, т. е. до тех пор, пока не получим совпадения некоторого приближения с предшествующим ему. В значениях t_1, t_2, t_3,... находим столько значащих цифр, сколько их имеет первая разность Δy_0 плюс одна. Отдельные члены в скобке второго рода вычисляем с числом десятичных знаков, на единицу большим числа десятичных знаков в табличных значениях y_0, y_1, y_2,...

Покажем применение этого способа на примере.

Задача. Имея таблицу значений интеграла вероятностей $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-x^2}dx$, вычисленных с 4 десятичными знаками для значений x от 0 до 1 через 0,1, найти то значение x, при котором $\Phi(x) = 0{,}5$, или так называемую „вероятную ошибку".

Составив разностную схему, убеждаемся, что значение 4-й разности можно считать постоянным и равным 4. Искомое значение x немного меньше 0,5, а потому применяем формулу Стирлинга, приняв $x_0 = 0{,}5$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,0	0,0000				
		1125			
0,1	0,1125		−23		
		1102		−20	
0,2	0,2227		−43		2
		1059		−18	
0,3	0,3286		−61		2
		998		−16	
0,4	0,4284		−77		6
		921		−10	
0,5	0,5205		−87		2
		834		−8	
0,6	0,6039		−95		7
		739		−1	
0,7	0,6778		−96		2
		643		+1	
0,8	0,7421		−95		4
		548		+5	
0,9	0,7969		−90		
		458			
1,0	0,8427				

$10^4 \cdot y_0 = 5205$

$10^4 \cdot \Delta y_{-0,5} = \frac{1}{2}(921 + 834) = 877{,}5$

$10^4 \cdot \Delta^2 y_{-1} = -87$

$10^4 \cdot \Delta^3 y_{-1,5} = \frac{1}{2}(-8 - 10) = -9$

$10^4 \cdot \Delta^4 y_{-2} = 4$

Среднее

$\Delta^4 y = 4$

Приходим к уравнению:

$$\Phi(x_0 + th) = \Phi(0{,}5 + t \cdot 0{,}1) = 0{,}5,$$

или

$$5000 = 5205 + 877{,}_5 t - 43{,}_5 t^2 + (t^3 - t)(-1{,}_5) + \frac{1}{6}(t^4 - t^2),$$

откуда

$$t = \left[-205 - 1{,}_5 t + 43{,}_7 t^2 + 1{,}_5 t^3 - \frac{1}{6}t^4\right] : 877{,}_5.$$

Интегрируя при исходном значении $t = 0$ и производя выкладки посредством линейки, получаем последующие приближения:

$t_1 = -205 : 8770{,}_5 = -0{,}2336$

$t_2 = [-205 + 0{,}_4 - 2{,}_3 + 0{,}_0 - 0{,}_0] : 877{,}_5 = -202{,}_3 : 877{,}_5 = -0{,}230_5$

$t_3 = [-205 + 0{,}_3 + 2{,}_3 + 0{,}_0 - 0{,}_0] : 877{,}_5 = -202{,}_4 : 877{,}_5 = -0{,}230_6$

$t_4 = [-205 + 0{,}_3 + 2{,}_3 + 0{,}_0 - 0{,}_0] : 877{,}_5 = -202{,}_4 : 877{,}_5 = -0{,}230_6$

В делителе $877{,}_5$ мы имеем лишь три надежные значащие цифры, а потому в полученном значении $t_4 = -0{,}230_6$ четвертая значащая цифра ненадежна, и мы должны взять $t = -0{,}231$, что дает искомый $x = x_0 + th = 0{,}5 - 0{,}231 \cdot 0{,}1 = 0{,}4769$ (более точное значение вероятной ошибки 0,47693627...).

При всей простоте рассмотренного способа он требует весьма тягостных выкладок, и нередко бывает выгоднее произвести субтабулирование, добившись равномерного или почти равномерного роста функции y, а затем выполнить обратную линейную интерполяцию.

Отметим в заключение, что всякую задачу решения уравнения $F(x)=0$ можно рассматривать как задачу обратной интерполяции и решать ее, как показано выше, составив предварительно таблицу значений функции $F(x)$ для значений x, близких к искомому корню.

Упражнения.

1. Взяв таблицу $\lg \sin x$ и $\lg \operatorname{tg} x$ со ступенью $h=0°,1=6'$, выяснить, с каким числом десятичных знаков возможна линейная интерполяция при значениях x, близких к $0°$.

Тот же вопрос относительно начала и конца таблицы натуральных тангенсов (x близок к $0°$ и x близок к $90°$).

2. Взяв таблицу кубических корней, вычисленных с 4 десятичными знаками, для чисел от 10 до 20 через 1, составить таблицу кубических корней чисел от 10 до 20 через 0,5 (интерполируя на середину), а затем через 0,1 (используя формулу I).

3. Имея следующую табличку значений гиперболического синуса

x	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
$\sin \operatorname{hyp} x$	6,0502	6,6947	7,4063	8,1919	9,0596	10,0179

найти то значение x, при котором гиперболический синус равен 6,5, сперва основываясь на формуле Ньютона и применяя способ итерации, затем субтабулируя до получения возможности применить обратную линейную интерполяцию.

§ 85. Эмпирические функции. Построение интерполяционных формул по способу наименьших квадратов.

На практике мы нередко встречаемся с такой задачей: известно аналитическое выражение функции y в зависимости от аргумента x, но неизвестны значения k постоянных параметров, входящих в это выражение; найти эти параметры, имея несколько пар значений аргумента x_i и функции $y_i\ (i=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n)$.

Если число этих пар данных значений n равно числу неизвестных параметров k, вопрос сводится к решению системы n уравнений с n неизвестными. Но обычно эти значения получаются из опыта в количестве, превосходящем число параметров, причем значения эти не вполне точны, как вследствие неизбежных погрешностей измерения, так и вследствие того, что явление обычно протекает не в том „чистом" виде, какой предполагался при выводе соответствующего аналитического выражения, а осложняется различными побочными „случайными" явлениями, влияние которых желательно исключить. Простое отбрасывание лишних уравнений нецелесообразно, так как оно было бы равносильно игнорированию некоторых данных опыта. Поэтому мы получаем, строго говоря, несовместную систему из n уравнений с k неизвестными, причем $n>k$, и надо подобрать такие значения неизвестных, которые *по возможности лучше* удовлетворяли бы всем уравнениям. В такой постановке задача страдает некоторой неопределенностью: что значит „по возможности лучше"? Неопределенность эта устраняется, если потребовать, чтобы значения неизвестных давали (по подстановке их в данные уравнения) *минимальное значение суммы квадратов разностей левых и правых частей всех уравнений.* Окончательно задача построения интерполяционных формул по этому *методу наименьших квадратов* формулируется так: даны n уравнений $y_i=f(x_i,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\dots,\ a_k)$, где $i=1,\ 2,\dots,\ n$, причем числа x_i и y_i даны, числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_k$ подлежат определению

$(n>k)$; найти такие значения этих неизвестных, при которых сумма $S=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i,\ a_1,\ a_2,\ldots,a_k)-y_i]^2$ получает наименьшее значение.

Эту сумму S называют „суммой квадратов остающихся погрешностей".

Если аналитическое выражение функции неизвестно, то делают различные *гипотезы*, руководствуясь общим характером хода изменения функции, и выбирают более или менее произвольно одно или несколько таких выражений. Установив по способу наименьших квадратов их коэфициенты, находят для каждого из этих выражений сумму квадратов остающихся погрешностей S и сравнивают результаты. Если два выражения с одним и тем же числом параметров дают различные значения S, предпочитают, естественно, как более точное, то, которое дает меньшее S. Если два выражения с различным числом параметров дают одно и то же значение S, то предпочитают, как более простое, то, которое имеет меньше параметров.

Покажем, как найти значения параметров в случае, когда рассматриваемая функция — целая рациональная второй степени (в случае целой рациональной функции любой степени весь ход вычисления остается по существу тот же). Итак, имеется функция $y=a+bx+cx^2$ и известны n пар значений аргумента и функции x_i, y_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$; найти такие значения трех коэфициентов a, b, c, при которых сумма $S=\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i+cx_i^2-y_i)^2$ достигает минимального своего значения.

Если давать коэфициентам a, b, c различные значения, сумма S будет их функцией. По известным из диференциального исчисления правилам находим ее минимум:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=2\sum(a+bx_i+cx_i^2-y_i)=2\left[an+b\sum x_i+c\sum x_i^2-\sum y_i\right].$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=2\sum(a+bx_i+cx_i^2-y_i)\cdot x_i=2\left[a\sum x_i+b\sum x_i^2+c\sum x_i^3-\sum x_iy_i\right].$$

$$\frac{\partial S}{\partial c}=2\sum(a+bx_i+cx_i^2-y_i)\cdot x_i^2=2\left[a\sum x_i^2+b\sum x_i^3+c\sum x_i^4-\sum x_i^2y_i\right].$$

Приравнивая эти частные производные нулю, получаем систему трех линейных (относительно трех неизвестных a, b, c) уравнений:

$$an+b\sum x_i+c\sum x_i^2=\sum y_i.$$
$$a\sum x_i+b\sum x_i^2+c\sum x_i^3=\sum x_iy_i.$$
$$a\sum x_i^2+b\sum x_i^3+c\sum x_i^4=\sum x_i^2y_i.$$

Эти три уравнения носят название „нормальных" уравнений. Решая их, мы и получим искомые значения a, b, c. В случае линейной функции $y=a+bx$ мы тем же путем получили бы два нормальных уравнения:

$$an+b\sum x_i=\sum y_i,\quad a\sum x_i+b\sum x_i^2=\sum x_iy_i.$$

В общем случае, имея функцию степени $k-1$ с k коэфициентами, мы получим систему из k нормальных уравнений.

Рассмотрим пример.

Задача 1. Даны шесть значений аргумента x_i и соответствующие значения функции y_i, приведенные ниже в двух первых столбцах схемы. Указать наилучшее приближенное представление этой функции посредством трехчлена $a+bx+cx^2$.

Составляем и заполняем схему, дающую значения коэфициентов нормальных уравнений, и решаем эти последние. Найдя значения a, b, c, вычисляем для проверки значения $f(x_i)$ по формуле $f(x_i)=a+bx_i+cx_i^2$ и сравниваем их с данными значениями y_i; в заключение вычисляем сумму $S=\sum \varepsilon_i^2$ (см. последние столбцы схемы).

i	x_i	y_i	x_iy_i	$x_i^2y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$a+bx_i$	cx_i^2	$f(x_i)$	$\varepsilon_i = f(x_i)-y_i$	$10^8\varepsilon_i^2$
1	2,0	0,3010	0,60200	1,204000	4,00	8,000	16,0000	0,4442593	−0,1430476	0,3012	+0,0002	4
2	2,2	0,3424	0,75328	1,657216	4,84	10,648	23,4256	0,5151655	−0,1730876	0,3421	−3	9
3	2,4	0,3802	0,91248	2,189952	5,76	13,824	33,1776	0,5860617	−0,2059885	0,3801	−1	1
4	2,6	0,4150	1,07900	2,805400	6,76	17,576	45,6976	0,6569579	−0,2417504	0,4152	+2	4
5	2,8	0,4472	1,25216	3,506048	7,84	21,952	61,4656	0,7278541	−0,2803733	0,4475	+3	9
6	3,0	0,4771	1,43130	4,293900	9,00	27,000	81,0000	0,7987402	−0,3218571	0,4769	−2	4
Σ	15,0	2,3629	6,03022	15,656516	38,20	99,000	860,7664				$S=31\cdot10^{-8}$	

$$6a+15b+38{,}20c=2{,}3629.$$

$$15a+38{,}20b+99{,}000c=6{,}03022.$$

$$38{,}20a+99{,}000b+260{,}7664c=15{,}656516.$$

$$a+2{,}50000000b+6{,}366666667c=0{,}3938166667.$$

$$a+2{,}54666667b+6{,}600000000c=0{,}4020146667.$$

$$a+2{,}59162300b+6{,}826345550c=0{,}4098564398.$$

$$0{,}04666667b+0{,}233333333c=0{,}0081980000. \qquad b+5{,}0000000c=0{,}17567142.$$

$$0{,}044956330b+0{,}226345550c=0{,}0078417731. \qquad b+5{,}0347871c=0{,}17443090.$$

$$0{,}0347871c=-0{,}001244052. \quad c=-0{,}0357619. \quad b=0{,}3544809. \quad a=-0{,}2647025.$$

$$f(x)=-0{,}2647025+0{,}3544809x-0{,}0357619x^2.$$

$$\boxed{f(x)=-0{,}26470+0{,}354481x-0{,}035762x^2}$$

Взятые в этой задаче значения y_i представляют собой не что иное, как значения функции $\lg x_i$, и мы выполнили, таким образом, *аппроксимацию* этой функции для промежутка от $x=2$ до $x=3$ посредством многочлена второй степени.

Если функция $f(x, a, b, c, \ldots)$, числовые параметры которой определяются по способу наименьших квадратов, не есть целая рациональная функция, то предварительно разыскиваются приближенные значения a_0, b_0, $c_0, \ldots$ параметров a, b, $c, \ldots$, что можно сделать одним из рассмотренных в § 86 способов, а затем по способу наименьших квадратов определяются поправки $\alpha=a-a_0$, $\beta=b-b_0$, $\gamma=c-c_0, \ldots$, причем $f(x, a, b, c, \ldots)$ преобразуется в линейную функцию этих поправок (посредством разложения в ряд по степеням α, β, $\gamma, \ldots$ и отбрасывания всех членов, содержащих степени этих поправок выше первой). Поясним сказанное примером.

Задача 2. Предполагая между x и y зависимость вида $y=a\sin bx$, найти наилучшие значения параметров a и b, если известно, что

при x ...	3°	37°	70°	86°	95°	130°	170°
y ...	0,18	1,97	3,22	3,55	3,64	3,36	1,90

Нанося точки с коэфициентами x_i, y_i $(i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ на миллиметровую бумагу, замечаем, что плавная кривая, проходящая через все эти точки, действительно напоминает синусоиду с вершиной в точке, ордината которой есть приблизительно 3,7. Полагая $a_0 = 3{,}7$, находим значение второго параметра b_0 из уравнения $1{,}90 = 3{,}7 \sin(b_0 \cdot 170°)$, соответствующего одной из точек графика (мы взяли точку с максимальной абсциссой $x = 170°$). Имеем $170° \cdot b_0 = 180° - \arcsin \frac{1{,}9}{3{,}7} = 180° - 30°56'$ (так как угол $170° \cdot b_0$, очевидно, тупой), откуда $170° \cdot b_0 = 149°4' = 149°{,}1$; $b_0 = 0{,}878$.

Итак, в качестве первого приближения имеем функцию $f_0(x) = a_0 \sin b_0 x$, где $a_0 = 3{,}7$, $b_0 = 0{,}878$. Полагая $a = a_0 + \alpha$, $b = b_0 + \beta$, разлагаем $f(x) = a \sin bx$ в ряд по степеням α и β и, ограничиваясь линейными членами (относительно α и β), получаем:

$$f(x) = f(x, a, b) = f(x, a_0 + \alpha, b_c + \beta) = f(x, a_0, b_0) + \alpha \frac{\partial f}{\partial a} + \beta \frac{\partial f}{\partial b} =$$

$$= a_0 \sin b_0 x + \alpha \sin b_0 x + \frac{\pi a_0 x}{180} \beta \cos b_0 x.$$

Множитель $\frac{\pi}{180}$ появился при диференцировании синуса из-за того, что известная формула $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ выведена в предположении, что угол u выражен в радианах, у нас же угол $b_0 x$ выражен в градусах. Переходя от градусов к радианам, имеем $\sin bx = \sin \frac{bx\pi}{180}$, и диференцирование по b дает $\frac{\pi x}{180} \cos \frac{bx\pi}{180} = \frac{\pi x}{180} \cos bx$.

Введем для краткости обозначения $\varepsilon_i = f(x_i) - y_i = A_i \alpha + B_i \beta + C_i$, где $A_i = \sin b_0 x_i$; $B_i = \frac{\pi a_0 x_i}{180} \cos b_0 x_i$; $C_i = a_0 \sin b_0 x_i - y_i$, и возьмем функцию

$$S = S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{7} (A_i \alpha + B_i \beta + C_i)^2.$$

Приравнивая нулю ее частные производные по α и β, получим нормальные уравнения:

$$\alpha \sum A_i^2 + \beta \sum A_i B_i + \sum A_i C_i = 0;$$

$$\alpha \sum A_i B_i + \beta \sum B_i^2 + \sum B_i C_i = 0.$$

Вычисляем их коэфициенты:

i	x_i	$b_0 x_i$	$A_i = \sin b_0 x_i$	$\cos b_0 x_i$	$B_i = \frac{\pi a_0 x_i}{180} \cos b_0 x_i$	$a_0 \sin b_0 x_i$	$C_i = a_0 \sin b_0 x_i - y_i$	A_i^2	$A_i B_i$	$A_i C_i$	$B_i C_i$	B_i^2
1	3°	2°38'	0,0460	0,9990	0,1937	0,1702	−0,0098	0,0021	0,0089	−0,0005	−0,0019	0,0375
2	37°	32°29'	0,5371	0,8436	2,0158	1,9873	+0,0173	0,2885	1,0827	+0,0093	+0,0349	4,0634
3	70°	61°28'	0,8785	0,4777	2,1593	3,2504	+0,0304	0,7718	1,8969	+0,0267	+0,0656	4,6626
4	86°	75°30'	0,9681	0,2504	1,3906	3,5820	+0,0320	0 9372	1,3462	+0,0310	+0,0445	1,9338
5	95°	83°25'	0,9934	0,1152	0,7074	3,6756	+0,0356	0,9868	0,7027	+0 0354	+0,0252	0,5004
6	130°	114°8'	0,9126	−0,4088	−3,4309	3,3766	+0,0166	0,8329	−3,1310	+0,0151	−0,0570	11,7711
7	170°	149°16'	0,5110	−0,8597	−9,4380	1,8907	−0,0093	0,2611	−4,8228	−0,0048	−0,0878	89,0758
							Σ	4,0804	−2,9164	+0,1122	+0,0235	112,0446

Нормальные уравнения

$$4{,}080\alpha - 2{,}916\beta = -0{,}1122;$$

$$2{,}916\alpha - 112{,}045\beta = +0{,}0235$$

имеют корни $\alpha = -0,0282$, $\beta = -0,0009$, что дает исправленные значения искомых параметров $a = 3,672$ и $b = 0,8771$. Искомая функция $f_1(x) = 3,672 \sin(0,8771x)$. Действительно ли она лучше, чем найденная ранее функция $f_0(x) = 3,7 \sin(0,878x)$? Ответ на этот вопрос дает вычисление сумм остающихся погрешностей.

i	x_i	y_i	$f_0(x_i)$	$\varepsilon_i = f_0(x_i) - y_i$	ε_i^2	$f_1(x_i)$	$\eta_i = f_1(x_i) - y_i$	η_i^2
1	3°	0,18	0,1702	$-0,0098$	0,000096	0,1689	$-0,0111$	0,000123
2	37°	1,97	1,9873	$+173$	299	1,9700	0	0
3	70°	3,22	3,2504	$+304$	924	3,2240	$+40$	16
4	86°	3,55	3,5820	$+320$	1024	3,5538	$+38$	14
5	95°	3,64	3,6756	$+356$	1267	3,6474	$+74$	55
6	130°	3,36	3,3766	$+166$	276	3,3540	-60	36
7	170°	1,90	1,8907	-93	86	1,8856	-144	207
				$S_0 = 0,003972$			$S_1 = 0,000451$	

Как видим, сумма остающихся погрешностей при исправленных значениях параметров почти в девять раз меньше, чем при неисправленных. Однако это еще не дает нам права утверждать, что найденные нами параметры — наилучшие из всех возможных: надо повторить все вычисление, приняв за исходные значения a_0 и b_0 только что найденные исправленные значения параметров 3,672 и 0,8771, и найти новые поправки. Продолжать это повторение надо до „стабилизации“ процесса, т. е. пока мы не получим нулевых поправок (в пределах тех десятичных знаков, с какими мы решили провести вычисление).

При вычислениях по методу наименьших квадратов применяются многие упрощающие работу приемы, заниматься которыми мы здесь не можем. Отсылаем интересующихся к книге проф. Н. И. Идельсона, „Уравнительные вычисления по методу наименьших квадратов“, Гиз, 1927 и Кубуч, 1932.

Упражнения.

1. Найти наилучшие значения коэфициентов линейной функции $y = a + bx$, если даны следующие значения x и y:

x ...	6	15	30	60	90	120
y ...	10,25	10,42	11,26	12,52	13,78	15,04

2. Температура t плавления сплава свинца и цинка при содержании в сплаве x% цинка дана таблицей:

x ...	46,7	63,7	77,8	84,0	87,5
t ...	197	235	270	283	292

Предполагая, что x выражается многочленом $a + bt + ct^2$, найти наилучшие значения a, b, c.

3. Меняя объем газа v при постоянной его температуре, получили следующие значения его давления p:

v ...	100	120	140	150	180	200
p ...	760	635	541	478	425	378

Предполагая, что переменные v и p связаны зависимостью $vp = a$, найти наилучшее значение a.

4. Взяв формулу $v = 1622 \cdot 0,994^t$, полученную в результате решения задачи 2, § 86, улучшить значения параметров a и b в формуле $v = ab^t$, ограничиваясь четырьмя значащими цифрами в каждом из них.

§ 86. Построение интерполяционных формул по способу натянутой нити и по способу средних.

Разыскивая числовые параметры интерполяционных формул по способу наименьших квадратов, мы должны производить весьма большую и тягостную вычислительную работу. Кроме того, как мы видели выше, в некоторых случаях для возможности применения способа наименьших квадратов необходимо предварительное определение приближенных значений параметров каким-нибудь другим способом. Эти два обстоятельства и вынуждают в дополнение к способу наименьших квадратов рассмотреть еще два способа, значительно менее совершенных, но быстро приводящих к приближенным значениям параметров.

В очень многих случаях помогает *способ натянутой нити.* Положим, разыскиваются коэфициенты a и b линейной функции $y = a + bx$ по нескольким парам наблюденных значений x_i и y_i $(i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n)$.

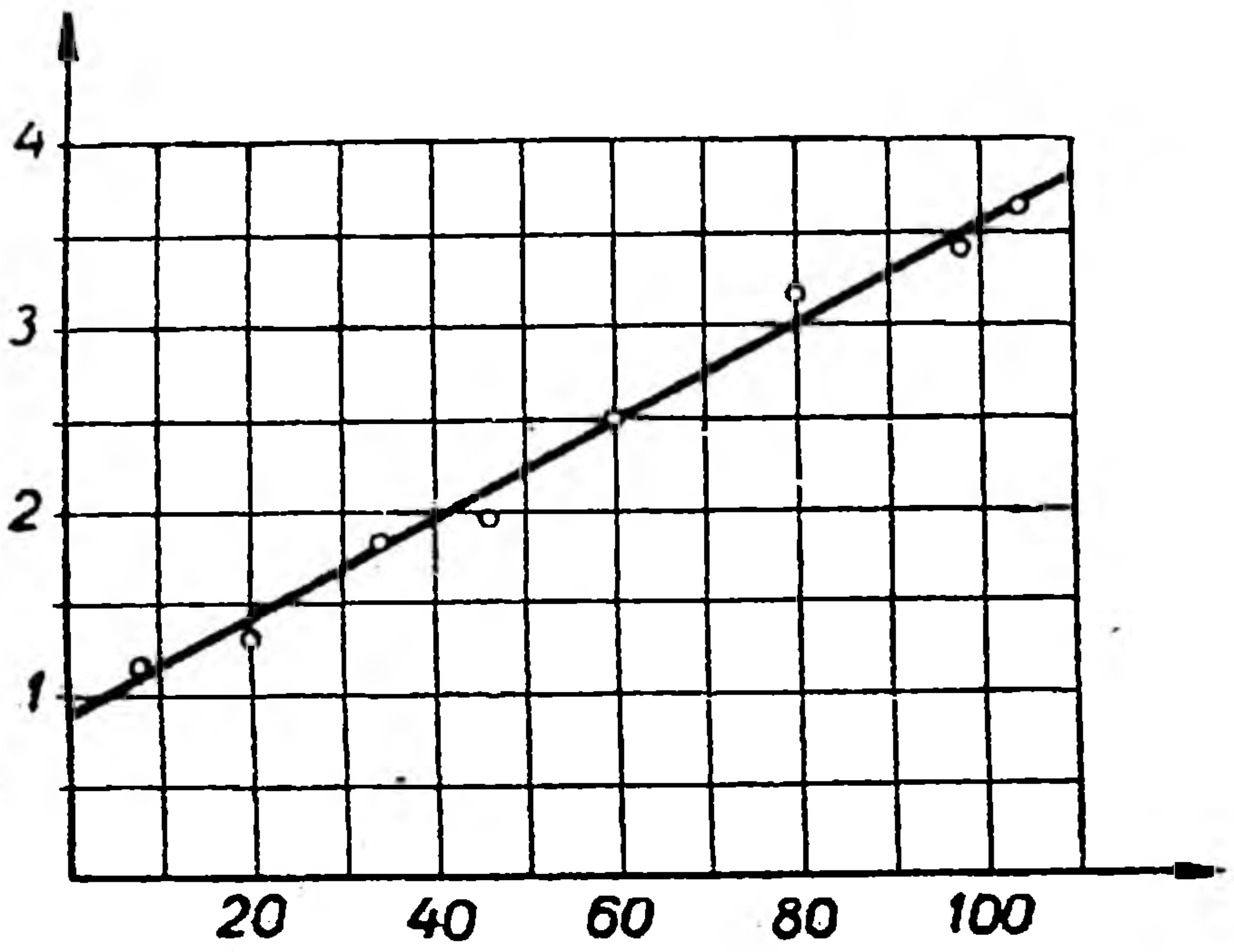


Рис. 63.

Взяв кусок миллиметровой бумаги, берем пару взаимно перпендикулярных координатных осей и отмечаем n точек с координатами x_i, y_i. Точки эти обычно не лежат на одной прямой, но можно указать прямую, около которой эти точки группируются наиболее тесно. Эту прямую находят, укладывая на чертеж прозрачную линейку с проведенной на ней прямой линией, или натягивая тонкую нить. Выбрав наилучшее (на-глаз) положение прямой, замечают координаты пары точек на ней, отстоящих друг от друга по возможности дальше, и по координатам этих точек находят значения a и b.

При выборе „наилучшей“ прямой неизбежен довольно значительный произвол: решая одну и ту же задачу несколько раз, обыкновенно получают каждый раз новые пары значений a и b. Чтобы сравнивать качество этих решений, надо составить сумму S (сумму квадратов остающихся погрешностей): чем меньше эта сумма, тем лучше решение.

Задача 1. Подъемный механизм для подъема груза в x *кг* требует приложения силы в y *кг*, причем опыты дали следующие значения:

$x\ldots$	4	20	34	46	60	80	98	104
$y\ldots$	1,18	1,30	1,85	1,98	2,50	3,15	3,42	3,68

Предполагая, что величина приложенной силы y есть линейная функция $a + bx$ от величины груза x, найти значения коэфициентов a и b.

Прямая, проведенная по возможности ближе ко всем точкам с координатами x_i, y_i на рисунке 63, проходит через точки $x = 0$, $y = 0{,}90$ и $x = 100$, $y = 3{,}55$. Ее уравнение $(y - 0{,}90):(3{,}55 - 0{,}90) = (x - 0):(100 - 0)$, или $y = 0{,}90 + 0{,}0265x$, а потому уравнение искомой зависимости есть $f(x) = 0{,}90 + 0{,}0265x$.

Для поверки вычисляем значения $f(x_i)$ при данных значениях аргумента x_i и находим сумму квадратов остающихся погрешностей $S = 0{,}0924$.

x_i ...	4	20	34	46	60	80	98	104
$0{,}0265x_i$ ...	0,106	0,530	0,901	1,219	1,590	2,120	2,597	2,756
$f(x_i)$ ...	1,006	1,430	1,801	2,119	2,490	3,020	3,497	3,656
y_i ...	1,180	1,300	1,850	1,980	2,500	3,150	3,420	3,680
$\varepsilon_i = f(x_i) - y_i$ ...	0,174	+0,130	−0,049	+0,139	−0,010	−0,130	+0,077	−0,024
ε_i^2 ...	0,0303	0,0169	0,0024	0,0193	0,0001	0,0169	0,0059	0,0006

Наряду со способом натянутой нити применяется *способ средних:* имея для определения k числовых параметров n уравнений, где $n > k$, разбиваем эти n уравнений на k групп, относя в каждую группу приблизительно поровну уравнений, и комбинируем все уравнения каждой группы в одно каким-нибудь способом, например, посредством действий сложения или умножения. В результате мы получаем систему k уравнений с k неизвестными, которую и решаем.

Если разыскиваются коэфициенты уравнения вида $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1}$, то применяем сложение.

Каждое уравнение новой системы можно предварительно разделить почленно на число уравнений, взятых для его получения; тогда коэфициенты этого уравнения будут равны средним арифметическим соответствующих коэфициентов первоначальных уравнений. Отсюда и название способа. Свести систему n уравнений к системе k уравнений можно многими способами, а потому и здесь мы не получаем вполне определенного решения задачи.

Решим по способу средних только что рассмотренную задачу 1, относя к I группе первые четыре уравнения ($i = 1, 2, 3, 4$), а ко II группе — остальные.

$$\begin{aligned} a + 4x &= 1{,}18 \qquad & a + 60x &= 2{,}50 \\ a + 20x &= 1{,}30 \qquad & a + 80x &= 3{,}15 \\ a + 34x &= 1{,}85 \qquad & a + 98x &= 3{,}42 \\ a + 46x &= 1{,}98 \qquad & a + 104x &= 3{,}68 \end{aligned}$$

Суммируя уравнения каждой группы почленно, получаем систему:

$$4a + 104b = 6{,}31; \quad 4a + 342b = 12{,}75,$$

откуда находим $b = 0{,}0271$, $a = 0{,}873$, и для искомой функции имеем выражение $f(x) = 0{,}873 + 0{,}0271x$. Здесь сумма квадратов остающихся погрешностей оказывается равной 0,9090. Она несколько больше той же суммы, полученной выше при решении задачи по способу натянутой нити, а потому решение $f(x) = 0{,}873 + 0{,}0271x$ надо признать худшим, чем решение $f(x) = 0{,}90 + 0{,}0265x$. Наилучшее возможное решение доставляется способом наименьших квадратов. Если ограничиться 3 десятичными знаками в значении a и 4 в значении b, то способ наименьших квадратов приводит к решению $f(x) = 0{,}923 + 0{,}0262x$, которому соответствует сумма $S = 0{,}0911$. Как видим, выигрыш, доставляемый применением способа наименьших квадратов, сравнительно невелик, и тем самым оправдывается применение на практике двух указанных менее совершенных способов.

Если разыскиваются параметры не линейной, а какой угодно другой функции, способ средних применим во всех случаях, способ же натянутой нити лишь тогда, когда эту функцию можно свести к линейной посредством какого-нибудь преобразования. Так, если предполагается существование зависимости вида $y = ax^b$, то прибегаем к логарифмированию, и из формулы $\lg y = \lg a + b \lg x$ замечаем, что между логарифмами аргумента и функции существует линейная зависимость, коэфициенты которой $\lg a$ и b могут быть определены по способу натянутой нити: по координатным осям надо откладывать не значения x_i и y_i, а значения их логарифмов; в этом случае особенно удобно воспользоваться логарифмической бумагой (§ 65). Если предполагается существование зависимости вида $y = ae^{bx}$, то в силу формулы $\lg y = \lg a + bx \lg e = \lg a + 0{,}4343bx$ имеем линейную зависимость между x и $\lg y$ (выгодно воспользоваться полулогарифмической бумагой). В случае зависимости вида $y = a + bx^k$ достаточно положить $x^k = \xi$, и вопрос сводится к разысканию коэфициентов линейной зависимости $y = a + bt$ (t — аргумент, y — функция).

Задача 2. Наблюдается медленный разряд лейденской банки, замкнутой плохим проводником. Получены следующие значения потенциала V банки (в вольтах) для различных моментов времени t (в секундах):

t . . .	0	30	60	90	120	150	180
V . . .	1640	1350	1120	930	780	660	550

Предполагая в силу теоретических соображений существование зависимости вида $V = ab^t$, найти значения a и b.

Откладывая по оси абсцисс значения t, а по оси ординат—значения $\lg V$ (или пользуясь полулогарифмической бумагой), строим точки с коэфициентами t_i, $\lg V_i$. Точки эти располагаются почти на одной прямой. Натягивая нить, замечаем, что „наилучшая" прямая проходит через точки $t = 0$, $\lg V = 3{,}210$ и $t = 180$, $\lg V = 2{,}738$. Подставляя эти значения t и $\lg V$ в уравнение $\lg V = \lg a + t \lg b$, получаем систему $3{,}210 = \lg a + 0 \cdot \lg b$; $2{,}738 = \lg a + 180 \lg b$, которая дает $\lg a = 3{,}210$; $\lg b = -0{,}00262 = \bar{1}{,}9974$, или $a = 1622$; $b = 0{,}994$. Итак, искомая зависимость есть $V = f(t) = 1622 \cdot 0{,}994^t$. Для контроля находим значения $f(t)$ по этой формуле и вычисляем сумму квадратов остающихся погрешностей S:

t_i ...	0	30	60	90	120	150	180	
$f(t_i)$ ...	1622	1353	1129	942	786	656	547	
V_i ...	1640	1350	1120	930	780	660	550	
$f(t_i) - V_i = \varepsilon_i$ ...	-18	$+3$	$+9$	$+12$	$+16$	-4	-3	
ε_i^2 ...	324	9	81	144	256	16	9	$S = 619$

Задача 3. Выразить посредством многочлена $y = a + bx + cx^2$ функцию $\lg x$ для значений x от 2 до 3, используя значения $\lg x$ при изменении x через 0,2 (см. задачу 1, § 85).

Имея всего шесть уравнений с тремя неизвестными a, b, c, соединяем их в группы по два уравнения в каждой, и складываем уравнения каждой группы. Получаем систему из трех уравнений:

$$
\begin{aligned}
2a + 4{,}2b + 8{,}84c &= 0{,}6424 \\
2a + 5{,}0b + 12{,}52c &= 0{,}7952 \\
2a + 5{,}8b + 16{,}84c &= 0{,}9243
\end{aligned}
$$

Корнями ее служат числа $a = -0{,}2739$, $b = 0{,}36134$, $c = -0{,}03703$, и искомая функция такова:

$$f(x) = -0{,}2739 + 0{,}36134x - 0{,}03703x^2.$$

Вычисляя для контроля значения $f(x)$ для значений x от 2,0 до 3,0 через 0,2 и сравнивая их с данными значениями $\lg x_i$, находим:

x_i ...	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	
$f(x_i)$ ...	0,3007	0,3418	0,3800	0,4153	0,4475	0,4769	
$\lg x_i$ ...	0,3010	0,3424	0,3802	0,4150	0,4472	0,4771	
$\varepsilon_i = f(x_i) - \lg x_i$ ...	−3	−6	−2	+3	+3	−2	
ε_i^2 ...	9	16	4	9	9	4	$S = 0{,}00000071$

Как видим, результаты получились удовлетворительные, но все же несколько хуже, чем при применении способа наименьших квадратов (там мы имели $S = 0{,}00000031$), как и должно быть.

Применение способа натянутой нити возможно и в настоящем случае, но он приводит к вычислениям, заметно более сложным, чем способ средних: надо привести уравнение $y = a + bx + cx^2$ к виду $\frac{y - y_0}{x - x_0} = (b + cx_0) + cx$, где x_0, y_0 — какая-нибудь пара данных значений, при- при- нять $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ за новую функцию z и искать коэфициенты $d = b + cx_0$ и c этой линейной функции $z = d + cx$.

Упражнения.

1. Решить по способу натянутой нити и по способу средних задачу 1 из упражнений § 85 и сравнить результаты с тем, что дал способ наименьших квадратов.

2. Опыт дал следующие значения сопротивления P (*кг*), встречаемого движущейся в воздухе со скоростью v (*м/сек*) моделью летательного снаряда:

v . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P . . .	0,2	0,8	1,5	2,7	3,7	5,2	6,7	8,3	9,9	11,5

Выразить зависимость между v и P формулой с двумя параметрами, испытав формулы вида $P = a + bv^2$; $P = ae^{bv}$; $P = av^k$ (посредством графических построений), и выбрать наилучшую.

3. Удельная теплоемкость воды c с изменением температуры t несколько меняется. Имея следующие данные опыта, выразить зависимость c от t посредством многочлена четвертой степени (по способу средних):

t . . .	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
c . . .	1,0075	1,0008	0,9974	0,9971	0,9974	0,9983	0,9995	1,0012	1,0032	1,0057	1,0086

Чтобы не иметь дела с числами, изображаемыми многими цифрами, рекомендуется искать зависимость между $x = 0{,}1t$ и $y = 1000(c - 1)$.

4. Подобрать параметры a и b в уравнении $y = ax + \frac{b}{x}$, чтобы оно выражало по возможности лучше следующую зависимость:

x ...	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
y ...	10,63	6,26	5,21	5,01	5,14	5,44	5,83	6,28

ГЛАВА X.

ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ТАБЛИЦЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ИЛИ ГРАФИКОМ.

§ 87. Диференцирование функций.

На практике встречаются следующие три задачи на диференцирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений или графиком: 1) найти значение производной функции $f'(x)$ при заданном значении аргумента

$x=\xi$ или *провести касательную к данной кривой в данной ее точке*; 2) указать значение аргумента $x=\xi$, при котором производная функция $f'(x)$ получает заданное значение, или *провести касательную к данной кривой параллельно данному направлению*; 3) построить таблицу значений производной функции или *начертить график диференциальной кривой*, т. е. кривой $\eta=f'(\xi)$.

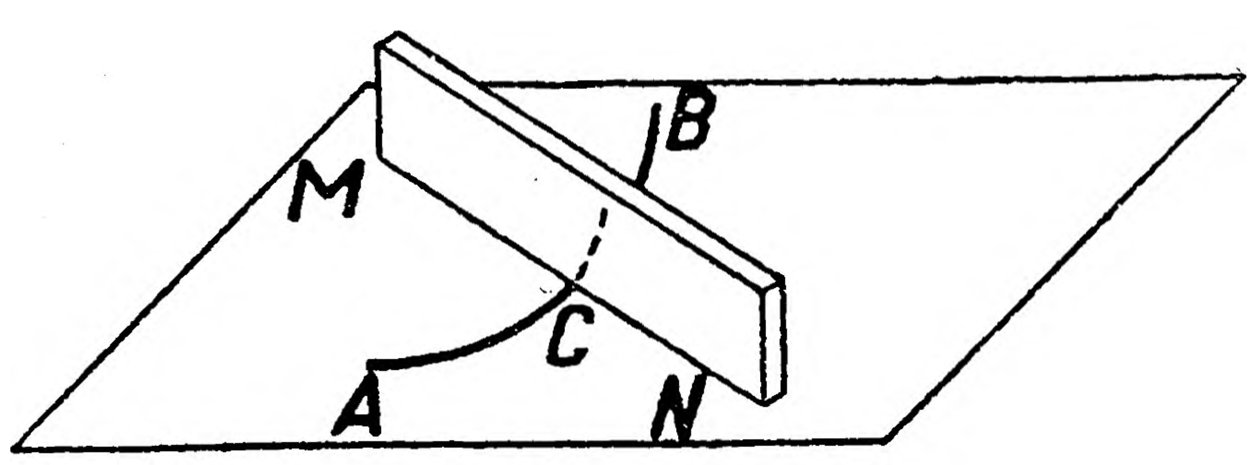


Рис. 64.

Применять обычные приемы диференцирования функций здесь нельзя, так как аналитическое выражение функции неизвестно.

Задачи эти можно решать или графическим, или численным способом. Первый выгоднее, если функция $y=f(x)$ задана графиком; второй предполагает наличность таблицы значений. Конечно, имея график, можно *снять* с него значения функции при определенных значениях аргумента и построить, таким образом, таблицу значений функции; обратно, по таблице значений можно построить график. Поэтому и графический и численный способы можно использовать всегда.

Сперва рассмотрим графическое решение трех указанных выше задач, предполагая, что функция задана графиком, и пользуясь прямоугольной системой координат.

Если на кривой указана точка и требуется провести через эту точку касательную к кривой, возможно проведение этой касательной на-глаз по линейке: ищем такое положение линейки, при котором ее край имел бы с кривой лишь одну общую точку. Способ этот весьма неточен, и применять его на практике не рекомендуется. Значительно лучшие результаты получаются, если воспользоваться *зеркальной линейкой* (простая пластинка с отражающей поверхностью и обрезанным по прямой линии краем); установив линейку в направлении, приблизительно перпендикулярном к направлению искомой касательной, вращают ее около данной на кривой AB точки C до тех пор, пока зеркальное отражение дуги AC, обозначенное на рисунке 64 пунктиром, не станет плавным продолжением самой дуги AC, т. е. пока не исчезнет *излом*, образуемый дугой AC и ее отражением в зеркале. Отметив на рисунке прямую MN, получим направление нормали, а перпендикуляр к ней через точку C даст искомую касательную. Действительно, в случае отсутствия излома прямая MN пересекает кривую под углом, равным (в силу равенства углов падения и отражения) своему смежному, т. е. под прямым углом.

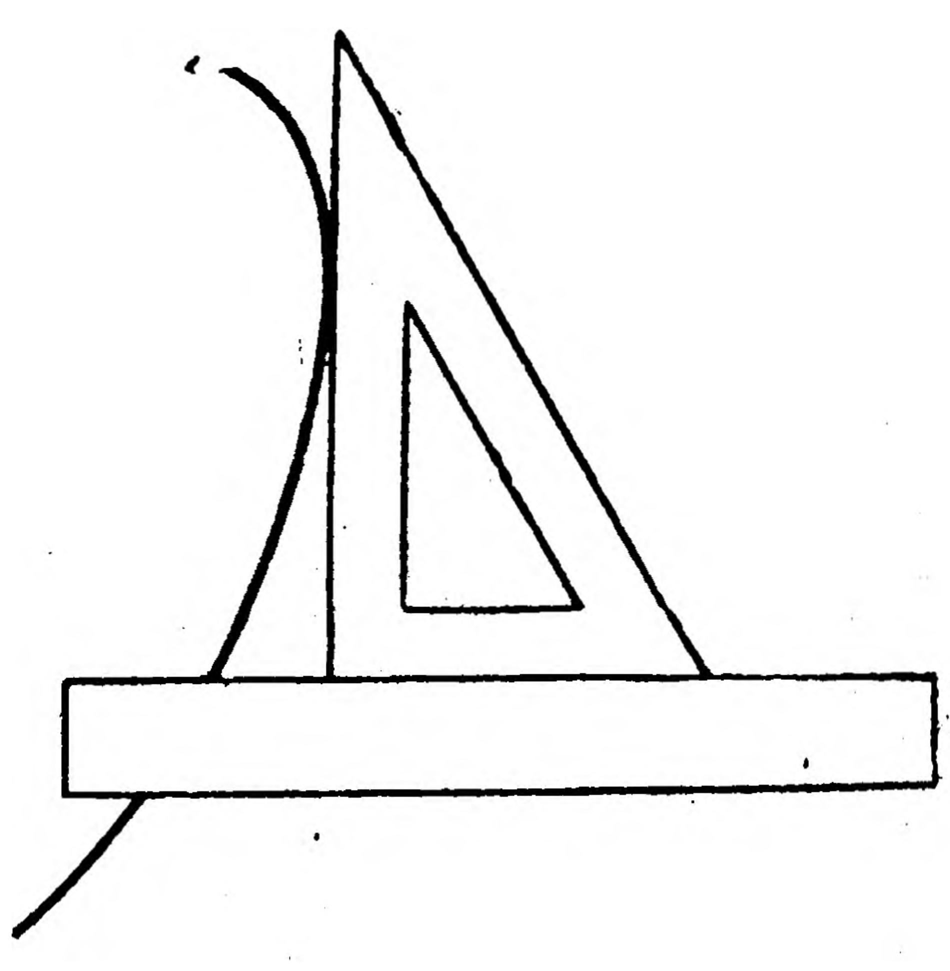


Рис. 65.

При решении второй задачи (провести к данной прямой касательную данного направления) неплохие результаты дает уже применение угольника, перемещаемого по рисунку так, чтобы один его катет, имея все время данное направление, приближался к кривой (рис. 65): момент соприкосновения подмечается на-глаз довольно точно, и положение касательной определено. Положение же точки касания лучше определять посредством проведения нескольких параллельных данному направлению хорд: разделив каждую из хорд пополам, соединяем середины плавной кривой и экстраполируем ее до пересечения с кривой в точке C, которая и есть точка касания (рис. 66). В случае, когда данная кривая есть кривая 2-го порядка, середины всех параллельных хорд лежат на диаметре, сопряженном с этими хордами, и прямая, проведенная через конец диаметра параллельно хордам, есть касательная; в случае же, когда данная кривая не принадлежит к коническим сечениям, середины параллельных хорд лежат на криволинейном диаметре, кривизна которого тем меньше, чем ближе мы подходим к кривой, а потому экстраполяция дает здесь хорошие результаты.

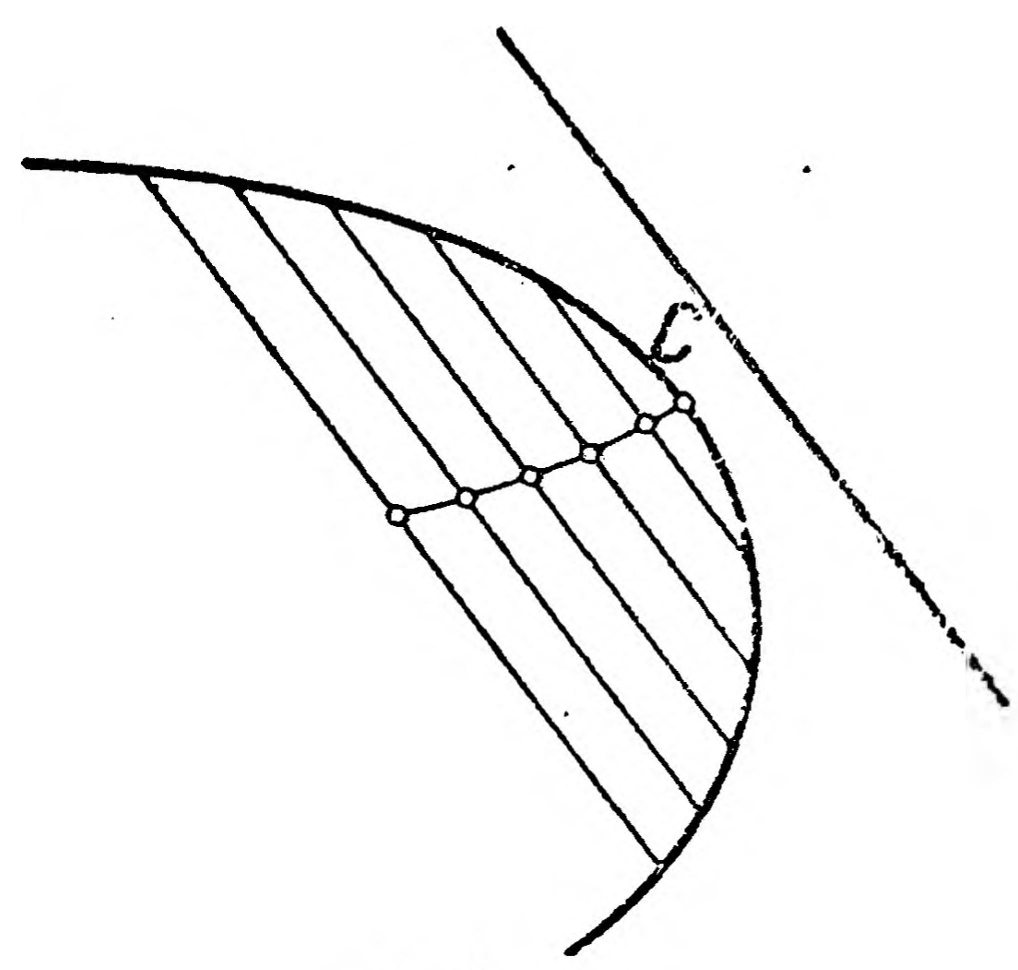


Рис. 66.

Этот способ разыскания точки касания с выгодой применяется в тех случаях, когда надо найти максимум или минимум ординаты точки на заданной кривой. Так, для кривой на рисунке 67 находим этим способом абсциссу $\xi = 1{,}25$ точки с минимальной ординатой (как точки касания той касательной, которая параллельна оси абсцисс). Кривая, изображенная на этом рисунке, есть график функции $y = 0{,}25x^2 + x^{-1}$, и точное значение абсциссы точки касания есть $\xi = \sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$

Переходя к третьей задаче (построение диференциальной кривой), предположим, что имеем график функции $y = f(x)$, выраженный в масштабе m_x по оси X и в масштабе m_y по оси Y; символы m_x и m_y означают длины отрезков в миллиметрах, которыми выражается единица при ее откладывании по осям X и Y (на рисунке 67 $m_x = 7{,}5$ *мм*, $m_y = 3{,}75$ *мм*). Если $m_x = m_y$, то тангенс угла α наклона касательной к оси X, проведенной через точку C на кривой, был бы равен значению производной $f'(x)$, вычисленной для значения абсциссы точки C. В слу-

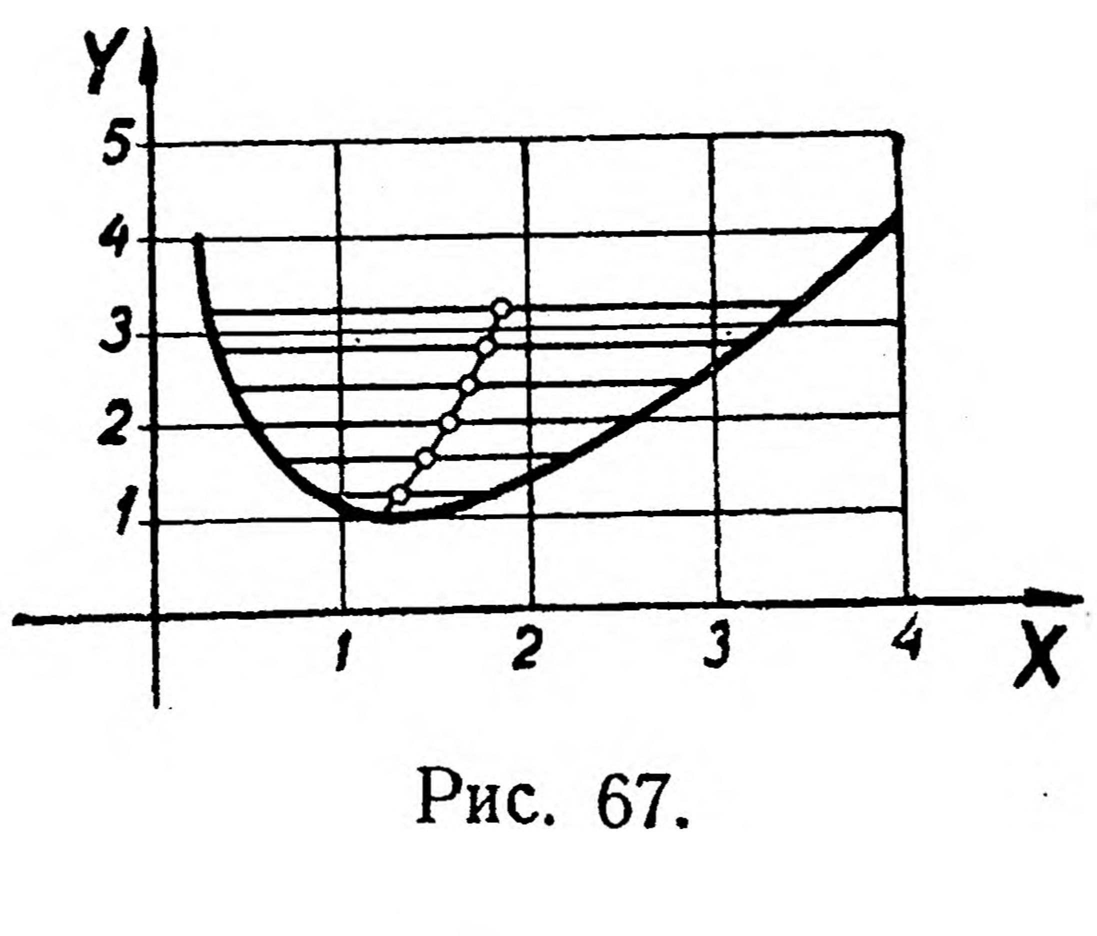


Рис. 67.

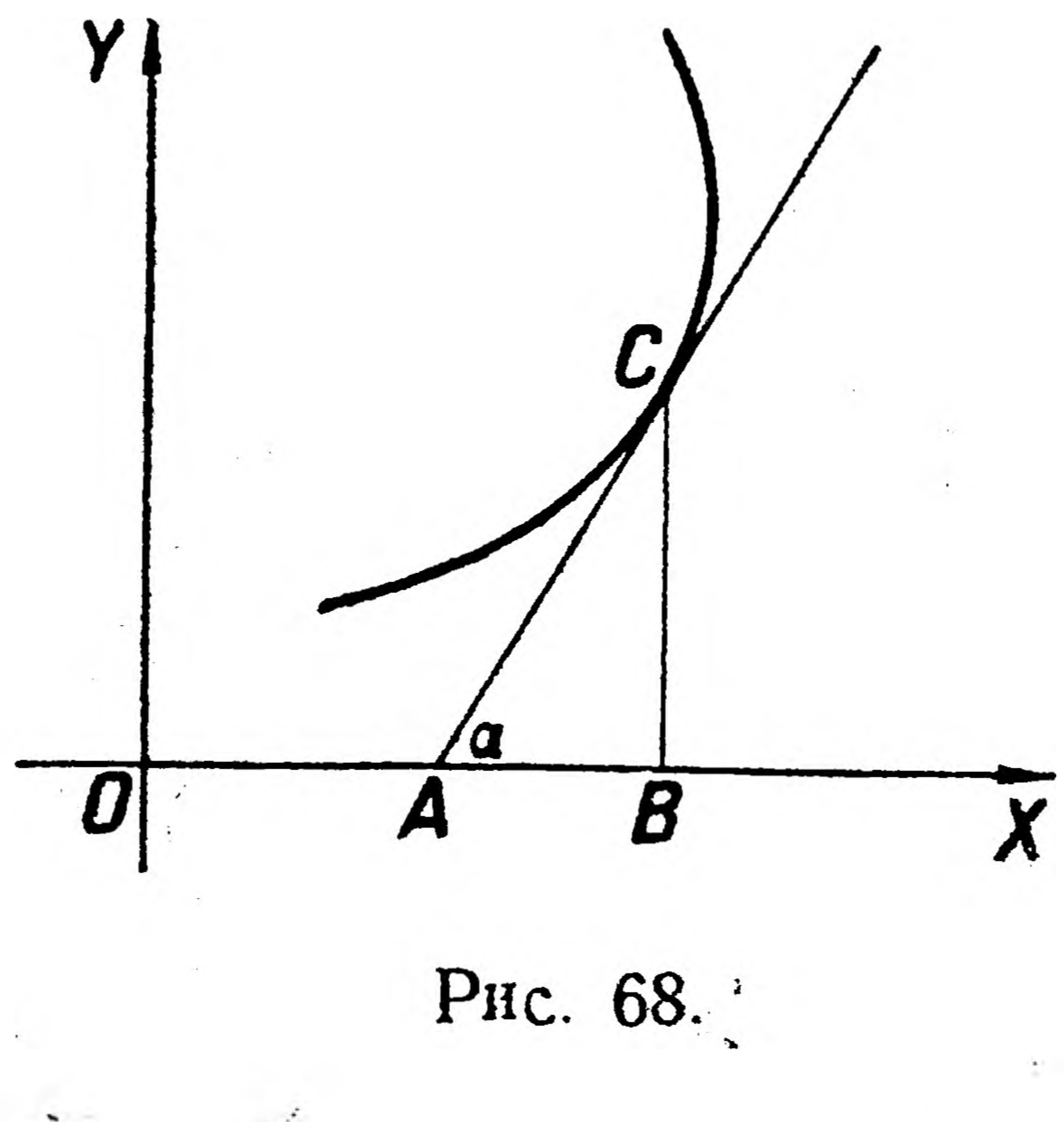


Рис. 68.

чае же $m_x \neq m_y$ происходит *искажение* углов наклона. Чтобы найти $\operatorname{tg} \alpha$ и для этого случая, берем уравнение касательной $\eta - y = y'(\xi - x)$ и находим координаты точки A (рис. 68). Получаем для абсциссы A *в принятом масштабе* значение $x - \frac{y}{y'}$, длина же отрезка OA в миллиметрах равна $\left(x - \frac{y}{y'}\right) m_x$. Так как длина OB равна xm_x *мм*, то длина отрезка AB равна $xm_x - \left(x - \frac{y}{y'}\right) m_x = \frac{y}{y'} \cdot m_x$ *мм*. Из $\triangle ABC$

находим $\operatorname{tg} \alpha = BC : AB = y m_y : \left(\frac{y}{y'} \cdot m_x\right) = \frac{m_y}{m_x} y'$. Итак, *тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$, вычерченной в масштабах m_x и m_y по осям X и Y, определяется по формуле $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_y}{m_x} y'$, где значение производной y' берется для точки касания.*

Заметив это, без труда поймем следующий способ построения диференциальной кривой. Имея график функции $y = f(x)$ в виде дуги AB (рис. 69), берем на продолжении оси X влево на p *мм* от начала точку P (так называемый „полюс"). Проведя через полюс пучок лучей, встречающих ось Y в точках Q_i $(i = 1, 2, 3, 4 \ldots)$, находим для каждого луча PQ_i такую точку C_i на кривой, чтобы касательная к кривой, проведенная через эту точку, была параллельна PQ_i. Сделав это одним из указанных выше способов (причем самих касательных не вычерчиваем), проводим через каждую точку Q_i параллель к оси X, а через каждую точку C_i параллель к оси Y. Пересечения этих параллелей дают точки D_i, лежащие на искомой диференциальной кривой, которую и проводим (от руки или посредством лекала) через все точки D_i.

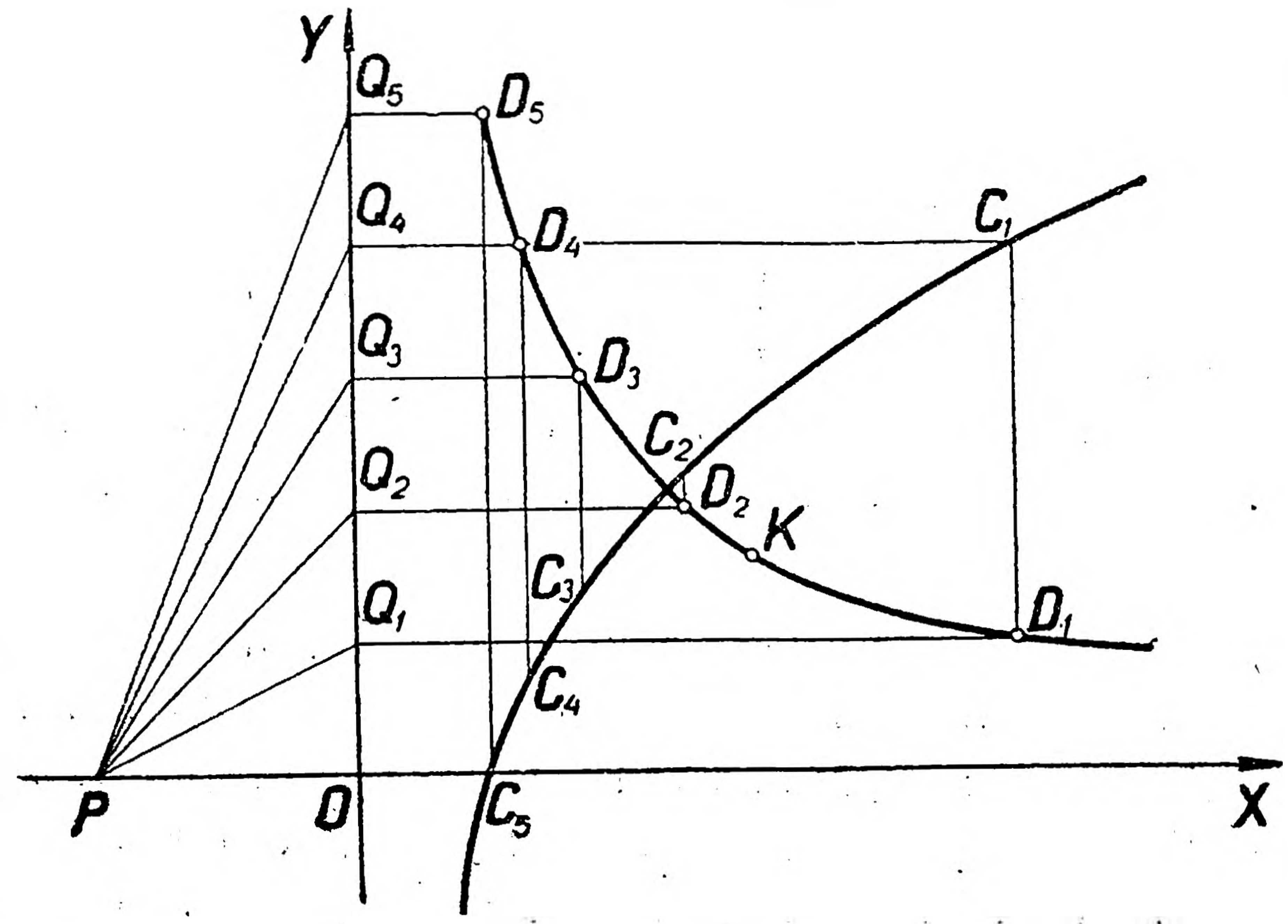


Рис. 69.
(Уменьшен в отношении 3:4).

Действительно, обозначив OQ_i через η, имеем $\operatorname{tg} XPQ_i = \frac{\eta}{p}$. Касательная к данной кривой, проведенная через точку C_i, имеет такой же угловой коэфициент, так как она параллельна лучу PQ_i. С другой стороны, как мы видели выше, угловой коэфициент касательной равен $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_y}{m_x} \cdot y'$, а потому $\frac{\eta}{p} = \frac{m_y}{m_x} \cdot y'$, или $\eta = \frac{p m_y}{m_x} \cdot y'$. Следовательно, каждая точка D_i, имея ту же абсциссу x, что и точка C_i, и ординату $\eta = \frac{p m_y}{m_x} \cdot y'$, лежит на кривой, выражаемой уравнением:

$$\eta = \frac{p m_y}{m_x} f'(x),$$

т. е. на графике диференциальной кривой $\eta = f'(x)$, вычерченном в масштабе m_x (по оси X) и $m_y = \frac{p m_y}{m_x}$ (по оси Y).

Кривая, изображенная на рисунке 69, есть логарифмика $y = \ln x$, вычерченная в масштабе $m_x = 10$ *мм*, $m_y = 25$ *мм*. Значение p взято равным 20 *мм*, а потому график диференциальной кривой вычерчен в масштабах $m_x = 10$ *мм*; $m'_y = \frac{20 \cdot 25}{10} = 50$ *мм*. Например, для точки $x = 3$ имеем на диференциальной кривой точку K, удаленную от оси X

на 17 *мм*, а потому значение $f'(3)$ равно $16:50=0{,}32$ (вместо точного значения $f'(3)=\frac{1}{3}$).

Чтобы получить более точные результаты, надо брать лучи PQ_i с таким расчетом, чтобы точки C_i на данной кривой расположились приблизительно равномерно, и не допускать таких больших интервалов, какой у нас получился на рисунке 69 между точками C_1 и C_2.

Рассмотрев способы *графического* диференцирования, займемся теперь диференцированием *численным*. Положим, имеется таблица значений функции y_i, вычисленных для равноотстоящих значений аргумента x_i, и требуется получить значение производной y'_0 для значения аргумента x_0.

Возьмем одну из интерполяционных формул, рассмотренных в гл. IX, лучше всего формулу Стирлинга, и продиференцируем обе ее части по фазе t. Полагая затем $t=0$, мы получим удобную формулу для вычисления $y'_0=\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}$:

$$f(x)=f(x_0+th)=y_0+t\Delta y_{-0,5}+\frac{1}{2}t^2\Delta^2 y_{-1}+\frac{1}{3!}(t^3-t)\,\Delta^3 y_{-1,5}+$$

$$+\frac{1}{4!}(t^4-t^2)\,\Delta^4 y_{-2}+\ldots$$

$$\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=h\,\frac{df(x)}{dx}=\Delta y_{-0,5}+t\Delta^2 y_{-1}+\frac{1}{6}(3t^2-1)\,\Delta^3 y_{-1,5}+$$

$$+\frac{1}{24}(4t^3-2t)\,\Delta^4 y_{-2}+\ldots$$

$$hy'_0=h\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}=\Delta y_{-0,5}-\frac{1}{6}\Delta^3 y_{-1,5}+\ldots$$

Если провести вычисление до разностей 11-го порядка, получим формулу:

$$y'_0=\frac{1}{h}\Big[\Delta y_{-0,5}-\frac{1}{6}\Delta^3 y_{-1,5}+\frac{1}{30}\Delta^5 y_{-2,5}-\frac{1}{140}\Delta^7 y_{-3,5}+$$

$$+\frac{1}{630}\Delta^9 y_{-4,5}-\frac{1}{2772}\Delta^{11} y_{-5,5}+\ldots\Big]. \qquad \text{(I)}$$

Диференцируя формулу Стирлинга дважды, придем к формуле для второй производной:

$$y''_0=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\frac{1}{90}\Delta^6 y_{-3}-\frac{1}{560}\Delta^8 y_{-4}+\frac{1}{3150}\Delta^{10} y_{-6}-\ldots\right]. \qquad \text{(II)}$$

Диференцируя формулы Ньютона, мы получим формулы для вычисления производных в начале и в конце интервала, охватывающего все данные значения аргумента (применяя экстраполяцию, можно и здесь обойтись формулами I и II). Формула Бесселя приводит к удобному выражению для производной при значениях аргумента $x_0+\frac{1}{2}h$, $x_0+\frac{3}{2}h$ и т. д.

Отметим следующее важное следствие формул (I) и (II): если в правых частях этих формул сохранить лишь по одному первому члену, отбросив все остальные, получим приближенные формулы:

$$y'_0\approx\frac{1}{h}\Delta y_{-0,5},\quad y''_0\approx\frac{1}{h^2}\Delta^2 y_{-1}. \qquad \text{(III)}$$

Формулу этого рода можно написать для производной любого порядка k, если продиференцировать интерполяционную формулу k раз; первая формула Ньютона дает такие приближения для производных:

$$y_0' \approx \frac{1}{h}\Delta y_0, \quad y_0'' \approx \frac{1}{h^2}\Delta^2 y_0, \quad y_0''' \approx \frac{1}{h^3}\Delta^3 y_0, \ldots \tag{IV}$$

Составив посредством формулы (I) таблицу значений y_0', y_1', y_2',..., мы можем посредством составления новой разностной схемы и нового применения интерполяционных формул находить и значения y' для произвольных значений x, и значения x при данном значении y'.

Задача 1. Найти производную при $x=10$, если функция $y=f(x)$ задана приведенной ниже табличкой.

Составив разностную схему, замечаем, что уже 3-и разности практически постоянны, и ограничиваемся формулой $y_0' = \frac{1}{h}\left[\Delta y_{-0,5} - \frac{1}{6}\Delta^3 y_{-1,5}\right]$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
8,0	0,5000			
		—294		
8,5	4706		+32	
		—262		—4
9,0	4444		28	
		—234		—4
9,5	4210		24	
		—210		—4
10,0	4000		20	
		—190		—4
10,5	3810		16	
		—174		0
11,0	3636		16	
		—158		—3
11,5	3478		13	
		—145		
12,0	3333			

Берем здесь $h=0,5$; $x_0=10$; $\Delta y_{-0,5} = -200$; $\Delta^3 y_{-1,5} = -4$ и получаем:

$$10^4 \cdot f'(10) = \frac{1}{0,5}\left[-200 - \frac{1}{6}\cdot(-4)\right] = 2\cdot[-199,3] = -398,6;$$

$$f'(10) = -0,0399.$$

Взятые выше значения $f(x)$ вычислены по формуле $y=\frac{4}{x}$, а потому точное значение $f'(10)$ равно $-4\cdot 10^{-2} = -0,0400$.

Задача 2. В первых двух столбцах приведенной ниже таблицы указаны значения времени t и соответствующие значения абсциссы x движущейся по оси X точки. Составить таблицу значений скорости $v=\frac{dx}{dt}$ и ускорения $w=\frac{d^2x}{dt^2}$ для тех же моментов.

Применяя формулы (I) и (II), находим требуемые значения v и w, причем в начале и в конце таблицы применяем экстраполяцию (значения разностей, полученные экстраполяцией, взяты в скобки).

Значения $w=\frac{d^2x}{dt^2}$ оказались одинаковыми по числовой величине (в пределах первых двух десятичных знаков) с исходными значениями x. Так в данном случае и должно быть, потому что эти исходные значения представляют собой не что иное, как значения функции $x=\sin t$, а потому $v=\frac{dx}{dt}=\cos t$, $w=\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$. Обращает внимание *потеря точности:* при переходе от значений x к значениям $\frac{dx}{dt}$ мы потеряли один десятичный знак, при переходе от x к $\frac{d^2x}{dt^2}$ — два знака. Запасные цифры в значениях $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в окончательном результате должны быть отброшены.

t	x	Δx	$\Delta^2 x$	$\Delta^3 x$	$\Delta^4 x$	$\Delta^5 x$	$\Delta x - \frac{1}{6}\Delta^3 x$	$v = \frac{dx}{dt}$	$\Delta^2 x - \frac{1}{12}\Delta^4 x$	$w = \frac{d^2x}{dt^2}$
		(1986)		(−87)						
0,0	0,0000	$1986,_5$	(+1)	−84	(+6)		$2000,_5$	$1,000_2$	0,5	$0,00_4$
		1937		(−81)						
0,2	0,1987	1947	— 80	−78	(+6)		1960	$0,980_0$	$-81,_5$	$-0,20_4$
		1907		−75						
0,4	0,3894	$1829,_5$	−155	−72	+6		$1841,_5$	$0,920_8$	$-155,_5$	$-0,3$[illegible]$_9$
		1752		−69		0				
0,6	0,5646	1640	−224	−66	+6		1651	$0,825_5$	$-224,_5$	$-0,56_4$
		1528		−63		+8				
0,8	0,7174	$1384,_5$	−287	−56	+14		$1394,_1$	$0,697_0$	$-288,_2$	$-0,72_0$
		1241		−49		0				
1,0	0,8415	1073	−336	−42	+14		1080	$0,540_0$	$-337,_2$	$-0,84_3$
		905		−35		0				
1,2	0,9320	$719,_5$	−371	−28	+14		$724,_2$	$0,362_4$	$-372,_2$	$-0,93_0$
		534		−21		−1				
1,4	0,9854	338	−392	$-14,_5$	+13		$340,_4$	$0,170_2$	$-393,_4$	$-0,98_3$
		142		− 8		+8				
1,6	0,9996	− 58	−400	$+2,_5$	+21		$-58,_4$	$-0,029_2$	$-401,_7$	$-1,00_4$
		− 258		+13		−10				
1,8	0,9738	$-451,_5$	−387	$+18,_5$	+11		$-454,_6$	$-0,227_3$	$-387,_9$	$-0,97_0$
		− 645		+24		+6				
2,0	0,9093	$-826,_5$	−363	$+32,_5$	+17		$-831,_9$	$-0,416_0$	$-364,_4$	$-0,91_4$
		−1003		+41						
2,2	0,8085	−1169	−322	$+49,_5$	(+17)		$-1177,_2$	$-0,588_6$	$-323,_4$	$-0,80_8$
		−1330		(+58)						
2,4	0,6755	−1462	(−264)	$+66,_5$	(+17)		$-1473,_1$	$-0,736_6$	$-265,_4$	$-0,66_4$
		(−1594)		(+75)						

Эта потеря точности при диференцировании зависит от существа дела: самые незначительные погрешности в значениях ординат точек на кривой могут повести к большим погрешностям при определении касательной, и бороться с этой потерей точности нелегко (необходимо предварительное „сглаживание“, см. книгу Уиттекер и Робинсон, „Математическая обработка результатов наблюдений“, ГТТИ, 1933, гл. XI).

Появление ступени h в выражении для производной в виде делителя (формула I) показывает, что брать очень малую ступень здесь невыгодно, как невыгодно брать и очень большую ступень: при очень большой ступени приходится принимать во внимание разности высокого порядка, при очень малой получается пониженная точность.

Упражнения.

1. Взяв таблицу значений функции $y = \sqrt{x}$, построить ее график в масштабе $m_x = 10$ *мм*, $m_y = 20$ *мм*, ограничиваясь значениями x от 0 до 10. Затем, пользуясь только этим графиком: a) найти значение y' при $x = 5{,}43$; b) найти значение x, при котором $y' = 0{,}2$; c) построить диференциальную кривую. В заключение сравнить найденные результаты с тем, что дает вычисление, основанное на использовании аналитического выражения.

2. Построив график функции $y = 6x - x^3$ для значений x от 0 до 3 ($m_x = m_y = 10$ *мм*), найти по нему то значение x, при котором y достигает своего максимума, и сравнить результат с тем, что дает аналитическое выражение.

3. Найти $(\lg x)'$ при $x = 5$, пользуясь только значениями логарифмов, помещенными в четырехзначной таблице, и применяя формулу (I). Ступень взять равной сперва 1, затем 0,5; 0,2; 0,1; 0,01 и сравнить все полученные результаты с точным искомым значением производной, равным 0,434294...:5 = 0,086858...

§ 88. Графическое интегрирование.

Если надо найти $I=\int_a^b f(x)\,dx$, причем подинтегральная функция $y=f(x)$ задана графиком, то возможно получение I графическим путем, основанное на геометрическом смысле интеграла как площади. Из многих предложенных способов графического интегрирования рассмотрим следующий простейший („способ средних ординат").

Чтобы найти определенный интеграл $I=\int_a^b f(x)\,dx$, надо вычислить площадь „криволинейной трапеции", ограниченной дугой кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси X (на рисунке 70 взято $a=0$, а потому прямая $x=a$ совпадает с осью Y). Разделим отрезок оси X, образующий одну из сторон трапеции, на несколько равных частей, и через точки деления проведем прямые, параллельные оси Y; таким образом, большая криволинейная трапеция разбивается на несколько малых криволинейных трапеций („полосок"). Каждую полоску, ограниченную сверху дугой графика подинтегральной функции $y=f(x)$, заменяем равновеликим прямоугольником, для чего проводим отрезок, параллельный оси X, на такой высоте, чтобы отрезаемый от полоски криволинейный треугольник был равен по площади соответствующему прибавляемому криволинейному треугольнику (на рисунке 70 эти треугольники заштрихованы). Как показывает опыт, наш глаз удовлетворительно оценивает сравнительную величину площадей малых фигур, и положение этих отрезков, ограничивающих каждый прямоугольник сверху, удается указать довольно точно.

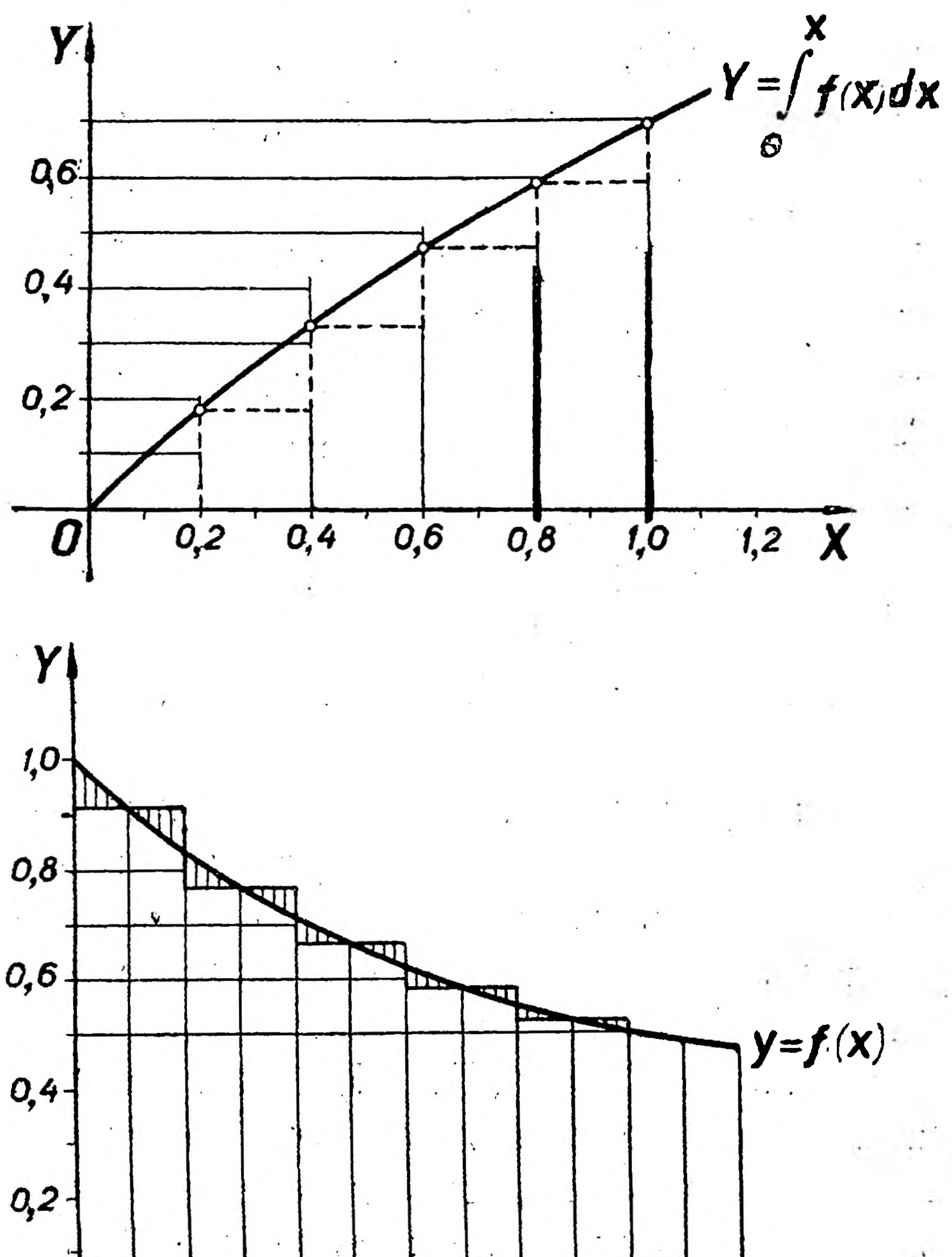


Рис. 70.

Теперь остается найти площадь каждого построенного прямоугольника, сложить их все, и искомое значение I будет найдено. Эту заключительную часть работы тоже можно выполнить графически. Для этого достаточно перенести все найденные высоты прямоугольников („средние ординаты" соответствующих полосок), не меняя их абсцисс, так, чтобы каждая последующая высота имела свой нижний конец на одной горизонтали с верхним концом предыдущей высоты, причем в случае надобности производится изменение масштаба (см. верхнюю часть рисунка 70, где перенесенные и уменьшенные в пять раз высоты прямоугольников показаны пунктиром). Соединив верхние концы всех перенесенных высот плавной линией, мы получим график интеграла с переменным верхним пределом $Y=\int\limits_a^x f(x)\,dx$, причем при выяснении масштаба по оси Y, в каком этот график вычерчен, необходимо принять во внимание ширину каждой полоски. На рисунке 70 ширина полоски 0,2, при перенесении высот за единицу принят 1 *см*, а потому масштаб по оси Y для интегральной кривой — в 1 *см* 0,2 единицы.

Искомое значение $I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ дается ординатой конечной точки графика; мы одновременно решили и задачу вычисления определенного интеграла, и задачу построения графика первообразной функции, т. е. неопределенного интеграла. Если задачей является лишь получение значения I, достаточно просуммировать все „средние ординаты“ посредством их откладывания на особой полоске бумаги, и умножить сумму на ширину одной полоски.

Если график подинтегральной функции полностью или частью опускается ниже оси X, площади соответствующих полосок берутся со знаком минус, и кроме графического сложения придется прибегнуть к графическому вычитанию.

Если график подинтегральной функции имеет части, резко различающиеся по кривизне, то интервал интегрирования можно разбить на части с полосками различной ширины: при меньшей кривизне дуги графика ширину полоски следует брать больше, при большей кривизне — меньше. Но переход от одной ширины полосок к другой их ширине вносит некоторое осложнение в графическое сложение высот (необходимо изменение масштаба, в каком откладываются высоты).

Благодаря накоплению погрешностей точность графического интегрирования вообще невелика. На рисунке 70, где взята функция $f(x)=\frac{1}{x+1}$, а потому $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b \frac{dx}{x+1}=\ln(x+1)$, мы получаем для $\ln 2$ значение 0,67 (вместо точного 0,693...). Если отказаться от графического выполнения сложений высот прямоугольников, точность результата несколько повышается: сняв с нижней части рисунка 70 значения средних ординат, имеем:

$$I=(0{,}91+0{,}77+0{,}67+0{,}59+0{,}53)\cdot 0{,}2=0{,}694.$$

Построение графика функции $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)\,dx$, т. е. интегральной кривой, по данному графику подинтегральной функции $y=f(x)$ выполняется весьма быстро и с высокой точностью посредством специальных машин — *интеграфов*. Наибольшей известностью пользуется интеграф системы Абданк-Абакановича, изготовляемый фирмой Коради в Цюрихе. С теорией и устройством этого интеграфа можно ознакомиться по книге академика А. Н. Крылова, „Лекции о приближенных вычислениях“. Там же имеется и общая теория приборов, предназначенных для механического определения величины площади, т. е. для механического вычисления определенного интеграла. Из этих приборов, известных под названием *планиметров*, наибольшее распространение имеет *полярный планиметр Амслера;* заслуживает внимания также *планиметр-топорик Притца,* имеющий шансы (в силу крайней простоты своего устройства) войти в школьное употребление. Краткие сведения о планиметре можно найти в любом учебнике „Геодезии", а также в книге проф. Фихтенгольца, „Математика для инженеров", ч. II, вып. 1.

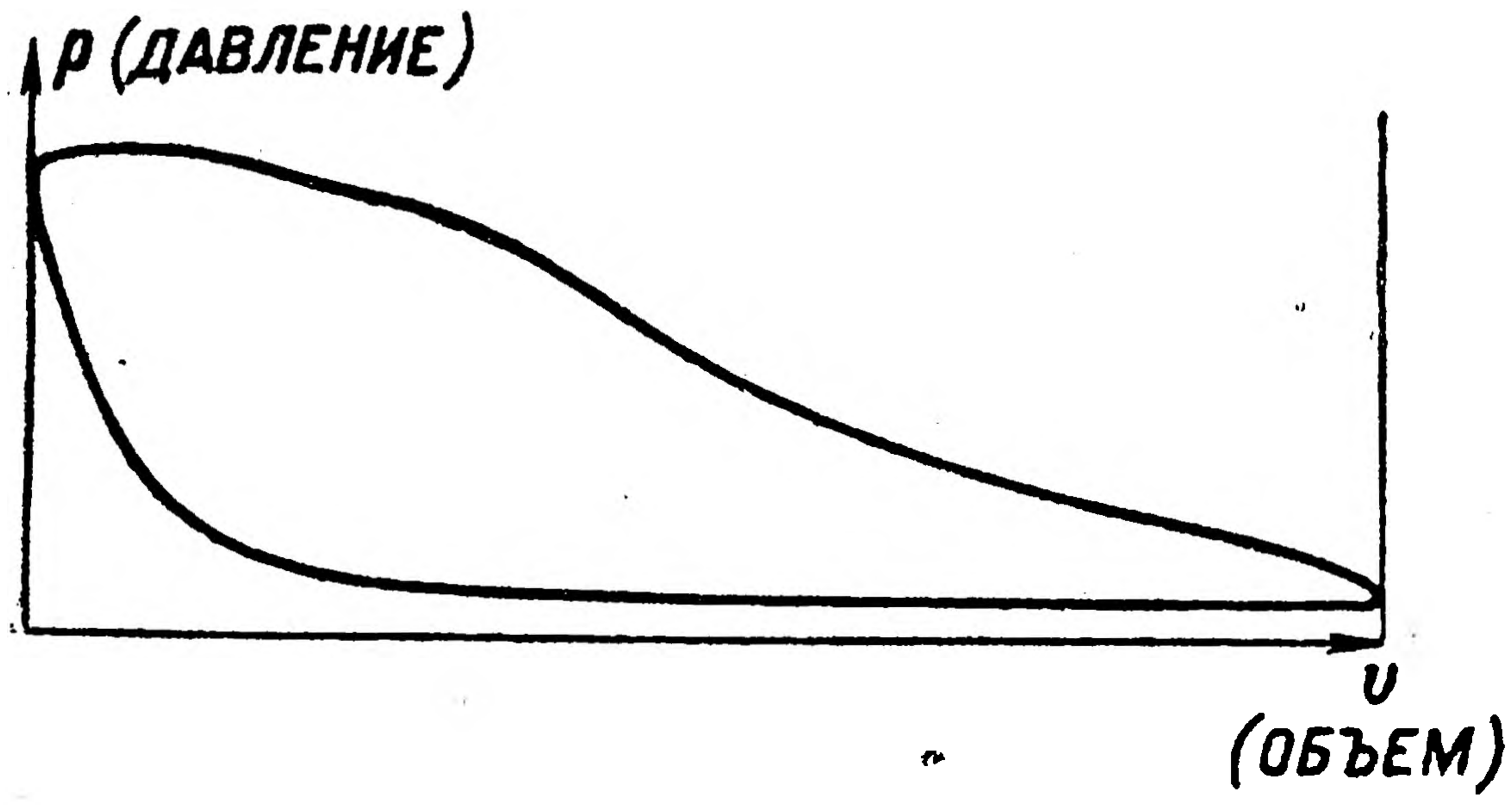


Рис. 71.

Упражнения.

1. Вычертить график функции $y = \sin x$ для значений x от $0°$ до $90°$ в масштабе $m_x = 1$ *мм*, $m_y = 100$ *мм*, построить по способу средних ординат график интеграла $\Phi(x) = \int_0^x \sin x dx$ и найти по графику значение $\Phi(90°)$. Выяснить, как меняется точность результата в зависимости от принятой ширины полоски.

2. Та же задача для функции $y = 0{,}6x^2 - 2{,}5x + 2$ и для пределов $a = -1$, $b = +5$.

3. Найти площадь *индикаторной диаграммы,* изображенной на рисунке 71 (в квадратных миллиметрах).

§ 89. Численное интегрирование посредством интерполяционных формул.

Если имеется таблица значений функции $y = f(x)$ для значений аргумента x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \ldots$ и требуется найти $J = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$, то выгоднее всего, как и в аналогичной задаче на диференцирование, обратиться к интерполяционным формулам.

Возьмем формулу Бесселя:

$$f(x) = f(x_0 + th) = y_{0,5} + (t - 0{,}5)\,\Delta y_0 + \frac{1}{2}(t^2 - t)\,\Delta^2 y_{-0,5} +$$
$$+ \frac{1}{6}(t^3 - 1{,}5t^2 + 0{,}5t)\,\Delta^3 y_{-1} + \frac{1}{24}(t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t)\Delta^4 y_{-1,5} + \ldots$$

и вычислим $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = h\int_0^1 f(x_0 + th)\,dh$; получим, доводя вычисление до разностей 8-го порядка, формулу:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = h\left[y_{0,5} - \frac{1}{12}\Delta^2 y_{-0,5} + \frac{11}{720}\Delta^4 y_{-1,5} - \frac{191}{60480}\Delta^6 y_{-2,5} + \right.$$
$$\left. + \frac{2497}{3628800}\Delta_8 y_{-3,5} - \ldots\right].$$

Написав подобные выражения для $\int\limits_{x_0}^{x_1}, \int\limits_{x_1}^{x_2}, \int\limits_{x_2}^{x_3}, \ldots, \int\limits_{x_{x-1}}^{x_n}$, сложим их все и получим новую формулу:

$$J(x_n) = \int\limits_{x_0}^{x_n = x_0 + nh} f(x)\,dx = h\left[\sum_{i=0}^{n-1} y_{i+0,5} - \frac{1}{12}\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2 y_{-0,5} + \frac{11}{720}\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^4 y_{i-1,5} - \ldots\right].$$

В эту формулу вместо *основных* чисел разностной схемы, т. е. значений функции y_i и ее разностей Δy_i, $\Delta^2 y_i$, $\Delta^3 y_i, \ldots$ с целыми значками $i = 0, 1, 2, \ldots$ входят *дополнительные* ее числа, а именно, $y_{i+0,5} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})$;

$$\Delta^2 y_{i-0,5} = \frac{1}{2}(\Delta^2 y_{i-1} + \Delta^2 y_i), \quad \Delta^4 y_{i-1,5} = \frac{1}{2}(\Delta^4 y_{i-2} + \Delta^4 y_{i-1}), \ldots,$$

которые мы вписываем в промежутках между основными ее числами. Легко видеть, что, взяв такие дополнительные числа во всех столбцах схемы, мы получим *новую разностную схему*, „дополнительную“ к первой. Действительно,

$$\Delta^k y_{i+1,5} - \Delta^k y_{i+0,5} = \frac{1}{2}(\Delta^k y_{i+1} + \Delta^k y_{i+2}) - \frac{1}{2}(\Delta^k y_i + \Delta^k y_{i+1}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\Delta^k y_{i+2} - \Delta^k y_i);$$

$$\Delta^{k+1} y_{i+0,5} = \frac{1}{2}(\Delta^{k+1} y_i + \Delta^{k+1} y_{i+1}) = \frac{1}{2}(\Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i + \Delta^k y_{i+2} - \Delta^k y_{i+1}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\Delta^k y_{i+2} - \Delta^k y_i)$$

и, следовательно, $\Delta^k y_{i+1,5} - \Delta^k y_{i+0,5} = \Delta^{k+1} y_{i+0,5}$. Таким образом, разность двух последовательных дополнительных чисел столбца $\Delta^k y$ равна дополнительному числу столбца $\Delta^{k+1} y$, записанному на промежуточной строке, и дополнительные числа разностной схемы сами образуют разностную схему („дополнительную“ к основной).

Как мы видели в § 81, сумма всех чисел некоторого столбца разностной схемы равна разности между последним и первым числами ближайшего левого столбца. Прилагая это предложение к числам дополнительной схемы, получаем:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2 y_{i-0,5} = \Delta y_{n-0,5} - \Delta y_{0,5}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^4 y_{i-1,5} = \Delta^3 y_{n-2,5} - \Delta^3 y_{-1,5},$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^6 y_{i-2,5} = \Delta^5 y_{n-2,5} - \Delta^5 y_{-2,5}, \ldots$$

Что касается суммы $\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_{i+0,5}$, то ее тоже можно представить в виде разности двух чисел, если добавить в разностной схеме (основной и дополнительной) еще один столбец слева (столбец „сумм 1-го порядка“).

Первое число этого столбца $\Delta^{-1}y_0$ произвольно, второе $\Delta^{-1}y_1$ равно $\Delta^{-1}y_0+y_0$, третье $\Delta^{-1}y_2$ равно $\Delta^{-1}y_1+y_1$ и т. д.

$$\begin{array}{lllll}
\Delta^{-1}y_0 & & & & \\
 & y_0 & & & \\
\Delta^{-1}y_1 & & \Delta y_0 & & \\
 & y_1 & & \Delta^2 y_0 & \\
\Delta^{-1}y_2 & & \Delta y_1 & & \\
 & y_2 & & & \\
\Delta^{-1}y_3 & & & &
\end{array}$$

Столбец сумм 1-го порядка можно пополнить дополнительными числами

$$\Delta^{-1}y_{0,5}=\frac{1}{2}(\Delta^{-1}y_0+\Delta^{-1}y_1),\quad \Delta^{-1}y_{1,5}=\frac{1}{2}(\varphi^{-1}y_1+\Delta^{-1}y_2),\ \ldots,$$

которые представляют собой суммы 1-го порядка для чисел $y_{0,5}$, $y_{1,5}, \ldots$, причем

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_{i-0,5}=\Delta^{-1}y_{n+0,5}-\Delta^{-1}y_{0,5}.$$

Формула для $J(x_n)$ перепишется теперь в таком виде:

$$J(x_n)=\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=h\left[\Delta^{-1}y_{n+0,5}-\frac{1}{12}\Delta y_{n-0,5}+\right.$$
$$\left.+\frac{11}{720}\Delta^3 y_{n-1,5}-\frac{191}{60\,480}\Delta^5 y_{n-2,5}+\frac{2497}{3628800}\Delta^7 y_{n-3,5}-\ldots\right], \qquad \text{(I)}$$

так как произвольное значение $\Delta^{-1}y_0$ можно выбрать так, чтобы совокупность членов, не зависящих от n, была равна нулю; для этого надо взять

$$\Delta^{-1}y_{0,5}=\frac{1}{12}\Delta y_{-0,5}-\frac{11}{720}\Delta^3 y_{-1,5}+\frac{191}{60480}\Delta^5 y_{-2,5}-\frac{2497}{3628800}\Delta^7 y_{-3,5}+\ldots \qquad \text{(II)}$$

Формула (I) позволяет весьма просто составить таблицу значений интеграла с переменным верхним пределом $J(x)=\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$, если имеется таблица значений подинтегральной функции $y=f(x)$. Значения интеграла получаются для тех же значений аргумента x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, ..., $x_n=x_0+nh$, для которых вычислены значения подинтегральной функции. Так как в формулу входят исключительно дополнительные числа разностной схемы, то сейчас же после составления таблицы значений y_i следует вписать между ними числа $y_i+_{0,5}=\frac{1}{2}y_i+$ $+y_{i+1})$, и *разностную схему составить только для этих дополнительных чисел*, вовсе не вычисляя и не записывая разностей основной схемы. Начальное значение суммы 1-го порядка, записываемое на одной горизонтальной строке с числом x_0, вычисляется по формуле (II). Все числа схемы, нужные для вычисления $j(x_i)$, лежат на одной горизонтальной строке с числом x_i. Чтобы пополнить схему разностями для строк в начале и в конце таблицы, приходится либо экстраполировать, либо брать несколько лишних значений подинтегральной функции в начале и в конце таблицы.

При численном диференцировании, как мы видели, наблюдается потеря точности: таблица значений производной функции $y' = \frac{df(x)}{dx}$ оказывается, вообще говоря, менее точной, чем данная таблица значений функции $y = f(x)$. При численном интегрировании наблюдается обратное: значения интеграла $J(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ оказываются, вообще говоря, более точными, чем данные значения функции $y = f(x)$. Так, если $h = 0{,}1$ и значения $y = f(x)$ даны с k десятичными знаками, то значения $y = f(x)$ благодаря наличности множителя h во второй части формулы (I) получаются с $k+1$ десятичными знаками. Правда, нередко происходит накопление погрешностей, и последний знак заслуживает, вообще говоря, тем меньше доверия, чем больше число n.

i	x	$\Delta^{-1}y$	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$-\frac{1}{12}\Delta y$	$+\frac{11}{720}\Delta^3 y$	$\int\limits_1^x \frac{dx}{x} = \ln x$
−2	0,8		1,2500								
			1,1806								
−1	0,9		1,1111	−1250							
			1,0556		239						
0	1,0	−83	1,0000	−1011		−61			$+84{,}_2$	$-0{,}_0$	0,00000
		83	9545		178		17				
1	1,1	9 462	9091	− 833		−44		−3	$69{,}_4$	$-0{,}_7$	0,09531
		69	8712		134		14				
2	1,2	18 174	8333	− 699		−30		−6	$58{,}_2$	$-0{,}_5$	0,18232
		58	8013		104		8				
3	1,3	26 187	7692	− 595		−22		−2	$49{,}_6$	$-0{,}_3$	0,26236
		49	7418		82		6				
4	1,4	33 605	7143	− 513		−16		−1	$42{,}_8$	$-0{,}_2$	0,33648
		43	6905		66		5				
5	1,5	40 510	6667	− 447		−11		−4	$37{,}_3$	$-0{,}_2$	0,40547
		37	6458		55		1				
6	1,6	46 968	6250	− 392		−10		+1	$32{,}_7$	$-0{,}_2$	0,47000
		32	6066		45		2				
7	1,7	53 034	5882	− 347		− 8		+2	$28{,}_9$	$-0{,}_1$	0,53063
		29	5719		37		4				
8	1,8	58 753	5556	− 310		− 4		−7	$25{,}_8$	$-0{,}_1$	0,58779
		26	5409		33		−3				
9	1,9	64 162	5263	− 277		− 7			$23{,}_1$	$-0{,}_1$	0,64185
		23	5132		26						
10	2,0	69 294	5000	− 251					$20{,}_9$	$(-0{,}_1)$	0,69315
		21	4881								
11	2,1		4762								

В качестве примера возьмем таблицу значений функции $f(x) = \frac{1}{x}$, вычисленных с 4 десятичными знаками при ступени $h = 0{,}1$, и найдем значения $J(x) = \int\limits_1^x \frac{dx}{x}$, т. е. составим таблицу значений натурального логарифма. За x_0 примем 1, но таблицу значений $y = \frac{1}{x}$ начнем с $x = 0{,}8$, чтобы сделать ненужной экстраполяцию. Заполнив столбец y_i табличными значениями дроби $\frac{1}{x}$, начиная от $\frac{1}{0{,}8} = 1{,}2500$, выписываем в промежутки дополнительные числа, из которых первое есть $\frac{1}{2}(1{,}2500 + 1{,}1111\ldots) = \frac{1}{2}\cdot 2{,}3611\ldots = 1{,}1806$, и составляем разностную схему для этих дополнительных чисел. Заполняем и добавочные столбцы для чисел $-\frac{1}{12}\Delta y$ и $+\frac{11}{720}\Delta^3 y$. Как видим, разности 5-го порядка можно считать нулями, так как их произведения на $\frac{191}{60480}$ ничтожно малы.

Далее находим $\Delta^{-1}y_{-0,5}$ по формуле (II): $\Delta^{-1}y_{-0,5}=\frac{1}{12}(-1011)-\frac{11}{720}(-61)=-84,_2+0,_9=-83,_3\approx-83$, и вписываем это число на одну строку с $x_0=1,0$ в столбец сумм $\Delta^{-1}y$. Суммируя, получим последующие числа столбца сумм: $-83+9545=9462$, $9462+8717=18\,174$ и т. д. Затем вычисляем „поправки“ $-\frac{1}{12}\Delta y$, $+\frac{11}{720}\Delta^3 y$ и подписываем их под числами столбца сумм. Прибавив поправки и умножая каждый результат на $h=0,1$, получим искомые значения интеграла, которые и записываем в последнем столбце схемы. Сравнение полученных результатов с табличными (пятизначными) натуральными логарифмами чисел 1,0; 1,1; 1,2 и т. д. показывает, что только в одном случае у нас имеет место расхождение в единицу разряда последней цифры ($\ln 1,4$ у нас оказался 0,33648, по таблице 0,33647), во всех же остальных случаях получилось полное совпадение.

Упражнения.

1. Пользуясь формулой (I), вычислить значения интеграла вероятностей $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$ для значений x от 0,0 до 1,0 через 0,1. Значения функции $y=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ приведены ниже. Там же для поверки указаны значения $\Phi(x)$, вычисленные с 5 точными десятичными знаками:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1,1284	1,1172	1,0841	1,0313	0,9615	0,8788	0,7872	0,6913	0,5950	0,5020	0,4151
$\Phi(x)$	0,00000	0,11246	0,22270	0,32863	0,42839	0,52050	0,60386	0,67780	0,74210	0,79691	0,84270

2. Проверить следующую таблицу значений эллиптического интеграла („полного эллиптического интеграла I рода“) $K(\alpha)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, где $k=\sin\alpha$.

α	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
K	1,5708	1,5738	1,5828	1,5981	1,6200	1,6490	1,6858	1,7313	1,7868	1,8541

3. Прибор, установленный на шахтном подъемнике, автоматически регистрировал его скорость v в метрах в различные моменты времени t (в секундах), считая время от начала движения. Ниже приведены значения v для моментов времени через 1 секунду. Пользуясь этой таблицей, указать путь $s=\int\limits_0^t v\,dt$ (в метрах), пройденный к концу каждой из первых t секунд движения, и ускорение $w=\frac{dv}{dt}$ для тех же моментов.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v	0	2,55	4,85	6,87	8,57	9,95	11,03	11,86	12,65

t	9	10	11	12	13	14	15	16
v	13,30	14,00	14,74	15,35	15,64	15,63	15,58	15,55

4. Показать справедливость следующей формулы:

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+(n+0,5)h} f(x)\,dx=h\left[\Delta^{-1}y_{n+1}+\frac{1}{24}\Delta y_n-\frac{17}{5760}\Delta^3 y_{n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{367}{967680}\Delta^5 y_{n-2}-\frac{27859}{464486400}\Delta^7 y_{n-3}-\ldots\right],$$

более удобной, чем формула (I), в том отношении, что в нее входят лишь члены основной схемы, а также в том, что ее коэфициенты меньше.

§ 90. Численное интегрирование по формулам без разностей.

Если требуется не таблица значений интеграла с переменным верхним пределом, а лишь значение определенного интеграла $J=\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то применение интерполяционных формул, требующих составления разностной схемы, оказывается менее выгодным, чем применение формул вида

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=K_1 f(\xi_1)+K_2 f(\xi_2)+\ldots+K_n f(\xi_n),$$

где ξ_i — определенным образом выбираемые значения переменной интегрирования x, а K_i — постоянные числовые коэфициенты. Подобным формулам часто дают не совсем подходящее название „формул механических квадратур". Рассмотрим важнейшие из этих формул.

1°. Возьмем криволинейную трапецию $ABCD$ (рис. 72), площадь которой выражается интегралом $I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$, и заменим ее обыкновенной прямолинейной трапецией, проведя хорду AB. Площадь этой прямолинейной трапеции, равная $\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$, и дает простейшее приближенное выражение для интеграла I. Мы пришли к „малой формуле трапеций“:

$$I \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]. \tag{I}$$

Разделив интервал (a, b) на n равных частей, мы разобьем криволинейную трапецию $ABCD$ на n полосок шириной $h=\frac{b-a}{n}$ каждая.

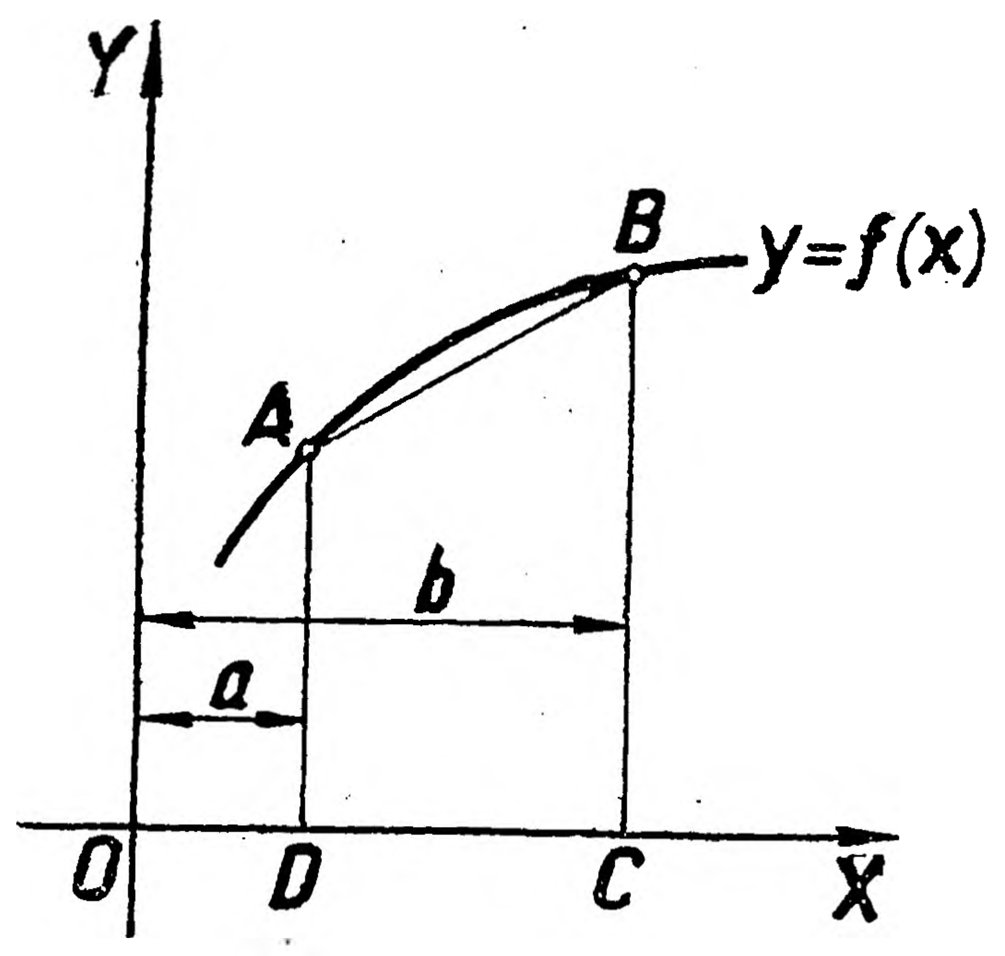


Рис. 72.

Применяя к каждой полоске формулу (I) и полагая $a=x_0$; $a+ih=x_i$; $b=x_n$; $f(x_i)=y_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$, придем к следующей „большой формуле трапеций“:

$$I \approx T_n, \quad T_n=h\left[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+\right.$$
$$\left.+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right]. \tag{II}$$

Очевидно, что в случае кривой, обращенной вогнутостью вниз, как на рисунке 72, т. е. при $f''(x)<0$, формула (II) дает приближенное значение интеграла I *по недостатку*, а в случае $f''(x)>0$, т. е. когда вогнутость кривой обращена вверх, — *по избытку*. Чтобы лучше оценить погрешность формулы (II), возьмем интерполяционную формулу Ньютона (первую), ограничиваясь разностями 2-го порядка:

$$f(x)=f(x_i+th)=y_i+t\Delta y_i+\frac{1}{2}t(t-1)\Delta^2 y_i+\ldots,$$

и вычислим $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$. Интегрируя, получим

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx=h\left[y_i+\frac{1}{2}\Delta y_i-\frac{1}{12}\Delta^2 y_i+\ldots\right],$$

или, после замены Δy_i через $y_{i+1}-y_i$ и $\Delta^2 y_i$ — через $hf''(x_i)$ (см. формулы IV, § 87)

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}h(y_i+y_{i+1})-\frac{1}{12}h^3 f''(x_i)+\ldots$$

Составив сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$, придем к формуле:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=h\left[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots y_{y-1}+\frac{1}{2}y_n\right]-\frac{1}{12}\cdot nh^3\cdot\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}f''(x_i)}{n}+\ldots,$$

или, отбрасывая все члены с разностями 3-го порядка и выше,

$$J \approx T_n-\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot M_{\text{II}}, \tag{III}$$

где M_{II} есть среднее значение второй производной $f''(x)$ в рассматриваемом интервале (a, b). Можно показать возможность замены *приближенной* формулы III *точной* формулой:

$$J = T_n - \frac{1}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2} f''(\xi), \tag{III bis}$$

где ξ — некоторое значение между a и b.

Формула (III bis) говорит, во-первых, о том, что *при достаточно большом n погрешность приближенной формулы $J \approx T_n$ может быть сделана как угодно малой,* и, во-вторых, о том, что *при постоянной второй производной* (о постоянстве второй производной можно заключить на основании равенства $f''(x_0) \approx \Delta^2 y_0 : h^2$ по постоянству второй разности) *погрешность формулы $J \approx T_n$ убывает пропорционально квадрату n.* Если при некотором n погрешность эта равна 4ε, т. е. если $J = T_n + 4\varepsilon$, то при удвоении n погрешность станет вчетверо меньше, и мы будем иметь $J = T_{2n} + \varepsilon$. Решая систему $J = T_n + 4\varepsilon$, $J = T_{2n} + \varepsilon$ относительно ε и J, получим:

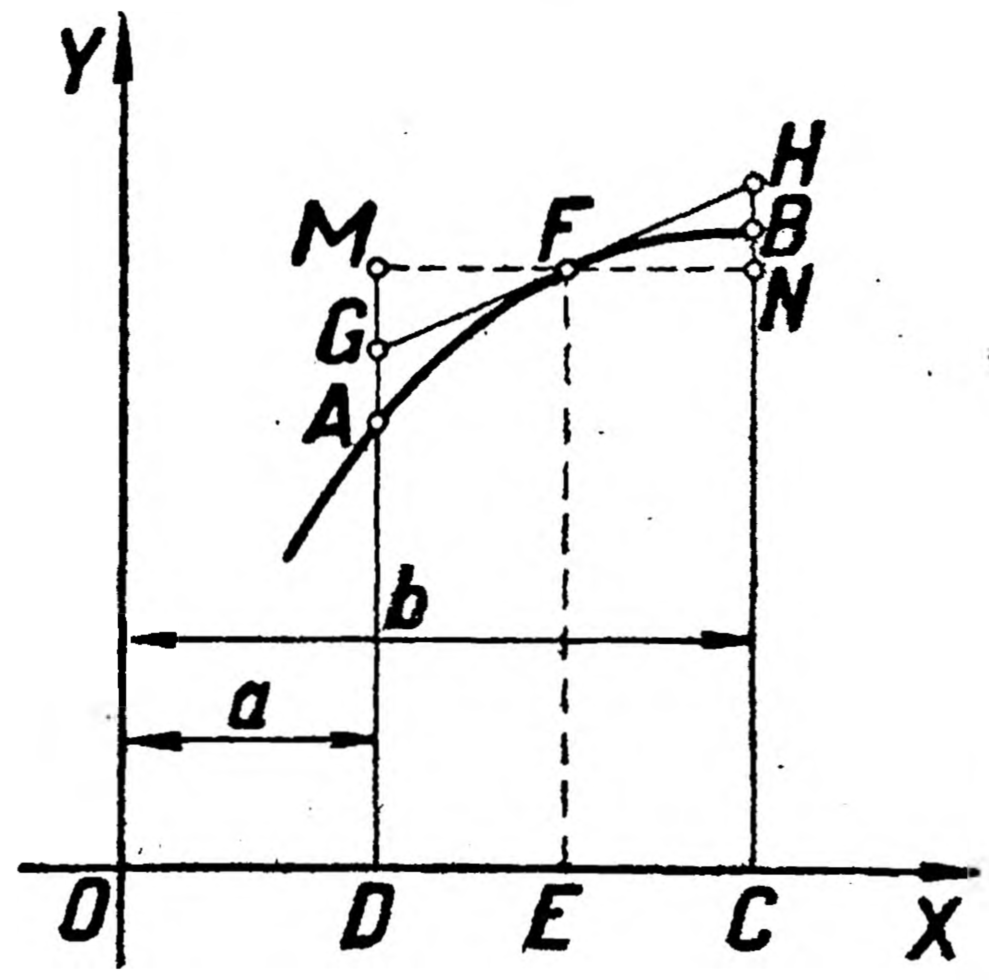


Рис. 73.

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n); \quad J = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n), \tag{IV}$$

что дает практически ценное правило оценки погрешности результатов, получаемых по формуле трапеций; если $\Delta^2 y$ приблизительно постоянна на протяжении всего интервала (a, b), то погрешность T_{2n} равна трети разности между T_{2n} и T_n, и более точное значение искомого интеграла равно $T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$.

2°. Если провести в криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 73) среднюю ординату $EF = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, а в конце ее — касательную GH к кривой $y = f(x)$, то получим новую прямолинейную трапецию $GHCD$, равновеликую „среднему“ прямоугольнику $MNCD$. Заменяя криволинейную трапецию этой прямолинейной, мы придем ко второй формуле механических квадратур, а именно к „малой формуле средних прямоугольников“:

$$J \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{V}$$

Разбивая интервал (a, b) на n равных частей и применяя формулу (V) к каждой из полученных n полосок ширины $h = \frac{b-a}{n}$, придем после суммирования к „большой формуле средних прямоугольников“:

$$J \approx R_n; \quad R_n = h\Big[f(a + 0{,}5h) + f(a + 1{,}5h) + \\ + f(a + 2{,}5h) + \ldots + f\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right)\Big], \tag{VI}$$

которая дает значение J по избытку, когда $f''(x) < 0$ (т. е. когда формула $J \approx T_n$ дает значение по недостатку), и по недостатку, когда $f''(x) > 0$ (т. е. когда формула $J \approx T_n$ дает значение J по избытку).

Таким образом, в случае постоянства знака $f''(x)$ на протяжении всего интервала (a, b) формулы (II) и (VI) отлично дополняют друг друга, так как дают низшую и высшую границы для искомого J.

Для оценки погрешности формулы (VI) берем выведенную выше формулу $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,h\,(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{12}\,h^3 f''(x_i) + \ldots$ и преобразуем первый член ее правой части, применяя формулу интерполяции на середину (стр. 242):

$$f[a + (i + 0{,}5)\,h] = f(x_i + 0{,}5\,h) = \frac{1}{2}\,[f(x_i) + f(x_{i+1})] -$$

$$- \frac{1}{8}\,\Delta^2 y_{i+0{,}5} + \ldots,$$

которую перепишем в виде

$$f[a + (i + 0{,}5)\,h] = \frac{1}{2}\,(y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{8}\,h^2 f''(x_i) + \ldots$$

(разница между $\Delta^2 y_{i+0{,}5}$ и $\Delta^2 y_i$ выражается разностью III порядка).

Подставляя, имеем:

$$\int\limits_{x_i}^{i+1} f(x)\,dx = h f[a + (i + 0{,}5)\,h] + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) h^3 f''(x_i) + \ldots,$$

или, после суммирования и отбрасывания всех ненаписанных членов,

$$J \approx R_n + \frac{1}{24} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2}\,M_{\text{II}}, \qquad \text{(VII)}$$

где M_{II} — среднее значение второй производной. Как и раньше, эту приближенную формулу можно заменить точной:

$$J = R_n + \frac{1}{24}\,\frac{(b-a)^3}{n^2}\,f''(\xi), \qquad \text{(VII bis)}$$

где ξ — некоторое значение между a и b.

Формула (VII bis) показывает, 1) что R_n стремится к J, как к пределу при $n \to \infty$; 2) что погрешность формулы $J \approx R_n$ убывает пропорционально квадрату n, а потому для оценки результатов применения этой формулы можно рекомендовать способ, указанный в конце $n1°$; 3) что погрешность формулы $J \approx R_n$ при постоянстве $f''(x)$, будучи обратной по знаку погрешности формулы $J \approx T_n$, вдвое меньше ее по числовой величине.

3°. Сопоставление погрешностей формул $J \approx T_n$ и $J \approx R_n$ по величине и по знаку, естественно, приводит к мысли о таком комбинировании этих двух формул, при котором погрешность исключалась бы возможно полнее. Полагая $J \approx R_n + \varepsilon$, имеем в силу сказанного выше $J \approx T_n - 2\varepsilon$. Почленное сложение этих двух равенств после предварительного умножения первого из них на 2 приводит к формуле $J \approx \frac{1}{3}\,(2R_n + T_n)$, которая при $n = 1$ в силу равенств $T_1 = \frac{1}{2}\,h\,(y_0 + y_1) = \frac{1}{2}\,h\,[f(a) + f(b)]$ и $R_1 = h f\left(a + \frac{1}{2}\,h\right)$, $h = b - a$, переписывается в виде:

$$J \approx \frac{b-a}{6}\,\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \qquad \text{(VIII)}$$

Эта формула, известная под названием „малой формулы Симпсона", легко выводится независимо от предшествующих, если предположить, что подинтегральная функция $f(x)$ есть целая рациональная функция третьей степени. Действительно, перенеся ось Y параллельно самой себе так, чтобы она прошла через середину основания DC криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 74), и переходя тем самым к новой переменной x', изменяющейся от $x' = -\frac{b-a}{2} = -k$ до $x' = +\frac{b-a}{2} = +k$, предположим, что уравнение кривой AB есть $y' = A + Bx' + Cx'^2 + Dx'^3$.

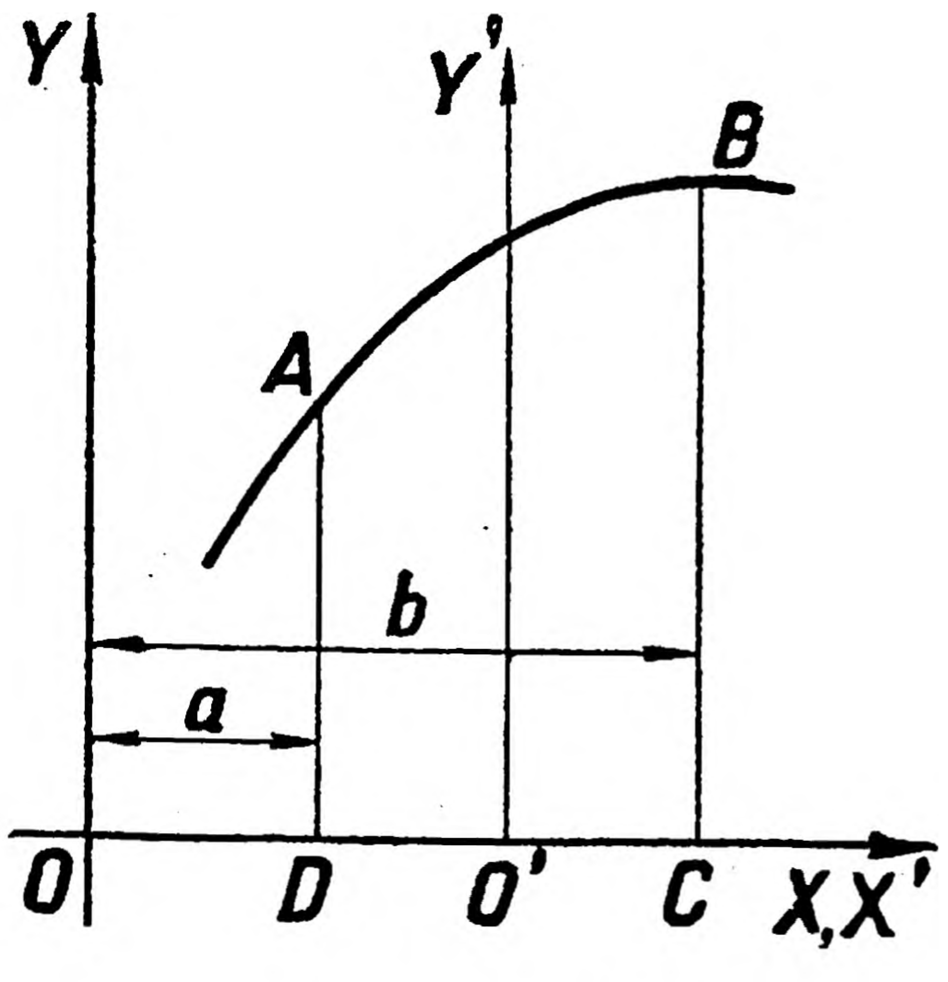


Рис. 74.

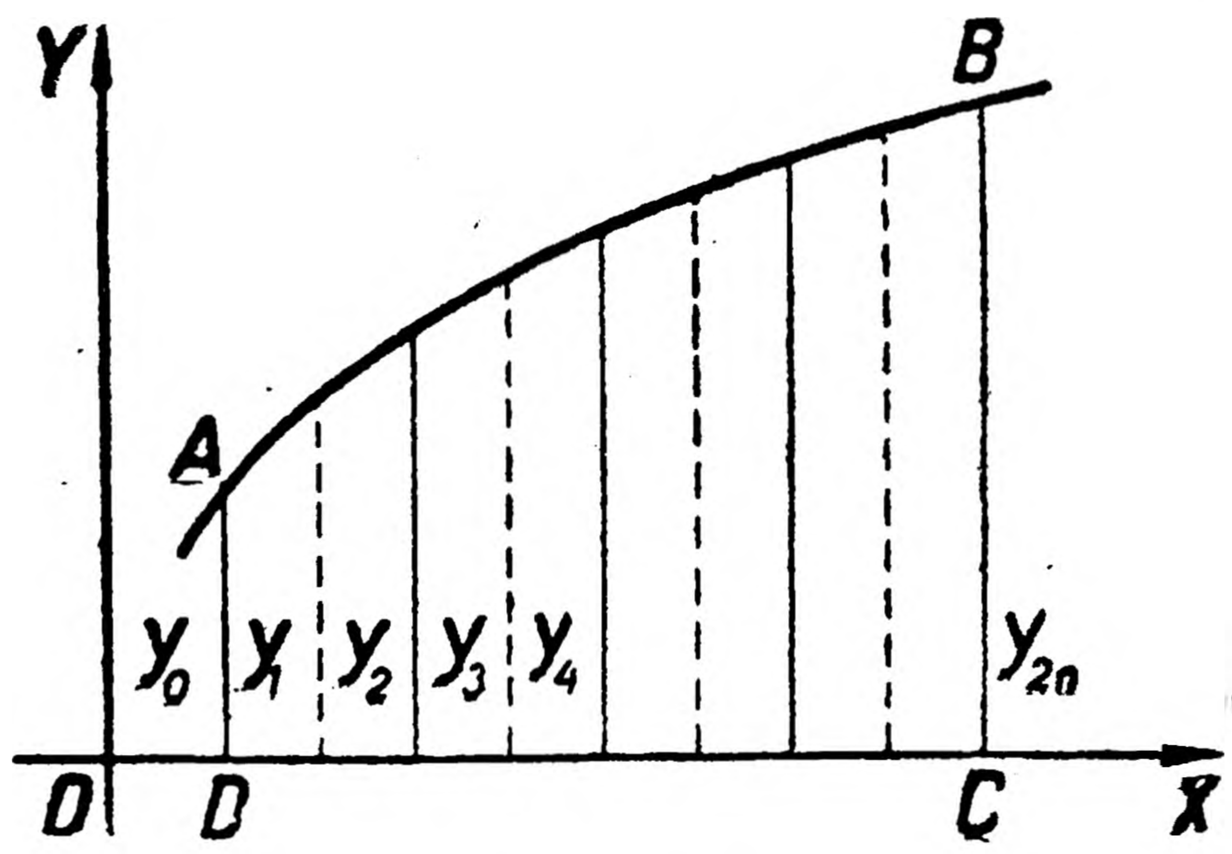


Рис. 75.

Тогда $J = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-k}^{+k} (A + Bx' + Cx'^2 + Dx'^3)\,dx' = 2Ak + \frac{2}{3}Ck^3$

Но $f(a) = A - Bk + Ck^2 - Dk^3$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = A$; $f(b) = A + Bk +$

$+ Ck^2 + Dk^3$,

откуда $A = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $2Ck^2 = f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$,

а потому $J = 2kf\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}k\left[f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$,

и после упрощений приходим к формуле:

$$J = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Как видим, формула Симпсона есть формула точная, когда $f(x)$ есть многочлен третьей степени (или ниже). Во всех остальных случаях она дает искомый интеграл с некоторым приближением. Чтобы повысить точность, разобьем трапецию $ABCD$, как и раньше, на n полосок, но полоски эти возьмем теперь *двойными* (рис. 75). Обозначив ширину одной двойной полоски через $2h$, причем $2h = \frac{b-a}{n}$, а ординаты кривой буквами $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-1}, y_{2n}$, причем $y_0 = f(a)$; $y_1 = f(a+h)$; $y_2 = f(a+2h)\ldots$, применим малую формулу Симпсона к каждой из n двойных полосок. Суммируя результаты, придем к „большой формуле Симпсона":

$$J \approx S_n,\quad S_n = \frac{2h}{6}\left[y_0 + 4\Sigma_1 + 2\Sigma_2 + y_{2n}\right], \qquad \text{(IX)}$$

где

$$2h=\frac{b-a}{n};\ \Sigma_1=y_1+y_3+y_5+\ldots+y_{2n-1};$$
$$\Sigma_2=y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2}.$$

Для оценки погрешности результатов, доставляемых формулой (IX), возьмем интерполяционную формулу Ньютона, доведенную до члена с разностью 4-го порядка, и вычислим интеграл:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx=h\int\limits_0^2 f(x_i+th)\,dt=h\cdot\left[2y_i+2\Delta y_i+\frac{1}{3}\Delta^2 y_i-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{90}\Delta^4 y_i+\ldots\right]=\frac{1}{3}h\left[y_i+4y_{i+1}+y_{i+2}\right]-\frac{1}{90}h\,\Delta^4 y_i+\ldots$$

Суммируя подобные интегралы, написанные для $i=0, 2, 4,\ldots,2n-2$, заменяя $\Delta^4 y_i$ через $h^4 f^{IV}(x_i)$ и отбрасывая все члены с разностями порядка 5 и выше, получим формулу:

$$J\approx S_n-\frac{1}{90}h^5\,\Sigma f^{IV}(x_i)=S_n-\frac{(b-a)^5}{90\cdot 32n^4}\cdot\frac{\Sigma f^{IV}(x_i)}{n},$$

или окончательно

$$J\approx S_n-\frac{1}{2880}\cdot\frac{(b-a)^5}{n^4}\cdot M_{IV}, \tag{X}$$

где M_{IV} есть среднее значение производной 4-го порядка $f^{IV}(x_i)$.

Вместо приближенной формулы (10) можно воспользоваться точной формулой:

$$J=S_n-\frac{1}{2880}\cdot\frac{(b-a)^5}{n^4}\cdot f^{IV}(\xi),$$

которую примем без вывода. Здесь ξ — некоторое число в промежутке (a, b).

Формула (X) показывает, что формула Симпсона гораздо точнее, чем формулы трапеций и средних прямоугольников. При увеличении числа двойных полосок n погрешность убывает пропорционально четвертой степени n. Поэтому, если $J=S_{2n}+\xi$, то $J\approx S_n+16\xi$, откуда

$$\varepsilon\approx\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n);\quad J\approx S_{2n}+\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n).$$

4°. Формулу Симпсона мы вывели, пользуясь параболой 3-го порядка. Применяя параболы более высокого порядка, получим ряд новых, еще более точных формул механических квадратур („формулы Котеса"). Однако в силу большей своей сложности они оказываются менее пригодными для практических вычислений, чем формулы трапеций, средних прямоугольников, Симпсона, которые все, как мы видели, при достаточно большом n дают произвольно высокую точность. Формула Симпсона, не требуя заметного увеличения выкладок по сравнению с формулами трапеций и средних прямоугольников, дает значительно большую точность, а потому чаще употребляется. Формулы трапеций и средних прямоугольников предпочтительнее тогда, когда надо получить низшую и высшую границы результата (если $f''(x)$ в интервале от a до b меняет знак, этот интервал разбивают на части с таким расчетом, чтобы на протяжении каждой части производная $f''(x)$ была постоянной по знаку).

5°. Рассмотрим примеры на применение выведенных формул.

Задача 1. Применяя формулу трапеций при $n=6$ и $n=12$, найти

$$J=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\sin x\,dx.$$

Вычисление при $n=6$.

i	x_i	$\sin x_i$	$\sin x_i$
0	0°	0,0000	
1	15°		0,2588
2	30°		0,5000
3	45°		0,7071
4	60°		0,8660
5	75°		0,9659
6	90°	1,0000	
Сумма		$1{,}0000=2A$	$3{,}2978=B$

$$T_6=\frac{1}{12}\pi(A+B)=0{,}26180\cdot 3{,}7978=$$
$$=0{,}9943$$

Вычисление при $n=12$.

i	x_i	$\sin x_i$	$\sin x_i$
0	0°	0,0000	
1	7°30′		0,1305
2	15°		2588
3	22°30′		3827
4	30°		5000
5	37°30′		6088
6	52°30′		7071
7	45°		7934
8	60°		8660
9	67″30′		9239
10	75°		9659
11	82°30′		9914
12	90°	1,0000	
Сумма		$1{,}0000=2A_1$	$7{,}1285=B_1$

$$T_{12}=\frac{1}{24}\pi(A_1+B_1)=0{,}13090\cdot 7{,}6285=0{,}9986.$$

$$T_{12}-T_6=0{,}0043,\quad \frac{1}{3}(T_{12}-T_6)=0{,}0014,$$

$$J\approx 0{,}9986+0{,}0014=1{,}0000.$$

Как видим, вычислив T_6 и T_{12} и придав к T_{12} поправку, равную $\frac{1}{3}(T_{12} - T_6)$, мы получили как раз точное значение искомого интеграла (в пределах 4 десятичных знаков).

Проведем то же самое вычисление еще раз, пользуясь уже формулой средних прямоугольников.

Вычисление при $n = 6$.

i	$x_{i+0,5}$	$\sin x_{i+0,5}$
0	7°30′	0,1305
1	22°30′	3827
2	37°30′	6088
3	52°30′	7934
4	67°30′	9239
5	82°30′	9914
	Сумма	$3,8307 = C$

$$R_6 = \frac{1}{12}\pi \cdot C = 0,26180 \cdot 3,8307 = 1,0029$$

$$R_{12} = \frac{1}{24}\pi \cdot C_1 = 0,13090 \cdot 7,6449 = 1,0007$$

$$R_{12} - R_6 = -0,0022, \quad \frac{1}{3}(R_{12} - R_6) = -0,0007$$

$$J \approx R_{12} + \frac{1}{3}(R_{12} - R_6) = 1,0007 - 0,0007 = 1,0000.$$

Вычисление при $n = 12$.

i	$x_{i+0,5}$	$\sin x_{i+0,5}$
0	3°45′	0654
1	11°15′	1951
2	18°45′	3214
3	26°15′	4423
4	33°45′	5555
5	41°15′	6594
6	48°45′	7519
7	56°15′	8315
8	63°45′	8969
9	71°15′	9469
10	78°45′	9808
11	86°15′	9978
	Сумма	$6,6471 = C_1$

Как видим, и здесь получилось точное значение искомого интеграла, причем погрешность R_6 и R_{12} оказалась, примерно, вдвое меньше (по абсолютной величине) погрешности T_6 и T_{12}, как и должно быть (при постоянстве знака второй производной).

Вычисление по формуле Симпсона уже при $n=6$ (шесть двойных полосок) приводит к точному значению (в пределах 4 десятичных знаков):

$$S_6=\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{12}(\sin 0^\circ+4\Sigma_1+2\Sigma_2+\sin 90^\circ);$$
$$\Sigma_1=\sin 7^\circ30'+\sin 22^\circ30'+\ldots=C=3{,}8307;$$
$$\Sigma_2=\sin 15^\circ+\sin 30^\circ+\ldots=B=3{,}2978;$$
$$S_6=\frac{1}{6}\cdot 0{,}26180\cdot 22{,}9184=1{,}0000$$

Задача 2. Вычислить значение $J=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ с 4 десятичными знаками.

Воспользуемся здесь формулой Симпсона, причем возьмем сперва четыре, потом восемь двойных полосок, ограничиваясь 4 десятичными знаками в значениях подинтегральной функции:

Вычисление при $n=4$.

$$S_4=\frac{1}{6}\cdot 0{,}25\,(y_0+4\Sigma_1+2\Sigma_2+y_8)$$

i	x_i	$1+x_i^2$	$y_i=(1+x_i^2)^{-1}$	y_i	y_i
0	0,000	1,0000	1,0000		
1	0,125	1,0156		0,9846	
2	0,250	1,0625			0,9412
3	0,375	1,1406		0,8767	
4	0,500	1,2500			0,8000
5	0,625	1,3906		0,7191	
6	0,750	1,5625			0,6400
7	0,875	1,7656		0,5664	
8	1,000	2,0000	0,5000		
			$y_0+y_8=1{,}5000$	$\Sigma_1=3{,}1468$	$\Sigma_2=2{,}3812$

$$S_4=\frac{1}{24}\cdot 18{,}8496=$$
$$=0{,}78540.$$

Подобное же вычисление, проведенное при восьми двойных полосках, дает $S_8=\frac{1}{6}\cdot 0{,}125\cdot 37{,}6992=0{,}78540.$

Совпадение результатов, полученных при $n=4$ и $n=8$, дает основание отнестись с доверием ко всем найденным цифрам.

Значение интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ известно точно, так как он равен $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}\pi \approx 0{,}785398\ldots$ Погрешность найденного выше значения не достигает, таким образом, и половины единицы последнего разряда, и для получения искомого значения интеграла с требуемой точностью в 4 десятичных знака можно было бы, как видим, ограничиться лишь 3 десятичными знаками в значениях подинтегральной функции.

Упражнения.

1. Вычислить значение функции („интеграл — синус“):

$$Si(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

при $x=1$ с 4 десятичными знаками.

2. Найти значение эллиптического интеграла 1-го рода:

$$F(\alpha,\varphi) = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k = \sin \alpha$$

при $\alpha = 30°$, $\varphi = 40°$ с той точностью, какую можно получить, применяя для вычисления значений подинтегральной функции четырехзначные таблицы (синусов, квадратов, квадратных корней, обратных величин).

3. Найти с 5 десятичными знаками значение модуля M перехода от натуральных логарифмов к десятичным, зная, что $\frac{1}{M} = \ln 10 = \int\limits_1^{10} \frac{dx}{x}$.

4. Вычислить, пользуясь формулой Симпсона, площадь индикаторной диаграммы, изображенной на рисунке 71.