В. БРАДИС

АРИФМЕТИКА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

ИЗДАНИЕ 2-ОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА • 1931 • ЛЕНИНГРАД

Отзыв об этой книге сообщить в редакцию журнала „Учебно-педагогическая книга“. Москва, Кузнецкий мост, 16, УЧГИЗ

У — 83. Учгиз № 126/л.
Ленинградский Областлит № 3184. Тираж 10.000—$14^1/_2$ л. Заказ № 147
Гос. типография имени Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Читателю, желающему ознакомиться со способами первоначального ознакомления школьников с правилами подсчета цифр, позволяю себе рекомендовать мою брошюру „Как надо вычислять“ (Гиз, 1929 г., Рабочая библиотека по математике, под редакцией А. М. Воронца, № 9).

Считаю долгом отметить, что пропагандируемые мною методы учета погрешностей (способ границ и способ подсчета цифр) представляют собой лишь развитие мыслей, не раз высказанных некоторыми авторами. Особенно сильный толчок в этом направлении дала мне книга по приближенным вычислениям проф. И. Н. Кавуна, которому приношу глубокую благодарность за неизменное внимание к моей работе и ценную помощь в ней.

Как при построении курса, так и при обработке книги, особенно ее X главы, я воспользовался рядом ценных советов проф. И. К. Андронова, и прошу его принять мою искреннюю благодарность.

20. VIII. 1929

Автор

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Расчеты буквенные и числовые. Расчеты, или вычисления, производятся над величинами, которые либо даны в общем виде и изображены буквами, либо имеют определенные числовые значения и изображены цифрами. В первом случае мы имеем дело с *буквенными расчетами*, во втором с *расчетами числовыми*. Только эти последние и рассматриваются в настоящей книге. Вместо термина „числовые расчеты", краткости ради, мы будем употреблять термин „*вычисления*", понимая его в указанном более узком смысле.

Почти каждая математическая задача практического содержания в заключительной части своего решения требует более или менее сложного вычисления (числового расчета). Для успешного выполнения таких вычислений, как оказывается, недостаточно тех знаний и навыков, какие до недавнего времени давала общеобразовательная школа. Дать необходимые дополнительные сведения, чтобы обеспечить вполне сознательное, быстрое и достаточно точное выполнение вычислений, и является задачей настоящего руководства.

§ 2. Вычисления с точными и неточными данными. Данные вычислений могут быть *точными*, но могут быть (и в громадном большинстве случаев действительно бывают) *неточными*, приближенными. В зависимости от характера данных, вычисления можно подразделить на *вычисления с точными данными* и *вычисления с приближенными данными*. Не следует, однако, думать, что всякое вычисление с точными данными непременно приводит к точному же результату. Это имеет место лишь в тех случаях, когда вычисление сводится к производству действий I ступени (сложения и вычисления) и прямых действий

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее руководство представляет собой несколько расширенное изложение лекций по первой (элементарной) части курса „Приближенных вычислений“, читанных мною в течение ряда лет студентам Физико-технического отделения Тверского педагогического института. Ограничиваясь почти исключительно вопросами, непосредственно связанными с программой математики для школы II ступени, я ставил себе задачей дать студентам, будущим преподавателям математики и физики, несколько более глубокое их освещение, а вместе с тем и ряд полезных навыков в области вычислительной техники. Вместе с тем были учтены и те требования по Арифметике приближенных вычислений, какие предъявляют к студентам другие изучаемые ими дисциплины, в первую очередь физика и геодезия.

От других аналогичных руководств предлагаемая книга отличается резким разграничением „вычислений со строгим учетом погрешностей“ и „вычислений без строгого учета погрешностей“ и большим вниманием, уделяемым способу границ и способу подсчета цифр. Обоснованию и пропаганде этих двух способов посвящен ряд моих статей, и сочувственное внимание, ими встречаемое, а также рекомендация этих двух способов программами ГУС'а (1927 г.) для школы-семилетки позволяют думать, что для школы они действительно имеют некоторое значение.

Стремясь достичь полной элементарности изложения и доступности книги для всех, знакомых с математикой в объеме курса школы II ступени, я должен был не раз поступиться строгостью и полнотой доказательств, особенно при изложении сведений по теории ошибок (гл. III) и при обосновании правил подсчета цифр (гл. VI), и отсылаю более требовательного читателя к специальной литературе, указанной частью в тексте, частью (по вопросу о правилах подсчета цифр) в конце книги.

II и III ступени (умножения и возведения в степень), да и то не всегда. После ряда, например, умножений цифровой состав числа, получаемого в результате, часто становится столь сложным, числа приобретают такие длинные „хвосты“, что обращение с ними становится весьма затруднительным. Тогда их „округляют“, т. е. отбрасывают одну или несколько последних цифр, сознательно заменяя точные, но неудобные результаты неточными, но зато удобными, и следя за тем, чтобы вводимая погрешность („погрешность от округления“) была допустима с точки зрения практического использования этих результатов. Действие деления, если избегать громоздких простых дробей, в громадном большинстве случаев приводит к приближенным результатам. Совершенно неустранима неточность результатов обратных действий III ступени — извлечения корня и логарифмирования (за редкими исключениями).

Погрешность в результате вычисления с точными данными мы будем называть *„вычислительною погрешностью“*. Учет такой погрешности, т. е. решение вопроса о ее величине или, вернее, о верхней ее границе (о наибольшем возможном ее значении), если речь идет о выполнении отдельных арифметических действий, затруднений не представляет. Если же мы имеем дело с рядом операций, причем приближенные результаты некоторых действий служат данными для последующих действий, то мы переходим уже к *вычислению с неточными данными*, и совершенно необходимым становится знакомство с *Арифметикой приближенных вычислений*.

§ 3. Основные задачи Арифметики приближенных вычислений. Всякое число, представляющее собою приближенное значение некоторой величины, будем называть, краткости ради, просто *приближенным числом*. Кроме двух уже указанных источников приближенных чисел, округления и вычисления, существует еще третий, важнейший: измерение. В силу несовершенства наших органов чувств и наших измерительных приборов, а также в силу неполной определенности самих измеряемых объектов, результатом всякого измерения является число, представляющее собой лишь приближенное значение измеряемой величины. *Оценка точности приближенных чисел* и составляет *первую основную задачу* Арифметики приближенных вычислений. Решению этой задачи, а также некоторым деталям обращения с приближенными числами, посвящена глава II. Особо рассмотрен вопрос об оценке точности приближенных чисел, получаемых в результате измерения (глава III).

Результат вычисления с приближенными данными даже при отсутствии в нем вычислительной погрешности не может быть точным: *он имеет погрешность от неточности данных.* Таким образом, *полная погрешность* результата вычисления с неточными данными (в дальнейшем мы будем называть ее просто *погрешностью*) слагается из двух частей, из погрешности от неточности данных и из вычислительной погрешности.

Рассмотрим следующий простой пример. Зная вес некоторого тела $p = 130$ *г* и его объем $v = 48$ *см*^{3}, найдем его среднюю плотность d. Для этого, как известно, достаточно разделить p на v. Обрывая деление после получения цифры сотых, находим $d = 2{,}71$. Если бы данные значения p и v были точны, полученное значение d заключало бы только вычислительную погрешность, а именно погрешность от округления, во всяком случае меньшую, чем 0,005. Но если значения p и v, как это обыкновенно и бывает, получены из опыта, то они являются лишь приближенными значениями истинного веса и объема. Положим, что рассмотрение условий взвешивания и измерения объема позволяет нам ручаться за то, что истинный вес больше 129,5 *г* и меньше 130,5 *г*, а истинный объем больше 47,5 *см*^{3} и меньше 48,5 *см*^{3}. Как сказывается эта неточность данных на результате нашего вычисления? Что же теперь мы можем сказать об искомой плотности с полной определенностью? Ответить на этот вопрос и значит произвести учет погрешности результата. Проще всего сделать это так. Если при вычислении частного $\frac{p}{v}$ мы заменим истинное значение p числом, заведомо меньшим, а истинное значение v числом, заведомо бо́льшим, то, очевидно, в частном получим число, заведомо меньшее искомого d, получим так называемую *низшую* его *границу*. Точно так же, заменяя p большим, а v меньшим числом, получим *высшую границу* для d.

$$\text{Итак } d > \frac{129{,}5}{48{,}5} = 2{,}6701\ldots > 2{,}67,$$

$$d < \frac{130{,}5}{47{,}5} = 2{,}7473\ldots < 2{,}75.$$

Таким образом, хотя мы и не узнали точного значения d, мы, однако, установили с полной определенностью, что оно больше 2,67 и меньше 2,75. Можно взять среднее между этими двумя границами и сказать, что d приближенно равно числу 2,71, отличаясь от него, в ту или другую сторону, во всяком случае меньше, чем на

$$2{,}75 - 2{,}71 = 2{,}71 - 2{,}67 = 0{,}04.$$

Подобный *учет погрешности результата вычисления*, производимый на основе учета погрешностей всех участвовавших в вычислении данных, и составляет *вторую основную задачу* Арифметики приближенных вычислений. Учет этот производится разными способами, из которых три важнейших рассмотрены в главах IV, V, VI.

Положим, мы не удовлетворены тем решением задачи о плотности тела, какое только что было получено, и желаем узнать эту плотность с погрешностью, меньшей одной сотой. Для этого, очевидно, мы должны точнее взвесить тело и точнее определить его объем. Получается задача, обратная предыдущей: выяснить, ***какие наибольшие погрешности в данных допустимы при некоторой определенной, наперед указанной, точности результата.*** Это третья основная задача Арифметики приближенных вычислений. Способы решения этой задачи рассматриваются параллельно со способами решения предыдущей задачи в главах IV, V, VI.

Кроме задач учета погрешностей, Арифметика приближенных вычислений ставит себе задачей всемерную *рационализацию* самой техники вычислений. Она рассматривает те вспомогательные средства (счетные приборы и машины, таблицы, графики и пр.), которые облегчают, ускоряют, упрощают, механизируют вычислительную работу. Об этих вспомогательных средствах вычислений речь идет в главах VII, VIII, IX настоящего руководства.

§ 4. Вычисления со строгим учетом погрешностей и без него. Мы будем говорить, что вычисление выполнено со строгим учетом погрешностей, если оно привело к совершенно определенному заключению о тех границах, между которыми содержится искомый результат. Так, установив в задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе, что искомая плотность заключается между числами 2,67 и 2,75, мы вычислили эту плотность со строгим учетом погрешностей.

Подобный строгий учет погрешностей осуществим более или менее легко лишь в простейших случаях и, во всяком случае, заметно усложняет работу вычислителя. Поэтому его применяют сравнительно редко, в таких наиболее „ответственных“ вычислениях, как составление математических таблиц, вычисление физических и астрономических постоянных и т. п., когда требуется полная гарантия того, что искомое число действительно заключено в указанных границах.

Так, в отношении математических таблиц (таблицы логарифмов, тригонометрических функций и т. п.) со времен

К. Ф. Гаусса[1] выполняется требование, чтобы табличные значения функций отличались от истинных их значений не более чем на половину единицы разряда последней написанной цифры. Например, значения табличных логарифмов, данных с 4 десятичными знаками, не должны отличаться от истинных их значений более как на половину десятитысячной. Следовательно, составитель таблицы должен вести строгий учет погрешностей. Он должен иметь полную уверенность в том, что погрешность результата его вычисления действительно не выходит из допускаемых границ.

Повторяю, что строгий учет погрешностей производится на практике сравнительно редко. Обыкновенно довольствуются тем, что ведут вычисление *с определенным числом цифр*, причем счет ведется либо на *десятичные знаки*, либо на *значащие цифры* (см. § 5). Последняя цифра результата бывает при этом более или менее *сомнительна*, но большая погрешность в этой цифре всегда бывает менее вероятна, чем малая. Оказывается, что для целей практики эта сомнительность последней цифры никакого значения в подавляющем большинстве случаев не имеет. Так, в расчетах технического характера обыкновенно вычисляют лишь первые три значащие цифры результата, причем третья цифра может быть и сомнительной. Значительные „коэффициенты прочности“, назначаемые при всяких технических расчетах, в известных границах более или менее произвольно, делают совершенно несущественной погрешность в одну или даже несколько единиц третьей значащей цифры.

Двум способам строгого учета погрешностей посвящены главы IV и V. Приближенным вычислениям без строгого учета погрешностей (их можно было бы, в отличие от „ответственных“ вычислений, назвать „простыми“) посвящена глава VI.

§ 5. Некоторые замечания об изображении чисел. При записи многозначных чисел пользоваться каким-либо значком (запятой, точкой) для разделения его на классы отнюдь не рекомендуется (во избежание смешения этого значка со знаком дробности). Если желательно облегчить чтение такого числа, можно отделить группы по 3, или 4, или 5 цифр небольшими интервалами. Это относится как к целым числам, так и к десятичным дробям. Вот, например, приближенное значение числа π с 24 десятичными знаками:

$$\pi = 3{,}1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ \ldots$$

[1] Крупнейший немецкий математик (1777 — 1855), много сделавший, между прочим, и для Арифметики приближенных вычислений.

Читать такую запись удобнее всего, произнося зараз по две цифры и делая короткие паузы после каждых четырех цифр: три целых; четырнадцать, пятнадцать; девяносто два, шестьдесят пять и т. д.

Многоточие, поставленное после числа, показывает, что число не дописано до конца. В данном случае дописать его и невозможно, так как число π есть число иррациональное.

Знаком дробности, отделяющим целую часть числа от дробной его части, у нас в СССР (а также в Германии и Франции) служит запятая, в Англии же и в Америке точка, которую, для отличия от точки, как знака умножения, иногда ставят высоко (на половине высоты цифры и даже выше). Впрочем, обычаи эти соблюдаются не всегда, особенно в таблицах. Если целой части у числа нет, то нуль целых, который мы обыкновенно ставим, часто пропускают. Так, для обозначения двадцати пяти сотых употребляются следующие способы записи:

$$0,25 \text{ или } 0 \cdot 25 \text{ или } 0 \cdot 25 \text{ или } \cdot 25.$$

Наиболее удобным представляется второй способ. Была попытка введения его в СССР (в связи с введением метрической системы), но успеха не имела.

О числах, изображаемых одним и тем же рядом цифр, не считая нулей слева или справа, будем говорить, что они имеют одинаковый цифровой состав. Таковы, напр., числа:

$$27,83 \quad 2,783 \quad 0,0002783 \quad 278300000.$$

Вычисление часто слагается из двух операций, причем первая дает только цифровой состав искомого результата, другая—положение знака дробности. Если грубо приближенное значение результата наперед известно, вторая операция становится излишней.

Каждая цифра числа есть цифра определенного его разряда. Говорят о разряде единиц, десятков, сотен и т. д., и—в другую сторону—о разрядах десятых, сотых, тысячных и т. д. Удобнее было бы разряды пронумеровать, придавая каждому номер, равный показателю соответствующей степени 10. Так, записав число 4135,67 в виде

$$4.10^3 + 1.10^2 + 3.10^1 + 5.10^0 + 6.10^{-1} + 7.10^{-2},$$

видим, что цифру единиц (5) можно назвать цифрой нулевого разряда, цифру тысяч (4)—цифрой третьего разряда, цифру сотых (7) — цифрой минус второго разряда и т. д.

Цифру минус первого разряда часто называют первым *деся-*

тичным знаком, минус второго — вторым десятичным знаком и т. д.

Цифру старшего имеющегося в числе разряда, т. е. разряда с наибольшим номером, называют первой *значащей цифрой* числа. Далее направо идут его вторая, третья, четвертая и т. д. значащие цифры; крайняя справа цифра есть цифра последнего разряда или последняя значащая цифра. В счет значащих цифр никогда не идут нули, написанные в начале числа (например, число 0,0023 имеет лишь две значащих цифры 2 и 3), а также в конце числа, если они поставлены взамен неизвестных цифр. Так, в числе 135 500 000, которое выражает (в $км^2$) площадь всей суши земного шара, мы имеем лишь *четыре* значащих цифры. Число это лучше записать в виде $1,355.10^8$. Напротив, нули, написанные в конце числа и означающие отсутствие единиц соответствующих разрядов, в счет значащих цифр идут. Так, узаконенное отношение аршина к метру выражается числом

$$0,711200,$$

в котором *шесть* значащих цифр (7,1,1,2,0,0).

Мы будем называть *однозначным*, *двузначным*, вообще *k-значным* всякое число, имеющее одну, две, вообще k значащих цифр.

При записи чисел с рядом нулей постоянно пользуются указанным выше приемом, т. е. введением степеней 10 как положительных, так и отрицательных. Так, число

$$59\ 80000\ 00000\ 00000\ 00000,$$

выражающее в тоннах массу земного шара, проще записать в виде

$$5,98 \cdot 10^{21},$$

а коэффициент теплового расширения железа, равный 0,0000123, в виде $1,23.10^{-5}$. Знак дробности в таких случаях обыкновенно ставят после первой значащей цифры числа, но, конечно, его можно ставить где угодно, соответственно меняя показатель при 10.

Этот прием упрощает запись и многих других громоздких чисел. Так, число 1,000038 лучше изобразить в виде суммы $1+3,8.10^{-5}$, а число 0,99999472 в виде разности $1-5,28.10^{-6}$.

Чтобы различать числа точные и приближенные, мы будем наряду со знаком точного равенства (две параллельных черточки) пользоваться также знаком приближенного равенства, ставя жирную точку под знаком равенства.

Так, запись $x \mathrel{\underset{\cdot}{=}} 26$ *см* будет у нас обозначать, что x приближенно равен 26 *см*.

Иногда, желая отметить, что некоторое число точно, мы будем покрывать его дугой (напр., $\overset{\frown}{8,7}$). Если такая дуга поставлена лишь над некоторыми цифрами числа, то это означает, что соответствующие цифры точны, остальные же сомнительны. [1] Так, в числе $\overset{\frown}{28,4}3$ первые три цифры точны, последняя сомнительна. Наряду с этой записью мы будем употреблять и обозначение сомнительных цифр более мелким шрифтом ($28,4{\scriptstyle 3}$).

§ 6. Двоякий смысл цифры нуль. Цифра 0 в следующих двух записях:

1) 1 *кг* = 1 000 *г*,

2) на земном шаре в настоящее время живет 1 700 000 000 человек

имеет существенно различный смысл. В первом случае нули означают отсутствие единиц соответствующих разрядов (в одном кило содержится одна тысяча граммов и ни одной сотни, ни одного десятка, ни одного отдельного грамма), во втором они только указывают на наше незнание цифр этих разрядов и поставлены взамен этих неизвестных нам цифр. Такое смешение функций одного символа крайне нежелательно, и давно уже делались предложения о введении особого знака для обозначения неизвестной цифры. Иногда для этой цели употребляется знак вопроса (?), но вообще эта идея, к сожалению, не привилась. Чрезвычайно желательно избегать употребления нуля, как замены неизвестной цифры, применяя в соответствующих случаях либо словесное название одного из высших разрядов изображаемого числа, либо степень 10-ти, либо, наконец, особые приемы записи точных и сомнительных цифр. Так, число 1 700 000 000, где все нули стоят вместо неизвестных цифр, следует писать так: 17 сотен миллионов, или 1,7 миллиарда, или $17 \cdot 10^8$, или $1{,}71 \cdot 0^9$, или $17{\scriptstyle 00\,000\,000}$, или $\overset{\frown}{17}00\,000\,000$.

Итак, мы будем писать нули лишь тогда, когда будем знать, что единиц данного разряда в числе нет. Например, запись $x \mathrel{\underset{\cdot}{=}} 14{,}60$ указывает, что в числе x, имеющем 14 целых и 6 десятых, нет ни одной сотой, а цифра тысячных и следующие нам неизвестны. Отбросить этот нуль здесь нельзя, так как запись $x \mathrel{\underset{\cdot}{=}} 14{,}6$ указала бы, что цифры сотых мы не знаем.

---

[1] Разъяснение точного смысла терминов „точные цифры“, „сомнительные цифры“ будет сделано в § 17.

§ 7. Округление чисел. В вычислительной практике постоянно приходится прибегать к *округлению* чисел, т. е. к уменьшению числа значащих их цифр, что всегда бывает связано с введением некоторой *погрешности от округления*. Рассмотрим приемы округления, считая пока все округленные числа известными точно. Некоторые замечания об округлении приближенных чисел будут сделаны в § 16, но вообще округление приближенных чисел производится по тем же правилам, как и точных.

Простое округление состоит в отбрасывании всех цифр числа, расположенных направо от одной из них. Следует различать округление до *k-го разряда* и до *k-ой значащей цифры*. Округление до k-ого разряда состоит в отбрасывании всех цифр числа, начиная с цифры $(k-1)$-ого разряда (последняя сохраняемая цифра есть цифра k-ого разряда). Округление до k-ой значащей цифры состоит в отбрасывании всех цифр числа, начиная с $(k+1)$-ой значащей цифры (последняя сохраняемая цифра есть k-ая значащая цифра числа). Если отбрасываются цифры нулевого и положительных разрядов, их, конечно, следует заменять нулями, придерживаясь однако записи, рекомендованной выше (стр. 16).

Пример. Простое округление числа 263,84

до минус первого разряда (иначе говоря до десятых долей) дает	263,8
до нулевого разряда (до целых)	263
до первого „ (до десятков)	$260 = 2{,}6 \cdot 10^2$
до второго „ (до сотен)	$200 = 2 \cdot 10^2$
до 4-ой значащей цифры	263,8
до 3-ей „ цифры	263
до 2-ой „ цифры	$260 = 2{,}6 \cdot 10^2$
до 1-ой „ цифры	$200 = 2 \cdot 10^2$

Простое округление уменьшает точное значение числа, но не больше, как на одну единицу последнего сохраняемого разряда. Уменьшение это равно как раз единице этого разряда, если отбрасывается бесконечный ряд девяток. Говорят, что простое округление всегда дает *недостаточное* приближенное значение округляемого числа.

Округление с усилением тем отличается от простого, что последняя сохраняемая цифра всегда усиливается, т. е. увеличивается на 1. В только что рассмотренном примере на простое округление, округление с усилением дало бы числа

$$263{,}9;\ 264;\ 2{,}7 \cdot 10^2;\ 3 \cdot 10^2.$$

Округление с усилением увеличивает точное значение числа, но всегда менее, чем на одну единицу последнего сохраненного разряда. Здесь мы получаем избыточные приближенные значения округленных чисел.

Округление с поправкой отличается от округления с усилением тем, что усиление последней сохраняемой цифры производится здесь лишь в том случае, когда первая отбрасываемая цифра больше 4.

Пример. Округление с поправкой числа 263,84
до десятых долей (или до 4-ой значащей цифры) дает 263,8
до целых (или до 3-ей значащей цифры) 264
до десятков (или до 2-ой значащей цифры) . . . . . $2{,}6 \cdot 10^2$
до сотен (или до 1-ой значащей цифры) . . . . . . $3 \cdot 10^2$.

Округление с поправкой иногда увеличивает точное значение числа, но не более, как на половину единицы последнего сохраненного разряда, иногда уменьшает его, тоже не более, как на половину единицы этого разряда. Таким образом округление с поправкой может давать и недостаточное, и избыточное значение округляемого числа. *Граница* погрешности от округления при округлении с поправкой вдвое меньше, чем при простом округлении или при округлении с усилением. Округление с поправкой употребляется поэтому на практике несравненно чаще, чем два другие вида округления, а потому в *дальнейшем, говоря об округлении, мы всегда будем подразумевать,* если не будет особой оговорки, *округление с поправкой.*

Погрешность от округления достигает своего наибольшего значения, равного половине единицы последнего сохраненного разряда, в том случае, когда отбрасывается одна лишь цифра 5. Легко видеть, что усиление в этом *исключительном случае* никакой выгоды не дает. Пусть, например, надо округлить до целых число 263,5. Простое округление дает недостаточное приближенное значение, равное 263; оно меньше точного на $263{,}5 - 263 = 0{,}5$. Округление с усилением дает избыточное приближенное значение, равное 264, которое больше истинного на столько же ($264 - 263{,}5 = 0{,}5$). В этом случае либо вовсе отказываются от округления, которое здесь не очень и нужно, либо применяют следующее *правило четной цифры:*

Если округление сводится к отбрасыванию одной единственной цифры 5, то последнюю сохраняемую цифру оставляют без изменения, если она четная, и усиливают, если она нечетная.

Согласно этому правилу округление до целых числа 263,5 дает 264, а числа 268,5 дает 268.

Правило это диктуется понятным желанием избежать односторонних погрешностей округления. Выбор между приведенным правилом четной цифры и противоположным (усилением последней цифры, если она четная) делается только на основании того соображения, что для вычисления иметь последнюю цифру числа четной иногда бывает удобнее (например, при делении на 2).

Обоснование предыдущих правил и заключений о погрешностях легко получается путем следующего рассуждения.

Пусть требуется округлить до k-ого разряда число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \\ + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \ldots,$$

где каждый из коэффициентов a означает одно из целых чисел от 0 до 9 и $a_n > 0$.

Простое округление дает число

$$x_1 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_k \cdot 10^k.$$

Это *недостаточное* приближенное значение числа x меньше x на

$$x - x_1 = a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \ldots = y.$$

Округление с усилением дает избыточное приближенное значение

$$x_2 = x_1 + 10^k,$$

которое больше x на

$$x_2 - x = x_1 + 10^k - x = 10^k - (x - x_1) = 10^k - y.$$

Погрешности обоих приближенных значений, недостаточного и избыточного, равны в том и только в том случае, когда $y = 10^k - y$, т. е. когда $y = 0{,}5 \cdot 10^k = 5 \cdot 10^{k-1}$, следовательно тогда, когда $a_{k-1} = 5$ и $a_{k-2} = a_{k-3} = a_{k-4} = \ldots = 0$. Здесь мы имеем *исключительный случай*, когда округление или совсем не делается, или делается по правилу четной цифры. Избыточное значение имеет меньшую погрешность, чем недостаточное, если $10^k - y < y$, т. е. если $y > 5 \cdot 10^{k-1}$, следовательно, тогда, когда либо $a_{k-1} > 5$, либо $a_{k-1} = 5$ и по крайней мере одна из последующих цифр отлична от 0.

§ 8. Формула и алгоритм. В большинстве случаев вычисление производится по определенной, заранее составленной, буквенной *формуле* и состоит в подстановке вместо букв соответствующих числовых значений и в производстве указанных в формуле действий. Первый шаг всякого такого вычисления состоит в рассмотрении этой формулы и в таком ее преобразовании, которое, при наличных вспомогательных средствах, обеспечивало бы наиболее экономное производство вычисления. Примером может служить то разложение на множители многочленного выражения („приведение к логарифмическому виду"), какое стараются сделать, прежде чем приступить к вычислению посредством логарифмов. Так, вычисляя x по формуле $x=\sqrt{a^2-b^2}$ посредством логарифмов, предварительно преобразуют эту формулу к виду $x=\sqrt{(a+b)(a-b)}$. Однако, такое преобразование совершенно излишне, если у нас имеется достаточно обширная таблица квадратов, которая дает по данным числам a и b их квадраты a^2 и b^2. Дать какие бы то ни было общие правила таких предварительных преобразований совершенно невозможно: все зависит от характера предложенной формулы, от выбора вычислительных средств и даже от индивидуальных особенностей самого вычислителя. Следует однако иметь в виду, что более или менее длительная работа по преобразованию формулы окупается лишь тогда, когда эта формула служит для „массовых" вычислений, т. е. для повторных вычислений с различными значениями входящих в нее букв.

Иногда порядок вычисления трудно выразить формулой. Тогда его выражают словами, в виде более или менее пространного правила, которое носит название *алгоритма* (или алгорифма). [1] Так, например, известны алгоритмы для решения уравнений высших степеней и уравнений трансцендентных. Процесс получения последовательных цифр квадратного корня тоже представляет собой применение некоторого алгоритма. Конечно, из различных вариантов одного и того же алгоритма следует выбрать такой, при котором достигается наибольшая экономия в получении искомого результата.

§ 9. Схема. За подготовкой формулы (или выбором алгоритма) следует второй шаг всякого вычисления: составление

---

[1] „Энциклопедия элементарной математики" Вебера и Вельштейна (изд. „Матезис", 1906 г., стр. 45) дает следующее определение: „Под алгоритмом в настоящее время разумеют правило, которое указывает, как найти некоторый общий результат в каждом частном случае, хотя оно и не дает общего выражения для этого результата".

схемы. Так называется такая разметка приготовленного для записи вычисления места (листа бумаги), при которой каждое входящее в вычисление число записывается на особом, заранее для него отведенном месте.

Положим, требуется найти значения z по формуле $z = x^2 + xy + y^2$ для нескольких пар значений x и y, выраженных многозначными числами. Имея в своем распоряжении таблицу квадратов, преобразуем формулу к виду

$$z = 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

и устраняем тем самым необходимость умножения многозначных чисел x и y. Схеме для вычисления z по этой последней формуле удобно в данном случае придать вид, показанный на стр. 22.

Сперва записываются данные числовые значения аргументов x и y (4-я и 5-я строки всех столбцов), далее суммы соответствующих значений x и y (3-я строка), полусуммы (2-я строка), квадраты полусумм (1-я строка). Затем переходим на 6-ю строку, где записываются разности аргументов, потом на 7-ю (полуразности) и на 8-ю (квадраты полуразностей). На 9-й строке записываются утроенные числа 1-й строки, и на 10-й — искомые значения z, получаемые сложением чисел 8-й и 9-й строк. Деления на 2 и умножения на 3 делаются, конечно, в уме, возведение в квадрат — посредством таблицы квадратов, поэтому все наше вычисление целиком укладывается в указанную схему, нигде никаких дополнительных записей не требуется. Если бы они понадобились, для них следовало бы отвести особый листок („листок для вспомогательных вычислений“) или, еще лучше, особое место на том же листе, где помещена схема.

Выгода схемы заключается в *механизации* вычислительного процесса. Хорошо продумав схему, мы освобождаем себя в дальнейшем от всякой работы по обдумыванию хода вычислений и выполняем только элементарные операции, схемой указываемые, притом несколько однородных операций подряд. Вторая, не менее важная выгода от применения схемы — *легкость контроля* уже произведенного вычисления как самим вычислителем, так и другими лицами. Как показал опыт, составление схемы совершенно необходимо при всяком более или менее сложном вычислении. В тех случаях, когда однородные вычисления повторяются много раз, схемы вырабатываются раз навсегда и печатаются. Такие *формуляры* в большом ходу у геодезистов и у астрономов.

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$					
$\frac{x+y}{2}$					
$x+y$					
x					
y					
$x-y$					
$\frac{x-y}{2}$					
$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$					
$3\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$					
z					

Для составления схемы (и для вычислений вообще) выгодно пользоваться бумагой, графленой на квадраты или, еще лучше, на прямоугольники. Прямые, отделяющие друг от друга различные столбцы схемы, а также горизонтальные прямые, ограничивающие столбцы чисел, подлежащих сложению или вычитанию, выделяются из числа других прямых сетки достаточно резкими штрихами. Перехода через строки (например, сложения чисел, написанных в двух строках, разделенных несколькими другими) надо вообще избегать. Часто это удается путем надлежащего приспособления схемы. Если же это оказывается невозможным, рекомендуется прикрывать промежуточные строки полоской бумаги подходящих размеров. Если во всех столбцах одной строки фигурирует некоторое постоянное число, его пишут обыкновенно только *один* раз, но на особой полоске бумаги, которую при вычислении помещают последовательно на надлежащее место каждого столбца.

§ 10. Поверка. Основное требование, предъявляемое ко всякому вычислению, — это его *правильность*, обусловливаемая отсутствием *ошибок*. Ошибки следует отличать от *погрешностей*, неустранимых в подавляющем большинстве случаев, незначительных по своей величине и наперед более или менее точно учитываемых. Об этом учете погрешностей речь будет впереди. Здесь же мы говорим о тех ошибках, какие обусловливаются недостаточной внимательностью вычислителя. Таковы ошибки при переписывании чисел, ошибки в выполнении элементарных арифметических операций, ошибки от замены одного действия другим (сложения вместо вычитания), ошибки от смешения двух таблиц (натуральный синус вместо логарифма синуса) и так далее, без конца. Все такие ошибки безусловно должны быть устранены. Внимательное отношение ко всякой выполняемой операции, пусть самой мелкой, неторопливая, спокойная работа, прекращение ее при первых признаках утомления, с тем чтобы возобновить ее после отдыха со свежими силами, применение счетных приборов и других вспомогательных средств вычисления, облегчающих и упрощающих работу, — все это весьма способствует устранению ошибок, но отнюдь не гарантирует полное их отсутствие. *Без особой поверки результат вычисления ненадежен* — этого никогда не следует забывать. Поэтому поверка является совершенно необходимой частью всякого вычисления. Пока поверка не произведена, вычисление нельзя считать законченным.

Простейшая форма поверки, быстро обнаруживающая наиболее грубые ошибки вычисления, — это *грубо-приближенная оценка* результата: все данные округляются до первой значащей цифры и весь расчет делается в уме; результат получается тоже с одной значащей цифрой, да и то далеко не вполне надежной, но зато устанавливается *порядок* результата, т. е. номер разряда старшей его цифры. Например, при вычислении по формуле $z = x^2 + xy + y^2$ при $x = 44{,}3$ и $y = 18{,}7$, берем $x \doteq 40$, $y \doteq 20$ и находим, что $x = 1600 + 800 + 400$, т. е. около 3000. Вычисление с неокругленными данными (по схеме § 9) дает $z = 3140{,}59$, и наша оценка показывает, что порядок результата установлен верно. Подобную оценку результата надо производить всегда, и притом даже *до* полного вычисления. В задачах геометрических роль такой оценки часто играет чертеж, быстро выполняемый без особой тщательности.

Лучшей формой поверки является повторение всего вычисления другим лицом, притом совершенно независимо от первого. С очень высокой степенью вероятности можно считать правильными результаты, полученные при таком вычислении „в две руки“, если они совпадают. В случае расхождения надо сравнивать оба вычисления шаг за шагом. Ошибка обнаруживается в том месте, откуда начинается расхождение. После этого необходимо довести до конца то вычисление, в котором она была обнаружена, опять-таки независимо от другого. Нередко случается, что этим способом последовательно вскрываются несколько ошибок, допущенных обоими вычислителями. Результат становится еще более надежным, если вычисления были проведены „в три руки“, „в четыре руки“.

Если вычислитель работает один, нужную уверенность в правильности результата он получает либо путем применения особых контрольных формул, либо путем повторного производства вычисления. Контрольную формулу дает всякая зависимость, которую часто заранее можно установить между искомыми результатами, при условии, конечно, что эта зависимость не используется в процессе их получения. Так, правильность вычисления трех углов треугольника по трем данным его сторонам контролируется путем разыскания суммы этих углов; правильность вычисления всех корней алгебраического уравнения — использованием соотношений между корнями и коэффициентами и т. п. В случае, когда удобной контрольной формулы нет, остается вторичное, совершенно независимое от первого вычисление того же результата. Чтобы избежать бессознательного повторения одной и той же случайной ошибки, второе вычисление рекомендуется делать не сразу после первого, а лишь по истечении некоторого времени, по меньшей мере, на другой день, или же иным способом, нежели первое.

Если контрольная формула или какие-нибудь иные соображения указывают на ошибку в вычислении, ее надо разыскать и исправить. Для этого или просматривают внимательно все вычисление, проверяя каждый его шаг, или делают его заново. Первый способ требует меньшей работы, но зато менее надежен, так как ошибку легко проглядеть. Если несмотря ни на что ошибка не обнаруживается, следует заподозрить правильность данных (возможны ошибки при переписке), или правильность тех табличных значений, какие участвовали в вычислении, или исправность применяемых счетных приборов, или, наконец, правильность самого указания на ошибку. Отметим, что ошибка, упорно ускользающая от самого вычислителя, нередко легко обнаруживается, когда его работу проверяет другое лицо. Когда ошибка обнаружена, ее исправляют, исправляют также последующие части вычисления. При этом либо перечеркивают неверные цифры и сверху записывают верные (лучше другими, например, красными чернилами), либо заклеивают все испорченное место полоской бумаги и записывают на ней исправленное вычисление заново.

Большое значение в смысле устранения случайных ошибок имеет аккуратная запись цифр. Каждую цифру следует писать так, чтобы характерные ее особенности ясно выступали. Нередки случаи, когда при несоблюдении этого правила вычислитель смешивает цифры 0 и 6, 2 и 9, 3 и 5, даже написанные им самим.

§ 11. Примеры вычислений с применением схем. Чтобы иллюстрировать сказанное выше, приведем полностью решение двух вычислительных задач.

Задача 1. Вычислить объем воронки, получаемой при свертывании в конус бумажного кружка радиусом $R = 5{,}4$ *см*, если из этого кружка предварительно вырезан сектор с центральным углом в α°, при следующих значениях угла α:

$$55^\circ,\ 60^\circ,\ 65^\circ,\ 70^\circ,\ 75^\circ,\ 80^\circ.$$

Предполагается, что два радиуса, ограничивающие сектор, при свертывании кружка приведены к совпадению и что полученный конус — круговой.

Задача решается по формуле, получение которой затруднений не представляет:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^2 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^2}.$$

Формулу эту предварительно преобразуем, полагая $\frac{1}{3}\pi R^3 = k$ и $1 - \frac{\alpha}{360} = t$ и приводя подкоренное к логарифмическому виду:

$$V = kt^2 \sqrt{(1 + t)(1 - t)}.$$

Вычисление выполняем посредством таблицы 4-значных логарифмов, кроме вычисления дроби $\frac{\alpha}{360}$, значения которой находим непосредственным делением и последовательным сложением. Весь ход вычислений понятен из приводимой ниже схемы.

I. Вычисление $\lg k$.

$\lg R$	0,7324
$\lg R^3$	2,1972
$\lg \pi$	0,4971
$-\lg 3$	$\bar{1}{,}5229$
$\lg k$	2,2172

II. Вычисление $\frac{\alpha}{360}$.

$$\frac{1}{72} = 0{,}01389$$

$$\frac{55}{360} = \frac{11}{72} = 0{,}15278$$

$$\frac{60}{360} = \frac{12}{72} = 0{,}16667$$

$$\frac{65}{360} = \frac{13}{72} = 0{,}18056$$

$$\frac{70}{360} = \frac{14}{72} = 0{,}19445$$

$$\frac{75}{360} = \frac{15}{72} = 0{,}20834$$

$$\frac{80}{360} = \frac{16}{72} = 0{,}22223.$$

Найдя делением $\frac{55}{360} = 0{,}15278$, последовательно прибавляем 0,01389, выписав это последнее число на край особого кусочка бумаги, постепенно передвигаемого. В заключение поверка: $\frac{80}{360} = \frac{2}{9} = 0{,}22222$. Расхождение в одну единицу разряда последней цифры вполне допустимо: оно является результатом округления дроби $\frac{1}{72}$ до 5 десятичных знаков.

III. Вычисление **V**.

α	55°	60°	65°	70°	75°	80°
$\frac{\alpha}{360} = 1 - t$	0,1528	0,1667	0,1806	0,1944	0,2083	0,2222
t	0,8472	0,8333	0,8194	0,8056	0,7917	0,7778
$1 + t$	1,8472	1,8333	1,8194	1,8056	1,7917	1,7778
$\lg(1 + t)$	0,2665	0,2633	0,2599	0,2566	0,2532	0,2499
$\lg(1 - t)$	$\bar{1},1841$	$\bar{1},2219$	$\bar{1},2567$	$\bar{1},2887$	$\bar{1},3187$	$\bar{1},3467$
$\lg(1 - t^2)$	$\bar{1},4506$	$\bar{1},4852$	$\bar{1},5166$	$\bar{1},5453$	$\bar{1},5719$	$\bar{1},5966$
$\lg t$	$\bar{1},9280$	$\bar{1},9208$	$\bar{1},9135$	$\bar{1},9061$	$\bar{1},8986$	$\bar{1},8909$
$\lg k$	2,2172	—	—	—	—	—
$\lg t^2$	$\bar{1},8560$	$\bar{1},8416$	$\bar{1},8270$	$\bar{1},8122$	$\bar{1},7972$	$\bar{1},7818$
$\lg\sqrt{1 - t^2}$	$\bar{1},7253$	$\bar{1},7426$	$\bar{1},7583$	$\bar{1},7726$	$\bar{1},7860$	$\bar{1},7983$
$\lg V$	1,7985	1,8014	1,8025	1,8020	1,8004	1,7973
V	62,88	63,30	63,46	63,38	63,16	62,70

Для поверки выполняем все вычисление по той же схеме еще раз, но применяя уже 5-значные логарифмы. Получаем следующие значения V:

$$62{,}878 \quad 63{,}299 \quad 63{,}464 \quad 63{,}403 \quad 63{,}139 \quad 62{,}697.$$

Сравнивая эти числа с полученными ранее, замечаем, что ошибки этих последних составляют 1 или 2 единицы разряда последней их цифры (четвертой значащей). Как мы увидим в § 50, при вычислении посредством таблицы 4-значных логарифмов четвертые значащие цифры результатов получаются вообще не вполне надежные.

Задача 2. Найти дугу сегмента, площадь которого равна половине площади полукруга, т. е. одной четверти площади круга.

Прежде всего производим грубо-приближенную оценку искомого результата и убеждаемся, что искомая дуга меньше 180° (так как сегмент с дугой в 180° есть полукруг) и больше 90° (так как сектор с центральным углом в 90° равновелик четверти круга, а соответствующий сегмент, следовательно, меньше).

Обозначая радиус круга буквой r, а искомую дугу (в градусах) буквой x, получаем уравнение

$$\frac{\pi r^2 x}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin x = \frac{1}{4} \pi r^2, \tag{I}$$

которое легко приводится к такому:

$$\cos t - \operatorname{arc} t = 0, \tag{II}$$

где $t = x - 90°$, а $\operatorname{arc} t$ означает радианную меру дуги в t градусов.

Замечая, это наше уравнение (I) согласно грубо-приближенной оценке имеет один и только один корень между 90° и 180°, а уравнение (II), следовательно, тоже один корень, но заключенный между 0° и 90°, приступаем к решению уравнения (II), постепенно сужая промежуток, заключающий искомый корень. Пользуемся при этом тем обстоятельством, что при значениях t, меньших корня, левая часть уравнения (II) получает положительные значения, больших корня — отрицательные. Весь ход решения ясен из приводимой схемы. При решении пользуемся четырехзначной таблицей натуральных косинусов и таблицей для перевода градусной меры в радианную. Останавливаемся тогда, когда четырехзначная таблица отказывается служить. Если достигнутая точность недостаточна, надо взять таблицу с большим числом знаков и продолжать работу.

t	0°	90°	40°	45°	42°	43°	42°20′	42°24′	42°21′
cos t	1	0	0,7660	0,7071	0,7431	0,7314	0,7392	0,7385	0,7390
arc t	0	1,5708	0,6981	0,7854	0,7330	0,7505	0,7389	0,7400	0,7391
cos t—arc t	1	—1,5708	0,0679	—0,0783	0,0101	—0,0191	0,0003	—0,0015	—0,0001
Заключение о том, где лежит корень	Между 0° и 90° ближе к 0°		Между 40° и 90° ближе к 40°	Межд 40° и 45° ближе к 40°	Между 42° и 45° ближе к 42°	Между 42° и 43° ближе к 42°	Между 42°20′ и 43° ближе к 42°20′	Между 42°20′ и 42°24′ ближе к 42°20′	Между 42°20′ и 42°21′ ближе к 42°21′

Как видим, искомый корень t лежит между 40° 20′ и 42° 21′, ближе к последнему значению. Следовательно, дуга $x = t + 90°$ заключается между 132° 20′ и 132° 21′, тоже ближе к последнему значению. Для поверки найдем площадь соответствующего сегмента при $r = 1$.

x	132° 20′	132°21′
x (в градусах)	132,33	132,35
$x : 360$	0,36759	0,36764
$(x : 360) \cdot \pi$	1,1548	1,1550
$\sin x$	0,7392	0,7390
$\frac{1}{2} \sin x$	0,3696	0,3695
$\frac{\pi x}{360} - \frac{1}{2} \sin x$	0,7852	0,7855

Площадь четверти круга при $r = 1$ равна $\frac{1}{4}\pi = 0,7854$, и площадь сегмента с дугой в 132°20′ действительно меньше, а с дугой в 132°21′ больше площади четверти круга. Можно принять, с погрешностью меньшей полуминуты, что $x = 132°21'$.

Продолжая вычисление далее посредством 7-значных таблиц, мы нашли бы для x значение 132°20′47″.

§ 12. Некоторые практические указания. В заключение настоящего введения приводим несколько советов вычислителю, которые дает немецкий специалист по вычислительной технике, профессор Шрутка. [1]

[1] Prof. L. Schrutka. Zahlenrechnen, S. 11—12. (Sammlung Math.-Physik. Lehrbücher, № 20, Leipzig—Berlin, 1923).

„Вычислять следует на листах не слишком малых, чтобы не страдала легкость обзора всего вычисления, и не слишком больших, чтобы не испытывать неудобств в обращении с ними. Лист обыкновенного канцелярского формата (21×32 *см*) следует считать уже довольно крупным. Ради удобства хранения листы должны быть одинаковых размеров. При более обширных вычислениях их хорошо нумеровать. Писать рекомендуется лишь на одной стороне листа.

„Мелкие вспомогательные вычисления выполняют на особых листках, которые обыкновенно не сохраняют. Однако здесь надо иметь в виду вопрос о поверке. То же относится и к умственным вычислениям. В сомнительных случаях лучше записывать вычисления на главном листе.

„При переписывании чисел или рядов чисел хорошо отмечать посредством мелких значков или каких-нибудь небольших предметов то место оригинала, до которого доведено переписывание.

„Проверять правильность переписанного удобнее всего вдвоем, причем один читает по оригиналу, другой следит по копии, или наоборот. При этом копию берет не тот, кто ее снимал, а другой: это приводит к более строгому отношению ко всем неясностям записи. Если такая проверка вдвоем невозможна, то стараются, во избежание непрестанного перевода взгляда с одного места на другое, так сложить оригинал или копию, чтобы одинаковые числа оказались непосредственно друг около друга или друг над другом.

„Если число приходится переписывать несколько раз, то каждый раз возвращаются к первоначальному источнику. Если требуется несколько копий, лучше вместо переписывания прибегать к механическим средствам воспроизведения.

„Если желательно выделить некоторые числа, как особо важные, их подчеркивают чернилами или цветным карандашом, или пишут другими чернилами. У кого очень ровный почерк, тот может применить более крупный размер цифр. Имеют применение также и цифры уменьшенного размера, чтобы выделить менее важные или менее надежные части чисел. Если некоторое вычисление лишь немногим отличается от другого, уже проведенного, то, в целях экономии, можно только добавить, другими чернилами, те цифры, в которых есть разница (так бывает, например, при исправлении незначительных ошибок).

„Никогда не следует экономить на поверках. Более пространные вычисления следует поверять по частям, чтобы, допустив ошибку в каком-нибудь промежуточном результате, не испортить всей дальнейшей работы его применением.

„Производя вычисление наспех, очень легко ошибаются Исправление ошибок обыкновенно отнимает гораздо больше времени, чем удается сберечь благодаря ускоренному темпу вычисления. С другой стороны однако и слишком большая осторожность и медлительность могут привести к некоторым ошибкам.

„В начале работы, на свежую голову, выполняют более трудные, а затем уже более механические части вычисления.

„Если в вычисление вкралась ошибка, и оно заменено другим, то первое уничтожают, чтобы впоследствии по недосмотру не смешать его со вторым“.

ГЛАВА II

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

§ 13. Низшая и высшая границы. Очень часто случается, что, не зная значения величины x, мы однако знаем два числа, между которыми содержится x. Обозначая эти числа буквами l и L, имеем двойное неравенство

$$l < x < L \tag{A}$$

Число l называется *низшей границей* x, число L *высшей* его *границей*. Сокращенно будем записывать это так:

$$\text{НГ}\, x = l, \ \text{ВГ}\, x = L.$$

Возможны также следующие случаи:

$$l \leqq x < L,$$
$$l < x \leqq L,$$
$$l \leqq x \leqq L.$$

Границы всегда можно расширить, заменяя НГ любым меньшим, ВГ любым большим числом, так как неравенство (А) от этого только усилится. Такое расширение границ вообще невыгодно, но иногда к нему все же прибегают.

Приближенным значением числа x называют произвольное число a, заключенное в интервале (l, L), включая эти граничные значения, т. е. число, удовлетворяющее двойному неравенству

$$l \leqq a \leqq L.$$

Иногда в качестве приближенного значения для x берут число, лежащее вне границ. Будем это понимать как результат предварительного расширения границ. Так, если, зная, что

$0{,}7102 < x < 0{,}7105$, мы берем для x приближенное значение 0,710, то будем считать, что низшая граница предварительно была понижена, т. е. что мы имели неравенство $0{,}710 < x < 0{,}7105$.

Связь приближенного значения a с числом x будем отмечать, пользуясь знаком *приближенного равенства*. Имеем запись

$$x \doteq a,$$

означающую, что a является приближенным значением для x. Когда приближенный характер равенства ясен и без того, употребляется обыкновенный знак равенства.

Различают *недостаточное* приближенное значение (случай $a < x$) и *избыточное* приближенное значение (случай $a > x$). Говорят также о приближенном значении, взятом по *недостатку* и по *избытку*.

Число a, рассматриваемое как приближенное значение числа x, будем называть, краткости ради, просто приближенным числом. В противоположность ему число x следует называть точным числом.

Пример. Пусть известно, что некоторое число x заключается между 8,45 и 8,48. Следовательно

$$8{,}45 < x < 8{,}48 \text{ или } \text{НГ}\,x = 8{,}45,\ \text{ВГ}\,x = 8{,}48.$$

Приближенным значением x может служить и 8,45, и 8,46, и 8,47, и 8,48, и любое другое число между 8,45 и 8,48, например, среднее между ними (8,465). При этом 8,45 будет недостаточным приближением, 8,48 избыточным; характер остальных неизвестен.

Расширяя границы, можно получить и другие приближенные значения. Взяв, например, $\text{НГ}\,x = 8{,}4$ и $\text{ВГ}\,x = 8{,}5$, имеем

$$x \doteq 8{,}4 \text{ (по недостатку)},$$
$$x \doteq 8{,}5 \text{ (по избытку)}.$$

Напомним, что часто приходится брать приближенное значение числа, известного точно, но изображаемого слишком большим числом цифр, т. е. *округлять* точное число.

§ 14. Абсолютная погрешность и ее граница. Истинной абсолютной погрешностью числа a, как приближенного значения числа x, или, короче, *абсолютной погрешностью* приближенного числа a, будем называть разность $x - a$. Таким образом, сказать, чему равна абсолютная погрешность, можно лишь в тех редких случаях, когда само число x нам известно.[1]

[1] Иногда разность $x - a$ называют *поправкой* приближенного числа a, абсолютной же его погрешностью называют разность $a - x$.

Полагая $x - a = \alpha$, имеем, что $x = a + \alpha$. В случае недостаточного приближенного значения, т. е. при $a < x$, абсолютная погрешность положительна, в случае избыточного, т. е. при $a > x$, отрицательна.

Обыкновенно точное число x остается неизвестным, а потому неизвестной остается и абсолютная погрешность приближенного числа a. Для целей учета погрешностей достаточно знать лишь *границу абсолютной погрешности*, которую мы будем обозначать буквами Δa. Границей абсолютной погрешности числа a, представляющего собой приближенное значение числа x, называют такое положительное число Δa, вычитание которого из a дает низшую границу x, а прибавление к a высшую границу x. Если, например, известно, что $7{,}3 < x < 7{,}6$ и если принять $a = 7{,}5$, то границей абсолютной погрешности этого последнего приближенного значения будет $\Delta a = 0{,}2$, так как $a - \Delta a = 7{,}5 - 0{,}2 = 7{,}3 < x$, а $a + \Delta a = 7{,}5 + 0{,}2 = 7{,}7 > 7{,}6 > x$.

Итак, число Δa есть граница абсолютной погрешности приближенного числа a, если

$$a - \Delta a < x < a + \Delta a \tag{A}$$

Записывать это сокращенно будем следующим образом:

$$x \doteq a \ (\pm \Delta a) \tag{B}$$

Если в неравенстве (A) заменим x через $a + \alpha$, где α есть истинная абсолютная погрешность a, и вычтем из всех членов неравенства (A) число a, то получим неравенство

$$-\Delta a < \alpha < +\Delta a$$

или, что то же

$$|\alpha| < \Delta a.$$

Таким образом, истинная абсолютная погрешность всегда меньше границы абсолютной погрешности. Это свойство границы абсолютной погрешности часто принимают за ее определение.

Равенство (B) будем читать так: „x приближенно равен a с погрешностью, меньшей $\pm \Delta a$“.

Отметим следующие почти очевидные свойства границы абсолютной погрешности:

I. *Границу абсолютной погрешности всегда можно повысить, заменяя ее любым большим числом.*

Действительно, увеличивая границу абсолютной погрешности, мы уменьшаем низшую границу и увеличиваем высшую границу, что, как мы видели, всегда возможно (хотя, вообще говоря, невыгодно).

Так, зная, что $x \doteq 2{,}73$ ($\pm 0{,}008$), мы имеем право сказать, что $x \doteq 2{,}73$ ($\pm 0{,}01$).

II. *В качестве границы абсолютной погрешности числа a, заключающегося между низшей и высшей границами (l и L), можно взять бо́льшую из разностей $l - a$ и $L - a$.*

Переходя от двойного неравенства $l < x < L$ к неравенству $l - a < x - a < L - a$ или $-(a - l) < \alpha < L - a$, заменим меньшую из разностей $a - l$ и $L - a$ большей, что всегда возможно, так как неравенство от этого только усилится. Тогда будем иметь

$$\text{либо } -(a - l) < \alpha < a - l, \text{ если } a - l > L - a,$$
$$\text{либо } -(L - a) < \alpha < L - a, \text{ если } l - a > a - L.$$

В первом случае $\Delta a = a - l$, во втором $\Delta a = L - a$.

III. *Граница абсолютной погрешности Δa получает, при данных границах l и L числа x, наименьшее значение, равное их полуразности, если за приближенное значение x взять число a, равное их полусумме.*

Если $a = \frac{l + L}{2}$, то $a - l = L - a = \frac{L - l}{2} = \Delta a$.

Выбирая в качестве приближенного значения другое число a_1, отличное от $\frac{l + L}{2}$, мы увеличиваем одну из разностей, а именно $a - l$, если $a_1 > a$, или $L - a$, если $a_1 < a$, и увеличим, следовательно, границу абсолютной погрешности Δa.

Из двух приближенных значений a и a_1 одного и того же точного числа x более точным естественно считать то, которому соответствует меньшая граница абсолютной погрешности. Однако, за приближенное значение для x далеко не всегда берут полусумму границ $\frac{l + L}{2}$, хотя здесь Δa, как мы только что видели, достигает своего минимума. Дело в том, что приходится считаться также с **простотой изображения**, и часто более точному приближенному числу предпочитают менее точное, но изображаемое меньшим числом цифр. Так, если $8{,}45 < x < 8{,}48$, то наиболее точное приближение дает, согласно предложению III этого параграфа, число $\frac{8{,}45 + 8{,}48}{2} = 8{,}465$, которому соответствует граница абсолютной погрешности $\frac{8{,}48 - 8{,}45}{2} = 0{,}015$. Но на практике предпочтительнее взять $x = 8{,}46$ или $8{,}47$, хотя граница абсолютной погрешности будет уже не $0{,}015$, а $0{,}02$. Кроме того немаловажного обстоятельства, что эти два последние приближения изображаются тремя значащими цифрами каждое, вместо четырех цифр числа $8{,}465$, наличность цифры разряда тысячных в этом последнем числе представляет то неудобство, что создает ложное впечатление, будто мы о цифре тысячных что-нибудь знаем.

Возьмем еще один пример. Пусть требуется найти $\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ с 4 десятичными знаками. Задача эта решена в § 31 (см. пример 4), где мы пришли к двойному неравенству

$$0{,}95105 < \sin 72^\circ < 0{,}95106.$$

Наиболее точное приближение дает полусумма границ, а именно

$$\sin 72^\circ \doteq 0{,}951055\ (\pm 0{,}000005).$$

Однако, соответственно заданию — найти значение $\sin 72^\circ$ с 4 десятичными знаками — берем для $\sin 72^\circ$ значение $0{,}9511$, лежащее вне указанных выше границ. Причина ясна: внутри этих границ нет числа с 4 десятичными знаками, границы эти надо расширить. Повышаем ВГ, оставляя НГ без изменения, так как $0{,}9511$ ближе к ВГ, чем $0{,}9510$ к НГ.

Теперь имеем

$$0{,}95105 < \sin 72^\circ < 0{,}9511, \tag{C}$$

откуда

$$\sin 72^\circ \doteq 0{,}9511\ (\pm 0{,}00005) \tag{D}$$

Отметим, что запись (D) связана с новым расширением границ, так как она равносильна двойному неравенству

$$0{,}95105 < \sin 72^\circ < 0{,}95115.$$

Чтобы избежать этого нового расширения границ, запись (D) можно заменить такой

$$\sin 72^\circ \doteq 0{,}9511\ (-0{,}00005),$$

которую будем читать так: „$\sin 72^\circ$ приближенно равен $0{,}9511$ с погрешностью, не превосходящей *минус* $0{,}00005$“.

Таким образом, на ряду с записью $x \doteq a\ (\pm \Delta a)$ будем в случае надобности применять запись $x \doteq a\ (-\Delta a)$, равносильную неравенству $a - \Delta a < x < a$, а также запись $x \doteq a\ (+\Delta a)$, равносильную неравенству $a < \Delta a < a + \Delta a$. В последнем случае будем говорить, что „x приближенно равен a с погрешностью, не превосходящей *плюс* Δa“.

Теперь ясно, как, зная НГ x и ВГ x, выбрать a и указать Δa, и обратно, как, зная a и Δa, указать НГ x и ВГ x.

Обозначая приближенное значение вместо a какой-либо другой буквой (b, c, d, ...), мы будем и соответствующие границы абсолютной погрешности обозначать уже не Δa, а Δb, Δc, Δd...

Границы погрешности не указываются, а подразумеваются в вычислениях со строгим учетом погрешностей, когда абсолютная погрешность не превосходит полуединицы последнего сохраненного разряда. Так, запись

$$\lg 2 \doteq 0{,}30103$$

равносильна, в вычислении со строгим учетом погрешностей, следующей более длинной

$$\lg 2 \doteq 0{,}30103 \ (\pm 0{,}000005).$$

В вычислениях без строгого учета погрешностей, границы погрешности никогда не записываются, так как они, вообще говоря, остаются до известной степени неопределенными.

Имеет ли применение границы абсолютной погрешности какие-либо преимущества сравнительно с простым указанием границ x? В обоих случаях для обозначения x мы пользуемся двумя числами (a и Δa или l и L). Разница в том, что запись $x \doteq a$ ($\pm \Delta a$) более компактна, чем запись $l < x < L$. Кроме того, в первом случае одно число Δa обычно бывает значительно меньше другого (a), тогда как во втором имеем два числа, мало разнящиеся одно от другого.

§ 15. Относительная погрешность и ее граница. Из двух приближенных значений *одного и того же* числа x мы считаем более точным то, у которого граница абсолютной погрешности меньше. Для сравнения же точности приближенных значений *двух* различных чисел границы абсолютной погрешности уже недостаточно, так как, например, нельзя признать одинаково точными два измерения длины, результаты которых имеют одну и ту же границу абсолютной погрешности, положим, 1 *см*, если первая длина составляет всего 20 *см*, а вторая 1 километр: первое измерение надо признать крайне грубым, второе чрезвычайно точным. Возникает, таким образом, вопрос о том, какую часть всей измеряемой величины составляет абсолютная погрешность, и мы приходим к понятию ***относительной погрешности.*** Относительной погрешностью приближенного числа a мы будем называть отношение абсолютной его погрешности к самому приближенному числу a. Подобно абсолютной погрешности, относительная погрешность в большинстве случаев остается неизвестной, и довольствуются разысканием ее границы. *Границей относительной погрешности* числа a, рассматриваемого как приближенное значение другого числа x, мы будем называть отношение границы абсолютной погрешности этого приближенного числа a к самому приближенному числу a (предполагается, что $a > 0$).

Итак, если $x \doteq a\ (\pm \Delta a)$, то граница относительной погрешности числа a есть дробь $\frac{\Delta a}{a}$.[1]

Как и граница абсолютной погрешности, граница относительной погрешности всегда выражается положительным числом. Ее можно повышать, заменяя найденное значение $\frac{\Delta a}{a}$ любым бо́льшим числом, если это по каким-либо соображениям (например, в целях сокращения записи) желательно.

Обыкновенно границу относительной погрешности выражают в % числа a.

Имея приближенное число a и зная границу его абсолютной погрешности Δa, мы находим границу относительной его погрешности в процентах путем деления $100 \Delta a$ на a, причем частное берется с 1 или 2, самое большее с 3 значащими цифрами, непременно по избытку. Запись одинакова с записью границы абсолютной погрешности, но сопровождается, для отличия, знаком %.

Пример 1. Зная, что $x \doteq 8{,}46\ (\pm 0{,}02)$, найти границу относительной погрешности для $a = 8{,}46$.

Здесь $\Delta a = 0{,}02$, $\frac{100 \Delta a}{a} = \frac{100 \cdot 0{,}02}{8{,}46} = 0{,}23\ldots < 0{,}3$.

Значит $x \doteq 8{,}46\ (\pm 0{,}3\%)$, что читается так: „$x$ приближенно равен 8,46, с погрешностью, не превосходящей плюс или минус 0,3 процента“.

Пример 2. Взвешивание некоторого предмета показало, что он тяжелее 43 *г* и легче 43,5 *г*. Найти границу относительной погрешности веса p, принимая его равным 43 *г*.

Здесь

$$p \doteq 43\ (+0{,}5) = 43\left(+\frac{100 \cdot 0{,}5}{43}\right) = 43\ (+1{,}1\ldots\%) =$$
$$= 43\ (+1{,}2\%).$$

---

[1] О другом определении границы относительной погрешности см. § 34.

Если приближенное число имеет границу абсолютной погрешности в одну единицу последнего разряда, то граница относительной его погрешности равна дроби с числителем 1 и знаменателем, разным числу, имеющему тот же цифровой состав, что и a, но без знака дробности.

Возьмем, например, $x = 2{,}65\,(\pm 0{,}01)$. Здесь $\frac{\Delta a}{a} = \frac{00{,}1}{2{,}65} = \frac{1}{265}$. Остается умножить эту дробь на 100, чтобы получить границу относительной погрешности в %.

Иногда границу относительной погрешности не выражают в процентах, а представляют ее в виде обыкновенной дроби с числителем 1, изменяя знаменатель (уменьшая его, чтобы увеличить границу) так, чтобы он выражался числом с 1 — 2 значащими цифрами. Так, в только что рассмотренном примере

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{265} < \frac{1}{200},\ x = 2{,}65\left(\pm\frac{1}{200}\right),$$

или

$$\frac{\Delta a}{a} < \frac{1}{250},\ x = 2{,}65\left(\pm\frac{1}{250}\right).$$

Так вычисляется граница относительной погрешности по известной границе абсолютной погрешности. Обратная задача тоже не вызывает никаких затруднений, и достаточно рассмотреть два примера.

Пример 3. Зная, что $x \doteq 184{,}3\ (\pm 0{,}1\%)$, указать границу абсолютной погрешности и границы для x.

Решение: $\frac{100\,\Delta a}{a} \doteq 0{,}1$; $a = 184{,}3$; $100\,\Delta a = 0{,}1\,a = 18{,}43$; $\Delta a = 0{,}1843 < 0{,}2$; $x \doteq 184{,}3\ (\pm 0{,}2)$; НГ $x = 184{,}1$; ВГ $x = 184{,}5$.

Пример 4. Измерение некоторой длины x дало число 457 метров, причем известно, что примененный способ измерения дает погрешность, не превышающую $\frac{1}{200}$ или $^1/_2\%$ в ту или другую сторону. Найти границы для x.

Здесь $x = 457\ (\pm{}^1/_2\%)$, $\Delta a = \frac{1}{2}\cdot 4{,}57 = 2{,}285 < 3$, НГ $x = 454$; ВГ $x = 460$.

Если взять для Δa не однозначное число 3, а двузначное число 2,3, то границы получаются более тесные (НГ $x = 454{,}7$; ВГ $x = 459{,}3$), но зато выражаются менее удобными числами.

§ 16. Округление приближенных чисел. Оно выполняется по правилам § 7, но надо выяснить, как влияет округление на границу абсолютной погрешности. Пусть, например, известно, что $\lg 41 \doteq 1{,}6128$ ($\pm 0{,}00005$), и надо произвести округление до 3 десятичных знаков. По правилу округления с поправкой получаем $\lg 41 \doteq 1{,}613$. От двойного неравенства

$$1{,}61275 < \lg 41 < 1{,}61285$$

переходим к другому

$$1{,}61275 < \lg 41 < 1{,}613,$$

которое дает, что

$$\lg 41 = 1{,}613 \ (-0{,}00025).$$

Разность между прежним приближенным значением логарифма (1,6128) и новым его значением (1,613) равна по абсолютной величине 0,0002; граница абсолютной погрешности прежнего значения 0,00005, нового — 0,00025. Как видим, последнее число равно сумме двух предыдущих. Легко показать, что так бывает всегда.

Действительно, пусть дано, что $x = a$ ($\pm \Delta a$), что равносильно неравенству

$$a - \Delta a < x < a + \Delta a. \qquad \text{(A)}$$

Если при округлении число a заменяется числом $a_1 < a$, то после вычитания a_1 из всех членов неравенства (A) будем иметь

$$a - a_1 - \Delta a < x - a_1 < a - a_1 + \Delta a. \qquad \text{(B)}$$

Заменим положительную разность $a - a_1$ в первом члене неравенства отрицательным числом $-(a - a_1)$, от чего неравенство только усилится.

Теперь имеем:

$$-(a - a_1) - \Delta a < x - a_1 < (a - a_1) + \Delta a,$$

или

$$-[(a - a_1) + \Delta a] < x - a_1 < [(a - a_1) + \Delta a],$$

откуда видно, что граница абсолютной погрешности числа a_1 равна сумме $(a - a_1) + \Delta a$. Если $a_1 > a$, то опять берем неравенство (B) и заменяем отрицательную разность $a - a_1 = -(a_1 - a)$ в третьем члене неравенства положительным числом $a_1 - a$, от чего неравенство только усилится.

Теперь имеем:

$$-(a_1 - a) - \Delta a < x - a_1 < (a_1 - a) + \Delta a,$$

или

$$-[(a_1 - a) + \Delta a] < x - a_1 < [(a_1 - a) + \Delta a],$$

что показывает, что здесь граница абсолютной погрешности числа a_1 равна сумме $(a_1 - a) + \Delta a$. Объединяя оба случая, получаем следующее правило:

При замене одного приближенного значения a другим a_1 граница абсолютной погрешности первого увеличивается на абсолютное значение разности $a - a_1$.

Пример 1. Округлить до 3 десятичных знаков $\lg 43 = 1{,}6335$ $(\pm 0{,}00005)$. Здесь $a = 1{,}6335$, $a_1 = 1{,}633$, $\Delta a = 0{,}00005$, $\Delta a + (a - a_1) = 0{,}00055$, $\lg 43 = 1{,}633$ $(\pm 0{,}00055)$.

К той же границе абсолютной погрешности приводит округление с усилением, а именно, получается $\lg 43 \doteq 1{,}634$ $(\pm 0{,}00055)$. Здесь следует применить правило четной цифры и взять $\lg 43 = 1{,}634$, или вовсе не делать округления.

Пример 2. Округлить до 3, 2, 1-ой значащей цифры приближенное значение для x.

$$x \doteq 8{,}256 \ (\pm 0{,}007).$$

До 3 значащих цифр: $x \doteq 8{,}26$ $(\pm 0{,}011)$; здесь $0{,}007 + 0{,}004 = 0{,}011$.

До 2 значащих цифр: $x \doteq 8{,}3$ $(\pm 0{,}051)$; здесь $0{,}007 + 0{,}044 = 0{,}051$.

До 1 значащей цифры: $x \doteq 8$ $(\pm 0{,}263)$; здесь $0{,}007 + 0{,}256 = 0{,}263$.

Заменяя полученные многозначные границы абсолютной погрешности однозначными, получаем такие результаты:

$$x \doteq 8{,}26 \ (\pm 0{,}02); \quad x \doteq 8{,}3 \ (\pm 0{,}06); \quad x \doteq 8 \ (\pm 0{,}3).$$

§ 17. Точные цифры приближенного числа. Очень удобный и постоянно применяемый на практике способ учета погрешностей приближенных чисел дает *подсчет точных их цифр*. Он позволяет оценивать точность приближенных чисел по самому их начертанию, без всяких дополнительных указаний. Термин „точные цифры“ определяется различно. Мы будем говорить, что *все цифры* данного приближенного числа *точны*, если граница абсолютной его погрешности не превосходит полуединицы последнего его разряда. Таким образом, применяя к точному числу округление с поправкой, мы всегда получаем в результате приближенное число, все цифры которого точны. Установив, например, что $\sqrt{200} \doteq 14{,}14$ $(\pm 0{,}005)$, мы тем самым получим значение этого корня с 4 точными значащими цифрами (или с 2 точными десятичными знаками). В числе 18 400 (± 50) мы имеем три точных значащих цифры. Математические таблицы всегда дают приближенные значения, все цифры которых точны.

Если граница абсолютной погрешности больше полуединицы, но не больше целой единицы последнего его разряда, то мы будем говорить, что все цифры числа точны, кроме последней, которая *почти точна*. (Некоторые авторы применяют в этом случае термин „верные цифры.)" Так в числе 0,654 (±0,001) две значащих цифры точны, третья почти точна. Отбросив ее, получаем число 0,65 (±0,005), где все цифры точны. Заметим, что отбрасывание последней почти точной цифры не всегда дает число, все цифры которого точны. Примером может служить число 231,65 (±0,01), которое, после отбрасывания последней почти точной цифры, дает число 231,6 (±0,06), т. е. число, где последняя цифра опять-таки лишь почти точна. Отбрасывая еще одну цифру, приходим к числу 232 (±0,46), где все цифры точны. Отбрасывание сразу двух последних цифр первоначально данного приближенного числа приводит к тому же округленному приближенному числу, но дает меньшую границу абсолютной погрешности, именно 232 (±0,36).

Условившись, что разуметь под „точными" цифрами приближенного числа, мы можем оценивать его точность, указывая, сколько точных цифр оно содержит. Таким образом можно говорить о приближенных числах с 1, 2, 3, 4 и т. д. точными значащими цифрами. В большинстве случаев числа, получаемые в результате измерения обычно применяемыми на практике способами, содержат *не более трех-четырех* точных значащих цифр. Точнейшие измерения дают числа, содержащие *не более восьми* точных значащих цифр.

Если граница абсолютной погрешности больше единицы последнего разряда, но меньше десяти единиц этого разряда, мы будем говорить, что все цифры числа точны, кроме последней, которая *сомнительна*. Например, в числе 38,45 (±0,04) последняя цифра сомнительна. Отбрасывая ее, получаем число 38,4 (±0,09), где последняя цифра уже почти точна. Отбрасывание сомнительной последней цифры далеко не всегда дает число, свободное от сомнительных цифр. Так, из числа 8,756 (±0,007) с сомнительной последней цифрой мы получаем, отбрасывая ее, число 8,76 (±0,011), где последняя цифра опять-таки сомнительна. Нужно отбросить сразу две последних цифры данного числа, чтобы освободиться от сомнительных цифр; действительно, в числе 8,8 (±0,051) последняя цифра почти точна.

Если, наконец, граница абсолютной погрешности числа превосходит 10 единиц последнего его разряда, то мы будем так округлять число, чтобы эта граница сделалась меньше 10 единиц последнего его разряда. Действительно, совершенно бессмысленно выписывать, скажем, сотые и тысячные доли числа, если его погрешность выражается десятыми долями и может доходить до 10 десятых, т. е. до целой единицы. Поэтому, имея, например, число 35,672 ($\pm$ 0,856), мы обязательно округлим его до десятых и получим 35,7 ($\pm$ 0,884) или, выражая границу однозначным числом 35,7 ($\pm$ 0,9). Отступления от этого правила мы будем делать в том только случае, когда погрешность, большая 10 единиц (разряда последней цифры) возможна, но крайне мало вероятна (подробности об этом см. в главе VI).

Наибольшее применение подсчет цифр имеет в вычислениях без строгого учета погрешностей. Здесь постоянно приходится иметь дело с приближенными числами, граница погрешности которых неизвестна, но малые погрешности, не превосходящие одной-двух единиц последнего разряда, всегда бывают в них гораздо более вероятны, чем большие. Чтобы отметить этот особый характер последней сомнительной цифры, мы будем говорить, что она *не вполне надежна*. При всех расчетах погрешностей мы будем трактовать этот случай как и случай почти точной последней цифры, имея в виду, что заключения будут в таких случаях лишь приблизительно справедливыми.

Между числом точных значащих цифр приближенного числа и границей его относительной погрешности существует зависимость, выраженная следующей табличкой:

Число точных значащих цифр	1	2	3	4	5
Граница относительной погрешности	от $\frac{1}{18}$ до $\frac{1}{2}$	от $\frac{1}{198}$ до $\frac{1}{20}$	от $\frac{1}{1998}$ до $\frac{1}{200}$	от $\frac{1}{19998}$ до $\frac{1}{2000}$	от $\frac{1}{199998}$ до $\frac{1}{20000}$
То же в %	от 5,6 до 50	от 0,5 до 5	от 0,05 до 0,5	от 0,005 до 0,05	от 0,0005 до 0,005

Если последняя цифра не точна, а только почти точна, числа второй и третьей строки надо удвоить. Составление этой таблички очень просто. Так, все числа с одной точной значащей цифрой заключаются между 1 ($\pm$ 0,5) и 9 ($\pm$ 0,5) и имеют границу относительной погрешности от $\frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}$ до $\frac{0,5}{9} = \frac{1}{18}$.

Все числа с двумя точными значащими цифрами заключаются между 10 ($\pm 0,5$) и 99 ($\pm 0,5$), а их границы относительной погрешности между $\frac{0,5}{10}=\frac{1}{20}$ и $\frac{0,5}{99}=\frac{1}{198}$ и т. д. Приближенные числа при этом расчете, очевидно, достаточно брать целыми, так как от перенесения в них запятой граница относительной погрешности не изменится.

Посредством этой таблички, зная число точных значащих цифр числа, можно без всяких вычислений получить приближенное значение соответствующей границы относительной погрешности. Обратное заключение, т. е. переход от границы относительной погрешности к числу точных значащих цифр, требует одной оговорки. Возьмем, например, число, немного превосходящее 100 и имеющее погрешность в 0,2%. Сколько цифр надо брать в этом числе, чтобы все они были точными? Согласно табличке три, причем граница относительной погрешности будет заключаться между 0,5% и 0,05% и может, следовательно, быть и несколько меньше 0,2% и несколько больше 0,2%. Пусть, например, число равно 112 ($\pm 0,5$). Его граница относительной погрешности есть $\frac{0,5 \cdot 100}{112}=0,44\ldots\%$. Таким образом трех значащих цифр для изображения нашего числа с погрешностью, меньшей 0,2%, недостаточно, надо взять **4**: теперь граница относительной погрешности будет заключаться уже между 0,005% и 0,05%. Итак, посредством нашей таблички по данной границе относительной погрешности приближенного числа число его точных значащих цифр определяется лишь приближенно.

Мы рассмотрели 4 способа оценки точности приближенных чисел. Остается еще рассмотреть способ, основанный на применении средних линейных и средних квадратических погрешностей. Так как способ этот применяется преимущественно для оценки точности чисел, получаемых путем измерения, то мы его рассмотрим в следующей главе.

Упражнения к главе II

1. Зная, что 1 *м* = 22,4972 вершка, а 1 *кг* = 2,44193 фунта, найти абсолютные и относительные погрешности следующих часто употребляемых приближений

$$1 \text{ м} \doteq 22,5 \text{ вершка}, \quad 1 \text{ кг} \doteq 2,5 \text{ фунта}.$$

2. Известно, что некоторое число x больше, чем 4,873 и меньше, чем 4,928. Указать подходящее приближенное значение

для x, а также границы его абсолютной и относительной погрешностей.

3. Найти границы для x, если известно, что $x = 3\,648$ ($\pm 2\%$). Округлить это приближенное значение так, чтобы оставалась лишь одна сомнительная цифра.

4. Округлить до 3 десятичных знаков следующие приближенные значения, все цифры которых точны, и указать новые границы абсолютных погрешностей:

$$\sin 70^\circ = 0{,}9397; \ \sin 71^\circ = 0{,}9455; \ \sin 72^\circ = 0{,}9511.$$

5. Сколько значащих цифр надо взять в числе, начинающемся с цифры 3, чтобы граница относительной его погрешности была не выше 1%? Не выше $0{,}1\%$? Предполагается, что граница абсолютной погрешности числа равна половине единицы разряда последней его цифры.

ГЛАВА III

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 18. Погрешности систематические и случайные. Всякое число, выражающее значение какой-нибудь величины, получается либо в результате счета, либо в результате измерения, либо, наконец, в результате математических операций над другими числами, полученными посредством счета или измерения. *Точным* число может быть (но далеко не всегда бывает) в результате *счета*. Всякое же число, полученное в результате измерения, дает лишь *приближенное* значение измеряемой величины вследствие несовершенства наших измерительных приборов, несовершенства наших органов чувств и, наконец, некоторой неопределенности самих измеряемых объектов. Так, например, длина отрезка прямой, заключенного между двумя точками, является вещью вполне определенной, если мы имеем две *математические* точки; на практике же мы всегда имеем дело лишь с более или менее грубыми *пометками* на концах измеряемого отрезка, только приблизительно его собой определяющими.

Сохраняя, как и раньше, термин „ошибка“ для обозначения таких легко устранимых отклонений приближенных результатов измерений от точных значений, которые происходят вследствие недостатка внимательности, мы будем называть *погрешностями* те неустранимые отклонения, какие присущи результату всякого измерения, будучи обусловлены указанными выше причинами.[1]

Погрешности можно разделить на две группы: погрешности *систематические* и погрешности *случайные.*

Систематическими называют те погрешности, какие обусловлены определенными и постоянно действующими в одном и том же направлении причинами. Так, если для измерения длины мы пользуемся миллиметровой линейкой, деления которой несколько короче нормальных, то мы постоянно будем получать *преувеличенные* результаты (пример так называемой *инструментальной* систематической погрешности). Если мы взвешиваем тело в воздухе, то вследствие потери в весе от вытесненного воздуха (закон Архимеда в газах), вес тела будет получаться либо *больше* либо *меньше* истинного, в зависимости от того, будет ли его плотность больше или меньше плотности разновесок, посредством которых взвешивание производилось (пример *теоретической* систематической погрешности). Понятно, что такого рода погрешности, искажающие результаты измерений, должны быть устранены, при последующей их обработке, введением надлежащих *поправок*. Так, установив, что 100 делений нашей масштабной линейки равны не 100 *мм*, а лишь 98,5 *мм*, мы должны полученные результаты (в делениях нашего масштаба) умножить на 0,985, чтобы получить эти результаты в миллиметрах. Труднее вводить поправки для устранения так называемых *личных* систематических погрешностей, обусловленных индивидуальными особенностями каждого наблюдателя (один, например, склонен делать несколько преувеличенные отсчеты, другой несколько преуменьшенные и т. п.), но их, в случае измерений, требующих высшей точности, все же вводят.

После устранения систематических погрешностей остаются погрешности случайные, обусловленные непостоянными и неподдающимися точному учету причинами. Существование их доказывается тем обстоятельством, что результаты нескольких повторных измерений одного и того же объекта, выполненных одним и тем же лицом, одним и тем же инструментом и, казалось бы, при одинаковых условиях, все же оказываются различными. Так, измеряя какое-нибудь более или менее значительное расстояние мерной 20-метровой цепью, мы получим при повторении измерений одно и то же число сотен и десятков метров, быть может, одно и то же число метров, но число дециметров будет полу-

---

[1] Часто и эти неустранимые погрешности тоже именуют „ошибкой“, называя ошибки от недостаточной внимательности „грубыми ошибками“.

чаться каждый раз новое, не говоря уже о сантиметрах.[1] Для объяснения этой разницы можно указать на неровности местности, отклонения от прямолинейного направления, неравномерность натяжения цепи и т. д.

Способы учета систематических погрешностей рассматриваются в специальных науках, занимающихся изучением соответствующих явлений: в физике, химии, астрономии, геодезии, прикладной механике и т. п. Случайные же погрешности изучает так называемая *теория уравновешивания* (или *теория ошибок*), в основных своих чертах излагаемая в каждом более или менее подробном курсе теории вероятностей.

§ 19. Учет погрешностей при измерениях малой точности. Итак, всякое измерение дает лишь приближенный результат. Как же учесть его погрешность? В очень многих измерениях, когда не ставят себе задачей получить наивысшую возможную точность, сделать это легко, прибегая к способу границ: производя измерение, устанавливают два числа, одно заведомо меньшее, другое заведомо большее истинного значения. Рассмотрим, например, процесс взвешивания.

Обыкновенный способ взвешивания состоит в том, что взвешиваемый предмет кладется на одну чашку весов, разновески на другую, и систематическими пробами устанавливают, сколько разновесок надо взять, чтобы перевешивала чашка с предметом и чтобы после добавления к разновескам еще одного, возможно меньшего, перевешивала бы чашка с разновесками. Положим, при нагрузке чашки с разновесками 183 граммами перевешивает чашка с предметом, а при добавлении к разновескам 0,5 грамма перевешивает чашка с разновесками. Таким образом, обозначая через x вес предмета, мы имеем для него низшую и высшую границы:

$$183 < x < 183{,}5,$$

что можно записать короче одним из следующих трех способов:

$$x \doteq 183\ (+0{,}5);\quad x \doteq 183{,}5\ (-0{,}5);\quad x \doteq 183{,}25\ (\pm 0{,}25).$$

Если при некоторой нагрузке чашки с разновесками нет заметного перевешивания ни той, ни другой чашки, что иногда бывает, то надо выяснить, какая наименьшая прибавка к каждой чашке заставляет эту чашку перевешивать. Пусть, например,

[1] При измерении мерной лентой отрезков до 200—300 *м* колебания, при благоприятных условиях (опытный работник, ровная местность), выражаются лишь немногими сантиметрами.

такое равновесие наблюдается, когда взято 183 грамма разновесок, причем прибавка к разновескам 0,2 грамма вызывает перевешивание чашки с разновесками, а такая же прибавка к предмету — чашки с предметом, прибавка же 0,1 грамма равновесия не нарушает. Тогда имеем границы для x:

$$183 - 0{,}2 < x < 183 + 0{,}2 \text{ или } 182{,}8 < x < 183{,}2,$$

то есть

$$x = 183 \ (\pm 0{,}2).$$

Такое указание границ точного значения и последующий вывод приближенного значения возможны в большинстве случаев непосредственных измерений: при измерении длины (линейкой, рулеткой, мерной цепью), когда не требуется многократного прикладывания измерительного прибора, при измерении углов транспортиром (на бумаге) или каким-либо более сложным угломерным прибором (на местности), при измерении температуры, давления, времени, силы тока и т. д. Каждый раз мы устанавливаем два числа: одно заведомо меньшее искомого значения, другое заведомо большее. Разность этих двух границ характеризует точность измерения. Она зависит, прежде всего, от точности примененного измерительного прибора. Употребляя, например, миллиметровую линейку со скошенной кромкой для измерения на плане, мы легко будем указывать для каждого измеряемого отрезка границы с разностью в полмиллиметра. Употребляя транспортир, разделенный на градусы и полуградусы, можно указывать для каждого измеряемого угла границы с разностью в $\frac{1^\circ}{4}$. Вообще, если приходится делать отсчет по некоторой шкале, и если наименьшие деления этой шкалы не очень мелки (не меньше 1 *мм*), то вполне возможно заключение измеряемого объекта в границы с разностью в половину наименьшего деления.[1] Эта разность границ очень расширяется, если самый измеряемый объект не обладает достаточной определенностью. Измеряя, например, на так называемой „оптической скамье“ расстояние от линзы до изображения, даваемого ею на подвижном экране, скользящем вдоль линейки с делениями, мы имеем не одно, а несколько последовательных положений экрана, дающих изображение одной и той же — на наш глаз — резкости. Приходится двигать экран в одном направлении до тех пор, пока резкость изображения не станет заметно меньшей: отсчет в этом

[1] При некотором навыке возможно указание и более тесных границ.

положении даст одну из границ искомого расстояния. Двигая далее экран в противоположном направлении, остановимся, когда изображение, сделавшееся сперва снова резким, не станет опять ухудшаться. Новый отсчет даст другую границу. Чем искуснее и внимательнее наблюдатель, тем теснее, при данных измерительных приборах, те границы, в какие он заключает измеряемую величину.

При вычислениях без строгого учета погрешностей точность получаемого приближенного значения измеряемой величины характеризуют просто числом его цифр, имея в виду, что некоторая неопределенность последней цифры вполне допустима. Здесь надо твердо держаться правила — никогда не писать больше, чем одну сомнительную цифру. Тогда сама запись числа даст характеристику его точности без каких бы то ни было дополнительных указаний. Записав, например, что предмет весит 183 *г*, мы тем самым утверждаем, что знаем его вес до целых граммов: цифра 3 не вполне надежна, но если и содержит погрешность, то небольшую. Запись 183,0 *г* означала бы, что цифра целых граммов (3) установлена точно и что погрешность может быть лишь в десятых долях грамма (цифра десятых 0 не вполне надежна).

§ 20. Среднее арифметическое результатов многократных равноточных измерений. При тех же самых приборах нередко есть возможность получить более точные результаты, оценивая на-глаз более мелкие доли наименьшего деления. Например, при измерении длины отреза миллиметровой линейкой, в случае достаточной определенности концов этого отрезка, можно при некотором навыке отсчитывать десятые доли миллиметра. Отсчет долей наименьшего деления облегчается при наличности поперечного десятичного масштаба или равноценного ему нониуса (верньера), например, на штангенциркуле или на круге угломерного прибора. Назначение этих вспомогательных приборов — давать доли наименьшего деления, имеющегося на данном измерительном приборе. Равным образом точность взвешивания повышается наблюдением отклонений от положения равновесия стрелки, соединенной с коромыслом весов и движущейся вдоль небольшой шкалы, которая имеется на всяких весах, предназначенных для более точных измерений.

Когда таким образом прибор дает наибольшую точность отсчета, какую он только может давать, повторный отсчет обыкновенно дает уже несколько иной результат. Тут начинают уже сказываться случайные погрешности измерений. При многократном одинаково тщательном повторении одного и того же измерения мы получаем целую серию довольно близких друг другу, но все же не совпадающих результатов, и является вопрос, как их использовать для получения результата, наиболее близкого к истинному, и как оценить его погрешность.

Та же задача возникает иногда и при измерениях малой точности. Например, желая узнать расстояние между двумя отдаленными друг от друга пунктами и измеряя его рулеткой, мы, при повторении измерения, получим несколько различные результаты.

Положим, все измерения сделаны одинаково тщательно, все заслуживают поэтому одинакового доверия, все *равноточны*. В этом случае берут среднее арифметическое всех полученных результатов, как *вероятнейшее* значение искомой величины. Обосновать это можно следующими соображениями. Если систематические погрешности устранены, то естественно принять две гипотезы: 1) случайные погрешности некоторых результатов положительны, некоторых отрицательны, то есть одни измерения дают результаты меньшие истинного, другие — большие истинного; 2) если, при этом, измерений произведено много, то каждой положительной случайной погрешности соответствует приблизительно равная ей по абсолютной величине отрицательная погрешность. Обозначая истинное значение искомой величины через x, а результаты первого, второго, третьего и т. д. измерений буквами a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$, их истинные абсолютные погрешности α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$, мы будем иметь n равенств, где n число сделанных измерений:

$$\alpha_1 = x - a_1,\ \alpha_2 = x - a_2, \alpha_3 = x - a_3 \ldots,\ \alpha_n = x - a_n.$$

Если все эти равенства почленно сложить, то в левой части получим, согласно второй сделанной гипотезе, нуль, в правой же многочлен $nx - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$, который записывают короче в виде $nx - [a]$.

Отсюда заключаем, что $nx = [a]$ или $x = \frac{[a]}{n}$, т. е. что x равен арифметическому среднему результатов всех измерений. Это среднее арифметическое будем обозначать буквой L. Итак

$$L = \frac{[a]}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Арифметическое среднее давало бы совершенно точное значение измеряемой величины, если бы гипотезы наши вполне соответствовали действительности. Но так как это соответствие лишь приблизительное, притом тем меньшее, чем меньше произведено измерений, то и арифметическое среднее дает лишь приближенное значение измеряемой величины, а именно только *вероятнейшее* ее значение, и необходимо установить способ оценки погрешности этого приближения.

Вопрос этот очень просто решается при вычислениях без строгого учета погрешностей: найдя среднее, его округляют, сравнивая его с результатами отдельных измерений и отбрасывая явно ненадежные его цифры (как и всегда, одну сомнительную цифру сохраняют). Пусть, например, некоторое расстояние было измерено 5 раз, причем получились такие результаты (в метрах):

$$763{,}8;\ 764{,}5;\ 761{,}8;\ 763{,}4;\ 762{,}7.$$

Сумма их 3816,2, среднее 763,24.

Разности между этим средним и результатом каждого отдельного измерения равны

$$-0{,}56;\ -1{,}26;\ +1{,}44;\ -0{,}16;\ +0{,}54.$$

Как видим, эти разности в 2 случаях несколько превосходят единицу. Поэтому среднее надо округлить до *целых*. Итак, искомое расстояние приближенно равно 763 *м* (приближенное число с тремя значащими цифрами).

Заключение о том, какие цифры среднего нужно сохранить, какие отбросить, большею частью можно бывает сделать и не находя разностей между результатами отдельных измерений и средним.

Если же требуется строгий учет погрешностей, то оценить точность среднего арифметического гораздо труднее. Сперва выясним, каким образом можно сравнить точность двух рядов результатов измерений одной и той же величины.

§ 21. Средняя и средняя квадратическая погрешность отдельного измерения. Положим, два наблюдателя измеряют углы треугольника и находят их сумму. Один повторяет все измерения шесть раз, другой восемь раз, и оба получают такие результаты:

I наблюдатель . .	180°5′	180°3′	179°55′	180°8′	179°51′	179°58′		
II наблюдатель . .	180°1′	179°58′	179°59′	180°2′	179°59′	179°58′	180°0′	179°59′

Таким образом, истинные погрешности измерений первого наблюдателя равны соответственно

$$-5',\ -3',\ +5',\ -8',\ +9',\ +2',$$

а второго

$$-1', +2', +1', -2', +1', +2',\ 0', +1'.$$

С первого взгляда видно, что II наблюдатель получил более точные результаты. Но как оценить эту бо́льшую точность числом? Попробуем вычислить среднее арифметическое истинных погрешностей для каждого:

для I наблюдателя

$$\frac{1}{6}\,[(-5)+(-3)+(+5)+(-8)+(+9)+(+2)]=0,$$

а для II

$$\frac{1}{8}\,[(-1)+(+2)+(+1)+(-2)+(+1)+(+2)+$$
$$+(+1)]=+\frac{1}{2}.$$

Таким образом, среднее арифметическое истинных погрешностей оказалось в данном случае меньше у того ряда измерений, который явно менее точен. Следовательно, среднее арифметическое истинных погрешностей для нашей цели непригодно.

Попробуем далее брать суммы абсолютных значений истинных погрешностей и опять найдем среднее:

для I наблюдателя

$$\frac{1}{6}\,[5+3+5+8+9+2]=5\frac{1}{3},$$

для II наблюдателя

$$\frac{1}{8}\,[1+2+1+2+1+2+1]=1\frac{1}{4}.$$

Полученные числа называются *средними линейными* погрешностями или короче просто *средними* погрешностями. Как видим, в данном случае они хорошо характеризуют точность обоих рядов измерений: у более точного второго ряда значительно меньшая средняя погрешность. Обыкновенно так бывает и в других случаях, а потому средними погрешностями нередко пользуются, особенно в школьной практике. Однако, употребление средних погрешностей не всегда дает удовлетворительные результаты. Так, предположим, что то же измерение углов треугольника и вычисление их суммы выполнил еще третий наблюдатель, получивший такие числа:

$$180°1',\ 180°13',\ 179°59',\ 180°0',\ 179°48',$$

которым соответствуют истинные погрешности

$$-1,\ -13,\ +1, 0,\ +12.$$

Вычисляя среднюю погрешность, находим, что она здесь равна

$$\frac{1}{5}[1+13+1+12]=5\frac{2}{5}.$$

Как видим, она почти одинакова со средней погрешностью результатов, полученных I наблюдателем. Между тем, сравнивая ряды полученных ими результатов непосредственно, мы должны признать, что измерения III наблюдателя вообще менее надежны, так как в двух случаях дают такие большие погрешности, каких вовсе не было у I.

Чтобы придать больше значения бóльшим погрешностям, вычисляют среднее не самых погрешностей, а их квадратов, и из этого среднего извлекают квадратный корень. Получаемое число носит название *средней квадратической погрешности* и постоянно употребляется для сравнения точности результатов измерений. Для его обозначения обыкновенно пользуются греческой буквой σ („сигма малая").

Итак,

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+\ldots+(x-a_n)^2}{n}}$$

или короче,

$$\sigma=\sqrt{\frac{[(x-a)^2]}{n}} \qquad \text{(A)}$$

Прямоугольные скобки здесь, как и в § 20, употреблены для сокращенной записи суммы ряда выражений некоторого определенного вида, в данном случае выражений

$$(x-a_1)^2,\ (x-a_2)^2,\ \ldots\ldots,\ (x-a_n)^2.$$

Такой сокращенный способ записи сумм введен Гауссом и постоянно употребляется в Теории уравновешивания.

Для трех рассматриваемых рядов измерений имеем такие средние квадратические погрешности:

$$\text{Для I} \ldots\ldots \sigma = \sqrt{\frac{1}{6}(25+9+25+64+81+4)} = 5{,}89.$$

$$\text{Для II} \ldots\ldots \sigma = \sqrt{\frac{1}{8}(1+4+1+4+1+4+1)} = 1{,}41.$$

$$\text{Для III} \ldots\ldots \sigma = \sqrt{\frac{1}{5}(169+1+144+1)} = 7{,}94.$$

В громадном большинстве случаев истинное значение x измеряемой величины неизвестно, а потому остаются неизвестными и истинные погрешности $\alpha_i = x - a_i$. Вычисление средней квадратической погрешности σ по формуле (A), таким образом, невозможно. Ее вычисляют посредством так называемых *уклонений от среднего.*

Уклонением результата каждого отдельного измерения a_i от их среднего арифметического L называется разность $L - a$, то есть разность между средним арифметическим всех результатов и данным результатом. Обозначая уклонение для a_i буквой v_i, имеем равенство

$$v_i = L - a_i,$$

где значок i принимает все значения от $i = 1$ до $i = n$. Легко установить два следующих свойства уклонений от среднего.

I свойство: *сумма всех уклонений от среднего равна 0.*

Действительно, написав равенство $v_i = L - a_i$ для каждого значения указателя i и сложив все n полученных равенств, имеем

$$[v_i] = nL - [a_i]$$

$$\text{Но } L = \frac{[a_i]}{n},\ nL = [a_i], \text{ а потому}$$

$$[v_i] = 0.$$

Здесь, как и выше, символ $[v_i]$ употреблен как сокращенная запись суммы $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$, а символ $[a_i]$ — как сокращенная запись суммы $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

II свойство: *сумма квадратов уклонений от среднего меньше суммы квадратов истинных погрешностей.*

Вычитая из истинной погрешности $\alpha_i = x - a_i$ уклонение $v_i = L - a_i$, получаем равенство

$$\alpha_i - v_i = x - L,$$

или после перенесения v_i направо, равенство

$$\alpha_i = v_i + (x - L).$$

Возведя это равенство в квадрат, получаем

$$\alpha_i^2 = v_i^2 + 2\,v_i(x - L) + (x - L)^2.$$

Написав последнее равенство для каждого из n значений i, сложим полученные n равенств почленно. Приходим к равенству

$$[\alpha^2] = [v^2] + 2\,(x - L)\,[v] + n\,(x - L)^2.$$

В силу I свойства, член $2\,(x - L)\,[v]$ равен нулю. Остается

$$[\alpha^2] = [v^2] + n\,(x - L)^2.$$

Так как второй член правой части всегда положителен, то сумма квадратов истинных погрешностей всегда больше суммы квадратов уклонений. Отсюда вытекает II свойство.

Если мы для вычисления средней квадратической погрешности σ в формуле (А) заменим сумму квадратов истинных погрешностей $[(x - a)^2]$ через сумму квадратов уклонений $[v^2]$, то мы числитель подкоренного, согласно II свойству, уменьшим. Чтобы оставить подкоренное неизменным, необходимо соответственно уменьшить и его знаменатель. В теории уравновешивания доказывается, что для этого достаточно уменьшить знаменатель на 1, то есть заменить в знаменателе n через $n - 1$. Для вычисления σ мы получаем теперь формулу

$$\sigma = \sqrt{\frac{[v_i^2]}{n - 1}} = \sqrt{\frac{[(L - a)^2]}{n - 1}} \qquad \text{(B)}$$

или подробнее

$$\sigma = \sqrt{\frac{(L - a_1)^2 + (L - a_2)^2 + \ldots + (L - a_n)^2}{n - 1}},$$

которая и употребляется постоянно на практике.

Средняя квадратическая погрешность σ вполне удовлетворяет цели сравнительной оценки точности различных рядов наблюдений, но она непригодна для характеристики точности тех средних выводов, какие мы из этих рядов получаем, вычисляя среднее арифметическое L всех результатов, содержащихся в каждом ряду. Действительно, с возрастанием числа наблюдений среднее арифметическое их результатов становится все более и более надежным; среднее из 10 одинаково точных наблюдений заслуживает большего доверия, чем среднее арифметическое из 4 таких же наблюдений, так как гипотезы о случайных погрешностях, сделанные в § 21, тем ближе к истине, чем больше число этих погрешностей. Между тем достаточно одного взгляда на формулу (В), чтобы убедиться, что при возрастании числа наблюдений n числитель и знаменатель подкоренного растут приблизительно одинаково быстро (конечно, предполагается, что новые добавочные наблюдения делаются при тех же условиях, что и первые).

В виду этого средняя квадратическая погрешность σ считается характеристикой точности *каждого отдельного измерения* из того ряда измерений, для которого она вычислена. Для характеристики же точности среднего арифметического употребляют другую величину, к рассмотрению которой и переходим.

§ 22. Средняя квадратическая погрешность арифметического среднего. Предварительно докажем два свойства средней квадратической погрешности отдельного измерения.

I свойство. Если по наблюдаемым значениям величины x вычисляется величина y, связанная с x соотношением

$$y = kx,$$

где k — точно известный множитель пропорциональности, то, зная среднюю квадратическую погрешность каждого отдельного измерения x, равную σ_x, можно получить среднюю квадратическую погрешность каждого значения y, которую обозначим символом σ_y, по формуле:

$$\sigma_y = k\sigma_x.$$

В самом деле, обозначая результаты отдельных измерений величины x, как и раньше, через $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, а соответствующие значения величины y через $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$, имеем согласно формуле (А) § 21:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_n)^2}{n}},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{(y-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + \ldots + (y-b_n)^2}{n}}.$$

Заменяя y в выражении для σ_y через kx, b_1 через ka_1, b_2 через ka_2 и т. д., заключаем, что

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{k^2(x-a_1)^2 + k^2(x-a_2)^2 + \ldots + k^2(x-a_n)^2}{n}} = k\sigma_x,$$

что и требовалось доказать.

II свойство. Если по наблюденным значениям двух величин x и y вычисляется третья z, связанная с ними соотношением

$$z = x + y,$$

то, зная среднюю квадратическую погрешность каждого отдельного измерения x, равную σ_x, и среднюю квадратическую погрешность каждого измерения y, равную σ_y, можем вычислить среднюю квадратическую погрешность каждого значения z, которую обозначим через σ_z, по формуле:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Действительно, согласно определению, имеем

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}[(x-a_i)^2],\quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n}[(y-b_i)^2],\quad \sigma_z^2 = \frac{1}{n}[(z-c_i)^2],$$

где буквы a и b (со значками) означают результаты измерений величин x и y, а буква c (со значком) означает соответствующее значение величин z, то есть $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$ и т. д. $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Согласно условию, имеем соотношение

$$z - c_1 = x + y - (a_1 + b_1)$$

или

$$z - c_1 = (x - a_1) + (y - b_1),$$

откуда

$$(z - c_1)^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = 2(x - a_1)(y - b_1);$$

точно также

$$(z - c_2)^2 = (x - a_2a_1)^2 + (y - a_2b_1)^2 + 2(x - a_2)(y - b_2),$$

$$(z - c_3)^2 = (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + 2(x - a_3)(y - b_3)$$

и так далее.

Написав все n равенств этого вида, сложив их почленно и разделив обе части на n, придем к равенству

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \frac{2}{n}\Big[(x - a_1)(y - b_1) + (x - a_2)(y - b_2) + \ldots + (x - a_n)(y - b_n)\Big].$$

В скобке во второй части содержится сумма произведений истинных погрешностей величин x и y. Произведения эти будут частью положительны, частью отрицательны. Применяя к ним те же гипотезы, какие были высказаны в § 20 о случайных погрешностях, на что мы имеем тем больше права, чем больше число их, заключаем, что выражение в скобках можно считать равным нулю, и приходим к зависимости

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Если имеется сумма не двух, а трех величин

$$u = x + y + z,$$

то, полагая $y + z = v$, сперва устанавливаем, согласно только что доказанному, что $\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + \sigma_v^2$ и что $\sigma_v^2 = \sigma_y^2 + \sigma_z^2$, откуда затем имеем, что $\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$. Продолжая тем же путем, обобщим наше II свойство на случай какого угодно числа слагаемых и формулируем его так:

Квадрат средней квадратической погрешности суммы нескольких величин равен сумме квадратов средних квадратических погрешностей слагаемых.

В только что проведенном рассуждении мы предполагали, что каждое значение a_i первого слагаемого комбинируется только с одним определенным значением b_i второго слагаемого, т. е. что a_1 складывается только с b_1, a_2 с b_2 и т. д. Нетрудно показать, что наш вывод останется в силе и при предположении, что каждое значение a_i первого слагаемого комбинируется с каждым значением b_n второго слагаемого (тогда, имея n значений первого слагаемого и столько же второго, мы получим n^2 значений суммы).

Вернемся теперь к характеристике точности среднего арифметического.

Пусть, как и раньше, имеется ряд равноточных измерений a_1, a_2, $a_3, \ldots,$ a_n, среднее арифметическое которых L, а средняя арифметическая погрешность каждого σ. В силу только что доказанного II свойства квадрат средней квадратической погрешности суммы

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = [a]$$

равен $\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 = n\sigma^2$, а сама средняя квадратическая погрешность этой суммы есть $\sqrt{n\sigma^2} = \sigma\sqrt{n}$. Но $L = \frac{[a]}{n} =$

$=\frac{1}{n}\cdot[a]$. Если заменить L через y, $\frac{1}{n}$ через k, $[a]$ через x, то получим зависимость $y=kx$, рассмотренную в I свойстве. Прилагая сюда это последнее, имеем, что средняя квадратическая погрешность среднего арифметического L равна $\frac{1}{n}\cdot\sigma\sqrt{n}=$ $=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Обозначая ее через M, получаем формулу для вычисления *средней квадратической погрешности арифметического среднего* (или средней квадратической погрешности среднего вывода):

$$M=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{C}$$

Как видим, число M убывает с возрастанием n, но медленнее, чем это последнее. Чтобы уменьшить среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического *вдвое*, надо сделать *вчетверо* больше измерений. Насколько медленно изменяется M при возрастании n, можно видеть из следующей таблички:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M	σ	$0{,}71\sigma$	$0{,}58\sigma$	$0{,}50\sigma$	$0{,}45\sigma$	$0{,}41\sigma$	$0{,}38\sigma$	$0{,}35\sigma$	$0{,}33\sigma$	$0{,}32\sigma$	$0{,}30\sigma$	$0{,}29\sigma$

При малом (примерно, меньше 8) числе измерений каждое лишнее измерение *значительно уменьшает* среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического, при большом же числе измерений это уменьшение становится е д в а з а м е т н ы м. Поэтому на практике ограничиваются обыкновенно 3, самое большее 10 измерениями.

Вычислив M, записывают результат в виде

$$x=L\pm M,$$

причем здесь M служит для характеристики точности среднего арифметического L, но *не есть граница абсолютной погрешности этого последнего приближенного числа.* Чтобы избежать смешения средней квадратической погрешности среднего арифметического и границы его абсолютной погрешности, будем писать $\pm M$ без скобки.

§ 23. Предельная погрешность. Итак, число M, т. е. средняя квадратическая погрешность среднего вывода, отнюдь не является границей погрешности среднего вывода, как не является ею и число σ, т. е. средняя квадратическая погрешность одного измерения. Теория вероятностей показывает, что при очень большом числе повторных равноточных измерений в каждой тысяче случайных погрешностей будет средним числом 680 погрешностей, заключенных между $-\sigma$ и $+\sigma$, 950 погрешностей, заключенных между -2σ и $+2\sigma$, 997 погрешностей, заключенных между -3σ и $+3\sigma$. Таким образом, в каждой тысяче случаев встречаются, в среднем, только *три* измерения, погрешность которых превосходит, по абсолютному значению, утроенную среднюю квадратическую погрешность. *Это число 3σ и считают поэтому границей случайных погрешностей*, отбрасывая, как ошибочные, результаты, содержащие погрешности, превосходящие эту границу. Число 3σ часто называют *предельной* погрешностью или *максимальной* погрешностью.

Границей абсолютной погрешности среднего вывода можно поэтому считать утроенную среднюю квадратическую его погрешность, то есть число $3M$.

Итак,

$$x \doteq L\,(\pm 3M). \qquad \text{(D)}$$

Необходимо однако иметь в виду несколько условный характер последней формулы: мы не ручаемся за то, что L отличается от x не больше, чем на $3M$; мы утверждаем только, что так будет в громадном большинстве случаев.

§ 24. Пример обработки результатов многократных равноточных измерений. Желая узнать расстояние между двумя точками, взятыми на полу комнаты, измерили это расстояние шесть раз посредством последовательного приложения линейки длиной в 20 *см*. Получены такие результаты (в *см*):

389,47; 389,54; 389,48; 389,35; 389,46; 389,56.

Если строгого учета погрешностей не требуется, мы просто сравниваем все эти результаты и замечаем, что цифры целых везде одинаковы, цифры же десятых немного колеблются (4 — 5 — 4 — 3 — 4 — 5). Поэтому берем среднее и округляем его до десятых. Полученное число 389,5 *см* и будет приближенно выражать искомое расстояние. Таким образом, мы узнали это расстояние с точностью до десятых долей *см*. Можно также сказать, что мы выразили его приближенным числом с 4 значащими цифрами (приближенным 4-значным числом). Последняя цифра числа 389,5, как всегда при вычислении без строгого учета погрешностей, не вполне надежна, но малая погрешность в ней значительно более вероятна, чем большая.

Когда требуется более определенный ответ на вопрос о точности результата нашего измерения, вычисляем σ, M и $3M$ по формулам (B), (C), (D) §§ 21, 22, 23.

Вычисления располагаем по следующей схеме:

i	a_i	$L - a_i$	$(L-a_i)^2$
1	389,47	$+0{,}007$	0,000049
2	389,54	$-0{,}063$	3969
3	389,48	$-0{,}003$	9
4	389,35	$+0{,}127$	16129
5	389,46	$+0{,}017$	289
6	389,56	$-0{,}083$	6889
Сумма	2336,86	—	0,027334
Среднее	389,477	—	0,005467

$$\sigma = \sqrt{0{,}005467} = 0{,}0739$$

$$M = \frac{0{,}0739}{\sqrt{6}} = 0{,}0302,$$

$$3M = 0{,}0906 < 0{,}10.$$

Искомое расстояние

$$\underline{389{,}48\ (\pm\ 0{,}10).}$$

Закончив второй столбец схемы, полезно произвести контроль, найдя отдельно сумму всех положительных разностей $L - a_i$ и сумму всех отрицательных. Согласно I свойству уклонения от среднего (§ 21), эти две суммы должны быть по абсолютной величине равны. В рассматриваемом примере сумма всех положительных уклонений $+0{,}151$, сумма всех отрицательных — 0,149. Разница в 0,002 объясняется тем, что среднее (389,4766...) нами округлено до тысячных.

§ 25. Упрощенный способ учета погрешностей результатов измерений. В школьной практике обыкновенно употребляется упрощенный способ оценки точности среднего арифметического результатов многократных равноточных измерений. А именно, вычисляют разности $L - a_i$ между средним арифметическим и результатами отдельных измерений, т. е. так называемые уклонения от среднего, и находят среднее арифметическое их абсолютных значений. Полученное число, близкое к средней линейной погрешности (см. § 21), мы будем называть *средним уклонением от арифметического среднего* или просто *средним уклонением.*

Это среднее уклонение и принимают за границу абсолютной погрешности среднего арифметического L.

Естественно, что вычисление границы абсолютной погрешности посредством этого упрощенного способа дает результаты, отличные от тех, какие получаются посредством средней квадратической погрешности, но разница обычно бывает очень незначительна. Так, возвращаясь к примеру § 24, находим среднее уклонение $\frac{0{,}300}{6} = 0{,}050$. Следовательно, упрощенный способ

дает для искомого расстояния число 389,477 ($\pm$ 0,050) или, после отбрасывания явно ненадежных тысячных долей, 389,48 ($\pm$ 0,053) или, наконец, 389,48 ($\pm$ 0,06).

§ 26. Понятие о весах измерений. До сих пор мы предполагали, что результаты всех измерений заслуживают одинакового доверия, что они *равноточны*, и брали их среднее арифметическое. Но так бывает не всегда. Положим, что одну и ту же задачу, например определение опытным путем плотности железа, решают трое наблюдателей. Допустим, что все они применяют один и тот же метод, пользуются одним и тем же прибором и обладают одинаковым навыком в измерении, но первый получил свой результат 7,76, как среднее из 10 измерений, второй получил 7,83, как среднее из 4 измерений, и третий — 7,80, как среднее из 3 измерений. Эти три результата заслуживают доверия не в одинаковой степени: более надежен первый, как полученный из большего числа измерений; менее надежен второй, еще менее третий. Если мы возьмем среднее этих трех результатов, а именно:

$$\frac{7{,}76 + 7{,}83 + 7{,}80}{3} = 7{,}797,$$

то получим число, отличное от того, какое дало бы непосредственное вычисление среднего по данным всех $10 + 4 + 3 = 17$ измерений.

Здесь необходимо каждому из 3 найденных результатов приписать определенный *вес*, равный числу измерений, послуживших для его получения, то есть 10 для первого, 4 для второго, 3 для третьего, и при выводе окончательного среднего суммировать произведения этих средних на соответствующие веса, делителем же брать не число средних 3, а сумму их весов, т. е. 17. Тогда окончательное среднее будет одинаково с тем, какое мы получили бы при непосредственном его вычислении по данным всех 17 измерений. Вычисляя это окончательное среднее, как указано, получаем:

$$\frac{7{,}76 \cdot 10 + 7{,}83 \cdot 4 + 7{,}80 \cdot 3}{17} = 7{,}784.$$

Вводить *веса* результатов, участвующих в определении среднего, необходимо всегда, когда эти результаты по той или иной причине представляются нам заслуживающими неодинакового доверия, *неравноточными*. Особенно просто устанавливать веса в том случае, когда известны средние квадратические погрешности результатов. Вес одного из них, все равно какого, принимается равным единице, веса всех остальных определяются простым расчетом на основании правила, которое примем без доказательства: *веса результатов обратно пропорциональны квадратам их средних квадратических погрешностей*. Так, если вес единица придан результату со средней квадратической погрешностью 0,5, то результат со средней квадратической погрешностью 0,2 будет иметь вес p, определяемый из пропорции

$$\frac{p}{1} = \frac{0{,}5^2}{0{,}2^2}, \quad p = \frac{25}{4} = 6{,}25.$$

Обозначая веса результатов буквами $p_1, p_2, p_3 \cdots p_n$, имеем для определения среднего формулу

$$L = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \cdots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n}$$

или короче

$$L = \frac{[ap]}{[p]},$$

а для средней квадратической погрешности, приходящейся на *единицу веса*, формулу

$$\sigma = \sqrt{\frac{(L - a_1)^2 p_1 + (L - a_2)^2 p_2 + \cdots + (L - a_n)^2 p_n}{n - 1}}$$

или короче

$$\sigma = \sqrt{\frac{[(L - a)^2 p]}{n - 1}}$$

Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического L вычисляется по формуле

$$M=\frac{\sigma}{\sqrt{p_1+p_2+\cdots+p_n}}$$

или короче

$$M=\frac{\sigma}{\sqrt{[p]}}.$$

Пример. Найти среднее значение солнечного параллакса, а также среднюю квадратическую и предельную погрешность этого среднего, пользуясь результатами, полученными семью исследователями и помещенными ниже в столбце с буквой a_i в заголовке. В столбце с буквой σ_i в заголовке помещены соответствующие средние квадратические погрешности.

Решение:

i	a_i	σ_i	p_i	$a_i\, p_i$	$L-a_i$	$(L-a_i)^2$	$(L-a_i)\, p_i$
1	8″,780	0″,020	1,0	8,780	0,0259	0,00067081	0,000671
2	8″,794	22	0,8	7,035	0,0119	14161	113
3	8″,857	23	0,8	7,086	— 0,0511	261111	2089
4	8″,802	7	8,2	72,176	0,0039	1521	125
5	8″,806	44	0,2	1,761	— 0,0001	1	0
6	8″,806	6	11,1	97,747	— 0,0001	1	0
7	8″,807	4	25,0	220,175	— 0,0011	121	30
Сумма	—	—	47,1	414,760	—	—	0,003028

$$L=\frac{414'',760}{47,1}=8'',8059;\quad \sigma=\sqrt{\frac{0,003028}{6}}=0'',0225;$$

$$M=\frac{0,0225}{\sqrt{47,1}}=0'',0033;\quad 3M=0'',0099<0'',010.$$

Итак, искомое значение параллакса

$$8'',8059\pm 0,0033 \text{ или } 8'',806\ (\pm 0,010).$$

Здесь в первом случае указана средняя квадратическая погрешность среднего вывода, во втором — его предельная погрешность.

Читателю, желающему глубже ознакомиться с вопросами, затронутыми в настоящей главе, рекомендую книги:

Н. И. Идельсон. Уравнительные вычисления по способу наименьших квадратов (Гиз, 1927).

А. С. Чеботарев. Способ наименьших квадратов (2-е изд. Московск. высш. технич. училища, 1928).

Упражнения к главе III

1. Три группы школьников измеряли одну и ту же длину, причем каждая сделала 4 измерения, результаты которых показаны в следующей табличке:

I группа:	51,46 *м*;	51,63 *м*;	51,57 *м*;	51,67 *м*.
II „	51,60 „	51,56 „	51,51 „	51,59 „
III „	51,55 „	51,65 „	51,66 „	51,70 „

Считая все эти измерения равноточными, найти среднее всех результатов и учесть его погрешность, a) вычисляя σ, M, $3M$, b) посредством среднего уклонения.

2. На клетчатой миллиметровой бумаге начертили 10 кругов радиусом 20 *мм*, затем сосчитали, сколько *кв. мм* находится внутри каждого круга (неполные квадратики, меньшие половины,— отбрасывались, большие половины — засчитывались как полные; приблизительно разделенные пополам засчитывались как половины). Были получены такие числа:

1166, 1240, 1355, 1552, 1281, 1270, 1258, 1264, 1236.

Найти их среднее и учесть его погрешность. Сравнить результат с тем, что дает формула площади круга, считая радиус известным точно.

ГЛАВА IV

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ В РЕЗУЛЬТАТАХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. СПОСОБ ГРАНИЦ

§ 27. Сущность способа границ. В случае приближенных данных даже при отсутствии вычислительной погрешности результат вычисления не может быть точным, так как в него *переносятся* погрешности данных. Полная погрешность результата слагается вообще из двух частей: вычислительной погрешности, которую всегда можно сделать как угодно малой, и из погрешности от неточности данных, уменьшить которую вычислитель может лишь в исключительных случаях, но всегда должен более или менее точно *учесть*.

К рассмотрению способов учета погрешностей результатов вычислений мы теперь переходим. Соответственно различным рассмотренным в главах II и III способам оценки точности приближенных чисел мы должны были бы рассмотреть *шесть* различных способов учета погрешностей в результатах вычислений: 1) способ границ, 2) способ границ абсолютных погрешностей, 3) способ границ относительных погрешностей, 4) способ подсчета цифр, 5) способ средних квадратических погрешностей, 6) способ средних (линейных) погрешностей. Однако, последних двух способов, как вовсе не применяемых в школьной практике, мы совсем не коснемся.[1] Способы же 2) и 3) объединим в один („способ границ погрешностей"). Таким образом, получаются три способа, которые мы рассматриваем в главах IV, V и VI.

Хотя для вычислительной практики наибольшее значение имеет способ подсчета цифр, но мы начнем со способа *границ* или, иначе, способа *двойных вычислений*, который дает наиболее строгий учет погрешностей и теоретическая сторона которого наиболее проста. Состоит он в том, что всякое действие над приближенными значениями производится дважды: один раз получается число, заведомо меньшее искомого точного результата; другой раз получается число, заведомо большее. Выполнив все требуемые вычисления, мы в конце концов получим низщую и высшую границы результата, и тогда в качестве вероятнейшего значения искомого берем полусумму этих границ, или число к ней близкое, и указываем соответствующую границу абсолютной погрешности, как это мы делали в § 14. Таким образом, особого учета вычислительной погрешности и погрешности от неточности данных делать не приходится: вычисление границ сразу дает полную погрешность результата.

Конечно, можно ограничиться непосредственным вычислением лишь одной, например низщей границы, а затем вычислить разность между высшей и низшей границами, или так называемый „прирост", что делается на основании довольно простых соображений. Подробности об этом „способе приростов" см. в § 33.

Вся теоретическая сторона способа границ сводится к вы-

---

[1] Способ средних квадратических погрешностей в большом употреблении у астрономов и геодезистов.

яснению того, как изменяется результат того или другого действия при изменении его компонентов, т. е. чисел, участвующих в вычислении. Если ограничиться 7 основными арифметическими действиями, то получим следующие 7 очевидных предложений:

I. Сумма чисел возрастает при увеличении каждого слагаемого и убывает при их уменьшении.

II. Разность двух чисел возрастает при увеличении уменьшаемого и уменьшении вычитаемого, и убывает при уменьшении уменьшаемого и увеличении вычитаемого.

III. Произведение положительных чисел растет при увеличении каждого сомножителя и убывает при их уменьшении.

IV. Частное двух положительных чисел растет при увеличении делимого и уменьшении делителя; оно убывает при уменьшении делимого и увеличении делителя.

V. Степень числа, большего 1, возрастает при увеличении основания и (положительного) показателя степени, убывает при их уменьшении.

VI. Корень из числа, большего 1, возрастает при увеличении подкоренного и при уменьшении (положительного) показателя корня, убывает при уменьшении подкоренного и при увеличении (положительного) показателя корня.

VII. Логарифм положительного числа при основании большем 1 возрастает при увеличении числа и при уменьшении основания, убывает при уменьшении числа и при увеличении основания.

Будем рассматривать приближенные значения двух точных неизвестных чисел x_1 и x_2, границы которых предположим данными. Пусть

$$\text{НГ}x_1 = l_1, \quad \text{ВГ}x_1 = L_1, \quad \text{НГ}x_2 = l_2, \quad \text{ВГ}x_2 = L_2.$$

Тогда из указанных выше 7 предложений непосредственно вытекают 7 следующих формул:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & l_1 + l_2 < x_1 + x_2 < L_1 + L_2 \\ \text{II.} & l_1 - L_2 < x_1 - x_2 < L_1 - l_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{при всех значениях;} \\ \text{чисел } l_1,\ l_2,\ L_1,\ L_2; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{III.} & l_1 l_2 < x_1 x_2 < L_1 L_2 \ldots\ldots & \text{при } l_1 \geqslant 0,\ l_2 \geqslant 0; \\ \text{IV.} & \dfrac{l_1}{L_2} < \dfrac{x_1}{x_2} < \dfrac{L_1}{l_2} \ldots\ldots\ldots & \quad \text{„} \quad l_1 \geqslant 0,\ l_2 > 0; \\ \text{V.} & l_1^{l_2} < x_1^{x_2} < L_1^{L_2} \ldots\ldots\ldots & \quad \text{„} \quad l_1 \geqslant 1; \\ \text{VI.} & \sqrt[L_2]{l_1} < \sqrt[x_2]{x_1} < \sqrt[l_2]{L_1} \ldots\ldots & \quad \text{„} \quad l_1 \geqslant 1,\ l_2 > 0; \\ \text{VII.} & \lg_{L_2} l_1 < \lg_{x_2} x_1 < \lg_{l_2} L_1 \ldots\ldots & \quad \text{„} \quad l_1 \geqslant 0,\ l_2 > 1. \end{array}$$

Все эти формулы можно объединить в следующие два правила, справедливые при тех ограничениях, какие выше наложены на данные границы:

Для результатов прямых действий НГ составляется посредством НГ компонентов, ВГ — посредством их ВГ.

Для результатов обратных действий НГ составляется посредством НГ первого компонента и ВГ — второго, ВГ — посредством ВГ первого и НГ второго.

При этом надо условиться, что первым компонентом считается: при вычитании — уменьшаемое, при делении — делимое, при извлечении корня — подкоренное, при логарифмировании — число, логарифм которого берется.

Эти два правила можно изложить еще более сжато:

Границы результатов прямых действий получаются при нормальном порядке границ обоих компонентов; обратных — при нормальном порядке для первого компонента и обратном нормальному для второго.

Доказательство формул I — VII сводится к применению основных законов арифметических действий, и мы на нем не останавливаемся. Если в формуле, по которой производится вычисление, встречаются трансцендентные, например тригонометрические функции, то для получения соответствующих теорем о границах достаточно выяснить, как изменяется функция при возрастании аргумента.

Так, для углов I четверти

$$\text{НГ} \sin x = \sin (\text{НГ}x), \quad \text{ВГ} \sin x = \sin (\text{ВГ} x),$$
$$\text{НГ} \cos x = \cos (\text{ВГ}x), \quad \text{ВГ} \cos x = \cos (\text{НГ} x).$$

§ 28. Практические указания. При практическом осуществлении вычисления границ мы прежде всего встречаемся с вопросом о том, со сколькими значащими цифрами или сколькими десятичными знаками следует вычислять каждую границу. Главный интерес имеют только совпадающие („согласные“) цифры обоих границ, но, чтобы судить о точности полученного результата, необходимо вычислять и некоторые „несогласные“ цифры. При этом, остановившись на первой несогласной цифре каждой границы, мы рискуем получить совершенно неправильное представление о действительной разности обеих границ. Например, при НГ $x = 5{,}39996$ и ВГ $x = 5{,}40005$, ограничившись первой несогласной цифрой, мы имели бы НГ $x = 5{,}3$, ВГ $x = 5{,}5$, откуда $x = 5{,}4$ $(\pm 0{,}1)$. Между тем, взяв границы без округления, т. е. с 5 несогласными цифрами каждую, мы будем иметь $x = 5{,}40001$ $(\pm 0{,}00005)$. Вообще разности границ, равной

1 — 2 единицам разряда последней цифры, доверять рискованно, так как она почти целиком может происходить от округления границ. Как правило, *вычислять границы надо с таким расчетом, чтобы разность между ними выражалась двузначным числом* (т. е. числом с 2 значащими цифрами).

Так как границы вычисляются последовательно, сперва одна, потом другая, то полезно заранее хотя бы приблизительно наметить разряд, до которого следует вычислять каждую. Здесь большую помощь оказывают „правила подсчета цифр", с которыми мы подробно ознакомимся в гл. VI. Их применение значительно ускоряет работу по вычислению границ.

Если для получения искомого результата требуется выполнить несколько действий, то вычисление границ *промежуточных* результатов сопровождается *округлением.* При вычислении НГ употребляется *простое* округление, при вычислении ВГ — округление с *усилением*, так как НГ можно только уменьшать, ВГ — только увеличивать.

При записи вычислений удобно пользоваться схемой, содержащей два столбца, один для вычисления НГ, другой ВГ. Выполняя какое-либо обратное действие, мы должны перевернуть нормальный порядок границ второго компонента. Чтобы напомнить об этом, полезно ставить на соответствующей строке какой-нибудь знак, например знак восклицания (!). Вот образец схемы для вычисления границ при определении плотности d по формуле

$$d=\frac{p-p_2}{p_1-p_2},$$

где p — вес пикнометра с жидкостью, p_1 — с водой, p_2 — вес пустого пикнометра. Предполагая, что границы для p, p_1, p_2 известны, вычисляем границы для d по такой схеме:

	НГ	ВГ
p		
p_1		
p_2		
(!) $p-p_2$		
(!) p_1-p_2		
(!) $d=\frac{p-p_2}{p_1-p_2}$		

§ 29. Простейшие примеры на вычисление границ.

Пример 1. Найти сумму $x = a + b + c$, если известно, что $a \doteq 827{,}3\ (\pm 0{,}1)$, $b \doteq 8{,}947\ (\pm 0{,}002)$, $c \doteq 3{,}6104\ (\pm 0{,}0002)$.

	НГ	ВГ
a	827,2	827,4
b	8,945	8,949
c	3,6102	3,6106
x	839,7552	839,9596
	839,75	839,96

$$x = \frac{1}{2}(839{,}75 + 839{,}96) = 839{,}855$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(839{,}96 - 839{,}75) = 0{,}105$$

$x \doteq 839{,}855\ (\pm 0{,}105)$
или $\underline{839{,}9 \quad (\pm 0{,}15)}$

Пример 2. Найти разность $x = a - b$, если
$a \doteq 82{,}35\ (\pm 0{,}01)$, $b \doteq 0{,}6037\ (\pm 0{,}00005)$.

	НГ	ВГ
a	82,34	82,36
(!) b	0,60365	0,60375
$x = a - b$	81,73625	81,75635
	81,736	81,757

$$x = \frac{1}{2}(81{,}736 + 81{,}757) = 81{,}7465$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(81{,}757 - 81{,}736) = 0{,}0105$$

$x \doteq 81{,}7465\ (\pm 0{,}0105)$
или $\underline{81{,}75\ (\pm 0{,}015)}$

Пример 3. Найти произведение $x = ab$, где $a \doteq 1{,}414$, $b \doteq 0{,}283$, если все цифры этих двух приближенных чисел точны.

	НГ	ВГ
a	1,4135	1,4145
b	0,2825	0,2835
x	0,39931375	0,40101075
	0,3993	0,4011

0,4011
0,3993

0,8004 : 2 = 0,4002
0,0018 : 2 = 0,0009

$x \doteq 0{,}4002\ (\pm 0{,}0009)$
или $\underline{0{,}400 \quad (\pm 0{,}002)}$

Здесь a и b приближенные значения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{0{,}08}$. В произведении должно получиться приближенное значение корня из $2 \cdot 0{,}08 = 0{,}16$, то есть 0,4, что и оказалось. При этом действительная погрешность полученного результата 0,4002 была (до его округления) равна 0,0002, тогда как мы ручались только за то, что она меньше 0,0009.

Пример 4. Найти частное от деления $a \doteq 0{,}7854$ на $b \doteq 1{,}273$, предполагая, что все цифры этих двух приближенных значений точны.

	НГ	ВГ
a	0,78535	0,78545
b	1,2725	1,2735
(!) $\frac{a}{b}$	0,61668	0,61725

0,61725
0,61668

1,23393 : 2 = 0,616965
0,00057 : 2 = 0,000285

$x \doteq 0{,}616965$ $(\pm 0{,}000285)$
или 0,6170 $(\pm 0{,}0004)$

Здесь знак ! напоминает, что для получения НГ $\frac{a}{b}$ надо НГ a делить на ВГ b, и обратно.

В этом примере в качестве делимого было взято приближенное значение числа $\frac{1}{4}\pi = 0{,}785398\ldots$, а в качестве делителя — приближенное значение числа $\frac{4}{\pi} = 1{,}27323\ldots$ В результате должно было получиться приближенное значение числа $\frac{1}{16}\pi^2 = 0{,}616850\ldots$, что и получилось. Отметим, что действительная погрешность окончательного результата оказалась близкой к полуторым единицам последнего разряда, тогда как мы ручались лишь за то, что она меньше 4 единиц этого разряда.

Пример 5. Найти $x = a^{10}$, $a \doteq 3{,}42$ $(\pm 0{,}01)$.

Воспользуемся здесь таблицей 4-значных логарифмов и антилогарифмов и примем во внимание, что погрешность табличного значения логарифма или антилогарифма всегда меньше полуединицы последнего разряда, интерполированного же — меньше целой единицы этого разряда (см. § 59).

Четырехзначный логарифм числа 3,41 равен 0,5328. Уменьшая это табличное значение на половину единицы последнего разряда, получим число 0,53275, заведомо меньшее $\lg a$, т. е. его НГ. Точно так же поступаем и в остальных случаях, с той лишь разницей, что при разыскании a^{10} прибавляем и отнимаем не полу-

	НГ	ВГ
a	3,41	3,43
$\lg a$	0,53275	0,53535
$10 \lg a$	5,3275	5,3535
a^{10}	212400	225800
	$2{,}12 \cdot 10^5$	$2{,}26 \cdot 10^5$

$$
\begin{array}{l}
2{,}26 \\
\underline{2{,}12} \\
4{,}38 : 2 = 2{,}19 \\
0{,}14 : 2 = 0{,}07 \\
a^{10} \doteq 2{,}19\ (\pm\ 0{,}07)\ .\ 10^5
\end{array}
$$

единицу, а целую единицу разряда последней цифры, так как здесь приходится интерполировать.

Пренебрегая погрешностями логарифмов, мы придем к тому же самому результату: вычислительная погрешность, обусловленная неточностью табличных значений, здесь совершенно незаметна сравнительно с погрешностью от неточности данного и целиком этой последней поглощается (выражаясь точнее, поглощается теми погрешностями округления, какие неизбежны в силу неточности данного).

Пример 6. Зная, что $\pi \doteq 3{,}142\ (-\ 0{,}0005)$, найти $\sqrt{\pi}$.

Необходим обычным способом $\sqrt{3{,}142}$ у $\sqrt{3{,}1415}$, останавливаясь тогда, когда будут найдены все согласные и по две несогласных цифры каждого корня (оба извлечения ведем одновременно).

$$\sqrt{3{,}142} = 1{,}77256\ldots \qquad \sqrt{3{,}1415} = 1{,}77242\ldots$$

Итак, НГ $\sqrt{\pi} = 1{,}77242$, ВГ $\sqrt{\pi} = 1{,}77256$. Отсюда

$$\sqrt{\pi} \doteq 1{,}77249\ (\pm\ 0{,}00007).$$

Более точное значение $\sqrt{\pi}$, найденное посредством более точного значения π, равно 1,772456...

Пример 7. Найти 7-значные логарифмы следующих приближенных чисел 2,4; 2,36; 2,361; 2,3608; 2,36087; 2,360875. Предполагая, что погрешность каждого из них не превосходит единицы последнего разряда, округлить найденные логарифмы так, чтобы в каждом было не более одной сомнительной цифры. Погрешностями 7-значных логарифмов пренебрегаем.

Обращая внимание на то обстоятельство, что после округления мы получали каждый раз логарифм со столькими десятичными знаками, сколько значащих цифр имело число, найдем эти же логарифмы еще раз, пользуясь разными таблицами логарифмов:

Числа		Логарифмы		Логарифмы после округления
НГ	ВГ	НГ	ВГ	
2,3	2,5	0,3617278	0,3979400	0,38 (± 0,02)
2,35	2,37	0,3710679	0,3747483	0,373 (± 0,002)
2,360	2,362	0,3729120	0,3732799	0,3731 (± 0,0002)
2,3607	2,3609	0,3730408	0,3730776	0,37306 (± 0,00002)
2,36086	2,36088	0,3730702	0,3730739	0,373072 (± 0,000002)
2,360874	2,360876	0,3730728	0,3730732	0,3730730 (± 0,0000002)

для первого числа (2,4) — двузначными (на практике не употребляются), для второго — трехзначными, для третьего — четырехзначными и т. д. Собственными погрешностями табличных логарифмов опять пренебрегаем.

Числа		Логарифмы		Логарифмы после округления
НГ	ВГ	НГ	ВГ	
2,3	2,5	0,36	0,40	0,38 (± 0,02)
2,35	2,37	0,371	0,375	0,373 (± 0,002)
2,360	2,362	0,3729	0,3733	0,3731 (± 0,0002)
2,3607	2,3609	0,37304	0,37308	0,37306 (± 0,0002)
2,36086	2,36088	0,373070	0,373074	0,373072 (± 0,00002)
2,360874	2,360876	0,3730728	0,3730732	0,3730730 (± 0,0000002)

Полученные результаты позволяют сделать весьма важное заключение, к которому мы вернемся в § 50: при разыскании логарифмов приближенных чисел можно пользоваться таблицей со столькими десятичными знаками, сколько значащих цифр имеют приближенные числа, или чтобы вполне застраховать себя от влияния погрешностей округления, на один больше.

Пример 8. Найти числа x, y, z, t, u, v по следующим их логарифмам, предполагая, что погрешность каждого данного логарифма не превосходит единицы разряда последней его цифры: $\lg x = 0{,}45$; $\lg y = 0{,}453$; $\lg z = 0{,}4528$; $\lg t = 0{,}45279$; $\lg u = 0{,}452794$; $\lg v = 0{,}4527943$.

Опять воспользуемся табицей 7-значных логарифмов и будем пренебрегать собственными их погрешностями. Результаты округлим так, чтобы в каждом оставалась лишь одна сомнительная цифра.

Логарифмы		Числа		Числа по округлении
НГ	ВГ	НГ	ВГ	
0,44	0,46	2,754228	2,884032	2,8 (± 0,1)
0,452	0,454	2,831392	2,844462	2,84 (± 0,01)
0,4527	0,4529	2,835959	2,837265	2,837 (± 0,002)
0,45278	0,45280	2,836481	2,836678	2,8366 (± 0,0002)
0,452793	0,452795	2,836566	2,836580	2,83657 (± 0,00001)
0,4527942	0,4527944	2,836574	2,836576	2,836575 (± 0,000001)

Полученные результаты наводят на новое важное заключение (подробнее о нем см. § 50): зная k-значный логарифм числа, можно найти k первых значащих цифр этого числа.

§ 30. Примеры более сложных задач на вычисление границ.

Пример 1. Найти разность высот (над уровнем моря) двух пунктов, в которых одновременные показания барометра и термометра оказались следующими:

$$B = 679{,}6\ \text{мм},\quad T = 20^\circ{,}7\ \text{C}\ \text{(для нижнего пункта)}$$
$$b = 654{,}7\ \text{мм},\quad t = 15^\circ{,}3\ \text{C}\ \text{(для верхнего)},$$

пользуясь приближенной формулой Бабине

$$h = 16010\ [1 + 0{,}002\ (T + t)] \cdot \frac{B-b}{B+b},$$

дающей эту разность в метрах. Предполагается, что все данные имеют погрешности, не превышающие единицы последней цифры каждого.

Здесь мы учли погрешность h, считая формулу Бабине точной. Ручаться за то, что истинное значение h отличается от 320 действительно не больше, чем на 4, мы, конечно, не можем, так как остается неучтенной *погрешность формулы*.

Пример 2. Вычислить объем ведра, имеющего форму усеченного конуса, если измерения, сделанные для определения попе-

	НГ	ВГ
T	20,6	20,8
t	15,2	15,4
$T+t$	35,8	36,2
$0{,}002\ (T+t)$	0,0716	0,0724
$[1+0{,}002\ (T+t)]$	1,0716	1,0724
$M=16010\ [\ldots]$	17156	17170

	НГ	ВГ	
B	679,5	679,7	323,2
b	654,6	654,8	317,3
(!) $B-b$	24,7	25,1	$640{,}5:2=320{,}25$
$B+b$	1334,1	1334,5	$5{,}9:2=\ \ 2{,}95$
(!) $N=\frac{B-b}{B+b}$	0,01850	0,01882	$h \doteq 320\ (\pm 4)$
$h=MN$	317,3	323,2	

речников нижнего и верхнего оснований (D и d) и высоты (h) дали следующие результаты (в *см*):

$D=29{,}3$	$d=21{,}7$	$h=27{,}5$
29,1	22,0	27,9
29,5	21,9	27,7
29,3	21,8	27,6
29,4	21,9	27,4

Считая все эти результаты равноточными, вычисляем средние и границы погрешностей этих средних упрощенным способом (см. § 25). Получаем

$$D \doteq 29{,}32\ (\pm 0{,}104),\ d \doteq 21{,}86\ (\pm 0{,}088),$$
$$h \doteq 27{,}62\ (\pm 0{,}144)$$

или по округлении

$$D \doteq 29{,}3\ (\pm 0{,}2),\ d \doteq 21{,}9\ (\pm 0{,}2),\ h \doteq 27{,}6\ (\pm 0{,}2).$$

Искомый объем найдем по известной формуле геометрии

$$V=\frac{1}{3}\pi h\ (R^2+r^2+Rr) \text{ или } V=\frac{1}{12}\pi h\ (D^2+d^2+Dd).$$

Так как в данных по 3 значащих цифры, все вычисление ведем с 4 значащими цифрами.

	НГ	ВГ
D	29,1	29,5
d	21,7	22,1
D^2	846,8	870,3
d^2	470,8	488,5
Dd	631,4	652,0
$s = D^2 + d^2 + Dd$	1949,0	2010,8
	1949	2011

	НГ	ВГ
π	3,141	3,142
h	27,4	27,8
πh	86,06	87,35
$\frac{1}{12}\pi h$	7,171	7,280
$V = \frac{1}{12}\pi h s$	13970	14640

14640
13970
28610
670
14305
335

$$V \doteq 14300\ (\pm 400)\ см^3 \text{ или } 14,3\ (\pm 0,4) \text{ литра.}$$

Таким образом, рассмотренное ведро имеет объем, немного больший нормального (12,30 *л*).

Пример 3. Зная стороны треугольника $a \doteq 15,3\ (\pm 0,05)$ *м* и $b \doteq 26,4\ (\pm 0,05)$ *м* и угол против стороны b

$$B \doteq 37°15'\ (\pm 1'),$$

найти угол A, лежащий против стороны a.

Вычисление ведем по формуле $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$, пользуясь 4-значной таблицей логарифмов и логарифмов синусов и пренебрегая погрешностями табличных значений. Чтобы показать, что эти погрешности в данном случае никакого практического значения не имеют, рядом проведено то же вычисление уже посредством 7-значной таблицы (стр. 75).

Вычисление по 4-значной таблице приводит, таким образом, к ответу 20°32′ (±7′), а по 7-значной — к ответу 20°32′10″ (±7′10″) или, по округлении, 20°32′ (±7′20″), то есть практически к тому же.

Пример 4. Требуется найти значение y по формуле

$$y = \frac{x - 1}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{x+8}} \qquad \text{(A)}$$

при $x = 1,1$ (точно), пользуясь таблицей квадратных корней с 3 десятичными знаками.

	НГ	ВГ	НГ	ВГ
a b B	15,25 26,35 37°14′	15,35 26,45 37°16′		
lg a lg sin B	1,1833 $\overline{1}$,7818	1,1861 $\overline{1}$,7821	1,1382698 $\overline{1}$,7818002	1,1861084 1,7821324
lg a sin B lg b	0,9651 1,4208	0,9682 1,4224	0,9650700 1.4207806	0,9682408 1,4224257
(!) $\lg \sin A = \lg \frac{a \sin B}{b}$ A	$\overline{1}$,5427 20°25′	$\overline{1}$,5474 20°39′	$\overline{1}$,5426443 20°25′0″	$\overline{1}$,5474602 20°39′20″

Подставляя вместо x данное его значение, получаем

$$y = \frac{0,1}{\sqrt{9,2} - \sqrt{9,1}}$$

и берем из таблицы $\sqrt{9,2} = 3,033$, $\sqrt{9,1} = 3,017$ (все цифры этих двух приближенных значений точны). Выполняя вычитание и деление, устанавливаем, что НГ$y = 5,88$, ВГ$y = 6,67$, откуда $y = 6,3$ $(\pm 0,5)$.

Итак, точность результата оказалась весьма невысокой: в нем всего две значащих цифры, да и то вторая очень сомнительна; граница относительной его погрешности около $\frac{0,5 \cdot 100}{6,3} = 8\%$. Здесь мы встречаемся с явлением так называемой „потери точности при вычитании“: при вычитании двух мало разнящихся друг от друга чисел результат получается с относительной погрешностью, много большей, чем у каждого из данных (уменьшаемого и вычитаемого) в отдельности.

Иногда эту потерю точности удается устранить и получить результат с большей точностью, не прибегая к увеличению точности данных. В настоящем случае для этой цели достаточно преобразовать формулу (A) так, чтобы иррациональность в знаменателе исчезла. Умножая числитель и знаменатель правой части на сумму корней, разность которых стоит в знаменателе, получаем, что

$$y = \sqrt{2x+7} + \sqrt{x+8} = \sqrt{9{,}2} + \sqrt{9{,}1}.$$

Теперь, пользуясь теми же приближенными значениями корней, находим, что НГ$y = 6{,}049$, ВГ$y = 6{,}051$, откуда $y \mp 6{,}050$ ($\pm 0{,}001$). Итак, вместо двух значащих цифр, из которых вторая была сомнительна, мы имеем теперь в результате 4 цифры, из которых последняя почти точна. Граница относительной погрешности результата с 8% уменьшилась до 0,02%, т. е. в 400 раз.

Пример 5. Вычислить посредством 4-значных логарифмов значение x по формуле $x = \frac{abc}{de}$, где $a = 52$, $b = 11$, $c = 18$, $d = 65$, $e = 33$, считая все эти данные числами точными и учитывая собственные погрешности логарифмов.

Вычисление x легко проводится без применения логарифмов и приводит к точному ответу $x = 4{,}8$. Вычисление посредством логарифмов делается лишь для того, чтобы увидеть, какую вычислительную погрешность вносит применение 4-значных логарифмов.

	НГ	ВГ
lg a	1,71595	1,71605
lg b	1,04135	1,04145
lg c	1,25525	1,25535
lg abc	4,01255	4,01285
(!) lg de	3,33150	3,33130
lg x	0,68105	0,68155
x	4,797	4,804

	НГ	ВГ
lg d	1,81285	1,81295
lg e	1,51845	1,51855
lg de	3,33130	3,33150

$x \mp 4{,}800$ ($\pm 0{,}004$)

Итак, вычислительная погрешность от применения 4-значных логарифмов сказалась на 4-ой значащей цифре результата.

Пример 6. Вычислить lg 1,5, пользуясь следующим бесконечным рядом, выводимым в курсе математического анализа:

$$\lg\frac{1+x}{1-x} = 2M\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \ldots\ldots\right),$$

где $M = 0{,}4342944\ldots$, причем ограничиться лишь первыми 3 его членами.

Приравняем, прежде всего, дробь $\frac{1+x}{1-x}$ данному числу 1,5 и найдем x. Оказывается, что $x \mp 0{,}2$.

Далее найдем границы *остаточного члена* ρ, равного совокупности всех отброшенных членов бесконечного ряда, а именно, обозначая сумму 3 первых членов через S,

$$\rho = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} + \ldots, \lg\frac{1+x}{1-x} = 2M(S+\rho).$$

Так как $x > 0$, то $\rho > \frac{1}{7}x^7$. С другой стороны, заменяя коэффициенты всех членов выражения для ρ, начиная со второго, через $\frac{1}{7}$, мы их увеличиваем, а потому

$$\rho < \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{7}x^9 + \frac{1}{7}x^{11} + \ldots$$

Имея теперь в правой части неравенства геометрическую прогрессию со знаменателем $x^2 < 1$, мы воспользуемся формулой для предела суммы членов бесконечно-убывающей геометрической прогрессии и получим высшую границу для ρ:

$$\rho < \frac{\frac{1}{7}x^7}{1-x^2} = \frac{x^7}{7(1-x^2)}.$$

Итак,

$$\text{НГ}\rho = \frac{1}{7}x^7, \quad \text{ВГ}\rho = \frac{x^7}{7(1-x^2)}.$$

Теперь переходим к вычислению искомого логарифма.

	НГ	ВГ
x	0,200 0000	0,200 0000
$\frac{1}{3}x^3$	2 6666	2 6667
$\frac{1}{5}x^5$	640	640
S	0,202 7306	0,202 7307
ρ	18	19
$S+\rho$	0,202 7324	0,202 7326
M	0,434 2944	0,434 2945
$M(S+\rho)$	0,088 0454	0,088 0457
$2M(S+\rho)$	0,176 0908	0,176 0914

Вспомогательные вычисления

x	0,2
x^2	0,04
x^3	0,008
$x^2 \cdot x^3 = x^5$	0,00032
$x^2 \cdot x^5 = x^7$	0,0000128
$\frac{1}{7}x^7$	0,00000182 . . . .
$1 - x^2$	0,96
$\frac{x^7}{7(1-x^2)}$	0,00000189 . . . .

$\lg 1{,}5 \doteq 0{,}1760911\ (\pm 0{,}0000003)$

$\lg 1{,}5 \doteq 0{,}176091\ \ (\pm 0{,}0000004)$

Таким образом, наше вычисление дало 7-значный логарифм с сомнительной последней цифрой, 6-значный — со всеми цифрами точными. Табличное значение 7-значного логарифма 1,5 есть 0,1760913 и действительно заключается в указанных нами границах.

§ 31. Вычисления с наперед назначенной точностью результата. До сих пор мы применяли вычисление границ для решения первой основной задачи Арифметики приближенных вычислений (см. § 3), а именно учитывали погрешности результатов вычислений по известным границам погрешностей данных. Переходим теперь ко второй основной задаче — к разысканию наибольших допустимых погрешностей данных при условии, что граница погрешности результата назначена заранее. Предполагается, что границы погрешностей данных могут быть произвольно (или, по крайней мере, в некоторых пределах) уменьшаемы.

Способ границ не дает прямого решения этой задачи. Приходится *пробовать* компоненты, взятые с тем или иным числом десятичных знаков или значащих цифр, вычисляя каждый раз границы погрешности результата изложенным выше способом. Вычисление границ показывает либо достаточность той точности, с какой взяты компоненты, либо недостаточность ее, либо ее избыточность. Во втором случае вычисление границ следует повторить, взяв компоненты с большей точностью. В третьем случае в повторении вычислений, конечно, надобности нет.

Большую помощь при такого рода пробах оказывают „правила подсчета цифр“, о которых будет речь в главе VI. Пока заметим только то обстоятельство, что для получения суммы или разности с определенным числом десятичных знаков надо начинать пробы с таких значений компонентов, при которых они имеют одним десятичным знаком больше, а для получения произведения, частного, степени и корня — с таких значений компонентов, при которых они имеют одной значащей цифрой более, чем требуется в результате.

Чтобы несколько примирить читателя со столь несовершенным способом, укажем, что в одном очень важном случае, а именно, когда требуется получить приближенное значение, все цифры которого точны, т. е. когда граница абсолютной погрешности результата не должна превосходить полуединицы последнего сохраненного разряда, *никакой способ* решения нашей задачи не дает сразу вполне надежных результатов. Всегда необходима поверка и всегда может оказаться, что принятой на основании сделанного расчета точности данных недостаточно для получения требуемой точности результата. Причиной этому является неизбежное округление результата, вычисляемого всегда с одной ил несколькими запасными цифрами. Погрешность от округления может приближаться к полуединице последнего разряда, а так как эта погрешность вместе с накопившейся вычислительной погрешностью и погрешностью от неточности данных тоже не должна превышать, согласно заданию, полуединицы этого же разряда, то заранее сказать, какая погрешность от неточности данных является допустимой, совершенно невозможно.

Переходим к примерам.

Пример 1. Найти с 3 десятичными знаками сумму

$$s = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11}.$$

Берем каждое слагаемое с $3+1=4$ десятичными знаками и вычисляем границы. Оказывается, что НГ$s = 0{,}5670$, ВГ$s = 0{,}5673$, откуда $s \mathrel{\dot{=}} 0{,}567$ $(+0{,}0003)$. Требуемая точность достигнута. Если бы мы взяли в компонентах только по 3 десятичных знака, то результатом было бы НГ$s = 0{,}565$, ВГ$s = 0{,}568$ и третий десятичный знак результата $s \mathrel{\dot{=}} 0{,}566$ $(\pm 0{,}0015)$ был бы сомнителен.

Пример 2. Найти произведение $p = \sqrt{91} \cdot \sqrt{5}$ с 3 точными значащими цифрами.

Попробуем взять каждый сомножитель с $3+1=4$ точными значащими цифрами, т. е., принимая во внимание, что целая часть каждого сомножителя выражается однозначным числом, с 3 десятичными знаками.

$$\text{НГ}\sqrt{91} = 9{,}539, \ \text{ВГ}\sqrt{91} = 9{,}540, \ \text{НГ}\sqrt{5} = 2{,}236,$$
$$\text{ВГ}\sqrt{5} = 2{,}237,$$

что дает

$$\text{НГ}p = 21{,}329, \quad \text{ВГ}p = 21{,}341.$$

Следовательно,

$$p \mathrel{\dot{=}} 21{,}335\,(\pm 0{,}006)$$

или, окончательно,

$$p \mathrel{\dot{=}} 21{,}3\,(+0{,}05).$$

Требуемая точность достигнута. Перемножая, для поверки, подкоренные и извлекая корень, получаем:

$$p = \sqrt{91.5} = \sqrt{455} = 21{,}330\ldots$$

Пример 3. Найти $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ при $p = 3\frac{1}{3}$, $t = 10$ с 3 точными десятичными знаками.

Обозначая $1 + \frac{p}{100}$ через x, видим, что x лишь немного превосходит 1. Поэтому заключаем, что x^{10}, вероятно, будет иметь только одну значащую цифру левее знака дробности. Следовательно, для получения результата с 3 десятичными знаками его надо вычислить с 4 значащими цифрами. Значение x возьмем с 5 значащими цифрами и применим 5-значные логарифмы (их собственные погрешности не учитываем).

	НГ	ВГ
x	1,0333	1,0334
$\lg x$	0,01423	0,01427
$\lg x^{10}$	0,14230	0,14270
x^{10}	1,3877	1,3890

$$\begin{array}{l} 1{,}3890 \\ 1{,}3877 \\ \hline 2{,}7767 : 2 = 1{,}38835 \\ 0{,}0013 : 2 = 0{,}00065 \\ x \doteq 1{,}38835\,(\pm 0{,}00065) \\ x \doteq 1{,}388\,(\pm 0{,}001) \end{array}$$

Четвертая значащая цифра результата (т. е. его 3-й десятичный знак) только почти точна. Вычисление необходимо повторить, взяв x с 6 значащими цифрами и либо выполняя возведение в 10 степень непосредственно (находя сперва x^2, потом x^4, далее x^8 и, наконец, $x^8 \cdot x^2 = x^{10}$), либо применяя таблицу логарифмов с 6 или 7 знаками.

Вычисление, проведенное посредством 7-значных логарифмов, приводит к такому результату: $x^{10} \doteq 1{,}38807$ $(\pm 0{,}00007)$ или $x^{10} \doteq 1{,}388$ $(\pm 0{,}0002)$. Теперь все 4 цифры точны и требуемая точность достигнута.

Пример 4. Вычислить с 4 точными десятичными знаками sin 72° по формуле $\sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Напишем вместо $2\sqrt{5}$, для устранения лишнего умножения, $\sqrt{20}$, и будем вести все вычисления с 5 десятичными знаками.

	НГ	ВГ
$\sqrt{20}$	4,47213	4,47214
$10+\sqrt{20}$	14,47213	14,47214
$\sqrt{10+\sqrt{20}}$	3,80422	2,80423
$\sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{10+\sqrt{20}}$	0,95105	0,95106

$$\underline{\sin 72° = 0{,}9511\ (-\ 0{,}00005)}$$

Требуемая точность достигнута.

§ 32. Вычисление приближенного значения числа π.

Чтобы иметь пример более сложного вычисления с наперед заданной точностью, найдем число π с 7 точными десятичными знаками, воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{4}\pi = 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}. \tag{A}$$

Формулу эту нетрудно вывести. Обозначая $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$ через x, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$ через y, имеем $\operatorname{tg} x = 0{,}2$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{239}$, причем x и y дуги I четверти и должны быть выражены в радианах. Применяя известные формулы для тангенса двойной дуги и для тангенса разности двух дуг, последовательно получаем:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4x = \frac{120}{119}, \quad \operatorname{tg}(4x - y) = \frac{120.239 - 119}{119.239 + 120} = 1.$$

Общий вид всех дуг, имеющих тангенс 1, есть

$$\frac{1}{4}\pi + k\pi,$$

где k произвольное целое. Вычисляя $4x - y$ посредством таблицы натуральных тангенсов, получаем значение, близкое к $45°$ или $\frac{1}{4}\pi$, откуда заключаем, что $k = 0$. Тем самым формула (A) доказана. Для вычисления $\operatorname{arc\,tg} t$ удобнее всего воспользоваться бесконечным рядом

$$\operatorname{arc\,tg} t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \ldots$$

В курсе математического анализа доказываетя, что, вычислив несколько первых членов этого ряда и взяв их сумму, мы получим значение $\operatorname{arc\,tg} t$ с погрешностью, меньшей первого из отброшенных членов и одного с ним знака. Так, останавливаясь на втором члене, имеем равенство $\operatorname{arc\,tg} t = S + \rho$, где $S = t - \frac{1}{3}t^3$, $0 < \rho < \frac{1}{5}x^5$. Останавливаясь на третьем члене, имеем уже $\operatorname{arc\,tg} t = S - \rho$, где $S = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$, $0 < \rho < \frac{1}{7}t^7$.

В виду сложности вычисления, ведем его уже не с одной а с тремя лишними (запасными) цифрами, т. е. с $7+3=10$ десятичными знаками.

Вычисление $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}$.

t	0,2000 0000 00
t^2	400 0000 00
t^3	80 0000 00
t^5	3 2000 00
t^7	1280 00
t^9	51 20
t^{11}	2 04...
t^{13}	8...

$$S' = t + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{9}t^9$$

$$S'' = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{11}t^{11}$$

$$\operatorname{arc\,tg} t = S' - S'' + \rho$$

$$0 < \rho < \frac{1}{13}t^{13}$$

	НГ	ВГ
t	0,2000 0000 00	0,2000 0000 00
$\frac{1}{5}t^5$	6400 00	6400 00
$\frac{1}{9}t^9$	5 69	5 70
S'	2000 6405 69	2000 6405 70
$\frac{1}{3}t^3$	26 6666 66	26 6666 67
$\frac{1}{7}t^7$	182 85	182 86
$\frac{1}{11}t^{11}$	18	19
S''	26 6849 69	26 6849 72
(!) $S' - S''$	1973 955 97	1973 9556 01
ρ	0	1
$x = \operatorname{arc\,tg} t$	0,1973 9555 97	0,1973 9556 01

Вычисление $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$.

t	0,0041 8410 04...
t^2	1750 66...
t^3	7 32...
t^4	3...
t^5	0...

$$S' = t,\ S'' = \frac{1}{3}t^3$$

$$\operatorname{arc\,tg} t = S' - S'' + \rho$$

$$0 < \rho < \frac{1}{5}t^5$$

	НГ	ВГ
t	0,0041 8410 04	0,0041 8410 05
$\frac{1}{3}t^3$	2 44	2 45
(!) $t - \frac{1}{3}t^3$	41 8407 59	41 8407 61
ρ	0	1
$y = \operatorname{arc\,tg} t$	0,0041 8407 59	0,0041 8407 72

Вычисление π.

	НГ	ВГ
x	0,1973 9555 97	0,1973 9556 02
$4x$	7895 8223 88	7895 8224 08
y	41 8407 59	41 8407 62
(!) $4x-y$	7853 9816 26	7853 9816 69
$\pi=4(4x-y)$	3,1415 9265 04	3,1415 9266 76

$$\begin{array}{l} 676 \\ \underline{505} \\ 1\,180 : 2 = 590 \\ 172 : 2 = 86 \\ \pi \doteq 3{,}1415\,9265\,90\ (\pm\, 0{,}00000000\,86) \\ \pi = 3{,}1415\,927\ (-\,0{,}0000\,000\,5) \end{array}$$

Семь точных десятичных знаков мы получили. Сравнивая найденные результаты с более точным значением π, приведенным в § 5, замечаем, что и 8-й десятичный знак найденного значения (до его округления) был точен.

При вычислении $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$ последовательные степени t удобнее всего находить делением на 239. Работу эту весьма облегчает применение легко составляемой таблички произведений числа 239 на числа от 1 до 9:

$$\begin{array}{rl} 239\cdot & 1 = 239 \\ & 2 = 478 \\ & 3 = 717 \\ & 4 = 956 \\ & 5 = 1195 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 239\cdot & 6 = 1434 \\ & 7 = 1673 \\ & 8 = 1912 \\ & 9 = 2151 \\ & 10 = 2390 \end{array}$$

§ 33. Способ приростов. Всесто того, чтобы вычислять низшую и высшую границы результата независимо друг от друга, можно вычислить непосредственно только НГ, а затем посредством нескольких простых правил найти „прирост“, т. е. разность ВГ — НГ. Прибавляя прирост к НГ, получим ВГ. Способ этот разработан киевским математиком П. Долгушиным.[1]

[1] П. Долгушин. Вычисления по приближению. Киев, 1908 и 1912.

Вот основные теоремы этого способа.

1. Прирост суммы и разности равен сумме приростов компонентов.

2. Прирост произведения равен сумме произведений НГ одного из сомножителей на прирост другого и ВГ другого на прирост первого.

3. Прирост частного равен частному от деления на НГ делителя суммы остатка, прироста делимого и произведения прироста делителя на НГ частного.

4. Прирост квадратного корня равен частному от деления суммы остатка и прироста подкоренного на удвоенную НГ корня.

Не останавливаясь на доказательстве этих теорем, не представляющем никаких затруднений, приведем несколько примеров их применения, заимствуя их у П. Долгушина, но несколько изменяя его обозначение. Числа в скобках везде выражены в единицах разряда последней цифры тех приближенных чисел, после которых они написаны.

Пример 1. Найти сумму чисел 4,78 (+ 2), 0,63 (+ 4), 34,29 (+ 3):

$$\begin{array}{r} 4{,}78\,(+2) \\ +\;0{,}63\,(+4) \\ 34{,}29\,(+3) \\ \hline 39{,}70\,(+9) \end{array}$$

Итак, НГ = 30,70, ВГ = 39,79.

Пример 2. Найти разность чисел 28,36 (+ 2) и 9,45 (+ 3):

$$\begin{array}{r} 28{,}36\,(+2) \\ -\;9{,}45\,(+3) \\ \hline 18{,}88\,(+5) \end{array}$$

Надо помнить, что для получения НГ разности надо из НГ уменьшаемого вычесть ВГ вычитаемого, т. е. в данном случае от 28,36 отнять 9,48.

Пример 3. Найти произведение 4,898 (+ 3) на 2,449 (+ 2)

$$\begin{array}{rl} 4{,}898 \cdot 2{,}449 & \\ \hline 9796 & \\ 19592 & \\ 19592 & \\ 44082 & \\ \hline 11{,}995202 & \text{. . . . . (НГ произведения, после округления 11,99)} \\ 9796 & \text{. . . . . (4,898 . 0,002)} \\ 7353 & \text{. . . . . (2,451 . 0,003)} \\ \hline 12{,}012351 & \text{. . . . . (ВГ произведения, после округления 12,02)} \end{array}$$

Ответ: 11,99 (+ 3).

Пример 4. Найти частное чисел 221600 (+200) и 576 (+3).

$$
\begin{array}{l}
221600 : 578 = 382 \\
\underline{1737} \\
\;\;4790 \\
\;\;\underline{4632} \\
\;\;\;\;1580 \\
\;\;\;\;\underline{1158} \\
\;\;\;\;\;\;422 \ldots \text{(остаток)} \\
\;\;\;\;\;\;\underline{200} \ldots \text{(прирост делимого)} \\
\;\;\;\;1146 \ldots \text{(произведение прироста делителя на НГ частного)} \\
3 < 1768 : 576 < 4
\end{array}
$$

Ответ: 382 (+4).

Для получения НГ частного берется НГ делимого и ВГ делителя.

Пример 5. Найти квадратный корень из числа 81,89 (+6).

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{81{,}89} = 9{,}049} \\
\multicolumn{2}{l}{\;\;\;\;81} \\
\hline
1804 & 8900 \\
4 & 7216 \\
\hline
18089 & 168400 \\
9 & 162801 \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{5599 \ldots \text{(остаток от извлечения в миллион. долях)}} \\
\multicolumn{2}{r}{60000 \ldots \text{(прирост подкоренного в тех же долях)}} \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{3 < 65599 : 18098 < 4 \text{ (при делении миллионных на тысячные получаем тысячные).}}
\end{array}
$$

Ответ: 9,049 (+4).

Упражнения к главе IV

1. Измерения сторон прямоугольника, начерченного на плане, показали, что его длина заключается между 84,0 и 84,5 *мм*, а ширина между 37,5 и 38,0 *мм*. Найти границы для площади прямоугольника и указать приближенное ее значение, а также границу его абсолютной погрешности.

2. Найти высоту сплошного медного цилиндра весом в 765 (± 1) *г*, если поперечник его основания 3,25 ($\pm 0{,}02$) *см*. Плотность меди примем равной 8,8 ($\pm 0{,}05$).

3. Найти площадь треугольного участка со сторонами 38,3 *м*, 44,9 *м*, 61,5 *м*, предполагая, что погрешность в определении длины каждой из этих сторон не превосходит 0,1 *м*. Применить формулу $S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$, где $2p = a + b + c$.

4. Начертить как можно точнее круг радиуса $r = 5$ *см* и вписанный в него правильный треугольник. Найти непосредствен-

ным измерением длину основания и высоты этого треугольника и вычислить его площадь с учетом погрешностей по способу границ. Вычислить ту же площадь по формуле $S = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$, взяв $\sqrt{3} = 1{,}73205$ ($\pm 0{,}000005$) и считая r известным точно. Сравнить результаты.

5. Вычислить с 5 точными десятичными знаками $\sin x$ посредством ряда $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$ при $x = 0{,}394$ (радиана). Останавливаясь на каком-нибудь члене этого ряда, мы делаем ошибку, численно меньшую первого из отброшенных членов и одного с ним знака. Обратить внимание на поставленное требование точности 5 десятичных знаков, и действительно добиться того, чтобы абсолютная погрешность результата была меньше 0,000005.

ГЛАВА V

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ В РЕЗУЛЬТАТАХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. СПОСОБ ГРАНИЦ ПОГРЕШНОСТЕЙ

§ 34. Весьма малые числа. Очень часто все числа, участвующие в вычислении, бывает возможно разбить на две категории, относя к первой числа, значительно бо́льшие по своей абсолютной величине, чем к другой. Если разница эта настолько велика, что при вычислении однородных многочленов, члены которых представляют собой произведения чисел обеих категорий, оказывается возможным пренебречь членами второго и высших измерений относительно чисел второй категории, то есть членами, содержащими произведения, квадраты, кубы и т. д. этих чисел, то числа второй категории мы будем называть ***весьма малыми*** по отношению к числам первой категории. Всякий член, содержащий сомножителем квадрат весьма малого числа или произведение двух весьма малых чисел, будем называть членом *второго порядка малости*. Понятно, что называют членами *третьего*, *четвертого* и других ***высших порядков малости***.

Вопрос о том, считать ли некоторое данное число весьма малым, или нет, нельзя, таким образом, решить один раз навсегда: его приходится решать каждый раз заново в зависимости от величины других чисел, участвующих в вычислении, и от требуемой точности. Например, ограничиваясь точностью до сотых долей и вычисляя $5{,}628^2 = (5{,}62 + 0{,}008)^2 = 5{,}62^2 + 2 \cdot 5{,}62 \cdot 0{,}008 + 0{,}008^2$, мы можем пренебречь членом $0{,}008^2$, то есть считать $0{,}008$ числом весьма малым. Если же требуется и цифра стотысячных долей числа $5{,}628^2$, то членом $0{,}008^2$ пренебречь нельзя, и число $0{,}008$ не будет весьма малым.

В настоящей главе мы будем считать весьма малыми числами границы абсолютных и относительных погрешностей всех приближенных чисел, с какими будем иметь дело. Другими словами, мы будем предполагать, что в многочленах, однородных относительно приближенных чисел и границ их погрешностей, можно отбрасывать все члены, содержащие квадраты, произведения, кубы и т. д. границ погрешностей. В случаях, когда поставленные в задаче требования точности такого отбрасывания не допускают, рассмотренный в настоящей главе способ границ погрешностей неприменим.

Пренебрегая членами второго и высших порядков малости, мы будем вносить в наши выводы погрешности, остающиеся без учета. Тем самым способ границ погрешностей лишается того безусловно строгого характера, каким отличается рассмотренный в гл. IV способ границ. Однако, во многих случаях, путем некоторого преобразования формул, этой полной строгости удается достичь и здесь, как это будет в свое время показано. Тогда, конечно, отпадает и то замечание о неприменимости способа границ погрешностей, которое было только-что сделано.

Чтобы дать пример применения понятия весьма малых чисел, сравним то определение границы относительной погрешности, какое было сделано выше (см. § 15), с другим, которое часто дается и тем отличается от первого, что берется не отношение $\frac{\Delta a}{a}$, а отношение $\frac{\Delta a}{x}$. Полагая, как и раньше, $x = a + \alpha$, где $|\alpha| < \Delta a$, найдем абсолютное значение разности обоих этих отношений:

$$\left|\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a}{x}\right| = \left|\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a}{a+\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha \Delta a}{a(a+\alpha)}\right| < \frac{(\Delta a)^2}{a(a+\alpha)}.$$

В числителе последней дроби мы имеем число второго порядка малости, в знаменателе же произведение двух „больших“, т. е. не весьма малых чисел. Следовательно, вся дробь представляет собой число второго порядка малости. Итак, оба определения границы относительной погрешности, если пренебречь числом второго порядка малости, совпадают.

В дальнейшем нам нередко придется пользоваться теоремой: „модуль алгебраической суммы не больше суммы модулей слагаемых". Здесь *модулем* числа a (мы рассматриваем только вещественные числа) называется его абсолютное значение $|a|$, то есть модуль числа -5 есть 5, равно как и модуль $+5$ есть тоже 5. Справедливость теоремы в случае двух слагаемых усматривается сразу. Действительно, если знаки слагаемых одинаковы, модуль их суммы равен сумме модулей слагаемых, если же различны, то модуль суммы меньше суммы модулей слагаемых. Например,

$$\begin{array}{ll} |(+5)+(+7)|=12 & \qquad |+5|+|+7|=12, \\ |(-5)+(-7)|=12 & \qquad |-5|+|-7|=12, \\ |(+5)+(-7)|=\ \ 2 & \qquad |+5|+|-7|=12, \\ |(-5)+(+7)|=\ \ 2 & \qquad |-5|+|+7|=12. \end{array}$$

Таким образом модуль суммы двух слагаемых действительно не больше суммы модулей этих слагаемых. То же рассуждение применяется и в случае любого числа слагаемых.

§ 35. Теоремы о границе абсолютной погрешности. Пусть x_1 и x_2 неизвестные точные числа, a_1 и a_2 их известные приближенные значения, α_1 и α_2 истинные абсолютные погрешности этих приближений (неизвестны), Δa_1 и Δa_2 границы этих погрешностей (известны). Тогда

$$x_1 = a_1 + \alpha_1, \quad x_2 = a_2 + \alpha_2, \tag{A}$$

причем

$$|\alpha_1| < \Delta a_1, \quad |\alpha_2| < \Delta a_2.$$

Сложив почленно равенства (А), получаем, что

$$x_1 + x_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Но $|\alpha_1 + \alpha_2| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2| < \Delta a_1 + \Delta a_2$, а потому, принимая за приближенное значение суммы $x_1 + x_2$ сумму $a_1 + a_2$, мы допускаем погрешность $\alpha_1 + \alpha_2$, границей которой служит сумма границ слагаемых.

Вычитая равенства (А) почленно, имеем:

$$x_1 - x_2 = (a_1 - a_2) + (\alpha - \alpha_2),$$

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |(+\alpha_1) + (-\alpha_2)| \leqq |+\alpha_1| + |-\alpha_2| < \Delta a_1 + \Delta a_2.$$

Следовательно, принимая за приближенное значение разности $x_1 - x_2$ разность $a_1 - a_2$, мы допускаем погрешность $\alpha_1 - \alpha_2$, границей которой служит та же самая сумма границ $\Delta a_1 + \Delta a_2$.

То, что мы сейчас доказали, удобно выразить следующими формулами:

$$\Delta(a_1 + a_2) = \Delta a_1 + \Delta a_2, \quad \Delta(a_1 - a_2) = \Delta a_1 + \Delta a_2,$$

или, считая, что числа a_1 и a_2 могут быть как положительными, так и отрицательными, — одной формулой

$$\Delta(a_1 + a_2) = \Delta a_1 + \Delta a_3.$$

Заключение это легко обобщить на случай любого числа слагаемых. Например, имея три приближенных слагаемых a_1, a_2, a_3, которые могут быть как положительными, так и отрицательными, обозначим $a_2 + a_3$ через b. Тогда

$$\Delta(a_1 + a_2 + a_3) = \Delta(a_1 + b) = \Delta a_1 + \Delta b = \Delta a_1 + \\ + (\Delta a_2 + \Delta a_3) = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3.$$

Точно так же случай 4 слагаемых сводится к случаю 3 слагаемых, случай $n+1$ слагаемого к случаю n слагаемых.

Теперь мы формулируем общее заключение:

Теорема I. *Граница абсолютной погрешности алгебраической суммы равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых.*

То же самое выражает формула

$$\Delta(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \ldots + \Delta a_n$$

где числа a_1 и $a_2 \ldots$ могут быть каких угодно знаков.

Переходим к рассмотрению погрешности произведения. Считая числа a_1 и a_2 уже только положительными, перемножим равенства (А) почленно. Получаем

$$x_1 x_2 = a_1 a_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2,$$

или, после отбрасывания $\alpha_1 \alpha_2$ (число второго порядка малости!) и перенесения $a_1 a_2$ в левую часть,

$$x_1 x_2 - a_1 a_2 = a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1.$$

Но

$$| a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 | \leqq | a_1 \alpha_2 | + | a_2 \alpha_1 |,$$

а потому $| x_1 x_2 - a_1 a_2 |$

$$\leqq a_1 | \alpha_2 | + a_2 | \alpha_1 | \\ < a_1 \Delta a_2 + a_2 \Delta a_1.$$

Мы пришли к теореме II: *Граница абсолютной погрешности произведения двух приближенных положительных сомножителей равна сумме произведений каждого сомножителя на границу абсолютной погрешности другого.*

В знаках: $\Delta(a_1 a_2) = a_1 \Delta a_2 + a_2 \Delta a_1$.

Если один из сомножителей, например a_2, есть число точное, то $\Delta a_2 = 0$, и последняя формула принимает вид

$$\Delta (a_1 a_2) = a_2 \Delta a_1.$$

Получаем следствие: *При умножении приближенного числа на точное граница абсолютной погрешности приближенного числа тоже умножается на это точное.*

Переходя к рассмотрению погрешности частного, предположим опять числа a_1 и a_2 положительными и разделим равенства (A) почленно друг на друга. Вычитая из обеих частей дробь $\frac{a_1}{a_2}$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} &= \frac{a_1 + \alpha_1}{a_2 + \alpha_1} - \frac{a_1}{a_2} \\ &= \frac{a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2}{a_2 (a_2 + \alpha_2)} \\ &= \left[\frac{a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2}{a_2 (a_2 + \alpha_2)} - \frac{a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2}{a_2^2} \right] + \frac{a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2}{a_2^2} \\ &= \frac{a_1 \alpha_2^2 - a_2 \alpha_1 \alpha_2}{a_2^2 (a_2 + \alpha_2)} + \frac{a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2}{a_2^2}.\end{aligned}$$

Первая дробь последней строчки имеет в числителе только члены второго порядка малости, в знаменателе же произведение трех „больших“ чисел, а потому может быть отброшена. Итак

$$\frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2}{a_2^2}.$$

Далее, $\left| \frac{a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2}{a_2^2} \right| \leqq \frac{|a_2 \alpha_1| + |a_1 \alpha_2|}{a_2^2} < \frac{a_2 \Delta a_1 + a_1 \Delta a_2}{a_2^2}.$

Мы получили теорему III: ***Граница абсолютной погрешности частного двух приближенных положительных чисел равна дроби, знаменателем которой служит квадрат делителя, а числителем сумма произведений делителя на границу абсолютной погрешности делимого и делимого на границу абсолютной погрешности делителя.***

В знаках:

$$\Delta \left(\frac{a_1}{a_2} \right) = \frac{a_2 \Delta a_1 + a_1 \Delta a_2}{a_2^2}.$$

Если делитель число точное, то $\Delta a_2 = 0$, $\Delta \left(\frac{a_1}{a_2} \right) = \frac{\Delta a_1}{a_2}$, откуда получается следствие: *При делении приближен-*

ного числа на точное граница абсолютной погрешности приближенного числа тоже делится на это точное.

Из действий III ступени рассмотрим только возведение в степень с натуральным показателем и извлечение корня квадратного и кубического.

Возводя обе части равенства $x = a + \alpha$, где $a > 0$ и $|\alpha| < \Delta a$, в степень с натуральным показателем n, получим по формуле бинома Ньютона

$$x^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} \alpha^2 + \ldots + \alpha^n,$$

$$x^n - a^n = \frac{n}{1} a^{n-1} \alpha,$$

$$|x^n - a^n| < na^{n-1} \Delta a.$$

Переходя от первой строки ко второй, мы пренебрегли всеми членами, содержащими вторую и высшие степени весьма малого числа α. Мы пришли к теореме IV: *Граница абсолютной погрешности степени приближенного числа с натуральным показателем равна произведению этого показателя на степень того же приближенного числа с показателем, на 1 меньшим, и на границу его абсолютной погрешности.*

То же самое в виде формулы:

$$\Delta a^n = na^{n-1} \Delta a.$$

В частности, при $n = 2$ и $n = 3$, имеем границы абсолютной погрешности квадрата и куба:

$$\Delta a^2 = 2a \Delta a, \quad \Delta a^3 = 3a^2 \Delta a.$$

Для получения границы абсолютной погрешности крадратного корня представим разность $\sqrt{x} - \sqrt{a}$ в виде дроби $\frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ (что достигается умножением и делением этой разности на сумму $\sqrt{x} + \sqrt{a}$), а затем разложим полученную дробь на разность двух дробей, из которых одна будет первого, другая второго порядка малости относительно α и Δa. Приводим подробно весь ход вычисления:

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \left[\frac{\alpha}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} - \frac{\alpha}{2\sqrt{a}}\right] + \frac{\alpha}{2\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{\alpha(\sqrt{a} - \sqrt{x})}{2\sqrt{a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} + \frac{\alpha}{2\sqrt{a}} =$$

$$=\frac{\alpha(a-x)}{2\sqrt{a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}+\frac{\alpha}{2\sqrt{a}}=$$

$$=-\frac{\alpha^2}{2\sqrt{a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}+\frac{\alpha}{2\sqrt{a}}.$$

Пренебрегая первой дробью последней строки, приходим к теореме V: *Граница абсолютной погрешности квадратного корня равна границе абсолютной погрешности подкоренного, деленной на удвоенный корень.*

В знаках:

$$\Delta\sqrt{a}=\frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}.$$

Чтобы получить аналогичную теорему для кубического корня, надо воспользоваться формулой $(a-b)\,(a^2+ab+b^2)=$ $=a^3-b^3$. Ход рассуждений тот же. Получаем в конце концов равенство

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}=\frac{\alpha}{3\sqrt[3]{a^2}}-\frac{\alpha^3}{3\sqrt[3]{a^2}\,(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2})},$$

которое, после отбрасывания дроби с числом α^3 в числителе, приводит к теореме VI: *Граница абсолютной погрешности кубического корня равна границе абсолютной погрешности подкоренного, деленной на утроенный квадрат кубического корня.*

В знаках:

$$\Delta\sqrt[3]{a}=\frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

Можно показать, что вообще имеет место соотношение

$$\Delta\sqrt[n]{a}=\frac{\Delta a}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}.$$

Первая из рассмотренных 6 теорем совершенно точна, остальные же имеют лишь приближенный характер, так как при выводе соответствующих формул мы пренебрегаем членами второго и высших порядков малости. Теоремы II, III, V, VI можно заменить их совершенно точными вариантами, которые выражаются следующими формулами:

Теорема II bis. $\Delta(a_1\cdot a_2)=a_1\,\Delta a_2+\text{ВГ}\,a_2\cdot\Delta a_1$.

Теорема III bis. $\Delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=\frac{a_2\,\Delta a_1+a_1\,\Delta a_2}{(\text{НГ}\,a_2)^2}$.

Теорема V bis. $\Delta \sqrt{a} = \frac{\Delta a}{2 \sqrt{\text{НГ}\, a}}$.

Теорема VI bis. $\Delta \sqrt[3]{a} = \frac{\Delta a}{3 \left(\sqrt[3]{\text{НГ}\, a}\right)^3}$.

Доказательство этих теорем затруднений не вызывает, и мы на нем не будем останавливаться.

Практически никакой разницы между теоремами II, III, V, VI и теоремами II bis, III bis, V bis, VI bis нет, так как при вычислении границ абсолютных погрешностей довольствуются одной-двумя первыми значащими цифрами.

§ 36. Теоремы о границе относительной погрешности. Пусть разыскивается сумма (арифметическая) нескольких (положим, четырех) приближенных положительных слагаемых x_1, x_2, x_3, x_4, известные приближенные значения которых суть a_1, a_2, a_3, a_4, а соответствующие границы абсолютных погрешностей Δa_1, Δa_2, Δa_3, Δa_4. Допустим, что наибольшую границу относительной погрешности, равную p, имеет первое слагаемое, наименьшую же, равную q, — последнее, границы же относительных погрешностей остальных идут в порядке убывания или, по крайней мере, не возрастают. Таким образом

$$p = \frac{\Delta a_1}{a_1} \geqq \frac{\Delta a_2}{a_2} \geqq \frac{\Delta a_3}{a_3} \geqq \frac{\Delta a_4}{a_4} = q.$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned}
&\Delta a_1 = a_1 p, \qquad && \Delta a_1 \geqq a_1 q,\\
&\Delta a_2 \leqq a_2 p, && \Delta a_2 \geqq a_2 q,\\
&\Delta a_3 \leqq a_3 p, && \Delta a_3 \geqq a_3 q,\\
&\Delta a_4 \leqq a_4 p, && \Delta a_4 = a_4 q.
\end{aligned}$$

Складывая равенство и неравенства каждого столбца почленно, получаем (после деления) границы для относительной погрешности суммы:

$$\begin{aligned}
\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \Delta a_4 &\leqq p\ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4),\\
\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \Delta a_4 &\geqq q\ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4).
\end{aligned}$$

Заменяя, согласно теореме I, $\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \Delta a_4$ через $\Delta (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$, легко получим, что

$$p \geqq \frac{\Delta (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \geqq q.$$

Последнее неравенство составляет содержание теоремы VII: *Граница относительной погрешности арифметической* *суммы нескольких приближенных положительных слагаемых заключается между наибольшей и наименьшей из границ относительных погрешностей слагаемых.*

Рассматривая выражение для границы относительной погрешности разности двух приближенных положительных чисел a_1 и a_2

$$\frac{\Delta(a_1 - a_2)}{a_1 - a_2} = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2}{a_1 - a_2},$$

замечаем, что при постоянных Δa_1 и Δa_2 и при сближении чисел a_1 и a_2 эта граница может стать как угодно большой. Поэтому никакой теоремы о границе относительной погрешности разности, которая позволила бы легко найти эту границу по границам относительных погрешностей компонентов, не существует.

Взяв границу абсолютной погрешности произведения двух приближенных положительных сомножителей, т. е. $\Delta(a_1 a_2)$, равную, согласно теореме II, $a_1 \Delta a_2 + a_2 \Delta a_1$, разделим ее на произведение $a_1 a_2$. Получаем границу относительной погрешности произведения двух сомножителей

$$\frac{\Delta(a_1 a_2)}{a_1 a_2} = \frac{a_1 \Delta a_2 + a_2 \Delta a_1}{a_1 a_2} = \frac{a_1 \Delta a_2}{a_1 a_2} + \frac{a_2 \Delta a_1}{a_1 a_2} = \frac{\Delta a_2}{a_2} + \frac{\Delta a_1}{a_1},$$

равную, таким образом, сумме границ относительных погрешностей сомножителей. Это заключение легко обобщается на случай любого числа сомножителей.

То же самое выражение получается для границы относительной погрешности частного. Действительно, деление границы абсолютной погрешности частного $\frac{a_1}{a_2}$, равной, согласно теореме III, $\frac{a_2 \Delta a_1 + a_1 \Delta a_2}{a_2^2}$, на само это частное, дает

$$\frac{(a_2 \Delta a_1 + a_1 \Delta a_2) \cdot a_2}{a_2^2 \cdot a_1} = \frac{\Delta a_1}{a_1} + \frac{\Delta a_2}{a_2}.$$

Соединяя два последних заключения, приходим к теореме VIII: ***Граница относительной погрешности результата любого числа действий II ступени равна сумме границ относительных погрешностей всех сомножителей и делителей.***

Например, граница относительной погрешности выражения $x = \frac{abc}{de}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta e}{e}.$$

Если приближенное число a_1 умножается или делится на точное число a_2, то $\frac{\Delta a_2}{a_2} = 0$. Отсюда следствие: *При умножении или делении приближенного числа на точное граница его относительной погрешности не изменяется.*

Разделив границу абсолютной погрешности степени a^n, равную, согласно теореме IV, $na^{n-1} \Delta a$, на самую степень a^n, получаем границу относительной погрешности степени

$$\frac{na^{n-1} \Delta a}{a^n} = n \cdot \frac{\Delta a}{a},$$

и устанавливаем теорему IX: ***Граница относительной погрешности степени приближенного числа с натуральным показателем n равна n-кратной границе относительной погрешности возводимого в степень числа.***

Разделив границу абсолютной погрешности квадратного корня $\sqrt{a}$, равную, согласно теореме V, $\frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$, на самый корень $\sqrt{a}$, получаем для границы абсолютной погрешности квадратного корня выражение $\frac{\Delta a}{2a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta a}{a}$. Точно так же для границы относительной погрешности кубического корня $\sqrt[3]{a}$ получаем выражение $\frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta a}{a}$. Это дает теорему X: ***Граница относительной погрешности квадратного (кубического) корня из приближенного числа равна половине (трети) границы относительной погрешности подкоренного.***

Теорема IX справедлива, как можно показать, не только для натурального показателя степени n, но для любого его значения, и теорема X получается из нее при $n = \frac{1}{2}$ и $n = \frac{1}{3}$; равным образом, заменяя n через $\frac{1}{n}$, получим, что

$$\frac{\Delta \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Теоремы настоящего параграфа, как и предыдущего, дают оценку только погрешности от неточности данных. Погрешность вычислительную, в том числе и погрешность от округления, приходится оценивать особо, или оставлять вовсе без учета.

§ 37. Простейшие примеры вычисления границ погрешностей. Учет погрешностей в результатах вычислений по способу границ погрешностей заключается в том, что последовательно применяя теоремы I — X, вычисляют границу погрешности (абсолютной или относительной) приближенного результата вычисления. При этом, как легко видеть, из теорем о границе абсолютной погрешности выгодно пользоваться лишь теоремой I, при вычислении же произведений, частных, степеней и корней лучше применять теоремы VIII, IX, X и находить границы относительных погрешностей результатов. Если формула, по которой производится вычисление, содержит, кроме знаков первых 6 действий (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня), еще знаки каких-либо других функций (например, tg, sin и т. п.), то необходимо иметь, в добавление к теоремам §§ 35 — 36, еще соответствующие теоремы о границах погрешностей этих функций. Вывод этих теорем представляет уже некоторые трудности, и в нижеследующих примерах мы ограничимся исключительно 6 основными действиями.

Пример 1. Найти $x = a + b + c$, если $a \doteq 827{,}3$ $(\pm 0{,}1)$, $b \doteq 8{,}947$ $(\pm 0{,}002)$, $c \doteq 3{,}6104$ $(\pm 0{,}0002)$.

Применяем схему, где в первом столбце записываем приближенные значения данных и результата, во втором — границы их абсолютных погрешностей.

	Приближенные значения	Δ
a	827,3	0,1
b	8,947	0,002
c	3,6104	0,0002
x	839,8574	0,1022

$x \doteq 839{,}9$ $(\pm 0{,}1448)$

$x \doteq 839{,}9$ $(\pm 0{,}2)$

Пример 2. Найти $z = xy$, где $x = \sqrt{91}$, $y = \sqrt{5}$, взяв табличные значения корней: $\sqrt{91} = 9{,}539$, $\sqrt{5} = 2{,}236$.

Здесь воспользуемся теоремой VIII.

Δx	0,0005	Δy	0,0005
x	9,539	y	2,236
$\frac{100\,\Delta x}{x}$	0,0053%	$\frac{100\,\Delta y}{y}$	0,0224%

$$\frac{100\,\Delta z}{z}=\frac{100\,\Delta x}{x}+\frac{100\,\Delta y}{y}\quad\Big|\quad 0{,}0277\%$$

$$z=xy\quad\Big|\quad 21{,}329204$$

$$\Delta z=z\cdot\frac{\Delta z}{z}\quad\Big|\quad 0{,}0059$$

$$z\doteq 21{,}329\ \ (\pm 0{,}007)$$

Точное значение $z=\sqrt{455}=21{,}3307\ldots$

Пример 3. Найти $x=a:b$, если $a\doteq 221600\ \ (\pm 200)$, $b=576\ \ (\pm 3)$.

Опять применяем теорему VIII.

Δa	200	Δb	3
a	221600	b	576
$\frac{100\,\Delta a}{a}$	$0{,}091\%$	$\frac{100\,\Delta b}{b}$	$0{,}521\%$

$$\frac{100\,\Delta x}{x}=\frac{100\,\Delta a}{a}+\frac{100\,\Delta b}{b}\quad\Big|\quad 0{,}612\%$$

$$x=a:b\quad\Big|\quad 384{,}72\ldots$$

$$\Delta x=x\cdot\frac{\Delta x}{x}\quad\Big|\quad 2{,}35\ldots$$

$$x\doteq 385\ \ (\pm 3)$$

Пример 4. Зная, что ребро a куба имеет длину 8,3 ($\pm$ 0,05) *см*, найти его объем v.

Здесь $v=a^3$. Применяем теорему IX.

Δa	0,05	$\frac{100\,\Delta v}{v}=3\cdot\frac{100\,\Delta a}{a}$	$1{,}83\%$
a	8,3	$v=a^3$	571,787
$\frac{100\,\Delta a}{a}$	$0{,}61\%$	$\Delta v=v\cdot\frac{\Delta v}{v}$	10,4

$v\doteq 572\ (\pm 11)$ *см*^{3}
или 0,572 ($\pm$ 0,011) литра.

Пример 5. Надо сделать шар, объем которого v отличался бы от 2 литров меньше, чем на 10 *см*^{3}. Какой величины и с какой наибольшей погрешностью следует взять диаметр d этого шара?

Здесь $v=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\pi d^3$, откуда

$$d=\sqrt[3]{\frac{6v}{\pi}}.$$

Пренебрегая погрешностью числа π, которое можно взять как угодно точным, определяем границу погрешности d по формуле $\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{3} \frac{\Delta v}{v}$ (см. теорему X). Но $\frac{\Delta v}{v} = \frac{10}{2000} = 0{,}5\%$, а потому $\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{6}\%$. Значение d определяем посредством 5-значных логарифмов.

$\lg 6$	0,77815
$\lg v$	3,30103
$-\lg \pi$	$\overline{1},50285$
$\lg d^3$	3,58203
$\lg d$	1,19401
d	15,632

$\Delta d = \frac{1}{6}\%$ от $15{,}632 = 0{,}0260\ldots$ *см*.

Искомый диаметр $d \doteq 15{,}632$ *см* $= 156{,}32$ *мм*. Его наибольшая допустимая погрешность 0,26 *мм*.

При вычислении Δd мы здесь должны брать, в виду особой постановки вопроса, непременно приближенное значение *по недостатку*; вместо границы 0,26 *мм* можно было бы назначить границу в 0,25, то есть в $\frac{1}{4}$ *мм*.

§ 38. Более сложные случаи вычисления границ погрешностей.

Пример 1. Вычислить d по формуле $d = \frac{p - p_2}{p_1 - p_2}$, если $p \doteq 64{,}97\ (\pm 0{,}01)$, $p_1 \doteq 74{,}67\ (\pm 0{,}01)$, $p_2 \doteq 24{,}83\ (\pm 0{,}01)$.

Здесь

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta\,(p - p_2)}{p - p_2} + \frac{\Delta\,(p_1 - p_2)}{p_1 - p_2} \quad \text{(по теореме VIII)},$$

$\Delta\,(p - p_2) = \Delta p + \Delta p_2$, $\Delta\,(p_1 - p_2) = \Delta p_1 + \Delta p_2$ (по теореме I).

	Приближенное значение	Δ
p	64,97	0,01
p_1	74,67	0,01
p_2	24,83	0,01
$p - p_2$	40,14	0,02
$p_1 - p_2$	49,84	0,02
$d = \frac{p - p_2}{p_1 - p_2}$	0,80538...	

$$\frac{\Delta\,(p - p_2)}{p - p_2} = 0{,}050\%$$

$$\frac{\Delta\,(p_1 - p_2)}{p_1 - p_2} = 0{,}041\%$$

$$\frac{\Delta d}{d} = 0{,}091\%$$

$$\Delta d = \frac{\Delta d}{d} \cdot d = 0{,}0008$$

$$d \doteq 0{,}8054\ (\pm 0{,}0010)$$

Пример 2. Вычислить объем ведра, имеющего форму усеченного конуса, если известно, что поперечник нижнего его основания $D \doteq 29{,}3$ *см*, верхнего — $d \doteq 21{,}9$ ($\pm 0{,}2$) *см*, а высота $h \doteq 27{,}6$ ($\pm 0{,}2$) *см*.

Применяем формулы $V = \frac{1}{12}\pi h s$, $s = D^2 + d^2 + Dd$.

Здесь

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta s}{s} \text{ (по теореме VIII)},$$

$$\Delta s = \Delta D^2 + \Delta d^2 + \Delta Dd \text{ (по теореме I)},$$

$$\Delta D^2 = 2D\,\Delta D,\ \Delta d^2 = 2d\,\Delta d \text{ (по теореме IV)}.$$

$$\Delta Dd = D\Delta d + d\Delta D \text{ (по теореме II)}.$$

Вычисление Δs.

D	29,3
ΔD	0,2
$D\Delta D$	5,86
$\Delta D^2 = 2D\,\Delta D$	11,72

d	21,9
Δd	0,2
$d\Delta d$	4,38
Δd^2	8,76

$D\Delta d$	5,86
$d\Delta D$	4,38
ΔDd	10,24

ΔD^2	11,72
Δd^2	8,76
ΔDd	10,24
Δs	30,72

Вычисление s.

D^2	858,49
d^2	479,61
Dd	639,67
s	1977,77
	1978

Вычисление V.

$\lg \pi$	0,4971
$\lg h$	1,4409
$\lg s$	3,2963
$-\lg 12$	$\bar{2}$,9208
$\lg V$	4,1551
V	14290

Вычисление ΔV.

$\Delta\pi$	0,0005
Δh	0,2
Δs	30,73 + 0,23 = 30,95

$\frac{\Delta\pi}{\pi}$	0,02%
$\frac{\Delta h}{h}$	0,73%
$\frac{\Delta s}{s}$	1,57%
$\frac{\Delta V}{V}$	2,32%

$$\Delta V = \frac{\Delta V}{V}\cdot V = 334$$

Ответ:
$V \doteq 14300$ (± 400) *см*^{3}
или 14,3 ($\pm 0{,}4$) литра

Ответ получился тот же, что и при решении этой задачи по способу границ (см. пример 2 § 30).

Пример 3. Найти среднюю плотность d дубового вала, имеющего форму круглого цилиндра, если радиус окружности его основания $r = 12{,}3$ ($\pm 0{,}05$) *см*, а высота (длина вала) $h \doteq 43{,}8$ ($\pm 0{,}1$) *см*, вес же вала $P \doteq 17{,}1$ ($\pm 0{,}05$) *кг*.

Искомое d получим по формулам $d = \frac{P}{V}$, $V = \pi r^2 h$, где P должно быть выражено в граммах. Границу относительной погрешности d вычисляем по теоремам VIII и IX:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V}, \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{2\Delta r}{r} = \frac{\Delta h}{h}.$$

Вычисление V и d проведем посредством таблицы 4-значных логарифмов. Значение π возьмем 3,142 ($\pm 0{,}0005$).

$\lg r$	1,0899
$2 \lg r$	2,1798
$\lg \pi$	0,4971
$\lg h$	1,6415
$\lg V$	4,3184
$\lg P$	4,2330
$-\lg V$	$\bar{5}{,}6816$
$\lg d$	$\bar{1}{,}9146$
d	0,8216

$\frac{\Delta r}{r}$	0,407%
$\frac{2\Delta r}{r}$	0,814%
$\frac{\Delta \pi}{\pi}$	0,016%
$\frac{\Delta h}{h}$	0,229%
$\frac{\Delta P}{P}$	0,293%
$\frac{\Delta d}{d}$	1,352%

$$\Delta d = \frac{\Delta d}{d} \cdot d = 0{,}0111$$

$d \doteq 0{,}8216$ ($\pm 0{,}0111$)

$\underline{d \doteq 0{,}82 \ (\pm 0{,}02)}$

§ 39. Вычисления с наперед назначенной точностью результата. Возьмем сперва простейший случай, а именно тот, когда формула, служащая для вычисления результата, точность которого назначена заранее, содержит лишь *одно* приближенное число. Пользуясь теоремами I—X, выражаем зависимость между границей погрешности (абсолютной или относительной) результата и границей погрешности этого единственного приближенного данного. После этого остается решить полученное уравнение относительно границы погрешности приближенного данного. Эту границу вычисляем *по недостатку*. Действительно, ее можно только уменьшать, так как если некоторое ее значение гарантирует требуемую точность результата, то всякое меньшее значение и подавно обеспечит эту точность, но большее значение может ее и не дать.

Здесь мы опять-таки учитываем только погрешности от неточности данных.

Пример 1. Со сколькими десятичными знаками надо взять значение π, чтобы найти длину окружности радиуса $r = 149{,}5 \cdot 10^6$ *км* с погрешностью, не превышающей 0,1 *мм*? Предполагается, что радиус круга известен точно.

Из формулы $C = 2\pi r$ находим, что $\Delta C = 2\,r\Delta\pi$ (см. следствие теоремы II), откуда $\Delta\pi = \frac{\Delta C}{2r}$. Здесь $\Delta C = 0{,}1$ *мм* $= 10^{-2}$ *см* $= 10^{-7}$ *км*, $r = 149{,}5 \cdot 10^{-6}$ *км*. Поэтому $\Delta\pi = \frac{10^{-7}}{2 \cdot 149{,}5 \cdot 10^6} = \frac{1}{299} \cdot 10^{-13} = 3{,}3 \ldots\ldots 10^{-16}$. Следовательно, взяв $\Delta\pi = 0{,}5 \cdot 10^{-16}$, т. е. взяв значение π с 16 точными десятичными знаками, мы нужную точность результата вполне обеспечиваем.

Пример 2. С какой точностью надо взять $\sin 20^\circ$, чтобы получить $\operatorname{tg} 20^\circ$ $\left(\text{по формуле } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\right)$ с 3 точными десятичными знаками?

Полагая, для краткости, $\sin 20^\circ = x$, $\operatorname{tg} 20^\circ = y$, переписываем данную формулу в виде

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

и находим зависимость между Δy и Δx.

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(по теореме VIII)}$$

$$= \frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(1-x^2)}{1-x^2} \qquad \text{(по теореме X)}$$

$$= \frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1-x^2} \qquad \text{(по теореме I)}$$

$$= \frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x\Delta x}{1-x^2} \qquad \text{(по теореме IV)}$$

$$= \Delta x \cdot \frac{1}{x(1-x^2)}.$$

Теперь находим Δx в зависимости от Δy:

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{y} \cdot x\ (1 - x^2) = \Delta y\ \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^3.$$

Вычислим, наконец, Δx, взяв Δy согласно заданию равным 0,0005, а $x = \sin\ 20° = 0{,}34$. Имеем:

$$\Delta x = 0{,}0005 \cdot \left(\sqrt{1 - 0{,}34^2}\right)^3 = 0{,}00041\ldots$$

Итак, абсолютная погрешность x, не превышающая 4 десятитысячных, уже обеспечивает — при отсутствии вычислительной погрешности — требуемую точность y. Чтобы иметь некоторый „запас точности“ на покрытие неизбежных вычислительных погрешностей, возьмем sin 20° с 4 точными десятичными знаками ($\sin\ 20° \doteq 0{,}3420$). Для контроля проведем вычисление $y = \operatorname{tg}\ 20°$ по способу границ:

	НГ	ВГ
$x = \sin\ 20°$	0,34195	0,34205
x^2	0,1169	0,1170
(!) $1 - x^2$	0,8830	0,8831
$\sqrt{1 - x^2}$	0,9396	0,9398
(!) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	0,3638	0,3641

0,3641
0,3638

0,7279 : 2 = 0,36395
0,0003 : 2 = 0,00015

$\operatorname{tg}\ 20° \doteq 0{,}364\ (\pm\ 0{,}0002)$

Требуемая точность действительно достигнута. Истинная погрешность (до округления) значительно ниже указанной границы, так как значение tg 20° с 5 точными десятичными знаками есть 0,36397.

Переходим к общему случаю, когда формула, по которой вычисляется число, точность которого назначена заранее, содержит несколько приближенных чисел. Выразив зависимость между данной границей погрешности результата и искомыми границами погрешностей этих приближенных чисел, мы получаем одно уравнение со многими неизвестными. Чтобы сделать задачу определенной, вводят дополнительные условия: либо требуют равенства границ относительных погрешностей приближенных чисел, либо равенства границ их абсолютных погрешностей, либо, напротив, считаясь с различной точностью измерительных приборов или с удобством получения лишних десятичных знаков в различных приближенных числах, назначают для некоторых приближенных чисел границы погрешностей, превосходящие в определенное число раз границы погрешностей других чисел, Детали применения этого способа выясняются при решении примеров.

Пример 3. С какой точностью надо взять вес p (в граммах) и объем v (в *куб. см*) куска свинца, чтобы получить его плотность d по формуле $d=\frac{p}{v}$ с погрешностью, не большей полупроцента.

На основании теоремы VIII пишем:

$$\frac{\Delta d}{d}=\frac{\Delta p}{p}+\frac{\Delta v}{v}.$$

Таким образом, сумма границ относительных погрешностей чисел p и v должна быть, согласно заданию, не больше $\frac{1}{2}\%$. Так как при взвешивании бо́льшая точность достигается гораздо легче, чем при измерении объема, то отнесем на погрешность в определении веса только десятую часть этой погрешности, т. е. $0{,}05\%$, а остальные $0{,}45\%$ отнесем на погрешность в определении объема. Если вес взятого куска свинца, определенный грубо приближенно, оказывается близким к 400 *г*, а его объем — близким к 40 *см*^{3}, то вес надо определить с погрешностью не превосходящей $0{,}05\%$ от 400, т. е. 0,2 *г*, а объем — с погрешностью, не превосходящей 0,18 *см*^{3}. Имея в своем распоряжении весы, чувствующие 0,2 *г* при нагрузке в 400 *г*, и прибор для измерения объема, позволяющий делать отчеты до 0,1 *см*^{3}, мы достигнем требуемой точности в определении искомой плотности.

Пример 4. Требуется найти объем v цилиндра, грубо приближенные размеры которого таковы: поперечник основания $2r \doteq 3$ *см*, высота $h \doteq 16$ *см*. С какой точностью надо произвести измерение $2r$ и h, а также с какой точностью следует взять число π, чтобы получить объем цилиндра с погрешностью не выше 1%?

Формула объема круглого цилиндра $v=\pi r^2 h=\frac{1}{4}\pi(2r)^2 h$ дает следующую зависимость между границами относительных погрешностей чисел v, π, d, h:

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{\Delta \pi}{\pi}+\frac{2\Delta(2r)}{2r}+\frac{\Delta h}{h}.$$

Так как π легко взять с какой угодно точностью, положим $\frac{\Delta\pi}{\pi}\leqq 0{,}01\%$, что будет обеспечено, если взять $\pi=3{,}1416$ $(-0{,}00001)$; тогда даже $\frac{\Delta\pi}{\pi}<\frac{1}{3}\cdot 0{,}001\%$. Если остальную часть погрешности v, т. е. $0{,}99\%$, распределить поровну на оба остающиеся члена, т. е. положить $\frac{2\Delta(2r)}{2r}=0{,}495\%$ и $\frac{\Delta h}{h}=0{,}495\%$, то $2r$ придется измерить с погрешностью, не превосходящей $\frac{1}{4}\%$, что при $2r \doteq 3$ *см* соответствует абсолютной погрешности, не превышающей $0{,}075$ *мм*. Такую точность обеспечить не так просто. Поэтому попробуем назначить одинаковые границы относительных погрешностей для $2r$ и h, т. е. положить $\frac{\Delta(2r)}{2r}=\frac{\Delta h}{h}$. Тогда $\frac{\Delta(2r)}{2r}=0{,}33\%$, откуда $\Delta(2r)=0{,}1$ *мм* и $\frac{\Delta h}{h}=0{,}33\%$, откуда $\Delta h=0{,}5$ *мм*. Точность в определении поперечника до $0{,}1$ *мм* получится при употреблении штангенциркуля, высоту же цилиндра можно измерить просто миллиметровой линейкой.

Предположим, что измерения дали $2r \doteq 3{,}17\ (\pm 0{,}01)$ *см*, $h \doteq 15{,}85\ (\pm 0{,}05)$ *см*. Тогда

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{0{,}001}{3}+\frac{2}{3{,}17}+\frac{5}{15{,}85}<0{,}95\%.$$

Вычисление v ведем посредством таблицы 5-значных логарифмов (значение π мы взяли с 5 значащими цифрами) и после обычных округлений получаем $v \doteq 125{,}1\ (\pm 1{,}2)$ *см*^{3}. Лучше было бы округлить до целых. Но тогда граница относительной погрешности v несколько (очень незначительно) перейдет 1%: $v \doteq 125\ (\pm 1{,}3)$ *см*^{3}.

Вычислительная погрешность, кроме погрешности окончательного округления, здесь не учтена. Но если вычислить НГ и ВГ, сохраняя в промежуточных результатах по 4 значащих цифры, то мы придем к тому же самому окончательному результату.

§ 40. Сравнительная оценка способа границ и способа границ погрешностей. Очевидными преимуществами способа границ являются: 1) чрезвычайная его простота, сводящая всю его теорию к одному основному принципу, приложение которого на практике не вызывает никаких затруднений даже у мало подготовленного вычислителя; 2) его универсальность, так как применять его можно ко всякому числовому расчету, от самых простых до самых сложных, лишь бы только был известен закон изменения всех входящих в формулу функций; 3) его строгость, позволяющая получать безусловно достоверные результаты, благодаря возможности учитывать как погрешности от неточности данных, так и вычислительные погрешности; 4) контроль правильности вычислений, получающийся при сравнении результатов двух параллельных рядов операций. Способ границ погрешностей превосходит способ границ в том отношении, что: 1) позволяет заранее учитывать погрешность от неточности данных и дает тем самым более или менее надежное указание о той точности, с какой надо вести вычисление; 2) выясняет, какая доля общей погрешности результата обусловлена погрешностью каждого приближенного данного; 3) уменьшает (но не сводит к 0) число случаев, когда при вычислении с наперед назначенной точностью приходится применять последовательные пробы. Способ границ погрешностей не отличается той безусловной строгостью, какая присуща способу границ как вследствие отбрасывания членов высшего порядка малости, так и в силу того, что учитываются только погрешности от неточности данных.

С первого взгляда кажется, что существенным недостатком способа границ является необходимость дважды повторять все вычисление. Однако, сравнивая два решения одной и той же задачи, одно с учетом погрешностей по способу границ, другое — по способу границ погрешностей (см., например, § 30, пример 2, и § 38, пример 2), убеждаемся, что общее количество выкладок в обоих случаях почти одинаково. Дело в том, что вычисление границы погрешности тоже требует некоторого труда. Правда, вычисление это можно упростить, пользуясь грубыми приближениями, но тогда либо получаются весьма ненадежные результаты, либо излишне увеличиваются границы погрешностей. Необходимо отметить, что при вычислении по формуле, содержащей только действия II и III ступени, вычисление по способу границ погрешностей выполняется определенно скорее, чем по способу границ. Иначе обстоит дело, если в формулу, наряду с действиями II и III ступени, входят также действия I ступени.

В случаях, когда требуется не абсолютная достоверность, а лишь более или менее высокая вероятность, как это обыкновенно бывает при обработке данных опыта и наблюдения, чаще пользуются вычислением границ погрешностей. В случаях же, когда такая абсолютная достоверность необходима (и, по существу дела, возможна), например, при составлении математических таблиц, лучше употреблять способ границ.

В дидактическом отношении способ границ имеет очевидные преимущества перед способом границ погрешностей, и именно способ границ надо рекомендовать для первого ознакомления со способами строгого учета погрешностей.

Упражнения к главе V

1. Определить площадь, заключенную между двумя концентрическими окружностями радиусов $r \risingdotseq 8{,}3$ ($\pm 0{,}05$) *см* и $R \risingdotseq 9{,}7$ ($\pm 0{,}05$) *см* с учетом погрешностей сперва по способу границ, потом по способу границ погрешностей.

2. Найти диаметр медного провода, если кусок этого провода длиной $l \risingdotseq 123{,}0$ ($\pm 0{,}1$) *м* весит 115 ($\pm 0{,}5$) *г*. Плотность меди принимаем равной $d \risingdotseq 8{,}8$ ($\pm 0{,}05$). Провод считаем круглым цилиндром. Погрешность учитывается двумя способами.

3. Вершина радио-мачты, установленной вертикально на горизонтальной площадке, видна с расстояния $a \risingdotseq 65{,}3$ ($\pm 0{,}2$) *м* под углом $\alpha \risingdotseq 48^\circ 14'$ ($\pm 2'$) к горизонтальной плоскости. Найти высоту мачты, зная, что высота угломерного прибора равна $b \risingdotseq 1{,}12$ ($\pm 0{,}01$) *м*. Учесть погрешность результата по способу границ погрешностей, прибегая, где необходимо, к способу границ.

4. С какой абсолютной погрешностью надо взять радиус круга, чтобы его площадь отличалась от 500 *см*^{2} не более, как на 1 *см*^{2}?

ГЛАВА VI

ВЫЧИСЛЕНИЯ БЕЗ СТРОГОГО УЧЕТА ПОГРЕШНОСТЕЙ. СПОСОБ ПОДСЧЕТА ЦИФР.

§ 41. Малая вероятность больших погрешностей. В тех случаях, когда мы имели возможность, кроме границы погрешности, т. е. наибольшего возможного ее значения, установить также и истинную погрешность результата, мы каждый раз видели, что эта истинная погрешность значительно меньше наибольшей возможной. Так, в примере 3 § 29 мы получили приближенное значение результата 0,4002 ($\pm$ 0,0009), точное же его значение было 0,4000, и истинная погрешность найденного приближенного значения (0,0002) в $4^1/_2$ раза меньше установленной границы. Явление это бывает выражено тем ярче, чем больше приближенных чисел участвует в вычислении. Возьмем, например, сумму четырехзначных логарифмов 20 последовательных целых чисел от 11 до 30 включительно. Граница абсолютной погрешности каждого такого логарифма есть 0,00005, сумма 20 логарифмов — $0{,}5 \cdot 20 = 10$ десятитысячных. Произведя сложение логарифмов, получим сумму 25,8638, причем ручаться можем только за то, что истинное значение этой суммы больше, чем 25,8628, и меньше, чем 25,8648. Если же взять 8-значные логарифмы тех же 20 чисел и опять произвести сложение, то получим сумму 25,8638 9705. Как видим, истинная погрешность первой суммы не достигает даже одной десятитысячной и составляет, таким образом, примерно десятую часть своей теоретической границы.

Такое расхождение между истинной и наибольшей возможной погрешностями объясняется прежде всего тем, что при разыскании этой наибольшей возможной погрешности мы всегда предполагаем самое неблагоприятное стечение обстоятельств. Так, в только что разобранном примере мы считаем границей погрешности каждого слагаемого полуединицу разряда последней его цифры. Между тем истинные погрешности этих слагаемых могут принимать и на самом деле принимают всевозможные значения от $-0,5$ до $+0,5$ единицы этого разряда. Положительные погрешности, встречаясь примерно одинаково часто с отрицательными, в более или менее значительной степени их уравновешивают, процесс накопления погрешностей идет параллельно с процессом взаимной их компенсации, и в результате вероятность того, что погрешность суммы примет *большое*, т. е. близкое к границе, значение, становится крайне малой. Конечно, подбирая слагаемые искусственно, можно получить погрешность суммы, как угодно близкую к границе. При отсутствии же такого искусственного подбора это становится весьма мало вероятным. Методами теории верятностей можно установить, как часто должно встречаться то или иное значение погрешности суммы. Результаты теоретического исследования подтверждаются и прямым опытом. Так, в 80-х годах прошлого века Г. Штадтхаген (в Германии), вычислив теоретически, как часто должны встречаться различные значения погрешности суммы 20 слагаемых, взятых с одинаковым числом точных десятитысячных знаков, проверил свои выводы следующим опытом. Он взял 440 сумм по 20 логарифмов каждая, сперва с 5, затем с 7 десятичными знаками, и определил разности этих сумм, т. е. приближенные значения погрешностей сумм 5-значных логарифмов. Нижеприведенная табличка показывает, насколько хорошо этот опыт подтвердил теоретические выводы.

Погрешность суммы лежит между	Число случаев по теории	в действительности
0 и 100,5	56%	65%
100,5 и 200,5	32%	28%
200,5 и 300,5	10%	6%
300,5 и 400,5	2%	1%
400,5 и 1 000	0,2	0%

Здесь погрешности выражены в десятимиллионных долях, т. е. в единицах разряда последней цифры 7-значных логарифмов.

Это явление компенсации погрешностей наблюдается в большей или меньшей мере также и в результатах других действий.

§ 42. Практические требования к точности результатов вычислений. Основной принцип обыкновенных вычислений. Строгий учет погрешностей разультатов вычислений, требующий, как мы видели в гл. IV и V, немалой дополнительной работы, применяется на практике очень редко. Обыкновенно вычислители довольствуются тем, что ведут вычисление с определенным числом значащих цифр (или десятичных знаков), сохраняя в окончательном результате одну, иногда две сомнительных цифры. Так, в только что рассмотренном примере вычисления суммы 20 слагаемых последнюю цифру результата при строгом учете погрешностей приходится признать сомнительной. Между тем, в виду крайне малой вероятности погрешности, сколько-нибудь приближающейся к границе, мы, конечно, эту цифру сохраним, и никакого округления суммы производить не будем.

Иногда выставляют требование, чтобы употребляемые на практике приближенные числа имели погрешности, не превосходящие единицы разряда последней их цифры. Вот, например, что говорит в своих „Лекциях о приближенных вычислениях" (Петербург, 1911) академик А. Н. Крылов: „Результат всякого вычисления и измерения выражается числом; условимся писать эти числа так, чтобы по самому их начертанию можно было судить о степени точности; для этого стоит только принять за правило писать число так, чтобы в нем *все* значащие цифры, *кроме последней*, были верны, и лишь последняя цифра была бы сомнительна, и притом не более, как на одну единицу". Если понимать это требование буквально, то оно весьма трудно исполнимо. Действительно, чтобы его соблюсти, необходим, во-первых, постоянный строгий учет погрешностей, и, во-вторых, на каждом почти шагу приходилось бы сильно округлять результаты. Например, 4-значный логарифм, полученный в результате сложения трех 4-значных же логарифмов, имеет границу погрешности в $1^1/_2$ единицы разряда последней цифры, а потому, придерживаясь этого правила, его пришлось бы округлить до 3 десятичных знаков. Однако, стоит только добавить в вышеприведенном правиле одно только слово „в среднем", и мы получаем основной важности принцип, который позволяет рационально обосновать целый ряд практических правил вычисления с приближенными числами. Этот „основной принцип обыкновенных вычислений", т. е. вычислений без строгого учета погрешностей (его можно назвать „принципом А. Н. Крылова") формулируем в окончательном виде так: „Приближенное число надо писать так, чтобы в нем *все* значащие цифры, *кроме последней*, были верны, и лишь последняя цифра была бы сомнительна, и притом *в среднем* не более, как на одну единицу".

Это добавление „в среднем" мы будем понимать в том смысле, что здесь речь идет не о границе погрешности, а о *средней квадратической погрешности*. С этого рода погрешностью мы уже встречались в главе III. Чтобы яснее ее себе представлять, решим такую задачу: найти среднюю квадратическую погрешность округления, состоящего в отбрасывании одной только цифры, считая все возможные значения этой цифры равновероятными, т. е. встречающимися (при большом числе округлений) одинаково часто. Следовательно, равновероятны следующие значения погрешности округления (в единицах разряда последней цифры):

$$-05; -0{,}4; -0{,}3; -0{,}2; -0{,}1; \ 0{,}0; \ 0{,}1; \ 0{,}2; \ 0{,}3; \ 0{,}4; \ 0{,}5.$$

Всего здесь 11 значений погрешности. Возьмем их квадраты, найдем сумму этих квадратов, разделим сумму на 11 и извлечем из частного квадратный корень. Это и даст искомую среднюю квадратическую погрешность округления, равную

$$\sqrt{\frac{2}{11}(0{,}25+0{,}16+0{,}09+0{,}04+0{,}01)}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}55}{11}}=$$
$$=\sqrt{0{,}1}=0{,}316.$$

Если округление состоит в отбрасывании не одной, а двух цифр, то будем иметь уже не 11, а 101 значение погрешности (от $-0{,}50$ до $+0{,}50$) и средняя квадратическая погрешность округления оказывается равной 0,292. При ее вычислении, во избежание сложения длинного ряда чисел, можно воспользоваться формулой

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)\ (2n+1).$$

Если, наконец, округление состоит в отбрасывании бесконечно длинного ряда цифр, то, как показывает расчет, основанный на переходе к пределу или на применении интегрального исчисления, средняя квадратическая погрешность округления оказывается равной числу 0,289.

Взяв за основу указанный выше основной принцип, выводим из него несколько правил, указывающих, сколько цифр следует сохранить в результате каждого действия. Правила эти можно назвать „Правилами подсчета цифр". Вывод их требует применения математического анализа, а потому приведем их без доказательства, ограничиваясь только некоторыми разъясняющими замечаниями и поверкой на примерах.[1]

§ 43. Правила подсчета цифр.

I. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Примечание. „Десятичными знаками" числа называются те его цифры, которые расположены справа от знака дробности.

II. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.

Примечание. „Значащими цифрами" числа называются все его цифры, кроме нулей, расположенных левее первой отличной от нуля его цифры.

III. При возведении в квадрат и в куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число.

Примечание. Последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания.

IV. При извлечении квадратного и кубического корня в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное.

Примечание. Последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надежна, чем последняя цифра подкоренного.

V. При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила.

Примечание. В окончательном результате эта „запасная цифра" отбрасывается. Писать ее рекомендуется в уменьшенном размере.

VI. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при действиях I ступени) или больше значащих цифр (при действиях II и III ступени), чем другие, их предварительно следует округлять, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.

VII. Если данные можно брать с произвольной точностью,

---

[1] Доказательства некоторых Правил подсчета цифр можно найти в работе автора **„Опыт обоснования некоторых практических правил действий над приближенными числами"**, напечатанной в **„Известиях Тверского педагогического института"** за 1927 г. (вып. 3).

то для получения результата с k цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое дает, согласно правилам I — IV, $k+1$ цифру в результате.

VIII. При вычислении посредством логарифмов одночленного выражения следует подсчитать число значащих цифр в приближенном данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и взять таблицу логарифмов с числом десятичных знаков, на 1 бо́льшим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

Примечание. При применении всех правил подсчета цифр следует избегать нулей, помещенных в конце приближенных чисел взамен неизвестных их цифр. Так, если число 25 400 имеет границу абсолютной погрешности, равную 100, то его надо писать в виде $254 \cdot 10^2$ или лучше, в виде $2{,}54 \cdot 10^4$, или, наконец, в виде 254oo.

Вычислять результаты с бо́льшим числом цифр, чем указывают эти правила, — потерянный труд. Сохранять в них эти лишние, лишенные всякого реального значения цифры, значит вводить в заблуждение тех, кто будет этими результатами пользоваться. Проф. Перри квалифицирует подобное сохранение незаслуживающих никакого доверия цифр как „нечестное“ обращение с цифрами („Практическая математика“, перевод под ред. В. В. Лермантова, 1909 г., стр. 14).

Прежде чем перейти к детальному рассмотрению отдельных правил, приведем таблицу, содержащую значения предельной и средней квадратической погрешности результатов различных действий (те и другие выражены в единицах разряда последней цифры результатов, округленных согласно правилам подсчета цифр). Предполагается, что приближенное значение каждого данного числа имеет погрешность, не превосходящую половины единицы разряда последней его цифры, и что все значения погрешностей от $-0{,}5$ до $+0{,}5$ равновероятны, т. е. могут встречаться одинаково часто.

Вычисление некоторых приведенных в таблице результатов приводится в §§ 44—50. Вычисление остальных, требующее применения математического анализа, можно найти в указанной выше работе „Опыт обоснования...“

Как видим, средняя квадратическая погрешность везде меньше 1, кроме случая возведения в куб, когда она очень незначительно превосходит 1. Средняя квадратическая погрешность суммы n слагаемых, равная, согласно таблице, $0{,}289\sqrt{n}$, не превосходит 1 при $n \leq 12$ (табл. на стр. 112).

Действие	Результат	Предельная погрешность	Средняя квадратическая погрешность
Сложение и вычитание	Алгебраическая сумма n слагаемых	$0{,}5\,(n+1)$	$0{,}289\sqrt{n}$
Умножение	Произведение двух k-значных приближенных чисел	6	0,626
	Произведение k-значного приближенного на точное	5,5	0,442
	Произведение k-значного приближенного на $(k+1)$-значное приближенное	5,55	0,445
Деление	Частное от деления k-значного приближенного числа на k-значное приближенное число	10,5	0,576
	Частное от деления k-значного приближенного числа на точное	5,5	0,389
	Частное от деления k-значного приближенного на $(k+1)$-значное приближенное	6	0,391
	Частное от деления точного на k-значное приближенное	5,72	0,425
	Частное от деления $(k+1)$-значного приближенного на k-значное приближенное	6	0,427
Возведение в степень	Квадрат k-значного приближенного числа	4	0,705
	Куб k-значного приближенного числа	8	1,059
Извлечение корня	Квадратный корень из k-значного приближенного числа	1,31	0,221
	Кубический корень из k-значного приближенного числа	1,29	0,185

Переходим к рассмотрению отдельных правил.

§ 44. Сложение и вычитание. Вычисляя алгебраическую сумму ряда приближенных слагаемых, имеющих одно и то же число десятичных знаков, мы сохраняем, как было показано в § 41, все десятичные знаки этой суммы, если только число слагаемых, как это обыкновенно и бывает на практике, не чрезмерно велико. Как мы убедились в конце предшествующего параграфа, основной принцип будет при этом вполне соблюден при числе слагаемых не большем 12. Однако, на практике это число 12 часто превосходят, и результаты, полученные Штадтхагеном (см. § 41), показывают, что даже при 20 слагаемых стоит сохранять все знаки суммы.

Если же слагаемые имеют различное число десятичных знаков, то число надежных десятичных знаков суммы определяется числом десятичных знаков наименее точного слагаемого, т. е. слагаемого, имеющего наименьшее число десятичных знаков.

Действительно, граница абсолютной погрешности суммы равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых (теорема I, гл. V), а потому, если наименее точное слагаемое имеет k десятичных знаков, из которых последний почти точен и его граница абсолютной погрешности равна, следовательно, 10^{-k}, то граница абсолютной погрешности суммы, как бы точны ни были остальные слагаемые, будет непременно больше этого числа 10^{-k}. Сохранять в результате больше чем k десятичных знаков нет никакого смысла, так как о цифрах, следующих за k-ым десятичным знаком, мы *ничего не знаем.*

Если все приближенные слагаемые (или, по крайней мере, некоторые из них) — числа целые, и говорить об их десятичных знаках в узком смысле этого слова не приходится, то можно перенести знак дробности во всех слагаемых на несколько мест (одинаково для всех) влево, вводя множитель в виде надлежащей степени 10. Например, имея сумму

$$546_{00} + 27_{000} - 12634,$$

где нули в первых двух слагаемых поставлены взамен неизвестных цифр, перепишем ее в виде

$$5{,}46 \cdot 10^4 + 2{,}7 \cdot 10^4 - 1{,}2634 \cdot 10^4.$$

Наименьшее число десятичных знаков имеет второе слагаемое — только один. Столько же следует сохранить и в сумме.

Для лучшего уяснения целесообразности I правила подсчета цифр рассмотрим три примера.

Пример 1. Вычислить сумму $x = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{5} + \sqrt{6}$, имея в своем распоряжении таблицу квадратных корней с 3 десятичными знаками.

Складывая члены со знаком $+$ и $-$ порознь, получаем:

$\sqrt{2}$	1,414
$\sqrt{4}$	2,000
$\sqrt{6}$	2,449
S_1	5,863
S_2	3,968
$x \doteq S_1 - S_2$	1,895

$\sqrt{3}$	1,732
$\sqrt{5}$	2,236
S_2	3,968

Здесь мы имеем случай, когда все члены алгебраической суммы даны с одним и тем же числом десятичных знаков (3). Столько же знаков сохраняем и в сумме. Если бы мы взяли вместо 3 по 5 десятичных знаков в каждом слагаемом, то получили бы $x = 1{,}89558$. Истинная погрешность суммы 1,895, следовательно, лишь немного превосходит половину единицы последнего ее разряда.

Пример 2. Вычислить сумму $x = \overset{\frown}{2{,}4} - 0{,}3509 + 13{,}85 + 0{,}04747$, где первое слагаемое точно, остальные — приближенные.

Перепишем слагаемые друг под другом, но вместо неизвестных их цифр (в менее точных слагаемых) поставим знаки вопроса и выполним сложение и вычитание:

$$
\begin{array}{r}
2{,}40000 \\
+\ 13{,}85??? \\
0{,}04747 \\
\hline
16{,}29_{747} \\
-\ \ 0{,}3509? \\
\hline
x \doteq 15{,}94_{657}
\end{array}
$$

Последние три цифры могли бы быть совсем другими, если бы были известны цифры, замененные знаками вопроса. Доверять этим цифрам, таким образом, совершенно невозможно; их надо отбросить, что дает, по округлении, $x \doteq 15{,}95$. Последняя сохраненная цифра тоже не вполне надежна, но погрешность в ней не может быть значительной.

Мы сделали именно то, что рекомендует I правило.

Лишние десятичные знаки более точных слагаемых (0,3509 и 0,04747) остаются, следовательно, неиспользованными и доставляют только лишнюю вычислительную работу. Поэтому рекомендуется подобные более точные слагаемые заранее округлять, сохраняя в них только по одному лишнему (сравнительно с наименее точным слагаемым) десятичному знаку.

Применяя в настоящем случае это „предварительное округление“

(о нем говорится в VI правиле), получаем

$$
\begin{array}{r}
2{,}400\\
+\;13{,}85\\
0{,}047\\
\hline
16{,}29{\scriptstyle 7}\\
-\;0{,}351\\
\hline
15{,}94{\scriptstyle 6}\\
\hline
15{,}95
\end{array}
$$

т. е. то же самое, что и раньше.

Для записи ненадежных цифр здесь, как и в других случаях, пользуемся цифрами уменьшенного размера.

Пример 3. Найти сумму $S=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{17}$ до сотых долей.

Предварительно надо обратить все слагаемые в десятичные дроби. С каким числом десятичных знаков вести вычисление? Очевидно, не менее, чем с двумя, т. е. до сотых. Один лишний знак, однако, желательно ввести, чтобы уменьшить влияние погрешностей округления. Именно это и рекомендует VII правило.

Проведем вычисление, для поверки сделанного заключения с 2, 3, 4, 5 десятичными знаками:

$\frac{1}{3}$	0,33	0,333	0,3333	0,33333	$\frac{1}{5}$	0,20	0,200	0,2000	0,20000
$\frac{1}{7}$	0,14	0,143	0,1429	0,14286	$\frac{1}{9}$	0,11	0,111	0,1111	0,11111
$\frac{1}{11}$	0,09	0,091	0,0909	0,09091	$\frac{1}{13}$	0,08	0,077	0,0769	0,07692
$\frac{1}{15}$	0,07	0,067	0,0667	0,06667	$\frac{1}{17}$	0,06	0,059	0,0588	0,05882
S_1	0,63	0,634	0,6338	0,63377	S_2	0,45	0,447	0,4468	0,44685
S_2	0,45	0,447	0,4468	0,44685					
$S=S_1-S_2$	0,18	0,187	0,1870	0,18692					

После округления до сотых получаем

$$0{,}18;\ 0{,}19;\ 0{,}19;\ 0{,}19.$$

Итак, введение более чем одной запасной цифры ничего не дало, но без этой запасной цифры результат получился несколько худший. Вычислять одну запасную цифру, таким образом, стоит, больше одной — бесполезно.

§ 45. Умножение. Граница относительной погрешности произведения равна сумме границ относительных погрешностей сомножителей (см. теорему VIII, гл. V). Граница относительной погрешности приближенного числа приблизительно пропорциональна числу значащих его цифр (см. § 17). Эти два обстоятельства и приводят ко II правилу подсчета цифр в той его части, которая касается умножения. Правило это получает достаточное обоснование после доказательства нижеследующей теоремы о предельной погрешности произведения и после вычисления средней квадратической его погрешности.

Теорема. *Если перемножаются два числа, имеющие k точных значащих цифр каждое, то k-я значащая цифра произведения сомнительна и, после отбрасывания всех последующих цифр, абсолютная погрешность произведения может приблизиться, в самом неблагоприятном случае, к 6 единицам разряда k-ой значащей цифры, но никогда не достигает этого предельного значения.*

Вот пример умножения, когда погрешность произведения оказывается действительно близкой к указанной в теореме предельной погрешности. Произведение чисел 999,499 и 1,00499 равно 1004,48650001. Взяв приближенные значения этих двух точных сомножителей с 3 точными значащими цифрами каждое, получаем произведение $999 \cdot 1{,}00 = 999$. Его погрешность равна $1004{,}48650001 - 999 = 5{,}48650001$, т. е. почти $5\frac{1}{2}$ единицам разряда 3-й значащей цифры.

Доказательство этой теоремы, не вызывающее никаких затруднений при применении диференциального исчисления, может быть проведено и вполне элементарно. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Если x растет от 0 до $+\infty$, то $y = x + \frac{p^2}{x}$ убывает, пока x растет от 0 до p, и возрастает, пока x растет от p до $+\infty$.

Для доказательства возьмем $y_1 = x_1 + \frac{p^2}{x_1}$ и составим разность $y_1 - y = (x_1 - x)\left(1 - \frac{p^2}{xx_1}\right)$. Если $x < x_1 < p$, то $xx_1 < p^2$, $\frac{p^2}{xx_1} > 1$, $1 - \frac{p^2}{xx_1} < 0$, $y_1 - y < 0$, $y_1 < y$. Если $p < x < x_1$, то $xx_1 > p^2$, $\frac{p^2}{xx_1} < 1$, $1 - \frac{p^2}{xx_1} > 0$, $y_1 - y > 0$, $y_1 > y$.

Лемма доказана.

Переходя к доказательству теоремы, ограничимся случаем $k=3$. В общем случае доказательство проводится совершенно так же, как и в рассматриваемом частном, требуя лишь более сложной записи. Для определенности будем считать, что приближенное множимое a_1 выражается трехзначным целым числом, а приближенный множитель a_2 — трехзначным числом, имеющим одну значащую цифру левее знака дробности.

Пусть точные значения сомножителей будут $x_1 = a + \alpha_1$, $x_2 = a_2 + \alpha_2$, где α_1 и α_2 — погрешности приближенных значений a_1 и a_2. Согласно условиям имеем, что $100 \leqq a_1 \leqq 999$, $1{,}00 \leqq a$, $\leqq 9{,}99$. Погрешность произведения $a_1\, a_2$ равна абсолютному значению разности $x_1 x_2 - a_1 a_2 = (a_1 + \alpha_1)\,(a_2 + \alpha_2) - a_1 a_2$. Раскрывая скобки и замечая, что $\alpha_1 \leqq 0{,}5$, $\alpha_2 \leqq 0{,}005$, имеем неравенство

$$|\, x_1 x_2 - a_1 a_2 \,| \leqq 0{,}005 a_1 + 0{,}5 a_2 + 0{,}0025 \qquad \text{(A)}$$

Рассмотрим порознь случаи, когда произведение $a_1 a_2$ имеет 1) три, 2) четыре значащих цифры до знака дробности. Неравенство $100 \cdot 1 \leqq a_1 a_2 \leqq 999 \cdot 9{,}99$ показывает, что только эти два случая и возможны.

В первом случае $a_1 a_2 \leqq 999$, $a_2 \leqq \frac{999}{a_1}$. Переписываем неравенство (A) в таком виде:

$$|\, x_1 x_2 - a_1 a_2 \,| \leqq 0{,}005 \left(a_1 + \frac{99900}{a_1}\right) + 0{,}0025.$$

Применяем к двучлену $a_1 + \frac{99900}{a_1}$ доказанную выше лемму, причем берем $p^2 = 99900$, $p = 316{,}06\ldots$ Число a может принимать все целые значения от 100 до 999. При $a_1 = 100$ $a_1 = \frac{99900}{a_1} = 1099$. При возрастании a_1 от 100 до 316 сумма $a_1 + \frac{99900}{a^1}$ убывает, при возрастании a_1 от 317 до 999 возрастает, принимая при $a_1 = 999$ снова значенке 1099. Итак, наибольшее значение выражения $a_1 + \frac{99900}{a_1}$ есть 1099. Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} |\, x_1 x_2 - a_1 a_2 \,| &\leqq 0{,}005 \cdot 1099 + 0{,}0025 \\ &\leqq 5{,}4975 \\ &< 5{,}5 \end{aligned}$$

Округляя произведение $a_1 a_2$ до 3 значащих цифр, т. е. в данном случае до целых, мы допускаем еще погрешность от округления максимум в 0,5. Следовательно, погрешность окончательного результата будет во всяком случае менее, чем $5{,}5 + 0{,}5 = 6$ единиц.

Во втором случае, когда произведение $a_1 a_2$ имеет не три, а четыре цифры до знака дробности, наибольшее возможное значение его погрешности вычисляется гораздо проще. Действительно, теперь:

$$\begin{aligned} | x_1 x_2 - a_1 a_2 | &\leqq 0{,}005 \cdot 999 + 0{,}5 \cdot 9{,}99 + 0{,}0025 \\ &\leqq 9{,}9925 \\ &< 10 \end{aligned}$$

При 4 цифрах до знака дробности третья значащая цифра есть цифра *десятков*. Округление до трех значащих цифр дает погрешность максимум 5 единиц, и полная погрешность округленного произведения оказывается во всяком случае меньшей 15 единиц или 1,5 десятков, т. е. 1,5 единиц разряда третьей значащей цифры, а следовательно, и подавно меньше 6 единиц этого разряда.

Теорема доказана.

Итак, в произведении двух k-значных приближенных чисел k-я значащая цифра сомнительна и может содержать погрешность (до округления) до 5,5 единиц. Ясно, что все цифры произведения, начиная с $(k+1)$-ой, никакого доверия не заслуживают и должны быть отброшены. Возникает далее вопрос, стоит ли сохранять k-ю значащую цифру, раз в ней возможна столь значительная погрешность? Ответ на этот вопрос дает вычисление средней квадратической погрешности, которого по его сложности не приводим. Как уж было указано в таблице конца § 43, эта средняя квадратическая погрешность составляет 0,626. Следовательно, малые значения погрешности k-й значащей цифры встречаются гораздо чаще, чем большие, т. е. близкие к предельной погрешности 5,5, а потому k-ю значащую цифру произведения сохранять следует. Это заключение еще подтверждается, если исследовать *распределение* погрешностей, т. е. выяснить, как часто встречаются погрешности разной величины. Оказывается, что в 83,1% всех случаев k-я значащая цифра содержит погрешность, абсолютная величина которой содержится между 0 и 0,5, в 8,4% всех случаев — между 0,5 и 1, в 6,1% всех случаев — между 1 и 2, в 1,9% всех случаев — между 2 и 3, в 0,4% — между 3 и 4, в 0,1% — между 4 и 5,5, причем погрешность между 5 и 5,5 встречается лишь в 0,001% всех случаев, т. е. один раз на 100 000 случаев умножения.

Эти числа, доставляемые теорией, хорошо согласуются с результатами следующего опыта. Были взяты 20 пар произвольных

Погрешность (по абс. вел.)	от 0 до 0,5	от 0,5 до 1	от 1 до 2	от 2 до 3	от 3 до 4	от 4 до 5
Число погрешн. в опыте . . .	162	24	10	3	1	0
То же в % . .	81%	12%	5%	1,5%	0,5%	0%
Теоретическое число	83,1%	8,4%	6,1%	1,9%	0,4%	0,1%

5-значных чисел, образованных посредством вынимания билетов с отдельными цифрами, и найдены их точные произведения. Далее эти 5-значные числа были округлены до 3 значащих цифр каждое и снова перемножены. Затем были образованы разности соответствующих произведений, причем разности эти были выражены в единицах k-й значащей цифры произведения приближенных чисел. Наконец, было подсчитано, сколько раз встречается разность, заключенная в определенных пределах. Результаты опыта содержатся в приведенной выше таблице, где для сравнения указаны еще раз и результаты теоретического исследования.

Если приближенные произведения округлять до 3 значащих цифр, то разности между ними и точными произведениями несколько изменяются, но общая картина распределения погрешностей остается почти той же. Взамен чисел, приведенных во второй строке таблицы, будем тогда иметь такие:

140; 45; 10; 4; 0; 1.[1]

Итак, перемножая два приближенных k-значных числа, все цифры которых точны, мы получаем в произведениях k заслуживающих доверия цифр, но не более.

Если в приближенных k-значных сомножителях последняя значащая цифра не точна, а только почти точна, или даже сомнительна, то граница погрешности произведения соответственно повышается, но вероятность малых значений погрешности в k-ой значащей цифре произведения остается все же много большей, чем больших.

Переходим теперь к случаю, когда приближенное k-значное число, все цифры которого точны, умножается на точное число,

[1] Вопрос о влиянии округления на распределение погрешностей рассмотрен О. А. Вольбергом. См. его исследование, напечатанное в „Известиях Тверского педагогического института“ за 1929 г. (вып. 5).

Тогда, как можно показать, предельная погрешность произведения (до округления) равна 5 единицам разряда k-ой значащей цифры, а средняя квадратическая его погрешность — 0,442 единицы разряда той же k-ой значащей цифры. Следовательно, и здесь надо сохранять только k первых значащих цифр произведения. Предельная погрешность от этого округления увеличивается до 5,5 единиц, распределение же погрешностей заметного изменения не претерпевает.

Почти те же значения предельной и средней квадратической погрешности получаются в случае, когда один из сомножителей имеет k точных значащих цифры, а другой — одной больше, т. е. $k+1$ точную значащую цифру. Здесь предельная погрешность (до округления) равна 5,05, средняя квадратическая 0,445. Округляя произведение и в этом случае до k значащих цифр, повышаем предельную погрешность до 5,55.

Сравнивая предельные и средние квадратические погрешности в последних двух случаях, приходим к заключению, что, имея приближенные сомножители с различным числом точных значащих цифр, мы можем, без всякого ущерба для точности результата, предварительно округлить более точный сомножитель, сохраняя в нем лишь одну лишнюю цифру сравнительно с другим менее точным сомножителем.

Целесообразность правил II и VI в той их части, какая касается умножения, теперь показана. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти $x=\sqrt{6}\cdot\sqrt{0{,}0096}$ и $y=\sqrt{6}\cdot\sqrt{0{,}015}$, взяв значение каждого корня с 4 точными значащими цифрами, а именно $\sqrt{6}=2{,}449$, $\sqrt{0{,}0096}=0{,}09798$, $\sqrt{0{,}015}=0{,}1224$.

Выполняя умножение обычным порядком, округляем произведения до 4 значащих цифр:

$$
\begin{array}{r}
2{,}449\\
\times\ 0{,}09798\\
\hline
19592\\
22041\\
17143\\
22041\\
\hline
0{,}23995302\\
\hline
0{,}2400
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
2{,}449\\
\times\ 0{,}1224\\
\hline
9796\\
4898\\
4898\\
2449\\
\hline
0{,}2997\ 76\\
\hline
0{,}2998
\end{array}
$$

Здесь легко указать истинные погрешности найденных результатов, так как $x=\sqrt{6}\cdot\sqrt{0{,}0096}=\sqrt{0{,}0576}=0{,}\overset{\frown}{24}$ и $y=\sqrt{6}\cdot\sqrt{0{,}015}=\sqrt{0{,}090}=0{,}\overset{\frown}{3}$. Значит, истинная погрешность первого приближенного результата (0,2400) есть нуль, а второго

(0,2998) 0,0002, т. е. 2 единицы 4-й значащей цифры. Сравнивая неокругленные приближенные произведения с их точными значениями, убеждаемся, что округление, выполненное согласно II правилу подсчета цифр, было здесь вполне целесообразно.

Пример 2. Найти произведения приближенных сомножителей $x \doteq 2{,}449 \cdot 0{,}1$; $y \doteq 2{,}449 \cdot 0{,}12$; $z \doteq 2{,}449 \cdot 0{,}122$; $t \doteq$ $\doteq 2{,}449 \cdot 0{,}12247$.

Здесь мы имеем произведения *неравноточных* сомножителей (4-значного на 1-значный, 4-значного на 2-значный, 4-значного на 3-значный, 4-значного на 5-значный) и, согласно II правилу, округляем их до того числа значащих цифр, какое имеет менее точный сомножитель (считая здесь менее точным то число, в котором меньше значащих цифр), т. е. x до одной значащей цифры, y — до двух, z — до трех, t — до четырех.

$$
\times\begin{array}{r} 2{,}449 \\ 0{,}1 \\ \hline 0{,}2449 \\ 0{,}2 \end{array}
\qquad
\times\begin{array}{r} 2{,}449 \\ 0{,}12 \\ \hline 4898 \\ 2449 \\ \hline 0{,}29388 \\ \hline 0{,}29 \end{array}
\qquad
\times\begin{array}{r} 2{,}449 \\ 0{,}122 \\ \hline 4898 \\ 4898 \\ 2449 \\ \hline 0{,}298778 \\ \hline 0{,}299 \end{array}
\qquad
\times\begin{array}{r} 2{,}449 \\ 0{,}12247 \\ \hline 17143 \\ 9796 \\ 4898 \\ 4898 \\ 2449 \\ \hline 0{,}29992903 \\ \hline 0{,}2999 \end{array}
$$

Здесь первый сомножитель представляет собой приближенное значение $\sqrt{6}$, второй — различные приближения $\sqrt{0{,}015}$. Точное произведение равно $\sqrt{6} \cdot \sqrt{0{,}015} = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$, а потому истинные погрешности полученных четырех приближенных произведений равны соответственно 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001, или одной единице разряда последней значащей цифры во всех случаях. Рассматривая неокругленные приближенные произведения, замечаем, что нами отброшены действительно неверные цифры.

Пример 3. Найти $a\sqrt{6}$, если точное значение сомножителя a есть 160, а $\sqrt{6}$ взят с 4 значащими цифрами ($\sqrt{6} \doteq 2{,}449$).

Здесь точное число умножается на приближенное число с 4 значащими цифрами. В произведении сохраняем столько цифр, сколько их имеет менее точный сомножитель, т. е. 4.

$$
\times\begin{array}{r} 2{,}449 \\ 160 \\ \hline 146\,94 \\ 244\,9 \\ \hline 391{,}840 \\ \hline 391{,}8 \end{array}
$$

Чтобы установить истинную погрешность результата, вычислим его еще раз, взяв $\sqrt{6}$ с 6 значащими цифрами:

$$\sqrt{6} = 2{,}44949 \cdot 160 = 391{,}918\ldots$$

Истинная погрешность полученного выше произведения 391,8 близка, таким образом, к одной единице разряда последней цифры.

Пример 4. Найти с 3 значащими цифрами длину окружности диаметра $d = \sqrt{2}$ *см*, т. е. $C = \pi d$.

Берем в сомножителях произведения последовательно по 2, 3, 4, 5 значащих цифр и округляем произведения до 3 значащих цифр.

$$\pi = 3{,}14159\ldots, \quad \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$$

$$3{,}1 \cdot 1{,}4 = 4{,}34; \quad 3{,}14 \cdot 1{,}41 = 4{,}4274 = 4{,}43; \quad 3{,}142 \cdot 1{,}414 = 4{,}442788 = 4{,}44;$$

$$3{,}1416 \cdot 1{,}4142 = 4{,}4428\ldots = 4{,}44.$$

Здесь мы получаем подтверждение VII правила в той его части, какая касается умножения: при умножении с наперед заданной точностью в приближенных данных следует брать одну запасную значащую цифру.

Пример 5. Найти произведение дробей $1\frac{3}{7}$, $\frac{1}{45}$, $\frac{21}{11}$, $\frac{11}{12}$, предварительно обратив их в десятичные с 4 десятичными знаками в каждой.

Выполняя это обращение, имеем:

$$1\frac{3}{7} = 1{,}4286; \quad \frac{1}{45} = 0{,}0222; \quad \frac{21}{11} = 1{,}9091; \quad \frac{11}{12} = 0{,}9167.$$

Наименьшее число значащих цифр имеет второй сомножитель. Округляя первый и третий сомножители до 4 значащих цифр каждый, перемножаем последовательно все полученные десятичные дроби, сохраняя в промежуточных результатах по 4 цифры (одна запасная), в окончательном же только 3.

$$1{,}429 \cdot 0{,}0222 = 0{,}0317238 = 0{,}0317_2; \quad 0{,}0317_2 \cdot 1{,}909 = 0{,}06055348 = 0{,}0605_5$$

$$0{,}0605_5 \cdot 0{,}9167 = 0{,}055506185 = \underline{0{,}0555}.$$

Для определения истинной погрешности полученного результата выполним умножение до обращения данных дробей в десятичные:

$$1\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{45}\cdot\frac{21}{11}\cdot\frac{11}{12}=\frac{1}{18}=0{,}055555\ldots$$

Как видим, полученное с применением правил подсчета цифр приближенное произведение отличается от точного немного больше, чем на половину единицы последнего своего разряда.

Пример 6. Найти вес P (в килограммах) медного провода, диаметр которого $2r \underset{\cdot}{=} 4{,}0$ *мм*, а длина $l=235$ *м*, если известно, что плотность меди $d \underset{\cdot}{=} 8{,}8$.

Вычисляем P по формулам $P=Vd$, $V=\pi r^2 l=\frac{1}{4}\pi(2r)^2 l$.

Для получения P в *кг* V должно быть выражено в куб. дециметрах, $2r$ и l в дециметрах: $2r \underset{\cdot}{=} 0{,}040$ *дм*, $l \underset{\cdot}{=} 235_0$ *дм*. В формуле для вычисления V мы имеем один точный сомножитель $\left(\frac{1}{4}\right)$, один сомножитель, точность которого может быть сделана как угодно высокой (π), один сомножитель приближенный с 2 значащими цифрами ($2r$) и один сомножитель приближенный с 3 значащими цифрами (l). Таким образом произведение V можно получить с 2 только значащими цифрами. Умножая V на d, известное тоже только с 2 значащими цифрами, получим для P приближенное значение с 2 значащими цифрами. Промежуточные результаты, с целью уменьшения погрешности от округления, берем везде с 1 запасной цифрой, то есть с $2+1=3$ значащими цифрами (правило V). Для π, согласно правилу VI, возьмем значение 3,14.

Вот примерная схема вычисления:

π	3,14	
$\frac{1}{4}\pi$	0,785	
$2r$	0,040	
$(2r)^2$	$0{,}0016_0$	
$\frac{1}{4}\pi(2r)^2$	$0{,}0012_6$	
l	235_0	
$\frac{1}{4}\pi(2r)^2=V$	$2{,}9_6$	
d	8,8	
$P=Vd$	26	$P \underset{\cdot}{=} 26$ *кг*

Обе значащих цифры окончательного результата заслуживают доверия. Действительно, выполнив вычисление границ при $\pi = 3{,}142$ (0,001), $2\,r = 4{,}0$ ($\pm 0{,}1$) *мм*, $l \doteq 235$ (± 1) *м*, $d \doteq 8{,}8$ ($\pm 0{,}1$), мы получим $P \doteq 26$ ($\pm 1{,}7$) *кг*.

Пример 7. Гипотенуза прямоугольного треугольника, по измерении ее миллиметровой линейкой, оказалась равной 9,6 *см*, а один из его острых углов, по измерении его транспортиром— равным 61°. Найти катеты.

Вычисление производим по формулам $a = c \cos B$, $b = c \sin B$. Здесь $c \doteq 9{,}6$ *см* (приближенное число с 2 значащими цифрами), $B \doteq 61°$. Из таблицы узнаем, что $\cos B \doteq 0{,}4848$. Чтобы выяснить, какие цифры здесь надежны, какие нет, возьмем из таблицы еще $\cos 61° 30'$ и $\cos 60° 30'$ (транспортир дает точность до полуградуса!). Получив числа 0,4772 и 0,4924, сопоставляем эти три значения косинусов и замечаем, что в значении $\cos 61°$ надежными являются только 2 десятичных знака. Сохраняя одну запасную (ненадежную) цифру, берем $\cos B \doteq 0{,}48_5$. Таким же путем устанавливаем, что $\sin B \doteq 0{,}87_5$. Теперь выполняем умножение, округляя результаты, согласно правилу II, до 2 значащих цифр.

$$9{,}6 \cdot 0{,}48_5 = 4{,}6560 = 4{,}7 \qquad\qquad 9{,}6 \cdot 0{,}87_5 = 8{,}4000 = 8{,}4$$

Итак, катеты оказываются равными 4,7 *см* и 8,4 *см*. Интересно посмотреть, что даст в настоящем случае строгий учет погрешностей. Считая, что $c \doteq 9{,}6$ ($\pm 0{,}05$) *см* и $B \doteq 61$ ($\pm 0{,}5$)°, вычислим границы для катетов.

	НГ	ВГ
c	9,55	9,65
B	61°30′	60°30′
$\sin B$	0,8704	0,8788
(!) $\cos B$	0,4774	0,4924
$a = c \cos B$	4,55	4,75
$b = c \sin B$	8,31	8,48

$$\begin{array}{r} 4{,}75 \\ \underline{4{,}55} \\ 9{,}30 : 2 = 4{,}65 \\ 0{,}20 : 2 = 0{,}10 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 8{,}48 \\ \underline{8{,}31} \\ 16{,}79 : 2 = 8{,}395 \\ 0{,}17 : 2 = 0{,}085 \end{array}$$

$a = 4{,}65$ ($\pm 0{,}10$)

$b = 8{,}40$ ($\pm 0{,}09$)

Если бы мы захотели провести контроль правильности результатов (полученных при вычислении без строгого учета погрешностей), применяя теорему Пифагора, то возник бы вопрос, какое расхождение между квадратом гипотенузы и суммой квадратов катетов считать здесь допустимым. Руководствуясь

III правилом, мы скажем, что при правильности всех произведенных вычислений сколько-нибудь значительное расхождение во второй значащей цифре весьма мало вероятно. Производим этот контроль:

a	4,7			
b	8,4			
a^2	$22,_1$		c	9,6
b^2	$70,_6$		c^2	$92,_2$
a^2+b^2	$92,_7$			

Разница между a^2+b^2 и c^2 составляет, таким образом, примерно половину единицы разряда второй значащей цифры и целиком объясняется погрешностями данных.

§ 46. Деление. Рассмотрев вопрос об умножении весьма подробно, можем несколько сократить изложение вопроса о делении.

Граница относительной погрешности частного, как и граница относительной погрешности произведения, равна сумме границ относительных погрешностей компонентов. Вспоминая, что граница относительной погрешности приближенного числа приблизительно пропорциональна числу значащих его цифр, заключаем, что при делении приближенных чисел, как и при умножении, надо считать значащие цифры в менее точном данном, и столько же значащих цифр оставлять в результате.

Более убедительное доказательство целесообразности II правила подсчета цифр в отношении действия деления дает вычисление предельной и средней квадратической погрешности частного. Рассмотрим сперва случай деления двух k-значных приближенных чисел, все цифры которых точны и $k > 1$.

Теорема. *Если делимое и делитель содержат по k ($k > 1$) точных значащих цифр, то в частном k-я значащая цифра сомнительна, и, после отбрасывания всех последующих цифр, абсолютная погрешность частного может приблизиться к 10,5 единицам разряда k-й значащей его цифры, но никогда не достигает этого значения.*

Вот пример деления, где погрешность частного оказывается близкой к указанному в теореме предельному значению. Разделив 100,499 на 1,00501, получаем 99,99801... Если же округлить эти два числа до 3 значащих цифр каждое, то получим частное $100 : 1,01 = 99,00990...$ или, после округления до 3 значащих цифр, 99,0. Разность между точным частным 99,99801...

и приближенным частным 99,0 оказывается близкой к 10 единицам разряда 3-й значащей цифры (0,998... целых или 9,98 десятых).

При доказательстве теоремы ограничимся случаем $k=3$, так как общий случай требует лишь более подробной записи. Подчиним приближенные данные (делимое и делитель) a_1 и a_2 и их абсолютные погрешности α_1 и α_2 тем же условиям, что и при доказательстве теоремы о предельной погрешности произведения:

$$100 \leqq \alpha_1 \leqq 999; \quad 1{,}00 \leqq \alpha_2 \leqq 9{,}99; \quad |\alpha_1| \leqq 0{,}5; \quad |\alpha_2| \leqq 0{,}005.$$

Здесь $x_1 = a_1 + \alpha_1$, $x_2 = a_2 + \alpha_2$. Абсолютная погрешность частного $\frac{a_1}{a_2}$, которую мы обозначим буквой α, равна

$$\alpha = \frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2(a_1+\alpha_1) - a_1(a_2+\alpha_2)}{a_2(a_2+\alpha_2)} = \frac{a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2}{a_2(a_2+\alpha_2)}$$

и удовлетворяет при сделанных условиях неравенству

$$|\alpha| \leqq \frac{0{,}5\,a_2 + 0{,}005\,a_1}{a_2(a_2 - 0{,}005}. \qquad \text{(A)}$$

Определяя границы частного $\frac{a_1}{a_2}$, находим, что

$$\frac{1\,00}{9{,}99} \leqq \frac{a_1}{a_2} \leqq \frac{9\,99}{1{,}00} \text{ или } 10 < \frac{a_1}{a_2} < 999$$

и что это частное может иметь либо 2, либо 3 значащие цифры левее знака дробности. Рассмотрим эти два случая порознь.

Если частное имеет 3 значащих цифры левее знака дробности, то наибольшее его значение есть 999. Представляя неравенство (А) в виде

$$|\alpha| \leqq \frac{0{,}5 + 0{,}005\,(a_1 : a_2)}{a_2 - 0{,}005}$$

заменим частное $a_1 : a_2$ в числителе наибольшим его значением 999, а делитель α_2 (в знаменателе) наименьшим его значением 1. Получаем, что

$$|\alpha| \leqq \frac{0{,}5 + 0{,}005 \cdot 999}{1 - 0{,}005} \leqq 5{,}52\ldots$$

Округляя частное $a_1 : a_2$ до 3 значащих цифр, вводим погрешность от округления максимум в 0,5, и полная погрешность округленного частного в самом неблагоприятном случае будет равна 6,02... (в единицах разряда 3-й значащей цифры).

Если частное имеет не 3, а только 2 цифры левее знака дробности, то $a_1 : a_2 < 100$, $a_1 < 100\,a_2$. Заменяя в неравенстве (A) число a_1 через $100a_2$, от чего неравенство только усилится, получим

$$|\alpha| < \frac{0{,}5\,a_2 + 0{,}005 \cdot 100\,a_2}{a_2\,(a_2 - 0{,}005)} < \frac{1}{a_2 - 0{,}005}. \qquad \text{(B)}$$

Из условия $a_1 < 100\,a_2$ следует, что $a_2 > \frac{a_1}{100}$. Наименьшее значение a_1 есть 100, а потому $a_2 > 1$. Так как a_2 есть число трехзначное, то наименьшее его значение (вообще и в рассматриваемом случае) есть 1,01. Заменяя в неравенстве (B) a_2 через 1,01, мы усиливаем это неравенство и получим

$$|\alpha| < \frac{1}{1{,}01 - 0{,}005} < 1.$$

В рассматриваемом случае третья значащая цифра частного есть цифра десятых. Округляя частное до десятых, допускаем погрешность от округления, не превышающую 0,05. Полная погрешность округленного частного меньше 1,05, т. е. меньше 10,5 единиц разряда 3-й значащей цифры.

Сопоставляя заключения, сделанные в обоих случаях, убеждаемся, что теорема доказана полностью.

Доказанная теорема с полной определенностью показывает необходимость отбрасывания всех цифр частного после k-й значащей, но остается открытым вопрос, стоит ли сохранять и эту k-ю значащую цифру частного, еще более сомнительную, если принимать во внимание только предельную погрешность, чем в случае умножения: там погрешность могла доходить до 6, едесь же до 10 единиц разряда k-й значащей цифры. Однако, значение средней квадратической погрешности, равной, согласно табличке конца § 43, 0,576, показывает, что истинная погрешность большей частью бывает гораздо меньше своего предельного значения, и мы, таким образом, имеем основание сохранять и k-ю значащую цифру частного. В том же нас убеждает и исследование *распределения* погрешностей частного. Нижеприведенная таблица содержит результаты опыта, поставленного аналогично опыту с произведениями приближенных чисел, а также результаты теоретического исследования.

Числа в табличке (стр. 128) относятся к неокругленным частным, поэтому предельная погрешность не 10,5, а только 10. Если все частные, полученные в опыте, округлить согласно II правилу подсчета цифр, то числа второй строки таблички заменятся такими:

61; 54; 30; 18; 16; 14; 5; 2; 0.

Погрешность (по абс. вел.)	от 0 до 0,2	от 0,2 до 0,4	от 0,4 до 0,6	от 0,6 до 0,8	от 0,8 до 1,0	от 1 до 2	от 2 до 4	от 4 до 6	от 6 до 10
Число погрешностей в опыте . .	86	39	26	18	14	15	2	0	0
То же в %	43%	19,5%	13%	9%	7%	7,5%	1%	0%	0%
Теоретическое число	46,6%	20,8%	13,4%	7,7%	4,2%	5,9%	1,3%	0,1%	0,0%

Таким образом наше правило о необходимости сохранения в частном (двух k-значных приближенных чисел) первых k значащих цифр, но не более, получает полное обоснование.

Переходим теперь к случаю, когда один из компонентов — число точное. Как показывают числа таблички конца § 43, и предельная и средняя квадратическая погрешность становятся значительно меньше, чем в предыдущем случае, но не настолько, чтобы в частном можно было сохранить цифры после k-й значащей: и здесь приходится округлять частное до k значащих цифр. Случай, когда один из компонентов есть приближенное число с k значащими цифрами, а другой — приближенное число с $k+1$ значащей цифрой, как показывают опять-таки числа той же таблички, практически ничем не отличаются от случая, когда один из компонентов — число точное. Отсюда делаем два заключения: 1) число значащих цифр частного, заслуживающих доверия, а потому подлежащих сохранению, всегда одинаково с числом значащих цифр менее точного компонента, причем менее точным компонентом здесь, как и при умножении, считается тот, у которого меньше значащих цифр; 2) более точный компонент без ущерба для точности результата можно подвергнуть предварительному округлению с таким расчетом, чтобы в нем оставалось только одной значащей цифрой больше, чем в менее точном компоненте.

Приведенные соображения выясняют целесообразность правил II и VI в отношении деления. Переходим к примерам.

Пример 1. Разделить $\sqrt{2400} \doteq 48,99$ на $\sqrt{0,08} \doteq 0,2828$.

Оба компонента даны с 4 значащими цифрами, столько же цифр сохраняем в частном:

$$48{,}99 : 0{,}2828 = 173{,}23\ldots$$
$$\doteqdot 173{,}2.$$

Точное частное есть $\sqrt{2400 : 0{,}08} = \sqrt{30000} = 173{,}20\ldots$

Как видим, 4 первых значащих цифры приближенного частного точны, 5-я уже неверна, и мы поступили правильно, округляя это приближенное частное до 4 значащих цифр.

Пример 2. Зная табличные 4-значные значения $\sin 89°42' \doteqdot 1{,}0000$ и $\cos 89°42' = 0{,}0052$, найти $\operatorname{tg} 89°42'$.

Здесь надо делить приближенное число с 5 значащими цифрами на приближенное число с 2 только значащими цифрами. Согласно II правилу подсчета цифр, в результате будем иметь только 2 заслуживающих доверия цифры.

$$1{,}0000 : 0{,}0052 = 192{,}3\ldots \doteqdot 19_0.$$

Табличное значение $\operatorname{tg} 89°42'$ есть 191,0. Как видим, две первых значащих цифры приближенного частного точны, третья же неверна, и мы поступили правильно, округлив его до 2 значащих цифр.

Пример 3. Найти градусную меру угла в 1 радиан, взяв $\pi \doteqdot 3{,}14$.

Здесь надо делить точное число 180 на приближенное число с 3 значащими цифрами. В частном получаем тоже 3 заслуживающих доверия цифры

$$180 : 3{,}14 = 57{,}324\ldots \doteqdot 57{,}3.$$

Более точное значение π приводит к частному 57,2957...

Пример 4. Найти частное от деления $\frac{3}{7} = 0{,}428571\ldots$ на $\frac{4}{7} \doteqdot 0{,}571428\ldots$ с 3 точными значащими цифрами.

Сколько цифр следует брать в каждом компоненте?

Если взять по три, то три значащих цифры в частном будут заслуживать доверия, но последняя из них все же может содержать погрешность и даже довольно значительную (вспомним, что предельная погрешность частного двух приближенных k-значных компонентов есть 10,5 единиц разряда k-ой значащей цифры). Поэтому компоненты лучше взять с 4 значащими цифрами, то есть с 1 запасной цифрой, как это и рекомендует VII правило подсчета цифр. Проверим это заключение, проводя вычисление с 3, 4, 5 значащими цифрами

$$0{,}429 : 0{,}571 = 0{,}7527\ldots \doteq 0{,}753 \qquad 0{,}4286 : 0{,}5714 = 0{,}75008\ldots \doteq 0{,}750$$

$$0{,}42857 : 0{,}57143 = 0{,}74999\ldots \doteq 0{,}750.$$

Как видим, одна запасная цифра в компонентах действительно повысила точность последней цифры результата. Дальнейшее же повышение точности компонентов бесполезно.

§ 47. Возведение в степень. Действие возведения в степень с натуральным показателем, будучи частным случаем умножения, невыгодно отличается от последнего по точности получаемых результатов. Происходит это вследствие того, что той компенсации погрешностей, какая обыкновенно имеет место при умножении, при возведении в степень вовсе не бывает, если не считать той весьма незначительной, какую может дать округление. Граница относительной погрешности числа при возведении его в степень с показателем k увеличивается в k раз (см. теорему IX• § 36), а потому от возведения в степень число значащих цифр должно уменьшаться. При возведении в квадрат и куб увеличение границы относительной погрешности еще не так значительно, а потому здесь можно сохранять в результате столько же значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень число, имея, однако, в виду, что последняя цифра округленного таким образом квадрата (куба) заслуживает меньшего доверия, чем последняя цифра возводимого в степень числа.

Прежде всего выясним, какова, при возведении в квадрат и в куб, предельная погрешность результата.

Теорема. *Если возвести в квадрат (в куб) приближенное число с k точными значащими цифрами, причем $k > 1$, то, по округлении результата до k значащих цифр, погрешность его может приблизиться к 4 единицам разряда последней цифры (8 единицам этого разряда для куба), но никогда не достигает этого предельного значения.*

Вот примеры возведения в квадрат и в куб, когда погрешности результатов действительно оказываются близкими к указанным предельным значениям.

Возьмем число $x = 3{,}15501$, квадрат которого равен $x^2 = 9{,}954088\ldots$, и округлим x до до трех значащих цифр. Полученное число $a \doteq 3{,}16$ тоже возведем в квадрат: $a^2 = 9{,}9856$, или, после округления до трех значащих цифр, 9,99. Разность

$x^2 - a^2$ равна, по абсолютной величине, 0,0359... т. е. 3,59... единицы разряда третьей значащей цифры приближенного квадрата 9,99.

Округляя, далее, точное число $x = 2,14501$, куб которого равен 9,8693..., до 3 значащих цифр и возводя полученное приближенное значение $a = 2,15$ в куб, получаем приближенное значение куба $a^3 = 9,938...$ или, после округления до 3 значащих цифр, 9,94. Истинная погрешность этого последнего значения равна 0,0706.., или 7,06... единицы рязряда 3-й значащей цифры.

При доказательстве теоремы примем $k = 3$ (доказательство в общем случае требует лишь более громоздкой записи) и предположим, что данное приближенное число a имеет только одну значащую цифру до знака дробности. Таким образом:

$$1 \leqq a \leqq 9,99; \; |\alpha| \leqq 0,005; \; x = a + \alpha.$$

Из равенства $x^2 = a^2 + 2a\alpha + \alpha^2$ получаем границу погрешности приближенного квадрата

$$x^2 - a^2 = 2a\alpha + \alpha^2, \; |x^2 - a^2| \leqq 2a \cdot 0,005 + 0,25 \cdot 10^{-4}.$$

Необходимо различать два случая: 1) когда a^2 имеет одну значащую цифру до знака дробности и третья значащая цифра квадрата есть цифра сотых; 2) когда a^2 имеет две значащих цифры до знака дробности и третья значащая цифра квадрата есть цифра десятых.

В первом случае $a^2 < 10$, $a < \sqrt{10} = 3,162...$ Наибольшее значение, какое может иметь 3-значное число a, есть 3,16. Наибольшее значение погрешности a^2 есть $2a \cdot 0,005 + 0,25 \cdot 10^{-4} = 0,0316 + 0,25 \cdot 10^{-4} = 0,031625$. Прибавляя сюда наибольшую возможную погрешность от округления, равную 0,005, получаем для полной погрешности квадрата число 0,036625 ими $3,6625 < 4$ единиц разряда 3-й значащей цифры.

Во втором случае $a^2 > 10$, но, согласно условию, $a \leqslant 9,99$. Наибольшее возможное значение a есть 9,99, а потому наибольшее возможное значение погрешности a^2 есть $2 \cdot 9,99 \cdot 0,005 + 0,25 \cdot 10^{-4} = 0,099925$. Погрешность от округления не превосходит 0,05, полная погрещность результата не больше 0,149925 или 1,5 единицы разряда третьей значащей цифры и подавно меньше 4 единиц этого разряда.

Для квадрата теорема доказана. Для куба она доказывается аналогичным образом, но требуется рассмотрение уже трех отдельных случаев.

Таковы предельные погрешности квадрата и куба приближенного числа. Соответствующие средние квадратические погрешности (см. табличку конца § 43) показывают, что истинные их погрешности в большинстве случаев бывают значительно меньше предельных своих значений, а потому k-ю значащую цифру квадрата и куба приближенного числа сохранять все же следует.

Что касается возведения в более высокую степень, чем третья, то возрастание относительной погрешности результата, пропорциональной, как показывает теорема IX § 36, показателю степени, уменьшает число заслуживающих доверия его цифр. Так, у приближенного числа с 4 точными значащими цифрами граница относительной погрешности заключается между 0,005% и 0,05% (см. § 17). При его возведении, например, в 20-ю степень граница относительной погрешности результата будет заключаться уже 0,1% и 1%, и в результате этом будет уже только 2 или 3 точных цифры. Установить определенное правило подсчета цифр для возведения приближенного числа в более высокую степень трудно, а потому в этих случаях надо применять строгий учет погрешностей (по способу границ или границ погрешностей).

§ 48. Извлечение корня. В противоположность возведению в степень действие извлечения корня с точки зрения точности получаемых результатов весьма выгодно. Компенсации погрешностей (при точном показателе корня) здесь, правда, тоже нет, но зато граница относительной погрешности квадратного корня вдвое, кубического — втрое, k-ой степени — в k раз меньше границы относительной погрешности подкоренного (см. теорему X § 36). При извлечении квадратного и кубического корня это возрастание точности еще не столь значительно, а потому здесь следует сохранять в результате столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное подкоренное. В целесообразности этого правила убеждает, как и раньше, вычисление предельной и средней квадратической погрешности результата.

Теорема *Если извлечь квадратный (кубический) корень из приближенного числа с $k < 1$ точными значащими цифрами, то, по округлении результата до k значащих цифр, погрешность его может приблизиться к 1,31 единицы разряда последней цифры (к 1,29 единицы этого разряда для кубического корня), но никогда не достигает этого предельного значения.*

При доказательстве рассмотрим только квадратный корень, полагая $k = 3$ и считая, что корень имеет знак дробности после первой значащей цифры. Необходимо различать два случая соответственно тому, будет ли подкоренное иметь одну или две значащих цифры левее знака дробности. В первом случае подкоренное a заключено между 1,00 и 9,99. Пусть точное подкоренное есть $x = a + \alpha$, где $|\alpha| \leq 0{,}005$. Составляем выражение для абсолютной погрешности корня и преобразуем его:

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{a+\alpha} - \sqrt{a} = \frac{\alpha}{\sqrt{a+\alpha} + \sqrt{a}};$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{0{,}005}{\sqrt{a - 0{,}005} + \sqrt{a}} \leq \frac{0{,}005}{\sqrt{0{,}995} + \sqrt{1{,}00}} < 0{,}0026.$$

Прибавляя сюда еще наибольшую возможную погрешность от округления, равную 0,005, видим, что полная погрешность корня в рассматриваемом случае меньше 0,0076 или 0,76 единицы разряда 3-й значащей цифры.

Во втором случае подкоренное a заключается между 10,0 и 99,9. Точное подкоренное $x = a + \alpha$, $|\alpha| \leq 0{,}05$. Повторяя те же рассуждения, что и в первом случае, приходим к заключению, что и теперь $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < 0{,}00792$. Прибавляя сюда погрешность от округления, равную опять 0,005, получаем полную погрешность 0,01292 или 1,292 единицы разряда 3-й значащей цифры.

Сопоставляя оба случая, заключаем, что при $k = 3$ предельная погрешность квадратного корня может быть принята равной 1,3. В общем случае, при любом $k > 1$, эта предельная погрешность возрастает, как нетрудно убедиться, до 1,31.

Предельная погрешность для кубического корня получается тем же путем, но приходится рассматривать отдельно уже не 2, а 3 случая.

Итак, погрешность квадратного и кубического корня из приближенного k-значного числа даже в самом неблагоприятном случае не достигает и $1\frac{1}{2}$ единиц разряда k-й значащей цифры. Присоединяя сюда еще значение средней квадратической погрешности, равной 0,221 для квадратного корня и 0,185 для кубического (см. табличку конца § 43), окончательно убеждаемся, что сохранять надо k значащих цифр корня, но не более.

В случае извлечения корня более высокой степени, чем третья, уменьшение границы относительной погрешности может привести к тому, что в корне надо будет сохранить больше значащих цифр, чем было в подкоренном. Дать соответствующее правило подсчета цифр, однако, здесь трудно и в таких случаях надо прибегать к строгому учету погрешностей.

§ 49. Употребление запасной цифры. Рассматривая в §§ 44—48 выполнение отдельных действий над приближенными числами, мы уже упоминали о необходимости сохранения запасной цифры в промежуточных результатах: всякий раз, когда какое-либо действие над приближенными числами дает результат, над которым придется производить еще действия (чтобы получить искомый окончательный результат), в этом *промежуточном* (неокончательном) результате лучше брать не столько цифр, сколько их следует взять согласно правилам подсчета цифр I—IV, а *одной больше* (правило V). Действительно, округляя какое-нибудь приближенное число, мы к той погрешности, какая была в нем ранее, добавляем еще погрешность от округления. Хотя в некоторых случаях может произойти частичная или даже полная компенсация этих двух погрешностей и округленное число может оказаться даже точнее неокругленного, однако, доказано, что *в среднем* округление все же уменьшает точность приближенных чисел.[1] Поэтому приходится позаботиться о том, чтобы сделать это уменьшение точности от округления практически неощутимым. Опыт показывает, что при небольшом числе действий (5—10) влияние округлений промежуточных результатов на результат окончательный будет совершенно незаметным, если в каждом промежуточном результате сохранять одну лишнюю (запасную) цифру. При более сложных вычислениях надо брать уже две запасных цифры. К сожалению, теоретически этот вопрос разработан еще недостаточно, и дать более определенное правило пока невозможно.

Эта запасная цифра промежуточных результатов, вообще говоря, доверия не заслуживает, и чтобы не смешать ее с надежными цифрами, ее надо как-нибудь отмечать (например, писать ее в уменьшенном виде).

Рассмотрим один пример.

При решении уравнения

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0$$

найден один из корней, а именно $x_1 = -3{,}71$, и требуется проверить правильность решения посредством подстановки, т. е. вычислением $f(x_1)$.

Проведем вычисление (с применением правил подсчета цифр) три раза: без запасной цифры, с одной запасной цифрой, с двумя запасными цифрами.

---

[1] См. упомянутое выше исследование О. А. Вольберга.

x	$-3{,}71$	$-3{,}71$	$-3{,}71$
x^2	$13{,}8$	$13{,}7_6$	$13{,}7_{64}$
x^3	$-51{,}1$	$-51{,}0_6$	$-51{,}0_{64}$
$2x^3$	-102	$-102{,}_1$	$-102{,}_{13}$
$-5x^2$	$-69{,}0$	$-68{,}8_0$	$-68{,}8_{20}$
$3x$	$-11{,}1$	$-11{,}1_3$	$-11{,}1_{30}$
-7	$-7{,}0$	$-7{,}00$	$-7{,}000$
$2x^3-5x^2+3x-7$	-189	$-189{,}_0$	$-189{,}_{08}$
x^4	190	$189{,}_2$	$189{,}_{45}$
$f(x)$	$+1$	$+0{,}_2$	$+0{,}_{37}$
То же по отбрасывании запасных цифр	$+1$	0	0

Как видим, сохранение одной запасной цифры несколько изменило окончательный результат. Вторая же запасная цифра никакого нового изменения этого результата не вызвала.

Другой случай употребления запасных цифр мы имеем тогда, когда данные для вычисления являются приближенными числами *разной* точности, т. е. с разным числом десятичных знаков (при действиях I ступени) или с разным числом значащих цифр (при действиях II и III ступени). Как мы не раз уже убеждались, большая сравнительная точность некоторых данных будет вполне использована, если оставить в них всего лишь по одной лишней (запасной) цифре сравнительно с наименее точным данным. Сохранение более чем одной запасной цифры только осложняет вычислительную работу, но не дает никакого выигрыша в точности окончательного результата.

Отметим, что это «правило предварительного округления более точных данных» (VI правило подсчета цифр) вполне решает вопрос о том, с какой точностью надо брать часто встречающиеся в вычислении постоянные, например число π. Если π надо умножить или разделить на приближенное число с k значащими цифрами, мы должны предварительно округлить π до $k+1$ значащей цифры, т. е. взять $\pi=3{,}1$ или $3{,}14$, или $3{,}142$, или $3{,}1416$ и т. д., при k соответственно равном 1, 2, 3, 4 и т. д.

Остается указать еще на один случай употребления запасных цифр — на вычисления с наперед заданной точностью. Если данные можно брать с более или менее произвольным числом цифр, а точность результата наперед указана, то, взяв данные с таким числом цифр, какое даст согласно правилам I — V как раз требуемое число цифр в результате, т. е. взяв эти данные, так сказать, „в обрез“, мы никогда не можем ручаться за точность последней цифры результата: правила подсчета цифр говорят только то, что значительная погрешность в этой последней цифре гораздо меньше вероятна, чем малая. Эта сомнительность последней цифры изчезает, если взять в приближенных данных по одной запасной цифре. Большее число запасных цифр, как оказывается, выигрыша в точности уже не дает, доставляя лишь добавочную вычислительную работу (конечно, в случае особо сложного вычисления лучше брать две запасных цифры).

Особого упоминания требует явление „потери точности при вычитании“, с которым мы уже встретились в примере 4 § 30: при вычитании двух близких друг к другу приближенных чисел, имеющих поровну десятичных знаков, в разности получается столько же десятичных знаков, число же значащих цифр получается меньше, чем было в каждом компоненте. Поэтому, желая получить такую разность с определенным числом значащих цифр, мы должны вычислить компоненты с числом знаков, значительно бо́льшим.

Пусть, например, требуется получить значение $x = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{(\operatorname{Arc} \alpha)^3}$ при $\alpha = 5^\circ$ с 3 значащими цифрами. Для получения частного с 3 значащими цифрами делимое и делитель надо взять, согласно VII правилу подсчета цифр, с 4 значащими цифрами. Чтобы получить разность $\operatorname{tg} 5^\circ - \sin 5^\circ = 0{,}0875 - 0{,}0872$ с 4 значащими цифрами, значения tg и sin надо взять не с 4 десятичными знаками, как мы сейчас их взяли, а с 7. Значение Arc 5° достаточно взять с 5 десятичными знаками.

Вычисление понятно из приводимой схемы:

Arc 5°	0,08727
tg 5°	0,0874 887
sin 5°	0,0871 557
tg 5° sin 5°	0,0003 330
$(\operatorname{Arc} 5^\circ)^3$..	0,0006 646
$x = \frac{\operatorname{tg} 5^\circ - \sin 5^\circ}{(\operatorname{Arc} 5^\circ)^3}$	0,501

В настоящем случае тот же результат можно получить гораздо скорее, если предварительно преобразовать числитель данного выражения к логарифмическому виду и воспользоваться таблицей 4-значных логарифмов. Тогда

$$x = \frac{\sin 5^\circ \cdot (1 - \cos 5^\circ)}{\cos 5^\circ \cdot (\text{Arc } 5^\circ)^3} = \frac{2 \sin 5^\circ \sin^2 2^\circ 30'}{\cos 5^\circ \cdot (\text{Arc } 5^\circ)^3} = \frac{2 \operatorname{tg} 5^\circ \sin^2 2^\circ 30'}{(\text{Arc } 5^\circ)^3} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} 5^\circ \sin^2 2^\circ 30'}{\left(\frac{\pi}{36}\right)^3}$$

$x = 0{,}5012$ или, по округлении до 3 десятичных знаков, 0,501.

Подобное преобразование, устраняющее вычитание близких чисел и связанную с ним потерю точности, надо применять всегда, если к тому есть возможность.

§ 50. Вычисления посредством логарифмов. Вычисляя посредством логарифмов одночленное выражение, содержащее *только точные компоненты*, мы получим результат с вычислительной погрешностью тем меньшей, чем больше десятичных знаков имеют табличные мантиссы. Причина появления погрешности ясна: все табличные мантиссы логарифмов, кроме логарифмов чисел 1, 10, 100 и т. д. — числа приближенные. Чтобы видеть, как велика эта вычислительная погрешность, вносимая применением логарифмов, вычислим, например, значение дроби $x = \frac{104}{11}$ посредством таблиц логарифмов с $k = 3$, 4, 5, 6, 7 десятичными знаками. Результаты показывает следующая табличка:

k	3	4	5	6	7
lg 104	2,017	2,0170	2,01703	2,017033	2,0170333
lg 11	1,041	1,0414	1,04139	1,041393	1,0413927
lg x	0,976	0,9756	0,97564	0,975640	0,9756406
x	9,46	9,453	9,4545	9,45455	9,454544

Сравнивая полученные значения x с тем его значением, какое дает непосредственное деление

$$x = 9{,}45454545\ldots$$

убеждаемся в том, что *таблица k-значных логарифмов дает результат с k значащими цифрами, причем последняя не вполне надежна*. Другими словами, ***вычислительная погрешность, вносимая в результат вследствие применения*** *таблицы k-значных логарифмов, делает не вполне надежной k-ю значащую его цифру.*

Обоснование этого предложения нетрудно получить, применяя приближенные формулы для логарифма и показательной функции (см. ниже, § 72). За недостатком места его не приводим, ограничиваясь опытным подтверждением этого предложения на ряде примеров и теми общими соображениями о точности доставляемых таблицами результатов, какие приведены в гл. VIII.

Для практически полного устранения вычислительной погрешности, обусловленной применением логарифмов, надо пользоваться таблицей логарифмов *с одним лишним* (запасным) *десятичным знаком*: для получения результата с 3 значащими цифрами употреблять 4-значные логарифмы, для получения результата с 4 значащими цифрами — 5-значные и т. д. Однако, эта погрешность от применения логарифмов вообще настолько невелика, что часто запасного десятичного знака не берут, и вычисляют k-значный результат посредством таблицы k-значных логарифмов. Доказано, что, вычисляя k-значный результат посредством k-значных логарифмов, мы получаем в нем среднюю квадратическую погрешность не больше единицы разряда последней цифры, если число складываемых (и вычитаемых) логарифмов не больше 3. [1]

Переходя к случаю, когда посредством логарифмов вычисляется одночленное выражение, содержащее *приближенные* данные, замечаем прежде всего, что такое выражение надо вычислять, согласно II, III, IV правилам подсчета цифр, с таким числом значащих цифр, сколько их имеет приближенный компонент с наименьшим числом значащих цифр. Обозначая это число буквой k, видим, что для вычисления окончательного результата надо воспользоваться таблицей логарифмов с $k+1$ десятичным знаком, так как хотя таблица k-значных логарифмов и дает k первых значащих цифр результата, но вычислительная погрешность, происходящая от применения логарифмов, ляжет на последнюю (k-ую) значащую цифру результата и сделает ее менее надежной, чем она была бы при непосредственном вычислении. Поэтому при всяком более или менее сложном вычислении рекомендуется, для получения результата с k значащими цифрами, применять таблицу логарифмов с $k+1$ десятичным знаком, округляя доставляемый

[1] См. резюме работы Н. Ф. Гуляева. О точности логарифмических вычислений, в „Известиях Тверского педагогического института“ за 1929 г. (вып. 5).

ею результат до k значащих цифр. Если число подыскиваемых логарифмов не больше трех, можно обходиться и без запасной цифры.

Примеры 7 и 8 § 29 подтверждают на опыте правильность последнего заключения. Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Найти произведение приближенных чисел 9,539 и 2,236.

Применяя таблицы логарифмов с 4, 5, 7 десятичными знаками получим такие значения этого произведения:

$$21{,}33; \quad 21{,}329; \quad 21{,}32920.$$

После округления до 4 значащих цифр, что мы обязаны сделать в силу II правила подсчета цифр, мы получаем во всех трех случаях одно и то же число, а именно 21,33.

Взятые сомножители представляют собой приближенные значения $\sqrt{91}$ и $\sqrt{5}$. Точное произведение $\sqrt{455} = 21{,}3307\ldots$

Пример 2. Найти произведение дробей $1\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{45} \cdot \frac{21}{11} \cdot \frac{11}{12}$, предварительно обратив их в десятичные с 4 десятичными знаками.

Выполняя это обращение, имеем:

$$1\frac{3}{7} \doteq 1{,}4286; \ \frac{1}{45} \doteq 0{,}0222; \ \frac{21}{11} \doteq 1{,}9091; \ \frac{11}{12} \doteq 0{,}9167.$$

Выполняя вычисление посредством таблиц 3-, 4- и 7-значных логарифмов, получаем следующие результаты:

$$0{,}0555; \quad 0{,}05550; \quad 0{,}05550339.$$

Точное произведение равно здесь $\frac{1}{18} = 0{,}055555\ldots$ Погрешность от неточности данных сказывается, как и следовало ожидать согласно II правилу подсчета цифр, на 4-й значащей цифре результата. Здесь, как и в предшествующем примере, даже один запасной десятичный знак в логарифмах оказался бесполезным.

Пример 3. Найти с точностью до копеек сумму, в которую обратятся через 12 лет, 30 рублей, отданные в рост по 5% (сложных).

Вычисление ведется по формуле $A = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, где $a = 30$, $p = 5$, $n = 12$. Искомый наращенный капитал не достигнет 100 рублей, а потому выразится (с копейками) 4-значным числом. Все компоненты здесь точны, результат будет иметь только вычислительную погрешность. Чтобы сделать ее незаметной, будем вычислять посредством таблицы логарифмов с $4 + 1 = 5$ десятичными знаками. Для сравнения то же вычисление проводим посредством таблиц логарифмов с 4 и 7 десятичными знаками

lg 1,05	0,02119	0,0212	0,0211893
12 lg 1,05	0,25428	0,2544	0,2542716
lg 30	1,47712	1,4771	1,4771213
lg A	1,73140	1,7315	1,7313929
A	53,877	53,89	53,87570
	53 р. 88 к.	53 р. 89 к.	53 р. 88 к.

Один запасной десятичный знак в логарифмах, следовательно, немного повысил точность результата, большее же их число влияния на окончательный результат не оказывает.

§ 51. Примеры более сложных вычислений без строгого учета погрешностей, но с применением правил подсчета цифр.

Пример 1. Найти вычислением объем обрезка стальной оси, состоящего из цилиндрической части (поперечник $d_1 \doteq 4{,}68$ *см*, высота $h_1 \doteq 9{,}40$ *см*) с цилиндрической же головкой ($d_2 \doteq 5{,}63$ *см*, $h_2 \doteq 0{,}88$ *см*). Ось имеет канал для шпильки диаметром $d_3 \doteq 0{,}89$ *см* (считаем его цилиндром с высотой, равной поперечнику оси d_1) и шпонку (выступ) в виде призмы с основанием в форме трапеции, основания которой $a \doteq 1{,}62$ *см*, $b \doteq 1{,}18$ *см*, а высота $c \doteq 0{,}50$ *см*; высота призмы $d \doteq 0{,}41$ *см*.

Искомый объем V вычислим по формуле $V = V_1 + V_2 - V_3 + V_4$, где V_1 — объем тела оси, V_2 — ее головки, V_3 — канала для шпильки, V_4 — выступа, причем $V_1 = \frac{1}{4}\pi d_1^2 h_1$, $V_2 = \frac{1}{4}\pi d_2^2 h_2$, $V_3 = \frac{1}{4}\pi d_3^2 d_1$, $V_4 = \frac{1}{2}(a+b)\,cd$.

Значения d_1 и h_1 известны с 3 значащами цифрами, а потому, согласно правилу VI, при вычислении V_1, берем π с 4 значащими цифрами (3,142) и вычисляем V_1, как промежуточный результат, тоже с 4 значащами цифрами. Число V_2 вычисляем уже только с 3 значащими цифрами, так как хотя d_2 известно с 3 цифрами, но h_2 — только с 2; здесь π можно взять уже с 3 значащими цифрами. Числа V_3 и V_4 вычисляем тоже с 3 значащими цифрами.

При вычислении V мы имели 4 слагаемых с разным числом десятичных знаков (V_1 и V_2 известны до целых, V_3 до десятых, V_4 до сотых). Поэтому V_4 предварительно округляем, Вычисление V_1, V_2, V_3.

	V_1	V_2	V_3
d	4,68	5,63	0,89
d^2	21,9$_0$	31,7	0,79$_2$
h	9,40	0,88	4,68
d^2h	205,$_9$	27,$_9$	3,7$_1$
π	3,142	3,14	3,14
πd^2h	646,$_9$	87,$_6$	11,$_6$
$\frac{1}{4}\pi d^2h$	161,$_7$	21,$_9$	2,9$_0$

Вычисление V_4.

a	1,62
b	1,18
$a+b$	2,80
c	0,50
$(a+b)c$	1,4$_0$
d	0,41
$(a+b)cd$	0,57$_4$
$\frac{1}{2}(a+b)cd$	0,28$_7$

Вычисление $V = V_1 + V_2 + V_4 - V_3$

V_1	161,$_7$
V_2	21,$_9$
V_4	0,3
$V_1 + V_2 + V_4$	183,$_9$
V_3	2,9
V	181,$_0$

$V = 181$ *см*^{3}.

сохраняя только десятые доли. В окончательном результате цифра десятых сомнительна, и мы округляем его до целых.

Оказалось, что мы воспользовались лишь одной значащей цифрой числа V_4 и двумя — числа V_3. Если бы мы предусмотрели это обстоятельство, заранее грубо-приближенно оценив значение отдельных членов суммы $V = V_1 + V_2 - V_3 + V_4$, то при вычислении V_3 и V_4 можно было бы ограничиться еще меньшей точностью

Пример 2. Зная, что экваториальный и полярный радиусы земного сфероида равны (по Кларку) соответственно $a = 6\,378{,}2492$ *км* и $b = 6\,356{,}5150$ *км*, найти с тремя значащими цифрами знаменатель дроби $\frac{1}{x} = \frac{a-b}{a}$, т. е. число $x = \frac{a}{a-b}$ (дробь $\frac{a-b}{a}$ выражает „сжатие" земного сфероида).

Для получения частного $\frac{a}{a-b}$ с 3 значащими цифрами берем делимое и делитель с одной лишней цифрой (VII правило), т. е.

с 4 значащими цифрами. Для получения разности $a-b$ с 4 значащими цифрами a и b приходится брать уже с 6 значащими цифрами („потеря точности при вычитании“).

a	6378,25
b	6356,52
$a-b$	21,73
a	6378
$x=\dfrac{a}{a-b}$	293,5

Сжатие земли $\frac{1}{294}$.

При этом вычислении пришлось дважды применять правило „округления до четной цифры“ (см. § 7).

Пример 3. Найти толщину x, какую следует придать стенкам трубы из сварочного железа, если труба, имея внутренний диаметр $2r \doteq 35$ *мм*, должна выдерживать внутреннее давление $p = 200$ атмосфер. Воспользоваться формулой Лямэ

$$x = r\left(\sqrt{\frac{R+p}{R-p}} - 1\right),$$

где R — допускаемое напряжение материала, равное для сварочного железа 900 — 1 000 *кг* на *см*^{2}. Давление p (считаем его известным точно) должно быть выражено в тех же единицах, что и R, т. е. в *кг* на *см*^{2} (1 атмосфера $\doteq$ 1,033 *кг/см*^{2}).

Для R возьмем значение 950, среднее между двумя указанными границами. Это число 950 приходится писать в виде 9_{50}, так как в нем всего одна надежная цифра. Число $p \doteq 200 \cdot 1{,}033 \doteq 206{,}6$ округляем согласно правилу VI так, чтобы в нем была одна лишняя цифра сравнительно с другим слагаемым ($R \doteq 9_{50}$), т. е. берем $p \doteq 21_0$.

Вычисляя дробь $\frac{R+p}{R-p}$, мы ее получим при данных значениях R и p с одной лишь значащей цифрой. Точность повышается, если эту дробь предварительно преобразовать к виду

$$\frac{R-p+2p}{R-p} = 1 + \frac{2p}{R-p}.$$

p	21_0	$\sqrt{1+q}$	$1{,}2_5$
$2p$	42_0	$\sqrt{1+q}-1$	$0{,}2_5$
R	95_0	$r = 2r:2$	$17{,}_5$
$R-p$	74_0	$x = r\left(\sqrt{1+q}-1\right)$	$4{,}_4$
$q = 2p:(R-p)$	$0{,}5_7$		
$1+q$	$1{,}5_7$		

$x \doteq 5$ *мм*

Итак, в результате мы получили значение x с одной только заслуживающей доверия значащей цифрой. Как всегда, в такого рода технических расчетах берем избыточное приближенное значение (применяем *округление с усилением*).

Пример 4. Пользуясь бесконечным рядом

$$\lg(1+x) = M\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots\right)$$

где $-1 < x \leqq +1$, $M = 0{,}43429448\ldots$, найти 4-значный логарифм числа 7.

Взять $x = 6$, чтобы сразу получить $\lg 7$, невозможно, так как ряд „сходится“ и может быть использован для целей вычисления лишь при значениях x, меньших (по модулю) единицы. Поэтому найдем сперва $\lg 0{,}7$, для чего возьмем $x = -0{,}3$. Вычисление будем вести с одним запасным десятичным знаком, то есть с $4 + 1 = 5$ десятичными знаками, и возьмем все члены ряда, не обращающиеся в 0 при округлении до 5 десятичных знаков.

x	$-0{,}30000$
x^2	$0{,}09000$
x^3	$-0{,}02700$
$x^4 = (x^2)^2$	$0{,}00810$
$x^5 = x^2 \cdot x^3$	$-0{,}00243$
$x^6 = (x^3)^2$	$0{,}00073$
$x^7 = x^3 \cdot x^4$	$-0{,}00022$
$x^8 = (x^4)^2$	$0{,}00007$
$x^9 = x^4 \cdot x^5$	$-0{,}00002$
$x^{10} = (x^5)^2$	$0{,}00001$
	$M = 0{,}434294$

x	$-0{,}30000$
$-\frac{1}{2}x^2$	$-0{,}04500$
$+\frac{1}{3}x^3$	$-0{,}00900$
$-\frac{1}{4}x^4$	$-0{,}00202$
$+\frac{1}{5}x^5$	$-0{,}00049$
$-\frac{1}{6}x^6$	$-0{,}00012$
$+\frac{1}{7}x^7$	$-0{,}00003$
$-\frac{1}{8}x^8$	$-0{,}00001$
$+\frac{1}{9}x^9$	$-0{,}00001$
S	$-0{,}35668$
MS	$-0{,}15491$

Итак, по отбрасывании запасной цифры, $\lg 0{,}7 \doteq -0{,}1549$, откуда $\lg 7 = \lg(0{,}7 \cdot 10) = -0{,}1549 + 1 = 0{,}8451$.

Именно это значение $\lg 7$ мы и находим в таблице 4-значных логарифмов.

Напомним, что, желая привести то же вычисление со строгим учетом погрешностей, мы должны были бы принять во внимание еще и „остаточный член“,

Упражнения к главе VI

1. Вычислить сумму $\sqrt{11}+\sqrt{12}+\sqrt{13}+\sqrt{15}+\sqrt{17}+\sqrt{19}+\sqrt{21}+\sqrt{23}$, пользуясь таблицей корней, сперва взяв значение корней до десятых долей, потом до тысячных долей. Сравнить действительную погрешность приближенной суммы, полученной первый раз, с границей ее погрешности, равной $0{,}05 \cdot 8 = 0{,}4$.

2. Вычислить $x = \dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{30}}$, взяв значения корней с 2 значащими цифрами и применяя II и V правила подсчета цифр. Замечая, что точное значение x есть 4, установить истинную погрешность результата и сравнить ее с теоретической границей его погрешности, вычисленной по способу границ погрешностей.

3. Решить еще раз задачи, приведенные в упражнениях к гл. IV и V, применяя правила подсчета цифр и сравнивая получаемые результаты с полученными ранее.

В следующих задачах произвести вычисления без строгого учета погрешностей, но применяя правила подсчета цифр.

4. Вычислить значение выражения $x = \dfrac{1 - \cos\alpha}{(\mathrm{Arc}\ \alpha^2)}$ при $\alpha = 6^\circ$, пользуясь 4-значной таблицей, сперва взяв выражение в том виде, в каком оно дано, затем — после предварительного преобразования к логарифмическому виду. Сравнить точность полученных оба раза результатов.

5. Применяя правило подсчета цифр, найти площадь треугольника, сторона которого оказалась по измерении равной $a \approx 56{,}3$ *м*, а углы $B \approx 57^\circ 45'$ и $C \approx 48^\circ 37'$.

6. Найти толщину x нити в лампочке накаливания, если длина этой нити $l \approx 46$ *см*, а вес ее $p \approx 0{,}0038$ *г*, считая ее цилиндром и принимая плотность материала $d \approx 19{,}1$ (вольфрам).

7. На площади в 387 482 *км*^{2} живет 12 806 455 чел. Найти до десятых среднюю плотность населения (на 1 *м*^{2}). Результат, полученный при применении VII правила подсчета цифр, сравнить с результатом, который получится при делении данных чисел без предварительного округления.

ГЛАВА VII

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ

§ 52. Счетные приборы и машины. Стремление облегчить и ускорить производство арифметических и вообще математических операций привело к созданию множества счетных приборов, в более или менее значительной степени механизирующих работу вычисления. Не имея возможности даже самым беглым образом обозреть разнообразнейшие типы этих приборов, ограничимся краткими указаниями на четыре прибора, предназначенные для выполнения элементарных операций и заслуживающие особого внимания.

Русские торговые счеты в значительной степени механизируют работу, нужную для выполнения действий сложения и вычитания. Так как умножение можно рассматривать как повторное сложение, а деление — как повторное вычитание, то счеты оказывают услуги и при выполнении этих двух действий. Отсылая за подробностями к специальным книгам,[1] укажем только на одно очень важное, но, к сожалению, мало распространенное применение счетов, а именно, на соединение их с таблицей логарифмов. Записав формулу, по которой проводится вычисление, и числовые значения входящих в нее букв, можно обойтись без всякой дальнейшей записи, „кладя“ на счеты логарифмы всех сомножителей числителя и „сбрасывая“ логарифмы всех сомножителей знаменателя. Многочленное выражение вычисляется, конечно, по частям. Отрицательные характеристики, когда они встречаются, можно класть на особой, специально для них отводимой проволоке (например, на крайней верхней), или же устранять их вовсе прибавлением к характеристике 10 единиц.

Крайне простой прибор, настолько простой, что каждый может его себе изготовить из куска плотной бумаги или картона, представляют собой *„палочки Непера“*. Несмотря на эту свою простоту, палочки Непера оказывают очень существенную помощь при вычислении, облегчая выполнение умножения и деления многозначных чисел в такой же мере, в какой торговые счеты облегчают выполнение сложения и вычитания. — Подробное описание устройства и употребления этого прибора можно найти

---

[1] См., напр., „Вычисления на счетах“ Е. Д. Кирюшина. Кооп. изд., 1925.

во многих книгах (например, в упомянутой в предисловии брошюре „Как надо вычислять").

Торговые счеты частично механизируют работу при выполнении действий сложения и вычитания, палочки Непера частично механизируют процессы умножения и деления. Механизация всех 4 действий в гораздо более полной форме осуществляется при помощи *арифмометра*.

С деталями устройства и употребления арифмометра можно ознакомиться из специальных брошюр, прилагаемых к машинам.

Обучение работе на арифмометре занимает не более 15—20 *минут*.

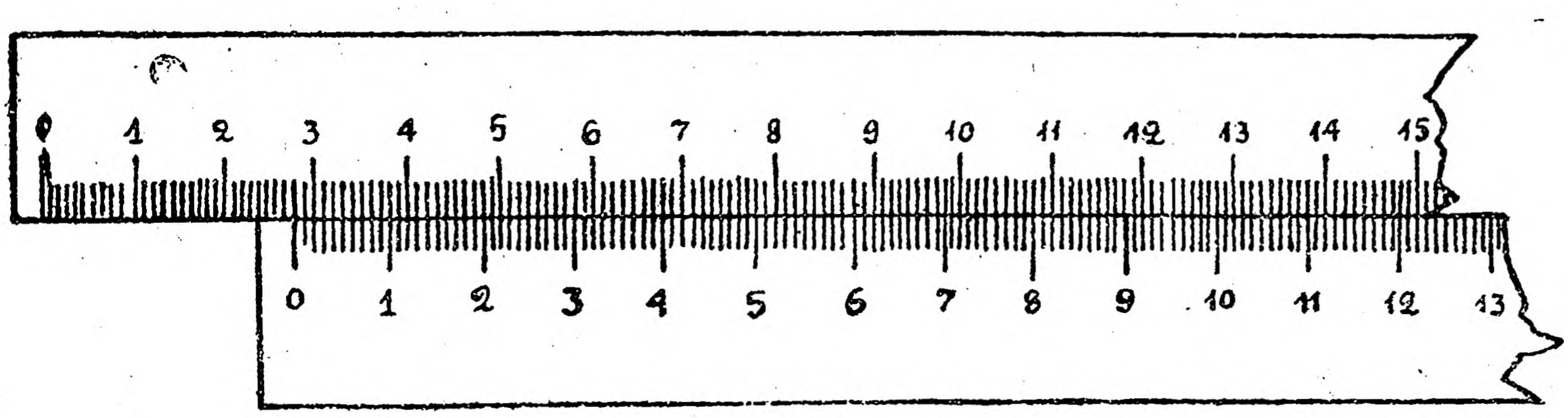
Арифмометры — лучшие современные приборы для производства действий над многозначными числами, не имеющие себе конкурентов в тех вычислениях, когда результат требуется с высокой точностью. К сожалению, их широкому распространению препятствует высокая их цена: новый арифмометр советского производства обходится в настоящее время около 300 руб.

§ 53. Счетная линейка. Если, как в большинстве технических расчетов, достаточно знать немногие первые значащие цифры результата, то предпочитают пользоваться особым счетным прибором — „счетной логарифмической линейкой". Прибор этот, гораздо более дешевый и более портативный, чем арифмометр, позволяет получать приближенные результаты действий умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня (квадратного и кубического) *быстрее*, чем посредством арифмометра, но зато с ограниченной точностью, а именно, дает первых 3, иногда 4 значащих цифры этих результатов. Кроме того, посредством линейки выполняется ряд операций (вычисления с логарифмами, тригонометрическими функциями и т. п.), которые посредством одного арифмометра (без таблиц) вовсе невыполнимы. Наконец — и это особенно важно — линейка позволяет в очень многих случаях посредством *одной* установки получить результат вычисления по формуле, содержащей *несколько* действий. Все эти преимущества обеспечили линейке чрезвычайно широкое распространение, и в настоящее время умение работать на линейке требуется от каждого инженера, техника и даже от некоторых категорий квалифицированных рабочих.

Соединение линейки с другими средствами вычисления позволяет с выгодой применять ее и в тех случаях, когда требуется более высокая точность результата. Кроме того, линейкой пользуются для предварительной приближенной оценки результата, а также для приближенной его поверки.

Обучение работе на линейке далеко не так просто, как на арифмометре, и требует уже не 15—20 *минут*, а по крайней мере четырех-шести *часов*. Отсылая читателя, желающего основательно изучить теорию линейки, к специальным руководствам, [1] рассмотрим здесь только основной принцип линейки.

Если взять две тожественных миллиметровых шкалы, нанесенных одна на верхнем краю одной линейки, другая на нижнем краю другой линейки, то, перемещая эти две шкалы друг относительно друга, мы можем механически выполнять сложение и вычитание небольших чисел. На фиг. 1 нулевой штрих нижней шкалы поставлен против штриха с меткой 2,8 верхней шкалы. В таком положении прибор дает суммы числа 2,8 с разными числами. Например, чтобы сложить 2,8 и 7,3, надо



Фиг. 1.

найти штрих с меткой 7,3 на нижней шкале и „прочесть“ противостоящую метку 10,1 верхней шкалы. Это и будет искомая сумма.

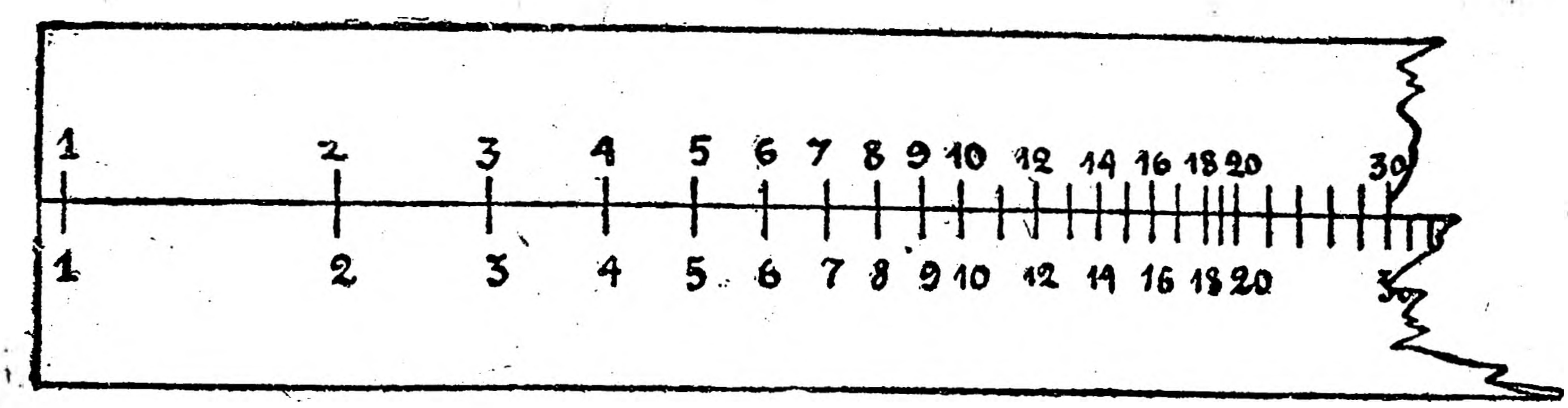
Этот прибор (его можно назвать „счетной метрической линейкой“), конечно, никакого практического значения иметь не может, так как во многом будет уступать счетам. Однако, небольшое его видоизменение даст нам как раз ту „счетную логарифмическую линейку“, о которой была речь выше.

В счетной метрической линейке мы имели две *равномерных* шкалы, где расстояние каждой точки от начала шкалы, выраженное в определенных единицах длины, численно равняется метке этой точки. Если, сохраняя метки штрихов, передвинуть самые

---

[1] См., напр., А. Михайлов. Счетная линейка и ее практическое применение. Гиз, 1928; П. С. Радецкий и В. А. Никитин. Логарифмическая счетная линейка. Научное хим.-техн. изд. НТО ВСНХ, 1925; Н. И. Идельсон. Механизация счета. Гиз, 1930. В последней книге много внимания уделено и другим способам механизации вычислительной работы.

штрихи по шкале так, чтобы расстояние каждого штриха от начала шкалы, выраженное в определенных единицах длины, стало равно *логарифму* соответственной метки (при некотором основании), то мы получим так называемую *логарифмическую шкалу*. Взяв за единицу длины, например, дециметр, и пользуясь обыкновенными (десятичными) логарифмами, мы должны будем штрих с меткой 1 поставить туда, где в метрической шкале стояла метка 0, так как $\lg 1 = 0$; штрих с меткой 2 поставить на расстоянии 0,301 *дм* = 3,01 *см*, так как $\lg 2 = 0{,}3010$; штрих с меткой 3 — на расстоянии 0,477 *дм* = 4,77 *см*, так как $\lg 3 = 0{,}4771$ (тысячные доли сантиметра, не имея возможности принять их во внимание при постановке штриха, мы отбрасываем). Штрих с меткой 10 окажется на расстоянии 1 *дм* = 10 *см* от начала, так как $\lg 10 = 1$, т. е. останется на прежнем месте. Операция эта проделывается со всеми штрихами метрической шкалы.

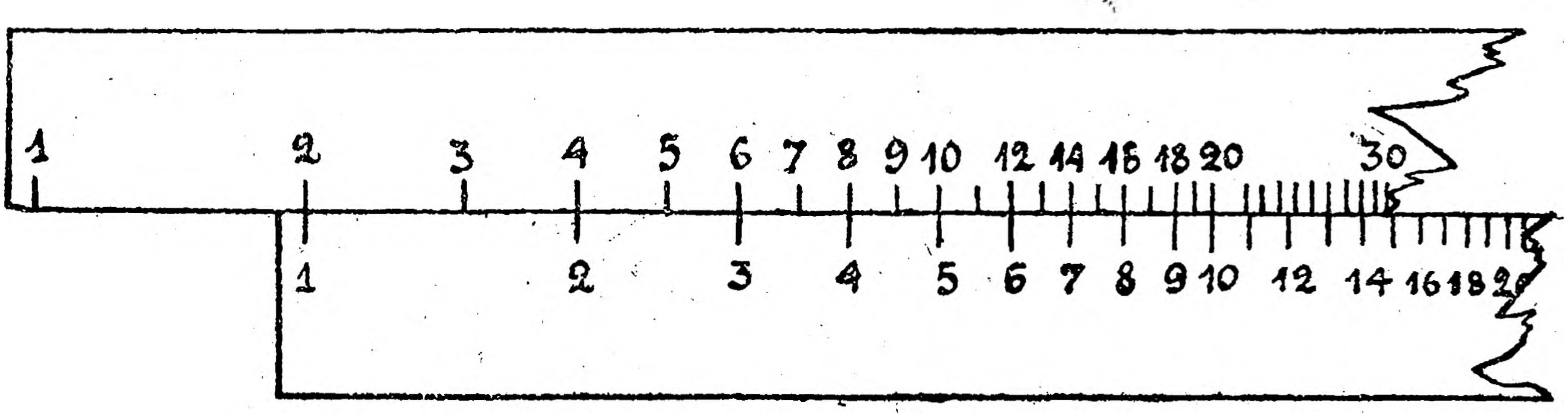


Фиг. 2.

Отрезок такой логарифмической шкалы, содержащий метки от 1 до 30, изображен на фиг. 2. Здесь мы видим характерную особенность логарифмической шкалы: промежутки между штрихами, имеющими метки 1, 2, 3 и т. д., постепенно уменьшаются. После штриха с меткой 10 мы поставили цифровые метки уже не у каждого штриха, а через штрих. После штриха с меткой 20, когда расстояние между двумя соседними штрихами уменьшилось до 2 *мм*, мы совсем опустили, чтобы не загромождать чертежа, штрихи с нечетными метками, сохранив цифровые метки только у штрихов, означающих десятки.

Продолжив штрихи еще на такое же расстояние вниз и поставив у нижних их концов те же цифровые метки, что уже поставлены у верхних их концов, разрежем полоску бумаги, на которой начерчена логарифмическая шкала, по прямой AB, и получим две тожественные логарифмические шкалы. Сдвигая одну из них относительно другой так, чтобы ее начало, т. е. точка с меткой 1, оказалась против метки 2 другой шкалы (фиг. 3), мы увидим, что против каждой метки a нижней шкалы теперь находится метка $b=2a$ верхней шкалы (против метки 3 нижней шкалы находится метка $2 \cdot 3=6$ верхней шкалы, против метки 8 нижней шкалы находится метка $2 \cdot 8=16$ верхней шкалы и т. д.). Мы, таким образом, выполнили умножение любого числа (в пределах шкалы) на 2. Установив начало нижней шкалы против метки 3 верхней шкалы, мы выполним умножение любого числа на 3. Вообще, установив метку 1 нижней шкалы против метки a верхней шкалы и взяв на нижней шкале метку b, мы получим против этой метки b нижней шкалы метку c верхней шкалы, и всегда будет $c=ab$.

Легко понять, почему это так. Длина отрезков верхней шкалы от ее начала до метки a равна $\lg a$, отложенному в некотором масштабе. Сюда прибавляется длина отрезка нижней шкалы от ее начала до метки b. Этот отрезок равен $\lg b$ (в том же масштабе). На верхней шкале мы имеем, таким образом, от



Фиг. 3.

начала до метки c, противостоящей метке b нижней шкалы, сумму логарифмов $\lg a+\lg b$, равную, как известно, $\lg ab$. Но, с другой стороны, отрезок верхней логарифмической шкалы от ее начала до метки c равен $\lg c$. Следовательно, $\lg c=\lg ab$, откуда $c=ab$.

Чтобы разделить число a на число b, берут метку a на одной из шкал, например, нижней, и помещают против этой метки метку b верхней шкалы. Разыскав метку c нижней шкалы, оказавшуюся при этом против метки 1 верхней шкалы, мы и получим искомое частное.

Очень рекомендуем не ограничиваться прочтением настоящего описания, а действительно приготовить такую самодельную счетную линейку и поупражняться в производстве умножения и деления. Мы убедимся, что эти два действия выполняются на счетной логарифмической линейке с такой же легкостью, как сложение и вычитание — на линейке метрической.

Счетные линейки фабричного изготовления отличаются от нашей самодельной лишь тем, что делаются из прочного материала и снабжаются большим количеством весьма тщательно нанесенных штрихов. Кроме того, они обыкновенно имеют сверх двух основных логарифмических шкал еще ряд других, позволяющих выполнять другие операции, и особое приспособление (визир) для удобства отсчетов.

Повторяем, что навык в обращении с линейкой приобретается далеко не сразу. Однако, доставляемая ею выгода так велика, что ее надо горячо рекомендовать всякому, имеющему дело с числовыми расчетами.

Наряду со счетными приборами, большую помощь в вычислительной работе оказывают разного рода математические таблицы. Их рассмотрению посвящена гл. VIII. Пока же рассмотрим некоторые приемы, облегчающие производство арифметических действий.

§ 54. Особые приемы устного и письменного производства действий. Существует большое число таких приемов. Их часто переоценивают. Большого значения в деле упрощения вычислительной работы они не имеют, далеко уступая таким вспомогательным средствам вычисления, как счетные приборы и математические таблицы. Однако, с некоторыми из этих приемов все же стоит ознакомиться, и мы их рассмотрим, отсылая желающих получить более детальные сведения к специальным книгам.[1]

Возьмем так называемые *сокращенные* приемы производства действий умножения, деления и извлечения квадратного корня, и ограничимся рассмотрением только тех из них, которые оказываются на практике наиболее удобными.

Положим, требуется найти первых 4 значащих цифры произведения $29{,}97 \cdot 2{,}738$. Выполним умножение сперва обычным способом:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{29{,}97 \cdot 2{,}738} \\
\hline
23 & 976 \\
89 & 91 \\
20\,97 & 9 \\
59\,94 & \\
\hline
82{,}05 & 786 \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{82{,}06}
\end{array}$$

[1] Напр., см., „Арифметические действия“ А. О. Филиппова. „Матезис“, 1912.

Тот же (или почти тот же) результат можно получить, ограничивая вычисление лишь цифрами, расположенными левее пунктирной черты. Вот запись этого „сокращенного“ умножения:

$$\begin{array}{l} 29{,}97 \cdot 2{,}738 \\ \underline{83\,72} \\ 59\,94 \\ 20\,98 \\ 90 \\ \underline{24} \\ 82{,}06 \end{array}$$

Цифры множителя подписываются под цифрами множимого в *обратном* порядке, причем, раз требуется 4 значащих цифры произведения, то цифра старшего разряда множителя подписывается под 4-й (считая слева направо) значащей цифрой множимого. Каждое частное произведение получается путем умножения (на соответствующую цифру множителя) лишь тех цифр множимого, которые *выше* и *левее* этой цифры множителя. Так, на 2 умножается число 2997, на 7 — только 299, на 3 — уже лишь 29, и на 8 — только 2. На отбрасываемые цифры множимого берется приближенная *поправка*. Например, при получении второго частного произведения замечаем прежде всего, что отбрасываемая цифра 7 при умножении на 7 дает около 5 десятков. Запоминая эту поправку 5, умножаем 9 на 7 и к произведению 63 прибавляем 5. Получив 68, 8 записываем под крайней правой цифрой первого частного произведения, цифру же 6 запоминаем. Получение остальных цифр частного произведения идет обычным порядком.

Для определения положения знака дробности надо произвести грубо-приближенную оценку произведения. В данном случае, получив в произведении цифры 8206 и замечая, что сомножители близки к 30 и 3, видим, что произведением может быть только число 82,06, а никак не 8,206 или 820,6.

Записывая сомножитель так, как указано выше, мы получим либо как раз столько цифр, сколько требуется, либо одной больше. В последнем случае эту лишнюю цифру отбрасываем.

Для примера найдем еще произведение 215,697 · 3,77264 с 5 значащими цифрами и 0,76543 · 1,8742 с 4 значащими цифрами (пример см. на стр. 152).

Объяснение этого приема не представляет затруднений. Надо только сопоставить частные произведения при полном и сокращенном умножении. Погрешность результата сокращенного умножения (при точных сомножителях) не превосходит полуединицы последнего разряда произведения, умноженной на число цифр множителя.

215,697 · 3,77264		0,76543 · 1,8742	
462773		24781	
64709		7654	
15099		6123	
1510		536	
43		31	
13		1	
1		1,4345	
813,75		1,434	
Точное произведение 813,74713008		Точное произведение 1,434568906	

Переходя к сокращенному делению, рассмотрим такой пример: требуется найти 4 первых значащих цифры частного от деления 81,3747 на 0,377264. Выполняя деление обычным способом, имеем

81,37	4700 : 0,377264 = 215,6..	
75,45	28	= 215,7.
592	190	
377	264	
214	9260	
188	6320	
26	29400	
22	63584	
3	658160	

Здесь тоже можно устранить из вычисления все цифры правее пунктирной черты. Для этого отделяем в делителе столько цифр, сколько их требуется в частном, т. е. в данном случае 4 значащих цифры, и начинаем деление обычным способом, не обращая внимания на знаки дробности в делимом и в делителе, с той лишь разницей, что после получения каждой цифры частного отбрасываем по одной (последней) цифре делителя, а последующих цифр делимого не сносим. Вот вся запись сокращенного деления:

$$\begin{array}{r}
813747 : 377264 = 2157 \\
7545 \\
\hline
592 \\
377 \\
\hline
215 \\
189 \\
\hline
26 \\
26 \\
\hline
0
\end{array}$$

Разделив 8137 на 3772, получаем первую цифру частного 2. Умножив 2 на 3772 с поправкой на отброшенные цифры делителя, получаем произведение 7545 и первый остаток 592. Теперь отбрасываем последнюю цифру делителя и делим 592 уже только на 377. Получаем вторую цифру частного 1, умножаем ее на 377 и находим второй остаток 215. Делим его на 37, получаем третью цифру частного 5, произведение которой на 37 с поправкой на отброшенные цифры делителя есть 189. Это дает третий остаток 26. Остается разделить 26 на 3. Если возьмем в частном 8, то произведение 8 на 3 с поправкой на отброшенные цифры делителя даст 30 и остаток — 4. Если же взять в частном не 8, а 7, то произведение 7 на 3 (с поправкой) даст как раз 26.

Итак, цифровой состав частного установлен. Остается выяснить положение знака дробности. Берем грубо приближенные значения делимого и делителя и замечаем, что частное должно быть близким к $80 : 0{,}4 = 800 : 4 = 200$. Поэтому ставим запятую после третьей значащей цифры и получаем окончательно в частном 215,7.

Правило сокращенного деления становится вполне понятным, если сопоставить шаг за шагом весь процесс при полном и сокращенном делении.

Если найдено n цифр частного, то, как легко видеть, погрешность последнего остатка никогда не превзойдет числа $0{,}5\ (n+1)$, выраженного в единицах разряда последней цифры этого остатка. Исходя из этого, нетрудно рассчитать и границу погрешности частного. Так, в рассмотренном примере последний остаток 0 выражен в сотых долях и имеет погрешность, не превосходящую $0{,}5 \cdot (4+1) = 2{,}5$ сотых. Погрешность частного поэтому не больше $2{,}5 : 0{,}377\ldots$, а следовательно и подавно меньше $2{,}5 : 0{,}3 = 8\frac{1}{3} < 10$ сотых или 0,1. Итак, можем ручаться, что погрешность найденного числа 215,7 меньше 0,1. Как и в других случаях, истинная погрешность бывает обыкновенно значительно меньше своего предельного значения. В рассмотренном примере точное частное есть 215,697..., а потому истинная погрешность частного равна только 0,003...

Для примера вычислим еще частное $\frac{1}{\pi}$ с 3, 4, 5 значащими цифрами ($\pi = 3{,}1415926\ldots$.)

1000 : 31415 = 319;	10000 : 314159 = 3183;	100000 : 3141592 = 31831
942	9425	94248
58	575	5752
31	314	3142
27	261	2610
28	251	2513
—1	10	97
	9	94
	1	3
		3
		0

Грубо приближенная оценка дает положение запятой, и получаем такие окончательные значения частного:

$$0{,}319;\ 0{,}3183;\ 0{,}31831.$$

Для сравнения приводим более точное значение дроби $\frac{1}{\pi}$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098\ldots$$

При сокращенном делении возможно появление, в качестве одной из *цифр* частного, *числа* 10. Это указывает на необходимость усиления на 1 предшествующей цифры частного. Вот пример:

$$
\begin{array}{r l}
2097 : 1049 & = 1,99(10) \\
1049 & \approx 2,000 \\
\hline
1048 & \\
944 & \\
\hline
104 & \\
94 & \\
\hline
10 &
\end{array}
$$

Обычный способ деления дает для частного значения 1,99947...

Остается рассмотреть сокращенный способ извлечения квадратного корня. Он основан на следующей теореме:

Если по вычислении n значащих цифр квадратного корня остаток от извлечения разделить на удвоенное найденное значение корня, то частное дает $n-1$ следующую цифру корня, причем последняя будет по крайней мере почти точна.

Для доказательства предположим, что подкоренное b имеет целую часть из n граней. Пусть найдено n первых цифр корня, образующих собою число a, и надо найти дробную часть корня, которую обозначим буквой x. Таким образом, $\sqrt{b}=a+x$, $b=a^2+2ax+x^2$, $\frac{b-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}$. Разность $b-a^2$ не что иное, как остаток, получаемый после разыскания n цифр корня, а дробь $\frac{b-a^2}{2a}$ представляет собой то самое частное, о котором говорится в тексте теоремы. Отсюда заключаем, что $x=\frac{b-a^2}{2a}-\frac{x^2}{2a}$. Принимая $x=\frac{b-a^2}{2a}$, мы допускаем погрешность, равную $\frac{x^2}{2a}$. Но $x<1$, $a\geqq 10^{n-1}$, а потому $\frac{x^2}{2a}<\frac{1}{2\cdot 10^{(n-1)}}=0,5\cdot 10^{-(n-1)}$. Если, выполняя деление $b-a^2$ на $2a$, мы становимся, найдя $n-1$ десятичный знак частного, и округлим его как обычно, то к выше найденной погрешности прибавится еще погрешность от округления, и полная погрешность приближенного значения корня в самом неблагоприятном случае может приблизиться к целой единице разряда $(n-1)$-ого десятичного знака, но никогда не достигнет этого предельного значения.

Если знак дробности в подкоренном стоит не там, где мы его предполагали, его всегда можно перенести на надлежащее место, производя умножение (или деление) подкоренного на некоторую степень 10 с четным показателем, с тем чтобы потом разделить (или умножить) найденный корень на степень 10 с показателем, вдвое меньшим. На практике делать это преобразование не нужно.

Рассмотрим пример. Положим, требуется найти $\sqrt{10}$ с 7 значащими цифрами. Обычным способом найдем первые 4 цифры; деление остатка на удвоенный корень даст следующие 3. Для сравнения рядом помещаем запись процесса получения всех 7 цифр обычным способом.

$\sqrt{10} = 3{,}162\,277$

9	
61	10′0
1	6 1
626	390′0
6	375 6
6322	1440′0
2	1264 4
	1756 : 6324
	1265
	491
	443
	48
	44
	4

$\sqrt{10} = 3{,}162\,277\ldots$

9	
61	10′0
1	6 1
626	390′0
6	375 6
6322	1440′0
6	1264 4
63242	17560′0
2	12648 4
632447	491160′0
7	442712 9
6324547	48447100
7	44271829
	4176271

Остаток 1756 мы считали целым и делили его на удвоенное найденное число, тоже считая его целым, а полученные цифры частного просто приписали к найденной ранее части корня. В самом деле, остаток у нас равен $1756 \cdot 10^{-6}$, удвоенное найденное число — $6324 \cdot 10^{-3}$, частное — $0{,}277 \cdot 10^{-3}$, и оно записано у нас на надлежащем месте.

§ 55. Графический способ решения вычислительных задач. В очень многих случаях достаточно бывает получить результат вычисления с 2—3 цифрами. Тогда выгодно применять *графические приемы* решения. В качестве простейшего примера можно указать графическое решение треугольников и фигур, составленных из треугольников. Применяя основные чертежные приборы, легко получить решение многих геометрических задач, просто вычерчивая соответствующие фигуры на бумаге. Пусть, например, требуется найти расстояние между двумя недоступными точками A и B на местности. Измерив подходящий *базис* CD, найдем измерением же 4 угла: ACD, BCD, ADC, BDC. Искомую длину AB можно *вычислить*, решая по правилам тригонометрии три треугольника: из $\triangle ACD$ находим сторону AC, из $\triangle BCD$ сторону BC, из $\triangle ABC$ — сторону AB. Но графическое решение даст искомую длину AB значительно скорее: надо лишь аккуратно начертить в подходящем масштабе базис CD и построить посредством транспортира углы при точках C и D. Пересечения двух пар прямых дадут положения точек A и B на чертеже, и останется только измерить на чертеже отрезок AB, принимая во внимание масштаб. Правда, точность результата, полученного графическим способом, будет несколько ниже, чем результата вычисления хотя бы посредством 4-значных таблиц. Но необходимо принимать во внимание и точность данных. Если в нашей задаче углы на местности измерены с помощью самодельного угломерного прибора с точностью до полуградуса, то более высокая точность тригонометрического способа будет здесь совершенно бесполезна, и графический способ нужно будет предпочесть.

Так как всякую зависимость между величинами можно истолковать геометрически, то всякую вычислительную задачу, с большей или меньшей выгодой, можно превратить в задачу геометрическую, и решать ее графическим способом.

Положим, имеется ряд чисел:

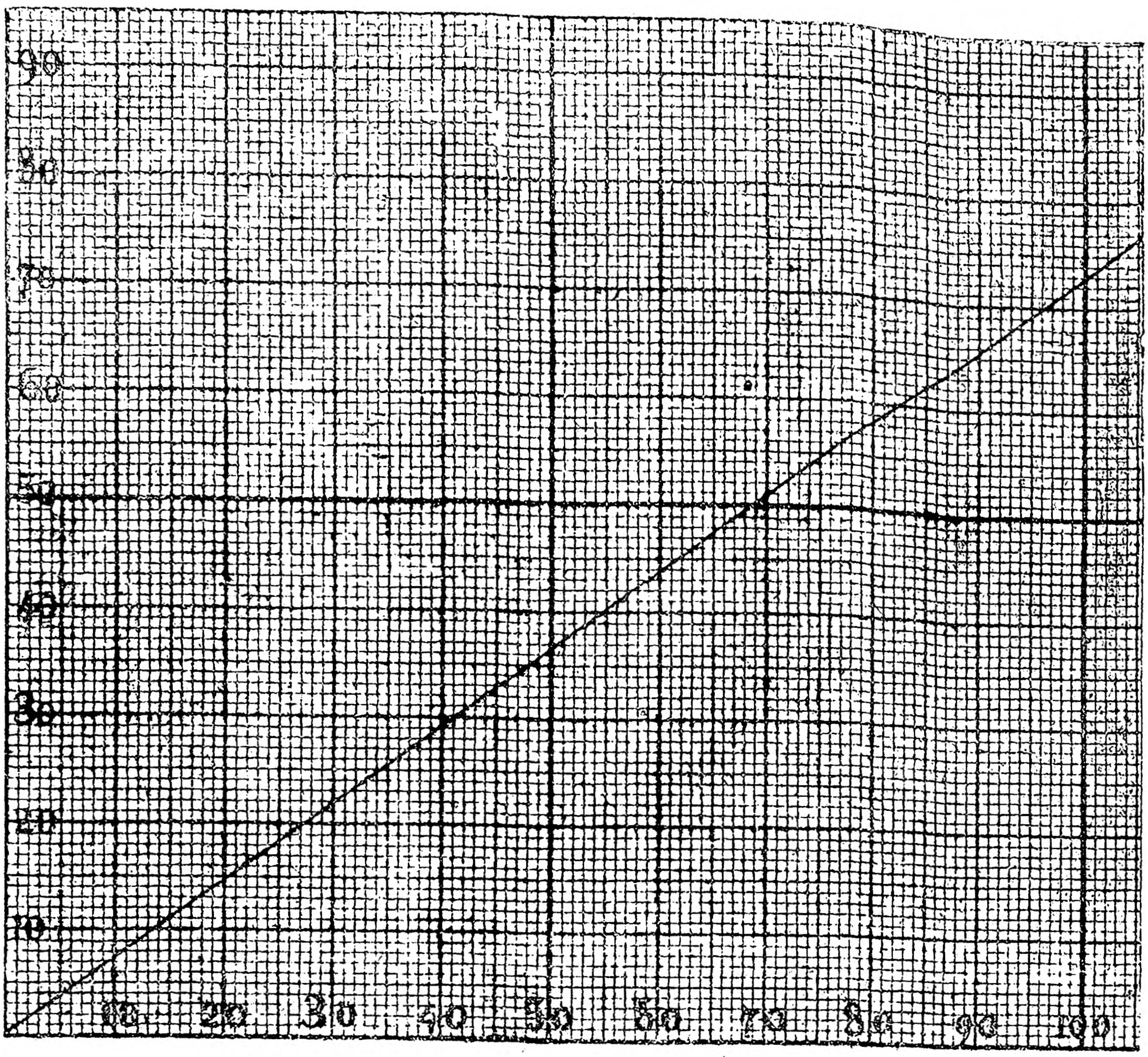
$$18,\ 23,\ 38,\ 57,\ 85,\ 92,$$

выражающих цены различных товаров в копейках. Требуется снизить цены на 27%. Найти сниженные цены товаров, отбрасывая доли копеек. Вместо того чтобы решать задачу вычислением, можно взять кусочек миллиметровой бумаги и начертить на нем прямоугольный треугольник с катетами в 100 *мм* и $100 - 27 = 73$ *мм*. Проводя параллели меньшему катету на расстояниях от вершины острого угла, лежащего против этого меньшего катета, равных 18, 23, 38 и т. д. *мм*, мы получим, в силу подобия треугольников, отрезки, длины которых (в *мм*) дадут искомые уменьшенные цены. Проводить эти параллели карандашом, конечно, не надо: достаточно лишь *проследить* их глазом и, пользуясь линиями сетки, сделать отсчет. Чертеж, изображенный на фиг. 4, дает такие результаты:

13, 17, 28, 42, 62, 67.

Точные значения искомых величин таковы:

13,14; 16,79; 27,74; 41,61; 62,05; 67,16.

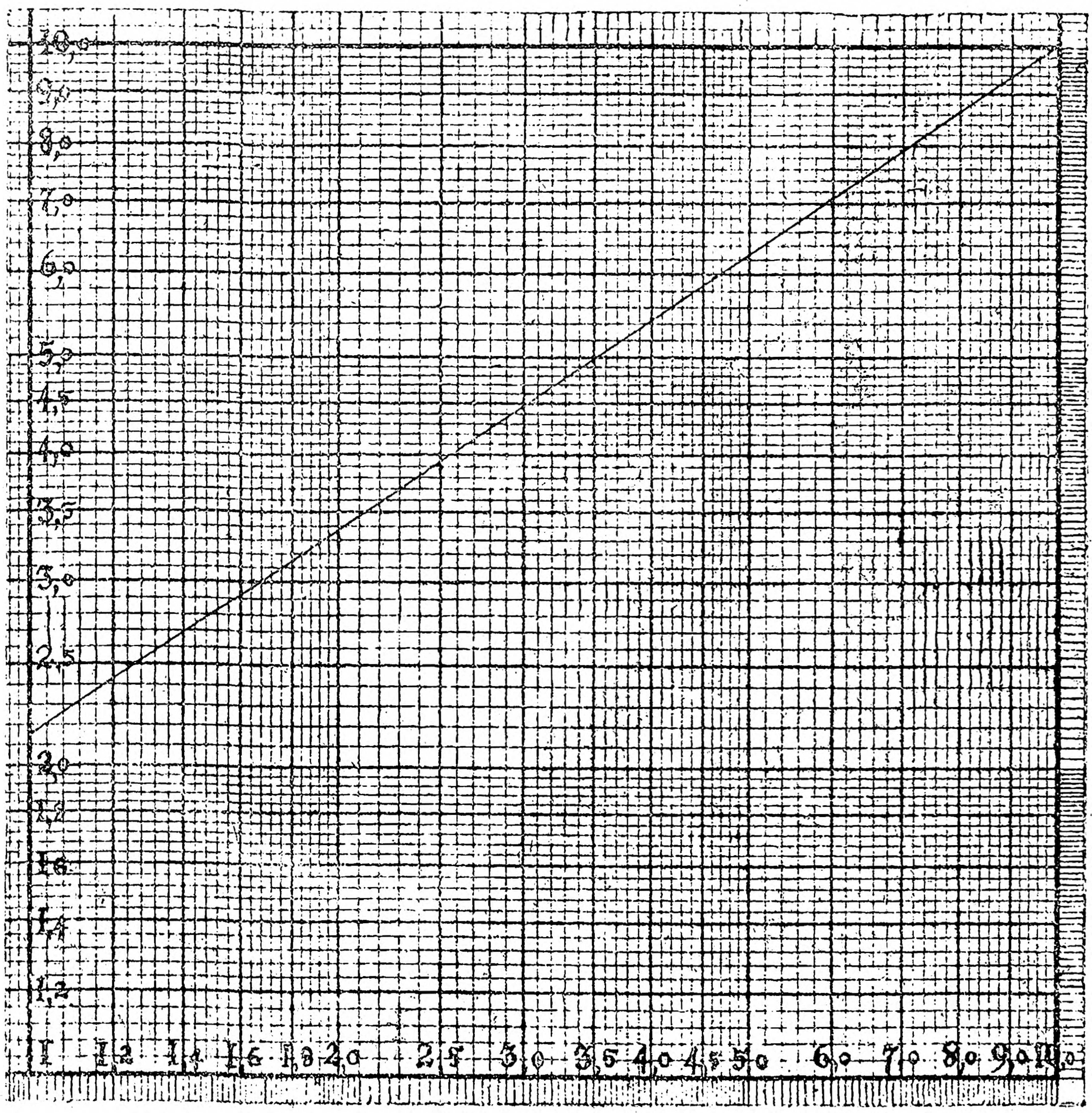


Фиг. 4.

Отметим, что в настоящем случае мы получим искомые уменьшенные цены еще скорее, чем графическим способом, и точнее, если применим счетную логарифмическую линейку.

При решении этой задачи, как и многих других, существенную пользу приносит употребление миллиметровой клетчатой бумаги.

Еще более серьезные услуги при вычислении оказывает *логарифмическая бумага*, один из типов которой изображен на **фиг. 5. Как видим, здесь на двух взаимно перпендикулярных** прямых (внизу и слева) нанесены логарифмические шкалы. Каждая метка каждой из этих двух шкал отстоит от точки их пересечения на расстоянии, равном произведению 100 *мм* на логарифм соответствующего числа. Так, метка 2 находится на расстоянии $100 \lg 2 = 100 \cdot 0{,}3010 = 30{,}1$ *мм*, метка 5 — на расстоянии $100 \lg 5 = 100 \cdot 0{,}6990 = 69{,}9$ *мм* и т. д.



Фиг. 5.

На миллиметровой бумаге всякая зависимость между переменными величинами x и y, приводящаяся к формуле $ax + by = c$, где a, b, c — определенные постоянные числа, изображается *прямой линией*. На логарифмической бумаге (изображенного на фиг. 5 типа) прямая линия изображает значительно более сложную зависимость, выражаемую формулой $x^a y^b = c$. Если, например, требуется вычислить y по формуле

$y=2{,}16\sqrt[3]{x^2}$ для различных значений x от $x=1$ до $x=10$, достаточно вычислить y для двух каких-нибудь значений x и провести через соответствующие точки, взятые на логарифмической бумаге, прямую линию. Тогда простые *отсчеты* по чертежу дадут искомые значения x. Найдем значения y при $x=1$ ($y=2{,}16$) и $x=8$ ($y=2{,}16\cdot 4=8{,}64$). Будем значения x откладывать по горизонтальной оси, значения y по вертикальной. Возьмем точки A ($x=1$, $y=2{,}16$) и B ($x=8$, $y=8{,}64$) и проведем через них прямую. Теперь, желая получить значение y, соответствующее определенному значению x, находим на горизонтальной оси точку, метка которой равна этому значению x, и подымаемся от этой точки по перпендикуляру к горизонтальной оси вверх. Достигнув проведенной нами прямой AB, поворачиваем влево и движемся дальше по перпендикуляру к вертикальной оси, пока не достигнем этой последней. Метка соответствующей точки вертикальной оси и даст искомое значение y. Например, для значений x, приведенных ниже в первой строке таблички, наш график дает значения y, приведенные ниже во второй строке. В третьей строке даны соответствующие значения y, найденные посредством таблицы 4-значных логарифмов.

x	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
y (по графику) .	2,44	2,70	2,95	3,15	3,45	3,60	3,80	4,05
y (по таблице) . .	2,440	2,703	2,955	3,197	3,430	3,655	3,873	4,085

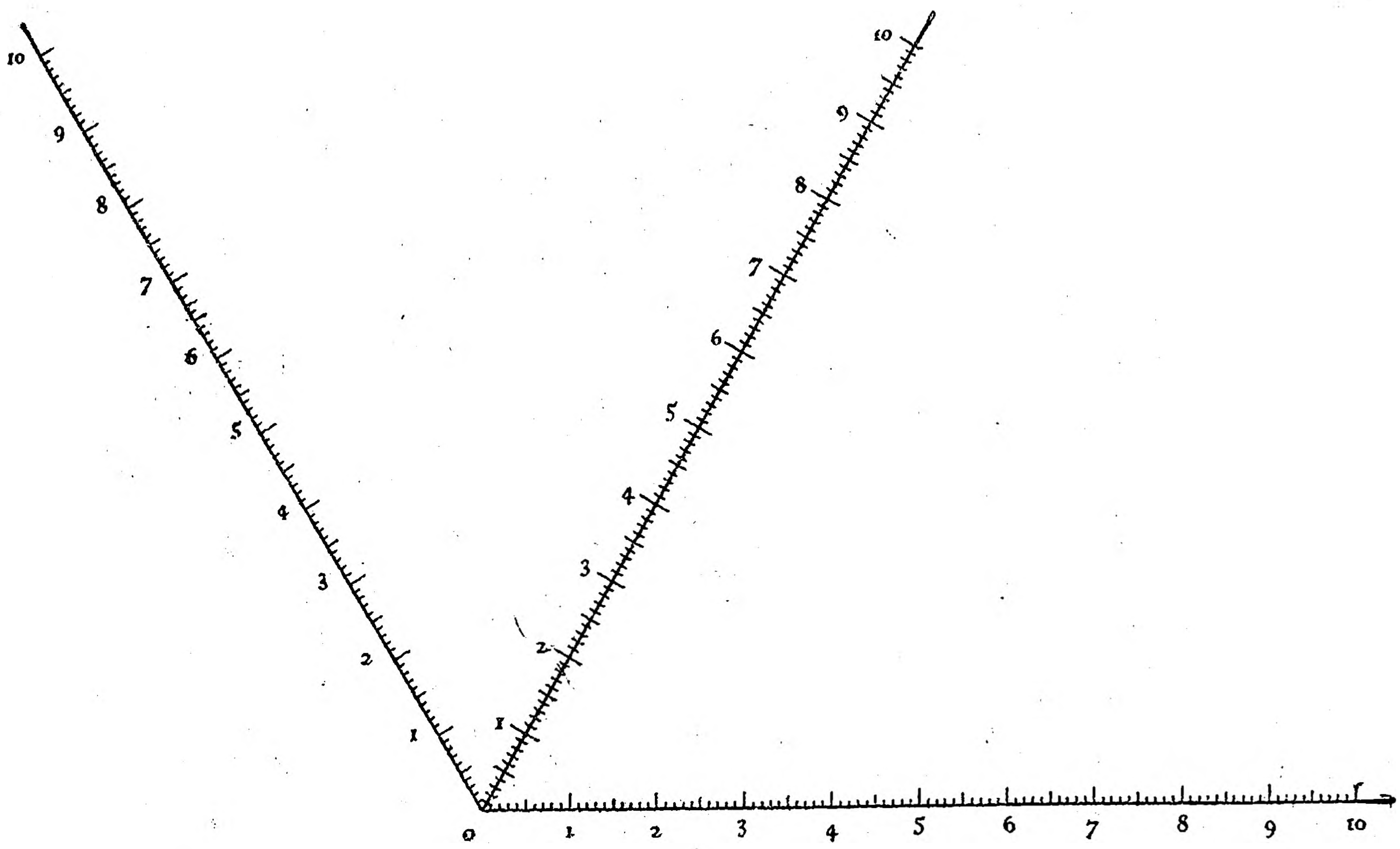
§ 56. Примеры из номографии. Особый и чрезвычайно важный метод графических расчетов дает *номография*, рассматривающая построение и употребление *номограмм*. Номограммой называется такое графическое изображение определенной зависимости между 2, 3, 4 и большим числом переменных величин, которое позволяет находить числовые значения каждой из них, коль скоро указаны значения остальных, притом с применением лишь самых простых операций: прикладывания линейки, или угольника, или особого транспаранта, или натягивания нити и т. п. Таким образом, частными случаями номограмм являются и те два чертежа, что были изображены на фиг. 4 и 5 и рассмотрены в предшествующем параграфе. Очень простой и всем известный пример номограммы представляет собой шкала термометра, если на ней указаны с одной стороны (например, слева) градусы Реомюра, а с другой (справа) — градусы Цельсия. Рассмотрим две несколько более сложных монограммы.

На фиг. 6 мы имеем три обыкновенных миллиметровых шкалы, сходящиеся в одной точке и образующие углы по 60°.

Это не что иное как номограмма для решения уравнения,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z},$$

часто встречающегося в вопросах оптики и электричества. Чтобы найти, например, значение z, соответствующее значениям $x=5{,}2$ и $y=4{,}2$, разыскиваем на двух крайних шкалах соответствующие метки и натягиваем через них нить. Нить пересекает сред-



Фиг. 6.

нюю шкалу в точке, метка которой, как видим, есть 2,3. Это число и есть искомое приближенное значение z (точное значение z равно 2,323...). Аналогично разыскивается x (или y) по данным y (или x) и z: данные значения берутся на одной из крайних шкал и на средней шкале, искомое получаем на другой крайней.

Доказать, что эта номограмма действительно дает решение уравнения $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$, проще всего следующим образом. Обозначив точки пересечения секущей с двумя крайними шкалами через A и C, а со средней через B, имеем соотношение:

площадь $\triangle AOB$ + площадь $\triangle BOC$ = площади $\triangle AOC$,

откуда

$$\frac{1}{2}xz\sin 60^\circ+\frac{1}{2}zy\sin 60^\circ=\frac{1}{2}xy\sin 120^\circ.$$

Так как $\sin 60° = \sin 120°$, то после сокращения на $\frac{1}{2}\sin 60°$ получаем уравнение

$$xz + yz = xy,$$

или, после деления обеих частей на xyz,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Другой пример дает нам номограмма, изображенная на фиг. 71, позволяющая решать уравнения $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$ и $V = \frac{1}{12}\pi d^2 h$, т. е. находить объемы цилиндров и конусов по данным значениям поперечников их оснований (d) и данным значениям их высот (h), а также решать обратные задачи. Чтобы найти, например, объем цилиндра (или конуса), соответствующий поперечнику основания $d = 2{,}8$ *см* и высоте $h = 5{,}1$ *см*, натягивают тонкую нить через соответствующие метки крайних шкал и читают метку средней шкалы, получаемую в пересечении, причем левая метка средней шкалы дает объем цилиндра $V_ц = 31{,}4$ *см*^{3}, правая же — объем конуса $V_к = 10{,}5$ *см*^{3}. Таблица 4-значных логарифмов дает в настоящем случае $V_ц = 31{,}41$ *см*^{3}, $V_к = 10{,}47$ *см*^{3}. Если данные значения d и h выходят из границ 1 и 10, то их предварительно представляют в виде произведений чисел, заключенных между 1 и 10, на соответствующие степени 10.

Все три шкалы рассматриваемой номограммы — логарифмические, и начерчены параллельно друг другу, причем расстояние между верхней и средней есть $a = 35$ *мм*, между средней и нижней $2a = 70$ *мм*. Левая шкала размечена согласно уравнению $\overline{d} = 100 \lg d$, где буква d означает метку любого штриха шкалы, а та же буква со штрихом сверху ($\overline{d}$) — расстояние этой метки от начала шкалы, выраженное в *мм*. Правая шкала размечена согласно уравнению $\overline{h} = 100 \lg h$, а средняя — согласно уравнениям

$$\overline{V}_ц = \frac{100}{3} \lg \frac{4\,V_ц}{\pi} \text{ (сверху) и } \overline{V}_к = \frac{100}{3} \lg \frac{12\,V_к}{\pi} \text{ (снизу).}$$

Взяв метки d, $V_ц$, h, расположенные на одной и той же прямой, пересекающей все три шкалы (нить!), и опустив из метки $V_ц$ перпендикуляр на шкалу h, из метки d — на шкалу $V_ц$, получим

Фиг. 7.

пару прямоугольных подобных треугольников с катетами $\overline{V}_ц - \overline{d}$ и a (левый треугольник) и $\overline{h} - \overline{V}_ц$ и 2 a (правый треугольник). Из подобия треугольников получаем соотношение

$$\frac{\overline{h} - \overline{V}_ц}{\overline{V}_ц - \overline{d}} = \frac{2a}{a} = 2,$$

которое дает, что $3\,\overline{V}_ц = \overline{h} + 2\,\overline{d}$, или что

$$3 \cdot \frac{100}{3} \lg \frac{4\,V_ц}{\pi} = 100 \lg h + 2 \cdot 100 \lg d,$$

откуда

$$\lg \frac{4\,V_ц}{\pi} = \lg h + 2 \lg d = \lg h\,d^2$$

или

$$\frac{4\,V_ц}{\pi} = hd^2,\ V_ц = \frac{1}{4}\pi\,d^2 h.$$

Как видим, номограмма действительно дает зависимость между поперечником основания цилиндра, его высотой и его объемом. Предоставляем читателю доказать, что нижняя средняя шкала дает то же для конуса.

Недостаток места вынуждает нас ограничиться лишь этими немногими примерами пользы графических приемов вычисления. Желающих ознакомиться с ними ближе отсылаем к специальной литературе. [1]

В заключение отметим еще раз громадное значение графического метода. Нет никакого сомнения в том, что метод этот еще не получил того распространения, какое он заслуживает: очень многие расчеты, производимые обыкновенным вычислительным методом, могут быть выполнены графическим методом с меньшей затратой времени и сил и с достаточной точностью.

ГЛАВА VIII

УСТРОЙСТВО И УПОТРЕБЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

§ 57. Основные типы таблиц. В вычислительной практике постоянно употребляются разного рода математические таблицы, представляющие собой прекрасное вспомогательное средство вычислений, чрезвычайно простое по своему устройству и употреблению, вполне общедоступное по своей дешевизне, в высокой степени гарантирующее от ошибок, доставляющее громадную экономию времени и сил.

---

[1] См. В. В. Добровольский. Графический метод в школе Гиз, 1924; П. П. Соколов. Номография. Гостехиздат, 1925; Н. Г. Кувыркин. Практика графических вычислений. Гиз, 1929; Школьная рабочая библиотека, № 7.

Наибольшее распространение имеют таблицы, дающие зависимость между *двумя переменными величинами* (из них одна является *аргументом*, другая *функцией*). Таковы, например, таблицы логарифмов, квадратов, кубов и т. д. Таблицы, дающие зависимость между тремя переменными („таблицы функций двух аргументов“), а тем более между бо́льшим числом их, встречаются гораздо реже, и мы коснемся их лишь вскользь, рассматривая почти исключительно функции одного аргумента.

Понимание полной теории математических таблиц невозможно без знакомства с особой ветвью математического анализа, носящей название „Исчисления конечных разностей“. Поэтому, оставляя в стороне более строгое доказательство устанавливаемых предложений, мы займемся исключительно выяснением практических приемов обращения с таблицами.

Рассмотрим три приведенных ниже таблицы (взяты только начала таблиц I и II):

I

d	C	Δ
1,00	3,142	31
1,01	3,173	31
1,02	3,204	32
1,03	3,236	31
1,04	3,267	32
1,05	3,299	31
1,06	3,330	32
1,07	3,362	31
1,08	3,393	31
1,09	3,424	32
1,10	3,456	

II

x	y	Δ
10	100	21
11	121	23
12	144	25
13	169	27
14	196	29
15	225	31
16	256	33
17	289	35
18	324	37
19	361	39
20	400	

III

A	$\sin A$	Δ
0°	0,000	259
15°	0,259	241
30°	0,500	207
45°	0,707	159
60°	0,866	100
75°	0,966	34
90°	1,000	—
—	—	—
—	—	—
—	—	—
—	—	

Табл. I дает длину окружности C диаметра d. Значения диаметра d (аргумента) взяты через 0,01. Это число 0,01, т. е. разность между двумя смежными табличными значениями аргумента, называется *ступенью* таблицы. Приведенные в таблице значения для длины окружности C (функции) вычислены до тысячных по формуле $C = \pi d$. Образуем разности между каждыми двумя смежными значениями функции и убеждаемся, что они равны то 31, то 32 тысячным (разности эти помещены в столбце с заголовком Δ против промежутков между соответствующими значениями функции). Формула $C = \pi d$ показывает, что приращению d в 0,01 соответствует постоянное приращение C, равное 0,01 π, и что, следовательно, небольшое наблюдаемое колебание табличных разностей (то 31, то 32 тысячных) обусловлено исключительно округлением табличных значений функции. Мы здесь имеем, таким образом, таблицу с *равномерным изменением функции.*

Подобные таблицы с равномерным изменением функции применяются довольно часто. Таковы переводные таблицы мер (например, старых русских в метрические), таблицы для перевода градусной меры угла в радианную и т. д. Зависимость между функцией (y) и аргументом (x) выражается в таких таблицах либо формулой $y = ax$ (пропорциональность), либо формулой $y = ax + b$ (линейная зависимость). Пример таблицы, где зависимость выражается последней формулой, дает таблица для перевода показаний термометра Фаренгейта (x) в градусы термометра Реомюра (y). Здесь:

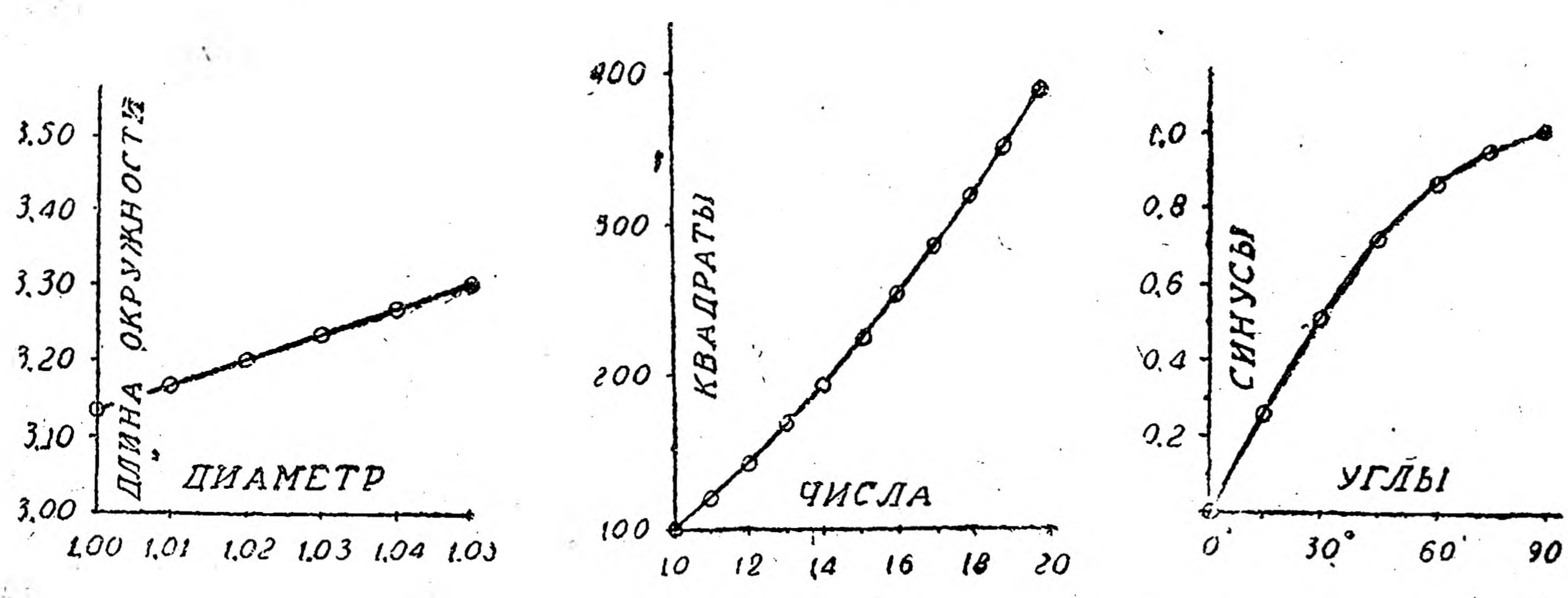
$$y = \frac{4}{9}(x - 32) = \frac{4x}{9} - 14\frac{2}{9}.$$

В табл. II, дающей квадраты последовательных целых чисел, ступень равна 1, а табличные разности (см. столбец Δ) меняются от 21 (в начале таблицы) до 39 (в конце приведенного ее отрывка). Но, рассматривая три смежных значения функции и два соответствующих смежных значения табличной разности, мы видим, что смежные табличные разности лишь немного отличаются друг от друга, а потому мы имеем здесь таблицу с *почти равномерным изменением функции.*

Именно этого рода таблицы чаще всего встречаются, и ими главным образом мы и будем заниматься в дальнейшем. В рассмотренной таблице квадратов имел место почти равномерный рост функции и вполне равномерный рост табличной разности. Последнее обстоятельство несущественно, и мы будем считать изменение функции почти равномерным всякий раз, когда две смежных табличных разности на всем протяжении таблицы отличаются одна от другой меньше, чем на 4 единицы (разряда последней цифры). Почему мы остановились именно на этом числе 4, выяснится в § 62.

В табл. III даны значения синусов с тремя десятичными знаками для углов, кратных 15°. Ступень таблички, таким образом, 15°. Табличные разности (столбец Δ) меняются здесь настолько быстро, что изменение функции приходится признать *резко неравномерным.*

Различие между таблицами трех рассмотренных типов (с равномерным, почти равномерным и резко неравномерным изменением функции) весьма наглядно выясняется посредством графиков. На фиг. 8-а имеем графическое изображение таблички длины окружности в зависимости от ее диаметра. Табличные значения функции (отмеченные кружками) расположены на одной прямой. Фиг. 8-b дает графическое изображение таблицы квадратов целых чисел от 10 до 20. Здесь табличные значения расположены уже не на прямой, а на кривой линии, но на протяжении



Фиг. 8-а. Фиг. 8-b. Фиг 8-с.

одной ступени, т. е. в промежутке между каждыми двумя табличными значениями эта кривая линия без заметной погрешности может быть принята за прямую. Наконец изображенный на фиг. 8-с график синуса заметно отклоняется от прямой линии даже на протяжении одной ступени (кроме первых двух ступеней, где неравномерность изменения функции на графике не заметна).

Одна и та же таблица в разных своих частях может давать и резко неравномерное, и почти равномерное изменение функции. Возьмем, например, таблицу квадратных корней, вычисленных с 4 десятичными знаками, из всех целых чисел от 1 до 1000, обычно приводимую в технических справочниках. В начале таблицы изменение функции резко неравномерно:

$$\sqrt{1} = 1{,}0000, \qquad \sqrt{2} = 1{,}4142, \qquad \sqrt{3} = 1{,}7321,$$

табличные разности 4142 и 3179 (десятитысячных). Далее табличные разности изменяются все медленнее и медленнее. Так, для чисел 49, 40, 51 значение корня 7,0000, 7,0711, 7,1414, в табличные разности 711 и 703. Начиная с 80, изменение функции становится уже почти равномерным (числам 80, 81, 82 соответствуют табличные разности 557 и 554). В конце таблицы числам 998, 999, 1000 соответствуют табличные разности 159 и 160.

Таблицу с резко неравномерным изменением функции часто бывает возможно превратить в таблицу с почти равномерным изменением функции путем надлежащего *округления* табличных значений, т. е. жертвуя ее точностью. Так, приведенную выше таблицу синусов, дающую резко неравномерное изменение функции при наличности трех десятичных знаков в табличных значениях, можно превратить в табличку с почти равномерным изменением функции от 0° до 45°, если округлить эти значения до 2 десятичных знаков.

Другой способ устранения резкой неравномерности изменения функции заключается в замене данной таблицы другой таблицей (той же функции) с *меньшей ступенью*. Так, взяв в таблице синусов ступень не в 15°, как выше, а только в 1°, мы при тех же трех десятичных знаках получим уже почти равномерное изменение функции на всем протяжении таблицы. Действительно, в начале таблицы мы будем иметь $\sin 0^\circ = 0{,}000$, $\sin 1^\circ = 0{,}017$, $\sin 2^\circ = 0{,}035$ и разности 17 и 18, а в конце $\sin 88^\circ = 0{,}999$, $\sin 89^\circ = 1{,}000$, $\sin 90^\circ = 1{,}000$ и разности 1 и 0.

Подобная замена одной таблицы другой, более подробной, конечно, далеко не так легко осуществима, как округление (надо либо *иметь* в своем распоряжении такую более подробную готовую таблицу, либо самому ее *составить*).

Все табличные значения функций принято вычислять с такой точностью, чтобы погрешность каждого такого значения ни в коем случае не превосходила половины единицы разряда последней его цифры. Поэтому построение математической таблицы даже при равномерности изменения функции не так просто, как может показаться с первого взгляда.

§ 58. Основные вопросы, возникающие при пользовании таблицами. При пользовании всякой таблицей возникает ряд вопросов, из которых одни касаются устройства и расположения каждой таблицы (соответствующие указания обыкновенно даются в каждом сборнике математических таблиц), другие же имеют более принципиальный характер и разрешаются более или менее одинаково в отношении всех таблиц. Вот важнейшие из таких вопросов.

I. Как получить значение функции для значения аргумента, содержащегося между двумя смежными табличными значениями аргумента (задача *интерполяции*)?

II. С какой точностью получают такие *интерполированные* значения функции?

III. Как получить значение аргумента, при котором функция принимает значение, заключенное между двумя смежными табличными ее значениями (задача *обратной интерполяции*)?

IV. С какой точностью этот процесс обратной интерполяции определяет значение аргумента?

V. Какое влияние имеют погрешности данных значений (аргумента или функции) на точность доставляемых таблицей значений (функции или аргумента).

Уметь ответить на каждый из этих вопросов в отношении каждой таблицы, с какой приходится иметь дело, совершенно необходимо для правильного и сознательного пользования этой таблицей. Посмотрим, как решаются все эти вопросы практически в применении к любой математической таблице с равномерным или почти равномерным изменением функции.

§ 59. Линейная интерполяция. Получение значений функции для таких значений аргумента, которые содержатся между двумя смежными табличными значениями аргумента, или, так сказать, *чтение между строк таблицы*, производится особенно просто в случае таблицы с равномерным изменением функции. Желая, например, найти длину C окружности диаметра $d = 1{,}034$ и пользуясь табличкой § 57, рассуждаем так:

$$\text{при } d \doteq 1{,}03 \qquad C = 3{,}236,$$

при увеличении d на $0{,}01 = 10$ тысячных C возрастает на $\Delta = 31$ (тысячных); при увеличении d на 1 тысячную C возрастает на $\frac{31}{10} = 3{,}1$ (возрастание C равномерно). При увеличении d на 4 тысячных C возрастает на $3{,}1 \cdot 4 = 12{,}4$.

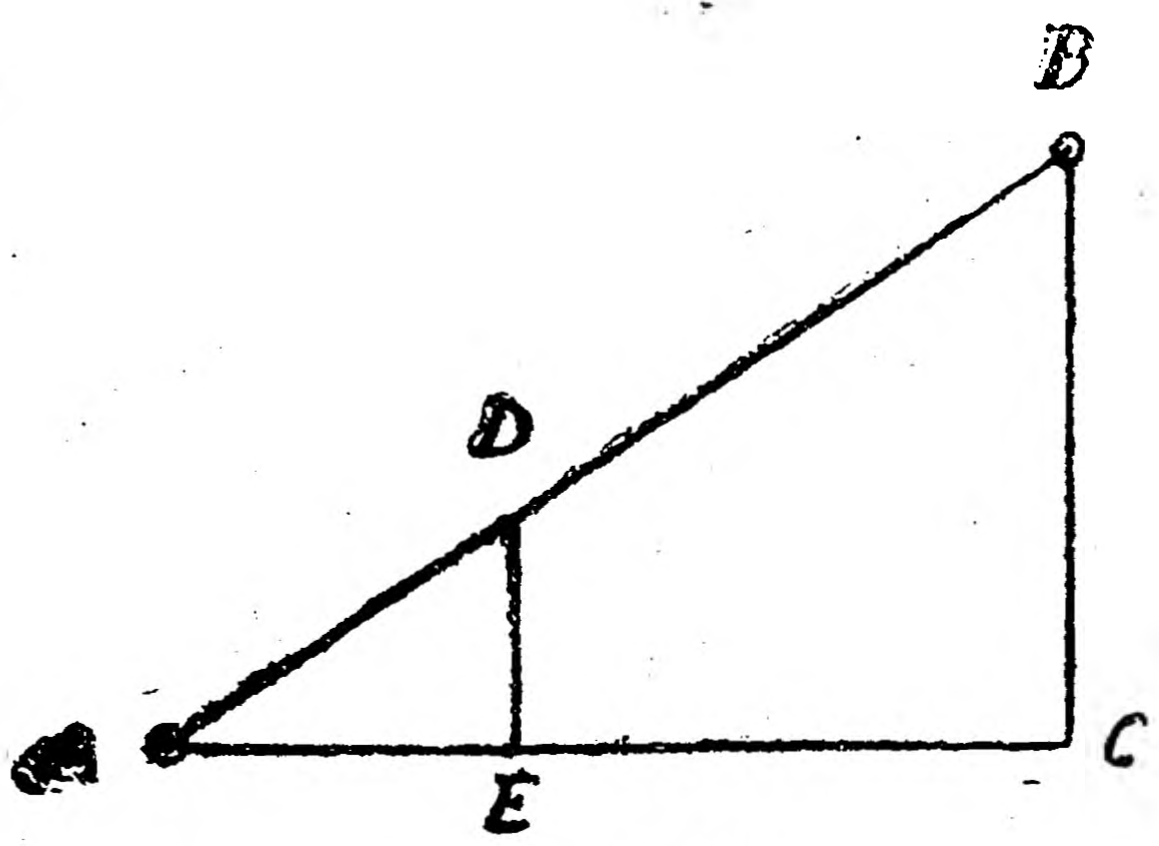
Округляя последнее число 12,4, получаем искомую поправку 12 (тысячных), которую надо прибавить к ближайшему меньшему табличному значению функции (3,236), чтобы получить искомое ее значение (3,248).

Замечая, что в случае равномерного изменения функции приращение аргумента *пропорционально* приращению функции, поправку v можно найти из пропорции:

$$v : 31 = 0{,}004 : 0{,}01,$$

которая содержит в левой части отношение искомой поправки к табличной разности, а в правой — отношение *избытка* данного значения аргумента над ближайшим меньшим табличным его значением к ступени таблицы.

Пропорциональность приращений аргумента и функции, которая уясняется вообще не так легко, полезно иллюстрировать посредством чертежа, рассматривая „интерполяционный треугольник“ ADE (см. фиг. 9). Здесь AB часть графика функции, заключающаяся между двумя табличными ее значениями (изображены точками A и B), AC ступень таблицы h, BC табличная разность Δ, AE избыток аргумента u (над ближайшим меньшим табличным его значением) или приращение аргумента, DE искомая поправка v (приращение функции).



Фиг. 9.

Подобие треугольников ADE и ABC и дает пропорцию:

$$v : \Delta = u : h.$$

Если разность между данным значением аргумента и ближайшим меньшим табличным его значением, т. е. избыток аргумента u, больше половины ступени, то вместо ближайшего меньшего табличного значения аргумента выгодно взять ближайшее большее табличное его значение (вместо „избытка“ аргумента взять его „недостаток“) и *вычитать* соответствующую поправку (функция предполагается возрастающей). Так, если надо найти длину окружности диаметра 1,038, то поправку v находим из пропорции $v : 31 = 0{,}002 : 0{,}1$ и, вычитая ее, получаем для искомого значения функции число $3{,}267 - 0{,}006 = 3{,}261$.

Какова точность значений функции, доставляемых этим процессом *линейной интерполяции?* Погрешность каждого табличного значения функции никогда не превосходит половины единицы (разряда последней цифры). Погрешность поправки, выражаемой в единицах того же разряда и округляемой до целых, тоже не превосходит половины единицы. Окончательный результат, получаемый после прибавления поправки к ближайшему меньшему табличному значению функции, имеет погрешность, которая может приближаться уже к целой единице разряда последней цифры, но никогда не превосходит этого *предельного* значения.

Может показаться, что мы не учли еще одного обстоятельства: поправка вычисляется посредством табличной разности $\Delta = y_1 - y_0$, которая, вследствие погрешностей табличных значений функции y_1 и y, сама не точна, а потому поправка не точна даже при отсутствии округления. Небольшое рассуждение, которого за недостатком места не приводим, устраняет это возражение.

Здесь уместно предостеречь от одной довольно распространенной ошибки: в поправке сохраняют один лишний десятичный знак и думают, что это приведет к более точному значению функции. Это, конечно, заблуждение. Если в примере, приведенном в начале этого параграфа, мы оставим поправку 12,4 без округления и прибавим ее к табличному значению функции:

$$\begin{array}{r} 3{,}236? \\ 124 \\ \hline 32{,}484 \end{array}$$

то последняя цифра результата (4), как полученная от сложения 4 с неизвестной цифрой табличного значения функции (отмечена знаком вопроса), никакого доверия не заслуживает и должна быть отброшена. Сохранять лишние цифры поправок стоило бы только в случае полной точности табличных значений функции.

Мы ответили на вопросы I и II § 58 в отношении любой таблицы с равномерным изменением функции. При работе с таблицами с почти равномерным изменением функции пользуются тем же способом линейной интерполяции, но теперь к рассмотренным двум источникам погрешностей (погрешности табличных значений функции и погрешности от округления поправки) присоединяется еще третий источник: неравномерность изменения функции. Геометрически это иллюстрируется заменой дуги криволинейного графика функции через хорду этой дуги. Учесть соответствующую погрешность довольно трудно, и мы займемся этим вопросом далее, в § 62, где будет показано, что наибольшая возможная погрешность результата линейной интерполяции, происходящая от неравномерности изменения функции y, приближенно равна $\frac{1}{8}\Delta^2 y$, где $\Delta^2 y$ означает *вторую разность*, т. е. разность двух смежных табличных разностей (в рассматриваемом месте таблицы). Для школы же можно рекомендовать решение этого вопроса путем небольшого опыта. Возьмем, например, приведенную в § 57 табличку квадратов и найдем посредством линейной интерполяции квадраты нескольких чисел, а затем, для сравнения, найдем квадраты тех же чисел непосредственным умножением. Так как в данном случае табличные значения функции точны, то в результате линейной интерполяции имеются только погрешности от округления поправок (не больше половины единицы разряда последней цифры) и погрешности от не вполне равномерного изменения функции (учитывать их мы пока не умеем). Вот результат такого опыта (здесь x — произвольное число, y — его квадрат, найденный по табличке, x^2 — его квадрат, найденный умножением):

x	15,1	15,2	15,3	15,4	15,5	15,6	15,7	15,8	15,9
y	228	231	234	237	241	244	247	250	253
x^2	228,01	231,04	234,09	237,16	240,25	243,36	246,49	249,64	252,81
$y-x^2$	0,01	0,04	0,09	0,16	0,75	0,64	0,51	0,36	0,19

Отметим, что при вычислении квадрата числа 15,5 получилась поправка $3{,}1 \cdot 5 = 15{,}5$, которая округлена *по правилу четной цифры* и взята равной 16.

Как видим, погрешности интерполированных значений превосходят в нескольких случаях 0,5, но нигде не превосходят 0,75. Таким образом погрешности от неравномерности изменения функции в рассматриваемом примере нигде не превосходят 0,25. Так оно и должно быть согласно приведенной выше формуле: здесь $\Delta^2 y = 23 - 21 = 2$, $\frac{1}{8}\Delta^2 y = \frac{1}{8} \cdot 2 = 0{,}25$.

Таблицы функций обыкновенно стараются составлять так, чтобы смежные табличные разности отличались друг от друга не более как на единицу. Тогда влияние погрешностей от неравномерного изменения функции на результаты линейной интерполяции делается едва заметным, и предельную погрешность этих результатов можно принимать равной *одной единице* разряда последней цифры. Заключение это легко и поучительно проверить на нескольких опытах, поставленных аналогично описанному выше над разными таблицами. Такие опыты особенно просто ставить в условиях работы в классе, пользуясь рациональным разделением труда (коллективное выполнение опыта).

До сих пор мы брали поправку лишь на одну цифру аргумента: избыток данного значения аргумента выражался у нас однозначным числом. Легко понять, что поправки можно брать и на следующие цифры, но что не всегда стоит это делать. Пусть, например, надо найти 4-значный логарифм числа 817,347. Берем из таблицы $\lg 817 = 2{,}9122$, $\lg 818 = 2{,}9128$, $\lg 819 = 2{,}9133$. Изменение функции почти равномерно: табличные разности 6 и 5. Поправка на первую цифру избытка данного числа (3) равна $0{,}3 \cdot 6 = 1{,}8$, поправка на вторую его цифру (4) равна $0{,}04 \cdot 6 = 0{,}24$, поправка на третью цифру (7) равна

$0{,}007 \cdot 6 = 0{,}042$. При округлении до целых поправки на вторую и третью цифры исчезают, поэтому логарифм числа 817,347 оказывается равным (в пределах 4 десятичных знаков) логарифму числа 817,3. Таким образом данное значение аргумента можно предварительно округлить, и интерполировать только на одну его цифру. Это возможно в тех случаях, когда табличная разность невелика. Чем больше табличная разность, тем больше цифр избытка аргумента следует принять во внимание.

Можно руководствоваться правилом: принимать во внимание только первую цифру избытка аргумента, т. е. десятые доли ступени, если $\Delta < 20$, и две первые цифры избытка, т. е. десятые и сотые доли ступени, если $\Delta \geqq 20$. При $\Delta < 20$ погрешность округления аргумента до десятых долей ступени, которая никогда не может быть больше 0,05 ступени, вызывает погрешность поправки во всяком случае меньшую, чем $0{,}05 \cdot 20 = 1$. Тысячные доли ступени приходится принимать во внимание при $\Delta \geqq 200$, но такие большие табличные разности в таблицах с почти равномерным изменением функции на практике не встречаются.

Напомним, что все изложенное о линейной интерполяции относится только к таблицам с равномерным или почти равномерным изменением функции. Необходимо самым решительным образом предостеречь от линейной интерполяции в случае резко неравномерного изменения функции, так как здесь возможны значительные погрешности в результатах. Попробуем, например, найти, посредством линейной интерполяции $\operatorname{tg} 89°33'$, зная, что $\operatorname{tg} 89°30' = 114{,}6$, а $\operatorname{tg} 89°36' = 143{,}2$. Здесь $\Delta = 28{,}6$, избыток аргумента $3'$ равен половине ступени, поправка $\frac{1}{2} \cdot 28{,}6 = 14{,}3$, что дает $\operatorname{tg} 89°33' = 114{,}6 + 14{,}3 = 128{,}9$. Между тем по справке в более подробной таблице устанавливаем, что $\operatorname{tg} 89°33' = 127{,}3$. Значительная погрешность интерполированного значения, равная 1,6 или 16 единицам разряда последней его цифры, произошла вследствие резко неравномерного изменения функции:

	разности
$\operatorname{tg} 89°30' = 114{,}6$	
	28,6
$\operatorname{tg} 89°36' = 143{,}2$	
	47,7
$\operatorname{tg} 89°42' = 191{,}0$	

§ 60. Обратная линейная интерполяция. В предыдущем параграфе мы предполагали, что значение аргумента известно, а значение функции надо определить. Теперь рассмотрим обратную задачу: дано значение функции, надо посредством таблицы найти соответствующее значение аргумента. Если данное значение функции имеется в таблице, мы просто выписываем из нее соответствующее значение аргумента. В противном случае мы встречаемся с задачей обратной *интерполяции* (III вопрос § 58). В таблицах с равномерным или почти равномерным изменением функции опять пользуемся пропорциональностью между приращением (избытком) аргумента и приращением (избытком) функции; говорят, что здесь применяется *обратная линейная интерполяция*.

Пусть, например, надо найти диаметр окружности, длина которой $C = 3{,}343$. Пользуясь табличкой § 57, замечаем, что искомый диаметр d больше 1,06 ($C = 3{,}330$) и меньше 1,07 ($C = 3{,}362$). Избыток данного значения функции (3,343) над ближайшим меньшим табличным ее значением равен 13, табличная разность 32. Поправку u, которую надо прибавить к 1,06, находим из пропорции $u : 0{,}01 = 13 : 32$. Ограничиваясь одной цифрой поправки, получаем искомое значение $d = 1{,}06 + 0{,}004 = 1{,}064$.

Если данное значение функции ближе к ближайшему большему табличному ее значению, чем к ближайшему меньшему, то выгоднее вместо его „избытка" пользоваться его „недостатком", т. е. разностью между ближайшим бо́льшим табличным значением функции и данным ее значением, и вычитать соответствующую поправку (функция предполагается возрастающей). Так, если требуется найти диаметр окружности, длина которой 3,260, то, замечая, что избыток данного значения (3,260—3,236) равен 24, а его недостаток (3,267—3,260) равен только 7, вычисляем поправку из пропорции $u : 0{,}01 = 7 : 31$. Отсюда $u = 0{,}002$, искомое значение аргумента $1{,}04 - 0{,}002 = 1{,}038$.

С какой точностью получается в результате обратной интерполяции значение аргумента? С какой бы точностью ни было дано значение функции, его избыток (или недостаток) не может быть найден точнее, чем до половины единицы разряда последней цифры табличных значений. Обозначая через x то приращение аргумента, которое соответствует приращению функции в половину единицы, имеем пропорцию $x : h = 0{,}5 : \Delta$, откуда $x = \frac{0{,}5h}{\Delta} = \frac{1}{2\Delta} \cdot h$.

Такова предельная погрешность аргумента, обусловленная неточностью табличных значений (предполагается, что данное значение функции точно). Эта предельная погрешность тем меньше, чем больше Δ. Она равна $0{,}1h$ при $\Delta = 5$ и $0{,}01\,h$ при $\Delta = 50$. При $\Delta < 5$ обратная линейная интерполяция не дает даже одной вполне надежной цифры поправки; при $5 < \Delta < 50$ получается одна вполне надежная цифра, которой обыкновенно и ограничиваются. Округляя поправку аргумента до одной цифры, т. е. до десятых долей ступени, мы вносим в окончательный результат еще погрешность от округления, не превышающую $0{,}05h$, которая прибавляется к погрешности от неточности табличных значений функции, не превышающей

$$\frac{1}{2\Delta} \cdot h.$$

Определяя выше диаметр окружности по данной ее длине $C = 3{,}343$, мы получили поправку $u = \frac{13}{32}\,h$ с погрешностью, не превосходящей $\frac{1}{2\Delta}\,h = \frac{1}{64}\,h < 0{,}02\,h$. Вычисляя одну цифру этой поправки, мы вносим в нее погрешность от округления, не превосходящую $0{,}05\,h$. Полная погрешность поправки (и окончательного результата) не превосходит $0{,}02\,h + 0{,}05\,h = 0{,}07\,h = 0{,}0007$ (здесь $h = 0{,}01$).

Так обстоит дело при пользовании таблицами с равномерным изменением функции. Тот же способ обратной линейной интерполяции употребляется и при почти равномерном изменении функции. При учете полной погрешности ее результата, кроме погрешностей от неточности табличных данных и погрешностей от округления поправок, следует еще принять во внимание и погрешность от неравномерности изменения функции. В § 62 мы увидим, что предельная погрешность в определении аргумента, обусловленная неравномерностью изменения функции, приближенно равна $\frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta y}$.

Для примера рассмотрим обратную линейную интерполяцию в случае пользования таблицей площади круга, отрывок которой приводим:

d	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$K = \frac{1}{4}\pi\, d^2$	79	95	113	133	154	177	201	227	254	284

Если данное (точное) значение площади круга заключается, например, между 201 и 227, то погрешность в определении его диаметра (посредством этой таблички) будет состоять из следующих трех частей:

1) погрешности от неточности табличных значений функции, не превышающей $\frac{1}{2\Delta}h = \frac{1}{2 \cdot 26} \cdot 1 < 0,02$; 2) погрешности от округления поправки, вычисляемой до десятых, не превышающей 0,05; 3) погрешности от неравномерности изменения функции, не превышающей $\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{26} = \frac{3}{208} < 0,02$ ($\Delta^2 y$, т. е. разность двух смежных табличных разностей, достигает в интересующем нас участке таблицы значения $30 - 27 = 3$). Полная погрешность результата таким образом не превзойдет $0,02 + 0,05 + + 0,02 = 0,09 < 0,1$. Если бы мы вычисляли поправку аргумента до сотых, полная погрешность результата была бы не больше $0,02 + 0,005 + 0,02 = 0,045 < 0,05$, и цифра сотых была бы следовательно весьма ненадежна. Поэтому мы делаем правильно, ограничиваясь только одной цифрой поправки.

Чтобы оценить погрешность результата обратной линейной интерполяции, происходящую от неравномерности изменения функции, не прибегая к формуле § 62, которая не может быть обоснована в школе, можно рекомендовать опять-таки производство опыта. Вычислим, например, значение диаметра круга, площадь K которого принимает ряд значений 202, 204, 206 и т. д. до 226, сперва применяя нашу табличку, затем по формуле $d = \sqrt{\frac{4K}{\pi}}$ посредством 4-значных логарифмов, и сравним результаты:

K	202	204	206	208	210	212	214	216	218	220	222	224	226
d (табличка) . . .	16,0	16,1	16,2	16,3	16,3	16,4	16,5	16,6	16,7	16,7	16,8	16,9	17,0
d (логарифмы) . .	16,04	16,12	16,20	16,28	16,35	16,43	16,51	16,59	16,66	16,74	16,82	16,89	16,96
разница	0,04	0,02	0,00	0,02	0,05	0,03	0,01	0,01	0,04	0,04	0,02	0,01	0,04

Как видим, действительные погрешности значений аргумента, вычисленных посредством обратной линейной интерполяции, нигде не превосходят половины единицы разряда последней его цифры и далеко не достигают найденного выше предельного своего значения (0,09).

Относительно таблиц с резко неравномерным изменением функции приходится повторить то же самое, что о них было сказано в § 59: обратная линейная интерполяция здесь недопустима.

§ 61. Интерполяция с высшими разностями. В школе, конечно, может найти применение только линейная интерполяция. Но мы коснемся вопроса об интерполяции с высшими разностями, применяемой в случае резко неравномерного изменения функции, чтобы затем, пользуясь соответствующей формулой, вывести условие допустимости линейной интерполяции.

Предположим, что дан ряд равноотстоящих значений аргумента x:

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 3h, \ldots$$

и ряд соответствующих значений функции y:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \ldots$$

Образуем ряд значений *первой разности*:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \Delta y_2 = y_3 - y_2, \ldots$$

и ряд значений *второй разности*:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2, \ldots$$

Если функция изменяется равномерно, то все значения первой разности равны друг другу, а все значения второй разности равны 0. В этом случае y есть линейная функция от x и выражается формулой:

$$y = y_0 + \frac{x - x}{h} \Delta y_0 \qquad \text{(I)}$$

Действительно, при $x = x_0$ формула эта дает $y = y_0$. При $x = x_1 = x_0 + h$ имеем $y = y_0 + \Delta y_0$ или, заменяя Δy_0 через $y_1 - y_0$, $y = y_1$. При $x = x_2 = x_0 + 2h$, $y = y_0 + 2\Delta y_0 = (y_0 + hy_0) + \Delta y_0 = y_1 + \Delta y_0$. Но по условию $\Delta y_0 = \Delta y_1$, а потому $y = y_1 + \Delta y_1 = y_2$. Продолжая так далее, убеждаемся, что формула (I) действительно выражает зависимость между x и y в случае равномерного изменения функции y. Но это есть не что иное как наша формула линейной интерполяции.

Переходим к случаю, когда функция y изменяется резко неравномерно, но первая разность изменяется равномерно, и все значения второй разности, следовательно, равны друг другу. Формула (I) уже не годится для выражения зависимости между x и y, кроме случаев $x = x_0$ и $x = x_1$, когда она дает как раз то, что требуется ($y = y_0$, $y = y_1$). Попробуем добавить в правой части формулы *поправочный член*, который обращался бы в 0 при $x = x_0$ и $x = x_1$. Получаем формулу $y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + K(x - x_0)(x - x_1)$, где неизвестное постоянное число K определим из условия, что при $x = x_2$ формула эта должна давать $y = y_2$. Подставляя, вместо x, $x_2 = x_0 + 2h$, находим, что $Kh^2 = \frac{1}{2}\Delta^2 y_0$, и получаем формулу *интерполяции со вторыми разностями*:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}\Delta^2 y_0 \qquad \text{(II)}$$

Подобно тому как формула (I) применяется не только при равномерном, но и при почти равномерном изменении функции, так и формула (II) применяется как при равномерном, так и при почти равномерном изменении первой разности.

Пусть требуется найти $\sqrt{21{,}4}$, пользуясь таблицей квадратных корней из чисел 1—100, дающей значения этих корней с 4 десятичными знаками. Выписываем несколько значений функции из этой таблицы и пишем сбоку значения первой и второй разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
21	4,5826		
		1078	
22	4,6904		—24
		1054	
23	4,7958		—22
		1032	
24	4,8990		

Как видим, изменение функции резко неравномерно, но изменение первой разности почти равномерно, и применять надо не (I), а (II) формулу. Полагаем в ней $x_0 = 21$, $x_1 = 22$, $h = 1$, $x = 21{,}4$ и вычисляем искомое значение:

$$y = \sqrt{21{,}4},$$

$$\sqrt{21{,}4} = 4{,}5826 + \frac{0{,}4}{1}\cdot 0{,}1078 + \frac{0{,}4\cdot(-0{,}6)}{2\cdot 1^2}\cdot(-0{,}0024) =$$

$$= 4{,}5826 + 0{,}0431_2 + 0{,}0002_9 =$$

$$= 4{,}6260.$$

Непосредственное извлечение дает $\sqrt{21{,}4} = 4{,}62601\ldots\ldots$, и в результате интерполяции со вторыми разностями все 4 десятичных знака точны.

Если и первая разность изменяется резко неравномерно, но равномерно (или почти равномерно) изменяется вторая разность, то пользуются формулой *интерполяции с третьими разностями*, а именно:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} \Delta^2 y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6h^2} \Delta^3 y_0 \qquad \text{(III)}$$

Возьмем, например, табличку синусов § 57 и составим табличку соответствующих разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0°	0,000			
		259		
15°	<u>0,259</u>		—18	
		<u>241</u>		—16
30°	0,500		<u>—34</u>	
		207		<u>—14</u>
45°	0,707		—48	
		159		—11
60°	0,866		—59	
		100		— 7
75°	0,966		—66	
		34		
90°	1,000			

Как видим, функция и первая разность изменяются резко неравномерно, вторая же разность — почти равномерно, и интерполировать надо по формуле (III). Вычислим, например, sin 20°. Здесь надо взять $x_0 = 15°$, $x_1 = 30°$, $x_2 = 45°$, $h = 15°$; $x = 20°$. Значения функции и разностей, которые надо в настоящем случае брать, в таблице разностей подчеркнуты. Выполняя подстановки и вычисления, получаем: $\sin 20° = 0{,}259 + 0{,}080_3 - 0{,}003_8 - 0{,}000_9 = 0{,}342$.

Пятизначная таблица натуральных синусов дает $\sin 20° = 0{,}34202$.

Интерполяционные формулы (I), (II), (III) представляют собой частные случаи *формулы Ньютона*. Известны и многие другие интерполяционные формулы, имеющие свои достоинства.

§ 62. Условие допустимости линейной интерполяции. Полагая в формуле (II) $x_1 = x_0 + h$, $x = x_0 + th$, где $0 < t < 1$, перепишем ее в виде:

$$y = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 y_0 \qquad \text{(II bis).}$$

Коэфициент при второй разности ($\Delta^2 y_0$) при возрастании t от 0 до 1 сперва убывает от 0 до $-\frac{1}{8}$, затем возрастает от $-\frac{1}{8}$ до 0, и никогда таким образом не превосходит по абсолютному своему значению $\frac{1}{8}$. Применяя линейную интерполяцию, мы пренебрегаем членом $\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0$, абсолютное значение которого не превосходит $\frac{1}{8}\Delta^2 y_0$. Итак, погрешность линейной интерполяции (обусловленная неравномерностью изменения функции) не превосходит восьмой части соответствующей второй разности.

Линейная интерполяция допустима, если погрешность от неравномерности изменения функции не достигает половины единицы (разряда последней цифры табличных значений), а это сводится к условию, что $\frac{1}{8}\Delta^2 y_0 < \frac{1}{2}$, откуда $\Delta^2 y_0 < 4$. Условие это и было указано (без обоснования) в § 59.

Разделив обе части формулы (II bis) на Δy_0, получаем, после понятных преобразований, такое выражение для t:

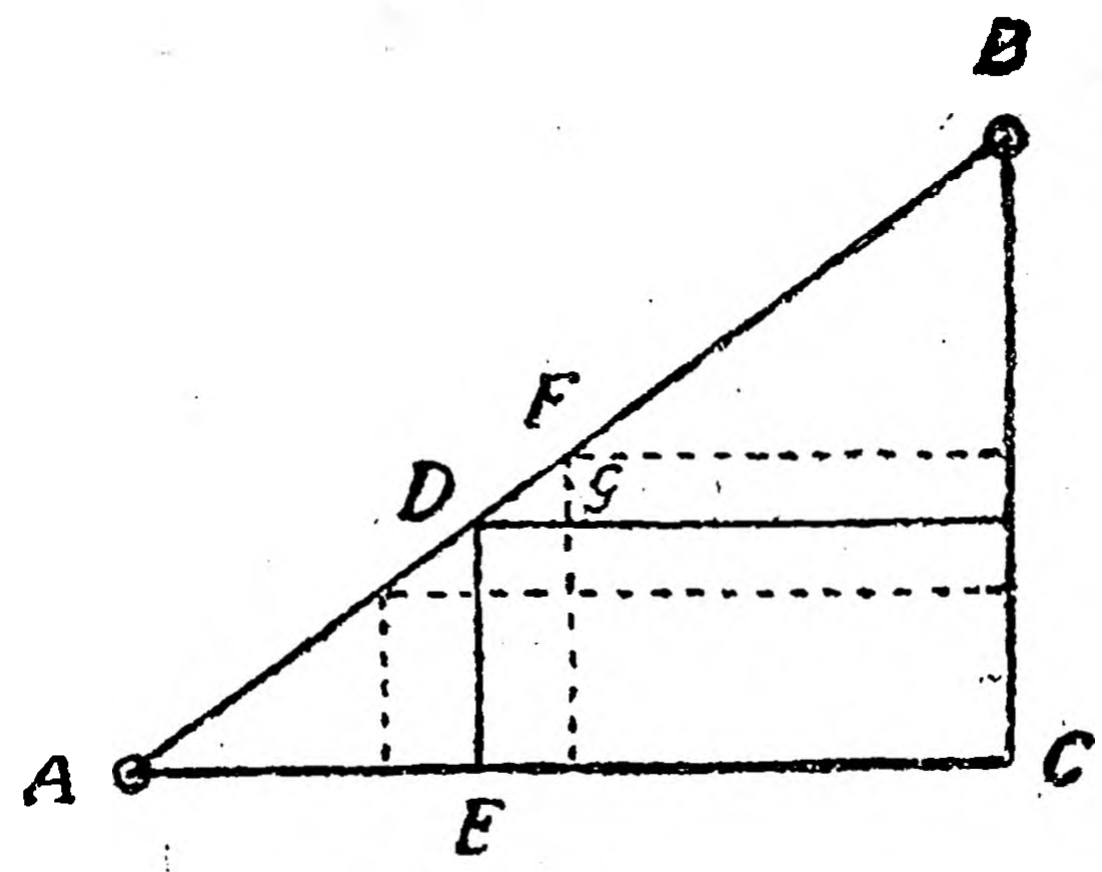
$$t = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} + \frac{t(t-1)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0}.$$

Применяя обратную линейную интерполяцию, мы отбрасываем член $\frac{t(t-1)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0}$, который не превосходит по абсолютному значению числа $\frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0}$. Так оценивается погрешность линейной обратной интерполяции, обусловленная неравномерностью изменения функции.

§ 63. Влияние погрешностей данных значений. До сих пор мы предполагали, что данные значения аргумента (при разыскании значений функции) и данные значения функции (при разыскании значений аргумента) вполне точны, и учитывали только погрешности, вносимые в результаты самими таблицами (эти погрешности можно называть „табличными погрешностями“). Однако в громадном большинстве случаев данные бывают только приближенными, и возникает вопрос, какое влияние имеют погрешности данных на точность результатов, получаемых посредством таблиц. Вопрос этот можно решать общими способами учета погрешностей, но при употреблении линейной интерполяции возможен также следующий простой прием. Пусть дано значение аргумента x с погрешностью в ту или другую сторону, не превышающей α. С какой предельной погрешностью β получим мы значение функции y?

В интерполяционном треугольнике (см. фиг. 10) мы теперь получим уже не две прямых, а две *полосы*: одну — между двумя вертикальными прямыми, соответствующими значениям аргумента $x - \alpha$ и $x + \alpha$, другую — между двумя горизонтальными прямыми, соответствующими значениям функции $y - \beta$, $y + \beta$. Из подобия треугольников ABC и DFG получаем соотношение $\alpha : h = \beta : \Delta$.

Таким образом погрешность в определении функции составляет такую часть табличной разности, какую часть ступени составляет погрешность аргумента. Посредством этого простого правила легко оценивается погрешность от неточности данных.



Фиг. 10.

Установив тем или другим способом, какое влияние на точность результатов имеют погрешности данных, и желая получить эти результаты посредством таблицы, мы должны поставить вопрос о том, соответствует ли точность таблицы точности искомого результата. При этом возможны три следующих случая. Допустим, прежде всего, что погрешность результата, происходящая от неточности данных, не превосходит 1, и что результат этот может быть вычислен посредством таблицы с табличной погрешностью, не превосходящей 0,1. Этот случай является *нормальным*: погрешность, вносимая в результат вычисления самим процессом вычисления, не повышает сколько-нибудь заметно неустранимой погрешности результата, обусловленной неточностью данных. Можно мириться и с таким положением, когда табличные погрешности приблизительно равны погрешностям от неточности данных. Но случай, когда погрешность от неточности данных оказывается в несколько раз меньше табличной погрешности, надо признать уже ненормальным: таблица в этом случае *недостаточно точна*, ее применение *портит* точность результата. Нужно либо применить другую, более точную таблицу, либо выполнить вычисление без таблицы. Наконец, ненормальным является и такой случай, когда погрешность от неточности данных равняется 1, а табличная погрешность, например, 0,01. Здесь таблица *слишком точна*, и нет надобности вычислять результат с той наибольшей точностью, какую может дать данная таблица (например, можно не интерполировать).

Поясним сказанное примерами:

I. Диаметр круга равен 14,7 *см* с погрешностью, не превосходящей 0,05 *см*. Найти посредством таблички § 60 его площадь.

Здесь граница погрешности аргумента составляет двадцатую часть ступени таблички, а потому граница погрешности результата, получающейся от неточности данного значения диаметра, равна $\frac{1}{20}$ от 23 или 1,15. Предельная табличная погрешность равна приблизительно 1. Таким образом, погрешность, вносимая в результат самими таблицами, меньше неизбежной его погрешности, обусловленной неточностью данного, и точность таблицы можно считать соответствующей точности данного. Применяя линейную интерполяцию, получаем искомое значение площади ($177-23 \cdot 0{,}3=170{,}1$ или, округляя, 170 *см*^{2}), причем погрешность его не больше $1{,}15+1=2{,}15$.

Конечно, вероятность того, что действительная погрешность найденного значения площади близка к этой границе погрешности (2,15), весьма мала, так как для этого нужно исключительно неблагоприятное стечение обстоятельств. В громадном большинстве случаев действительная погрешность результата бывает значительно меньше установленной теоретически границы погрешности. Чтобы проверить это заключение на рассматриваемом примере, выполним небольшой опыт. Предположим, что точное значение диаметра круга d нам известно и выражается четырехзначным числом. Согласно условию, число это не меньше 14,65 и не больше 14,75. Возможные значения диаметра выписаны ниже в графе d, соответствующие значения площади круга, найденные с 4 значащими цифрами, выписаны в графе K. Третья графа содержит значения разности $170-K$, т. е. действительные погрешности найденного приближенного значения площади круга (170 *см*^{2}).

d	14,65	14,66	14,67	14,68	14,69	14,70	14,71	14,72	14,73	14,74	14,75
K	168,5	168,8	169,0	169,2	169,5	169,7	169,9	170,2	170,4	170,6	170,8
$170-K$	−1,5	−1,2	−1,0	−0,8	−0,5	−0,3	−0,1	+0,2	+0,4	+0,6	+0,8

Как видим, действительная погрешность в большинстве случаев оказывается много меньше теоретической границы 2,15. Сложив абсолютные значения всех погрешностей, найдем их среднее. Получается *средняя* погрешность $\frac{7,4}{11} = 0,67$.

II. Диаметр круга равен 16,46 *см* с погрешностью, не превосходящей 0,005 *см*. Найти площадь круга.

Здесь искомая площадь может быть найдена с 4 значащими цифрами, табличка же § 60 дает только 3 надежных цифры. Точность таблички недостаточна, а потому от применения ее следует в данном случае отказаться, или же помириться с тем, что она даст результат с меньшей точностью, чем он может быть найден по условиям задачи.

III. Площадь круга равна 180 *см*² с погрешностью, не превосходящей 15 *см*². Найти его диаметр.

Применяя ту же табличку § 60, видим, что граница погрешности данного значения функции составляет $\frac{15}{24}$ табличной разности, а потому граница погрешности искомого значения аргумента равна $\frac{15}{24} \cdot 1 = 0,6$.

В искомом значении аргумента десятые доли ненадежны, вычислять их не стоит, а потому интерполяция здесь бесполезна. Ограничиваемся тем, что просто берем из таблицы то значение аргумента (15), какое соответствует ближайшему табличному значению функции (177).

Конечно, в каждом отдельном случае нет возможности, да и не нужно, так детально разбираться в погрешностях данных и результатов, как мы это сейчас делали. Достаточно твердо усвоить — и прежде всего самому руководителю занятий математикой — общий принцип необходимости соответствия точности данных и точности таблиц и избегать резких нарушений этого принципа.

§ 64. Вспомогательные средства линейной интерполяции. Для вычислений, связанных с выполнением линейной интерполяции, употребляются три следующих вспомогательных средства:

1) между каждыми двумя табличными значениями функции помещают значение соответствующей табличной разности; таким образом устраняется необходимость делать вычитание;

2) на каждой странице таблицы помещают (сбоку) произведения десятой части каждой встречающейся на этой странице табличной разности на последовательные целые числа 1, 2, . . . 9. Это всем известные таблички P. P. (Partes proportionales, про-

порциональные части), весьма упрощающие производство как умножения (при прямой интерполяции), так и деления (при интерполяции обратной); если аргументом таблицы служит угол и ступень таблицы равна, скажем, $0{,}1° = 6'$, то берут произведение одной шестой табличной разности на числа 1, 2, 3, 4, 5;

3) для ряда последовательных табличных значений функции, расположенных на одной строке, вычисляют *среднее значение* табличной разности, и соответствующие произведения располагают на этой же строке, обыкновенно справа; такие произведения представляют собой те же пропорциональные части, только особым образом расположенные; мы будем называть их *готовыми поправками*.

Готовые поправки дают значительно большую экономию в вычислительной работе, чем обыкновенные Р. Р. Распространение они получили лишь в самое последнее время, а потому остановимся на них несколько подробнее. Покажем прежде всего, как их вычисляют.

Возьмем 4-значные мантиссы логарифмов чисел от 100 до 999 и расположим их по 10 на каждой строке, занимая таким образом всего 99 строк. Такая таблица занимает обыкновенно 2 печатных страницы. Рассмотрим разности логарифмов, расположенных на двух каких-либо последовательных строках, например на 30-й и 31-й, приведенных ниже (n-й строкой будем называть строку, имеющую в заголовке, т. е. слева, число n).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051									

На 30-й строке разности равны то 14, то 15, на 31-й то 14, то 13. Воспользовавшись таблицей 6-значных логарифмов, устанавливаем, что на 30-й строке табличная разность изменяется от $d_1 = \lg 301 - \lg 300 = 0{,}001445$ или 14,45 десятитысячных до $d_2 = \lg 310 - \lg 309 = 0{,}001404$ или 14,04 десятитысячных, а на 31-й от $d_1 = \lg 311 - \lg 310 = 13{,}98$ до $d_2 = \lg 320 - \lg 319 = 13{,}59$ (десятитысячных). Берем среднее значение табличной разности для 30-й строки:

$$d = \frac{14{,}45 + 14{,}04}{2} = 14{,}245$$

и составляем произведения десятой части d на числа 1, 2 . . . 9.

Получаем числа 1,4245, 2,8490, 4,2735, 5,6980, 7,1225, 8,5470, 9,9715, 11,3960, 12,8205, и округляем их до целых:

1 3 4 6 7 9 10 11 13.

Точно так же для 31-й строки получим произведения:

1 3 4 6 7 8 10 11 12.

Эти „готовые поправки“ и помещают в конце каждой строки таблицы, получая таким образом „таблицу с готовыми поправками“:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30 . .	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	12
31 . .	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32 . .	5051																		

Наличность готовых поправок чрезвычайно упрощает пользование таблицей, так как позволяет выполнять интерполяцию (как прямую, так и обратную) в уме. Пусть, например, требуется найти lg 3,154. Из таблицы берем мантиссу 3,15, а именно 4 983 („31-я строка, 5-й столбец“) и поправку на цифру 4 (на той же строке, в „4-м столбце поправок“), равную 6. Остается только прибавить поправку 6 к найденному табличному значению 4 983. Получаем lg 3,154 = 0,4989. Если 4-я цифра числа больше 5, лучше брать ближайшее большее табличное значение логарифма и *вычитать* соответствующую поправку на 4-ю цифру. Так, для получения lg 3,158 берем табличную мантиссу lg 3,16 и отнимаем поправку на 2, равную 3. Получается lg 3,158 = 0,4997 — 0,0003 = 0,4994. Тот же результат получается и при пользовании ближайшим меньшим табличным значением (4,983 + 11 = 4,994). Иногда, однако, эти два способа дают результаты, разнящиеся на 1 единицу (разряда последней цифры). Большего доверия заслуживает, вообще говоря, тот результат, который найден посредством меньшей поправки. Итак, поправок на цифры 6, 7, 8, 9 можно никогда не брать, заменяя их поправками на цифры 4, 3, 2, 1. Поэтому в таблице иногда только эти последние поправки и помещают, отчасти по соображениям экономии места, отчасти желая избежать погрешностей, которые тем больше, чем больше поправки.

Если избыток данного значения аргумента (над табличным его значением) содержит не одну, а две цифры, то поправку можно брать на каждую цифру отдельно, уменьшая взятую из таблицы вторую поправку в 10 раз. Желая, например, найти lg 3,1416, берем табличную мантиссу, соответствующую числу 314, затем поправку на 4-ю цифру (1), равную 1, и наконец поправку на 5-ю цифру (6), равную 8. Уменьшая последнюю поправку в 10 раз и округляя ее до целых, получаем окончательно $4\,969 + 1 + 1 = 4\,971$. В большинстве случаев поправка на 5-ю цифру числа (при разыскании 4-значного его логарифма) получается настолько малой, что лучше предварительно округлить 5-значное число до 4 цифр, а затем уже искать логарифм.

При обратной интерполяции, мы, пользуясь готовыми поправками, легко *подбираем* значение аргумента, которому соответствует данное значение функции. Например, если $\lg x = 0{,}4875$, то, замечая, что ближайшая табличная мантисса (4 871) соответствует значению аргумента 307 и отличается от данной мантиссы (4 875) на 4 единицы, смотрим в графе поправок, какому избытку в числе соответствует поправка в 4 единицы. Убедившись, что такую поправку дает избыток 3, заключаем, что искомое число есть 3 073 или, принимая во внимание характеристику данного логарифма, 3,073.

Применение готовых поправок несомненно увеличивает погрешности интерполированных значений, и притом тем больше, чем быстрее изменяется на протяжении строки табличная разность, т. е. чем больше разница между табличной разностью в начале и в конце строки. Если эта разница близка к 2 единицам (разряда последней цифры табличных значений функции), то погрешность, вызываемая применением готовых поправок, может при самом неблагоприятном стечении обстоятельств достигать 1 единицы (разряда последней цифры), и полная табличная погрешность интерполированного значения функции может приближаться в самом неблагоприятном случае к 2 единицам разряда последней цифры. Однако в громадном большинстве случаев действительные погрешности интерполированных значений далеко не достигают этой границы. Убедиться в этом позволяет простой опыт. Возьмем, например, числа 3,121, 3,122, 3,123 . . . 3,129, и найдем 4-значные мантиссы их логарифмов посредством вышеприведенного отрывка таблицы с готовыми поправками, а затем возьмем мантиссы логарифмов тех же чисел по 5-значным таблицам. Сравнивая результаты, обнаруживаем, что погрешности 4-значных мантисс составляют (в долях единицы 4-го десятичного знака):

0,1 0,7 0,3 0,9 0,5 0,1 0,7 0,3 0,1,

что дает в среднем $\frac{3,7}{9} = 0,41$ и не достигает даже половины единицы (разряда последней цифры табличных мантисс).

Если разница табличных разностей в начале и в конце строки больше 2 единиц, то готовые поправки вносят уже заметную погрешность. Тогда строку разбивают на 2 и более частей и дают готовые поправки для каждой такой части („уступа“) отдельно. Вот, например, какой вид должна иметь первая строка 4-значной таблицы логарифмов, чтобы погрешности от применения готовых поправок были совершенно незаметны:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043									4	9	13	17	22	26	30	35	39
			0086	0128	0170						4	9	13	17	21	25	30	34	38
						0212	0253				4	8	12	16	21	25	29	33	37
								0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36

Если в таблице тригонометрических функций ступень равна $0,1° = 6'$, то готовые поправки даются на $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ или же только на $1'$, $2'$, $3'$, так как поправки на $4'$ и $5'$ можно с выгодой заменять поправками на $1'$ и $2'$.

В заключение этого параграфа отметим, что для большинства таблиц со вполне равномерным изменением функций, а именно для всех таблиц функций вида $y = ax$, никаких вспомогательных средств интерполяции, в сущности, и не нужно: интерполяция, в силу строгой пропорциональности аргумента и функции, может быть производима посредством самой таблицы.

Возьмем, например, табличку для перевода фунтов в килограммы:

фунты . . .	10	20	30	40	50	60	70	80	90
кг	4,10	8,19	12,29	16,38	20,48	24,57	28,67	32,76	36,86

Пусть требуется перевести в килограммы 36,54 фунта. Пишем (или кладем на счетах):

30 ф. . . .	12,29		
6 „ . . .	2,45	7	(взято число 24,57 и уменьшено в 10 раз)
0,5 „ . . .	0,20	48	(взято число 20,48 и уменьшено в 100 раз)
0,04 „ . . .	0,01	638	(взято число 16,38 и уменьшено в 1000 раз)
Всего .	14,97		

Цифры, стоящие правее вертикальной пунктирной черты, не складываем, а только замечаем, какое влияние они имеют на цифру сотых.

Если, наоборот, нужно перевести в фунты, скажем, 14,97 *кг*, то вместо сложения применяем вычитание (письменно или на счетах):

$$
\begin{array}{lr}
14{,}97 & \\
12{,}29 \;\vdots\; \ldots\ldots\ldots & 30 \\
\hline
2{,}68 & \\
2{,}457 \;\ldots\ldots\ldots & 6 \\
\hline
0{,}223 & \\
0{,}2048 \;\ldots\ldots\ldots & 0{,}5 \\
\hline
0{,}0182 & \\
0{,}01638 \;\ldots\ldots\ldots & 0{,}04 \\
\hline
\text{Всего} \;\ldots\ldots & 36{,}54
\end{array}
$$

Как видим, интерполяция для функций вида $y = ax$ возможна и без каких бы то ни было вспомогательных средств. Однако, применение готовых поправок и здесь вносит некоторое упрощение.

§ 65. Расположение таблиц. Если таблица расположена в два параллельных столбца (или две параллельных строки), причем первый содержит последовательные значения аргумента, а второй — функции, то говорят, что таблица имеет *один вход*. Таково, например, расположение „Таблиц логарифмов с 5 десятичными знаками“ проф. С. П. Глазенапа. Меньше места занимают, при том же объеме, т. е. при том же количестве табличных значений, таблицы, расположенные в *два входа*: так называют таблицы, в которых каждое табличное значение функции находят в пересечении строки, имеющей в заголовке (слева) несколько первых цифр значения аргумента, и столбца, имеющего в заголовке (сверху) последнюю цифру этого значения аргумента. В два входа расположены, например, общеизвестные „Пятизначные таблицы логарифмов“ Е. Пржевальского (однако логарифмо-тригонометрические таблицы этого сборника имеют один вход). Таблица 4-значных логарифмов с готовыми поправками, отрывок которой приведен в предыдущем параграфе, представляет собой пример таблицы с *тремя входами*: здесь третий вход служит для получения поправок на четвертую цифру. Существуют таблицы и с бо́льшим числом входов (4, 5, 6 входов).

Вообще следует заметить, что чем больше входов имеет таблица, тем сложнее ее устройство и употребление, но зато тем менее места она занимает. Последнее обстоятельство весьма существенно, так как очень большой объем таблицы и удорожает ее и делает неудобным пользование ею (большой формат, необходимость перелистывания многих листов). При рассмотрении различных таблиц ясно видны две основных тенденции: стремление придать таблице возможно более экономные размеры, что всегда связано с усложнением ее устройства, и стремление упростить устройство (а следовательно и употребление) таблицы, что неизбежно вызывает увеличение ее размеров. Например, математик Вронский составил (в начале XIX века) таблицу 5-значных логарифмов, занимающую всего одну страницу. [1] Но таблица эта имеет очень сложное устройство и никакого применения не получила. Как другую крайность, можно указать английскую таблицу 5-значных логарифмов Скотта, [2] дающую логарифмы всех 5-значных чисел (от 10000 до 99999) без интерполяции, но зато занимающую 181 печатную страницу. Следующие 200 страниц занимает устроенная точно так же таблица антилогарифмов, напечатанная, во избежание ошибок от смешения обеих таблиц, на цветной (зеленоватой) бумаге. В общем получается том почти в 400 страниц (стоит 6 шиллингов, т. е. около 3 рублей), но вычисление посредством этой таблицы значительно меньше утомляет, чем посредством обычных таблиц, требующих интерполяции на 5-ю цифру, да и точность даваемых результатов несколько выше.

В таблицах Вронского и Скотта мы имеем два крайних выражения обеих указанных тенденций. Наиболее практичным, по-видимому, является нечто среднее: таблица с готовыми поправками, расположенная в три входа, очень простая для обращения и в то же время занимающая сравнительно немного места.

Размеры таблицы можно уменьшать, увеличивая ее ступень. Но это возможно лишь до известного предела, а именно до тех пор, пока соблюдаются условия допустимости линейной интерполяции. Таблицы с резко неравномерным изменением функции, при употреблении которых нужно интерполировать с высшими разностями, для школ, конечно, совершенно непригодны. Они применяются, однако, в астрономии, навигации, страховых вычислениях, математической статистике и т. д.

Как мы видели, всякая таблица значений некоторой функции служит также и для решения обратного вопроса, т. е. для получения значений обратной функции. Так как, однако, процесс

---

[1] Таблица эта воспроизведена в статье Л. Монкевича, в № 111 „Вестника опытной физики и элементарной математики“ (1891 г.).

[2] E. Scott. Tables of logarithms and antilogarithms to five places. London, 1912.

обратной интерполяции несколько сложнее, чем прямой, то рядом с таблицами более употребительных функций часто помещают и таблицы соответствующих обратных функций; рядом с таблицей логарифмов (десятичных) помещают таблицу антилогарифмов, т. е. значений функций 10^x, рядом с таблицей квадратов — таблицу квадратных корней. Необходимости в этом нет, но некоторое удобство такие таблицы обратных функций представляют. Например, наличность таблицы антилогарифмов имеет ту выгоду, что вместо двух правил (одно для разыскания логарифма, другое для разыскания числа по логарифму) приходится усваивать только одно: оба вопроса решаются совершенно одинаково. Однако, при этом возникает опасность смешения двух различных таблиц, обыкновенно устроенных совершенно одинаково. Чтобы устранить такое смешение, пользуются, как мы видели, цветной бумагой. Можно конечно и самому покрыть таблицу антилогарифмов какой-нибудь прозрачной краской.

Различные подробности расположения таблицы бывают обыкновенно рассмотрены в объяснениях к ней. С внимательного чтения объяснений и следует начинать ознакомление со всякой новой таблицей.

§ 66. Обзор важнейших таблиц. Среди таблиц первенствующую роль играют таблицы *логарифмов чисел* и *логарифмов тригонометрических функций*. В широких кругах даже самое понятие математической таблицы отожествляется с понятием таблицы логарифмов. Объем таблицы логарифмов чисел быстро меняется с изменением числа десятичных знаков в табличных мантиссах. Таблица 4-значных логарифмов содержит обыкновенно логарифмы всех целых чисел от 100 до 999 и занимает всего 2 печатных страницы. Таблица 5-значных логарифмов содержит уже логарифмы всех целых чисел от 1000 до 9999 и имеет объем примерно в 10 раз больший, чем таблица 4-значных логарифмов. Таблица 7-значных логарифмов содержит уже логарифмы всех цедых чисел от 10000 до 99999 и представляет собой уже целый том. Чем объемистее таблица, тем дороже она стоит и тем больше времени требует каждое в ней подыскание. Поэтому таблицу надо выбирать соответственно точности данных и искомых. В подавляющем большинстве случаев вполне достаточно той точности, какую дает таблица 4-значных логарифмов, так как данные, полученные путем измерения, содержат обыкновенно не больше 3—4 значащих цифр. Правда, встречаются задачи, где требуется точность в 5 и более цифр, например многие задачи на денежные расчеты (сложные %, срочные уплаты). Поэтому, постоянно применяя таблицу 4-значных логарифмов, как основное пособие, необходимо уметь обращаться и с более подробными 5- и 7-значными таблицами (таблицы 6-значные мало употребительны). Интересно отметить, что несколько десятков лет тому назад в школах употреблялись исключительно 7-значные таблицы, вытесненные к концу XIX века таблицами 5-значными. Эти последние в свою очередь вытесняются таблицами 4-значными. Получается выигрыш и в цене таблиц, и в простоте обращения с ними, и в скорости вычислительной работы (по свидетельству известного астронома Энке, время, нужное для проведения одного и того же вычисления посредством 7-, 6- и 5-значных таблиц логарифмов, пропорционально числам 3, 2, 1). Все это покупается ценой уменьшения точности доставляемых таблицами результатов, но, повторяем, точность в 4 значащих цифры в большинстве случаев является даже слишком большой, и результаты округляются до 3 значащих цифр. В дальнейшем, с распространением счетных линеек, дающих ту же точность, что и таблицы 3-значных логарифмов, но представляющих целый ряд выгод сравнительно с таблицами, эти линейки, можно думать, займут в вычислительной практике то положение, какое в настоящее время занимают 4-значные таблицы.

Из функций углов прежние таблицы отдавали решительное предпочтение логарифмо-тригонометрическим функциям. В настоящее время, с развитием других методов вычисления, кроме логарифмического, все большее и большее значение начинают иметь таблицы *натуральных тригонометрических функций*. В особых таблицах косинусов и котангенсов надобности нет, достаточно обычной второй нумерации в таблицах синусов и тангенсов. Таблицы секансов и косекансов желательны, так как позволяют заменять деление (на косинус и синус) умножением, но особой необходимости в них нет. В 4-значных логарифмо-тригонометрических таблицах, равно как и в таблицах натуральных тригонометрических функций, ступень берут обыкновенно в $0{,}1^\circ = 6'$. Тогда таблицы получают удобный небольшой объем, и линейная интерполяция допустима на всем их протяжении, кроме начал таблиц логарифмов синусов и тангенсов, конца таблицы логарифмов тангенсов и конца таблицы натуральных тангенсов. Поэтому желательно иметь особые таблицы $\lg \sin$ и $\lg \operatorname{tg}$ углов, близких к 0°, а также $\lg \operatorname{tg}$ и tg углов, близких к 90°, таблицы, которые давали бы значения соответствующих функций для углов через $1'$ без интерполяции.

Очень полезны, хотя менее распространены, таблицы *квадратов* и *кубов*. Расположенная в 3 входа 4-значная таблица квадратов дает квадрат любого 4-значного числа с 4 значащими цифрами и, обратно, 4-значный квадратный корень из любого 4-значного числа. Занимает такая таблица всего 2 страницы. Аналогичная таблица кубов занимает, вследствие более быстрого изменения разностей в начале таблицы, уже не 2, а 4 страницы, и дает, кроме кубов, также кубические корни.

Большое применение при решении задач геометрического и физического содержания имеют таблицы *длины окружности* и *площади круга* в зависимости от радиуса или, лучше, диаметра. При расположении в 3 входа каждая такая таблица, заключая в себе только две страницы, позволяет находить (с 4 значащими цифрами) длину окружности и площадь круга для всех значений диаметра, выраженных 4-значными числами, а также решать обратную задачу, т. е. находить (с 4 значащими цифрами) значение диаметра по данному значению длины окружности или площади круга. Задачи на окружность встречаются так часто, что все технические справочники содержат таблицы дилны окружности и площади круга, обыкновенно для значений диаметра от 1 до 1000. Но там без нужды дают значения функций с большим числом цифр, а именно с 5 или даже с 6, чем затрудняют интерполяцию и решение обратного вопроса.

Таблица *для перевода градусной меры в радианную* прилагается ко всякой более подробной таблице логарифмов. Имея сравнительно малое значение для задач, связанных с элементарным курсом математики, такая таблица находит постоянное применение в приложениях математического анализа и в задачах технического характера.

Таблица обратных значений могла бы приносить существенную пользу при всевозможных расчетах, начиная от простейших арифметических, так как позволяет заменять всякое умножение делением. Такая таблица для каждого числа n, взятого с определенным числом значащих цифр, дает значение дроби $\frac{1}{n}$, то есть так называемое „обратное число“. Многие технические справочники содержат значение дроби $\frac{1}{n}$ для всех значений n от 1 до 100 или даже до 1 000. Удобнее иметь таблицы для значений n от 1,000 до 9,999 через 0,001 (такие таблицы имеются во многих иностранных, особенно английских сборниках математических таблиц).

Существует еще множество других полезных таблиц, перечислить которые невозможно. В настоящее время, в виду введения в СССР метрической системы мер, особое значение временно получают таблицы для перевода старых русских мер в метрические.

Табулированию, т. е. расположению в таблицу, легко поддаются всевозможные функции одного аргумента. Труднее табулировать функцию двух аргументов (для них удобнее пользоваться *номограммами*). Однако, есть функция двух аргументов, для которой создано множество таблиц. Это — функция $F = xy$, таблицы которой существенно облегчают выполнение умножения и деления многозначных чисел. Опыт показывает, что умножение или деление одной пары многозначных чисел скорее выполняется при помощи подходящей таблицы произведений, чем при помощи таблицы логарифмов: в первом случае нужно всего лишь одно подыскание в таблице, тогда как во втором — целых три. Из очень многих таблиц произведений упомянем только изданные Гостехиздатом „Таблицы умножения" О'Рурка, дающие точные произведения всех трехзначных чисел на все двузначные. Таблицы эти находят себе применение даже при наличности счетной линейки и арифмометра.

Маленькую таблицу произведений, содержащую произведения определенного числа на все однозначные числа, выгодно составлять самому всякий раз, когда это число фигурирует несколько раз как множитель или делитель. Такая табличка, составляемая особенно удобно при помощи палочек Непера или арифмометра, быстро получается и без этих приборов последовательным прибавлением взятого числа. Прибавление следует вести до получения 10-кратного значения, так как тогда мы получаем хороший контроль правильности всей таблички.

Таблицы длины окружности, перевода градусов в радианы, перевода мер и некоторые другие представляют собой не что иное как таблицы произведений.

ГЛАВА IX

УПОТРЕБИТЕЛЬНЕЙШИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ

§ 67. Формулы для умножения. Иногда удается существенно упростить вычисление, отбрасывая в формулах члены, значения которых представляют собой числа высшего порядка малости (см. § 34). В настоящей главе рассматривается несколько случаев подобных упрощений.

Если вычисляется произведение вида $(1+x)$ $(1+y)$, где x и y весьма малые положительные или отрицательные числа, то, раскрывая скобки и пренебрегая членом второго порядка малости, получим *приближенную формулу*

$$(1+x)(1+y) \doteq 1+x+y. \tag{I}$$

Погрешность этой приближенной формулы равна значению отброшенного члена xy.

Подобным же образом

$$(1+x)(1+y)(1+z) \doteq 1+x+y+z. \tag{II}$$

Здесь отброшена сумма $\varepsilon = xy + xz + xyz$. Если y и z не превосходят по модулю x, то $\varepsilon \leqq 3x^3 + x^3$. При малом x число x^3 значительно меньше x^2, а потому погрешность ε формулы (II) можно приближенно положить равной $3x^2$. Важно заметить, что здесь мы сейчас учитывали только *погрешность формулы*: вычислительную погрешность и погрешность от неточности данных, если они есть, надо учитывать особо одним из рассмотренных раньше способов. Эту погрешность формулы в дальнейшем будем обозначать греческой буквой ε („эпсилон").

Пример 1. Найти $p = 1{,}092 \cdot 1{,}026$, $q = 0{,}997 \cdot 0{,}995$, $r = 0{,}998 \cdot 1{,}004$, $s = 0{,}9997 \cdot 1{,}0004 \cdot 1{,}0011$.

Применяя формулы (I) и (II), находим искомые произведения, а затем соответствующие значения ε (грубо-приближенно). Произведения округляем с таким расчетом, чтобы оставались только заслуживающие доверия цифры. Для сравнения приводим точные значения этих произведений.

$p \doteq 1 + 0{,}092 + 0{,}026 = 1{,}118,$ $\doteq 1{,}12$	$\varepsilon \doteq 0{,}09 \cdot 0{,}03 < 0{,}003$ (точное значение $p = 1{,}120398$)
$q \doteq 1 - 0{,}003 - 0{,}005 = 0{,}992,$ $\doteq 0{,}9920$	$\varepsilon \doteq 0{,}003 \cdot 0{,}005 < 0{,}00002$ (точное значение $q = 0{,}992015$)
$r \doteq 1 - 0{,}002 + 0{,}004 = 1{,}002,$ $\doteq 1{,}00200$	$\varepsilon \doteq 0{,}002 \cdot 0{,}004 < 0{,}00001$ (точное значение $r = 1{,}001992$)
$s \doteq 1 - 0{,}0003 + 0{,}0004 + 0{,}0011,$ $\doteq 1{,}00120$	$\varepsilon \doteq 3 \cdot 0{,}0011^2 < 4 \cdot 10^{-6}$ (точное произведение $1{,}0011999$)

Как видим, округление в собственном смысле слова пришлось сделать лишь при разыскании первого произведения. В остальных случаях пришлось приписывать нули, чтобы характеризовать действительную точность результатов.

При умножении двучленов вида $X + x$, где x мало сравнительно с X, выгодно производить преобразование к виду $X\left(1 + \frac{x}{X}\right)$ и применять формулы (I) и (II).

Пример 2. Из листового железа толщиной $a \doteq 0{,}50$ *мм* сделан закрытый ящик в форме прямоугольного параллелепипеда размерами (внутри) $35 \times 24 \times 18$ *см*. Найти объем V его стенок.

Здесь надо найти разность между наружным и внутренним объемом ящика.

$$
\begin{aligned}
V &\doteq (35+0{,}1)(24+0{,}1)(18+0{,}1) - 35 \cdot 24 \cdot 18 \\
&\doteq 35 \cdot 24 \cdot 18 \left[\left(1+\frac{0{,}1}{35}\right)\left(1+\frac{0{,}1}{24}\right)\left(1+\frac{0{,}1}{24}\right)-1\right] \\
&\doteq 35 \cdot 24 \cdot 18 \left(1+\frac{0{,}1}{35}+\frac{0{,}1}{24}+\frac{0{,}1}{18}-1\right) \\
&\doteq 15120 \cdot 0{,}0126 \doteq 191 \text{ см}^3 \qquad \underline{V \doteq 19_0 \text{ см}^3 \doteq 0{,}19 \text{ литра.}}
\end{aligned}
$$

Длины ребер ящика и толщина стенок указаны с 2 значащими цифрами, поэтому в окончательном результате сохраняем тоже только две значащих цифры. Отметим, что найденный посредством формулы (II) результат совпадает с тем, какой мы получили бы, взяв полную поверхность ящика и умножив ее на толщину листа.

§ 68. Формулы для возведения в степень. Полагая в формулах (I) и (II) $x = y = z$, получим формулы

$$(1+x)^2 \doteq 1+2x, \quad (1+x)^3 \doteq 1+3x, \qquad \text{(III) и (IV)}$$

погрешности которых выражаются так же, как и для формулы (I) и (II).

Применяя формулу бинома Ньютона (для натурального показателя n) и отбрасывая все члены разложения, кроме двух первых, имеем формулу

$$(1+x)^n \doteq 1+nx \qquad \text{(V)}$$

тем более точную, чем меньше числа n и x, и заключающую в себе формулы (III) и (IV) как частные случаи. Погрешность формулы (V) равна

$$\varepsilon = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots + x^n.$$

Для приближенной ее оценки достаточно установить значение первого ее члена, так как при малых значениях x члены быстро убывают (если только n не очень велико). Лучше, однако, воспользоваться точным двойным неравенством

$$1+nx < (1+x)^n < \frac{1}{1-nx} \qquad \text{(V bis)}$$

справедливым как при положительных, так и при отрицательных значениях x при соблюдении условия $|nx| < 1$. Доказательство этого неравенства легко проводится при помощи неравенств

$$(1+x)^n > 1+nx, \quad (1-x)^n > 1-nx,$$
$$(1-x^2)^n < 1,$$

и мы на нем не останавливаемся, предоставляя его читателю.

Примеры. Найти $p = 0{,}997^2$, $q = 0{,}997^3$, $r = 1{,}034^3$, $s = \left(1+\frac{1}{30}\right)^{10}$.

Решение:

$p \doteq 1 - 2.0{,}003 = 0{,}994 \doteq 0{,}99400$ — $\varepsilon \doteq 0{,}003^2 < 0{,}00001$ (точное значение $p = 0{,}994009$)

$q \doteq 1 - 3.0{,}003 = 0{,}991 \doteq 0{,}9910$ — $\varepsilon \doteq 3.0{,}003^2 < 0{,}00003$ (точное значение $q = 0{,}991027\ldots$)

$r \doteq 1 + 3.0{,}034 = 1{,}102 \doteq 1{,}10$ — $\varepsilon \doteq 3.0{,}034^2 < 0{,}004$ (точное значение $r = 1{,}105507\ldots$)

$s \doteq 1 + 10 \cdot \frac{1}{30} = 1{,}33\ldots$

Чтобы оценить погрешность последнего результата, воспользуемся неравенством (V bis), что даст

$$s > 1 + 10 \cdot \frac{1}{30} = 1{,}33\ldots, \quad s < \frac{1}{1-10\cdot\frac{1}{30}} = 1{,}50.$$

Взяв среднее между этими двумя границами, получаем $s \doteq 1{,}4$ $(\pm 0{,}1)$.

Поверка посредством 7-значных логарифмов дает $s \doteq 1{,}38804$.

§ 69. Формула для деления. Полагая в формуле (I) $y = -x$, получим любопытную формулу

$$(1+x)(1-x) = 1,$$

дающую приближенную формулу для деления

$$\frac{1}{1+x} \doteq 1 - x. \tag{VI}$$

Эту приближенную формулу можно получить также следующим образом, причем одновременно мы получим и оценку ее точности:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1-x^2+x^2}{1+x}=\frac{1-x^2}{1+x}+\frac{x^2}{1+x}=1-x+$$
$$+\frac{x^2}{1+x}=1-x+\varepsilon.$$

Как видим, получается формула (VI), если пренебречь членом $\varepsilon=\frac{x^2}{1+x}$. Знаменатель весьма мало отличается от 1, а потому погрешность формулы (VI) можно приближенно оценивать числом x^2.

Пример 1. Найти $p=\frac{1}{1,05}$ и $q=\frac{1}{0,96}$.

Решение:

$p \doteq 1-0,05=0,95$ $\quad\varepsilon \doteq 0,05^2=0,0025$
(точное значение $p=0,95238\ldots$)

$q \doteq 1-(-0,04)=1,04$ $\quad\varepsilon \doteq 0,04^2=0,0016$
(точное значение $q=1,04166\ldots$)

При делении на двучлен вида $X+x$, где x мало сравнительно с X, выгодно взять X за скобку и применить формулу (VI).

Пример 2. В закрытом сосуде заключено $v \doteq 356$ *см*³ газа под давлением $p \doteq 778$ *мм* ртутного столба. На сколько изменится давление, если, не меняя температуры, мы сделаем объем сосуда рявным 1) 357 *см*³, 2) 350 *см*³.

Обозначая измененные объем и давление через $v+\Delta v$ и $p+\Delta p$, имеем согласно закону Бойля-Мариотта, что $pv=(p+\Delta p)(v+\Delta v)$, откуда

$$p+\Delta p=\frac{pv}{v+\Delta v}=\frac{pv}{v\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)}=\frac{p}{1+\frac{\Delta v}{v}} \doteq$$
$$\doteq p\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)=p-p\cdot\frac{\Delta v}{v}$$
$$\Delta p \doteq -p\cdot\frac{\Delta v}{v}.$$

Подставляя вместо букв числа, получаем:

1) $v+\Delta v \doteq 357$, $\Delta v \doteq 1$, $\Delta p \doteq -778\cdot\frac{1}{356}=-2,2$. Таким образом, при увеличении объема на 1 *см*³ давление уменьшится на 2,2 *мм* и вместо 778 *мм* будет 776 *мм*.

2) $v+\Delta v \doteq 350$, $\Delta v \doteq -6$, $\Delta p \doteq 778 \cdot \frac{1}{356} = 13{,}1$. При уменьшении объема на 6 *см*^{3} давление увеличится на 13,1 *мм* и вместо 778 *мм* будет 791 *мм*.

Погрешность от замены $\frac{1}{1+\frac{\Delta v}{v}}$ через $1-\frac{\Delta v}{v}$ составляет приблизительно $\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2$, что дает в определении Δp погрешность, равную приблизительно $p\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2$.

При $\Delta v = 1$ эта погрешность равна $778 \cdot \frac{1}{356^2}$ и меньше 0,01. Как видим, она совершенно поглощается погрешностью значения v, данного только до целых. При $\Delta v = -6$ погрешность от этой замены дает погрешность $778 \cdot \left(\frac{6}{356}\right)^2 \doteq 0{,}3$ в определении Δp, и тоже не может оказать сколько-нибудь заметного влияния на окончательный результат.

§ 70. Формулы для извлечения корня. Полагая в формуле (III) $2x = y$ и извлекая из обеих частей квадратный корень, получим, что $1+\frac{1}{2}y \doteq \sqrt{1+y}$. Возвращаясь к прежнему обозначению, т. е. заменяя y через x, приходим к приближенной формуле для извлечения квадратного корня из чисел, близких к 1:

$$\sqrt{1+x} \doteq 1+\frac{1}{2}x. \qquad \text{(VII)}$$

Чтобы оценить погрешность формулы, напишем ее в виде

$$\sqrt{1+x} \doteq 1+\frac{1}{2}x+\varepsilon$$

и найдем приближенное значение ε

$$\varepsilon = \sqrt{1+x}-\left(1+\frac{1}{2}x\right) = \frac{(1+x)-\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2}{\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{1}{2}x\right)} =$$

$$= -\frac{x^2}{4\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x\right)}.$$

При x весьма малом выражение в скобке в знаменателе последней дроби близко к 2, а потому можно принять, что $\varepsilon \doteq -\frac{1}{8}x^2$. Таким образом, формула (VII) дает значение $\sqrt{1+x}$ всегда по избытку, с погрешностью, близкой к $\frac{1}{8}x^2$.

Подобным же путем, исходя из формулы (IV), мы получим приближенную формулу для извлечения кубического корня из чисел близких к 1:

$$\sqrt[3]{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{3}x, \qquad \text{(VIII)}$$

которая тоже дает искомое значение корня по избытку, но с погрешностью, близкой к $\varepsilon = -\frac{1}{9}x^2$.

Формулы (VII) и (VIII) можно получить из разложения

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots \qquad \text{(A)}$$

которым, как устанавливают в курсе математического анализа, можно пользоваться для вычисления $(1+x)^n$ не только при натуральных значениях n, но и для всяких значений этого показателя, лишь бы только было $|x| < 1$. Полагая $n = \frac{1}{2}$ и $n = \frac{1}{3}$, получаем, после отбрасывания членов со второй и высшими степенями x, как раз формулы (VII) и (VIII). Первый из отбрасываемых членов дает приближенную оценку погрешности формулы.

Полагая в разложении (A) $n = \frac{1}{m}$ и ограничиваясь первыми двумя его членами, получим приближенную формулу для извлечения корня степени m из числа близкого к 1:

$$\sqrt[m]{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{m}x. \qquad \text{(IX)}$$

Погрешность этой формулы приближенно оценивается первым из отброшенных членов, равным

$$\varepsilon = -\frac{m-1}{2m^2}x^2.$$

Если приходится извлекать корень из числа, близкого не к 1, а к некоторой точной степени с показателем, равным показателю корня, то подкоренное выгодно преобразовать, как показано ниже:

$$\sqrt[m]{a^m + x} = \sqrt[m]{a^m\left(1 + \frac{x}{a^m}\right)} = a\sqrt[m]{1 + \frac{x}{a^m}}$$

и применить формулу (IX).

Примеры. Найти $p = \sqrt{1{,}017}$, $q = \sqrt{0{,}9642}$, $r = \sqrt[3]{0{,}975}$, $s = \sqrt[4]{627}$.

Решение:

$$p \doteq 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}017 = 1 + 0{,}0085 = 1{,}0085,$$

$$\varepsilon \doteq \frac{1}{8} \cdot 0{,}017^2 < 0{,}00004$$

(точное значение $p = 1{,}00844\ldots$)

$$q \doteq 1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}0358 = 0{,}9821 \doteq 0{,}982$$

$$\varepsilon = \frac{1}{8} \cdot 0{,}0358^2 < 0{,}0002$$

(точное значение $q = 0{,}98193\ldots$)

$$r \doteq 1 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}025 = 0{,}991666\ldots \doteq 0{,}9917$$

$$\varepsilon \doteq \frac{1}{9} \cdot 0{,}025^2 < 0{,}00007$$

(точное значение $r = 0{,}99159\ldots$)

$$s \doteq \sqrt[4]{625 + 2} = \sqrt[4]{5^4 + 2} = 5\sqrt[4]{1 + \frac{2}{625}} \doteq$$

$$\doteq 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{625}\right) = 5{,}00400$$

$$\varepsilon \doteq \frac{4-1}{2 \cdot 4^2}\left(\frac{2}{625}\right)^2 < \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{300^2}$$

$$5\varepsilon < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300^2} = \frac{1}{18} \cdot 10^{-4} < 10^{-5}$$

(точное значение $s = 5{,}003996\ldots$)

§ 71. Формулы тригонометрические. Взяв малый угол в n°, построим равнобедренный треугольник с углом при вершине $2n^\circ$, боковой стороной r *см* и основанием $2a$ *см*, и проведем дугу радиуса r с центром в вершине треугольника. При малом угле $2n^\circ$ хорда $2a$ будет мало отличаться от длины стягиваемой ею дуги. Это соображение приводит к приближенному равенству

$$2a \doteq \frac{2\pi r \cdot 2n^\circ}{360^\circ} \quad \text{или} \quad \frac{a}{r} = \frac{\pi n^\circ}{180^\circ}$$

В левой части последнего равенства мы имеем синус малого угла в n°, в правой — радианную меру этого же угла. Обозначая ее буквой x, получаем приближенную формулу для синуса малого угла

$$\sin x \doteq x \qquad \text{(X)}$$

Эту же формулу гораздо скорее можно получить, воспользовавшись следующим предложением тригонометрии (причем заодно получается и средство оценки ее точности): если x есть радианная мера острого угла, то его синус больше $x - \frac{1}{6}x^3$ и меньше x. Следовательно, полагая синус приближенно равным x, мы получаем значение синуса по избытку, с погрешностью, не превосходящей $\frac{1}{6}x^3$.

Вычисляя по синусу косинус, воспользуемся приближенной формулой (VII) и отбросим число второго порядка малости. Получаем приближенную формулу для косинуса малого угла:

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \doteq \sqrt{1 - x^2} \doteq 1 - \frac{1}{2}x^2 \doteq 1$$

$$\cos x \doteq 1 \qquad \text{(XI)}$$

Погрешность этой формулы оценивается числом $\frac{1}{2}x^2$, и точность ее, следовательно, ниже, чем формулы (X).

Вычисляя далее тангенс по формуле $\operatorname{tg} x = \sin x : \cos x$, получаем приближенную формулу для тангенса малого угла

$$\operatorname{tg} x \doteq x, \qquad \text{(XII)}$$

погрешность которой оценивается, как можно показать, числом $\frac{1}{3}x^3$. Формула эта дает значение тангенса по недостатку.

Укажем еще одну формулу, относящуюся уже не только к малому, но и ко всякому острому углу и весьма полезную при грубо-приближенных оценках:

$$\left.\begin{aligned} &\sin n^\circ \doteq \frac{n}{60} \text{ при } 0 \leqq n^\circ < 60^\circ, \\ &\sin n^\circ \doteq 1 \text{ при } 60^\circ \leqq n^\circ \leqq 90^\circ \end{aligned}\right\} \qquad \text{(X bis)}$$

Чтобы убедиться в приближенной справедливости этой формулы, достаточно начертить график синуса и график функции, стоящей в правой части (см. фиг. 11).

Применяя формулы (X), (XI), (XII), мы облегчим себе работу, если воспользуемся таблицей для перевода градусной меры в радианную.

Пример 1. Найти без таблиц $\sin 3^\circ$.

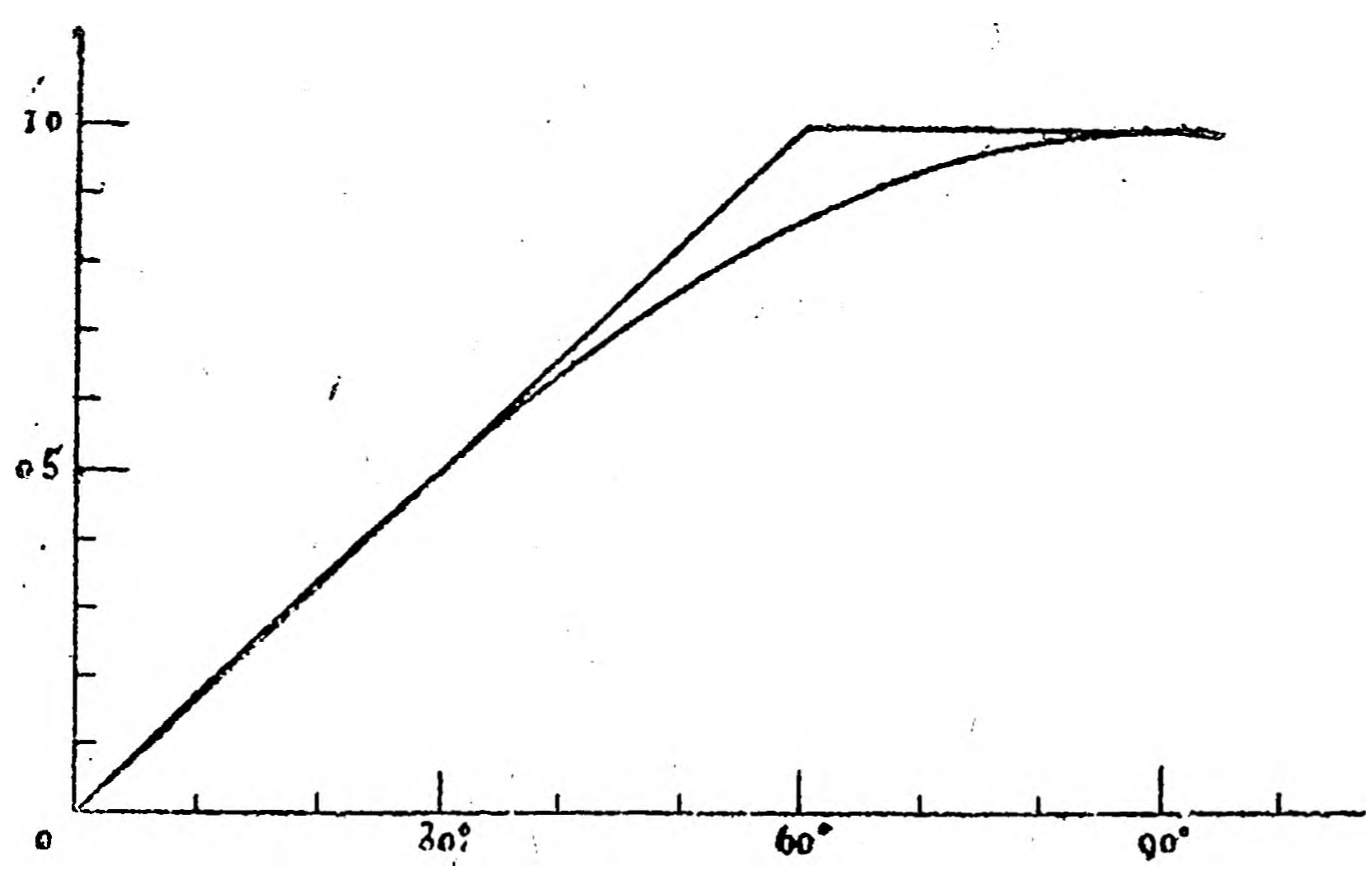
Радианная мера угла в 3° равна

$$\frac{\pi \cdot 3}{180} = \frac{3{,}1415\ldots}{60} = 0{,}05235\ldots$$

Шестая часть куба этого числа меньше, чем 0,00003, а потому приближенная формула (X) даст искомое значение синуса с 4 точными десятичными знаками: $\sin 3^\circ \doteq 0{,}0523$ (именно это значение мы и находим в таблице натуральных синусов). Округление мы сделали по недостатку, так как формула (X) всегда дает избыточное значение синуса.

Пример 2. Считая допустимой погрешность до 0,5%, выяснить, какими углами наклонения можно пренебрегать при измерении прямолинейных отрезков на местности.

Измеряя длину b наклонного прямолинейного отрезка на местности, всегда вычисляют длину горизонтального проложе-



Фиг. 11.

ния a такого отрезка по формуле $a = b \cos \alpha$. При малых значениях угла α можно воспользоваться формулой (XI) и брать просто $a \doteq b$. Спрашивается, при каких углах можно это делать, при условии, что погрешность не должна быть выше 0,5%.

Как мы видели, погрешность формулы (XI) оценивается числом $\frac{1}{2}x^2$, где x — радианная мера угла. При каком значении x $\frac{1}{2}x^2$ составляет 0,5% от приближенного значения $\cos x$, т. е. от 1? Составляем уравнение $\frac{1}{2}x^2 = 0{,}005$ и, решая его, получаем, что $x = 0{,}1$. Угол в 1 радиан содержит несколько больше 57°, а потому угол в 0,1 радиана приближенно равен $5{,}7^\circ = 5^\circ 42'$.

Обыкновенно принимают, что поправки на наклонение можно не делать, если угол не превосходит 5°.

Пример 3. Уклон участка железнодорожного пути равен восьми тысячным. Найти угол между линией этого участка пути и горизонтальным ее проложением.

Пользуясь таблицей тангенсов, ответим на вопрос, решая уравнение $\operatorname{tg} x = 0{,}008$. Четырехзначная таблица тангенсов дает $x = 0°28'$. Применяя формулу XII, получим тот же ответ, не прибегая к таблице. Надо только найти угол, радианная мера которого равна 0,008:

$$\frac{\pi n°}{180°} = 0{,}008, \quad n° = \frac{0{,}008 \cdot 180}{\pi} = 0{,}458$$

или, в минутах, $0°27{,}5'$.

§ 72. Формулы для логарифма и показательной функции.

Дадим еще без доказательства следующие две формулы:

$$\lg(1 + x) \approx 0{,}4343\ x, \quad 10^x \approx 1 + 2{,}303\ x, \qquad \text{(XIII и XIV)}$$

точность которых тем выше, чем ближе к 0 значение x. Формула (XIII) дает значение $\lg(1 + x)$ с погрешностью, приблизительно равной $0{,}4343 \cdot \frac{x^2}{2} < \frac{1}{4} x^2$. Формула (XIV) дает значение 10^x с погрешностью, приблизительно равной $\frac{1}{2} \cdot (2{,}303\, x)^2$ и меньшей $3x^2$.

Элементарный вывод этих формул затруднителен, а потому ограничимся лишь опытной их поверкой на частных примерах.

Пример 1. Найти lg чисел 1,001; 1,01; 1,1; 1,2.

x	0,001	0,01	0,1	0,2
$\lg(1 + x)$ по (XIII)	0,0004343	0,004343	0,04343	0,08686
$\varepsilon = \frac{1}{4} x^2$	$\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$	$\frac{1}{4} \cdot 10^{-4}$	$\frac{1}{4} \cdot 10^{-2}$	10^{-2}
Те же логарифмы по округлении	0,000434	0,0043	0,04	0,09
$\lg(1 + x)$ по таблице	0,00043427	0,0043214	0,0414	0,0792

Пример 2. Найти 10^x при $x = 0{,}001$; $0{,}01$; $0{,}1$; $0{,}2$.

x	0,001	0,01	0,1	0,2
10^x по (XIV)	1,002303	1,02303	1,2303	1,4606
$\varepsilon = 3x^2$	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$12 \cdot 10^{-2}$
Те же значения 10^x, но после округления	1,00230	1,023	1,2	1,5
10^x по таблице	1,002305	1,023295	1,259	1,585

Отметим, что, приняв одну из формул (XIII) или (XIV) без доказательства, мы легко можем вывести из нее другую. Так, если примем формулу (XIII)

$$\lg (1 + x) \doteq 0{,}4343\, x,$$

то, по определению десятичного логарифма, имеем, что

$$10^{0{,}4343\, x} \doteq 1 + x,$$

или, полагая $0{,}4343\, x = y$, $10^y \doteq 1 + \frac{1}{0{,}4343} y \doteq 1 + 2{,}303\, y$, а это и есть формула (XIV).

Пример 3. Полагая, что разница чисел a и b $(a > b)$ весьма мала сравнительно с их суммой, показать возможность замены $\lg \frac{a}{b}$ через $0{,}8686 \cdot \frac{a-b}{a+b}$.

Для этой цели воспользуемся тожеством

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a-b}{a+b}}$$

и применим к числителю и знаменателю правой части формулу (XIII). Тогда

$$\lg \frac{a}{b} = \lg \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right) - \lg \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) \doteq 0{,}4343 \cdot \frac{a-b}{a+b} - \\ - \left(-0{,}4343 \cdot \frac{a-b}{a+b}\right) \doteq 0{,}8686 \cdot \frac{a-b}{a+b}.$$

Можно показать, что погрешность, обусловленная такой заменой, оценивается членом не второго порядка малости, как можно думать на основании оценки погрешности формулы (XIII), а третьего: здесь $\varepsilon \doteq 0{,}3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3$.

При двукратном применении формулы (XIII) произошла частичная компенсация погрешностей. Полагая $\frac{a-b}{a+b}=x$, получаем новую приближенную формулу

$$\lg \frac{1+x}{1-x} \doteq 0{,}8686\,x \tag{XV}$$

погрешность которой не превосходит $0{,}3\,x^3$.

§ 73. Сводная таблица приближенных формул. Чтобы упростить оценку погрешностей рассмотренных приближенных формул, приводим таблицу, показывающую, в каком интервале должно заключаться значение аргумента, чтобы эти формулы давали результаты с определенным числом точных десятичных знаков. При этом учтены только *погрешности формул*. Вычислительная погрешность, в частности погрешность от округления, а также возможная погрешность от неточности данных в расчет не приняты.

Составление таблицы сводится к решению ряда уравнений, каждое с одним неизвестным, частью довольно простых, частью несколько более трудных. Покажем, например, как вычислены границы интервалов для формулы (VI).

Записав формулу (VI) в виде $\frac{1}{1+x}=1-x+\varepsilon$, решаем это уравнение относительно x, считая ε известным, и получаем для корней выражения

$$x_1=\frac{\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon+\varepsilon^2}}{2} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{\varepsilon-\sqrt{4\varepsilon+\varepsilon^2}}{2}.$$

Полагая сперва $\varepsilon=+0{,}005$, получаем $x_1=-0{,}0682$, $x_2=0{,}0732$. В таких границах должен заключаться x, чтобы формула (VI) давала *два* точных десятичных знака. Округляя эти границы до 2 десятичных знаков (конечно, по недостатку), получаем те самые числа $-0{,}06$ и $+0{,}07$, какие приведены в таблице. Полагая далее $\varepsilon \doteq 0{,}0005$, получаем $x_1=-0{,}0221$ и $x_2=+0{,}0226$. В этом интервале (для x) формула (VI) обеспечивает три точных десятичных знака. Полагая, наконец, $\varepsilon=0{,}00005$, находим границы интервала, в котором эта формула дает уже 4 точных десятичных знака ($-0{,}0070$, $+0{,}0070$).

В данном случае мы придавали букве ε только положительные значения, так как отрицательные ее значения приводят к мнимым корням. Отсюда заключаем, что формула (VI) дает значения всегда по недостатку (это можно вывести и из рассуждений § 69).

Уравнения, получаемые при вычислении границ интервалов для других формул, проще всего решать тем же способом, каким мы решили уравнение $\cos x = x$ в § 11.

§ 74. Более сложные примеры применения приближенных формул. Комбинируя разными способами формулы I — XV, легко получить множество других, упрощающих вычисления в более сложных случаях. Таковы, например, следующие формулы (везде предполагается, что x число весьма малое):

$$1)\ \frac{1}{(1+x)^2} \doteq \frac{1}{1+2x} \doteq 1-2x;$$

$$2)\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} \doteq \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} \doteq 1+\frac{1}{2}x;$$

$$3)\ \sqrt[3]{(1+x)^2} \doteq \sqrt[3]{1+2x} \doteq 1+\frac{2}{3}x;$$

$$4)\ \sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}} \doteq \sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}} \doteq 1+\frac{1}{2}(x-y-z).$$

В последней формуле, предполагая весьма малым не только x, но также и y и z, окончательный результат получаем после применения формул (VI) и (VII).

Чтобы судить об экономии, доставляемой применением подобных формул, решим несколько задач посредством этих формул и без них.

Пример 1. Зная, что сила земного тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра земли, найти, насколько легче станет человек, весящий на поверхности земли (на уровне океана) $p_0 \doteq 65$ *кг*, если он поднимается на высоту $h \doteq 10$ *км*. Радиус земли примем равным $R \doteq 6370$ *км*.

Обозначая вес человека на высоте h через $p_0 - \Delta p$, имеем, для вычисления Δp формулу

$$p_0 - \Delta p = \frac{p_0 R^2}{(R+h)^2},$$

которая после деления числителя и знаменателя правой части на R^2 и применения первой из полученных в начале настоя-

№№	Приближенная формула	Дает k точных десятичных знаков, если x в интервале						Примечание
		$k=2$		$k=3$		$k=4$		
		от	до	от	до	от	до	
I	$(1+x)(1+y) \doteq 1+x+y$	$-0{,}07$	$+0{,}07$	$-0{,}022$	$+0{,}022$	$-0{,}007$	$+0{,}007$	$\lvert x\rvert \geqq \lvert y\rvert$
II	$(1+x)(1+y)(1+z) \doteq 1+x+y+z$	$-0{,}04$	$+0{,}04$	$-0{,}012$	$+0{,}012$	$-0{,}004$	$+0{,}004$	$\lvert x\rvert \geqq \lvert y\rvert \geqq \lvert z\rvert$
III	$(1+x)^2 \doteq 1+2x$	$-0{,}07$	$+0{,}07$	$-0{,}022$	$+0{,}022$	$-0{,}007$	$+0{,}007$	
IV	$(1+x)^3 \doteq 1+3x$	$-0{,}04$	$+0{,}04$	$-0{,}012$	$+0{,}012$	$-0{,}004$	$+0{,}004$	
V	$(1+x)^n \doteq 1+nx$ (n — натуральное число)							Если $\lvert nx\rvert < 1$, то $1+nx<(1+x)^n<\frac{1}{1-nx}$
VI	$\frac{1}{1+x} \doteq 1-x$	$-0{,}06$	$+0{,}07$	$-0{,}022$	$+0{,}022$	$-0{,}007$	$+0{,}007$	
VII	$\sqrt{1+x} \doteq 1+\frac{1}{2}x$	$-0{,}19$	$+0{,}21$	$-0{,}062$	$+0{,}064$	$-0{,}020$	$+0{,}020$	
VIII	$\sqrt[3]{1+x} \doteq 1+\frac{1}{3}x$	$-0{,}20$	$+0{,}22$	$-0{,}065$	$+0{,}068$	$-0{,}021$	$+0{,}021$	
IX	$\sqrt[m]{1+x} \doteq 1+\frac{1}{m}x$ (m — натуральное число)							Приближенное значение погрешности $-\frac{m-1}{2m^2}x^2$
X	$\sin x \doteq x$	$-17°48'$	$+17°48'$	$-8°15'$	$+8°15'$	$-3°50'$	$+3°50'$	
XI	$\cos x \doteq 1$	$-5°43'$	$+5°43'$	$-1°48'$	$+1°48'$	$-0°34'$	$+0°34'$	
XII	$\mathrm{tg}\, x \doteq x$	$-14°8'$	$+14°8'$	$-6°25'$	$+6°25'$	$-3°2'$	$+3°2'$	
XIII	$\lg(1+x) \doteq 0{,}4343\,x$	$-0{,}14$	$+0{,}15$	$-0{,}047$	$+0{,}048$	$-0{,}015$	$+0{,}015$	
XIV	$10^x \doteq 1+2{,}303\,x$	$-0{,}04$	$+0{,}04$	$-0{,}014$	$+0{,}014$	$-0{,}004$	$+0{,}004$	
XV	$\lg\frac{1+x}{1-x} \doteq 0{,}8686\,x$	$-0{,}25$	$+0{,}25$	$-0{,}119$	$+0{,}119$	$-0{,}055$	$+0{,}055$	

щего параграфа формул (число $\frac{h}{R}$ весьма мало!) принимает следующий вид

$$p_0 - \Delta p = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \doteq p_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \doteq p_0 - \frac{2hp_0}{R},$$

откуда

$$\Delta p \doteq \frac{2hp_0}{R}.$$

Так как $\frac{h}{R} \doteq \frac{10}{6370} < 0{,}002$, то приближенная формула (III), позволяющая заменить $\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2$ через $1 + \frac{2h}{R}$, дает не меньше 4 точных десятичных знаков (см. табл. I). Далее, замечая, что $\frac{2h}{R} < 0{,}004$, убеждаемся, что и формула (VI), приводящая к разности $1 - \frac{2h}{R}$, тоже дает по крайней мере 4 точных десятичных знака. Рассматривая 2 последних действия (умножение на p_0 и вычитание p_0), заключаем, что погрешности использованных приближенных формул не могут сказаться на первых двух десятичных знаках окончательного результата. С другой стороны, в виду приближенности значений h, p_0, R, этот окончательный результат имеет 2 заслуживающих доверия значащих цифры. Вычисляя Δp (посредством счетной линейки), получаем $\Delta p \doteq \doteq \frac{2 \cdot 10 \cdot 65}{6370} = \frac{130}{637} \doteq 0{,}204$, и по округлении до 2 значащих цифр (что будет в то же время и округлением до 2 десятичных знаков), получим $\Delta p \doteq 0{,}20$ *кг*. Это и есть искомая убыль веса.

Как видим, применение приближенных формул чрезвычайно упростило числовые выкладки: в данном случае все свелось к одному делению (130 на 637). Зато, конечно, приходится тратить некоторое время на преобразование буквенных выражений и особенно на рассуждения, связанные с учетом погрешностей. Последнего, впрочем, часто вовсе не делают, что связано, конечно, с риском применить приближенную формулу тогда, когда она в виду требуемой точности результатов не может быть применена.

Проведем, для сравнения, вычисление Δp еще раз, не пользуясь приближенными формулами. Придется применить логарифмы (согласно VIII правилу подсчета цифр, 4-значные). Вычисление уменьшенного веса по формуле

$$p_0 - \Delta p = \frac{p_0 \cdot R^2}{(R + h)^2}$$

дает значение 64,79, а потому Δp получается равным $65-64,79=$ $=0,21$. Сохраняя в результате обе цифры, мы, повидимому, нарушаем I правило подсчета цифр. Однако, приближенное число p_0 входит множителем в вычитаемое, а потому можно отнестись с доверием к обеим цифрам разности; лучше было бы, однако, применить формулу

$$1-\frac{\Delta p}{p_0}=\frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

Вычисление того же результата посредством 7-значных логарифмов дает $\Delta p=0,2036$.

Пример 2. Вычислить, на сколько увеличится поверхность шара, объем которого $V=856$ $м^3$, если увеличить этот объем на 1, 2, 3, 4, 5%.

Исключая R из формул для поверхности и объема шара $\left(S=4\pi R^2 \text{ и } V=\frac{4}{3}\pi R^3\right)$, получаем зависимость между поверхностью и объемом

$$S=\sqrt[3]{36\pi V^2} \qquad \text{(A)}$$

Далее, обозначая приращения V и S через ΔV и ΔS, заключаем, что

$$S+\Delta S=\sqrt[3]{36\pi(V+\Delta V)^2}=S\sqrt[3]{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^2}\doteq$$

$$\doteq S\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta V}{V}\right),$$

откуда

$$\Delta S=\frac{2}{3}\cdot S\cdot\frac{\Delta V}{V} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta S}{S}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta V}{V}.$$

Поставленный в задаче вопрос получает теперь такое решение: Если объем увеличить на

1%, 2%, 3%, 4%, 5%,

то поверхность увеличится на

0,7%, 1,3%, 2,0%, 2,7%, 3,3%.

Не прибегая к приближенным формулам, искомое увеличение поверхности проще всего получить, вычисляя по формуле (А) поверхность S для объема $V=856$ $м^3$ и для объемов, увеличенных на соответствующее число процентов. Проводя вычисление, например, для 5%, и применяя 4-значные логарифмы, получим $\Delta S=450,4-436,0=14,4$ $м^2$ или 3,30% от $S=436,0$ $м^2$.

Итак, в результатах, полученных посредством приближенных формул, точным оказались не только целые проценты, но и десятые их доли (вычисление посредством приближенных формул при меньших значениях ΔS даст еще более точные результаты).

Упражнения к главе IX

1. Масса *1 куб. дм* чистой воды при температуре наибольшей плотности и под нормальным атмосферным давлением равна 0,999973 *кг*. Найти объем чистой воды при тех же условиях.

2. Показать возможность замены формулы Лямэ (см. пример 3 § 51) следующей: $x=\frac{rp}{R}$. Выяснить, как велико расхождение между результатами вычисления по обеим формулам при $\frac{p}{R}$ равном 0,01; 0,05; 0,1; 0,5.

3. Секундный маятник имеет в Ленинграде длину $l=99{,}482$ *см*, соответствующую ускорению силы тяжести $g=981{,}93$ *см/сек*^{2}. Вычислить, пользуясь формулой $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где T — время дного колебания в секундах, сколько колебаний в час сделает в Ленинграде маятник, на 0,5 *см* более длинный, и маятник, на 0,5 *см* более короткий. Вывести формулу, дающую изменение числа колебаний в час в зависимости от изменения длины.

ГЛАВА X

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ РАБОТА В ТРУДОВОЙ ШКОЛЕ II СТУПЕНИ

§ 75. Чему должна научить школа? Сравнительно недавно было широко распространено мнение, что вычислительная работа есть работа второстепенная, и все внимание устремлялось на другие стороны математического образования. Программа дореволюционной средней школы, если не считать начального курса арифметики, касалась лишь одного вопроса техники вычислений: применения логарифмических и логарифмотригонометрических таблиц. Отсюда понятны те жалобы, какие постоянно высказывались работниками высшей, особенно высшей технической школы, по поводу полного неумения студентов выполнять вычисления. В настоящее время вопросам приближенных вычислений и развитию вычислительной техники общеобразовательная школа уделяет несравненно больше внимания. Неизбежность этого становится понятной, если принять во внимание *реальное* направление в современной постановке изучения математики: стремясь связать занятия математикой с трудовой деятельностью человека, школа должна отказаться от искусственных, выдуманных задач, или по крайней мере весьма ограничить их употребление, и брать задачи реального содержания, т. е. такие, к каким приводит человека его желание изучить и подчинить себе окружающую действительность. Но преподаватель математики, желающий отказаться от искусственных задач и заменить их задачами, взятыми из действительной жизни, из практики, например, землемера, инженера, агронома, бухгалтера, встречается при этом с двумя затруднениями. Первое заключается в том, что такие задачи, вообще говоря, требуют больших числовых расчетов, отнимающих много времени и не имеющих, повидимому, никакой образовательной ценности, коль скоро навык в арифметических операциях уже приобретен. Второе затруднение доставляется приближенным характером чисел, с которыми приходится иметь дело: точные данные при решении таких „реальных" задач встречаются лишь в виде исключения, а приближенные данные приводят к приближенным же результатам. Что же в этих последних верно и что неверно? Как быть с теми длинными „хвостами" цифр, которые быстро получаются при умножении нескольких многозначных чисел? Сколько цифр брать в результате в том случае, когда действие (деление, извлечение корня) дает результат в виде бесконечной десятичной дроби? Со сколькими цифрами брать для вычисления те данные, которые, как число π, могут быть взяты с произвольной точностью? Чтобы ответить на эти и подобные им вопросы, и приходится вводить в школьные занятия математикой элементы Арифметики приближенных вычислений. Иначе преподаватель начинает избегать данных, какие доставляются непосредственными измерениями школьников, а также всевозможными справочниками, и заменяет их искусственными, выдуманными, но зато удобными для вычисления. Отсюда один шаг и до такого подбора данных, при котором из вычисления наперед устраняются все осложнения: все деления „выходят" без остатка, корни извлекаются точно, уравнения решаются в целых числах и т. д. Получается возвращение к старой, всеми осужденной схоластике.

Какие же именно вопросы должны войти в школьный курс математики? Ответом на это может служить содержание предшествующих глав настоящей книги. Однако, книга эта предназначается для учителя, а потому рассматривает многие вопросы полнее и глубже, чем их надо осветить ученику. Попробуем выяснить, хотя бы в самых общих чертах, тот минимум знаний и навыков по Арифметике приближенных вычислений, который должен стать прочным достоянием учащихся, а также посмотрим, как распределяется этот материал по годам обучения.

Сначала возьмем вопросы, связанные с I частью Арифметики приближенных вычислений — с учетом погрешностей.

§ 76. Учет погрешностей. Так как приемы действий над числами точными и приближенными не одинаковы, то, прежде всего, надо научиться постоянно различать те и другие. Желательно было бы введение особого обозначения для чисел точных. Есть предложение обозначать точные числа знаком $\wedge$, поставленным над числом. Быть может, этот знак и не привьется, так как он занимает слишком много места (лучше было бы заменить угол горизонтальной черточкой или дугой), но потребность в выделении точных чисел особым знаком несомненно есть. Точно так же есть потребность и в особом знаке приближенного равенства. Предложен целый ряд подобных знаков, но ни один из них не получил общего признания. Оставляя знак $=$ для равенства точного, можно было бы отмечать приближенный характер равенства добавочной жирной точкой, поставленной под этим знаком.

Итак, первая задача — *научиться различать числа точные и числа приближенные.*

Очень часто, имея число, точное или приближенное, изображаемое несколькими цифрами, мы должны бываем изобразить его меньшим числом цифр или *округлить* его. С задачей округления мы встречаемся уже при делении целого на целое, когда хотим представить частное в виде десятичной дроби. На практике всегда употребляется *округление с поправкой.* Особого правила требует случай, когда отбрасывается одна только цифра 5 („Правило четной цифры“ — см. § 7).

Таким образом, вторая задача — *научить округлять числа* (до определенного числа десятичных знаков или значащих цифр).

Зная приближенное значение некоторой величины, например, зная, что $x \mathrel{\underset{\bullet}{=}} 8{,}21$ *км*, мы, строго говоря, еще ничего об этой величине не знаем. Действительно, пока остается открытым вопрос о том, как велика может быть разница между точным значением (x) и указанным приближенным значением (8,21), мы не можем сказать о величине x ничего определенного. Отсюда возникает задача: дать характеристику точности приближенного числа или, другими словами, *произвести учет погрешности.*

Для разрешения этой (третьей) задачи в нашем распоряжении находится 4 способа, рассмотренных в гл. II: учет погрешностей приближенных чисел, взятых независимо от способа их получения, можно производить либо по способу границ, либо посредством границ их погрешностей, абсолютных или относительных, либо подсчетом их цифр. Последний способ, будучи наименее совершенным, оказывается в то же время и наиболее простым, а потому он и применяется на практике несравненно чаще первых трех способов. Его и надо сделать основным школьным способом учета погрешностей чисел. При этом необходимо раз навсегда условиться *округлять всякое приближенное число так, чтобы в нем оставались лишь заслуживающие доверия цифры;* при этом допускается некоторая неопределенность последней цифры числа, но с условием, чтобы малые значения погрешности в этой цифре были значительно более вероятны, чем большие. Если принять это *основное правило употребления приближенных чисел*, то, например, утверждение, что $x = 8{,}21$, приобретает смысл хотя и не вполне определенный, но достаточно определенный для большинства требований практики: оно означает, что точное значение x отличается от указанного приближенного его значения (8,21) не более как на 1-2 единицы разряда последней цифры, т. е. на 1-2 сотых. Более значительная разность между x и 8,21 хотя и возможна, но весьма мало вероятна.

Из остальных трех способов, дающих совершенно определенный ответ на вопрос о точности приближенного числа, наиболее простым является способ границ. Его и надо применять в школе в тех случаях, когда такая определенность в оценке точности приближенного числа необходима. Например, если утверждение: $x = 8{,}21$ представляется недостаточно определенным, мы можем заменить его, скажем, таким: „x наверно заключается между 8,20 и 8,22", указывая вместо приближенного значения числа его НГ и ВГ.

Итак, для тех сравнительно редких случаев, когда требуется совершенно определенный ответ на вопрос о точности данного приближенного числа, т. е. в вычислениях „со строгим учетом погрешностей", можно рекомендовать школе применение способа границ. Для повседневного же, так сказать, употребления, а именно для вычислений „без строгого учета погрешностей" остается способ подсчета цифр и основное правило употребления приближенных чисел.

Отметим, что в связи со способом подсчета цифр неизбежно появляются вопросы о двояком смысле цифры 0 и об особом обозначении точных и сомнительных цифр (§§, 5, 6, 17).

Считая способ подсчета цифр и способ границ обязательными для школьного курса математики, мы должны еще решить вопрос о том, следует ли в него включать способ оценки точности приближенных чисел, основанный на применении границы абсолютной и относительной погрешности. Эти способы являются, по существу, дальнейшим развитием и усовершенствованием способа границ. Они широко применяются в экспериментальных науках. Если ограничивать их применение только оценкой точности отдельно взятых приближенных чисел и не пользоваться ими для учета погрешностей в результатах вычислений по известным границам погрешностей данных, о чем дальше, то вряд ли можно возражать против введения их в школу. Но делать это нужно с надлежащей постепенностью, отодвигая их на более поздний период, чтобы понятия НГ и ВГ самого числа не смешались бы в головах учеников с понятиями границ погрешностей, что иногда, к сожалению, бывает.

Переходим к следующей — четвертой по счету — задаче школьной Арифметики приближенных вычислений, а именно к учету погрешностей в результатах измерений.

В гл. III мы видели, что оценка точности чисел, полученных путем измерения, производится либо двумя ранее установленными способами (подсчетом цифр или способом границ), либо двумя новыми (посредством средних уклонений или средних квадратических погрешностей).

И здесь, как и в предыдущем случае, в качестве основного способа надо рекомендовать для школы способ подсчета цифр. Даже в случае многократного измерения одной и той же величины этот способ вполне достаточен (конечно, при вычислении без строгого учета погрешностей). Надо вычислить среднее арифметическое всех найденных результатов (отдельных измерений) и округлить его так, чтобы в нем оставалась лишь одна сомнительная цифра, причем выяснение сомнительных цифр достигается путем простого сравнения найденного среднего с результатами отдельных измерений или, в случае каких-либо затруднений, путем вычисления уклонений от среднего.

Более строгий учет погрешностей результатов измерений посредством указания НГ и ВГ, а также посредством вычисления среднего уклонения (см. § 25) тоже не представляет никаких затруднений и может быть рекомендован для школы. Отметим, однако, еще раз, что надобность в строгом учете погрешностей встречается в школьной практике весьма редко, а потому основным способом учета погрешностей и для результатов измерений остается способ подсчета цифр.

Научный способ обработки результатов измерений, основанный на применении средних квадратических погрешностей (см. §§ 21 и 22), вряд ли может войти в программу трудовой школы.

Остается последняя — пятая по счету — задача школьного курса Арифметики приближенных вычислений: учет погрешностей в результатах вычислений.

С этой важнейшей задачей школьники встречаются очень рано — собственно говоря, еще в школе I ступени. Совершенно необходимо уже на 1-м году школы II ступени (на V году обучения) дать им в руки один из способов учета погрешностей в результатах вычисления, иначе неизбежны „нелепые хвосты ненужных цифр“ (по выражению И. Н. Кавуна), так затрудняющие решение реальных задач. В самом деле, даже такая простая задача, как, например, вычисление веса призматического бруска с квадратным сечением по известным его линейным размерам, полученным посредством измерения, и по известной плотности материала, взятой из справочника, неизбежно ставит вопрос о рациональном округлении полученного результата. Пусть, например, этот брусок имеет длину 24,7 *см* и сторону сечения 8,3 *см*. Если он железный, то, взяв для плотности число 7,78 и вычислив вес, получим для него число 1594,9778 *г*. Уже здравый смысл говорит, что результат этот надо округлить, и школьники делают это обыкновенно сами, произвольно решая вопрос о количестве подлежащих сохранению цифр — если только, как это иногда случается, преподаватель не требует „полной точности“, конечно, совершенно фантастической, так как при приближенных данных результат не может быть точным.

Из трех рассмотренных нами в гл. IV — VI способов учета погрешностей в результатах вычислений (способ границ, способ границ погрешностей, способ подсчета цифр) единственно приемлемым на V году обучения является способ подсчета цифр, причем для этого года совершенно достаточно 4 правил подсчета цифр, а именно правил I, II, V, VI. Программа ГУС‘а [1] предлагает ограничиться на этом году даже тремя лишь правилами, пропуская правило V. Однако это последнее (правило округления промежуточных результатов) надо ввести как можно раньше, так как иначе накопление погрешностей от округления может заметно исказить окончательный результат. Что же касается правила VI (о предварительном округлении более точных данных), то его без всякого ущерба для дела можно отнести и на следующий год обучения.

---

[1] См. „Программы и методические записки единой трудовой школы“, выпуск 3, стр. 117, Гиз, 1927.

Остальные правила подсчета цифр появляются в школьном курсе по мере того, как в них появляется надобность. Вычисления без строгого учета погрешностей, но с применением правил подсчета цифр должны быть основным видом вычислений и применяться на всем протяжении школьного курса математики.

Желая ввести в школьный обиход правила подсчета цифр, мы должны разрешить вопрос о доступном для школьников способе их обоснования. Строгое их обоснование, связанное с вычислением предельных и средних квадратических погрешностей, в школе немыслимо. Остается применение более или менее широких опытов, особенно легко осуществимых в условиях работы с целым коллективом ребят (разделение труда!), а также использование некоторых приемов (употребление знаков вопроса взамен неизвестных цифр в компонентах, варьирование последней цифры). За подробностями позволю себе отослать читателя к моей брошюре для ученика, выпущенной под заглавием „Как надо вычислять?“ и содержащей популярное, приспособленное для понимания школьников на V году обучения, изложение способа подсчета цифр. [1]

Для строгого учета погрешностей, надобность в котором встречается сравнительно редко, достаточно ознакомить школьников с одним из способов. Сравнивая способ границ и способ границ погрешностей, заключаем, что изучение первого во много раз легче, чем второго. Поэтому способ границ обязательно должен войти в программу школьного курса математики, но, конечно, знакомство с ним должно быть отнесено на значительно более поздний срок, чем знакомство со способом подсчета цифр.

Способ границ погрешностей дается уже гораздо труднее, чем способ границ, и школе II ступени надо либо вовсе отказаться от него, хотя он имеет большое применение в экспериментальных науках, либо отнести ознакомление с ним на самый конец школьного курса математики.

Научить целесообразному округлению результатов при вычислениях без строгого учета погрешностей и хотя бы одному способу строгого учета погрешностей — в этом и заключается важнейшая задача школьного курса математики в вычислительной его части.

§ 77. Механизация вычислительной работы. В практических применениях математики все большее и большее значение получают различные приемы и приборы, облегчающие и ускоря-

---

[1] В. Брадис. Как надо вычислять. Гиз, 1929 (Школьная рабочая библиотека по математике, под ред. А. М. Воронца, № 9).

ющие вычислительную работу. До недавнего времени школа ограничивалась только употреблением логарифмических и логарифмо-тригонометрических таблиц, совершенно игнорируя все прочие вспомогательные средства вычисления. Теперь, всерьез поставив вопрос о сближении школьной математики с жизнью, мы должны пойти по пути механизации вычислительной работы гораздо дальше. Все вспомогательные средства вычисления, расмотренные в гл. VII, могут и должны в большей или меньшей степени найти себе применение в школе. Из приборов на первый план надо выдвинуть счеты (для сложения и вычитания) и палочки Непера (для умножения и деления). Эти приборы так дешевы, что могут получить самое широкое распространение среди школьников, и так просты, что могут применяться с 1-го года II ступени. Крайне желательно, чтобы каждая школа имела по экземпляру арифмометра, но это, конечно, при нашей бедности пока трудно достижимо. Менее трудно, но все же нелегко, обзавестись набором счетных логарифмических линеек. Пока у нас в СССР не наладилось производство дешевых и достаточно точных счетных линеек, [1] в школе придется ограничиваться основательным усвоением принципа линейки и изготовлением самодельной линейки, описанной в § 53. Дешевая же счетная линейка займет в школе то место, какое там сейчас занимает таблица логарифмов, и будет применяться даже чаще этой последней. Графические приемы вычисления должны применяться на всем протяжении курса и образовывать собою тот мост между арифметикой и алгеброй, с одной стороны, и геометрией с тригонометрией, — с другой, какого теперь так ищут. Новый метод графических вычислений, какой доставляет номография, начинает понемногу проникать в школу. Можно указать несколько иностранных сборников математических таблиц, предназначенных для школы и впервые содержащих (в виде приложения) некоторые номограммы, способные облегчить наиболее часто встречающиеся расчеты.

Далеко не использованы школой и математические таблицы. Пользование таблицами наиболее распространенных типов (в один, два и три входа) настолько просто, что знакомить с ними можно уже на 5-м году обучения. Будучи вспомогательным средством вычисления, таблица должна применяться всякий раз, когда основной способ выполнения того или иного действия усвоен, а встречающиеся задачи требуют многократного производства

---

[1] В Германии появились в продаже линейки школьного образца, воспроизводящие всю лицевую сторону обыкновенных технических линеек и стоящие всего около 3 марок ($1^1/_3$ рубля) штука.

этого действия. Первыми таблицами, с каким следует знакомить школьников, являются несомненно таблицы произведений: действия умножения и деления встречаются так часто, что вопрос об их механизации возникает в первую очередь. Уже самодельные таблички произведений (определенного числа на все однозначные числа) оказывают существенную помощь, например при переводе мер. Если на 5-м году прорабатывается, как рекомендует программа ГУС'а (1927 г.), вопрос о длине окружности и площади круга, соответствующие таблицы получат свое применение уже здесь. В дальнейшем вводится таблица квадратов (в связи с геометрическими задачами), получающая особенно широкое применение при проработке статьи о квадратных уравнениях (на 7-м году), а также таблица кубов, наличность которой позволит давать много интересных геометрических задач, требующих извлечения кубического корня. Изучение элементов тригонометрии, относимое на 7-й год, вызывает потребность в таблицах натуральных тригонометрических величин. Наконец, на 8-м году появляются и таблицы логарифмические, вводить которые надо по возможности раньше, чтобы школьники имели время приобрести в пользовании ими достаточно прочный навык, а также таблицы логарифмотригонометрические. В разные моменты курса используются и различные другие таблицы: обратных значений, радианов и т. д.

Если таблицы вводятся своевременно, т. е. тогда, когда имеется уже потребность в механизации производства того или иного действия, то школьники быстро оценивают выгоды применения таблиц и легко справляются со всеми затруднениями, неизбежно возникающими на первых порах. Крайне желательно, чтобы с самого начала имело место не чисто механическое, а вполне сознательное пользование таблицами. Надо дать понятие о том, как таблица составляется, и поручить группе перевычислить некоторые (хотя бы) табличные значения, что связано с рациональным разделением труда. Затем необходимо добиться сознательного выполнения процесса интерполяции (приведением к единице или по способу пропорции), а после уже приучить к применению вспомогательных средств интерполяции. Вопросом первостепенной важности является вопрос о точности результатов, доставляемых таблицами, и надо приучить школьников всегда выяснять, соответствует ли точность имеющейся у них таблицы точности данных вычисления и его результата. В случае, когда точность таблицы недостаточна, вычисление надо провести без таблицы, или, по крайней мере, отдать себе отчет в той *потере точности*, какая вызвана применением таблицы. В случае, когда точность таблицы слишком велика, надо надлежащим образом округлить результат или упростить применение таблицы (округлять табличные значения, не делать интерполяции).

Не требует ли ознакомление с таблицами лишнего времени, которого в распоряжении преподавателя математики вообще так мало? С введением таблиц дело обстоит так же, как и со всяким другим видом рационализации какой бы то ни было работы: несколько часов, которые придется затратить на ознакомление с новой таблицей, с избытком окупятся, благодаря доставляемой таблицами экономии времени и сил. Вычисление квадратного корня с 4 значащими цифрами, требующее при применении обычного способа письменного вычисления 2—3 минут времени, производится при помощи четырехзначной таблицы квадратов в 10—15 секунд, т. е. раз в десять скорее, да и ошибки при применении таблицы встречаются знанительно реже. А сколько таких вычислений межет быть облегчено применением таблиц!

Многие авторы рекомендуют прививать в школе так называемые сокращенные приемы производства арифметических действий и прежде всего правила сокращенного умножения и деления многозначных чисел. Позволительно думать, что значение этих правил сильно преувеличено. Выгоды от их применения становятся заметными лишь в случае вычисления с числами, имеющими много цифр. Но такие числа в задачах практического характера встречаются редко, и труд, потраченный на усвоение правил, вообще говоря, не окупается. При вычислениях же с двух-, трех-, четырехзначными числами, с которыми почти всегда и приходится иметь дело, правила эти совершенно не выдерживают конкуренции с различными вспомогательными способами вычислений (таблицы, счетные приборы, графики).

Однако преподаватель все же должен быть знаком с этого рода „сокращенными“ и „упрощенными“ способами производства арифметических действий, а потому те из них, какие на практике оказываются наиболее удобными, в настоящей книге рассмотрены (см. § 54).

Подобное отрицательное отношение к сокращенным приемам письменного производства арифметических действий не следует распространять на многочисленные частные приемы, упрощающие во многих случаях производство главным образом устных вычислений. Таковы, например, приемы умножения и деления на 5, 25, 125, умножения на 11, прием округления данных, прием для возведения в квадрат числа с цифрой 5 на конце и многие другие. Научить быстро и уверенно считать в уме, пользуясь в целях упрощения индивидуальными свойствами участвующих в вычислении чисел, несомненно, одна из задач школьной математики, задача, к сожалению, часто упускаемая из вида.

Точно так же не следует отказываться и от применения различных **приближенных формул**, позволяющих получить искомый результат с достаточный для практических целей точностью и весьма просто. Таковы формулы:

$$(1+x)^2 \doteq 1+2x, \ \sqrt{1+x} \doteq 1+\frac{1}{2}x, \ \sin x \doteq x, \ \cos x \doteq 1$$

и многие другие. Все подобные формулы дают тем большую точность, чем ближе к нулю значение x. Ряд таких формул выведен в гл. IX, причем указаны и способы оценки доставляемой ими погрешности.

Возвращаясь к письменному производству вычислений, заметим, что здесь надо всемерно добиваться *рациональной записи*, рационального расположения всех вычислений. Школа I ступени выработала нормальный вид записи решения всякой арифметической задачи: словесно выраженные вопросы, подробная запись каждого арифметического действия. Эта „стандартная" запись применяется и в младших группах школы II ступени. В дальнейшем такая форма записи становится излишне громоздкой и оставляется, но никакого другого „стандарта" записи взамен не дается. В результате обыкновенно получается полный беспорядок в записи арифметических вычислений, которыми должно заканчиваться решение всякой алгебраической, геометрической (на вычисление) и тригонометрической задачи. Между тем планомерная запись, дающая возможность легко обозреть весь ход вычислений, допускающая поверку всего вычисления как самим вычислителем, так и другим лицом, является совершенно необходимым условием успеха всякой более или менее сложной вычислительной работы.

Практика вычислений (в астрономии, геодезии и т. д.) выработала определенные формы записи. Формы эти, варьируя от случая к случаю, в основном все же сводятся к составлению некоторой вычислительной *схемы* (вычислительного *формуляра*). К употреблению подобных схем и следует постоянно приучать школьников (во II ступени). Дело сводится к неуклонному соблюдению следующего порядка вычислительной работы: 1) прежде чем приступить к собственно вычислительной работе, надо вывести (на буквах) формулу, дающую выражение искомого числа через данные, и придать формуле вид, наиболее удобный для вычислений; 2) далее надо дать себе отчет в том, с какой точностью надо выполнять вычисление; при этом сообразуемся с точностью данных и с требуемой точностью результата; вместе с тем решим вопрос и о выборе тех или других вспомогательных средств вычисления (таблицы, приборы, графики); 3) затем составляется схема, указывающая, какие действия и в каком порядке надо производить, а также указывающая место для записи каждого промежуточного результата вычисления; 4) наконец, приступают к самому вычислению, причем в схему вписываются только результаты отдельных действий, самые же действия выполняются на особо отведенном месте (на том же или на другом, *вспомогательном* листе).

Необходимо приучить учащихся к самостоятельному составлению схем. Время, потраченное на это с избытком окупится той экономией, какая получается при решении задач благодаря устранению беспорядка в записи.

Следует принять за правило либо записывать решение задачи, расчленяя его на отдельные действия, которые нумеруются и записываются в последовательном порядке („стандарт" школы I ступени, только, быть может, без обязательной словесной формулировки вопросов), либо предварительно составлять схему („стандарт" школы II ступени).

Примеры вычислений по схемам были даны выше.

Весьма серьезное значение имеет вопрос о поверке. Все что было сказано о поверке в § 10, в полной мере относится к школе. Совершенно недопустимо, чтобы школьники знали только один „способ" поверки: заглядывание в список приложенных к задачнику ответов, и были бы совершенно беспомощны в тех случаях, когда таких готовых ответов нет, а это будет всегда, когда вопрос берется не из книги, а из окружающей действительности. Надо приучить к постоянному грубо-приближенному контролю, надо поощрять взаимную поверку (вычисления „в две руки", „в три руки" и т. д.) — конечно, однако, не на контрольных работах. Надо добиться того, чтобы каждый школьник всегда помнил о ненадежности непроверенных результатов, умел бы их так или иначе проверить и в случае наличности ошибки разыскать ее и устранить.

§ 78. Вычислительная работа в разные годы обучения. Наметив в общих чертах те направления, по каким должна итти вычислительная работа в школьном курсе математики, попытаемся хотя бы приблизительно выяснить, как должен распределиться намеченный материал по годам обучения, предполагая, что в основу положены последние программы ГУС'а. [1]

---

[1] См. „Программы и методические записки единой трудовой школы". Вып. 3 и вып. 5, Гиз, 1927 г.

Не повторяя того, что имеется в программах и объяснительных записках, сделаем к ним несколько дополнений и пояснений, и прежде всего выясним, на что должно быть устремлено основное внимание преподавателя.

Центральным пунктом вычислительной работы в школе является, несомненно, усвоение одного из приемов учета погрешностей результатов вычислений и измерений: пока учащиеся не умеют различать, что в результатах их работы над числами надежно и что нет, все их вычисления будут носить либо сугубо искусственный характер (если преподаватель будет давать задачи только с точными и искусственно подобранными данными), либо пестреть „нелепыми хвостами ненужных цифр", причем на получение этих „хвостов" будет расходоваться масса времени и сил. На каком же способе учета погрешностей остановиться? Представляется совершенно бесспорным, что основным способом для образовательной школы должен быть *способ подсчета цифр:* вычисления, как правило, должны вестись (во всех группах школы II ступени) без строгого учета погрешностей, но с обязательным применением правил подсчета цифр. Крайне желательно научить и строгому учету погрешностей, но это уже несомненно вторая задача, к разрешению которой следует приступать лишь тогда, когда будет разрешена первая, т. е. когда будет создан прочный навык в округлении результатов по правилам подсчета цифр. Выяснять, какие цифры всех участвующих в вычислении чисел надежны, какие нет, и соответственно округлять результаты, надо всегда, на протяжении всего школьного курса математики, от 5-го года до 9-го, постепенно вводя различные правила подсчета цифр.

Переходим к рассмотрению программы каждого года в отдельности.

Программа ГУС'а рекомендует вводить на 5-м году три правила подсчета цифр (о сумме и разности, о произведении и частном, о возможности предварительного округления приближенных чисел, данных с большим числом цифр, чем другие, т. е. правила I, II, VI § 43). Однако, с самого начала надо ознакомить также с правилом V, как уже было отмечено выше.

При применении правил подсчета цифр необходимо тщательно различать, какие данные точны, какие приближенны, иначе возможны досадные ошибки. Например, при вычислении периметра правильного 8-угольника, длина стороны которого по измерении оказалась равной 23,4 *см*, мы получаем для периметра значение $23{,}4 \cdot 8 = 187{,}2$ *см*, где следует сохранить, согласно II правилу, три значащих цифры, так как столько значащих цифр имел единственный приближенный сомножитель (23,4) произведения. Округлять же до одной значащей цифры на том основании, что один из сомножителей (8) имеет только одну значащую цифру, было бы, конечно, ошибкой: число 8 точное, а не приближенное.

Другое затруднение при первом знакомстве с правилами подсчета цифр проистекает от двоякого смысла цифры 0. О нем достаточно сказано в § 6.

Хороший материал для упражнений в применении правил подсчета цифр, помимо задач геометрического и физического содержания, дают задачи на вычисление числовых значений буквенных выражений. Значение одного и того же выражения вычисляется, в целях контроля и практики в действиях над дробями, дважды: первый раз — применяя обыкновенные дроби и считая значения букв данными точно, второй раз — применяя десятичные дроби, причем все обыкновенные дроби заменяются их десятичными приближениями (3—4 значащих цифры). Вычисляя и округляя результаты по правилам подсчета цифр, приходим к ответу и указываем, какие его цифры надежны. Указание это проверяем, сравнивая ответы, полученные оба раза.

На практике иногда встречается случай „потери точности при вычитании". Если производится вычитание двух приближенных чисел, данных с одним и тем же числом десятичных знаков, то в результате может получиться число, имеющее столько же десятичных знаков, но меньше значащих цифр, чем каждое из данных.

Пусть, например, надо вычислить значение выражения $x = \frac{a-b}{a}$ при $a = 5^1/_3$ и $b = 5^1/_8$, считая оба эти значения точными. Вычисление посредством обыновенных дробей дает точный ответ $x = \frac{5}{128}$. Решая эту же задачу в десятичных дробях и ограничиваясь трехзначными приближениями для a и b ($a \doteq 5{,}33$ и $b \doteq 5{,}12$), получаем для $a - b = 0{,}21$ приближенное значение только с двумя значащими цифрами. Следовательно, деление $a - b$ на a даст только две заслуживающих доверия цифры. Выполнив деление 0,21 на 5,33, находим, что $x \doteq 0{,}039$, причем следующая цифра 4. Остается сравнить полученный приближенный ответ с полученным ранее точным $\left(x = \frac{5}{128}\right)$, для чего обратим последний в десятичную дробь. Получаем $x \doteq 0{,}03906...$, что и показывает, что округления при вычислении с десятичными приближениями сделаны правильно. Напомним еще раз, что при вычислениях без строгого учета погрешностей всегда возможно расхождение в 1 или 2 единицы разряда последней цифры, а при очень сложных вычислениях и несколько более.

Что касается записи и расположения вычислений, то на 5-м году должны употребляться оба способа: и вынесенный из школы I ступени способ записи решения с нумерацией отдельных действий и (иногда) с постановкой вопросов, и запись посредством схемы. Составление схемы удобно впервые давать при разыскании числовых значений буквенных выражений. Польза и удобство схемы особенно ясны в тех случаях, когда вычисление надо провести несколько раз, при разных значениях входящих в формулу букв. Уже на 5-м году следует приучать ребят к постоянному грубо-приближенному вычислению результата (с целью поверки).

Вспомогательных средств вычисления на 5-м году лучше не затрагивать вовсе, чтобы, сосредоточив внимание на двух рассмотренных пунктах (правила подсчета цифр и рациональной записи), добиться в них совершенно прочных навыков. Программа ГУС'а рекомендует в этом же году знакомить и с понятием границы относительной погрешности приближенного числа. Конечно, сделать это нетрудно, но более целесообразно отложить этот вопрос до 7-го года, когда будет прорабатываться способ границ.

На 6-м году все вычисления выполняются так же, как и на 5-м году, т. е. без строгого учета погрешностей, но с применением правил подсчета цифр. Дальнейшее усовершенствование способов учета погрешностей, а именно способ границ, программа ГУС'а правильно относит на 7-й год: к этому времени навыки в вычислениях с применением правил подсчета цифр окончательно окрепнут.

Новым на 6-м году может явиться использование некоторых вспомогательных средств вычисления: счетных приборов (счеты, палочки Непера), простейших графиков (прямая линия на клетчатой миллиметровой бумаге), некоторых таблиц (таблицы квадратов, кубов, длины окружности, площади круга). Вообще программа 6-го года дает гораздо меньше вычислительного материала, чем 5-го, и нередко на 6-м году обучения можно наблюдать потерю вычислительных навыков, приобретенных в течение 5-го года. Это бывает тогда, когда преподаватель постоянно берет „удобные" однозначные данные во всех алгебраических и геометрических задачах. Это, конечно, большая ошибка. Опасность потери вычислительных навыков совершенно устраняется, если работа ведется на „реальных" задачах с „реальными" же, из действительной жизни взятыми, данными, которые в большинстве случаев выражаются трехзначными или четырехзначными приближенными числами. Приемами округления результатов действий ребята на 6-м году уже вполне овладели, и у них появляется уже потребность в сокращении механической вычислительной работы. Введение некоторых простейших вспомогательных средств вычисления является поэтому вполне своевременным.

Весь отдел тожественных преобразований вполне осмысливается ребятами и прорабатывается ими с гораздо большим интересом, чем обычно, если мы будем рассматривать эти преобразования с точки зрения удобства получения числовых значений буквенных выражений. Конечно, надо не ограничиваться одним только разъяснением основной цели тожественных преобразований, а почаще действительно выполнять вычисление как данного алгебраического выражения, так и того, какое из него получилось после преобразований (указание на желательность такого рода упражнений имеется на стр. 127, вып. III программы ГУС'а).

Рекомендуемое программой введение некоторых простейших приближенных формул, как $(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha$ и др., вполне соответствует основной задаче 6-го года в области вычислительной техники — упрощению вычислительной работы посредством разных вспомогательных приемов.

На 7-м году программа Гус'а рекомендует сделать новый и важный шаг в деле изучения методов учета погрешностей, а именно ввести понятие низшей и высшей границ числа, точное значение которого неизвестно, и использовать это понятие для поверки знакомых с 5-го года правил подсчета цифр. Такая поверка будет состоят в том, что одна и та же вычислительная задача решается дважды: один раз—без строгого учета погрешностей, но с применением правил подсчета цифр, другой раз—со строгим учетом погрешностей по способу границ. При этом, с одной стороны, получается устранение какой бы то ни было неопределенности в окончательном заключении (мы устанавливаем совершенно категорически, что искомое числовое значение меньше того-то и больше того-то), а с другой стороны вновь подтверждается целесообразность тех округлений, какие мы постоянно делаем на основании правил подсчета цифр.

Основным способом решения вычислительных задач и на 7-м году все же остается вычисление без строгого учета погрешностей и с применением правил подсчета цифр, причем к известным ранее 4 правилам присоединяются еще правила округления квадрата и куба и квадратного корня (правила III и IV § 43). Но от времени до времени, встречаясь с более ответственным вычислением, ребята по указанию преподавателя, должны проводить и строгий учет погрешностей по способу границ. Особенно необходим такой строгий учет при решении, например, задач на определение недоступных расстояний и высот, когда у ребят возникает совершенно законное желание проверить результат косвенного измерения и вычисления измерением непосредственным, „превращая" в доступные те расстояния и высоты, какие рассматривались, как недоступные. Измерив, например, высоту дома от земли до слухового окна на чердаке посредством угломерного прибора и установив, что высота эта заключается между 9,4 *м* и 9,8 *м*, а затем, забравшись на чердак и измерив ту же высоту непосредственно рулеткой, ребята будут вполне удовлетворены, если окажется, что результат непосредственного измерения действительно больше 9,4 и меньше 9,8 *м*. Конечно, могут быть и неудачи: результат непосредственного измерения иногда выходит из заранее установленных для него границ. В таких случаях неизменно происходит оживленная дискуссия, выясняющая либо простую ошибку в сделанных расчетах, либо какой-нибудь неучтенный источник погрешностей.

Далее, программа ГУС'а рекомендует знакомить на 7-м году с сокращенными приемами умножения и деления многозначных чисел. О некоторых сомнениях в целесообразности изучения этих приемов была речь выше: приемы эти на практике не прививаются, не выдерживая конкуренции даже с самыми простыми вспомогательными средствами вычислений. Вместо сокращенных приемов умножения и деления лучше ввести таблицы произведений (например, О'Рурка), или пользоваться палочками Непера в соединении со счетами. Если же вводить сокращенные приемы, то следует воспользоваться первым указанным в программе ГУС'а приемом умножения (вып. 3, стр. 136), а также указанным там же приемом деления.

Большое пременение на 7-м году получают таблицы. Это с одной стороны, таблица квадратных корней, которая с успехом может быть заменена достаточно подробной таблицей квадратов; с другой стороны, постоянное применение имеет таблица натуральных синусов и тангенсов.

Программа ГУС'а рекомендует трехзначные таблицы, прилагаемые ко многим руководствам. Однако, представляется вполне возможным сразу ввести в употребление и четырехзначные таблицы, к которым все равно придется переходить в дальнейшем.

Отметим, что знакомство с понятием низшей и высшей границ позволяет легко ввести и понятия границы погрешности как абсолютной, так и относительной. Конечно, они послужат лишь для оценки точности отдельных приближенных чисел, но не для учета погрешностей, переносимых из данных в результаты: обоснование нужных для последней цели теорем на 7-м году обучения совершенно непосильно.

Остается сказать несколько слов о вычислительной работе на 8-м и 9-м годах. Центральным пунктом программы 8-го года являются логарифмы. Основным пособием должны быть таблицы четырехзначных логарифмов. Чрезвычайно важно выяснить, что такие таблицы дают в результате вычисления 4 значащих цифры, причем последняя, вообще говоря, не вполне надежна, и что в случаях, когда требуется большая точность, нужно применять таблицы с большим числом десятичных знаков (см. VIII правило подсчета цифр). Однако, в очень многих случаях точность четырехзначных таблиц даже слишком велика, и можно было бы пользоваться трехзначными логарифмами, мирясь с некоторой ненадежностью последней (3-ей значащей) цифры результатов. Этим и объясняется громадное распространение счетной логарифмической линейки, которая (при обычной длине в 25 *см*) дает ту же точность, что и таблицы трехзначных логарифмов, но представляет целый ряд преимуществ в обращении. Все возрастающее значение счетной линейки налагает на школу обязанность знакомить с нею учащихся. Если, за отсутствием (конечно, временным) дешевых счетных линеек (школьного образца), линейку в настоящее время нельзя еще сделать такой же принадлежностью школьного обихода, как, например, таблицу логарифмов, то все же вполне возможно основательное изучение принципов ее устройства и употребления, а также выяснение даваемых линейкой выгод.

Из остального вычислительного материала для 8-го года особого упоминания заслуживают задачи на преобразование иррациональных выражений. Как и все вообще задачи на тождественные преобразования, они очень выигрывают, если их прорабатывать с точки зрения удобства вычислений, действительно вычисляя числовые значения данных (непреобразованных) и окончательных (преобразованных) выражений, и сравнивая количество выкладок.

Относительно 9-го года можно высказать пожелание, чтобы здесь были проработаны все вопросы, рассмотренные выше в §§ 76—77 и не затронутые в предшествующие годы. Однако, программа 9-го года бывает обычно настолько перегружена, что говорить об ее расширении не приходится, и только осуществляемое в настоящее время введение 10-го года может улучшить положение. Несомненно, уже ознакомление ребят с двумя важнейшими способами учета погрешностей—способом подсчета цифр и способом границ — представляет собой заметный шаг вперед, и на ближайшее время им можно и удовлетвориться, добившись полного овладения этими двумя способами в дополнение к той работе по технике вычислений, какая производится в общем школьном курсе математики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

РАЗЛИЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ПРАВИЛ ПОДСЧЕТА ЦИФР

Разумея под „правилом подсчета цифр“ всякое правило, позволяющее установить количество подлежащих сохранению цифр в результате того или иного математического действия непосредственно по количеству цифр в приближенных компонентах, приводим ниже некоторые из подобных правил, предложенные в разное время разными авторами. Необходимо иметь в виду, что в каждой почти статье по приближенным вычислениям можно встретить то или иное правило подсчета цифр, а так как литература по приближенным вычислениям очень велика, то рассмотрение всех предложенных вариантов правил подсчета цифр является задачей, требующей особого и довольно обширного исследования. Поэтому я ограничиваюсь лишь немногими примерами, а в заключение привожу список тех работ по приближенным вычислениям, какие можно рекомендовать лицам, желающим пойти в этом направлении дальше.

Вот эти примеры:

„При сложении многих чисел, значительно отличающихся по величине, но одинаковой относительной точности, надо написать вперед наибольшее из слагаемых и удерживать в остальных лишь столько, знаков после запятой, сколько их в этом наибольшем слагаемом“ (проф. А. Н, Крылов, „Лекции о приближенных вычислениях“, стр. 12).

„При умножении и делении приближенных чисел в произведении и частном следует сохранять столько цифр, сколько их имеется в том из данных чисел, которое обладает наименьшим числом значащих цифр“ (Г. Григорьев, П. Знаменский, И. Кавун, „Практические занятия по физике“, издание II, стр. 9).

„Если требуется вычислить некоторое выражение и получить результат с n верными цифрами, то следует брать все компоненты с $(n+1)$ знаками, произвести все вычисления, следя за тем, чтобы в результате каждого действия получалось не менее $(n+1)$ цифр, и в окончательном результате откинуть последний знак" (В. А. Крогиус, „Приближенные и сокращенные вычисления в средней школе". Труды I съезда преподавателей математики, том II, стр. 239).

„При (логарифмических) действиях умножения, деления, возведения в степень приближенных чисел из k цифр можно получать не более k цифр" („основное положение", принятое в быв. Вычислительном, ныне Астрономическом институте в Ленинграде; сообщено мне в 1924 году заместителем директора этого Института Б. В. Нумеровым).

„Результат сложения или вычитания не должен оканчиваться значащими цифрами в тех разрядах, которых нет хотя бы в одном из данных чисел. Если такие цифры получаются, их следует заменять нулями. (Нули, стоящие между значащими цифрами, также считаются значащими). Результат умножения и деления не должен состоять из большего числа значащих цифр, чем их имеется в том из данных чисел, которое содержит наименьшее число значащих цифр. Число значащих цифр степени или корня не должно превышать числа их в основании или в подкоренном количестве. Указанные правила действий относятся только к окончательным результатам выкладок. Если же выполняемое действие не окончательное, т. е. если с полученным результатом предстоит выполнять еще и другие действия, то в результате оставляют одною цифрой больше, чем указано в предыдущих правилах". (Я. И. Перельман, „Живая геометрия", стр. 7).

СПИСОК РАБОТ, РЕКОМЕНДУЕМЫХ ПО ВОПРОСУ О ПРАВИЛАХ ПОДСЧЕТА ЦИФР

1. Проф. В. П. Ермаков, Приближенное вычисление („Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики", 1905 г., № 388).

2. Проф. В. П. Ермаков, Приближенное вычисление. Для средних школ и для технических училищ (Киев, 1905 г.).

3. П. Долгушин, Вычисления по приближению (Вып. I и II, оттиски из Известий Киевского университета за 1908 г.).

О правилах подсчета цифр речь идет во II выпуске („Теория значности результатов").

4. В. Филиппов, Теория и практика элементарных приближенных вычислений (Петербург, 1909 г.).

5. Инж. С. В. и Ю. А. Шиманские, Принципы числовых расчетов. Теория и практика рационального ведения числовых расчетов (Петербург, 1909 г.).

6. Проф. А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях (Петербург, издание Института инженеров путей сообщения. 1911 г.).

7. Г. Григорьев, П. Знаменский, И. Кавун, Практические занятия по физике (Петербург, 1912 г.).

Правила подсчета цирф в математическом введении („Об измерении физических величин и о вычислениях“).

8. В. А. Крогиус, Приближенные и сокращенные вычисления в средней школе (Доклад на I съезде преподавателей математики, напечатан в „Трудах“ I съезда, том II, (Петербург, 1913 г.).

9. Проф. С. В. Орлов, Первые работы по измерению земли (Москва, Гиз, 1921 г.).

Правила подсчета цифр для умножения и деления и их обоснование путем рассмотрения частных примеров с применением знаков вопроса взамен неизвестных цифр.

10. Проф. И. Н. Кавун, Приближенные вычисления. Курс элементарный (Москва, Гиз, 1922 г.).

11. Проф. Д. Селиванов, Приближенные вычисления (Петроград, изд-во „Сеятель“, 1922 г.).

12. Проф. А. П. Фандерфлит, Арифметика приближенных чисел (Прага, издание „Наша речь“, 1922 г.).

13. В. Брадис, Приближенные вычисления в школьном курсе математики (сборник „Вопросы математики и ее преподавания“ под редакцией проф. И. И. Чистякова и Н. М. Соловьева, Москва, Гиз, 1923 г.).

14. В. Брадис, Умножение приближенных чисел („Известия Физико-математического общества при Казанском университете“, том XXV, сер. 2, 1925 г.).

15. В. Брадис, Теория и практика приближенных вычислений в школе второй ступени (сборник „Вопросы преподавания математики“ под редакцией И. А. Сигова и И. С. Симонова, Ленинград, изд-во Брокгауз — Ефрон, 1925 г.).

16. Я. Безикович и А. Фридман, Приближенные вычисления (Ленинград, Гиз, 1925 г.).

17. В. Брадис, Приближенные вычисления (сборник „На путях математики“, выпуск II из серии „На путях к педагогическому самообразованию“ под общей редакцией проф. М. М. Рубинштейна. Москва, изд-во „Мир“, 1926 г.).

18. В. С. Галицкий, О приближенных вычислениях („Труды комиссии по математическому образованию“, вып. I. Днепропетровск, издание Всеукраинской ассоциации инженеров, 1926 г.).

Доклад сделанный еще в 1924 г. и содержащий ряд (обоснованных преимущественно опытным путем) предложений, рассмотренных автором настоящей книги с точки зрения теории вероятностей в статьях, напечатанных в 1925 и 1927 гг. (см. выше № 14 и ниже № 19). Любопытный пример параллельной работы, проведенной двумя исследователями совершенно независимо друг от друга и приведшей к весьма близким результатам.

19. В. Брадис, Опыт обоснования некоторых практических правил действий над приближенными числами („Известия Тверского педагогического института“, вып. 3, 1927 г.).

20. Я. И. Перельман, Таблицы и правила для вычислений (Ленинград, изд-во Сев.-Зап. обл. Промбюро ВСНХ, 1927 г.).

21. Г. Дуббель, Справочник по математике для инженеров, техников, студентов и преподавателей математики (перевод Н. П. Тарасова, Москва, Гостехиздат, 1927 г.).

22. В. И. Баталин, Приближенные измерения и вычисления

в школе-семилетке (журнал „Физика и математика в трудовой школе“, 1928 г., № 2).

23. О. А. Вольберг, О влиянии округления на распределение погрешностей („Известия Тверского педагогического института, вып. 5, 1929 г.).

24. О. А. Вольберг, Еще о приближенных вычислениях (журнал „Физика, химия, математика, техника в трудовой школе“, № 7, 1929 г.).

25. Я. И. Перельман, Живая геометрия (Харьков, „Униздат“, 1930 г.).

В заключение отметим, что вопрос о правилах подсчета цифр даже для результатов основных семи действий нельзя считать исчерпанным ни с научной, ни с методической стороны. О дальнейших еще не разрешенных задачах научного обоснования см. выше работы №№ 19 и 23. С методической стороны остается еще сделать очень много: 1) дать доступное школе обоснование правил, так как данное мною их обоснование путем вычисления предельных и средних квадратических погрешностей (а также выяснения картины распределения погрешностей) далеко не элементарно; 2) установить окончательный список и текст правил, подлежащих изучению в разные годы школьной работы, что можно сделать лишь на основе массового опыта; 3) выработать рациональные обозначения (прежде всего для точных и приближенных чисел); 4) устранить те противоречия правилам подсчета цифр, которых, к сожалению, так много даже в новейших учебниках по математике и физике и которые так сбивают учащихся, усвоивших правила подсчета цифр и начинающих их применять: сплошь и рядом бывает так, что приведенная в книге задача, взятая из практической жизни, допускает ответ лишь с 2 или 3 значащими цифрами, в ответах же, помещенных в книге, учащийся встречает число с 4 или 5 цифрами. Конечно, такого рода обстоятельства очень путают начинающих, и не только учащихся, но и преподавателей. Однако, все эти трудности не должны останавливать: всякий преподаватель, систематически применяющий правила подсчета цифр, скоро убеждается, что они доставляют существенную экономию времени и сил даже в том несовершенном виде, в каком мы их видели и применяли в настоящей книге.