ПОСОБИЯ
ДЛЯ
ТРУДОВОЙ ШКОЛЫ

А. АСТРЯБ

КУРС
ОПЫТНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАНИЕ
ПЯТНАДЦАТОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО 1928

УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ШКОЛ I и II СТУПЕНИ

А. М. АСТРЯБ

КУРС ОПЫТНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИНДУКТИВНО-ЛАБОРАТОРНЫЙ МЕТОД ИЗЛОЖЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ПЯТНАДЦАТОЕ
СТЕРЕОТИПНОЕ

411 — 445 тысяча

Научно-педагогической секцией Государственного Ученого Совета допущено для школ II ступени

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1928 — ЛЕНИНГРАД

Государственное Издательство
Типография
Печатный Двор
Ленинград
Гатчинская 26

У, 21. Гиз № 26295/м.
Ленинградский Областлит № 4994.
$18^{1}/_{4}$ л. Тираж 35000.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

«Для того, чтобы определить отношение площади циклоиды к площади производящего круга, Галилей взвесил две пластинки: одну, имеющую форму круга, а другую — описанной им циклоиды, и нашел, что последняя была в три раза тяжелее первой. Отсюда Галилей заключил, что площадь циклоиды равна тройной площади производящего круга».

О. Конт. — Курс положительной философии, т. I, стр. 148.

«Что без исключения доступно всякому ученику, это — конкретное. Величайшая услуга, которую мы можем ему оказать, это не бросить его сразу в мир абстракций, но так направлять его труд и усилия, чтобы он сам вошел в этот мир. Когда индивидуальные случаи, на сравнение которых будет призвано его внимание, станут достаточно многочисленными, абстракции зародятся и расцветут сами собою, и это будут идеи, которые войдут в плоть и кровь, а не слова, которые только слегка касаются его».

Liard. — Conférences du Musée pédagogique, IX.

«Только благодаря интуиции математический мир остается в соприкосновении с реальностью. Нужно помнить, что свойства, найденные логическим путем, принадлежат реальным объектам, и потому нужно прибегать к опыту, к интуиции».

Poincaré. — Conférences du Musée pédagogique, VII.

«Обе способности, интуитивная и логическая, имеют каждая свою собственную ценность. Дело идет не о том, чтобы устранить из геометрии логические рассуждения, а о том, чтобы наряду с логическими доказательствами дать место и наглядному доказательству».

Н. Н. Володкевич. — К вопросу о реформе преподавания математики, стр. 23.

Предлагаемый «Курс Опытной Геометрии» ставит себе целью изложить в популярной форме элементарный курс геометрии в объеме необходимом для применения геометрических знаний в практической жизни. В основу этого курса положен индуктивно-лабораторный метод. Причины, которые заставили меня остановиться именно на этом методе, читатель найдет в вышеприведенных цитатах.

Учебник составлен по определенному плану. Книга состоит из четырех частей.

Первая часть представляет собой небольшой подготовительный концентр, в котором учащиеся непосредственными опытами конкретно воспринимают основные геометрические элементы: линию, плоскую фигуру, тело. В основу линий кладется прямая линия, в основу плоской фигуры — прямоугольник, в основу тел — прямоугольная призма (параллелепипед).

Знакомство с этими в е л и ч и н а м и идет двумя путями: «синтезом» (составляются из основных единиц прямая линия, прямоугольник и прямоугольная призма) и «анализом» (разрезываются прямая линия, прямоугольник и прямоугольная призма на основные единицы). Попутно с этим учащиеся образуют из прямоугольника ряд более сложных фигур (треугольник, параллелограмы, трапеции и т. д.) и знакомятся с более сложными геометрическими телами.

В этом концентре главное внимание уделено конкретному усвоению идеи измерения линии (линейными единицами), площади (квадратными единицами) и объема (кубическими единицами).

Для того, чтобы геометрические образы были более яркими, вводятся и простейшие геодезические работы в поле.

Для того, чтобы подчеркнуть идею функциональной зависимости, в эту часть включены графики и диаграммы, в которых при помощи геометрических величин иллюстрируются зависимости между различными величинами, входящими в состав разнообразных явлений.

При желании этот подготовительный концентр можно значительно сократить, перенеся помещенный в нем материал в соответствующие места систематического курса.

В остальных трех частях излагается систематический курс геометрии, а именно: во второй части рассматриваются свойства прямолинейных фигур; в третьей части заканчивается планиметрия (изучаются подобные фигуры и свойства простейшей криволинейной фигуры — окружности); в последней, четвертой части рассматриваются свойства тел (стереометрия).

Систематический курс начинается с главы 8-й, в которой, пользуясь материалом, конкретно воспринятым в подготовительном концентре, даются определения основных геометрических элементов: точки, линии, поверхности и тела. С 9-й главы начинается систематическое изложение свойств всех этих элементов, при чем, как я уже говорил, в основу положен и н д у к т и в н ы й метод, то-есть учащиеся сначала должны сами при помощи опыта, на отдельных конкретных случаях, подметить искомую зависимость, и только после этого дается логическое доказательство. Для того, чтобы придать курсу более практический характер, параллельно с основной теорией дается применение ее к геодезической практике: рядом с измерением длины отрезка рассматривается провешивание и измерение прямой в поле; рядом с измерением углов транспортиром указывается измерение их астролябией; признаки равенства треугольников сопровождаются решением некоторых землемерных задач при помощи построения равных треугольников; при проектировании отрезков рассматривается нивеллировка, как частный вид проектирования. В эту часть включена симметрия осевая (в связи с задачами на построение) и центральная (построение правильных многоугольников). Вторая часть заканчивается измерением площадей прямолинейных фигур, при чем случай несоизмеримости сторон, как при измерении площадей, так и во всем дальнейшем курсе, в виду его отвлеченности, не рассматривается.

В третьей части заканчивается планиметрия. В отделе о подобии фигур одним из наиболее трудно-усваиваемых понятий является понятие об отношении; вот почему я уделил ему много внимания, придав ему, насколько возможно, конкретный характер. Здесь учащиеся решают две основные задачи: чисто-опытным путем по двум данным отрезкам находят их отношение, а затем по данному отношению строят самые отрезки. Из признаков подобия треугольников рассматривается только первый и второй. Третий признак я выпустил, так как он имеет очень малое применение. Эти признаки подобия дают возможность решить несколько интересных задач из землемерной практики. Признак подобия многоугольников излагается в связи с построением плана астролябией. Далее вводится в курс простейшая кривая линия — окружность, при чем, в виду практического интереса, дается элементарное понятие о кривизне кривой. Планиметрия заканчивается выводом формул для измерения длины окружности и площади круга.

В последней, четвертой, части изучается стереометрия, в которой отдел общих свойств линий и плоскостей, расположенных в пространстве, как имеющий малое практическое применение, значительно сокращен. Я оставил в нем только статьи о признаках параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

В этой части главное внимание обращено на измерение поверхностей и объемов многогранников и круглых тел, при чем при выводе правила для измерения объема пирамид лемма Кавальери о равновеликости трехгранных пирамид теоретически не доказывается, а устанавливается опытом. Формула для измерения объема усеченной пирамиды дается в готовом виде. Правило для измерения поверхности шара выводится непосредственным превращением «развертки» шара в равновеликий ей прямоугольник.

При изложении своего курса геометрии я стремился к тому, чтобы приучить учащихся не только заучивать памятью одну теорему за другой, нанизывая их длинной вереницей, не имеющей ни начала, ни конца; я стремился научить их видеть, наблюдать и исследовать геометрические факты, пользуясь разными органами чувств, приучить их читать не только в напечатанных книгах, но и в живой, окружающей их книге природы. Насколько мне удалось все это — судить, конечно, не мне.

Ал. Астряб

ПРЕДИСЛОВИЕ К НОВОМУ ИЗДАНИЮ.

В данное издание внесены следующие изменения.

Во-первых, всюду сохранена только метрическая система мер.

Во-вторых, после многих глав добавлено небольшое число упражнений и задач, взятых в большинстве случаев из моего «Задачника по Начальной Геометрии».

В-третьих, внесены кое-какие изменения и в самый текст: переработана глава о графиках (§ 91), о нивеллировке (§ 199), и т. д.

Ал. Астряб

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ КУРС

ГЛАВА I.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ И ПЛОСКОСТЬ.

1. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ.

§ 1. Прямая линия. Возьмите в руки концы какой-нибудь нитки и туго натяните ее (рис. 1). Нарисуйте эту нитку у себя в тетради. Нарисованную вами линию называют *прямой линией* или просто *прямой*; правильнее ее называть *отрезком прямой*.

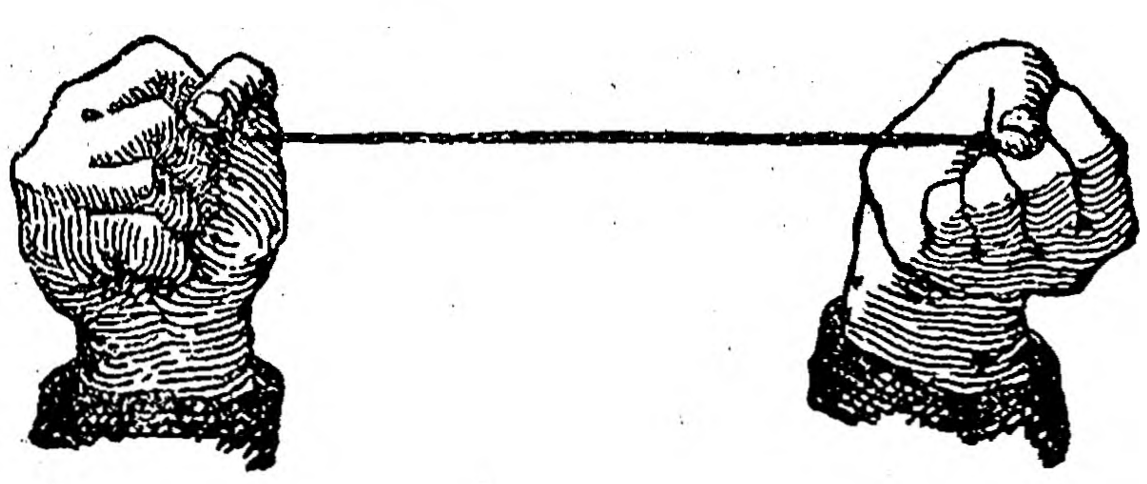


Рис. 1.
Прямая линия.

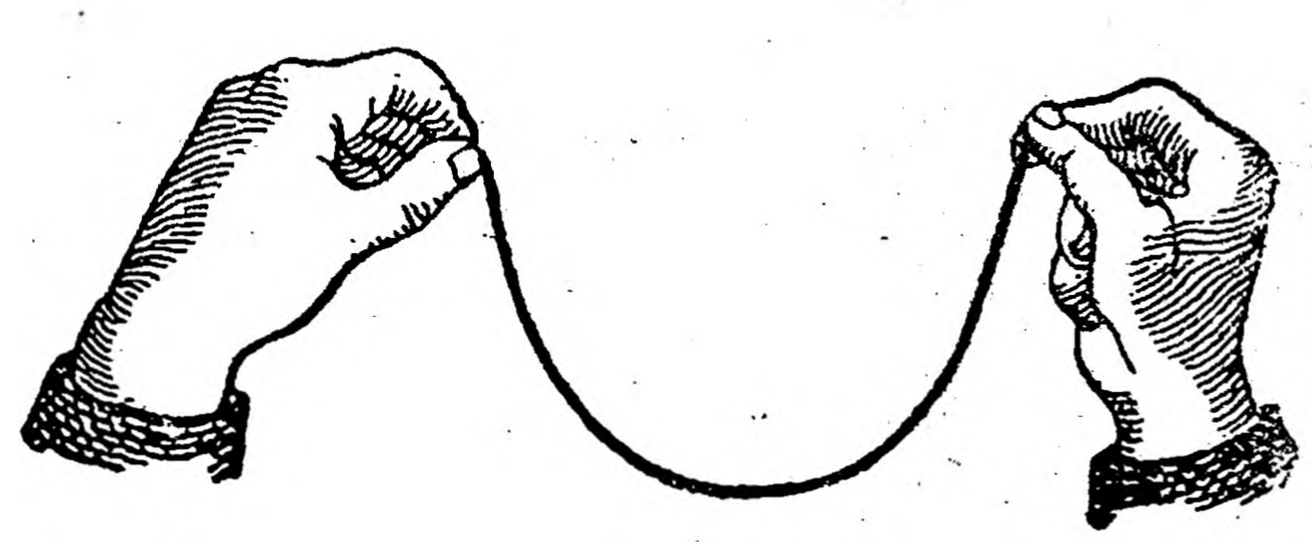


Рис. 2.
Кривая линия.

§ 2. Сантиметр. Нарежьте из проволоки (или из бумажной полосы) несколько кусочков, равных по длине такому отрезку прямой

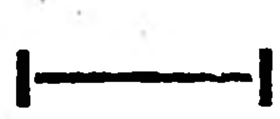


Рис. 3.
Сантиметр.

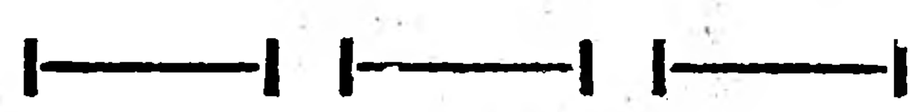


Рис. 4.
Здесь нарисовано 3 сантиметра.

(рис. 3). Каждая из этих проволок по длине будет равна одному сантиметру. Будем называть короче каждую такую проволочку *сантиметром*.

Нарисуйте у себя в тетради один сантиметр.

§ 3. Сколько сантиметров содержит данный отрезок. Положите перед собою три проволочных сантиметра и составьте из них один отрезок прямой. Какой длины получился он?

Составьте отрезок прямой длиною в 4 сантиметра.

Я дам вам отрезок проволоки, длины которого вы не знаете. Постарайтесь узнать, из скольких сантиметров состоит эта проволока.[1])

Для этого разрежьте ее на сантиметры. Сколько сантиметров получили вы? Сколько сантиметров содержит длина нашей проволоки?

Разрезывание отрезков прямой на сантиметры отнимает много времени, да и не всегда возможно. Постараемся, не разрезая бумажной полосы на сантиметры, узнать при помощи одного проволочного сантиметра, сколько сантиметров содержит она.

Для этого, начиная от одного из концов бумажной полосы, укладывайте на ней ваш проволочный сантиметр и отмечайте на полосе карандашом концы этого сантиметра.

Посчитайте теперь, сколько сантиметров отложили вы. Чему, следовательно, равна длина нашей бумажной полосы?

§ 4. Измерительная линейка. Но и предыдущий способ измерения можно упростить.

Для этого надо приготовить измерительную линейку.

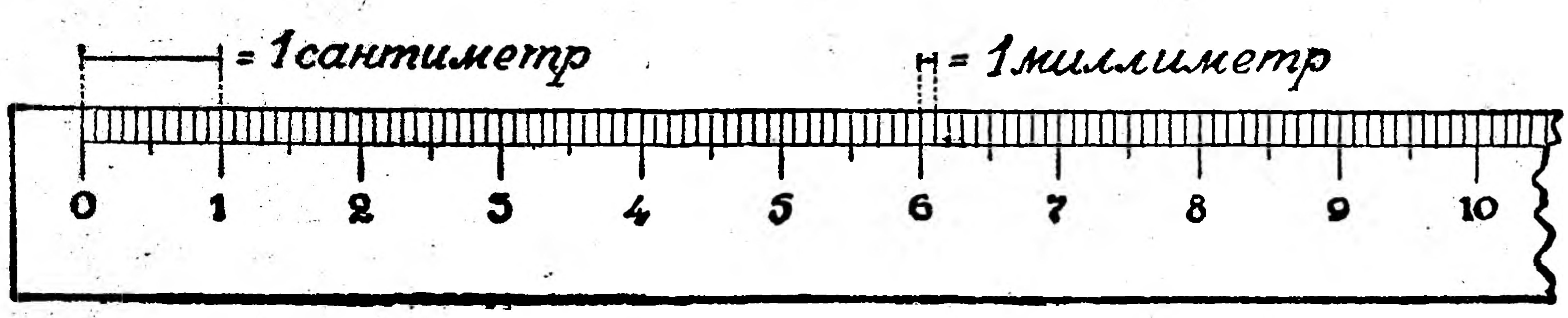


Рис. 5
Измерительная линейка.

Приготовьте узкую полоску из картона или толстой бумаги. На одной стороне ее отложите сантиметры. Перенумеруйте число отложенных вами сантиметров, как сделано это на рис. 5.

Вместо того, чтобы самому готовить линейку, можно воспользоваться покупной измерительной линейкой.

Возьмите ее в руки. Прикладывая ваш проволочный сантиметр, найдите на ней части длиною в один сантиметр.

§ 5. Миллиметр. Нам надо измерить толщину тетради или карандаша. В этом случае пользоваться лишь сантиметром неудобно. Почему?

Для измерения прямых более коротких, чем сантиметр, пользуются единицей измерения, составляющей десятую часть сантиметра.

---

[1]) Вместо проволоки можно взять бумажную полоску.

Нарисуйте в тетради сантиметр и разделите его «от руки» на десять равных частей. Каждая десятая часть сантиметра называется миллиметром.

Найдите миллиметры на вашей измерительной линейке.

§ 6. Измерение отрезка прямой линии. Длину какого-либо отрезка прямой *AB* (рис. 6) измеряют так:

Приставим к этому отрезку измерительную линейку так, чтобы начало делений на линейке («нулевое» деление ее) совпало с одним из концов прямой (на рис. 6 — с концом *A*).

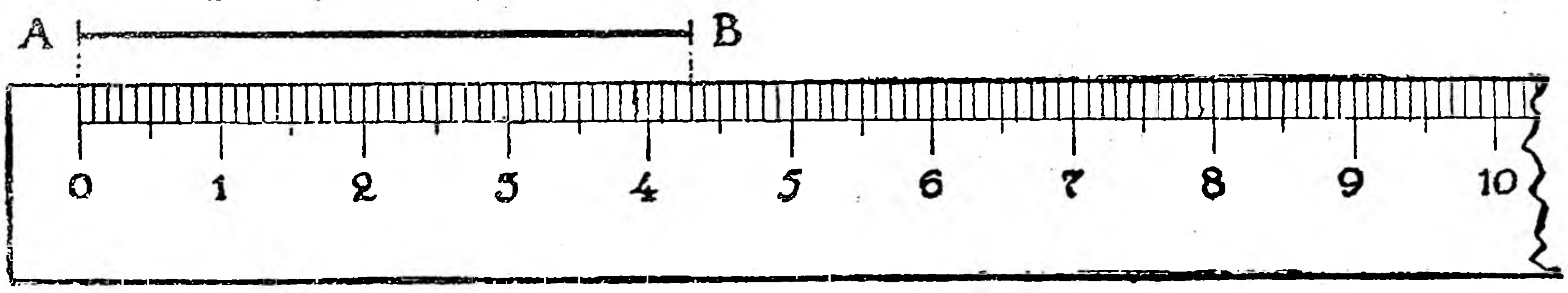


Рис. 6.
Измерение отрезка.

Остается отметить черточками на нашем отрезке части, равные одному сантиметру, и сосчитать число их. На нашем отрезке отложилось 4 сантиметра.

На оставшейся части, меньшей одного сантиметра, отложим миллиметры. Их у нас отложится 3. Следовательно, длина нашего отрезка прямой *AB* равна 4 сантиметрам 3 миллиметрам.

2. ПЛОСКОСТЬ.

§ 7. Плоская поверхность. Положите на стол лист картона. Обведите ладонью руки его поверхность.

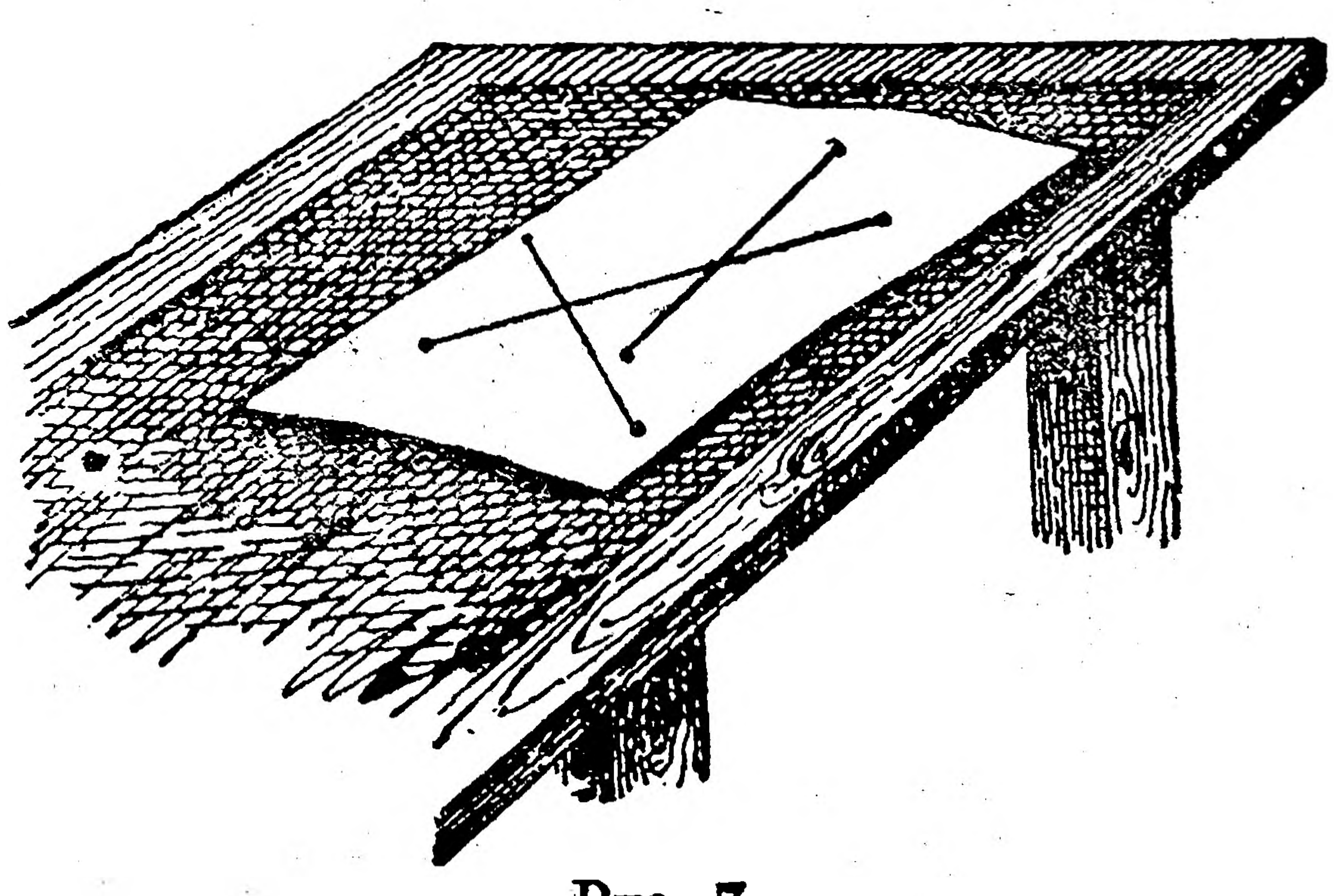


Рис. 7.
Плоскость.

Кладите в самых разнообразных направлениях на эту поверхность картона прямую линию (ребро линейки или вязальную спицу) так, чтобы две какие-нибудь точки прямой лежали на поверхности картона.

При этом окажется, что все промежуточные точки прямой будут лежать на нашей поверхности.

Такая поверхность называется плоской поверхностью или плоскостью (рис. 7).

ГЛАВА II.

УГОЛ.

3. УГОЛ И ЕГО ВЕЛИЧИНА.

§ 8. Угол, его вершина и стороны. Положите на стол в разном направлении два карандаша так, чтобы они встретились одним из своих концов (рис. 8). Укажите угол, который образовали они. Та точка, в которой встретились карандаши, называется вершиной угла, а те карандаши, которые образовали угол, называются сторонами угла.

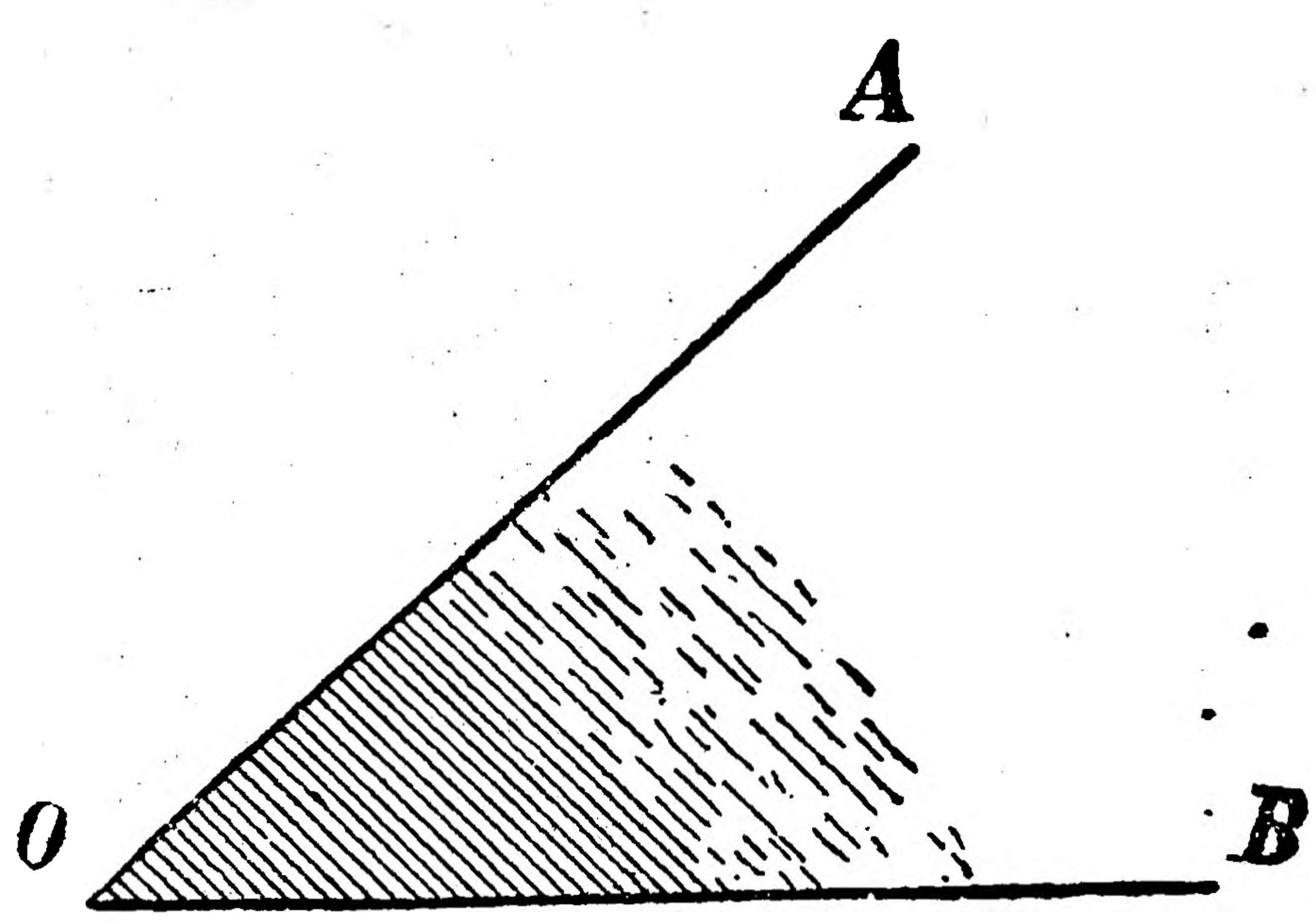


Рис. 8. Угол.

§ 9. Величина угла. Величина угла зависит только от того, как наклонены друг к другу стороны его. Если вы будете, не изменяя направления, укорачивать или удлинять те карандаши, из которых вы образовали угол, то

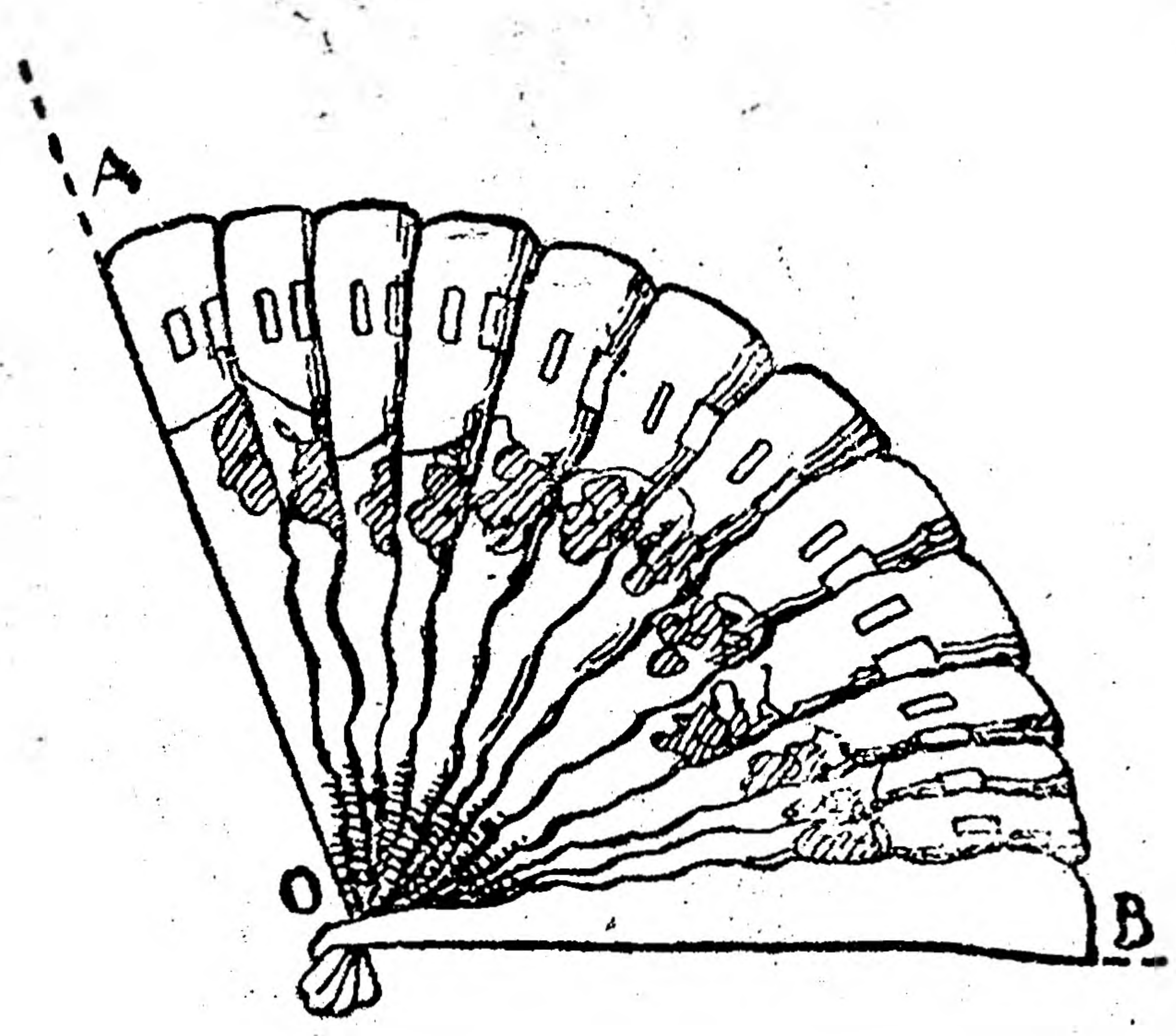


Рис. 9.

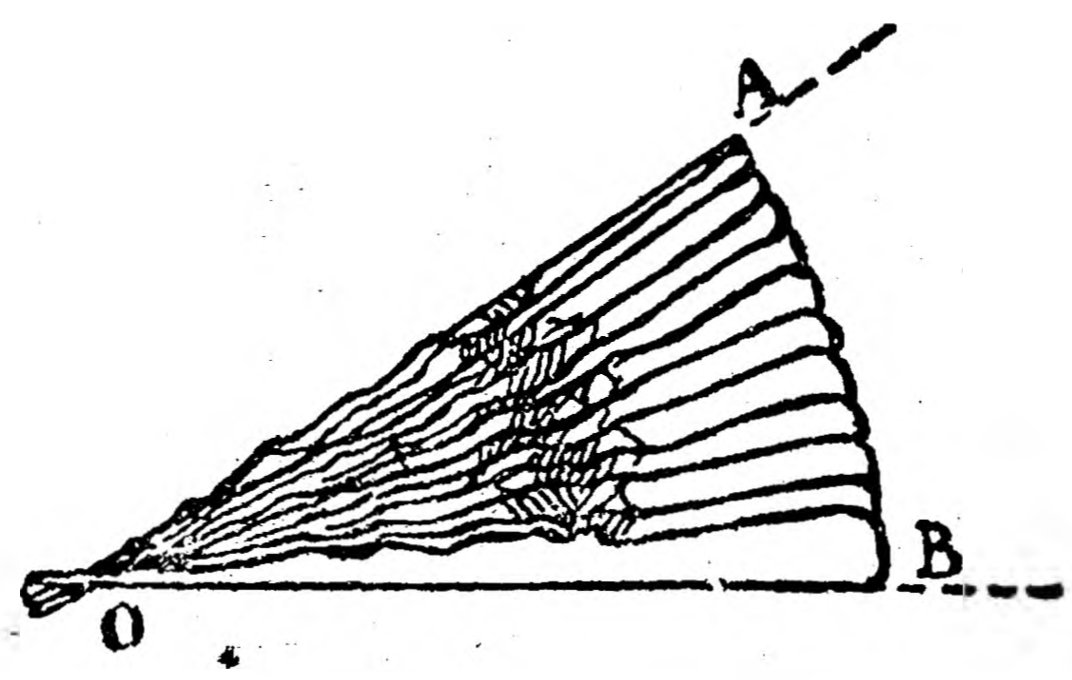


Рис. 10.

будет ли изменяться наклон между карандашами? Конечно, нет. Следовательно, **длина сторон угла на величину угла не оказывает влияния.**

Посмотрите на рис. 9.

Укажите на этом веере тот угол, который образуют прямые *OA* и *OB*.

Начнем складывать этот веер (рис. 10). Тогда наклон между прямыми *OA* и *OB* начнет изменяться; следовательно, будет изменяться и величина угла.

§ 10. Сравнивание величины двух углов. Как же теперь сравнить друг с другом величину двух каких-нибудь углов?

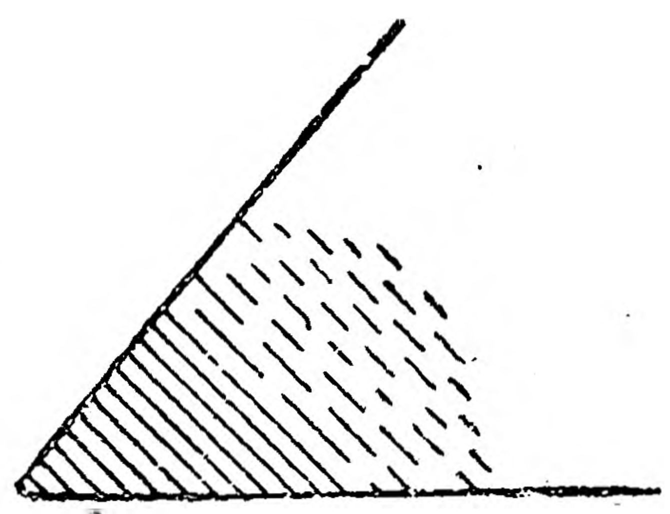


Рис. 11.

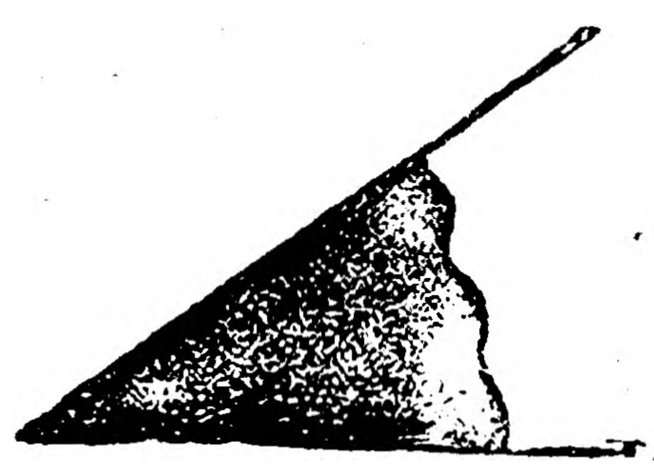


Рис. 12.

Возьмите два листа разноцветной бумаги (например, один лист зеленой бумаги, другой — красной).

Нарисуйте на каждом куске по какому-нибудь углу. Вырежьте эти углы. Получится у нас один угол, нарисованный на зеленой бумаге, а другой — на красной. Будем для простоты называть первый угол зеленым, а второй — красным. Смотрите рис. 11 и 12, где зеленый угол заштрихован, а красный заменен черным.

Сравним величину этих углов.

Приклеим один из углов, например, зеленый, а затем на него наложим другой сравниваемый угол, красный, так, чтобы их вершины и какая-либо пара сторон совпали, и чтобы сам накладываемый угол расположился на приклеенном зеленом угле.

Рис. 13.

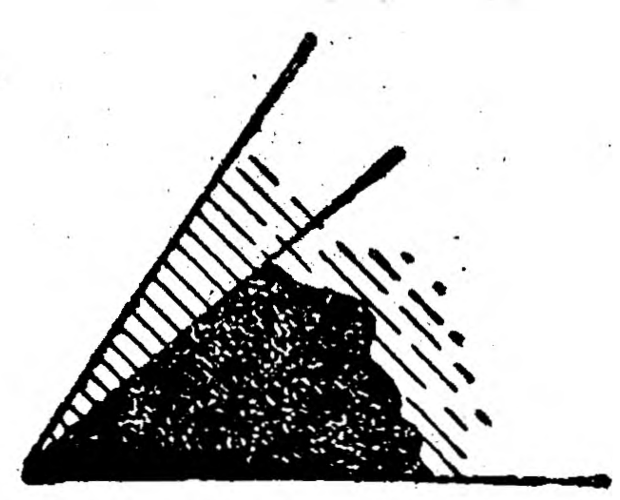


Рис. 14.

Если и вторая пара сторон наших углов совпадет друг с другом так, как произошло это на рисунке 13, то такие два угла считаются равными.

Если же вторая сторона красного угла не совпадет с соответствующей стороной зеленого, а пойдет так, как пошла она на рисунке 14, то тогда наши углы по величине не будут равны друг другу.

Помните только, что длина сторон угла не влияет на его величину.

4. ПРИГОТОВЛЕНИЕ ПРЯМОГО УГЛА.

§ 11. Как получить прямой угол. Возьмите листок бумаги произвольной формы. Согните его пополам по прямой линии (рис. 15), а затем сложите его вчетверо (рис. 16).

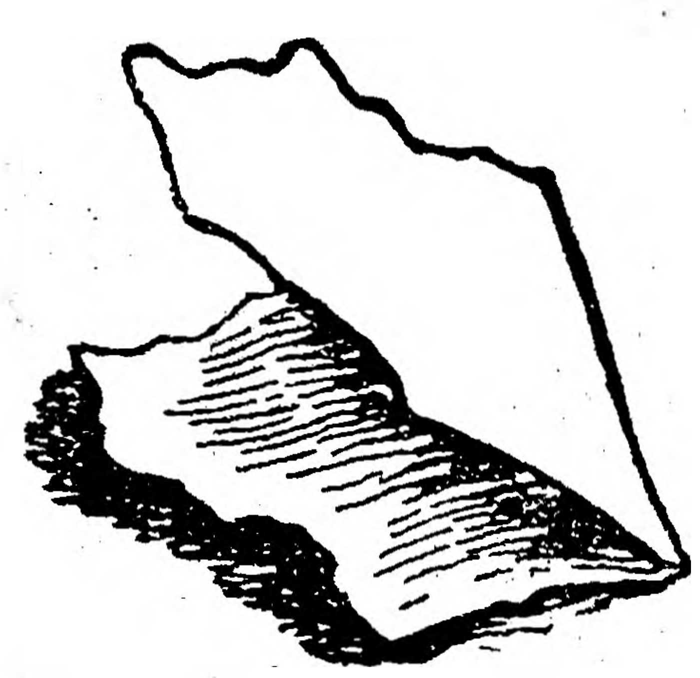


Рис. 15.

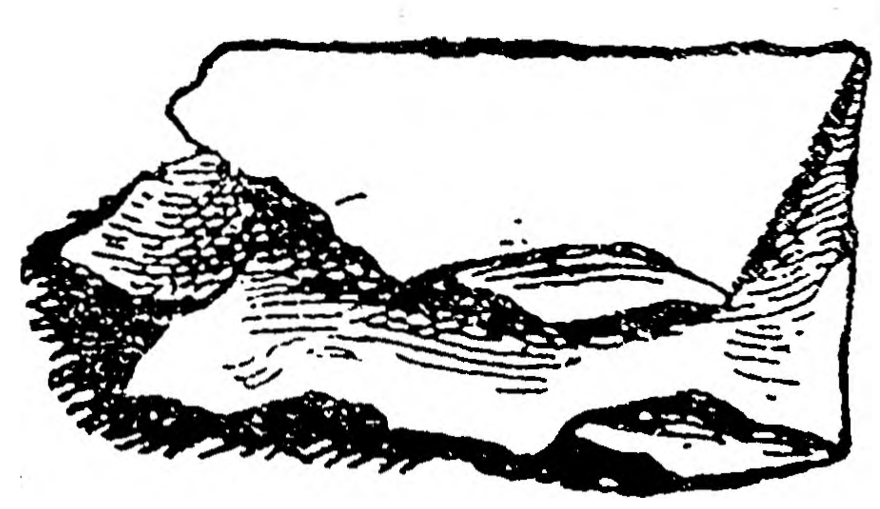


Рис. 16.

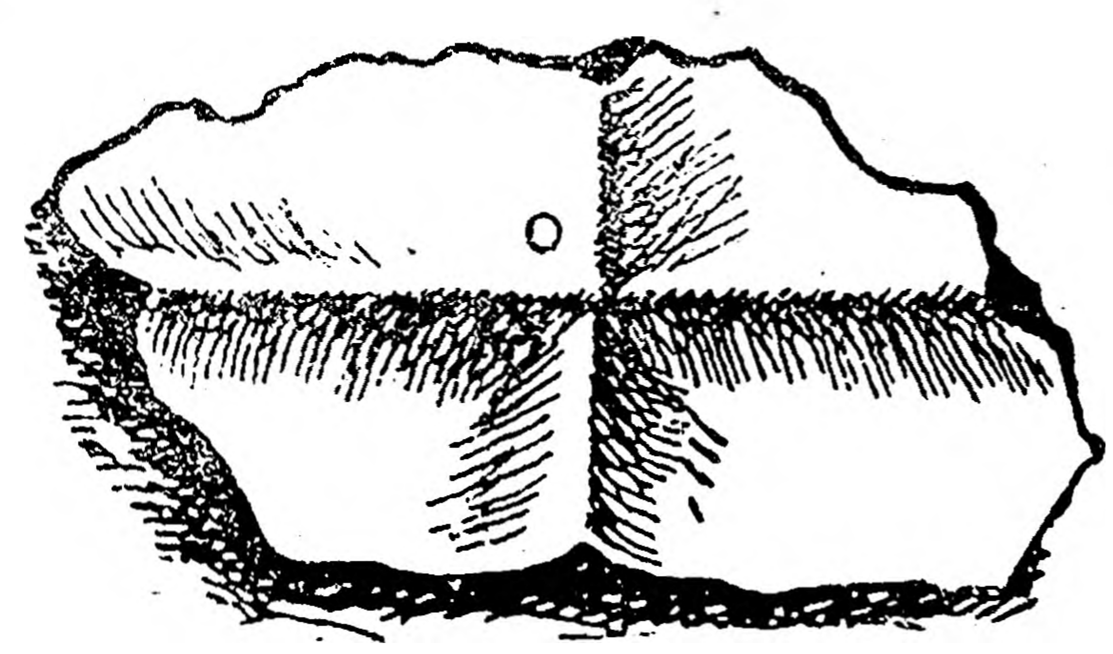


Рис. 17.

Расправьте теперь ваш листок и нарисуйте карандашом те прямые, по которым вы сгибали бумагу.

Вы получите две прямых линии, которые, пересекаясь в одной точке (точка *о* на рис. 17), дают 4 угла. Укажите их.

Легко видеть, что эти 4 угла равны друг другу. Кто из вас сомневается в этом, тот пусть опять сложит вчетверо свой листок бумаги.

Каждый из этих 4 равных углов называется **прямым углом**.

§ 12. Рисование прямых углов наугольником. Для рисования прямых углов пользуются прибором, который называется **наугольником** (рис. 18). Где у него прямой угол? Где вершина и стороны этого угла?

Решите при помощи наугольника следующие задачи:

Задача 1. Нарисуйте при помощи наугольника прямой угол около точки *А*.

Задача 2. Нарисуйте прямую *АВ* и у конца ее *А* постройте прямой угол.

Задача 3. Нарисуйте прямую *AB* и на ней отметьте какую-нибудь точку *C*. Проведите через точку *C* прямую так, чтобы она с первой прямой *AB* составляла прямой угол.

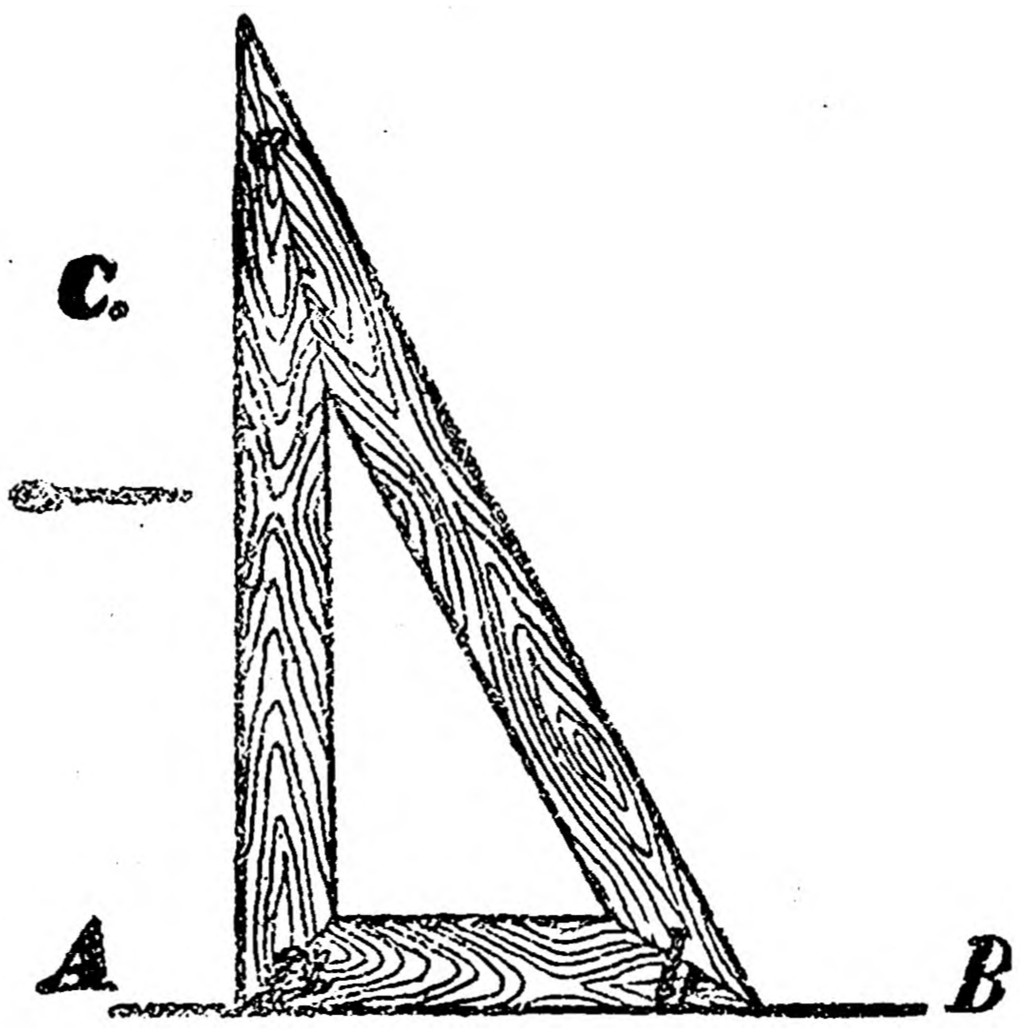


Рис. 18.

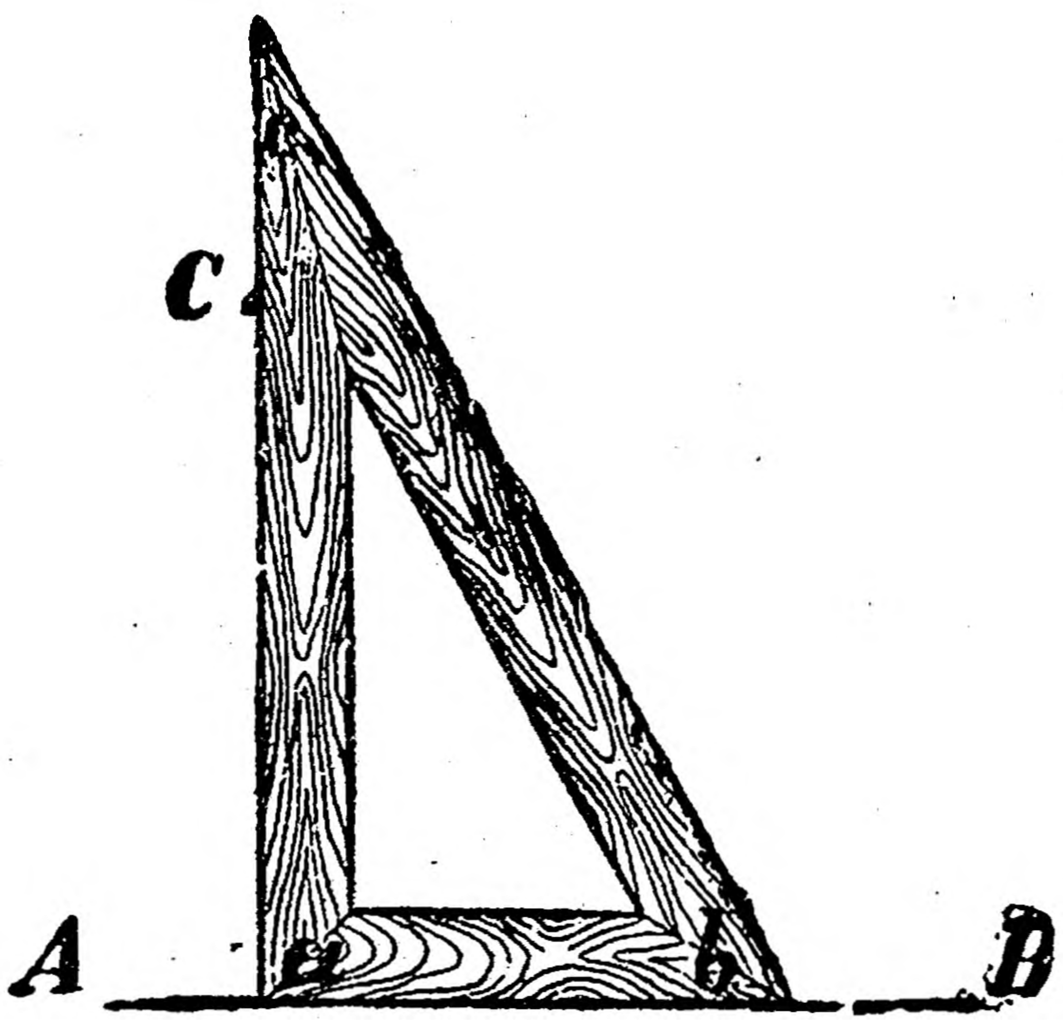


Рис. 19.

Задача 4. Нарисуйте прямую *AB* и вне ее точку *C*. Надо провести через точку *C* прямую так, чтобы она составляла с *AB* прямой угол (рис. 18).

Пояснение. Для этого надо приложить наугольник так, чтобы одна из его сторон *ab*, составляющая с другой стороной прямой угол, легла на нашу прямую *AB* (рис. 18). Затем нужно наугольник придвигать к точке *C* так, чтобы сторона его *ab* все время скользила по *AB* до тех пор, пока другая сторона прямого угла *ac* не встретит точки *C* (рис. 19).

§ 13. Косые углы. Углы, неравные прямому, называются **косыми углами** (рис. 20 и 21).

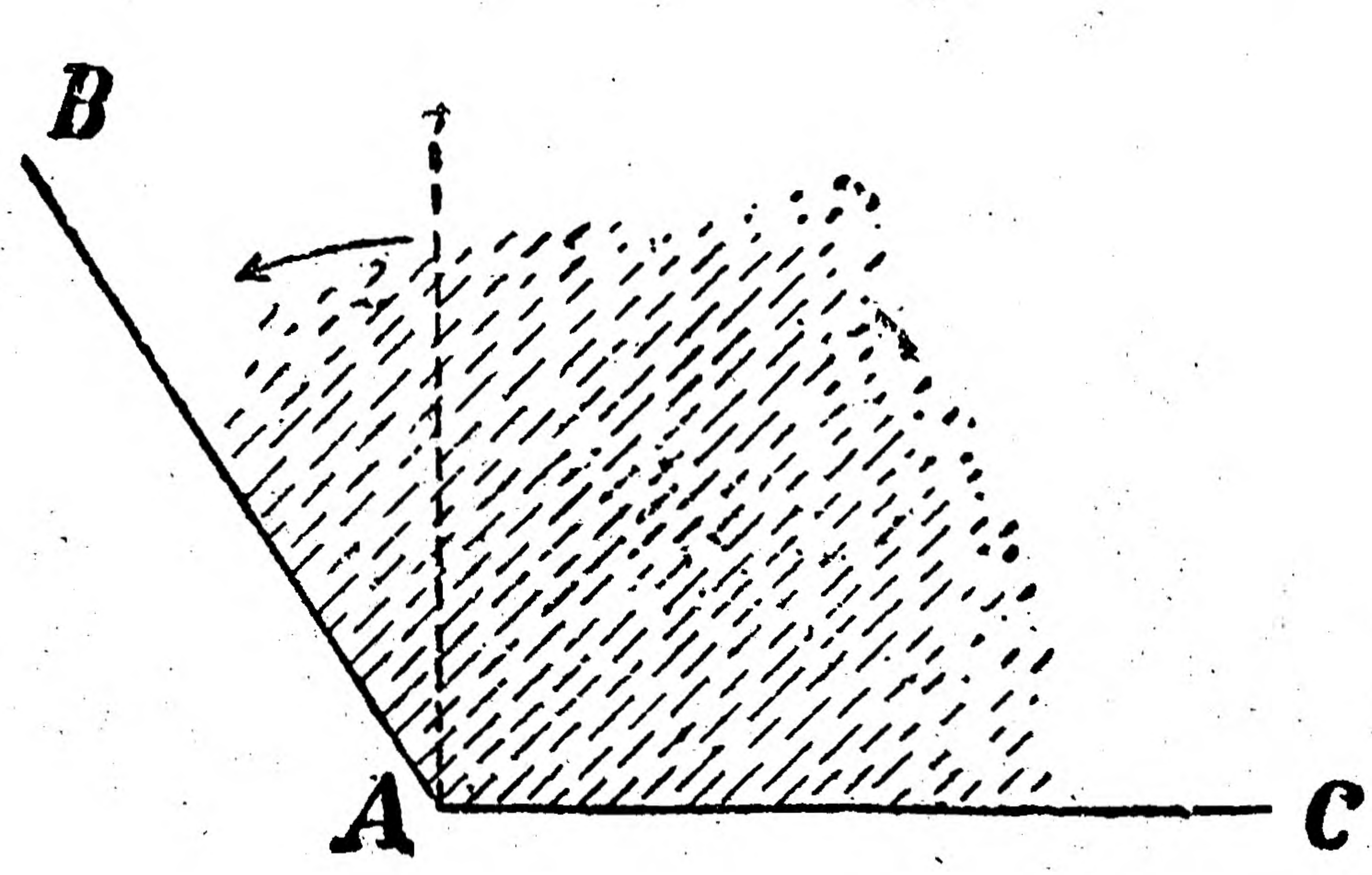


Рис. 20.

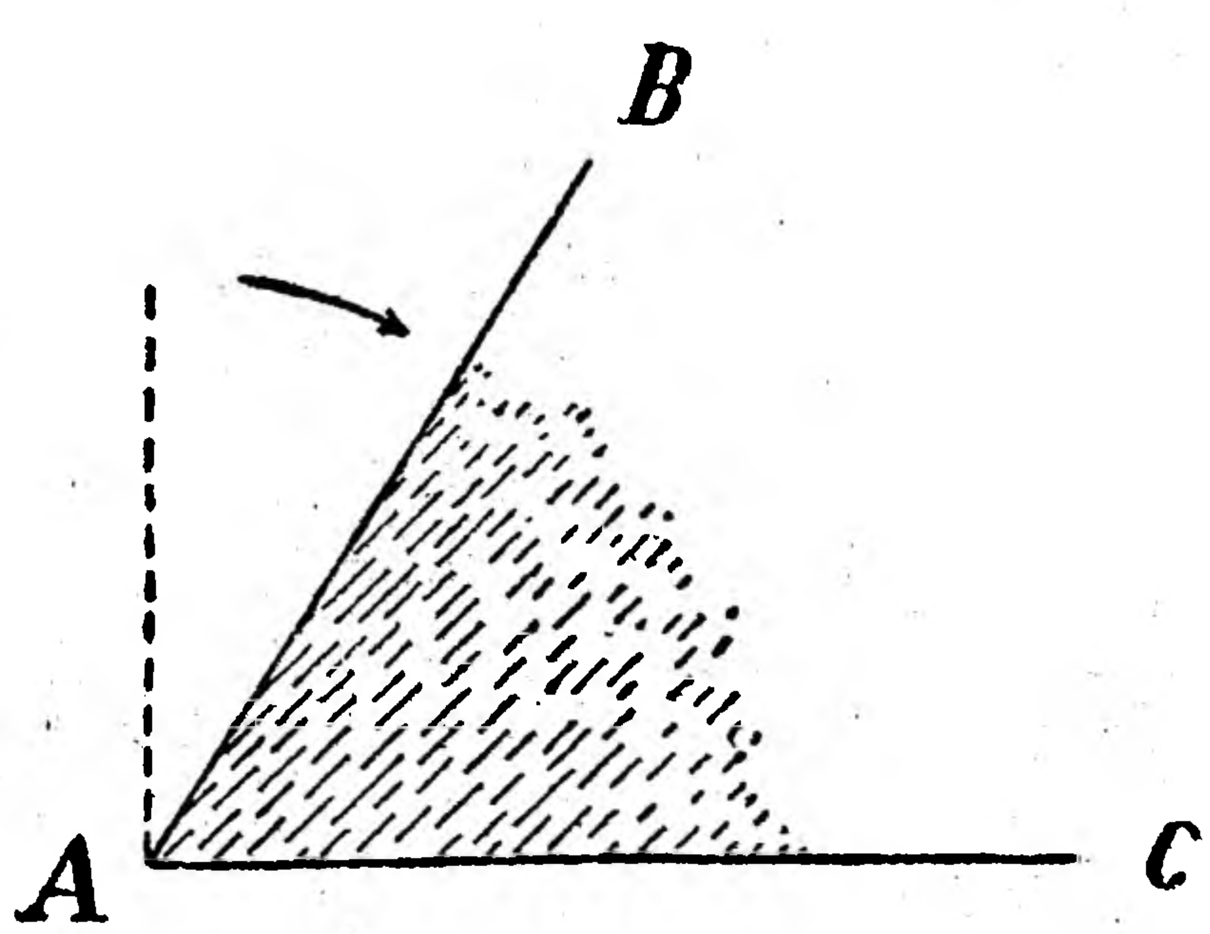


Рис. 21.

Нарисуйте два косых угла: один больше прямого, а другой меньше прямого.

ГЛАВА III.

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР.

5. ПРЯМОУГОЛЬНИК.

§ 14. Прямоугольник. Его стороны и вершины. Я вырезал из тонкого картона такую фигуру (рис. 22).

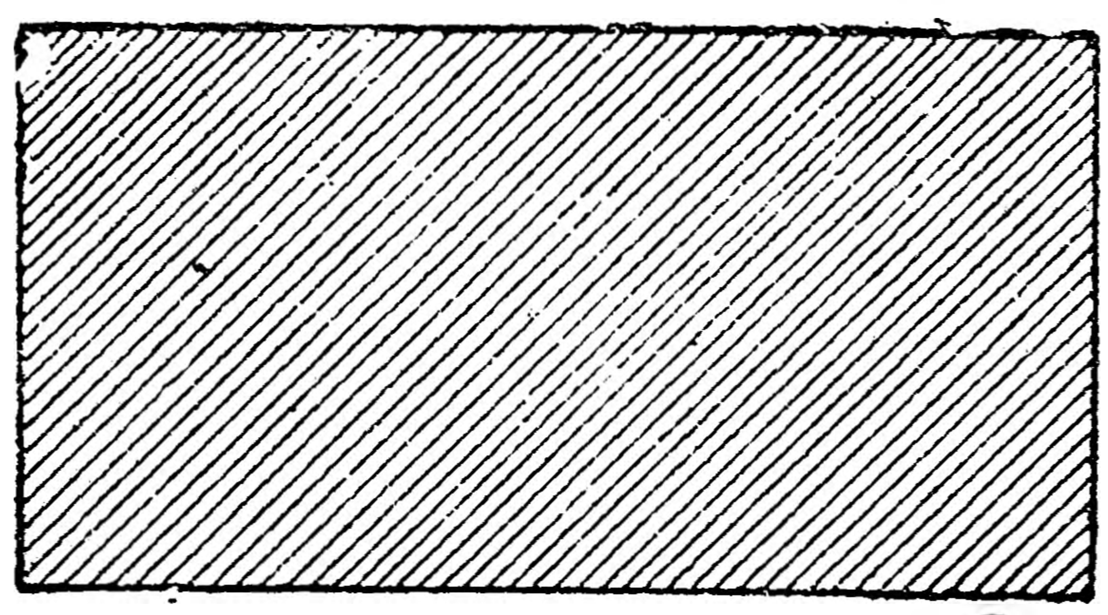


Рис. 22. Прямоугольник.

Укажите у этой фигуры все углы. Сколько их? Какие они?

Эта фигура называется прямоугольником.

Обведите пальцем все стороны этого прямоугольника. Сколько их?

Те точки, в которых пересекаются стороны, называются вершинами.

Сколько их?

§ 15. Свойство противоположных сторон его. Вырежьте из вашей тетради аккуратно один листок. Какую форму имеет он?

Обведите пальцем одну пару противоположных сторон этого прямоугольника.

Сравним друг с другом длину их. Сгибая прямоугольник, нетрудно добиться того, чтобы его противоположные стороны совпали одна с другой вполне, всеми своими точками. Итак, противоположные стороны прямоугольника равны друг другу.

§ 16. Рисование прямоугольника при помощи наугольника. Выучимся теперь рисовать прямоугольник, пользуясь наугольником линейкой (рис. 23). Нарисуем, например, прямоугольник, у которого длина равна 4 сантиметрам, а ширина 3 сантиметрам.

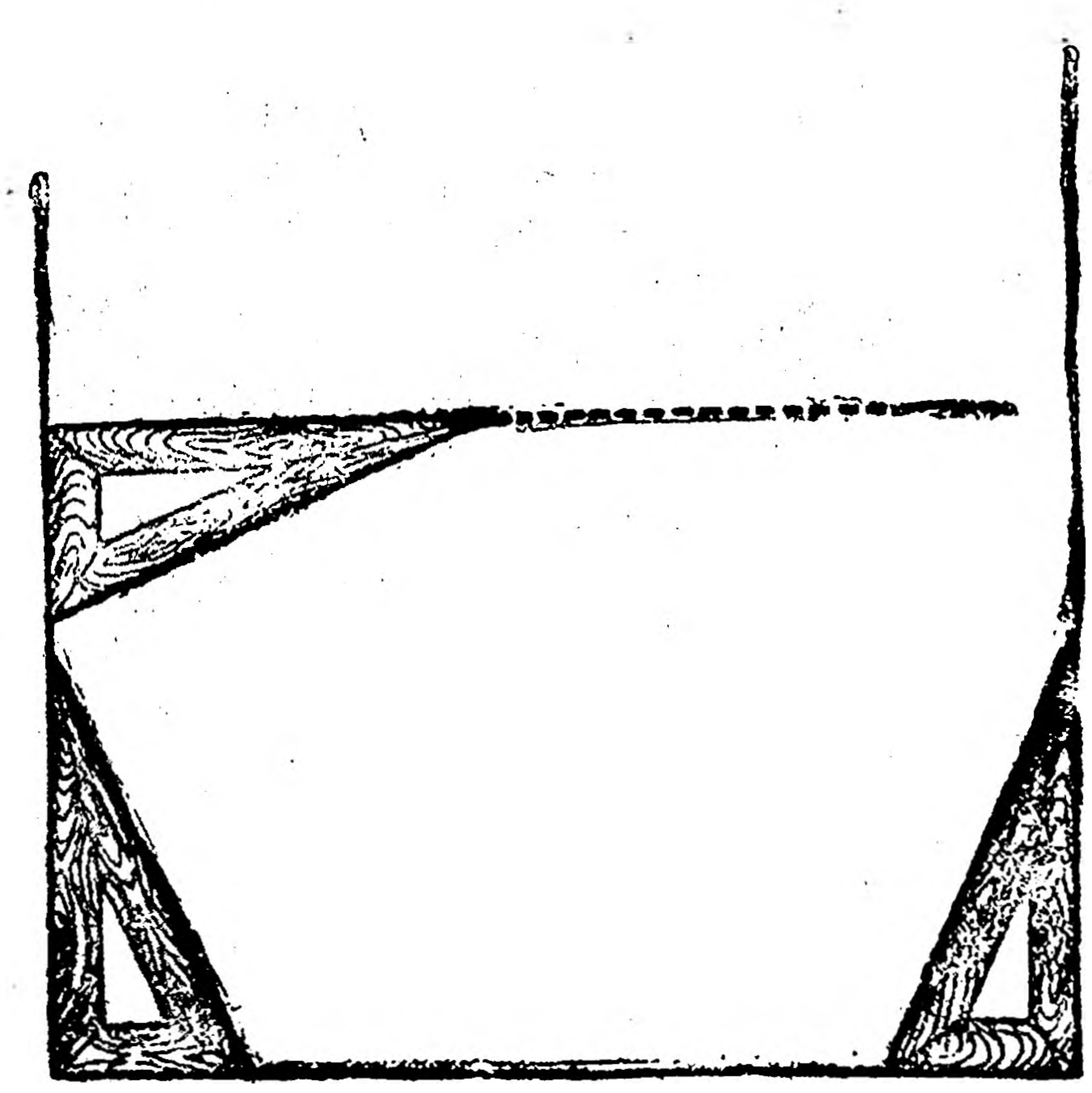


Рис 23.
Рисование прямоугольника.

Для этого нарисуем сначала при помощи измерительной линейки прямую в четыре сантиметра и у ее концов проведем при помощи наугольника две прямые, составляющие прямой угол с первой линией. На этих двух прямых отложим измерительной линейкой по 3 сантиметра и концы отложенных отрезков соединим прямой линией. Тогда и получим искомый прямоугольник.

Проверьте при помощи наугольника и измерительной линейки, что у полученной фигуры все углы прямые и что противоположные стороны ее равны друг другу.

Убедитесь тем же способом, что равны друг другу и две другие противоположные стороны прямоугольника.

§ 17. Длина и ширина. Высота и основание прямоугольника. Укажите две соседние стороны прямоугольника. Сравним их друг с другом. Сгибая прямоугольник наискось, как показано на рис. 24, мы убедимся, что две соседние стороны его не равны друг другу.

Одну из них называют *длиной* прямоугольника, другую — его *шириной*. Обыкновенно за ширину принимают более короткую сторону.

Часто одну из сторон прямоугольника называют *основанием* его, а соседнюю сторону — *высотой*.

6. КВАДРАТ.

§ 18. Приготовление квадрата. Приготовьте из бумаги прямоугольник. Постараемся отрезать от этого прямоугольника часть его так, чтобы получился новый прямоугольник с равными сторонами.

Для этого согнем прямоугольник наискось, как делали мы это в упражнении § 17. Отрежем теперь от прямоугольника такую часть, чтобы получилась фигура, изображенная на рис. 25.

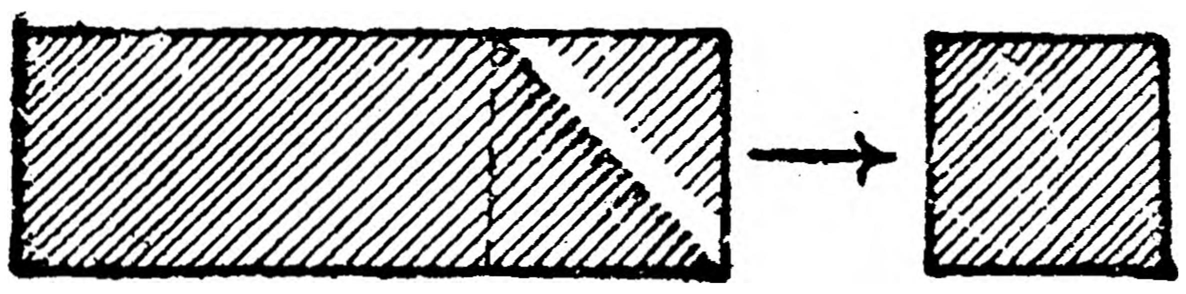


Рис. 24. Прямоугольник.

Рис. 25. Квадрат.

Почему у этой фигуры все стороны должны оказаться равными друг другу?

Будут ли у нее все углы прямыми? Проверьте это наугольником.

Такая фигура, у которой все стороны равны и все 4 угла прямые, называется квадратом.

7. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

§ 19. Квадратный сантиметр. Нарисуйте квадрат со стороною в один сантиметр. Такой квадрат называется *квадратным сантиметром* (рис. 26).

Как называется квадрат со стороною в 1 миллиметр?

§ 20. Равные и неравные отрезки прямой и углы. Мы умеем сравнивать между собой отрезки прямой линии и углы. Мы можем ответить на вопрос, равны ли два натянутых куска веревки и если не равны, то который из них больше и который меньше. Точно также мы можем сравнить два раскрытых веера и сказать, который из них более раскрыт и который менее.

Рис. 26.
Квадратный сантиметр.

Рис. 27.
Здесь нарисовано три квадр. сантиметра.

Про отрезки прямой линии, которые мы сравниваем, мы говорим, что они имеют одинаковую длину, или что один из них имеет бо́льшую длину, а другой — меньшую.

Два угла тоже могут иметь одинаковую величину, или один может быть больше, а другой — меньше.

§ 21. Что такое площадь прямоугольника. Вырежьте из бумаги два прямоугольника так, чтобы длина каждого была равна 3 сантиметрам, а ширина — 2 сантиметрам. Вы можете наложить один прямоугольник на другой так, что они совпадут всеми своими точками: они равны между собой. Теперь посмотрите на прямоугольники, нарисованные на рисунках 28 и 29. Они не равны между собой. Вы сразу скажете, который из них длиннее, который шире, но можно еще спросить, на который из них уйдет больше бумаги, если мы захотим их вырезать; на который уйдет больше краски, если мы их закрасим? На эти вопросы не так легко ответить. Если вы сравните квадрат и прямоугольник, нарисованные на рис. 24 и 25, то сразу скажете, что на прямоугольник уйдет больше бумаги, больше краски, чем на квадрат.

Можно сказать, что площадь прямоугольника, нарисованного на рис. 24, больше, чем площадь квадрата, нарисованного на рис. 25.

На равные прямоугольники нужно употребить одинаковое количество бумаги: равные прямоугольники имеют одинаковые площади.

§ 22. Могут ли неравные фигуры иметь равные площади? Интересно теперь узнать, можно ли нарисовать две такие фигуры, которые, не будучи равными друг другу, будут все-таки иметь одинаковые площади.

Нарисуйте два прямоугольника. У первого основание равно 4 сантиметрам, высота равна 3 сантиметрам (рис. 28), у второго основание равно 6 сантиметрам, высота 2 сантиметрам (рис. 29). Очевидно, что эти прямоугольники не равны друг другу. Почему?

Нарежьте из картона несколько десятков квадратных сантиметров и покройте ими всю площадь того и другого прямоугольников. Сосчитайте, сколько квадратных сантиметров уложилось на каждом прямоугольнике [1]).

Окажется, что площадь каждого из этих неравных друг другу прямоугольников содержит по 12 квадратных сантиметров.

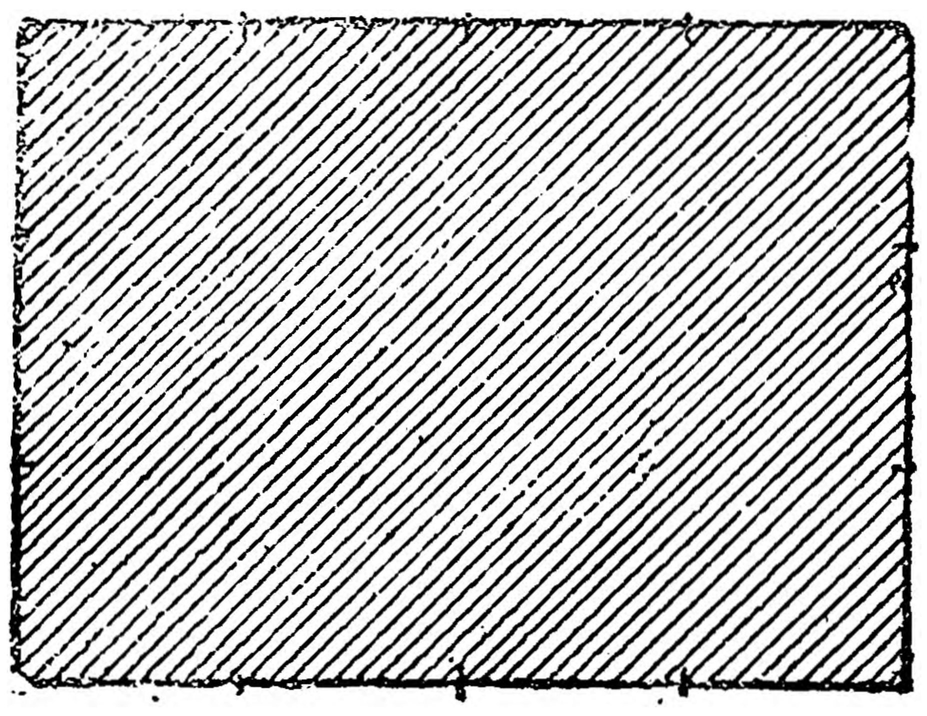


Рис. 28.

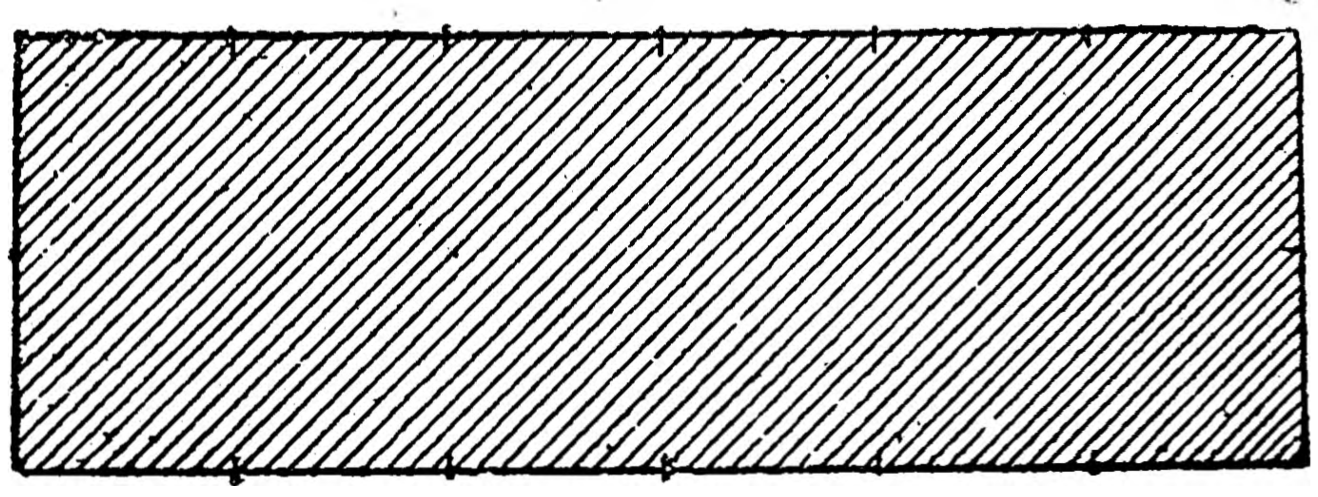


Рис. 29.

Итак, две фигуры, не будучи равными друг другу, могут иметь равные площади.

Фигуры, имеющие равные площади, называются равновеликими.

§ 23. Измерение площади прямоугольника. Для того, чтобы узнать, сколько квадратных сантиметров содержит площадь прямоугольника, можно поступить еще так:

Измерим, например, площадь прямоугольника, нарисованного на чертеже 28. Основание его равно 4 сантиметрам. Отложим на нижнем и верхнем основании эти линейные сантиметры и соответствующие точки делений соединим прямыми линиями (рис. 30).

Разрезав прямоугольник вдоль по этим линиям, мы получим 4 таких полосы, шириною в сантиметр (рис. 31):

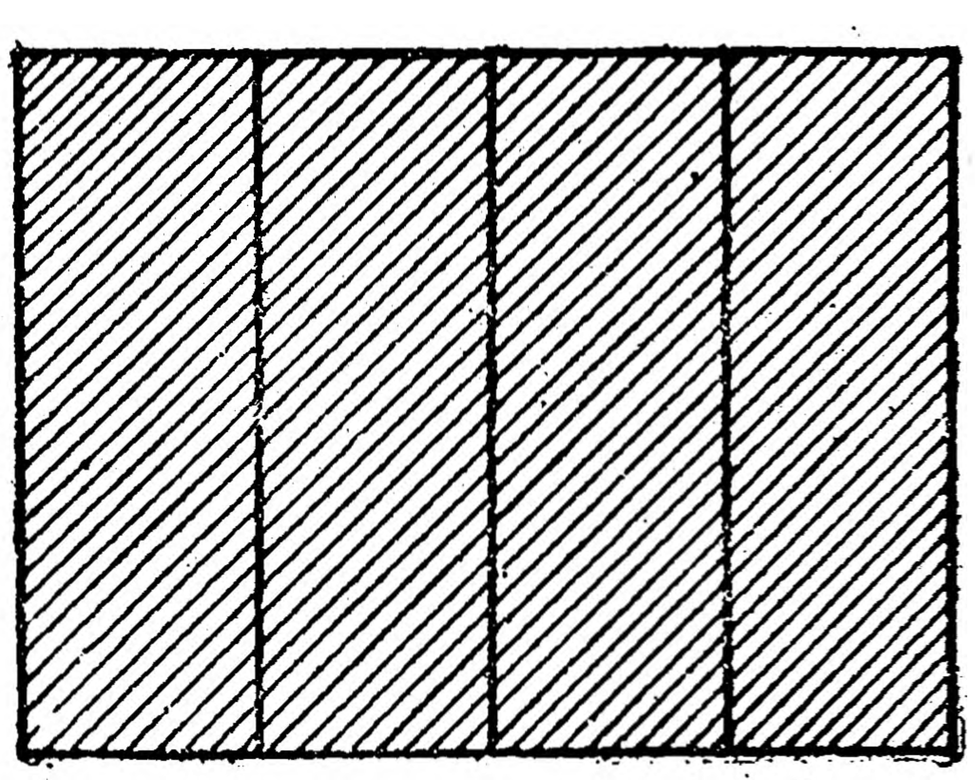


Рис. 30.

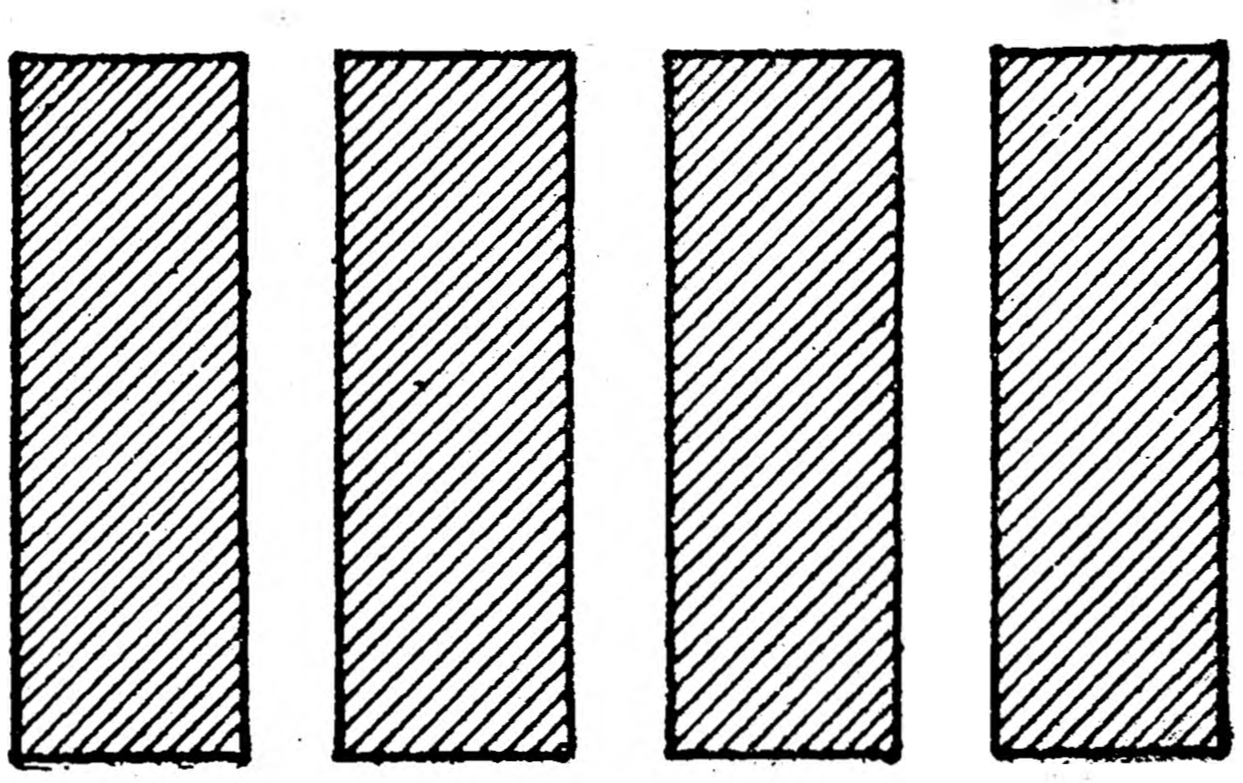


Рис. 31.

[1]) Вместо того, чтобы укладывать на прямоугольники отдельные квадратные сантиметры, можно наложить лист прозрачной бумаги, разграфленной на квадратные сантиметры.

Разрежем теперь каждую из этих полос на квадратные сантиметры. Начнем с первой. Высота этой полосы 3 сантиметра. Отложим вдоль по обеим высотам по 3 сантиметра и соединим соответствующие точки деления прямыми линиями (рис. 32).

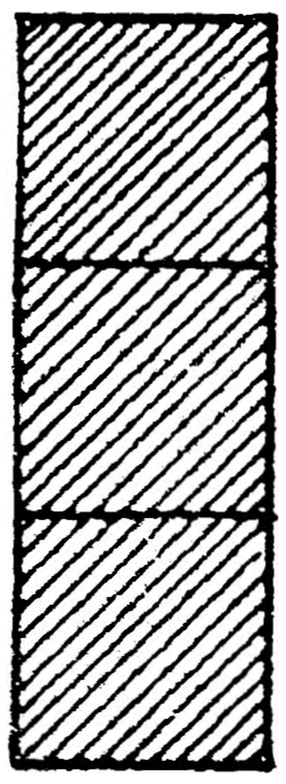


Рис. 32.

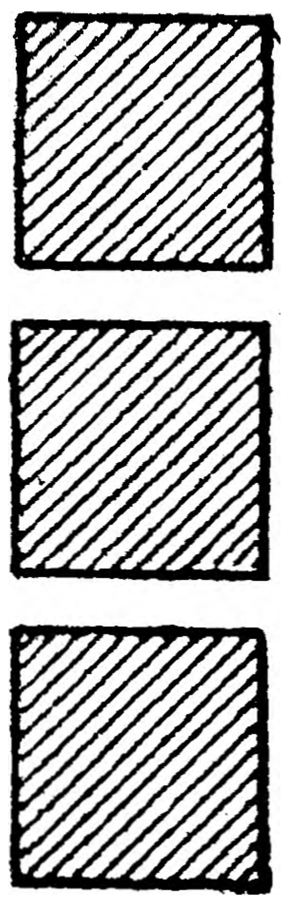


Рис. 33.

Разрезав полоски по этим линиям, мы из каждой полосы получим 3 квадратных сантиметра (рис. 33).

Посчитаем теперь, сколько квадратных сантиметров получим мы из всего нашего прямоугольника. Из одной полосы мы получили 3 квадратных сантиметра, а таких полос у нас было 4, следовательно, из всего прямоугольника мы получим $3 \times 4 = 12$ квадратных сантиметров.

Подчеркните числа, выражающие в сантиметрах основание и высоту прямоугольника. Подчеркните число квадратных сантиметров, содержащихся в площади этого прямоугольника.

Какое арифметическое действие надо сделать над первыми двумя, чтобы получить последнее число?

$$3 \times 4 = 12.$$

Итак, *чтобы узнать, сколько квадратных сантиметров содержит площадь прямоугольника, достаточно измерить основание и высоту его в линейных сантиметрах и полученные измерением числа перемножить.*

8. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ КВАДРАТА.

§ 24. Измерение площади квадрата. Квадрат — это прямоугольник с равными сторонами (рис. 25).

Поэтому, чтобы узнать, сколько квадратных единиц (квадратных сантиметров или квадратных миллиметров) содержит его площадь, можно разрезать наш квадрат на квадратные единицы тем же самым способом, как мы делали это с прямоугольником в упражнении § 23.

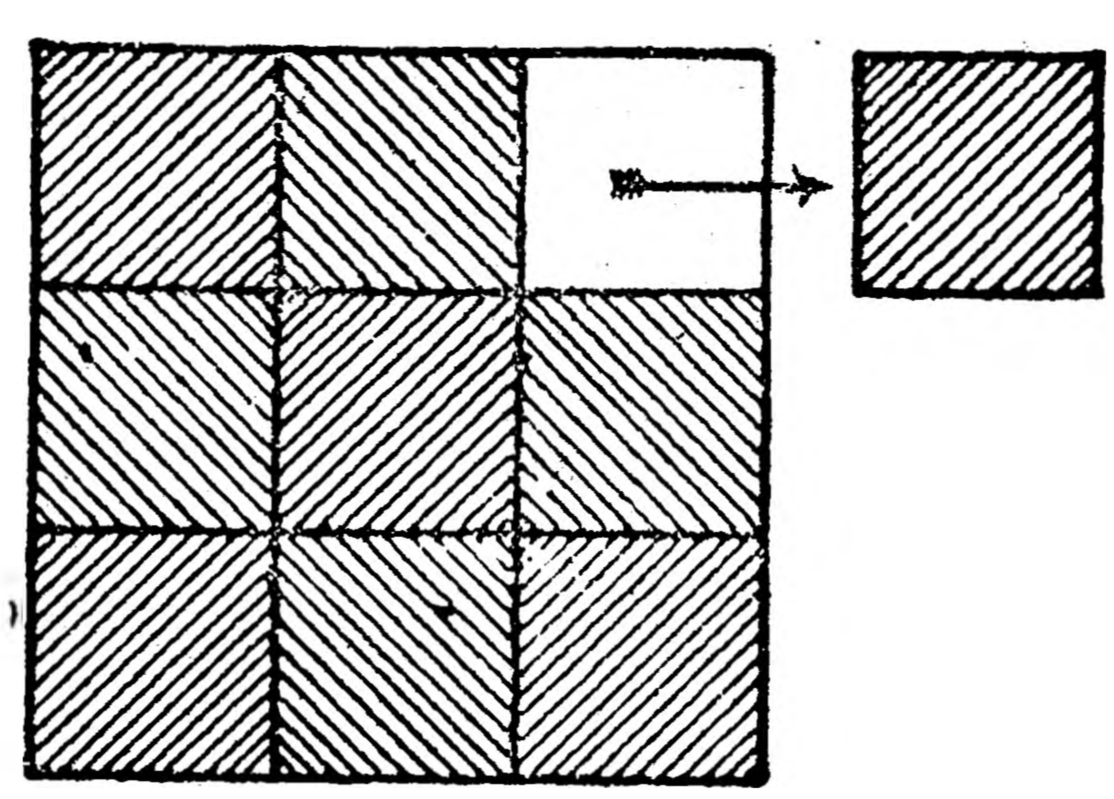


Рис. 34.

Разрежьте, например, по этому способу на квадратные сантиметры квадрат, сторона которого равна 3 сантиметрам. Так как и основание и высота этого квадрата равны

3 сантиметрам, то площадь его будет состоять из $3 \times 3 = 9$ квадратных сантиметров (рис. 34). (Объясните сами, почему.)

Итак, чтобы узнать, сколько квадратных единиц (например, квадратных сантиметров или квадратных миллиметров) содержит площадь квадрата, надо измерить соответствующей линейной единицей (сантиметром, миллиметром) любую его сторону и полученное число помножить само на себя. Найденное число укажет, сколько квадратных единиц имеет площадь этого квадрата.

9. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАМА.

§ 25. Приготовление параллелограма. Сложивши вдвое лист цветной бумаги, нарисуйте на нем прямоугольник, с основанием в 3 сантиметра и высотою в 2 сантиметра. Вырезав его, вы получите два одинаковых прямоугольника.

Один из них приклейте. Укажите на нем высоту и основание.

В другом прямоугольнике из какой-нибудь вершины его проведите поперек наклонную прямую линию (на рис. 35 она изображена пунктирной «точечной» линией). Отрежьте вдоль по этой прямой от нашего прямоугольника часть его (заштрихованную на рисунке 36) и приставьте ее слева так, чтобы получилась такая фигура (рис. 37). Полученная фигура называется параллелограмом.

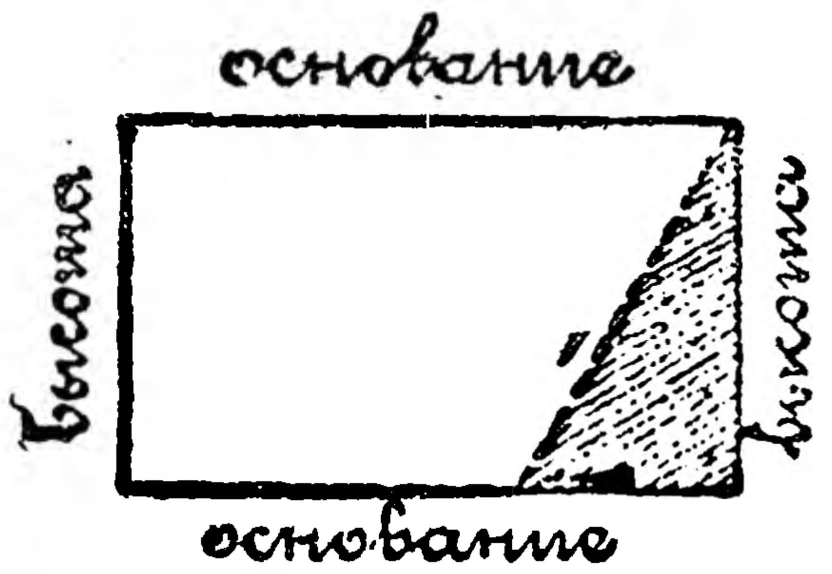


Рис. 35.

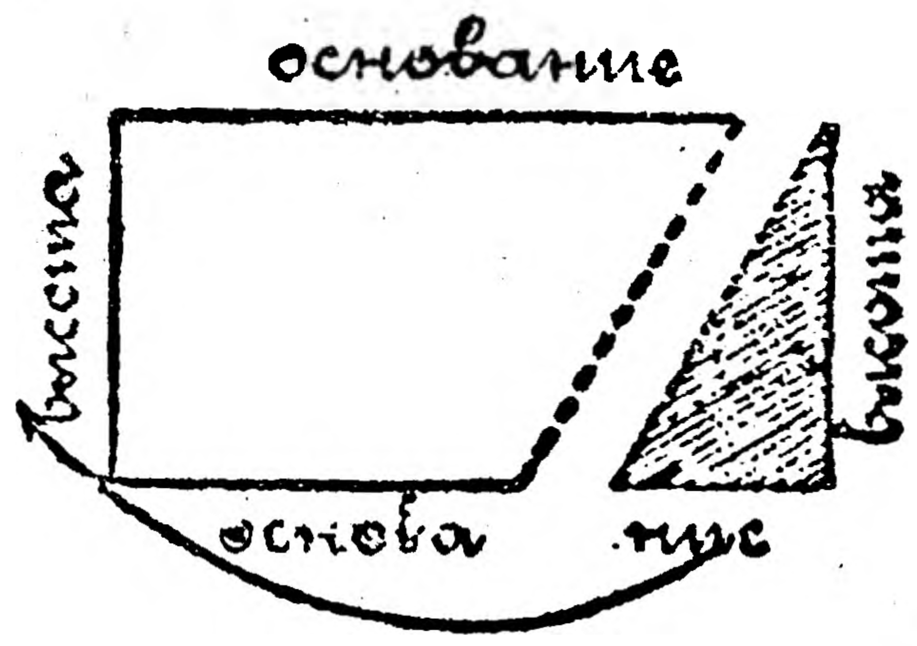


Рис. 36.

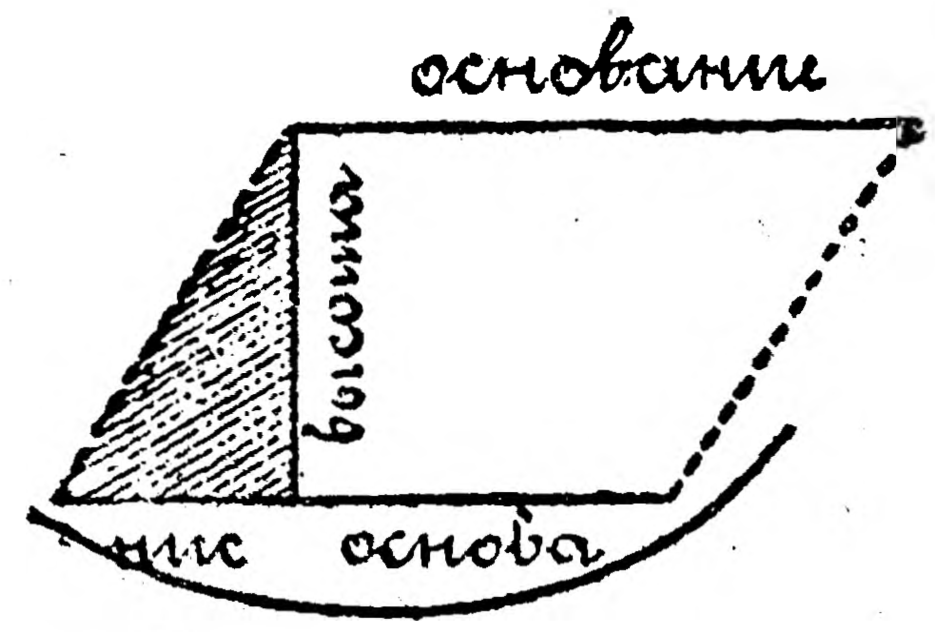


Рис. 37

§ 26. Стороны и углы параллелограма. Укажите все стороны параллелограма.

Те точки, в которых встречаются соседние стороны параллелограма, называются его вершинами. Сколько их?

Отрежьте все его углы. Сколько их? Косые ли все эти углы?

§ 27. Рисование параллелограма. Параллелограм можно рисовать так. Нарисуйте сначала прямоугольник (рис. 38). Затем отложите на верхнем основании его какой-либо отрезок, считая его от одной из вершин. Такой же длины отрезок отложите на нижнем основании, считая его от вершины, противолежащей первой. Проведя от полученных точек наклонные прямые к двум остальным вершинам (рис. 38), мы и получим параллелограм. Конечно, у этого параллелограма основание будет меньше основания прямоугольника.

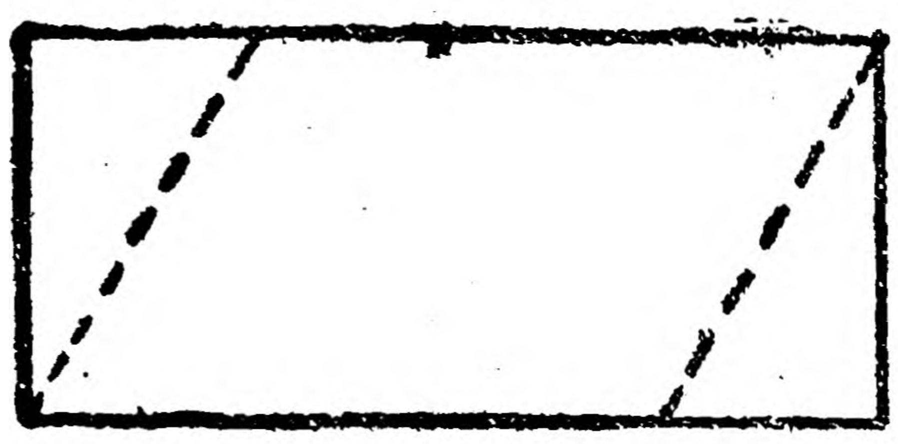


Рис. 38.

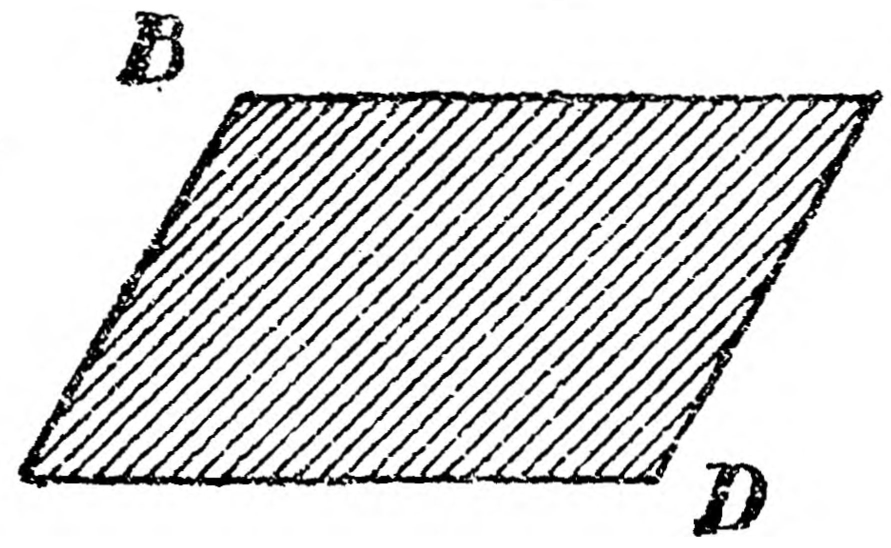


Рис. 39. Параллелограм.

§ 28. Основание и высота параллелограма. Найдите в полученном нами (в упражн. § 25) параллелограме (рис. 37) сторону, служившую основанием того прямоугольника, из которого мы составили этот параллелограм. Это основание прямоугольника называется основанием параллелограма. Укажите его.

Высотою параллелограма называется высота того прямоугольника, из которого мы составили наш параллелограм. Укажите ее на рисунке.

Научитесь рисовать при помощи наугольника высоту у параллелограма (вспомните § 12).

Пояснение. Удобнее всего рисовать высоту так, чтобы она проходила через точку *B* (рис. 39).

§ 29. Превращение параллелограма в равновеликий прямоугольник. Вырежьте из бумаги какой-либо параллелограм (рис. 37). Постарайтесь превратить его в равновеликий прямоугольник (рис. 35).

Измерьте площадь этого прямоугольника (§ 23). Так как наш параллелограм имеет такую же площадь, как и прямоугольник, то, измеривши площадь прямоугольника, вы узнаете и площадь параллелограма.

Пояснение. Нарисовав высоту (рис. 37), отрежьте вдоль по ней часть параллелограма и приставьте ее к противоположной стороне так, чтобы получился прямоугольник (рис. 35). Убедитесь, что у полученного прямоугольника основание и высота такие же, как и у параллелограма.

10. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА.

§ 30. Приготовление треугольника из параллелограма. Нарисуйте какой-либо параллелограм и вырежьте его. Соедините две противоположные вершины его прямой линией и разрежьте вдоль по ней наш параллелограм. Каждая из полученных частей параллелограма называется **т р е у г о л ь н и к о м.**

Сколько у треугольника сторон? Укажите их. Сколько вершин? Сколько углов? Где они?

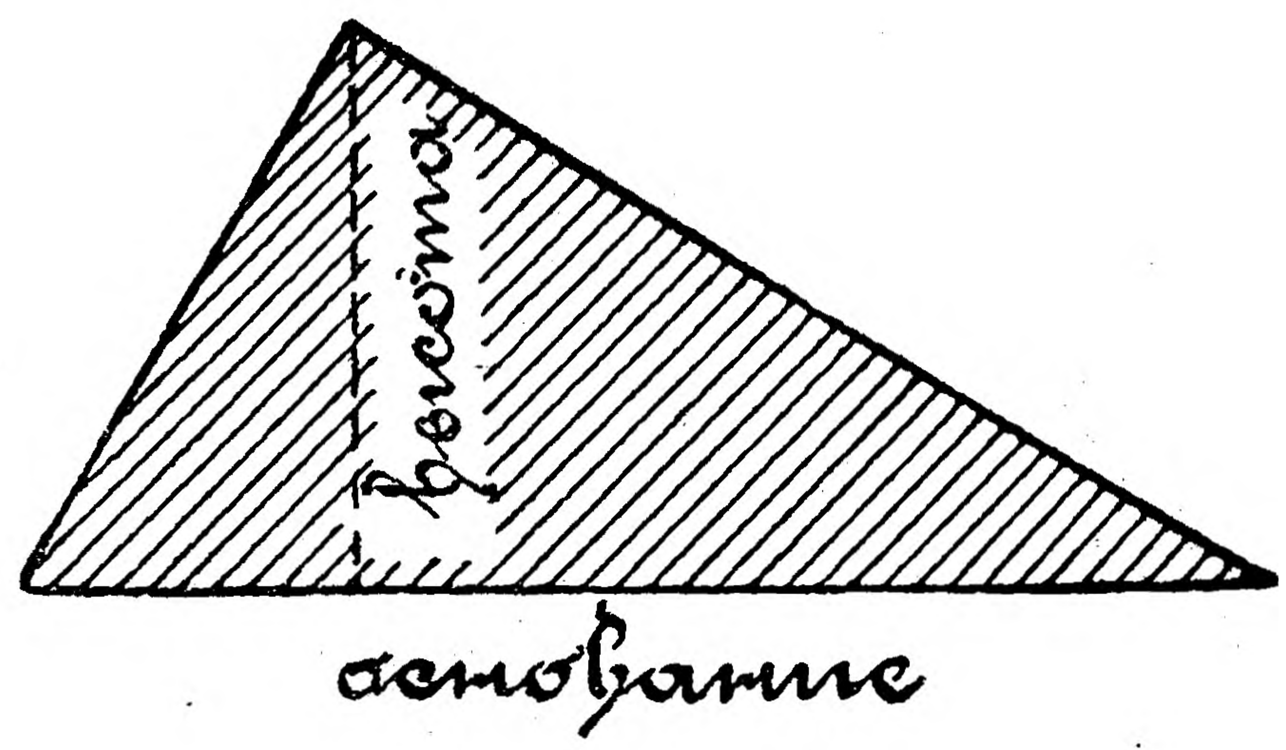


Рис. 40.

§ 31. Основание и высота треугольника. Основанием и высотою треугольника будут те же линии, которые служили основанием и высотою тому параллелограму, из которого мы получили наш треугольник.

Укажите основание вашего треугольника (рис. 40). Нарисуйте при помощи наугольника его **в ы с о т у.** Нарисуйте несколько треугольников и поучитесь рисовать их высоту, пользуясь наугольником.

§ 32. Превращение треугольника в равновеликий прямоугольник. Для того, чтобы измерить площадь треугольника, постарайтесь превратить его в равновеликий прямоугольник.

Вырежьте из бумаги треугольник. Нарисуйте его высоту. Соедините прямой линией середины боковых сторон треугольника. Отрежьте два образовавшихся у вершины маленьких треугольника *a* и *b* (рис.41) и приклейте их к оставшейся части треугольника так, чтобы получился прямоугольник (рис. 42). Убедитесь, что у этого прямоугольника основание равно основанию треугольника, а высота вдвое короче высоты треугольника.

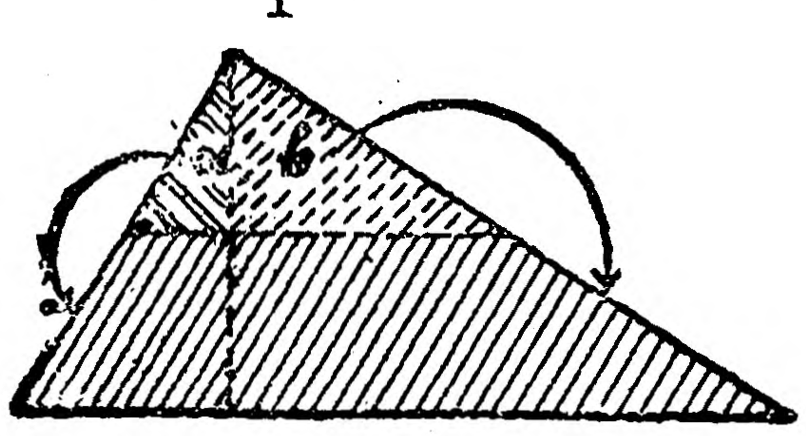


Рис. 41.

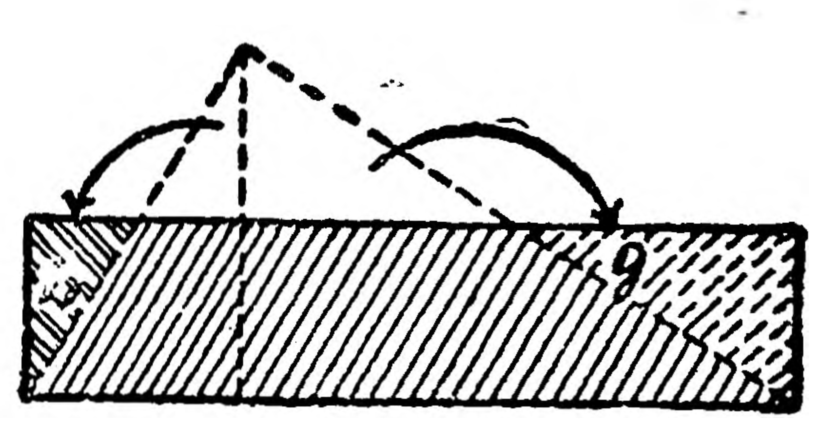


Рис. 42.

Превращение треугольника в равновеликий прямоугольник.

Измерив площадь этого прямоугольника, вы этим самым измерите и площадь треугольника.

11. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ ТРАПЕЦИИ.

§ 33. Приготовление трапеции. Нарисуйте прямоугольник (рис. 43). Проведите из двух вершин его, находящихся у основания, две какие-либо наклонные (косые) прямые. (На рисунке 43 эти прямые нарисованы пунктиром).

Если от прямоугольника отрезать вдоль по этим прямым боковые части его, то получится т р а п е ц и я (затушеванная часть рисунка).

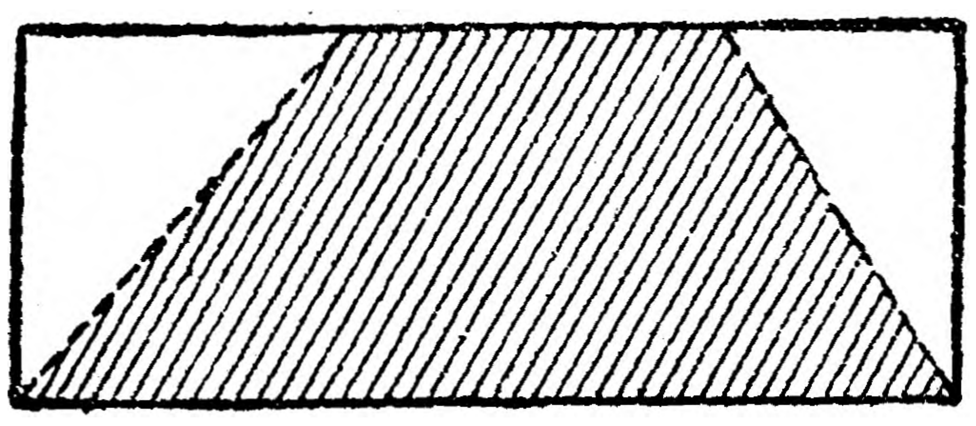


Рис. 43.
Превращение прямоугольника в трапецию.

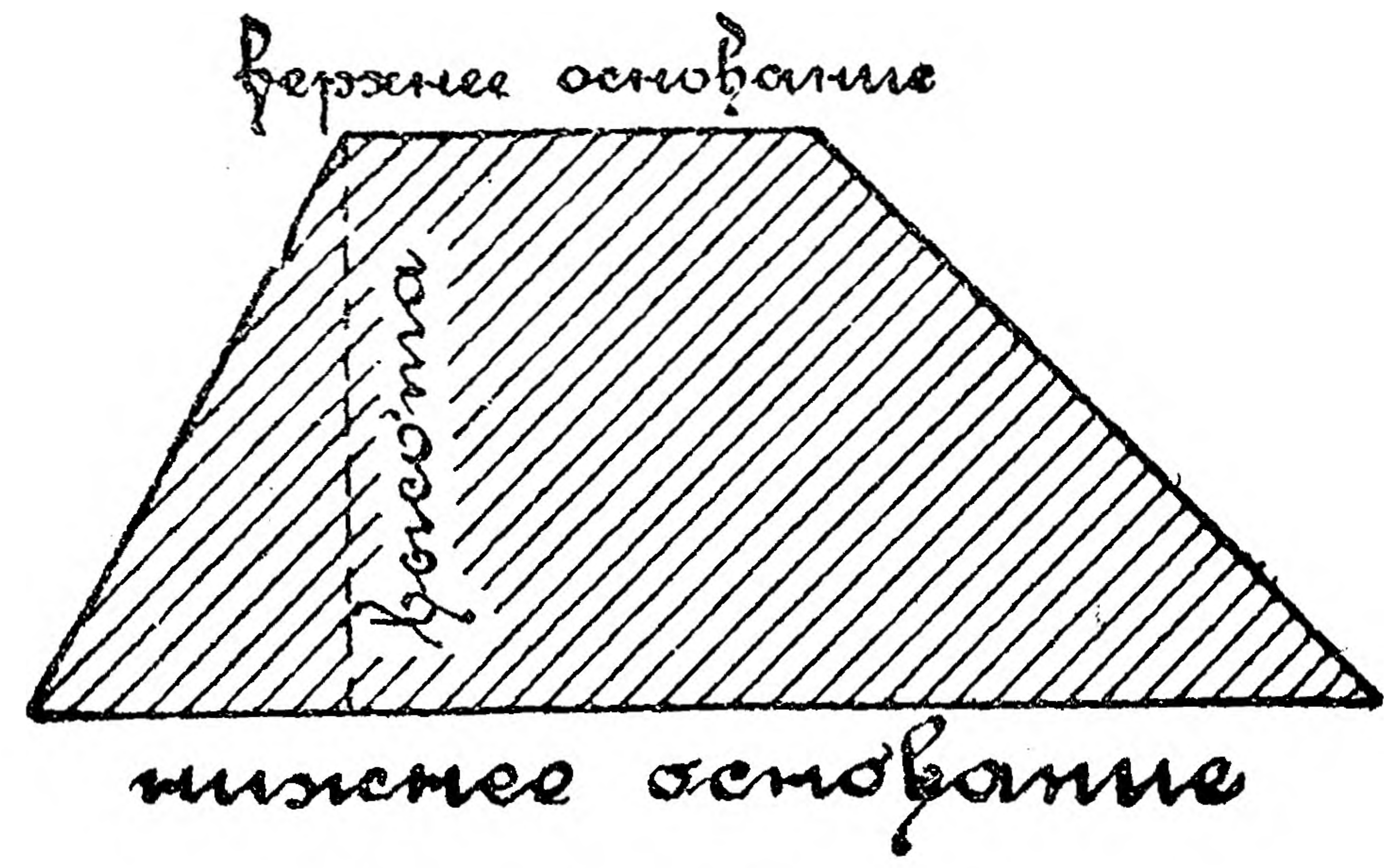


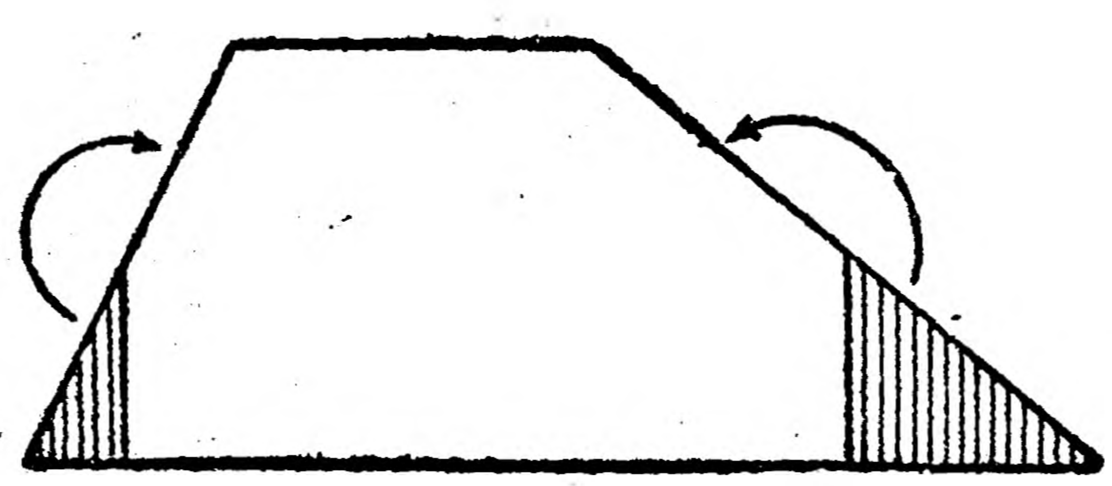
Рис. 44. Трапеция.

§ 34. Основание и высота трапеции. Высотою трапеции будет служить высота того прямоугольника, из которого мы получили трапецию. Укажите на рисунке 44 эту высоту.

Трапеция имеет два основания: верхнее и нижнее. Найдите оба эти основания на рисунке.

§ 35. Измерение площади трапеции. Для того, чтобы измерить площадь трапеции, превратим ее в равновеликий прямоугольник.

Вырежьте трапецию. Найдите середины ее боков и из этих точек проведите прямые, образующие у нижнего основания трапеции прямые углы (рис. 45). Отрезав вдоль по этим линиям маленькие тре-



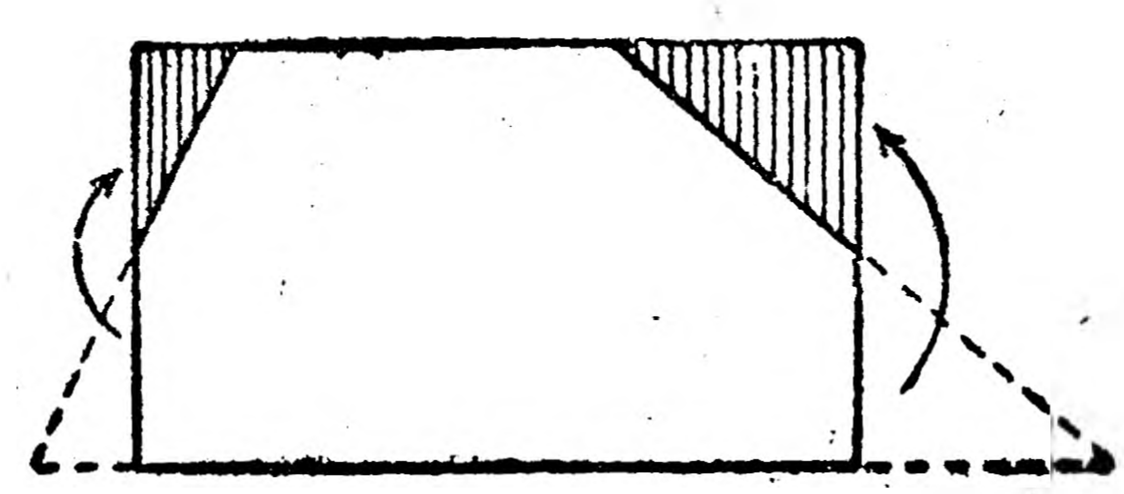


Рис. 45. **Рис. 46.**
Превращение трапеции в равновеликий прямоугольник.

угольники, поверните их на полоборота и приставьте к бокам трапеции так, чтобы получился прямоугольник (рис. 46). Измерив площадь этого прямоугольника, вы узнаете вместе с тем и площадь вашей трапеции.

ГЛАВА IV.

КУБ. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА. ИЗМЕРЕНИЕ ИХ ОБЪЕМОВ.

12. КУБ. ЕГО ГРАНИ, РЕБРА И ВЕРШИНЫ.

§ 36. Приготовление куба. Все предметы, окружающие нас, будем называть т е л а м и.

Вылепите из глины или воска такой кубик. (Посмотрите на рисунок 47.)

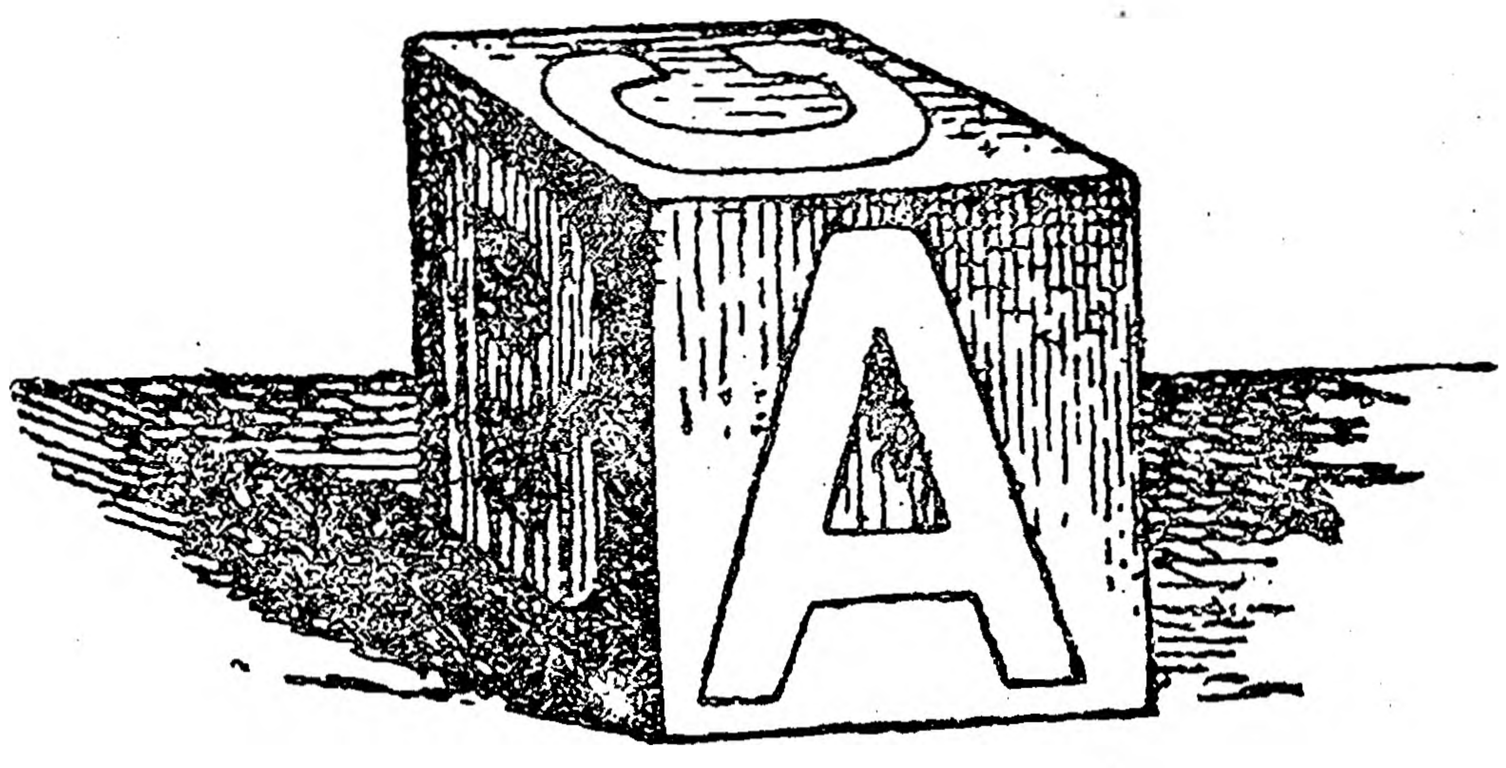


Рис. 47. Куб

Это тело называется к у б о м.

Нарисуйте на плотной бумаге фигуру, указанную на рисунке 48, и склейте из нее куб.

Вырезав аккуратно выкройку, по контуру, согните фигуру по линиям, нарисованным точками, обмажьте клейстером заштрихованную на рисунке кайму и склейте тело так, чтобы кайма попала внутрь его.

Назовите несколько предметов, имеющих форму куба.

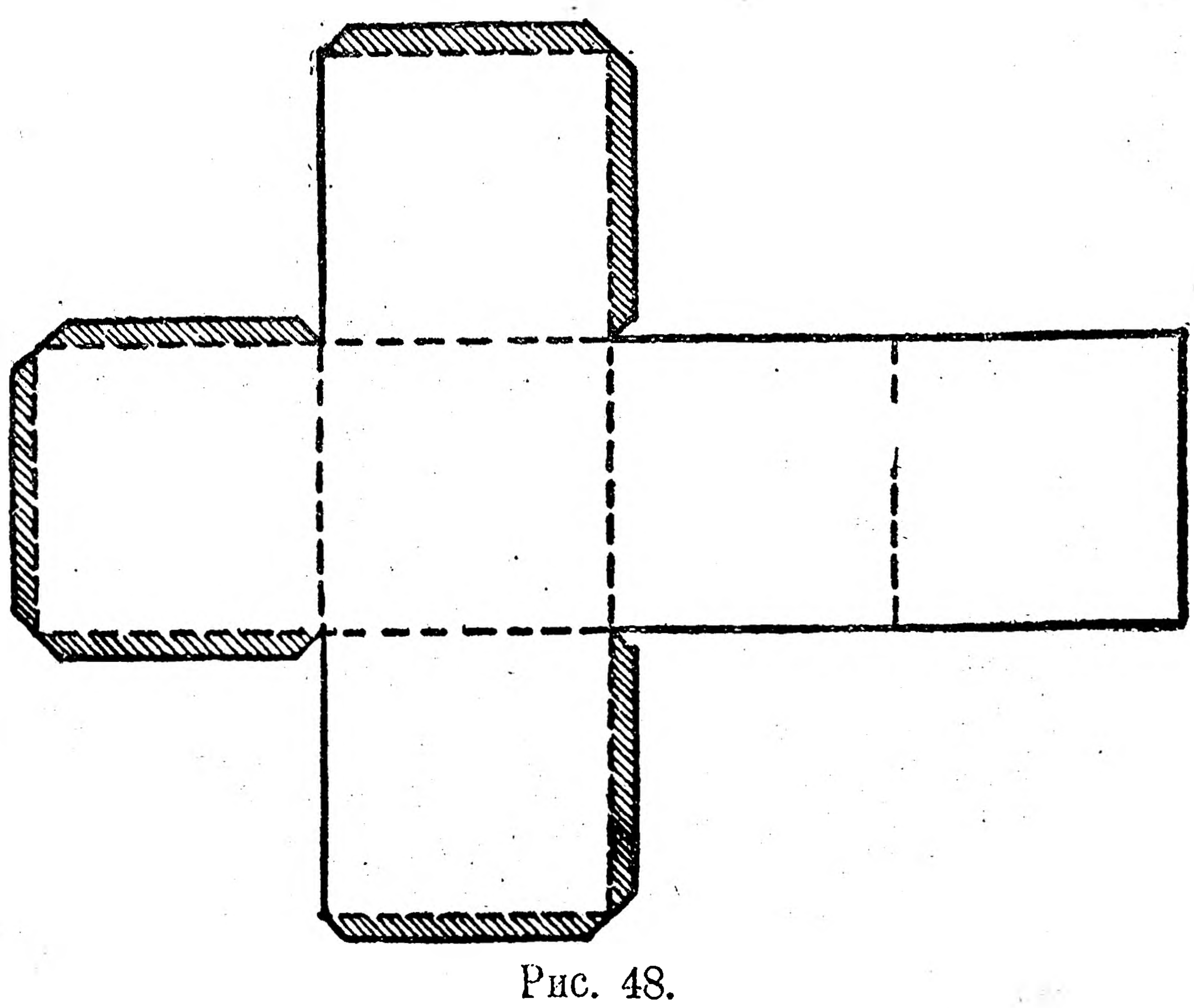


Рис. 48.
Выкройка куба.

§ 37. Грани куба — плоские. Обведите ладонью руки всю поверхность вашего куба. Сосчитайте, сколькими площадками ограничена эта поверхность. Эти площадки называются г р а н я м и куба.

Кладя на грани куба ребро линейки в разных направлениях, как было указано в упражнении § 7, убедимся, что все грани куба — плоские.

§ 38. Грани куба равны друг другу. Нарисуйте в тетрадях фигуру грани куба (рис. 49). Фигура эта — квадрат.

Сравним друг с другом размеры всех шести граней куба.

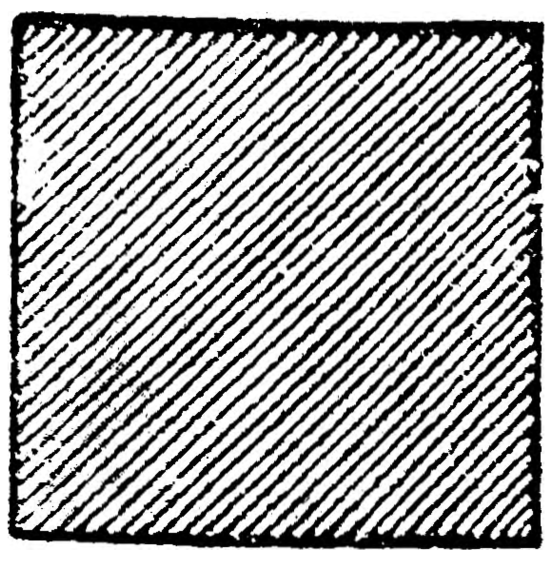


Рис. 49.
Грань куба.

Поставьте куб на чистый лист бумаги одной какой-либо гранью и обведите аккуратно карандашом контур ее. Кладите теперь поочередно все остальные грани на этот контур.

Или сделайте так: положив на любую грань тонкий картон, вырежьте из него кусок, равный этой грани, и накладывайте его поочередно на остальные грани.

В результате вы убедитесь, что все грани куба равны друг другу.

§ 39. У куба все ребра равны друг другу. Обведите на вашем кубе пальцем те прямые линии, по которым сходятся грани.

Эти прямые называются ребрами куба.

Сколько ребер имеет куб?

Сравнив при помощи нитки длину всех этих ребер, мы убедимся, что у куба все ребра одинаковой длины.

§ 40. Высота, ширина и длина куба. Укажите те точки, в которых сходятся ребра куба. Эти точки называются вершинами куба.

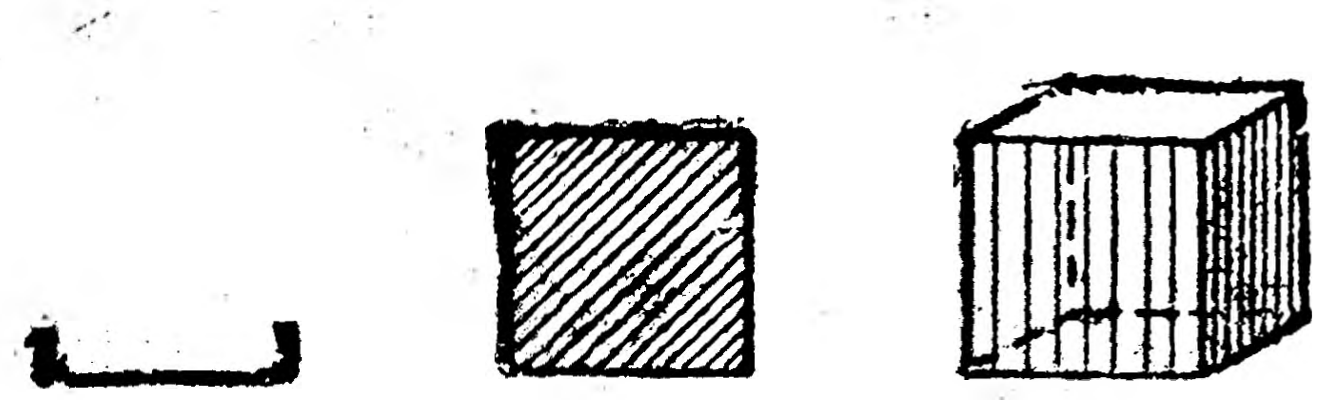
Сколько всех вершин имеет куб?

Сколько ребер сходятся у каждой вершины куба?

Из этих ребер одно называется высотою куба, другое шириною его, а третье длиною. Укажите на вашем кубе его высоту, ширину, длину. Будут ли они одинаковы по величине?

13. ИЗМЕРЕНИЕ ОБЪЕМА КУБА.

§ 41. Кубический сантиметр. Вырежьте из мыла куб, у которого каждое ребро равно одному сантиметру. Такой куб называется кубическим сантиметром (рис. 50).



Линейный сантиметр. Квадратный сантиметр. Кубический сантиметр.

Рис. 50.

§ 42. Измерение объема куба. Я дам вам кубическую коробку, сделанную из картона. Каждое ребро ее равно 3 сантиметрам.

Отрежьте одну из ее граней. Определите, сколько кубических сантиметров можно поместить внутри этого куба так, чтобы заполнить его. Если в каком-нибудь кубе поместится 8 куб. сантиметров, то говорят, что его вместимость или **объем** равен 8 куб. сантиметрам. Вообще если какое-нибудь тело можно разрезать на 5, 6 . . . 10 и т. д. кубических сантиметров, или если это тело можно заполнить 5, 6 . . . 10 и т. д. кубическими сантиметрами, то говорят, что его **объем** равен 5, 6 . . . и т. д. куб. сантиметрам.

Задача 1. Для того, чтобы узнать, скольким кубическим сантиметрам равен объем этой коробки, имеющей форму куба, можно поступить так: возьмите приготовленные вами кубические сантиметры и заполните ими весь объем вашего куба. Сосчитав число вложенных кубических сантиметров, вы и узнаете, скольким кубическим сантиметрам равен объем куба. Однако, такой способ измерения объемов очень неудобен. (Почему?)

Постараемся найти общее правило, пользуясь которым мы легко измерим объем любого куба. Для этого решим предварительно еще несколько задач.

Задача 2. Нарисуйте на бумаге квадрат со стороною в 3 сантиметра и разделите его на квадратные сантиметры (рис. 51). Поставьте на каждый квадратный сантиметр по одному кубическому сантиметру. Подсчитайте, чему равен объем полученной пластинки.

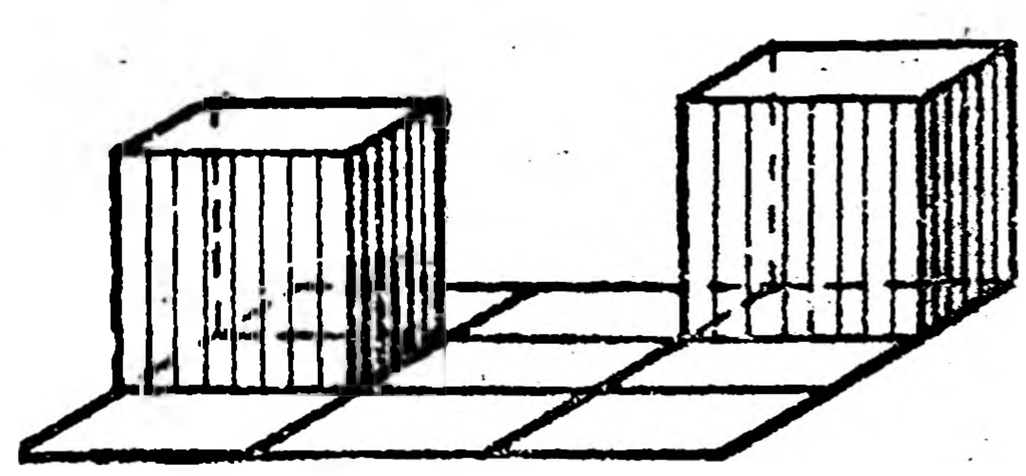


Рис. 51.

Так как наш квадрат состоит из 9 квадратных сантиметров, то объем пластинки будет содержать 9 кубических сантиметров.

Задача 3. Составьте из кубических сантиметров такой куб, чтобы каждое ребро его равнялось 3 сантиметрам.

Сосчитаем, из скольких кубических сантиметров составили вы этот куб.

Подсчет удобнее вести так:

Наш куб составлен из 3 пластинок, высотою в один сантиметр каждая. Основание каждой пластинки равно основанию нашего куба, т.-е. содержит $3 \times 3 = 9$ квадратных сантиметров. Из предыдущей задачи мы знаем, что такая пластинка состоит из 9 кубических сантиметров.

Так как куб состоит из 3 таких пластинок, то весь он содержит $9 \times 3 = 27$ кубических сантиметров.

Задача 4. Вырежьте из мыла куб с ребром в 3 сантиметра.

Разрежем этот куб на кубические сантиметры в таком порядке:

На четырех ребрах куба, служащих его высотою, отложите линейные сантиметры и соедините прямыми линиями соответствующие точки деления (рис. 52). Обхватив ниткой вдоль по этим линиям наш куб, разрежьте его на пластинки такого вида (рис. 53):

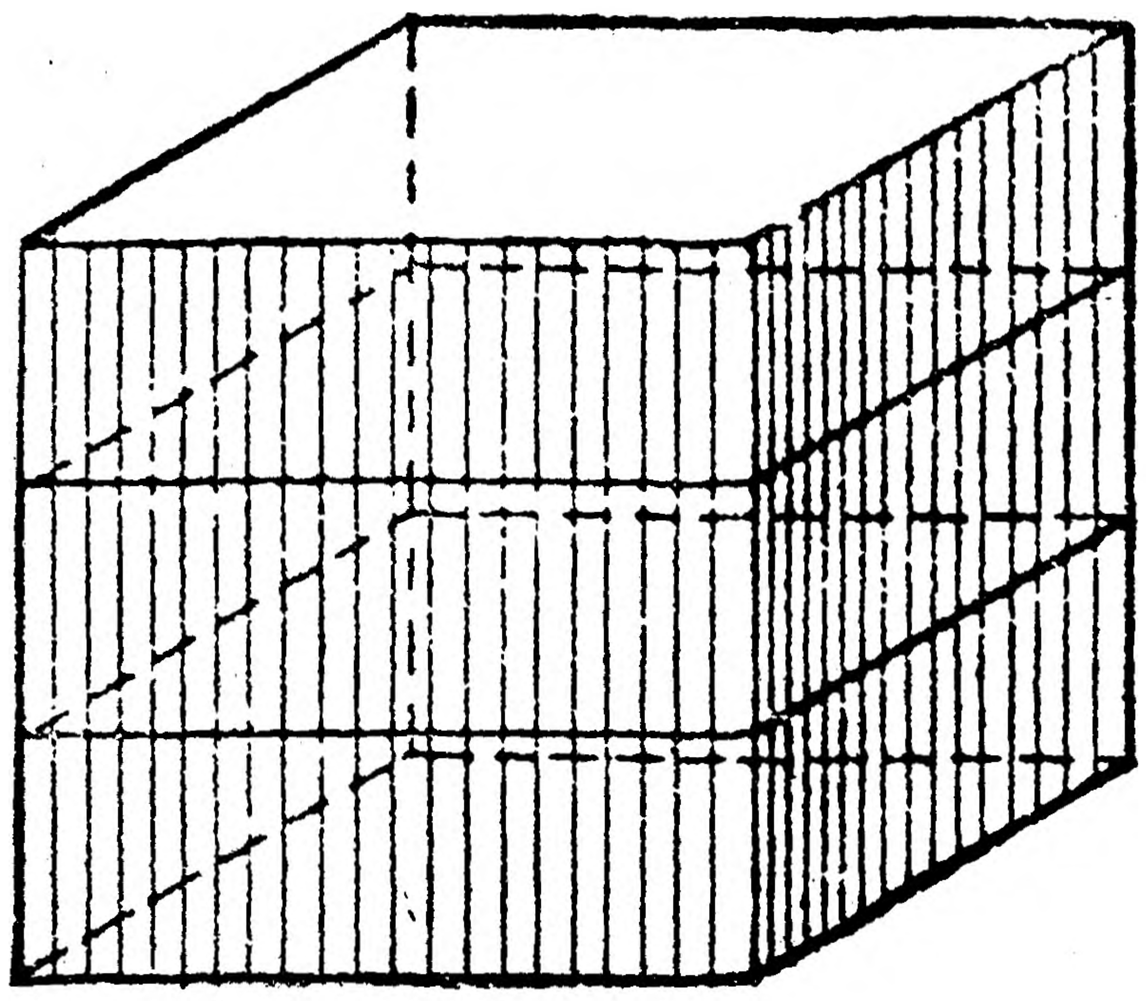


Рис. 52.

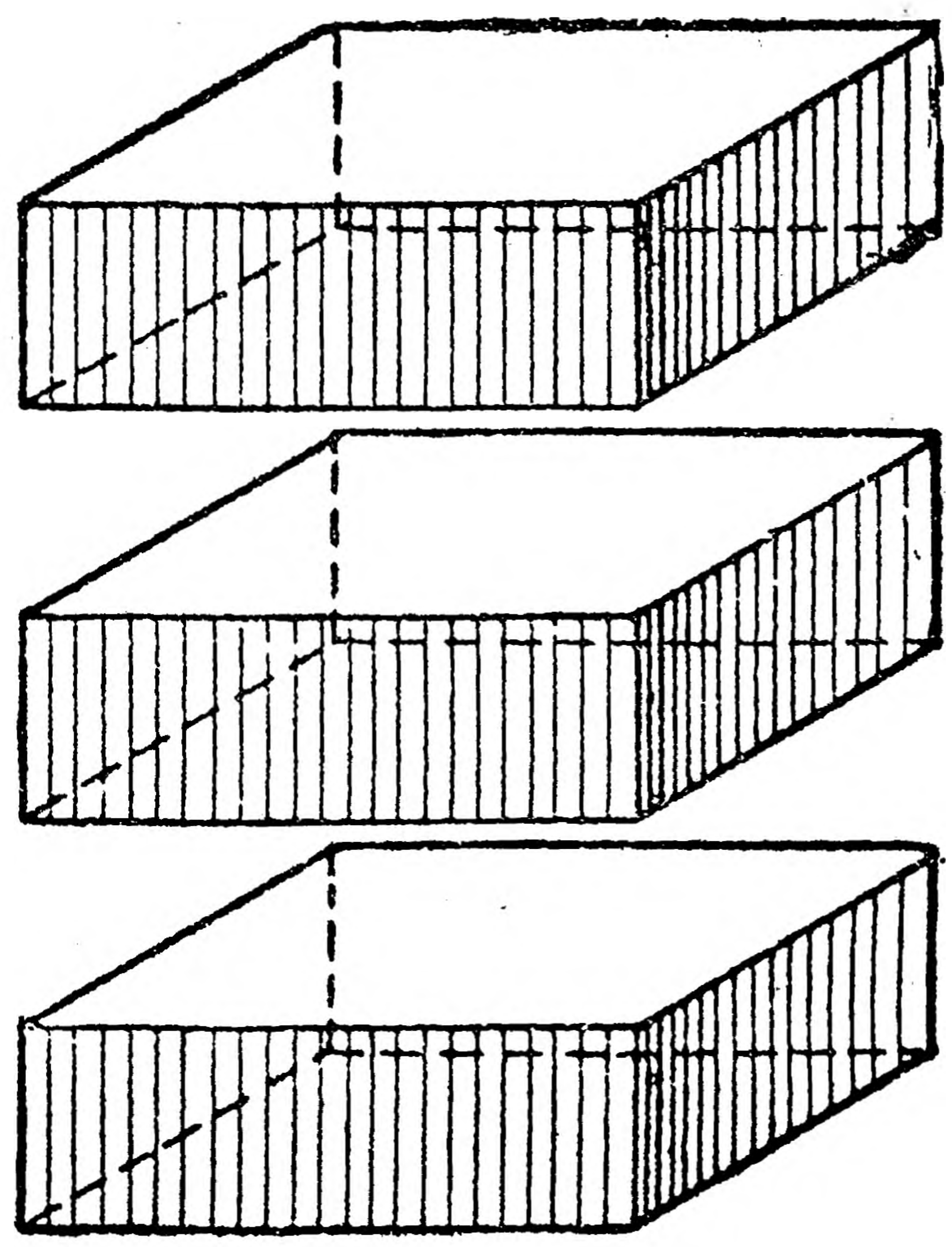


Рис. 53.

Каждая из этих пластинок будет иметь высоту в один сантиметр, а основание у нее будет равно основанию куба. Так как высота куба равна 3 сантиметрам, то мы получим из куба 3 таких пластинки.

Разрежем теперь одну из полученных пластинок на столбики с основанием в квадратный сантиметр и длиною в 3 сантиметра. Для этого, отложив вдоль по ребрам, служащим шириною пластинки, линейные сантиметры, соедините прямыми линиями соответствующие

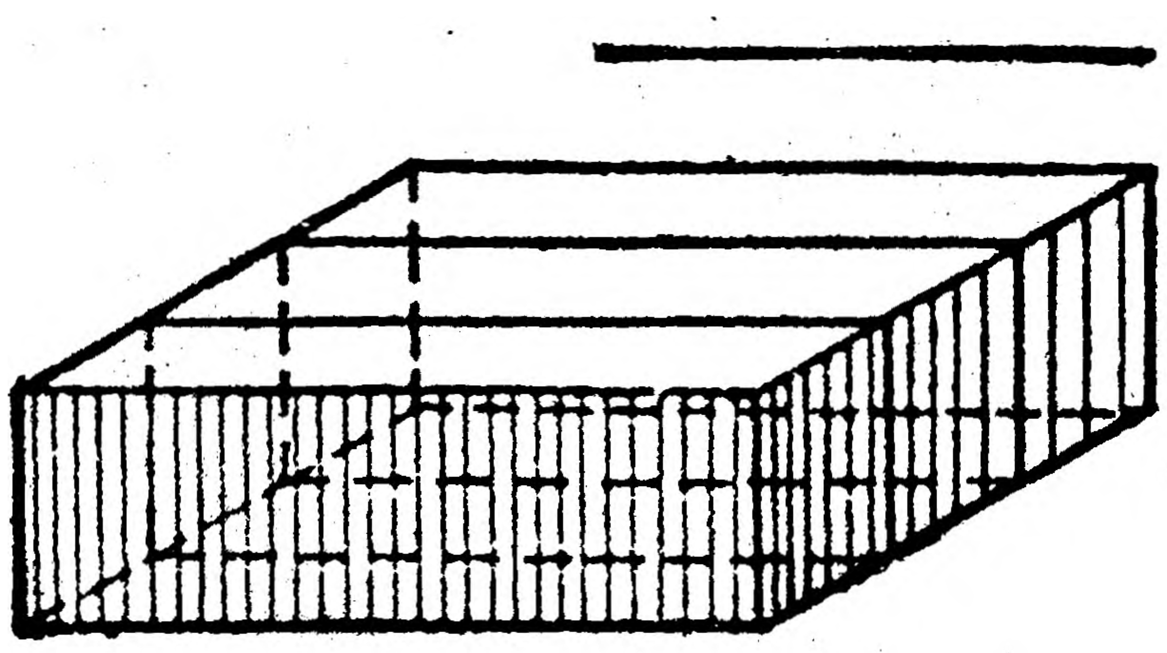


Рис. 54.

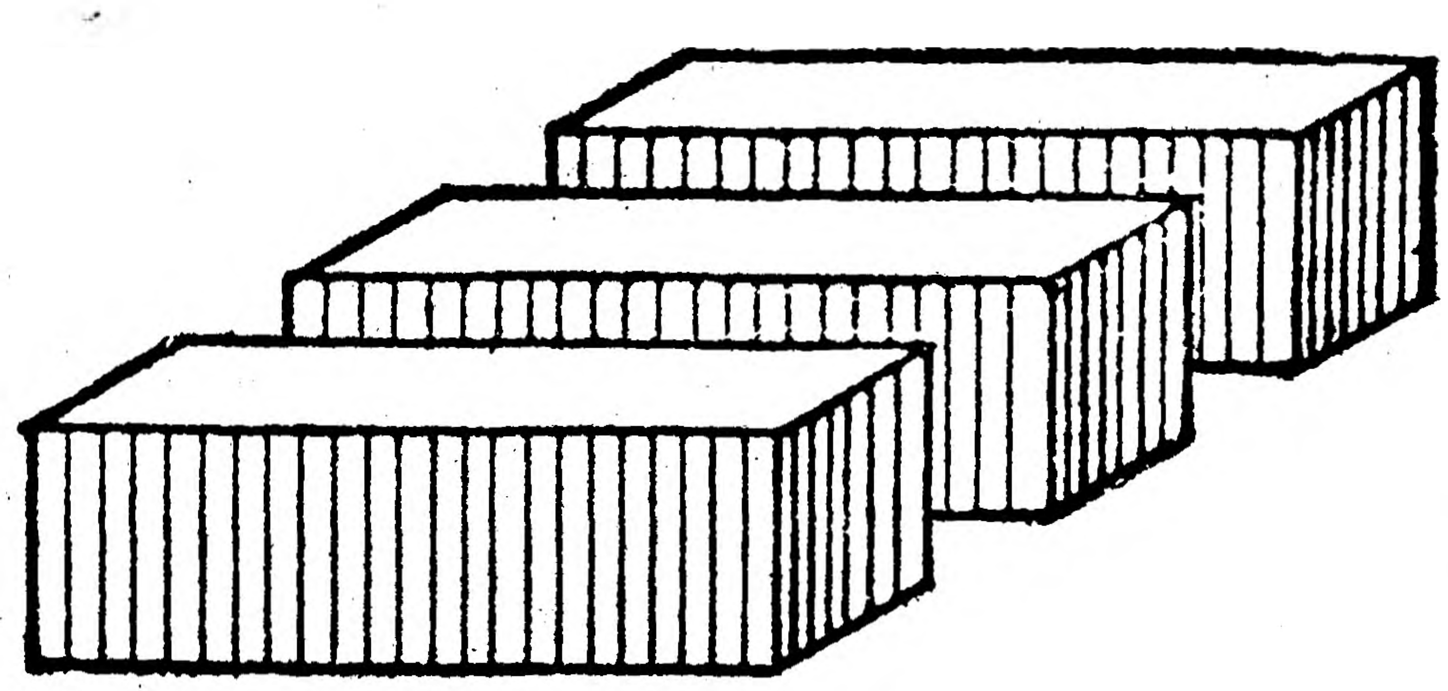


Рис. 55.

точки деления (рис. 54) и вдоль по проведенным линиям разрежьте пластинку на столбики (рис. 55). Так как ширина пластинки 3 сантиметра, то из каждой пластинки получится 3 таких столбика.

Остается теперь один из полученных столбиков разрезать на кубические сантиметры. Отложите линейные сантиметры на ребрах, соответствующих длине столбика (рис. 56). Соедините точки деления прямыми линиями и разрежьте столбик вдоль по этим прямым. Вы получите кубические сантиметры (рис. 57). Так как длина столбика 3 сантиметра, то из каждого столбика мы получим 3 куб. сантиметра.

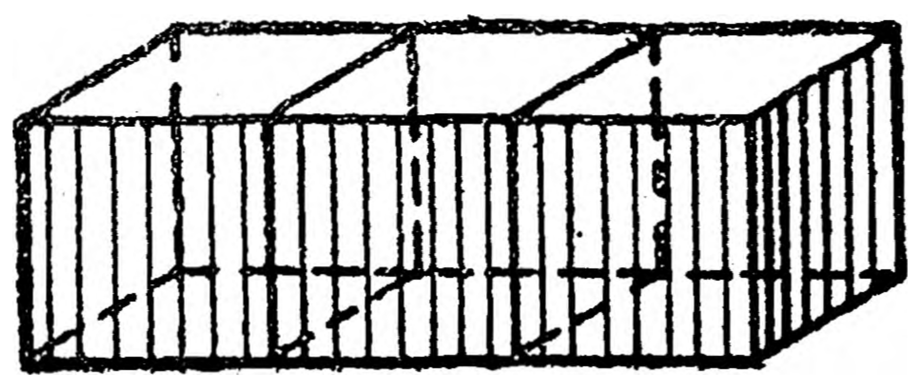


Рис. 56.

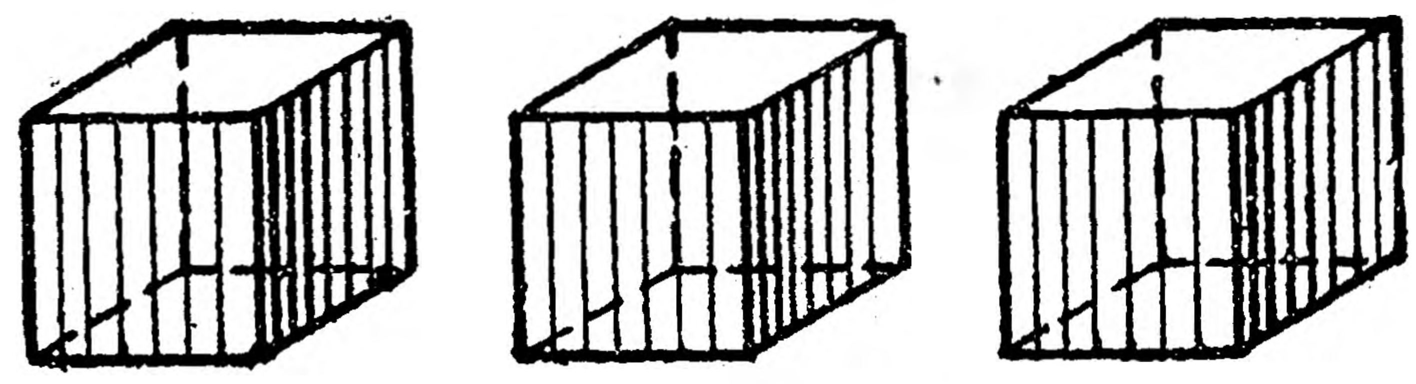


Рис. 57.

Остается теперь подсчитать, сколько кубических сантиметров получили бы вы, если бы весь ваш куб разрезали на кубические сантиметры. Из каждого столбика мы получили 3 кубических сантиметра, а в одной пластинке таких столбиков 3, следовательно, одна пластинка дала бы нам $3 \times 3 = 9$ кубических сантиметров. Но весь куб был разрезан на три таких пластинки, следовательно, наш куб имеет $9 \times 3 = 27$ кубических сантиметров.

Разрезав все пластинки на столбики и столбики на кубические сантиметры, проверьте, что их получится 27.

§ 43. Вывод правила. Теперь нетрудно вывести и общее правило для измерения объема любого куба. Остановимся на последней (§ 42) задаче.

Число кубических сантиметров, содержащихся в нашем кубе (27), мы получили, перемножив число кубических сантиметров, содержащихся в одном столбике (3), на число столбиков в одной пластинке (3) и, наконец, на число всех пластинок (3).

Но эти числа — не что иное, как числа, показывающие, сколько линейных сантиметров содержится в длине, ширине и высоте куба. У куба длина, ширина и высота — одинаковы, поэтому можно ограничиться измерением одного только ребра, а потом полученное число написать три раза *сомножителем* $(3 \times 3 \times 3)$ и вычислить это произведение.

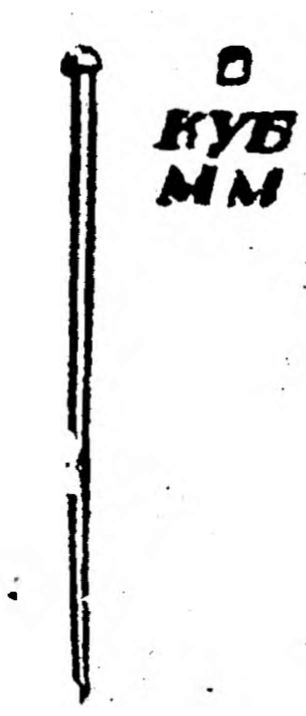


Рис. 58.

Итак, для измерения объема куба пользуются таким правилом:

Надо измерить в линейных единицах одно из ребер куба и полученное число повторить три раза сомножителем. Произведение покажет, сколько соот-

ветствующих кубических единиц будет иметь объем нашего куба.

§ 44. Кубический миллиметр. Попробуйте вырезать из мыла кубик, с ребром в один миллиметр. Вы получите очень маленький кубик, размерами почти в булавочную головку. Он называется кубическим миллиметром (рис. 58).

14. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА. ЕЕ ГРАНИ, РЕБРА И ВЕРШИНЫ.

§ 45. Приготовление прямоугольной призмы. У меня в руках кирпич. Он имеет форму тела, которое называется прямоугольной призмой.

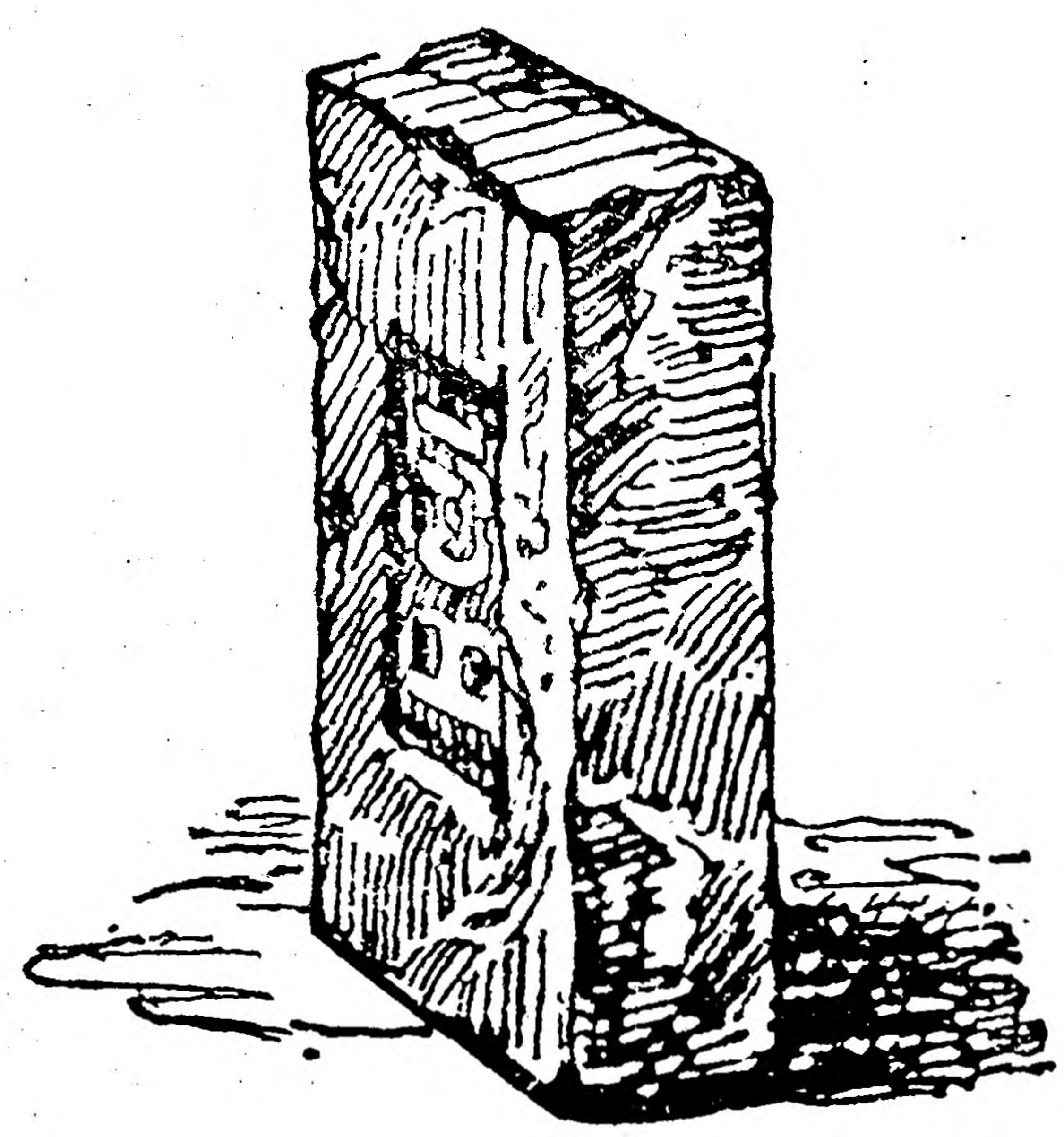


Рис. 59.
Кирпич имеет форму прямоугольной призмы.

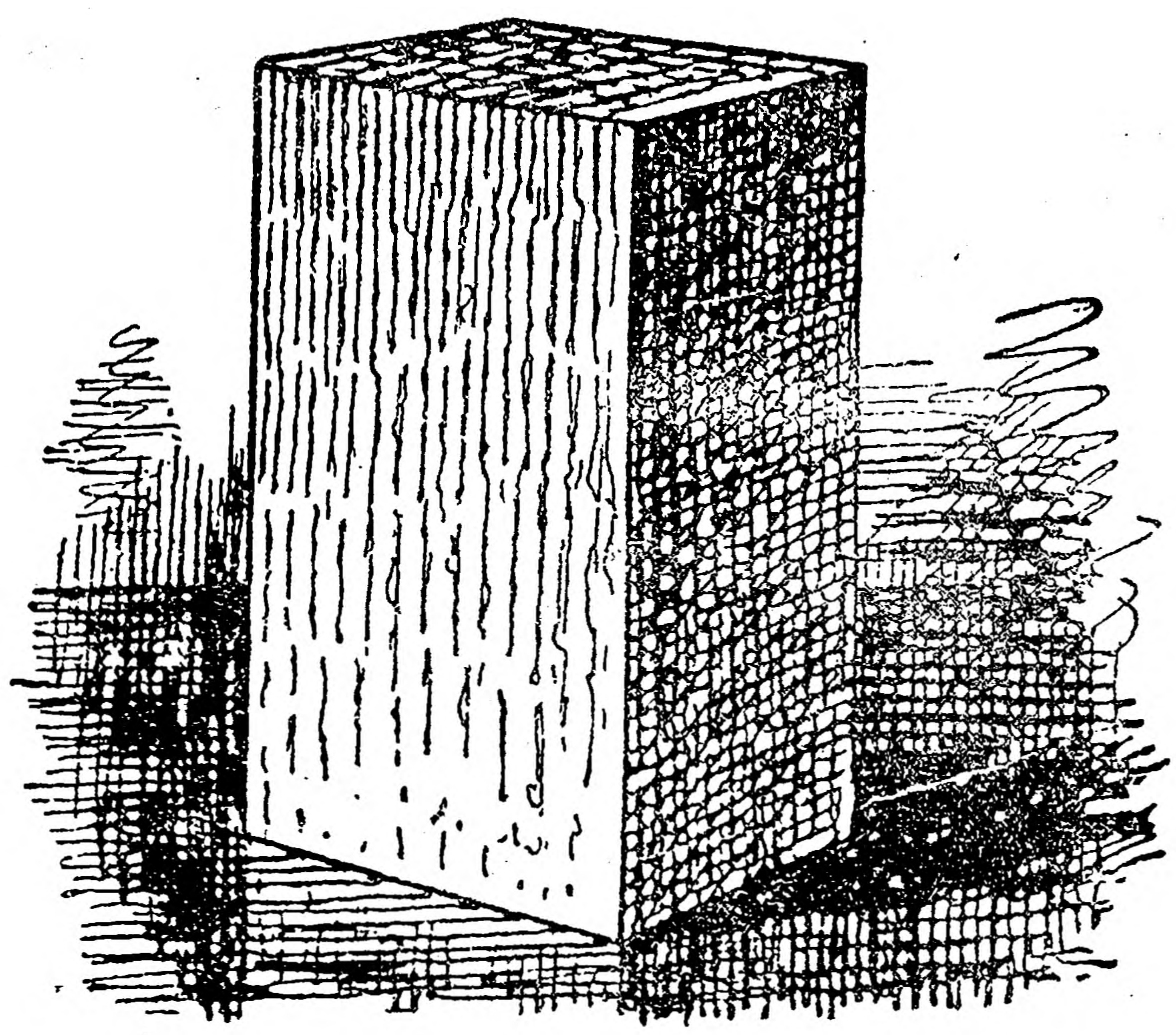


Рис. 60.
Прямоугольная призма.

Вылепите из воска или глины прямоугольную призму.

Назовите несколько предметов, имеющих форму прямоугольной призмы.

§ 46. Свойство граней прямоугольной призмы. Сколько всех граней у нашей призмы? Обведите ладонью руки верхнюю грань, нижнюю, боковые грани.

Наша призма имеет 4 боковых грани. Укажите их.

Остальные две грани называются основаниями призмы. Укажите нижнее основание призмы, верхнее основание ее.

Нарисуйте в тетради любую грань вашей призмы.

Будет ли полученная фигура квадратом? Почему? Как же называется эта фигура?

Итак, все грани нашей призмы—прямоугольники. Вот почему эта призма называется прямоугольной [1]).

Сравним теперь друг с другом величину всех граней призмы. Применяя один из способов, указанных в § 38, мы убедимся, что у всякой прямоугольной призмы две противоположные грани равны друг другу.

§ 47. Ребра и вершины прямоугольной призмы. Пользуясь чертежом 61, склейте прямоугольную призму. Укажите у нашей призмы все ее ребра.

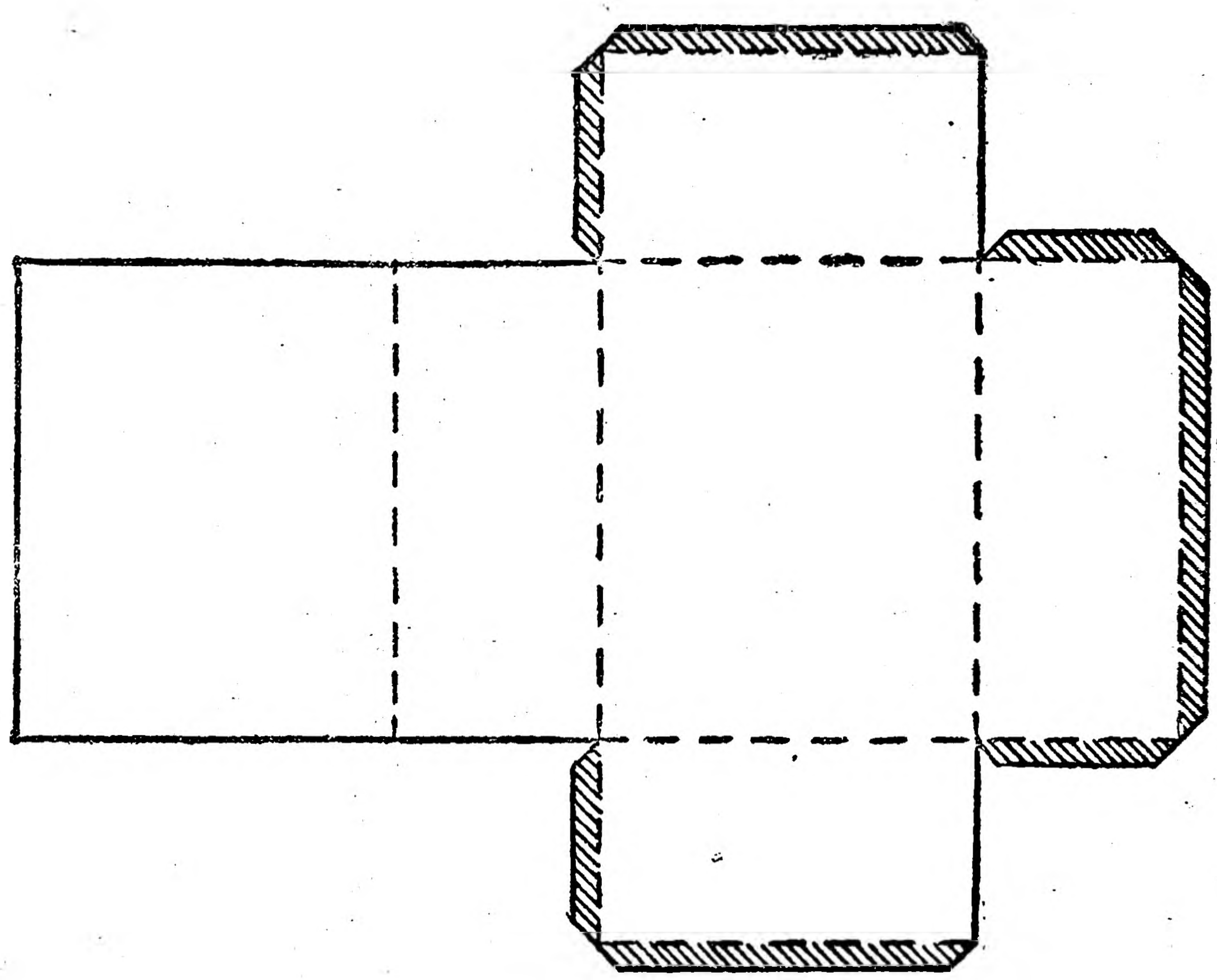


Рис. 61.
Выкройка прямоугольной призмы.

Сколько их? Поищите среди них ребра одинаковой длины.

Сравнивая длину всех ребер при помощи нитки, мы убедимся, что у прямоугольной призмы есть по 4 ребра одинаковой длины.

Те точки, в которых встречаются ребра призмы, называются вершинами призмы. Сколько всех вершин у призмы? Сколько ребер встречается в каждой вершине?

§ 48. Длина, ширина и высота прямоугольной призмы. Поставьте призму нижним основанием на стол. Укажите какую-нибудь вершину, лежащую на основании призмы. От этой вершины идут 3 ребра. Два из них лежат в основании призмы. Из них одно назы-

[1]) Призму эту называют еще прямоугольным параллелепипедом.

вается **длиной** призмы, а другое **шириной** ее. Третье ребро называется **высотою** призмы.

Укажите все те ребра, которые при одном и том же основании призмы могут быть ее высотой. Таких ребер у нашей призмы должно быть четыре.

Все они, конечно, должны быть одинаковой длины.

15. ИЗМЕРЕНИЕ ОБЪЕМА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ.

§ 49. Подготовительные задачи.

Задача 1. Отрежьте у склеенной вами из картона призмы верхнее основание.

Кладя внутрь ее кубические сантиметры, заполните ими всю призму. Сосчитайте, скольким кубическим сантиметрам равен объем этой призмы.

Задача 2. Составьте из кубических сантиметров прямоугольную призму высотою в 4 сантиметра, длиною в 3 сантиметра и шириною в 2 сантиметра.

Сосчитайте, из скольких кубических сантиметров составлен объем этой призмы.

§ 50. Вывод первого правила для измерения объема призмы. Для того, чтобы узнать, сколько кубических единиц содержится в объеме данной призмы, мы в предыдущих задачах непосредственно считали число тех кубических единиц, из которых состоит объем этой призмы. Но этот способ не всегда возможен, да и очень он длинен.

Выведем правило, при помощи которого легко измерить объем прямоугольной призмы.

Задача 3. Вырежьте из мыла прямоугольную призму, высотою в 4 сантиметра, длиною в 3 сантиметра и шириною в 2 сантиметра.

Разрежьте эту призму на такие пластинки, чтобы основание у них было равно основанию призмы, а высота равнялась одному сантиметру. (О том, как это сделать, рассказано в задаче 4-й § 42.) Так как высота нашей призмы равна 4 сантиметрам, то мы получим 4 таких пластинки (посмотрите рис. 53).

Возьмем теперь одну из полученных пластинок. Отложим вдоль по ширине ее линейные сантиметры и разрежем пластинку на такие столбики, чтобы основание их равнялось одному квадратному сантиметру, а длина их была равна длине пластинки.

Так как ширина призмы имеет 2 сантиметра, то из каждой пластинки мы получим 2 таких столбика (посмотрите рис. 54).

Остается теперь один из этих столбиков разрезать на кубические сантиметры. Отложим по длине столбика линейные сантиметры. Так как длина призмы равна 3 сантиметрам, то из каждого столбика мы получим 3 кубических сантиметра.

Подсчитаем теперь, сколько кубических сантиметров получили бы мы, если бы всю призму разрезали на кубические сантиметры.

Из одного столбика мы получили 3 кубических сантиметра. Каждая пластинка состояла из 2 столбиков, следовательно, из одной пластинки мы получили 3×2 кубических сантиметра. Но в призме всех пластинок было 4, следовательно, из всей призмы мы получим $3 \times 2 \times 4 = 24$ кубических сантиметра.

Разрежьте все пластинки и все столбики на кубические сантиметры и проверьте, что призма содержит $3 \times 2 \times 4 = 24$ кубических сантиметра.

Правило. Мы получили число кубических сантиметров, содержащихся в объеме призмы (24), перемножив числа, выражающие высоту (4), длину (3) и ширину (2), измеренные одной и той же линейной единицей (у нас линейным сантиметром). Итак, для измерения объема призмы получается такое правило:

Чтобы измерить объем призмы, надо измерить высоту, длину и ширину ее линейными единицами (например, линейными сантиметрами) и полученные числа перемножить. Результат покажет, скольким кубическим единицам равен объем этой призмы.

§ 51. Вывод второго правила для измерения объема прямоугольной призмы. Рассмотрим еще одно правило, при помощи которого часто измеряют объем прямоугольной призмы.

Составим из кубических сантиметров призму, площадь основания которой должна иметь 12 квадратных сантиметров, а высота 4 сантиметра.

Основанием нашей призмы может служить прямоугольник со сторонами в 4 сантиметра и 3 сантиметра. Нарисуем на бумаге этот прямоугольник и разделим его карандашом (пользуясь разграфленной бумагой) на квадратные сантиметры.

Составим теперь из наших кубических сантиметров вертикальные столбики высотою в 4 сантиметра. Каждый такой столбик будет составлен из 4 кубических сантиметров (рис. 62).

Поставив на каждый квадратный сантиметр основания по такому столбику, мы и получим искомую призму.

Подсчитаем теперь, сколько кубических сантиметров содержит объем этой призмы. Каждый столбик состоит из 4 кубических сантиметров. Так как основание призмы содержит 12 квадратных сантиметров, то на этом основании мы поставили 12 столбиков, то-есть 4×12 кубических сантиметров. Следовательно, объем призмы равен $4 \times 12 = 48$ кубическим сантиметрам.

Рис. 62.

Правило. Итак, чтобы измерить объем прямоугольной призмы в кубических единицах, надо измерить высоту в линейных единицах и площадь основания в соответствующих квадратных единицах. Перемножив эти числа, мы узнаем, сколько кубических единиц содержится в объеме нашей призмы.

ГЛАВА V.

ПЕРВОНАЧАЛЬНОЕ ЗНАКОМСТВО С ОСНОВНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ТЕЛАМИ.

16. ПРИЗМА.

§ 52. Грани призмы. На рисунке 63 вы видите несколько коробок. Давайте рассмотрим их: быть может, нам удастся найти между ними какое-либо сходство.

Обведите ладонью руки поверхность всех этих коробок. Все эти поверхности состоят из нескольких пересекающихся друг с другом плоскостей (укажите их). Эти плоскости называются гранями.

Если хотите убедиться в том, что грани наших коробок — плоские, то возьмите лист плоского картона и положите его на любую грань так, чтобы контур этой грани лежал на картоне. Тогда вы увидите, что вся грань всеми своими точками будет лежать на нашем плоском картоне, то-есть будет плоской.

Те грани, которые ограничивают тело с боков, называются боковыми гранями, остальные две называются основаниями.

§ 53. **Основания призм параллельны друг другу.** Форма левой коробки (рис. 63) нам уже знакома. Эта — прямоугольная призма. Укажите оба основания этой призмы. Обведите ладонью руки верхнее и нижнее основание ее.

Оба основания нашей призмы друг с другом не пересекаются.

Посмотрим теперь, не встретятся ли друг с другом плоскости этих оснований, если мы их будем неограниченно удлинять.

Возьмите два больших листа картона. На один из них поставьте нашу прямоугольную призму, а другой лист положите на верхнее основание ее. Плоскости этих картонов, являясь «продолжением» плоскостей оснований, попрежнему не будут пересекаться друг с другом. И как бы вы ни увеличивали размеры этих картонных плоскостей, они никогда друг с другом не пересекутся.

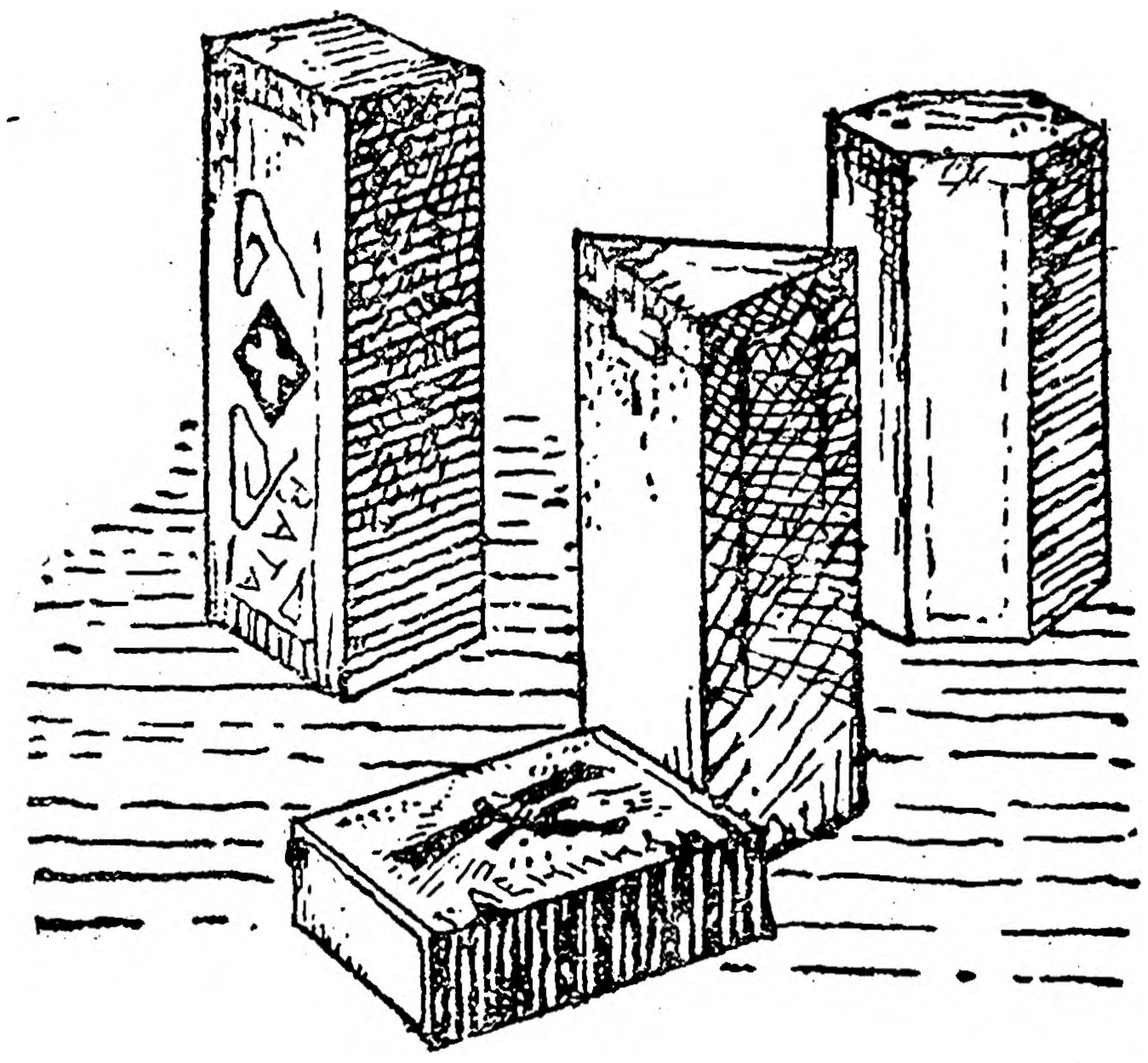


Рис. 63.
Призмы.

Такие плоскости, которые, как бы далеко мы их ни продолжали, никогда одна с другой не встретятся, называются параллельными плоскостями.

Итак, основания у нашей первой призмы параллельны друг другу.

Посмотрите теперь на остальные три коробки. Применяя указанный только что способ, вам нетрудно будет убедиться, что каждая из них имеет по два параллельных друг другу основания.

§ 54. **Основания призм равны друг другу.** Мы уже сравнивали (§ 46) величину тех прямоугольников, которые служат основаниями прямоугольной призмы (рис. 63). Оказалось, что эти основания равны друг другу.

Сравним теперь величину оснований второй коробки (рис. 63). Поставив эту коробку нижним основанием на лист белой бумаги, обведите карандашом контур его. Какая фигура получилась у вас? Кладя на нарисованный треугольник верхнее основание, мы убедимся, что и у этой коробки оба основания равны друг другу.

Нарисуем теперь на бумаге фигуру, служащую нижним основанием третьей коробки (рис. 63). Сосчитайте, сколько углов имеет эта фигура. Укажите их. Эта фигура называется шестиугольником.

*

Кладя на этот шестиугольник верхнее основание нашей коробки, мы увидим, что и у этого тела оба основания равны друг другу.

Итак, у всех этих тел оба основания равны друг другу.

§ 55. Боковые ребра призмы равны друг другу. Каждые две боковые грани наших коробок, пересекаясь друг с другом, дают в пересечении прямые линии. Эти прямые называются *ребрами* тела.

Обведите пальцем те ребра, которые образовались пересечением двух боковых граней. Они называются *боковыми ребрами*.

Укажите все боковые ребра первой коробки. Сколько их?

Через любую пару боковых ребер можно провести плоскость (укажите их).

Посмотрите теперь, пересекаются ли друг с другом боковые ребра призмы. А может быть они пересекутся, если мы удлиним их? Не трудно убедиться в том, что как бы мы ни удлиняли боковые ребра нашей призмы, они никогда не встретятся друг с другом (рис. 64).

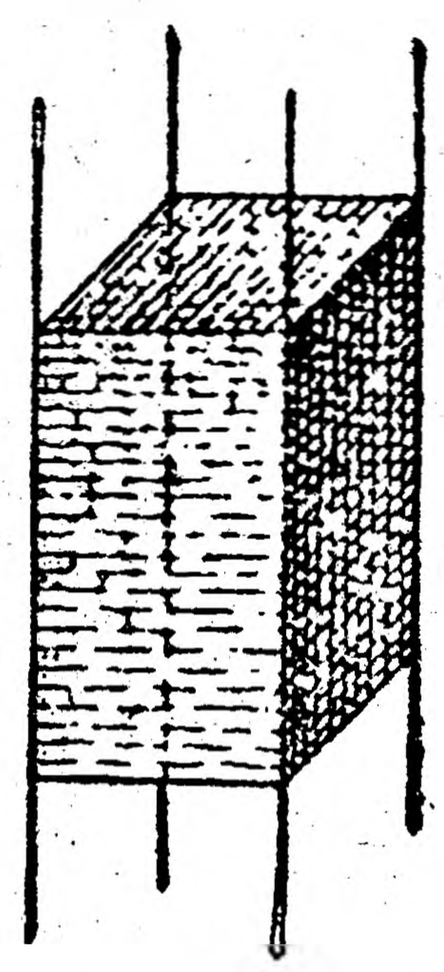


Рис. 64.

Итак, наши боковые ребра обладают следующими свойствами:

Во-первых, через каждую пару этих прямых можно провести плоскость и, во-вторых, эти прямые, как бы мы их ни удлиняли, никогда одна с другой не пересекутся.

Такие прямые называются *параллельными* прямыми.

Следовательно, все боковые ребра нашей призмы параллельны друг другу.

Исследуя боковые ребра во всех остальных наших коробках, мы найдем, что и у этих тел боковые ребра параллельны.

§ 56. Боковые ребра призмы равны друг другу. Еще раз сравните при помощи нитки длину всех боковых ребер первой коробки. Все эти боковые ребра одинаковой длины.

Сравнивая тем же способом длину боковых ребер у остальных коробок, вы увидите, что у каждого из этих тел *все боковые ребра одинаковой длины*.

§ 57. Что такое призма. Итак, все поставленные перед вами коробки (рис. 63) имеют следующее сходство:

Во-первых, *все они имеют два равных по величине и параллельных друг другу основания*, и, во-вторых, *все* боковые ребра у них одинаковой длины и параллельны друг другу.

Тела, обладающие такими свойствами, называются **призмами**.

Следовательно, все наши коробки имеют форму призмы.

§ 58. Различные виды призм. Чем же отличаются эти призмы одна от другой?

Обведите ладонью руки боковые грани первой призмы (рис. 63). Сосчитайте их. Так как эта призма имеет четыре боковых грани, то ее называют **четырехгранной**.

Вторая призма (рис. 63) имеет три боковых грани. Вот почему ее называют **трехгранной**.

А как назвать третью призму (рис. 63)?

§ 59. Вершины призм. Найдите на одной из наших призм две какие-нибудь пересекающиеся прямые линии (ребра).

Укажите пальцем **точку**, в которой эти прямые пересеклись. Эта точка называется **вершиной** призмы.

17. ПИРАМИДА.

§ 60. Грани пирамид. Рассмотрим теперь новую группу тел (рис. 65, 66 и 67).

Эти тела тоже ограничены со всех сторон плоскостями, которые называются **гранями**, но по своей форме тела эти значительно отличаются от только что изученных нами призм.

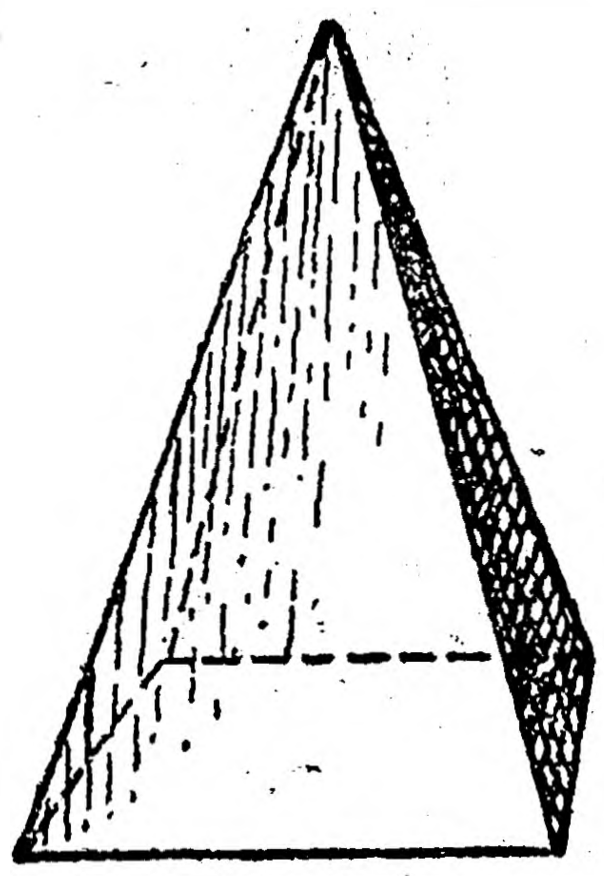


Рис. 65.
Четырехгранная пирамида.

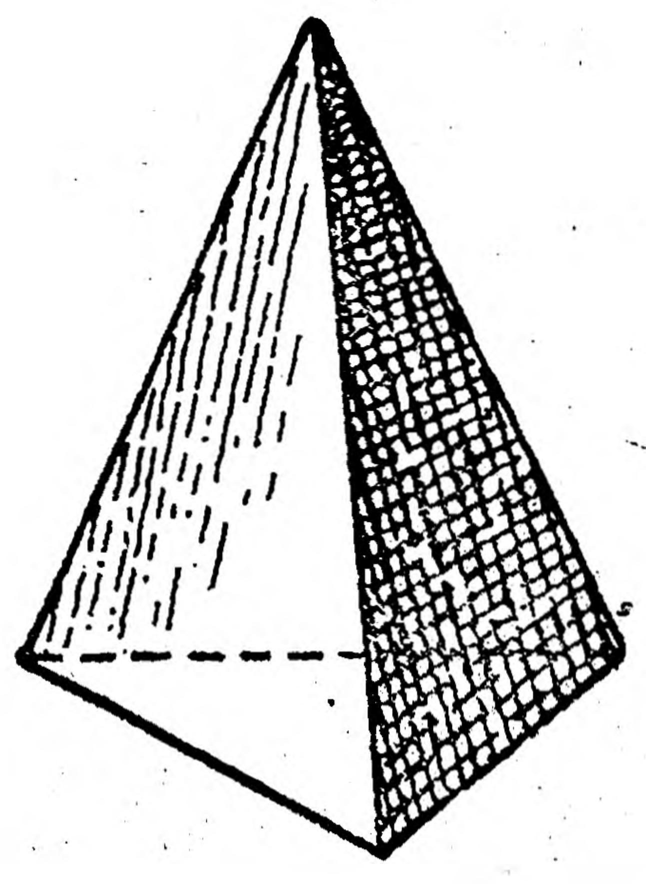


Рис. 66.
Трехгранная пирамида.

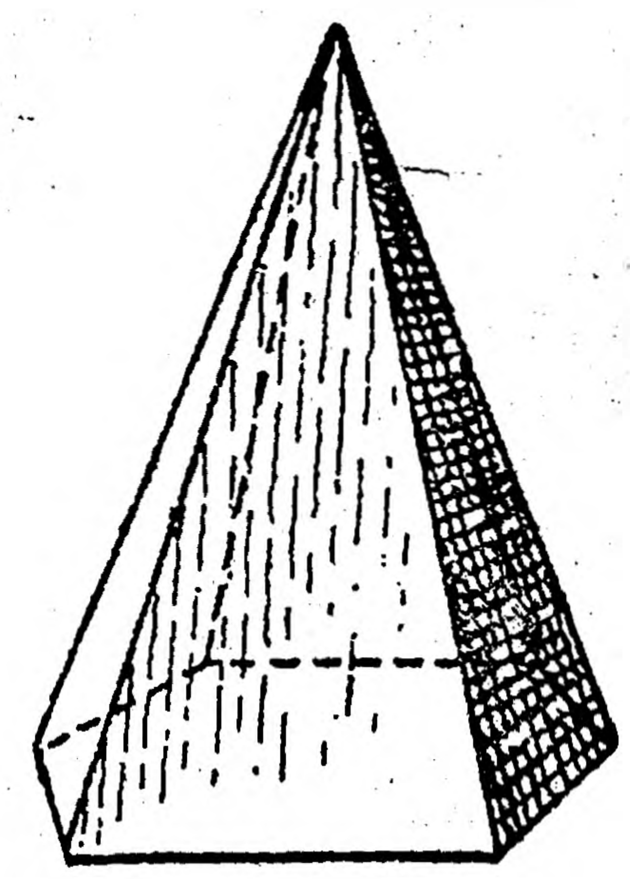


Рис. 67.
Шестигранная пирамида.

В самом деле. Каждое из этих тел имеет только **одно основание**. Укажите его. Такое тело называется **пирамидой**. Нарисуйте в тетради фигуру, служащую основанием первой пирамиды. Что это за фигура?

Нарисуйте в тетради основания второй и третьей пирамид. Что это за фигуры?

§ 61. Различные виды пирамид. Обведите рукою боковые грани первой пирамиды. Сколько их? Так как эта пирамида имеет четыре боковых грани, то она называется четырехгранной.

Вторая пирамида имеет три боковых грани, поэтому она называется трехгранной. Как назвать третью пирамиду?

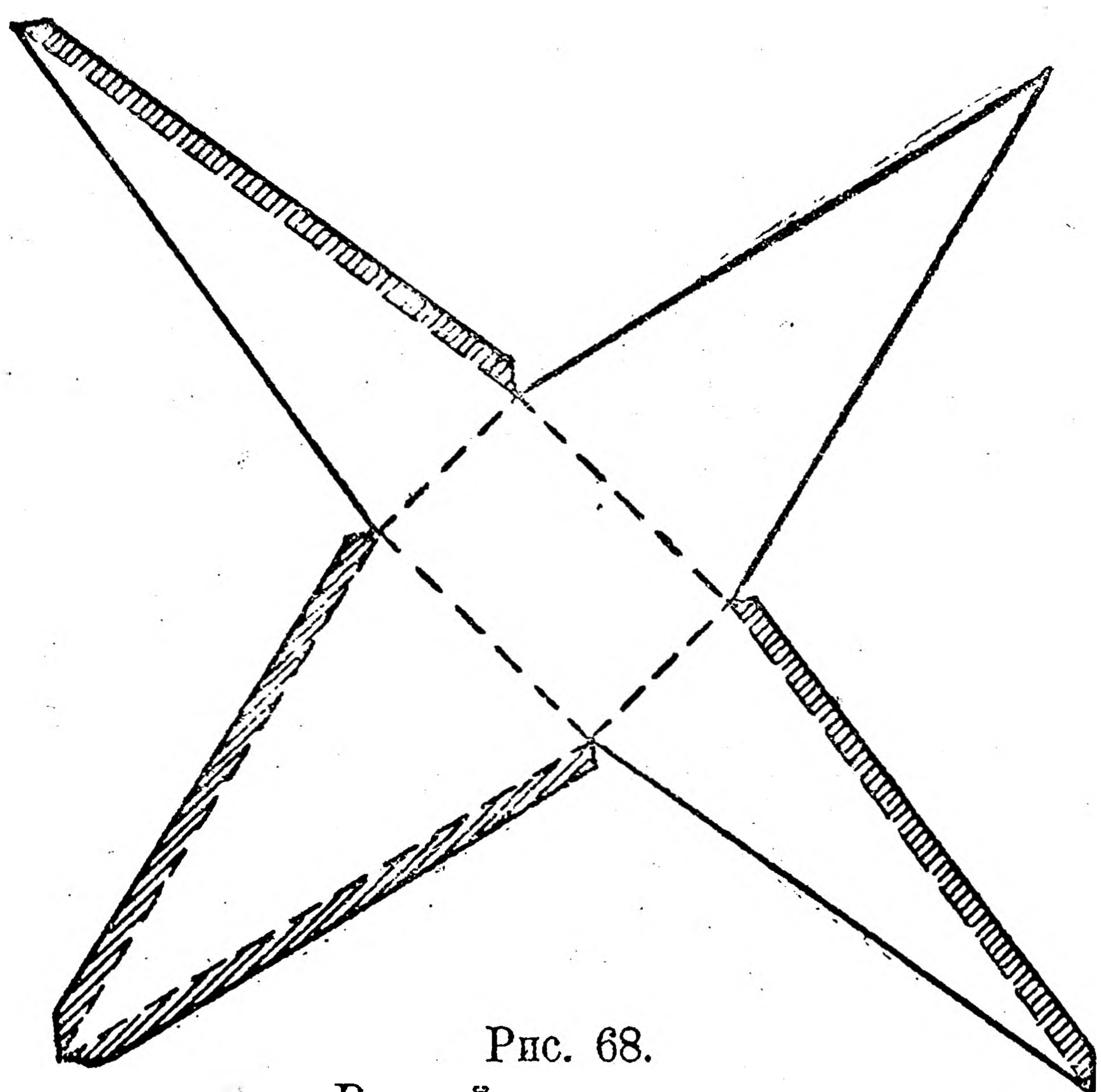


Рис. 68.
Выкройка пирамиды.

Нарисуйте выкройку, как показано на рис. 68, склейте из нее тело. Как это тело будет называться?

§ 62. Ребра пирамиды. Каждые две грани пирамиды пересекаются по прямым линиям, которые называются ребрами пирамиды.

Укажите те ребра, которые образовались пересечением плоскости основания с боковыми гранями.

Укажите те ребра, которые образовались от пересечения друг с другом боковых граней. Эти ребра называются боковыми ребрами.

Мы знаем, что боковые ребра призмы друг другу параллельны. А посмотрите на боковые ребра пирамиды: параллельны ли они? Конечно, нет.

§ 63. Вершины пирамид. Все боковые ребра пирамиды пересекаются в одной точке, которая называется вершиной пирамиды. Укажите вершины на наших пирамидах.

18. ШАР.

§ 64. Поверхность шара. Вы, конечно, все знаете, что нарисованный здесь мяч имеет форму шара (рис. 69).

Выучитесь лепить шар из глины или воска.

Обведите ладонью руки поверхность шара.

Узнаем, будет ли эта поверхность плоской.

Прикладывая к поверхности шара лист плоского картона[1]) в самых разнообразных направлениях, вы заметите, что наша плоскость (картон) имеет с поверхностью шара только одну общую точку (рис. 69). Такую поверхность мы не можем назвать плоской. (Вспомните § 7.)

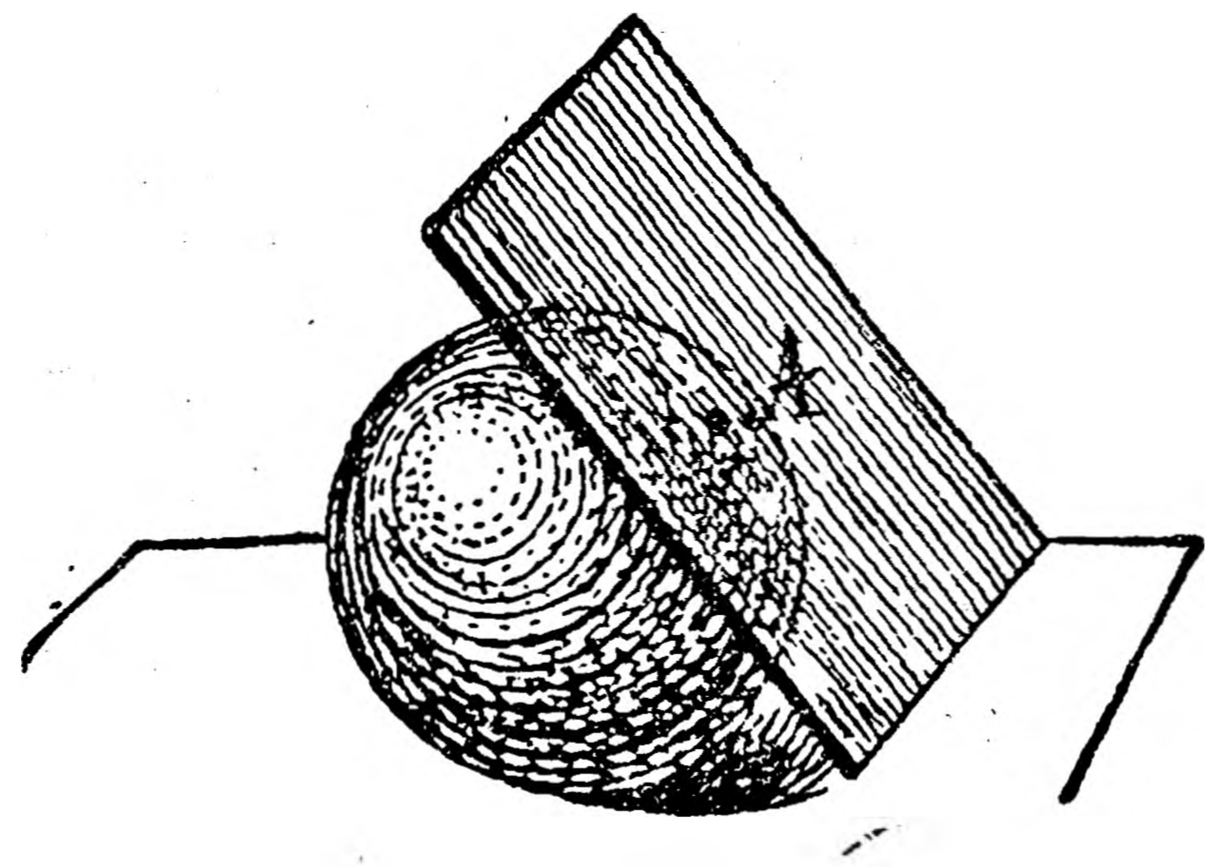


Рис. 69.
Шар и касательная к нему плоскость.

Поверхность шара относится к разряду кривых поверхностей.

§ 65. Полушарие. Сделайте из воска или глины шар.

Обхватив поверхность шара ниткой, постарайтесь разрезать этот шар на две равные части. Если это удастся, то полученные части называются полушариями (рис. 70).

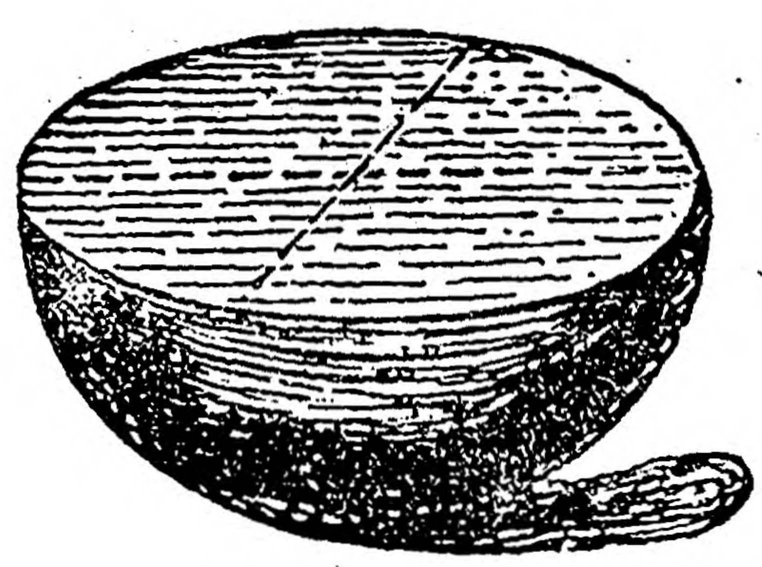


Рис. 70.
Полушарие

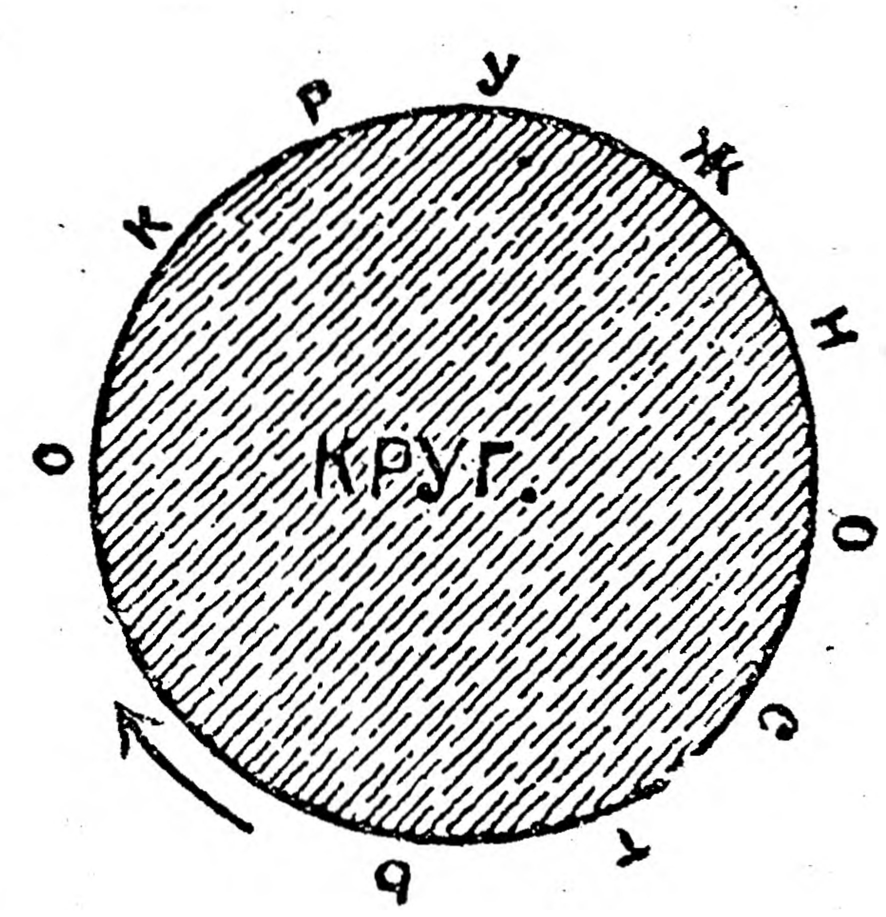


Рис. 71.
Круг.

§ 66. Круг. Наше полушарие ограничено с одной стороны кривой поверхностью (укажите ее), а с другой — плоской. Обведите ладонью руки эту плоскую поверхность, по которой вы разрезывали ваш шар. Она называется кругом (рис. 71). Вырежьте из бумаги кружок, равный кругу нашего полушария.

---

[1]) Еще лучше брать вместо картона кусок стекла.

Сделайте несколько одинаковых шаров из воска и разрежьте каждый из них по какой-либо совершенно произвольной плоскости. При пересечении шара плоскостью у вас всегда будут получаться круги (рис. 72).

Вырежьте из бумаги кружки, равные тем кругам, которые получили вы, пересекая шар плоскостями.

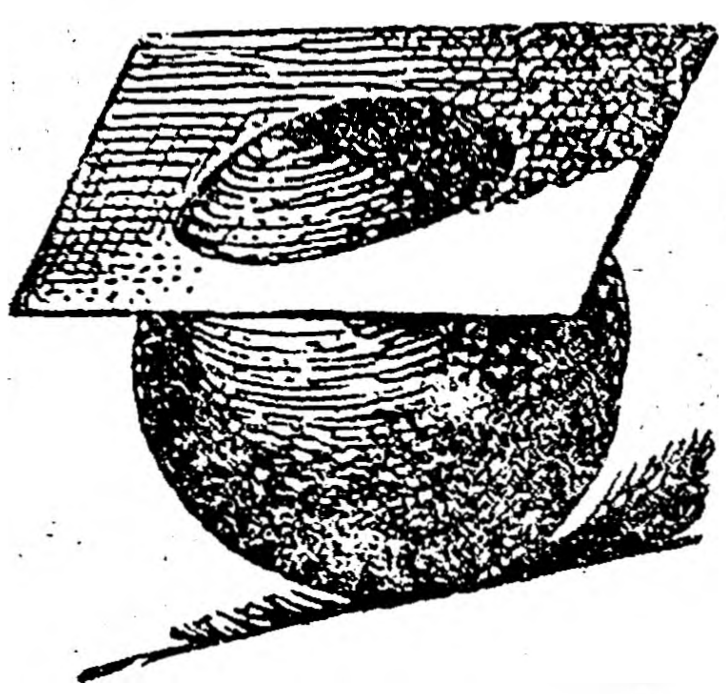


Рис. 72.
При пересечении шара плоскостью получается всегда круг.

Сравнивая друг с другом величину этих кружков, вы заметите, что самым большим кругом окажется тот, который рассекал наш шар на два полушария (рис. 70). Этот круг называется большим кругом шара.

§ 67. Окружность. Обведите теперь пальцем линию, которая служит границей круга. Эта замкнутая линия называется окружностью (рис. 71).

Не смешивайте круга с окружностью: круг это часть плоскости, а окружность — это линия, ограничивающая круг.

Изучим некоторые свойства этой линии.

Привяжите к одному концу нитки карандаш, а другой конец ее укрепите при помощи булавки на середине чистого листа бумаги. Обводите карандашом вокруг булавки, держа нить все время натянутой (рис. 73), до тех пор, пока карандаш не вернется на прежнее место. Та замкнутая линия, которую нарисовал карандаш, и будет окружностью.

Для рисования окружности часто пользуются прибором, который называется циркулем (рис. 74).

Держа циркуль рукою за верхнюю часть, прижимайте к бумаге ножку с острием, а ножку с карандашом свободно двигайте; тогда карандаш начертит замкнутую линию — окружность.

§ 68. Центр окружности. Та точка, в которой стояла булавка (рис. 73) или острие циркуля, называется центром окружности.

Посмотрите на рисунок и скажите, почему центр любой окружности должен находиться на одинаковом расстоянии от всех точек окружности.

Вырежьте из бумаги круг, равный одному из кругов, полученных нами на шаре, обведите пальцем руки окружность этого круга.

Найдите центр этой окружности (его можно еще назвать центром круга). Для этого согните кружок по прямой линии сначала пополам, а затем вчетверо. Точка пересечения тех прямых, по которым вы сгибали круг, и будет центром этого круга. (В дальнейшем курсе мы познакомимся с более легкими способами нахождения центра круга или окружности).

§ 69. **Центр шара.** Найдем теперь центр большого круга нашего шара. Для этого надо, вырезав из бумаги кружок, равный большому кругу шара, найти центр его по способу, указанному в предыдущем параграфе. Остается, наложив этот кружок на круг полушария, отметить на этом полушарии центр его большого круга.

Прокалывая наше полушарие в разных направлениях вязальной спицей так, чтобы она проходила через центр большого круга, измеряйте длину спицы от центра до поверхности шара. Окажется, что эта длина во всех направлениях будет одинаковой. Поэтому центр большого круга будет вместе с тем и центром шара.

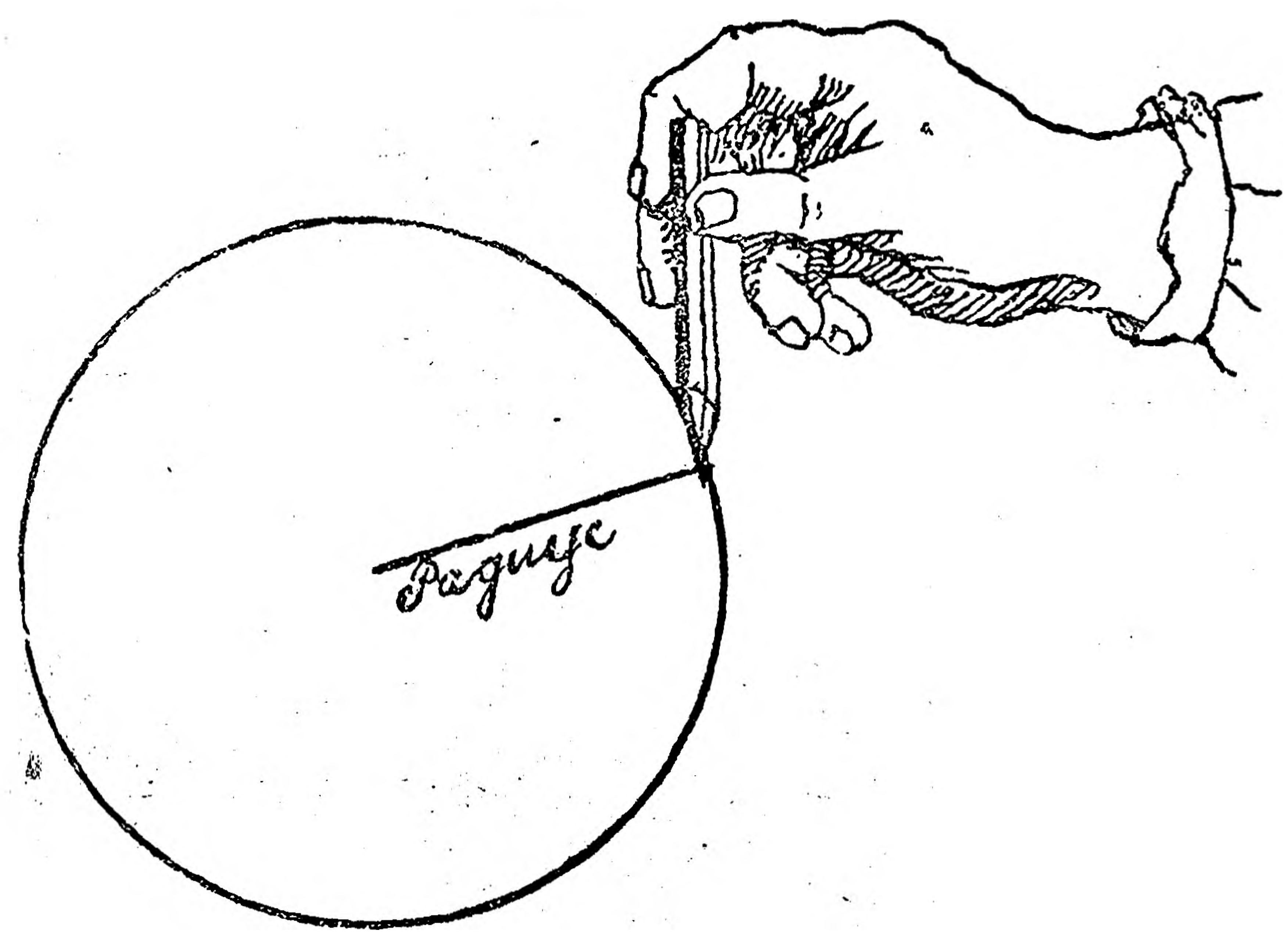


Рис. 73.

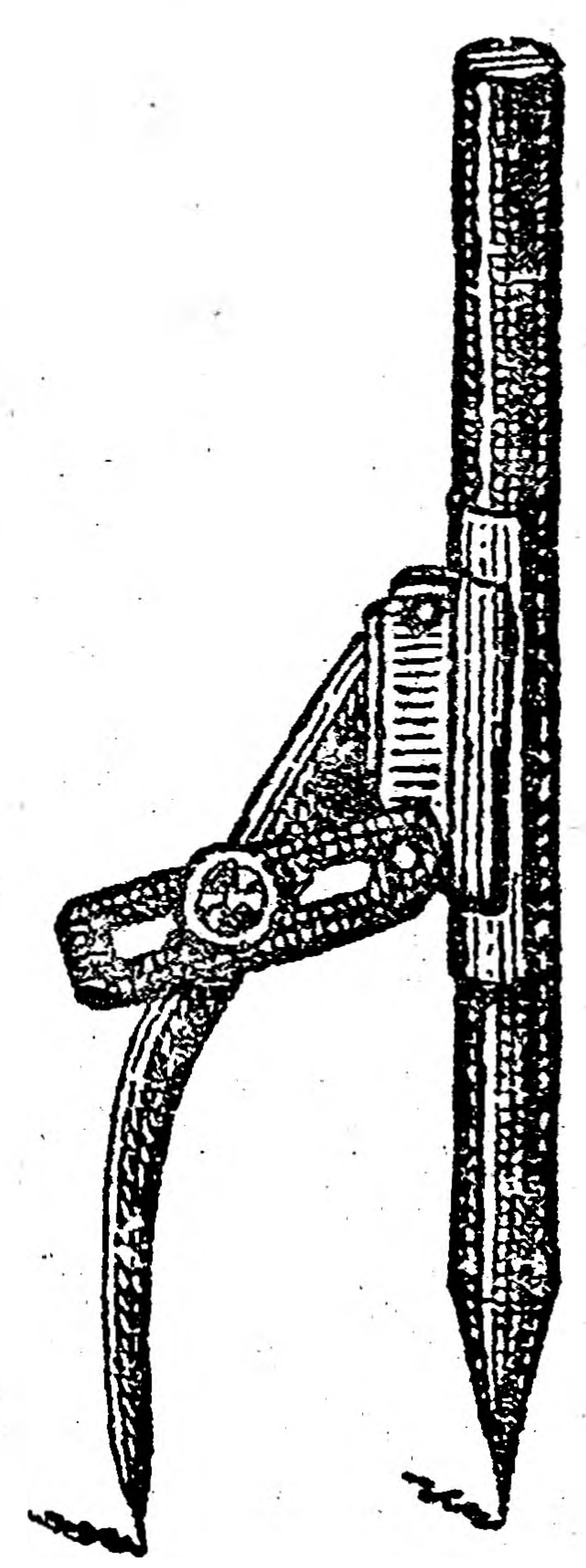


Рис. 74.
Циркуль.

Ц е н т р ш а р а н а х о д и т с я н а о д и н а к о в о м р а с с т о я н и и о т в с е х т о ч е к, л е ж а щ и х н а п о в е р х н о с т и ш а р а.

§ 70. **Радиус окружности.** Нарисуйте циркулем окружность. Отметьте на ней несколько точек и соедините их прямыми линиями с центром окружности.

Все эти прямые должны оказаться одинаковой длины (§ 68). Эти прямые называются р а д и у с о м о к р у ж н о с т и (рис. 73).

§ 71. **Радиус шара.** Отметьте на шаровой поверхности несколько точек. Эти точки одинаково удалены от центра шара (§ 69). Следовательно, прямые, соединяющие эти точки с центром шара, будут одинаковой длины. Эти прямые называются р а д и у с а м и ш а р а.

§ 72. Диаметр окружности. Нарисуйте окружность. Проведите теперь такую прямую, чтобы она проходила через центр и чтобы концы этой прямой лежали на окружности.

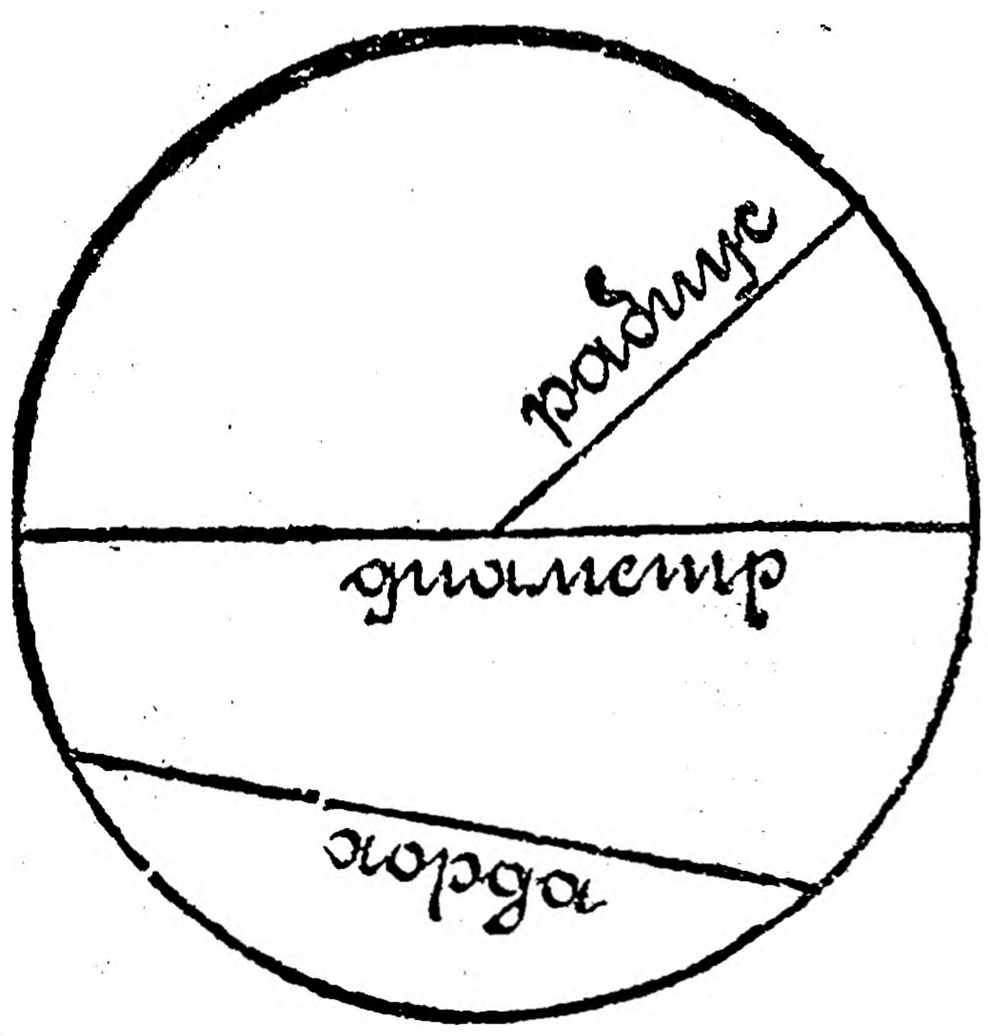


Рис. 75.

Эта прямая называется диаметром окружности или круга (рис. 75).

§ 73. Диаметр шара. Сделайте шар из воска или глины. Проткните его вязальной спицей так, чтобы она прошла, хотя бы приблизительно, через центр шара.

Прямая линия, соединяющая две точки шаровой поверхности и проходящая через центр, называется диаметром шара.

§ 74. Шар как тело вращения. Вырежьте из картона круг. Проткните его вязальной спицей по диаметру, как указано на рисунке 76 (спица должна туго входить в круг). Быстро вращайте круг вокруг спицы, следя за тем, чтобы спица не шаталась. При этом вращении круг будет описывать шар, а окружность — поверхность шара.

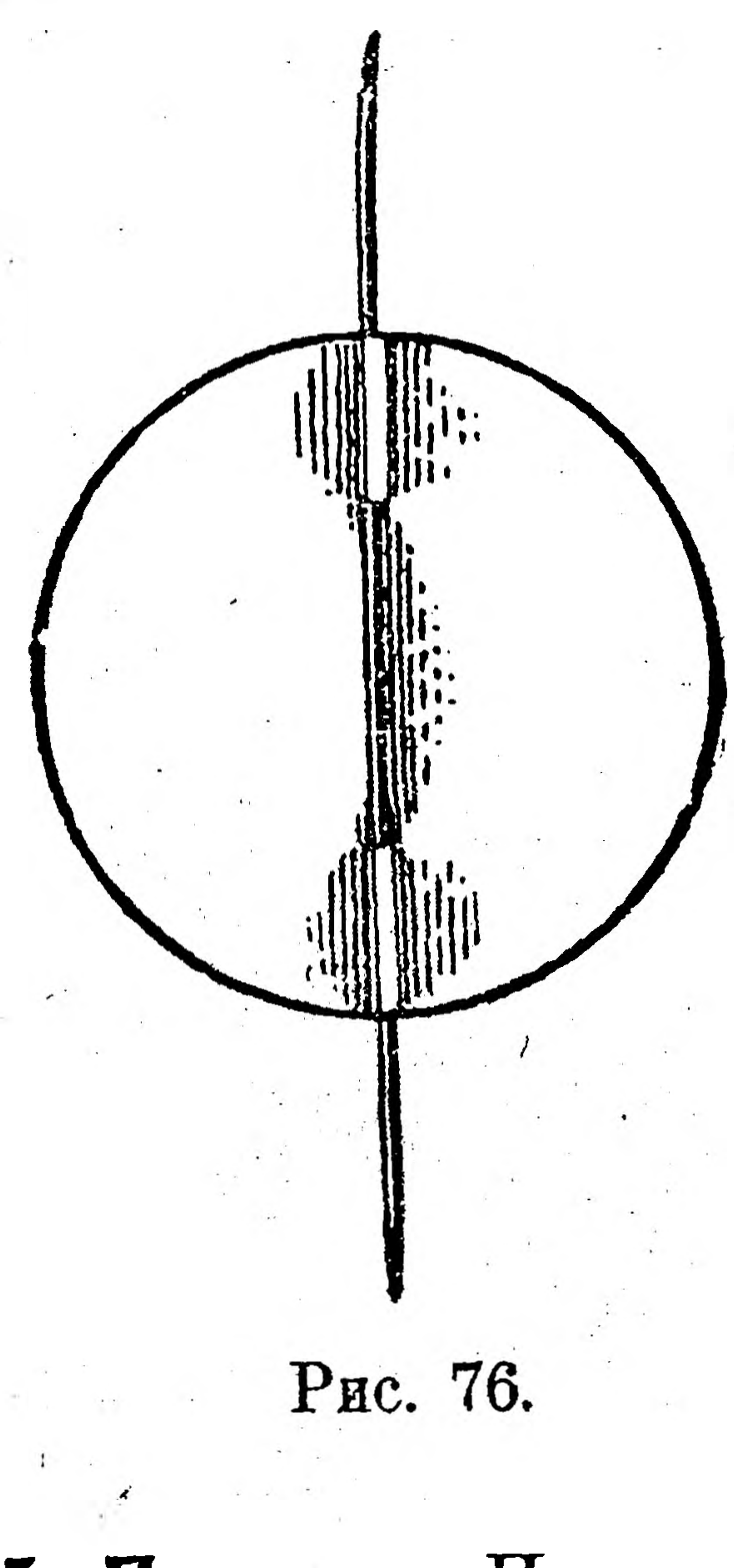


Рис. 76.

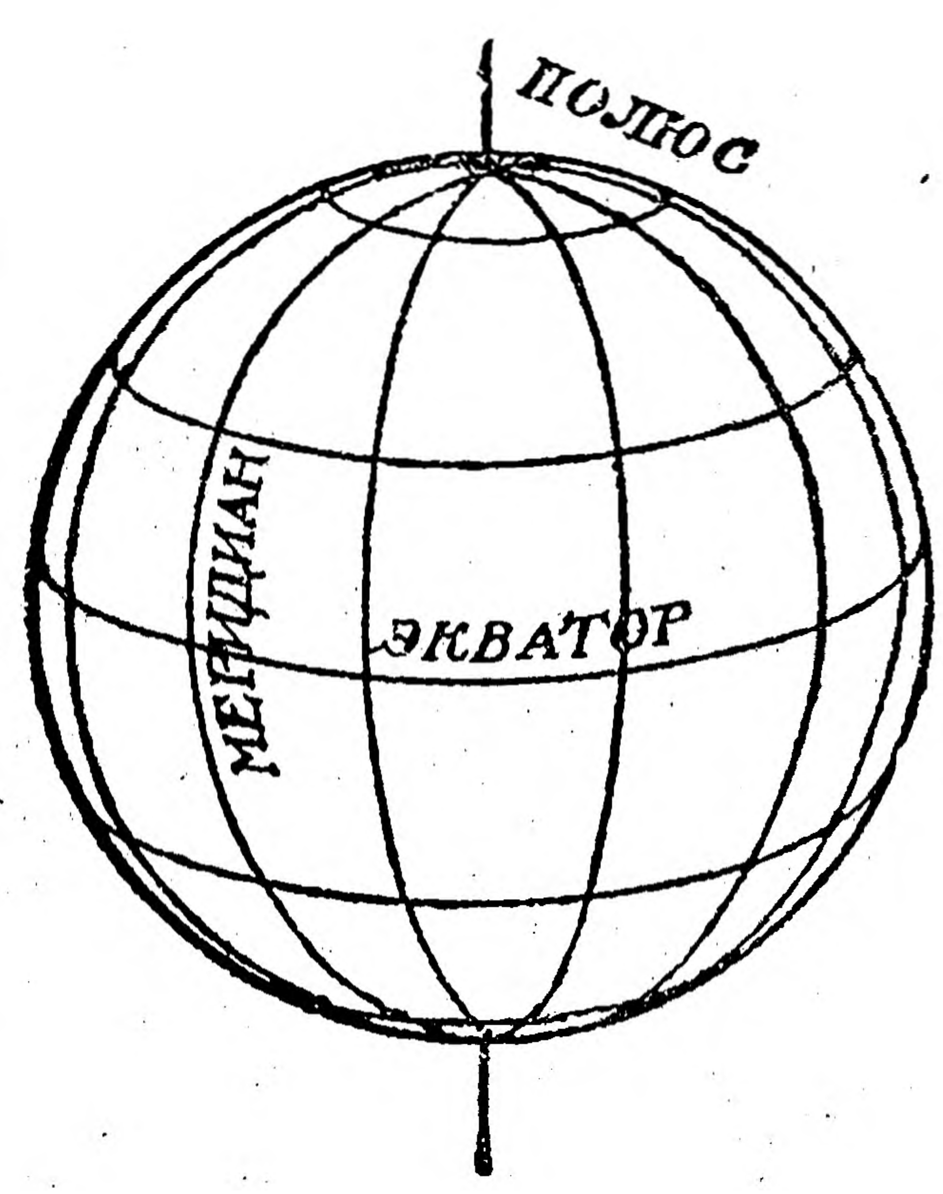


Рис. 77.

§ 75. Полюсы. Проткнув шар спицей, проходящей через центр его, вращайте шар так, чтобы спица не двигалась (рис. 77).

Тогда спица называется осью вращения, двѣ же точки, в которых она пересекает поверхность шара, называются полюсами. Укажите их.

§ 76. Параллельные круги и экватор. Отметьте на поверхности шара какую-нибудь точку. Прикоснитесь к ней концом вязальной спицы и, вращая шар, проследите тот путь, который описывает конец спицы по поверхности шара. Отметьте этот путь мелом или краской. У вас должна получиться окружность.

Проделайте то же самое еще с несколькими точками на шаре, не меняя направления оси. Круги этих окружностей называются п а р а л л е л ь н ы м и к р у г а м и (рис. 77).

Нарисуйте наибольший из всех параллельных кругов. Он называется э к в а т о р о м (рис. 77).

§ 77. Меридиан. Отметьте на поверхности шара какую-нибудь точку. Проведите окружность так, чтобы она проходила через полюсы и нашу точку.

Такая окружность называется м е р и д и а н о м нашей точки (рис. 77).

19. ЦИЛИНДР.

§ 78. Приготовление цилиндра. Я поставлю перед вами такое ведро (рис. 78). Оно имеет форму ц и л и н д р а (рис. 79).

Нарисуйте выкройку, как показано на рис. 81, склейте из нее цилиндр.

§ 79. Боковая поверхность цилиндра. Обведите ладонью руки всю поверхность цилиндра.

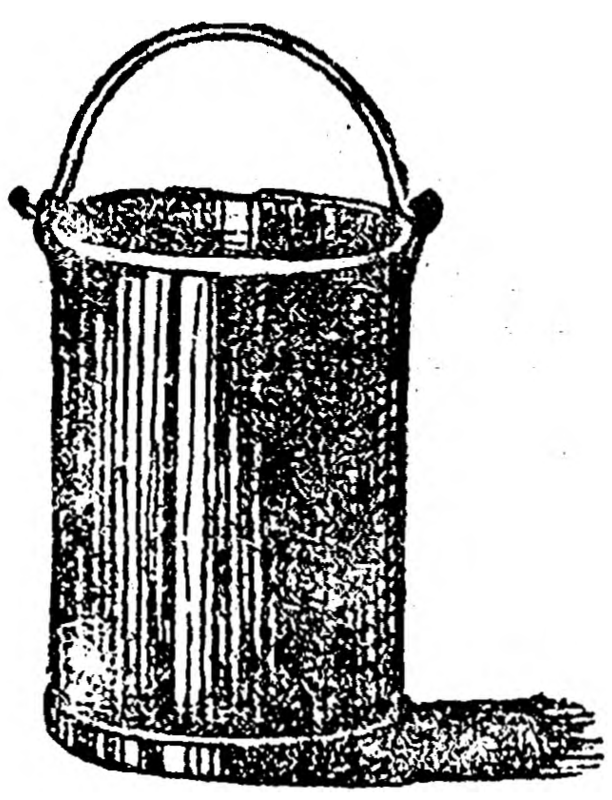


Рис. 78.
Это ведро имеет форму цилиндра.

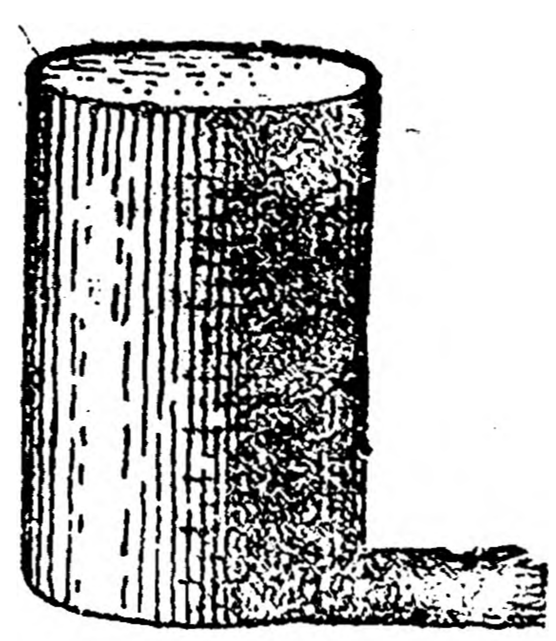


Рис. 79.
Цилиндр.

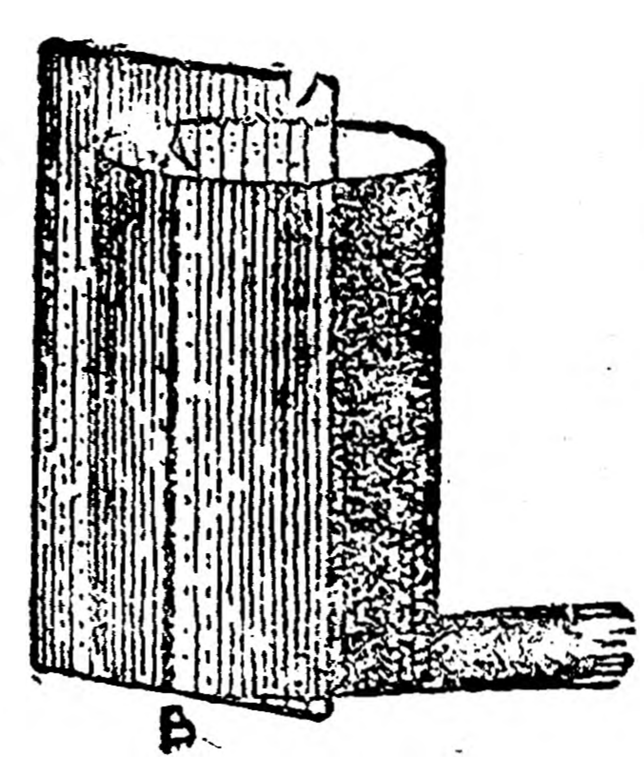


Рис. 80.
Боковая поверхность цилиндра кривая.

Обведите теперь боковую поверхность его. Исследуем ее при помощи плоского картона.

Прикладывая к этой боковой поверхности плоскость картона в самых разнообразных направлениях (рис. 80), вы заметите, что наша поверхность будет иметь с этой плоскостью не больше о д н о й общей прямой, все же остальные точки поверхности будут лежать вне плоскости картона. Следовательно боковая поверхность цилиндра относится к разряду не плоских поверхностей, а кривых.

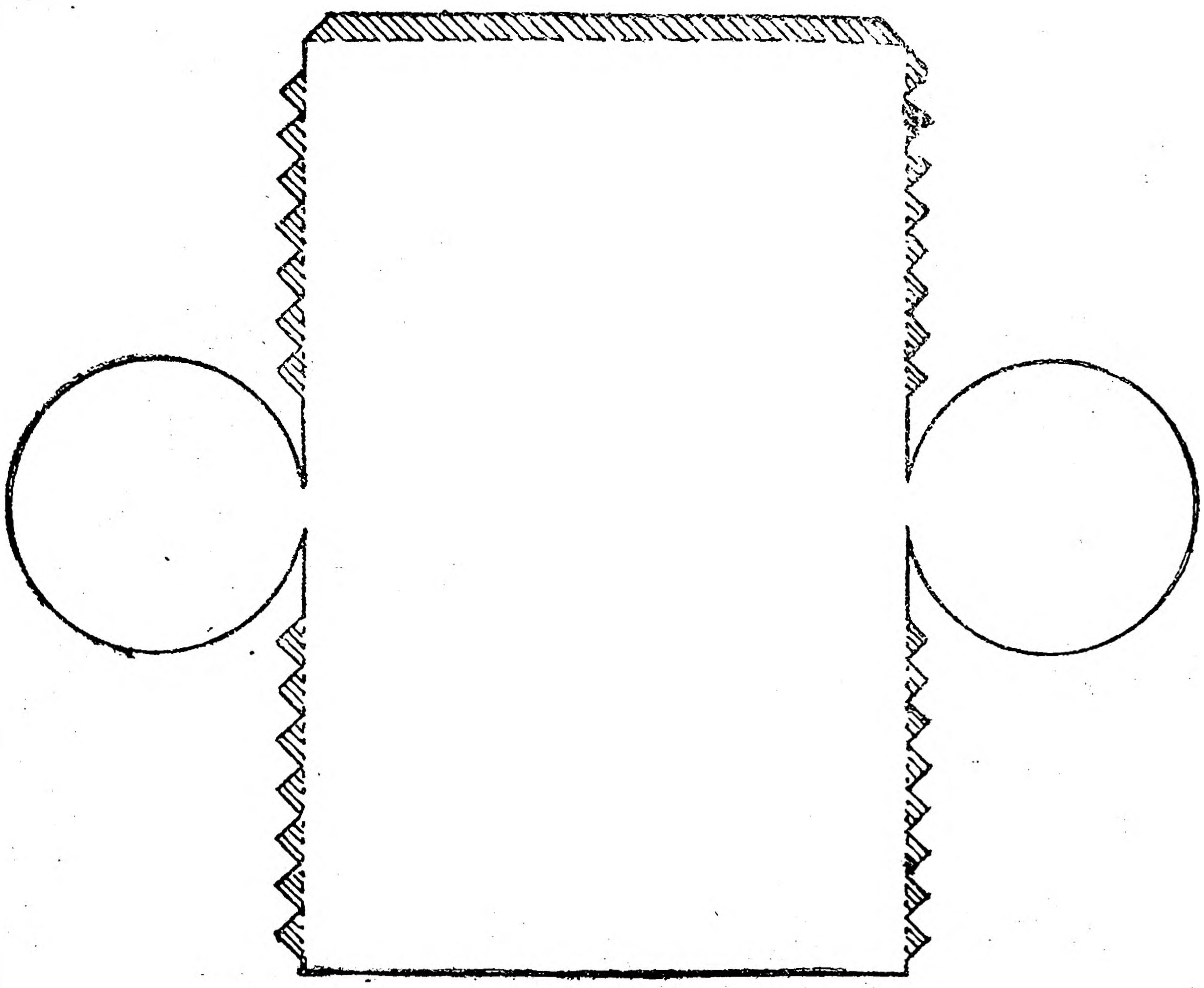


Рис. 81.
Выкройка цилиндра.

§ 80. Основание цилиндра. Обведите теперь ладонью руки оба основания цилиндра.

Кладя на эти основания лист плоского картона, вы увидите, что каждое основание совпадает всеми своими точками с плоскостью картона, следовательно, эти основания — плоские.

Как убедиться в том, что эти основания равны друг другу?

Обведите пальцем ту линию, которая образовалась от пересечения плоскости основания с боковой цилиндрической поверхностью. Как называется эта линия?

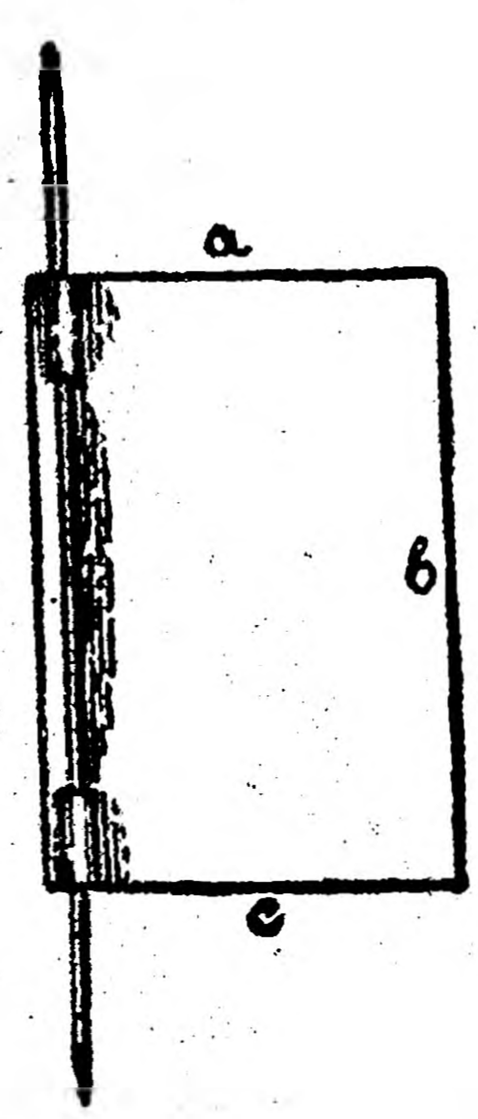


Рис. 82.

§ 81. Цилиндр как тело вращения. Вырежьте из картона прямоугольник. Проткните одну из сторон его вязальной спицей, как показано на рисунке 82. Быстро вращайте этот прямоугольник вокруг спицы.

Какое тело образует при этом вращении ваш прямоугольник?

Какую поверхность образует при этом вращении прямая b? (Эта прямая называется о б р а з у ю щ е й цилиндра.)

Что описывают прямые a и c?

20. КОНУС.

§ 82. Конус; приготовление его. Голова сахара имеет форму *конуса* (рис. 83).

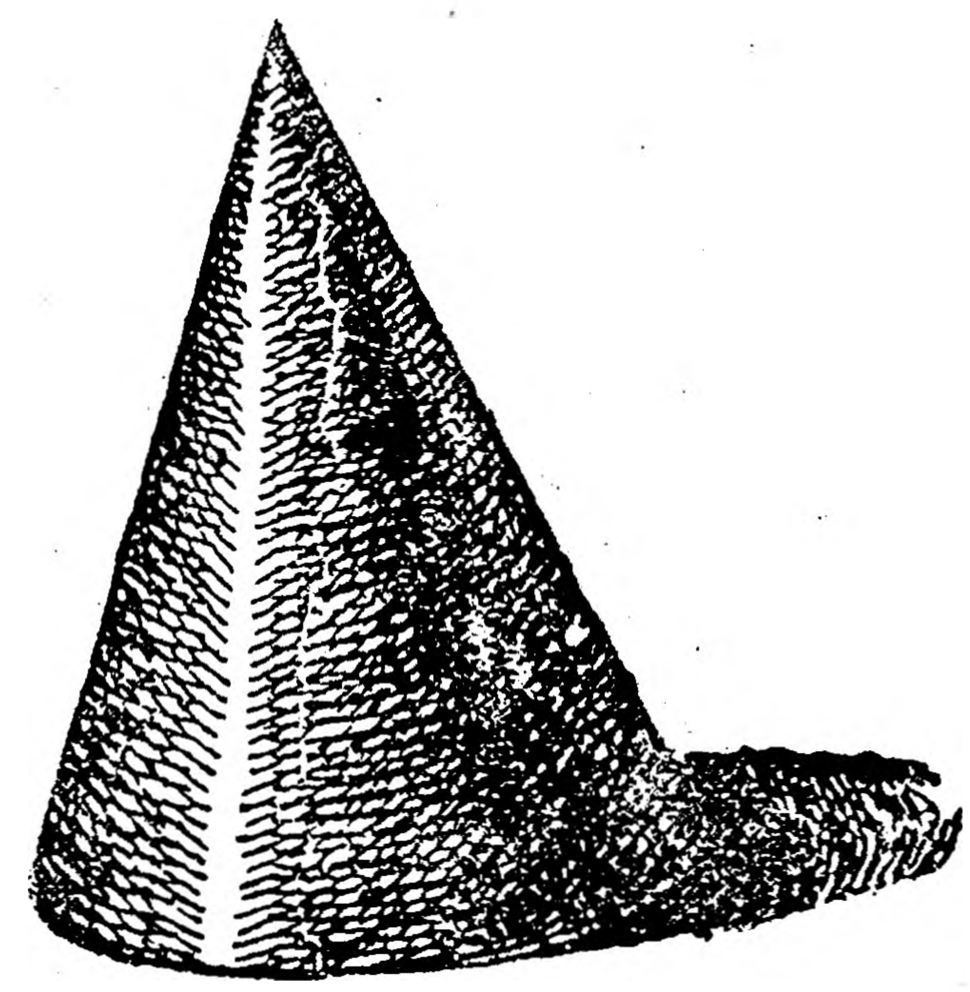


Рис. 83.
Конус.

Назовите несколько предметов, имеющих форму конуса.

Нарисуйте выкройку, как показано на рисунке 84, и склейте из нее тело. Как называется полученное тело?

§ 83. Боковая поверхность конуса. Обведите ладонью руки всю поверхность конуса. Обведите теперь одну только боковую поверхность его. Покажите при помощи плоского листа картона, что эта поверхность кривая.

§ 84. Основание конуса. Снизу наш конус ограничен плоской поверхностью, которая имеет форму круга. Этот круг называется *основанием* конуса. Укажите его.

Плоскость основания пересекается с боковой поверхностью по кривой линии. Обведите пальцем эту линию. Эта линия — окружность.

§ 85. Вершина конуса. Наша коническая поверхность сверху заканчивается точкой. Покажите ее. Эта точка называется *вершиной* конуса.

§ 86. Конус как тело вращения. Вырежьте из картона треугольник с прямым углом. Проткните вязальной спицей одну из сторон, образующих прямой угол, так, как это показано на рисунке 85.

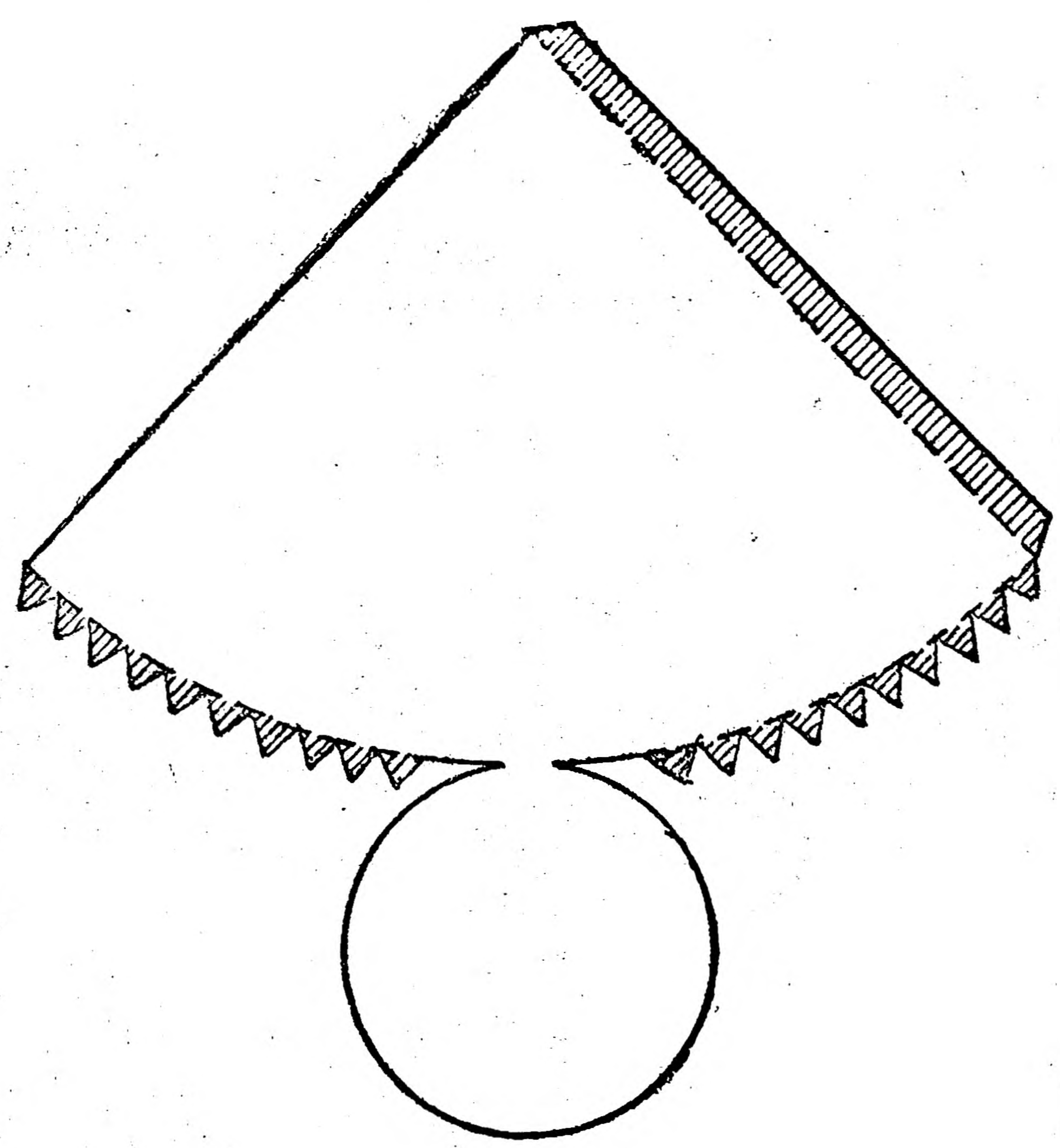


Рис. 84.
Выкройка конуса.

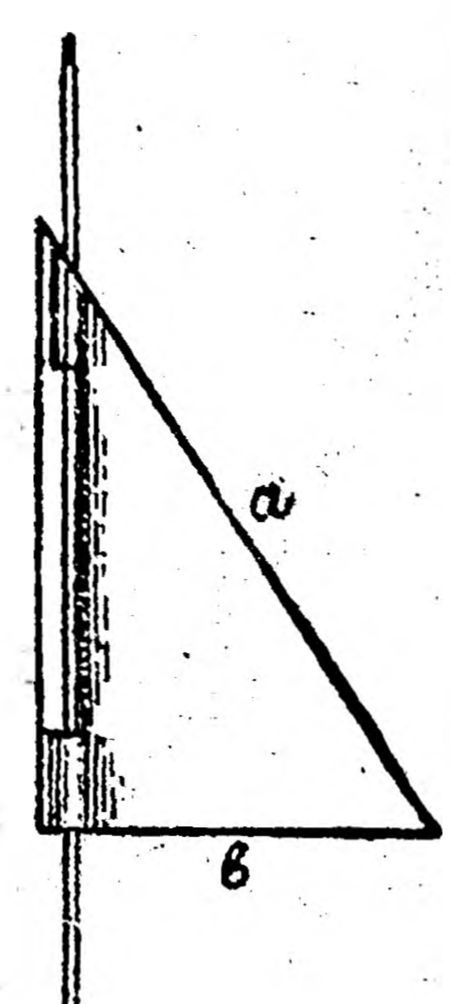


Рис. 85.

Быстро вращайте этот треугольник вокруг спицы.

При этом вращении треугольник опишет конус. Прямая b опишет основание конуса; прямая a опишет коническую поверхность. Эта прямая называется образующей конуса. (Припомните образование цилиндра § 81.)

ГЛАВА VI.

ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ВО ДВОРЕ И В ПОЛЕ.

21. ПРИГОТОВЛЕНИЕ ПРИБОРОВ.

§ 87. Необходимые приборы. Сделаем несколько простейших геометрических построений на поверхности земли. Для этого прежде всего нам надо приготовить некоторые приборы.

Вехи. Возьмите десятка два палок длиною в $1^1/_2 — 2$ метра и заострите их с одного конца так, чтобы их можно было без труда втыкать в землю. Эти палки и будут вехи.

Отвес. Все вехи устанавливаются вертикально. Для такой установки вам надо воспользоваться отвесом. Приготовить его очень легко. Возьмите веревку длиною в $^1/_2 — ^3/_4$ метра и к одному из концов ее привяжите какой-нибудь груз (гайку, ключ, гирьку). Если вы укрепите второй конец веревки отвеса так, чтобы нитка свободно натягивалась грузом, то она примет вертикальное или отвесное направление. На рис. 86 вы видите несколько таких отвесов.

Ватерпас. Так называется прибор, при помощи которого узнают горизонтальное положение прямой линии или плоскости. Устройство его видно на рис. 87. Когда нижняя линейка AB ватерпаса лежит на горизонтальной прямой, тогда груз отвеса находится у метки C. Ватерпас этот вы можете приготовить сами. Возьмите прямоугольный кусок толстой доски и, поставив ее ребром на горизонтальную плоскость, прибейте на боковой грани гвоздь и привяжите к ней отвес. Второй гвоздь прибейте у той точки, возле которой остановится груз отвеса. Вот и готов ваш ватерпас.

Уровень. Часто пользуются водяным ватерпасом или уровнем. Приготовим и его. Возьмите чуть изогнутую стеклянную трубку длиною около 10 сантиметров и, наполнив ее водою так, чтобы внутри ее остался небольшой пузырек воздуха, заткните оба конца ее пробками[1].

---

[1]) Можно воспользоваться готовой пробиркой.

Сделайте в куске толстой доски гнездо и укрепите в нем вашу трубку выпуклой стороною кверху. Когда вы положите приготовленный уровень на горизонтальную прямую, то пузырек воздуха, стремясь оставаться

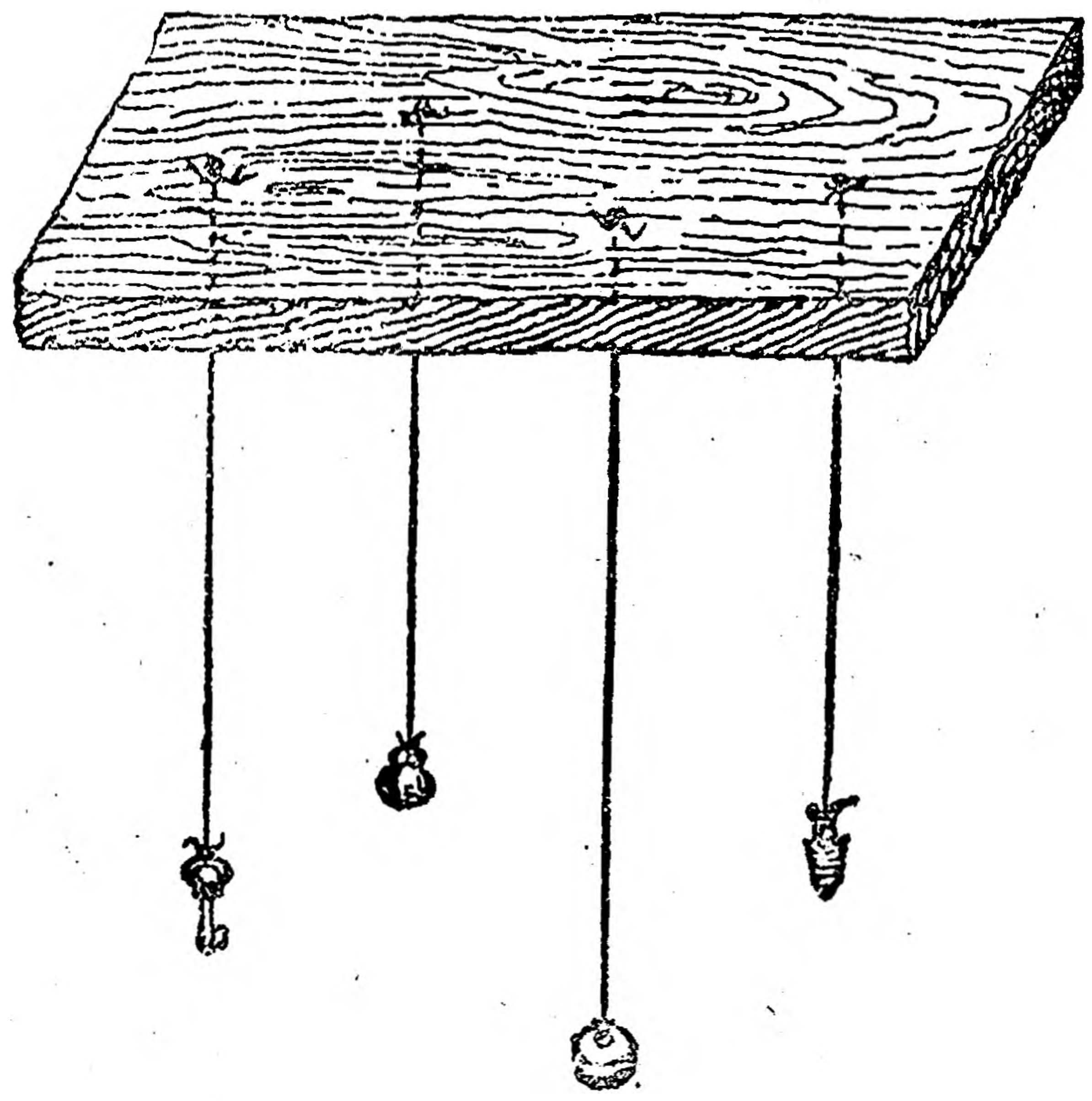


Рис. 86. Отвесы.

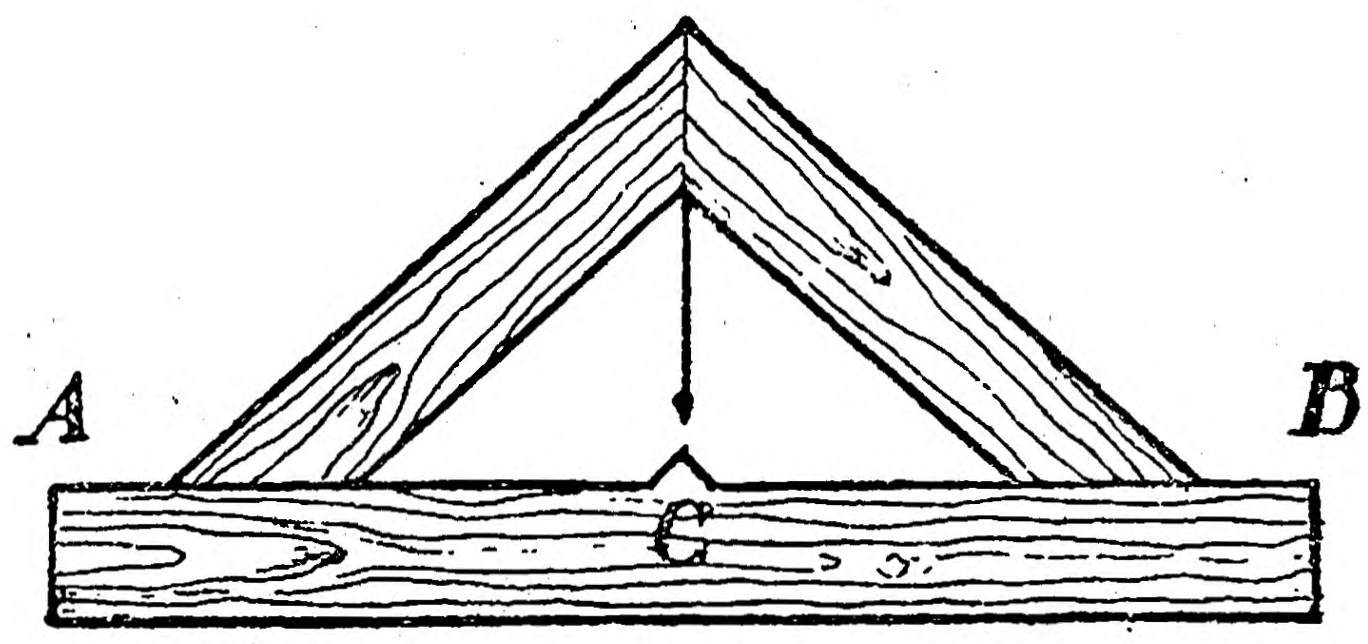


Рис. 87. Ватерпас.

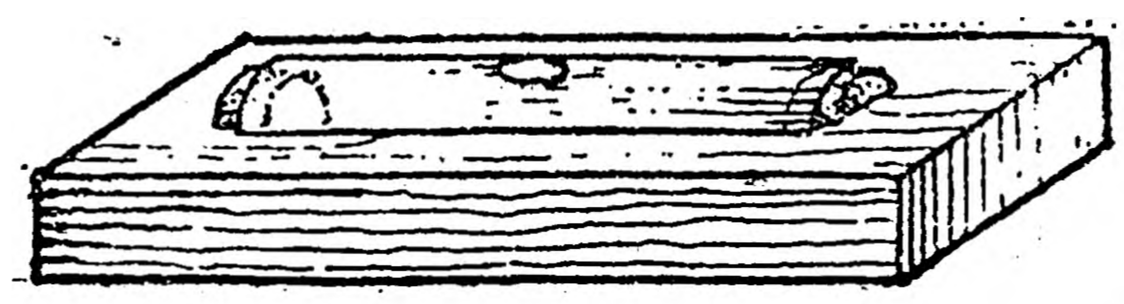


Рис. 88. Уровень.

наверху, займет определенное положение (рис. 88). Отметьте на стекле положение этого пузырька. Для этого можно наклеить на стеклянную трубку бумажную полоску с соответствующим прорезом для воздушного пузырька.

Рис. 89. Рулетка.

Рулетка. При измерении прямых линий на земле пользуются либо рулеткой (рис. 89), либо землемерной цепью (рис. 90). На них нанесены метры, о которых будем говорить дальше. Вместо этих при-

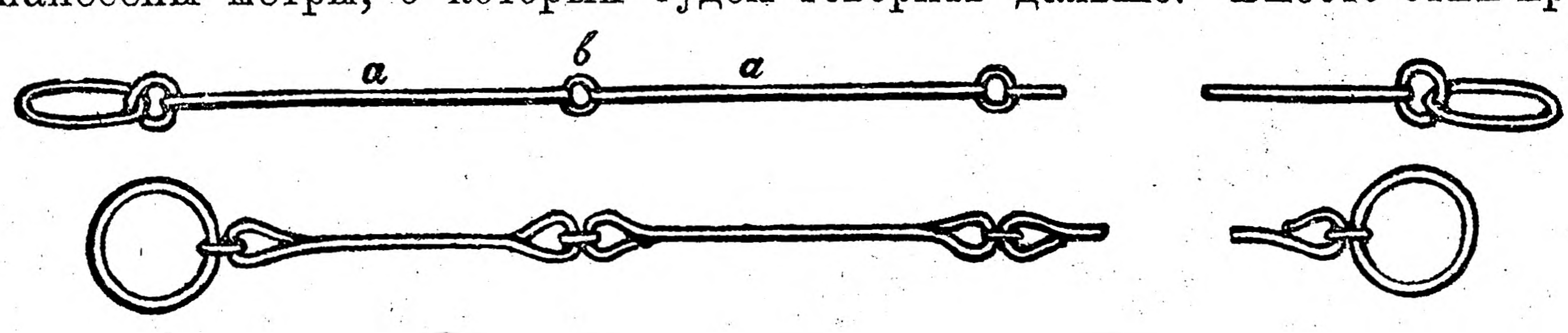


Рис. 90. Землемерная цепь.

боров вы можете взять длинную веревку и завязать на ней в конце каждого метра по большому узлу и на них привязать пластинки из жести с цифрами: 1 (метр), 2 (метра) и т. д. Такая веревка вполне заменит вам рулетку.

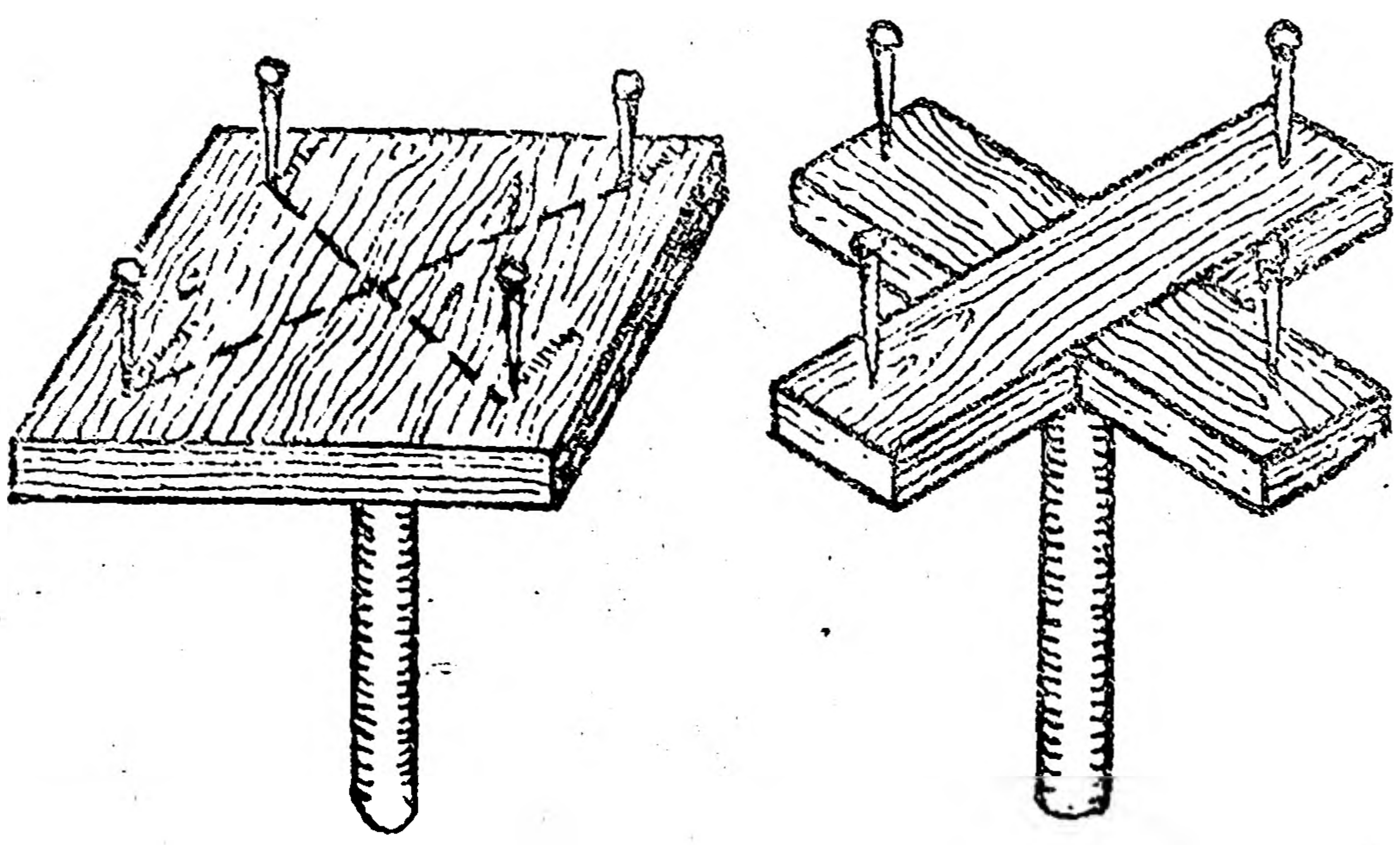


Рис. 91. Эккер.

Эккер. Для построения прямого угла пользуются эккером (рис. 91). Его вы тоже можете смастерить сами. Если вам трудно будет склеить крест, то вместо него возьмите простую квадратную доску и на ней воткните булавки так, чтобы получились две прямые линии, пересекающиеся под прямым углом.

22. ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПРЯМОГО УГЛА.

§ 88. Прямая линия на поверхности земли. На поверхности земли прямые линии отмечаются при помощи вех (рис. 92). Пусть, например, надо провести прямую от точки *A* до точки *B*. Воткните

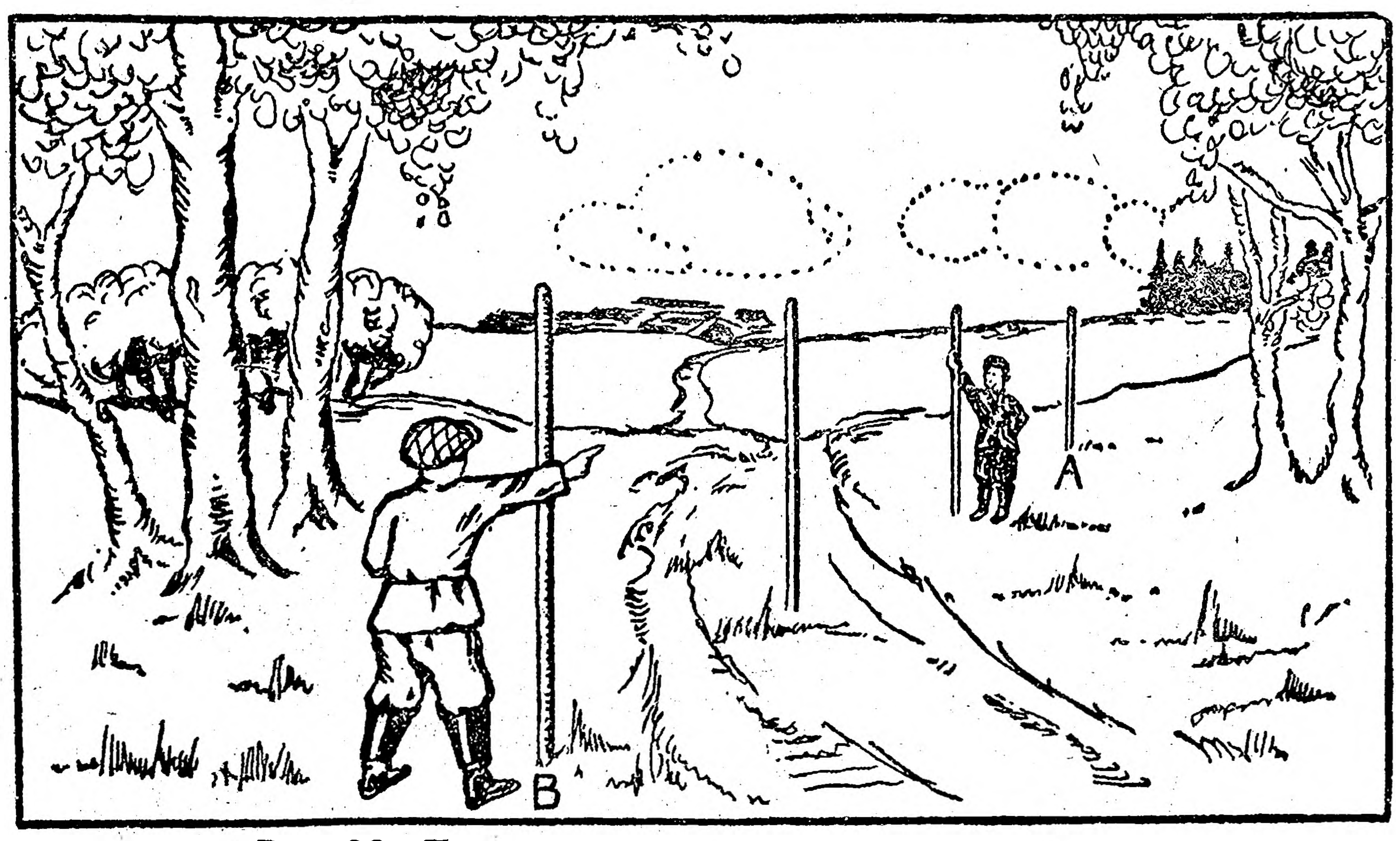


Рис. 92. Построение на земле прямых линий.

у этих точек по вехе. Сами встаньте у одной из этих точек (например, у *A*) лицом к точке *B*, а одного из товарищей попросите ставить остальные вехи между *A* и *B* так, чтобы, когда вы будете смотреть через веху *A* на крайнюю веху *B*, все промежуточные вехи покрывали одна другую.

Сообразите теперь сами, как при помощи вех отметить на земле продолжение прямой AB.

§ 89. Измерение прямой линии на земле цепью или рулеткой. — Метр. Предположим, что вам надо измерить расстояние от крыльца до ворот. Установите вертикально две вехи: одну у крыльца, другую у ворот, и затем «провесьте» всю измеряемую прямую промежуточными вехами так, как указано в § 88. Отмеченную таким образом прямую надо измерить либо при помощи землемерной цепи, либо при помощи рулетки.

Посмотрим теперь, какие единицы длины укладывать на этой измеряемой прямой. Сантиметром воспользоваться неудобно, — он слишком мал. Приготовьте тогда палку, составленную из 100 сантиметров. Вы и получите новую, более удобную для этой задачи меру. Длина этой палки, состоящая из 100 сантиметров, называется метром.

§ 90. Построение на земле прямых углов. Для проведения на земле прямых углов пользуются эккером. Провесьте на дворе вехами какую-либо прямую линию. На рисунке 93 эта прямая отмечена вехами L_1L_2. Отметьте затем на этой прямой какую-либо точку, например, точку O. Надо провести при помощи эккера через эту точку O прямую, образующую прямой угол с первой прямой.

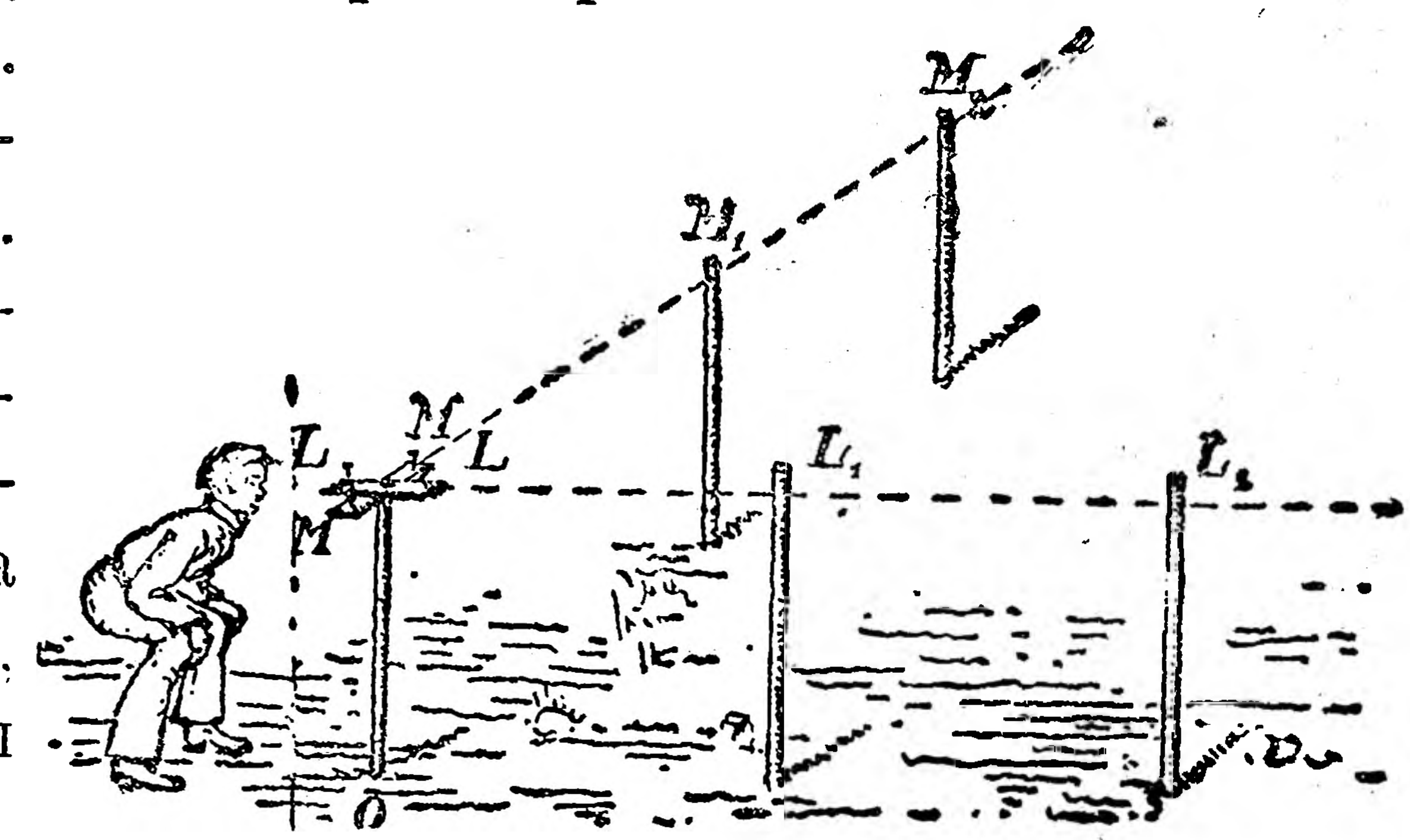


Рис. 93.
Построение на земле прямых углов.

Установите эккер у кола O так, чтобы палка эккера была строго вертикальной (что надо проверить при помощи отвеса), и чтобы два острия эккера (например, LL) расположились по направлению первой прямой L_1L_2.

Смотрите теперь вдоль остриев MM, и ваш товарищ пусть ставит ряд вех M_1M_2 так, чтобы они служили продолжением прямой MM (§ 88).

Укажите получившийся прямой угол.

ГЛАВА VII.

РИСОВАНИЕ ГРАФИК И ДИАГРАММ.

23. РИСОВАНИЕ ГРАФИК.

§ 91. Система координат.

Задача 1. В течение одного года ученики ежедневно следили за погодой. Они составляли для каждого месяца календарь и в нем зарисовывали штрихами пасмурные дни.

Понедельник		6	13	20	27
Вторник		7	14	21	28
Среда	1	8	15	22	29
Четверг	2	9	16	23	30
Пятница	3	10	17	24	
Суббота	4	11	18	25	
Воскресенье	5	12	19	26	

Для того, чтобы яснее показать, какой из месяцев в этом году был наиболее пасмурным, можно сделать так. Вырежьте все квадратики, соответствующие пасмурным дням каждого месяца и составьте из них столбики. Эти столбики поставьте на горизонтальную прямую, а внизу подпишите либо название месяца, либо просто его номер. У вас получится такой рисунок:

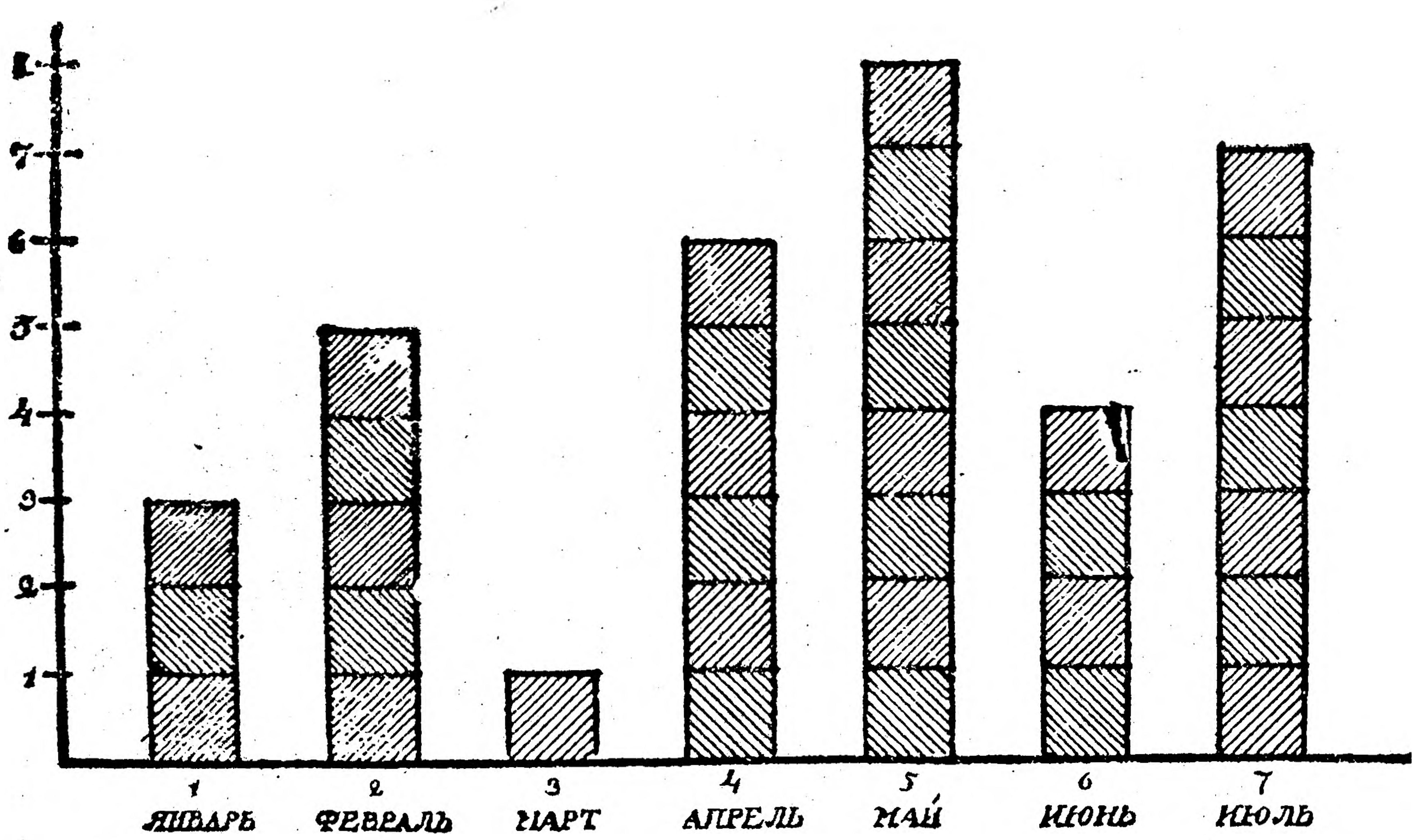


Рис. 94.

Для того, чтобы легче было сосчитать число этих квадратиков, нарисуйте сбоку вертикальную прямую и отметьте на ней чертой по порядку место, где кончается каждый квадратик.

Узнайте по рисунку 94 сколько пасмурных дней было в январе, мае, июне, феврале, марте? Какой месяц был самым пасмурным? Какой наиболее безоблачным? Какие месяцы имели одинаковое число безоблачных дней?

Задача 2. Ученики, следя за погодой, ежедневно в час дня замечали высоту столбика ртути термометра и эту температуру записывали у себя в тетрадях. В мае месяце в течение первых десяти дней температура была такой:

1-го	2-го	3-го	4-го	5-го	6-го	7-го	8-го	9-го	10-го
6°	9°	4°	12°	10°	8°	10°	3°	9°	5°

Эту температуру можно записать наглядно так. Возьмем клетчатую бумагу, разделенную на сантиметры, и нарисуем на ней прямой угол (рис. 95). Горизонтальную сторону его назовем о с ь ю а б с ц и с с или о с ь ю x-о в (осью иксов), будем отмечать на ней (через каждый сантиметр) по порядку дни и у этих точек рисовать вертикальные столбики, соответствующие высоте ртути термометра в этот день. Мы получим такой рисунок:

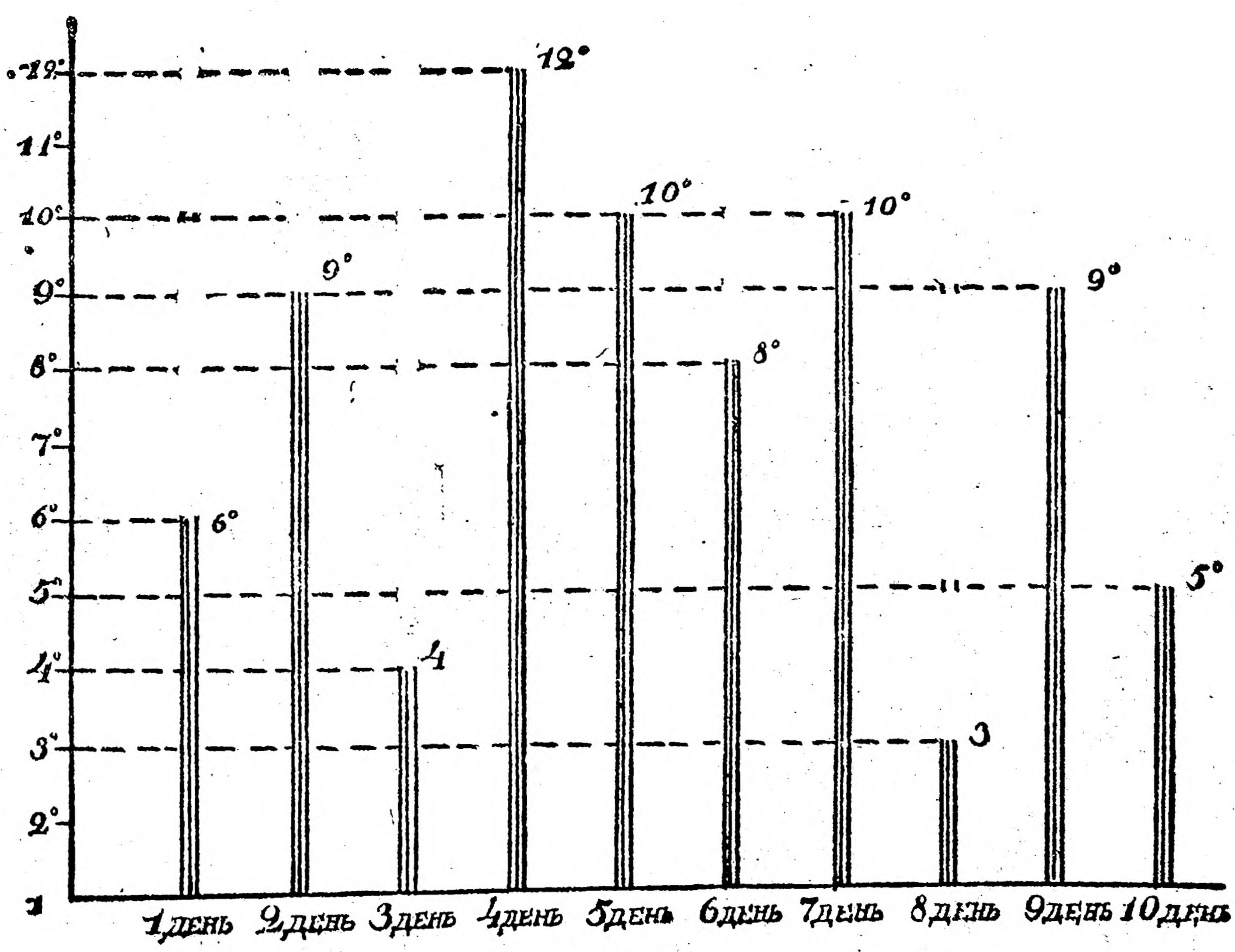


Рис. 95.

Вертикальную сторону угла назовем осью ординат или осью y-ков (осью игреков). Для того, чтобы удобнее отсчитывать число градусов, отметим концы столбиков ртути на оси ординат и надпишем на ней соответствующее число градусов, начиная от вершины прямого угла; эта вершина, точка 0, называется началом координат.

Какой из этих дней был наиболее холодным? Какой наиболее теплым? Какая температура была самой низкой? Какая самой высокой?

Задача 3. Так как при отсчете температуры нам надо следить только за концом столбика ртути, то можно на нашем рисунке рисовать не весь столбик, а отмечать только конец его. Сделаем это. Тогда у нас получится вместо прежнего рисунка, такой:

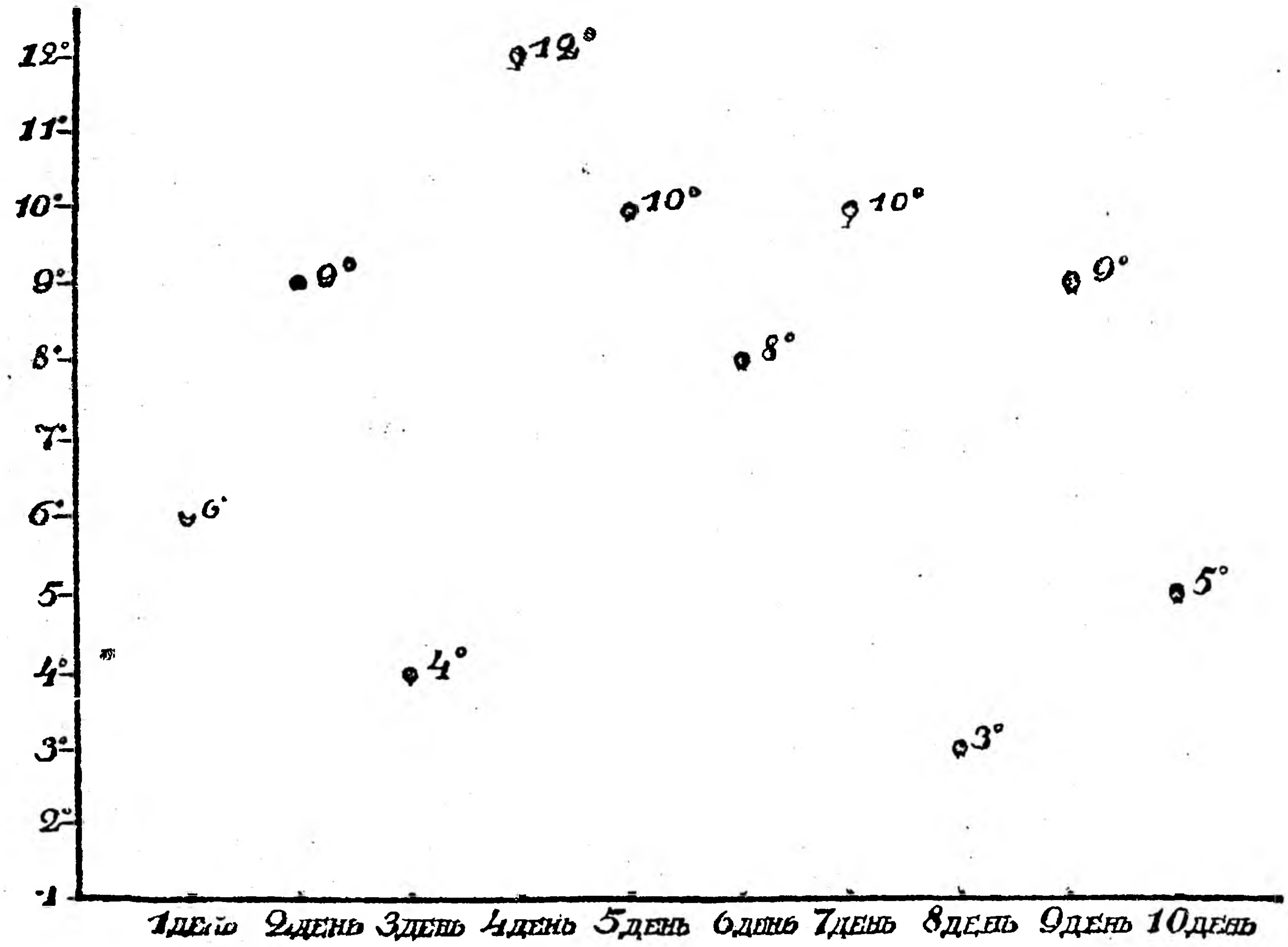


Рис. 96.

Проследите внимательно по этому чертежу, как опускалась и подымалась каждый день ртуть в термометре. В какой из этих дней столбик ртути был самым высоким? Нарисуйте весь этот столбик. А в какой день столбик ртути был самым низким? В какие дни столбик ртути стоял на одинаковой высоте и какая тогда была температура?

Задача 4. Возьмите лист белой бумаги, разграфите его на клеточки со стороною в 1 сантиметр каждая, как это сделано на рисунке 97.

В левом нижнем угле вашего листа нарисуйте прямой угол. Вершина этого угла (точка O) будет нашим началом координат. Горизонтальная прямая — осью X-ов, а вертикальная — осью Y-ов.

Отметьте на оси X-ов и на оси Y-ов точки, делящие эти оси на сантиметры, и напишите у каждой точки соответствующие числа (рис. 97).

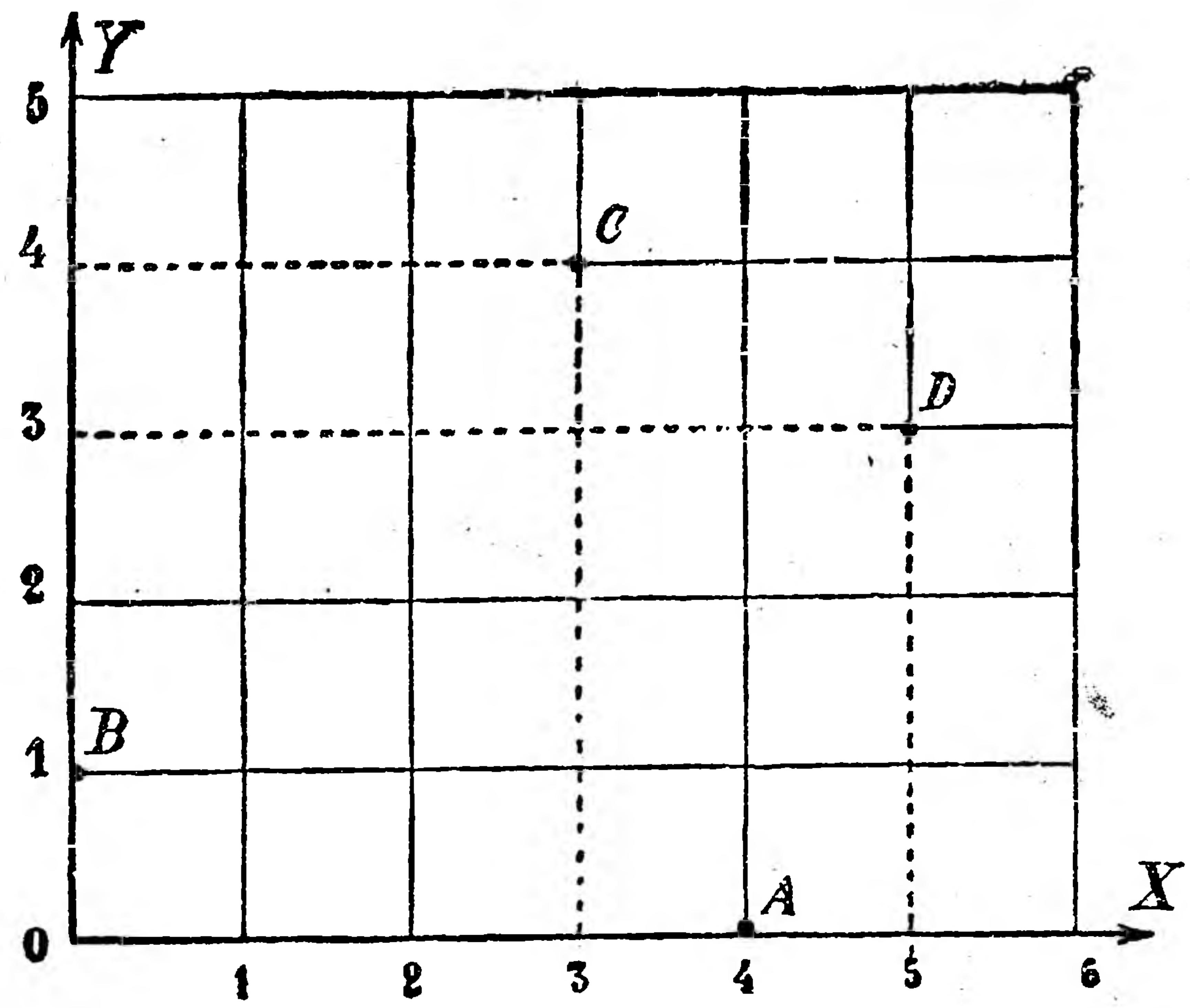


Рис. 97.
Система координат.

Для того, чтобы определить на рис. 97 положение точки A, достаточно знать, что эта точка A находится на оси X-ов на расстоянии 4 сантиметров от начала координат O. Это расстояние OA назовем координатой X или абсциссой точки A. Для точки B (рис. 97) достаточно запомнить, что она лежит на оси Y-ов на расстоянии 1 сантиметра от начала координат. Это расстояние OB назовем координатой Y или ординатой точки B.

Посмотрим теперь, как на рис. 97 определить положение точки C. Проведем из точки C прямые, параллельные осям, до пересечения с ними. Скольким сантиметрам равна длина прямой, параллельной оси X-ов? Эта прямая ($C4 = 3$ *см*) будет **координатой** X (или абсциссой точки C).

Скольким сантиметрам равна длина прямой параллельной оси Y-ов? Эта длина ($C3 = 4$ *см*) называется координатой Y (или ординатой точки C).

Найдите абсциссу и ординату точки D на рис. 97.

Измерив координаты точек C и D, перенесите эти точки на вашу разграфленную бумагу.

Пояснение. Надо от начала координат отложить по оси x-ов длину координаты x точки C, а по оси y-ов длину координаты y; через полученные точки провести прямые, параллельные осям. Точка пересечения этих параллельных прямых и даст искомую точку C.

Отметьте на своей бумаге точки с такими координатами: точка L (4,2); точка M (2,4); точка N ($3,1^1/_2$); точка P (1,5). Здесь из чисел, стоящих в скобках, первое число соответствует координате x, второе —

координате y. Так, наприм., для точки L координата x равна 4 *см*, координата y равна 2 *см*.

Чему равна координата y точки A, если эта точка лежит на оси x-ов.

Чему равна координата x точки B, если эта точка лежит на оси y-ов?

Задача 5. Разграфите снова бумагу на клетки в 1 *см*. Проведите по средине листа две прямые, пересекающиеся под прямым углом (рис. 98).

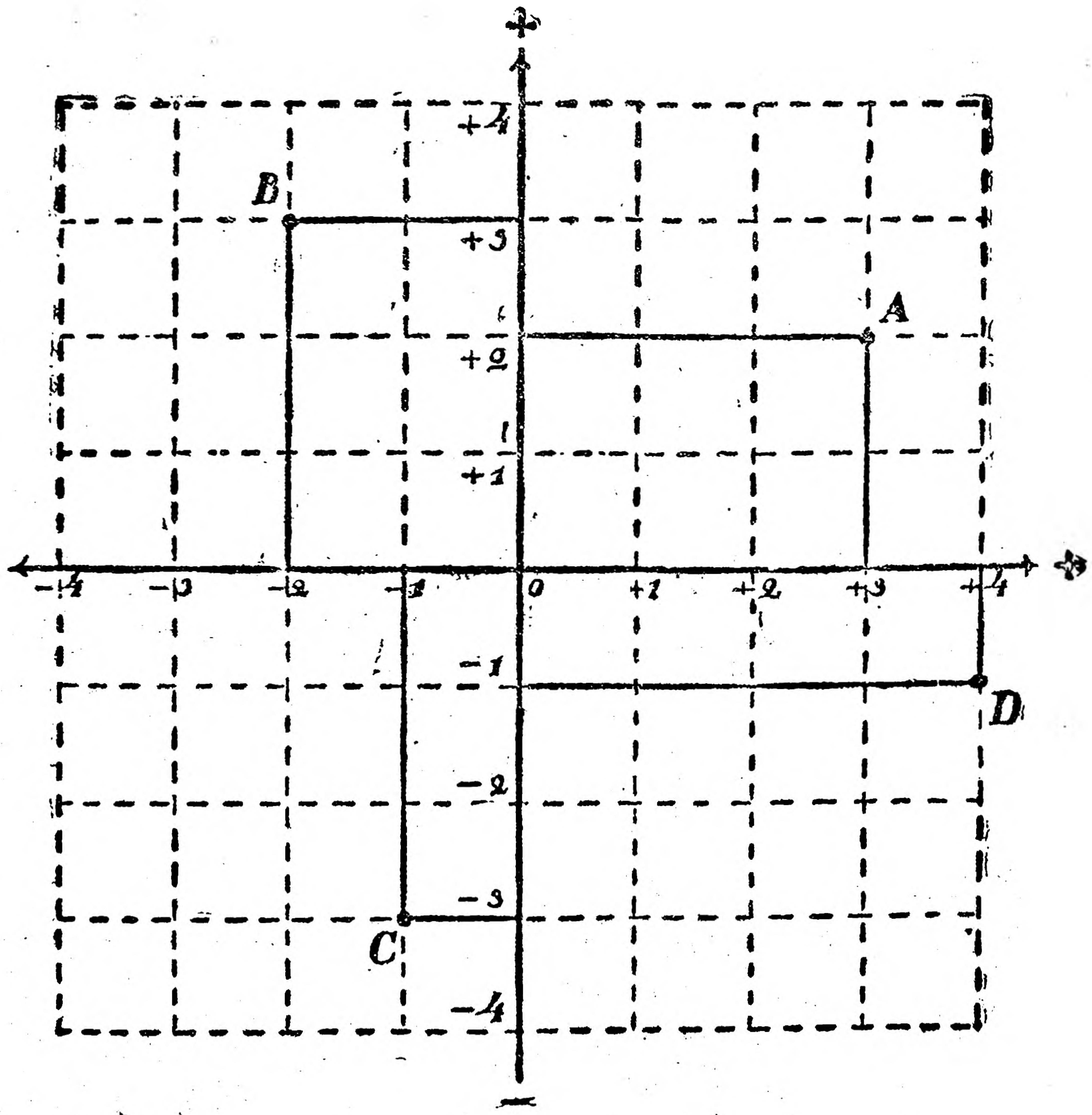


Рис. 98.

Горизонтальную прямую назовем попрежнему осью x-ов. Как назвать вертикальную прямую?

Как называется точка пересечения этих прямых?

Отметьте и назовите соответствующими числами точки, делящие ось x-ов на сантиметры вправо и влево, начиная от точки O. Чтобы отличить деления на оси x-ов, идущие вправо от начала координат, будем перед этими числами ставить знак + и читать так: (+5) «плюс 5» (такие числа называются положительными). Перед числами, идущими влево от начала координат, будем ставить знак — и читать так: (—4) «минус 4» (эти числа называются отрицательными).

Проделайте то же самое с осью y-ов, при чем деления, идущие вверх от начала координат, отмечайте числами со знаком $+$ («плюс»), а вниз со знаком $-$ («минус»).

Проведя через точку A (рис. 98) прямые, параллельные осям, определите координату x и координату y для этой точки.

Нужно ли при этих координатах ставить знак $+$ или $-$? Если надо, то почему?

Найдите и запишите координаты точек: B, C, D (рис. 98).

Нарисуйте на своей разграфленной бумаге точку, занимающую такое же положение относительно осей, как точка D.

Пояснение. Для точки D координата x равна $+4$, а координата y равна -1; поэтому надо отложить по оси x-ов вправо от начала координат 4 сантиметра, а по оси y-ов вниз 1 сантиметр. Через концы отложенных отрезков провести прямые параллельные осям. Точка пересечения их и даст вам искомую точку D.

Нарисуйте на разграфленной бумаге точки с координатами.

$(-1, -2)$; $(-2{,}0)$; $(+1^1/_2, -4)$; $(-3^1/_2, +2^1/_3)$; $(0, -3)$.

§ 92. Термометрическая кривая.

Задача 1. На рисунке 99 записана температура воздуха, которая наблюдалась и записывалась ежедневно в 1 час дня в течение ноября месяца 1907 г. в городе Киеве.

Рисунок этот составлен так: на оси x-ов от начала координат отложили дни месяца по порядку: 1, 2, 3 и так далее.

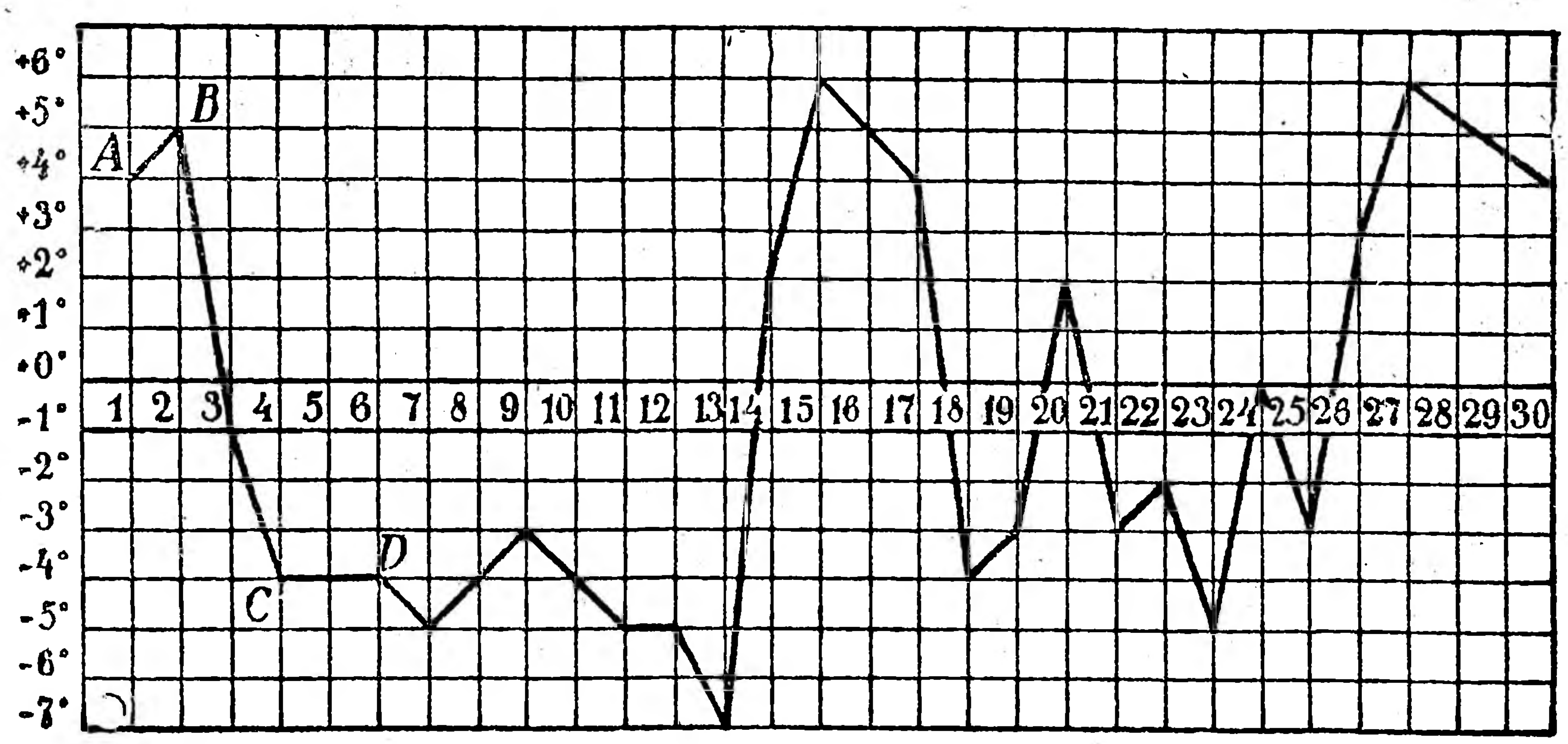


Рис. 99.
Кривая температур за ноябрь.

На оси y-ов вверх от начала координат отложили показания термометра, когда температура его выше нуля градусов, и вниз, когда она ниже нуля.

Найдите на рисунке точку A. Чему равна координата x и координата y для этой точки? Какая температура воздуха была 1-го ноября?

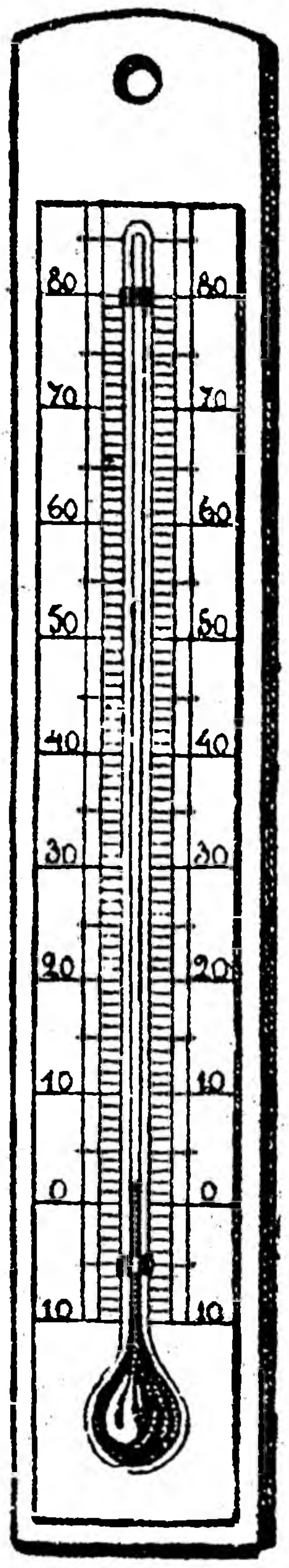


Рис. 100. Термометр.

Пояснение. Для точки A координата x равна 1, а координата y равна $+4$. Следовательно, 1-го ноября температура воздуха была $+4°$ ($4°$ выше нуля).

Найдите координаты точек B, C, D и узнайте, какая температура воздуха была в эти дни.

Задача 2. Если бы температура воздуха 20-го ноября равнялась стольким градусам, сколько показывает изображенный на рис. 100 термометр, то где бы вы отметили на рисунке соответствующую этому наблюдению точку?

Пояснение. Надо на оси x-ов найти деление, соответствующее 20-му ноября, и провести через него прямую, параллельную оси y-ов. На оси же y-ов надо отметить деление, соответствующее показанию термометра, и провести прямую, параллельную оси x-ов. Пересечение этих линий и даст искомую точку (обыкновенно эти параллельные линии на рисунке не проводятся).

Задача 3. Ученики в течение ноября 1908 г. измеряли каждый день температуру воздуха в Киеве и получили следующие числа (см. табл. на стр. 59).

Приготовьте разграфленную бумагу, как указано в предыдущей задаче, и отметьте на ней точки, соответствующие указанным наблюдениям.

Число месяца.	1	2	3	4	5	6	7	8		10
Температура воздуха . . .	$-8°$	$-8°$	$-6°$	$-1/2°$	$-1°$	$+3\,1/2°$	$+1\,1/2°$	$+3°$	$+1°$	$0°$

Число месяца.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Температура воздуха . . .	$-1°$	$-1/2°$	$-4°$	$+3°$	$+1\,1/2°$	$0°$	$-2°$	$+1\,1/2°$	$-2°$	$+1\,1/2°$

Число месяца.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Температура воздуха . . .	$-2°$	$-7\frac{1}{2}°$	$+2°$	$-10\frac{1}{2}°$	$-9°$	$-7°$	$-1\frac{1}{2}°$	$-16°$	$+\frac{1}{2}°$	$+2°$

Соедините прямыми линиями поочередно найденные точки.

Полученная линия называется кривой температуры воздуха (не смешивайте ее с такими кривыми, как окружность, которые мы изучали в предыдущих главах).

Сравните нарисованную кривую температуры воздуха в ноябре 1908 г. с соответствующей кривой ноября 1907 г.

Повесьте за окном термометр. Отсчитывайте по нему и записывайте температуру воздуха каждый день в течение года и чертите кривую [1]).

Какая была средняя температура воздуха в ноябре месяце 1907 года?

Пояснение. Для этого надо взять среднее арифметическое наблюдаемых температур, т.-е. сложить все числа и разделить сумму на число наблюдений. Складывать числа надо алгебраически, т.-е. прибавлять числа со знаком + (положительные) и вычитать числа со знаком — (отрицательные).

Если у вас составлена кривая температур за целый год, то вычислите по ней среднюю температуру воздуха за каждый месяц.

Составьте кривую средней месячной температуры воздуха за год, откладывая на оси x-ов месяцы, а на оси y-ов соответствующую этим месяцам среднюю температуру.

§ 93. Барометрическая кривая. В течение сентября месяца 1908 г. давление воздуха в городе Киеве было такое:

Число месяца.	1	2	3	4	5	6
Давление воздуха по ртутному барометру (в *мм*)	742[2])	749	749	749	755	758

---

[1]) Наблюдение надо вести в один и тот же час дня, например, в 9 час. утра или в 1 час дня.

[2]) Число 742 показывает, что 1-го сентября воздух давил с такой силой, что в состоянии был поддерживать столбик ртути высотою в 742 *мм*. Короче говоря, давление воздуха было равно 742 *мм*.

Число месяца.	7	8	9	10	11	12
Давление воздуха по ртутному барометру (в *мм*)	762	756	753	752	751	752

Число месяца.	13	14	15	16	17	18
Давление воздуха по ртутному барометру (в *мм*)	753	754	753	754	752	752

Число месяца.	19	20	21	22	23	24
Давление воздуха по ртутному барометру (в *мм*)	749	749	755	744	742	744

Число месяца.	25	26	27	28	29	30
Давление воздуха по ртутному барометру (в *мм*)	752	752	742	750	751	750

Нарисуйте кривую давления воздуха в г. Киеве за сентябрь 1908 г. (Иначе ее называют «барометрическая кривая».)

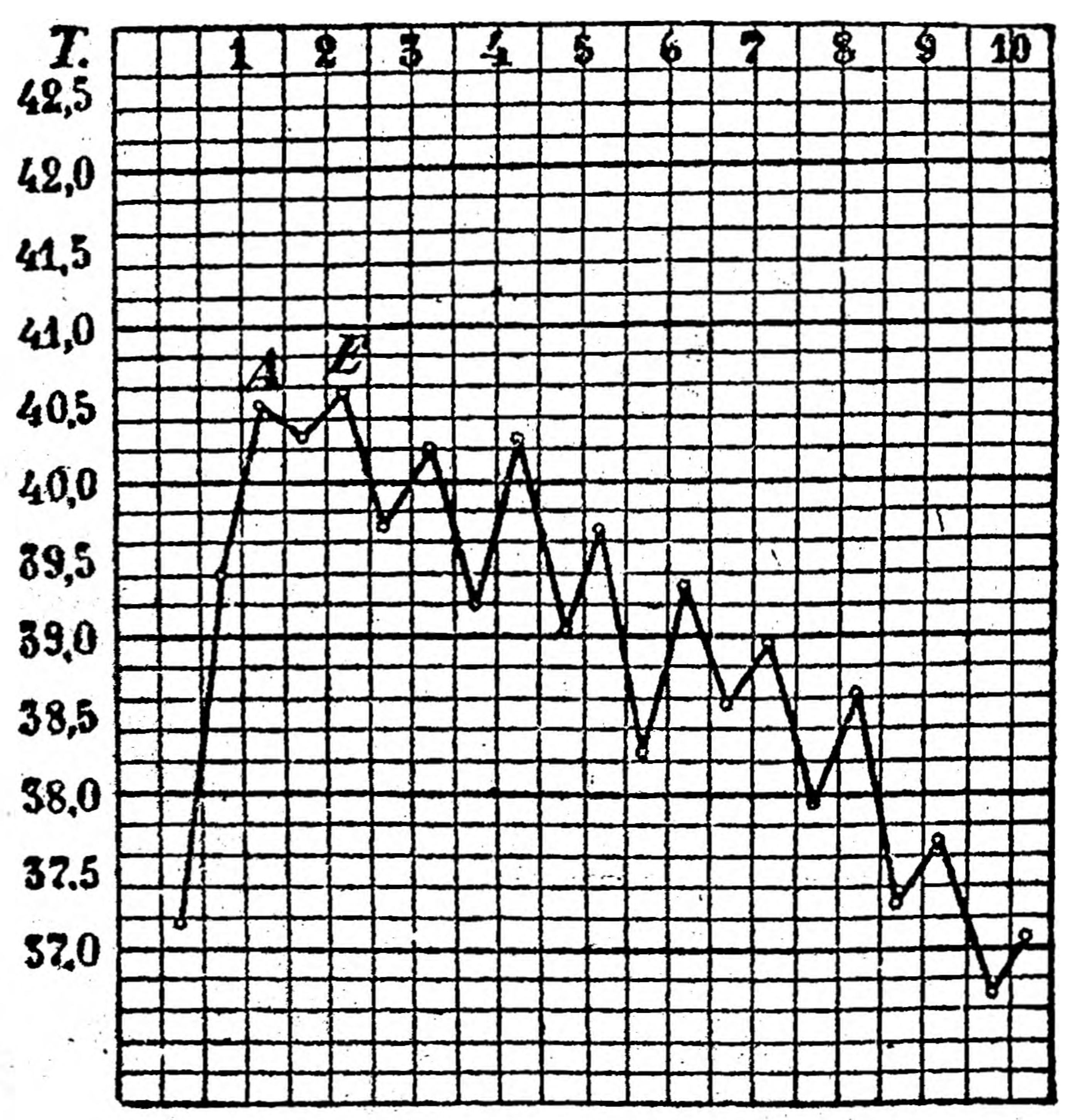


Рис. 101.
Кривая температур при кори.

Пояснение. На оси x-ов надо отложить попрежнему числа месяца, а на оси y-ов — давление воздуха, откладывая через каждые пять миллиметров оси по 1 миллиметру барометрического давления, при чем у начала координат отметьте наименьшее давление (в 742 *мм*).

§ 94. Кривая температуры при болезнях. На рисунке 101 нарисована кривая температур ребенка, больного корью.

Составлена эта кривая следующим образом:

Так как температура больного измерялась дважды в день (утром и вечером), то для каждого дня по оси x-ов отмечено по два деления. На оси y-ов отмечена температура, начиная от 37 градусов.

Какая температура была у больного в первый день болезни утром и вечером?

Какую температуру имел больной утром и вечером на 2-й, на 3-й и так далее день болезни?

Сыпь при кори появляется, когда температура больного достигает наибольшей высоты. Когда у больного появилась сыпь?

У больного скарлатиной температура изменялась следующим образом:

Д н и.	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й
Утром	39,5°	39,3°	39,6°	39,2°	39,0°
Вечером . . .	40,5°	40,6°	40,2°	40,3°	39,6°

Д н и.	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
Утром	38,3°	38,6°	38,0°	37,3°	36,7°
Вечером . . .	39,3°	39,0°	38,7°	37,6°	37,1°

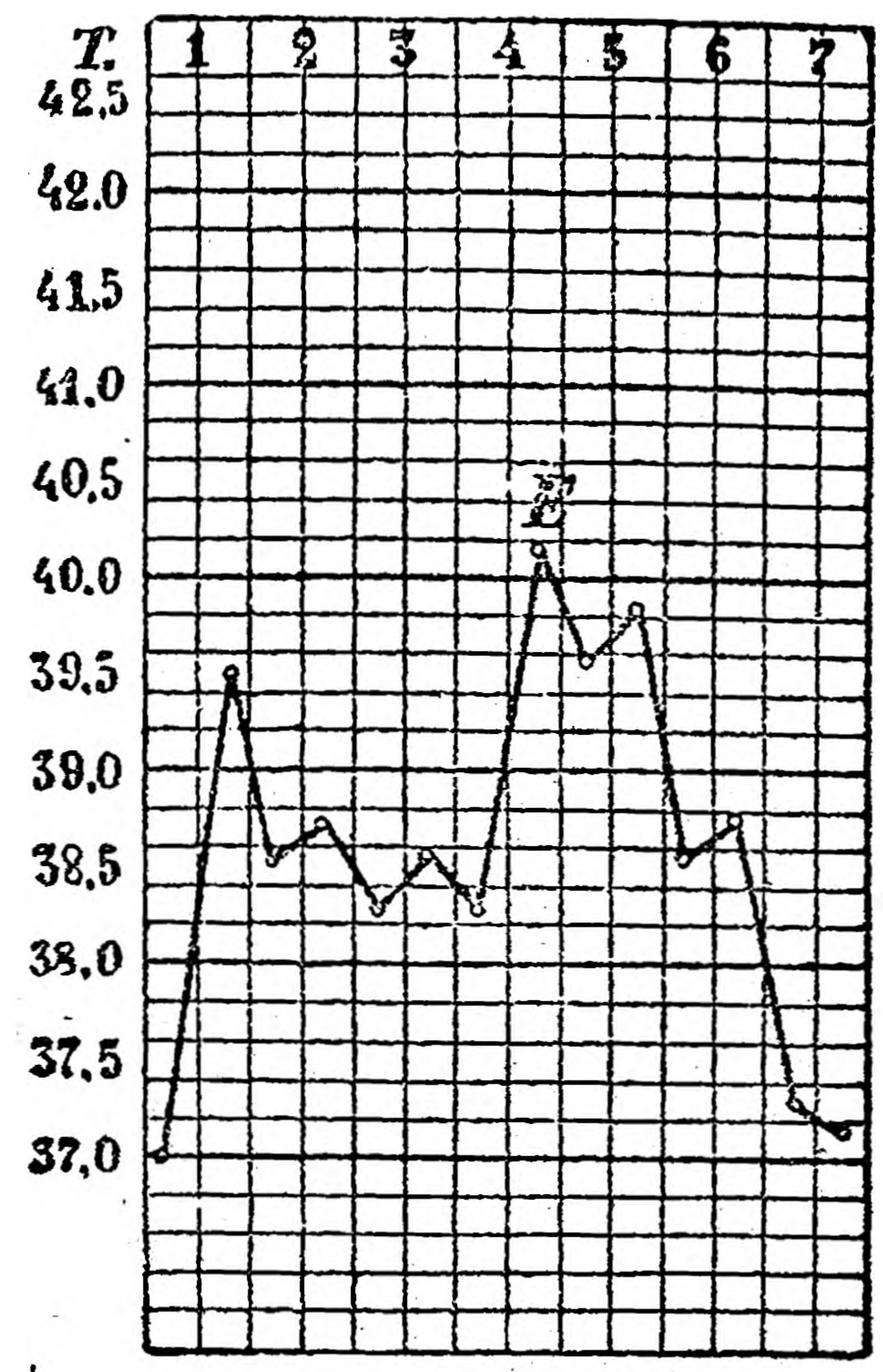


Рис. 102.
Кривая температур при скарлатине.

Нарисуйте кривую температур больного и сравните ее с рисунком 102.

Сравните кривые температур при кори и при скарлатине.

§ 95. Расписание поездов. Здесь (рис. 103) нарисовано графически расписание пассажирских поездов Киево-Полтавской железной дороги.

На оси x-ов отложено время от 8 часов утра до 10 часов вечера, а на оси y-ов отмечены станции, лежащие между Киевом и Полтавой. Узнайте по этому рисунку, когда отходит поезд из Киева. Когда он приходит в Борисполь? Сколько минут стоит он там? Можно ли на основании этой диаграммы определить, когда поезд приходит в Яготин и сколько минут стоит он там? Когда приходит этот поезд в Полтаву?

Проследите таким же самым способом движение поезда, идущего из Полтавы в Киев.

Где и когда эти поезда встретятся?

Попробуйте сами составить такое же графическое расписание для какой-нибудь пары поездов, например, между Москвой и Ленинградом, пользуясь железнодорожным путеводителем.

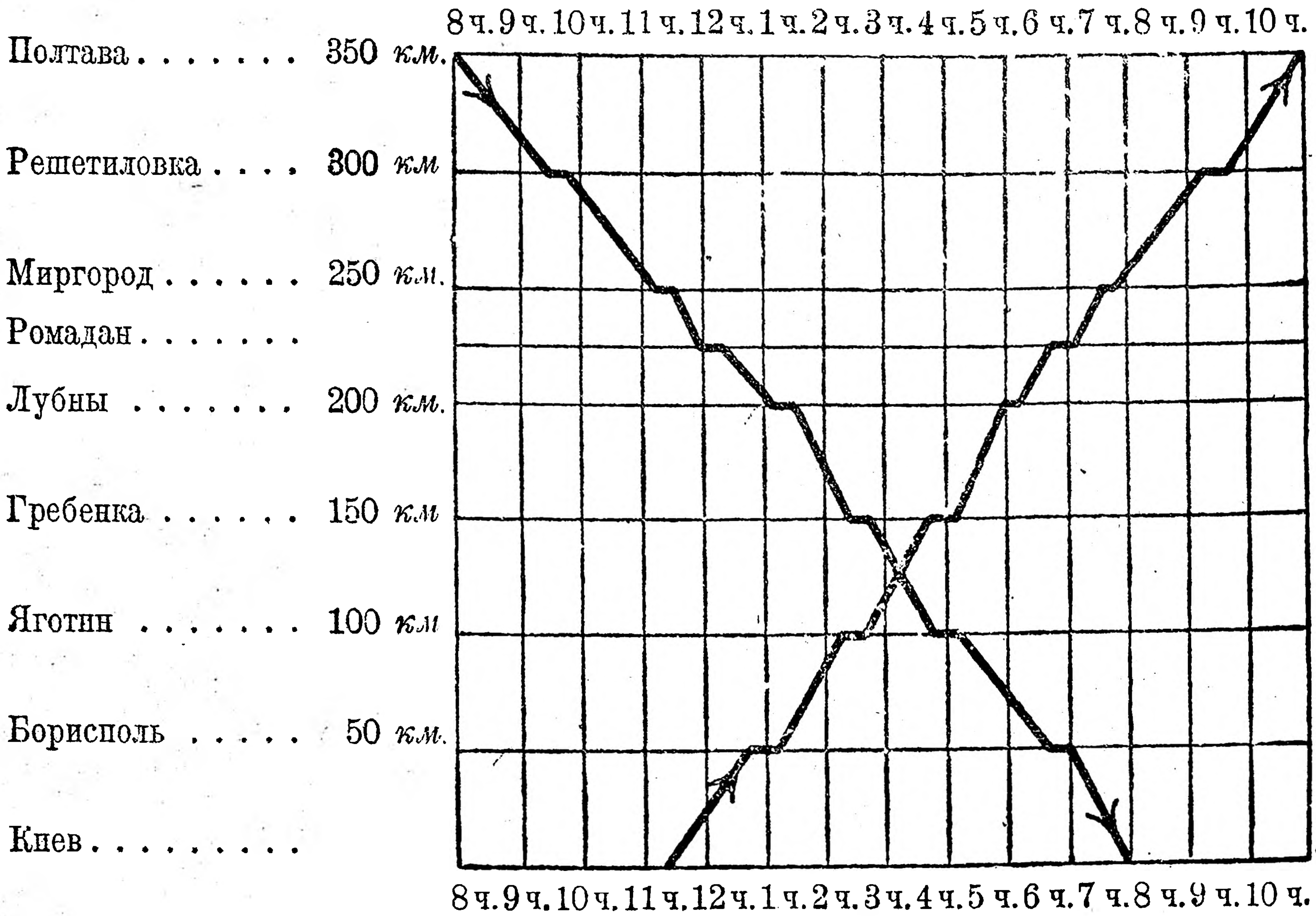


Рис. 103.
Расписание поездов Киево-Полтавской железной дороги.

24. РИСОВАНИЕ ДИАГРАММ.

§ 96. Диаграммы. При помощи чертежей можно наглядно показать размеры величин относительно друг друга и наглядно иллюстрировать распределение частей какой-нибудь величины относительно целой величины. Для примера решим несколько задач.

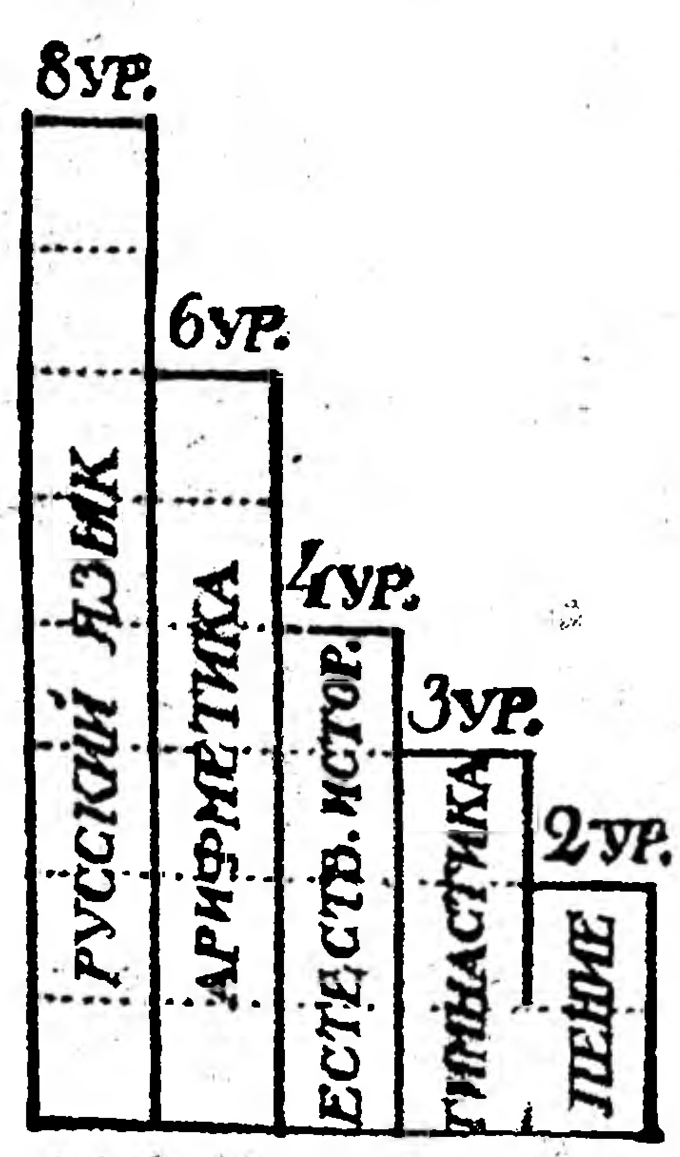


Рис. 104. Диаграмма расписания уроков.

Задача 1. В одной школе в группе в течение одной недели назначено: русского языка 8 уроков, арифметики 6 уроков, естествоведения 4 урока, гимнастики 3 урока и пения 2 урока. Составьте диаграмму расписания уроков, изобразив каждый урок в виде квадрата. (Посмотрите на рис. 104.)

Составьте диаграмму расписания уроков в вашей группе.

Задача 2. Число жителей в крупнейших городах России выражалось в 1914 г. следующими цифрами:

В Петрограде	2100	тысяч человек
» Москве	1500	» »
» Киеве	 600	» »
» Харькове	 300	» »

Составьте диаграмму распределения жителей в этих городах.

Пояснение. Для того, чтобы чертеж не занял слишком много места, надо найти общий наибольший делитель наших чисел (для нашей задачи он равен 300 тысяч) и этот наибольший делитель изобразить квадратом.

Задача 3. Суша составляет приблизительно $^2/_7$ части всей земной поверхности, а вода составляет остальные $^5/_7$ частей ее. Изобразив площадь всей земной поверхности в виде круга, затушуйте $^2/_7$ части этого круга, соответствующие суше.

Задача 4. На рисунке 105 показано наглядно, сколько переслано в среднем писем на 1 человека в 1914 году в разных странах. Исследуйте эту диаграмму. Определите, в какой стране на 1 человека приходится наименьшее число писем, в какой — наибольшее? Сравните — во сколько раз русский гражданин получил в 1914 году меньше писем, чем гражданин Соединенных Штатов, Германии и других стран? (Обращайте внимание только на сравнительную высоту фигур.) Определите, сколько приходилось писем на 1 человека во всех странах, если в Германии приходилось 125 писем?

Соед. Штаты. Германия. Англия. Франция. Россия.

Рис. 105.
Наглядная диаграмма.

Упражнения и задачи.[1]

1. Повесьте за окном термометр. Отсчитывайте по нему температуру воздуха каждый день в один и тот же час в течение целого года и начертите график этих температур.

---

[1]) Большинство помещенных в этой книге задач взято из моего Геометрического задачника.

2. Если у вас составлена кривая температур за целый год, то вычислите среднюю температуру воздуха за каждый месяц и составьте график средней месячной температуры воздуха за год в вашем городе.

	Январь.	Февраль.	Март.	Апрель.	Май.	Июнь.
Ялта	+ $3^1/_2$°	+ $3^1/_2$°	+ $7^1/_2$°	+ 11°	+ 16°	+ 20°
Киев	— 6°	— 5°	0°	+ 7°	+ 15°	+ 17°
Томск	— 20°	— 17°	— 10°	0°	+ 8°	+ 16°
	Июль.	**Август.**	**Сентябрь.**	**Октябрь.**	**Ноябрь.**	**Декабрь.**
Ялта	+ 24°	+ 24°	+ 20°	+ 15°	+ 10°	+ 6°
Киев	+ 19°	+ 17°	+ 14°	+ 8°	0°	— 5°
Томск	+ 19°	+ 16°	+ 9°	0°	— 12°	— 16°

3. На этой таблице указана средняя ежемесячная температура воздуха в трех городах: Ялте, Киеве и Томске. Нарисуйте кривые этих температур, откладывая по оси x-ов месяцы, а на оси y-ов — температуры. Сравните годовой ход температуры в этих городах. В каком из этих городов наиболее тепло, в каком наиболее холодно? В каком более резкое колебание температуры? В какие месяцы температура у всех трех городов близка одна к другой? В каком месяце наибольшая разница температур? Бывают ли в Ялте морозы? А в Киеве? Какова наиболее низкая месячная температура в Ялте?

4. [1]) Мариинская сельскохозяйственная ферма (в Саратовской губ.), желая установить более точно влияние осенних дождей на озимые хлеба (т.-е. такие, которые сеются с осени), измеряла в течение 18 лет количество дождя, выпавшего в августе и сентябре, и сравнивала его с урожаем озимой ржи. Получились такие числа (см. таблицу, стр. 63).

Нарисуйте графики урожая озимой ржи и количество осенних осадков за эти годы и сравните их друг с другом. Нет ли между

---

[1]) Данные для этой задачи взяты мною из «Большой Энциклопедии сельского хозяйства», изд. Девриена, 1903 г., т. VIII, стр. 930 и 939.

этими явлениями какой-либо связи? Попросите сведущих лиц объяснить вам причину этой связи.

В 1885 и 1890 годах рожь сеяли на земле, имеющей много солей (такая земля называется солончаками), а в 1893 году на поле было много мышей. Посмотрите, как это отразилось на урожае.

Осенний дождь.	Год посева ржи	1879	1880	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887
	Какой высоты слой дождя покрывал землю (в *мм*) в августе и сентябре	50	100	75	20	60	135	110	128	50
Урожай ржи.	Сколько пудов ржи дала десятина	20	71	55	29	79	68	50	65	50
	Год сбора ржи	1880	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888
Осенний дождь.	Год посева ржи	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895	1896
	Какой высоты слой дождя покрывал землю (в *мм*) в августе и сентябре	70	80	30	62	46	34	110	85	55
Урожай ржи.	Сколько пудов ржи дала десятина	100	98	30	108	30	75	160	90	78
	Год сбора ржи	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897

5. Записывайте ежедневно, в котором часу вы встаете и в котором ложитесь спать, и составьте соответствующий график.

6. В таблице (см. стр. 64) указано в миллионах пудов количество чугуна, выплавленного на юге России, на Урале, в Польше и около Москвы, начиная с 1897 года по 1912 год. Представьте эту таблицу в виде графика.

7. Если у вас дома кто-нибудь заболеет, и ему надо будет ежедневно измерять температуру, то вы записывайте эту температуру графикой.

Годы	1897	1898	1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912
Юг России	48	60	80	90	90	85	85	110	102	102	110	112	120	125	150	175
Урал	40	44	44	50	48	45	38	37	42	37	38	35	35	40	45	50
Польша	12	15	18	18	19	16	17	20	15	18	16	12	12	14	20	25
Около Москвы	10	11	12	12	10	8	8	8	8	7	6	6	6	7	8	9

8. Метр больше аршина приблизительно в 1,4 раза. Составьте такой график: на оси x-ов отложите метры, а на оси y-ов — аршины; отметьте теперь ряд точек, имеющих такие координаты: 1 *м* = 1,4 арш.; 2 *м* = 2,8 арш.; 5 *м* = 7 арш. и т. д. Соединив каждую пару точек отрезками, вы увидите, что они составят одну общую прямую. Эта прямая даст вам возможность быстро переводить метры в аршины и обратно. Найдите по этому графику, скольким аршинам равняется 8,4 метра; 12,5 метра. Скольким метрам равняется 5 арш.? 7 арш.? 4,5 арш.?

9. Нарисуйте диаграммой скорости движения:

пешеход . . . . . . 4 *км* в час.	лошадь . . . . . . 10 *км* в час.
велосипедист . . . 20 » » »	поезд . . . . 50 » » »
муха . . . . 16 » » »	ласточка . . . . . 150 » » »
грач . . . . 32 » » »	орел . . . . 100 » » »

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КУРС

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ
ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ФИГУРЫ

ГЛАВА VIII.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ.

25. ТЕЛО, ЕГО ОБЪЕМ И ПОВЕРХНОСТЬ. ЛИНИЯ И ТОЧКА.

§ 97. Геометрическое тело. В 1-й части мы познакомились со многими телами, при чем мы не интересовались тем материалом, из которого сделаны тела, а изучали форму пространства, занимаемого этими телами, другими словами, мы изучали *геометрические тела*, а не физические.

§ 98. Объем тела. Каждое из исследуемых тел занимает *определенную часть пространства*, которую *называют объемом тела* (вспомните все то, что говорили мы об объеме куба и призмы в §§ 42, 50 и 51).

§ 99. Поверхность тела. Для того, чтобы изучить форму тела, мы прежде всего исследовали его поверхность, то-есть то, что ограничивает тело со всех сторон и отделяет его от всего остального наружного пространства.

Так, например, исследуя форму тел, мы заметили, что границей куба, призмы, пирамиды служат несколько пересекающихся друг с другом плоских поверхностей (грани), шар ограничен со всех сторон одной кривой сферической поверхностью. Границей цилиндра сверху и снизу служат плоские поверхности в форме круга, а с боков цилиндр ограничен кривой цилиндрической поверхностью. Границей конуса с боков служит кривая коническая поверхность, а снизу — плоский круг.

Итак, *граница тела называется поверхностью*, при чем поверхности бывают плоскими и кривыми.

§ 100. Линия как граница поверхности. Возьмите любое тело, ограниченное плоскостями (например, призму). Каждые две пересекающиеся плоскости дают в сечении прямую линию (укажите их).

У конуса и цилиндра мы можем найти случай пересечения кривой поверхности с плоскостью, при чем в сечении мы получали кривую линию — окружность [1]).

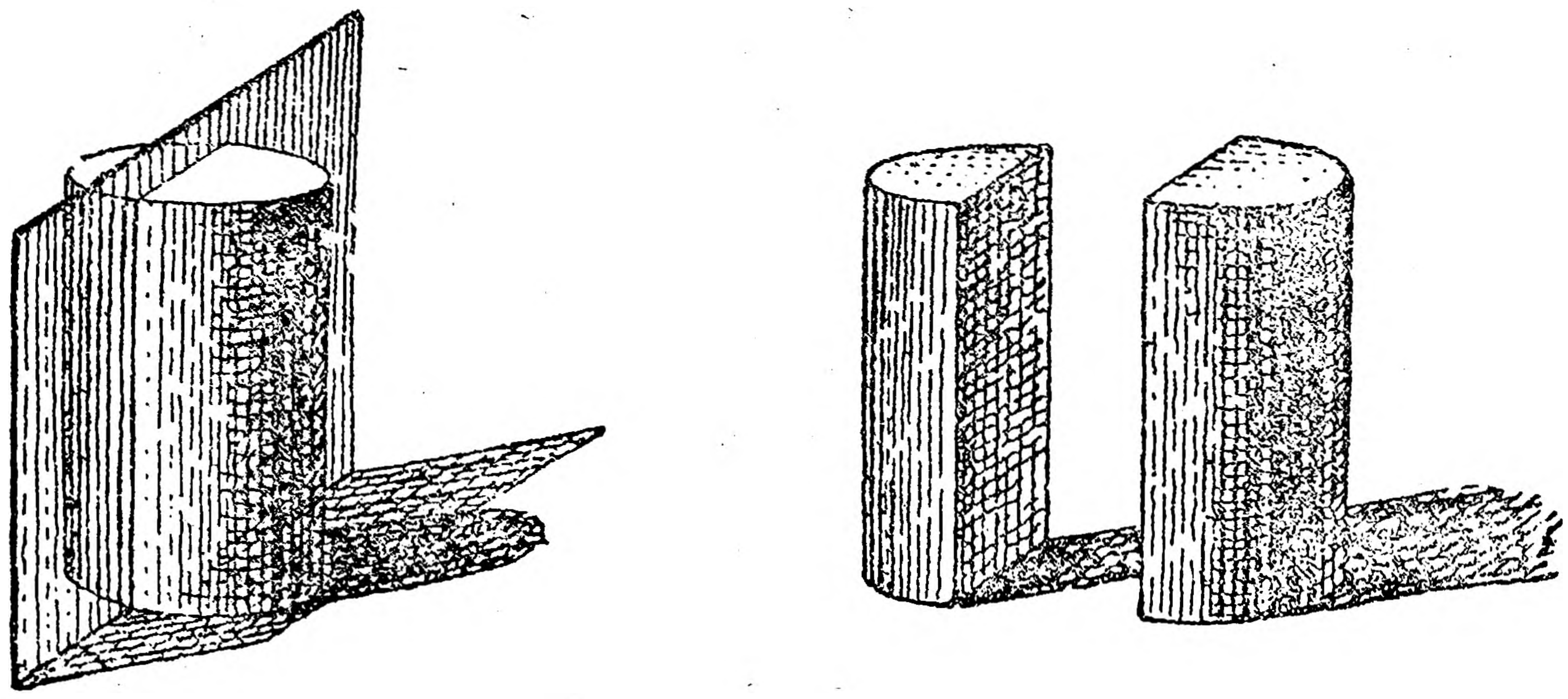


Рис. 106.
При пересечении цилиндрической поверхности плоскостью могут получиться прямые линии.

Итак, линия — это граница поверхности. Линии бывают прямые и кривые.

§ 101. Точка как граница линии. На изученных телах мы заметили, что две линии давали нам в пересечении точку, которую можно рассматривать как границу линии.

§ 102. Тело как след от движущейся плоскости. При вращении плоской поверхности в форме круга вокруг диаметра мы получили шар (§ 74). При вращении плоского прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 82) получился цилиндр (§ 81); наконец, при вращении прямоугольного треугольника вокруг одной из его сторон, образующей с другой стороной прямой угол (рис. 85), мы получили конус (§ 86).

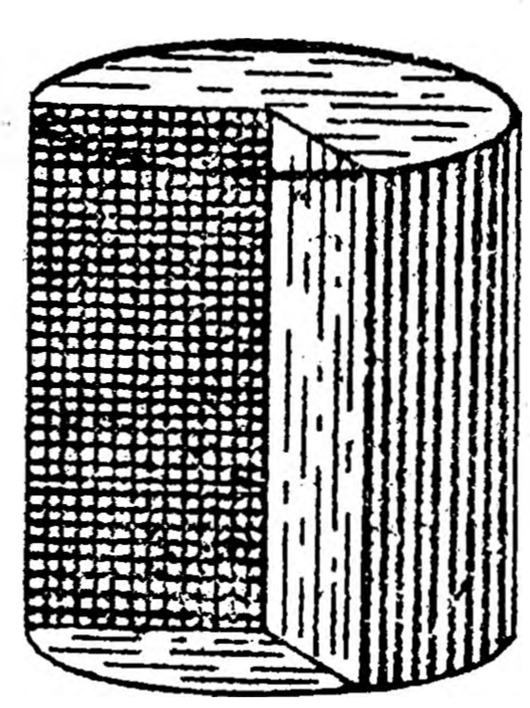


Рис. 107.
Цилиндр как тело, получаемое от вращения прямоугольника.

Следовательно, тело может еще получиться как след от движения поверхности.

§ 103. Поверхность как след от движущейся линии. В § 74 кривая линия в форме окружности, вращаясь, описывала шаровую поверхность. В § 86

[1]) Две плоскости при пересечении всегда дают прямую линию. Кривая же поверхность, пересекаясь с плоскостью, дает в сечении иногда кривую линию, иногда же прямую. Разрежьте, например, цилиндрическую пробку так, чтобы получился в сечении прямоугольник, ограниченный прямыми линиями (рис. 106).

прямая линия (сторона треугольника, укажите ее), вращаясь, описывала коническую поверхность, а другая описывала плоскую поверхность в виде круга.

Следовательно, *поверхность можно рассматривать как след, получаемый при движении какой-нибудь линии.*

§ 104. Линия как след от движущейся точки. В § 81 и § 86 точки прямоугольника и треугольника описывали кривую линию в виде окружности. Когда вы рисуете какую-нибудь линию, то она является следом от движения точки: острия карандаша.

Итак, *линию можно рассматривать как след от движения точки.*

ГЛАВА IX.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ.

26. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОЙ.

§ 105. Обозначение точек. Я нарисую на классной доске несколько точек. Для того, чтобы отличать одну точку от другой, нужно каждой точке дать свое название, свое имя. Названием каждой точки служит обыкновенно одна из букв французского или латинского алфавита (рис. 108). Эту букву пишут *возле* данной точки. Буквы берутся обыкновенно заглавные.

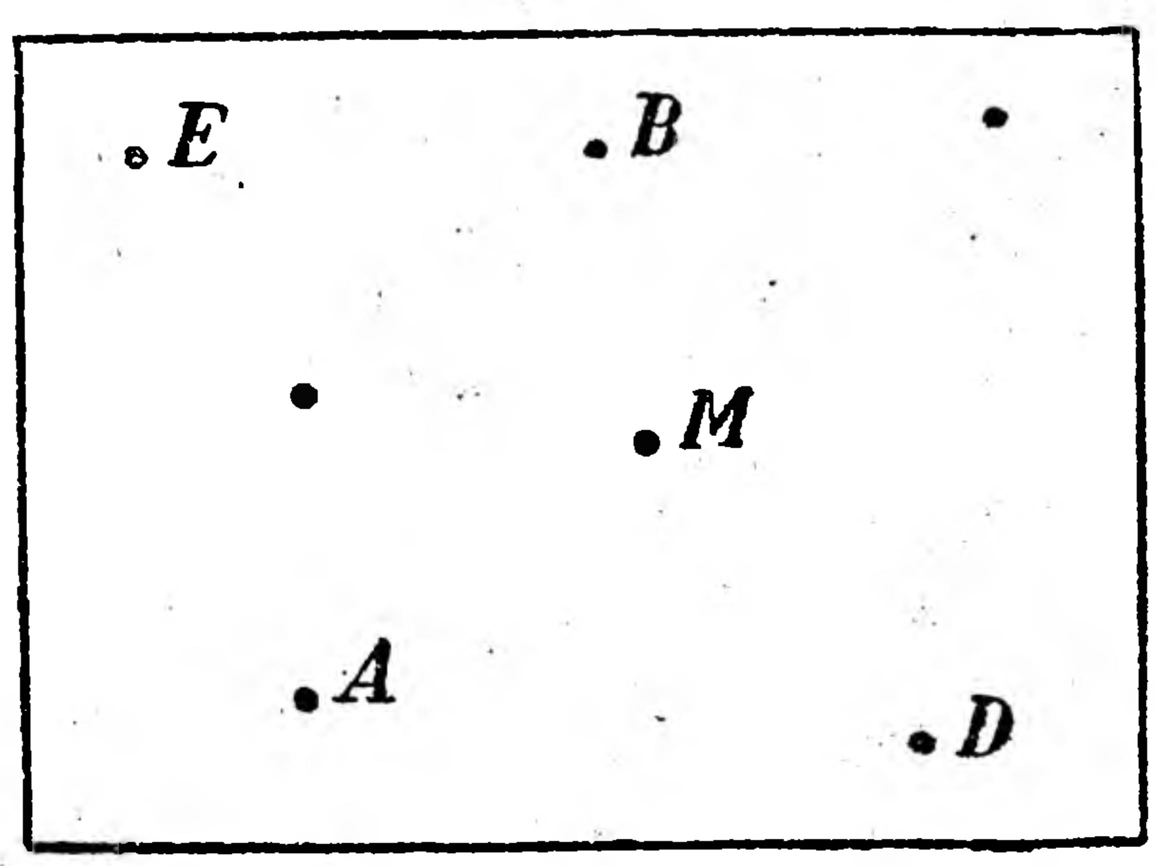


Рис. 108.

§ 106. Между двумя точками можно провести только одну прямую.

Опыт. Нарисуйте две какие-нибудь точки и обозначьте каждую из них какой-нибудь буквой. Пусть одна точка будет называться A, другая B (рис. 109). Приведите через эти две точки прямую линию. Попробуйте нарисовать еще несколько прямых линий так, чтобы они прошли через те же две точки.

Вы заметите, что каждая новая прямая будет сливаться с уже нарисованной. *Между двумя точками можно провести только одну прямую линию.*

§ 107. Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками.

Опыт. Пусть каждый из вас нарисует у себя в тетради две какие-нибудь точки и соединит их линиями самого разнообразного

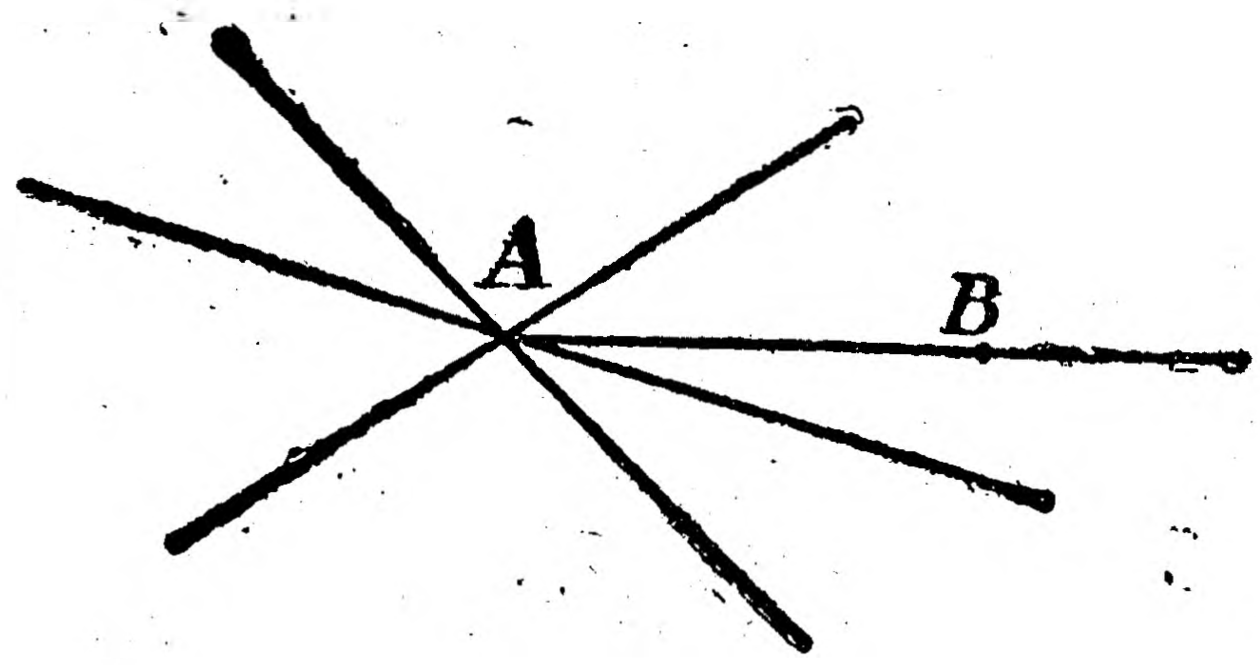


Рис. 109.
Между двумя точками можно провести только одну прямую.

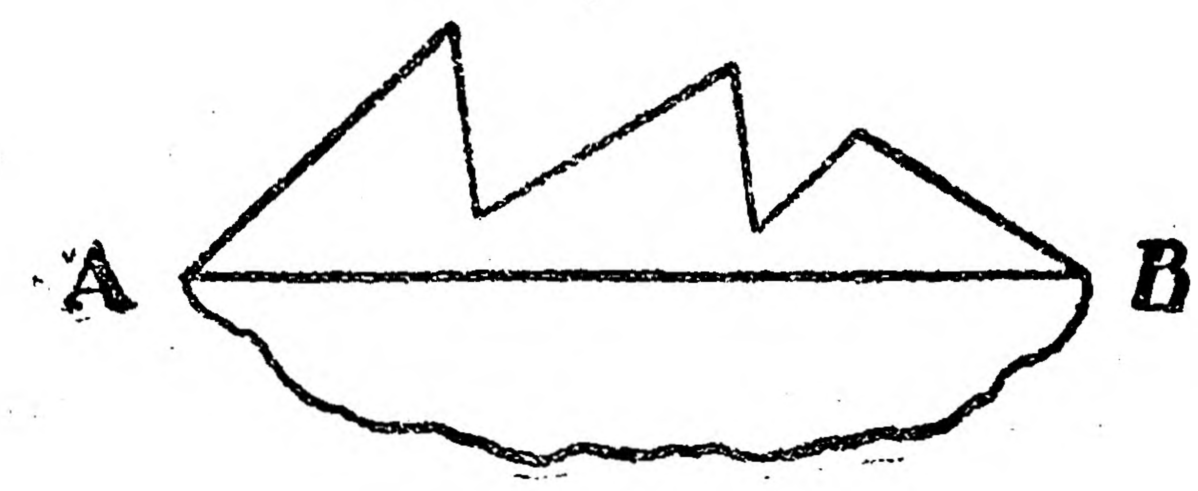


Рис. 110.
Прямая линия—кратчайшее расстояние между двумя точками.

вида. У нас на рис. 110 между точками *A* и *B* проведены, во-первых, кривая линия (укажите ее), во-вторых, линия, составленная из нескольких прямых, идущих друг к другу под углом (такая линия называется ломаной), и, наконец, проведена прямая линия.

Узнайте теперь, какая из всех этих линий самая короткая. Положите аккуратно на каждую из этих линий нитку и отрежьте от нее часть, равную по длине этой линии. Выпрямив эти нитки, вы получите длину каждой линии. Посмотрите, какой длины оказались наши линии на рисунке 111.

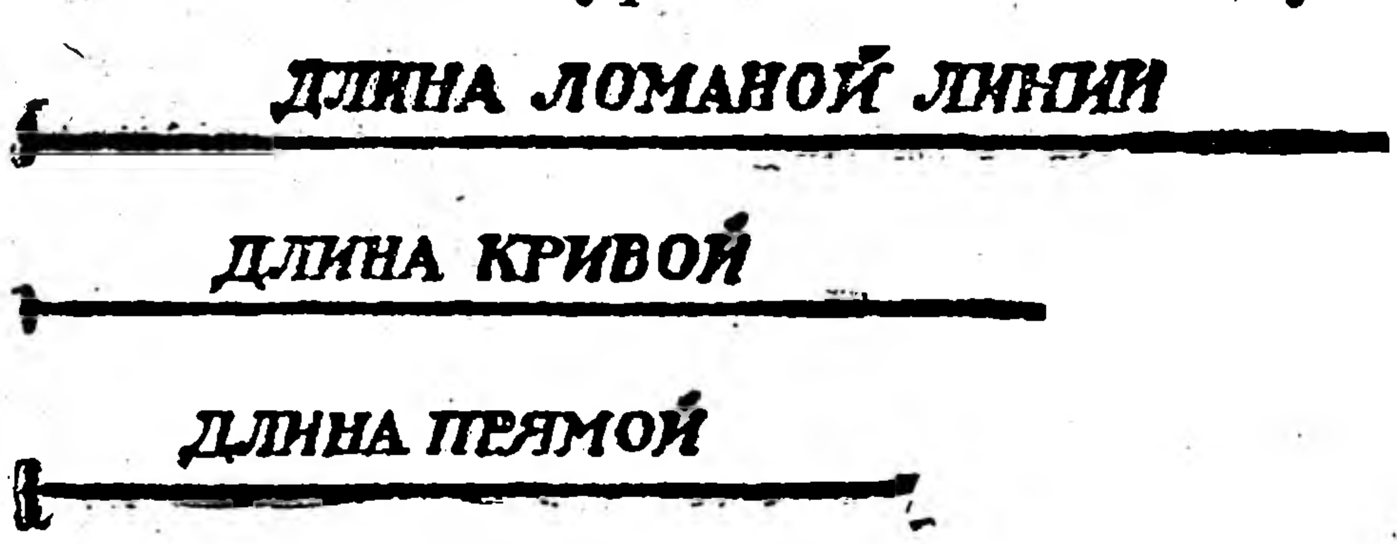


Рис. 111.

Легко заметить, что у меня на рисунке самой короткой линией оказалась прямая. А у вас? Итак, у всех нас оказалось, что **прямая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками.**

27. ИЗМЕРЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ.

§ 108. Прямая — беспредельна.

Опыт. Нарисуйте при помощи линейки на классной доске какую нибудь прямую линию. Возьмите теперь более длинную линейку и приложите ее к нашей прямой. При помощи этой линейки вы можете сделать нашу прямую более длинной. Удлините теперь нашу прямую в обе стороны, насколько позволяют вам размеры доски. Всю ли прямую нарисовали вы? Конечно, нет. Если бы доска наша была больших размеров, то и прямую можно было бы еще удлинить. Итак, каждую прямую можно удлинять без конца в обе стороны. Каждая прямая линия—беспредельна.

§ 109. Отрезок прямой линии. Часто нас интересует не вся прямая, а только часть ее. Часть прямой называется отрезком прямой.

Двум точкам, находящимся у концов отрезка, дают какие-нибудь названия, например, точка *B* и точка *D*, а сам отрезок читается так: *BD* или *DB*.

Займемся изучением свойств отрезков прямой линии, при чем для краткости будем говорить, вместо «отрезок прямой», просто «прямая».

§ 110. Рисование отрезка прямой, равного по длине данному отрезку.

Опыт 1. Вы можете решить эту задачу так: взявши достаточно длинную бумажную полоску, приложите ее к нашему отрезку *AB* и отметьте на бумажке концы его *A* и *B*.

Нарисовав у себя в тетради какую-нибудь прямую произвольной длины и приложив к ней бумажную полоску, вы без труда отложите в желаемом месте данный отрезок *AB*.

Опыт 2. Если вы хотите исполнить эту задачу по возможности точнее, то воспользуйтесь циркулем, оба конца которого заострены (рис. 112). Раздвиньте ножки циркуля так, чтобы острия ножек упирались в концы данного отрезка *A* и *B*. Не изменяя расстояния между ножками циркуля, перенесите его и поставьте острия на ту неопределенной длины прямую, на которой вы хотите отложить отрезок *AB*.

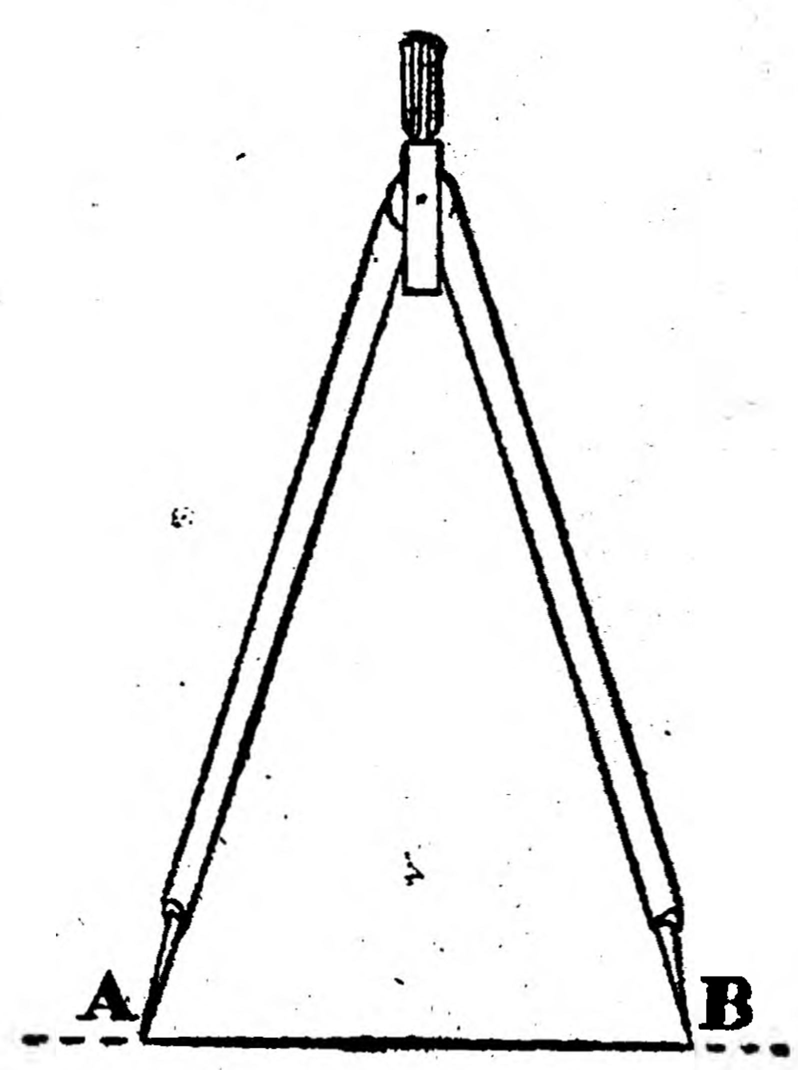


Рис. 112.

§ 111. Как перенести отрезок прямой большой длины. Плотникам поручено снять старый забор и перенести его на новое место. Плотники прежде всего должны выяснить, хватит ли этого старого забора или еще придется добавлять к нему часть нового. Как узнать это? Если забор не особенно длинный, то плотники отрежут кусок веревки, равный длине старого забора, и перенесут этот кусок туда, где хотят построить новый забор. Но если забор достаточно длинный, то такой способ неудобен, ибо приходится тащить за собой длинную веревку, да и не всегда ее можно найти под рукой. Плотники сделают так: возьмут какую-нибудь палку и, укладывая ее вдоль забора, сосчитают, сколько раз эта палка уложится вдоль забора. Отложивши эту же самую палку столько же раз в новом направлении, они и получат прямую, равную по длине нашему забору.

§ 112. Единица измерения длины. Такой способ измерения длины забора палкой неудобен тем, что, если вам захочется сообщить кому-нибудь длину вашего забора, то вы должны каждый раз показывать и ту палку, которой производили измерение, ибо мерка взята нами совершенно произвольная.

Поэтому при измерении прямой линии пользуются отрезком определенной длины. Такой отрезок прямой называется единицей измерения длины.

В древности за единицу длины принимали длину какой-либо части человеческого тела. Так, например, египтяне измеряли прямую линию «локтем» (расстояние от локтя до конца пальцев), «ладонью» (наиболее широкая часть ее), длиною ступни «четвертью», «шагами» и прочее. Так как длина этих частей тела не у всех людей одинаковая, то с течением времени каждое государство установило свою систему измерения, образцы которых тщательно хранятся в особых помещениях. Такие образцы мер называются эталонами.

С единицами измерения длины мы уже познакомились в 1-й части и, там мы достаточно подробно говорили об измерении отрезков прямых линий при помощи этих единиц.

28. МЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ.

§ 113. Метр. В настоящее время как в науке, так и во всех культурных странах употребляется французская система единиц измерения. Эта система мер вводится теперь и в наших республиках. В основу этой системы положен отрезок прямой, равный (приблизительно) 1/40000000 меридиана, проходящего через город Париж. Этот отрезок называется метром. Вот почему вся система единиц измерения называется метрической.

Метр равен (приблизительно) 1,4 аршина, то-есть он почти в полтора раза длиннее аршина. Нарисуйте на доске отрезок длиною в один метр, а под ним отрезок в 1 аршин.

§ 114. Единицы измерения большие, чем метр. Для измерения прямых линий большой длины существуют следующие единицы измерения: 10 метров называются декаметром (по-гречески дека—

десять); отмерьте во дворе расстояние, равное декаметру; 10 декаметров, то-есть 100 метров, называются гектометром (гекто по-гречески—сто), и, наконец, длина в 10 гектометров, то-есть в 1000 метров, называется километром (кило по-гречески — тысяча). Километр немного короче старой русской меры — версты.

§ 115. Единицы измерения меньшие, чем метр. Для измерения прямых более коротких, чем метр, употребляются следующие единицы измерения:

Каждую десятую часть метра называют дециметр (децем по-латыни — десять). Десятую часть дециметра, т.-е. сотую часть метра, называют сантиметр (центум по латыни—сто). Наконец, десятая

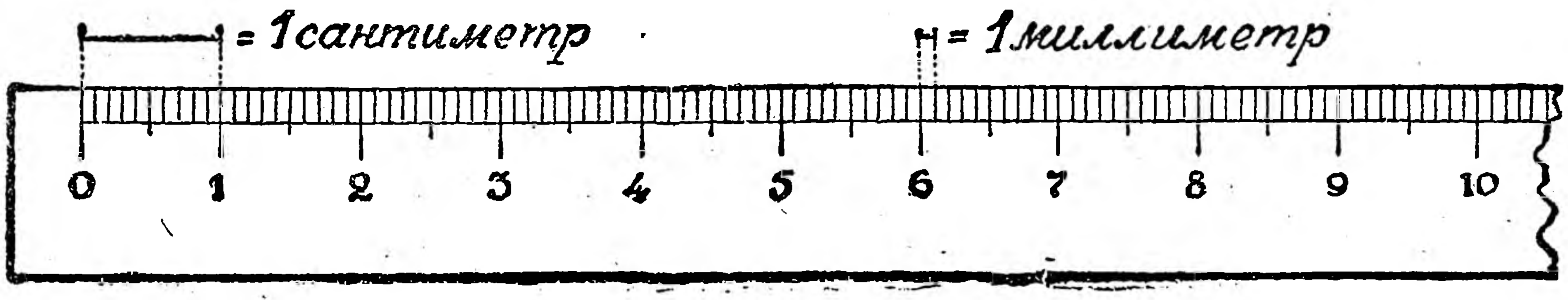


Рис. 113.
Измерительная линейка, разделенная на сантиметры и миллиметры.

часть сантиметра, то-есть тысячная доля метра, называется миллиметром (милле по-латыни — тысяча).

§ 116. Таблица метрических единиц измерения длины. Таким образом мы получим следующую таблицу метрических единиц.

Километр имеет	1000 метров.
Гектометр »	100 »
Декаметр »	10 »
Метр (равен приблизительно 1,4 аршина).	
Дециметр составляет	$^1/_{10}$ метра.
Сантиметр »	$^1/_{100}$ »
Миллиметр »	$^1/_{1000}$ »

Из этих единиц измерения особенно употребительны: километр, метр, сантиметр и миллиметр. В дальнейшем нашем курсе мы будем пользоваться исключительно метрической системой измерения. Для того, чтобы яснее представлять себе связь этих метрических единиц с старыми русскими единицами, надо помнить, что километр немного меньше версты (0,9 версты), метр в полтора (приблизительно) раза больше аршина (1,4 аршина), каждые 2 метра немного меньше сажени, каждые $2^1/_2$ сантиметра (или 25 миллиметров) дают дюйм. Слово «километр» будем в дальнейшем курсе сокращенно писать так: «*км*»; сантиметр «*см*»; миллиметр будем сокращенно записывать «*мм*».

Полезно запомнить, что длина обыкновенной спички приблизительно равна 5 сантиметрам.

29. СЛОЖЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ.

§ 117. Сложение отрезков прямых линий.

Опыт 1. Положите несколько (незаостренных) карандашей вдоль какой-нибудь прямой линии так, чтобы они прикасались друг к другу своими концами.

Если вы склеите концы их, то получите один большой карандаш, равный по длине сумме всех взятых карандашей. Таким образом вы сделали действие сложения.

Опыт 2. Нарисуйте два произвольной длины отрезка прямых линий. Надо сложить их. Отрежьте две бумажные разноцветные полоски, равные по длине данным прямым (§ 110), и склейте их концами так, как показано на рисунке 114. Укажите на этом рисунке прямую, равную сумме наших отрезков.

Рис. 114.
Сложение прямых линий.

Опыт 3. Если вы хотите сделать сложение отрезков прямых линий более точно и аккуратно, то воспользуйтесь циркулем. Нарисуйте неопределенной длины прямую линию и на нее перенесите циркулем (§ 110) сначала отрезок AB, а потом рядом с ним перенесите другой отрезок CD. У вас получится прямая AD, равная сумме наших отрезков.

Совершенное вами действие можно записать так:

$$AD = AB + CD.$$

Нарисуйте прямую, равную сумме сторон какого-нибудь треугольника. Сумма сторон треугольника называется его периметром.

ГЛАВА X.

УГОЛ.

30. ПОСТРОЕНИЕ УГЛА, РАВНОГО ДАННОМУ.

§ 118. Угол, его стороны и вершина. Нарисуйте две прямые, имеющие различное направление. Удлиняйте их до тех пор, пока они не встретятся в какой-нибудь точке. Как называется полученная фигура (рис. 115)? Укажите вершину этого угла. Укажите его стороны.

§ 119. Обозначение угла. Величина угла (§ 9) зависит только от направления его сторон (длина сторон на величину угла не влияет). Следовательно, для того, чтобы отличить один угол от другого, достаточно отметить направление сторон, его образующих.

Рис. 115.

На рис. 115 положение одной стороны отмечено точками A и B, а другой точками A и C. Самый же угол читается и записывается так:

$$\angle BAC \text{ или } \angle CAB$$

(название вершины угла надо писать в середине). Значок $\angle$ заменяет слово «угол».

Нарисуйте какой-нибудь угол. Назовите и прочитайте его.

§ 120. Рисование угла. Я нарисую какой-нибудь угол (например, такой: рис. 115) и предложу вам нарисовать у себя угол, равный моему. Это можно сделать так: наложивши на мой угол листок бумаги, согните из него угол, равный данному. Перенесите теперь этот бумажный угол к себе на тетрадь и обведите карандашом его стороны. Вы и получите угол, равный моему.

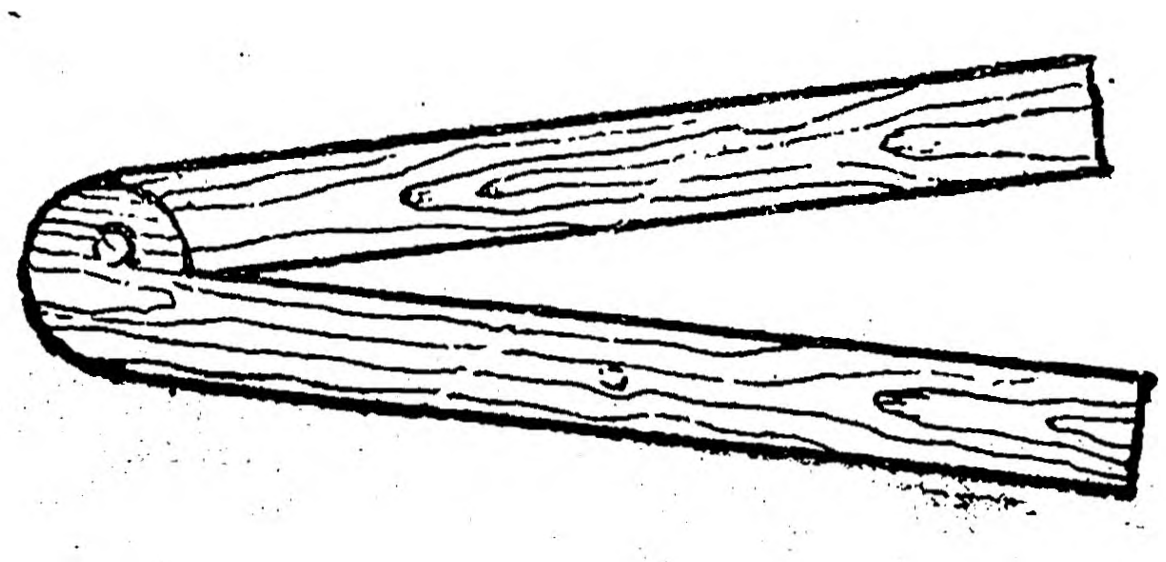


Рис. 116. Малка.

§ 121. Рисование при помощи малки. Плотники рисуют угол, равный данному углу, при помощи инструмента, который называется малкой (рис. 116). Этот прибор вы легко можете приготовить сами. Возьмите две деревянных или картонных линейки (а еще лучше две проволоки) и скрепите их у одного из концов булавкой или ниткой так, чтобы эти линейки могли вращаться подобно ножкам циркуля.

Как при помощи малки нарисовать угол, равный данному?

31. СЛОЖЕНИЕ УГЛОВ.

§ 122. Сложение двух углов, вырезанных из бумаги. Вырежьте из разноцветной бумаги два угла: $\angle ABC$ и $\angle DFM$ (рис. 117). Приложите их друг к другу так, как указано на рис. 118. Вы тогда склеите из них новый угол $\angle KFM$, который называется суммой наших углов, а сделанное вами действие называется сложением углов.

§ 123. Сложение двух углов при помощи малки. Надо сложить два угла (рис. 117). Нарисуйте при помощи малки сначала угол, равный одному из наших углов, например $\angle DFM$. Затем при

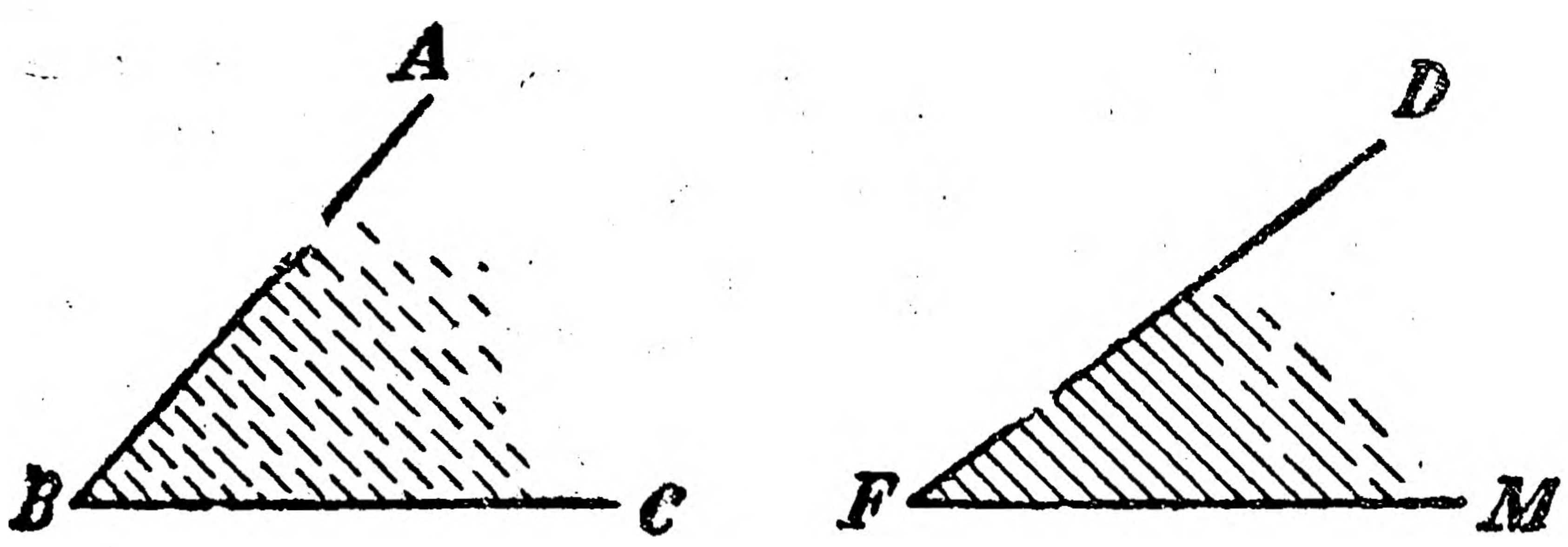


Рис. 117.

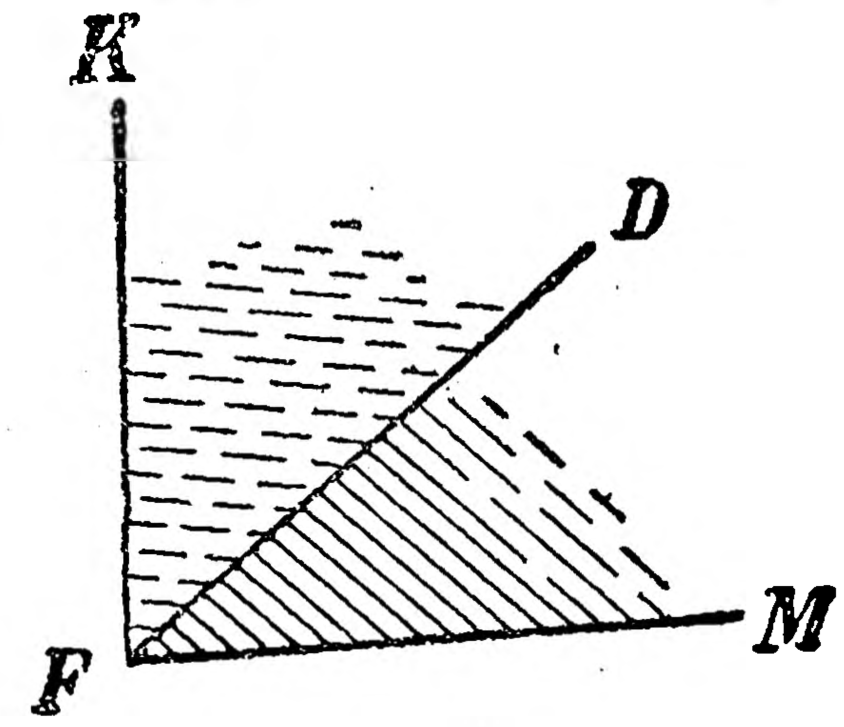


Рис. 118.

помощи той же малки приложите к этому углу второй угол ABC так, чтобы вершины у этих углов совпали, и чтобы сторона BC пошла по стороне FD.

У вас получится один большой угол KFM (рис. 118). Этот угол называется суммой наших углов.

Действие сложения можно записать так:

$$\angle KFM = \angle DFM + \angle ABC.$$

32. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УГЛОВ.

§ 124. Смежные углы. Нарисуйте какой-нибудь угол, например, $\angle BAC$ (рис. 119). Приложивши к одной из его сторон (например, к стороне AC) линейку, удлините эту сторону так, чтобы образовался еще один угол. Нетрудно заметить, что полученные два угла имеют одну общую сторону (какую?), две же другие стороны (AD и AC) составляют одну прямую (DC). Два таких угла называются смежными углами.

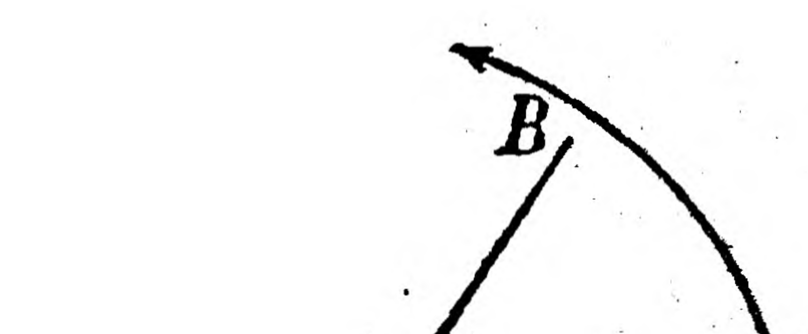


Рис. 119.

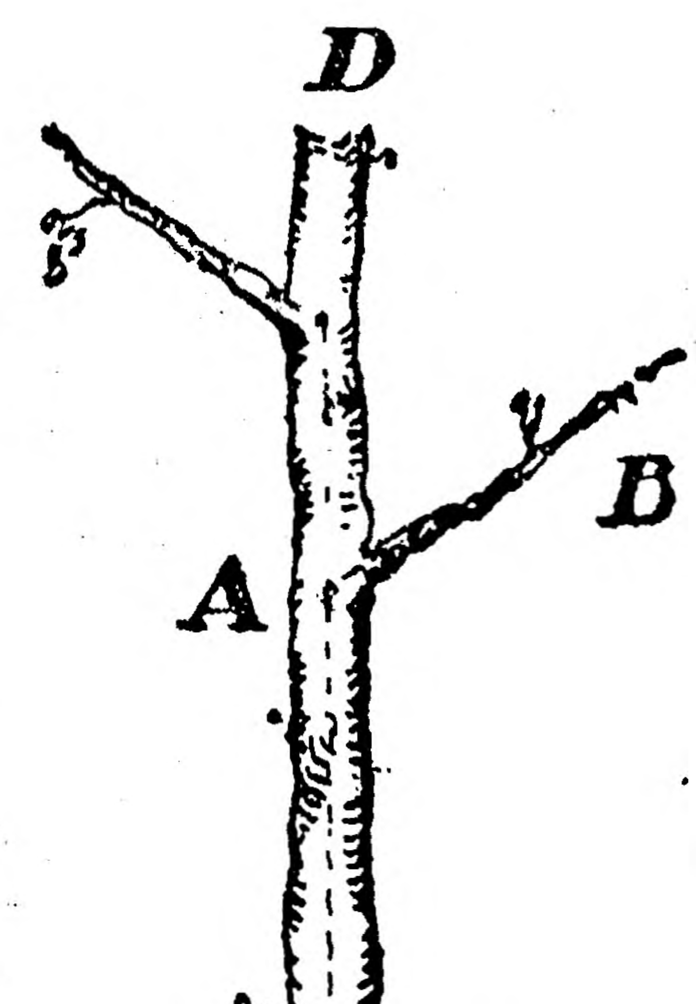


Рис. 120. Смежные углы.

Посмотрите, сколько углов образуют ветка и ствол этого дерева? Где вершина этих двух углов, а где стороны их (рис. 120)?

§ 125. Прямой угол. Положите две вязальных спицы так, чтобы образовалось два смежных угла (рис. 119). Начните теперь вращать общую сторону AB этих углов вокруг вершины A до тех пор, пока правый угол не сделается равным левому углу (как это узнать?). Вы получите тогда два равных смежных угла (рис. 121).

Каждый из двух равных смежных углов называется прямым углом.

§ 126. Острый и тупой угол. Остановим свое внимание на первоначальном положении стороны AB (рис. 119). В наших смежных углах сторона AB образовывала справа угол, меньший прямого. Убедитесь в этом при помощи наугольника). Всякий угол, меньший прямого, называется острым углом (посмотрите рис. 21).

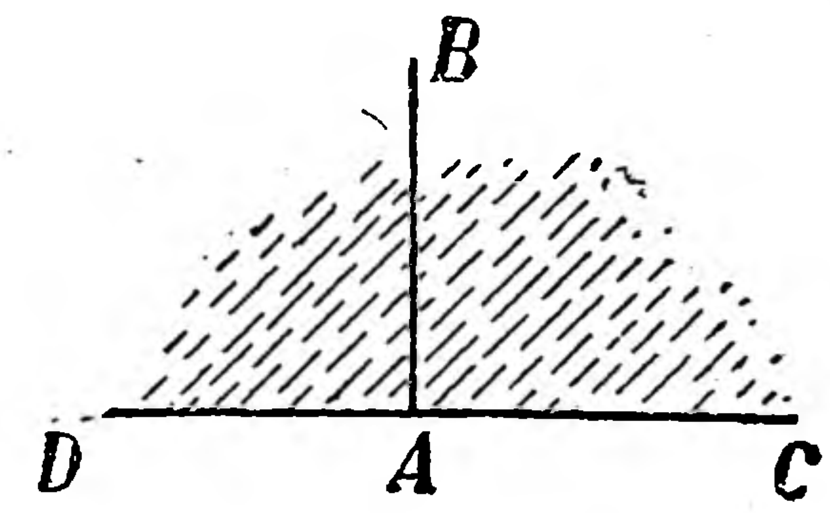


Рис. 121. Прямые углы.

Слева получился угол $\angle BAD$, больший прямого. Угол, больший прямого, называется тупым углом (посмотрите рис. 20).

33. ПРЯМОЙ УГОЛ И ПЕРПЕНДИКУЛЯР.

§ 127. Наклонная и перпендикулярная прямая. Вернемся к опыту, проделанному в § 125.

Опыт. Передвиньте общую сторону AB (рис. 119) так, чтобы она совпала со стороною AC [1]. Начнем теперь вращать сторону AB по направлению стрелки.

В начале опыта прямая AB будет составлять вместе с прямой DC два неравных друг другу косых угла: справа острый, а слева тупой. В таком случае прямую AB называют наклонной к прямой DC (рис. 122).

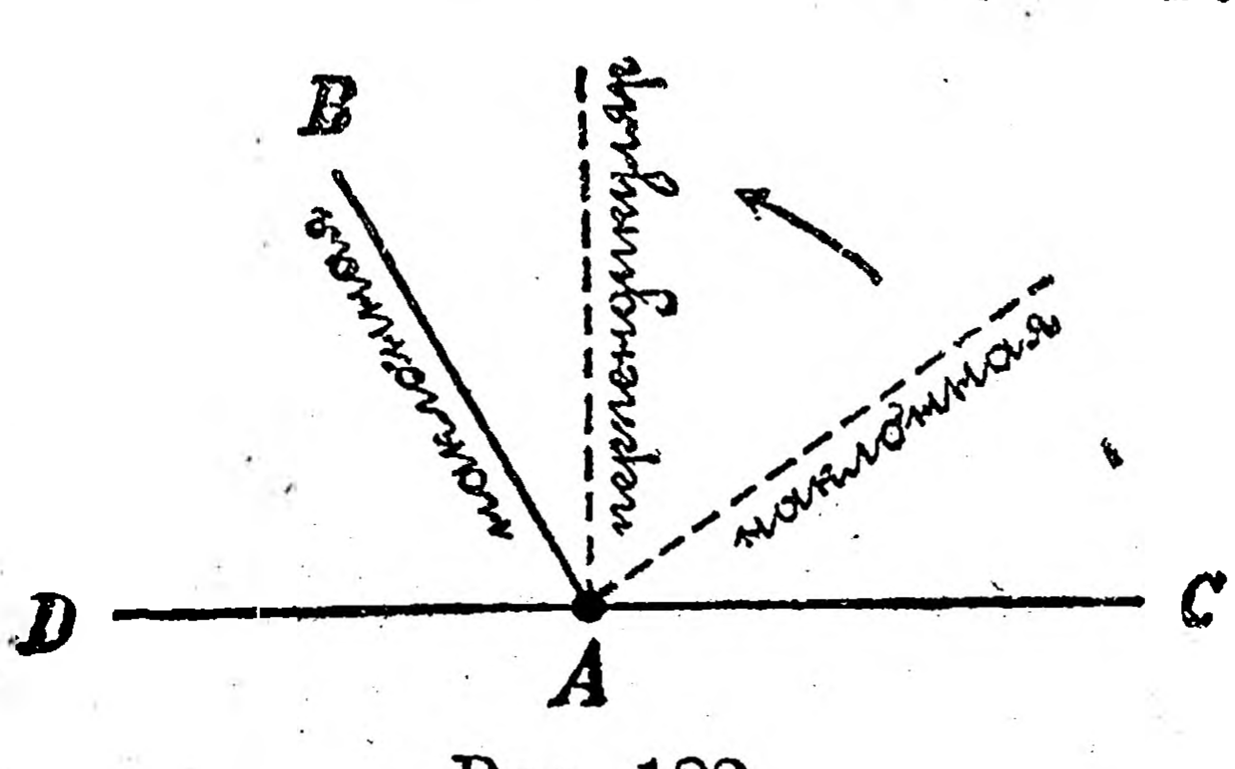


Рис. 122.

По мере вращения прямой AB наклон ее к прямой DC изменяется: правый острый угол увеличивается, а левый тупой уменьшается, и наступит момент, когда оба эти угла сделаются равными друг другу (прямыми) углами. Прямая AB, образующая с другой DC прямые углы, называется прямой, перпендикулярной к DC, или просто: перпендикуляром к DC в точке A.

---

[1]) Здесь удобно воспользоваться двумя проволоками, скрепленными в точке A шарниром, или приготовить такую модель из двух картонных полосок.

При дальнейшем вращении равенство углов опять нарушится, но уже правый угол сделается тупым, а левый острым. Следовательно, прямая AB опять сделается наклонной к DC.

Точка A встречи перпендикуляра (или наклонной) с прямой DC называется **основанием перпендикуляра** (или наклонной).

§ 128. Построение перпендикулярных прямых. Проведение перпендикуляров сводится к рисованию прямого угла, что мы выучились делать уже в I части. (Повторите §§ 11 и 12.)

Пользуясь указаниями, данными в § 12, сделайте при помощи наугольника и линейки следующие построения:

Задача 1. Дана прямая AB. Нарисуйте несколько прямых, перпендикулярных к ней.

Задача 2. Дана прямая AB и на ней точка K; проведите через точку K прямую, перпендикулярную к данной прямой AB. Сколько перпендикуляров можно провести?

Задача 3. Дана прямая AB и вне ее точка C; проведите через точку C прямую, перпендикулярную к AB. Сколько перпендикуляров можно провести к одной прямой линии через точку, взятую вне этой прямой?

§ 129. К данной прямой через данную на ней точку можно провести только один перпендикуляр. Чтобы получить этот перпендикуляр, мы укрепляли на данной прямой DC (рис. 119) в данной ее точке A прямую AB и непрерывно вращали ее по направлению стрелки вокруг точки A до тех пор, пока не получили с обеих сторон двух равных углов. Тогда прямая AB сделалась перпендикуляром. Если теперь вы хотя бы немного еле-еле повернете эту прямую вперед (по стрелке), либо назад, сейчас же нарушится равенство наших углов, следовательно, перпендикуляр AB превратится в наклонную прямую.

Итак, к данной прямой в данной на ней точке можно провести только один перпендикуляр, и никогда второго перпендикуляра в этой точке нам провести не удастся.

Вообще можно сказать, что **к данной прямой через данную точку** (будет ли она взята на прямой или вне ее) **можно провести только один перпендикуляр.**

34. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ ТРАНСПОРТИРОМ И АСТРОЛЯБИЕЙ.

§ 130. Свойство прямых углов.

Теорема. Все прямые углы равны.

Опыт. Пусть каждый из вас возьмет в руки по наугольнику. Укажите на наугольниках прямые углы. Надо узнать, равны ли друг другу эти прямые углы. Равными углами мы называли (§ 10) такие, у которых при наложении совмещались стороны. Посмотрим, совместятся ли стороны у наших прямых углов. Возьмите любую пару наугольников и наложите их прямые углы друг на друга так, чтобы у них совпали вершины и одна пара сторон.

Посмотрите: совпадет ли при этом и вторая пара сторон? Будут ли ваши прямые углы равны?

Доказательство. Так как из одной точки к одной прямой можно провести только один перпендикуляр, то и вторая пара сторон тоже должна совпасть. Следовательно, все прямые углы, где бы вы ни нарисовали их, всегда будут равны друг другу.

§ 131. Единицы измерения углов. Углы могут отличаться один от другого величиной. Мы, например, знаем, что острый угол меньше прямого, что тупой угол больше острого и больше прямого (§ 127). Но для более точного сравнивания величины углов надо выучиться измерять их. А для этого надо прежде всего остановиться на таком угле, который всюду имел бы одну и ту же постоянную величину, и, принявши этот угол за единицу измерения, сравнивать с ним величину всех других углов. С таким углом, сохраняющим всюду одинаковые размеры, мы только-что познакомились: это прямой угол.

§ 132. Градус, минута и секунда. Однако, прямой угол, как единица измерения, имеет один недостаток: все острые углы — меньше прямого, а потому они будут выражаться в дробных долях прямого угла, что представляет большое неудобство при различных вычислениях.

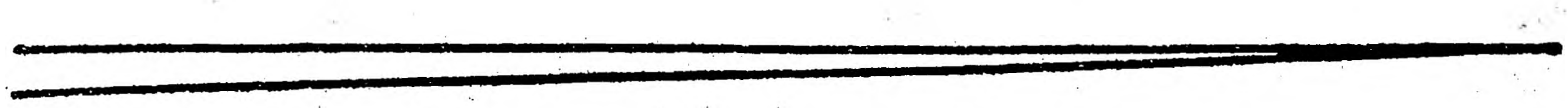


Рис. 123. Здесь нарисован один угловой градус.

Вот почему еще в далекой древности за единицу измерения углов приняли не весь прямой угол, а более мелкую часть его, а именно, разделили прямой угол на 90 равных друг другу углов и каждый такой маленький угол, составляющий 90-ю часть прямого, назвали угловым градусом (рис. 123).

Для измерения углов более мелких, чем один градус, делят угловой градус на 60 равных частей и каждый такой угол называют угловой минутой, наконец, эту угловую минуту делят еще на 60 новых уголков и каждый из них называют угловой секундой.

Слово «градус» заменяют для краткости таким значком «°», слово «минута» такой чертой «′», а «секунда» двумя чертами «″», так что такую запись: 25° 15′ 40″ читать надо так: «двадцать пять градусов, пятнадцать минут, сорок секунд».

§ 133. Приготовление транспортира.

Опыт 1. Нарисуйте на листе прозрачной бумаги при помощи наугольника прямой угол и соедините его стороны (подальше от

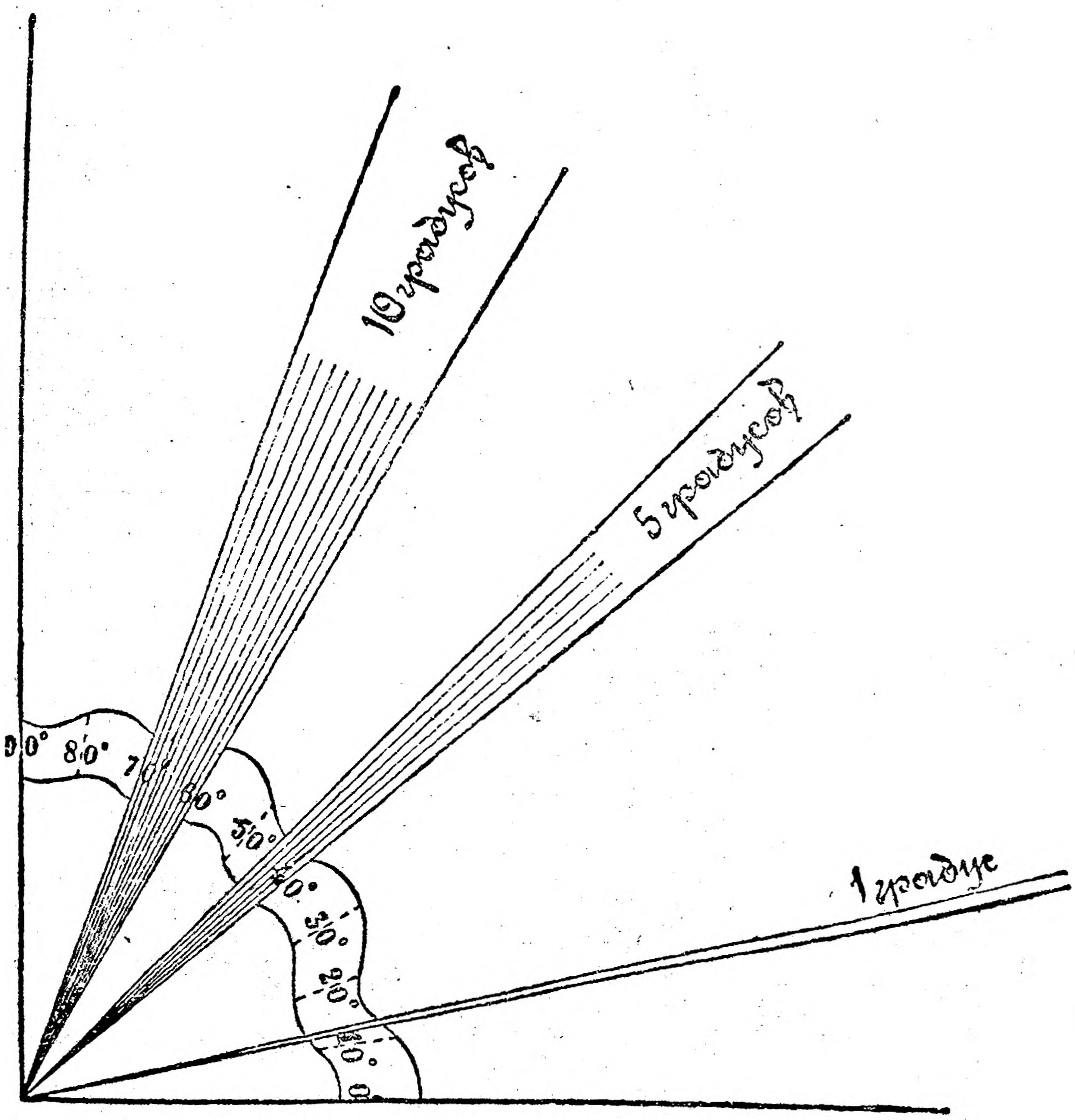


Рис. 124.

верщины) какой-либо линией совершенно произвольной формы (линия AB на рис. 124). Наложите этот прозрачный листок на эту страницу нашей книги так, чтобы нарисованный на вашей бумаге угол совпал с прямым углом, разделенным на градусы. Отметьте на проведенной вами линии (AB) те точки, в которых встречают ее лучи, разделяющие наш угол на градусы.

Соединяя эти точки с вершиной нарисованного вами прямого угла, вы получите пучок лучей, которые разобьют прямой угол на 90 градусов. (Лучи, разделяющие угол на градусы, сходятся у вершины слишком густым пучком, поэтому до самой вершины их можно не доводить.) Таким образом, вы приготовили прибор, при помощи которого можно узнать, из скольких угловых градусов состоит любой острый угол.

Опыт 2. Нарисуйте какой-нибудь острый угол. Измерим его. Наложите на него приготовленный вами прямой угол так, чтобы у этих углов совпали вершины и какая-нибудь одна пара сторон.

Сосчитав теперь число лучей, поместившихся внутри острого угла, узнайте, из скольких градусов состоит он.

Опыт 3. Какое затруднение испытывали вы, решая предъидущую задачу? Прежде всего вас затруднял счет тех лучей, которые разбивали угол на градусы. Поэтому сделайте так. На линии AB (рис. 124), соединяющей стороны прямого угла, надпишите, начиная от любой стороны, цифры, указывающие число градусов, соответствующее данному лучу. Вторым неудобством вашего прибора является изобилие лучей. Но раз вы отметили и перенумеровали точки пересечения наших лучей с линией AB, то вам для измерения углов эти лучи уже не нужны. Поэтому вырежьте аккуратно всю внутреннюю часть вашего прямого угла, оставив у линии AB лишь небольшую полосу с нанесенными на ней делениями, указывающими число градусов (рис. 124). Приготовленный таким образом прибор называется транспортиром.

Опыт 4. Так как тупой угол больше прямого, то приготовленным вами транспортиром нельзя измерить тупых углов. Поэтому транспортиры обыкновенно приготовляются из двух приставленных друг к другу прямых углов. Возьмите такой транспортир (рис. 125) и рассмотрите его. На нем линия AB с перенумерованными делениями имеет вид полуокружности (вообще говоря, эта линия может быть самой разнообразной формы. Есть, например, транспортиры в виде прямоугольника или в виде треугольника). Центр этой полуокружности совпадает с вершиной тех двух прямых углов, из которых составлен транспортир. Укажите его. Так как транспортир составлен из двух прямых углов, то на его дуге нанесены деления для 180 градусов. При чем нанесены два ряда цифр — верхний ряд для углов с отверстиями налево, нижний — для углов с отверстиями направо.

§ 134. Измерение угла транспортиром. Нарисуйте какой-нибудь угол (например $\angle LMN$, рис. 125). Измерим его нашим транспортиром. Наложите транспортир на угол LMN так, чтобы центр транспортира (точка O) совпал с вершиной угла M. Вращайте затем транспортир вокруг вершины M до тех пор, пока прямая OB не совпадет со стороной MN. Остается теперь сосчитать на дуге транспортира то число угловых градусов, из которых состоит наш угол. Угол LMN будет содержать 35 градусов. Вместо слова «градус» пишут такой значок «°». Поэтому результат нашего измерения можем записать так:

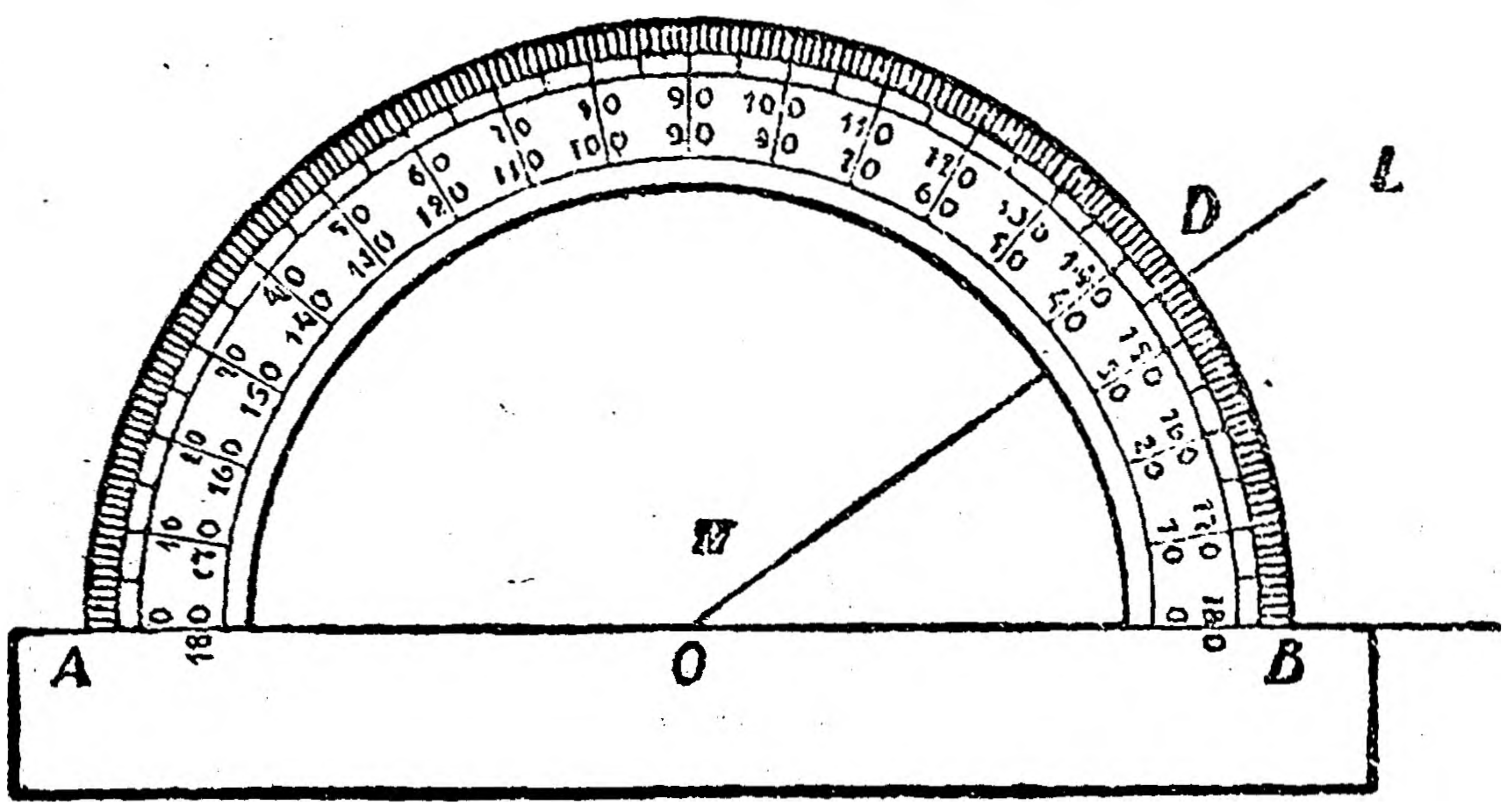


Рис. 125.
Измерение углов транспортиром.

$$\angle LMN = 35°.$$

§ 135. Рисование углов транспортиром. Нарисуйте прямую AN и на ней точку M (рис. 125). Надо у точки M на прямой AN построить угол в 35° (отверстием вправо). Центр транспортира поместите в точку M. Правую часть прямой транспортира (OB) совместите с направлением отрезка MN. Отсчитайте по нижним цифрам 35 и отметьте здесь точку D. Соединив эту точку с точкой M, вы и получите искомый угол в 35°.

§ 136. Измерение углов астролябией. Углы на поверхности земли измеряются при помощи астролябии (рис. 126). Она состоит из металлического круга, который можно рассматривать как два транспортира, приложенных друг к другу своими диаметрами (AB).

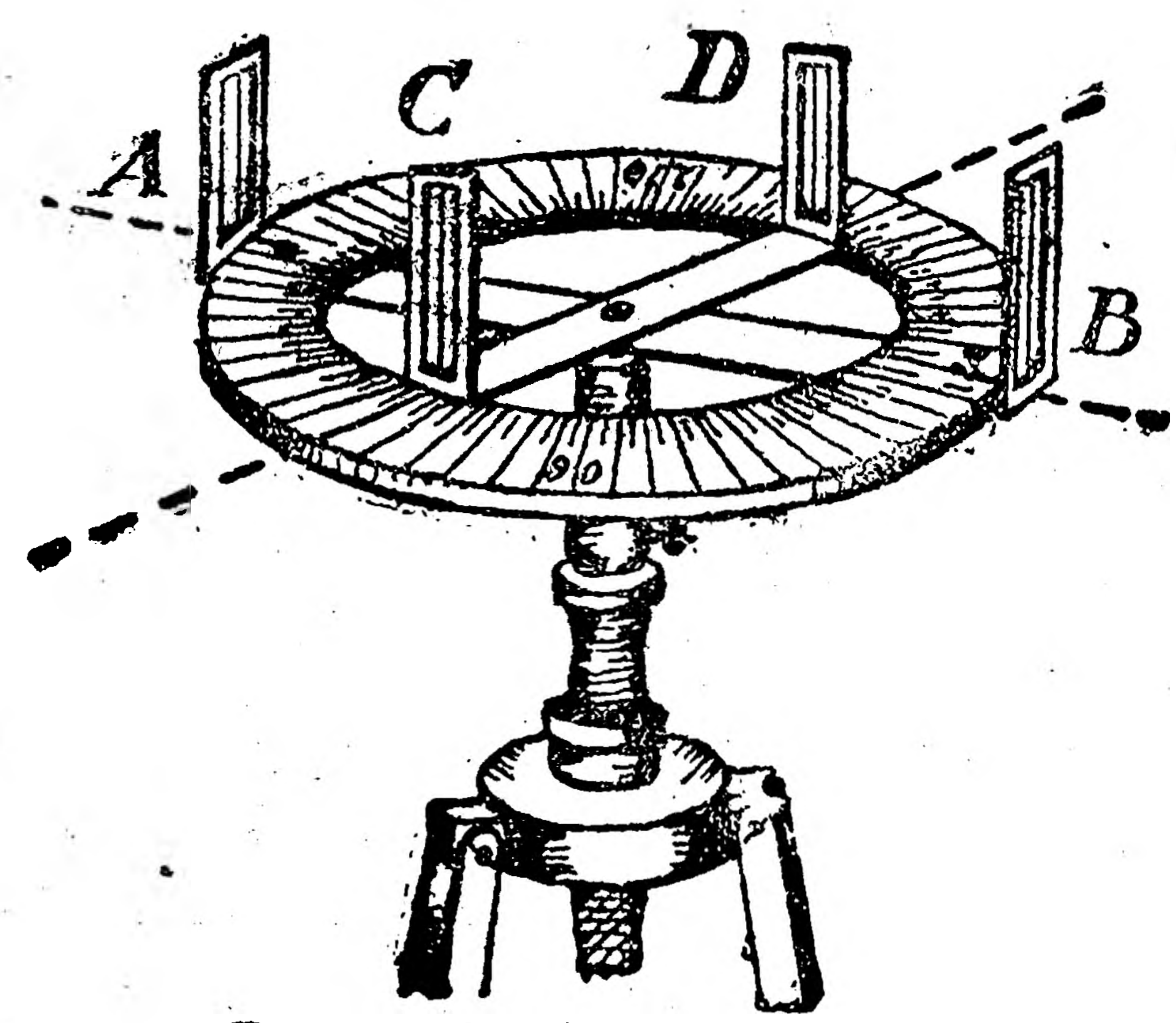


Рис. 126. Астролябия.

На окружности этого круга нанесены деления, дающие возможность отсчитывать число угловых градусов. На этом же круге укреплены по диаметрам две линейки AB и CD. У концов каждой линейки приделано по две вертикальных пластинки A и B, C и D с вертикальным разрезом на каждой; у этих пластинок внутри разреза натянут вертикальный волосок. Первая линейка AB прикреплена к кругу неподвижно, и от одного из ее концов начинается в обе стороны счет угловых градусов. Другая линейка CD сделана немного короче и может свободно вращаться по кругу. Отодвиньте на какое-нибудь деление круга неподвижную линейку и измерьте величину угла DOB.

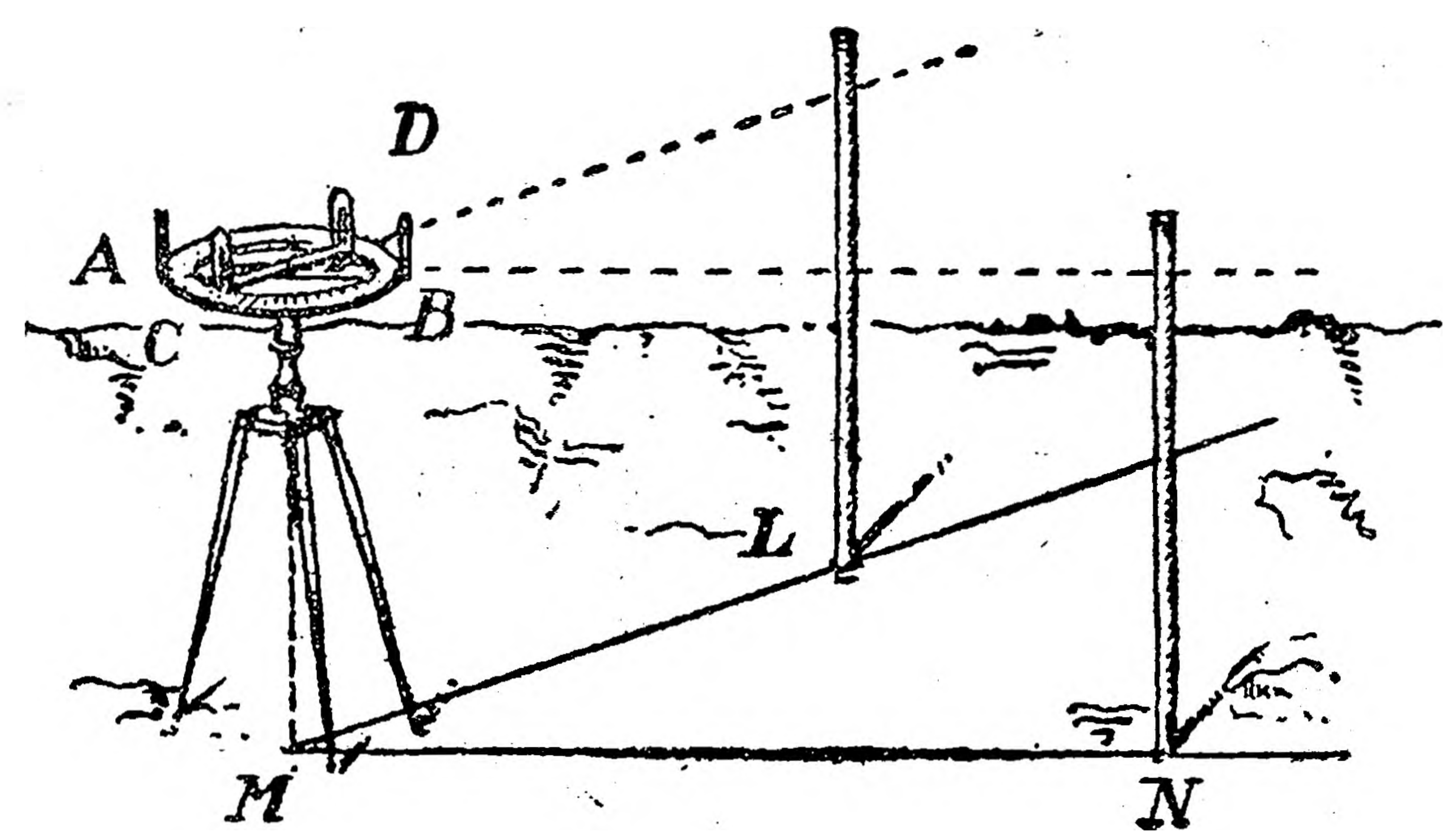


Рис. 127.
Измерение углов астролябией.

Опыт. Вам надо при помощи астролябии измерить угол LMN (рис. 127).

Поставьте прибор так, чтобы отвесная линия, идущая от центра круга его, проходила через вершину угла M (достигнуть этого можно с помощью отвеса). Круг астролябии надо укрепить в горизонтальном положении так, чтобы неподвижная линейка AB была направлена по одной из сторон MN измеряемого угла. Для этого, смотря через просвет в пластинке A, вращайте круг астролябии до тех пор, пока волосок противоположной пластинки B не покроется крайней вехой N.

Затем надо расположить вторую подвижную линейку CD по направлению другой стороны ML нашего угла. Для этого смотрите через прорез пластинки C и двигайте линейку CD до тех пор, пока волосок D не покроется вехой L. Остается теперь прочесть по нанесенным на круге делениям угол BCD.

35. СВОЙСТВО СМЕЖНЫХ УГЛОВ.

§ 137. Разрезывание смежных углов на два прямых угла.

Теорема. Сумма двух смежных углов равна двум прямым углам (то-есть 180°).

Смежными углами мы назвали такие углы, у которых одна сторона общая (на рис. 119 — AB), а две другие AC и CD составляют одну прямую линию CD.

Пусть каждый из вас возьмет по листу цветной бумаги и нарисует на своем листе какой-нибудь угол. (Я нарисовал $\angle DOB$.) Удлините одну из сторон нашего угла так, чтобы получились два смежных угла (рис. 128) (я удлинил сторону OB). Отрежьте отдельно эти углы. У вас получатся два угла: один тупой, другой острый.

*

Отрежьте от тупого угла при помощи наугольника один прямой угол (рис. 128 покажет вам, как это надо сделать), а оставшуюся часть тупого угла склейте со вторым смежным углом (рис. 129).

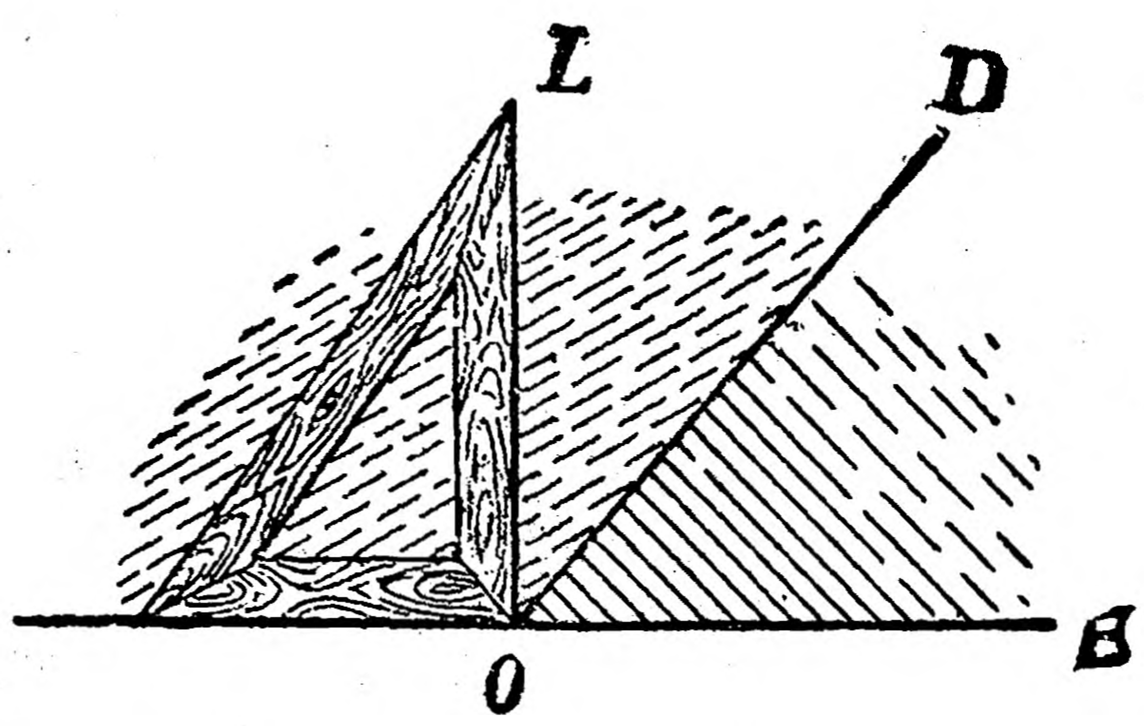


Рис. 128.

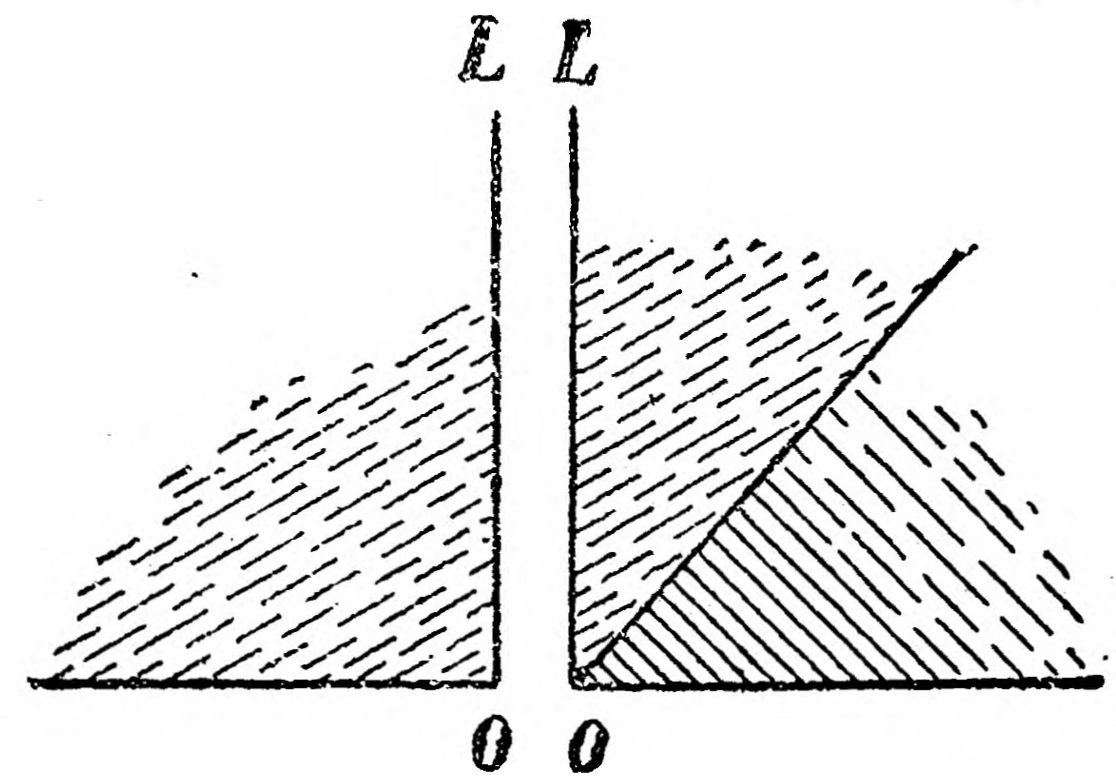


Рис. 129.

Из двух смежных углов получаются два прямых.

Узнайте при помощи наугольника, какого вида склеенный новый угол. Сколько, следовательно, прямых углов получили вы из двух смежных углов?

Результат опыта. Таким образом, *из двух смежных углов, которые нарисовали вы и ваши товарищи, вам удалось получить два прямых угла.*

Доказательство. Но можно ли на основании вашего опыта утверждать, что решительно все смежные углы, которые когда-либо кто-нибудь нарисует, всегда будут обладать этим свойством? Конечно, нет. Если вас в классе 50 человек, то вами было нарисовано самое большее 50 разнообразных смежных углов, которые удалось разрезать на прямые углы. Утверждать же, что этим свойством обладают *все* смежные углы, вы не имеете оснований.

Попытаюсь, однако, при помощи рассуждений убедить, что на два прямых угла распадаются смежные углы, не только нарисованные вами, но и решительно все смежные углы должны обладать этим свойством.

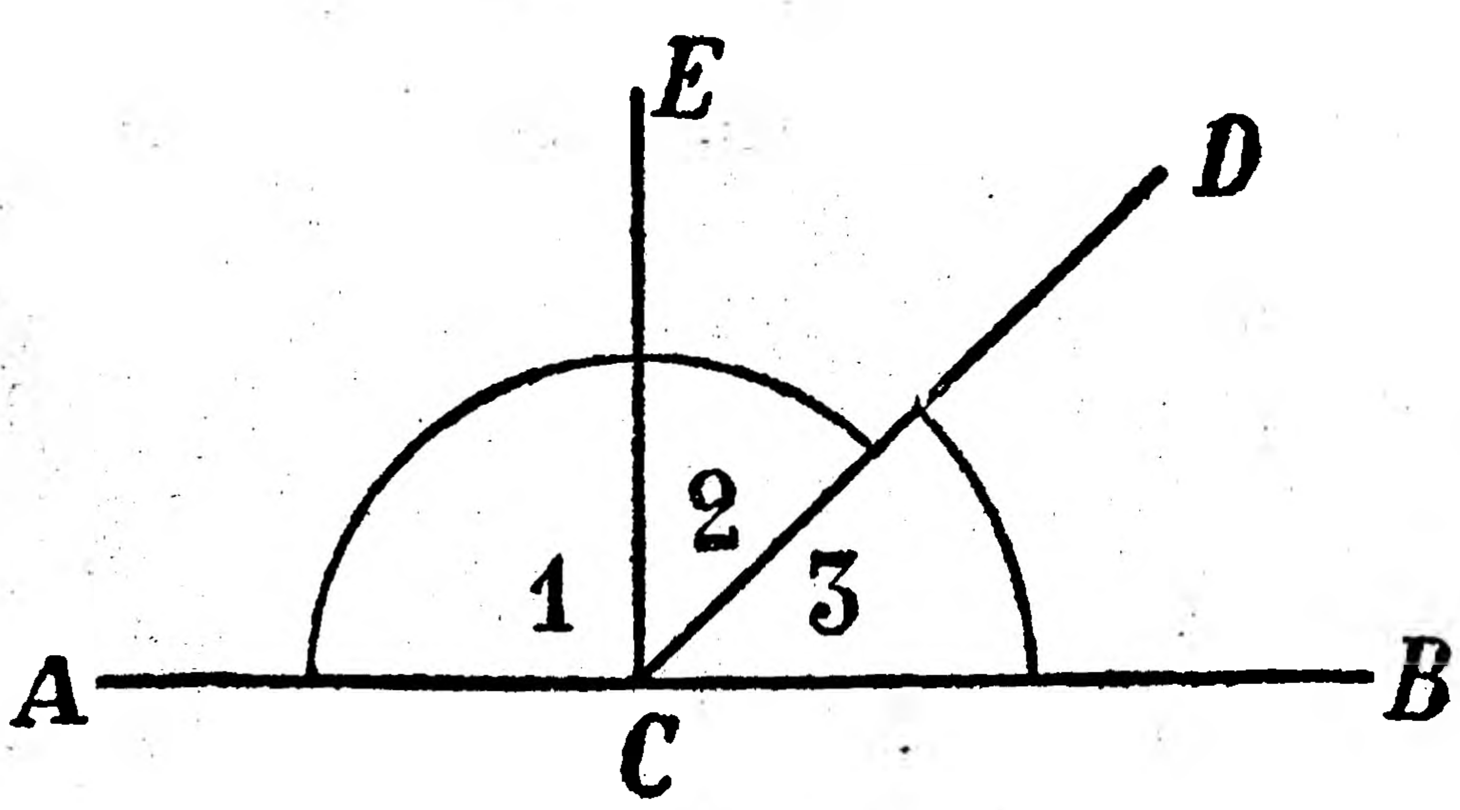


Рис. 130.

Нарисуйте совершенно произвольную пару смежных углов.

Например, такую (рис. 130). Проведите наугольником через точку C к прямой AB перпендикуляр CE. Этот перпендикуляр разрежет тупой смежный угол на два угла, следовательно, всего у нас образуется три угла. Для краткости обозначим эти углы номерами: угол № 1, угол № 2 и угол № 3. Исследуем их. Угол № 1 образован стороной CA

и прямой *CE*, перпендикулярной к *CA*, следовательно, угол № 1 — прямой. У нас осталось еще два угла № 2 и № 3. Сложим их вместе (§ 123). Сумма этих двух углов даст нам $\angle ECB$; последний угол образован стороной *CB* и прямой *CE*, перпендикулярной к ней, следовательно, этот угол будет также прямым. Итак, два смежных угла, мною нарисованных, дадут в сумме два прямых угла.

Такое рассуждение можно применить не только к нарисованной паре смежных углов, но решительно ко всем без исключения смежным углам. Следовательно, мы можем утверждать, что сумма двух смежных углов во всех без исключения случаях должна быть равной двум прямым углам.

Так как два прямых угла содержат 180° (почему? § 134), то это свойство смежных углов можно написать так:

$$\angle BCD + \angle ACD = 180^\circ.$$

Следствие. Нарисуйте два каких-нибудь угла, дающих в сумме 180° (например: $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 140^\circ$). Приложите эти два угла вершинами друг к другу так, чтобы у них совпала одна пара сторон. Составят ли тогда одну прямую две другие стороны их? Почему?

36. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ.

§ 138. Какие углы называются вертикальными? Нарисуйте какой-нибудь угол, например, угол *BAC* (рис. 131). Удлините обе стороны его так, чтобы продолжение этих сторон образовало новый угол. Назовите и прочитайте его.

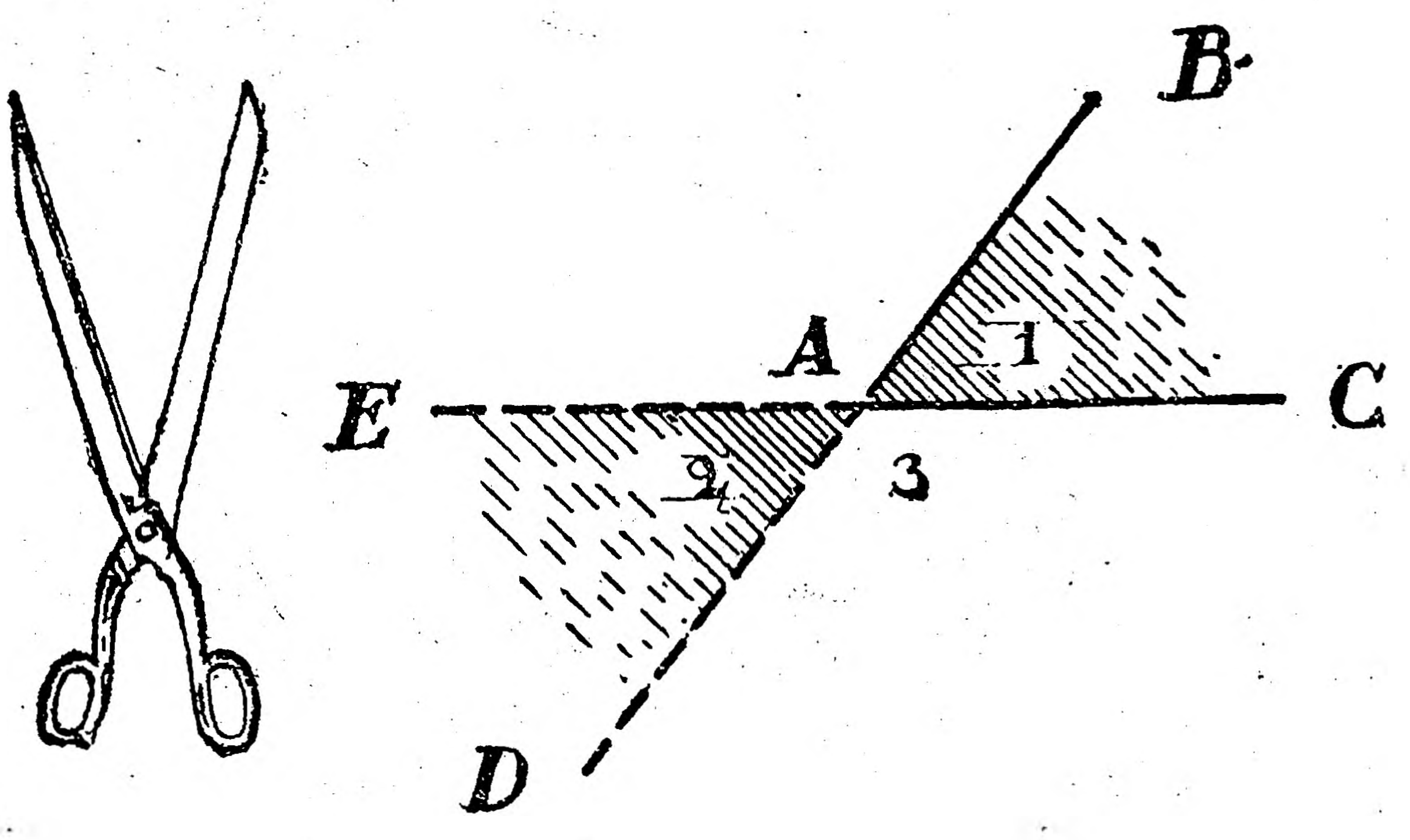


Рис. 131.
Вертикальные углы.

Итак сторонами второго угла ($\angle EAD$) служат продолженные стороны первого угла ($\angle BAC$). Такие два угла называются вертикальными углами.

§ 139. Свойство вертикальных углов.

Теорема. Вертикальные углы равны друг другу.

Опыт. Нарисуйте два вертикальных угла (рис. 131). Сравним величину их. Отрежьте одну из них (например, угол *BAC*) и наложите его на другой угол (на $\angle EAD$). Так как эти углы при наложении совместятся своими сторонами, то они окажутся равными друг другу.

Проверьте это свойство ваших вертикальных углов, измерив их транспортиром.

Доказательство. Убедимся теперь, что не только те углы, которые нарисовали вы, но что все без исключения вертикальные углы обладают этим свойством. Нарисуйте любые два вертикальные угла и для удобства перенумеруйте их. Будем сравнивать каждый из них с соседним углом № 3 (рис. 131): $\angle$№ 1 с $\angle$№ 3—смежные углы. (Почему?) Следовательно, они вместе будут содержать 180°. Поэтому, чтобы узнать число градусов, содержащихся в вертикальном угле № 1, надо из 180° вычесть число градусов, содержащихся в угле № 3. Результат наших вычислений запишем так:

$$\angle № 1 = 180° - \angle № 3.$$

Вертикальный угол № 2 вместе с тем же $\angle$ № 3 содержит тоже 180°. (Почему?)

Следовательно

$$\angle № 2 = 180° - \angle № 3.$$

Сравнивая выражения для угла № 1 и угла № 2, мы видим, что эти углы равны.

Только-что приведенное рассуждение можно применить ко всем без исключения вертикальным углам; при чем для всех их вывод, конечно, получится тот же самый: всякая пара вертикальных углов должна оказаться состоящей из равных углов. Итак, все вертикальные углы равны между собою.

37. УГЛЫ, РАСПОЛОЖЕННЫЕ ВОКРУГ ОДНОЙ ПРЯМОЙ И ВОКРУГ ОДНОЙ ТОЧКИ.

§ 140. Свойство углов, расположенных по одну сторону от прямой. Нарисуйте какую-нибудь прямую линию *LM* (рис. 132) и на ней отметьте точку *A*. Проведите от этой точки пучок прямых по одну сторону от прямой LM. Рассмотрите образовавшиеся углы. Проведите в точке A к LM перпендикуляр. Найдем сумму углов, расположившихся по одну сторону этого перпендикуляра, и сумму углов, лежащих

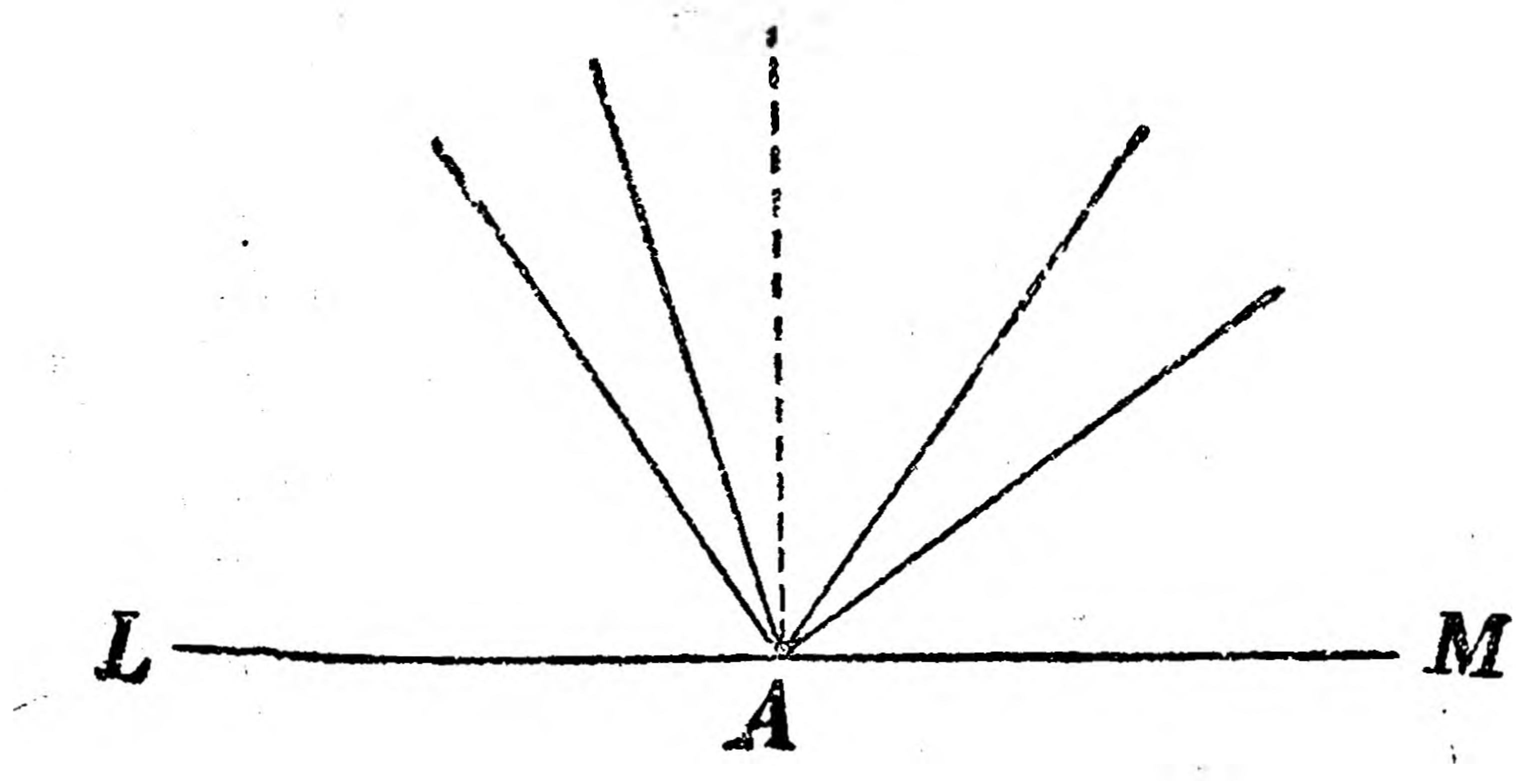


Рис. 132.

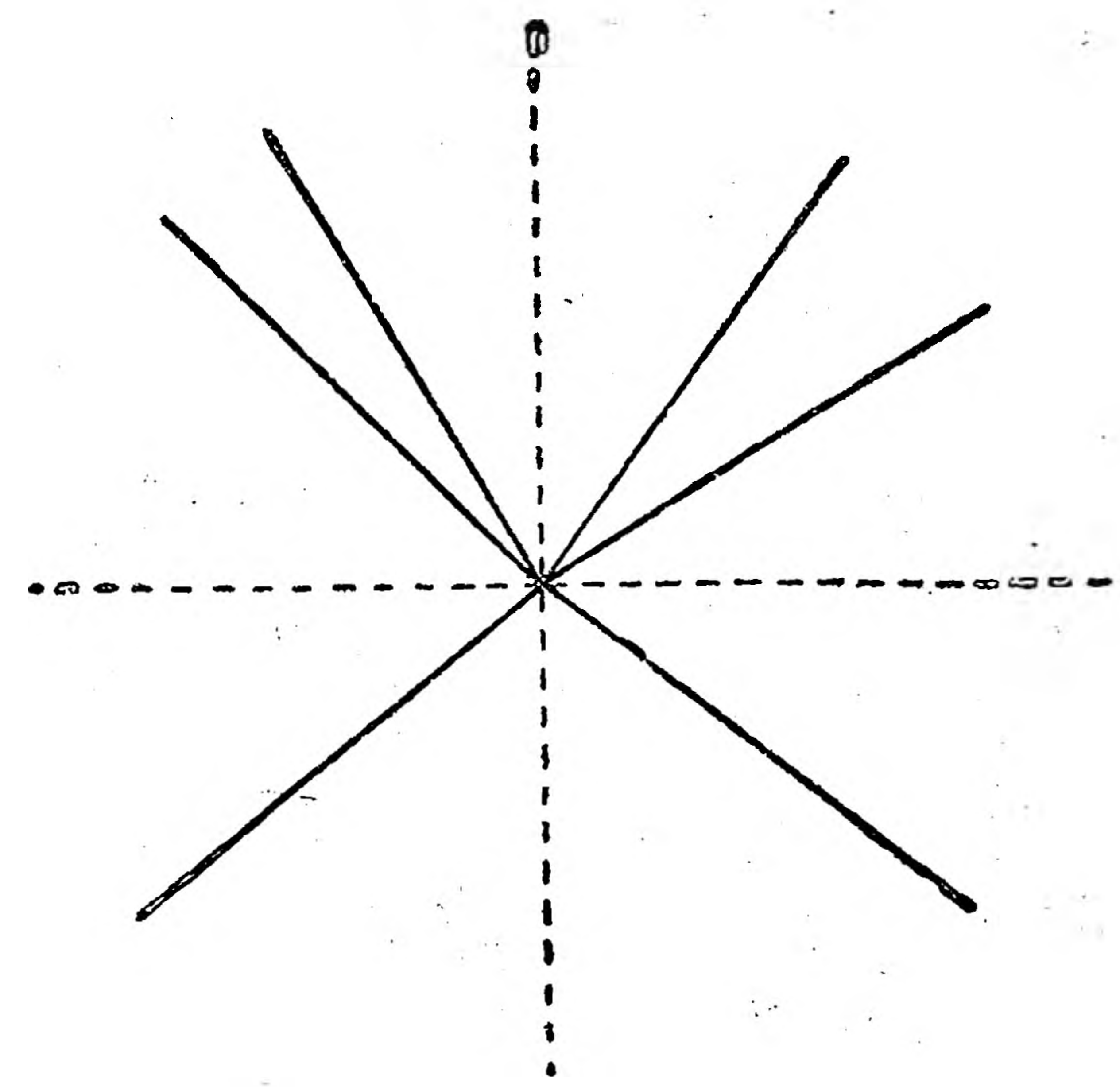


Рис. 133.

по другую сторону от него. Докажите, что все углы, лежащие по одну сторону от прямой, дают в сумме 180°.

§ **141. Свойство углов, расположенных вокруг точки.** Нарисуйте несколько углов, лежащих вокруг одной точки. Пользуясь рисунком 133, убедитесь в том, что сумма всех углов, расположенных вокруг одной точки, равна 360°.

38. АКСИОМА И ТЕОРЕМА.

§ **142. Аксиома.** При получении разнообразных свойств прямых линий мы прибегали к двум приемам.

Иногда мы подмечали какое-либо свойство линии, которое нам казалось настолько простым и очевидным, что мы сразу убеждались в его истинности во всех случаях, хотя в действительности мы рассматривали только один или несколько примеров. Такое очевидное свойство называют аксиомой. Так, например, мы принимали за аксиомы следующие свойства прямых:

1. Через две данные точки можно провести только одну прямую (§ 106).

2. Кратчайшее расстояние между двумя точками — прямая линия (§ 107).

§ **143. Теорема.** Вспомните теперь, как мы узнали, что все прямые углы равны. Мы не ограничились здесь только тем, что при помощи опыта убедились в равенстве прямых углов у имеющихся в нашем распоряжении наугольников.

Мы при помощи рассуждений, опираясь на принятые раньше на веру аксиомы и на изученные раньше свойства линий и углов, **доказали**, что равными окажутся не только те прямые углы, которые мы исследовали на опыте, но решительно все прямые углы, без исключения. Такое свойство, справедливость которого мы доказываем путем рассуждений, основанных на аксиомах и на раньше доказанных свойствах, называется **теоремой**.

Упражнения и задачи.

1. Для того чтобы проверить наугольник, поступают так. Рисуют прямую и отмечают на ней точку. К этой прямой у отмеченной точки рисуют при помощи наугольника перпендикуляр. Затем перекидывают наугольник обратной стороной и, опять приложив его к той же прямой у той же точки, проводят перпендикуляр. Если эта линия не сольется с прежде проведенной, то наугольник неправильный. На каком свойстве перпендикуляра основана такая поверка наугольника?

Проверьте этим способом свой наугольник.

2. От моего дома идут две дорожки: одна на юг, а другая на северо-восток. Под каким углом пересекаются они?

3. Узнайте сначала «на-глаз», — сколько градусов имеет тот угол, который образуют две какие-нибудь пересекающиеся улицы, а потом ответ проверьте измерением этого угла.

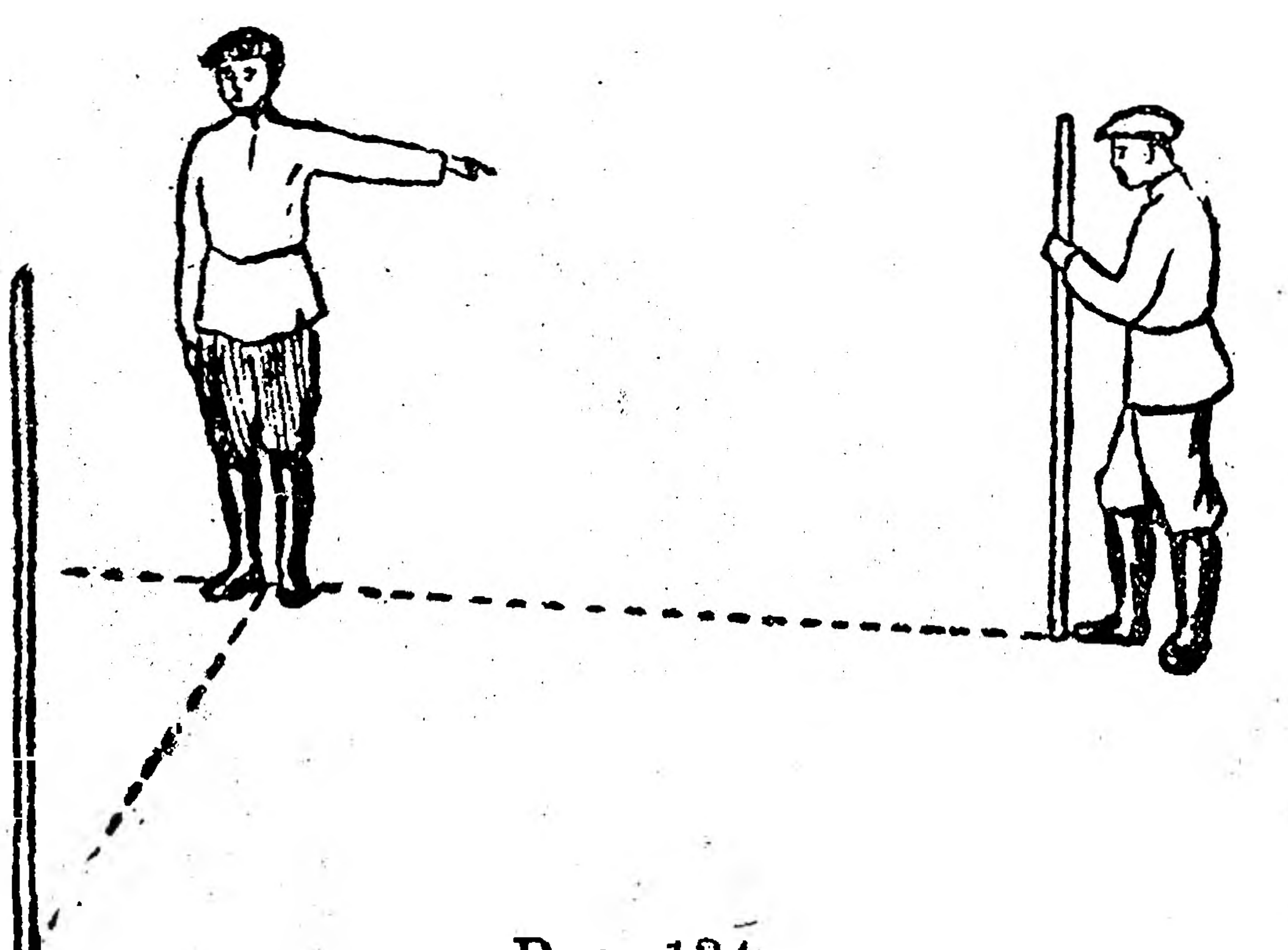


Рис. 134.

4. На сколько градусов должна повернуться стрелка флюгера, если ветер, дувший с востока, начнет дуть с юго-запада?

5. Нарисуйте циферблат часов так, чтобы стрелки его показывали 5 часов; 3 ч. 40 м.; «без четверти» 6 часов; и «десять мин. 7-го». Сколько градусов имеет угол между стрелками в каждом случае?

6. Колесо имеет 12 спиц; 10 спиц; 14 спиц. Какой угол (в градусах) образуют две соседние спицы этого колеса?

7. Посмотрите внимательно на рис. 134 и скажите, как можно построить на земле прямой угол без эккера?

8. Укрепите посредине креста эккера компас. Поставьте эккер на середине двора и при помощи компаса проведите прямые, идущие от эккера прямо на север, на юг, на восток и на запад. Под каким углом пересекаются эти прямые?

9. Назовите несколько крупных городов, лежащих в каждом из отмеченных вами в предыдущей задаче направлениях. Найдите их на географической карте.

ГЛАВА XI.

ТРЕУГОЛЬНИК.

39. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 144. Треугольник. Его стороны, углы и вершины. Нарисуйте три пересекающиеся прямые так, чтобы получился треугольник. Укажите его вершины, стороны и углы.

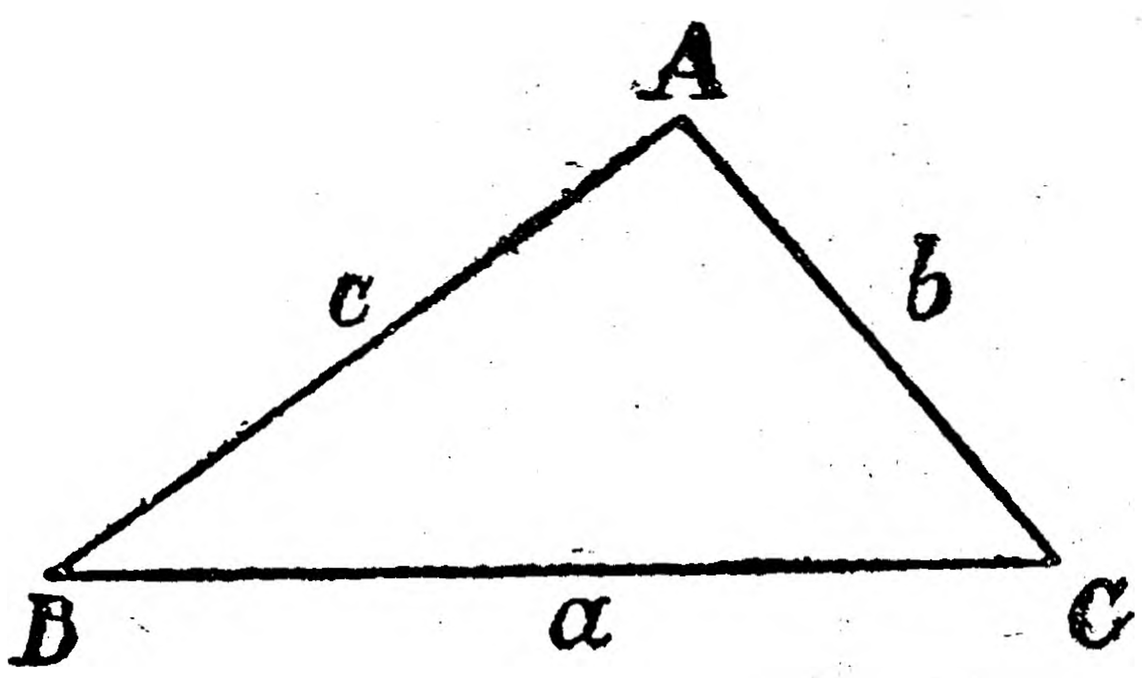


Рис. 135.

Треугольник ABC (рис. 135) записывается так: $\triangle ABC$.

Его стороны: прямые AB, BC и AC. Его вершины: A, B и C. Его углы: $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$.

§ 145. Различного рода треугольники. Заготовьте побольше узких бумажных полосок [1]) самой разнообразной длины. Начните склеивать из полосок различные треугольники; при этом могут получиться треугольники следующих видов:

1. *Равносторонний треугольник.* Если у треугольника все три стороны равны друг другу, то такой треугольник называется равносторонним (рис. 136).

2. *Равнобедренный треугольник.* Составьте треугольник, у которого равны только две стороны (рис. 137).

Такой треугольник называется р а в н о б е д р е н н ы м. За основание принимают неравную сторону, а две равные стороны называются боками.

---

[1]) Вместо бумажных полосок можно взять тонепькие деревянные палочки или соломинки.

3. Разносторонний треугольник. Треугольник с тремя различной длины сторонами называется р а з н о с т о р о н н и м (рис. 138).

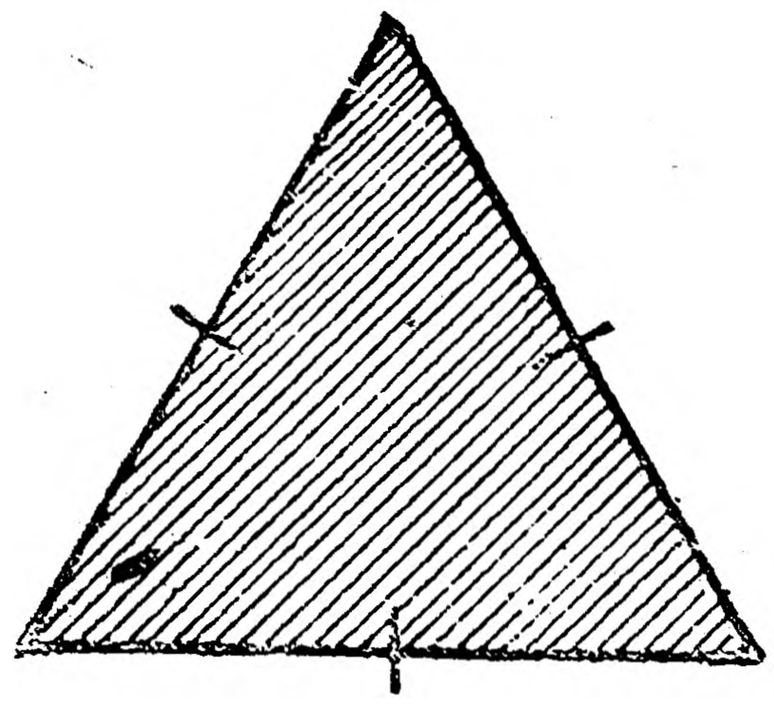


Рис. 136. Равносторонний треугольник.

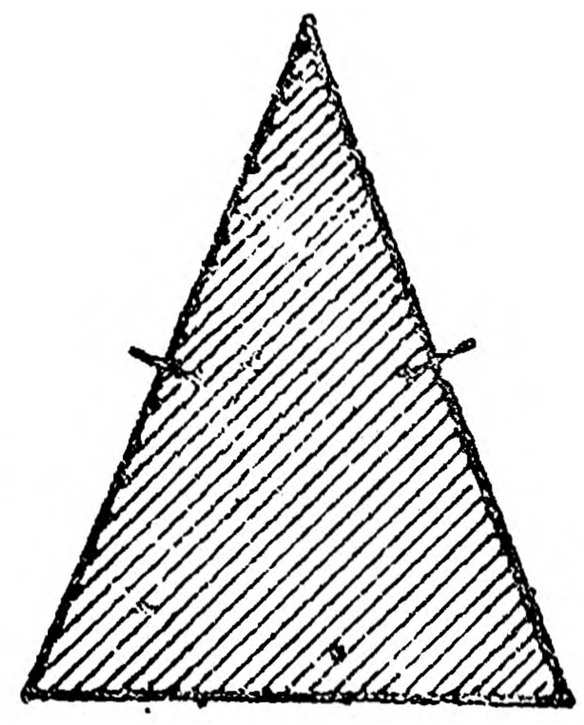


Рис. 137. Равнобедренный треугольник.

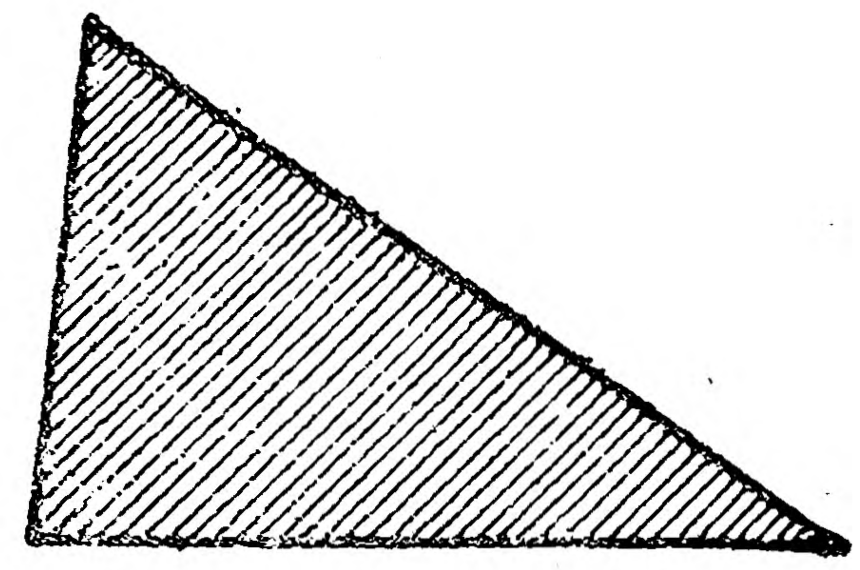


Рис. 138. Разносторонний треугольник.

4. Прямоугольный треугольник. Составьте треугольник с прямым углом. Он называется п р я м о у г о л ь н ы м (рис. 139). Укажите у него сторону, лежащую против прямого угла. Она называется г и п о т е н у з о й.

Остальные две стороны, образующие прямой угол (укажите их), называются к а т е т а м и.

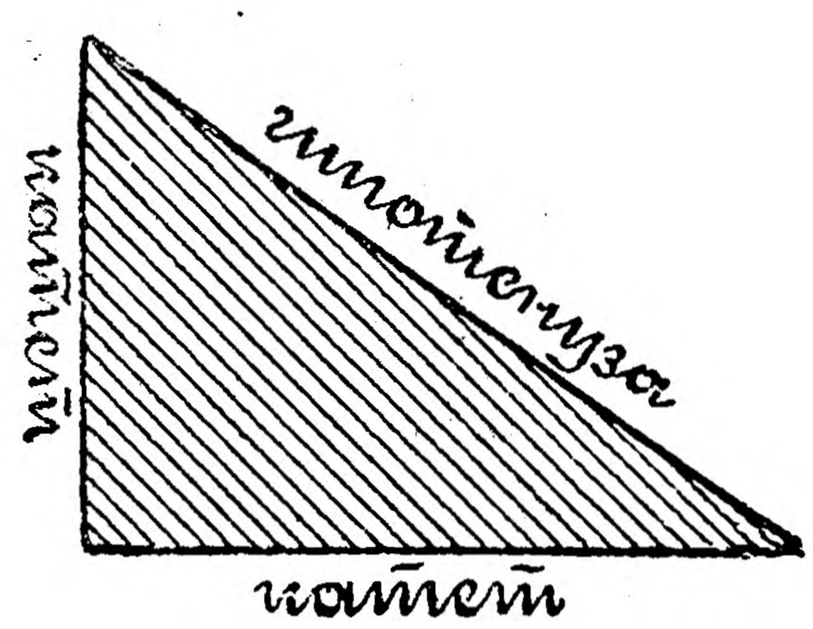


Рис. 139. Прямоугольный треугольник.

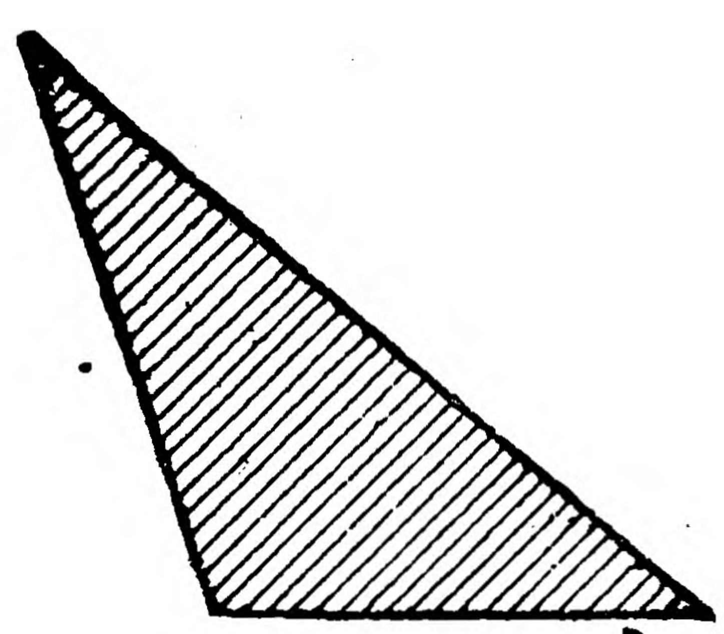


Рис. 140. Тупоугольный треугольник.

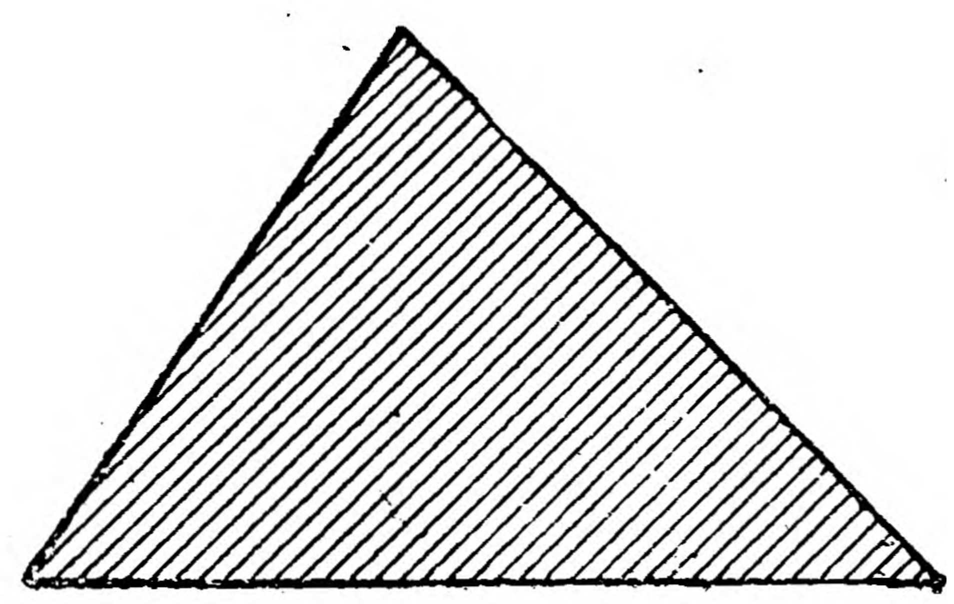


Рис. 141. Остроугольный треугольник.

5. Тупоугольный треугольник. Если у треугольника есть тупой угол, то он называется т у п о у г о л ь н ы м (рис. 140).

6. Остроугольный треугольник. Составьте такой треугольник, чтобы у него все углы были острые. Он называется о с т р о у г о л ь н ы м (рис. 141).

40. СВОЙСТВО СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКА.

§ 146. *Теорема.* О д н а с т о р о н а т р е у г о л ь н и к а м е н ь ш е с у м м ы д в у х д р у г и х с т о р о н.

Когда вы составляли разнообразные треугольники из заготовленных вами бумажных полосок, то, должно-быть, заметили, что не всегда это вам удавалось. Рассмотрим причину такого явления.

Опыт. Возьмите две бумажные полоски разной длины (рис. 142). Более короткую из них a приклейте, а более длинную разрежьте на две части: b и c.

Укрепив булавками концы их (рис. 142), вращайте полосы b и c до тех пор, пока два других конца их не встретятся в точке C. Укажите получившийся треугольник.

Начните теперь укорачивать один из отрезков или оба отрезка b и c до тех пор, пока концы их не коснутся друг друга в какой-либо точке, лежащей на третьей стороне a. Получится ли у вас тогда треугольник? Чему равна в этом положении сумма отрезков a и b?

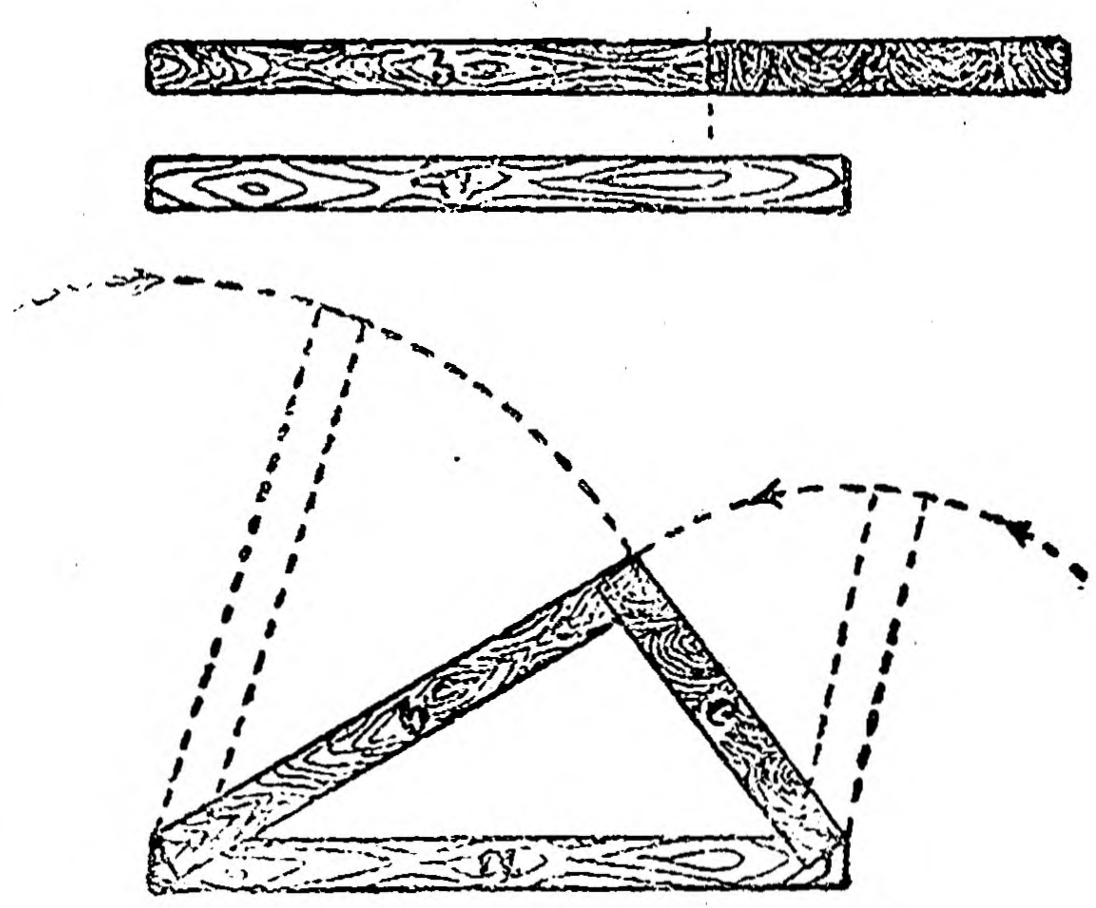


Рис. 142.

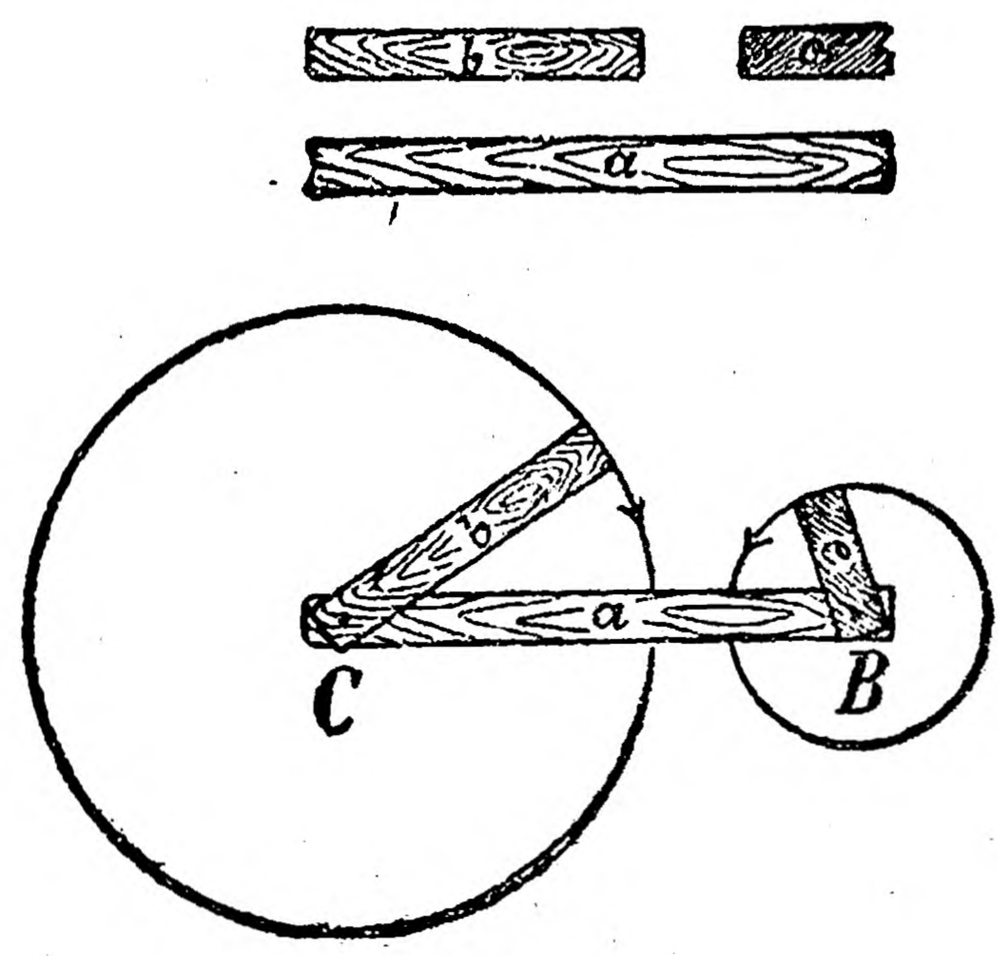


Рис. 143.

Одна сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Продолжайте еще больше укорачивать одну из полосок b и c. Попробуйте теперь соединить концы этих полосок (143).

Какую линию описывают эти концы? Встретятся ли друг с другом описываемые этими концами окружности? Получится ли у вас треугольник?

Результат опыта. Мы могли составить треугольник только тогда, когда одна сторона a была короче суммы двух других сторон ($c+b$).

Доказательство. Нетрудно доказать, что у всякого треугольника (например, $\triangle ABC$, рис. 135) любая сторона, наприм. BC, должна быть короче суммы двух сторон ($AB+AC$). В самом деле, сумму этих двух сторон можно рассматривать как ломаную линию, проведенную между концами третьей стороны (BC). А потому, применяя аксиому 2-ю о прямой линии (§ 142), мы можем утверждать, что

$$BC < AB + AC$$

(значок $<$, означающий «меньше», смотрит всегда острием в сторону меньшей величины).

Итак, у всех треугольников одна сторона меньше суммы двух других сторон.

41. СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

§ 147. Биссектриса, медиана и высота. Нарисуйте какой-нибудь разносторонний треугольник (рис. 144). Измерьте транспортиром один из его углов и разделите его пополам.

Прямая CE (рис. 144), делящая угол пополам, называется *биссектрисой* этого угла.

Разделите одну из сторон треугольника пополам (рис. 145) и соедините середину этой стороны с противоположной вершиной. Эта прямая называется *медианой*.

Опустите из какой-нибудь вершины треугольника (рис. 146) на противоположную сторону его перпендикуляр. Этот перпендикуляр называется *высотой* треугольника.

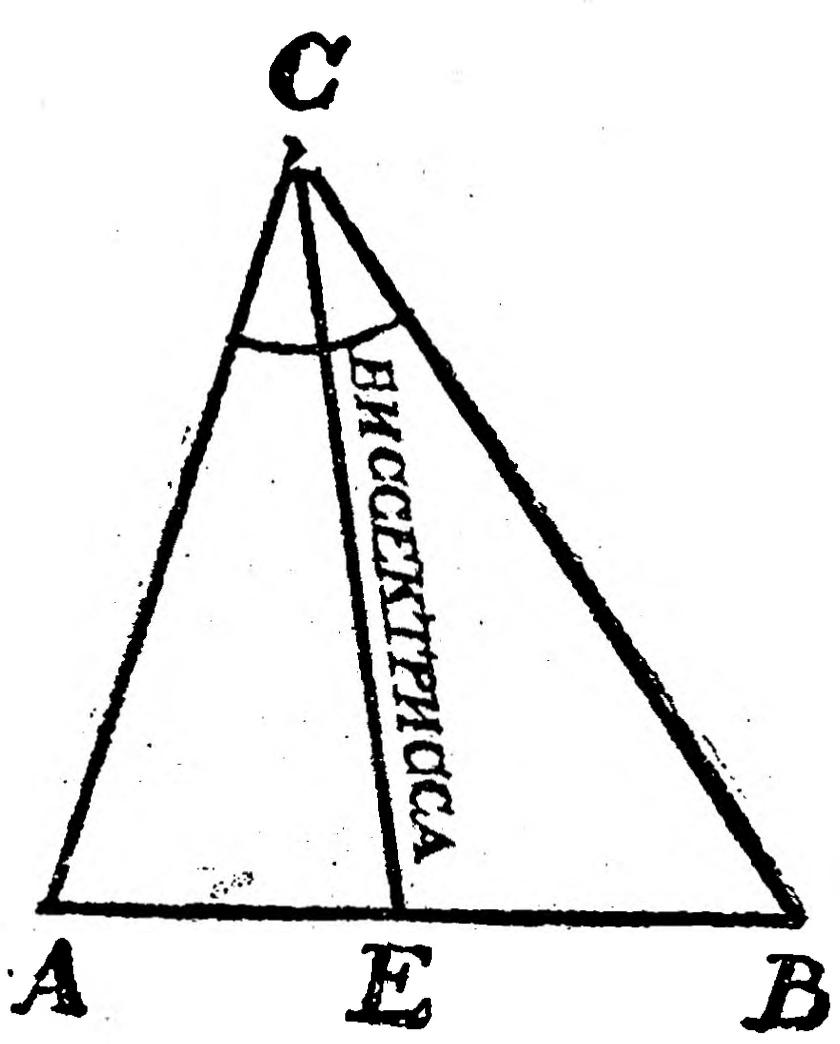


Рис. 144.

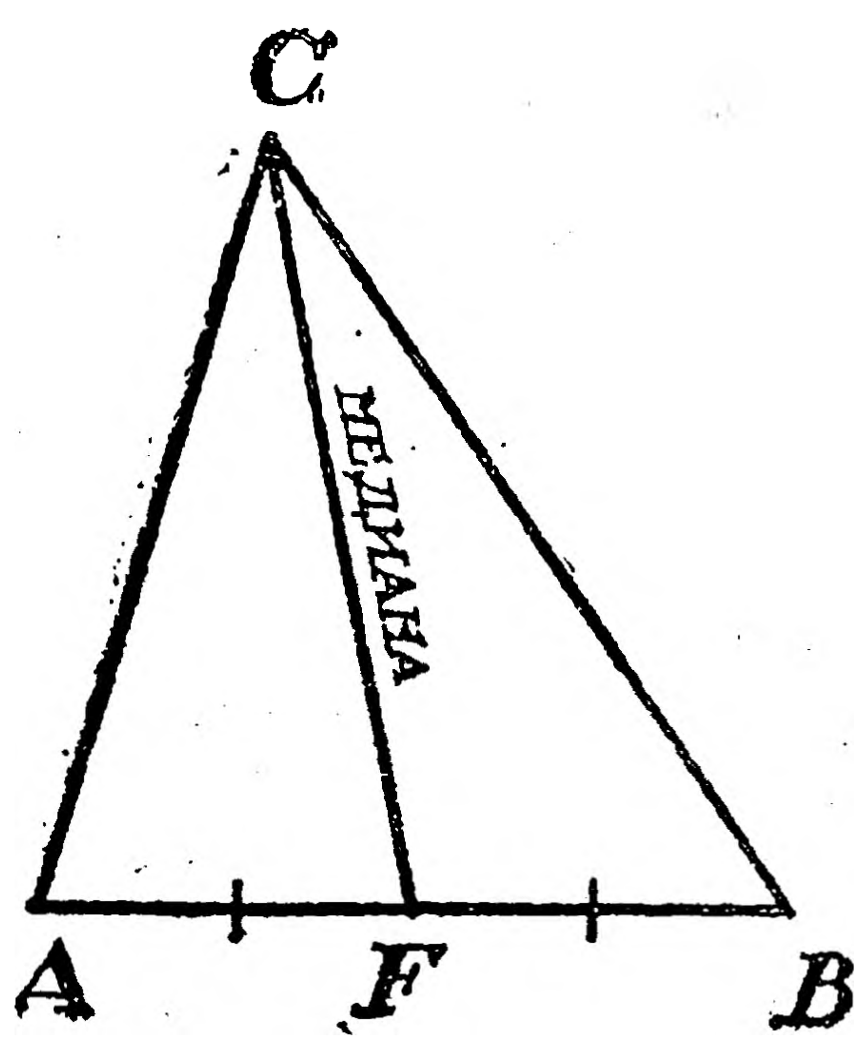


Рис. 145.

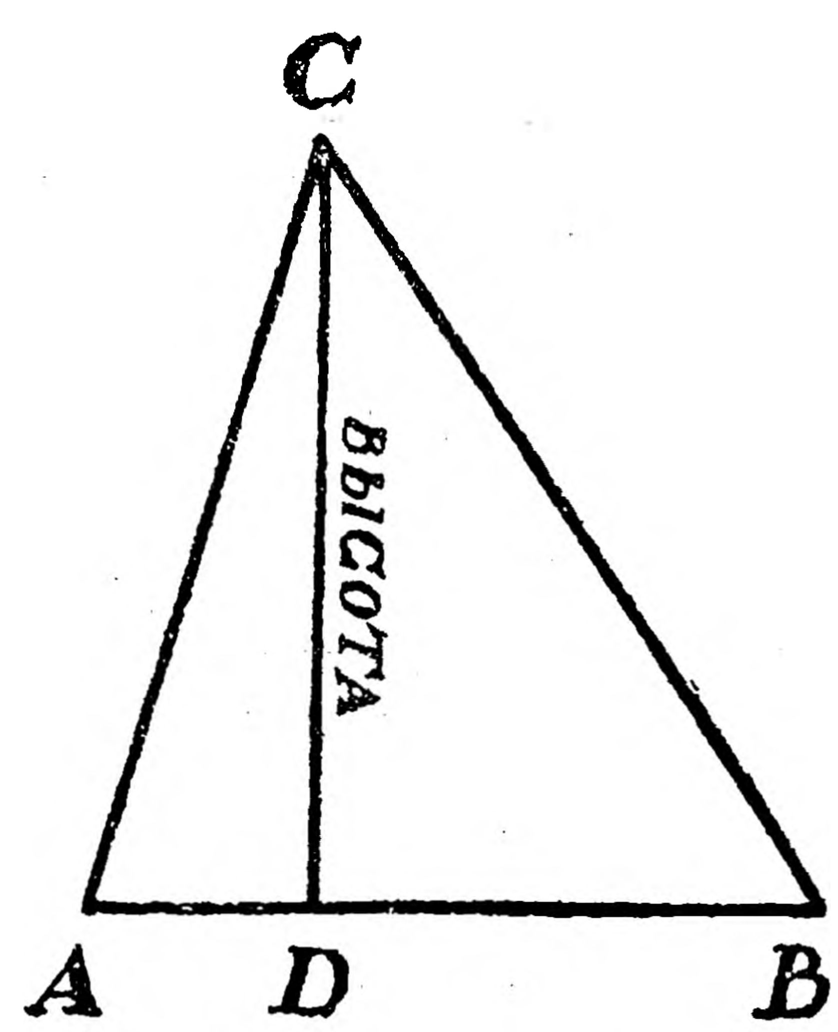


Рис. 146.

Опыт. Нарисуйте какой-нибудь разносторонний треугольник. Одну из сторон треугольника называют основанием его. Проведите из вершины разностороннего треугольника к его основанию три линии: биссектрису, высоту и медиану.

Слились ли эти линии у равностороннего треугольника?

§ 148. Свойство биссектрисы равнобедренного треугольника.

Теорема. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине служит одновременно и медианой и высотой.

Опыт. Нарисуйте на бумажке равнобедренный треугольник, обозначьте его буквами ABC (BC—основание треугольника, §145) и вырежьте его. Измерьте транспортиром угол при его вершине (в точке A) и проведите биссектрису этого угла AD. Эта биссектриса разрезала наш треугольник на два новых треугольника. Прочитайте их. Наложите друг на друга эти два треугольника, сгибая их вдоль по биссектрисе AD. Посмотрите, совпали ли эти треугольники всеми своими сторонами и углами.

Не будет ли биссектриса AD служить медианой и высотой у нарисованного вами треугольника ABC (рис. 147)?

Итоги опыта. У нарисованного вами равнобедренного треугольника биссектриса угла при вершине будет вместе с тем и медианой и высотой.

Доказательство. Докажем, что у всех равнобедренных треугольников биссектриса будет обладать этим свойством. Когда мы сгибаем равнобедренный треугольник вдоль по биссектрисе AD (рис. 147) и накладываем правый образовавшийся треугольник ADC на левый $\triangle ABD$, то углы при точке A должны всегда совпасть друг с другом (AD есть биссектриса), следовательно, накладываемая сторона AC должна пойти по стороне AB. Концы C и B этих сторон должны тоже совпасть (ибо $AC=AB$). Концы наших третьих сторон DC и BD совпали, а потому должны совместиться и все промежуточные точки их. (Вспомните аксиому: через две точки B и D можно провести только одну прямую.)

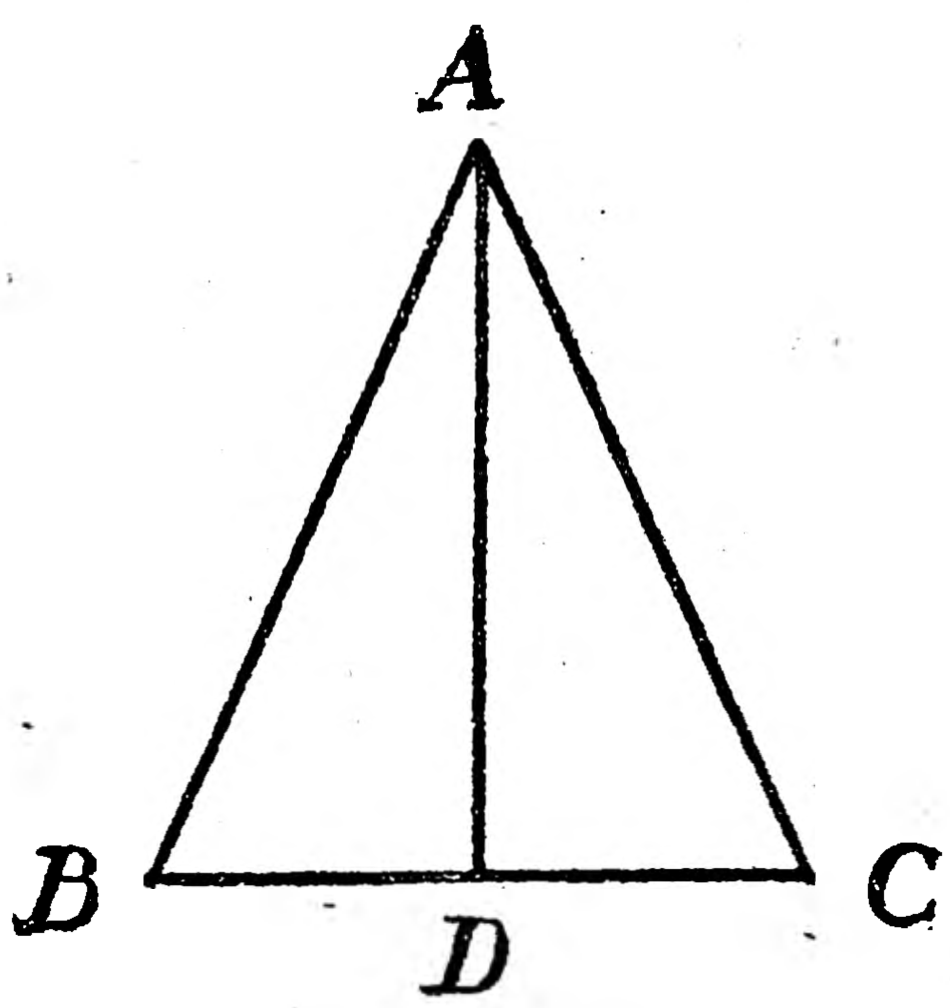


Рис. 147.

Итак, наши два треугольника всегда совпадут друг с другом всеми своими частями, следовательно, у всех равнобедренных треугольников биссектриса (угла при вершине) разбивает его на два равных треугольника.

Докажите теперь, что в равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине служит одновременно и медианой и высотой.

§ 149. Свойство углов равнобедренного и равностороннего треугольника.

Следствие 1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Так как $\triangle ADC = \triangle ABD$, то $\angle B = \angle C$. Проверьте это, измерив углы B и C транспортиром (рис. 147).

Следствие 2. В равностороннем треугольнике все углы равны друг другу.

42. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 150. Равенство фигур. Если удается наложить две фигуры так, чтобы они совпали всеми своими точками, то такие фигуры считаются равными.

Но мы не всегда имеем возможность накладывать одну фигуру на другую. В таких случаях приходится измерять все стороны и все углы этих фигур и, сравнивая друг с другом все соответствующие стороны и все соответствующие углы, убеждаться в равенстве или неравенстве наших фигур.

Однако, для того, чтобы убедиться в равенстве двух каких-нибудь фигур (например, двух треугольников), нет надобности знать непременно, что все стороны и все углы их соответственно равны, а достаточно убедиться, что равны только некоторые из этих элементов.

Рассмотрим несколько таких признаков, по которым можно судить о равенстве треугольников.

§ 151. Первый признак равенства треугольников.

Теорема. Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними другого треугольника, то два таких треугольника равны друг другу.

Опыт. Нарисуйте у себя в тетради какой-нибудь треугольник, например, $\triangle FED$ (рис. 148).

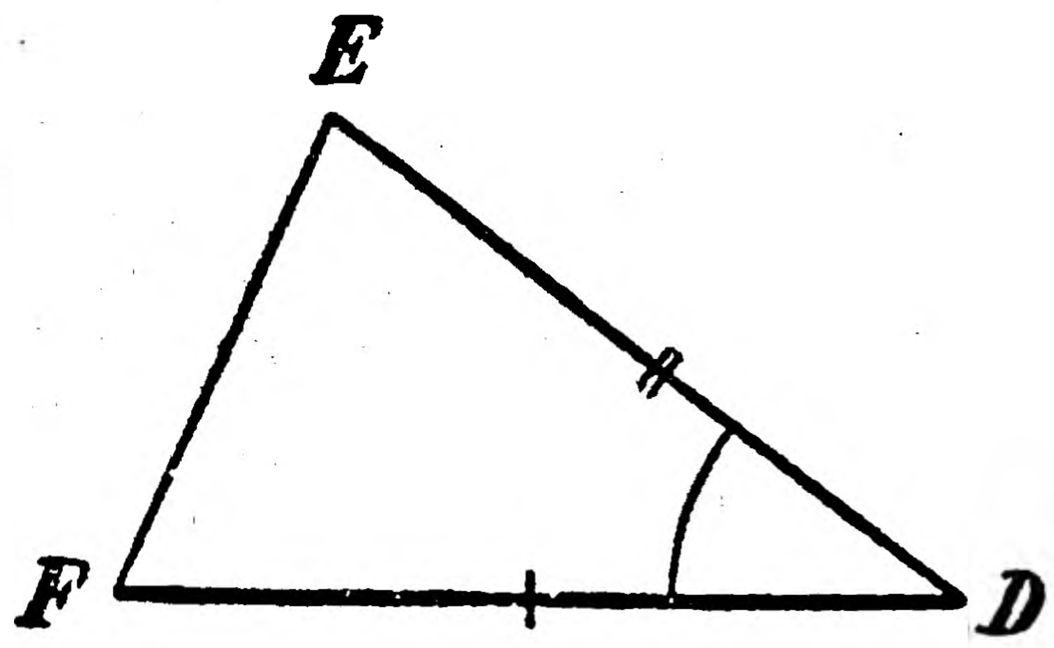


Рис. 148.

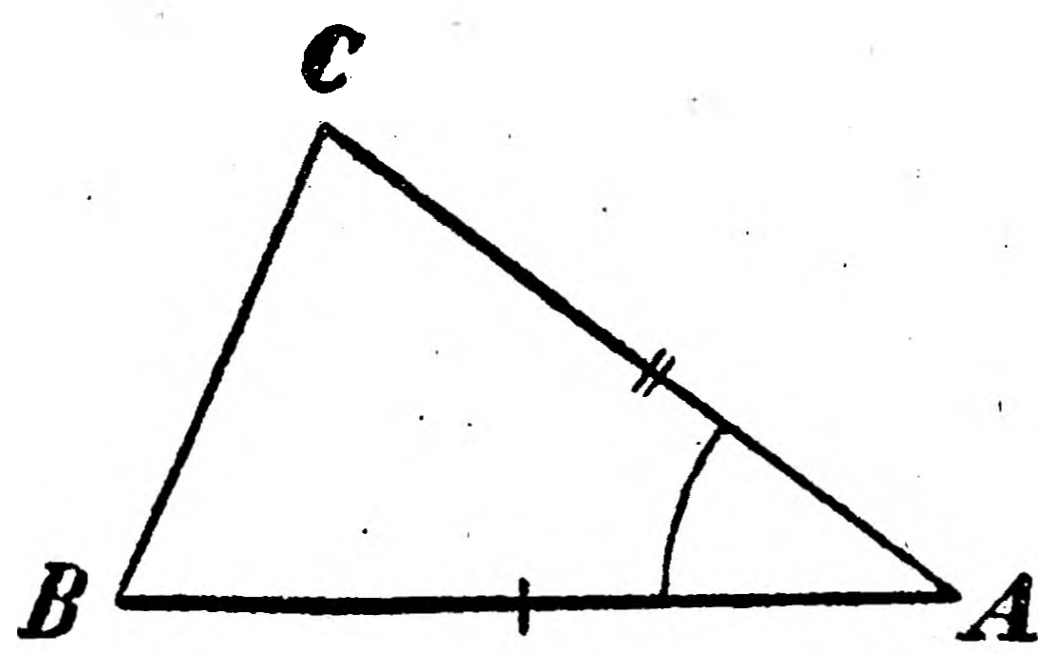


Рис. 149.

Измерьте в этом треугольнике один из углов, например $\angle D$ и две составляющие его стороны DF и DE.

Возьмите затем лист бумаги и нарисуйте на нем угол A (рис. 149), равный углу D. Стороны у этого угла (AB и AC) сделайте равными сторонам угла D. Соедините концы этих сторон (точки B и C) прямой линией. У вас получится новый треугольник ($\triangle ABC$). Вырежьте его и, наложив на первоначальный $\triangle EDF$, узнайте, равны ли эти два треугольника.

Результаты опыта. У моего $\triangle ABC$ (рис. 149):

$$\angle A = 35°;\ AB = 33\ мм;\ AC = 31\ мм.$$

$\triangle DEF$ (рис. 148) нарисован так, что

$$\angle D = 35°;\ DF = 33\ мм;\ DE = 31\ мм.$$

При наложении эти треугольники совместились всеми своими частями, следовательно, они равны друг другу.

Доказательство. Когда вы накладывали $\triangle DFE$ на $\triangle ABC$, то угол D можно всегда совместить с углом A (ибо по условию $\angle D = \angle A$), а потому стороны DE и DF должны пойти по направлению сторон AC и AB. Конец E должен лечь в точке C, а конец F — в точке B (ибо $DF = AB$ и $DE = AC$).

Остается исследовать, какое положение должна принять сторона FE. Точка E совпала с C, а точка F легла на точку B, следовательно, вся прямая FE должна слиться с прямой BC (между двумя точками можно нарисовать только одну прямую, § 142).

Итак, два таких треугольника всегда при наложении должны совместиться, то-есть они должны быть равны друг другу.

§ 152. *Задача.* Как измерить расстояние от точки A до точки B, между которыми находится препятствие? (Например, какое-либо здание или озеро, рис. 150.)

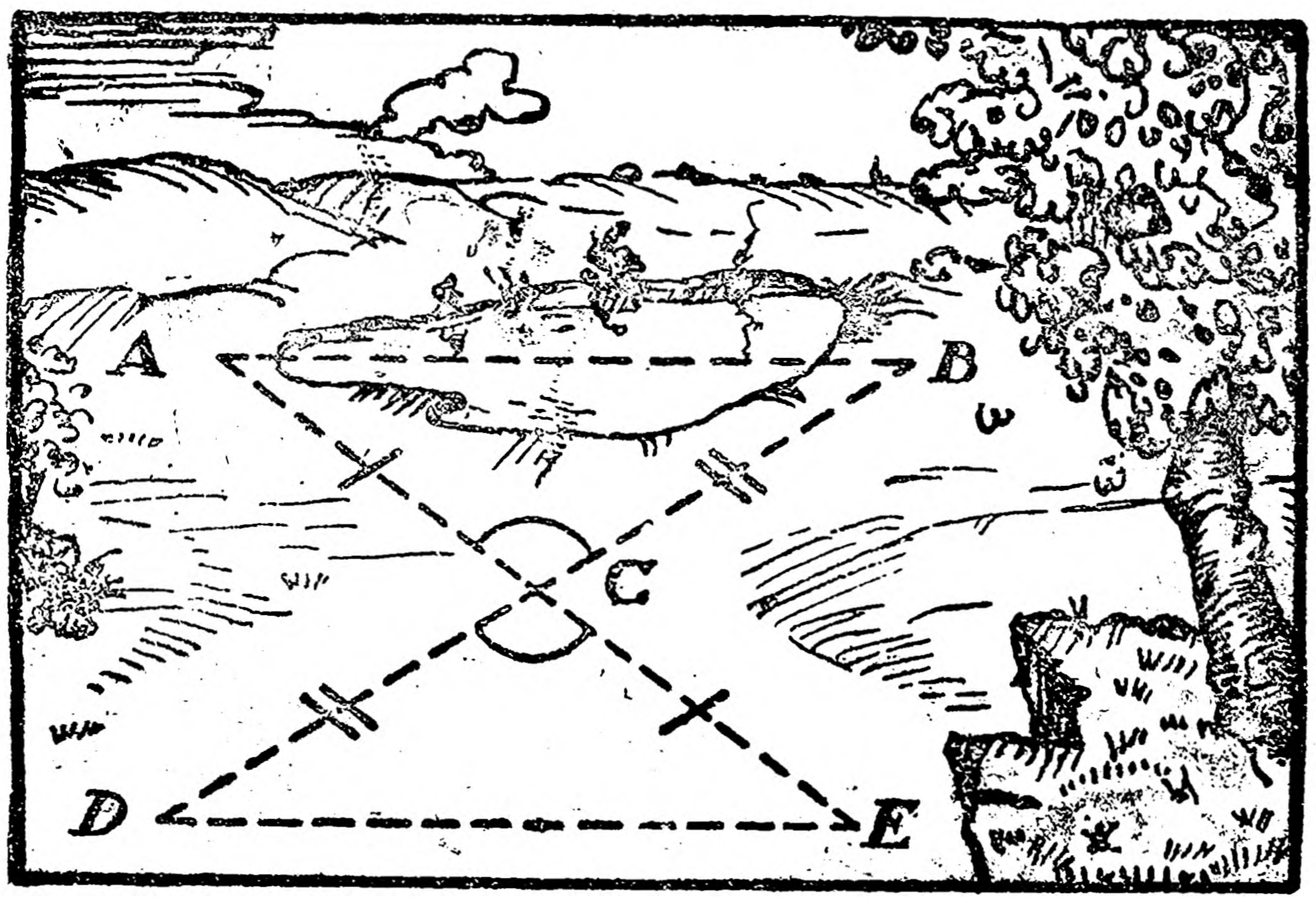


Рис. 150.
Измерение расстояния между двумя точками, когда между ними лежит препятствие.

Выберите такую точку C, чтобы можно было измерить расстояние ее от точек A и B. Затем, удлинив прямые AC и BC, отложите на продолжении их отрезки CE и CD, соответственно равные прямым AC и BC, и соедините прямой линией концы отложенных отрезков, точки D и E. Вы получите тогда два равных друг другу треугольника: $\triangle DCE = \triangle ACB$ (докажите это).

В равных треугольниках равны все соответствующие стороны, следовательно, сторона AB равна DE, а потому измерение прямой AB можно заменить измерением доступной нам линии DE.

§ 153. Второй признак равенства треугольников.

Теорема. Если одна сторона и два угла, прилегающие к ней, одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилегающим углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Опыт. Нарисуйте какой-нибудь треугольник, напр. $\triangle ABC$ (рис. 151). Измерьте одну из его сторон (например, AC) и два угла, прилегающие к ней ($\angle A$ и $\angle C$).

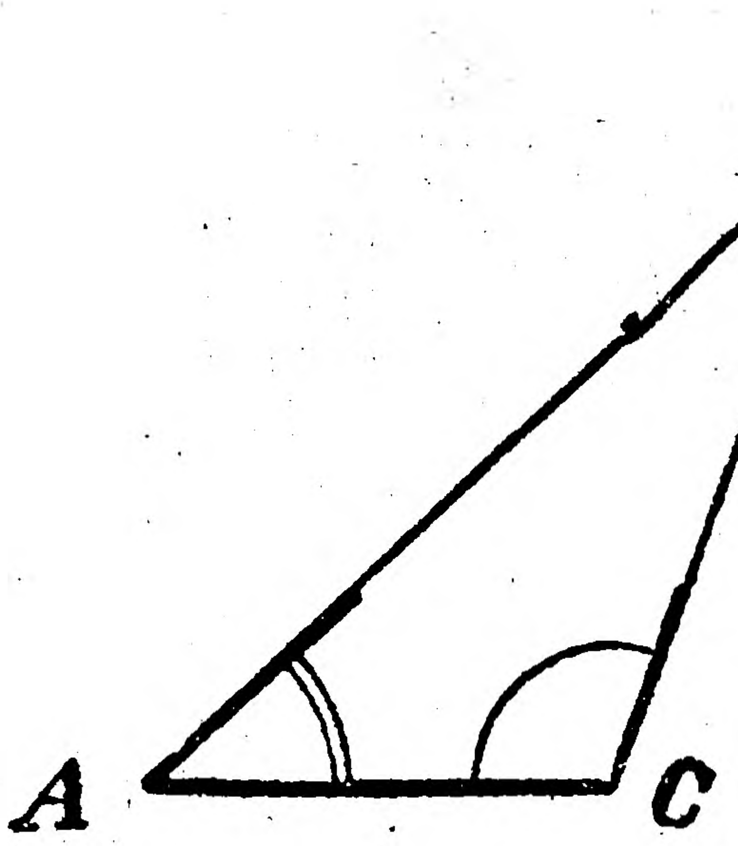


Рис. 151.

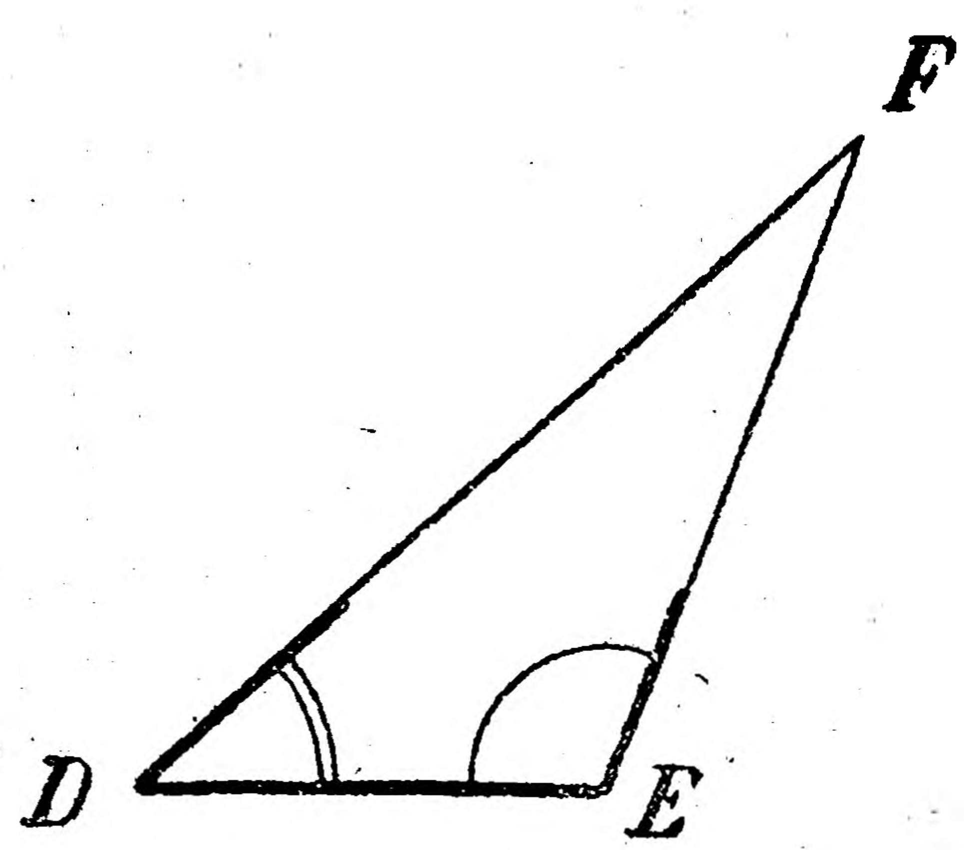


Рис. 152.

Начертите затем на листе бумаги прямую DE (рис. 152), равную стороне AC, и постройте у концов этой прямой при помощи транспортира два угла: $\angle D$, равный углу A, и $\angle E$, равный углу C. Удлинив стороны этих углов до тех пор, пока они не пересекутся в точке F, вы получите новый треугольник DEF.

Вырезав треугольник DEF и наложив его на первый треугольник ABC, сравните их друг с другом.

Результаты опыта. При наложении оказалось, что

$$\triangle DEF = \triangle ACB.$$

Доказательство. Совместим прежде всего сторону DE с AC. Эти стороны совпадут своими концами (ибо $DE = AC$), сторона EF должна пойти по стороне CB ($\angle E = \angle C$), а сторона DF пойдет всегда по направлению AB ($\angle D = \angle A$).

Остается исследовать, куда ляжет точка F. Эта точка F есть точка пересечения прямых DF и EF. Эти прямые после наложения пойдут по прямым AB и BC, которые пересекаются в точке B, следовательно, и накладываемые прямые пересекутся в той же точке B, другими словами, вершина F сольется с вершиной B.

Следовательно, треугольник DEF совместится с $\triangle ACB$ всеми частями.

§ 154. *Задача.* Как измерить расстояние между двумя точками A и B, если к точке B нельзя подойти (рис. 153)?

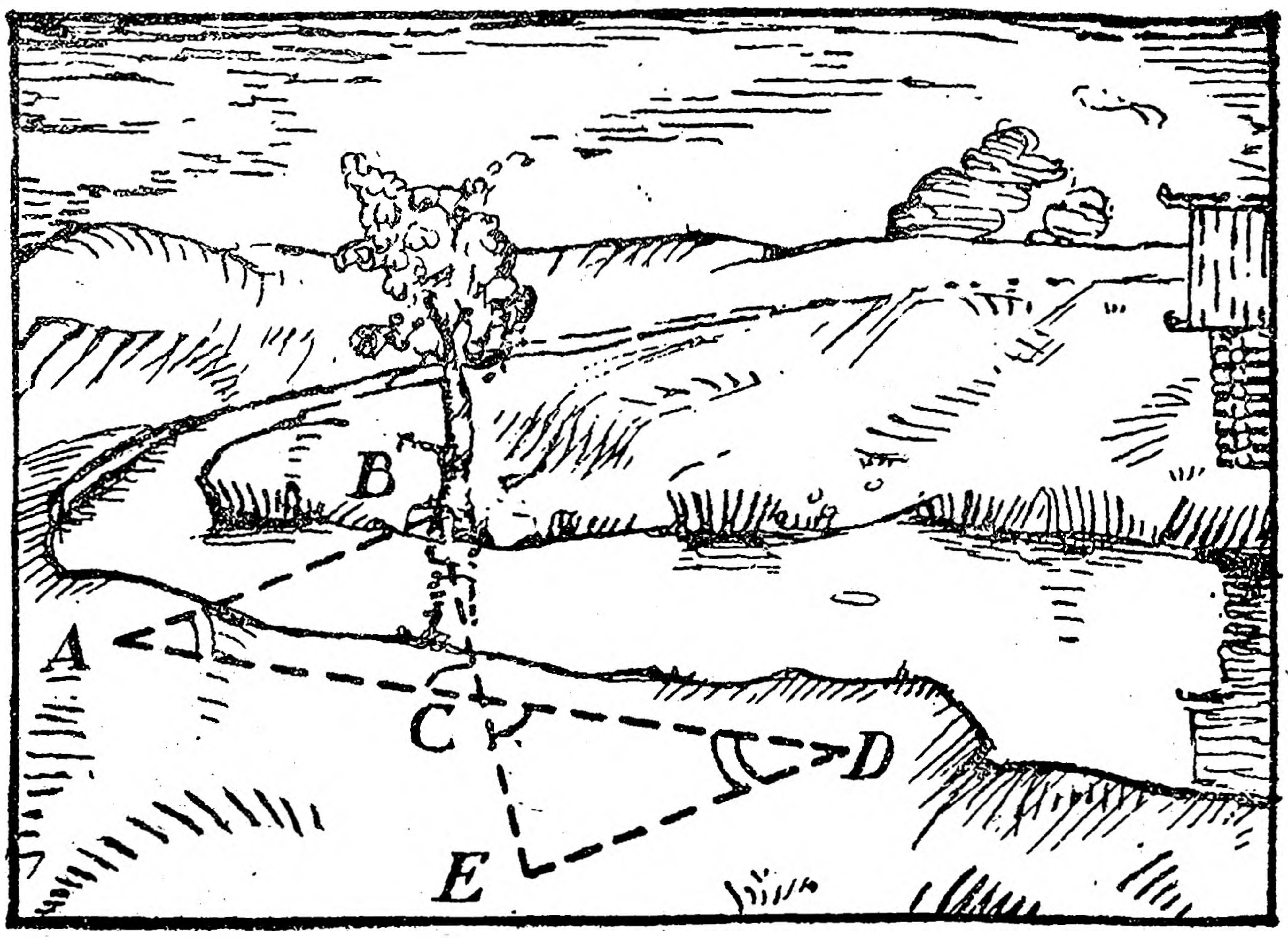


Рис. 153.
Измерение расстояния между двумя точками, если к одной из них нельзя подойти.

прежде всего надо выбрать такую точку C, чтобы из нее была видна точка B и чтобы можно было измерить прямую AC и угол A. Удлините стороны AC и BC и на продолжении их отложите часть CD, равную AC. У конца D постройте при помощи астролябии угол, равный углу A. У вас получится треугольник CDE. Сравните его с треугольником ABC.

Как, измерив DE, узнать длину AB?

§ 155. Третий признак равенства треугольников.

Теорема. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны друг другу.

Опыт. Нарисуйте у себя в тетради какой-нибудь треугольник (например, $\triangle ABC$, рис. 154).

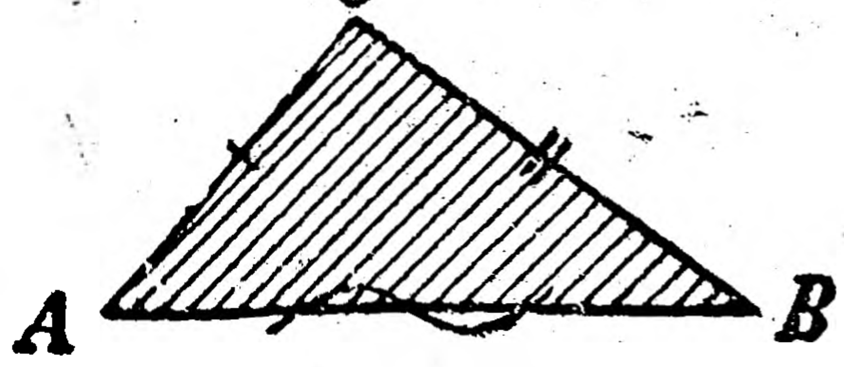


Рис. 154.

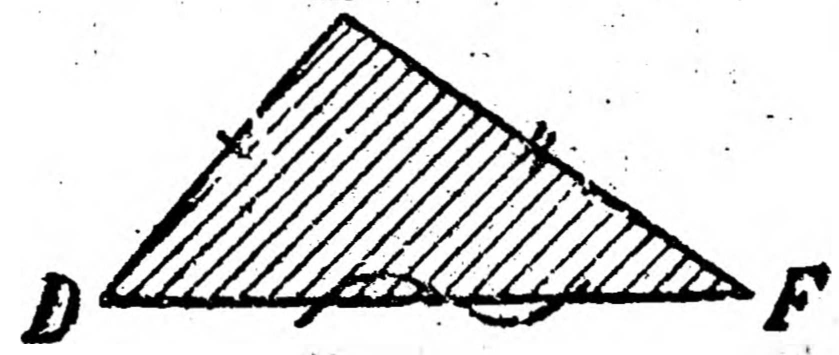


Рис. 155.

Составьте новый треугольник DFE так, чтобы стороны его были соответственно равны сторонам треугольника ABC (рис. 155). Вырежьте этот треугольник и, наложив его на $\triangle ABC$[1]), узнайте, равны ли эти треугольники.

Результаты опыта. Окажется, что $\triangle ABC = \triangle DFE$.

Доказательство. Предыдущий опыт наводит нас на мысль, что все треугольники, у которых три соответственные стороны равны друг другу, равны между собою.

Посмотрим сначала, нельзя ли убедиться в равенстве таких треугольников, накладывая их один на другой. Когда вы во время опыта накладывали $\triangle DFE$ на $\triangle ABC$, то вы совместили одну пару их равных сторон, например, DF и AB.

Эти две стороны у наших треугольников совместятся. (Почему?) Какое же направление примут две другие стороны DE и AC? Направление сторон зависит от величины углов. Так как об углах наших треугольников мы ничего не знаем, то мы и не можем быть уверены, что эти стороны всегда пойдут по одному и тому же направлению.

Итак, способ наложения не привел нас к цели. Попытаемся доказать равенство наших треугольников другим способом.

Перевернем треугольник DFE вершиною E вниз и приложим к $\triangle ABC$ так, чтобы стороны их DF и AB совпали и чтобы треугольник DFE принял положение треугольника ABK (рис. 156).

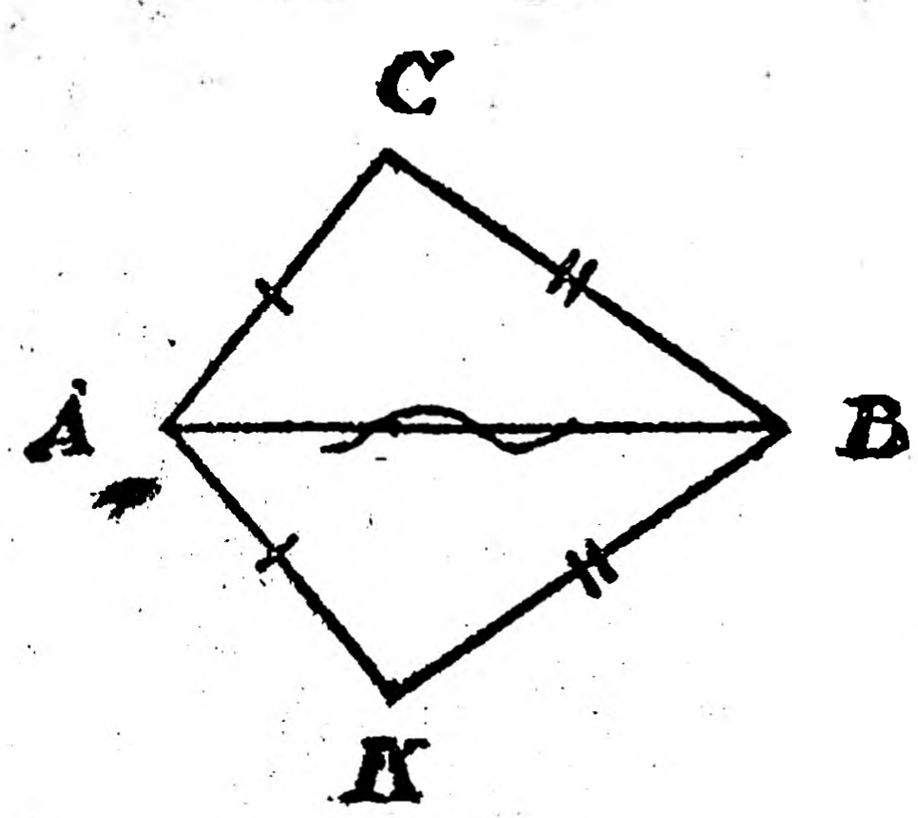


Рис. 156.

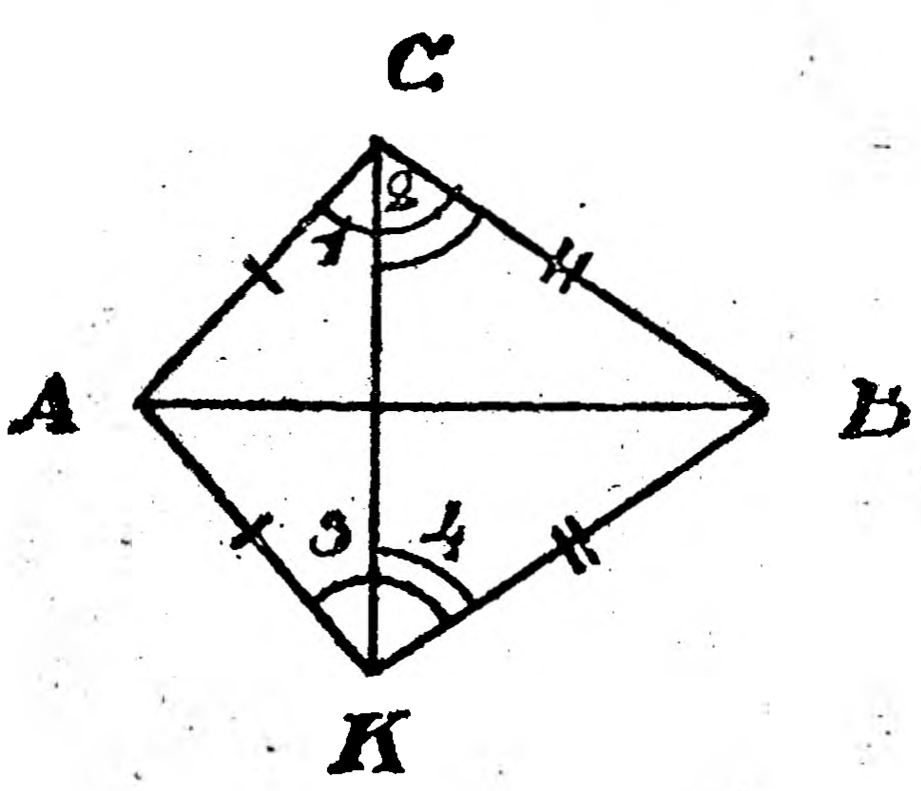


Рис. 156а.

Постараемся теперь использовать один из доказанных уже нами признаков. У этих треугольников $AC = AK$, $CB = BK$. (Почему?) Следовательно, если удастся доказать равенство углов, лежащих между этими сторонами, то этим самым мы, согласно § 152, докажем и равенство наших треугольников. Обратим наше внимание на эти

[1]) Для этого можно приготовить 3 бумажных полосы, равные по длине сторонам AC, AB и BC, и склеить из них треугольник.

Если вы хотите сделать построение более точно и аккуратно, то воспользуйтесь циркулем, расстояние между остриями которого будет заменять собою длину бумажных полос.

углы ($\angle C$ и $\angle K$). Соединим вершины их прямой CK (рис. 156а). Тогда $\angle C$ разобьется на два угла: $\angle 1$ и $\angle 2$, а $\angle K$ разобьется на $\angle 3$ и $\angle 4$.

Сравним попарно эти углы:

$$\angle 1 = \angle 3 \ (\triangle ACK \text{— равнобедренный, § 149});$$

$$\angle 2 = \angle 4 \ (\triangle BCK \text{— равнобедренный}).$$

Сложим попарно эти углы:

$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4.$$

Так как $\angle 1 + \angle 2$ можно заменить углом C, а $\angle 3 + \angle 4$ можно заменить углом K, то

$$\angle C = \angle K.$$

Вернемся теперь к треугольникам ABC и ABK. Эти треугольники, согласно второму признаку (§ 153), равны друг другу:

$$\triangle ABC = \triangle ABK.$$

А так как вместо $\triangle ABK$ можно поставить равный ему $\triangle DFE$, то

$$\triangle ACB = \triangle DFE,$$

что и требовалось доказать.

43. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 156. О равенстве двух прямоугольных треугольников можно судить по следующим признакам:

Теорема 1. Прямоугольные треугольники равны, если они имеют равные гипотенузы и по одному равному острому углу.

Доказательство. Наложим $\triangle MKD$ на $\triangle ABC$ (рис. 157) так, чтобы у них совпали гипотенузы и равные острые углы. Тогда KM пойдет по BA ($\angle K = \angle B$), точка D совпадает с C ($KD = BC$), а катет DM сольется с CA (из одной точки на одну прямую можно опустить только один перпендикуляр). Наши треугольники совпали, значит, они равны.

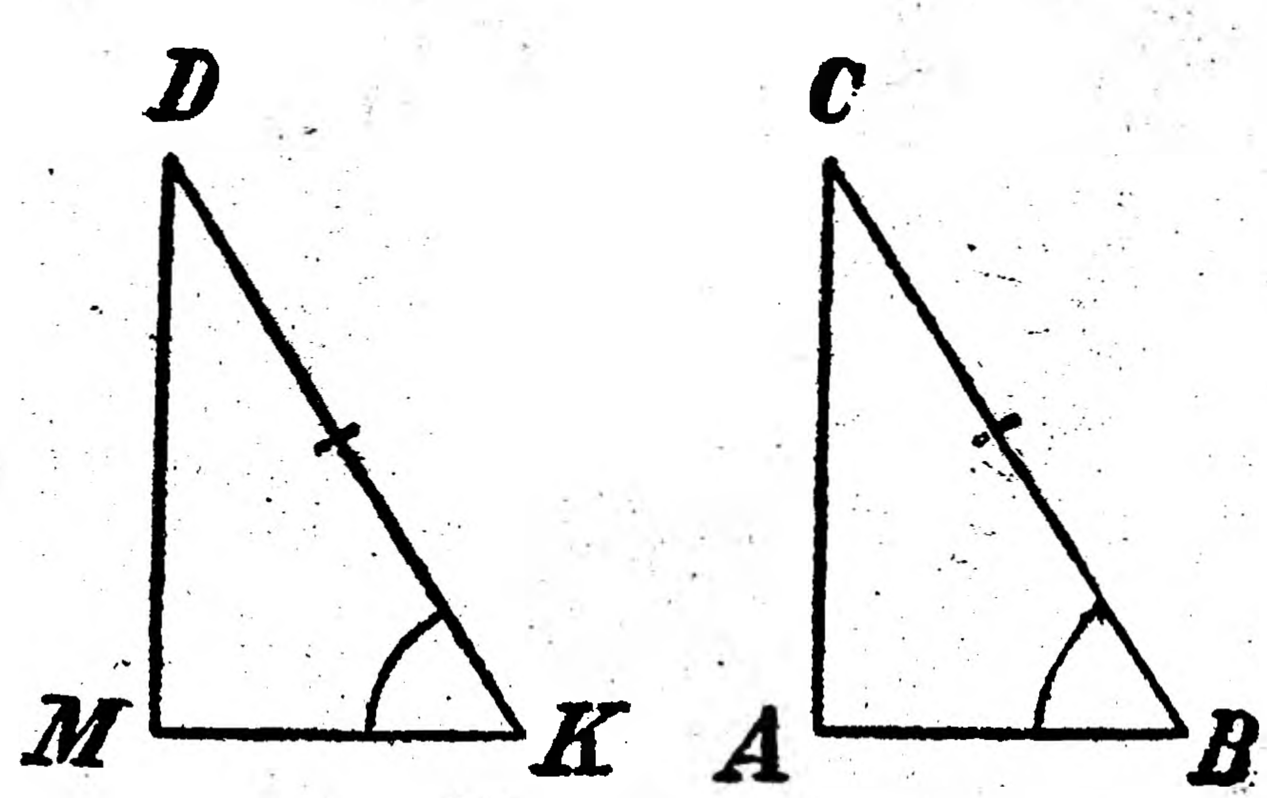


Рис. 157.

Теорема 2. Прямоугольные треугольники равны, если они имеют одинаковые гипотенузы и по равному катету.

*

Доказательство. Приложим $\triangle RFK$ к $\triangle ABC$ (рис. 158) равными катетами (рис. 159). У нас получится равнобедренный треугольник BCD ($CB = KF = CD$).

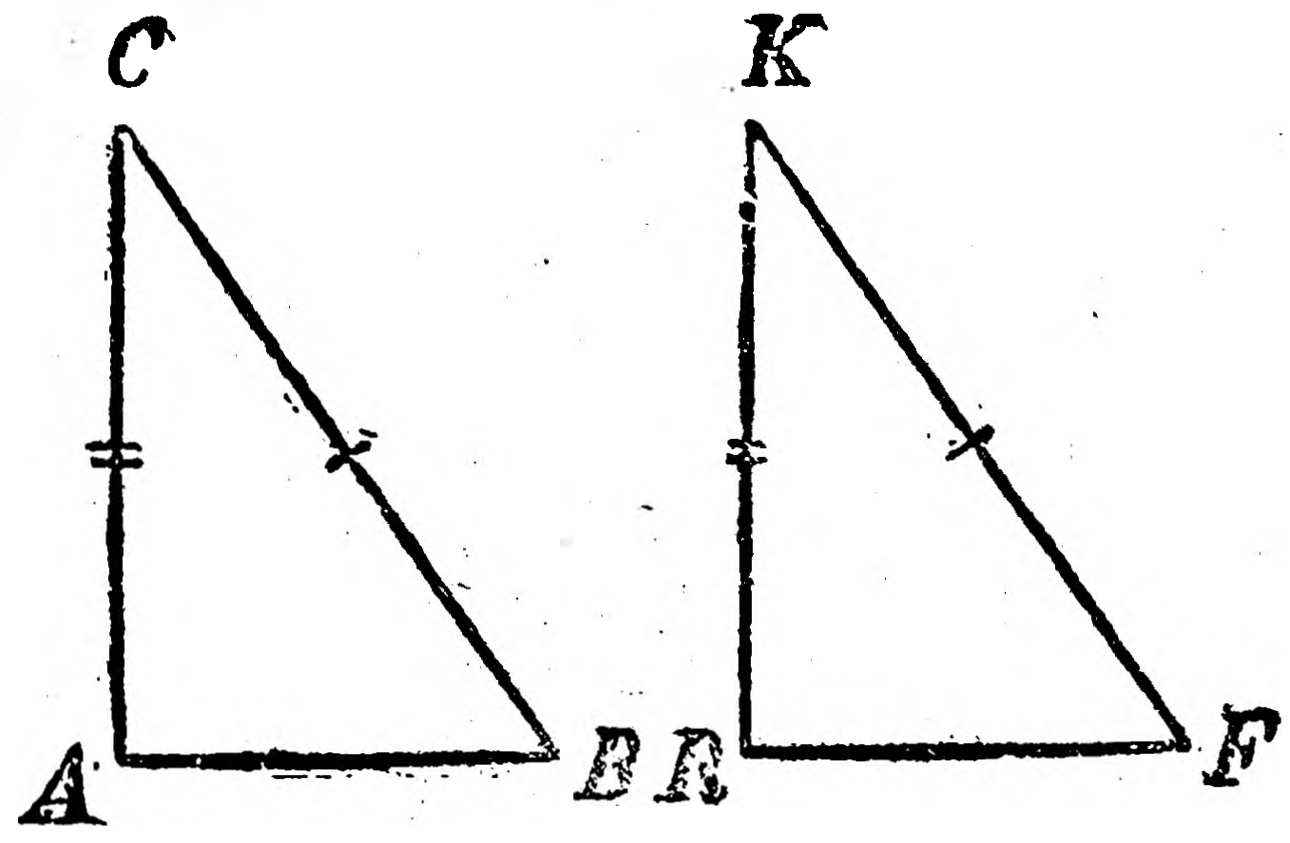


Рис. 158.

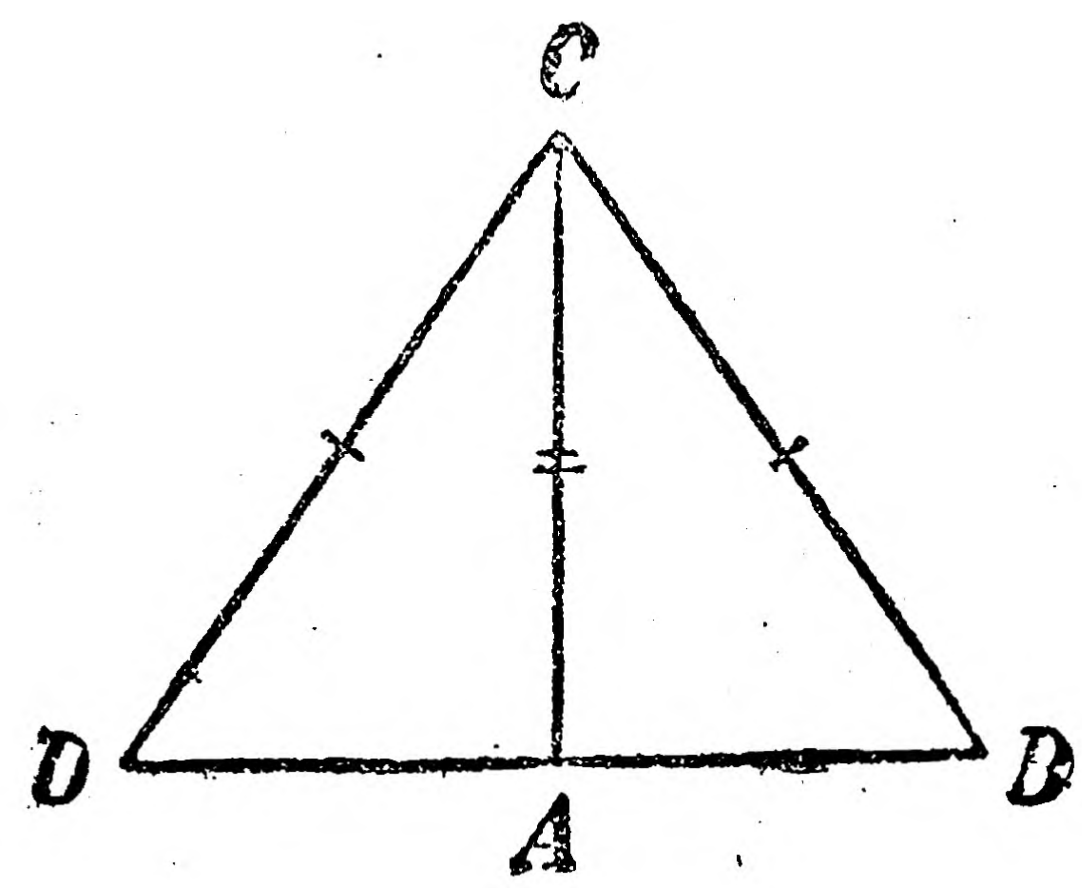


Рис. 159.

Высота CA этого равнобедренного треугольника ($\angle CAB$ и $\angle CAD = \angle KRF$, оба прямые) есть вместе с тем и биссектриса, которая рассекает равнобедренный треугольник на два равных треугольника (§ 148). Следовательно, $\triangle ABC = \triangle ADC = \triangle RFK$.

§ 157. Равенство скольких элементов влечет за собой равенство треугольников? В состав каждого треугольника входит 6 элементов (три стороны и три угла). Для равенства треугольников оказалось достаточным исследовать, равны ли у них только три какихнибудь элемента, при чем в число сравниваемых элементов должна входить, по крайней мере, одна сторона.

44. СИММЕТРИЯ.

§ 158. Симметричные фигуры. Биссектриса равнобедренного треугольника рассекает его на два треугольника ADC и ADB (рис. 160).

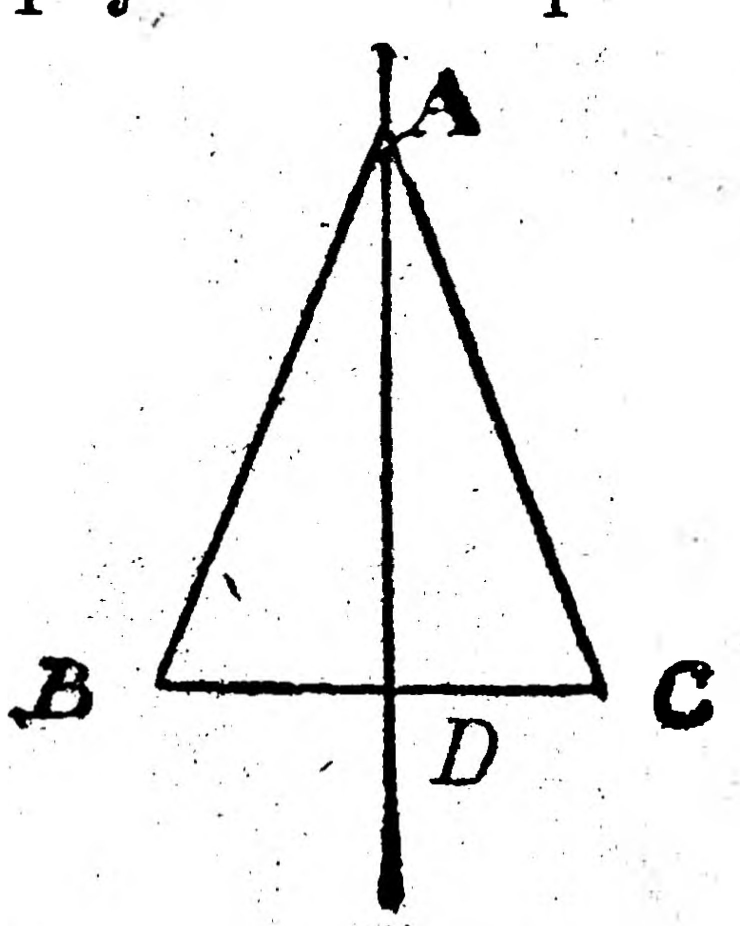


Рис. 160.

Вращая один из этих треугольников вокруг биссектрисы, нам удалось (§ 148) наложить эти треугольники один на другой так, что они совпали всеми своими частями.

Такие две фигуры, которые вращением вокруг какой-нибудь прямой могут быть совмещены одна с другой всеми своими частями, называются симметричными фигурами, а та прямая, при вращении вокруг которой симметричные фигуры совпадают, называется осью симметрии. В нашем примере $\triangle ADC$ и $\triangle ADB$ симметричны относительно AD, которая и является их осью симметрии.

§ 159. Симметричные точки.

Теорема. Прямая, соединяющая симметричные точки (A и A_1), делится осью симметрии пополам и перпендикулярна к ней.

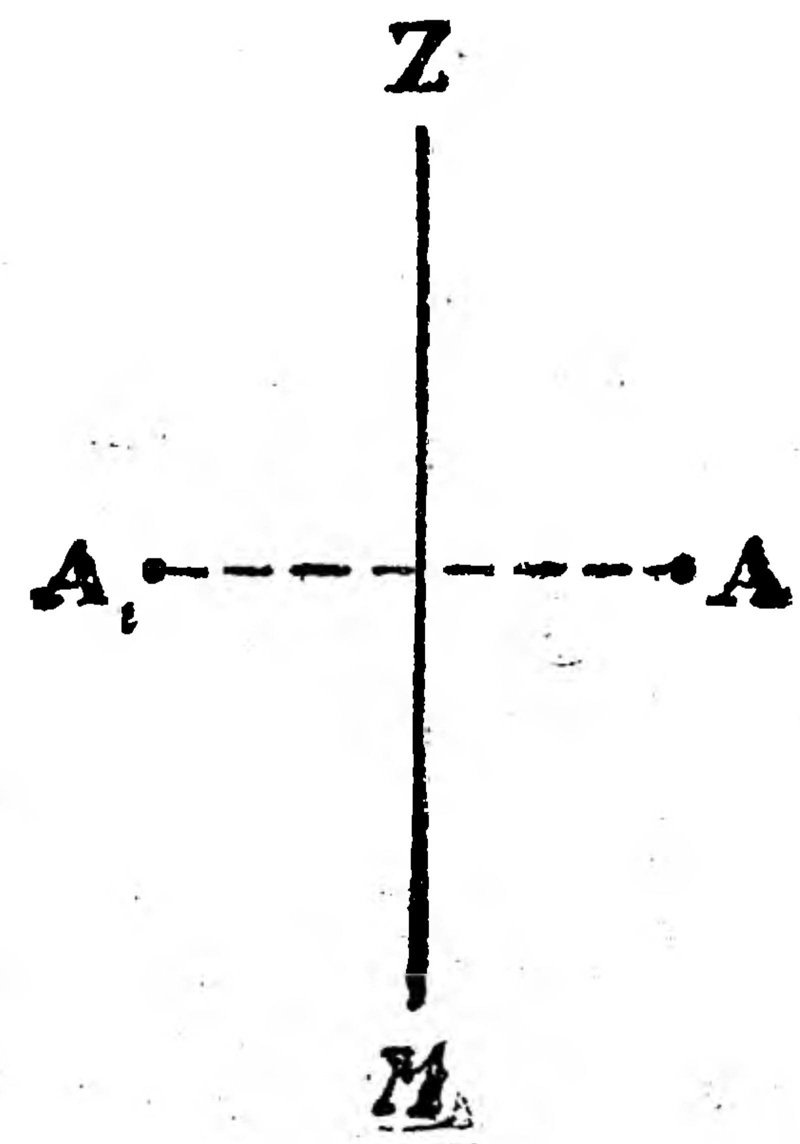


Рис. 161.

Опыт. Согните лист бумаги по прямой линии и проколите его где-нибудь булавкой. Разверните ваш лист: в нем вы найдете две проколотые точки A и A_1 (рис. 161) и прямую ZM, по которой вы сгибали бумагу. A и A_1 будут симметричны относительно прямой ZM. (Почему?)

Докажите, что прямая AA_1 (рис. 161) делится осью симметрии ZM пополам и перпендикулярна к нӗй.

§ 160. Свойство перпендикуляра, проведенного к прямой через ее середину.

Теорема 1. Перпендикуляр, проведенный к данной прямой через ее середину, есть ось симметрии этого отрезка.

Нарисуйте отрезок AB и отметьте середину его D. Проведите при помощи наугольника прямую, перпендикулярную к нашему отрезку и проходящую через середину его (рис. 162).

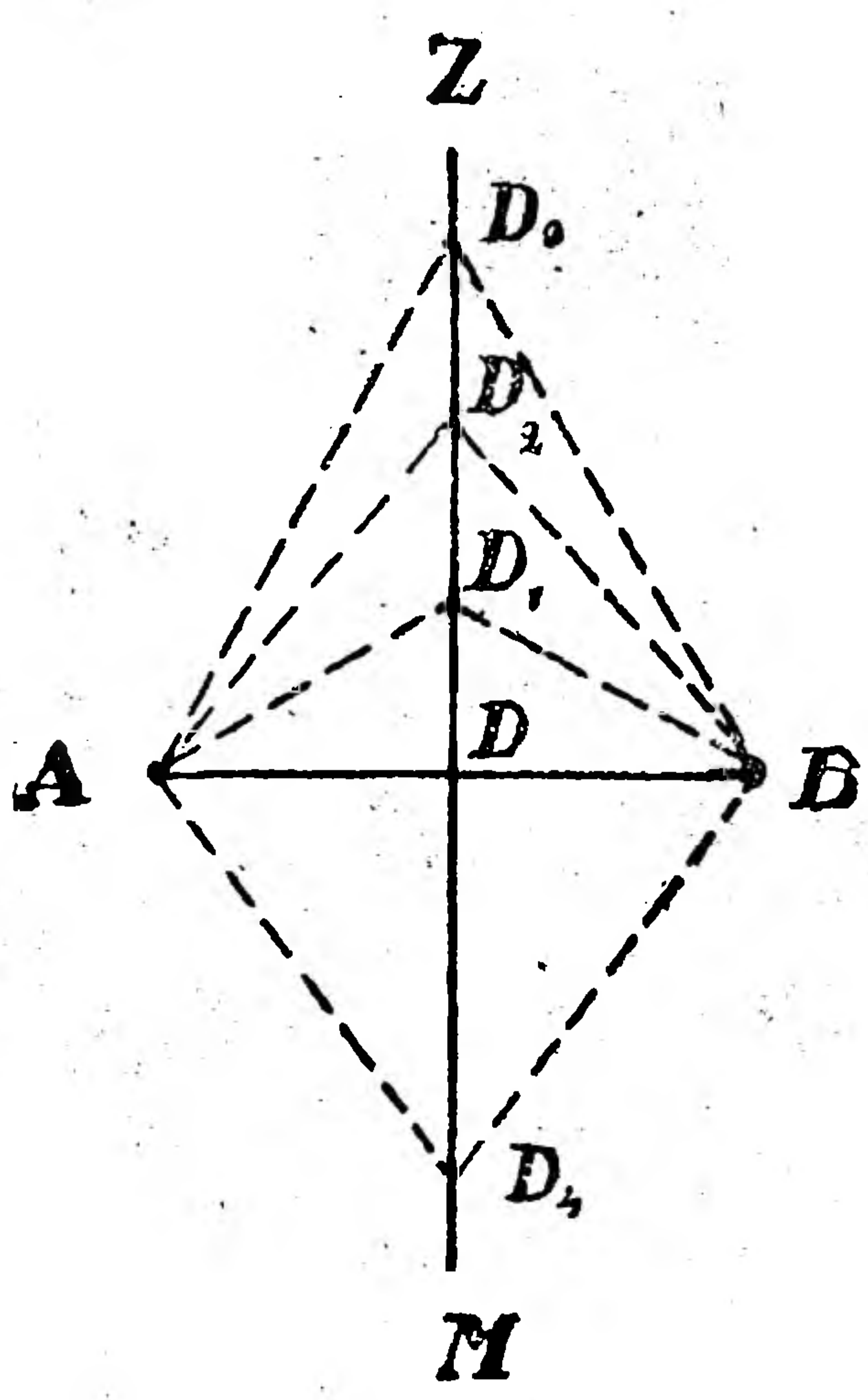


Рис. 162.

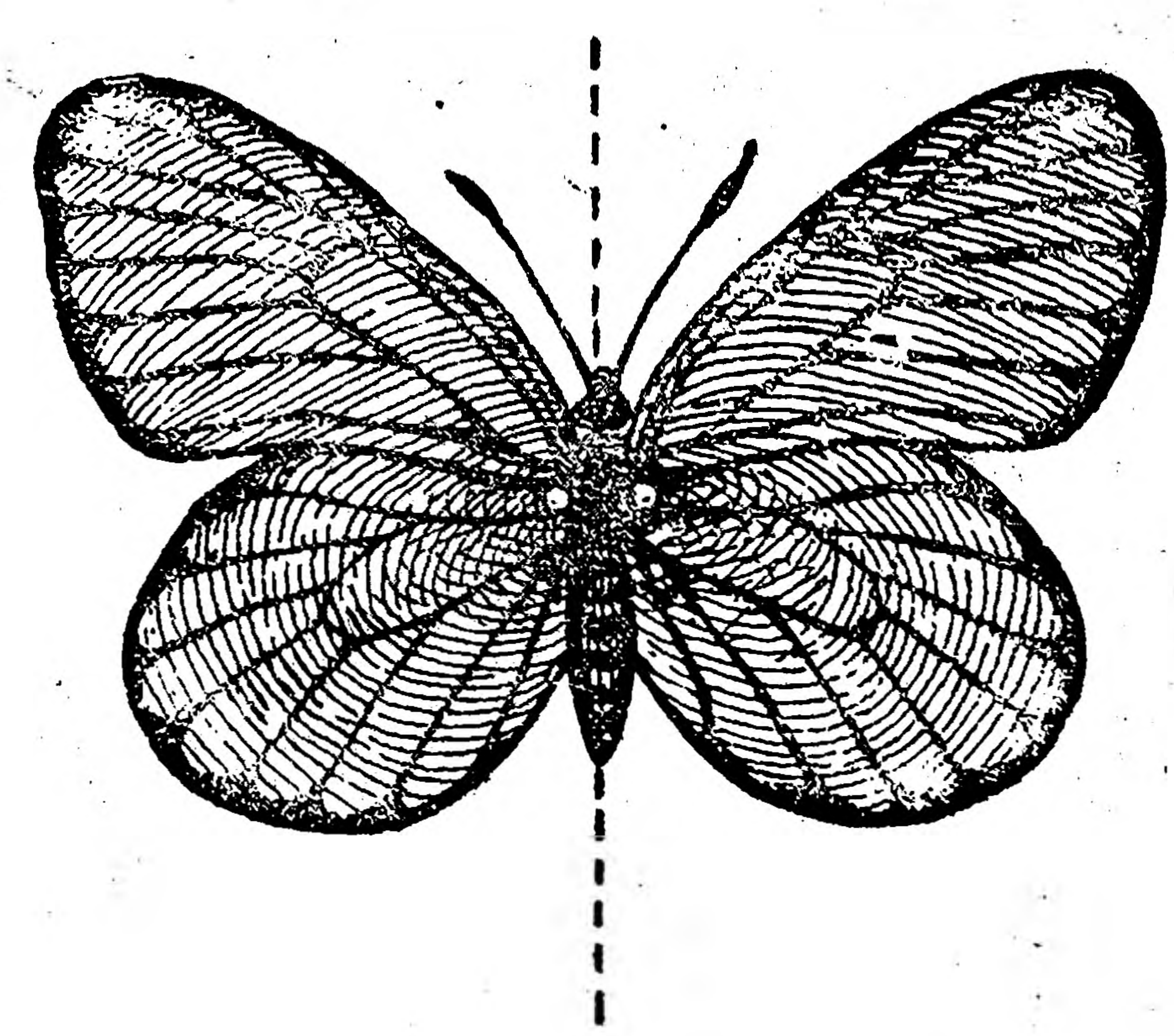


Рис. 163.
Где ось симметрии?

Докажите, что этот перпендикуляр ZM, проведенный через середину D отрезка AB, есть ось симметрии этого отрезка.

Указание. Надо доказать, что если согнуть чертеж вдоль оси ZM, то BD пойдет по AD (углы у точки D прямые) и что точка B сольется с точкой A ($DB = DA$).

Теорема 2. Любая точка, лежащая на перпендикуляре, проведенном к какому-либо отрезку прямой линии в середине его, одинаково удалена от концов этого отрезка.

Докажите эту теорему сами, воспользовавшись указаниями, данными в предыдущей теореме, и пользуясь тем же рисунком.

Проверьте непосредственным измерением, что $D_1A = D_1B$, $D_2A = D_2B$ и т. д.

Где ось симметрии на рис. 163?

§ 161. Свойство биссектрисы угла.

Теорема 1. Биссектриса любого угла есть его ось симметрии.

Теорема 2. Любая точка, взятая на биссектрисе угла, находится на одинаковом расстоянии от обеих сторон этого угла.

Опыт. Нарисуйте какой-нибудь угол и проведите его биссектрису (рис. 164). Отметьте на биссектрисе любую точку и опустите из нее на обе стороны перпендикуляры N_1B_1 и N_1C_1. Сгибая угол по биссектрисе, узнайте, равны ли эти перпендикуляры.

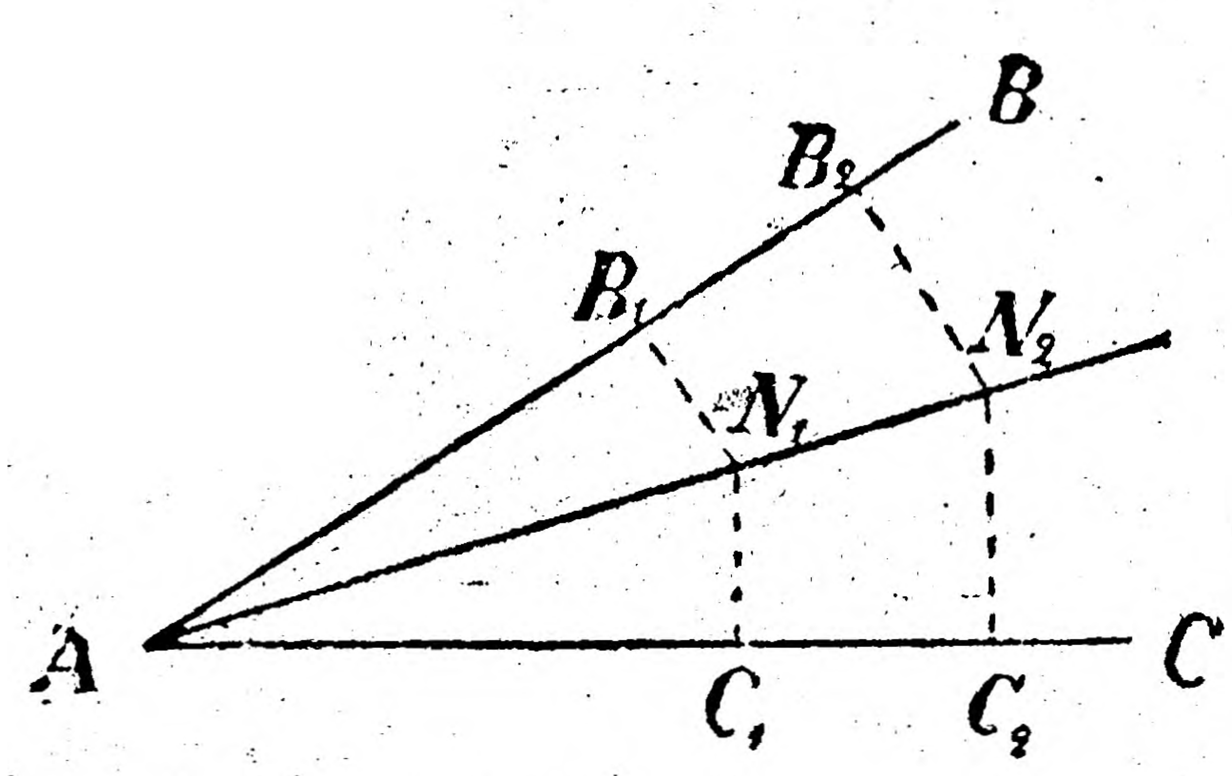


Рис. 164.

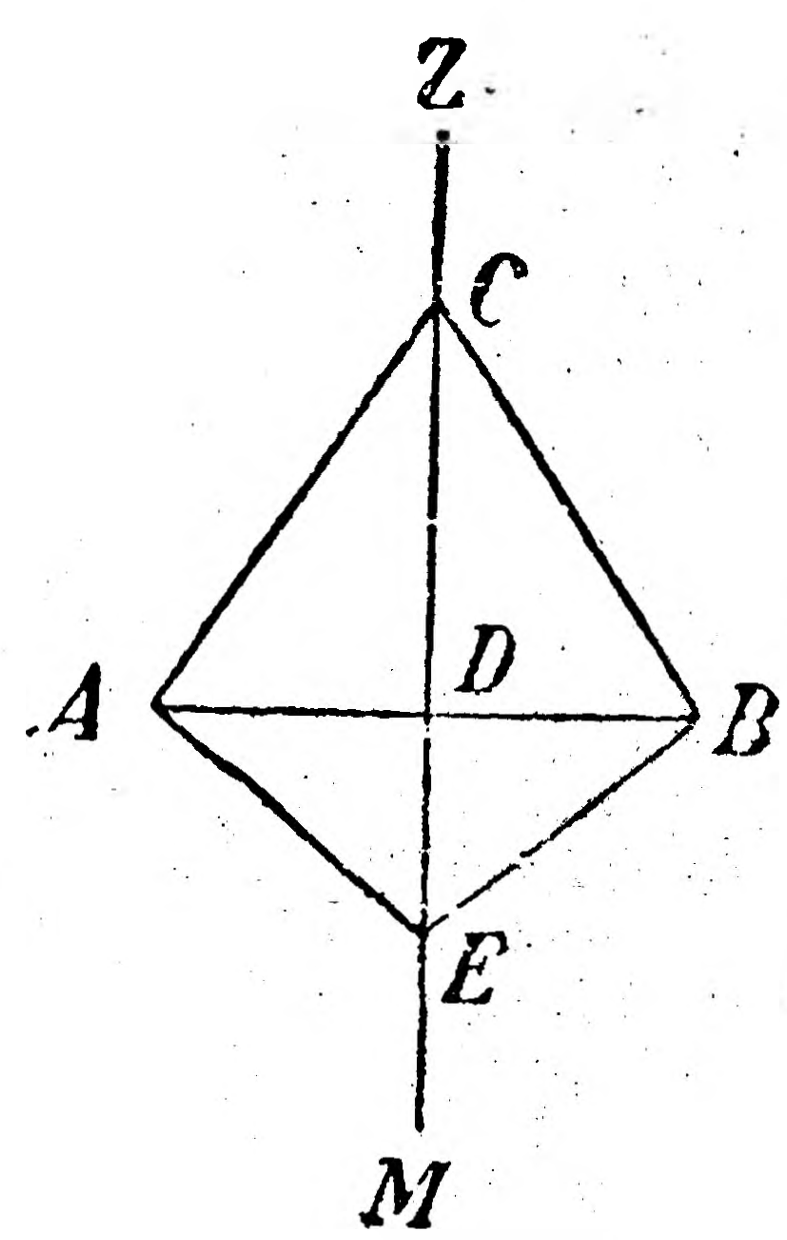


Рис. 165.

Доказательство. При сгибании угла сторона AC пойдет по AB (AN_1 — биссектриса); перпендикуляр N_1C_1 сольется с N_1B_1 (из одной точки на одну прямую можно опустить только один перпендикуляр).

§ 162. Свойство равнобедренных треугольников, имеющих общее основание.

Теорема. Прямая, соединяющая вершины двух равнобедренных треугольников, сложенных своими равными основаниями, служит осью симметрии полученной фигуры.

Докажите эту теорему сами, воспользовавшись §§ 155 и 148 и рисунком 165.

Проверьте справедливость этой теоремы на опыте.

45. РИСОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ.

§ 163. До сих пор мы рисовали линии, углы и треугольники, пользуясь линейкой, наугольником и транспортиром. Однако ни наугольник, ни тем более транспортир не могут дать особенно точного чертежа. Если надо сделать чертеж возможно точнее, то пользуются линейкой и циркулем.

§ 164. Деление прямой пополам.

Задача 1. Разделить данный отрезок прямой пополам.

Построение. Поставив острие циркуля в точку A (рис. 166) радиусом, большим, чем половина отрезка AB, опишите около точки A, как около центра, окружность. Тем же радиусом опишите вторую окружность, приняв за ее центр точку B. Соедините при помощи линейки две точки пересечения C и E наших окружностей.

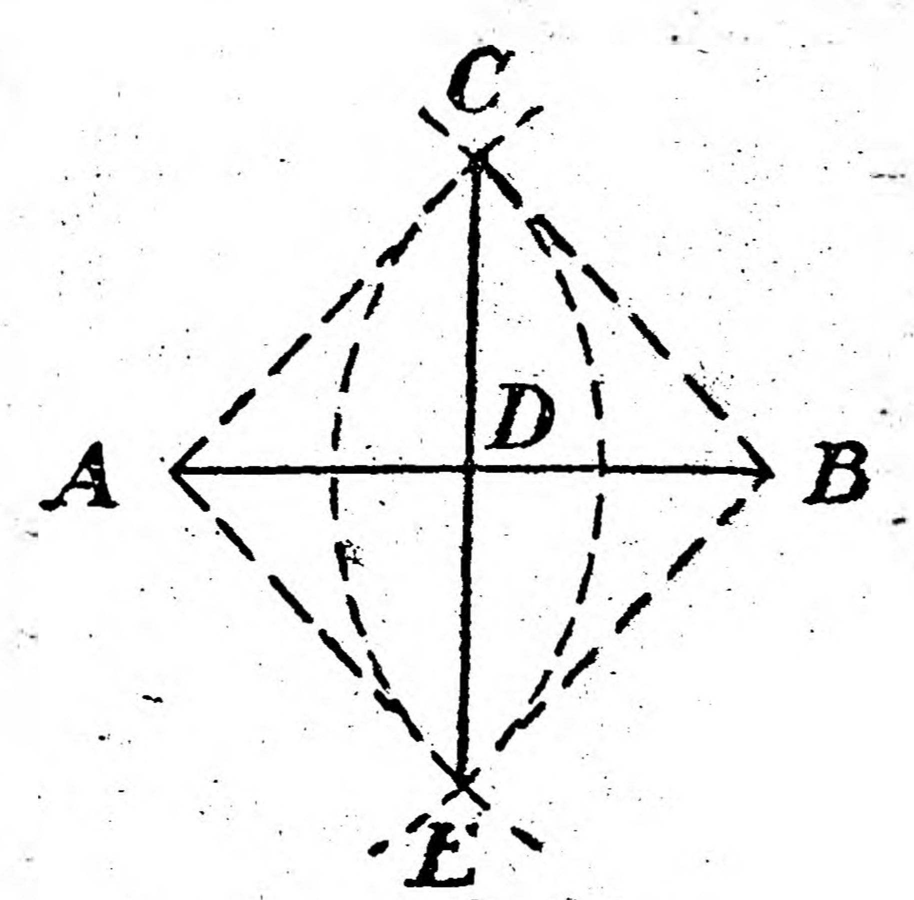


Рис. 166.

Доказательство. Если на отрезке AB, как на основании, построить два равнобедренных треугольника и соединить их вершины C и E прямой линией, то эта прямая, будучи осью симметрии, разделит наш отрезок AB пополам (§ 162). Оба равнобедренных треугольника взяты здесь одинаковыми.

§ 165. Построение перпендикуляров.

Задача 2. Провести перпендикуляр к данному отрезку прямой AB через его середину.

Построение. Сделайте такое же построение, как и в задаче № 1 предыдущего §.

Докажите, что нарисованная прямая CE (рис. 167) есть искомый перпендикуляр, пользуясь § 164.

Задача 3. Нарисовать к данной прямой AB перпендикуляр, проходящий через точку D, взятую на этой прямой.

Построение. Поставьте острие циркуля в точке D (рис. 167) и сделайте второй ножкой циркуля на одной прямой AB две засечки A и B. Тогда точка D будет серединой отрезка AB. Повторив построение предыдущей задачи, вы найдете прямую CE, перпендикулярную к AB и проходящую через точку D.

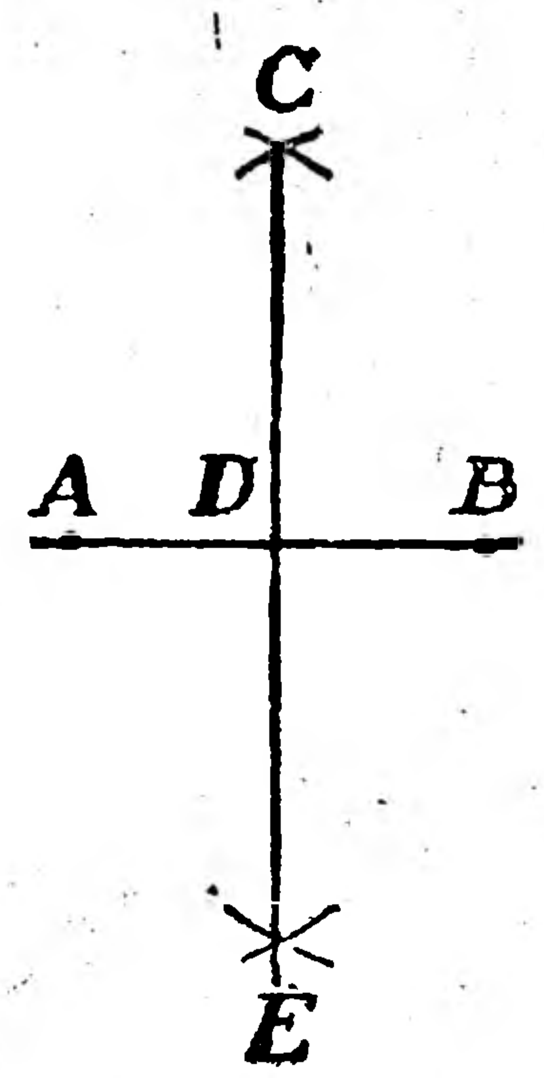


Рис. 167.

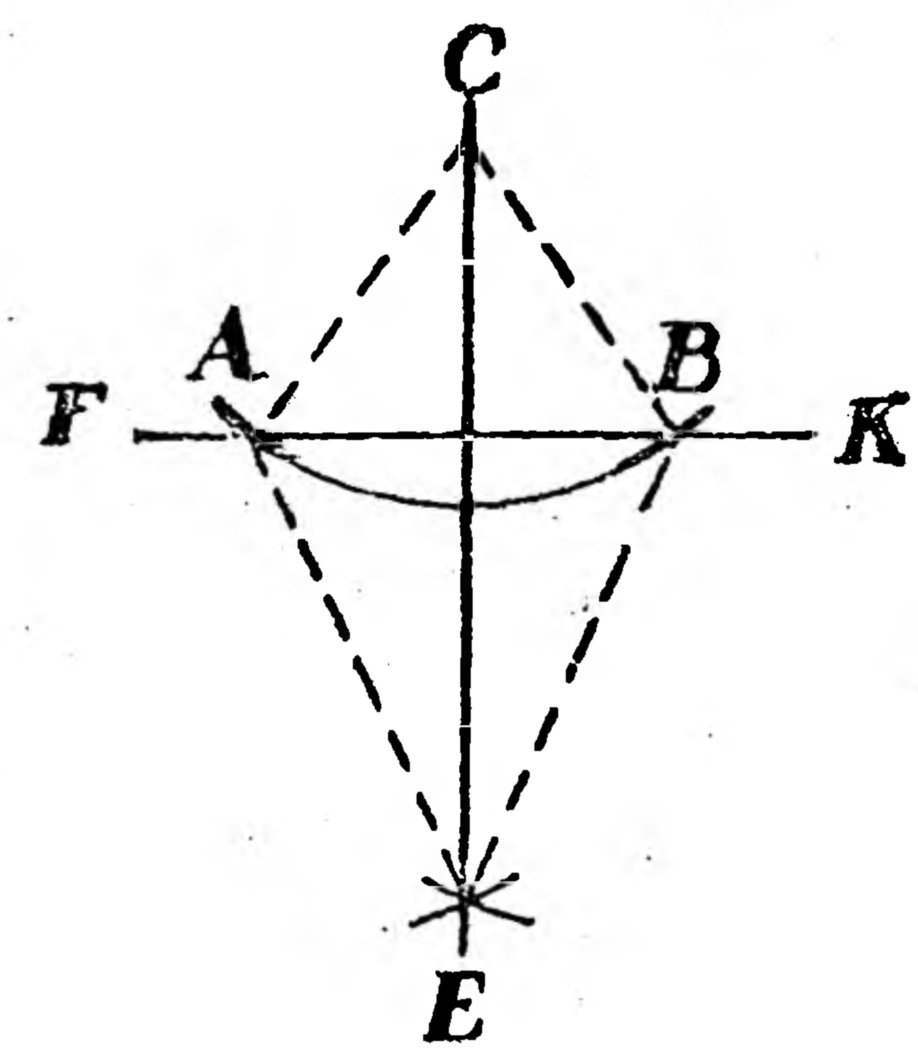


Рис. 168.

Задача 4. Нарисовать прямую, перпендикулярную к данной прямой и проходящую через данную точку, взятую вне данной прямой.

Прежде всего надо построить (рис. 168) такой равнобедренный треугольник CAB, чтобы его вершина была в точке C и основание лежало на данной прямой FK. Когда этот треугольник будет построен, остается построить второй равнобедренный треугольник AEB с тем же основанием AB. Соединив вершины C и E этих треугольников, мы и получим искомый перпендикуляр.

§ 166. Построение углов.

Задача 5. Нарисовать угол, равный данному углу A (рис. 169).

Исследование. Задачу можно свести на построение двух равных треугольников, в состав которых должен войти и данный угол. Соединив две какие-нибудь точки E и D, лежащие на сторонах угла EAD (рис. 169), мы получим треугольник EAD, стороны которого нам известны. Остается при помощи циркуля построить на данной прямой CM у точки C такой же треугольник.

Построение. Поставив острие циркуля в вершину угла A (рис. 169), другой ножкой его сделайте на обеих сторонах его засечки E и D. Тем же радиусом опишите окружность возле точки C (рис. 170). Окружность эта пересечет нашу прямую CM в точке N, соответствующей точке D. Чтобы найти третью вершину искомого треугольника, надо раздвинуть ножки циркуля на расстояние ED и, поставив ножку с острием в точку N, другой ножкой сделать засечку S.

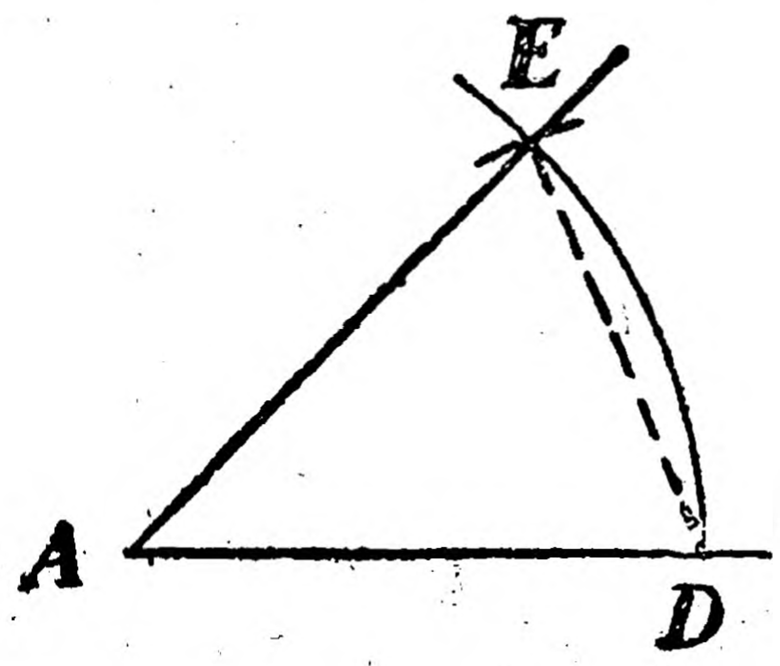


Рис. 169.

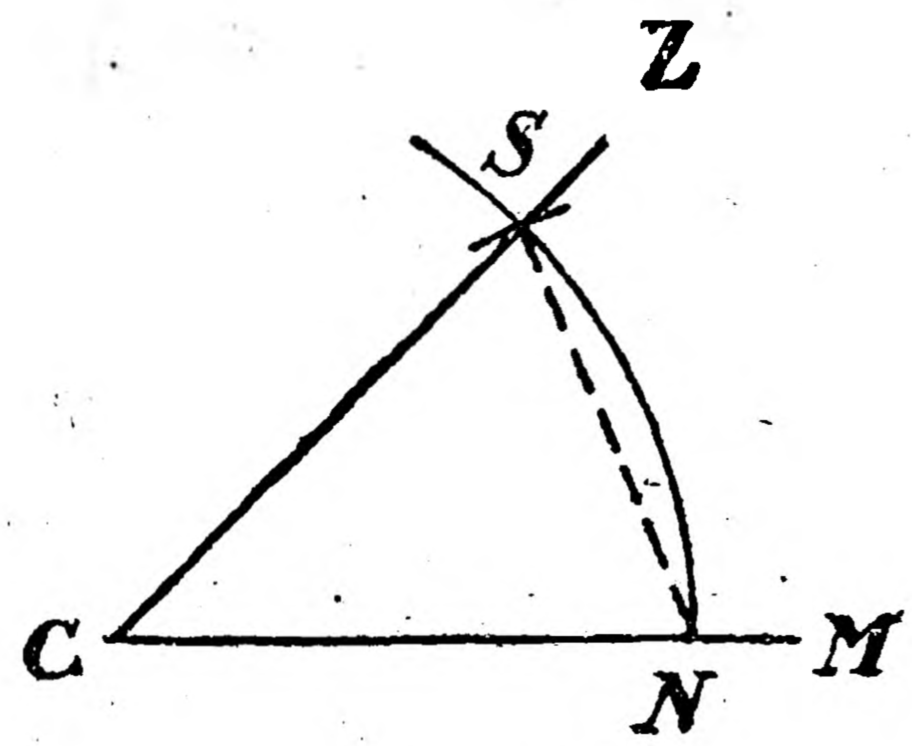


Рис. 170.

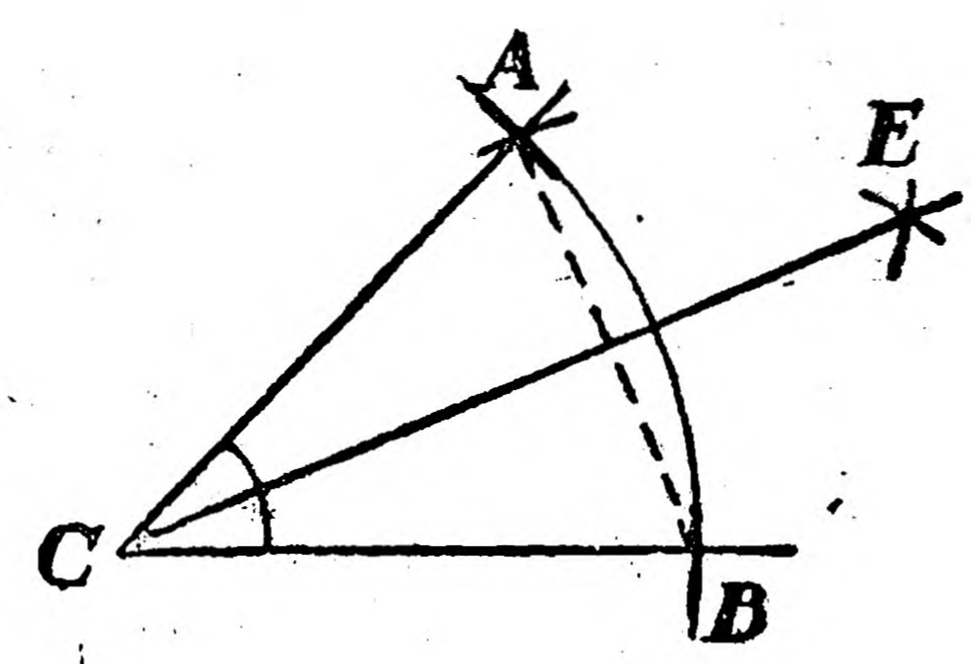


Рис. 171.

Соединив точку S с C прямой линией, мы и получим $\angle ZCM$ равный $\angle EAD$.

Задача 6. Разделить данный угол C пополам (рис. 171).

Пользуясь указаниями, данными в задаче № 4 и рис. 171, вы без труда сами сделаете должное построение.

§ 167. Построение треугольников. Мы в §§ 151 и 153 подробно рассматривали вопрос о построении треугольников, равных данному, при помощи транспортира и линейки. При этом выяснили, что для этого необходимо и достаточно знать три элемента его (в число данных элементов должна входить, по крайней мере, одна сторона).

Постройте те же треугольники (§§ 151 и 153), заменив транспортир и наугольник циркулем и линейкой.

46. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ.

§ 168. *Теорема.* Если из одной и той же точки к одной и той же прямой провести перпендикуляр и наклонную, то перпендикуляр всегда будет короче наклонной.

Опыт. Нарисуйте неопределенной длины прямую LM и точку O вне ее (рис. 172). Опустите из этой точки на нашу прямую перпендикуляр OA. Вырежьте из бумаги узкую полоску более длинную, чем перпендикуляр OA, и, укрепив булавкой один конец ее в точке O, вращайте ее до тех пор, пока второй конец не встретит прямую LM в двух точках B_1 и B_2. Вы получите две одинаковой длины наклонных OB_1 и OB_2, основания которых одинаково удалены от основания A перпендикуляра OA. Продолжайте укорачивать подвижную прямую.

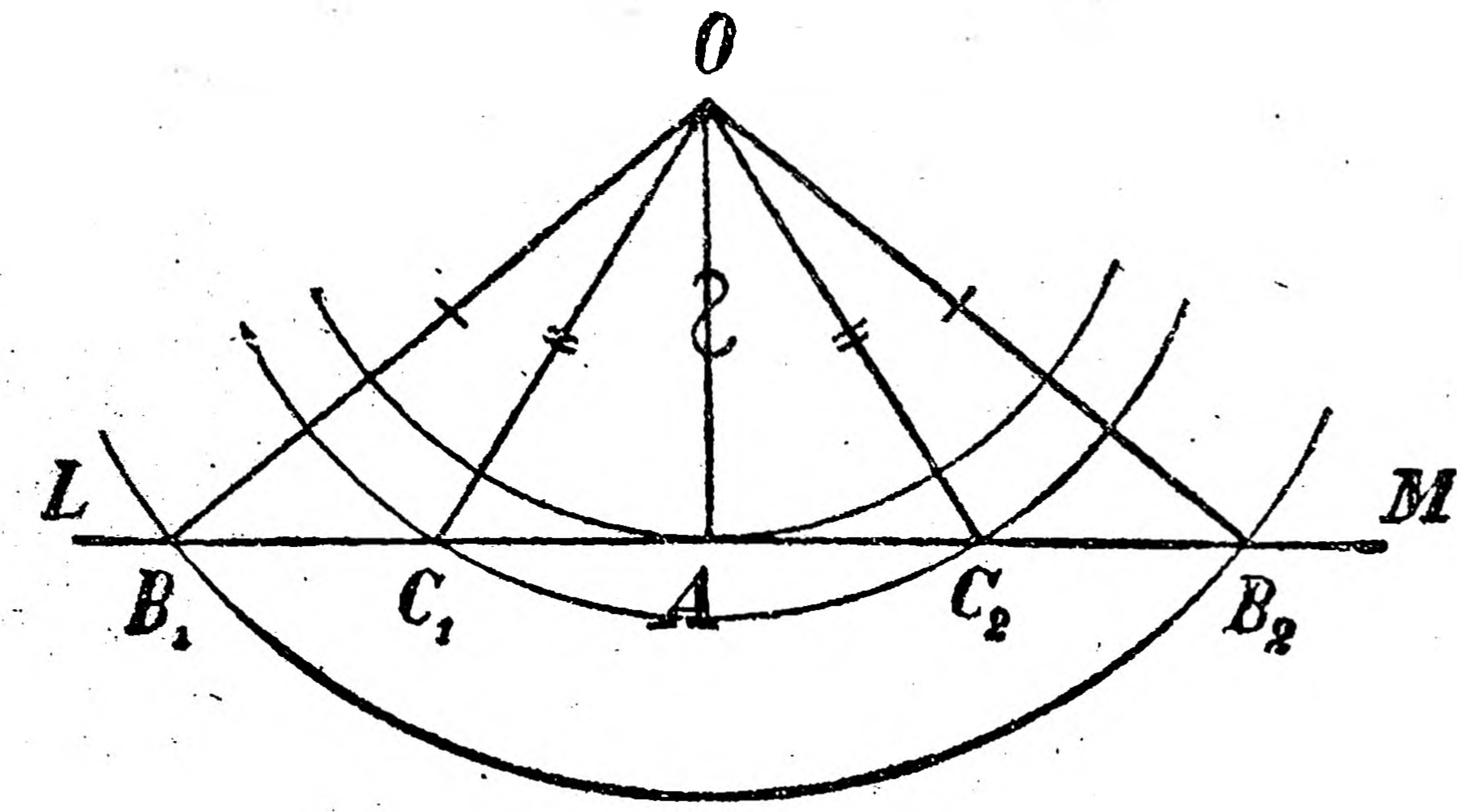


Рис. 172.

Вы будете получать ряд наклонных, основания которых будут все больше и больше приближаться друг к другу и к основанию перпендикуляра.

Когда, наконец, вы укоротите подвижную прямую так, что основания наклонных сольются вместе (в точке A), тогда эти наклонные сольются в одну перпендикулярную прямую OA.

При дальнейшем укорачивании подвижная прямая не встретит уже линии LM.

Доказательство. Проведем от точки O к прямой перпендикуляр OA и наклонную OB (рис. 173). Докажем, что перпендикуляр

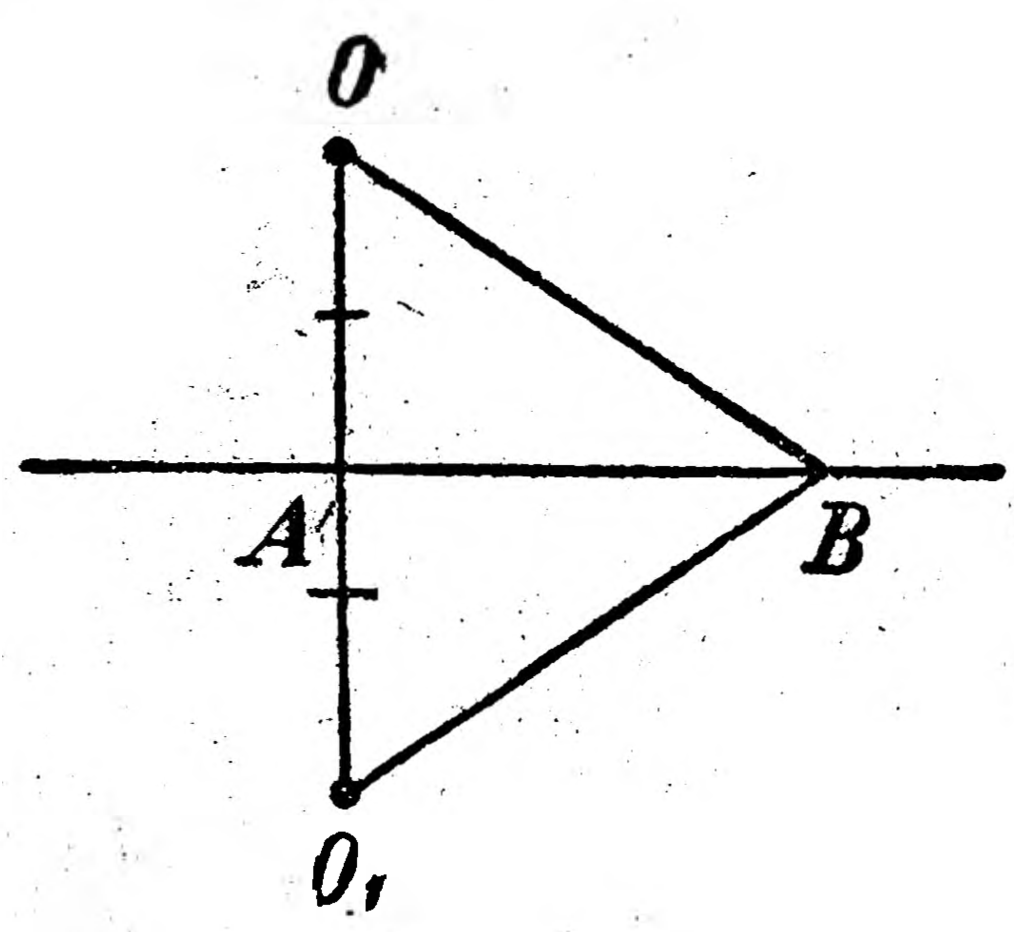


Рис. 173.

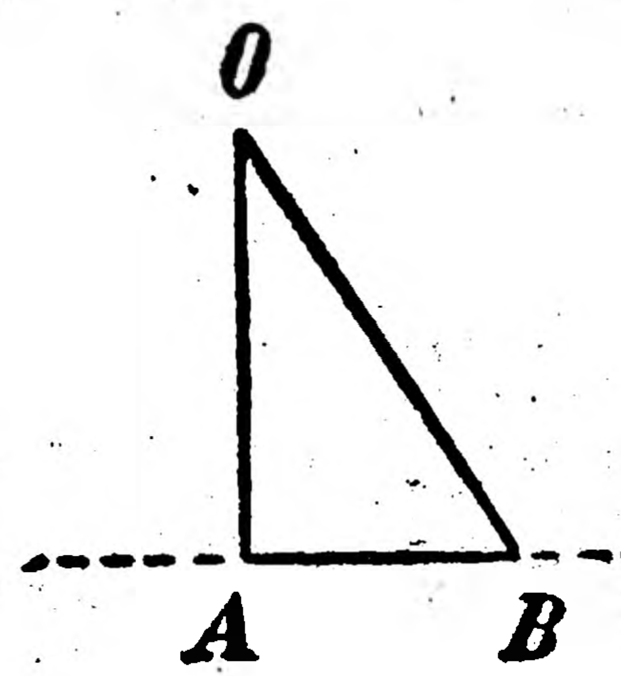


Рис. 174.

этот всегда будет короче наклонной OB. Удлиним перпендикуляр OA так, чтобы AO_1 равнялась AO, и, соединив B с O_1, получим прямую O_1B, равную OB. (Почему?) Из двух линий между O и O_1, OO_1 короче OBO_1.

(§ 107), следовательно, и половина ее, то-есть перпендикуляр OA короче половины OBO_1, то-есть наклонной OB.

Длину этого перпендикуляра и принимают за расстояние точки O от прямой AB.

Следствие. В прямоугольном треугольнике OAB гипотенуза (наклонная OB на рис. 174) длиннее катета (перпендикуляра OA).

Упражнения и задачи.

1. Между двумя деревьями лежит куча камней, мешающая непосредственно измерить расстояние между деревьями. Как измерить его, пользуясь построением равных треугольников?

2. Воздухоплаватель с воздушного шара (рис. 175) увидел часть моста, длина которой равна 200 метрам под углом понижения к горизонту $\alpha = 36°$. На какой высоте находится шар?

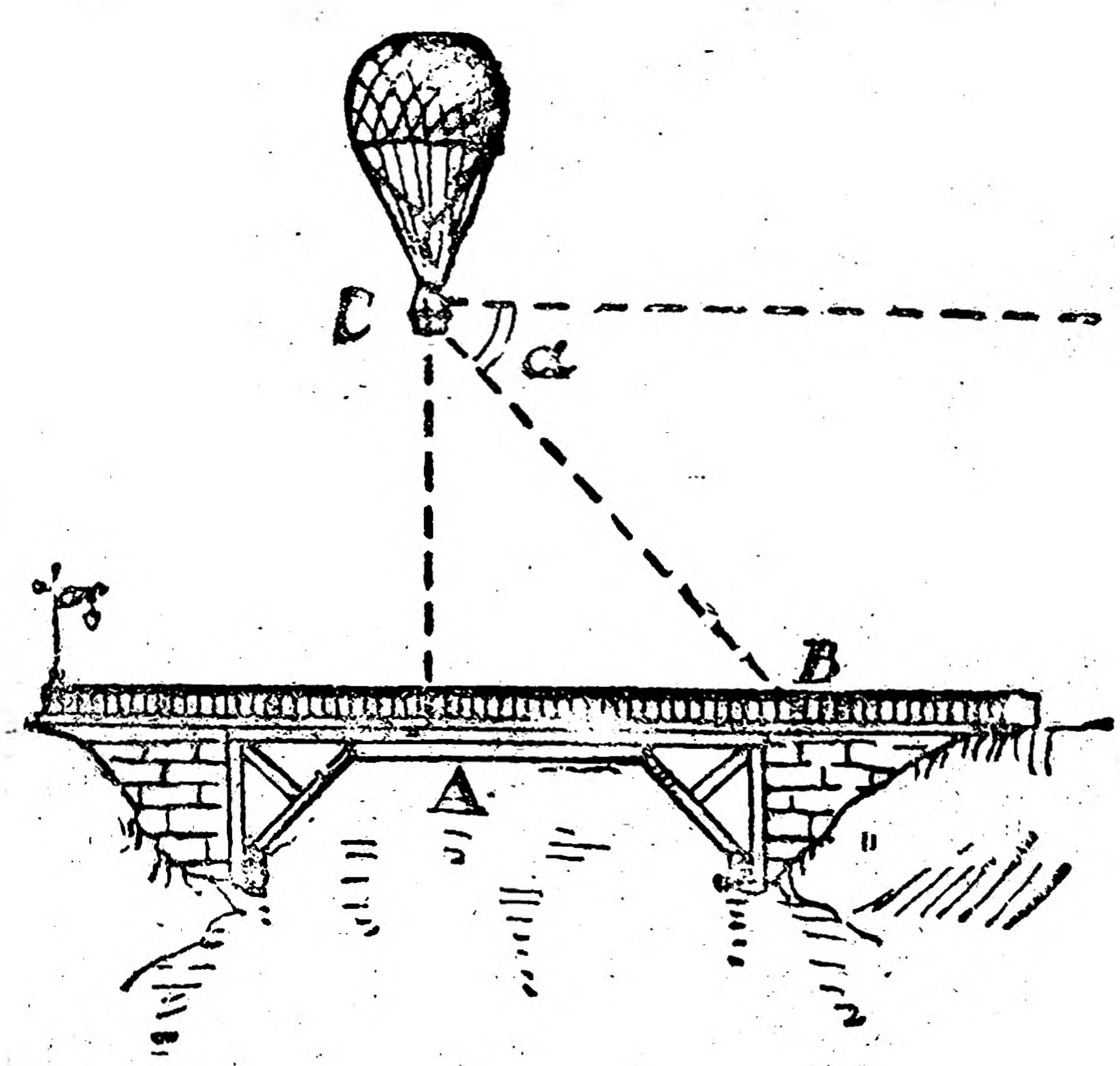


Рис. 175.

Указание. Нарисуйте прямоугольный треугольник ABC, приняв каждые 50 метров за 1 *см*.

3. Для того, чтобы измерить высоту дерева BD, приготовили прямоугольный треугольник AB_1C_1 с углом $A = 45°$ (рис. 176) и, держа его вертикально, отошли на такое расстояние, при котором, глядя вдоль гипотенузы AB_1, увидели верхушку дерева B. Какова высота дерева, если расстояние $AC = 8$ метрам, а высота человека $CD = 1{,}5$ метра?

4. У египтян для построения фигур на поверхности земли были особые специалисты, которые назывались *гардепонаптами* (натягивателями каната). Гардепонапты при проведении канатом перпендикуляров пользовались такими приемами:

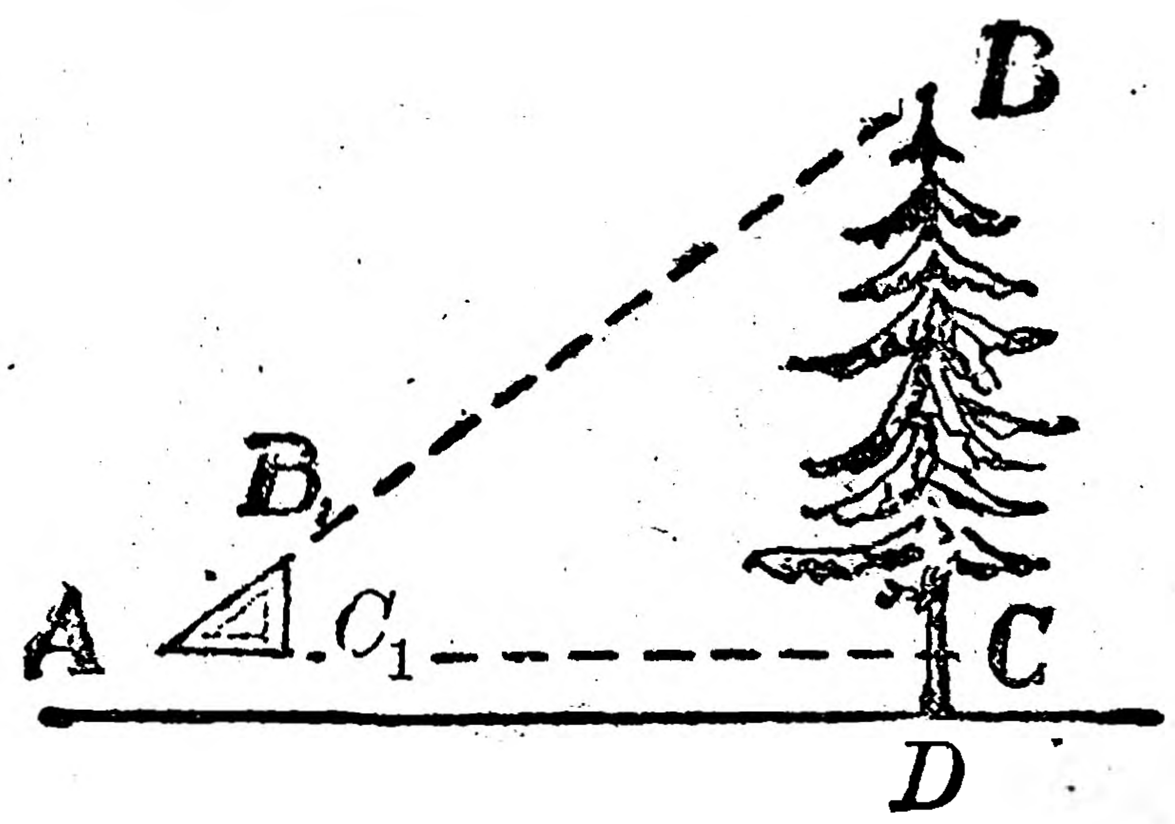


Рис. 176.

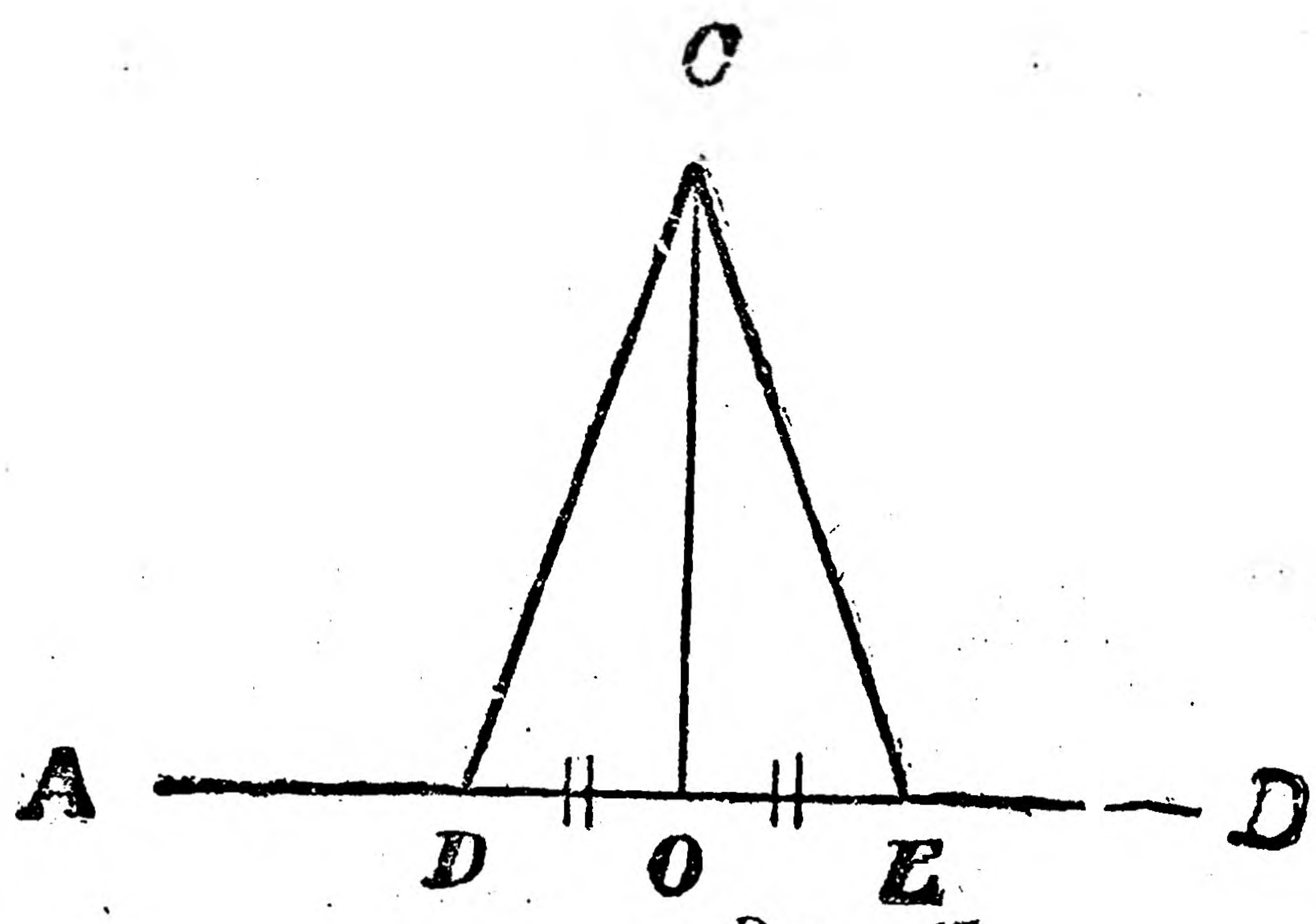


Рис. 177.

Из точки C на прямую AB надо опустить перпендикуляр (рис. 177). Египтяне натягивали измерительный канат так, чтобы CD равнялась CE, затем, разделив веревкой DE пополам, соединяли C с O.

Из точки O к прямой AB восставить перпендикуляр (рис. 177). Отложив от точки O равные отрезки OD и OE, гардепонапты натягивали измерительный канат так, чтобы DC равнялось EC. Соединив C с O, получали искомый перпендикуляр.

На каких свойствах треугольника основаны эти построения? Попробуйте сами построить перпендикуляр этими старинными способами. (К этим приемам, впрочем, прибегают землемеры иногда и теперь.)

ГЛАВА XII.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ.

47. ОБРАЗОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ.

§ 169. *Теорема.* **Два перпендикуляра к одной и той же прямой не могут пересечься, сколько бы их ни удлиняли.**

Опыт. Попробуем составить треугольник с двумя прямыми углами. Возьмите три бумажных полосы (рис. 178) и к концам A и B одной из них приставьте при помощи наугольника две другие полосы под прямым углом. Получился ли у вас треугольник? Встретились ли концы C и D этих полос? Быть может они встретятся на своем продолжении?

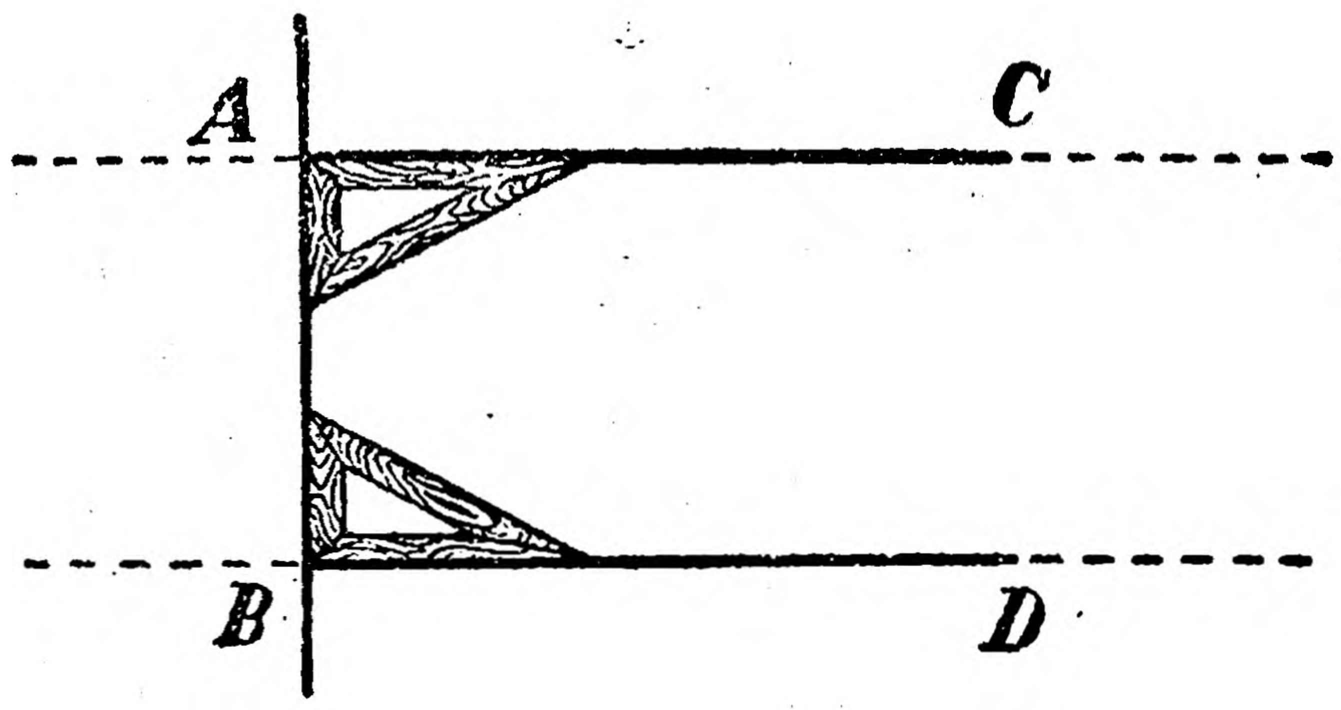


Рис. 178.

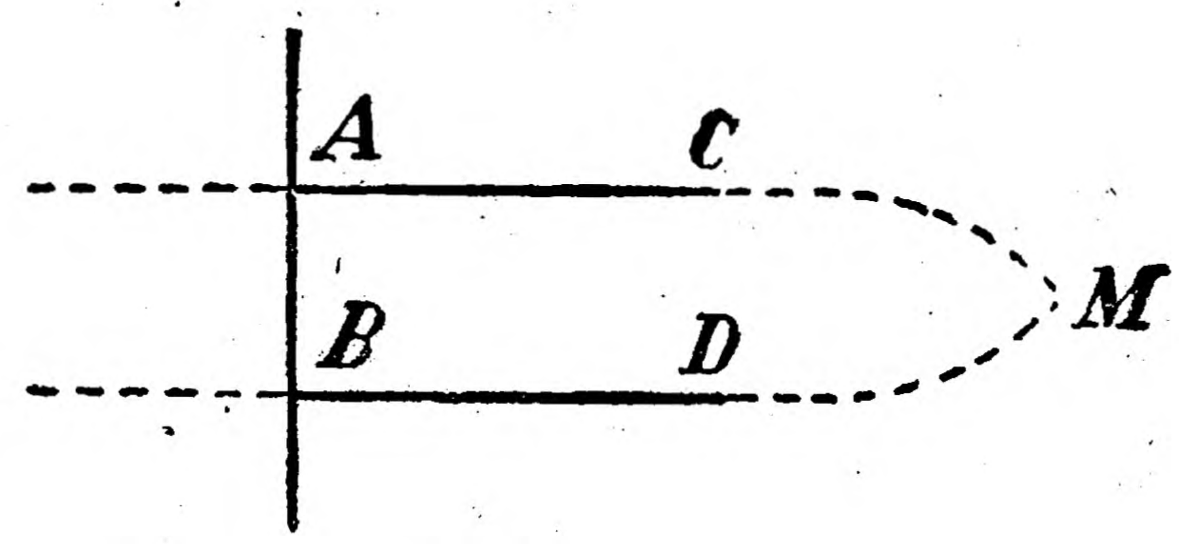


Рис. 179.

Доказательство. Если бы перпендикуляры AC и BD пересеклись в какой-либо точке M (рис. 179), то через эту точку проходили бы две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой AB, что невозможно (§ 129).

Итак, *два перпендикуляра, проведенные к одной и той же прямой и лежащие в одной плоскости* (укажите ее), *друг с другом никогда не встретятся.* Такие прямые называются *параллельными прямыми.*

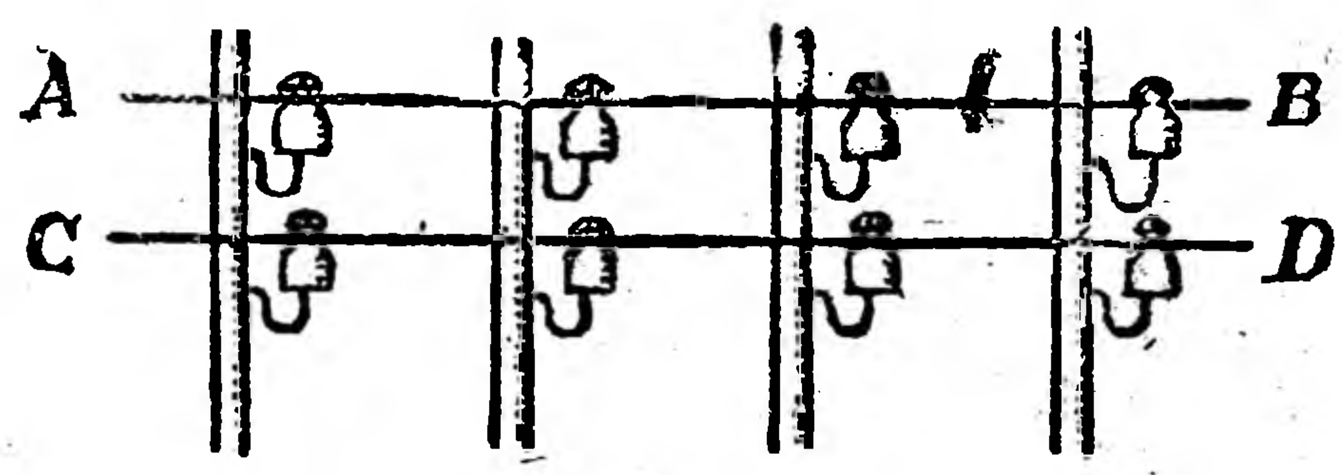


Рис. 180.
Прямые перпендикулярные к одной и той же прямой — параллельны.

Так, например, натянутые провода телеграфа, перпендикулярные к столбам, между собою параллельны (рис. 180).

48. УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ И СЕКУЩЕЙ.

§ 170. Какие группы углов образуют две параллельные прямые и секущая? Нарисуйте две параллельные прямые и пересеките их третьей прямой (рис. 181). Сколько всех углов получилось у вас? Сколько из них острых углов? Сколько тупых? Перенумеруйте их. Если две прямые (безразлично, параллельные или нет) пересечены третьей прямой, то образуется 8 углов, которые можно разбить на две группы: 4 лежат у точки пересечения одной прямой с секущей и 4 у точки пересечения другой прямой с секущей. На рис. 181 углы 1, 2, 3 и 4 входят в одну группу, а углы 5, 6, 7 и 8 — в другую.

§ 171. Внутренние накрестлежащие углы. Остановим свое внимание на углах 3 и 5. Угол 3 лежит слева от секущей и снизу от *AB*; угол 5 — справа от секущей и сверху от *EF*. Их называют внутренними накрестлежащими. Найдите на рис. 181 еще одну пару внутренних накрестлежащих углов.

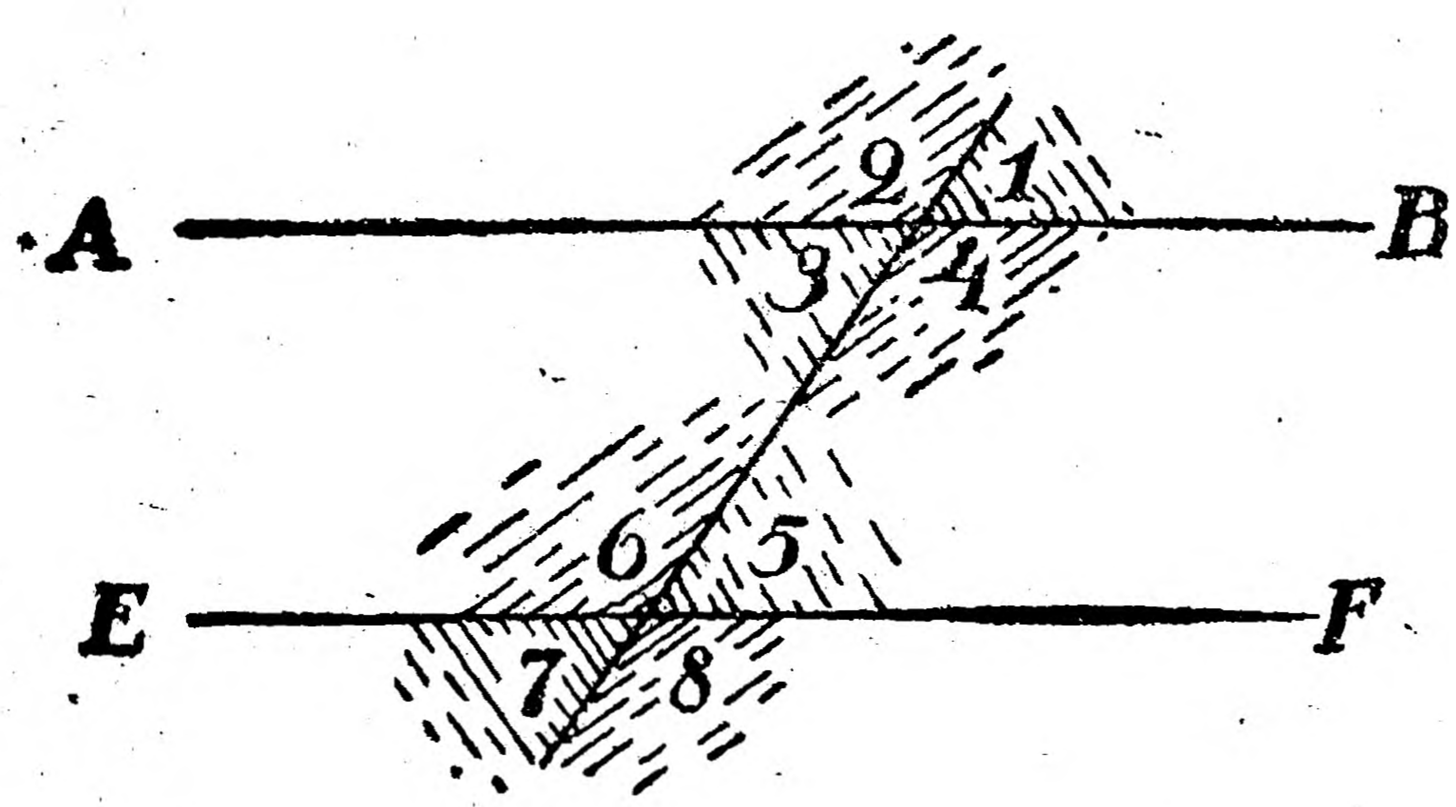


Рис. 181.

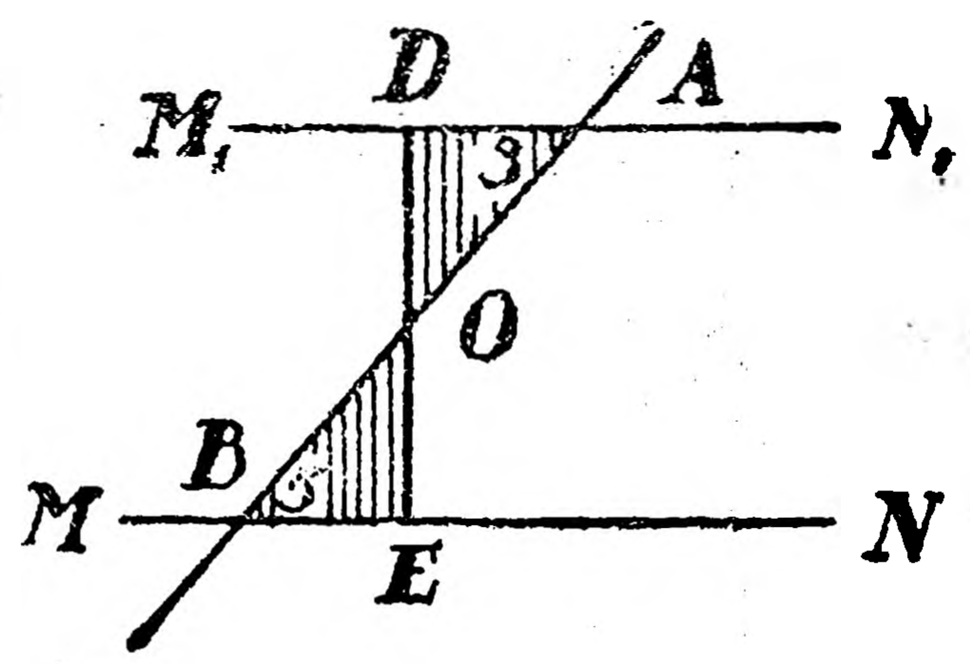


Рис. 182.

Теорема. Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрестлежащие углы окажутся равными, то прямые параллельны.

Доказательство. Пусть $\angle 3 = \angle 5$ (рис. 182).

Разделите часть секущей *AB* пополам в точке *O* и проведите через эту точку прямую, перпендикулярную к прямой *MN*. Тогда образуются два треугольника *OBE* и *ODA*, у которых $OB = OA$, $\angle OBE = \angle OAD$ и углы у точки *O* равны (почему?). Следовательно, треугольники равны (§ 153).

Поэтому угол *ODA* равен углу *OEB*.

Но $\angle OEB$ — прямой. Значит, и угол *ODA* тоже прямой. Таким образом, прямые *MN* и M_1N_1 обе перпендикулярны к прямой *DE*. Следовательно, они параллельны (§ 169).

§ 172. Внутренние односторонние углы. Из углов, расположенных по одну сторону от секущей, углы 3 и 6, равным образом 4 и 5 (рис. 181), называются внутренними односторонними.

Теорема. Если при пересечении двух прямых третьей сумма двух внутренних односторонних углов окажется равной двум прямым углам, то прямые параллельны.

Пусть $\angle 6 + \angle 3 = 180°$ (рис. 181). Так как $\angle 6 + \angle 5 = 180°$ (почему?), то $\angle 3 = \angle 5$, т.-е. внутренние накрестлежащие углы равны. Поэтому прямые *AB* и *EF* параллельны (§ 171).

§ 173. Соответственные углы. Возьмите какой-нибудь из углов первой группы, например, $\angle 1$. Он лежит сверху прямой *AB* и вправо от секущей (рис. 181). Во второй группе углов сверху прямой EF и вправо от секущей лежит $\angle 5$.

Углы 1 и 5 называются соответственными.

Найдите на рис. 181 угол, соответственный углу 3.

Теорема. Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы окажутся равными, то прямые параллельны.

Пусть $\angle 1 = \angle 5$ (рис. 181); $\angle 1 = \angle 3$ (почему?). Следовательно, $\angle 3 = \angle 5$, т.-е. внутренние накрестлежащие углы равны, поэтому прямые AB и EF параллельны (§ 171).

49. ПОСТРОЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ.

§ 174. Построение параллельных прямых при помощи линейки и наугольника.

Задача. Дана прямая AB (рис. 183) и точка P вне ее. Надо провести через точку P прямую, параллельную AB.

Построение. Приложите к AB наугольник так (рис. 183), чтобы одна из сторон его (например, гипотенуза ab) совпала с данной прямой AB, а к другой стороне наугольника (катету ac) приставьте

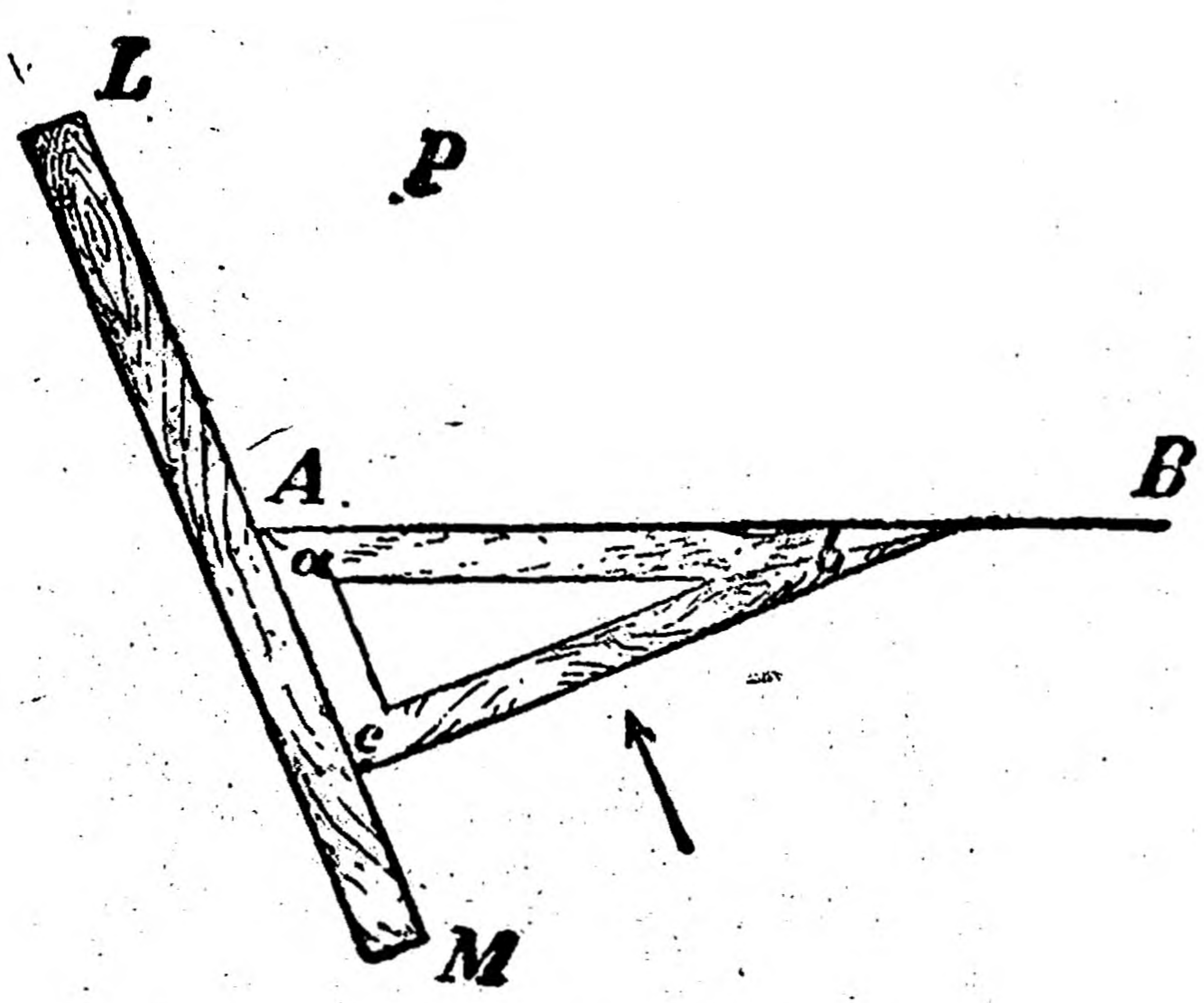


Рис. 183.

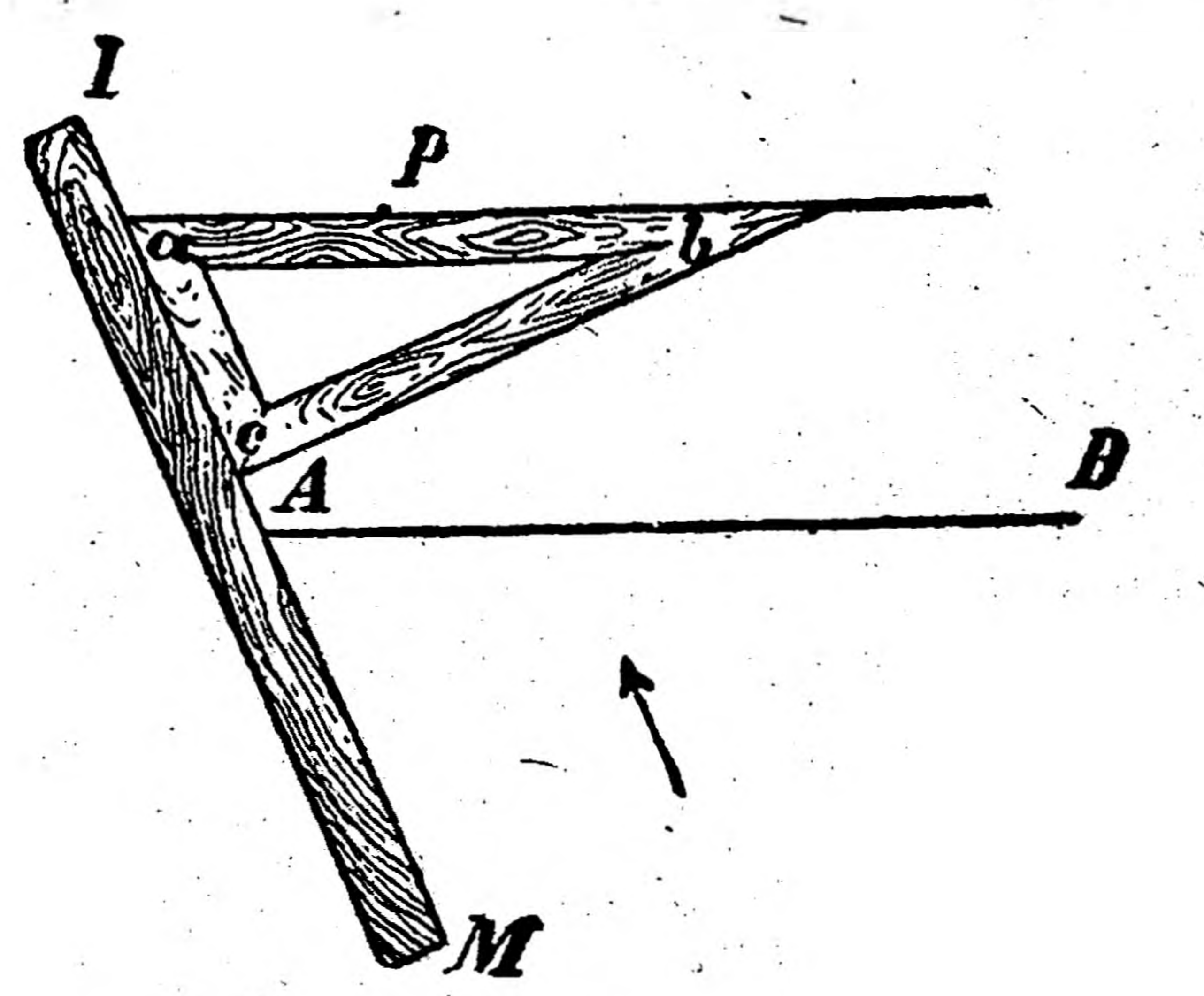


Рис. 184.

линейку. Двигайте вдоль нее наугольник. Тогда вдоль ребра наугольника ab можно чертить прямые, параллельные AB, ибо эти прямые с ребром линейки будут образовывать одинаковые соответственные углы (равные углу наугольника). Подвигайте наугольник до тех пор, пока гипотенуза его ab не коснется точки P (рис. 184).

Докажите, воспользовавшись свойством соответственных углов, что построенная этим способом прямая, проходящая через точку P, будет параллельна AB.

§ 175. Построение прямой, параллельной данной, при помощи линейки и циркуля.

Задача. Дана прямая AB и точка P вне ее. Построить прямую, параллельную AB и проходящую через точку P (рис. 185).

Исследование. Проведем из P (рис. 185) произвольную секущую PM. Задача наша сводится к тому, чтобы у данной точки P нарисовать внутренний накрестлежащий угол, равный углу AMP (§ 171).

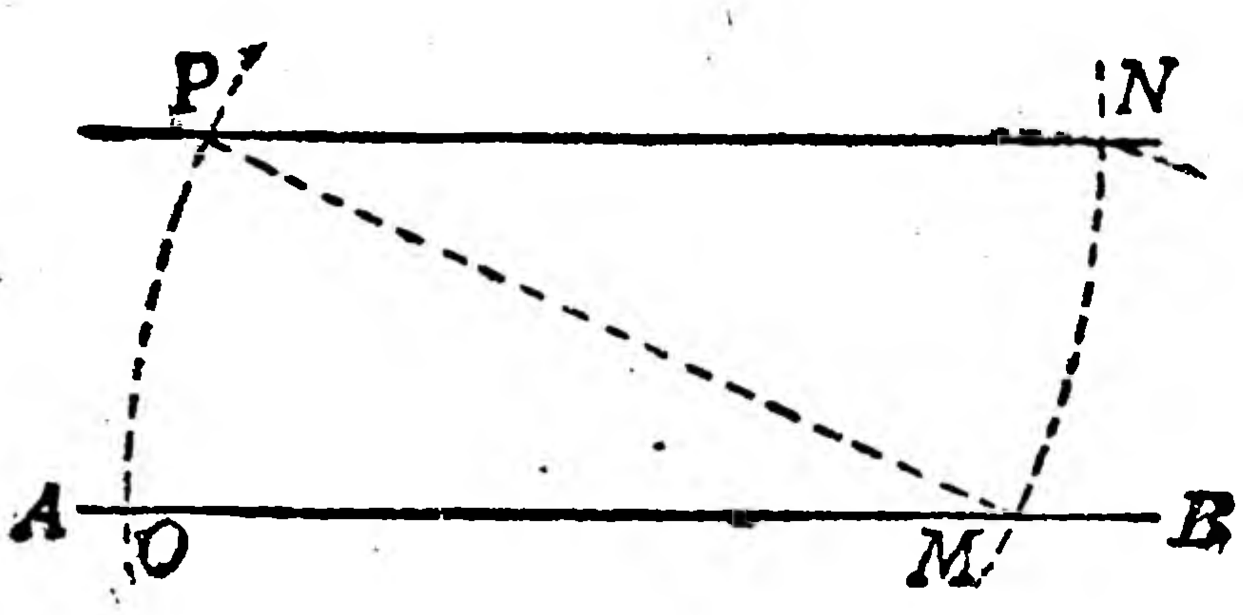


Рис. 185.

Построение. Из точки M, как из центра, опишите помощью циркуля часть окружности PO, проходящей через данную точку P (рис. 185). Тем же радиусом MP опишите часть окружности $\acute{N}M$, приняв за центр точку P. Измерив циркулем расстояние PO, отложите его вдоль по дуге MN. Соединив найденную точку N с точкой P, вы и получите прямую PN, параллельную AB. Докажите, что построенная таким способом прямая PN должна быть параллельна AB (§ 171).

§ 176. Аксиома о параллельных прямых. В двух предыдущих §§-х мы выучились проводить прямые, параллельные данной прямой (AB), проходящие чрез данную точку (P), при чем в обоих случаях нам удалось чрез данную точку провести только одну прямую (§§ 174 и 175), параллельную AB. Тут может возникнуть вопрос: а нельзя ли через ту же точку P провести вторую прямую, параллельную той же прямой AB?

Только-что рассмотренные задачи наводят нас на мысль, что вторая параллельная прямая должна слиться с первой, но доказать это, ссылаясь на предыдущие теоремы, нельзя, а потому это свойство мы принимаем на веру, как аксиому, которая гласит:

Через данную точку (P) к данной прямой (AB) можно провести только одну параллельную прямую.

Отсюда вытекают такие следствия:

Следствие 1. Прямая, пересекающая одну из параллельных, пересекает и другую.

Следствие 2. Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

Докажите это сами.

§ 177. Внутренние накрестлежащие, односторонние и соответственные углы при параллельных прямых. С помощью аксиомы о параллельных легко доказать такую теорему:

Теорема. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрестлежащие углы равны.

Пусть прямые MN и M_1N_1 параллельны (рис. 186).

Допустим, что внутренние накрестлежащие углы 3 и 5 не равны. Проведем через точку A прямую M_2N_2 так, чтобы угол M_2AB был равен углу 5. Тогда прямая M_2N_2 параллельна прямой MN (§ 171) и, значит, через точку A проходят две прямые M_1N_1 и M_2N_2, параллельные прямой MN. Но это противоречит аксиоме о параллельных прямых. Поэтому прямая M_2N_2 должна слиться с прямой M_1N_1. Значит, $\angle 5 = \angle 3$.

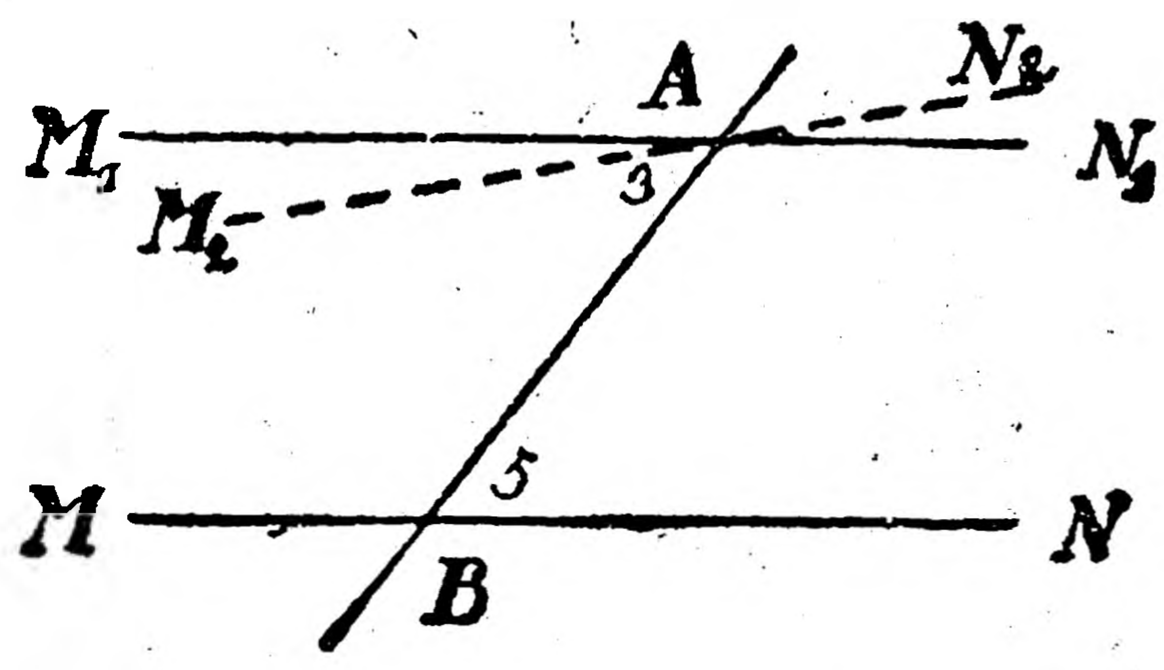


Рис. 186.

Сравните теорему, которую мы только-что доказали, с той, которая доказана в § 171. В теореме § 171 было известно, что углы 3 и 5 равны, и мы доказали, что прямые MN и M_1N_1 параллельны. Здесь, наоборот, нам известно, что прямые MN и M_1N_1 параллельны, и мы доказали, что углы 3 и 5 равны. Такие две теоремы, когда то, что дано в условии одной, доказывается в другой, и то, что дано в условии второй, доказывается в первой, — называются взаимно обратными.

Тем же приемом, которым мы доказали последнюю теорему, можно доказать теоремы, обратные тем, которые доказаны в §§ 172 и 173.

Проделайте это сами.

Таким образом вы придете к такому результату:

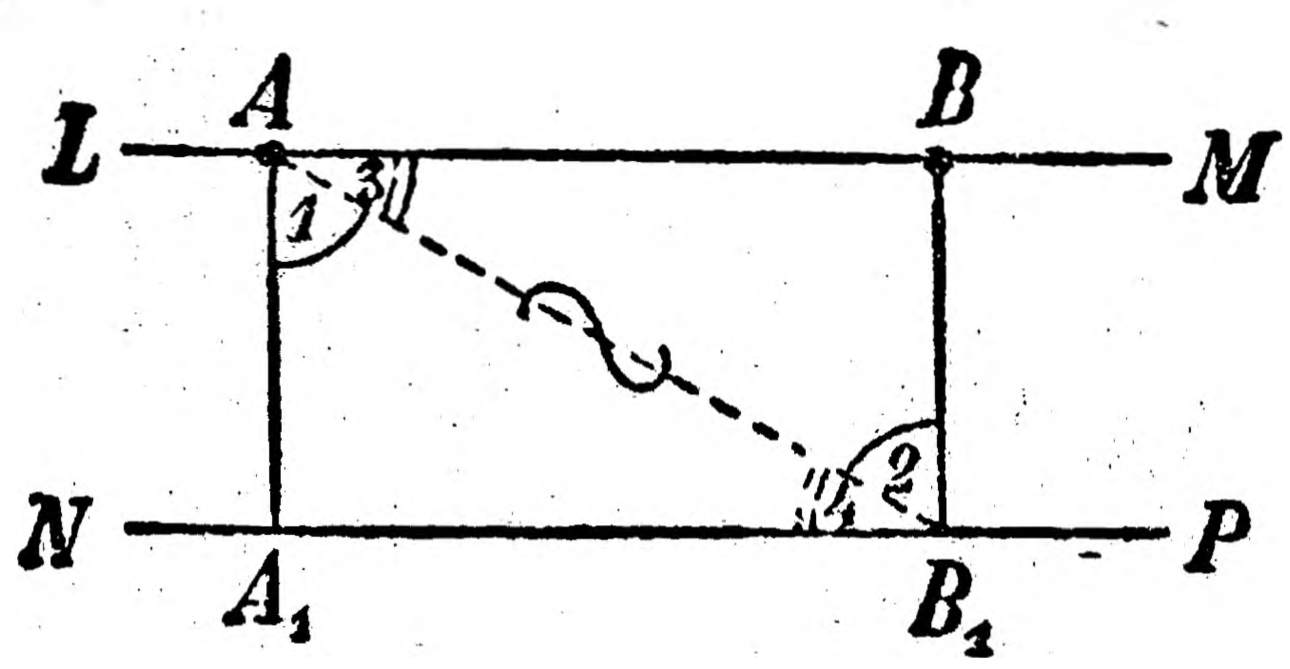


Рис. 187.

Если две параллельные прямые пересечь другой прямой (секущей), то образуется 8 углов, при чем: 1) все углы одного и того же типа (все острые или все тупые) равны друг другу и 2) любые два угла разного типа (один острый и другой тупой) дают в сумме 180°, то-есть два прямых угла.

§ 178. Свойство точек, лежащих на параллельных прямых.

Теорема. Все точки, лежащие на одной прямой, находятся на одинаковом расстоянии от параллельной ей прямой.

Даны две параллельные прямые LM и NP (рис. 187). Докажите, что перпендикуляры AA_1 и BB_1 равны друг другу.

Указание. Надо доказать, что $\triangle AA_1B_1 = \triangle ABB_1$ (AB_1 — общая сторона и $\angle 1 = \angle 2$).

50. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА.

§ 179. *Теорема.* Сумма внутренних углов треугольника равна 180° (т.-е. состоит из двух прямых углов.)

Опыт. Вырежьте из бумаги треугольник ABC (рис. 188). (Название вершин запишите внутри каждого угла.)

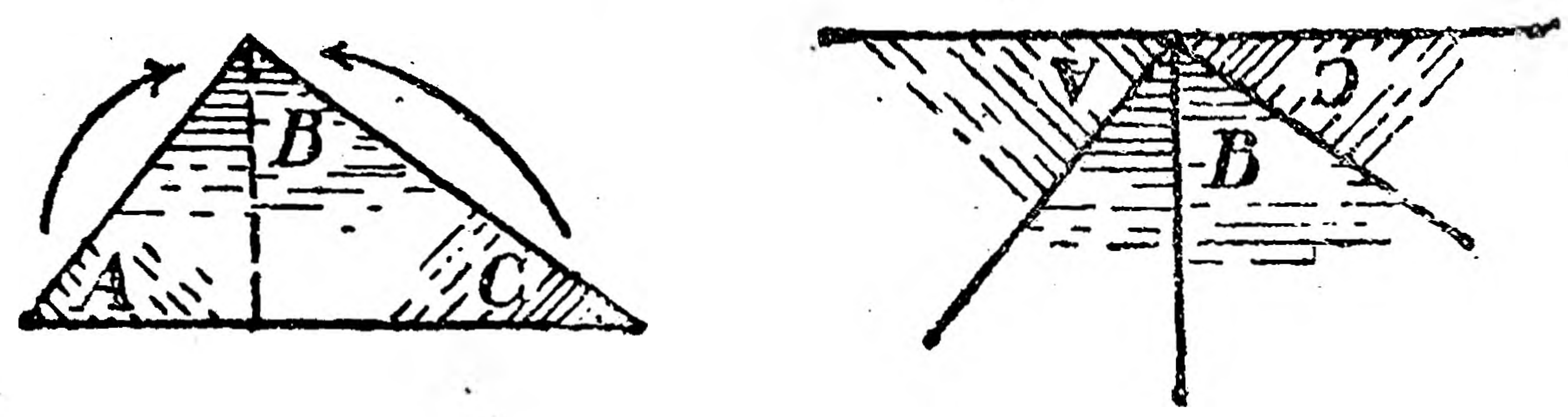


Рис. 188.

Отрежьте от него все три угла и составьте из них прямые углы подобно тому, как вы это делали со смежными углами. Сколько прямых углов образовали вы из трех внутренних углов треугольника?

Результат опыта. Из трех углов треугольника вам удастся составить 2 прямых угла (рис. 188).

Доказательство. Докажем, что этим важным свойством должны обладать углы всех без исключения треугольников.

Нарисуйте какой-нибудь треугольник, например $\triangle ABC$ (рис. 189). Для того, чтобы сложить все его углы, достаточно через вершину одного из них ($\angle B$) провести прямую DE, параллельную противоположной стороне AC. У точки B, под прямой DE, образовалось три угла. Средний из них ($\angle$ № 3) входит в состав углов нашего треугольника. Левый боковой угол № 1 равен углу A, ибо эти два угла суть внутренние накрестлежащие углы, образованные параллельными DE и AC и секущей AB. По той же причине правый боковой угол № 2 равен углу C. (Какими параллельными и какой секущей образованы эти два угла?) Следовательно, три угла нашего треугольника можно заменить тремя углами, расположенными у точки B, лежащими по одну сторону от прямой, а сумма этих углов всегда равна 180° (§ 140).

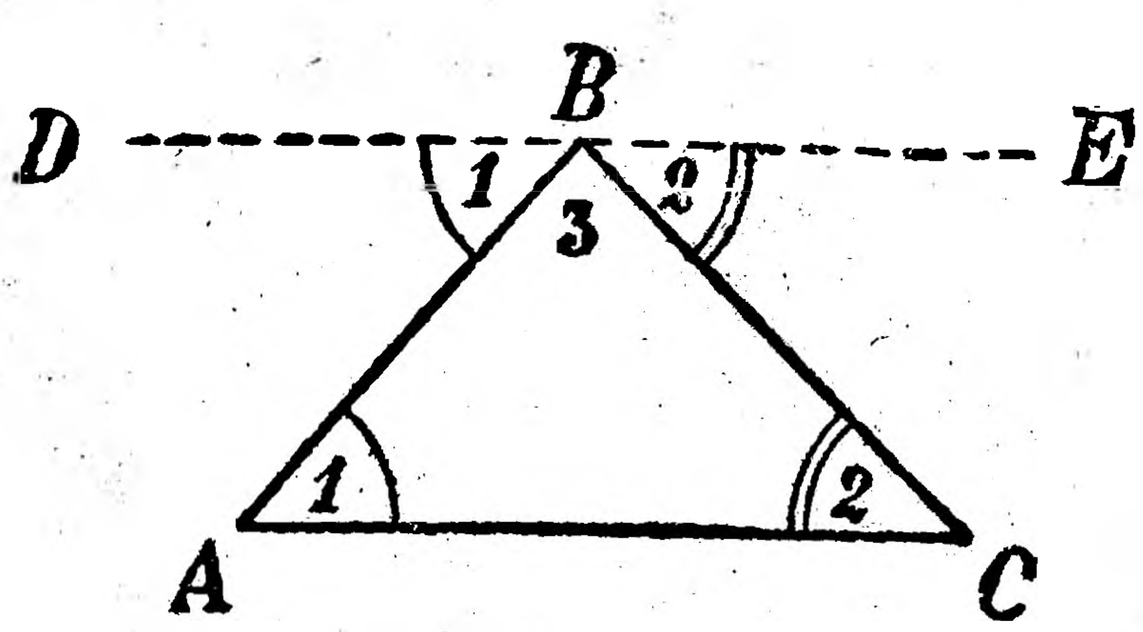


Рис. 189.

§ 180. *Теорема.* Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Нарисуйте треугольник ABC (рис. 190). Угол CBD, образованный стороной BC и продолжением соседней с ней стороны AB, называется внешним углом треугольника.

Прочитайте внутренний угол треугольника, смежный с этим внешним углом. Прочитайте два внутренних угла треугольника, не смежных с внешним углом.

Опыт. Измерьте транспортиром величину этого внешнего угла и сравните ее с суммой двух внутренних углов ($\angle C$ и $\angle A$), не смежных с ним.

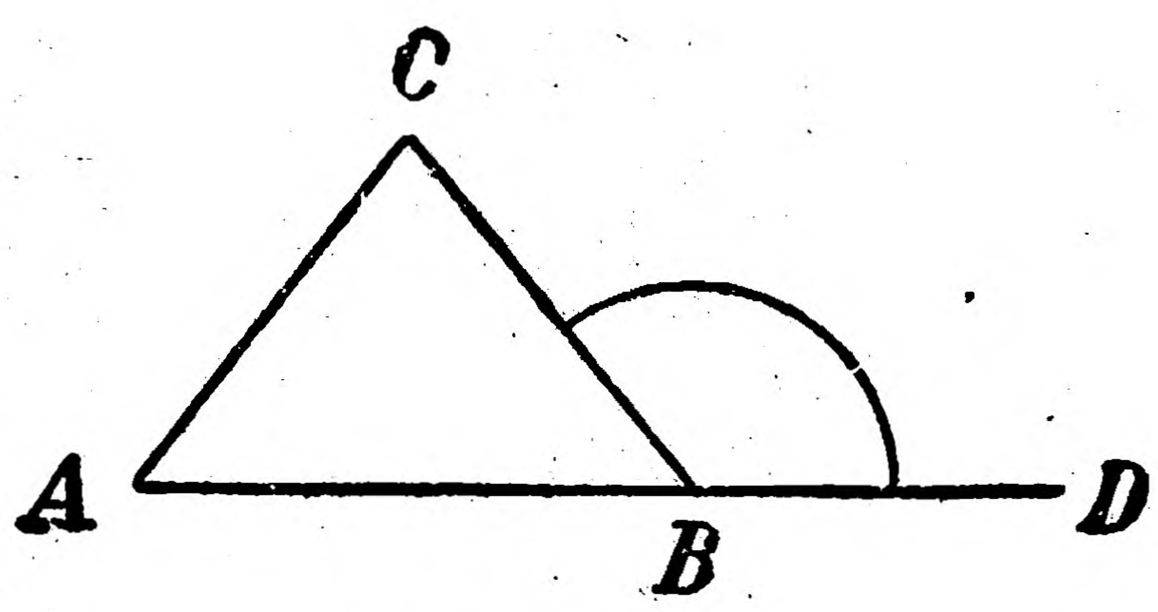


Рис. 190.

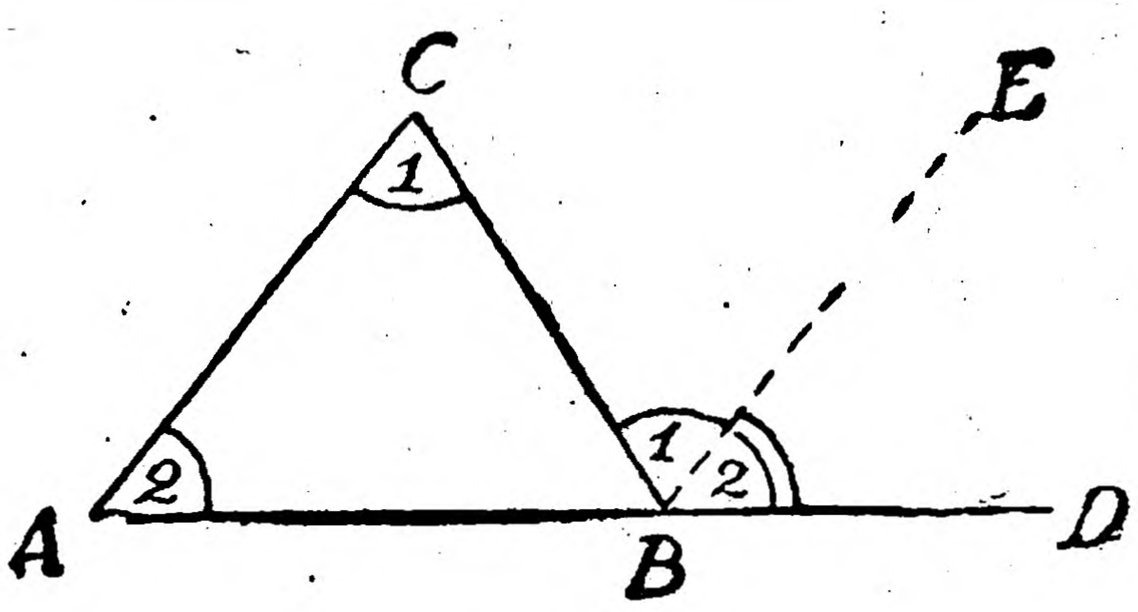


Рис. 191.

Докажите при помощи § 177 и чертежа 191, что внешний угол CBD всегда должен быть равен сумме внутренних, не смежных с ним углов ($\angle A$ и $\angle C$).

Следствие 1. Так как внешний угол равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, то этот внешний угол должен быть больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним.

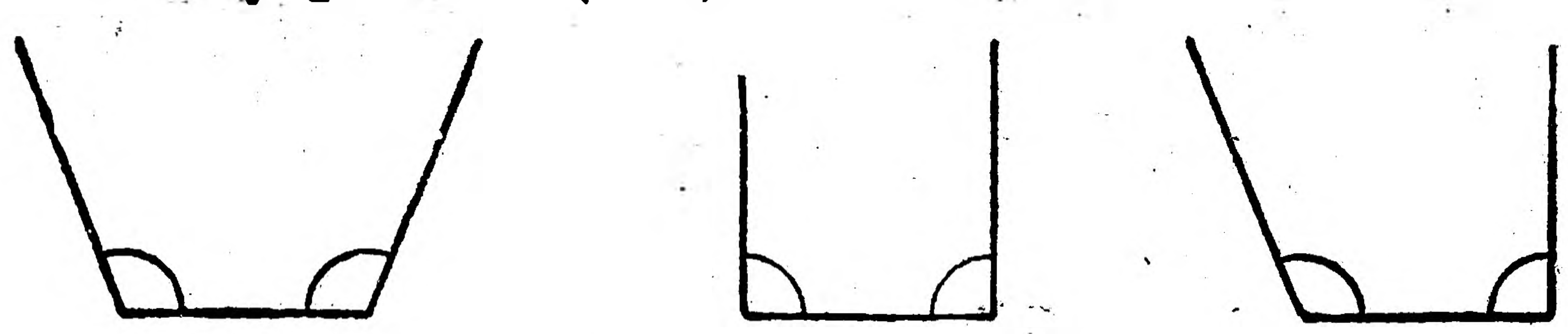


Рис. 192.

У треугольника не может быть больше одного прямого или тупого угла.

Следствие 2. У треугольника не может быть больше одного прямого или одного тупого угла (рис. 192).

Упражнения и задачи.

1. Столяры для проведения на доске параллельных прямых пользуются таким прибором (рис. 193). Посмотрите на этот рисунок и расскажите, как таким прибором пользоваться? На каком свойстве параллельных прямых основан он?

2. Имеем ли мы право все отвесы считать параллельными? Ведь все они пересекаются в центре земли?

3. Для измерения угла наклона холма ($\angle KAB$ на рис. 194) приготовляют такой прибор. Берут транспортир CFE и в центре его D

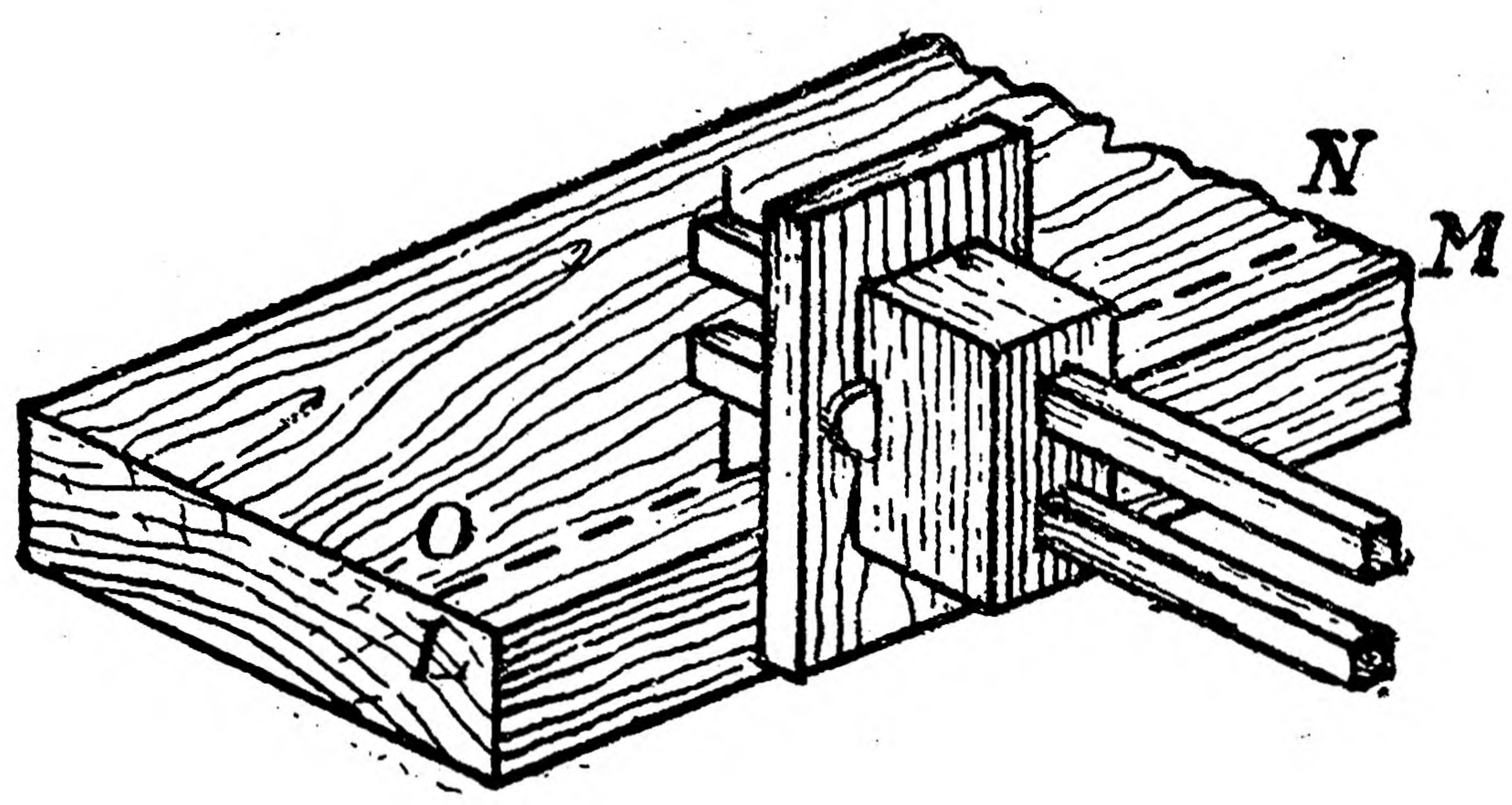


Рис. 193.

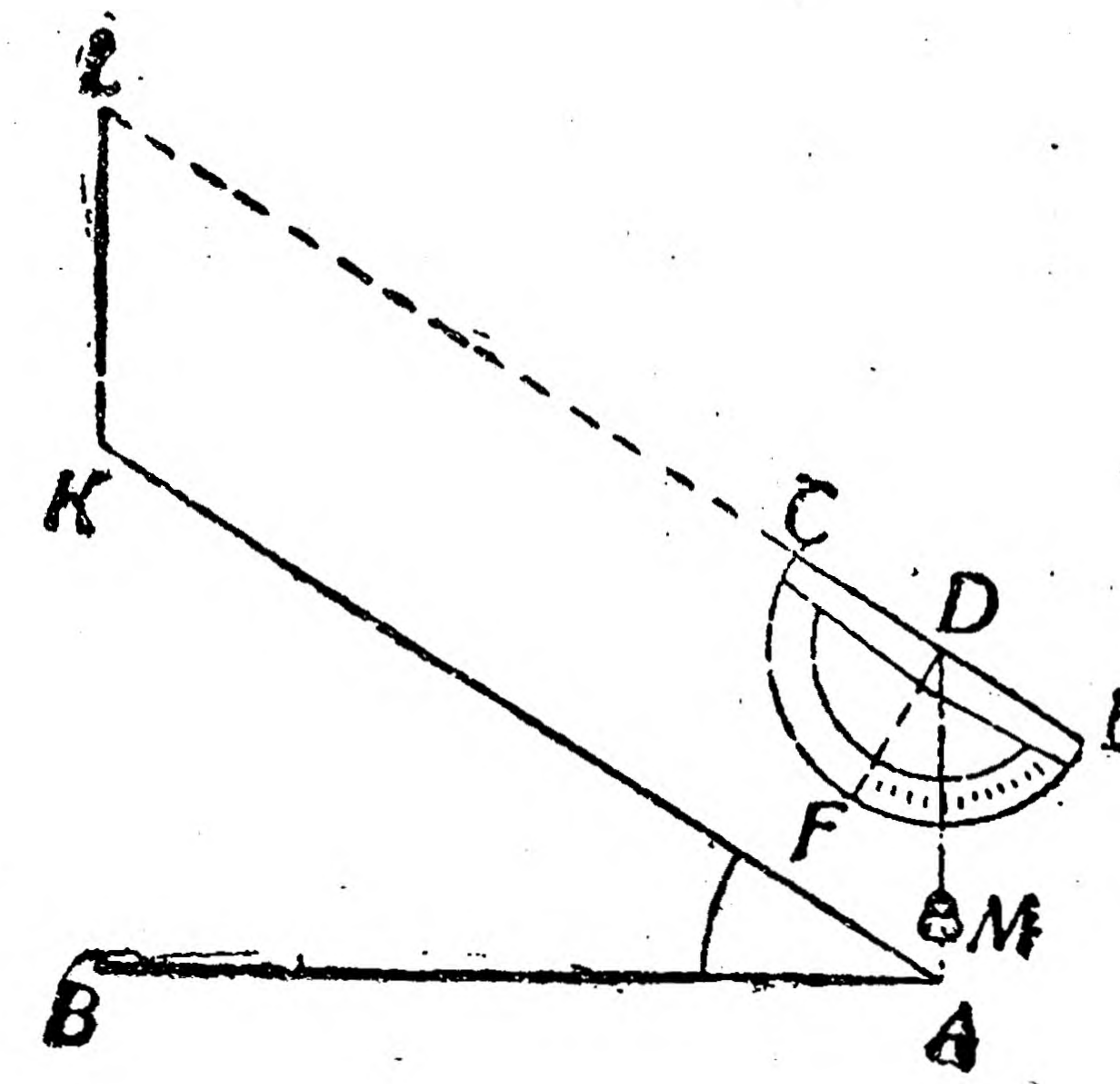


Рис. 194

привешивают отвес DM. Затем две одинаковой длины палки LK и DA устанавливают вертикально — одну на верхушке холма K, другую у подошвы ее A. На конце палки прикрепляют приготовленный высотомер и поворачивают его до тех пор, пока, целясь вдоль прямой DE, вы не увидите точки L. Прочтите теперь $\angle MDF$. Докажите, что он равен искомому углу KAB.

4. Для проведения параллельной прямой землемеры прибегают иногда к такому приему. Пусть, напр., надо из точки C провести прямую, параллельную AB (рис. 195). Землемеры проводят произвольную прямую CE, измеряют $\angle CEA$ и у точки C строят угол ECD, равный углу CEA. Прямая CD и будет параллельной AB. Почему? Постройте этим способом прямую, параллельную данной. Поверяют землемеры свое построение тем, что убеждаются в равенстве углов D и K. Правильна ли эта проверка?

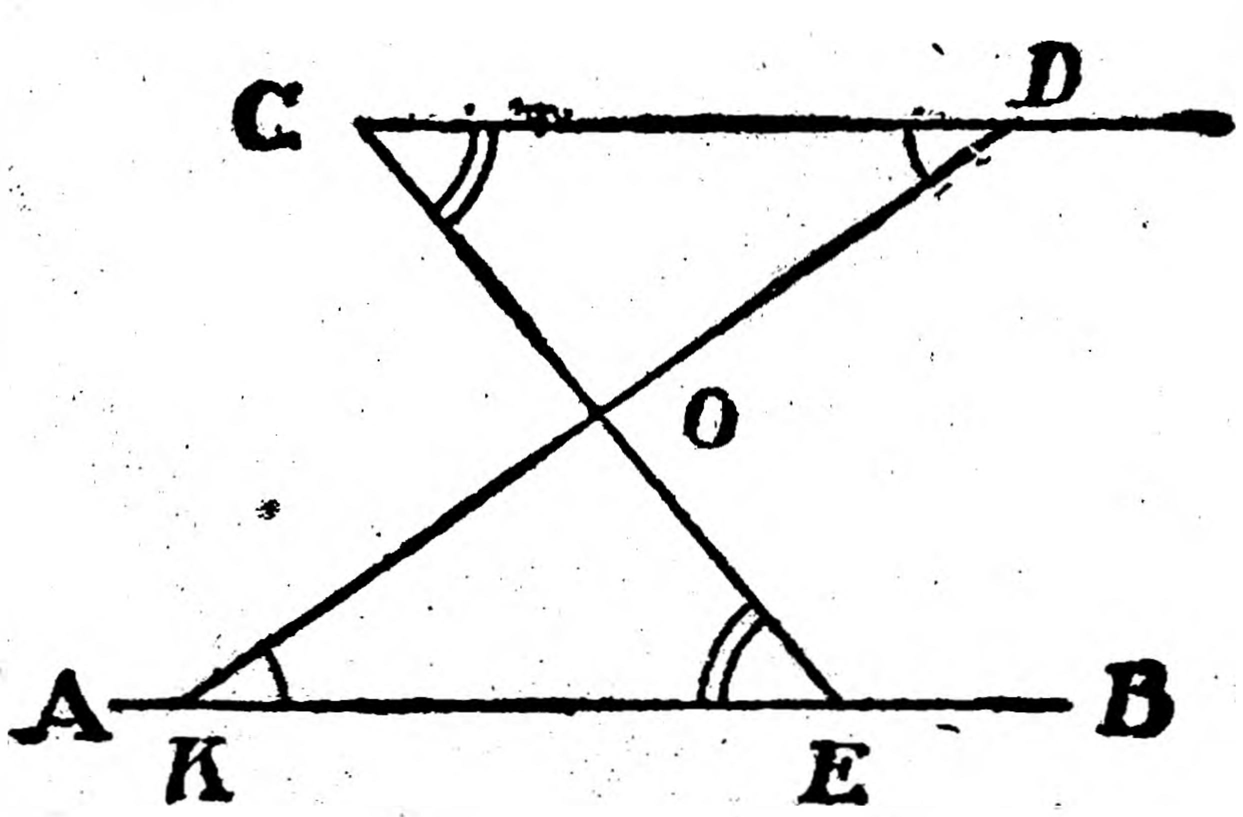


Рис. 195.

5. Много математиков любителей ломало голову над такой, казалось бы, простой задачей. Как при помощи циркуля и линейки разделить любой угол на три равные части (трисекция угла). Теперь уже доказано, что любой угол разделить на три равные части при помощи циркуля и линейки нельзя. Прямой же угол разделить можно следующим способом.

Постройте на стороне его AB равносторонний треугольник ALB (рис. 196). На второй стороне AC постройте тоже равносторонний треугольник ACM. Прямые AL и AM разделят $\angle CAB$ на три равные части. Докажите это!

6. Для того, чтобы построить циркулем перпендикуляр у конца прямой AB, не удлиняя ее, поступают так. Раздвинув ножки циркуля на расстояние AB, описывают этим радиусом две окружности,

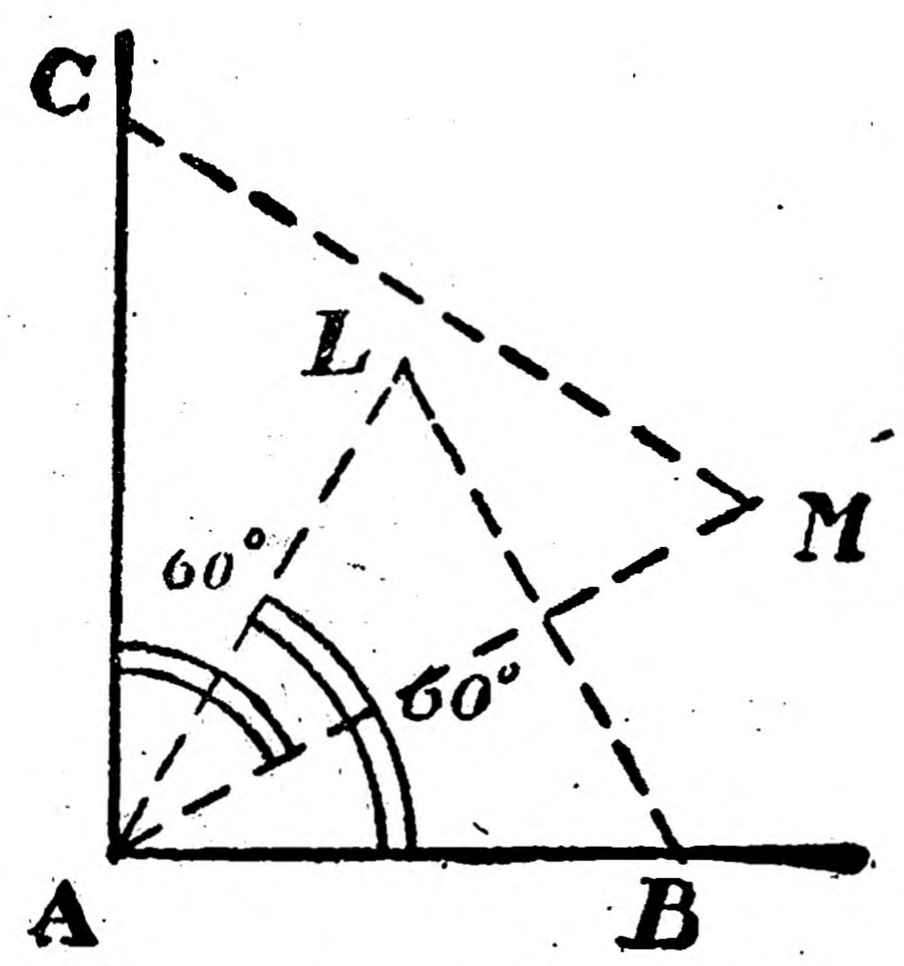


Рис. 196.

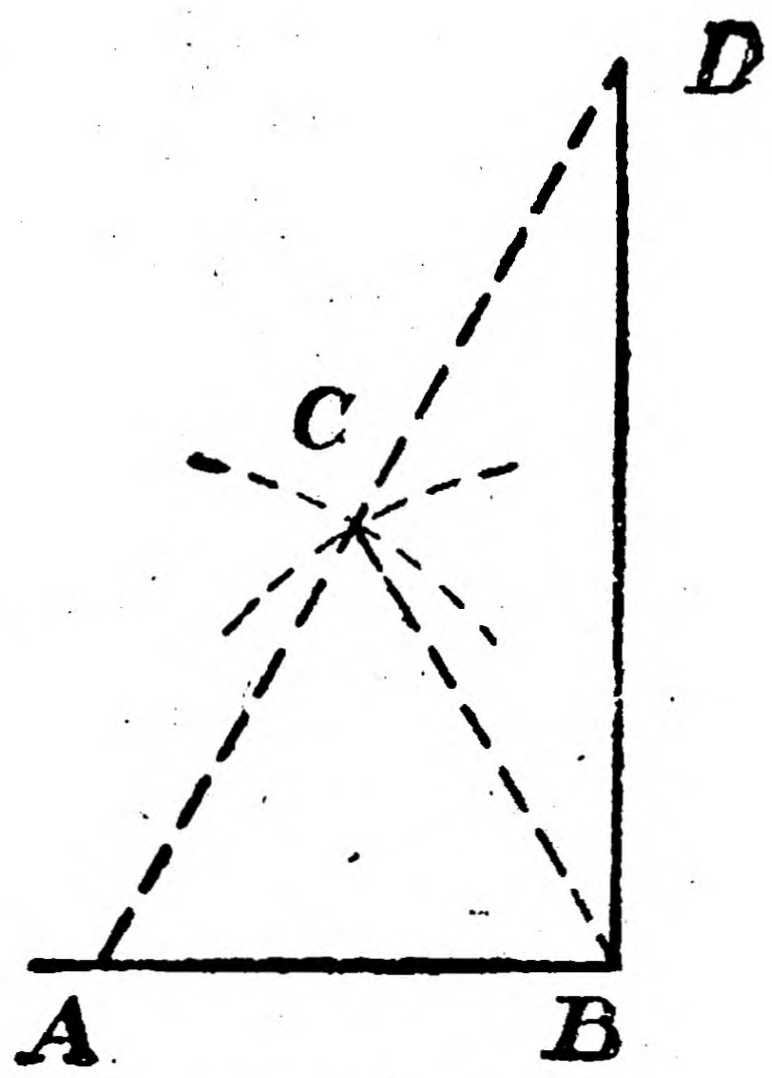


Рис. 197.

принимая за центр их точки A и B (рис. 197). Соединив точку C пересечения окружностей с концами прямой AB, получают равносторонний треугольник ABC. Затем удлиняют сторону AC и на ней откладывают отрезок CD, равный CB. Прямая DB будет искомым перпендикуляром. Рассмотрите внимательно чертежи и докажите это!

7. [1]) Крыша, в зависимости от того материала, из которого она сделана, должна иметь такой уклон по отношению к горизонтальной линии:

крыша железная	30°
» из черепицы	40°
» соломенная	60°

Какой угол образуют между собою стропила двухскатной крыши, когда она сделана из железа, черепицы и соломы?

8. [1]) Подъем лестницы считается «крутым», если она образует с горизонтальной линией угол, больший 35°; «средним», если этот угол = 30°, и «пологим», если меньше 25°. Вычислите, будет ли достаточно пологой лестница, если высота ее равна «основанию»?

[1]) Задача заимствована из «Нового задачника по геометрии» Я. И. Перельмана.

ГЛАВА XIII.

ЧЕТЫРЕУГОЛЬНИКИ.

51. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ЧЕТЫРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 181. Четыреугольник. Его стороны, углы и вершины. Эта фигура (рис. 198) составлена из четырех пересекающихся прямых. Сколько углов имеет она? Укажите их. Фигура эта называется четыреугольником. Укажите его стороны и вершины. Соедините прямыми линиями две противоположные вершины. Эти прямые называются диагоналями. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины четыреугольника? А сколько всех диагоналей имеет он?

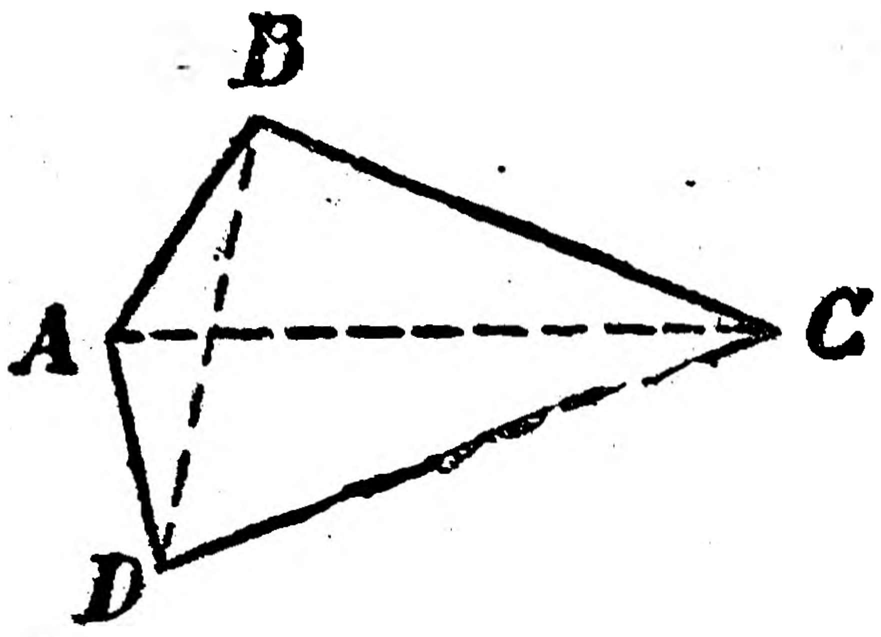


Рис. 198.

У четыреугольника $ABCD$ четыре угла: $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ и $\angle CDA$. Четыре стороны: AB, BC, CD и DA. Четыре вершины: точки A, B, C и D. Две диагонали: AC и BD.

§ 182. Различные виды четыреугольников. Посмотрите на рис. 199. Здесь изображены различного вида четыреугольники. Вспомним, как они называются.

Трапеция. Четыреугольник, у которого только одна пара сторон параллельна, мы назвали трапецией. Нарисуйте у себя в тетради трапецию. Укажите ее нижнее и верхнее основания. Проведите высоту ее.

Параллелограм. Нарисуйте четыреугольник, у которого обе пары сторон параллельны. Мы назвали его параллелограмом (§ 25). Где его основание?

Прямоугольник. Параллелограм с прямыми углами называется прямоугольником. Укажите его основание и высоту.

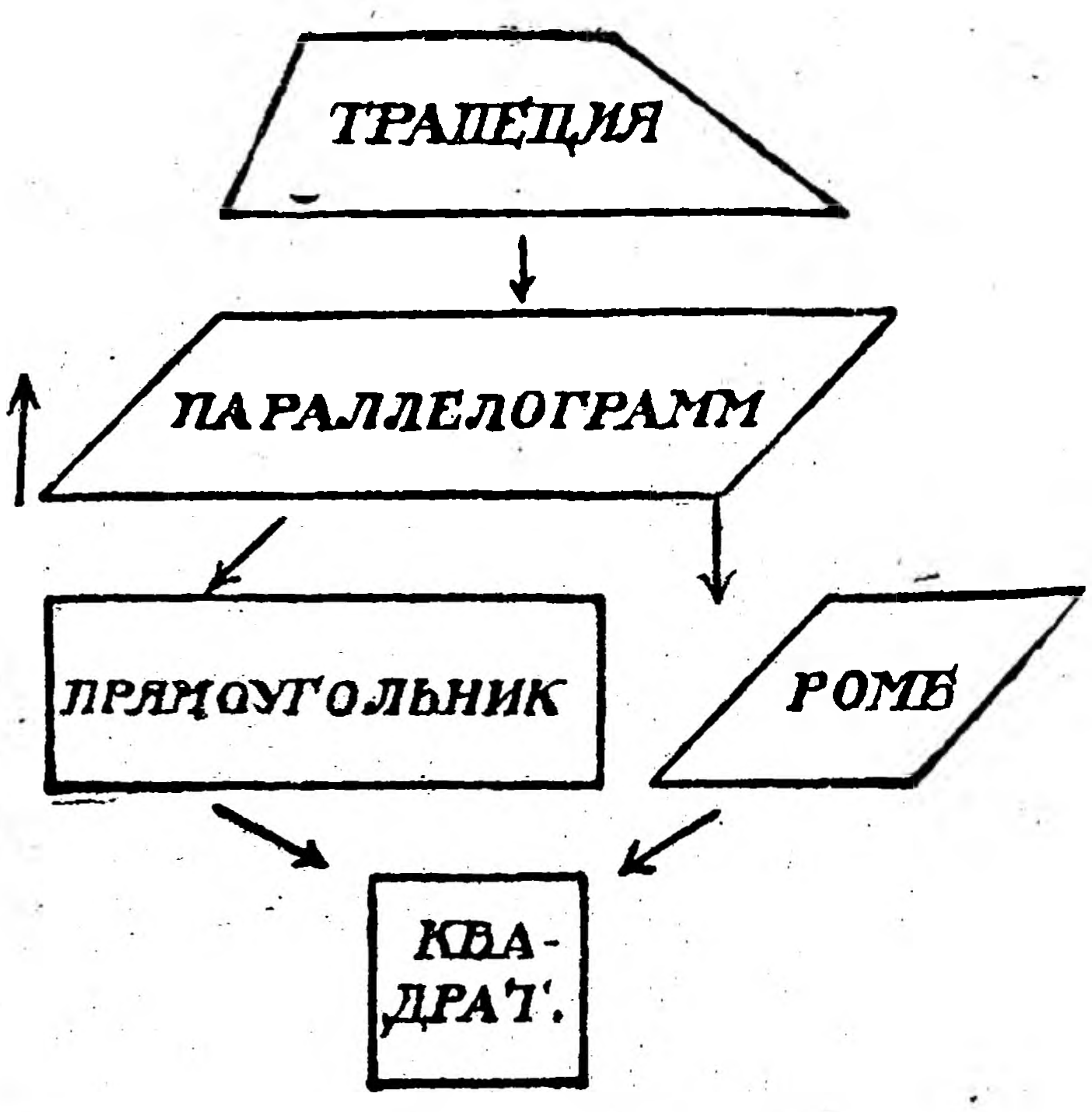


Рис. 199.

Ромб. Вырежьте параллелограм. Отрежьте от него такую часть, чтобы получился новый параллелограм с четырьмя равными сторонами. Такой параллелограм называется ромбом. Найдите его основание и высоту.

Квадрат. Нарисуйте у себя в тетради ромб с прямыми углами Как называется он? Укажите его основание и высоту. Каким они обладают свойством? Как получить квадрат из прямоугольника?

52. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАМА.

§ 183. Углы параллелограма.

Теорема. Во всяком параллелограме противоположные углы равны, а сумма двух углов, прилегающих к одной и той же стороне, равна двум прямым углам (то-есть 180°).

Опыт. Вырежьте из бумаги параллелограм и разрежьте его по какой-нибудь линии LM (рис. 200). Накладывая друг на друга полученные куски параллелограма, убедитесь, что два противоположных угла (например, $\angle A$ и $\angle C$) равны друг другу. Приложив друг к другу те же куски параллелограма, убедитесь, что два соседних угла (например, $\angle A$ и $\angle D$) должны в сумме давать два прямых угла (рис. 201).

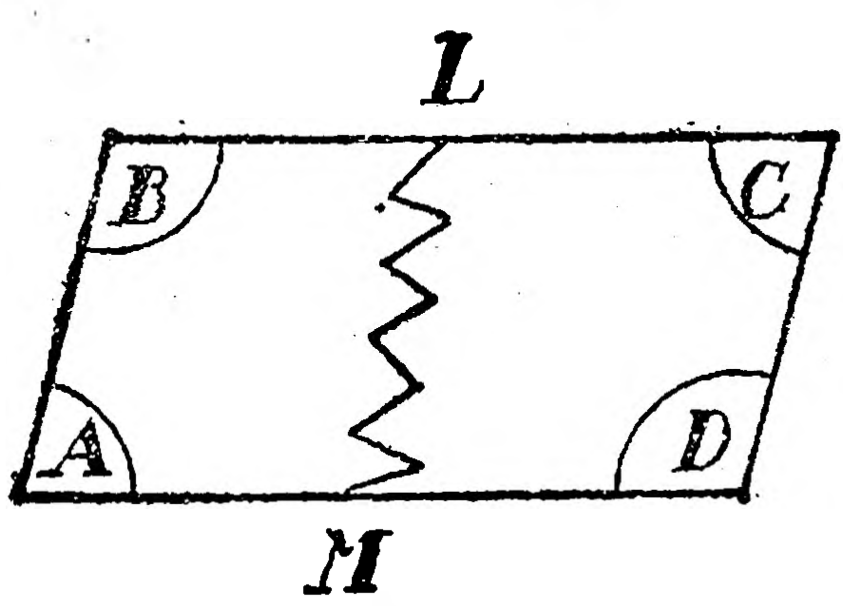


Рис. 200.

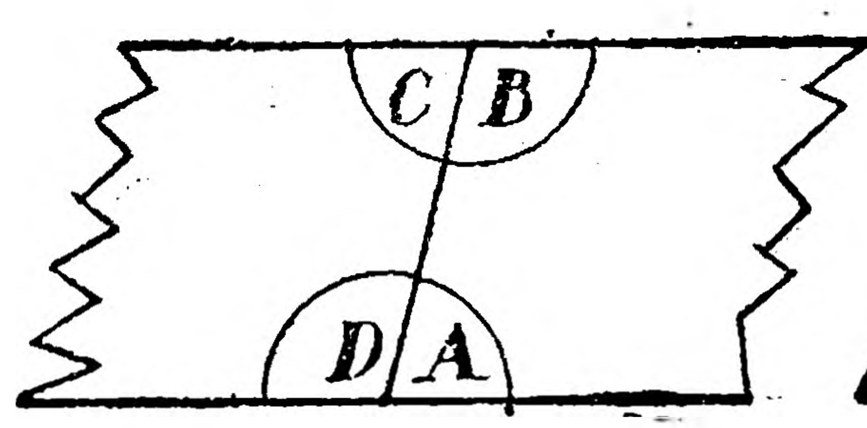


Рис. 201.

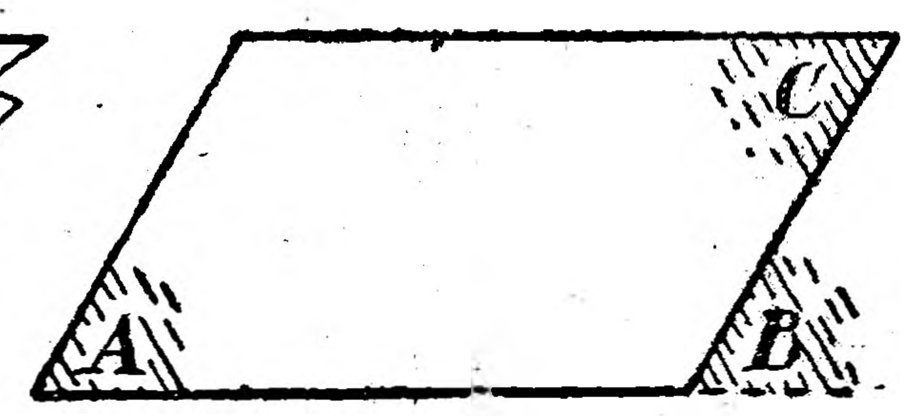


Рис. 202.

Доказательство. 1) $\angle A$ и $\angle C$ порознь равны углу B (§ 177 и рис. 202). Следовательно,

$$\angle A = \angle C.$$

2) $\angle A$ и $\angle D$ — внутренние односторонние, следовательно,

$$\angle A + \angle D = 180°.$$

§ 184. Свойство сторон параллелограма.

Теорема. Во всяком параллелограме противоположные стороны равны друг другу.

Опыт 1. Нарисуйте параллелограм (рис. 203), измерьте все его стороны. Сравните друг с другом величину противоположных сторон.

У меня оказалось, что

$$AB = 1{,}9 \text{ см}; \quad BC = 3{,}6 \text{ см};$$
$$CD = 1{,}9 \text{ см}; \quad AD = 3{,}6 \text{ см};$$

т.-е. $AB = CD$ и $BC = AD$. А у вас?

Доказательство. Докажем, что у всякого параллелограма противоположные стороны равны.

Всякий параллелограм вдоль по диагонали можно разрезать на два треугольника ($\triangle ABC$ и $\triangle ACD$, рис. 203). Эти треугольники равны друг другу. В самом деле, у них AC — общая сторона, затем

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ и } \angle 3 = \angle 4$$

(как внутренние накрестлежащие. При каких параллельных и секущей?).

Следовательно,

$$\triangle ABC = \triangle ADC \ (\S\ 154).$$

Против равных углов лежат равные стороны, а потому

$$AB = CD \text{ и } BC = AD.$$

Параллельные линейки. Возьмите две деревянных линейки (рис. 204) и сделайте у концов их на одинаковом расстоянии друг от

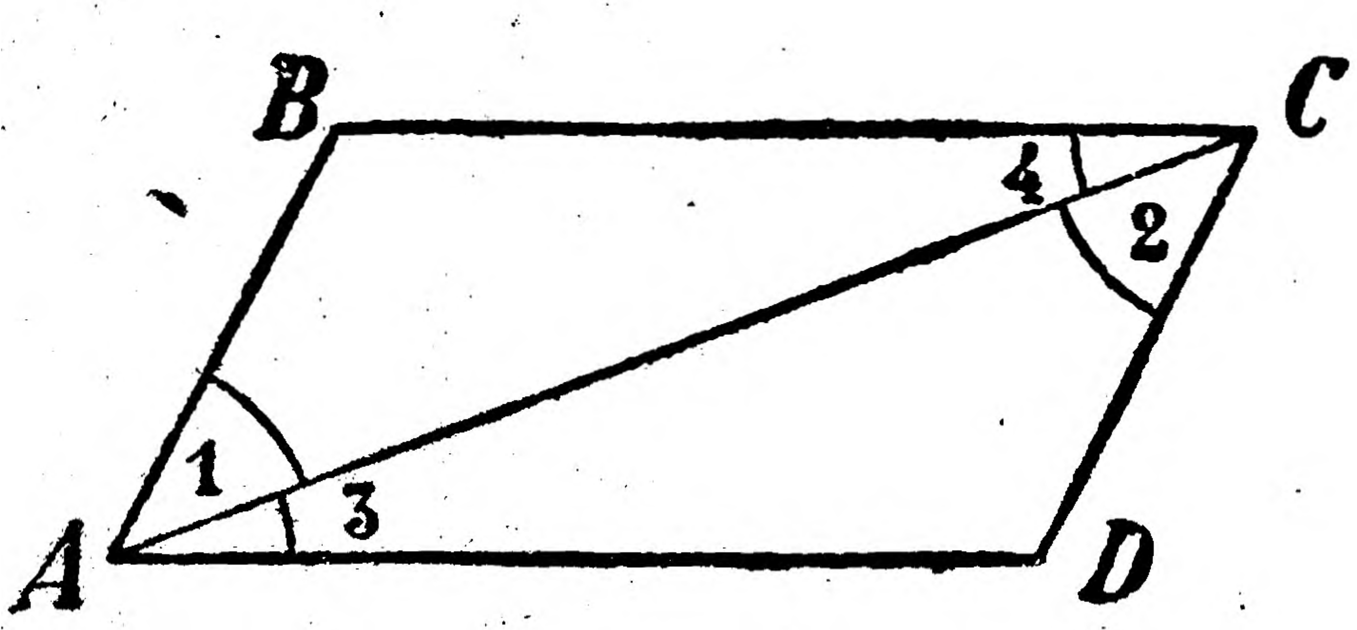


Рис. 203.

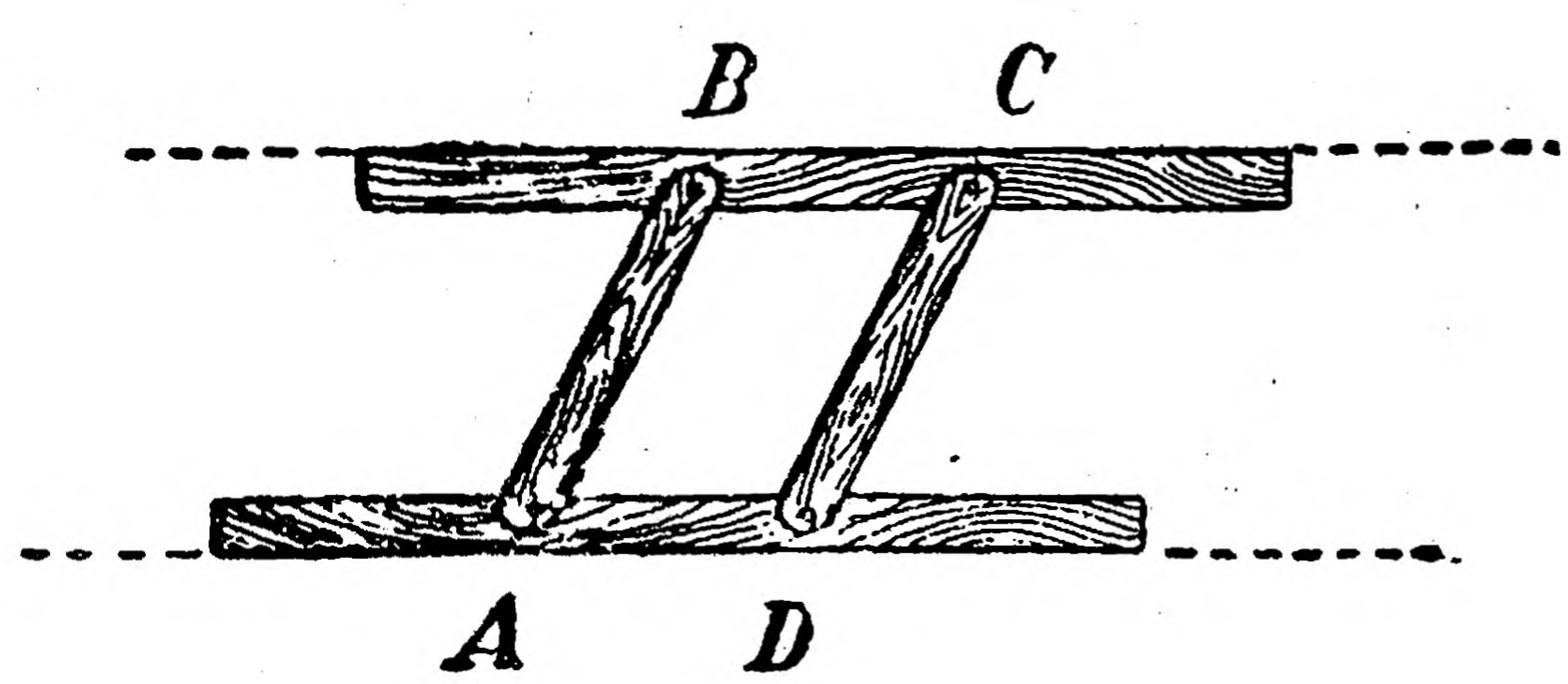


Рис. 204.

друга по две небольшие дырки. Скрепите теперь эти линейки двумя поперечными картонными или деревянными планками равной длины так, чтобы наши линейки могли вращаться вокруг точек скрепления (A, B, C и D). Какая фигура получилась у вас? Изменяя наклон планок AB и CD, проследите, остаются ли при этом линейки BC и AD параллельными друг другу. Почему?

Как при помощи этого прибора нарисовать прямую, параллельную AM и проходящую через точку P (рис. 185)?

§ 185. Свойство диагоналей параллелограма.

Теорема. Диагонали параллелограма делятся друг другом на равные части.

Опыт. Приготовьте из деревянных палочек подвижную модель параллелограма (§ 184). Соедините противоположные вершины по диагоналям резиновой ниткой. Начните теперь «скашивать» ваш параллелограм. Проследите внимательно, изменяется ли при этом длина диагоналей; вы заметите, что при движении сторон параллелограма диагонали его все время изменяются, при чем в то время, как одна из них увеличивается, другая уменьшается.[1]) Обратите теперь внимание на ту точку, в которой пересекаются наши диагонали: не будет ли она все время делить пополам каждую диагональ параллелограма? Проверьте это непосредственно измерением.

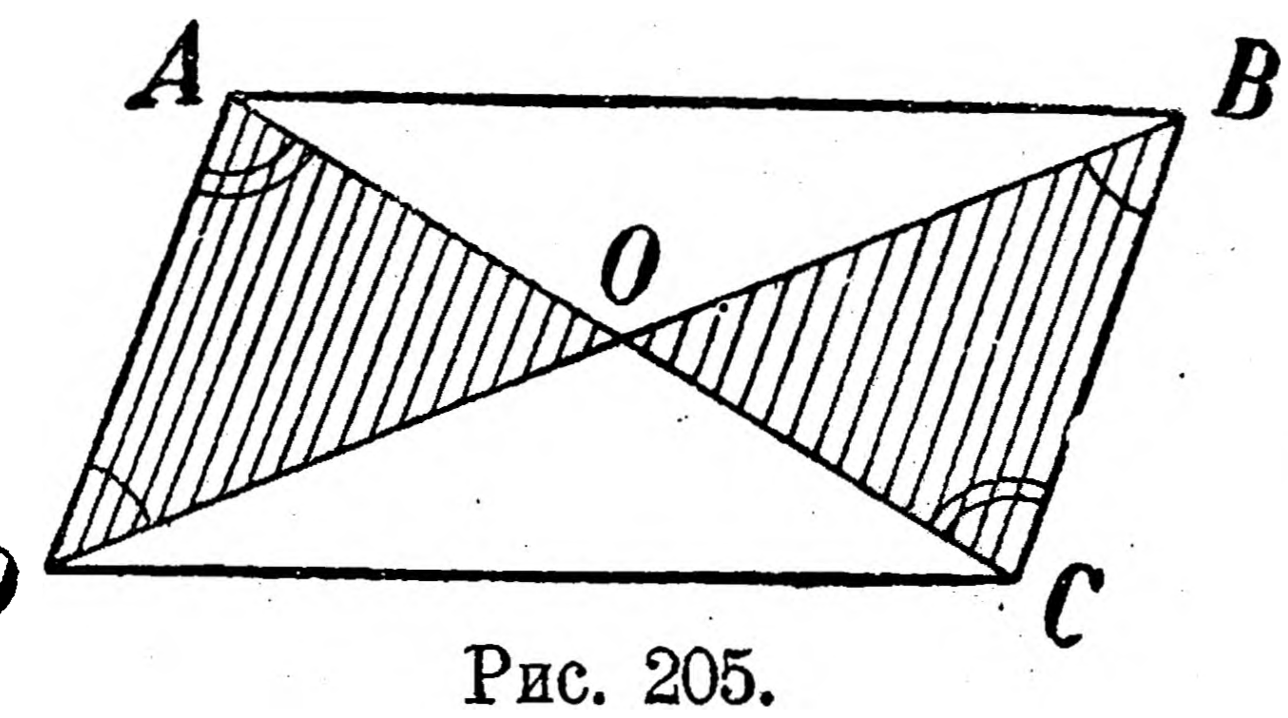


Рис. 205.

Доказательство. Проведем две диагонали AC и BD (рис. 205) и рассмотрим $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$. У них:

$AD = BC$ (противоположные стороны параллелограма, § 184),

$\angle OAD = \angle OCB$ (внутрен. накрестлежащие),

$\angle ODA = \angle OBC$ » »

А потому

$\triangle AOD = \triangle BOC$ (второй признак равенства $\triangle$-ков, § 153).

Следовательно,

$$AO = OC \text{ и } BO = OD,$$

что и требовалось доказать.

53. СВОЙСТВО ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

§ 186. Свойство диагоналей прямоугольника.

Теорема. Диагонали любого прямоугольника равны друг другу. Нарисуйте какой-нибудь прямоугольник; например, такой: $ABCD$ (рис. 206).

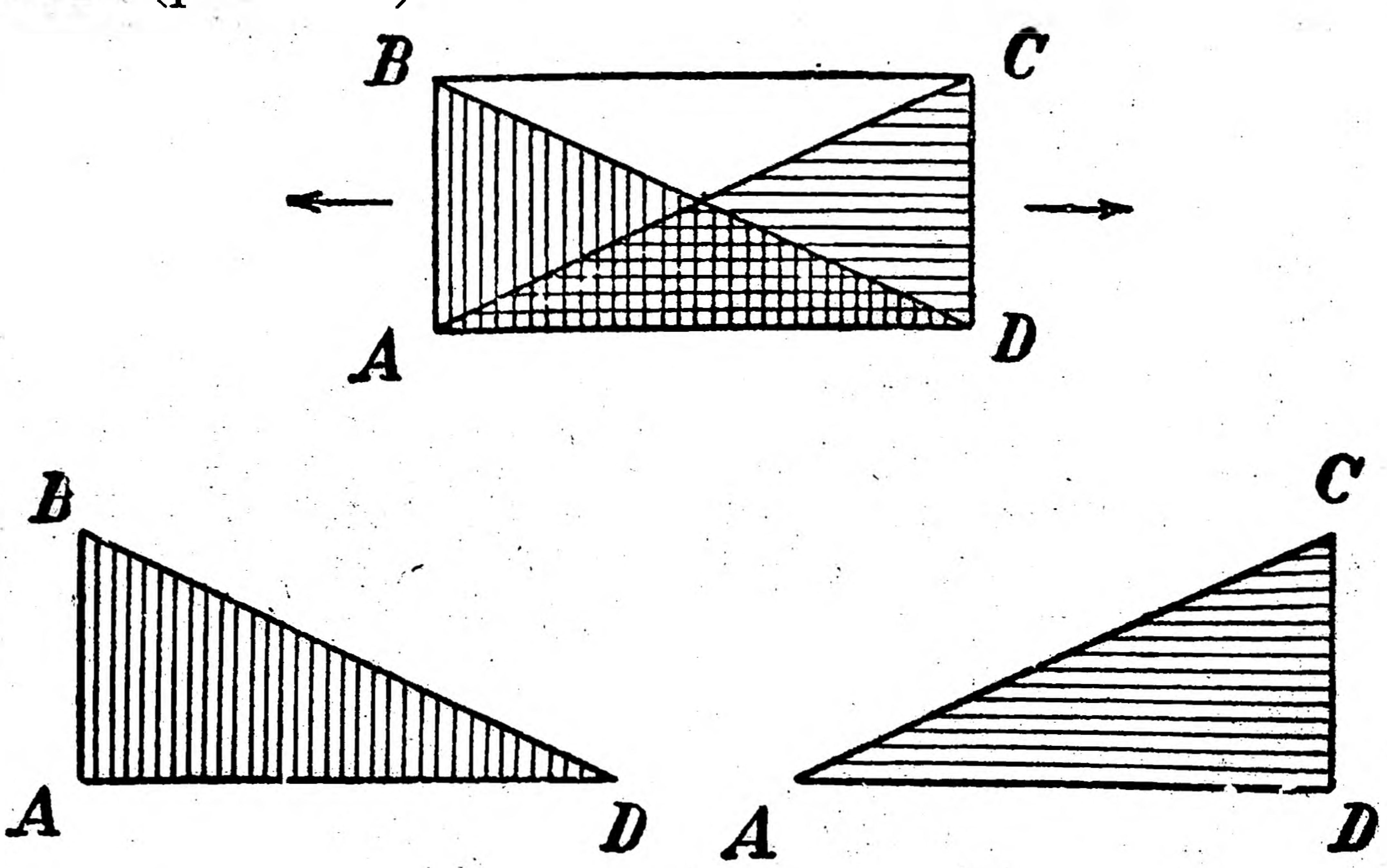


Рис. 206.

[1]) Чтобы легче было следить за изменением длины диагоналей, перевяжите резинки в нескольких местах цветной ниткой.

Сравним друг с другом его диагонали AC и BD. Эти диагонали входят в состав таких треугольников: $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$. Положите на наш треугольник прозрачную бумагу, нарисуйте на нем и вырежьте отдельно два эти треугольника. У этих треугольников AD была общей стороной. Сторона AB равна стороне CD (почему?) и $\angle BAD = \angle ADC$ (почему?).

Следовательно, эти прямоугольные треугольники равны (вспомните § 151).

54. СВОЙСТВА РОМБА И КВАДРАТА.

§ 187. Углы и стороны. Ромб — это параллелограм, у которого все четыре стороны равны друг другу; поэтому у него (§ 183):

1) Противоположные углы равны.

2) Два соседних угла в сумме дают 180°.

§ 188. Свойство диагоналей ромба.

Теорема. Диагональ ромба есть его ось симметрии, а потому она делит его углы пополам.

Опыт. Вырежьте из бумаги параллелограм. Посмотрим, не будет ли осью симметрии одна из его диагоналей AC (рис. 203). Если вы согнете параллелограм по диагонали AC так, чтобы $\triangle ACD$ лег на $\triangle ACB$, то заметите, что вам не удастся совместить всеми частями эти треугольники:

$$\angle 4 \text{ не равен } \angle 2 \text{ и } AD \text{ не равна } AB.$$

Итак, диагональ параллелограма не служит ему осью симметрии.

Начните теперь отрезывать от параллелограма полоски по прямым, параллельным стороне CD, и сгибайте каждый раз вновь полученный параллелограм по диагонали AC. Тогда сторона AD начнет приближаться к стороне AB.

Укоротите, наконец, параллелограм так, чтобы AD сделалась равной AB. Тогда при сгибании сторона AD пойдет по стороне AB, и концы этих сторон D и B совпадут друг с другом.

Итак, у ромба диагональ обратилась в ось симметрии.

Доказательство. Остается доказать, что таким свойством должна обладать диагональ любого ромба. Любой ромб диагональю AC (рис. 207) разбивается на два треугольника: $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$, которые должны быть обязательно равны друг другу (ибо у них три стороны соответственно равны). Почему? Если всегда $\triangle ABC = \triangle ADC$, то и всегда $\angle 1 = \angle 2$.

Теорема. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

Опыт. Вырежьте из бумаги какой-либо параллелограм $ABCD$ (рис. 205) и согните его вчетверо по диагоналям. Совпадут ли друг с другом те четыре угла, которые образовались у точки O пересече-

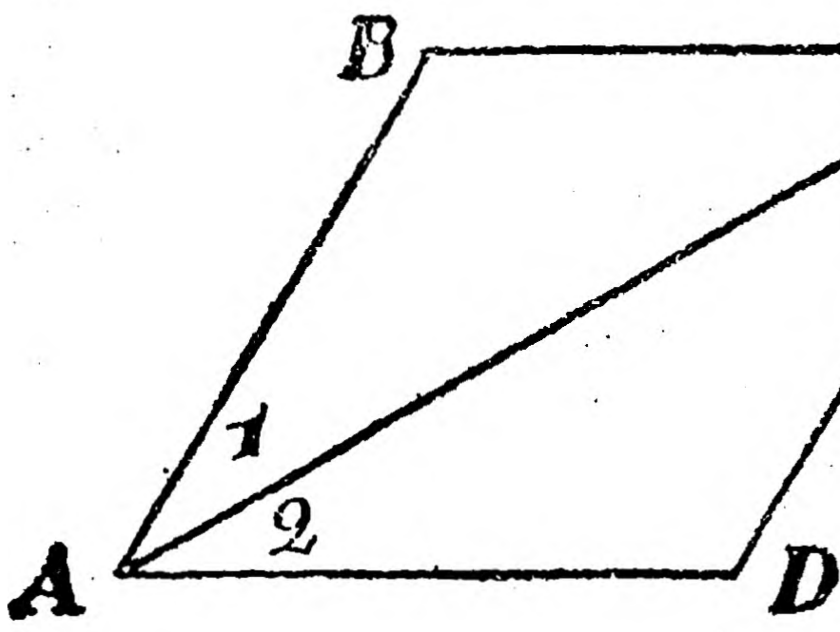


Рис. 207.

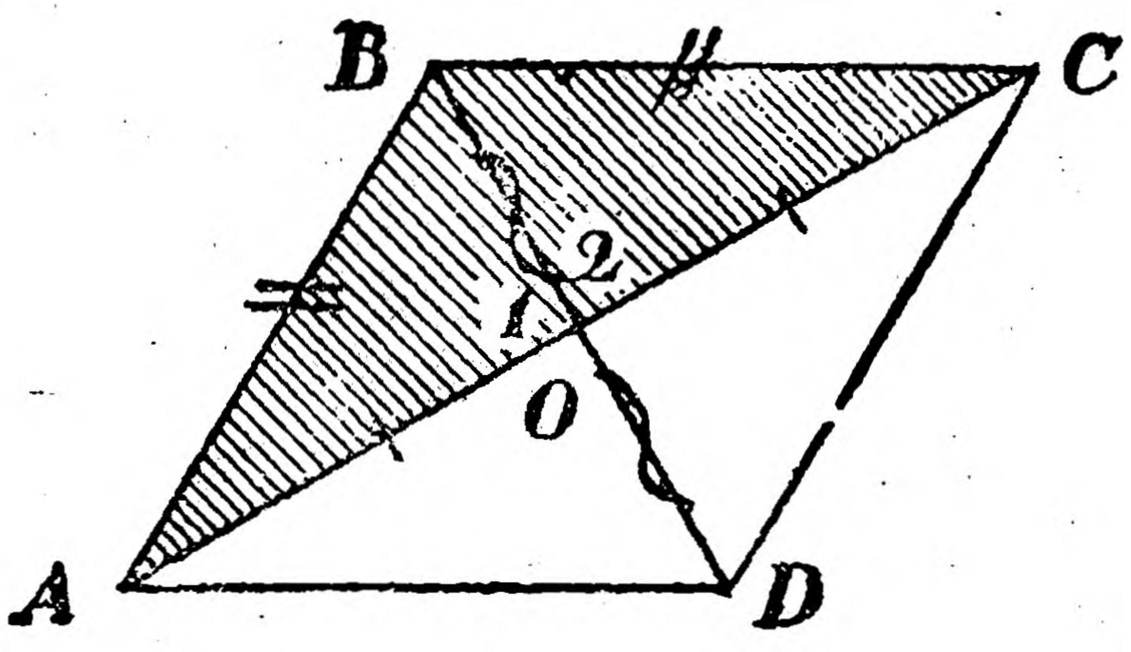


Рис. 208.

ния диагоналей? Равны ли они? Вырежьте теперь из бумаги ромб и проделайте с ним тот же опыт. Окажется, что не только совпадут все те четыре угла, которые образовались у точки O, но совпадут и все четыре маленькие треугольника. Итак, у ромба диагонали, пересекаясь, образуют в точке пересечения четыре равных, а следовательно и прямых угла.

Доказательство. Треугольник ABC (рис. 208) — равнобедренный (почему?), при чем BO есть биссектриса (§ 148), а у равнобедренного треугольника биссектриса есть вместе с тем и высота. Следовательно, углы у точки O должны быть всегда прямыми.

§ 189. Свойства квадрата. Так как квадрат вмещает в себе все признаки параллелограма, прямоугольника и ромба, то он обладает такими свойствами:

1. У него все стороны, углы и диагонали равны.
2. Диагонали делят углы его пополам.
3. Диагонали пересекаются перпендикулярно друг другу.

55. СВОЙСТВА ПУЧКА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ.

§ 190. *Теорема.* Если на одной стороне угла отложить равные части и через точки деления провести пучок параллельных прямых, то и другая сторона угла разделится на одинаковые по величине отрезки.

Опыт. Нарисуйте какой-нибудь угол BAC (рис. 209). Отложите на стороне его AB, при помощи циркуля, равные отрезки $AL = LM = MN = \dots$ Проведите через любую из этих точек, например, через точку L какую-нибудь прямую LK, которая пересекла бы вторую сторону угла A. Теперь при помощи линейки и наугольника проведите через остальные точки деления M, N и т. д. пучок прямых, параллельных LK. Этот пучок встретит вторую сторону AC в точках P, R и т. д. Сравните при помощи циркуля те отрезки, на которые разделилась вторая сторона нашим пучком.

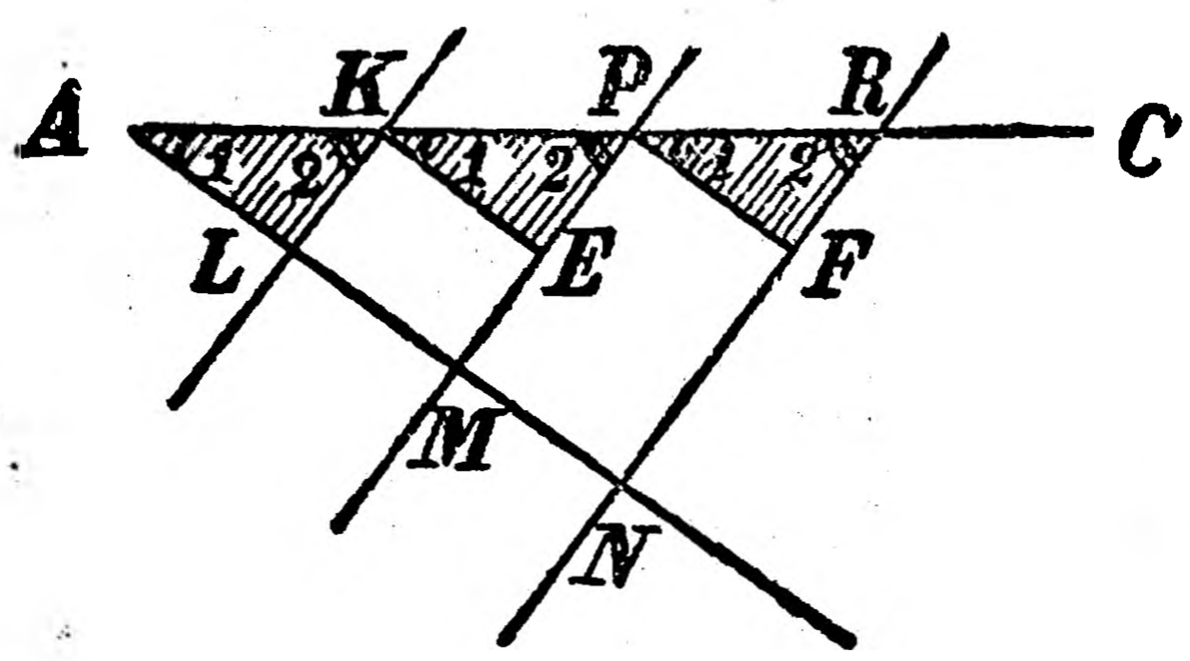


Рис. 209.

У вас должно оказаться, что $AK = KP = PR = \ldots$ А равны ли части, отложенные на первой стороне, отрезкам, полученным на второй стороне?

Например, LM равна ли KP? Проверьте это непосредственным измерением.

Доказательство. Докажем справедливость этого свойства для любого пучка параллельных прямых и для любого угла.

Пусть нам дано, что $AL = LM = MN = \ldots$

Надо доказать, что $AK = KP = PR = \ldots$

Постараемся получить ряд треугольников, в состав которых входили бы интересующие нас отрезки. Для этого проведем из точек K, P и т. д. новый пучок параллельных прямых $KE \parallel LM$ и $PF \parallel MN$ и т. д.[1])

Тогда мы получим такие треугольники:

$$\triangle AKL;\ \triangle KPE;\ \triangle PRF \text{ и т. д.}$$

У них имеется по одной одинаковой стороне:

$$AL = KE = PF = \ldots \text{ (почему?) }^{2)}$$

Углы, отмеченные № 1, равны друг другу; кроме того, равны друг другу и все углы № 2 (почему?).

Следовательно,

$$\triangle AKL = \triangle KPE = \triangle PRF = \ldots,$$

а потому

$$AK = KP = PR = \ldots$$

---

[1]) Знак $\parallel$ заменяет слово «параллельно».

[2]) Пояснение. Нам известно, что $AL = LM = MN = \ldots$ Но LM можно заменить KE (почему?), MN можно заменить PF (почему?), и тогда получим, что $AL = KE = PF = \ldots$

Следствие. Если вы сотрете часть угла, прилегающую к его вершине A, то получите такой рисунок (черт. 210). Здесь мы имеем пучок параллельных прямых ($KL \parallel PM \parallel RN \parallel \ldots$) и две секущие ($KS$ и LT). Легко доказать такую теорему: Если пучок параллельных прямых образует равные отрезки на одной секущей ($LM = MN = \ldots$), то он отсекает равные отрезки и на другой секущей ($KR = PR = \ldots$).

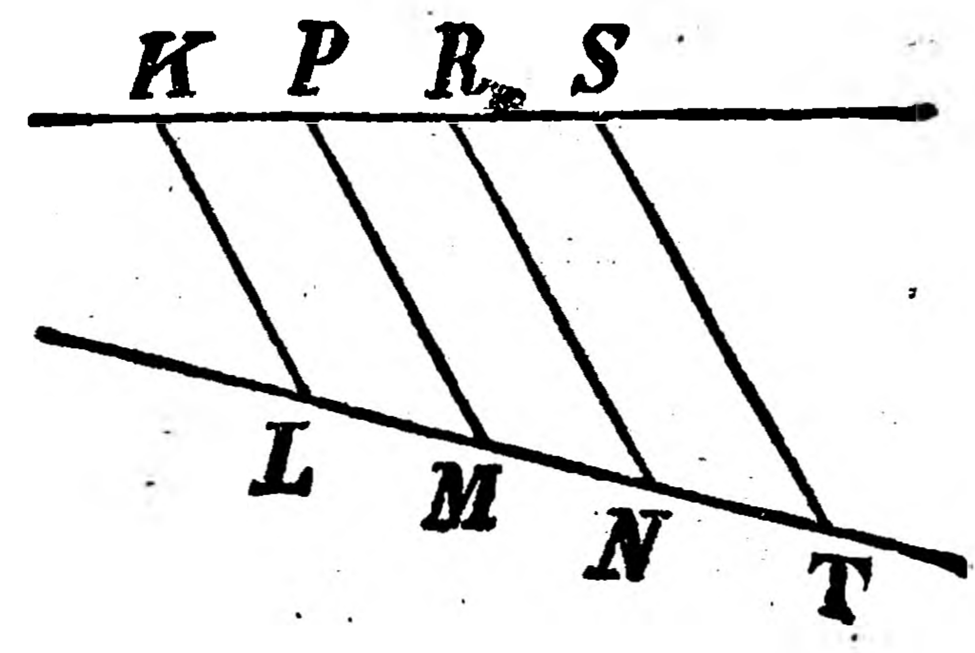


Рис. 210.

§ 191. *Задача.* Разделить отрезок прямой AB на произвольное число равных частей. Разделите, напр., отрезок AB (рис. 211) на три равных части. Проведите через его конец под произвольным углом неопределенной длины прямую и отложите на ней, начиная от конца A, произвольные по длине, но одинаковые три отрезка $AC = CD = DE$. Соедините конец E с концом B и проведите через точки C и D пучок прямых, параллельных BE. Этот пучок и разделит нашу прямую AB на три равные части.

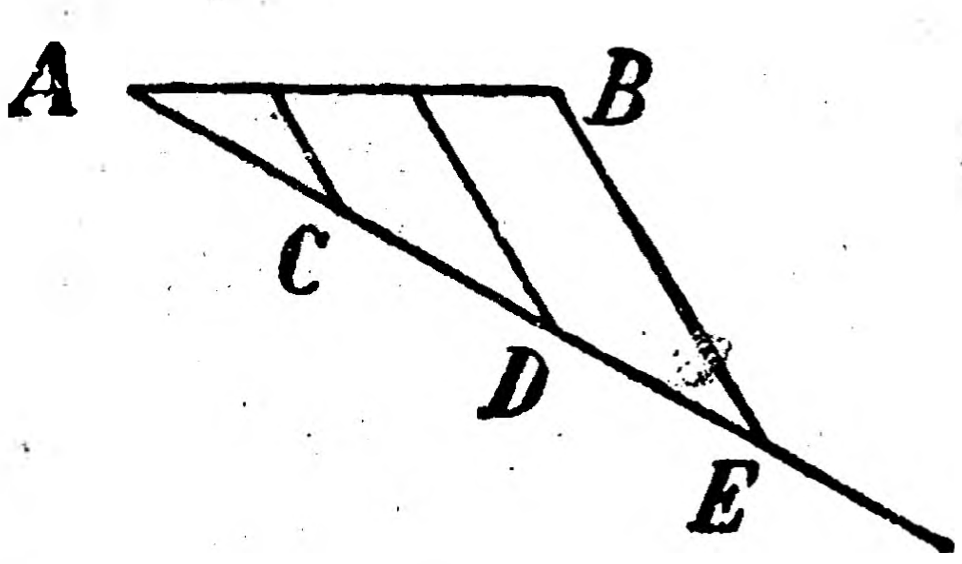


Рис. 211.

§ 192. Свойство средней линии треугольника.

Теорема. Средняя линия треугольника, параллельная третьей стороне, равна половине ее.

Опыт. Нарисуйте какой-либо треугольник ABC. Разделите пополам одну из его боковых сторон (рис. 212) и через найденную середину D проведите прямую DE, параллельную основанию AC. Эта прямая встретит второй бок треугольника в точке E. Исследуйте положение этой точки: измерьте отрезки BE и EC. Не будет ли точка E серединой второго бока? Эту прямую DE, параллельную основанию треугольника и соединяющую середины двух других сторон его, назовем средней линией треугольника. Узнайте, сколько раз эта средняя линия DE уложится на основании AC.

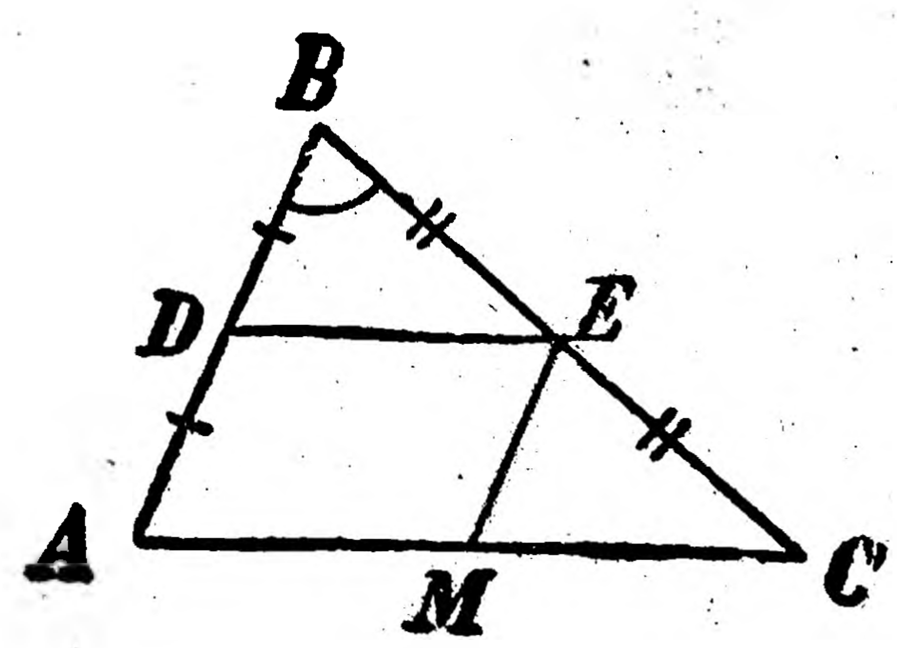


Рис. 212.

Доказательство. Докажем прежде всего, что прямая DE (рис. 212), проведенная через середину D стороны AB параллельно основанию, встречает второй бок тоже в его середине. Для этого достаточно доказать, что $BE = EC$. На стороне AB были отложены одинаковые отрезки $AD = DB$ и через точки деления A и D проведены две параллельные прямые AC и DE, которые должны разделить вторую сторону BC на равные части (§ 190), следовательно, BE должна равняться EC.

Остается теперь доказать, что у всякого треугольника средняя линия DE равна половине основания. Проведите через точку E прямую EM, параллельную AB. Эта прямая разделит основание AC на два равных отрезка AM и MC (§ 190), при чем каждый из них в отдельности равен средней линии DE.

Следовательно, $DE = {}^1/_2 AC$.

56. СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ.

§ 193. Свойство углов. Нарисуйте какую-нибудь трапецию $ABCD$ (рис. 213). Отметьте у нее два угла, прилегающие к одному и тому же боку ее (например, $\angle C$ и $\angle D$). Отрежьте один из этих

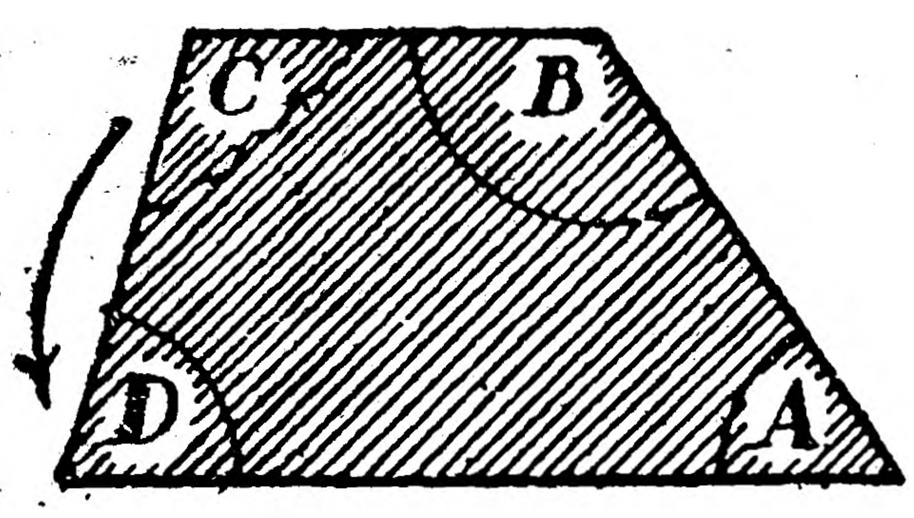


Рис. 213.

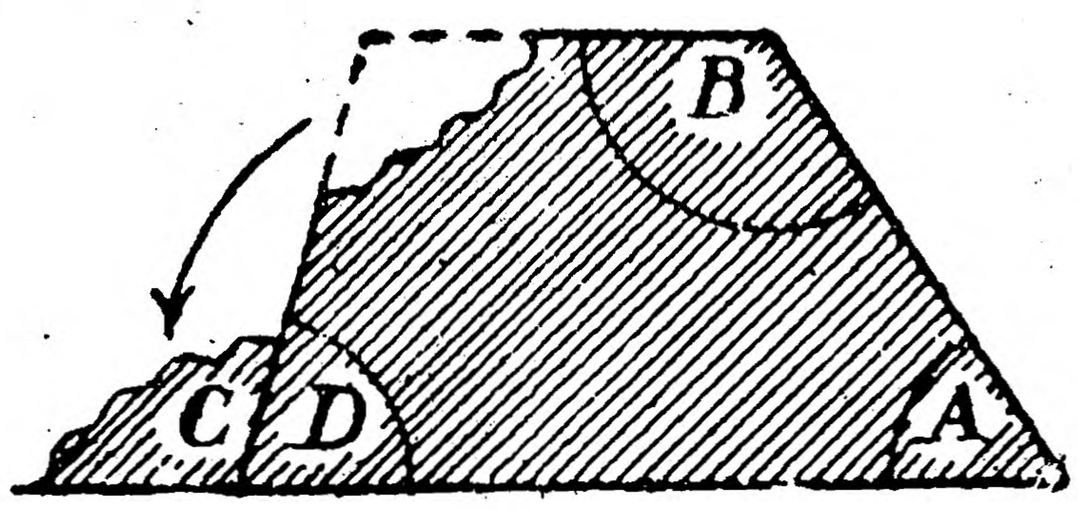


Рис. 214.

углов ($\angle C$) и приложите его к другому углу ($\angle D$) так, чтобы получились два смежных угла (рис. 214).

Чему равна сумма $\angle C + \angle D$?

Докажите (пользуясь § 177), что у трапеции сумма двух углов, прилегающих к одному и тому же боку, равна 180°.

§ 194. Свойство средней линии трапеции.

Теорема. Средняя линия трапеции равна полусумме двух оснований ее.

Нарисуйте трапецию $ABCD$ (рис. 215). Разделите один из ее боков AB пополам и через середину его E проведите прямую EF, параллельную основаниям. Эта прямая (вспомните следствие § 190) пересекает и второй бок в середине его. Такая прямая EF, которая соединяет середины двух боков трапеции, называется средней линией трапеции.

Опыт. Нарисуйте какую-нибудь трапецию *ABCD* (рис. 215), измерьте ее среднюю линию и оба основания. Сравнивая полученные числа, постарайтесь найти зависимость между этими линиями.

Верхнее основание	$BC = 26$	*мм*
Нижнее »	$AD = 64$	»
Сумма оснований	$BC + AD = 90$	»
Средняя линия	$EF = 45$	»

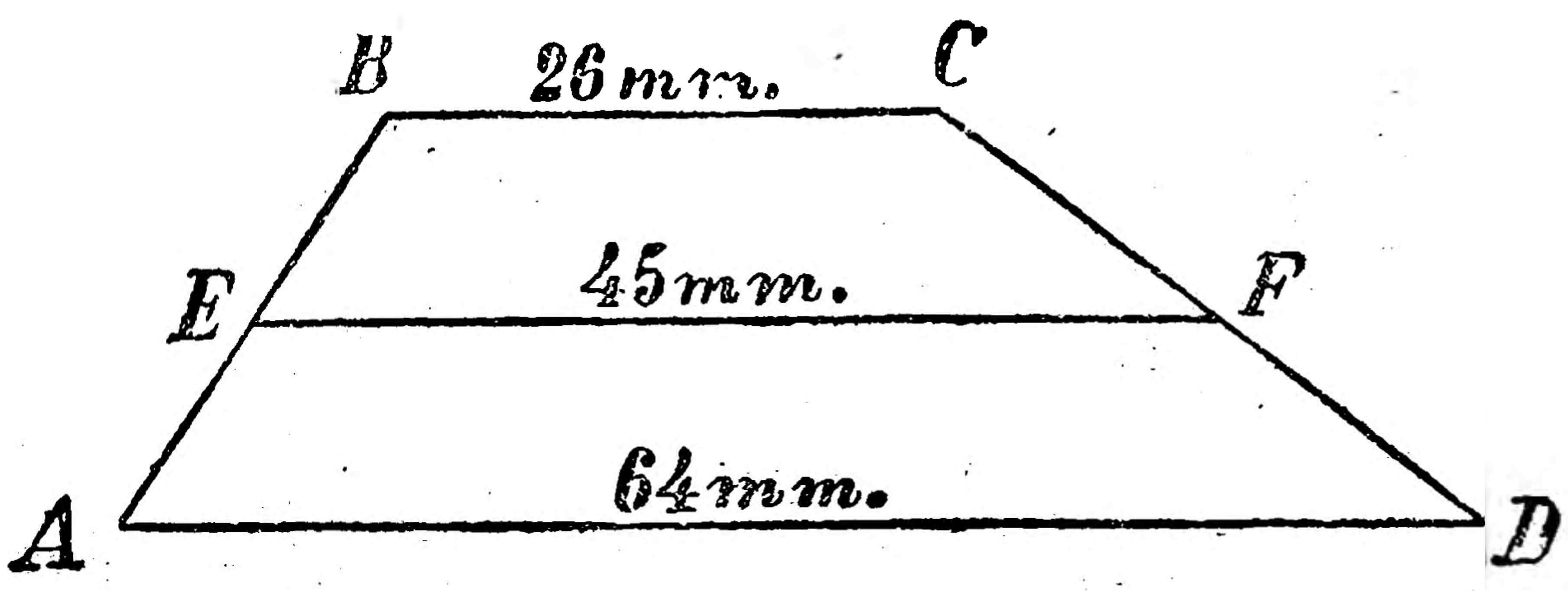


Рис. 215.

Доказательство. Вырежьте из бумаги трапецию. Отрежьте от нее по прямой *EC* (рис. 216) треугольник *EBC* и, вращая его вокруг точки *E* по направлению стрелки, заставьте сторону *BE* совпасть со стороною *AE* (рис. 217). (Почему эти стороны должны совпасть друг с другом?)

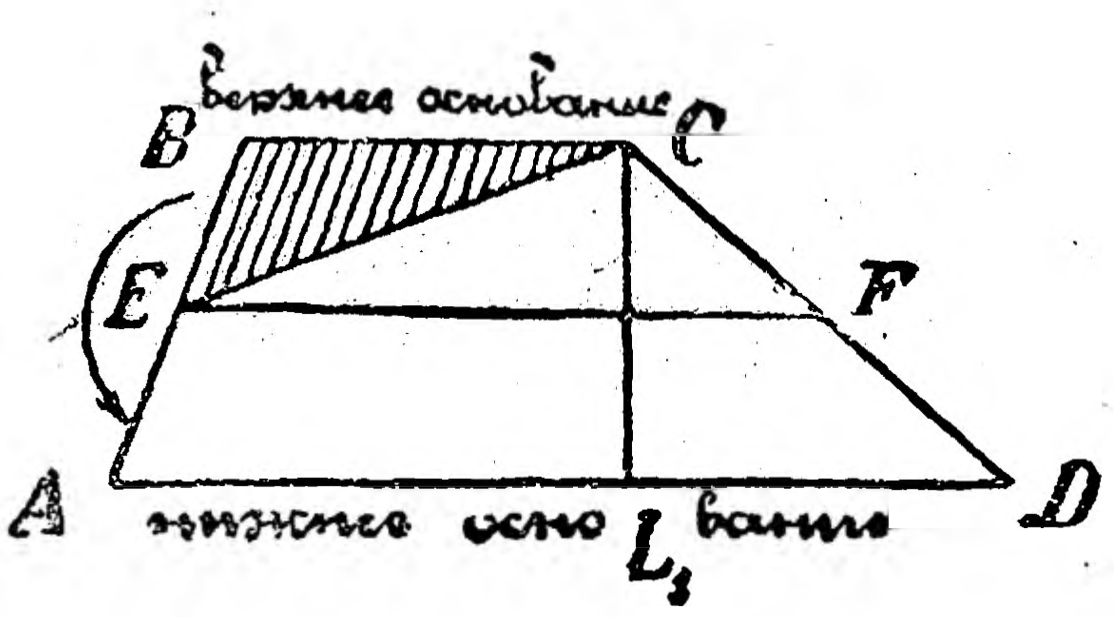


Рис. 216.

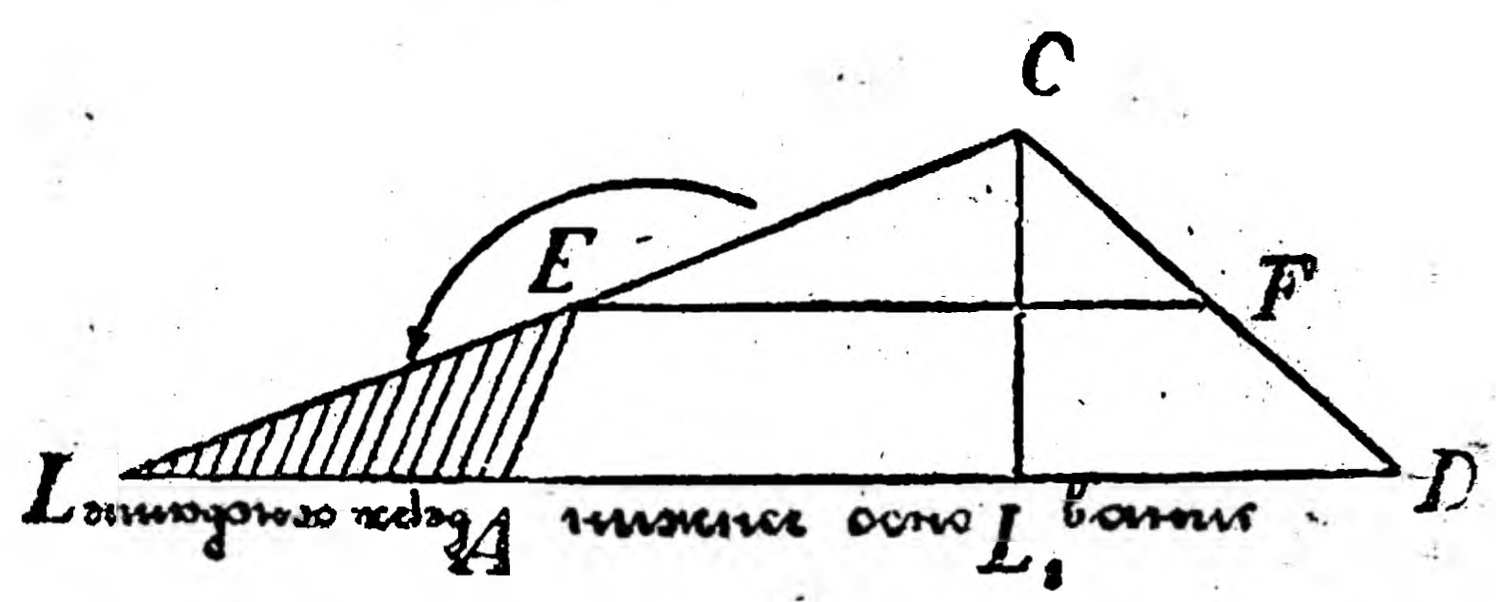


Рис. 217.

Угол *B* с углом *A* образуют два смежных угла, а потому верхнее основание трапеции *BC* с нижним основанием *AD* составит одну прямую *LD*; таким образом мы получим треугольник *CLD*, средняя линия которого *EF* должна равняться половине основания *LD*; но *EF* есть вместе с тем средняя линия трапеции, а *LD* равна сумме верхнего и нижнего оснований трапеции, следовательно, у любой трапеции средняя линия должна равняться полусумме двух оснований ее.

Формула. Если обозначить число сантиметров, содержащихся в верхнем основании трапеции, буквой *a*; число сантиметров, содержащихся в нижнем основании, буквой b и, наконец, число сантиметров, заключенных в средней линии трапеции, буквой m, то

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

Пример. В трапеции на рис. 216: $a = 1{,}6$ *см*; $b = 3{,}7$ *см*, следовательно,

$$m = \frac{1{,}6 + 3{,}7}{2} = 2{,}65 \text{ см.}$$

57. ПРОЕКЦИЯ.

§ 195. Проекция точки.

Опыт. Нарисуйте на листе бумаги несколько точек (A, B, C) и какую-нибудь прямую линию MN неопределенной длины (рис. 218). Опустите перпендикуляр из точки A на нашу прямую. Укажите точку пересечения перпендикуляра с нашей прямой (след этого перпендикуляра на нашей прямой). Эта точка a называется **проекцией точки A на прямую MN**. Опустите перпендикуляр из точки B. Проекция точки B на ту же прямую MN будет точка b. Опустите перпендикуляры на нашу прямую из всех остальных точек. Укажите проекцию точки C. Укажите, наконец, проекцию точек F, D и E. Вы видите, что проекция точки F слилась с проекцией точки A. Проекции точек D и E должны слиться с проекцией точки C. То-есть, все точки, расположенные на одном и том же перпендикуляре к MN, имеют одну и ту же проекцию.

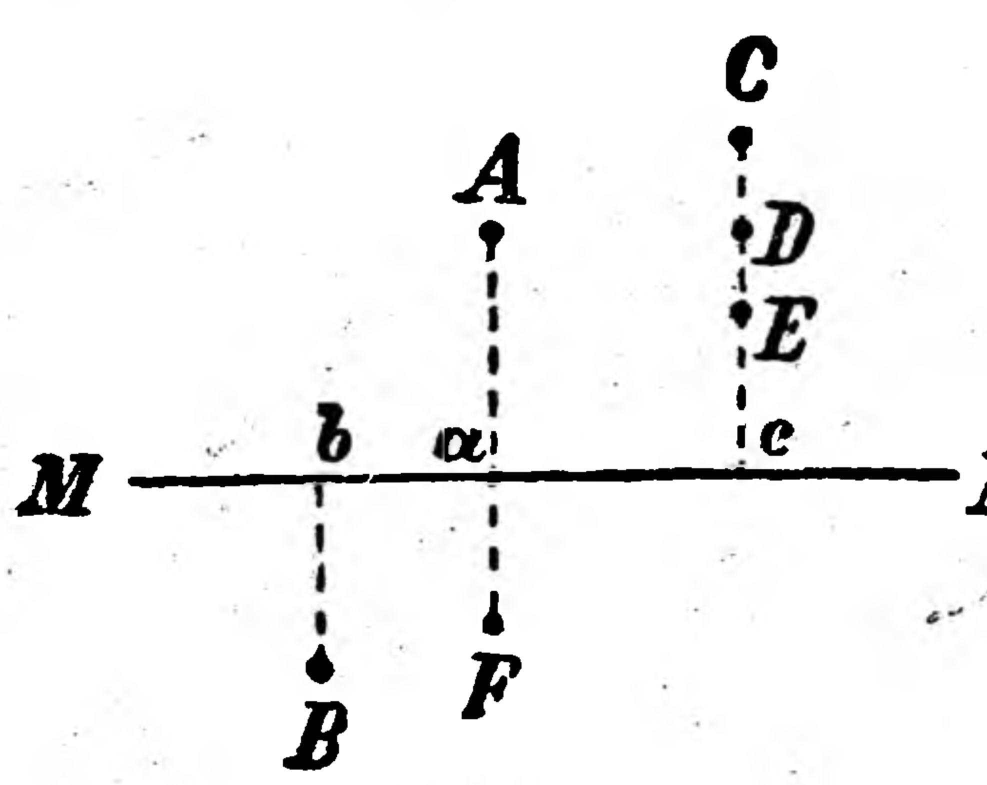


Рис. 218.

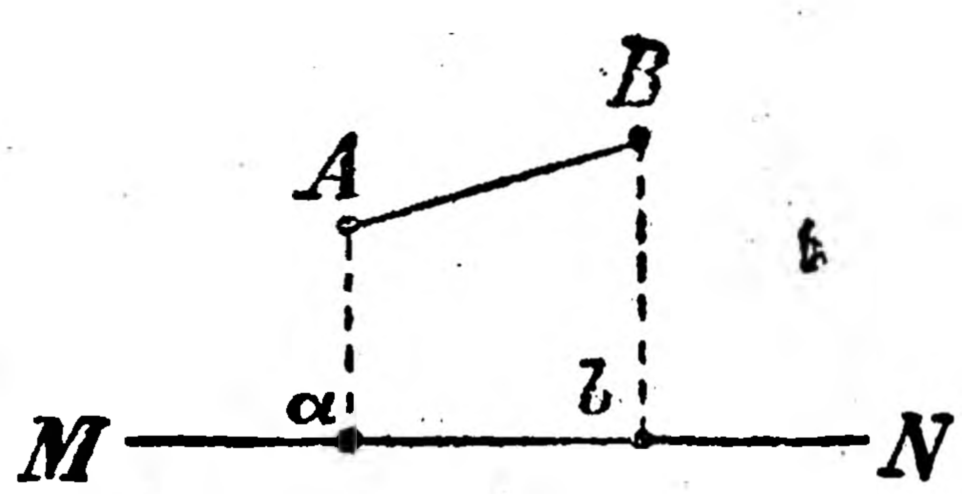


Рис. 219.

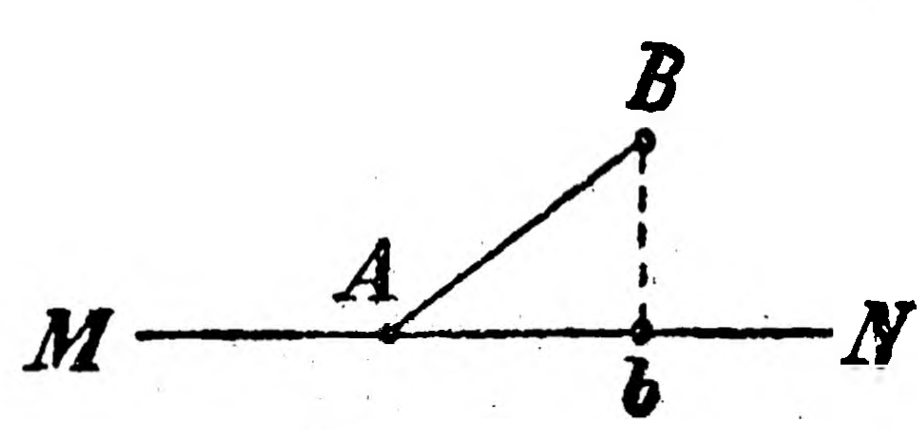


Рис. 220.

§ 196. Проекция отрезка прямой. Нарисуйте отрезок прямой AB (рис. 219) и вне его неопределенной длины прямую линию MN. Найдите проекции концов нашего отрезка A и B на прямую MN. Вы получите точки a и b. Проекции всех промежуточных точек отрезка AB лягут между точками a и b. Отрезок ab называется **проекцией отрезка AB на прямую MN**.

§ 197. Проекция отрезка на прямую, проходящую через один из его концов.

Опыт. Нарисуйте неопределенной длины прямую MN (рис. 220) и отрезок AB так, чтобы конец A лежал на прямой MN. Посмотрим теперь, как изменяется величина проекции нашего отрезка от изменения положения этого отрезка относительно прямой MN.

Нарисуйте сначала отрезок AB так, чтобы он обоими своими концами лежал на прямой MN. Проекцией отрезка AB при таком положении его будет служить сам отрезок AB. Начните теперь приподымать по направлению стрелки конец отрезка B (рис. 221) и находите в каждом новом положении проекцию этого отрезка AB на ту же прямую MN. Продолжайте вращать отрезок до тех пор, пока точка B опять не ляжет на прямую MN.

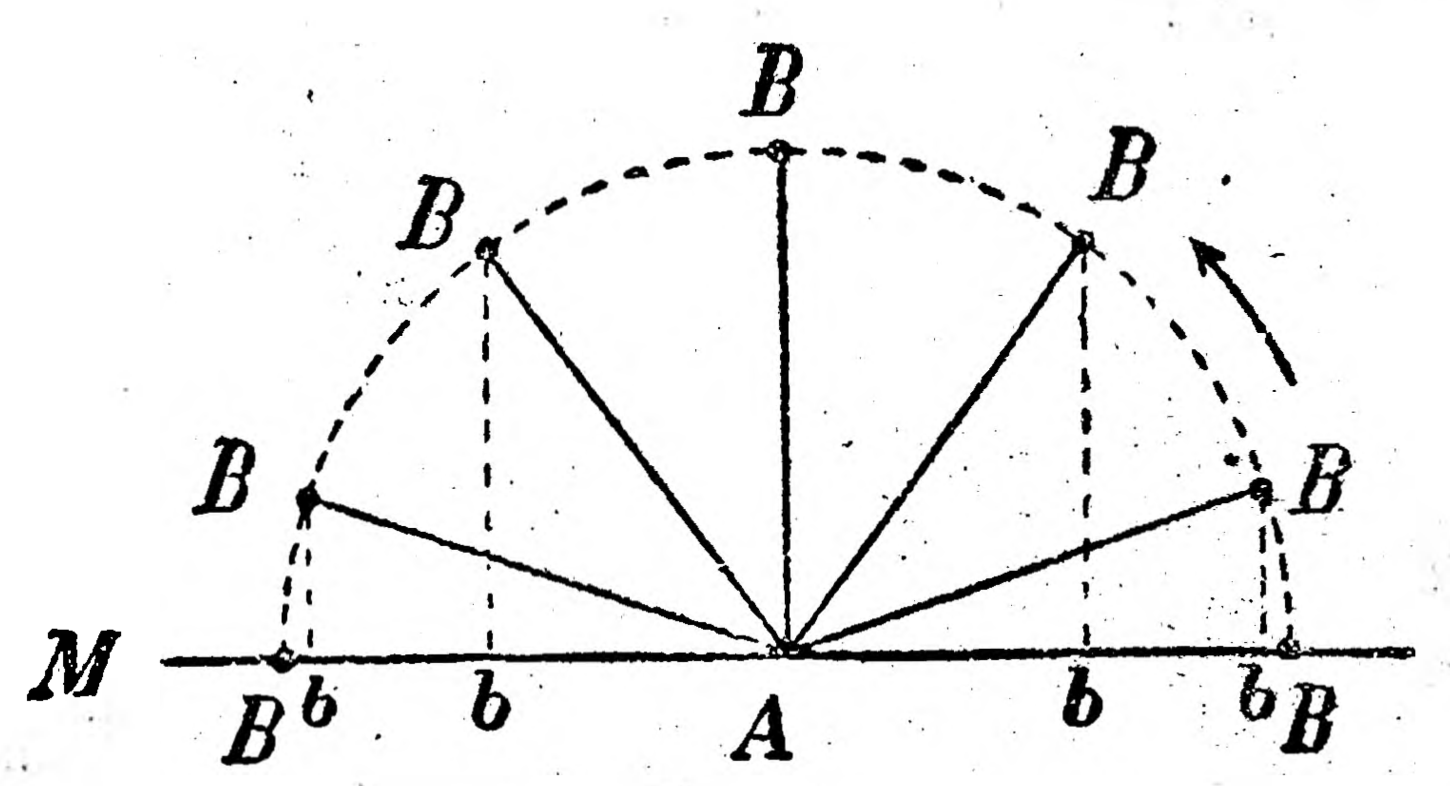


Рис. 221.

Как изменялась эта проекция с изменением положения отрезка AB?

Результат опыта. Когда отрезок AB лежал на MN, то проекция его равна была самому отрезку. По мере того, как увеличивался подъем отрезка, проекция уменьшалась и, когда отрезок сделался перпендикулярным к MN, проекция превратилась в точку. При дальнейшем вращении отрезок проектируется влево от точки A, и проекция все время увеличивается.

Докажите, что проекция никогда не может быть длиннее проектируемого отрезка (обратите внимание на прямоугольный треугольник ABb).

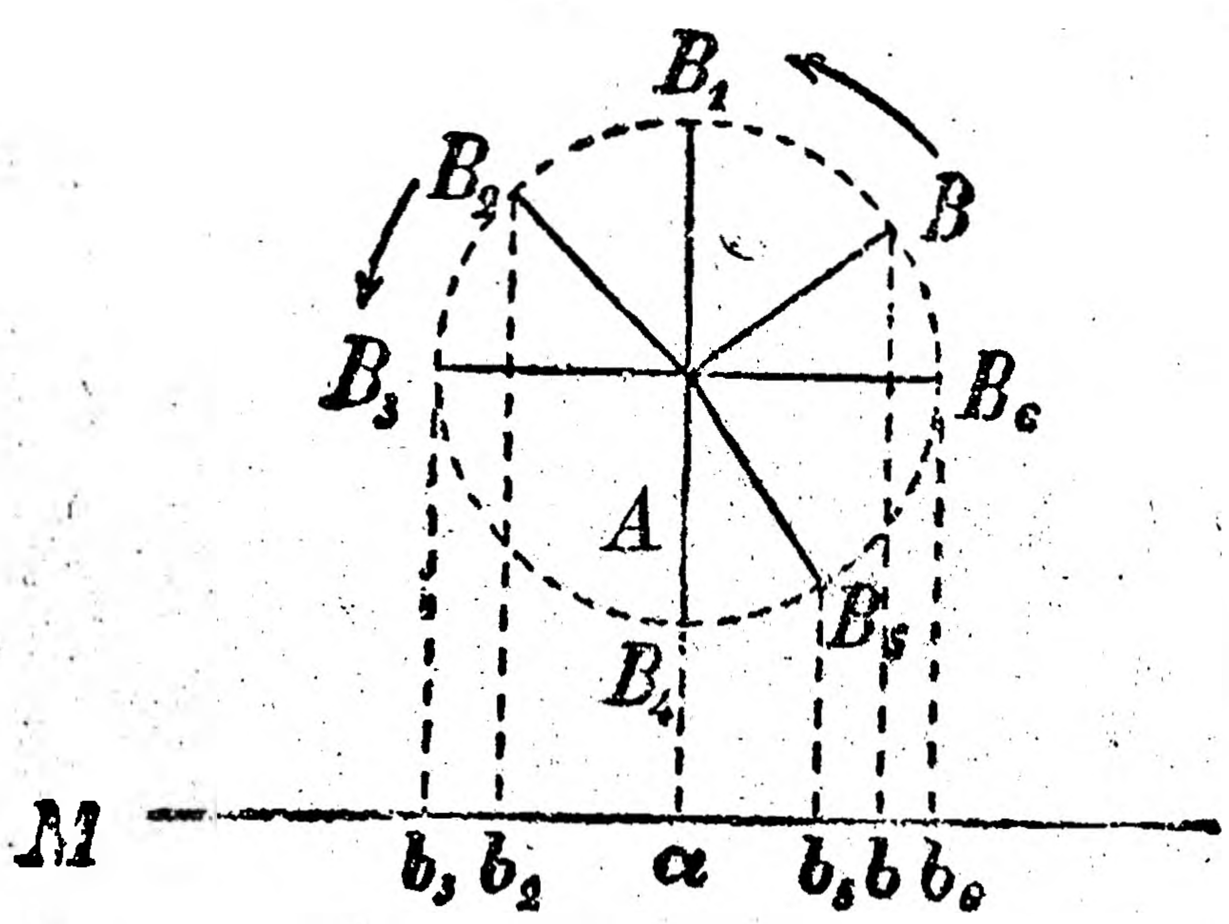


Рис. 222.

§ 198. Проекция отрезка на прямую, проходящую вне его. Найдите проекцию отрезка AB на ось MN, лежащую вне его. Проследите, как изменяется проекция, когда отрезок совершает полный оборот вокруг одного из своих концов (рис. 222).

Докажите, что проекция ab и здесь всегда короче проектируемого отрезка и равна ему только тогда, когда отрезок AB параллелен MN.

§ 199. Нивелирование.

Задача. Надо измерить высоту точки A над подошвой холма B (рис. 223). В задаче требуется определить проекцию линии AB на вертикальное направление, то-есть измерить высоту AB_1. Поставим у точки B вертикально палку BK, [1]) разделенную на сантиметры, и на верхушку ее положим длинную линейку KC так, чтобы она была горизонтальной, что проверяем при помощи ватерпаса, или уровня. Отметив на холме ту точку C, в которой наша горизонтальная линейка уперлась в холм, перенесем нашу вертикальную палку, разделенную на сантиметры, в эту точку C и, поставив ее вертикально,

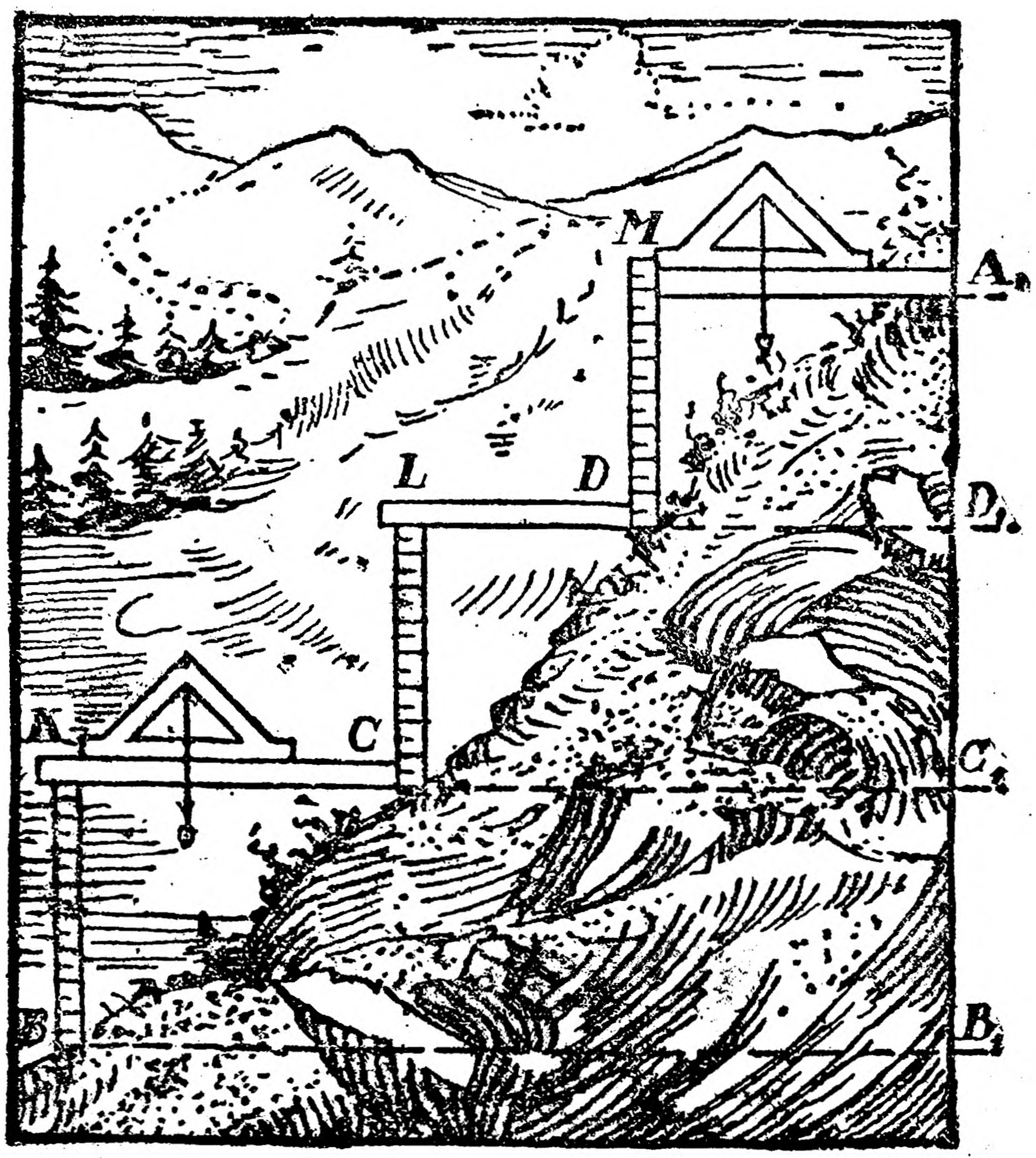


Рис. 223.
Нивелирование.

опять положим на верхушку ее горизонтально линейку LD и отметим на холме точку D. Подымаясь все выше и выше, мы дойдем, наконец, до верхушки холма A. У точки A придется положить линейку AM не на верхушку вертикальной палки DM, а сбоку ее так, чтобы эта линейка попрежнему приняла горизонтальное положение.

Измерив на рейке BK, LC и DM, мы найдем проекции B_1C_1, C_1D_1, D_1A и т. д. Отсюда не трудно найти и всю проекцию AB_1, то-есть узнать высоту точки A над подошвой холма B.

---

[1]) Эта палка называется *рейкой*.

Упражнения и задачи.

1. Землемеры проводят через точку C (рис. 224) прямую, параллельную AB, так: точку C соединяют с произвольно взятой на AB точкою E. Прямую CE делят в точке O пополам. Берут на AB вторую произвольную точку K, соединяют ее с O и на продолжении ее откладывают часть $OD = OK$. Соединивши C и D, они получают прямую CD, параллельную AB. Докажите это.

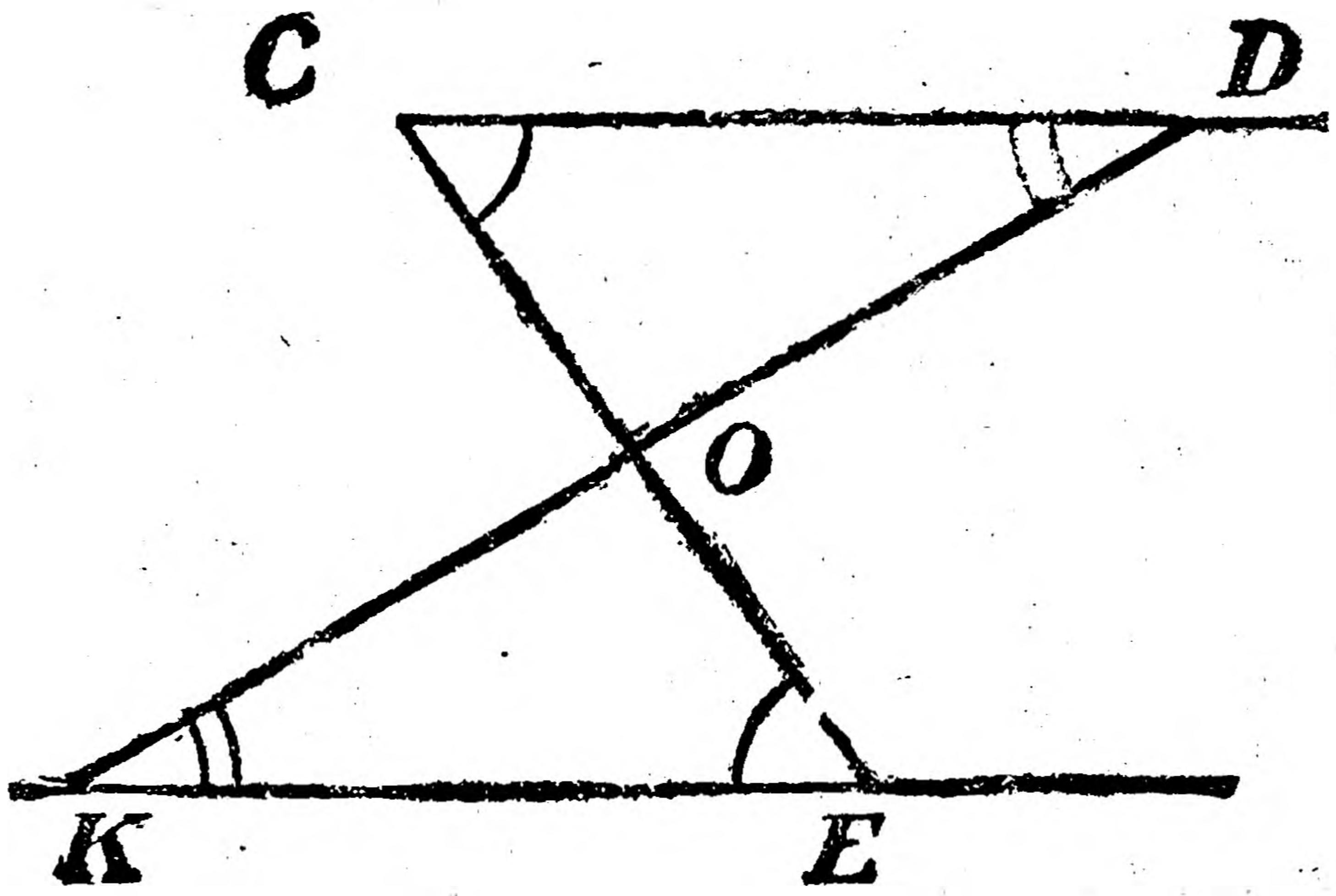


Рис. 224.

2. Возьмите три палочки или узких картонных полоски равной длины и составьте из них треугольник, скрепив концы их у вершин булавками или кнопками, вокруг которых могла бы вращаться каждая пара сторон. Попробуйте изменить форму треугольника, меняя наклон сторон. Удастся ли это вам?

3. Возьмите 4 полоски равной длины и скрепите их концы булавками так, чтобы получился четыреугольник. Попробуйте изменить форму четыреугольника, меняя наклон одной стороны относительно другой. Сколько таких четыреугольников можно получить?

Скрепите теперь диагональю пару противоположных вершин четыреугольника. Можно ли теперь изменить форму четыреугольника? Почему?

4. Какие из указанных здесь фигур (рис. 225, 226, 227) подвижны в своих частях и какие неподвижны.

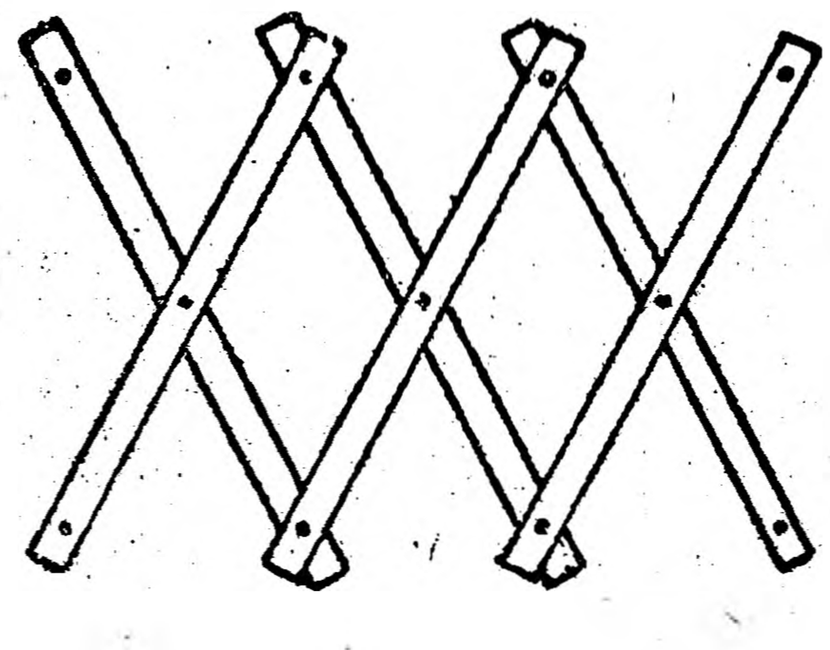


Рис. 225.

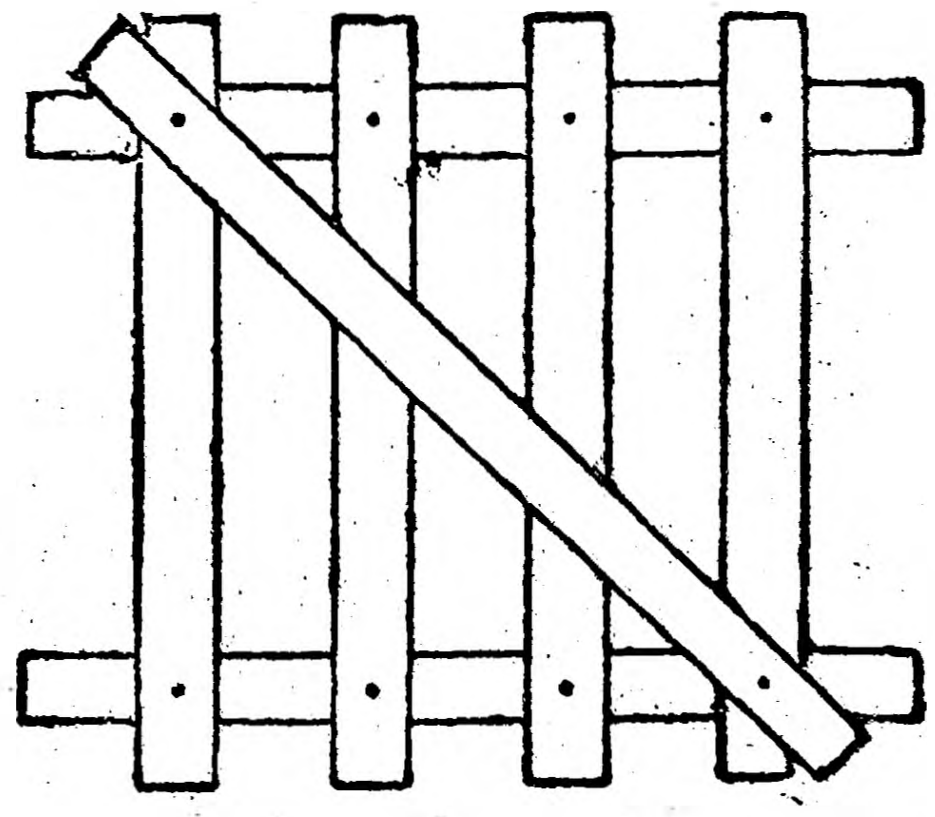


Рис. 226.

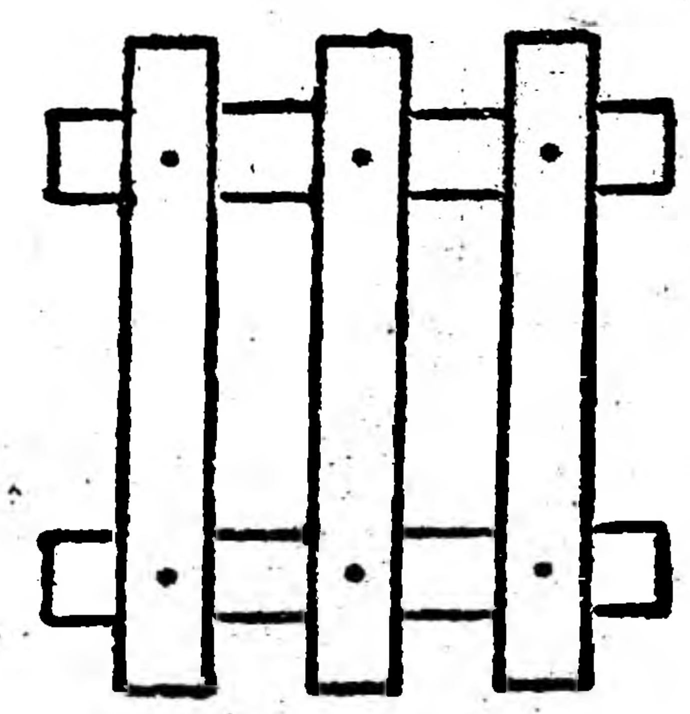


Рис. 227.

Где надо приделать планки в изменяющихся фигурах, чтобы они не могли изменяться?

5. Почему дети, приготовляя четыреугольную раму для змея, скрепляют ее по диагонали?

6. На доске был нарисован параллелограм. Случайно часть его стерли и оставили только фигуру ABC, изображенную на рис. 228. BC служила стороною, C — точкой пересечения сторон. Восстановите стертый параллелограм.

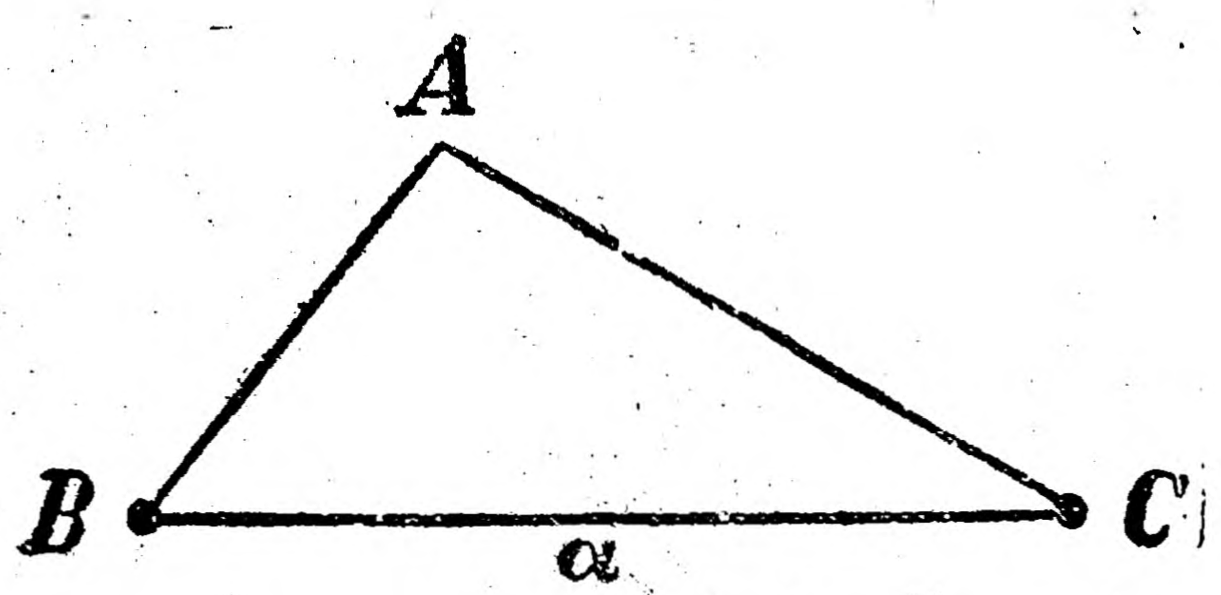


Рис. 228.

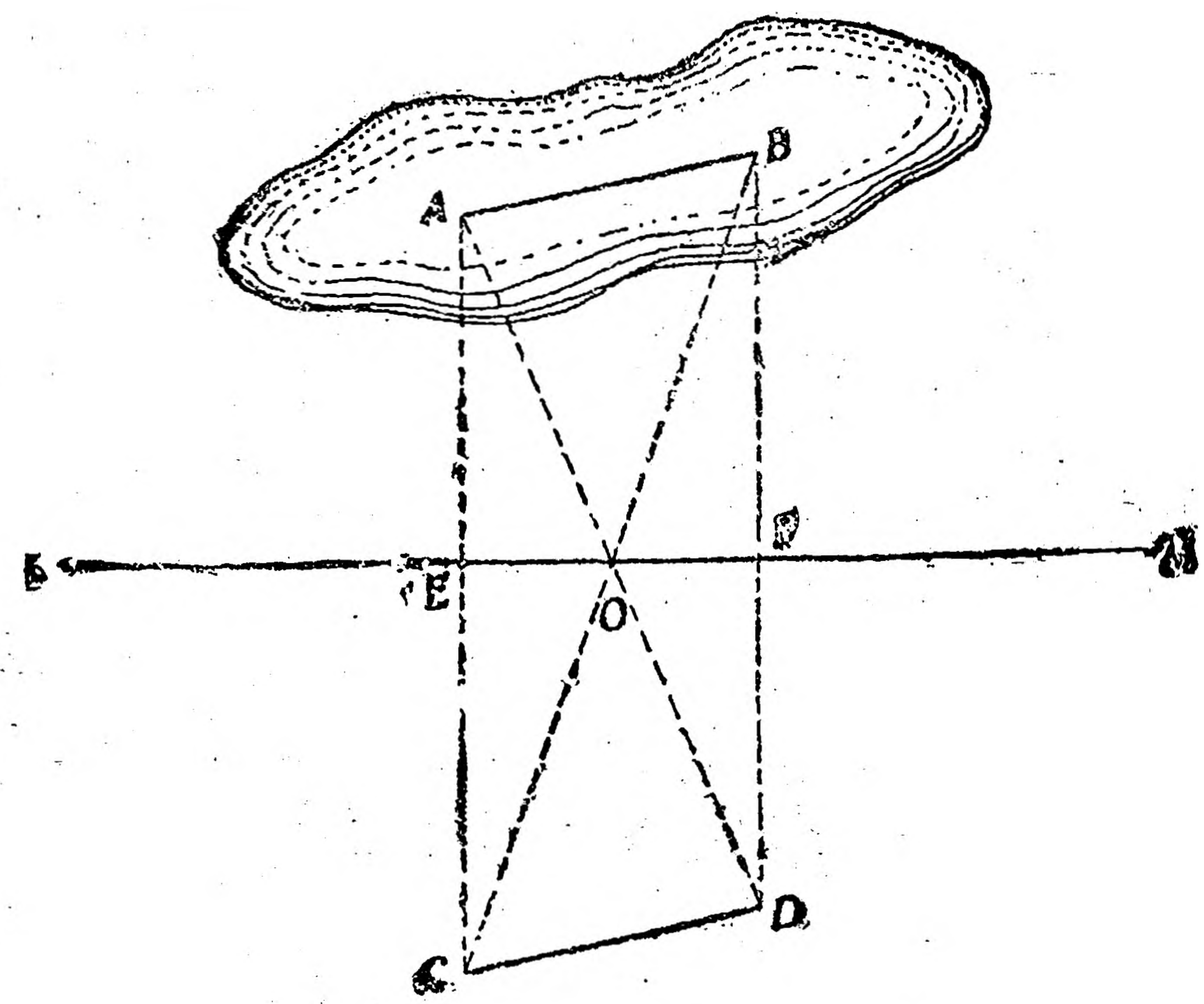


Рис. 229.

7. Для того, чтобы измерить расстояние между двумя недоступными точками A и B, землемеры делают так. Проводят произвольную прямую LM (рис. 229), восстанавливают перпендикуляры EA и FB, находят середину EF (точка O), продолжают прямые AO и BO до пересечения с перпендикулярами EA и FB в точках C и D. Прямая CD будет по длине равна искомому расстоянию AB. Сделайте тщательно на бумаге это построение и убедитесь, что фигура $ABDC$ действительно параллелограм. Измерьте и вы этим способом расстояние между двумя недоступными точками.

ГЛАВА XIV.

МНОГОУГОЛЬНИКИ.

58. ВИДЫ МНОГОУГОЛЬНИКОВ. СВОЙСТВА ИХ ДИАГОНАЛЕЙ И УГЛОВ.

§ 200. Различные виды многоугольников. Фигуры, нарисованные на рисунках 230 и 231, называются *многоугольниками*. Сколько углов имеет первая фигура (рис. 230)? Эта фигура называется *пятиугольником*. Сколько у этого пятиугольника $ABCDE$ углов, сторон и вершин? Укажите их.

Если многоугольник имеет шесть углов, то он называется шестиугольником (рис. 235).

Нарисуйте какой-нибудь восьмиугольник.

§ 201. *Теорема.* Диагонали, проведенные из одной какой-нибудь вершины многоугольника, разделяют его на треугольники, число которых на два меньше числа его сторон.

Опыт. Вырежьте из бумаги несколько многоугольников с разным числом сторон и разрежьте каждый из них вдоль по диагоналям, проведенным из какой-нибудь вершины, на треугольники. Постарайтесь найти зависимость между числом сторон многоугольников и числом полученных треугольников.

Результаты опыта:

Число сторон многоугольника:	3	4	5	6	7	...	n
Число полученных треугольников:	1	2	3	4	5	...	$n-2$

Доказательство. Когда вы разрезываете ваш многоугольник на треугольники, то каждая сторона многоугольника будет входить в состав нового треугольника (рис. 230). Только две стороны (*AE* и *AB*), прилегающие к вершине *A*, из которой проведены диагонали, не дадут отдельных треугольников. Следовательно, число треугольников должно быть на два меньше числа сторон многоугольника.

§ 202. Сумма внутренних углов многоугольника.

Теорема. Чтобы вычислить сумму всех внутренних углов многоугольника, надо число сторон его уменьшить на два, а затем 180° помножить на полученное число.

Доказательство. Нарисуйте какой-нибудь многоугольник, число сторон которого обозначим буквой n, и разбейте его диагоналями

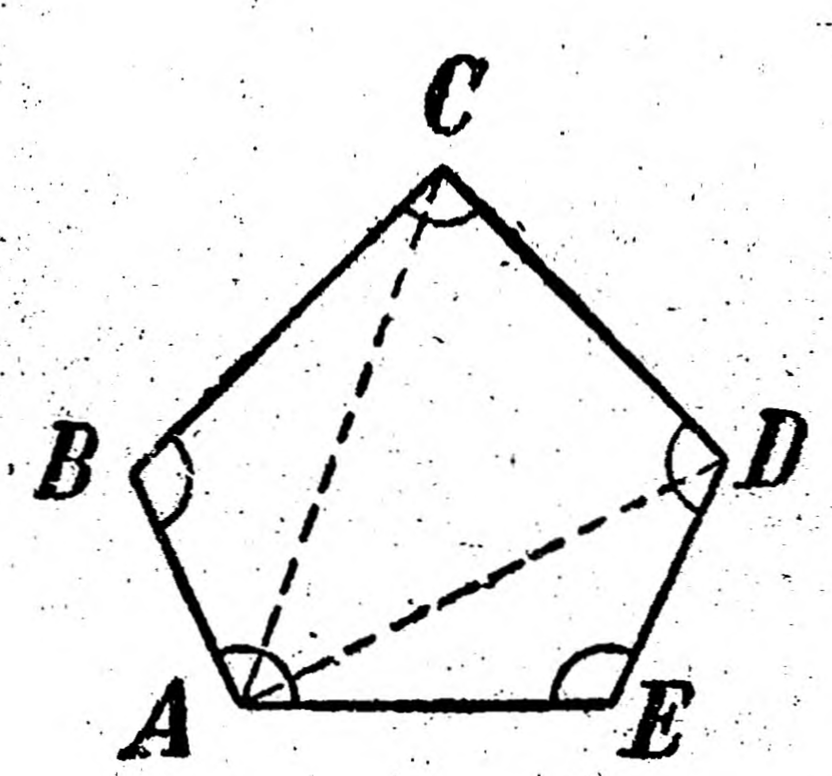


Рис. 230.

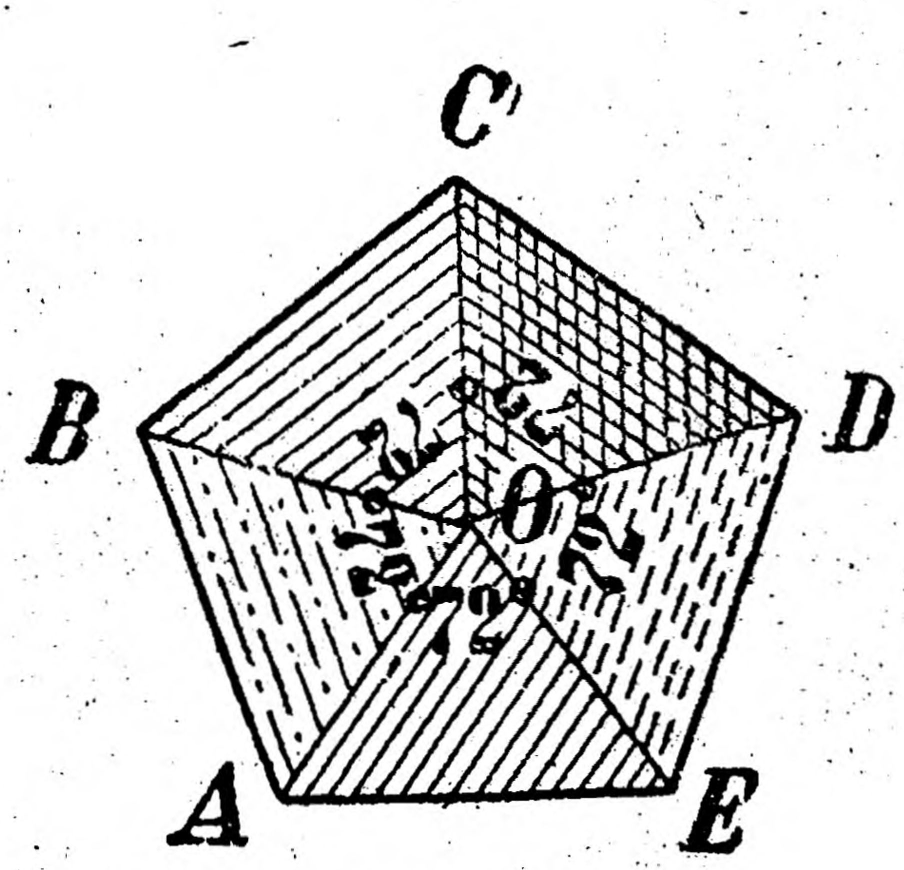


Рис. 231.

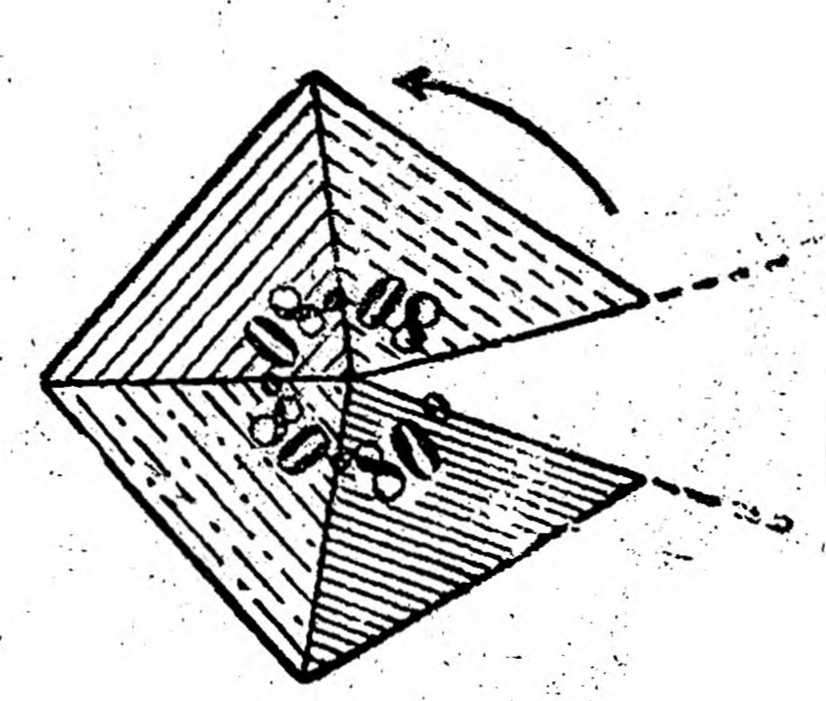


Рис. 232.

на треугольники. Сумма внутренних углов нашего многоугольника равна сумме углов всех этих треугольников. Но сумма углов каждого треугольника содержит 180° (§ 179), а таких треугольников мы получим n—2 (§ 201), следовательно, сумма всех углов многоугольника должна содержать не 180°, а число градусов в n—2 раза большее, то-есть: $180° \times (n-2)$.

Проверьте непосредственным измерением, что сумма внутренних углов равна для:

четыреугольника	$180° \times (4-2) = 360°$
пятиугольника	$180° \times (5-2 = 540°$
шестиугольника	$180° \times\ 6-2) = 720°$ и т. д.

59. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

§ 203. Что называется правильным многоугольником?

Опыт. Вырежьте из бумаги несколько одинаковых равнобедренных треугольников, имеющих у вершины угол в 72°. Уложите их один возле другого так, чтобы вершины их упирались в одну и ту же точку, а боковые стороны прилегали одна к другой. Заполните этими треугольниками плоскость вокруг вершины (рис. 231). Сколько понадобилось для этого треугольников?

Основания этих равнобедренных треугольников образуют многоугольник $ABCDE$. Сравните друг с другом стороны этого многоугольника. Сравните друг с другом его внутренние углы.

Такой многоугольник, *у которого равны все стороны и все углы, называется правильным многоугольником.*

Та точка O (рис. 231), вокруг которой расположились вершины равнобедренных треугольников, называется *центром* правильного многоугольника, а бока этих равнобедренных треугольников (OA, OB и т. д.) называются *радиусами* многоугольника. Опустите из центра O на стороны перпендикуляры. Эти перпендикуляры называются *апофемами.* У правильного многоугольника апофемы равны друг другу.

§ 204. Всегда ли из равнобедренных треугольников можно составить правильный многоугольник?

Опыт. Вырежьте несколько одинаковых равнобедренных треугольников, имеющих у вершины угол в 80°. Постарайтесь, прикладывая их вершинами один возле другого, заполнить всю плоскость вокруг общей вершины и получить таким образом правильный многоугольник (рис. 232).

Однако, этого сделать вам не удастся. Когда вы расположите вокруг точки O четыре равнобедренных треугольника, то для пятого треугольника оставшееся свободным пространство окажется слишком малым и потому останется незаполненным.

Такой результат можно было предугадать и заранее. В самом деле, углы, заполняющие пространство, находящееся вокруг центра многоугольника, должны в сумме содержать 360° (§ 141). Наш равнобедренный треугольник имеет при вершине угол в 80°, который не содержится целое число раз в 360°, поэтому у нас остается незаполненным угол в 40°.

В предыдущем опыте (рис. 231) мы брали равнобедренные треугольники с углом при вершине в 72°. Так как этот угол содержится пять раз в 360°, то 5 равнобедренных треугольников и заполнили все пространство вокруг точки *O*, образовав правильный пятиугольник ($72° \cdot 5 = 360°$).

§ 205. Правильный треугольник.

Задача 1. Составьте из равнобедренных треугольников правильный треугольник.

Для правильного треугольника нужно взять три равнобедренных треугольника. Следовательно, угол при вершине этих треугольников должен иметь $360° : 3 = 120°$.

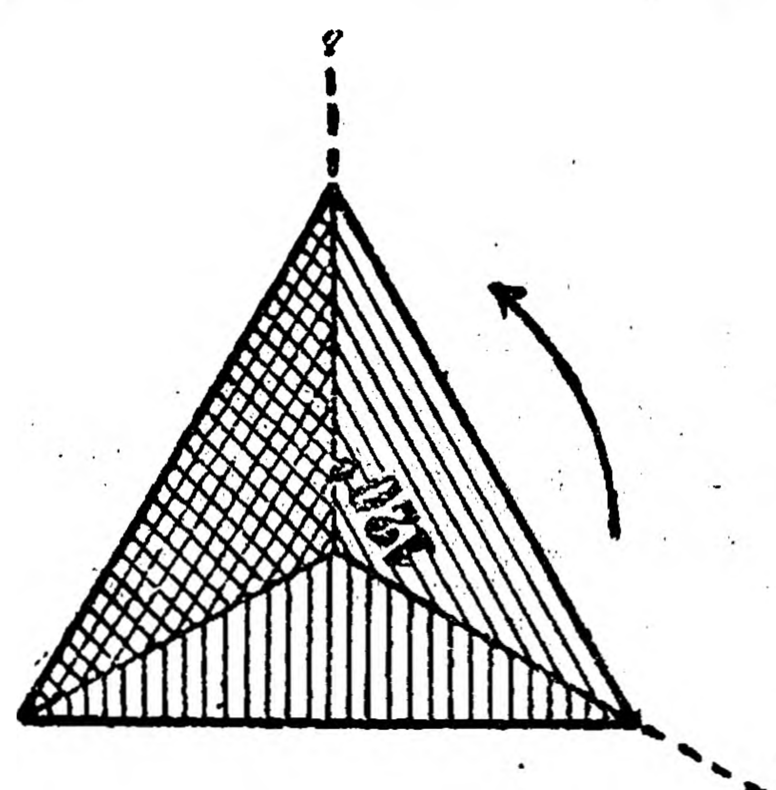


Рис. 233.

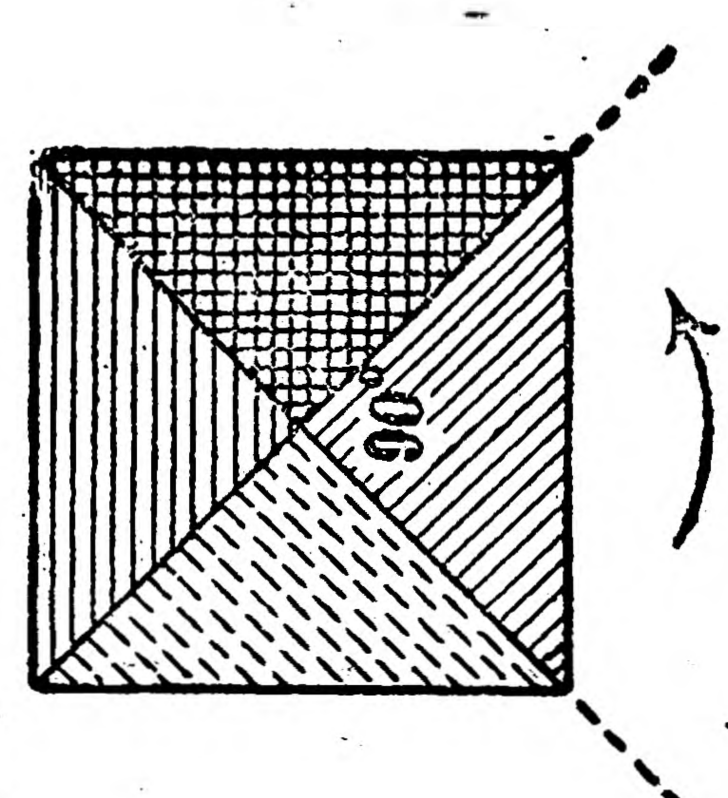


Рис. 234.

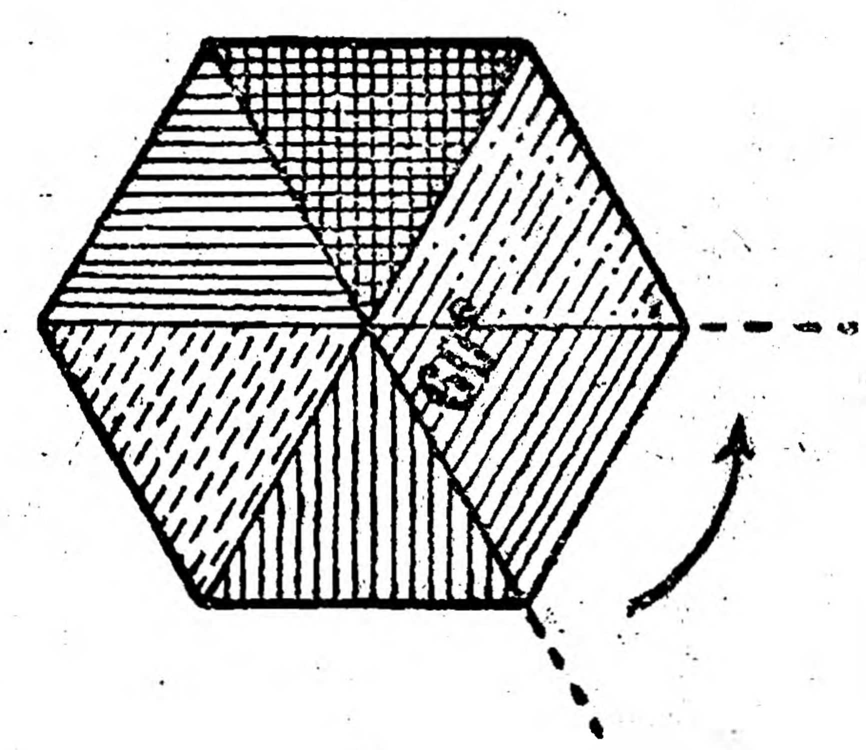


Рис. 235.

Остается вырезать из бумаги три таких равнобедренных треугольника и склеить их (рис. 233).

Докажите, что построенный вами треугольник будет правильным.

§ 206. Правильный четыреугольник.

Задача 2. Нарисуйте и составьте из равнобедренных треугольников правильный четыреугольник.

Указание. Угол при вершине четырех равнобедренных треугольников должен равняться $360° : 4 = 90°$.

Докажите, что построенный вами четыреугольник есть квадрат (рис. 234).

§ 207. Правильный шестиугольник.

Задача 3. Постройте правильный шестиугольник, пользуясь транспортиром и линейкой.

Указание. Надо брать равнобедренные треугольники с углом при вершине в $360° : 6 = 60°$.

Докажите, что у этих равнобедренных треугольников все стороны равны (рис. 235).

§ 208. Построение правильных многоугольников по стороне и одному из углов. Так как у правильного многоугольника все внутренние углы равны, то можно, зная сумму всех этих углов, вычислить величину каждого этого угла. Поэтому, если известна еще и сторона, то можно, пользуясь транспортиром и линейкой, построить любой правильный многоугольник. Решим для примера одну задачу.

Задача. Построить правильный шестиугольник, сторона которого равна 3 *см.*

Сумма всех углов шестиугольника равна $180°. (6 - 2) = 180° \cdot 4 = 720$ (§ 202), значит, каждый угол равен $720° : 6 = 120°$.

Постройте сначала транспортиром угол в 120°. Отложите у этого угла стороны в 3 *см.* У конца их постройте по углу в 120° и т. д.

60. ЦЕНТР СИММЕТРИИ.

§ 209. Центрально-симметричные фигуры.

Опыт 1. Вырежьте из бумаги параллелограм $ABCD$ (рис. 236) и нарисуйте его диагонали. Посмотрим, не будет ли одна из диагоналей, например AC, его осью симметрии. Согнув параллелограм по этой диагонали, попробуйте наложить часть ABC на ADC. Однако, этим приемом вам не удастся совместить части параллелограма ABC и ADC.

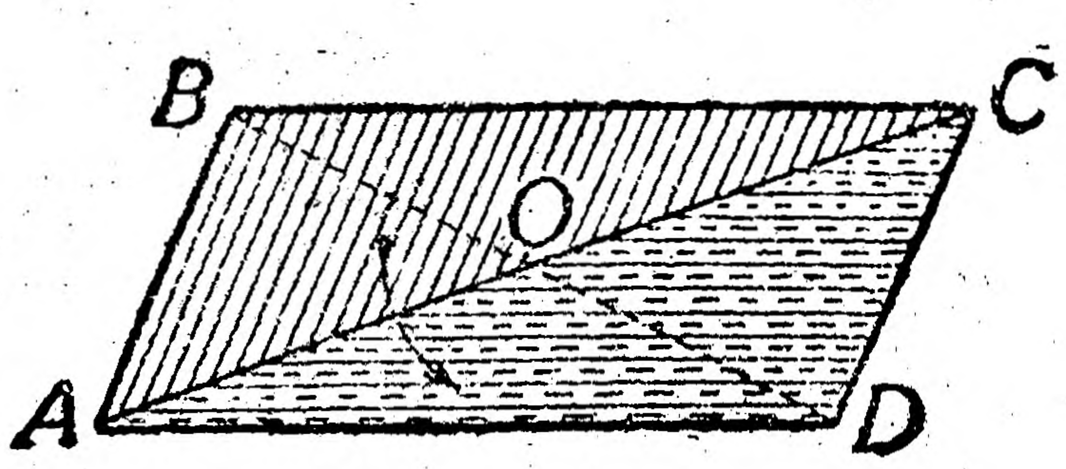


Рис. 236.

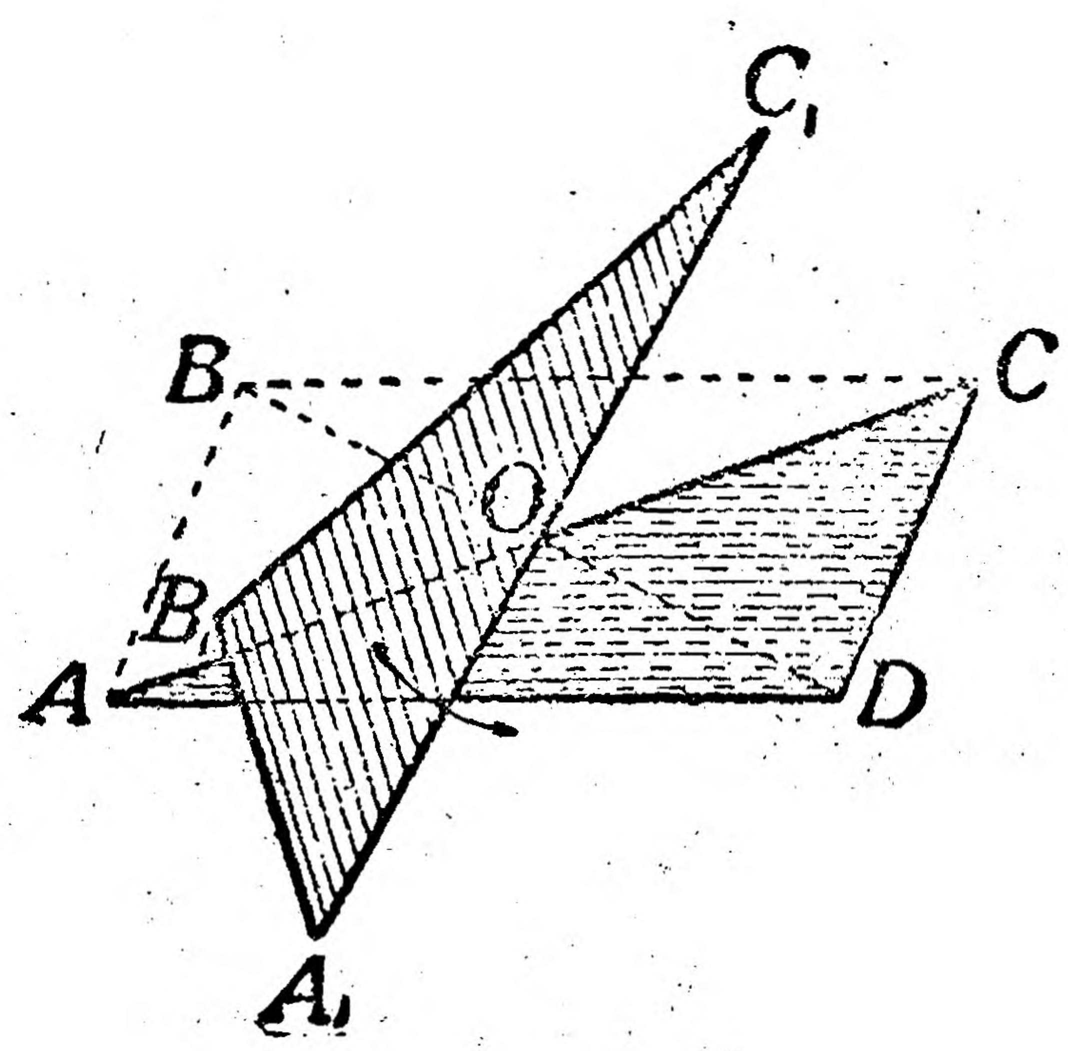


Рис. 237.

Опыт 2. Попробуем теперь сделать так: нарисуйте этот параллелограм в тетради, а из бумаги вырежьте еще одну часть его ABC (рис. 237), которую наложите на рисунок и укрепите булавкой в точке O. Попробуйте теперь совместить треугольник ABC и ADC, вращая первый из них вокруг O. Окажется, что когда вы повернете в плоскости чертежа вашу часть ABC на пол-оборота (то-есть на 180°), то она сольется со второй половиной ACD параллелограма. (Докажите это.) Конечно, если вы начнете вращать вокруг точки O весь параллелограм, то и он, повернувшись на 180°, сольется со своим прежним положением.

Такие фигуры, которые при вращении вокруг какой-либо точки сливаются со своим первоначальным положением, называются центрально-симметричными, а точка вращения O называется центром симметрии.

В нашем примере центром симметрии параллелограма оказалась точка пересечения диагоналей O, а параллелограм оказался центрально-симметричной фигурой.

§ 210. Центр симметрии правильного четыреугольника.

Опыт. Вырежьте из бумаги правильный треугольник (рис. 233); проткнув его в центре булавкой, вращайте его вокруг этого центра и проследите, не совпадет ли треугольник со своим первоначальным положением прежде, чем повернется на полный оборот (на 360°).

Рис. 238. Центрально-симметричная фигура.

Окажется, что при повороте на каждые 120° (треть полного оборота) правильный треугольник будет сливаться со своим первоначальным положением, т.-е. пока он сделает полный оборот, то трижды произойдет это совмещение.

Следовательно, правильный треугольник есть центрально-симметричная фигура, центром симметрии которой служит центр треугольника.

§ 211. Убедитесь теперь, что любой правильный многоугольник есть центрально-симметричная фигура, центром симметрии которой служит центр многоугольника.

ГЛАВА XV.

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ФИГУР.

61. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

212. Обобщение выведенного прежде правила. В I части нашего учебника мы для измерения площади прямоугольника вывели такое правило (§ 23):

Для того, чтобы узнать, сколько квадратных единиц содержит площадь прямоугольника, надо измерить одними и теми же линейными единицами (например, сантиметрами) основание и высоту его, и полученные числа перемножить. Результат покажет, сколько соответствующих квадратных единиц (квадратных сантиметров) имеет площадь прямоугольника.

Такое правило получилось у нас, когда основание и высота прямоугольника измеряются целыми числами. Посмотрим теперь, можно ли пользоваться этим правилом в том случае, когда стороны прямоугольника выражаются дробными числами.

Задача 1. Какую часть квадратной единицы составляет площадь прямоугольника, основание которого равно $^1/_5$ линейной единицы, а высота $^1/_3$ линейной единицы?

Нарисуйте сначала квадратную единицу (рис. 239). Разделив основание ее на 5 равных частей, а высоту на 3 равные части, выделите

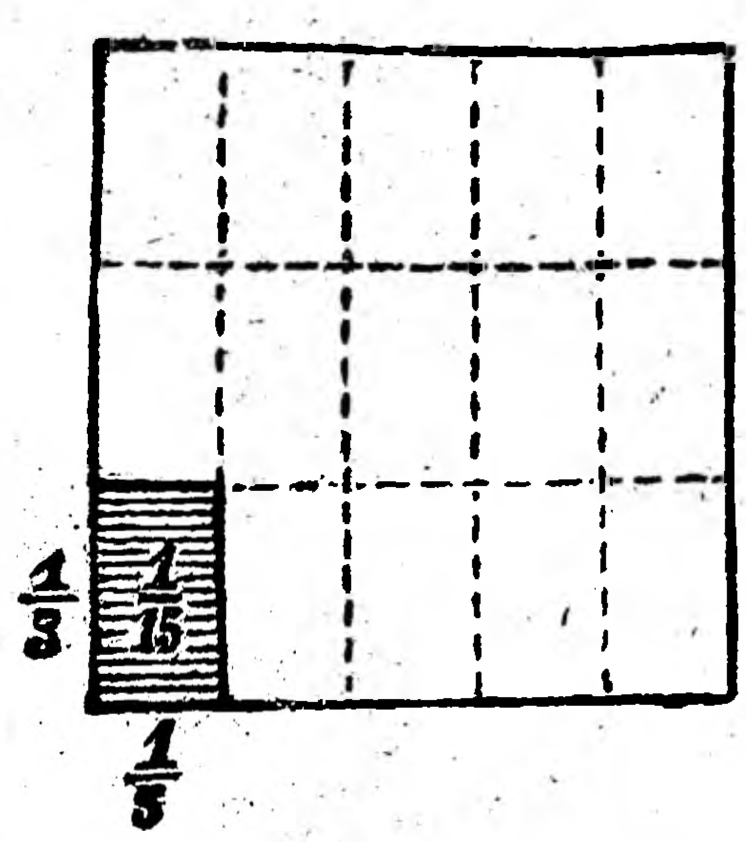


Рис. 239.

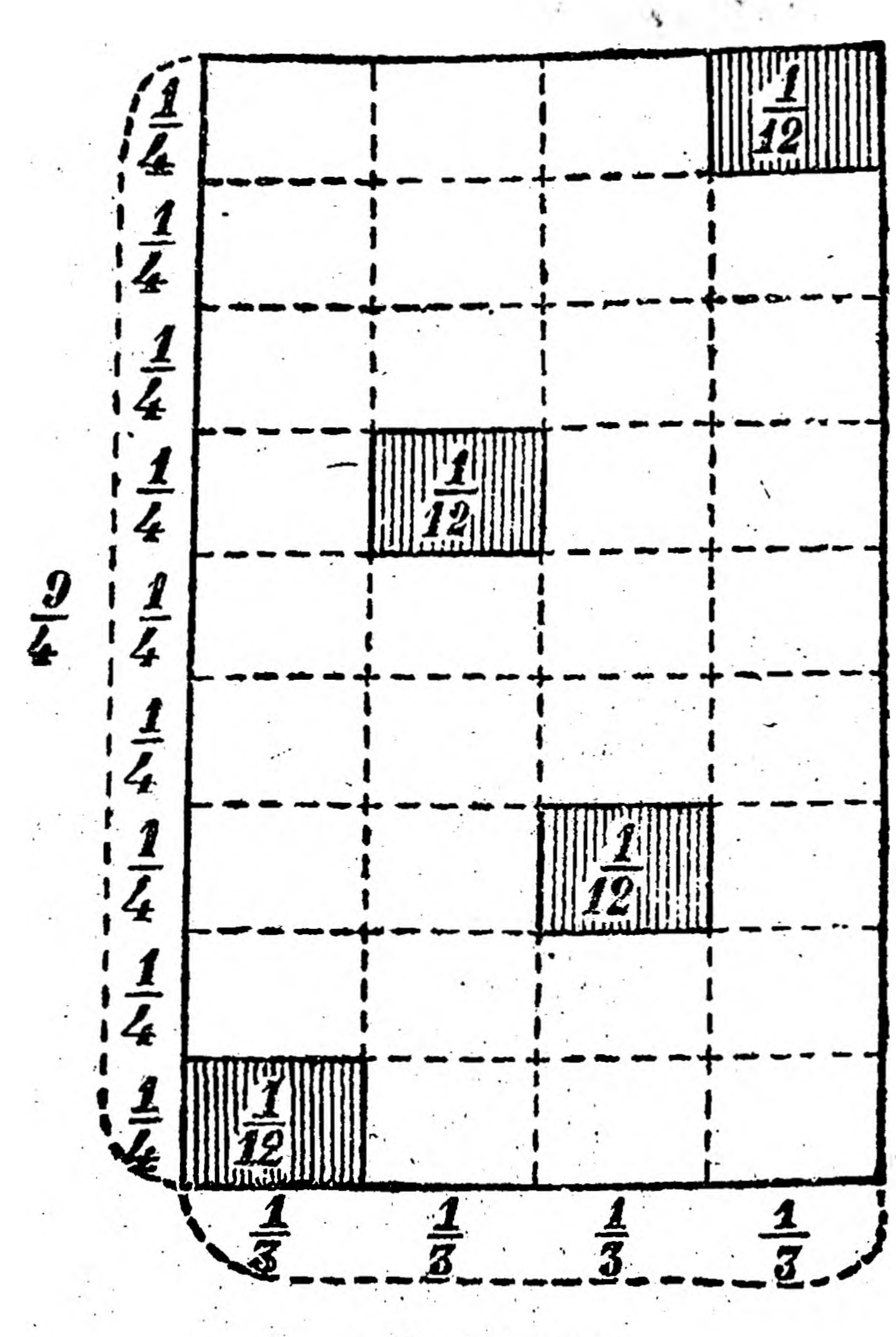


Рис. 240.

из этого квадрата прямоугольник со сторонами $^1/_5$ и $^1/_3$ линейной единицы. Разделите теперь весь квадрат на такие прямоугольники и сосчитайте их.

Окажется, что ваш квадрат содержит $3 \times 5 = 15$ таких прямоугольников, следовательно, площадь одного из этих прямоугольников равна $^1/_{15}$ части квадратной единицы:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

Задача 2. Измерьте площадь прямоугольника, основание которого равно $1^1/_3$ линейной единицы, а высота $2^1/_4$ линейной единицы (рис. 240).

Нарисуйте такой прямоугольник. На основании его отложите третьи доли линейной единицы ($1^1/_3 = {}^4/_3$), а на высоте четвертые доли ($2^1/_4 = {}^9/_4$).

Через отмеченные точки проведите ряд прямых линий, которые разобьют прямоугольник на маленькие прямоугольники площадью $^1/_3 \times {}^1/_4 = {}^1/_{12}$ квадратной единицы.

Вся площадь будет иметь $4 \times 9 = 36$ таких прямоугольников, следовательно, она содержит $^{36}/_{12}$ квадратной единицы.

$$1^1/_3 \times 2\frac{1}{4} = \frac{36}{12} = 3.$$

Правило. Итак, и для того случая, когда стороны прямоугольника выражаются дробными числами, остается справедливым прежде доказанное правило измерения площади прямоугольника, а именно: чтобы узнать, сколько квадратных единиц содержит площадь прямоугольника, достаточно измерить соответствующими линейными единицами его основание и высоту и полученные после измерения числа перемножить. Полученное произведение покажет, сколько квадратных единиц (или частей их) содержит площадь прямоугольника.

Обыкновенно это правило выражают короче так:

Площадь прямоугольника равна основанию, умноженному на высоту.

В чем заключается неточность этой формулировки?

§ 213. Формула для измерения площади прямоугольника. Обозначим буквой a число, показывающее, сколько линейных единиц содержит основание прямоугольника, буквой h обозначим число таких же линейных единиц, содержащихся в высоте прямоугольника (рис. 241), а число соответствующих квадратных единиц, содержащихся в площади, обозначим буквой S.

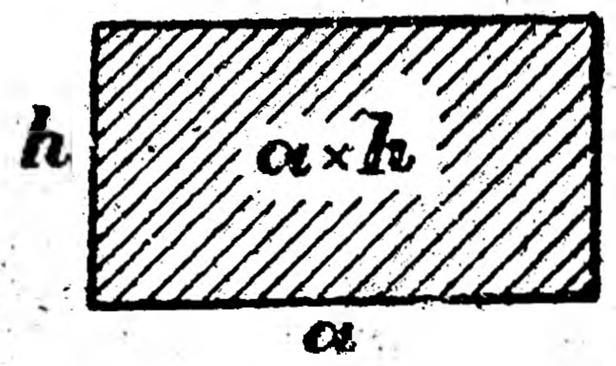


Рис. 241.

Между этими числами должна быть такая зависимость:

$$S = a \times h \; . \; . \; . \quad (1).$$

Пример. Для задачи 2-й § 212 под нашими буквами подразумеваются следующие числа:

$$a = 1\frac{1}{3};\ h = 2\frac{1}{4};\ S = 1\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{4} = \frac{36}{12} = 3.$$

62. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ КВАДРАТА.

§ 214. *Правило.* Для измерения площади квадрата мы вывели правило: для того, чтобы узнать, сколько квадратных единиц содержит площадь квадрата, нужно измерить, в соответствующих единицах, одну из сторон его. Полученное от измерения число повторить сомножителем два раза. Произведение покажет число квадратных единиц, содержащихся в площади квадрата.

Это правило короче выражают так:

Площадь квадрата равна стороне его, помноженной на самое себя.

Годится ли это правило, если сторона квадрата выражается дробным числом? Почему?

§ 215. Формула. Если обозначить буквой a число линейных единиц, содержащихся в стороне квадрата (рис. 242) (при чем под этой буквой может скрываться и целое и дробное число), а через S — число, показывающее, сколько соответствующих квадратных единиц содержит площадь квадрата, то

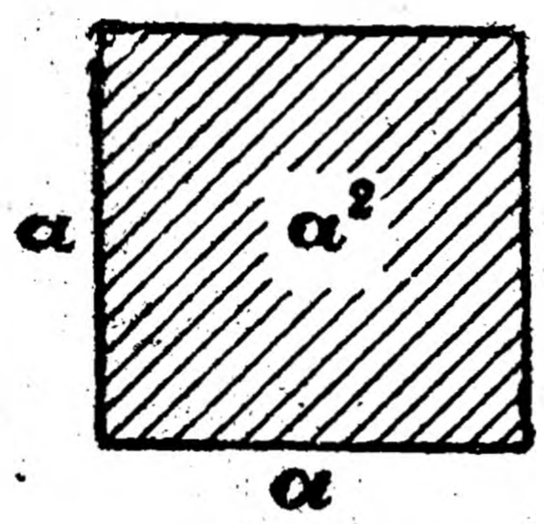


Рис. 242.

$$S = a \times a,$$

или

$$S = a^2.$$

Последнюю формулу можно прочитать так: площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Пример. Вычислим площадь квадрата, сторона которого равна $5^1/_2$ сантиметрам:

$$a = 5^1/_2 \textit{ см};\ a^2 = 5^1/_2 \times 5^1/_2 = 30^1/_4 \textit{ кв. см.}$$

Следовательно,

$$S = a^2 = 30^1/_4 \textit{ кв. см.}$$

63. КВАДРАТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МЕРЫ.

§ 216. Квадратный метр. В метрической системе мер в основу квадратных мер положен квадратный метр — это квадрат, все стороны которого равны одному метру. Нарисуйте на полу или во дворе такой квадрат.

Будет ли он больше квадратного аршина или меньше его?

Полезно запомнить, что 1 кв. метр = 2 кв. аршинам (приблизительно).

Проверьте это, приняв, что 1 метр = 1,41 арш.

§ 217. Таблица квадратных метрических единиц измерения.

Кв. километр имеет $1000 \times 1000 = 1.000.000$ кв. метров.

Кв. гектометр (гектар) имеет $100 \times 100 = 10.000$ кв. метров.

Кв. декаметр (ар) имеет $10 \times 10 = 100$ кв. метров.

Кв. дециметр составляет $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ часть кв. метра.

Кв. сантиметр составляет $\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10.000}$ часть кв. метра.

Кв. миллим. составляет $\frac{1}{1000} \times \frac{1}{1000} = \frac{1}{1.000.000}$ часть кв. метра.

§ 218. Наиболее употребительные квадратные метрические меры. Из всех этих квадратных единиц наиболее употребительны:

1) Квадратный миллиметр.

2) Квадратный сантиметр, равный, приблизительно, площади ногтя (рис. 243).

3) Квадратный метр почти в два раза больше квадратного аршина.

4) Квадратный гектометр, или гектар, играет роль старой русской меры — десятины (он составляет 0,9 частей ее: точнее $^{11}/_{12}$ ее).

5) Квадратный километр равняется 0,9 квадр. версты.

В дальнейшем курсе мы слова: квадратный сантиметр и квадратный миллиметр будем писать сокращенно — «*кв. см*» и «*кв. мм*».

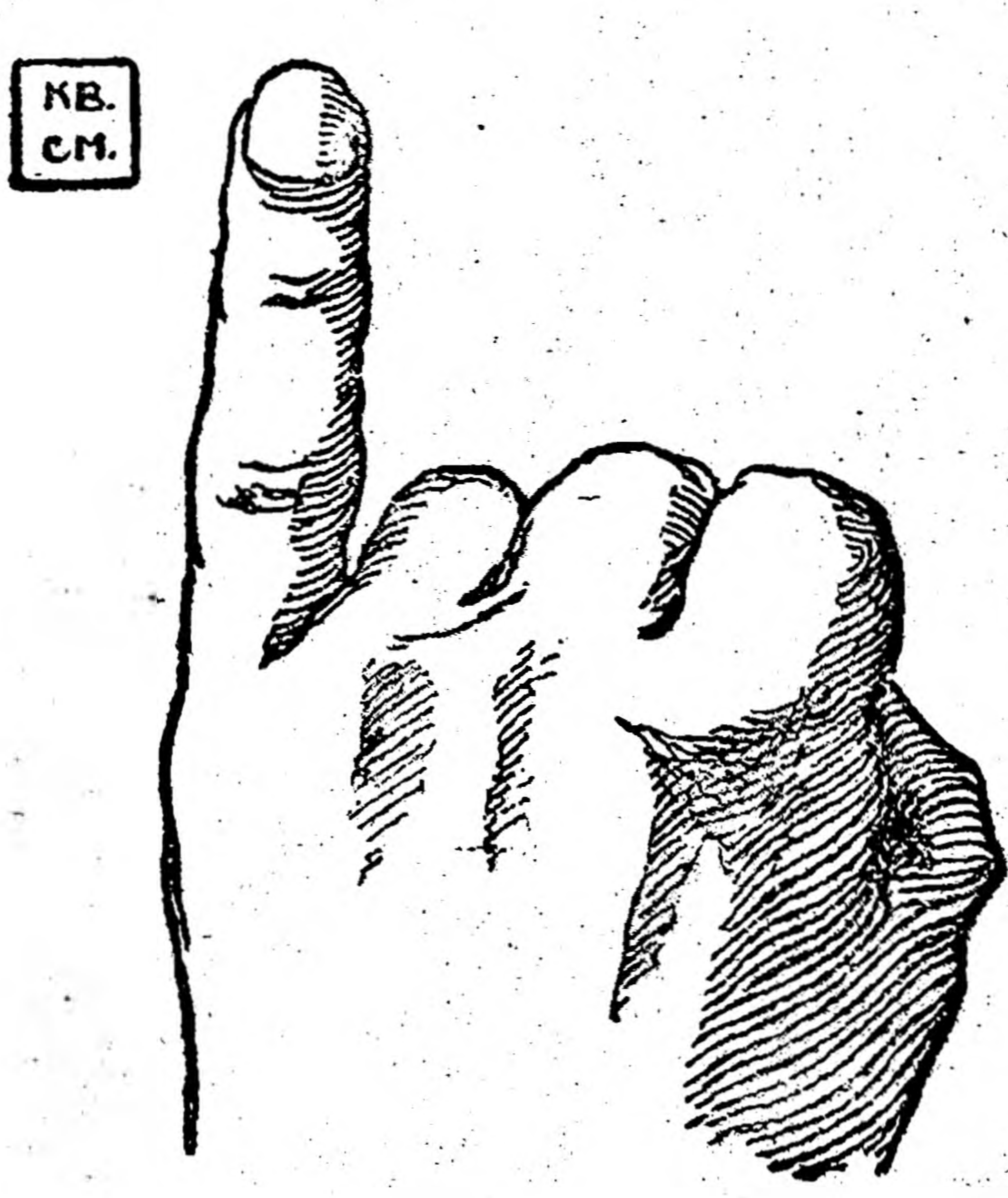


Рис. 243.

64. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАМА.

§ 219. *Теорема.* Площадь параллелограма равна произведению основания на высоту.

Опыт. Вспомните, как вы в задаче § 29 (I ч., стр. 21) преобразовывали параллелограм в равновеликий прямоугольник. Повторите еще раз этот опыт. Вырежьте из бумаги параллелограм $ABCD$ (рис. 244), приняв за основание его более длинную сторону. Про-

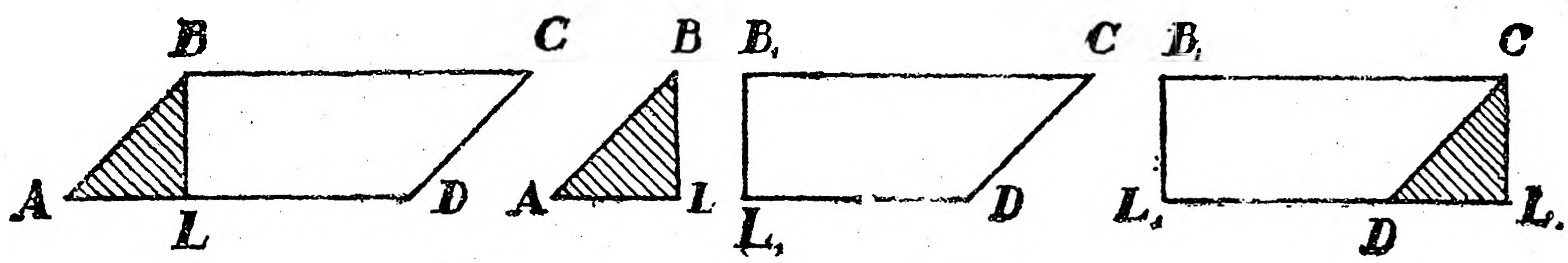


Рис. 244.

ведите высоту его BL и, отрезав вдоль по ней треугольник ABL, приложите его к правому боку DC. У вас должен получиться прямоугольник.

Доказательство. В самом деле $\angle D + \angle A$ в сумме дают 180° (§ 172), а потому, когда вы их приложите друг к другу так, чтобы CD совпало с AB, то они обратятся в смежные углы. Следовательно, DL_1 и DL должны образовать одну общую прямую LL_1 (4-я фигура рис. 244-го). За основание этого прямоугольника можно принять сторону LL_1, а высоту B_1L_1.

Следовательно:

Площадь прямоугольника $= LL_1 \times B_1L_1$ (§ 213).

Так как параллелограм равновелик этому прямоугольнику и у этих двух фигур одинаковы основания и высоты, то площадь параллелограма $= LL_1 \times BL$.

Основание LL_1 можно заменить равным ему AD (почему?) и окончательно получим:

Площадь параллелограма $= AD \times BL$.

Правило это короче выражается так:

Площадь параллелограма равна произведению его основания на высоту.

§ 220. Формула. Если основание параллелограма содержит a *см*, а высота его содержит h *см*, то площадь S параллелограма содержит ah *кв. см*:

$$S = ah.$$

Пример. Измерим площадь какого-либо параллелограма (рис. 244). Проведем наугольником высоту и измерим ее. Пусть она равна 2 *см* 4 *мм*, что можно записать так: 2,4 *см*. Пусть основание равно 5 *см*. Следовательно,

$$\text{число } a = 2{,}4 \textit{ см},$$
$$\text{число } h = 5 \textit{ см},$$
$$\text{число } S = a \times h = 2{,}4 \times 5$$
$$\text{или } S = 12 \textit{ кв. см}.$$

То-есть площадь параллелограма содержит 12 *кв. см.*

65. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА.

§ 221. *Теорема.* Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

В начале нашего курса (I ч., § 32) мы измеряли площадь отдельного треугольника, превращая его в равновеликий прямоугольник. Выведем теперь общее правило для измерения площади треугольника.

Доказательство. Возьмем $\triangle ABC$ (рис. 245). Проведем через вершины B и C прямые $BD \parallel AC$ и $CD \parallel AB$. У нас получится параллелограм $ABDC$. Высота его BE.

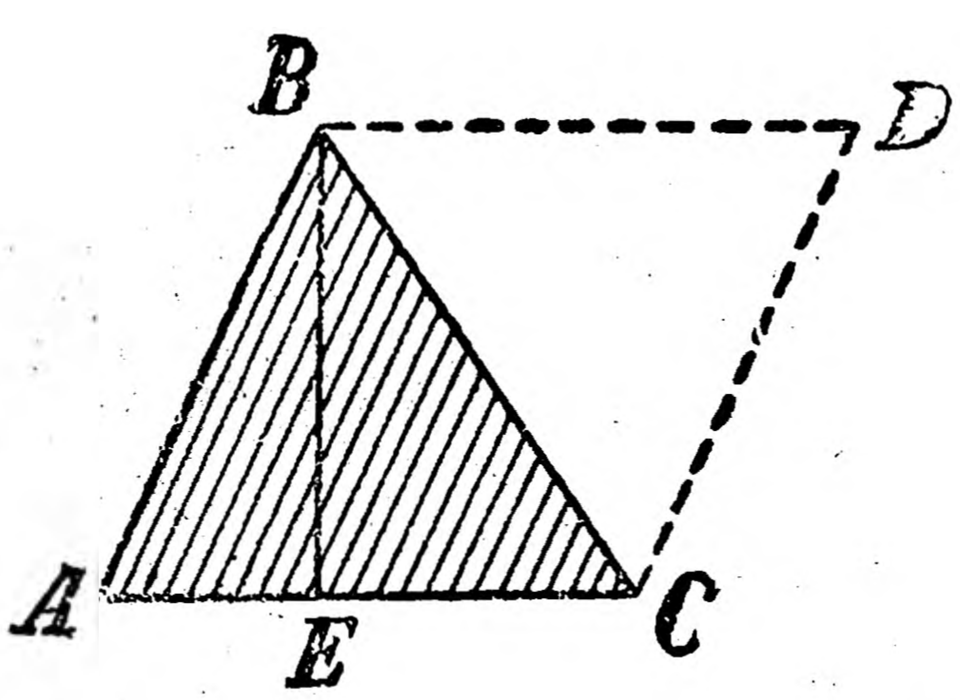


Рис. 245.

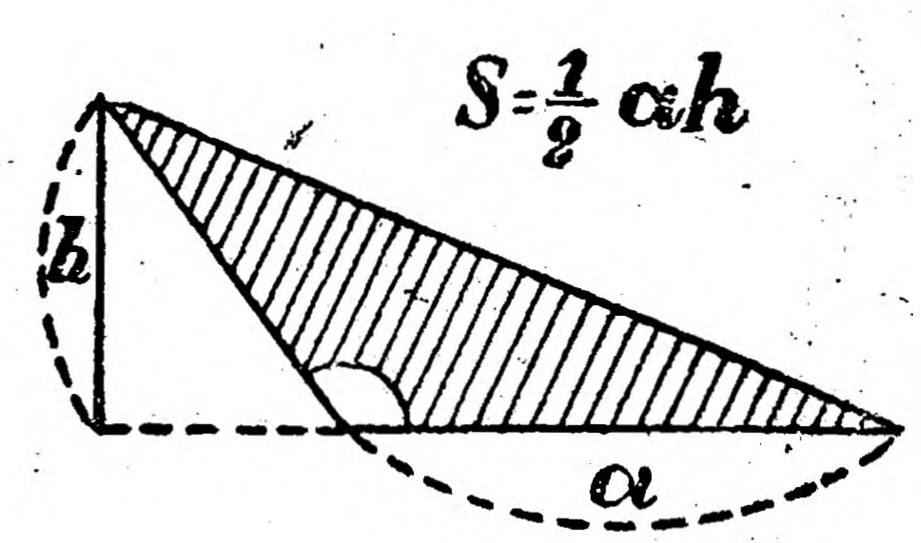


Рис. 246.

Площадь параллелограма $ABCD = AC \times BE$.

Так как этот параллелограм состоит из двух равных треугольников (§ 184 и 155), то площадь одного из них, напр.,

$$\text{площадь } \triangle ABC = {}^1/_2\, AC \times BE,$$

что и требовалось доказать.

§ 222. *Формула.* Если основание треугольника содержит *a см*, а высота его содержит *h см*, то площадь его *S* содержит $^1/_2\, ah$ *кв. см.*

$$S = {}^1/_2\, ah.$$

Пример. У тупоугольного треугольника (рис. 246) основание содержит *a см*, высота — *h см*.

Следовательно, площадь S содержит $\frac{1}{2}\,a \times h$ *кв. см.*

66. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ.

§ 223. *Теорема.* Площадь трапеции равна половине суммы обоих оснований ее, умноженной на высоту ее.

Опыт. В опыте § 194 (стр. 127) вы преобразовали трапецию в равновеликий треугольник следующим образом: соединив прямой EC середину бока AB с противоположной вершиной, мы отрезали по этой линии треугольник EBC и, повернув его на 180° вокруг точки E, приложили его так, чтобы он принял положение EAL. Тогда наша трапеция должна превратиться в треугольник CLD (рис. 247 и 248).

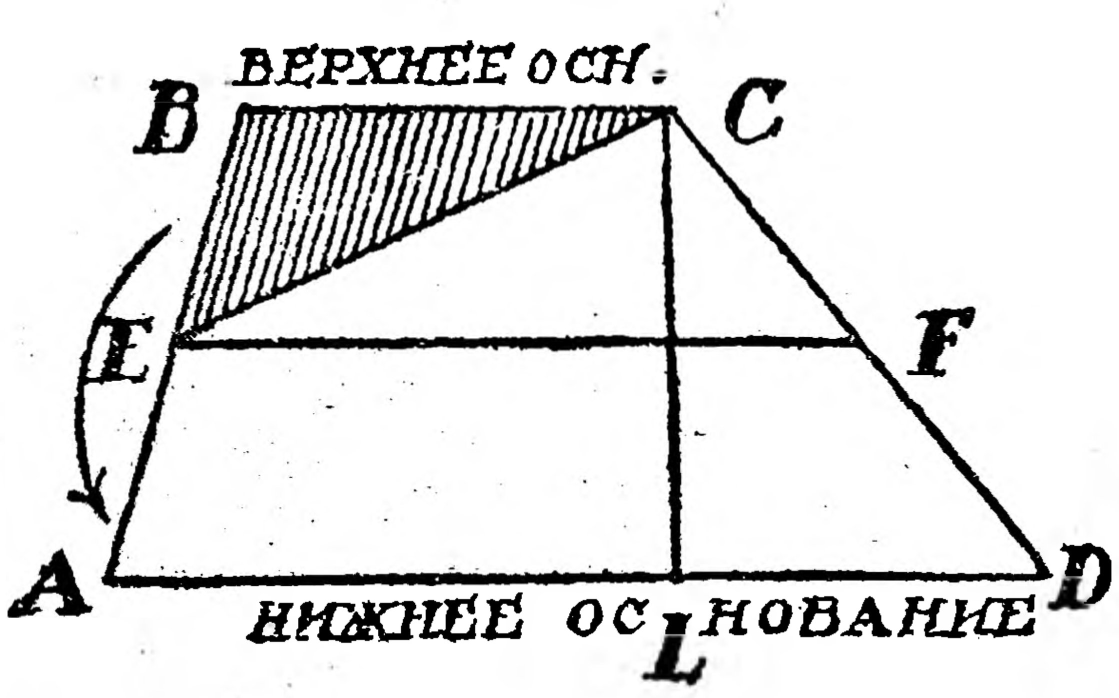


Рис. 247.

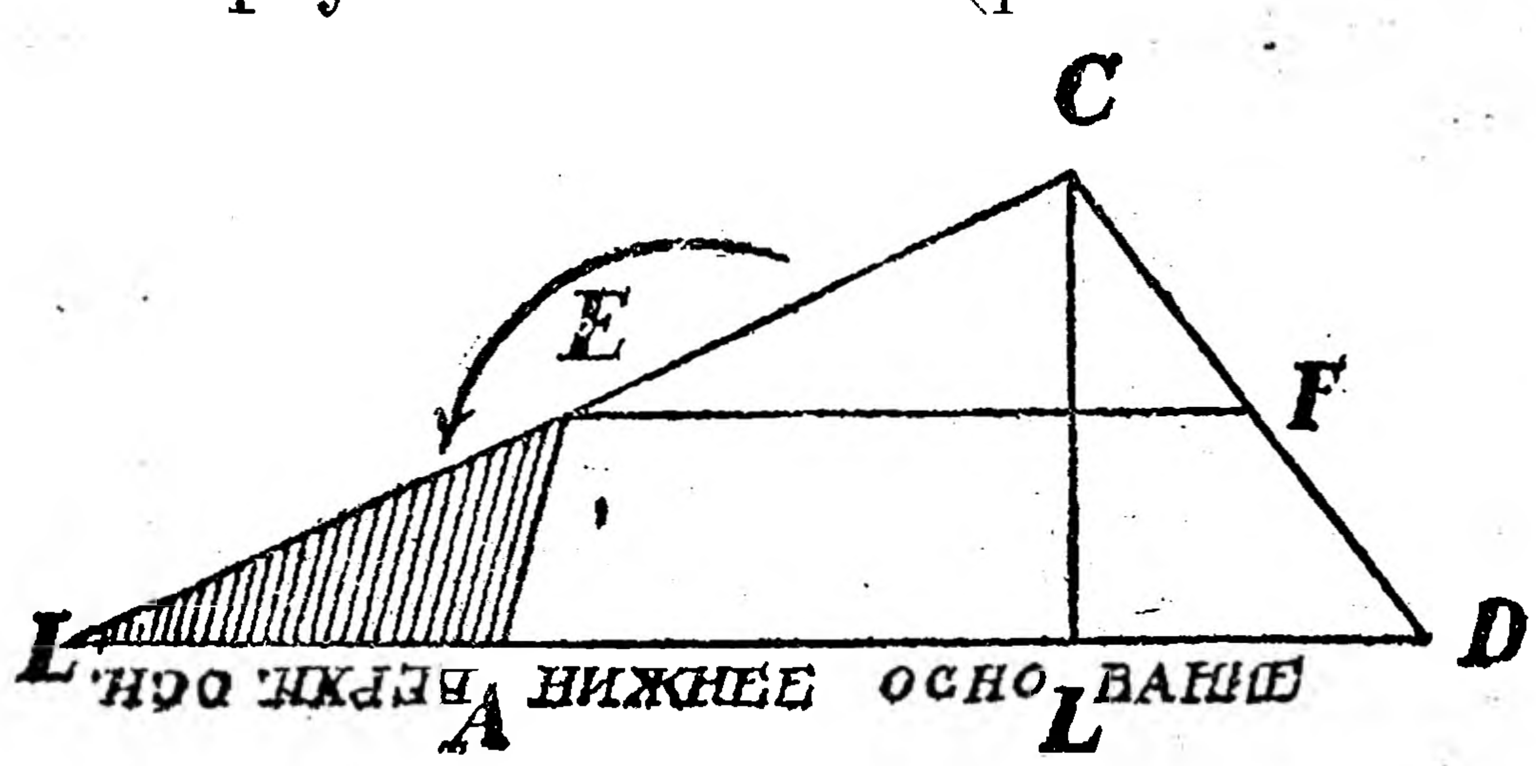


Рис. 248.

Доказательство. В самом деле, когда вы повернете треугольник EBC вокруг точки E на 180°, то сторона BC должна занять положение AL, то-есть быть продолжением AD, ибо углы у точки A — смежные.

Основанием этого треугольника служит линия LD, равная сумме верхнего и нижнего оснований трапеции. Высота CL равна высоте трапеции.

А так как площадь трапеции равна площади этого треугольника, то для измерения площади трапеции получается такое правило:

Чтобы измерить площадь трапеции, надо измерить прежде всего верхнее и нижнее основания ее. Сложить полученные от измерения числа. Затем сумму помножить на число, измеряющее высоту, и произведение разделить на два. Результат покажет, сколько соответственных квадратных единиц содержит площадь трапеции.

Это правило короче выражается так:

Площадь трапеции равна полусумме ее оснований, умноженной на высоту.

Формула. Пусть верхнее основание содержит a *см*, нижнее основание содержит b *см*, высота содержит h *см*, тогда площадь трапеции S содержит $^1/_2\,(a+b)\;h$ *кв. см.*

$$S = {}^1/_2\,(a+b)\,h.$$

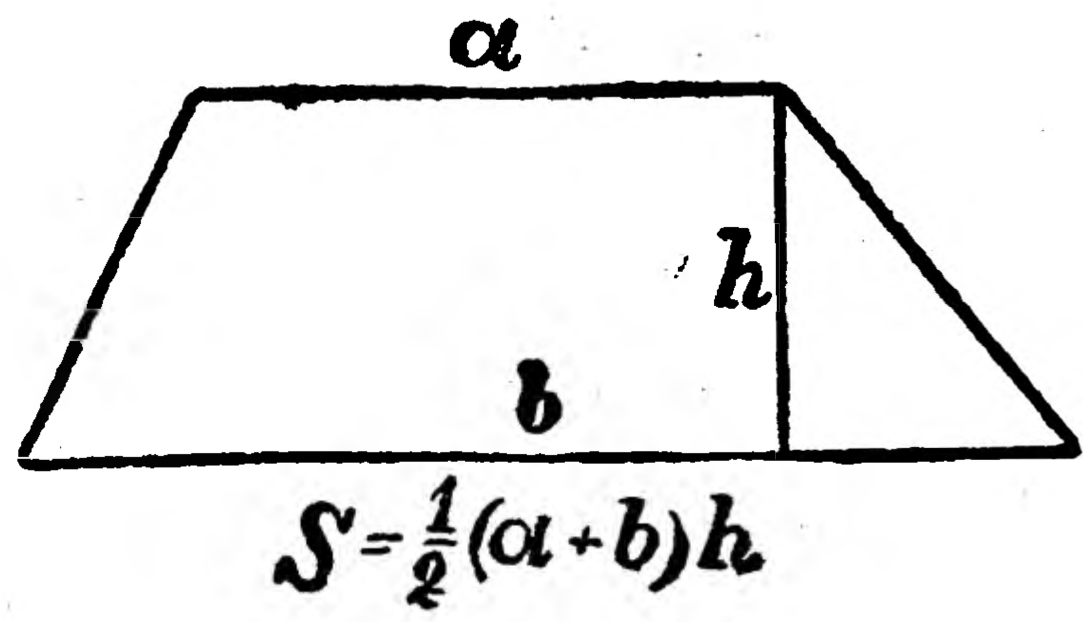


Рис. 249.

Пример. Измерим площадь трапеции на рис. 249; у нее:

верхнее основание	$a = 24$ *мм*
нижнее основание	$b = 42$ »
высота	$h = 15$ »

Следовательно, площадь этой трапеции равна:

$$S = {}^1/_2\,(a+b)\,h = 495 \textit{ кв. мм.}$$

§ **224.** *Теорема.* Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

Повторите еще раз опыт § 194, изложенный на стр. 127. Докажите, что любую трапецию можно преобразовать в равновеликий прямоугольник, основание которого будет равно средней линии трапеции, а высота равна высоте трапеции. Этим самым вы докажете и нашу теорему.

67. ПЛОЩАДЬ РОМБА.

§ **225.** *Теорема.* Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Первый способ. Так как ромб есть частный случай параллелограма (§ 187), то его площадь можно измерить, пользуясь только-что доказанным правилом (§ 219).

Второй способ. Можно еще использовать свойство диагоналей ромба (диагонали ромба делятся друг другом пополам и взаимно перпендикулярны, § 188).

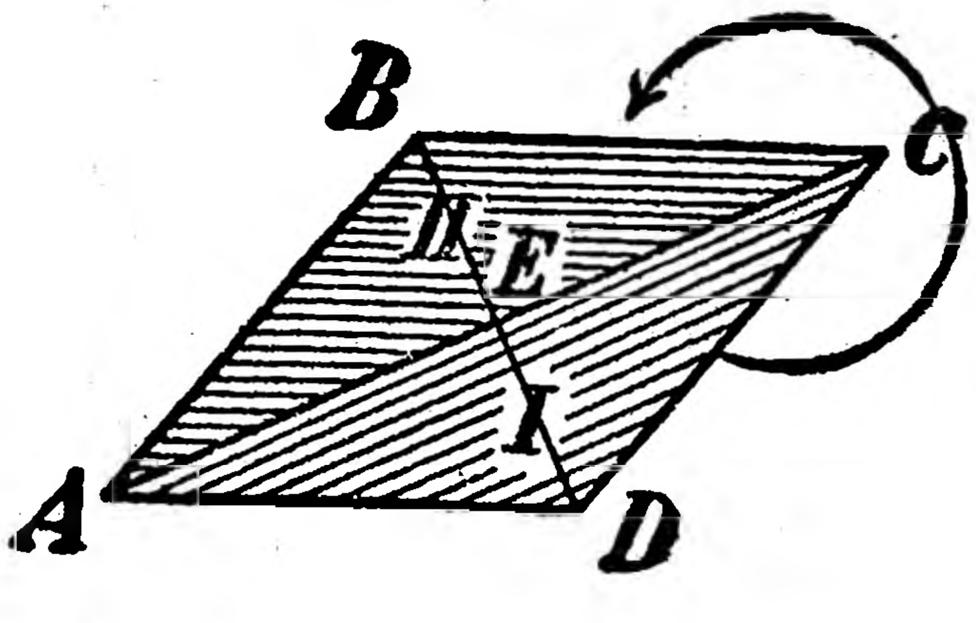


Рис. 250.

Опыт. Вырежьте ромб. Нарисуйте его диагонали. Разрежьте ромб вдоль одной диагонали на два треугольника и составьте из них такой параллелограм, чтобы основанием его служила диагональ ромба, а высотой половина другой диагонали (рис. 250). Измерив площадь этого параллелограма, узнайте площадь ромба.

Доказательство. Площадь ромба состоит из удвоенной площади равнобедренного треугольника ABC. Приняв за его основание AC, а за высоту BE, докажите, что площадь любого ромба равна половине произведения его диагоналей.

68. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА.

§ 226. Измерение площади правильного многоугольника.

Теорема. Площадь правильного многоугольника равна половине произведения периметра на апофему.

Опыт. Вырежьте какой-нибудь правильный многоугольник, имеющий четное число сторон, например, правильный шестиугольник. Нарисуйте центр и апофему этого многоугольника (рис. 251).

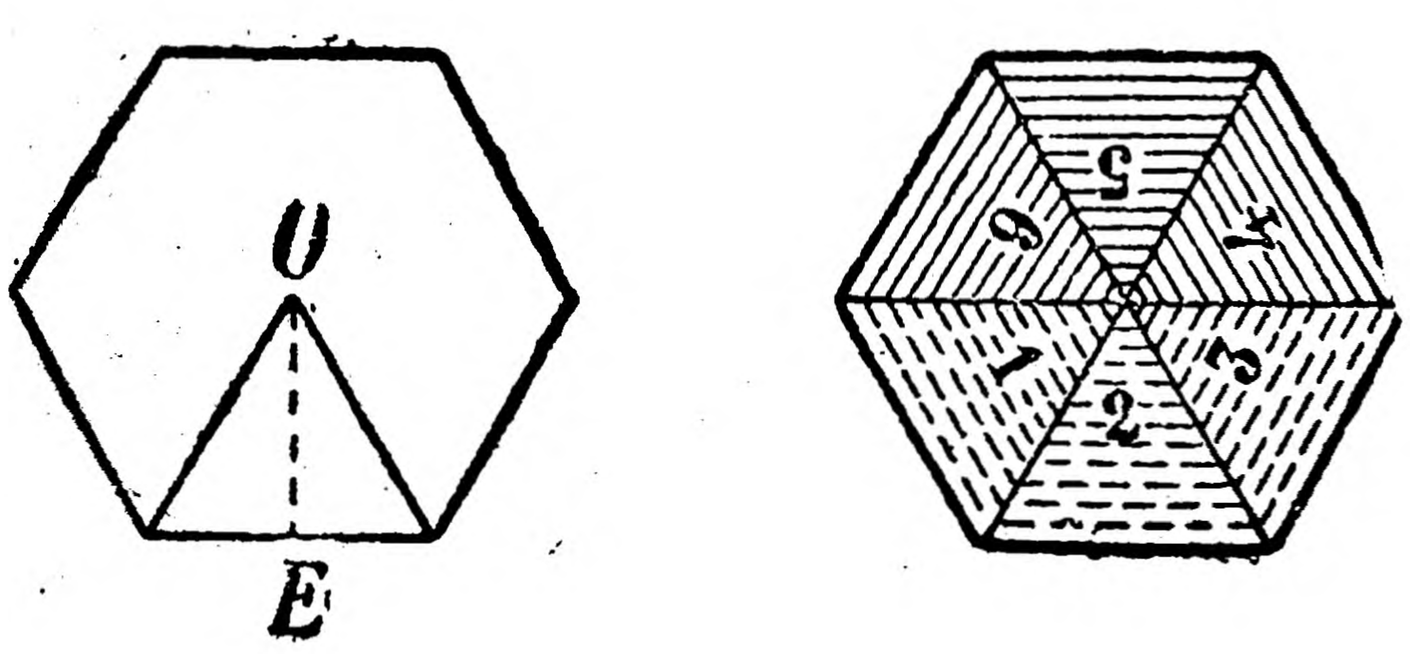


Рис. 251.

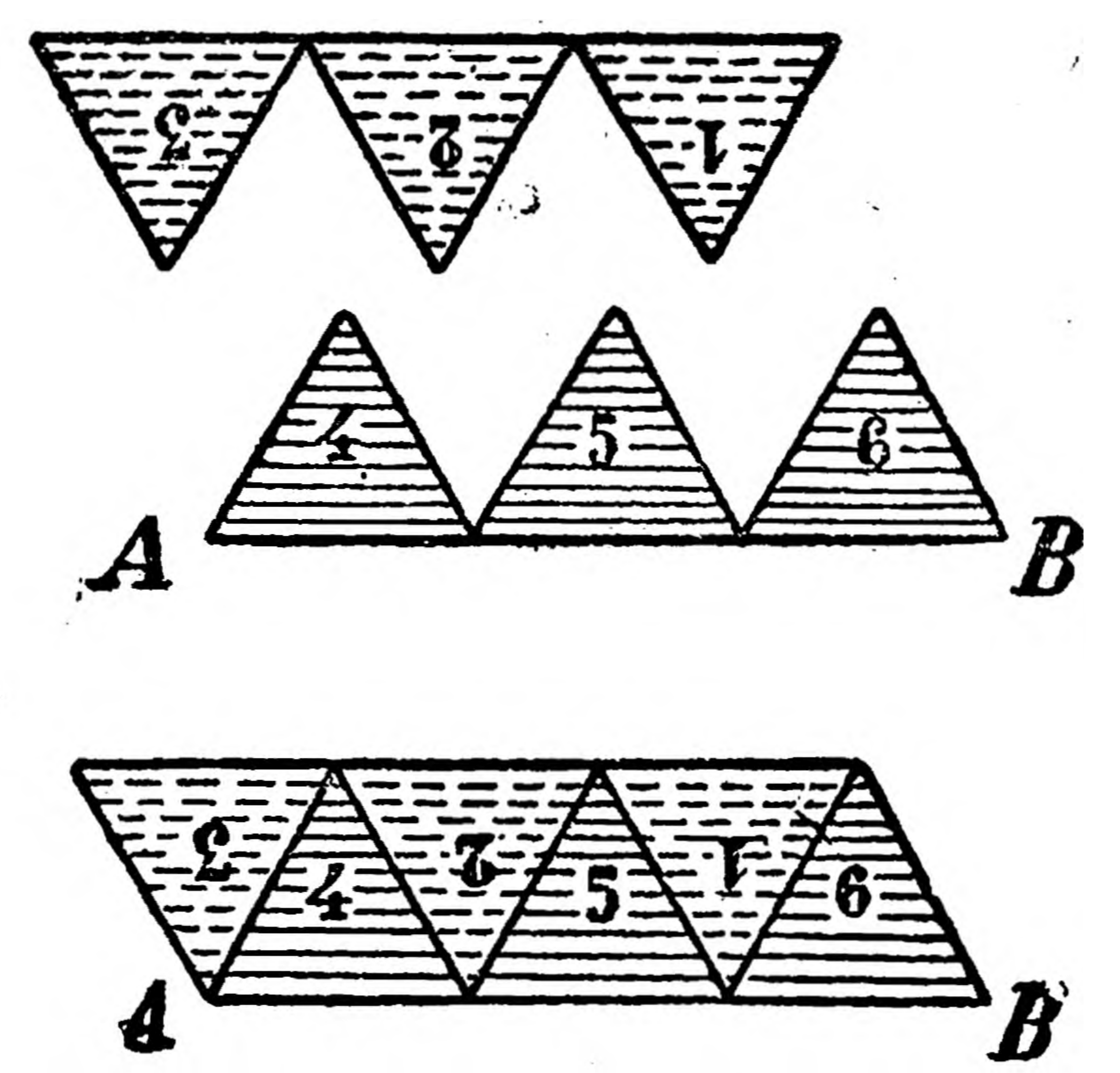


Рис. 252.

Разрежьте его на 6 равных друг другу равнобедренных треугольников. Три из них приклейте так, чтобы основания лежали на одной прямой AB (рис. 252), а остальные три вставьте вершинами внутрь образовавшихся зубцов.

Какая у нас получилась фигура (рис. 252)? Укажите основание и высоту этого параллелограма. Чему равна площадь его? Выведите из этого опыта правило для измерения площадей правильных многоугольников.

Указание. Основанием этого параллелограма служит (AB на рис. 252) половина периметра нашего многоугольника, а высотой — его апофема (OE на рис. 251). Следовательно, площадь многоугольника равна половине его периметра, умноженного на апофему.

Доказательство. Предположим, что наш правильный многоугольник содержит n сторон (рис. 251). Тогда его можно разбить на n одинаковых равнобедренных треугольников (§ 204). Вычислим площадь одного из них.

Если сторона многоугольника содержит a *см*, а апофема ее содержит l *см*, то площадь одного треугольника содержит

$$\frac{1}{2}\, al \text{ кв. см},$$

а площадь S всего многоугольника содержит

$$\frac{1}{2}\, aln \text{ кв. см}.$$

Переставим сомножители:

$$S = \frac{1}{2}\,(an)\cdot l \text{ кв. см}.$$

Здесь an показывает, сколько сантиметров содержит периметр многоугольника. Обозначим это число буквой $p = an$.

Тогда

$$S = \frac{1}{2}\, p \cdot l,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Применим это правило к пятиугольнику. Вычислим сначала его периметр. Пусть сторона его $= 2{,}4$ *см*; следовательно, периметр его

$$p = 2{,}4 \cdot 5 = 12 \text{ см},$$

а потому, если апофема $h = 3$ *см*, то площадь его равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot p \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 = 18 \text{ кв. см}.$$

§ 227. Измерение площади неправильного многоугольника. Если многоугольник неправильный, то разбивают его тем или другим способом на фигуры, площади которых мы умеем уже измерять.

§ 228. Измерение при помощи разграфленной сетки. Площадь какой-нибудь фигуры, имеющей сложную форму, можно измерить так:

Нужно взять лист прозрачной бумаги и разделить его на квадратные единицы, например, на квадратные сантиметры и на квадратные миллиметры. Затем наложить этот лист на исследуемую фигуру и сосчитать, сколько квадратных единиц и частей их будет находиться внутри контура этой фигуры.

§ 229. Измерение площади сложной фигуры разбиванием ее на более простые фигуры. Так как непосредственный подсчет квадратных единиц, содержащихся в площади данной фигуры, слишком долог и утомителен, то поступают еще так:

Стремятся разбить данную сложную фигуру на ряд более простых фигур, площадь которых мы выучились уже измерять по тем или другим формулам.

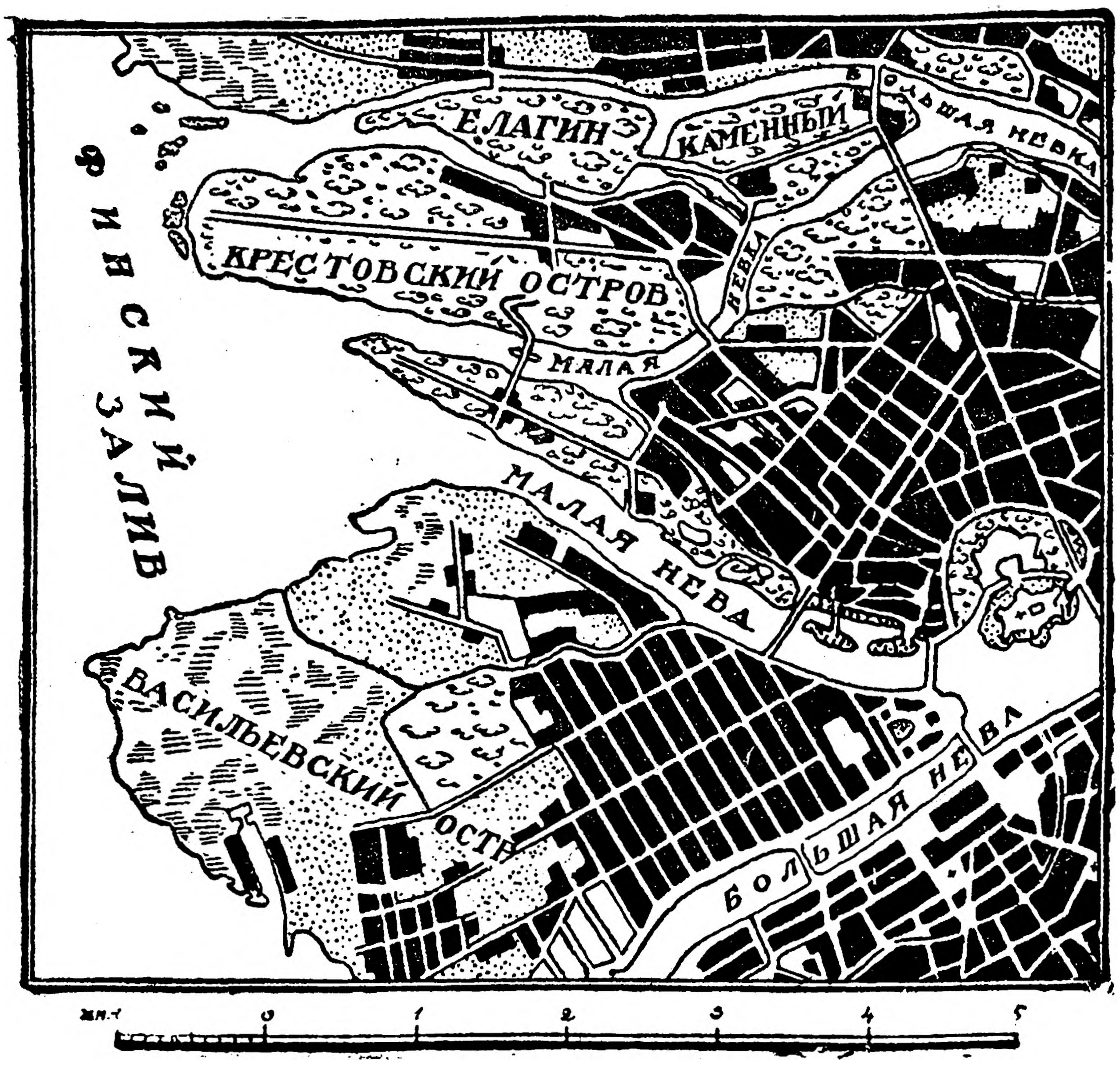


Рис. 253.

На рис. 253 изображен план части Ленинграда. Разбив его на известные вам геометрические фигуры, узнайте, скольким квадр. сантиметрам равна площадь этой части города (суши). Сколько гектаров занимает собой эта часть, если каждому квадратному сантиметру нашего плана соответствует в действительности площадь в $^2/_8$ *кв. км.*

Измерьте, например, площадь фигуры рис. 253, разбив ее на треугольники, трапеции, параллелограмы и т. д.

69. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА.

§ 230. *Теорема.* Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей двух квадратов, построенных на катетах.

Опыт. Нарисуйте какой-нибудь прямоугольный треугольник (рис. 254) и постройте на его катетах и гипотенузе по квадрату.

Отрежьте квадраты катетов и поставьте их рядом, как указано на рисунке 255. Постараемся теперь из этих двух квадратов составить квадрат гипотенузы. Постройте два прямоугольных треугольника № 1

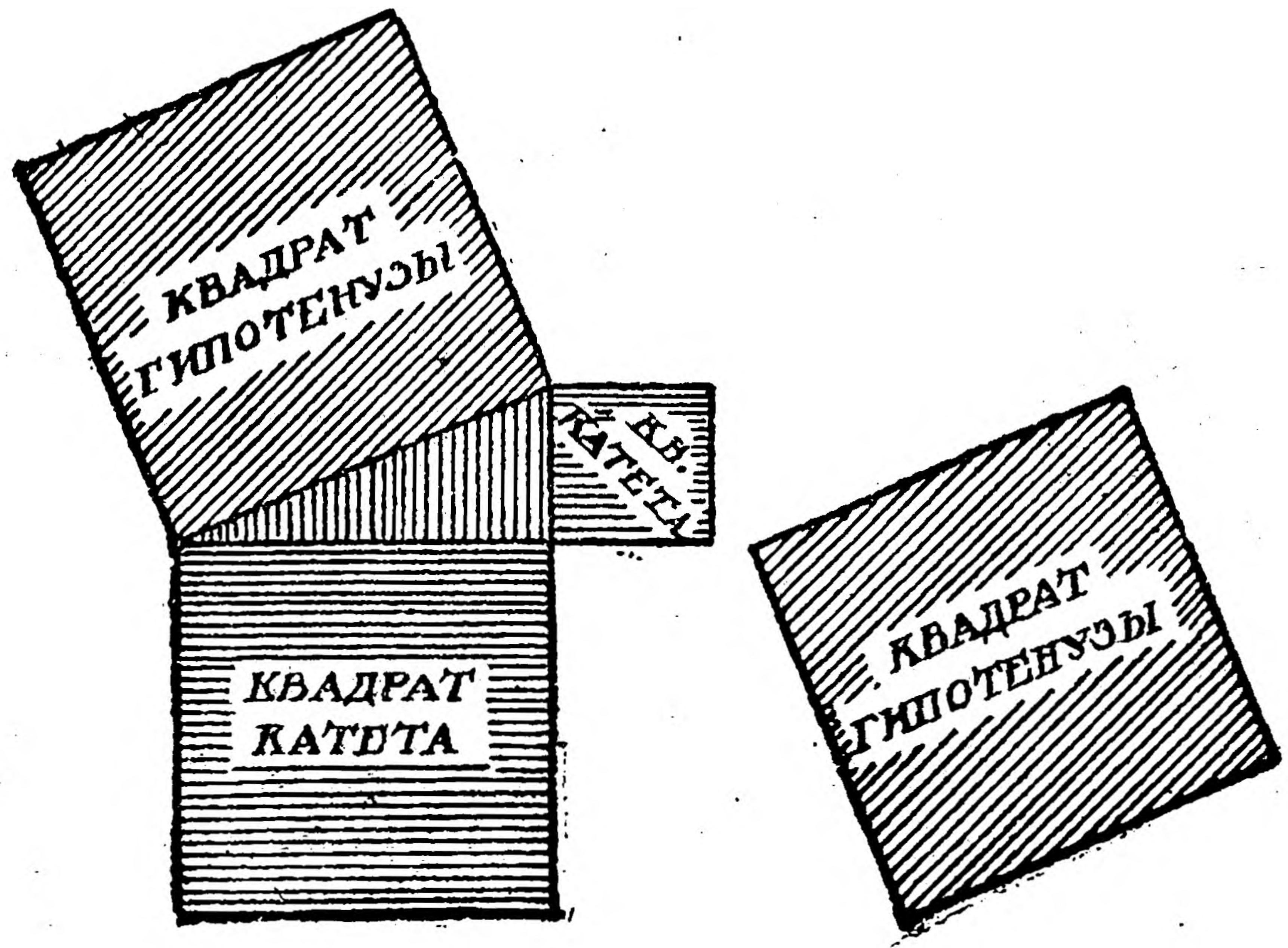


Рис. 254.

Рис. 255.

и № 2, как показано на рис. 256 так, чтобы *DE* равнялась катету *b* основного треугольника. Отрежьте их и, повернув вокруг точек *B* и *A*, составьте из них фигуру рис. 257.

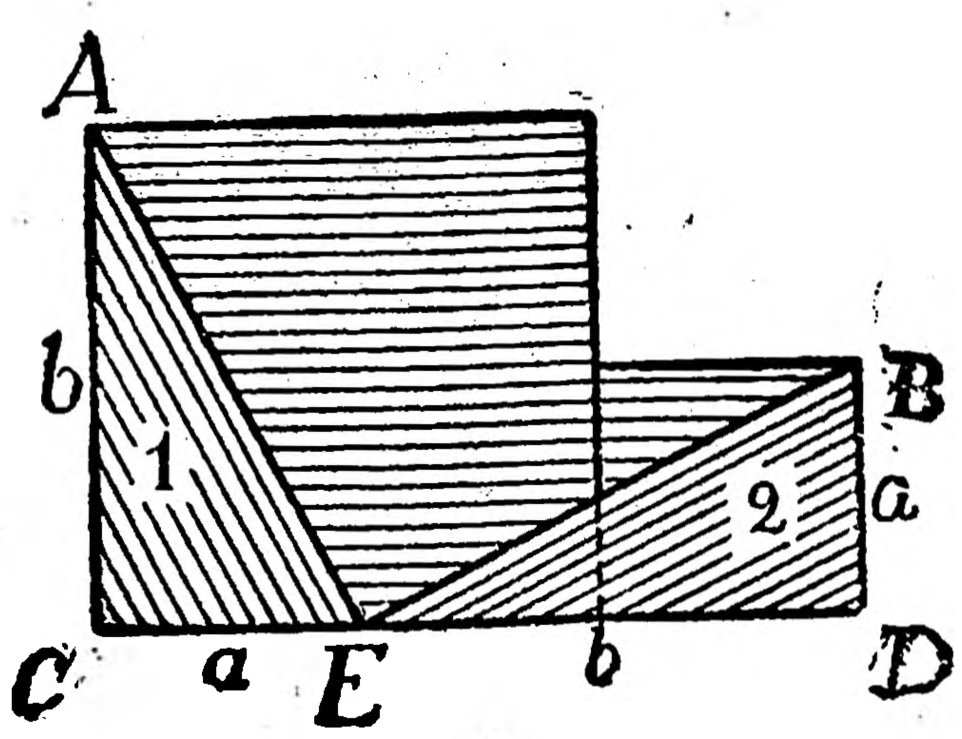


Рис. 256.

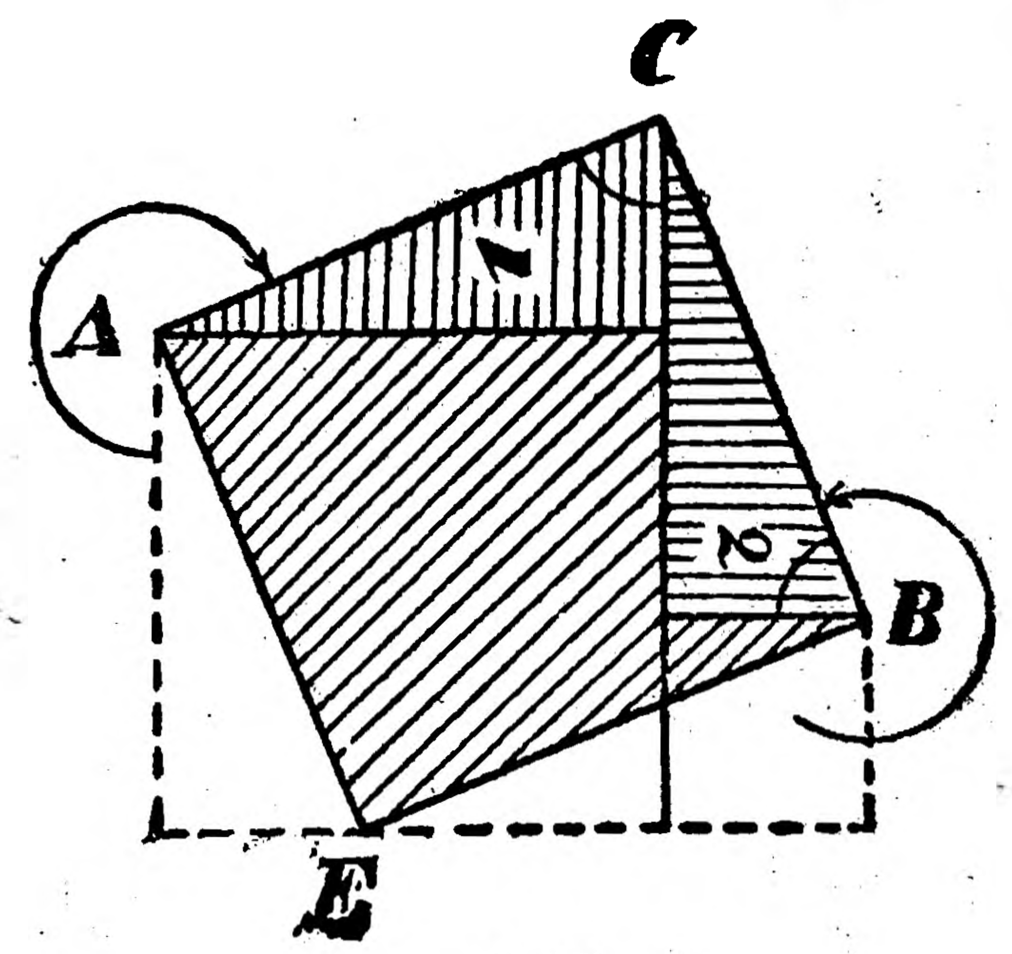


Рис. 257.

Убедитесь при помощи наложения, что эта фигура равна квадрату гипотенузы.

Доказательство. Отрезанные нами треугольники № 1 и № 2 (рис. 256) равны друг другу и кроме того равны нашему основному треугольнику (почему?). Отметьте у этих треугольников равные стороны и равные углы. Углы *CAE* и *EBD*, как острые углы прямоугольного треугольника, дают в сумме прямой угол. Исследуем теперь фигуру *AEBC* (рис. 257). У нее все стороны равны друг другу (так как каждая из них равна гипотенузе), $\angle B$ и $\angle A$ прямые, ибо они составлены из тех же частей, которые на рисунке 256 давали прямые углы. $\angle C$, равный сумме $\angle CAE + \angle EBD$ рисунка 256, тоже должен быть прямым; $\angle E = 90^\circ$.

Итак, у нашего четыреугольника все углы прямые и все стороны равны гипотенузе, следовательно, мы получили квадрат, равный квадрату, построенному на гипотенузе.

Эта теорема короче читается так:

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Формула. Если один катет содержит *a см*, второй катет содержит *b см*, а гипотенуза содержит *c см*,— то квадрат, построенный на первом катете, содержит a^2 *кв. см*; квадрат, построенный на втором катете, содержит b^2 *кв. см*; квадрат же гипотенузы содержит c^2 *кв. см*.

При чем между этими числами существует такая зависимость:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

§ 231. Применение теоремы Пифагора к задачам на вычисление. Если в прямоугольном треугольнике известны две какие-либо стороны, то можно построить этот треугольник (§ 156) и, измерив третью сторону, найти ее величину. Однако, этот способ неудобен тем, что, как построение треугольника, так и измерение сторон его сделать вполне точно нельзя: и то и другое будет сопровождаться ошибками. Поэтому предпочитают узнать величину третьей стороны треугольника при помощи вычислений.

Решим для примера такие задачи:

Задача 1. Гипотенуза равна 17 *см*, катет равен 15 *см*, чему равен другой катет?

Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна $17 \times 17 = 289$ *кв. см*.

Площадь квадрата, построенного на данном катете, равна $15 \times 15 = 225$ *кв. см*.

Следовательно, на долю площади квадрата, построенного на другом катете, остается

$$289 \text{ кв. см} - 225 \text{ кв. см} = 64 \text{ кв. см}.$$

То-есть этот квадрат должен иметь сторону в 8 *см*.

Постройте треугольник и проверьте ответ, измерив длину искомого катета.

Задача 2. В равнобедренном прямоугольном треугольнике катет равен 1 аршину. На много ли гипотенуза отличается от 1 метра? Примите метр равным 1,41 аршина. Укажите простой способ, как, имея под руками аршин, построить метр. Найдите простой способ построения метра, имея под руками аршин.[1])

Задача 3. Сторона равностороннего треугольника равна 20 *мм*, чему равна его площадь?

Надо прежде всего узнать высоту AD (рис. 258). В прямоугольном треугольнике ABD гипотенуза $AB = 20$ *мм*, $BD = {}^1/_2 \cdot 20 = 10$ *мм*. (Почему?)

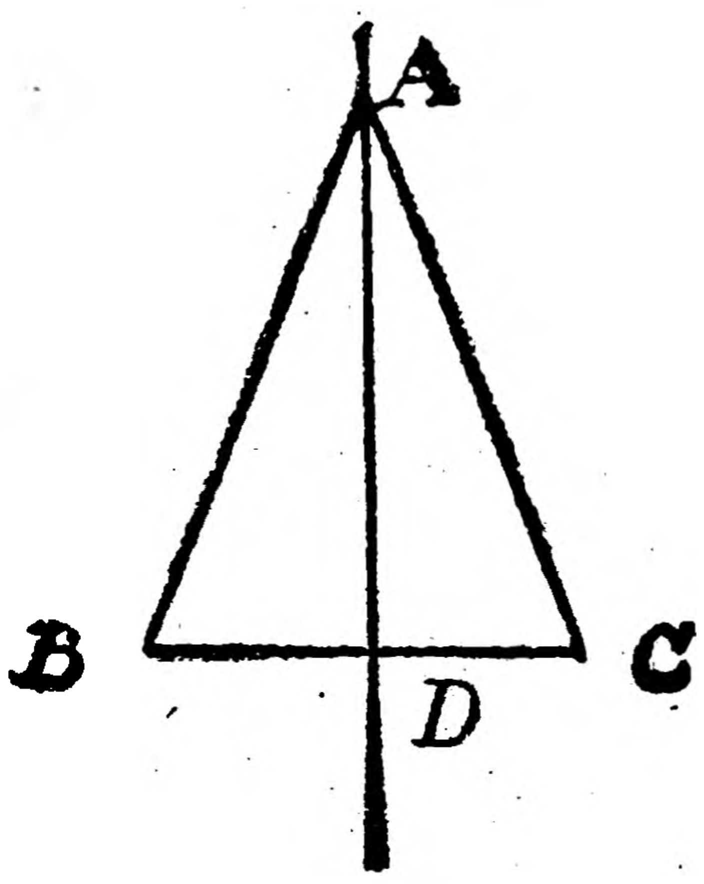


Рис. 258.

Согласно предыдущей задаче, площадь квадрата, построенного на катете AD, равна $20^2 - 10^2 = 300$ *кв. мм*.

Чтобы найти сторону этого квадрата, надо найти число, которое после умножения само на себя даст 300.

Найти такое число точно нельзя, поэтому ограничиваемся приблизительным значением его:

$$AD = 17{,}3 \text{ мм}.$$

Следовательно, площадь треугольника равна.

$$^1/_2 \times 20 \times 17{,}3 = 173 \text{ кв. мм}.$$

Упражнения и задачи.

1. Измеривши площадь газетного листа и зная, что ежедневно выпускается 50 тысяч экземпляров, подсчитайте, какую площадь займет эта газета, если всю ее разложить рядом на земле. Сравните эту площадь с площадью вашего города.

2. Сколько надо купить тесьмы, чтобы обшить ею скатерть в 6 метров длиною? Площадь этой скатерти 24 *кв. м*.

3. Между двумя селами, находящимися на расстоянии 24 километров, сделана через посеянные хлеба тропинка шириною в $^1/_2$ метра. Сколько гектаров посева уничтожено этой тропинкой?

---

[1]) См. Перельман. «Старые и новые меры».

4. Участок земли, имеющий форму прямоугольника со сторонами в 24 *м* и 6 *м*, променяли на равновеликий ему квадратный. Какова сторона нового участка?

5. Два участка земли огородили забором одинаковой длины: первый имеет вид прямоугольника со сторонами в 180 *м* и 140 *м*; другой участок имеет вид квадрата. Вычислив площадь каждого участка земли, узнайте, какой из этих участков больше?

6. Пол кухни, имеющий 10 *м* ширины и 15 *м* длины, устилается каменными квадратными плитками, сторона которых равна 50 *см*. Сколько плиток пойдет на это?

7. Вдоль забора прямоугольного сада, имеющего 82 *м* длины и 35 *м* ширины, идет дорожка шириною в 1 *м*; все остальное пространство засажено деревьями в таком расчете, что на каждые 10 *кв. м* приходится по одному дереву. Сколько деревьев в саду?

8. Сделайте необходимые измерения и высчитайте, во сколько обойдется полный ремонт вашей комнаты (покраска пола, побелка потолка, покраска дверей, оклейка обоями стен).

9. Сделайте необходимые измерения и вычислите, сколько надо купить кусков обоев, чтобы ими можно было оклеить стены вашего класса.

10. Каждая сторона двускатной крыши имеет форму прямоугольника величиною 5 *м* $\times$ 3 *м*. Эту крышу кроют черепицей, при чем каждая черепица покрывает прямоугольник 27 *см* $\times$ 18 *см* (одна сторона его 27 *см*, а другая 18 *см*). Сколько черепиц потребуется для этой крыши?

11. Сколько гектаров занимает пр. 25-го Октября (б. Невский проспект, главная улица Ленинграда)? Длина его $2^1/_2$ километра; ширина 20 *м*.

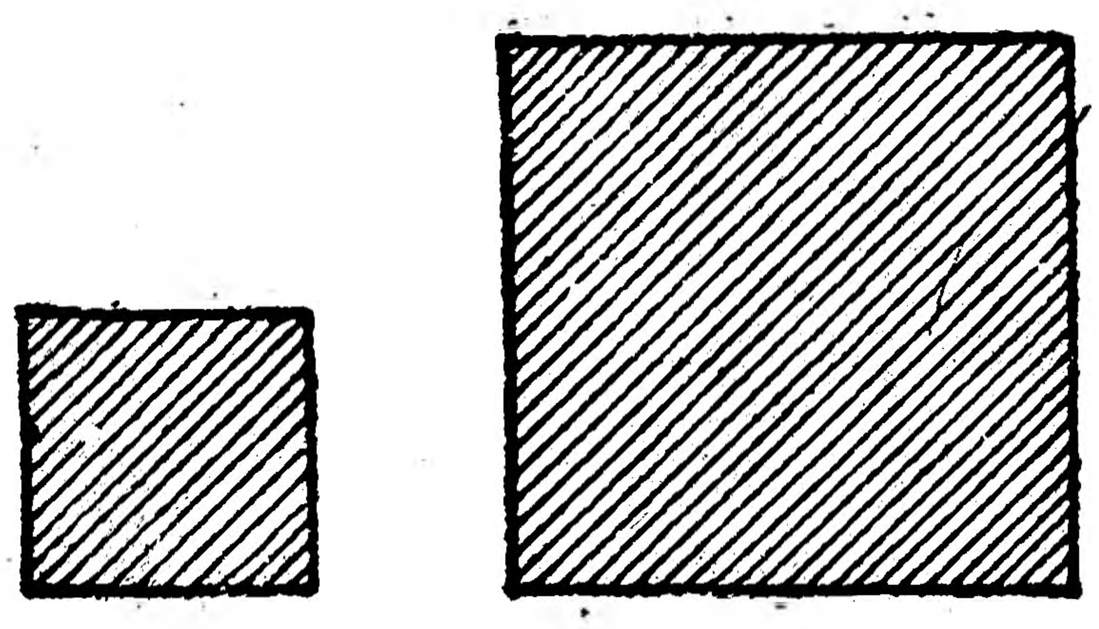


Рис. 259.

12. Какой участок земли потребует больше ограды: прямоугольник 32 *м* $\times$ 2 *м* или квадрат, имеющий такую же площадь?

13. Под «квадратурой» какой-нибудь фигуры подразумевается замена данной фигуры квадратом, имеющим одинаковую площадь. Нарисуйте квадрат, равновеликий прямоугольнику 9 *м* $\times$ 4 *м* (квадратура прямоугольника).

14. Нарисуйте квадрат, равный (по площади) сумме двух таких квадратов (рис. 259). Нарисуйте квадрат, равный разности их.

Указание Используйте теорему Пифагора.

15. Стропило двускатной крыши упирается в балку, длина которой 24 *м*. Расстояние от верхушки стропила до середины балки равно 5 *м*. Какой длины стропило?

16. К крыше дома приставлена лестница длиною в 17 *м*. Расстояние от нижнего конца ее до основания стены равно 8 *м*. Какой высоты стена?

17. На рис. 260 изображен разрез железнодорожной насыпи в виде трапеции с равными боковыми сторонами. $AC = 5$ *м*. Ширина насыпи вверху $= 6$ *м*. Высота $= 4$ *м*. Вычислить ширину ее у основания.

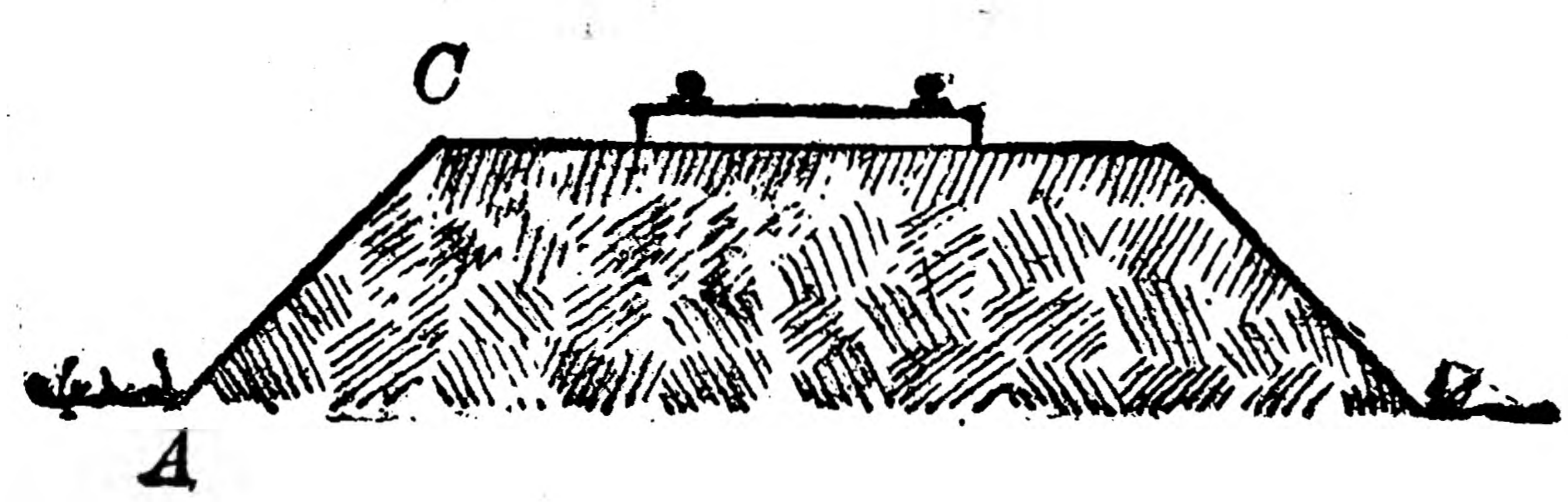


Рис. 260.

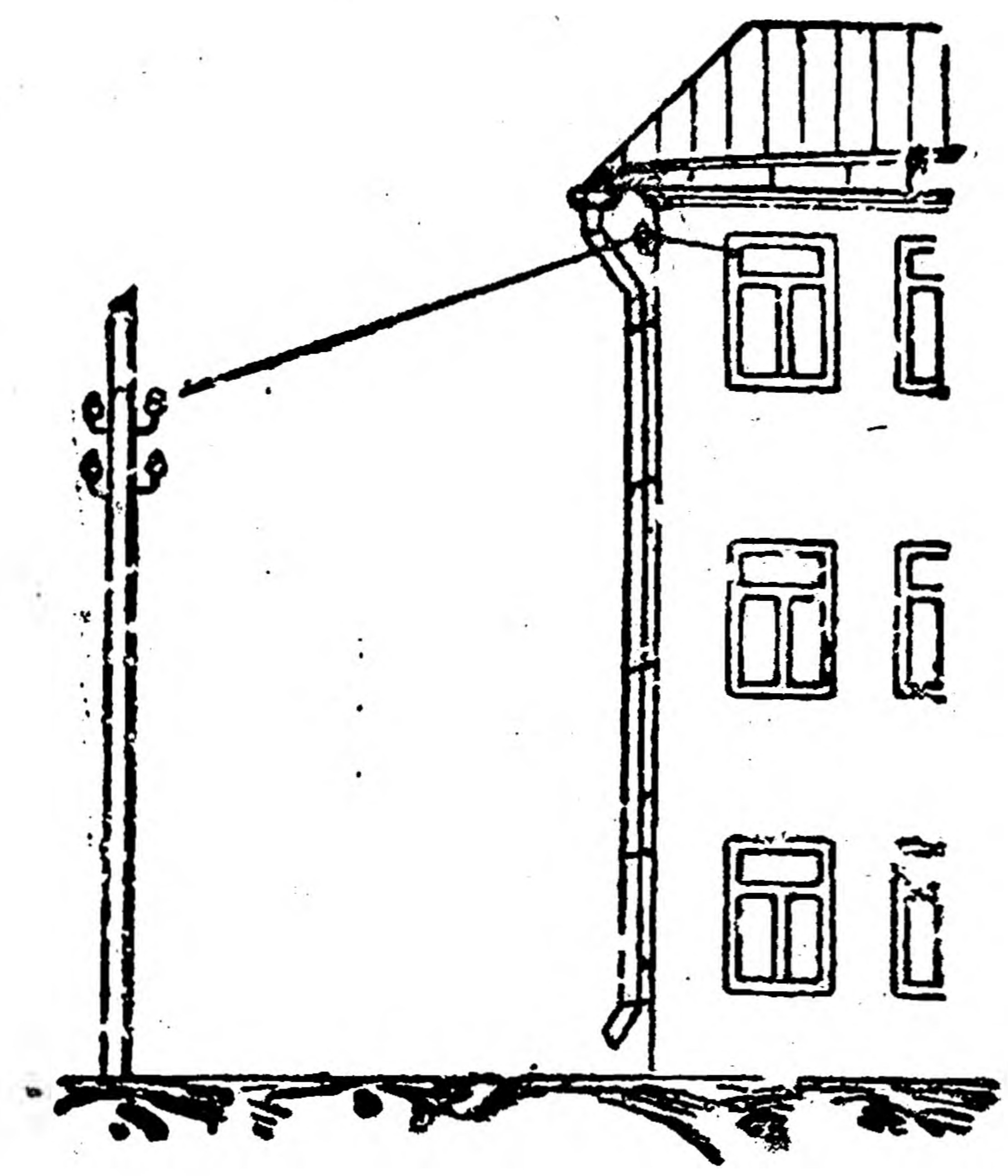


Рис. 261.

18. Телефонная проволока длиною в 15 метров протянута к углу дома. Высота ее у столба равна 5 *м*, у дома равна 15 *м*. Какое расстояние от угла дома до столба?

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ
СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ФИГУР

ГЛАВА XVI.

ОТНОШЕНИЕ И ПРОПОРЦИЯ.

70. ОТНОШЕНИЕ.

§ 232. Что такое отношение?

Задача. Надо узнать, во сколько раз прямая AB (рис. 262) больше прямой CD.

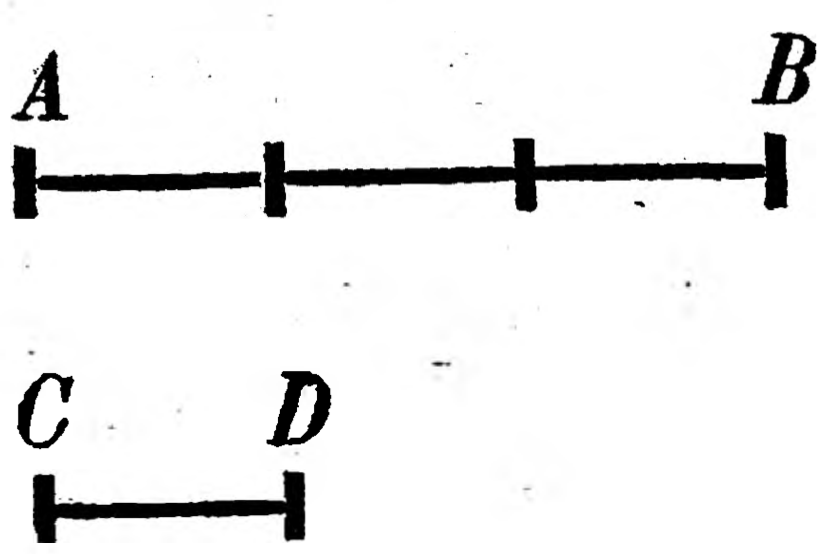


Рис. 262.

Посмотрим, не уложится ли целое число раз меньший отрезок CD в большем AB. Будем откладывать циркулем отрезок CD на AB. Окажется, что CD уложится на AB ровно 3 раза.

Следовательно, в этом случае AB будет в 3 раза больше CD, то-есть $AB = 3\,CD$.

Этот результат будем записывать так:

$$\frac{AB}{CD} = 3.$$

Число 3, показывающее, во сколько раз AB больше CD, будем называть **отношением** отрезка AB к отрезку CD.

Если отрезок CD укладывается в AB 3 раза, то он составляет $^1/_3$ часть отрезка AB; то-есть $CD = {}^1/_3\,AB$, что можно записать так:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Число $^1/_3$, показывающее, какую часть AB составляет отрезок CD, будем называть отношением CD к AB.

Итак, отношением двух отрезков будем называть число, показывающее, во сколько раз первый отрезок больше второго, или какую часть второго отрезка он составляет.

§ 233. Как найти отношение двух отрезков прямых? Найдем теперь отношение отрезка AB к CD на рисунке 263. Попробуйте, не уложится ли и здесь отрезок CD целое число раз на отрезке AB. Оказывается, что нет. Поэтому постараемся подыскать такой новый отрезок, который бы уложился целое число раз в отрезке AB и в отрезке CD; такой отрезок называется общей мерой. Измерим одной и той же единицей измерения, например, сантиметром, оба наши отрезка. Наш сантиметр уложился в отрезке CD 3 раза, а в отрезке AB 4 раза. Следовательно, AB составляет $^4/_3$ от CD.

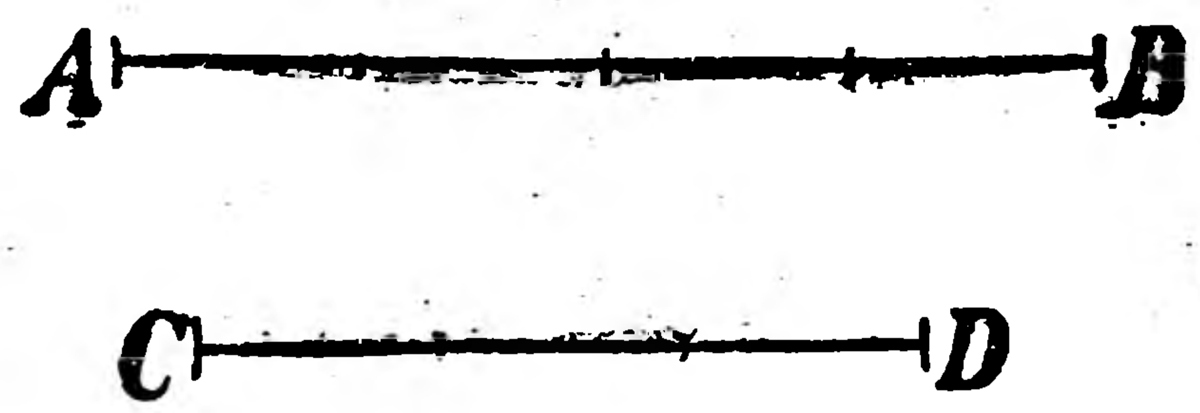


Рис. 263.

$$AB = {}^4/_3 \text{ от } CD,$$

что можно записать еще так:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}.^{1)}$$

Здесь число $^4/_3$ есть отношение отрезка AB к отрезку CD. Это число указывает нам, как из отрезка CD получить AB; а именно, надо CD разделить на три равные части и взять 4 таких части.

Если вы хотите по отрезку AB найти меньший отрезок CD, то должны AB разделить на 4 равные части и взять 3 таких части.

Следовательно, CD есть $^3/_4$ AB; $CD = {}^3/_4$ от AB, что можно записать так: $\frac{CD}{AB} = \frac{3}{4}.^{1)}$

Здесь число $^3/_4$ есть отношение отрезка CD к AB. Это число показывает, как, зная величину отрезка AB, найти отрезок CD.

Задача. Найдем отношение отрезков AB и CD на рисунке 264. Сантиметр не укладывается целое число раз в этих отрезках, а потому мы будем измерять наши отрезки более мелкой единицей измерения, составляющей какую - нибудь дробную часть сантиметра; попробуем, например, измерить их миллиметром.

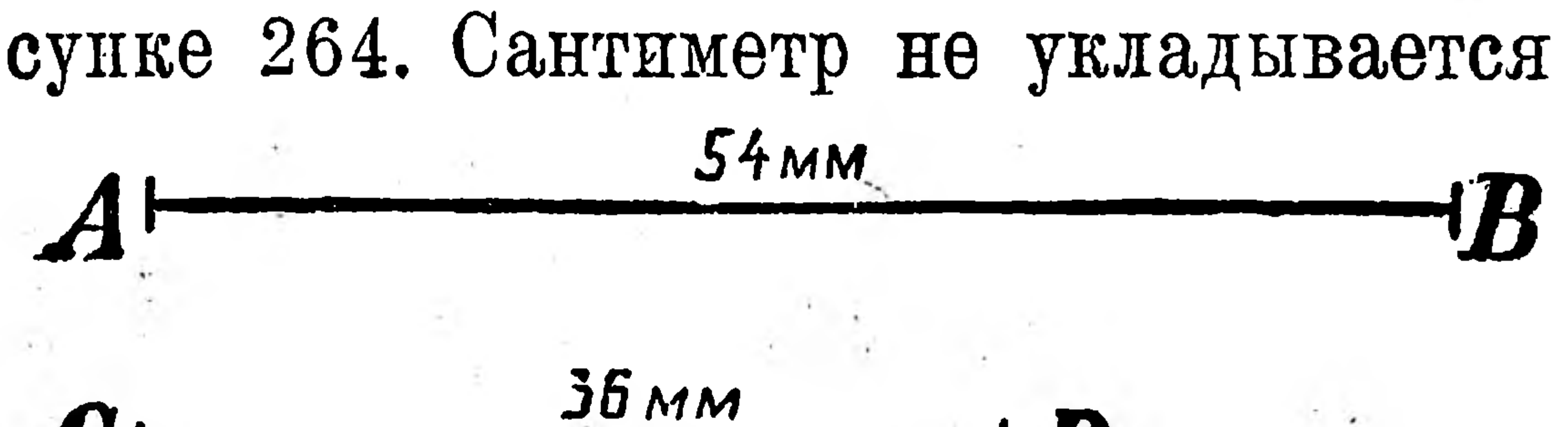


Рис. 264.

$$AB = 54 \text{ мм},$$

$$CD = 36 \text{ мм}.$$

---

[1]) Примечание. Эти числа $^4/_3$, $^3/_4$ и т. д. для сравнивания отношений друг с другом часто очень удобно выражать десятичной дробью с точностью до десятой, одной сотой и т. д.

Следовательно, общей мерой наших отрезков будет в этом случае миллиметр.[1]) Он укладывается в CD 36 раз, а в AB 54 раза.

Следовательно, отношение AB к CD:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{54}{36}.$$

Эту дробь можно сократить на 18; тогда окончательно найдем, что отношение

$$\frac{AB}{CD}=\frac{3}{2}.$$

Следовательно, чтобы получить отрезок AB, надо CD разделить на две равные части и взять их 3.

Если же мы хотим по отрезку AB найти отрезок CD, то должны AB разделить на 3 равные части и взять их две. То-есть

$$\frac{CD}{AB}=\frac{2}{3}.$$

§ 234. Построение отрезков, находящихся в данном отношении.

Задача. Дан отрезок прямой AB. Найти второй отрезок CD так, чтобы отношение этих отрезков равнялось $^4/_3$.

Отношение $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{3}$.

Первый способ. Это отношение $^4/_3$ говорит нам, что если мы данный отрезок AB разделим на 4 равные части, то CD будет иметь 3 таких части.

Разделим сначала AB на 4 равные части по способу, указанному в § 191, а именно:

Нарисуем у точки A (рис. 265) произвольную прямую; отложим на ней 4 одинаковых отрезка и конец L последнего из них соединим с концом B. Проведем затем через точки деления K, E и F прямые, параллельные BL. Они разделят нашу прямую AB на 4 равные части.

(Почему? вспомните § 190.)

---

[1] В этом примере миллиметр хотя будет общей мерой наших отрезков, но не будет наибольшей общей их мерой. Здесь наибольшей общей мерой будет отрезок длиною в 18 *мм*, который укладывается целое число раз и в AB (3 раза) и в CD (2 раза). Есть способ, дающий возможность находить сразу общую наибольшую меру двух отрезков, но мы его рассматривать не будем.

Отложив на какой-нибудь прямой 3 части, равные найденным на AB частям, вы и получите искомый отрезок CD (рис. 265).

Второй способ. Прямую AL (рис. 265) можно заменить линейкой, на которой отложены и перенумерованы какие-нибудь равные друг другу отрезки (рис. 266). Линейку эту надо приложить так,

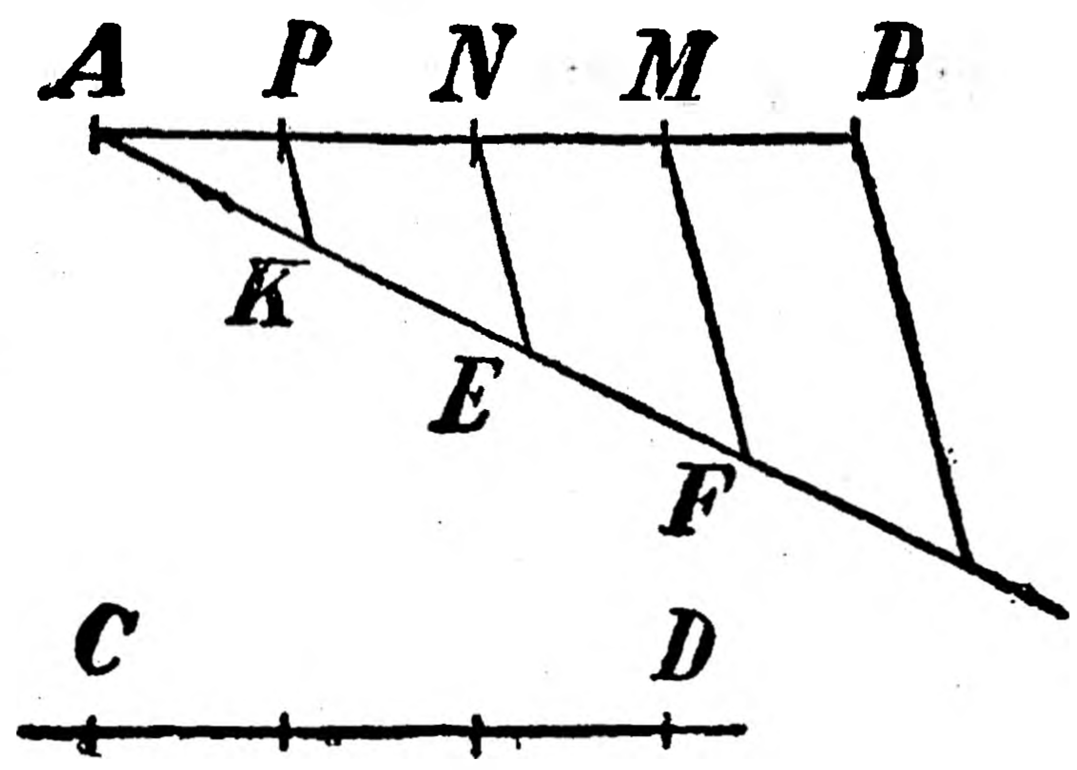


Рис. 265.

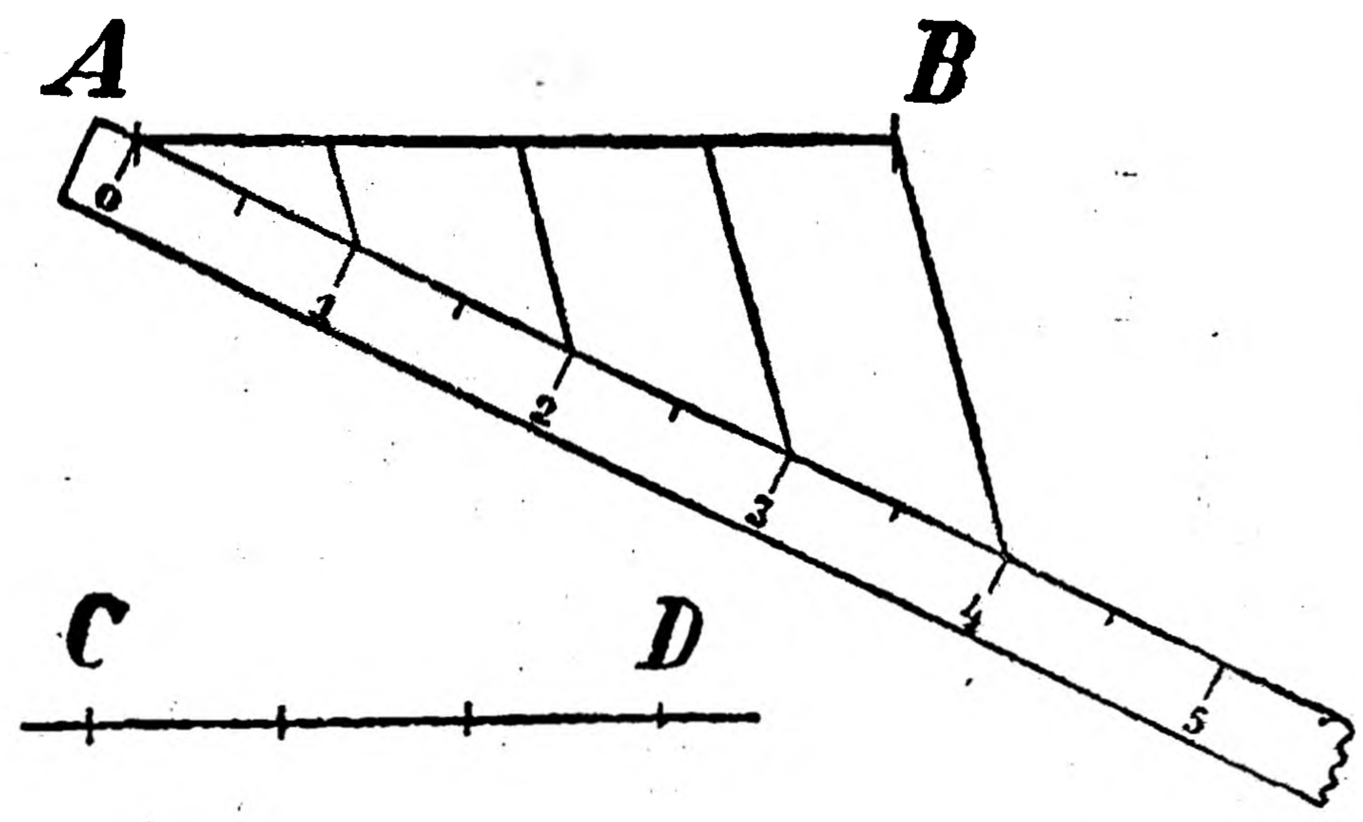


Рис. 266.

чтобы начало делений совпало с одним из концов A нашего отрезка AB. Соединив четвертое деление линейки с другим концом отрезка B и проведя пучок параллельных прямых через первое, второе и третье деления линейки, вы разделите отрезок AB на 4 равные части (рис. 266). Второй отрезок (CD) находится так же, как и в 1-м способе.

Проверьте непосредственным измерением, что отношение

$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}.$$

Задача. Разделить данный отрезок LM на такие два отрезка LN и NM, чтобы отношение между ними равнялось $^3/_7$.

$$\text{Отношение } \frac{LN}{NM} = \frac{3}{7}.$$

Один из искомых отрезков LN должен состоять из трех равных частей, а другой NM из 7 таких же частей. Следовательно, весь отрезок LM содержит 10 таких частей. Сделайте сами построение. Проверьте ответ непосредственным измерением найденных отрезков.

71. МАСШТАБ.

§ 235. Что такое масштаб. Часто является надобность изображать прямые линии очень больших размеров, например, расстояние между двумя городами, длину и ширину дома, высоту комнат и прочее. Нарисовать все эти прямые в натуральную величину мы не можем, поэтому мы их изображаем в уменьшенном виде. Желая, на-

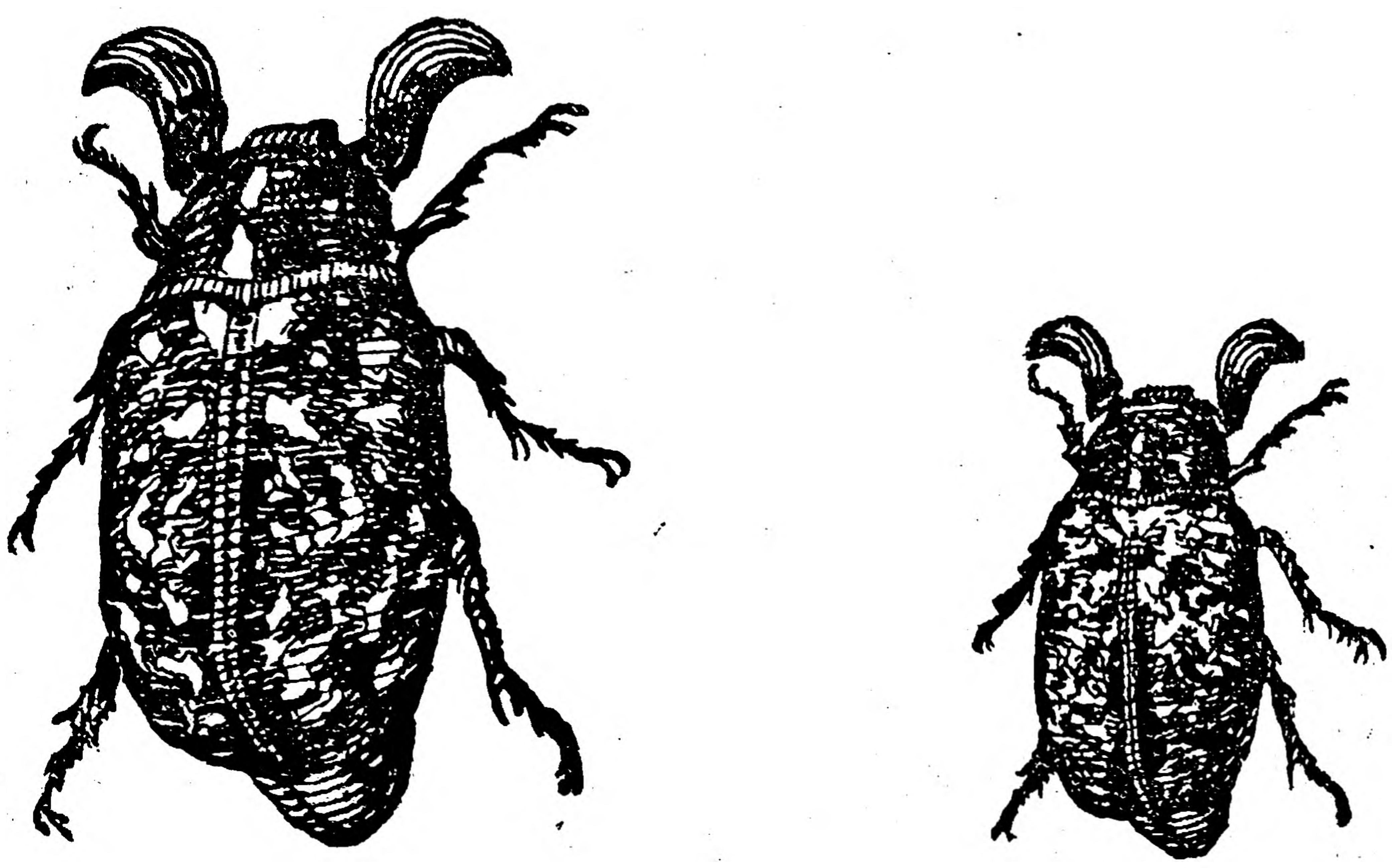


Рис. 267.
Слева нарисован жук в натуральную величину; узнайте, в каком масштабе нарисован жук справа.

пример, нарисовать человека, действительная высота которого равна 2 метрам, мы изображаем его всегда значительно меньшим. Нарисуйте его, например, вышиной в 2 сантиметра.

Высота нарисованного вами человека равна только 2 сантиметрам. Вычислите, какую часть действительной высоты составляет высота нарисованного таким образом человека. Для этого надо найти отношение 2 сантиметров к 2 метрам, что даст вам $2:200 = {}^1/_{100}$.

Вот, это число, которое показывает, какую часть действительных размеров составляют размеры нарисованных линий, называется *масштабом* рисунка.

Вычисленный нами масштаб (${}^1/_{100}$) показывает, что каждый метр действительной длины уменьшен на рисунке в 100 раз, то-есть изображен в виде сантиметра. Поэтому рисунок дополним изображением прямой линии, разделенной на сантиметры, при чем будем

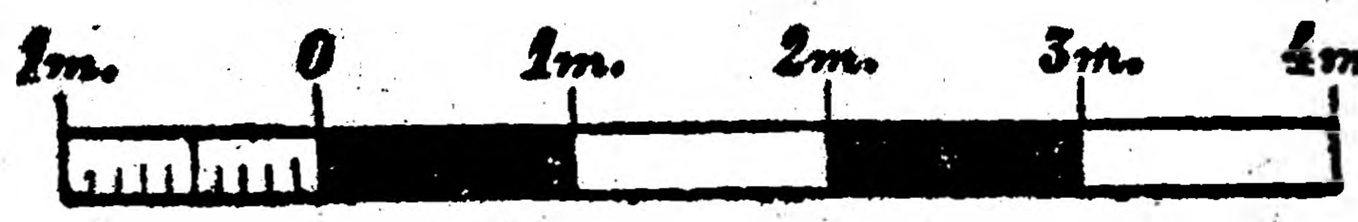


Рис. 268.

помнить, что каждый сантиметр рисунка соответствует в действительности одному метру. Итак, ваш рисунок нарисован в масштабе 1:100 или «1 метр в сантиметре». Масштаб обыкновенно изображают так, как показано на рисунке 268.

72. ПРОПОРЦИЯ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНИИ.

§ 236. Пропорция.

Опыт. Вырежьте несколько бумажных полосок длиною по 15 *мм* каждая и, приняв их за общую меру (§ 233), составьте из них два

Первая пара отрезков.

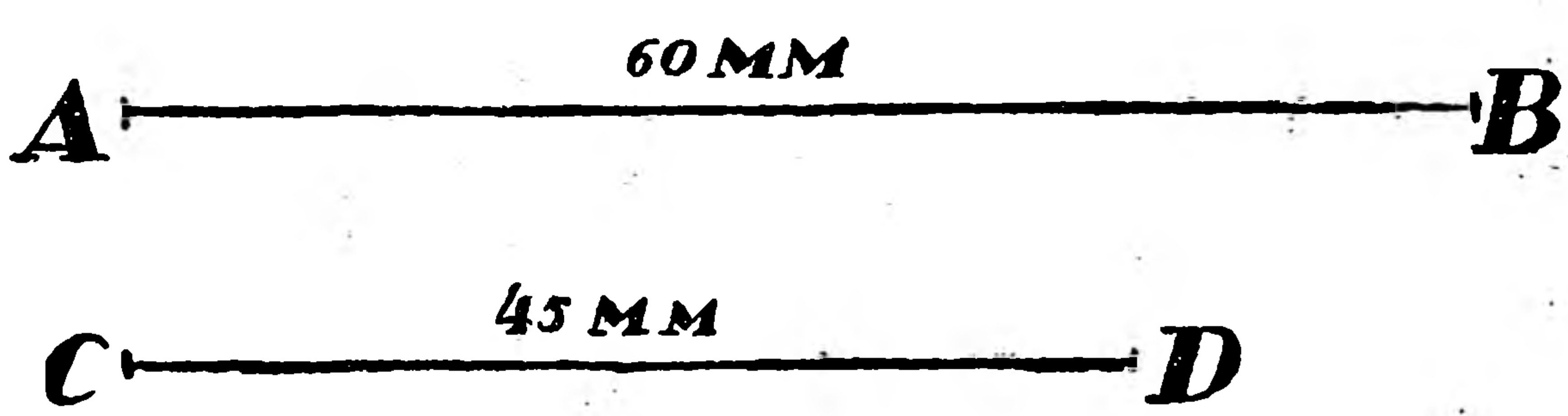


Рис. 269.

Вторая пара отрезков.

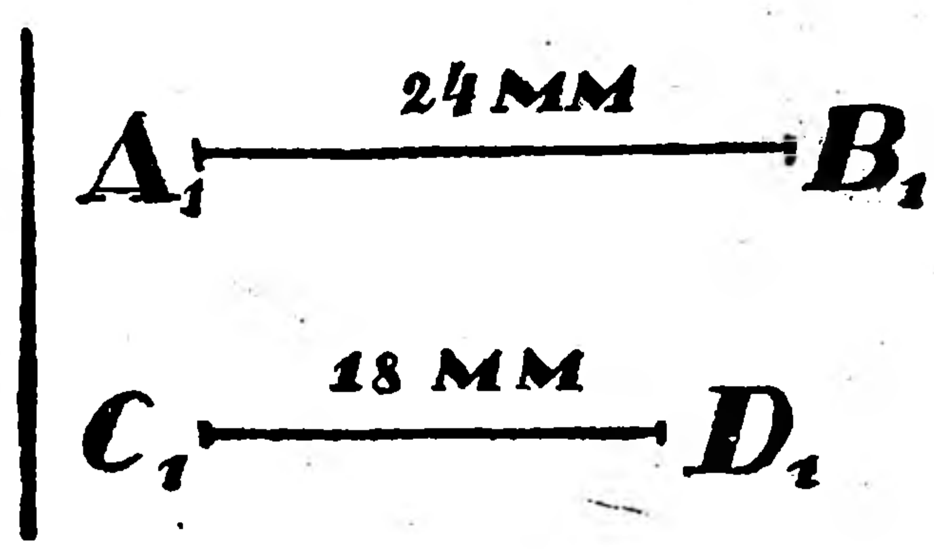


Рис. 270.

отрезка. Пусть первый отрезок AB состоит из 4 таких частей, а второй CD из 3-х (рис. 269). У вас получится пара прямых:

$$AB = 60 \text{ мм},$$
$$CD = 45 \text{ мм}.$$

Найдите отношение этой пары прямых:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}. \tag{1}$$

Приготовьте теперь несколько бумажных полосок по 6 *мм* каждая. Составьте из них два новых отрезка с тем самым числом частей: 4 и 3. Так как общая мера здесь будет иная (6 *мм*), то и у вас получится новая пара отрезков A_1B_1 и C_1D_1 (рис. 270).

$$A_1B_1 = 24 \text{ мм},$$
$$C_1D_1 = 18 \text{ мм}.$$

Отношение этой пары прямых равно

$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{4}{3}. \tag{2}$$

Оба найденные вами отношения оказались равными друг другу:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}.$$

Равенство двух отношений называется пропорцией, а те четыре отрезка, из которых мы составили пропорцию, называются членами пропорции.

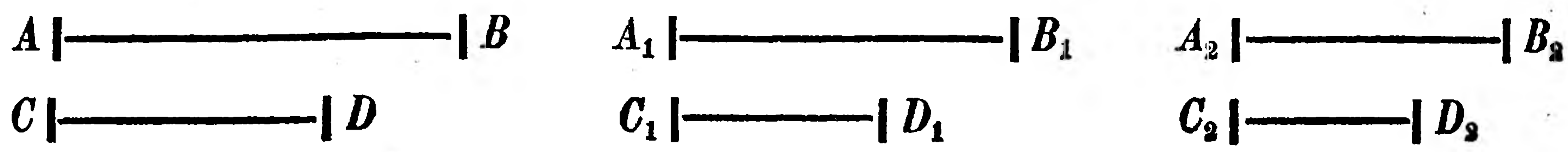


Рис. 271.

Измерив все пары нарисованных на рис. 271 прямых, найдем отношение каждой из них:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{3}{2}, \qquad \frac{A_1B_1}{C_1D_1}=\frac{3}{2}, \qquad \frac{A_2B_2}{C_2D_2}=\frac{3}{2}.$$

Мы видим, что все эти отношения равны друг другу.[1])

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A_1B_1}{C_1D_1}=\frac{A_2B_2}{C_2D_2}.$$[2])

Будем называть такие пары прямых пропорциональными. Следовательно, отрезки AB, A_1B_1 и A_2B_2 пропорциональны отрезкам CD, C_1D_1 и C_2D_2.

Упражнения и задачи.

1. Высота собаки = 0,5 *м*, волка = 80 *см*, лошади = 1,2 *м*, человека = 170 *см*, журавля = 1,6 *м*, верблюда = 230 *см*, слона = 3,5 *м*. Выразите эти высоты диаграммой.

2. Самые высокие облака «перистые» находятся на высоте 9000 *м*, высота «дождевых» туч равна 1500 *м*, а гора Казбек—высотою в 5000 *м*. Нарисуйте все эти высоты в виде прямых линий масштабом 500 метров в 1 миллиметре.

3. Возьмите карту СССР и при помощи указанного на ней масштаба вычислите расстояния между Москвою, Ленинградом, Нижним Новгородом, Казанью, Пермью. Узнайте, на каком расстоянии живете вы от Москвы.

---

[1]) Если отношения выражаются простыми дробями с большим числителем или знаменателем, то будем превращать их в десятичные дроби, вычислив последние с точностью до 0,01 или 0,1.

[2]) Эту строку можно прочитать так: отношение AB к CD равно отношению A_1B_1 к C_1D_1 и равно отношению A_2B_2 к C_2D_2. Чаще ее читают так: AB так относится к CD, как A_1B_1 к C_1D_1 и как A_2B_2 к C_2D_2.

ГЛАВА XVII.

ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ.

73. ПОДОБНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

§ 237. Что называется подобными многоугольниками?

Здесь нарисованы два многоугольника с одинаковым числом сторон (рис. 272). Эти многоугольники, хотя и неравны друг другу, но очень похожи один на другой. Исследуем их подробнее.

Опыт. Измерьте у этих многоугольников все стороны и углы. Равны ли у этих многоугольников соответственные углы $\angle A$ и $\angle A_1$, $\angle B$ и $\angle B_1$ и т. д.? Равны ли сходственные [1]) стороны? А не будут ли равны их отношения?

Результат опыта. Углы у первого многоугольника: $\angle A = 110°$, $\angle B = 128°$, $\angle C = 40°$, $\angle D = 82°$; у второго многоугольника: $\angle A_1 = 110°$, $\angle B_1 = 128°$, $\angle C_1 = 40°$, $\angle D_1 = 82°$. Соответственные углы оказались равными.

Стороны:

Первая пара сходственных сторон:

$$BC = 25 \text{ мм};$$

$$B_1C_1 = 12{,}5 \text{ мм};$$

$$\frac{BC}{B_1C_1} = 2.$$

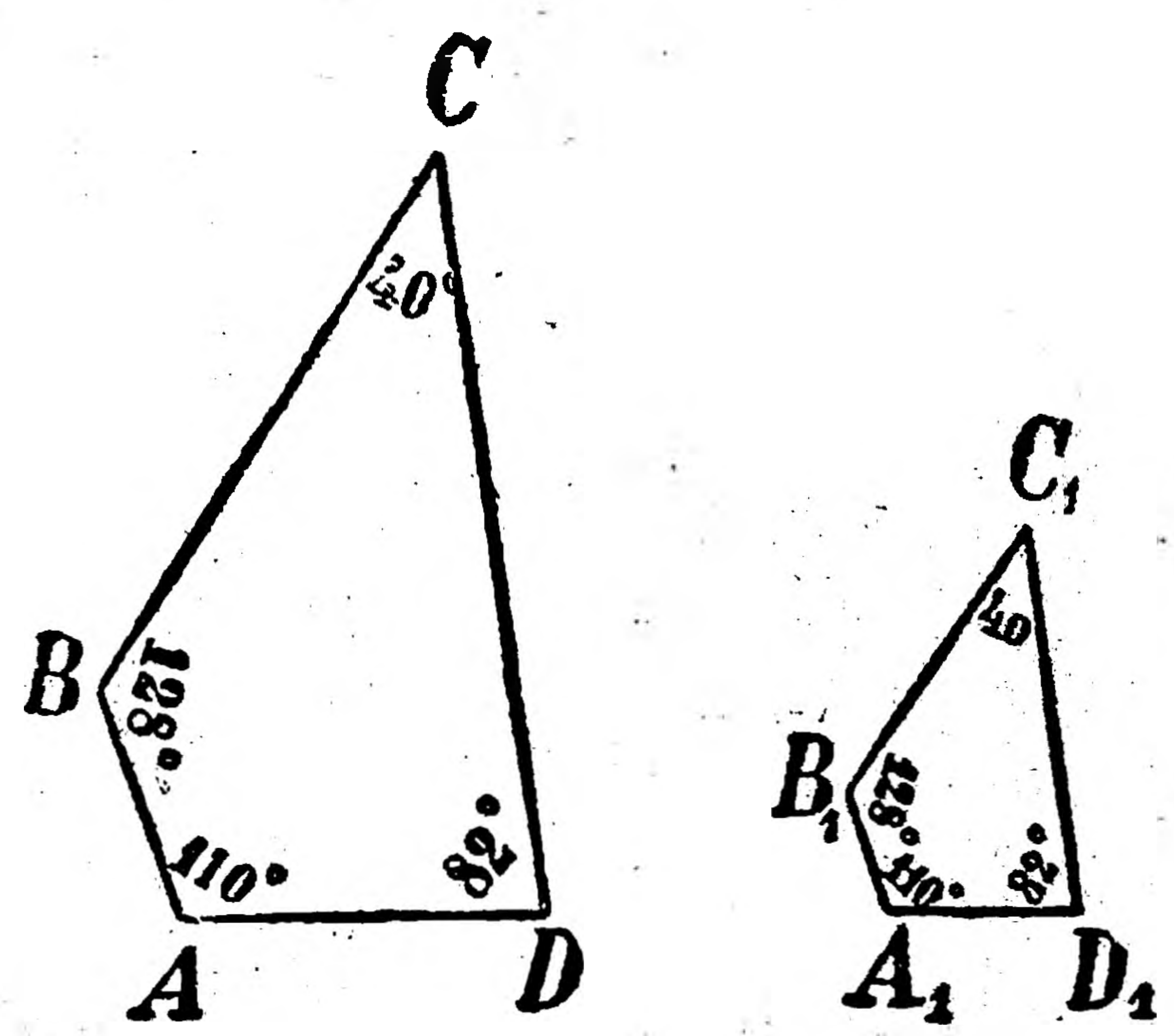


Рис. 272.

Вторая пара сходственных сторон:

$$CD = 31 \text{ мм};$$

$$C_1D_1 = 15{,}5 \text{ мм};$$

$$\frac{CD}{C_1D_1} = 2.$$

Третья пара сходственных сторон:

$$AD = 15 \text{ мм}; \; A_1D_1 = 7{,}5 \text{ мм}; \; \frac{AD}{A_1D_1} = 2.$$

Четвертая пара сходственных сторон:

$$AB = 10 \text{ мм}; \; A_1B_1 = 5 \text{ мм}; \; \frac{AB}{A_1B_1} = 2.$$

---

[1]) Так называются стороны, лежащие против равных углов, например, AB и A_1B_1, BC и B_1C_1.

Отношения сходственных сторон оказались одинаковыми, следовательно, сходственные стороны наших многоугольников пропорциональны.

Два многоугольника, у которых, во-первых, все соответственные углы равны, а, во-вторых, все сходственные стороны пропорциональны, называются подобными многоугольниками.

Слово «подобен» заменяется значком $\backsim$.

74. ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 238. Основная теорема о подобии треугольников.

Теорема. Прямая, проведенная внутри треугольника параллельно одной из сторон треугольника, отсекает от него новый треугольник, подобный первоначальному.

Опыт. Нарисуйте какой-нибудь треугольник, например, $\triangle ABC$ (рис. 273), и проведите в нем прямую DE, параллельную основанию AC. Эта прямая отсечет новый треугольник BDE. Измерив все соответственные углы и все сходственные стороны, убедитесь, что $\triangle ABC$ подобен $\triangle DBE$.

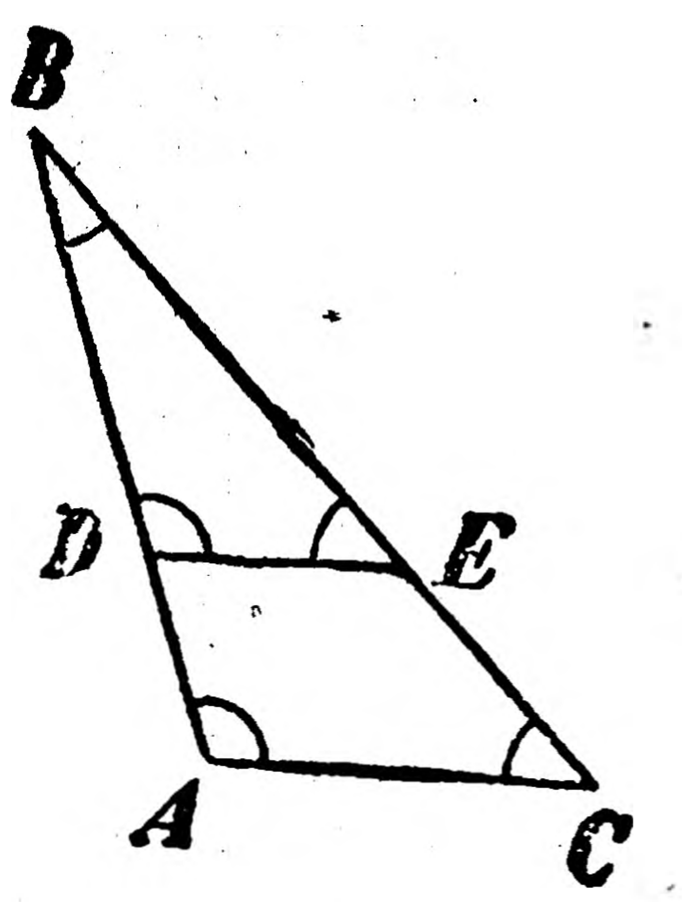


Рис. 273.

Доказательство. Равенство углов. У треугольников ABC и DBE все углы должны быть равны друг другу. В самом деле:

$\angle A = \angle D$, как углы соответственные ($DE \parallel AC$, а AB — секущая).

$\angle E = \angle C$, как соответственные (при параллельных DE и AC и секущей BC).

$\angle B$ у них общий.

Пропорциональность сторон. 1) Найдем сначала отношение первой пары сходственных сторон BC и BE. Это отношение мы получим так: измерив одной и той же общей мерой (миллиметром стороны BC и BE и разделив полученные после измерения числа найдем, что отношение

$$\frac{BC}{BE} = \frac{6}{4}.$$

2) Займемся теперь вторым отношением $\frac{BA}{BD}$.

Это отношение мы найдем тем же приемом, что и первое, но можно найти его иначе.

Отношение первой пары сторон $\frac{BC}{BE}$ равнялось $^6/_4$; следовательно, если мы разделим BE на 4 равные части, то полученные отрезки уложатся на стороне BC в 6 раз.

Проведем теперь через точки деления BC пучок прямых, параллельных DE (рис. 274). Этот пучок разделит стороны AB и BD на ряд новых отрезков. Эти новые отрезки должны быть равны друг другу (почему? § 190), при чем на AB таких отрезков должно уложиться 6, а на BD — 4.

Следовательно, отношение

$$\frac{BA}{BD}=\frac{6}{4}.$$

3) Остается теперь найти третье отношение $\frac{AC}{DE}$.

Проведем через точки деления стороны BC пучок прямых, параллельных стороне AB (рис. 275). Этот пучок разделит сторону AC на

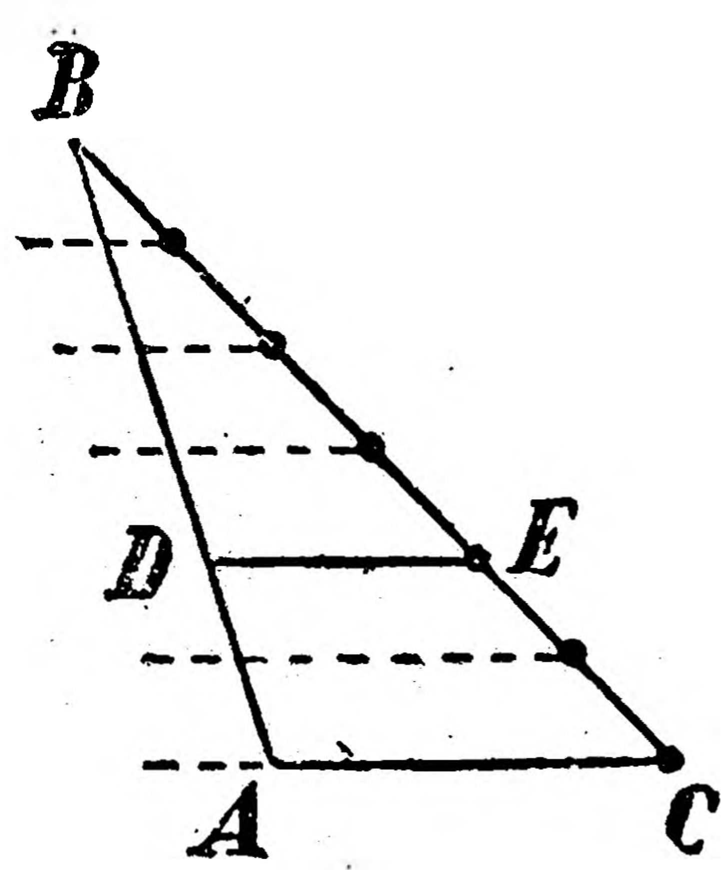


Рис. 274.

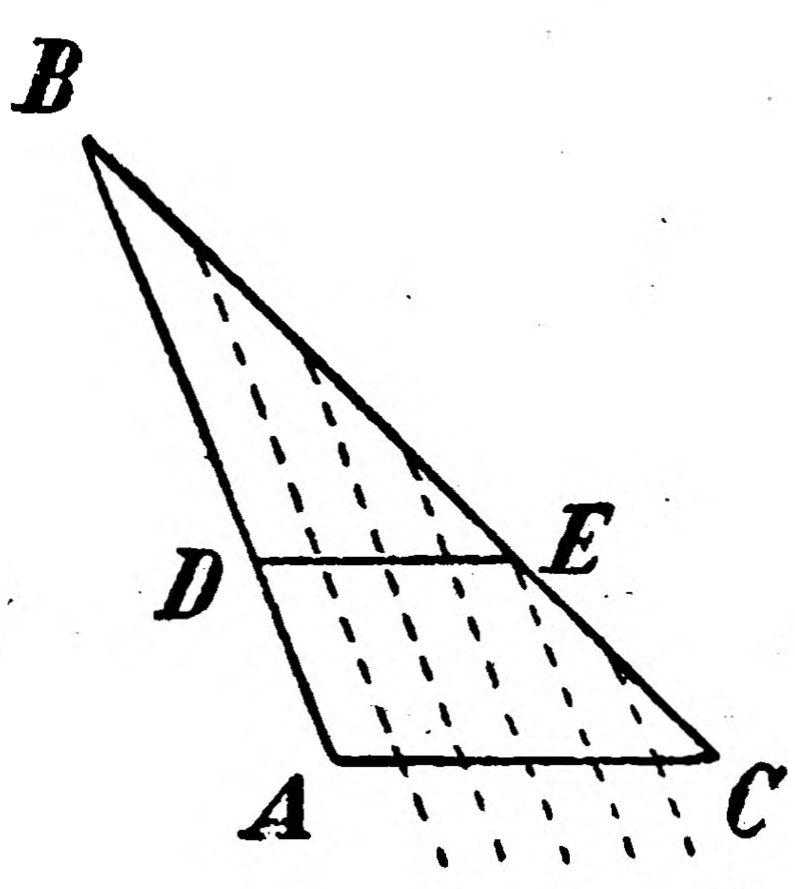


Рис. 275.

шесть равных друг другу отрезков (примените к углу BCA теорему § 190), сторона DE этим пучком разделится на 4 равные отрезка (примените ту же теорему к углу BED). Отрезки, отложенные на сторонах AC и DE, должны быть равны друг другу (противоположные стороны параллелограмов, § 184), следовательно, они могут служить общей мерой для сторон AC и DE (длина каждого из этих отрезков $=2{,}5$ *мм*). Таким образом, и третье отношение должно дать нам отношение

$$\frac{AC}{DE}=\frac{6}{4}.$$

Следовательно, все три отношения должны всегда быть равными друг другу:

$$\frac{BC}{BE}=\frac{BA}{BD}=\frac{AC}{DE}.$$

Итак, в этих двух треугольниках — $\triangle ABC$ и $\triangle DBE$ — все соответственные углы равны друг другу, а стороны пропорциональны; следовательно, наши треугольники подобны:

$$\triangle ABC \backsim \triangle DBE,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если между сторонами угла ABC провести две какие-нибудь параллельные прямые DE и AC, то отношение этих прямых $\frac{DE}{AC}$ равно отношению сторон $\frac{BE}{BC}$ или $\frac{BD}{BA}$.

Следствие 2. Всякая прямая (DE), делящая две стороны треугольника (AB и BC) в одном и том же отношении, должна быть параллельна третьей стороне (AC, рис. 274).

Доказательство. Найдите на двух сторонах треугольника ABC (рис. 274) такие две точки D и E, которые делят эти стороны в одном и том же отношении. На рисунке 274 точки D и E делят стороны AC и BC в таком отношении:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{EC}{BE}=\frac{2}{4}.$$

Соединим точки D и E прямой линией и докажем, что прямая DE параллельна третьей стороне AC. Проведем из точки D, делящей AB в отношении $2:4$, прямую, параллельную AC. Эта прямая, согласно § 190, должна встретить сторону BC в точке E, следовательно, наша параллельная прямая, идущая из точки D, должна пройти и через точку E. Итак, DE есть прямая, параллельная AC.

§ 239. Первый признак подобия треугольников.

Теорема. **Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны.**

Опыт. Нарисуйте две прямых AB и A_1B_1 разной длины. На одной из них (на AB) постройте какой-нибудь треугольник ABC

(рис. 276), измерьте два его угла: $\angle A$ и $\angle B$ и нарисуйте на другой прямой A_1B_1 у ее концов A_1 и B_1 углы, соответственно равные углам A и B. Вы получите второй треугольник $A_1B_1C_1$. Не будут ли эти треугольники подобны? Убедитесь в этом непосредственным измерением сторон.

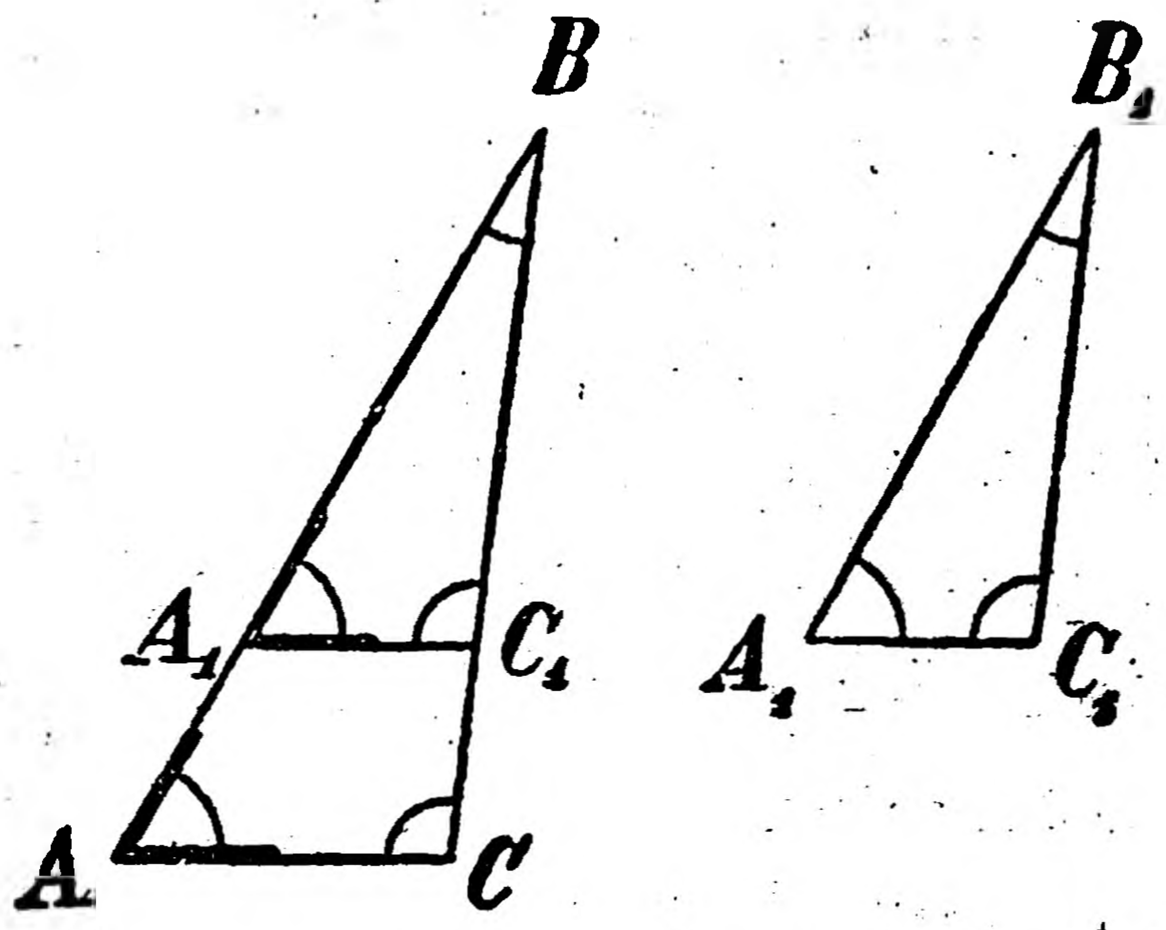


Рис. 276.

Доказательство. Вырежем меньший из этих треугольников ($\triangle A_1B_1C_1$) и наложим его на больший ($\triangle ABC$) так, чтобы равные углы ($\angle B_1$ и $\angle B$) совпали друг с другом; тогда сторона B_1A_1 должна пойти по стороне BA, а сторона B_1C_1 по BC. Так как сторона B_1A_1 короче, чем BA, то конец ее A_1 ляжет где-либо на стороне BA. В виду того, что угол A_1 равен углу A, сторона A_1C_1 должна пойти параллельно AC (соответственные углы $\angle A_1$ и $\angle A$ равны только тогда, когда линии A_1C_1 и AC параллельны — § 172). Но если A_1C_1 параллельна AC, то $\triangle A_1B_1C_1$ должен быть подобен треугольнику ABC.

Следствие. У двух подобных треугольников отношение сходственных высот равно отношению сходственных сторон.

Пусть $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$; докажите, что

$$\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Указание. Надо исследовать два треугольника: $\triangle ABD$ и $\triangle A_1B_1D_1$ (рис. 277).

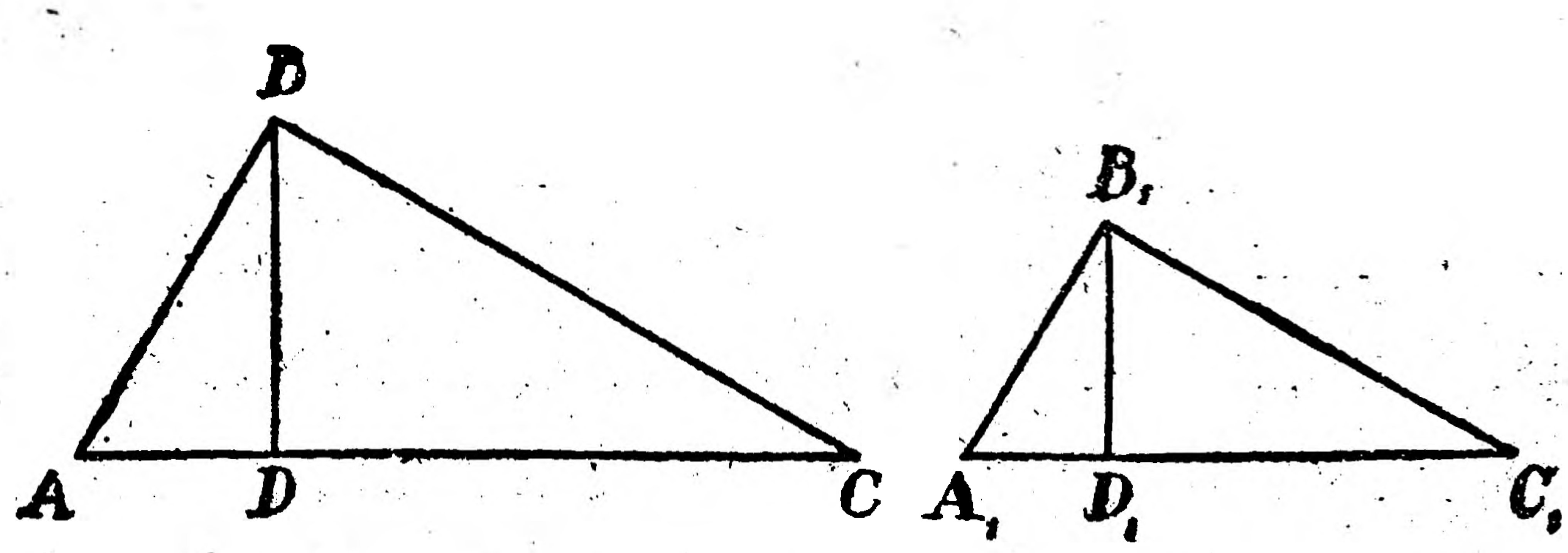


Рис. 277.

§ 240. *Задача.* **Измерить расстояние между двумя точками A и B, если к одной из них (B) нельзя подойти.**

Измерить, например, ширину реки AB (рис. 153).

Задачу эту мы уже решили в § 154 построением двух одинаковых треугольников.

Пользуясь изученным только-что признаком подобия треугольников, можно эту же самую задачу решить более простым способом. Так как нарисовать на бумаге треугольник, равный треугольнику ABC, отмеченному на земле, мы не можем, то построим у себя в тетради треугольник $A_1B_1C_1$, подобный отмеченному на земле треугольнику ABC (рис. 277), уменьшив все стороны его в одном и том же отношении. Прежде всего нужно подобрать для сторон нового треугольника подходящий масштаб с таким расчетом, чтобы этот треугольник мог поместиться на данном листе бумаги. Нарисовав затем в найденном масштабе сторону A_1C_1, надо у концов ее A_1 и C_1 построить углы, соответственно равные углам A и C. Тогда вы получите треугольник $A_1B_1C_1 \backsim ABC$ (§ 239). Остается измерить в этом треугольнике сторону A_1B_1 и, зная масштаб, вычислить размеры искомой сходственной стороны AB.

§ 241. Второй признак подобия треугольников.

Теорема. Если у двух треугольников (ABC и $A_1B_1C_1$) две стороны пропорциональны и углы, заключенные между этими сторонами, равны ($\angle B = \angle B_1$), то́ такие треугольники подобны.

Опыт. Дан треугольник ABC (рис. 278). Измерьте его угол B и две стороны BA и BC, прилегающие к этому углу. Нарисуйте теперь

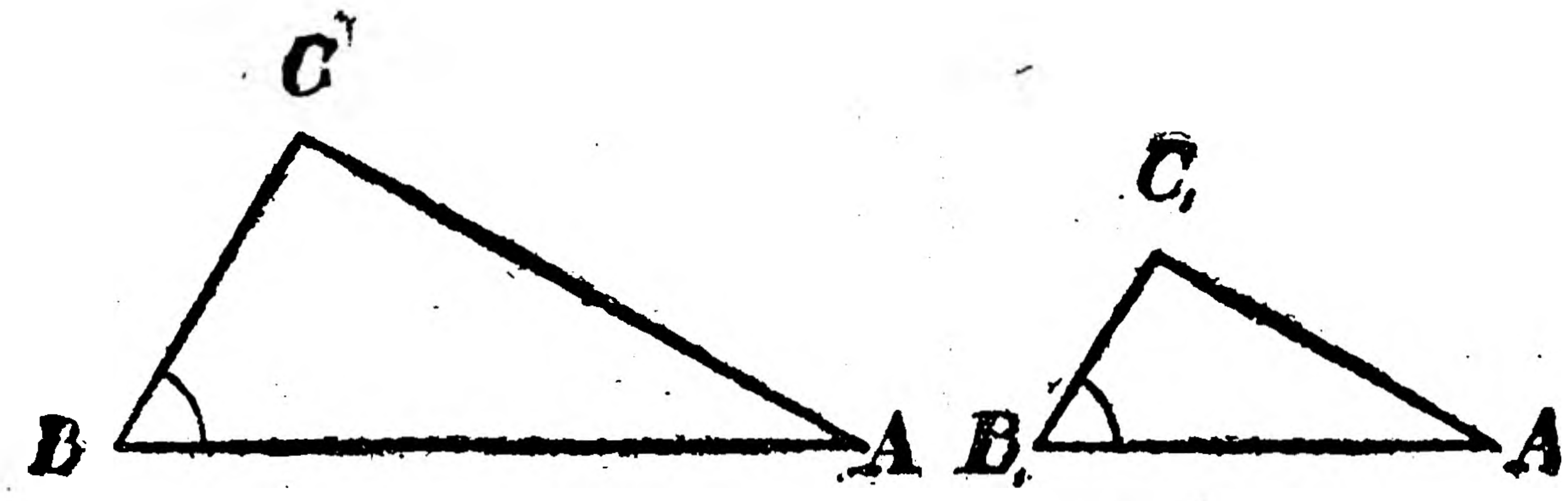


Рис. 278.

второй треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы у него угол B_1 равнялся углу B, а стороны B_1A_1 и B_1C_1 были пропорциональны сторонам BA и BC, то-есть, чтобы отношения: $\frac{BA}{B_1A_1}$ и $\frac{BC}{B_1C_1}$ выражались одним и тем же числом (вспомните § 234, где рассказано, как это сделать).

Измерив третью пару сторон AC и A_1C_1, найдите отношение

$$\frac{AC}{A_1C_1}.$$

Убедитесь, что у наших треугольников все три сходственные стороны имеют одинаковые отношения и все три соответственные угла равны, то-есть убедитесь, что эти треугольники подобны.

Доказательство. Вырежем треугольник $A_1B_1C_1$ и наложим его на треугольник ABC (рис. 279). Угол B_1 совпадает с углом B (Почему?) Точка A_1 ляжет в точку D, а точка C_1 в точку E, при чем точки D и E разделят стороны AB и BC в одном и том же отношении. Следовательно, прямая DE будет параллельна AC (§ 238, следствие 2-е), а потому треугольник $A_1B_1C_1$, занявший положение DBE, должен быть обязательно подобен треугольнику ABC (§ 238).

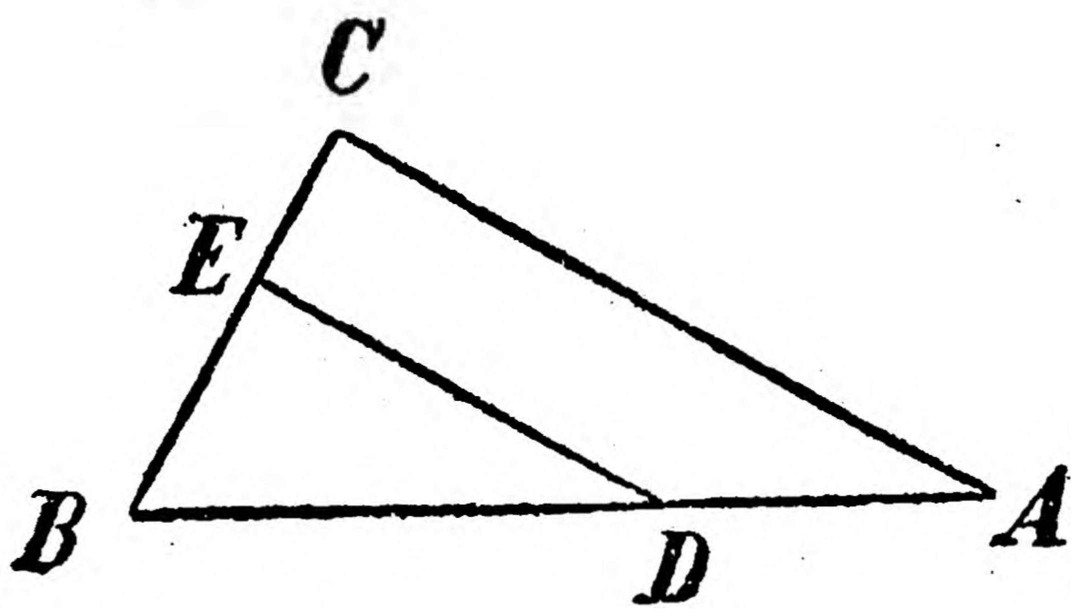


Рис. 279.

§ 242. *Задача.* Измерить расстояние между двумя точками A и C, между которыми находится препятствие.

Эту задачу мы решили в § 152 при помощи построения треугольника DCE, равного треугольнику ABC (рис. 150, стр. 95). Если воспользоваться только что доказанным признаком подобия треугольников, то ту же самую задачу можно решить более простым способом.

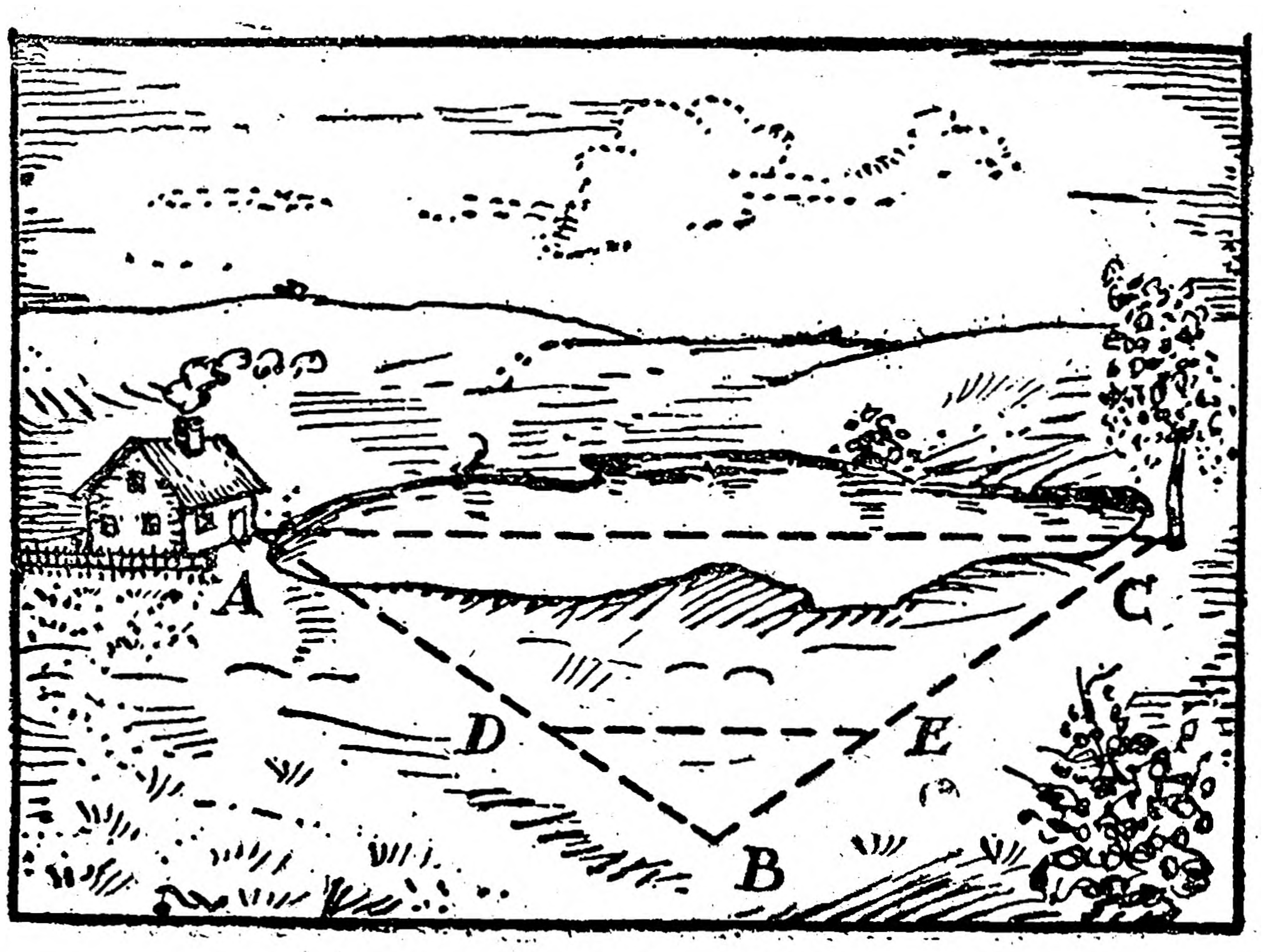


Рис. 280.

Первое решение. Если местность вокруг точки B (рис. 280) достаточно ровная, то можно сделать так: измерив прямые AB и BC, разделите их в точках D и E в каком-нибудь одном и том же отношении. Соедините точки D и E прямой линией и измерьте эту прямую DE.

Измерив DE, нетрудно вычислить и расстояние AC.

Второе решение. Если местность не дает возможности построить прямую DE, то можно, измерив стороны AB, BC и угол B, построить у себя в тетради $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы $\angle B_1 = \angle B$, а стороны B_1A_1 и B_1C_1 были нарисованы в одном и том же масштабе, составляющем одну и ту же дробную часть сторон BA и BC. Тогда отношение сторон $\frac{A_1B_1}{AB}$ будет равно отношению $\frac{B_1C_1}{BC}$, а потому $\triangle A_1B_1C_1$ будет подобен $\triangle ABC$.

Измерив сторону A_1C_1 и зная масштаб ее, вы без труда найдете длину искомой стороны AC [1]).

75. ЧИСЛОВЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

§ 243. *Теорема.* В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы.

Опыт. Нарисуйте прямоугольный треугольник ABC (рис. 281). Проведите из вершины прямого угла на гипотенузу перпендикуляр AD. Измерьте длину этого перпендикуляра и длину двух образовавшихся отрезков DC и DB гипотенузы. Постарайтесь составить пропорцию из полученных чисел.

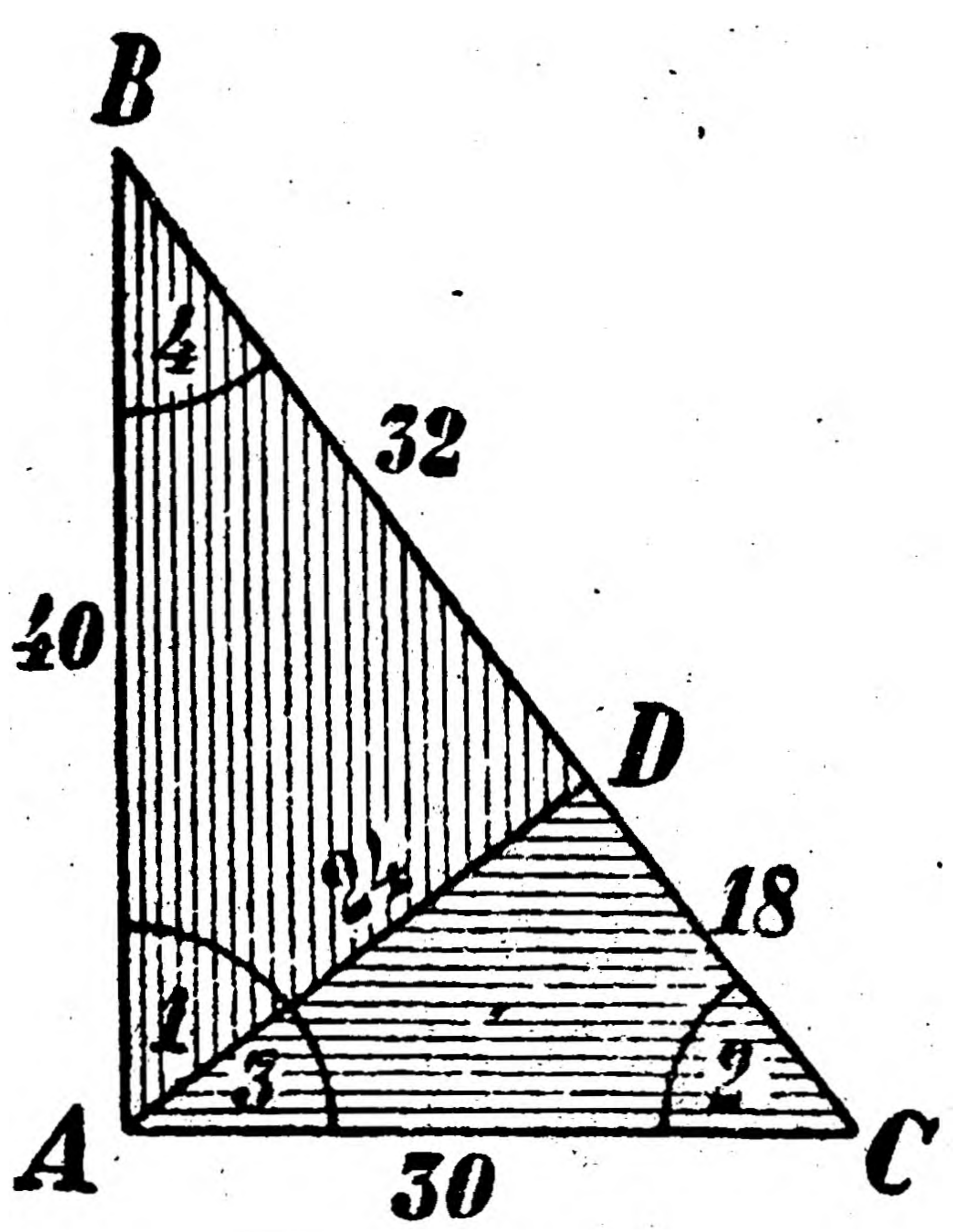


Рис. 281.

Результат опыта. На рис. 281:

Отрезки гипотенузы: $BD = 32$ *мм*; $DC = 18$ *мм*.

Перпендикуляр $AD = 24$ *мм*.

Между этими числами можно составить такие отношения: $\frac{BD}{AD} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$ и $\frac{AD}{DC} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$.

Так как эти отношения равны, то получим пропорцию:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

---

[1]) Третий признак подобия треугольников — подобие по трем пропорциональным сторонам — очень редко применяется к делу; поэтому он в учебнике пропущен и перенесен в задачник.

В этой пропорции средние члены (AD) одинаковы. Такая пропорция называется непрерывной, а средний член ее называется «средней пропорциональной» между двумя другими членами.

В нашем примере перпендикуляр AD оказался средней пропорциональной между отрезками гипотенузы BD и DC.

Доказательство. Надо найти зависимость между отрезками

$$AD,\ BD \text{ и } DC.$$

Они входят в состав треугольников: ABD и ADC (рис. 282).

У $\triangle ABD$: $\angle 4 = 90° - \angle 1$ (так как $\angle 1 + \angle 4$ дают в сумме 90°, как острые углы прямоугольного треугольника, § 179).

У $\triangle ADC$: $\angle 3 = 90° - \angle 2$ ($\angle 2 + \angle 3$ составляют прямой угол).

Следовательно,

$$\angle 4 = \angle 3.$$

По той же причине

$$\angle 1 = \angle 2.$$

А потому: $\triangle ABD \backsim \triangle ADC$ (первый признак подобия, § 239).

У подобных треугольников стороны, лежащие против равных углов, пропорциональны. Итак, $\triangle ABD \backsim \triangle ADC$.

Следовательно,

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC},$$

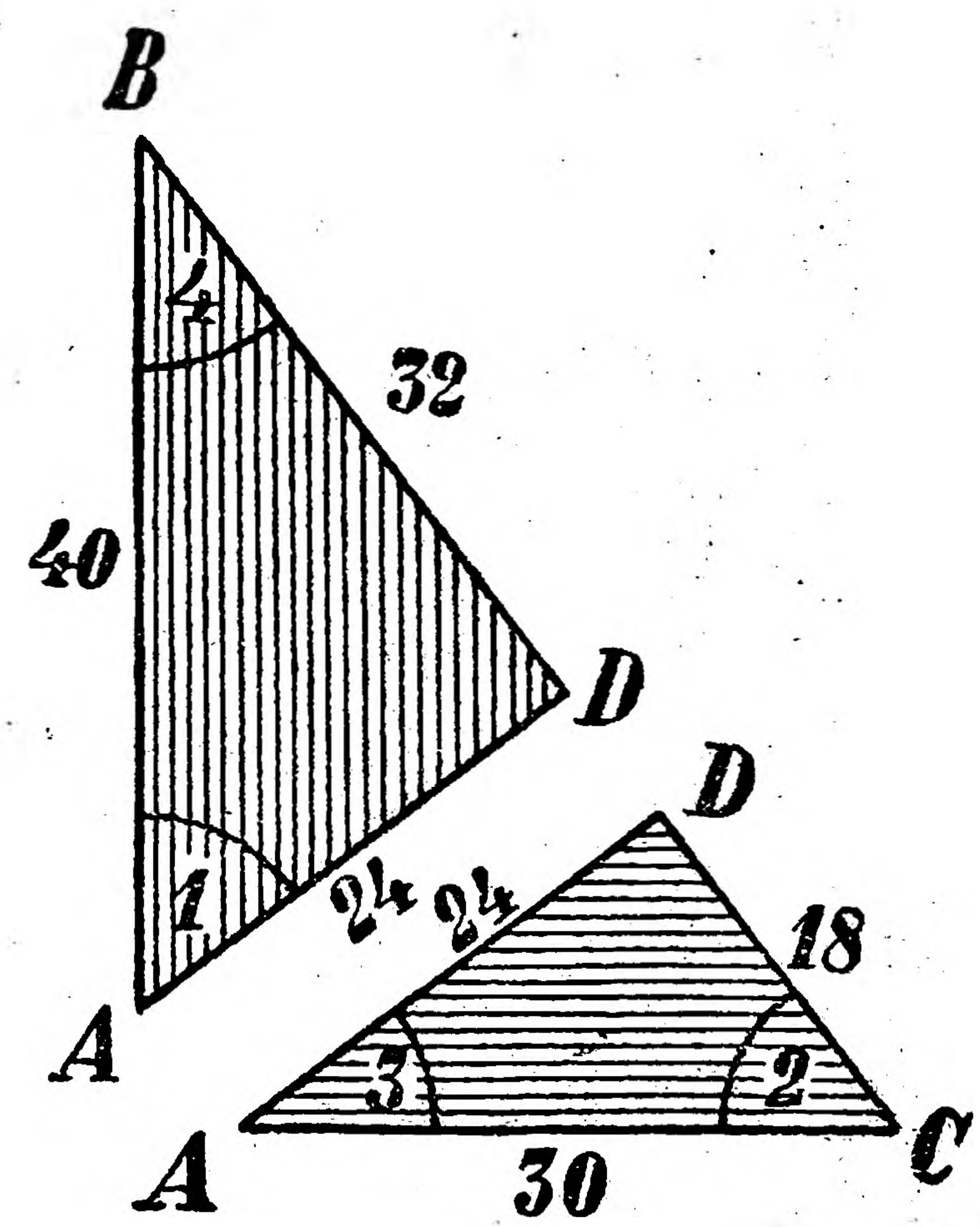


Рис. 282.

что и требовалось доказать.

§ 244. *Теорема.* Каждый из катетов есть среднее пропорциональное между гипотенузой и прилегающим (к катету) отрезком ее, отсекаемым перпендикуляром, опущенным из вершины прямого угла на гипотенузу (см. § 243).

Опыт. Измерьте AC, BC и CD на рисунке 281:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3};\ \frac{AC}{DC} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3},$$

то-есть

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}. \qquad (1)$$

Доказательство. Эти отрезки входят в состав двух прямоугольных треугольников: ABC и ADC (рис. 283), у которых

$$\angle A = \angle ADC \text{ (как прямые)}$$

$$\text{и } \angle 4 = \angle 3 \text{ (§ 243)},$$

а потому

$$\triangle ABC \backsim \triangle ADC.$$

Следовательно, у этих треугольников гипотенузы пропорциональны катетам, лежащим против $\angle 4$ и $\angle 3$:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC},$$

что и требовалось доказать.

Докажите сами, что для второго катета AB существует такая зависимость:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}. \tag{2}$$

Указание. Надо исследовать $\triangle ABC$ и $\triangle ADB$ (рис. 283).

§ **245.** *Теорема.* Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Доказательство. В предыдущем параграфе мы нашли такие пропорции: $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$ и $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$.

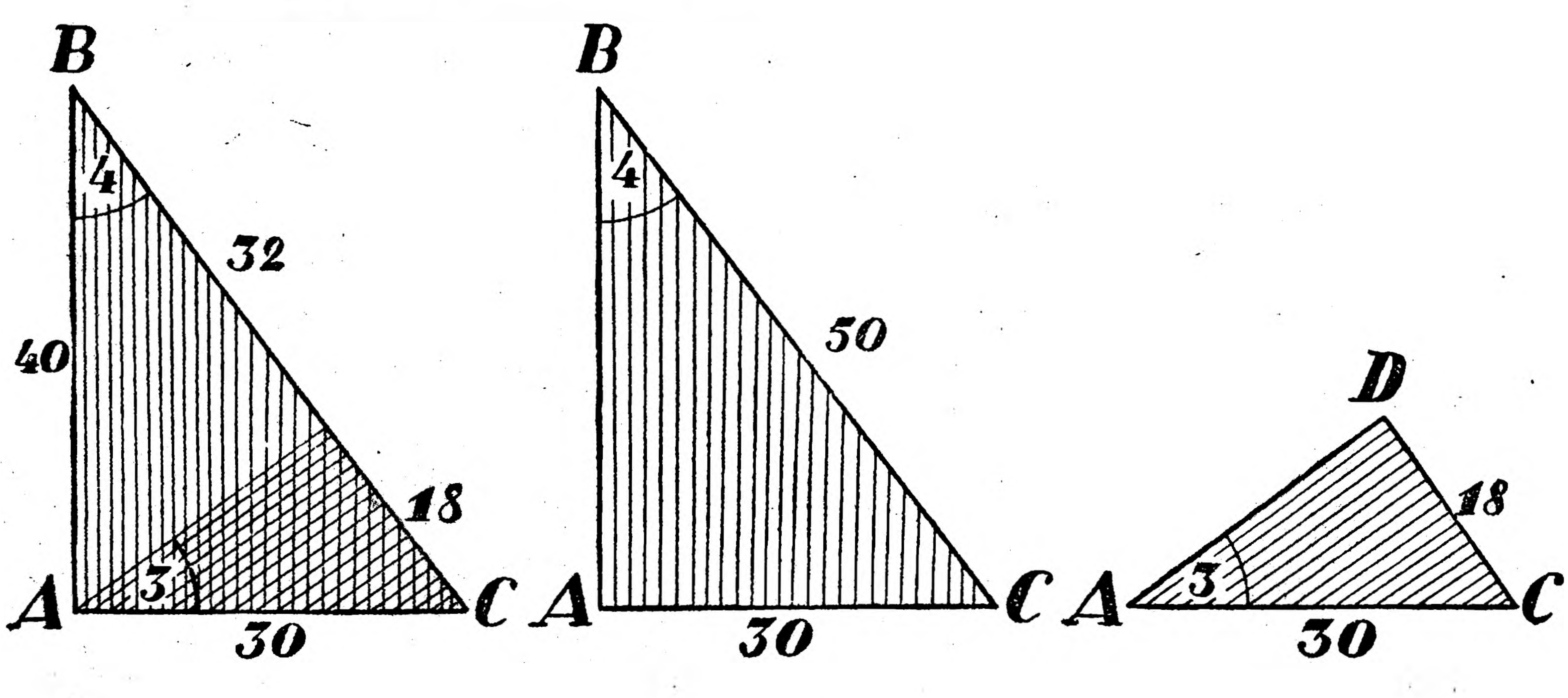


Рис. 283.

Произведение средних членов пропорции равно произведению крайних; из формулы (2):

$$AB^2 = BC \cdot BD,$$

из формулы (1)

$$AC^2 = BC \cdot DC.$$

Сложим эти равенства:

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BD + BC \cdot DC,$$

или

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BD + DC);$$

так как $BD + DC = BC$ (см. рис. 283), то

$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

что и требовалось доказать.

Сравните эту теорему с доказанной раньше теоремой Пифагора (§ 230).

76. ПОДОБНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

§ 246. Построение подобных многоугольников. П о д о б н ы м и многоугольниками мы назвали такие, у которых все соответственные углы равны, а все сходственные стороны пропорциональны.

Дан многоугольник $ABCDE$ (рис. 284).

Нарисуем второй многоугольник так, чтобы у него углы были такие же, как у первого, а каждая сторона составляла некоторую часть соответствующей стороны первого.

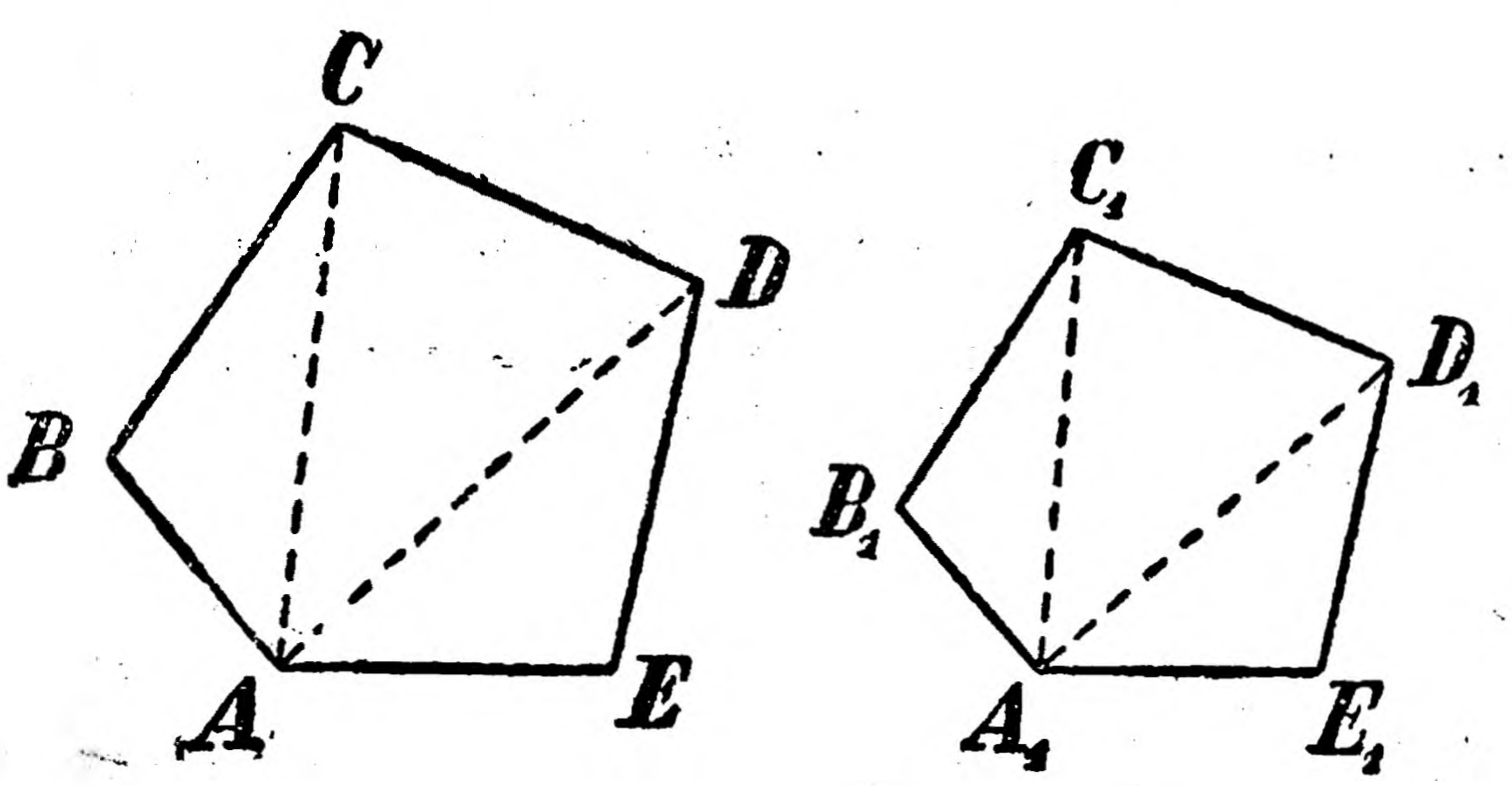


Рис. 284.

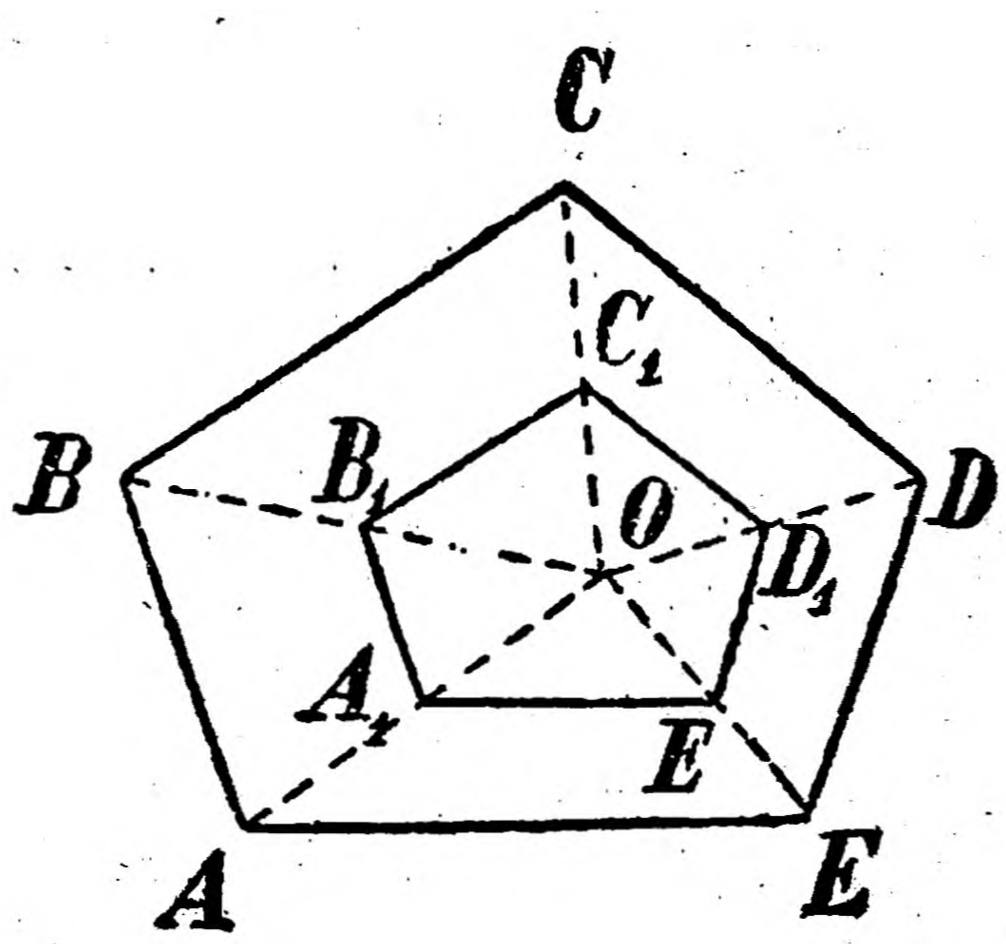


Рис. 285.

Первый способ. Нарисуйте сначала $\angle A_1$, равный $\angle A$. Затем отложите сторону $A_1B_1 = {}^4/_5 AB$. У конца B_1 нарисуйте угол B_1, равный углу B, от него отложите сторону $B_1C_1 = {}^4/_5 BC$ и т. д., пока не вернетесь к вершине A_1. У вас должен получиться многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобный многоугольнику $ABCDE$. Почему эти многоугольники подобны?

Второй способ. Нарисуйте многоугольник $ABCDE$ (рис. 285). Отметьте внутри его какую-нибудь точку O и соедините ее со всеми вершинами. Вы получите ряд лучей OA, OB, OC и т. д. Разделите каждую эту прямую в одном и том же отношении. Пусть, например, $OA_1 = {}^1/_2 OA$; $OB_1 = {}^1/_2 OB$ и т. д. Соедините прямыми линиями точки A_1, B_1, C_1 и т. д. Вы получите многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, который должен быть подобен многоугольнику $ABCDE$. Докажите это.

Указание. $A_1B_1 \parallel AB$; $B_1C_1 \parallel BC$ и т. д. (§ 238, след. 2-е).

§ 247. Правильные подобные многоугольники.

Теорема. Все правильные многоугольники, имеющие одинаковое число сторон, подобны.

Какие многоугольники назвали мы правильными? (203).

Нарисуйте два каких-нибудь правильных многоугольника, имеющих одно и то же число сторон. Докажите, что у этих многоугольников, во-первых, все соответственные углы ($\angle A$ и $\angle A_1$; $\angle B$ и $\angle B_1$ и т. д.) должны быть равны друг другу (вспомните § 203); во-вторых, все отношения сходственных сторон $\left(\frac{AB}{A_1B_1}; \frac{BC}{B_1C_1}\right.$ и т. д.$\left.\right)$ должны быть одинаковы (§ 246).

Проверьте это непосредственным измерением углов и сторон.

77. ПЕРИМЕТРЫ И ПЛОЩАДИ ПОДОБНЫХ ФИГУР.

§ 248. Зависимость между периметрами и сторонами подобных многоугольников.

Теорема. Отношение периметров подобных многоугольников равно отношению их сходственных сторон.

Опыт. Нарисуйте два подобных многоугольника по одному из способов, изложенных в § 246 (рис. 286).

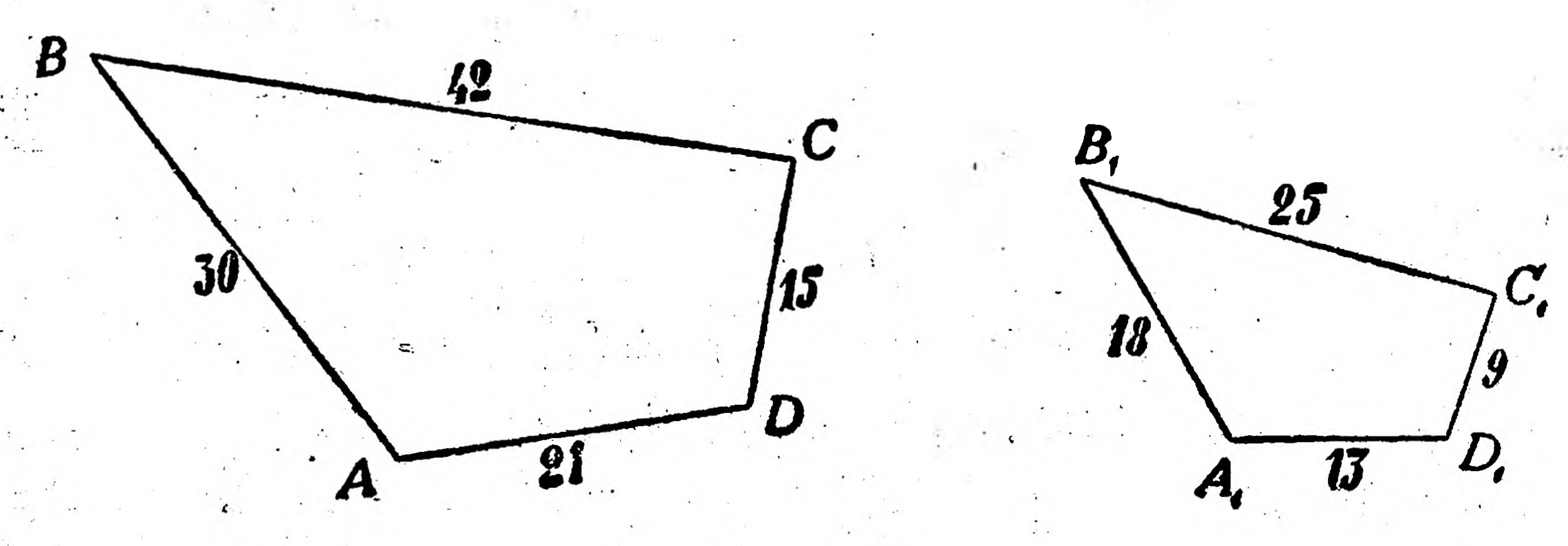


Рис. 286.

Измерьте стороны этих многоугольников и найдите их отношение. Обведите границу каждого многоугольника. Сумма сторон многоугольника называется периметром его. Нарисуйте прямые, равные периметрам этих многоугольников. Измерьте эти периметры и найдите их отношение.

Сравните отношение периметров с отношением сторон.

Результат опыта. У многоугольников на рис. 286 отношение любой пары сходственных сторон одинаково. Например:

$$\text{стороны:}\ \begin{cases} A_1B_1 = 18\ \text{мм}, \\ AB\ \ = 30\ \text{мм}. \end{cases}$$

Отношение сторон $= 0{,}6$.

$$\text{Периметры:}\ \begin{cases} A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1 = 65\ \text{мм}, \\ AB + BC + CD + DA = 108\ \text{мм}. \end{cases}$$

Отношение периметров $= 0{,}6$.

Следовательно, у ваших подобных многоугольников отношение периметров оказалось равным отношению сторон.

Доказательство. Вытянем периметры этих многоугольников в одну прямую линию. Тогда у нас получатся две прямые такой длины:

Периметр меньшего многоугольника $A_1B_1C_1D_1$

Периметр большего многоугольника $ABCD$

Так как каждая сторона, входящая в состав меньшего периметра, составляет 0,6 частей соответствующей стороны большего периметра, то и весь меньший периметр $A_1B_1C_1D_1$ должен составлять такую же часть (0,6) большого периметра $ABCD$.

§ 249. Зависимость между площадями и сторонами подобных треугольников.

Теорема. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения сходственных сторон.

Опыт. Нарисуйте какой-нибудь треугольник ABC (рис. 287). Удлините его стороны так, чтобы получился подобный треугольник, имеющий стороны в 2 раза длиннее (рис. 288). Разрежьте полученный треугольник на первоначальные треугольники. Сколько получилось их? Во сколько раз площадь полученного треугольника больше площади первоначального? Чему равно отношение сторон этих треугольников?

$$\left(\frac{A_1B_1}{AB} = 2\right).$$

Чему равно отношение их площадей?

$$\left(\frac{\text{пл. } A_1B_1C_1}{\text{пл. } ABC} = 4\right).$$

Если вы помножите отношение сторон само на себя, то получится ли число, равное отношению площадей?

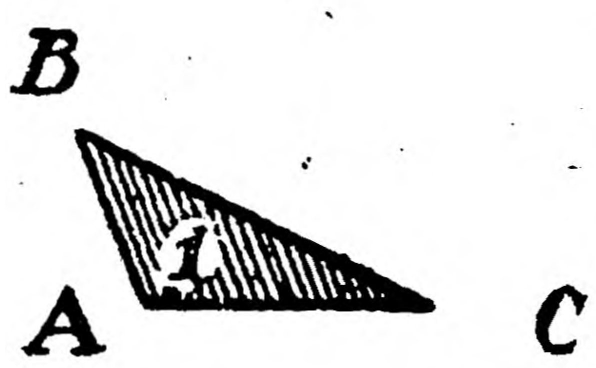


Рис. 287.

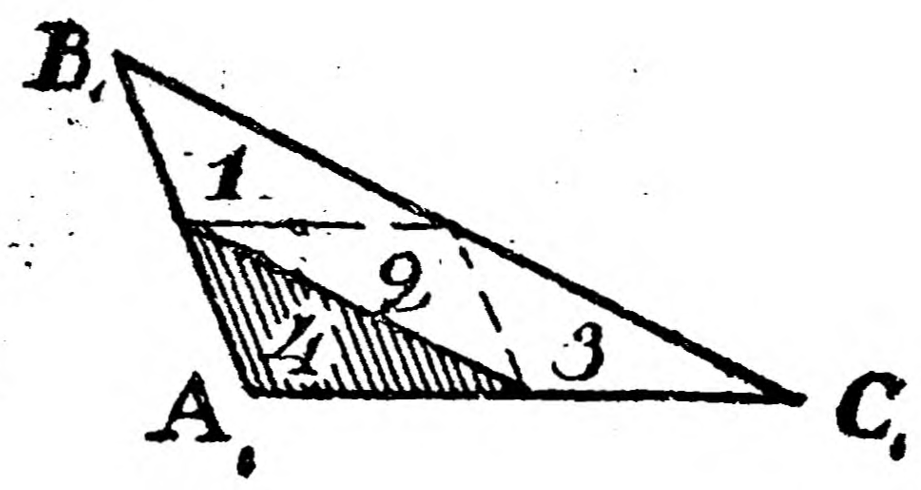


Рис. 288.

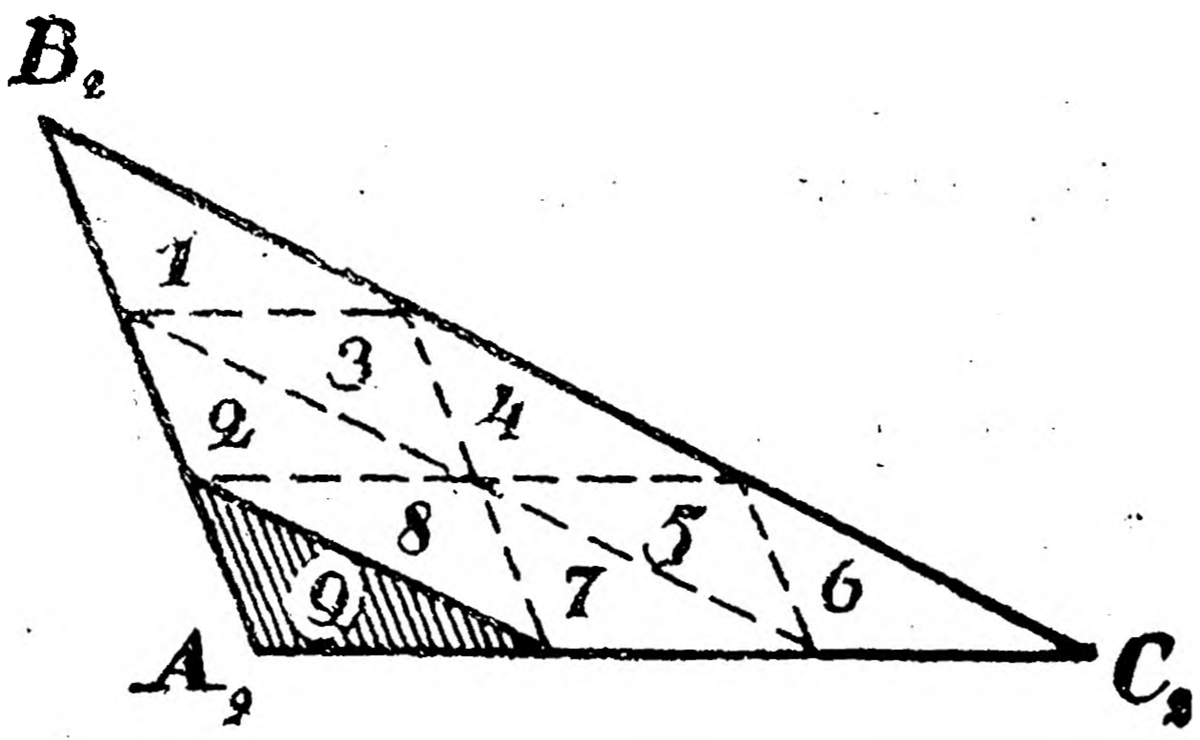


Рис. 289.

Удлините теперь сторону первоначального треугольника ABC так, чтобы получился треугольник $A_2B_2C_2$, имеющий стороны в три раза длиннее (рис. 289). Разделите его на первоначальные треугольники. Сосчитайте число их.

Чему равно отношение сходственных сторон?

$$\frac{A_2B_2}{AB} = 3.$$

Чему равно отношение площадей?

$$\left(\frac{\text{пл. } A_2B_2C_2}{\text{пл. } ABC} = 9\right).$$

Сторона этого треугольника больше сходственной стороны первого треугольника в три раза. А во сколько раз одна площадь больше другой?

Если вы отношение сторон этих подобных треугольников (число 3) помножите само на себя (на 3), то получите ли вы отношение площадей их (9)? Убедитесь, что такое соотношение имеет место для тех подобных треугольников, у которых отношение сторон равно 4, равно 5 и т. д. Посмотрите на рисунки и убедитесь, что если отношение двух сходственных сторон у подобных треугольников равно $^2/_3$, то отношение их площадей равно

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Результаты опыта. Итак, между площадями наших подобных треугольников и их сходственными сторонами есть определенная зависимость. А именно, если вы хотите узнать отношение этих площадей, то вам достаточно найти отношение сторон их и помножить найденное число само на себя (возвести в квадрат). Полученное после умножения число будет равно искомому отношению площадей.

Это правило короче говорится так:

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения сходственных сторон.

§ 250. *Теорема.* Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату отношения сходственных сторон.

Опыт. Нарисуйте два подобных многоугольника и найдите отношение их сходственных сторон.

Разбейте эти многоугольники на ряд подобных треугольников.

На рисунке 284 отношение любой пары сходственных сторон, например, $\frac{A_1B_1}{AB}$ равно $\frac{4}{5}$.

В таком случае, отношение площадей любой пары подобных треугольников должно быть $^{16}/_{25}$ (§ 249).

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{25}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\text{пл. } \triangle A_1B_1C_1 = {}^{16}/_{25} \text{ пл. } \triangle ABC;\\
&\text{пл. } \triangle A_1C_1D_1 = {}^{16}/_{25} \text{ пл. } \triangle ACD;\\
&\text{пл. } \triangle A_1D_1E_1 = {}^{16}/_{25} \text{ пл. } \triangle ADE.
\end{aligned}$$

А, значит, и площадь всего многоугольника

$$\text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1 = {}^{16}/_{25} \text{ пл. } ABCDE,$$

то-есть отношение площадей многоугольников равно $^{16}/_{25}$.

Итак, чтобы найти отношение площадей подобных многоугольников, достаточно найти отношение любой пары их сходственных сторон ($^4/_5$) и полученное число помножить само на себя, т.-е. возвести в квадрат $\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{25}\right)$. Результат умножения $\left(\frac{16}{25}\right)$ и даст нам искомое отношение площадей.

Это правило короче выражается так:

Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату отношения их сходственных сторон.

Если вы масштаб рисунка уменьшите в 5 раз, во сколько раз уменьшится площадь каждой нарисованной вами фигуры?

78. ПЛАН.

§ 251. Что такое план. Было время, когда люди, желая построить какое-нибудь здание, чертили план постройки в натуральную величину на том участке земли, на котором предполагалось построить здание.

Однако люди очень скоро заменили этот неудобный способ более простым, а именно, они стали чертить на бумаге фигуру, подобную действительной фигуре исследуемого участка земли или строящегося здания, при чем углов не изменяют, а все стороны этой фигуры уменьшают в определенное число раз, прибегая к соответствующему масштабу (§ 235).

Измерив расстояние между любыми двумя точками плана и зная масштаб его, нетрудно вычислить действительное расстояние между этими точками (вспомните § 235). При вычислении площади какого-нибудь участка земли по плану, надо помнить, что площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных сторон (§ 250). Поэтому, узнавши по масштабу, во сколько раз уменьшены все линии плана, надо это число помножить само на себя. Найденное число и покажет, во сколько раз действительная площадь больше нарисованной.

Если, например, план нарисован в масштабе: «8 метров в сантиметре», то расстояния и все линии на плане составляют $^1/_{800}$ часть действительной их длины; следовательно, площадь любой фигуры этого плана составляет $\frac{1}{800} \cdot \frac{1}{800} = \frac{1}{640000}$ часть действительной площади этого участка. Удобнее, однако, при вычислении площади сразу измеряемые на плане линии выражать при помощи масштаба в единицах, соответствующих действительным их размерам.

Тогда вычисленная по плану площадь сразу даст размеры площади исследуемого участка.

Посмотрим теперь, как приготовить план какой-нибудь местности, при чем ограничимся только тем случаем, когда контуры местности имеют вид многоугольника.

§ 252. Съемка плана при помощи астролябии.

Первый способ. Предположим, что наш участок земли имеет вид многоугольника $ABCDEF$ (рис. 290). Измерьте при помощи астролябии все углы его. При помощи землемерной цепи измерьте длину всех сторон. Остается теперь нарисовать по этим данным, пользуясь транспортиром и измерительной линейкой, многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, подобный измеренному $ABCDEF$, уменьшив каждую сторону последнего в одно и то же число раз согласно принятому масштабу.

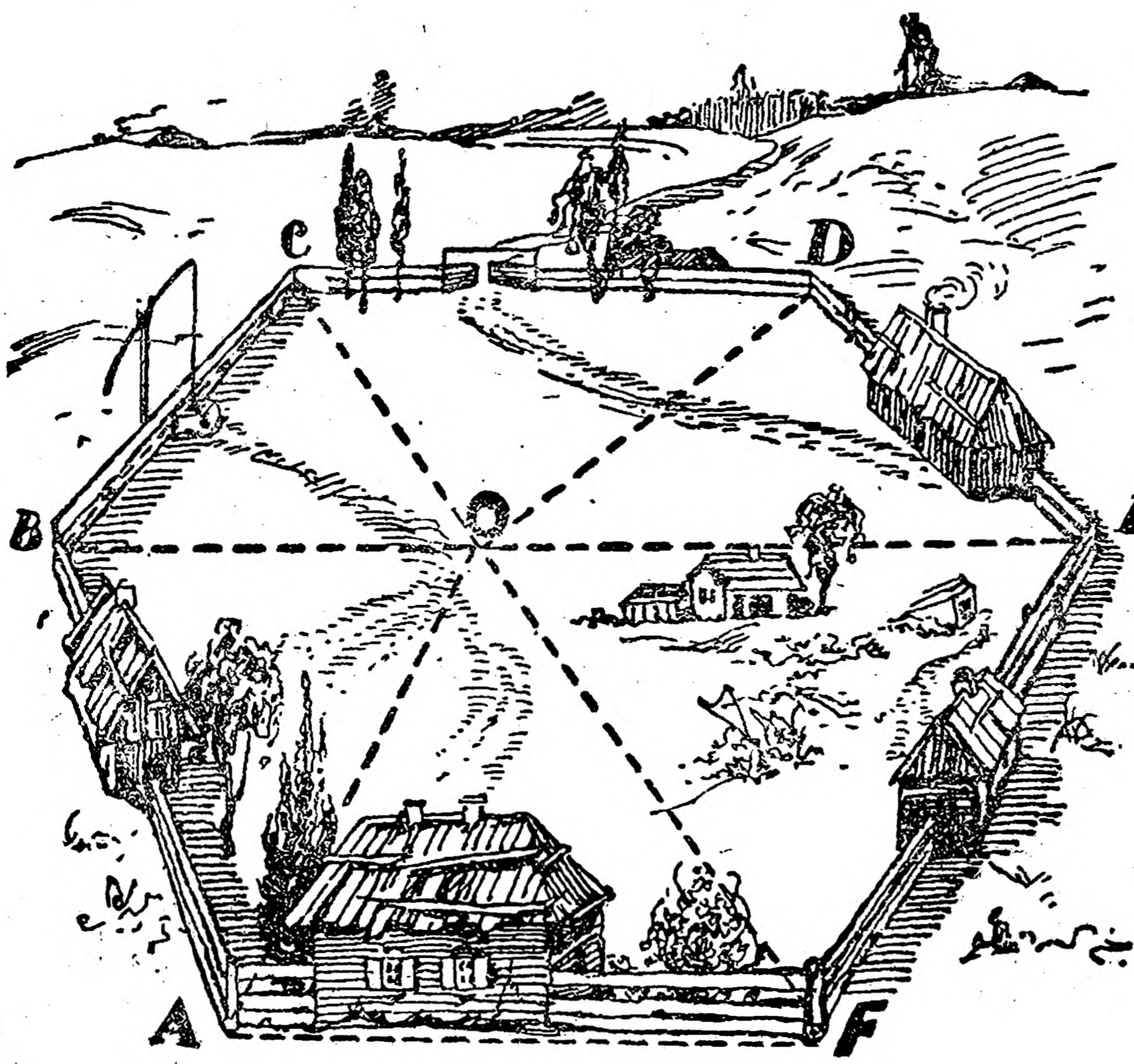


Рис. 290.

Второй способ. Если местность не позволяет измерить непосредственно все стороны многоугольника или его углы, то поступают так: выбирают внутри этого многоугольника такую точку O (рис. 290), из которой видны все вершины и доступны непосредственному измерению прямые OA, OB, OC и т. д. Поставив астролябию в эту точку O, направляют подвижную линейку ее поочередно на все вершины A, B, C и т. д. и измеряют все углы, образовавшиеся у точки O. Затем измеряют все расстояния от точки O до вершин, то-есть прямые OA, OB, OC и т. д. Остается теперь построить на бумаге многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобный $ABCDE$ (вспомните § 246).

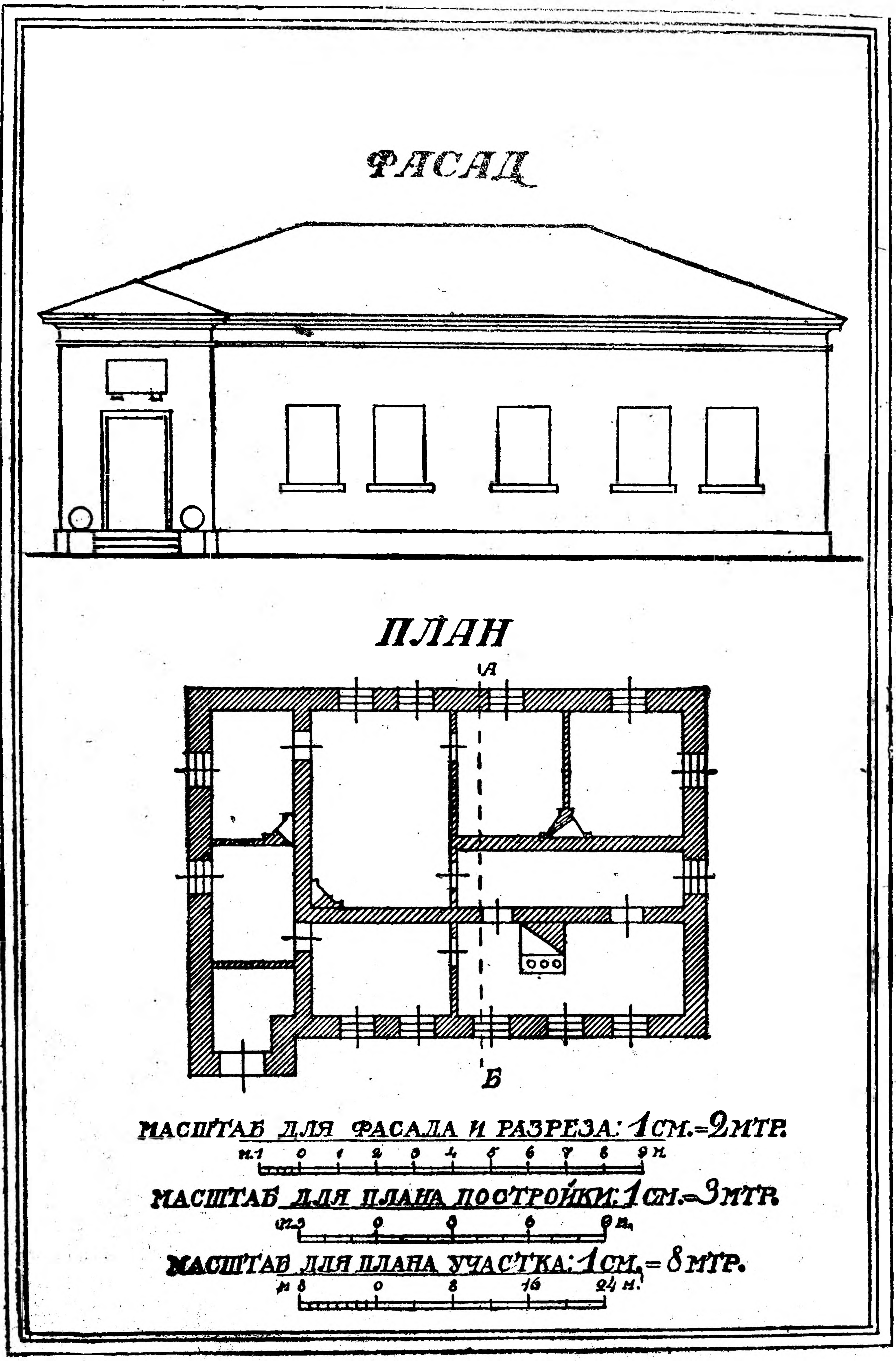

ФАСАД
ПЛАН
А
Б
МАСШТАБ ДЛЯ ФАСАДА И РАЗРЕЗА: 1 СМ.=2 МТР.
МАСШТАБ ДЛЯ ПЛАНА ПОСТРОЙКИ: 1 СМ.=3 МТР.
МАСШТАБ ДЛЯ ПЛАНА УЧАСТКА: 1 СМ.=8 МТР.

Рис. 291.

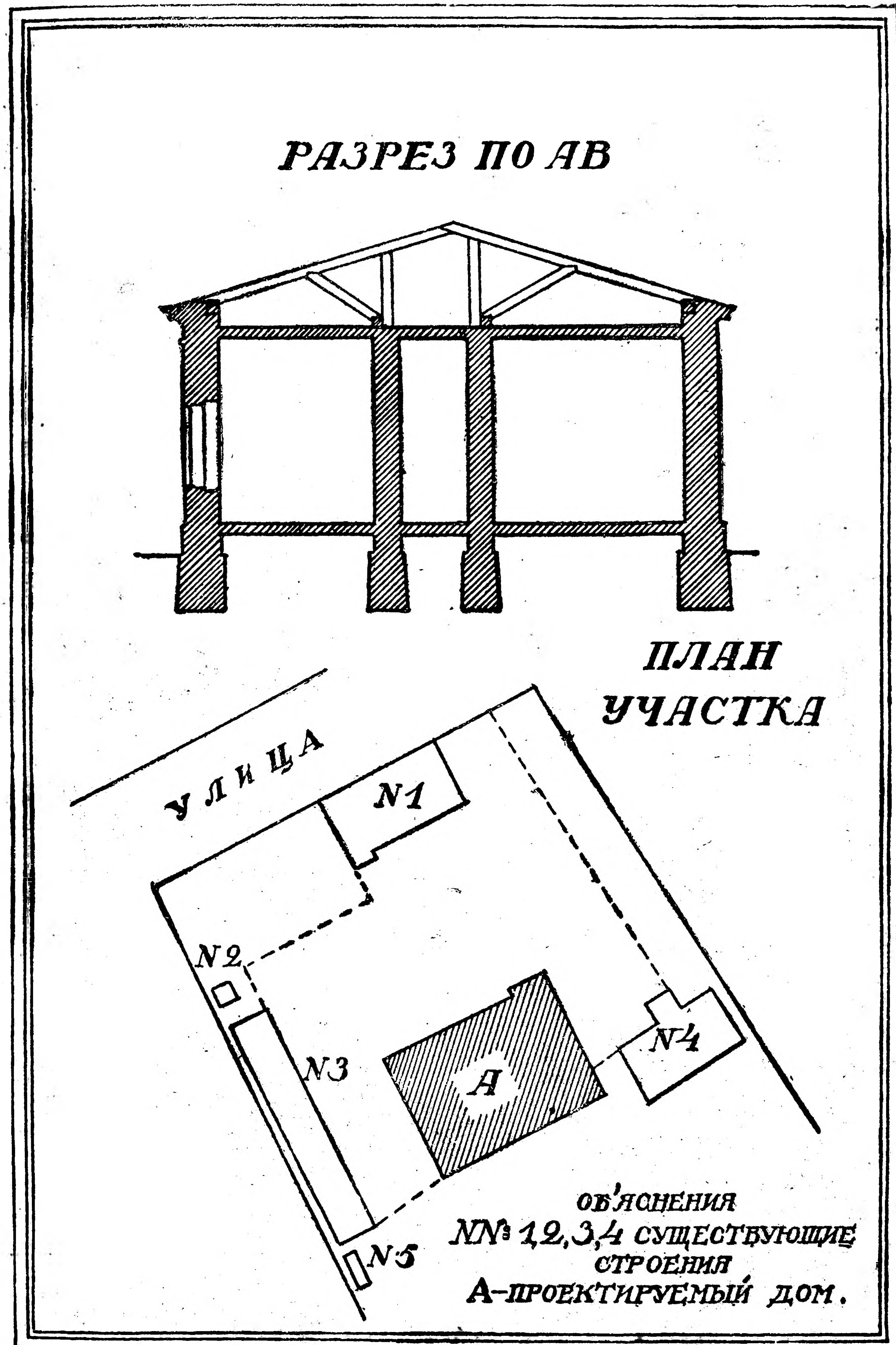

РАЗРЕЗ ПО АВ
ПЛАН
УЧАСТКА
УЛИЦА
N1
N2
N3
N4
N5
A
ОБ'ЯСНЕНИЯ
NN 1,2,3,4 СУЩЕСТВУЮЩИЕ
СТРОЕНИЯ
А-ПРОЕКТИРУЕМЫЙ ДОМ.

Рис. 292.

§ 253. Съемка плана при помощи мензулы. Часто вместо астролябии употребляют м е н з у л у.

Она состоит из треножника (рис. 293), к которому привинчивают горизонтальную доску с прикрепленным к ней листом бумаги.

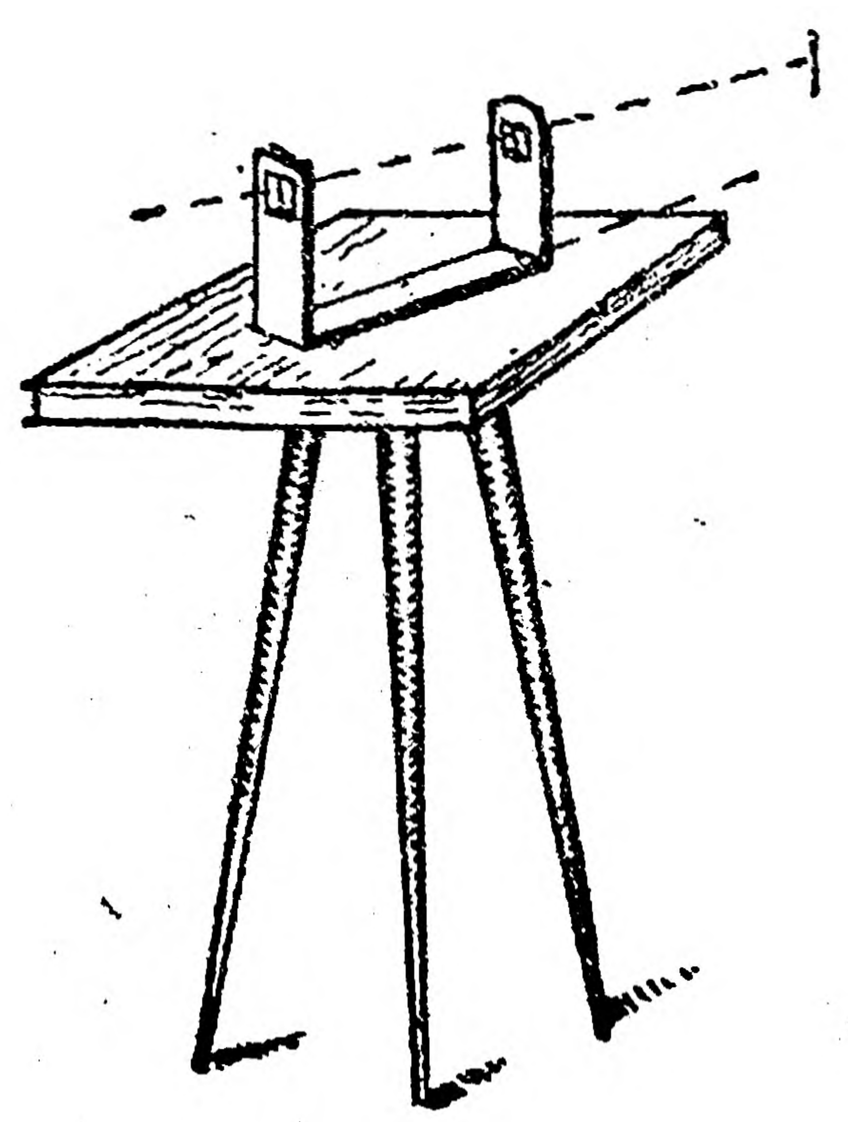


Рис. 293.

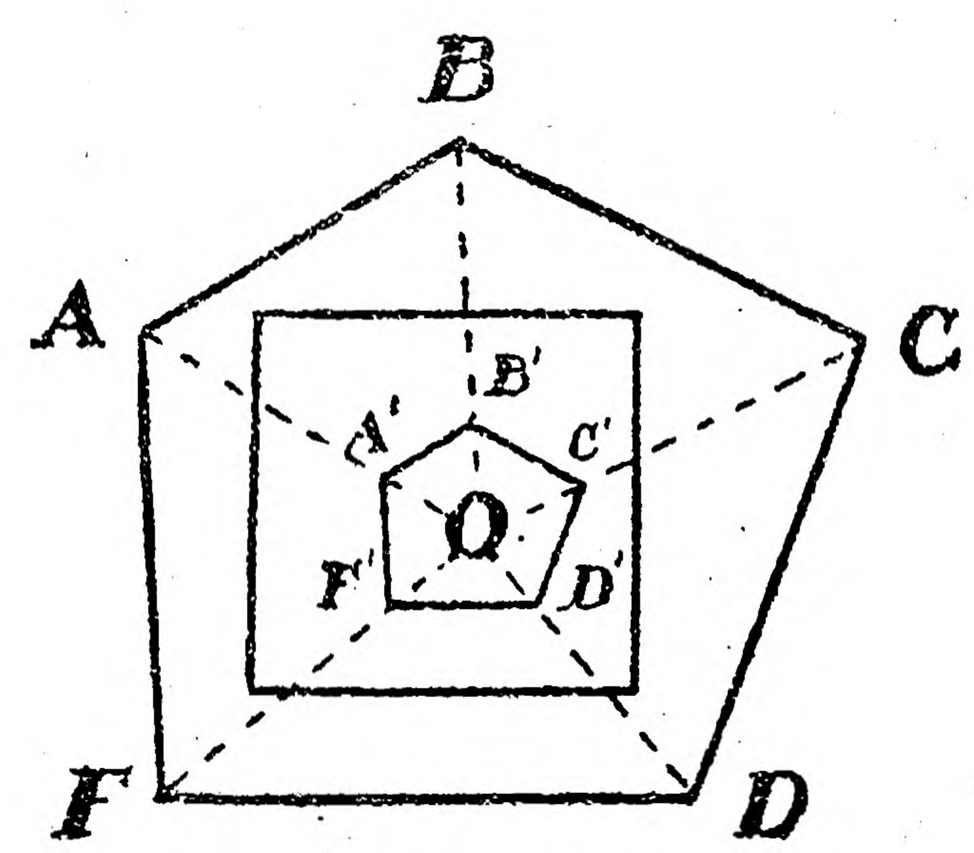


Рис. 294.

На этот лист бумаги кладут подвижную линейку, имеющую на своих концах вертикальные щели (устройство линейки такое же, как у астролябии).

Предположим, что надо нарисовать план местности, имеющей вид многоугольника $ABCDF$ (рис. 294); тогда ставят мензулу в какую-нибудь точку O, находящуюся внутри участка, и намечают при помощи линейки направление OA, OB и т. д. Измерив расстояние от точки O до вершин A, B, C и т. д., откладывают эти расстояния на бумаге, уменьшив их в одно и то же число раз сообразно с принятым масштабом. Соединив концы отложенных линий, вы и получите многоугольник $A'B'C'D'F'$, подобный измеряемому $ABCDF$.

Упражнения и задачи.

В этой книге (стр. 178 — 179) помещен план одного дома. Изучите по этому плану подробно данный дом, а именно, произведя по плану необходимые измерения, ответьте на следующие вопросы:

1. Какова площадь той усадьбы, на которой построен дом? Какая часть этой усадьбы занята постройками, а какая — двором и садом?

2. На каком расстоянии от улицы построен этот дом и какова ширина улицы?

3. Какая длина и высота фасада? Какой высоты крыша? Сколько ступенек имеет крыльцо и какой оно высоты?

4. Какая глубина фундамента? Какой толщины стены: какая часть их сделана из кирпича, какая — из дерева?

5. Какую площадь занимает весь дом?

6. Сколько комнат имеет дом? Проследите, какие из них «проходные». Сколько дверей, сколько печей имеет дом?

7. Измерьте площадь пола в каждой комнате.

8. Сколько окон имеет дом? Измерьте площадь окон. Какова высота окон?

9. Для нормального освещения комнаты необходимо, чтобы площадь окон составляла не менее $^1/_{10}$ части площади пола. Соблюдена ли эта норма в данном доме?

10. Какова высота комнат?

11. В этом доме в данное время помещается детский приют. При нормальных условиях требуется, чтобы на каждого ребенка приходилось не менее 10 *куб. м* (1 кубической сажени) воздуха.

Измерьте кубатуру воздуха в этом доме и узнайте, сколько детей при нормальных условиях можно было бы поместить в этом доме.

ГЛАВА XVIII.

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ.

79. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА СИНУС.

§ 254. *Задача 1.* На рисунке 295 дан вертикальный разрез железнодорожного пути, сделанный вдоль полотна дороги (такой разрез

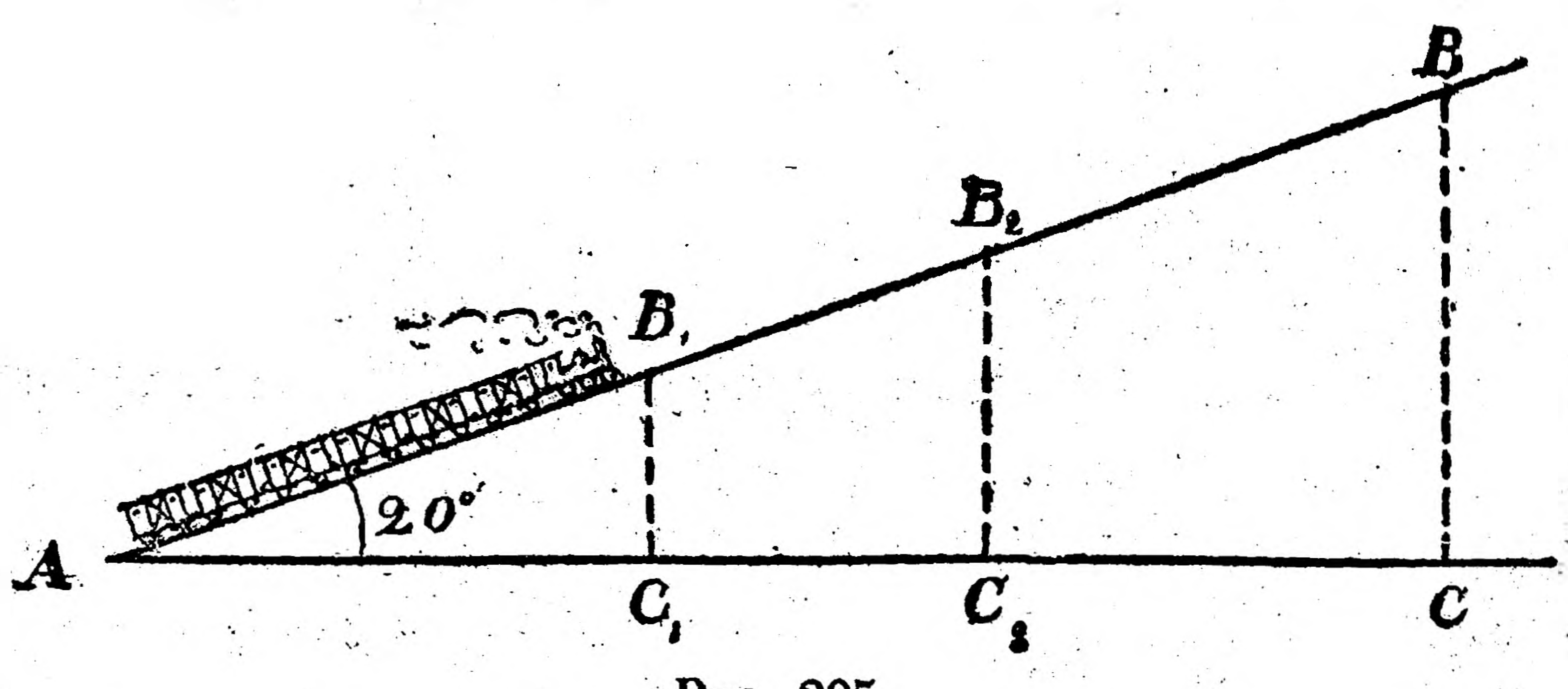


Рис. 295.

называется продольным профилем). Угол «подъема» этого пути ($\angle BAC$) равен 20°. По этому пути AB поднимается поезд. Сравните ту высоту BC, на которую поднимается он, с тем расстоянием AB, которое при этом проходит поезд.

В каком месте пути находится поезд?	На какую высоту поднялся поезд?	Какое расстояние прошел поезд?	Какую часть пройденного пути составляет высота подъема? [1]
В точке B_1	$B_1C_1 =$	$AB_1 =$	$\frac{B_1C_1}{AB_1} =$
В точке B_2	$B_2C_2 =$	$AB_2 =$	$\frac{B_2C_2}{AB_2} =$
В точке B	$BC =$	$AB =$	$\frac{BC}{AB} =$

Результаты измерения. Оказалось, что при одном и том же угле подъема $\angle A$ высота подъема (BC) составляет каждый раз одну и ту же часть пройденного пути (AB).

Доказательство. Этот результат получился не случайно. Исследуйте прямоугольные треугольники AB_1C_1; AB_2C_2; ABC. Докажите, что они подобны (вспомните § 239). А у подобных треугольников стороны пропорциональны, следовательно, отношения $\frac{B_1C_1}{AB_1}$, $\frac{B_2C_2}{AB_2}$, $\frac{BC}{AB}$ должны оказаться одинаковыми.

Задача 2. Посмотрим теперь, будет ли меняться отношение высоты подъема к пройденному расстоянию, если будет изменяться угол подъема (угол A).

Опыт. Пусть угол подъема горы будет равен 30°. Нарисуйте его (рис. 295). Возьмите на одной из сторон его несколько точек B_1; B_2; B_3... и опустите из них перпендикуляры (B_1C_1; B_2C_2; B_3C_3...) на вторую сторону угла. Вы получите ряд прямоугольных треугольников. Измерьте в каждом из них длину катета, лежащего против вашего угла A, и длину гипотенузы. Вычислите, какую часть гипотенузы составляет соответствующий ей катет.

Нарисуйте теперь угол в 45° и вычислите, какую часть его гипотенузы составляет катет, лежащий против этого угла.

Вычислите то же самое для угла в 60°.

---

[1]) Все эти отношения надо выражать десятичной дробью с точностью до 0,1 или 0,01.

Результаты опыта.

		30°	45°	60°
Угол A равен		30°	45°	60°
Катет, противолежащий этому углу, составляет вот какую часть гипотенузы.	$\frac{BC}{AB}$	0,50	0,71	0,87

Итак, для каждого нового угла получилось свое отдельное число.

Вот, это число, которое показывает, какую часть всей гипотенузы составляет катет, лежащий против данного угла, назовем синусом данного угла.

Слово «синус» будем короче писать так «sin». Следовательно, мы нашли, что

$$\sin 30^\circ = 0{,}5.$$

Читается эта запись так: «синус угла в 30° равен 0,5».

Вопросы: 1. Прочитайте такую запись: $\sin \angle 45^\circ = 0{,}71$. *2.* Напишите покороче: «синус угла в 60° равен 0,87». *3.* Какую часть гипотенузы составляет катет, лежащий против угла в 60°? А против угла в 30°.

§ 255. Как изменяется sin с изменением угла?

Опыт 1. Приготовьте такой прибор (рис. 296):

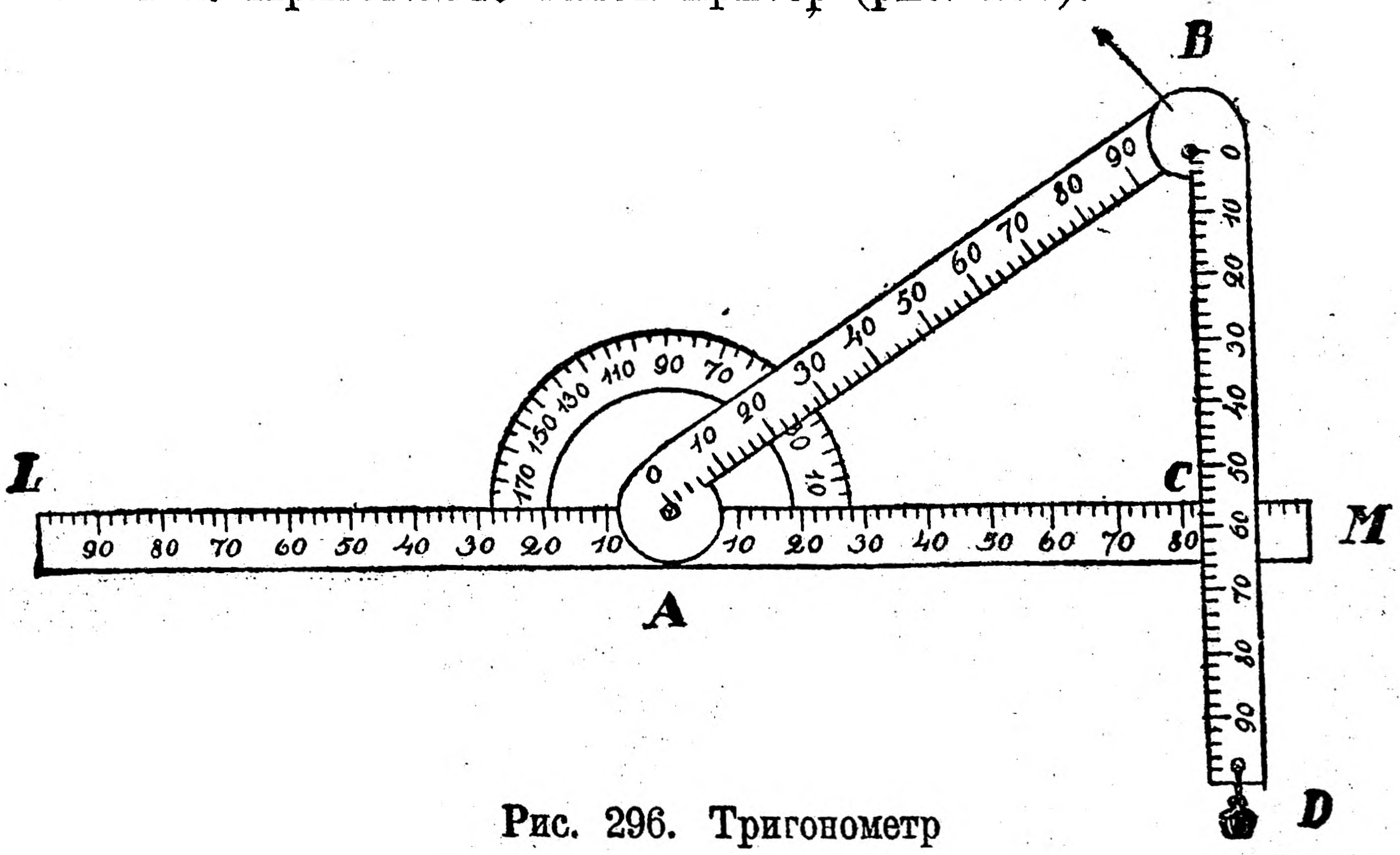


Рис. 296. Тригонометр

Этот прибор можно сделать так. Посередине длинной линейки LM (длина ее около 1 *м*) надо прикрепить транспортир и линейку AB, которая могла бы вращаться вокруг точки A. К другому концу ее B

надо приделать еще одну (такой же длины как и AC) линейку BD, которая могла бы свободно вращаться вокруг точки B.[1]) На линейках $AB = BD = AM = AL$ наносятся 100 одинаковых делений. Если длина $AB = 50$ *см*, то каждое деление будет длиною $^1/_2$ *см*.

Этот прибор называется тригонометром.

Поставьте прибор так, чтобы линейка LM лежала горизонтально, а транспортир и линейка BD были вертикальными.

Теперь вращайте линейку AB так, чтобы у точки A получался угол в 10°, 20°, 30° и так далее. Измерив длину катета BC, лежащего против этого угла A, и узнав, какую часть гипотенузы AB составляет этот катет, вы вычислите синусы всех этих углов.

$\angle A$	Катет BC	Гипотенуза AB	$\sin \angle A$
10°			
20°			
30°			
40°			
50°			

Опыт 2. Проследите внимательно на приборе (рис. 296), как меняется sin с возрастанием угла от 0° до 90° и от 90° до 180°.

Для какого угла sin становится равным 0?

При каком угле он равен 1? (Какую тогда часть гипотенузы составляет противолежащий катет?)

При каком угле sin имеет наименьшее значение, а для какого — наибольшее?

Опыт 3. Если трудно вам построить этот тригонометр, то синусы соответствующих углов можно найти тем способом, которым пользовались мы в задаче № 2 § 254.

§ 256. Таблица синусов. Итак, при помощи опытов, указанных в предыдущем параграфе, вы можете составить себе такую таблицу, в которой для каждого угла указан его синус (стр. 186).

Надо только иметь в виду, что для очень многих углов точного синуса найти нельзя. В нашей таблице даны приближенные значения синусов с точностью до 0,01.

---

[1]) Линейку BD можно заменить лентой, разделенной на сантиметры. Такую ленту употребляют портнихи.

§ 257. Как применить таблицу sin-ов для решения задач?

Задача 1. Стропила крыши $AB = 8$ *м* (рис. 297). Эта крыша составляет с потолком угол $A = 35°$. Вычислите высоту крыши BC.

Решение. Из таблицы sin-ов находим, что $\sin 35° = 0,57$. Следовательно, лежащий против этого угла катет BC составляет 0,57 частей гипотенузы AB, а поэтому высота крыши

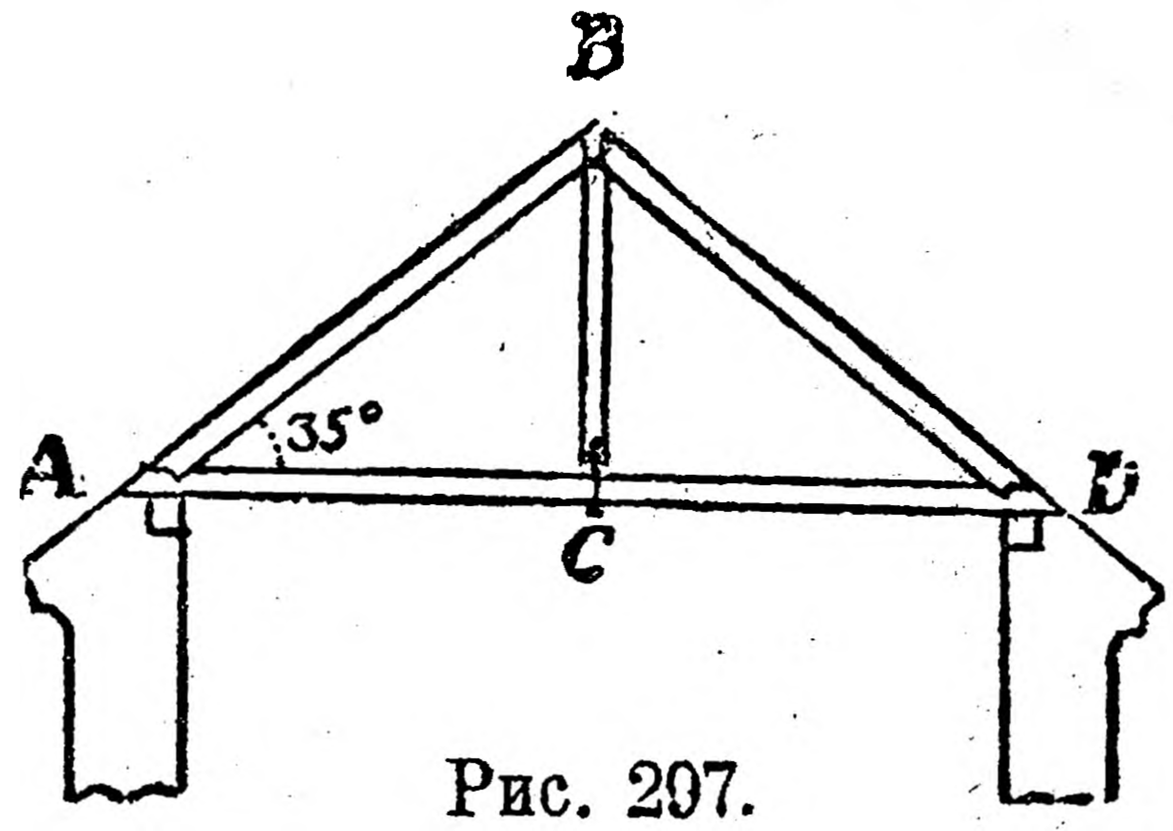


Рис. 297.

$$BC = 8\text{ м} \times 0,57 = 4,56\text{ м},$$

или с округлением 4,6 *м*.

Задача 2. На гору, угол подъема которой равен 39°, поднимается путешественник. На какую высоту поднялся он, когда прошел от подошвы горы 700 *м*?

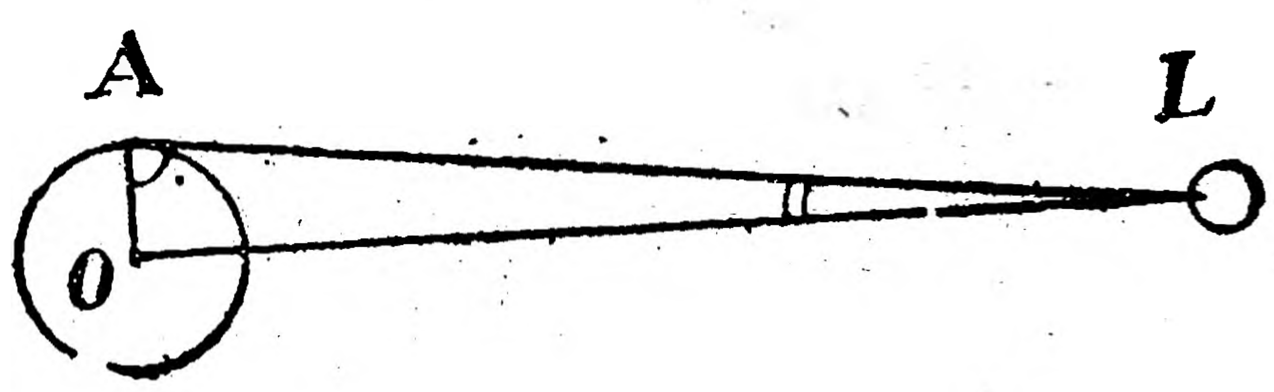


Рис. 298.

Задача 3. Радиус земли OA (рис. 298) равен 6400 километрам. Угол L, под которым виден этот радиус с луны, равен около 1°. (Этот угол можно измерить с земли. Он называется параллаксом луны.) Вычислите, на каком расстоянии от земли находится луна?

Решение. Из таблицы находим, что $\sin \angle 1° = \ldots$ Следовательно, радиус AO составляет часть искомого расстояния OL. Отсюда нетрудно найти и OL.

80. КОСИНУС.

§ 258. Что такое косинус данного угла?

Задача 1. Мы раньше (в § 197) исследовали, как изменяется проекция прямой линии, если эта прямая, оставаясь все время одинаковой длины, будет менять угол своего наклона. А теперь проследим за изменением проекции, когда угол наклона прямой не меняется, а зато изменяется длина самой прямой линии.

Опыт. Нарисуйте какой-нибудь угол A (рис. 299). Возьмите на стороне его ряд точек B_1; B_2; B_3... и опустите из них перпендикуляры на вторую сторону.

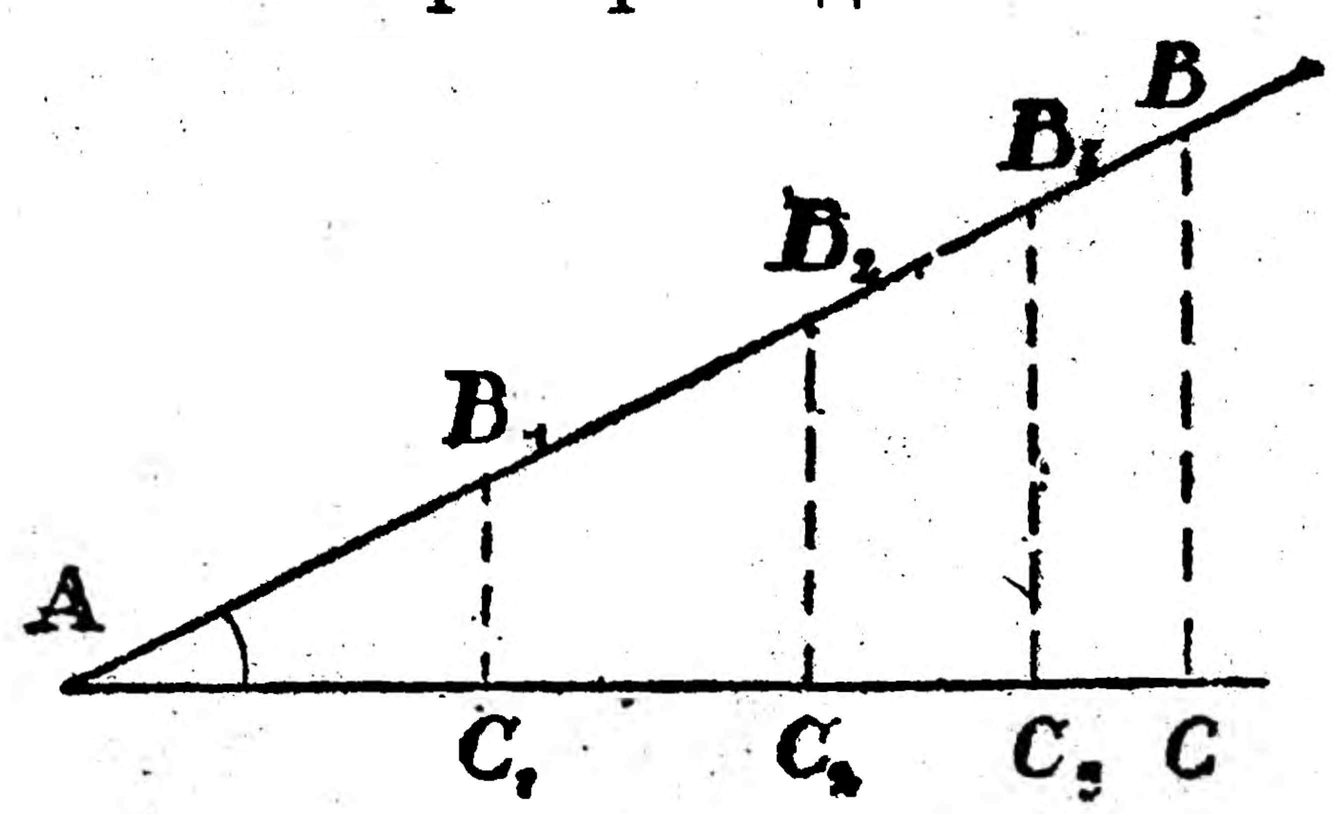


Рис. 299.

Таблица синусов.

Угол	Sin	Угол	Sin	Угол	Sin
0°	0,00	30°	0,50	60°	0,87
1°	0,02	31°	0,51	61°	0,87
2°	0,03	32°	0,53	62°	0,88
3°	0,05	33°	0,54	63°	0,89
4°	0,07	34°	0,56	64°	0,90
5°	0,09	35°	0,57	65°	0,91
6°	0,10	36°	0,59	66°	0,91
7°	0,12	37°	0,60	67°	0,92
8°	0,14	38°	0,62	68°	0,93
9°	0,16	39°	0,63	69°	0,93
10°	0,17	40°	0,64	70°	0,94
11°	0,19	41°	0,66	71°	0,95
12°	0,21	42°	0,67	72°	0,95
13°	0,22	43°	0,68	73°	0,96
14°	0,24	44°	0,69	74°	0,96
15°	0,26	45°	0,71	75°	0,97
16°	0,28	46°	0,72	76°	0,97
17°	0,29	47°	0,73	77°	0,97
18°	0,31	48°	0,74	78°	0,98
19°	0,33	49°	0,75	79°	0,98
20°	0,34	50°	0,77	80°	0,98
21°	0,36	51°	0,78	81°	0,988
22°	0,37	52°	0,79	82°	0,990
23°	0,39	53°	0,80	83°	0,992
24°	0,41	54°	0,81	84°	0,994
25°	0,42	55°	0,82	85°	0,996
26°	0,44	56°	0,83	86°	0,998
27°	0,45	57°	0,84	87°	0,998
28°	0,47	58°	0,85	88°	0,999
29°	0,48	59°	0,86	89°	0,9998
				90°	1,000

Измерьте отрезки AB_1; AB_2; AB_3 и соответствующие им проекции AC_1; AC_2; AC_3... Вычислите, какую часть соответствующего отрезка составляет его проекция.

Длина проекции AC	Длина отрезка AB	Какую часть всего отрезка составляет проекция AC/AB
$AC_1 =$	$AB_1 =$	$\frac{AC_1}{AB_1} =$
$AC_2 =$	$AB_2 =$	$\frac{AC_2}{AB_2} =$
$AC_3 =$	$AB_3 =$	$\frac{AC_3}{AB_3} =$

Результаты опыта. У вас окажется, что для одного и того же угла A проекция составляет одну и ту же часть соответствующего отрезка.

Докажите, что этим свойством обладают все проекции, применив к образовавшимся треугольникам первый признак подобия (§ 239).

Задача 2. Исследуем теперь, будет ли меняться отношение проекции AC к самому отрезку AB, если мы будем изменять угол наклона отрезка.

Опыт. Нарисуйте угол в 30°. Возьмите на одной стороне его несколько точек B_1; B_2; B_3... и опустите из них перпендикуляры B_1C_1; B_2C_2; B_3C_3... на вторую сторону угла. Вы получите ряд прямоугольных треугольников. Измерьте в каждом из них длину гипотенузы (она является нашим отрезком AB) и длину соответствующего катета, прилегающего к нашему углу A (он служит проекцией гипотенузы). Вычислите, какую часть гипотенузы составляет этот катет, прилегающий к нашему углу.

Проделайте то же самое для углов в 45° и в 60°.

Результаты опыта.

Угол A равен	30°	45°	60°
Катет, прилегающий к этому углу, составляет вот какую часть гипотенузы. $\frac{AC}{AB}$	0,87	0,71	0,50

Итак, для каждого нового угла получилось свое новое число. Вот это число, которое показывает, какую часть всей гипотенузы составляет катет, прилегающий к данному углу, называется косинусом данного угла.

Короче это слово будем писать так: cos.

Фразу: «косинус угла в 30° равен 0,87» мы можем короче записать так: $\cos 30° = 0{,}87$.

Понимать это надо так, что катет, прилегающий к углу в 30°, составляет 0,87 частей соответствующей ему гипотенузы.

Вопросы: *1.* Напишите покороче: «косинус угла в 45° равен 0,71». *2.* Прочитайте такую запись: $\cos 75° = 0{,}26$. Как понимаете вы эту запись?

§ 259. Как изменяется cos с изменением угла?

Опыт. Пользуясь тригонометром (рис. 296), найдите косинусы для различных углов, начиная от 0° и кончая 180°, и составьте таблицу cos-ов, вычислив их с точностью до 0,01.

Чему равен cos 0°? cos 90°? cos 180°?

Как меняется cos с возрастанием угла от 0° до 90°? А как изменяется он при возрастании угла от 90° до 180°? Обратите внимание, по какую сторону от точки A откладывается проекция AC, когда угол увеличивается от 90° до 180°?

§ 260. Как применить таблицу cos-ов для решения задач?

Задача 1. Угол подъема горы $\angle B = 48°$. Длина горы $AB = 610$ *м* (рис. 300). Узнайте, на каком расстоянии находится вершина горы A от подошвы ее B, считая по горизонтальному направлению.

Указание. Надо найти из таблицы cos угла в 48°. Этот косинус покажет, какую часть гипотенузы AB составляет искомый катет BC.

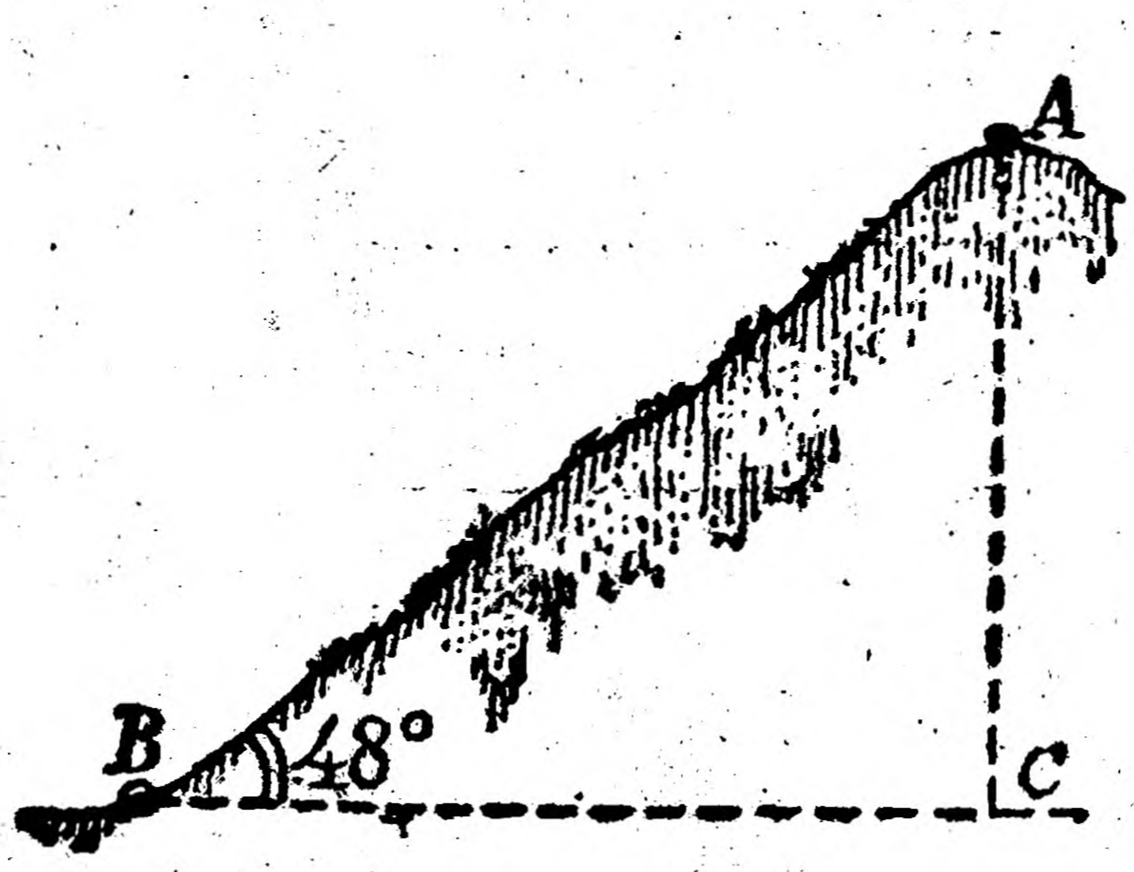


Рис. 300.

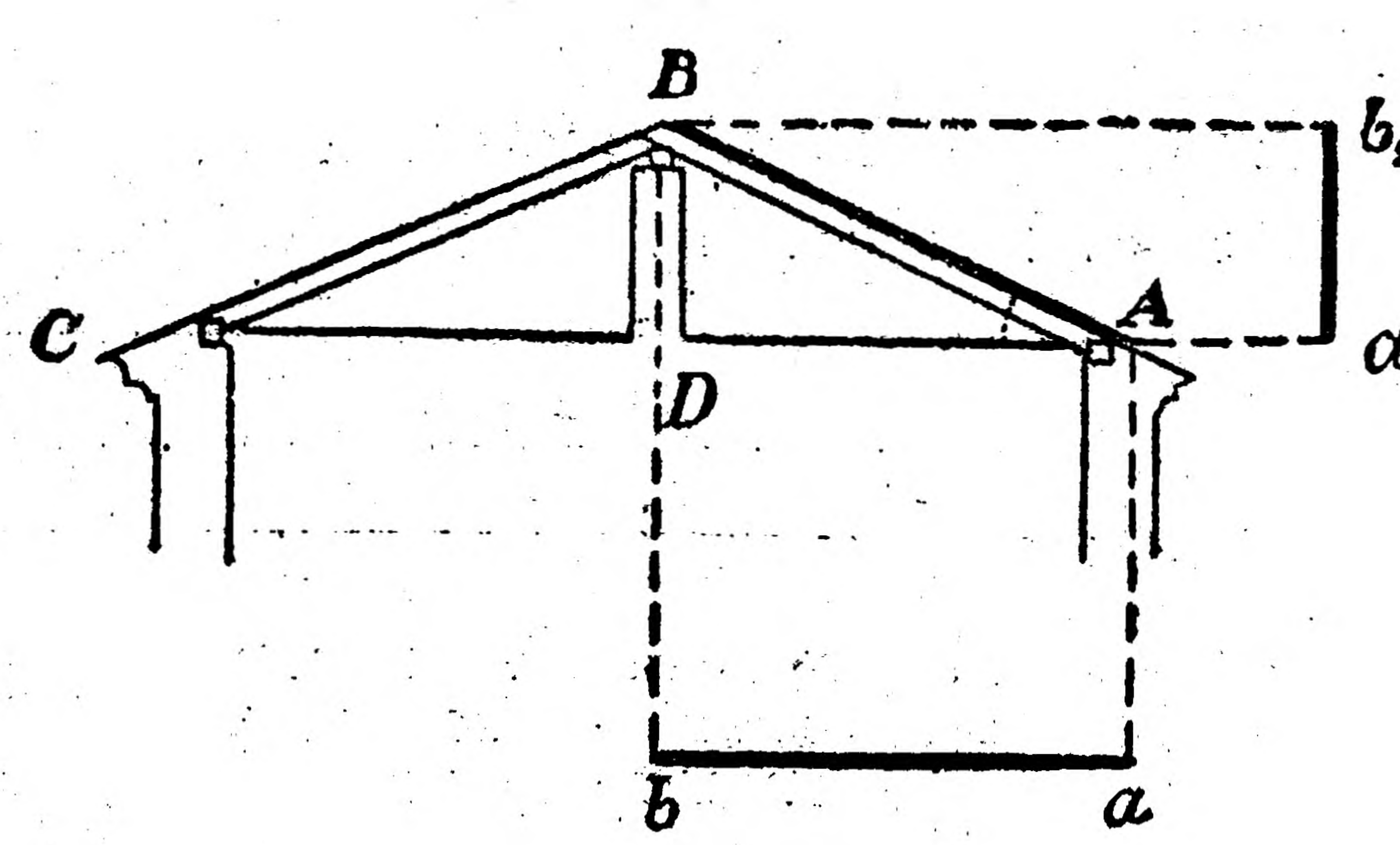


Рис. 301.

Задача 2. Инженеры при постройке домов рисуют проекцию дома на горизонтальную плоскость (она называется планом) и дают еще проекцию этого дома на вертикальные плоскости (так называемые продольный и поперечный разрезы дома).

На рисунке 301 дан поперечный разрез крыши дома. Эту крышу надо спроектировать на горизонтальную плоскость (нарисовать план) и дать продольный разрез ее.

Вычислите, какой длины будет проекция стропила AB «в плане» (ab) и в продольном разрезе, если длина стропила $AB = 6$ *м*, а угол подъема $A = 28°$.

81. ТАНГЕНС.

§ 261. Что такое тангенс данного угла?

Задача 1. До сих пор мы сравнивали катет с гипотенузой, а теперь сравним катеты один с другим.

Опыт. Нарисуйте угол A (рис. 299), равный 30°. Возьмите на одной стороне его какую-нибудь точку B_1 и опустите из нее перпендикуляр B_1C_1 на другую сторону. Вы получите прямоугольный треугольник. Измерив длину обоих катетов, вычислите отношение катета B_1C_1, лежащего против нашего угла A, к катету AC_1, прилегающему к этому углу.

Возьмите на той же стороне новую точку B_2. Опустите из нее перпендикуляр на AC и опять узнайте отношение соответствующих катетов.

Сравните между собою полученные числа.

Катет, лежащий против угла A: BC	Катет, лежащий возле угла A: AC	Катет, лежащий против угла A, составляет вот какую часть катета, лежащего возле этого угла BC/AC
$B_1C_1 =$	$AC_1 =$	$\frac{B_1C_1}{AC_1} =$
$B_2C_2 =$	$AC_2 =$	$\frac{B_2C_2}{AC_2} =$
$BC =$	$AC =$	$\frac{BC}{AC} =$

Результаты опыта. Оказалось, что катет, лежащий против угла в 30°, всегда составляет 0,58 частей катета, прилегающего к этому углу.

Докажите, что при одном и том же угле A этим свойством обладают все катеты.

Задача 2. Теперь исследуйте, как будет меняться отношение наших катетов, если будем изменять величину угла A.

Опыт. Нарисуйте углы в 30°, а затем в 45° и, наконец, в 60° (рис. 299).

Определите относительно катета DC, лежащего против каждого из этих углов, какую он составляет часть катета AC, прилегающего к нашему углу.

Угол A равен	30°	45°	60°
Отношение катета, лежащего против угла A, к катету, лежащему возле этого угла. $\dfrac{BC}{AC}$	0,58	1	1,73

Итак, для каждого нового угла получилось разное отношение. Оказалось, что при угле в 30° противолежащий катет BC составляет 0,58 частей прилегающего AC. При угле в 45° оба катета равны друг другу, а при угле в 60° противолежащий катет BC в 1,73 раза больше прилегающего катета AC.

Вот это число, которое показывает, какую часть катет, лежащий против данного угла A, составляет (или во сколько раз он больше) катета AC, лежащего возле нашего угла A, назовем *тангенсом* этого угла.

Это слово короче будем писать так: tg.

Вместо фразы: «тангенс угла в 30° равен 0,58» можно написать так:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = 0{,}58.$$

Понимать эту запись надо так: «катет, лежащий против угла в 30°, составляет 0,58 часть катета, прилегающего к этому углу».

Для угла в 60° получим такую запись:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = 1{,}73.$$

(Прочитайте ее!) Эта запись означает, что катет, лежащий против угла в 60°, в 1,73 раза больше катета, прилегающего к этому углу.

А как понять такую запись:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1?$$

§ 262. Как изменяется tg с изменением угла?

Пользуясь тригонометром (рис. 296), найдите тангенсы для различных углов, начиная от 0° и кончая 180°, и составьте таблицу tg-ов, вычислив их с точностью до 0,01. Таблица эта помещается на странице 192.

Чему равен тангенс 0°; tg 45°; tg 90°; tg 180°?

Как меняется тангенс при возрастании угла от 0° до 45° и от 45° до 90°?

При каком угле тангенс равен 1?

При каких углах противолежащий катет меньше прилегающего, а начиная с какого угла он становится больше этого прилегающего катета?

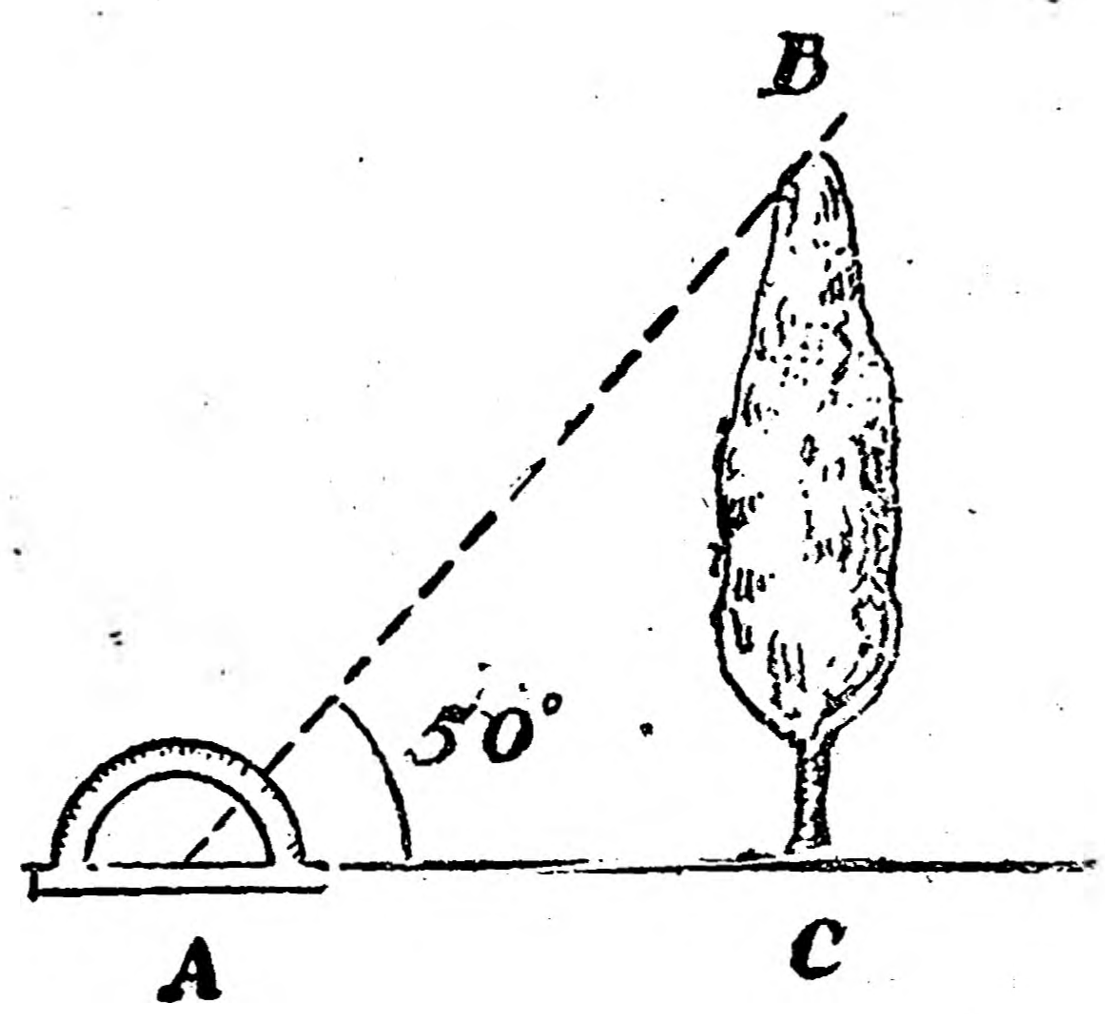


Рис. 302.

Упражнение. Составьте графику sin-ов, cos-ов и tg-ов, откладывая на оси абсцисс углы (от 0° до 180°), а на ординатах соответствующие этим углам значения sin-а, cos-а и tg-а.

§ 263. Как применить таблицу tg-ов для решения задач?

Задача 1. С помощью транспортира узнали, что если отойти от дерева BC на расстояние $AC = 20$ метрам, то это дерево будет видно под углом $A = 50°$ (рис. 302). Вычислите высоту дерева.

Указание. Для того, чтобы вычислить BC, надо AC помножить на $\operatorname{tg} \angle A$.

Задача 2. Мы уже знаем два способа для измерения ширины реки: при помощи построения или равного треугольника (§ 154), или подобного (§ 240).

Зная таблицу тангенсов, можно решить эту задачу значительно проще и точнее.

Пусть вам надо измерить ширину реки AB (рис. 153). Прямую AC проведем так, чтобы у точки A получился прямой угол (воспользуйтесь для этого эккером). Измерив длину прямой AC и $\angle C$ (астролябией), вы без труда, пользуясь таблицею тангенсов, вычислите длину катета AB (то-есть ширину реки).

Обдумайте, как этим же самым способом решить задачу §-а 242.

Таблица синусов, косинусов и тангенсов.

Угол	sin	cos	tg	Угол	sin	cos	tg	Угол	sin	cos	tg
0°	0,00	1,0000	0,00	**30°**	0,50	0,87	0,58	**60°**	0,87	0,50	1,7
1°	0,02	0,9998	0,02	31°	0,51	0,86	0,60	61°	0,87	0,48	1,8
2°	0,03	0,999	0,03	32°	0,53	0,85	0,62	62°	0,88	0,47	1,9
3°	0,05	0,998	0,05	33°	0,54	0,84	0,65	63°	0,89	0,45	2,0
4°	0,07	0,998	0,07	34°	0,56	0,83	0,68	64°	0,90	0,44	2,0
5°	0,09	0,996	0,09	35°	0,57	0,82	0,70	65°	0,91	0,42	2,1
6°	0,10	0,994	0,10	36°	0,59	0,81	0,73	66°	0,91	0,41	2,2
7°	0,12	0,992	0,12	37°	0,60	0,80	0,75	67°	0,92	0,39	2,4
8°	0,14	0,990	0,14	38°	0,62	0,79	0,78	68°	0,93	0,37	2,4
9°	0,16	0,988	0,16	39°	0,63	0,78	0,81	69°	0,93	0,36	2,6
10°	0,17	0,98	0,18	**40°**	0,64	0,77	0,84	**70°**	0,94	0,34	2,7
11°	0,19	0,98	0,19	41°	0,66	0,75	0,87	71°	0,95	0,33	2,9
12°	0,21	0,98	0,21	42°	0,67	0,74	0,90	72°	0,95	0,31	3,1
13°	0,22	0,97	0,23	43°	0,68	0,73	0,93	73°	0,96	0,29	3,3
14°	0,24	0,97	0,25	44°	0,69	0,72	0,97	74°	0,96	0,28	3,5
15°	0,26	0,97	0,27	**45°**	0,71	0,71	**1,00**	75°	0,97	0,26	3,7
16°	0,28	0,96	0,29	46°	0,72	0,69	1,04	76°	0,97	0,24	4,0
17°	0,29	0,96	0,31	47°	0,73	0,68	1,07	77°	0,97	0,22	4,3
18°	0,31	0,95	0,33	48°	0,74	0,67	1,10	78°	0,98	0,21	4,7
19°	0,33	0,95	0,34	49°	0,75	0,66	1,2	79°	0,98	0,19	5,1
20°	0,34	0,94	0,36	**50°**	0,77	0,64	1,2	**80°**	0,98	0,17	5,7
21°	0,36	0,93	0,38	51°	0,78	0,63	1,2	81°	0,988	0,16	6,3
22°	0,37	0,93	0,40	52°	0,79	0,62	1,3	82°	0,990	0,14	7,1
23°	0,39	0,92	0,42	53°	0,80	0,60	1,3	83°	0,992	0,12	8,1
24°	0,41	0,91	0,45	54°	0,81	0,59	1,4	84°	0,994	0,10	9,5
25°	0,42	0,91	0,47	55°	0,82	0,57	1,4	85°	0,996	0,09	11
26°	0,44	0,90	0,49	56°	0,83	0,56	1,5	86°	0,998	0,07	14
27°	0,45	0,89	0,51	57°	0,84	0,54	1,5	87°	0,998	0,05	19
28°	0,47	0,88	0,53	58°	0,85	0,53	1,6	88°	0,999	0,03	29
29°	0,48	0,87	0,55	59°	0,86	0,51	1,7	89°	0,9998	0,02	57
								90°	1,000	0,00	∞

Задача 3. Мачта плывущего вдали парохода имеет высоту $BC = 25$ метрам и видна с берега под углом $A = 15°$. Вычислите, на каком расстоянии от берега плывет пароход.

Указание: $\operatorname{tg} 15° = 0{,}27$. Следовательно, мачта составляет 0,27 частей искомого расстояния.

Задача 4. Если подняться на гору Монблан, высота которой AC равна почти 5 *км*, то из ее верхушки горизонт виден под углом $CAB = 89°$. Вычислите радиус видимого горизонта BC (рис. 303).

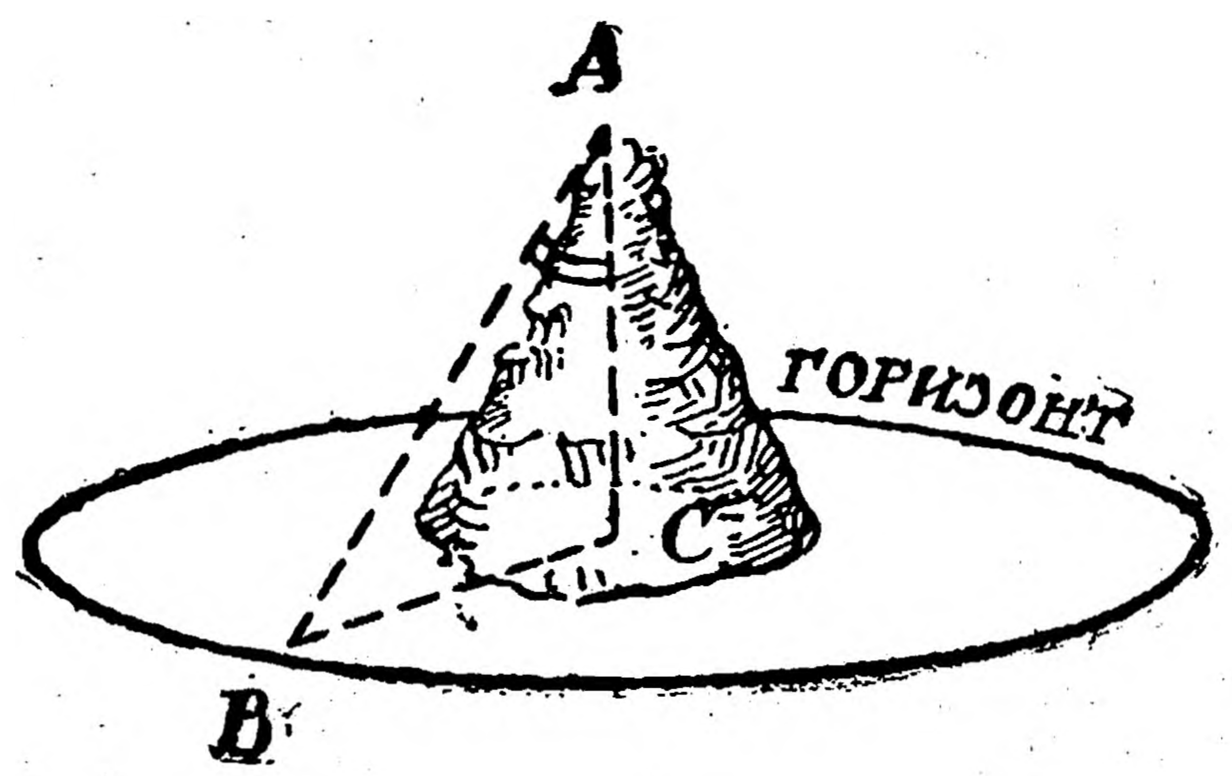


Рис. 303.

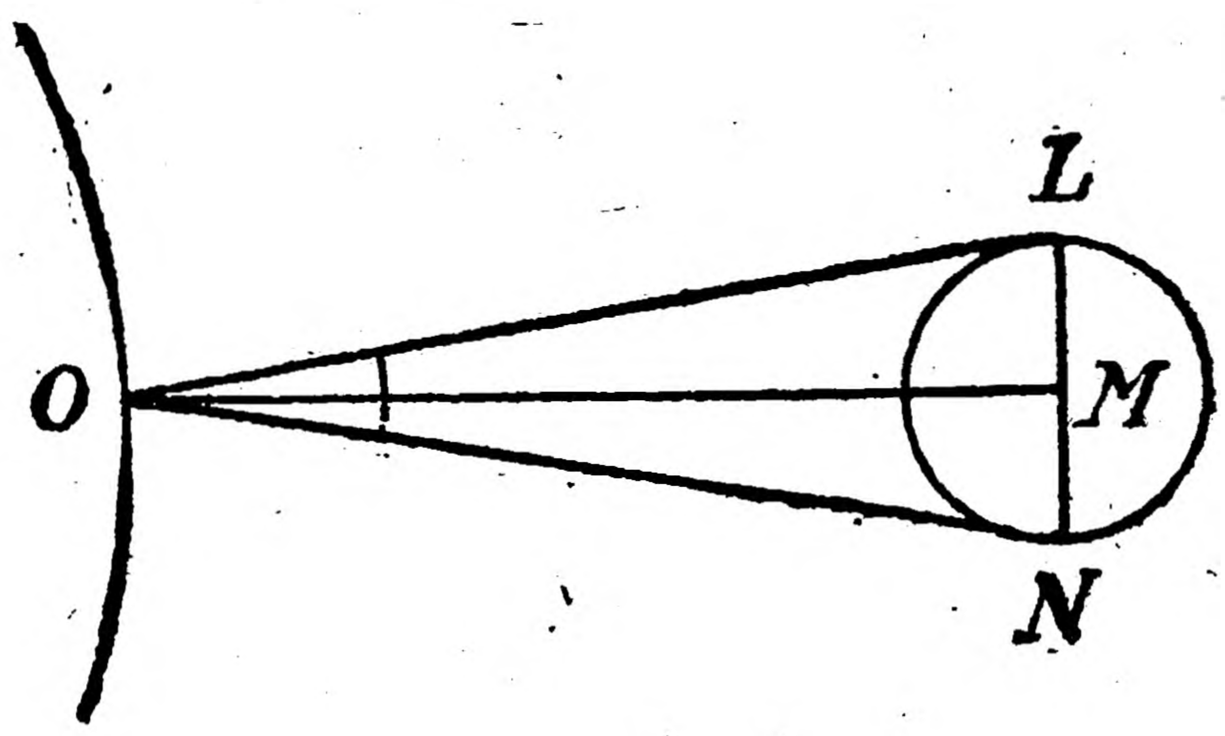


Рис. 304

Задача 5. Мы в задаче № 3 § 257 (стр. 185) узнали, что луна находится от земли на расстоянии OM, равном около 320 000 *км* (рис. 304). $\angle LON$, под которым виден с земли диаметр луны, равен $^1/_2°$ (приблизительно). Вычислите радиус луны и сравните его с радиусом земли.

Указание: $\operatorname{tg} {}^1/_4°$ примите равным 0,005.

§ 264. Как найти угол, зная его sin, cos или tg?

Задача 1. Ширина дома $AD = 24$ *м* (рис. 297). Длина стропила $BD = 20$ *м*. Каков угол подъема A у этой крыши?

Указание. Найдя отношение $\frac{AC}{AB}$, мы узнаем cos угла A. А таблица cos-ов укажет нам, какому углу соответствует этот косинус.

Задача 2. В зависимости от того, из какого материала сделана крыша, ей дают разный уклон.

Для железной крыши подъем ее BC (рис. 297) составляет обыкновенно $^1/_5$ часть ширины AD. Для соломенной крыши он должен быть не ниже $^1/_2$ этой ширины, а для черепичной он может составлять $^1/_3$ часть ее.

Вычислите, чему равен угол A наклона кровли в крышах железных, черепичных и соломенных.

Задача 3. На рис. 305 дан «поперечный профиль» железнодорожного пути. Высота насыпи $AL = 1{,}3$ *м*, а боковая сторона ее $AC = 2{,}3$ *м*. Вычислите угол откоса C этой насыпи.

Задача 4. Нормальным углом откоса для железнодорожной насыпи (см. поперечный профиль на рис. 305) считается такой, при котором на каждый 1 метр высоты AL приходится $1^1/_2$ метра ширины «подошвы» CL. Определите, чему равен у такой насыпи угол наклона C?

У к а з а н и е. Надо вычислить сначала tg этого угла, а потом по таблицам найти и самый угол.

Задача 5. Обыкновенно высоту подъема железнодорожного пути выражают в виде дроби, которая показывает, какую часть всего железнодорожного пути AB составляет эта высота BC (рис. 295).

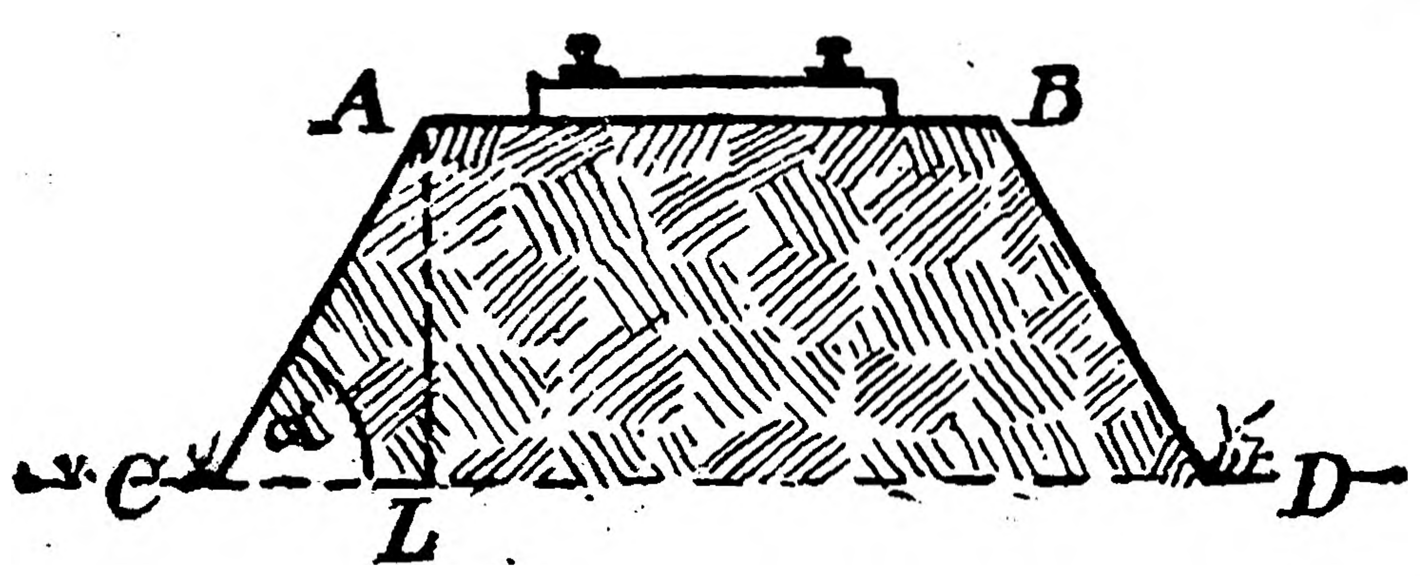


Рис. 305.

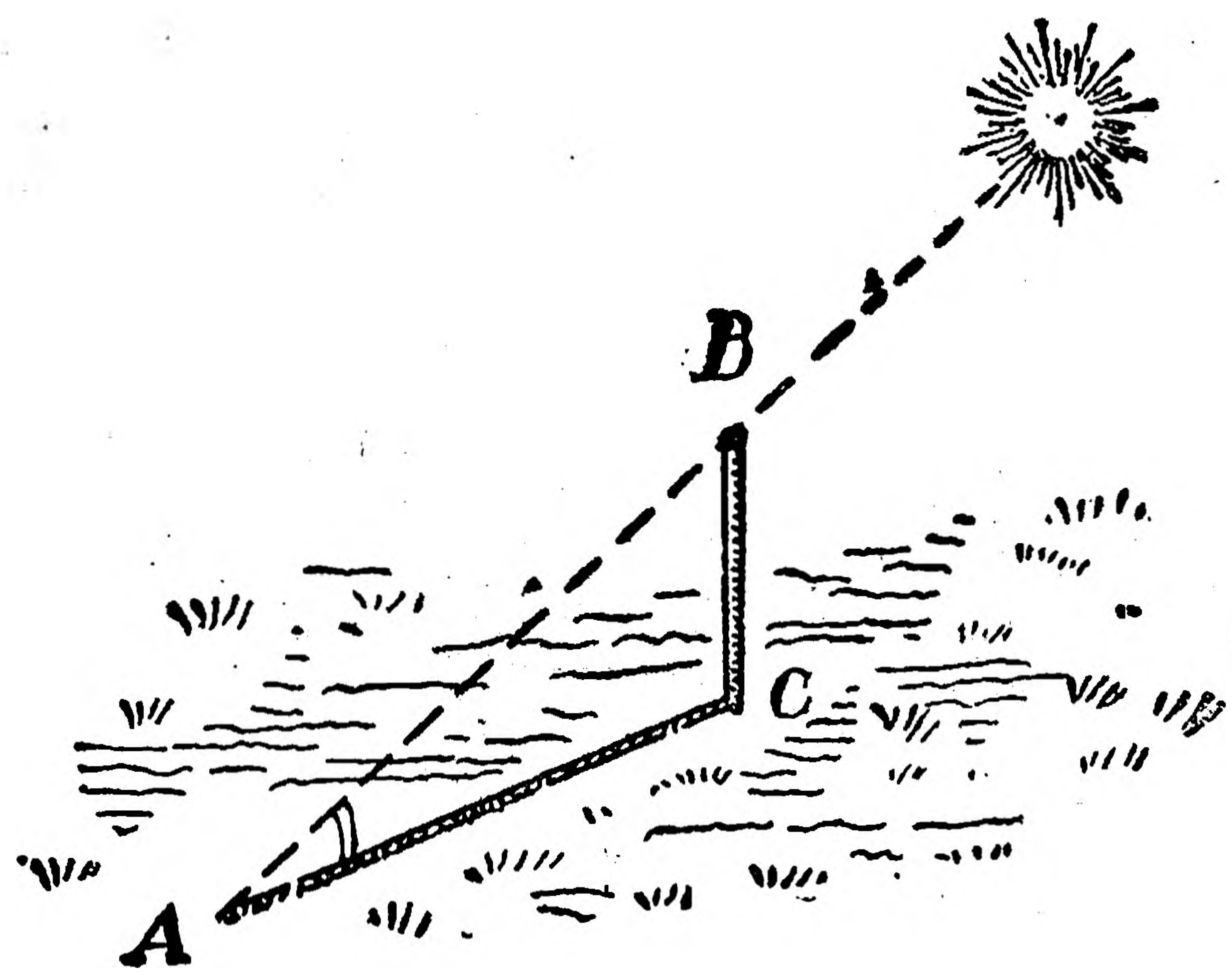


Рис. 306.

Наибольший подъем, который допускает обыкновенная железная дорога $= {}^1/_{40}$. Какой тригонометрической величине соответствует эта дробь? Каков угол подъема у такого железнодорожного пути?

Иногда эту дробь, указывающую, какую часть железнодорожного пути составляет высота подъема, выражают в процентах. Для зубчатой железной дороги в горах допускается максимальный подъем в $25^0/_0$. Вычислите угол этого подъма.

Задача 6. Для того, чтобы измерить «высоту» солнца, поставили вертикально палку $BC = 150$ *см* (рис. 306) и измерили длину ее тени $AC = 200$ *см*. Вычислив угол A, вы узнаете «высоту» солнца.

У к а з а н и е. Вычислив отношение $\frac{BC}{AC}$, вы узнаете tg $\angle A$. При помощи таблицы тангенсов вы найдете тот угол, который имеет этот тангенс.

82. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ Sin, Cos И Tg.

Мы познакомились с тремя тригонометрическими величинами — с и н у с о м, к о с и н у с о м и т а н г е н с о м. Для одного и того же угла эти тригонометрические величины имеют свои отдельные значения. Например, для угла в 30° синус равен 0,50; косинус того же угла равен 0,87, а тангенс 0,58.

Посмотрим, вполне ли независимы друг от друга эти числа, либо между ними есть какая-то зависимость, связывающая их друг с другом.

Поищем сначала связь между sin и cos одного и того же угла.

§ 265. Зависимость между sin и cos одного и того же угла.

Опыт. Мы для каждого угла непосредственным измерением нашли sin и cos. (Вспомните составление таблицы: § 259.)

Возьмем любой из этих углов, например угол в 36°, и выпишем из таблицы значение его sin и cos. (Помните только, что там мы нашли только приближенные значения.) Сделаем то же самое еще с каким-нибудь произвольным углом, например, с углом в 78°.

$$\sin 36° = 0{,}59 \quad \Big| \quad \sin 78° = 0{,}98$$
$$\cos 36° = 0{,}81 \quad \Big| \quad \cos 78° = 0{,}21.$$

С первого взгляда очень трудно подметить какую-нибудь связь между sin и cos одного и того же угла. Но попробуем сделать так. Возведем в квадрат[1]) sin и cos угла в 36°, а потом и угла в 78°, получим:

$$(\sin 36°)^2 = 0{,}36\ ^{2)} \quad \Big| \quad (\sin 78°)^2 = 0{,}95$$
$$(\cos 36°)^2 = 0{,}65 \quad \Big| \quad (\cos 78°)^2 = 0{,}04$$

Всмотритесь теперь внимательно в эти числа, теперь уже легче подметить между ними связь.

Результат опыта. Если сложить $(\sin 36°)^2$ с $(\cos 36°)^2$, то получим число, близкое к 1:

$$(\sin 36°)^2 + (\cos 36°)^2 = 1{,}01.$$

Ту же самую зависимость найдем мы и для sin и cos угла в 78°:

$$(\sin 78°)^2 + (\cos 78°)^2 = 0{,}99,$$

опять получим число, близкое к 1.

Возьмите еще несколько случайных углов, найдите из таблицы значения их sin и cos и убедитесь непосредственным вычислением, что вы опять получите число, близкое к 1. Так как мы для sin и cos брали из таблицы только приближенные их значения, то напрашивается мысль, не будет ли между точными значениями sin и cos одного и того же угла такая зависимость:

$$(\sin \angle A)^2 + (\cos \angle A)^2 = 1.$$

---

[1]) То-есть помножим число само на себя.

[2]) После возвышения в квадрат достаточно сохранить в результате только две цифры, ограничившись точностью до 0,01.

Докажем, что предполагаемая нами зависимость между sin и cos одного и того же угла не есть что-то случайное. В самом деле, нарисуем произвольный угол A и найдем его sin и cos (рис. 307):

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB}; \quad \Big| \quad \cos \angle A = \frac{AC}{AB}.$$

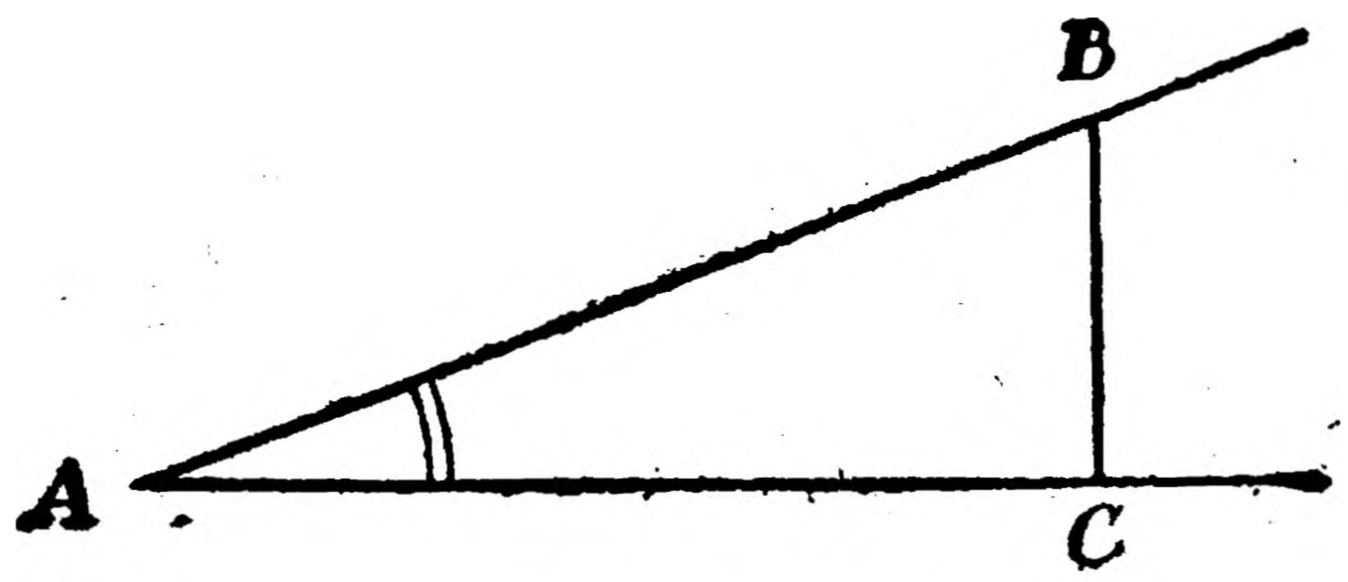


Рис. 307.

Возведем эти равенства в квадрат:

$$(\sin \angle A)^2 = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2}$$

$$(\cos \angle A)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{AC^2}{AB^2}.$$

Сложим правые и левые части этих равенств

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2}$$

или, если сложить дроби:

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

Посмотрите теперь внимательно на рис. 307: BC и AC — это катеты прямоугольного треугольника, а ведь еще Пифагор знал, что сумму квадратов катетов ($BC^2 + AC^2$) можно заменить одним квадратом гипотенузы AB^2 (§ 230).

Сделаем и мы это:

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{AB^2}{AB^2}$$

или, окончательно,

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1.$$

Таким образом, применив алгебру, мы убедились, что такая зависимость будет всегда между sin и cos любого угла.

§ 266. Как, зная sin и cos одного и того же угла, вычислить его tg?

Опыт. Возьмем из таблицы sin и cos любой пары углов, например

$\sin 33° = 0{,}54$	$\sin 68° = 0{,}93$
$\cos 33° = 0{,}84$	$\cos 68° = 0{,}37.$

Попытайтесь сделать такое действие над sin и cos одного и того же угла, чтобы получить число, близкое к tg того же угла.

Результат опыта. После нескольких проб вы, быть-может, подметите, что если sin какого-нибудь угла разделить на его cos, то получится число, близкое к tg этого угла.

В самом деле

$$\frac{\sin 33^\circ}{\cos 33^\circ} = 0{,}64\ldots \qquad \frac{\sin 68^\circ}{\cos 68^\circ} = 2{,}5\ldots$$

$$\operatorname{tg} 33^\circ = 0{,}65\ldots \qquad \operatorname{tg} 68^\circ = 2{,}4\ldots$$

Докажем, что если бы мы нашли точное значение sin и cos, то отношение их дало бы tg того же угла.

Для рис. 307 имеем:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}; \quad \cos A = \frac{AC}{AB};$$

разделим их друг на друга:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB}.$$

После сокращения получим

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AC}.$$

Но посмотрите на чертеж! Ведь $\frac{BC}{AC}$ есть tg A.

Итак всегда

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tg} A.$$

А потому, если мы знаем sin и cos какого-нибудь угла, то узнать tg этого угла очень легко: достаточно sin разделить на cos.

ГЛАВА XIX.

ОКРУЖНОСТЬ И ПРЯМАЯ.

83. ОКРУЖНОСТЬ И ТОЧКА.

§ 267. Окружность. Ее центр и радиус. Окружностью называется замкнутая кривая линия, все точки которой одинаково удалены от центра.

Нарисуйте при помощи циркуля какую-нибудь окружность (§ 67). Укажите ее центр и радиус (рис. 308).

§ 268. Сколько окружностей можно провести через одну точку?

Опыт. Нарисуйте какую-нибудь точку A (рис. 309).

Отметьте несколько произвольно взятых точек (например, точки O_1, O_2, O_3, O_4); приняв каждую из этих точек за центр, нарисуйте окружности, проходящие через нашу точку A. Итак, сколько окружностей можно провести через данную точку A?

Результат опыта. Через одну точку B можно провести неограниченное число окружностей.

§ 269. Сколько окружностей можно провести через две точки?

Опыт. Нарисуйте две какие-нибудь точки A и B (рис. 310).

Постарайтесь нарисовать несколько окружностей, проходящих через эти точки. Нельзя ли соединить центры этих окружностей

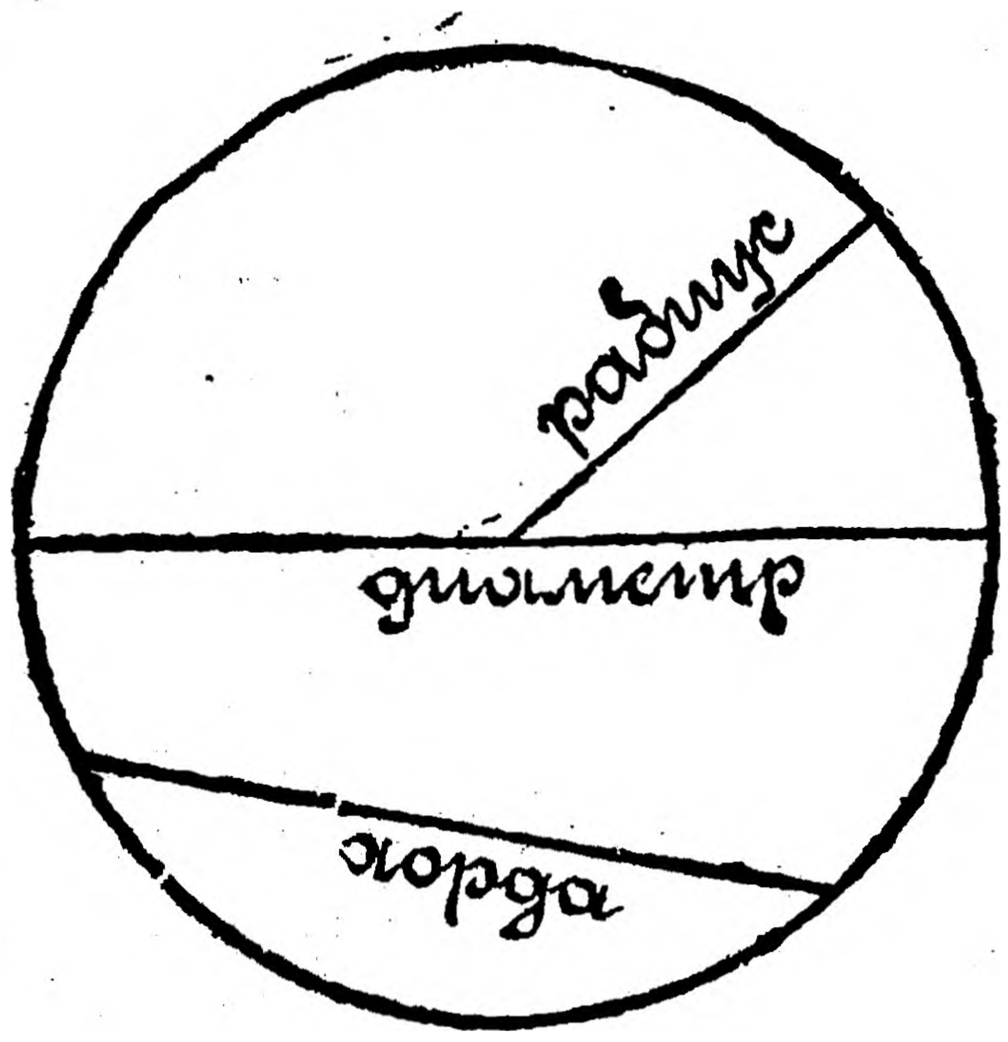


Рис. 308.

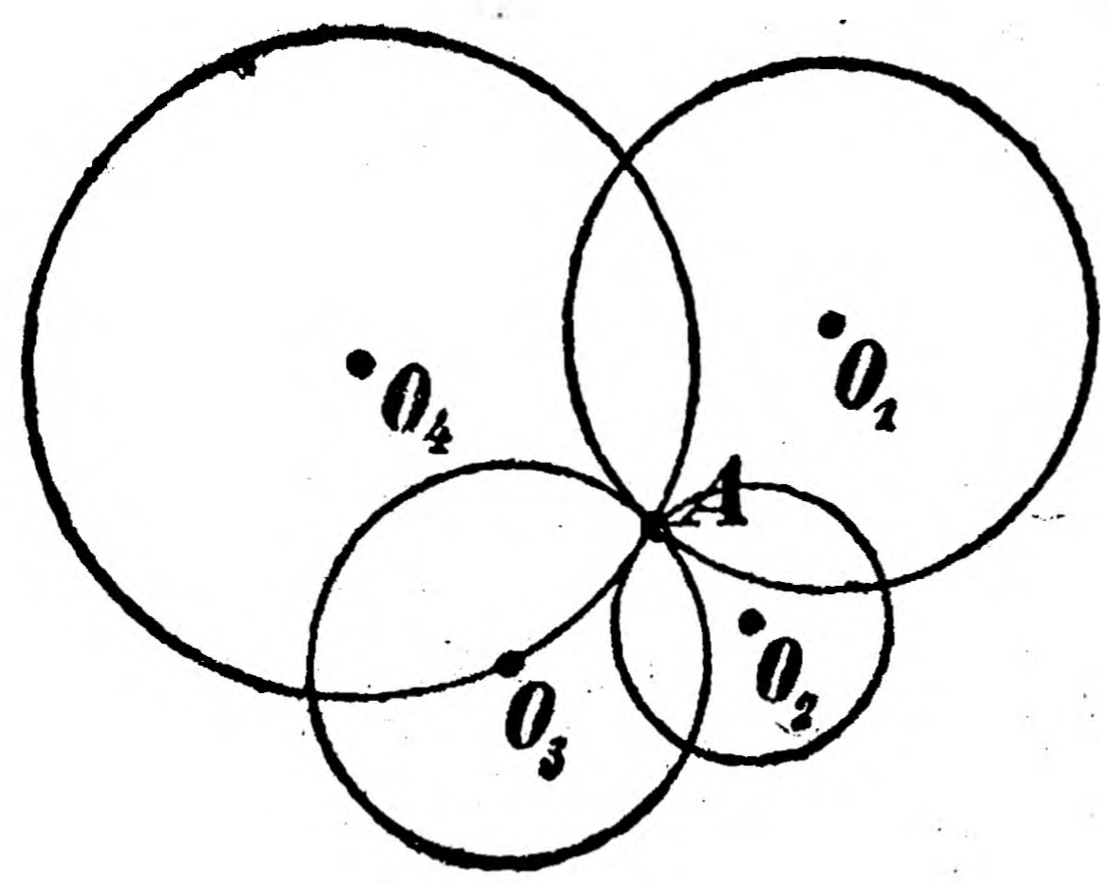


Рис. 309.

одной прямой линией? Какое положение занимает эта линия центров относительно прямой AB?

Итак, через точки A и B можно провести неограниченное число окружностей.

Докажите (воспользовавшись теоремой § 160), что центры всех этих окружностей лежат на одной прямой ZM, которая служит осью симметрии отрезка, соединяющего данные точки A и B.

§ 270. Сколько окружностей можно провести через три точки?

Теорема. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести только одну окружность.

Опыт. Нарисуйте три каких-нибудь точки A, B и C, не лежащие на одной прямой.

Проведите несколько окружностей, проходящих через две точки A и B, и нарисуйте ту ось симметрии, назовем ее ZM, на которой располагаются центры этих окружностей (рис. 310). Проведите затем несколько окружностей, проходящих через точки *B* и *C* и нарисуйте ту ось симметрии (назовем ее *NP*), на которой лежат все центры этих окружностей.

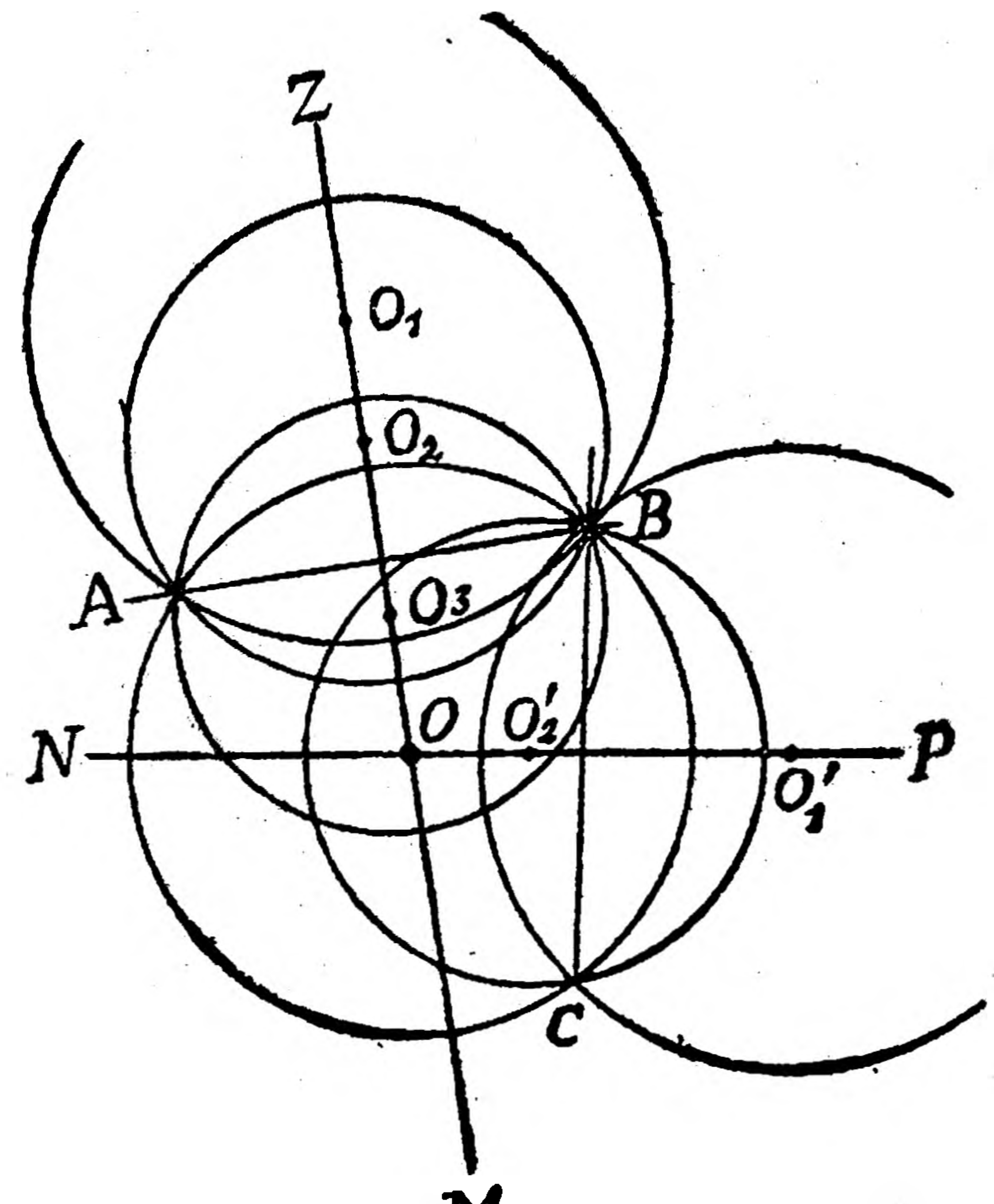


Рис. 310.

Не удастся ли вам среди этих окружностей найти такую, которая будет принадлежать обеим группам окружностей, то-есть проходить через точки *A*, *B* и *C*? Где лежит центр ее? Не удается ли вам найти еще одну окружность, проходящую через все три точки *A*, *B* и *C*?

Результат опыта. Центр искомой окружности будет лежать в точке *O*, которая есть пересечение двух осей симметрии *ZM* и *NP*.

Такую окружность можно провести только одну.

Доказательство. Центры всех окружностей, проходящих через две точки *A* и *B*, лежат на оси *ZM* (это перпендикуляр к отрезку *AB* в его середине). Центры окружностей, проходящих через точки *B* и *C*, лежат на оси *NP*. Центр окружности, проходящей через все три точки, должен лежать одновременно на обоих перпендикулярах, то-есть быть в точке их пересечения *O*.

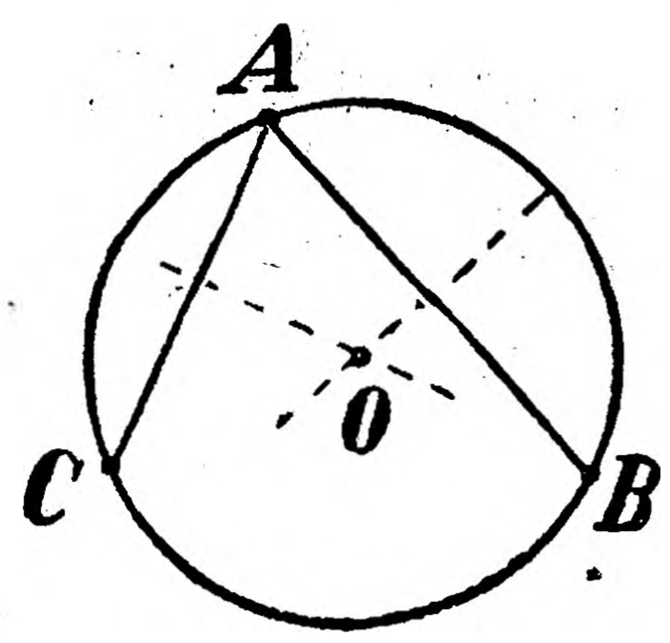


Рис. 311.

Второй окружности через наши три точки провести нельзя, потому что две линии оси симметрии могут пересечься только в одной точке.

Задача. Найти центр данной окружности или ее дуги (рис. 311).

Часть окружности называется дугою. Нарисуйте какую-нибудь дугу (на рис.—*BAC*). Найдем ее центр.

Указание. Возьмите на данной дуге три точки *A*, *B* и *C*. Соедините их хордами и из середины этих хорд восставьте к ним перпендикуляры. Точка пересечения этих перпендикуляров и будет искомым центром. Почему?

84. ХОРДЫ И ДИАМЕТР.

§ 271. Хорда, диаметр и дуга. Нарисуйте окружность. Отметьте на ней две какие-нибудь точки *A* и *B* и соедините их прямой линией. Прочитайте на рис. 308, как называется такая прямая.

Проведите хорду так, чтобы она прошла через центр окружности. Вы получите диаметр (см. рис. 308).

Укажите те части, на которые окружность делится хордою.

§ 272. *Теорема.* Чем хорда ближе к центру, тем она больше, при чем наибольшей хордой будет диаметр.

Рис. 312.

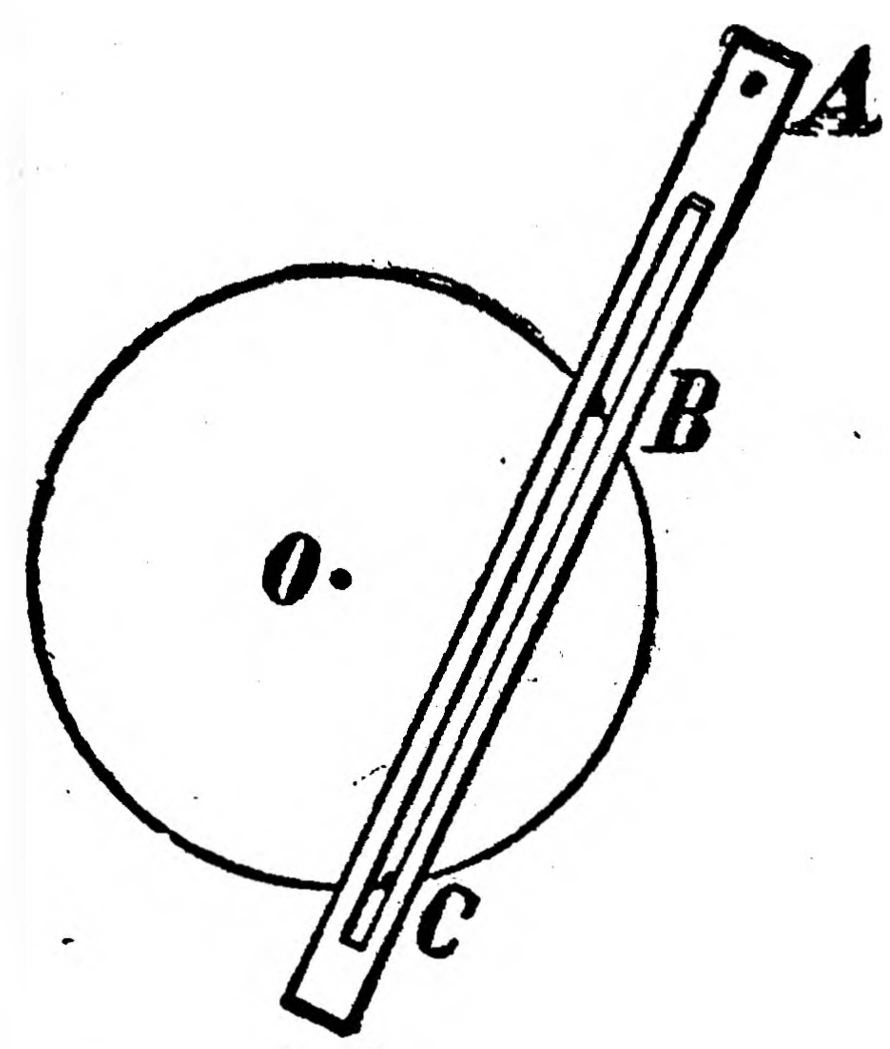


Рис. 313.

Опыт. Вырежьте из бумаги или тонкого картона длинную полосу и сделайте внутри продольный узкий прорез (рис. 312).

Нарисуйте какую-нибудь окружность и прикрепите кнопкой конец полосы A вне окружности так, чтобы полоса могла вращаться вокруг точки A (посмотрите на рис. 313).

Вращайте полосу справа налево и рисуйте получаемые внутри прореза хорды.

Проследите, как изменится длина этих хорд по мере того, как полоса ваша приближается к центру.

Поверните полосу так, чтобы хорда прошла через центр, тогда она превратится в диаметр.

Отметьте на полосе концы диаметра и продолжайте, вращая полосу, следить за длиною хорд. Как изменяется длина их по мере того, как она удаляется от центра?

Результаты опыта. По мере того, как хорда приближается к центру, она становится все длиннее и длиннее, при чем наибольшей длины она будет тогда, когда проходит через центр, то-есть когда превращается в диаметр.

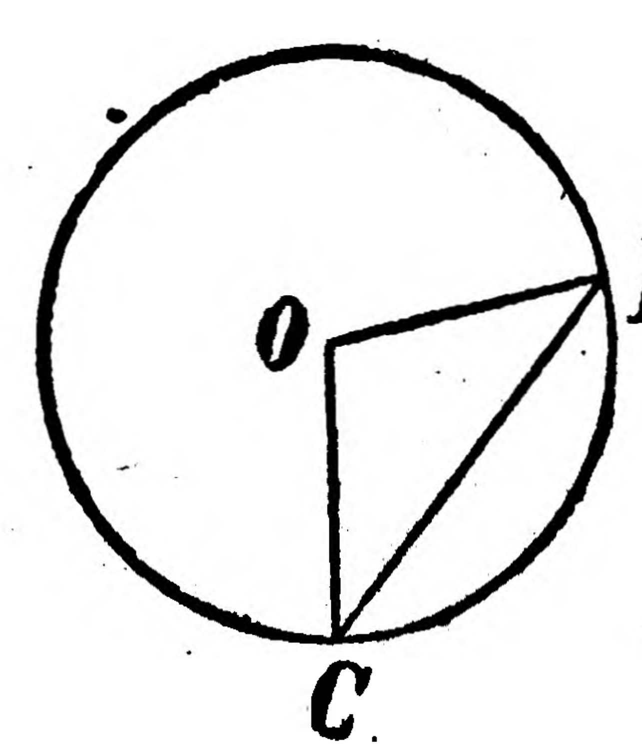


Рис. 314.

Доказательство. Докажем, что диаметр должен быть больше любой хорды. Нарисуем какую-нибудь хорду CB (рис. 314). Соединим концы ее с центром. Получится $\triangle\ COB$.

$$\text{Хорда } CB < OC + OB$$

(одна сторона $\triangle$-ка меньше суммы двух других, § 146), OC и OB — радиусы, а потому хорда CB меньше двух радиусов.

Следовательно, хорда CB меньше диаметра.

§ 273. *Теорема.* Равные хорды находятся на одинаковом расстоянии от центра.

Опыт. Нарисуйте окружность. Вырежьте две бумажные полосы такой длины, чтобы одна из них могла служить радиусом нарисованной окружности, а другая ее хордой. Прикрепите первую полоску одним концом (при помощи кнопки или булавки к центру, рис. 315).

По середине второй полосы (хорды) сделайте два надреза и наденьте ее на радиус так, чтобы концы ее лежали на окружности, и чтобы она была перпендикулярна к радиусу (рис. 315).

Укажите расстояние этой хорды от центра (OC).

Начните теперь вращать хорду AB, чтобы концы ее A и B все время лежали на окружности, и следите за той точкой C, в которой радиус OD (перпендикулярный к хорде) пересекает хорду; остается ли эта точка на одном и том же расстоянии от центра или меняет его? Начертите ту линию, которую опишет эта точка при движении нашей хорды вдоль окружности.

Результат опыта. Итак, равные хорды одинаково удалены от центра. Докажите справедливость этой теоремы.

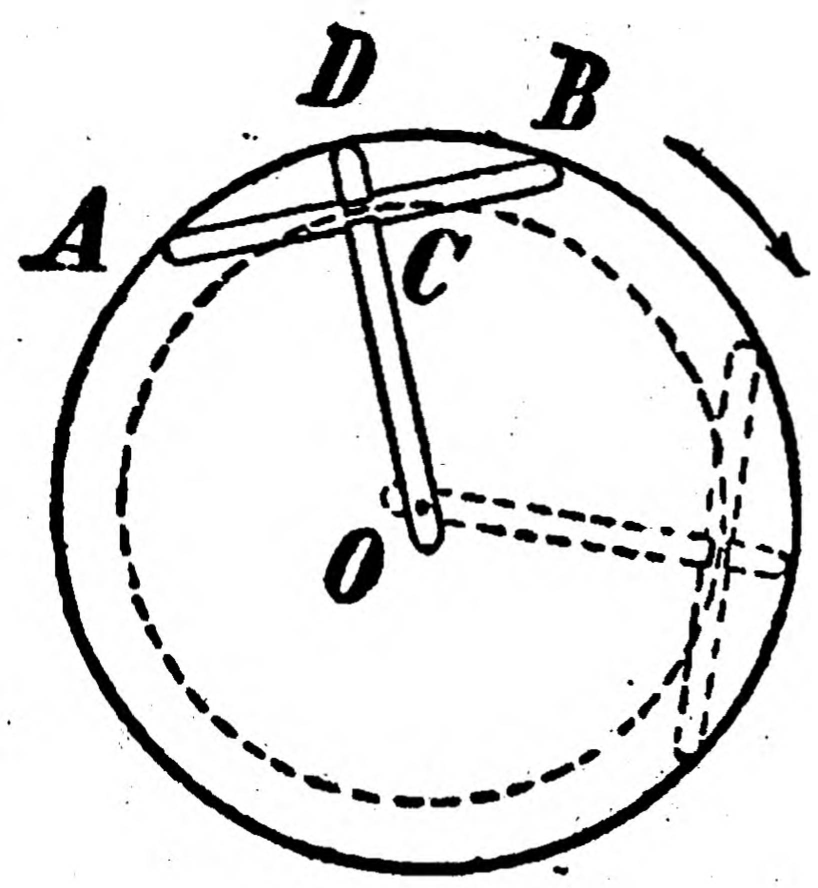


Рис. 315.

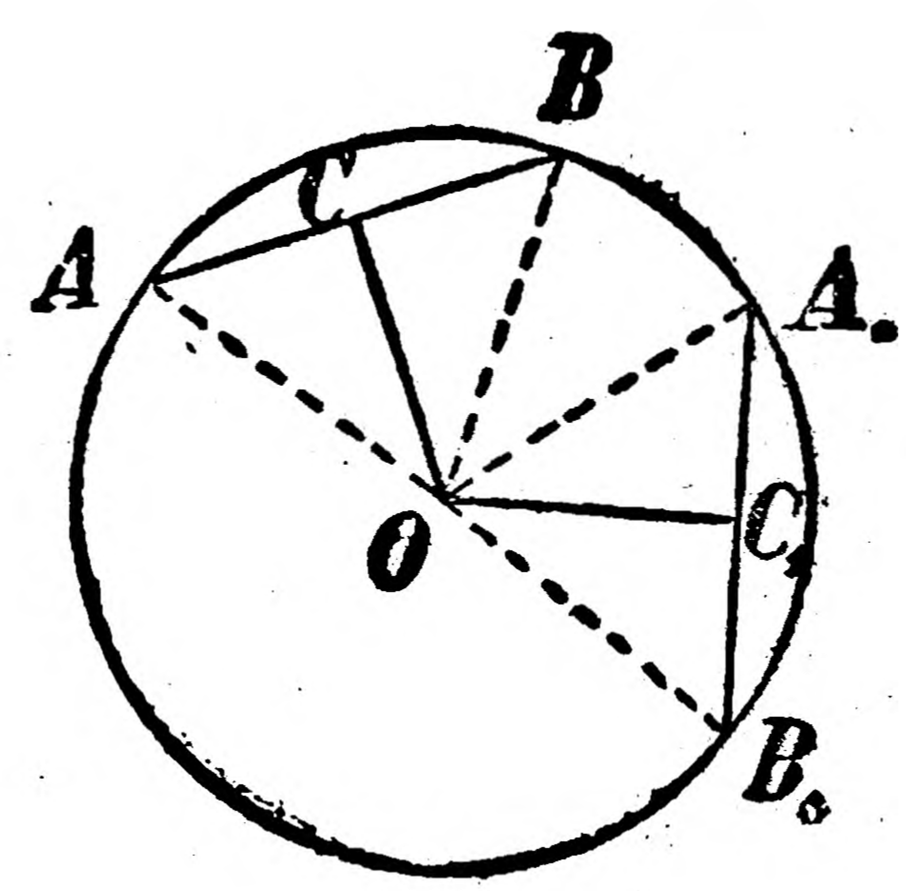


Рис. 316.

Указание. Соединив концы равных хорд A и B, A_1 и B_1 с центром, докажите, что полученные треугольники AOB и A_1OB_1 равны друг другу, а следовательно, равны и их высоты OC и OC_1 (рис. 316).

§ 274. Хорды и дуги.

Теорема. Если равны хорды, то равны и стягиваемые ими дуги.

Опыт. Нарисуйте окружность и проведите в ней две одинаковые хорды (рис. 317). Укажите те дуги, которые стягивают эти хорды. Для того, чтобы сравнить друг с другом эти дуги сделайте так: наложите на ваш чертеж лист прозрачной бумаги и укрепите его в центре булавкой. Перечертите на него вашу окружность и одну из хорд, например, хорду CD. Вращайте весь подвижной круг (нарисованный на прозрачной бумаге) до тех пор, пока не совпадет хорда AB с CD. Совпадут ли тогда дуги CFD и AEB?

Доказательство. Вместо того, чтобы вращать весь круг, можно вырезать часть его $OCFD$ (такая часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется сектором), и вращать этот

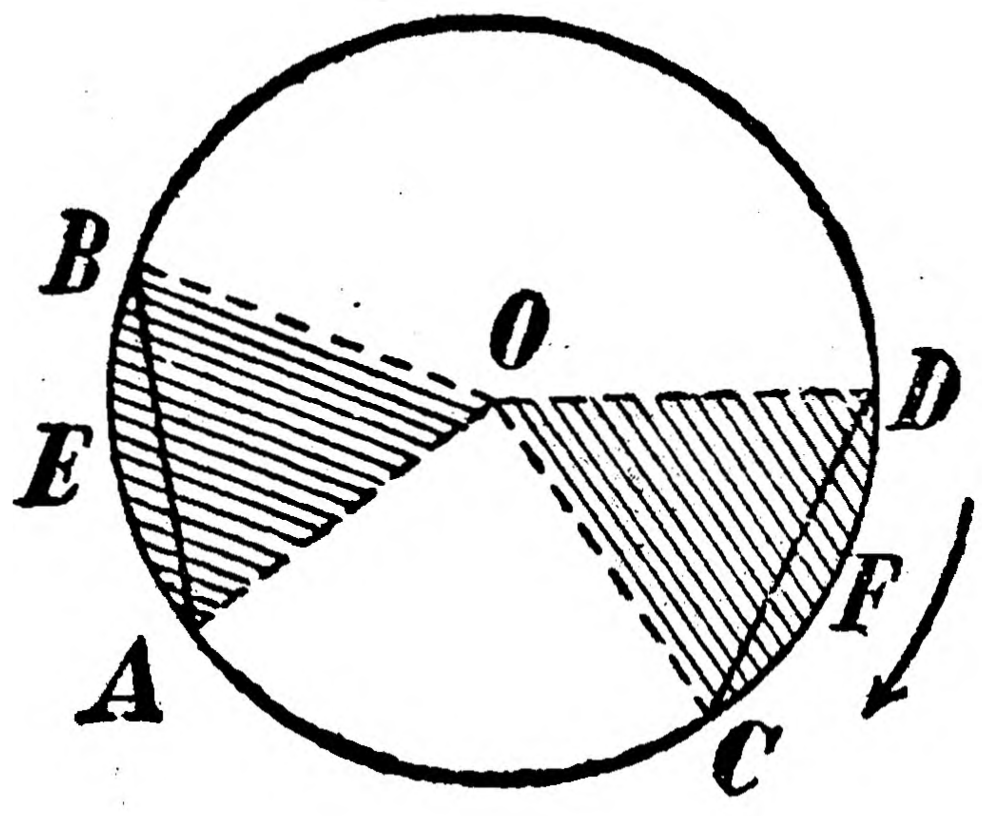


Рис. 317.

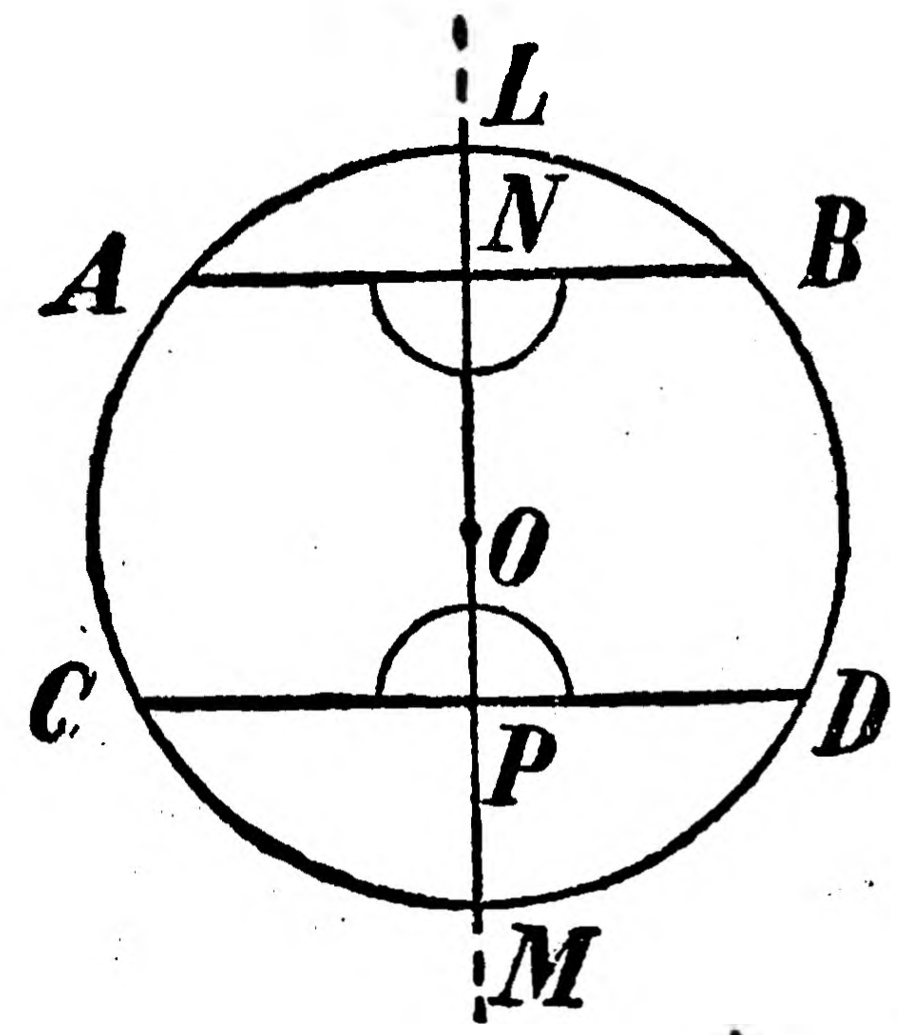


Рис. 318.

сектор. Докажите, что он должен совпасть всеми своими частями с сектором $OAEB$, что, следовательно, дуги CFD и AEB должны оказаться равными друг другу.

§ 275. *Теорема.* Диаметр, перпендикулярный к хордам, есть их ось симметрии.

Опыт. Начертите на прозрачной бумаге окружность и нарисуйте в ней две параллельные хорды (рис. 318). Проведите диаметр, перпендикулярный к этим хордам. Вырежьте этот круг и, сгибая его вдоль по диаметру LM, убедитесь, что последний есть ось симметрии.

Доказательство. При сгибании круга по диаметру, отрезки обеих хорд (NB и NA; PD и PC) пойдут по одному и тому же направлению (у точек N и P углы прямые). Концы хорд A и B, D и C тоже сольются (они лежат на одной окружности). Должны, конечно, слиться и все остальные точки окружности (почему?). Следовательно, у любой окружности диаметр, перпендикулярный к хорде, служит ее осью симметрии.

Следствие 1. Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны (дуга AC = дуге BD).

Следствие 2. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду пополам.

Следствие 3. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит стягиваемую этой хордой дугу пополам.

85. КАСАТЕЛЬНАЯ.

§ 276. Секущая и касательная.

Опыт. Нарисуйте окружность и прикрепите вне ее один конец бумажной полосы с продольным прорезом (вспомните опыт § 272). Прямая AE (рис. 319), изображаемая прорезом этой полосы, пересекает окружность в двух точках (D и E). Такая прямая называется секущей. Начните вращать секущую по направлению стрелки. Тогда те две точки, в которых секущая пересекает окружность, начнут приближаться друг к другу. Поверните, наконец, секущую так, чтобы эти две точки слились в одну. Прямая AC, встречающая окружность только в одной точке, называется касательной; а точка (B или C) встречи касательной с окружностью называется точкой касания. Сколько таких касательных можно провести из одной точки к одной окружности?

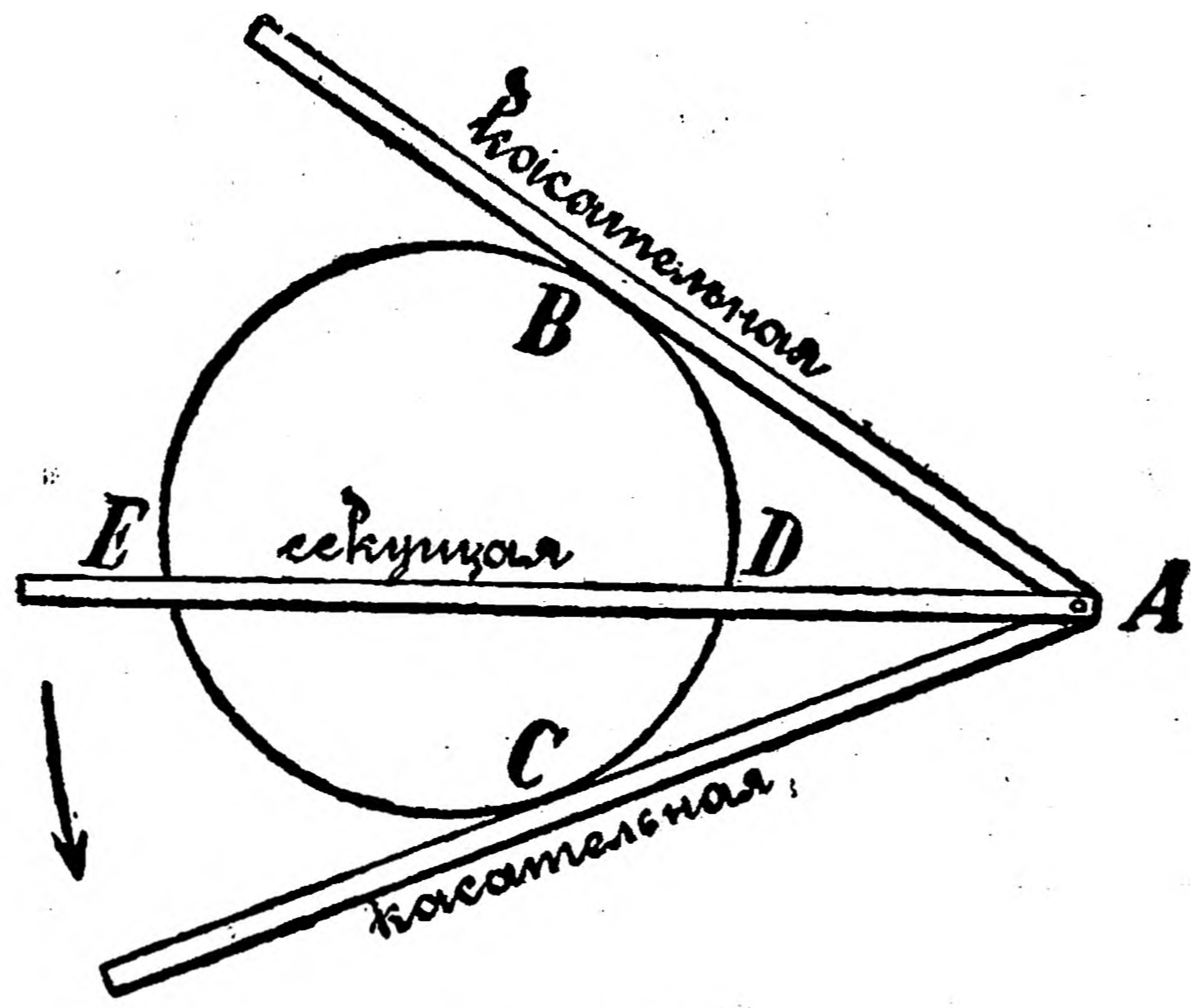


Рис. 319

§ 277. *Теорема.* Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной.

Опыт. Дополните предыдущий прибор таким приспособлением. Вырежьте бумажную полосу, равную по длине радиусу, и укрепите один конец ее крепко в центре, а в другой воткните кнопку так, чтобы головка ее лежала на окружности, острие было сверху и чтобы это острие могло скользить по прорезу секущей, при чем этот конец радиуса, скользя по окружности, должен все время находиться в одной из точек пересечения секущей и окружности, например, в точке B (рис. 320).[1] Обратите внимание на те углы ($\angle OBC$ и $\angle OBA$), которые образует секущая с радиусом, проведенным в точку пересечения B. Будут ли эти углы прямыми?

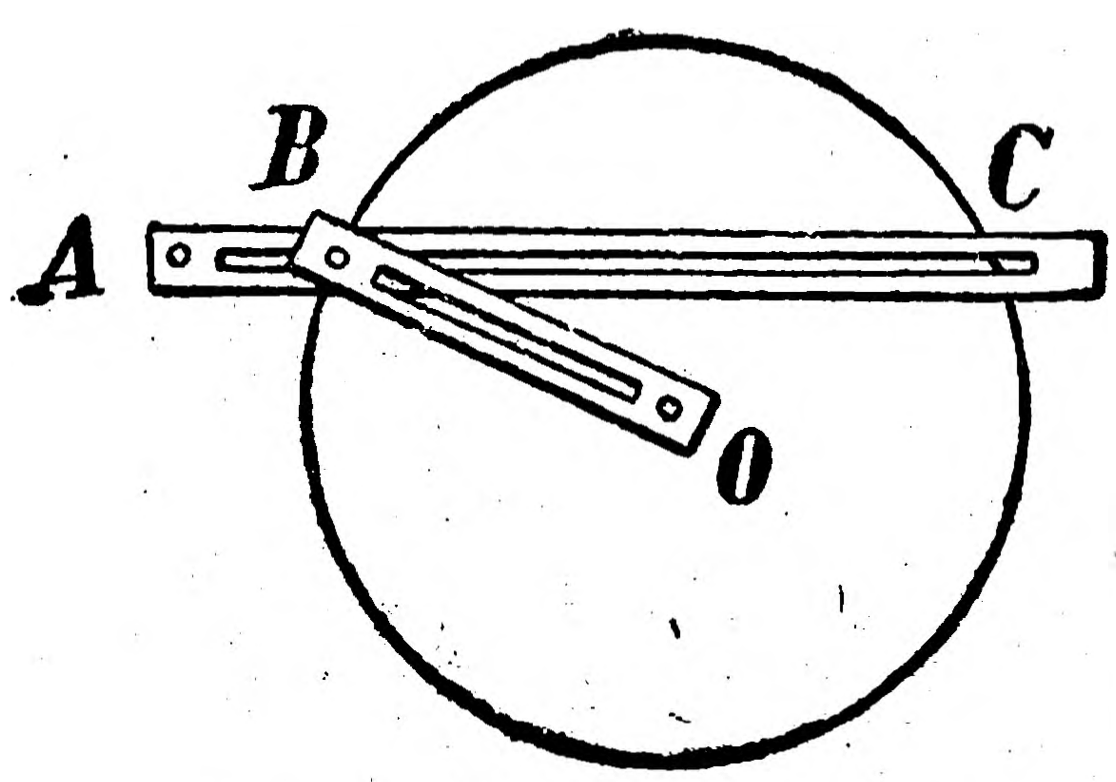


Рис. 320.

[1]) Чтобы не усложнять опыта можно выбросить кнопку у конца B и каждый раз передвигать конец радиуса в эту точку рукою.

Передвигайте секущую так, чтобы точки пересечения *B* и *C* приближались друг к другу. Следите при этом, как изменяются углы у точки *B*. Поверните, наконец, секущую так, чтобы она обратилась в касательную. Какого вида углы получатся тогда у точки касания? Будет ли в этом положении радиус *OB* перпендикуляром к касательной *AC*? Проверьте это наугольником.

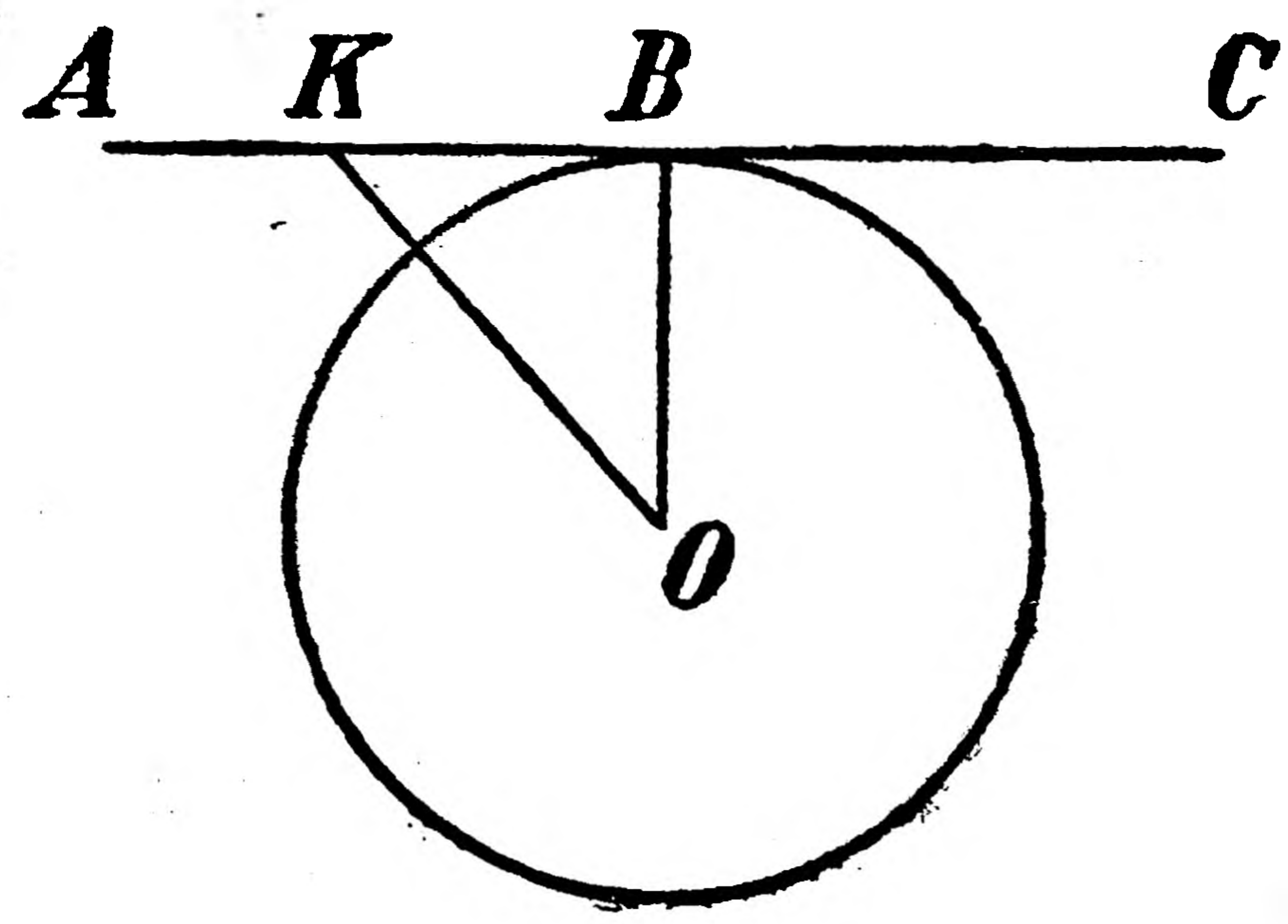


Рис. 321.

Доказательство. Не трудно доказать, что радиус *OB*, проведенный в точку касания *B* (рис. 321), всегда должен быть перпендикулярен к касательной. В самом деле, *OB* есть кратчайшее расстояние центра *O* от касательной *AC* (все остальные точки касательной, в роде точки *K*, лежат вне окружности, значит, они находятся дальше от центра, чем точка *B*), а кратчайшее расстояние от точки *O* до прямой *AC* есть перпендикуляр, опущенный на эту прямую (§ 168).

§ **278.** *Теорема.* Две касательные, проведенные из одной точки к одной и той же окружности, равны друг другу.

Опыт. Вырежьте из бумаги две достаточно длинные узкие полосы и прикрепите их булавкой одним концом в точке *A*. Поверните их так, чтобы они, обхватывая окружность с двух сторон, обратились в касательные к ней (рис. 322). Отметьте на каждой касательной точку касания. Сдвиньте теперь обе касательные вместе и сравните длину их от точки *A* до точки касания. Равны ли эти касательные?

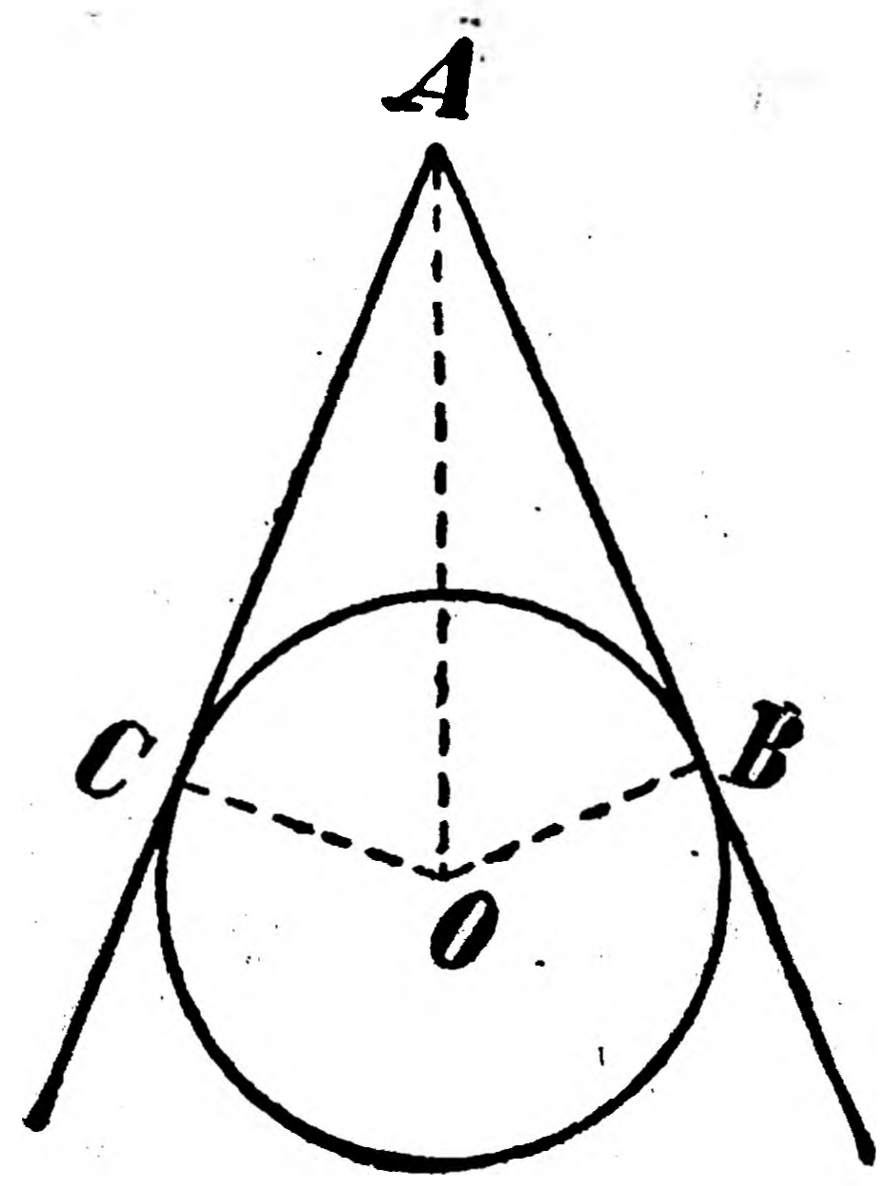


Рис. 322.

Доказательство. Соедините точку *A* с центром и проведите в точки касания *B* и *C* радиусы, докажите, что полученные прямоугольные треугольники должны быть равны друг другу (равные гипотенузы и катеты § 156). Этим вы и докажете, что касательные *AB* *AC* должны быть равны друг другу.

Следствие. Прямая *AO*, соединяющая точку *A* с центром, есть биссектриса угла *BAC*, образованного касательными.

86. КРИВИЗНА.

§ 279. Кривизна окружности и ее радиус.

Опыт 1. Возьмите тонкий прут из лозы и согните его в виде окружности. Начните теперь уменьшать радиус окружности. Для этого вам придется все больше и больше сгибать прут, то-есть увеличивать его кривизну; наоборот, если вы захотите уменьшить кривизну прута, то вам надо будет увеличить радиус этого кольца.

Опыт 2. Нарисуйте прямую AB (рис. 323) и проведите к ней в точке C перпендикуляр. Нарисуйте ряд окружностей, касательных прямой AB в точке C и имеющих центры на этом перпендикуляре. Проследите, как изменяется кривизна окружности при увеличении радиуса.

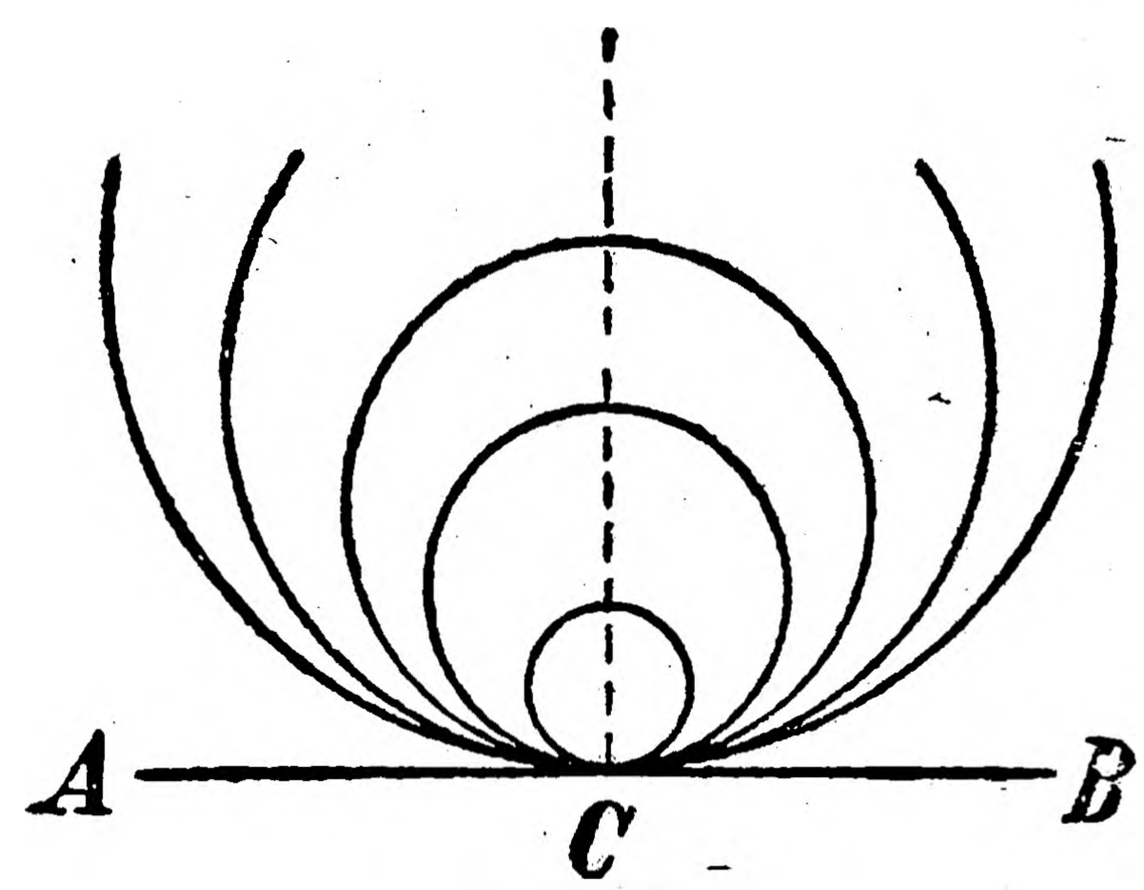


Рис. 323.

Результаты опытов. Мы видим, что с увеличением радиуса окружности кривизна ее уменьшается: окружность начинает как бы выпрямляться. Вот почему кривизну окружности измеряют дробью, обратной радиусу; если радиус окружности содержит R сантиметров, то кривизну считают равной $\frac{1}{R}$, и эта дробь служит мерою кривизны.

§ 280. Эллипс. Окружность имеет по всей своей длине одну и ту же кривизну, но есть такие кривые, которые в разных частях имеют разную кривизну. Познакомимся со свойствами одной из таких линий.

Опыт 1. Нарисуйте посредине листа бумаги прямую линию F_1F_2 длиною в 3 *см* (рис. 324). У обоих концов ее воткните по булавке. Свяжите концы нитки в 8 *см* длиною и, накинув образовавшееся кольцо на булавки, обведите его вокруг булавок, туго натягивая карандашом (нить должна вся лежать на бумаге). Карандаш будет рисовать кривую (рис. 324), которая называется эллипсом. Те точки F_1 и F_2, в которые вы втыкали булавки, называются фокусами эллипса. Укажите их. Соедините прямой линией фокусы и протяните эту прямую до пересечения с эллипсом. Эта прямая AB называется большой осью эллипса. Укажите ее на чертеже.

Найдите середину большой оси. Проведите через эту середину перпендикулярно к большой оси прямую CD. Эта прямая называется малой осью эллипса. Укажите ее на рисунке.

Нарисуйте окружность, которая имела бы такую же кривизну, как та часть эллипса, которая прилегает к концам большой оси (рис. 325). Нарисуйте затем вторую окружность такой же кривизны, как та часть эллипса, которая прилегает к концам меньшей оси. Сравните радиусы этих окружностей. Одинаковы ли они? Одинакова ли кривизна эллипса вдоль по всей его длине? Где эта кривизна больше?

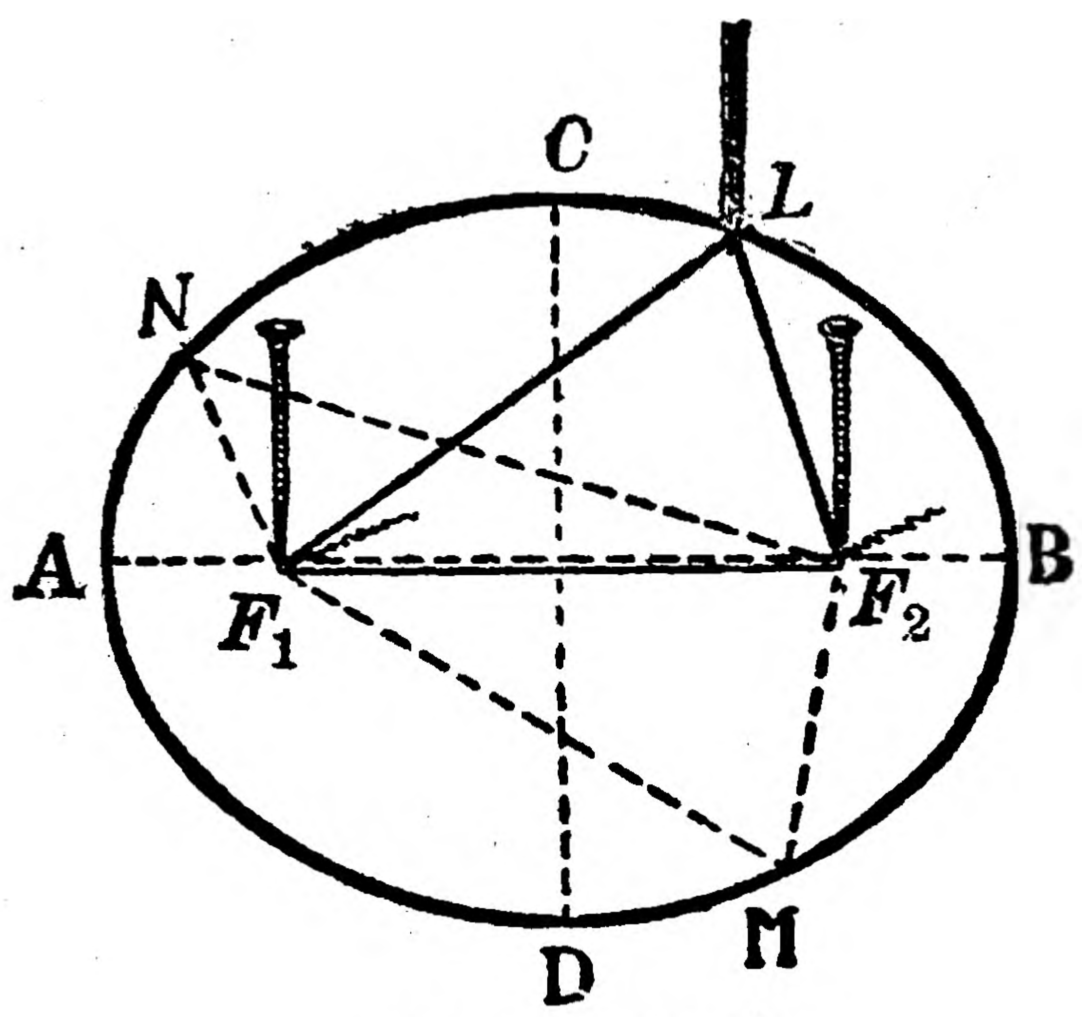


Рис. 324.

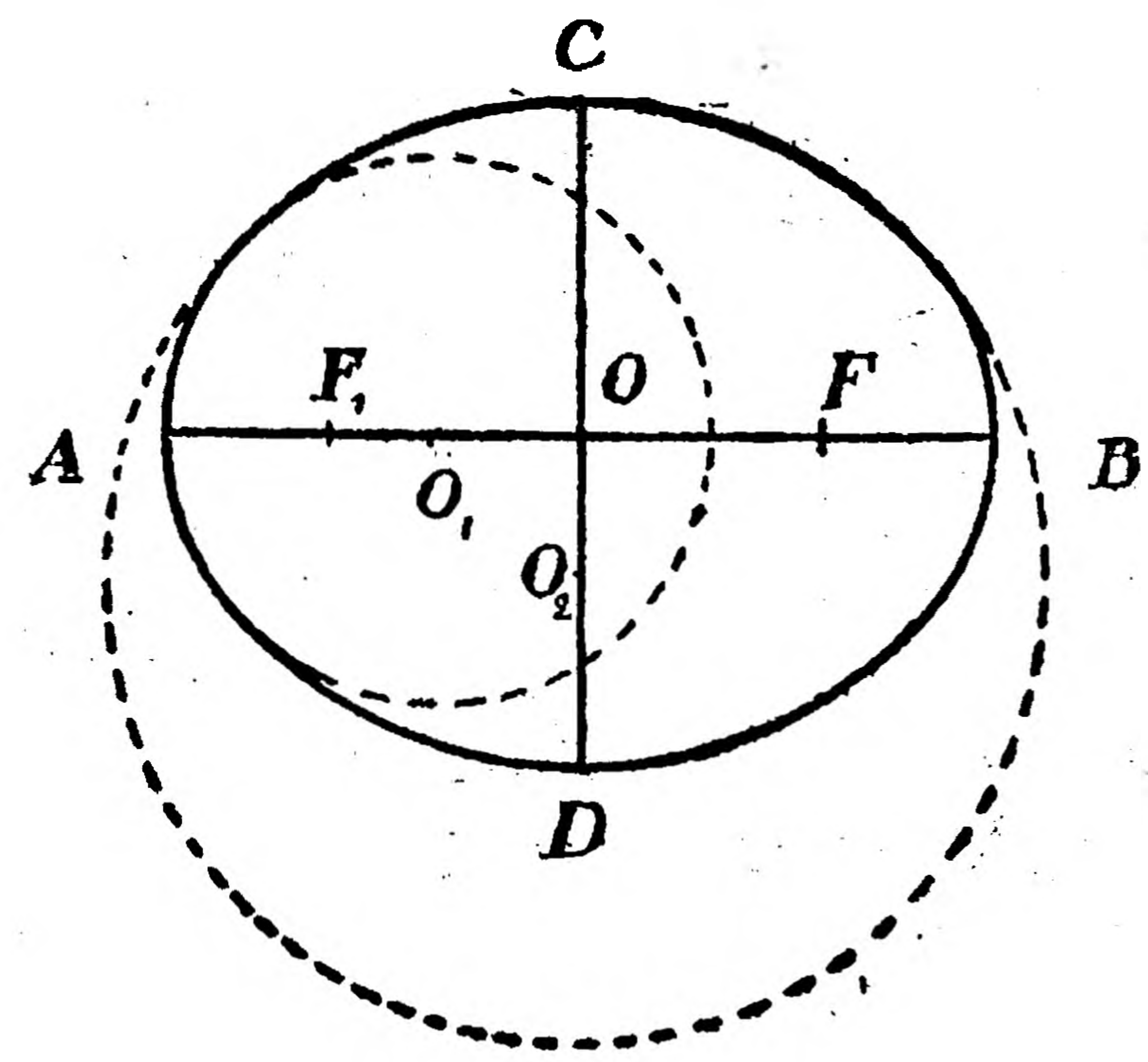


Рис. 325.

Опыт 2. Приблизьте друг к другу булавки, воткнутые в фокусы F_1 и F_2, и, не изменяя длины нитки, начертите новый эллипс. Как изменилась кривизна эллипса у концов малой и большой оси? Сблизьте фокусы эллипса F_1 и F_2 так, чтобы они слились в одну точку O. В какую линию обратится тогда наш эллипс? Какова будет кривизна у концов обеих осей?

Результат опыта. У концов большой оси кривизна эллипса будет наибольшей, а у малой оси она будет наименьшей. По мере того, как расстояние между фокусами F_1 и F_2 будет уменьшаться, кривизна будет уравниваться. У окружности она всюду одинакова.

§ 281. Свойство точек, лежащих на эллипсе.

Опыт. Отметьте на эллипсе какую-нибудь точку и измерьте расстояние этой точки от каждого фокуса (и запишите полученные числа рядом). Возьмите на эллипсе еще несколько точек и найдите расстояния каждой из них от обоих фокусов. Постарайтесь подметить свойство этих расстояний.

Результат опыта. Для нарисованного на рис. 324 эллипса мы найдем:

	От фокуса F_1	От фокуса F_2	
Расстояние точки L. .	2,2 *см*	+ 1,3 *см*	= 3,5 *см*
» » M. .	2,3 »	+ 1,2 »	= 3,5 »
» » N. .	0,9 »	+ 2,6 »	= 3,5 »

Итак, у нашего эллипса сумма расстояний любой точки, лежащей на эллипсе, от обоих фокусов выражается одним и тем же числом.

Докажите, что это свойство вытекает из самого построения эллипса, а потому оно применимо ко всем эллипсам.

Упражнения и задачи.

1. Для измерения диаметра проволоки употребляют такой прибор. Он состоит из пластинки с клинообразным прорезом. Что обозначают цифры, стоящие сбоку прореза? Приготовьте сами такой прибор и измерьте им диаметр какой-нибудь проволоки.

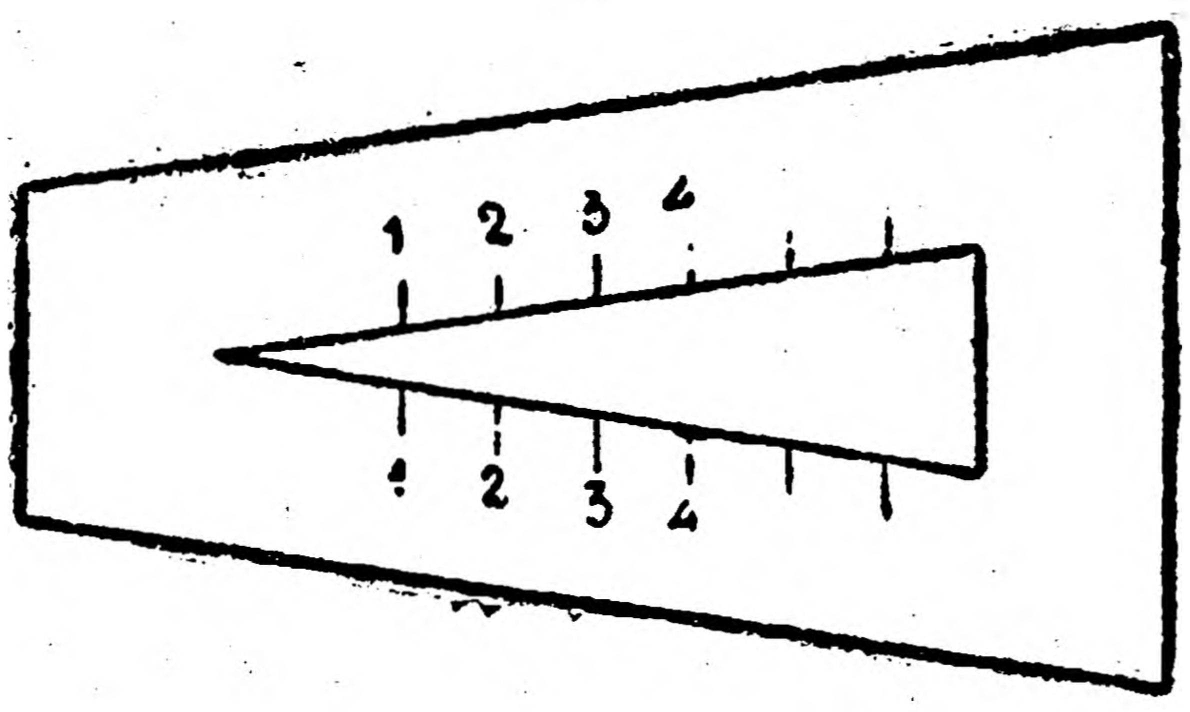


Рис. 326.

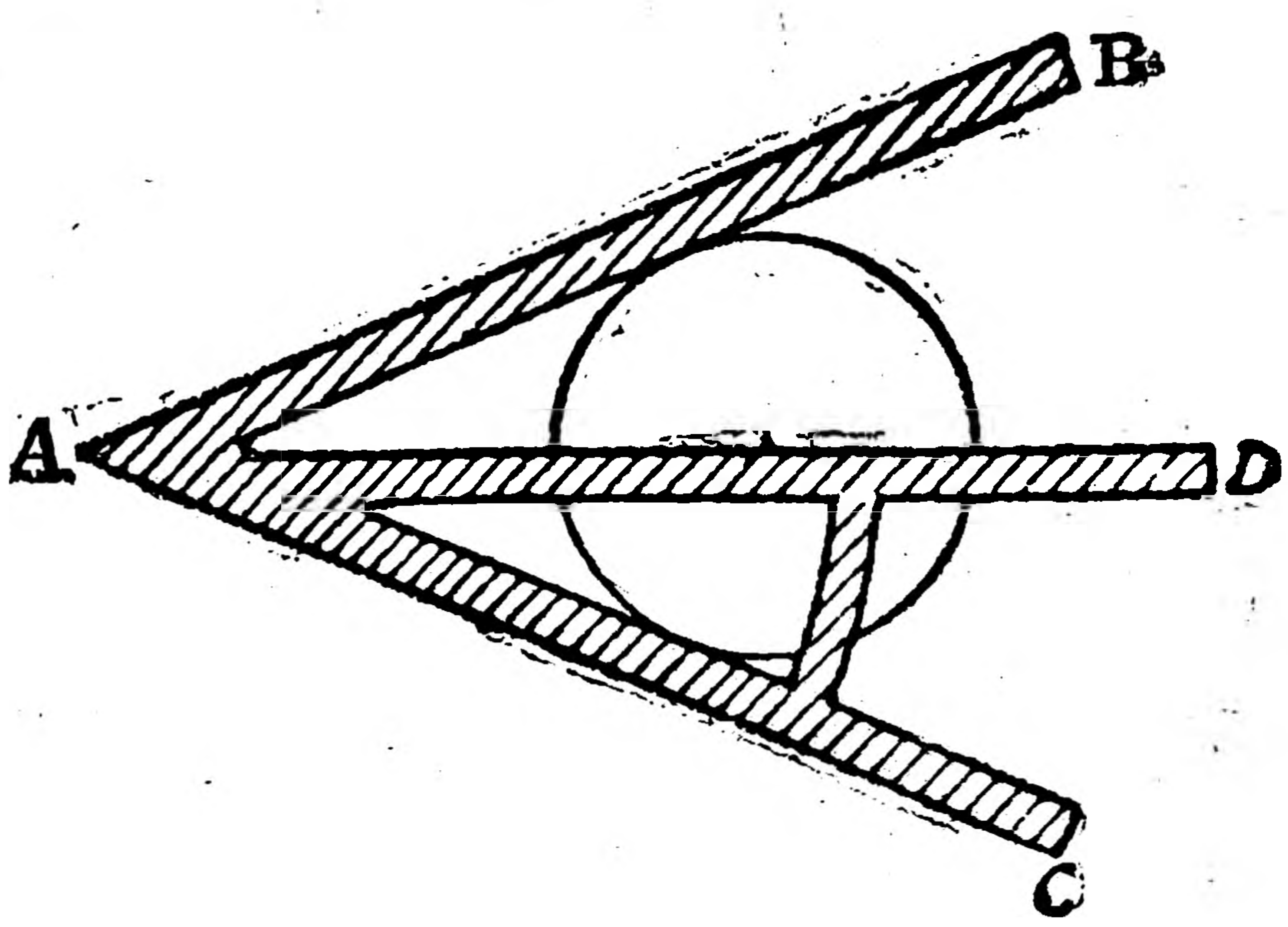


Рис. 327.

2. Как найти центр монеты?

Для того, чтобы найти центр круга, пользуются центроискателем (изображенным на рис. 327). Он имеет вид угла, разделенного прямой AD пополам. Прибор надо приложить к окружности так, чтобы обе стороны AB и AC касались ее, и отметить карандашом направление AD. То же самое надо проделать второй раз, поставив центроискатель в новое положение. Пересечение обеих нарисованных прямых и даст вам центр.

Сделайте из картона такой центроискатель.

Если у центроискателя сделать угол прямым, то длина касательной будет равна радиусу. Докажите это.

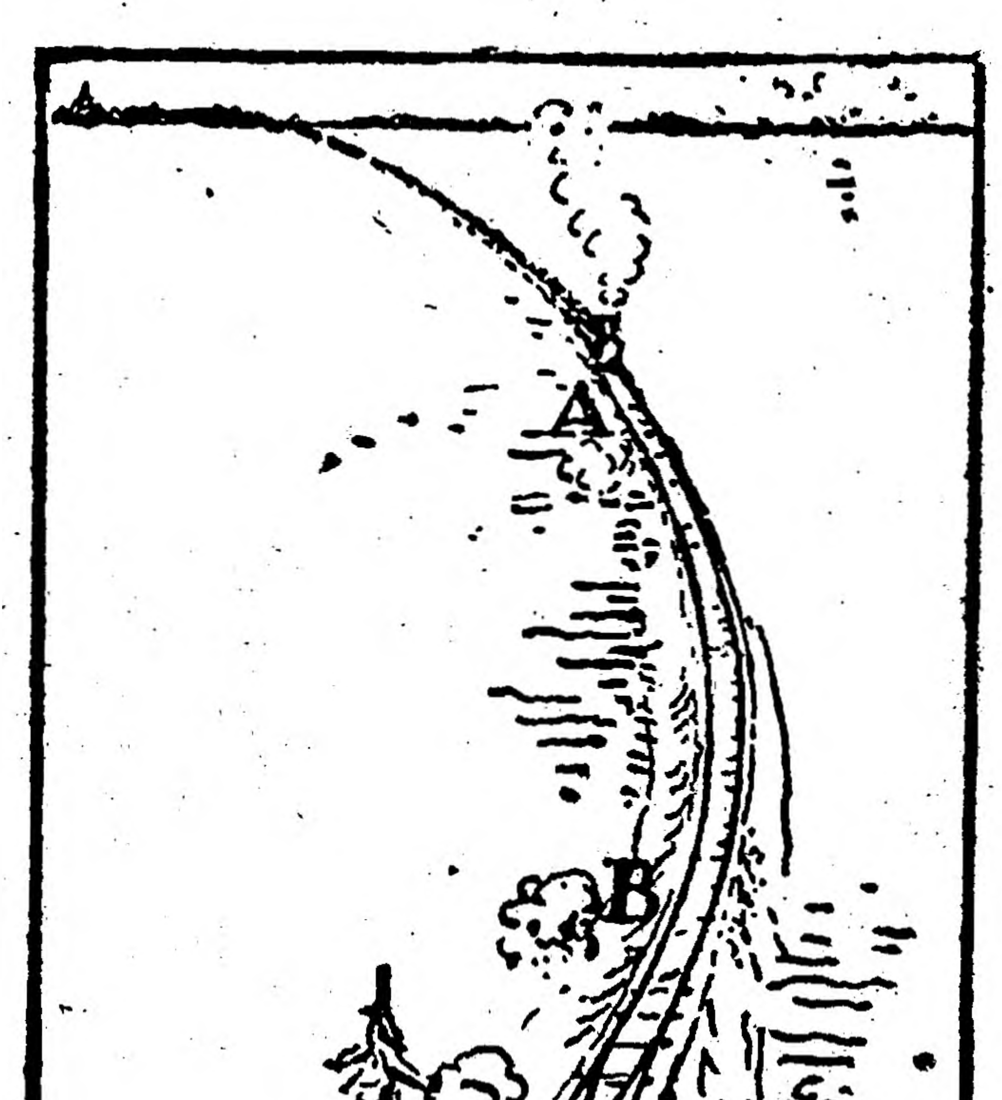


Рис. 328.

3. Нарисуйте какую-нибудь дугу. Найдите центр ее.

4. Вычислите радиус кривизны железнодорожного пути на участках AB и CD, найдя центр этих дуг и измерив их радиусы (рис. 328).

ГЛАВА XX.

ОКРУЖНОСТЬ И УГОЛ.

87. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ УГЛЫ.

§ 282. Центральный угол и соответствующая ему дуга.

Нарисуйте окружность и проведите в ней два каких-нибудь радиуса. Прочитайте образовавшийся угол. Где вершина его? Такой угол ($\angle AOB$ на рис. 329), сторонами которого служат радиусы, называется центральным углом. Вершина его лежит в центре окружности. Укажите дугу, лежащую между сторонами центрального угла. Про эту дугу будем говорить, что она соответствует нашему центральному углу. На рисунке центральному углу соответствует дуга AB.

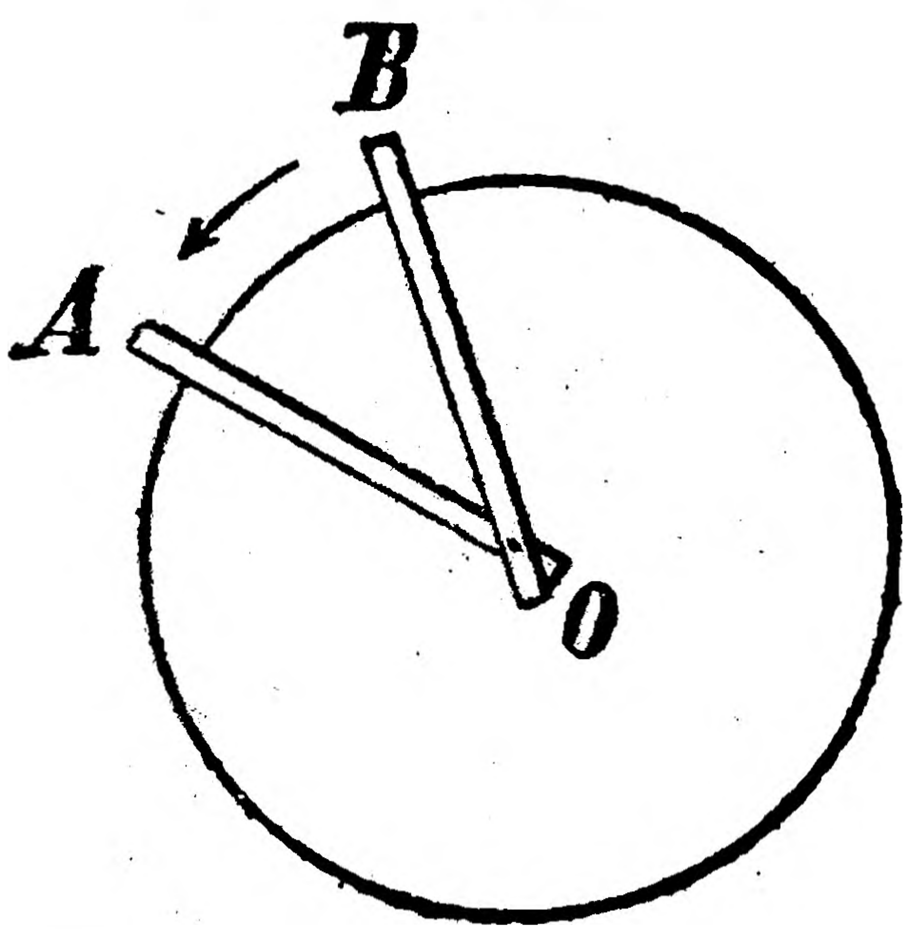


Рис. 329.

Опыт. Вырежьте две бумажных полоски одинаковой длины. Один конец их укрепите булавкой в точке O так, чтобы эти полоски могли вращаться подобно часовым стрелкам. Одну из них OB закрепите в первоначальном ее положении, а другую OA начните вращать по направлению стрелки (рис. 329), воткнув в точку A острие карандаша. Тогда наша полоска OA будет образовывать с неподвижной полосой OB центральный угол, а конец ее A будет описывать дугу, соответствующую этому центральному углу. По мере того, как будет увеличиваться этот угол, будет изменяться и соответствующая ему дуга. Когда подвижной радиус, сделав полный оборот, вернется в первоначальное свое положение (OA), тогда он опишет полный круг, а его конец A опишет полную окружность. Когда подвижной радиус опишет центральный угол, составляющий половину круга, тогда точка A опишет дугу, составляющую $^1/_2$ окружности. Когда подвижной радиус опишет центральный угол, составляющий $^1/_4$ круга, то точка A опишет дугу, которая равна $^1/_4$ всей окружности.

Следовательно, между центральным углом и соответствующей ему дугой существует зависимость. Центральный угол составляет такую же часть всего описываемого его стороной круга, какую часть полной окружности составляет соответствующая ему дуга.

Исследуем подробно эту зависимость между центральным углом и его дугой.

§ 283. *Теорема.* Равным центральным углам соответствуют равные дуги.

Опыт. Нарисуйте окружность и два равных друг другу центральных угла (рис. 330). Наложите на этот чертеж прозрачную бумагу, укрепите ее булавкой в центре O и, скопировав на нее нашу

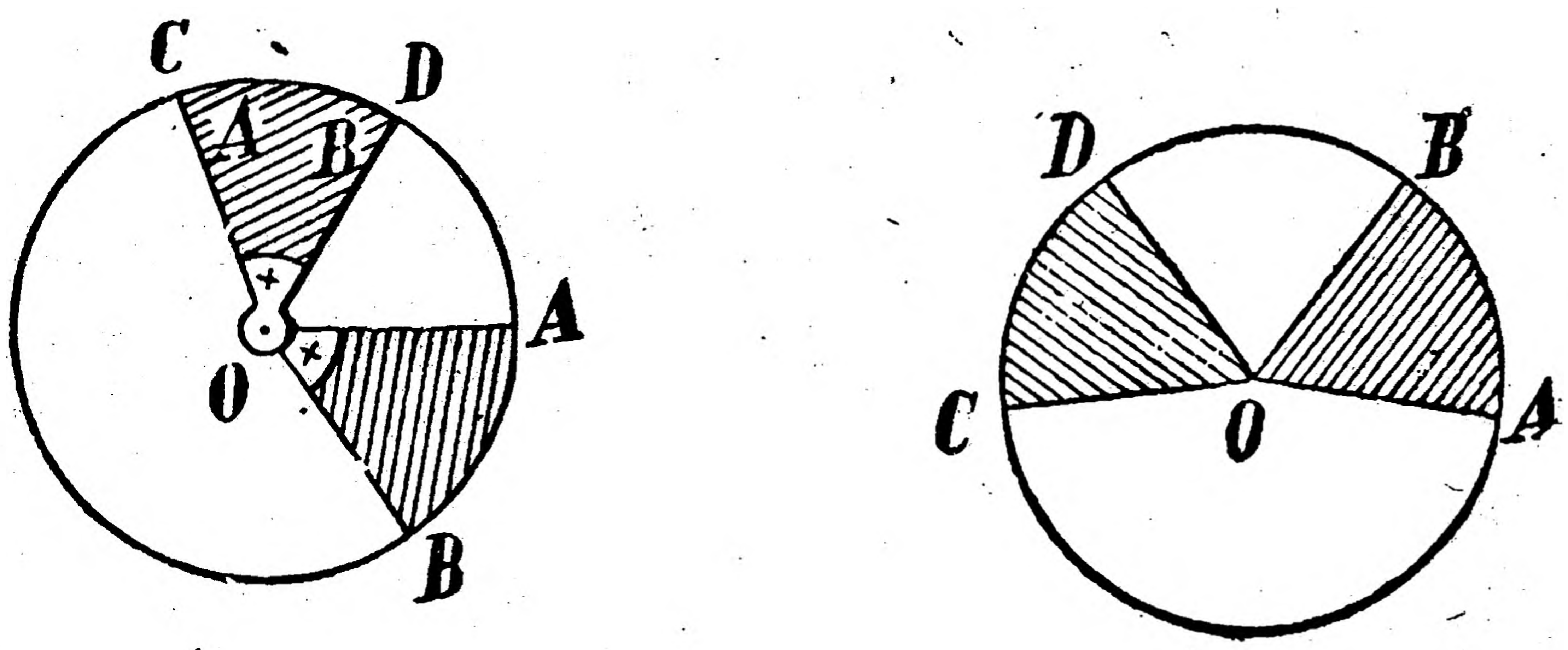


Рис. 330.

окружность и одну из дуг (например, дугу AB), вращайте ее до тех пор, пока она не совпадет со второй дугой CD. Совпадут ли эти дуги всеми своими частями?

Доказательство. Вращая сектор AOB вокруг центра O, докажите, что он должен совпасть с сектором COD, а потому дуга AB должна быть всегда равной дуге CD. (Вспомните доказательство § 274.) Таким приемом вы докажете, что если равны центральные углы ($\angle COD$ и $\angle AOB$), то равны и соответствующие им дуги ($\smile CD = \smile AB$).

§ 284. Угловой градус и дуговой градус.

Опыт 1. Образуйте подвижным радиусом прямой центральный угол и нарисуйте ту соответствующую этому углу дугу AB, которую опишет конец радиуса OA (рис. 331).

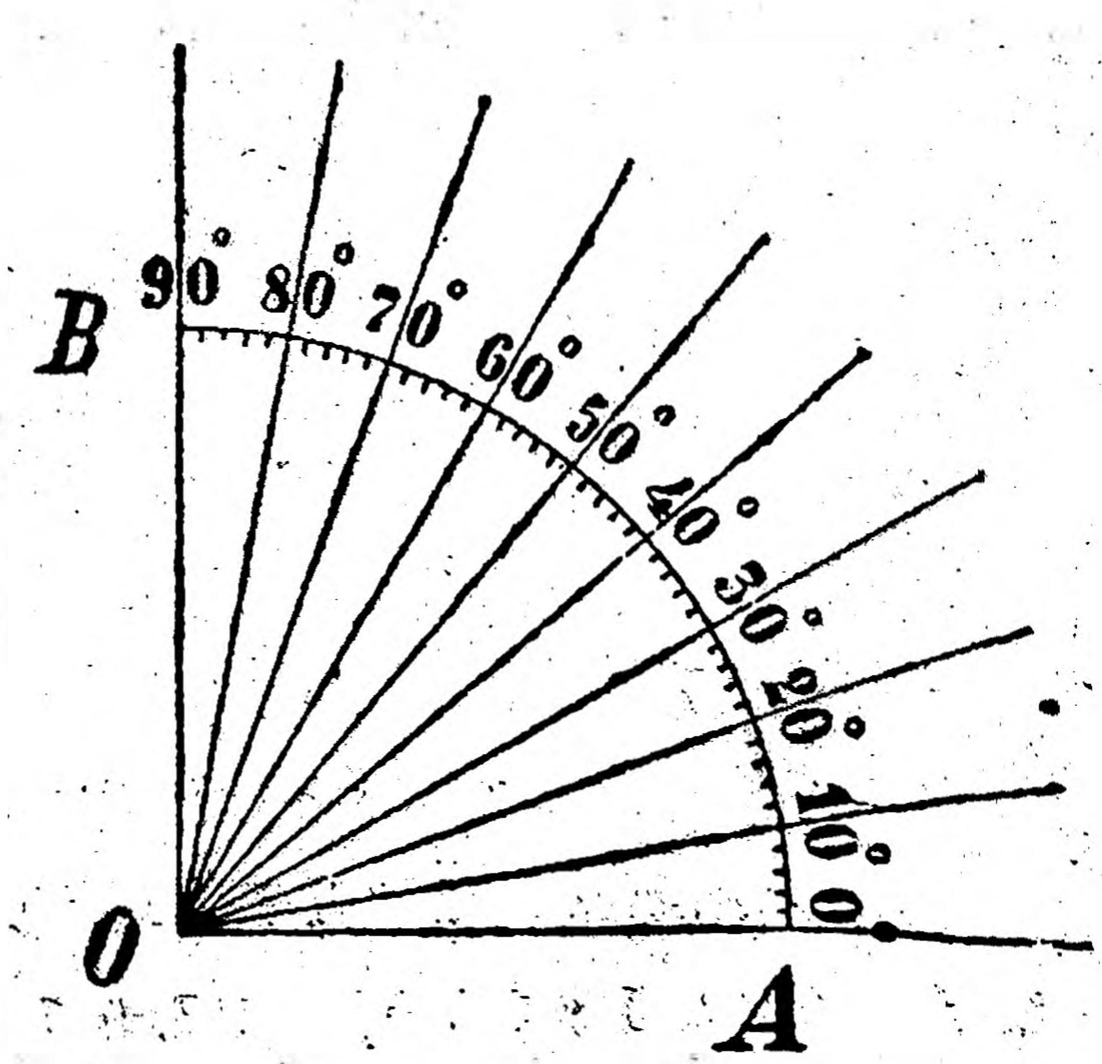


Рис. 331.

Разделите этот угол AOB при помощи транспортира на угловые градусы (достаточно провести радиусы через каждые 10 или 15 градусов). Дуга AB, соответствующая прямому центральному углу, разделится на 90 равных друг другу маленьких дуг (§ 283). Каждая из этих маленьких дуг, соответствующая углу в один угловой градус, называется дуговым градусом.

В нашем прямом центральном угле ($\angle AOB$) содержится 90 угловых градусов, при чем соответствующая ему дуга разделится тоже на 90 дуговых градусов.

Сколько прямых углов опишет подвижной радиус, когда он сделает полный круг? Сколько, следовательно, угловых градусов будет содержаться в полном круге? (Сравните это с § 141.) А сколько дуговых градусов будет содержать та окружность, которую опишет конец A радиуса, когда он сделает полный оборот?

Результат опыта. Итак, угловой градус можно получить, разделив круг на 360 равных углов; а дуговой градус мы получим, если разделим окружность на 360 равных дуг.

Мы уже знаем (§ 133), что каждый угловой градус делится еще на 60 равных частей, называемых угловой минутой; последняя же делится еще на 60 равных частей, называемых угловой секундой. Дуговой градус в свою очередь делится на дуговые минуты (эта дуга, составляющая $^1/_{60}$ часть дуги в один градус), а дуговая минута делится на дуговые секунды (это дуга, равная $^1/_{60}$ части дуговой минуты). Как для дуговых, так и для угловых единиц употребляются одни и те же обозначения: (°) градус, (′) минута, (″) секунда. Такая запись 15°20′30″ читается так: 15 градусов 20 минут 30 секунд.

Опыт 2. Укоротите радиус OA и сделайте им опять полный оборот (центр O оставьте в той же точке). Тогда конец A_1 снова опишет окружность, не меньшую прежней. Найдите на ней дуговые градусы. Эти дуговые градусы будут по длине меньше дуговых градусов первой окружности. А будет ли каждый из них составлять $^1/_{360}$ новой окружности?

Изменяется ли величина углового градуса с изменением радиуса? (Величина угла не зависит от длины сторон его, § 9.)

Итак, с изменением длины радиуса изменяется длина дугового градуса, а величина углового градуса всегда будет одной и той же.

§ 285. Измерение центральных углов.

Теорема. Центральный угол содержит столько угловых градусов, сколько соответствующая ему дуга содержит дуговых градусов.

Опыт. Дан какой-нибудь угол AOB. Нарисуйте вокруг этого угла при помощи транспортира окружность так, чтобы центр ее совпал с вершиной угла O. Тогда угол AOB сделается центральным углом. Укажите дугу, соответствующую этому углу. Узнайте при помощи транспортира, из скольких дуговых градусов состоит эта дуга AB (рис. 332).

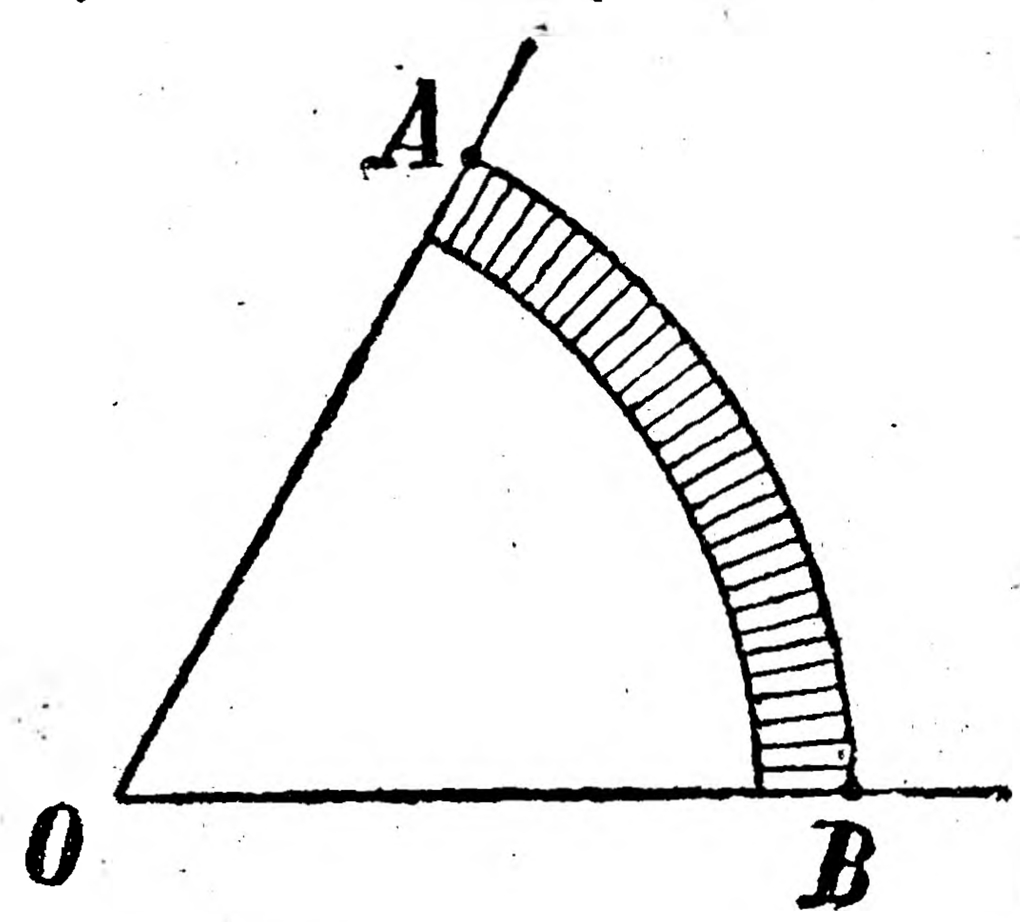


Рис. 332.

Отложите на этой дуге дуговые градусы (достаточно отложить дуги по 10 градусов) и точки деления соедините прямыми линиями с вершиной O. На сколько угловых градусов разобьется тогда $\angle AOB$? Сравните число угловых градусов, содержащихся в этом центральном угле, с числом дуговых градусов, содержащихся в соответствующей ему дуге. Вы получите одинаковые числа.

Следовательно, измеряя соответствующую дугу в дуговых градусах, можно узнать число угловых градусов, заключающихся в центральном угле.

Эта теорема короче читается так: **центральный угол измеряется соответствующей дугой.**

§ 286. *Теорема.* Центральные углы пропорциональны соответствующим дугам.

Нарисуем два каких-нибудь центральных угла и сравним их отношение с отношением соответствующих им дуг (рис. 333).

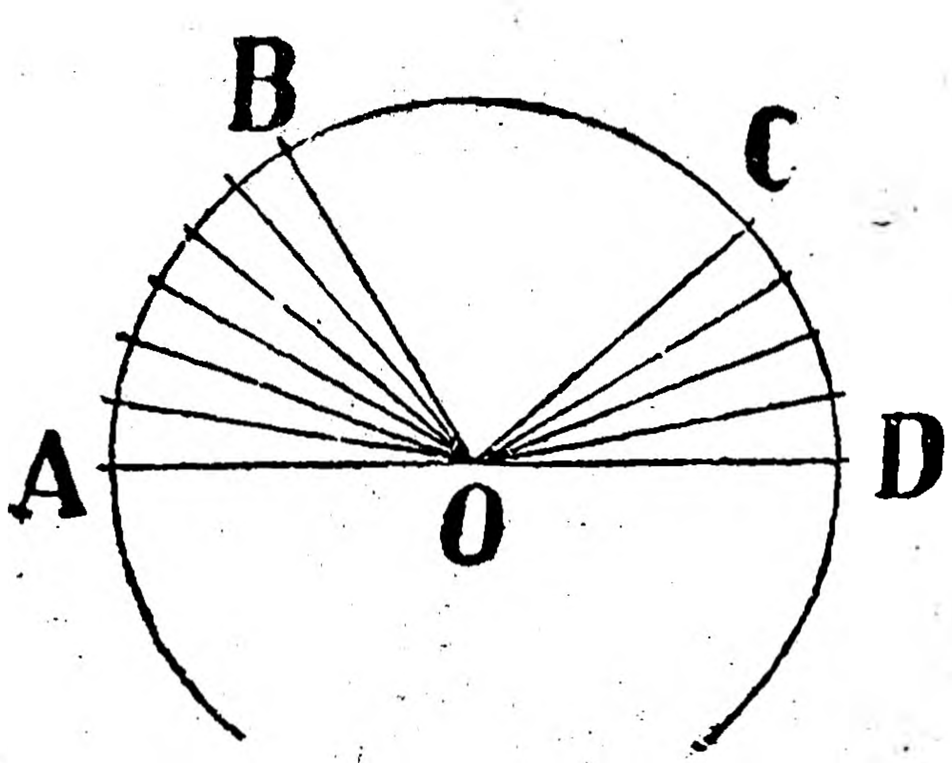


Рис. 333.

(Окружность надо нарисовать такого же радиуса, как и ваш транспортир.)

Найдем сначала отношение дуг AB и CD. Для этого измерим их. У меня дуга AB содержит 60 дуговых градусов, а дуга CD содержит 40 дуговых градусов:

$$\smile AB = 60^\circ, \smile CD = 40^\circ.$$

Отношение дуг равно

$$\frac{\smile AB}{\smile CD} = \frac{3}{2}.$$

Для того, чтобы найти отношение центральных углов AOB и COD, соединим точки делений (концы дуговых градусов) дуг с центром, тогда $\angle AOB$ разделится на 60 угловых градусов, а $\angle COD$ на 40 угловых градусов:

$$\angle AOB = 60^\circ$$
$$\angle COD = 40^\circ.$$

Отношение углов равно

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{\smile AB}{\smile CD}.$$

Итак, отношение двух центральных углов равно отношению соответствующих дуг; другими словами: центральные углы пропорциональны своим дугам. (Вспомните § 283.)

88. ВПИСАННЫЕ УГЛЫ.

§ 287. *Теорема.* Вписанный угол равен половине соответствующего ему центрального угла.

Нарисуйте угол (рис. 334), вершина которого лежит на окружности, а сторонами служат хорды. Такой угол ($\angle BAC$) называется вписанным углом, а про дугу *BC*, которая лежит между сторонами его, будем говорить, что это та дуга, на которую опирается наш угол.

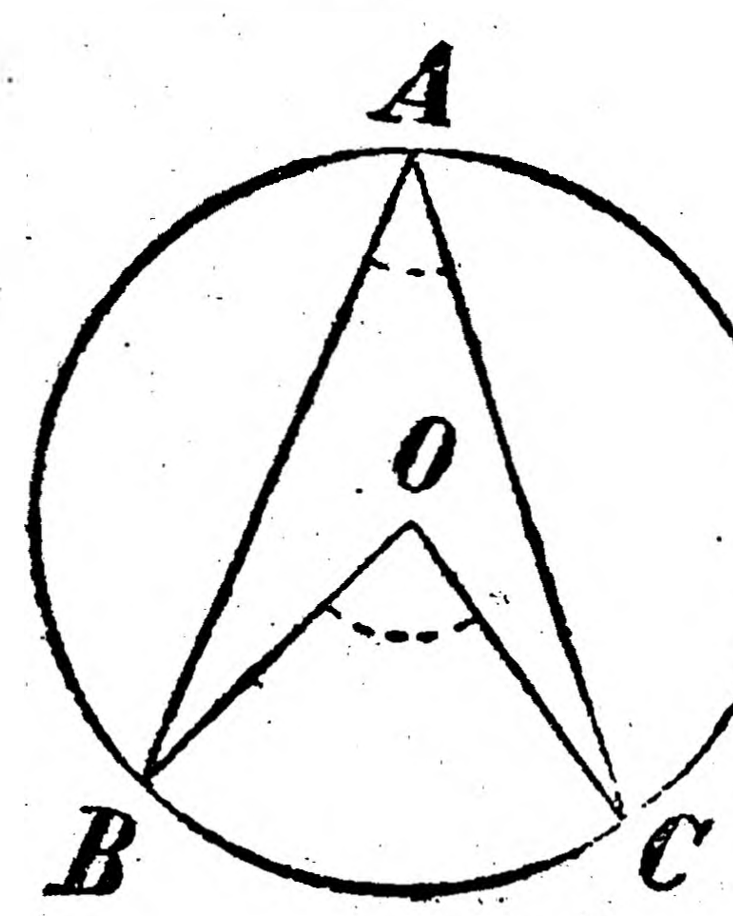


Рис. 334.

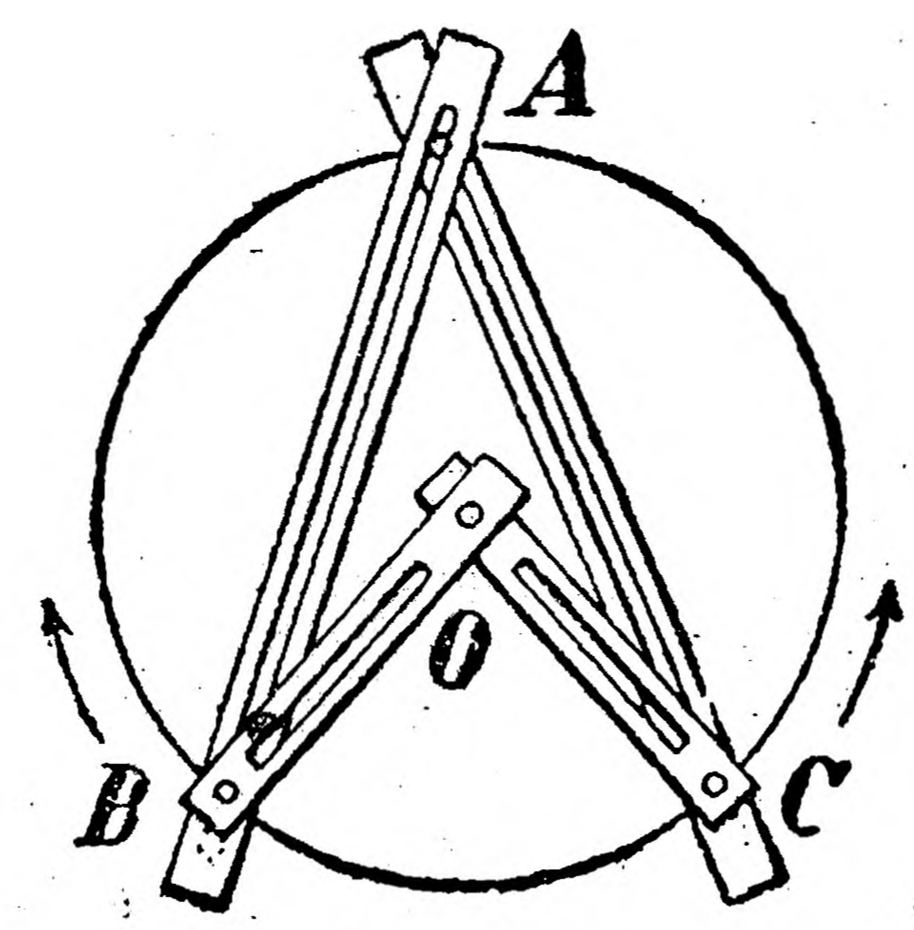


Рис. 335.

Опыт. Нарисуйте окружность и вырежьте из бумаги четыре полоски: две, равные по длине радиусу окружности, а две другие немного длиннее радиуса.

Из первых двух полос *OB* и *OC* составьте центральный угол *BOC*, а из двух более длинных *AB* и *AC* образуйте вписанный угол, опирающийся на дугу *BC* (посмотрите на рис. 335).

У центра *O* скрепите полосы булавкой (или кнопкой) так, чтобы они могли вращаться вокруг центра, как часовые стрелки. У точек *B* и *C* скрепите их кнопками так, чтобы они могли вращаться в этих точках, как на шарнире, и чтобы точки B и C могли двигаться вдоль по окружности. Для этого их надо проткнуть кнопками снизу вверх, чтобы головки кнопок лежали на окружности. У точки A полоски скреплять не надо. Какой из этих углов больше: центральный или вписанный? Проверьте ваше предположение транспортиром.

Начните раздвигать в противоположные стороны радиусы OB и OC так, чтобы центральный угол увеличивался, при чем следите за тем, чтобы полосы BA и AC пересекались всегда на окружности в точке A. Как изменяется вписанный угол BAC с возрастанием центрального угла ($\angle BOC$): увеличивается ли он или уменьшается? Сравните теперь во всех этих положениях вписанный угол с соответствующим ему центральным углом: больше ли он, чем последний, или меньше? Если вписанный угол меньше центрального, то какую часть последнего составляет он? Проверьте ваше предположение непосредственным измерением этих углов при помощи транспортира.

В результате ваших измерений вам удается подметить, что **вписанный угол всегда меньше своего центрального и составляет половину его.**

Доказательство.

Первый случай. Рассмотрим сначала тот случай, когда одна из хорд, образующая вписанный угол, проходит через центр круга, то-есть служит диаметром (рис. 336).

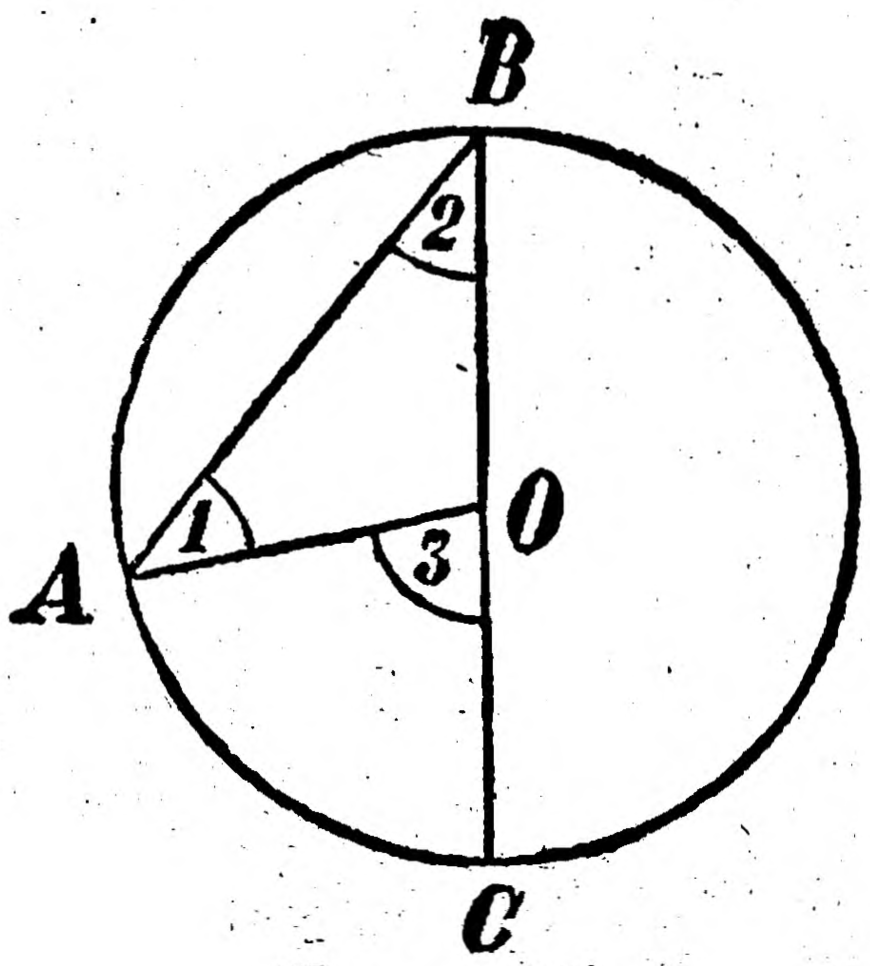


Рис. 336.

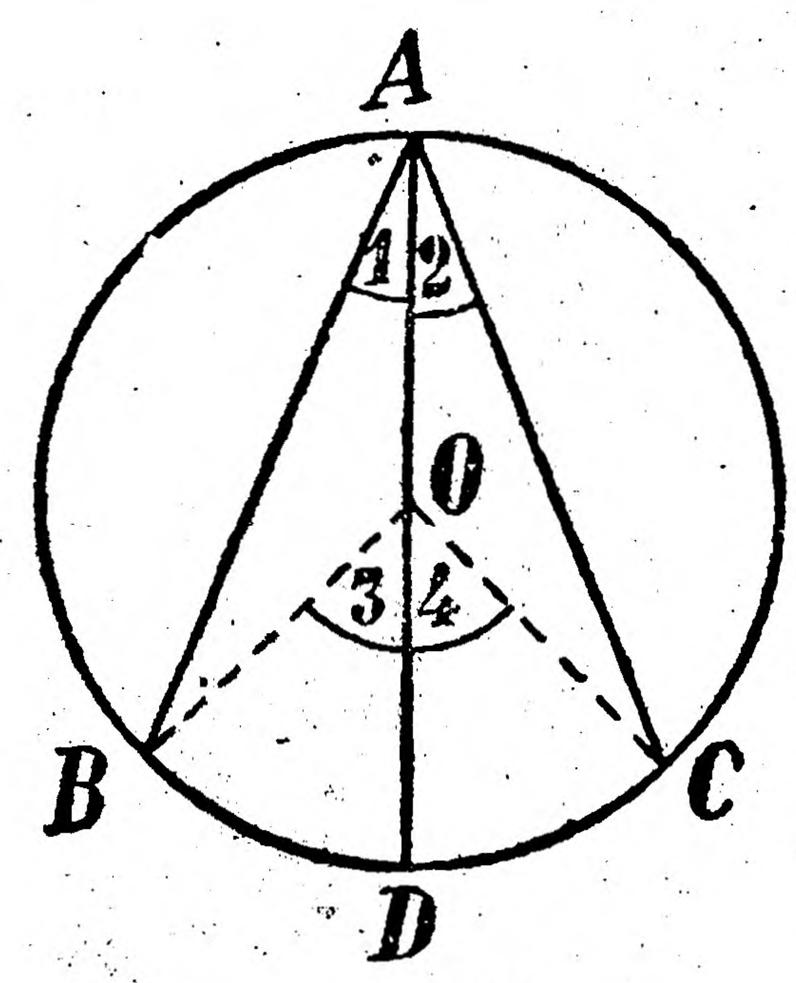


Рис. 337.

Соединив центр O с точкой A, вы получите равнобедренный треугольник AOB, у которого $\angle A$ и $\angle B$ ($\angle 1$ и $\angle 2$) равны друг другу (углы при основании равнобедренного треугольника, § 149). Сумма двух этих углов равна центральному углу № 3 (внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним, § 180), а следовательно, один вписанный угол ($\angle 2$) должен составлять половину соответствующего ему центрального угла ($\angle 3$).

Второй случай. Возьмем теперь вписанный угол, образованный хордами (рис. 337).

Проведя диаметр AD, мы разобьем наш вписанный угол на два угла: $\angle 1$ и $\angle 2$. Из них $\angle 1$ равен половине $\angle 3$ (только-что рассмотренный случай); по той же причине $\angle 2$ равен половине $\angle 4$.

Следовательно, весь вписанный угол A $(\angle 1 + \angle 2)$ равен половине всего центрального угла, т. е. $\frac{1}{2} \cdot (\angle 3 + \angle 4)$.

§ 288. Измерение вписанного угла.

Теорема. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается.

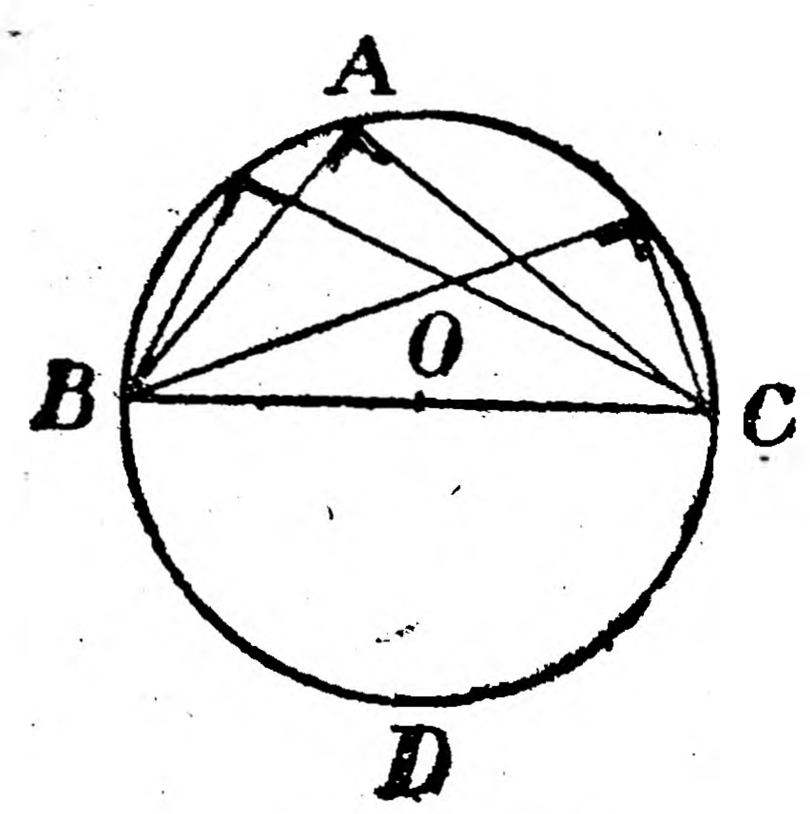


Рис. 338.

Мы только-что доказали, что вписанный угол $(\angle BAC)$ равен половине соответствующего ему центрального угла $(\angle BOC)$, но последний угол измеряется своею дугою BC (§ 285), следовательно, наш вписанный угол должен измеряться половиной этой дуги (рис. 338).

Теорему эту надо понимать так: чтобы узнать, сколько угловых градусов содержит вписанный угол, надо измерить дуговыми градусами его дугу и найденное число разделить на два. Результат и покажет, сколько угловых градусов содержит вписанный угол.

Докажите справедливость этой теоремы для того случая, когда хорды, образующие вписанный угол, лежат по одну и ту же сторону от центра.

Указание. Надо рассмотреть разность углов.

§ 289. Свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр.

Теорема. Любой вписанный угол, опирающийся на диаметр, должен быть прямым.

Опыт. Вернемся к нашему основному опыту, изложенному в § 287 (рис. 335).

Продолжайте вращать точки B и C в разные стороны до тех пор, пока радиусы OB и OC, образующие центральный угол, не выпрямятся в диаметр. Тогда вписанный угол A будет опираться своими концами в концы диаметра BC (рис. 334). Измерьте транспортиром вписанный угол A. Не будет ли он прямым?

Доказательство. Дуга BDC, на которую опирается наш вписанный угол BAC, содержит 180 дуговых градусов. (Почему?)

§ 290. *Задача.* Провести касательную из данной точки к данной окружности.

Только-что доказанная теорема дает нам возможность при помощи циркуля и линейки провести из данной точки *A* к данной окружности касательную линию. Соедините данную точку *A* и центр окружности прямой линией и разделите эту прямую *OA* пополам (§ 165). Из найденной точки *M*, как из центра, опишите радиусом, равным *MO* (рис. 339), новую окружность, которая пересечется с первоначальной в двух точках *B* и *C*. Соединив эти точки прямой линией с точкой *A*, вы и получите две искомые касательные *AB* и *AC*.

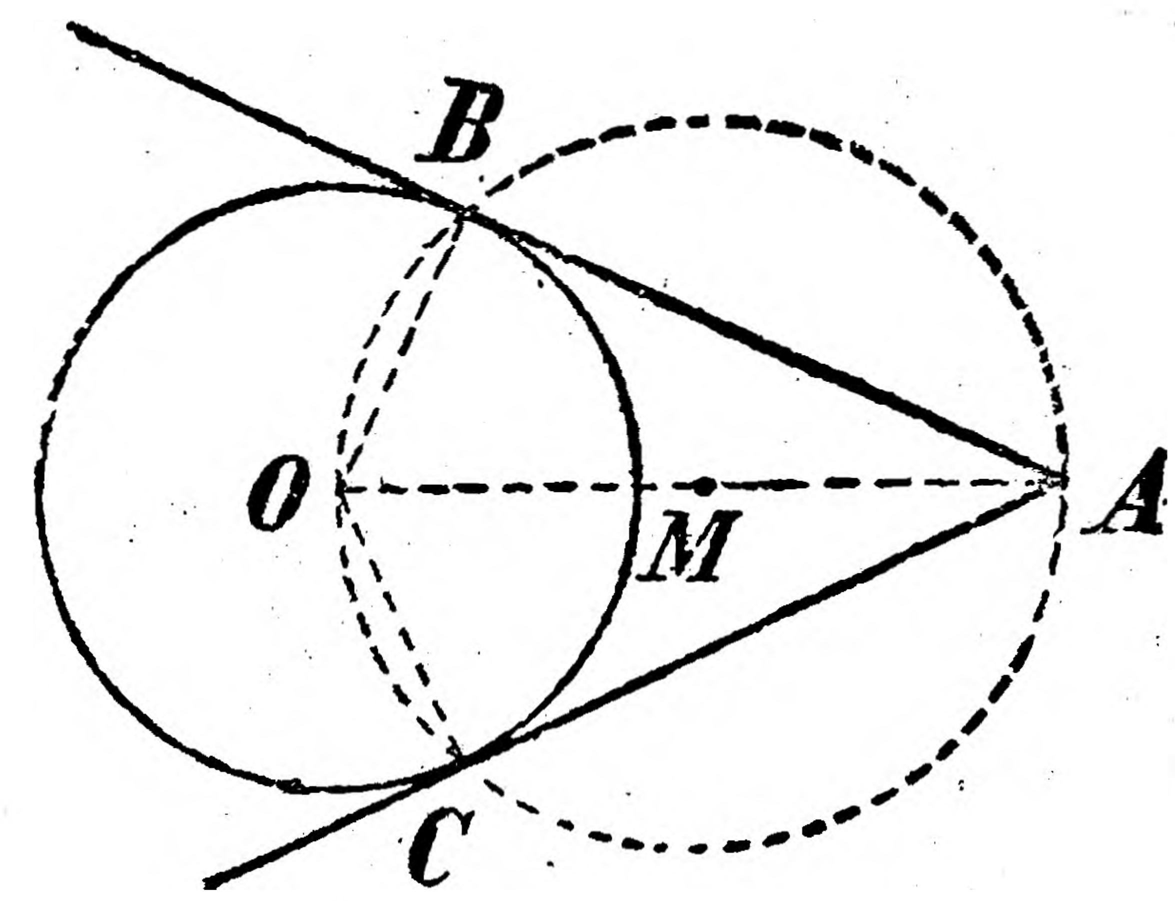


Рис. 339.

Докажите, что построенные таким способом прямые *Ab* и *AC* должны быть касательными линиями.

Указание. $\angle ABO$ есть вписанный угол, опирающийся на диаметр. Примените теоремы § 289 и § 277.

ГЛАВА XXI.

ОКРУЖНОСТЬ И МНОГОУГОЛЬНИК.

89. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

§ 291. *Задача.* Описать около данного треугольника окружность.

Исследование. Дан треугольник *ABC* (рис. 340). Окружность, проходящая через все его вершины *A*, *B* и *C*, называется окружностью, описанной вокруг треугольника (а про треугольник *ABC* говорят, что он вписан в эту окружность). Для того, чтобы построить эту окружность, надо через три точки, не лежащие на одной прямой, провести окружность. Вспомните, как построить ее (§ 270).

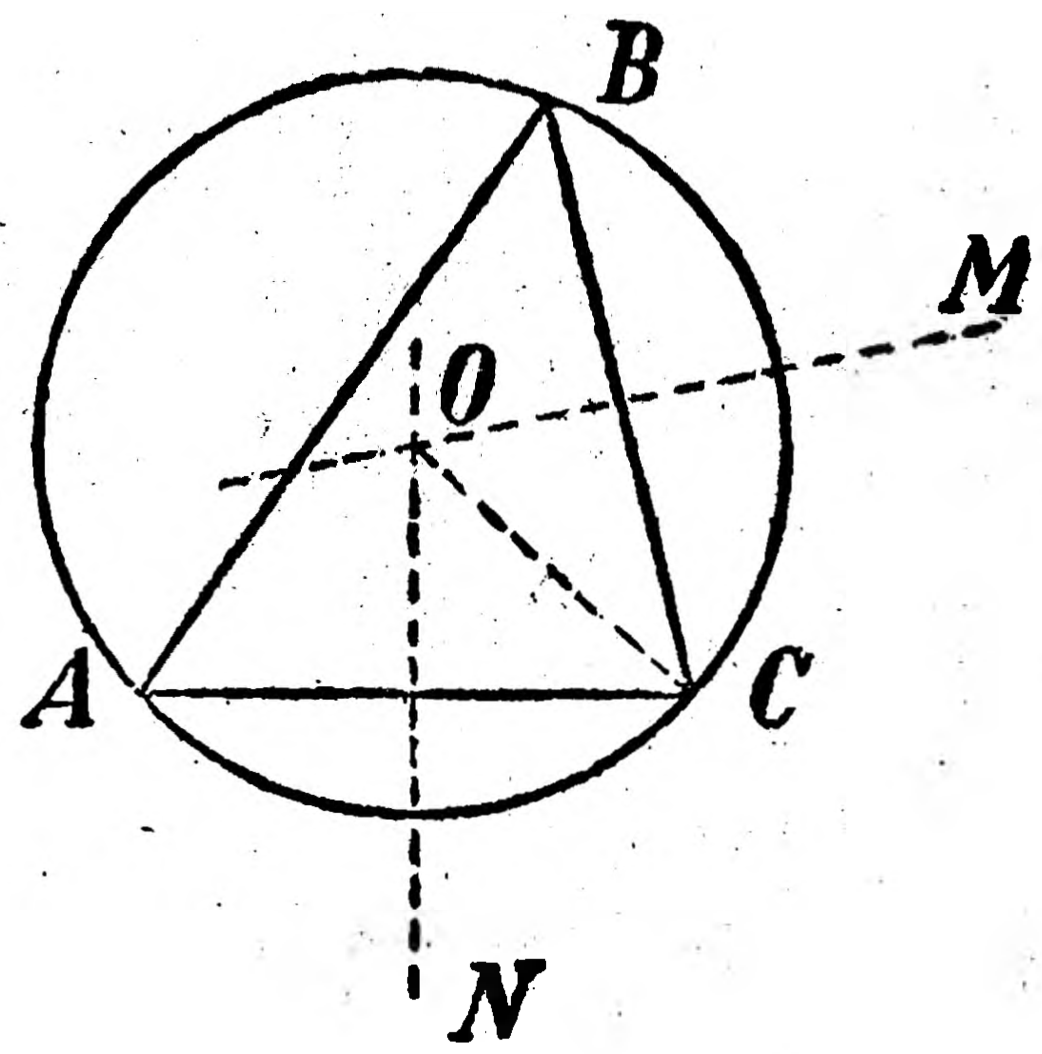


Рис. 340.

Построение. Чтобы найти центр описанной окружности, надо из середины двух хорд восставить к этим хордам перпендикуляры, тогда точка пересечения их даст центр. Соединив найденный центр с любой вершиной, вы получите радиус искомой окружности, а, следовательно, можете нарисовать и самую окружность (рис. 340).

Так как две прямые (перпендикуляры MO и NO) могут пересечься только в одной точке O, то и вокруг нашего треугольника можно описать только одну окружность.

§ 292. *Задача.* Вписать в данный треугольник окружность.

Исследование. Дан треугольник ABC (рис. 341). Нужно нарисовать окружность так, чтобы все три стороны треугольника были касательными к ней. Такая окружность называется вписанной в треугольник (а про такой треугольник говорят, что он описан около окружности). Если точка O (рис. 341) есть центр искомой окружности, то эта точка должна быть одинаково удалена от всех трех сторон треугольника. (Перпендикуляры, опущенные из центра на стороны, служат радиусами окружности, § 277.) Точка, одинаково удаленная от сторон AC и BC, должна лежать на биссектрисе угла C (на линии CO, § 161). Точка же, одинаково удаленная от сторон AB и BC, должна лежать на биссектрисе угла B (на линии AO, § 161). Следовательно, точка O, одинаково удаленная от всех трех сторон, должна лежать одновременно на двух этих биссектрисах, то-есть в точке их пересечения.

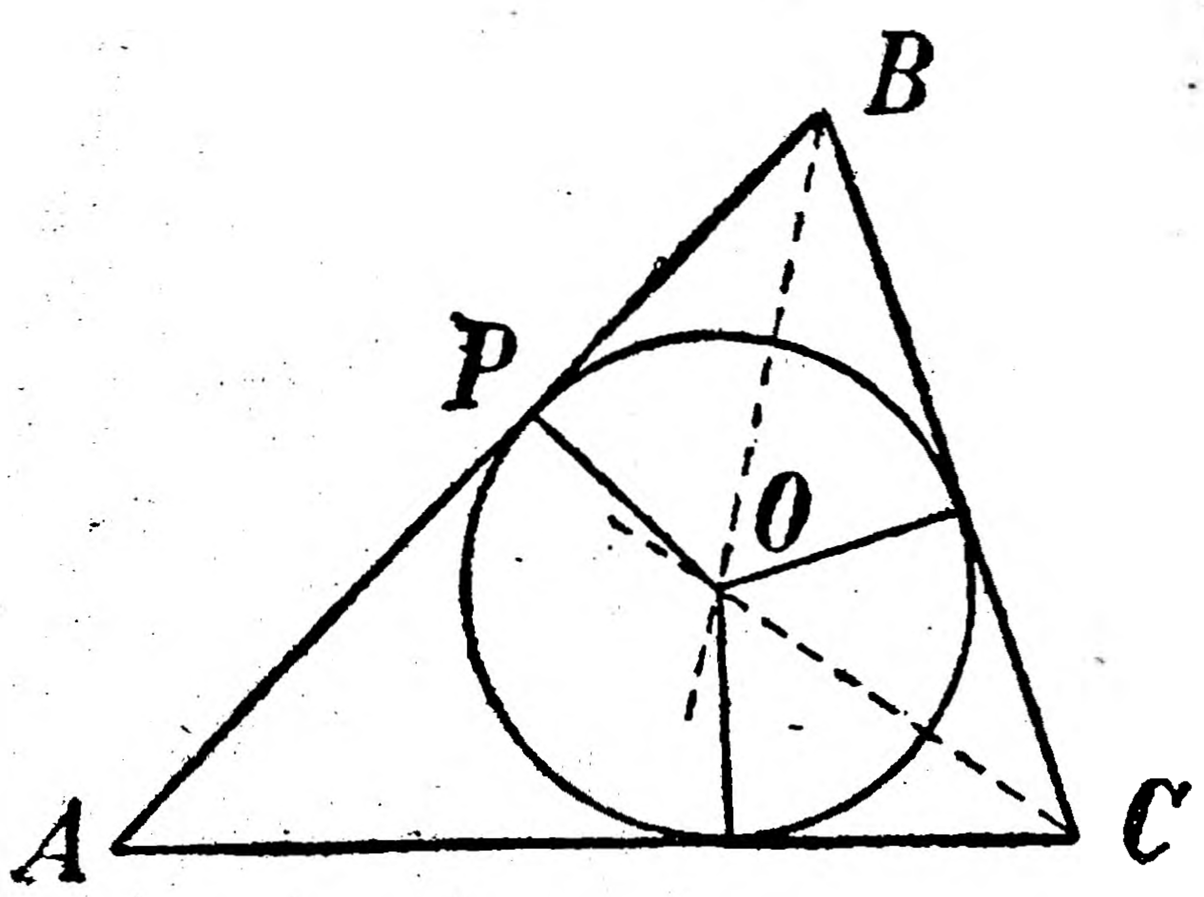


Рис. 341.

Построение. Постройте биссектрисы двух каких-нибудь углов треугольника, например, угла C и угла B (§ 167), и из точки их пересечения O опустите перпендикуляр OP на одну из сторон, например, на AB (задача 6, § 166). Приняв этот перпендикуляр OP за радиус, опишите им окружность.

Докажите, что построенная таким способом окружность будет касаться всех трех сторон, и что таких окружностей можно построить только одну.

90. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

§ 293. *Задача.* Описать около правильного многоугольника окружность.

В § 203 (стр. 134) мы составляли правильные многоугольники из одинаковых равнобедренных треугольников. Примем общую вершину их O за центр искомой окружности (рис. 342). Тогда боковые стороны OA, OB и т. д. будут радиусами. Сколько окружностей можно описать около правильного многоугольника?

§ 294. *Задача.* Вписать в правильный многоугольник окружность.

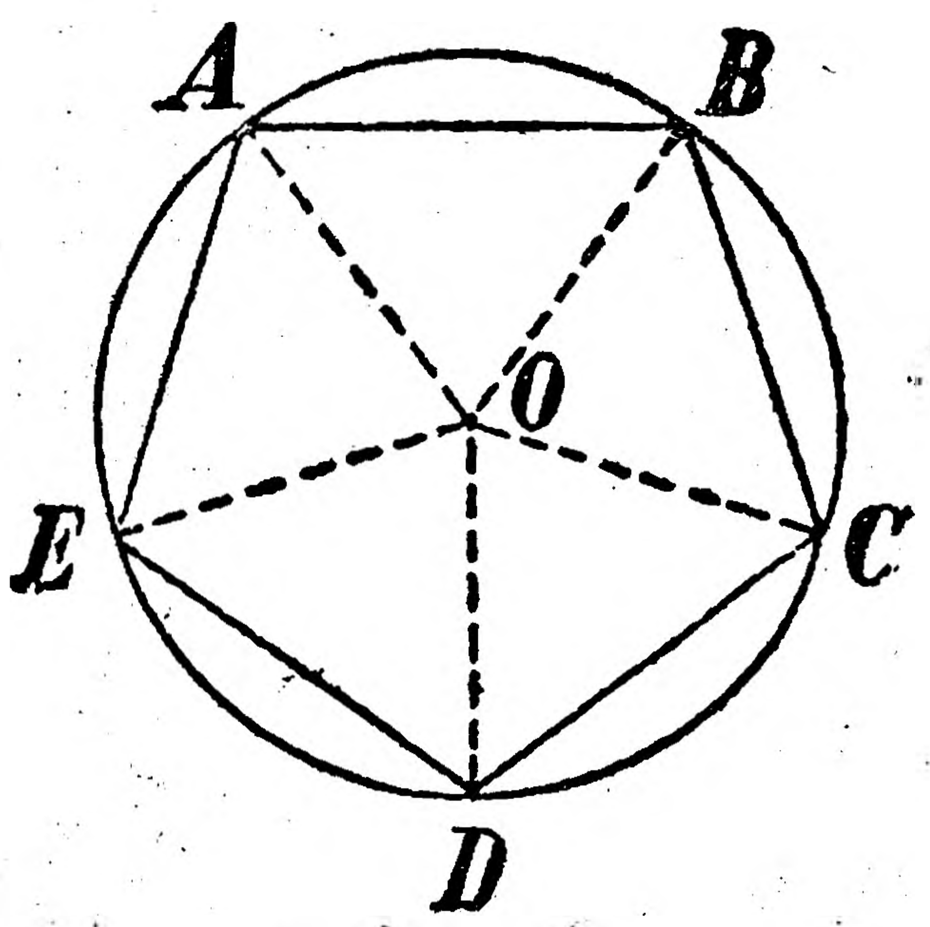


Рис. 342.

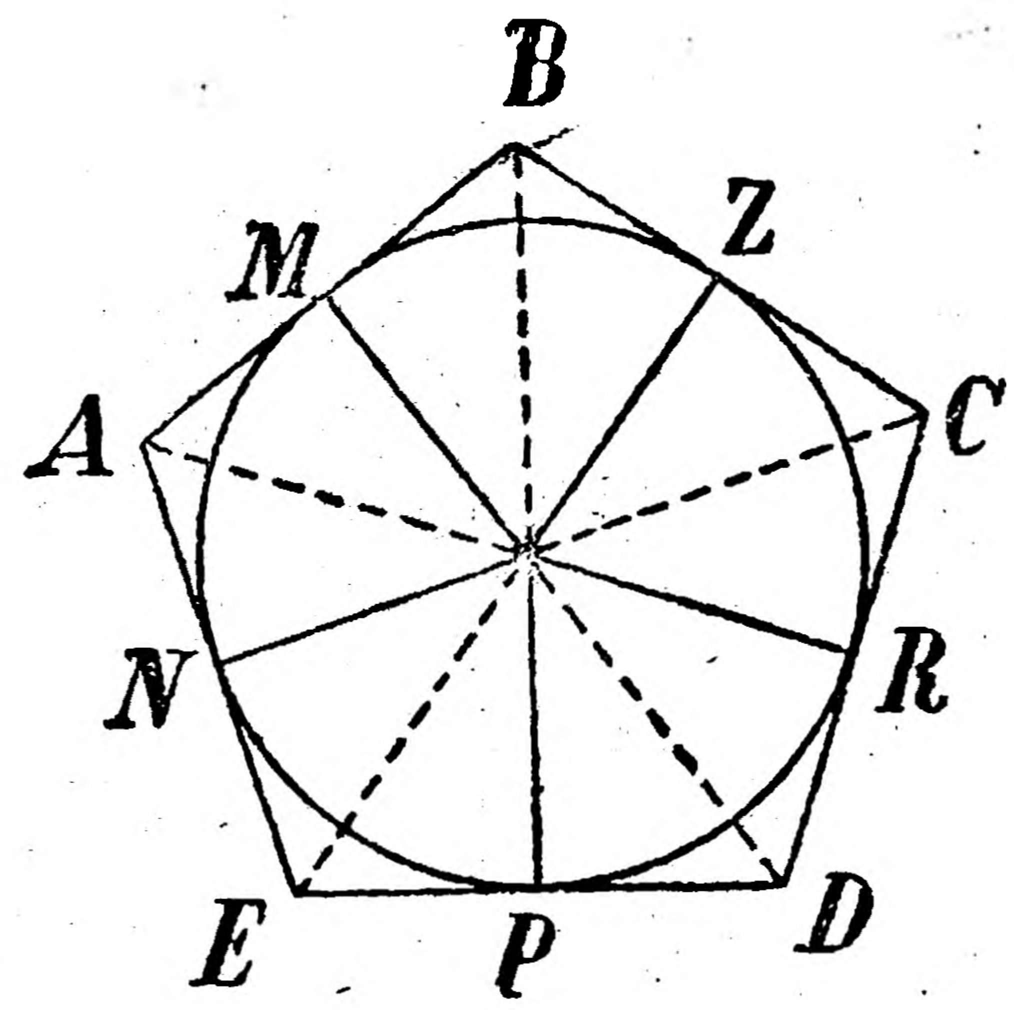


Рис. 343.

Общую вершину тех равнобедренных треугольников, из которых составлен наш многоугольник, примем за центр искомой окружности (рис. 343). Высоты этих равнобедренных треугольников примем за радиусы окружности и нарисуем окружность. Она должна касаться всех сторон многоугольника (§ 211). Такая окружность называется вписанной в многоугольник (а многоугольник называется описанным около окружности).

В данный правильный многоугольник можно вписать только одну окружность. Почему?

Радиусы этой вписанной окружности (*OM*, *ON* и т. д.) называются апофемами многоугольника.

§ 295. Как вписать в данную окружность правильный многоугольник? В предыдущих задачах нам был дан правильный многоугольник и надо было либо описать, либо вписать в этот многоугольник окружность.

Посмотрим теперь, как, имея окружность, вписать в нее тот или другой правильный многоугольник.

Задача 1. Вписать в данную окружность правильный четыреугольник.

Исследование. Те равнобедренные треугольники, из которых мы составили в § 206 (стр. 135) правильный четыреугольник, имели у своей общей вершины O прямые углы. Следовательно, у четыреугольника два соседних радиуса, например, OC и OB (рис. 344), взаимно перпендикулярны.

Построение. Проведите два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD (рис. 344) и соедините концы их. Докажите, что полученный четыреугольник будет правильным, т.-е. что у него все стороны и все углы равны.

Пояснение. Примените для углов теорему § 289.

Задача 2. Вписать в данную окружность правильный шестиугольник.

Те равнобедренные треугольники, из которых мы составили в § 207 правильный шестиугольник, имели все три стороны одинаковой длины, следовательно, у шестиугольника каждая сторона должна равняться радиусу OA.

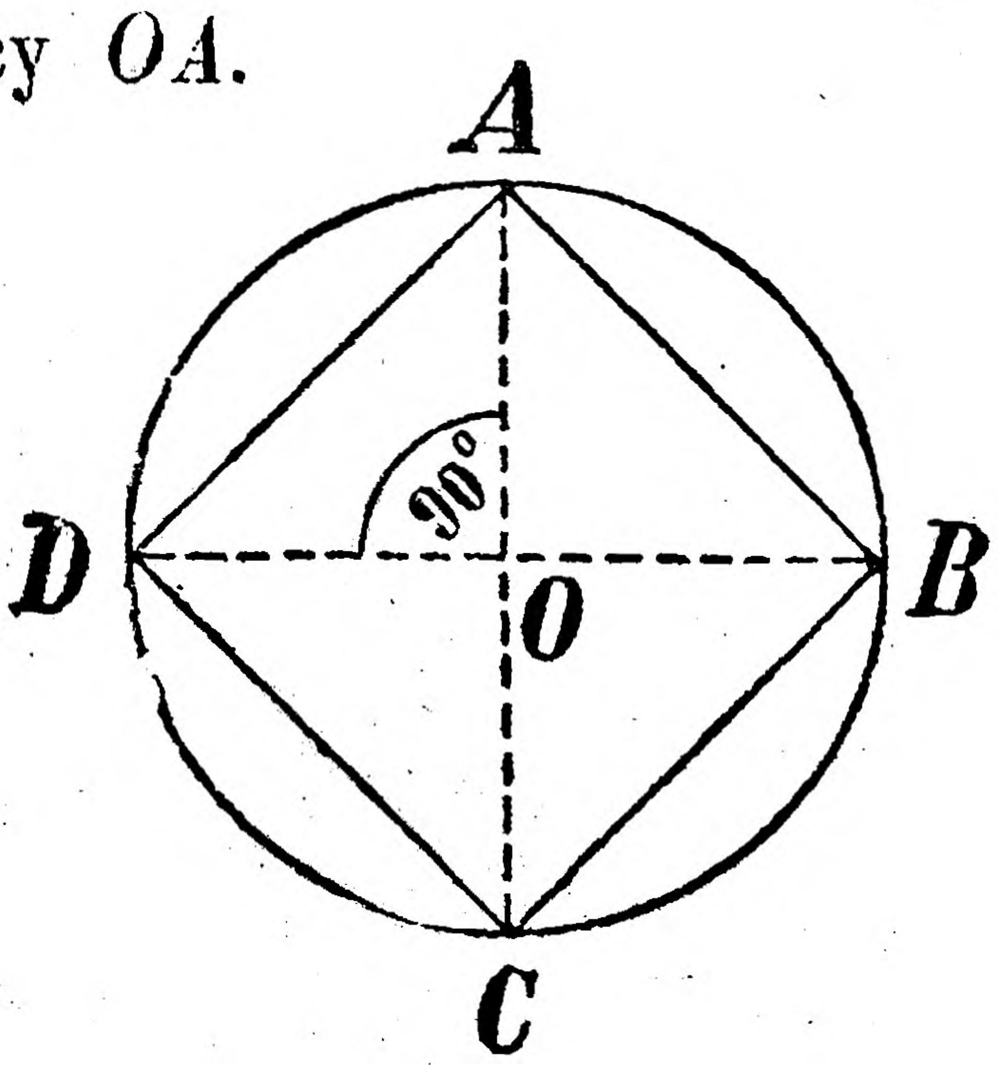


Рис. 344.

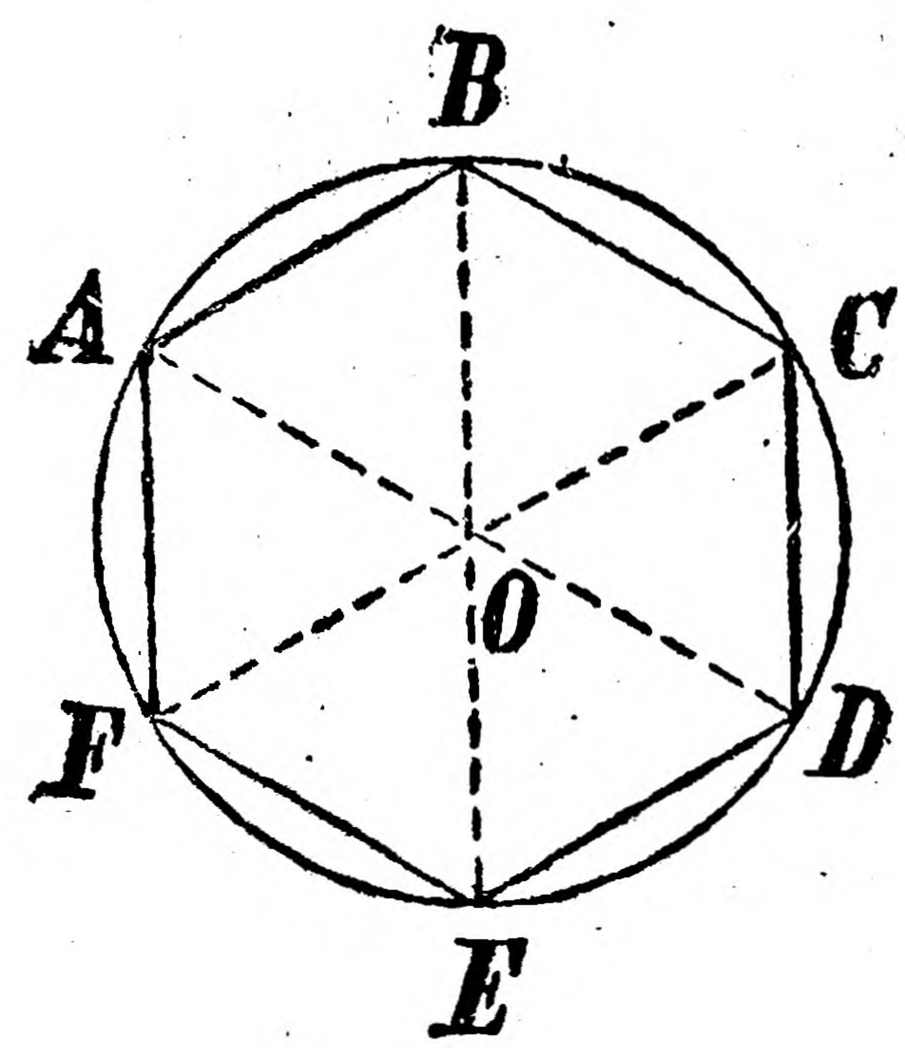


Рис. 345.

Построение. Отложите вдоль окружности (рис. 345) шесть хорд, равных радиусу.

Докажите, что окружность разделится при этом на 6 равных частей и что полученный шестиугольник будет правильным.

Задача 3. Вписать в данную окружность правильный треугольник.

Впишите в окружность правильный шестиугольник и соедините прямыми линиями его вершины через одну.

Докажите, что построенный таким образом треугольник будет правильным.

§ 296. *Задача.* Удвоить число сторон у данного правильного вписанного многоугольника.

Если вам удалось вписать в окружность какой-либо правильный многоугольник $ABCDE$ (рис. 346), то вы без труда легко можете построить правильный вписанный в многоугольник, имеющий вдвое большее число сторон.

В самом деле, проведите из центра на одну сторону многоугольника (например, на AB) перпендикулярный радиус OZ. Этот радиус разделит дугу AB на две равные части (§ 275). Соединив с этой точкой Z концы стороны A и B, вы получите вместо одной стороны AB две новые хорды AZ и BZ. Проделав то же самое со всеми остальными сторонами многоугольника $ABCDE$, вы получите новый многоугольник $AZBNCPDQER$, имеющий вдвое большее число сторон. Докажите, что построенный вами новый многоугольник будет правильным.

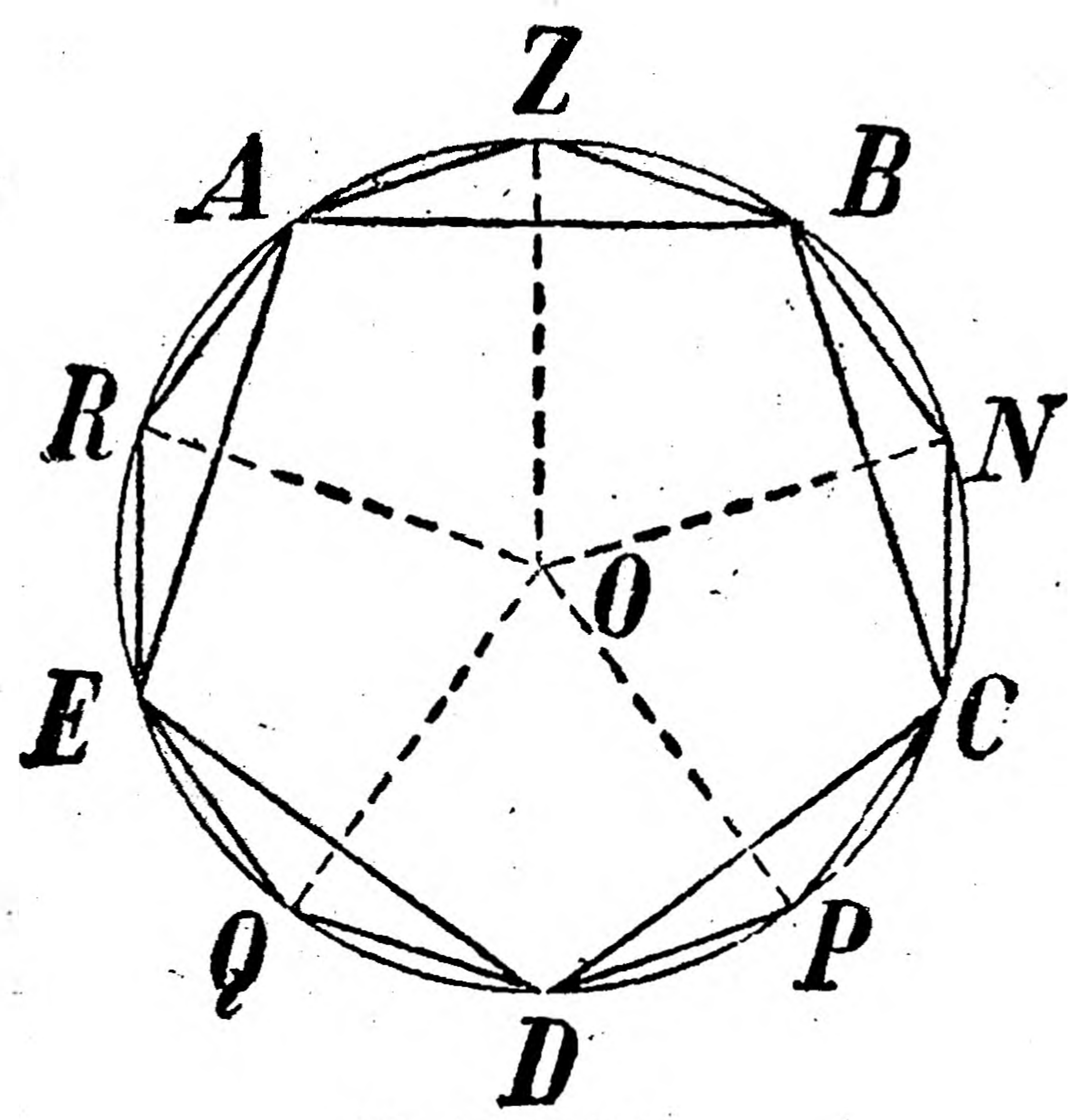


Рис. 346.

Итак, вписав в окружность правильный 4-угольник, мы изложенным способом можем вписать правильный 8-угольник, 16-угольник, 32-угольник и т. д.

Построив правильный вписанный 3-угольник, можно вписать правильный 6-угольник, 12-угольник, 24-угольник, 48-угольник и т. д.

При помощи более сложных геометрических построений можно вписать правильный 5-угольник, а следовательно, и многоугольники, имеющие 10, 20, 40 и т. д. сторон. Можно также построить правильные многоугольники, имеющие 15, 30, 60 и т. д. сторон. Однако есть такие многоугольники, которые не могут быть вписаны циркулем и линейкой. Например, нельзя вписать правильного 7-угольника или 13-угольника.

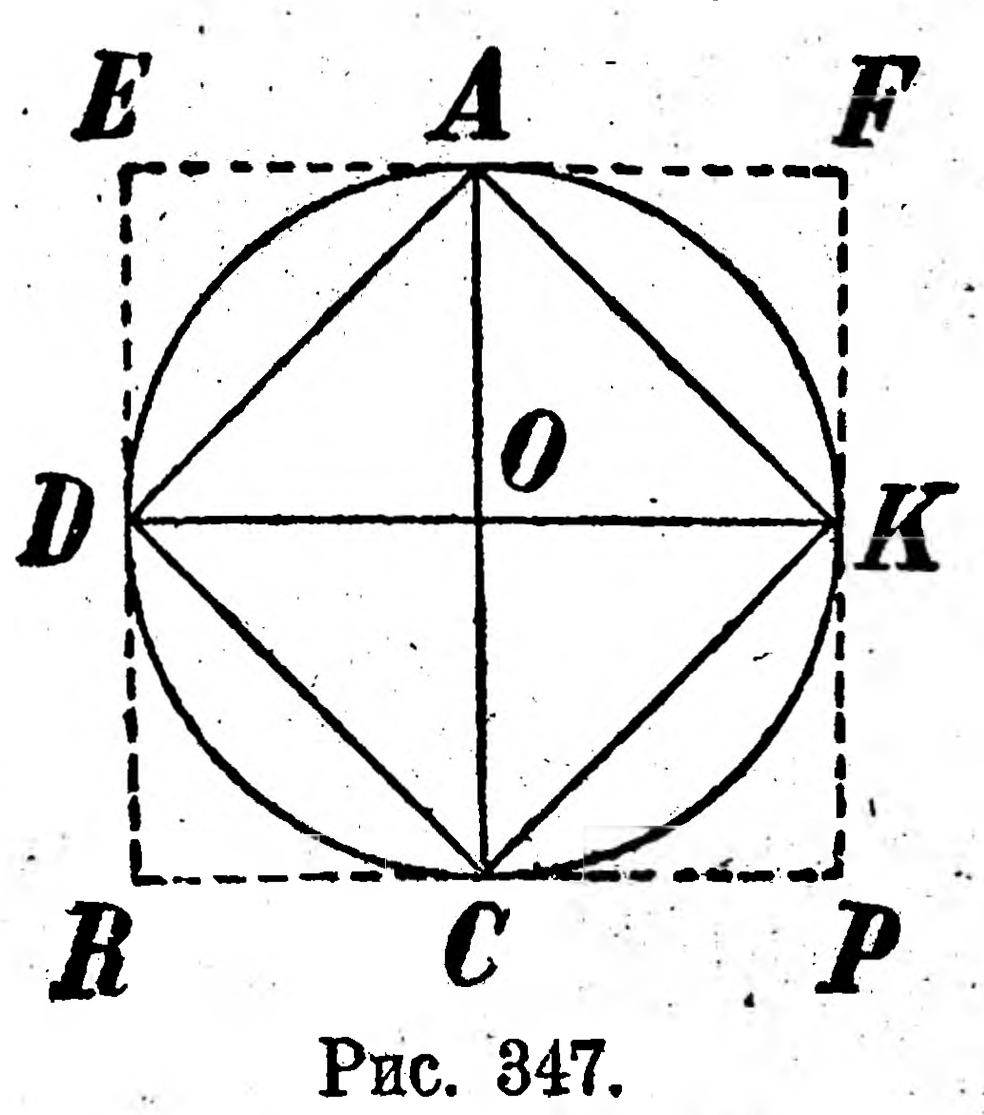


Рис. 347.

§ 297. *Задача.* **Как около данной окружности описать правильный многоугольник?**

Пусть дана окружность (рис. 347), вокруг которой надо описать правильный многоугольник, например, правильный четыреугольник.

Впишите сначала в эту окружность правильный четыреугольник $ADCK$, проведите к его вершинам радиусы OA, OK, OC и OD и у тех же вершин постройте прямые, касательные к окружности; вы получите новый четыреугольник $BEFP$. Убедитесь, что этот четыреугольник—правильный.

Постройте около окружности тем же самым способом правильный описанный 3-угольник, 6-угольник, 8-угольник и т. д.

ГЛАВА XXII.

ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ.

91. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ.

§ 298. Длину окружности нельзя точно измерить.

Опыт. Нарисуйте окружность. Если бы вы попытались измерить длину этой окружности какой-либо прямолинейной единицей, например, линейным сантиметром, и попробовали бы, укладывая его вдоль окружности, узнать, из скольких сантиметров состоит длина ее, этого сделать вам не удалось бы. Прямая линия не может иметь с окружностью более двух общих точек (§ 276). Попытаемся измерить длину нашей окружности какой-либо криволинейной единицей.

Примите, например, за единицу измерения дугу AB, равную $^1/_4$ части нашей окружности. Нашу окружность удастся вам измерить этой единицей. Сколько раз укладывается в ней эта единица? Но если вы попробуете измерить этой дуговой единицей какую-либо новую окружность иного радиуса, то натолкнетесь на прежнее препятствие: когда вы вырежете дугу AB и попробуете укладывать ее на окружности, то она совпадает с нею только своими концами, а промежуточные точки не совместятся.

§ 299. Нахождение длины окружности при помощи измерения периметров многоугольников. Итак, непосредственно измерить длину окружности нельзя ни прямолинейной мерой, ни криволинейной. Поэтому нам нужно либо совсем отказаться от измерения длины окружности, либо попытаться хотя бы приблизительно измерить эту длину каким-либо косвенным путем. Мы, конечно, предпочтем второй путь: постараемся найти способ, при помощи которого можно было бы узнать хотя бы только приблизительную длину окружности.

Опыт 1. Нарисуйте какую-нибудь окружность достаточно большого радиуса (желательно, чтобы радиус был по крайней мере 100 миллиметров) и впишите в нее какой-либо правильный многоугольник, например, правильный шестиугольник (рис. 348). Измерив сторону этого 6-угольника, вычислите его периметр. Периметр этого многоугольника будет значительно отличаться от длины окружности. Впишите теперь новый правильный многоугольник с удвоенным числом сторон. Тогда у вас получится правильный вписанный 12-угольник, стороны которого будут уже довольно близко прилегать к окружности. Удвойте еще раз число сторон многоугольника. У вас получится правильный вписанный 24-угольник, периметр которого будет еще больше приближаться к длине окружности. Если вы будете продолжать и дальше этот процесс, то вы будете получать ряд новых многоугольников, периметры которых будут все ближе и ближе прилегать к окружности.

Измерьте периметры всех многоугольников. Зная эти периметры, укажите приблизительно длину нарисованной вами окружности.

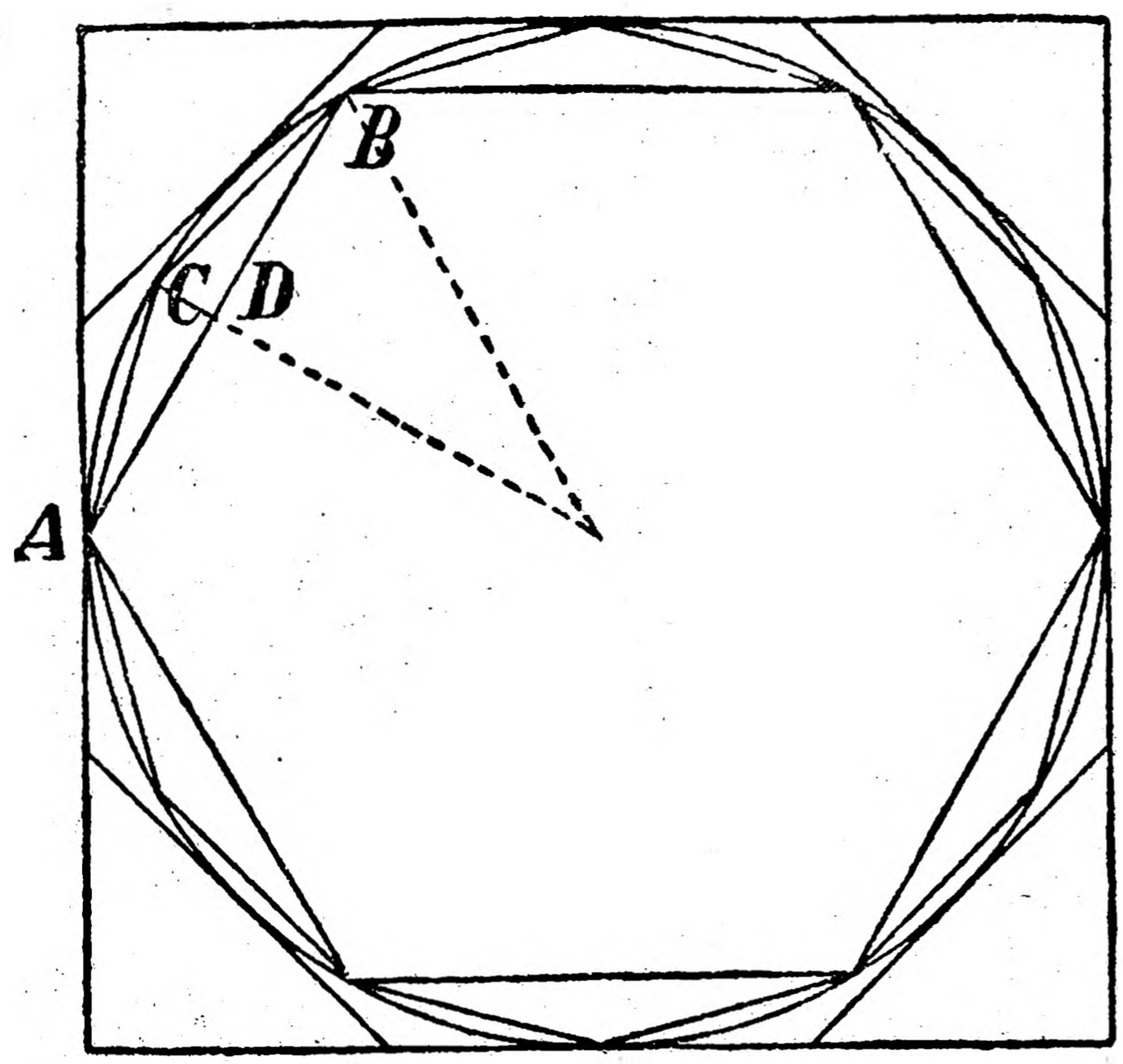


Рис. 348.

Результат опыта. Если вы нарисуете окружность радиусом в 100 миллиметров и впишете в нее правильные 6-угольники, 12-угольники, 24-угольники и т. д., то после измерений вы найдете, что

сторона 6-угольника равна 100 *мм*,
сторона 12-угольника равна 51 *мм*,
сторона 24-угольника равна 26 *мм*.

Умножая длину каждой стороны на число сторон, вы найдете периметры этих многоугольников:

периметр 6-угольника равен 600 *мм*,
периметр 12-угольника равен 612 *мм*,
периметр 24-угольника равен 624 *мм*.

Длина нашей окружности больше каждого из этих периметров. К какому периметру будет она ближе всего?

Опыт 2. Нарисуйте опять ту же окружность того же самого радиуса. Вместо того, чтобы вписать в окружность правильные многоугольники, начнем их описывать.

Легче всего описать около окружности правильный четыреугольник. Опишите его (рис. 347). Периметр этого четыреугольника будет значительно отличаться от окружности. Удвойте число сторон этого четыреугольника. Вы получите правильный описанный 8-угольник. Периметр его будет уже довольно близко прилегать к окружности.

Продолжайте дальше описывать многоугольники, удваивая число сторон. У вас получатся правильные описанные 16-угольники, 32-угольники и т. д., при чем периметр каждого нового многоугольника будет все более и более приближаться к длине окружности.

Найдите периметры этих многоугольников.

Результаты опыта. Если вы около окружности, радиус которой равен 100 *мм*, опишете правильные 4-угольники, 8-угольники, 16-угольники и т. д., то после измерения найдете, что

сторона 4-угольника равна 200 *мм*,
сторона 8-угольника равна 83 *мм*,
сторона 16-угольника равна 40 *мм*.

Следовательно,

периметр 4-угольника равен 800 *мм*,
периметр 8-угольника равен 664 *мм*,
периметр 16-угольника равен 640 *мм*.

Длина нашей окружности будет меньше каждого из этих периметров.

Итоги первого и второго опытов. Сравним теперь результаты, полученные в первом опыте. Так как наша окружность больше периметра любого вписанного многоугольника и меньше периметра любого описанного, то она должна лежать между такими числами:

(1) 600 *мм* $<$ длина окружности $<$ 800 *мм*,
(2) 612 *мм* $<$ длина окружности $<$ 664 *мм*,
(3) 124 *мм* $<$ длина окружности $<$ 640 *мм*.

Первая строка (1) говорит, что число, соответствующее длине окружности, лежит где-то между 600 и 800 *мм*. Эти числа отличаются одно от другого на 200 *мм*. Поэтому, если вы за длину окружности примете любое число, лежащее между 600 и 800, например, 605, 750, 690 и т. д., то найдете неточную, приближенную длину окружности, которая будет отличаться от неизвестной нам действительной длины не более, чем на 200 *мм*.

Вторая строка (2) дает возможность сравнить длину окружности с периметрами правильного вписанного 12-угольника (612 *мм*) и описанного 8-угольника (664 *мм*). Число, измеряющее длину искомой окружности, должно лежать между 612 *мм* и 664 *мм*. Разность между этими числами 52 *мм* Поэтому, если вы за длину окружности возьмете любое число, лежащее между 612 и 664 (например, 620 *мм*, 650 *мм* и т. д.), то найденная вами длина окружности будет отличаться от действительной длины ее не более, чем на 52 *мм*.

Согласно третьей строке (3) вы для окружности можете взять числа, лежащие между 624 *мм* и 640 *мм* (напр., 630 *мм*), при чем это значение будет отличаться от действительной длины окружности уже не более, чем на 16 *мм*. Итак, если вы будете брать многоугольники все с бо́льшим и бо́льшим числом сторон и измерять их периметры, то будете иметь возможность указать приближенные значения длины окружности, все менее и менее отличающиеся от действительной длины ее.

92. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ.

§ 300. Нахождение длины окружности при помощи вычислений периметров многоугольников. Когда вы в предыдущей задаче измеряли периметры многоугольников, то заметили, что уже 24-угольник, а тем более 48-угольник так тесно сливаются с окружностью, что измерить его сторону очень затруднительно, а ведь измерение стороны надо сделать как можно точнее, ибо если вы при измерении стороны 48-угольника ошибетесь на 1 *мм*, то при вычислении периметра 48-угольника эта ошибка превратится уже в 48 *мм*. (Почему?) Вот почему при помощи непосредственных измерений периметров многоугольников очень трудно найти достаточно близкую к истине длину окружности.

Значительно лучшие результаты получим, если, вместо того чтобы измерять стороны всех многоугольников, ограничимся измерением только радиуса окружности, а длину сторон будем определять при помощи вычислений. Посмотрим, как это можно сделать.

У нашей окружности (§ 299) радиус равен 100 *мм*. Тогда сторона правильного вписанного шестиугольника *AB* (рис. 348) должна равняться тоже 100 *мм* (вспомните § 295). Вычислим сторону 12-угольника *BC*. Тут большую услугу окажет нам теорема Пифагора, которая дает возможность вычислить любую сторону прямоугольного треугольника, если известны размеры двух других сторон (§ 230).

В прямоугольном треугольнике *ODB* известны размеры гипотенузы *OB* (100 *мм*), катета *BD* (50 *мм*). Следовательно, можно без всяких измерений, одними только вычислениями узнать длину второго катета *OD*. Если *OD* вычислено, то легко узнать длину *DC* (*DC* = *OC* — *OD*). Тогда из прямоугольного треугольника *DCB*, в котором мы вычислили размеры обоих катетов *DC* и *DB*, вы узнаете длину искомой стороны *BC*. Точно таким же путем можно вычислить сторону 24-угольника, 48-угольника и т. д. Эти вычисления дают возможность определять длину сторон многоугольников с неограниченно большим числом сторон (например, были ученые, которые вычисляли периметры многоугольников, имеющих 393 216 сторон).

Нетрудно также вычислить и стороны всех наших описанных многоугольников, помня, что сторона описанного четыреугольника равна двум радиусам, то-есть 200 *мм*, и применяя затем Пифагорову теорему.

Однако, при помощи вычислений вам не удастся найти точные размеры сторон многоугольников, так что и здесь придется ограничиваться приближенными значениями их, но зато при вычислениях можно находить размеры сторон, как угодно мало отличающиеся от действительных размеров их, чего при непосредственном измерении сделать нельзя. (Почему?)

Если произвести все эти вычисления, предполагая, что наши многоугольники описаны или вписаны в окружность с радиусом в 100 *мм*, то мы получим такие числа:

Вписанные многоугольники.					Описанные многоугольники.	
Число сторон	Периметры многоугольников				Периметры многоугольников	Число сторон
6	600 *мм*	<	ОКРУЖНОСТЬ	<	800 *мм*	4
12	622 »	<		<	663 »	8
24	626 »	<		<	636 »	16
48	627 »	<		<	630 »	32
96	628 »	<		<	629 »	64
192	628,3 »	<		<	628,4 »	128

Из этой таблицы мы видим, что, если вписать многоугольник с 192 сторонами и описать многоугольник с 128 сторонами, то их периметры будут так близко прилегать к окружности, что разница между ними будет меньше 1 *мм*, так что, если для окружности взять число 628 *мм*, то ошибка будет сделана меньше 1 *мм*.

93. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ.

§ 301. Отношение длины окружности к ее диаметру. Измерение длины окружности одним из указанных способов требует очень много времени, а потому постараемся найти такое правило, пользуясь которым можно было бы без особого труда быстро вычислить длину любой окружности. Вы, конечно, заметили и сами, что с изменением радиусов изменяется и длина окружности: чем длиннее радиус, тем длиннее окружность. Следовательно, между длиною окружности и ее радиусом есть какая-то зависимость. Постараемся найти ее. Только вместо радиуса возьмем диаметр (его легче измерить). Постараемся узнать, во сколько раз окружность длиннее своего диаметра.

Опыт 1. Я раздам вам всем самые разнообразные предметы: монеты в 5 коп., 3 коп. и 2 коп., донышки от круглых коробок, чайное блюдце, цилиндрическую гирю, чайный стакан, чернильницу и т. д.

Укажите на этих телах окружность. Плотно обхвативши эту окружность узкой бумажной полоской, отрежьте от последней часть, равную длине окружности (рис. 349), и выпрямите ее (рис. 350);

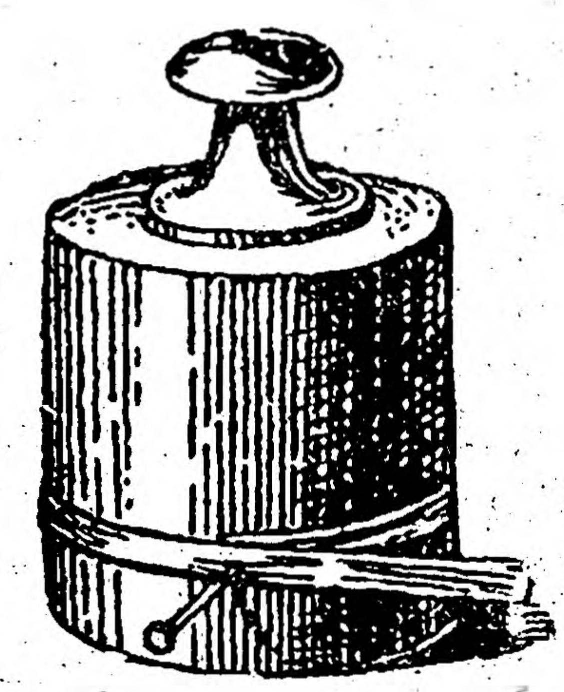


Рис. 349.

Рис. 350.

отрежьте теперь полоску, равную по длине диаметру вашей окружности. Узнайте, сколько раз укладывается диаметр на выпрямленной окружности. Получится ли при этом остаток? Укладывая этот остаток на диаметре, узнайте, какую часть диаметра составляет он. Итак, во сколько раз окружность длиннее диаметра? Будет ли это отношение зависеть от того, какой длины взята у вас окружность, или это число будет одинаковым для всех окружностей?

Результат опыта. Для всех окружностей вы получите приблизительно одно и то же число. Любая окружность длиннее своего диаметра приблизительно в $3\frac{1}{7}$ раза (рис. 350).

Опыт 2. Это отношение можно найти еще иначе. Измерьте в миллиметрах длину выпрямленной окружности и длину ее диаметра (здесь удобно воспользоваться сантиметровой лентой, которую употребляют портнихи).

Разделив эти числа, вы найдете искомое отношение. Эти отношения надо выразить десятичной дробью, при чем достаточно ограничиться десятыми долями, а в лучшем случае — сотыми долями.

Результат опыта. Окажется, что отношение любой окружности к ее диаметру выразится одним и тем же числом. При очень тщательном измерении вам, быть-может, удастся найти, что это отношение $= 3{,}14$.

§ 302. Вычисление π. Отношение любой окружности к ее диаметру выражается одним и тем же числом. Это число, показывающее, во сколько раз окружность длиннее диаметра, будем обозначать греческой буквой π *(пи)*.

В опытах 1 и 2 мы находили отношение окружности к диаметру, непосредственно измеряя эти линии; но таким способом получить достаточно точные результаты трудно, ибо каждое измерение сопровождается ошибкой. Значительно лучшие результаты получим мы, если воспользуемся таблицей § 300, где вычислены периметры ряда описанных и вписанных многоугольников. Будем считать, что длина окружности равна каждому из этих периметров. Правда, это предположение тоже несет за собой ошибку, но здесь мы имеем возможность, неограниченно увеличивая число сторон наших многоугольников, сделать эту ошибку как угодно малой.

Так как радиус той окружности, около которой мы рисовали наши многоугольники, равнялся 100 *мм*, то диаметр ее равен 200 *мм*. Разделивши каждый из приведенных в таблице периметров на 200 *мм*, найдем ряд приближенных чисел, между которыми должно лежать точное отношение окружности к диаметру.

Из таблицы (стр. 227) видно, что у правильного вписанного 96-угольника и правильного описанного 64-угольника (вторая строка снизу) наше π будет лежать между числами, отличающимися друг от друга меньше, чем на одну сотую долю.

Следовательно, если мы будем считать, что

$$\pi = 3{,}14,$$

то мы ошибаемся меньше, чем на 0,01. [1])

Для π можно взять еще число $3^1/_7$ (§ 301). Ошибка и здесь будет не больше одной сотой. Выразите это число десятичной дробью и сравните с данным выше значением π.

---

[1]) Более точное значение этих отношений $3{,}141 < \pi < 3{,}144$.

Число сторон.	Периметры описанных многоугольников в *мм.*	Диаметр окружности в *мм.*	Отношение периметров вписанных многоугольников к диаметру.	π	Отношение периметров описанных многоугольников к диаметру.	Диаметр окружности в *мм.*	Периметры описанных многоугольников в *мм*	Число сторон.
6	600	200	3,00	$<\pi<$	4,00	200	800	4
12	622	200	3,11	$<\pi<$	3,31	200	663	8
24	626	200	3,13	$<\pi<$	3,18	200	636	16
48	627	200	3,13	$<\pi<$	3,15	200	630	32
96	628	200	3,14	$<\pi<$	3,14	200	629	64
192	628	200	3,14	$<\pi<$	3,14	200	628	128

Уже египтяне делали попытки узнать, во сколько раз окружность длиннее диаметра. Так, один египетский жрец (Ахмес), живший по крайней мере за 1700 лет до начала нашего летосчисления, предполагал в своих вычислениях, что $\pi = 3{,}16$.

Знаменитый греческий ученый Архимед (около 250 лет до начала нашего летосчисления) дал для π число $3^1/_7 = 3{,}1428$.

В настоящее время вычислили π с чрезвычайно большой точностью. Для практических целей совершенно достаточно считать π равным 3,14, а в случае необходимости особенной точности можно воспользоваться значением $\pi = 3{,}1416$.

§ 303. Вывод формулы для измерения длины окружности. Для того, чтобы вычислить длину окружности, достаточно измерить ее диаметр. Так как окружность длиннее своего диаметра в π раз, то, умножив диаметр на это число, мы и узнаем длину окружности.

Если диаметр окружности содержит d *см*,
то длина окружности содержит $l = \pi d$ *см*.

Если вместо диаметра измерить радиус окружности, то формула для измерения длины окружности будет такая:

Пусть радиус окружности содержит r *см*,
тогда диаметр ее содержит $2r$ »
а длина окружности содержит $l = \pi 2r$ »

$$l = 2\pi r.$$

Следствие. Длина окружности пропорциональна радиусу, то-есть, если, например, радиус увеличится в несколько раз, то во столько же раз увеличится и длина окружности.

94. ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ.

§ 304. *Задача.* Измерить длину дуги AB (рис. 351).

1. Прежде всего вычислим длину всей окружности, частью которой является наша дуга AB. Для этого найдем центр ее O (вспомните § 270) и измерим радиус OA. На рисунке радиус $OA = 25$ *мм*, следовательно, полная окружность содержит

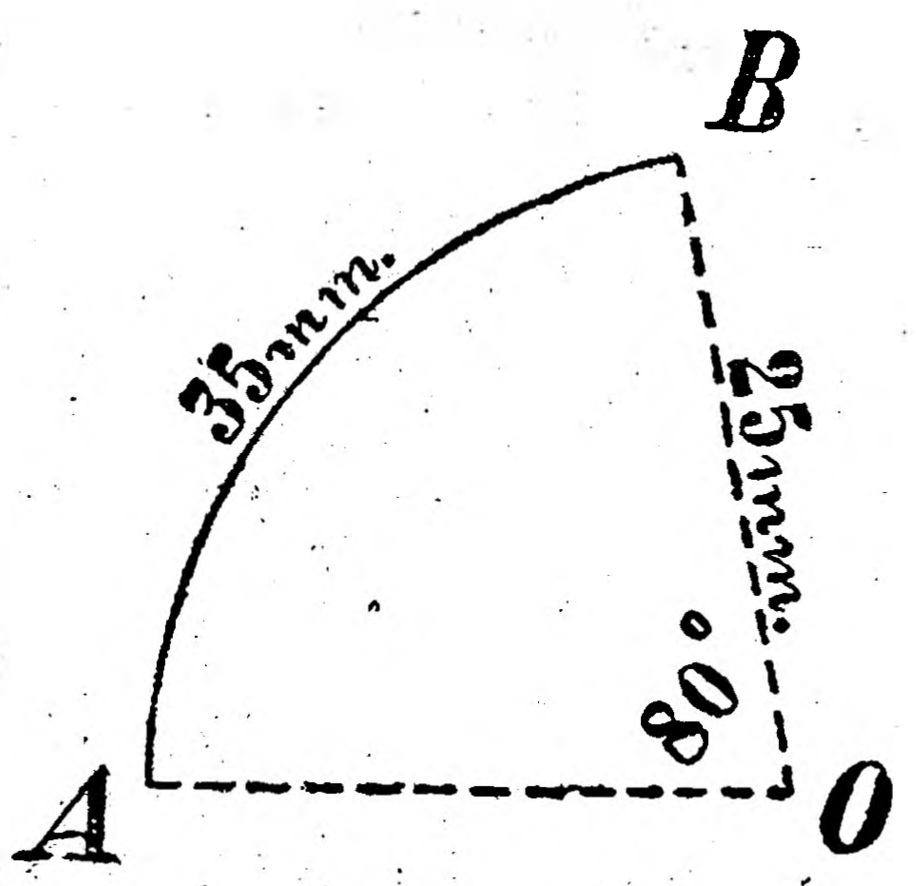


Рис. 351.

$$2\pi r \text{ мм} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \text{ мм},$$

что после вычислений дает 157 *мм*.

2. Узнаем теперь, какую часть всей окружности составляет дуга AB. Измерим транспортиром центральный угол AOB:

$$\angle AOB = 80°.$$

Следовательно, дуга AB содержит 80 дуговых градусов (§ 285). Так как вся окружность содержит 360 дуговых градусов, то наша дуга составляет

$$\frac{80}{360} = \frac{2}{9} \text{ части окружности.}$$

Взявши $^2/_9$ части от 157 *мм*, мы и найдем, что

$$\smile AB = 157 \text{ мм} \times {}^2/_9 = 35 \text{ мм (приблизительно).}$$

Вывод формулы.

Если радиус окружности содержит r *см*, и если дуга содержит n градусов, то эта дуга составляет $\frac{n}{360}$ частей окружности.

Так как длина всей окружности $2\pi r$ *см*, то длина дуги $S = 2\pi r \cdot \frac{n}{360} = \frac{\pi r n}{180}$ *см*.

$$S = \frac{\pi r n}{180}. \qquad (1)$$

Упражнения и задачи.

1. Если человек на ровном месте видит кругом на 3 километра, то какой длины окружность видимого им горизонта?

2. Нарисуйте окружность, длина которой равна 21,7 *см*.

3. Измерьте длину минутной стрелки ваших часов и вычислите, какой длины путь пробежит конец ее в сутки.

4. Во сколько времени можно объехать экватор, двигаясь со скоростью 15 километров в час? Радиус земли приблизительно 6400 километров.

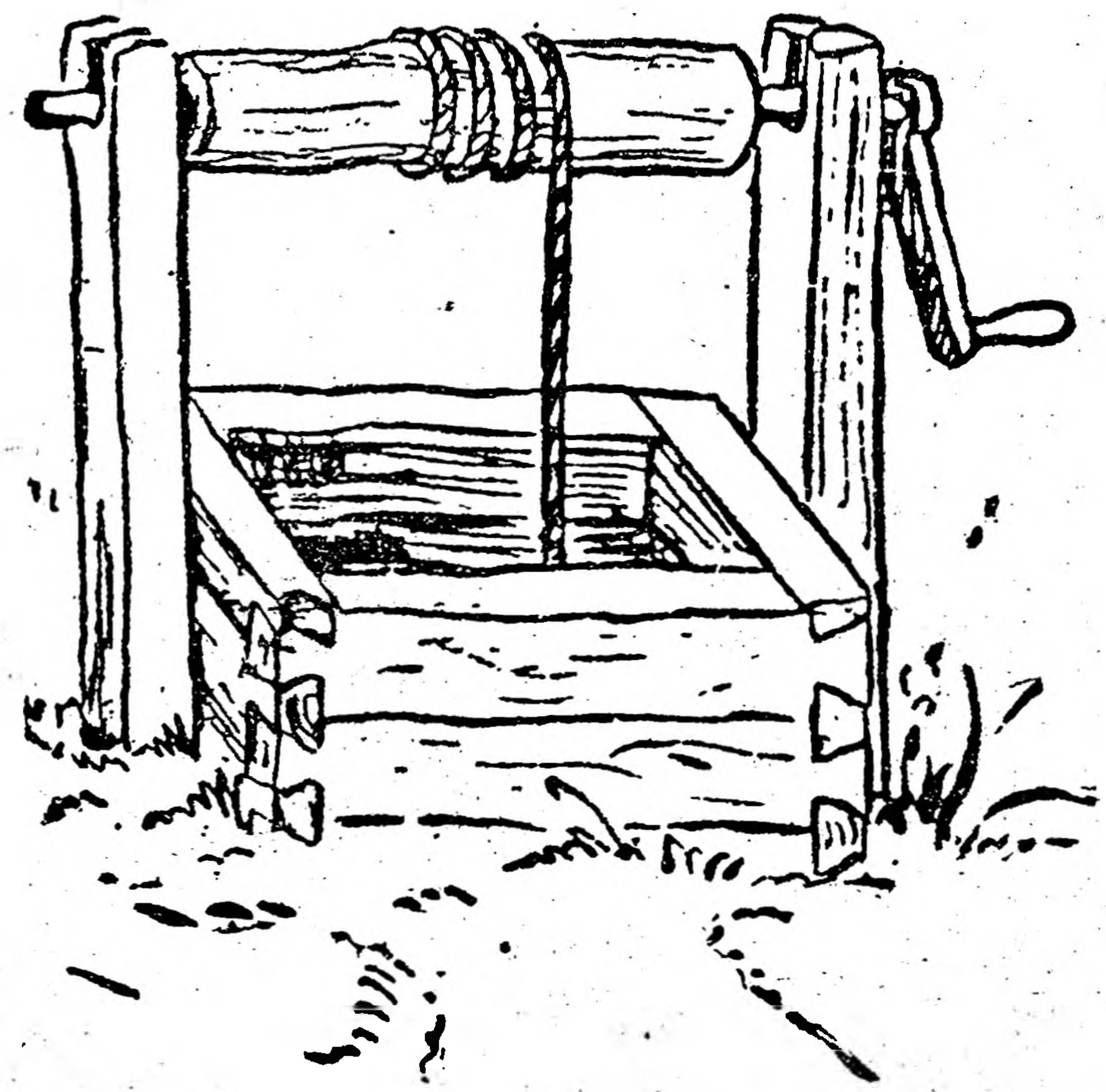


Рис. 352.

5. Какой длины путь пробегает земля вокруг солнца в год, если она вращается по окружности, радиус которой около 150000000 *км.*

6. Проволока намотана кольцами. Для того, чтобы узнать длину ее, измерили средний диаметр колец и сосчитали число их. Оказалось, что средний диаметр кольца = 1,5 метра, а всех колец 240. Какой длины вся проволока?

Рис. 353.

7. Автомобиль едет со скоростью 74,4 *км* в час. Колесо его делает 400 оборотов в минуту. Чему равен диаметр колеса?

8. Диаметр вала колодезного ворота (рис. 352) равен 0,7 метра. Для того, чтобы вытянуть ведро с поверхности воды, надо сделать 10 полных оборотов. Какова глубина колодца?

9. Вычислите длину географического градуса экватора. Радиус земли = 6400 километров (приблизительно).

10. Шестидесятая часть земного экваториального градуса называется морской милей или узлом. Найдите длину узла.

11. Измерьте длину этой дуги (рис. 353).

ГЛАВА XXIII.

ПЛОЩАДЬ КРУГА.

95. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ КРУГА.

§ 305. Части круга. Вырежьте из бумаги круг. Отрежьте от него часть, ограниченную двумя радиусами и дугой (на рис. 354, *AOB*). Такую часть круга мы назовем с е к т о р о м. Отрежьте от этого круга часть, ограниченную хордой и дугою. Она называется **сегментом** (рис. 354, *CEDF*). Нарисуйте два пересекающихся круга. Часть *ACBD* (рис. 354), ограниченная двумя дугами (*ACB* и *ADB*), называется **луночкой**. Вырежьте из бумаги несколько луночек.

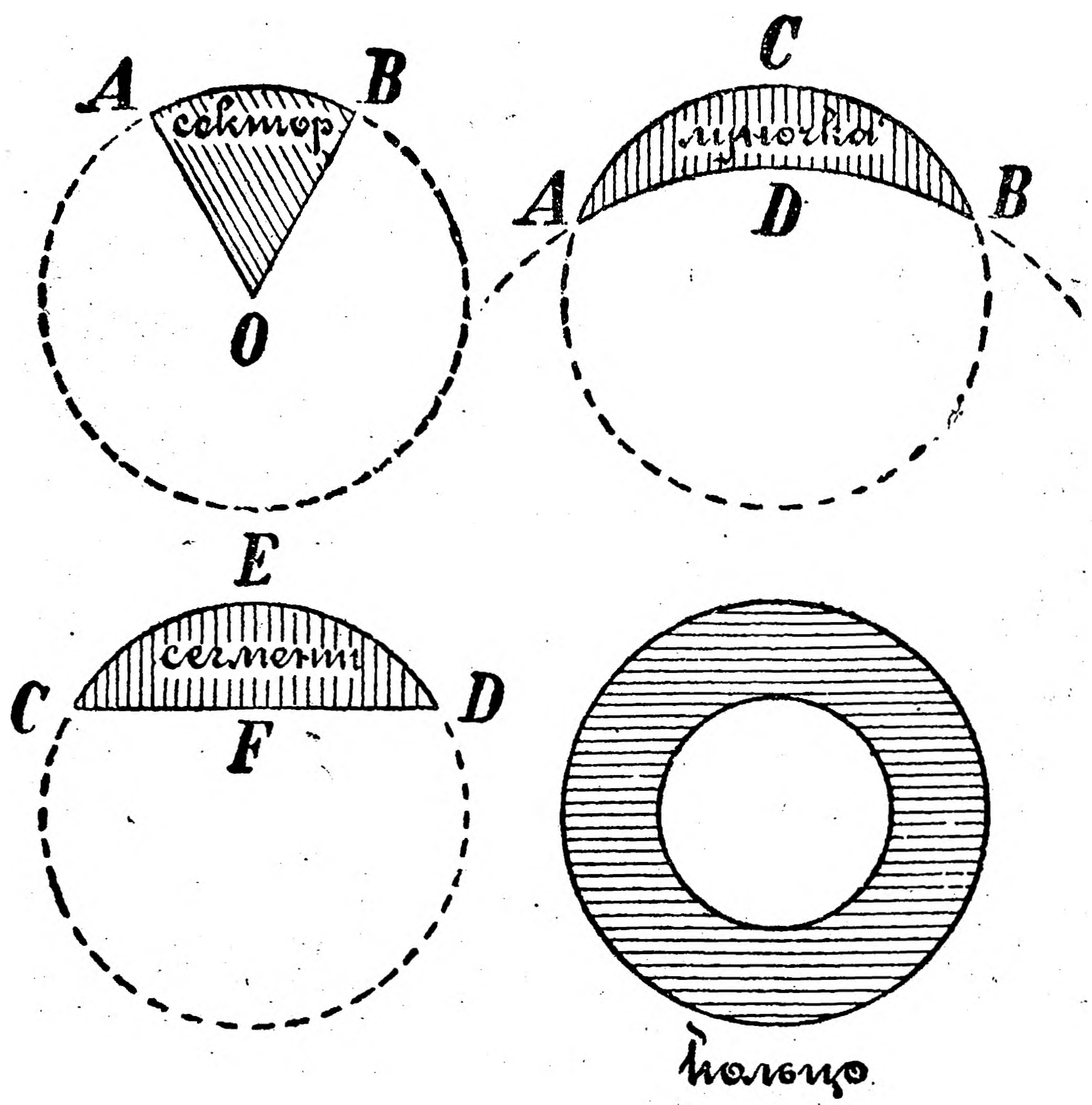


Рис. 354.

Нарисуйте две окружности с общим **центром** (такие окружности называются **концентрическими**). Вырежьте часть, ограниченную обеими этими окружностями. Она называется **круговым поясом** или **кольцом** (рис. 354).

§ 306. Вычисление площади круга.

Теорема. **Площадь круга равна половине длины его окружности, умноженной на радиус.**

Опыт. Вырежьте из цветной бумаги круг. Разрежьте его на 12 равных секторов (рис. 355). Шесть из них приклейте вдоль прямой *AB*, а остальные шесть вставьте остриями внутрь образовавшихся зубцов. У вас должна получиться фигура, похожая на параллелограм (рис. 356). Если разрезать круг на большее число секторов, то получится фигура, очень похожая на прямоугольник.

Укажите линию, которая служит основанием этой фигуры. Чем была эта линия у окружности? Проведите высоту «параллелограма».

Чем была она у окружности? На основании этого опыта выведите правило для измерения площади круга.

Результат опыта. Основанием полученной фигуры служит половина окружности AB, а высотою — радиус ее. Следовательно:

Площадь круга $= \frac{1}{2}$ окружности, умноженной на радиус.

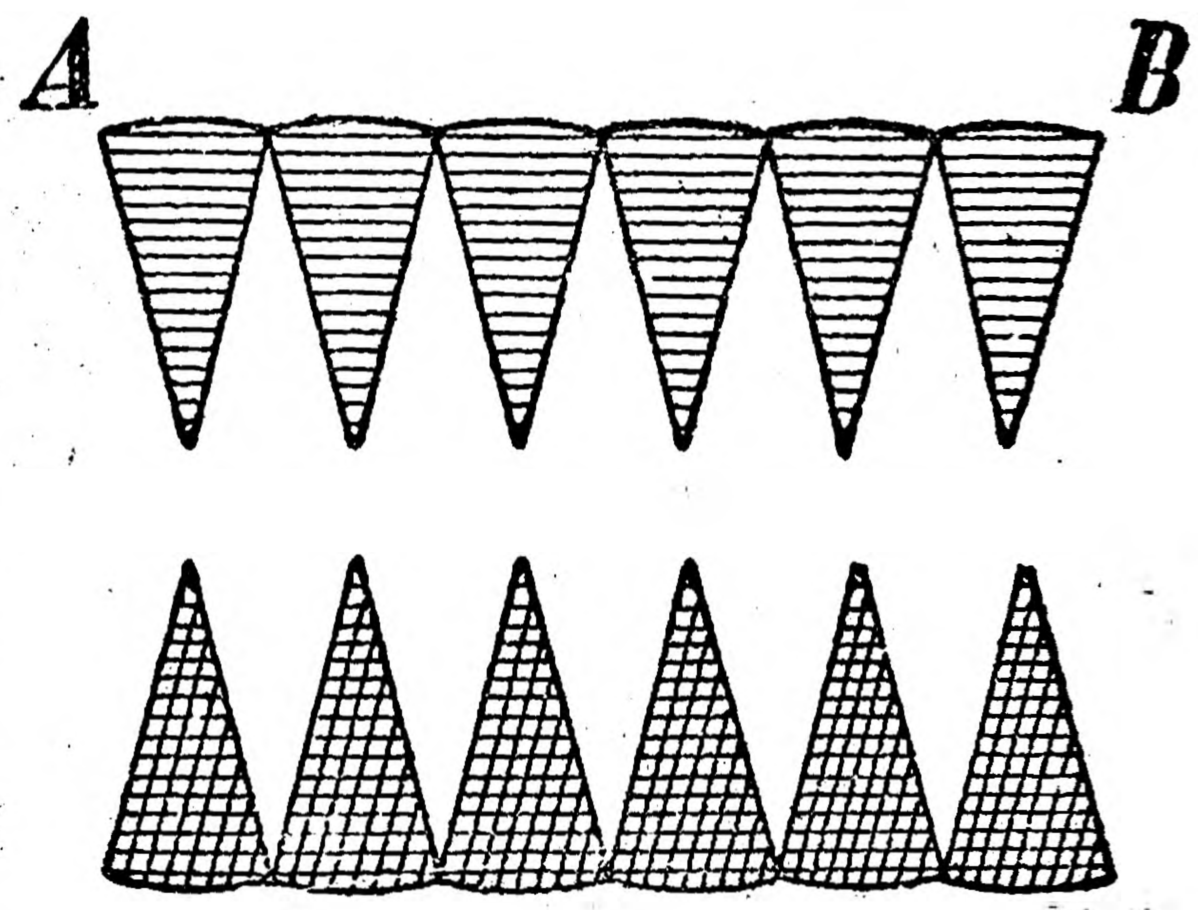


Рис. 355.

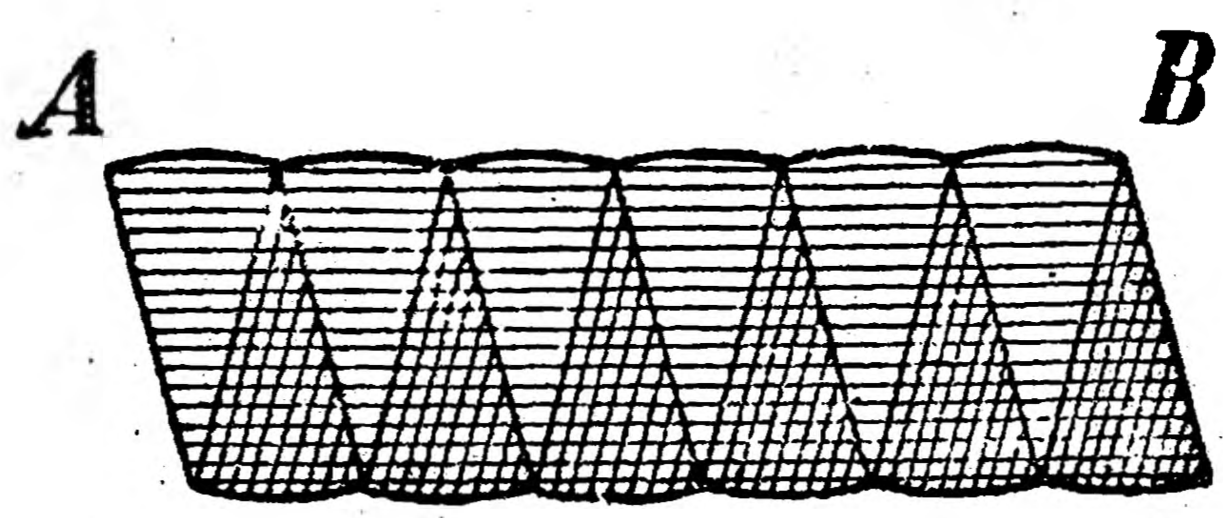


Рис. 356.

Доказательство. Впишем в наш круг правильный шестиугольник (рис. 357). Если его разрезать вдоль по радиусам на 6 равнобедренных треугольников, то из них можно составить параллелограм, площадь которого равна половине периметра 6-угольника, помноженного на апофему (вспомните § 226). Но площадь этого 6-угольника значительно меньше площади нашего круга, ибо для того, чтобы получить этот многоугольник, надо от круга отрезать 6 сегментов (укажите их на рис. 357). Удвоим число сторон этого 6-угольника. Тогда мы получим правильный вписанный 12-угольник, площадь которого будет уже меньше отличаться от площади круга, ибо для того, чтобы превратить круг в 12-угольник, надо отрезать от него меньшие по площади сегменты (посмотрите на рис. 357). Площадь этого 12-угольника равна половине его периметра, умноженной на апофему. Впишем затем правильный 24-угольник, 48-угольник и т. д. Если начать неограниченно увеличивать число сторон этих многоугольников, то будем получать многоугольники, площади которых начнут как угодно мало отличаться от площади нашего круга, а фигура рис. 356 будет чрезвычайно мало отличаться от параллелограма. Периметры этих многоугольников как угодно мало отличаются от длины окружности (§ 298),

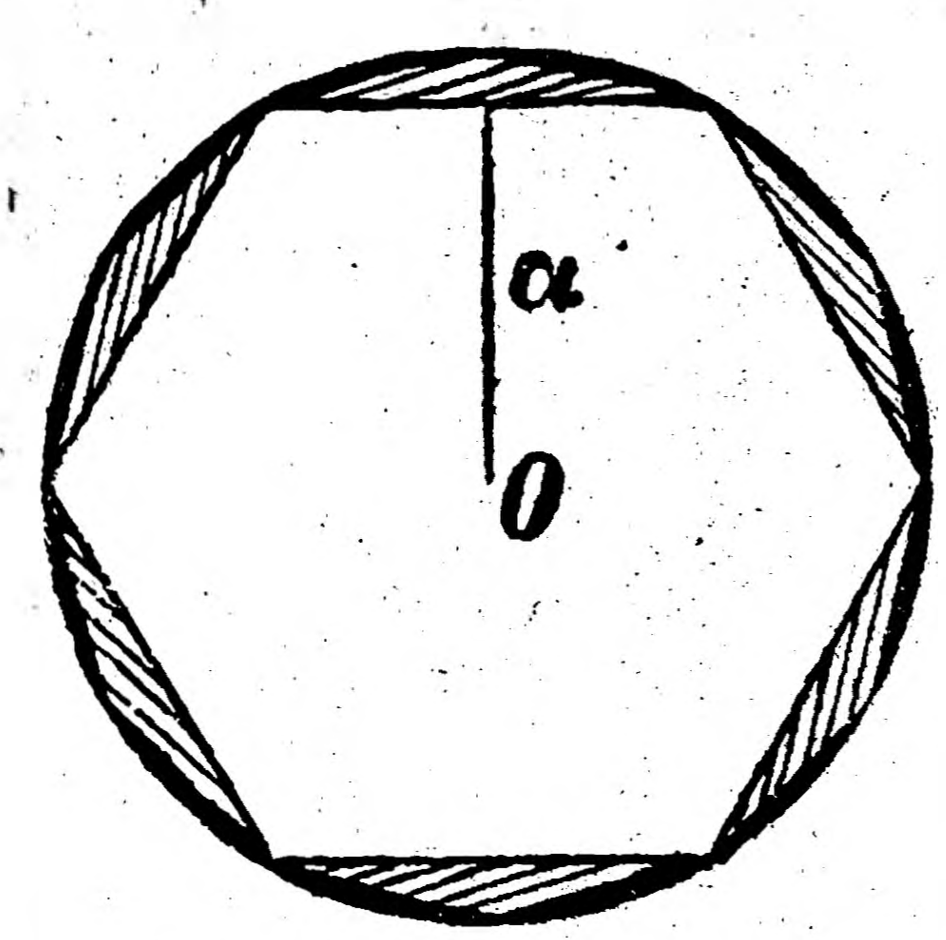


Рис. 357.

а апофема, все удлиняясь и удлиняясь, приближается к радиусу. А потому, заменяя площади многоугольников, их периметры и апофемы теми величинами, с которыми они стремятся слиться, мы получим такое правило:

Для того, чтобы узнать, сколько квадратных единиц содержит площадь круга, надо измерить соответствующими линейными единицами половину его окружности и радиус, и полученные числа перемножить. Это правило короче формулируется так:

Площадь круга равна половине его окружности, умноженной на радиус.

Докажите эту теорему, заменив вписанные многоугольники правильными описанными.

§ 307. Вывод формулы для измерения площади круга. Согласно предыдущей теоремы:

Если длина окружности содержит C сантиметров и если радиус ее содержит r сантиметров, то площадь круга содержит

$$Q = {}^1/_2 \cdot C \cdot r \text{ кв. см}$$

$$Q = {}^1/_2 \cdot C \cdot r. \qquad (1)$$

Но длина окружности

$$C = 2\pi r \text{ (§ 303).}$$

Заменив в нашей формуле (1) длину окружности этим выражением, найдем, что площадь круга

$$Q = {}^1/_2 \times 2\pi r \times r.$$

После упрощения получим окончательно, что площадь круга

$$Q = \pi r^2.$$

Итак, площадь круга в π раз больше площади квадрата, сторона которого равна радиусу круга.

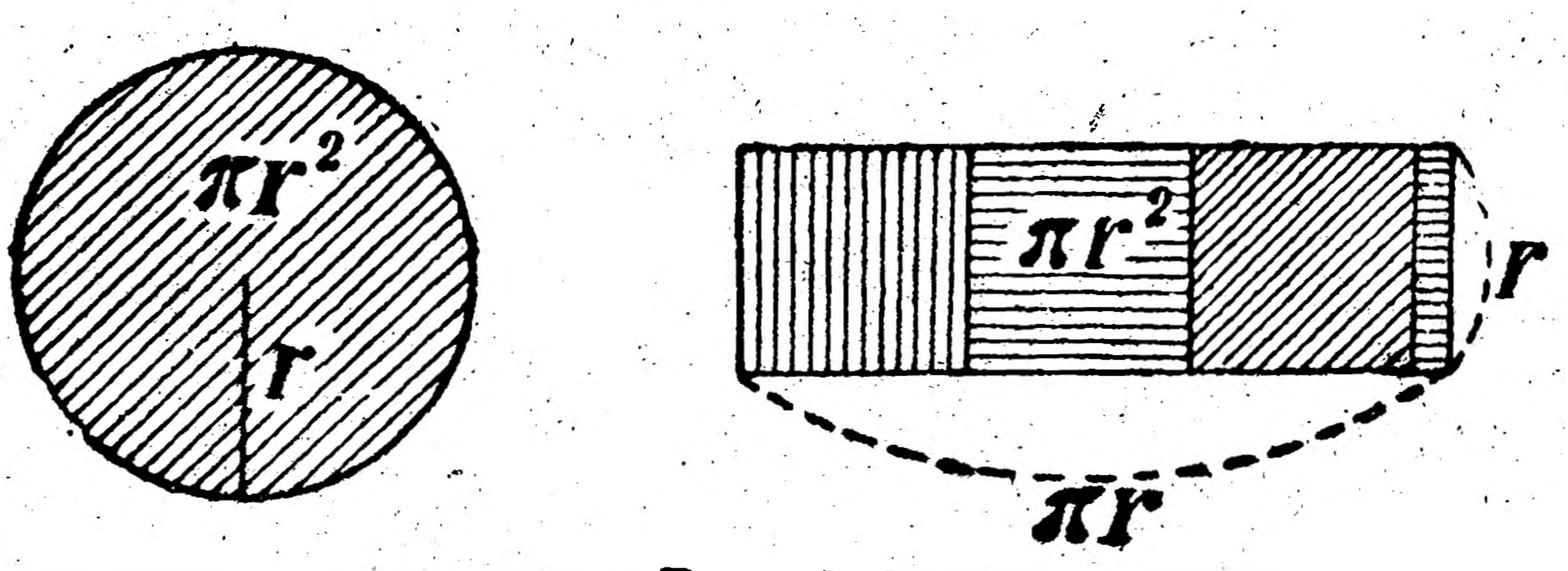


Рис. 358.

Пример. Надо измерить площадь пятикопеечной монеты. Измерим диаметр ее. Он равен 34 *мм.* Следовательно,

$$r = 17 \text{ мм}$$

$$r^2 = 17 \times 17 = 289 \text{ кв. мм.}$$

Площадь круга $= \pi r^2 = 3{,}14 \times 289 = 907$ *кв. мм.*

§ 308. Отношение площадей двух кругов.

Теорема. Отношение площадей двух кругов равно отношению квадратов их радиусов.

Опыт. Вырежьте из одного и того же материала штук десять кружков одинакового радиуса и несколько кругов, имеющих радиус в два раза, в три раза и т. д. больше, чем радиус первоначальных кругов. На одну чашку весов положите круг с двойным радиусом, а на другую кладите малые кружки до тех пор, пока не достигнете равновесия. Сколько малых кругов уравновесят круг с двойным радиусом? Каково отношение площадей этих кругов?

Найдите этим же способом отношение площади круга с тройным радиусом к площади первоначального круга.

Результат опыта. Круг, имеющий двойной радиус, уравновешивается четырьмя малыми кругами. Круг с тройным радиусом уравновесится 9 кружками. Следовательно, если радиус круга в два раза больше, то площадь в $2 \cdot 2 = 4$ раза больше; если радиус круга увеличить в 3 раза, то его площадь увеличится в $3 \cdot 3 = 9$ раз, то-есть площади кругов относятся как квадраты их радиусов.

Доказательство. Если радиус одного круга содержит R *см*, а другого r *см*, то их площади равны

$$Q = \pi R^2;$$
$$q = \pi r^2.$$

Следовательно, отношение площадей этих кругов равно

$$\frac{Q}{q} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2};$$

после сокращения получим

$$\frac{Q}{q} = \frac{R^2}{r^2},$$

что и требовалось доказать.

Проверьте эту теорему, измерив площади двух кругов при помощи разграфленной на квадратные миллиметры бумаги (§ 228).

96. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ СЕКТОРА И СЕГМЕНТА.

§ 309. Измерение площади сектора. При измерении площади сектора могут быть два случая. Первый случай: известен радиус и центральный угол; второй случай: известен радиус и длина дуги.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Задача 1. Вычислить площадь сектора, если измерен его центральный угол и радиус.

Вычислим сначала площадь всего круга. Если радиус сектора содержит r *см*, то площадь всего круга содержит (§ 307)

$$\pi r^2 \text{ кв. см.}$$

Узнаем, какую часть этого круга составляет наш сектор. Если центральный угол содержит n°, то этот сектор составляет $\frac{n}{360}$-ых частей всего круга.

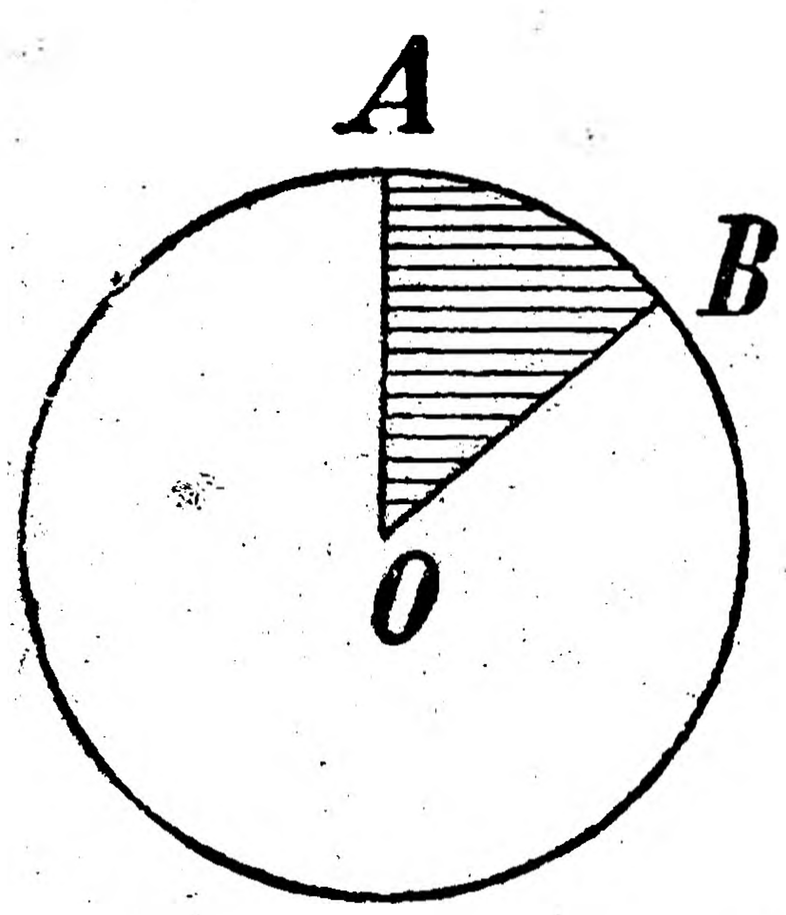


Рис. 359.

Следовательно, обозначив буквой S число квадратных единиц (*кв. см*), содержащихся в площади сектора, мы получим такую формулу:

$$S = \frac{n}{360}\pi r^2. \qquad (1)$$

Пример. Вычислим площадь сектора на рис. 359. Измерим его радиус: $r = 15$ *мм*.

Площадь всего круга равна

$$\pi r^2 = 3{,}14 \times 15 \times 15 = 705{,}5 \text{ кв. мм.}$$

Измерим транспортиром центральный угол AOB.

$$\angle AOB = n^\circ = 45^\circ.$$

Следовательно, площадь сектора составляет

$$\frac{n}{360} = \frac{45}{360} = \frac{1}{8} \text{ часть площади круга,}$$

то-есть площадь сектора равна

$$K = 706{,}5 \cdot {}^1/_8 = 88{,}3 \text{ кв. мм.}$$

Задача 2. Вычислить площадь сектора, если даны длина его дуги и радиус.

Для измерения площади сектора мы только-что нашли такую формулу:

$$K = \pi r^2 \cdot \frac{n}{360}. \qquad (2)$$

Перепишем ее так

$$K=\frac{\pi r n}{180}\cdot\frac{r}{2}.$$

Согласно формуле (1) § 304, $\frac{\pi r n}{180}$ есть длина дуги AB; пусть она содержит S *см*; тогда площадь сектора

$$K=S\cdot\frac{r}{2}. \qquad (3)$$

Итак, площадь сектора равна половине дуги, умноженной на радиус.

Сектор можно рассматривать как треугольник, основанием которого служит дуга AB (рис. 359), а высотою — радиус.

§ 310. Площадь сегмента. Для того, чтобы вычислить площадь сегмента, надо дополнить его до сектора и, измерив площадь последнего, вычесть из нее площадь треугольника AOB. Вычислите, например, площадь сегмента, нарисованного на чертеже 354.

§ 311. Площадь кольца. Для того, чтобы измерить площадь кругового кольца (рис. 354), надо вычислить площади обоих концентрических кругов и взять разность их.

§ 312. Как измерить площадь луночки? (Рис. 354.) Проведите общую хорду AE и, измерив площадь двух образовавшихся сегментов, возьмите разность их.

§ 313. Измерение площади криволинейной фигуры. Для того, чтобы измерить площадь какой-либо криволинейной фигуры, можно сделать так. Возьмите вдоль кривой линии этой фигуры ряд точек и соедините их прямыми линиями. Вы получите прямолинейную фигуру. Измерив площадь этой прямолинейной фигуры, вы найдете число, более или менее приближающееся к точному значению искомой площади криволинейной фигуры. Чем больше будет взято промежуточных точек, тем меньше найденное приближенное значение будет отличаться от истинного.

Можно также воспользоваться миллиметровой бумагой, разделенной на квадратные единицы, о которой говорили мы в § 228. Конечно, и при помощи этого способа вам удастся найти только приближенное значение измеряемой площади.

§ 314. Переменные величины и их пределы. При вычислении длины окружности мы пользовались процессом вписывания и описывания многоугольников в окружность (§ 299, опыты 1 и 2). При этом процессе некоторые величины, как, например, длина окружности и ее радиус, не меняли своего значения, другие же величины (периметры вписанных и описанных многоугольников) во время нашего процесса изменяли свое значение. Те величины, которые в данном процессе не меняют своего значения, называются постоянными: те же величины, которые в данном процессе меняют свое значение, называются переменными величинами. В нашем примере длина окружности и ее радиус суть величины постоянные, а периметры вписанных и описанных многоугольников — величины переменные. [1])

В результате наших опытов мы заметили, что наши переменные величины — периметры вписанных и описанных многоугольников, по мере увеличения числа сторон многоугольников, неограниченно близко приближаются по своим размерам к постоянной величине — длине окружности. Про такую постоянную величину (длину окружности) говорят, что она есть предел нашей переменной величины (периметров вписанных и описанных многоугольников).

При выводе правила для измерения площади круга (§ 306) мы вписывали в наш круг правильные многоугольники все с бо̀льшим и бо̀льшим числом сторон и измеряли их площади. Здесь переменными величинами были площади этих многоугольников, их периметры и апофемы. При неограниченном увеличении числа сторон наши переменные величины стремились к следующим постоянным пределам: площади многоугольников имели своим пределом площадь круга, периметры многоугольников имели пределом длину окружности, а пределом апофем был радиус.

При этом мы заметили, что между указанными переменными величинами все время сохранялась одна и та же зависимость: площадь многоугольника равнялась половине периметра, умноженной на апофему.

Заменив переменные величины их пределами, мы получили такую же зависимость уже между пределами, а именно, мы нашли, что площадь круга равна половине длины окружности, умноженной на радиус.

Этим способом замены переменных величин их пределами нам придется пользоваться и в дальнейшем курсе (§§ 368, 370, 371 и 372).

---

[1]) Надо иметь в виду, что при новом процессе прежние переменные величины могут сделаться постоянными, и наоборот. Например, когда мы строили окружности, проходящие через две данные точки (§ 269, рис. 310), то здесь длины окружностей и их радиусы были величинами переменными, а длина хорды *AB* величиною постоянной.

Упражнения и задачи.

1. «Квадратурой круга» называется такая задача: «при помощи циркуля и линейки построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга». Эту, казалось бы, такую простую задачу старались решить многие ученые и любители математики, и только недавно удалось доказать, что такой квадрат построить при помощи одного только циркуля и линейки нельзя. Пользуясь же другими приборами, построение это, конечно, сделать можно.

Вот, например, как решил эту задачу итальянский ученый Леонардо-да-Винчи. Дан круг, радиус которого содержит *r см*. Возьмите такую цилиндрическую коробку, у которой высота равна радиусу нашего круга *r*, а диаметр основания равен высоте цилиндра. Обхватите его боковую поверхность листом бумаги и вырежьте прямоугольник, равный этой поверхности. Сравните площадь круга с площадью полученного прямоугольника. Заменив теперь прямоугольник равновеликим квадратом, вы и найдете квадратуру круга.

2. Нарисуйте круг, площадь которого равна площади данного квадрата. (Такая задача называется циркулятурой квадрата.)

3. Лошадь привязана к столбу веревкой в 7 метров. Вычислите величину той площади, на которой она может пастись.

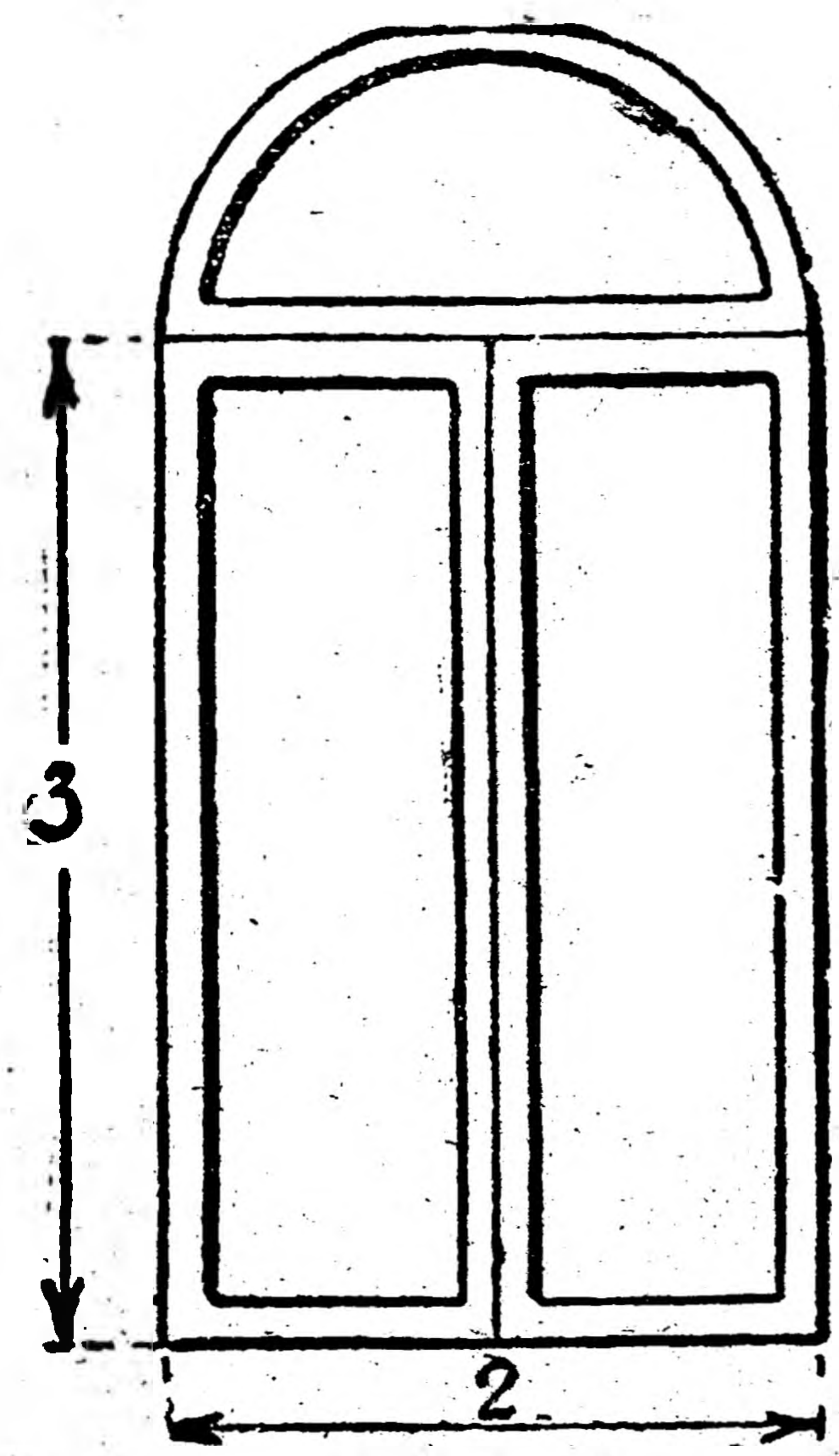


Рис. 360.

4. Найдите площадь сечения дерева, обхват которого (длина окружности) равен 155 *см.*

5. Наружный диаметр трубки = 2 *см.* Толщина стенок = 4 *мм.* Какова площадь внутреннего сечения трубки?

6. Вычислить площадь этого окна, размеры которого указаны в метрах (рис. 360).

7. Сколько нужно материи, чтобы обтянуть веер, имеющий форму полукруга (часть его у центра не обтягивается). Радиус наружного круга = 12 *см*; радиус внутреннего = 6 *см.*

8. В цилиндре паровой машины пар давит на поршень с силою в 4,5 *кг* на каждый квадратный сантиметр. Вычислите, с какою силою давит пар на весь поршень, если диаметр этого поршня = 30 *см.*

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ
СВОЙСТВА ТЕЛ

ГЛАВА XXIV.
ПЛОСКОСТЬ, ТОЧКА И ПРЯМАЯ.
97. ПЛОСКОСТЬ И ТОЧКА.

§ 315. Что такое плоскость? Плоской поверхностью или плоскостью мы назвали поверхность, обладающую тем свойством, что прямая, соединяющая любые две точки, лежащие на этой поверхности, будет лежать на ней и всеми остальными промежуточными точками (вспомните § 7, стр. 11).

§ 316. Плоскость безгранична. Каждая плоскость может иметь неограниченно большие размеры.

Обыкновенно мы имеем дело не со всей плоскостью, а только с частью ее, ограниченной каким-нибудь контуром. На рис. 361 одна

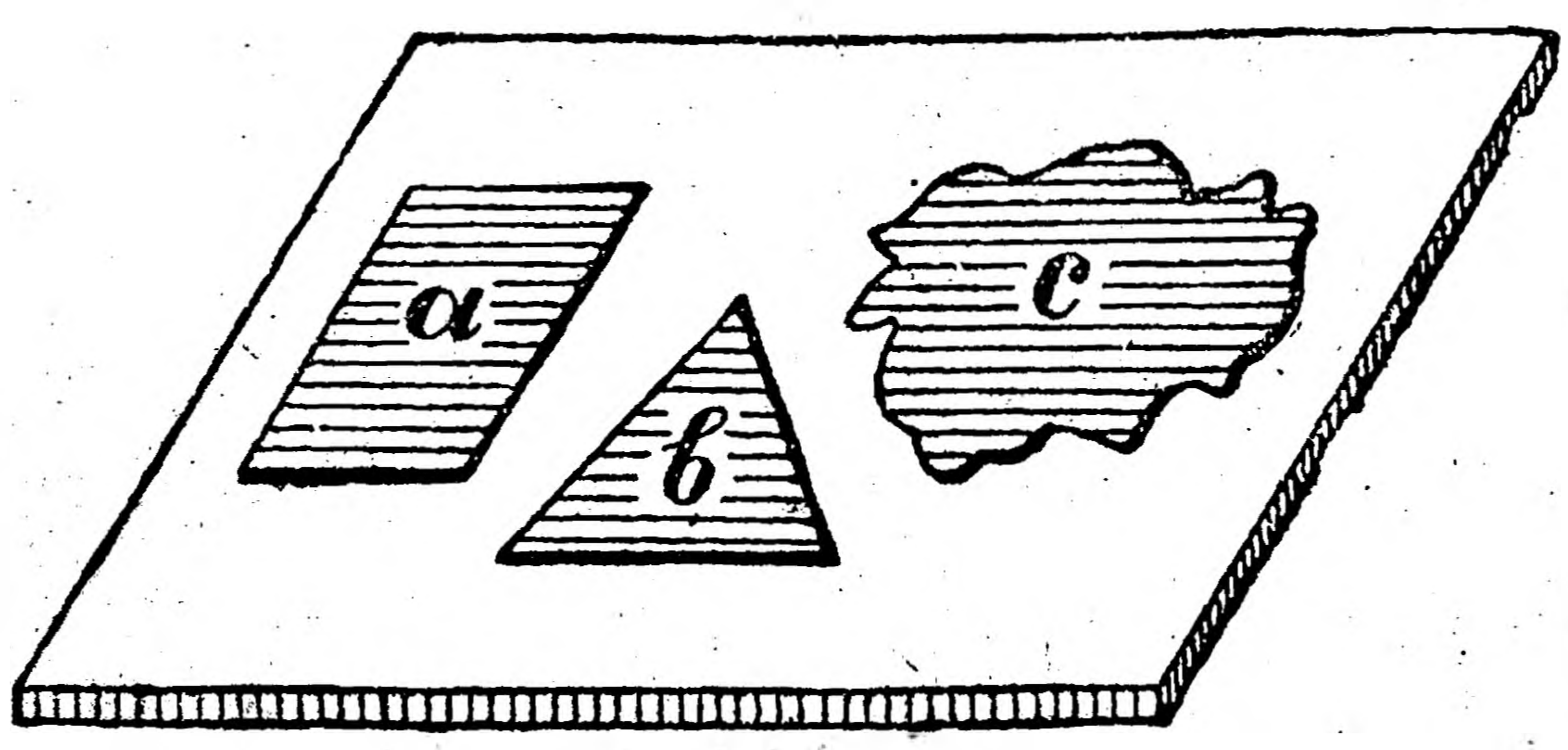


Рис. 361.

и та же плоскость изображена различными фигурами *a*, *b*, *c*. Чаще всего плоскость изображают в виде прямоугольника.

§ 317. Сколькими точками определяется положение плоскости?

Опыт 1. Поставьте карандаш острием вверх. Принявши острие за геометрическую точку, положите на него плоский кусок картона[1])

[1]) Еще лучше кусок картона заменить куском оконного стекла.

(рис. 362). Сколько плоскостей можно провести через одну точку? Укажите несколько из них.

Результаты опыта. Меняя положение картона, лежащего на острие карандаша, вы увидите, что через одну точку можно провести очень много плоскостей.

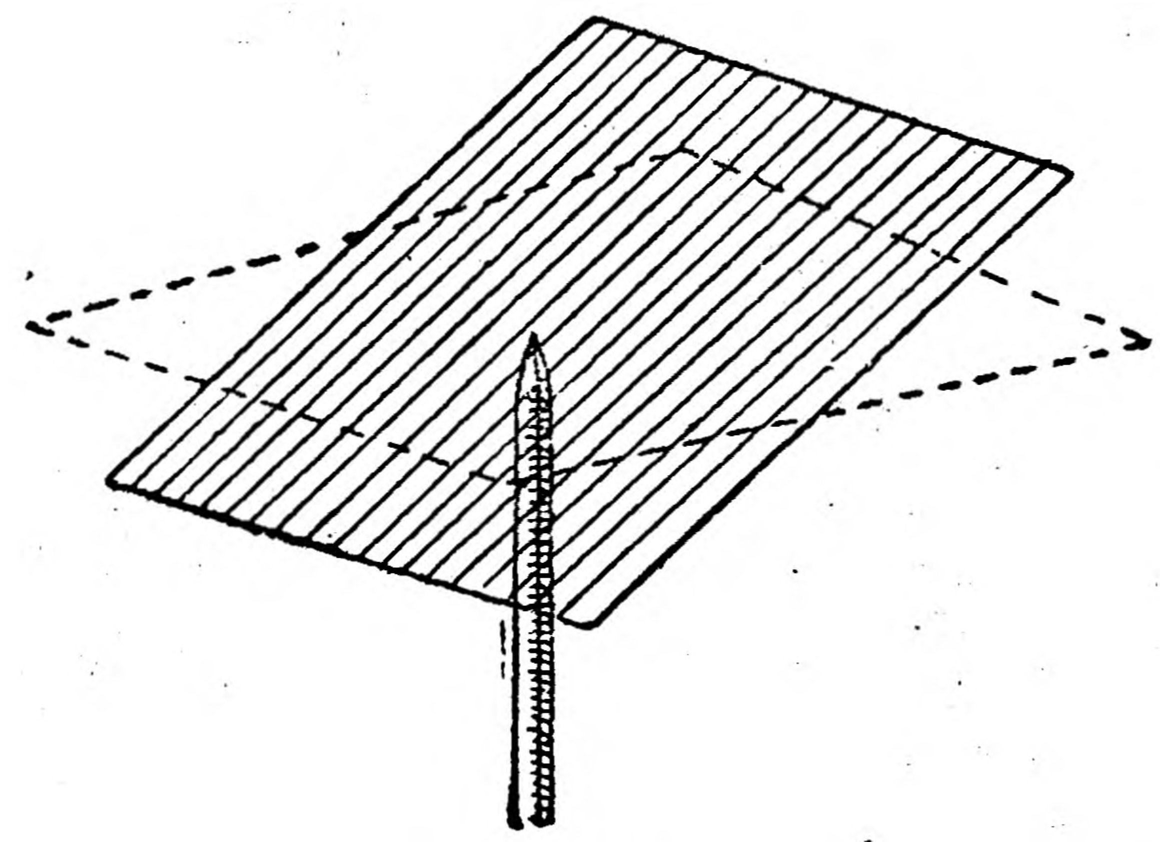


Рис. 362.

Опыт 2. Возьмите два карандаша и поставьте их острием вверх (рис. 363). Положите на эти острия плоский кусок картона. Сколько плоскостей можно провести через эти точки? Укажите несколько из этих плоскостей.

Результаты опыта. Вращая картон вокруг прямой, соединяющей точки *A* и *B*, вы получите ряд плоскостей, проходящих через *A* и *B*: следовательно, через две точки или через одну прямую можно провести неограниченное число плоскостей.

Опыт 3. Поставьте, наконец, три карандаша произвольной высоты и, приняв острия их за геометрические точки, постарайтесь провести через них плоскость (рис. 364). Всегда ли это вам удастся? Сколько плоскостей можно провести через 3 точки?

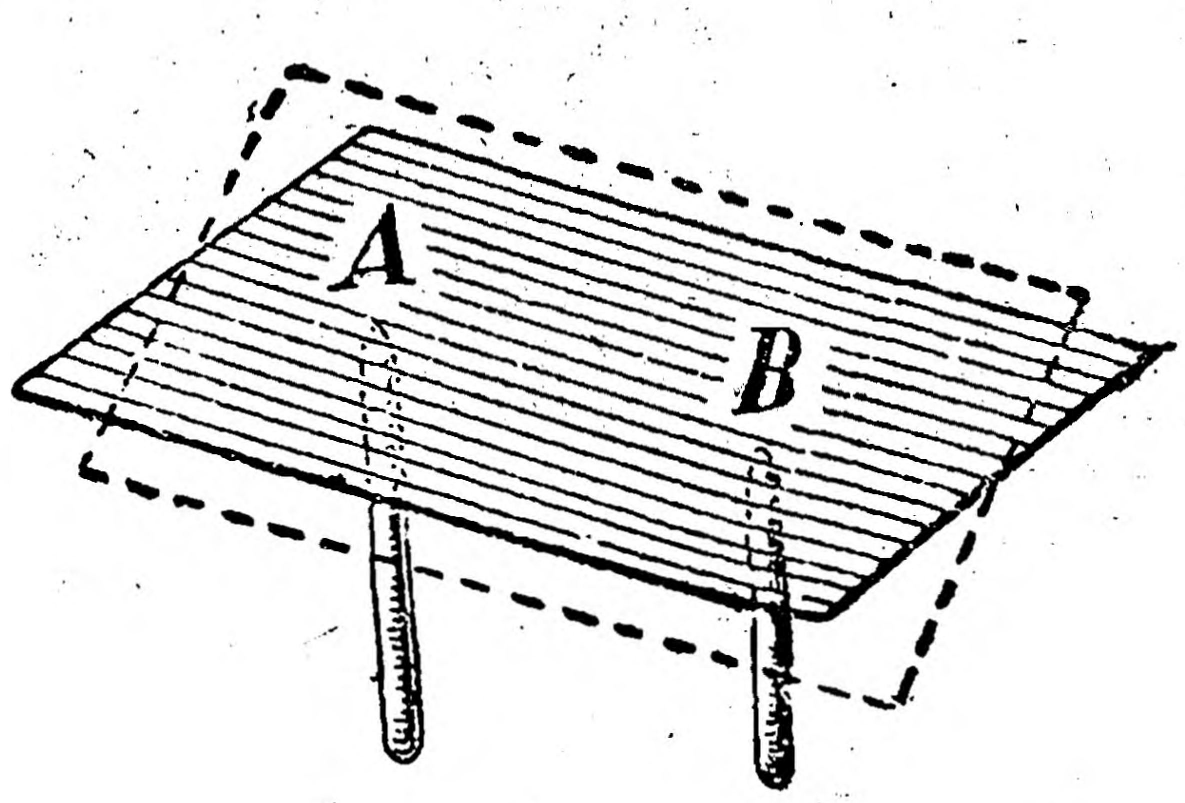


Рис. 363.

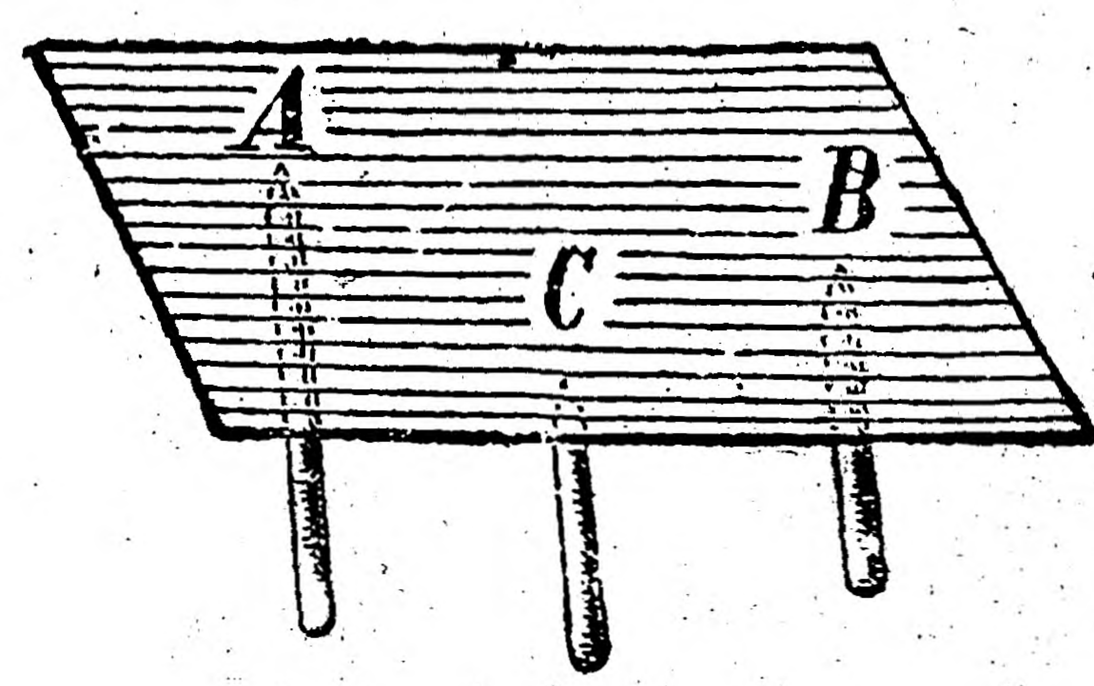


Рис. 364.

Результат опыта. Положивши плоский кусок картона на две выбранные точки *A* и *B*, вращайте его до тех пор, пока он не ляжет на третью точку *C*. Таким образом, через эти три точки можно провести только одну плоскость.

Опыт 4. Расположите ваши три карандаша так, чтобы острия их лежали на одной прямой.

Сколько плоскостей можно провести через эти три точки?

Результат опыта. Если три точки лежат на одной прямой, то через них можно провести неограниченное число плоскостей.

Итак, для того, чтобы определить положение плоскости, достаточно указать на ней положение трех каких-нибудь точек, не лежащих на одной прямой линии.

98. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ ЛИНИЯ.

§ 318. Прямая, параллельная плоскости. Возьмите вязальную спицу (или карандаш) и картонную плоскость и расположите их друг относительно друга так, чтобы они, как бы вы их ни удлиняли, не могли встретиться друг с другом (рис. 365).

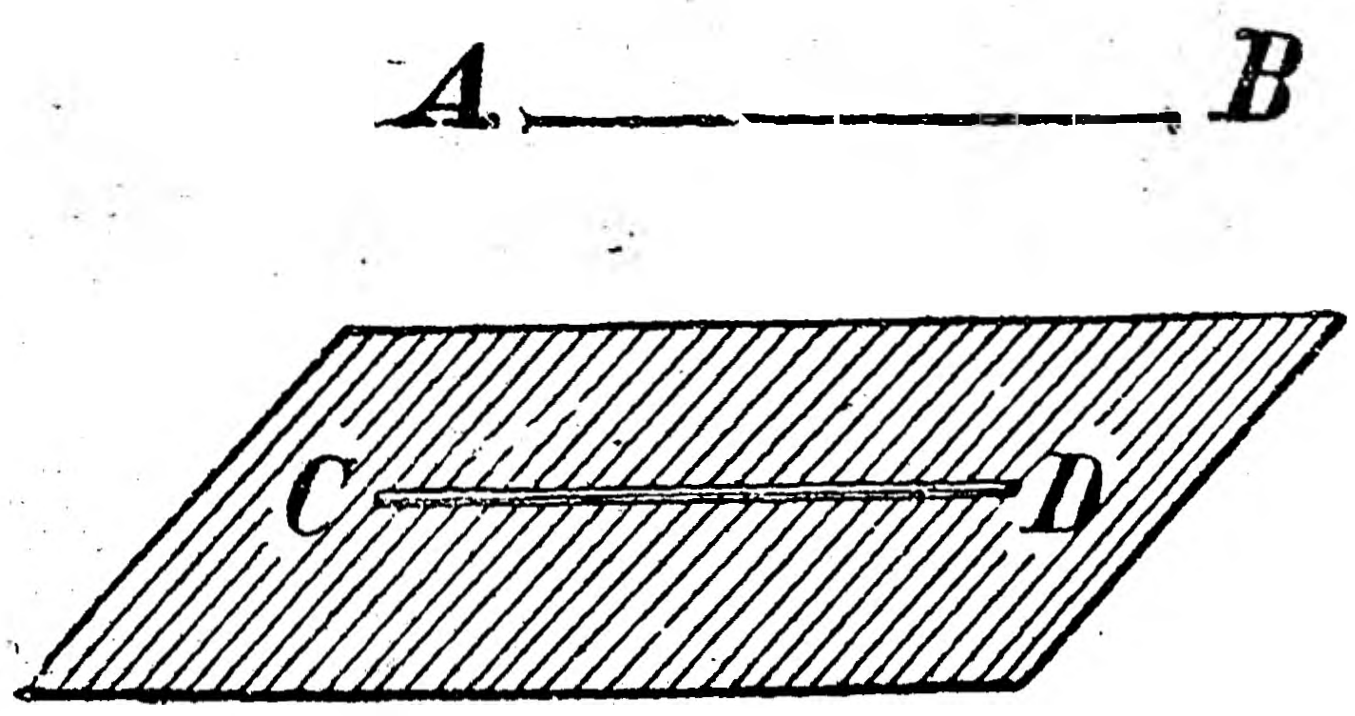


Рис. 365.

Про такую прямую линию, которая, как бы вы далеко ее ни удлиняли, никогда с плоскостью не пересекается, говорят, что она параллельна плоскости.

§ 319. Признак параллельности прямой и плоскости.

Опыт. Расположите плоскость и прямую линию *AB* параллельно друг другу (рис. 365). Положите на эту плоскость вторую прямую *CD* (вязальную спицу) так, чтобы через *CD* и *AD* можно было провести плоскость. Прямая *CD* будет параллельна *AB*. (Почему?)

Не сдвигая обеих прямых, начните поворачивать плоскость вокруг прямой *CD*. Будет ли наша плоскость оставаться параллельной прямой *AB*?

Результат опыта. Плоскость, на которой лежит прямая *CD*, все время будет параллельна прямой *AB*, а потому для того чтобы убедиться, что плоскость параллельна прямой, достаточно найти на этой плоскости хотя бы одну прямую, параллельную данной прямой.

§ 320. Прямая, перпендикулярная к плоскости.

Опыт. Расположите спицу *BA* (или карандаш) так, чтобы один конец ее (на рис. 366, конец *A*) лежал на нашей плоскости. Через точку *A* проведите на плоскости несколько прямых линий (*AC*, *AD*, *AE* и *AF*). Поставьте спицу *BA* так, чтобы она со всеми прямыми, проведенными на плоскости через точку *A*, образовывала косые углы.

Приставьте теперь к спице наугольник и измените положение ее так, чтобы она составляла прямой угол с одной из нарисованных на плоскости прямых, например, с прямой AF (рис. 366). Начните наклонять прямую BA так, чтобы угол BAF оставался все время прямым. Будет ли прямая BA перпендикулярна к прямым линиям AC, AD и AE? Возьмите теперь второй наугольник и при помощи его поставьте спицу BA так, чтобы она была перпендикулярна к двум прямым, проведенным на плоскости (например к линиям AD и AE). Исследуйте теперь, какие углы образует спица BA со всеми прямыми, проведенными на плоскости через основание A.

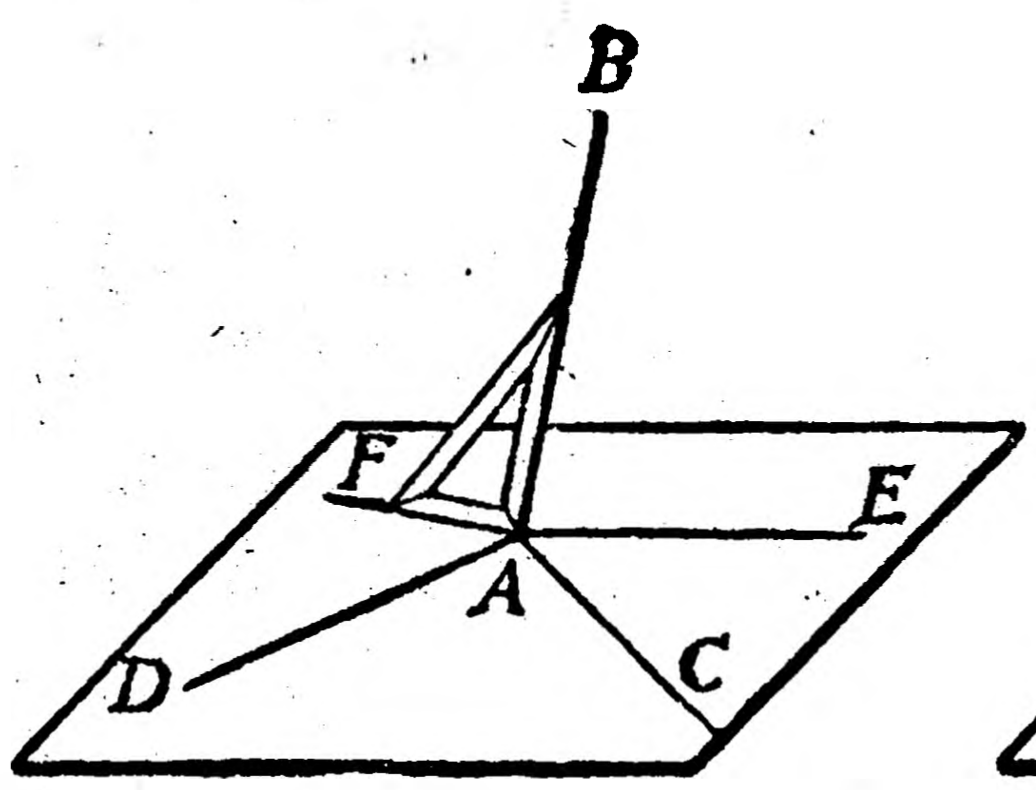


Рис. 366.

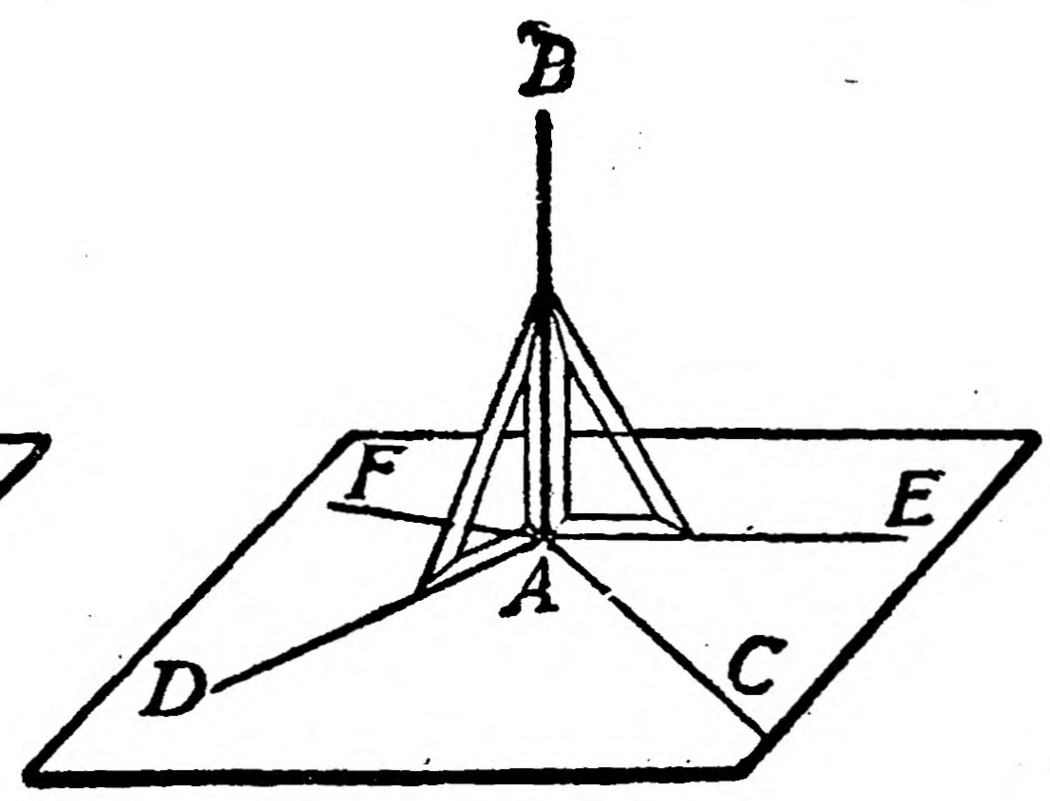


Рис. 367.

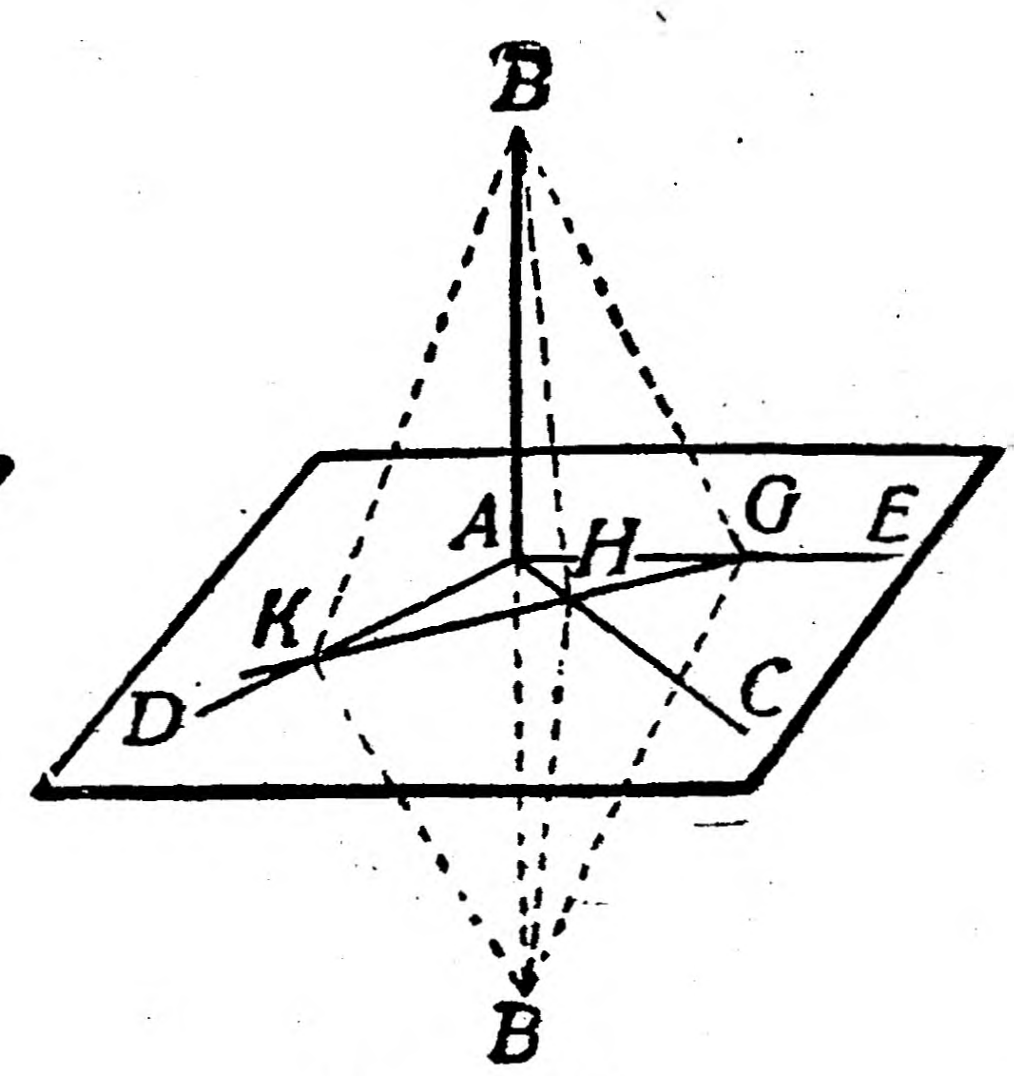


Рис. 368.

Результат опыта. Если вы спицу поставите так, чтобы она была перпендикулярна к одной только прямой AF, то эта спица может образовывать косые углы с прямыми AC, AD и т. д.

Если же вы поставите спицу так, чтобы она была перпендикулярна к двум прямым, нарисованным на плоскости, то эта спица будет перпендикулярна и ко всем остальным прямым, лежащим на нашей плоскости и проходящим через основание спицы.

Определение. Прямой перпендикулярной к плоскости называют такую, которая образует прямые углы со всеми прямыми на плоскости, проходящими через ее основание (через точку A на рис. 367).

§ 321. Признак перпендикулярности прямой линии с плоскостью. Из опытов в § 320 видно, что если мы хотим узнать, будет ли данная прямая (например, BA на рис. 367) перпендикулярна к плоскости, то достаточно убедиться только в том, что она перпендикулярна к двум каким-нибудь прямым, нарисованным на нашей плоскости.

Доказательство. Дано: $BA \perp AD$ и $BA \perp AE$[1]) (рис. 368).
Надо доказать, что $BA \perp AC$.

Проведем линию KG, пересекающую все три наших прямых, Удлиним прямую BA так, чтобы $BA = AB_1$, и соединим вершины B и B_1 с точками K, H и G. Наклонные

$$BK = B_1K \text{ и } BG = B_1G.$$

(KA и GA перпендикулярны к BB_1. Основания наклонных KB и KB_1, GB и GB_1 одинаково удалены от основания A перпендикуляров.)

Рассмотрим следующие треугольники:

1) $\triangle KBG = \triangle KB_1G$ (по трем равным сторонам, § 155).

Следовательно, у них углы при точке K — равные.

2) $\triangle BKH = \triangle B_1KH$ (первый признак равенства треугольников, § 151: $BK = B_1K$, HK — общая. Углы при точке K равны).

Следовательно, $BH = B_1H$.

3) $\triangle BHA = \triangle B_1HA$ (третий признак равенства треугольников).

Следовательно, $\angle BAH = \angle B_1AH$.

Так как эти углы еще и смежные, значит, они прямые.

Итак, прямая BA перпендикулярна и к третьей прямой AC, что и требовалось доказать.

§ 322. Наклонная и ее проекция.

Определение. Если прямая не перпендикулярна к плоскости, то такую прямую называют наклонной.

Опыт 1. Возьмите плоский кусок картона и поставьте наклонно к нему спицу (рис. 369). Один конец спицы A упирается в плоскость, а из второго конца B опустите на плоскость перпендикуляр Bb. Соедините основание A наклонной и основание b перпендикуляра прямой линией. Полученный отрезок прямой Ab назовем проекцией нашей наклонной на плоскость.

Начните подымать кверху конец B наклонной AB. Как будет изменяться проекция?

Поставьте спицу перпендикулярно к плоскости.

Чему тогда равна проекция?

Результат опыта. Если конец B приподымать, то проекция укорачивается.

Когда прямая сделается перпендикулярной к плоскости, то проекция обратится в точку.

---

[1]) «$\perp$» — значок перпендикулярности прямых.

Опыт 2. Положите на стол плоский кусок картона и поместите над ней какой-нибудь отрезок прямой (например, карандаш) так, чтобы оба конца его были вне плоскости. Как найти проекцию этой прямой на плоскость?

Для этого надо опустить из концов отрезка A и B (рис. 370) перпендикуляры на плоскость и соединить основания этих перпендикуляров a и b прямой. Изменяя наклон отрезка AB, исследуйте, как при этом изменяется проекция.

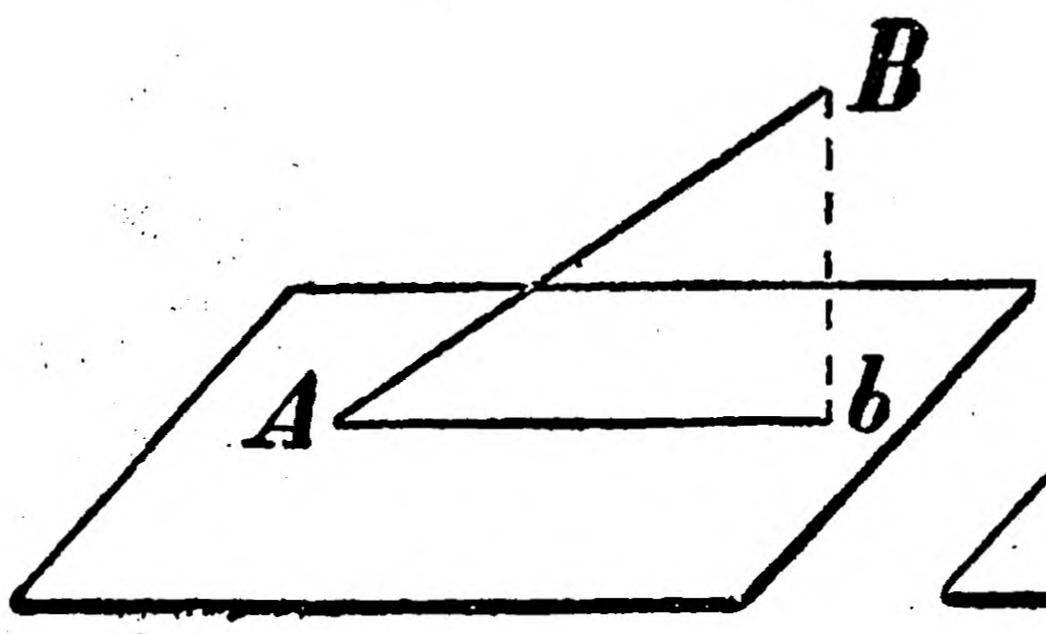


Рис. 369.

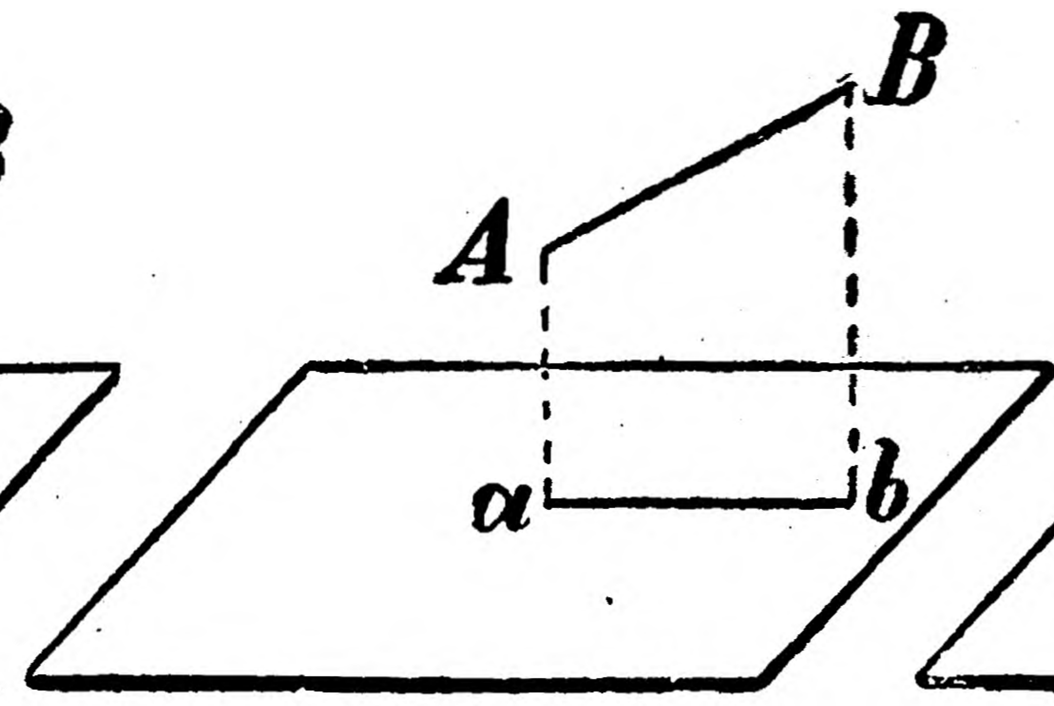


Рис. 370.

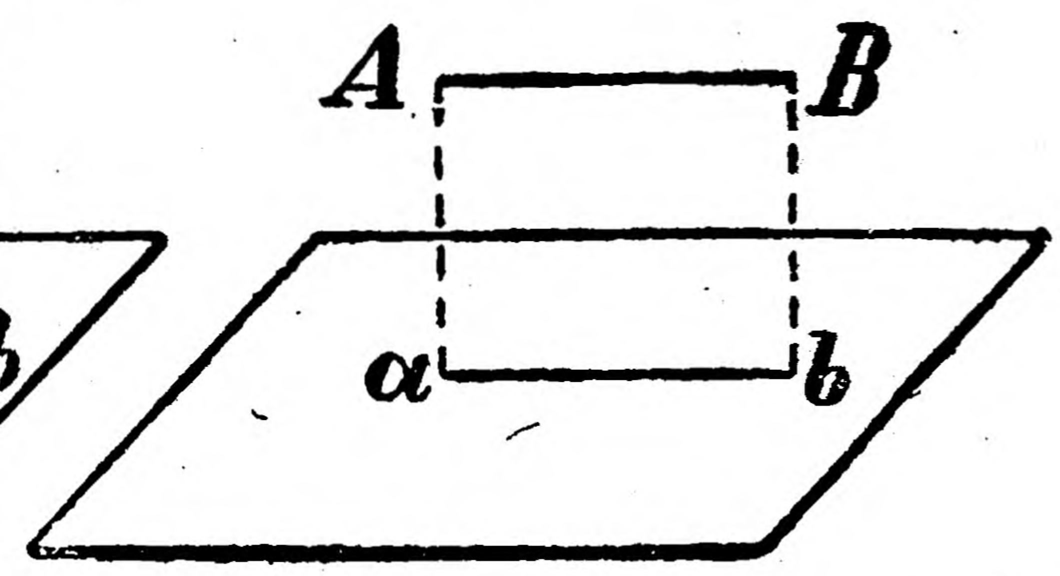


Рис. 371

Найдите теперь проекции какого-нибудь отрезка прямой AB на вертикальную плоскость.

Опыт 3. Поместите спицу параллельно плоскости (рис. 371). Опустите из концов спицы перпендикуляры и соедините основания их прямой линией. Сравните длину полученной проекции с длиной спицы.

Результаты опыта. Когда прямая AB параллельна плоскости, то ее проекция (ab) на плоскость равна прямой AB.

99. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ.

§ 323. Две пересекающиеся плоскости образуют двугранный угол. Приготовьте две картонных плоскости в виде двух одинаковых прямоугольников и приложите их друг к другу так, как показано на рис. 372. Две эти пересекающиеся плоскости образовали двугранный угол. Укажите ту прямую, по которой пересекаются эти плоскости. Эта прямая AB называется ребром, а самые плоскости — гранями (укажите их).

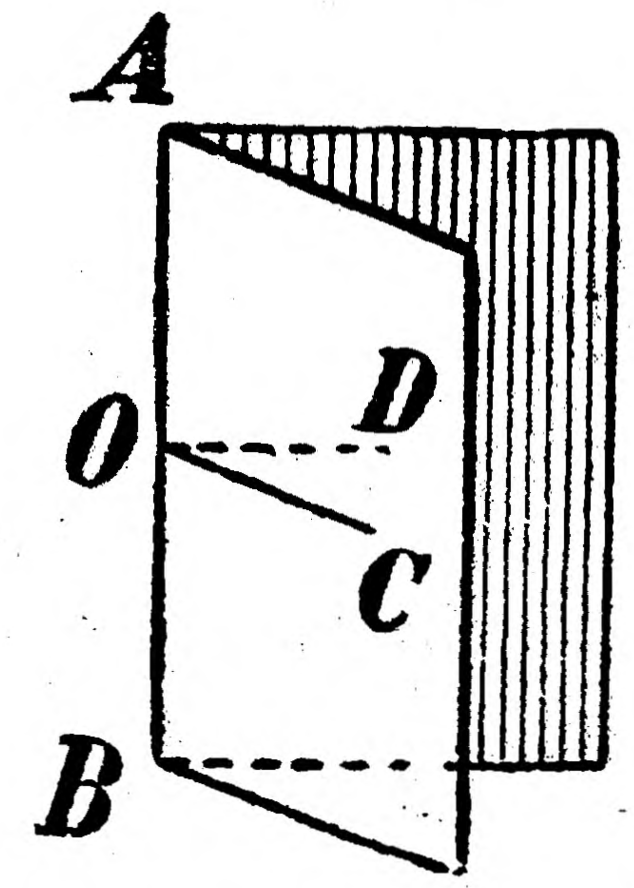


Рис. 372.

§ 324. Линейный угол двугранного угла. Отметьте на ребре двугранного угла какую-нибудь точку, например, O (рис. 372). Через эту точку в каждой грани нарисуйте по прямой линии, перпендикулярной к ребру *AB*. У вас получится плоский угол *COD*, который называется линейным углом нашего двугранного угла.

Склейте наши грани продольной бумажной лентой вдоль ребра *AB*. Начните отодвигать одну грань от другой, вращая ее вокруг ребра. Тогда двугранный угол начнет увеличиваться, а вместе с ним начнет возрастать и линейный угол. При уменьшении двугранного угла уменьшается и его линейный угол.

Можно доказать, что двугранные углы пропорциональны своим линейным, то-есть, если двугранный угол увеличится (или уменьшится) в несколько раз, то во столько же раз увеличится (или уменьшится) и линейный угол. Вот почему о размерах двугранного угла можно судить по величине его линейного угла.

§ 325. Измерение линейного угла гониометром. Составьте из двух плоскостей какой-нибудь двугранный угол и нарисуйте на гранях его линейный угол. Как измерить этот линейный угол? Можно сделать так: взять малку (§ 121) и раздвинуть ее ножки на угол, равный линейному. Наложив малку на транспортир, вы и узнаете, сколько градусов содержит линейный угол. Вместо малки удобнее пользоваться прибором гониометром, который представляет собой соединение малки с транспортиром. Догадайтесь сами, как таким прибором измерить линейный угол.

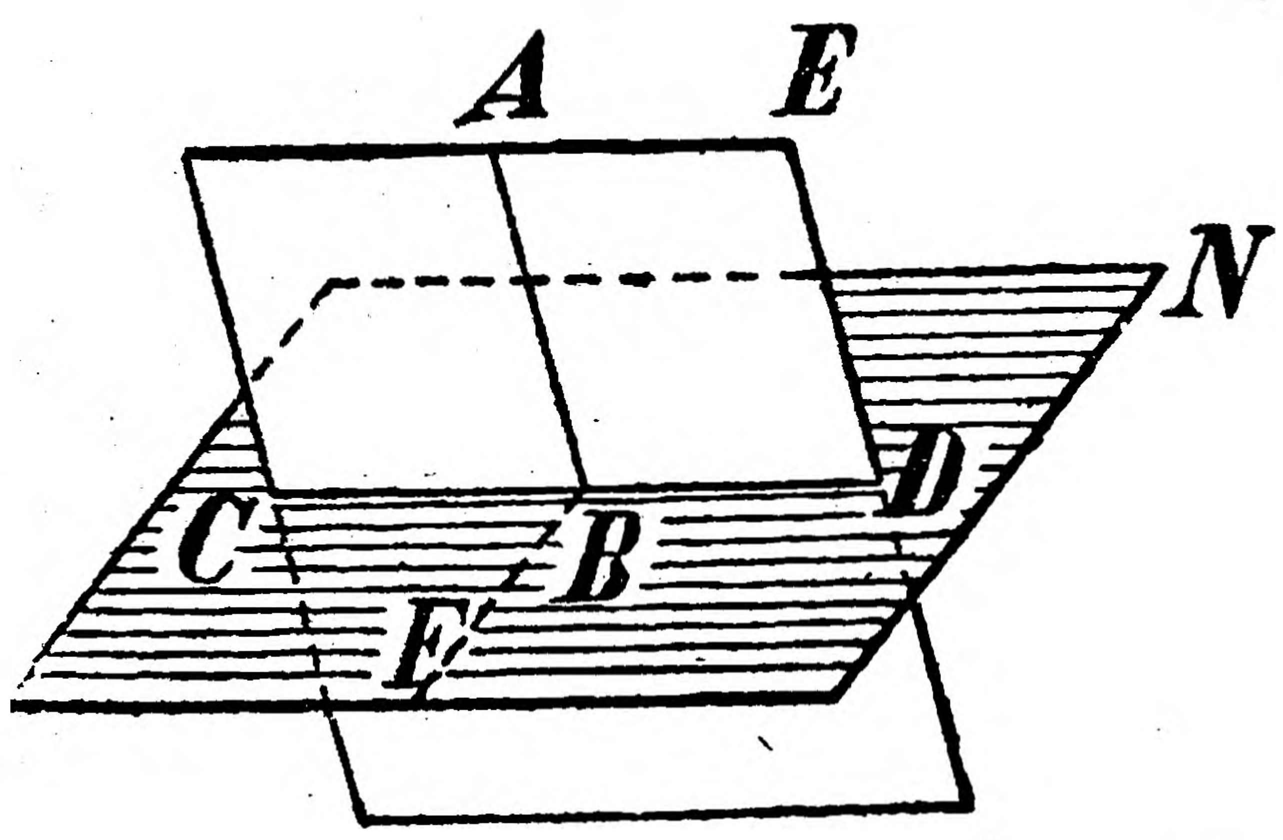


Рис. 373.
Перпендикулярные плоскости.

§ 326. Взаимно перпендикулярные плоскости. Составьте из двух плоскостей двугранный угол так, чтобы его линейный угол был прямым (рис. 373).

Такой двугранный угол называется прямым двугранным углом, а о плоскостях его говорят, что они перпендикулярны друг к другу.

§ 327. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

Опыт. Положите на стол картонную плоскость и поставьте перпендикулярно к ней вязальную спицу.[1]) Возьмите вторую плоскость и поставьте ее так, чтобы вязальная спица лежала на ней. Укажите полученный двугранный угол. Нарисуйте его линейный угол. Исследуйте его гониометром.

---

[1]) Спицу прикрепите к плоскости кусочком воска.

Результат опыта. Линейный угол окажется прямым, следовательно, плоскости будут друг другу перпендикулярны.

Итак, если на одной из плоскостей мы найдем прямую, перпендикулярную ко второй плоскости, то эти плоскости будут перпендикулярны друг другу.

Попробуйте сами, пользуясь §§ 320 и 324, доказать эту теорему.

100. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ.

§ 328. Первый признак параллельности двух плоскостей.

Опыт. Возьмите вязальную спицу и проткните ее через две плоскости так, чтобы спица была перпендикулярна к обеим плоскостям (рис. 374).

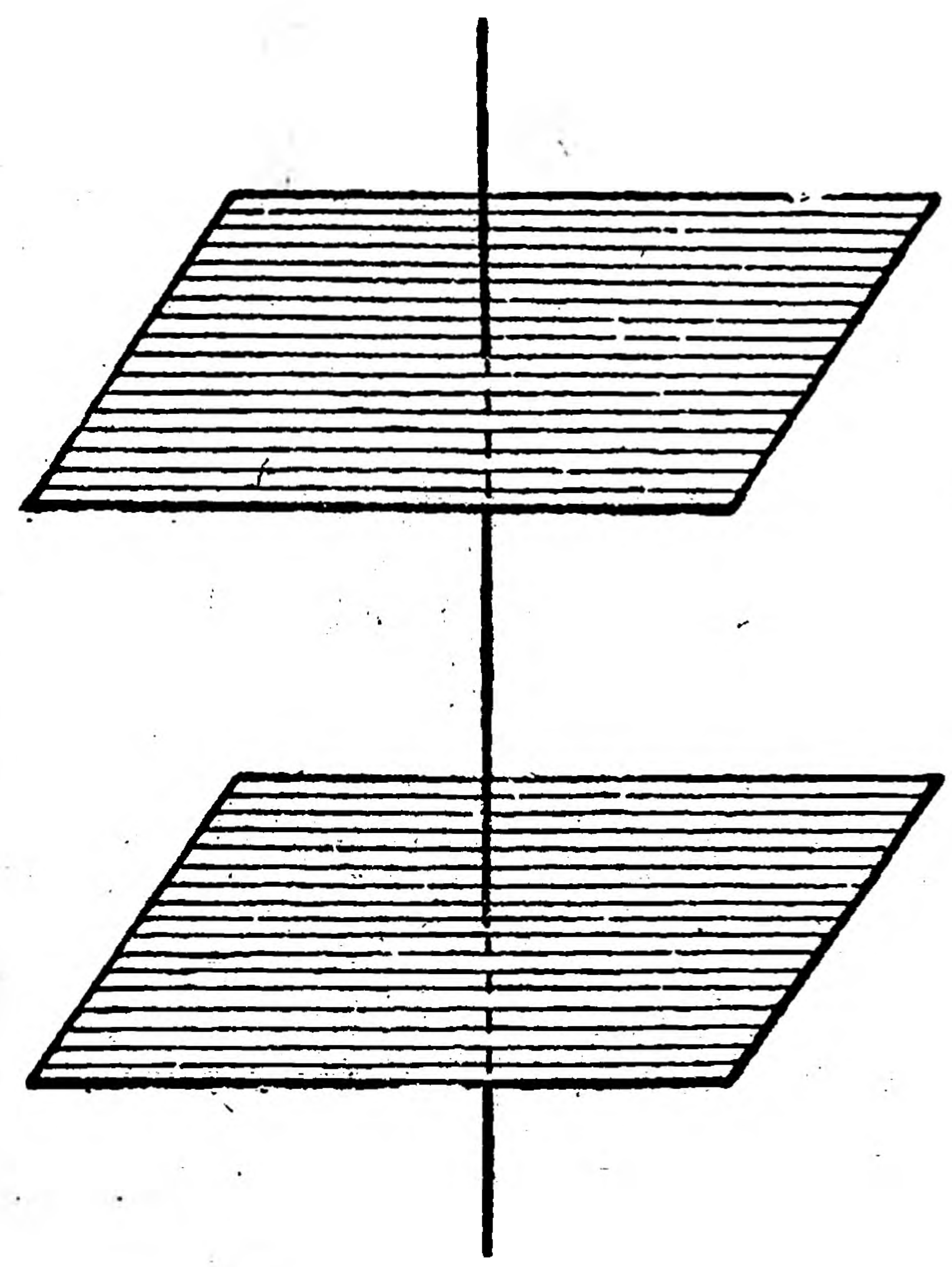


Рис. 374.

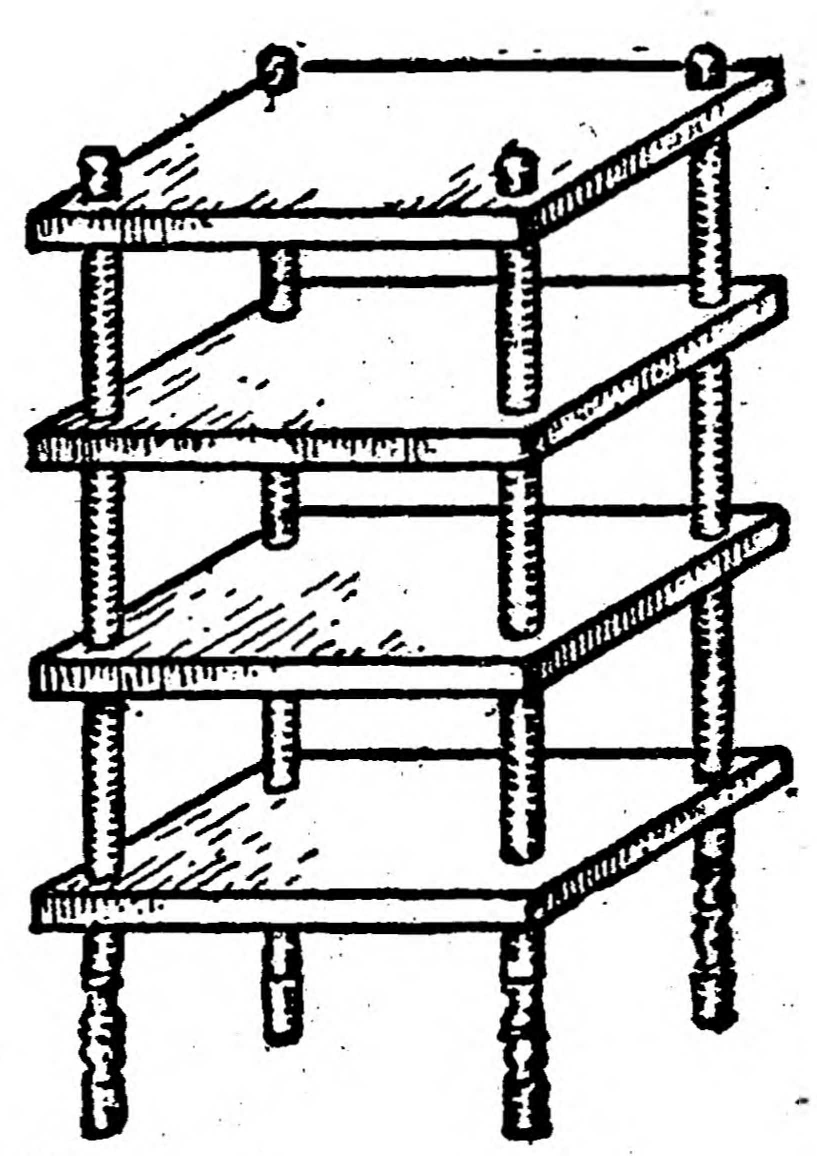


Рис. 375.

Эти плоскости обладают тем свойством, что как бы далеко вы их ни продолжали, они никогда не встретятся друг с другом.

Если бы эти плоскости встретились, то прямые, проведенные через какую-либо точку прямой их пересечения и через основания их общего перпендикуляра, пересекались бы, будучи в то же время перпендикулярны к одной и той же прямой, что невозможно.

Такие плоскости, которые не пересекаются, сколько бы их ни продолжали, называются параллельными.

Итак, если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то они друг другу параллельны.

§ 329. Второй признак параллельности плоскостей. Расположите параллельно друг другу две плоскости I и II (рис. 376).

Проведите в плоскости I пару пересекающихся прямых, например, AB и AC, а в плоскости II через произвольную точку D проведите прямую DE так, чтобы она лежала в одной плоскости с прямой AB; и прямую DF так, чтобы она лежала в одной плоскости с прямой AC. Тогда $DE \parallel AB$, так как, если бы они пересекались, то точка их пересечения лежала бы одновременно в обеих плоскостях, т.-е. наши плоскости не были бы параллельны. На том же основании $DF \parallel AC$. Таким образом, если две плоскости параллельны, то в них

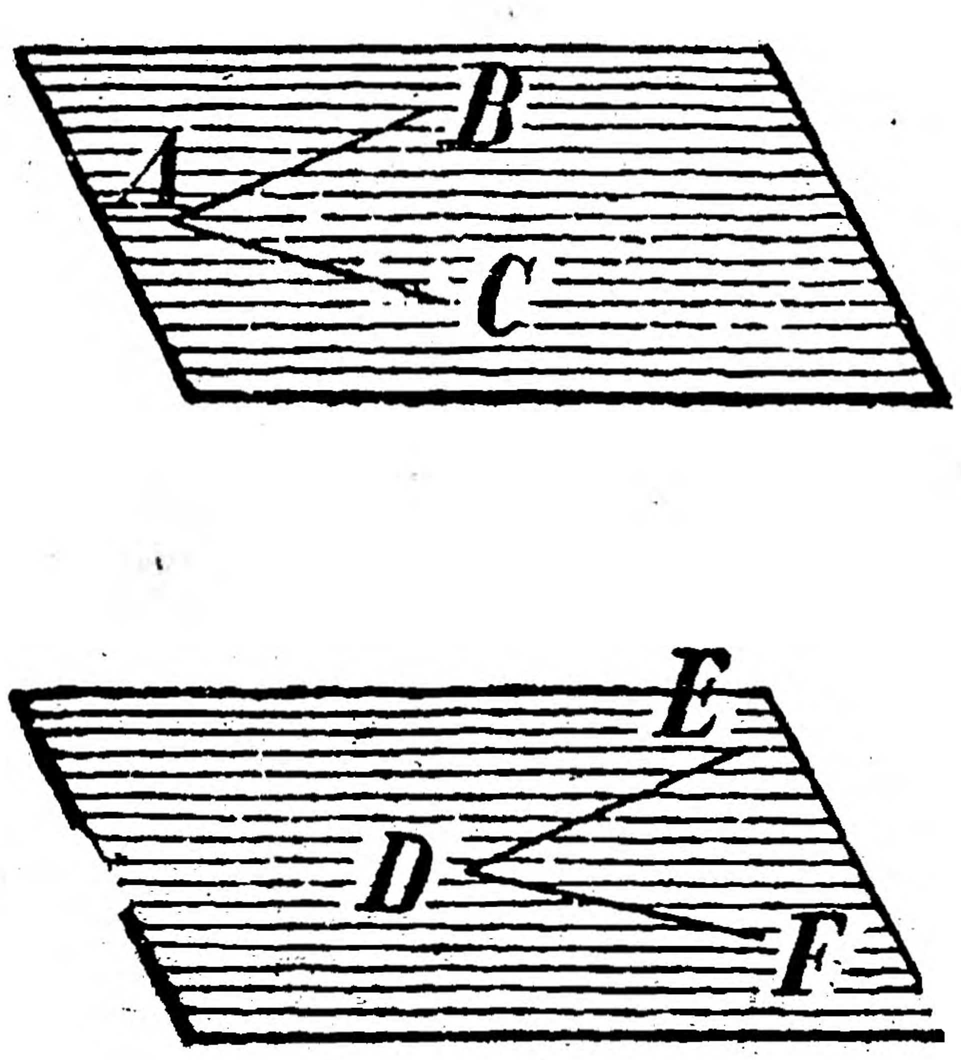


Рис. 376.

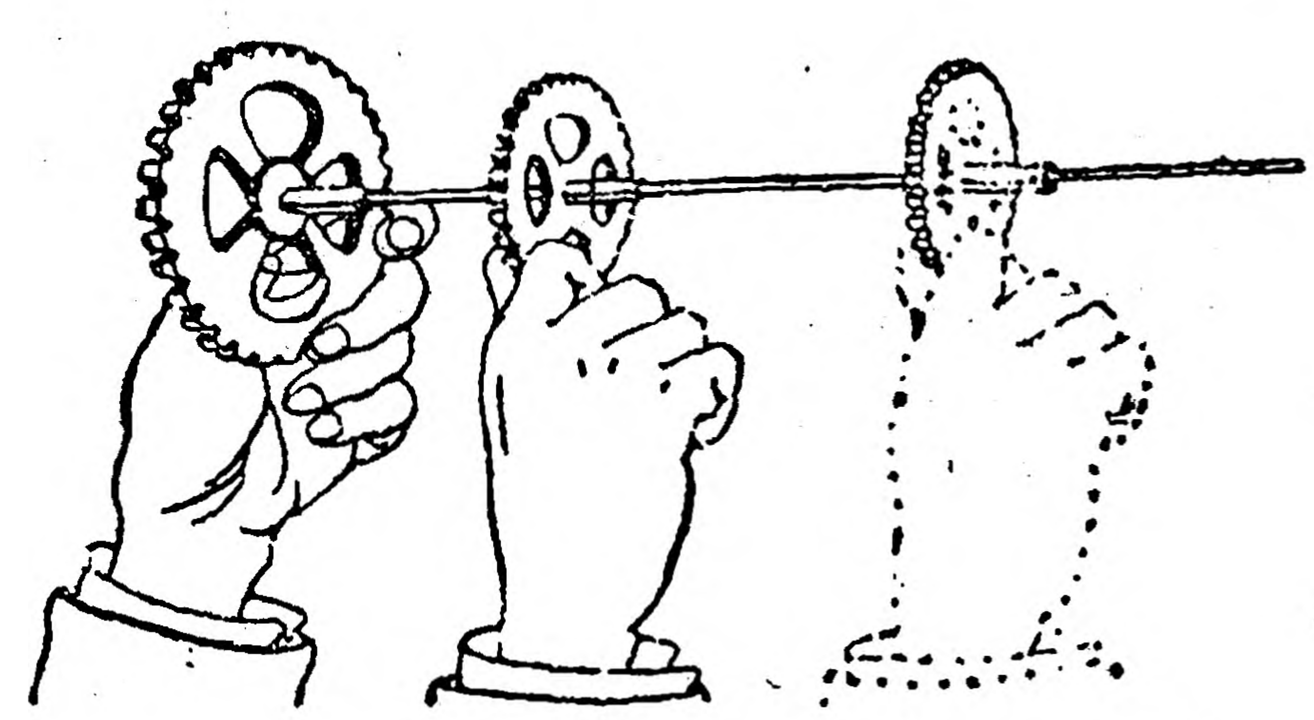


Рис. 377.
Плоскости этих колес параллельны. Почему?

можно провести две пары пересекающихся прямых, так, чтобы прямые одной плоскости были соответственно параллельны прямым другой плоскости. Но если ваши плоскости не параллельны, то сделать это вам не удастся. В самом деле, если плоскости I и II пересекаются, то либо AB, либо AC, либо обе они пересекают общую прямую этих плоскостей. (Почему?) Следовательно, либо AB, либо AC, либо обе они пересекают плоскость II. (Почему?) Но прямая, пересекающая плоскость II, не может быть параллельна прямой, лежащей в этой плоскости (§ 319). Следовательно, в плоскости II нельзя провести пару прямых, соответственно параллельных прямым AB и AC. Таким образом, признак, по которому можно узнать, параллельны ли плоскости, выражается так:

Если на одной плоскости можно найти две пересекающиеся прямые (AB и AC), соответственно параллельные двум пересекающимся прямым, лежащим на другой плоскости (DE и DF), то эти плоскости параллельны друг другу.

§ 330. Параллельные прямые. Поставьте несколько вязальных спиц перпендикулярно к плоскости (рис. 378). Все эти прямые будут обладать двумя свойствами: во-первых, каждая пара из них лежит в одной плоскости (укажите, напр., ту плоскость, в которой лежат прямые *b* и *c*) и, во-вторых, как бы вы их ни удлиняли, эти прямые никогда не пересекутся.

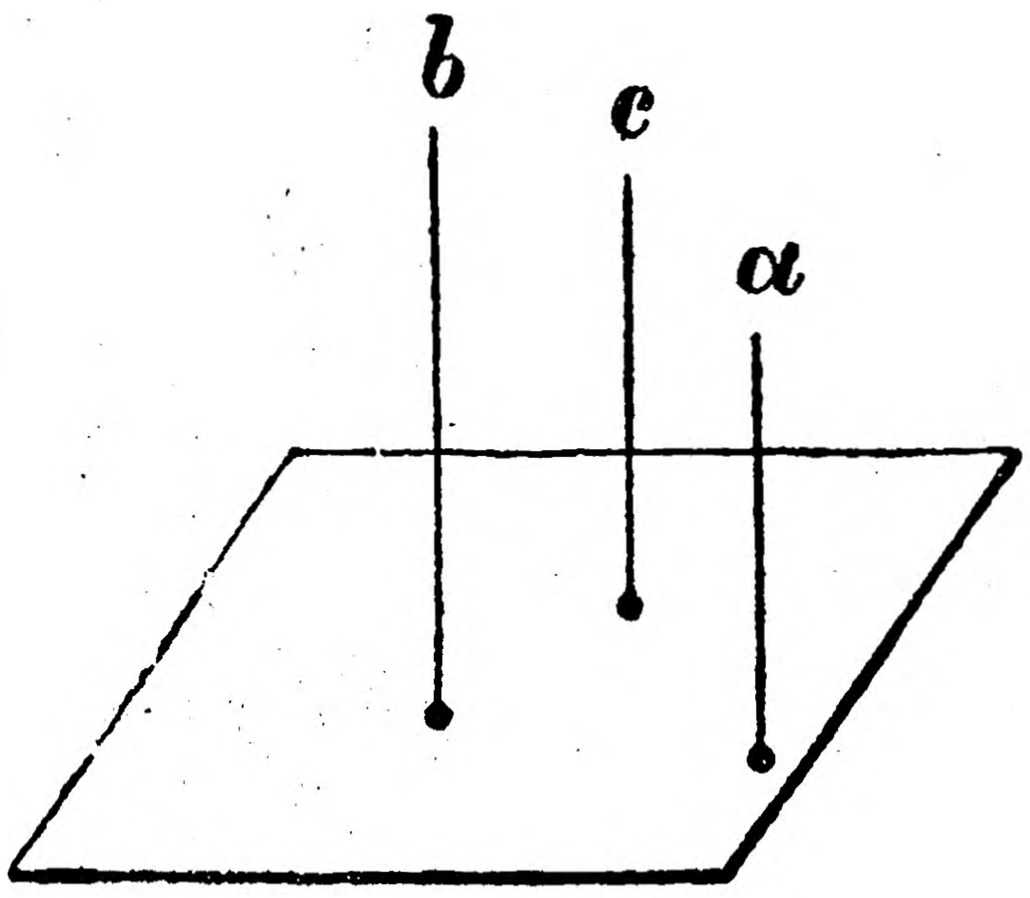


Рис. 378.
Параллельные прямые в пространстве.

Прямые, обладающие этими двумя свойствами, мы назвали параллельными прямыми.

Из этого опыта вытекает такой признак параллельности прямых:

Прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны.

ГЛАВА XXV.

МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ. МНОГОГРАННИКИ.

101. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ.

§ 331. Что такое многогранный угол? Возьмите плоский лист бумаги. Нарисуйте посредине его точку (на рис. 379 точка *S*), из этой точки проведите во все стороны пучок прямых (*SA*, *SB*, *SC* и т. д.).

Каждая пара соседних прямых образует плоский угол.

Вырежьте один из этих углов (например, *ASF*), а плоскости остальных сгибайте по прямым линиям до тех пор, пока стороны *SA* и *SF* вырезанного угла не совпадут.

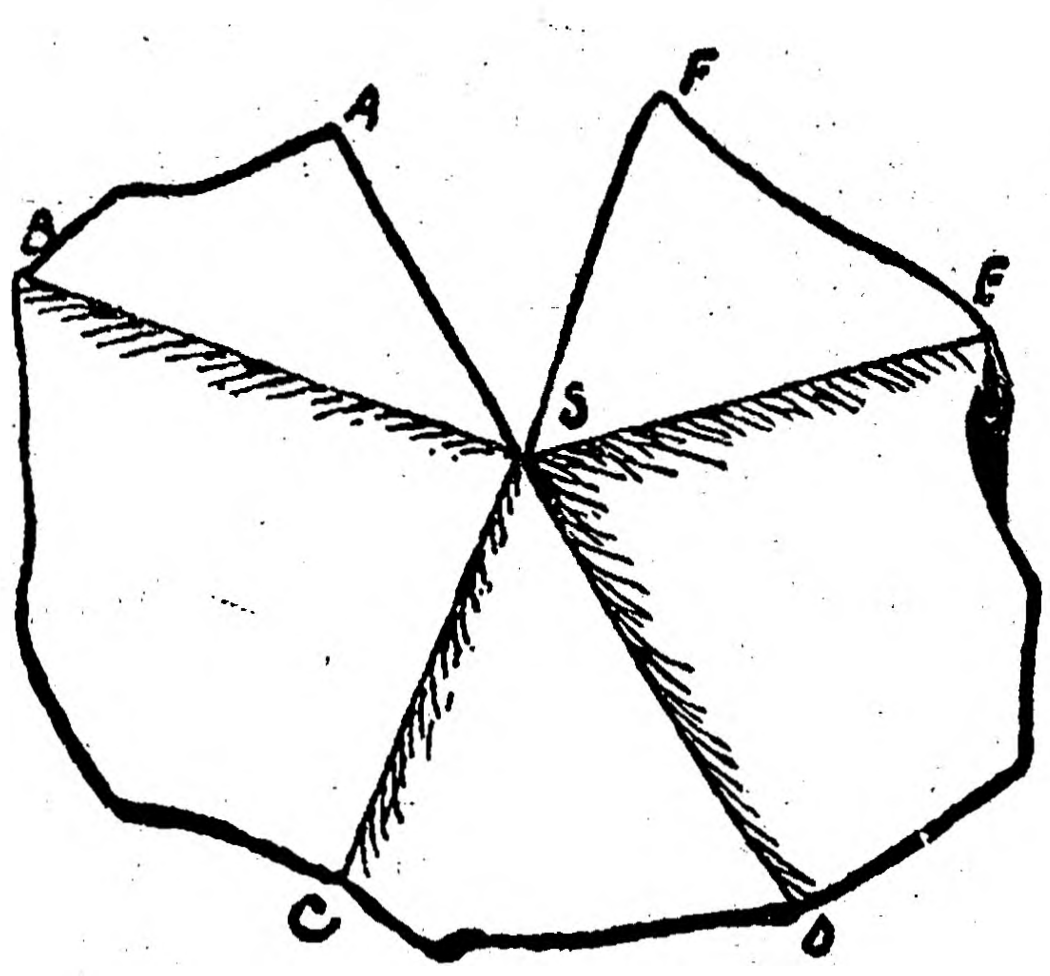


Рис. 379.

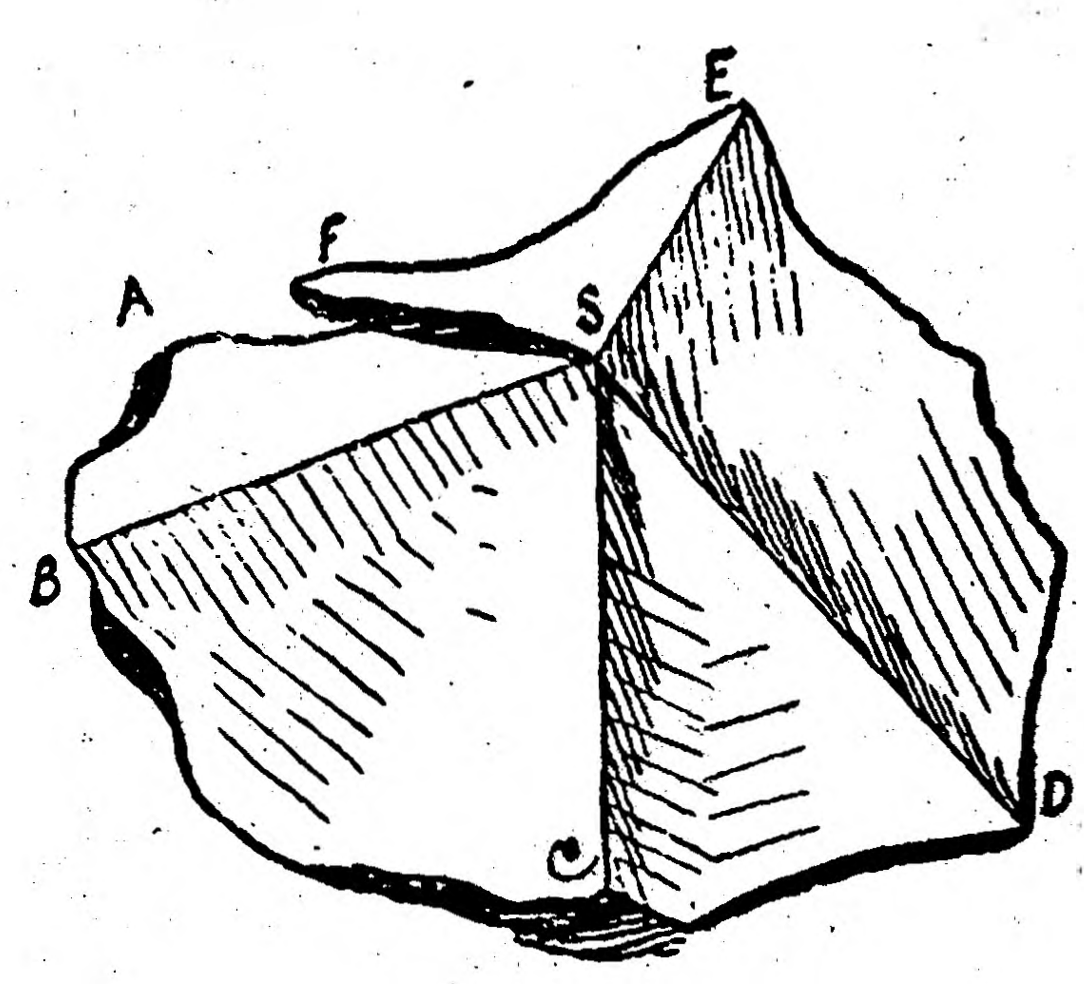


Рис. 380.

У вас получится фигура (рис. 380), образованная пересечением нескольких плоскостей. Она называется многогранным углом.

Прямые SA, SB, SC и т. д. называются ребрами, точка S — вершиной многогранного угла. Плоскости углов, ограничивающих многогранный угол, называются гранями.

В зависимости от числа граней, угол называется трехгранным, четырехгранным и т. д.

§ 332. Свойство плоских углов многогранного угла.

Теорема. Сумма плоских углов многогранного угла должна быть меньше 360°.

Опыт. Склейте какой-нибудь многогранный угол. Измерив транспортиром все плоские углы, найдите сумму их. Больше ли 360° эта сумма?

Доказательство. Сумма всех углов, лежащих вокруг одной точки S, равна 360°. Для того, чтобы получился многогранный угол из углов, нарисованных на плоскости (§ 331), надо хотя бы один из этих углов вырезать; следовательно, сумма оставшихся плоских углов должна быть меньше 360°.

102. МНОГОГРАННИКИ.

§ 333. Многогранник. Его грани, ребра и вершины. Тело, ограниченное со всех сторон плоскостями, называется многогранником (рис. 381).

Те плоскости, из которых состоит поверхность многогранника, называются гранями его.

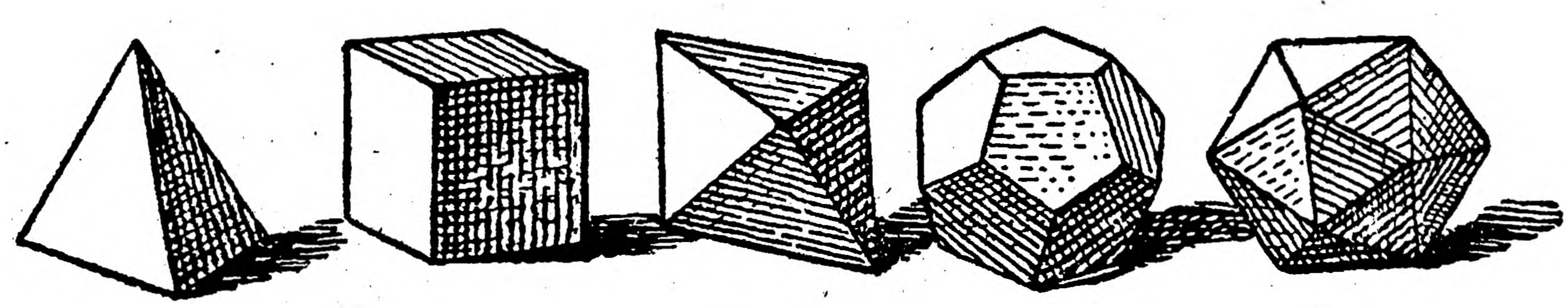


Рис. 381. Правильные многогранники.

Грани пересекаются друг с другом по прямым линиям, которые называются ребрами.

Ребра пересекаются в точках, называемых вершинами.

Можно ли призму или пирамиду причислить к многогранникам? А цилиндр? А конус?

§ 334. Правильные многогранники. Многогранник называется правильным, если все его грани представляют собою равные друг другу правильные многоугольники.

§ 335. Правильные многогранники, составленные из треугольников. Нарежьте из тонкого картона несколько десятков одинаковых правильных треугольников.

1. *Правильный 4-гранник.* Постарайтесь составить из этих треугольников многогранник так, чтобы у каждой вершины сходились по три грани. Сумма плоских углов каждого образовавшегося трехгранного угла даст только $60° \cdot 3 = 180°$ (вспомните § 332). Вы получите такой многогранник (рис. 381, *A*). Его поверхность состоит из 4-х равных граней, а потому он называется п р а в и л ь н ы м 4 - г р а н н и к о м.

2. *Правильный восьмигранник.* Составьте теперь многогранник так, чтобы у каждой вершины сходились по 4 грани (сумма плоских углов у каждой вершины будет меньше 360°, а именно $60° \cdot 4 = 240°$); вы получите многогранник (рис. 340, *C*), состоящий из 8 граней. Он называется п р а в и л ь н ы м в о с ь м и г р а н н и к о м.

3. *Правильный двадцатигранник.* Составьте, наконец, такой многогранник, у каждой вершины которого сходятся по 5 граней.

Для этого придется взять 20 треугольников (рис. 381, *E*). Как назвать такой правильный многогранник?

Д о к а ж е м теперь, что из треугольников нельзя составить правильный многогранник с бо̀льшим числом граней у вершины.

В самом деле, сумма плоских углов многогранного угла должна быть меньше 360°. Этому условию удовлетворяли плоские углы тех трехгранных, четырехгранных и пятигранных углов, которые образовали мы в только-что построенных многогранниках.

Если же вы расположите у каждой вершины, скажем, по 6 граней, то сумма сходящихся здесь плоских углов даст $60° . 6 = 360°$, а при таких условиях многогранного угла получить нельзя (§ 332).

§ 336. Многогранник, составленный из правильных 4-угольников. Из одинаковых правильных четыреугольников (квадратов) вам удастся составить только один многогранник, а именно такой, у каждой вершины которого будут сходиться по три грани ($90° . 3 = 270°$). Вы получите правильный ш е с т и г р а н н и к (рис. 381, *B*). Как он еще иначе называется?

Многогранников с бо̀льшим числом граней из квадратов получить нельзя ($90° . 4 = 360°$).

§ 337. Многогранник, составленный из правильных пятиугольников. Из правильных пятиугольников можно составить один только многогранник. Он будет состоять из 12 граней (рис. 381, *D*). Вот почему он называется правильным двенадцатигранником.

Докажите, что из правильных многоугольников, имеющих больше, чем пять сторон, составить правильного многогранника нельзя.

ГЛАВА XXVI.

ПРИЗМА.

103. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ПРИЗМ.

§ 338. Что такое призма? Призмой называется такой многогранник, который ограничен сверху и снизу двумя параллельными и равными друг другу многоугольниками, а боковые ребра которого равны и параллельны (§ 53, стр. 34). На рис. 382 нарисована одна из таких призм. Укажите ее верхнее и нижнее основания. Равны ли и параллельны ли они? Покажите боковые ребра ее и проверьте, что они равны и параллельны. Проткните вязальной спицей перпендикулярно оба основания. Перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки верхнего основания на нижнее основание, называется высотою призмы.

§ 339. Боковые грани призмы. Обведите ладонью руки боковые грани призмы (рис. 382). Эти грани имеют вид четыреугольников, противоположные стороны которых параллельны друг другу, следовательно, боковые грани призмы представляют собой параллелограмы.

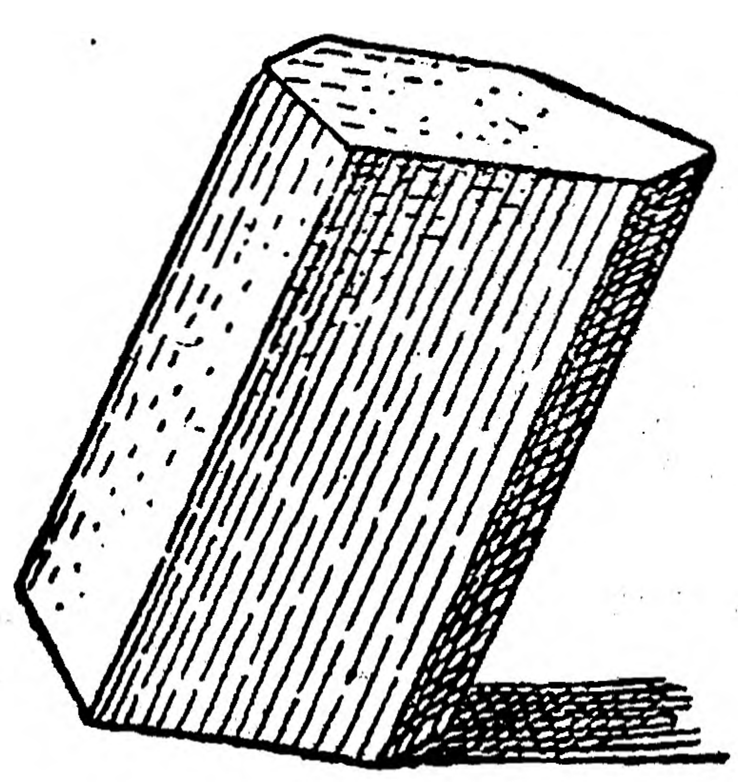


Рис. 382.
Наклонная призма.

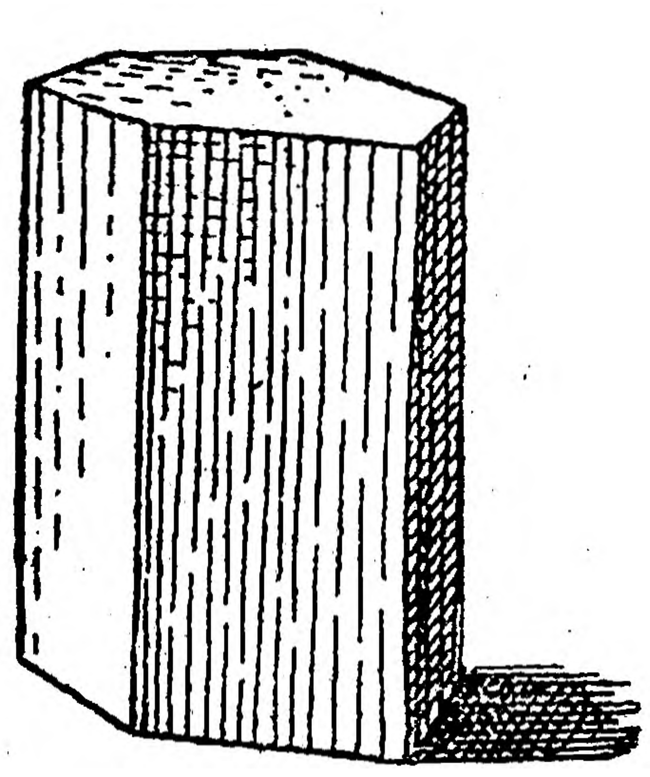


Рис. 383.
Прямая призма.

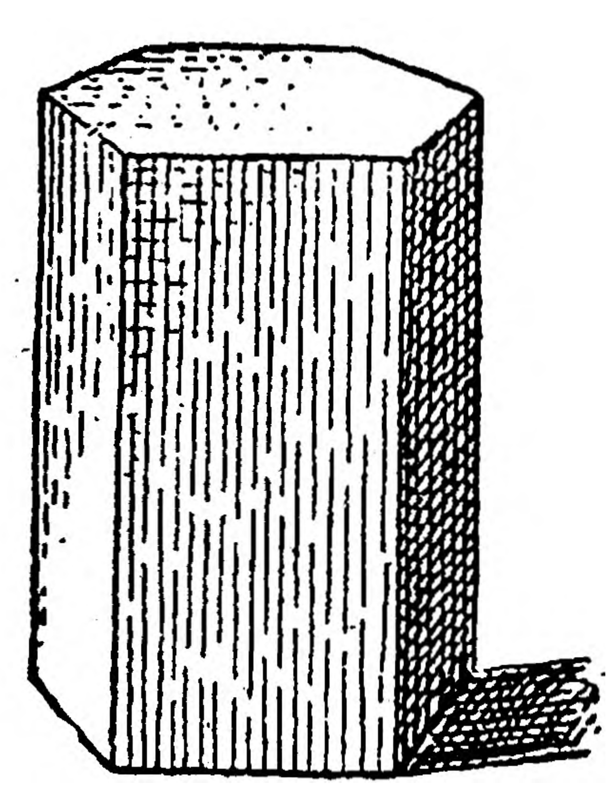


Рис. 384.
Правильная призма.

§ 340. Наклонная и прямая призма. У только-что рассмотренной призмы боковые ребра идут наклонно к основаниям (рис. 382). Такая призма называется наклонной призмой. У тех же призм, которые мы изучали во второй части, боковые ребра были расположены перпендикулярно к основаниям (рис. 383). Призма, боковые ребра которой перпендикулярны к основаниям, называется прямой.

У прямой призмы боковые грани имеют вид прямоугольников (докажите это сами, воспользовавшись §§ 320 и 383).

Высота прямой призмы равна по длине боковому ребру ее.

§ 341. Правильная призма. Если основаниями прямой призмы служат правильные фигуры, то такая прямая призма называется правильной. Почему призма, нарисованная на рис. 384, правильная?

§ 342. Наименование призмы по числу ее боковых граней. По числу своих боковых граней призмы делятся на трехгранные, четырехгранные, пятигранные и т. д.

Как, например, назвать призмы на рисунках 382, 383 и 384?

§ 343. Параллелепипеды. Очень часто мы встречаемся с четырехгранной призмой, основаниями которой служат параллелограмы. Такая призма называется параллелепипедом (рис. 385).

Если боковые ребра параллелепипеда идут наклонно к основаниям, то такой параллелепипед называется наклонным (рис. 385). Его поверхность состоит из шести параллелограмов.

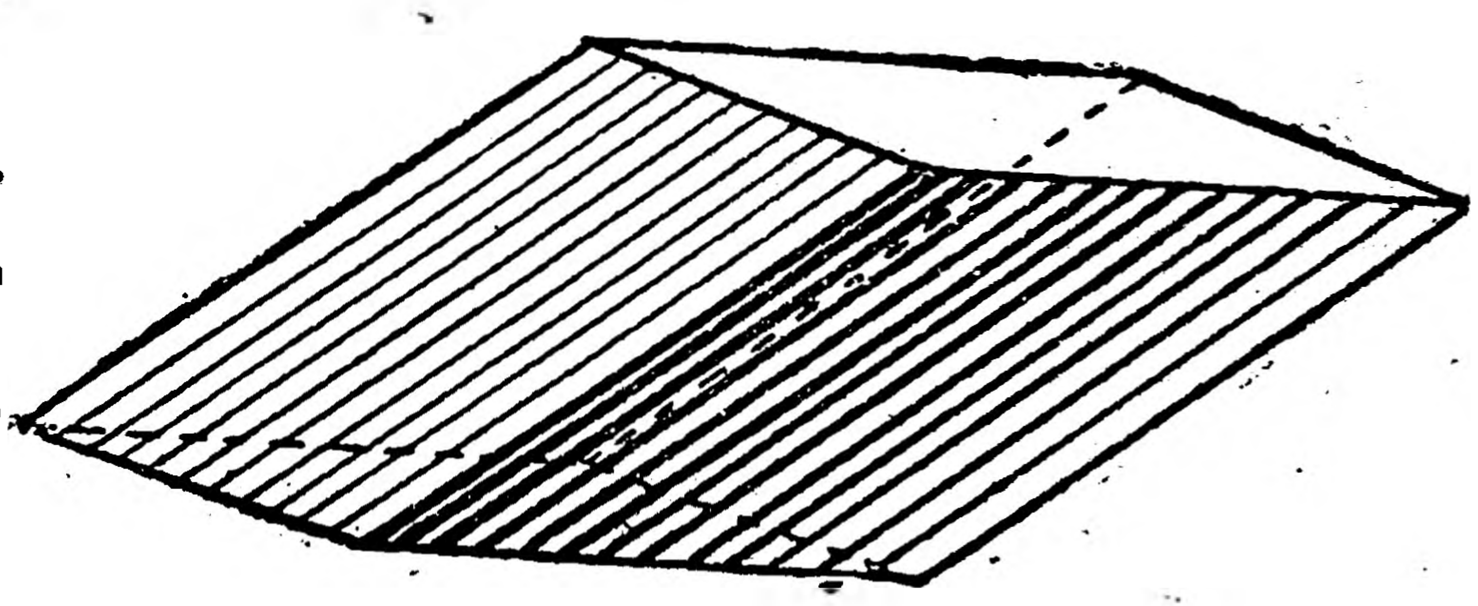


Рис. 385.

Вырежьте из мыла параллелепипед, в основании которого лежат параллелограмы, а боковые ребра перпендикулярны к основаниям Боковыми гранями его будут прямоугольники. Такой параллелепипед называется прямым.

Спичечная коробка имеет форму прямого параллелепипеда, основания которого — прямоугольники. Его поверхность состоит из шести прямоугольников.

Такой параллелепипед называется прямоугольным параллелепипедом. (Раньше мы его называли прямоугольной призмой.)

104. ИЗМЕРЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ.

§ 344. Измерение боковой поверхности прямой призмы.

Опыт. Возьмите одну из склеенных вами прямых призм и разверните всю ее поверхность в одну плоскость. Вы получите ту выкройку (она называется разверткой), из которой вы прежде приготовили призму (рис. 386).

Боковая поверхность призмы равна сумме площадей боковых граней ее. Измерив их, узнайте площадь боковой поверхности вашей призмы.

Доказательство. У нашей призмы площадь боковых граней будет равна площади прямоугольника ABB_1A_1 (рис. 386), основанием которого служит периметр основания призмы, а высотою — боковое ребро ее AB, равное по длине высоте призмы.

А потому, для того, чтобы измерить боковую поверхность прямой призмы, надо периметр основания ее помножить на боковое ребро.

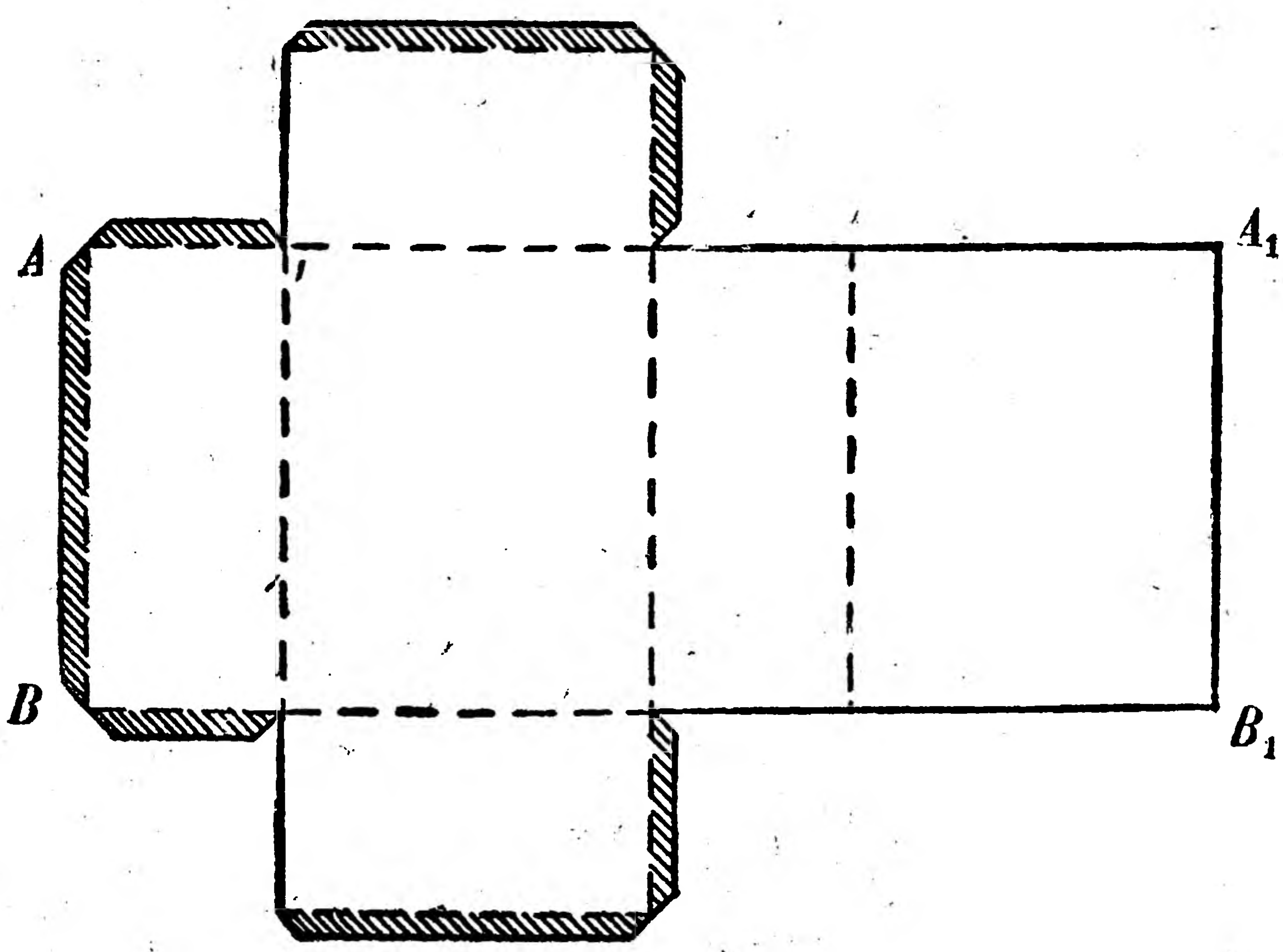


Рис. 386.

§ 345. Измерение поверхности наклонной призмы. Возьмите какую-нибудь наклонную призму, например, такую (рис. 387). Вычислите ее боковую поверхность. Для этого надо сложить площади всех параллелограмов, которые служат ее боковыми гранями.

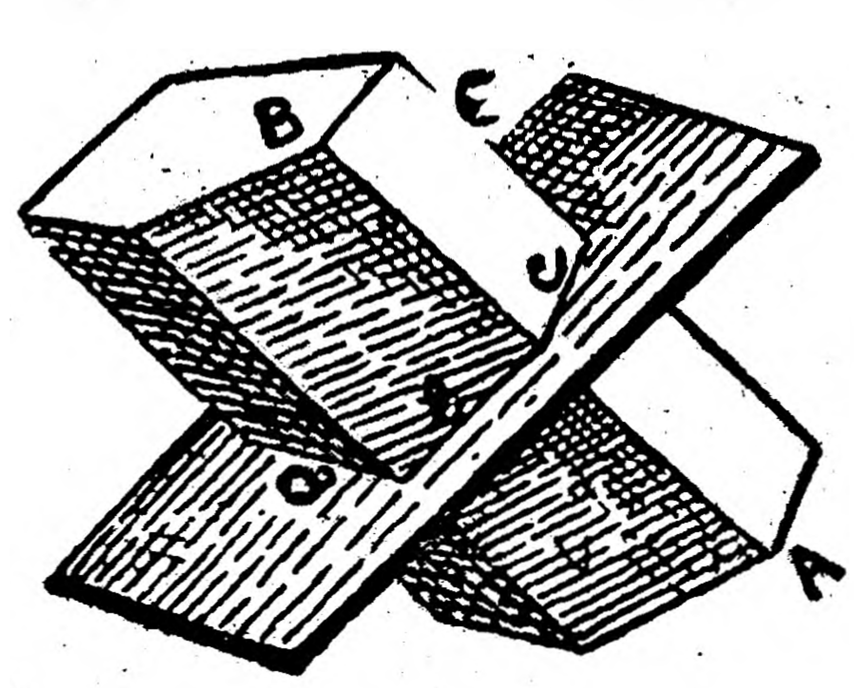


Рис. 387.

У этих параллелограмов за основание удобнее принять боковое ребро (AB). Чтобы получить высоту параллелограмов, сделайте так. Возьмите длинную нитку и обхватите ею боковую поверхность так, чтобы контур нитки был перпендикулярен к боковым ребрам (рис. 387). Тогда каждая сторона этого перпендикулярного сечения ($a, b, c, \ldots$) будет служить высотою наших параллелограмов.

Формула. Пусть боковое ребро призмы AB содержит l линейных единиц.

Высота первой грани	содержит	a	линейных	единиц.
» второй грани	»	b	»	»
» третьей грани	»	c	»	»
» четвертой грани	»	d	»	»
» пятой грани	»	e	»	»

Тогда боковая поверхность содержит

$$S = (a \cdot l + b \cdot l + c \cdot l + d \cdot l + e \cdot l) \text{ кв. единиц,}$$

или

$$S = (a + b + c + d + e) . l \text{ кв. единиц,}$$

$a + b + c + d + e$ есть периметр перпендикулярного сечения. Пусть этот периметр содержит $p = a + b + c + d + e$ лин. единиц. Тогда получим такую формулу

$$S = p \cdot l.$$

§ 346. Измерение полной поверхности призмы. Зная боковую поверхность призмы, легко вычислить и всю полную поверхность ее. Для этого достаточно к боковой поверхности прибавить двойную площадь любого основания ее.

105. ИЗМЕРЕНИЕ ОБЪЕМА ПРИЗМЫ.

§ 347. Кубические метрические меры. В метрической системе единиц в основу положен кубический метр—это куб, все стороны которого равны линейному метру. Составьте из палок такой куб.

Кроме кубического метра употребляются такие единицы:

Куб. дециметр равен $\frac{1}{10.10.10}$ части куб. метра.

Куб. сантиметр равен $\frac{1}{100.100.100}$ части куб. метра.

Куб. миллиметр равен $\frac{1}{1000.1000.1000}$ части куб. метра.

1. Кубический сантиметр. Он нарисован в натуральную величину на рис. 388.

2. Кубический миллиметр. Он составляет $\frac{1}{1000}$ часть кубического сантиметра.

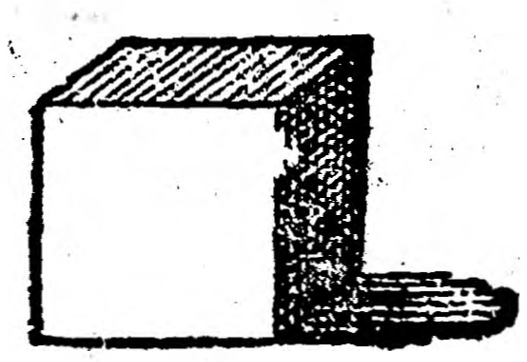


Рис. 388.

Куб. миллиметр равен, приблизительно, объему булавочной головки.

3. Кубический дециметр. Он содержит 1000 кубических сантиметров. Его еще называют литром.

В чайном стакане помещается $^1/_4$ литра (приблизительно).

Вырежьте из мыла кубический сантиметр и кубический миллиметр.

В дальнейшем курсе слова «кубический сантиметр» и «кубический миллиметр» будем сокращенно писать так: «*куб. см*», «*куб. мм*».

§ 348. Объем прямоугольного параллелепипеда.

Теорема. Объем прямоугольного параллелепипеда равен площади его основания, умноженной на высоту.

Для измерения объема прямоугольного параллелепипеда мы вывели такое правило: чтобы узнать, сколько кубических единиц содержит объем прямоугольного параллелепипеда, надо измерить высоту его линейными единицами и площадь основания соответствующими квадратными единицами. Перемноживши эти числа, мы узнаем, сколько соответствующих кубических единиц содержится в объеме нашего прямоугольного параллелепипеда (§ 51, стр. 34). Прочитайте еще раз всю эту главу (стр. 25), и вспомните, как мы вывели это правило.

В таком виде запоминать это правило неудобно, потому что оно очень длинное. Заучим его в более короткой форме:

Объем прямоугольного параллелепипеда равен площади его основания, умноженной на высоту. (Какую мы допускаем ошибку при таком сокращенном изложении правила?)

§ 349. Измерение объема параллелепипеда.

Опыт 1. Приготовьте из проволоки модель прямоугольного параллелепипеда и скосите его (отодвигая от себя верхнее основание) так, чтобы у вас получился параллелепипед, у которого оба основания, передняя и задняя грани — прямоугольники, а с боков — параллелограмы. Выучимся измерять объем такого параллелепипеда.

Приготовьте такой параллелепипед из мыла (рис. 389). Превратим его в прямоугольный параллелепипед. Для этого отрежьте от него по плоскости A_1B_1FE, проходящей через ребро A_1B_1 перпендикулярно к основаниям, клин $FEABA_1B_1$ и приставьте этот клин к параллелепипеду так, чтобы задняя грань CC_1D_1D совпала с передней AA_1B_1B. Тогда наш наклонный параллелепипед превратится в равный ему по объему прямоугольный параллелепипед $A_1B_1EFC_1D_1E_1F_1$ (рис. 390). Объем этого последнего равен площади основания, умноженной на высоту. Так как площади оснований и высоты у наших параллелепи-

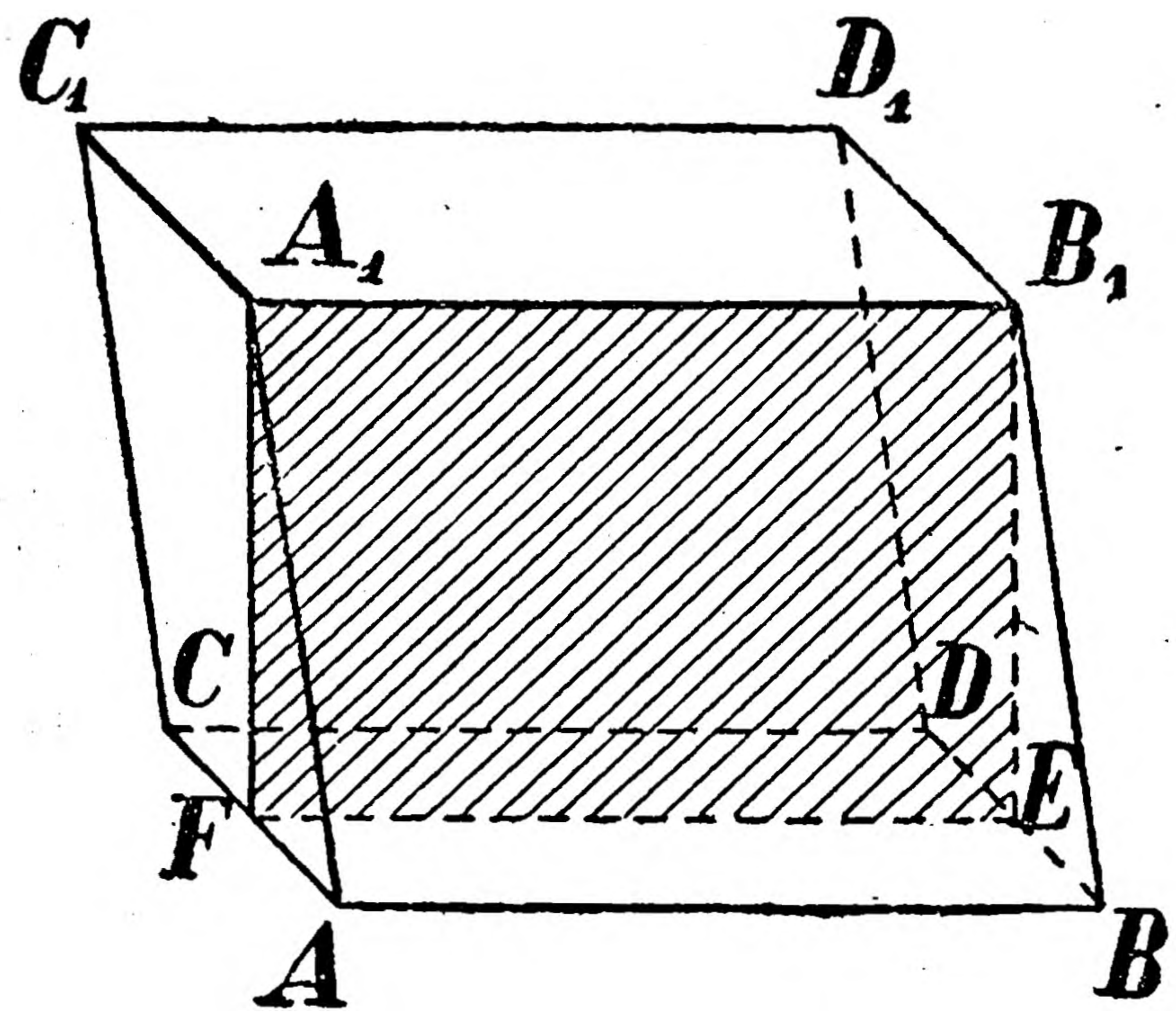


Рис. 389.

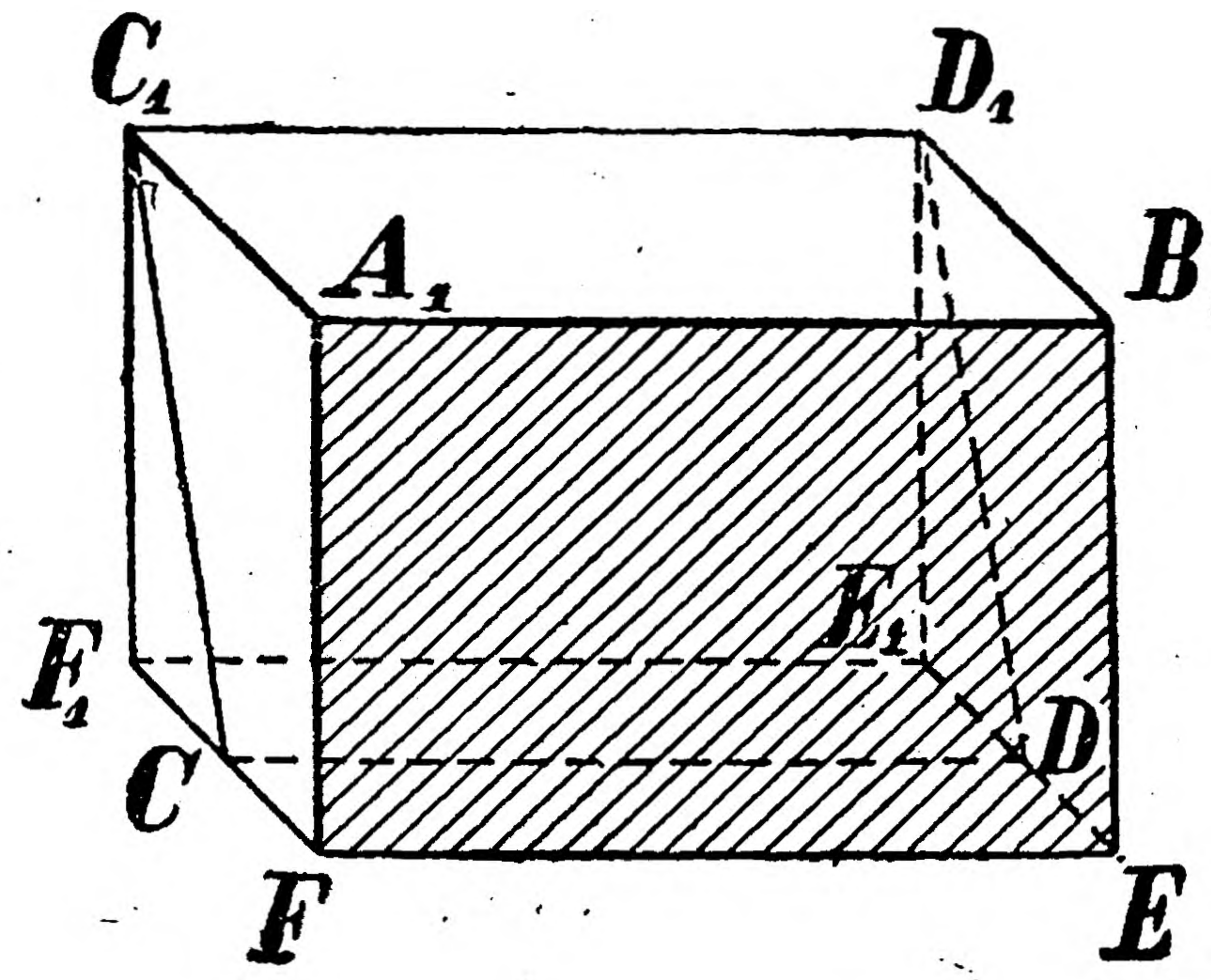


Рис. 390.

педов соответственно равны друг другу (почему?), то *объем нашего наклонного параллелепипеда равен площади основания, умноженной на высоту.*

Опыт 2. Приготовьте теперь из мыла наклонный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 391), у которого все грани — параллелограмы.

Разрежьте его вдоль плоскости $LMNP$, перпендикулярной к горизонтальным ребрам AB, A_1B_1, CD и C_1D_1, на две части и обменяйте их местами так, чтобы левая грань (AA_1D_1D) прежнего параллелепи-

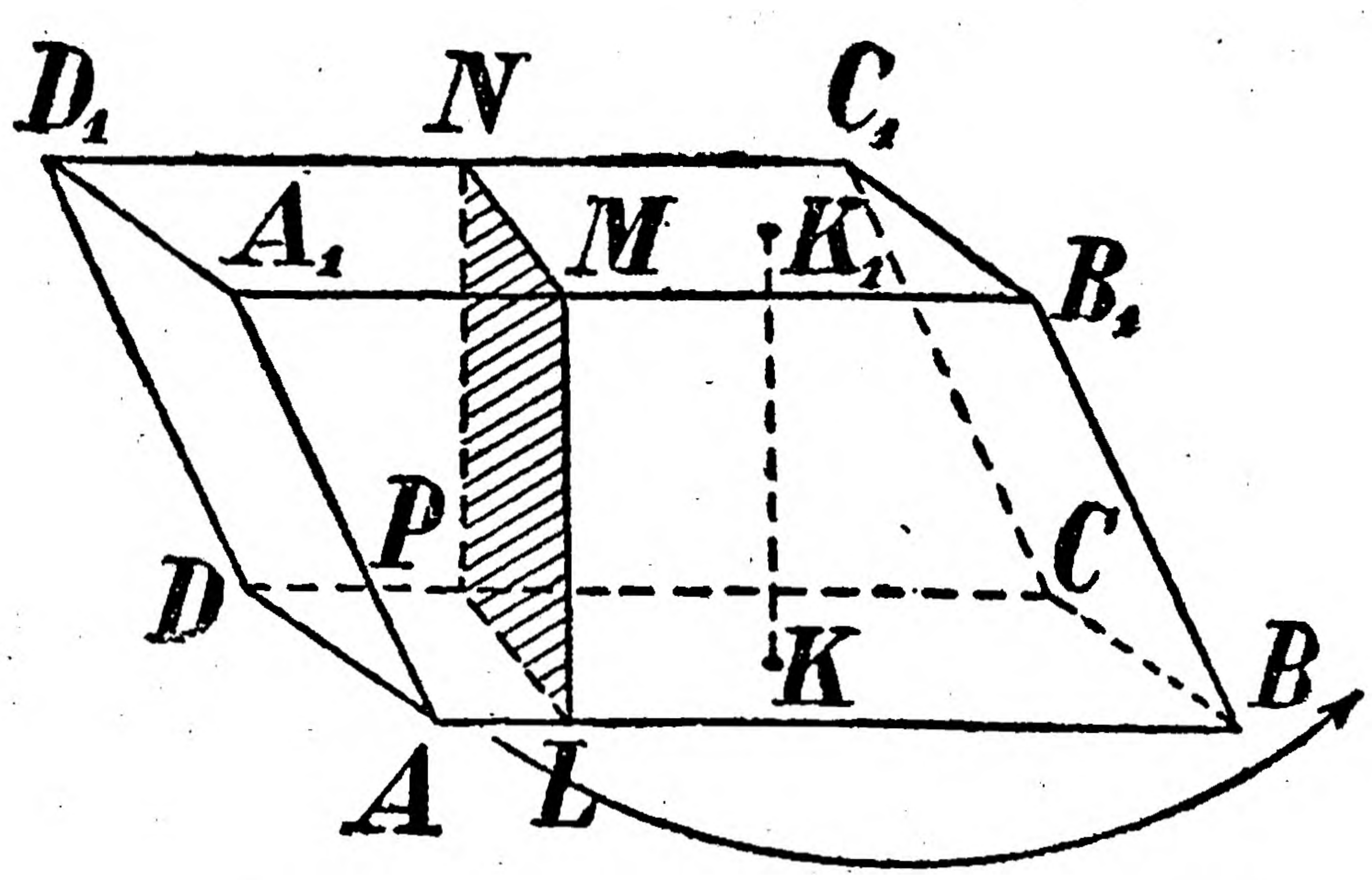


Рис. 391.

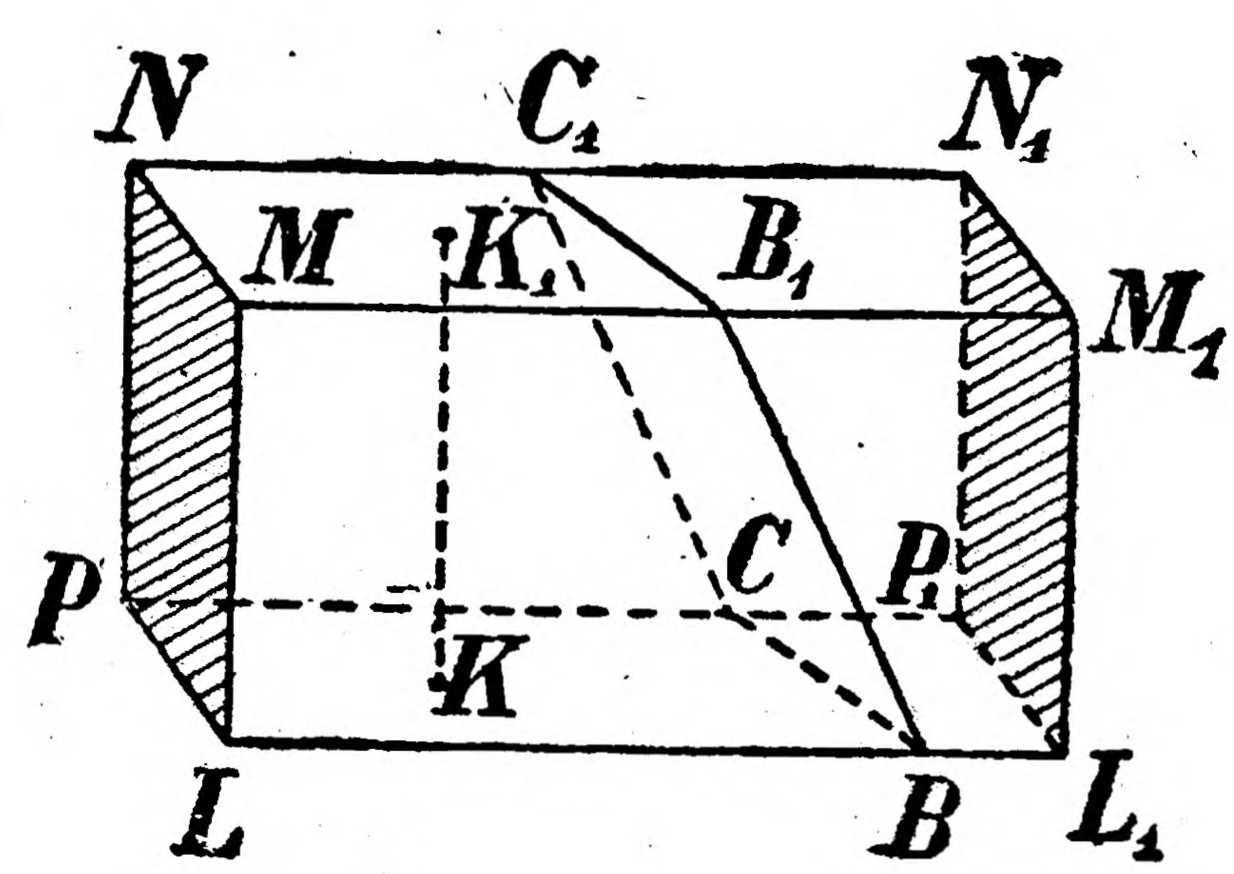


Рис. 392.

педа совпала с правою (BB_1C_1C). Вы получите параллелепипед $LMNPL_1M_1N_1P_1$ (рис. 392), рассмотренный в предыдущем опыте. Его объем равен площади основания LPP_1L_1, умноженной на высоту KK_1. Так как объемы, площади оснований и высоты у этих параллелепипедов соответственно равны друг другу (докажите!), то чтобы измерить объем искомого параллелепипеда, достаточно площадь его основания умножить на высоту.

§ 350. Измерение объема трехгранной призмы.

Опыт 1. Вырежьте из мыла прямую трехгранную призму (рис. 393). Постараемся превратить ее в равновеликую ей четырехгранную призму. Проведем среднюю линию верхнего и нижнего оснований ее (§ 192) и через эти две параллельные прямые проведем плоскость. Разрежем по этой плоскости нашу призму на две части. Меньшую часть повернем вокруг ребра DD_1 так, чтобы BD совпало с DA и чтобы фигуры BDE и $DACE$ легли в одну плоскость. Тогда грань BDD_1B_1 совпадет с равной ей гранью DAA_1D_1. Наша трехгранная призма превратится в равновеликую ей четырехгранную (рис. 394). Измерив объем последней, вы узнаете вместе с тем и объем искомой трехгранной призмы.

Так как площадь основания и высота полученной четырехгранной призмы соответственно равны площади основания и высоте данной

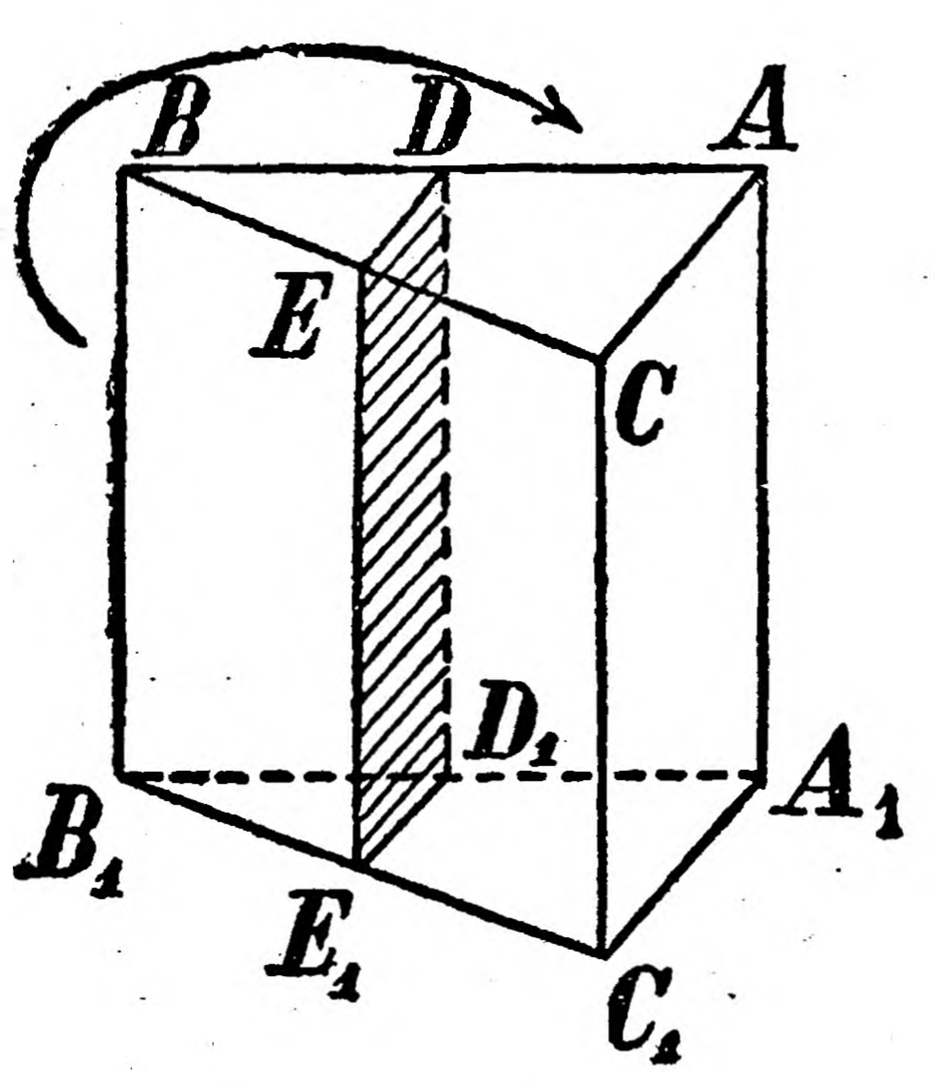


Рис. 393.

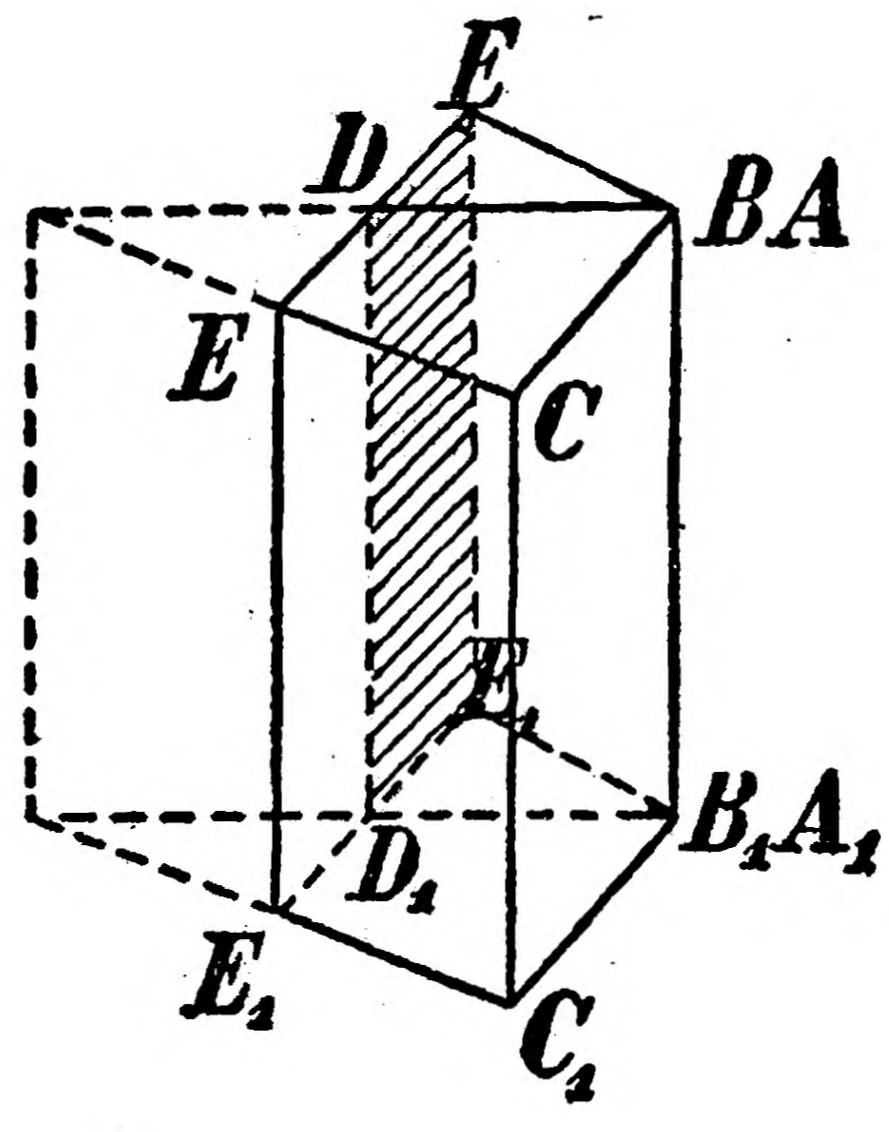


Рис. 394.

Превращение трехгранной призмы в четырехгранную.

трехгранной призмы, то для измерения объема нашей трехгранной призмы получим такое правило: объем трехгранной призмы равен площади ее основания, помноженной на высоту.

Опыт 2. Вырежьте из мыла наклонную трехгранную призму. Превратим ее в прямую. Для этого разрежем ее на две части по плоскости, перпендикулярной к боковым ребрам, и верхнюю часть приставим к нижней так, чтобы совпали оба прежних основания. Тогда наша наклонная призма превратится в прямую, у которой высотою будет прежнее боковое ребро, а основанием перпендикулярное сечение. Измерив объем полученной прямой призмы, можно узнать объем и данной наклонной.

Опыт 3. Найдем теперь правило для непосредственного измерения объема наклонной призмы. Возьмем две такие трехгранные призмы (рис. 395), чтобы, сложив их боковыми гранями, получить четырехгранную призму (рис. 396).

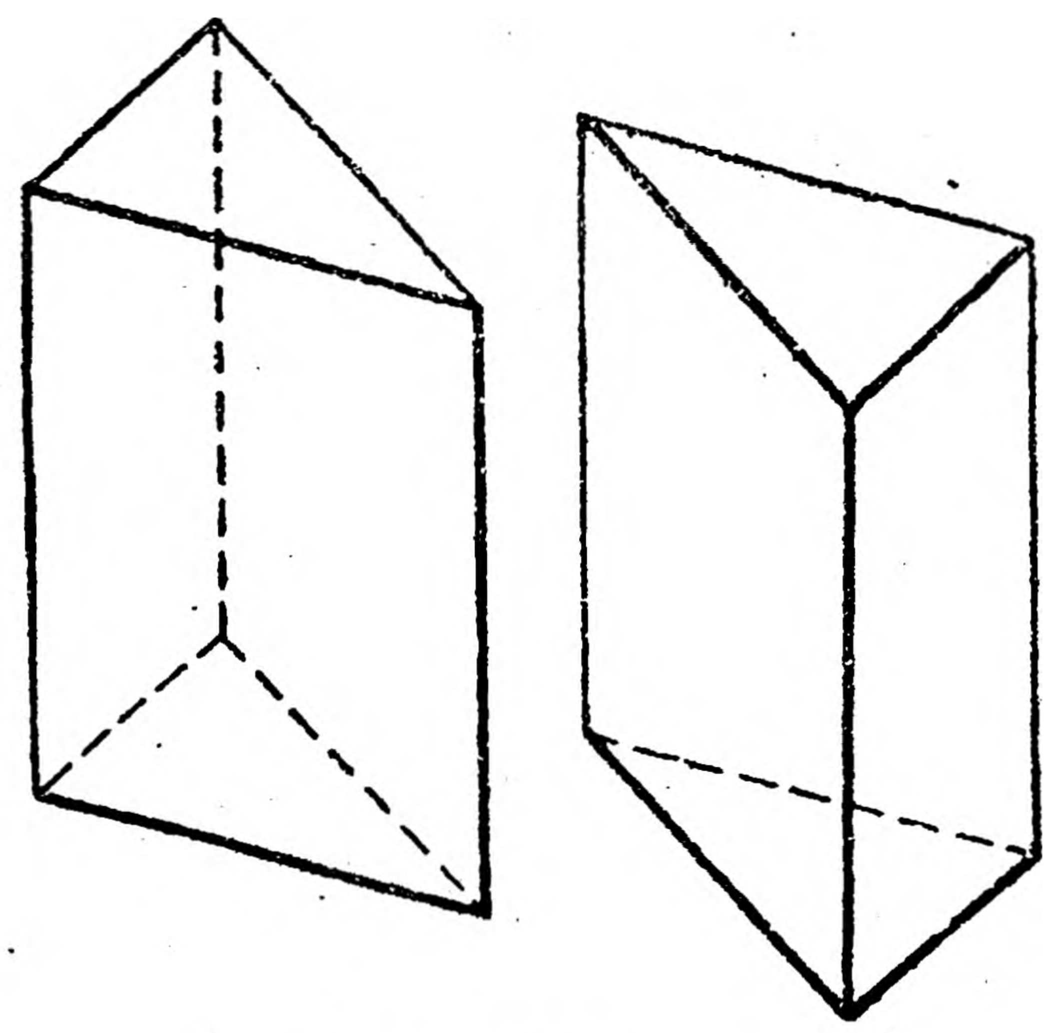


Рис. 395.

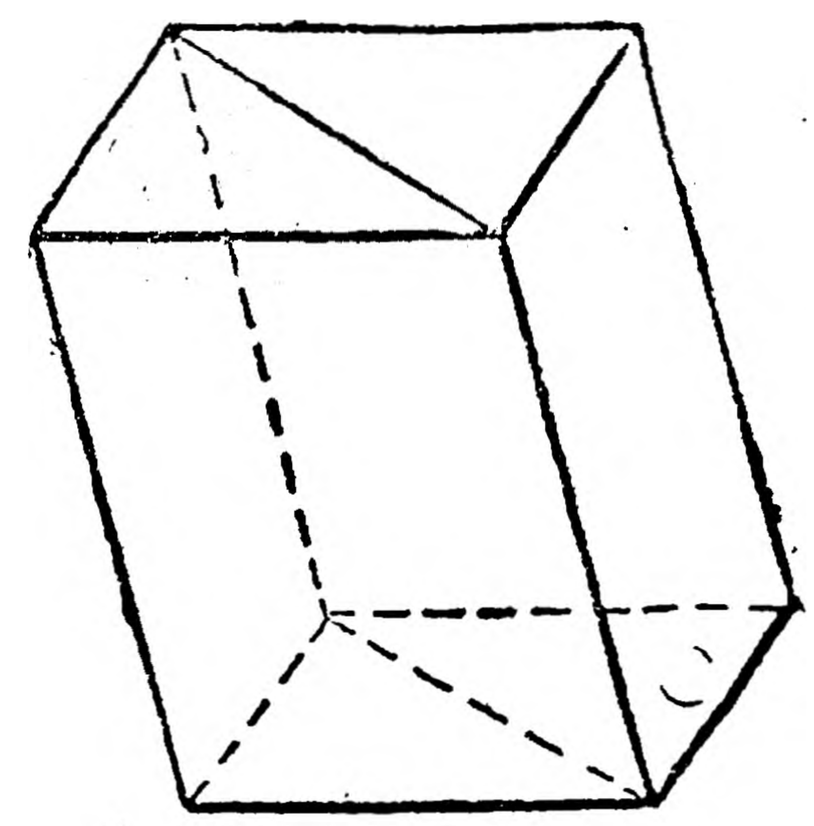


Рис. 396.

Объемы у этих двух трехгранных призм будут одинаковые, ибо если превратить эти призмы в прямые, то у последних и площади оснований и высоты будут соответственно равные. (Вспомните предъидущий опыт.)

Объем одной трехгранной призмы составляет половину объема четырехгранной призмы, то-есть равен $^1/_2$ площади основания четырехгранной призмы, умноженной на высоту, но так как $^1/_2$ основания четырехгранной призмы равна всему основанию трехгранной и так как высоты у этих призм одинаковы, то получаем такое правило: **для того, чтобы измерить объем любой трехгранной призмы, надо площадь ее основания умножить на высоту.**

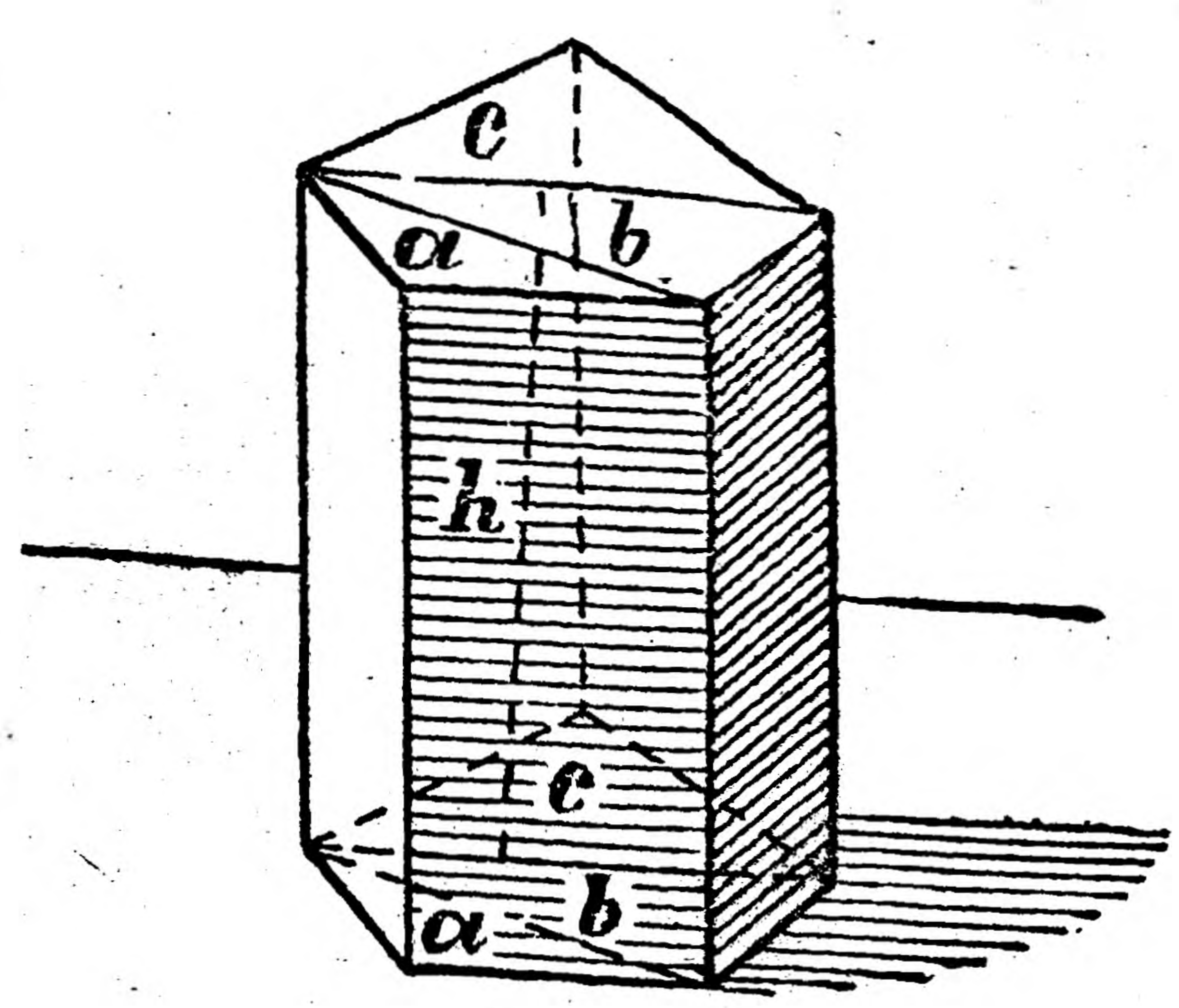


Рис. 397.

§ 351. Вывод формулы для измерения объема многогранной призмы. Остается нам еще рассмотреть многогранную призму. Ее нетрудно разбить на ряд трехгранных призм (рис. 397).

Высоты у этих призм все одинаковой длины; пусть каждая из них содержит h линейных единиц. Если площадь основания первой трехгранной призмы содержит a кв. ед., площадь второй b кв. ед., площадь третьей c кв. ед., то получим:

Объем первой призмы $= a \cdot h$ куб. ед.

Объем второй призмы $= b \cdot h$ куб. ед.

Объем третьей призмы $= c \cdot h$ куб. ед.

Следовательно, объем всей призмы $= ah + bh + ch$ куб. ед.

Вынесем h за скобки.

Объем призмы $= [a + b + c] \cdot h$ куб. ед.

Если площадь основания всей многогранной призмы содержит B кв. ед., то

$$a + b + c = B.$$

Следовательно, объем этой призмы содержит

$$V = B \cdot h \text{ куб. ед.}$$

Упражнения и задачи.

1. Можете ли вы поднять куб. метр пробки? (Каждый куб. сантиметр пробки весит $^1/_5$ *г.*)

2. Бассейн для купанья имеет форму куба, ребро которого равно 5 *м.* Сколько надо плит для того, чтобы обложить его стены и дно, если размеры каждой плиты 20 *см* $\times$ 25 *см?*

Сколько весит вода, налитая до половины в этот бассейн?

3. Ледник имеет форму куба с ребром в 4 *м.* Сколько возов льду надо привезти, чтобы набить ледник, если каждый воз привозит 2 *куб. м* льда?

4. Какой объем будет больше: 5 кубических ящиков с ребром в 4 *см* или 4 кубических ящика с ребром в 5 *см?*

5. Узнайте на-глаз, сколько куб. сантиметров содержит объем какой-нибудь коробки. Проверьте ответ измерением.

6*). Вычислите, сколько весит воздух, находящийся в вашей комнате, если известно, что литр его весит приблизительно $1^1/_3$ *г.* [1])

7. Взрослый человек в каждую минуту делает 18 вздохов и выдыхов, втягивая в себя по 500 *куб. см* свежего воздуха. Измерив объем вашей комнаты, высчитайте, на сколько времени хватило бы вам воздуха вашей комнаты, если бы в нее не было притока свежего воздуха извне.

---

[1]) Темы задач, отмеченных звездочкой, заимствованы мною из «Начального Курса Геометрии» Кавуна.

8*). Пеперечный разрез канала имеет форму равнобочной трапеции, основания которой равны 95 *м* и 85 *м*. Глубина канала 16 *м*. Сколько воды пройдет через этот разрез канала за минуту, если скорость течения воды 1,5 метра в час.

9*). Поперечный разрез железнодорожного пути имеет форму равнобочной трапеции. Верхнее основание ее = 2,6 метра. Боковая сторона = 2,5 метра. Высота насыпи = 2 метрам. Сколько *куб. м* земли потребовалось на укладку такой насыпи на протяжении одного километра.

ГЛАВА XXVII.

ПИРАМИДА.

106. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ПИРАМИД.

§ 352. Что такое пирамида? Пирамидой мы назвали многогранник, боковыми гранями которого служат треугольники и боковые ребра которого пересекаются в одной точке. У пирамиды имеется только одно основание, представляющее собой многоугольник (рис. 398).

§ 353. Вершина, боковые грани, боковые ребра и высота пирамиды. Укажите боковые грани пирамиды. Вспомните, как называются те прямые линии, по которым пересекаются боковые грани. Обведите пальцем боковые ребра. Укажите ту точку, в которой пересекаются боковые ребра. Эта точка называется вершиной пирамиды.

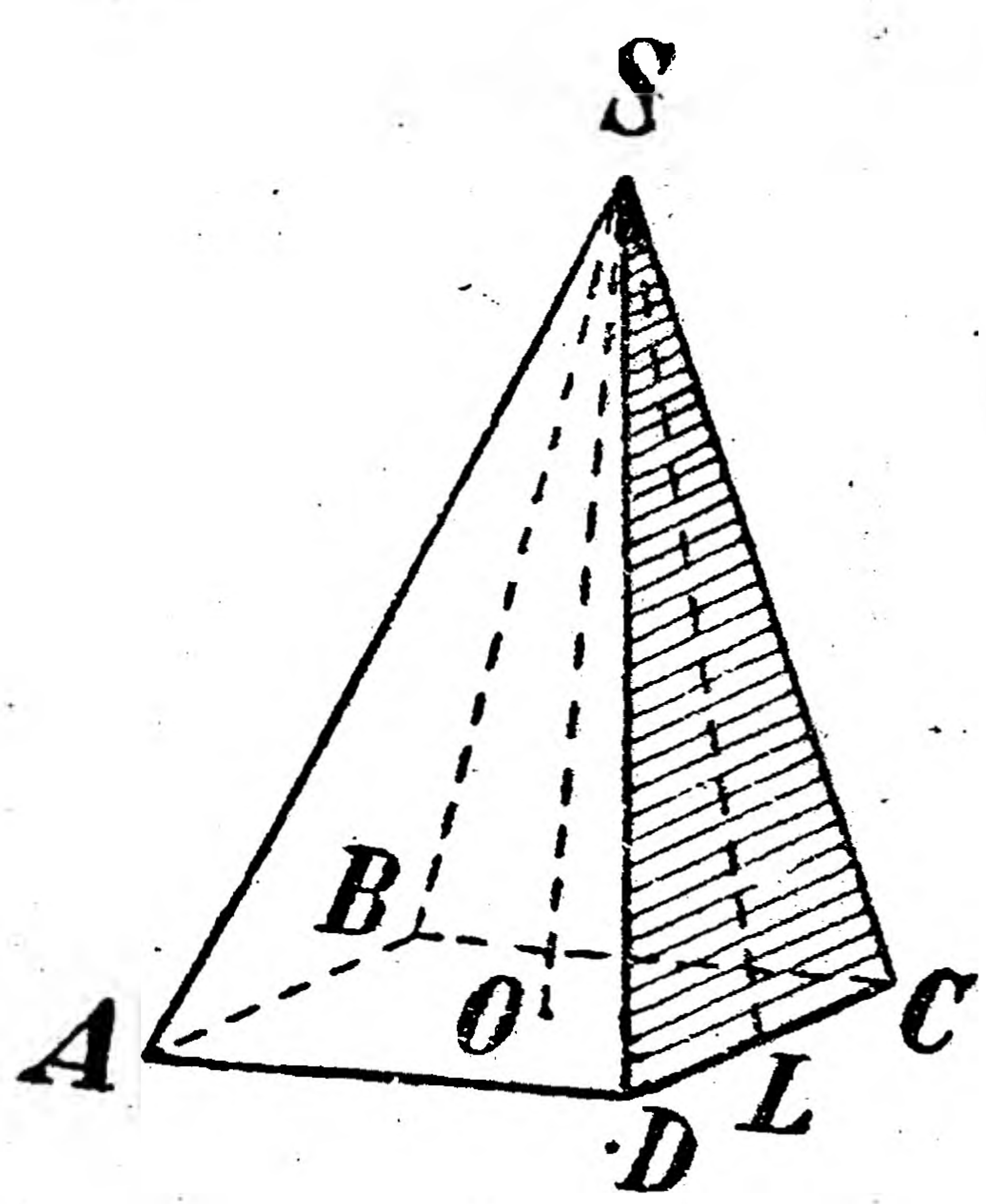


Рис. 398.
Правильная пирамида.

Проткните пирамиду вязальной спицей так, чтобы спица прошла через вершину ее перпендикулярно к плоскости основания. Перпендикуляр (*SO*), опущенный из вершины пирамиды на ее основание, называется высотою (рис. 398).

§ 354. Правильная пирамида. Посмотрите на эту пирамиду (рис. 398). В основании ее лежит правильный многоугольник, а высота *SO* проходит через центр основания. Такая пирамида называется правильной.

У правильной пирамиды все боковые ребра равны друг другу, а боковые грани — одинаковые равнобедренные треугольники.

Проведите высоты этих равнобедренных треугольников. Они называются апофемами пирамиды (SL).

Равны ли апофемы у правильной пирамиды? Почему?

§ 355. Наименование пирамиды по числу ее боковых граней. Число боковых граней пирамиды равно числу сторон того многоугольника, который лежит в основании ее. Если, например, в основании лежит треугольник, то боковых граней будет три. Такая пирамида называется трехгранной. А как назвать пирамиду рисунка 398?

107. ИЗМЕРЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПИРАМИДЫ.

§ 356. Измерение поверхности наклонной пирамиды. Чтобы вычислить боковую поверхность пирамиды, надо измерить площади всех тех треугольников, которые служат ее боковыми гранями, и сложить их.

Если вам нужно узнать полную поверхность, то вы должны, вычислив боковую поверхность, прибавить к ней площадь основания.

§ 357. Измерение боковой поверхности правильной пирамиды.

Теорема. Боковая поверхность правильной пирамиды равна половине периметра ее основания, помноженной на апофему.

Опыт. Найдем развертку нашей пирамиды (рис. 398). Разрежем для этого ее поверхность по боковым ребрам (SA, SB, SC и CD) и развернем все грани так, чтобы они расположились в одной плоскости. Так как у правильной пирамиды все боковые грани одинаковые, то для того, чтобы вычислить боковую поверхность ее, достаточно измерить площадь одной из них и умножить ее на число всех боковых граней.

Найдем, например, площадь грани SDC (рис. 398); для этого надо измерить линейными единицами основание этого треугольника DC и высоту его SL (т.-е. апофему пирамиды).

Пусть прямая DC содержит a лин. единиц.

Апофема SL содержит l лин. единиц.

Тогда площадь грани SDC содержит $^1/_2\ al$ кв. единиц (§ 221).

Если наша пирамида имеет n боковых граней, то вся боковая поверхность пирамиды содержит $P = {^1/_2}\ aln$ кв. единиц. Преобразуем это выражение:

$$P = {^1/_2}(a \cdot n)\ l.$$

Но an есть периметр основания пирамиды. Обозначим это число буквой p; тогда получится такая формула:

$$P = {}^1/_2 pl,$$

т.-е. боковая поверхность правильной пирамиды равна половине периметра ее основания, помноженной на апофему.

§ 358. Измерение полной поверхности правильной пирамиды. Для того, чтобы найти правильную поверхность правильной пирамиды, надо сначала вычислить ее боковую поверхность, а потом уже прибавить площадь основания, которую можно вычислить по правилу, указанному в § 226.

108. ИЗМЕРЕНИЕ ОБЪЕМА ПИРАМИДЫ.

§ 359. Свойство пирамид, имеющих равновеликие основания и равные высоты.

Теорема. Все пирамиды, площади оснований которых равны друг другу и высоты которых одинаковые, имеют равные друг другу объемы.

Опыт. Приготовьте из воска несколько пирамид, имеющих одинаковые высоты и одинаковые площади оснований.

Постараемся сравнить друг с другом объемы их.

Для этого воспользуемся сосудом, нарисованным на рис. 399, и «измерительным» стаканом (так называется цилиндрический стакан с делениями, показывающими, сколько кубических сантиметров содержит объем жидкости, уровень которой касается данной черты; рис. 399.

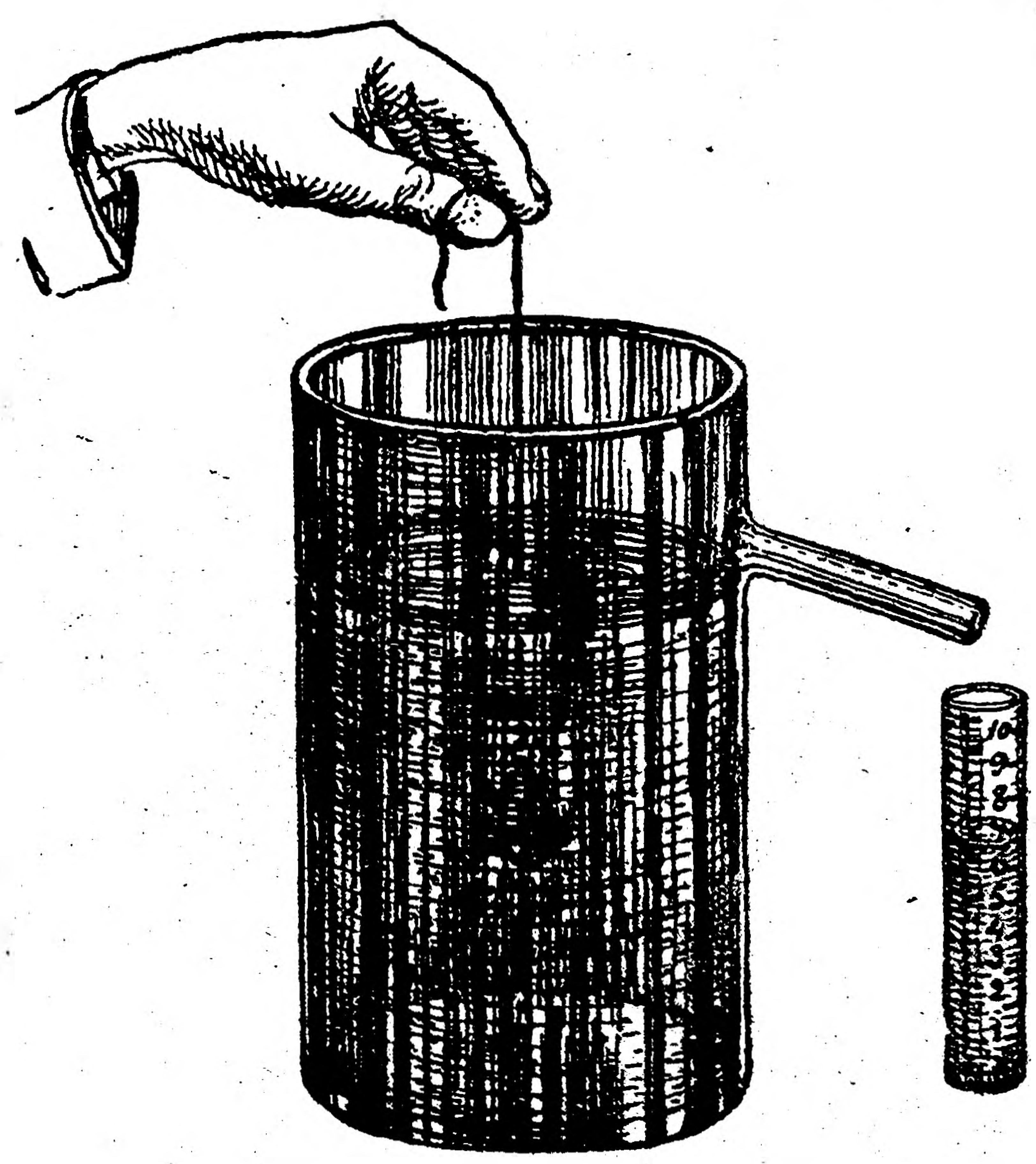


Рис. 399.

Наполните сосуд доверху водою так, чтобы избыток ее вытек через отверстие A. Подставьте теперь под отверстие сосуда измерительный стакан и погрузите в сосуд одну из пирамид. [1]) Узнав при помощи измерительного стакана объем вытесненной пирамидой воды, вы одновременно узнаете и объем самой пирамиды.

Проделав тот же самый опыт с остальными пирамидами, [2]) вы убедитесь, что у всех ваших пирамид, если только они имеют одинаковые высоты и равные площади оснований, объемы будут одинаковые.

§ 360. Измерение объема трехгранной пирамиды.

Теорема. Объем трехгранной пирамиды равен $^1/_3$ произведения площади ее основания на высоту.

Опыт. Приготовьте из мыла какую-нибудь трехгранную призму, например такую (рис. 400 вверху). Постараемся разрезать ее на трехгранные пирамиды.

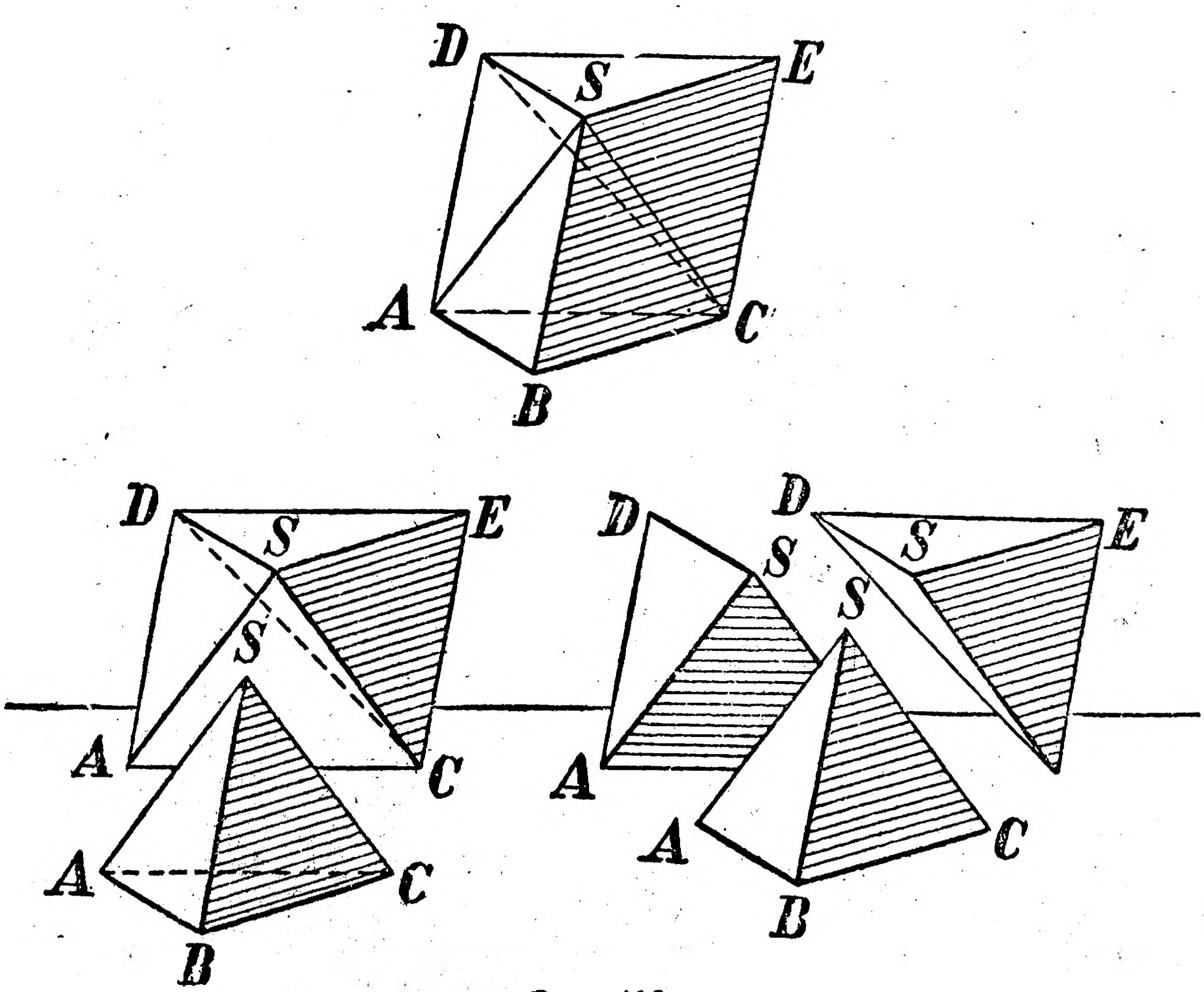


Рис. 400.

Прежде всего отсечем плоскостью SAC пирамиду $SABC$, имеющую такое же основание и высоту, как наша призма. Оставшуюся четырех-

[1]) Чтобы восковая пирамида не всплывала, можно заменить нитку спицей.

[2]) Этот опыт можно заменить таким: сделать все ваши пирамиды открытыми внутри и, наполнив одну из них песком (или водой), пересыпать его в остальные пирамиды.

гранную пирамиду *SADEC* рассечем плоскостью *SDC*, тогда у нас получатся еще две трехгранные пирамиды (*SDEC* и *SADC*). Измерив при помощи градуированного стакана объем вытесняемой каждой пирамидой воды, убедитесь, что эти три пирамиды равновелики.

Как, измерив объем всей призмы, вычислить объем одной пирамиды *SABC*?

Доказательство. Сравним раньше объем первой (*SABC*) и второй (*SDEC*) пирамиды. Если у второй пирамиды принять за основание грань *DSE*, то вершина ее будет в точке *C*, тогда у первой и у второй пирамиды и основание и высоты будут одинаковые, а согласно § 359 такие пирамиды равновелики.

Сравним теперь объем второй *SDEC* и третьей *SDAC* пирамиды. Если за вершины этих пирамид принять точку *S*, то основания их (*DAC* и *DEC*) составят параллелограм *ADEC*. Следовательно, эти пирамиды будут иметь равные основания (диагональ *DC* делит параллелограм на равные треугольники) и равные высоты, а потому пирамиды эти равновелики (§ 359).

Итак, все три пирамиды, входящие в состав призмы, имеют одинаковые объемы, а потому объем одной пирамиды (*SABC*) в три раза меньше объема призмы.

Объем призмы равен произведению площади основания (*ABC*) на высоту.

Так как объем нашей пирамиды (*SABC*) составляет $^1/_3$ объема призмы и так как у этих двух тел основание и высоты одинаковы, то для измерения объема трехгранной пирамиды нужно измерить квадратными единицами площадь ее основания, а линейными единицами высоту, и полученные числа перемножить. Разделив произведение на три, мы и узнаем, сколько кубических единиц содержит объем нашей пирамиды.

Это правило можно короче формулировать так: объем трехгранной пирамиды равен $^1/_3$ произведения площади основания на высоту.

§ 361. Измерение объема многогранной пирамиды.

Теорема. Объем многогранной пирамиды равен $^1/_3$ площади основания, умноженной на высоту.

Доказательство. Надо измерить объем такой пирамиды (рис. 401). Проведем через боковые ребра ряд плоскостей, которые разобьют нашу пирамиду на несколько трехгранных пирамид.

Пусть площади оснований каждой из этих пирамид содержат: b_1, b_2, b_3, b_4 кв. единиц, а высота содержит h лин. единиц, тогда объемы пирамид будут содержать

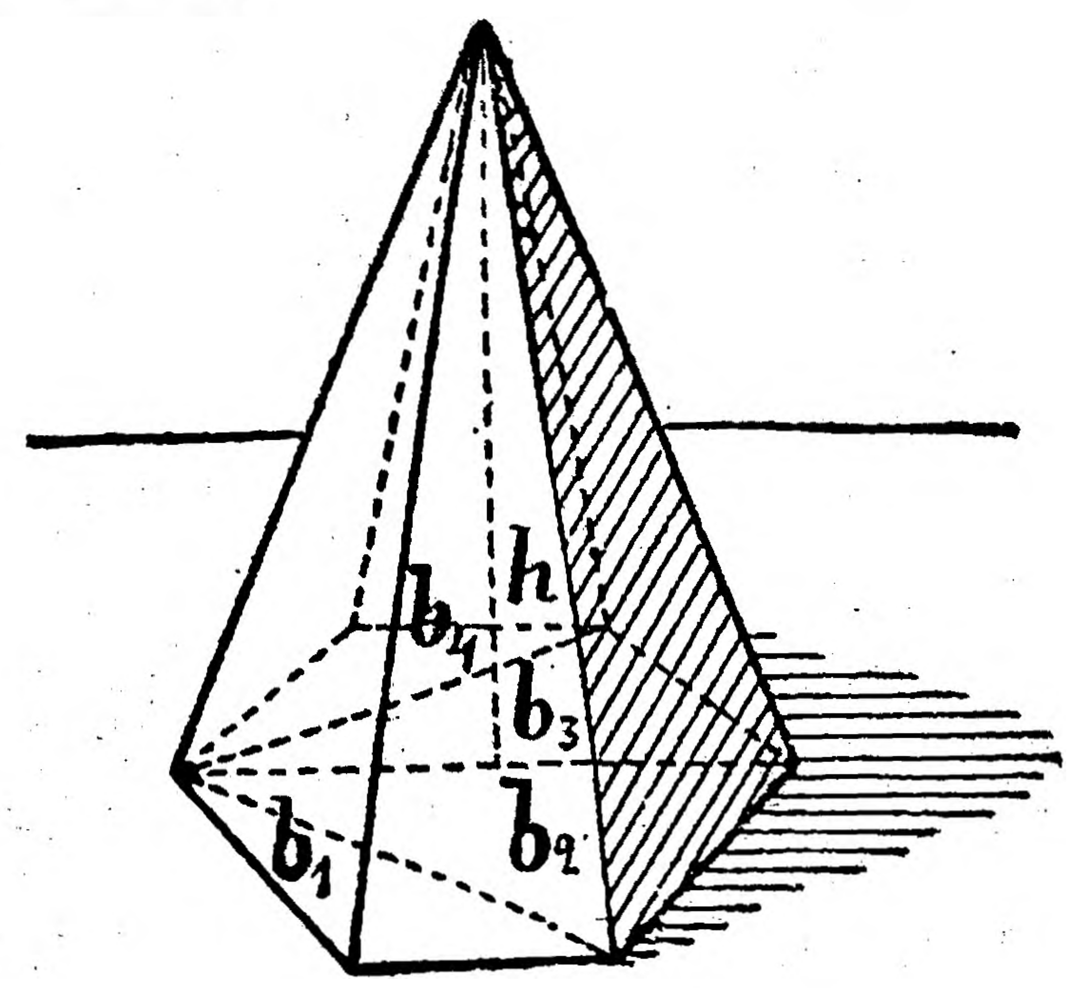


Рис. 401.

$$^1/_3\, b_1 h,\quad ^1/_3\, b_2 h,\quad ^1/_3\, b_3 h,\ \ldots \text{ куб. единиц.}$$

Следовательно, объем всей многогранной пирамиды V будет содержать

$$V = {}^1/_3\, b_1 h + {}^1/_3\, b_2 h + {}^1/_3\, b_3 h + \ldots \text{ куб. ед.,}$$

то-есть

$$V = {}^1/_3\,(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)\, h.$$

Если площадь многоугольника, служащего основанием многогранной пирамиды, содержит B кв. единиц, то

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = B.$$

Следовательно,

$$V = {}^1/_3\, B \cdot h,$$

что и требовалось доказать.

109. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА.

§ 362. Параллельное сечение пирамиды. Пересеките сделанную вами из мыла пирамиду плоскостью, параллельной основанию. В сечении получится многоугольник, подобный многоугольнику, лежащему в основании пирамиды.

Чем ближе к вершине сделано ваше сечение, тем оно меньше. Можно доказать, что площадь параллельного сечения пирамиды во столько раз меньше площади основания, во сколько раз квадрат расстояния этого сечения от вершины меньше квадрата высоты пирамиды.

§ 363. Усеченная пирамида. Рассечем нашу пирамиду (рис. 402) сечением, параллельным основанию; у нас получится многогранник (рис. 403). Он называется усеченной пирамидой.

Усеченная пирамида ограничена с боков трапециями; а сверху и снизу двумя подобными многоугольниками, которые называются основаниями пирамиды. Укажите их.

Если мы получили усеченную пирамиду из правильной пирамиды, то она также называется правильной. У **правильной усеченной пирамиды основания—правильные многоугольники, а боковые грани представляют собою равнобочные трапеции.**

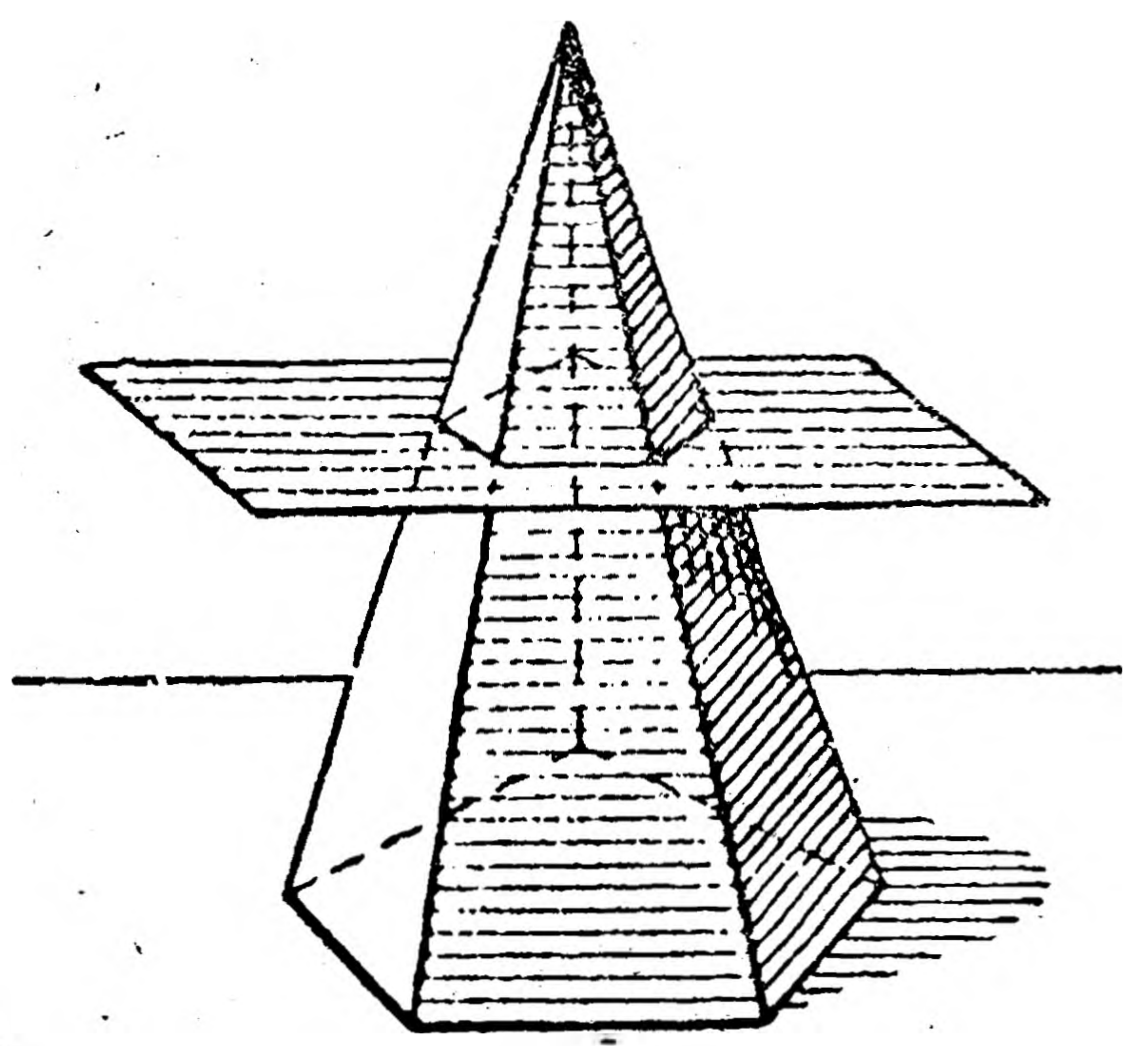


Рис. 402.

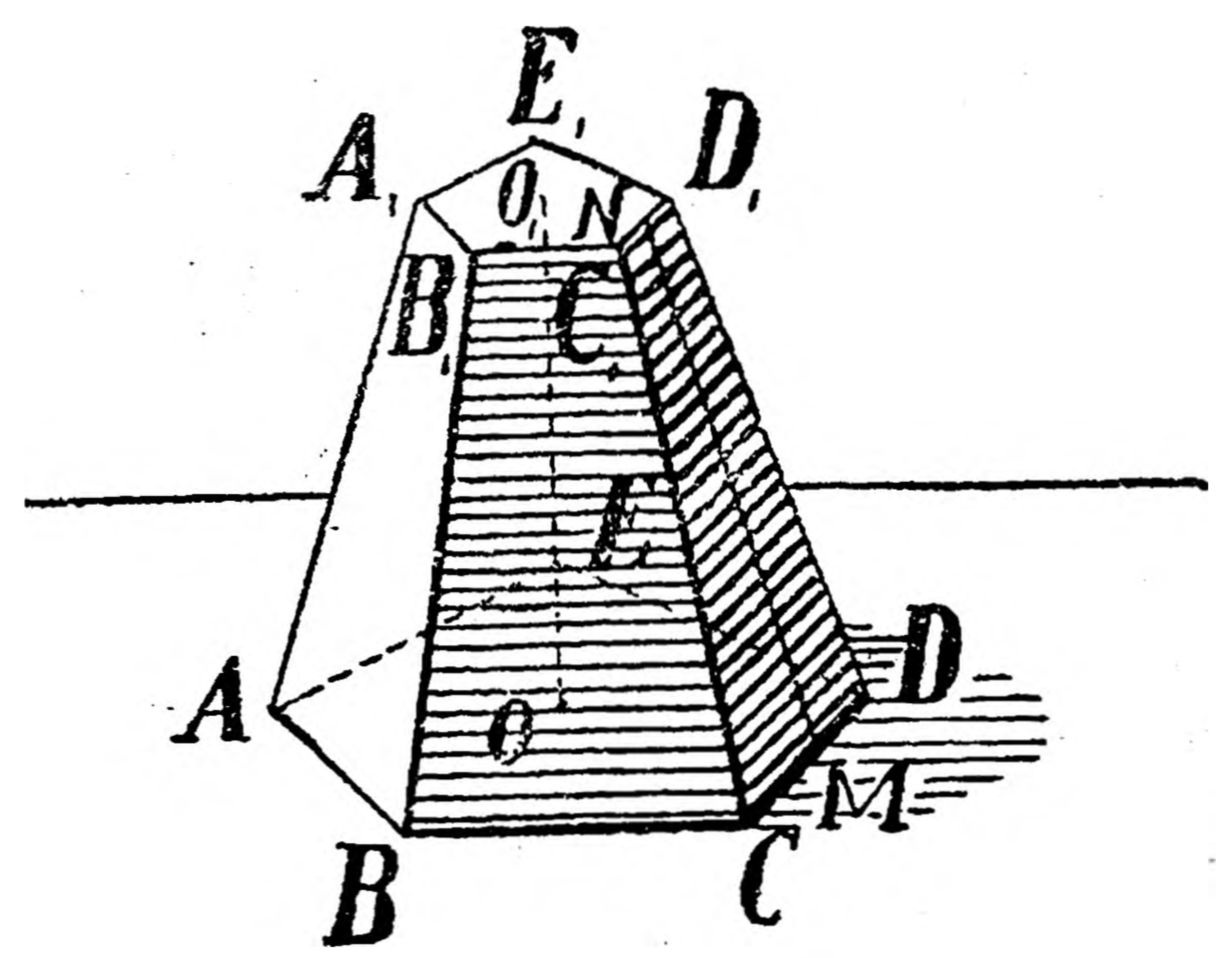


Рис. 403.

Высоты NM у этих трапеций будут одинаковой длины. Называются они **апофемами**. Не смешивайте апофемы пирамиды NM с ее высотою O_1O.

§ 364. Измерение боковой поверхности правильной усеченной пирамиды. Если сторона AB нижнего основания пирамиды содержит a лин. единиц, сторона A_1B_1 верхнего основания содержит b лин. единиц, апофема содержит l лин. единиц, то площадь одной боковой грани содержит

$$\frac{a+b}{2}\cdot l \text{ кв. единиц.}$$

Если пирамида имеет n боковых граней, то ее боковая поверхность

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot l\cdot n\cdot \text{кв. единиц,}$$

что можно преобразовать так:

$$S=\frac{an+bn}{2}\cdot l.$$

Обозначим периметр нижнего основания пирамиды через p_1, а периметр верхнего через p_2, тогда

$$an=p_1; \qquad bn=p_2.$$

Следовательно,

$$S=\frac{p_1+p_2}{2}\cdot l.$$

Итак, для того, чтобы измерить боковую поверхность правильной усеченной пирамиды, надо полученную сумму периметров ее оснований помножить на апофему.

А как узнать полную поверхность этой пирамиды?

§ 365. Измерение объема усеченной пирамиды.

Первый способ. Предположим, что нам нужно измерить объем усеченной пирамиды (рис. 403). Дополним ее до той полной пирамиды, из которой мы получили нашу усеченную. Измерив объем двух образовавшихся пирамид и вычтя из бо̀льшего объема меньший, мы и найдем объем усеченной пирамиды.

Второй способ. Для измерения объема усеченной пирамиды можно еще воспользоваться такой формулой:

если площадь нижнего основания ее содержит B кв. единиц;

если площадь верхнего основания содержит b кв. единиц;

если высота пирамиды содержит H лин. единиц, а объем пирамиды содержит V куб. единиц, то

$$V=\frac{H}{3}\left(B+b+\sqrt{Bb}\right).$$

Упражнения и задачи.

1. Десяток гвоздей весит 35 *г*. Форма их правильная четырехгранная пирамида. Периметр квадратного основания равен $^1/_2$ *см*. Каждый куб. сантиметр железа весит 7 *г*, какой длины эти гвозди?

2. Шатер, обтянутый парусиной, имеет вид правильной четырехгранной пирамиды (рис. 404). $BC=6$ *м*. Длина палки $EB=5$ *м*. Сколько кв. метров парусины пошло на этот шатер?

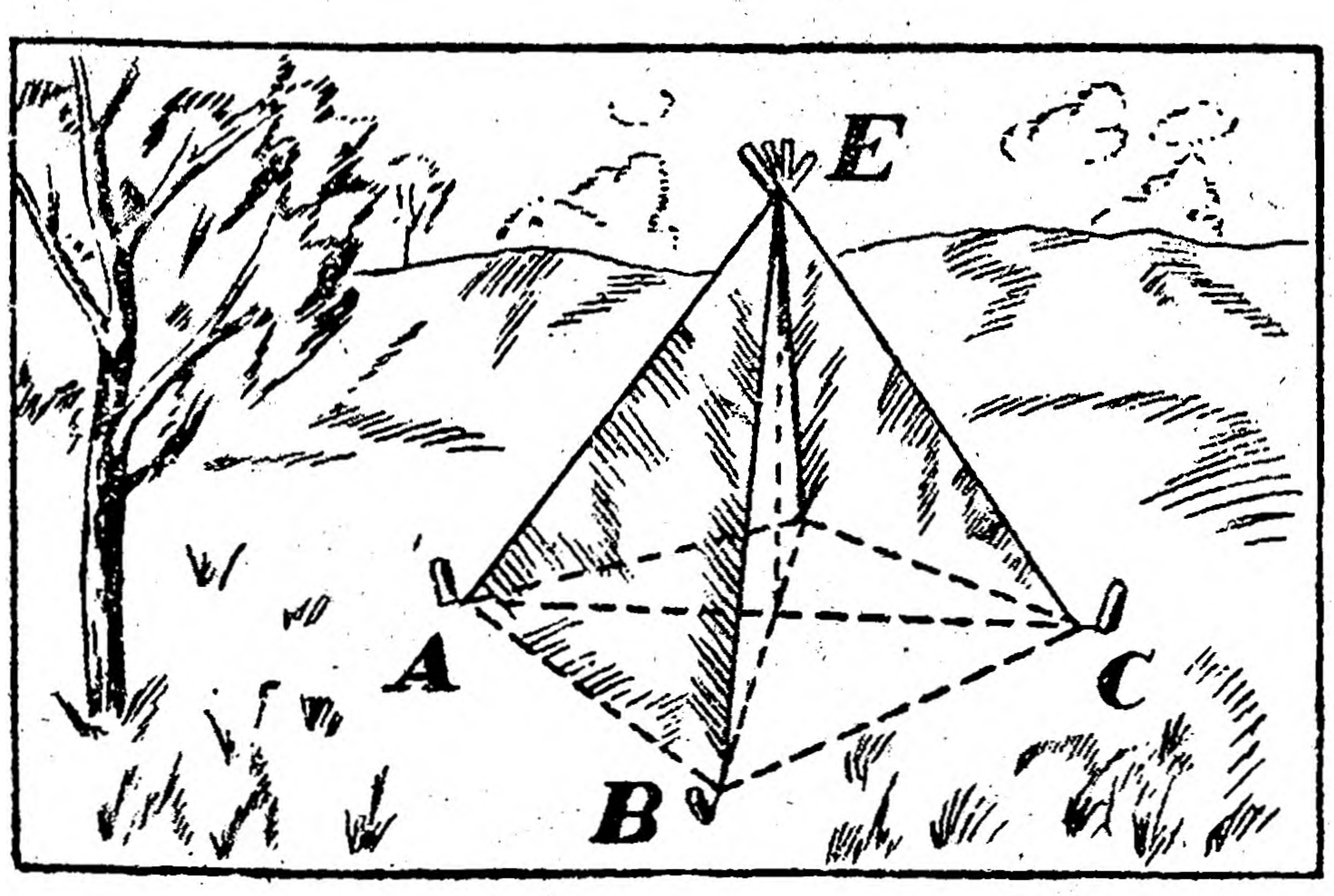


Рис. 404.

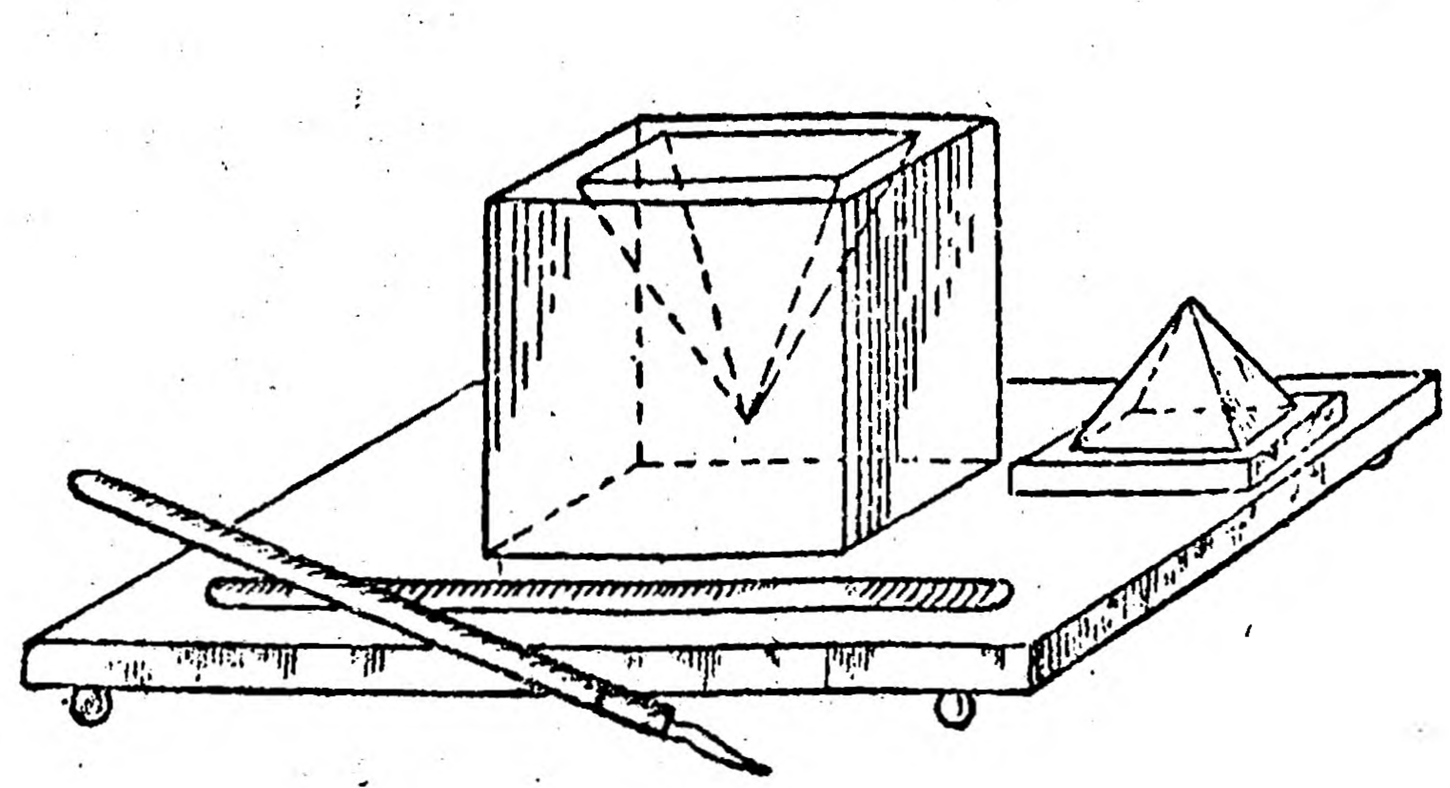


Рис. 405.

3. В Египте есть пирамида, основание которой — квадрат со стороною в 200 *м*, а объем 7 500 000 *куб. м.* Какой высоты эта пирамида?

4. Стеклянная чернильница имеет форму куба с ребром в 7 *см* (рис. 405). Углубление для чернил имеет форму правильной четырехгранной пирамиды и не доходит до основания чернильницы на 2 *см*. Стороны основания пирамиды отстоят от сторон основания куба на 1 *см*. Сколько можно влить чернил в эту чернильницу?

ГЛАВА XXVIII.

КРУГЛЫЕ ТЕЛА.

110. ЦИЛИНДР.

§ 366. *Теорема.* **Боковая поверхность цилиндра равна длине окружности основания, умноженной на образующую.**

Обведите ладонью руки боковую поверхность цилиндра, склеенного вами из картона (рис. 406).

Разрежем поверхность цилиндра по окружности верхнего и нижнего основания и вдоль его образующей и развернем его поверхность на плоскости. Мы получим тогда развертку (рис. 81, стр. 44). [1]) Боковая поверхность цилиндра примет вид прямоугольника. Измерив площадь этого прямоугольника, узнайте, чему равна боковая поверхность цилиндра.

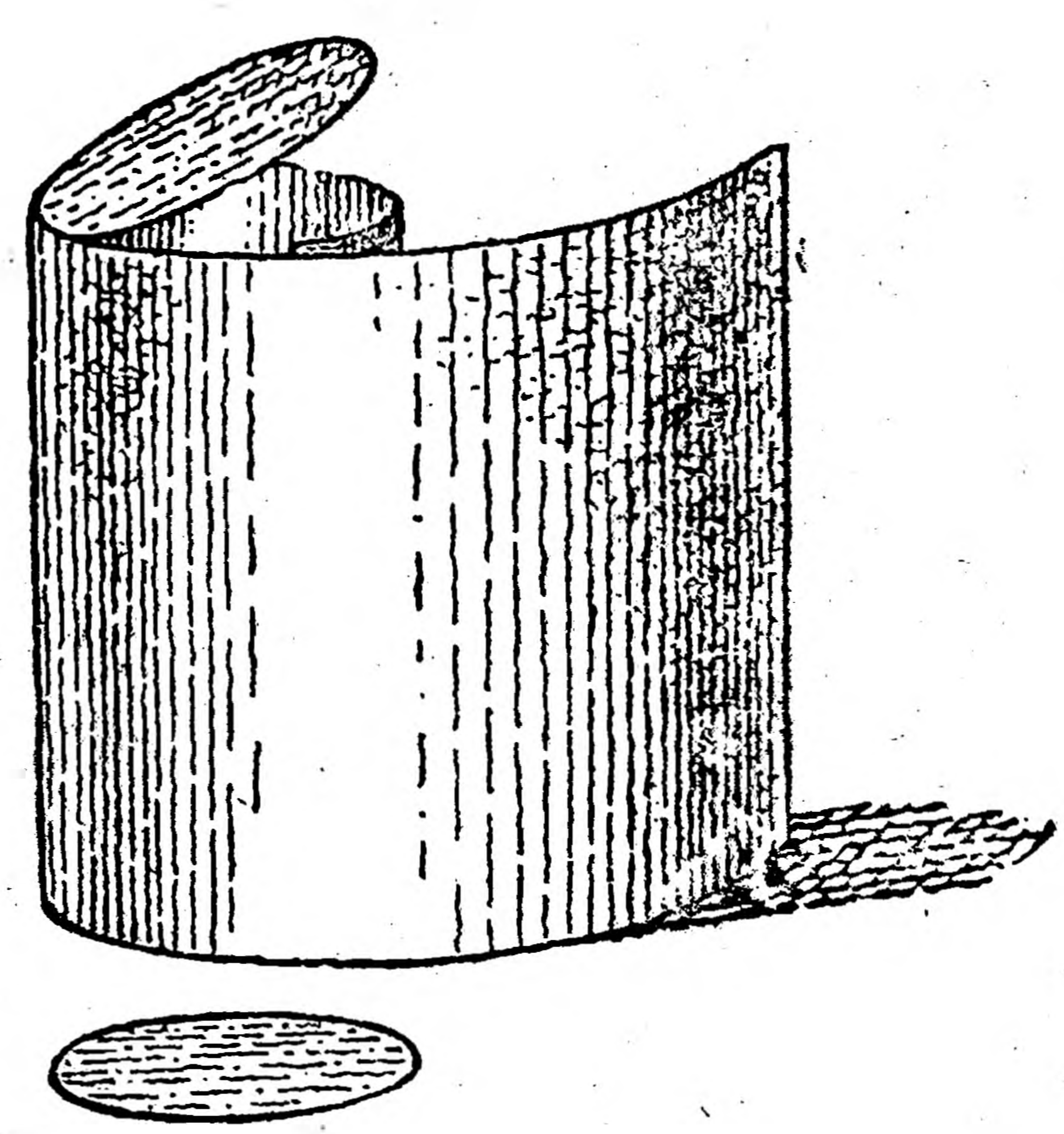


Рис. 406.

Доказательство. Боковая поверхность цилиндра при развертке приняла вид прямоугольника, основание которого равно длине окружности основания цилиндра, а высотою служит образующая цилиндра. Следовательно, боковая поверхность цилиндра равна длине окружности основания, помноженной на образующую (или на высоту цилиндра).

---

[1]) Вместо того, чтобы разрезывать цилиндр, можно, обхватив его поверхность со всех сторон листом бумаги, вырезать контуры развертки.

Формула. Если радиус основания цилиндра содержит r линейных единиц, а высота цилиндра содержит h лин. единиц, то длина окружности основания содержит (§ 302) $2\pi r$ лин. единиц.

Следовательно, боковая поверхность содержит

$$S = 2\pi r \cdot h \text{ кв. единиц.}$$

§ 367. Полная поверхность цилиндра. Чтобы вычислить полную поверхность цилиндра, надо к боковой поверхности прибавить площади обоих оснований его.

Если радиус основания содержит r лин. единиц, то площадь одного из оснований содержит πr^2 кв. единиц, а площадь обоих оснований содержит $2\pi r^2$ кв. единиц. Следовательно, полная поверхность цилиндра содержит

$$P = 2\pi rh + 2\pi r^2 \text{ кв. единиц,}$$

или

$$P = 2\pi r\,(h + r) \text{ кв. единиц.}$$

§ 368. Измерение объема цилиндра.

Теорема. Объем цилиндра равен площади основания его, умноженной на высоту.

Опыт. Приготовьте из бумаги (или цинка) цилиндр и призму (лучше всего взять прямоугольный параллелепипед) одинаковой высоты и с равновеликими основаниями, срежьте их верхние основания. Наполнив эти тела песком или водою, убедитесь, что они имеют одинаковые объемы. Чему, следовательно, равен объем вашего цилиндра?

Доказательство. Впишем в наш цилиндр какую-нибудь правильную призму, например, четырехгранную (рис. 407).

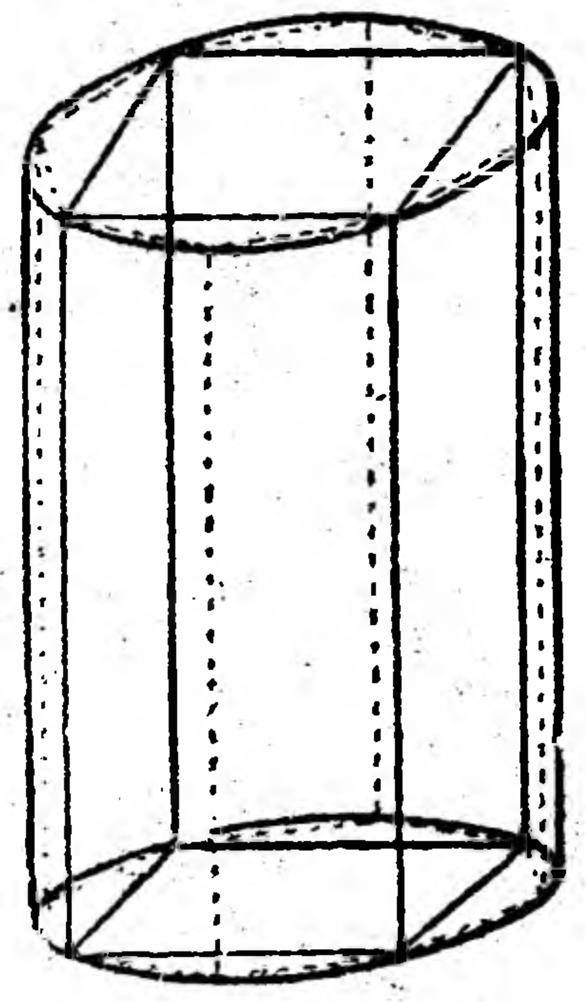


Рис. 407.

Если площадь ее основания содержит b_1 кв. единиц, а высота (равная высоте цилиндра) содержит h лин. единиц, то объем этой призмы

$$V = b_1 h \text{ куб. единиц.} \qquad (1)$$

Начнем теперь неограниченно увеличивать число граней этой вписанной призмы (заменим 4-гранную призму сначала 8-гранной, потом 16-гранной, 32-гранной и т. д.). Тогда объем ее (V_1) начнет стремиться к объему цилиндра (V), а площадь основания призмы (b_1) — к площади основания цилиндра (b).

Заменяя в формуле (1) переменные величины их пределами, получим, что объем цилиндра

$$V = bh \text{ куб. единиц.} \qquad (2)$$

Но площадь основания цилиндра

$$b = \pi r^2 \text{ кв. единиц (§ 306),}$$

где r — радиус основания, следовательно, объем цилиндра

$$V = \pi r^2 h \text{ куб. единиц.}$$

111. КОНУС.

§ 369. Измерение поверхности конуса.

Теорема. Боковая поверхность конуса равна окружности его основания, умноженной на половину образующей.

Опыт. Разрежьте поверхность конуса, сделанного вами из картона, по образующей и по окружности основания, и разверните ее в одну плоскость. Вы получите развертку конуса.

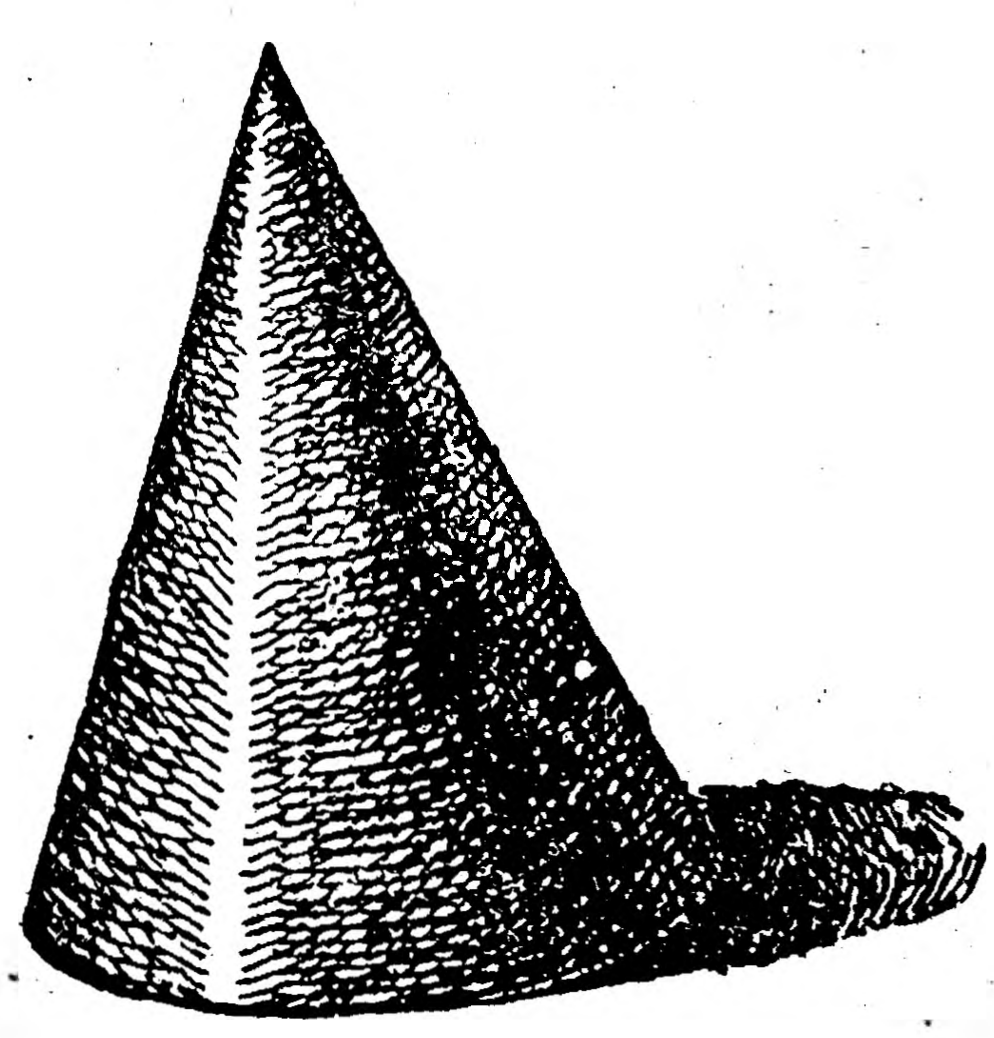


Рис. 408.

Измерив площадь полученного сектора, узнайте, скольким квадратным единицам равна боковая поверхность конуса.

А как измерить полную поверхность его?

Доказательство. Измерим сначала боковую поверхность конуса. Она представляет в развертке сектор CAB (рис. 409).

Площадь этого сектора равна половине длины дуги AB, помноженной на радиус сектора CL (§ 207); но длина дуги AB равна окружности основания конуса, а CL есть его образующая, следовательно, боковая поверхность конуса равна половине длины окружности, помноженной на образующую (не на высоту).

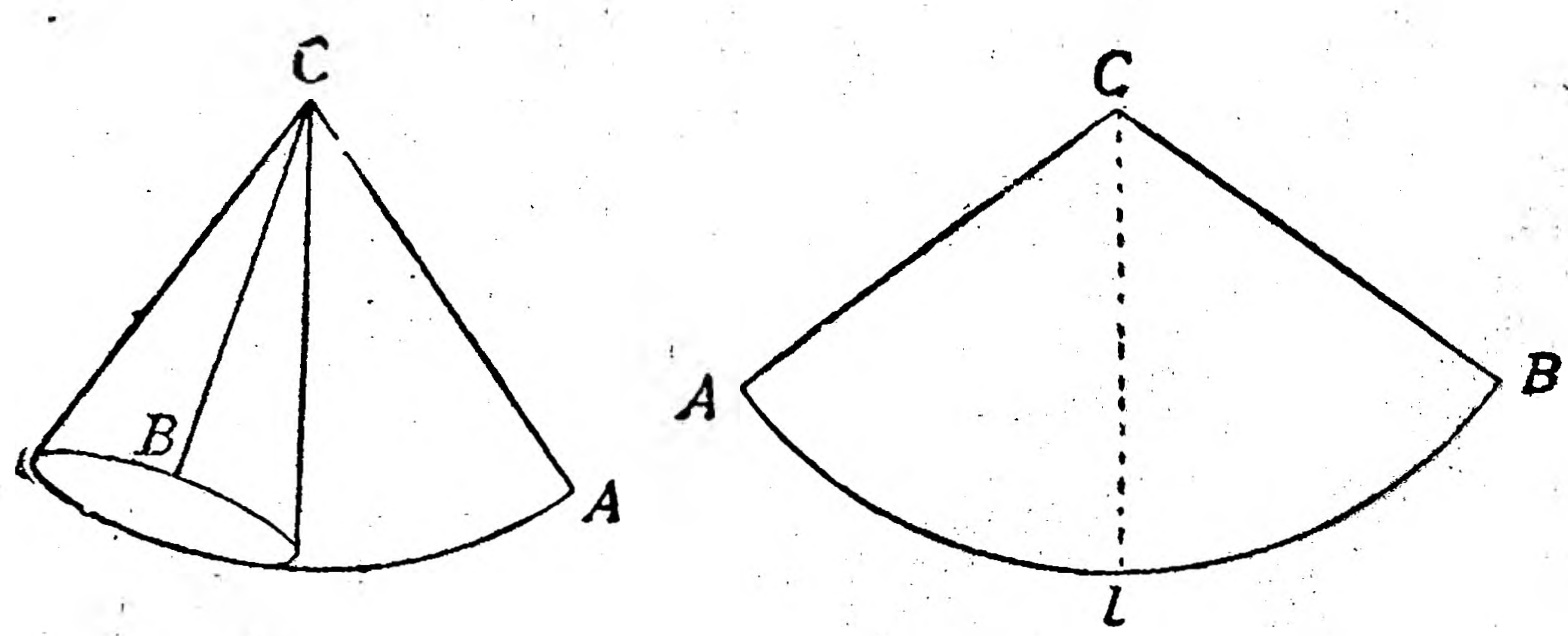


Рис. 409.

Для того, чтобы вычислить полную поверхность конуса, надо к боковой поверхности добавить площадь основания.

Формула. Если радиус основания конуса содержит r лин. единиц, если образующая конуса содержит l лин. единиц, то боковая поверхность его содержит $S=\frac{2\pi rl}{2}$ кв. единиц.

Полная поверхность

$$P=\pi rl+\pi r^2=\pi r\ (l+r) \text{ кв. единиц.}$$

§ 370. Измерение объема конуса.

Теорема. Объем конуса равен $^1/_3$ площади основания, умноженной на высоту.

Опыт. Сравните объемы конуса и цилиндра, у которых площади оснований и высота одинаковые. Наполнив цилиндр песком (или водой) и пересыпая его в конус, убедитесь, что объем такого конуса составляет $^1/_3$ часть объема цилиндра. Как, следовательно, измерить объем конуса?

Доказательство. Впишем в наш конус какую-нибудь правильную пирамиду. Объем ее равен $^1/_3$ площади основания, умноженной на высоту (§ 361).

Начнем неограниченно увеличивать число граней этой пирамиды. Тогда объем ее начнет неограниченно приближаться к объему конуса, а площадь основания будет стремиться к площади круга, служащего основанием конуса (высота же пирамиды все время будет оставаться равной высоте конуса). А потому: объем конуса равен $^1/_3$ площади основания, умноженной на высоту.

Формула. Если радиус основания конуса содержит r лин. единиц, высота конуса содержит h лин. единиц, то

$$\text{объем конуса } V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ куб. единиц.}$$

§ 371. Усеченный конус. Отрежьте от конуса его верхушку плоскостью, параллельной основанию (рис. 410). У вас получится тело, называемое усеченным конусом. Высотою этого конуса называется перпендикуляр, опущенный из верхнего основания на нижнее, например, OO_1 (рис. 411).

Усеченный конус можно еще получить вращением трапеции $ABOO_1$ вокруг OO_1 (рис. 411). Тогда AB опишет боковую поверхность конуса, а стороны AO_1 и BO — основания его. OO_1 будет осью конуса. Прямая AB называется образующей.

Поверхность и объем усеченного конуса можно рассматривать как предел, к которому стремится поверхность и объем правильных усеченных пирамид, вписанных в конус, если число их граней заставить не ограниченно увеличиваться.

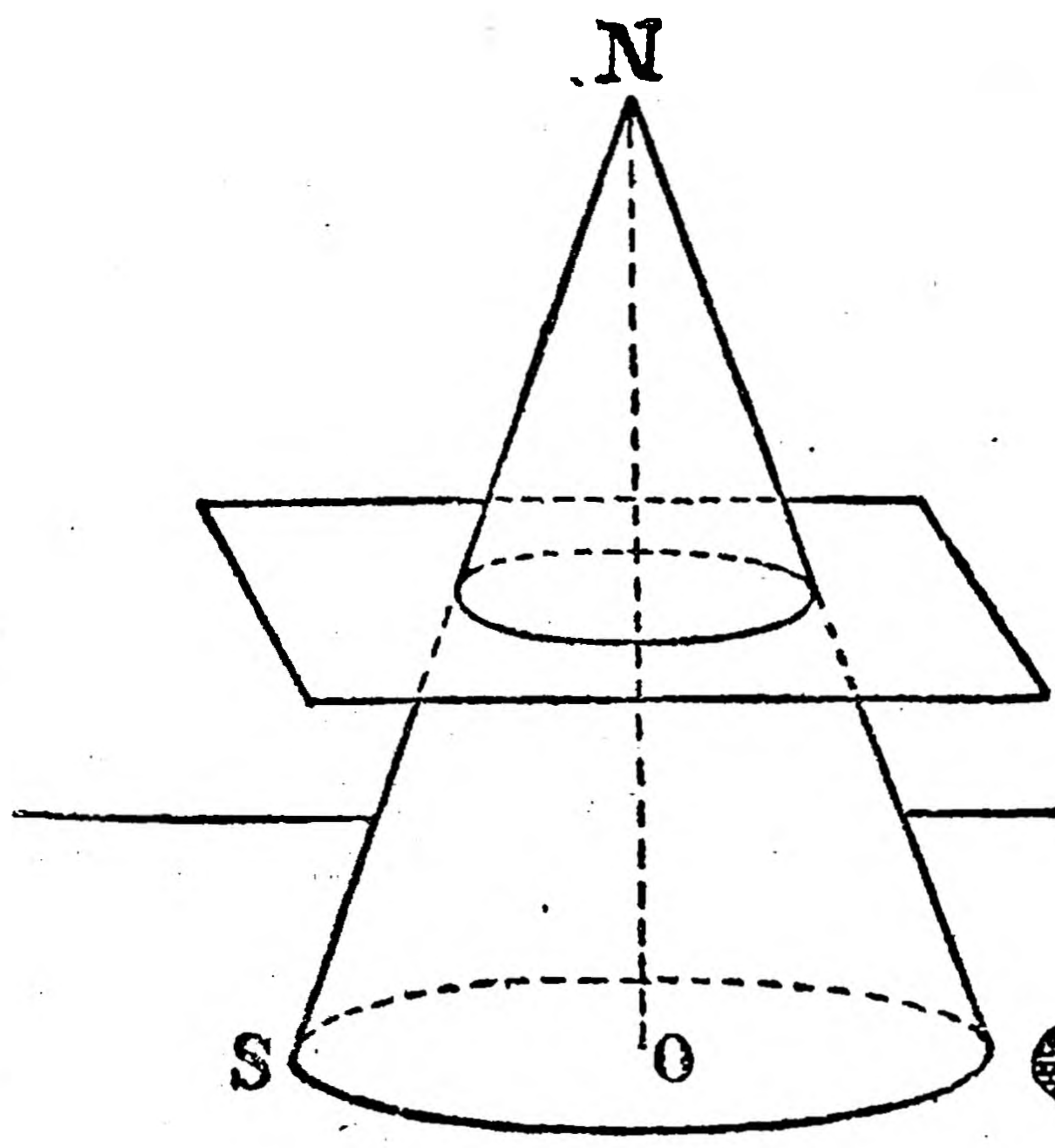


Рис. 410.

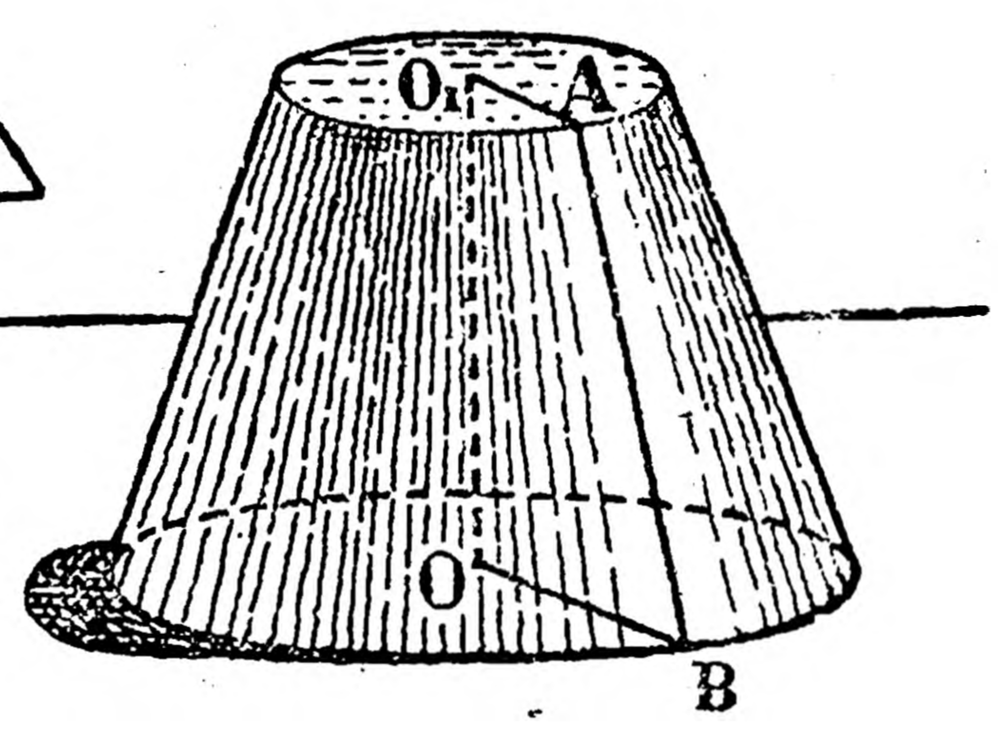


Рис. 411.

При этом основания пирамид стремятся к основанию конуса, апофема имеет своим пределом образующую, а высота у пирамид и у конуса одна и та же.

А потому: боковая поверхность усеченного конуса равна полусумме окружностей ее двух оснований, умноженной на образующую.

Формула. Если радиус нижнего основания усеченного конуса содержит R лин. единиц, если радиус верхнего основания — r лин. единиц, если образующая — l лин. единиц, то боковая поверхность

$$S = \pi l \ (R + r) \text{ кв. единиц.}$$

Полная поверхность усеченного конуса равна боковой поверхности, сложенной с площадями обоих оснований.

§ 372. Объем усеченного конуса. Объем усеченного конуса можно измерить двумя способами.

Первый способ. Дополнив усеченный конус до полного (рис. 412), надо из объема полного конуса (NCD) вычесть объем конуса добавочного (NAB).

Второй способ. Если в формулу для измерения объема усеченной пирамиды (§ 365) вставить те пределы, к которым стремятся входящие сюда величины при неограниченном увеличении числа граней вписываемых в конус пирамид, то мы найдем, что объем усеченного конуса

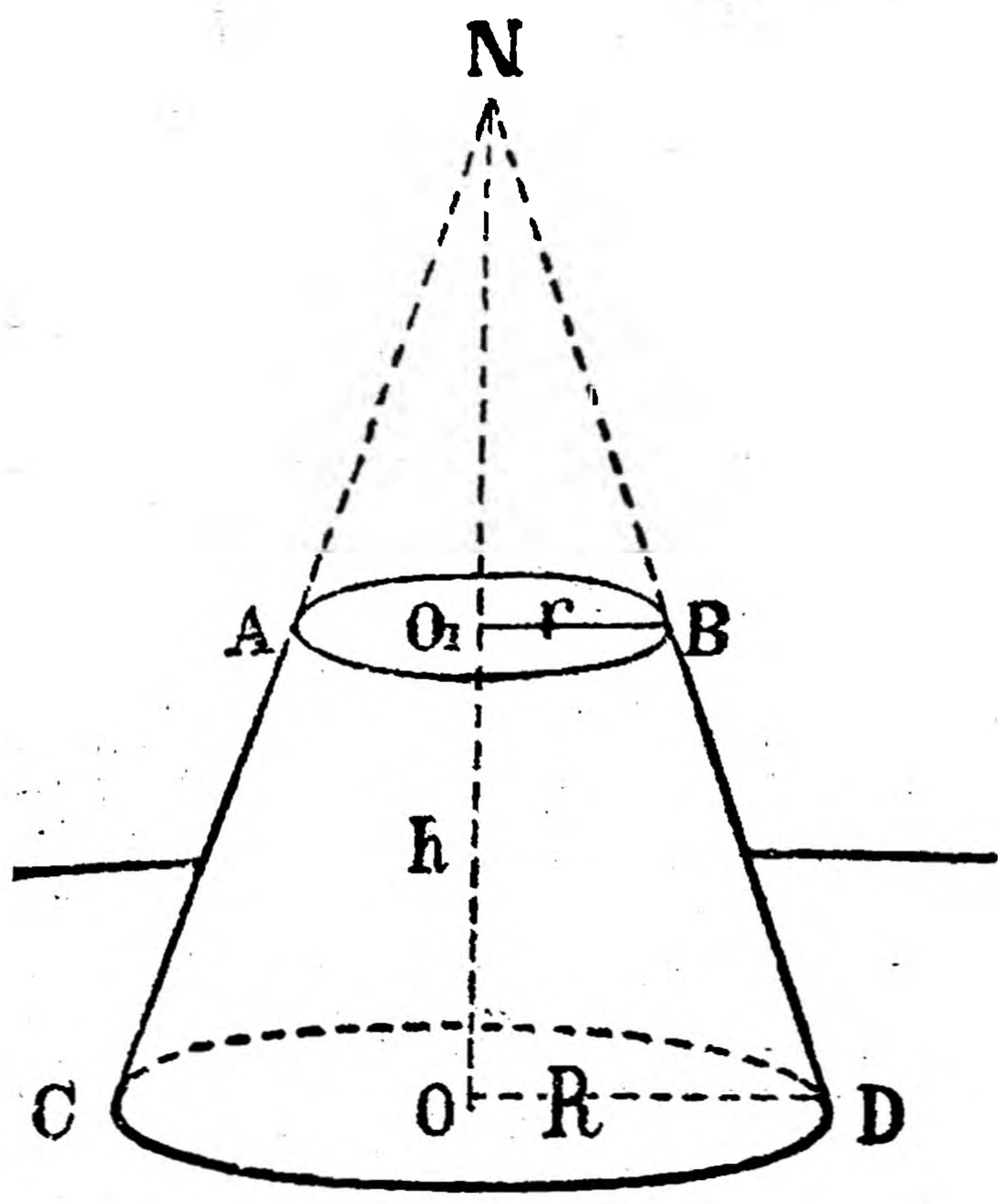


Рис. 412.

$$V = {}^1/_3\, h\,(B + b + \sqrt{Bb}),$$

где h — высота конуса, b — площадь верхнего основания, B — площадь нижнего основания.

Если выразить площади кругов, лежащих в основаниях, b и B через радиусы (r и R) и сделать алгебраические упрощения, то для измерения объема усеченного конуса получим такую формулу:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

112. ШАР.

§ 373. Измерение поверхности шара. Шаром мы назвали тело, поверхность которого обладает тем свойством, что все расположенные на ней точки одинаково удалены от центра.

Вспомните все то, что вы выучили о шаре в § 64, стр. 39. (Что такое радиус и диаметр шара, большой и малый круг?)

Теорема 1. Поверхность шара равна учетверенной площади его большого круга.

Опыт. Сделайте аккуратно из глины [1]) (или воска) большой шар и разрежьте его пополам.

Обведите ладонью руки поверхность образовавшегося полушария и площадь большого круга.

Обмотайте достаточно толстой веревкой [2]) поверхность полушара и площадь большого круга (рис. 413).

---

[1]) Удобнее всего воспользоваться полушаром, выточенным из мягкого дерева.
[2]) Для этого опыта можно взять веревку в 5—6 *мм* толщины.

Сравните длины полученных веревок, узнайте, во сколько раз поверхность шара больше площади большого круга. У вас должно оказаться, что поверхность шара в 4 раза больше площади большого круга.

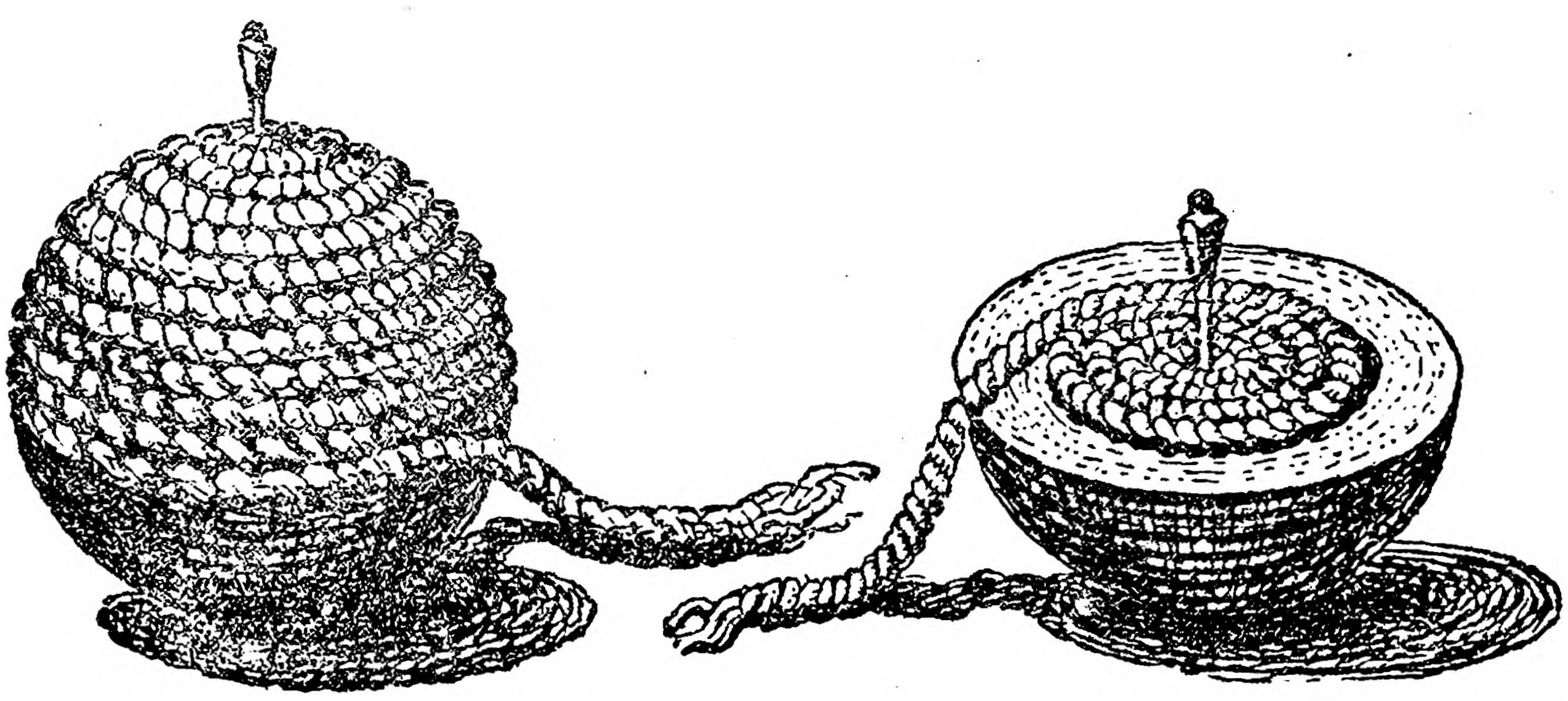


Рис. 413.
Измерение поверхности шара.

Формула. Если радиус шара содержит r лин. единиц, то площадь большого круга содержит πr^2 кв. единиц. Следовательно, поверхность шара содержит

$$4\pi r^2 \text{ кв. единиц.}$$

Теорема 2. **Поверхность шара равна боковой поверхности описанного около него цилиндра.**

Опыт. Возьмите какой-нибудь шар, например, детский мяч, и положите его в такую цилиндрическую коробку, чтобы поверхность шара касалась поверхности цилиндра (вдоль экватора) и чтобы оба основания цилиндра касались (своими центрами) поверхности шара (рис. 414). Про такой цилиндр говорят, что он **описан около шара.**

Сравним поверхность шара с боковой поверхностью описанного вокруг него цилиндра.

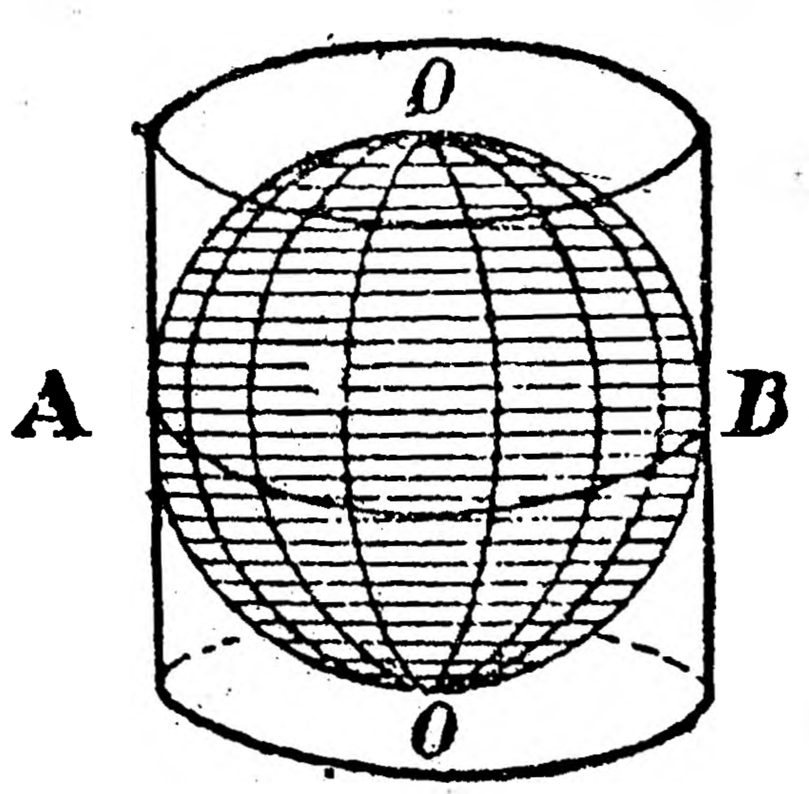


Рис. 414.

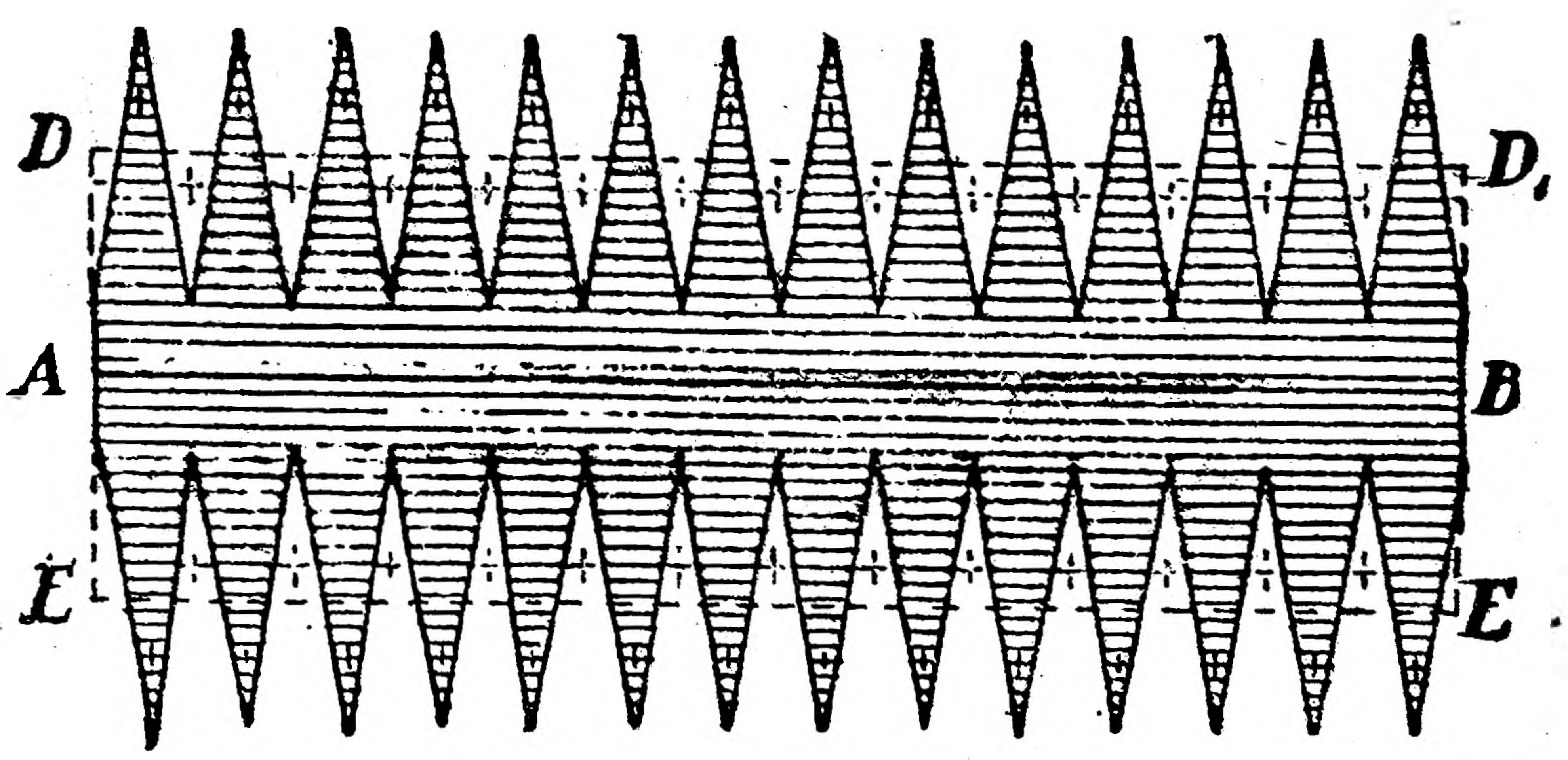


Рис. 415.

Развернем сначала в плоскость боковую поверхность цилиндра. У нас получится прямоугольник DD_1E_1E (рис. 415). Что служит основанием и высотою этого прямоугольника? Почему?

Постараемся теперь превратить в прямоугольник и поверхность шара. Для этого разрежем эту поверхность вдоль меридианов на 12 равных частей (рис. 414) и развернем[1] их в одну плоскость. Мы получим фигуру, очень похожую на заштрихованную фигуру рисунка 415.

По обе стороны от AB проходят две параллельные прямые DD_1 и EE_1, каждая на расстоянии от AB, равном радиусу шара.

Отрезав вдоль по этим прямым (DD_1 и EE_1) части зубцов и вложив их в оставшиеся промежутки между зубцами, мы получим прямоугольник DD_1E_1E (рис. 416).

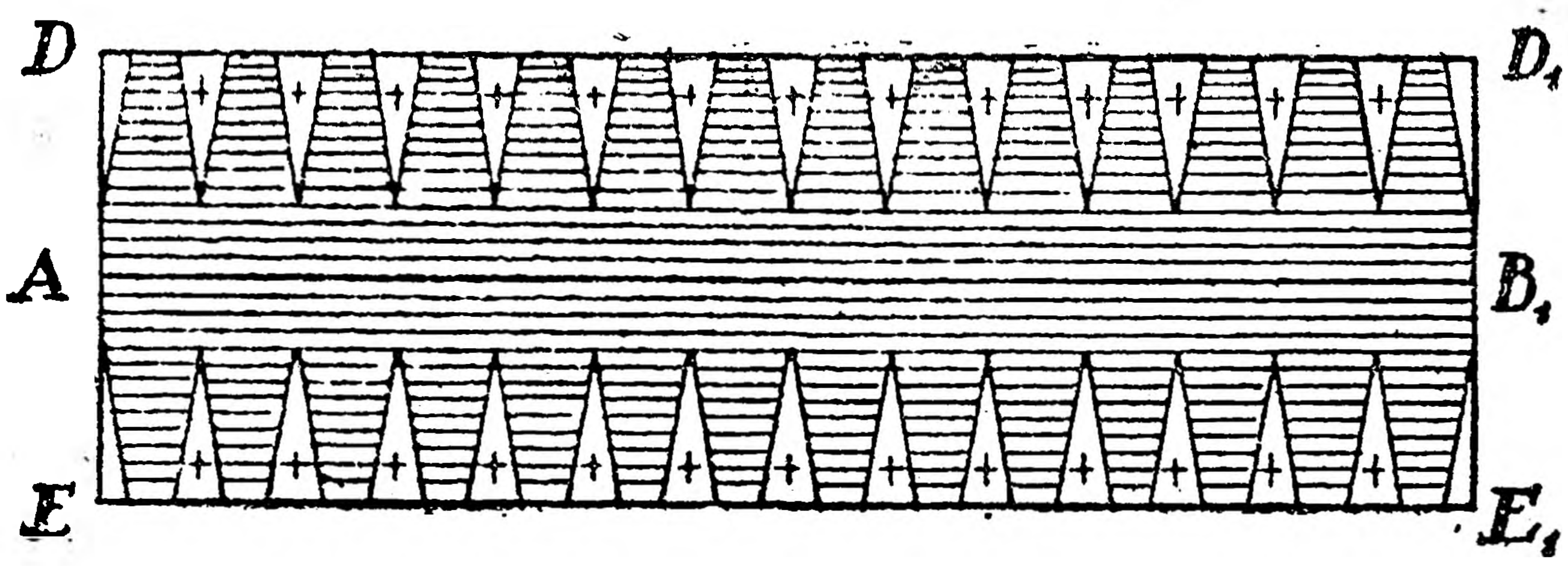


Рис. 416.

У этого прямоугольника основанием будет служить экватор шара, а высотою его диаметр.

Таким образом оказалось, что поверхность шара равна боковой поверхности описанного цилиндра.

Вывод формулы. Если радиус шара содержит r *см*, то экватор его содержит $2\pi r$ *см*, высота описанного цилиндра содержит $2r$ *см*, следовательно, поверхность шара содержит $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$ *кв. см*,

$$S = 4\pi r^2.$$

§ 374. Измерение объема шара.

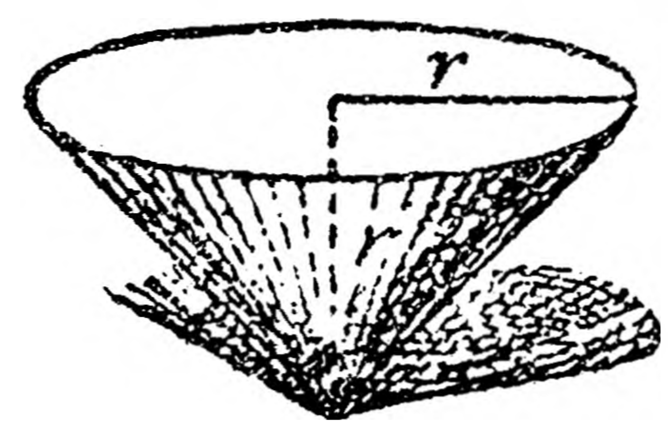
Теорема. Объем шара равен его поверхности, умноженной на $^1/_3$ радиуса.

---

[1]) Строго говоря, поверхность шара развернуться вполне точно в плоскость не может; это можно сделать только приближенно. К приближенному способу нахождения развертки шара приходится, например, прибегать в географии, изображая шаровую поверхность земли на плоской географической карте.

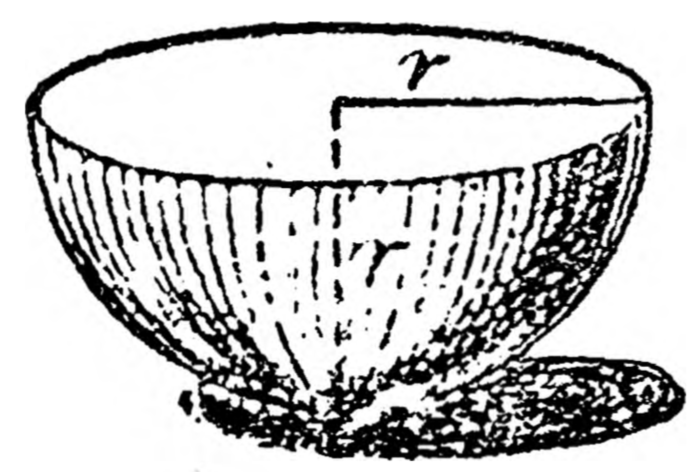
Опыт. Возьмите сделанные из жести или цинка пустые внутри конус и полушар, при чем конус должен быть таким, чтобы радиус его основания и его высота равнялись радиусу полушара (рис. 417 вверху).

Объем такого конуса



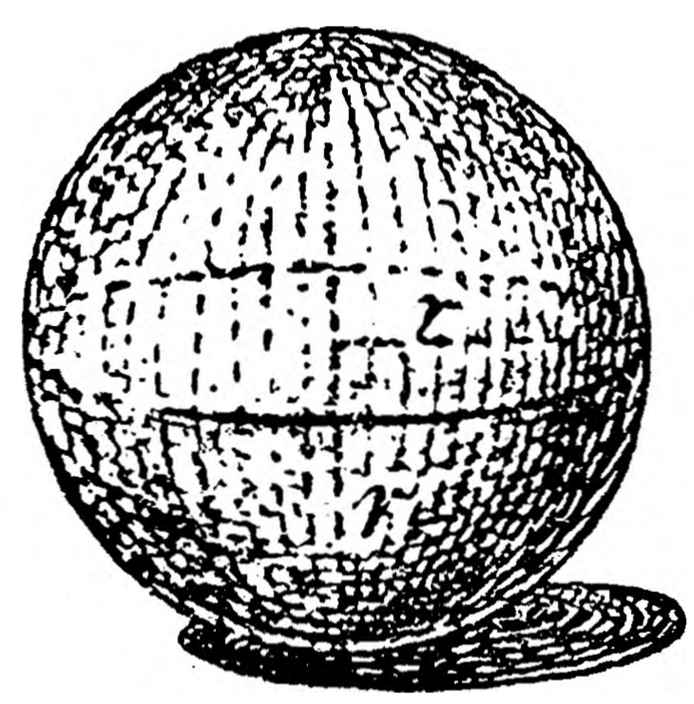
равен $^1/_3\ \pi\ r^3$

Объем такого полушара



равен $^2/_3\ \pi\ r^3$

Следовательно объем шара



равен $^4/_3\ \pi\ r^3$

Рис. 417.

Наполнив полушар водою и перелив ее в конус, узнайте, во сколько раз объем всего шара больше объема этого конуса. Как вывести из этого опыта правило для измерения объема шара?

Результат опыта. Объем шара окажется в 4 раза больше объема этого конуса. Если радиус шара содержит r лин. единиц, то объем конуса содержит $^1/_3\ \pi r^2 \cdot r$ куб. единиц $= {^1/_3}\ \pi r^3$ куб. единиц.

Следовательно, объем шара $V = {^4/_3}\ \pi r^3$ куб. единиц.

Докажем справедливость этой формулы для любого шара.

Разрежем шар по плоскостям, проходящим через центр его. Тогда шар наш разрежется на куски, один из которых изображен на рис. 418 внизу. Каждый из этих кусков похож на пирамиду, осно-

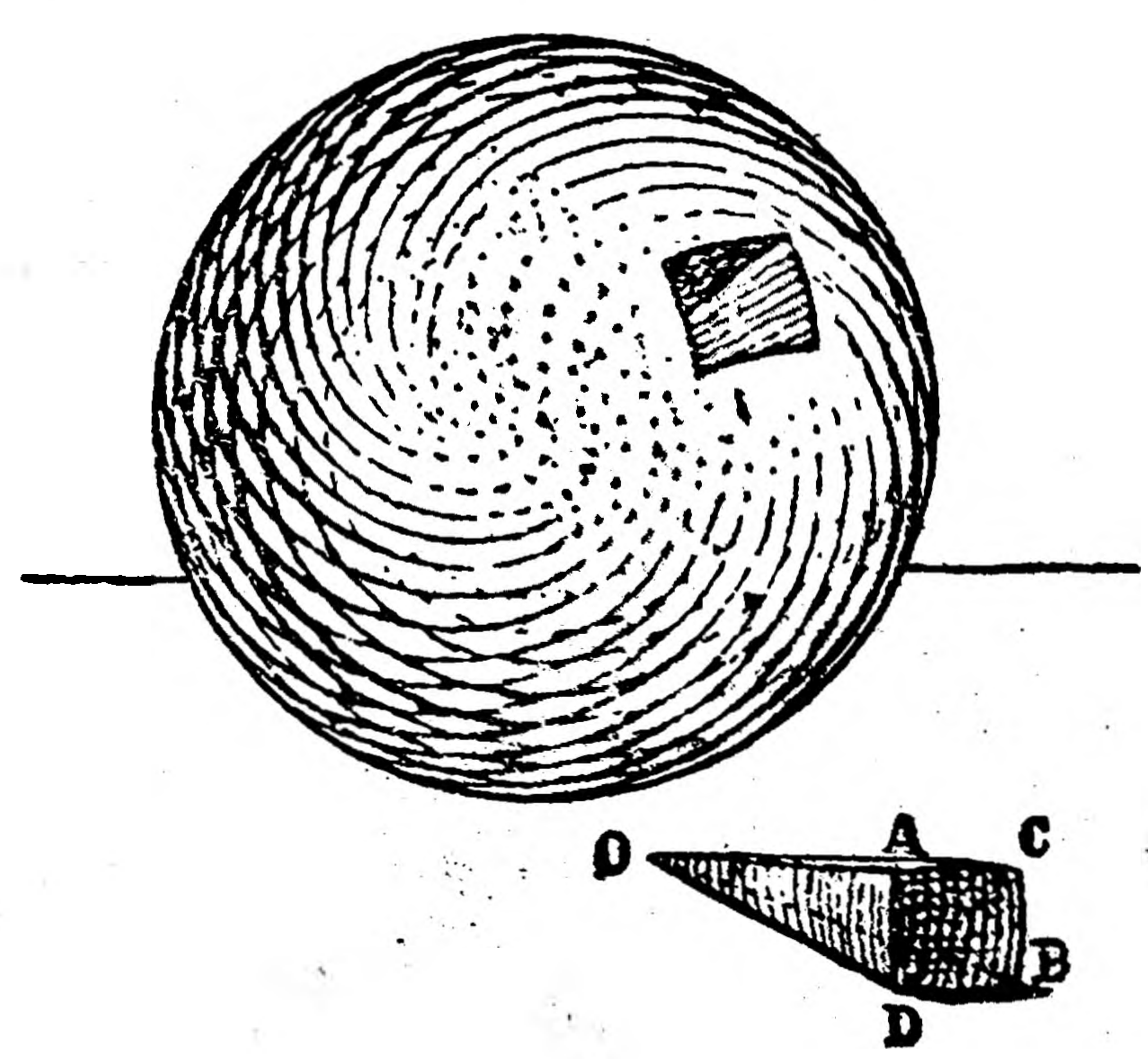


Рис. 418.

ванием которой служит часть поверхности шара $ACBD$, а высотою — радиус шара. Чем на большее число таких кусков вы разрежете шар, тем больше каждый кусок будет приближаться по своей форме к пирамиде.

Объем каждого куска равен $^1/_3$ поверхности основания, умноженной на радиус шара. Следовательно, объем всех этих кусков равен $^1/_3$ поверхности шара, умноженной на радиус.

А потому объем шара

$$V = {}^1/_3\, r \cdot S \text{ куб. единиц},$$

то-есть объем шара $= {}^1/_3$ его поверхности, умноженной на радиус, а так как $S = 4\pi r^2$ (§ 373), то

$$V = {}^4/_3\, \pi r^3.$$

Упражнения и задачи.

1. Игрушечное корыто имеет форму и размеры, указанные (в сантиметрах) на рис. 419 (боковые стенки — полукруги). Узнайте объем его.

2. Приняв ваш самовар за цилиндр, измерьте его объем и узнайте, сколько чайных стаканов вмещает он.

3. Надо было узнать объем колонны, имеющей форму цилиндра. Для этого измерили высоту ее, оказавшуюся равной 6 *м*, затем узнали, что длина окружности основания колонны равна 3,1 *м*. Чему равен объем этой колонны?

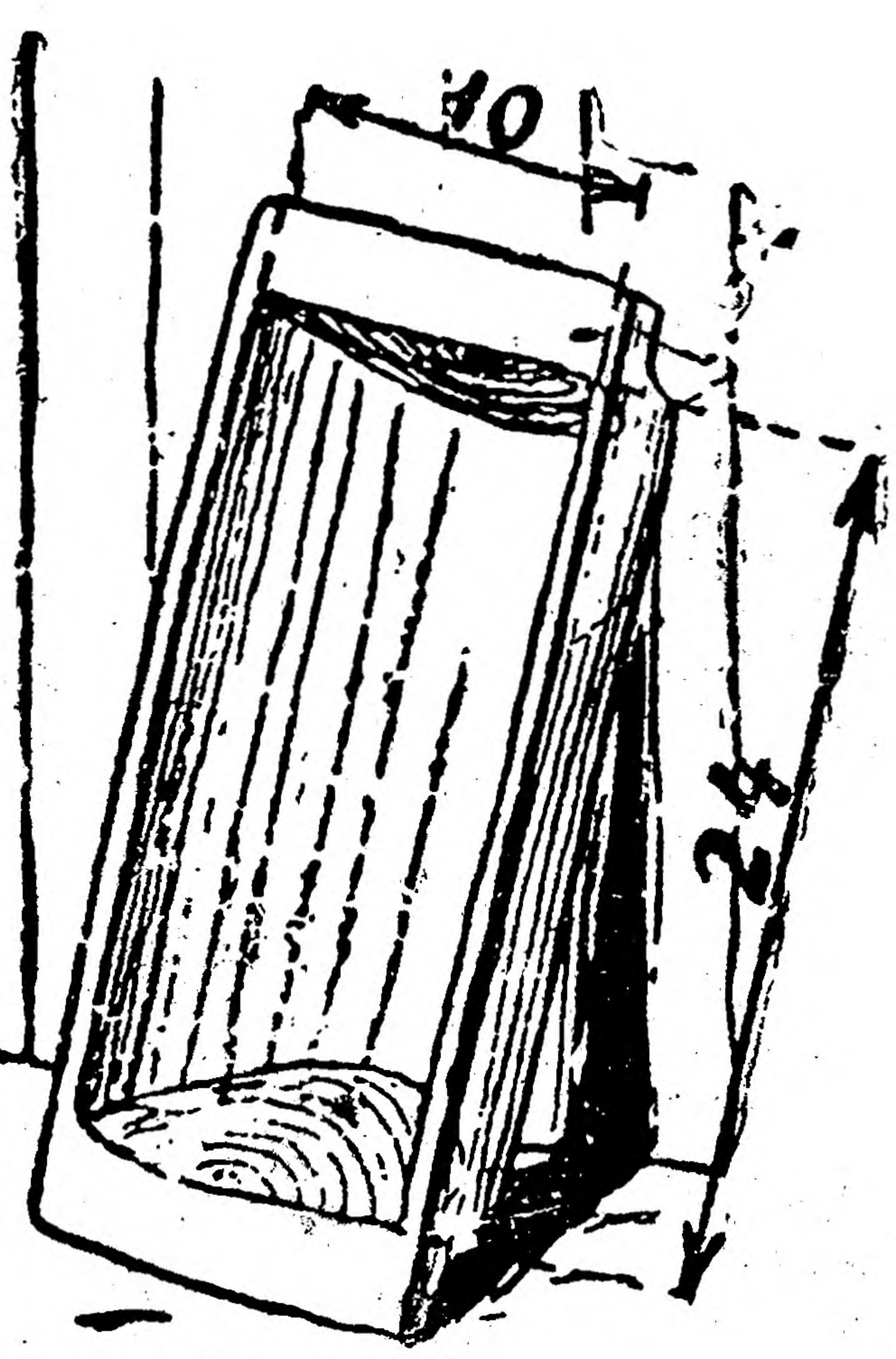


Рис. 419.

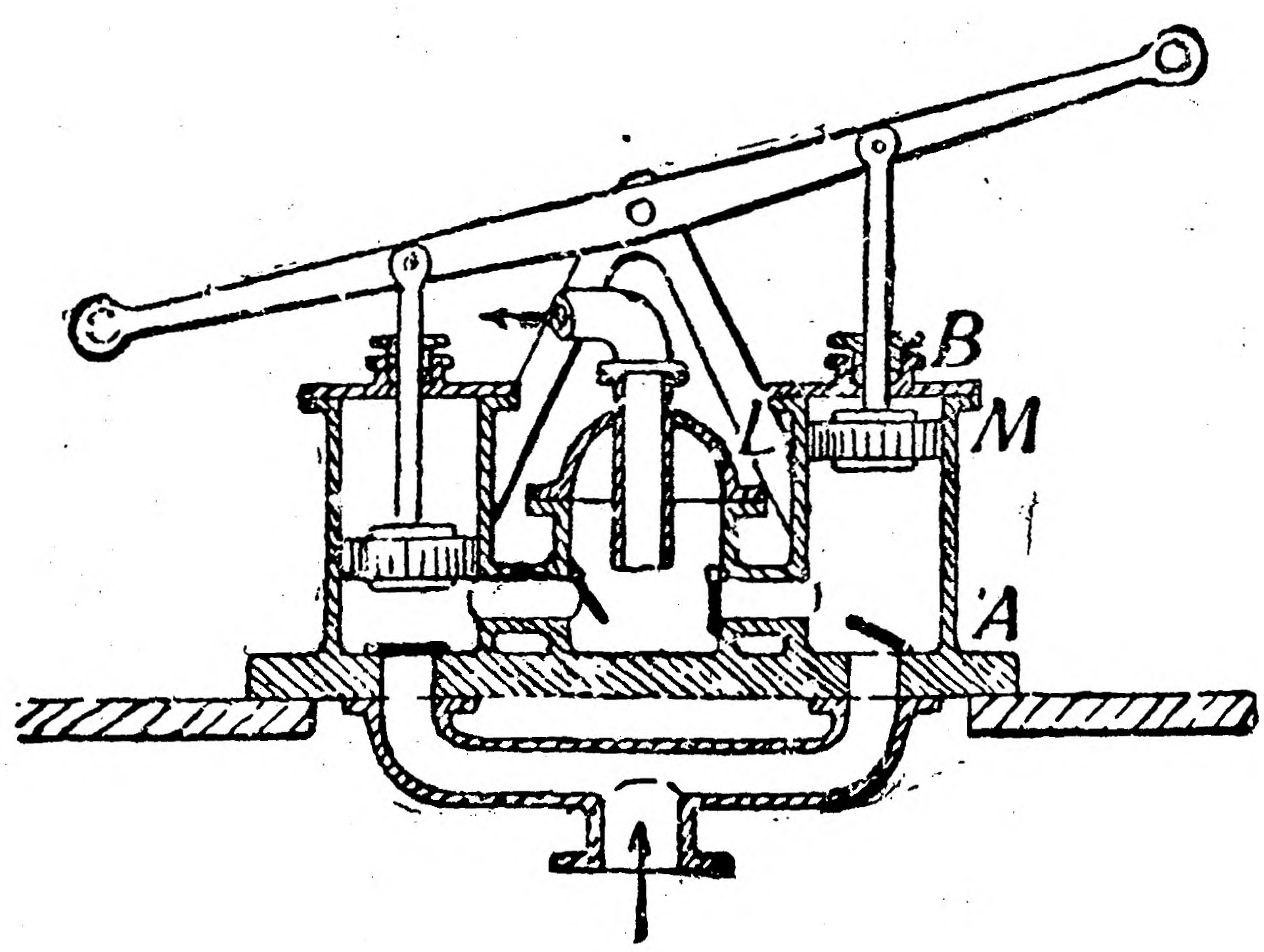


Рис. 420.

4. Сколько воды протекает в час через водопроводную трубу, если диаметр трубы $=16$ сантиметрам, а скорость течения воды $=1$ метру в секунду.

5. Пожарный насос имеет два цилиндра (рис. 420). Диаметр поршня $LM=10$ *см*, высота цилиндра, в котором двигается поршень, 50 *см*. В одну минуту поршень совершает 10 полных колебаний. Сколько ведер воды выбрасывает в час этот насос? (Объем ведра 12 300 *куб. см*).

6. Во время дождя вода с крыши дома наполнила 4 кадушки, диаметр которых 50 *см*, высота 100 *см*. Вода эта собрана с площади в 31 *кв. м*. Какой «высоты» выпал дождь?

7. Юрта самоедов имеет форму конуса, диаметр основания которого равен 8 *м*, а длина шеста (образующая конуса) от вершины до нижнего края 5 *м*. Сколько нужно меха шириною в 1 *м* для такой юрты?

8. Сколько куб. сажен сена помещается в стогу (рис. 421), если расстояния $AB=3$ *м*, $BC=3^1/_2$ *м*, диаметр основания $=5$ *м*?

9. Зерно насыпано в углу сарая. Высота кучи 4 *м*, радиус основания 2 *м*. Это зерно надо пересыпать в мешки, имеющие высоту 1 *м*, а диаметр основания $^2/_3$ *м*. Во скольких мешках уместится все зерно?

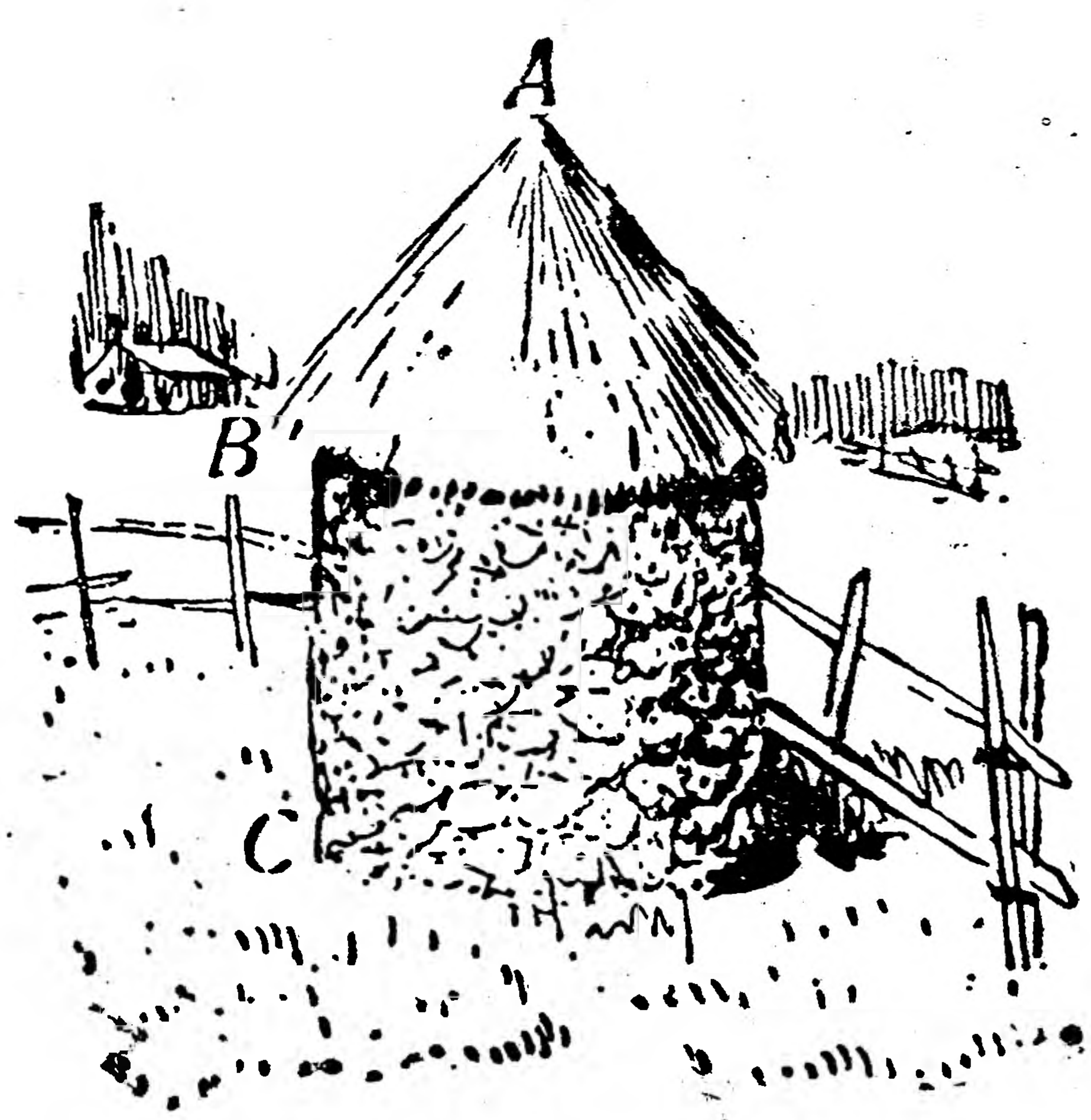


Рис. 421.

10. Сколько метров материи шириною в 2 *м* необходимо для приготовления воздушного шара диаметром в 20 *м*?

11. Сколько всего гектаров суши имеется на земном шаре, если диаметр его равен 12 800 километрам и суша составляет 30% всей земной поверхности?

12. Суповая ложка имеет форму полушара, диаметр которого равен 12 *см*. Каков объем ложки?

13. Термометр состоит из трубки, внутренний диаметр которой 0,2 *см*, и шарика, внутренний диаметр которого равен 2,4 *см*. Ртуть в трубке стоит на высоте 4 *см* над шариком. Сколько ртути в термометре.

14. Сколько дробинок возможно приготовить из 1 *кг* свинца, если диаметр дробинки равен 2 *мм*? (1 *куб. см* свинца весит 12 *г.*)

15. Сколько свинцовых дробинок диаметром в 0,6 *см* можно вылить из свинцового цилиндра, высота которого равна 18 *см*, а диаметр 40 *мм*?

16. Каких размеров должен быть лист жести, чтобы из него можно было сделать граммофонную трубу, которая должна иметь радиус наружного отверстия в 20 *см*, а образующую в 52 *см*. Сколько (по объему) воздуха помещается внутри этой трубы?

Заключение.

Вот и закончили мы с вами, читатель, наши беседы. В этой книге вы познакомились с разнообразными свойствами окружающих вас геометрических тел. Этими свойствами придется вам часто пользоваться в вашей будущей жизни, да и теперь вы нередко прибегаете к услугам геометрии. Если вы сомневаетесь в этом, то это только оттого, что вы недостаточно внимательно вглядываетесь в окружающую жизнь. В самом деле:

Вот вы сидите у себя в комнате. Осмотритесь внимательно вокруг себя. Ваша комната представляет собою прямоугольный параллелепипед. Посмотрите на шкап, на печь и двери с их украшениями, посмотрите на ваш письменный стол с его резными ножками, с чернильным прибором и лежащим возле него заостренным карандашом. разве все это не имеет знакомые вам геометрические формы?

В углу стоит этажерка. Присмотритесь к ее строго параллельным полкам, да, кстати, вспомните тот признак, по которому можно утверждать о параллельности этих плоскостей.[1])

Посмотрите на стены, пол и потолок вашей комнаты. Какое разнообразное положение имеют эти плоскости! Между ними вы найдете взаимно параллельные и перпендикулярные, горизонтальные и вертикальные. Пересекаясь, они дают двухгранные и трехгранные углы. Поищите их!

А вот кто-то приоткрыл вашу дверь. Исследуйте, останется ли она вертикальною и будет ли она попрежнему перпендикулярною к плоскости пола.[2]) Обратите внимание на тот двухгранный угол, который образует эта дверь со стеною. Найдите его линейный угол и проследите, как меняется он при непрерывном изменении двухгранного угла, когда дверь открывается и закрывается.[3])

---

[1]) Опытная геометрия, § 328.

[2]) Опытная геометрия, § 327.

[3]) Опытная геометрия, § 324.

Подойдите теперь к окну и посмотрите внимательно на улицу. На противоположной стороне ее строится дом. У дома стоит инженер с рабочими и держит в руках план,[1] по которому он строит этот дом. Вдумайтесь, сколько раз должен был инженер прибегать к геометрии, чтобы начертить этот план, а затем, пользуясь им, построить дом. Возьмите хотя бы такой вопрос: инженеру надо подсчитать, какой длины надо сделать стропила, чтобы при данной ширине дома получилась крыша желаемой высоты. Ну, как не использовать ему тут Пифагоровой теоремы? На крыше маляры заняты покраской ее. Как высчитают они количество потребной для этой работы краски? Ведь для этого надо измерить поверхность крыши, но и тут без геометрии никак не обойдешься.

Выйдешь во двор. Ваш домашний пес, увидев вас, стремительно бросился к вам навстречу. Посмотрите, по какой линии побежит он: видимо, и собака хорошо усвоила на опыте аксиому о кратчайшем расстоянии между двумя точками![2] Во дворе дети играют в мяч. Обратите внимание на ту линию, по которой летит мяч, когда дети перебрасывают его друг другу. Сравните эту линию с той, по которой течет из водовозной бочки вода. Это — одна и та же кривая — парабола. Свойства ее подробно изучает геометрия, ибо эта кривая имеет большое значение; ведь по параболе двигается и комета вокруг солнца!

А вот немного далее тянут воду из колодца. Какой он глубокий! А нельзя ли, хотя бы приблизительно, измерить глубину его? Конечно, можно. Сосчитайте, сколько полных оборотов делает вал, на который наматывается веревка, измерьте (на-глаз) диаметр этого вала. По этим данным геометрия дает вам возможность быстро вычислить и глубину колодца.

Пойдемте теперь в поле. Посмотрите, какой красивой линией тянутся телеграфные столбы. Вспомните тот способ, по которому легко узнать, стоят ли все эти столбы на одной прямой линии.[3] По этим столбам так красиво тянется ряд параллельных проволок. Как высоки эти столбы! При желании можно измерить и высоту их.

Геометрия дает много очень простых способов для измерения этой высоты и в ясный солнечный день и в случае пасмурной погоды. Та же геометрия укажет вам и способы для измерения расстояния

[1]) Опытная геометрия, §§ 252 — 253.
[2]) Опытная геометрия, § 107.
[3]) Опытная геометрия, § 88.

вон до той отдаленной деревушки, не подходя к ней.[1]) Всюду на поле идет сейчас дружная весенняя работа. Все поле поделено на участки, на которых люди с раннего утра до позднего вечера обрабатывают свои огороды. Но для того, чтобы поделить поле на участки и измерить площадь каждого из них, надо прежде всего обратиться за помощью к геометрии,[2]) которая недаром в переводе с греческого языка означает: «землемерие», ибо первоначальной своей задачей она ставила измерение площадей участков земли.

Вот вы подошли к полотну железной дороги. Присядьте здесь на минутку и подумайте, как люди построили эту дорогу. Сколько надо было затратить физической силы и материальных средств, сколько надо было иметь знаний и уменья, чтобы через бесконечные степи, непроходимые горы и реки проложить на тысячи верст этот стальной путь! Среди тех знаний, которыми приходилось пользоваться при постройке железной дороги, не последнюю роль играла и геометрия.

Измеряли ли инженеры уклон пути, прибегая к нивеллировке,[3]) делали ли изыскания, подыскивая ту кривизну,[4]) которую надо придать железнодорожному пути, чтобы он прошел через намеченные пункты, делались ли выемки земли для насыпи и велся ли подсчет снятой земли, определялось ли количество насыпанного на полотно балласта, строились ли семафоры, водокачки и железнодорожные здания, — всюду, на каждом шагу прибегали строители за помощью к геометрии.

Не одни только инженеры прибегают к услугам геометрии. И художник-скульптор,[5]) и ученый физик,[6]) и естествоиспытатель, посвятивший свою жизнь изучению природы,[7]) и астроном, пытливо всматривающийся в далекие небесные миры, — все они в изобилии пользуются материалом, собранным в геометрии.

---

[1]) Опытная геометрия, § 242.

[2]) Опытная геометрия, §§ 252 — 253.

[3]) Опытная геометрия, § 199.

[4]) Опытная геометрия, §§ 279 — 280.

[5]) Художники, например, нашли, что идеальной фигурой человека будет такая, у которой размеры отдельных частей ее связаны собой **пропорцией**, носящей название «золотого деления». Золотым делением широко пользуются и архитектора при постройке художественных зданий.

[6]) В физике есть даже один большой отдел, носящий название «**геометрическая** оптика», в которой изучаются чисто геометрическими приемами световые явления, связанные с изменением направления светового луча.

[7]) Существует, например, наука — кристаллография, которая изучает свойства **многогранников** — кристаллов, из которых состоят многие вещества.

Изучая геометрию, вы познакомились там с основными геометрическими *величинами* (длиною линии, величиною угла, площадью фигуры, поверхностью и объемом тела). Несмотря на большое разнообразие этих величин (ну, что, например, общего между радиусом шара и его объемом?), мы старались подметить между ними какую-либо зависимость и выразить ее математическою формулою. Во многих случаях это нам удалось сделать. Мы, например, знаем, как связывается площадь треугольника с его основанием и высотою, какова связь между объемом шара и его радиусом, какова зависимость между поверхностью цилиндра и его радиусом основания и высотою. Эта *функциональная зависимость* между геометрическими величинами, выраженная алгебраическою формулою, имеет большое значение в геометрии, открывая широкое поле использования геометрией алгебраических и арифметических знаний.

Таким образом, вы видите, что геометрия — наука не одинокая. Она, давая другим наукам неисчерпаемый запас знаний, сама охотно пользуется знаниями, накопляемыми другими науками.

Если, наконец, вы вспомните, что, *доказывая* то или иное свойство геометрических фигур, вы приучались подчинять свою мысль строго-логическим законам, приучались «*логически мыслить*», то вы поймете, какое значение имеет геометрия в цикле тех наук, которые изучаете вы в школе, а потому не поминайте лихом время, затраченное на изучение ее, а постарайтесь, как можно скорее, приложить приобретенные вами знания к жизни.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава V. Первоначальное знакомство с основными геометрическими телами.

Глава VI. Простейшие геометрические работы во дворе и в поле.

Глава VII. Рисование график и диаграмм.

ЧАСТЬ II.

СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КУРС.

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ФИГУРЫ.

Глава VIII. Общие понятия.

Глава IX. Прямая линия.

Глава X. Угол.

Глава XV. Измерение площадей прямолинейных фигур.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ. СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ФИГУР.

Глава XVI. Отношение и пропорция.

Глава XVII. Подобные фигуры.

Глава XVIII. Основы тригонометрии.

Глава XIX. Окружность и прямая.

Глава XX. Окружность и угол.

Глава XXI. Окружность и многоугольник.

Глава XXII. Измерение длины окружности.

Глава XXIII. Площадь круга.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.

СВОЙСТВА ТЕЛ.

Глава XXIV. Плоскость, точка и прямая.

Глава XXV. Многогранные углы. Многогранники.

Глава XXVI. Призма.

Глава XXVII. Пирамида.

Глава XXVIII. Круглые тела.