В. БРАДИС

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1938

В. БРАДИС

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Допущено коллегией Наркомпроса РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1934

ПРЕДИСЛОВИЕ.

На математическом отделении педагогических институтов на аналитическую геометрию отводится согласно учебному плану 1933 г. 200 часов, в том числе 110 часов на I и 90 на II курсе. Такое сравнительно большое число часов позволяет поставить изучение этой дисциплины на бо́льшую высоту, чем это было до сих пор (когда она прорабатывалась в педвузах в том же, примерно, объеме, как и во втузах), и вызывает необходимость выпуска учебника, излагающего его с большей полнотой, чем получившие за последние годы широкое распространение учебники, предназначенные для втузов. Попыткой дать такое изложение курса аналитической геометрии, которое соответствовало бы отведенному числу часов и учитывало бы специфические требования педагогического учебного заведения, и является настоящая книга, представляющая собой переработку лекций, читанных автором в Калининском педагогическом институте.

Составляя книгу, автор руководствовался следующими соображениями о характере изложения. Как показывает опыт, первые главы курса аналитической геометрии, прорабатываемые студентами в самом начале пребывания их в педвузе, следует излагать очень детально, так как только тогда обеспечиваются полная ясность понимания и прочность усвоения. В дальнейшем, по мере роста навыков в математическом рассуждении, характер изложения постепенно меняется. Последние главы, посвященные геометрии пространства, прорабатываемые уже на II курсе, можно излагать гораздо более сжато, предполагая у студентов довольно значительный навык в проведении деталей математического рассуждения, основные пункты которого им указываются.

Почти каждый параграф настоящего руководства снабжен задачами для упражнения, частью очень легкими, частью несколько более трудными, рассчитанными на более сильных студентов. И тех и других однако очень мало, и для хорошего усвоения курса необходимо использование одного из существующих задачников (например задачника О. Н. Цубербиллер).

Несколько параграфов книги набраны мелким шрифтом (в оглавлении они обозначены знаком *). При недостатке времени их можно пропустить без ущерба для понимания последующего.

Автор.

Август 1933 г.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

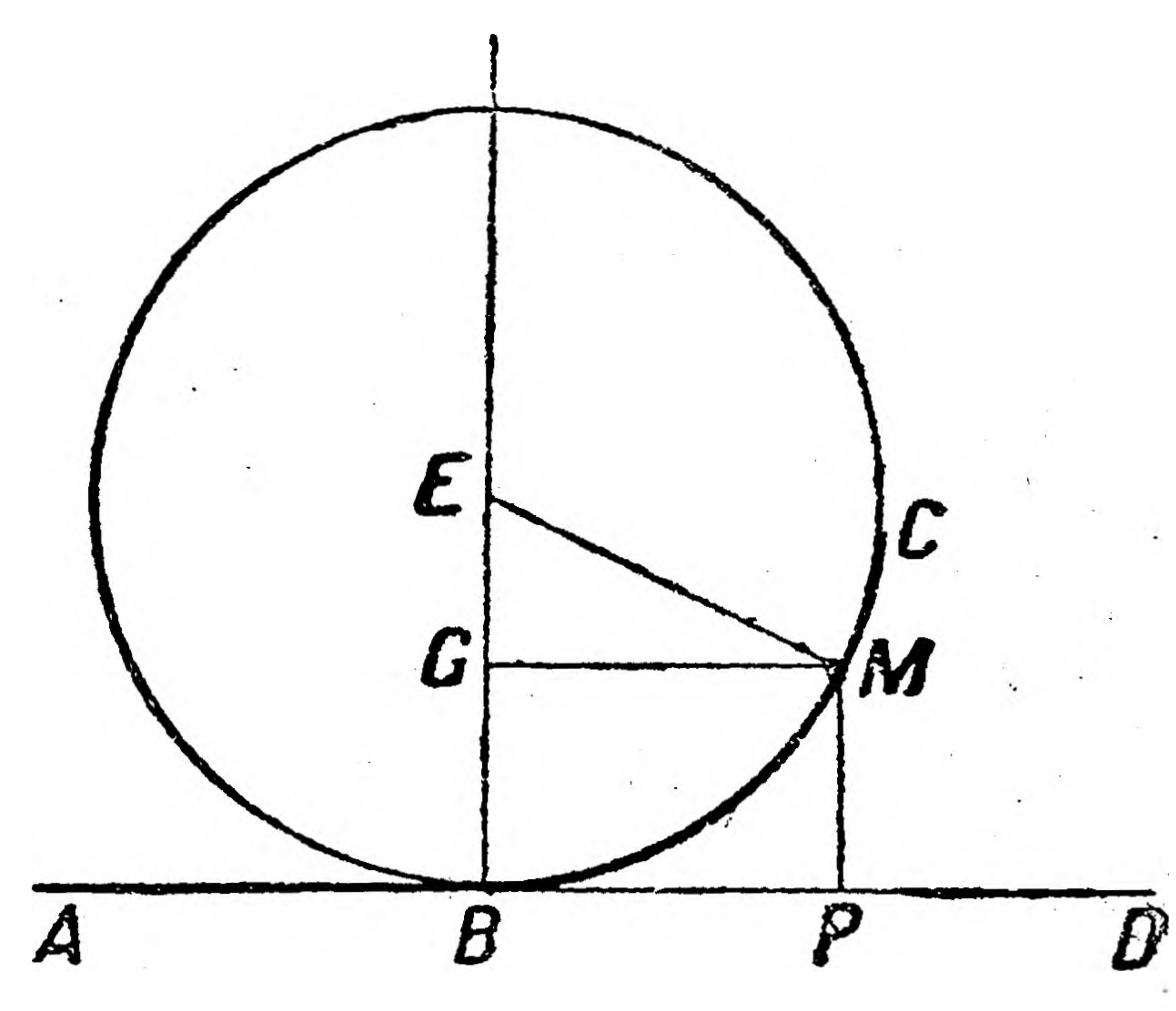
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.

Глава I.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Построительный и вычислительный методы решения геометрических задач. Чтобы получить представление о характерных особенностях аналитической геометрии, рассмотрим следующую практическую задачу.

На местности производится „разбивка“ будущей железнодорожной колеи, для чего средняя линия этой колеи отмечается колышками, забиваемыми в землю на расстоянии, примерно, в 10 *м* друг от друга. Надо перейти с прямолинейного участка пути AB на закругление BC, представляющее собой дугу круга определенного радиуса, положим $r = 100$ *м* (черт. 1). Для обеспечения плавности перехода с прямой на кривую круг должен касаться прямой AB в той ее точке B, где начинается закругление. Итак, задача заключается в том, чтобы построить круг данного радиуса $r = 100$ *м*, касающийся данной прямой AB в данной ее точке B, или, по крайней мере, не вычерчивая всего круга, указать несколько его точек, расположенных на дуге BC на расстоянии, примерно, в 10 *м* друг от друга (места, где забиваются колышки).

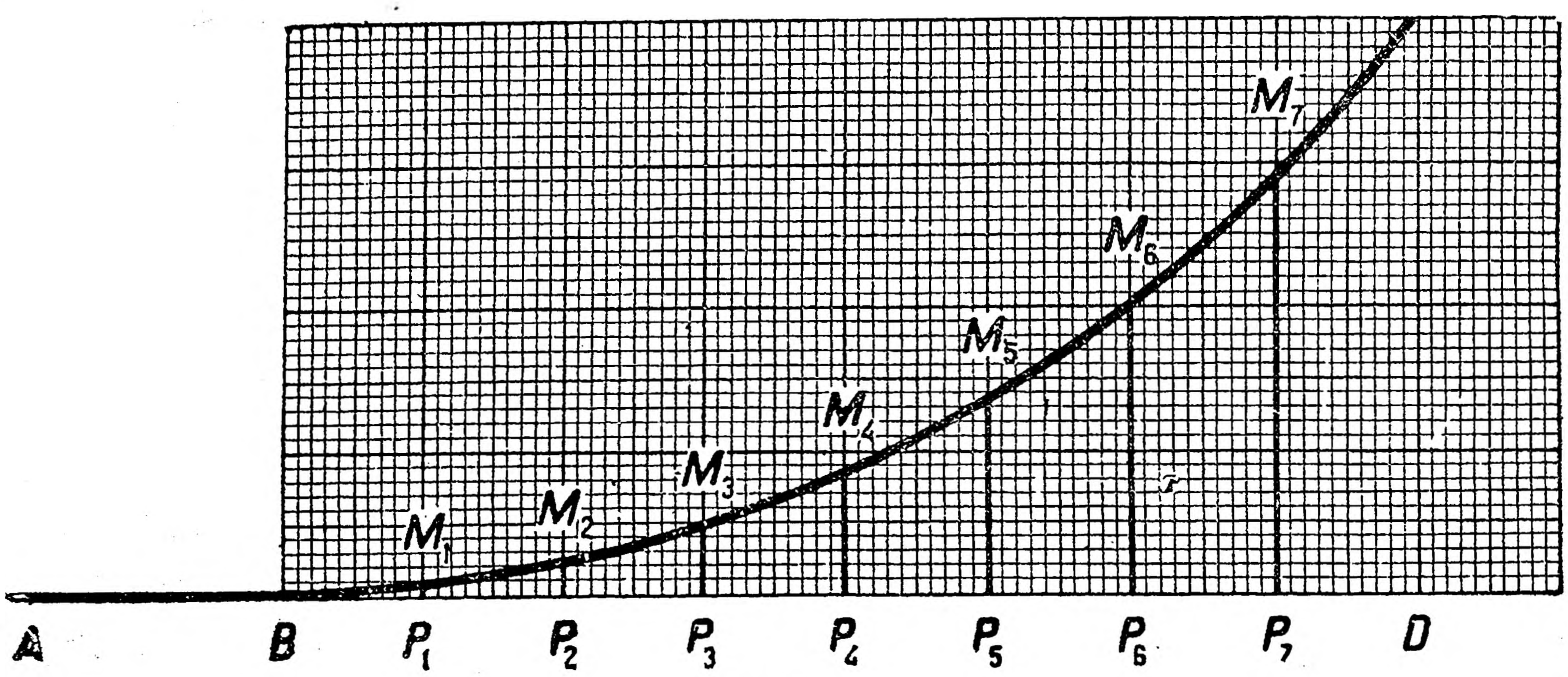


Черт. 1.

Решим эту задачу двумя методами — построительным и вычислительным.

Так как радиус круга, проведенный в точку касания, перпендикулярен, как известно, к касательной, то центр E искомого круга мы получим, если восставим к прямой AB через точку B перпендикуляр и отложим на нем отрезок $BE = r = 100$ *м*. После этого останется провести круг радиусом BE из точки E как из центра.

Построение это, легко осуществляемое на чертеже, нельзя выполнить на местности, так как нет циркуля, который позволил бы чертить дугу окружности радиусом в 100 *м*, а если и взять какой-нибудь суррогат циркуля (например бечевку достаточной длины), то все же выполнению построения непосредственно на местности могут помешать некоторые условия (например лес, холмы и т. п.). Построение надо выполнить сперва на бумаге в возможно более крупном (для уменьшения погрешностей) масштабе, а потом *перенести* интересующие нас точки круга на местность. Для этого продолжим прямую AB за точку B направо (черт. 2, выполненный в масштабе в 1 *мм*: 1 *м*, т. е. в 1 : 1000 натуральной величины) и возьмем на ней точки P_1, P_2, $P_3, \ldots$ на расстоянии 10 *мм* друг от друга и от точки B. Восставляя в этих точках перпендикуляры к AD и продолжая их до пересечения с дугой круга в точках M_1, M_2, $M_3, \ldots$, измерим отрезки P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 и т. д. Результаты измерений показаны в нижеследующей таблице, где буквой x обозначены расстояния точек P от точек B, а буквой y длины соответствующих перпендикуляров PM.



Черт. 2.

x	10	20	30	40	50	60	70
y	0,5	1,8	4,5	8,3	13,2	20,0	28,5

Имея эти пары чисел x и y, указывающие положение точек круга на чертеже, мы без труда укажем соответствующие точки круга на местности. Для этого надо продолжить на местности прямую AB за точку B направо, что делается известным способом провешивания, взять на ней точки P_1, P_2, $P, \ldots$ на расстоянии 10 *м* одна от другой и от точки B, затем восставить к прямой AD перпендикуляры в этих точках и отложить на этих перпендикулярах отрезки $P_1M_1 = 0{,}5$ *м*, $P_2M_2 = 1{,}8$ *м*, $P_3M_3 = 4{,}5$ *м* и т. д. Тем самым положения точек M_1, M_2, $M_3, \ldots$, будут определены *на местности*.

Однако это решение поставленной задачи недостаточно точно. Действительно, длины отрезков P_1M_1, $P_2M_2, \ldots$, которые мы берем по чертежу, получаются лишь приближенными, с погрешностями, которые при самом тщательном выполнении чертежа могут доходить до 0,2 *мм*, что соответствует при взятом у нас масштабе в 1 : 1000 погрешностям в определении точки на местности до 0,2 *м*, а таких отклонений для железнодорожного пути допустить нельзя. Погрешности можно уменьшить, увеличивая масштаб, но это возможно не всегда. Поэтому, естественно, возникает вопрос о том, нельзя ли получить значения

$y = PM$ не графическим способом, т. е. по чертежу, а более точно — путем их вычисления, и перейти таким образом от решения задачи *построительным* методом к ее решению методом *вычислительным?*

Вернемся к чертежу 1 и рассмотрим положение какой-нибудь точки M на дуге BC. Проводя PM перпендикулярно AD и GM параллельно AD, соединяем M с центром круга E и применяем к треугольнику EMG теорему Пифагора. Тогда, обозначая $BP = GM$ через x, а $PM = BG$ через y, имеем зависимость $GM^2 + GE^2 = EM^2$, или

$$x^2 + (r - y)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Решая это уравнение относительно y, получим формулу, определяющую значение y в зависимости от значений x, а именно: $(r - y)^2 = r^2 - x^2$, $r - y = +\sqrt{r^2 - x^2}$, откуда

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}. \qquad (2)$$

Извлекая квадратный корень, мы взяли перед ним знак $+$, так как при положении точки M на дуге BC, меньшей четверти круга, $y < r$, $r - y > 0$, а потому в формуле (2) перед корнем пришлось взять знак $-$. Если же точку M перенести на дугу II четверти круга, считая от точки B, то вместо формулы (2) имели бы формулу $y = r + \sqrt{r^2 - x^2}$.

Формула (2) позволяет по данным r и x вычислить значения y с произвольно высокой точностью. Взяв $r = 100$ *м* и меняя x через каждые 10 *м*, начиная от нуля, выполним показанные ниже вычисления и получим значения y с точностью до 0,01 *м*, что вполне достаточно для поставленной практической задачи.

x	0	10	20	30	40	50	60	70
x^2	0	100	400	900	1 600	2 500	3 600	4 900
$100^2 - x^2$	10 000	9 900	9 600	9 100	8 400	7 500	6 400	5 100
$\sqrt{100^2 - x^2}$	100	99,50	97,98	95,39	91,65	86,60	80,00	71,41
$y = 100 - \sqrt{100^2 - x^2}$	0,00	0,50	2,02	4,61	8,35	13,40	20,00	28,59

Итак, чисто построительное решение нашей задачи оказалось осуществимым лишь на чертеже. Чтобы перейти с чертежа на местность, нам пришлось прибегнуть к обозначению положения каждой точки M на круге посредством пары чисел, выражающих длины отрезков $BP = x$ и $PM = y$. Это смешанное построительно-вычислительное решение задачи оказалось недостаточно точным, и мы должны были решить ее уже чисто вычислительным методом. Отметим, что вычислительное решение несколько упрощается, если ввести вспомогательный угол $t = BEM$ и воспользоваться формулами $x = r \sin t$, $y = r - r \cos t = 2r \sin^2 \frac{1}{2} t$.

В курсе элементарной геометрии мы все время имели дело с обоими методами решения задач: *построительным*, иначе называемым *геометрическим* или *конструктивным*, когда искомые величины получаются на чертеже в результате применения определенных приборов (обычно циркуля и линейки) без каких бы то ни было вычислений, и *вычислительным*, иначе называемым *алгебраическим*, или *аналитическим*, когда чертеж играет лишь вспомогательную роль, помогая лучше представить все обстоятельства дела, а решение получается через некоторые вычисления, дающие в результате числовые значения искомых величин по числовым значениям данных. Так, чтобы найти радиус круга, описанного около треугольника с данными сторонами a, b, c, можно либо прибегнуть к построению, дающему центр этого круга (в пересечении перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенным через их середины), а затем просто измерить расстояние от центра до любой вершины треугольника, либо вычислить этот радиус по известной формуле $R=\frac{1}{4}abc:\triangle$, где $\triangle$ — площадь треугольника, определяемая по формуле Герона:

$$\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Каждый метод решения имеет свои достоинства и недостатки. Построительный метод имеет в большинстве случаев преимущество большей простоты и наглядности, но он дает результаты с ограниченной точностью, соответствующей точности построений на чертеже. Вычислительный метод требует гораздо большей математической подготовки, нередко связан с продолжительными и сложными числовыми выкладками, но приводит к решениям, точность которых при достаточной точности данных может быть сделана как угодно высокой. В каждом отдельном случае приходится решать вопрос о сравнительной выгодности каждого метода. Так, если вершины треугольника, около которого надо описать окружность, заданы точками на чертеже, то для применения вычислительного метода нам придется начать с измерения сторон треугольника. Получив *приближенные* значения длин этих сторон (так как никакое измерение не дает абсолютно точных результатов), мы и искомый радиус найдем в результате вычислений лишь приближенно. Построительный метод при условии аккуратного выполнения чертежа даст искомый радиус с той же, примерно, точностью, как и метод вычислительный, но гораздо скорее, и его в этом случае следует предпочесть. Иначе обстоит дело, если стороны треугольника заданы числами (точными или приближенными, но с большой точностью). Тогда вычислительное решение позволяет найти результат с точностью, совершенно недостижимой при употреблении построительного метода.

Применение вычислительного метода в элементарной геометрии ограничивается определением величин отрезков, углов, площадей и объемов. Все вопросы, связанные с взаимным расположением точек и с формой тех линий и поверхностей, по которым точки располагаются, решению вычислительным методом поддаются лишь при введении особых способов указания положения точки при помощи чисел — ее *координат*. Эта идея *координирования* точек, пример применения которой мы видели выше, рассматривая задачу о разбивке железнодорожного закругления, и является основной идеей аналитической геометрии. В следующем параграфе мы остановимся на ней несколько подробнее.

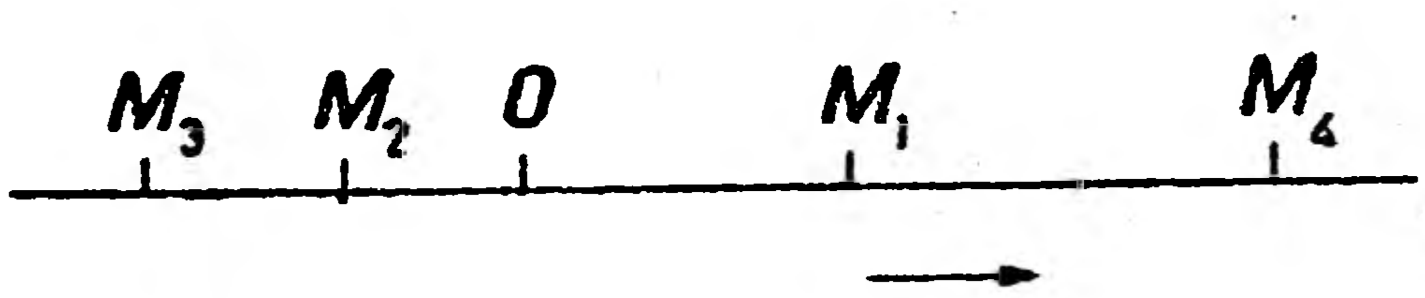
Упражнения.

1. Указать примеры задач элементарной геометрии, решаемых построительным и вычислительным методами.

2. Решить построительным и вычислительным методами задачу о построении полукруга радиусом 65 *мм*, касающегося в одном из своих концов данной прямой в данной ее точке, и проверить совпадение результатов, полученных обоими методами.

3. Дана прямая и точка A на ней, а также точка B вне прямой, причем длина перпендикуляра BC, опущенного из точки B на данную прямую, равна 18 *мм*, а отрезок AC этой прямой имеет длину 24 *мм*. Найти построением и вычислением ряд точек круга, проходящего через точку B и касающегося данной прямой в точке A.

§ 2. Прямоугольные координаты точки. Если точка M движется по некоторой прямой, то, выбрав на этой прямой (будем называть ее „осью") по своему произволу начальную точку („начало"), обозначаемую обыкновенно буквой O, и установив на оси положительное направление отсчетов (обозначаем его стрелкой), мы можем характеризовать *положение* точки M для любого момента времени, указывая *число* x, выражающее расстояние OM в некоторых определенных единицах длины, причем это число x берется со знаком плюс, если точка M находится в том направлении от начальной точки, которое принято за положительное, и со знаком минус, если в противоположном. Это число x и называется *координатой* точки M на данной прямой. Каждому положению движущейся точки M соответствует одно определенное значение ее координаты x, и обратно, каждому вещественному (положительному, нулевому, отрицательному) значению x соответствует одно определенное положение точки M на оси (она предполагается неограниченно простирающейся в обоих направлениях). Как говорят, между всеми положениями точки на прямой и всеми вещественными числами существует *взаимно-однозначное соответствие* [1]. Так, на чертеже 3 точка M_1 имеет координату $x_1 = 13$ *мм*, точка M_2 — координату $x_2 = -7$ *мм*. Обратно, зная координаты двух других точек M_3 и M_4, равные $x_3 = -15$ *мм* и $x_4 = 30$ *мм*, мы легко укажем эти точки на прямой. Таким образом, чтобы координировать точки на прямой, надо: 1) выбрать начало (точку O); 2) выбрать положительное направление (обычно на горизонтальной оси положительное направление берется слева направо, на вертикальной — снизу вверх); 3) выбрать единицу длины (мы будем чаще всего брать за единицу длины 1 *мм*).



Черт. 3.

Такое указание положения точки на прямой линии очень часто употребляется на практике. Например, чтобы указать положение пожарного крана, устроенного под мостовой на улице, на стене дома, стоящего против него, помещают направленную вниз стрелку, а под ней буквы П. К.

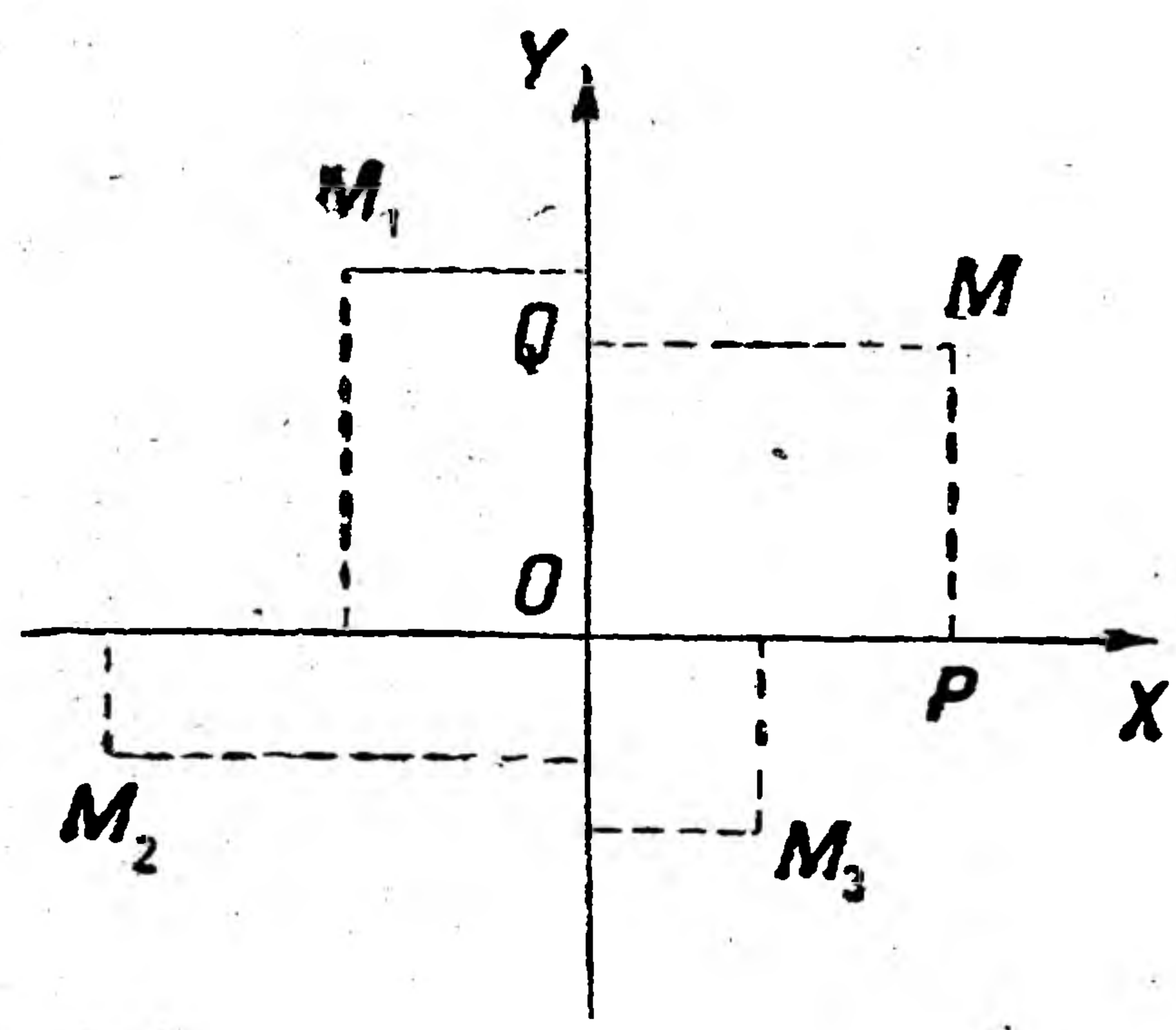
---

[1] Понятие взаимно-однозначного (или одно-однозначного) соответствия элементов двух совокупностей каких-либо объектов (двух множеств) является одним из основных понятий новейшей математики. Разъяснение этого понятия и доказательство упомянутого в тексте утверждения о взаимно-однозначном соответствии вещественных чисел и точек на прямой можно найти в любом подробном курсе математического анализа.

и число. Это число показывает, на сколько метров надо отойти от стены дома по перпендикуляру к ней, проходящему через стрелку, чтобы дойти до крышки, закрывающей кран. Такой стенной знак позволяет пожарным быстро разыскать кран, даже если улица покрыта снегом.

Если точка M находится не на оси, а где-нибудь на плоскости, то характеризовать ее положение посредством одной координаты уже невозможно: нужны две координатные оси и две координаты. Эти оси проводятся под прямым углом друг к другу, обычно одна горизонтально, другая вертикально, и за начальную точку на обеих принимают их точку пересечения. Эта точка O называется „началом координат". Положительное направление на горизонтальной оси, обычно называемой осью X, или осью „абсцисс", назначается большей частью направо, на вертикальной же (ось Y, или ось „ординат") — вверх. Данную точку M проектируют на обе координатные оси, т. е. проводят $MP \perp OX$ и $MQ \perp OY$ (черт. 4).

Координатами точки M являются числа, выражающие длины отрезков $x = QM = OP$ („абсцисса" точки M) и $y = OQ = PM$ („ордината" точки M). На чертеже 4 точка M имеет абсциссу $x = 15$ *мм* и ординату $y = 12$ *мм*. Абсцисса и ордината точки вместе называются ее *координатами* и вполне определяют ее положение на плоскости, если применять то правило знаков, о котором была речь выше. Абсциссы точек правой полуплоскости (т. е. расположенные справа от оси Y) положительны, левой полуплоскости — отрицательны. Ординаты точек верхней полуплоскости (т. е. расположенные выше оси X) положительны, нижней — отрицательны. Точки самой оси X имеют ординату 0, точки оси Y имеют абсциссу 0. Нулевые значения обеих координат характеризуют начало координат — точку O. Значения абсциссы и ординаты точки записывают рядом, разделяя их точкой с запятой и заключая оба числа в скобку. Так, запись $(-10; 15)$ означает точку с абсциссой $x = -10$ и ординатой $y = 15$ (на чертеже точка M_1). Точка M_2 имеет координаты $x = -20$, $y = -5$ и сокращенно обозначается так: $M_2(-20; -5)$. Положение точки M_3 вполне характеризуется записью $M_3(7; -8)$.



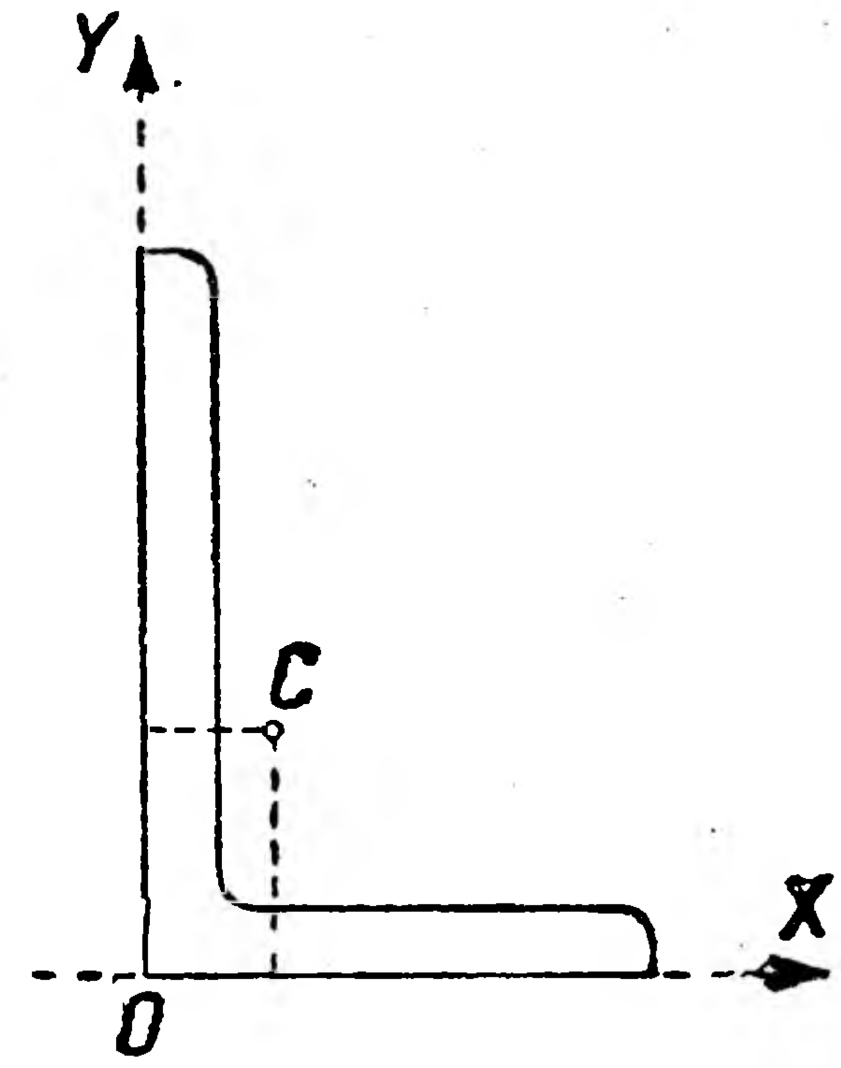
Черт. 4.

Конечно, можно и не проектировать данную точку на обе оси. Спроектировав точку M, например, на ось x, мы сразу получаем и ее абсциссу $x = OP$ и ее ординату $y = PM$, так как отрезки PM и OQ равны.

Итак, каждой точке плоскости соответствует одна определенная пара чисел, выражающих ее координаты, и обратно, всякой паре чисел, каждое из которых может быть положительным, отрицательным или равным нулю, соответствует одна определенная точка плоскости, а именно точка, абсцисса которой равна первому числу пары, а ордината второму. Между множеством всех точек плоскости и множеством всех пар вещественных чисел существует таким образом взаимно-однозначное соответствие.

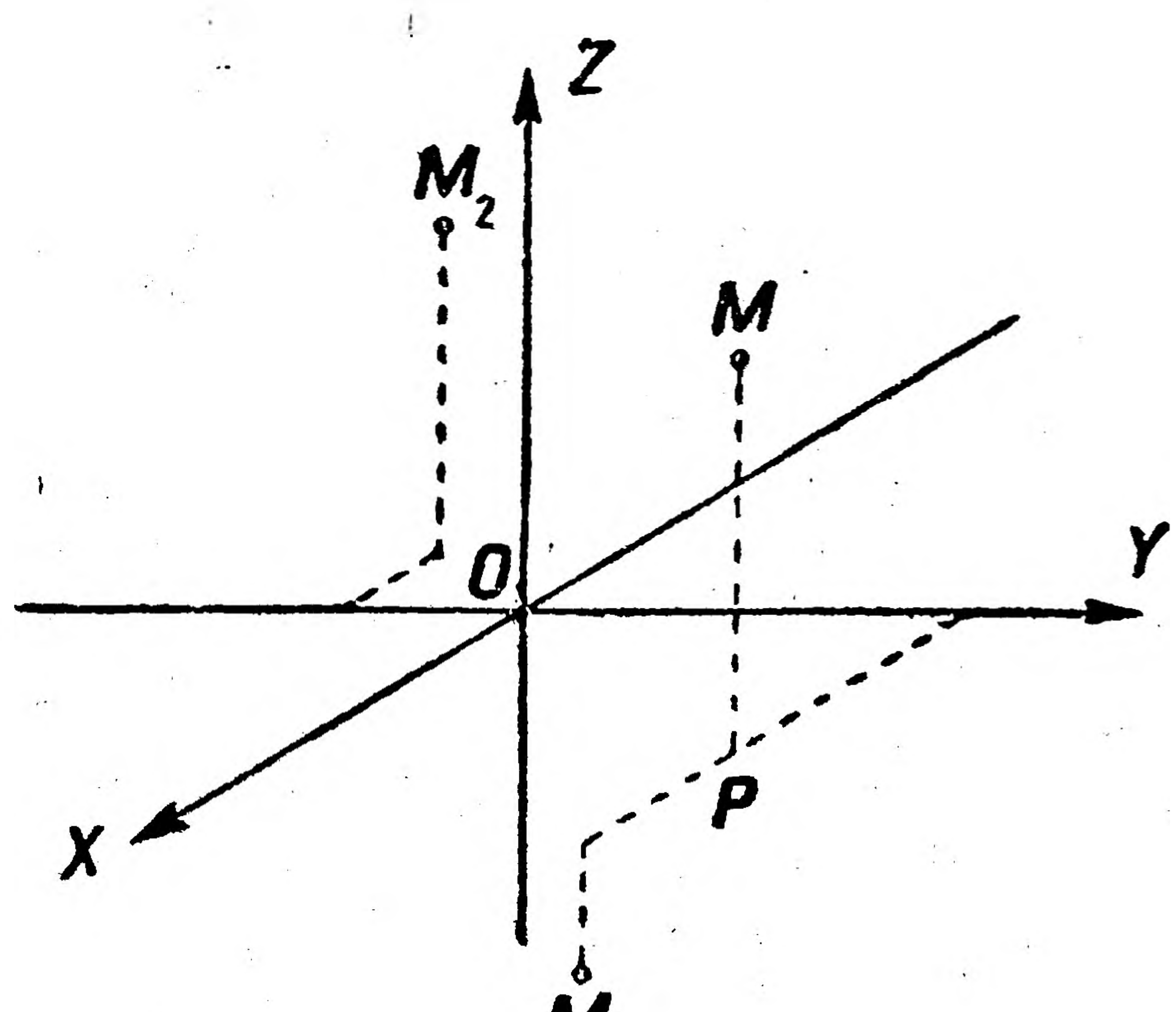
Надо однако твердо помнить, что говорить о координатах точек на плоскости можно лишь тогда, когда указаны координатные оси, выбираемые, впрочем, совершенно произвольно, и на каждой из осей указано положительное направление.

Чтобы получить пример употребления этого способа указывать положение точки на плоскости, возьмем таблицу профилей углового железа, приводимую во многих технических справочниках. В таблице этой есть, между прочим, графа с заголовком „центр тяжести“, где приводятся координаты x_0, y_0 центра тяжести C сечения относительно осей, указанных на чертеже 5. Для уголка, фигурирующего в таблице под № 3, таблица дает $x_0 = 5{,}0$ *мм*, $y_0 = 9{,}9$ *мм*, что позволяет указать на чертеже центр тяжести сечения.



Черт. 5.

Если точка M находится не на одной определенной плоскости, а где-нибудь в пространстве, то берут какую-нибудь плоскость и проектируют на нее эту точку. Положение проекции P точки M характеризуют, проводя на этой плоскости оси X и Y и находя абсциссу x и ординату y этой точки, а затем измеряют длину перпендикуляра $MP = z$, которая берется со знаком плюс, если точка M расположена по одну сторону плоскости, и со знаком минус, если по другую ее сторону. Эта величина z носит название *аппликаты* и является третьей координатой, характеризующей вместе с абсциссой x и ординатой y положение точки в пространстве. Аппликата измеряется, таким образом, по направлению, параллельному третьей координатной оси OZ, проходящей через точку пересечения двух первых осей OX и OY и перпендикулярной к каждой из них. Положительное направление оси Z берется обыкновенно вверх. На чертеже 6 изображены три точки M, M_1, M_2 со следующими координатами:



Черт. 6.

у точки M

$$x = 24, \quad y = 20, \quad z = 18;$$

у точки M_1

$$x = 40, \quad y = 20, \quad z = -6;$$

у точки M_2

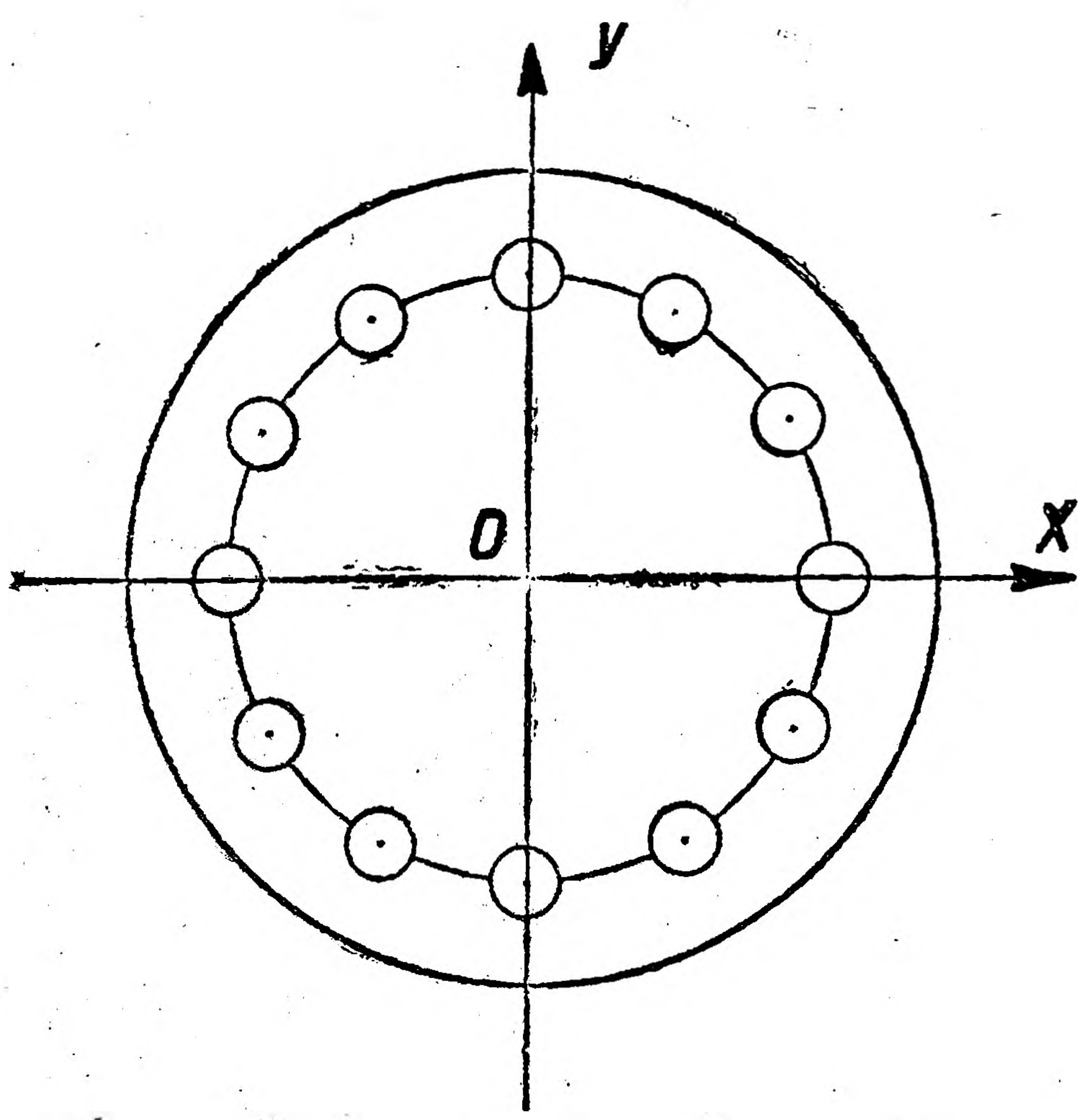
$$x = -10, \quad y = -8, \quad z = 15.$$

Все координаты даны здесь в миллиметрах, причем ординаты и аппликаты изображены на чертеже в натуральную величину, а абсциссы — уменьшенными (вследствие перспективного сокращения).

Каждой точке в пространстве соответствует таким образом тройка чисел x, y, z, вполне характеризующих ее положение (при данном выборе координатных осей). Обратно, всякой тройке чисел x, y, z, каждое из которых может быть положительным, равным нулю или отрицательным, соответствует при данном выборе координатных осей одна определенная точка: построив в плоскости, проходящей через оси

X и Y, точку P с координатами, равными двум первым из данных чисел (x и y), проводим через эту точку прямую, параллельную оси Z, и откладываем на ней отрезок PM, равный z (принимая во внимание знак z). Конец M отрезка PM и есть искомая точка, соответствующая данной тройке чисел x, y, z. Мы имеем таким образом здесь взаимно-однозначное соответствие между множеством всех точек пространства и множеством всех троек вещественных чисел.

Три рассмотренных величины — абсцисса x, ордината y, аппликата z, откладываемые по трем взаимно-перпендикулярным направлениям, носят название *прямоугольных координат точки*. Наряду с прямоугольными координатами, хотя гораздо реже, употребляются и другие способы характеристики положения точки. Так, географы характеризуют положение точки на земной поверхности посредством указания ее *широты*, т. е. дуги меридиана, проходящего через эту точку, от экватора до этой точки, и ее *долготы*, т. е. дуги экватора от его пересечения с начальным меридианом до пересечения с меридианом, проходящим через данную точку. С двумя системами координат, а именно системой *косоугольных координат* и системой *полярных координат*, употребляемых в геометрии кроме только что рассмотренной системы прямоугольных координат для указания положения точки на плоскости, мы ознакомимся далее — в §§ 10 и 11, но на протяжении всего настоящего курса мы будем пользоваться почти исключительно прямоугольными координатами и, говоря в дальнейшем о координатах точки, мы будем всегда подразумевать, если не будет оговорено противное, прямоугольные ее координаты.



Черт. 7.

Упражнения.

1. Указать, как расположены на чертеже 2 оси координат, которыми мы пользовались, решая задачу о разбивке закругления.

2. Точка движется слева направо по прямой AB со скоростью 50 *мм* в секунду и проходит через начало O в некоторый момент. Указать координаты ее положения за 5 секунд до этого момента и через 10 секунд после него.

3. Крышка для цилиндра имеет 12 круглых отверстий для болтов, причем эти отверстия располагаются на равных расстояниях друг от друга по кругу радиуса 400 *мм*. Проведя оси координат, как показано на чертеже 7, указать координаты центров всех отверстий.

4. Указать на чертеже 7 точки (0; 200), (— 100; 0), (0; 0), (— 200; — 200).

§ 3. Чем занимается аналитическая геометрия и как она возникла. Изучая элементарную геометрию, мы замечаем, что в ней нет единого основного метода, посредством которого можно было бы решать все ее задачи как практического, так и теоретического характера. В этом отношении элементарная геометрия находится в худшем положении, нежели элементарная алгебра, располагающая таким методом в виде метода уравнений: каковы бы ни были условия задачи, мы можем обозначить неизвестные величины буквами и выразить зависимость между ними и данными величинами в виде уравнений, решение которых и даст искомые значения неизвестных. Конечно могут быть затруднения и в решении уравнений, но во всяком случае приведение всякой задачи к решению некоторого уравнения или системы уравнений является громадным шагом вперед. Зная, что многие геометрические задачи легко решаются именно этим методом уравнений, естественно поставить вопрос о том, нельзя ли сделать этот метод уравнений основным методом и в геометрии? Однако здесь мы встречаемся с тем затруднением, что элементарная геометрия пользуется числами только при измерении (длин, углов, площадей, объемов), в то время как положение точки, форма линии или поверхности числами не выражаются. Но введение метода координат распространило применение чисел в геометрии на все вопросы, связанные с положением точек и формой линий, и дало геометрии этот единый метод решения всех задач. Вводя координаты точек, мы устанавливаем взаимную связь между каждым вопросом о положении точек и вопросом о соотношении между числами, т. е. вопросом о составлении и решении некоторого уравнения. Пример этому мы имели в решении задачи о разбивке закругления в § 1. Вопрос о разыскании положения точек круга оказался после введения прямоугольных координат x и y и составления уравнения (1) § 1 равносильным вопросу о решении этого уравнения.

Применение метода координат и является характерной особенностью той дисциплины, к изучению которой мы приступаем и которую с полным правом можно было бы назвать „координатной геометрией" (что иногда и делают). Общепринятое ее название „аналитическая геометрия" подчеркивает то обстоятельство, что здесь геометрические вопросы решаются посредством методов анализа, т. е. науки о числе в самом широком смысле слова. Метод координат дает как раз тот единый метод, которого не хватает элементарной геометрии и посредством которого решаются все геометрические вопросы как практического, так и теоретического порядка.

Так обстоит дело с методом аналитической геометрии. Что же касается ее содержания, то оно ограничено теми средствами алгебры, которыми можно пользоваться. В настоящем начальном курсе аналитической геометрии мы будем заниматься решением тех вопросов геометрии, которые сводятся к решению уравнений 1-й и 2-й степени. Как мы увидим далее, именно таково большинство вопросов элементарной геометрии, рассматривающей три основных геометрических образа плоской геометрии — точку, прямую и круг. Конечно мы не будем прорабатывать координатным методом все вопросы элементарного курса, а ограничимся только немногими из них. Но зато мы двинемся дальше, за пределы элементарной геометрии, рассматривая те кривые, которые получаются при пересечении круглого конуса плоскостями, — так называемые *конические сечения*. Эти кривые, имеющие громадное значение в естествознании и технике, требуют для своего изучения применения тех же средств алгебры, что и круг, т. е. лишь уравнений 1-й и 2-й степени.

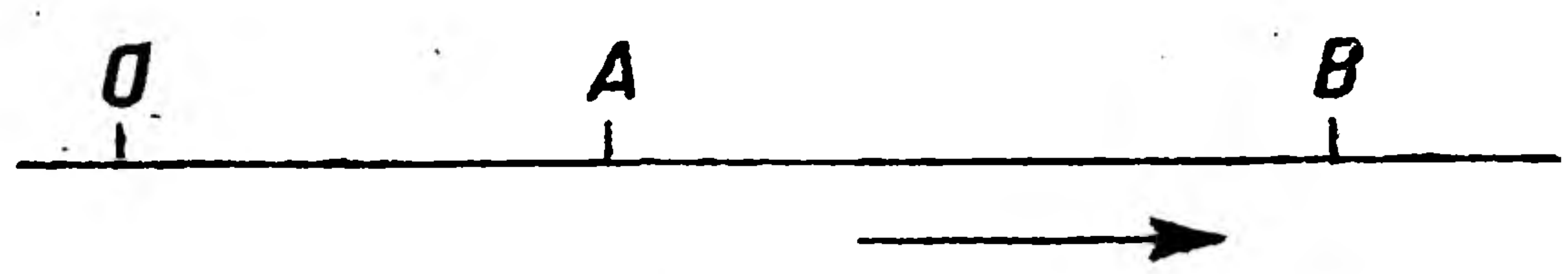
Впервые этими кривыми занимались древнегреческие математики, главным образом А п о л л о н и й из города Перге (в Малой Азии) (он родился около 265 г. до нашей эры). До нашего времени дошло несколько книг его сочинений, где он дает много важных сведений об этих кривых, применяя для их изучения те же разнообразные методы, какие применяются в элементарной геометрии: методом координат Аполлоний еще не располагал. Честь введения этого метода, давшего прочную основу всему дальнейшему развитию аналитической геометрии, принадлежит двум французам: Пьеру Ферма (1601—1665) и Рене Декарту (1596—1650), независимо друг от друга его открывшим. Ферма изложил основные идеи метода координат в письме (к математику Робервалю) еще за 10 лет до появления в 1637 г. книги Декарта „Геометрия", содержавшей основы метода координат, но широкое распространение этого метода было вызвано именно работами Декарта. Те два числа x и y, которыми определяется положение точки на плоскости относительно двух взаимно-перпендикулярных осей и которые, как мы видели выше, называются прямоугольными координатами точки на плоскости, называются также в честь Декарта *декартовыми координатами*. Дальнейшее развитие аналитической геометрии пошло очень быстро, и она в скором времени вышла далеко за пределы тех задач, которыми занимались древнегреческие геометры. Так, Исаак Ньютон (1642—1727) изучил кривые III порядка, т. е. те кривые, которые выражаются алгебраическими уравнениями 3-й степени относительно декартовых координат. Леонард Эйлер (1707—1783) впервые дал систематическое изложение аналитической геометрии как целого. Из числа многих других математиков, занимавшихся аналитической геометрией, назовем только Филиппа Лагира (1640—1718), впервые применившего метод Декарта к определению положения точки в пространстве[1]. В настоящее время начальный курс аналитической геометрии составляет одну из частей курса „Элементов высшей математики", и знание его совершенно необходимо для понимания современных руководств по физике, механике, астрономии и многим другим дисциплинам.

Решив в I главе настоящего руководства несколько задач на положение отдельных точек на плоскости, мы займемся во II главе выяснением того, как выразить посредством координат целое геометрическое место точек, т. е. совокупность бесчисленного множества точек, обладающих каким-либо общим свойством. Как мы увидим, в то время как положение каждой отдельно взятой точки плоскости характеризуется двумя числами — значениями ее координат, геометрическое место точек характеризуется некоторым *уравнением* между двумя переменными координатами x и y точки. В дальнейшем мы изучим геометрическое место точек, выражаемое уравнением 1-й степени с двумя переменными и уравнением 2-й степени с двумя переменными. После этого мы перейдем от изучения фигур на плоскости к изучению фигур (точек, линий, поверхностей) в пространстве.

§ 4. Длины и перемещения (направленные отрезки). Говоря об отрезке прямой, заключенном между двумя данными точками A и B, иногда имеют в виду просто *расстояние* от точки A до точки B, т. е. длину отрезка AB, иногда же рассматривают *перемещение* из точки A в точку B или обратно, или так называемый *направленный отрезок*. В то время

[1] Интересующихся историей возникновения аналитической геометрии отсылаем к „Хрестоматии по истории математики" Г. Вилейтнера (перевод П. С. Юшкевича, вып. III, изд. ГТТИ, 1932).

как расстояние от точки A до точки B выражается тем же числом, как и расстояние от точки B к точке A, перемещениям из A в B и из B в A придают разные знаки, считая перемещение в одном направлении положительным, в обратном — отрицательным. Так, имея на оси, изображенной на чертеже 8, точки A и B с координатами $OA = 20$ *мм*, $OB = 50$ *мм*, мы имеем расстояние $AB = 30$ *мм* и два перемещения (два направленных отрезка) $\overline{AB} = +30$ *мм* и $\overline{BA} = -30$ *мм*. Направленные отрезки иногда отмечают черточками, поставленными над буквами, обозначающими их концы (например $\overline{AB}$), но делают это не всегда, так как обыкновенно по смыслу задачи бывает видно, идет ли речь о расстоянии или о перемещении (направленном отрезке). Расстояние AB часто обозначают знаком $|AB|$ и называют „абсолютным значением отрезка AB“.



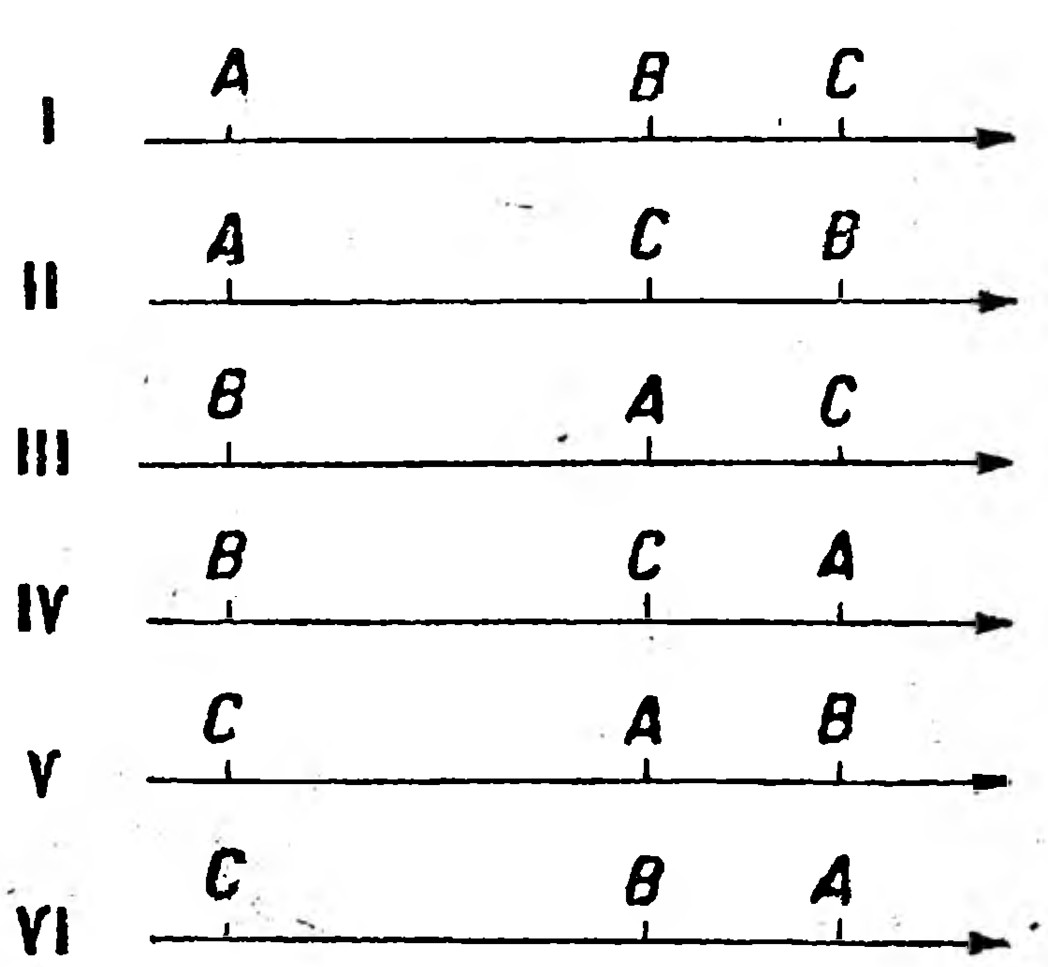
Черт. 8.

Имея прямую с установленным на ней положительным направлением, мы будем считать положительными все отрезки, проходимые в этом направлении, и отрицательными все отрезки, проходимые в противоположном направлении. Можно сказать, что координата точки A на такой прямой выражает направленный отрезок, начало которого совпадает с начальной точкой O, выбранной произвольно на прямой, а конец — с этой точкой A, т. е. отрезок $OA = x$.

Установим несколько предложений о направленных отрезках, расположенных на одной прямой. Краткости ради вместо термина „направленный отрезок“ мы будем употреблять просто термин „отрезок“, понимая его в смысле „перемещение“.

I. *Как бы ни были расположены точки A и B на прямой, всегда*

$$\overline{AB} = -\overline{BA}. \qquad (1)$$



Черт. 9.

Эта формула выражает не что иное, как указанное выше соглашение о знаке отрезка. Из нее вытекает, что

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

II. *Как бы ни были расположены точки A, B, C на прямой, всегда*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \qquad (2)$$

Три точки A, B, C можно расположить на оси шестью различными способами (таково число перестановок из трех элементов), показанными на чертеже 9. Легко показать справедливость формулы (2) для каждого из этих 6 случаев отдельно. Так, в случае I простое сложение отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, имеющих один и тот же знак плюс, дает новый отрезок $\overline{AC}$, тоже со знаком плюс (перемещение в положительном направлении из точки A в точку B, после которого идет новое перемещение в том же направлении из точки B в точку C, равносильно одному перемещению в положительном направлении из точки A прямо в точку C), а потому

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$. В случае II мы можем написать по предыдущему, что $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$, откуда $\overline{AC}=\overline{AB}-\overline{CB}$ или, взяв вместо $\overline{CB}$ по формуле (I) $-\overline{BC}$,

$$\overline{AC}=\overline{AB}-(-\overline{BC})=\overline{AB}+\overline{BC},$$
$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Подобным же образом соотношение (2) доказывается и во всех остальных случаях.

III. *Как бы ни были расположены точки* A_1, A_2, $A_3, \ldots A_{n-1}$, A_n *на прямой, всегда*

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\ldots+\overline{A_{n-2}A_{n-1}}+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_1A_n}. \tag{3}$$

Формула (3) является обобщением формулы (2), которая получается из формулы (3) при $n=3$. Для доказательства формулы (3) допустим, что она верна для $n-1$ точки, а именно для точек A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_{n-1}$, т. е. что

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\ldots+\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=\overline{A_1A_{n-1}}, \tag{4}$$

и возьмем три точки A_1, A_{n-1}, A_n. Согласно формуле (2) имеем для этих трех точек соотношение

$$\overline{A_1A_{n-1}}+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_1A_n}$$

и, заменяя $\overline{A_1A_{n-1}}$ по формуле (4), приходим к соотношению (3). Итак, если это соотношение верно для $n-1$ точки, то оно верно и для $(n-1)+1=n$ точек. Но справедливость этого соотношения для случая 3 точек уже доказана. Следовательно, оно верно и для $3+1=4$ точек. Раз оно верно для 4 точек, оно верно и для $4+1=5$ точек и т. д. Соотношение (3) доказано таким образом для любого значения натурального числа n.

Соотношение (3) выражает теорему, известную под названием *теоремы Шаля*[1].

IV. *Если точки* A *и* B, *взятые на некоторой оси, имеют координаты, равные соответственно* x_1 *и* x_2, *то*

$$\overline{AB}=x_2-x_1. \tag{5}$$

Для получения отрезка $\overline{AB}$ надо, таким образом, взять абсциссу его конца и вычесть из нее абсциссу его начала.

Доказательство справедливости этой формулы для всех возможных случаев расположения точек A и B относительно начала O получается очень просто, если воспользоваться теоремой Шаля. Действительно, взяв на числовой оси три точки O, A, B, расположенные в каком угодно порядке, всегда имеем соотношение $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$, но $\overline{OA}=x_1$, $\overline{OB}=x_2$, а потому $x_1+\overline{AB}=x_2$, откуда $\overline{AB}=x_2-x_1$.

Упражнения.

1. Проверить формулу (5) для случаев, когда:

(I) $x_1=-3$, $x_2=5$, (III) $x_1=5$, $x_2=-3$,
(II) $x_1=-3$, $x_2=-5$, (IV) $x_1=5$, $x_2=-1$.

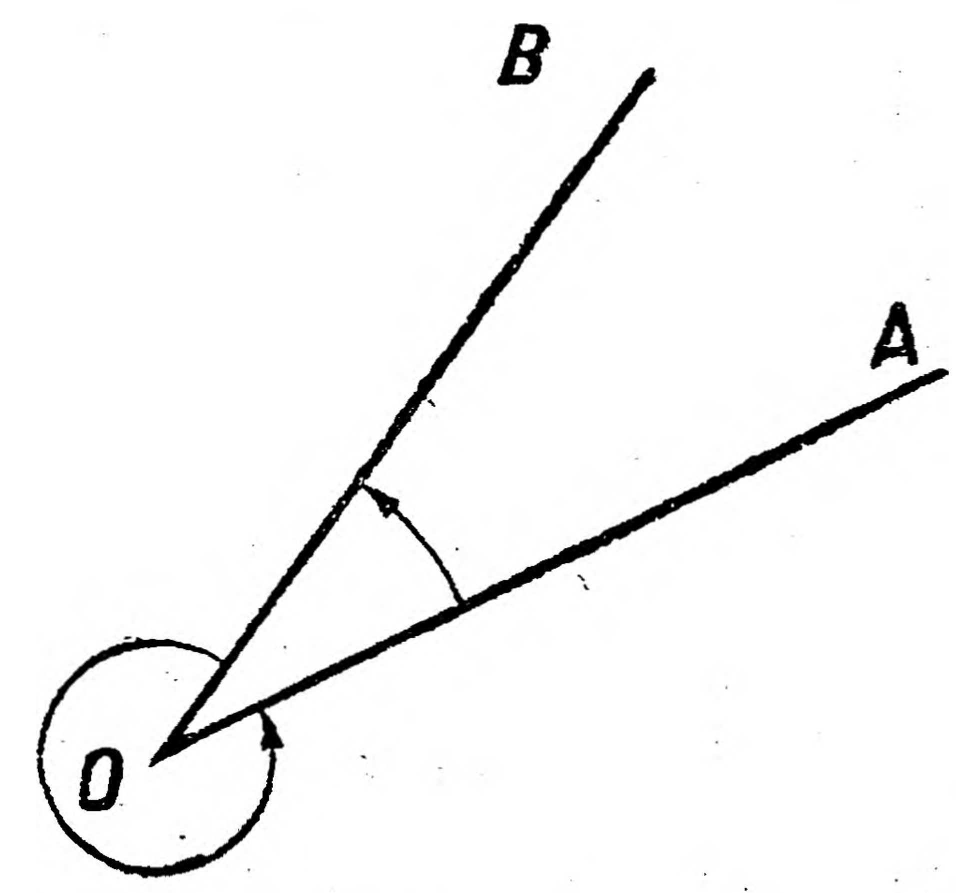
[1] Французский геометр Мишель Шаль жил с 1793 по 1880 г.

2. Если бы теорема Шаля для n точек доказывалась не по методу математической индукции (переходом от $n-1$ к n), которым мы ее доказали выше, а непосредственно по чертежу, подобно тому, как мы доказывали ее для трех точек, то сколько различных случаев взаимного расположения точек пришлось бы рассмотреть при $n=4$ и $n=5$?

3. Положение точки A на круге можно характеризовать, выбрав на нем постоянное начало O, назначив положительное направление (обыкновенно против часовой стрелки) и указав длину дуги $OA=S$. Показать, что всякому положению точки A соответствует бесчисленное множество значений S, определяемых формулой $S=S_0+2n\pi r$, где S_0 — длина наименьшей дуги, идущей от начала O в положительном направлении до точки A; r — радиус круга, n — произвольное целое число (положительное, отрицательное, равное нулю).

4. Показать, что если точки A, B, C расположены как угодно на круге, то $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}+2n\pi r$, где $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ суть направленные дуги, т. е. перемещения по дуге круга радиуса r от точки, обозначенной первой буквой каждой пары букв, до точки, обозначенной второй ее буквой, а n целое число.

§ 5. Углы и вращения. Имея два луча OA и OB, исходящие из одной общей точки O, мы будем называть углом между ними тот угол, на который надо повернуть в направлении, обратном движению часовой стрелки, первый из них до совпадения со вторым. Измеряя такой угол, как обычно, градусами или радианами, мы будем обозначать его символом (OA, OB) или короче (A, B). Таким образом символы (A, B) и (B, A) означают разные углы. Если на чертеже 10 $(A, B)=\frac{1}{3}\pi$, то угол (B, A), т. е. тот угол, на который надо повернуть в направлении, обратном движению часовой стрелки, луч OB до совпадения с лучом OA, равен $2\pi-(A, B)=\frac{5}{3}\pi$, и вообще, если $(A, B)=\omega$, то $(B, A)=2\pi-\omega$, причем $0\leqq\omega<2\pi$. Важно заметить, что при вращении луча OA на угол $\omega+2\pi$, $\omega+2\cdot 2\pi$, вообще на угол $\omega+n\cdot 2\pi$, где n — любое целое число, мы каждый раз будем иметь совмещение его с лучом OB. Получается формула:



Черт. 10.

$$(A, B)=\omega+2n\pi, \tag{1}$$

показывающая, что два луча OA и OB даже при указании того, какой из них является начальным (OA) и какой — конечным, и при указании направления вращения не определяют угла однозначно. Так угол (A, B) на чертеже 10 равен или $\frac{1}{3}\pi$, или $\frac{7}{3}\pi$, или $\frac{13}{3}\pi$, или вообще

$$\frac{1}{3}\pi+2n\pi=\frac{1}{3}\Big(6n+1\Big)\pi,$$

где n — любое целое число, а угол (B, A) равен

$$\frac{5}{3}\pi+2n\pi=\frac{1}{3}\Big(6n+5\Big)\pi.$$

Считая положительными углы, получаемые в результате вращения луча в направлении, обратном движению часовой стрелки, мы должны считать отрицательными углы, получаемые при вращении луча по часовой стрелке. Так, повернув на чертеже 10 луч OB на угол в $\frac{1}{3}\pi$ по часовой стрелке, мы приведем его к совпадению с лучом OA, причем окажется, что $(B, A) = -\frac{1}{3}\pi$. Заметим, что это значение угла (B, A) получается из вышеприведенной формулы $(B, A) = \frac{1}{3}\left(6n + 5\right)\pi$ при $n = -1$, что можно понимать так: повернув луч OB в положительном направлении до совпадения с лучом OA, т. е. на $\frac{5}{3}\pi$, мы затем вращаем его в обратном (отрицательном) направлении на полный оборот (2π) и вновь совмещаем его с лучом OA. Всего луч OB повернулся на $\frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{1}{3}\pi$, что и дает значение угла (B, A), соответствующее такому вращению.

Итак угол (A, B), определяемый двумя лучами, есть величина *многозначная*, выражаемая формулой (I), где ω есть наименьший положительный угол, на который надо повернуть луч OA до его совпадения с лучом OB, а буква n означает любое целое число (положительное, отрицательное, равное нулю).

Заметим следующие простые предложения об углах, аналогичные предложениям I—IV § 4 о направленных отрезках.

I. *Как бы ни были расположены лучи OA и OB, всегда*

$$(A, B) = -(B, A) + 2n\pi, \tag{2}$$

где *n — любое целое число* (положительное, отрицательное, равное нулю).

II. *Как бы ни были расположены лучи OA, OB, OC, всегда*

$$(A, B) + (B, C) = (A, C) + 2n\pi. \tag{3}$$

III. *Как бы ни были расположены лучи OA_1, OA_2 $OA_3 \ldots$, OA_{n-1}, OA_n, всегда*

$$(A_1 A_2) + (A_2 A_3) + \ldots + (A_{n-1} A_n) = (A_1 A_n) + 2n\pi. \tag{4}$$

IV. *Если лучи OA и OB составляют с положительным направлением оси абсцисс OX соответственно углы α и β, где $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta < 2\pi$, то, обозначая через ω наименьшее положительное значение угла (A, B), имеем всегда*

$$\omega = \beta - \alpha + 2n\pi, \tag{5}$$

где n имеет одно из двух значений 0 и $+1$.

Доказательство этих предложений можно провести совершенно аналогично доказательствам соответствующих предложений об отрезках.

Имея дело с углами, мы большей частью должны будем брать не значения самих углов, а значения их тригонометрических функций. Важно заметить, что многозначность угла (A, B) не влечет за собой многозначности тригонометрической функции угла, так как последняя не меняется при изменении угла на 2π. Действительно, из формулы (1) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sin(A, B) &= \sin\omega, & \operatorname{tg}(A, B) &= \operatorname{tg}\omega, \\ \cos(A, B) &= \cos\omega, & \operatorname{ctg}(A, B) &= \operatorname{ctg}\omega, \end{aligned} \tag{6}$$

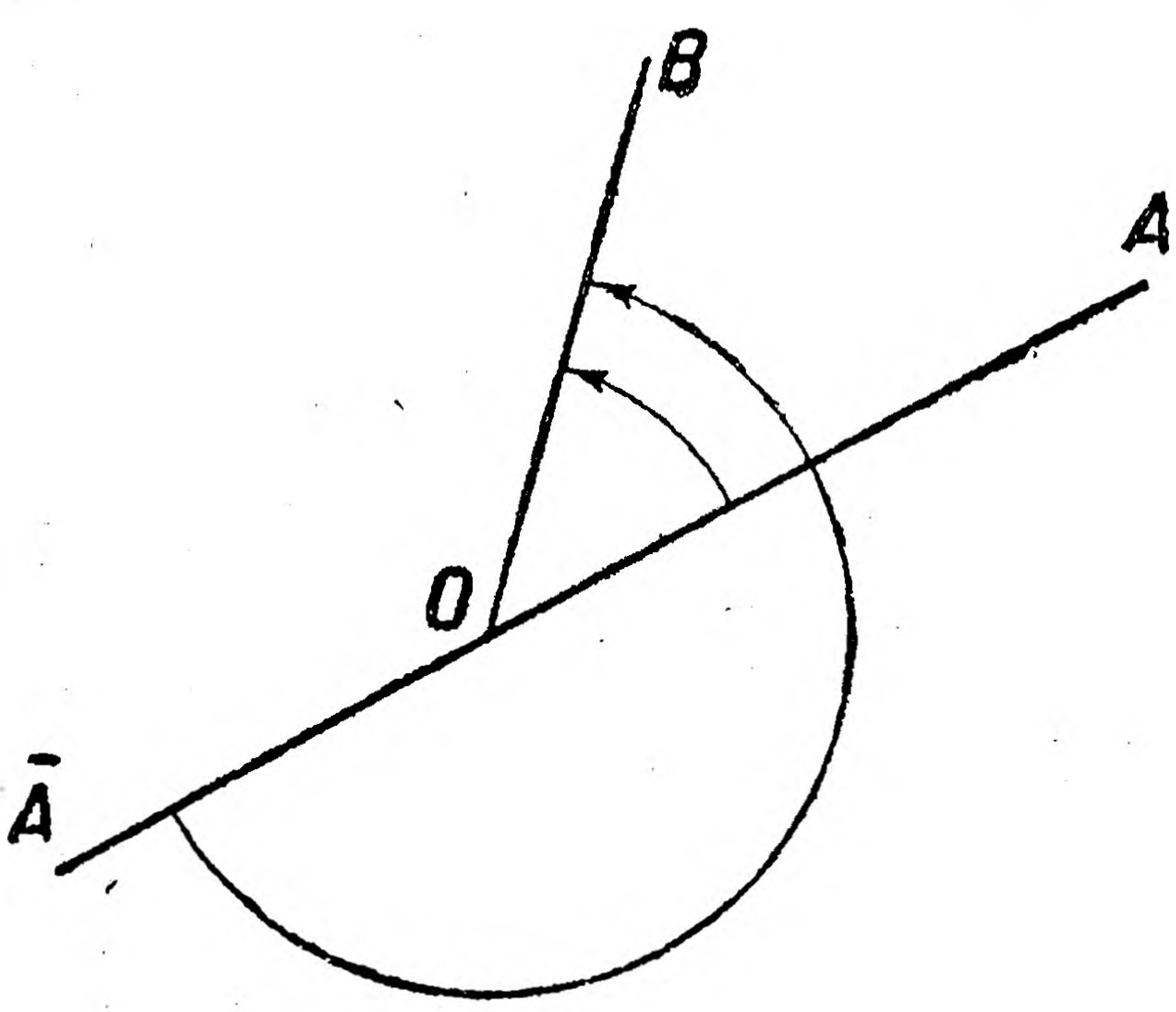
Замена угла (A, B) углом (B, A) влечет за собой изменение знака у синуса, тангенса и котангенса („нечетные“ тригонометрические функции), знак же косинуса оставляет неизменным („четная“ функция):

$$\sin(A, B) = -\sin(B, A), \quad \operatorname{tg}(A, B) = -\operatorname{tg}(B, A),$$
$$\cos(A, B) = \cos(B, A), \quad \operatorname{ctg}(A, B) = -\operatorname{ctg}(B, A). \tag{7}$$

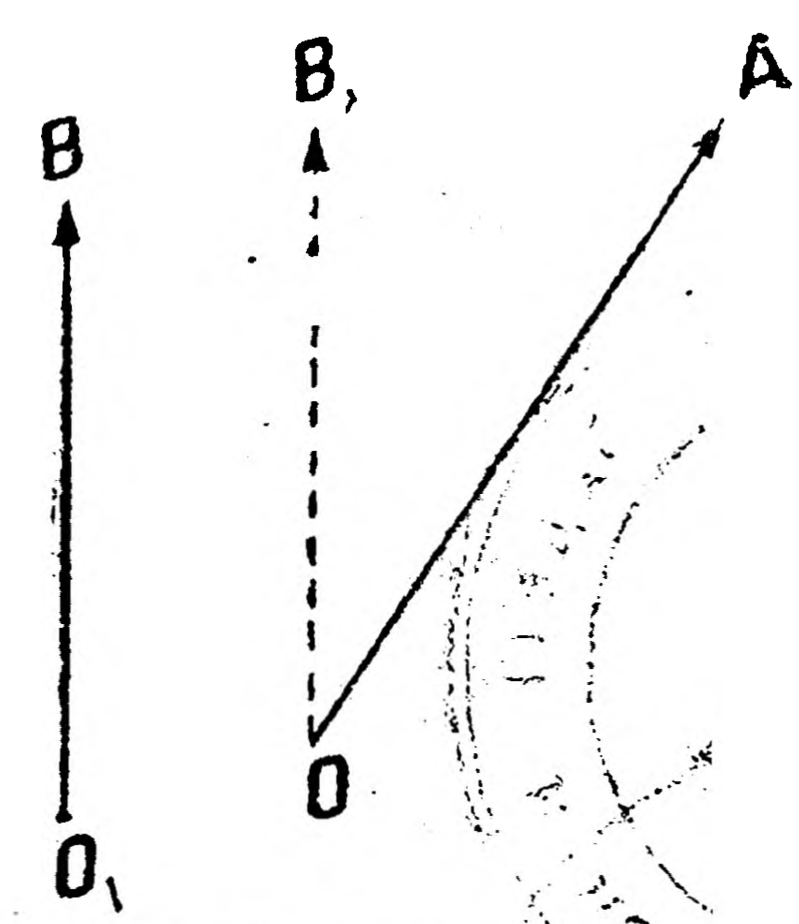
Замена луча OA лучом $O\bar{A}$, имеющим прямо-противоположное направление, равносильна замене угла ω углом $\pi + \omega$ (черт. 11), а потому

$$\sin(\bar{A}, B) = -\sin(A, B), \quad \operatorname{tg}(\bar{A}, B) = \operatorname{tg}(A, B),$$
$$\cos(\bar{A}, B) = -\cos(A, B), \quad \operatorname{ctg}(\bar{A}, B) = \operatorname{ctg}(A, B). \tag{8}$$

Задание угла (A, B) определяет любую тригонометрическую его функцию однозначно, обратная же задача, а именно задача разыскания угла по заданному значению его тригонометрической функции, дает одно определенное решение лишь при некоторых дополнительных условиях. Так, в интервале от $-\frac{1}{2}\pi$ до $+\frac{1}{2}\pi$ угол определяется однозначно по синусу, тангенсу и котангенсу, в интервале от 0 до π — по косинусу, тангенсу и котангенсу. Указывая одновременно значения синуса и косинуса угла, мы определяем его однозначно в интервале от



Черт. 11.



Черт. 11 bis.

0 до 2π. Значение тангенса (или котангенса) определяет угол в интервале от 0 до 2π двузначно, а именно: дает одно значение угла ω между 0 и π и другое, равное $\omega + \pi$, между π и 2π.

До сих пор речь у нас шла лишь о лучах, исходящих из одной общей точки. Если даны два луча OA и O_1B, проведенные из разных точек O и O_1 плоскости или даже лежащие в разных плоскостях, то углом между ними называют угол, образованный одним из них, например лучом OA, и лучом OB_1, проведенным из той же точки O, что и OA, параллельно второму данному лучу O_1B (черт. 11 bis). Итак, если $OB_1 \parallel O_1B$, то $(A, B) = (A, B_1)$.

Упражнения.

1. Через начало координат проведен луч OL, составляющий угол α с положительной осью X, т. е. $(X, L) = \alpha$, где $0 \leq \alpha = 2\pi$. Найти $\sin(Y, L)$ и $\cos(Y, L)$ для любого положения луча L.

Указание. Сперва рассмотреть порознь 4 случая возможного расположения луча OL в 4 четвертях, а затем сделать вывод, основанный на применении формулы (3) и имеющий силу для всех случаев.

2. Показать справедливость формул (2) — (5), основываясь на результатах решения задач 3 и 4 из числа приведенных в конце § 4.

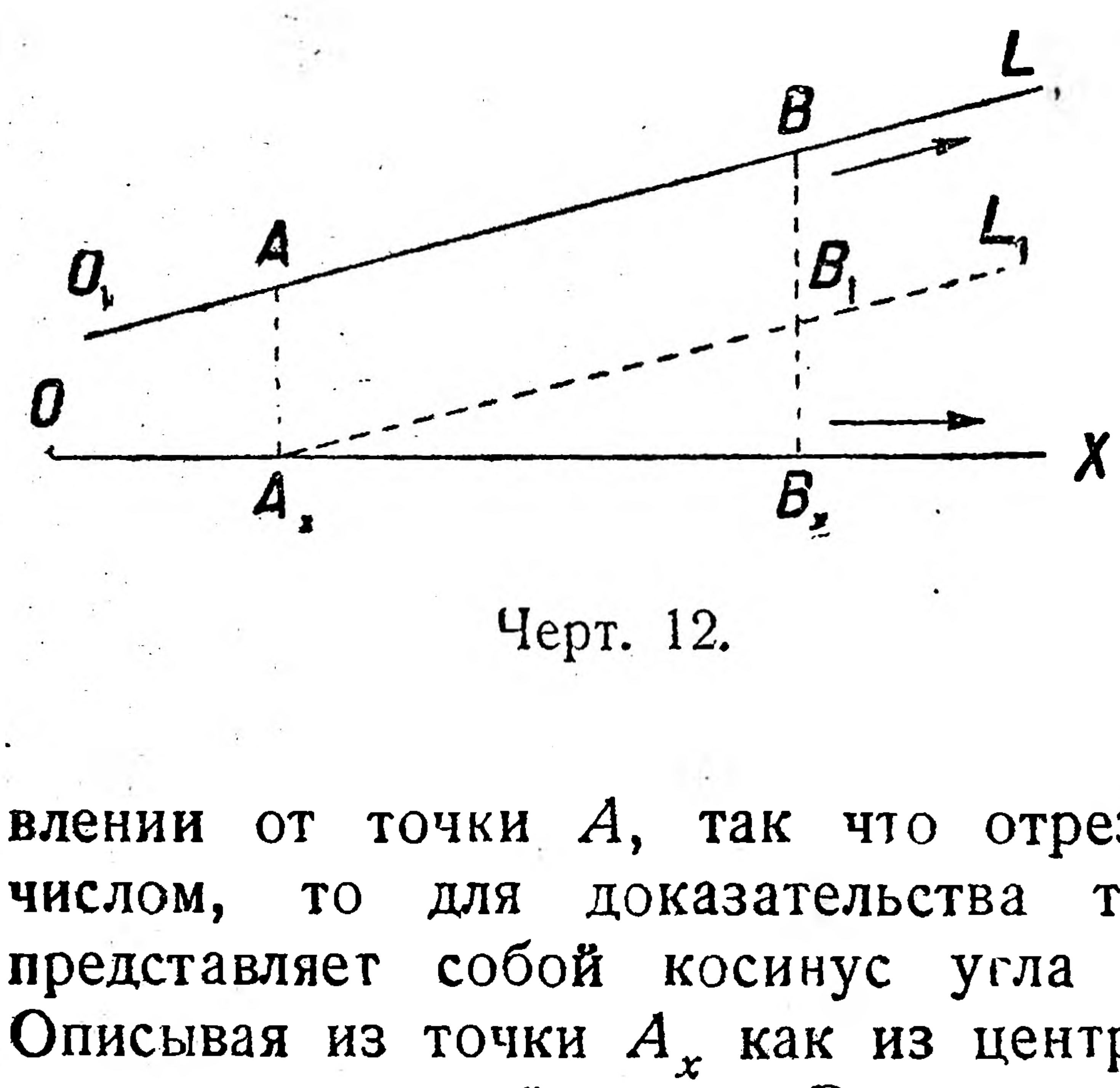
§ 6. Некоторые сведения о проекциях. Проекцией точки A на ось OX (черт. 12) называют основание перпендикуляра AA_x, опущенного из точки A на эту ось. Проекцией отрезка AB на ту же ось называют отрезок A_xB_x этой оси, содержащийся между проекциями концов A и B проектируемого отрезка [1]).

Различая начало A и конец B проектируемого отрезка, мы должны различать начало A_x и конец B_x его проекции, т. е. рассматривать проекцию A_xB_x как направленный отрезок, имеющий либо положительное, либо отрицательное значение, смотря по тому, совпадает ли направление от A_x к B_x с положительным направлением оси OX или противоположно ему. Если же имеют в виду лишь абсолютное значение проекции A_xB_x, то говорят о *длине проекции* отрезка.

Выбрав положительное направление на прямой O_1L, на которой лежит проектируемый отрезок AB, и на оси проекций OX, имеем соотношение между проекцией A_xB_x и самим проектируемым отрезком AB в виде формулы

$$A_xB_x = AB\cos(X,\ L), \tag{1}$$

выражающей следующую теорему, имеющую место при любом расположении направленного отрезка относительно оси проекций: *проекция отрезка равна произведению отрезка на косинус угла между осью проекций и тем лучом, на котором данный отрезок расположен.*



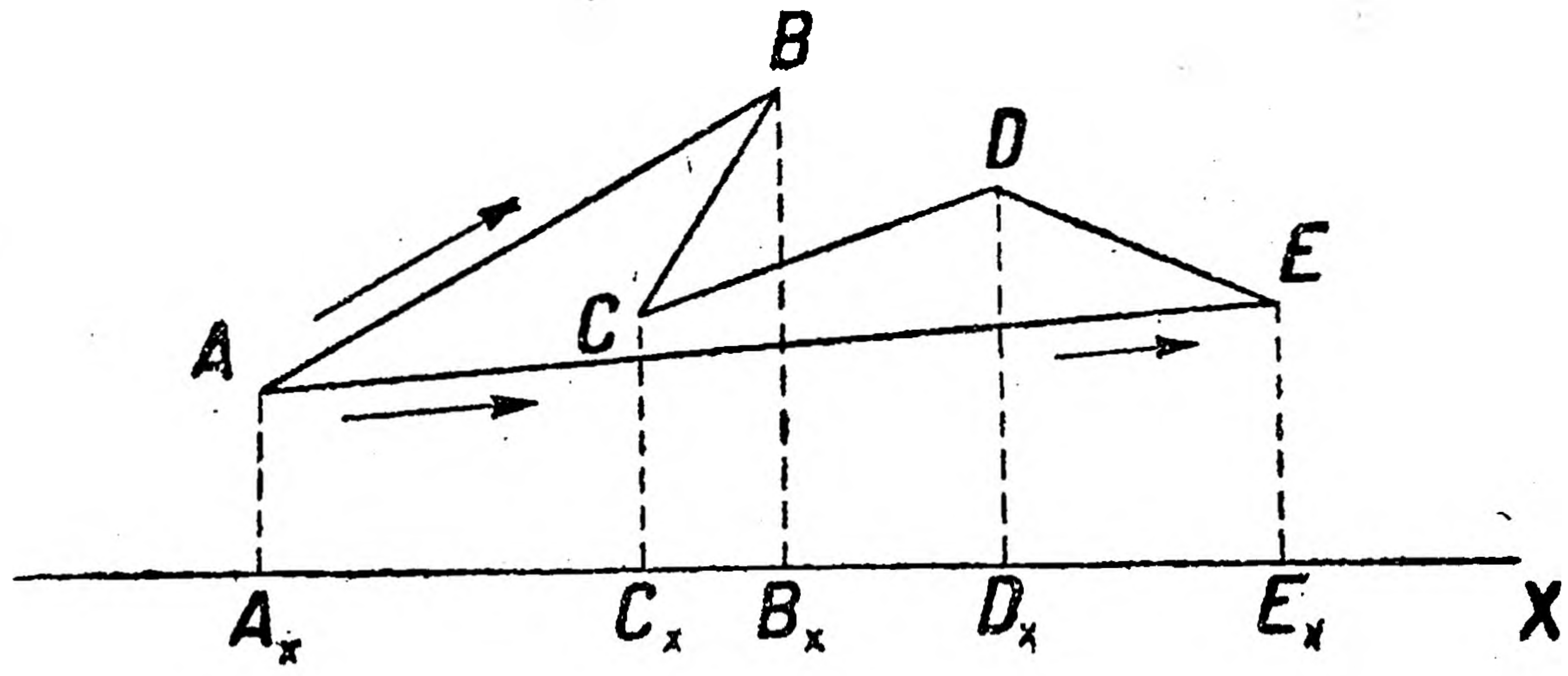
Черт. 12.

Доказательство теоремы для случая, изображенного на чертеже 12, получается сразу, если провести $A_xL_1 \parallel O_1L$ и рассмотреть прямоугольный треугольник $A_xB_1B_x$. Если точка B расположена в положительном направлении от точки A, так что отрезок AB выражается положительным числом, то для доказательства теоремы достаточно выяснить, что представляет собой косинус угла $(X,\ L)$, меняющегося от 0 до 2π. Описывая из точки A_x как из центра радиусом $A_xB_1 = AB$ круг и опуская из конечной точки B_1 этого радиуса перпендикуляр B_1B_x на ось OX, мы получим *линию косинуса* A_xB_x, а ее отношение к радиусу AB есть косинус угла $(X,\ L)$, а потому $A_xB_x = AB\cos(X,\ L)$. Особого внимания заслуживают следующие случаи: если $(L,\ X) = 0$, то $A_xB_x = AB$ (при параллельности проектируемого отрезка оси проекций проекция отрезка равна самому отрезку); если $(L,\ X) = \pi$, то $A_xB_x = -AB$ (при параллельности проектируемого отрезка оси проекций, но противоположности положительных направлений на них проекция отрезка равна проектируемому отрезку по величине и противоположна ему по знаку); если $(L,\ X) = \frac{1}{2}\pi$ или $\frac{3}{2}\pi$, то $A_xB_x = 0$ (при перпендикулярности проектируемого отрезка оси проекций проекция отрезка есть точка).

---

[1]) Это так называемые ***прямоугольные***, или ***ортогональные***, проекции. О проекциях ***косоугольных*** и ***центральных*** речь будет итти в §§ 10 и 31.

Теорема, выражаемая формулой (1), верна и в том случае, когда точка B лежит не в положительном, а в отрицательном направлении от точки A, так что отрезок AB выражается отрицательным числом. Действительно, перенося точку B на другую сторону от точки A, мы переменим знаки обоих отрезков AB и A_xB_x, угол же (X, L), т. е. угол между положительными направлениями обеих осей, останется неизменным, а потому формула (1) сохранит силу и в этом случае.

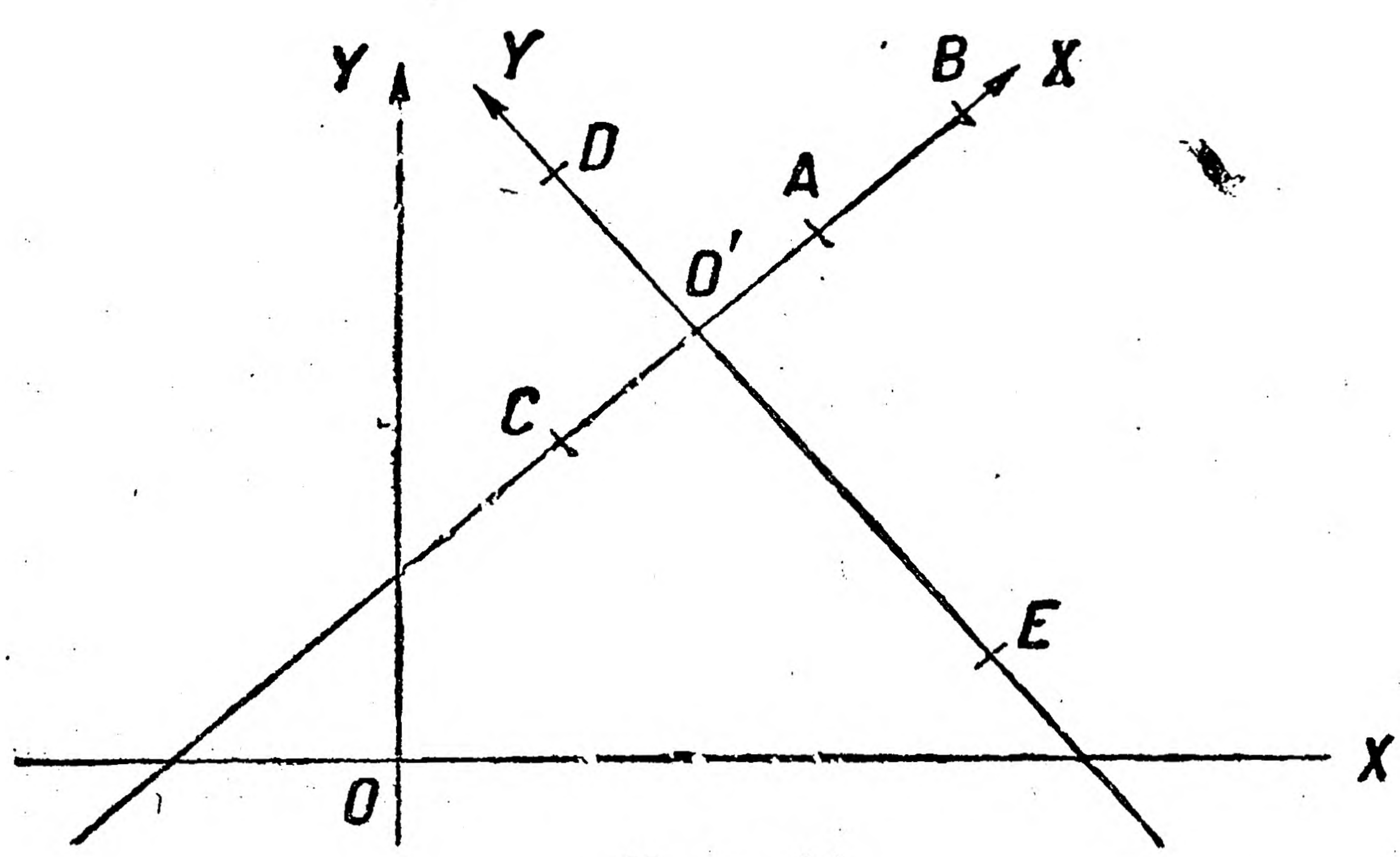


Черт. 13.

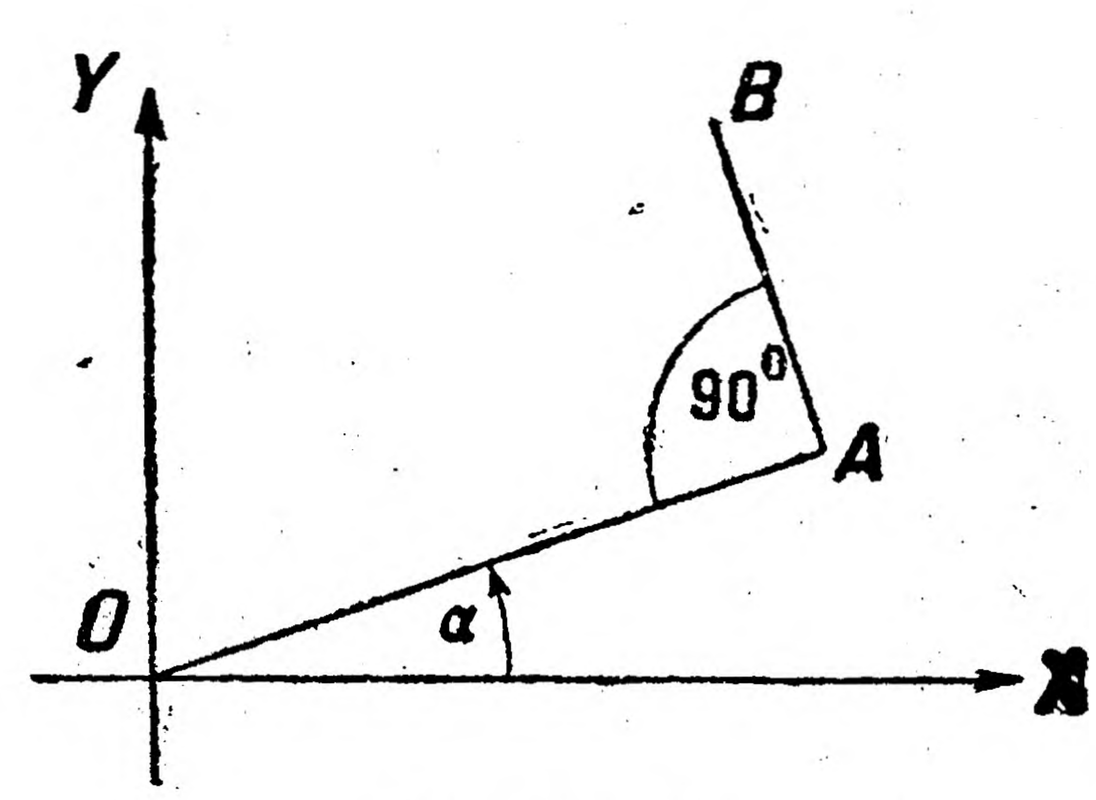
Имея ломаную линию $ABCDE$, состоящую из произвольного числа отрезков — „звеньев“ ломаной (на чертеже 13 для простоты взяты только 4 звена, но вывод остается в силе для любого их числа), проходящих в определенном направлении, указанном стрелкой, мы можем провести ее *замыкающую* AE, соединяя прямой ее начальную и конечную точки. Проектируя на какую-нибудь ось все точки A, B, C, D, E, получим на ней точки A_x, B_x, C_x, D_x, E_x, причем согласно теореме Шаля

$$A_xB_x + B_xC_x + C_xD_x + D_xE_x = A_xE_x, \tag{2}$$

как бы ни были расположены точки A, B, C, D, E. Формула (2) выражает вторую важную для дальнейшего теорему о проекциях: *сумма проекций всех звеньев ломаной на какую-нибудь ось равна проекции замыкающей на ту же ось.*



Черт. 14.



Черт. 15.

Следствие I. *Если две ломаные имеют общие начальную и конечную точки, то их проекции на одну и ту же ось равны* (проекцией ломаной называют сумму проекций всех ее звеньев).

Действительно, такие две ломаные имеют общую замыкающую, а потому их проекции, равные согласно теореме (2) о проекции замыкающей, равны между собой.

Следствие II. *Проекция замкнутой ломаной равна нулю.* Если ломаная замкнута, т. е. если конечная ее точка совпадает с начальной, то ее замыкающая равна нулю, а потому и проекция самой ломаной равна нулю.

Все заключения настоящего параграфа сохраняют свою силу и тогда, когда рассматриваемые отрезки и ось проекций не находятся на одной плоскости, а расположены произвольным образом в пространстве.

Упражнения.

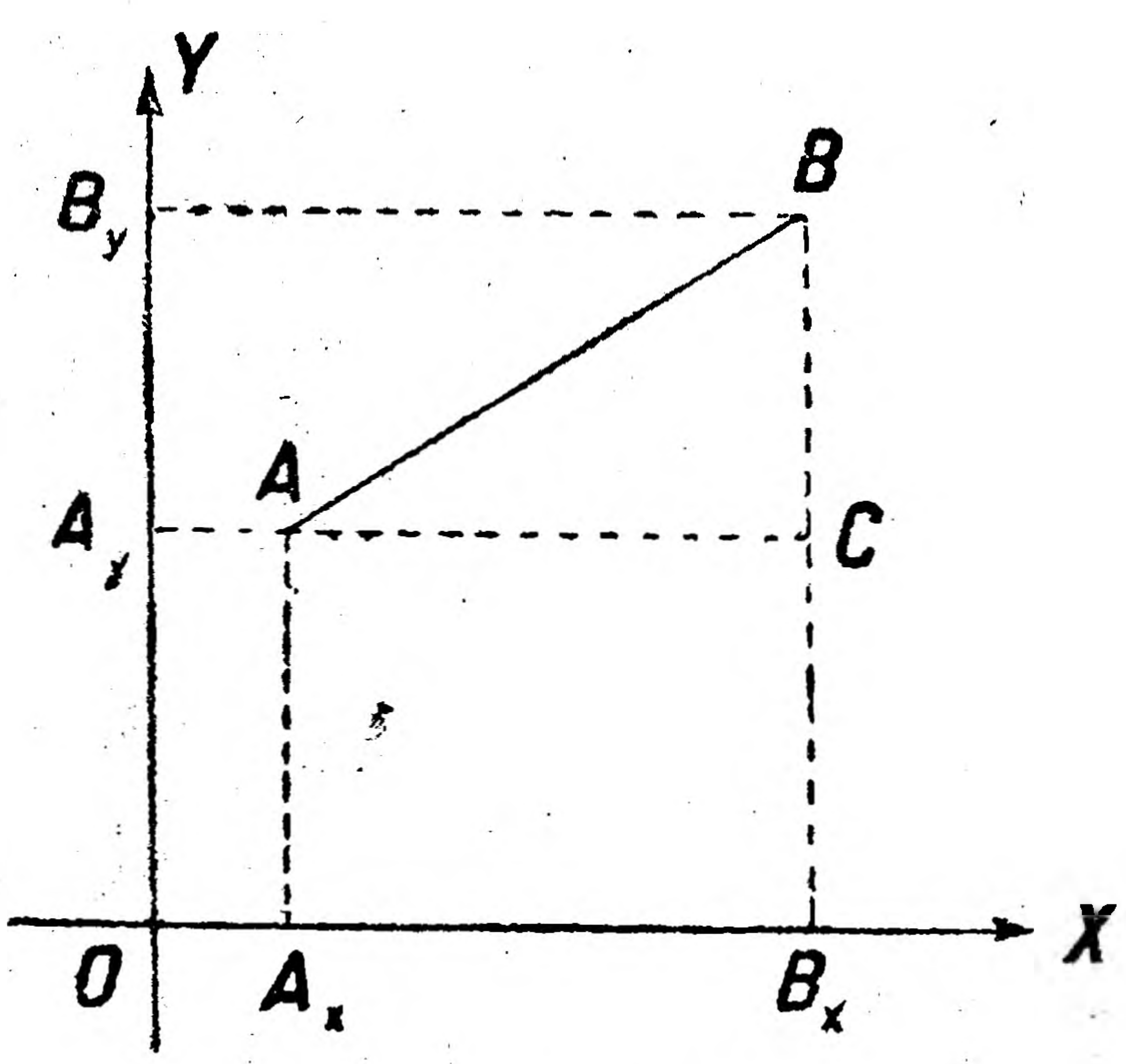
1. Показать возможность определения координат точки A на плоскости как проекций отрезка OA на каждую из координатных осей.
2. Найти проекции отрезков AB, $O'C$, $O'D$, ED на оси OX и OY (черт. 14).
3. Найти проекции ломаной OAB сперва на ось X, потом на ось Y, если $OA=a$, $AB=b$. На чертеже 15 угол α взят острым. Повернуть ломаную так, чтобы угол α стал углом II, III, IV четверти, и решить задачу для каждого случая еще раз.

§ 7. Расстояние между двумя точками. Зная абсциссы x_1 и x_2 точек A и B на оси X, мы находим отрезок AB по формуле (5) § 4: $AB=x_2-x_1$. Расстояние d от точки A до точки B, т. е. длина отрезка AB, которая является величиной всегда положительной, определяется по формуле

$$d=|x_2-x_1|, \quad d=AB=|\overline{AB}|, \tag{1}$$

где две вертикальных черточки показывают, что берется абсолютное значение отрезка $\overline{AB}$.

Если точки A и B расположены не на оси X, а где угодно на плоскости, то, обозначая их координаты через x_1, y_1 и x_2, y_2, имеем для случая, изображенного на чертеже 16:



Черт. 16.

$$AB^2=AC^2+CB^2,$$

но

$$AC=A_xB_x=OB_x-OA_x=x_2-x_1,$$
$$CB=B_xB-B_xC=y_2-y_1,$$
$$AB=d,$$

а потому

$$d=+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{2}$$

Сохраняется ли эта формула в других случаях расположения точек A и B относительно координатных осей?

Вместо того, чтобы рассматривать различные случаи, какие могут представиться, спроектируем отрезок AB на обе оси координат. Применяя теорему I § 6, получаем для всякого расположения точек A и B:

$$A_xB_x=AB\cos(X,\ AB),\quad A_yB_y=AB\cos(Y,\ AB). \tag{3}$$

Но согласно формуле (3) § 5

$$(X,\ AB)+(AB,\ Y)=(X,\ Y)+2n\pi=\frac{1}{2}\pi+2n\pi,$$

откуда

$$(AB,\ Y)=\frac{1}{2}\pi-(X,\ AB)+2n\pi.$$

Но

$$(Y,\ AB)=-(AB,\ Y)+2n_1\pi,$$

где n_1 — целое, а потому

$$(Y, AB) = (X, AB) - \frac{1}{2}\pi + 2n_2\pi,$$

где $n_2 = n_1 - n$ и, следовательно,

$$\cos(Y, AB) = \cos\left[(X, AB) - \frac{1}{2}\pi + 2n_2\pi\right] = \cos\left[(X, AB) - \frac{1}{2}\pi\right] = \sin(X, AB).$$

Переписываем формулы (3) в виде

$$A_xB_x = AB\cos(X, AB), \quad A_yB_y = AB\sin(X, AB),$$

возводим каждую из них почленно в квадрат и складываем обе почленно. Получаем:

$$A_xB_x^2 + A_yB_y^2 = AB^2.$$

Заменяя A_xB_x через $x_2 - x_1$, A_yB_y — через $y_2 - y_1$, AB — через d, имеем окончательно:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

откуда сейчас же получается формула (1), справедливость которой для любого случая расположения точек A и B относительно координатных осей таким образом доказана.

Упражнения.

1. Найти расстояние от точки A (50; 20) до точки B (—10; 5) сперва простым измерением по чертежу, затем применяя формулу (1), и сравнить результаты.

2. Показать справедливость формулы (1) для случая, когда точка A расположена во II четверти, точка B — в I четверти, причем $y_1 < y_2$, не прибегая к теореме о проекциях.

3. Какой вид примет формула (1) для случая, когда одна из данных точек совпадает с началом координат?

4. Предполагая, что абсцисса точки A равна ее ординате и что расстояние от точки A до точки (11; 13) равно 10, найти координаты точки A.

5. Найти на оси абсцисс точку, расстояние которой от точки (12; 5) равно 13.

§ 8. Деление отрезка, заданного координатами его концов, в данном отношении. Пусть на оси X даны две точки A и B с абсциссами x_1 и x_2 и требуется указать на этой же оси такую точку M, которая делила бы отрезок между A и B в данном отношении, т. е. такую, чтобы отношение $AM:MB$ равнялось некоторому наперед заданному положительному числу λ.

Обозначая неизвестную абсциссу точки M через x, имеем

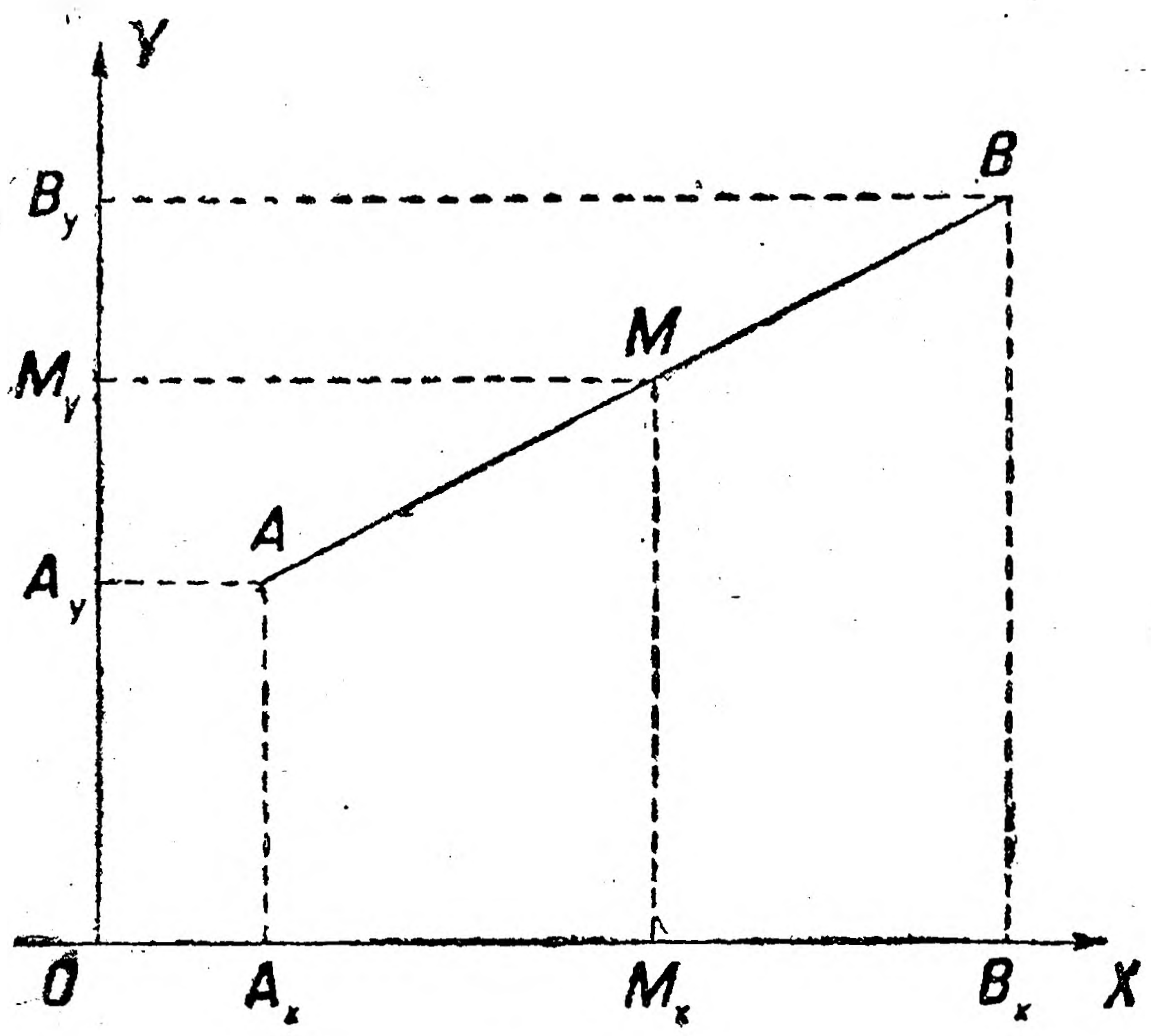
$$AM = x - x_1, \quad MB = x_2 - x, \quad AM:MB = (x - x_1):(x_2 - x) = \lambda.$$

Решая полученное уравнение относительно x, находим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \tag{1}$$

что и решает поставленную задачу.

Если данные точки A и B лежат не на оси X, а где угодно на плоскости, и нужно найти на прямой AB такую точку M, которая делила бы отрезок между точками A и B в данном отношении, т. е. такую, чтобы отношение $AM:MB$ равнялось некоторому наперед заданному положительному числу λ, то проектируем точки A, M, B на ось X и на ось Y и применяем теорему о пропорциональности отрезков, на которые стороны угла рассекаются параллельными секущими. Обозначая данные координаты точки A через x_1, y_1, точки B через x_2, y_2, искомые координаты точки M через x, y, имеем (черт. 17):



Черт. 17.

$$A_xM_x : M_xB_x = AM : MB = \lambda,$$

а потому согласно формуле (1)

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Точно так же

$$A_yM_y : M_yB_y = AM : MB = \lambda,$$

а потому согласно той же формуле

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Итак, координаты точки M, делящей отрезок от точки $A(x_1, y_1)$ до точки $B(x_2, y_2)$ в отношении, равном λ, выражаются формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

Если, например, нужно найти точку M, делящую отрезок от точки A до точки B пополам, то $AM = MB$, $AM : MB = \lambda = 1$, и формулы (2) дают:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2). \tag{3}$$

Применяя формулы (1) и (2), надо помнить, что число λ есть отношение отрезка, прилегающего к точке, координаты которой обозначены через x_1 и y_1, к отрезку, прилегающему к точке, координаты которой обозначены через x_2 и y_2, а не наоборот. Если, например, надо указать такую точку M на прямой AB, соединяющей точки $A(2; 6)$ и $B(7; 12)$, которая вдвое ближе к A, чем к B, то, обозначая координаты точки A через x_1 и y_1, а точки B через x_2 и y_2, мы должны взять

$$\lambda = AM : MB = 1 : 2 = 0{,}5,$$

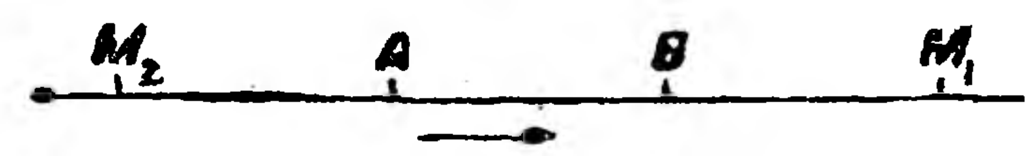
а потому

$$x = (2 + 0{,}5 \cdot 7) : (1 + 0{,}5) = 3\frac{2}{3},$$
$$y = (6 + 0{,}5 \cdot 12) : (1 + 0{,}5) = 8.$$

Установив на прямой AB определенное направление как положительное, например направление от A к B, мы можем обобщить нашу задачу, считая λ уже не обязательно положительным, а каким угодно вещественным числом. Если отношение $AM : MB = \lambda$ есть число отрицательное, то отрезки AM и MB имеют разные знаки, и точка M лежит не между точками A и B, а либо за точкой B (если $|\lambda| > 1$), либо за A (если $|\lambda| < 1$). Так, при $\lambda = -2$ точка M совпадает с точкой M_1, при $\lambda = -\frac{1}{2}$ точка M совпадает с точкой M_2 (черт. 18). Действительно, взяв $AB = 12$ *мм*, $AM_1 = 24$ *мм*, $AM_2 = -12$ *мм*, имеем:

$$AM_1 : M_1B = 24 : (-12) = -2,$$

$$AM_2 : M_2B = (-12) : (+24) = -0{,}5.$$



Черт. 18.

Формулы (1) и (2) сохраняют силу и при отрицательном λ.

Упражнения.

1. Найти точку, делящую отрезок от точки A (50; — 30) до точки B (—20; 70) в отношении, равном $\lambda = 2:3$.

2. Найти центр тяжести треугольника с вершинами в точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, зная, что он лежит на медиане треугольника в точке, делящей медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

3. Придавая λ ряд значений, идущих от 0 к $+\infty$, а затем от 0 к $-\infty$, проследить, как будет при этом двигаться точка M, делящая отрезок AB в отношении, равном λ.

§ 9. Преобразование прямоугольных координат. Нередко в процессе решения задачи приходится заменять первоначально взятую систему координатных осей другой, новой системой. При этом возникают две задачи: 1) зная координаты некоторой точки M относительно первоначально взятой (старой) системы, найти координаты той же точки M относительно новой системы и, 2) зная координаты точки M относительно новой системы, найти ее координаты относительно первоначально взятой (старой) системы.

Рассмотрим различные случаи, какие могут представиться при решении этой задачи.

I. Параллельное перенесение осей. Положим, что новые оси координат X' и Y' проведены параллельно старым осям X и Y и новое начало O' находится в точке с координатами a, b относительно старых осей. Взяв точку M с координатами x, y относительно старых осей, обозначим через x', y' координаты этой же точки относительно осей новых и найдем зависимость между x и y, с одной стороны, x' и y' — с другой. На чертеже 19 имеем $OQ = a$, $QO' = b$, $OP = x$, $PM = y$, $O'P' = x'$, $P'M = y'$.

Но $OP = OQ + QP$, $PM = PP' + P'M$, откуда в силу равенства $QP = O'P'$ и $PP' = QO'$ получаем искомые формулы:

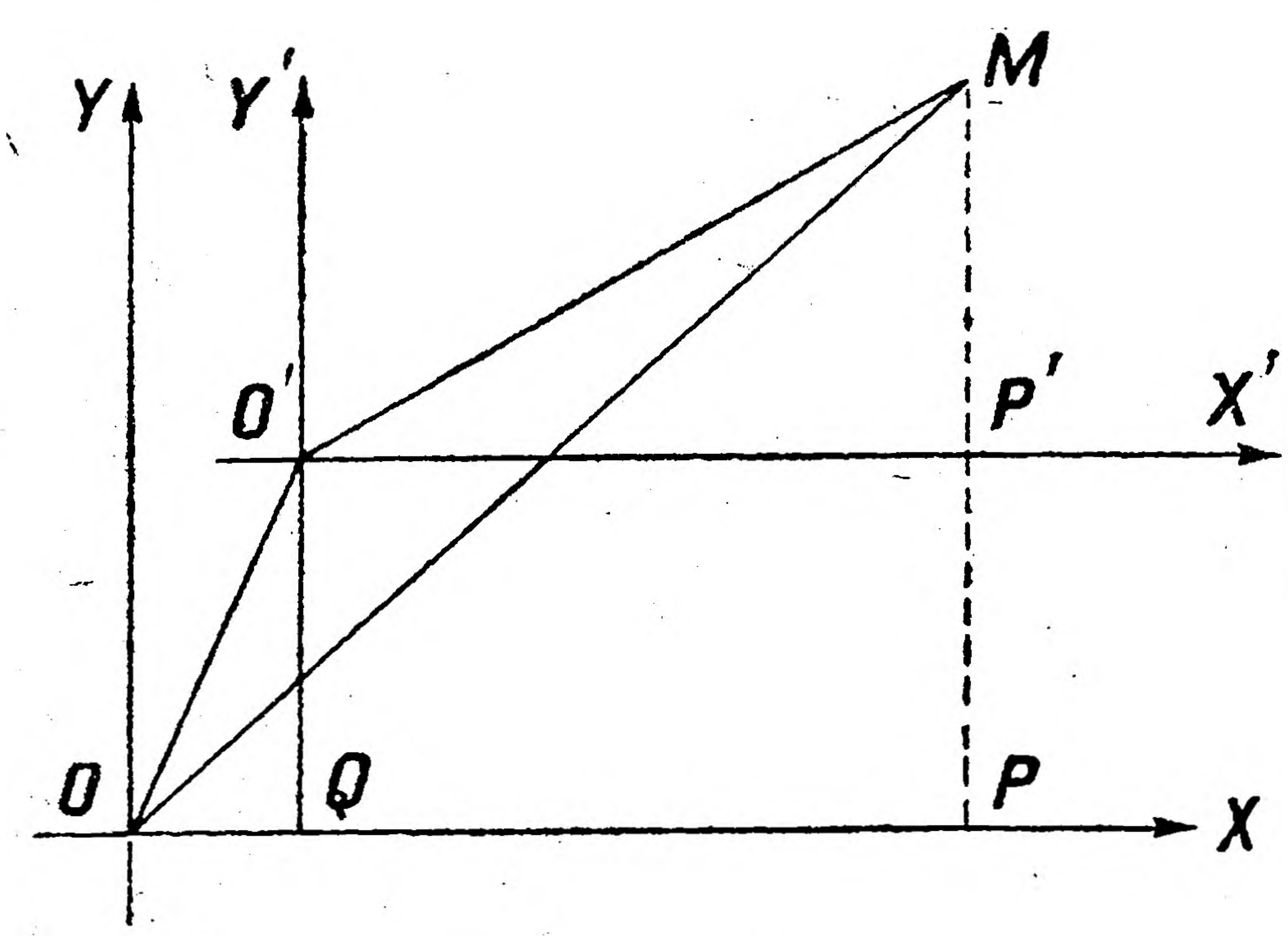
$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \tag{1}$$

которые говорят, что *при параллельном перенесении координатных осей старые координаты каждой точки равны новым ее координатам, сложенным с координатами нового начала относительно старой системы координат* (или, короче, *со старыми координатами нового начала*).

Например, если координаты нового начала суть $a = 5$ *мм* и $b = 10$ *мм*, то точка, имевшая относительно старых осей координаты $x = 25$, $y = 20$, будет иметь относительно новых осей координаты x' y', определяемые из уравнений $25 = x' + 5$, $20 = y' + 10$, а именно: $x' = 20$, $y' = 10$. Обратно, если в новой системе координаты некоторой точки равны $x' = -10$, $y' = 30$, то координаты той же точки в старой системе суть $x = -10 + 5 = -5$, $y = 30 + 10 = 40$.

Мы вывели формулы (1) в предположении, что новые оси и данная точка расположены относительно старых осей так, как показано на чертеже 19. Естественно поставить вопрос о том, сохраняют ли формулы (1) силу при другом расположении новых осей и данной точки, т. е. когда начало O' новой системы и точка M лежат уже не в I четверти, как на чертеже 19, а где угодно на плоскости, например начало O' может лежать во II четверти, а точка M — в III и т. п.

Вместо того чтобы рассматривать различные случаи, какие могут при этом представиться, возьмем ломаную линию из двух звеньев $OO'M$ и ее замыкающую OM. Будут ли эти линии расположены так, как показано на чертеже 19 или как угодно иначе, во всяком случае, проектируя их на ось X и применяя II теорему § 6, имеем, что $O_xO'_x+O'_xM_x=O_xM_x$, т. е. что $a+x'=x$, и точно так же, проектируя на ось Y, имеем $O_yO'_y+O'_yM_y=O_yM_y$, откуда $b+y'=y$. Таким образом справедливость формул (1) доказана для любого расположения новых осей и точки M относительно старых осей.



Черт. 19.

II. Вращение осей. Если начало новой системы координат совпадает с началом старой системы, и оси X и Y совмещаются с осями X' и Y' после поворота на угол α, отсчитываемый, как всегда, в положительном направлении, то, обозначая буквами P и P' проекции данной точки M на оси X и X_1, проектируем ломаные OPM и $OP'M$ на ось X. По следствию I теоремы (2) § 6 получаем:

$$O_xP_x+P_xM_x=O_xP'_x+P'_xM_x,$$

а по теореме (1) § 6

$$x\cos(X,X)+y\cos(X,Y)=x'\cos(X,X')+y'\cos(X,Y').$$

Но

$$(X,X)=0,\ (X,Y)=\frac{1}{2}\pi,\ (X,X')=\alpha,\ (X,Y')=(X,Y)+(Y,Y')=\frac{1}{2}\pi+\alpha,$$

следовательно,

$$x\cdot 1+y\cdot o=x'\cos\alpha+y'\cos\left(\frac{1}{2}\pi+\alpha\right).$$

Производя упрощения, получаем:

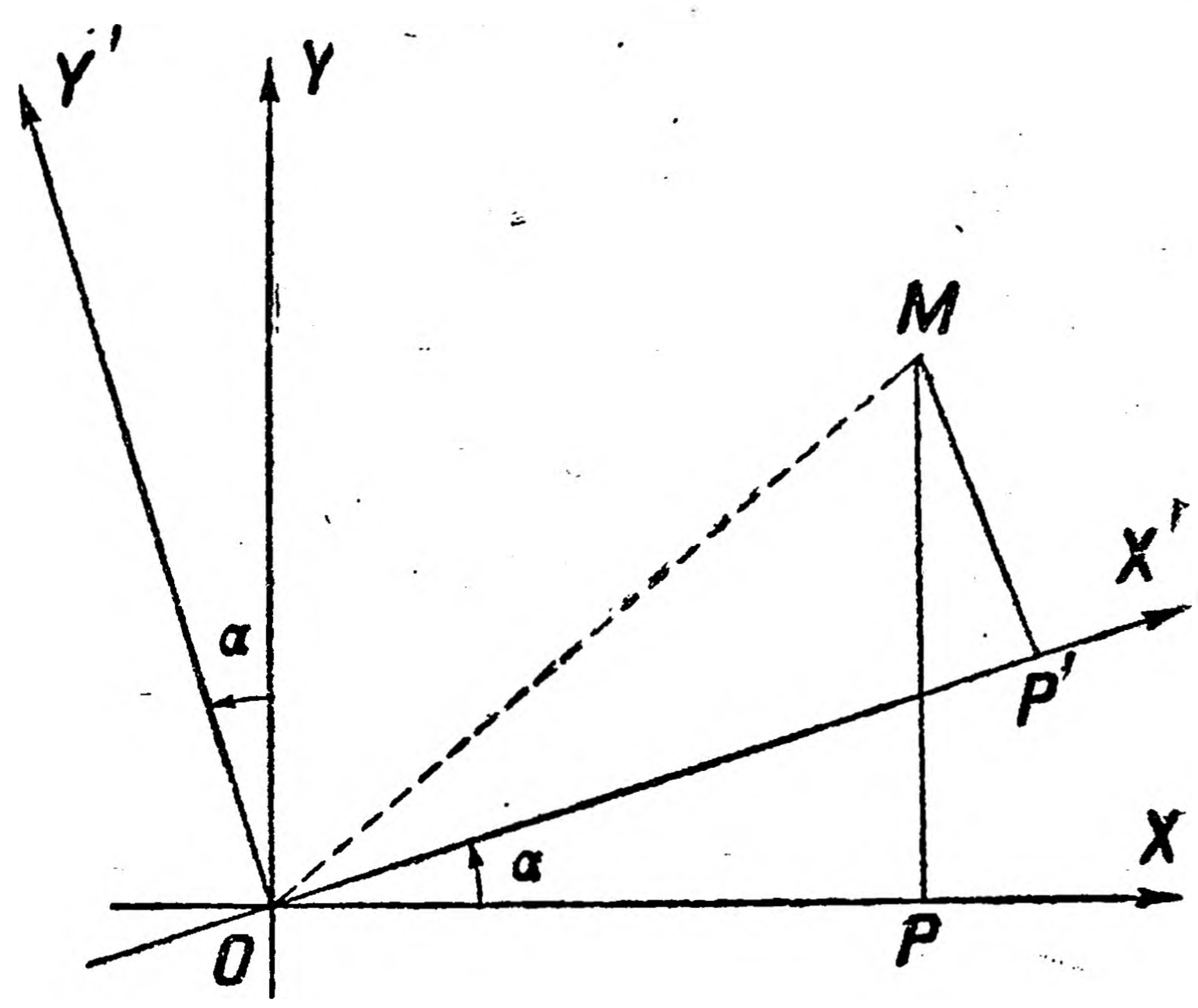
$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha.$$

Проектируя далее ломаные OPM и $OP'M$ на ось Y и рассуждая, как и выше, придем к формуле $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$. Итак, имеем пару формул:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \qquad (2)$$

Важно заметить, что при выводе формул (2) мы пользовались лишь теоремами о проекциях, верными для любого расположения линий, а потому эти формулы справедливы для всякого расположения точки M и новых осей X', Y' относительно старых осей.

Для лучшего запоминания формул (2) можно заметить, что во второй из них „все идет по порядку“ (первая координата x умножается на первую тригонометрическую функцию $\sin\alpha$, вторая координата y — на вторую тригонометрическую функцию $\cos\alpha$, оба произведения соединяются знаком первого арифметического действия — сложения), в первой же „все идет наоборот“ (x умножается на косинус, y — на синус, между ними знак действия, обратного сложению).

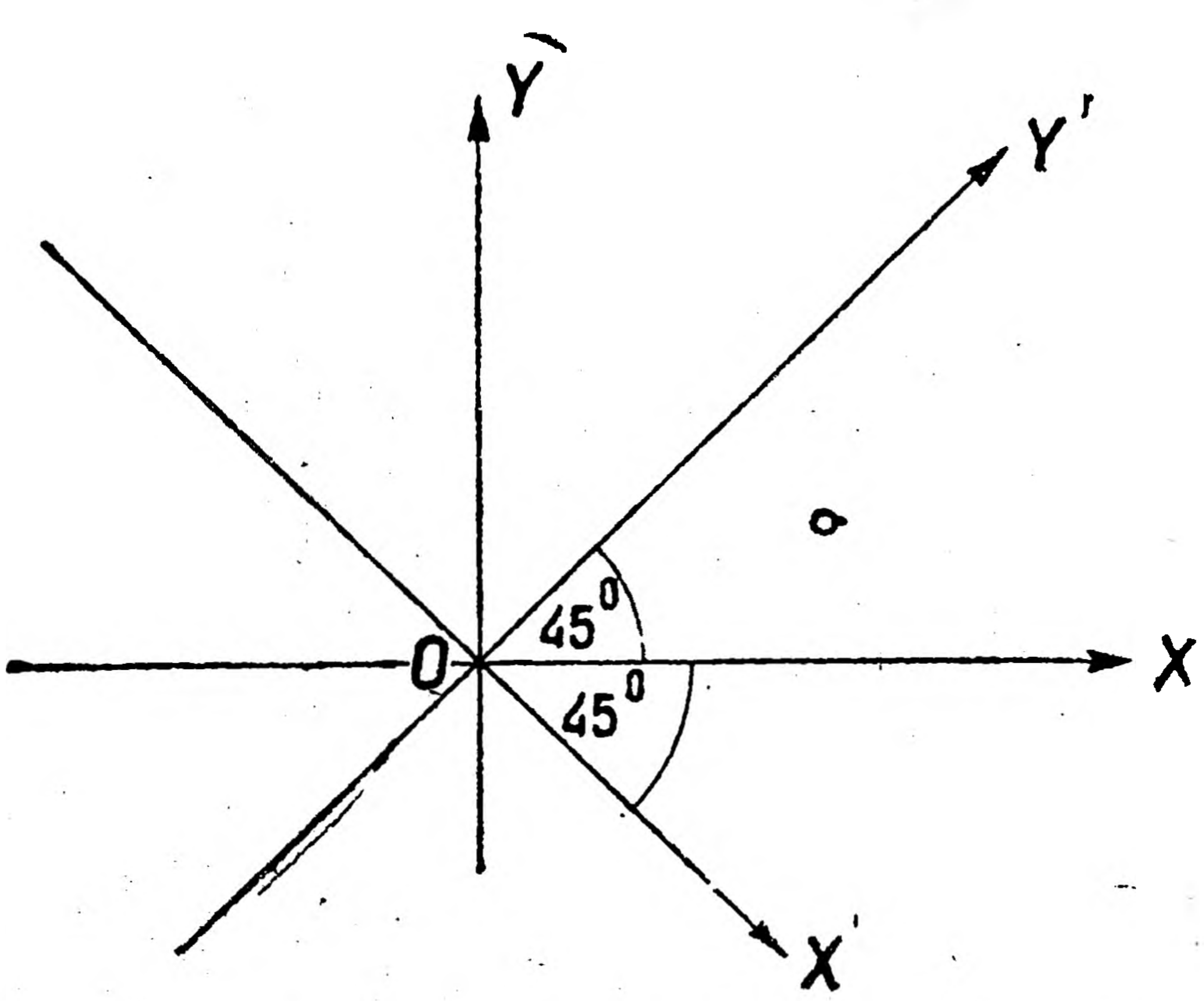


Черт. 20.

Формулы (2) решают вторую из поставленных в начале настоящего параграфа задач (для рассматриваемого случая). Для решения первой из них надо решить систему (2) относительно координат x', y', для чего умножаем первое из уравнений (2) на $\cos\alpha$, второе на $\sin\alpha$, затем складываем результаты и получаем значение x' в зависимости от x, y, α. Умножение первого уравнения на $-\sin\alpha$, а второго на $\cos\alpha$ и последующее сложение дают значение y' в зависимости от x, y, α. В результате получаются формулы:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned} \tag{3}$$

которые и решают первую из поставленных в начале параграфа задач. Формулы (3) можно не запоминать, так как, помня формулы (2), формулы (3) легко получить, применяя только что указанный способ.

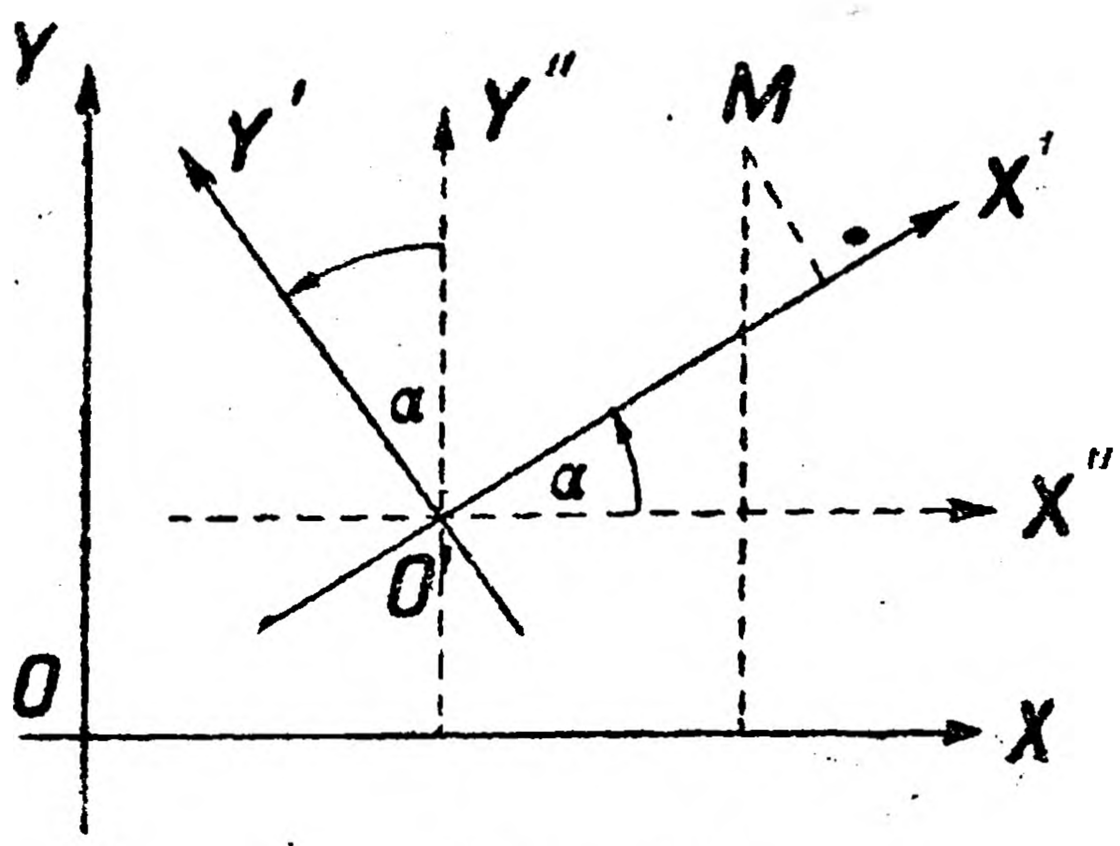


Черт. 21.

Для примера рассмотрим случай, изображенный на чертеже 21. Здесь $\alpha = (X, X') = 2\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi$; с таким же правом можно считать $\alpha = -\frac{1}{4}\pi$ (но ни в коем случае не $+\frac{1}{4}\pi$). Формулы (2) и (3) дают:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(x'+y'), & x' &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(x-y), \\ y &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(-x'+y'), & y' &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(x+y). \end{aligned} \tag{4}$$

III. Общий случай преобразования прямоугольных координат. Такой общий случай имеет место, если начало новой системы координат находится в точке $O'(a;\ b)$, а ее оси X', Y' повернуты на угол α относительно осей X, Y старой системы (черт. 22). Чтобы получить формулы, связывающие старые координаты точки M x, y с новыми ее координатами x', y', возьмем вспомогательную систему координатных осей X'', Y'', параллельных старым осям X и Y и пересекающихся в начале новой системы координат — в точке $O'(a;\ b)$. Обозначая координаты той же точки M относительно этой вспомогательной системы через x'' и y'', имеем согласно формулам (1) и (2):



Черт. 22.

$$x = x'' + a, \quad x'' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = y'' + b, \quad y'' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

откуда, исключая x'' и y'', получаем формулы:

$$\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\\ y &= b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{aligned} \tag{5}$$

решающие вторую из поставленных в начале настоящего параграфа задач для рассматриваемого общего случая. Решая систему (5) относительно x', y', имеем формулы:

$$\begin{aligned} x' &= (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha,\\ y' &= -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha, \end{aligned} \tag{6}$$

решающие первую задачу.

Упражнения.

1. Дана точка $M(-50;\ 30)$. Найти ее координаты относительно новых осей, параллельных прежним, но пересекающихся в точке $(20;\ -10)$. Решить эту задачу, как и последующие, сперва графическим, затем аналитическим способом и выяснить точность первого.

2. Дан равносторонний треугольник со стороной 20 *мм*. Координатные оси, первоначально совпадающие с основанием и высотой треугольника, повернуты на угол в 60°. Найти старые и новые координаты вершин треугольника, а также середин его сторон.

3. Прямоугольная пластинка $ABCD$, стороны AB и AC которой первоначально были направлены по осям X и Y, а вершина A совпадала с началом координат O, перемещена в плоскости так, что вершина A перешла в точку $(-60;\ +20)$, а сторона AB повернулась на угол в 240° относительно оси X. Полагая $AB = 40$ *мм*, $AC = 30$ *мм*, указать координаты вершин прямоугольника в этом окончательном его положении.

Указание. Провести новые оси координат X' и Y' через точку A по направлению сторон AB и AC.

4. Вывести формулы (2), не пользуясь теоремами о проекциях, а проводя вспомогательные прямые, параллельные осям X и Y через точку P' (черт. 20), сперва для случая, изображенного на этом чертеже, потом для случая, когда α есть угол II четверти, а точка M имеет то же положение, что и на чертеже 20.

§ 10. Косоугольные координаты. Наряду с прямоугольными координатами, но гораздо реже их употребляются координаты косоугольные. Оси косоугольной системы координат наклонены одна к другой под некоторым углом ω, который может иметь любое значение между 0 и π. При $\omega = \frac{1}{2}\pi$ косоугольные координаты приводятся к прямоугольным, которые таким образом являются их частным случаем. Через данную точку M проводятся прямые MQ и MP параллельно осям X и Y, и отрезки $OP = x$ и $OQ = y$ этих осей и являются координатами точки M в данной системе косоугольных координат (черт. 23).

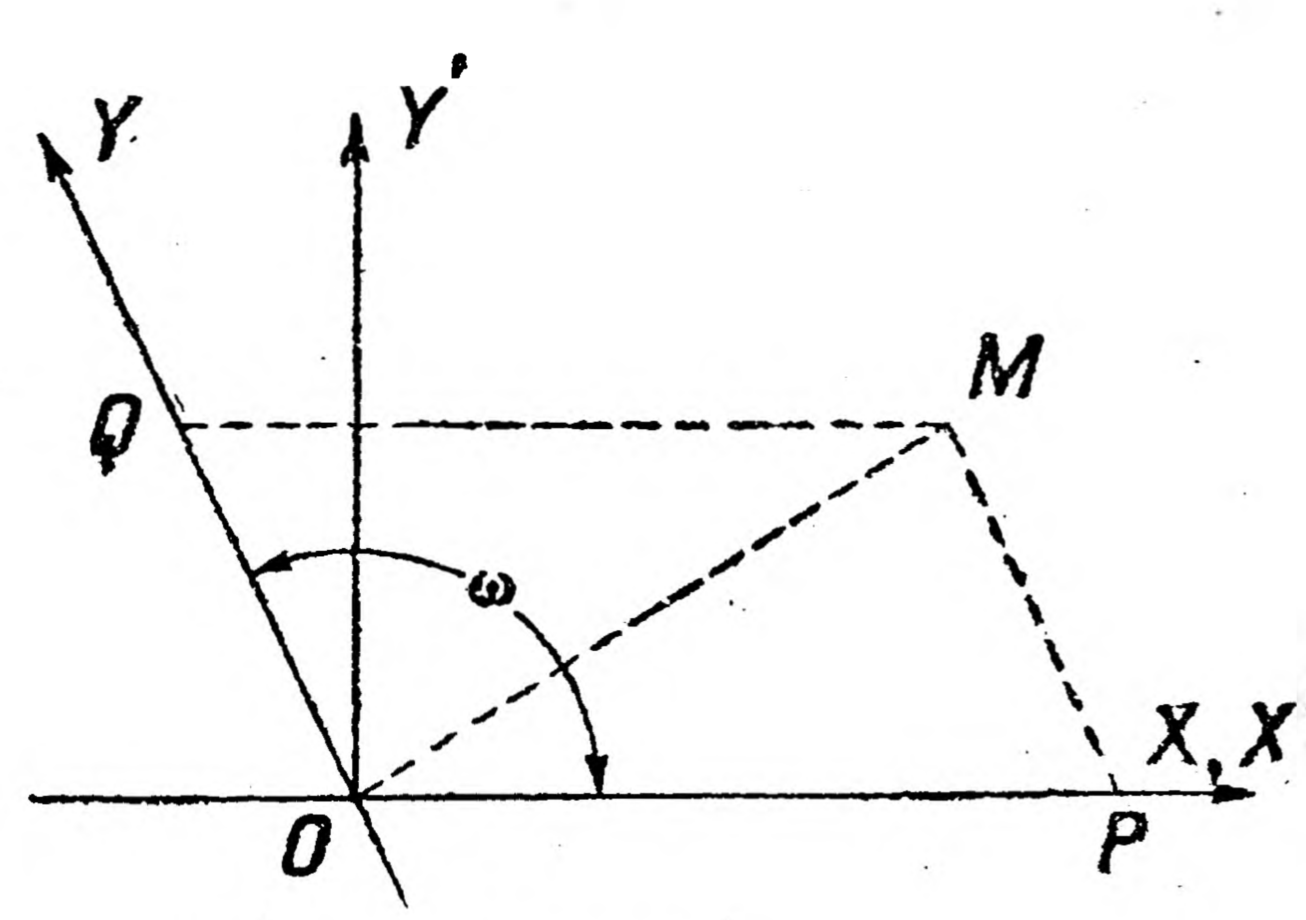
Выведем формулы, связывающие косоугольные координаты точки $M(x; y)$ с прямоугольными ее координатами x', y', причем предположим, что оси X и X' обеих систем совпадают, как совпадают и начала. Применяя тот же приём, что и при выводе формул (2) § 9, а именно проектируя (сперва на ось X, X', потом на ось Y') ломаную OPM и ее замыкающую OM (черт. 23), легко получим формулы, выражающие прямоугольные координаты x', y' через косоугольные x, y:

$$x' = x + y\cos\omega, \quad y' = y\sin\omega, \tag{1}$$

а решая их относительно x и y, — формулы, выражающие косоугольные координаты x и y через прямоугольные x' и y':

$$x = x' - y'\operatorname{ctg}\omega, \quad y = y'\operatorname{cosec}\omega. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) позволяют легко переходить от косоугольных координат к прямоугольным, имеющим то же начало и ту же ось абсцисс, и обратно.



Черт. 23.

Некоторые формулы, выведенные для прямоугольных координат, сохраняют силу и для косоугольных координат. Так, если даны косоугольные координаты точек A и B, а именно x_1, y_1 и x_2, y_2 и требуется найти координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении, равном λ, то, действуя так, как в § 8, мы придем опять к формулам (2) этого параграфа.

Многие же другие формулы, напротив, при переходе от прямоугольных координат к косоугольным свой вид меняют. Посмотрим, например, как выражается при употреблении косоугольных координат расстояние между двумя точками. Пусть косоугольные координаты этих двух точек суть x_1, y_1 и x_2, y_2, прямоугольные же их координаты x_1', y_1' и x_2', y_2', причем оси абсцисс и начала обеих систем предположим совпадающими. Тогда согласно формуле (2) § 7 искомое расстояние выражается формулой

$$d = +\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}.$$

Переходя от прямоугольных координат к косоугольным по формулам (1) настоящего параграфа, получим после простых преобразований:

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega}. \tag{3}$$

Так выражается при употреблении косоугольных координат расстояние между двумя данными точками.

Упражнения.

1. Треугольник имеет угол $A = \omega$ и стороны $AB = a$, $AC = b$. Приняв точку A за начало координат и направив ось X по AB, ось Y по AC, найти координаты вершин треугольника, средин его сторон, а также центра тяжести треугольника (см. задачу 2 § 8).

2. Вывести формулу (3) непосредственно, не прибегая к преобразованию координат.

3. Две косоугольных системы координат с осями X, Y и X', Y' имеют общее начало, причем

$$(X, X') = \alpha,\ (X', Y) = \beta,\ (X, Y') = \alpha',\ (Y', Y) = \beta',\ (X, Y) = \omega,\ (X', Y') = \omega'.$$

Показать, что

$$\omega = \alpha + \beta = \alpha' + \beta' \text{ и } \omega' = \alpha' - \alpha = \beta - \beta',$$

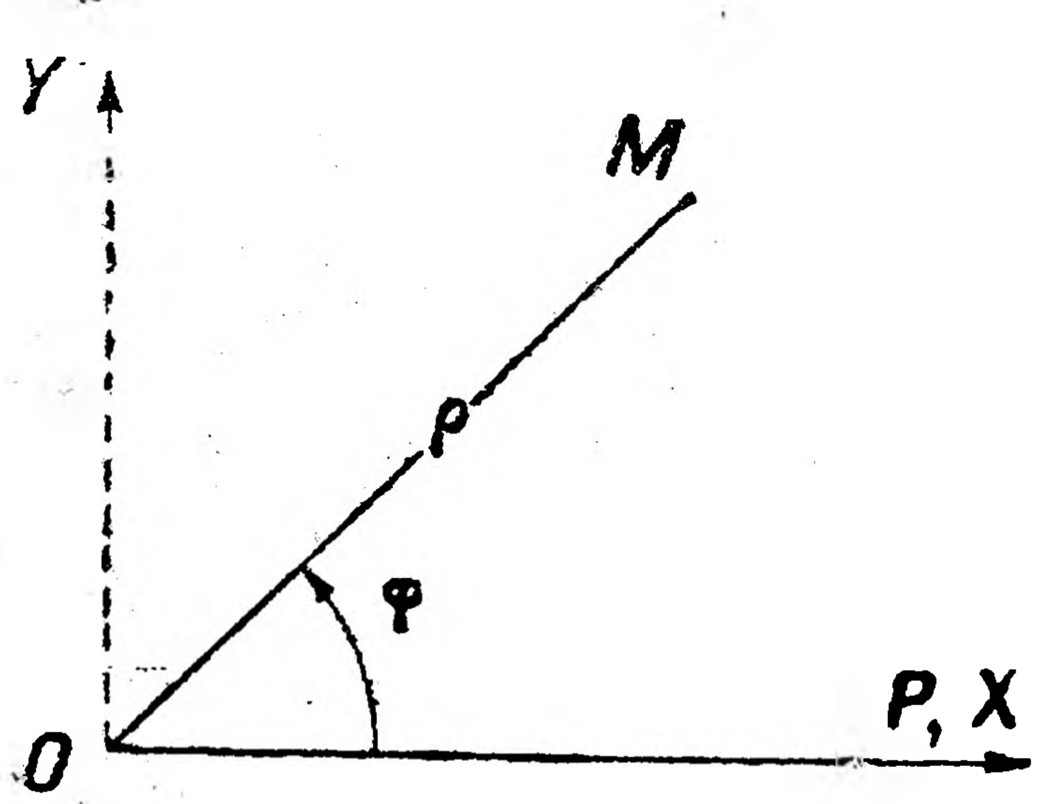
и вывести формулы

$$x \sin\omega = x' \sin\beta + y' \sin\beta',$$
$$y \sin\omega = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha',$$

выражающие зависимость между координатами x, y, x', y' одной и той же точки в обеих системах. Убедиться, что формулы (2) § 9 получаются из них при

$$\omega = \omega' = \frac{1}{2}\pi.$$

§ 11. Полярные координаты. Положение точки на плоскости можно определить, указывая ее расстояние $OM = \rho$ от некоторой постоянной точки плоскости O (черт. 24), называемой „полюсом", и угол $(OP, OM) = \varphi$, составляемый лучом OM с некоторой постоянной прямой OP, проходящей через полюс и носящей название „полярной оси". Величины ρ и φ называются „полярными координатами" точки на плоскости и часто употребляются на практике (в геодезии, астрономии, военном деле, горном искусстве и др.). „Полярное расстояние" или „радиус-вектор" ρ есть величина всегда положительная, способная принимать все значения от 0 до $+\infty$. „Полярный угол" φ может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$, но его всегда можно привести к интервалу от 0 до 2π, выбрасывая некоторое число целых оборотов. Всякой паре значений ρ и φ отвечает одна определенная точка плоскости, но обратное верно лишь с двумя оговорками: всякой точке плоскости отвечает одна определенная пара значений ρ и φ, если 1) брать значения φ только в интервале от 0 до 2π и 2) исключить точку O (полюс), для которой $\rho = 0$, а φ не имеет определенного значения.



Черт. 24.

Легко установить связь между полярными и прямоугольными координатами одной и той же точки. Совместим ось X с полярной осью, а начало — с полюсом P. Тогда, проектируя радиус-вектор $OM = \rho$ на каждую из осей координат X и Y, получаем формулы

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{1}$$

верные для любого положения точки M (в сущности эти формулы являются просто определениями тригонометрических функций синус и косинус). Формулы эти позволяют находить прямоугольные координаты точки по известным полярным ее координатам. Для решения обратной задачи надо, во-первых, сложить обе формулы (1) после предварительного возведения обеих частей каждой из них в квадрат и, во-вторых, разделить вторую из них на первую. Тогда получим, что

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = y:x. \tag{2}$$

По этим формулам, которые, конечно, легко получить и независимо от формулы (1), вычисляются полярные координаты точки по данным прямоугольным ее координатам.

Упражнения.

1. Указать полярные координаты центров отверстий в крышке цилиндра, о которых была речь в задаче 3 § 2, предполагая, что полярная ось проходит через центр одного из отверстий, а полюс совмещен с центром крышки.

2. Предполагая, что оси X и Y расположены так, как показано на чертеже 24, найти полярные координаты точек (5; 12), (—3; 4), (—4; —1), а также прямоугольные координаты точек ($\rho = 50$, $\varphi = 330°$), ($\rho = 40$, $\varphi = 225°$), ($\rho = 20$, $\varphi = 162°$) сперва графическим, потом аналитическим способом.

3. По какой линии движется точка, если полярный ее угол φ остается постоянным, а радиус-вектор меняется? Тот же вопрос для случая, когда постоянным остается радиус-вектор, а угол φ меняется.

4. Зная, что для точки A $\rho_1 = 20$, $\varphi_1 = 80°$, а для точки B $\rho_2 = 50$, $\varphi_2 = 240°$, найти длину AB и площадь треугольника ABO.

§ 12. Некоторые сведения о детерминантах. „Определителями", или „детерминантами", называются некоторые выражения, которые вводятся в связи с решением систем линейных уравнений. Знание основных свойств определителей позволяет нам во многих случаях существенно упростить выкладки и рассуждения. Теория определителей подробно изучается в курсе высшей алгебры. Мы ограничимся лишь немногими начальными сведениями о них.

Решая систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y

$$ax + by + c = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \tag{1}$$

и применяя обычный способ сложения (после предварительного умножения обеих частей уравнений сперва на $+b_1$ и $-b$, потом на $-a_1$ и $+a$), находим, что

$$(ab_1 - ba_1)x = (-cb_1 + bc_1), \quad (ab_1 - ba_1)y = (-ac_1 + ca_1). \tag{2}$$

Выражение $ab_1 - ba_1$ сокращенно записывается в виде следующей таблички, которая и носит название *определителя (детерминанта)*:

$$D = \begin{vmatrix} a, & b \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1, \tag{3}$$

а именно *определителя второго порядка*. Такой определитель составляется из $2^2 = 4$ „элементов" a, a_1, b, b_1, расположенных в два столбца и две строки. Итак, определитель II порядка (3) выражает не что иное как разность между произведением элементов, расположенных по диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний угол (так называемая первая диагональ), и произведением элементов, расположенных на другой диагонали. Говорят, что элементы a, b составляют первую строку определителя, элементы a_1, b_1 — вторую его строку, элементы a, a_1 — первый его столбец, элементы b, b_1 — второй его столбец. Произведения ab_1 и ba_1 образуют первый и второй „члены определителя".

Уравнения (2) имеют еще две разности произведений $-cb_1+bc_1$ и $-ac_1+ca_1$, которые тоже можно представить в виде определителей, а именно

$$D_x=\begin{vmatrix}-c, & b\\ -c_1, & b_1\end{vmatrix}=-cb_1-(-c_1b)=-cb_1+bc_1,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a, & -c\\ a_1, & -c_1\end{vmatrix}=-ac_1-(-a_1c)=-ac_1+a_1c.$$

Для облегчения запоминания полезно заметить, что определитель D_x получается из определителя D путем замены элементов первого столбца a и a_1, т. е. коэфициентов при x, соответствующими свободными членами уравнений, взятыми с обратным знаком, и что определитель D_y получается после замены этими же свободными членами, взятыми с обратным знаком, элементов второго столбца b и b_1, т. е. коэфициентов при y.

Уравнения (2) можно теперь переписать так: $Dx=D_x$, $Dy=D_y$, откуда, если $D\neq 0$,

$$x=D_x:D, \quad y=D_y:D. \tag{4}$$

Если определитель D, называемый *определителем системы* (1), отличен от нуля, то система (1) имеет единственную и вполне определенную систему корней, определяемых по формулам (4). Если же $D=0$, но хотя бы один из определителей D_x и D_y отличен от нуля, то уравнениям (2) нельзя удовлетворить ни при каких значениях x и y, так как, каковы бы ни были значения x и y, всегда $Dx=0x=0$, $Dy=0y=0$, тогда как по условию хотя бы одно из чисел $D_x=Dx$ и $D_y=Dy$ отлично от нуля. Таким образом равенство $D=0$ указывает на *несовместность* системы уравнений (1).

Если $D=0$, причем и $D_x=0$, и $D_y=0$, то уравнения (1), как можно показать, сводятся к одному и удовлетворяются бесчисленным множеством пар значений x и y, причем значение одной из этих букв можно брать произвольным (случай *неопределенности* системы уравнений).

Заметим следующие основные свойства определителя:

1. *Величина определителя не меняется, если его строки сделать столбцами, а столбцы строками.*

Действительно,

$$D=\begin{vmatrix}a, & b\\ a_1, & b_1\end{vmatrix}=ab_1-ab_1, \begin{vmatrix}a, & a_1\\ b, & b_1\end{vmatrix}=ab_1-ba_1=D.$$

2. *При умножении всех элементов некоторого столбца (или строки) на одно и то же число k значение определителя тоже умножается на то же число k.*

В самом деле,

$$\begin{vmatrix}ka, & b\\ ka_1, & b_1\end{vmatrix}=kab_1-kba_1=k(ab_1-ba_1)=k.\begin{vmatrix}a, & b\\ a_1, & b_1\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a, & b\\ ka_1, & kb_1\end{vmatrix}=akb_1-ka_1b=k(ab_1-a_1b)=k\cdot\begin{vmatrix}a, & b\\ a_1, & b_1\end{vmatrix}$$

3. *Перестановка двух столбцов (или строк) друг вместо друга меняет знак определителя, оставляя неизменным его абсолютное значение.*

Действительно,

$$\begin{vmatrix} b, & a \\ b_1, & a_1 \end{vmatrix} = ba_1 - ab_1 = -(ab_1 - a_1b) = -D,$$

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a, & b \end{vmatrix} = a_1b - ab_1 = -(ab_1 - a_1b) = -D.$$

4. *Если все элементы некоторого столбца (или строки) равны соответствующим элементам другого столбца (или строки), параллельного первому, то определитель равен нулю.*

Действительно, переставляя два таких тожественных столбца, мы получаем новый определитель, ничем не отличающийся от первоначального, равного D. Между тем, согласно свойству 3 знак определителя должен при такой перестановке меняться на обратный. Таким образом $-D = D$, откуда $2D = 0$, т. е. $D = 0$.

5. *Величина определителя не меняется, если ко всем элементам какого-нибудь столбца (или строки) прибавить числа, пропорциональные соответствующим элементам другого столбца (или строки), параллельного первому.*

Возьмем определитель

$$D = \begin{vmatrix} a, & b \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix}$$

и вычислим новый определитель

$$D_1 = \begin{vmatrix} a + bk, & b \\ a_1 + b_1k, & b_1 \end{vmatrix},$$

где k — некоторое произвольное число. Имеем

$$D_1 = (a + bk)\,b_1 - (a_1 + b_1k)\,b = ab_1 - a_1b = D.$$

Определителем III порядка называется выражение

$$D = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix},$$

содержащее $3^2 = 9$ элементов $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ и вычисляемое следующим образом. Берутся элементы какой-нибудь строки или столбца, хотя бы первого столбца, и находятся суммы нумеров той строки и столбца, к которым принадлежит каждый элемент взятого столбца. Эти суммы нумеров, или так называемые *индексы*, для элементов первого столбца равны соответственно $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$. Затем каждый элемент взятого столбца берется со знаком $+$, если у него четный индекс, и со знаком $-$, если индекс нечетный, и умножается на тот определитель II порядка, который получается из рассматриваемого определителя III порядка, если вычеркнуть ту его строку и тот столбец, к которым принадлежит этот элемент. Действуя указанным способом, получаем, что

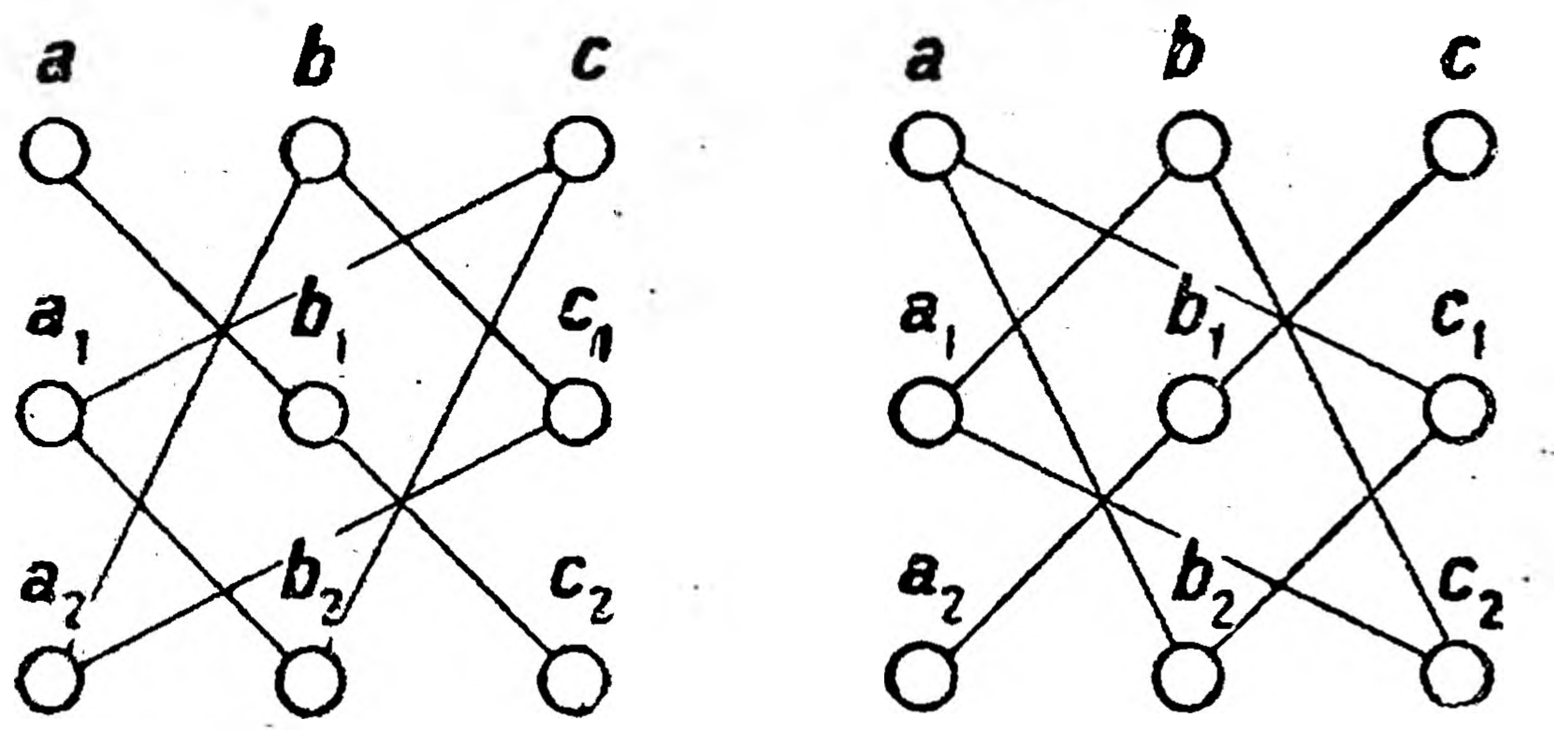
$$D = a \cdot \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} b, & c \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b, & c \\ b_1, & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= ab_1c_2 - ab_2c_1 - a_1bc_2 + a_1b_2c + a_2bc_1 - a_2b_1c. \qquad (5)$$

Точно так же вычисляются и определители IV, V, VI и т. д. порядка: вычисление каждого из них сводится к вычислению нескольких определителей на 1 низшего порядка.

Важно заметить, что, как можно доказать, то разложение по элементам первого столбца, посредством которого мы вычислили выше определитель III порядка, можно производить по элементам любой строки и любого столбца, получая каждый раз один и тот же результат. Читателю предлагается проверить это, вычисляя определитель III порядка по элементам первого столбца, второй строки и т. д.

Для вычисления определителя III порядка можно воспользоваться правилом, наглядно изображенным следующими двумя фигурами (черт. 25).



Черт. 25.

На левой фигуре проведена первая диагональ определителя, т. е. его диагональ, идущая слева направо и вниз, и построены два треугольника, имеющие по стороне, параллельной этой диагонали. На правой фигуре имеется вторая диагональ того же детерминанта и опять пара треугольников, в каждом из которых одна сторона параллельна этой второй диагонали. Надо взять каждые три элемента, расположенные на диагонали и на каждом из двух треугольников левой фигуры, и записать их произведения со знаком плюс. Получаем трехчлен

$$ab_1c_2 + a_1b_2c + a_2bc_1.$$

Точно так же правая фигура дает еще три произведения, которые берутся уже со знаком минус, а именно: $-a_2b_1c - a_1bc_2 - ab_2c_1$. Записав вместе эти два трехчлена, мы и получаем указанное выше значение определителя (5).

Указанные выше пять свойств определителя II порядка сохраняются и у детерминанта III и любого другого порядка, доказательство чего можно найти в специальных курсах теории детерминантов и в учебниках высшей алгебры.

Итак, вычисление определителя II порядка выполняется прямо по формуле $ab_1 - ba_1$, где a и b_1 — элементы первой его диагонали, a_1 и b — элементы второй диагонали. Вычислять определитель III порядка проще всего по указанному выше „правилу треугольников". Вычисление определителя любого высшего порядка сводится к вычислению определителей низшего порядка, причем возможны некоторые упрощения, основанные на использовании свойств 1—5.

Для примера вычислим определитель IV порядка:

$$D = \begin{vmatrix} 3, & -2, & 1, & 5 \\ 6, & 8, & -4, & 10 \\ 5, & -3, & -3, & 7 \\ 12, & -9, & 6, & 6 \end{vmatrix}$$

Первый способ. Определим индексы для элементов первой строки

$$1+1=2,\ 1+2=3,\ 1+3=4,\ 1+4=5$$

и сведем вычисление D к вычислению 4 определителей III порядка, а именно

$$D=3\cdot\begin{vmatrix} 8, & -4, & 10\\ -3, & -3, & 7\\ -9, & 6, & 6\end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 6, & -4, & 10\\ 5, & -3, & 7\\ 12, & 6, & 6\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 6, & 8, & 10\\ 5, & -3, & 7\\ 12, & -9, & 6\end{vmatrix}-$$

$$-(+5)\cdot\begin{vmatrix} 6, & 8, & -4\\ 5, & -3, & -3\\ 12, & -9, & 6\end{vmatrix}.$$

Вычислим каждый из четырех определителей III порядка отдельно по правилу треугольника. Для первого из них получаем

$$\begin{vmatrix} 8, & -4, & 10\\ -3, & -3, & 7\\ -9, & 6, & 6\end{vmatrix}=-144-180+252-270-72-336=-750.$$

Для остальных трех определителей тот же способ дает значения 84,
ных уравнений этому

Упраж

1. В

$$D=3\cdot(-750)+2\cdot 84+1\cdot 612-5\cdot(-762)=$$
$$=-2250+168+612+3810=2340.$$

Второй способ. Выкладки значительно упрощаются, если при вычислении определителя использовать свойства 1—5. Прежде всего, замечая, что все элементы второй строки кратны 2, а все элементы четвертой строки кратны 3, выносим множители 2 и 3 за знак определителя (свойство 2). Теперь имеем

$$D=6\cdot\begin{vmatrix} 3, & -2, & 1,5\\ 3, & 4, & -2,5\\ 5, & -3, & -3,7\\ 4, & -3, & 2,2\end{vmatrix}$$

Прибавим к элементам первого столбца произведения соответствующих элементов третьего столбца на -3, к элементам второго столбца произведения элементов третьего столбца на 2, к элементам четвертого столбца произведения элементов третьего столбца на -5. Согласно свойству 4 величина определителя при этом не изменится, а все элементы первой строки, кроме того, который находится в третьем столбце, обратятся в 0, что существенно упростит дальнейшее вычисление.

$$D=6\cdot\begin{vmatrix} 3-3, & -2+2, & 1, & 5-5\\ 3+6, & 4-4, & -2, & 5+10\\ 5+9, & -3-6, & -3, & 7+15\\ 4-6, & -3+4, & 2, & 2-10\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix} 0, & 0, & 1, & 0\\ 9, & 0, & -2, & 15\\ 14, & -9, & -3, & 22\\ -2, & 1, & 2, & -8\end{vmatrix}=$$

$$=6\cdot\begin{vmatrix}9, & 0, & 15\\ 14, & -9, & 22\\ -2, & 1, & -8\end{vmatrix}=18\cdot\begin{vmatrix}3, & 0, & 5\\ 14, & -9, & 22\\ -2, & 1, & -8\end{vmatrix}=$$

$$=18\cdot\begin{vmatrix}3, & 0, & 5\\ -4, & 0, & -50\\ -2, & 1, & -8\end{vmatrix}=18\cdot 130=2340.$$

Указанное упрощение, состоящее в сведении к нулю всех элементов некоторого столбца или строки, всегда осуществимо и постоянно применяется на практике.

Покажем применение детерминантов III порядка к решению системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Возьмем систему

$$\begin{aligned} &ax+by+cz+d=0,\\ &a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ &a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{aligned}\tag{6}$$

и умножим первое уравнение на величину $A=\begin{vmatrix}b_1, & c_1\\ b_2, & c_2\end{vmatrix}$, второе на $A_1=-\begin{vmatrix}b, & c\\ b_2, & c_2\end{vmatrix}$, третье на $A_2=\begin{vmatrix}b, & c\\ b_1, & c_1\end{vmatrix}$. Сложив затем все три уравнения и взяв неизвестные за скобки, получаем $Dx=D_x$, где

$$D=\begin{vmatrix}a, & b, & c\\ a_1, & b_1, & c_1\\ a_2, & b_2, & c_2\end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix}-d, & b, & c\\ -d_1, & b_1, & c_1\\ -d_2, & b_2, & c_2\end{vmatrix}$$ и записать их

Действительно, коэфициент при x оказывается равным

$$aA+a_1A_1+a_2A_2=a\cdot\begin{vmatrix}b_1, & c_1\\ b_2, & c_2\end{vmatrix}-a_1\cdot\begin{vmatrix}b, & c\\ b_2, & c_2\end{vmatrix}+a_2\cdot\begin{vmatrix}b, & c\\ b_1, & c_1\end{vmatrix}$$

или, согласно формуле (5), равным D. Коэфициент при y равен

$$b\cdot\begin{vmatrix}b_1, & c_1\\ b_2, & c_2\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}b, & c\\ b_2, & c_2\end{vmatrix}+b_2\cdot\begin{vmatrix}b, & c\\ b_1, & c_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b, & b, & c\\ b_1, & b_1, & c\\ b_2, & b_2, & c_2\end{vmatrix}=0$$

(как определитель с двумя одинаковыми столбцами). Точно так же убеждаемся в том, что коэфициент при z равен 0, а свободный член $-D_x$.

Умножая уравнения (6) на

$$B=\begin{vmatrix}a_1, & c_1\\ a_2, & c_2\end{vmatrix},\quad B_1=-\begin{vmatrix}a, & c\\ a_2, & c_2\end{vmatrix},\quad B_2=\begin{vmatrix}a, & c\\ a_1, & c_1\end{vmatrix}$$

и складывая, найдем, что $Dy=D_y$, а умножая их на

$$C=\begin{vmatrix}a_1, & b_1\\ a_2, & b_2\end{vmatrix},\quad C_1=-\begin{vmatrix}a, & b\\ a_2, & b_2\end{vmatrix},\quad C_2=\begin{vmatrix}a, & b\\ a_1, & b_1\end{vmatrix}$$

и опять складывая, найдем, что $Dz=D_z$, где

$$D_y=\begin{vmatrix}a, & -d, & c\\ a_1, & -d_1, & c_1\\ a_2, & -d_2, & c_2\end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix}a, & b, & -d\\ a_1, & b_1, & -d_1\\ a_2, & b_2, & -d_2\end{vmatrix}\tag{8}$$

Итак, систему (6) из трех линейных уравнений с тремя неизвестными всегда можно свести к системе

$$Dx = D_x, \quad Dy = D_y, \quad Dz = D_z, \tag{9}$$

где значения D, D_x, D_y, D_z даются определителями (7) и (8). „Определитель системы" D составляется посредством девяти коэфициентов при неизвестных, а каждый из определителей D_x, D_y, D_z получается из D путем замены коэфициентов при соответствующем неизвестном свободными членами, взятыми с обратными знаками.

Наибольший интерес представляет случай, когда $D \neq 0$. Тогда из уравнений (9) легко определяются значения всех трех неизвестных:

$$x = D_x : D, \quad y = D_y : D, \quad z = D_z : D. \tag{10}$$

Условие $D \neq 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы система (6) имела единственную систему корней. Если $D = 0$, но по крайней мере один из трех определителей D_x, D_y, D_z отличен от нуля, система (9), а следовательно, и система (6) не удовлетворяется ни при каких значениях x, y, z: система (6) *несовместна*. Она содержит уравнения, противоречащие друг другу. Если же $D = D_x = D_y = D_z = 0$, то системы (9) и (6) имеют бесчисленное множество систем корней. Система (6) сводится к двум или даже к одному уравнению и является системой *неопределенной*.

Подобным же приемом решается и система из любого числа линейных уравнений, если число уравнений равно числу неизвестных.

Упражнения.

1. Вычислить определители

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2, & 5 \\ 4, & -3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 5, & 4, & 3 \\ 7, & -2, & 1 \\ 3, & -1, & 6 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 4, & 5, & 6 \\ 4, & 5, & 6, & 7 \end{vmatrix}$$

2. Решить посредством определителей системы:

$$\begin{aligned} &-5x + 2y + 4 = 0; \quad && -5x + 2y + 4 = 0; \quad && -5x + 2y + 4 = 0; \\ &3x + 4y - 18 = 0; && 10x - 4y + 1 = 0; && 10x - 4y - 8 = 0. \end{aligned}$$

3. Решить посредством определителей систему

$$3x + 5y - 10z - 2 = 0; \qquad x + z - 1 = 0; \qquad y - 2z - 1 = 0.$$

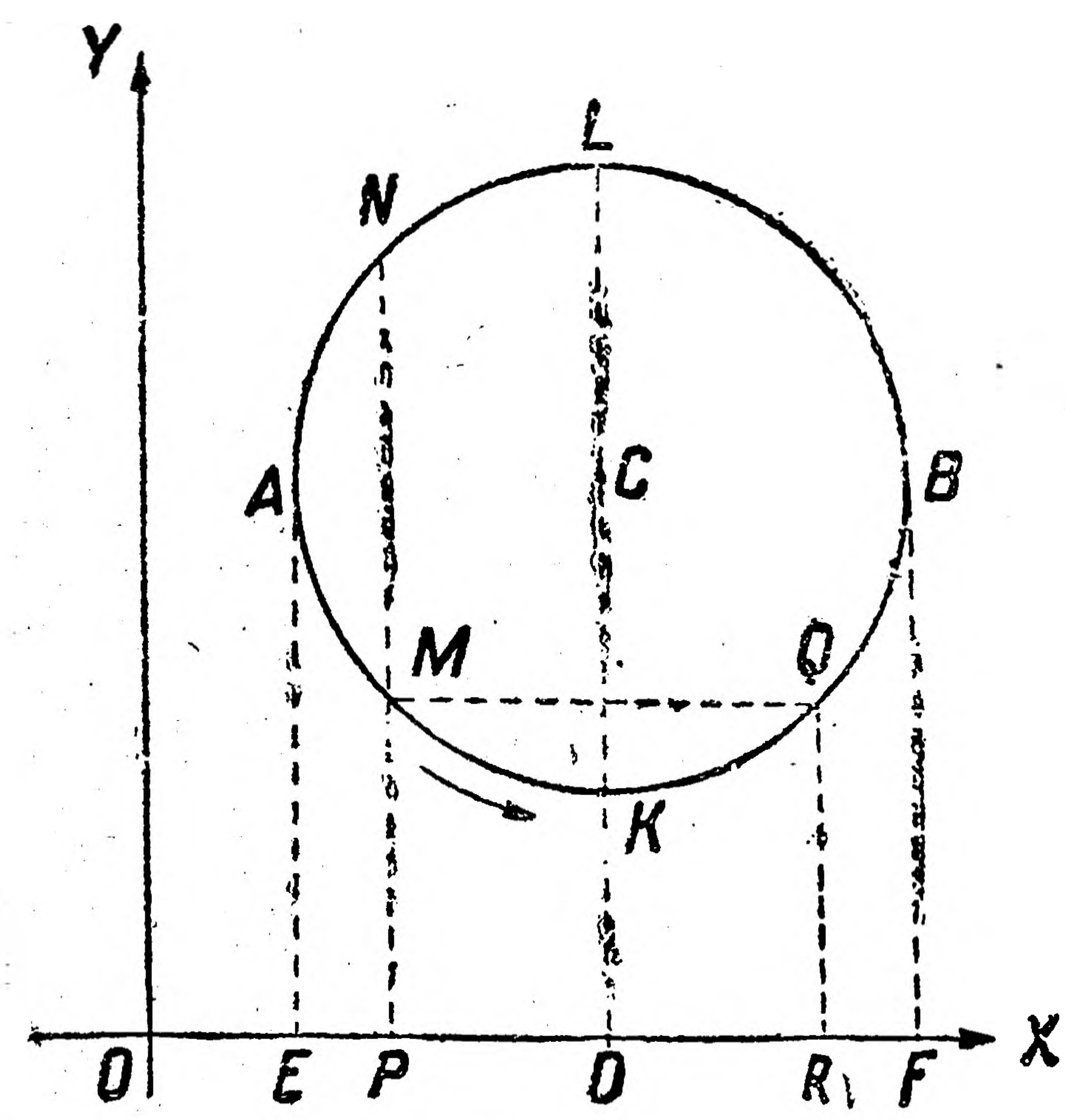
4. Показать справедливость тождества

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ a, & b, & c \\ a^2, & b^2, & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a).$$

Глава II.

УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ.

§ 13. Уравнение круга. В главе I мы рассматривали отдельные точки плоскости и убедились, что положение каждой такой точки может быть указано при помощи двух чисел — ее координат (относительно некоторой системы координат). Чтобы развить эту основную для аналитической геометрии мысль об изучении геометрических образов посредством чисел, перейдем к рассмотрению уже не отдельных точек, а целых линий, и в качестве первого примера рассмотрим хорошо известную линию — круг. Возьмем круг с радиусом r, имеющий центр в точке C, координаты которой относительно некоторой произвольной системы прямоугольных координат пусть будут $OD=a$ и $DC=b$ (черт. 26). Каждое из чисел a и b в зависимости от положения центра C может быть или больше 0, или меньше 0, или равно 0. Число r всегда положительно (при r, стремящемся к 0, размеры круга уменьшаются, и при $r=0$ круг вырождается в точку C — его центр). Итак перед нами задача — выразить посредством координат положение любой точки круга, т. е. положение любой точки, отстоящей от точки C на расстоянии r. На первый взгляд задача эта представляется неразрешимой: на круге бесчисленное множество точек; положение каждой из них характеризуется парой координат; для указания положения всех точек круга требуется, казалось бы, указание бесчисленного множества координат.



Черт. 26.

Однако дело оказывается гораздо проще, если принять во внимание, что точки круга составляют одну *непрерывную линию* и имеют абсциссы, изменяющиеся от $OE=a-r$ (для крайней левой точки A) до $OF=a+r$ (для крайней правой точки B). Возьмем движущуюся по кругу (хотя бы в направлении, указанном на чертеже стрелкой) точку M и рассмотрим ее координаты $OP=x$ и $PM=y$. При перемещении точки M по кругу точка P будет двигаться по оси X, пробегая отрезок EF сперва в одну сторону, затем обратно. Число x будет при этом получать все возможные (вещественные) значения, заключающиеся в промежутке от $a-r$ до $a+r$ (включая границы). Таким образом абсцисса x точки M, движущейся по кругу, является величиной переменной, изменяющейся непрерывно от $a-r$ до $a+r$ и обратно от $a+r$ до $a=r$. Ордината $y=PM$ этой точки тоже меняется, принимая все возможные значения от $b-r$ (когда точка M имеет самое низкое положение, совпадая с точкой K) до $b+r$ (для самого высокого положения точки M, совпадающего с точкой L) и обратно. Примем теперь во внимание тот основной важности факт, что при движении точки M по кругу между изменением ее абсциссы x и изменением ее ординаты y существует некоторая совершенно определенная зависимость: хотя x может принимать любое значение в интервале $a-r$, $a+r$, а y — любое значение в интервале $b-r$, $b+r$, но если значение одной из координат указано, то значение другой уже не может быть взято произвольно. Так, если взять абсциссу x равной OP, то получается либо точка M, либо точка N на круге, и ордината y имеет одно из двух значений: PM или PN. Обратно, взяв произвольное значение ординаты y, например $y=PM$, мы получаем два возможных положения подвижной точки, а именно:

точки M и Q ($MQ \parallel OX$), и абсцисса x принимает либо значение OP, либо значение OR. Между переменными x и y существует, как говорят, *функциональная зависимость*. Считая x переменной *независимой*, или *аргументом* (т. е. назначая значение x в границах его изменения по произволу), мы имеем в y переменную *зависимую*, или *функцию*, от x[1]. Так как каждому значению x соответствуют два возможных значения y, то в данном случае y является *двузначной* функцией от x (в точке A, т. е. при $x = a - r$ эти два значения y сливаются в одно, то же самое в точке B, т. е. при $x = a + r$). Но можно поступать и наоборот, а именно давать произвольные значения ординате y, которая будет независимой переменной, или аргументом; тогда абсцисса x будет зависимой переменной, а именно двузначной функцией от y.

Легко указать алгебраическую формулу, выражающую эту зависимость между x и y. Возьмем формулу (1) § 7 и применим ее к расстоянию от точки $M(x; y)$ до точки $C(a; b)$. Так как расстояние CM при движении точки M по кругу не меняется и остается постоянно равным радиусу круга r, то получается уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \tag{1}$$

справедливое для любого положения точки M на круге. Подставив в уравнение (1) вместо текущих координат x и y координаты любой точки рассматриваемого круга, мы превращаем это уравнение в тожество. Можно сказать, что координаты любой точки нашего круга *удовлетворяют* этому уравнению. Важно заметить, что координаты никакой другой точки этому уравнению не удовлетворяют. Действительно, взяв точку M вне круга, мы получим для левой части уравнения (1) значение, большее r^2, а именно квадрат расстояния от точки C до точки M, которое в этом случае будет больше r. Точно так же, взяв точку M внутри круга, мы получим для левой части уравнения (1) значение, меньшее r^2.

Итак, уравнение (1) характеризует все точки круга с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r и никакие другие. Поэтому его называют *уравнением круга*.

Имея уравнение круга и зная a, b, r, мы легко можем указать точное положение какого угодно числа точек этого круга. При этом одну из координат, например x, задаем произвольно, соответствующие же значения другой, т. е. y, вычисляем по уравнению (1), которое в этом случае следует заранее решить относительно y, что даст

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}. \tag{2}$$

Задача о разбивке железнодорожной колеи, рассмотренная нами в § 1, была решена именно посредством уравнения (2), которое мы брали в виде $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$, так как там было $a = 0$, $b = r$ и нас интересовали лишь точки нижнего полукруга (поэтому перед корнем мы брали лишь знак $-$).

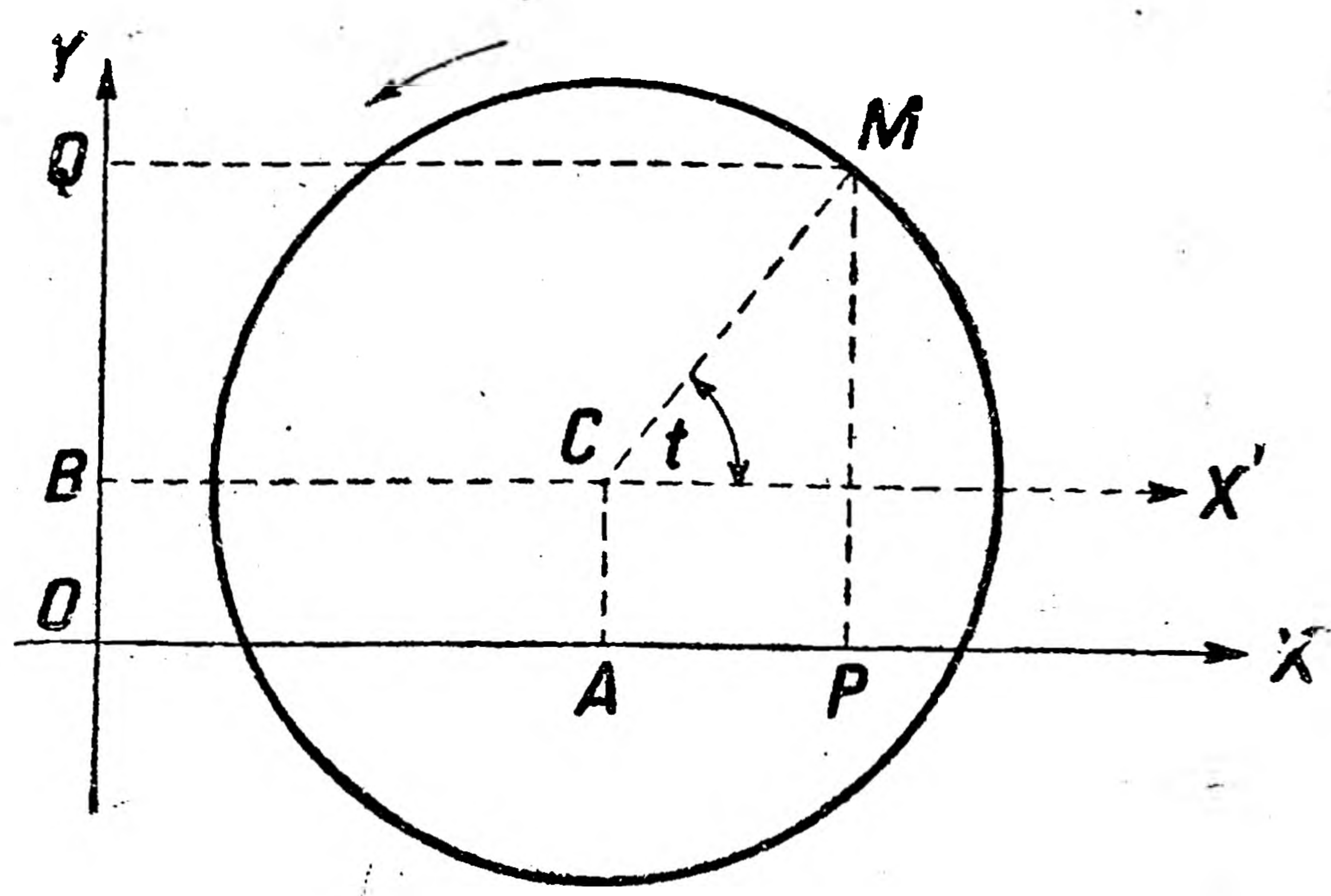
Если центр круга находится в начале координат, то $a = b = 0$ и уравнение круга принимает особенно простой вид, а именно

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{3}$$

[1] Подробные сведения о функциональной зависимости даются в курсах *математического анализа*. См. также § 21.

Мы займемся рассмотрением некоторых задач на круг в главе IV, основываясь именно на этом „простейшем“ уравнении круга.

Укажем еще один часто применяемый вид уравнения круга. Через центр C круга проведем луч CX', параллельный OX, и обозначим буквой t угол между CX' и радиусом CM, проведенным через движущуюся по кругу точку M с координатами $OP=x$, $PM=y$. При движении точки M по кругу от точки пересечения круга с лучом CX' в положительном направлении до возвращения в исходную точку (черт. 27) угол t принимает все значения от 0 до 2π. Проектируя CM сперва на ось OX, потом на OY, легко выводим соотношения:



Черт. 27.

$$
\begin{aligned}
x &= a + r\cos t,\\
y &= b + r\sin t,
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

дающие значения координат точки на круге для любого значения угла t. Эти соотношения (4) называются *параметрическими уравнениями* круга, причем угол t, в зависимости от которого выражены x и y, называется *параметром* [1]. Находя $\sin t$ и $\cos t$ из уравнений (4), а затем складывая выражения для $\sin^2 t$ и $\cos^2 t$, мы исключим параметр t и придем опять к уравнению (1), которое будем называть в отличие от параметрических уравнений уравнением *обыкновенным*. Действительно,

$$\cos t = \frac{x-a}{r}, \quad \sin t = \frac{y-b}{r},$$

$$\frac{(x-a)^2}{r^2} + \frac{(y-b)^2}{r^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Итак, всякому кругу соответствует уравнение (1), где a и b — координаты центра круга, r — его радиус, удовлетворяющееся координатами любой точки круга и никакой другой. Обратно, всякому уравнению вида (1), где a, b, r — постоянные величины, а x и y — переменные, соответствует круг радиуса r с центром в точке с координатами a, b.

Упражнения.

1. Составить уравнение круга радиуса a с центром в точке $(a; 0)$, а также круга радиуса b с центром в точке $(0; b)$.

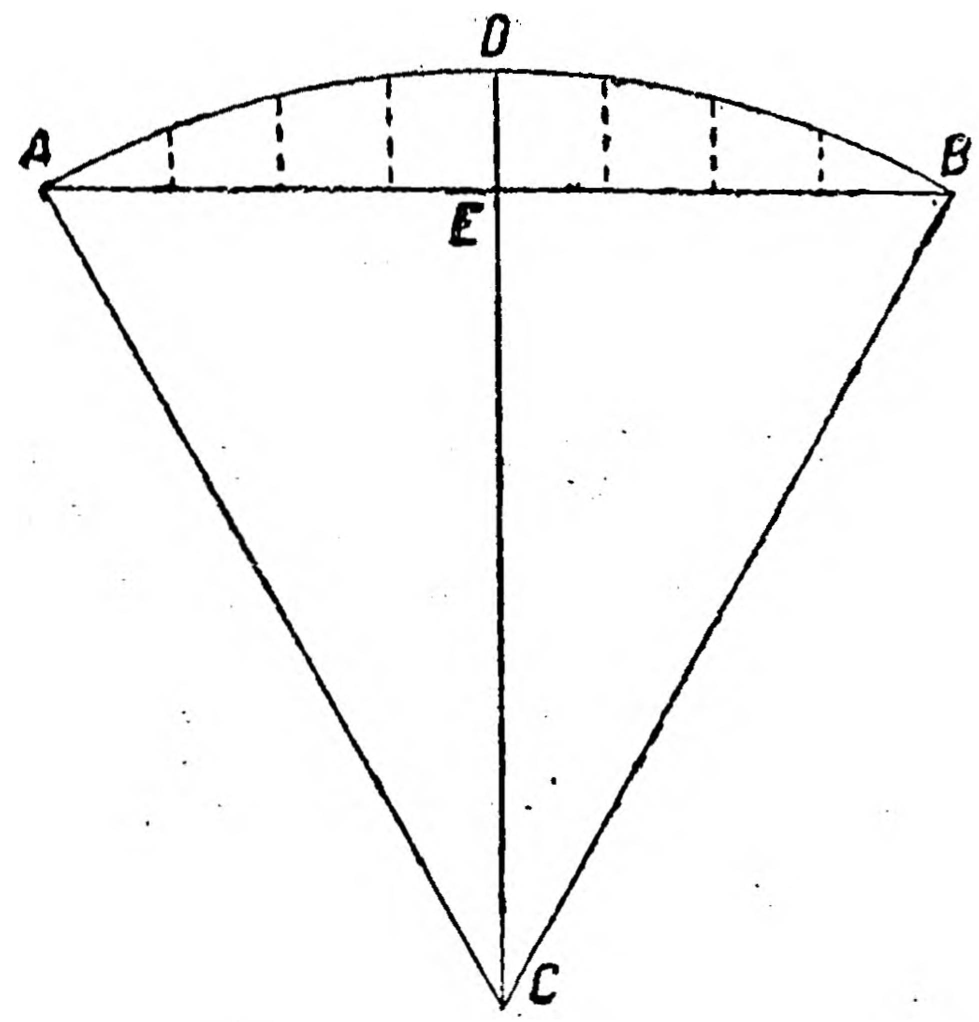
2. Найти ординаты тех точек круга с центром в точке $(-120; 50)$ и радиусом 130, абсциссы которых равны -30; 0; $+30$.

[1] Термин „параметр“ употребляется в математике во многих значениях. Чаще всего им обозначают *относительно постоянную* величину, т. е. такую величину, которая в данной задаче имеет постоянное значение, но при изменении условий задачи изменяет свое значение на другое, тоже постоянное. Например, величины a, b, r уравнения (1) являются в этом смысле параметрами этого уравнения.

Кроме того, термином „параметр“ обозначают такую вспомогательную переменную величину, в зависимости от которой выражают другие переменные. Именно в этом последнем смысле термин „параметр“ и употреблен в тексте.

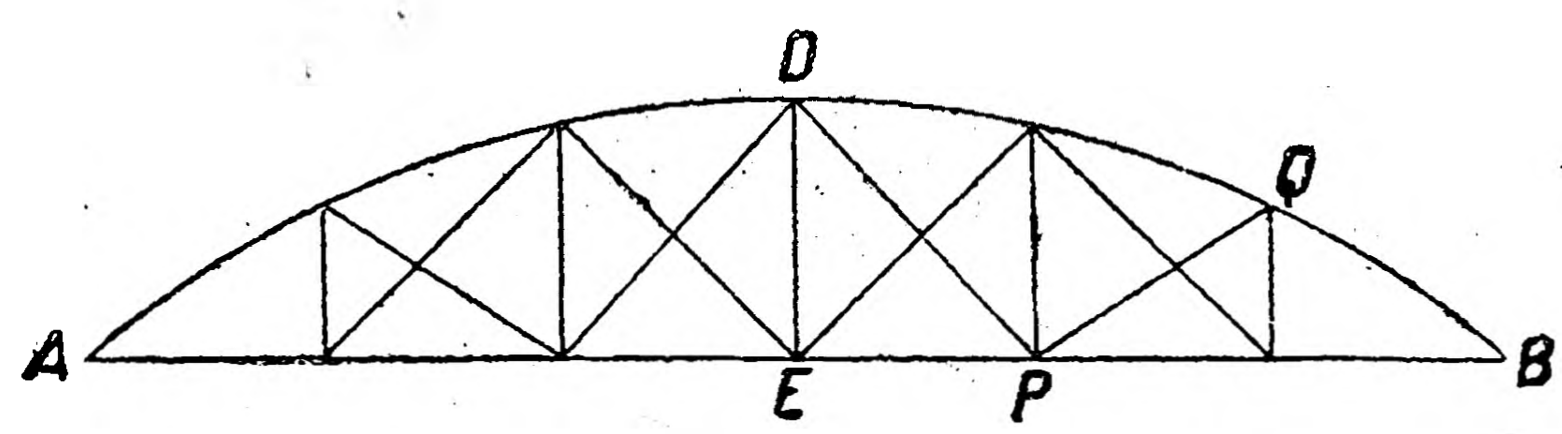
3. Найти абсциссы тех точек того же круга, ординаты которых равны 0; 50; 200.

4. Для бетонных работ надо приготовить щит в виде сегмента круга ADB (черт. 28), причем длина хорды $AB = l = 4$ *м*, стрелка $ED = h = 1$ *м*. Вычислить до тысячных метра длины отрезков, показанных на чертеже пунктиром и проведенных на равных расстояниях друг от друга и от точек A и B перпендикулярно к хорде AB.



Черт. 28.

Указание. Надо поместить начало координат в точке E, направить оси по EB и ED и найти $CE = r - h$ и $BC = r$ из прямоугольного треугольника BCE. Можно воспользоваться как уравнением (2) (выяснить, какой знак взять перед корнем), так и уравнением (4) и сравнить результаты вычислений.



Черт. 29.

5. Мостовая ферма длиной $AB = l = 18$ *м* и высотой $ED = h = 4{,}2$ *м* ограничена сверху дугой круга (черт. 29). Ферма имеет 5 стоек, поставленных на равном расстоянии друг от друга и от концов фермы. Найти построением и вычислением длину раскоса PQ.

§ 14. Уравнения прямой в различных положениях относительно координатных осей. Возьмем прямую, проведенную параллельно оси X на расстоянии n единиц от нее, причем число n может быть положительным (прямая проходит выше оси X) или отрицательным (ниже оси X) и равняться 0 (прямая совпадает с осью X). Рассматривая точку M с координатами x и y, движущуюся по данной прямой, замечаем, что x может принимать любое значение как положительное, так и отрицательное, сколь угодно большое по абсолютной величине (это выражают короче, говоря, что x меняется от $-\infty$ до $+\infty$), а y принимает при этом всегда одно и то же значение n. Уравнение

$$y = n \qquad (1)$$

есть уравнение рассматриваемой прямой, так как оно удовлетворяется координатами любой ее точки, в то время как для всякой точки, расположенной выше этой прямой, левая часть уравнения (1) окажется больше правой его части, а для всякой ниже расположенной точки — наоборот. Итак, уравнение (1) есть уравнение прямой, параллельной оси X и пересекающей ось Y в точке с ординатой n.

Точно так же легко устанавливаем, что уравнение прямой, параллельной оси Y и пересекающей ось X в точке с абсциссой m, есть

$$x = m. \qquad (2)$$

При $m > 0$ или $m < 0$ прямая располагается правее или левее оси Y. При $m = 0$ прямая совпадает с осью Y.

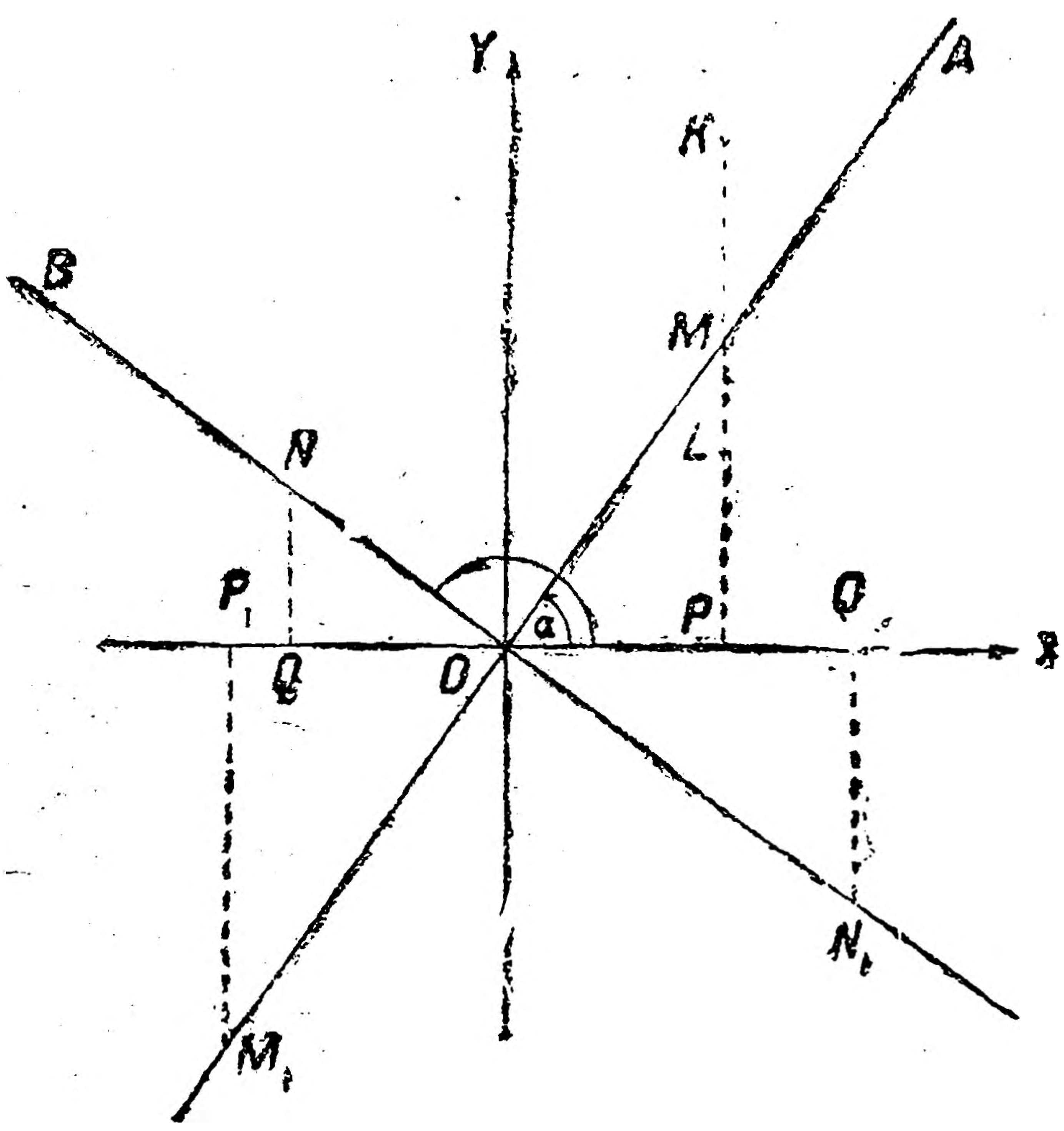
Выведем теперь уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью X угол α. Этот угол α может принимать всевозможные значения от $\alpha = 0$, когда прямая совпадает с осью X, до $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, когда она совпадает с осью Y, и далее до $\alpha = \pi$, когда она совпадает с осью $\overline{X}$, т. е. с отрицательной осью X. Возьмем прямую OA (черт. 30), составляющую с осью X острый угол α, и движущуюся по этой прямой точку M с координатами $OP=x$ и $PM=y$. При любом положении этой точки M на прямой имеем соотношение

$$y=kx, \text{ где } k=\operatorname{tg}\alpha. \tag{3}$$

Действительно, если точка M находится в 1-й четверти, то из треугольника OPM имеем

$$\frac{PM}{OP}=\operatorname{tg}\alpha, \text{ или } \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Если она лежит в 3-й четверти и совпадает с точкой M_1, то опять-таки $\frac{P_1M_1}{OP_1}=\operatorname{tg}\alpha$. Но здесь $x=-OP_1, y=-P_1M_1$, а потому $\frac{-y}{-x}=\operatorname{tg}\alpha$, и следовательно, опять приходим к уравнению (3). Это уравнение удовлетворяется координатами любой точки прямой OA, в том числе и точки O, и не удовлетворяется координатами никакой другой точки, расположенной выше прямой OA (как точка K, для которой $y>x\operatorname{tg}\alpha$) или ниже прямой OA (как точка L, для которой $y<x\operatorname{tg}\alpha$). Следовательно, уравнение (3) является уравнением рассматриваемой прямой.



Черт. 30.

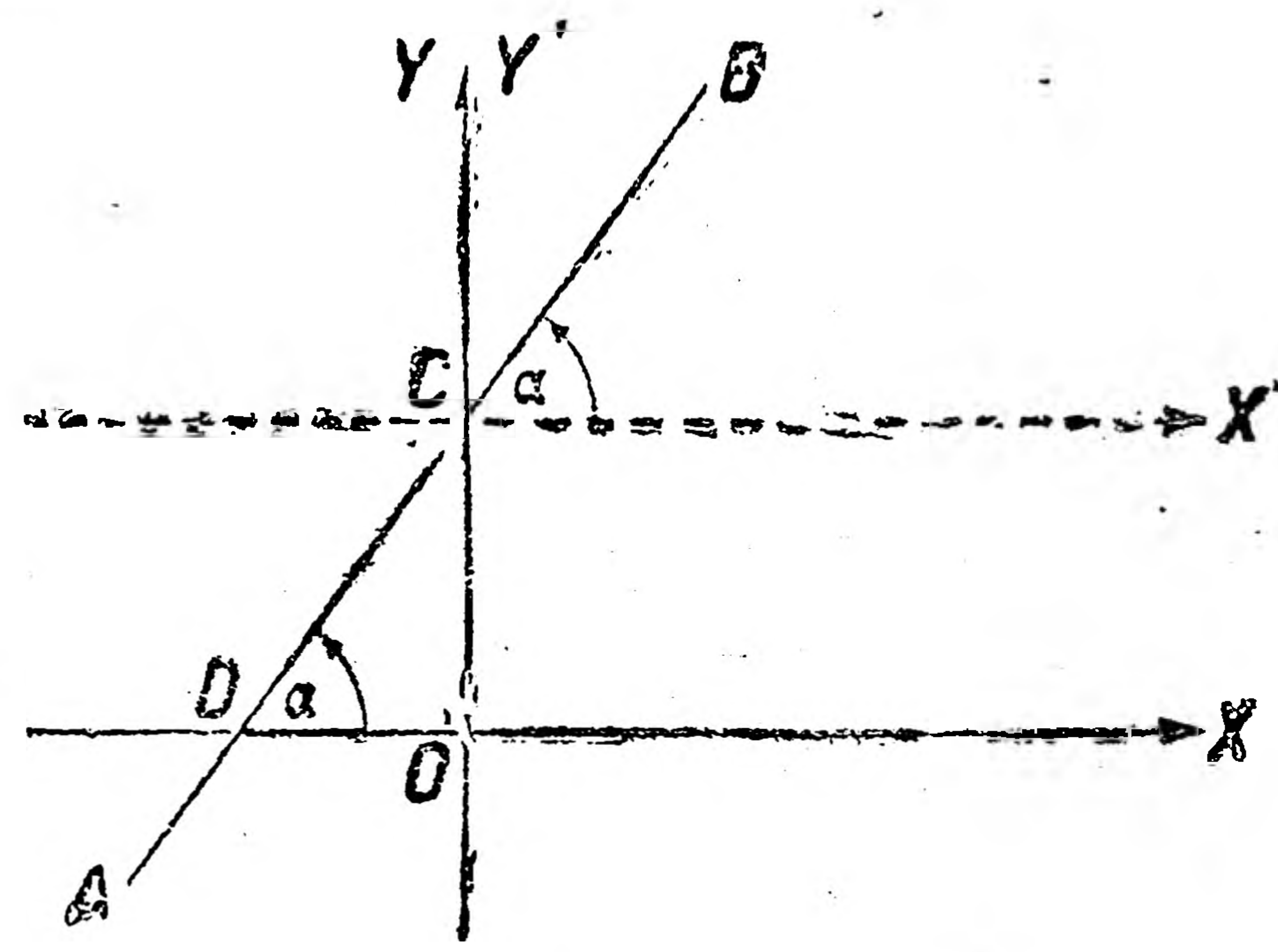
Легко видеть, что такой же вид имеет и уравнение прямой OB, составляющей с осью X не острый, а тупой угол XOB. Обозначая этот угол опять через α и взяв на OB движущуюся точку N с координатами $x=-OQ$ и $y=QN$, имеем из прямоугольного треугольника OQN соотношение $\frac{QN}{OQ}=\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$, или $\frac{y}{-x}=-\operatorname{tg}\alpha$, которое приводит к тому же уравнению (3). Взяв движущуюся точку не во 2-й, а в 4-й четверти, имеем $x=OQ_1$, $y=-Q_1N_1$, $\frac{Q_1N_1}{OQ_1}=\operatorname{tg} Q_1ON_1$, $\frac{-y}{x}=\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)$, и опять приходим к уравнению (3).

Итак, уравнение (3) выражает любую прямую, проходящую через начало координат и составляющую с осью X произвольный острый или тупой угол α. Но для случая $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, т. е. для случая, когда прямая совпадает с осью Y, предыдущий вывод теряет силу. Как мы видели выше, ось Y выражается уравнением $x=0$, которое не получается из уравнения (3) ни при каком конечном значении k. Однако, если взять это уравнение (3) и предварительно преобразовать его к виду $\frac{y}{k}=x$, то при приближении α к $\frac{1}{2}\pi$ $k=\operatorname{tg}\alpha$ неограниченно растет по абсолютной величине, дробь $\frac{y}{k}$ стремится к 0 при любом постоянном значении y, и уравнение (3) в пределе переходит в уравнение $x=0$.

Рассмотрим, наконец, прямую, составляющую с осью X произвольный угол α $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ и пересекающую ось Y уже не в начале координат, а в точке C с произвольной ординатой $n\,(-\infty < n < +\infty)$. Перенося начало координат в точку C (черт. 31) и направляя новые координатные оси X', Y' параллельно старым, имеем для прямой AB уравнение $y' = x' \operatorname{tg} \alpha$, так как эта прямая проходит через новое начало координат и составляет с новой осью абсцисс угол $X'CB = XDB = \alpha$. Вспоминая формулы преобразования координат для случая параллельного перенесения осей $x = x' + a$, $y = y' + b$ (см. § 9), берем $a = 0$, $b = n$ (таковы в данном случае старые координаты нового начала, т. е. точки C) и заменяем в уравнении $y' = x' \operatorname{tg} \alpha$ новые координаты через старые по формулам $x = x'$, $y = y' + n$. Получаем $y - n = x \operatorname{tg} \alpha$ или, полагая $\operatorname{tg} \alpha = k$,

$$y = kx + n. \tag{4}$$

Уравнение (4), которое легко было бы вывести и непосредственно из чертежа (пришлось бы однако рассматривать несколько случаев), удовлетворяется координатами любой точки прямой AB и не удовлетворяется координатами никакой другой точки (для точек, расположенных выше прямой AB, левая часть уравнения окажется больше правой, для точек ниже прямой — меньше правой). Уравнение (4) является, таким образом, уравнением любой прямой, не параллельной оси Y. В частности, при $\alpha = 0$ оно выражает прямую, параллельную оси X, и приводится к уравнению (1). Второй член правой части уравнения (4) называется *начальной ординатой* прямой. Коэфициент при x, обозначенный у нас буквой k, называется *угловым коэфициентом* прямой. Начальная ордината n указывает точку пересечения прямой с осью Y, а угловой коэфициент k, являясь тангенсом угла между прямой и положительным направлением оси X, характеризует наклон прямой.



Черт. 31.

Мы доказали теорему: **всякая прямая, непараллельная оси Y, выражается уравнением вида $y = kx + n$, а всякая прямая, параллельная этой оси, — уравнением вида $x = m$, причем величины k, n, m имеют постоянные вещественные значения.**

Справедлива и обратная теорема: **всякое уравнение вида $y = kx + n$, где k и n — вещественные постоянные, выражает некоторую прямую, непараллельную оси Y, а всякое уравнение вида $x = m$** (m — вещественная постоянная) **выражает некоторую прямую, параллельную оси Y** (при $m = 0$ самую ось Y).

Для доказательства этой теоремы найдем по данному значению k острый или тупой угол α по уравнению $\operatorname{tg} \alpha = k$ и построим прямую, пересекающую ось Y в точке $(0;\ n)$ и составляющую угол α с осью X. Как мы уже видели, координаты x и y любой точки этой прямой удовлетворяют уравнению $y = kx + n$, в то время как координаты какой бы то ни было точки, лежащей вне этой прямой, этому уравнению не удовлетворяют. Значит, это уравнение действительно выражает прямую. Аналогично доказывается и вторая часть теоремы.

Имея уравнение прямой, мы легко можем вычислить ординату той точки прямой, которая имеет некоторую наперед заданную абсциссу: дело сводится к простой подстановке заданного значения абсциссы x в уравнение (4). Возможна и обратная задача: по заданной ординате y найти абсциссу x точки на прямой. Для решения этой задачи надо решить уравнение (4) относительно x. Решением многих других задач на прямую линию мы будем заниматься в главе III.

Упражнения.

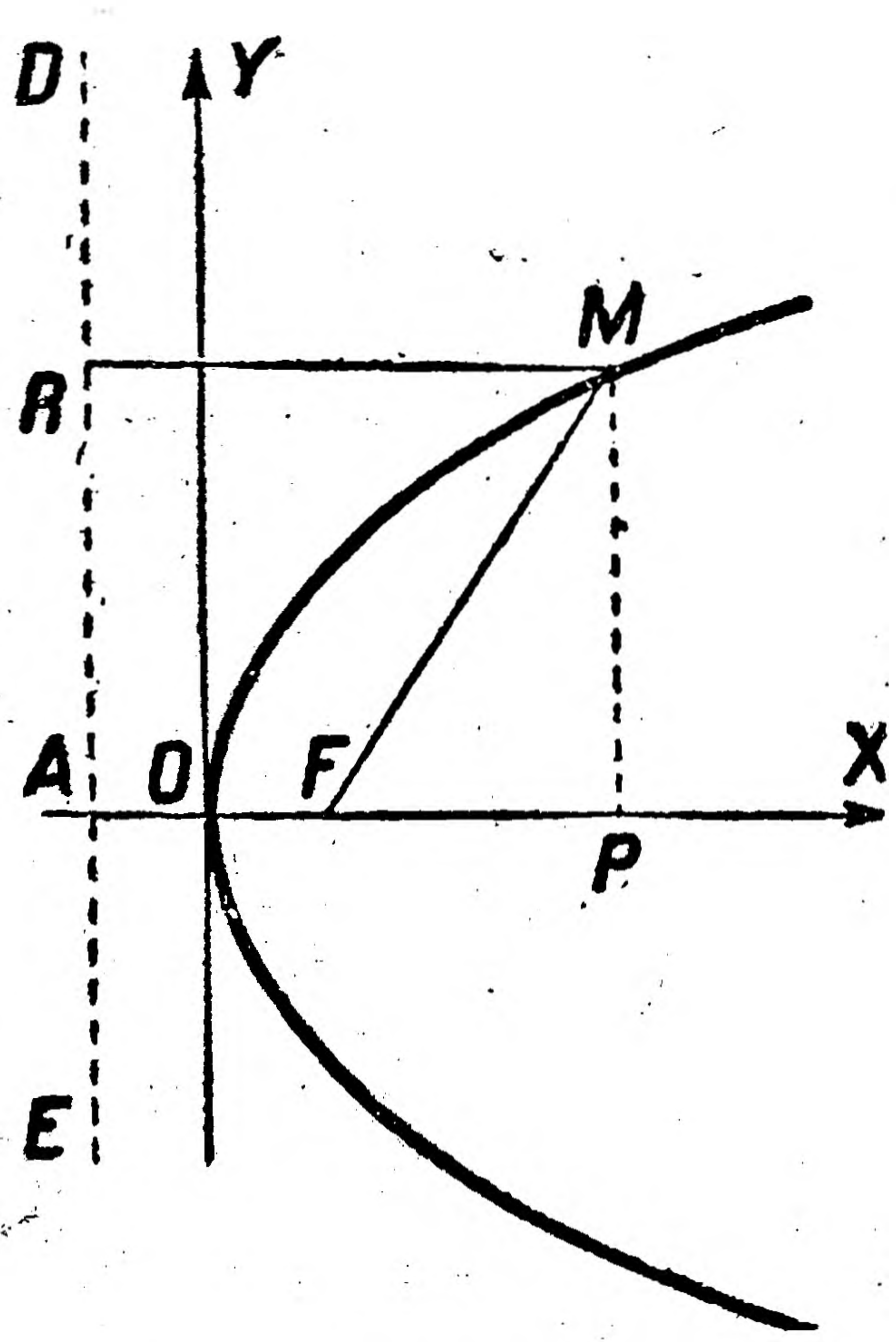
1. Имеется квадрат со стороной в 50 *мм*. Одна из его вершин принята за начало координат, ось X направлена по диагонали квадрата. Написать уравнения всех четырех сторон и обеих диагоналей квадрата.

2. Прямая пересекает ось Y в точке с ординатой — 20 *мм* и составляет угол в 120° с осью X. Написать уравнение прямой. Найти сперва построением на миллиметровой бумаге, а затем вычислением ординаты тех точек прямой, которые имеют абсциссы 15 *мм* и — 25 *мм*, а также абсциссы тех точек прямой, ординаты которых 0 и 10 *мм*. Выяснить, с какой точностью получаются результаты при применении миллиметровой бумаги.

3. Дана прямая, пересекающая ось Y в точке A с ординатой n и составляющая угол α с осью X, и подвижная точка M с координатами x и y на ней. Вывести параметрические уравнения этой прямой, приняв за параметр отрезок $AM = t$. Показать, что исключение t приводит к уравнению (4).

4. Вывести уравнение прямой для косоугольной системы координат.

§ 15. Кривая постоянного расстояния от данной точки и данной прямой (парабола). Траектория тяжелой точки в пустоте. Решим следующую задачу: *найти геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от данной точки F и от данной прямой DE* (черт. 32).



Черт. 32.

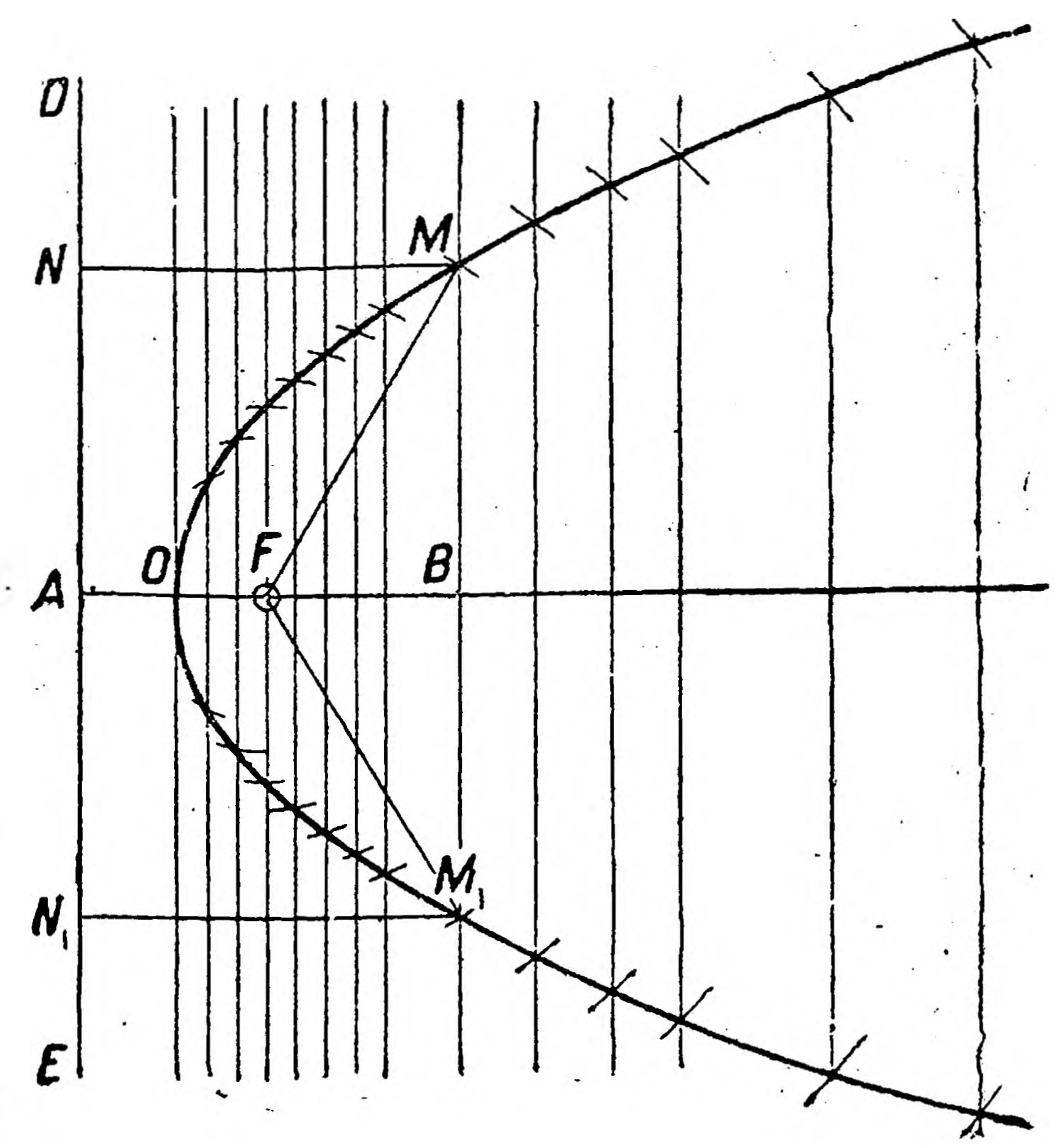
Обозначив расстояние FA от данной точки до данной прямой буквой p, возьмем за начало координат середину O отрезка AF, ось X направим по отрезку OF, ось Y — вверх. Тогда, обозначая через x и y координаты точки M, движущейся по искомому геометрическому месту, и проводя $RM \perp DE$, замечаем, что $FM = +\sqrt{(x-0{,}5p)^2+y^2}$, $RM = 0{,}5p + x$, а потому в силу условий задачи имеем равенство $0{,}5p + x = \sqrt{(x-0{,}5p)^2+y^2}$. Освобождая его от корня и производя упрощения, придем к уравнению:

$$y^2 = 2px \qquad (1).$$

Кривая, выражаемая уравнением (1), носит название параболы. Итак, параболу можно определить *как геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки* (ф о к у с а параболы) *и от данной прямой* (ее д и р е к т р и с ы).

Это определение параболы позволяет находить ее точки следующим простым построением. Имея на чертеже фокус F и директрису DE

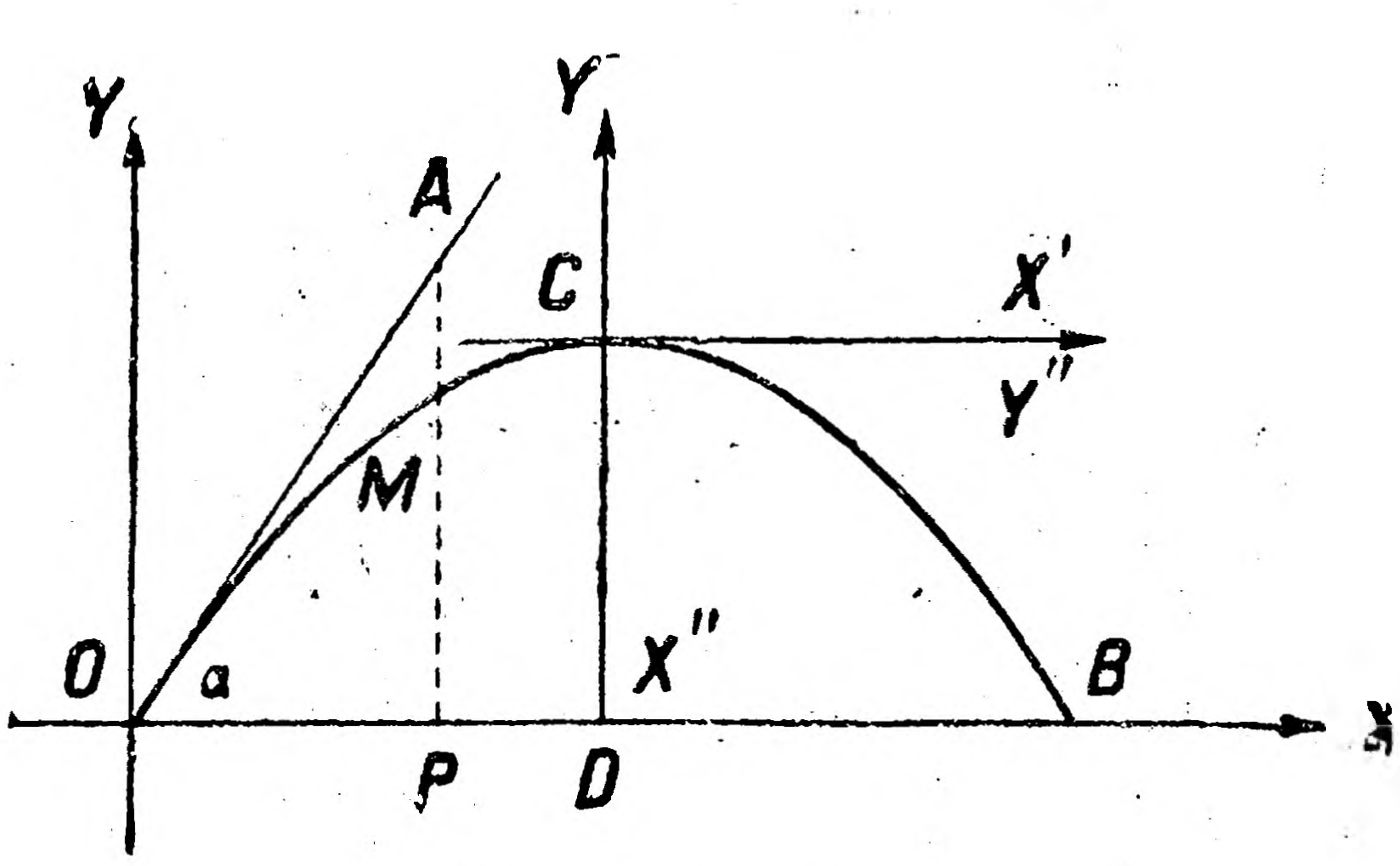
параболы (черт. 33), намечаем на отрезке AF и его продолжении вправо ряд точек, начиная с середины O отрезка AF. Расстояния между каждыми двумя смежными точками должны быть на отрезке OF небольшими, но по мере продвижения вправо они могут постепенно возрастать. Через каждую из намеченных точек проводим прямую, параллельную прямой DE. Поместив острие циркуля в одну из этих точек, например в точку B, его карандаш помещаем в точке A. Затем, не меняя взятого циркулем расстояния, переносим его острие в фокус F, а карандашом делаем засечку на прямой, проведенной через точку B. Точки пересечения M и M_1 принадлежат параболе, так как расстояния MF и MN, как и расстояния M_1F и M_1N_1, равны.



Черт. 33.

Выведем далее уравнение той кривой, по которой летит материальная точка (например центр тяжести артиллерийского снаряда), брошенная с начальной скоростью v_0 метров в секунду под углом α к горизонту ($0 < v_0 < +\infty$, $0 \leqq \alpha \leqq 0{,}5\pi$). Такой путь движущейся точки называют ее *траекторией*. Предположим, что точка не встречает при полете никакого сопротивления со стороны воздуха.

Поместив начало координат в точке вылета снаряда O и направив ось X по горизонтальной прямой, а ось Y — по перпендикуляру к ней вверх (черт. 34), строим прямую под углом α к оси X. По этой прямой полетел бы снаряд, если бы не было силы тяжести и он двигался бы исключительно по инерции. Тогда через t секунд снаряд оказался бы в точке A на расстоянии $OA = v_0t$, причем координаты точки A были бы равны $x = OP = v_0t\cos\alpha$, $y = PA = v_0t\sin\alpha$. Сила тяжести, непрерывно действуя на снаряд, перемещает его вниз, и он окажется через t секунд не в точке A, а ниже ее на отрезок AM, равный, как известно из курса физики, $0{,}5\,gt^2$, где g — ускорение силы тяжести (около 9,8 *м/сек*^{2}). Координаты точки M оказываются равными:



Черт. 34.

$$x = v_0 t\cos\alpha, \quad y = v_0 t\sin\alpha - 0{,}5\,gt^2. \tag{2}$$

Эти формулы представляют собой не что иное как параметрические уравнения искомой траектории снаряда.

Действительно, они позволяют найти значения x и y для любого момента времени t. Чтобы получить обыкновенное уравнение траектории, надо исключить параметр t. Находя t в зависимости от x из первого уравнения, подставляем его во второе и после упрощений получаем:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) позволяют решать много важных вопросов о полете снаряда. Выясним, например, какова дальность полета снаряда, т. е. на каком расстоянии $l = OB$ снаряд окажется вновь на горизонтальной прямой, проведенной через точку его вылета. Речь идет, следовательно, об абсциссе той точки кривой, изображаемой уравнением (3), ордината которой равна 0. Полагая в уравнении (3) $y = 0$, решаем его относительно x. Так как это уравнение второй степени относительно x, то получаем два корня:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = l.$$

Первый корень дает точку вылета снаряда. Эта точка лежит на оси X. Поэтому, разыскивая те точки траектории, в которых ордината равна нулю, мы должны были попутно получить и ее. Второй корень дает абсциссу интересующей нас точки падения снаряда. Как видим, дальность полета пропорциональна квадрату начальной скорости v_0^2 (при удвоении начальной скорости дальность полета возрастает вчетверо), обратно пропорциональна ускорению силы тяжести (на Луне, где ускорение силы тяжести, примерно, в 6 раз меньше, чем на Земле, наша пушка стреляла бы в 6 раз дальше) и прямо пропорциональна синусу угла α. Принимая во внимание, что синус имеет наибольшее значение при значении угла, равного 90°, заключаем, что для получения наибольшей дальности полета при данной начальной скорости пушку надо направить под углом в $0{,}5\pi : 2 = \pi : 4$, или 45° к горизонту[1].

Обозначая $\operatorname{tg} \alpha$ через k и пользуясь выражением для l, преобразуем уравнение (2) к следующему более удобному виду:

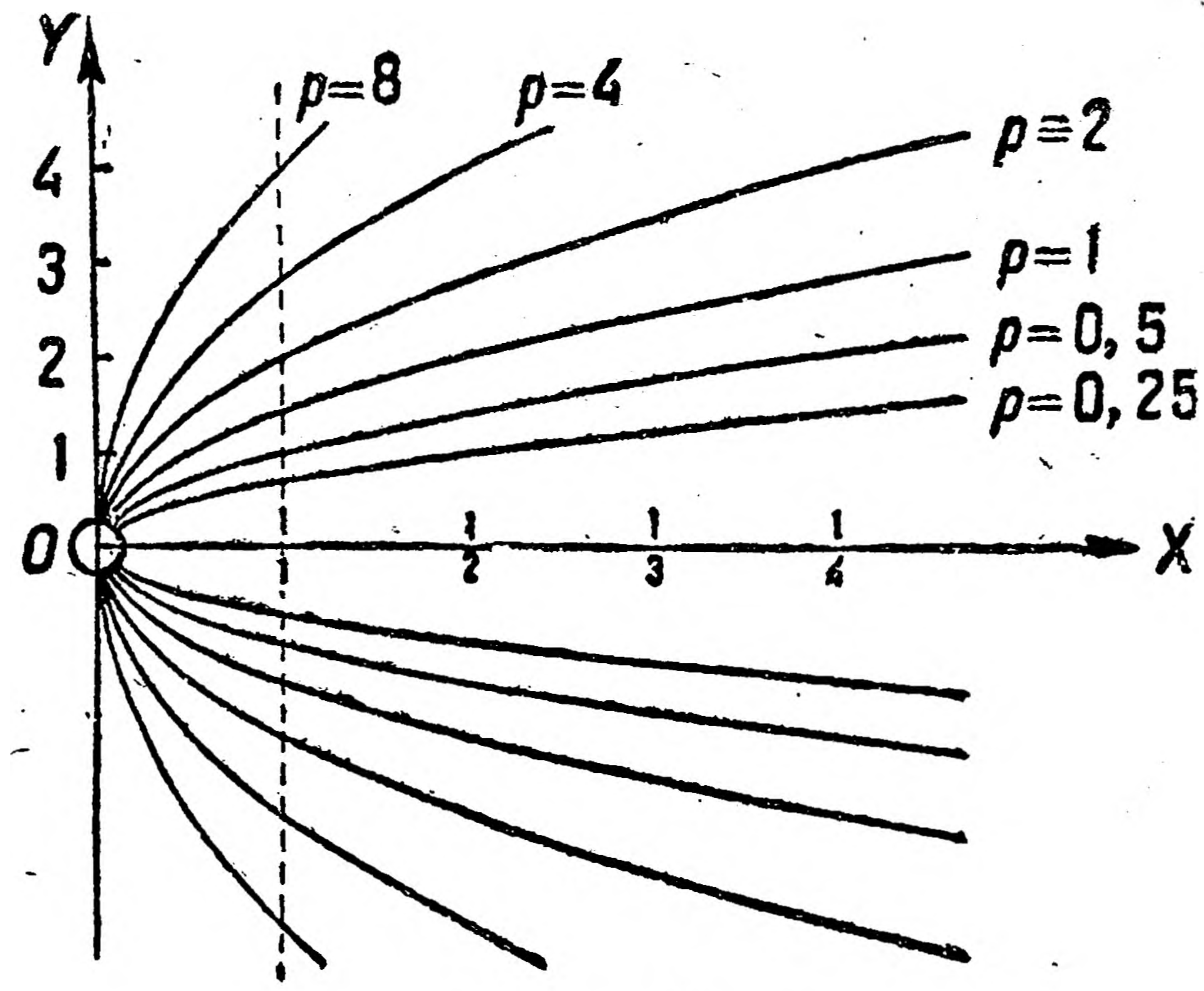
$$y = kx - \frac{k}{l} x^2, \quad \text{или} \quad y = kx\left(1 - \frac{x}{l}\right). \tag{4}$$

Решим еще вопрос о том, какова наибольшая высота полета снаряда. Такого рода вопросы легко решаются посредством диференциального исчисления, но в данном случае его нетрудно решить и элементарным способом. Для этого достаточно решить уравнение (4) относительно x. Получаем $x = \frac{kl \pm \sqrt{k^2 l^2 - kly}}{2k} = 0{,}5l \pm 0{,}5 \sqrt{l^2 - \frac{ly}{k}}$. Рассматривая подкоренное выражение $l\left(l - \frac{y}{k}\right)$, сразу видим, что $\frac{y}{k}$ имеет наибольшее значение, равное l, так как при $\frac{y}{k} > l$ подкоренное сделалось бы отрицательным и абсцисса x получила бы мнимое значение, что невозможно. Итак, $\frac{y}{k} \leqq l$, $y \leqq kl$. Когда y достигает этого своего наиболь-

[1] Сопротивление воздуха несколько изменяет этот угол, притом тем сильнее, чем больше v_0.

шего значения, x обращается, как показывает формула корней, в $0{,}5l$. Следовательно, наибольшая высота полета снаряда достигается им тогда, когда его проекция на ось x оказывается в точке D, делящей отрезок $OB = l$ пополам; эта наибольшая высота равна $CD = kl = h$.

Уравнение траектории принимает особенно простой вид, если перенести начало координат в точку C (в „вершину" траектории) и направить ось абсцисс вниз, ось ординат направо. Выполняя сперва параллельное перенесение осей, причем за новое начало берется точка C с координатами $0{,}5\,l$ и h, а затем поворачивая оси на угол $-90°$, получим уравнение траектории в виде $y'^2 = 2(l:k)\,x'$ или, полагая $l:k = p$ и опуская значки при новых координатах, в виде $y^2 = 2px$. Как видим, мы опять пришли к уравнению (1) и убеждаемся, что т р а е к т о р и я т я ж е л о й т о ч к и в п у с т о т е е с т ь п а р а б о л а.



Черт. 35.

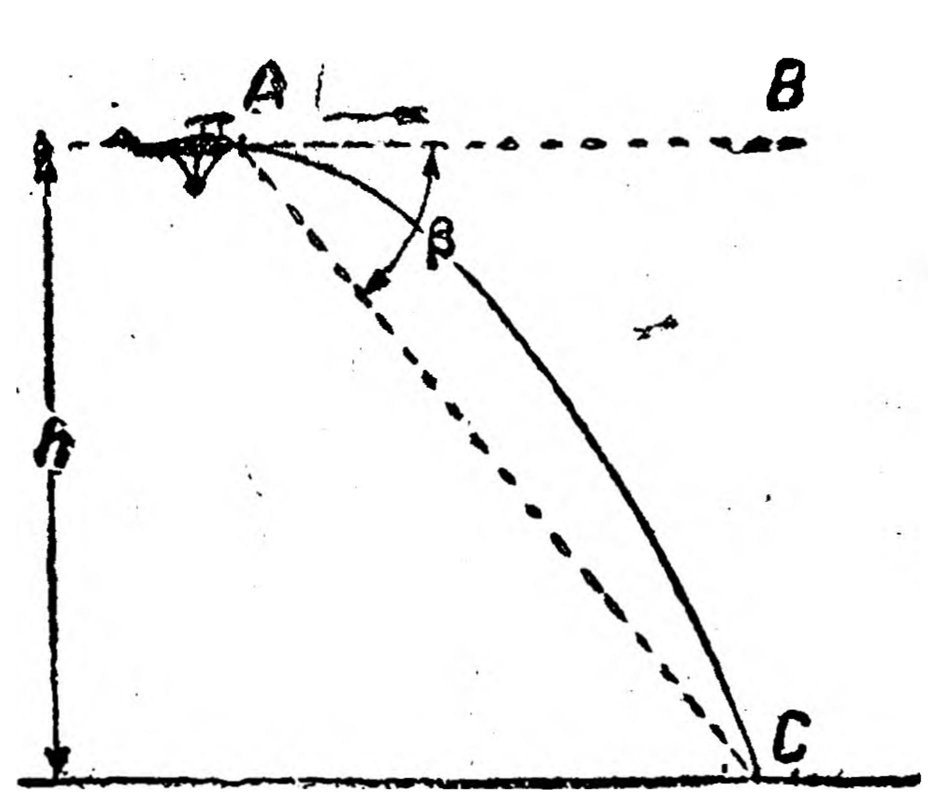
В главе IV мы займемся более детальным изучением этой кривой, часто встречающейся в природе и в технике и в различных теоретических вопросах. Сейчас отметим в дополнение к сказанному лишь то обстоятельство, что, придавая величине p различные значения, мы получим по уравнению (1) целое с е м е й с т в о парабол. Несколько кривых этого семейства изображены на чертеже 35. При $p < 0$ кривые переходят в левую полуплоскость.

Упражнения.

1. Вычертить траекторию снаряда, выпущенного под углом $\alpha = 45°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 350$ *м/сек*.

Указание. Сперва вычислить $l = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (принимая $g = 9{,}8$), затем воспользоваться уравнением (3).

2. Построить параболу $y^2 = 2px$ при $p = 3$ для значений x от 0 до 10 два раза, сперва взяв значения x от 0 до 10 через 1 и вычисляя значения y, потом взяв значения y от 0 до ± 8 через 0,5 и вычисляя значения x.



Черт. 36.

3. Построить *семейство* парабол, являющихся траекториями снарядов, вылетающих из одной и той же точки с одной и той же начальной скоростью $v_0 = 250$ *м/сек*, но под различными углами α к горизонту, а именно взять значения α от 10 до 90° через каждые 10° или через каждые 5°.

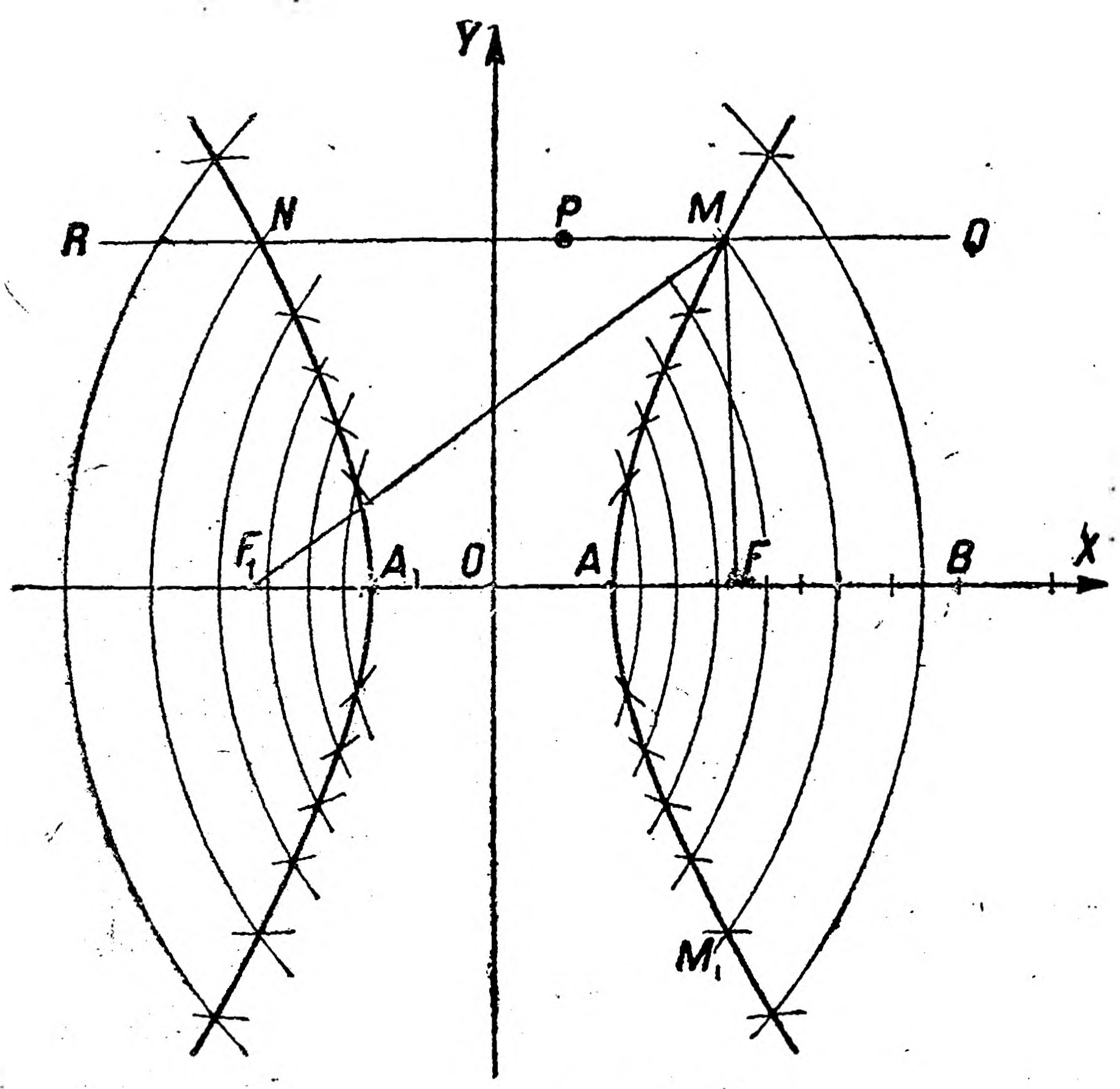
4. В направлении выстрела имеется холм, высшая точка которого находится на высоте 85 *м* над горизонтальной плоскостью (проведенной через точку вылета снаряда) на расстоянии 250 *м* от пушки. Перелетит ли через холм снаряд, выпущенный с начальной скоростью $v_0 = 200$ *м/сек* под углом $\alpha = 22°$, и если перелетит, то на сколько выше вершины холма?

5. Как определить тот угол α, под которым должен быть выпущен снаряд с данной начальной скоростью v_0, чтобы он попал в цель, расположенную на расстоянии a и высоте b?

6. Аэроплан летит горизонтально со скоростью $v=40$ *м/сек* на высоте $h=150$ *м*. Летчику надо знать тот угол $BAC=\beta$ (черт. 36), под которым он должен видеть цель C в момент сбрасывания бомбы, чтобы эта бомба, двигаясь по параболе с вершиной в точке A, достигла цели C. Рассчитать этот угол β.

§ 16. Кривая постоянной разности расстояний от двух данных точек (гипербола). Решим еще одну задачу из области военного дела.

В точках F и F_1, расположенных на расстоянии $2c=1200$ *м* одна от другой (черт. 37), регистрируется звук выстрела неприятельской пушки. Оказывается, что звук этот слышен в точке F_1 на 2 секунды позже, нежели в F. Зная, что скорость звука в воздухе равна (приблизительно) 300 *м/сек*, указать те точки плоскости, где может быть расположена, судя по наблюдаемому запаздыванию звука, неприятельская пушка. Как мы сейчас увидим, эти точки возможных положений неприятельской пушки располагаются по некоторой кривой линии. Практическое значение поставленной задачи заключается в том, что, регистрируя один и тот же выстрел в двух парах точек, мы в состоянии будем вычертить кривую возможных положений пушки для каждой пары точек в отдельности. Пересечение обеих кривых и определит место расположения пушки.



Черт. 37.

Запаздывание звука на 2 секунды соответствует удалению на лишних $300 \cdot 2 = 600$ *м* $=2a$. Итак, неприятельская пушка отстоит от точки F_1 дальше, чем от точки F, на $2a=600$ *м*, и задача наша заключается в том, чтобы указать все точки плоскости, разность расстояний которых от двух данных точек F и F_1, называемых фокусами, равна $2a=600$ *м* (в силу технических условий чертеж 37 несколько уменьшен).

Приближенное решение этой задачи легко получить простым построением. Отмечаем фокусы F и F_1 на чертеже (у нас взят масштаб 300 *м* или 1 *звуковая секунда* в 1 *см*), проводим через них прямую и отмечаем средину O отрезка F_1F, а также точки A и A_1, находящиеся от точки O на расстоянии $OA=OA_1=a=1$ *см*, соответствующем половине запаздывания (у нас $600:2=300$ *м*). Взяв на прямой F_1F правее точки F произвольную точку B, проводим две дуги, одну радиусом A_1B с центром в точке F_1 и другую радиусом AB с центром в точке F. Так как $A_1B - AB = A_1A = 2a$, то каждая из точек пересечения M и M_1 этих двух дуг удалена от фокусов F и F_1 на расстояния, разность которых равна как раз $2a$. Взяв еще несколько точек на прямой F_1F, расположенных, как и точка B, правее F, повторяем для каждой то же построение и получаем еще несколько пар точек искомого геометрического места. Соединяя их плавной кривой (от руки или посредством лекала), получаем дугу кривой линии, носящей название *гиперболы*.

Тот способ вычерчивания дуги гиперболы, который мы только что рассмотрели, дает результаты довольно точные, но, зная уравнение кривой, к выводу которого мы сейчас переходим, мы будем в состоянии находить координаты произвольного числа ее точек с произвольно высокой точностью. Однако как рассмотренный построительный способ, так и способ вычислительный требуют много времени. Изучение гиперболы, которым мы будем заниматься в главе IV, положив в основу именно ее уравнение, приведет нас к способу, гораздо более быстрому и действительно употребляемому на практике при решении поставленной выше задачи и других, ей аналогичных.

Итак, задача наша состоит в выводе уравнения гиперболы, т. е. кривой, каждая точка которой удалена от данной на плоскости точки F_1 дальше, чем от другой данной точки F, на некоторую постоянную величину $2a$, причем отрезок F_1F равен $2c$. Прямую F_1F принимаем за ось X, начало координат помещаем в средине отрезка FF_1, ось Y направляем вверх. Взяв подвижную точку M с координатами x и y, лежащую на гиперболе, находим выражения для фокальных радиусов-векторов точки M, т. е. для отрезков $F_1M = r_1$ и $FM = r_2$. Замечая, что точка F_1 имеет координаты $-c$ и 0, а точка F координаты $+c$ и 0, и применяя формулу (2) § 7, получаем

$$r_1 = +\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2 = +\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

после чего пишем и уравнение гиперболы:

$$r_1 - r_2 = 2a, \text{ или } \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \qquad (1)$$

Это уравнение значительно упрощается, если уничтожить в нем радикалы. После перенесения второго радикала в правую часть уравнения и возведения обеих его частей в квадрат получаем уравнение, упрощение которого приводит к такому результату:

$$a^2 - cx = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Вторичное возведение в квадрат и новые упрощения дают уравнение

$$\frac{(c^2-a^2)x^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2. \qquad (2)$$

Является вопрос о знаке постоянной разности $c^2 - a^2$. Обращаясь к чертежу 37, замечаем, что сторона $F_1F = 2c$ треугольника F_1MF согласно известной из курса элементарной геометрии теореме всегда больше разности двух других сторон F_1M и FM, равной по условию $2a$. Следовательно, $c > a$ и $c^2 - a^2 > 0$. Обозначим эту постоянную положительную разность через b^2. Тогда уравнение (2) перепишется после деления обеих частей на $c^2 - a^2 = b^2$ в следующем окончательном виде („простейшее уравнение" гиперболы):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Отметим, что то же самое уравнение получится и в том случае, если мы будем искать геометрическое место точек, из которых каждая *ближе* к F_1, чем к F, на $2a$. Тогда вместо уравнения (1) будем иметь уравнение $r_2 - r_1 = 2a$ или $r_1 - r_2 = -2a$ и после двукратного возведения в квадрат находим опять то же, что и выше. Поэтому уравнение (3) удовлетворяется координатами любой точки каждой ветви гиперболы (черт. 37) как правой, уже рассмотренной выше, так и левой, которая строится точно так же, как и правая, удобнее всего одновременно с ней (при помощи тех же точек, расположенных правее фокуса, какими мы пользовались при вычерчивании правой ветви гиперболы).

Что даст подстановка в уравнение (3) координат точки, расположенной где-нибудь между обеими ветвями гиперболы, как точка P, или правее правой ветви, как точка Q, или левее левой ветви, как точка R? Легко видеть, что, отходя от точки M (на гиперболе), имеющей координаты x и y, подстановка которых в уравнение (3) обращает его в тожество, направо по параллели к оси X, мы оставляем y неизменным, а x увеличиваем, и разность $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ увеличивается, принимая значения, уже большие 1. Идя же налево, но оставаясь между обеими ветвями гиперболы (между точками M и N), мы уменьшаем x при постоянном y, и разность $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ принимает уже значения, меньшие 1.

Итак, если точка $(x;\ y)$ лежит на гиперболе, то

$$H = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

если между ветвями гиперболы, то $H < 0$, а если за одной из ветвей гиперболы, то

$$H > 0. \tag{4}$$

Упражнения.

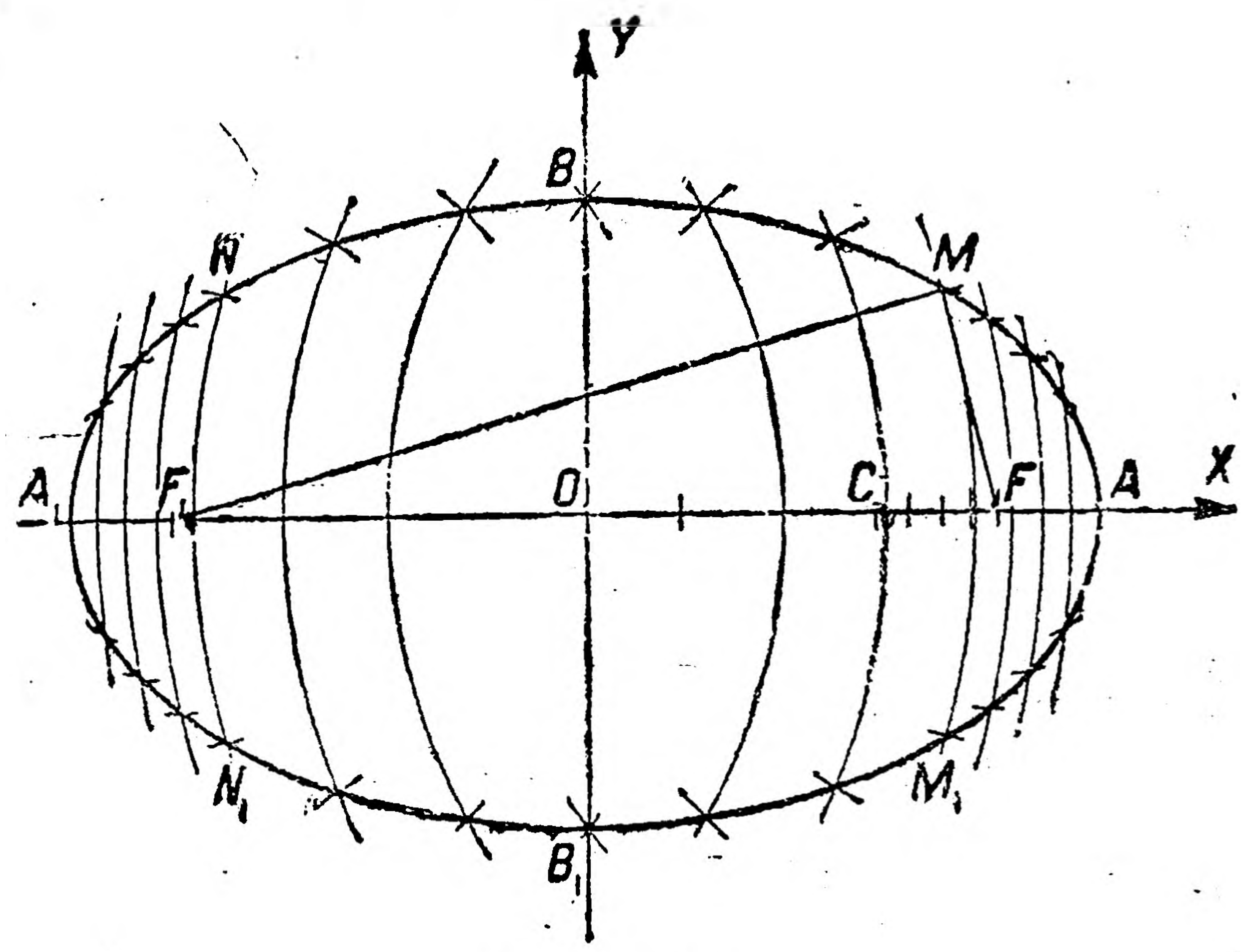
1. Выразить из простейшего уравнения гиперболы y в зависимости от x, а затем x в зависимости от y. Выяснить геометрический смысл двойного знака перед радикалом.

2. Составить уравнение гиперболы, о которой была речь в начале § 16 ($2a = 20$ *мм*, $2c = 40$*мм*), и найти ординаты ее точек, абсциссы которых равны 15 *мм* и 5 *мм*, а также абсциссы тех ее точек, ординаты которых равны 30 *мм* и 0 *мм*, и проверить соответствие результатов вычисления чертежу 37.

3. Звук выстрела неприятельской пушки регистрируется в точках $F(2;0)$, $F_1(-2;0)$, $F'(5;-1)$, $F_1'(5;+2)$, причем на чертеже за единицу принят сантиметр, изображающий 1 звуковую секунду (около 300 *м*). Звук дошел до точки F_1 позже, чем до точки F, на 1,53 секунды, а до точки F_1' на 2,86 секунды позже, чем до точки F'. Найти графическим способом координаты точки, где расположена неприятельская пушка.

4. Вычертить график обратно пропорциональной зависимости по уравнению $y = k^2 : x$ при $k = 12$ *мм*, вычислив значения y при x, равном ± 12, ± 16, ± 20, ± 24, ± 30, ± 36, а также значения x при таких же значениях y, и убедиться, что при повороте координатных осей на угол в 45° уравнение вычерченной линии ($xy = k^2$) переходит в уравнение $x'^2 - y'^2 = 2k^2$ и что эта линия есть, следовательно, гипербола, у которой $a = b = k\sqrt{2}$.

§ 17. Кривая постоянной суммы расстояний от двух данных точек (эллипс). Ознакомившись с гиперболой, представляющей собой геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, естественно поставить вопрос о том, что представляет собой геометрическое место точек, у которых *сумма* расстояний от двух данных точек (фокусов) постоянна. Кривая, все точки которой обладают этим свойством, носит название *эллипса*. Построить ее нетрудно тем же способом засечек, каким мы строили в § 16 гиперболу. Возьмем две точки F_1 и F на расстоянии $FF_1 = 2c$ друг от друга (на чертеже 38 взято $c = 20$ *мм*) и разделим отрезок FF_1 пополам. От середины O отложим отрезки $OA = OA_1 = a$, где a есть половина той суммы расстояний $r_1 = MF_1$ и $r = MF$, постоянство которой характеризует каждую точку M эллипса (на чертеже взято $a = 25$ *мм*). Итак, $r_1 + r_2 = 2a$, где бы на эллипсе ни была расположена точка M. Так как в треугольнике сумма двух сторон всегда больше третьей стороны, то $F_1M + FM > F_1F$, откуда $2a > 2c$ и $a > c$. Точки A и A_1 располагаются поэтому дальше от точки O, чем фокусы F и F_1. Взяв далее точку C где-нибудь между O и A, берем радиус, равный A_1C, и проводим дуги из точек F_1 и F как из центров, а затем радиус, равный AC, и проводим им дуги из тех же точек F и F_1. Пересечение этих 4 дуг определяет 4 точки: M, M_1, N, N_1, лежащих на эллипсе, так как $FM + F_1M = AC + A_1C = 2a$, $FN + F_1N = A_1C + AC = 2a$ и т. д. Повторяя то же построение для нескольких других точек отрезка OA, получаем каждый раз еще 4 новых точки эллипса, а потом соединяем эти точки плавной кривой (от руки или по лекалу). Получается кривая, которую можно назвать „сплюснутым кругом" или с таким же правом „растянутым кругом" и которая носит название *эллипса*.



Черт. 38.

Вывод ее уравнения производится совершенно так же, как и гиперболы. Расположив оси координат, как показано на чертеже, обозначаем координаты точки M, движущейся по эллипсу, через x и y и находим длины фокальных радиусов-векторов:

$$r_1 = F_1M = +\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad r_2 = FM = +\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Уравнение эллипса можно написать в виде $r_1 + r_2 = 2a$ или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (1)$$

Уничтожая радикалы двукратным возведением обеих частей уравнения в квадрат (с предварительным уединением одного радикала), приходим к уравнению $\frac{(c^2 - a^2)x^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$, одинаковому с уравнением (2) § 16 для гиперболы. Сходство это однако только внешнее, так как разность $c^2 - a^2$ здесь уже не положительна, как было у гиперболы, а отрицательна (в силу того, что, как мы видели выше, у эллипса $a > c$). Меняя знаки во всех членах на обратные, получаем уравнение

$$\frac{(a^2 - c^2)x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2,$$

которое, после замены a^2-c^2 через b^2 и деления обеих частей на b^2 дает следующее „простейшее уравнение“ эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2)$$

Как видим, оно только знаком при втором члене отличается от простейшего уравнения гиперболы, выведенного в § 16.

Сдвигая точку M внутрь эллипса (к началу координат) или наружу эллипса (от начала координат), получим точки, координаты которых уравнению (2) уже не удовлетворяют. Рассуждая как и в § 16, получим, что если точка $(x;\ y)$ лежит на эллипсе, то

$$E=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad (3)$$

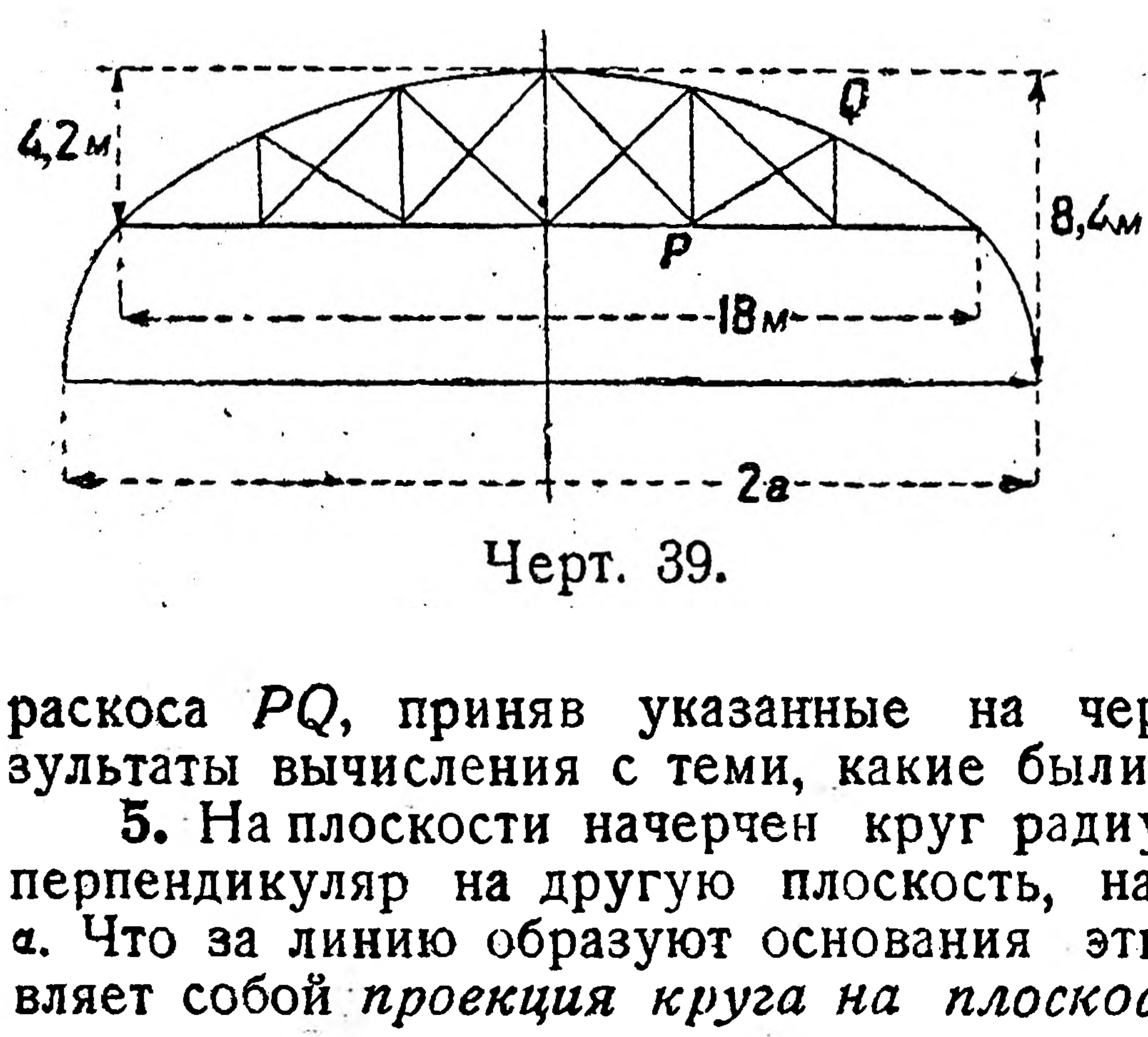
если внутри эллипса, то $E<0$, если же вне эллипса, то $E>0$.

Величины a и b носят название большой и малой полуоси эллипса. Их геометрический смысл выясняется ниже, при решении задачи 3 (в упражнениях). Детальное изучение эллипса будет проведено в главе IV.

Упражнения.

1. Выразить из простейшего уравнения эллипса y в зависимости от x, а потом x в зависимости от y. Выяснить значение двойного знака.

2. Составить уравнение эллипса по данным $a=25$ *мм* и $c=20$ *мм* и вычислить ординаты тех точек эллипса, абсциссы которых равны 15 *мм*, 0 *мм* и 30 *мм*, а затем абсциссы тех точек эллипса, ординаты которых равны 8 *мм*, 0 *мм* и 90 *мм*.



Черт. 39.

3. Полагая в уравнении (2) сперва $y=0$ и вычисляя x, а затем $x=0$ и вычисляя y, указать геометрический смысл величин a и b, входящих в уравнение (2).

4. Ферма моста (черт. 39) ограничена сверху дугой эллипса, а снизу прямой, проведенной параллельно большой оси эллипса через середину верхней малой его полуоси. Найти построением и вычислением длину раскоса PQ, приняв указанные на чертеже размеры фермы. Сравнить результаты вычисления с теми, какие были получены при решении задачи 5 § 13.

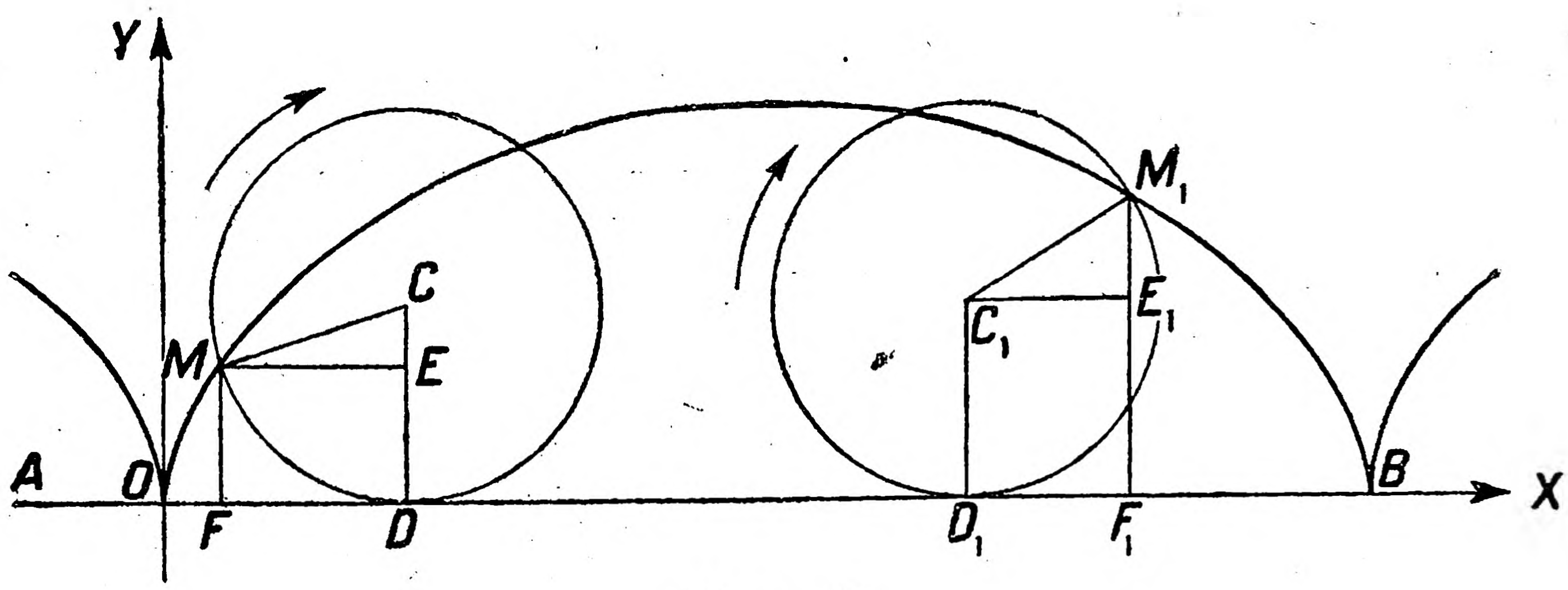
5. На плоскости начерчен круг радиуса r и из каждой точки круга опущен перпендикуляр на другую плоскость, наклоненную к первой под острым углом α. Что за линию образуют основания этих перпендикуляров, т. е. что представляет собой *проекция круга на плоскость*?

Указание. Надо провести в плоскости круга оси координат, поместив начало в центре круга и направив одну из осей параллельно прямой пересечения плоскостей. Другая пара осей проводится в плоскости проекций, причем начало помещают в проекции центра круга и одну из осей направляют тоже параллельно прямой пересечения плоскостей. Далее устанавливается связь между координатами любой точки первой плоскости и координатами ее проекции и по уравнению круга устанавливается уравнение его проекции.

***§ 18. Циклоида и развертка круга.** Если круг катится без скольжения по прямой, то каждая его точка описывает при этом кривую, которая называется *циклоидой*. Чтобы ее вычертить, достаточно взять вырезанный из фанеры круг, укрепить в особой зарубке в точке M карандаш и катить круг по горизонтальной линейке AB. Карандаш вычертит циклоиду. Кривая эта неограниченно простирается в обе стороны и состоит из бесчисленного количества *арок*, одна из которых вместе с частями двух соседних изображена на чертеже 40. Чтобы получить уравнение циклоиды, поместим начало координат в одной из тех точек циклоиды, которые находятся на линейке, хотя бы в точке O. Ось X направляем по линейке, ось Y — по перпендикуляру к ней вверх. Пусть координаты точки M, в которой находится карандаш, будут x и y, а радианную меру угла MCD, составленного радиусом CM, идущим к карандашу, с радиусом CD, идущим отвесно вниз, обозначим буквой t. Когда карандаш находится в точке O (а центр круга C на оси Y), угол t равняется 0. По мере перемещения круга вправо угол t растет и становится равным 2π в тот момент, когда карандаш снова окажется на линейке. Длина дуги DM всегда равна длине отрезка OD, так как круг катится согласно предположению без скольжения. С другой стороны, длина дуги DM равна rt. Теперь, замечая, что $x = OF = OD - FD = MD - ME = rt - r\sin t$, а $y = FM = DE = DC - EC = r - r\cos t$, получаем параметрические уравнения циклоиды:

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t), \tag{1}$$

по которым легко вычислить координаты любой точки циклоиды. Уравнения (1) выведены в предположении, что угол t — острый. Читателю предоставляется самому доказать, что это же уравнение получается и для других значений угла t, например для того случая, когда этот угол заключен между π и $\frac{3}{2}\pi$ (см. чертеж). Уравнение (1) можно получить также другим способом, проектируя ломаные $ODCM$ и OFM сперва на ось X, затем на ось Y. При этом необходимость рассматривать различные случаи отпадает.



Черт. 40.

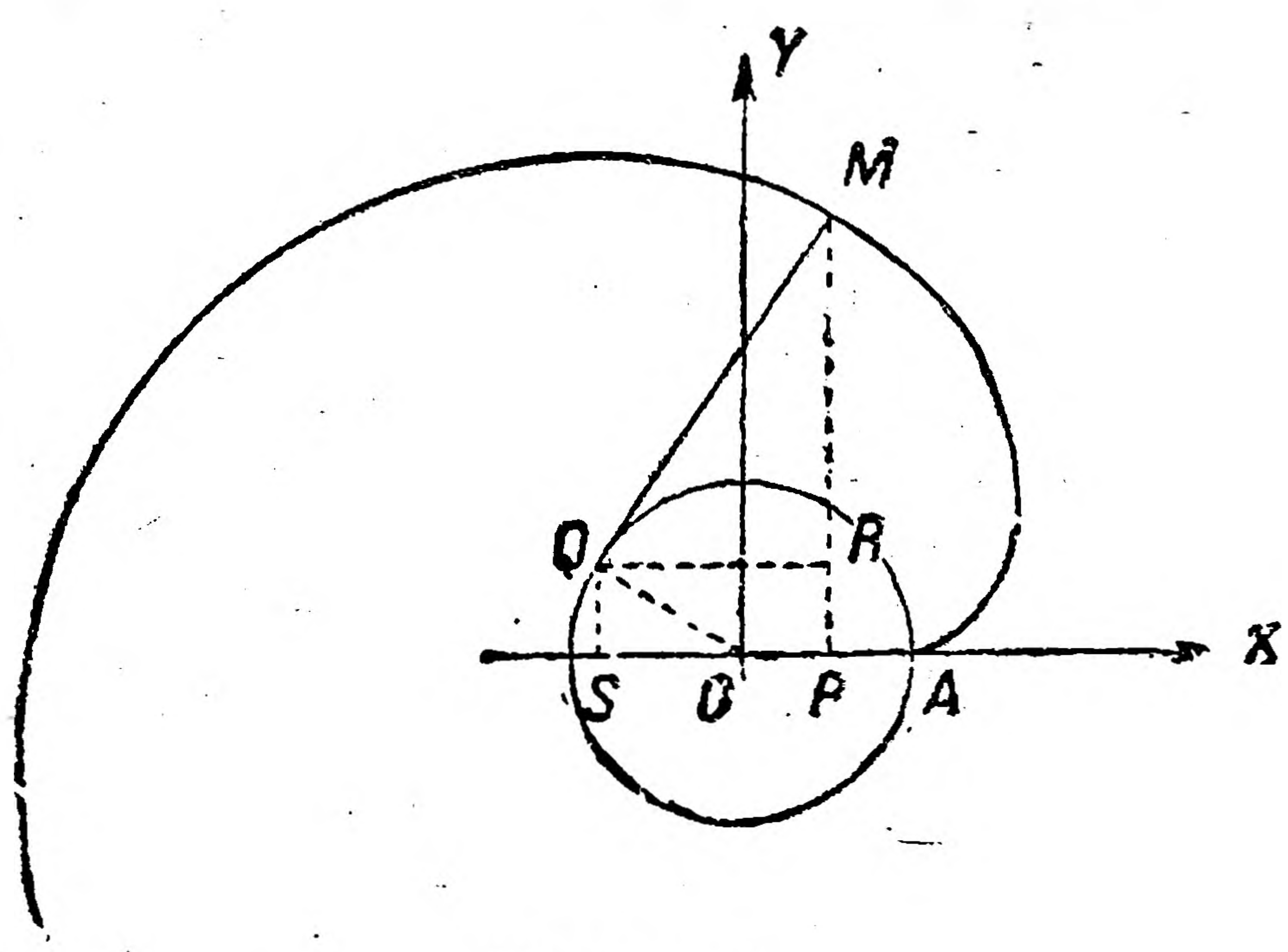
Параметрические уравнения (1) можно заменить обыкновенным уравнением, которое получится, если найти t из второго уравнения в зависимости от x и подставить это выражение вместо t в первое уравнение. При этом находим $t = \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right)$, и искомое обыкновенное уравнение циклоиды получается в виде

$$x = r\left[\arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right) \pm \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y}{r}\right)^2}\right]. \tag{2}$$

Как видим, это обыкновенное уравнение циклоиды весьма сложно, и потому всегда предпочитают пользоваться уравнением (1), а не (2).

Если мы, вместо того чтобы держать линейку неподвижной и двигать (катить по ней) круг, поступим наоборот, а именно сделаем круг неподвижным и будем двигать линейку так, чтобы она все время касалась круга, но не скользила по нему, то каждая точка линейки будет описывать новую кривую — так называемую *развертку круга* (или *эвольвенту круга*). Эту развертку круга можно получить, поставив на бумагу небольшой круглый цилиндр с намотанной на него ниткой, к концу которой прикреплен карандаш. Сматывая нитку с цилиндра и натягивая ее в то же время карандашом, мы и начертим кривую, состоящую из многих завитков. Первый завиток (частью) изображен на чертеже 41. Здесь точка A является начальной точкой кривой и соответствует тому моменту, когда нить намотана целиком. Точка M дает положение карандаша для того момента, когда смотан кусок нити QM, равный по длине дуге AQ. Обозначая координаты точки M буквами x и y, а радианную меру угла AOQ через t, имеем, подобно тому как в циклоиде, $x = OP = SP - SO = QM\sin(\pi - t) - OQ\cos(\pi - t) = QA\sin t + OQ\cos t = rt\sin t + r\cos t$, $y = PM = SQ + RM = OQ\sin(\pi - t) + QM\cos(\pi - t) = r\sin t - rt\cos t$. Итак, уравнения развертки круга таковы:

$$\begin{aligned} x &= r(\cos t + t\sin t), \\ y &= r(\sin t - t\cos t). \end{aligned} \tag{3}$$



Черт. 41.

Эти уравнения легко получить, применяя проектирование ломаных OPM и OQM на оси X и Y.

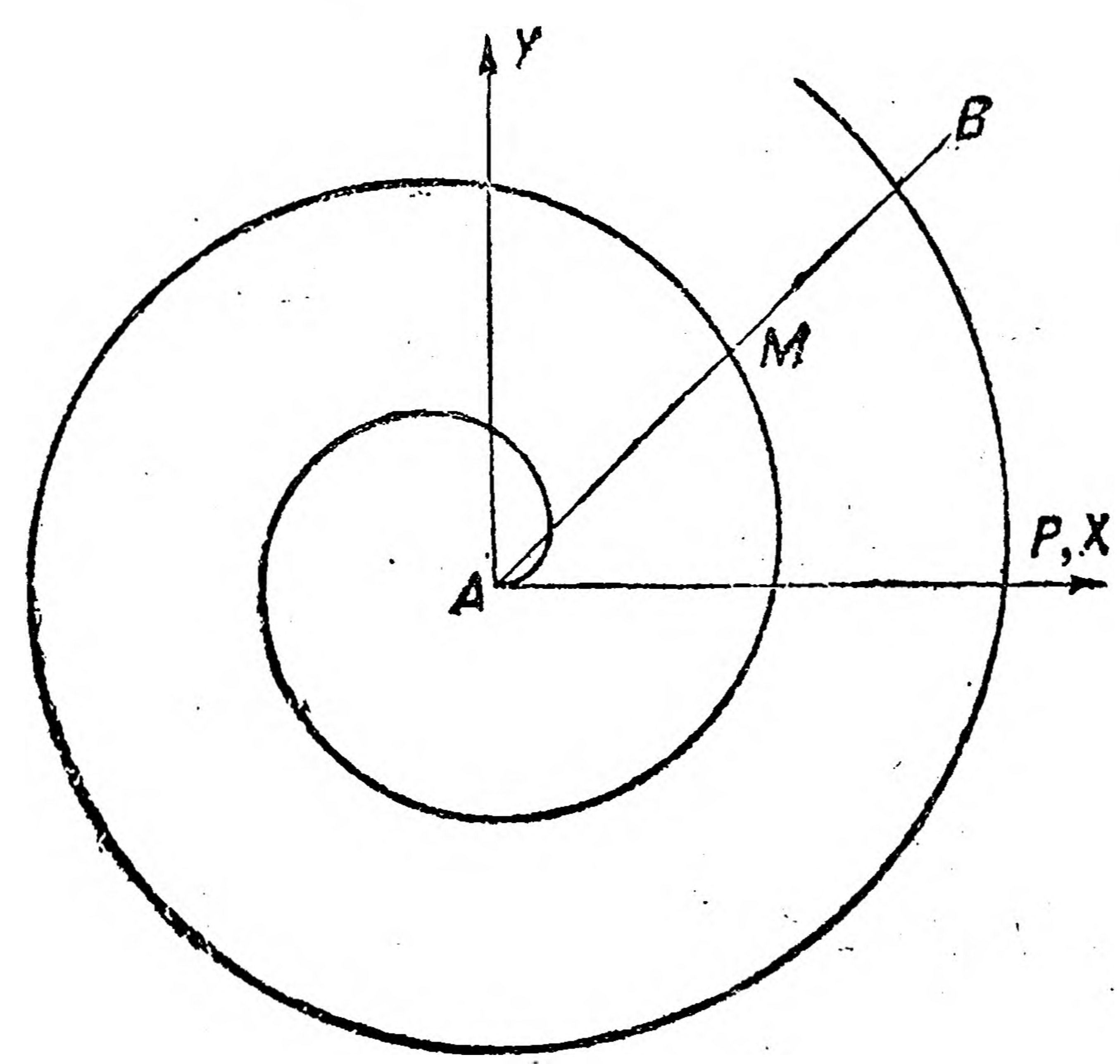
Обе рассмотренных кривых, и циклоида и развертка круга, имеют применение в машиностроении. Так, например, по дугам этих кривых вычерчивают зубцы зубчатых колес, чтобы обеспечить минимальное их изнашивание и легкость хода.

Упражнения.

1. Вычислить координаты 13 точек циклоиды, соответствующих значениям t от 0 до 360° через каждые 30°, взяв $r = 10$ *мм*, и вычертить циклоиду по этим точкам.

2. Вычислить координаты 13 точек развертки круга, соответствующих значениям t от 0 до 360° через каждые 30°, взяв $r = 5$ *мм*, и вычертить по этим точкам первый завиток кривой.

*** § 19. Уравнения линий в полярных координатах.** Устанавливая зависимость между декартовыми координатами x и y точки, движущейся по кривой, мы получаем уравнение кривой в декартовых координатах. Точно так же, устанавливая зависимость между радиусом-вектором ρ движущейся точки и ее полярным углом φ, мы получим уравнение кривой, по которой движется точка, в полярных координатах. Для примера рассмотрим кривую, по которой движется точка, удаляющаяся от данной точки A с равномерной скоростью v_0 миллиметров в секунду по прямой AB, которая равномерно вращается около точки A против часовой стрелки, поворачиваясь в 1 секунду на угол ω (в радианах). Приняв точку A за полюс, а то положение вращающейся прямой, в каком она была в начальный момент $t = 0$, за полярную ось AP, имеем для координат движущейся точки M через t секунд после начала движения уравнения:



Черт. 42.

$$AM = \rho = v_0 t, \quad \angle PAM = \varphi = \omega t, \tag{1}$$

представляющие собой параметрические уравнения кривой, по которой движется точка M (черт. 42). Для получения обыкновенного уравнения этой кривой в полярных координатах исключаем t из обоих уравнений (1) и получаем

$$\rho = \frac{v_0}{\omega}\varphi, \text{ или } \rho = a\varphi, \tag{2}$$

где a — постоянное число. Кривая, выражаемая этим уравнением, имеет бесчисленное множество завитков и носит название „архимедовой спирали" (по имени одного из величайших математиков древности, грека Архимеда, жившего в Сицилии, в Сиракузах, с 287 по 212 год до нашей эры и впервые изучавшего эту кривую). Нетрудно составить и уравнение этой кривой в декартовых координатах (принимая AP за ось X, перпендикуляр к ней через точку A за ось Y).

Уравнение это имеет вид

$$y = x \operatorname{tg} \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2}}{v_0}, \text{ или } y = x \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}, \tag{3}$$

и много сложнее уравнения (2). Понятно, что изучение архимедовой спирали гораздо выгоднее вести в полярных координатах, чем в декартовых. Исключительно просто выражается в полярных координатах уравнение круга с центром в полюсе: $\rho = r$.

Если выведено уравнение кривой в декартовых координатах, то перейти к полярным можно посредством формул перехода § 11. Надо только иметь в виду, что эти формулы предполагают, что полюс и полярная ось полярной системы координат совпадают с началом и осью X прямоугольной системы. Обратно, зная полярное уравнение кривой, легко перейти по тем же формулам к ее уравнению в прямоугольных координатах. Для примера найдем уравнение в полярных координатах для так называемой *лемнискаты*, уравнение которой в прямоугольных координатах имеет следующий вид (о происхождении лемнискаты см. § 20, упражнение 2):

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2 (x^2 - y^2) = 0.$$

Помещая полюс в начале координат и направляя полярную ось по оси X, имеем формулы перехода $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ и легко обнаруживаем, что искомое уравнение лемнискаты в полярных координатах имеет вид:

$$(\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi)^2 - a^2 (\rho^2 \cos^2\varphi - \rho^2 \sin^2\varphi) = 0,$$

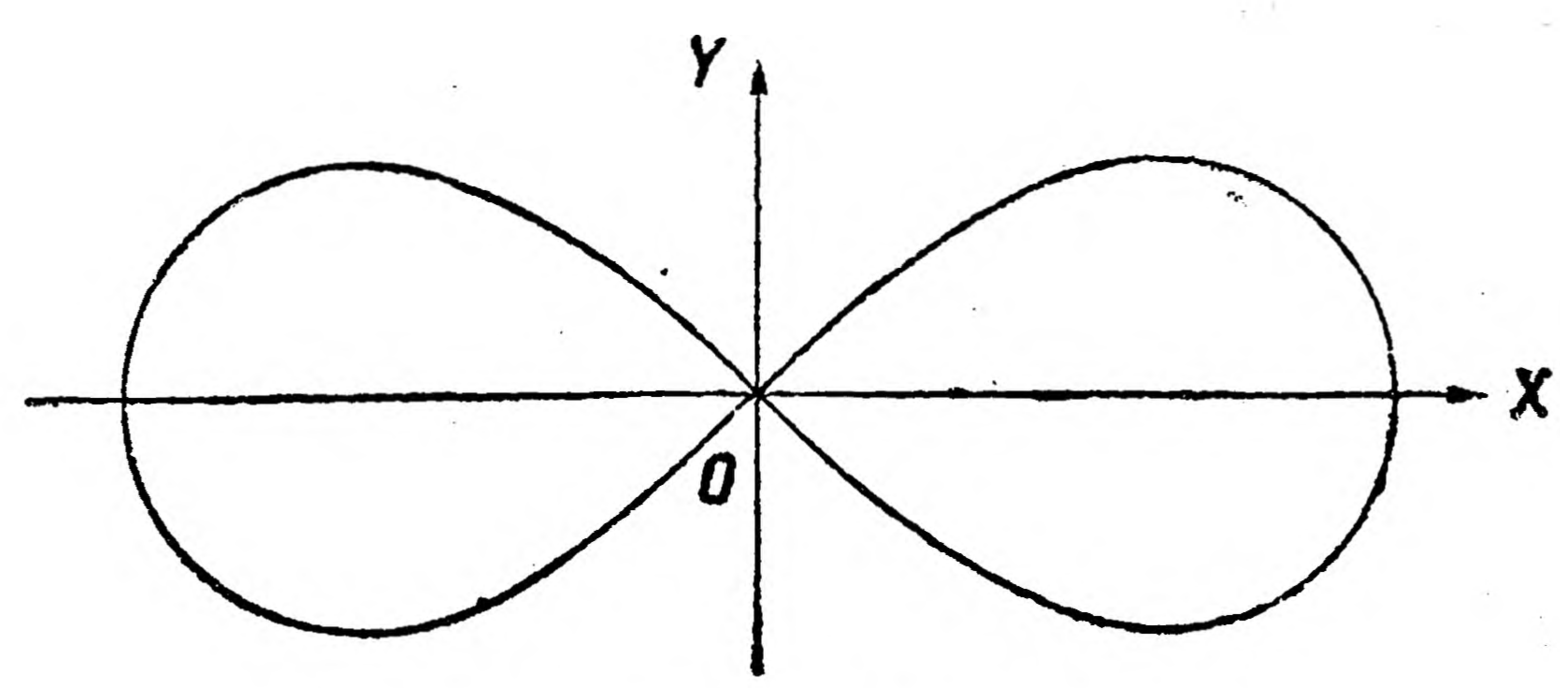
или

$$\rho^4 - a^2 \rho^2 \cos 2\varphi = 0, \text{ или } \rho^2 (\rho^2 - a^2 \cos 2\varphi) = 0.$$

Отбрасывая множитель ρ^2, обращающийся в 0 только в точке, принятой за полюс, и перенося второй член направо, получим после извлечения квадратного корня окончательное уравнение

$$\rho = + a \sqrt{\cos 2\varphi}, \tag{4}$$

гораздо более простое, чем вышеприведенное уравнение лемнискаты в декартовых координатах. Уравнение (4) показывает, что кривая имеет точки, соответствующие значениям угла φ от 0° до 45°, от 135° до 225° и от 315° до 360°, и не имеет точек для значений φ от 45° до 135° и от 225° до 315°.



Черт. 43.

Взяв $a = 20$ *мм* и придавая углу φ значения от 0 до 45° через каждые 5°, легко составляем табличку значений ρ:

φ	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$\cos 2\varphi$	1,0000	0,9848	0,9397	0,8660	0,7660	0,6428	0,5000	0,3420	0,1736	0,0000
$\sqrt{\cos 2\varphi}$	1,0000	0,9924	0,9694	0,9304	0,8752	0,8018	0,7071	0,5848	0,4165	0,0000
$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$	20,00	19,85	19,39	18,61	17,50	16,04	14,14	11,70	8,33	0,00

Те же значения ρ получаются, только в обратном порядке, для значений φ от 135° до 180°, так как $\cos 2(180° - \varphi) = \cos(360° - 2\varphi) = \cos 2\varphi$. Изменение φ от 180° до 360° тоже не дает ничего нового. Теперь легко строим лемнискату по точкам (черт. 43).

Упражнения.

1. Вычислить значения ρ по уравнению $\rho = 10 \sec(\varphi - 60°)$ для значений φ от 0° до 150° через каждые 30° и вычертить по этим точкам линию.

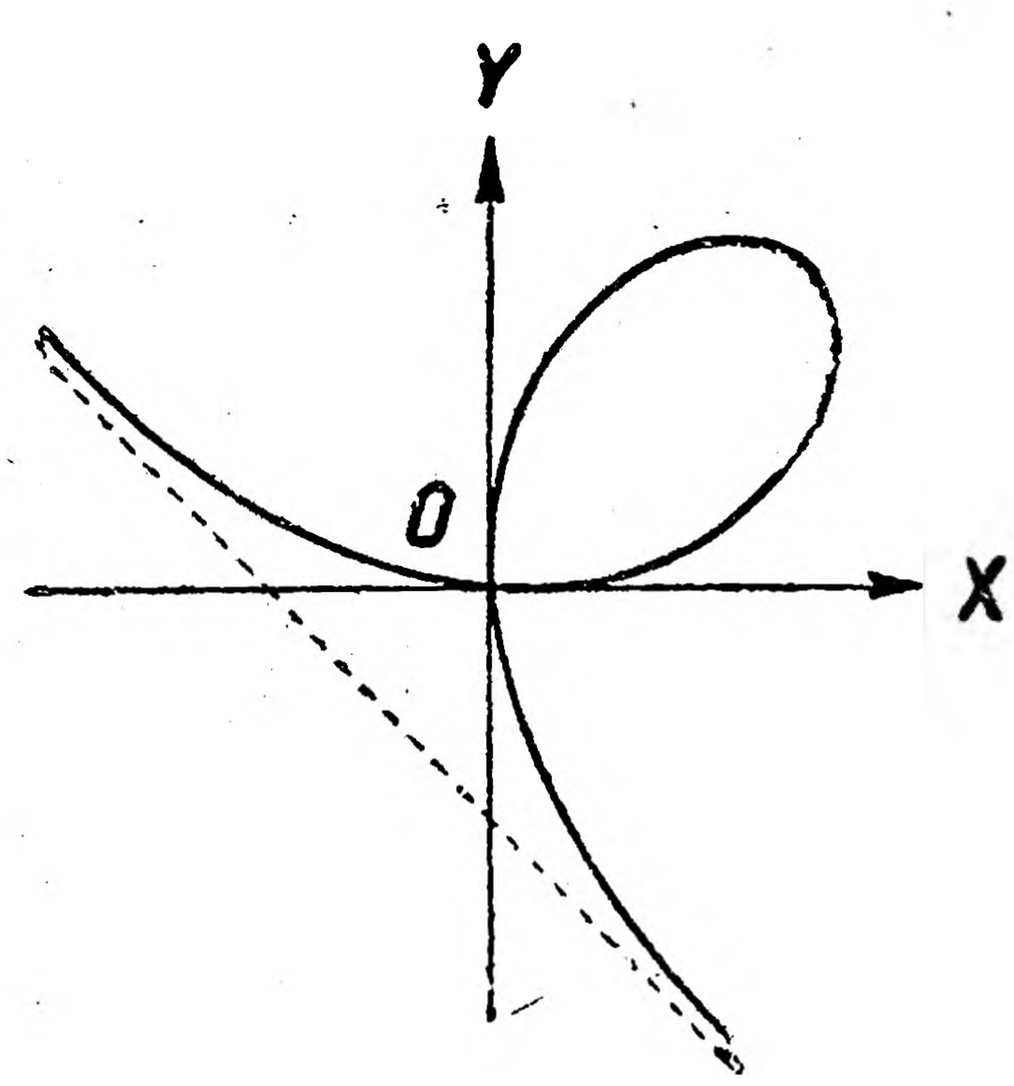
2. Показать, что уравнение этой линии с помощью формул перехода от полярных координат к декартовым (§ 11) приводится к уравнению $y = 10 \operatorname{cosec} 60° - x \operatorname{tg} 30°$ и выражает, следовательно, прямую линию.

3. Точка M удаляется от данной точки A с постоянной скоростью v_0 миллиметров в секунду по прямой AB, которая равномерно вращается около точки A с угловой скоростью ω радианов в секунду. Указать уравнение кривой, по которой движется точка M, предполагая, что в начальный момент она отстоит от точки A на расстояние $AA_0 = \rho_0$. Показать, что эта кривая включает в себе архимедову спираль и круг как частные случаи (при $\rho_0 = 0$ и при $v_0 = 0$).

4. Построить точки кривой $\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$ при $p = 10$ *мм*, придавая φ значения от 0° до 360° через каждые 30°.

5. Применяя формулы перехода от полярных координат к декартовым, показать, что кривая предыдущей задачи есть алгебраическая кривая II порядка, а также показать путем переноса начала координат, что эта кривая — парабола.

*** § 20. Уравнения линий в явной и неявной форме. Параметрические уравнения линий.** Если уравнение с двумя переменными x и y решено относительно одной из них, т. е. имеет вид $y = f(x)$ или $x = F(y)$, где $f(x)$ есть выражение, зависящее от одной лишь переменной x, а $F(y)$ — выражение, зависящее от одной лишь переменной y, то говорят, что уравнение это *явного вида*. В противоположность ему уравнение, не решенное относительно какой-либо переменной, называют уравнением *неявного* вида. Так в § 13 мы имели уравнение неявного вида $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, изображающее круг, а также уравнение явного вида $y = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$, изображающее тот же круг. Когда речь идет о вычислении координат точек некоторой линии, удобнее пользоваться ее уравнением явного вида. Уравнения, получаемые после всех упрощений (освобождения от знаменателей и т. д.), обычно оказываются уравнениями неявного вида.



Черт. 44.

Наряду с обыкновенным уравнением, связывающим декартовы координаты x и y движущейся по кривой точки, употребляются также и параметрические уравнения, выражающие x и y в явном виде через новую независимую переменную (параметр) t. Особенно часто параметрические уравнения употребляются в механике, где координаты x и y движущейся точки выражаются в зависимости от времени t. Пример таких уравнений движения точки мы имели в § 15, рассматривая движение тяжелой точки в пустоте. В § 18 мы видели обыкновенное уравнение циклоиды (2), гораздо более сложное, чем параметрические уравнения (1) этой кривой, а потому вовсе неупотребительное на практике.

Параметрические уравнения нередко позволяют строить кривые по точкам в таких случаях, когда приведение уравнения кривой к явному виду затруднительно. Так, желая построить кривую, известную под названием „декартов лист", по ее уравнению

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \qquad (1)$$

мы должны решить кубическое уравнение относительно y. Этого однако можно избежать, введя параметр t посредством соотношения $y = tx$, т. е. обозначив через t тангенс угла, составляемого осью X с прямой, соединяющей начало с точкой на кривой. Подставляя $y = tx$ в уравнение (1), находим параметрические уравнения декартова листа

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \qquad (2)$$

по которым легко вычисляем координаты какого угодно числа точек кривой и строим самую кривую (черт. 44).

Сказанное об обыкновенных и параметрических уравнениях относится и к уравнениям в полярных координатах. В уравнениях (2) § 19 мы имели параметрические уравнения архимедовой спирали в полярных координатах, а в уравнении (3) того же параграфа — обыкновенное уравнение этой кривой в полярных координатах.

Упражнения.

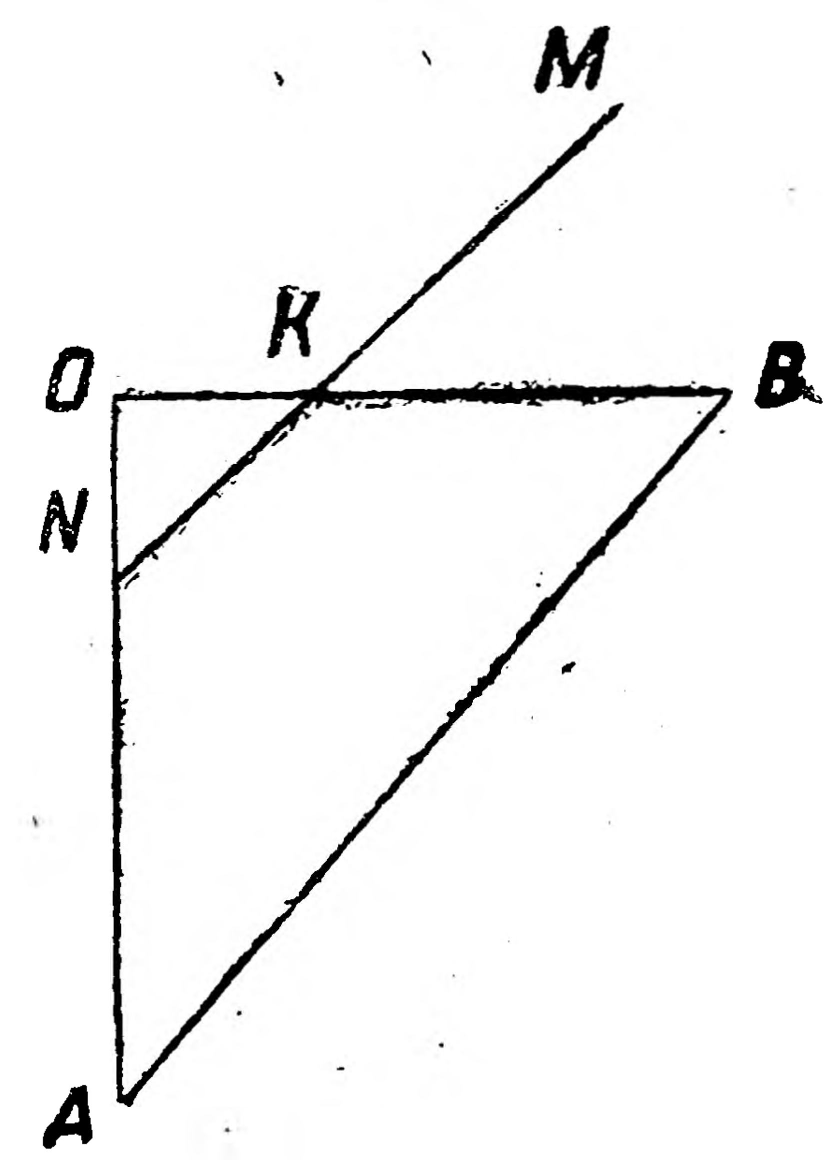
1. Точка равномерно движется со скоростью v по прямой $y = kx + n$ и в начальный момент (при $t = 0$) находится в точке с координатами x_0 и $y_0 = kx_0 + n$. Найти координаты движущейся точки для момента t и показать, что полученные уравнения $x = x_0 + vt \cos \alpha$, $y = y_0 + vt \sin \alpha$, где $\alpha = \operatorname{arc\,tg} k$, можно рассматривать как параметрические уравнения данной прямой.

2. Найти уравнение (сперва в декартовых, потом в полярных координатах) кривой, для всех точек которой произведение их расстояний от двух данных точек плоскости, удаленных друг от друга на расстоянии $2b$, есть величина постоянная, равная c^2. Кривая эта, называемая „овалом Кассини“, при $c = b$ переходит в лемнискату.

3. Найти уравнение кривой, по которой плоскость, составляющая угол α с осью круглого цилиндра, пересекает этот цилиндр.

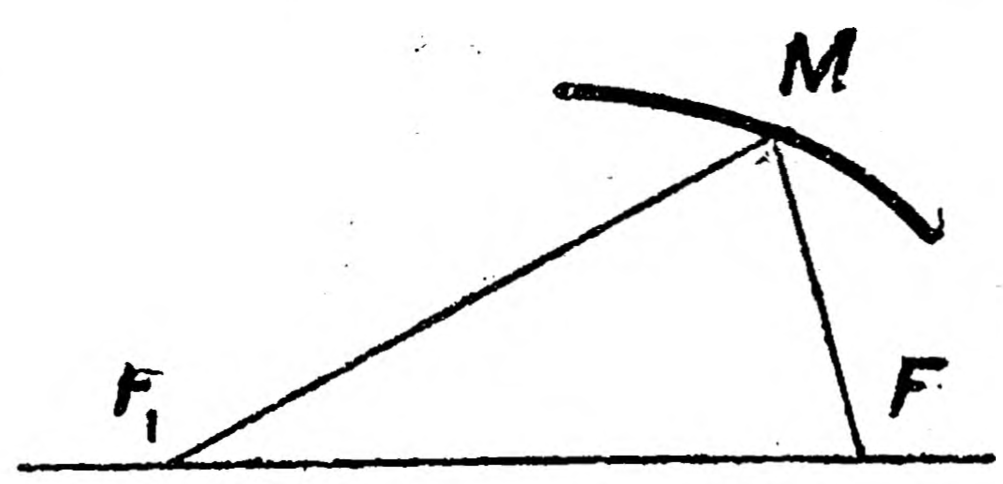
Указание. Использовать прием, посредством которого была решена задача 5 § 17.

4. Прямая NM движется так, что ее точки N и K перемещаются по сторонам прямого угла AOB (черт. 45). Найти уравнение кривой, по которой перемещается точка M прямой NM, если отрезки MK и MN равны соответственно b и a.

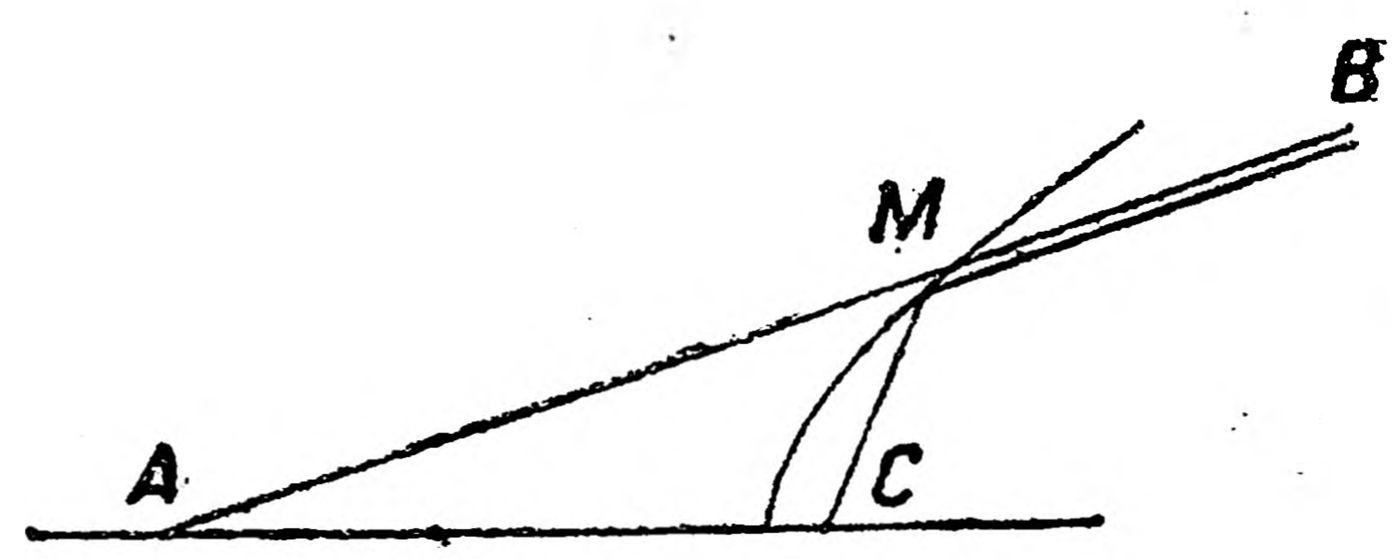


Черт. 45.

Указание. Поместить начало прямоугольных координат в точке O, ось X направить по стороне OB, ось Y по продолжению AO (вверх). Угол $BKM = t$ принять за параметр.

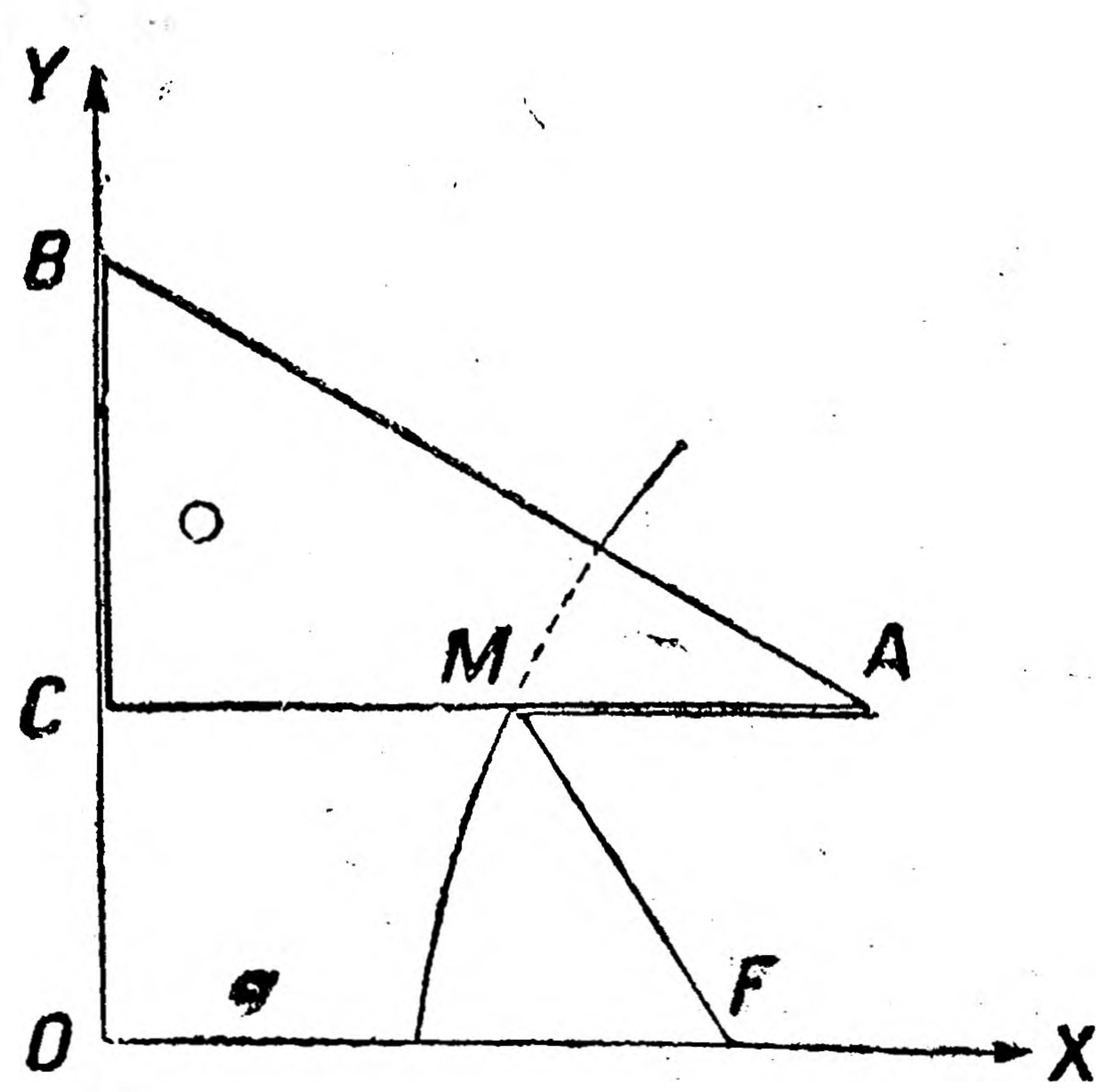


Черт. 46.



Черт. 47.

5. Нить длиною $2a$ миллиметров закреплена концами в точках F и F_1 (черт. 46). Карандаш M движется по плоскости, поддерживая все время нить в натянутом состоянии. Какую кривую опишет карандаш?

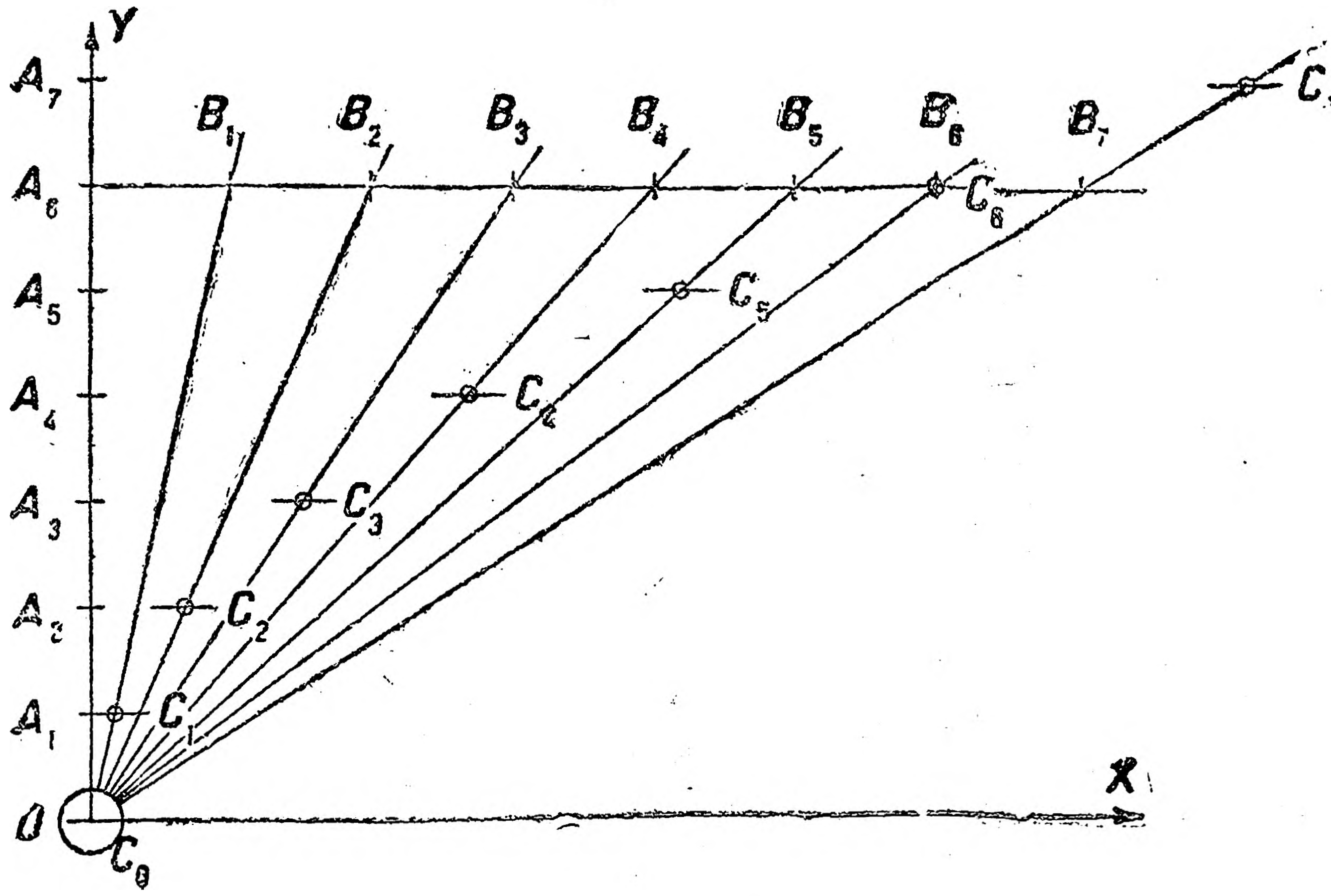


Черт. 48.

6. Имеется линейка длиной m миллиметров и нить длиной n миллиметров, причем $m - n = 2a$. Линейка может вращаться около одного из своих концов A; к другому ее концу B прикреплен конец нити (черт. 47). Начало нити закреплено неподвижно в точке C. Карандаш M прижимает нить к линейке, поддерживая нить все время в натянутом состоянии. Найти уравнение кривой, которую вычертит карандаш, если линейку вращать около точки A (расстояние $AC = 2c$).

Указание. Обратить внимание на то обстоятельство, что при изменении положения линейки отрезки AM и CM одновременно увеличиваются или уменьшаются на равные величины. За начало координат взять середину AC, ось X направить по прямой AC.

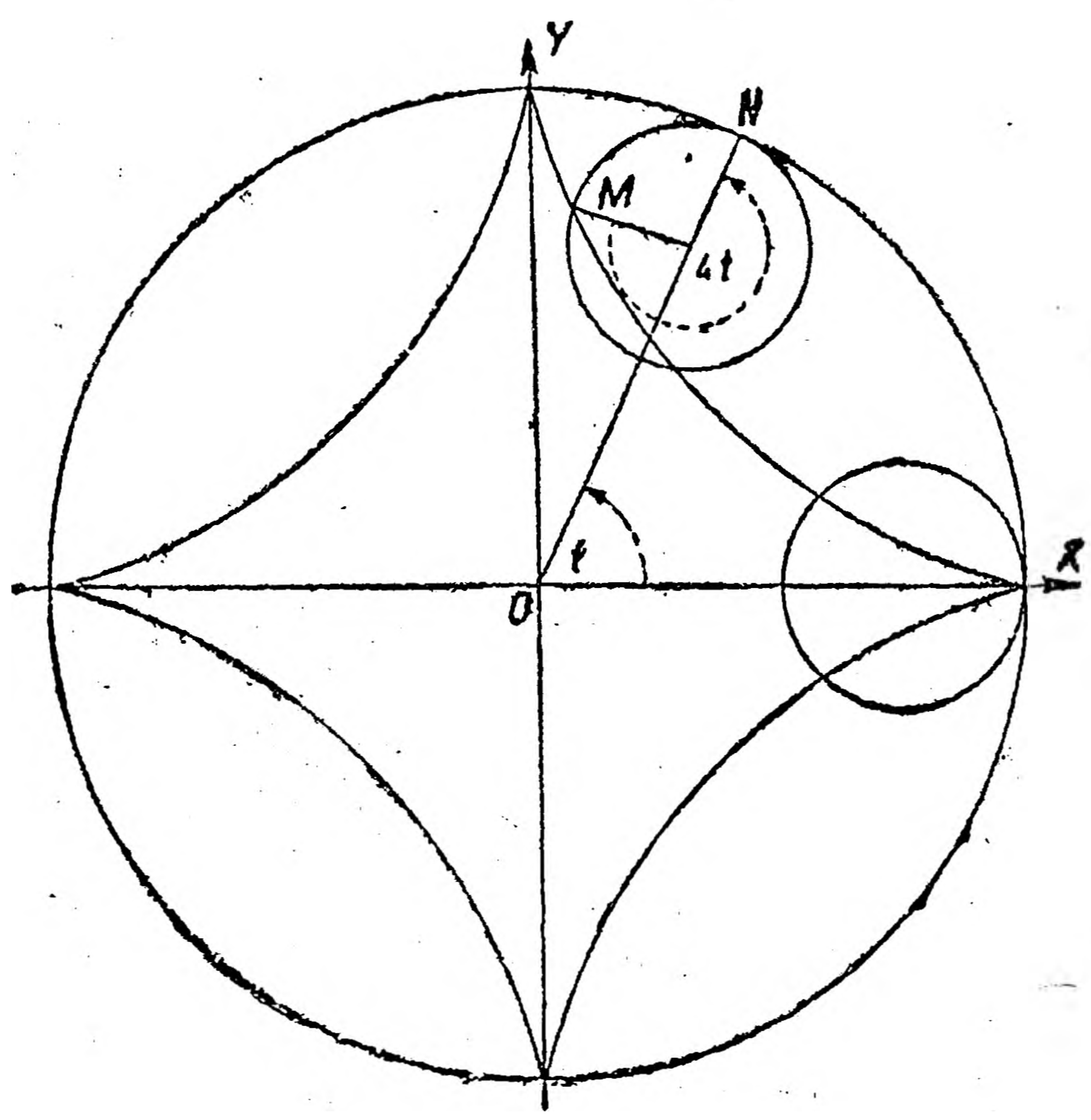
7. К вершине A прямоугольного треугольника ABC прикреплен конец нити длиной AC (черт. 48). Нить эта прижата к стороне AC карандашом M, другой ее конец укреплен в точке F. Найти уравнение кривой, которую опишет каран-



Черт. 49.

даш M, если, поддерживая нить в натянутом состоянии, двигать треугольник ABC так, чтобы его катет BC скользил по прямой OY.

8. На прямой OY (черт. 49) взят ряд точек O, A_1, A_2, A_3,... на равном расстоянии a друг от друга. На прямой A_6B_7, перпендикулярной к OY, взят другой ряд точек B_1, B_2, B_3,... тоже на равном расстоянии b друг от друга. Через точки A_i ($i = 1, 2, 3,...$) проведены параллели к OX, а точки B_i соединены с началом O. Показать, что все точки пересечения прямых, проходящих через точки A_i, B_i с одинаковыми нумерами, лежат на параболе $y^2 = 2px$, где $p = \frac{3b^2}{a}$.



Черт. 50.

9. Круг радиуса r катится без скольжения по кругу радиуса $4r$, касаясь его изнутри. Найти уравнение кривой („гипоциклоиды с 4 заострениями“), которую вычертит при этом карандаш, закрепленный в одной из точек окужности первого круга (чертеж 50).

Указание. Сперва вывести параметрические уравнения искомой кривой (применить проектирование)

$$x = r\,(3\cos t + \cos 3t) = 4r\cos^3 t,$$
$$y = r\,(3\sin t - \sin 3t) = 4r\sin^3 t,$$

а затем исключить t и получить обыкновенное ее уравнение $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4r)^{\frac{2}{3}}$.

§ 21. Некоторые общие заключения. Классификация линий по их уравнениям в декартовых координатах. 1°. В предшествующих параграфах мы имели целый ряд примеров составления уравнений линий, закон образования которых был каждый раз точно указан. Всякий раз нам удавалось составить уравнение, выражающее данную линию в том смысле, что координаты x, y каждой точки линии удовлетворяли этому уравнению, обращая его в тождество, в то время как координаты любой точки, не принадлежащей данной линии, уравнению не удовлетворяли. Тем самым мы устанавливали теснейшую взаимную связь между вопросами геометрическими, относящимися к свойствам линий, и вопросами аналитическими, относящимися к свойствам уравнений.

Чтобы формулировать относящиеся сюда общие предложения, необходимо понятие функции.

Всякое уравнение вида $f(x, y) = 0$, где буква f (так называемый функциональный символ) указывает, что над величинами x и y производятся какие-то определенные операции, устанавливает, вообще говоря, некоторую *функциональную зависимость* между переменными величинами x и y. Детальным изучением функциональной зависимости занимается математический анализ, здесь же достаточно лишь напомнить, как это выражение следует понимать. *Между переменными x и y существует функциональная зависимость, если каждому значению одной из них (аргументу) соответствует одно или несколько определенных частных значений другой (функции).* Например, уравнение $3x - 2y = 6$ показывает, что каждому значению аргумента x соответствует одно определенное значение функции $y = \frac{3}{2}x - 3$, и уравнение это определяет, следовательно, y как однозначную функцию от x, выражаемую в явном виде формулой $y = \frac{3}{2}x - 3$.

Уравнение $y^2 - 2xy + x = 0$ определяет y как двузначную функцию от x, выражаемую в явном виде формулой $y = x \pm \sqrt{x^2 - x}$. Уравнение $\sin y - x = 0$ определяет y как бесконечно-многозначную функцию от x: каждому значению x (от -1 до $+1$) соответствует бесчисленное множество значений дуги y, синус которой равен x.

Имея функциональную зависимость, выражаемую уравнением $f(x, y) = 0$, мы можем поставить вопрос о **геометрическом смысле** последнего. Рассматривая x и y как текущие (декартовы) координаты точки на плоскости, мы выделим на плоскости совокупность точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, и получим **геометрическое место точек, выражаемое уравнением** $f(x, y) = 0$. Любая точка этого геометрического места, и никакая другая, имеет координаты, удовлетворяющие этому уравнению.

Выделение геометрического места, т. е. выяснение геометрического смысла уравнения $f(x, y) = 0$, можно вести следующим образом. Взяв какое-нибудь частное значение x_0 одной из переменных, подставляем его в уравнение и решаем последнее, а именно $f(x_0, y) = 0$ относительно другого переменного y, причем получаем одно или несколько значений $y_0, y_0', y_0'', \ldots$. Отметив на плоскости точки $(x_0; y_0)$, $(x_0; y_0')$, $(x_0; y_0'')$, ..., берем другое частное значение $x = x_1$ и, повторяя операцию, получим еще несколько точек $(x_1; y_1)$, $(x_1; y_1')$, $(x_1; y_1'')$. . . . Повторяя эти операции, мы либо исчерпаем все точки рассматриваемого геометрического места (если число значений, какие может принимать переменная x, конечно), либо хоть и не исчерпаем его, но все же получим ряд точек, расположенных достаточно близко друг к другу, чтобы судить о характере геометрического места.

Вообще говоря, **геометрическое место точек, выражаемых уравнением $f(x, y)=0$, есть некоторая линия на плоскости.** Выше мы видели целый ряд примеров, подтверждающих это заключение: уравнение $x^2+y^2-r^2=0$, например, выражает круг радиуса r с центром в начале координат, уравнение $y=kx+n$, или, что то же, $y-kx-n=0$, выражает прямую с угловым коэфициентом k и начальной координатой n и т. д. Но возможны и исключения: геометрическое место точек, выражаемых уравнением $f(x, y)=0$, может сводиться к одной или нескольким отдельно расположенным точкам, может даже вовсе не существовать. Так уравнение $x^2+y^2=0$ выражает одну лишь точку, а именно начало координат, так как если мы возьмем пару каких угодно вещественных чисел, не равных одновременно нулю, то сумма их квадратов всегда будет положительна и равняться нулю не может. Уравнение $(x^2+y^2)[(x-1)^2+y^2]=0$ выражает пару точек, а именно точки (0; 0) и (1; 0). Уравнение $x^2+y^2+1=0$ не удовлетворяется координатами никакой точки плоскости, а потому вовсе лишено геометрического смысла [1]).

2°. Так обстоит дело с геометрическим истолкованием данного уравнения вида $f(x, y)=0$. Перейдем теперь к обратному вопросу: на плоскости дана некоторая линия и требуется выразить ее посредством уравнения вида $f(x, y)=0$, устанавливающего функциональную зависимость между координатами x и y любой ее точки. В предыдущих параграфах настоящей главы мы видели целый ряд примеров решения этой задачи в отношении многих кривых и прямых линий. Разрешима ли эта задача для любой линии? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо произвести более глубокий анализ самого понятия „линия", но мы им заниматься не будем. Заметим только, что задача составления уравнения произвольной линии, которую можно вычертить непрерывным движением карандаша по бумаге, всегда разрешима либо точно, либо приближенно, но с произвольно высокой степенью точности.

3°. Одну и ту же линию можно представить различными уравнениями. Так, два уравнения $x^2+y^2=r^2$ и $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ выражают один и тот же круг радиуса r с центром в начале координат. Ясно, что, выполняя над левой частью уравнения $f(x, y)=0$ какие угодно тожественные преобразования, мы получим в результате новое уравнение $f_1(x, y)=0$, *равносильное* прежнему, т. е. удовлетворяющееся координатами тех же точек, что и первое, и никаких других; уравнения $f(x, y)=0$ и $f_1(x, y)=0$ имеют в этом случае один и тот же геометрический смысл. Утверждать обратное нельзя: два уравнения $f(x, y)=0$ и $f_1(x, y)=0$ могут иметь один и тот же геометрический смысл, в то время как никакими тожественными преобразованиями нельзя привести $f(x, y)$ в $f_1(x, y)$; таковы, например, уравнения $x+y=0$ и $10^{x+y}-1=0$.

Заметим теорему: **умножая обе части уравнения на постоянное число C, не равное нулю, получаем новое уравнение, равносильное первому.**

---

[1]) Если не ограничиваться одними вещественными числами, как мы это делаем в настоящем курсе, а ввести в рассмотрение также комплексные числа вида $a+b\sqrt{-1}$, то и уравнения вроде указанного в тексте ($x^2+y^2+1=0$) получат определенный геометрический смысл. Изучением функциональной зависимости $f(x, y)=0$ при комплексных значениях переменных x и y занимается „Теория функций комплексного переменного".

Действительно, координаты точки, удовлетворяющей уравнению $f(x, y)=0$, удовлетворяют и уравнению $cf(x, y)=0$, где $c \neq 0$, и обратно.

Важно иметь в виду, что умножение обеих частей уравнения $f(x, y)=0$ на некоторое выражение $\varphi(x, y)$, зависящее от переменных x и y или хотя бы от одной из них, приводит к уравнению $f(x, y) \cdot \varphi(x, y)=0$, которому удовлетворяют не только координаты всех точек кривой $f(x, y)=0$, но и координаты всех точек кривой $\varphi(x, y)=0$. Уравнение $f(x, y) \cdot \varphi(x, y)=0$ выражает, таким образом, уже не первоначально взятую кривую, а новую „распадающуюся" кривую, т. е. совокупность двух кривых: первоначально взятой, выражаемой уравнением $f(x, y)=0$, и другой, выражаемой уравнением $\varphi(x, y)=0$. Так, умножая обе части уравнения $y=kx+n$ (или, что то же, уравнение $y-kx-n=0$) на x, получаем уравнение $xy=kx^2+nx$, выражающее уже не одну прямую, как уравнение $y=kx+n$, а пару прямых: прямую $y=kx+n$ и прямую $x=0$, т. е. ось Y. Действительно, уравнение $xy=kx^2+nx$ удовлетворяется, во-первых, координатами любой точки прямой $y=kx+n$ и, во-вторых, координатами любой точки оси Y.

Возведение обеих частей уравнения в степень и деление обеих частей на выражение, зависящее от x и y, тоже может изменить геометрический смысл уравнения. Так, уравнение $y=x$ выражает биссектрису координатного угла XOY, а уравнение $y^2=x^2$, или $y^2-x^2=0$, или $(y-x)(y+x)=0$ выражает совокупность обеих биссектрис координатных углов, так как удовлетворяется как координатами точек прямой $y-x=0$, или $y=x$, так и координатами точек прямой $y+x=0$, или $y=-x$. Уравнение $x^3+xy^2-xr^2=0$ выражает совокупность круга радиуса r с центром в начале координат и прямой — оси Y, а уравнение $x^2+y^2-r^2=0$, получаемое из него делением обеих частей на x, выражает уже только круг.

Последние замечания показывают, что, выполняя преобразования уравнения, надо внимательно относиться к таким действиям, как умножение и деление на выражение, зависящее от переменных, или возведение в степень (а следовательно, и извлечение корня), и учитывать изменения геометрического смысла уравнения, какие могут при этом произойти.

4°. Изучение различных линий является одной из задач геометрии. Элементарная геометрия рассматривает только две линии — прямую и круг. Прежде чем приступать к систематическому изучению других линий, надо их классифицировать, т. е. распределить все бесконечное разнообразие линий в ряд определенных классов, относя в каждый класс линии, имеющие ряд общих свойств. Классификация линий является первым серьезным шагом в деле их изучения. Но классификация должна быть основана на каком-нибудь существенном признаке, т. е. таком, изменение которого вызывает изменение в ряде других признаков. Классификацию линий можно с успехом основать на рассмотрении уравнений, эти линии выражающих, и нам необходимо ознакомиться с основами этой классификации.

Различают линии *алгебраические* и линии *трансцендентные*. К алгебраическим относятся те, уравнения которых заключают лишь знаки 5 основных действий, производимых над переменными x и y, а именно, сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень с натуральным показателем, к трансцендентным же те, в уравнениях которых переменные x и y подвергаются еще другим действиям, кроме указанных 5, причем эти другие действия нельзя устранить никакими преобразованиями. Круг, прямая, эллипс, парабола, гипербола представляют собой примеры алгебраических линий. Синусоида же, известная по курсу тригонометрии как график синуса, имеющая уравнением $y = \sin x$, и циклоида, выражаемая уравнением (2) § 18, принадлежат к числу трансцендентных кривых линий, так как тригонометрических функций, относящихся к текущим координатам x и y, устранить из этих уравнений невозможно. Если уравнение содержит корень с натуральным показателем, извлекаемый из выражения, зависящего от x или y, то этот корень всегда можно устранить надлежащим возведением в степень подобно тому, как мы это делали при выводе уравнений гиперболы и эллипса. Поэтому кривые, в уравнения которых кроме знаков 5 основных действий входит еще знак радикала (с натуральным показателем), являются кривыми алгебраическими.

Отметим, что знаки действий, производимых над постоянными числами, при классификации линий в расчет не принимаются. Так, линия, изображаемая уравнением $y = x \operatorname{tg} \alpha$, — алгебраическая, хотя в это уравнение входит знак тангенса: знак этот относится к постоянному углу α и не должен приниматься во внимание.

5°. Уравнение алгебраической линии всегда можно привести к такому виду, когда в левой части окажется многочлен, каждый член которого будет вида Ax^ky^n (A — какое угодно вещественное число, k и n — натуральные числа или нули), а в правой — нуль. Степенью каждого такого члена называется сумма показателей $k+n$, а степенью уравнения — степень члена с наибольшей степенью. В зависимости от степени уравнения алгебраические линии относятся к линиям того или другого *порядка.* Так, например, прямая линия есть линия I порядка, так как ее уравнение при любом расположении относительно координатных осей есть уравнение 1-й степени (см. § 14). Круг, парабола, гипербола, эллипс — линии II порядка, как показывают их простейшие уравнения, выведенные в §§ 13, 15—17. Уравнение

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \tag{1}$$

изображает некоторую линию III порядка („декартов лист"), а уравнение

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0 \tag{2}$$

— одну из линий IV порядка, а именно так называемую лемнискату.

В зависимости от того, как проведены координатные оси, одна и та же линия выражается различными уравнениями. Но формулы преобразования декартовых координат, рассмотренные в § 9, показывают, что никакое преобразование координат не может повысить степень изображающего линию уравнения, так как старые координаты точки x и y выражаются через новые координаты той же точки x' и y' всегда *линейно.* Точно так же никаким преобразованием координат нельзя понизить степень уравнения, так как иначе обратное преобразование преобразованного уравнения, приводящее его к прежнему виду, повышало бы его степень, что невозможно. Таким образом, порядок кривой остается одним и тем же, как бы мы ни располагали оси координат. Говорят, что порядок кривой есть ее *инвариант*, т. е. величина, остающаяся неизменной при всех преобразованиях декартовых координат (как прямоугольных в прямоугольные, так и прямоугольных в косоугольные). Так, установив, что прямая, параллельная оси X, выражается уравнением 1-й степени, мы могли бы сразу заключить, что прямая есть линия I порядка и выражается, следовательно, уравнением 1-й степени между двумя переменными x и y при любом положении относительно координатных осей, причем безразлично, в прямоугольной или косоугольной системе координат. Формула (4) § 14 и результат решения задачи 4 в конце этого же параграфа подтверждают это заключение.

6°. Разделение всех линий на алгебраические и трансцендентные и дальнейшее разделение алгебраических линий на линии разных порядков оказывается весьма глубоким: алгебраические линии одного и того же порядка при всем своем разнообразии имеют множество общих свойств, притом таких, каких нет у алгебраических линий другого порядка, не говоря уже о трансцендентных. Для примера рассмотрим несколько теорем.

Теорема I. **Всякая алгебраическая линия порядка n пересекается произвольной прямой не более как в n точках.**

Таким образом, линия I порядка (т. е. прямая) пересекается произвольной прямой не более как в одной точке, линия II порядка — не более как в двух точках и т. д. Между тем у кривых трансцендентных число точек пересечения произвольной прямой может быть бесконечно большим. Так синусоида $y = \sin x$ пересекает всякую прямую, параллельную оси x и отстоящую от этой оси на расстоянии, не большем 1, в бесчисленном множестве точек.

Доказательство теоремы 1 очень просто: координаты каждой точки пересечения должны удовлетворять и уравнению $f(x, y) = 0$ алгебраической кривой, и уравнению прямой $y = kx + n$. Исключая из этих двух уравнений y, получим алгебраическое уравнение $f(x, kx + n) = 0$ степени не свыше n. Но такое уравнение, как доказывается в курсе высшей алгебры, имеет не более n различных вещественных корней, а потому не может быть и более чем n точек пересечения.

Теорема II. **Если в уравнении алгебраической кривой свободный член (т. е. член, не зависящий ни от x ни от y) равен нулю, то кривая проходит через начало координат, и обратно: если алгебраическая кривая проходит через начало координат, то свободный член в ее уравнении равен нулю.**

Действительно, начало координат есть точка с координатами $x = 0$, $y = 0$, и при равенстве нулю свободного члена уравнение кривой удовлетворяется координатами этой точки. Обратно, если кривая проходит через точку (0; 0), то ее уравнение должно удовлетворяться при $x = 0$, $y = 0$, и мы приходим к условию $c = 0$, где c — свободный член.

Теорема III. **Если два уравнения выражают одну и ту же алгебраическую линию, то после всех упрощений** (освобождения от радикалов, от знаменателей, от скобок и т. д.) **они будут иметь в правых частях нули, а в левых — многочлены, различающиеся друг от друга лишь постоянным множителем в коэфициентах.**

Например, если два уравнения второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

и

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0$$

выражают одну и ту же линию, то имеют место соотношения $A_1 = Ac$, $B_1 = Bc$, $C_1 = Cc$, $D_1 = Dc$, $E_1 = Ec$, $F_1 = Fc$, где c — постоянное число.

Теорему эту мы примем без доказательства.

7°. Теперь мы в состоянии точно формулировать задачу I части нашего курса. Ее задачей является изучение алгебраических линий I и II порядка, т. е. линий, выражаемых относительно произвольной системы декартовых координат уравнениями вида:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где коэфициенты A, B, C, D, E, F могут принимать какие угодно (вещественные) значения.

В последнем уравнении можно было бы писать не $2B$, $2D$, $2E$, а просто B, D, E, но первая запись, как в свое время выяснится, имеет некоторые преимущества.

В начальном курсе аналитической геометрии ограничиваются изучением алгебраических линий I и II порядка, во-первых, потому, что эти линии имеют наибольшее значение как для дальнейшего изучения теоретических дисциплин, так и для изучения природы и техники и, во-вторых, потому, что изучение этих линий возможно на основе одной лишь элементарной алгебры.

Упражнения.

1. Указать, являются ли трансцендентными или алгебраическими линии, изображаемые приведенными ниже уравнениями:

$$y = a \operatorname{tg} x; \tag{I}$$
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0; \tag{II}$$
$$y = 10^x; \tag{III}$$
$$a^2 y = x^3; \tag{IV}$$
$$y - \sqrt{2px} = 0; \tag{V}$$
$$xy = k^2. \tag{VI}$$

2. Указать разницу в геометрическом смысле уравнений $y : x = k$ и $y = kx$, из которых второе получается умножением обеих частей первого на x.

3. Тот же вопрос для уравнений $xy = x^2$ и $y = x$, из которых второе получается делением обеих частей первого на x.

4. Тот же вопрос для уравнений $y = +\sqrt{2px}$ и $y^2 = 2px$, из которых второе получается возведением в квадрат обеих частей первого.

5. Тот же вопрос для уравнений $y^2 = (2x + 1)^2$ и $y = 2x + 1$, из которых второе получается извлечением квадратного корня из обеих частей первого.

6. Указать геометрический смысл уравнений:

$$x^2 : a^2 + y^2 : b^2 = 0; \tag{I}$$
$$x^2 : a^2 + y^2 : b^2 = -1; \tag{II}$$
$$(x^2 + y^2)\left[(x+1)^2 + (y-1)^2\right] = 0; \tag{III}$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14 = 0. \tag{IV}$$

7. Показать, что уравнение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ выражает круг тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$A = C \neq 0, \ B = 0, \ D^2 + E^2 - AF \geqslant 0$$

и что координаты центра $(a;\ b)$ и радиус круга определяются по формулам:

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{E}{A}, \quad r = \left| \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - AF}}{A} \right|.$$

Глава III.

ПРЯМАЯ.

§ 22. Исследование общего уравнения 1-й степени с двумя переменными. Как мы видели в § 14, всякая прямая, не параллельная оси Y, выражается уравнением

$$y = kx + n, \tag{1}$$

где k — ее *угловой коэфициент*, т. е. тангенс угла, составляемого прямой с положительным направлением оси X, а n — ее *начальная ордината*, т. е. ордината той точки прямой, в которой она пересекает ось Y. Всякая же прямая, параллельная оси Y, выражается уравнением

$$x = m, \tag{2}$$

где число m есть *начальная абсцисса* прямой, т. е. абсцисса той ее точки, где она пересекается с осью X. Три величины k, n, m могут принимать в зависимости от положения прямой всевозможные (вещественные) значения.

Из сказанного делаем следующее важное заключение (теорема I): *всякая прямая на плоскости выражается уравнением 1-й степени с двумя переменными* (уравнение $x = m$ можно считать тоже уравнением с двумя переменными, но с коэфициентом при y, равном 0).

Теперь поставим такую задачу: выяснить, какой геометрический смысл имеет уравнение 1-й степени (с двумя переменными) самого общего вида. Такое уравнение можно написать так:

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

причем коэфициенты A, B, C могут иметь какие угодно (вещественные) значения.

Естественно высказать предположение о справедливости утверждения, обратного теореме 1: *всякое уравнение 1-й степени с двумя переменными выражает прямую линию на плоскости.*

Чтобы выяснить, так ли это, возьмем уравнение (1) и решим его относительно y, что можно сделать всегда, если только $B \neq 0$. Получаем, что $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, или, заменяя $-\frac{A}{B}$ через k и $-\frac{C}{B}$ через n, $y = kx + n$, где k и n — некоторые вещественные числа, т. е. получаем уравнение (1), выражающее, как мы уже знаем (см. обратную теорему § 14), прямую с угловым коэфициентом $k = -\frac{A}{B}$ и начальной ординатой $n = -\frac{C}{B}$. Таким образом при $B \neq 0$ уравнение (3) действительно выражает прямую, притом прямую, не параллельную оси Y.

Далее надо исследовать случай $B = 0$, когда уравнение (3) сводится к уравнению $Ax + C = 0$. Если $A \neq 0$, то это последнее уравнение можно решить относительно x. Получаем $x = -\frac{C}{A}$, или $x = m$, где $m = -\frac{C}{A}$, т. е. уравнение (2), выражающее прямую, параллельную оси Y.

Итак, при $B=0$, $A\neq 0$ уравнение (3) выражает прямую, параллельную оси Y.

Если же не только $B=0$, но и $A=0$, положение становится совершенно иным. Действительно, если при этом $C\neq 0$, то уравнение (3), принимающее теперь вид

$$0\cdot x+0\cdot y+C=0,$$

не удовлетворяется ни при каких значениях координат x и y и не имеет, следовательно, никакого геометрического смысла. А если при $A=0$, $B=0$ еще и $C=0$, то уравнение (3) принимает вид

$$0\cdot x+0\cdot y+0=0$$

и удовлетворяется при любых значениях x и y, а потому выражает все точки плоскости.

Сводим полученные результаты в следующую маленькую таблицу:

Случай 1, $B\neq 0$. Уравнение (3) выражает прямую, не параллельную оси Y.

Случай 2, $B=0$, но $A\neq 0$. Уравнение (3) выражает прямую, параллельную оси Y.

Случай 3, $B=0$, $A=0$, но $C\neq 0$. Уравнение (3) не имеет никакого геометрического смысла.

Случай 4, $B=0$, $A=0$, $C=0$. Уравнение (3) выражает все точки плоскости.

Мы доказали справедливость теоремы II, обратной теореме I и утверждающей, что *всякое уравнение 1-й степени с двумя переменными, а именно уравнение вида* $Ax+By+C=0$, *где* A, B, C — *какие угодно вещественные постоянные, выражает прямую на плоскости, если только* A *и* B *не равны одновременно* 0.

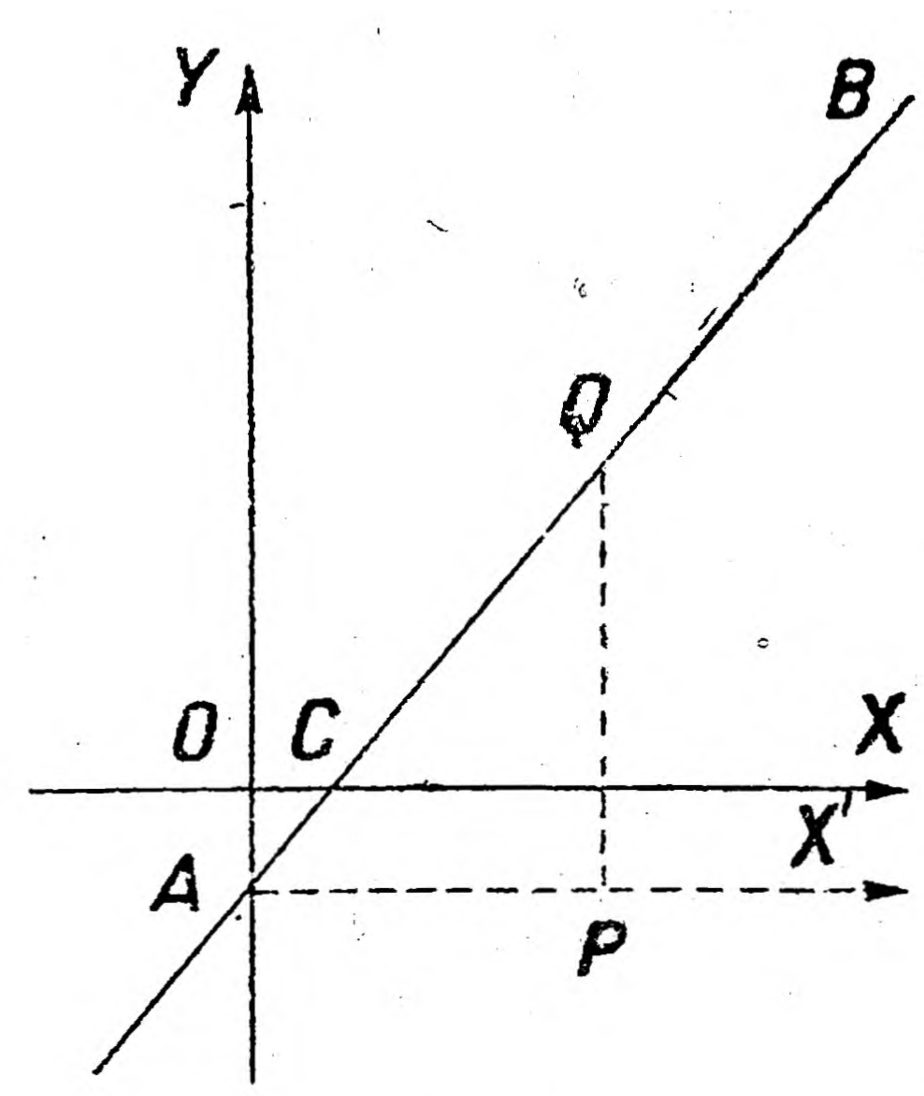
В дальнейшем, имея дело с уравнением (3), мы будем всегда предполагать, что коэфициенты A и B, или по крайней мере один из них, отличны от 0. Уравнение (3) носит название *общего уравнения* прямой, или уравнения прямой *в общем виде*, в то время как уравнения (1) и (2) называются *простейшими* уравнениями прямой. Уравнение (1) часто называется *уравнением прямой с угловым коэфициентом.*

Отмечаем одно существенное различие между простейшим и общим уравнением прямой. В то время как коэфициенты k и n уравнения (1), выражающего некоторую определенную прямую, имеют совершенно определенные числовые значения, коэфициенты A, B, C общего уравнения, выражающего ту же прямую, определяются лишь с точностью до постоянного множителя и могут быть заменены без изменения геометрического смысла уравнения любыми числами A_1, B_1, C_1, пропорциональными A, B, C. Другими словами, коэфициенты уравнения (3) можно умножать и делить на любое отличное от 0 число.

Дополним наше исследование уравнения (3) еще одним замечанием. При $C=0$, если при этом либо A, либо B не равно 0, уравнение (3) удовлетворяется координатами точки (0; 0), т. е. начала координат. Следовательно, при $C=0$ уравнение (3) выражает прямую, проходящую через начало координат. Справедливо и обратное заключение: если прямая проходит через начало координат, то в изображающем ее уравнении вида (3) C равно 0, так как это уравнение должно удовлетворяться при $x=0$, $y=0$.

Чтобы построить прямую, изображаемую уравнением (3), достаточно вычислить координаты двух каких-либо ее точек. Например, имея уравнение $4x - 3y - 9 = 0$, берем произвольно $x_1 = 0$, затем $x_2 = 12$, и находим по уравнению соответствующие значения $y_1 = -3$ и $y_2 = 13$. Отметив на чертеже точки $A(0; -3)$ и $B(12; 13)$, проводим через них прямую AB, координаты каждой точки которой удовлетворяют данному уравнению (черт. 51). Координаты же каждой точки, лежащей справа от прямой AB, обращают левую часть данного уравнения в положительное число, а лежащей слева — в отрицательное. Заметим, что следует избегать построения прямой по двум точкам, близким одна другой, так как тогда ничтожная погрешность в положении одной из точек может сильно сказаться на направлении прямой. Так, брать в данном примере $x_1 = 0$ и $y_2 = 0$, чему соответствуют значения $y_1 = -3$ и $x_2 = 2\frac{1}{4}$, не следует, так как через точки A и C провести прямую более или менее точно трудно (черт. 51).

Другой способ построения прямой по данному общему ее уравнению заключается в том, что уравнение приводят к простейшему виду, т. е. находят коэфициенты k и n уравнения (1), и проводят через точку $(0; n)$ прямую, составляющую с осью X угол, тангенс которого равен k. Для построения такого угла нет надобности прибегать ни к таблице тангенсов, ни к транспортиру. Достаточно построить прямоугольный треугольник с вершиной одного из острых углов в точке $(0; n)$ и с катетами, параллельными осям координат, причем отношение катета, параллельного оси Y, к катету, параллельному оси X, надо взять равным k. Так, чтобы построить прямую, изображаемую тем же уравнением $4x - 3y - 9 = 0$, приводим его к простейшему виду $y = \frac{4}{3}x - 3$, находим по начальной ординате -3 точку пересечения прямой с осью Y, а именно точку $A(0; -3)$, строим прямоугольный треугольник APQ с катетами $AP = 6$ и $PQ = 8$ и проводим искомую прямую через точки A и Q. Катеты 6 и 8 берутся с таким расчетом, чтобы отношение второго к первому равнялось угловому коэфициенту прямой (в данном случае 4:3). Можно было бы вместо чисел 6 и 8 взять числа 3 и 4, или 9 и 12, или 12 и 16 и т. д. Если k отрицательно, треугольник строится не выше, а ниже прямой AX', параллельной оси X.



Черт. 51.

Упражнения.

1. Указать геометрический смысл уравнения $Ax + By + C = 0$ при $A = C = 0$ и $B \neq 0$ и при $A \neq 0$, $B = C = 0$.

2. Тот же вопрос для случая $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

3. Построить, применяя оба рассмотренных выше способа, прямые, изображаемые уравнениями $x + 2y + 1 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$, $2x + 5 = 0$, $2y - 7 = 0$.

§ 23. Уравнение прямой в отрезках на осях и уравнение прямой в нормальном виде. Если известны координаты $(a; 0)$ и $(0; b)$ точек A и B, в которых прямая пересекает координатные оси, то уравнение прямой можно написать в особой, очень легко запоминаемой форме. Будем при этом предполагать, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Так как прямая при таком предположении не параллельна оси Y, то ее уравнение можно написать в виде $y = kx + n$, где k и n — неизвестные, подлежащие определению по данным a и b. Точки A и B лежат на прямой, а потому их координаты удовлетворяют ее уравнению. Производя подстановку (сперва $x = a$, $y = 0$, потом $x = 0$, $y = b$), получаем пару уравнений

$$0 = ka + n, \quad b = k \cdot 0 + n,$$

из которых и находим неизвестные $n = b$ и $k = -\frac{b}{a}$. Подставляем эти значения n и k в уравнение прямой и получаем искомое уравнение $y = -\frac{b}{a}x + b$, которое после перенесения одного члена налево и деления на b принимает окончательный вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{1}$$

Это и есть так называемое *уравнение прямой в отрезках на осях*. Здесь a и b отличны от 0, а потому уравнение (1) может выражать лишь прямые, не проходящие через начало координат и не параллельные координатным осям („предельные" случаи уравнения прямой в отрезках на осях, получающиеся при неограниченном возрастании a и b, рассмотрены в § 31).

Уравнение в отрезках на осях употребляется довольно часто, так как оно очень легко составляется. Если, например, требуется составить уравнение прямой, отсекающей от координатных осей отрезки $a = -10$ и $b = 15$, т. е. пересекающей ось X в точке $(-10;\ 0)$ и ось Y в точке $(0;\ 15)$, то по уравнению (1) сразу пишем

$$\frac{x}{-10} + \frac{y}{15} = 1,$$

откуда в случае надобности легко получить и общее уравнение данной прямой

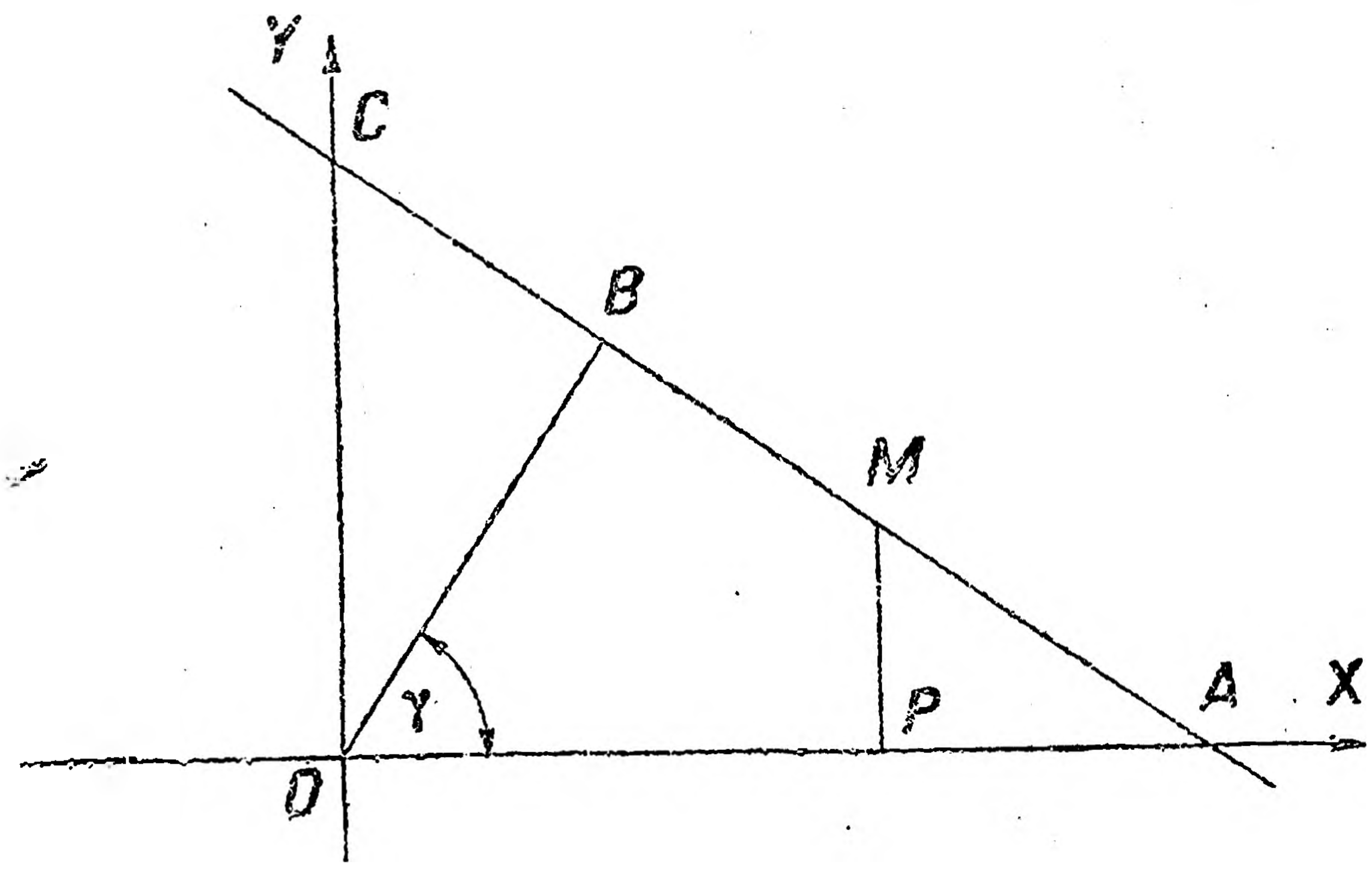
$$3x - 2y + 30 = 0.$$

Обратно, имея уравнение в отрезках на осях с определенными числовыми значениями a и b, можем легко построить соответствующую прямую, отмечая на чертеже точки $(a;\ 0)$ и $(0;\ b)$ и проводя через них прямую.

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ выражает любую прямую плоскости без всякого исключения, но имеет то неудобство, что координаты A, B и C содержат неопределенный множитель и не допускают простого геометрического истолкования. Уравнения с угловым коэфициентом и в отрезках на осях свободны от последнего недостатка, но выражают не всякую прямую плоскости: уравнение с угловым коэфициентом непригодно для выражения прямых, параллельных оси Y; с уравнением в отрезках на осях дело обстоит, как мы видели только что, еще хуже. Немецкий математик Гессе, живший в середине XIX в., предложил новую форму уравнения прямой, получившую название *уравнения прямой в нормальном виде*, свободную от обоих указанных недостатков. Для вывода этого уравнения надо решить следующую задачу:

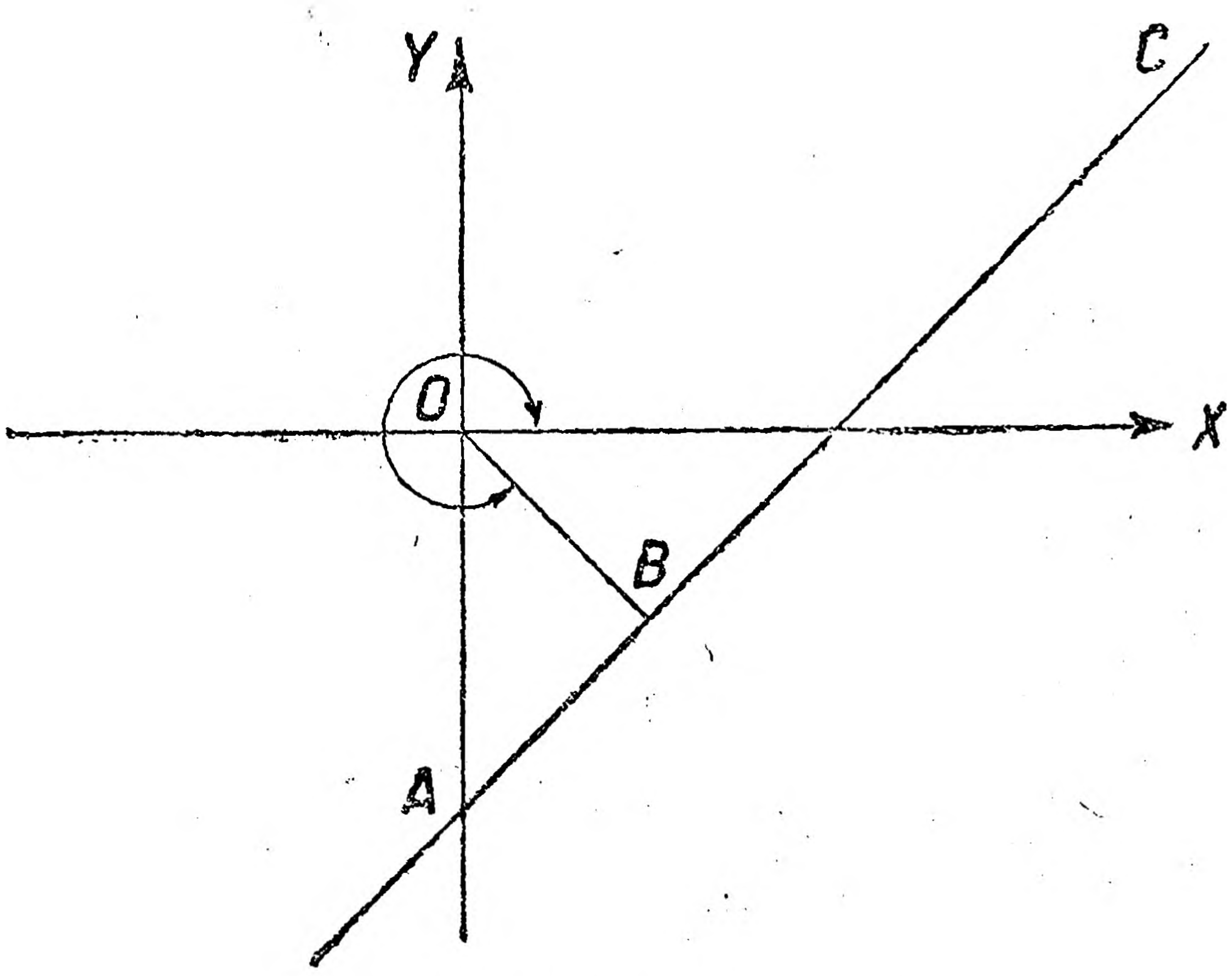
Найти уравнение прямой, зная, что перпендикуляр, опущенный на нее из начала координат, имеет длину $p (p \geqq 0)$ и составляет с осью X угол γ $(0 \leqq \gamma < 2\pi)$.

Эти две величины p и γ характеризуют положение любой прямой на плоскости. Для прямой, параллельной оси Y, $\gamma = 0$ (если прямая расположена справа от начала) или $\gamma = \pi$ (если слева). Для прямой, параллельной оси X, $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ (если она проходит выше начала координат) или $\gamma = \frac{3}{2}\pi$ (если — ниже). Прямая, проходящая через начало координат, имеет $p = 0$, а для угла γ можно в этом случае брать одно из двух значений, отличающихся друг от друга на π.



Черт. 52.

На чертеже 52 изображен случай, когда $0 < \gamma < \frac{1}{2}\pi$, но приводимое ниже доказательство основано не на этом чертеже, а на теореме о проекции замыкающей, верной при любом расположении звеньев (см. § 6), а потому носит вполне общий характер.



Черт. 53.

Берем на данной прямой AB подвижную точку M с координатами $OP = x$ и $PM = y$ и проектируем ломаную $OPMB$ на прямую $OB \perp AC$; имеем

$$\text{пр. } OP + \text{пр. } PM + \text{пр. } MB = \text{пр. } OB\,^{1)},$$

или

$$x \cos \gamma + y \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \gamma\right) + MB \cos \frac{1}{2}\pi = p \cos 0,$$

откуда

$$x \cos \gamma + y \sin \gamma - p = 0. \quad (2)$$

Это и есть уравнение прямой в нормальном виде.

Знaя значения p и γ, сразу можем написать уравнение прямой в нормальном виде, а затем, в случае надобности, перейти к общему ее уравнению. Так, уравнение прямой AC, изображенной на чертеже 53, где $\gamma = 315°$, $p = 15$, можно написать в нормальном виде:

$$x \cos 315° + y \sin 315° - 15 = 0,$$

[1]) Буквы „пр." представляют собой сокращенное обозначение слова „проекция".

или

$$x\frac{\sqrt{2}}{2}-y\frac{\sqrt{2}}{2}-15=0.$$

После деления обеих частей на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ получаем уравнение той же прямой в общем виде

$$x-y-15\sqrt{2}=0,$$

а после решения относительно y — в простейшем виде (с угловым коэфициентом)

$$y=x-15\sqrt{2}.$$

Уравнение в отрезках на осях будет в данном случае таково

$$\frac{x}{15\sqrt{2}}+\frac{y}{-15\sqrt{2}}=1.$$

Переход от уравнения прямой в нормальном виде к ее уравнению в общем виде, а следовательно, и к уравнениям с угловым коэфициентом и в отрезках на осях не представляет, таким образом, никаких затруднений.

Решим теперь обратную задачу:

Имея общее уравнение некоторой прямой в общем виде $Ax+By+C=0$, найти уравнение этой же прямой в нормальном виде $x\cos\gamma+y\sin\gamma-p=0$.

Дело сводится к вычислению неизвестных постоянных γ и p по данным значениям A, B, C. Так как оба уравнения должны выражать одну и ту же линию, то согласно теореме конца § 21 заключаем, что они отличаются друг от друга лишь некоторым постоянным и неравным 0 множителем N, на который надо умножить все коэфициенты уравнения в общем виде, чтобы получить соответствующие коэфициенты уравнения в нормальном виде. Это соображение дает нам три уравнения

$$AN=\cos\gamma,\quad BN=\sin\gamma,\quad CN=-p, \tag{3}$$

из которых легко определяются три неизвестных величины: γ, p, N. Действительно, возводя первые два уравнения в квадрат (почленно) и складывая их, исключим γ и найдем N:

$$A^2N^2+B^2N^2=\cos^2\gamma+\sin^2\gamma,\quad N^2(A^2+B^2)=1.$$

$$N=1:\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}, \tag{4}$$

причем буквой ε обозначено одно из двух чисел $+1$ и -1 (взамен двойного знака, появляющегося при извлечении квадратного корня). Выбор значения ε сделаем дальше.

Узнав N, легко находим $\sin\gamma$, $\cos\gamma$ и p:

$$\sin\gamma=\frac{B}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}},\qquad \cos\gamma=\frac{A}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}},\qquad p=-\frac{C}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{5}$$

Так как число p не может быть отрицательным, то надо брать $\varepsilon=+1$ при $C<0$ и $\varepsilon=-1$ при $C>0$. При $C=0$ знак ε безразличен: данная прямая проходит через начало координат, перпендикуляр p восставляется с любой стороны прямой. Выбрав значение ε, определяем сперва четверть, в какой находится γ, по знакам $\sin\gamma$ и

$\cos\gamma$, а затем самый угол γ по таблице (угол определяется по тангенсу точнее, чем по синусу или косинусу, а потому лучше разделить первое из уравнений (5) почленно на второе и находить γ по формуле $\operatorname{tg}\gamma=\frac{B}{A}$).

Рассмотренное преобразование возможно во всех случаях (когда данное уравнение $Ax+By+C=0$ выражает прямую) без исключения. Действительно, как мы видели в § 22, в уравнении прямой A и B никогда не обращаются в 0 одновременно, а потому в рассмотренном преобразовании деление на нуль встретиться не может, так как $\sqrt{A^2+B^2}$ всегда больше 0. По этой же причине всегда возможно и извлечение квадратного корня. Разыскание угла γ, удовлетворяющего первым двум из уравнений (5), тоже всегда возможно, так как

$$|B|\leqq|\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}|,\qquad |A|\leqq|\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}|,$$

и правые их части не превосходят 1 по абсолютному значению.

Для примера возьмем прямую, изображаемую уравнением $3x-4y+45=0$, и найдем ее уравнение в нормальном виде. „Нормирующий" множитель N равен здесь согласно формуле (4)

$1:(-1\cdot\sqrt{3^2+4^2})=-0{,}2$ (берем $\varepsilon=-1$, так как $C=+45>0$).

Формулы (5) дают

$$\sin\gamma=(-4)\cdot(-0{,}2)=0{,}8,\quad \cos\gamma=3\cdot(-0{,}2)=-0{,}6,$$
$$p=-45\cdot(-0{,}2)=+9.$$

Угол, имеющий положительный синус и отрицательный косинус, есть угол второй четверти. Полагая $\gamma=180^\circ-\gamma_1$, где угол γ_1 — острый, берем $\operatorname{tg}\gamma=\frac{B}{A}=\frac{-4}{3}=-1{,}3333$ и находим, что $\operatorname{tg}\gamma_1=\operatorname{tg}(180^\circ-\gamma)=-\operatorname{tg}\gamma=+1{,}3333$, откуда по таблице $\gamma_1=53^\circ8'$, а потому

$$\gamma=179^\circ60'-53^\circ8'=126^\circ52'.$$

Итак, искомое уравнение прямой в нормальном виде есть

$$x\cos 126^\circ52'+y\sin 126^\circ52'-9=0.$$

Построение прямой по данному ее уравнению в нормальном виде сводится к построению перпендикуляра p, наклоненного к оси X под углом γ и проходящего через начало.

Итак, мы располагаем четырьмя уравнениями прямой, а именно:

1) *уравнением в общем виде* $Ax+By+C=0$, выражающим любую прямую плоскости без исключения, причем A, B, C принимают произвольные вещественные значения, но A и B неравны одновременно 0;

2) *уравнением простейшим* (с угловым коэфициентом) $y=kx+n$, выражающим любую прямую плоскости, кроме прямых, параллельных оси Y, причем k и n принимают произвольные вещественные значения; в случае параллельности оси Y уравнение с угловым коэфициентом заменяется уравнением $x=m$;

3) *уравнением в отрезках на осях* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, выражающим любую прямую плоскости, кроме прямых, параллельных одной из осей, и

прямых, проходящих через начало координат; буквы a и b могут принимать любые вещественные значения, кроме значений $a=0$ и $b=0$;

4) *уравнением в нормальном виде* $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, выражающим любую прямую плоскости без исключения, причем $p\geqq 0$, а α можно брать в интервале от $\alpha=0$ до $\alpha=2\pi$.

Чаще всего на практике употребляется уравнение с угловым коэфициентом, но в некоторых случаях более удобными оказываются другие.

Упражнения.

1. Составить уравнения прямых, отсекающих от координатных осей отрезки $+2$ и $+3$; $+2$ и -3; -2 и $+3$; -2 и -3. Построить эти прямые.

2. Составить уравнения прямых, отстоящих от начала координат на расстоянии 20 *мм*, если перпендикуляры, опущенные на них из начала координат, составляют с осью X углы 30°, 120°, 210°, 330°.

3. Прямая дана уравнением $12x+5y+26=0$. Найти ее уравнения остальных трех видов. По каждому из 4 уравнений построить прямую и убедиться, что каждый раз получается одна и та же прямая.

4. Тот же вопрос для прямых, заданных уравнениями $2x-4y-5=0$, $x+8=0$, $2y-7=0{,}5$.

5. Вывести нормальное уравнение прямой, исходя из простейшего ее уравнения $y=kx+n$, где $k=\operatorname{tg}\alpha$, а для случая параллельности с осью Y — из уравнения $x=m$.

6. Вывести нормальное уравнение прямой, не проходящей через начало координат, выразив уравнением равенство расстояний от подвижной точки на прямой до начала и до точки, симметричной с началом относительно данной прямой.

7. Показать вывод уравнения прямой в отрезках на осях из ее уравнения в нормальном виде.

§ 24. Пересечение двух прямых.

Ознакомившись с 4 различными видами уравнения прямой, используем их для решения ряда задач. Начнем со следующей: *даны две прямые их уравнениями в общем виде* $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$; *найти координаты* x_0 *и* y_0 *точки пересечения этих прямых.*

Так как точка $(x_0;\ y_0)$ лежит на каждой из двух данных прямых, то ее координаты удовлетворяют обоим данным уравнениям. Для решения задачи надо решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_0 и y_0:

$$Ax_0+By_0+C=0,\quad A_1x_0+B_1y_0+C_1=0, \tag{1}$$

причем в каждой паре коэфициентов A и B, A_1 и B_1 по крайней мере один отличен от 0.

Поступая, как было указано в § 12, получаем пару уравнений

$$x_0\Delta=\Delta_x,\quad y_0\Delta=\Delta_y, \tag{2}$$

удовлетворяющихся при тех же значениях неизвестных, что и система (1), но более простого вида. Здесь величины Δ, Δ_x и Δ_y являются определителями второго порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix}A, & B\\ A_1, & B_1\end{vmatrix}=AB_1-BA_1,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}-C, & B\\ -C_1, & B_1\end{vmatrix}=BC_1-B_1C,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}A, & -C\\ A_1, & -C_1\end{vmatrix}=A_1C-AC_1.$$

Переход от системы (1) к системе (2) выполним всегда, так как требует лишь умножений и сложений.

Для получения искомых значений x_0 и y_0 нужно выполнить деление на Δ, что возможно, если $\Delta \neq 0$. Предположив это, находим искомые координаты точки пересечения прямых:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{3}$$

Таким образом при $\Delta \neq 0$ прямые имеют одну единственную точку пересечения, координаты которой определяются формулами (3).

Если же $\Delta = 0$, то система (2) принимает вид $0 \cdot x_0 = \Delta_x$ и $0 \cdot y_0 = \Delta_y$. Здесь надо различать два случая: либо $\Delta_x = \Delta_y = 0$ (1-й случай), либо эти два последних определителя или, по крайней мере, один из них отличен от 0 (2-й случай).

В 1-м случае, когда $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = 0$, система (2) принимает вид $x_0 \cdot 0 = 0$ и $y_0 \cdot 0 = 0$ и удовлетворяется при любых значениях x_0 и y_0. Таким образом все точки одной из данных прямых являются в то же время и точками пересечения, т. е. принадлежат и второй прямой, и обратно. Это возможно тогда и только тогда, когда обе прямые совпадают. Действительно, из условий $\Delta = AB_1 - BA_1 = 0$, $\Delta_x = BC_1 - CB_1 = 0$, $\Delta_y = CA_1 - AC_1 = 0$, предполагая, что $A \neq 0$, легко находим $B_1 = \frac{BA_1}{A}$, $C_1 = \frac{CA_1}{A}$ и видим, что второе из уравнений (1) может быть написано в виде $A_1 x + \frac{BA_1}{A} y + \frac{CA_1}{A} = 0$ и отличается от первого уравнения лишь постоянным множителем $A_1 : A$. Если же $A = 0$, то $B \neq 0$ (в уравнении прямой из двух коэфициентов A и B, по крайней мере, один отличен от 0). Из условия $\Delta = 0$ получаем $A_1 = \frac{AB_1}{B}$, из условия $\Delta_x = 0$ получаем $C_1 = \frac{CB_1}{B}$ и пишем второе из уравнений (1) в виде $\frac{AB_1}{B} x + B_1 y + \frac{CB_1}{B} = 0$; таким образом второе уравнение отличается от первого лишь постоянным множителем.

Переходим ко 2-му случаю, когда $\Delta = 0$ и, по крайней мере, один из определителей Δ_x и Δ_y, например Δ_x, отличен от 0. Первому из уравнений (2), принимающему теперь вид $0 \cdot x_0 = \Delta_x \neq 0$, удовлетворить нельзя ни при каком значении x_0: что бы мы ни брали вместо x_0, произведение $0 \cdot x$ всегда равно 0 и не может равняться числу Δ_x, отличному от 0. Отсюда заключаем, что нельзя удовлетворить и системе (1). Следовательно, прямые не имеют ни одной общей точки, а так как они расположены в одной плоскости, то они параллельны.

Итак, мы приходим к следующим заключениям:

Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ имеют единственную общую точку (точку пересечения) тогда и только тогда, когда определитель системы $\Delta = AB_1 - BA_1$ отличен от 0; координаты этой точки выражаются формулами $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, где $\Delta_x = BC_1 - CB_1$ и $\Delta_y = CA_1 - AC_1$.

Прямые совпадают, если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. Общих точек бесчисленное множество.

Прямые параллельны, если $\Delta = 0$ и, по крайней мере, одно из чисел Δ_x и Δ_y отлично от нуля. Общих точек нет.

Упражнения.

1. Даны 4 прямых: $2x - 3y - 12 = 0$ (I), $4x + 5y - 20 = 0$ (II), $4x - 6y - 9 = 0$ (III), $x - 1{,}5y = 6$ (IV). Найти сперва графическим, потом аналитическим способом точки пересечения прямых (I) и (II), (I) и (III), (II) и (IV).

2. При автогенной сварке стоимость K 1 *пог. м* шва при толщине листа в s миллиметров вычисляется в копейках по формулам $K = 1{,}5 + 0{,}095\,s$, когда сварка производится на ацетилене и кислороде, и $K = 4 + 0{,}06\,s$ — при применении водяного газа. При какой толщине шва стоимость сварки оказывается в обоих случаях одинаковой? При какой толщине шва первый способ дешевле второго и обратно? Задачу решить графическим способом.

3. Выяснить, проходят ли через одну общую точку прямые $x + 2y - 5 = 0$; $3x - y + 6 = 0$; $5x + 3y - 4 = 0$.

Указание. Найти точку пересечения двух из трех данных прямых и подставить ее координаты в уравнение третьей прямой.

4. Доказать теорему: если три прямых $Ax + By + C = 0$, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ проходят через одну общую точку, то определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, & B, & C, \\ A_1, & B_1, & C_1, \\ A_2, & B_2, & C_2, \end{vmatrix} \text{ равен } 0.$$

Указание. Действовать, как в предшествующей задаче, и воспользоваться разложением определителя Δ по элементам третьей строки.

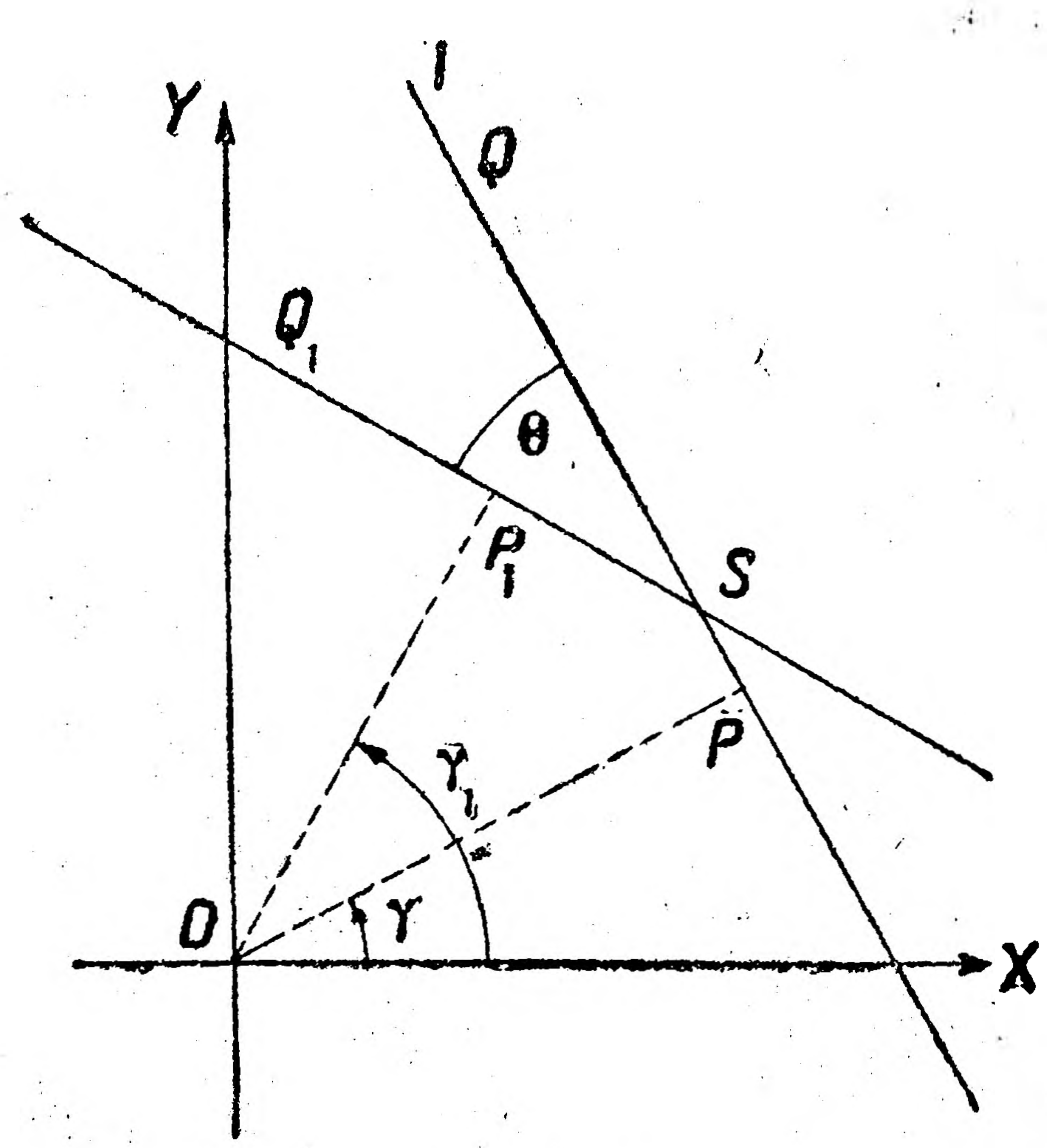
5. Доказать теорему, обратную предыдущей: если $\Delta = 0$, то либо три данных прямых проходят через одну общую точку, либо все три параллельны, либо две из них совпадают.

6. Решить задачу § 24 еще раз, исходя не из уравнений общего вида, а из простейших уравнений прямой (надо различать три случая: 1) обе данных прямых не параллельны оси Y; 2) одна из них ей параллельна; 3) обе ей параллельны).

7. Решить ту же задачу еще раз, исходя из уравнений данных прямых в нормальном виде:

$$x\cos\gamma + y\sin\gamma - p = 0, \quad x\cos\gamma_1 + y\sin\gamma_1 - p_1 = 0.$$

§ 25. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Определить углы между двумя прямыми, заданными их уравнениями в нормальном виде, очень легко. Действительно, угол между перпендикулярами, опущенными на данные прямые из начала координат, равен одному из углов, образуемых при пересечении этих прямых. Так, на чертеже 54 $\angle POP_1 = \angle QSQ_1$. Но $\angle POP_1 =$ углу $\gamma_1 - \gamma$. Таким образом, один из углов, образуемых при пересечении двух прямых, данных уравнениями $x\cos\gamma + y\sin\gamma - p = 0$, $x\cos\gamma_1 + y\sin\gamma_1 - p_1 = 0$, равен $\theta = \gamma_1 - \gamma$, другой $\theta_1 = \pi - (\gamma_1 - \gamma)$.



Черт. 54.

Если прямые заданы их уравнениями в общем виде, а именно

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

то сперва надо перейти к уравнениям в нормальном виде, как было показано в § 23, а затем найти θ.

Выведем формулы, выражающие $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{tg}\theta$ в зависимости от коэфициентов данных уравнений. Согласно формулам (5) § 23 имеем для первой прямой $\sin\gamma = BN$, $\cos\gamma = AN$, где $N = 1 : \varepsilon\sqrt{A^2+B^2}$, и для второй $\sin\gamma_1 = B_1N_1$, $\cos\gamma_1 = A_1N_1$, $N_1 = 1 : \varepsilon\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}$. Но $\sin\theta = \sin(\gamma_1 - \gamma) = \sin\gamma_1 \cos\gamma - \cos\gamma_1 \sin\gamma = NN_1(AB_1 - A_1B)$, $\cos\theta = \cos(\gamma_1 - \gamma) = NN_1(AA_1 + BB_1)$. Значение $\operatorname{tg}\theta$ получаем почленным делением выражения для $\sin\theta$ на выражение для $\cos\theta$. Итак:

$$\sin\theta = NN_1(AB_1 - A_1B),\ \cos\theta = NN_1(AA_1 + BB_1),\ \operatorname{tg}\theta = \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1}, \quad (2)$$

где $N = 1 : (\varepsilon\sqrt{A^2+B^2})$, $N_1 = 1 : (\varepsilon\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2})$, а ε означает $+1$ или -1, смотря по тому, будет ли $C <$ или > 1 (ε_1 определяется точно так же в зависимости от C_1).

На практике часто пользуются выражением для $\operatorname{tg}\theta$ в зависимости от угловых коэфициентов уравнений прямых, данных в простейшем виде:

$$y = kx + n, \quad y = k_1x + n_1, \quad (3)$$

причем обе прямые предполагаются, таким образом, непараллельными оси Y. Перенеся в уравнениях (3) все члены налево, рассматриваем их как уравнения в общем виде и берем $A = -k$, $B = 1$, $C = -n$, $A_1 = -k_1$, $B_1 = 1$, $C_1 = -n_1$. Последняя из формул (2) тогда дает

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_1 - k}{1 + kk_1}. \quad (4)$$

Применяя эту формулу, надо иметь в виду, что пользоваться ею можно лишь в тех случаях, когда обе прямые не параллельны оси Y.

Формулы (2) и (4) позволяют легко решить вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять коэфициенты уравнений, чтобы выражаемые ими прямые были взаимно параллельны или перпендикулярны. Если прямые параллельны, то параллельны и опущенные на них перпендикуляры из начала координат, а потому $\varphi_1 = \varphi$ и $\theta = \varphi_1 - \varphi = 0$. Первая из формул (2) показывает, что в этом случае $NN_1(AB_1 - BA_1) = 0$. Нормирующие множители N и N_1 в 0 никогда не обращаются, а потому $AB_1 - BA_1 = 0$.

Итак, *если прямые* (1) *параллельны, то разность* $AB_1 - BA_1$, *обозначенная в § 24 буквой* Δ, *равна 0* (теорема, обратная той, которая была доказана при решении задачи § 24: если $\Delta = 0$ и, по крайней мере, одно из выражений Δ_x или Δ_y отлично от 0, то прямые параллельны). Подобным же образом, пользуясь второй из формул (2), находим, что *если прямые* (I) *перпендикулярны, то сумма* $AA_1 + BB_1 = 0$. Справедливо и обратное предложение: *если* $AA_1 + BB_1 = 0$, *то прямые* (I) *перпендикулярны друг другу,* так как в этом случае согласно второй из формул (2) $\cos\theta = 0$.

Для практических предложений особо важное значение имеют условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных уравнениями (3). Переписывая эти уравнения так, как мы делали это выше, и применяя к ним только что доказанные предложения, заключаем, что *прямые* (3) *параллельны друг другу тогда и только тогда, когда* $k = k_1$, *а перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда* $kk_1 = -1$.

Упражнения.

1. Найти графическим и аналитическим способом углы между прямыми, рассмотренными в задаче 1 § 24.

2. Через начало координат провести две прямые, из которых одна параллельна, другая перпендикулярна прямой $x+2y-1=0$.

3. Среди прямых, выраженных уравнениями $y=-1{,}25x+5$, $y=0{,}8\,x-2$, $4x+5y+30=0$, $4x-5y-30=0$, указать взаимно-параллельные и взаимно-перпендикулярные.

4. Показать, что при соблюдении условия $AA_1+BB_1=0$ первая из формул (2) дает $\sin\Theta=\pm 1$.

5. Вывести формулу (4) независимо от формул (2), основываясь на чертеже 55 и применяя теорему о внешнем угле треугольника ($k=\operatorname{tg}\alpha$, $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$).

6. Вывести условия параллельности и перпендикулярности для прямых, заданных уравнениями (3), из формулы (4).

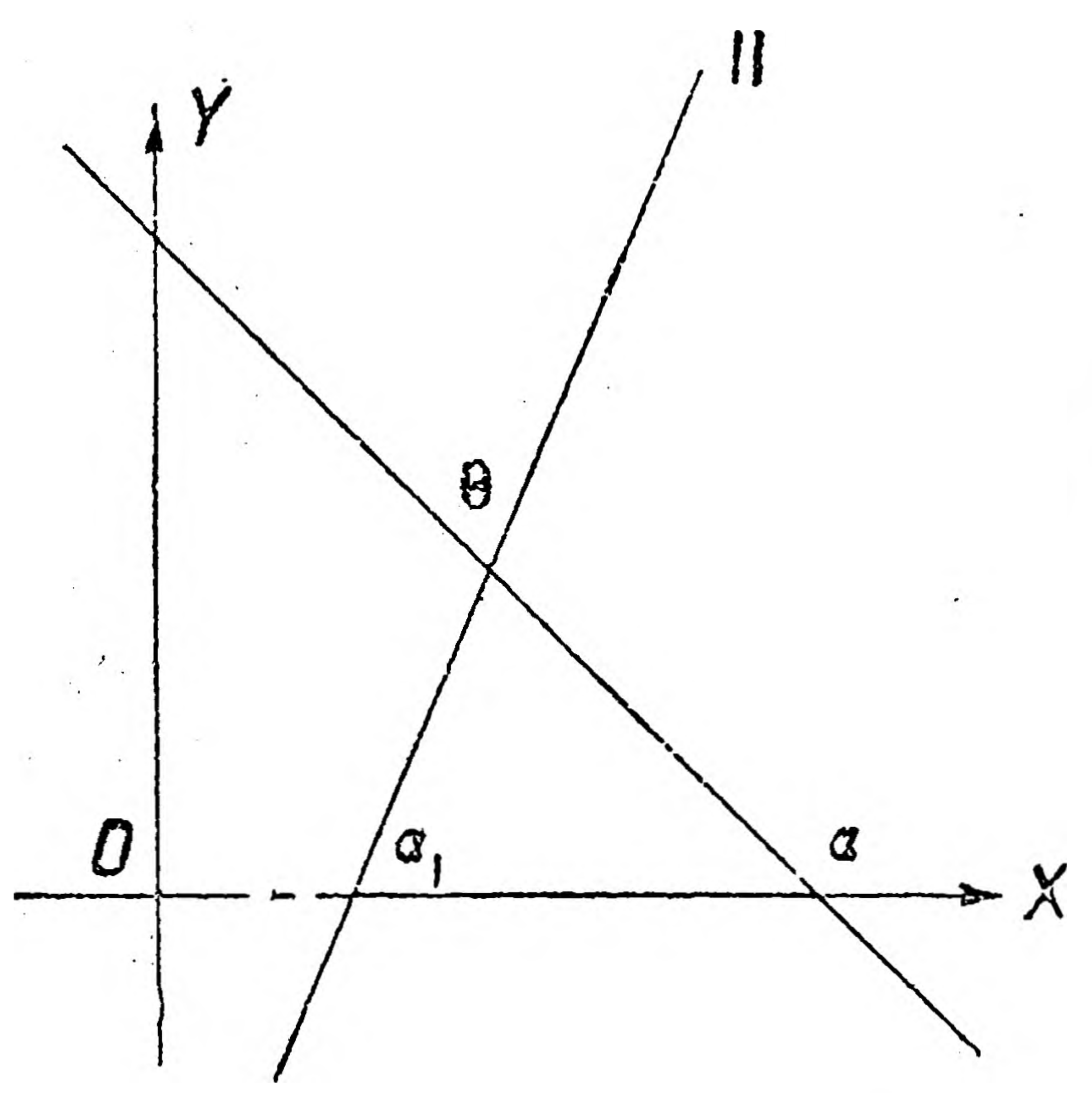
7. Найти сумму внутренних углов треугольника, образованного прямыми $y=0{,}5\;x+6$, $y=-3\;x+10$, $y=-x$, вычисляя каждый из этих углов.

§ 26. Уравнения прямых, проходящих через 1, 2, 3 данных точки. Через одну данную точку можно провести бесчисленное множество прямых — целый „пучок" их. Все эти прямые (за одним исключением, о котором речь будет ниже) выражаются уравнением

$$y-y_0=k\;(x-x_0)$$

или

$$y=kx+(y_0-kx_0), \tag{1}$$



Черт. 55.

где x_0, y_0 — координаты данной точки („центра пучка"), k — произвольный угловой коэфициент. Уравнения (1) легко получаются из простейшего уравнения прямой $y=kx+n$, если из него почленно вычесть уравнение $y_0=kx_0+n$, выражающее, что прямая $y=kx+n$ проходит через точку $(x_0; y_0)$. Упомянутым выше исключением является та прямая пучка, которая параллельна оси Y. Она не получается из уравнения (1) ни при каком конечном значении k и выражается уравнением $x=x_0$.

Имея уравнение (1), легко решить задачу: *через данную точку* $(x_0;\;y_0)$ *провести прямые, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна данной прямой* $Ax+By+C=0$.

Если данная прямая не параллельна оси Y, то ее угловой коэфициент $k_1=-\dfrac{A}{B}$ (случай $B=0$ надо рассмотреть особо). Чтобы прямая пучка (1) была параллельна данной прямой, надо взять $k=k_1=-\dfrac{A}{B}$, что приводит к уравнению первой искомой прямой:

$$A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)=0.$$

Чтобы прямая пучка была перпендикулярна к данной прямой, надо взять $kk_1=-1$, т. е. $k=\dfrac{B}{A}$, что дает уравнение второй искомой прямой: $B\,(x-x_0)-A\,(y-y_0)=0$. Если $B=0$, т. е. данная прямая параллельна оси Y, то первая из искомых прямых тоже ей параллельна и выражается уравнением $x=x_0$, вторая же параллельна оси X и выражается уравнением $y=y_0$. Но именно к этим двум последним уравнениям и сводятся два полученных для случая $B\neq 0$ уравнения, если взять в них $B=0$, $A\neq 0$.

Итак, общее решение поставленной задачи дается уравнениями $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ и $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$. Читателю предлагается проверить, что эти два уравнения действительно выражают прямые, из которых первая параллельна, вторая перпендикулярна прямой $Ax+By+C=0$ и которые проходят через данную точку (x_0, y_0).

Переходим теперь к задаче: *найти уравнение прямой, проходящей через две данных точки* (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

Если эти две точки различны, что мы и будем предполагать, то эта задача является вполне определенной и допускает лишь одно решение. Его получим, написав уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку $(x_0; y_0)$, а именно уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$, а затем выбрав значение k с таким расчетом, чтобы прямая пучка прошла через точку $(x_1; y_1)$, т. е. удовлетворив уравнению $y_1-y_0=k(x_1-x_0)$. Если $x_1\neq x_0$, т. е. если данные точки не лежат на одной прямой, параллельной оси Y, то из последнего уравнения находим: $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ и получаем уравнение искомой прямой в виде

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0). \tag{2}$$

Если не только $x_1\neq x_0$, но и $y_1\neq y_0$, то уравнение (2) можно переписать в следующем, более удобном для запоминания виде:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \tag{3}$$

В случае $y_1=y_0$ искомая прямая параллельна оси X и выражается уравнением $y-y_0=0$, а в случае $x_1=x_0$ параллельна оси Y и выражается уравнением $x-x_0=0$. Можно сказать, что уравнение (3) дает решение задачи и в двух последних случаях, если условиться устранять деление на нулевую разность, когда оно встречается, соответствующим преобразованием уравнения (3), а именно к виду

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

в первом случае и к виду

$$x-x_0=\frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}(y-y_0)$$

во втором или же к виду:

$$(x-x_0)(y_1-y_0)=(y-y_0)(x_1-x_0), \tag{4}$$

пригодному для всех случаев.

Первая из поставленных в заголовке настоящего параграфа задач, а именно задача о проведении прямой через данную точку является задачей *неопределенной*, так как содержит недостаточное для единственности решения число условий. Вторая задача — о проведении прямой через две данных (различных) точки — является задачей ***вполне определенной*** и всегда допускает единственное решение. Третья задача — о проведении прямой через три данных точки — имеет избыточное число условий. Она допускает решение не всегда, и необходимо выяснить, в каких именно случаях решение существует.

Если даны три различных точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, то прямая, проходящая через первые две из них, выражается уравнением (4). Подставляем в это уравнение координаты третьей точки $(x_2; y_2)$ и получаем условие расположения трех точек на одной прямой:

$$(x_2 - x_0)(y_1 - y_0) = (y_2 - y_0)(x_1 - x_0). \qquad (5)$$

При соблюдении этого условия поставленная задача разрешима, и искомая прямая выражается уравнением (4). Если же оно не соблюдено, то три данных точки не лежат на одной прямой, и задача решения не имеет. Условие (5) *необходимо* для того, чтобы три данных точки лежали на одной прямой (если оно не соблюдено, точки не лежат на одной прямой). Вместе с тем оно и *достаточно* (если оно соблюдено, точки лежат на одной прямой).

Уравнение (4) можно представить в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно привести уравнение (4) к виду $x(y_0 - y_1) - x_0(y - y_1) + x_1(y - y_0) = 0$ и принять во внимание формулу (5) § 12. Подставляя в (6) вместо текущих координат x и y координаты третьей данной точки x_2 и y_2 и переставляя строки (см. свойство 3 § 12), получаем условие расположения трех данных точек на одной прямой в виде:

$$\begin{vmatrix} x_0, & y_0, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Упражнения.

1. Найти уравнения двух прямых, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к прямой $x - 4y + 4 = 0$ и обе проходят через точку $(1; -3)$.

2. Вершины треугольника находятся в точках $(-2; -5)$, $(1; -5)$, $(1; 3)$. Найти уравнения сторон этого треугольника.

3. Выяснить, лежат ли на одной прямой точки с координатами $(5; 2)$, $(3; 3{,}5)$, $(1; 5)$. Тот же вопрос по отношению к точкам $(a + b;\ a - b)$, $(2a - b;\ 2b + a)$, $(3a - 3b;\ a + 5b)$.

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2; 4)$ и составляющей угол в $30°$ с прямой $x - 2y + 5 = 0$ (два решения).

5. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку $(x_0; y_0)$ и составляющей данный угол θ с данной прямой $Ax + By + C = 0$ (обобщение предыдущей задачи).

6. Доказать, что три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке.

Указание. Начало координат поместить в одной из вершин треугольника, ось X совместить с одной из его сторон.

7. Доказать, что три медианы треугольника всегда пересекаются в одной точке, делящей каждую медиану в отношении $2:1$ (в направлении от вершины к противолежащей стороне).

8. Найти координаты центра круга, описанного около треугольника и вписанного в него, в зависимости от координат его вершин.

Указание. Основываться на том, что центр описанного круга находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника и проходящих через их средины, а центр вписанного круга — в точке пересечения биссектрис углов треугольника.

§ 27. **Проведение прямой через точку пересечения двух данных прямых.** Если даны уравнения $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$ двух прямых и нужно написать уравнение пучка прямых, проходящих через их точку пересечения $P(x_0; y_0)$, то можно найти x_0 и y_0 в зависимости от данных коэфициентов, а затем применить уравнение (1) § 26. Однако гораздо выгоднее воспользоваться тем соображением, что уравнение

$$(Ax+By+C)+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0, \qquad (1)$$

получаемое почленным сложением уравнений данных прямых после предварительного умножения одного из них на неопределенный множитель λ, будучи уравнением некоторой прямой, так как оно 1-й степени относительно текущих координат, удовлетворяется координатами точки пересечения данных прямых. Действительно, координаты этой точки, обращая в 0 левые части данных уравнений, обратят в 0 и левую часть уравнения (1). Следовательно, уравнение (1), в котором букве λ можно придавать бесчисленное множество значений, изображает бесчисленное множество прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых. Однако является вопрос: может ли уравнение (1) выразить любую прямую рассматриваемого пучка? Чтобы на него ответить, заметим, что каждая прямая пучка определяется добавочной точкой $Q(x_1; y_1)$, отличной от точки $P(x_0; y_0)$. Посмотрим, можно ли подобрать значение неопределенного множителя λ в уравнении (1) так, чтобы изображаемая этим уравнением прямая, проходя через точку P, прошла также и через точку Q. Подставляя координаты точки Q в уравнение (1), имеем уравнение $(Ax_1+By_1+C)+\lambda(A_1x_1+B_1y_1+C_1)=0$, откуда можно найти единственное и определенное значение λ во всех случаях, за исключением того, когда $A_1x_1+B_1y_1+C_1=0$, т. е. когда точка $Q(x_1; y_1)$ лежит на второй из данных прямых.

Итак, *уравнение (1) выражает любую прямую пучка, кроме второй из данных прямых.* Заменив уравнение (1) уравнением

$$\mu(Ax+By+C)+(A_1x+B_1y+C_1)=0, \qquad (2)$$

где μ — опять неопределенный множитель, таким же способом убедимся, что уравнение (2) выражает любую прямую пучка, кроме первой из данных прямых. Отсюда заключаем, что *уравнение*

$$\mu(Ax+By+C)+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0 \qquad (3)$$

выражает при надлежащем выборе произвольных множителей μ и λ любую прямую пучка, так как при $\mu=1$ сводится к (1) и при $\lambda=1$ к (2).

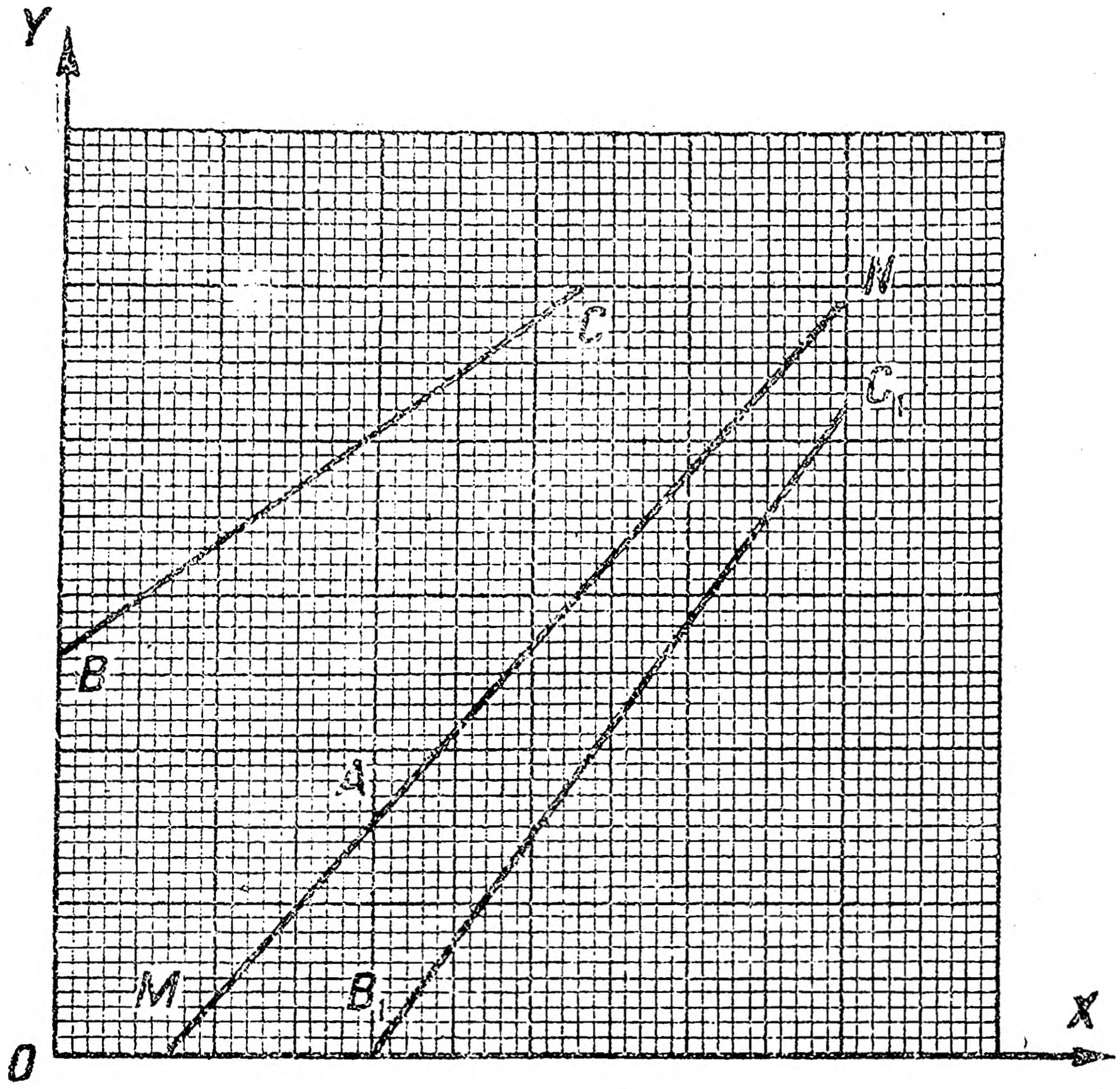
Решим следующую практическую задачу.

На квадратном куске бумаги (сторона квадрата 50 *мм*) имеются точка A и прямые BC и B_1C_1, в пределах чертежа не пересекающиеся. Надо провести прямую, проходящую через точку A и через точку пересечения прямых BC и B_1C_1 (черт. 56).

Примем нижнюю сторону квадрата за ось X, боковую левую — за ось Y и найдем измерением на чертеже координаты точек A, B, C, B_1, C_1. Получаем для точки A координаты 20 и 15, для B 0 и 26, для C 33 и 50, для B_1 20 и 0, для C_1 50 и 42. Далее составляем уравнения прямых BC и B_1C_1, а именно: $\frac{x-0}{33-0}=\frac{y-26}{50-26}$, или $8x-11y+286=0$, для BC и $\frac{x-20}{50-20}=\frac{y-0}{42-0}$, или $7x-5y-140=0$, для B_1C_1. Совместное решение двух последних уравнений дает координаты точки пересечения P прямых BC и B_1C_1, а именно:

$$x_0=2970:37=80{,}27 \text{ и } y_0=3122:37=84{,}38.$$

Для прямой, проходящей через точки A и P, находим уравнение $69{,}38x-60{,}27y-483{,}5=0$. Это уравнение дает для $y=0$ $x=6{,}97$, а для $x=50$ $y=49{,}53$. Остается отметить на чертеже эти две точки M и N и провести через них искомую прямую.



Черт. 56.

Решение этой же задачи способом, указанным выше и основанным на применении уравнения (1), требует значительно меньше выкладок. Действительно, написав уравнение любой прямой, проходящей через точку пересечения данных прямых, $8x-11y+286=0$ и $7x-5y-140=0$ в виде

$$(8x-11y+286)+\lambda(7x-5y-140)=0,$$

находим λ из условия прохождения этой прямой через точку $A(20;\ 15)$. Получаем, что

$$\lambda=-(8\cdot20-11\cdot15+286):(7\cdot20-5\cdot15-140)=281:75,$$

а потому уравнение искомой прямой есть $(8+7\lambda)x-(11+5\lambda)y+(286-140\lambda)=0$, или $2567x-2230y-17\,890=0$, лишь множителем 37,00 отличающееся от полученного первым способом уравнения $69{,}38x-60{,}27y-483{,}5=0$.

Уравнение (1) с выгодой применяется также и при решении вопроса о том, проходят ли три данных прямых через одну общую точку или нет. Вместо того чтобы находить координаты точки пересечения двух данных прямых и подставлять их в уравнение третьей прямой, проще написать уравнение пучка прямых с центром в точке пересечения этих двух прямых, а затем выяснить, возможен ли такой выбор значения λ, при котором одна из прямых пучка совпадала бы с третьей прямой.

Например, желая установить, проходят ли через одну общую точку прямые $5x+6y+7=0$, $6x-5y+9=0$, $x+2y+a=0$, где a — некоторая неопределенная величина, берем уравнение пучка $(5x+6y+7)+\lambda(6x-5y+9)=0$ или $(5+6\lambda)x+(6-5\lambda)y+(7+9\lambda)=0$ и сравниваем его с уравнением третьей из данных прямых. Они имеют один и тот же геометрический смысл, если соблюдены условия

$$\frac{5+6\lambda}{1}=\frac{6-5\lambda}{2}=\frac{7+9\lambda}{a}.$$

Равенство первых двух отношений возможно лишь при условии, что значение λ удовлетворяет уравнению $2(5+6\lambda)=6-5\lambda$, т. е. при $\lambda=-4:17$, а равенство первого отношения с третьим возможно лишь при условии $a=(7+9\lambda):(5+6\lambda)=83:61$. Итак, три данных прямых проходят через одну общую точку тогда и только тогда, когда $a=83:61$.

Упражнения.

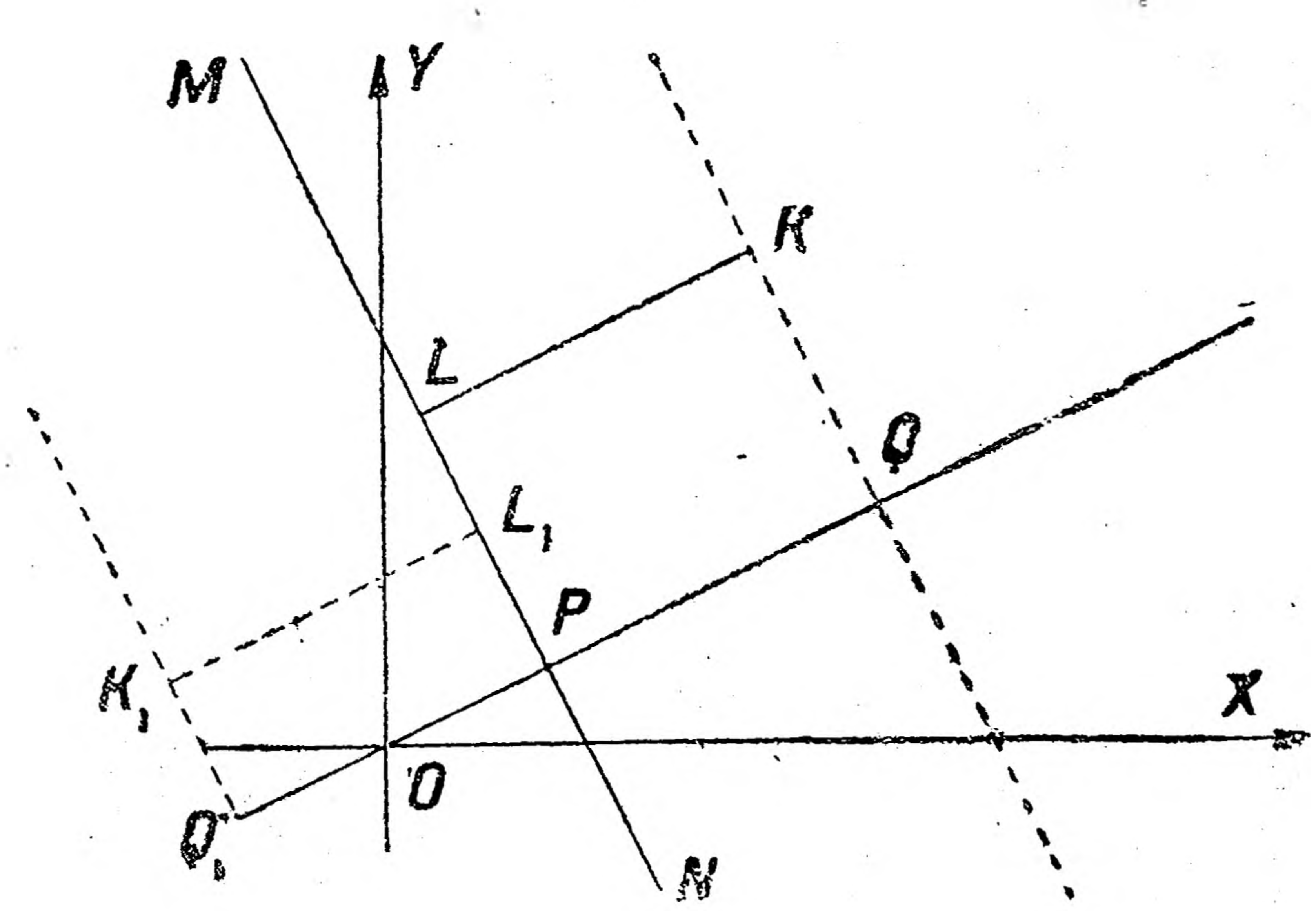
1. На куске миллиметровой бумаги отделить „чертеж" в виде квадрата со сторонами в 40 *мм* и провести пару каких-нибудь прямых, не пересекающихся в пределах „чертежа", но пересекающихся в пределах взятого куска бумаги в точке P, и взять внутри „чертежа" произвольную точку A, не лежащую ни на одной из данных прямых. Требуется найти точки пересечения прямой AP со сторонами квадрата. Сделать это, сперва основываясь на формуле (1), а затем графическим способом, просто проводя прямую AP по линейке.

2. Выяснить, проходят ли прямые $x+4y-23=0$, $3x-2y-6=0$, $x-6y+$ $+22=0$ через одну общую точку, не находя координат точки пересечения. Тот же вопрос относительно прямых $x+4y-23=0$, $3x-2y-6=0$, $2x-2y+$ $+1=0$. Решив задачу способом, указанным в настоящем параграфе, для поверки вычислить определитель, указанный в задаче 4 в конце § 24.

3. Найти уравнения прямых, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к прямой $Ax+By+C=0$ и которые обе проходят через точку пересечения двух данных прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$.

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-5y-1=0$ и $4x+y=0$ и составляющую угол в 45° с первой из них (два решения).

§ 28. Расстояние от данной точки до данной прямой. Вычисление площади треугольника по координатам его вершин.



Черт. 57.

Расстояние от точки до прямой, измеряемое, как известно, по перпендикуляру из точки на прямую, можно вычислить по формуле расстояния между двумя точками, если предварительно найти координаты точки пересечения данной прямой и прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой. Есть, однако, другой способ, скорее приводящий к цели. Обозначив координаты данной точки K (черт. 57) через x_0, y_0, возьмем уравнение данной прямой MN в нормальном виде

$$x\cos\gamma+y\sin\gamma-p=0. \tag{1}$$

Проводя $LK\perp MN$, $KQ\parallel MN$ и $OQ\perp KQ$, замечаем, что $LK=PQ=$ $=OQ-OP$. Но отрезок $OP=p$, а $OQ=p_1$, если написать уравнение вспомогательной прямой KQ тоже в нормальном виде:

$$x\cos\gamma+y\sin\gamma-p_1=0 \tag{2}$$

(здесь $\angle XOQ=\angle XOP=\gamma$). Чтобы найти неизвестную величину p_1, заметим, что координаты x_0 и y_0 данной точки K удовлетворяют уравнению (2), а потому $p_1 = x_0 \cos\gamma + y_0 \sin\gamma$. Теперь имеем для искомой длины отрезка $LK = l$ выражение

$$l = x_0 \cos\gamma + y_0 \sin\gamma - p. \qquad (3)$$

Мы брали сейчас точку K по другую сторону данной прямой, нежели начало координат. Если же она расположена по ту же сторону от данной прямой, что и начало, как точка K_1, то для искомого расстояния L_1K_1 получается, как легко видеть, формула

$$l_1 = -(x_0 \cos\gamma + y_0 \sin\gamma - p), \qquad (4)$$

так как уравнение вспомогательной прямой K_1Q_1 теперь уже таково:

$$x \cos(\gamma + \pi) + y \sin(\gamma + \pi) - p_1 = 0$$

и $p_1 = -x_0 \cos\gamma - y_0 \sin\gamma$, а $l_1 = L_1K_1 = OQ_1 + OP = p - x_0 \cos\gamma - y_0 \sin\gamma$.

Та же формула (4) получается и в случае, когда вспомогательная прямая проходит между началом координат и данной прямой.

Соединяя формулы (3) и (4) вместе, имеем формулу

$$l = |x_0 \cos\gamma + y_0 \sin\gamma - p|, \qquad (5)$$

справедливую для всех случаев взаимного расположения точки и прямой. Словами эту формулу можно прочесть так: *расстояние от данной точки до данной прямой равно абсолютному значению выражения, получающегося из левой части уравнения данной прямой в нормальном виде после замены текущих координат координатами данной точки.*

Если прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$, то предварительно надо умножить левую часть на нормирующий множитель $N = 1 : \sqrt{A^2 + B^2}$ (знак перед корнем здесь безразличен), и для расстояния от точки до прямой получается формула:

$$l = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \qquad (6)$$

Так, расстояние от точки $(5; -3)$ до прямой $6x - 8y + 25 = 0$ равно

$$l = \left| \frac{6 \cdot 5 - 8 \cdot (-3) + 25}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \right| = \left| \frac{30 + 24 + 25}{10} \right| = 7{,}9.$$

Чтобы показать более сложный пример применения формулы (6), решим такую задачу: *найти площадь треугольника ABC, если даны координаты его вершин $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$.*

Площадь треугольника S равна половине произведения любой из его сторон, например AB, на соответствующую высоту, т. е. на длину перпендикуляра CD, опущенного из третьей вершины C на эту сторону AB. Уравнение прямой AB согласно формуле (4) § 26 есть

$$(x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0) = 0,$$

а длина перпендикуляра CD равна согласно формуле (6) настоящего параграфа:

$$CD=\left|\frac{(x_2-x_0)(y_1-y_0)-(y_2-y_0)(x_1-x_0)}{\sqrt{(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2}}\right|.$$

Но $AB=+\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ (см. формулу 2 § 7), а потому

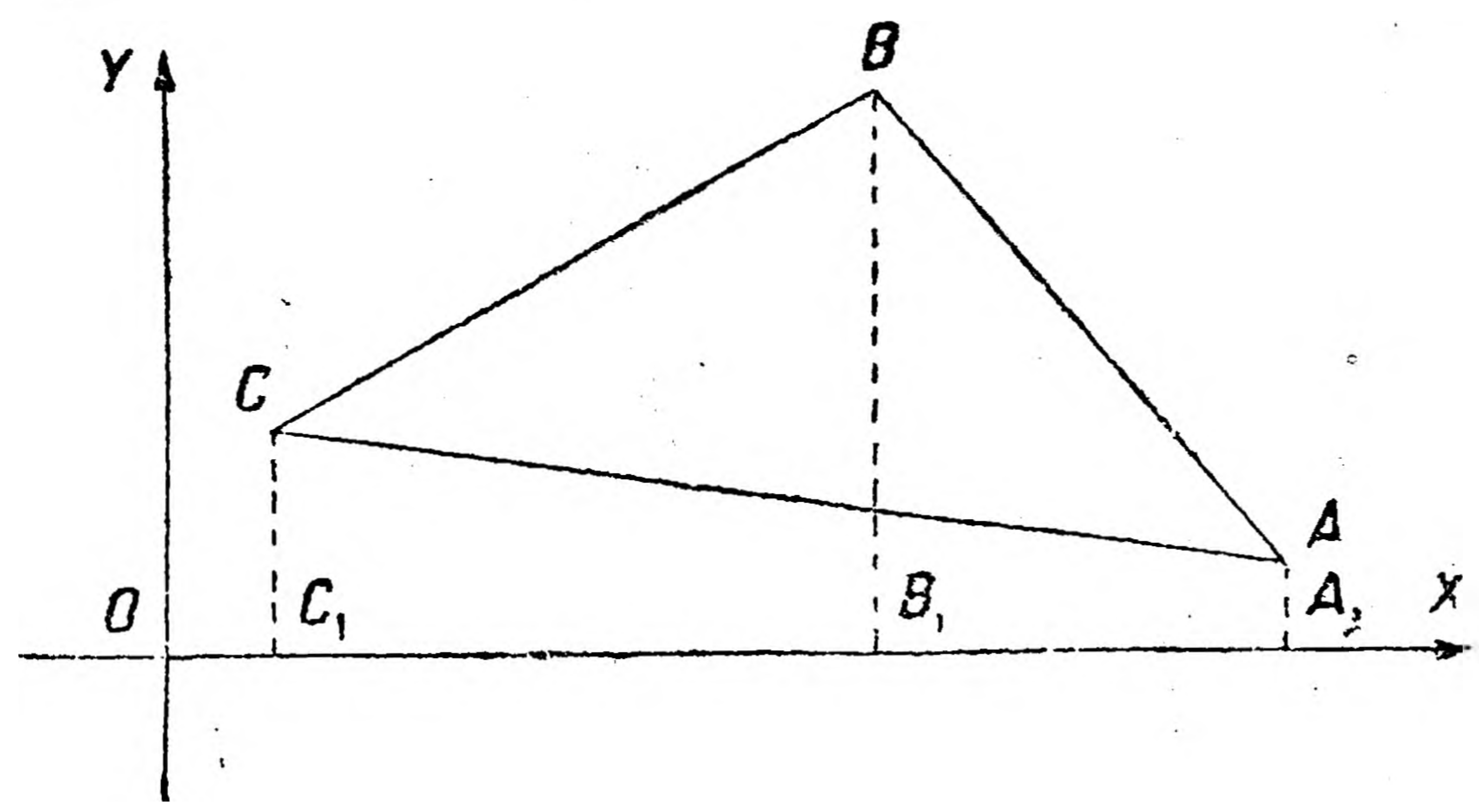
$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot\left|(x_2-x_0)(y_1-y_0)-(y_2-y_0)(x_1-x_0)\right|.$$

Выполняя простые преобразования, получаем два следующих выражения для площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}\left|x_0(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_0)+x_2(y_0-y_1)\right|; \qquad (7)$$

$$S=\frac{1}{2}\left|(x_0-x_1)(y_0+y_1)+(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_0)(y_2+y_0)\right|. \qquad (8)$$

Формула (7) особенно легко запоминается, так как значки при x и y в каждом из трех членов правой части идут „по циклу" из трех „элементов" 0, 1, 2: после 0 идет 1, после 1 идет 2, после 2 опять 0 и т. д. Формула же (8) допускает очень простое геометрическое истолкование отдельных членов. Действительно, каждый из них после умножения на $^1/_2$ выражает площадь некоторой трапеции, образованной стороной треугольника, ординатами двух ее концов и отрезком оси абсцисс, причем площадь одной из трапеций (на чертеже 58 трапеции AA_1C_1C) получается с обратным знаком.



Черт. 58.

Площадь треугольника ABC получается как сумма площадей трапеций AA_1B_1B и BB_1C_1C, уменьшенная на площадь трапеции AA_1C_1C. Таким образом, формулу (8) можно вывести и непосредственно из чертежа. Действуя подобным же образом, легко получить и формулу

$$S=\frac{1}{2}\left|(x_0-x_1)(y_0+y_1)+(x_1-x_2)(y_1+y_2)+\ldots+\right.$$
$$\left.+(x_{n-1}-x_0)(y_{n-1}+y_0)\right|, \qquad (9)$$

выражающую площадь n-угольника по координатам n его вершин. Эта последняя формула содержит сумму n членов одного и того же вида, отличающихся один от другого лишь значками при x и y, причем в каждом последующем члене значки на 1 больше, чем в предыдущем, а значок $n-1$ переходит „по циклу" в значок 0. Для более краткого обозначения таких сумм пользуются знаком $\sum$ [1]), и формулу (9) можно записать в виде

$$S=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=0}^{n-1}(x_i-x_{i+1})(y_i+y_{i+1})\right|, \qquad (10)$$

[1]) Греческая буква „сигма большая".

которая читается так: *площадь многоугольника равна половине абсолютного значения суммы всех членов вида* $(x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})$, где значок i получает последовательные целые значения от $i=0$ до $i=n-1$ (эти *предельные* значения i, а именно 0 и $n-1$, записываются ниже и выше знака суммы).

Формула (10) находит себе применение в геодезии.

Формулу (7) можно записать в виде определителя:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0, & y_0, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} \tag{11}$$

Приравнивая S нулю и сокращая множитель $\frac{1}{2}$, получим условие расположения трех данных точек на одной прямой, уже известное нам по § 26 (см. формулу 7). Действительно, площадь треугольника ABC обращается в нуль тогда и только тогда, когда три точки A, B, C расположены на одной прямой.

Упражнения.

1. Найти расстояние точки $(2; -5)$ до каждой из прямых $3x - 4y + 10 = 0$, $5x - 12y - 39 = 0$, $2x + y - 8 = 0$, сперва простыми измерениями на чертеже, предварительно построив эти точки, затем по формуле (6).

2. Вывести формулу (5) еще раз, следуя пути, указанному в начале § 28.

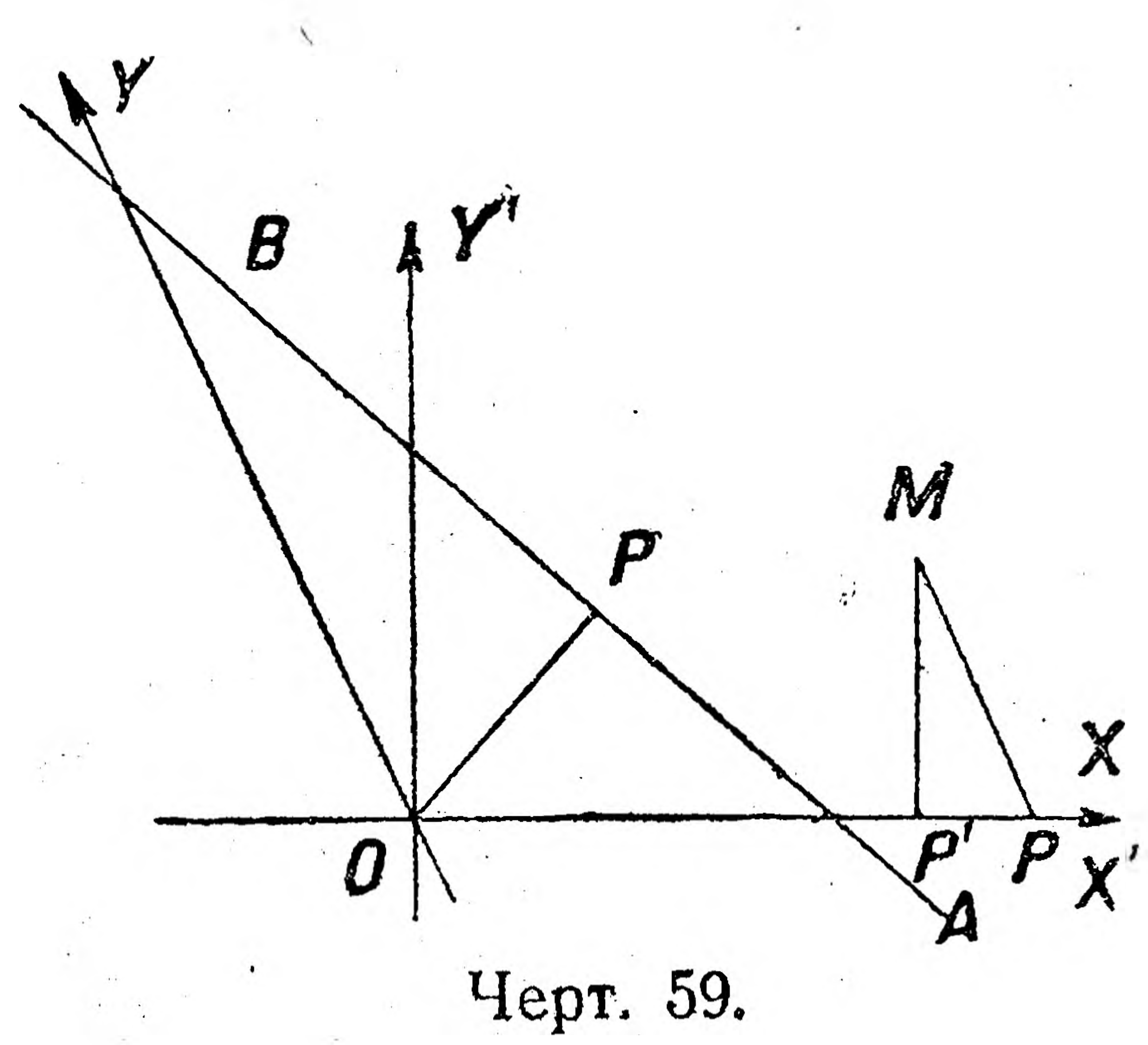
3. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $(2; -4)$, $(5; 3)$, $(-2; 1)$.

4. Найти площадь пятиугольника с вершинами в точках $(1; 2)$, $(4; -3)$, $(-1; -6)$, $(-4; 0)$, $(0; 6)$.

5. Поле имеет форму прямоугольной трапеции с основаниями 120 *м* и 75 *м* и высотой (она же одна из боковых сторон) 54 *м*. На каком расстоянии от большего основания надо провести параллельную ему прямую, которая разделила бы площадь трапеции пополам?

Указание. Принять за оси координат две взаимно-перпендикулярных стороны данной трапеции и найти уравнение другой боковой стороны.

* **§ 29. Уравнение прямой в косоугольных координатах.** Если применять вместо прямоугольных косоугольные координаты, то часть формул, выведенных в настоящей главе, останется без изменения. Посмотрим, прежде всего, сохраняют ли силу для косоугольных координат основные теоремы § 22.



Черт. 59.

Возьмем систему косоугольных координат с углом между осями ω $(0 < \omega < \pi)$ и построим систему вспомогательных прямоугольных координат с тем же началом координат и той же осью абсцисс (черт. 59). Обозначая косоугольные координаты произвольной точки M через $x = OP$ и $y = PM$, а ее прямоугольные координаты через $x' = OP'$, $y' = P'M$, имеем формулы преобразования координат для данного случая:

$$x' = x - y\cos(\pi - \omega), \quad y' = y\sin(\pi - \omega),$$

или

$$x' = x + y\cos\omega, \quad y' = y\sin\omega \tag{1}$$

Поставим себе задачей найти уравнение прямой AB в системе X, Y, зная длину p перпендикуляра OP, опущенного на нее из начала O, и угол $XOP = \gamma$, составленный этим перпендикуляром с осью X.

В системе прямоугольных координат X', Y' уравнение прямой AB, как мы уже знаем, имеет вид

$$x'\cos\gamma + y'\sin\gamma - p = 0.$$

Переходя по формулам (1) от прямоугольных координат к косоугольным, переписываем это уравнение в виде:

$$(x+y\cos\omega)\cos\gamma+y\sin\omega\sin\gamma-p=0,$$

или

$$x\cos\gamma+y(\cos\omega\cos\gamma+\sin\omega\sin\gamma)-p=0,$$

или

$$x\cos\gamma+y\cos(\omega-\gamma)-p=0. \qquad (2)$$

Такой вид имеет уравнение прямой в нормальном виде для косоугольных координат. Теорема I § 22, как видим, сохраняет силу и для косоугольных координат.

Возьмем далее уравнение

$$Ax+By+C=0 \qquad (3)$$

и выясним его геометрический смысл. Если это уравнение, как и в случае прямоугольных координат, всегда (при A и B, не равных одновременно 0) выражает прямую, то умножением всех его коэфициентов на надлежащий нормирующий множитель N его можно привести к виду (2). Попробуем сделать это. Дело сводится к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными γ, p, N:

$$AN=\cos\gamma,\ BN=\cos(\omega-\gamma),\ CN=-p.$$

Переписав второе уравнение системы в виде

$$BN=\cos\omega\cos\gamma+\sin\omega\sin\gamma,$$

подставляем в него $\cos\gamma=AN$ и $\sin\gamma=\pm\sqrt{1-A^2N^2}$. После освобождения от иррациональности получим:

$$(BN-AN\cos\omega)^2=\sin^2\omega\,(1-A^2N^2),$$

откуда

$$N=\frac{\sin\omega}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}.$$

Здесь $\varepsilon=\pm1$, и выбор знака производится, как и в § 23, на основании того соображения, что $p=-CN$ должно быть величиной не отрицательной. Теперь надо найти угол γ, удовлетворяющий уравнению $AN=\cos\gamma$, что всегда возможно, так как

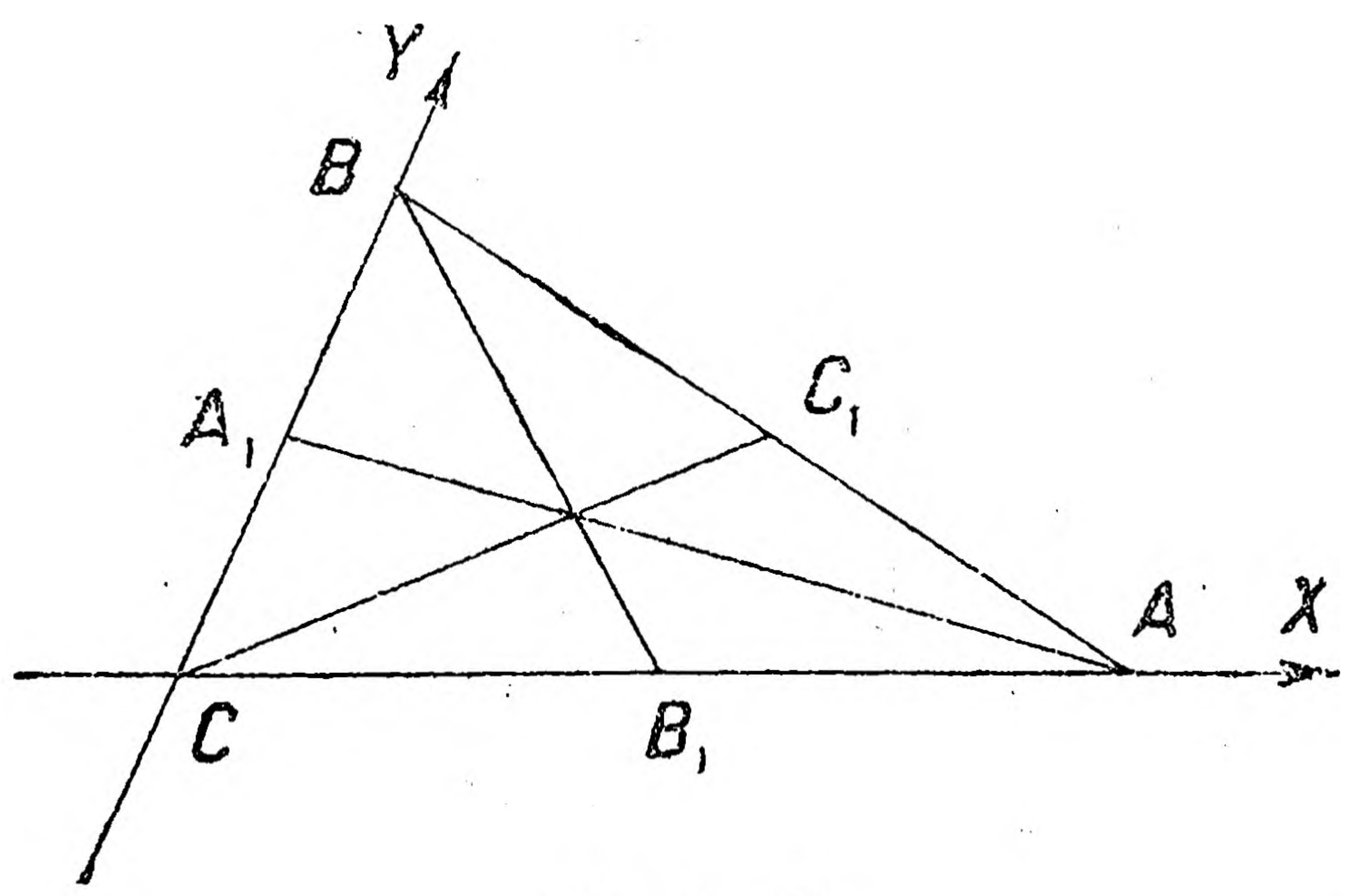
$$|AN|=\left|\frac{A\sin\omega}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}\right|\leqq1$$

(читателю предлагается самому доказать справедливость этого неравенства). Вместе с тем удовлетворяется и уравнение $BN=\cos(\omega-\gamma)$, и переход от уравнения прямой (3) к уравнению (2) будет выполнен. Итак, всякое уравнение вида (3) может быть приведено к уравнению вида (2), а потому всякое уравнение вида (3) выражает прямую линию. Как видим, для косоугольных координат сохраняет силу и теорема II § 22, обратная теореме I.

Какой геометрический смысл имеет в системе косоугольных координат уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, выражающее в системе прямоугольных координат прямую, которая отсекает от осей координат отрезки a и b? Уравнение это линейно относительно x и y, а потому согласно только что указанному выражает прямую линию. Оно удовлетворяется при $x=0$, $y=b$, а также при $x=a$, $y=0$, а потому выражаемая им прямая проходит через эти две точки. Следовательно, в системе косоугольных координат оно тоже является уравнением прямой в отрезках на осях, как и в системе координат прямоугольных.

Формулы § 24, вывод которых был основан исключительно на том факте, что уравнение вида $Ax+By+C=0$ выражает прямую, сохраняют свою силу и для системы косоугольных координат, как сохраняют свою силу и две теоремы, о которых идет речь в задачах (4) и (5) в конце этого параграфа. Остаются в силе и формулы (1)—(7) § 26. Формулы § 25, напротив, при переходе к косоугольным координатам существенно изменяются, но вывод новых формул никаких затруднений не представляет, и ему отведены задачи 4 и 5 в конце настоящего параграфа.

В заключение покажем на примере, какие выгоды приносит переход от прямоугольных к косоугольным координатам. Докажем еще раз теорему о том, что три медианы треугольника всегда пересекаются в одной точке (см. задачу 7 в конце § 26). Взяв произвольный треугольник ABC, совместим ось X со стороной CA и ось Y со стороной CB (черт. 60). Координаты вершин треугольника получат при этом такие значения: $A(a;\ 0)$; $B(0;\ b)$; $C(0;\ 0)$, где $a = AC$, $b = BC$, а координаты средин сторон такие: $A_1\left(0; \frac{1}{2}b\right)$; $B_1\left(\frac{1}{2}a;\ 0\right)$; $C_1\left(\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}b\right)$. Уравнение медианы AA_1 будет при этом



Черт. 60.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{0{,}5b} = 1, \quad \text{или} \quad bx + 2ay - ab = 0,$$

медианы BB_1

$$\frac{x}{0{,}5a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ или } 2bx + ay - ab = 0,$$

медианы CC_1

$$y = \frac{\frac{1}{2}bx}{\frac{1}{2}a} = \frac{bx}{a}, \text{ или } bx - ay = 0.$$

Вычисляя значение определителя, составленного из коэфициентов трех уравнений медиан (см. задачи 4 и 5 в конце § 24), получаем:

$$\begin{vmatrix} b, & 2a, & -ab \\ 2b, & a, & -ab \\ b, & -a, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b, & 2a, & -ab \\ 2b-b, & a-2a, & -ab+ab \\ b, & -a, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b, & 2a, & -ab \\ b, & -a, & 0 \\ b, & -a, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

а потому медианы проходят через одну точку.

Упражнения.

1. Прямая выражается в косоугольных координатах с координатным углом $\omega = 120°$ уравнением $3x + 2y + 1 = 0$. Указать уравнение этой же прямой в нормальном виде (для той же системы координат). Значения p и γ найти сперва графическим способом, затем вычислением.

2. Вывести уравнение (2), не прибегая к уравнению прямой в нормальном виде для прямоугольных координат.

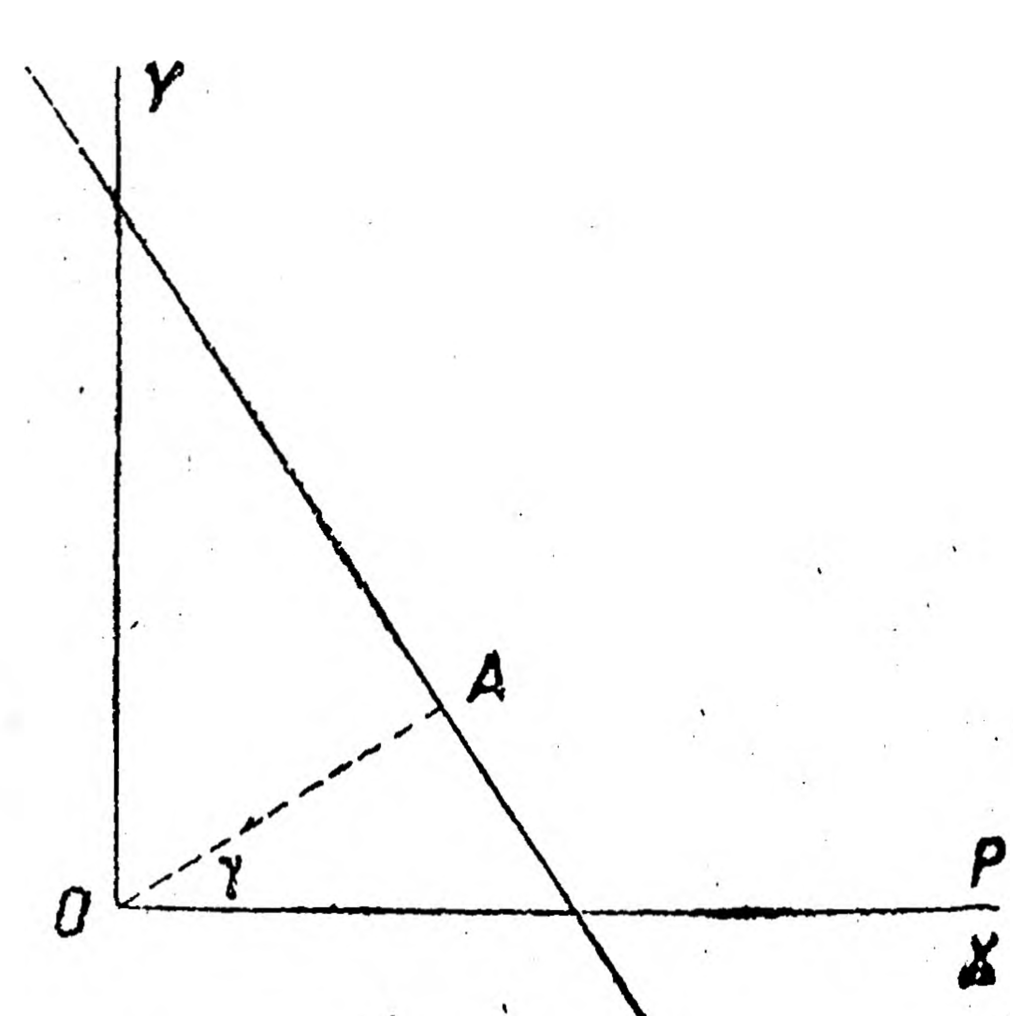
3. Указать геометрический смысл коэфициентов k и n простейшего уравнения прямой $y = kx + n$ в косоугольных координатах.

4. Найти формулы для $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{tg}\theta$, если θ—угол между двумя прямыми, заданными их уравнениями в общем виде в косоугольных координатах.

5. Вывести условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных в косоугольных координатах их уравнениями в общем и в простейшем виде.

6. Вывести формулу для расстояния от данной точки до данной прямой, заданной уравнением в общем виде (в косоугольных координатах).

* **§ 30. Уравнение прямой в полярных координатах.** Чтобы найти уравнение прямой относительно некоторой системы полярных координат, опустим из полюса O перпендикуляр $P = OA$ на данную прямую (черт. 61) и обозначим



Черт. 61.

буквой γ угол POA, образованный этим перпендикуляром с полярной осью OP. Воспользовавшись вспомогательной системой прямоугольных координат, начало которой совпадает с полюсом, а ось X — с полярной осью, напишем уравнение данной прямой (в прямоугольных координатах) в нормальном виде:

$$x \cos\gamma + y \sin\gamma - p = 0. \tag{1}$$

Прямоугольные координаты x и y произвольной точки выражаются через ее полярные координаты ρ и φ (см. § 11) формулами

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi,$$

применение которых к уравнению (1) приводит к уравнению:

$$\rho \cos(\varphi - \gamma) - p = 0, \quad \text{или} \quad \rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \gamma)}. \tag{2}$$

Это и есть уравнение в полярных координатах прямой, не проходящей через полюс. Если же прямая проходит через полюс, то она выражается, как легко видеть, уравнением

$$\varphi = \alpha, \tag{3}$$

вовсе не содержащим ρ. Здесь α обозначает угол между полярной осью и данной прямой, причем можно полагать $0 \leqq \alpha < \pi$.

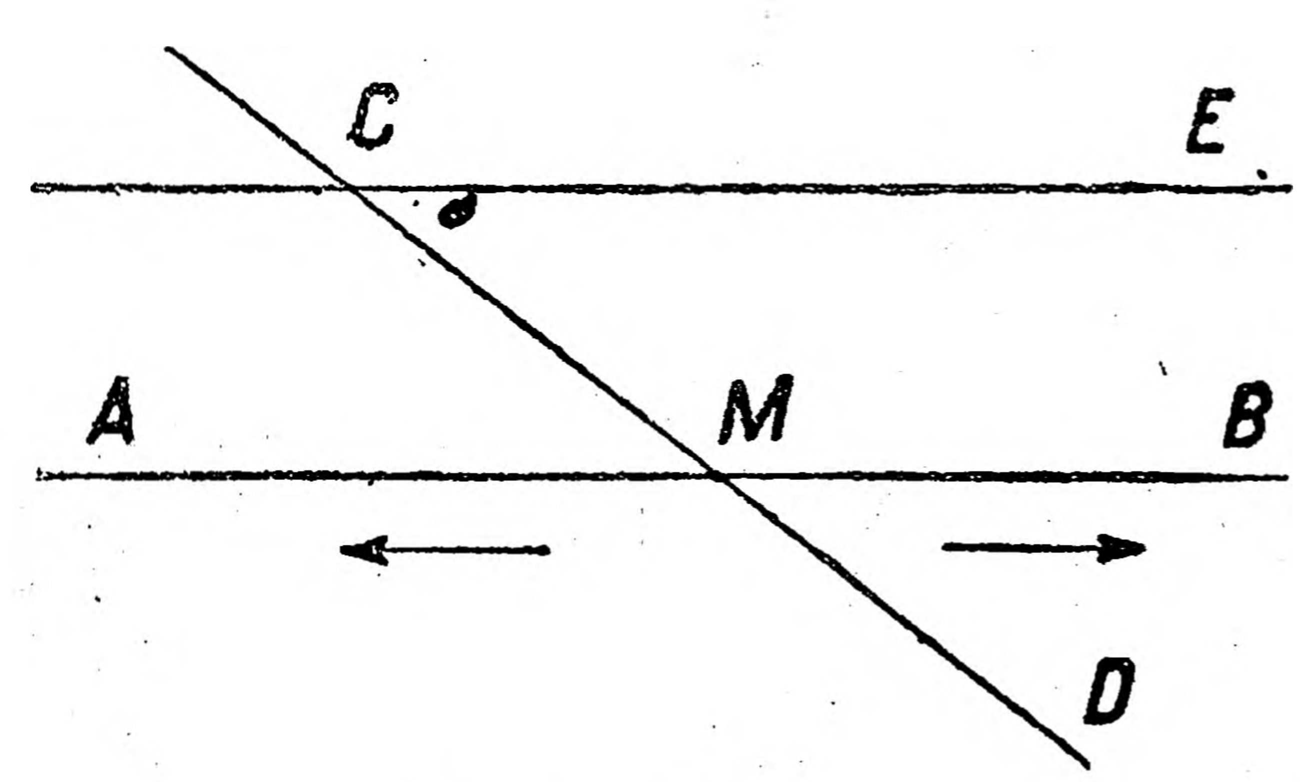
Упражнения.

1. Вывести уравнение в полярных координатах для прямой по данному углу α, составляемому ею с полярной осью, и длине отрезка m, отсекаемого ею от полярной оси.

2. Вывести уравнение (2) еще раз, не пользуясь уравнением (1).

3. Прямая проходит через две данных точки с координатами ρ_0, φ_0 и ρ_1, φ_1. Найти ее уравнение в полярных координатах.

§ 31. Бесконечно-удаленные точки и прямые. 1°. Параллельные прямые согласно с их определением расположены в одной плоскости и не пересекаются, сколько бы их ни продолжали. Вступая в формальное противоречие с этим определением, говорят, что *всякие две параллельные прямые пересекаются в бесконечно-удаленной точке.* Понимать это надо так. Возьмем две прямые AB и CD, пересекающиеся в точке M. Оставляя прямую AB неподвижной, будем вращать прямую CD около точки C так, чтобы точка пересечения M двигалась вправо (черт. 62).

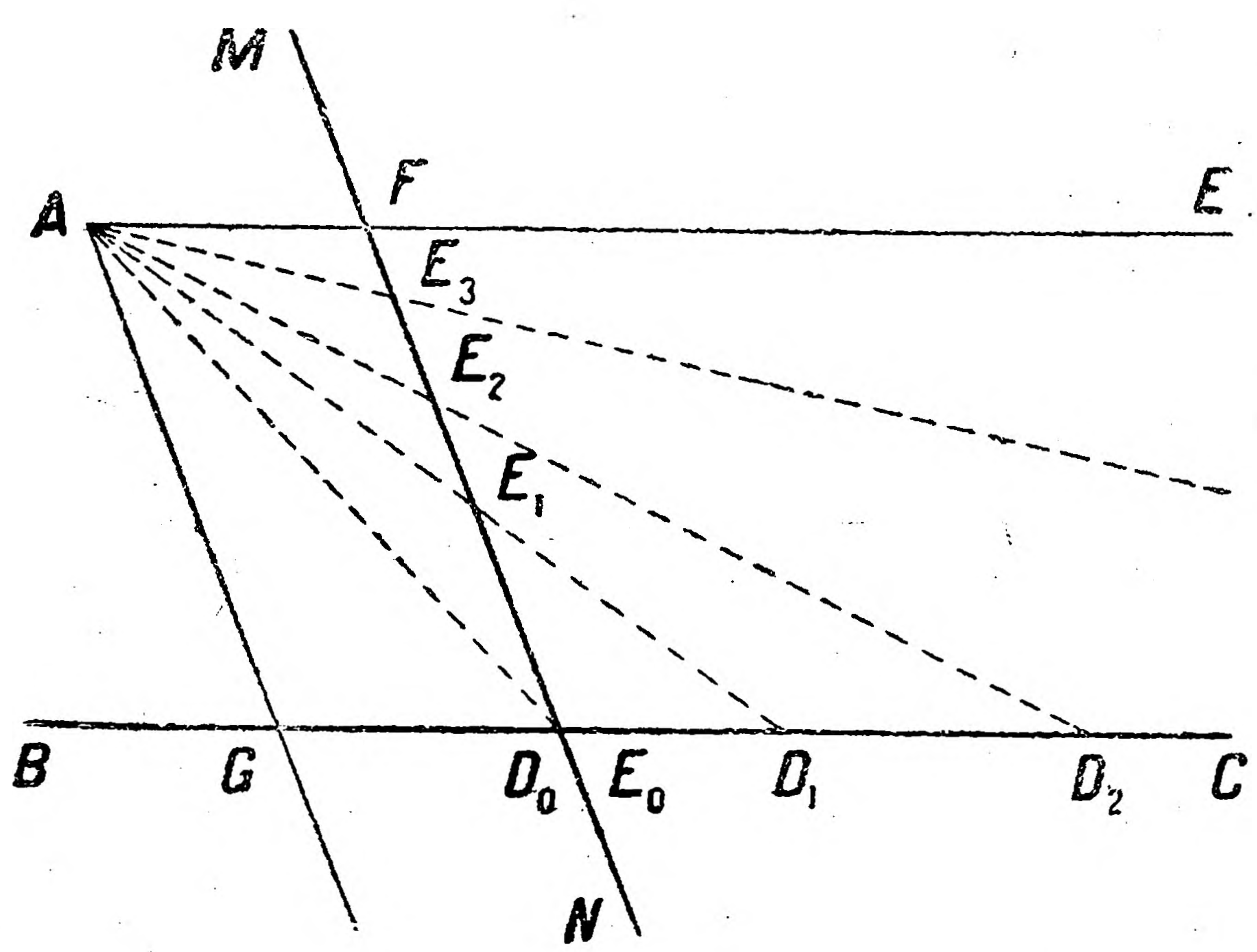


Черт. 62.

Угол MCE, образуемый вращающейся прямой CD с прямой CE, параллельной AB, будет при этом уменьшаться и может быть сделан при достаточно большом удалении точки M как угодно малым. Прямая CE, параллельная AB, является ***предельным*** положением вращающейся прямой CD при условии, что точка M неограниченно удаляется. В этом смысле и говорят, что параллельные прямые CE и AB имеют точку пересечения на бесконечно-большом расстоянии (пересекаются в бесконечно-удаленной точке). Важно заметить, что вращение прямой CD в противоположном направлении, т. е. так, что точка M движется налево, при бесконечно-большом удалении точки M опять приводит к прямой CE как предельному положению. Отсюда утверждение, что *на всякой прямой имеется лишь одна бесконечно-удаленная точка, а именно точка пересечения с любой прямой, ей параллельной.* Пойдем ли мы по прямой AB неограниченно далеко направо или налево, мы каждый раз будем приближаться к одной и той же бесконечно-удаленной точке этой прямой. Это утверждение имеет совершенно ясный смысл: секущая CM, проходящая через неподвижную точку C и через точку M, движущуюся по прямой, стремится к одному и тому же предельному положению, а именно к прямой CE, параллельной AB, в какую бы сторону, направо или налево, ни удалялась точка M.

2°. Чтобы лучше уяснить себе понятие бесконечно-удаленной точки прямой, рассмотрим задачу о *центральном проектировании* одной прямой на другую, с ней пересекающуюся.

Если глаз находится в точке A (черт. 63) и мы рассматриваем неограниченную прямую BC с нанесенными на ней точками D_0, D_1, D_2,..., то можно поставить задачу об изображении этих точек на некоторой другой прямой MN, пересекающейся с первой в точке D_0. Располагая таким изображением, мы можем в случае надобности судить по нему о расположении точек D_0, D_1, D_2, D_3....



Черт. 63.

Соединяя каждую из этих *проектируемых* точек с *центром проекций*, т. е. с точкой A, мы получим в пересечении каждого луча AD_i ($i = 0$, 1, 2, 3...) с прямой MN точку E_i, являющуюся изображением точки D_i, или ее *центральной проекцией* относительно центра A. Проекции всех точек прямой BC, расположенных правее точки D_0, расположатся на отрезке D_0F, где F — точка пересечения прямой AE, параллельной BC, с прямой MN, причем каждой точке луча D_0C, неограниченно простирающегося направо, соответствует одна определенная точка отрезка FD_0 и обратно — каждой точке отрезка FD_0 соответствует одна определенная точка луча D_0C. Особого внимания требуют концы отрезка D_0F. Точка D_0 имеет изображением точку E_0, совпадающую с ней самой, точке же F не соответствует никакая конечная точка луча D_0C, так как луч AE, будучи параллельным BC, нигде этой последней прямой не встречает. Тем не менее точка F имеет особо важное значение: она является предельным положением точки E_i, изображающей точку D_i, если точка D_i неограниченно удаляется от точки D_0. Именно это и имеют в виду, когда говорят, что *точка F является изображением бесконечно-удаленной точки прямой BC.*

Проведем еще прямую AG, параллельную MN. При движении проектируемой точки от D_0 до G ее изображение на прямой MN уходит вниз. Точка G изображения в обычном смысле вовсе не имеет, но, пользуясь понятием бесконечно-удаленной точки, мы можем сказать, что изображением точки G является бесконечно-удаленная точка прямой MN.

При дальнейшем движении проектируемой точки от G налево ее изображение на MN получится выше точки F и будет приближаться к F по мере неограниченного удаления проектируемой точки налево. Таким образом, каждой без исключения точке прямой BC соответствует одна определенная точка (ее изображение) прямой MN, и обратно: каждой без исключения точке прямой MN соответствует одна определенная точка прямой BC, изображаемая ею. Подчеркнем еще раз, что изображение бесконечно-удаляющейся точки прямой BC стремится к F как при удалении направо, так и при удалении налево (разница лишь в том, что в первом случае приближение изображения к F идет снизу, во втором сверху), а потому прямая BC, как и всякая другая прямая, *имеет лишь одну бесконечно-удаленную точку*. Так же обстоит дело и с прямой MN.

Весь курс аналитической геометрии может быть изложен без применения понятия бесконечно-удаленной точки. Но введение этого понятия позволяет значительно обобщить ряд формулировок и рассуждений аналитической геометрии. Так, говоря о взаимном расположении двух прямых на плоскости, мы обычно различаем два случая: либо две прямые пересекаются в одной точке, либо они параллельны. Вводя же понятие бесконечно-удаленной точки, мы можем утверждать, что всякие две прямые пересекаются в одной точке, конечной (т. е. находящейся на конечном расстоянии) или бесконечно-удаленной.

3°. Рассмотрим далее уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1)$$

В § 23 мы видели, что в таком виде может быть представлено уравнение любой прямой, не параллельной ни одной из координатных осей и не проходящей через начало координат. Легко видеть, что введение понятия бесконечно-удаленной точки позволяет снять первое из этих ограничений. Действительно, всякую прямую, параллельную оси X и отсекающую отрезок b от оси Y, можно рассматривать как предельное положение прямой (1) при условии, что точка ее пересечения с осью X удаляется в бесконечность, что соответствует неограниченному увеличению (по абсолютной величине) отрезка a. Но тогда член $\frac{x}{a}$ при любом конечном значении x стремится к 0, что выражается посредством любого из трех следующих обозначений:

$$\frac{x}{a}\to 0, \quad \text{предел } \frac{x}{a}=0, \quad \lim\frac{x}{a}=0\ [1].$$

Уравнение (1) переходит при этом в уравнение $\frac{y}{b}=1$ или $y=b$, т. е. в хорошо известное нам уравнение прямой, параллельной оси X и проходящей от нее на расстоянии b. Точно таким же образом легко убедиться, что уравнение (1) может выражать (при $b\to\infty$) и прямую, параллельную оси Y.

4°. Выясним геометрический смысл уравнений $Ax+B=0$ и $Ax^2+Bx+C=0$ при условии, что $A\to 0$. Если в уравнении

[1] Знак lim есть сокращение латинского слова limes и французского слова limite, означающих „предел".

$Ax+B=0$ коэфициент B отличен от 0 и сохраняет постоянное значение, а коэфициент A стремится к 0, то корень этого уравнения, равный $x=-\frac{B}{A}$, неограниченно возрастает по абсолютной величине, принимая положительные или отрицательные значения в зависимости от того, приближается ли A к 0 со стороны отрицательных или положительных значений (при $B>0$) или наоборот (при $B<0$). Краткости ради в этом случае говорят так: „Уравнение $0\cdot x+B=0$ при $B\neq 0$ имеет корень, равный $+\infty$ или $-\infty$". Рассматривая x как абсциссу точки на оси X, можем сказать, что уравнение $Ax+B=0$ при $B\neq 0$ и $A\to 0$ выражает точку, движущуюся по оси X и неограниченно удаляющуюся от начала в ту или другую сторону, или, короче, что уравнение $0\cdot x+B=0$ при $B\neq 0$ выражает бесконечно-удаленную точку на оси X.

Если в уравнении $Ax^2+Bx+C=0$ коэфициент $A\to 0$, коэфициент B постоянен и отличен от 0, коэфициент C постоянен, то один из корней уравнения стремится к значению $-\frac{C}{B}$, а другой неограниченно возрастает по абсолютной величине. Действительно, предположив, что $B>0$ (если $B<0$, то можно знаки всех членов уравнения изменить на обратные), имеем для одного из корней выражение

$$x_1=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

которое при $A\to 0$ неограниченно возрастает по абсолютному значению, так как числитель стремится к $-B-\sqrt{B^2}=-B-B=-2B\neq 0$, а знаменатель к 0. Второй же корень преобразуем, умножая его числитель и знаменатель на одно и то же выражение $-B-\sqrt{B^2-4AC}$:

$$x_2=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{2C}{-B-\sqrt{B^2-4AC}}.$$

При $A\to 0$ это выражение для x_2 стремится к $-\frac{C}{B}$.

Полученные результаты можно кратко формулировать так: „Уравнение $0\cdot x^2+Bx+C=0$, где $B\neq 0$, имеет один корень, равный $+\infty$ или $-\infty$, а другой корень $-\frac{C}{B}$", или так: „Уравнение $0\cdot x^2+Bx+$ $+C=0$, где $B\neq 0$, выражает пару точек на оси X, причем одна из этих точек конечная, другая — бесконечно-удаленная".

Если в уравнении $Ax^2+Bx+C=0$ не только $A\to 0$, но и $B\to 0$, а C постоянно и не равно 0, то и второй корень неограниченно возрастает. Таким образом, можно сказать, что *уравнение* $0\cdot x^2+0\cdot x+C=0$, *где* $C\neq 0$, *имеет два бесконечно-больших корня* и что *оно выражает две совпадающих бесконечно-удаленных точки на оси* X.

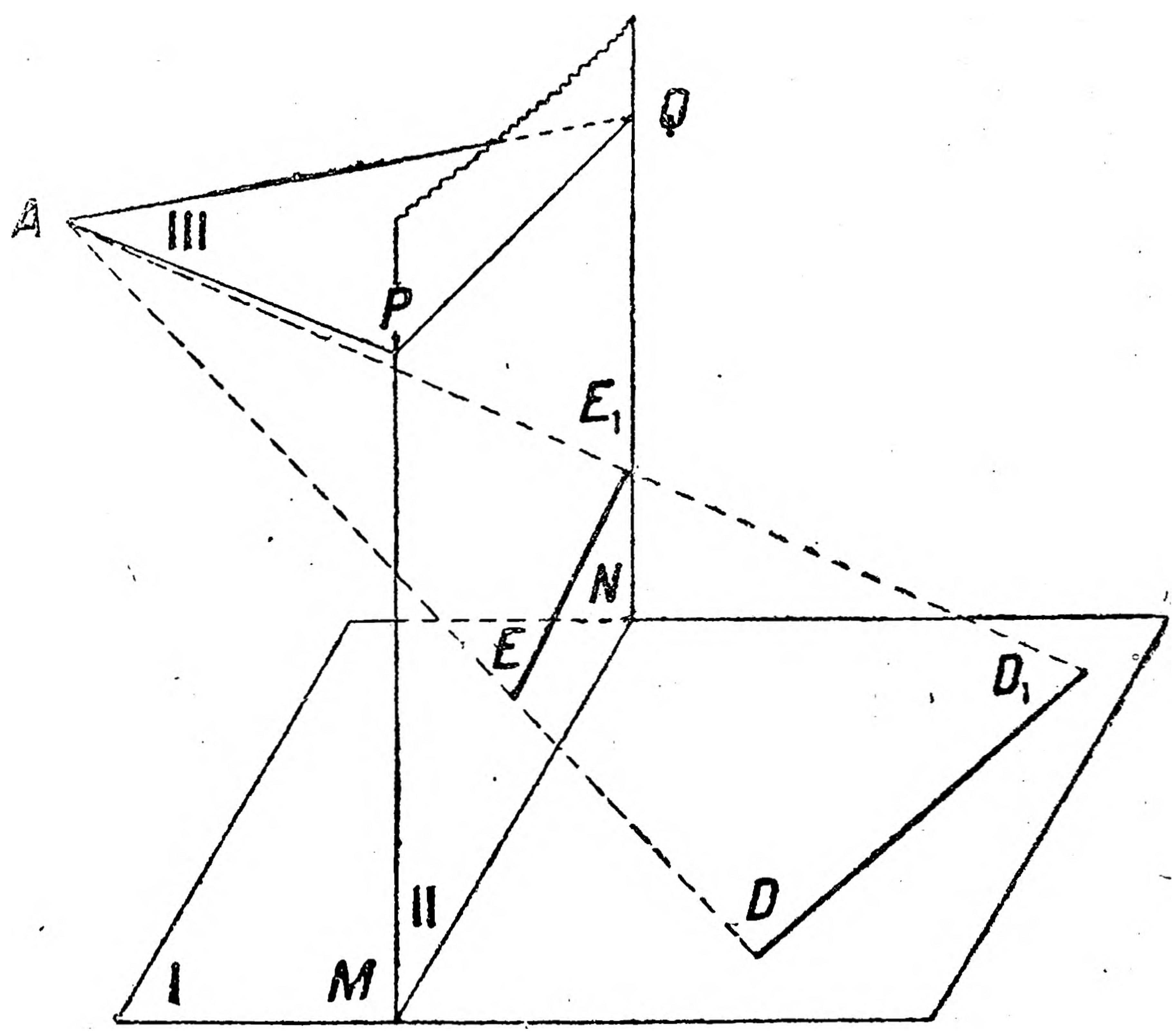
5°. Подобно понятию бесконечно-удаленной точки на прямой вводится и понятие *бесконечно-удаленной прямой на плоскости.* Возьмем общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ и будем приближать A и B одновременно к 0, сохраняя $C\neq 0$ постоянным. Изменение коэфициентов A и B соответствует некоторому *движению* прямой на плоскости. Переписав уравнение прямой в виде

$$\frac{x}{-C:A}+\frac{y}{-C:B}=1, \tag{2}$$

замечаем, что при $A \to 0$ и $B \to 0$ и постоянном $C \neq 0$ отношения $-C:A$ и $-C:B$ неограниченно возрастают по абсолютной величине, а потому изображаемая уравнением (2) прямая движется по плоскости так, что точки пересечения ее с осями координат неограниченно удаляются от начала. В пределе получается уравнение $0 \cdot x + 0 \cdot y + C = 0$, где $C \neq 0$, которое и является *уравнением бесконечно-удаленной прямой*. Величина коэфициента C не имеет при этом никакого значения — важно лишь, что $C \neq 0$.

6°. Распространяя задачу о центральном проектировании прямой на прямую, рассмотрим *центральное проектирование плоскости на плоскость*.

Поместив глаз в точке A (черт. 64), будем рассматривать плоскость I с расположенными на ней точками и прямыми и изображать эти точки и прямые на плоскости II, пересекающейся с плоскостью I по прямой MN. Для каждой точки D плоскости I легко указать ее изображение на плоскости II, а именно точку E, находящуюся в пересечении луча AD с плоскостью II. Взяв несколько точек, расположенных в плоскости I на прямой DD_1, мы получим в плоскости II ряд точек, расположенных на прямой EE_1. Таким образом, всякой прямой плоскости I соответствует некоторая определенная прямая плоскости II, ее изображающая, и обратно, всякой прямой плоскости II соответствует некоторая определенная изображаемая ею прямая плоскости I.



Черт. 64.

Особого внимания требует прямая PQ, которая получается в пересечении плоскости II с плоскостью III, проведенной через точку A параллельно плоскости I. Эта прямая PQ, не изображая никакой конечной прямой плоскости I, является предельным положением изображения прямой DD_1, если эта последняя движется по плоскости I так, что кратчайшее расстояние от нее до какой-нибудь определенной точки этой плоскости I неограниченно возрастает. Прямая PQ является изображением бесконечно-удаленной прямой плоскости I.

Справедливы следующие два предложения:

1. Если прямая движется по плоскости I в каком угодно направлении, но так, что кратчайшее расстояние от нее до какой-нибудь определенной точки плоскости I неограниченно возрастает, то ее изображение на плоскости II стремится к совпадению с прямой PQ.

Это позволяет сказать, что *на плоскости имеется только одна бесконечно-удаленная прямая*.

2. Любые две параллельные прямые плоскости I имеют своими изображениями прямые плоскости II, пересекающиеся на прямой PQ.

Это позволяет сказать, что *бесконечно-удаленная прямая на плоскости есть совокупность всех бесконечно-удаленных точек плоскости.*

Ни доказывать два последних предложения, ни развивать их мы в настоящем кратком курсе не можем. Читателя, желающего глубже ознакомиться с вопросом о бесконечно-удаленных точках и прямых, отсылаем к книге „Введение в высшую геометрию" проф. Четверухина, а также к книгам: Вебер и Вельштейн — „Энциклопедия элементарной математики", том II, книга I (перевод под ред. В. Кагана, 1913 г., стр. 343—356); Вольберг — „Основные идеи геометрии" (Гиз, 1930 г.).

Упражнения.

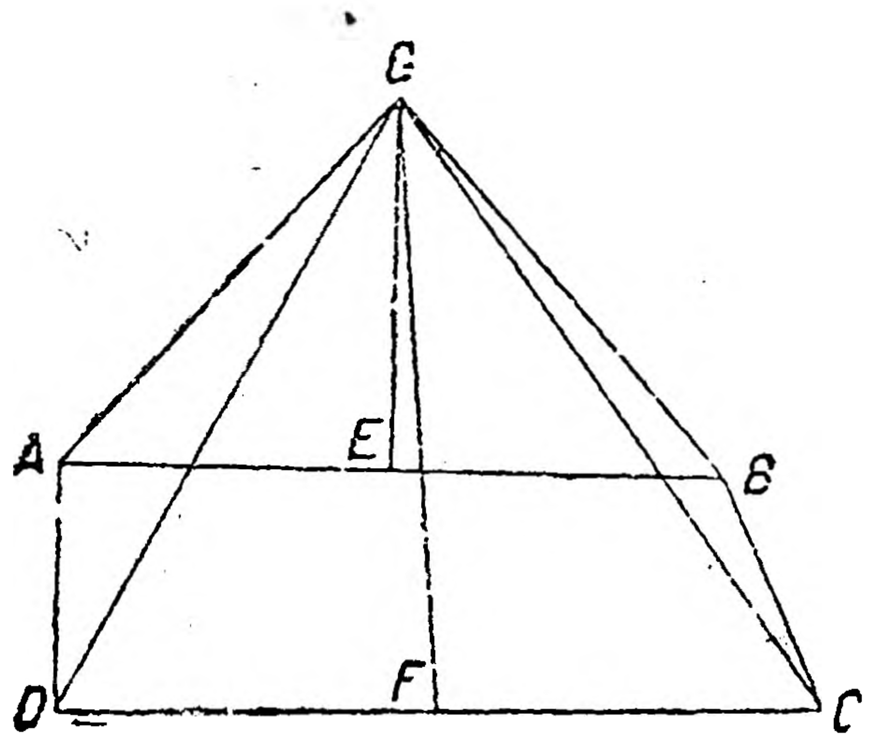
1. Найти уравнения биссектрис углов, образуемых прямыми $3x+4y-9=0$ и $12x+5y-3=0$, и показать, что эти биссектрисы перпендикулярны одна другой.

2. Решить ту же задачу в общем виде, считая данными уравнения прямых.

3. Вывести уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_0; y_0)$ и $B(x_1; y_1)$ на основе формул § 8.

4. Вывести уравнение прямой, расположенной как угодно на плоскости, исходя из уравнения оси абсцисс и применяя преобразование координат.

5. Три вершины треугольника перемещаются по трем данным прямым, причем две его стороны все время проходят через две данных точки A и B. Показать, что третья сторона треугольника все время проходит через некоторую постоянную точку, лежащую на одной прямой с точками A и B.



Черт. 65.

6. Даны точки $A(x_0; y_0)$ и $B(x_1; y_1)$. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B.

7. Найти ошибку в следующем рассуждении (*софизме*). При концах отрезка AB (черт. 65) строятся углы BAD (прямой) и ABC (тупой), на их сторонах откладываются отрезки $AD=BC$. Через середины отрезков AB и DC восставляются к ним перпендикуляры, пересекающиеся в точке G. Из равенства прямоугольных треугольников AGE и BGE вытекает равенство их гипотенуз AG и BG, а также равенство углов EAG и EBG; из равенства прямоугольных треугольников DGF и FGC равенство гипотенуз DG и CG. Треугольники ADG и BCG равны (по трем сторонам), а потому углы DAG и CBG равны. Вычитая из них по равному углу EAG и EBG, получим равные остатки DAB и CBA. Итак, прямой угол DAB равен тупому углу CBA.

Глава IV.

КРИВЫЕ II ПОРЯДКА, ВЫРАЖЕННЫЕ ПРОСТЕЙШИМИ УРАВНЕНИЯМИ.

§ 32. Некоторые кривые II порядка. Выяснив в главе III геометрический смысл общего уравнения 1-й степени с двумя переменными $Ax+By+C=0$, мы должны перейти к выяснению геометрического смысла общего уравнения 2-й степени с двумя переменными, которое можно написать в виде $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$. Но прежде чем перейти к решению этой более трудной задачи, которое откладываем до главы V, займемся в настоящей главе изучением тех кривых линий из числа уже известных нам по главе II, уравнения которых получаются из вышеуказанного общего уравнения 2-й степени при некоторых частных значениях его коэфициентов. Таких кривых мы имели четыре: круг, эллипс, гиперболу, параболу. Действительно, уравнение круга $x^2+y^2=r^2$ получается, если взять в общем уравнении $A=C=1$, $B=D=E=0$, $F=-r^2$. Уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ получается при $A=\frac{1}{a^2}, C=\frac{1}{b^2}$, $B=D=E=0$, $F=-1$, а уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ при $A=\frac{1}{a^2}$, $C=-\frac{1}{b^2}$, $B=D=E=0$, $F=-1$. Наконец, для получения уравнения параболы $y^2=2px$ надо взять $A=B=E=F=0$, $C=1$, $D=-p$.

Пользуясь этими уравнениями, мы изучим некоторые свойства четырех перечисленных кривых, причем начнем с простейшей и хорошо изученной в курсе элементарной геометрии фигуры — с круга. Некоторые уже известные свойства круга мы установим здесь еще раз, чтобы лучше освоиться с основным методом аналитической геометрии — методом координат.

Уравнение круга с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r есть, как мы видели в § 13, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Это уравнение получает особенно простой вид, если поместить начало координат в центр круга. Только этим *простейшим* уравнением, а именно уравнением $x^2+y^2=r^2$, мы и будем пользоваться в настоящей главе.

§ 33. Взаимное расположение круга и прямой. Поставим себе задачей найти общие точки круга $x^2+y^2=r^2$ и прямой $y=kx+n$. Последнее уравнение, как мы знаем, выражает любую прямую на плоскости за исключением тех, которые параллельны оси Y. Вопрос о разыскании общих точек круга и прямой, параллельной оси Y, рассмотрим особо.

Координаты общих точек круга и прямой удовлетворяют уравнениям обеих этих линий. Следовательно, геометрическая задача разыскания общих точек круга и прямой сводится к алгебраической задаче решения системы уравнений

$$x^2+y^2=r^2, \quad y=kx+n. \tag{1}$$

Подставляя вместо y выражение $kx+n$ из второго уравнения в первое и выполняя простые преобразования, получаем квадратное уравнение, содержащее одно лишь неизвестное x, и решаем его. Затем подставляем найденные значения x_1 и x_2 во второе уравнение системы (1) и получаем соответствующие значения y, а именно y_1 и y_2,

$$(1+k^2)x^2+2knx+(n^2-r^2)=0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{-kn+\sqrt{R}}{1+k^2}, \quad x_2=\frac{-kn-\sqrt{R}}{1+k^2},\\ y_1&=\frac{n+k\sqrt{R}}{1+k^2}, \quad y_2=\frac{n-k\sqrt{R}}{1+k^2},\\ R&=r^2(1+k^2)-n^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Случай 1, $R>0$. Система (1) имеет две различных системы вещественных корней, прямая имеет две различных общих точки с кругом, а именно точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Прямая является *секущей* для круга.

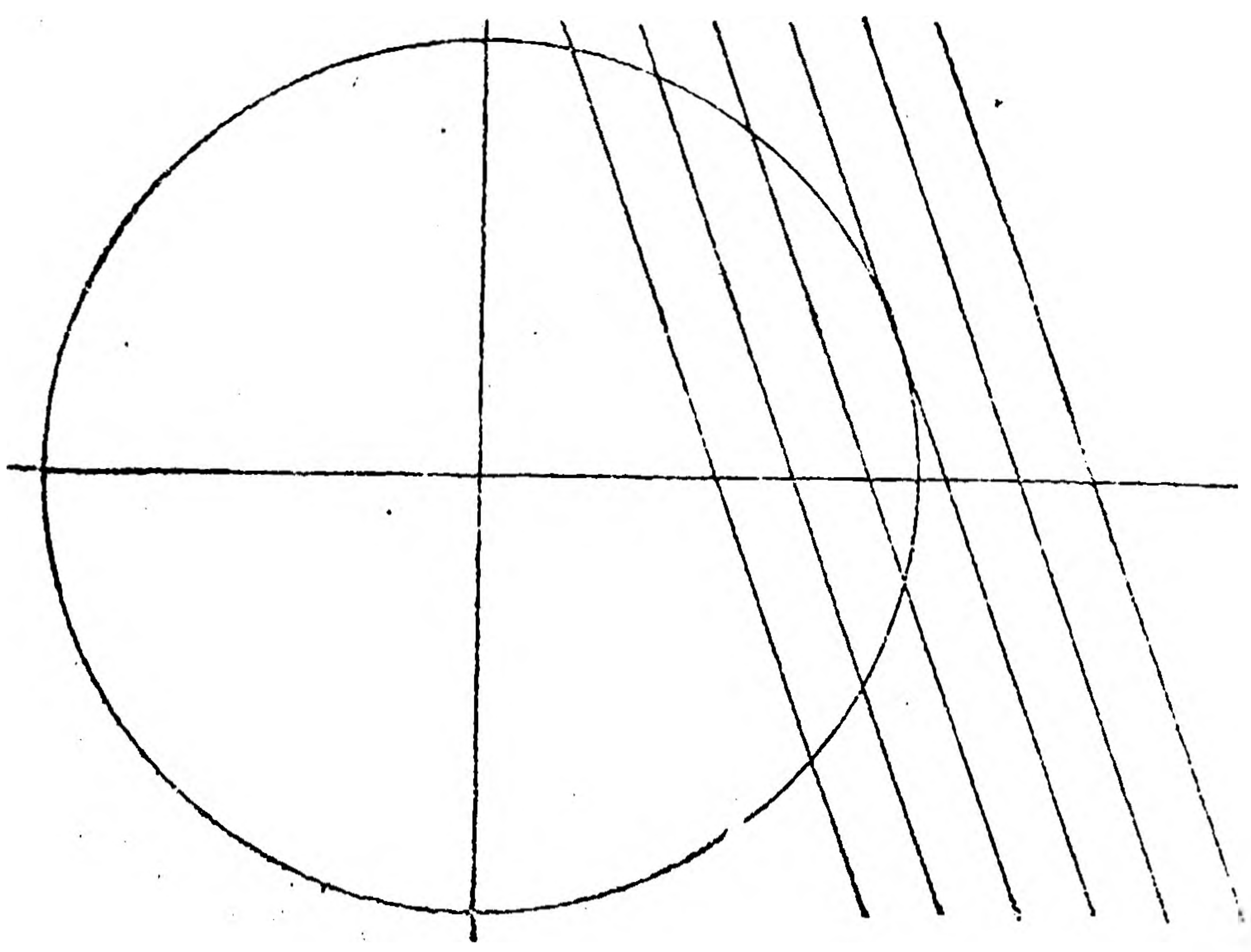
Случай 2, $R<0$. Система (1) вещественных корней не имеет, прямая и круг не имеют ни одной общей точки.

Случай 3, $R=0$. Система (1) имеет две системы равных корней, а именно

$$x_1=x_2=-\frac{kn}{1+k^2}=-\frac{kn\cdot r^2}{n^2}=-\frac{kr^2}{n};$$

$$y_1=y_2=\frac{n}{1+k^2}=\frac{nr^2}{n^2}=\frac{r^2}{n}.$$

Прямая имеет только одну общую точку с кругом, которую следует рассматривать как две совпадающих, и является поэтому *касательной* к кругу; точка $(x_0; y_0)$, где $x_0=x_1=x_2$, $y_0=y_1=y_2$, есть *точка касания*. Мы основываемся при этом на следующем определении: *касательной к кривой называется предельное положение прямой, пересекающей кривую в двух точках M и M_1, при условии, что одна из этих точек пересечения, хотя бы M, стремится к другой (M_1).*



Черт. 66.

Чертеж 66, на котором показано несколько положений прямой, перемещающейся по плоскости параллельно самой себе (угловой коэфициент k имеет постоянное значение, начальная ордината n меняется), наглядно изображает переход одного случая взаимного расположения круга и прямой в другие.

Чтобы выяснить геометрический смысл условий $R \gtreqless 0$, вычислим расстояние d от центра круга, т. е. от точки $(0; 0)$ до данной прямой $y=kx+n$. Согласно § 28 имеем:

$$d=\left|\frac{n}{\sqrt{1+k^2}}\right|, \quad d^2=\frac{n^2}{1+k^2},$$

а потому

$$R=r^2(1+k^2)-n^2=(1+k^2)\left(r^2-\frac{n^2}{1+k^2}\right)=(1+k^2)(r^2-d^2).$$

Следовательно, условие $R>0$ ($R<0$, $R=0$) выражает, что радиус круга r больше (меньше, равен) расстояния от центра круга до данной прямой, и связь значения R с числом общих точек круга и прямой становится совершенно очевидной.

Важно отметить, что те деления, какие приходится производить, вычисляя координаты точек пересечения или точки касания по формулам (2) или (3), всегда выполнимы, так как делителем служит выражение $1+k^2$, не равное 0 ни при каком k: каково бы ни было вещественное число k (а только такие мы и рассматриваем), всегда $k^2 \geqq 0$ и $1+k^2 \geqq 1$.

Те же три случая взаимного расположения круга и прямой получаются и при рассмотрении того *особого* случая, когда прямая параллельна оси Y, в чем и предлагается убедиться читателю (надо решить совместно систему $x^2+y^2=r^2$, $x=m$).

Мы рассмотрели вопрос о различных случаях взаимного расположения круга и прямой, пользуясь только аналитическим методом. Этот же метод позволяет легко доказать и ряд других теорем о круге, доказываемых в курсе элементарной геометрии на основании различных геометрических соображений. Выясним, например, под каким углом пересекаются касательная к кругу и радиус, проведенный в точку касания.

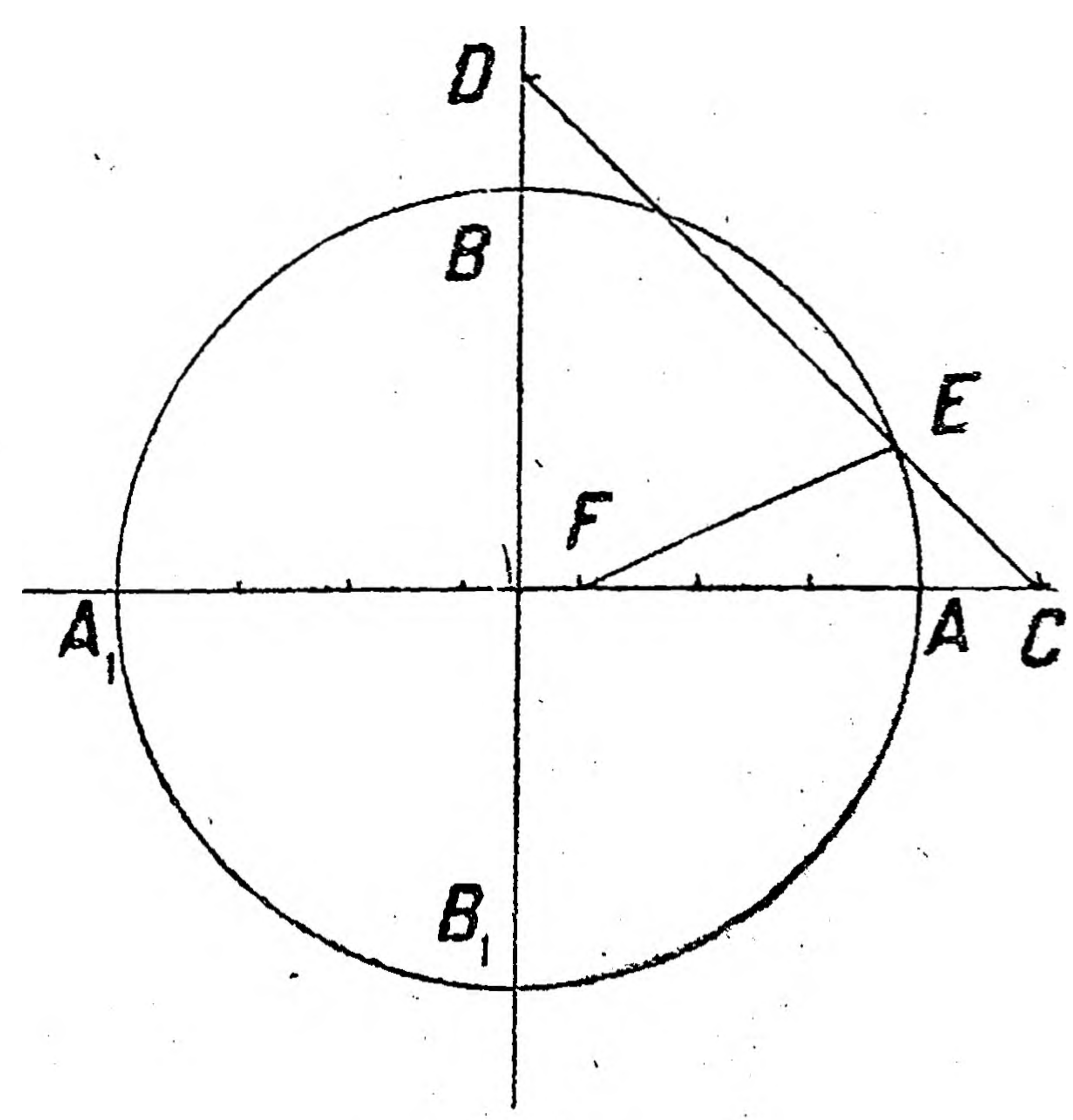
Прямая $y=kx+n$ касается круга $x^2+y^2=r^2$ при соблюдении условия $R=0$, причем точка касания имеет координаты, выражаемые формулами (3). Уравнение прямой, соединяющей начало координат с точкой касания, есть $y=-\frac{x}{k}$. Его получаем как уравнение прямой, проходящей через две данных точки (начало и точку касания). Как видим, выполняется условие перпендикулярности двух прямых (см. § 25), и мы убеждаемся в справедливости теоремы: радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной.

Упражнения.

1. Найти точки пересечения прямых $2x+3y+6=0$, $3x-4y+25=0$, $x+2y-15=0$, $x+2=0$, $x+6=0$, $x+5=0$ с кругом $y^2+x^2=25$ сперва графическим способом, потом аналитическим.

2. Найти координаты точки пересечения круга $x^2+y^2=r^2$ с прямой, заданной общим уравнением $Ax+By+C=0$, и выразить условие их касания.

3. Доказать аналитическим методом, что радиус круга, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду пополам. Доказательство провести два раза, сперва располагая оси координат наивыгоднейшим образом по отношению к данной хорде, а затем при произвольном их расположении, но принимая центр круга, как и везде в этой главе, за начало.



Черт. 67.

4. Для деления окружности круга на n равных частей ($n \geq 5$) употребляется способ, показанный на чертеже 67 для случая $n=7$. Диаметр круга A_1A делится на n равных частей. На продолжениях двух взаимно перпендикулярных диаметров A_1A и B_1B откладываются отрезки $AC=BD=AA_1:n$ и через точки C и D проводится прямая. Отрезок EF, соединяющий любую из точек пересечения прямой CD и круга, с концом *третьего* деления диаметра AA_1, считая от точки A, и дает приближенное значение хорды, стягивающей $\frac{1}{n}$ часть круга. Найти точное значение длины EF и его отклонение от хорды, стягивающей $\frac{1}{n}$ часть круга.

§ 34. Касательная и нормаль к кругу. *Нормалью* к кривой называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной. В настоящем параграфе мы рассмотрим решение важнейших задач на проведение касательных и нормалей к кругу.

Задача 1. Найти уравнения касательной и нормали к кругу $x^2+y^2=r^2$, проходящих через данную на круге точку $(x_0; y_0)$.

Задачу эту можно решить разными способами. Приводим одно из решений, основанное на применении уравнения пучка прямых, проходящих через точку $(x_0; y_0)$, а именно уравнения $y-y_0=k(x-x_0)$.

Каждая прямая этого пучка пересекает круг в двух точках, из которых одна и есть точка $(x_0;y_0)$. Нам надо найти то значение k, при котором вторая точка пересечения сливается с первой, что бывает, как мы видели выше, при $R=r^2(1+k^2)-n^2=0$. Переписывая уравнение пучка в виде $y=kx+(y_0-kx_0)$, видим, что в настоящем случае надо взять $n=y_0-kx_0$, а потому для определения k имеем уравнение $r^2(1+k^2)-(y_0-kx_0)^2=0$, или $(r^2-x_0^2)k^2+2kx_0y_0+(r^2-y_0^2)=0$. Замечая, что координаты точки $(x_0;y_0)$, находящейся на круге, удовлетворяют уравнению круга, имеем соотношение $x_0^2+y_0^2=r^2$, из которого вытекает, что $r^2-x_0^2=y_0^2$, $r^2-y_0^2=x_0^2$.

Переписывая уравнение для определения k в виде $y_0^2k^2+2x_0y_0k+x_0^2=0$, находим из него $k_1=k_2=-\frac{x_0}{y_0}$ (случай $y_0=0$ надо рассмотреть особо). Подставляя найденное единственное значение k в уравнение пучка, имеем для искомой касательной уравнение $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$, или после простых преобразований,

$$x_0x+y_0y=r^2. \tag{1}$$

Это уравнение получено в предположении, что $y_0\neq 0$. Рассматривая особый случай, когда $y_0=0$, замечаем, что он имеет место тогда, когда данная точка находится в пересечении данного круга с осью X.

В силу доказанной перпендикулярности касательной и радиуса, проведенного через точку касания, касательной в особом случае служит прямая, перпендикулярная к оси X, а именно прямая $x=r$ или $x=-r$ (при $y_0=0$ условие $x_0^2+y_0^2=r^2$ дает $x_0=\pm r$). Но уравнение (1) при $y_0=0$, $x_0=\pm r$ дает как раз $x=\pm r$. Таким образом, уравнение (1) есть уравнение касательной к кругу для всех случаев, когда данная точка $(x_0;\ y_0)$ лежит на круге, без исключения.

Уравнение нормали к кругу, проходящей через данную на круге точку $(x_0;\ y_0)$, получается из того же уравнения пучка $y-y_0=k(x-x_0)$, если определить k из условия перпендикулярности к касательной (1). Предполагая $x_0\neq 0$, получим $k=\frac{y_0}{x_0}$ и напишем уравнение нормали в виде:

$$y_0(x-x_0)=x_0(y-y_0). \tag{2}$$

Рассматривая особый случай $x_0=0$, убеждаемся, что это последнее уравнение сохраняет свою силу и для него.

Задача 2. Найти уравнение касательной к кругу $x^2+y^2=r^2$, имеющей данное направление.

Чтобы задать направление, достаточно указать прямую, имеющую это направление и проходящую через начало. Пусть эта прямая имеет уравнение $y=kx$ (случай прямой, параллельной оси Y, рассмотрим особо). Искомая касательная параллельна данной прямой.

Вопрос сводится теперь к разысканию начальной ординаты n, касательной $y=kx+n$ (угловой коэфициент равен угловому коэфициенту данной прямой $y=kx$). Значение n найдем из условия касания $R=r^2(1+k^2)-n^2=0$, что дает $n=\pm r\sqrt{1+k^2}$. Так как $1+k^2>0$, то искомых касательных всегда две. Их уравнения:

$$y = kx + r\sqrt{1+k^2}, \qquad y = kx - r\sqrt{1-k^2}. \tag{3}$$

Если заданное направление есть направление оси Y, то уравнения (3) не годятся: уравнение касательной надо искать в виде $x = m$. Учитывая перпендикулярность касательной и радиуса, проведенного через точку касания, заключаем, что уравнения касательных в этом особом случае суть

$$x = +r, \qquad x = -r. \tag{4}$$

Прямую, имеющую направление оси Y, можно получить, вращая прямую $y = kx$ около начала. Тогда угловой коэфициент неограниченно возрастает. Можно поэтому сказать, что направление оси Y характеризуется значением $k = \infty$. Однако, если мы возьмем в уравнениях (3) $k = \infty$, они ничего определенного не дадут. Если же предварительно преобразовать эти уравнения (3), а именно разделить каждую часть каждого уравнения на k, то после перехода к пределу получим как раз уравнения (4). Действительно,

$$\frac{y}{k} = \frac{kx \pm r\sqrt{1+k^2}}{k}, \qquad \frac{y}{k} = x \pm r\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}$$

при $k = \infty$, $\quad 0 = x \pm r$.

Имея в виду такую оговорку о необходимости предварительного преобразования уравнений (3) при $k = \infty$, можем сказать, что они решают поставленную задачу во всех случаях без исключения.

Задача 3. Найти уравнение касательной к кругу, проходящей через точку $(x_0;\ y_0)$, данную где угодно на плоскости.

Начинаем решение задачи точно так же, как начинали решение задачи 1, и приходим, как и там, к уравнению

$$(r^2 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0k + (r^2 - y_0^2) = 0, \tag{5}$$

определяющему угловой коэфициент искомой касательной. Те упрощения этого уравнения, какие были возможны в задаче 1 в силу того, что данная точка лежала на круге, здесь невозможны, так как сумма $x_0^2 + y_0^2$ может теперь быть и больше r^2 (если данная точка лежит вне круга), и меньше r^2 (если внутри), и равна r^2 (если на круге). Решая это уравнение относительно k, получаем:

$$k = \frac{-x_0y_0 \pm r\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - r^2}}{r^2 - x_0^2}, \tag{6}$$

откуда уравнение искомой касательной $y - y_0 = k(x - x_0)$ после всех упрощений будет:

$$y = \frac{\left(-x_0y_0 \pm r\sqrt{x_0^2+y_0^2-r^2}\right)x + \left(r^2y_0 \mp rx\sqrt{x_0^2+y_0^2-r^2}\right)}{r^2 - x_0^2}, \tag{7}$$

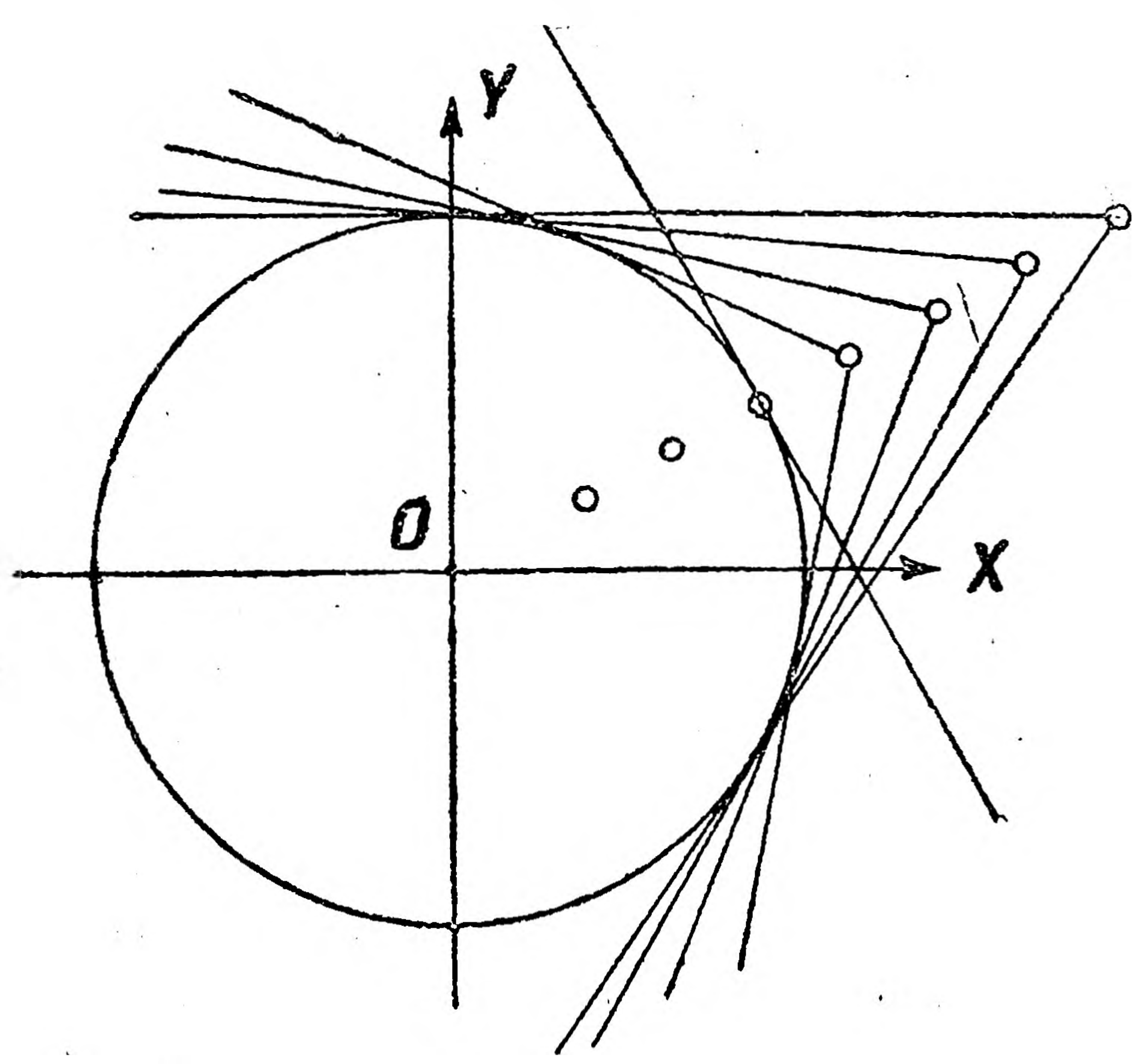
где одновременно берутся либо только верхние, либо только нижние знаки.

Исследуем результаты, выражаемые формулами (6) и (7), предположив сперва $r^2 - x_0^2 \neq 0$. В зависимости от знака подкоренного $x_0^2 + y_0^2 - r^2$ различаем три случая.

Случай 1, $x_0^2 + y_0^2 - r^2 > 0$. Формула (6) определяет два различных значения углового коэфициента k, существует пара касательных. Этот случай имеет место, если данная точка находится вне круга, так как только тогда выражение $x_0^2 + y_0^2 - r^2$ положительно (§ 13).

Случай 2, $x_0^2 + y_0^2 - r^2 < 0$. Формула (6) не дает ни одного вещественного значения k; касательных через точку $(x_0;\ y_0)$ провести нельзя. В настоящем случае данная точка находится внутри круга: только тогда $x_0^2 + y_0^2 - r^2$ отрицательно.

Случай 3, $x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$. Формула (6) дает два равных значения k; через точку $(x_0;\ y_0)$ можно провести только одну касательную. Точка расположена на круге, и мы возвращаемся к задаче 1.



Черт. 68.

На чертеже 68 показано несколько положений пары касательных к кругу, проведенных через точку, движущуюся по направлению к центру круга. Здесь ясно виден переход от случая 1 к случаю 2 через случай 3.

Остается рассмотреть *особый* случай, когда $r^2 - x_0^2 = 0$, т. е. тот, когда $x_0 = +r$ или $x_0 = -r$. Коэфициент при k^2 в квадратном уравнении, определяющем угловой коэфициент касательной, обращается при этом в 0, и уравнение это сводится к линейному

$$2kx_0y_0 + (r^2 - y_0^2) = 0,$$

откуда при условии $y_0 \neq 0$ находим

$$k = -\frac{r^2 - y_0^2}{2x_0y_0}.$$

Теперь легко получить и уравнение касательной

$$y = \frac{y_0^2 - r^2}{2x_0y_0}x + \frac{y_0^2 + r^2}{2y_0}. \tag{8}$$

Мы нашли таким образом одну касательную. Между тем, при $x_0 = \pm r$, $y_0 \neq 0$ точка $(x_0;\ y_0)$ находится вне круга, и геометрически очевидно, что здесь должны быть две касательных. Получившееся противоречие разрешается, если принять во внимание, что уравнение пучка $y - y_0 = k(x - x_0)$, которым мы пользовались при решении настоящей задачи, как и задачи 1, выражает не все прямые пучка, а лишь прямые, не параллельные оси Y. Действительно, в настоящем (особом) случае второй касательной является прямая $x = r$ (при $x_0 = r$) или прямая $x = -r$ (при $x_0 = -r$).

Наконец, в случае $x_0 = \pm r$, $y_0 = 0$, который мы оставили в стороне, линейное уравнение $2x_0y_0k + (r^2 - y_0^2) = 0$ ничего не дает, так как сводится к $0 \cdot k + r^2 = 0$. Принимая во внимание, что здесь данная точка есть одна из точек пересечения круга с осью X, замечаем, что здесь обе касательных параллельны оси Y и сливаются в одну, уравнение которой $x = r$ или $x = -r$.

Можно показать, что результаты, полученные нами при рассмотрении особого случая, получаются из той же формулы (6), которую мы вывели для общего случая. В самом деле, предположим, что точка $(x_0; y_0)$ движется так, что x_0 приближается к r от значений, больших r, а y_0 сохраняет постоянное значение, не равное 0. Тогда коэфициент $r^2 - x_0^2$ старшего члена уравнения (5), из которого мы определили угловой коэфициент касательной k, стремится к 0, а коэфициент при k в первой степени отличен от 0. Согласно 4° § 31 имеем, что один из корней уравнения (5) равен здесь ∞, а другой $\frac{y_0^2 - r^2}{2x_0y_0}$. Таким образом, при $x_0 = r$, $y_0 \neq 0$ одна касательная имеет угловой коэфициент $\frac{r^2 - y_0^2}{-2ry_0}$ и выражается, как легко видеть, уравнением (8), другая же имеет угловой коэфициент ∞ и выражается уравнением $x = r$. При $x_0 = -r$, $y_0 \neq 0$ получаются аналогичные результаты. Если же $x_0 = \pm r$, а $y_0 = 0$, то не только k_2, но и k_1 обращается в ∞. Выражаясь точнее, можем сказать, что при $x_0 = \pm r$ и y_0, стремящемся к 0, k_1 неограниченно возрастает, а потому при $y_0 = 0$ обе касательных, будучи параллельными оси Y и проходящими через точку $x_0 = \pm r$, $y_0 = 0$, выражаются одним и тем же уравнением $x = \pm r$, т. е. сливаются в одну.

Упражнения.

1. Построить касательную к кругу $x^2 + y^2 = 25$, проходящую через точку (3; —4), применяя два способа: а) геометрический (начертив данный круг и проводя через данную на круге точку перпендикуляр к радиусу, проведенному в эту точку) и б) аналитический (строя касательную по ее уравнению (1).

2. Вывести уравнение касательной (1) еще раз, исходя из формул (3) § 33 для координат точек касания.

3. К кругу $x^2 + y^2 = r^2$ провести касательные, параллельные прямой $y = 1{,}5\,x$ (два способа).

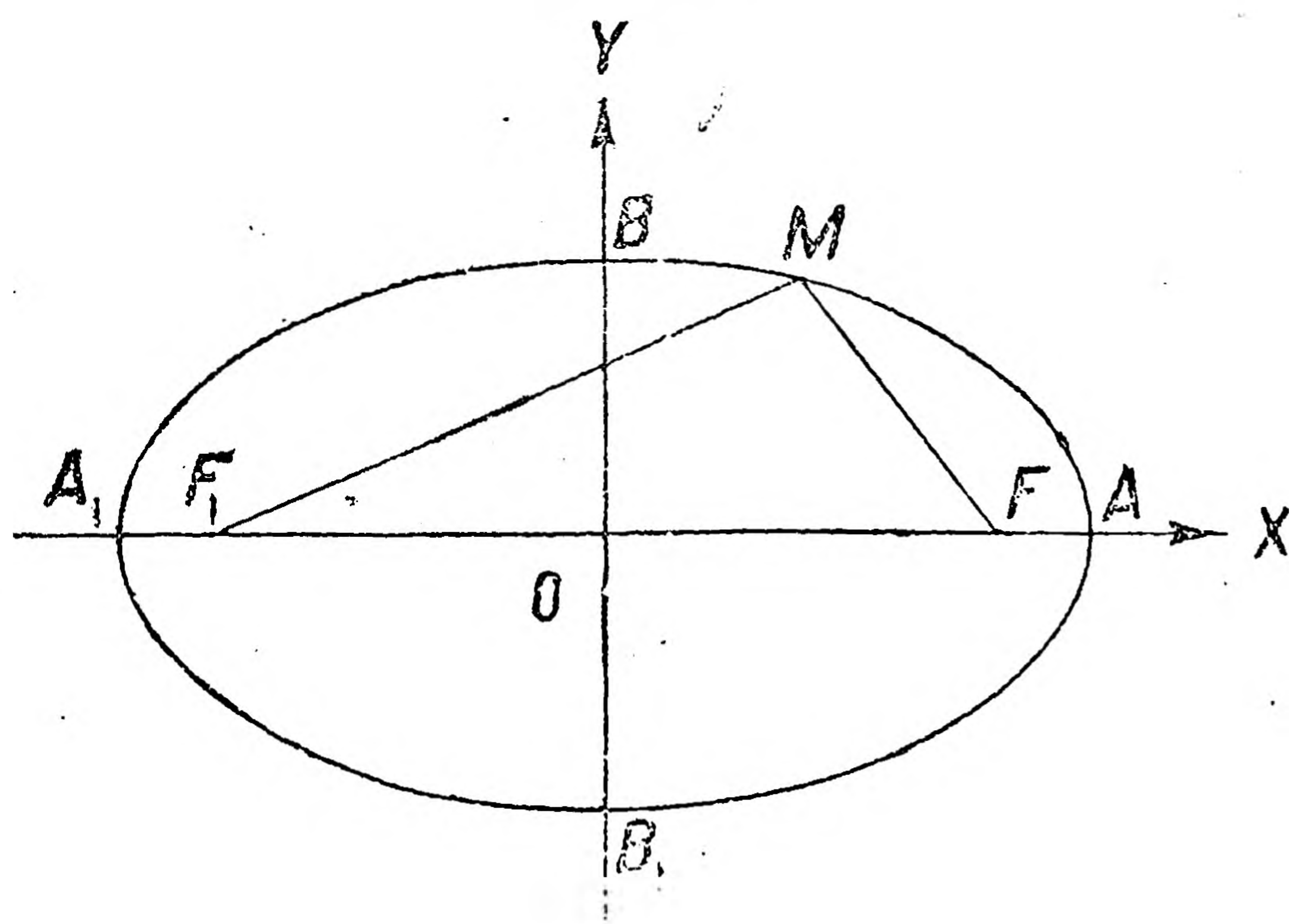
4. Через точку (— 6; 4) провести касательные к кругу $x^2 + y^2 = 9$ (два способа).

5. Та же задача для точки (— 3; 4).

6. Найти уравнение касательной к кругу $x^2 + y^2 = r^2$, проходящей через данную на оси X точку $(x_0; 0)$ (с подробным исследованием по образцу того, какое дано в тексте для задачи 3).

§ 35. Круг и эллипс. Оси симметрии и центр симметрии эллипса. Сжатие и эксцентриситет. Параметр. 1°. В § 17 мы ознакомились с эллипсом, т. е. такой кривой, для каждой точки которой сумма расстояний от двух данных точек плоскости (так называемых „фокусов" эллипса) есть величина постоянная, и видели, каким образом можно получить сколько угодно точек эллипса, зная его фокусы (на черт. 69 F и F_1) и постоянную сумму расстояний от фокусов до произвольной точки эллипса M. Отрезки FM и F_1M носят название „фокальных радиусов-векторов" эллипса и обозначаются через r и r_1, а постоянное значение их суммы — через $2a$, так что $(r_1 + r_2 = 2a)$.

Отрезок прямой, проходящей через оба фокуса, от одной точки пересечения с эллипсом A до второй точки пересечения с ним A_1 называется „фокальной", или „большой", осью эллипса, а середина отрезка FF_1 — „центром" эллипса. Тот отрезок прямой BB_1, перпендикулярной к большой оси эллипса и проходящей через его центр, который содержится между точками пересечения с эллипсом, называется „малой" осью эллипса. Точки A, A_1, B, B_1, т. е. концы большой и малой осей эллипса, называются его „вершинами".



Черт. 69.

Кроме рассмотренного в § 17 способа вычерчивания эллипса по точкам, получаемым посредством засечек, применяется также вычерчивание его непрерывным движением посредством нити. В точках F и F_1 закрепляются концы гибкой и нерастяжимой нити, длина которой больше расстояния между фокусами $FF_1 = 2c$ и равна $2a$. Нить натягивается карандашом, острие которого помещается в точке M и движется по плоскости так, что нить остается все время натянутой. Фокальные радиусы-векторы будут при этом изменяться, но сумма их останется все время постоянной и равной $2a$, а потому карандаш вычертит эллипс.

Направив ось X по большой, а ось Y по малой оси эллипса и, обозначив разность $a^2 - c^2$ через b^2, мы получили в § 17 уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

которому удовлетворяют координаты x, y любой точки эллипса. Если вместо x и y в уравнение (1) подставить координаты какой-нибудь точки, находящейся внутри эллипса, то левая часть уравнения (1) окажется, как мы видели в § 17, меньше правой, а подстановка координат точки, находящейся вне эллипса, даст левой части значение, большее правой.

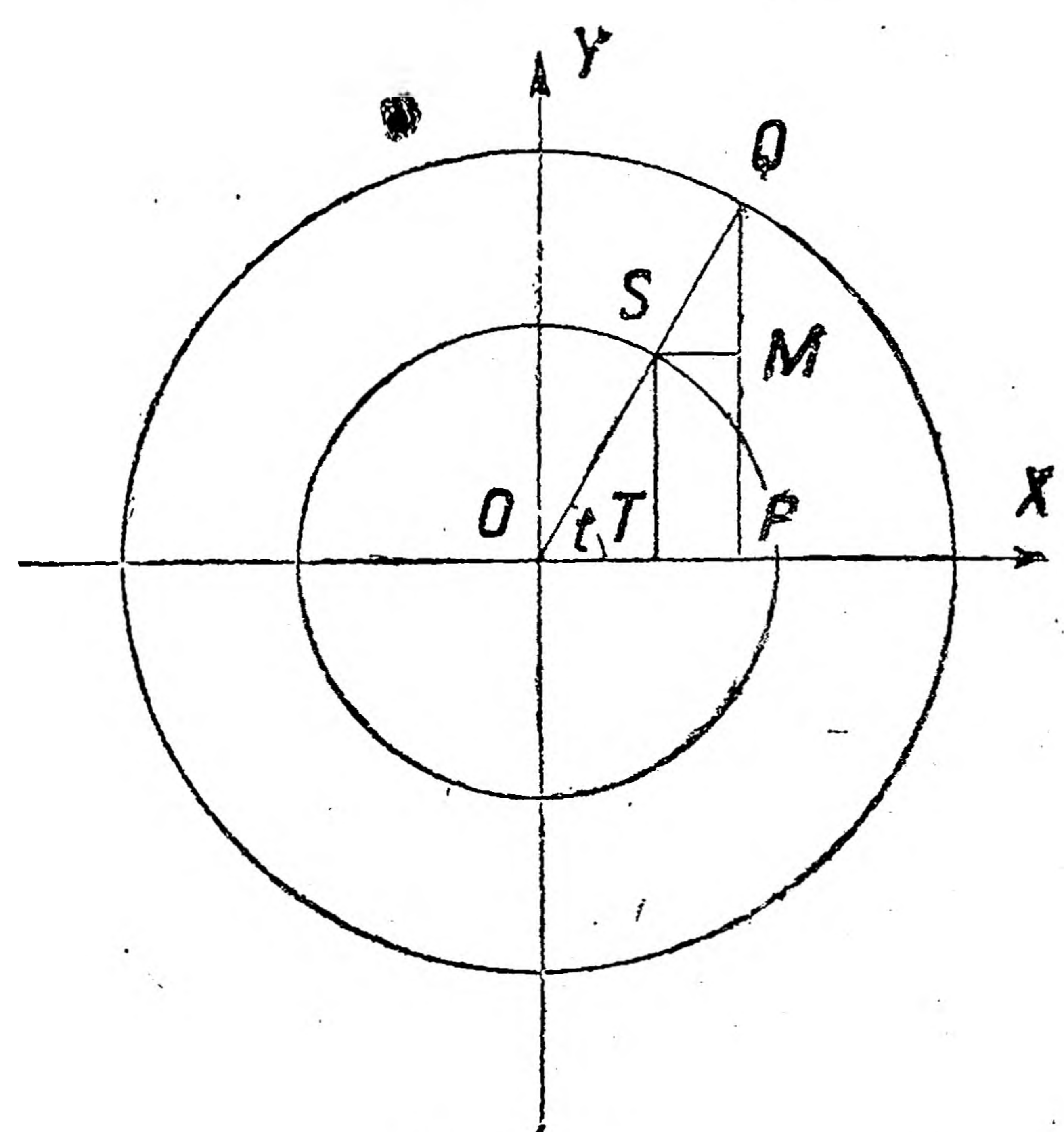
Если бы мы ничего не знали о форме эллипса, а имели бы только его уравнение (1), то на основании этого уравнения легко было бы составить представление о том, какова форма эллипса. Действительно, решив уравнение (1) относительно y, получим

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2}$$

Подкоренное выражение не может принимать отрицательных значений, так как иначе мы получили бы мнимые значения для y, а потому $x^2 \leqq a^2$. Это показывает, что точки эллипса располагаются на полосе между прямыми $x = -a$ и $x = +a$. С изменением x от $-a$ до 0 и дальше до $+a$ абсолютные значения ординаты, как показывает формула (2), сперва растут от 0 до $+b$, затем убывают от $+b$ до 0. Двойной знак в формуле (2) показывает, что каждому значению x между $-a$ и $+a$ соответствуют две точки эллипса, расположенные симметрично относительно большой его оси. Итак, точки $(-a;\ 0)$ и $(+a;\ 0)$ являются крайними точками эллипса слева и справа, точки $(0;\ b)$ и $(0;\ -b)$ — сверху и снизу. Попутно выяснился и геометрический смысл величины b, введенной нами формулой $b^2 = a^2 - c^2$: это не что иное как длина „малой полуоси“ эллипса OB или OB_1, подобно тому как a есть длина его „большой полуоси“ OA или OA_1.

Уравнение круга, центр которого находится в начале координат, можно написать в виде $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$, где r — радиус круга. Таким образом, круг является частным случаем эллипса, а именно таким эллипсом, у которого обе полуоси равны $(a = b = r)$. В силу соотношения $a^2 - c^2 = b^2$ для круга $c = 0$ и оба его фокуса совпадают с центром.

Родство между эллипсом и кругом находит свое выражение, между прочим, и в том, что проекция круга, вычерченного в некоторой плоскости на какую-нибудь плоскость, ей не параллельную, есть эллипс (см. задачу 5 § 17). Используем это родство, чтобы дать новый и очень удобный способ вычерчивания эллипса, четвертый по счету (первый способ основан на получении точек эллипса посредством засечек и рассмотрен в § 17, второй — на вычислении координат точек эллипса по его уравнению и рассмотрен там же, третий — на применении нити).



Черт. 70.

Начертим два концентрических круга, один радиусом a, другой b, оба с центром в начале координат (черт. 70). Уравнение первого из них после решения относительно y дает для ординаты точки на круге выражение

$$y_к = +\sqrt{a^2 - x^2},$$

которое сравним с выражением для ординаты точки на эллипсе:

$$y_э = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Рассматриваем только верхние половины обеих кривых, а потому берем в обоих случаях только знак плюс.

Две точки с одной и той же абсциссой x, из которых одна лежит на эллипсе, другая на круге, имеют ординаты, отношение которых $y_э : y_к = b : a$. Таким образом, чтобы построить эллипс, надо построить круг радиуса a и уменьшить все его ординаты в отношении $b : a$. Это уменьшение с удобством выполняется графически. Надо из точки пересечения произвольного радиуса OQ с внутренним кругом (радиуса b) провести прямую, параллельную оси X, а из точки пересечения этого же радиуса с внешним кругом (радиуса a) провести прямую, перпендикулярную оси X. Точка пересечения этих двух вспомогательных прямых принадлежит искомому эллипсу. Справедливость этого легко усматривается из чертежа 70, на котором проведена еще одна вспомогательная прямая $ST \parallel OY$. Подобные треугольники OST и OQP дают пропорцию $ST:QP = OS:OQ$ или $MP:y_к = b:a$, что показывает, что $MP = y_э$. Построение точек эллипса этим способом идет очень быстро. Вспомогательных линий нет надобности проводить целиком: достаточно лишь отметить точки S, Q, M для разных положений радиуса OQ.

Обозначая угол XOQ через t и замечая, что при обходе всего эллипса этот угол меняется от 0 до 2π, мы можем выразить координаты любой точки на эллипсе через параметр t формулами

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t. \tag{3}$$

Эти два уравнения представляют собой „параметрические" уравнения эллипса. Они равносильны уравнению (1), которое получается из уравнений (3), если исключить из них t:

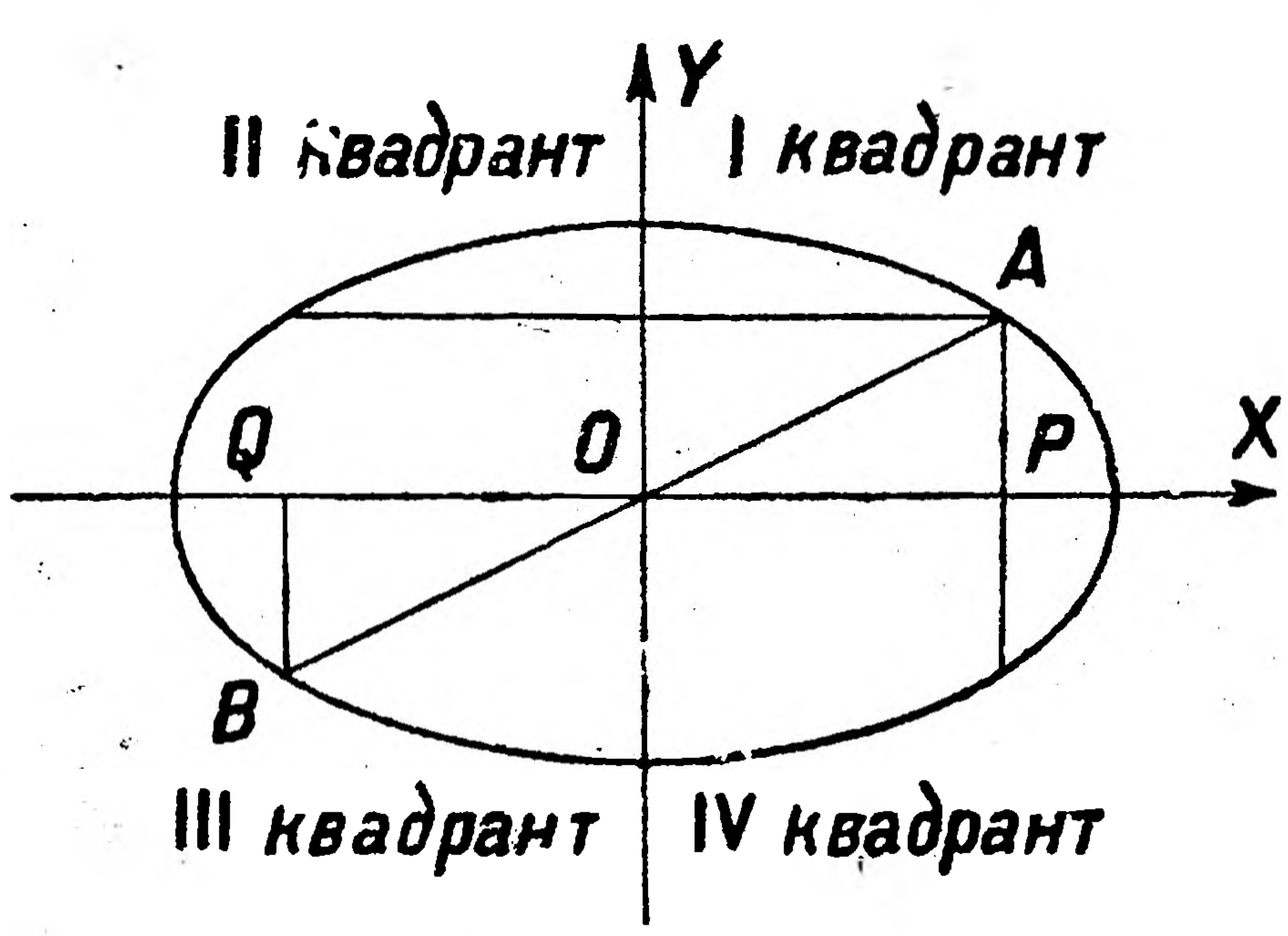
$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

2°. Уравнение (1) позволяет легко доказать следующую теорему: *если точка с координатами* $(x_0;\ y_0)$ *находится на эллипсе (1), то и точки* $(-x_0;\ y_0)$, $(x_0; -y_0)$, *симметричные ей относительно осей* X, Y, *находятся на эллипсе; точно так же на эллипсе находится точка* $(-x_0; -y_0)$, *симметричная ей относительно начала координат.*

Для доказательства достаточно заметить, что выполнение условия $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ влечет за собой и выполнение условий:

$$\frac{(-x_0)^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{(-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(-x_0)^2}{a^2} + \frac{(-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Доказанную теорему можно иначе формулировать так: для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ каждая из осей координат есть *ось симметрии*, а начало координат есть *центр симметрии* (или просто *центр*).



Черт. 71.

Всякая хорда эллипса, проходящая через его центр, называется его *диаметром*. Точки $A(x_0;\ y_0)$ и $B(-x_0; -y_0)$ лежат на одном и том же диаметре, и из равенства треугольников AOP и BOQ следует, что $AO = OB$ (черт. 71). Таким образом, получается следующее следствие теоремы: *всякий диаметр эллипса делится в его центре пополам.*

Симметрия эллипса позволяет при вычерчивании эллипса ограничиваться только одной его четвертью (одним *квадрантом*), так как остальные три легко получаются простым построением: из каждой полученной точки первого квадранта надо опустить перпендикуляры на оси X и Y и, продолжив эти перпендикуляры, отложить на них отрезки, равные по абсолютной величине координатам данной точки второго квадранта (черт. 71). Получатся точки второго и четвертого квадрантов. Точки третьего квадранта можно получить, либо повторяя такую *симметризацию* над точками второго квадранта (относительно оси X) или над точками четвертого квадранта (относительно оси Y), либо проведя через точки первого квадранта диаметры. Часто построение симметричных частей фигуры возможно бывает механизировать (перегибанием чертежа по оси симметрии или двойным копированием).

При $a \neq b$ никаких других осей симметрии эллипс не имеет: его нельзя перегнуть ни по какой другой прямой так, чтобы обе его половины совпали (доказательство этого утверждения будет дано в § 38). Иначе обстоит дело с кругом: перегибая его по любому диаметру, мы совместим обе его половины. Кроме центра симметрии, круг имеет, таким образом, бесчисленное множество осей симметрии.

3°. Как мы видели выше, всякий эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ можно рассматривать как круг $x^2+y^2=a^2$, ординаты всех точек которого уменьшены в одном и том же отношении $b:a$. Выражаясь менее точно, можно сказать, что *эллипс есть сжатый круг*. Легко показать, что всякий эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ можно рассматривать как круг $x^2+y^2=b^2$, абсциссы всех точек которого увеличены в одном и том же отношении $a:b$, и что эллипс можно поэтому получить не только через сжатие, но и через *растяжение* некоторого круга.

Чтобы характеризовать меру этой деформации, превращающей круг в эллипс, пользуются понятиями *сжатия* и *эксцентриситета* эллипса. Сжатием эллипса k называют отношение разности его полуосей к большой его полуоси, а эксцентриситетом e — отношение расстояния между фокусами к большой оси:

$$k=\frac{a-b}{a}=1-\frac{b}{a}, \quad e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{3}$$

Круг есть эллипс, у которого как сжатие, так и эксцентриситет равны нулю. Как видно из формул (3), у всякого эллипса $k<1$, $e<1$. Чем ближе k и e к 1, тем больше вытянут эллипс.

Отметим еще, что ордината эллипса, проходящая через его фокус, носит название его „параметра“ и обыкновенно обозначается буквой p. Легко видеть, что $p=\frac{b^2}{a}$.

Упражнения.

1. Возьмите плотную бумагу или тонкий картон и вычертите эллипсы с полуосями $a=40$ *мм*, $b=25$ *мм* и $a=20$ *мм*, $b=15$ *мм*. Вырежьте эти эллипсы и полученные шаблоны сохраните: они пригодятся в дальнейшей работе.

2. Написать параметрические уравнения круга с центром в начале координат и выяснить геометрический смысл параметра t.

3. Выяснить, являются ли оси координат осями симметрии, а начало — центром симметрии для кривых, заданных уравнениями $x^3+y^3-3axy=0$, $x^2+y^2+2ax=0$, $3x^2-2xy+y^2=10$, $xy=a^2$, $y^2=2px$.

4. Меридиональное сечение земного сфероида, т. е. его сечение плоскостью, проходящей через его ось вращения, есть эллипс с полуосями $a=6378{,}388$ *км* и $b=6356{,}911$ *км* (по Хейфорду). Найти его сжатие и эксцентриситет с тремя значащими цифрами.

5. Расстояние между фокусами эллипса 5 *см*, большая ось 13 *см*. Найти малую ось, сжатие, эксцентриситет.

6. Как выражаются длины полуосей эллипса в зависимости от величины c (расстояние от центра до фокуса) и e (эксцентриситет)?

7. Земля движется вокруг Солнца по эллипсу с большой полуосью $a=149{,}5$ млн. *км* и эксцентриситетом $e=0{,}0168$, причем Солнце находится в одном из фокусов. Если изобразить эту „орбиту“ Земли на чертеже в масштабе в 1 *мм* 20 млн. *км*, то насколько придется удалить центр Солнца от центра эллипса? Какой окажется на чертеже разница между a и b? Сопоставить результаты с тем историческим фактом, что уже Гиппарху более 2000 лет назад было известно эксцентричное положение Солнца (или вернее Земли, так как тогда Земля считалась неподвижной), между тем как эллиптическая форма земной орбиты была установлена лишь в начале XVII в. Кеплером.

§ 36. Взаимное расположение эллипса и прямой. Чтобы найти общие точки эллипса и прямой, предположим сперва, что прямая не параллельна оси Y, и решим систему

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y=kx+n. \tag{1}$$

Применяя способ подстановки, находим две системы корней:

$$\begin{gathered} x_1=\frac{-a^2kn+ab\sqrt{R}}{a^2k^2+b^2}, \qquad x_2=\frac{-a^2kn-ab\sqrt{R}}{a^2k^2+b^2}, \\ y_1=\frac{b^2n+abk\sqrt{R}}{a^2k^2+b^2}, \qquad y_2=\frac{b^2n-abk\sqrt{R}}{a^2k^2+b^2}, \\ R=a^2k^2+b^2-n^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Знаменатель $a^2k^2+b^2$ всегда больше нуля, а потому надо обратить внимание лишь на знак R. Различаем три случая: $R>0$, $R<0$, $R=0$.

Случай 1, $R>0$. Система (1) имеет две различных системы вещественных корней, прямая имеет две различных общих точки с эллипсом, а именно $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$. Прямая является секущей для эллипса.

Случай 2, $R<0$. Система (1) вещественных корней не имеет, прямая не имеет общих точек с эллипсом.

Случай 3, $R=0$. У системы (1) две системы равных корней, прямая имеет лишь одну общую точку с эллипсом и является касательной к нему в точке с координатами $x_1=x_2=x_0$, $y_1=y_2=y_0$, где

$$x_0=-\frac{a^2kn}{a^2k^2+b^2}=-\frac{a^2kn}{n^2}=-\frac{a^2k}{n}, \quad y_0=+\frac{b^2}{n}. \tag{3}$$

Чтобы установить, какие случаи взаимного расположения возможны у эллипса с прямой, параллельной оси Y, надо решить совместно систему $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $x=m$. Легко видеть, что здесь получаются те же три случая: при $a^2-m^2>0$ прямая пересекает эллипс, при $a^2-m^2<0$ общих с ним точек не имеет, при $a^2-m^2=0$ касается его в точке $x_0=a$, $y_0=0$ или в точке $x_0=-a$, $y_0=0$.

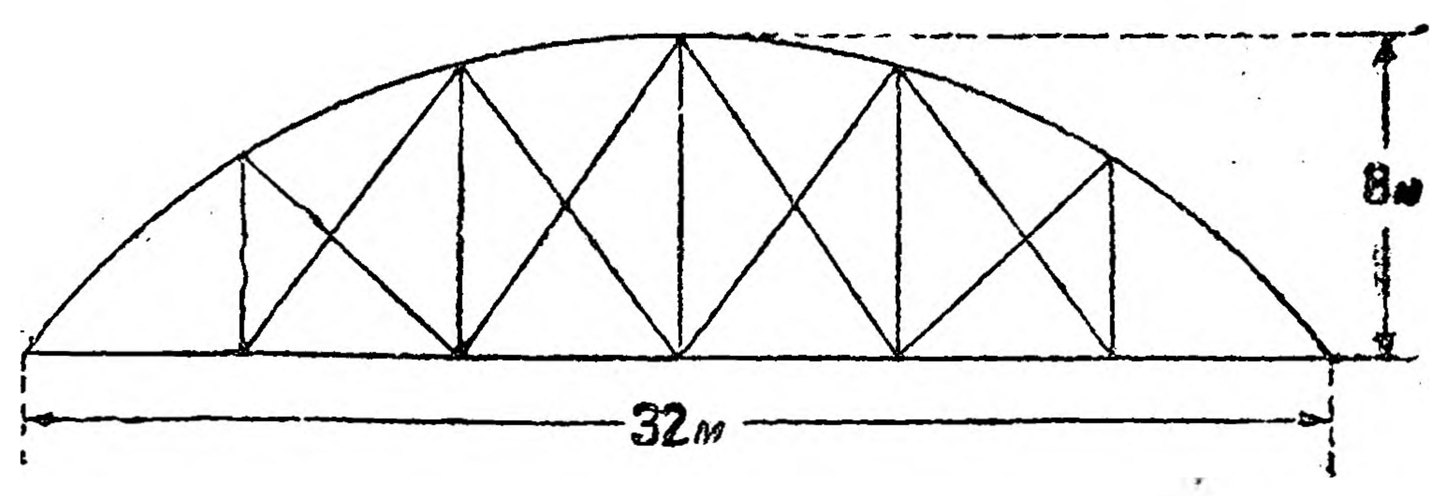
Упражнения.

1. Найти точки пересечения прямой $x+y+2=0$ и эллипса $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2{,}5^2}=1$ сперва графически, пользуясь одним из приготовленных шаблонов (см. упражнение 1 § 35), затем аналитически.

2. Рассмотреть различные случаи взаимного расположения того же эллипса и прямой, параллельной прямой $y=0{,}5x$.

3. Рассмотреть различные случаи взаимного расположения того же эллипса и прямой, проходящей: а) через точку (0; 5) и в) через точку (4; 3).

4. Ферма моста, изображенная на чертеже 72, ограничена сверху дугой эллипса, которую получили, проведя в эллипсе хорду параллельно его большой оси на расстоянии в одну треть малой оси от нее. Эта хорда разделена на 6 равных частей. Найти с точностью до 1 *мм* длины изображенных на чертеже стоек, исходя из указанных на чертеже размеров. С какой точностью можно получить искомые отрезки по чертежу? В каком масштабе следовало бы выполнить чертеж, чтобы получить искомые отрезки с требуемой точностью графически?



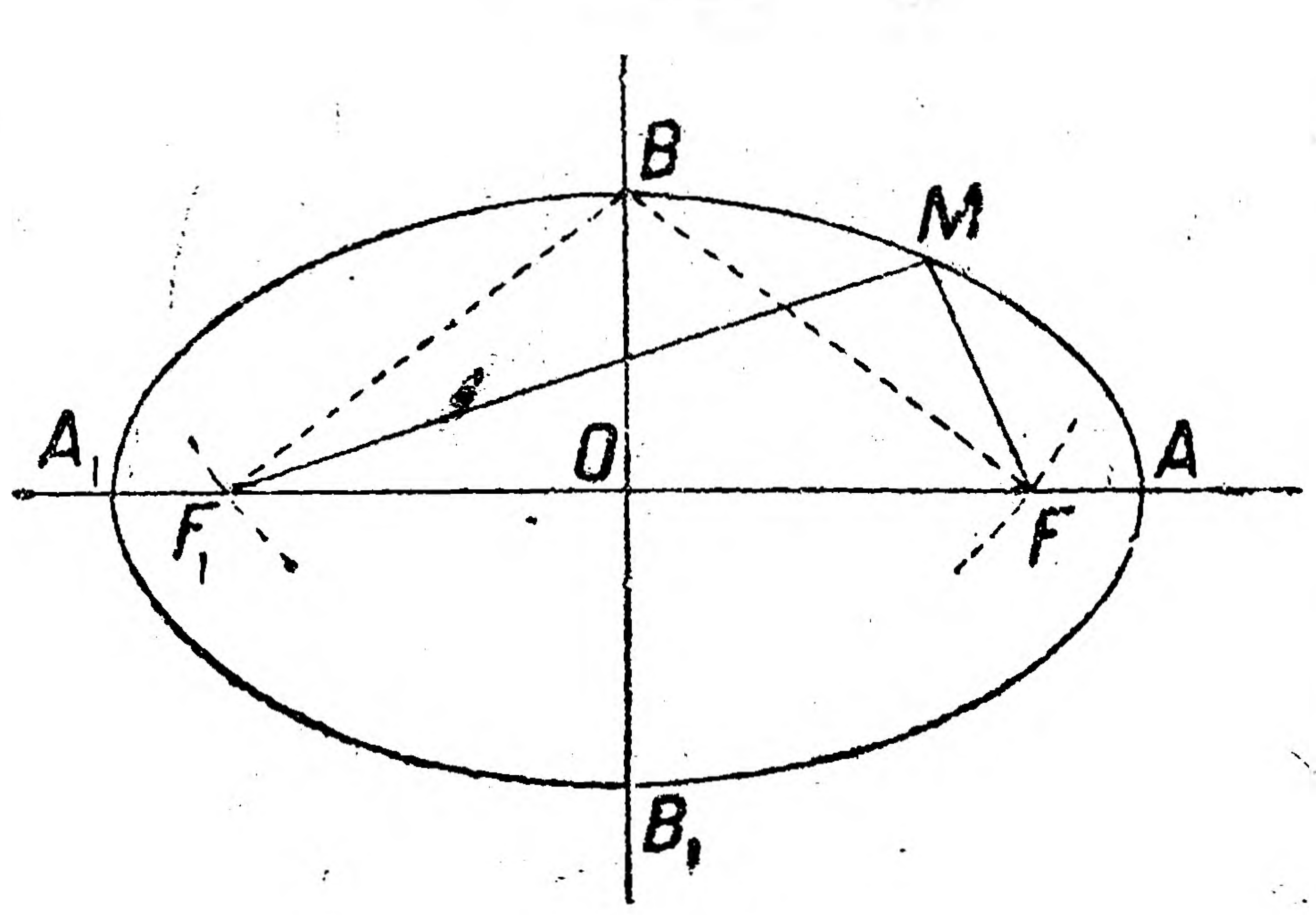
Черт. 72.

§ 37. Фокусы и директрисы эллипса. При обычном расположении эллипса относительно координатных осей, когда ось X направлена по большой, а ось Y по малой оси эллипса, фокусы эллипса находятся в точках $(c;\ 0)$ и $(-c;\ 0)$. Если известны величины полуосей эллипса a и b, то значение c находится из соотношения $a^2 - c^2 = b^2$. Оно показывает, что отрезок c равен катету прямоугольного треугольника с гипотенузой a и другим катетом b. По данным a и b отрезок c либо вычисляется по формуле $c = +\sqrt{a^2 - b^2}$, либо находится построением, понятным из чертежа 73, где $BF = BF_1 = a$, $OF = OF_1 = c$.

Найдем расстояния $r = FM$ и $r_1 = F_1M$ от фокусов до произвольной точки эллипса с координатами x и y, принимая во внимание, что эти координаты связаны уравнением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \\ &= x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \\ &= \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2 = \\ &= (a + ex)^2. \end{aligned}$$

Здесь буквой e обозначен эксцентриситет эллипса $\frac{c}{a}$, причем $0 < e < 1$. Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, находим, что $r_1 = \pm(a + ex)$. Знак минус отбрасываем, так как $r_1 > 0$, а выражение в скобке всегда, даже при $x < 0$, положительно (наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение x есть $-a$, и тогда $a + ex = a - \frac{c}{a}\cdot a = a - c > 0$. Итак, $r_1 = a + ex$. Точно таким же образом, или используя зависимость $r + r_1 = 2a$, найдем, что $r = a - ex$. Эти формулы *фокальных радиусов-векторов*



Черт. 73.

$$r = a - ex, \quad r_1 = a + ex \tag{1}$$

будут нередко применяться в дальнейшем изложении. Они показывают, что эти расстояния выражаются линейной функцией абсциссы точки на эллипсе. Можно показать, что только фокусы эллипса обладают этим свойством: расстояние от любой другой точки плоскости до точки, движущейся по эллипсу, выражается формулой, содержащей абсциссу движущейся точки под знаком корня.

Перепишем формулы (1) в несколько ином виде, а именно:

$$r = e\left(\frac{a}{e} - x\right), \quad r_1 = e\left(\frac{a}{e} + x\right)$$

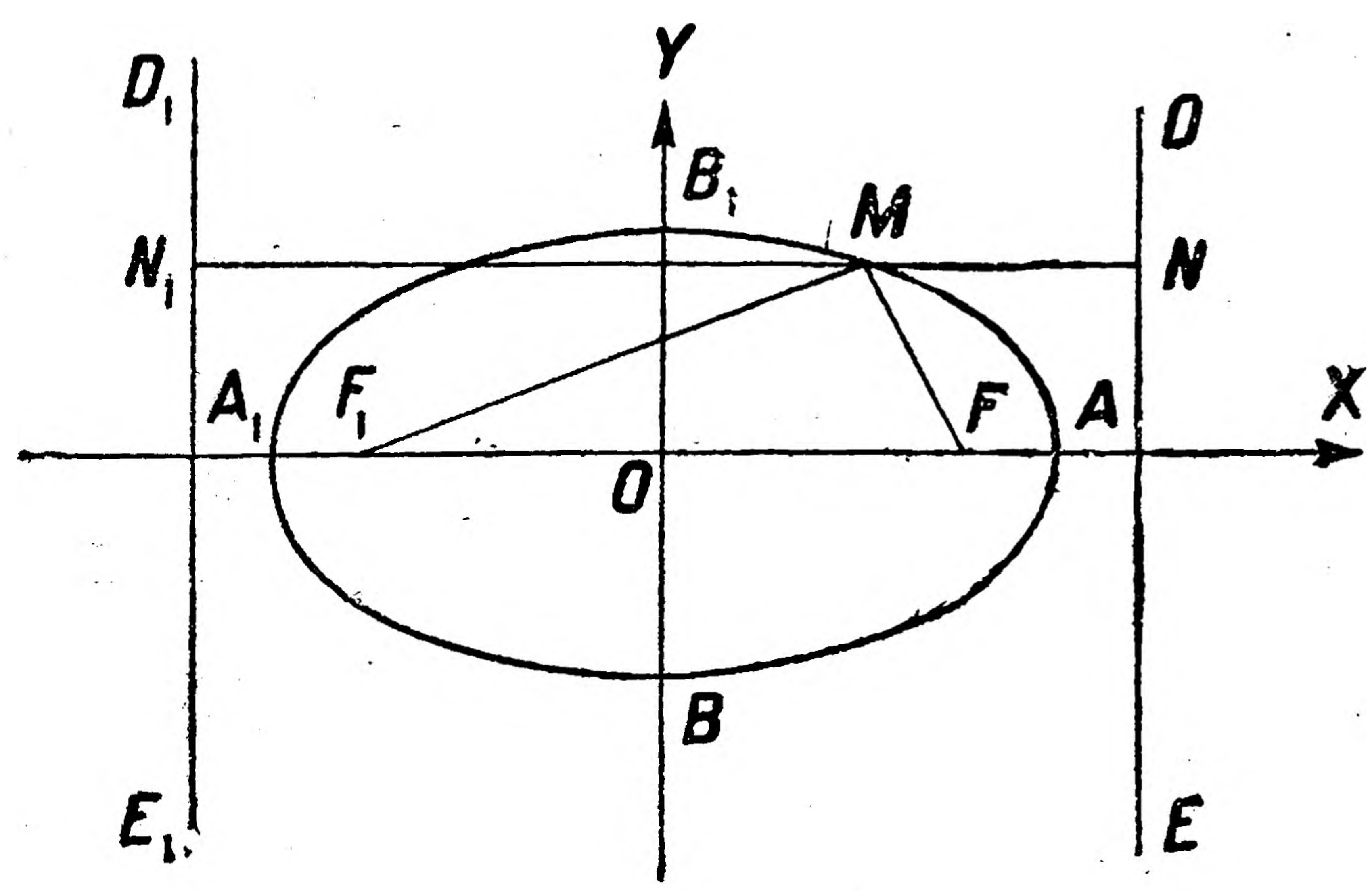
или

$$r = e\left(\frac{a^2}{c} - x\right), \quad r_1 = e\left(\frac{a^2}{c} + x\right), \tag{2}$$

и рассмотрим прямые, параллельные оси Y и выражаемые уравнениями

$$x = \frac{a^2}{c}, \quad x = -\frac{a^2}{c}. \tag{3}$$

Прямые эти называются *директрисами* и проходят обе вне эллипса, так как $a^2 : c = a \cdot \frac{a}{c} > a$ (черт. 74). Правые части уравнений (2) содержат в скобках не что иное как расстояния от точки $M(x; y)$ на эллипсе до директрисы: $MN = a^2 : c - x = d$, $MN_1 = a^2 : c + x = d_1$, причем в формуле для правого фокуса фигурирует расстояние до правой директрисы, в формуле для левого фокуса — до левой.



Черт. 74.

Уравнения (2) можно переписать в виде

$$\frac{r}{d} = e, \quad \frac{r_1}{d_1} = e \tag{4}$$

и прочесть их так: *отношение фокального радиуса-вектора любой точки эллипса к ее расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная и меньшая единицы, а именно равная эксцентриситету эллипса.*

Упражнения.

1. Вычертить по способу двух кругов (см. § 35) эллипс с полуосями $a = 50$ *мм*, $b = 30$ *мм* и найти положение его фокусов сперва графическим, затем вычислительным способом.

2. Вычертить директрисы эллипса, построенного в предыдущем упражнении, и, найдя фокальные радиусы-векторы и расстояния до директрис точек эллипса с абсциссами —10, 20, 40 *мм* (сперва графически, потом вычислительным способом), проверить постоянство отношений r к d и равенство их e.

3. Выяснить, как движутся фокусы и директрисы эллипса, если большая его полуось a постоянна, а малая полуось b растет, приближаясь к a. Где расположены директрисы круга?

4. На плоскости даны прямая и точка, расположенная вне прямой. По плоскости движется точка, причем ее расстояние до данной точки сохраняет постоянное и меньшее единицы отношение e к расстоянию до данной прямой. Найти уравнение кривой, по которой движется точка, приняв за ось Y данную прямую и направив ось X через данную точку. Перенося начало по оси X, показать, что эта кривая — эллипс.

5. Доказать, что расстояние от точки $M(x; y)$, движущейся по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, до неподвижной точки N плоскости с координатами x_0, y_0 выражается линейной функцией координат x, y, т. е. функцией вида $Px+Qy+R$ (здесь P, Q, R — постоянные, зависящие от x_0, y_0, a, b), тогда и только тогда, когда точка N совпадает с одним из фокусов эллипса.

§ 38. Сопряженные диаметры эллипса. 1°. Если в круге провести диаметр, перпендикулярный к какой-нибудь хорде, то он разделит пополам как эту хорду, так и все другие, ей параллельные. Следовательно, геометрическое место середин всех хорд круга, параллельных друг другу, есть диаметр, к ним перпендикулярный. Посмотрим, имеет ли место это свойство и для эллипса.

Возьмем эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и „семейство" параллельных прямых $y=kx+n$, где k имеет постоянное значение, а n меняется при переходе от одной прямой к другой прямой (того же семейства). Случай прямых, параллельных оси Y, рассмотрим особо. Исключая y, найдем уравнение, определяющее абсциссы точек пересечения прямой с эллипсом, т. е. абсциссы концов хорды, а именно:

$$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2knx+a^2(n^2-b^2)=0. \qquad (1)$$

Обозначая координаты концов хорды через x_1, y_1 и x_2, y_2, имеем для середины хорды координаты $x_n=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $y_n=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$. Чтобы их найти, можно, не решая уравнения (1), воспользоваться известным свойством корней квадратного уравнения:

$$x_n=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2a^2kn}{2\cdot(a^2k^2+b^2)}=-\frac{a^2kn}{a^2k^2+b^2},$$
$$y_n=kx_n+n=-\frac{a^2k^2n}{a^2k^2+b^2}+n=\frac{b^2n}{a^2k^2+b^2}.$$

Найденные координаты середины хорды зависят от n, но их отношение $y_n:x_n=-b^2:(a^2k)$ от n не зависит (случай $k=0$ надо рассмотреть особо). Таким образом, координаты середины любой хорды направления k удовлетворяют уравнению $\frac{y}{x}=-\frac{b^2}{a^2k}$, а потому середины всех таких хорд располагаются по прямой

$$y=-\frac{b^2}{a^2k}x, \text{ или } y=k_1x, \text{ где } k_1=-\frac{b^2}{a^2k}, \qquad (2)$$

выражаемой этим уравнением. Эта прямая проходит через центр эллипса, и та ее часть, которая заключена внутри эллипса, называется *диаметром, сопряженным с хордами направления k.*

2°. Будет ли этот диаметр перпендикулярен к соответствующим хордам, через середины которых он проходит? Перпендикулярность хорд $y=kx+n$ и сопряженного с ними диаметра $y=k_1x$ требует соблюдения условия $kk_1=-1$ или $k\cdot\left(-\frac{b^2}{a^2k}\right)=-1$ или $b=a$, имеющего место лишь для круга. Итак, хорды эллипса с неравными осями, не параллельные осям эллипса (хорды, параллельные осям, мы сейчас рассмотрим), никогда не бывают перпендикулярны к диаметру, с ними сопряженному. Отсюда, между прочим, следует, что эллипс не имеет осей симметрии, кроме тех двух, о которых уже была речь в § 35.

Если $k=0$ и хорды, следовательно, параллельны оси X, то координаты середины каждой такой хорды $y=0\cdot x+n$ равны $x_n=0$, $y_n=n$. Таким образом, диаметр, сопряженный с хордами, параллельными большой оси эллипса, совпадает с малой его осью.

Если хорды параллельны оси Y, то уравнение каждой из них есть $x=m$, где m имеет любое значение от $-a$ до $+a$. Прямая $x=m$ пересекает эллипс в точках с координатами $x_1=m$, $y_1=b\sqrt{a^2-m^2}:a$, $x_2=m$, $y_2=-b\sqrt{a^2-m^2}:a$. Отсюда для середины хорды имеем $x_n=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=m$, $y_n=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=0$, а потому диаметр, сопряженный с хордами, параллельными малой оси эллипса, совпадает с большой его осью.

Как видим, у всякого не сводящегося к кругу эллипса имеются хорды, перпендикулярные к сопряженному с ними диаметру, а именно хорды, параллельные осям эллипса.

Мы доказали следующую теорему (1): *Геометрическое место середин всех хорд эллипса, имеющих один и тот же угловой коэфициент k, есть диаметр с угловым коэфициентом $k_1=-\frac{b^2}{a^2k}$*. Этот „сопряженный“ с хордами данного направления диаметр перпендикулярен к ним, если $a=b$, т. е. если эллипс есть круг. При $a\neq b$ хорды вообще не перпендикулярны к сопряженному с ними диаметру. Исключениями являются лишь хорды, параллельные большой или малой оси эллипса; для них сопряженным диаметром является перпендикулярная к ним малая или большая ось. Заметим, что диаметр, перпендикулярный к сопряженным с ними хордам, называется *главным диаметром* кривой. Итак, эллипс имеет два главных диаметра, совпадающих с его осями.

3°. Возьмем опять хорды направления k и сопряженный с ними диаметр $y=k_1x$ и проведем хорды направления k_1, т. е. параллельные этому диаметру. Где расположатся их середины? Согласно только что доказанному, на диаметре $y=k_2x$, где $k_2=-\frac{b^2}{a^2k_1}$. Заменяя k_1 через $-\frac{b^2}{a^2k}$, получим $k_2=k$. Называя диаметры $y=kx$ и $y=k_1x$, где $kk_1=-\frac{b^2}{a^2}$, *взаимно-сопряженными диаметрами*, или просто *сопряженными диаметрами*, получаем следствие только что доказанной теоремы: *каждый из двух сопряженных диаметров эллипса делит пополам хорды, параллельные другому.*

Оси эллипса являются единственными (при $a\neq b$) взаимно-перпендикулярными сопряженными диаметрами и имеют особое название: *главные диаметры* эллипса. Круг имеет бесчисленное множество пар главных диаметров.

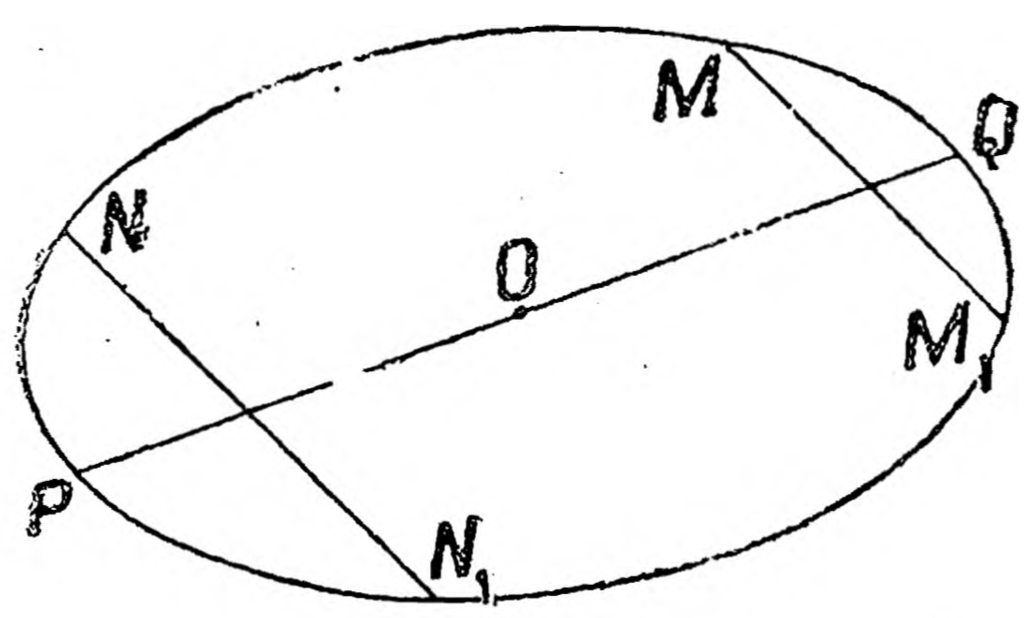
4°. Рассмотрим несколько задач на сопряженные диаметры эллипса.

Задача 1. Даны эллипс и один из его диаметров. Найти диаметр, с ним сопряженный.

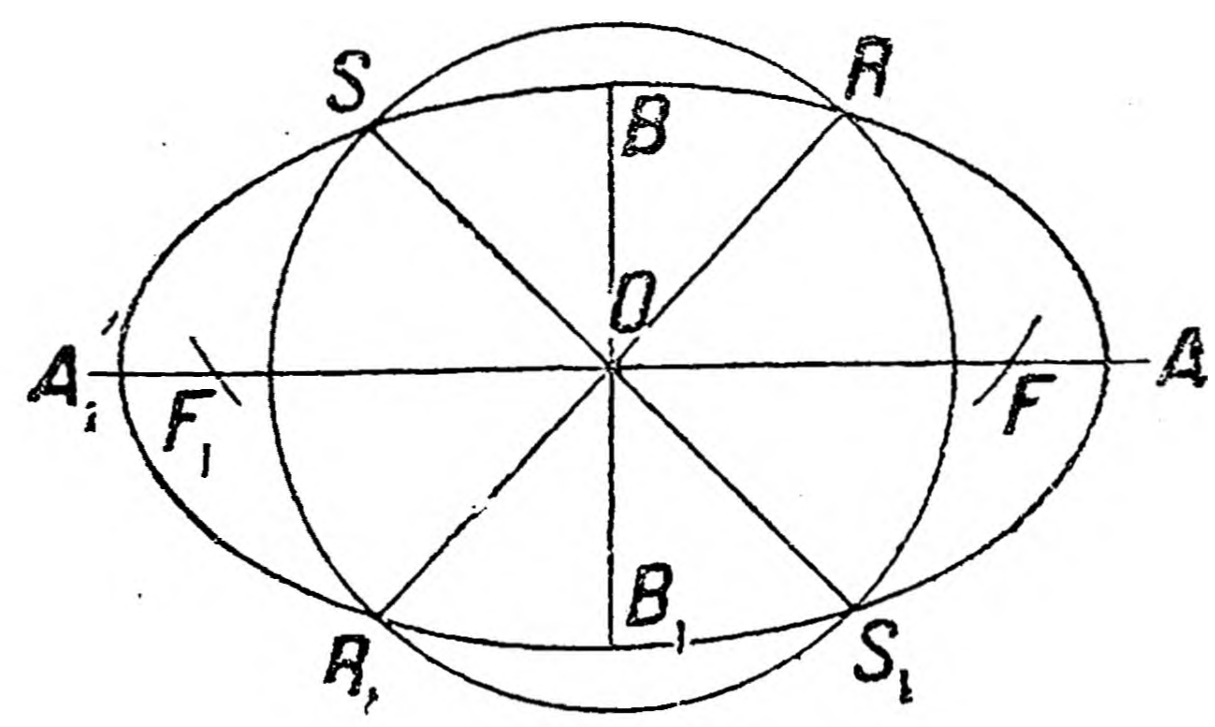
При аналитическом решении задачи можно считать известными уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и угловой коэфициент данного диаметра k. Решение задачи сводится к вычислению углового коэфициента искомого диаметра по формуле $k_1=-\frac{b^2}{a^2k}$. Если же данный эллипс вместе с данным его диаметром изображены на чертеже, то достаточно провести какую-нибудь хорду, параллельную данному диаметру, и соединить ее середину с серединой последнего.

Задача 2. На чертеже изображен эллипс. Найти его центр, оси симметрии, фокусы.

Эта задача решается построительным способом следующим образом. Проводится пара каких-нибудь параллельных хорд MM_1 и NN_1 (черт. 75) и вычерчивается диаметр PQ, с ними сопряженный. Середина O этого диаметра дает положение центра. Берем далее круг с центром в центре эллипса и радиусом, бо́льшим меньшей полуоси эллипса и меньшим большей его полуоси. Такой радиус легко подобрать путем одной-двух проб, так как соответствующий круг пересечет эллипс в 4 точках (черт. 76). Проводя через эти точки пересечения диаметры RR_1 и SS_1,



Черт. 75.



Черт. 76.

делим углы ROS и ROS_1 пополам. Биссектрисы AA_1 и BB_1 являются осями симметрии данного эллипса. Фокусы F и F_1 получаются в пересечении круга, описанного из точки B как из центра радиусом, равным OA, с большой осью эллипса.

Задача 3. Выяснить, как меняется угол между двумя сопряженными диаметрами эллипса, если один из них вращается, как показано на чертеже 77, причем угол его наклона к оси X меняется от 0 до 180°.

Обозначая углы наклона диаметров PQ и P_1Q_1 к оси X через φ и φ_1, имеем для угловых коэфициентов $k = \operatorname{tg}\varphi$ и $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$ соотношение $kk_1 = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{b^2}{a^2}$, которое показывает, что $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi_1$ всегда имеют разные знаки, а потому углы φ и φ_1 — разных четвертей, и что при увеличении абсолютного значения $\operatorname{tg}\varphi$ абсолютное значение $\operatorname{tg}\varphi_1$ уменьшается, и наоборот. Теперь легко составить такую табличку показывающую, что при вращении диаметра PQ сопряженный диаметр P_1Q_1 вращается в том же направлении.

φ	0°	от 0° до 90°	90°	от 90° до 180°	180°
k	0	от 0 до $+\infty$	∞	от $-\infty$ до 0	0
k_1	∞	от $-\infty$ до 0	0	от 0 до $+\infty$	∞
φ_1	90°	от 90° до 180°	180°	от 180° до 270°	270°

Задача 4. Найти длины двух сопряженных полудиаметров эллипса $OP=a'$ и $OP_1=b'$, предполагая известным угловой коэфициент k первого из них.

Решая систему уравнений $y=kx$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, найдем координаты точки P, равные

$$x=\frac{ab}{+\sqrt{b^2+a^2k^2}},\quad y=\frac{abk}{+\sqrt{b^2+a^2k^2}},\tag{3}$$

а заменяя здесь k через $k_1=-\frac{b^2}{a^2k}$, получим координаты точки P_1, равные

$$x=-\frac{a^2k}{\sqrt{b^2+a^2k}},\quad y=+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2k}},\tag{4}$$

причем знаки у корней выбраны в предположении, что точка P находится в 1-й четверти, а точка P_1, следовательно, во 2-й.

Теперь применяем формулу (2) § 7 и находим, что

$$a'=+ab\sqrt{\frac{1+k^2}{b^2+a^2k^2}},\quad b'=+\sqrt{\frac{a^4k^2+b^4}{b^2+a^2k^2}}.\tag{5}$$

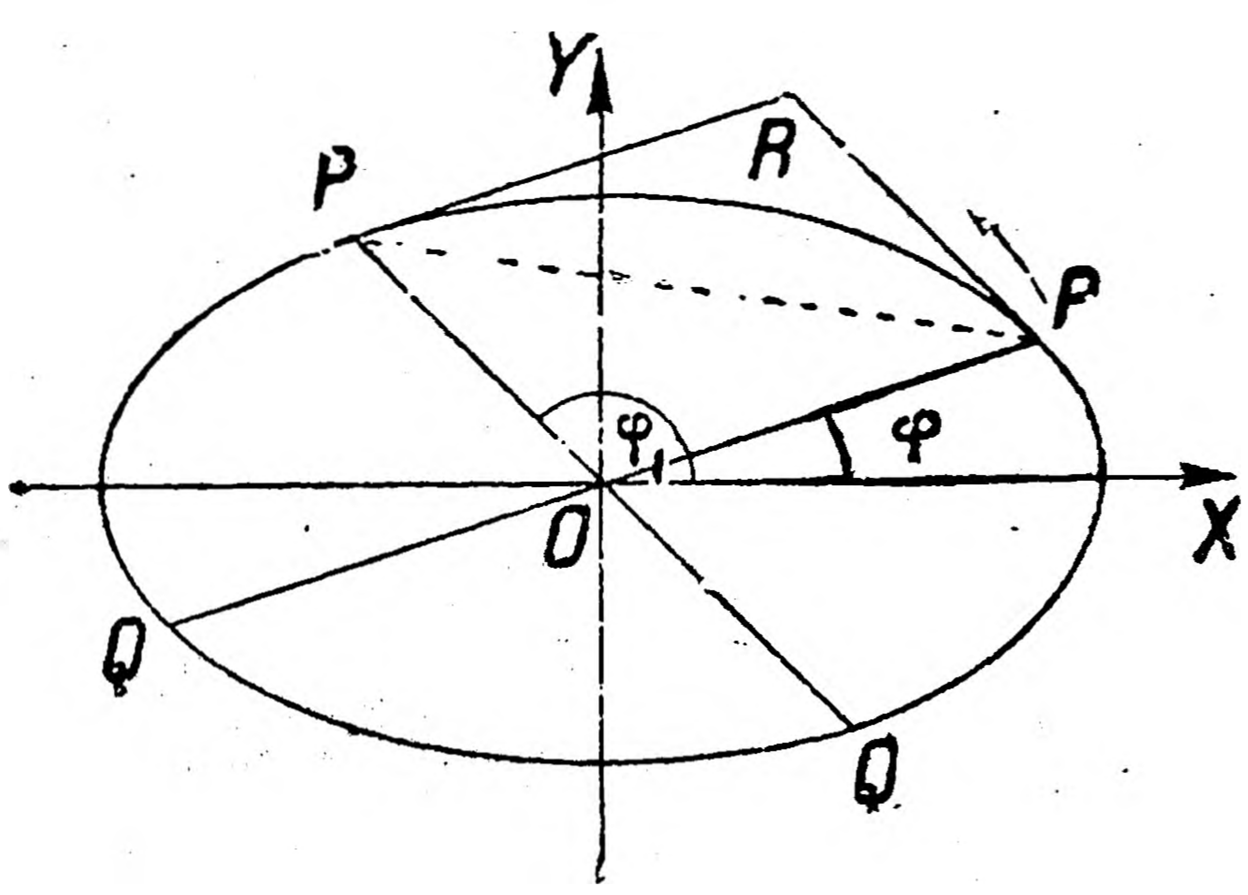
Для поверки замечаем, что при $k=0$ $a'=a$, $b'=b$, как и должно быть.

Задача 5. Найти сумму квадратов сопряженных полудиаметров эллипса.

Формулы (5) дают, как легко убедиться,

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2.\tag{6}$$

Этот результат составляет содержание так называемой 1 теоремы Аполлония: *сумма квадратов двух сопряженных полудиаметров эллипса есть величина постоянная, равная сумме квадратов двух его полуосей.*



Черт. 77.

Задача 6. Найти площадь параллелограма, построенного на двух сопряженных полудиаметрах эллипса.

Чтобы найти площадь параллелограма $OPRP_1$ (черт. 77), найдем по формуле (11) § 28 площадь S треугольника OPP_1, координаты всех вершин которого известны, а затем удвоим ее. Получаем:

$$2S=\begin{vmatrix} x_0, & y_0, & 1\\ x_1, & y_1, & 1\\ x_2, & y_2, & 1\end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1,$$

так как $x_0=y_0=0$. Подставляя вместо x_1 и y_1 координаты точки P, найденные по формуле (3), а вместо x_2 и y_2 координаты точки P_1, найденные по формуле (4), и упрощая результаты, убеждаемся, что $2S=ab$. Но, с другой стороны, $2S=a'b'\sin(\varphi_1-\varphi)$, а потому, полагая $\varphi_1-\varphi=\theta$, имеем окончательно:

$$a'b'\sin\theta=ab.\tag{7}$$

Полученный результат выражает так называемую II теорему Аполлония: *площадь параллелограма, построенного на двух сопряженных полудиаметрах эллипса, есть величина постоянная, равная площади прямоугольника, построенного на его полуосях.*

Упражнения.

1. Взять эллипс с полуосями $a=40$ *мм*, $b=25$ *мм* и найти (построительным и вычислительным способами) диаметры, сопряженные с биссектрисами координатных углов.

2. В том же эллипсе найти хорду, делящуюся в точке (10; 12) пополам.

3. Взять один из имеющихся шаблонов эллипса (упражнение 1 § 35), перевести его контур на бумагу (только контур, но не оси!) и найти центр, оси и фокусы эллипса способом, указанным выше (задача 2).

4. Показать, что во всяком эллипсе имеется пара равных сопряженных диаметров, и указать углы, составляемые ими с осью X.

5. Проверить обе теоремы Аполлония, вычисляя сумму квадратов сопряженных полудиаметров, найденных выше в упражнении 1, а также площадь построенного на них параллелограма.

6. Найти сопряженные полудиаметры эллипса, угол между которыми равен 150°, зная бо́льшую полуось эллипса, равную 20, и его эксцентриситет, равный $\sqrt{15:16}$.

7. Один из двух сопряженных диаметров эллипса в λ раз длиннее другого, угол между ними θ. По данным λ и θ найти эксцентриситет e эллипса.

8. Найти геометрическое место середин хорд эллипса с полуосями a и b, соединяющих концы каждой пары сопряженных его диаметров.

§ 39. Касательная и нормаль к эллипсу. Решим для эллипса три задачи, какие были решены в § 34 для круга, применяя тот же аналитический метод.

1°. **Задача 1.** Найти уравнения касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проходящих через данную на нем точку $(x_0;\ y_0)$.

Пишем, как и раньше, уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку, а именно уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$, и по условию касания прямой и эллипса составляем квадратное уравнение для определения k, а именно:

$$k^2(a^2-x_0^2)+2kx_0y_0+(b^2-y_0^2)=0, \tag{1}$$

корни которого выражаются формулой

$$k=\frac{-x_0y_0\pm\sqrt{x_0^2y_0^2-(a^2-x_0^2)(b^2-y_0^2)}}{a^2-x_0^2}=\frac{-x_0y_0\pm ab\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1}}{a^2-x_0^2}. \tag{2}$$

Формула эта написана в предположении, что $a^2-x_0^2\neq 0$ (случай $a^2=x_0^2$ рассмотрим особо). Так как точка $(x_0;\ y_0)$ лежит на эллипсе, то $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, и для k получаем единственное значение $k=-\frac{x_0y_0}{a^2-x_0^2}$, а потому уравнение касательной есть $y-y_0=-\frac{x_0y_0}{a^2-x_0^2}(x-x_0)$. Оно легко приводится к такому

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1, \tag{3}$$

которое в силу своего сходства с уравнением эллипса легко запоминается. Им мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Остается рассмотреть особый случай, когда $a^2=x_0^2$, а y_0 обращается, как легко получить из уравнения эллипса, в нуль. Уравнение (2) здесь ничего не дает, так как обращается в такое: $k^2\cdot 0+k\cdot 0+b^2=0$. Таким образом, уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$ в этом случае касательной не выражает. Как известно, это уравнение выражает все прямые, проходящие через точку $(x_0;\ y_0)$, кроме той, которая параллельна оси Y. Естественно предположить, что именно прямая, параллельная оси Y, и есть в данном случае касательная к эллипсу в точке $(a;\ 0)$ или в точке $(-a;\ 0)$. Это предположение подтверждается, если рассмотреть общие точки эллипса и прямых $x=\pm a$. Итак, касательной к эллипсу в точке $(a;\ 0)$ является прямая $x=a$, а в точке $(-a;\ 0)$ прямая $x=-a$.

Важно заметить, что при $x_0=\pm a$, $y_0=0$ уравнение (3) дает эти самые уравнения $x=\pm a$. Итак, уравнение (3), выведенное нами для случая $x_0^2\neq a^2$, оказывается имеющим силу и в особом случае, когда $x_0^2=a^2$.

Чтобы получить уравнение нормали, надо взять ту прямую пучка $y-y_0=k(x-x_0)$, которая перпендикулярна к касательной (3). Угловой коэфициент касательной равен $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, а потому угловой коэфициент нормали равен $\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$ и уравнение нормали $y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$. Его легко привести к следующему виду:

$$a^2y_0(x-x_0)=b^2x_0(y-y_0). \tag{4}$$

Последнее уравнение сохраняет силу и для вершин эллипса, где одна из координат точки касания (x_0 или y_0) обращается в 0. Действительно, при $x_0=0$ и $y_0=\pm b$ оно дает уравнение нормали $x=0$, т. е. выражает ось Y, а при $y_0=0$, $x_0=\pm a$ дает $y=0$, т. е. выражает ось X, как и должно быть.

2°. **Задача 2.** Найти уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, имеющей данное направление.

Задав направление, не параллельное оси Y, угловым коэфициентом k, рассмотрим прямые $y=kx+n$. Условие касания с эллипсом, а именно уравнение $b^2+a^2k^2-n^2=0$, дает для n два значения $n=\pm\sqrt{b^2+a^2k^2}$, всегда вещественных и различных, а потому всегда возможно указать две касательных к эллипсу, имеющих данное направление k. Уравнения этих касательных

$$y=kx+\sqrt{b^2+a^2k^2},\quad y=kx-\sqrt{b^2+a^2k^2}. \tag{5}$$

Если данное направление есть направление оси Y, то уравнение касательной надо искать в виде $x=m$. Точки пересечения прямой $x=m$ с эллипсом сливаются в одну лишь при $m=\pm a$, а потому искомые касательные выражаются в этом случае уравнениями $x=+a$, $x=-a$.

Это последнее особое решение заключается в общем решении, выраженном формулами (5), и получается из него после деления обеих частей на k и перехода к $k=\infty$.

3°. **Задача 3.** Найти касательную к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проходящую через данную точку $A(x_0;\ y_0)$.

Настоящая задача отличается от задачи 1 только тем, что никаких предположений о месте точки A здесь не делается: она расположена где угодно на плоскости.

Начиная решение так же, как в задаче 1, приходим к уравнению (1), определяющему угловой коэфициент k искомой касательной. Предположив сперва, что $a^2-x_0^2\neq 0$, и обозначив подкоренное $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1$ буквой E, различаем три случая в зависимости от того, будет ли E больше 0, меньше 0 или равно 0. Как мы видели в конце § 17, эти три случая соответствуют расположению точки вне эллипса, внутри эллипса, на эллипсе.

Случай 1, $E>0$. Точка A расположена вне эллипса. Через нее проходят две касательных к эллипсу, выражаемых уравнениями $y-y_0=k_1(x-x_0)$; $y-y_0=k_2(x-x_0)$, где

$$k_1=\frac{-x_0y_0+ab\sqrt{E}}{a^2-x_0^2},\quad k_2=\frac{-x_0y_0-ab\sqrt{E}}{a^2-x_0^2}. \tag{6}$$

Случай 2, $E<0$. Точка A расположена внутри эллипса. Оба корня уравнения (2) мнимы, касательных через точку A провести нельзя.

Случай 3, $E=0$. Точка A лежит на эллипсе. Уравнение (2) имеет два равных корня. Через точку A можно провести одну касательную к эллипсу (см. задачу 1).

Особый случай. При $x_0^2=a^2$ точка A лежит, как легко установить по уравнению эллипса, либо вне эллипса (когда $y_0^2>0$), либо на нем (когда $y_0^2=0$). Предполагая первое, замечаем, что уравнение (1) сводится тогда к линейному, из которого определяется одно значение k, а именно: $k=-\frac{b^2-y_0^2}{2x_0y_0}$, откуда уравнение касательной:

$$y-y_0=-\frac{b^2-y_0^2}{2x_0y_0}(x-x_0).$$

Уравнение второй касательной не получается в настоящем случае (при $x_0=\pm a$, $y_0\neq 0$) из уравнения $y-y_0=k(x-x_0)$ ни при каком конечном значении k. Эта касательная параллельна оси Y и выражается либо уравнением $x=+a$, либо уравнением $x=-a$.

Если $x_0=\pm a$, а $y_0=0$, то мы имеем особый случай задачи 1 (единственная касательная, параллельная оси Y).

Те же результаты, но гораздо скорее мы получим, если воспользуемся заключениями п. 4 § 31.

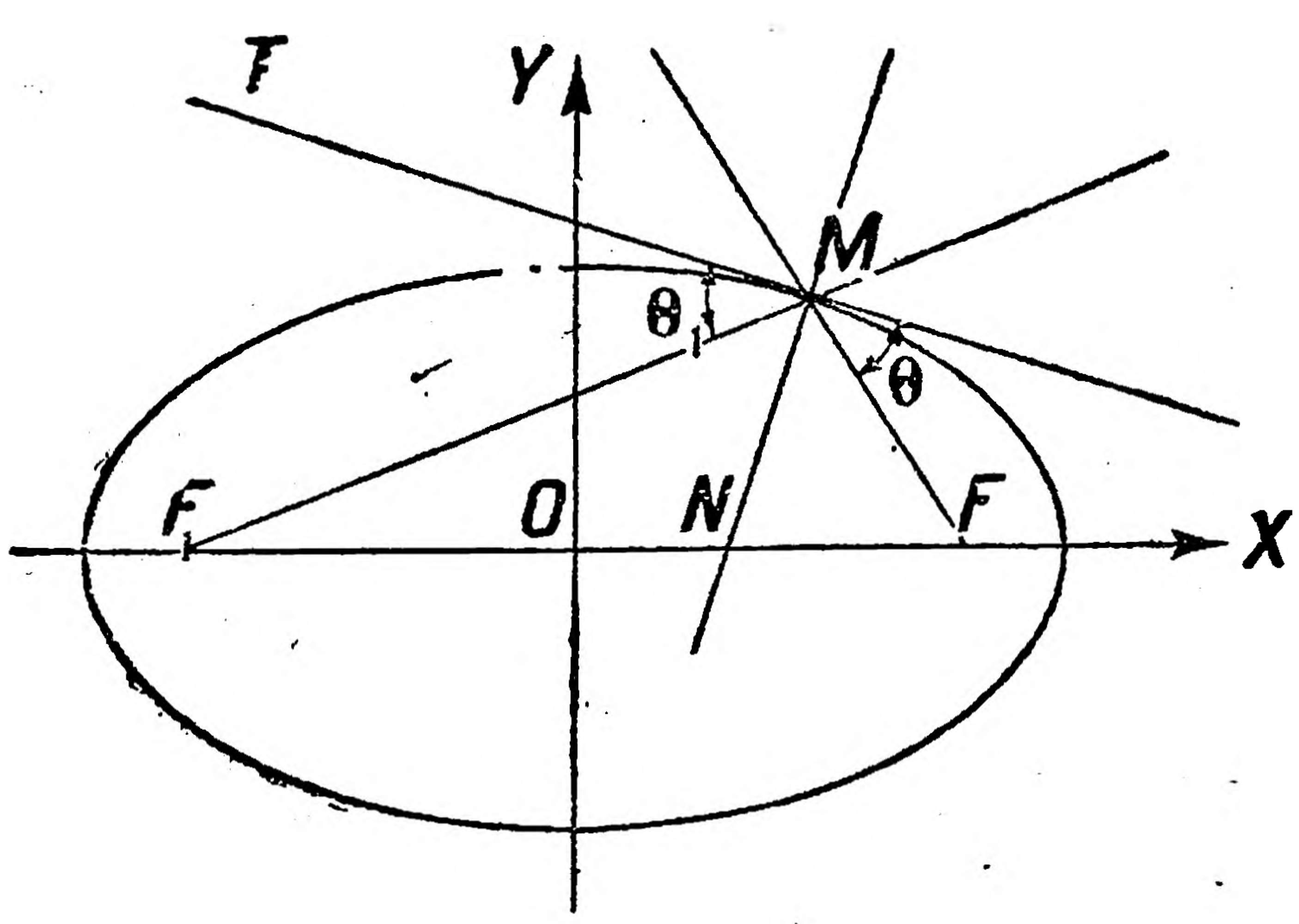
4°. Касательная к кругу перпендикулярна к радиусу, проведенному через точку касания. У эллипса этого нет: вычисляя угол между касательной и диаметром, проведенным в точку касания, мы получаем разные результаты, в зависимости от того, где взята точка касания. Попробуем вычислить углы θ и θ_1, составляемые касательной с радиусами-векторами FM и F_1M, проведенными в точку касания M (черт. 78). Радиус-вектор FM, проходящий через точки $F(c;0)$ и $M(x_0;y_0)$, имеет уравнение $y_0(x-x_0)+(c-x_0)(y-y_0)=0$, а радиус-вектор F_1M, проходящий через $F(-c;0)$ и $M(x_0;y_0)$, уравнение $y_0(x-x_0)-(c+x_0)(y-y_0)=0$.

Касательная MT имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$. Для вычисления искомых углов воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\theta=\frac{AB_1-BA_1}{AA_1+BB_1}$ (см. § 25). Сперва полагаем $A=y_0$, $B=c-x_0$, $A_1=x_0:a^2$, $B_1=y_0:b^2$ и находим:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y_0^2:b^2-(c-x_0)\cdot x_0:a^2}{x_0y_0:a^2+(c-x_0)\cdot y_0:b^2}=\frac{y_0^2:b^2+x_0^2:a^2-cx_0:a^2}{x_0y_0(1:a^2-1:b^2)+cy_0:b^2}=$$

$$=\frac{1-cx_0:a^2}{-x_0y_0c^2:a^2b^2+cy_0:b^2}=\frac{1-cx_0:a^2}{(cy_0:b^2)(1-cx_0:a^2)}=\frac{1}{cy_0:b^2}=\frac{b^2}{cy_0}.$$

Далее полагаем $A=\frac{x_0}{a^2}$, $B=\frac{y_0}{b^2}$, $A_1=y_0$, $B_1=-(c+x_0)$ и находим точно так же, что $\operatorname{tg}\theta_1=\frac{b^2}{cy_0}$. Так как оба угла θ и θ_1 острые, то из равенства их тангенсов вытекает равенство их самих. Рассматривая другие углы, расположенные вокруг точки M, а именно углы, дополнительные к θ и θ_1, а также углы, им вертикальные, получаем доказательство следующего важного свойства касательной и нормали к эллипсу:



Черт. 78.

Нормаль к эллипсу делит пополам угол между фокальными радиусами-векторами, проведенными в точку касания. Касательная к эллипсу делит пополам каждый из двух углов, образуемых одним из этих радиусов-векторов и продолжением другого.

Приведенное выше доказательство этой теоремы теряет силу при $1-\frac{cx_0}{a^2}=0$, так как сокращать на 0 нельзя, а также при $y_0=0$, так как тогда 0 оказывается в знаменателе. Однако легко видеть, что $\frac{cx_0}{a^2}<1$, так как всегда $c<a$, $x_0\leqq a$, а потому $\frac{c}{a}<1$, $\frac{x_0}{a}\leqq 1$, $\frac{cx_0}{a^2}<1$, и разность $1-\frac{cx_0}{a^2}$ всегда положительна. В случае же, когда $y_0=0$, касательная параллельна оси Y, а нормаль и радиусы-векторы идут по оси X и каждый из углов θ и θ_1 обращается в прямой, угол же между радиусами-векторами равен 0, так что теорема верна и для этого случая.

Доказанная теорема дает простой способ построительного решения задачи о проведении касательной и нормали к эллипсу через данную его точку. Проведя в данную точку оба радиуса-вектора, надо построить биссектрисы угла, ими образованного, а также угла, образованного одним из них и продолжением другого. Первая биссектриса будет нормалью, вторая — касательной.

Другое доказательство рассмотренного свойства касательной и радиусов-векторов эллипса можно дать, основываясь на известной теореме элементарной геометрии: если прямая, проходящая через вершину треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные двум соседним сторонам, то она является биссектрисой угла при вершине. Поэтому для доказательства нашей теоремы достаточно показать, что $F_1N:FN = F_1M:FM$ (черт. 78). Но $F_1N = F_1O + ON = c + ON$, $FN = c - ON$, а ON найдем из уравнения нормали (4), полагая в нем $y = 0$. Тогда

$$ON = x = x_0 - \frac{b^2}{a^2}x_0 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x_0 = \frac{c^2x_0}{a^2} = e^2x_0,$$

а потому

$$F_1N : FN = (c + e^2x_0):(c - e^2x_0),$$

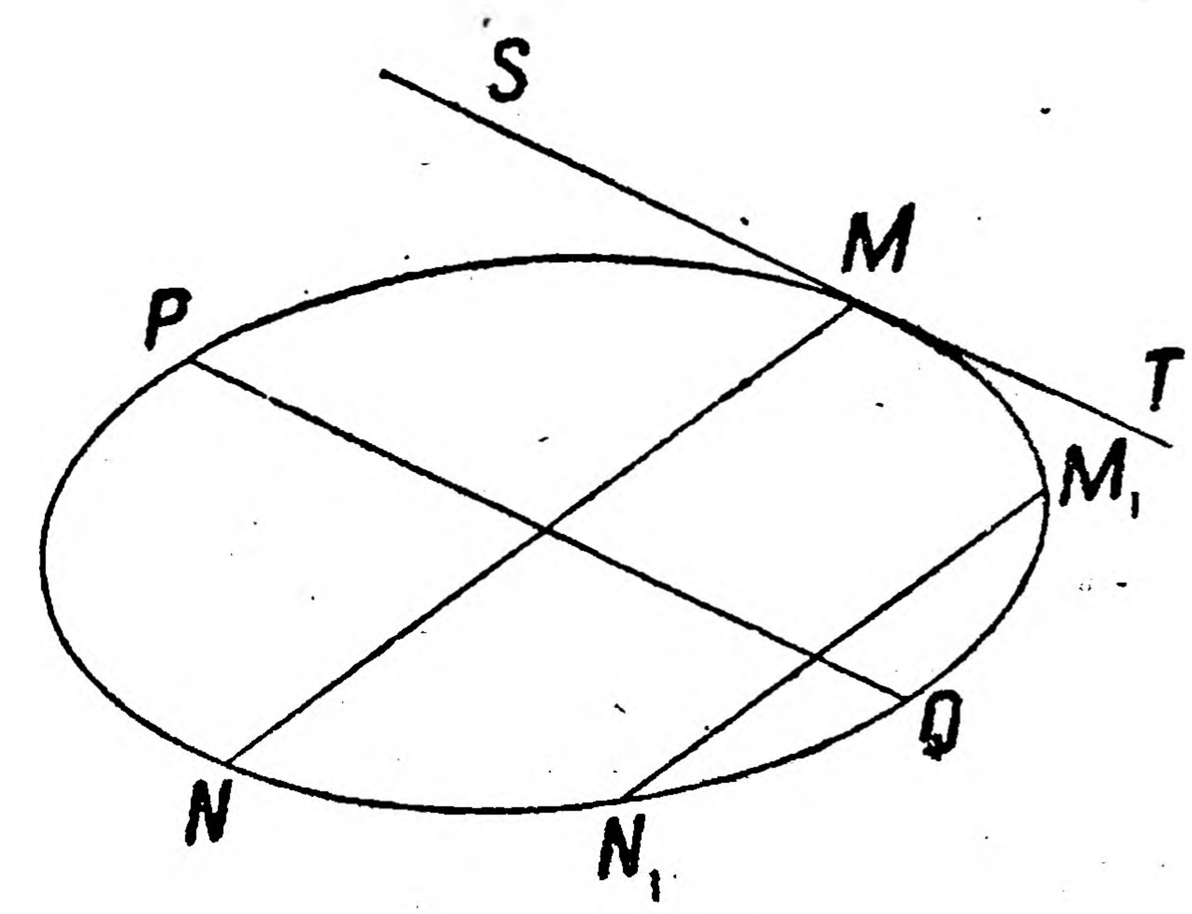
где $e = \frac{c}{a}$ есть эксцентриситет эллипса. С другой стороны,

$$F_1M:FM = (a + ex_0):(a - ex_0) = (c + ex_0\, c:a):(c - ex_0\, c:a) = \\ = (c + e^2x_0):(c - e^2x_0),$$

и равенство отношений $F_1N:FN$ и $F_1M:FM$ доказано.

Не теряет ли наше доказательство силу в случае $c - e^2x_0 = 0$? Легко показать, что всегда $c - e^2x_0 = c\left(1 - \frac{e^2x_0}{c}\right) > 0$, что и предоставляем сделать читателю.

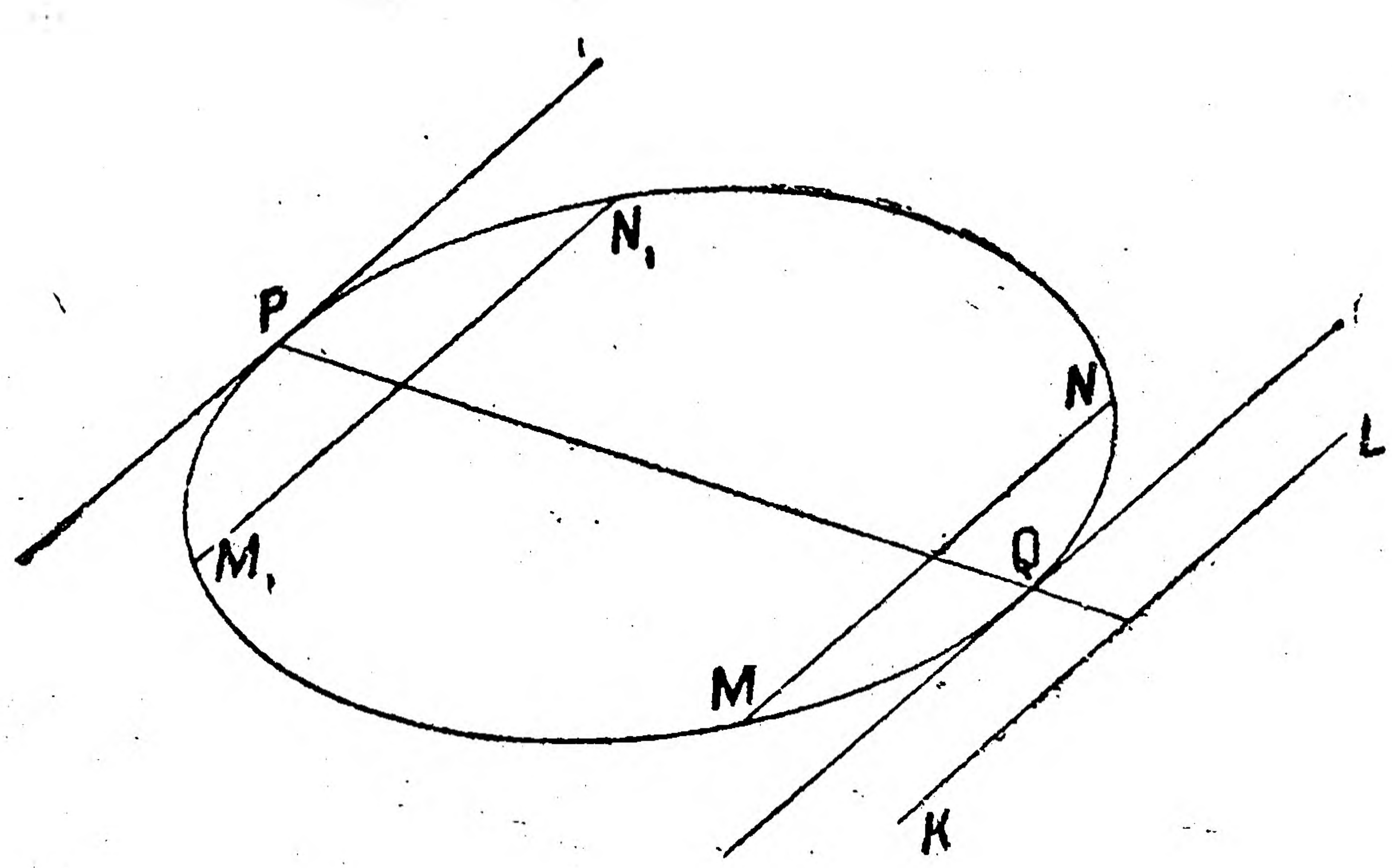
5°. Дадим еще способы построительного решения трех основных задач на проведение касательной к эллипсу.



Черт. 79.

Чтобы провести касательную к эллипсу через данную на нем точку M (черт. 78), надо соединить ее с фокусами эллипса, а затем провести биссектрису угла, образованного одним из полученных радиусов-векторов и продолжением другого радиуса-вектора.

Если положение фокусов неизвестно, то их надо найти (см. задачу 2 § 38); но можно обойтись и без них, применяя следующий способ: через данную на эллипсе точку M (черт. 79) проводим диаметр MN (если положение центра неизвестно, его надо предварительно определить), а затем диаметр PQ, с ним сопряженный. Проводя далее через точку M прямую ST, параллельную PQ, мы и получим искомую касательную. Чтобы оправдать это построение, надо показать справедливость теоремы: *касательная, проведенная к эллипсу через любую его точку M, параллельна диаметру PQ, сопряженному с диаметром MN, проходящим через эту точку.*

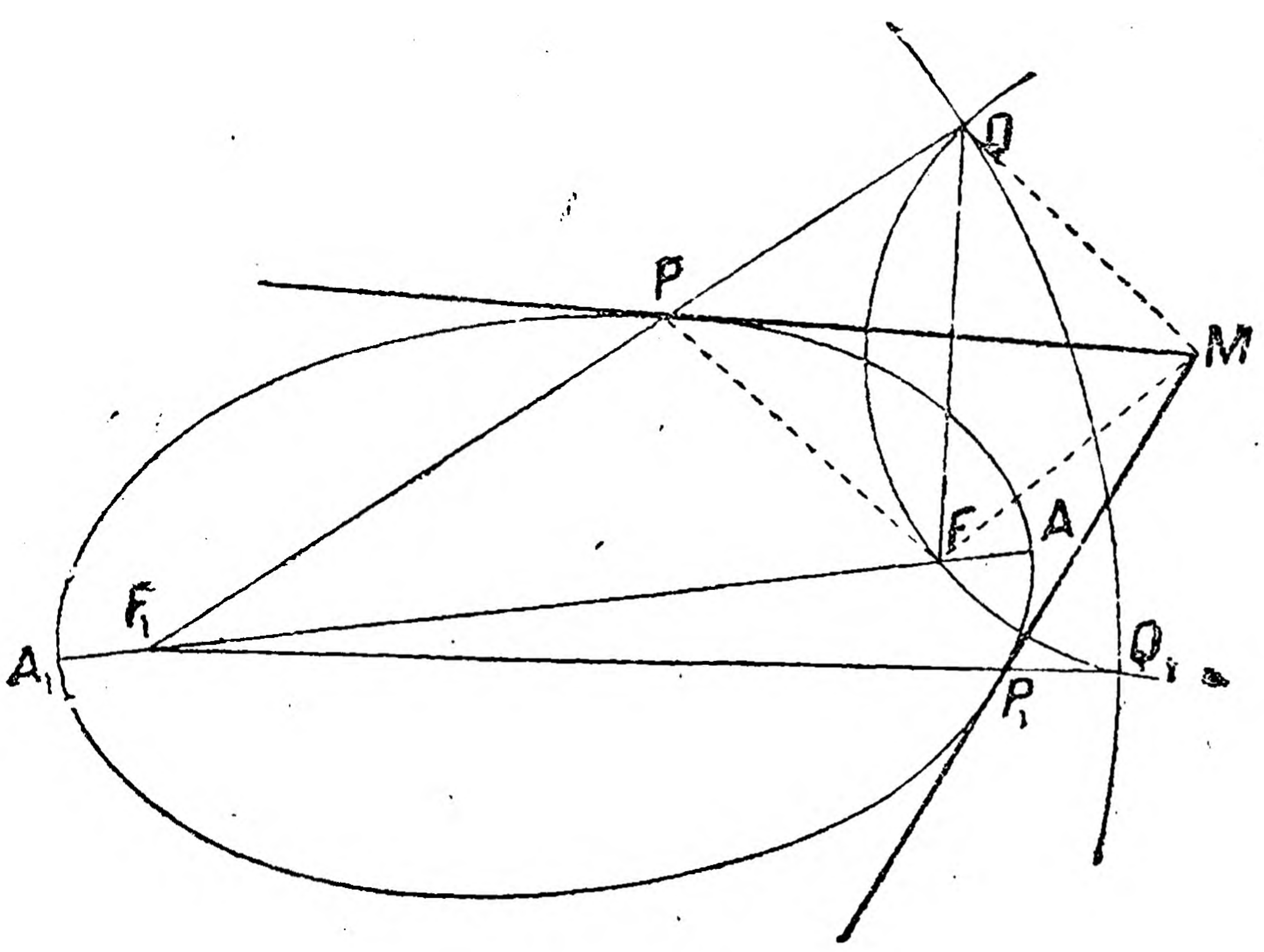


Черт. 80.

Предоставляем читателю доказать эту теорему, пользуясь уравнением касательной (3) и соотношением между угловыми коэфициентами двух сопряженных диаметров.

Если требуется провести касательные к эллипсу параллельно данной прямой KL (черт. 80), то проводят две хорды MN и M_1N_1, параллельные этой прямой, а затем проводят прямую PQ через середины обеих хорд. Точки пересечения прямой PQ с эллипсом и дадут точки касания искомых касательных. Читатель не затруднится дать доказательство того, что прямые, проведенные через точки P и Q параллельно данной прямой KL, действительно касаются эллипса.

Рассмотрим, наконец, задачу о проведении касательной к эллипсу через точку M, данную вне эллипса (черт. 81). Будем при этом предполагать, что на чертеже, кроме контура эллипса, указаны также вершины его большой оси A и A_1 и фокусы F и F_1. Взяв циркулем расстояние $AA_1 = 2a$, вычерчиваем дугу круга радиуса $2a$ с центром в точке F_1. Затем вычерчиваем дугу круга радиуса MF с центром в точке M. Точки пересечения обеих дуг Q и Q_1 соединяем с фокусом F_1 и в пересечении прямых F_1Q и F_1Q_1 с эллипсом получаем точки касания P и P_1. Искомыми касательными являются прямые PM и P_1M.



Черт. 81.

Чтобы доказать это, заметим, что отрезки PQ и PF равны: $F_1P + PQ = F_1Q = 2a$ (по построению), $F_1P + PF = 2a$ (по определению эллипса), а потому $PQ = 2a - F_1P$, $PF = 2a - F_1P$. Треугольники PQM и PFM равны (по трем сторонам), а потому MP является биссектрисой для FPQ, т. е. касательной к эллипсу. То же рассуждение применимо и к касательной MP_1.

Упражнения.

1. Построить касательную к эллипсу $\frac{x^2}{40^2} + \frac{y^2}{25^2} = 1$, проходящую через ту его точку, которая имеет абсциссу 20 и находится в первой его четверти, двумя способами: построительным, основанным на теореме об угле между радиусами-векторами, и аналитическим, пользуясь уравнением касательной. Используйте приготовленный шаблон (см. § 35, упражнение 1).

2. К тому же эллипсу провести касательные, параллельные прямой $y = x$, двумя способами: графическим, пользуясь линейкой и угольником и перемещая угольник так, чтобы один из его катетов двигался параллельно данной прямой (касательная проводится в тот момент, когда точки пересечения этого катета с эллипсом сольются — поскольку об этом можно судить на-глаз — в одну), и аналитическим, применяя формулы (5) настоящего параграфа.

3. К тому же эллипсу провести касательные, проходящие через точку (50; 10), а также через точку (40; 10), двумя способами (графическим и аналитическим).

4. Найти угол между касательной, проведенной к эллипсу с полуосями a и b через некоторую его точку M, и диаметром, проведенным в эту же точку. Показать, что при различных положениях точки M угол этот имеет различную величину.

5. Построить прямые с угловыми коэфициентами 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 5, ± 6, ± 10, ∞, касающиеся эллипса $\frac{x^2}{40^2} + \frac{y^2}{25^2} = 1$, не вычерчивая самого эллипса. Имея эти 32 касательных, попробуйте от руки начертить эллипс, которого все они касаются, и сравните результат с имеющимся уже шаблоном.

6. Доказать, что отрезок любой касательной к эллипсу, заключенный между двумя его касательными, проведенными через вершины большой оси, виден из каждого фокуса под прямым углом.

7. Показать, что основание перпендикуляра, опущенного из фокуса эллипса на любую касательную к нему, находится на круге, построенном на его большой оси как на диаметре.

8. Найти геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что две касательных, проведенных к эллипсу из каждой точки, перпендикулярны друг другу.

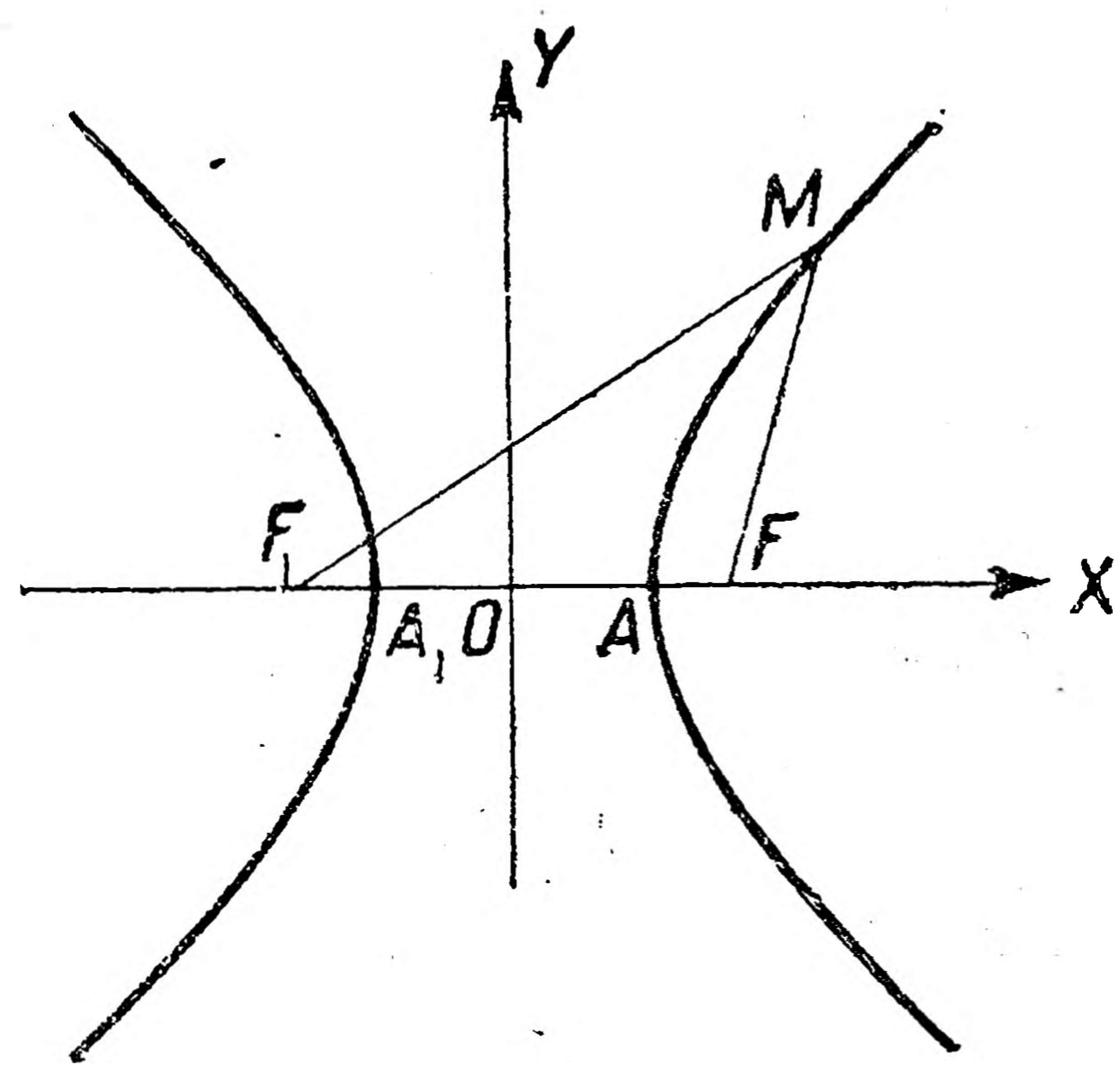
§ 40. Гипербола. Оси симметрии, центр симметрии, асимптоты. Ознакомившись в § 16 с гиперболой как геометрическим местом точек, разность расстояний которых от двух данных точек, ее фокусов, есть величина постоянная, мы вывели ее уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где a означает половину постоянной разности фокальных радиусов-векторов $r_1 = F_1M$ и $r = FM$ (черт. 82), проведенных в любую точку M гиперболы $(r_1 - r = \pm 2a)$, а величину b мы определили соотношением

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{2}$$

причем буква c означала половину расстояния между фокусами $(F_1O = FO = c)$. В этом же § 16 мы рассмотрели два способа построения точек гиперболы (посредством засечек и вычислением координат по уравнению), а в упражнении 6 § 20 видели, каким образом гипербола вычерчивается непрерывным движением посредством линейки и нити. Прямая, проходящая через оба фокуса F_1 и F гиперболы, называется „фокальной осью“, или „вещественной осью“, гиперболы. Точки пересечения A_1 и A гиперболы с фокальной осью называются „вершинами“ гиперболы. Чтобы найти абсциссы этих точек, надо в уравнении (1) положить $y = 0$; тогда оно даст $x = \pm a$. Таким образом, величина a, будучи половиной постоянной разности $r_1 - r$ или $r - r_1$, является в то же время длиной каждого из отрезков OA и OA_1 фокальной оси, называемых „вещественными полуосями“ гиперболы.



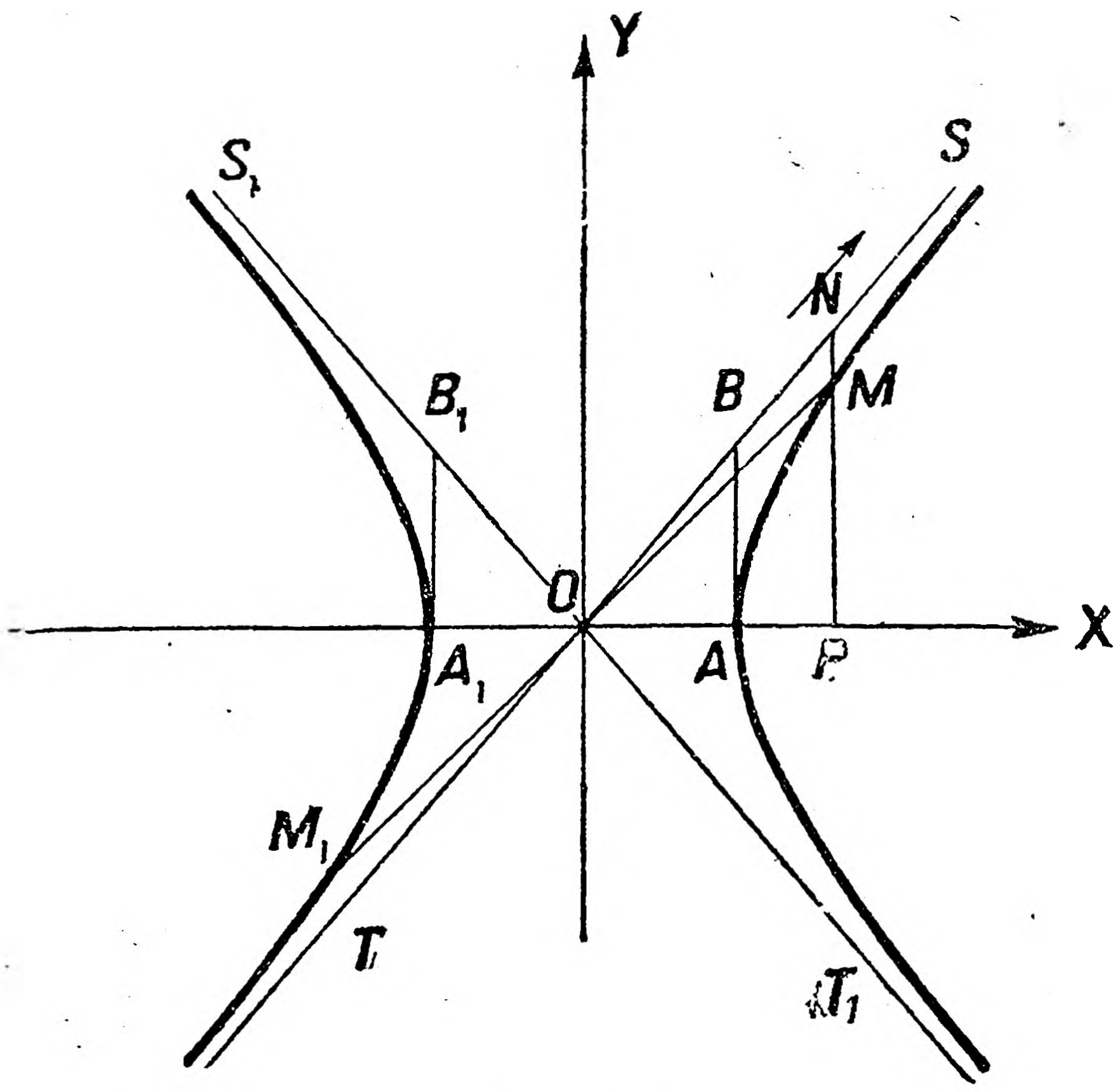
Черт. 82.

Если бы мы ничего не знали о форме гиперболы, а имели бы только ее уравнение (1), то, решая его относительно y и рассматривая выражение

$$y = \pm \frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a}, \tag{3}$$

мы установили бы, что: 1) кривая симметрична относительно оси X (при любом x ордината y имеет два равных по абсолютной величине и противоположных по знаку значения); 2) кривая симметрична и относительно оси Y (при замене x на $-x$ значение y не меняется); 3) при изменении x от $+a$ до $+\infty$ и от $-a$ до $-\infty$ значения y растут по абсолютной величине от 0 до ∞; 4) кривая состоит из двух раздельно расположенных частей, левой и правой, каждая из которых имеет две уходящих в бесконечность ветви.

Итак, гипербола имеет две оси симметрии: *фокальную* (или *вещественную*) ось, с которой при выводе простейшего уравнения была совмещена ось X, и перпендикулярную к ней вторую ось, часто называемую *мнимой* осью гиперболы (с ней мы совместили ось Y). Рассуждая, как в § 35, 2°, мы покажем, что точка O, делящая пополам вещественную ось гиперболы, является ее „центром симметрии“, или просто ее „центром“. В этой точке O делится пополам всякая проведенная через нее хорда MM_1 кривой.



Черт. 83.

Посмотрим, что делается с точками M и M_1 (черт. 83) пересечения хорды MOM_1, проходящей через центр O и наклоненной к оси X под углом $XOM=\alpha$, при ее вращении около точки O, т. е. при изменении угла α (достаточно рассмотреть изменение α от 0° до 180°). Написав уравнение хорды в виде $y=x\operatorname{tg}\alpha$, решаем его совместно с уравнением (1) и находим координаты точки M:

$$x=\frac{b}{\sqrt{(b:a)^2-\operatorname{tg}^2\alpha}},\quad y=\frac{b\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{(b:a)^2-\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{4}$$

(координаты точки M_1 отличаются только знаками). Пока угол α растет от 0 до такого значения α_0, меньшего 90°, при котором $\operatorname{tg}\alpha_0=\frac{b}{a}$, подкоренное выражение, оставаясь положительным, уменьшается от $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ до 0, а потому обе координаты x и y неограниченно растут: x от $+a$ до $+\infty$, y от 0 до $+\infty$. При дальнейшем увеличении α от α_0 до $180°-\alpha_0$, когда $\operatorname{tg}^2\alpha$ растет от $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ до $+\infty$, а затем убывает от $+\infty$ до $\left(\frac{b}{a}\right)^2$, подкоренное выражение остается отрицательным, точек пересечения у прямой $y=x\operatorname{tg}\alpha$ с гиперболой нет. Далее при изменении α от $180°-\alpha_0$ до 180°, т. е. при изменении $\operatorname{tg}^2\alpha$ от $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ до 0, опять получаем точку пересечения прямой с гиперболой, определяемую теми же формулами (4), в которых надо изменить лишь знак x. Как видим, прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ (на черт. 83 прямые TS и T_1S_1) имеют особое значение: всякая прямая, проходящая через центр гиперболы и расположенная внутри угла SOT_1, встречает гиперболу в двух точках M и M_1, а расположенная внутри угла SOS_1 гиперболы вовсе не встречает.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$, образующие стороны этих углов, носят название *асимптот* гиперболы. Итак, всякая гипербола, определяемая уравнением (1), имеет пару асимптот, определяемых уравнениями

$$y = +\frac{b}{a} x, \quad y = -\frac{b}{a} x. \tag{5}$$

Посмотрим, как изменяется отрезок MN, выражающий расстояние между точкой M на гиперболе и такой точкой N на ближайшей асимптоте, которая имеет ту же абсциссу, как и точка M. Полагая $MP = y_г$, $NP = y_a$, находим MP и NP из уравнений (3) и (5) и выражаем искомый отрезок MN формулой

$$MN = y_a - y_г = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})\,(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a\,(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\right)}, \tag{6}$$

которая показывает, что при неограниченном увеличении x разность $y_a - y_г$ стремится к 0. Таким образом, точка M, движущаяся по бесконечной ветви гиперболы в направлении, указанном на чертеже 83 стрелкой, неограниченно приближается к асимптоте OS, но никогда ее не достигает.

Важно заметить, что при значениях x, превосходящих в несколько раз величину a, дробью $\frac{a^2}{x^2}$ в формуле (6) можно пренебречь и получить приближенную формулу:

$$y_a - y_г \approx \frac{ab}{2x}, \tag{7}$$

показывающую, что расстояние MN изменяется приблизительно обратно пропорционально x, причем формула (7) тем точнее, чем больше x.

Уравнение (5) раскрывает геометрический смысл величины b, введенной нами просто для сокращения записи формулой (2). Эта величина b есть не что иное как ордината той точки асимптоты $y = \frac{bx}{a}$, абсцисса которой равна вещественной полуоси гиперболы a. Эту величину b часто называют „мнимой полуосью“ гиперболы.

Вычерчивая гиперболу по данным значениям a и b, полезно начинать ее построение именно с построения асимптот: отложив по оси X направо и налево от начала отрезок a, восставляем в концах его, т. е. в точках A и A_1, перпендикуляры $AB = A_1B_1 = b$ к оси X и проводим асимптоты OB и OB_1.

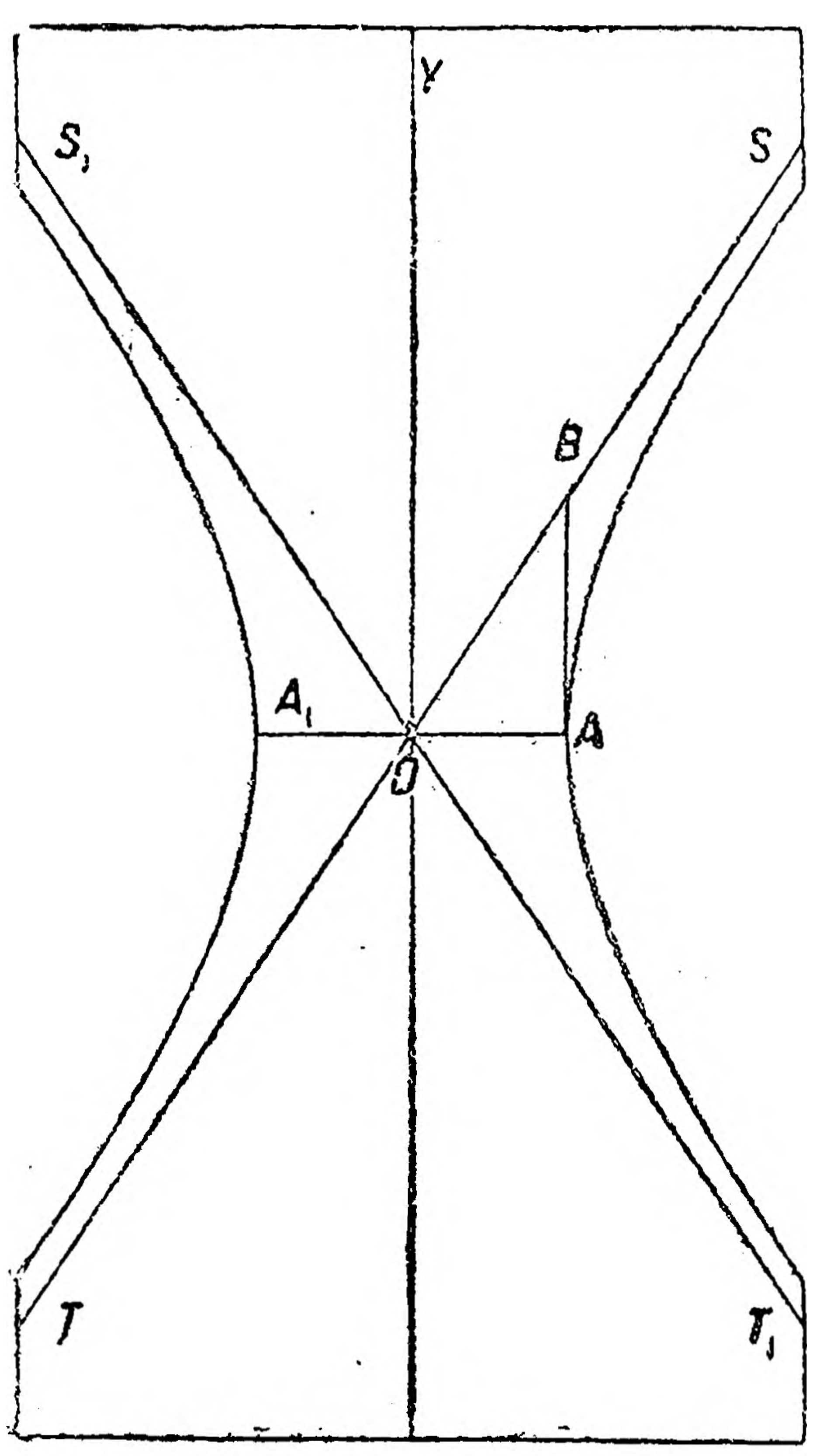
Упражнения.

1. Приготовьте шаблоны для вычерчивания гиперболы с полуосями $a = 10$ *мм*, $b = 15$ *мм* и $a = 20$ *мм*, $b = 10$ *мм*. Первый шаблон должен иметь вид, указанный на чертеже 84 (можно ограничиться лишь одним квадрантом).

2. Найти уравнение гиперболы, зная, что ее вещественная полуось $a = 10$ *мм*, а расстояние между фокусами вдвое больше расстояния между вершинами.

3. Насколько надо удалиться от вершины гиперболы с полуосями $a=20$ *мм* и $b=10$ *мм*, чтобы расстояние от точки на гиперболе до ближайшей асимптоты, измеряемое по параллели к оси Y, сделалось меньше 1 *мм*? 0,1 *мм*? 0,01 *мм*?

4. Вывести уравнение гиперболы, „сопряженной" с гиперболой (1), т. е. такой, фокусы которой расположены на оси Y, вещественная полуось равна b, мнимая полуось равна a.



Черт. 84.

5. Решить еще раз задачу упражнения 3 § 16, заменяя построение гипербол построением их асимптот.

6. Найти уравнение гиперболы, оси которой совмещены с осями координат, зная, что она проходит через точку (60; 50) и что отношение расстояния между ее фокусами к расстоянию между ее вершинами („эксцентриситет" гиперболы) равно 1,5.

7. Показать, что при одновременном приближении к нулю обеих полуосей гиперболы, но с сохранением постоянного отношения $b:a$ гипербола деформируется и движется, приближаясь к совпадению со своими асимптотами, которые остаются неподвижными, и что всякую пару пересекающихся прямых можно поэтому рассматривать как особого рода гиперболу (точнее — как *предельный случай* гиперболы).

§ 41. Взаимное расположение гиперболы и прямой. В предыдущем параграфе мы уже выяснили, как располагаются относительно гиперболы прямые, проходящие через ее центр. Рассмотрим теперь взаимное расположение гиперболы и любой прямой, не параллельной оси Y. Поступая, как в § 36, получим уравнение

$$(a^2k^2-b^2)x^2+2a^2knx+a^2(n^2+b^2)=0, \tag{1}$$

корни которого дают абсциссы точек пересечения гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямой $y=kx+n$. Предположив, что $a^2k^2-b^2\neq 0$, находим для координат точки пересечения выражения

$$x_{1\text{ и }2}=\frac{-a^2kn\pm ab\sqrt{R}}{a^2k^2-b^2}, \qquad y_{1\text{ и }2}=\frac{-nb^2\pm abk\sqrt{R}}{a^2k^2-b^2}, \tag{2}$$

где $R=b^2-a^2k^2+n^2$ и одновременно берутся либо оба верхние, либо оба нижние знака.

Различаем 3 случая:

С л у ч а й 1, $R>0$. Прямая имеет две различные общие точки с гиперболой и является для нее *секущей*.

С л у ч а й 2, $R<0$. Прямая общих точек с гиперболой не имеет.

С л у ч а й 3, $R=0$. Две общих точки прямой и гиперболы сливаются в одну, прямая является *касательной* для гиперболы, причем координаты точки касания $(x_0; y_0)$ выражаются формулами (2), в которых надо взять $R=0$, а именно:

$$x_0=-\frac{a^2k}{n}, \quad y_0=-\frac{b^2}{n}.$$

Рассмотрим дальше особый случай, а именно тот, когда $a^2k^2-b^2=0$, т. е. когда $k^2=\frac{b^2}{a^2}$, или $k=\pm\frac{b}{a}$.

Прямые с угловым коэфициентом $+\frac{b}{a}$ или $-\frac{b}{a}$ параллельны одной из асимптот и называются прямыми *асимптотического направления*. Для таких прямых уравнение (1) сводится к линейному и дает при $n \neq 0$ один корень $x = -\frac{n^2+b^2}{2kn}$. Всякая прямая асимптотического направления имеет с гиперболой, таким образом, лишь одну общую точку.

Если же при $k = \pm\frac{b}{a}$ имеем $n=0$, т. е. рассматриваемая прямая есть одна из асимптот, то уравнение (1) сводится к невозможному условию $a^2b^2=0$ и точек пересечения не оказывается.

Остается выяснить, какие случаи представляет взаимное расположение гиперболы и прямой $x=m$, параллельной оси Y. Предоставляем читателю доказать, что здесь возможны те же три случая: при $m^2 > a^2$ прямая является секущей, при $m^2 < a^2$ общих точек у прямой и гиперболы нет, при $m^2 = a^2$ прямая является касательной.

Вводя в рассмотрение бесконечно-удаленные точки плоскости (см. § 31), можно сказать, что всякая прямая асимптотического направления встречает гиперболу в одной конечной и в одной бесконечно-удаленной точке, а каждая из асимптот встречает гиперболу в двух бесконечно-удаленных точках. Принимая во внимание, что на всякой прямой имеется лишь одна бесконечно-удаленная точка (см. § 31), заключаем, что асимптота имеет с гиперболой две совпадающих бесконечно-удаленных точки и является поэтому *касательной к гиперболе* в бесконечно-удаленной ее точке.

Напомним еще раз, как надо понимать это замечание о бесконечно-удаленных точках. Взяв какую-нибудь прямую, пересекающую гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в двух точках, будем вращать эту прямую около одной из точек пересечения так, чтобы ее угловой коэфициент приближался к $\frac{b}{a}$ или $-\frac{b}{a}$. Вторая точка пересечения будет при этом двигаться по одной из ветвей гиперболы, неограниченно удаляясь от начала координат, и при достаточном приближении углового коэфициента секущей к $\pm\frac{b}{a}$ эта точка будет иметь сколь угодно большие координаты x и y. Только это и выражается утверждением о том, что прямая асимптотического направления пересекает гиперболу в одной бесконечно-удаленной точке. Если же, уменьшая абсолютное значение начальной ординаты, приближать прямую асимптотического направления, перемещая ее параллельно самой себе к соответствующей асимптоте, то и первая точка пересечения будет неограниченно удаляться от начала: асимптота пересекает гиперболу в двух совпадающих бесконечно-удаленных точках.

После всего сказанного становится вполне ясным утверждение, что всякая гипербола имеет две различных бесконечно-удаленных точки, а именно по одной в каждом из двух асимптотических направлений. Так как эллипс, не имея бесконечных ветвей, вовсе не имеет бесконечно-удаленных точек, а парабола, как мы увидим ниже, имеет две совпадающих бесконечно-удаленных точки, то именно число бесконечно-удаленных точек можно было бы положить в основу классификации кривых II порядка, что иногда и делают.

Упражнения.

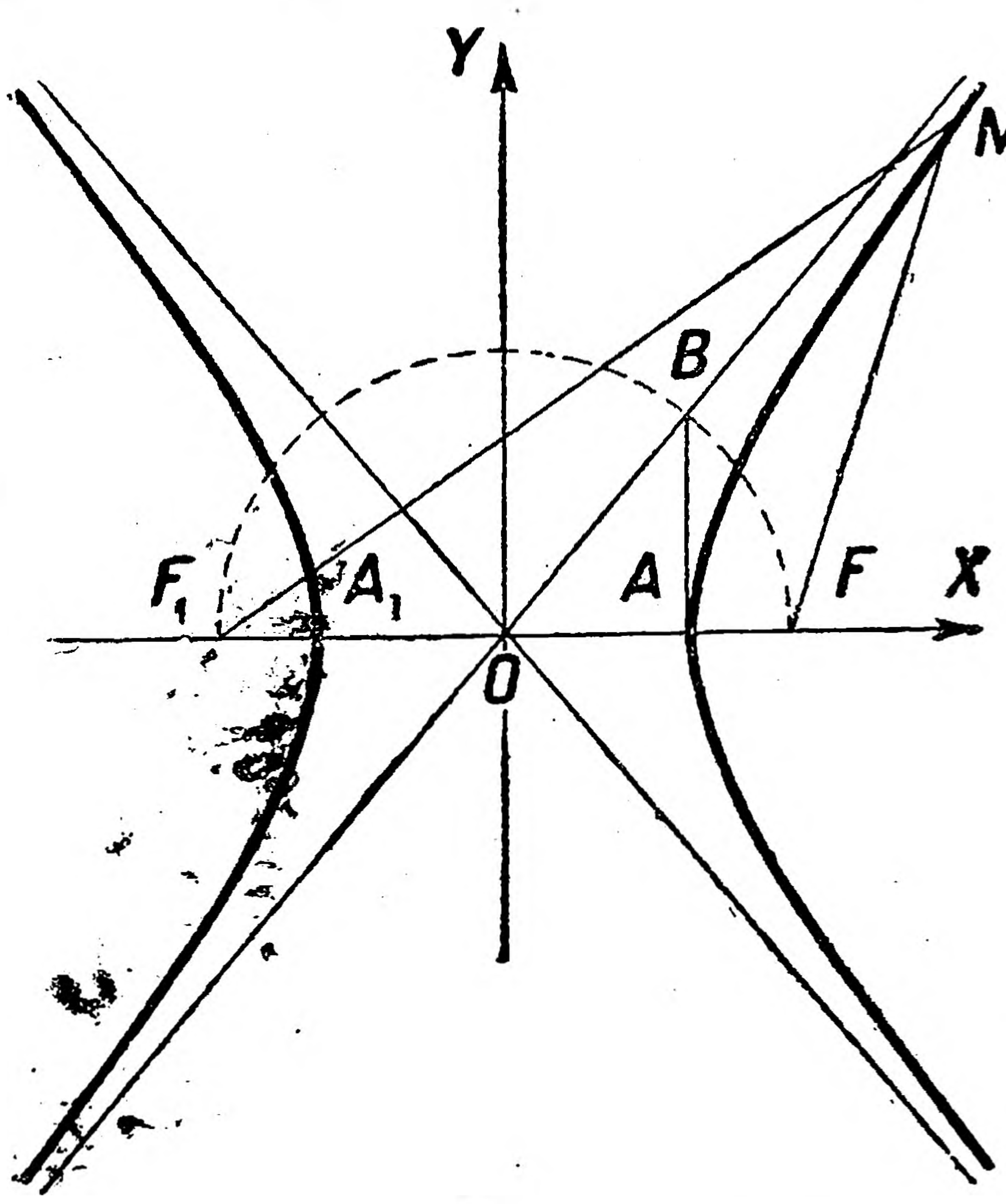
1. Найти точку пересечения прямых $x-y+10=0$, $x+y+10=0$, $3x-2y-6=0$, $10x+y-20=0$ с гиперболой $\frac{x^2}{10^2}-\frac{y^2}{15^2}=1$ сперва графическим способом, используя приготовленный шаблон, затем аналитическим способом.

2. Рассмотреть все случаи взаимного расположения той же гиперболы и прямой, проходящей через точку (20; 5). Тот же вопрос для точки (5; 20).

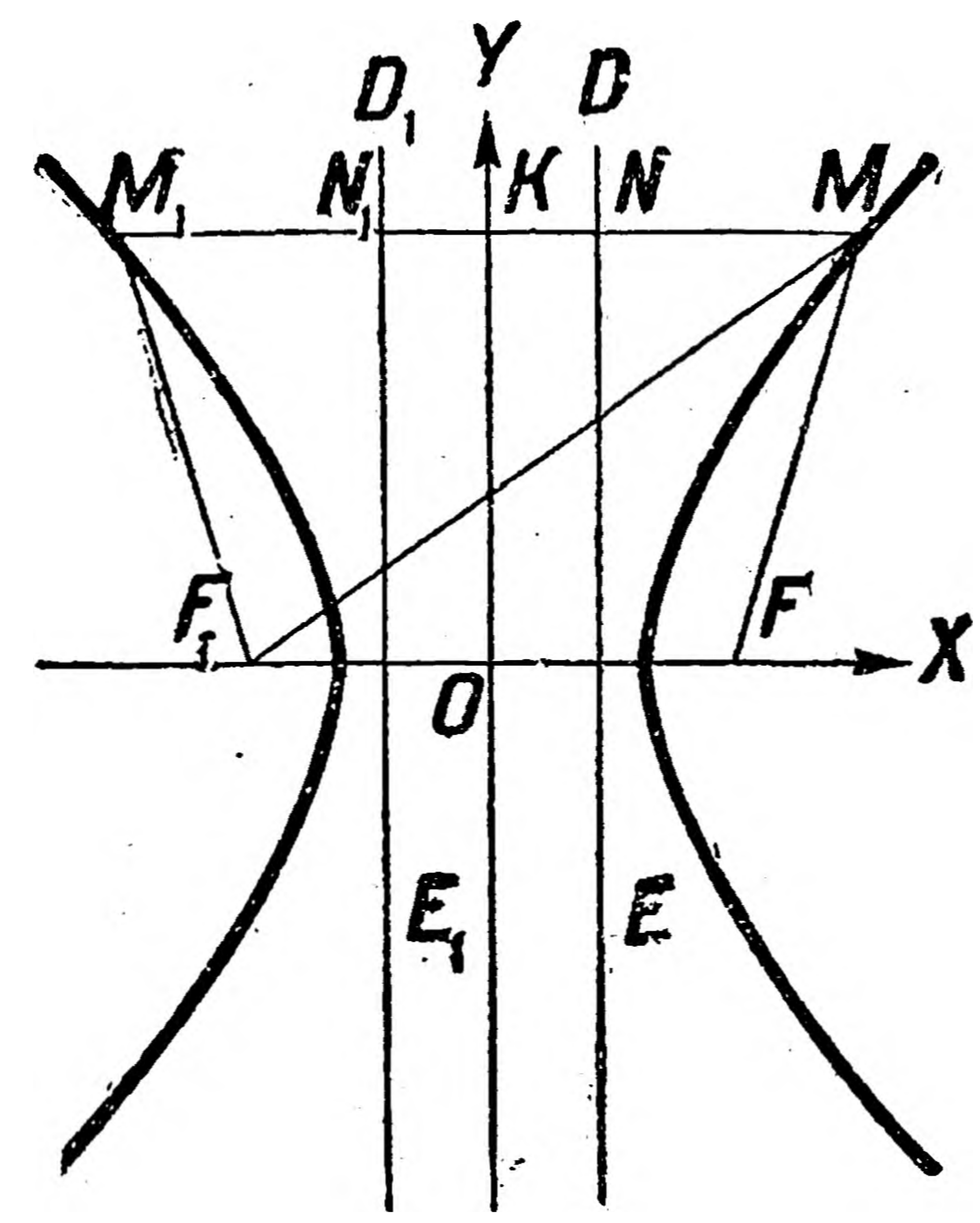
3. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая пересекала и гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, и гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, сопряженную с первой.

§ 42. Фокусы, директрисы, эксцентриситет, параметр гиперболы. Выводя простейшее уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, мы имели для координат фокусов значения $x=\pm c$, $y=0$. Число c связано с числами a и b соотношением $c^2-a^2=b^2$, и если a и b известны, то c можно найти либо по формуле $c^2=a^2+b^2$, либо построением, понятным из чертежа 85, где $OA=OA_1=a$, $AB=b$, $OF=OF_1=OB=c$.

Найдем расстояния от обоих фокусов F и F_1 до произвольной точки



Черт. 85.



Черт. 86.

гиперболы $M(x; y)$, принимая во внимание, что координаты этой точки удовлетворяют уравнению гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (черт. 86). Пользуясь формулой (2) § 7, находим, действуя совершенно аналогично тому, как в § 37, что $FM^2=r^2=(ex-a)^2$, $F_1M^2=r_1^2=(ex+a)^2$, где $e=\frac{c}{a}$ есть эксцентриситет гиперболы. В отличие от эллипса, где всегда $0<e<1$, у гиперболы $e>1$, так как $c>a$. Извлекая корни, имеем $r=\pm(ex-a)$, $r_1=\pm(ex+a)$. Легко видеть, что для точек правой части гиперболы надо брать в обоих случаях верхние знаки, для точек левой части — нижние (чтобы доказать это, надо принять во внимание, что $e>1$, $x>a$ для правой части, $x<-a$ для левой). Итак,

$$\begin{aligned} &\text{при } x\geqq a \quad r=ex-a, \quad r_1=ex+a, \\ &\text{при } x\leqq -a \quad r=-ex+a, \quad r_1=-ex-a. \end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, как и в случае эллипса, расстояния любой точки гиперболы от каждого из фокусов выражаются линейно через абсциссу этой точки.

Переписывая формулы (1) в несколько ином виде, а именно

$$r=\pm e\left(x-\frac{a}{e}\right)=\pm e\left(x-\frac{a^2}{c}\right),\quad r_1=\pm e\left(x+\frac{a^2}{c}\right),\tag{2}$$

замечаем, что двучлены в скобках представляют собой не что иное как расстояния рассматриваемой точки M от прямых

$$x=\frac{a^2}{c},\quad x=-\frac{a^2}{c},\tag{3}$$

проходящих параллельно оси Y между обеими вершинами гиперболы $\left(\text{так как } \frac{a^2}{c}=\frac{a}{e}<a\right)$ и называемых *директрисами* гиперболы (на чертеже 86 прямые DE и D_1E_1). Обозначая расстояния NM и N_1M через d и d_1, замечаем, что для правой части гиперболы $d=x-\frac{a^2}{c}$, $d_1=x+\frac{a^2}{c}$, а для левой $d=-x+\frac{a^2}{c}=-\left(x-\frac{a^2}{c}\right)$, $d_1=-\left(x+\frac{a^2}{c}\right)$, и переписываем формулы (2) в виде

$$r=ed,\quad r_1=ed_1.\tag{4}$$

Как видим, *отношение фокального радиуса-вектора любой точки гиперболы к ее расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная и бо́льшая единицы, а именно равная эксцентриситету гиперболы.*

Параметром гиперболы, как и параметром эллипса, называют ту ординату кривой, которая проходит через фокус. Параметр гиперболы выражается через полуоси той же формулой, как и у эллипса, а именно

$$p=\frac{b^2}{a}.$$

Упражнения.

1. Найти фокальные радиусы-векторы для нескольких точек одной из тех двух гипербол, для которых мы приготовили шаблон (см. упражнение 1 § 40), сперва измерениями по чертежу, потом по формулам (4), найдя предварительно эксцентриситет e.

2. Выяснить, что делается с фокусами и директрисами гиперболы, если, сохраняя постоянным отношение $b:a$, приближать обе полуоси гиперболы a и b к нулю.

3. На плоскости даны прямая и точка, расположенная вне прямой. По плоскости движется точка, причем ее расстояние до данной точки сохраняет постоянное и большее единицы отношение e к расстоянию до данной прямой. Найти уравнение кривой, по которой движется точка, и показать, применяя надлежащее преобразование координат, что эта кривая — гипербола.

4. Доказать, что точка пересечения асимптоты и директрисы находится от центра гиперболы на расстоянии, равном вещественной полуоси, и что прямая, соединяющая эту точку с ближайшим фокусом, перпендикулярна к асимптоте и отсекает от мнимой оси гиперболы отрезок, равный абсциссе той точки гиперболы, ордината которой равна вещественной полуоси.

5. Доказать, что расстояние от точки $M(x; y)$, движущейся по гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до неподвижной точки $N(x_0; y_0)$, выражается линейной функцией координат x и y тогда и только тогда, когда точка N совпадает с одним из фокусов гиперболы.

§ 43. Сопряженные диаметры гиперболы. Вопрос о том, как расположены середины всех хорд гиперболы, имеющих одно и то же направление, решается так же, как и для эллипса (§ 38). Решая совместно уравнение гиперболы и уравнение прямой $y = kx + n$, где k предполагается постоянным, находим координаты середины каждой хорды

$$x_n = -\frac{a^2kn}{a^2k^2 - b^2}, \quad y_n = -\frac{nb^2}{a^2k^2 - b^2} \qquad (1)$$

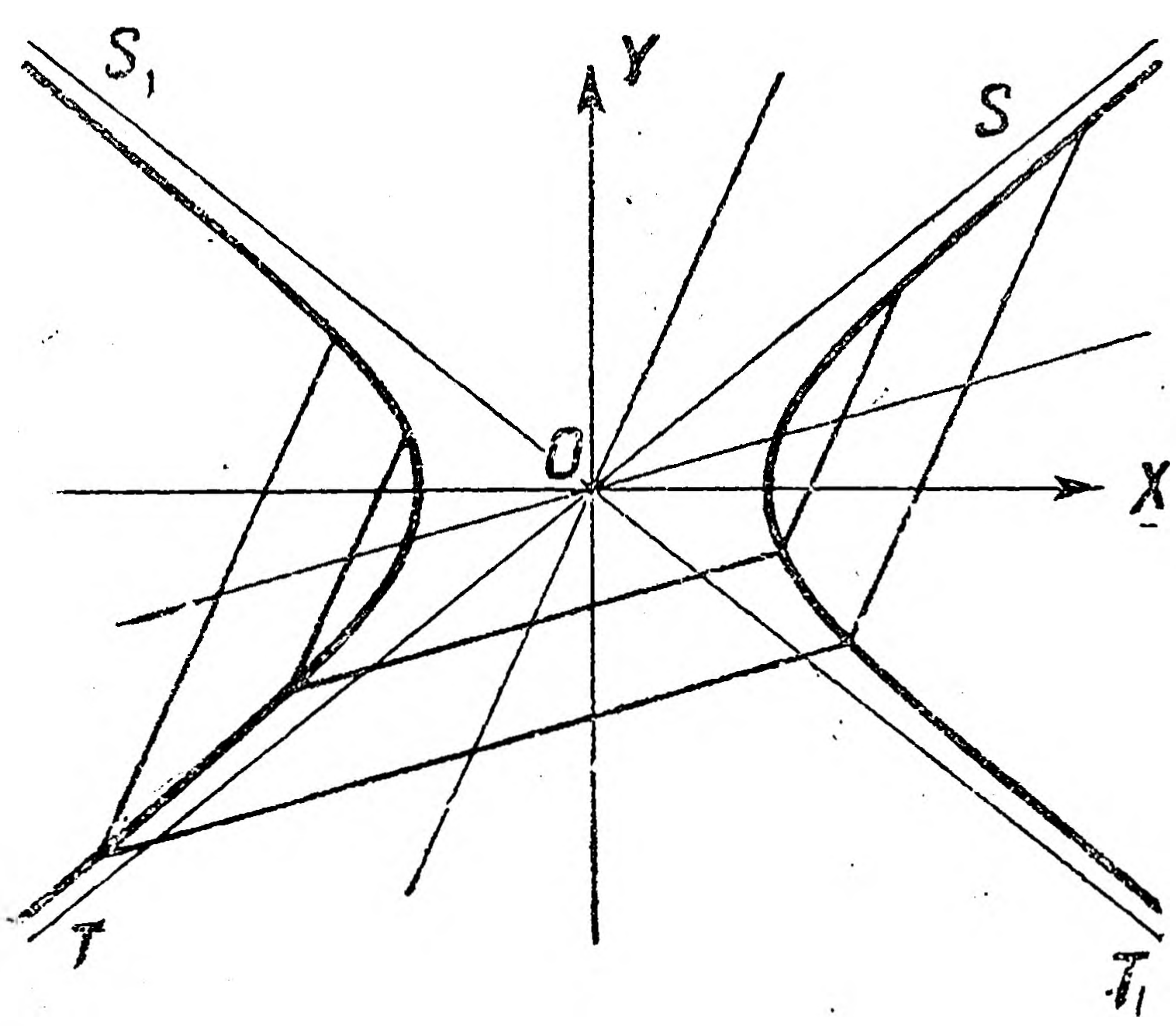
и замечаем, что геометрическим местом этих середин является прямая

$$y = \frac{b^2}{a^2k} x \text{ или } y = k_1 x,$$

где $k_1 = \frac{b^2}{a^2k}$. Прямая эта называется *диаметром, сопряженным с хордами направления* k. Соотношение между угловыми коэфициентами k и k_1 можно написать в виде формулы

$$kk_1 = \frac{b^2}{a^2}, \qquad (2)$$

не меняющейся от перестановки k и k_1, что показывает правильность следующего утверждения: *если диаметр* $y = k_1x$ *сопряжен с хордами направления* k, *то диаметр* $y = kx$ *сопряжен с хордами направления* k_1. Два диаметра $y = kx$ и $y = k_1x$, угловые коэфициенты которых связаны соотношением (2), называются *взаимно-сопряженными*, или просто *сопряженными*, диаметрами гиперболы. Каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому (чертеж 87). Соотношение (2) показывает, что оба угловых коэфициента k и k_1 имеют одинаковые знаки, а потому сопряженные диаметры гиперболы лежат всегда в одном и том же координатном угле, а именно либо в угле XOY, как на чертеже 87, либо в смежном с ним. Если $0 < k < \frac{b}{a}$, то, как показывает то же соотношение (2), $\frac{b}{a} < k_1$, а потому два сопряженных диаметра лежат всегда в двух различных углах T_1OS и SOS_1, образуемых асимптотами.



Черт. 87.

Приближая k к нулю, мы будем тем самым в силу соотношения $k_1 = \frac{b^2}{ka^2}$ неограниченно увеличивать k_1. Поэтому вещественная и мнимая оси гиперболы, т. е. обе ее оси симметрии, являются взаимно-сопряженными ее диаметрами. Существуют ли, кроме этих двух, еще другие взаимно-сопряженные диаметры гиперболы, тоже перпендикулярные друг к другу? Вопрос этот представляет интерес в том отношении, что он равносилен вопросу о существовании других осей симметрии гиперболы, кроме тех двух, с какими мы уже знакомы. Приняв во внимание условие перпендикулярности двух направлений $kk_1 = -1$, замечаем, что ни при каких конечных значениях k и k_1 нельзя удовлетворить одновременно двум уравнениям

$$kk_1 = \frac{b^2}{a^2}, \quad kk_1 = -1,$$

а потому других перпендикулярных друг другу взаимно-сопряженных диаметров, кроме уже известных нам и совпадающих с вещественной ($k=0$) и мнимой ($k_1=\infty$) осями гиперболы, не существует: *гипербола имеет лишь два главных диаметра*, т. е. таких, которые перпендикулярны к сопряженным с ними хордам.

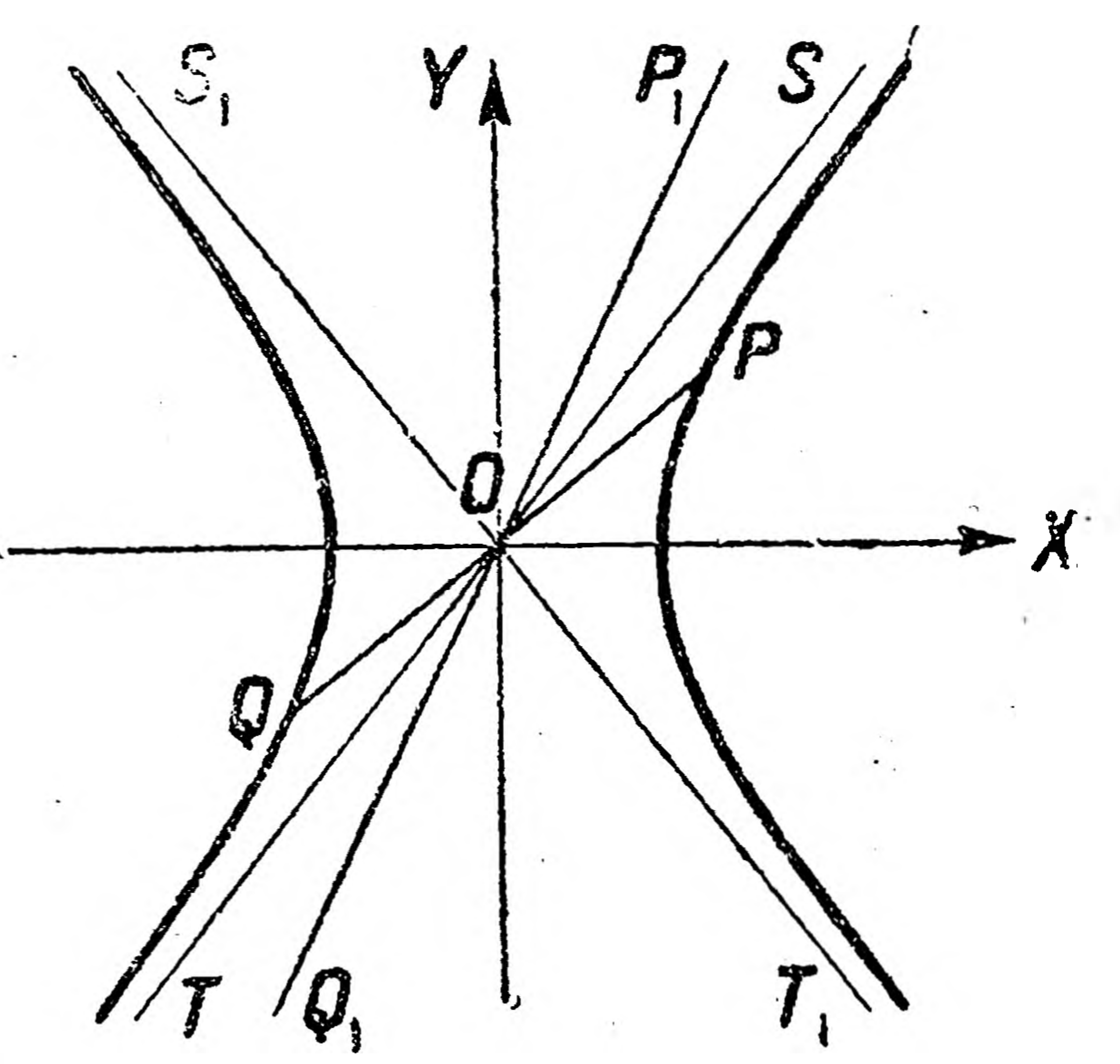
Решим теперь несколько задач на сопряженные диаметры гиперболы, аналогичных задачам на сопряженные диаметры эллипса (§ 38, 4°).

Задача 1. Даны гипербола и один из ее диаметров. Найти диаметр, с ним сопряженный.

При аналитическом решении задачи, когда следует считать известными значения a, b, k, все сводится к вычислению k_1 по уравнению (2). Для построительного решения задачи достаточно провести пару хорд, параллельных данному диаметру, и соединить их середины.

Задача 2. На чертеже изображена гипербола. Найти ее центр и оси симметрии.

Начертив пару каких-нибудь параллельных друг другу хорд, соединим их середины прямой и получим один из диаметров гиперболы. Построив два диаметра, в пересечении их получим центр гиперболы. Начертив круг с центром в центре гиперболы и с радиусом, достаточно большим, чтобы круг пересекал обе части гиперболы, получим в пересечении четыре точки гиперболы, попарно симметричных относительно осей гиперболы, а потому легко найдем и эти последние.



Черт. 88

Задача 3. Выяснить, как меняется угол между двумя сопряженными диаметрами гиперболы, если один из них вращается в положительном направлении, причем угол его наклона к оси X меняется от 0° до 180°.

Обозначая углы наклона сопряженных диаметров PQ и P_1Q_1 к оси X через φ и φ_1 (черт. 88) и пользуясь соотношением (2), ясно убеждаемся, что при вращении диаметра PQ в положительном направлении диаметр P_1Q_1 вращается в направлении отрицательном, причем при приближении первого из них к асимптоте TS второй тоже приближается к ней (с другой стороны). Если $k=\frac{b}{a}$, то и $k_1=\frac{b}{a}$, а потому асимптота является *самосопряженным* диаметром. При дальнейшем вращении диаметра PQ он переходит в угол SOS_1, а P_1Q_1 — в угол SOT_1, и при приближении PQ ко второй асимптоте S_1T_1 P_1Q_1 тоже приближается к совпадению с нею; если $k=-\frac{b}{a}$, то и $k_1=-\frac{b}{a}$.

Задача 4. Найти длины двух сопряженных полудиаметров данной гиперболы, предполагая известным угловой коэфициент k первого из них.

Так как один из двух сопряженных диаметров гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

с этой кривой не пересекается, то берут его пересечение с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, сопряженной с данной (черт. 89). Длинами сопряженных диаметров гиперболы называют, таким образом, отрезки $OP=a'$ и $OP_1=b'$, причем угловые коэфициенты k и k_1 связаны соотношением (2) Решение системы $y=kx$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ дает координаты точки P, а именно

$$x=\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2k^2}},\quad y=\frac{abk}{\sqrt{b^2-a^2k^2}},\tag{3}$$

а решение системы $y=k_1x$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ — координаты точки P_1:

$$x=\frac{a^2k}{\sqrt{b^2-a^2k^2}},\quad y=\frac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2k^2}},\tag{4}$$

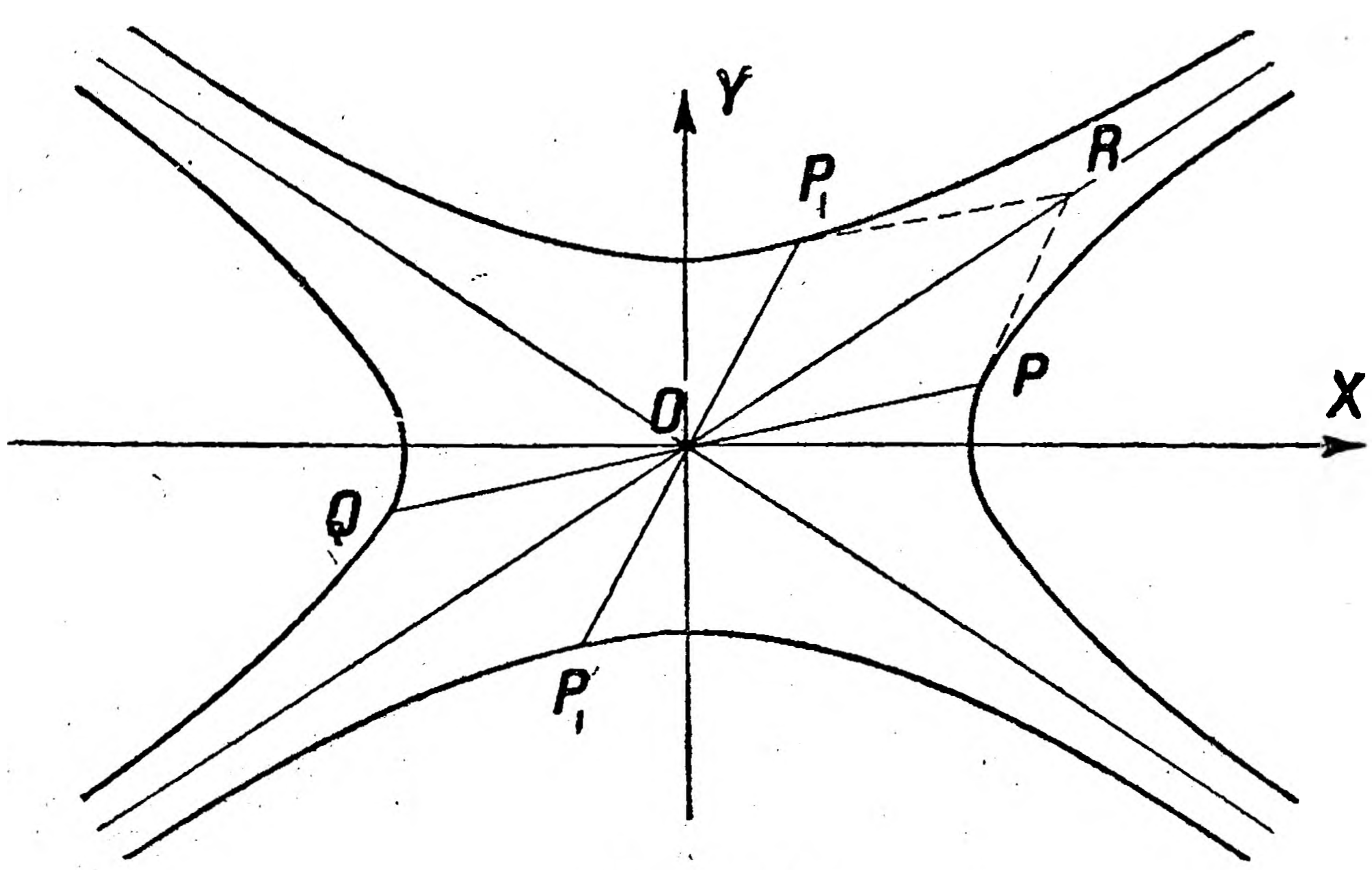
причем знак перед корнем взят в предположении, что точки P и P_1 лежат в первой четверти.

Теперь по формуле (2) § 7 находим

$$a'=ab\sqrt{\frac{1+k^2}{b^2-a^2k^2}},\quad b'=\sqrt{\frac{a^4k^2+b^4}{b^2-a^2k^2}}.\tag{5}$$

Задача 5. Найти разность квадратов сопряженных полудиаметров гиперболы.

Формула (5) показывает, что $a'^2-b'^2=a^2-b^2$, и мы получаем I теорему Аполлония (для гиперболы): *разность квадратов двух сопряженных полудиаметров гиперболы есть величина постоянная, равная разности квадратов его полуосей.*



Черт. 89.

Задача 6. Найти площадь параллелограма, построенного на двух сопряженных полудиаметрах гиперболы.

Вычисляя эту площадь как удвоенную площадь S треугольника PP_1O по координатам трех его вершин, получаем формулу $2S=a'b'\sin\theta=ab$, выражающую II теорему Аполлония: *площадь параллелограма, построенного на двух сопряженных полудиаметрах гиперболы, есть величина постоянная, равная площади прямоугольника, построенного на его полуосях.*

Упражнения.

1. Взять гиперболу с полуосями $a=20$, $b=10$ и найти построительным и вычислительным способами диаметр, сопряженный с биссектрисой координатного угла.

2. В этой же гиперболе найти хорду, делящуюся в точке (30; 5) пополам.

3. Взять один из имеющихся шаблонов гиперболы, перевести ее контур на бумагу (только контур, а не оси!), найти центр и оси гиперболы.

4. Проверить обе теоремы Аполлония, вычисляя разность квадратов сопряженных полудиаметров гиперболы, найденных выше в упражнении 1, а также площадь построенного на них параллелограма.

5. Найти угол между двумя сопряженными диаметрами гиперболы с полуосями $a=20$ и $b=30$, если один из них наклонен к оси X под углом в 30°.

6. Найти сопряженные полудиаметры гиперболы, зная угол между ними, равный 60°, длину вещественной полуоси $a=6$, эксцентриситет $e=\frac{13}{12}$.

7. Найти угол между двумя сопряженными полудиаметрами гиперболы, зная, что отношение их длин равно λ, а эксцентриситет гиперболы равен e.

8. Показать, что вершина R параллелограма, построенного на двух сопряженных полудиаметрах гиперболы (черт. 89), лежит на асимптоте.

§ 44. Касательная и нормаль к гиперболе. Решим для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

те же задачи на касательную и нормаль, какие были решены в § 39 для эллипса.

Задача 1. Найти уравнения касательной и нормали к гиперболе, проходящих через данную на ней точку $(x_0; y_0)$.

Берем пучок $y-y_0=k(x-x_0)$ и условие касания прямой этого пучка с гиперболой (§ 41). Получаем квадратное уравнение для определения k, а именно

$$(a^2-x_0^2)\,k^2+2\,kx_0y_0-(b^2+y_0^2)=0. \tag{2}$$

Предполагая, что $a^2-x_0^2\neq 0$, найдем отсюда k. Принимая во внимание, что $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$, получаем

$$k=\frac{-x_0y_0\pm ab\sqrt{-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+1}}{a^2-x_0^2}=-\frac{x_0y_0}{a^2-x_0^2}.$$

Подставляя найденное значение k в уравнение пучка, получаем после преобразований уравнение касательной

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1, \tag{3}$$

сохраняющее силу и для того особого случая, когда $a^2-x_0^2=0$.

Применяя условие перпендикулярности, выводим уравнение нормали

$$a^2y_0(x-x_0)+b^2x_0(y-y_0)=0. \tag{4}$$

Задача 2. Найти уравнение касательной к гиперболе (1), параллельной данной прямой $y=kx$.

Здесь дело сводится к определению начальной ординаты n в уравнении касательной $y=kx+n$. Применяя условие касания, находим, что $n=\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}$, и видим, что задача имеет два решения, выражаемых уравнением

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}, \tag{5}$$

если $k^2 > \frac{b^2}{a^2}$, т. е. если данная прямая лежит в том угле между асимптотами, в котором лежит ось Y, и вовсе не имеет решения, если $k^2 < \frac{b^2}{a^2}$, т е. если она лежит в том же угле между асимптотами, что и ось X. В случае $k^2 = \frac{b^2}{a^2}$ данная прямая является одной из асимптот и может быть рассматриваема как касательная к гиперболе в бесконечно-удаленной точке (см. конец § 41).

Задача 3. Найти касательную к гиперболе (1), проходящую через данную где угодно на плоскости точку $M(x_0; y_0)$.

Составляем, как и выше, уравнение (2) и, предполагая пока $a^2 - x_0^2 \neq 0$, решаем его относительно k. Получаем два значения k

$$k = \frac{-x_0 y_0 \pm ab\sqrt{-H}}{a^2 - x_0^2}, \quad \text{где } H = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1. \tag{6}$$

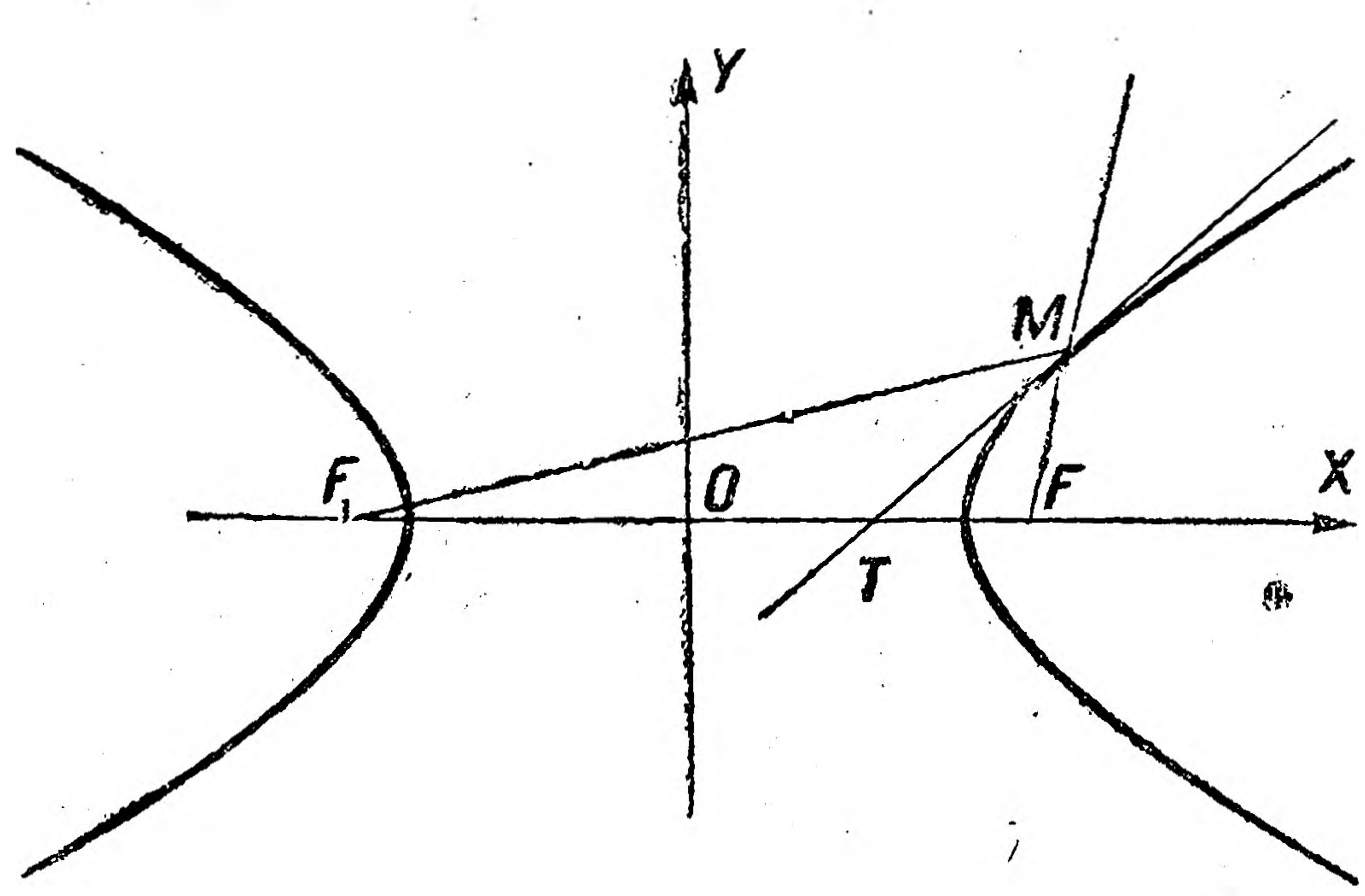
Различаем три случая: 1) $H < 0$, 2) $H > 0$, 3) $H = 0$.

Случай 1, $H < 0$. Точка M расположена между обеими частями гиперболы (см. § 16). Через точку M проходят две касательных к гиперболе, выражаемых уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$, где k имеет два значения, определяемых по формуле (6).

Случай 2, $H > 0$. Точка M расположена не между обеими частями гиперболы, а внутри одной из них. Оба значения k, определяемые формулой (6), являются числами мнимыми. Через точку M не проходит ни одной касательной к гиперболе.

Случай 3, $H = 0$. Точка M расположена на гиперболе, и мы возвращаемся к задаче 1 (одно решение).

Особый случай, $a^2 - x_0^2 = 0$. Предоставляем читателю показать, что в этом случае через точку M проходят либо две касательных к гиперболе (при $y_0 \neq 0$), либо одна (при $y_0 = 0$).



Черт. 90.

Рассмотрим далее углы, которые касательная к гиперболе составляет с фокальными радиусами-векторами, проведенными в точку касания M (черт. 90).

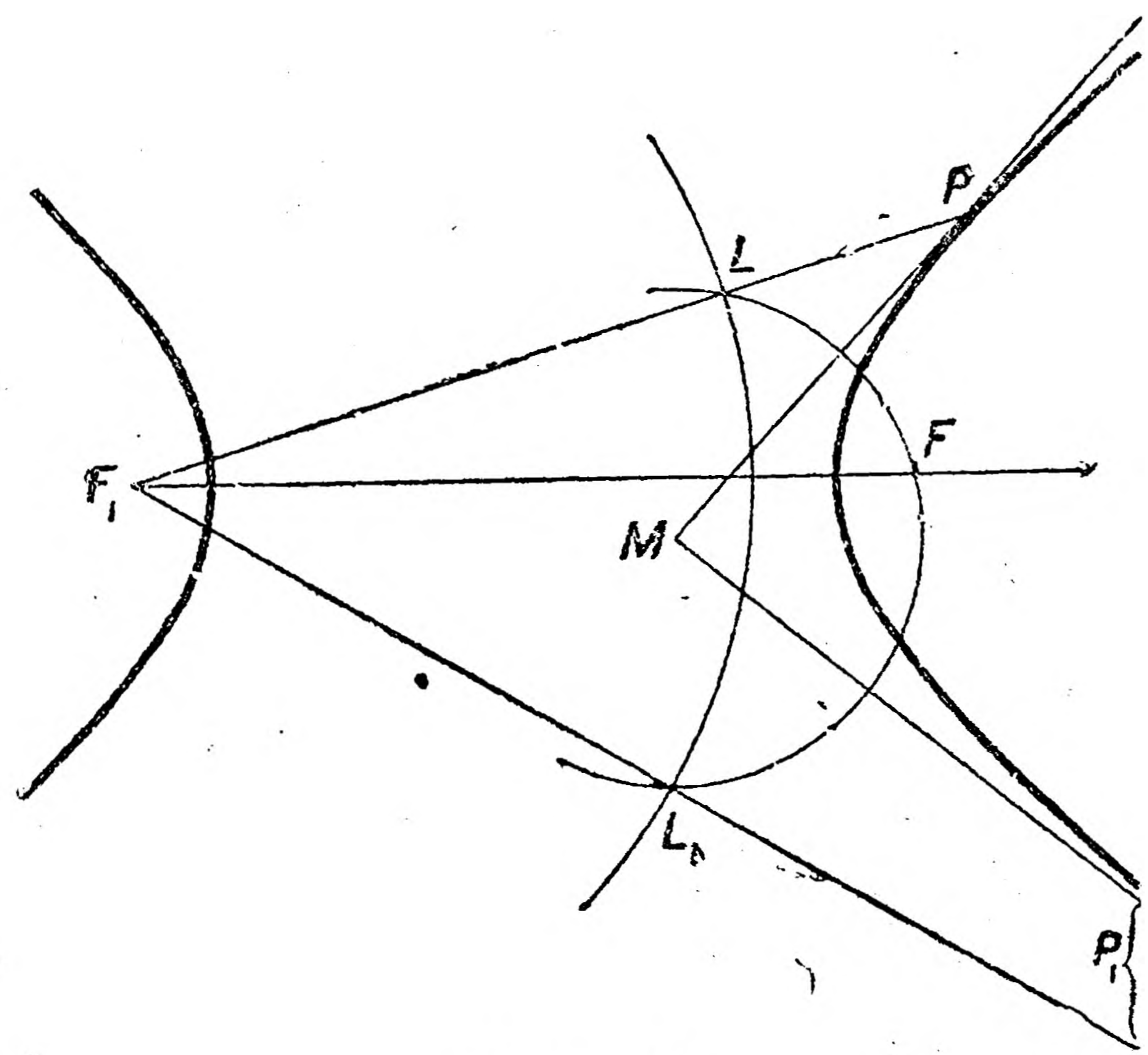
Взяв треугольник F_1MF, находим отношение его сторон $F_1M : FM = (ex_0 + a) : (ex_0 - a)$, пользуясь формулами (1) § 42. С другой стороны, обозначая буквой T точку пересечения касательной с осью X, видим, что и отношение $F_1T : TF$ оказывается равным тому же, так как, определяя OT из уравнения касательной (3), получаем при $y = 0$ $x = OT = \frac{a^2}{x_0}$, а потому $F_1T : TF = \left(c + \frac{a^2}{x_0}\right) : \left(c - \frac{a^2}{x_0}\right) = (ex_0 + a) : (ex_0 - a)$. Итак, касательная MT рассекает сторону F_1F треугольника F_1MF на две части, пропорциональные боковым его сторонам, а потому является биссектрисой угла при вершине M. Отсюда теорема: *касательная к гиперболе* *делит пополам угол между фокальными радиусами-векторами, проведенными в точку касания, а нормаль делит пополам каждый из двух углов, образованных одним из радиусов-векторов и продолжением другого.*

Дадим в заключение настоящего параграфа способ построительного решения трех основных задач на касательную к гиперболе, причем доказательства правильности этих построений читатель должен дать самостоятельно (они аналогичны построениям, детально разобранным в § 39).

Чтобы провести касательную к гиперболе через данную на ней точку, проводим через эту точку диаметр и строим диаметр, с ним сопряженный. Прямая, проведенная параллельно этому второму диаметру через данную точку, и есть искомая касательная.

Зная фокусы гиперболы, решаем ту же задачу, проводя фокальные радиусы-векторы точки касания (черт. 90) и строя биссектрису угла F_1MF.

Если надо провести касательные к гиперболе, параллельные данной прямой (лежащей в том же угле между асимптотами, что и ось Y), достаточно построить диаметр, сопряженный с этой прямой, и через точки его пересечения с гиперболой провести прямые, параллельные данной прямой. Эти прямые и будут искомыми касательными.



Черт. 91.

Чтобы провести касательную к гиперболе через точку M, данную где-нибудь между обеими ветвями гиперболы (черт. 91), проводим из этой точки как из центра дугу радиусом, равным MF, а затем из фокуса F_1 как из центра проводим вторую дугу радиусом, равным $2a$. Проводя через точку F_1 и каждую из точек пересечения этих двух дуг L и L_1 прямые F_1L и F_1L_1, получим при их продолжении точки касания P и P_1 (точка P_1 на чертеже 91 не показана), а прямые MP и MP_1 и будут искомыми касательными.

Упражнения.

1. Построить касательную к гиперболе с полуосями 20 и 10, проходящую через ту ее точку, которая лежит в 1-й четверти и имеет абсциссу 30. Задачу эту, как и две последующих, решить двумя способами — построительным и вычислительным.

2. К этой же гиперболе провести касательные параллельно прямой $y = x$.

3. К ней же провести касательные через точку (15; 5).

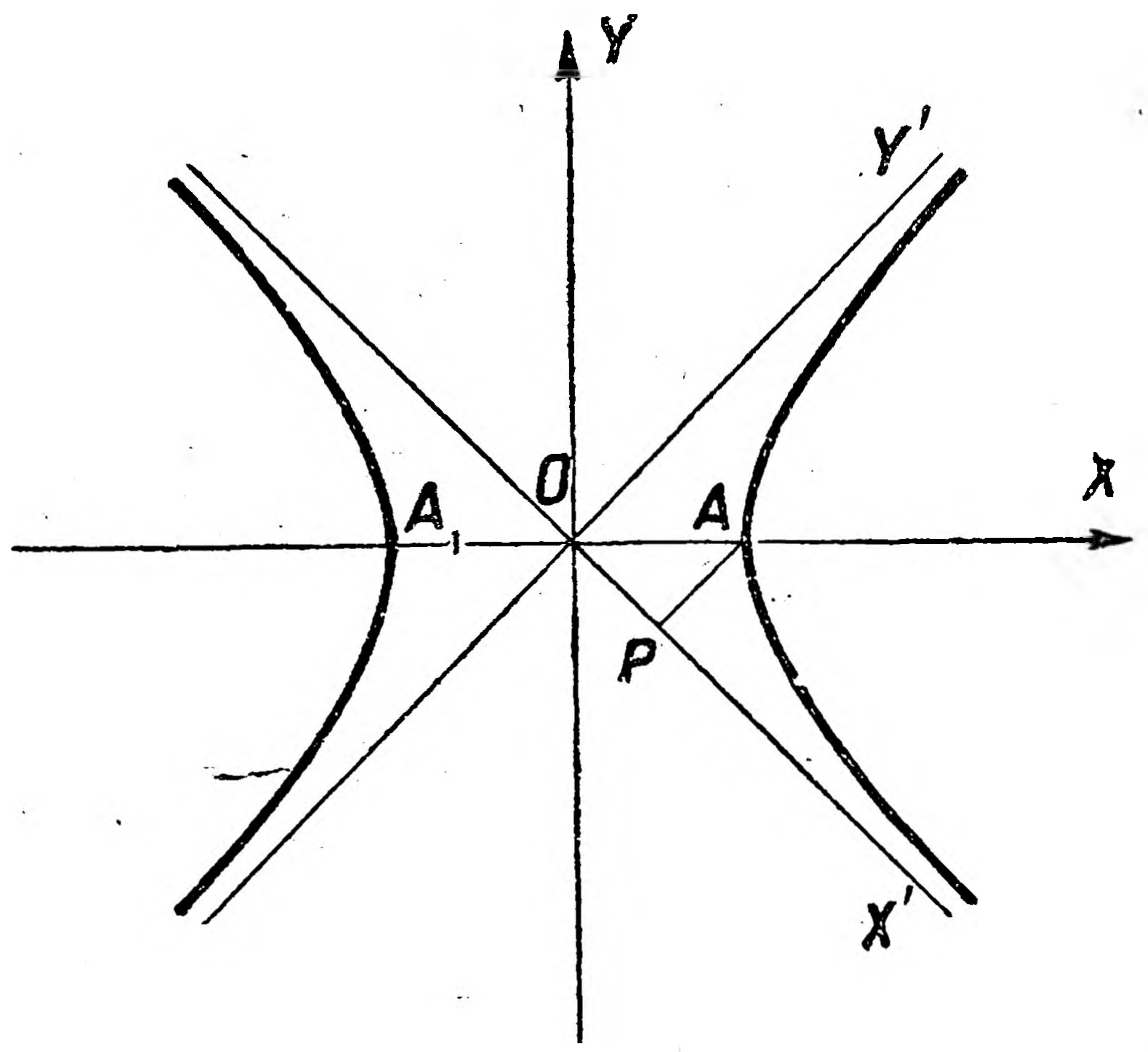
4. Доказать, что произведение перпендикуляров, опущенных из фокусов гиперболы на любую ее касательную, равно всегда квадрату мнимой ее полуоси.

5. Выяснить, в каком отношении точка касания делит отрезок касательной, заключенный между асимптотами.

6. Найти угол между касательными к эллипсу и гиперболе, проведенными через одну из их точек пересечения, предполагая эти кривые *софокусными*, т. е. имеющими общие фокусы.

§ 45. Равнобочная гипербола. Уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам. При равенстве большой и малой полуосей эллипс переходит в круг, имеющий целый ряд свойств, каких не имеет эллипс с неравными осями. Точно так же, уравнивая вещественную и мнимую полуоси гиперболы, мы получаем особый вид гиперболы — так называемую *равнобочную*, или *равностороннюю*, гиперболу, уравнение которой может быть написано в виде:

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1)$$



Черт. 92.

Асимптоты такой гиперболы наклонены под углом в 45° к осям и перпендикулярны друг к другу. Фокусы находятся на расстоянии $\pm a\sqrt{2}$ от центра, эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

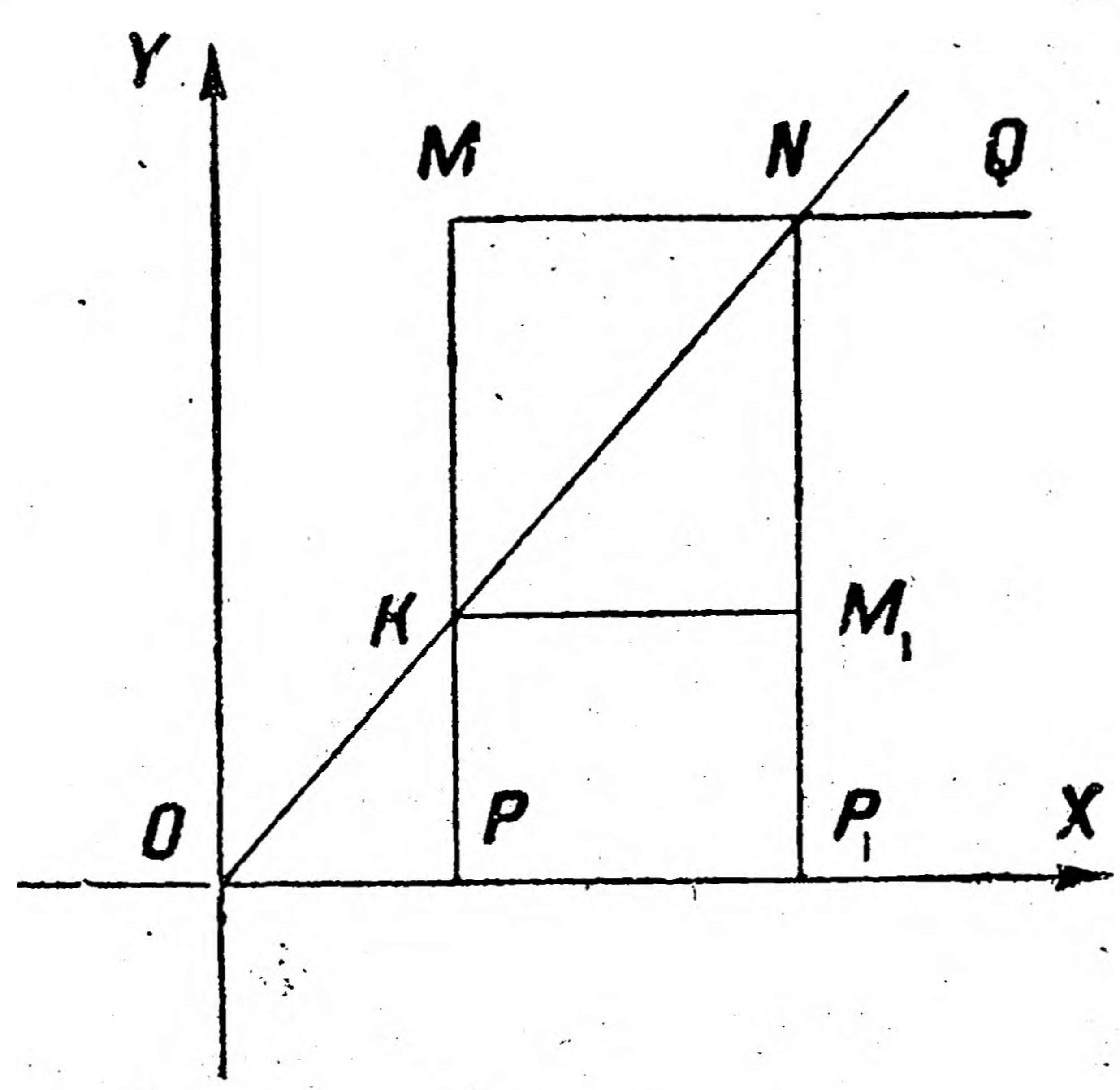
Поворачивая координатные оси X, Y на угол $\alpha = -45°$, мы совместим их с асимптотами равнобочной гиперболы (черт. 92). Новое уравнение кривой получим, применяя формулы преобразования координат (4) § 9:

$$a^2 = x^2 - y^2 = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'+y')\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'-y')\right]^2 = 2x'y'.$$

Обозначая $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ через m и опуская значки при x', y', получим *уравнение равнобочной гиперболы, отнесенной к асимптотам*

$$xy = m^2, \qquad (2)$$

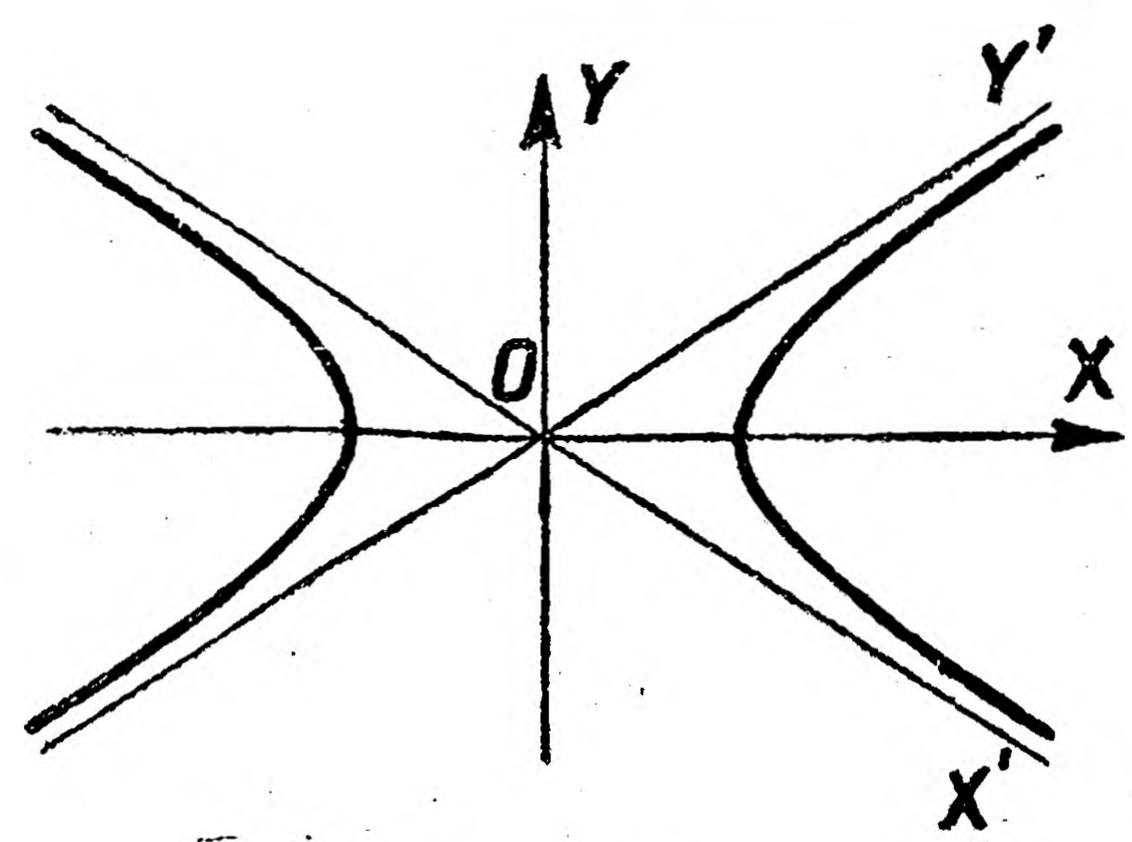
где m есть не что иное как абсцисса OP (или равная ей ордината AP) вершины A гиперболы относительно новых осей, совпадающих с асимптотами.



Черт. 93.

Уравнение (2) показывает, что равнобочная гипербола, отнесенная к асимптотам, является графическим изображением обратно пропорциональной зависимости между x и y. Разыскание координат точек этой гиперболы сводится к выполнению одних только делений (числа m^2 на значения той переменной, которую принимаем за аргумент).

Существует очень простой способ построения на чертеже произвольного числа точек гиперболы, изображаемой уравнением (2), если известно положение одной какой-нибудь ее точки M (черт. 93). Надо: 1) провести через эту точку M прямые MP и MQ, параллельные координатным осям; 2) провести через начало координат произвольную прямую ON; 3) через каждую из точек пересечения K и N прямых MP и MQ с прямой ON опять провести параллели к осям. Точка M_1 пересечения этих параллелей принадлежит искомой гиперболе, в чем можно убедиться, рассматривая подобные треугольники OKP и ONP_1. Полагая $OP=x$, $OP_1=x_1$, $MP=y$, $M_1P_1=y_1$, имеем пропорцию $OP:OP_1=KP:NP_1$, или $x:x_1=y_1:y$, откуда $xy=x_1y_1$. В силу уравнения (2) произведение xy координат точки M, лежащей по условию на гиперболе, равно m^2, а потому в силу последнего равенства и точка M_1 лежит на ней же. Проводя через начало ряд новых прямых, получим столько же точек гиперболы, которые соединяем затем плавной кривой.



Черт. 94.

* Если полуоси a и b гиперболы не равны одна другой, то асимптоты ее не перпендикулярны друг к другу. Принимая асимптоты за оси координат, мы перейдем к косоугольным координатам (§ 10). Обозначая угол XOY' между фокальной осью гиперболы (черт. 94) и асимптотой через φ, мы имеем для определения φ формулу $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$. Чтобы перейти от осей X, Y к новым осям X', Y', совпадающим с асимптотами гиперболы, воспользуемся формулами упражнения 3 § 10:

$$\begin{aligned} x\sin\omega &= x'\sin\beta+y'\sin\beta', \\ y\sin\omega &= x'\sin\alpha+y'\sin\alpha', \end{aligned} \tag{3}$$

где надо взять

$$\omega=(X,Y)=0{,}5\pi,\quad \alpha=(X,X')=-\varphi,\quad \alpha'=(X,Y')=+\varphi,$$
$$\beta=(X',Y)=\varphi+0{,}5\pi,\quad \beta'=(Y',Y)=0{,}5\pi-\varphi.$$

Переписывая формулы (3) в виде

$$x=x'\cos\varphi+y'\cos\varphi=(x'+y')\cos\varphi,\quad y=(-x'+y')\sin\varphi,$$

преобразуем уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ к виду

$$\frac{(x'+y')^2}{a^2}\cos^2\varphi-\frac{(-x'+y')^2}{b^2}\sin^2\varphi=1. \tag{4}$$

Замечая, что из формулы $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$ следует, что $\sin^2\varphi=\frac{b^2}{a^2+b^2}$, $\cos^2\varphi=\frac{a^2}{a^2+b^2}$, переписываем уравнение (4) в виде

$$(x'+y')^2-(-x'+y')^2=a^2+b^2=c^2$$

или окончательно в виде

$$x'y'=m^2,\quad \text{где}\quad m=\frac{1}{2}c. \tag{5}$$

Итак, уравнение всякой гиперболы может быть приведено к виду (5), если за оси координат взять асимптоты. Способ разыскания точек гиперболы на чертеже, рассмотренный выше для гиперболы равнобочной, применим и ко всякой гиперболе, в чем можно убедиться, принимая во внимание, что подобие треугольников OKP и ONP_1 (черт. 93) не нарушится, если угол (X, Y) сделать острым или тупым, сохраняя параллельность проводимых на чертеже прямых осям координат.

Упражнения.

1. Вычертить гиперболу $xy=100$, применяя два способа определения точек гиперболы на чертеже.

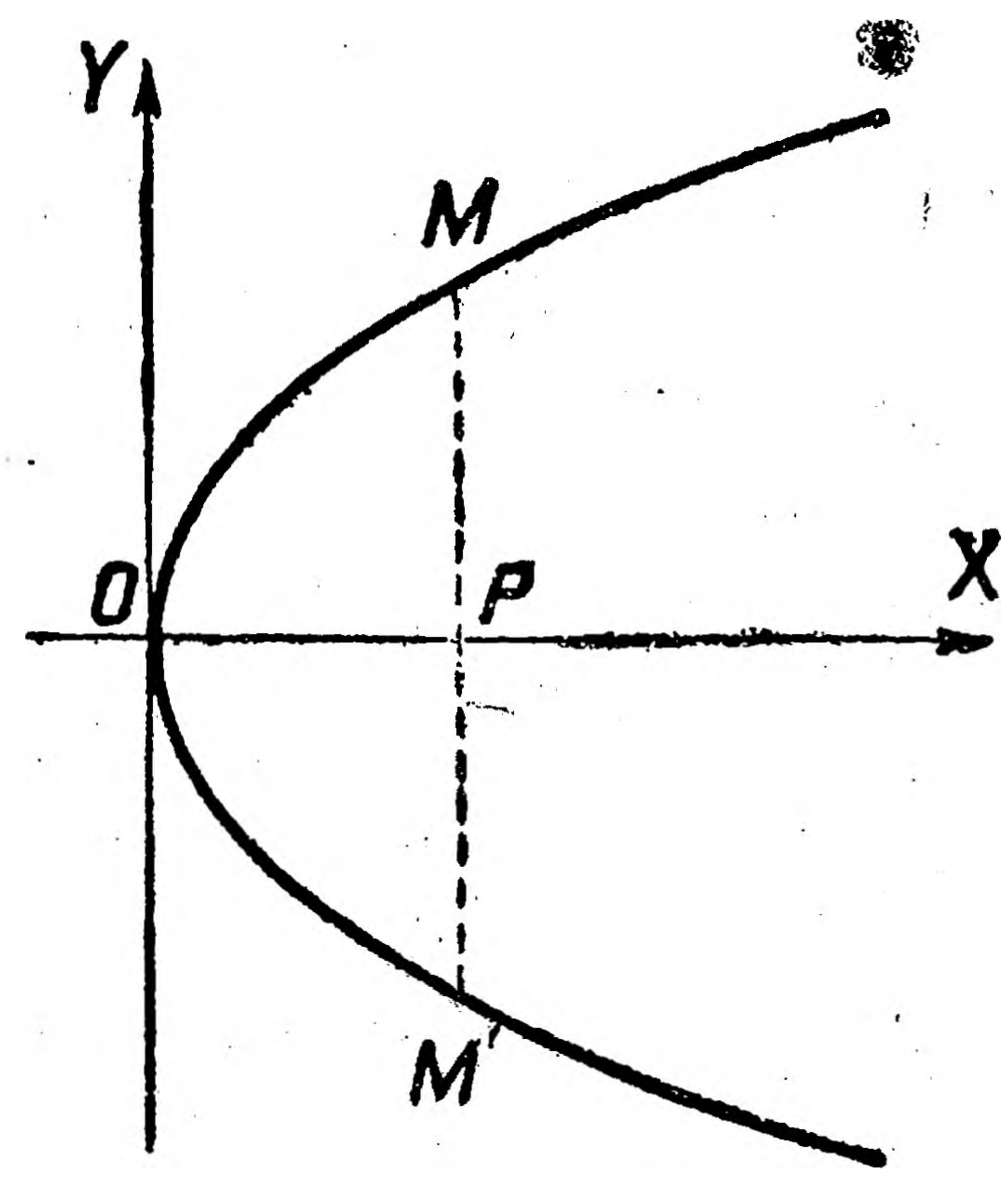
2. Показать, что уравнение касательной к гиперболе $xy=m^2$ есть $y_0x+x_0y=2m^2$, где x_0 и y_0 — координаты точки касания.

3. Выяснить, как точка касания делит отрезок касательной, содержащийся между асимптотами.

4. Найти площадь параллелограма, одна из вершин которого лежит на гиперболе $xy=m^2$, другая — в начале координат, третья и четвертая — на асимптотах.

§ 46. Парабола. Ее симметрия. Фокус и директриса. Эксцентриситет. Как мы видели в § 15, параболой называется кривая, определяемая при некотором определенном выборе координатных осей уравнением $y^2=2px$, где p — некоторое положительное число, и представляющая собой геометрическое место точек, каждая из которых находится на равном расстоянии от фокуса F, имеющего координаты $\frac{1}{2}p$, 0, и директрисы DE, имеющей уравнение $x=\frac{1}{2}p$ (черт. 32).

Если точка $M(x_0; y_0)$ находится на параболе, то $y_0^2=2px_0$, но тогда и $(-y_0)^2=2px_0$, а потому на параболе же находится и точка $M_1(x_0, -y_0)$, симметричная с точкой M относительно оси X. Итак, эта последняя есть ось симметрии параболы. Других осей симметрии парабола не имеет. Не имеет парабола и центра симметрии, т. е. такой точки, в которой делилась бы пополам всякая проходящая через нее хорда кривой (доказательство этих двух утверждений будет дано ниже).



Черт. 95.

Если абсцисса x_0 точки M (или M_1) неограниченно растет, то ее ордината тоже неограниченно растет по абсолютной величине, и точка M (или M_1) удаляется по кривой направо и вверх (или направо и вниз). Парабола имеет две бесконечных ветви, расположенные симметрично относительно оси X (черт. 95). Левее оси Y нет ни одной точки параболы, так как уравнение $y^2=2px$ показывает, что при отрицательном x ордината y получает мнимое значение.

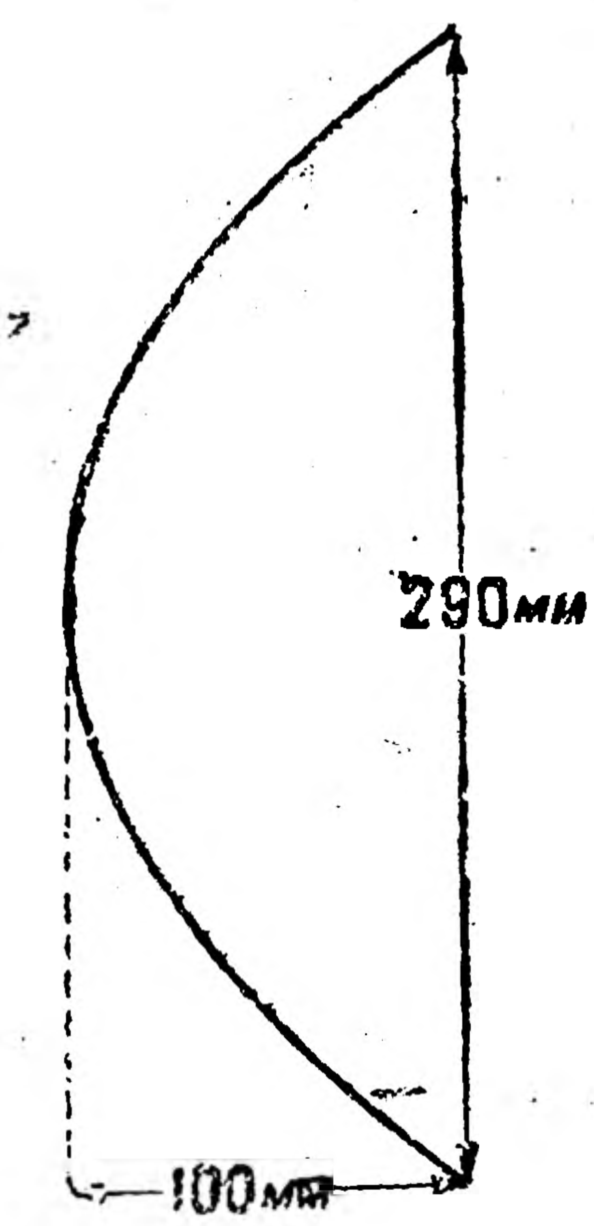
Точка O, в которой парабола пересекает свою единственную ось симметрии, называется ее *вершиной*. Разность $y^2-2px=0$ обращается в нуль при замене x и y координатами любой точки параболы. Координаты любой внутренней ее точки, а именно точки, расположенной по ту же сторону от кривой, как и ее фокус, обращают эту разность в отрицательное число, любой внешней — в число положительное.

Эксцентриситетом e эллипса и гиперболы мы называли отношение междуфокусного расстояния $2c$ к длине фокальной оси $2a\left(e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}\right)$. К параболе это определение неприменимо, так как у нее только один фокус. Но, как мы видели, эксцентриситет эллипса и гиперболы выражается в то же время формулой $e=\frac{r}{d}$, где r есть расстояние любой точки кривой до фокуса, d — ее же расстояние до соответствующей директрисы. Принимая эту формулу за определение эксцентриситета e, мы получим для параболы в силу основного свойства ее точек, выражаемого равенством $r=d$, равенство $e=1$. Итак, в то время как эксцентриситет эллипса меньше 1, гиперболы больше 1, эксцентриситет параболы равен 1.

Упражнения.

1. Начертить параболу по уравнению $y^2=10x$, взяв значения x от 0 до 60 *мм*, и приготовить шаблон.

2. Зеркало рефлектора имеет в осевом разрезе форму параболы (черт. 96). Найти ее уравнение по данным, указанным на чертеже, приняв за оси координат ось симметрии и касательную в вершине.



Черт. 96.

3. Вычислить расстояние от фокуса параболы $y^2=10x$ до той ее точки, абсцисса которой 20.

4. Найти на параболе $y^2=px$ точку, ордината которой равна p.

5. В параболу $y^2=2px$ вписан равносторонний треугольник, одна из вершин которого находится в вершине параболы. Найти координаты двух других вершин треугольника.

6. Прямой угол вращается около вершины, совпадающей с вершиной параболы. Найти уравнение линии, по которой движется середина хорды параболы, соединяющей точки ее пересечения со сторонами угла.

§ 47. Взаимное расположение параболы и прямой. Точки пересечения параболы $y^2=2px$ и прямой $y=kx+n$ имеют координаты:

$$x=\frac{p-kn\pm\sqrt{R}}{k^2}, \quad y=\frac{p\pm\sqrt{R}}{k}, \tag{1}$$

где $R=p(p-2kn)$ и где одновременно берутся либо оба верхние, либо оба нижние знака. Формулы (1) получаем, решая совместно уравнения прямой и параболы и предполагая $k\neq0$. Различаем три случая.

Случай 1, $R>0$, а потому $2kn<p$. Прямая пересекает параболу в двух различных точках, координаты которых определяются формулами (1).

Случай 2, $R<0$, а потому $2kn>p$. Прямая не имеет ни одной общей точки с параболой.

Случай 3, $R=0$, а потому $2kn=p$. Прямая имеет одну общую точку с параболой, и эту точку можно рассматривать как две совпадающих. Прямая касается параболы. Условием касания является равенство $2kn=p$, координаты точки $(x_0; y_0)$ касания определяются формулами (1) при $R=0$, а именно $x_0=\frac{n}{k}$, $y_0=2n$.

Особый случай. При $k=0$, т. е. если данная прямая параллельна оси симметрии параболы, всегда имеем одну единственную точку пересечения с координатами $x=\frac{n^2}{2p}$, $y=n$.

Прямую $y=n$ можно рассматривать как предельное положение прямой $y=kx+n$ при k, приближающемся к нулю. Как легко видеть, одна из точек пересечения этой последней прямой с параболой будет при этом неограниченно удаляться, другая же будет стремиться к предельному положению $\left(x=\frac{n^2}{2p},\ y=n\right)$. Можно поэтому сказать, что *всякая прямая, параллельная оси симметрии параболы, встречает эту кривую в одной бесконечно-удаленной и в одной конечной точках.*

Внешний вид параболы несколько напоминает вид одной из частей гиперболы. Но для гиперболы характерным является существование асимптот, т. е. таких прямых, которые встречают кривую в двух совпадающих бесконечно-удаленных точках. Имеются ли асимптоты у параболы? Легко видеть, что нет, так как прямая *асимптотического направления* $y=n$, т. е. прямая, встречающая параболу в одной бесконечно-удаленной точке, всегда имеет с ней еще одну общую точку на конечном расстоянии от начала.

Формулы (1) позволяют легко решить вопрос о том, существует ли у параболы центр симметрии. Допустим, что он существует и находится в точке $(a;\ b)$. Тогда всякая хорда параболы, проходящая через эту точку, должна делиться в ней пополам. Берем уравнение прямой $y-b=k(x-a)$, проходящей через эту точку, и замечаем, что координаты точек ее пересечения с параболой выражаются формулами (1), если взять $n=b-ak$. Абсцисса середины хорды равна $\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)=\frac{p-kn}{k^2}=\frac{p-k(b-ak)}{k^2}$ и должна равняться a при любом значении k. Это условие после упрощений приводит к равенству $p=bk$, которое не может сохранять силу при постоянном значении p и b и всех значениях k. Следовательно, парабола центра симметрии не имеет.

Упражнения.

1. Найти точки пересечения прямых $x+y-10=0$, $x+y+10=0$, $x-2y+10=0$, $y=10$ с параболой $y^2=10x$.

2. Прямая вращается около точки $(a;\ 0)$, где $a<0$. Что делается с точками ее пересечения с параболой $y^2=2px$, если ее угловой коэфициент меняется от 0 до $+\infty$?

3. Найти координаты середины хорды параболы $y^2=2px$, если уравнение этой хорды $y=kx+n$, причем $2kn<p$.

4. Окружность, построенная на хорде параболы как на диаметре, касается директрисы. Найти уравнение всех хорд, имеющих это свойство, и показать, что все они проходят через некоторую постоянную точку.

§ 48. Диаметры параболы. Возможны два определения диаметра кривой II порядка, а именно как хорды, проходящей через центр симметрии кривой, или как геометрического места середин всех хорд одного направления. Для эллипса (в частности для круга) и для гиперболы оба эти определения, как мы видели, совпадают. Для параболы же первое непригодно, так как центра симметрии у параболы нет. Остается второе, которым мы и воспользуемся. Итак, поставим себе задачей найти геометрическое место середин хорд параболы $y^2=2px$, имеющих один и тот же угловой коэфициент k.

Написав уравнение таких хорд в виде $y=kx+n$, имеем для координат середин каждой такой хорды формулы

$$x=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)=\frac{p-kn}{k^2};\quad y=\frac{1}{2}\left(y_1+y_2\right)=\frac{p}{k}, \tag{1}$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 определяются по формулам (1) § 47. Как видим, при постоянном k и переменном n все эти середины располагаются на одной прямой, параллельной оси X и выражаемой уравнением $y=\frac{p}{k}$. Это и есть уравнение диаметра, *сопряженного с хордами направления* k. Таким образом, все *диаметры* параболы параллельны ее оси симметрии. Сама ось симметрии $(y=0)$ является диаметром, сопряженным с хордами направления $k=\infty$, т. е. с хордами, параллельными оси Y. Чем меньше k по абсолютной величине, тем больше удаляется от оси симметрии соответствующий диаметр. С приближением k к нулю диаметр, сопряженный с хордами направления k, удаляется в бесконечность.

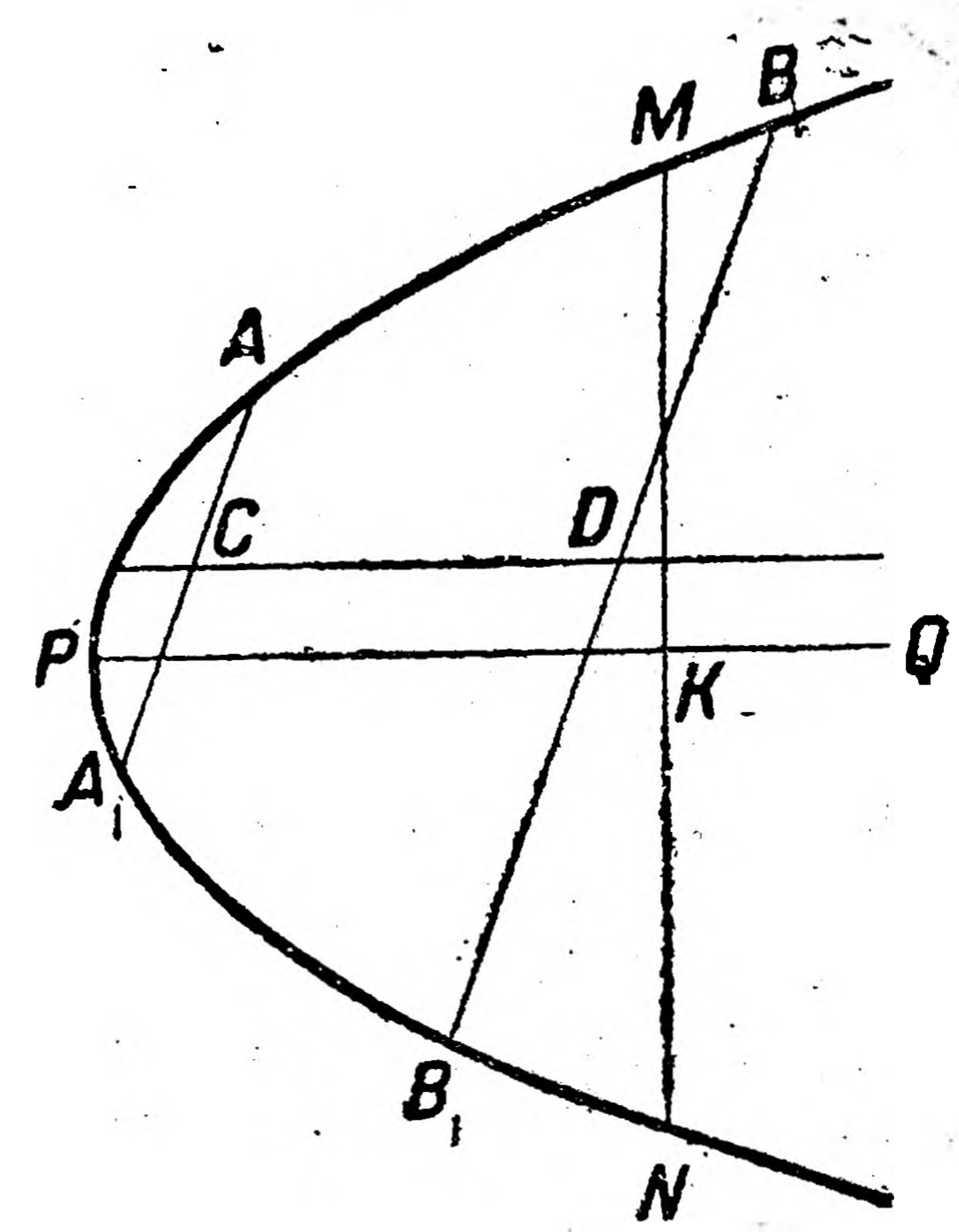
Теперь мы в состоянии решить вопрос о том, имеет ли парабола еще оси симметрии, кроме той, с которой мы совместили ось X, или нет. Хорды кривой, перпендикулярные к ее оси симметрии, должны делиться этой осью симметрии пополам. Возьмем хорды параболы, наклоненные под углом φ к оси X, причем $\operatorname{tg}\varphi=k$. Середины всех таких хорд, как мы только что видели, лежат на диаметре $y=\frac{p}{k}$. Угол между этим диаметром и каждой из взятых хорд равен, таким образом, φ. Чтобы диаметр был осью симметрии, надо, чтобы φ равнялось $0{,}5\pi$, что дает диаметр $y=0$, т. е. уже известную нам ось симметрии, совпадающую с осью X. Никакой другой оси симметрии парабола не имеет.

Переходим к решению задач на диаметры параболы.

Задача 1. Даны парабола и одна из ее хорд. Найти диаметр, сопряженный с хордами этого направления.

При аналитическом решении задачи следует считать известными параметр p параболы $y^2=2px$ и угловой коэфициент k данной хорды $y=kx+n$. Искомый диаметр имеет уравнение $y=\frac{p}{k}$. Для построительного решения достаточно провести пару хорд данного направления и соединить их середины.

Задача 2. На чертеже изображена парабола. Найти ее ось симметрии.



Черт. 97.

Проведя две параллельных хорды параболы AA_1 и BB_1 какого угодно направления (черт. 97), соединяем их середины C и D. Строим какую-нибудь хорду MN, перпендикулярную к диаметру CD, и делим ее в точке K пополам. Прямая PQ, проведенная через точку K параллельно CD, и есть ось симметрии параболы.

Задача 3. Через точку пересечения диаметра параболы, сопряженного с хордами направления k, проведена прямая этого же направления. Найти точки ее пересечения с параболой.

Диаметр $y=\frac{p}{k}$ пересекает параболу $y^2=2px$ в точке $x=\frac{p}{2k^2}$, $y=\frac{p}{k}$. Прямая с угловым коэфициентом k, проходящая через эту точку, имеет уравнение $y-\frac{p}{k}=k\left(x-\frac{p}{2k^2}\right)$, или $y=kx+\frac{p}{2k}$. Обращаясь к формулам (1) § 47, замечаем, что здесь $n=\frac{p}{2k}$, $R=p\left(p-2k\cdot\frac{p}{2k}\right)=0$, а потому прямая касается параболы (имеет с параболой две общих совпадающих точки).

Упражнения.

1. Найти диаметры параболы $y^2=10x$, сопряженные с хордами, параллельными прямым $y=x$, $y=-x$, $y=\frac{1}{2}x$.

2. Написать уравнение всех хорд той же параболы, которые делятся пополам диаметром $y=5$.

3. Найти параметр p параболы $y^2=2px$, зная, что абсцисса точки пересечения этой параболы с тем ее диаметром, который сопряжен с хордами направления k, есть x_0.

4. Преобразовать уравнение параболы, приняв за новую ось абсцисс один из ее диаметров, а за новую ось ординат касательную к параболе в точке ее пересечения с этим диаметром. Обозначив угол наклона этой касательной к оси X через ω, показать, что новое уравнение параболы есть $y'^2=2p'x'$, где $p'=\frac{p}{\sin^2\omega}$.

Примечание. Применяя формулы (1) § 10, учесть разницу в обозначении старых и новых координат.

§ 49. Касательная и нормаль к параболе. **Задача 1.** Через точку $M(x_0;\ y_0)$, данную на параболе $y^2=2px$, провести к этой параболе касательную и нормаль.

Взяв уравнение пучка прямых $y-y_0=k(x-x_0)$, проходящих через данную точку, переписываем его в виде $y=kx+(y_0-kx_0)$ и выражаем условие ее касания с параболой (§ 47). Получаем соотношение $2k(y_0-kx_0)=p$, откуда находим $k=\frac{y_0}{2x_0}$ (предполагаем, что $x_0\neq 0$), а затем приходим к уравнению искомой касательной $2x_0y=y_0(x+x_0)$, которое после умножения обеих частей на y_0 и замены y_0^2 через $2px_0$ принимает вид

$$yy_0=p(x+x_0). \tag{1}$$

Пользуясь условием перпендикулярности двух прямых, получаем уравнение нормали к параболе

$$y_0(x-x_0)+p(y-y_0)=0. \tag{2}$$

При выводе уравнения (1) мы предположили, что $x_0\neq 0$. Если же $x_0=0$, то и $y_0=0$, и точка M совпадает с вершиной параболы $y^2=2px$; касательной служит, как легко видеть, сама ось Y. Уравнения (1) и (2) сохраняют силу и в этом особом случае. Задача имеет одно решение во всех случаях без исключения.

Задача 2. Найти уравнение той касательной к параболе $y^2=2px$, которая параллельна данной прямой $y=kx$.

Написав уравнение искомой касательной в виде $y=kx+n$, находим n из условия касания $2kn=p$ и получаем после подстановки

$$y=kx+\frac{p}{2k}. \tag{3}$$

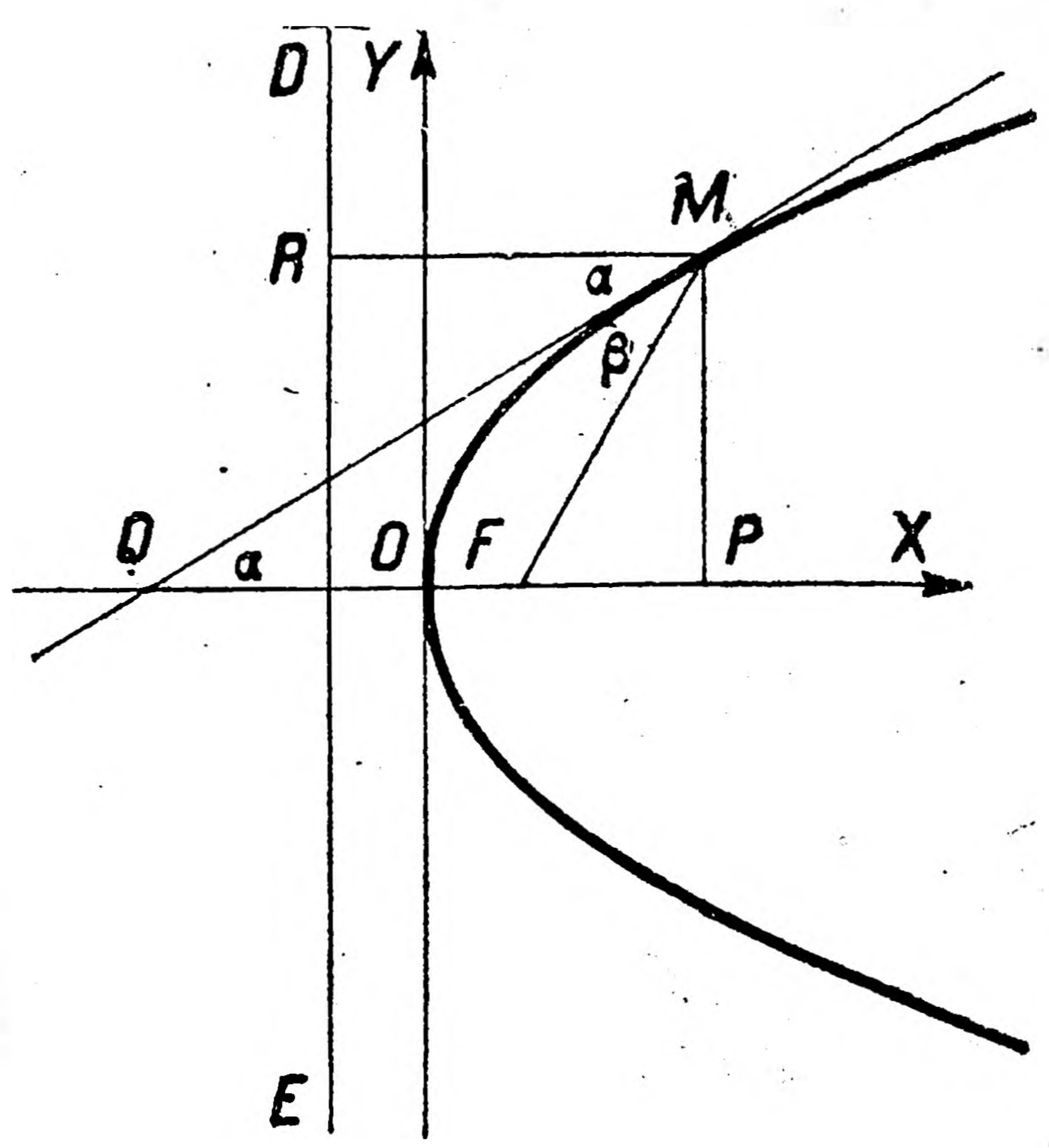
Задача имеет одно решение во всех случаях кроме того, когда $k=0$, так как прямая асимптотического направления не может быть касательной.

Задача 3. Провести касательную к параболе $y^2=2px$ через данную точку $M(x_0;y_0)$, расположенную где угодно на плоскости.

Взяв опять пучок прямых $y-y_0=k(x-x_0)$, находим k из уравнения $2k(y_0-kx_0)=p$, выражающего условие касания, и получаем:

$$k=\frac{y_0\pm\sqrt{y_0^2-2px_0}}{2x_0}, \tag{4}$$

предполагая $x\neq 0$. В зависимости от знака подкоренного различаем три случая: 1) $y_0^2-2px_0>0$, точка M лежит вне параболы (т. е. по другую сторону кривой, нежели ее фокус), и через нее проходят две различных касательных с угловыми коэфициентами, определяемыми по формуле (4); 2) $y_0^2 - 2px_0 < 0$, точка M лежит внутри параболы (т. е. по ту же сторону кривой, как и ее фокус), ни одной касательной провести через эту точку нельзя; 3) $y_0^2 - 2px_0 = 0$, точка M лежит на параболе, через нее можно провести одну касательную к кривой (или две совпадающих). В особом случае, т. е. при $x_0 = 0$, когда данная точка лежит на оси Y, сама эта ось является одной из касательных, проходящих через данную точку. Угловой коэфициент второй касательной определяется из условия касания, принимающего в этом случае вид $2ky_0 = p$, и равен $k = \frac{p}{2y_0}$ $\left(\text{при } y_0 \neq 0\right)$. Если же не только $x_0 = 0$, но и $y_0 = 0$, то обе касательные сливаются: ось Y можно рассматривать как пару совпадающих касательных, проведенных через вершину параболы.



Черт. 98.

Выясним далее, каковы те углы, какие касательная к параболе составляет с радиусом-вектором FM, проведенным из фокуса F в точку касания M, и с перпендикуляром MR, опущенным из этой же точки M на директрису (черт. 98). Обозначая угол FQM через α, имеем для его определения формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MP}{QP} = \frac{y_0}{QO + x_0}$. Здесь x_0 и y_0 — координаты точки касания, а отрезок QO определяется по уравнению касательной (1) как абсолютная величина абсциссы той точки касательной, ордината которой равна 0; оказывается, что $OQ = x_0$, а потому $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_0}{2x_0} = \frac{y_0{}^2}{2x_0 y_0} = \frac{2px_0}{2x_0 y_0} = \frac{p}{y_0}$. То же значение получаем и для $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} FMQ = \operatorname{tg}(PMQ - PMF)$, если примем во внимание, что

$$\operatorname{tg} PMQ = \frac{PQ}{MP} = \frac{2x_0}{y_0} = \frac{y_0}{p} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} PMF = \frac{PF}{MP} = \frac{x_0 - \frac{1}{2}p}{y_0}.$$

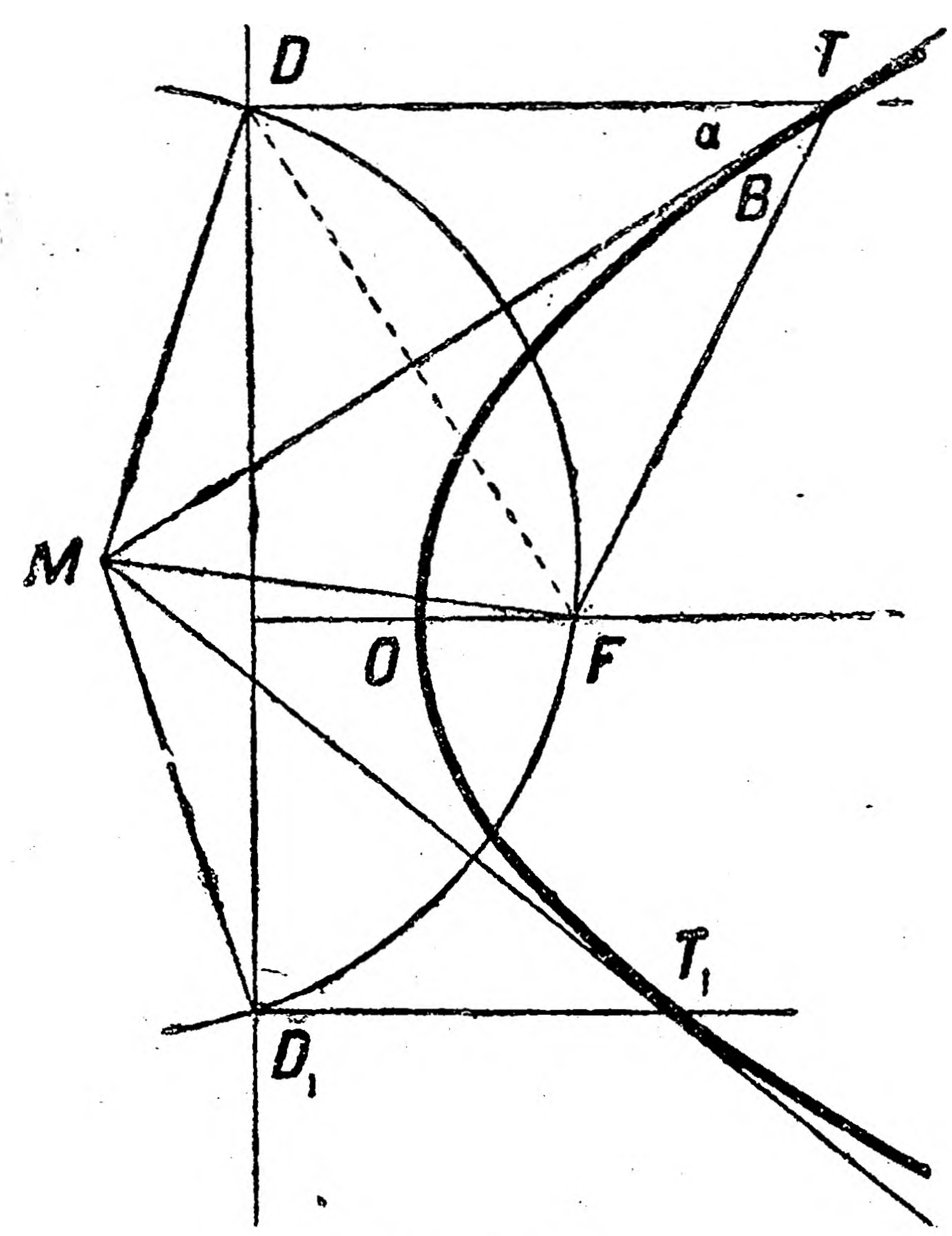
Отсюда заключаем, что углы $\alpha = FQM = RMQ$ и $\beta = FMQ$ равны, и приходим к теореме: *касательная к параболе делит пополам угол, составленный фокальным радиусом-вектором точки касания и перпендикуляром, опущенным из нее на директрису.*

Приведем еще второе доказательство той же теоремы. Доказав, как и выше, что $OQ = x_0$, рассматриваем треугольник MQF и замечаем, что $MF = MR = x_0 + \frac{1}{2}p$ (по основному свойству параболы, см. § 46), а $FQ = \frac{1}{2}p + x_0$. Следовательно, треугольник MQF — равнобедренный, а потому углы $FQM = \alpha$ и $FMQ = \beta$ равны.

Остается рассмотреть способы построительного решения трех основных задач на касательную к параболе.

Чтобы провести касательную к параболе через данную на ней точку M, надо провести через эту точку фокальный радиус-вектор MF и перпендикуляр MR к директрисе, т. е. параллель оси симметрии параболы (черт. 98). Биссектриса угла FMR и будет искомой касательной. Еще проще другой способ: надо отложить по продолжению оси симметрии, т. е. влево от вершины O, отрезок OQ, равный абсциссе точки касания OP. Соединяя точки Q и M, получим искомую касательную.

Если требуется провести касательную к параболе параллельно данной прямой, проводят параллельно этой прямой какую-нибудь хорду параболы и через средину этой хорды проводят прямую, параллельную оси симметрии кривой, т. е. диаметр, сопряженный с хордами, параллельными данной прямой. Точка пересечения этого диаметра с параболой даст точку касания искомой касательной.



Черт. 99.

Пусть дана, наконец, некоторая точка M вне параболы (черт. 99) и нужно построить касательные к параболе, проходящие через эту точку. Положим, что такая касательная MT проведена и T есть точка касания. Проведя директрису, опустим на нее перпендикуляр TD из точки касания, а также соединим точку касания с фокусом F. Взяв треугольники MFD и MTF, замечаем, что $TD = TF$ по основному свойству точек параболы, углы MTD и MTF тоже равны (по доказанной выше теореме). Следовательно, треугольники MTD и MTF равны (по двум сторонам и углу между ними), а потому равны и отрезки MF и MD. Отсюда заключаем, что для разыскания точки касания T надо начертить круг радиуса MF с центром в точке M и взять точки пересечения D и D_1 этого круга с директрисой. Проводя далее через точки D и D_1 прямые DT и D_1T_1 параллельно оси симметрии параболы, получим в их пересечении с параболой искомые точки касания T и T_1. Если данная точка M находится вне параболы, ее расстояние MF до фокуса всегда больше ее расстояния MD до директрисы, а потому круг, проводимый из точки M радиусом MF, всегда пересечет директрису в двух точках, и задача всегда имеет два решения.

Упражнения.

1. Построить касательную к параболе $y^2 = 10x$ в той точке кривой, которая лежит в 1-й четверти и имеет абсциссу 20.

2. Провести касательную к той же параболе параллельно прямой $y = x$.

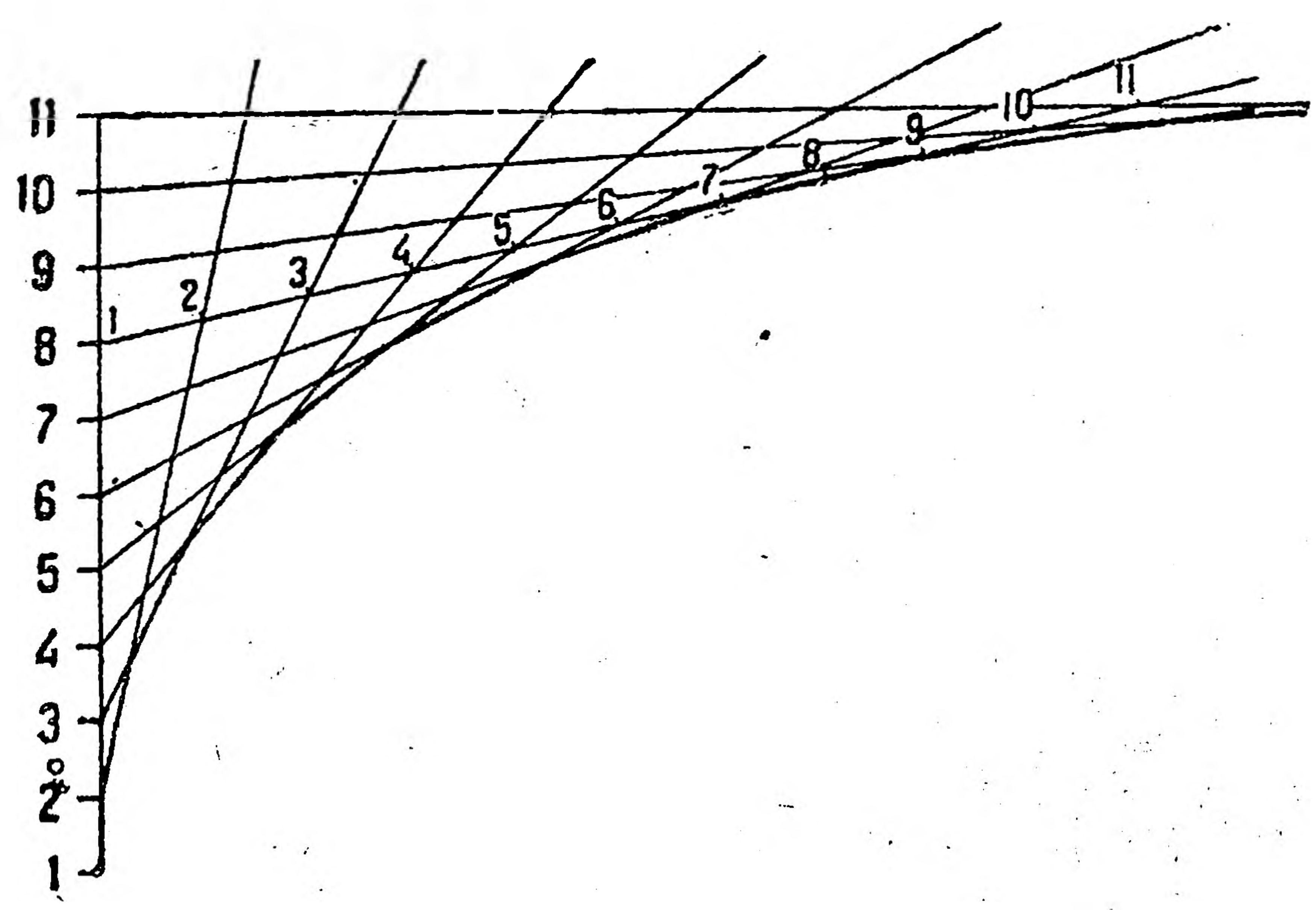
3. Провести касательные к той же параболе через точку $(-10; 5)$.

4. Показать, что для получения на чертеже фокуса параболы, ось симметрии которой известна, надо построить прямоугольный треугольник, один катет которого лежал бы на оси симметрии параболы, а другой был бы вдвое больше первого, причем вершина острого угла должна быть помещена в вершине параболы. Проекция на ось симметрии точки пересечения гипотенузы или ее продолжения с параболой и есть фокус. Выяснить, какому условию должна удовлетворять длина меньшего катета, чтобы построение было возможно без продолжения гипотенузы.

5. Найти предел, к которому стремится угловой коэфициент касательной параболы, если точка касания неограниченно удаляется от начала.

6. Доказать, что основание перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы на любую касательную к ней, лежит на касательной в вершине.

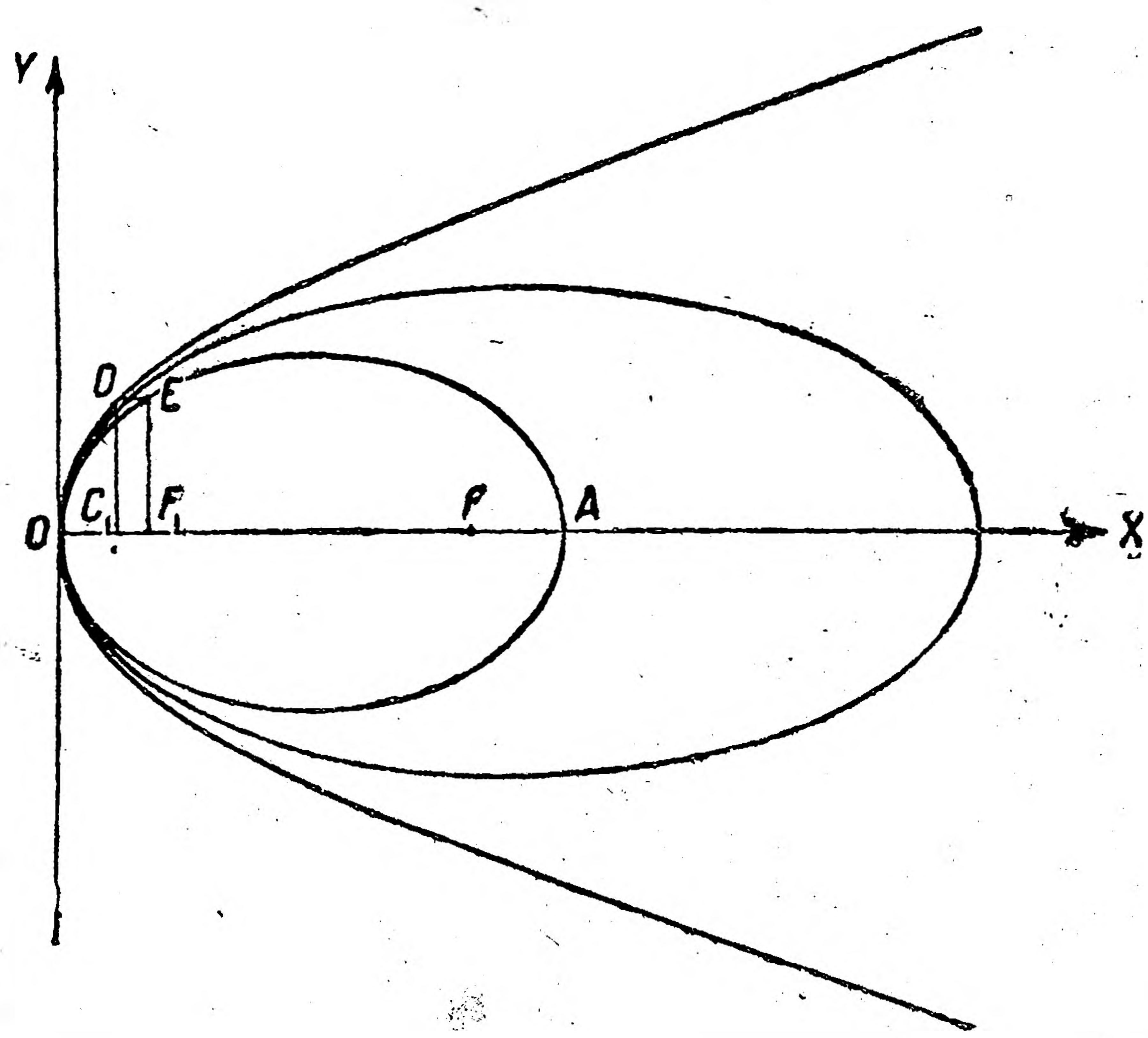
7. На двух прямых, пересекающихся под произвольным углом, отложены на равных расстояниях друг от друга точки, обозначенные на чертеже 100 нумерами *1, 2, 3*..., причем расстояние между каждыми двумя смежными точками на второй прямой может и не равняться расстоянию между двумя смежными точками на первой прямой. Через точки с одинаковыми нумерами проведены прямые. Доказать, что все эти прямые являются касательными к одной и той же параболе.



Черт. 100.

§ 50. Переход от эллипса и гиперболы к параболе.

Чтобы установить связь между эллипсом и гиперболой, с одной стороны, и параболой — с другой, возьмем эллипс с полуосями a и b и перенесем, не меняя направления осей, начало координат в левую его вершину (черт. 101). Известное нам простейшее уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в силу формул преобразования координат, имеющих в данном случае вид $x=x'-a$, $y=y'$, перейдет теперь в такое (знаки у x' и y' опускаем):



Черт. 101.

$$y^2=2px-qx^2, \quad (1)$$

где $p=\frac{b^2}{a}$ есть фокальный параметр эллипса, $q=\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ — положительное число, выражающее квадрат отношения малой полуоси эллипса к большой. Будем увеличивать полуоси a и b неограниченно, но не одинаково быстро, а так, чтобы $p=\frac{b^2}{a}$ оставалось постоянным. Замечая, что из последнего равенства имеем $b=+\sqrt{ap}$, видим, что для этого большую полуось a надо увеличивать по произволу, значения же b вычислять по формуле $b=+\sqrt{ap}$. При изменении полуосей a и b эллипс будет *деформироваться*. Правая его вершина A будет неограниченно удаляться от начала O, двигаясь по OX. Вершина B будет двигаться направо и вверх, тоже неограниченно удаляясь от начала. Фокус F, равно как и центр эллипса, будет удаляться в бесконечность, левая же вершина, совпадающая с началом координат O, останется на месте. Фокус F_1, отстоящий от начала O на расстоянии

$$a-c=a-\sqrt{a^2-b^2}=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{ap}{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{p}{1+\sqrt{1-\frac{p}{a}}},$$

будет двигаться *налево*, так как $\frac{p}{a}$ с увеличением a убывает, приближаясь к 0, разность $1-\frac{p}{a}$ растет, приближаясь к 1, сумма $1+\sqrt{1-\frac{p}{a}}$ растет, приближаясь к $1+\sqrt{1}=2$, разность $a-c=\frac{p}{1+\sqrt{1-\frac{p}{a}}}$ убывает, приближаясь к $\frac{1}{2}p$. Предельным положением точки F_1 при неограниченном возрастании a будет служить точка C_1 с абсциссой $\frac{1}{2}p$. Параметр эллипса $F_1E=p$, не меняя своей длины, будет смещаться налево и имеет предельное положение C_1D. Число $q=\frac{b^2}{a^2}=\frac{ap}{a^2}=\frac{p}{a}$ будет стремиться к нулю. К какому же предельному положению будет приближаться при таком изменении полуосей весь эллипс? Один взгляд на уравнение (1), обращающееся при этом в

$$y^2=2px, \tag{2}$$

показывает, что эллипс, деформируясь, переходит в *параболу*, которая является, следовательно, предельным положением эллипса при условии неограниченного (но не одинаково быстрого) роста его полуосей a и $b=\sqrt{ap}$ при постоянном значении p. Эксцентриситет эллипса $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{p}{a}}$ будет при этом увеличиваться, приближаясь к предельному значению 1, как и должно быть у параболы.

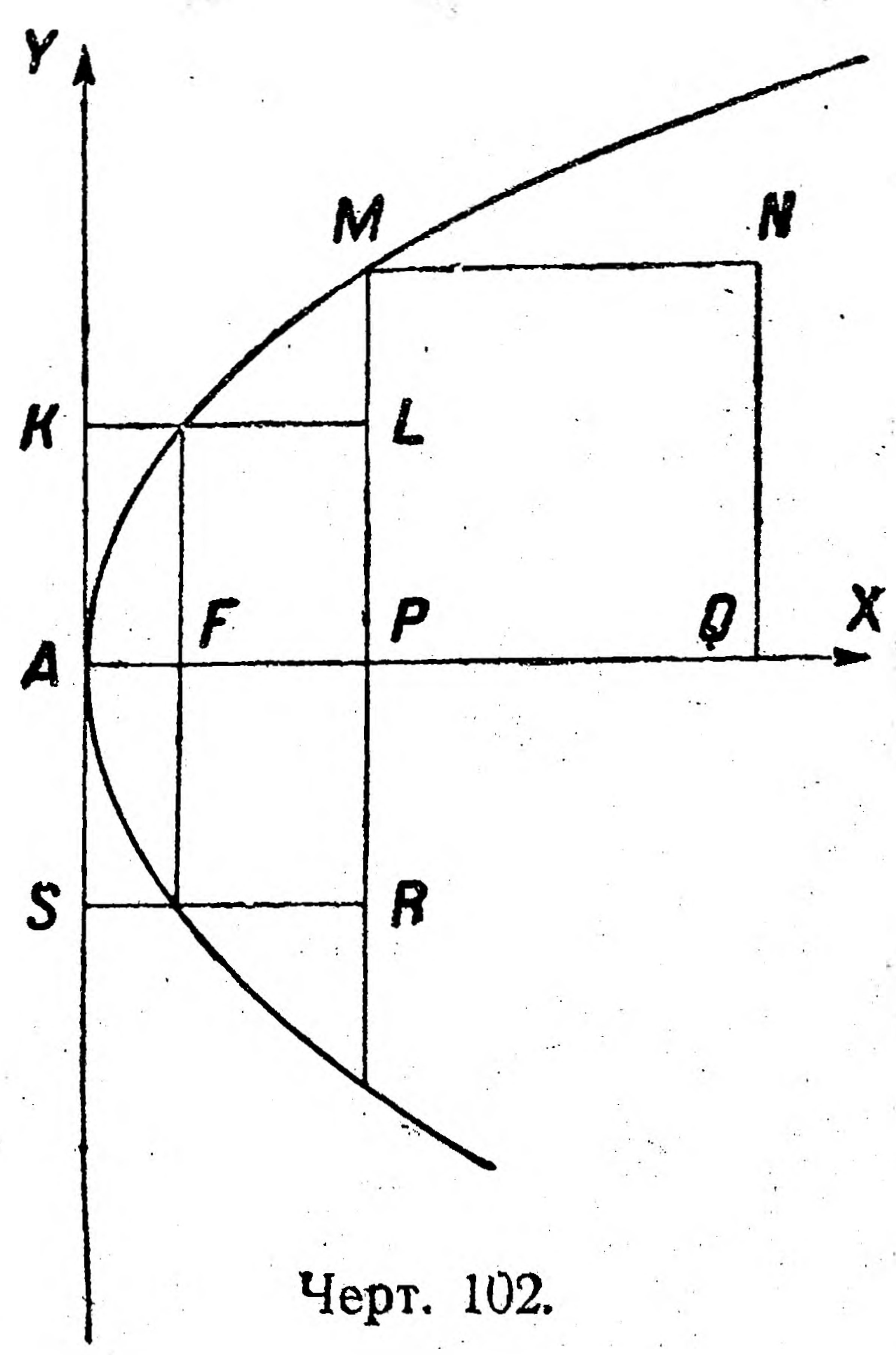
Та же парабола $y^2=2px$ получается и как предельное положение для гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, если предварительно перенести начало координат, не меняя направления осей, в правую вершину кривой, что дает такое уравнение:

$$y^2=2px+qx^2, \tag{3}$$

где $p=\frac{b^2}{a}$, $q=\frac{b^2}{a^2}$, а затем увеличивать a и b с таким расчетом, чтобы параметр гиперболы p оставался постоянным, т. е. чтобы рост b совершался в зависимости от роста a согласно формуле $b=+\sqrt{ap}$, при p постоянном. Читателю рекомендуется рассмотреть движения, какие при этом получат вершины, фокусы, центр, параметр, асимптоты гиперболы, и убедиться, что и здесь предельным положением кривой является парабола (2).

Возможность рассматривать параболу как предельное положение эллипса и гиперболы представляет в новом свете все свойства параболы, а именно позволяет выводить их из соответствующих свойств центральных кривых, т. е. эллипса и гиперболы. Возьмем, например, свойство углов, образуемых касательной к центральной кривой с радиусами-векторами, проведенными из обоих фокусов в точку касания. Как известно, касательная делит пополам либо этот угол (у гиперболы), либо смежный с ним (у эллипса). Деформируя эллипс или гиперболу, как было указано, мы удаляем один из ее фокусов в бесконечность, а потому соответствующий радиус-вектор будет двигаться по плоскости, стремясь к предельному положению, когда он параллелен фокальной оси, т. е. перпендикулярен к директрисе. Таким образом, в параболе касательная должна делить пополам угол между фокальным радиусом-вектором, проведенным в точку касания, и перпендикуляром, опущенным на директрису.

Как обстоит дело с асимптотическими направлениями и асимптотами при подобном переходе гиперболы в параболу? Превращая гиперболу, как указано выше, в параболу, мы неограниченно удаляем (налево) точку пересечения асимптот гиперболы, а потому в пределе получаем не два различных асимптотических направления $+\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$, а лишь одно с угловым коэфициентом, равным $\lim\left(\pm\frac{b}{a}\right)=\lim\left(\pm\frac{\sqrt{ap}}{a}\right)=$ $=\lim\left(\pm\sqrt{\frac{p}{a}}\right)=0$. Это единственное асимптотическое направление параболы следует рассматривать как два совпадающих. Это обстоятельство дает основание утверждать, что у параболы лишь одна бесконечно-удаленная точка, но двойная, происходящая от совпадения двух бесконечно-удаленных точек гиперболы. Асимптоты же гиперболы, проходя через точки $(0;0)$ и $(a;\pm b)$, при неограниченном возрастании длин полуосей a и $b=+\sqrt{ap}$ удаляются всеми своими точками в бесконечность (напомним, что центр гиперболы неограниченно удаляется влево), а потому парабола вовсе асимптот не имеет (можно сказать, что парабола имеет одну двойную асимптоту, которой является бесконечно-удаленная прямая плоскости).



Черт. 102.

Только подобное рассмотрение трех кривых II порядка в движении и взаимном переходе вполне уясняет их свойства. Особо важное значение имеют эти процессы перехода кривых друг в друга при дальнейшем изучении геометрии.

Уравнения (1), (2), (3) объясняют и происхождение названий кривых. Слова „парабола“, „эллипс“, „гипербола“ означают по-гречески „равенство“, „недостаток“, „избыток“. Почему этим кривым даны такие названия? Уравнение параболы (2) можно истолковать следующим образом: *квадрат, построенный на ординате любой точки параболы, равновелик прямоугольнику, построенному на абсциссе этой точки и имеющему высотой двойной параметр (2p) параболы* (предполагается, что осью абсцисс служит фокальная ось кривой, а осью ординат — касательная в вершине). На чертеже 102 изображены обе эти фигуры — квадрат $PMNQ$ и прямоугольник $KLRS$. Равенство площадей этих двух фигур, имеющее место для любого положения точки M на параболе, и дало основание назвать эту кривую „кривой равенства", или „параболой". Если мы проделаем то же построение для эллипса (взяв в качестве осей координат фокальную ось и касательную в вершине), то, как показывает уравнение (1), равенства площадей обеих фигур не получим: площадь квадрата (y^2) равна площади прямоугольника ($2px$), *уменьшенной* на величину qx^2. Квадрат ординаты y^2 эллипса имеет, таким образом, сравнительно с прямоугольником $2px$ *недостаток* qx^2, и кривая, все точки которой обладают этим свойством, получила название „кривой недостатка", или „эллипса". Подобным же образом объясняется и происхождение названия „гиперболы" как „кривой избытка": как показывает уравнение (3), квадрат, построенный на ординате любой точки гиперболы, имеет площадь y^2, равную площади прямоугольника, построенного на ее абсциссе и удвоенном параметре, но с добавлением *избытка* qx^2.

Упражнения.

1. Вывести „единое" уравнение для эллипса, гиперболы, параболы $y^2 = 2px - (1 - e^2)x^2$, где e — эксцентриситет, равный $\frac{c}{a}$, и выяснить, как изменяется изображаемая им кривая при изменении e от 0 до $+\infty$ (значение p предполагается постоянным).

2. Что делается при этом с директрисой кривой?

3. Указать вид кривых, изображаемых уравнениями $0{,}36x^2 + y^2 - 4x = 0$ и $6x^2 - y^2 + 4x = 0$, и установить размеры этих кривых и их расположение относительно координатных осей,

4. Рассмотреть изменения, претерпеваемые гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, при одновременном и одинаково быстром уменьшении их полуосей и приближении их к нулю ($\lim a = 0$, $\lim b = 0$, $\lim \frac{b}{a} = k$, где $k =$ постоянная величина, неравная нулю).

Глава V.

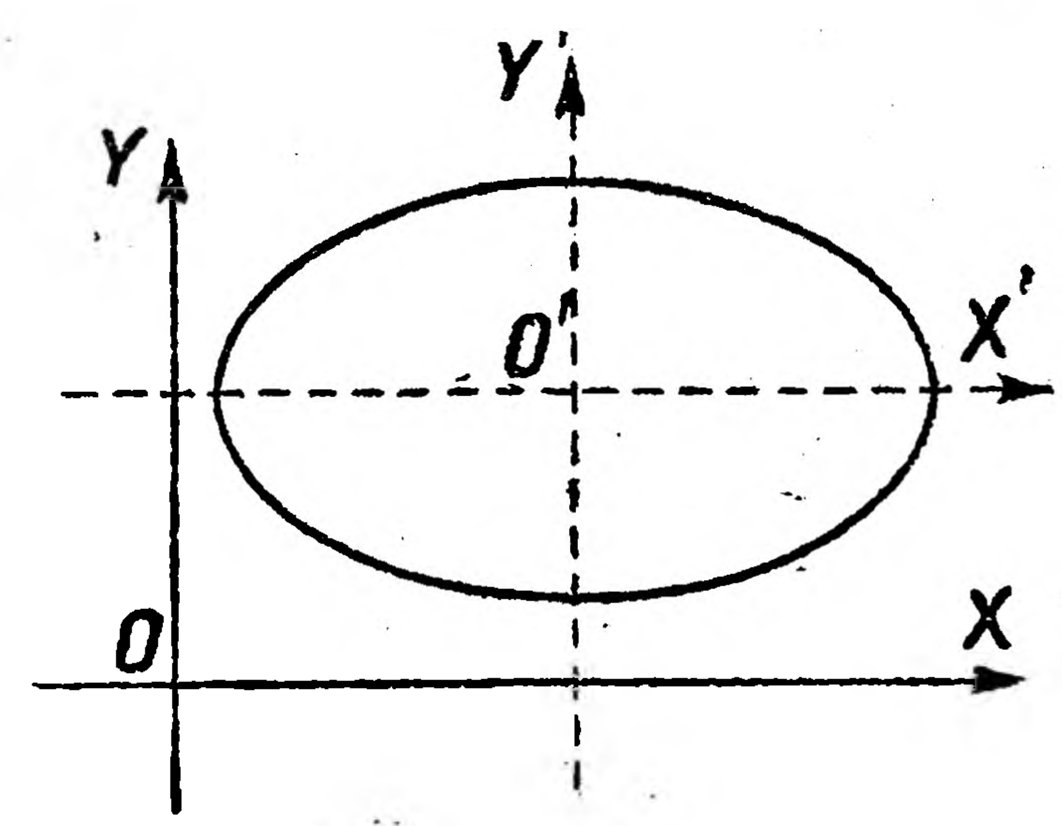
ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ 2-Й СТЕПЕНИ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.

§ 51. Постановка вопроса. Взяв уравнение 1-й степени с двумя переменными самого общего вида $Ax + By + C = 0$, где коэфициенты A, B, C имеют какие угодно (вещественные) значения (за одним лишь исключением — A и B не должны одновременно равняться нулю), мы установили в § 22, что геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, есть прямая линия. Теперь надо заняться выяснением геометрического смысла общего уравнения 2-й степени с двумя переменными

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

где шесть коэфициентов A, B, C, D, E, F могут иметь какие угодно (вещественные) значения, за одним исключением — первые три из них не должны одновременно равняться нулю, так как при $A=B=C=0$ уравнение (1) свелось бы к уравнению 1-й степени [1]).

Как мы уже знаем, уравнение (1) при некоторых частных значениях коэфициентов выражает круг, эллипс, гиперболу (см. § 32), расположенные определенным образом относительно координатных осей. В случае *центральных кривых* (круг, эллипс, гипербола) мы совмещаем начало координат с центром симметрии кривой и направляем оси координат по ее осям симметрии. Имея кривую II порядка *без центра* (парабола), мы направляем ось абсцисс по единственной оси симметрии кривой, а начало помещаем в ее вершине, т. е. в точке пересечения кривой с этой ее осью симметрии. Если мы возьмем те же кривые, но в другом положении относительно координатных осей, то их уравнения получат иной вид, но останутся уравнениями 2-й степени; как мы видели в § 21, степень уравнения кривой при всех преобразованиях координат остается неизменной. Так, помещая начало координат не в центре эллипса, а в какой-либо другой точке плоскости и проводя оси координат параллельно осям симметрии эллипса (черт. 103), мы легко получаем его уравнение в виде



Черт. 103.

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2x_cx}{a^2}-\frac{2y_cy}{b^2}+\left(\frac{x_c^2}{a^2}+\frac{y_c^2}{b^2}-1\right)=0.$$

Для его вывода надо взять вспомогательные оси координат X', Y', проходящие через центр эллипса O' (x_c, y_c) параллельно данным осям X и Y, написать простейшее уравнение эллипса (относительно этих вспомогательных осей), а именно $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$, и перейти к координатам x и y по формулам $x'=x-x_c$, $y'=y-y_c$.

Как видим, помещение начала координат в точку, не совпадающую с центром эллипса, вызвало усложнение его уравнения: появились два линейных члена $-\frac{2x_cx}{a^2}$ и $-\frac{2y_cy}{b^2}$. Отсюда естественно сделать предположение, что, помещая начало координат в центр эллипса, мы обеспечиваем упрощение его уравнения, а именно исчезновение двух линейных его членов, если они имеются. В следующем параграфе мы подробно рассмотрим такое *преобразование к центру* для кривой II порядка. Если, далее, мы поместим начало координат в центре эллипса, но координатные оси направим не по осям симметрии эллипса, а под некоторым углом α к ним (черт. 104), то уравнение эллипса принимает вид

$$\frac{(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}{a^2}+\frac{(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2}{b^2}-1=0,$$

[1]) Уравнение (1) можно рассматривать и при $A=B=C=0$ как уравнение 2-й степени. Геометрический его смысл выясняется в упражнении 6 § 56.

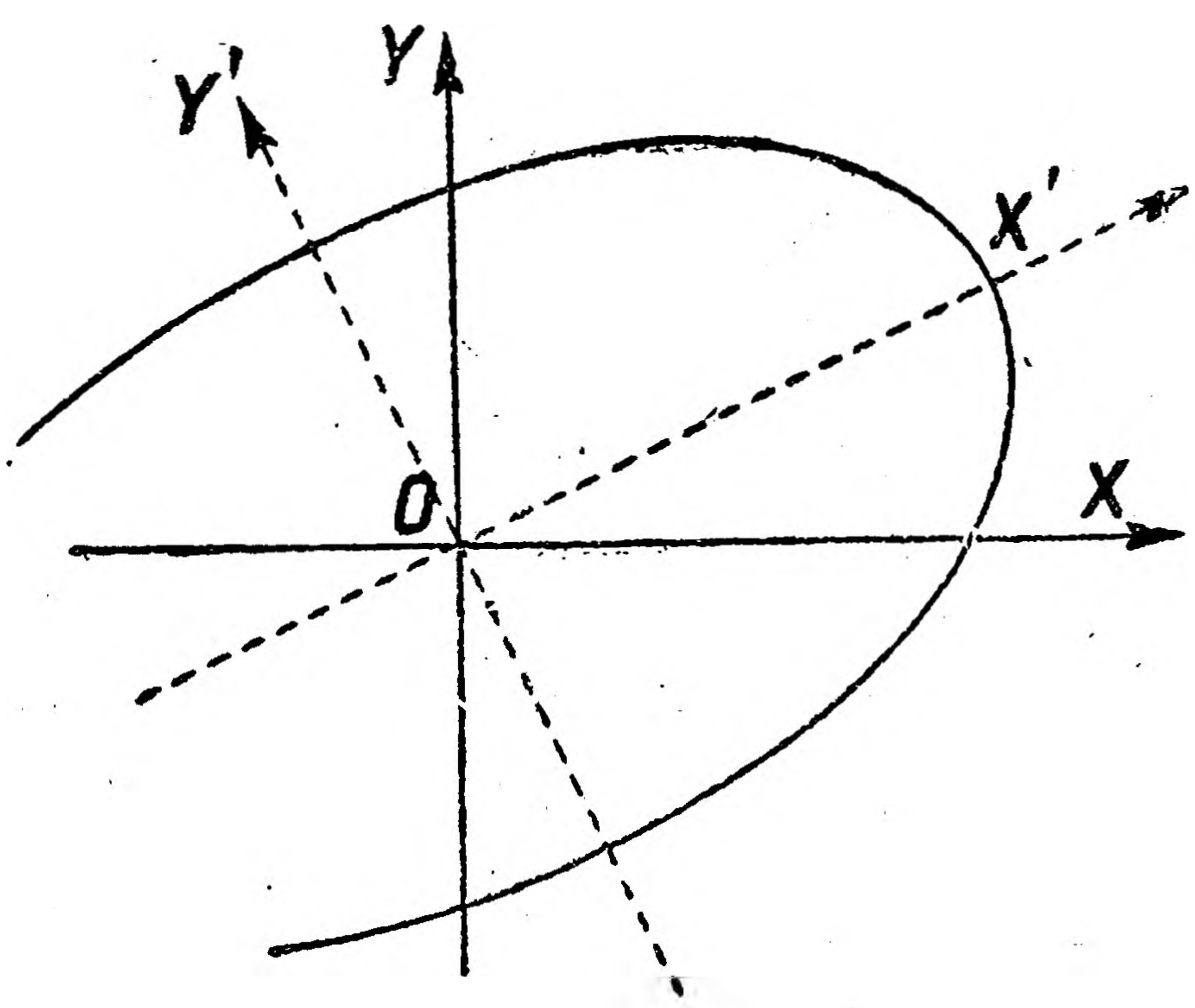
или

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+F=0,$$

где

$$A=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2},\quad B=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a^2}-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{b^2},\quad C=\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2},\quad F=-1.$$

Это уравнение получается из простейшего уравнения эллипса относительно вспомогательных осей X', Y' после перехода к осям X, Y по формулам $x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha$, $y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha$ (см. § 9). Как видим, направляя оси координат под углом к осям симметрии эллипса, мы опять-таки усложняем его уравнение, а именно вводим член с произведением координат xy. Это указывает на возможность устранения такого члена уравнения, если он имеется, посредством поворота осей координат до совпадения с осями симметрии кривой; подробности этого *преобразования к осям симметрии* будут даны в § 54.



Черт. 104.

То, что мы сейчас установили относительно уравнения эллипса, относится, как легко видеть, и к уравнению гиперболы и — с некоторыми изменениями — к уравнению параболы: при ином расположении координатных осей, чем то, при котором мы выводили простейшие уравнения этих кривых, в их уравнениях появляются новые члены. Возникает вопрос: выражает ли уравнение (1) при любых значениях коэфициентов одну из рассмотренных кривых II порядка (круг, эллипс, гиперболу, параболу), расположенную каким-то образом относительно координатных осей, или же этими 4 кривыми не исчерпывается геометрический смысл уравнения (1)? Если верно последнее, то надо выяснить, что же именно выражает уравнение (1), если оно не выражает ни одной из этих кривых. Ответ на эти два вопроса и является задачей настоящей главы.

Упражнения.

1. Найти уравнение эллипса с полуосями a и b, если его центр находится в точке с координатами x_c, y_c, а фокальная ось составляет угол α с осью X.

2. Найти уравнение параболы с параметром p, ось симметрии которой параллельна оси X, а вершина находится в точке с координатами a и b.

3. Найти уравнение параболы с параметром p, ось симметрии которой составляет угол α с осью X, а вершина находится в начале координат.

4. Выяснить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение (1) выражало круг, и выразить в зависимости от коэфициентов уравнения (1) радиус этого круга и координаты его центра.

5. Выяснить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение (1) выражало параболу с осью симметрии, параллельной оси Y, и выразить в зависимости от коэфициентов уравнения (1) параметр параболы и координаты ее вершины.

§ 52. Преобразование к центру симметрии. Докажем сперва две теоремы о центре симметрии кривой II порядка.

Теорема I. *Если кривая II порядка*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

имеет центр симметрии, совпадающий с началом координат, то в уравнении (1) отсутствуют члены 1-й степени, т. е. $D = E = 0$.

Напомним, что всякая прямая, проходящая через центр симметрии, встречает кривую в двух точках, равноудаленных от центра симметрии. Взяв прямую $y = kx$, имеем для определения абсцисс x_1 и x_2 точек ее пересечения с кривой ур-ние $(A + 2Bk + Ck^2)x^2 + 2(D + Ek)x + F = 0$. Но если эти точки пересечения одинаково удалены от начала координат, то $x_1 + x_2 = 0$, а потому $D + Ek = 0$ при любом значении углового коэфициента прямой k, что возможно лишь при $D = E = 0$.

Теорема II (обратная). *Если кривая II порядка выражается уравнением* (1), *где* $D = E = 0$, *то начало координат есть центр симметрии этой кривой.*

Взяв опять прямую $y = kx$, имеем для определения абсцисс точек ее пересечения с кривой уравнение $(A + 2Bx + Ck^2)x^2 + F = 0$, а потому $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$, что показывает, что всякая прямая, проведенная через начало координат и встречающая кривую в точке $(x_1;\ y_1)$, встречает ее также и в точке $(x_2;\ y_2)$, симметричной с первой относительно начала координат. Теорема доказана.

Если кривая (1) имеет центр симметрии, но он находится не в начале координат, а в точке с координатами x_c, y_c, то перенесение начала координат в эту точку должно существенно упростить уравнение кривой. Применяя формулы $x = x' + x_c$, $y = y' + y_c$, где x' и y' означают текущие координаты точки на кривой относительно новых координатных осей, проведенных через точку $(x_c;\ y_c)$ параллельно старым осям, мы получим вместо уравнения (1) уравнение

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \qquad (2)$$

где

$$A' = A,\ B' = B,\ C' = C,\ D' = Ax_c + By_c + D,\ E' = Bx_c + Cy_c + E,$$
$$F' = Ax_c^2 + 2Bx_cy_c + Cy_c^2 + 2Dx_c + 2Ey_c + F =$$
$$= (Ax_c + By_c + D)x_c + (Bx_c + Cy_c + E)y_c + (Dx_c + Ey_c + F).$$

Уравнение (2) выражает кривую с центром в начале координат, а потому согласно теореме (1) $D' = E' = 0$. Таким образом, для определения неизвестных координат центра x_c, y_c получаем систему двух уравнений:

$$Ax_c + By_c + D = 0, \quad Bx_c + Cy_c + E = 0. \qquad (3)$$

Такая система, как мы видели в § 12, легко приводится к системе

$$\delta x_c = \mu, \quad \delta y_c = \nu, \qquad (4)$$

где

$$\delta = \begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix} = AC - B^2, \quad \mu = \begin{vmatrix} -D, & B \\ -E, & C \end{vmatrix} = BE - CD,$$
$$\nu = \begin{vmatrix} A, & -D \\ B, & -E \end{vmatrix} = BD - AE.$$

В дальнейшем исследовании будем различать три случая:

Случай 1, $\delta \neq 0$. Система (3) имеет одно единственное решение $x_c = \frac{\mu}{\delta}$, $y_c = \frac{\nu}{\delta}$. Кривая (1) имеет центр в точке с координатами $x_c = \frac{\mu}{\delta}$, $y_c = \frac{\nu}{\delta}$. Этот случай будет подробно рассмотрен в § 54.

С л у ч а й 2, $\delta=0$, но по крайней мере одно из чисел μ и ν отлично от нуля. Система (4) не удовлетворяется ни при каких значениях x_c, y_c, система (3), следовательно, решений не имеет (является системой *несовместной*). Кривая (1) центра не имеет. Рассмотрению этого случая отводится § 55.

С л у ч а й 3, $\delta=0$, $\mu=0$, $\nu=0$. Система (4) удовлетворяется при совершенно произвольных значениях x_c, y_c, система (3) является системой *неопределенной*. Как мы увидим в § 53, она сводится к одному уравнению (второе отличается от него лишь постоянным множителем) и удовлетворяется координатами бесчисленного множества точек, расположенных по некоторой прямой — *линии центров*. Уравнение (1) выражает в этом случае кривую с бесчисленным множеством центров.

Вернемся к уравнению (2) и найдем значение F'. Переписывая найденное выше выражение для F' в виде

$$F'=D'x_c+E'y_c+(Dx_c+Ey_c+F),$$

будем иметь для случая $D'=0$, $E'=0$

$$F'=Dx_c+Ey_c+F. \tag{5}$$

Предполагая, что $\delta\neq 0$, заменяем x_c и y_c их выражениями из уравнений (4). Тогда

$$F'=\frac{D\mu+E\nu+F\delta}{\delta}=\frac{\Delta}{\delta}, \tag{6}$$

где буквой Δ обозначено выражение, которое можно представить в виде определителя III порядка:

$$\Delta=D\mu+E\nu+F\delta=\begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix},$$

$$\Delta=ACF-AE^2+2BDE-B^2F-CD^2. \tag{7}$$

Выражения

$$\delta=\begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta=\begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix}$$

будут играть в дальнейшем исследовании как при $\delta\neq 0$, так и при $\delta=0$ весьма важную роль, и их полезно запомнить. В определителе, выражающем Δ, первую строку составляют коэфициенты тех членов уравнения (1), в состав которых входит переменная x (надо твердо помнить, что вместо $2B$ и $2D$ берутся только B и D); вторую строку составляют коэфициенты при членах с y (с аналогичной оговоркой). Третья строка тождественна с третьим столбцом. Выражение δ называется *дискриминантом старших членов* уравнения (1), или короче — *малым* его *дискриминантом*, выражение Δ — *большим* его *дискриминантом*.

Итак, если уравнение (1) выражает кривую с единственным центром, то координаты последнего определяются из уравнений (3). После перенесения начала координат в центр уравнение кривой получает вид:

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+F'=0,$$

причем

$$F'=\frac{\Delta}{\delta}.$$

Упражнения.

1. Указать центры кривых

$$2x^2+2y^2+6x-3y=0, \quad x^2-4xy+2y^2-14x+24y+3=0,$$
$$4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$$

и преобразовать уравнения этих кривых к центру.

2. Убедиться в том, что уравнение

$$4x^2-12xy+9y^2+10x-15y+6=0$$

выражает кривую с линией центров, перенести начало в одну из точек этой линии и выяснить вид этой кривой, вычисляя координаты нескольких ее точек.

3. Преобразовать к центру уравнение кривой

$$2x^2-3xy+y^2+12x-9y+18=0$$

и выяснить вид этой кривой (тем же способом).

4. Кривая II порядка имеет центр в точке (3; —4) и проходит через точки (0; 0), (6; 0), (3; 1). Найти ее уравнение и преобразовать его к центру.

5. Выяснить, каков геометрический смысл уравнения $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, применяя преобразование к центру. Это уравнение выражает так называемую *дробно-линейную* зависимость между x и y.

§ 53. Геометрическое место II порядка с линией центров.

Итак, общее уравнение II порядка с двумя переменными выражает либо центральную кривую (круг, эллипс, гиперболу, а, может быть, и еще какую-нибудь еще неизвестную нам линию), либо кривую без центра (параболу или еще какую-нибудь неизвестную нам линию), либо кривую с линией центров. Займемся сперва выяснением вида кривой с линией центров.

Имеем общее уравнение II порядка с двумя переменными

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

при условиях

$$\delta=AC-B^2=0, \quad \mu=BE-CD=0, \quad \nu=BD-AE. \tag{2}$$

Из трех коэфициентов A, B, C по крайней мере один отличен от нуля (иначе уравнение выражало бы, как уравнение 1-й степени, прямую). Будем различать следующие три случая (других в силу условия $\delta=0$ быть не может):

Случай 1, $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$.
Случай 2, $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$.
Случай 3, $A\neq 0$, $B=0$, $C=0$.

Исследуем каждый из них порознь, начиная с 1-го. Координаты центра x_c, y_c удовлетворяют уравнениям (3) § 52, первое из которых можно переписать в виде

$$Ax_c+By_c+D=\frac{ACx_c+BCy_c+CD}{C}=\frac{B^2x_c+BCy_c+BE}{C}=0$$

или

$$Bx_c+Cy_c+E=0$$

и которое сводится таким образом ко второму. Система (3) сводится, следовательно, к одному лишь уравнению

$$Bx_c+Cy_c+E=0$$

и удовлетворяется координатами любой точки прямой

$$Bx+Cy+E=0.$$

Взяв для x_c произвольное значение, хотя бы $x_c=0$, найдем, что $y_c=-\frac{E}{C}$. Точка с координатами $x_c=0$, $y_c=-\frac{E}{C}$ является одним из бесчисленного множества центров кривой (1). Перенося в нее начало координат и взяв новые оси X', Y' параллельными прежним X, Y, преобразуем уравнение (1) по формулам $x=x'+x_c$, $y=y'+y_c$ к виду

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+F'=0, \tag{3}$$

где $F'=D\cdot 0+E\cdot\left(-\frac{E}{C}\right)+F=F-\frac{E^2}{C}$ (см. формулу 5 § 52). Обозначив разность $CF-E^2$ через λ, имеем, что $CF'=\lambda$. Умножив обе части уравнения (3) на A и заменив AC через B^2 (в силу условия $\delta=0$), приведем уравнение (3) к виду

$$(Ax'+By')^2+\lambda=0. \tag{4}$$

Левую часть уравнения (4) можно разложить на пару линейных множителей

$$\left(Ax'+By'+\sqrt{-\lambda}\right)\left(Ax'+By'-\sqrt{-\lambda}\right)=0. \tag{5}$$

Уравнение (5) удовлетворяется, если удовлетворяется одно из двух уравнений

$$Ax'+By'+\sqrt{-\lambda}=0, \qquad Ax'+By'-\sqrt{-\lambda}=0, \tag{6}$$

и исследуемое уравнение (1) в данном случае *распадается* на пару линейных уравнений (6), из которых каждое при $\lambda\leqq 0$ выражает некоторую прямую, а при $\lambda>0$ никакого геометрического смысла не имеет. Вспоминая условие параллельности двух прямых, замечаем, что *уравнение* (4) *при* $\sigma=\mu=\nu=0$ *в случае* $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$ *при* $\lambda<0$ *выражает пару различных параллельных прямых, при* $\lambda=0$ — *пару совпадающих прямых (одну прямую), при* $\lambda>0$ — *никакого геометрического смысла не имеет.*

Переходя ко второму случаю, когда $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$, переписываем уравнение (1) в виде

$$Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{7}$$

В силу условия $\mu=BE-CD$ равенство $B=0$ влечет за собой равенство $D=0$, так как C по предположению отлично от нуля. Уравнения (3) переписываются в виде

$$0\cdot x_c+0\cdot y_c+0=0, \quad 0\cdot x_c+C\cdot y_c+E=0$$

и удовлетворяются при любом значении x_c и $y_c=-\frac{E}{C}$. Берем, как и выше, $x_c=0$, $y_c=-\frac{E}{C}$ и переносим начало в точку с этими координатами, проводя новые оси параллельно старым. Уравнение (7) перейдет при этом в такое:

$$C^2y'^2+\lambda=0,$$

или
$$\left(Cy'+\sqrt{-\lambda}\right)\left(Cy'-\sqrt{-\lambda}\right)=0,$$
распадающееся на два линейных:
$$Cy'+\sqrt{-\lambda}=0, \quad Cy'-\sqrt{-\lambda}=0. \tag{8}$$

Как и в предыдущем случае, имеем:

при $\lambda<0$ пару параллельных прямых (различных),
при $\lambda=0$ пару совпадающих прямых (одну прямую),
при $\lambda>0$ уравнение (8), а следовательно, и уравнение (7) не имеют никакого геометрического смысла.

Таким образом второй случай отличается от первого лишь тем, что там параллельные прямые (6) были наклонны к осям, здесь же они выражаются уравнениями (8) и параллельны оси X.

Предоставляем читателю самому показать, что в третьем случае уравнение (1) опять-таки выражает пару параллельных прямых (или пару совпадающих прямых, или ничего не выражает), но эти прямые параллельны оси Y.

Три условия:
$$\delta=0, \quad \mu=0, \quad \nu=0, \tag{9}$$
из которых мы исходили в настоящем параграфе, совершенно равносильны двум условиям
$$\delta=0, \quad \Delta=0. \tag{10}$$

Действительно, при выполнении условий (9) выполняются и условия (10), так как $\Delta=D\mu+E\nu+F\delta$ (см. формулу 7, § 52). Обратно, при выполнении условий (10) выполняются и условия (9). Чтобы в этом убедиться, воспользуемся соотношениями
$$A\Delta=\delta\varkappa-\nu^2, \quad C\Delta=\delta\lambda-\mu^2, \tag{11}$$
где $\varkappa=AF-D^2$, $\lambda=CF-E^2$, в справедливости которых легко убедиться простой подстановкой. Если $\delta=0$ и $\Delta=0$, то в силу соотношений (11) и $\mu=0$, и $\nu=0$, т. е. выполняются условия (9).

Итак, *при наличности соотношений* $\delta=0$, $\Delta=0$ *уравнение* (1) *всегда выражает пару параллельных прямых* (различных или совпадающих) *или не имеет никакого геометрического смысла.*

Убедившись в наличности условий $\delta=0$, $\Delta=0$, мы можем сразу написать уравнение тех двух прямых, на которые распадается в этом случае геометрическое место, изображаемое уравнением (1). Действительно, переписав уравнение (1) в виде
$$Cy^2+2Py+Q=0, \tag{12}$$
где $P=Bx+E$, $Q=Ax^2+2Dx+F$, и предполагая сперва $C\neq 0$, находим, что
$$y=\frac{-P\pm\sqrt{P^2-CQ}}{C}=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{(B^2-AC)x^2+2(BE-CD)x+(E^2-CF)}}{C}$$
или в силу условий $\delta=0$, $\mu=0$
$$Cy=-(Bx+E)\pm\sqrt{-\lambda},$$

где попрежнему $\lambda = CF - E^2$. Уравнение (1) распадается таким образом на пару уравнений:

$$Bx + Cy + E + \sqrt{-\lambda} = 0, \qquad Bx + Cy + E - \sqrt{-\lambda} = 0, \qquad (13)$$

изображающих при $\lambda < 0$ пару различных параллельных прямых, при $\lambda = 0$ пару совпадающих прямых, при $\lambda > 0$ ничего не изображающих.

Если же $C = 0$, то в силу условия $\delta = 0$ и $B = 0$, а в силу условия $\nu = 0$ и $E = 0$, так как $A \neq 0$ (все три коэфициента одновременно обращаться в нуль не могут).

Уравнение (1) сводится к $Ax^2 + 2Dx + F = 0$ и распадается, как показывает решение относительно x, на пару прямых

$$Ax + D + \sqrt{-\varkappa} = 0, \qquad Ax + D - \sqrt{-\varkappa} = 0,$$

где $\varkappa = AF - D^2$, изображающих либо пару прямых, параллельных оси Y (при $\varkappa < 0$), либо пару совпадающих прямых, тоже параллельных этой оси (при $\varkappa = 0$), либо ничего не изображающих (при $\varkappa > 0$).

Пример. Указать геометрический смысл уравнения

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 + 6x - 4y - 4 = 0.$$

Здесь $A = 9$, $B = -6$, $C = 4$, $D = 3$, $E = -2$, $F = -4$, $\delta = 9 \cdot 4 - (-6)^2 = 0$, $\mu = (-6)(-2) - 4 \cdot 3 = 0$, $\nu = (-6) \cdot 3 - 9(-2) = 0$, а потому уравнение выражает пару параллельных прямых (различных или совпадающих) или ничего не выражает. Найдя $\lambda = CF - E^2 = 4 \cdot (-4) - (-2)^2 = -20$, убеждаемся, что оно выражает пару различных параллельных прямых, уравнения которых согласно (13) таковы:

$$-6x + 4y - 2 + \sqrt{20} = 0, \qquad -6x + 4y - 2 - \sqrt{20} = 0$$

или в явном виде

$$y = 1{,}5x - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), \qquad y = 1{,}5x + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Упражнения.

1. При каких значениях коэфициентов A и D уравнение $Ax^2 - 4xy + 2y^2 + 2Dx - 6y + 4 = 0$ выражает пару параллельных прямых? Найти уравнения этих прямых.

2. Указать геометрический смысл уравнений $x^2 - 5x + 6 = 0$, $y^2 - 4y + 4 = 0$, $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$, $25x^2 - 40xy + 16y^2 + 30x - 24y + 9 = 0$, $4x^2 - 4xy + y^2 + 12x - 6y + 10 = 0$.

3. Не применяя преобразования к центру, выяснитъ необходимые и достаточные условия распадения геометрического места II порядка на пару прямых, параллельных друг другу, т. е. условия, при которых левая часть уравнения (1) может быть разложена на два линейных множителя вида $px + qy + r$ и $px + qy + s$.

§ 54. Преобразование уравнения центрального геометрического места II порядка к осям симметрии.

Вернемся к уравнению

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \qquad (1)$$

где

$$\delta = AC - B^2 \neq 0, \quad \Delta = D\mu + E\nu + F\delta, \quad \mu = BE - CD, \quad \nu = BD - AE,$$

к которому, как мы видели в § 52, всегда можно привести общее уравнение 2-й степени с двумя переменными, если $\delta \neq 0$. Для уничтожения членов с первыми степенями x и y нам послужило перенесение начала координат в центр кривой. Как мы сейчас увидим, надлежащим поворотом осей можно добиться исчезновения члена с произведением xy. Предварительно формулируем предложение, аналогичное теореме II § 52.

Теорема. *Если кривая выражается уравнением $Ax^2+Cy^2+F=0$, то каждая из осей координат является осью симметрии кривой.*

Доказательство предоставляется читателю (см. § 35, где эта теорема была доказана для эллипса).

Вернемся теперь к уравнению (1) и выясним, имеет ли выражаемое им геометрическое место оси симметрии и какие именно. Преобразуем это уравнение, переходя к новой системе координатных осей, начало которой совпадает с началом 0 прежней системы, а оси X' и Y' повернуты относительно осей X и Y на угол α, причем $0 \leq \alpha < \pi$. Как известно (см. § 9), при таком преобразовании прежние координаты некоторой точки $(x;\ y)$ выражаются через новые координаты той же точки $(x';\ y')$ формулами

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Заменяя в уравнении (1) x и y их выражениями через x' и y', получим уравнение того же геометрического места II порядка относительно новой системы координат

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{2}$$

причем

$$A' = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$2B' = -2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$C' = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

или после упрощений

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha, \\ 2B' &= 2B\cos 2\alpha - (A - C)\sin 2\alpha, \\ C' &= A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Важно заметить следующие соотношения между новыми и старыми коэфициентами, легко получаемые из формул (3):

$$A' + C' = A + C = \sigma, \tag{4}$$

$$A' - C' = (A - C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha, \tag{4 bis}$$

$$(A' - C')^2 + 4B'^2 = (A - C)^2 + 4B^2 = \rho^2. \tag{5}$$

Но $(A' - C')^2 = (A' + C')^2 - 4A'C', \qquad (A - C)^2 = (A + C)^2 - 4AC,$

а потому последнее соотношение можно переписать в виде

$$(A' + C')^2 - 4(A'C' - B'^2) = (A + C)^2 - 4(AC - B^2) = \sigma^2 - 4\delta = \rho^2,$$

откуда, принимая во внимание соотношение (4), имеем

$$A'C' - B'^2 = AC - B^2 = \delta. \tag{6}$$

Соотношения (4), (5), (6) показывают, что выражения $\sigma = A + C$, $\rho^2 = (A - C)^2 + 4B^2$, $\delta = AC - B^2$ обладают свойством *инвариантности*: выражения эти остаются неизменными (инвариантными), если вместо коэфициентов данного уравнения A, B, C подставим в них коэфициенты преобразованного уравнения A', B', C'. Первый из этих *инвариантов* $A + C$ мы обозначили буквой σ, второй, имеющий всегда положительное (или в крайнем случае нулевое) значение, — буквой ρ^2, так что

$$\rho = \pm\sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} = \pm\sqrt{\sigma^2 - 4\delta}. \tag{7}$$

К вопросу об инвариантах мы вернемся в дальнейшем (см. конец § 56), а пока продолжим работу по упрощению уравнения геометрического места II порядка.

Попробуем сделать такой выбор угла поворота α, чтобы в уравнении (2) исчез член с произведением координат, т. е. чтобы коэфициент B' обратился в нуль. Для определения α имеем таким образом уравнение

$$2B' = 2B\cos 2\alpha - (A - C)\sin 2\alpha = 0. \tag{8}$$

Это уравнение удовлетворяется при любом значении угла α, если имеют место равенства

$$B = 0, \quad A - C = 0. \tag{9}$$

В этом случае уравнение (1) приводится к уравнению $Ax'^2 + Ay'^2 = \frac{\Delta}{\delta} = 0$ или к уравнению

$$x'^2 + y'^2 = -\frac{\Delta}{A\delta} \tag{10}$$

и выражает либо круг, если $-\frac{\Delta}{A\delta} > 0$, либо одну только точку (0; 0), если $-\frac{\Delta}{A\delta} = 0$. В случае, если $-\frac{\Delta}{A\delta} < 0$, уравнение (10) ничего не выражает, так как сумма квадратов двух вещественных чисел x' и y' не может равняться отрицательному числу, и уравнение (10) не удовлетворяется координатами никакой точки плоскости.

Если хотя бы одно из условий (9) не выполнено, то уравнение (8), которое можно переписать в виде

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}, \tag{11}$$

позволяет найти единственное определенное значение угла $\alpha = \alpha_0$ между 0 и $\frac{1}{2}\pi$, так как при изменении угла 2α от 0 до π его тангенс принимает по одному разу все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Тангенс не изменяется, если угол увеличить на π, а потому кроме корня $\alpha = \alpha_0$ уравнение (11) имеет также корень $\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{2}\pi$. Других корней в интервале от 0 до π уравнение (11) не имеет. Отсюда, основываясь на теореме начала настоящего параграфа, заключаем, что *центральное геометрическое место II порядка имеет вообще две взаимно-перпендикулярные оси симметрии, а в особом случае, когда выполнены* *условия* (9) *и когда оно является кругом, — бесчисленное множество осей симметрии.*

Совместив ось X' с одной из осей симметрии, мы приведем уравнение (1) к виду

$$A'x'^2 + C'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{12}$$

так как B' обращается тогда в 0. Определив α по уравнению (11), мы можем вычислить значения A' и C' по формулам (3), но проще воспользоваться соотношениями (4), (5), (7), которые дают

$$A' + C' = \sigma, \quad A' - C' = \rho, \quad \sigma = A + C, \quad \rho = \pm\sqrt{\sigma^2 - 4\delta}, \tag{13}$$

откуда легко находим, что

$$A' = \frac{1}{2}(\sigma + \rho), \quad C' = \frac{1}{2}(\sigma - \rho). \tag{14}$$

Выбор того или иного знака при корне, определяющем ρ в уравнении (13), вызывает взаимную замену значений A' и C', что соответствует повороту системы координат либо на угол α_0, либо на угол

$$\alpha_0 + \frac{1}{2}\pi.$$

Лучше всего, сделав определенный выбор угла α, выяснить знак ρ по формуле (4 bis), вычислив хотя бы грубо приближенно значение разности $A' - C' = \rho$.

Заметим также, что в силу формулы (6) при $B' = 0$ имеем соотношение

$$A'C' = \delta, \tag{15}$$

показывающее, что при $\delta \neq 0$ ни один из коэфициентов A' и C' не может обратиться в 0.

Теперь остается выяснить геометрический смысл уравнения (12).

В зависимости от того, отличен ли от нуля большой дискриминант Δ или нет, будем различать два случая: случай 1, когда $\Delta \neq 0$, и случай 2, когда $\Delta = 0$.

Случай 1, $\Delta \neq 0$. Уравнение (12) можно переписать в виде

$$\frac{x'^2}{\Delta : (-A'\delta)} + \frac{y'^2}{\Delta : (-C'\delta)} = 1. \tag{16}$$

Если $\delta > 0$, то в силу формулы (15) коэфициенты A' и C' имеют одинаковые знаки. Если этот их общий знак одинаков со знаком Δ, то выражения $\Delta : (-A'\delta)$ и $\Delta : (-C'\delta)$ оба отрицательны, и левая часть уравнения (16) при всех значениях x' и y' отрицательна, а потому не может равняться 1. Уравнение (16) никакого геометрического смысла не имеет.

Если же общий знак коэфициентов A' и C' противоположен знаку Δ, то выражения $\Delta : (-A'\delta)$ и $\Delta : (-C'\delta)$ оба положительны и можно, положив

$$\Delta : (-A'\delta) = a^2, \quad \Delta : (-C'\delta) = b^2, \tag{17}$$

переписать уравнение (16) в виде

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

Итак, при $\delta > 0$ уравнение (16), а следовательно, и уравнение (I) либо ничего не выражают, либо выражают эллипс с полуосями a и b, определяемыми по формуле (17). Заметим при этом, что a может оказаться или больше, или меньше, или равным b. В первом случае (при $a > b$) мы получим эллипс, бо́льшая ось которого совпадает с осью X, малая — с осью Y. Во втором случае, т. е. при $a < b$, наоборот: малая ось эллипса совпадает с осью X, большая — с осью Y. Для приведения эллипса в привычное для нас положение придется сделать еще дополнительный поворот координатных осей на $\frac{1}{2}\pi$. В третьем случае, а именно при $a = b$, получается круг.

Если же $\delta < 0$, то в силу формулы (15) A' и C' имеют разные знаки, а потому разные же знаки будут и у выражений $\Delta:(-A'\delta)$ и $\Delta:(-C'\delta)$. Уравнение (16) переписывается в одном из двух следующих видов:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad -\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

и выражает гиперболу, вещественная ось которой совпадает с осью X, а мнимая — с осью Y, или наоборот.

Переходим ко второму случаю, когда $\Delta = 0$. Вместо уравнения (12) имеем теперь уравнение

$$A'x'^2 + C'y'^2 = 0 \tag{18}$$

и замечаем, что при $\delta > 0$, когда A' и C' имеют в силу формулы (15) одинаковые знаки, левая часть уравнения (18), будучи суммой двух чисел одного знака, обращается в 0 лишь при значениях $x' = 0$, $y' = 0$, и уравнение (18) выражает только одну точку — начало координат. Если же $\delta < 0$ и A' и C' имеют разные знаки, то можно положить $\frac{A'}{C'} = -k^2$, откуда $A' = -k^2C'$, и переписать уравнение (18) в виде

$$y'^2 - k^2x'^2 = 0. \tag{19}$$

Левая часть этого уравнения разлагается на два линейных множителя $y' + kx'$ и $y' - kx'$, а потому уравнение (19) удовлетворяется любыми значениями x' и y', удовлетворяющими уравнению $y' + kx' = 0$ или уравнению $y' - kx' = 0$, и никакими другими. Отсюда заключаем, что уравнение (19) изображает пару прямых

$$y' = kx', \quad y' = -kx', \tag{20}$$

пересекающихся в начале координат и расположенных симметрично относительно каждой из координатных осей.

Подводя итоги, имеем следующую теорему: при $\delta = AC - B^2 \neq 0$ *уравнение* $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ *выражает либо эллипс* (в частном случае круг), *либо гиперболу, либо пару пересекающихся прямых, либо одну точку, либо не имеет никакого геометрического смысла.*

Пример. Найти положение центра симметрии и осей симметрии у кривой, выражаемой уравнением

$$x^2 - 4xy - 3y^2 + 6x - 2y - 9 = 0;$$

определить вид этой кривой, найти простейшее ее уравнение и, пользуясь им, построить кривую.

Здесь $A=1$, $B=-2$, $C=-3$, $D=3$, $E=-1$, $F=-9$, $\delta=AC-B^2=-7$, $\mu=BE-CD=11$, $\nu=BD-AE=-5$, $\Delta=D\mu+E\nu+F\delta=101$.

Так как $\delta\neq 0$, то рассматриваемая кривая имеет центр. Его координаты

$$x_c=\frac{\mu}{\delta}=-11:7=-1{,}571,\quad y_c=\frac{\nu}{\delta}=5:7=0{,}714.$$

Отрицательный знак малого дискриминанта δ указывает на то, что кривая — гипербола (случай распадения на две пересекающихся прямых отпадает, так как большой дискриминант отличен от нуля). Оси симметрии наклонены к оси X под углом α, удовлетворяющим уравнению (11):

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2B}{A-C}=-4:4=-1,$$

откуда

$$2\alpha_0=135^\circ \text{ и } 2\alpha_0+180^\circ=315^\circ,$$

что дает

$$\alpha_0=67^\circ 30',\ \alpha_0+90^\circ=157^\circ 30'.$$

Перенося начало координат в центр кривой и направляя оси X' и Y' параллельно старым осям X и Y, напишем уравнение кривой в виде

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0,$$

т. е. в виде

$$x'^2-4x'y'-3y'^2+\frac{101}{-7}=0,$$

или

$$x'^2-4x'y'-3y'^2=14{,}43.$$

Поворачивая оси координат X' и Y' на угол $\alpha_0=67^\circ 30'$, получаем следующее уравнение рассматриваемой кривой относительно новых осей X'', Y'' (значки при x и y опускаем):

$$A'x^2+C'y^2=14{,}43,$$

где

$$A'=A\cos^2\alpha_0+B\sin 2\alpha_0+C\sin^2\alpha_0,\quad C'=A\sin^2\alpha_0-B\cos 2\alpha_0+C\cos^2\alpha_0,$$
$$\alpha_0=67^\circ 30'.$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$A'=1\cdot 0{,}3827^2-2\cdot 0{,}7071-3\cdot 0{,}9239^2=$$
$$=0{,}1465-1{,}4142-3\cdot 0{,}8536=-3{,}828_5,$$
$$C'=1\cdot 0{,}9239^2-2\cdot(-0{,}7071)-3\cdot 0{,}3827^2=$$
$$=0{,}8536+1{,}4142-0{,}4395=1{,}828_3.$$

Для контроля найдем сумму $A'+C'$, которая должна равняться сумме $A+C=\sigma$. Действительно,

$$\sigma=1+(-3)=-2,\quad A'+C'=-3{,}828_5+1{,}828_3=-2{,}000_2.$$

Проще было бы найти A' и C' по формулам (13) и (14), но тогда перед нами была бы возможность выбора того или иного знака у ρ, и мы имели бы $\rho^2 = \sigma^2 - 4\delta = 4 + 28 = 32$, $\rho = \pm\sqrt{32}$. Чтобы установить знак ρ, поступаем так. Если поворот осей был сделан на угол $\alpha_0 = 67°30'$, то формула (4 bis) дает

$$A'' - C' = (A - C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha = 4\cos 135° - 4\sin 135° =$$
$$= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2},$$

а потому по формуле (13)

$$\rho = A' - C' = -4\sqrt{2} = -\sqrt{32}.$$

Находим дальше

$$A' = \frac{1}{2}(\sigma + \rho) = \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{32}) = -1 - \sqrt{8} = -3{,}8284$$

и

$$C' = \frac{1}{2}(\sigma - \rho) = \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{32}) = -1 + \sqrt{8} = 1{,}8284.$$

Теперь переписываем уравнение рассматриваемого геометрического места в виде

$$-3{,}828x^2 + 1{,}828y^2 = 14{,}43$$

или, выполняя деления, в виде

$$\frac{x^2}{3{,}770} - \frac{y^2}{7{,}894} = -1.$$

Фокальная ось гиперболы направлена таким образом по оси Y''. Фокальная полуось $a = \sqrt{7{,}894} = 2{,}810$, вторая (мнимая) полуось $b = \sqrt{3{,}770} = 1{,}942$. Чтобы совместить фокальную ось гиперболы с осью абсцисс, надо произвести дополнительный поворот осей на угол $\frac{1}{2}\pi$. Относительно этих новых осей X''', Y''' уравнение гиперболы будет иметь вид (значки у x и y опускаем):

$$\frac{x^2}{2{,}810^2} - \frac{y^2}{1{,}942^2} = 1,$$

и гиперболу легко вычертить, употребляя хотя бы способ засечек, указанный в § 16 (см. чертеж 105, где за единицу масштаба взят 1 *см*), и найдя предварительно положение фокусов ($c^2 = a^2 + b^2 = 11{,}664$, $c = 3{,}414$).

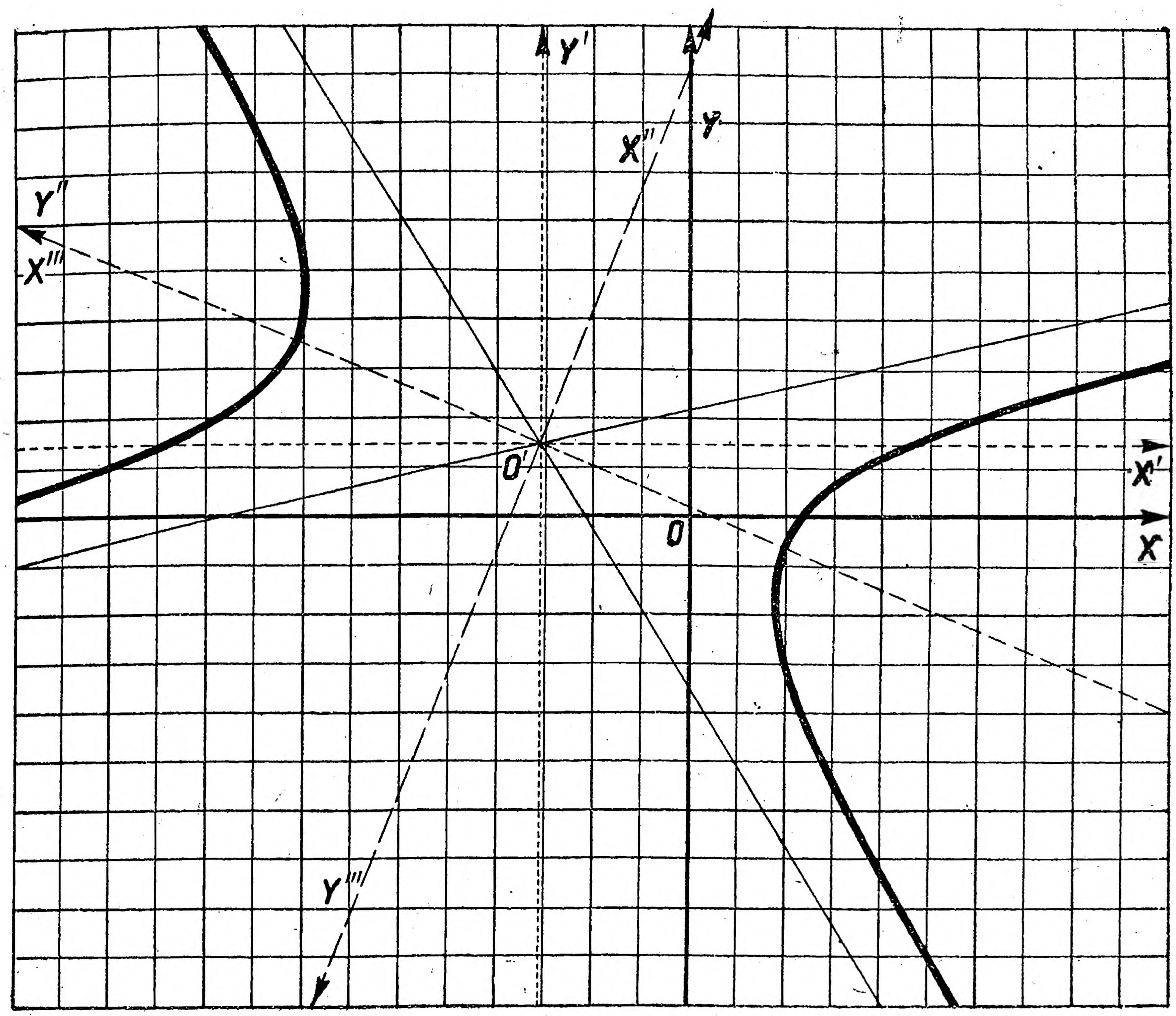
Чтобы получить некоторый контроль правильности нашего чертежа, найдем по нему ординаты точек гиперболы, имеющих абсциссу 2 (относительно первоначально взятой системы координат). Чертеж показывает, что эти ординаты равны $y_1 = 0{,}6$ и $y_2 = -3{,}9$. Находя же эти ординаты вычислением по данному уравнению, куда надо подставить $x = 2$, имеем

$$4 - 8y - 3y^2 + 12 - 2y - 9 = 0 \quad \text{или} \quad 3y^2 + 10y - 7 = 0,$$

откуда

$$y = \frac{1}{3}(-5 \pm \sqrt{46}) = \frac{1}{3}(-5 \pm 6{,}782),$$
$$y_1 = 0{,}594, \quad y_2 = -3{,}927,$$

что хорошо подтверждает правильность всего решения.



Черт. 105.

Упражнения.

1. Исследовать кривые, выраженные следующими уравнениями (выяснить вид кривой, найти положение центра симметрии и оси симметрии, найти простейшее уравнение кривой, вычертить кривую на основе этого уравнения):

(I) $x^2 - 3xy + 2y^2 - 3 = 0$; (V) $5x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$;

(II) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$; (VI) $3x^2 + 3y^2 - x + 12y = 0$;

(III) $5x^2 - 3xy + 2y^2 - 3 = 0$; (VII) $xy - 2x + 4y + 7 = 0$;

(IV) $5x^2 - 3xy + 2y^2 + 3 = 0$; (VIII) $4x^2 - 3xy - y^2 + 1 = 0$.

2. Не прибегая к преобразованию координат, а решая уравнение (I) относительно y и предполагая, что $C \neq 0$, $\delta \neq 0$, показать, что оно может выражать прямые линии лишь при условии $\Delta = 0$, а также показать, что при $\Delta = 0$ оно выражает либо пару пересекающихся прямых, либо одну точку. Рассмотреть особый случай, когда $C = 0$ (тоже решая уравнение I относительно y).

3. Доказать теорему: если центральная кривая II порядка $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$ имеет ось симметрии, совпадающую с одной из координатных осей, то либо $B = 0$, либо $A = C = F = 0$. В последнем случае кривая распадается на пару взаимно-перпендикулярных прямых, совпадающих с осями координат.

§ 55. Геометрическое место II порядка, не имеющее центра симметрии. Как мы видели в § 52, если $\delta = AC - B^2 = 0$, но по крайней мере одно из чисел $\mu = BE - CD$ и $\nu = BD - AE$ отлично от нуля, то общее уравнение 2-й степени с двумя переменными

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad \text{(I)}$$

не может быть освобождено от обоих членов 1-й степени, так как изображаемое им геометрическое место не имеет центра.

Условие $\delta = 0$ или $AC = B^2$ показывает, что при $B \neq 0$ ни одно из чисел A и C не может равняться нулю. Если же $B = 0$, то либо $A = 0$, либо $C = 0$. При $B = 0$ оба коэфициента A и C обращаться в 0 не могут, так как иначе уравнение (I) было бы не 2-й, а 1-й степени. Будем поэтому различать три случая: 1) когда $B \neq 0$; 2) когда $B = 0$ и $A = 0$, 3) когда $B = 0$, $C = 0$, и рассмотрим каждый из них в отдельности.

Случай 1, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Условие $\delta = 0$ позволяет исключить из уравнения (I) один из коэфициентов при членах 2-й степени, хотя бы A, так как из равенства $AC - B^2 = 0$ следует, что $A = \frac{B^2}{C}$. Переписываем уравнение (I) в виде

$$\frac{B^2}{C} x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

или в виде

$$\frac{(Bx + Cy)^2}{C} + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{2}$$

В настоящем случае ни одно из чисел μ и ν не может равняться нулю. Действительно,

$$\nu = BD - AE = BD - \frac{B^2E}{C} = \frac{B(CD - BE)}{C} = -\frac{B\mu}{C},$$

а потому равенство нулю одного из чисел μ или ν влечет за собой и равенство нулю другого; одновременное же обращение в нуль обоих чисел μ и ν противоречит условию.

Для упрощения уравнения (2) перейдем к новым координатным осям X' и Y', имеющим общее начало со старыми осями X и Y, но составляющим с ними углы α. Применяя известные формулы перехода, преобразуем уравнение (2) к виду:

$$\begin{gathered}\frac{1}{C}\left[(B\cos\alpha + C\sin\alpha)x' + (-B\sin\alpha + C\cos\alpha)y'\right]^2 + \\ + 2(D\cos\alpha + E\sin\alpha)x' + 2(-D\sin\alpha + E\cos\alpha)y' + F = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Выберем угол α с таким расчетом, чтобы обратить в нуль коэфициент при x' в скобке второго рода. Для этого берем уравнение $B\cos\alpha + C\sin\alpha = 0$, приводимое к уравнению

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{B}{C}. \tag{4}$$

Каковы бы ни были значения B и C, всегда можно указать в интервале от 0 до π одно определенное значение α, удовлетворяющее этому уравнению (одновременное обращение в нуль коэфициентов B и C противоречило бы сделанным предположениям). Уравнение (3) переписывается в виде

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \tag{5}$$

где

$$C' = \frac{(-B\sin\alpha + C\cos\alpha)^2}{C}, \quad D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha, \quad E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha,$$

$F' = F$. Чтобы найти значения C', D', E', найдем по уравнению (4) значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Применяя известные формулы тригонометрии, имеем

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha} = \frac{1}{1+\cot^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = \frac{B^2}{B^2+C^2},$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{B}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}},$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Выбор знака производится на основании того соображения, что $0 < \alpha < \pi$, а потому $\sin\alpha > 0$. Поэтому при $B > 0$ надо взять $\varepsilon = +1$, при $B < 0$ $\varepsilon = -1$. Разделив

$$\sin\alpha = \frac{B}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}}$$

на

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{B}{C},$$

получим

$$\cos\alpha = -\frac{C}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}}.$$

Итак, имеем формулы

$$\sin\alpha = \frac{B}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}}, \quad \cos\alpha = -\frac{C}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}},$$

где $\varepsilon = +1$ при $B > 0$ и $\varepsilon = -1$ при $B < 0$.

Теперь без труда находим значения коэфициентов уравнения (5):

$$\left.\begin{aligned} C' &= \frac{B^2+C^2}{C} = \frac{AC+C^2}{C} = A+C = \sigma, \\ D' &= \frac{BE-CD}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{\mu}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}}, \\ E' &= -\frac{BD+CE}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}}, \\ F' &= F. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Последние формулы показывают, что $C' \neq O$, так как $B^2 + C^2$, будучи суммой квадратов двух вещественных неравных нулю чисел, имеет всегда положительное значение. Кроме того, и $D' \neq 0$, так как $\mu \neq 0$ согласно сделанному выше замечанию.

Как видим, поворот осей координат позволил нам уничтожить два члена уравнения (1), а именно член с x^2 и член с xy.

Перенесем теперь начало координат в точку $(a;\ b)$, сохраняя прежнее направление осей, т. е. направление осей X', Y'. Обозначая новые координаты точки буквами x'', y'', имеем формулы перехода

$$x' = x'' + a, \quad y' = y'' + b$$

и вместо уравнения (5) получаем уравнение

$$C''y''^2 + 2D''x'' + 2E''y'' + F'' = 0, \tag{7}$$

где

$$C'' = C' = \sigma, \quad D'' = D' = \frac{\mu}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{\mu}{\varepsilon\sqrt{C\sigma}},$$

$$E'' = C'b + E' = \sigma b - \frac{BD+CE}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}} = \sigma b - \frac{BD+CE}{\varepsilon\sqrt{C\sigma}},$$

$$F'' = C'b^2 + 2D'a + 2E'b + F'.$$

Произвольность выбора значений a и b позволяет уничтожить коэфициенты E'' и F''. Для этого надо взять

$$b = \frac{BD+CE}{\varepsilon\sigma\sqrt{C\sigma}}, \quad a = -\frac{C'b^2 + 2E'b + F'}{2D'}, \tag{8}$$

что всегда возможно, так как ни σ, ни C, ни D' не равны нулю.

Уравнение (7) переписывается теперь в виде

$$C''y''^2 + 2D''x'' = 0 \text{ или } y''^2 = -\frac{2D''}{C''}x''.$$

Если $-\frac{D''}{C''} > 0$, то полагаем эту дробь равной p и имеем в результате нашего исследования уравнение

$$y''^2 = 2px'', \tag{9}$$

т. е. уравнение параболы с параметром p, вычисляемым по формуле

$$p = -\frac{D''}{C''} = -\frac{\mu}{\varepsilon\sigma\sqrt{C\sigma}}, \tag{10}$$

где подкоренное $C\sigma$ всегда положительно. Если же $-\frac{D''}{C''} < 0$, то необходим еще дополнительный поворот координатных осей на угол π, после которого придем к тому же уравнению (9), а в формуле (10) знак в правой части переменится на обратный.

Итак, *при $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ и при сделанных предположениях относительно δ, μ, ν уравнение (1) всегда выражает параболу.*

Случай 2, $A = B = 0$, $C \neq 0$. Уравнение (1) приводится к уравнению $Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, а величины μ и ν сводятся к $\mu = -CD$, $\nu = 0$. Коэфициент D поэтому отличен от нуля, так как иначе мы имели бы одновременно $\mu = 0$ и $\nu = 0$, что противоречит условию. Уравнение это ничем по существу не отличается от того уравнения (5), к которому мы привели уравнение (1) в предшествующем случае посредством поворота осей. Применяя рассмотренное выше параллельное перенесение осей, мы опять придем к тому же уравнению (9).

Случай 3, $A \neq 0$, $B = C = 0$. Повернув координатные оси на угол $\frac{1}{2}\pi$, мы переменим местами переменные x и y и приведем уравнение (1) к виду

$$Ay^2 + 2Ex - 2Dy + F = 0.$$

Таким образом приходим опять к случаю 2.

Те условия, которые определяют геометрическое место II порядка без центра, а именно равенство нулю малого дискриминанта δ и отличие от нуля, по крайней мере, одного из чисел μ и ν, равносильны следующим двум:

$$\delta = 0, \quad \Delta \neq 0.$$

Действительно, формулы (11) § 53 при $\delta=0$ переписываются в виде $A\Delta=-\nu^2$, $C\Delta=-\mu^2$, откуда видно, что при $\Delta\neq 0$, по крайней мере одно из чисел μ и ν отлично от нуля, так как A и C одновременно в нуль не обращаются. Обратно, если хотя бы одно из чисел μ и ν не равно нулю, то не может равняться нулю и Δ.

Теперь можем высказать теорему: *при $\delta=0$ и $\Delta\neq 0$ уравнение $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ выражает параболу.*

Пример. Выяснить геометрический смысл уравнения

$$9x^2-12xy+4y^2-10x-18y-20=0$$

и вычертить кривую, изображаемую этим уравнением.

Здесь $A=9$, $B=-6$, $C=4$, $D=-5$, $E=-9$, $F=-20$, $\delta=0$, $\Delta=-1369$, а потому уравнение изображает параболу.

Повернув координатные оси на угол α, определяемый по уравнению (4), сводящемуся в данном случае к уравнению $\operatorname{tg}\alpha=1{,}5$, откуда $\alpha=56°19'$, приведем данное уравнение к виду

$$C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0,$$

где

$$C'=A+C=13,$$

$$D'=\frac{BE-CD}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}}=-\frac{37}{\sqrt{13}},\quad E'=-\frac{BD+CE}{\varepsilon\sqrt{B^2+C^2}}=-\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$F'=F=-20.$$

Перенося далее начало в точку $(a;\ b)$ с сохранением направлений осей, приходим к уравнению

$$C'y''^2+2D'x''+2(C'b+E')y''+(C'b^2+2D'a+2E'b+F')=0$$

и определяем b и a из условий обращения в нуль коэфициента при y'' и свободного члена. Получаем

$$b=-\frac{E'}{C'}=\frac{3}{13\sqrt{13}}=0{,}0640,$$

$$a=-\frac{C'b^2+2E'b+F'}{2D'}=-\frac{3389\sqrt{13}}{169\cdot 74}=-0{,}9772.$$

Теперь уравнение параболы принимает вид

$$C'y''^2+2D'x''=0 \quad \text{или} \quad y''^2=2px'',$$

где

$$p=-\frac{D'}{C'}=\frac{37\sqrt{13}}{169}=0{,}7893.$$

Пользуясь всеми полученными данными, отмечаем фокус F по координатам

$$x''=\frac{1}{2}p=0{,}3946,\quad y''=0,$$

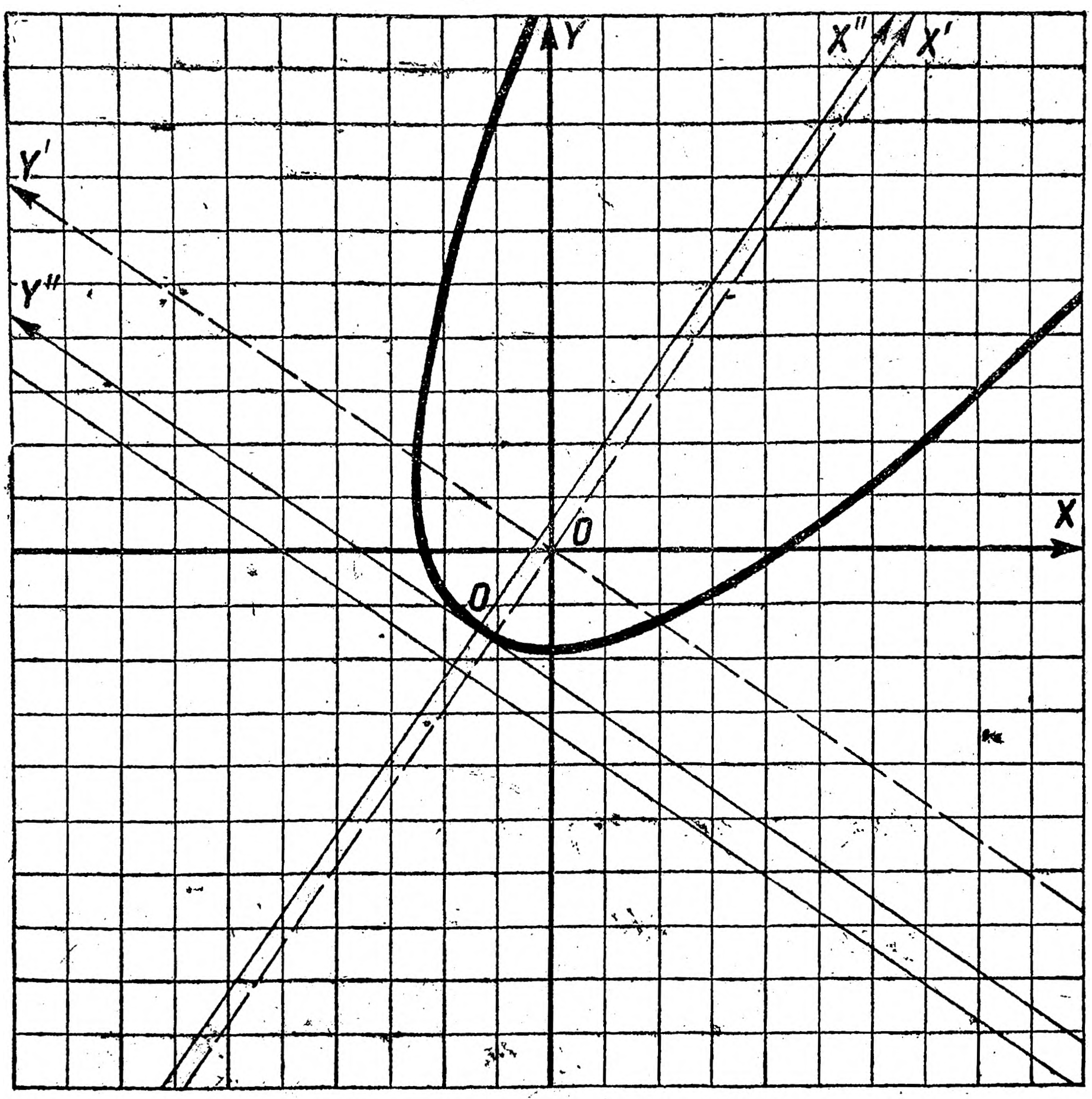
проводим директрису (по уравнению $x''+\frac{1}{2}p=0$) и вычерчиваем параболу хотя бы по способу засечек, рассмотренному в § 15.

Для контроля правильности сделанного построения можно воспользоваться точками пересечения параболы с осями первоначально взятой системы координат. Согласно чертежу, при $x=0$ имеем $y_1=-0{,}9$ и $y_2=5{,}4$, а при $y=0$ $x_1=-1{,}2$ и $x_2=2{,}2$. Вычисление же значения y при $x=0$ по данному уравнению приводит к корням уравнения $2y^2-9y-10=0$, равным

$$y_1=\frac{9-\sqrt{161}}{4}=-0{,}92 \quad \text{и} \quad y_2=\frac{9+\sqrt{161}}{4}=5{,}42,$$

а вычисление по тому же уравнению значений x при $y=0$ дает корни уравнения $9x^2-10x-20=0$, равные

$$x_1=\frac{5-\sqrt{205}}{9}=-1{,}04 \quad \text{и} \quad x_2=\frac{5+\sqrt{205}}{9}=2{,}15.$$



Черт. 106.

Таким образом, согласие между чертежом и результатами вычисления оказывается удовлетворительное.

Упражнения.

Выяснить геометрический смысл уравнений:

(I) $x^2+2xy+y^2-4x+6y-2=0$; (III) $y^2-5x+y+1=0$;
(II) $4x^2-4xy+y^2-2x+6=0$; (IV) $2x^2+4x+6y-1=0$

и построить изображаемые этими уравнениями кривые, найдя предварительно их простейшие уравнения.

§ 56. Сводка полученных результатов. Инварианты. Как мы видели в последних параграфах, при определении геометрического смысла общего уравнения 2-й степени с двумя переменными

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{1}$$

решающее значение имеют величины малого и большого дискриминантов δ и Δ этого уравнения.

$$\delta=\begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix}, \quad \Delta=\begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix}.$$

Действительно, при $\delta>0$, когда оба коэфициента A и C имеют один и тот же знак и оба можно сделать, меняя в случае надобности знаки всех коэфициентов уравнения (1) на обратные, положительными, уравнение (1) в случае $\Delta>0$ не имеет никакого геометрического смысла, в случае $\Delta<0$ выражает эллипс, в случае $\Delta=0$ — одну единственную точку. Так как при $\Delta>0$ уравнение (1) можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

весьма схожему с уравнением эллипса, то говорят, что уравнение (1) выражает в этом случае *мнимый эллипс*. Если же ту единственную точку, которую уравнение (1) выражает при $\delta>0$, $\Delta=0$, рассматривать как эллипс с полуосями $a=0$, $b=0$, т. е. как *предельный случай* эллипса при одновременном приближении к нулю его полуосей, то становится понятным утверждение: *при $\delta>0$ уравнение* (1) *выражает геометрическое место типа эллипса: эллипс при $\Delta<0$, мнимый эллипс при $\Delta>0$, точку при $\Delta=0$* (предполагается, что $A>0$, $C>0$).

При $\delta<0$ уравнение (1) выражает гиперболу как при $\Delta>0$, так и при $\Delta<0$; в случае же $\Delta=0$ оно выражает пару пересекающихся прямых. Но всякую такую пару прямых можно рассматривать как предельный случай гиперболы, для которой эти прямые служат асимптотами, при одновременном приближении к нулю ее полуосей (см. § 50, упражнение 4). Поэтому говорят, что *при $\delta<0$ уравнение* (1) *выражает геометрическое место типа гиперболы: гиперболу при $\Delta\neq0$, пару пересекающихся прямых при $\Delta=0$*.

Наконец, при $\delta=0$ уравнение (1) выражает параболу при $\Delta\neq0$, а при $\Delta=0$ либо пару параллельных прямых (при $\lambda=CF-E^2<0$), либо пару совпадающих прямых, т. е. одну прямую (при $\lambda=0$), либо не имеет никакого геометрического смысла (при $\lambda>0$). При $\Delta=0$ уравнение (1) распадается, как мы видели в конце § 53, на два линейных уравнения (13):

$$Bx+Cy+E+\sqrt{-\lambda}=0, \quad Bx+Cy+E-\sqrt{-\lambda}=0,$$

выражающих, как можно сказать, всегда пару параллельных прямых, но при $\lambda<0$ эти прямые действительны и различны, при $\lambda=0$ действительны и совпадают, при $\lambda>0$ являются мнимыми. Говорят, что *при $\delta=0$ уравнение* (1) *выражает геометрическое место типа параболы: параболу при $\Delta\neq0$, пару параллельных прямых* (действительных и различных или действительных и совпадающих, или мнимых) *при $\Delta=0$*.

Если при исследовании кривой требуется установить лишь ее вид и размеры, но не нужно выяснять ее расположения относительно первоначально взятой системы координатных осей, то выгодно воспользоваться **инвариантами**, на которых остановимся поэтому несколько подробнее.

Будем рассматривать кривую II порядка, изображаемую в некоторой системе прямолинейных (прямоугольных или косоугольных) координат с углом между осями X и $У$, равным ω, где $0<\omega<\pi$, уравнением

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

и перейдем к другой системе прямолинейных координат с углом между осями X' и $У'$, равным ω' $(0<\omega'<\pi)$, предполагая, что новая система отличается от прежней, вообще говоря, как положением начала координат, так и направлениями осей. Допустим, что рассматриваемая кривая выражается относительно новой системы координат уравнением

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0,$$

и докажем следующую **теорему**:

Полагая

$$I_1=\frac{A+C-2B\cos\omega}{\sin^2\omega},\quad I_2=\frac{\delta}{\sin^2\omega},\quad I_3=\frac{\Delta}{\sin^2\omega},$$

$$I'_1=\frac{A'+C'-2B\cos\omega'}{\sin^2\omega'},\quad I'_2=\frac{\delta'}{\sin^2\omega'},\quad I'_3=\frac{\Delta'}{\sin^2\omega'},$$

где

$$\delta=\begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix},\qquad \delta'=\begin{vmatrix} A', & B' \\ B', & C' \end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix},\qquad \Delta'=\begin{vmatrix} A', & B', & D' \\ B', & C', & E' \\ D', & E', & F' \end{vmatrix},$$

имеем для любой кривой, изображенной уравнением (1), *и для любого преобразования прямолинейных координат соотношения:*

$$I_1=I'_1,\quad I_2=I'_2,\quad I_3=I'_3.$$

Выражения I_1, I_2, I_3 называются *первым, вторым и третьим основными инвариантами* кривой II порядка.

Доказательство. Покажем сперва справедливость теоремы для случая параллельного перенесения осей, далее для случая поворота осей без изменения начала координат при переходе от произвольной косоугольной системы координат к системе прямоугольной, затем для случая перехода от прямоугольной системы к произвольной косоугольной, имеющей с этой прямоугольной общее начало и общую ось абсцисс. Тем самым теорема будет доказана для какого угодно преобразования координат, так как от одной произвольной системы прямолинейных координат можно перейти к другой произвольной системе прямолинейных координат посредством трех указанных преобразований.

В случае параллельного перенесения осей имеем формулы преобразования:

$$x=x'+a,\quad y=y'+b,\quad \omega=\omega',\quad A'=A,\quad B'=B,\ C'=C,$$
$$D'=Aa+Bb+D,\ E'=Ba+Cb+E,\ F'=D'a+E'b+Da+Eb+F.$$

Подставляя эти значения в выражения для инвариантов, имеем непосредственно $I'_1 = I_1$, $I'_2 = I_2$. Третий инвариант I'_3 подвергаем после подстановки некоторым упрощениям и показываем, что он тождественно равен I_3:

$$I'_3 = \begin{vmatrix} A, & B, & Aa + Bb + D = D' \\ B, & C, & Ba + Cb + E = E' \\ Aa + Bb + D, & Ba + Cb + E, & D'a + E'b + Da + Eb + F \end{vmatrix} : \sin^2\omega =$$

$$= \begin{vmatrix} A, & B, & Aa + Bb + D \\ B, & C, & Ba + Cb + E \\ D, & E, & Da + Eb + F \end{vmatrix} : \sin^2\omega = \begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix} : \sin^2\omega = I_3.$$

Здесь мы сперва прибавили к элементам третьей строки элементы первой строки, умноженные на $-a$, и элементы второй строки, умноженные на $-b$, а затем к элементам третьего столбца — элементы первого столбца, умноженные на $-a$, и элементы второго столбца, умноженные на $-b$.

В случае поворота осей (без изменения начала) при переходе от произвольной косоугольной системы к системе прямоугольной имеем формулы преобразования, вытекающие при $\omega' = \frac{1}{2}\pi$ из формул упражнения 3 § 10: $x \sin\omega = x' \sin\beta - y' \cos\beta$, $y \sin\omega = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$, где $\alpha = (X, X')$, $\beta = \omega - \alpha$. Отсюда имеем:

$$A' \sin^2\omega = A \sin^2\beta + 2B \sin\alpha \sin\beta + C \sin^2\alpha,$$
$$B' \sin^2\omega = -A \sin\beta \cos\beta + B \sin\beta \cos\alpha - B \sin\alpha \cos\beta + C \sin\alpha \cos\alpha,$$
$$C' \sin^2\omega = A \cos^2\beta - 2B \cos\alpha \cos\beta + C \cos^2\alpha,$$
$$D' \sin\omega = D \sin\beta + E \sin\alpha, \quad E' \sin\omega = -D \cos\beta + E \cos\alpha, \quad F' = F.$$

Подставляя, получим:

$$I'_1 = \left(A' + C' - 2B' \cos\frac{1}{2}\pi\right) : \sin^2\frac{1}{2}\pi = [A - 2B\cos(\alpha + \beta) + C] : \sin^2\omega =$$
$$= (A + C - 2B\cos\omega) : \sin^2\omega = I_1;$$

$$I'_2 = \begin{vmatrix} A', & B' \\ B', & C' \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} A\sin^2\beta + 2B\sin\alpha\sin\beta + C\sin^2\alpha, & -\frac{1}{2}A\sin 2\beta + B\sin(\beta - \alpha) + \frac{1}{2}C\sin 2\alpha \\ -\frac{1}{2}A\sin 2\beta + B\sin(\beta - \alpha) + \frac{1}{2}C\sin 2\alpha, & A\cos^2\beta - 2B\cos\alpha\cos\beta + C\cos^2\alpha \end{vmatrix}}{\sin^4\omega} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} A\sin\beta\sin\omega + B\sin\alpha\sin\omega, & -\frac{1}{2}A\sin 2\beta + B\sin(\beta - \alpha) + \frac{1}{2}C\sin 2\alpha \\ -A\cos\beta\sin\omega + B\cos\alpha\sin\omega, & A\cos^2\beta - 2B\cos\alpha\cos\beta + C\cos^2\alpha \end{vmatrix}}{\sin^4\omega\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sin^3\omega\cos\alpha} \begin{vmatrix} A\sin\beta + B\sin\alpha, & B\sin\beta\cos\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha \\ -A\cos\beta + B\cos\alpha, & -B\cos\alpha\cos\beta + C\cos^2\alpha \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sin^2\omega} \begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix} = I_2.$$

Все упрощения были здесь произведены на основании свойств определителя. Подобным же образом доказывается и справедливость равенства $I'_3 = I_3$. Читателю рекомендуется хорошо разобраться в доказательстве равенства $I'_2 = I_2$, а затем самостоятельно доказать, пользуясь теми же приемами упрощения определителей, и тождество $I_3 = I'_3$.

В случае перехода от прямоугольной системы координат к новой, косоугольной системе, имеющей общее с этой прямоугольной системой начало и общую ось абсцисс, опять берем формулы упражнения 3 § 10 и полагаем в них $\omega = \frac{1}{2}\pi$, $(X, X') = \alpha = 0$. Получим формулы перехода $x = x' + y\cos\omega'$, $y = y'\sin\omega'$, посредством которых находим

$$A' = A,\ B' = A\cos\omega' + B\sin\omega',\ C' = A\cos^2\omega' + C\sin^2\omega' + 2B\sin\omega'\cos\omega',$$
$$D' = D,\ E' = D\cos\omega' + E\sin\omega',\ F' = F.$$

Подставляя эти значения A', B', C', D', E', F' в I'_1, I'_2, I'_3, получим:

$$I'_1 = \frac{A + (A\cos^2\omega' + C\sin^2\omega' + 2B\sin\omega'\cos\omega') - 2(A\cos\omega' + B\sin\omega')\cos\omega'}{\sin^2\omega'} =$$
$$= \frac{A - A\cos^2\omega' + C\sin^2\omega}{\sin^2\omega'} = A + C = I_1.$$

$$I'_2 = \begin{vmatrix} A, & A\cos\omega' + B\sin\omega', \\ A\cos\omega' + B\sin\omega', & A\cos^2\omega' + C\sin^2\omega' + 2B\sin\omega'\cos\omega' \end{vmatrix} : \sin^2\omega' =$$
$$= \begin{vmatrix} A, & B\sin\omega' \\ B\sin\omega', & C\sin^2\omega' \end{vmatrix} : \sin^2\omega' = \begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix} = I_2,$$

$$I'_3 = \frac{\begin{vmatrix} A, & A\cos\omega' + B\sin\omega', & D \\ A\cos\omega' + B\sin\omega', & A\cos^2\omega' + C\sin^2\omega' + 2B\sin\omega'\cos\omega', & D\cos\omega' + E\sin\omega' \\ D, & D\cos\omega' + E\sin\omega', & F \end{vmatrix}}{\sin^2\omega'} =$$
$$= \begin{vmatrix} A, & B\sin\omega', & D \\ B\sin\omega', & C\sin^2\omega', & E\sin\omega' \\ D, & E\sin\omega', & F \end{vmatrix} : \sin^2\omega' = \begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix} = I_3.$$

Теорема доказана.

Из нее вытекает, между прочим, следующее важное следствие: *зависимость между видом кривой II порядка и значениями дискриминантов δ и Δ ее уравнения, установленная выше для прямоугольных координат, сохраняет свою силу и в том случае, когда уравнение кривой отнесено к любой системе прямолинейных координат.* Действительно, доказанная инвариантность выражений $I_2 = \frac{\delta}{\sin^2\omega}$ и $I_3 = \frac{\Delta}{\sin^2\omega}$ показывает, что если дискриминант имеет, например, положительное значение, то он сохраняет его при всяком преобразовании координат.

Решим теперь несколько задач.

Задача 1. В системе прямолинейных координат с углом между осями $\omega = 60^\circ$ уравнение некоторой кривой имеет вид $x^2 - 2xy + 4y^2 - 6x + 8y - 12 = 0$. Найти простейшее уравнение этой кривой в системе прямоугольных координат ($\omega' = 90^\circ$).

Здесь

$$\delta = \begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix} = 3,\quad \Delta = \begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix} = -64,$$

а потому кривая есть эллипс, и простейшее ее уравнение имеет вид $A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0$. Коэфициенты A', C', F' легко находятся посредством инвариантов:

$$I_1 = (1+4-2\cos 60^\circ):\sin^2 60^\circ = \frac{16}{3}, \quad I_2 = \delta:\sin^2 60^\circ = 4,$$

$$I_3 = \Delta:\sin^2 60^\circ = -\frac{256}{3}, \quad I_1' = A' + C', \quad I_2' = A'C', \quad I_3' = A'C'F'.$$

Теперь имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$A' + C' = \frac{16}{3}, \quad A'C' = 4, \quad A'C'F' = -\frac{256}{3}.$$

Решая ее, получаем две системы решений:

$$A' = \frac{1}{3}(8+\sqrt{28}), \qquad A' = \frac{1}{3}(8-\sqrt{28}),$$

$$C' = \frac{1}{3}(8-\sqrt{28}), \qquad C' = \frac{1}{3}(8+\sqrt{28}),$$

$$F' = -\frac{64}{3}. \qquad F' = -\frac{64}{3}.$$

Простейшее уравнение кривой

$$\frac{x^2}{\frac{32}{4+\sqrt{7}}} + \frac{y^2}{\frac{32}{4-\sqrt{7}}} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{\frac{32}{4-\sqrt{7}}} + \frac{y^2}{\frac{32}{4+\sqrt{7}}} = 1,$$

а полуоси эллипса:

$$\sqrt{\frac{32}{4-\sqrt{7}}} = \frac{4}{3}(\sqrt{7}+1) \text{ (большая) и } \sqrt{\frac{32}{4+\sqrt{7}}} = \frac{4}{3}(\sqrt{7}-1) \text{ (малая).}$$

Задача 2. Найти параметр p параболы, заданной уравнением $x^2 - 4xy + 4y^2 + 16x - 2y - 20 = 0$ в прямоугольных координатах.

Здесь $I_1 = 5$, $I_2 = 0$, $I_3 = -225$. Простейшее уравнение $C'y'^2 + 2D'x' = 0$, а потому $I_1' = C'$, $I_3' = -C'D'^2$. Отсюда $C' = 5$, $D'^2 = 45$, $D' = \pm\sqrt{45}$. Написав простейшее уравнение параболы в виде $y'^2 = 2px'$, имеем $p' = -\frac{D'}{C'} = \frac{\sqrt{45}}{5} = \sqrt{1,8}$.

Задача 3. Найти уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($\omega = 90^\circ$), приняв за оси координат ее асимптоты.

Зная, что тангенс угла наклона асимптоты к оси X равен $\frac{b}{a}$, легко находим $\operatorname{tg}\omega' = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$, $\sin\omega' = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\cos\omega' = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. Искомое уравнение имеет вид $2B'x'y' + F' = 0$.

Коэфициенты B' и F' находим посредством инвариантов I_2 и I_3:

$$I_2 = -\frac{1}{a^2b^2}, \quad I_3 = \frac{1}{a^2b^2}, \quad I_2' = -\frac{B'^2}{\sin^2\omega'} = -\frac{B'^2(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2},$$

$$I_3' = -\frac{B'^2F'(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2}, \quad B'^2 = \frac{4}{(a^2+b^2)^2}, \quad B' = \pm\frac{2}{a^2+b^2}, \quad F' = -1.$$

Окончательно, выбирая знак $+$,

$$x'y' = \frac{1}{4}(a^2+b^2).$$

Упражнения.

1. Пользуясь рассмотренными в настоящей главе методами, исследовать геометрический смысл уравнения $y^2 = 2px - qx^2$ при различных предположениях относительно величины q (коэфициент p можно считать положительным или равным нулю). Сравнить результаты с выводами § 50.

2. Установить вид кривой, выражаемой уравнением $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, найти ее расположение относительно координатных осей и ее простейшее уравнение.

3. Показать, что уравнения

$$y = 10 + x + \frac{5}{x - 10}, \quad y = m + nx + \frac{p}{x + q}$$

выражают гиперболы, и выяснить их расположение относительно координатных осей, а также найти их уравнения относительно осей симметрии и относительно асимптот.

4. Стержень AB движется так, что один его конец A скользит по неподвижной прямой CD, а одна из его точек E описывает дугу круга с радиусом, равным AE и с центром в C. Найти пути, по которым движутся различные точки стержня AB.

5. Исследовать кривую, изображаемую уравнениями

$$x = a \cdot \frac{1 - t}{1 + t}, \quad y = -\frac{t^2}{1 + t},$$

где a — постоянное число, t — переменный параметр (эта кривая служит осью криволинейной шкалы в известной номограмме для решения квадратного уравнения).

6. Показать, что уравнение

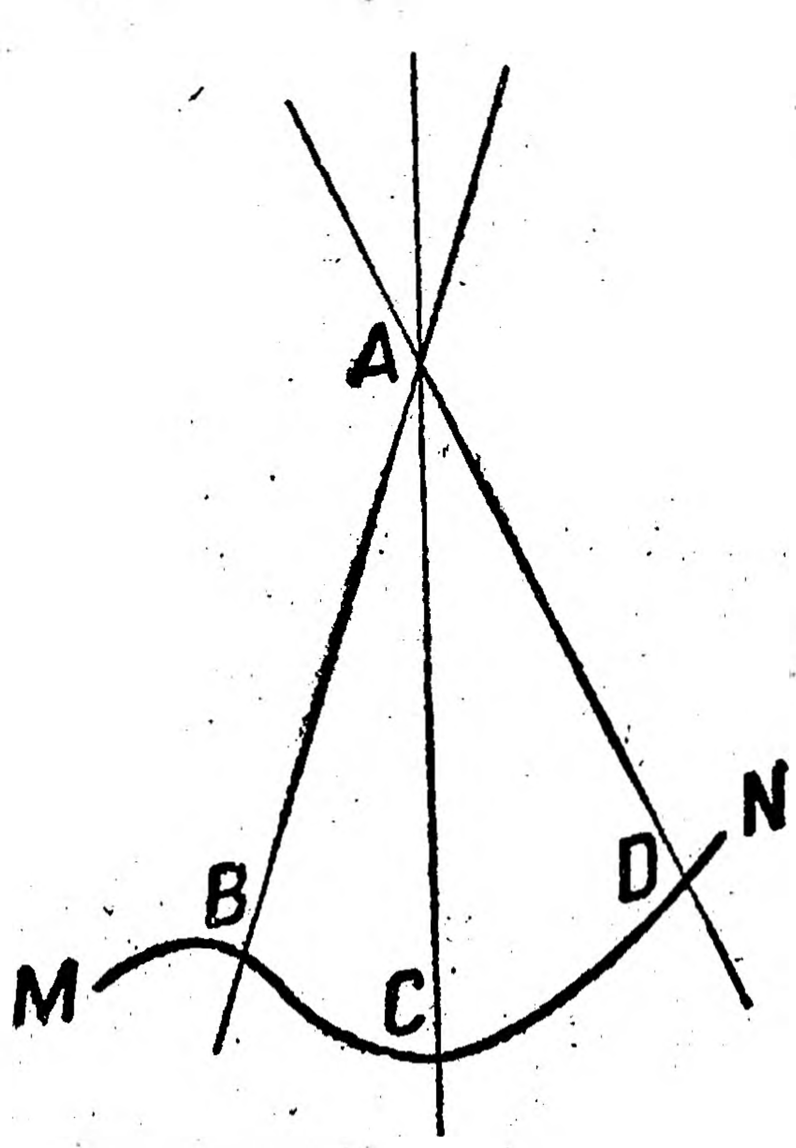
$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot xy + 0 \cdot y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

выражает совокупность двух прямых, из которых одна — бесконечно-удаленная.

Глава VI.

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ II ПОРЯДКА.

§ 57. Плоские сечения прямого круглого конуса. *Конической поверхностью*, или короче — *конусом* [1]), называется поверхность, образуемая прямой AB (черт. 107), которая движется в пространстве так, что все время проходит через постоянную точку A („вершину“ конуса) и через точки некоторой кривой MN („направляющей“ конуса). Движущаяся прямая AB, называемая „образующей“ конуса, предполагается неограниченно простирающейся в обе стороны, а потому всякий конус состоит из двух частей, простирающихся в бесконечность. В зависимости от вида направляющей и от ее положения относительно вершины различают конические поверхности различных видов. Мы будем рассматривать в настоящем параграфе только *прямой круглый конус*, т. е. такой конус, направляющей которого

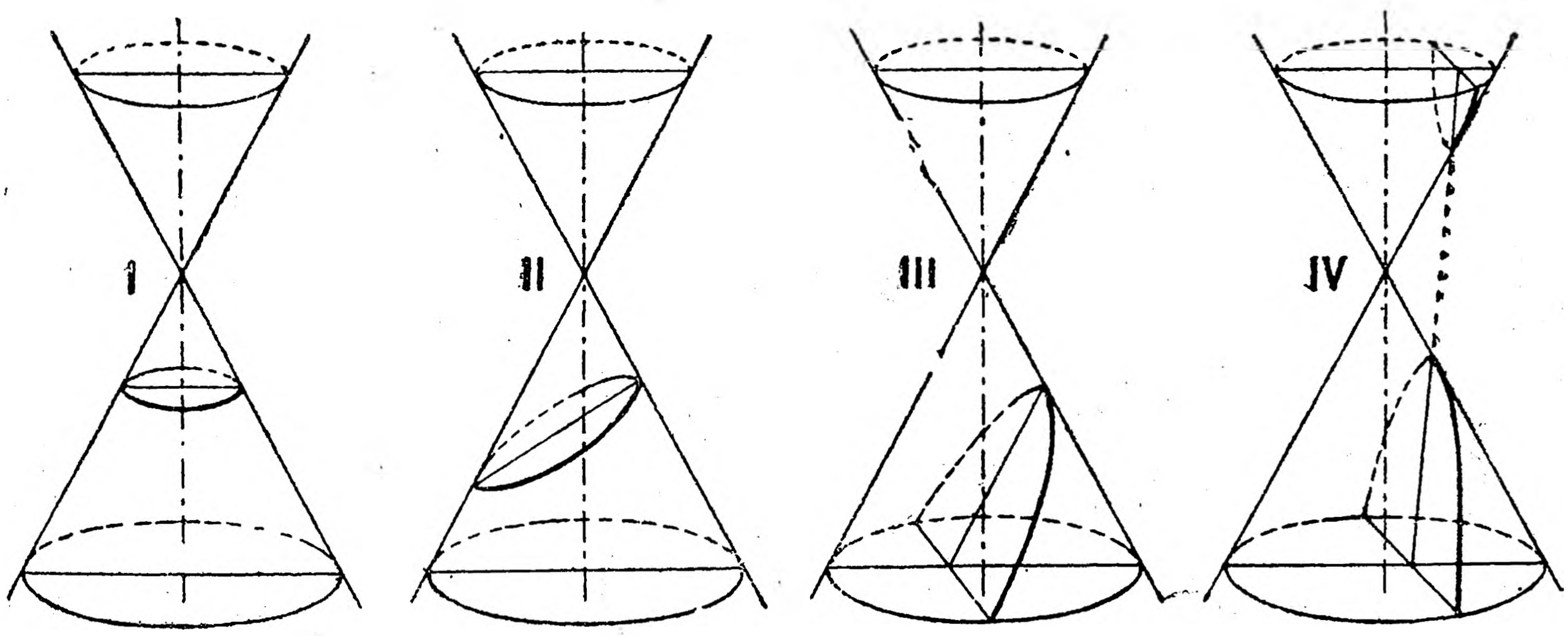


Черт. 107.

[1]) Термин „конус“ часто употребляют для обозначения тела, которое получится, если коническую поверхность (с замкнутой направляющей) пересечь плоскостью, пересекающей все образующие. У нас термин „конус“ употребляется как сокращение термина „коническая поверхность“.

служит круг, причем центр круга находится на перпендикуляре, опущенном из вершины конуса на плоскость этого круга (перпендикуляр этот называется „осью“ конуса).

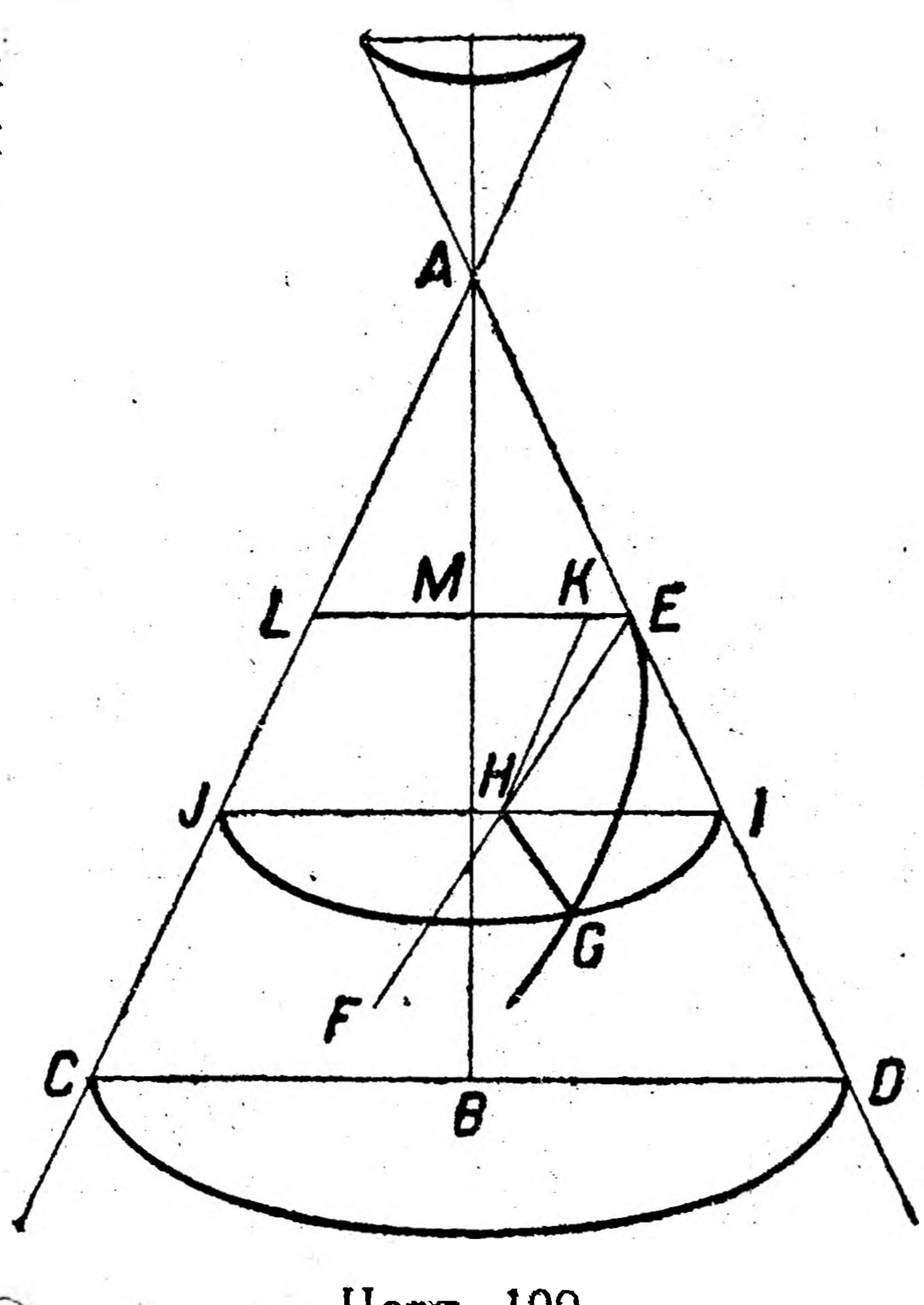
На чертеже 108 изображен один и тот же прямой круглый конус (в дальнейшем мы будем называть его просто „конус“), пересеченный



Черт. 108.

плоскостью, по-разному наклоненной к оси конуса. В зависимости от угла наклона в пересечении конуса с плоскостью получается либо круг (I), либо замкнутая кривая, напоминающая своей формой эллипс (II), либо разомкнутая кривая, уходящая двумя ветвями в бесконечность и напоминающая параболу (III), либо кривая, состоящая из двух раздельных частей, каждая из которых уходит двумя ветвями в бесконечность (IV). Последняя кривая похожа на гиперболу.

Нашей задачей является выяснение вида всех этих кривых — так называемых „конических сечений“.



Черт. 109.

Возьмем конус с углом между осью и образующей, равным α $(0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi)$, и изобразим на чертеже его сечение плоскостью, проходящей через ось AB. Прямые AC и AD изобразят при этом две образующие конуса, проходящие через две диаметрально противоположные точки C и D направляющего круга (черт. 109). Через точку E на образующей AD на расстоянии $AE = d$ $(d \geqq 0)$ от вершины конуса проводим плоскость, расположенную перпендикулярно к плоскости чертежа и пересекающую эту плоскость по прямой EF, причем $\angle DEF = \varphi$. Этот угол φ, определяющий наклон секущей плоскости к образующей, может иметь любое значение между 0 и π. Кривая пересечения конуса с этой секущей плоскостью есть EG.

Берем произвольную точку G этой кривой и опускаем из нее перпендикуляр GH на FE. Обозначив отрезок EH через x, HG через y, делаем тем самым выбор координатных осей, а именно принимаем за ось X прямую EF, за ось Y прямую, лежащую в секущей плоскости и проходящую через точку E (эта прямая на чертеже не показана). Постараемся установить зависимость между $x = EH$ и $y = HG$ и получить таким образом уравнение рассматриваемого конического сечения.

Проводя через точку H плоскость, перпендикулярную к оси конуса, получаем круг с диаметром IJ и перпендикуляром HG, опущенным на этот диаметр. Согласно известной из курса элементарной геометрии теореме

$$HG^2 = HI \cdot HJ. \tag{1}$$

Это соотношение и приведет нас к искомому уравнению кривой. Надо выразить три входящие в него отрезка HG, HI, HJ через текущие координаты x и y точки на кривой и данные величины d, α, φ.

Берем треугольник EHI и замечаем, что в нем $\angle EIH = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, $\angle HEI = \varphi$, а потому, применяя теорему синусов, находим, что $HI : EH = \sin\varphi : \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)$. Следовательно,

$$HI = x \sin\varphi : \cos\alpha. \tag{2}$$

Проводя HK параллельно CA и EL параллельно IJ, имеем $HJ = KL = EL - EK = 2EM - EK$.

Но $EM = AE \sin EAM = d \sin\alpha$, а сторону EK найдем из треугольника EKH опять-таки по теореме синусов: $EK : EH = \sin EHK : \sin EKH$. Здесь

$$\angle EKH = \angle ELJ = \pi - \left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \frac{1}{2}\pi + \alpha,$$

$$\angle KEH = \pi - \left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) - \varphi = \frac{1}{2}\pi + \alpha - \varphi, \quad \angle EHK =$$

$$= \pi - \angle EKH - \angle KEH = \pi - \left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right) - \left(\frac{1}{2}\pi + \alpha - \varphi\right) = \varphi - 2\alpha,$$

а потому

$$EK = x \sin(\varphi - 2\alpha) : \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right).$$

Теперь находим

$$HJ = 2EM - EK = 2d\sin\alpha - \frac{x\sin(\varphi - 2\alpha)}{\cos\alpha}. \tag{3}$$

Возвращаясь к формуле (1), переписываем ее, используя формулы (2) и (3), в виде

$$y^2 = \frac{x\sin\varphi}{\cos\alpha} \cdot \left[2d\sin\alpha - \frac{x\sin(\varphi - 2\alpha)}{\cos\alpha}\right]$$

или окончательно в виде

$$y^2 = 2px - qx^2, \tag{4}$$

где положено

$$p = d\,\mathrm{tg}\,\alpha \sin\varphi, \quad q = \frac{\sin\varphi \sin(\varphi - 2\alpha)}{\cos^2\alpha}. \tag{5}$$

Какие бы значения (из числа возможных для них и указанных выше) ни имели величины d, a, φ, всегда $p \geqq 0$ (значение $p=0$ получается при $d=0$, т. е. тогда, когда секущая плоскость проводится через вершину конуса A). Но величина q может быть либо положительной (при $\varphi > 2\alpha$, когда разность $\varphi - 2\alpha$ заключается между 0 и π), либо отрицательной (при $\varphi < 2\alpha$), либо равной 0 (при $\varphi = 2\alpha$).

Исследуя уравнение (4) при этих трех предположениях (см. § 50), заключаем, что сделанные выше при рассмотрении чертежа 108 догадки подтверждаются: *всякое сечение прямого круглого конуса с углом между осью и образующей, равным* α, *дает либо эллипс* (при $\varphi > 2\alpha$), *либо параболу* (при $\varphi = 2\alpha$), *либо гиперболу* (при $\varphi < 2\alpha$); в частности при $\varphi = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ получается круг, при $d=0$ и $\varphi > 2\alpha$ одна точка (вершина конуса), при $d=0$ и $\varphi < 2\alpha$ пара пересекающихся прямых (две образующих конуса), при $d=0$ и $\varphi = 2\alpha$ пара совпадающих прямых (одна из образующих конуса).

Исторически изучение кривых II порядка было начато именно с изучения различных плоских сечений прямого круглого конуса еще древнегреческими геометрами Менехмом, Евклидом и Аполлонием. Однако, не располагая в те времена ни буквенным алгебраическим обозначением, ни теоремами тригонометрии, ни методом координат, они должны были проводить свои рассуждения существенно иначе, чем это сделали мы [1]).

Упражнения.

1. Повторить вывод уравнения (4), взяв на чертеже угол $\varphi = DEF$ (черт. 109) настолько малым, чтобы точка K оказалась на продолжении отрезка LE вправо.

2. Предполагая $\alpha = 45°$, установить, при каких значениях d и φ получается в сечении конуса эллипс с данными полуосями a и b? При всех ли значениях a и b задача разрешима?

3. Если $\alpha = 45°$, какие значения d и φ надо взять, чтобы получить в сечении гиперболу с полуосями a и b? При всех ли значениях a и b задача разрешима?

4. Если $\alpha = 45°$, какие значения α и φ надо взять, чтобы получить в сечении параболу с параметром p? При всех ли значениях p задача разрешима?

5. Обобщая результаты решения трех предшествующих задач, доказать, что в сечении прямого круглого конуса с произвольным углом $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi\right)$ между осью и образующей при надлежащем выборе значений d и φ может быть получен любой эллипс и любая парабола, гипербола же может быть получена лишь такая, у которой угол между асимптотами, содержащий фокальную ось, не больше угла 2α.

Указание. Преобразовать выражение для q (5), заменив произведение синусов разностью косинусов.

*** § 58. Число условий, определяющих кривую II порядка. Теорема Паскаля.** Прямая линия определяется, как известно, двумя своими точками: через всякие две точки можно провести прямую и притом только одну. Круг определяется тремя своими точками: через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести круг и притом только один. Сколько же точек, принадлежащих кривой II порядка, надо указать, чтобы они однозначно определяли эту кривую? Взяв общее уравнение такой кривой

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

примем во внимание, что из шести входящих в него коэфициентов один может быть взят произвольно, так как все члены уравнения (1) можно умножать или де-

---

[1]) См., например, отрывки из сочинений Аполлония Пергского в упомянутой уже „Хрестоматии по истории математики“ Вилейтнера.

лить без изменения его геометрического смысла на произвольное постоянное число, неравное нулю. Таким образом уравнение (1) определяется пятью отношениями пяти из коэфициентов уравнения (1) к шестому, т. е. пятью условиями. Взяв 5 точек, принадлежащих кривой, изображаемой уравнением (1), мы получим, подставляя координаты каждой из них в уравнение (1), пять однородных уравнений первой степени относительно коэфициентов A, B, C, D, E, F, т. е. таких, у которых нет членов, не содержащих неизвестных, откуда и найдем отношения пяти из них к шестому, значение которого можно взять по произволу. Итак, *кривая II порядка определяется пятью принадлежащими ей точками.*

Найдем, например, кривую II порядка, проходящую через точки $(-1;\ 0)$, $(+5;\ 0)$, $(0;\ +3)$, $(0;\ -2)$, $(+2;\ +3)$.

Для определения коэфициентов уравнения (1) имеем 5 уравнений:

$$A-2D+F=0, \quad 25A+10D+F=0, \quad 9C+6E+F=0, \quad 4C-4E+F=0,$$
$$4A+12B+9C+4D+6E+F=0.$$

Вычитая из второго уравнения первое, из третьего второе и т. д., исключаем F и получаем систему из четырех уравнений:

$$24A+12D=0, \quad -25A+9C-10D+6E=0, \quad -5C-10E=0,$$
$$4A+12B+5C+4D+10E=0.$$

Первое из этих уравнений дает $D=-2A$, третье $C=-2E$. Подстановка этих значений D и C в уравнения второе и четвертое дает систему двух уравнений

$$5A+12E=0, \quad A-3B=0,$$

откуда находим, что

$$B=A:3, \quad E=-5A:12.$$

Далее берем

$$D=-2A, \quad C=-2(-5A:12)=5A:6, \quad F=2D-A=-5A.$$

Выразив таким образом 5 коэфициентов B, C, D, E, F через шестой коэфициент A, подставим найденные выражения в уравнение (1) и получим

$$Ax^2+2\cdot\frac{1}{3}Axy+\frac{5}{6}Ay^2+2(-2A)x+2\left(-\frac{5}{12}A\right)y+(-5A)=0$$

или после деления всех членов на A и умножения на 6

$$6x^2+4xy+5y^2-24x-5y-30=0.$$

Для поверки подставляем в это уравнение координаты каждой из пяти данных точек и убеждаемся, что кривая, изображаемая этим уравнением, проходит через все эти точки. Пользуясь способами, рассмотренными в предшествующей главе, устанавливаем, что эта кривая — эллипс, имеющий центр в точке $(2{,}11;\ -0{,}34)$, наклон фокальной оси к оси X в $37°59'$ и полуоси $a=3{,}98$ и $b=2{,}69$.

Отметим следующие частные случаи взаимного расположения данных пяти точек.

Если три из них расположены на одной прямой, а остальные две вне этой прямой, то кривая распадается на пару прямых. Действительно, взяв одну из трех первых точек за начало координат и направив ось X через вторую и третью, имеем такие координаты всех данных точек: $(0;\ 0)$, $(a;\ 0)$, $(b;\ 0)$, $(c;\ d)$, $(e;f)$, причем $a\neq 0$, $b\neq 0$, $d\neq 0$, $f\neq 0$, $a\neq b$.

Первые три уравнения системы получаются такие:

$$F=0, \quad Aa^2+2Da+F=0, \quad Ab^2+2Db+F=0,$$

откуда

$$F=D=A=0.$$

Последние два уравнения системы

$$2Bcd+Cd^2+2Ed=0, \quad 2Bef+Cf^2+2Ef=0$$

позволяют выразить B и C в зависимости от E. В конце концов приходим к уравнению

$$y(2Bx+Cy+2E)=0,$$

подтверждающему сказанное выше.

Если четыре данных точки расположены на одной прямой, а пятая вне ее, то задача имеет не одно единственное решение, а бесчисленное их множество. Действительно, направив ось X по этой прямой и совместив начало координат с одной из данных точек, можем написать координаты данных точек в виде $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(b; 0)$, $(c; 0)$, $(d; e)$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $e \neq 0$ и три числа a, b, c все различны. Первые три уравнения системы, как и в предыдущем случае, дают $F = 0$, $D = 0$, $A = 0$, четвертое выполняется само собой, а пятое, имеющее вид

$$2Bde + Ce^2 + 2Ee = 0,$$

дает возможность выразить C в зависимости от B и E. Искомое уравнение напишется в виде

$$2Bxy - 2(E + Bd)y^2 : e + 2Ey = 0$$

и левая его часть распадается на два множителя

$$y[Bex - (E + Bd)y + Ee] = 0,$$

из которых первый выражает ось X, а второй любую прямую, проходящую через точку $(d; e)$.

Число точек, определяющих кривую II порядка, уменьшается, если даны какие-либо дополнительные условия, устанавливающие зависимость между коэфициентами. Так, если кривая — парабола, то $B^2 - AC = 0$, и достаточно четырех точек, чтобы определить кривую. Если кривая — круг, то $A = C$ и $B = 0$, и достаточно трех точек.

Если таких дополнительных условий нет и даны лишь четыре точки кривой, то через них можно провести бесчисленное множество кривых II порядка, целый их „пучок". Каждая кривая пучка определяется заданием еще одной пятой точки, через которую она проходит. Если известны уравнения каких-нибудь двух кривых II порядка, проходящих через четыре данных точки, а именно $f(x, y) = 0$ и $f_1(x, y) = 0$, то уравнение любой кривой пучка может быть представлено в виде

$$f(x, y) + \lambda f_1(x, y) = 0,$$

где λ — произвольное число, значение которого определяет кривую пучка. „Кривая" может быть здесь и распадающейся на две прямых. Так, если даны четыре точки

$$M_1(0; 0), \quad M_2(0; a), \quad M_3(b; c), \quad M_4(d; e),$$

то, взяв уравнения

$$x[(x - b)(e - c) - (y - c)(d - b)] = 0$$

и

$$(by - cx)\cdot[(e - a)x - (y - a)d] = 0,$$

из которых первое выражает пару прямых M_1M_2 и M_3M_4, а второе пару прямых M_1M_3 и M_2M_4, мы можем выразить любую кривую пучка уравнением

$$x[(x - b)(e - c) - (y - c)(d - b)] + \lambda(by - cx)[(e - a)x - (y - a)d] = 0.$$

Провести кривую II порядка через 6 данных точек можно не всегда, а лишь при соблюдении некоторого условия. Условие это выражается знаменитой теоремой Паскаля [1]), гласящей, что *три пары противоположных сторон любого шестиугольника, вписанного в кривую II порядка, пересекаются на одной прямой*, и обратно, что *около всякого шестиугольника, три пары противоположных сторон которого пересекаются на одной прямой, можно описать кривую II порядка.* Обозначая 6 данных точек просто нумерами *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, а прямые, проходящие через каждые две точки *1* и *2*, *2* и *3* и т. д., символами (12), (23) и т. д., имеем согласно теореме Паскаля, что точка пересечения прямых (12) и (45), которую обозначаем цифрой *I*, прямых (23), (56), которую обозначаем через *II*, и прямых (34) и (61), которую обозначим через *III*, лежат на одной прямой.

---

[1]) Ее открыл французский математик Блэз Паскаль (1623 — 1662), доказавший на основании ее свыше 400 предложений о кривых II порядка.

Чтобы доказать теорему Паскаля, возьмем нераспадающуюся кривую II порядка и 6 точек на ней. Точки эти обозначим нумерами *1, 2, 3, 4, 5, 6* и рассмотрим уравнение

$$(12)(34)+\lambda(14)(23)=0, \tag{2}$$

где λ — неопределенный числовой множитель, а символы (12), (34), (14), (23) означают левые части уравнений прямых, проходящих через соответствующие точки. Так, символ (12) означает левую часть уравнения

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}-\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=0.$$

Уравнение (2) есть уравнение 2-й степени относительно переменных x и y и удовлетворяется координатами точек *1, 2, 3, 4*, а потому выражает пучок кривых II порядка, проходящих через эти четыре точки. Действительно, придавая λ различные значения, мы получим по уравнению (2) бесчисленное множество кривых II порядка, каждая из которых проходит через точки *1, 2, 3, 4*.

Подходящим выбором значения λ можно достичь того, что уравнение (2) будет выражать данную кривую II порядка. Равным образом эту же данную кривую можно представить уравнением

$$(45)(61)+\mu(14)(56)=0, \tag{3}$$

где букве μ надо дать определенное числовое значение.

Если уравнения (2) и (3) удовлетворяются координатами любой точки данной кривой II порядка, то и уравнение

$$\lambda(14)(23)(45)(61)-\mu(14)(56)(12)(34)=0, \tag{4}$$

получаемое от них почленного сложения с предварительным умножением обеих частей первого на (45) (61), а второго на $-$ (12) (34), тоже удовлетворяется координатами любой точки этой кривой.

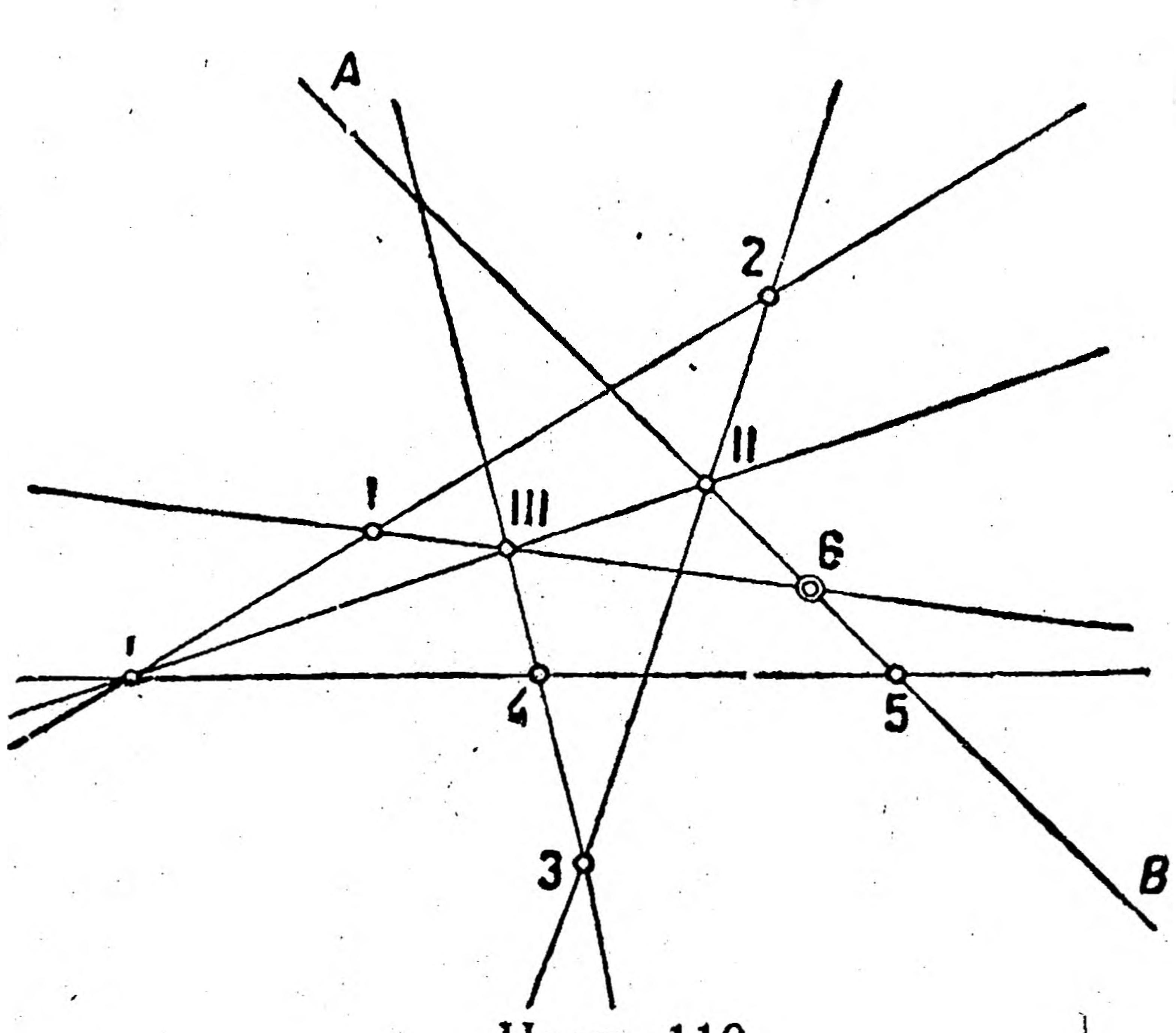
Переписывая уравнение (4) в виде

$$(14)[\lambda(23)(45)(61)-\mu(56)(12)(34)]=0,$$

замечаем, что оно распадается на два, — на уравнение прямой $(14)=0$ и уравнение третьей степени

$$\lambda(23)(45)(61)-\mu(56)(12)(34)=0. \tag{5}$$

Координаты любой точки данной кривой II порядка, удовлетворяя уравнению (4), удовлетворяют и уравнению (5), так как координаты произвольной точки нераспадающейся кривой II порядка не могут удовлетворять уравнению прямой $(14)=0$. Отсюда заключаем, что уравнение (5) тоже в свою очередь распадается на уравнение данной кривой II порядка и уравнение некоторой прямой $Kx+Ly+M=0$. Но уравнение (5) удовлетворяется, если в него подставить координаты точки *I* пересечения прямых $(12)=0$ и $(45)=0$, а также точки *II* пересечения прямых $(23)=0$ и $(56)=0$ и точки *III* пересечения прямых $(34)=0$ и $(61)=0$. Но точки *I*, *II*, *III* не лежат на данной кривой II порядка, а потому они лежат на прямой $Kx+Ly+M=0$, что и требовалось доказать.



Черт. 110.

Покажем применение теоремы Паскаля к решению следующей задачи: ***на чертеже даны пять точек 1, 2, 3, 4, 5; указать точки пересечения кривой II порядка, проходящей через эти пять точек, и прямой, проведенной произвольным образом через одну из них.*** Получив решение этой задачи, мы будем иметь построительное решение задачи о проведении кривой II порядка через 5 данных точек. На чертеже 110 показаны 5 данных точек *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и прямая *AB*, проведенная произвольным образом через точку *5*. Будем искать точку *6*, лежащую на прямой *AB* и на кривой II порядка, проведенной через 5 данных точек.

Проводим прямые (12) и (45) и отмечаем (светлым кружком) их точку пересечения *I*. Затем проводим прямую (23) и отмечаем новым светлым кружком и цифрой *II* точку ее пересечения с прямой *AB*, которая есть не что иное, как прямая (56). Соединив точки *I* и *II* прямой, берем точку *III* (опять светлый кружок) в пересечении прямой *(I, II)* с прямой (34). Проводя прямую через точки *I* и *III*, мы получим в точке ее пересечения с прямой (56) искомую точку *6* (двойной кружок).

Изменяя положение прямой *AB*, мы получим еще сколько угодно точек кривой II порядка, проходящей через 5 данных точек.

Заметим, что тот порядок, в каком мы пронумеровали данные 5 точек, совершенно произволен. Если две прямых, точка пересечения которых нам нужна, оказываются параллельными, то им же параллельной будет и всякая прямая, проходящая через их точку пересечения.

Упражнения.

1. Найти уравнение кривой II порядка, проходящей через точки (0; 0), (0; 20) (40; 0), (40; 20), (20; 15), и исследовать его. Проверить сделанное заключение о виде кривой, разыскивая несколько ее точек на основании теоремы Паскаля.

2. Найти уравнение параболы, проходящей через точки (0; 0), (0; 25), (25; 0), (3; —2).

3. Найти по теореме Паскаля несколько точек кривой II порядка, проходящей через точки (— 1; 0), (+ 5; 0), (0; + 3), (0; — 2), (2; 3), и проверить таким образом приведенное в начале настоящего параграфа аналитическое решение задачи.

4. Решить в общем виде задачу о составлении уравнения кривой II порядка, проходящей через 5 данных точек, и исследовать все могущие представиться при этом случаи.

Указание. Не нарушая общности задачи, можно поместить начало координат в одну из данных точек и провести одну из координатных осей через другую из данных точек.

§ 59. Пересечение кривых II порядка прямою. Возьмем кривую II порядка, выраженную общим уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

и выясним, какие могут представиться случаи ее взаимного расположения с прямой. Уравнение прямой возьмем в виде $y = kx + n$. (Случай прямой, параллельной оси Y, особо рассматривать не будем, так как будем предполагать, что коэфициент k может принимать не только конечные, но и бесконечно-большие значения.)

Разыщем координаты точек пересечения прямой $y = kx + n$ с кривой (1), для чего подставим в уравнение (1) вместо y сумму $kx + n$. Производя упрощения, получим уравнение

$$Lx^2 + 2Mx + N = 0, \qquad (2)$$

где положено $L = A + 2Bk + Ck^2$, $M = Bn + Ckn + D + Ek$, $N = Cn^2 + 2En + F$. Это уравнение определяет абсциссы точек пересечения. Решив его, подстановкой значений x в уравнение $y = kx + n$ найдем ординаты точек пересечения.

При решении уравнения (2) могут представиться следующие случаи: 1) $L \neq 0$; 2) $L = 0$, $M \neq 0$; 3) $L = 0$, $M = 0$, $N \neq 0$, 4) $L = M = N = 0$. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Случай 1, $L \neq 0$. Уравнение (2) имеет два конечных корня, вещественных различных, или мнимых, или вещественных совпадающих. Соответственно этому различаем три подслучая:

Подслучай 1, $M^2 - LN > 0$; уравнение (2) имеет два вещественных различных корня, *прямая пересекает кривую в двух различных точках*, абсциссы которых определяются формулами:

$$x_1 = (-M + \sqrt{M^2 - LN}):L, \quad x_2 = (-M - \sqrt{M^2 - LN}):L. \tag{3}$$

Подслучай 2, $M^2 - LN < 0$; уравнение (2) имеет два мнимых корня, *прямая кривой вовсе не пересекает.*

Подслучай 3, $M^2 - LN = 0$; уравнение (2) имеет два равных вещественных корня, прямая пересекает кривую в двух совпадающих точках и является, следовательно, *касательной к кривой.*

Условие касания

$$M^2 - LN = 0. \tag{4}$$

Координаты точки касания:

$$x = -M:L, \quad y = (Ln - kM):L. \tag{5}$$

Случай 2, $L = 0$, $M \neq 0$. Согласно § 31, п. 4 уравнение (2) имеет один бесконечно-большой и один конечный корень

$$x = -N:(2M), \tag{6}$$

а потому всякая прямая направления k, определяемого условием $L = 0$ или

$$A + 2Bk + Ck^2 = 0, \tag{7}$$

встречает кривую (1) *в одной бесконечно-удаленной и одной конечной точке.* Такое направление называется *асимптотическим.* В зависимости от значений коэфициентов уравнения (7) различаем три подслучая:

Подслучай 1, $B^2 - AC > 0$; уравнение (7) имеет два различных вещественных корня (1), кривая (1) *имеет два различных асимптотических направления* — кривая *типа гиперболы* ($\delta = AC - B^2 < 0$) см. § 54.

Подслучай 2, $B^2 - AC < 0$; уравнение (7) имеет два мнимых корня, *кривая (1) вовсе не имеет асимптотических направлений* — кривая типа эллипса ($\delta > 0$) см. § 54.

Подслучай 3, $B^2 - AC = 0$; уравнение (7) имеет два равных вещественных корня, *кривая (1) имеет одно асимптотическое направление, которое можно рассматривать как два совпадающих* — кривая типа параболы ($\delta = 0$, парабола или пара параллельных прямых) см. § 53 и § 55.

Примечание. Если $C \neq 0$, оба корня уравнения (7) конечны. Если $C = 0$, но $B \neq 0$, то один из корней этого уравнения конечен, другой бесконечно велик (имеет место подслучай 1, асимптотическим направлением является направление оси Y). Если $C = 0$, $B = 0$, $A \neq 0$, то оба корня бесконечно-велики (имеет место подслучай 3), оба асимптотических направления совпадают с направлением оси Y. Случай $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ представиться не может, так как тогда уравнение (1) свелось бы к уравнению 1-й степени.

Случай 3, $L = 0$, $M = 0$, $N \neq 0$. Не только одна, но и вторая точка пересечения прямой $y = kx + n$ с кривой (1) находится в бесконечности, прямая касается кривой в бесконечно-удаленной точке и называется *асимптотой* кривой. Асимптотой является та прямая, асимптотического направления, т. е. направления k, удовлетворяющего условию $L=0$, начальная ордината n которой удовлетворяет условию $M=0$ или

$$(B+Ck)\cdot n+(D+Ek)=0. \tag{8}$$

Здесь приходится различать те же три подслучая, как и в случае 2. При $\delta<0$ (кривая типа гиперболы) имеется два различных асимптотических направления, определяемых формулой $k=\left(-B\pm\sqrt{-\delta}\right):C$; уравнение (8) сводится к

$$\pm n\sqrt{-\delta}+\left[D+E\left(-B\pm\sqrt{-\delta}\right):C\right]=0 \tag{9}$$

и всегда дает два конечных значения начальной ординаты асимптоты, по одному для каждого асимптотического направления; *у кривой типа гиперболы существует две различных асимптоты*. При $\delta>0$ (кривая типа эллипса) нет асимптотических направлений, т. е. условие $L=0$ не выполняется ни для какого направления, а потому *у кривой типа эллипса асимптот нет вовсе*. При $\delta=0$ (кривая типа параболы) есть одно асимптотическое направление, определяемое формулой $k=-B:C$, и уравнение (8) принимает вид $0\cdot n+(D-BE:C)=0$ или $0\cdot n=\mu$, где $\mu=BE-CD$. Если $\mu\neq0$ (кривая — парабола), то это уравнение не удовлетворяется ни при каком конечном значении n: *парабола имеет асимптотическое направление, но не имеет асимптоты*. Если же $\mu=0$, то кривая (1) распадается на пару параллельных прямых, уравнение (8) принимает вид $0\cdot n=0$ и удовлетворяется при любом n: всякая прямая асимптотического направления имеет в этом случае свойства асимптоты, встречая кривую в двух бесконечно-удаленных точках.

Случай 4, $L=0$, $M=0$, $N=0$. Уравнение (2) сводится к уравнению $0\cdot x^2+0\cdot x+0=0$ и удовлетворяется при любом значении x, прямая $y=kx+n$ целиком принадлежит кривой (1): каждая точка прямой лежит в то же время и на кривой. Это возможно лишь в том случае, если кривая (1) распадается на пару прямых и прямая $y=kx+n$ является одной из них. Подтвердить это заключение можно выяснением того условия, какому должны удовлетворять коэфициенты уравнения (1) при существовании условий $L=M=N=0$. Но проще поступить следующим образом. Примем рассматриваемую прямую за ось X. Уравнение (1) перейдет при этом в уравнение того же вида, но с другими значениями коэфициентов. Для определения абсцисс точек пересечения данной прямой, выражаемой теперь уравнением $y=0$, и кривой, выражаемой уравнением (1), получаем уравнение $Ax^2+2Dx+F=0$. Если каждая точка данной прямой принадлежит и кривой, то $A=D=F=0$, и уравнение (1) сводится к уравнению $2Bxy+Cy^2+2Ey=0$, или $y(2Bx+Cy+2E)=0$, распадающемуся на два: $y=0$ и $2Bx+Cy+2E=0$.

Как окончательный вывод получаем следующее заключение: *всякая прямая пересекает каждую кривую II порядка в двух точках* (конечных или бесконечных, различных или совпадающих) *или вовсе ее не пересекает*; исключением является только тот случай, когда кривая распадается на пару прямых и данная прямая совпадает с одной из них: в этом случае прямая пересекает кривую в бесконечно-большом числе точек.

Выведем в заключение настоящего параграфа уравнение касательной к кривой II порядка (1) по данным координатам $(x_0;\ y_0)$ точки касания. Для этого можно было бы взять уравнение пучка $y-y_0=k(x-x_0)$ и воспользоваться условием касания (4). Однако во избежание очень сложных выкладок лучше предварительно перенести начало координат в точку $(x_0;\ y_0)$, сохраняя направления координатных осей. Применяя формулы преобразования $x=x'+x_0$, $y=y'+y_0$, получим уравнение пучка в новых координатах $y'=kx'$ и уравнение кривой

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0,$$

где

$$A'=A,\quad B'=B,\quad C'=C,\quad D'=Ax_0+By_0+D,\quad E'=Bx_0+Cy_0+E,$$
$$F'=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=(Ax_0+By_0+D)x_0+$$
$$+(Bx_0+Cy_0+E)y_0+(Dx_0+Ey_0+F)=D'x_0+E'y_0+(Dx_0+Ey_0+F).$$

Так как кривая проходит через новое начало координат, то $F'=0$ и $D'x_0+E'y_0=-(Dx_0+Ey_0+F)$. Из условия касания $M^2-LN=0$, где $M=D'+E'k$, $N=0$, $L=A'+2B'k+C'k^2$ (см. формулы 2, где надо положить $n=0$), находим уравнение для определения углового коэфициента искомой касательной $D'+E'k=0$, а затем и уравнение этой касательной $E'y'=kE'x'=-D'x'$ или $D'x'+E'y'=0$, что дает после возвращения к старым координатам $(Ax_0+By_0+D)(x-x_0)+(Bx_0+Cy_0+E)(y-y_0)=0$ или окончательно

$$(Ax_0+By_0+D)x+(Bx_0+Cy_0+E)y+(Dx_0+Ey_0+F)=0. \quad (10)$$

Упражнения.

1. Найти асимптотические направления и асимптоты для кривых

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0,\ 5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0,$$
$$9x^2+24xy+16y^2-230x+110y=0.$$

2. Найти уравнения тех касательных к каждой из кривых последней задачи, которые проходят через начало координат.

3. При каком значении величины k кривая $x^2+2xy+3y^2+2kx-4y+25=0$ касается оси абсцисс.

4. Какой вид имеет уравнение кривой II порядка, если

а) обе оси координат являются касательными к кривой;

б) ось абсцисс является для нее прямой асимптотического направления;

в) ось абсцисс является для нее асимптотой,

г) начало координат лежит на кривой, а прямые $4x+3y+2=0$ и $x-y-1=0$ касаются кривой соответственно в точках $(1;-2)$ и $(0;-1)$.

5. Выяснить все возможные случаи взаимного расположения кривой второго порядка $3x^2+xy-2y^2-8x+7y-3=0$ и прямой.

§ 60. Полюс и поляра. Теорема Брианшона. Если две точки A_1 и B_1, расположенные на прямой AB, делят отрезок AB внутренне и внешне в одном и том же отношении, т. е. если имеет место соотношение

$$\overline{AA_1}:\overline{A_1B}=-\overline{AB_1}:\overline{B_1B}, \quad (1)$$

то говорят, что точки A_1 и B_1 *гармонически разделяют* отрезок AB. Так, если $\overline{AA_1}:\overline{A_1B}=2:1$, $\overline{AB_1}:\overline{B_1B}=-2:1$ (черт. 111), то точки A_1 и B_1 гармонически разделяют отрезок AB. Если положить $\overline{AB}=2a$, $\overline{AA_1}=x$, $\overline{AB_1}=y$, то из условия (1) легко выводим, что

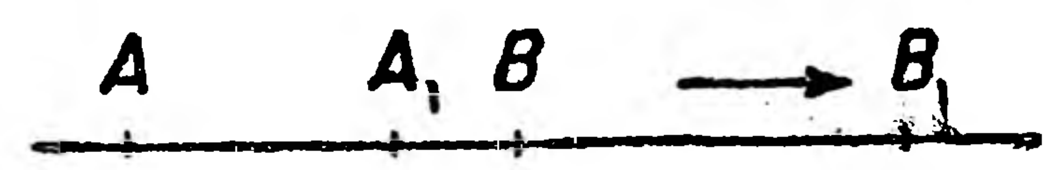
$$y=ax:(x-a). \quad (2)$$

Если точка A_1 и B_1 гармонически разделяют отрезок AB, то и обратно точки A и B гармонически разделяют отрезок A_1B_1. Действительно при наличности условия (2) имеем:

$$\overline{A_1A}:\overline{AB_1}=-x:y=-(x-a):a,\quad \overline{A_1B}:\overline{BB_1}=(2a-x):(y-2a)=(x-a):a,$$

а потому $\overline{A_1A}:\overline{AB_1}=-\overline{A_1B}:\overline{BB_1}$, что и выражает гармоническое разделение точками A и B отрезка A_1B_1. Поэтому можно не различать точек каждой пары A и B, A_1 и B_1 и говорить, что две пары точек A и B, A_1 и B_1 при наличности соотношения (1) являются *гармонически сопряженными*.

Для лучшего уяснения понятия гармонически сопряженных точек полезно разобраться в том, как движется точка B_1, если точка A_1 движется по прямой AB в одну определенную сторону, например слева направо. Рекомендуем читателю проделать это, основываясь на формуле 2. Результаты исследования даны следующей табличкой, где стрелка ↗ означает рост величины, а стрелка ↘ — ее уменьшение. Знак $-\infty+$ означает, что величина переходит скачком от бесконечно-большого отрицательного к бесконечно-большому положительному значению; знак $+\infty-$ означает обратный переход.



Черт. 111.

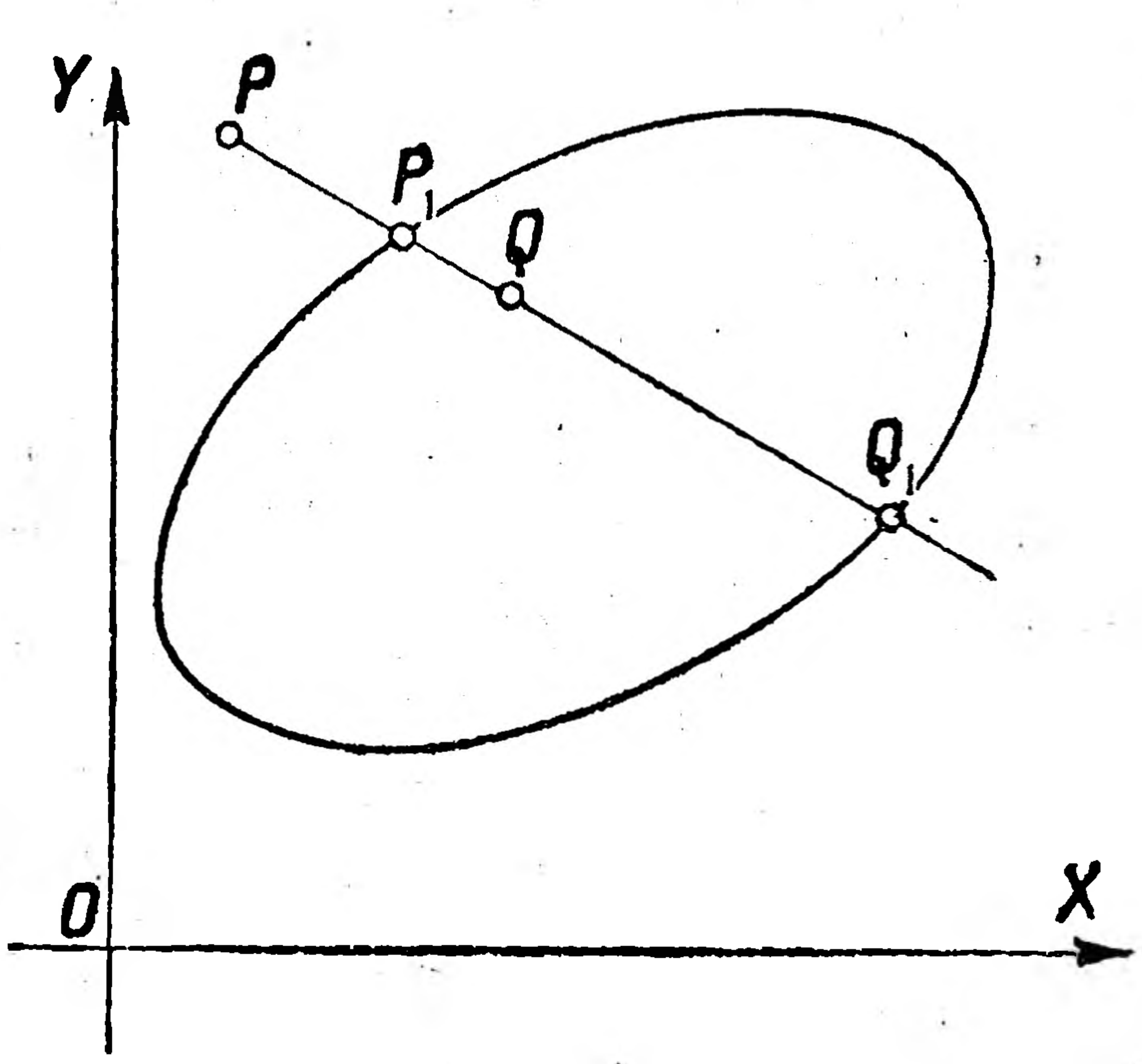
x	0	↗	a	↗	$2a$	↗	$+\infty-$	↗	0
y	0	↘	$-\infty+$	↘	$2a$	↘	a	↘	0

Как видим, при неподвижности точек A и B, составляющих одну пару гармонически сопряженных точек, две точки A_1 и B_1 другой пары движутся все время в противоположных направлениях и дважды встречаются: один раз в точке A, другой раз в точке B.

Возьмем кривую II порядка, заданную уравнением:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{3}$$

и какую-нибудь точку P, расположенную где угодно на плоскости. Проведя через точку P секущую, найдем на ней *четвертую гармоническую* к точке P и точкам пересечения P_1 и Q_1, т. е. такую точку Q, которая вместе с точкой P составляла бы пару точек, гармонически сопряженных с точками P_1 и Q_1 (черт. 112).



Черт. 112.

Если проделать подобное построение с каждым лучом пучка, имеющего центр в точке P, то мы получим бесчисленное множество четвертых гармонических, образующих некоторое геометрическое место, которое и называется *полярой* точки P по отношению к кривой (3), а точка P носит название *полюса* этой поляры (опять-таки по отношению к той же кривой).

Выясним, какой вид имеет поляра точки P $(x_0;\ y_0)$ по отношению к кривой II порядка (3).

Для упрощения выкладок перенесем начало координат, не меняя направления осей, в точку P. Имеем формулы преобразования $x=x'+x_0$, $y=y'+y_0$, уравнение пучка прямых с центром в точке P (в новых координатах) $y'=kx'$ и уравнение кривой (тоже в новых координатах):

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0, \tag{4}$$

где

$$A'=A,\ B'=B,\ C'=C,\ D'=Ax_0+By_0+D,\ E'=Bx_0+Cy_0+E,\ F'=D'x_0+ \\ +E'y_0+Dx_0+Ey_0+F.$$

Для определения абсцисс x_1' и x_2' точек пересечения P_1 и Q_1 имеем уравнение

$$Lx'^2 + 2Mx' + N = 0, \tag{5}$$

где $L = A' + 2B'k + C'k^2$, $M = D' + E'k$, $N = F'$ (надо взять формулы (2) § 59 и положить в них $n = 0$). Выражая условие гармонического сопряжения точек P, Q, P_1, Q_1 и обозначая координаты точки Q через x' и y', получаем уравнение (с помощью проектирования этих точек на ось X') $x_1' : (x' - x_1') = x_2' : (x_2' - x')$, откуда

$$x'(x_1' + x_2') = 2x_1'x_2'. \tag{6}$$

Но из уравнения (5) имеем $x_1' + x_2' = -2M:L$, $x_1'x_2' = N:L$. Уравнение (6) теперь переписывается в виде $Mx' + N = 0$ или $(D' + E'k)x' + F' = 0$, или $D'x' + E'kx' + F' = 0$. Но $y' = kx'$, а потому имеем $D'x' + E'y' + F' = 0$ (в новых координатах) или $(Ax_0 + By_0 + D)(x - x_0) + (Bx_0 + Cy_0 + E)(y - y_0) + (D'x_0 + E'y_0 + Dx_0 + Ey_0 + F) = 0$ (в старых). Производя подстановки и упрощения, окончательно имеем:

$$(Ax_0 + By_0 + D)x + (Bx_0 + Cy_0 + E)y + (Dx_0 + Ey_0 + F) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) не заключает углового коэфициента k прямой PQ, а так как ему удовлетворяют координаты точки Q, лежащей на этой прямой, то оно и выражает искомое геометрическое место. Итак, *поляра точки $P(x_0; y_0)$ относительно кривой* (3) *есть прямая, выражаемая уравнением* (7) (теорема 1).

Уравнение (7) мы уже имели в § 59 (формула 10), когда решали задачу о проведении касательной через точку с координатами x_0, y_0, лежащую на данной кривой II порядка. Тождество уравнений (10) § 59 и уравнения (7) настоящего параграфа позволяет сделать такое заключение: *если данная точка P находится на кривой (3), то ее поляра относительно этой кривой совпадает с касательной к этой кривой, проведенной через точку P* (теорема 2).

Возьмем точку P $(x_0; y_0)$, расположенную где угодно на плоскости, и ее поляру (7) и какую-нибудь точку $P'(x'; y')$ на поляре. Подставляя в уравнение (7) вместо текущих координат x, y координаты точки P', а именно x' и y', и производя перегруппировку членов, получаем уравнение

$$(Ax' + By' + D)x_0 + (Bx' + Cy' + E)y_0 + (Dx' + Ey' + F) = 0, \tag{8}$$

которое показывает, что точка $P(x_0; y_0)$ лежит на поляре точки $P'(x'; y')$, так как уравнение

$$(Ax' + By' + D)x + (Bx' + Cy' + E)y + (Dx' + Ey' + F) = 0$$

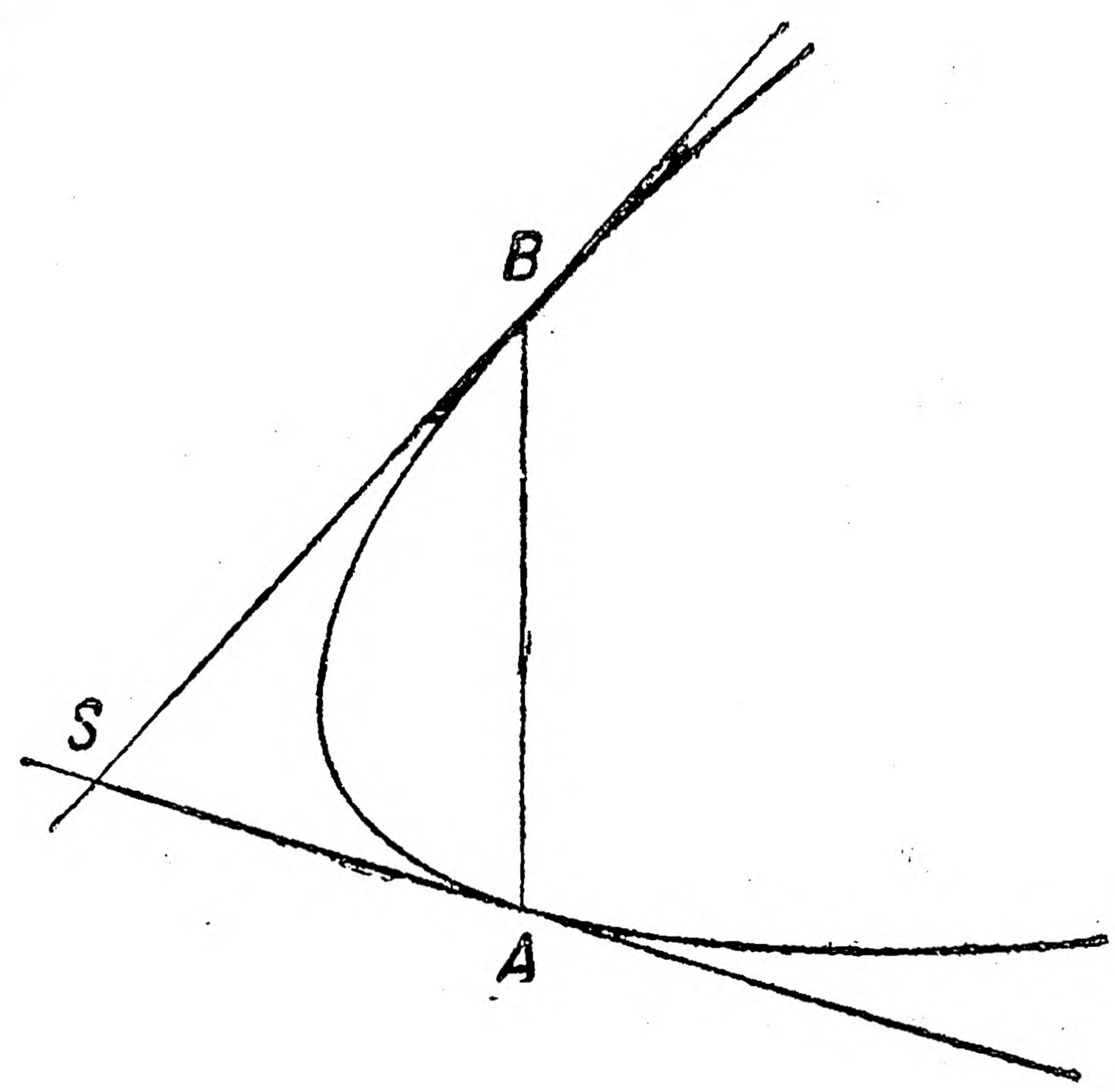
выражает не что иное, как поляру точки $P'(x'; y')$ относительно той же кривой II порядка. Отсюда теорема 3: *если точка $P'(x'; y')$ лежит на поляре точки $P(x_0; y_0)$, то точка $P(x_0; y_0)$ лежит на поляре точки $P'(x'; y')$.*

Умея находить поляру данной точки $P(x_0; y_0)$ относительно данной кривой II порядка, мы легко решим и обратную задачу, а именно *задачу о разыскании полюса данной прямой.* Пусть данная прямая выражается уравнением $ax + by + c = 0$. Допустим, что ее полюс (относительно кривой II порядка, выраженной уравнением 3) есть точка $P(x_0; y_0)$. Тогда уравнение поляры точки $P(x_0; y_0)$, а именно уравнение (7), только постоянным множителем λ отличается от уравнения $ax + by + c = 0$, а потому

$$Ax_0 + By_0 + C = a\lambda, \quad Bx_0 + Cy_0 + D = b\lambda, \quad Dx_0 + Ex_0 + F = c\lambda.$$

Остается решить эту систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_0, y_0, λ, и искомый полюс $P(x_0; y_0)$ будет найден. Не входя в рассмотрение различных случаев, какие могут представиться при решении этой системы, можем утверждать, что, вообще говоря, *всякая прямая имеет относительно данного конического сечения один определенный полюс.*

Возьмем две прямых SU и SV, пересекающихся в точке S, и найдем их полюсы U_1 и V_1. Тогда прямая U_1V_1 будет иметь полюсом точку S, так как по теореме 3, раз точка S лежит на поляре SU точки U_1, то поляра точки S проходит через точку U_1, а раз та же точка S лежит на поляре SV точки V_1, то поляра точки S проходит через точку V_1. Проходя через точки U_1 и V_1, поляра точки S должна совпадать с прямой U_1V_1. Проведя через точку S какую-нибудь третью прямую SW, получим ее полюс W_1 на прямой U_1V_1: согласно теореме 3 поляра точки S должна проходить через каждую из точек U_1, V_1, W_1. Так как это заключение можно сделать относительно любой прямой, проходящей через точку S, то получаем теорему 4: *если несколько прямых проходят через одну точку, то полюсы этих прямых располагаются на одной прямой*, и обратно: *если несколько точек лежит на одной прямой, то их поляры проходят через одну общую точку*. Иначе: *полюс прямой, вращающейся около неподвижной точки S, движется по поляре U_1V_1 этой точки S*, и обратно: *поляра точки, движущейся по прямой U_1V_1, вращается около точки S — полюса этой прямой U_1V_1*.



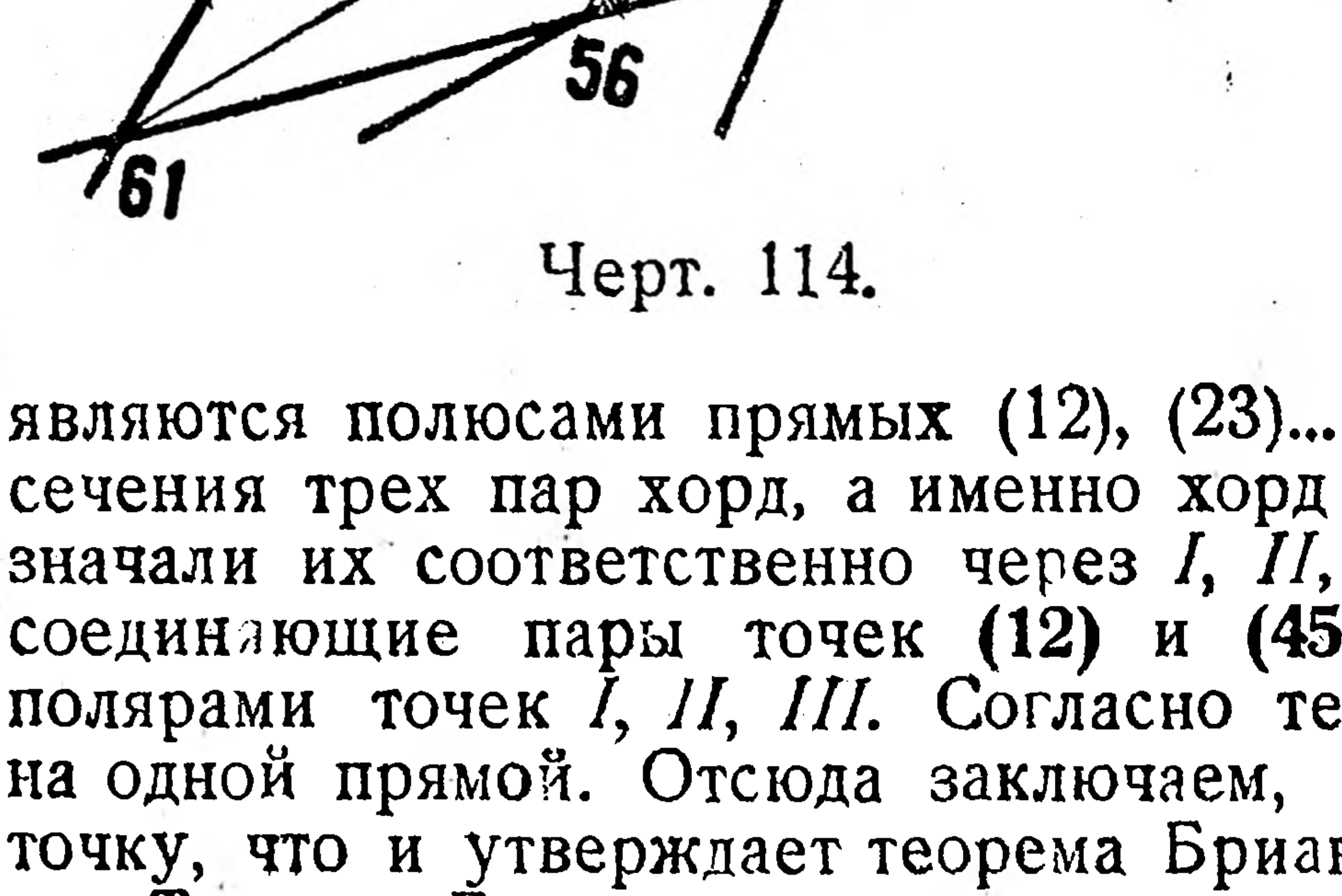
Черт. 113.

Последняя теорема является основой важных приложений теории поляр, так как устанавливает соответствие между каждой точкой S (на плоскости), рассматриваемой как центр пучка прямых, и прямой U_1V_1, на которой располагаются полюсы всех прямых пучка.

Не имея возможности входить в дальнейшие подробности о полярах и полюсах, приведем лишь доказательства двух следующих теорем.

Всякая хорда AB кривой II порядка есть поляра точки S пересечения касательных SA и SB, проведенных через точки A и B на кривой (теорема 5). Действительно, согласно теореме 2 поляры точек A и B суть касательные AS и BS (черт. 113), полюсы всех прямых пучка с центром в S расположены на прямой AB, прямая AB есть поляра точки S.

Если шестиугольник описан около кривой II порядка, то три прямые, попарно соединяющие противоположные вершины шестиугольника, пересекаются в одной точке (теорема Брианшона). Доказательство этой теоремы получается непосредственно, если взять те точки и прямые, о которых идет речь в теореме Паскаля (§ 58), и найти полюсы первых и поляры вторых. В теореме Паскаля речь шла о шести точках, обозначенных нумерами от 1 до 6 и расположенных на кривой II порядка. Возьмем поляры этих шести точек, т. е. касательные к кривой в этих точках, и обозначим их теми же нумерами, но напечатанными жирным шрифтом (черт. 114).



Черт. 114.

В теореме Паскаля мы брали хорды, соединяющие точки *1* и *2*, *2* и *3*..., и обозначали их символами (12), (23)... Здесь мы возьмем точки пересечения каждых двух касательных **1** и **2**, **2** и **3**... и обозначим их символами **(12)**, **(23)**... Так как прямые **1**, **2**, **3**... являются полярами точек *1*, *2*..., то точки **(12)**, **(23)**... являются полюсами прямых (12), (23)... В теореме Паскаля мы брали точки пересечения трех пар хорд, а именно хорд (12) и (45), (23) и (56), (34) и (61), и обозначали их соответственно через *I*, *II*, *III*. Здесь мы возьмем прямые **I**, **II**, **III**, соединяющие пары точек **(12)** и **(45)**, **(23)** и **(56)**, **(34)** и **(61)** и являющиеся полярами точек *I*, *II*, *III*. Согласно теореме Паскаля три точки *I*, *II*, *III* лежат на одной прямой. Отсюда заключаем, что прямые **I**, **II**, **III** проходят через одну точку, что и утверждает теорема Брианшона.

Теорема Брианшона позволяет по данным пяти касательным кривой II порядка получить еще сколько угодно касательных к этой кривой.

Упражнения.

1. Показать, что полюс директрисы кривой II порядка есть фокус этой кривой.

2. Показать, что поляра любой точки плоскости относительно круга перпендикулярна к прямой, соединяющей эту точку с центром круга, и что произведение расстояний от центра круга до полюса и до поляры равно квадрату радиуса круга.

3. Доказать теорему, обратную доказанной выше теореме 2, а именно теорему: если поляра некоторой точки проходит через эту точку, то последняя лежит на той кривой II порядка, относительно которой берется поляра.

4. Найти точки касания двух касательных, проведенных к кривой II порядка, заданной уравнением $y^2 = 2px - qx^2$, из точки $(x_0;\ y_0)$.

Указание. Воспользоваться теоремой 5.

5. Найти полюс оси X относительно кривой II порядка, заданной общим уравнением.

6. Найти геометрическое место полюсов касательных к кругу $x^2 + y^2 = r^2$ относительно эллипса $x^2 : a^2 + y^2 : b^2 = 1$.

7. Зная, что прямые $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 8$, $y = 2x + 12$, $y = 0{,}5x - 6$ являются касательными к некоторой кривой II порядка, построить к этой кривой еще касательную, проходящую через точку (20; 4).

Указание. Воспользоваться теоремой Брианшона, приняв во внимание, что данная точка лежит на последней из данных прямых.

§ 61. Пересечение двух кривых II порядка. Имея две кривых II порядка, отнесенных к одной и той же системе координатных осей и выраженных уравнениями

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

и

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0, \tag{1}$$

мы должны для определения координат их точек пересечения решить совместно эту систему двух квадратных уравнений с двумя неизвестными. Сделать это проще всего следующим образом. Переписав систему (1) в виде

$$\begin{gathered} Cy^2 + 2(Bx + E)y + (Ax^2 + 2Dx + F) = 0; \\ C_1y^2 + 2(B_1x + E_1)y + (A_1x^2 + 2D_1x + F_1) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

найдем из нее y и y^2. Получим $y = M_2 : M_1$, $y^2 = M_3 : M_1$, где M_1, M_2 и M_3 — многочлены соответственно первой, второй и третьей степени от x. Возводя дробь $M_2 : M_1$ в квадрат и приравнивая ее дроби $M_3 : M_1$, получим после упрощений уравнение

$$M_2^2 - M_1M_3 = 0 \tag{3}$$

четвертой степени относительно x. Решив это уравнение, мы получим, как известно из курса высшей алгебры, вообще четыре корня x_1, x_2, x_3, x_4, которые и дадут абсциссы четырех точек пересечения кривых (1). Ординаты этих точек получатся после подстановки каждого значения x в уравнение $y = M_2 : M_1$.

При решении уравнения (3) могут представиться различные частные случаи. Из четырех корней этого уравнения два, три или даже все четыре могут оказаться равными, что соответствует различным видам касания кривых (1). Два или четыре корня могут быть мнимыми (число мнимых корней алгебраического уравнения с вещественными коэфициентами, как доказывает высшая алгебра, всегда четное), и число точек пересечения кривых тогда сводится к двум или даже к нулю. Уравнение (3) может сводиться к уравнению низшей степени, что соответствует наличности бесконечно-удаленных точек пересечения. Не имея возможности за недостатком места систематически исследовать все случаи, какие могут представиться при решении уравнений (1), ограничимся рассмотрением лишь нескольких примеров.

Задача 1. Найти точки пересечения эллипса $x^2 : a^2 + y^2 : b^2 = 1$ и гиперболы $xy = k^2$.

Вместо общего указанного выше приема здесь достаточно просто найти y из уравнения гиперболы и подставить полученное выражение $y = k^2 : x$ в уравнение эллипса. Получаем после упрощений уравнение 4-й степени, не содержащее

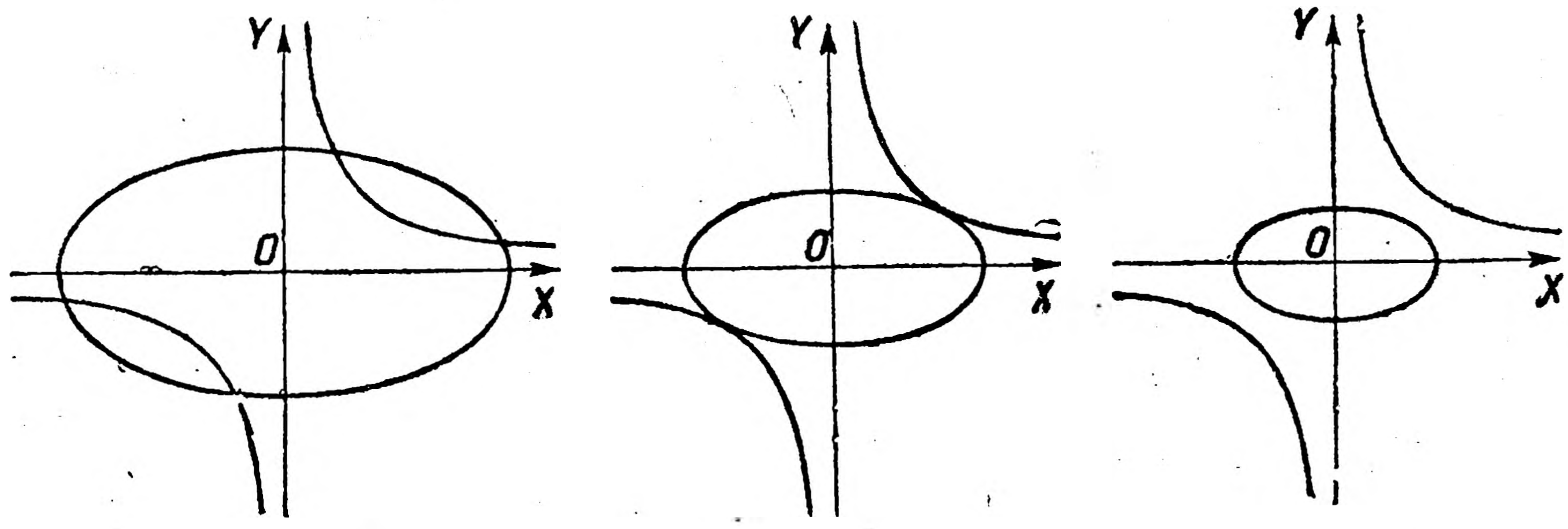
x и x^3, а потому легко сводимое к квадратному (подстановкой $x^2=z$). Для координат точек пересечения получаем выражения

$$x_1=\frac{\sqrt{2ab\,(ab+\sqrt{R})}}{2b},\quad y_1=\frac{k^2}{x_1},\quad x_2=-\frac{\sqrt{2ab\,(ab+\sqrt{R})}}{2b},\quad y_2=\frac{k^2}{x_2},$$

$$x_3=\frac{\sqrt{2ab\,(ab-\sqrt{R})}}{2b},\quad y_3=\frac{k^2}{x_3},\quad x_4=-\frac{\sqrt{2ab\,(ab-\sqrt{R})}}{2b},\quad y_4=\frac{k^2}{x_4},$$

где $R=a^2b^2-4k^4$.

При $R>0$ имеем 4 различных точки пересечения, так как $ab>\sqrt{R}$; при $R=0$ две пары совпадающих точек; при $R<0$ точек пересечения нет вовсе (черт. 115).



Чер. 115.

Задача 2. Найти точки пересечения гиперболы $xy=9$ и параболы $4y^2=27\,(x+5)$.

Исключая y, как в предыдущей задаче, приходим к уравнению $12=(x+5)x^2$ или $x^3+5x^2-12=0$. Пробуя различные целые числа, устанавливаем, что один из корней этого кубического уравнения есть $x_1=-2$. Разделив левую часть уравнения на двучлен $x-(-2)=x+2$, получаем в частном x^2+3x-6 и видим, что найденное кубическое уравнение можно представить в виде $(x+2)(x^2+3x-6)=0$, а потому для получения двух других его корней решаем квадратное уравнение $x^2+3x-6=0$ и находим $x_2=\frac{1}{2}(\sqrt{33}-3)$, $x_3=-\frac{1}{2}(\sqrt{33}+3)$.

Итак, две данных кривых пересекаются в точках

$$x_1=-2,$$

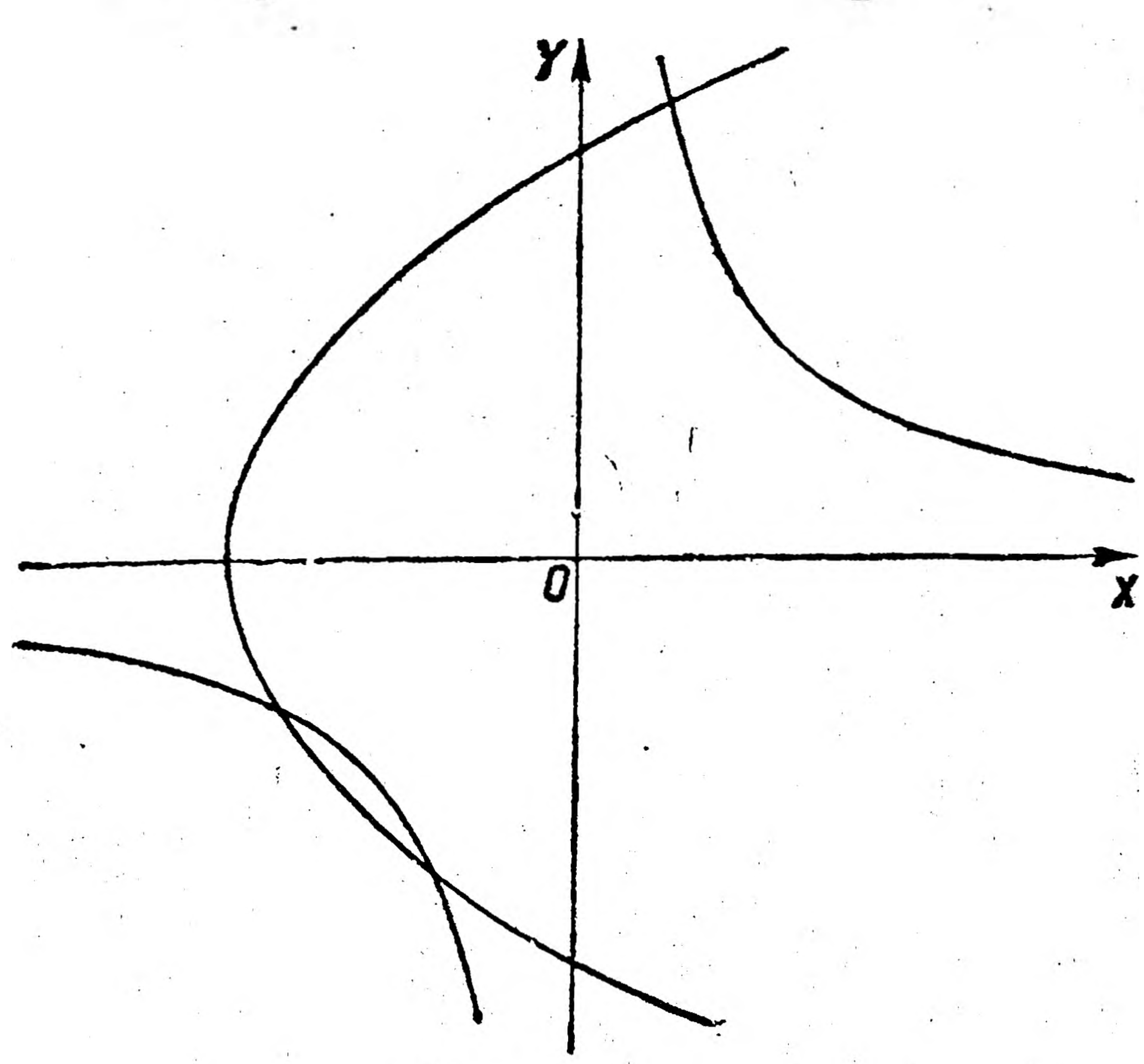
$$y_1=\frac{9}{x_1}=-4{,}5,$$

$$x_2=\frac{1}{2}(\sqrt{33}-3)=1{,}372,$$

$$y_2=\frac{9}{x_2}=6{,}560,$$

$$x_3=-\frac{1}{2}(\sqrt{33}+3)=-4{,}372,$$

$$y_3=\frac{9}{x_3}=-2{,}059.$$



Черт. 116.

Четвертая точка пересечения лежит в бесконечности в направлении оси X, так как это направление является асимптотическим для обеих кривых (черт. 116).

Если бы нам не удалось подобрать число, удовлетворяющее полученному кубическому уравнению, его пришлось бы решать по правилам высшей алгебры или же аккуратно вычертить обе данных кривых на миллиметровой бумаге (применяя хотя бы способы построения равнобочной гиперболы и параболы, рассмотренные в §§ 45 и 15) и определить по чертежу координаты точек пересечения. Найденные приближенные значения координат можно уточнить, применяя следующий способ, указанный еще Ньютоном.

Положим, мы определили по чертежу приближенные значения координат второй точки пересечения $x \approx 1,4$ и $y \approx 6,6$. Обозначая через ξ и η те поправки, какие нужно придать к этим приближенным значениям координат, чтобы получить точные их значения, заменим x и y в данных уравнениях через $1,4 + \xi$ и $6,6 + \eta$. В преобразованных уравнениях

$$(1,4 + \xi)(6,6 + \eta) = 9, \quad 4(6,6 + \eta)^2 = 27(1,4 + \xi + 5)$$

отбросим члены, содержащие произведения малых поправок ξ и η и их степени выше первой. После упрощений получим

$$6,6\xi + 1,4\eta = -0,24; \quad 27\xi - 52,8\eta = 1,44.$$

Решая эту систему двух линейных уравнений, найдем

$$\xi = -0,0276, \quad \eta = -0,0383,$$

откуда получаем новые, более точные значения искомых координат $x = 1,4 - 0,0276 = 1,3724$, $y = 6,6 - 0,0383 = 6,5617$. Взяв эти улучшенные значения за исходные и повторив всю операцию, мы получим новую систему линейных уравнений для поправок:

$$6,5617\xi + 1,3724\eta = -0,00528,$$
$$27\xi - 52,4936\eta = 0,1688,$$

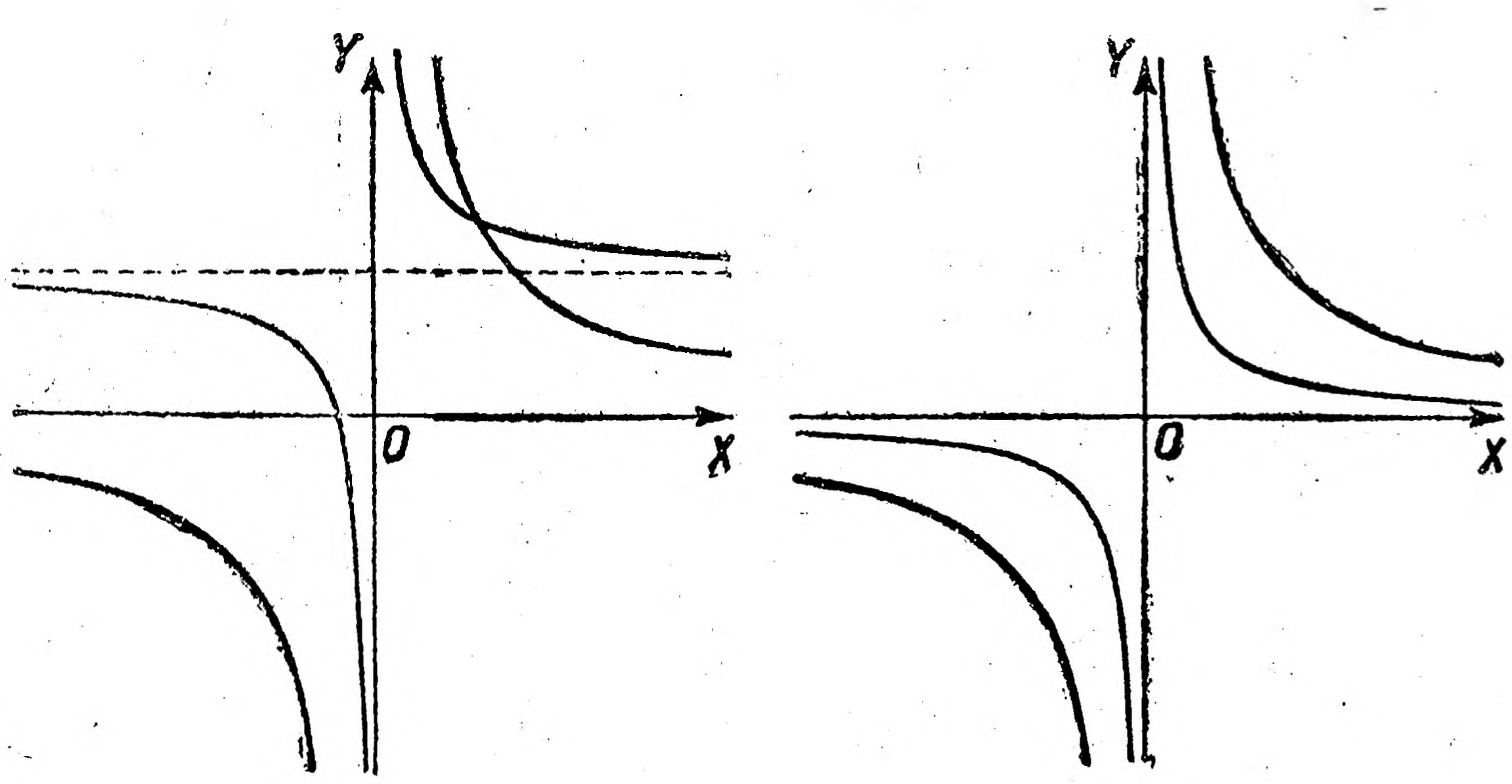
откуда вычисляем новые поправки: $\xi = -0,00012$ и $\eta = -0,00328$ и новые, еще более точные значения координат:

$$x = 1,3724 - 0,00012 = 1,37228 \quad \text{и} \quad y = 6,5617 - 0,00328 = 6,55842.$$

Новое повторение всей операции, если ограничиваться той же точностью, приводит к системе:

$$6,5584\xi + 1,3723\eta = -0,00001,$$
$$27\xi - 52,4674\eta = -0,00007,$$

корни которой не достигают и половины единицы пятого десятичного знака, а потому вычисление координат с точностью до пяти десятичных знаков закончено. Найденные выше точные значения $x = \frac{1}{2}(\sqrt{33} - 3)$ и $y = 9 : x$ при вычислении до пяти десятичных знаков дают $x = 1,37228$ и $y = 6,55843$.



Черт. 117.

Применяя этот способ, состоящий из графического решения с последующим *уточнением* найденных приближенных значений, мы всегда можем решить задачу о разыскании координат точек пересечения двух кривых II порядка с произвольно высокой точностью (при условии однако, что в данных уравнениях нет буквенных коэфициентов).

Задача 3. Найти точки пересечения двух гипербол $xy = k^2$, $x(y - y_0) = k_1^2$.

Исключая y, получим для определения x уравнение 1-й степени $xy_0 = k^2 - k_1^2$ и найдем координаты единственной точки пересечения:

$$x = (k^2 - k_1^2):y_0, \quad y = k^2 y_0:(k^2 - k_1^2).$$

При $y_0 \neq 0$ имеем расположение кривых, показанное на чертеже 117 слева. Три остальные точки пересечения находятся в бесконечности, так как гиперболы, имея общую асимптоту $x = 0$ и общее асимптотическое направление $y = 0$, имеют $2 + 1 = 3$ общие точки в бесконечности. Если же $y_0 = 0$, то и эта единственная точка пересечения удаляется в бесконечность (черт. 117, справа), так как гиперболы имеют две общих асимптоты, т. е. $2 + 2 = 4$ общих точек в бесконечности.

Итак, как окончательный вывод имеем, что *две кривые II порядка пересекаются не более как в четырех конечных точках.*

Упражнения.

1. Найти точки пересечения круга $x^2 + y^2 = r^2$ и эллипса $x^2:a^2 + y^2:b^2 = 1$. Исследовать все случаи, какие могут при этом представиться.

2. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 2p(x - x_0)$ и круга $x^2 + y^2 = r^2$ тоже с исследованием.

3. Найти с точностью до сотых долей координаты точек пересечения парабол $x^2 + y = 31$, $x + y^2 = 41$.

4. Найти точки пересечения двух кругов

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 1 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = 25.$$

Указание. Заменить одно из данных уравнений 2-й степени уравнением линейным, получаемым в результате почленного вычитания второго из данных уравнений от первого и выражающим так называемую *радикальную ось* двух данных кругов.

5. Найти точки пересечения кривых

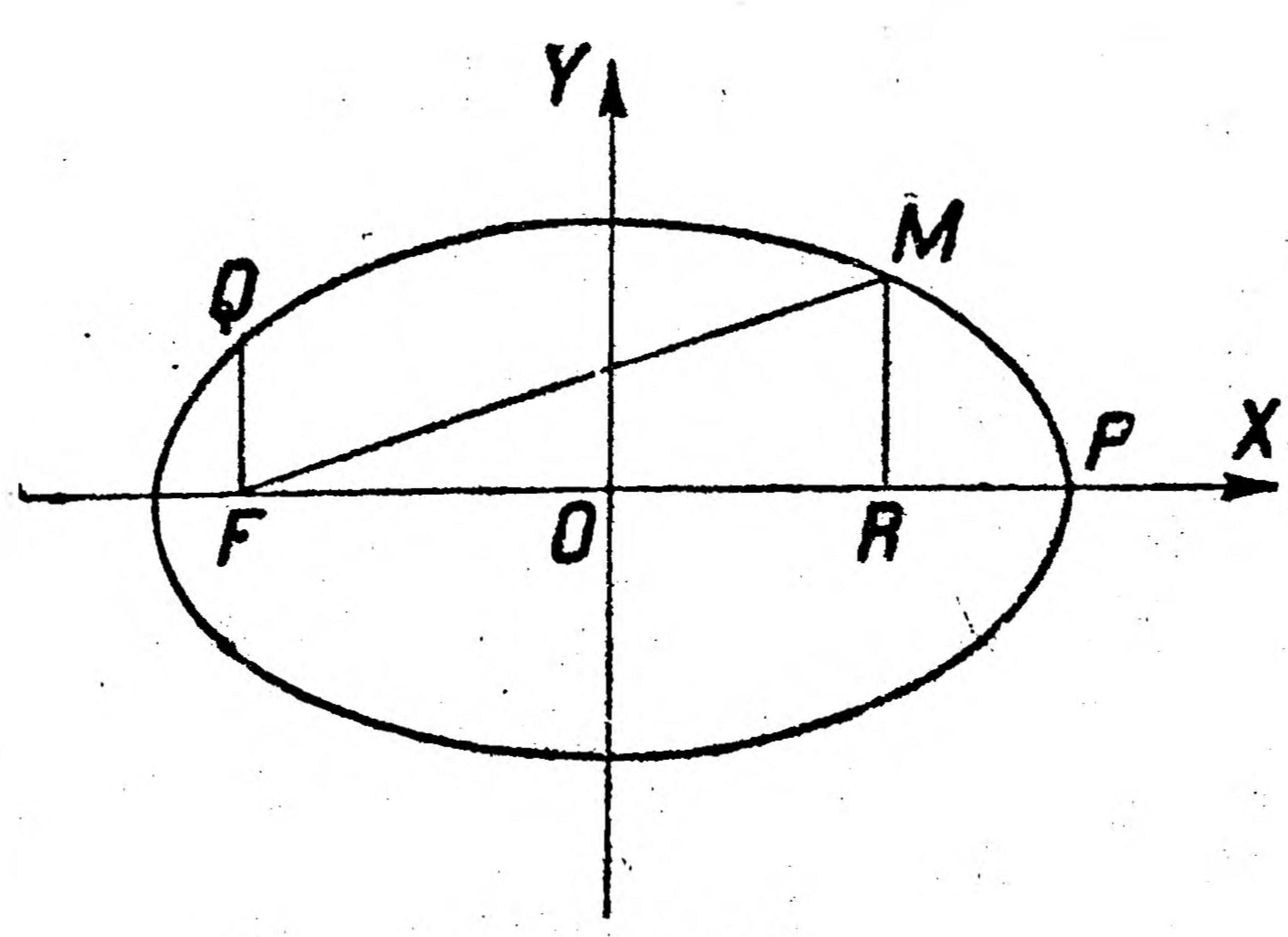
$$2y^2 - 3x - 4y = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 2y^2 + x + 4y = 0.$$

6. Составить уравнение пучка кривых II порядка, проходящих через точки пересечения двух кривых $x^2 + xy + 4y^2 - x - 8y = 0$, $x^2 - 2xy - 2y^2 - x + 4y = 0$ и подобрать неопределенный множитель λ (см § 58) с таким расчетом, чтобы кривая распалась на две прямых. Находя пересечение каждой из этих прямых с одной из данных кривых, найти координаты всех четырех точек пересечения данных кривых.

7. Используя прием, указанный в предыдущей задаче, показать, что решение задачи о разыскании координат точек пересечения двух кривых II порядка всегда может быть сведено к разысканию одного из корней кубического уравнения и к решению двух систем уравнений, из которых каждая состоит из одного линейного уравнения и одного уравнения 2-й степени.

§ 62. Уравнение кривой II порядка в полярных координатах. Если полюс полярной системы координат поместить в одном из фокусов эллипса и направить полярную ось к другому фокусу (чертеж 118), то, обозначая $FM = \rho$, $\angle RFM = \varphi$, легко получим следующее уравнение, выражающее эллипс с полуосями a и b в полярных координатах

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \qquad (1)$$



Черт. 118.

Здесь $p = b^2:a$ („фокальный параметр"), а $e = c:a$ („эксцентриситет" эллипса). Для вывода уравнения (1) проще всего провести вспомогательные оси координат X и Y, относительно которых эллипс выражается простейшим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

и воспользоваться формулой $\rho=a+ex$ (см. § 37, формула 1). Здесь $OR=x$, $OF=c$, $FR=c+x=FM\cos RFM=\rho\cos\varphi$, $x=\rho\cos\varphi-c$. Подставляя это значение x в формулу $\rho=a+ex$, придем к уравнению (1), так как

$$a-ec=a-\frac{c^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{b^2}{a}=p.$$

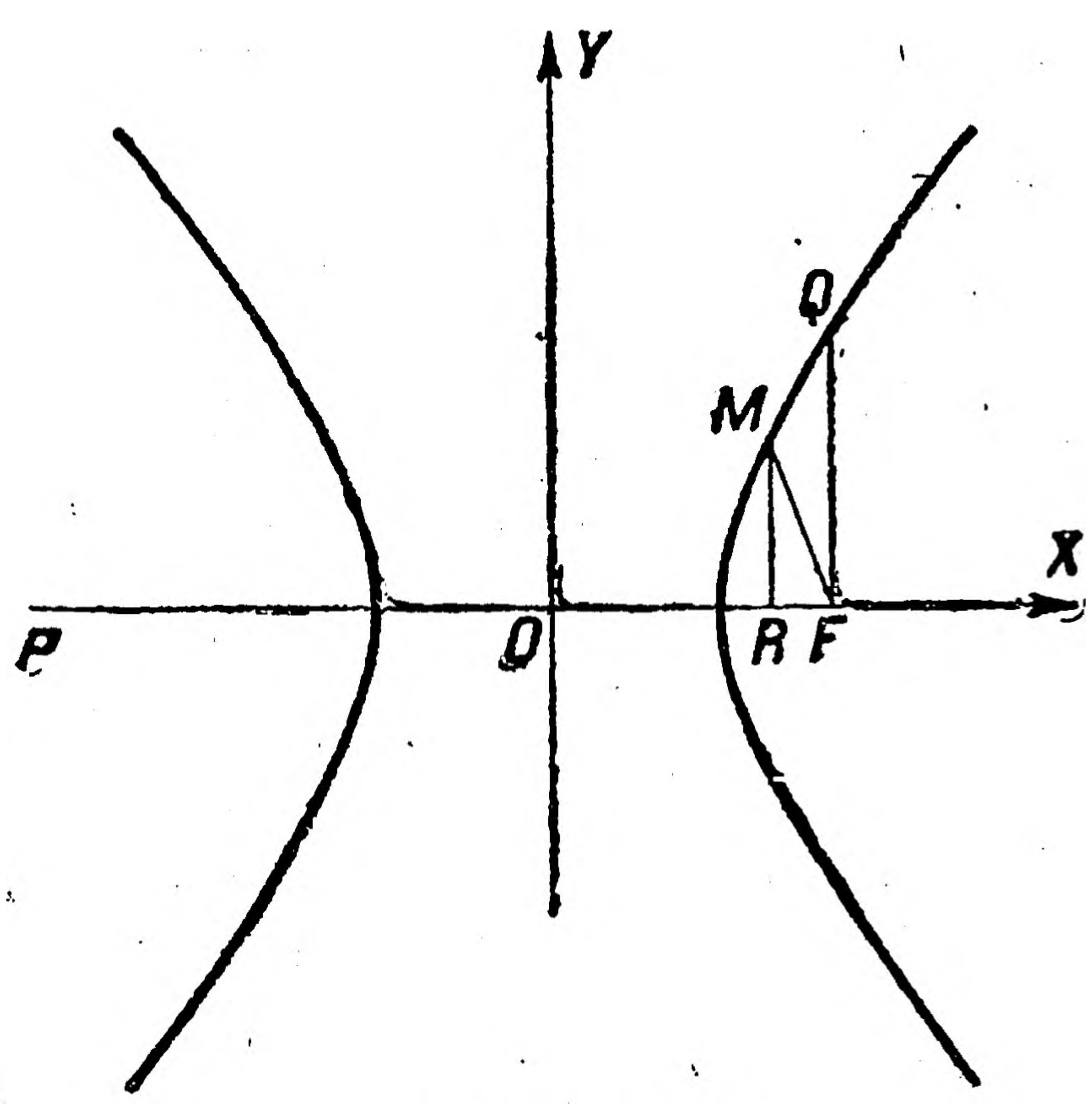
Изменяя в уравнении (1) φ от 0 до 2π, мы обойдем весь эллипс. При $\varphi=0$ получим наибольшее значение ρ, а именно:

$$\rho=\frac{p}{1-e}=\frac{b^2:a}{1-c:a}=\frac{b^2}{a-c}=\frac{a^2-c^2}{a-c}=a+c,$$

при $\varphi=\pi$ наименьшее значение ρ, а именно:

$$\rho=\frac{p}{1+e}=a-c.$$

Так как у эллипса $0<e<1$, а $\cos\varphi$ всегда заключается между -1 и $+1$, то член $1-e\cos\varphi$ изменяется в пределах от $1-e>0$ до $1+e$, никогда не обращаясь в 0, и ρ принимает только конечные значения.



Черт. 119.

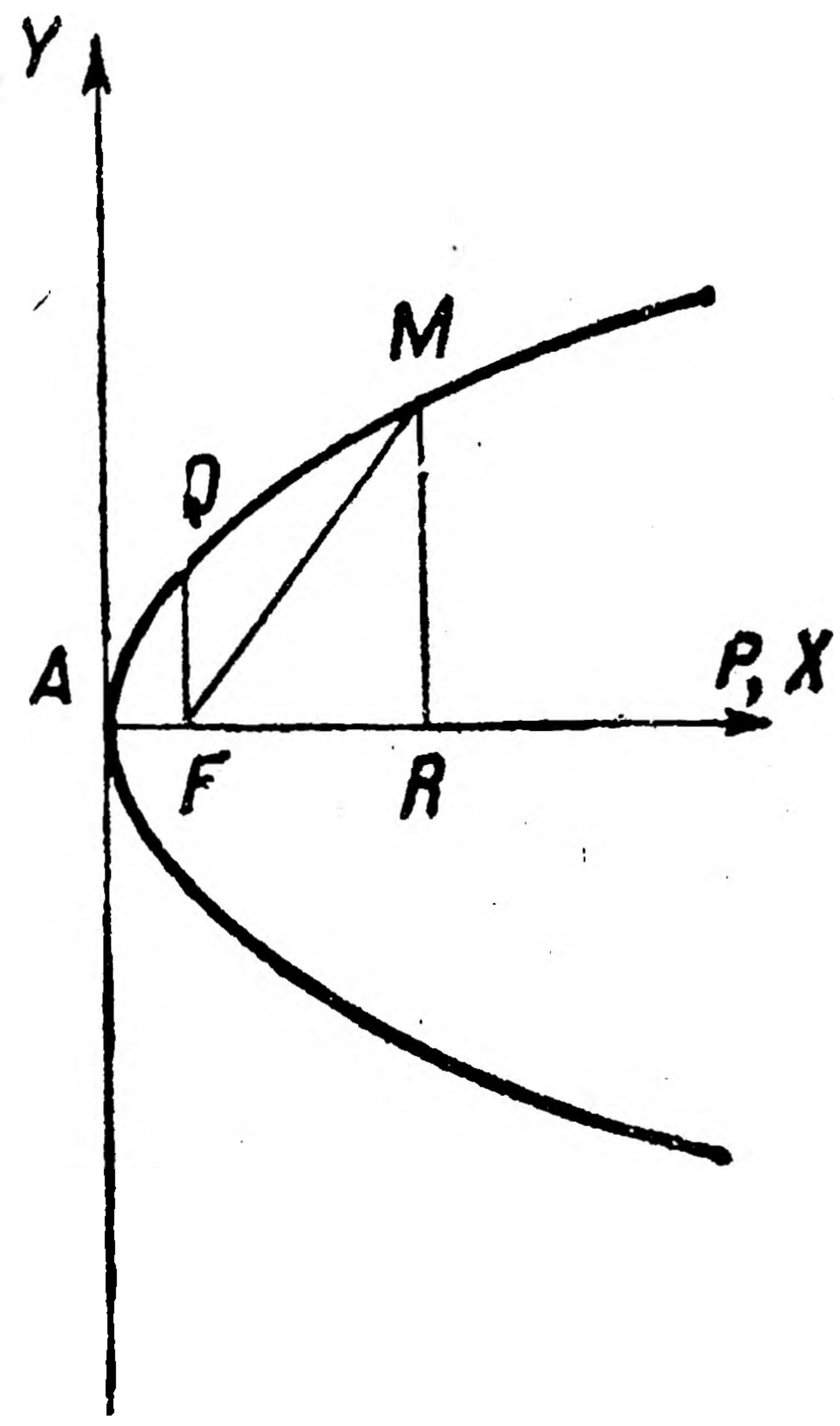
Взяв гиперболу с полуосями a и b и поместив полюс в фокус F, направим полярную ось по фокальной оси направо и воспользуемся формулой $\rho=ex-a$ (см. § 42, формула 1). Взяв из треугольника FMR (черт. 119) $c-x=\rho\cos(\pi-\varphi)$ и исключив x, придем опять к уравнению (1), так как у гиперболы

$$ec-a=\frac{c^2}{a}-a=\frac{c^2-a^2}{a}=\frac{b^2}{a}=p.$$

Однако у гиперболы $c>a$, $e>1$, и характер изменения ρ, определяемого из уравнения (1), будет в настоящем случае совершенно иной, чем в случае эллипса. Действительно, при $\varphi=\pi$ $\rho=\frac{p}{1+e}=$ $=c-a>0$. При уменьшении φ от π до положительного значения φ_0, удовлетворяющего соотношению $e\cos\varphi_0=1$, ρ возрастает от $c-a$ до $+\infty$, что соответствует удалению точки M в бесконечность. Как легко видеть, $\operatorname{tg}\varphi_0=+\sqrt{\sec^2\varphi_0-1}=\sqrt{e^2-1}=\frac{b}{a}$, как и должно быть для асимптотического направления. При дальнейшем уменьшении φ от φ_0 до 0 и от 0 до $-\varphi$ ρ изменяется от $-\infty$ до 0 и от 0 опять до $-\infty$, что соответствует движению точки M по другой, левой части гиперболы. Чтобы получить точки нижней ветви первой (правой) части гиперболы, надо изменять φ от π до $2\pi-\varphi_0$.

Предоставляем читателю доказать, что то же уравнение (1) дает и все точки параболы, если положить в нем $e=1$. При этом полюс надо поместить в фокусе параболы, ось x направить по фокальной оси в сторону, противоположную вершине (черт. 120). При $\varphi=0$ получаем $\rho=+\infty$. При изменении φ от 0 до π и дальше до 2π получим сперва изменение ρ от $+\infty$ до $\frac{1}{2}p$, что соответствует движению точки M из бесконечноудаленной точки до точки A, а затем изменение ρ от $\frac{1}{2}p$ до $+\infty$, что соответствует движению точки M по нижней ветви параболы от точки A до бесконечно-удаленной точки кривой.

Уравнение (1), выражая в зависимости от значения e любую кривую II порядка, имеет большие применения, особенно в астрономии.



Черт. 120.

Упражнения.

1. Вычертить по точкам, полярные координаты которых вычисляются по уравнению (1), параболу с параметром $p = 10$ *мм*, эллипс с полуосями $a = 50$ *мм*, $b = 30$ *мм*, гиперболу с полуосями $a = 30$ *мм*, $b = 40$ *мм*. Значение φ достаточно брать от 0° до 360° через каждые 30°.

2. Дано уравнение кривой II порядка в полярных координатах

$$\rho = \frac{2p}{q + \cos\varphi}.$$

Вывести уравнение той же кривой в декартовых координатах.

3. Показать, что уравнение

$$\rho^2 = b^2 : (1 - e^2\cos^2\varphi) \quad \text{и} \quad \rho^2 = b^2 : (e^2\cos^2\varphi - 1)$$

выражают первое — эллипс, второе — гиперболу. Выяснить геометрический смысл величин b и e и установить положение полюса и полярной оси относительно кривой.

4. Найти уравнение параболы в полярных координатах, поместив полюс в вершине и направив полярную ось по оси симметрии.

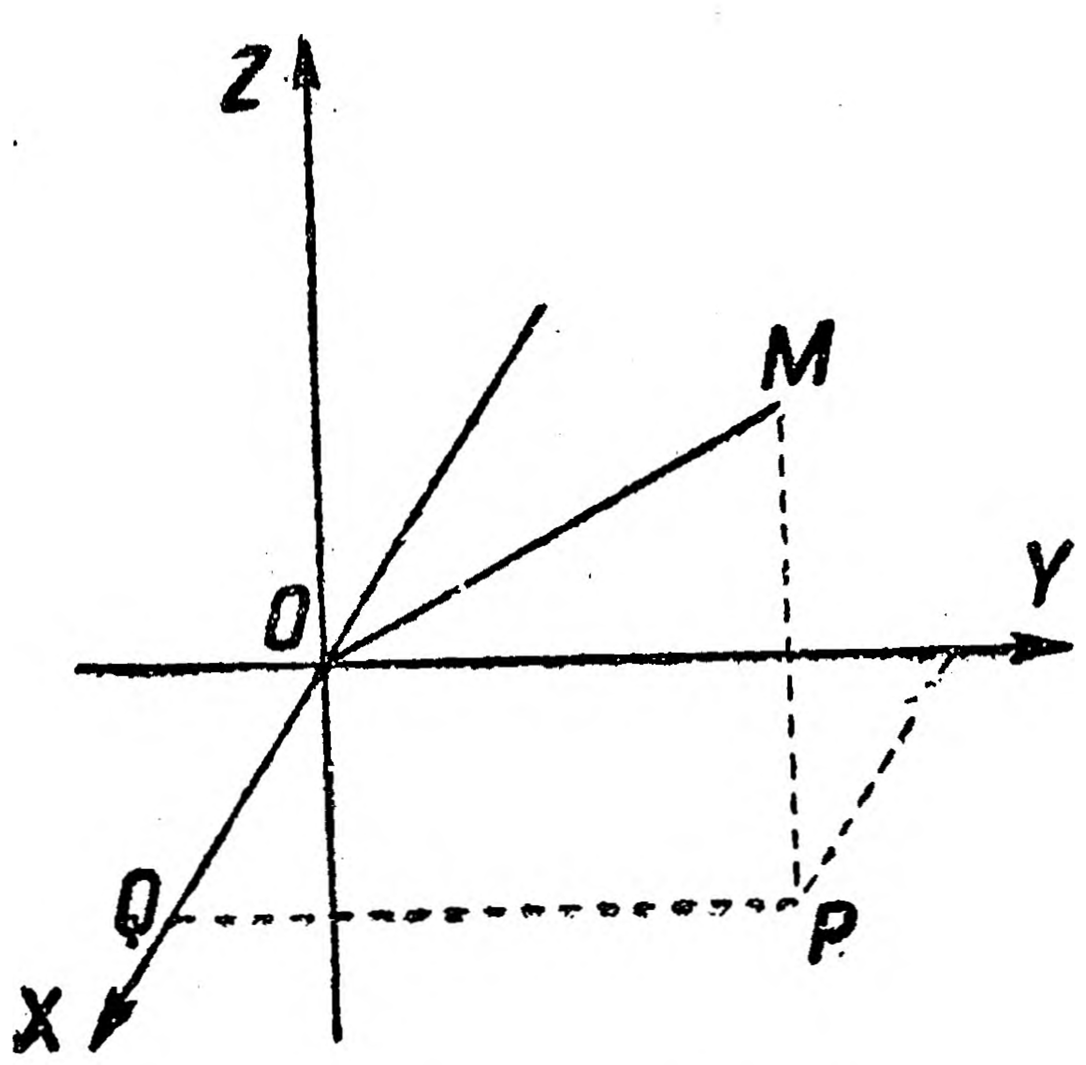
ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Глава VII.

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 63. Прямоугольные координаты точки в пространстве. Чтобы указать положение точки в пространстве, нужны, как мы уже видели в § 2, три координатных оси. Чаще всего употребляются три взаимно-перпендикулярные оси OX, OY, OZ, проходящие через одну общую точку O (черт. 121) и образующие систему *прямоугольных* (или *ортогональных*) координатных осей. Ось X (ось абсцисс) мы будем представлять себе расположенной перпендикулярно к плоскости чертежа и идущей к нам, ось Y (ось ординат) — расположенной в плоскости чертежа и направленной слева направо, ось Z (ось аппликат) — расположенной, как и ось Y, в плоскости чертежа, но направленной вверх[1]. На чертеже ось X будем изображать прямой, составляющей угол в 120° с осью Y и угол в 150° с осью Z, предполагая глаз наблюдателя помещенным несколько правее и выше начала координат O. Чертеж будем представлять изображенным в вертикальной пло-



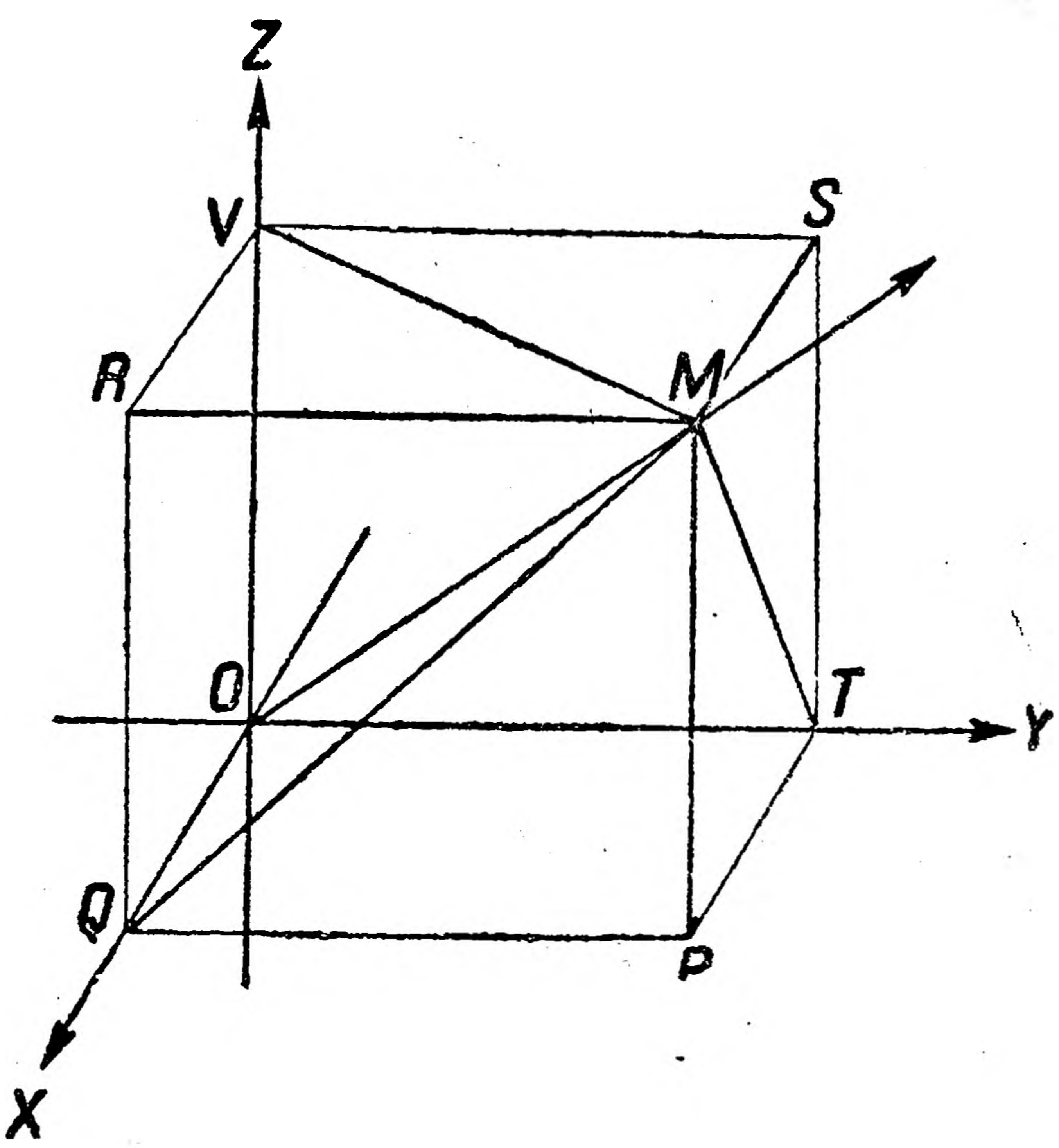
Черт. 121.

[1] Три координатные оси X, Y, Z, выходящие из общего начала и рассматриваемые в определенной последовательности (после X берется Y, после Y — Z, после Z — X и т. д.), образуют либо правую, либо левую системы, различаемые следующим образом. Допустим, что наблюдатель расположился вдоль одной из осей, хотя бы оси X, проходящей через его тело от ног к голове, и смотрит на плоскость, в которой находятся две другие оси (Y и Z). Будем вращать ось Y в этой плоскости около точки O так, чтобы она кратчайшим путем пришла к совпадению с осью Z. Наблюдатель увидит это вращение совершающимся либо по часовой стрелке, либо против нее. В первом случае мы имеем левую систему, во втором — правую. Большой, средний и указательный пальцы левой руки, рассматриваемые именно в этой последовательности, образуют левую систему, правой руки — правую систему. Две прямоугольные системы осей могут быть совмещены друг с другом надлежащим перемещением одной из них тогда и только тогда, когда они одноименны (обе правых или обе левых). При координировании точек пространства употребляются как правые, так и левые системы. Мы будем пользоваться в дальнейшем всегда правой системой, так как именно такая система получится, если взять общепринятое расположение осей X и Y на плоскости (ось X направо, ось Y вверх) и добавить ось Z, направленную от плоскости чертежа вперед (к читателю).

скости (как плоскость классной доски). Поэтому оси X и Y будем представлять горизонтальными, ось Z — вертикальной.

Проводя через каждую пару координатных осей плоскость, мы получим три взаимно перпендикулярных координатных плоскости: плоскость XY, которая при горизонтальности осей X и Y будет расположена тоже горизонтально; плоскость XZ, расположенную вертикально и перпендикулярно к плоскости чертежа; плоскость YZ, расположенную тоже вертикально и совпадающую с плоскостью чертежа.

Чтобы получить координаты произвольной точки M, опустим из нее перпендикуляр MP (черт. 121) на плоскость XY; этот перпендикуляр параллелен оси Z; длина его, взятая с надлежащим знаком (плюс, если точка M выше плоскости XY, минус — если ниже ее), и будет *аппликатой* Z рассматриваемой точки M. Из точки P опускаем далее перпендикуляр PQ на ось X, т. е. проводим параллель к оси Y; длина PQ, взятая со знаком плюс, если точка M лежит правее плоскости XZ или со знаком минус, если левее ее, даст нам *ординату* y точки M. Наконец, длина отрезка OQ оси X, взятого со знаком плюс, если точка Q оказалась перед плоскостью YZ, т. е. если точка M лежит перед плоскостью YZ, или со знаком минус (в противном случае), будет *абсциссой* x точки M.



Черт. 122.

Ломаная $OQPM$, имеющая начальную точку в начале координат, а конечную точку — в рассматриваемой точке M и состоящая из трех звеньев, параллельных осям X, Y, Z, будет нередко встречаться в дальнейших рассуждениях. Будем называть ее *координатной ломаной точки* M. Радиус-вектор точки M, т. е. отрезок OM, соединяющий начало координат с точкой M, является замыкающим для этой ломаной.

Координаты точки M можно получить иначе, а именно путем опускания перпендикуляров на все три координатных плоскости. Опуская перпендикуляр на плоскость YZ, получим абсциссу $MS = x$ (черт. 122), перпендикуляр на плоскость XZ даст ординату $MR = y$, перпендикуляр на плоскость XY является аппликатой $MP = z$. Чтобы доказать это, надо провести через точку M три плоскости, параллельные трем координатным плоскостям. Все 6 плоскостей, пересекаясь, ограничивают прямоугольный параллелепипед, параллельные ребра которого, как известно, равны друг другу:

$$MS = QO = x, \quad MR = OT = y, \quad MP = VO = z.$$

Проведение этих трех плоскостей, проходящих через точки M параллельно координатным плоскостям, дает еще один способ получения координат точки M. Координаты точки M получаются как отрезки координатных осей $OQ = x$, $OT = y$, $OV = z$, отсекаемые этими плоскостями. Так как точки Q, T, V являются проекциями точки M на все три координатные оси, то отрезки OQ, OT, OV можно рассматривать как проекции радиуса-вектора OM на оси X, Y, Z. Полагая $OM = r$ $(0 \leq r < +\infty)$ и обозначая буквами α, β, γ углы между лучом OM и координатными осями X, Y, Z

$$(X,\ M) = \alpha, \quad (Y,\ M) = \beta, \quad (Z,\ M) = \gamma,$$

получаем формулы:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma. \tag{1}$$

Здесь мы применили теорему 1 § 6. Каждый из углов α, β, γ может принимать любое значение между 0 и π.

Итак, координаты точки M можно получить любым из трех следующих способов: 1) построением *координатной ломаной* $OQPM$, 2) проектированием точки M на координатные плоскости YZ, ZX, XY и измерением расстояний от точки M до каждой из ее проекций на эти плоскости, 3) проектированием точки M на координатные оси X, Y, Z и измерением проекций радиуса-вектора OM на каждую из осей.

Три координатных плоскости, пересекаясь, делят все пространство на восемь частей—„октантов". Каждый октант характеризуется своей комбинацией знаков координат. Будем нумеровать октанты цифрами I—VIII, руководствуясь следующей табличкой:

x	y	z	Октант
+	+	+	I
—	+	+	II
—	—	+	III
+	—	+	IV

x	y	z	Октант
+	+	—	V
—	+	—	VI
—	—	—	VII
+	—	—	VIII

То обстоятельство, что точка M имеет координаты, равные a (абсцисса), b (ордината), c (аппликата), мы будем сокращенно записывать так: $M\,(a;\ b;\ c)$.

Упражнения.

1. Указать координаты всех 8 вершин куба с ребром a, если начало координат помещено в точке пересечения диагоналей одной из граней, ось X совмещена с одной из этих диагоналей, ось Y—с другой, а ось Z направлена внутрь куба.

2. Имеется точка M (2; 3; 5). Указать точки, симметричные с точкой M относительно: a) каждой из координатных плоскостей, b) каждой из координатных осей, c) начала координат.

3. Для точки M (4; —5; —2) указать: a) координаты начала и конца каждого звена координатной ломаной, b) координаты точек, представляющих собой проекции точки M на координатные плоскости, c) координаты точек, представляющих собой проекции точки M на координатные оси.

§ 64. Углы направления и направляющие косинусы луча. Угол между двумя лучами. Всякий луч, проходящий через начало координат, образует с координатными осями X, Y, Z углы, обозначенные выше буквами α, β, γ и называемые *углами направления* луча. Два из этих углов направления могут быть заданы произвольно, третий определяется двумя первыми (двузначно). Действительно, все лучи, образующие с осью X один и тот же угол α и проходящие через начало координат, располагаются по поверхности конуса (не двойного, какой мы рассматривали в § 57, а простого), осью которого служит ось X. Точно так же лучи с углом направления β располагаются по поверхности конуса (тоже простого) с осью, совпадающей с осью Y. Оба конуса пересекаются $\left(\text{при } \alpha+\beta>\frac{1}{2}\pi\right)$ по двум образующим, расположенным симметрично относительно плоскости XY. Итак, задание двух углов направления α и β определяет два луча, симметричных относительно плоскости XY и составляющих с осью Z углы γ и $\pi-\gamma$.

Аналогичные заключения можно сделать и об углах β и γ, γ и α.

Выразим аналитически эту зависимость между углами α, β, γ.

Как известно, квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений. Применяя эту теорему к параллелепипеду, изображенному на чертеже 122, имеем уравнение $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Но координаты x, y, z можно выразить через r и углы α, β, γ формулами (1) § 63, а потому после подстановок и сокращений получаем искомую зависимость в виде

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{1}$$

Зная α и β, находим отсюда $\cos\gamma$ по формуле

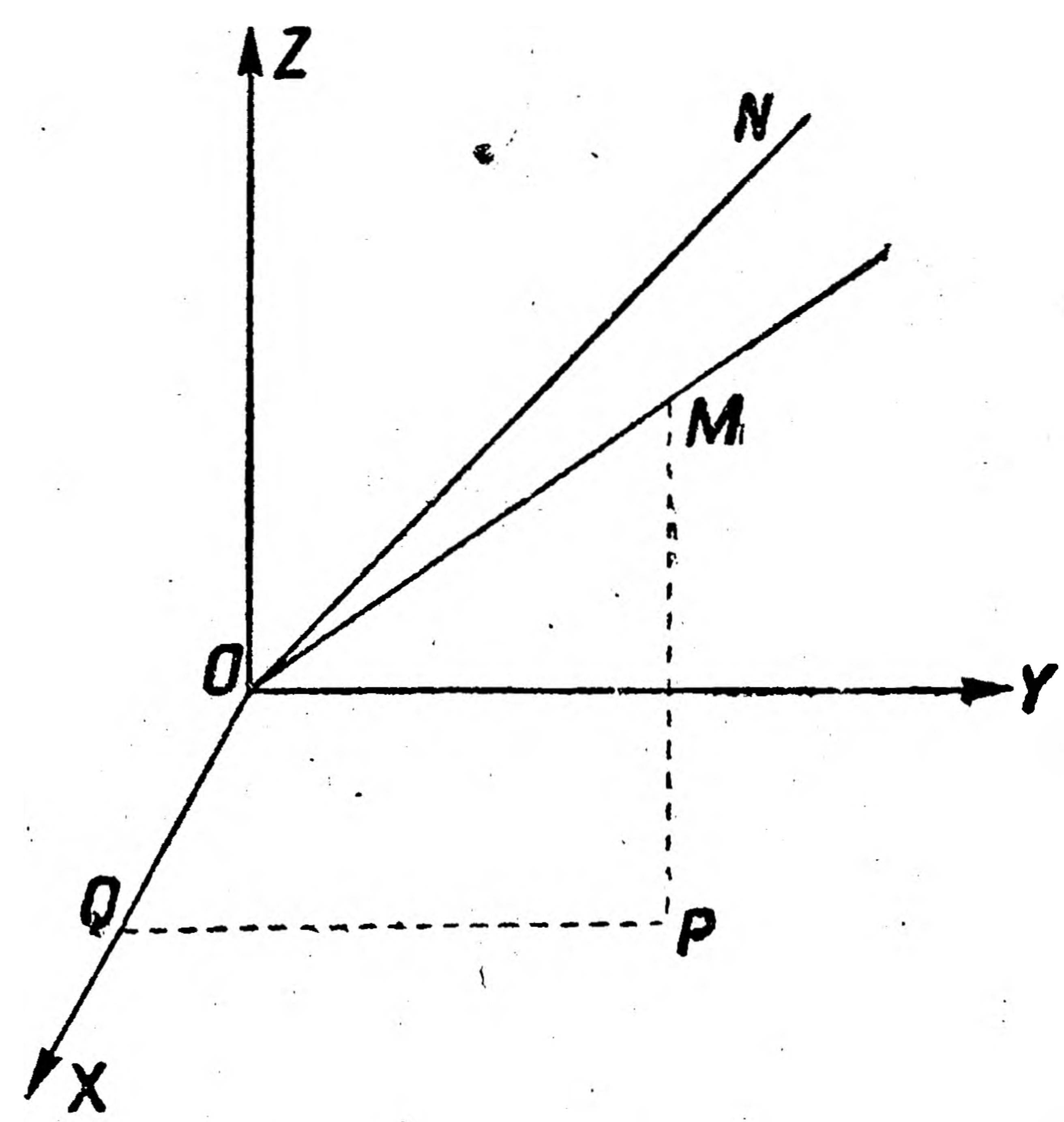
$$\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}.$$

Если обозначить буквой γ острый угол, удовлетворяющий соотношению (1), то этому же соотношению удовлетворяет и угол $\pi-\gamma$, как и должно быть.

Косинусы углов направления носят название „направляющих косинусов“ луча. Соотношение (1) выражает теорему: *если углы α, β, γ являются углами направления для некоторого луча, то сумма квадратов их косинусов равна единице.* Справедлива, как легко видеть, и обратная теорема: *если сумма квадратов косинусов углов α, β и γ равна 1, то эти углы являются углами направления для некоторого луча.* Действительно, соединив начало координат с точкой, имеющей координаты

$$x=\cos\alpha,\quad y=\cos\beta,\quad z=\cos\gamma,$$

мы и получаем этот луч.



Черт. 123.

Решим далее задачу: зная углы направления двух лучей α, β, γ и α_1, β_1, γ_1, найти угол θ между ними. Возьмем на первом из данных лучей произвольную точку M и построим для нее координатную ломаную $OQPM$ (черт. 123). Проектируя эту ломаную на второй из данных лучей и применяя теорему 2 § 6, имеем, что пр. $OQ+$ пр. $QP+$ пр. $PM=$ $=$ пр. OM (здесь слово „проекция“ мы сокращенно обозначаем буквами

„пр."). Но согласно теореме (1) того же § 6 пр. $OQ = x\cos\alpha_1$, пр. $QP = y\cos\beta_1$, пр. $PM = z\cos\gamma_1$, пр. $OM = OM\cos\theta$, где x, y, z — координаты точки M, а потому $x = OM\cos\alpha$, $y = OM\cos\beta$, $z = OM\cos\gamma$. После подстановок и сокращений имеем формулу:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1, \tag{2}$$

для которой формула (1) является частным случаем, соответствующим совпадению обоих лучей ($\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$). Полагая $\theta = \frac{1}{2}\pi$, получаем условие перпендикулярности („ортогональности") двух лучей

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0. \tag{3}$$

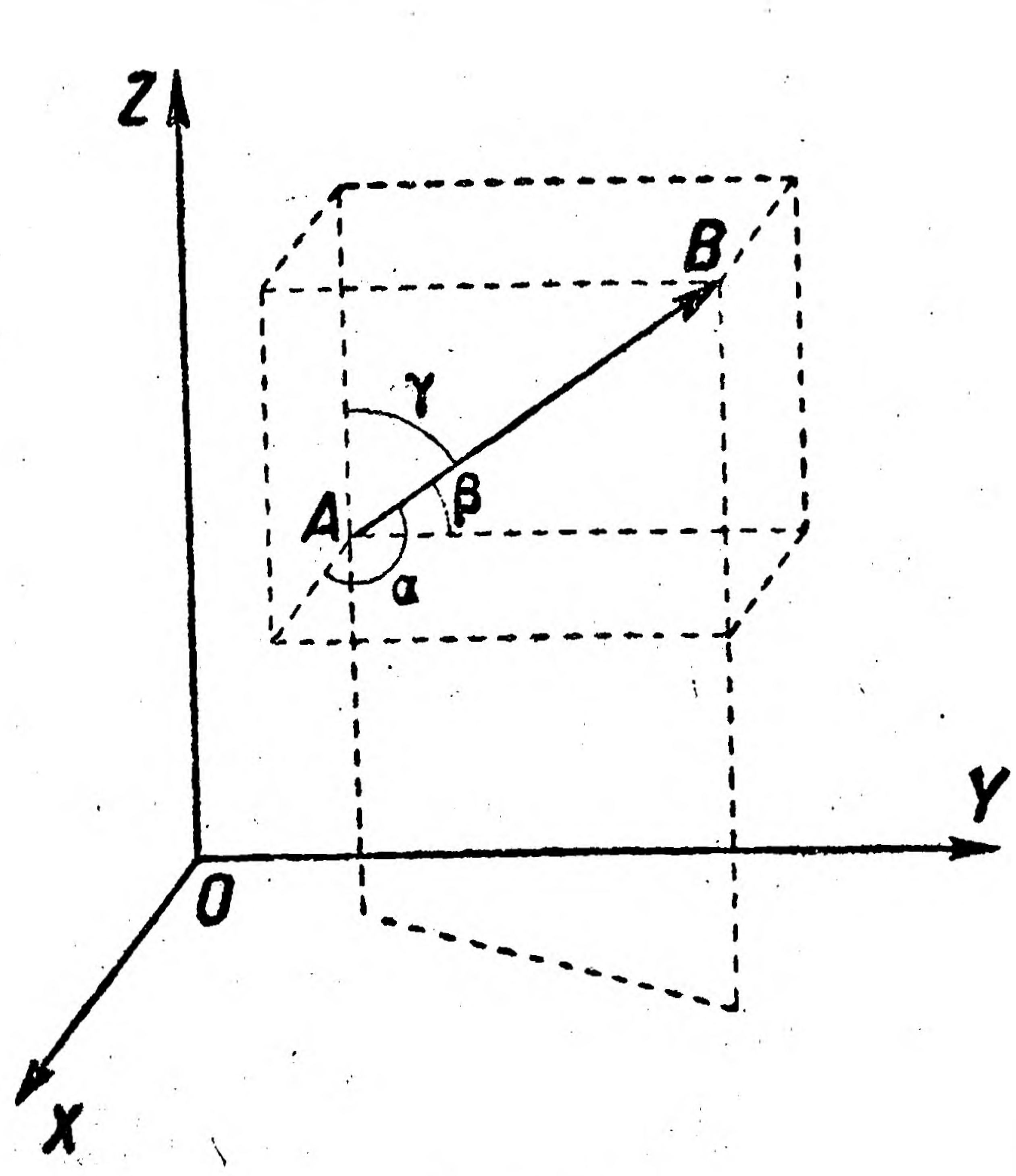
Направление луча не меняется, если его перемещать параллельно самому себе. Поэтому, имея луч AB, не проходящий через начало координат, мы всегда можем провести через начало координат другой луч OM, параллельный первому, и взять углы направления α, β, γ, которые будут относиться одинаково к обоим лучам. Вместо этого можно провести через начальную точку A данного луча AB прямые AX', AY', AZ', параллельные осям X, Y, Z и составляющие опять те же углы α, β, γ с лучом AB.

Точно так же, чтобы получить угол между двумя лучами AB и CD, не имеющими ни одной общей точки, надо провести через начало лучи OM и ON, им параллельные, и искать угол $\theta = (OM, ON)$.

Упражнения.

1. Найти угол направления γ для всех лучей, у которых $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$.
2. Луч составляет со всеми тремя осями координат равные углы. Найти их.
3. Вывести формулу (1), не прибегая к теореме о диагонали прямоугольного параллелепипеда, а проектируя координатную ломаную на радиус-вектор.
4. Найти угол между биссектрисами углов XOY и XOZ.
5. Луч OM имеет углы направления $\alpha = 45°$ и $\beta = 60°$ и расположен в V октанте; луч OM_1 имеет углы направления $\alpha_1 = 120°$ и $\beta_1 = 120°$ и расположен в III октанте. Найти луч, перпендикулярный к каждому из лучей OM и OM_1 (два решения).

§ 65. Две задачи на пару точек. Если даны две точки: начальная точка A (x_1; y_1; z_1) и конечная точка B (x_2; y_2; z_2), то относительно отрезка AB, ими определяемого, возникают два вопроса: какова его длина d и каковы его углы направления α, β, γ?



Черт. 124.

Для ответа на первый из этих вопросов проводим через каждую из точек A и B по три плоскости, параллельных координатным плоскостям XY, XZ, YZ. Эти шесть плоскостей, будучи попарно параллельными, ограничивают прямоугольный параллелепипед, диагональю которого служит отрезок AB (черт. 124). Замечая, что ребра параллелепипеда, параллельные осям X, Y, Z, равны соответственно $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ (при любом расположении точек A и B относительно начала координат!) и применяя опять теорему о квадрате диагонали параллелепипеда, получаем формулу

$$d = + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1)$$

Принимая же во внимание, что отрезки, образующие ребра параллелепипеда, равны по величине и по знаку проекциям отрезка AB на оси X, Y, Z, получаем для направляющих косинусов луча AB формулы:

$$\cos\alpha = (x_2 - x_1):d, \quad \cos\beta = (y_2 - y_1):d, \quad \cos\gamma = (z_2 - z_1):d, \qquad (2)$$

являющиеся обобщением формул (1) § 63.

Пользуясь формулами (2), надо строго различать координаты начала отрезка A и его конца B и брать в числителе разность между координатами конца и начала, а не наоборот. Меняя местами начало и конец отрезка, мы заменяем его направление на прямо противоположное, и углы направления α, β, γ изменятся при этом на π, а направляющие косинусы переменят знаки.

Применяя формулу (1), выражающую абсолютное значение расстояния между двумя точками A и B, можно не делать разницы между началом и концом отрезка.

Найдем, например, длину и направление отрезка AB, если известны координаты начальной точки A $x_1 = 5$, $y_1 = -2$, $z_1 = 4$ и конечной точки B $x_2 = -3$, $y_2 = -1$, $z_2 = 0$.

Здесь $x_2 - x_1 = -8$, $y_2 - y_1 = 1$, $z_2 - z_1 = -4$, а потому

$$d = + \sqrt{64 + 1 + 16} = + 9, \ \cos\alpha = -8:9, \ \cos\beta = 1:9, \ \cos\gamma = -4:9,$$

откуда

$$\alpha = 152°43', \quad \beta = 83°37', \quad \gamma = 116°23'.$$

Решим еще задачу о делении отрезка AB, координаты концов которого известны, в данном отношении. Задача состоит в том, чтобы, имея точки A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, найти точку M $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющую условию $AM:MB = \lambda$, где λ — данное число (положительное или отрицательное).

Проектируя данные точки A и B вместе с искомой точкой M на каждую из координатных осей и применяя теорему о пропорциональности тех отрезков двух прямых, которые заключены между тремя параллельными плоскостями, замечаем, что проекция M_x точки M на ось X делит отрезок $A_x B_x$, где A_x и B_x — проекции данных точек на ту же ось, в отношении, равном отношению $AM:MB$, а потому $A_xM_x:M_xB_x = AM:MB = \lambda$. Абсциссу x точки M_x, а следовательно, и точки M найдем по формуле (1) § 8. Повторяя то же построение с другими осями, получим три формулы:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \qquad (3)$$

решающие поставленную задачу.

Напомним, как и в § 8, что значков 1 и 2, которыми отмечены координаты первой и второй точки, менять нельзя: перемена значков вызывает замену отношения λ отношением $1:\lambda$.

Упражнения.

1. Найти длину и направление отрезка с начальной точкой $(3; -1; -2)$ и конечной точкой $(-2; 4; 3)$. Как придется изменить ответы задачи, если начальную точку сделать конечной, и обратно?

2. На оси Z найти точку, удаленную от точки $(8; 12; 3)$ на 28 (два ответа).

3. На плоскости XZ найти точку, равноудаленную от трех данных точек $(0; 0; 5)$, $(0; -3; 0)$, $(4; 4; 0)$.

4. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами в точках $(5; -2; 0)$, $(-1; -2; 4)$, $(-1; -4; 4)$.

5. Найти координаты точек, делящих отрезок AB внутренним и внешним образом в отношении $3:2$, если точка A имеет координаты $4, 2, -1$, а точка B — координаты $-2, 3, 8$.

6. Треугольная пирамида (тетраэдр) имеет вершины в точках $(0; 0; 0)$, $(a; b; 0)$, $(c; 0; 0)$, $(d; e; f)$. Найти средины трех отрезков, соединяющих средины каждых двух противоположных ребер тетраэдра.

§ 66. Преобразование прямоугольных координат. Если оси X, Y, Z заменяются осями X', Y', Z', параллельными прежним, но проходящими через точку O' с координатами a, b, c, то между старыми координатами x, y, z точки M и новыми координатами той же точки x', y', z' существует зависимость, выражаемая формулами:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c. \tag{1}$$

Формулы эти, как и формулы (1) § 9, получаются для произвольного расположения координатных осей посредством проектирования: берем ломаную $OO'M$ и проектируем ее и ее замыкающую OM последовательно на каждую из координатных осей.

В случае изменения направления координатных осей без изменения начала координат обозначим буквами α, β, γ углы направления новой оси абсцисс X', т. е. те три угла, какие ось X' составляет с осями X, Y, Z. Точно так же обозначим буквами α', β', γ' углы направления новой оси ординат Y' и буквами α'', β'', γ'' — новой оси аппликат Z'. Для большей ясности приводим табличку, указывающую смысл сделанных обозначений:

	X	Y	Z
X'	α	β	γ
Y'	α'	β'	γ'
Z'	α''	β''	γ''

В этой табличке каждая буква, означающая угол, находится в одной строке и в одном столбце с буквами, означающими те оси, которые этот угол образуют.

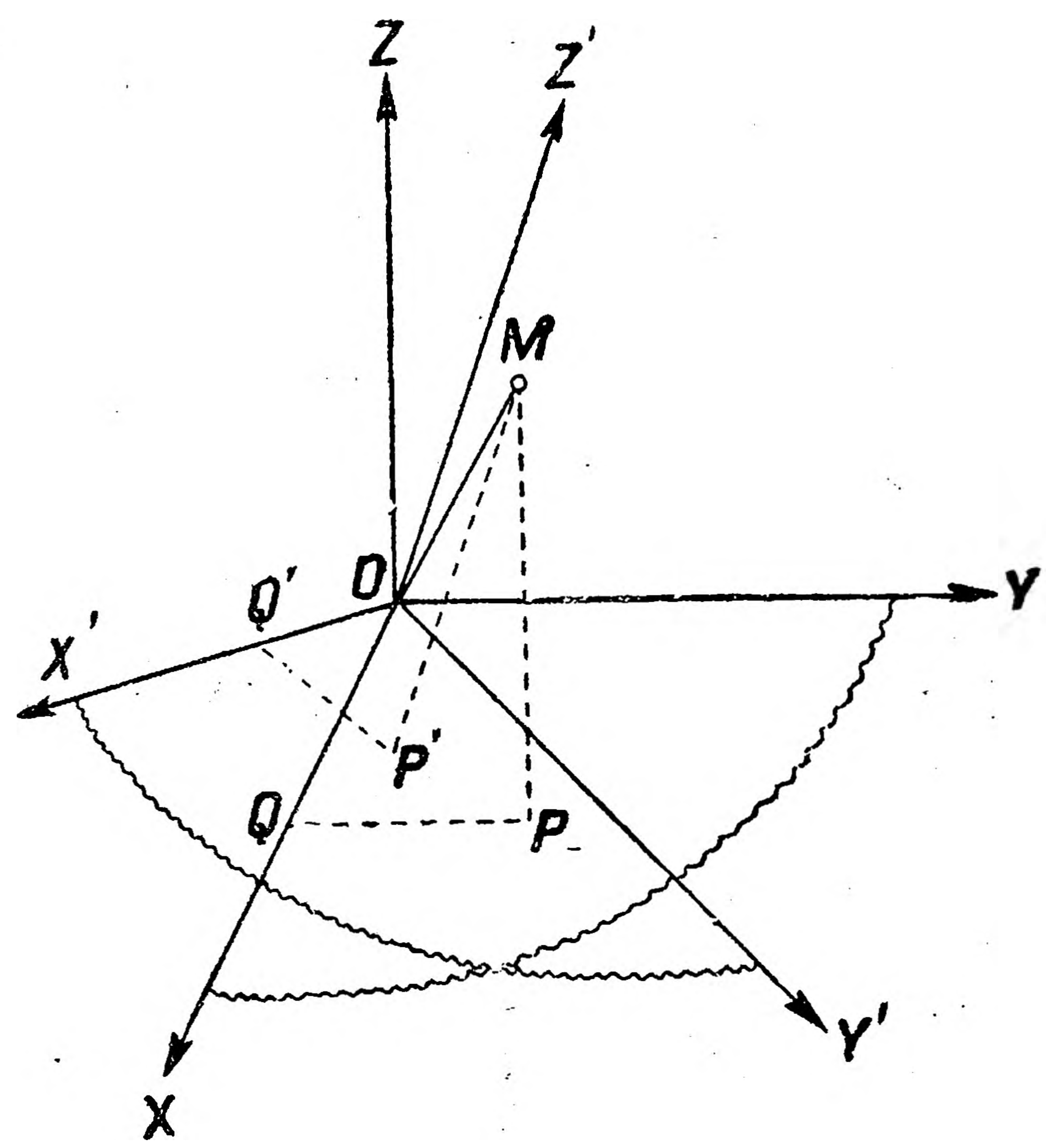
Обе системы координат — как старая, так и новая — предполагаются прямоугольными. Поэтому между 9 углами направления существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0,\\
&\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1, \quad \cos\alpha''\cos\alpha + \cos\beta''\cos\beta + \cos\gamma''\cos\gamma = 0,\\
&\cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1, \quad \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Возьмем точку M с координатами x, y, z в старой системе и обозначим буквами x', y', z' ее же координаты в новой системе. Строя в обеих системах координатные ломаные $OQPM$ и $OQ'P'M$ с общей замыкающей OM (черт. 125), проектируем их последовательно на оси X, Y, Z и получаем формулы:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'', \\ y &= x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'', \\ z &= x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma'', \end{aligned} \quad (3)$$

дающие зависимость между старыми и новыми координатами точки в случае вращения осей.



Черт. 125.

Наконец, для общего случая преобразования прямоугольных координат, когда новое начало находится в точке O' $(a;\ b;\ c)$, а новые координатные оси X', Y', Z' составляют со старыми углы, указанные выше табличкой, без труда получаем формулы:

$$\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'', \\ y &= b + x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'', \\ z &= c + x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma'' \end{aligned} \quad (4)$$

(применяем, как и в § 9, вспомогательную систему координат с началом в точке O' и осями, параллельными осям X, Y, Z).

Упражнения.

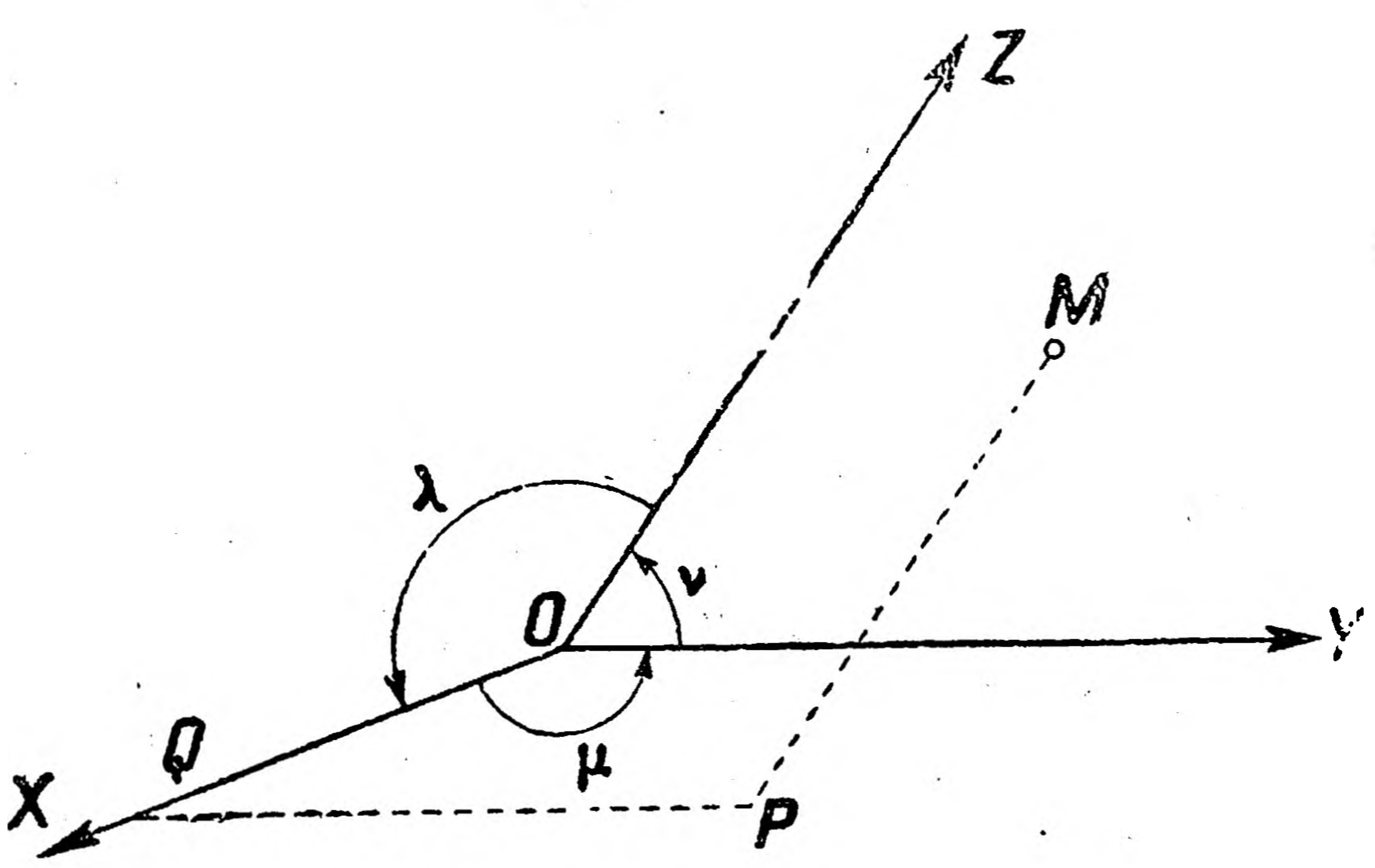
1. Даны три точки A $(a;\ 0;\ 0)$, B $(0;\ a;\ 0)$, C $(0;\ 0;\ -a)$. Написать формулы преобразования координат для случая, когда новое начало помещается в центре тяжести треугольника ABC, а направления осей сохраняются.

2. Через точки A $(a;\ 0;\ 0)$, B $(0;\ a;\ 0)$, C $(0;\ 0;\ a)$ проведены три плоскости, параллельные координатным плоскостям. Написать формулы преобразования координат для случая, когда при сохранении начала O новая ось Z' проходит через точку $D\,(a;\ a;\ a)$, а новая ось X' находится в пересечении плоскости AOD с плоскостью, проведенной через точку O перпендикулярно прямой AD. Проверить эти формулы, вычислив по ним новые координаты вершин куба.

3. Применяя параллельное перенесение осей, преобразовать уравнение $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$ так, чтобы в нем не было линейных членов.

4. Какой вид получит уравнение $3x + 2y + z = 5$, если перейти, сохраняя начало, к новым осям координат (прямоугольных), имеющим следующие направления: ось X' образует с осями X и Y углы, косинусы которых равны соответственно $3:\sqrt{14}$ и $2:\sqrt{14}$, а с осью Z — острый угол; ось Y' лежит в плоскости XY и составляет острый угол с осью X. Ось Z' составляет острый угол с осью X.

***§ 67. Другие системы координат (координаты косоугольные, полярные, сферические).** Проведя через произвольную точку O (начало координат) три оси X, Y, Z, составляющие друг с другом произвольные углы $(X,\ Y) = \mu$, $(Y,\ Z) = \nu$, $(Z,\ X) = \lambda$, можно определить положение любой точки M пространства, если построить ломаную $OQPM$ из трех отрезков, параллельных осям X, Y, Z, и измерить длину каждого из этих отрезков $OQ = x$, $QP = y$, $PM = z$ (черт. 126). Таким образом получается система прямолинейных (декартовых) координат точки в пространстве. Углы μ, ν, λ могут иметь произвольные значения между 0 и π. При $\mu=\nu=\lambda=\frac{1}{2}\pi$ получаем частный, но особенно удобный и наиболее часто употребляемый вид прямолинейных координат — систему прямоугольных координат. Если хотя бы один из координатных углов отличен от $\frac{1}{2}\pi$, система называется *косоугольной*.



Черт. 126

Легко получить формулы, выражающие прямоугольные координаты точки $M(x';\ y';\ z')$ через косоугольные ее координаты x, y, z, предполагая, что оси X и X' и плоскости XY и $X'Y'$ в обеих системах совпадают. Проектируя координатную ломаную $OQPM$, звенья которой параллельны X, Y, Z, и ее замыкающую OM на каждую из осей X', Y', Z' прямоугольной системы, получим формулы:

$$x'=x+y\cos\mu+z\cos\lambda,$$

$$y'=y\sin\mu+z\cos\varphi,\quad z'=z\cos\psi, \tag{1}$$

где $\lambda=(Z,\ X')=(Z,\ X)$, $\mu=(X',\ Y)=(X,\ Y)$, $\varphi=(Y',\ Z)$, $\psi=(Z',\ Z)$. Считая данными углы между осями косоугольной системы координат

$$\mu=(X,\ Y),\ \nu=(Y,\ Z),\ \lambda=(Z,\ X),$$

мы должны найти углы φ и ψ из соотношений

$$\begin{gathered}\cos^2\lambda+\cos^2\varphi+\cos^2\psi=1,\\ \cos\nu=\cos\mu\cos\lambda+\sin\mu\cos\varphi,\end{gathered} \tag{2}$$

получаемых из формул (1) и (2) § 64. Чтобы лучше ориентироваться в углах, составляемых осями обеих систем, полезно составить следующую табличку, аналогичную табличке предшествующего параграфа:

	X	Y	Z
X'	0	μ	λ
Y'	$\frac{1}{2}\pi$	$\mu-\frac{1}{2}\pi$	φ
Z'	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	ψ

Выведем формулу, выражающую расстояние между двумя точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ в косоугольной системе координат с углами μ, ν, λ. Обозначим через x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2 прямоугольные координаты тех же точек относительно вспомогательной системы, расположенной, как указано выше. Воспользуемся формулой (1) § 65, которая дает

$$d^2=(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2, \tag{3}$$

а затем перейдем к координатам x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 по формулам (1) настоящего параграфа, которые дают:

$$\begin{aligned} x'_1&=x_1+y_1\cos\mu+z_1\cos\lambda, & x'_2&=x_2+y_2\cos\mu+z_2\cos\lambda;\\ y'_1&=y_1\sin\mu+z_1\cos\varphi, & y'_2&=y_2\sin\mu+z_2\cos\varphi;\\ z'_1&=z_1\cos\psi, & z'_2&=z_2\cos\psi.\end{aligned}$$

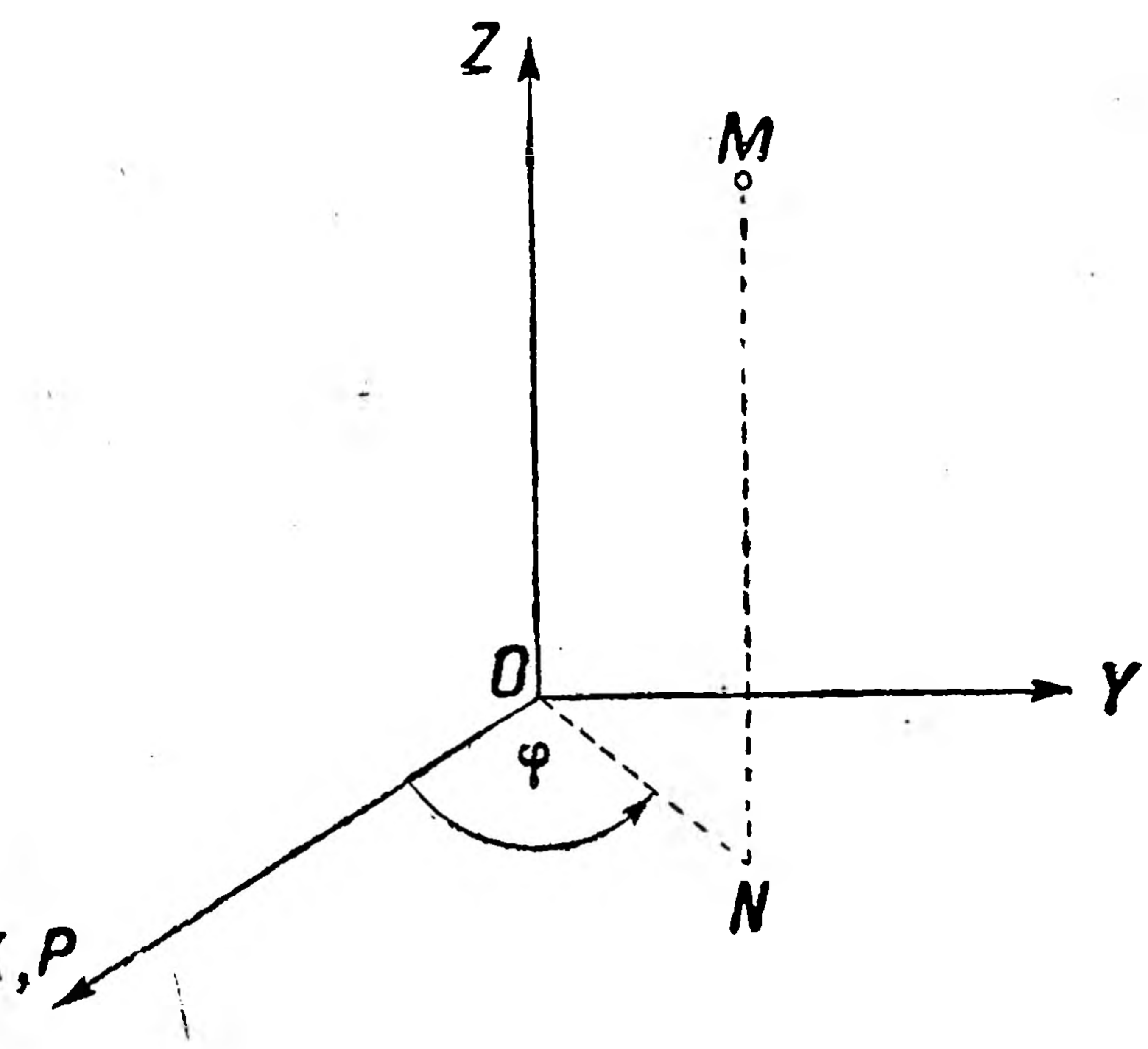
Подставляя, имеем:

$$d^2 = [(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\cos\mu + (z_2 - z_1)\cos\lambda]^2 + [(y_2 - y_1)\sin\mu +$$
$$+ (z_2 - z_1)\cos\varphi]^2 + (z_2 - z_1)^2\cos^2\psi = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2[\cos^2\mu + \sin^2\mu] +$$
$$+ (z_2 - z_1)^2\cdot[\cos^2\lambda + \cos^2\varphi + \cos^2\psi] + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\mu +$$
$$+ 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)\cdot[\cos\mu\cos\lambda + \sin\mu\cos\varphi] + 2(z_2 - z_1)(x_2 - x_1)\cos\lambda.$$

Принимая во внимание соотношения (2), окончательно имеем:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\mu +$$
$$+ 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)\cos\nu + 2(z_2 - z_1)(x_2 - x_1)\cos\lambda.$$

Как видим, получилась формула, гораздо более сложная, чем формула (3), выражающая то же расстояние в прямоугольных координатах. Следует однако заметить, что некоторые формулы, выведенные для прямоугольной системы координат, сохраняют силу и для координат косоугольных. Таковы, например, формулы (3) § 65.



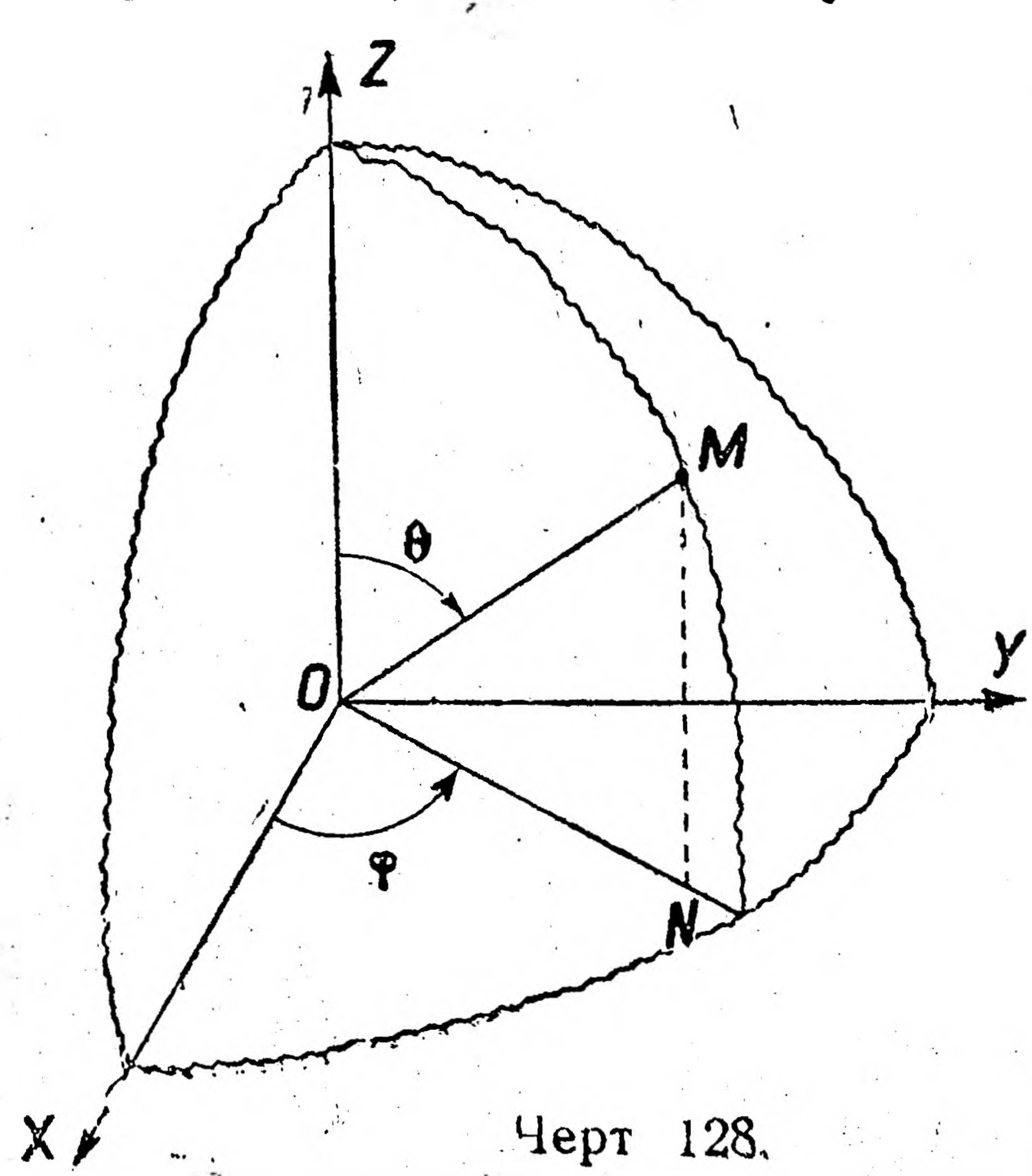
Черт. 127.

Упомянем еще о двух системах координат, довольно часто употребляемых в механике и астрономии: системе *полярных*, или *цилиндрических*, координат и системе *сферических* координат.

Опуская из произвольной точки M перпендикуляр $MN = z$ на некоторую определенную плоскость и определяя положение основания N этого перпендикуляра на плоскости посредством полярных координат ρ и φ, рассмотренных в § 11, мы определим положение точки M посредством трех чисел ρ, φ, z, являющихся *полярными*, или *цилиндрическими, координатами точки в пространстве* (черт. 127). Надо только условиться о том, в какую сторону от координатной плоскости отсчитываются положительные аппликаты z. Взяв систему прямоугольных координат, как показано на чертеже 127, легко получим формулы для перехода от полярных координат ρ, φ, z к прямоугольным x, y, z:

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z. \tag{5}$$

Система *сферических* координат предполагает выбор постоянной точки O (центр системы), постоянного луча OZ (ось системы), исходящего из этой точки, и постоянной плоскости XOZ (начальная плоскость системы), проходящей через этот луч (черт. 128). Положение любой точки пространства M определяется в этой системе двугранным углом φ, который составляет начальная плоскость с плоскостью, проходящей через ось системы и точку M, углом θ между осью системы и лучом OM и длиной отрезка $\rho = OM$. Вместо того чтобы измерять двугранный угол между плоскостями XOZ и ZOM, можно измерить его линейный угол XON, расположенный в плоскости, перпендикулярной к оси OZ.



Черт 128.

Направляя оси X, Y, Z прямоугольной системы координат, как показано на чертеже 128, и проектируя точку M на плоскости XOY, легко получим формулы перехода от сферических координат φ, θ, ρ к координатам прямоугольным x, y, z:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z = \rho\cos\theta. \tag{6}$$

В географии для обозначения положения точек на земной поверхности пользуются системой координат, имеющей то отличие от только что описанной, что угол θ заменяется углом, ему дополнительным („широта“ места).

Упражнения.

1. Найти координаты вершин параллелепипеда с ребрами a, b, c и плоскими углами μ, ν, λ между ребрами, приняв эти ребра за оси координат.

2. Правильный тетраэдр (т. е. треугольная пирамида, все 6 ребер которой равны) имеет ребра длины a. Приняв за координатные оси три ребра, сходящиеся в одной точке, найти координаты средин ребер и проекций вершин на противоположные грани.

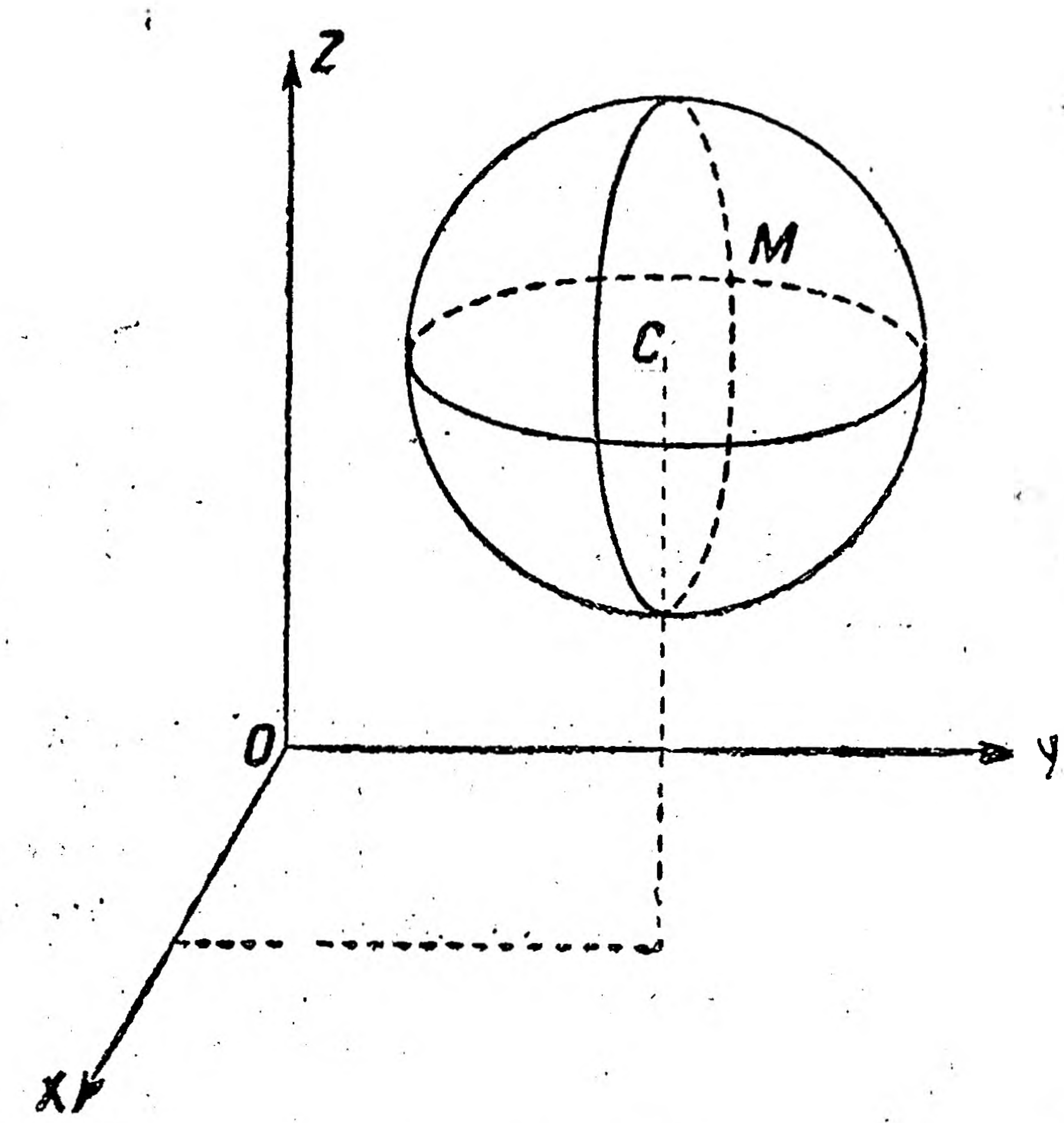
3. Показать, что формулы (3) § 66 сохраняют силу и в том случае, если оси X', Y', Z' образуют между собой какие угодно углы.

4. Указать геометрическое место точек, соответствующих постоянному значению одной из координат в косоугольной, полярной, сферической системе координат.

Глава VIII.

УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЛИНИЙ.

§ 68. Уравнение сферы. Шаром, или *сферой*, называется, как известно, геометрическое место точек, удаленных от данной точки (центра шара) на одно и то же расстояние (радиус шара). Обозначая координаты центра C буквами a, b, c, а радиус буквой r, берем произвольную точку M $(x; y; z)$ на поверхности шара (черт. 129) и составляем уравнение, выражающее равенство $CM = r$ (пользуясь формулой 1 § 65); после освобождения от радикала получаем уравнение сферы



Черт. 129.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \quad (1)$$

Координаты любой точки, находящейся на поверхности сферы, удовлетворяют этому уравнению. Координаты любой точки, лежащей внутри сферы, дают после подстановки в левую часть уравнения (1) значение, меньшее r^2, а любой точки, лежащей вне сферы, — значение, большее r^2 (в справедливости этого легко убедиться, сравнивая расстояния от этой внутренней или внешней точки до центра сферы с радиусом сферы).

Как видим, уравнение сферы есть уравнение 2-й степени с тремя переменными. Поэтому говорят, что поверхность сферы есть *поверхность II порядка*.

Помещая начало координат в центр сферы, мы придадим ее уравнению особенно простой вид. Действительно, тогда $a=b=c=0$, и уравнение (1) перепишется так:

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \quad (2)$$

Именно этим *простейшим* уравнением сферы мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Выясним теперь условия, необходимые и достаточные для того, чтобы общее уравнение 2-й степени с тремя переменными

$$\begin{gathered}Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+\\+2Gx+2Hy+2Jz+K=0\end{gathered} \tag{3}$$

выражало сферу.

Допустим, что уравнение (3) выражает сферу с центром в точке $(a; b; c)$ и с радиусом r. В таком случае коэфициенты уравнения (3) лишь постоянным множителем отличаются от соответствующих коэфициентов уравнения (1), которое перепишем так:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-r^2)=0.$$

Обозначая этот постоянный множитель буквой N, имеем систему условий:

$$\begin{gathered}A=N,\ B=N,\ C=N,\ D=0,\ E=0,\ F=0,\ G=-Na,\\ H=-Nb,\ J=-Nc,\ K=(a^2+b^2+c^2-r^2)N.\end{gathered} \tag{4}$$

Отсюда заключаем, что необходимыми условиями того, что уравнение (3) выражает сферу, являются равенства

$$A=B=C\neq 0,\ D=E=F=0. \tag{5}$$

Если условия (5) не выполнены, уравнение (3) выражать сферу не может. Но если они выполнены, выражает ли оно обязательно сферу или может выражать еще какую-либо поверхность? Другими словами, достаточны ли эти условия? Если они выполнены, легко находим значения a, b, c, r, а именно:

$$\begin{gathered}a=-G:N,\ b=-H:N,\ c=-J:N,\ r^2=(G^2+H^2+J^2):N^2-K:N,\\ N=A=B=C\neq 0.\end{gathered}$$

Радиус сферы r определится из последних соотношений лишь при добавочном условии $(G^2+H^2+J^2):N^2\geqq K:N$, если это условие не выполнено, r получает мнимое значение, сферы не существует. Отсюда заключаем, что необходимыми и достаточными условиями того, что уравнение (3) выражает сферу, являются соотношения:

$$A=B=C=N\neq 0,\ D=E=F=0,\ (G^2+H^2+J^2):N^2\geqq K:N.$$

Отметим, что при $(G^2+H^2+J^2):N^2=K:N$ сфера вырождается в точку, которую можно рассматривать как сферу нулевого радиуса.

Упражнения.

1. Дано уравнение $x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$. Привести его к виду (1) и указать координаты центра и радиус сферы, им изображаемой.

2. Как расположены относительно этой сферы точки $A(2; -2; 0)$, $B(0; 2; 1)$, $C(1; -2; 2)$?

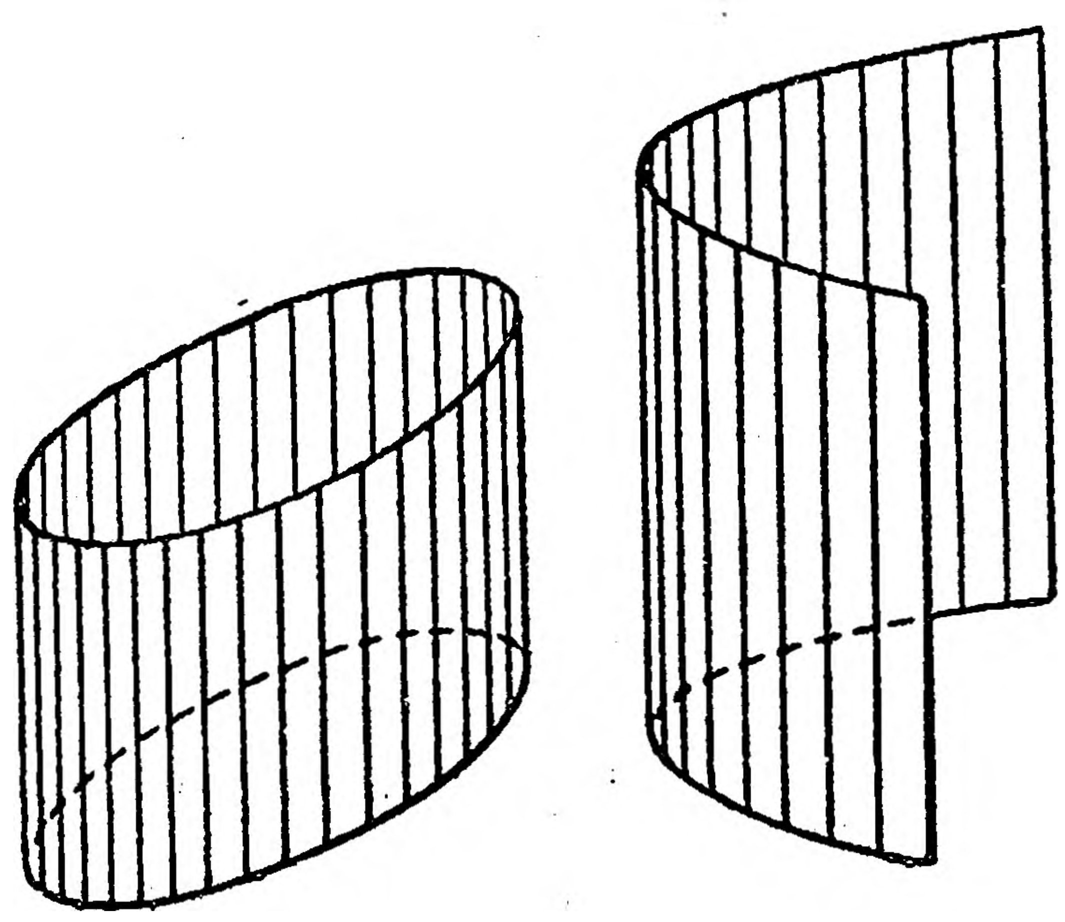
3. Найти те точки сферы $x^2+y^2+z^2=25$, у которых $x=2, y=3$.

§ 69. Уравнение цилиндрической поверхности.

Цилиндрической поверхностью, или просто цилиндром [1]), называется всякая поверх-

[1]) Иногда термины „цилиндрическая поверхность" и „цилиндр" различают, называя „цилиндром" тело, которое получается, если цилиндрическую поверхность с замкнутой направляющей пересечь парой плоскостей, каждая из которых пересекает все образующие поверхности. В дальнейшем ради сокращения речи мы будем говорить „цилиндр" вместо „цилиндрическая поверхность".

ность, которую можно получить движением прямой, перемещающейся параллельно себе самой и все время пересекающей некоторую данную кривую, которая носит название *направляющей*; различные положения движущейся прямой называются *образующими*. Смотря по виду направляющей, различают цилиндрические поверхности разных видов. Наиболее часто встречается цилиндр с направляющей в виде круга и образующими, перпендикулярными к плоскости этого круга (прямой круглый цилиндр). Взяв в качестве направляющей эллипс или параболу, получим эллиптический или параболический цилиндры (черт. 130), которые могут быть прямыми (если образующие перпендикулярны к плоскости направляющей) или наклонными (если образующие составляют с плоскостью направляющей угол, отличный от прямого). Точно так же легко получить и гиперболический цилиндр.



Черт. 130.

Говоря о цилиндре, необходимо всегда указывать направляющую и направление образующих.

Найдем уравнение цилиндра, направляющей которого служит какая-нибудь линия $f(x, y) = 0$ в плоскости XY, а образующие параллельны оси Z. Взяв произвольную точку $M(x; y; z)$ на этой поверхности и опустив перпендикуляр $MP = z$ на плоскость XY, легко убеждаемся, что координата z совершенно произвольна, а координаты x и y связаны уравнением направляющей $f(x, y) = 0$. Координаты любой точки $M(x; y; z)$ на рассматриваемом цилиндре удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$. Обратно, всякая точка $M(x; y; z)$, абсцисса x и ордината y которой удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$, а ордината z совершенно произвольна, лежит на рассматриваемом цилиндре. Отсюда теорема: *уравнение $f(x, y) = 0$, изображая на плоскости XY некоторую кривую линию, изображает в пространстве цилиндрическую поверхность, направляющей которой служит эта линия, а образующие параллельны оси Z.* Точно так же уравнения $f(y, z) = 0$ и $f(z, x) = 0$ изображают цилиндрические поверхности, образующие которых соответственно параллельны осям X и Y. Например, уравнения $x^2 - y^2 = a^2$, $y^2 = 2pz$, $Az + Bx + C = 0$ изображают: первое — гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Z, второе — параболический цилиндр с образующими, параллельными оси X, третье — такой цилиндр, направляющей которого служит прямая на плоскости XZ, а образующие параллельны оси Y; последний цилиндр, очевидно, есть не что иное как плоскость, которую таким образом можно рассматривать как особый вид цилиндра.

Упражнения.

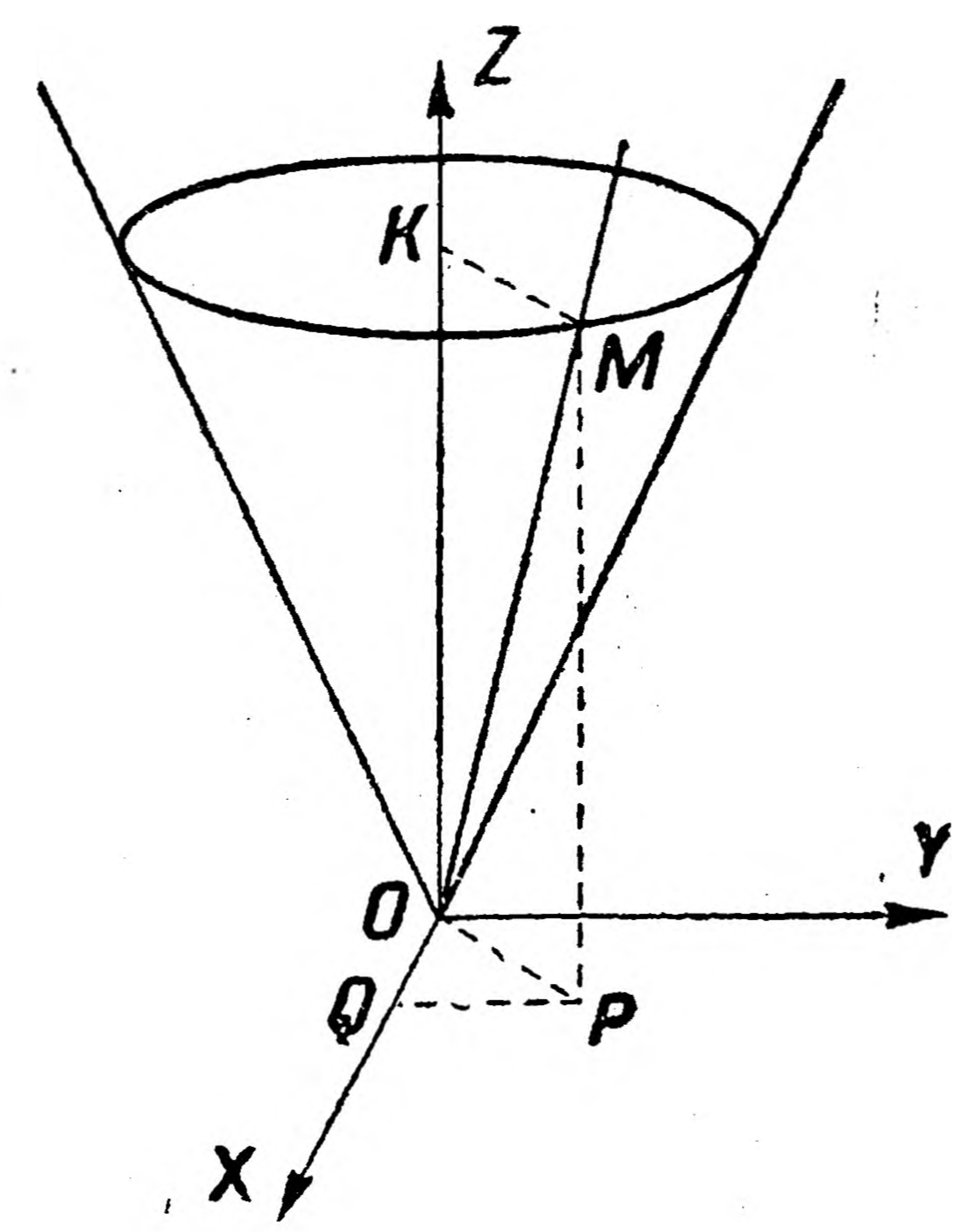
1. Написать уравнения цилиндра, направляющие которого параллельны оси Y, а образующая есть круг радиуса r, расположенный в плоскости XZ и имеющий центр в точке $x = a, z = c$

2. Указать геометрический смысл (на плоскости и в пространстве) уравнений:

$$y^2 : b^2 + z^2 : c^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 0, \quad z^2 = 2px, \quad y = \sin x, \quad y = kx + n.$$

§ 70. Уравнение конической поверхности. После цилиндрической поверхности естественно перейти к рассмотрению конической поверхности, причем рассмотрим сперва прямой круглый конус (§ 57). Обозначив буквой α угол между образующей конуса и его осью, поместим начало координат в вершину конуса, а ось Z направим по оси конуса. Взяв произвольную точку $M(x; y; z)$ на поверхности конуса (черт. 131), имеем $z = MP = OP \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ctg} \alpha$, откуда $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$. Полагая $\operatorname{tg} \alpha = a : c$, где a — радиус круга, служащего направляющей взятой конической поверхности, а c — расстояние от вершины конуса до плоскости направляющего круга, можем написать уравнение рассматриваемой конической поверхности в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{1}$$



Черт. 131.

Числа a и c можно заменить любыми другими, им пропорциональными, не изменяя геометрического смысла уравнения (1).

Уравнение, получающееся из уравнения (1) заменой a в знаменателе второго члена через b, а именно уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{2}$$

тоже выражает конус, но уже не круглый, а эллиптический: рассматривая сечения поверхности (2) плоскостями, параллельными плоскости XY, мы получим в сечении бесконечное множество эллипсов. Если $b < a$, то можно сказать, что мы сжали круглый конус (1) в направлении оси Y и получили эллиптический конус (2). Предполагается, что при таком сжатии ордината y каждой точки конуса (1) уменьшается в отношении $b : a$, а ее абсцисса и аппликата остаются неизменными.

Упражнения.

1. Написать уравнения прямых эллиптических конусов, осями которых служат оси X и Y.

2. Какое значение получает левая часть уравнения (2), если вместо текущих координат подставить координаты какой-нибудь точки, лежащей внутри конуса, а также точки вне конуса?

3. Что за линии получаются в пересечении конуса (1) плоскостями, параллельными плоскостям XZ и YZ?

4. Тот же вопрос для конуса (2).

§ 71. Уравнение плоскости. Плоскость, параллельная плоскости XY и расположенная выше ее на высоте c, характеризуется уравнением $z = c$. Действительно, координаты каждой точки $M(x; y; z)$ такой плоскости удовлетворяют этому уравнению, а координаты всякой точки, расположенной вне этой плоскости, этому уравнению не удовлетворяют. При $c < 0$ эта плоскость располагается ниже плоскости XY, при $c = 0$ уравнение $z = c = 0$ изображает координатную плоскость XY. Равным образом уравнения $x = a$ и $y = b$ изображают плоскости, параллельные соответственно плоскостям YZ и XZ. Уравнение $Ax + By + D = 0$ изображает плоскость, параллельную оси Z и пересекающую плоскость XY по прямой

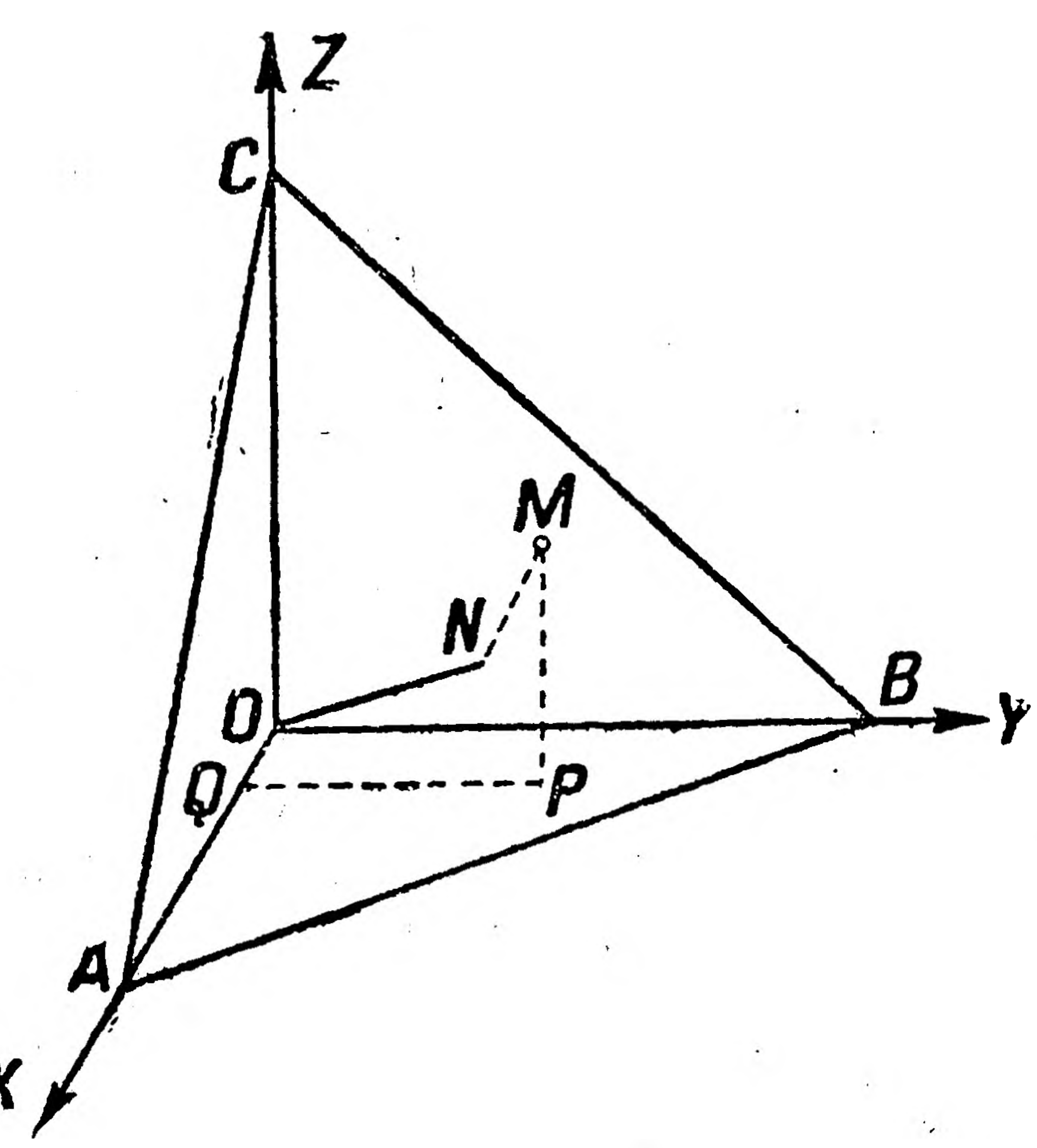
$Ax + By + D = 0$ (рассматриваем плоскость как особый вид цилиндрической поверхности, см. § 69). Точно так же и уравнения $By + Cz + D = 0$ и $Ax + Cz + D = 0$ выражают плоскости, параллельные соответственно осям X и Y.

Посмотрим теперь, какой вид имеет уравнение плоскости, расположенной произвольным образом относительно координатных осей.

Возьмем плоскость, пересекающую оси координат в точках A, B, C (черт. 132), и опустим из начала перпендикуляр $ON = p$ на нее. Обозначая углы направления ON буквами α, β, γ, возьмем произвольную точку плоскости $M(x; y; z)$ и построим координатную ломаную $MPQO$. Проектируя ее на ON, получим уравнение

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \tag{1}$$

которому удовлетворяют координаты любой точки рассматриваемой плоскости и не удовлетворяют координаты никакой другой точки. Следовательно, уравнение (1) и есть уравнение рассматриваемой плоскости.



Черт. 132.

Сделанный вывод уравнения плоскости остается в силе для любого расположения точек A, B, C относительно начала координат.

Итак, уравнение плоскости есть уравнение 1-й степени с тремя переменными (как мы увидим в § 78, имеет место и обратная теорема). Отсутствие одной из переменных возможно лишь в случае обращения в 0 соответствующего коэфициента и указывает на параллельность плоскости соответствующей оси координат. Отсутствие двух переменных означает параллельность плоскости двум осям одновременно, т. е. ее параллельность той координатной плоскости, которая проходит через эти две координатные оси.

Упражнения.

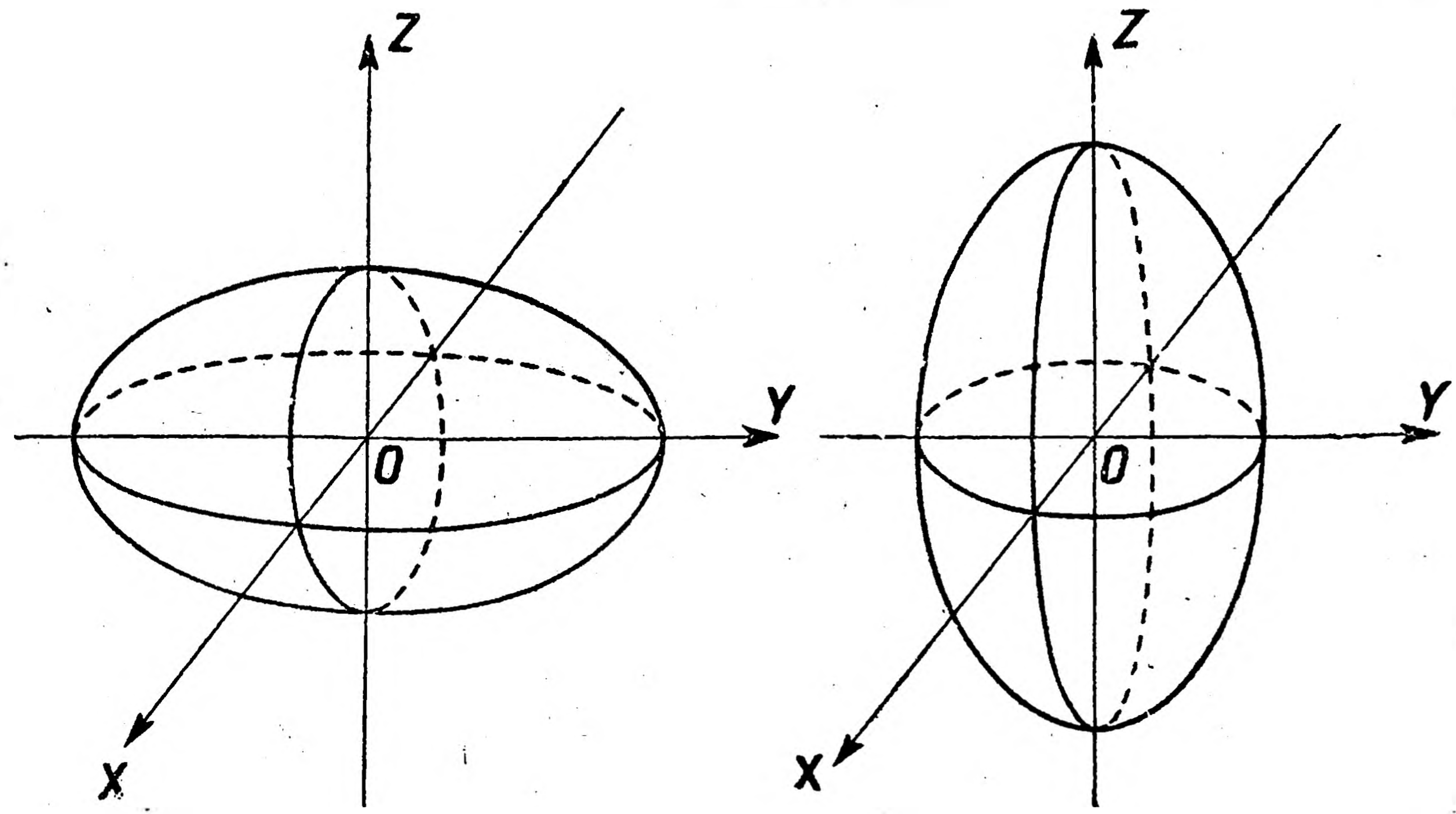
1. Написать уравнение плоскости, если известно, что опущенный на нее из начала координат перпендикуляр имеет длину 40 *см* и составляет с осью X угол в 60°, с осью Y — угол в 120°, с осью Z — острый угол.

2. Какой знак получит левая часть уравнения (1), если заменить в ней текущие координаты координатами начала или какой-либо точки, расположенной по ту же сторону от плоскости, как и начало? Тот же вопрос для точки, расположенной по другую сторону от плоскости, нежели начало.

3. Плоскость параллельна оси X и пересекает плоскость YZ по прямой $z = y + 2$. Написать уравнение этой плоскости в виде (1).

§ 72. Эллипсоид вращения. Трехосный эллипсоид. Сферу можно образовать, вращая круг около одного из его диаметров. Поверхность, которая образуется при вращении эллипса около одной из его осей симметрии, носит название поверхности *эллипсоида вращения*, а именно сжатого или планетарного эллипсоида вращения, если осью вращения служит малая ось эллипса, и удлиненного эллипсоида, если осью вращения служит большая его ось (черт. 133).

Для вывода уравнения эллипсоида возьмем в плоскости YZ эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и будем его вращать около оси Z, совпадающей с малой осью эллипса (при $b>c$) или с большой его осью (при $b<c$). Берем на эллипсоиде произвольную точку $M(x; y; z)$ и строим координатную ломаную $MPQO$ (черт. 134), где $x=OQ$, $y=QP$, $z=MP$, $\sqrt{x^2+y^2}=OP$.



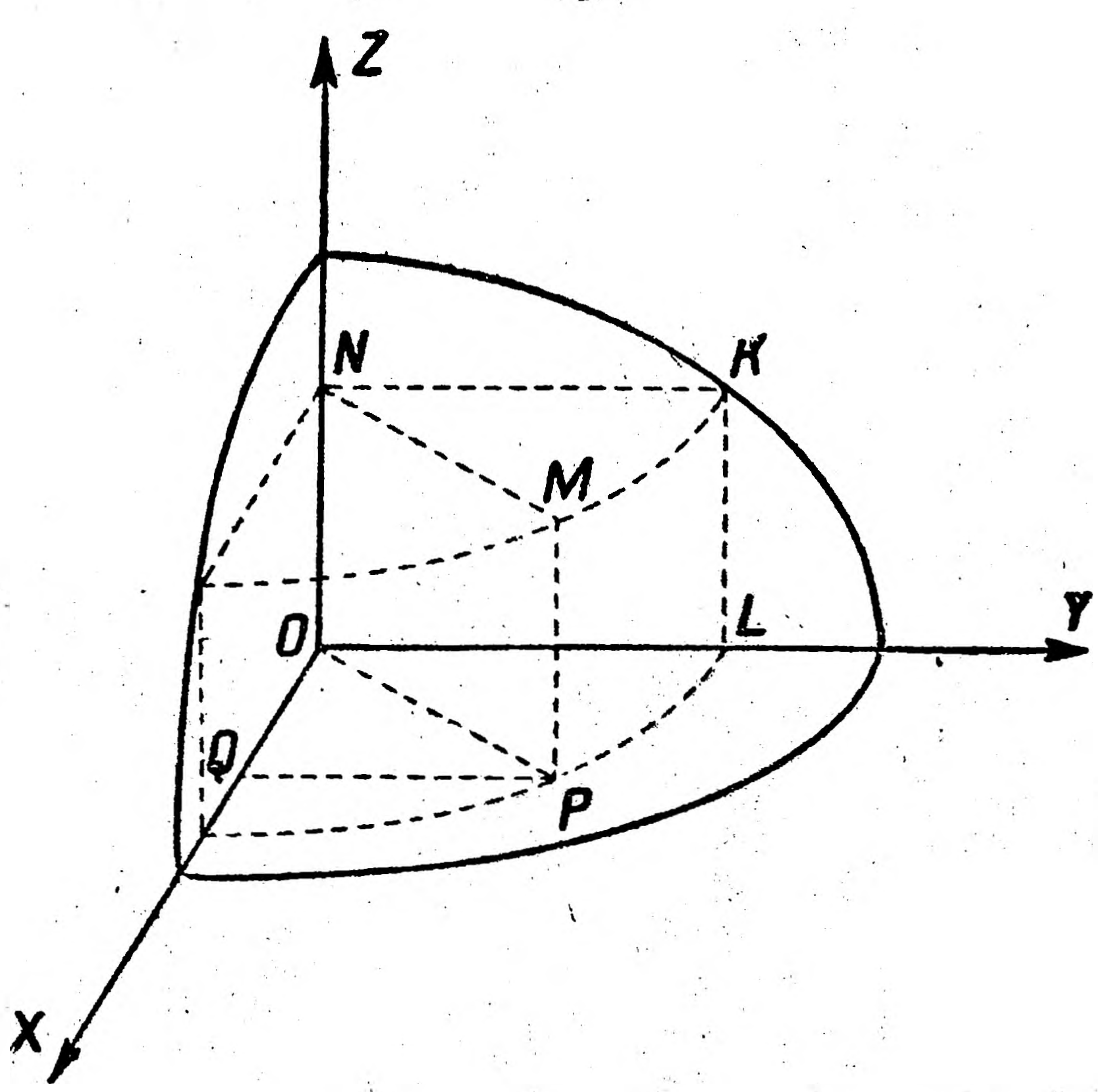
Черт. 133.

Рассмотрим точку K на первоначально взятом эллипсе, получающуюся в пересечении этого эллипса с плоскостью, проведенной через M параллельно XY. Проектируя K на оси Y и Z, получаем ординату точки K, равную $OL=OP=\sqrt{x^2+y^2}$, и ее аппликату $ON=PM=z$. Так как точка K лежит на эллипсе $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, то ее координаты удовлетворяют этому последнему уравнению, а потому $\frac{(OL)^2}{b^2}+\frac{(ON)^2}{c^2}=1$ или после подстановок и упрощений

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

Это и есть уравнение эллипсоида вращения (при $b>c$ сжатого, при $b<c$ удлиненного), переходящего при $b=c$ в сферу.

Подвергая эллипсоид вращения (1) равномерному растяжению в направлении оси X таким образом, чтобы абсцисса каждой его точки изменилась в отношении $a:b$ (при $a<b$ растяжение переходит в сжатие), а две другие ее координаты оставались бы неизменными, мы превратим



Черт. 134.

эллипсоид вращения в *трехосный эллипсоид*, изображаемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (2)$$

Отрезки a, b, c носят название „полуосей" эллипсоида.

Сечения эллипсоида вращения (1) плоскостями, параллельными плоскости XY, дают круги, а плоскостями, параллельными плоскостям YZ и XZ, — эллипсы. У трехосного же эллипсоида (2) эллипсы получаются и при пересечении его плоскостями, параллельными плоскости XY.

Упражнения.

1. Эллипсоид вращения $\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{50^2}+\frac{z^2}{20^2}=1$ (размеры в миллиметрах) пересечен плоскостями $z=0$, $z=5$, $z=10$, $z=15$, $z=20$, кривые пересечения спроектированы на плоскость XY. Написать уравнения этих проекций и вычертить их, проставив около каждой число, показывающее высоту над плоскостью XY соответствующего сечения. Обратить внимание на то, насколько наглядно такой *план в горизонталях* изображает поверхность.

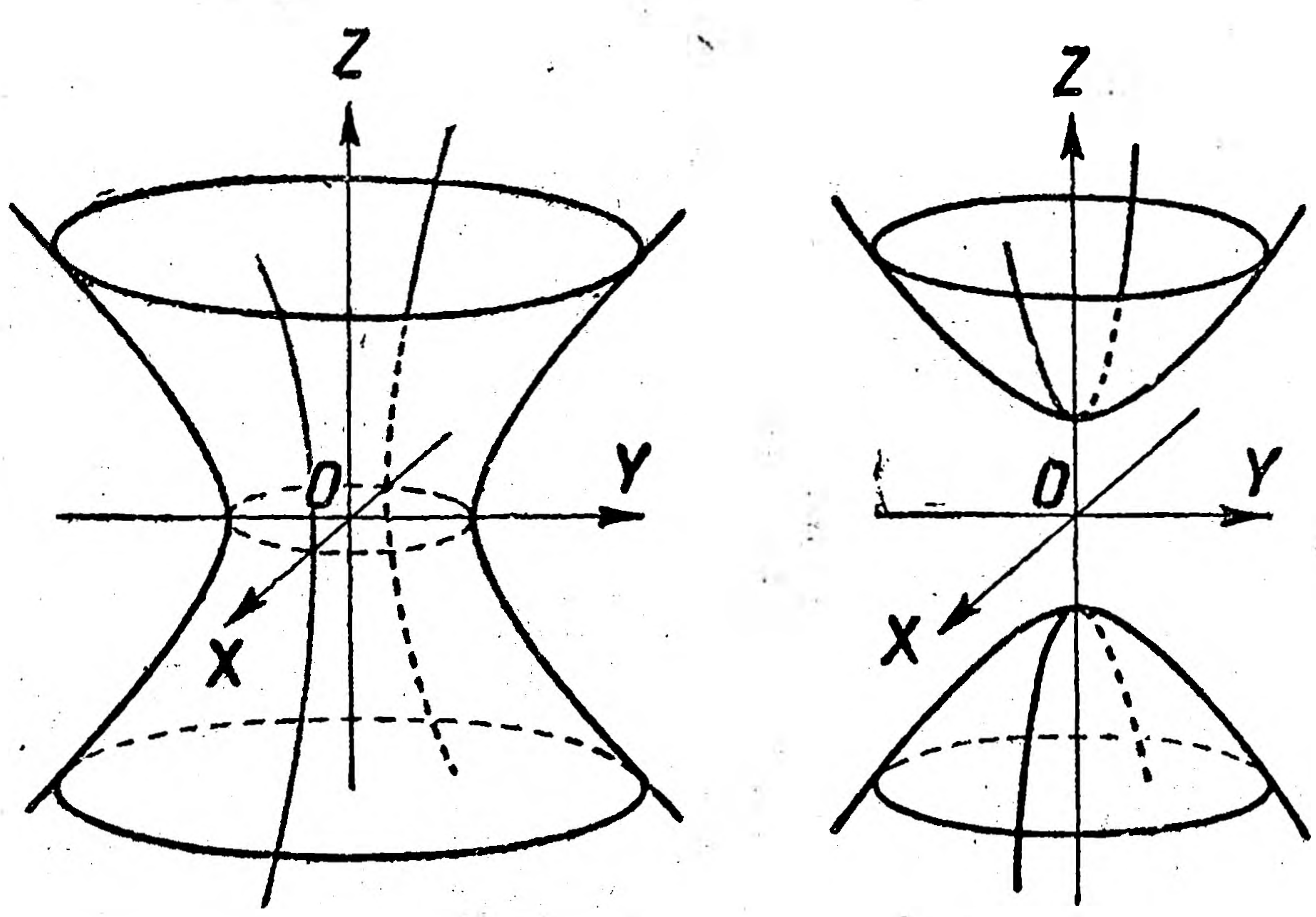
2. Та же задача для эллипсоида $\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{50^2}+\frac{z^2}{100^2}=1$, пересекаемого плоскостями $z=0$, $z=20$, $z=40$, $z=60$, $z=80$, $z=100$.

3. Перенеся 1 из правой части уравнения (2) налево, выяснить, какой знак получает левая часть уравнения при замене текущих координат координатами любой точки внутри или вне эллипсоида.

4. Найти координаты точки пересечения эллипсоида (2) с осями координат.

5. Показать, что точка с координатами $x=a\cos t\cos\tau$, $y=b\cos t\sin\tau$, $z=c\sin t$, где t и τ имеют произвольные значения, лежит на эллипсоиде (2), и обратно, что координаты любой точки этого эллипсоида можно получить по этим формулам (при надлежащем выборе значений t и τ).

§ 73. Гиперболоиды вращения (однополостный и двуполостный). Гиперболоиды трехосные. Вращая эллипс около одной из его осей, мы получили эллипсоид вращения. Вращая гиперболу около одной из ее осей, получим новую поверхность, называемую *гиперболоидом вращения*, причем надо различать *однополостный* гиперболоид, получаемый при вращении гиперболы около ее мнимой оси, и *двуполостный* гиперболоид, который дает вращение гиперболы около вещественной ее оси (черт. 135). Как легко видеть, из любой точки первого можно попасть в любую другую его точку, двигаясь только по его поверхности, на втором же это возможно не всегда: двуполостный гиперболоид состоит из двух раздельных полостей, расположенных, как показано на чертеже 135, выше и ниже плоскости XY.



Черт. 135.

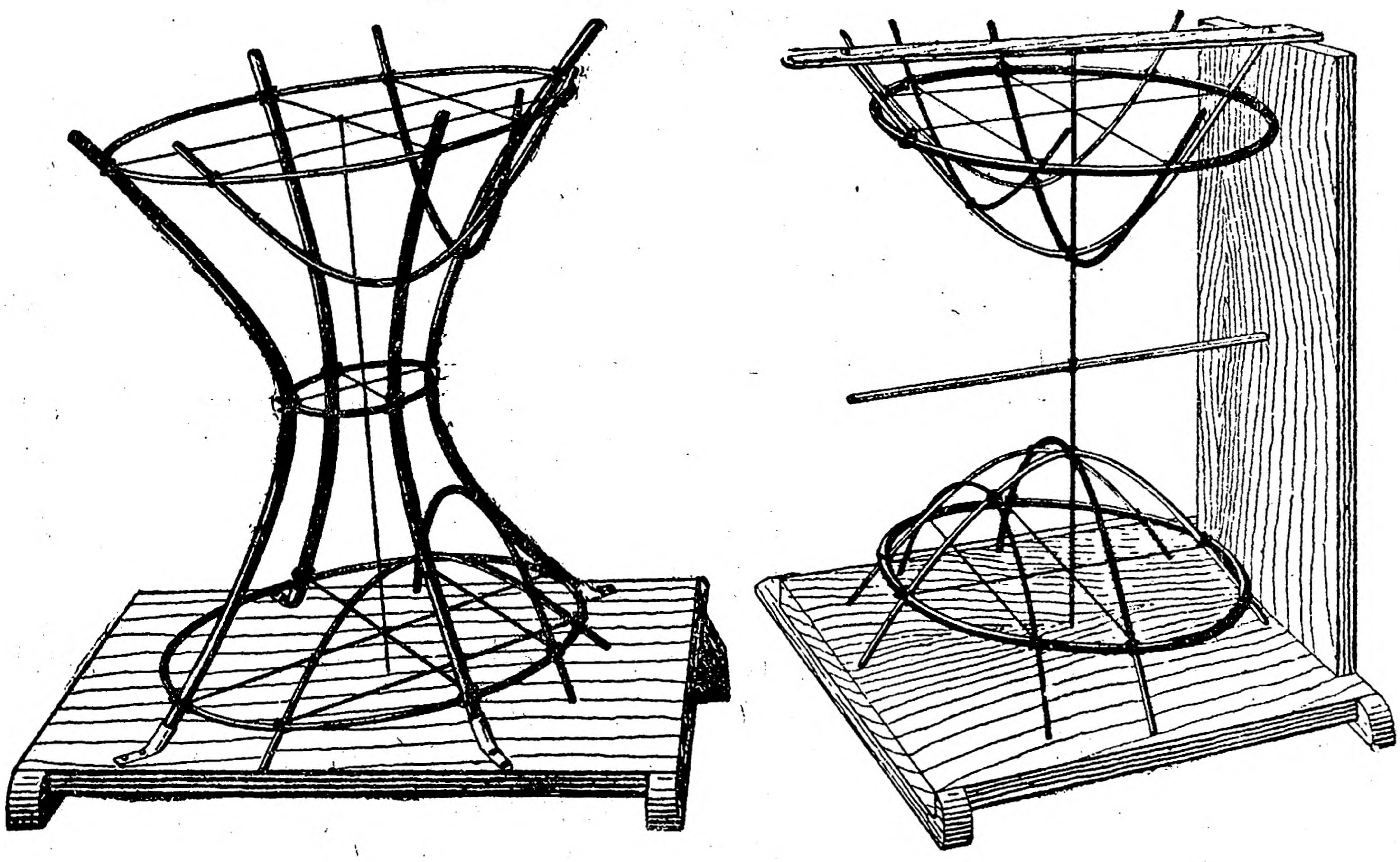
Чтобы вывести уравнения гиперболоидов, возьмем гиперболы $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ и $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ и повторим рассуждения, какими мы пользовались при выводе уравнения эллипсоида вращения. В результате мы получим уравнение однополостного гиперболоида вращения

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

и уравнение двуполостного гиперболоида вращения

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{2}$$

Произведя равномерное растяжение обеих этих поверхностей в направлении X так, чтобы абсцисса каждой их точки изменилась



Черт. 135 bis.

в отношении $a:b$, а две другие ее координаты остались неизменными, мы получим два трехосных гиперболоида с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3}$$

выражающим однополостный гиперболоид, и уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{4}$$

выражающим двуполостный гиперболоид.

(На черт. 135 bis изображены модели поверхностей двух гиперболоидов.)

Пересекая однополостный гиперболоид (3) плоскостью $z=h$, получим в сечении эллипс, уравнение проекции которого на плоскости XY есть $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$, где $a'=a\sqrt{1+h^2:c^2}$, $b'=b\sqrt{1+h^2:c^2}$. Наименьшие размеры этот эллипс имеет при $h=0$ („горловой эллипс" однополостного гиперболоида), по мере удаления от плоскости XY размеры этого эллипса неограниченно возрастают. Пересечение того же гиперболоида (3) плоскостью $x=h$ при $-a<h<+a$ дает гиперболу, уравнение которой (после проектирования на плоскость YZ) есть $\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1$, где $b'=b\sqrt{1-h^2:a^2}$, $c'=c\sqrt{1-h^2:a^2}$, а при $|h|>a$ гиперболу $\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=-1$, где $b'=b\sqrt{h^2:a^2-1}$, $c'=c\sqrt{h^2:a^2-1}$.

При $h=\pm a$ гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых, выражаемых (после проектирования на плоскость YZ) уравнением $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. То же получается и в пересечении гиперболоида плоскостью $y=h$.

Читателю предлагается самому рассмотреть различные сечения гиперболоида (4) плоскостями, параллельными плоскостям координат.

Упражнения.

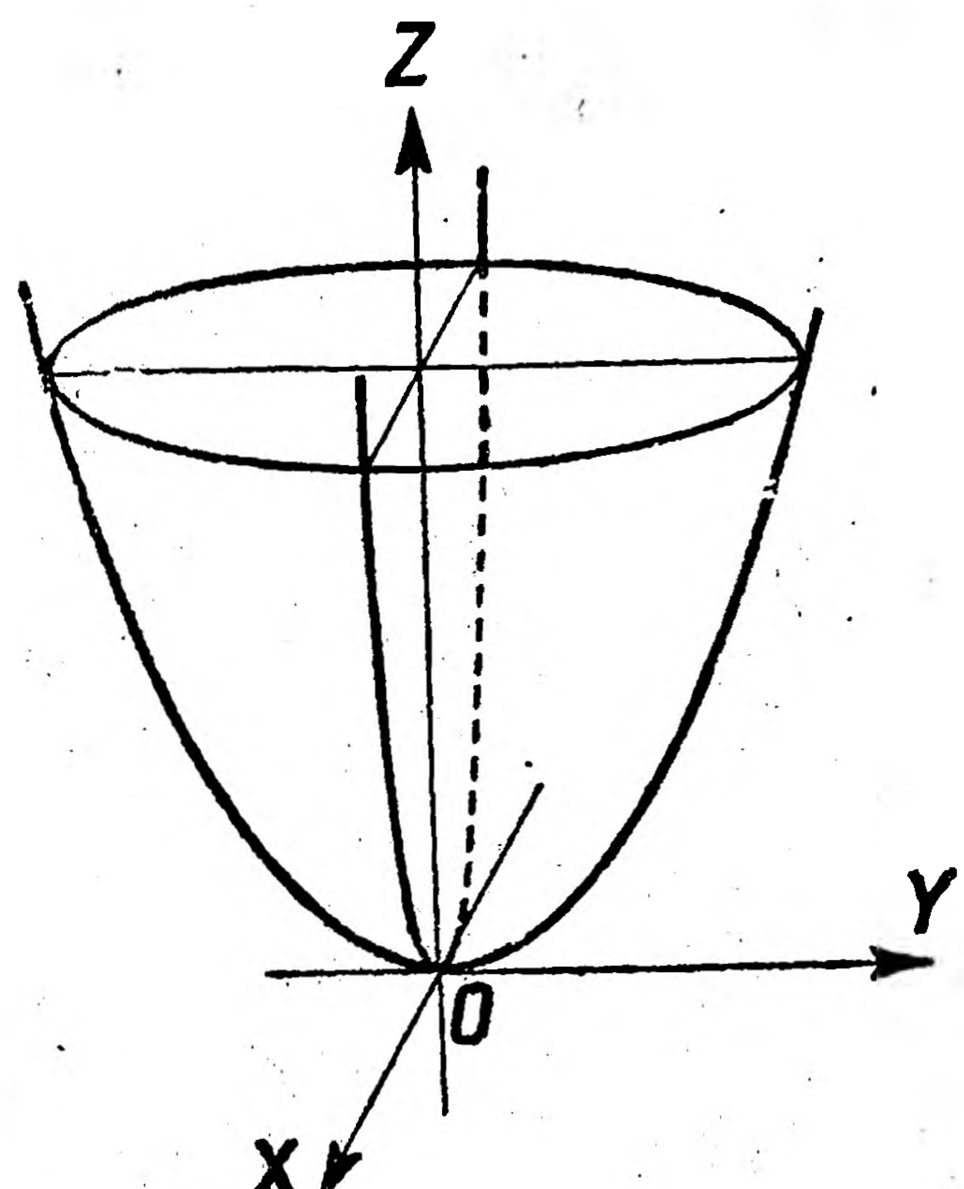
1. Однополостный гиперболоид вращения $\frac{x^2}{20^2}+\frac{y^2}{20^2}-\frac{z^2}{10^2}=1$ пересечен плоскостями $z=0$, $z=10$, $z=20$, $z=30$, $z=40$, $z=50$ *мм*, кривые пересечения спроектированы на плоскость XY. Написать уравнения этих проекций и вычертить их.

2. Та же задача для двуполостного гиперболоида $\frac{x^2}{20^2}+\frac{y^2}{20^2}-\frac{z^2}{10^2}=-1$ и тех же плоскостей.

3. Перенося все члены уравнений (3) и (4) налево, выяснить, какой знак получают эти левые части уравнений при замене текущих координат координатами точки, расположенной по ту или по другую сторону каждой из поверхностей.

§ 74. Параболоид вращения. Эллиптический параболоид. Вращая параболу $y^2=2qz$ (черт. 136) около ее оси симметрии, совпадающей с осью Z, мы получим новую поверхность II порядка — *параболоид вращения*. Ее уравнение

$$\frac{x^2}{q}+\frac{y^2}{q}=2z \tag{1}$$



Черт. 136.

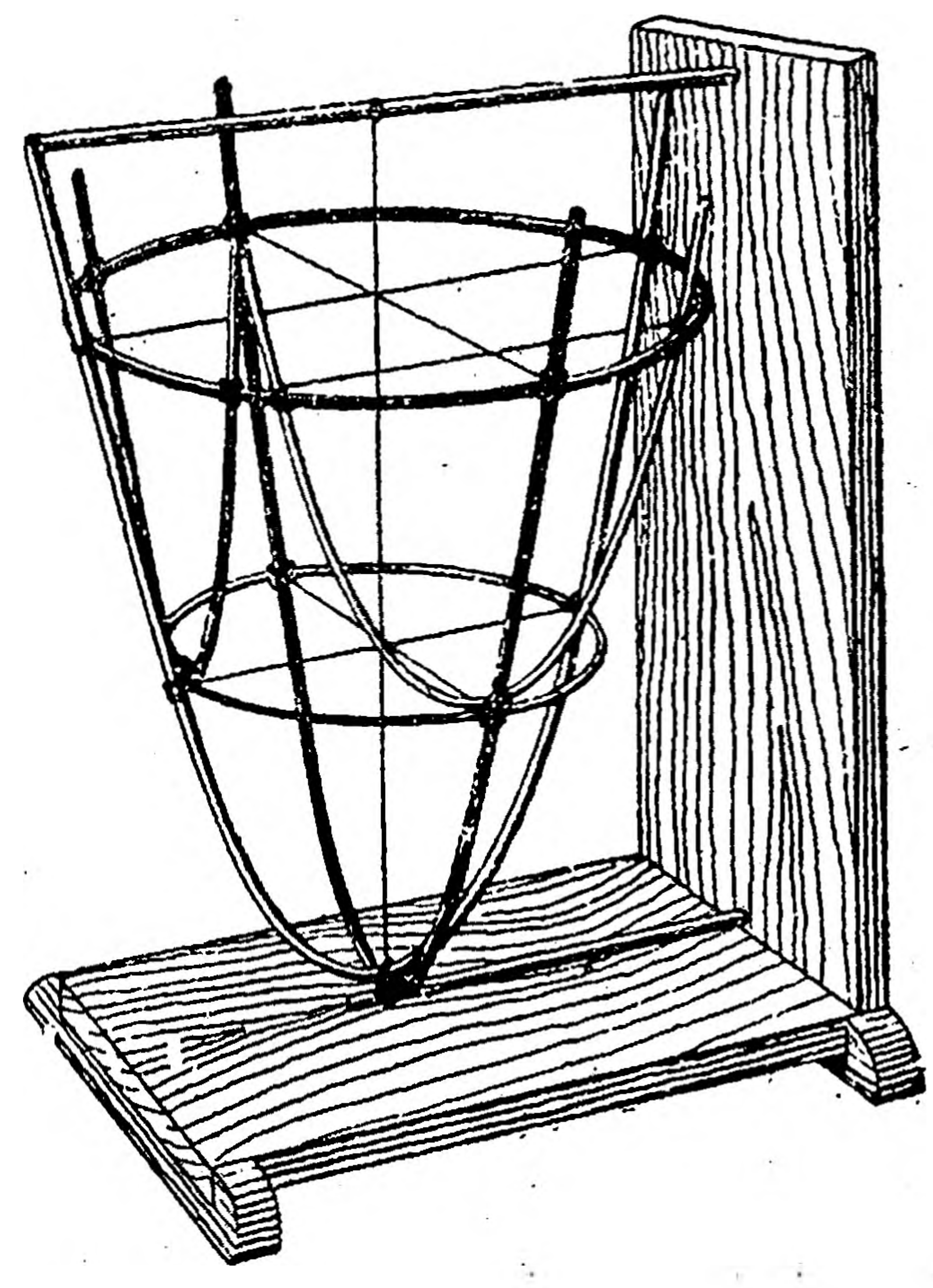
легко получается тем же способом, каким были выведены уравнения эллипсоида и гиперболоидов вращения. Получается поверхность, часть которой, расположенная ниже сечения плоскостью $z=h$, где $(h>0)$, имеет форму открытой сверху чаши. Такую форму имеют поверхности зеркал, применяемых в прожекторах и автомобильных фонарях *(фарах)*. Последние можно видеть на каждом автомобиле.

Подвергая параболоид вращения (1) равномерному растяжению в направлении оси X в отношении $p:q$, мы превратим его в *эллиптический параболоид*, уравнение которого

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z. \tag{2}$$

(На черт. 136 bis изображена модель поверхности эллиптического параболоида).

Сечение параболоида (2) плоскостью $z=h$ дает эллипс, проекция которого на плоскость XY имеет уравнение $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$, где $a'=\sqrt{2ph}$, $b'=\sqrt{2qh}$. Размеры этого эллипса тем больше, чем выше мы поднимаемся над плоскостью XY. При $h=0$ эллипс вырождается в точку, а при $h<0$ становится мнимым: ниже плоскости XY точек поверхности нет.



Черт. 136 bis.

Сечение того же параболоида (2) плоскостью $x=h$ дает кривую, уравнение проекции которой на плоскость YZ есть $y^2=2qz-\frac{h^2q}{p}$ и которая, как легко видеть, есть не что иное как парабола с осью симметрии, совпадающей с осью Z, и с вершиной в точке $y=0$, $z=\frac{h^2}{2p}$. Параметр этой параболы равен q и не зависит, следовательно, от h. Замечая, что в пересечении параболоида (2) плоскостью XZ получается парабола $x^2=2pz$, можем сказать, что *эллиптический параболоид образуется при таком движении параболы $y^2=2qz$, когда она остается все время в плоскости, параллельной плоскости YZ, а ее вершина движется по параболе $x^2=2pz$.*

Сечения параболоида (2) плоскостями, параллельными плоскости XZ, дают опять подобное же семейство парабол.

Упражнения.

1. Параболоид вращения $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{10}=2z$ пересечен плоскостями $z=0$, $z=10$, $z=20$, $z=30$, $z=40$, $z=50$ *мм*, кривые пересечения спроектированы на плоскость XY. Написать их уравнения и вычертить их.

2. Перенеся все члены уравнения (2) налево, выяснить, какой знак имеет левая его часть при замене текущих координат координатами точки, расположенной по ту или другую сторону поверхности.

3. Крыша круглого паровозного здания имеет форму параболоида вращения. Написать уравнение ее поверхности, если поперечник здания d, высота стен h, высота самой высокой точки крыши над уровнем земли H. За начало координат принять центр круга, лежащего в основании здания, ось Z направить вертикально вверх.

§ 75. Гиперболический параболоид. Если в уравнении эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ изменить знак между двумя членами левой части на обратный (предполагая, как и раньше, числа p и q положительными), то получается уравнение

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \qquad (1)$$

выражающее совершенно иную поверхность — так называемый *гиперболический параболоид*. Чтобы составить о нем представление, будем опять пересекать поверхность плоскостями, параллельными каждой из координатных плоскостей.

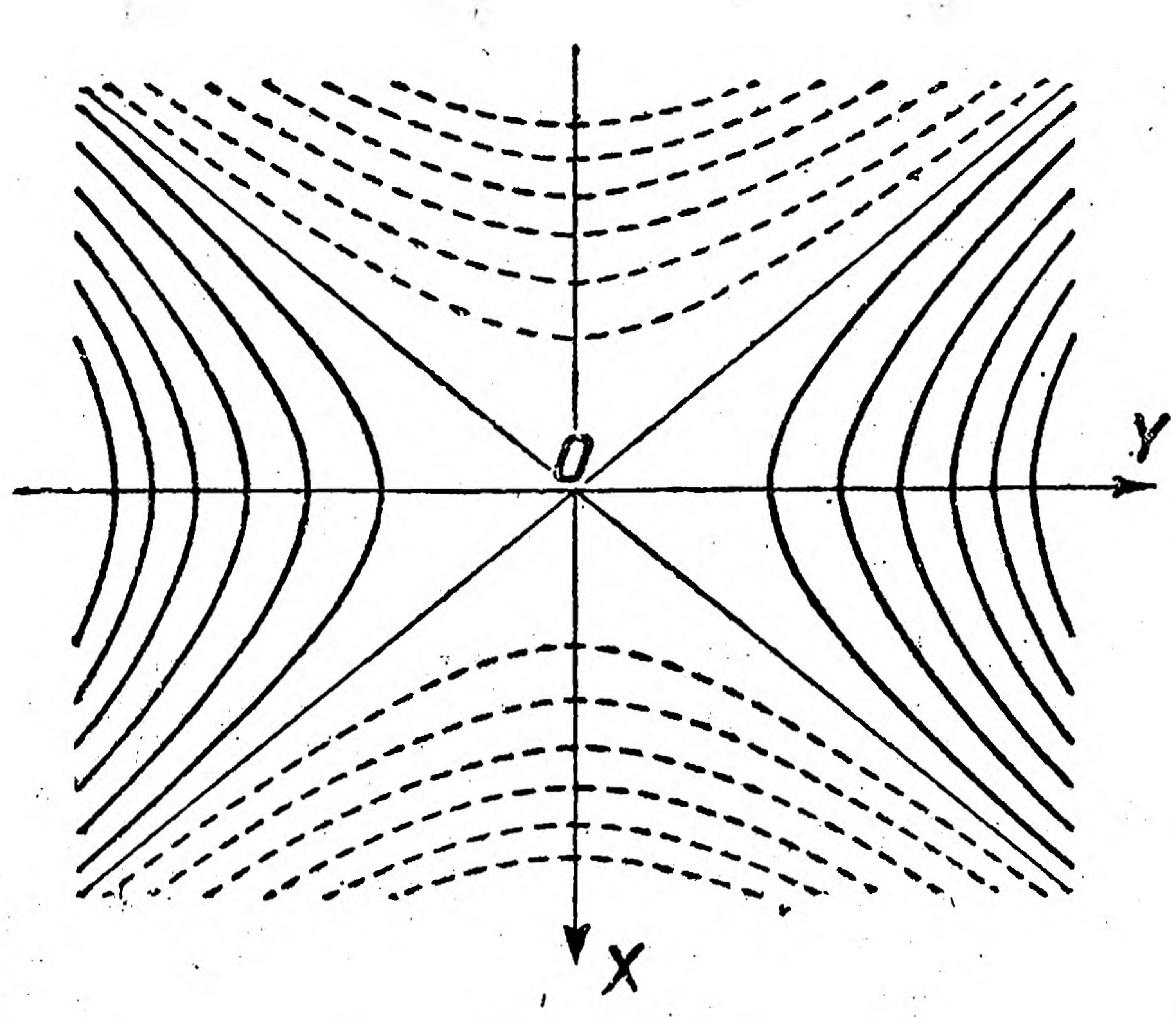
Полагая $z=h$, видим, что всякая плоскость, параллельная плоскости XY и расположенная выше ее на $h>0$, пересекает поверхность (1) по гиперболе $\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1$, где $a'=\sqrt{2ph}$, $b'=\sqrt{2qh}$. Размеры осей этих гипербол по мере удаления от плоскости XY неограниченно растут, причем вещественная ось остается параллельной оси X, мнимая — оси Y. При $h=0$ гипербола вырождается в пару прямых $y=\pm x\sqrt{q:p}$. Опускаясь ниже плоскости XY, т. е. делая h отрицательным, опять получим семейство гипербол, но направления вещественной и мнимой осей каждой из них будут теперь уже иными: вещественная ось будет параллельна оси Y, мнимая — оси X, как показывает уравнение

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=-1,$$

где

$$a'=\sqrt{2p(-h)},\quad b'=\sqrt{2q(-h)}.$$

Все гиперболы, полученные как при $h>0$, так и при $h<0$, имеют один и тот же угол между асимптотами, так как $b':a'=\sqrt{q:p}$ при всех значениях h. Поэтому, проектируя все гиперболы на плоскость XY, получим *семейство* гипербол с общими асимптотами, совпадающими с теми двумя прямыми, по которым плоскость XY пересекает поверхность. На чертеже 137 изображен план поверхности $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=2z$ в горизонталях, причем гиперболы, получаемые при $h>0$, вычерчены прерывистыми линиями. Рассматривая поверхность сверху, т. е. помещая глаз в одну из точек положительной оси Z, и считая, что ось X направлена, как на географических картах, на юг, а ось Y на восток, можем сказать, что при движении по поверхности из точки O на запад и на восток имеет место *спуск* (все увеличивающейся крутизны), а при движении на север и на юг — *подъем* (тоже все увеличивающейся крутизны). Следовательно, точка O находится на *седловине* поверхности.



Черт. 137.

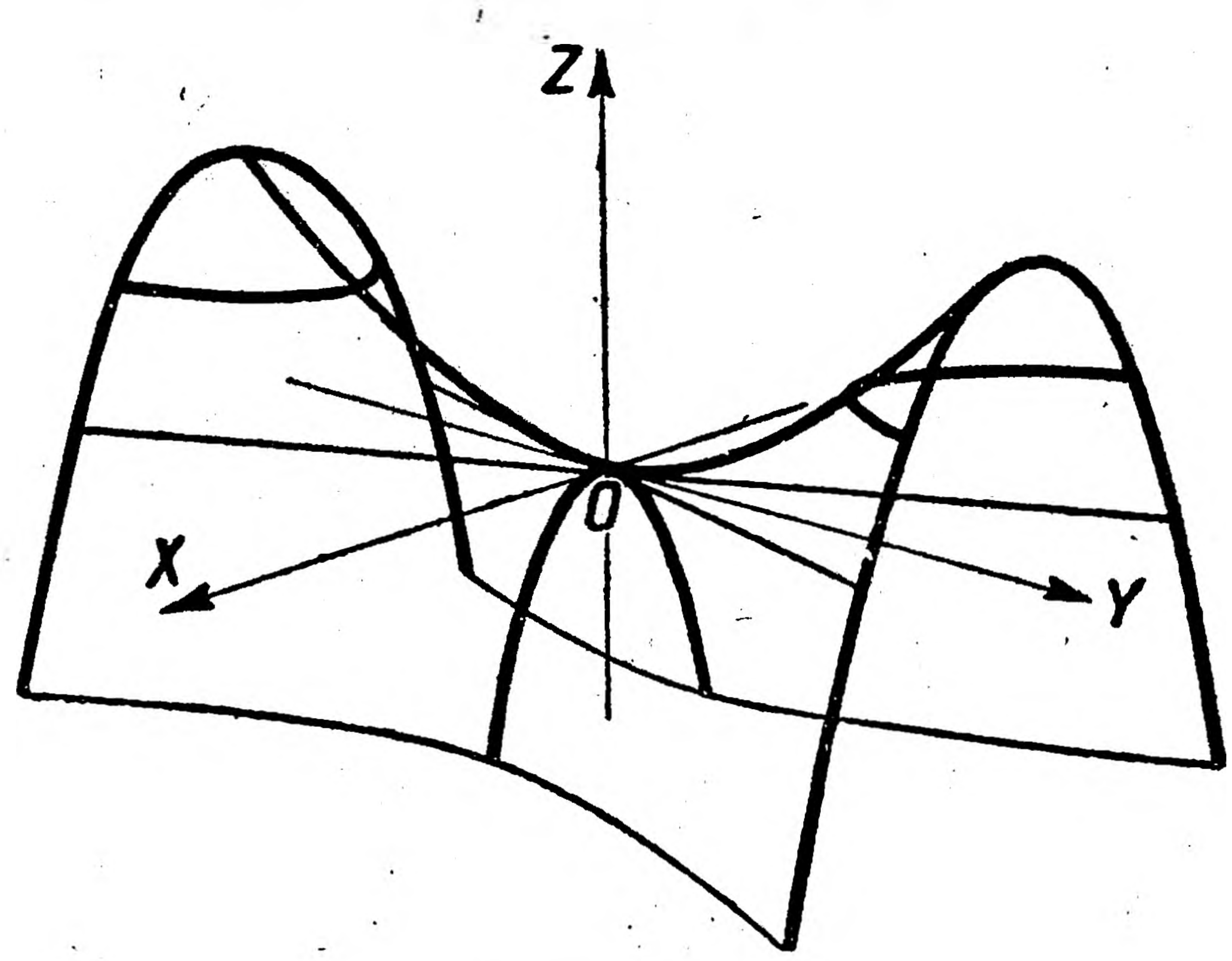
Возьмем далее плоскость $x=h$ и рассмотрим ее пересечение с поверхностью (1). Получается семейство парабол, выражаемых уравнением $y^2=-2qz+qh^2:p$. Ось симметрии каждой такой параболы совпадает с осью Z, а вершины находятся в точке $x=h$, $y=0$, $z=h^2:(2p)$. Отрицательный знак параметра q указывает на то, что ветви каждой такой параболы идут не вверх, а вниз (по направлению отрицательной оси аппликат). Так как поверхность (I) пересекает плоскость XZ по параболе $x^2=2pz$, то можно сказать, что *гиперболический параболоид образуется при таком движении параболы $y^2=-2qz$, когда она остается все время в плоскости, параллельной плоскости YZ, а ее вершина движется по параболе $x^2=2pz$.* Разница в процессах образования эллиптического и гиперболического параболоидов заключается только в том, что в первом случае обе параболы (образующая и направляющая) имеют бесконечные ветви, направленные в одну и ту же сторону, например в сторону возрастающих значений z, а во втором в разные: ветви образующей параболы направлены вниз, а направляющей — вверх.

Сечения поверхности (1) плоскостями $y=h$ дают тоже семейство парабол, но теперь ветви образующей параболы $x^2=2pz$ направлены вверх, а направляющей параболы $y^2=-2qz$ вниз.

Уравнение

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=-2z, \qquad (2)$$

отличающееся от уравнения (1) лишь знаком члена $2z$, выражает ту же поверхность, что и уравнение (1), но расположенную несколько иначе относительно плоскостей координат: поверхность (2) симметрична поверхности (1) относительно плоскости XY. На чертеже 138 дан перспективный вид части гиперболического параболоида (2). В § 95 мы ознакомимся с другим, еще более наглядным способом построения поверхности гиперболического параболоида.



Черт. 138.

Упражнения.

1. Перенеся все члены уравнения (2) налево, выяснить, какой знак получает эта левая часть при замене текущих координат координатами какой-нибудь точки, расположенной по ту или другую сторону поверхности.

2 Исследовать, применяя сечение плоскостями, параллельными координатным плоскостям, поверхность, изображаемую уравнением $xy=kz$, где k — некоторое положительное число.

3. Показать, что поверхность $xy=kz$ есть не что иное как гиперболический параболоид, расположенный относительно координатных осей несколько иначе, чем параболоид, изображаемый уравнением (2).

Указание. Повернуть оси X и Y на угол $\alpha=45°$, сохраняя прежнее направление оси Z и прежнее начало координат.

§ 76. Геометрический смысл уравнения с тремя переменными. В §§ 68—75 мы на ряде примеров убедились, что уравнение с тремя переменными x, y, z выражает некоторую поверхность и что выпадение одной из переменных означает, что эта поверхность есть цилиндрическая с образующими, параллельными той оси координат, которой соответствует отсутствующая координата. Однако возможны и такие случаи, когда уравнение с тремя переменными не имеет никакого геометрического смысла, как уравнение $x^2+y^2+z^2=-1$, или выражает одну лишь точку, как уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$, или некоторую линию, как уравнение $(x-y)^2+(x-z)^2=0$. Действительно, первое из этих уравнений не удовлетворяется координатами никакой точки пространства, второму удовлетворяют координаты лишь одной точки, а именно точки $(a; b; c)$, третьему удовлетворяют координаты всех точек, общих плоскостям $x=y$ и $x=z$, т. е. всех точек прямой, по которой эти плоскости пересекаются. Возможны и различные другие случаи. Вообще говоря, всякая поверхность может быть изображена посредством некоторого уравнения с тремя переменными x, y, z (в частных случаях одна или даже две из трех переменных могут отсутствовать). Следовательно, между тремя координатами одной и той же точки на поверхности должна быть зависимость, выражаемая некоторым уравнением.

Выражая поверхности посредством уравнений, мы получаем тем самым средство для классификации поверхностей. Если уравнение поверхности после всех упрощений сводится к уравнению вида $\sum A_{ikl}\, x^i y^k z^l = 0$, где i, k, l принимают различные натуральные значения, а буква A_{ikl} означает некоторое вещественное число, различное для различных значений i, k, l, то поверхность называется *алгебраической*, притом *порядка* n, если n есть наибольшее значение суммы $i+k+l$ для членов уравнения. Вспоминая то, что было выяснено об уравнениях плоскости, сферы, эллипсоида, гиперболоидов, параболоидов, можем сказать, что *плоскость есть алгебраическая поверхность I порядка, а сфера, эллипсоид, гиперболоиды и параболоиды — алгебраические поверхности II порядка.* Все поверхности не алгебраические носят название *трансцендентных*. Такова, например, поверхность цилиндра, изображаемого уравнением $y=\sin x$ (образующие параллельны оси Z, направляющая — синусоида в плоскости XY).

Задачей нашей дальнейшей работы является выяснение геометрического смысла всех возможных уравнений 1-й и 2-й степени с тремя переменными и изучение свойств изображаемых ими поверхностей, т. е. *изучение свойств алгебраических поверхностей I и II порядка.*

Упражнения.

1. Выяснить геометрический смысл уравнений $x^2+(y-1)^2=0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, $(x^2+y^2-1)^2+(z-1)^2=0$, $(1-x)\cdot(x^2+y^2+z^2)=0$.

2. Что выражают уравнения $2x+5=0$, $x^2\pm 4=0$, $x^3-3x^2+2x=0$, вообще $f(x)=0$?

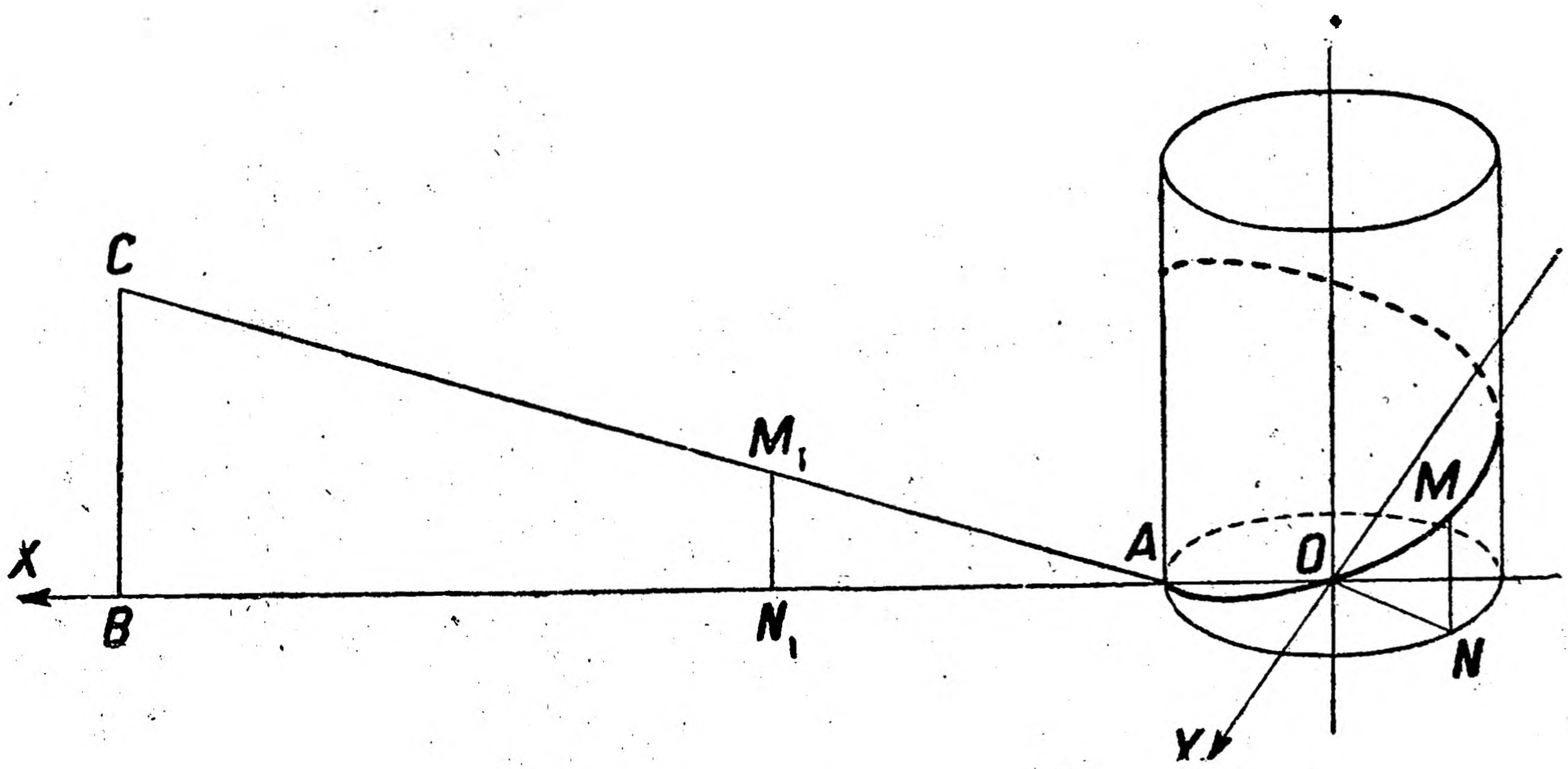
3. Какого порядка поверхность получается при вращении параболы около оси, совпадающей с ее касательной в вершине?

4. Выяснить, будет ли алгебраической или трансцендентной поверхность, получаемая равномерным вращением луча, перпендикулярного к оси Z, около его начальной точки, находящейся на этой оси, если эта начальная точка равномерно же движется по оси Z.

Указание. Взять точку на луче на расстоянии λ от начальной его точки и выразить полярные ее координаты (см. § 67) в зависимости от времени t, прошедшего от начала движения, а затем перейти к декартовым координатам и исключить λ и t.

§ 77. Уравнения линий в пространстве. Система двух уравнений с тремя переменными, выражающая пару поверхностей, может, вообще говоря, удовлетворяться координатами точек, расположенных на обеих поверхностях одновременно, т. е. координатами их точек пересечения. Итак, *система двух поверхностей с тремя переменными выражает, вообще говоря, некоторую линию* (в частных случаях эта линия может вырождаться в одну или несколько точек и даже вовсе не существовать). Так, система из уравнения какой-нибудь поверхности и уравнения плоскости выражает ту линию, по которой эта плоскость пересекает поверхность; выше мы имели целый ряд примеров таких систем. Но в сечении может получиться и кривая *неплоская* (кривая *двоякой кривизны*). Такова, например, линия, выражаемая системой уравнений $x^2+y^2=r^2$, $y^2+z^2=(2r)^2$. Это — линия пересечения двух цилиндров с пересекающимися под прямым углом осями, причем радиус одного вдвое больше радиуса другого.

Обратно, имея какую-нибудь линию в пространстве, безразлично плоскую или двоякой кривизны, мы всегда можем построить пару поверхностей, пересечением которых она является. Сделать это можно множеством способов, а проще всего — проводя через каждую точку линии пару прямых: одну параллельно одной из координатных осей, другую параллельно другой. Написав уравнения двух полученных таким способом цилиндров, мы и будем иметь искомую систему уравнений, выражающую данную линию. Рассмотрим, например, винтовую линию, состоящую из бесчисленного множества последовательных витков, продолжающих друг друга и расположенных на прямом круглом цилиндре.



Черт. 139.

Каждый виток в отдельности получается путем навертывания на цилиндр прямоугольного треугольника ABC (черт. 139), один из катетов которого (AB), равный длине окружности направляющего круга цилиндра, совмещается при навертывании с этим кругом. Гипотенуза AC треугольника, располагаясь по поверхности цилиндра, образует один *виток* винтовой линии. Расположив оси, как показано на чертеже 139, и обозначив радиус OA направляющего круга цилиндра через r, а длину катета BC („шаг винта“) через h, возьмем произвольную точку M полученного витка и рассмотрим полярные ее координаты:

$$\rho=ON=r, \quad \varphi=\angle XON, \quad z=MN=M_1N_1;$$

так как отрезок AN_1 равен длине дуги круга $AN=r\varphi$, то из подобия треугольников AN_1M_1 и ABC имеем пропорцию $z=\frac{h}{2\pi}\varphi$. Переходя к декартовым координатам и применяя формулы

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi,$$

имеем выражения для координат точки $M(x; y; z)$, в зависимости от полярного угла φ:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = (h:2\pi)\,\varphi. \tag{1}$$

Исключая φ из первого и второго уравнений, получаем уравнение цилиндра $x^2 + y^2 = r^2$, проектирующего винтовую линию на плоскость XY. Исключая φ из первого и третьего уравнений, получаем уравнение цилиндра

$$x = r\cos\frac{2\pi}{h}z,$$

проектирующего винтовую линию на плоскость XZ. Таким образом, система уравнений, представляющая винтовую линию, может быть написана в таком виде:

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad x = r\cos(2\pi z:h). \tag{2}$$

Второй из этих цилиндров имеет направляющей косинусоиду, расположенную в плоскости XZ и вьющуюся около оси Z.

Система (1) есть не что иное как *система параметрических уравнений* нашей винтовой линии. Она дает значения всех трех координат x, y, z точки на винтовой линии, в зависимости от параметра φ, изменяющегося для одного витка от 0 до 2π. В механике очень часто пользуются подобными параметрическими уравнениями линий.

Упражнения.

1. Указать геометрический смысл следующих систем уравнений:

(I) $x^2 + y^2 + z^2 = 6^2$, $z = 5$; (IV) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$;

(II) $x^2 + y^2 + z^2 = 6^2$, $z = 2x$; (V) $x^2 + y^2 + z^2 = 6^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$;

(III) $x^2 + y^2 + z^2 = 6^2$, $z^2 + y^2 = 1$; (VI) $x = a\sin 2\pi y$, $x^2 + z^2 = a^2$.

2. Точка M движется с постоянной скоростью v по лучу AB, составляющему углы α, β, γ с осями координат, и в момент $t = 0$ находится в точке $A(x_0; y_0; z_0)$. Найти координаты точки $M(x; y; z)$ для момента t. Исключая t из трех полученных уравнений, найти систему уравнений, изображающих луч (прямую) AB.

Глава IX.

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 78. Исследование общего уравнения 1-й степени с тремя переменными. Различные виды уравнения плоскости. Как мы уже убедились в § 71, *всякая плоскость выражается уравнением*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{1}$$

(где p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость, а α, β, γ — углы направления этого перпендикуляра), т. е. *некоторым уравнением 1-й степени с тремя переменными.* Решим теперь обратную задачу, т. е. выясним, какой геометрический смысл имеет уравнение 1-й степени с тремя переменными общего вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

где коэфициенты A, B, C, D могут иметь какие угодно вещественные значения.

Отметим прежде всего два частных случая: 1) если все четыре коэфициента уравнения (2) равны нулю, то это уравнение удовлетворяется координатами *любой точки пространства*; 2) если $A=B=C=0$, но $D\neq 0$, то уравнение (2) не удовлетворяется координатами ни одной конечной точки пространства и *никакого геометрического смысла не имеет* (ниже мы увидим, что в этом случае возможно толкование уравнения (2) как уравнения бесконечно-удаленной плоскости). Будем в дальнейшем предполагать, что по крайней мере один из трех коэфициентов A, B, C неравен нулю, и покажем, что в этом случае уравнение (2) всегда можно свести к уравнению (1).

Действительно, умножив все члены уравнения (2) на некоторое постоянное число N, остающееся пока произвольным, мы приведем уравнение (2) к виду (1), если сумеем по данным A, B, C, D найти значение N, α, β, γ, p, удовлетворяющие уравнениям

$$AN=\cos\alpha,\ BN=\cos\beta,\ CN=\cos\gamma,\ DN=-p,$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{3}$$

Эта система 5 уравнений с пятью неизвестными легко решается. Возводя обе части каждого из трех первых уравнений в квадрат и складывая эти уравнения почленно, исключим (в силу последнего уравнения системы) косинусы углов и найдем значение $N=\pm 1:\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Зная N, получаем значения α, β, γ, p по формулам:

$$\cos\alpha=AN,\quad \cos\beta=BN,\quad \cos\gamma=CN,\quad p=-DN. \tag{4}$$

Так как $p\geqq 0$, то знак перед корнем в выражении для N надо брать обратный знаку свободного члена D (если $D=0$, то знак корня безразличен). Формулы (4) однозначно определяют значения углов α, β, γ, каждый из которых заключается между 0 и 180°, а также значение p.

Итак, уравнение (2) при сделанном предположении о коэфициентах A, B, C всегда приводится к виду уравнения (1). Вспоминая геометрический смысл последнего уравнения, получаем теорему: *всякое уравнение I-й степени с тремя переменными, а именно уравнение вида*

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где A, B, C, D — какие угодно вещественные постоянные, выражает плоскость, если только A, B, C не равны одновременно нулю.

Уравнение (1) носит название уравнения плоскости *в нормальном виде* (или *нормального* уравнения плоскости), а уравнение (2) — уравнения плоскости *в общем виде* (или *общего* уравнения плоскости).

Вспоминая уравнение прямой в отрезках на осях (§ 23), пишем по аналогии уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{5}$$

и замечаем, что в силу только что доказанной теоремы оно выражает плоскость, а так как оно удовлетворяется координатами точек $(a;\ 0;\ 0)$, $(0;\ b;\ 0)$, $(0;\ 0;\ c)$, то выражает плоскость, отсекающую от координатных осей отрезки, равные a, b, c. Каждый из этих отрезков отсчитывается от начала координат и имеет знак + или —, смотря по тому, откладывается ли он по положительному или отрицательному направле нию соответствующей оси. Уравнение (5) есть *уравнение плоскости в отрезках на осях.*

Если неограниченно увеличивать один из этих трех отрезков, то соответствующая координата выпадает, и мы получаем уже известное уравнение плоскости, параллельной одной из координатных осей. При бесконечно больших значениях двух из трех отрезков выпадают две координаты, и плоскость становится параллельной одной из координатных плоскостей. Если же бесконечно увеличивать значения всех трех отрезков, то плоскость всеми своими точками неограниченно удаляется от начала, а потому уравнение

$$x:\infty + y:\infty + z:\infty = 1$$

или уравнение

$$0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + D = 0,$$

где $D \neq 0$, есть уравнение *бесконечно-удаленной плоскости.*

Упражнения.

1. Плоскость задана уравнением

$$3x + 4y - 12z + 30 = 0.$$

Найти уравнение этой плоскости в отрезках на осях и в нормальном виде.

2. Тот же вопрос для плоскостей $6x + 8z + 15 = 0$ и $4y + 5 = 0$.

3. Вывести уравнение плоскости как геометрического места точек, равноудаленных от начала координат и от точки ($2p\cos\alpha$; $2p\cos\beta$; $2p\cos\gamma$).

4. Плоскость пересекается с плоскостью XY по прямой $5x - 6y + 12 = 0$, а с плоскостью YZ — по прямой $13y - 6z - 26 = 0$. Найти уравнения этой плоскости.

5. Куб помещен так, что три смежных его ребра совпадают с тремя координатными осями, а вершина, противоположная той, в которой пересекаются эти ребра, лежит на плоскости $2x + 3y + 5z - 30 = 0$. Найти ребро куба.

6. Та же задача для плоскости $2x - 3y + 5z - 30 = 0$.

7. Найти уравнение плоскости в косоугольных координатах, предполагая известными длину p перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, и углы направления α, β, γ этого перпендикуляра.

8. Показать, что уравнение плоскости в отрезках на осях сохраняется и для косоугольных координат.

§ 79. Угол между двумя плоскостями. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Две плоскости, пересекаясь, образуют 4 двугранных угла, попарно равных друг другу. Двугранный угол измеряется, как известно, линейным углом, т. е. углом, образованным двумя перпендикулярами, восставленными на гранях к ребру. Но вместо этого линейного угла можно измерить равный ему угол между перпендикулярами, опущенными из любой точки пространства на обе грани. Удобнее всего опускать эти перпендикуляры из начала координат. Итак, для измерения угла между двумя плоскостями, заданными уравнениями

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1}$$

надо измерить угол θ между перпендикулярами, опущенными на эти плоскости из начала координат. Четыре угла, образуемых пересечением данных плоскостей, равны θ, $\pi - \theta$, θ, $\pi - \theta$.

Угол между перпендикулярами находим по формуле (2) § 64: $\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$, где α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 — их углы направления. Применяя формулы (4) § 78, найдем, что

$$\cos\theta = (AA_1 + BB_1 + CC_1)NN_1,$$

где

$$N = 1 : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$N_1 = 1 : \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}. \qquad (2)$$

Вычисляя по этой формуле, можно брать только абсолютное значеине $\cos\theta$, что даст острый угол между плоскостями.

В случае, если плоскости (1) взаимно-перпендикулярны, $\cos\theta = 0$, а потому

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \qquad (3)$$

Обратно, если это условие соблюдено, $\cos\theta = 0$, $\theta = 90°$, а потому плоскости (1) взаимно-перпендикулярны.

При параллельности плоскостей $\theta = 0, \cos\theta = 1$, а поэтому числитель и знаменатель правой части формулы (2) равны. Освобождаясь от корней, получаем условие

$$(AA_1 + BB_1 + CC_1)^2 = (A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2),$$

которое можно написать в виде

$$(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2 = 0 \text{ [1]}.$$

Но сумма квадратов трех вещественных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них в отдельности равно нулю. Поэтому $AB_1 - BA_1 = 0$, $BC_1 - CB_1 = 0$, $CA_1 - AC_1 = 0$, откуда получаем условие параллельности двух плоскостей (1)

$$A : A_1 = B : B_1 = C : C_1. \qquad (4)$$

Если плоскости (1) параллельны, условие (4) выполняется. Обратно, если условие (4) выполнено, то $A = A_1K$, $B = B_1K$, $C = C_1K$, $N = N_1K$, где K есть общее значение трех отношений (4), а потому $\cos\theta = 1$ и $\theta = 0$, т. е. плоскости параллельны. Итак, условия (4) и (3) необходимы и достаточны для параллельности и перпендикулярности плоскостей (1).

Отметим, что в случае пропорциональности всех четырех пар коэфициентов уравнений (1), т. е. при условии

$$A : A_1 = B : B_1 = C : C_1 = D : D_1 \qquad (5)$$

плоскости (1) сливаются.

Разобрав все случаи взаимного расположения двух плоскостей, выясним, какие случаи могут представиться в расположении трех плоскостей

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (6)$$

Будем предполагать, что в каждом из этих уравнений по крайней мере один из трех первых коэфициентов отличен от нуля, т. е. что

[1] Здесь используется тождество:

$$(AB_1 - BA_1)^2 + (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2 =$$
$$= (A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - (AA_1 + BB_1 + CC_1)^2,$$

известное под названием „тождества Эйлера“ и часто применяемое в вопросах геометрии и механики. В справедливости этого тождества легко убедиться, если перенести второй член правой части налево, а затем разложить левую часть на множители.

среди плоскостей нет ни одной бесконечно-удаленной и что среди этих трех плоскостей нет двух, друг другу параллельных. Последним условием исключается возможность пропорциональности между первыми тремя парами коэфициентов каких-либо двух из уравнений (6). Выясним прежде всего, какому условию должны удовлетворять коэфициенты уравнений (6), чтобы три плоскости образовывали при пересечении трехгранный угол, т. е. чтобы они пересекались в одной точке — вершине этого угла.

Решая совместно три уравнения (6), придем к системе

$$\delta x = \delta_1, \quad \delta y = \delta_2, \quad \delta z = \delta_3, \tag{7}$$

где $\delta = \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix}$, $\delta_1 = -\begin{vmatrix} D, & B, & C \\ D_1, & B_1, & C_1 \\ D_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = -\begin{vmatrix} A, & D, & C \\ A_1, & D_1, & C_1 \\ A_2, & D_2, & C_2 \end{vmatrix}$,

$$\delta_3 = -\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix}.$$

Будем различать три случая:

Случай 1. $\delta \neq 0$. Система (7), а следовательно, и система (6) имеют одну единственную систему корней $x = \delta_1 : \delta$, $y = \delta_2 : \delta$, $z = \delta_3 : \delta$, *плоскости* (6) *пересекаются в одной точке и образуют трехгранный угол.*

Случай 2. $\delta = 0$, но по крайней мере один из определителей δ_1, δ_2, δ_3 отличен от нуля. Система (7), а следовательно, и система (6) не удовлетворяются координатами никакой точки (конечной), *плоскости* (6) *ни одной конечной общей точки не имеют*, что возможно лишь при параллельности одной из них прямой, по которой пересекаются две другие, так как быть параллельными плоскости согласно предположению не могут.

Случай 3. $\delta = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. Система (7) удовлетворяется координатами любой точки пространства, система (6) имеет бесконечное множество корней, *плоскости (6) имеют бесконечное множество общих точек.* Так как возможность совпадения всех трех плоскостей, а также любых двух из них согласно предположению исключена, то возможно лишь пересечение всех трех плоскостей по одной прямой, все точки которой и являются их общими точками. Взяв какие-нибудь два из этих уравнений (6), хотя бы первое и второе, выберем пару переменных, коэфициенты которых не пропорциональны (такая пара должна быть, так как иначе плоскости были бы параллельны). Положим, что $A : A_1$ не равно $B : B_1$, а потому в качестве этой пары переменных берем x и y. Решая систему

$$Ax + By + (Cz + D) = 0, \quad A_1x + B_1y + (C_1z + D_1) = 0$$

относительно x и y, получим для них выражения через z:

$$x = (Pz + Q) : R, \quad y = (P_1z + Q_1) : R, \tag{8}$$

где $P = \begin{vmatrix} B, & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}$, $P_1 = \begin{vmatrix} C, & A \\ C_1, & A_1 \end{vmatrix}$, $Q = \begin{vmatrix} B, & D \\ B_1, & D_1 \end{vmatrix}$, $Q_1 = \begin{vmatrix} D, & A \\ D_1, & A_1 \end{vmatrix}$,

$$R = \begin{vmatrix} A, & B \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix}.$$

Подставляя выражения (8) в уравнение третьей плоскости, убеждаемся, что последнее удовлетворяется тождественно, так как приводится к виду $\delta z + \delta_3 = 0$ или, согласно предположению, $0z + 0 = 0$. Таким образом, придавая z произвольные значения, мы получаем по формулам (8) координаты бесчисленного множества точек, расположенных в пересечении всех трех плоскостей, т. е. на одной прямой линии.

Упражнения.

1. Найти все четыре двугранных угла, образуемых пересечением плоскостей $12x - 3y - 4z + 4 = 0$, $9x + 12y - 20z - 18 = 0$.

2. Указать такие значения a и b, при которых плоскости $ax + by - 5z + 16 = 0$ и $2x - 4y + 2z - 5 = 0$ параллельны.

3. Какое значение должен иметь коэфициент a в уравнении $ax - 4y + 5z + 1 = 0$, чтобы изображаемая им плоскость была перпендикулярна к плоскости

$$2x + y - 3z = 0?$$

4. Плоскость проходит через начало координат и параллельна плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Найти ее уравнение.

5. Плоскость проходит через ось X и перпендикулярна к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Найти ее уравнение.

6. Выяснить, как расположены друг относительно друга плоскости I, II, III, плоскости I, II, IV, плоскости I, II, V, плоскости I, II, VI из числа следующих:

(I) $2x - 3y + 5z - 1 = 0$;	(IV) $x - 4y + 7z - 5 = 0$;
(II) $x + y - 2z + 4 = 0$;	(V) $x - 4y + 7z - 1 = 0$;
(III) $3x - y - z + 2 = 0$;	(VI) $4x - 6y + 10z - 5 = 0$.

7. Вывести условия параллельности двух плоскостей, исходя из формул (4) § 78.

§ 80. Уравнения плоскостей, проходящих через 1, 2, 3, 4 данных точки. Если требуется провести плоскость через данную точку $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$, то берем уравнение плоскости в общем виде $Ax + By + Cz + D = 0$ и пишем условие того, что данная точка лежит на этой плоскости, а именно $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Вычитая второе из первого, освобождаемся от одного из коэфициентов (D) и имеем уравнение искомой плоскости в виде

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \tag{1}$$

где коэфициенты A, B, C совершенно произвольны (исключается лишь одновременное обращение в 0 всех трех коэфициентов). Так как все эти коэфициенты можно разделить на один из них, не равный нулю, то можно сказать, что уравнение плоскости, проходящей через данную точку, содержит два произвольных параметра — отношения двух из коэфициентов A, B, C к третьему. При всевозможных значениях этих отношений уравнение (1) изобразит все плоскости, проходящие через точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, или, как говорят, всю *связку* плоскостей с *центром* в этой точке.

Чтобы получить уравнение плоскости, проходящей через две данных точки $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, берем уравнение связки (1) и выражаем, что плоскость связки проходит через вторую из данных точек:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0. \tag{2}$$

Последнее уравнение позволяет выразить один из трех коэфициентов A, B, C в зависимости от двух других, и после его подстановки в уравнение (1) мы получим уравнение искомой плоскости с одним произвольным параметром, которым будет служить отношение этих двух оставшихся коэфициентов. Бесчисленное множество плоскостей, проходящих через две данных точки, составляет так называемый *пучок* плоскостей.

Возьмем теперь три точки $M_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$, где $i=1,\ 2,\ 3$, и найдем уравнение плоскости, проходящей через них. Для этого надо выбрать значения коэфициентов A, B, C, D так, чтобы удовлетворить трем уравнениям $Ax_i+By_i+Cz_i+D=0$, где $i=1,\ 2,\ 3$. Считая один из коэфициентов, например D, заданным произвольно, находим в зависимости от него остальные три и получаем $A=-D\Delta_1:\Delta$, $B=-D\Delta_2:\Delta$, $C=-D\Delta_3:\Delta$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 1, & y_1, & z_1 \\ 1, & y_2, & z_2 \\ 1, & y_3, & z_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} x_1, & 1, & z_1 \\ x_2, & 1, & z_2 \\ x_3, & 1, & z_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Подставляя эти значения для A, B, C в уравнение $Ax+By+Cz+$ $+D=0$, получим после упрощений

$$x\Delta_1+y\Delta_2+z\Delta_3-\Delta=0. \tag{3}$$

Левую часть этого уравнения можно представить в виде определителя IV порядка:

$$\begin{vmatrix} x\,, & y\,, & z\,, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{4}$$

Приведенный вывод уравнений (3) и (4) предполагает, что $\Delta\neq 0$. Если же $\Delta=0$, то надо взять за известное число не коэфициент Δ, а один из трех других и выразить остальные через него. Это возможно, если хотя бы один из трех остальных определителей Δ_1, Δ_2, Δ_3 отличен от нуля и приводит в конце концов к тому же уравнению (3). Если же $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, то указанный вывод невозможен. Но в этом случае, как легко видеть, основываясь на формуле (7) § 26, три данных точки M_i лежат на одной прямой, и задача наша сводится к предыдущей (к проведению плоскости через две данных точки).

Если требуется провести плоскость через четыре данных точки $M_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$, где $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, то проводим плоскость через любые три из них и выясняем, будет ли она проходить через четвертую данную точку или нет. Подставляя координаты точки M_4 в уравнение (4), получим условие расположения четырех данных точек на одной плоскости

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

Если 4 данных точки лежат на одной плоскости, условие (5) выполняется. Обратно, если условие (5) выполняется, точки M_i лежат на одной плоскости.

Упражнения.

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(1; -1; 2)$ и параллельной плоскости $2x - 3y - z = 0$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $(1; -1; 2)$ и $(2; 0; -1)$ и перпендикулярной к плоскости $x + y - z = 0$.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $(1; -1; 2)$, $(2; 0; 1)$, $(0; 1; 3)$.

4. Указать такое значение для a, при котором точка $(a; 1; 0)$ лежит на плоскости предыдущего упражнения.

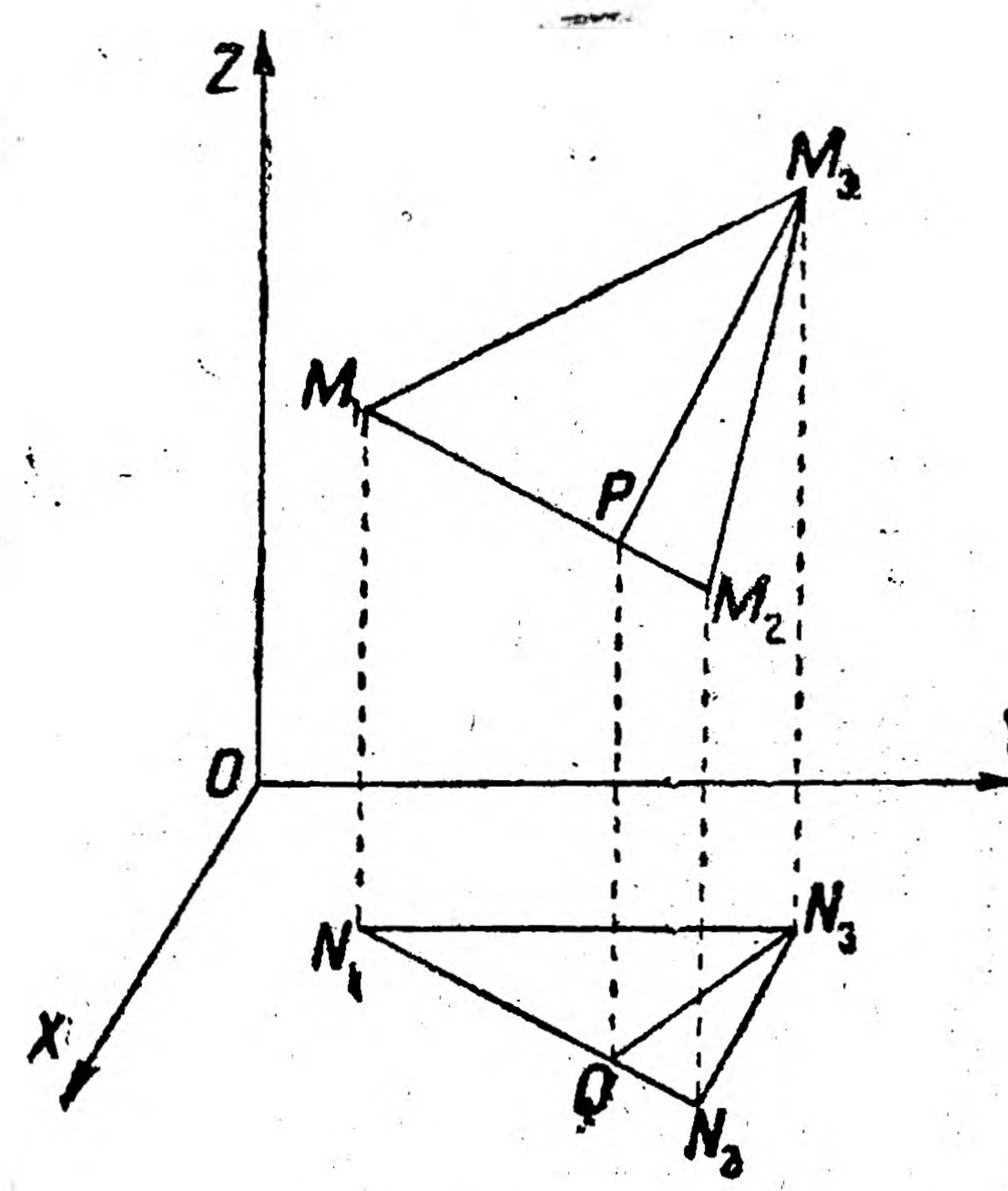
5. Показать, что уравнение $\mu(Ax + By + Cz + D) + \nu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$ при произвольных значениях μ и ν выражает любую плоскость пучка плоскостей, проходящих через прямую пересечения плоскостей $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$.

6. Написать уравнение любой плоскости пучка плоскостей, проходящих через точку пересечения трех плоскостей, данных их общими уравнениями.

§ 81. Расстояние от точки до плоскости. Площадь треугольника. Объем тетраэдра. Расстояние от начала координат до данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно $p = \left| D : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \right|$ (формула 4, § 78). Чтобы получить расстояние l от произвольной точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до той же плоскости, воспользуемся вспомогательной системой прямоугольных координат, имеющей те же направления осей, но начало в точке M. Применяя формулы перехода $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, $z = z' + z_0$, переписываем уравнение данной плоскости в виде $Ax' + By' + Cz' + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$ и находим для искомого расстояния формулу

$$l = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \qquad (1)$$

Чтобы дать пример применения этой формулы, найдем объем *тетраэдра* (четырехгранника, т. е. треугольной пирамиды) по координатам его вершин. Но предварительно покажем, как определяется площадь треугольника с вершинами в точках $M_i(x_i; y_i; z_i)$, где $i = 1, 2, 3$.



Черт. 140

Проектируя на плоскость XY треугольник $M_1M_2M_3$, две вершины которого M_1 и M_2 имеют одну и ту же аппликату $z_1 = z_2$, получим новый треугольник $N_1N_2N_3$, площадь которого S_1 равна площади данного треугольника S, умноженной на косинус угла θ, образуемого плоскостью, в которой расположен данный треугольник, и плоскостью проекций XY. Действительно, проводя плоскость M_3PQN_3, проходящую через точку M_3 перпендикулярно к прямой M_1M_2 (черт. 140), имеем:

$$S = \frac{1}{2} M_1M_2 \cdot PM_3, \quad S_1 = \frac{1}{2} N_1N_2 \cdot QN_3 = \frac{1}{2} M_1M_2 \cdot PM_3 \cos\theta = S\cos\theta.$$

Если же треугольник $M_1M_2M_3$ имеет разные аппликаты у всех вершин, то, проводя через одну из них плоскость, параллельную плоскости XY, мы разобьем его на два треугольника, в каждом из которых есть пара вершин с одинаковыми аппликатами. Обозначая площади этих треугольников буквами U и V, а площади их проекций буквами U_1 и V_1, имеем по доказанному $U_1=U\cos\theta$, $V_1=V\cos\theta$, а потому $S_1=U_1+V_1=(U+V)\cos\theta=S\cos\theta$. Итак, мы доказали теорему: *если треугольник проектируется на какую-нибудь плоскость, то площадь его проекции равна произведению площади данного треугольника на косинус угла между его плоскостью и плоскостью проекций* (можно показать, что эта теорема верна для любой фигуры).

Проектируя треугольник $M_1M_2M_3$ с площадью S на каждую из трех координатных плоскостей и обозначая площади проекций на плоскости XY, YZ, ZX соответственно буквами S_1, S_2, S_3, получим согласно доказанной теореме

$$S_1=S\cos\gamma,\quad S_2=S\cos\alpha,\quad S_3=S\cos\beta, \tag{2}$$

где α, β, γ — углы направления перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $M_1M_2M_3$ (каждый из углов между плоскостями заменяем углом между перпендикулярами к ним). Возводя равенства (2) в квадрат и складывая их почленно, получим в силу формулы (1) § 64 формулу

$$S=+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}. \tag{3}$$

Если требуется найти площадь S треугольника с вершинами в точках $M_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$, где $i=1,\ 2,\ 3$, то вычисляем по известной формуле для площади треугольника (на плоскости) площади S_1, S_2, S_3 проекции треугольника $M_1M_2M_3$ на все три координатные плоскости.

Получаем:

$$S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1\\ x_2, & y_2, & 1\\ x_3, & y_3, & 1\end{vmatrix},\quad S_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1\\ y_2, & z_2, & 1\\ y_3, & z_3, & 1\end{vmatrix},\quad S_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1, & x_1, & 1\\ z_2, & x_2, & 1\\ z_3, & x_3, & 1\end{vmatrix}, \tag{4}$$

а затем находим площадь треугольника S по формуле (3).

Решим теперь задачу об определении объема тетраэдра с вершинами в точках $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$, где $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Как известно из курса элементарной геометрии, объем V тетраэдра (треугольной пирамиды) равен одной трети произведения площади основания S на высоту H. Приняв треугольник $M_1M_2M_3$ за основание тетраэдра, имеем для S выражение через данные координаты по формулам (3) и (4). Уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3, есть согласно формуле (3) § 80 $x\Delta_1+y\Delta_2+z\Delta_3-\Delta=0$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1\\ x_2, & y_2, & z_2\\ x_3, & y_3, & z_3\end{vmatrix},\quad \Delta_1=2S_2,\quad \Delta_2=2S_3,\quad \Delta_3=2S_1.$$

Высота H, т. е. расстояние от точки $M_4(x_4;\ y_4;\ z_4)$ до плоскости $M_1M_2M_3$, равна абсолютному значению частного от деления левой части уравнения этой плоскости, где текущие координаты надо заменить координатами данной точки M_4, на корень квадратный из суммы квадратов первых трех коэфициентов уравнения плоскости:

$$H=\frac{|x_4\Delta_1+y_4\Delta_2+z_4\Delta_3-\Delta:2|}{\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}}=\frac{|x_4S_2+y_4S_3+z_4S_1-\Delta:2|}{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}},$$

а объем тетраэдра

$$V=\frac{1}{6}SH=\frac{1}{3}\left|x_4S_2+y_4S_3+z_4S_1-\Delta:2\right|=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}x_1, & y_1, & z_1, & 1\\ x_2, & y_2, & z_2, & 1\\ x_3, & y_3, & z_3, & 1\\ x_4, & y_4, & z_4, & 1\end{vmatrix}, \tag{5}$$

так как

$$x_4\cdot\begin{vmatrix}y_1, & z_1, & 1\\ y_2, & z_2, & 1\\ y_3, & z_3, & 1\end{vmatrix}+y_4\cdot\begin{vmatrix}z_1, & x_1, & 1\\ z_2, & x_2, & 1\\ z_3, & x_3, & 1\end{vmatrix}+z_4\cdot\begin{vmatrix}x_1, & y_1, & 1\\ x_2, & y_2, & 1\\ x_3, & y_3, & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_1, & y_1, & z_1\\ x_2, & y_2, & z_2\\ x_3, & y_3, & z_3\end{vmatrix}=$$

$$=x_4\cdot\begin{vmatrix}y_1, & z_1, & 1\\ y_2, & z_2, & 1\\ y_3, & z_3, & 1\end{vmatrix}-y_4\begin{vmatrix}x_1, & z_1, & 1\\ x_2, & z_2, & 1\\ x_3, & z_3, & 1\end{vmatrix}+z_4\begin{vmatrix}x_1, & y_1, & 1\\ x_2, & y_2, & 1\\ x_3, & y_3, & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_1, & y_1, & z_1\\ x_2, & y_2, & z_2\\ x_3, & y_3, & z_3\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}x_1, & y_1, & z_1, & 1\\ x_2, & y_2, & z_2, & 1\\ x_3, & y_3, & z_3, & 1\\ x_4, & y_4, & z_4, & 1\end{vmatrix}.$$

В зависимости от расположения точек M_i формула (5) дает V со знаком $+$ или $-$. Понятно, что следует брать лишь абсолютное значение полученного результата.

Упражнения.

1. Найти расстояние точки (1; 2; — 3) до плоскости $3x+4y-12z+24=0$.
2. Найти площадь треугольника с вершинами в точках (3; 4; 2), (5; 1; 0), (1; 0; 4).
3. Найти объем тетраэдра с вершинами в точках (5; 0; 0), (0; 5; 0), (0; 0; 5), (5; 5; 5).

§ 82. Уравнения прямой в пространстве. Имея в пространстве точку $M(a; b; c)$ и проходящую через нее прямую с углами направления α, β, γ, относящимися к одному из двух лучей, составляющих прямую, возьмем точку N на этой прямой и выразим ее координаты x, y, z в зависимости от шести постоянных a, b, c, α, β, γ и от отрезка $MN=t$, который берется со знаком плюс при движении в одну сторону от точки M по прямой и со знаком минус при движении в противоположную сторону. Применяя теорему о длине проекции отрезка, имеем *систему параметрических уравнений прямой:*

$$x=a+t\cos\alpha,\quad y=b+t\cos\beta,\quad z=c+t\cos\gamma. \tag{1}$$

Исключая параметр t, представляем уравнения прямой в виде системы

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}, \tag{2}$$

которую можно назвать *нормальной системой уравнений прямой.*

Система

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{3}$$

легко сводится к системе (2), а потому тоже выражает прямую. Действительно, умножив знаменатели m, n, p на множитель N, удовлетворяющий условию $(mN)^2+(nN)^2+(pN)^2=1$, откуда

$$N=\pm 1:\sqrt{m^2+n^2+p^2},$$

мы можем положить $mN=\cos\alpha$, $nN=\cos\beta$, $pN=\cos\gamma$. Система (3) особенно часто употребляется при решении всевозможных задач на прямую линию.

Каждой из систем (1), (2), (3) может быть изображена любая прямая. Если же известно, что прямая не параллельна плоскости XZ, то, обозначая буквами x_0 и y_0 координаты точки пересечения прямой с этой плоскостью, а буквами k и l отношения $\cos\alpha:\cos\gamma$ и $\cos\beta:\cos\gamma$, где $\cos\gamma$ в силу условия непараллельности прямой плоскости XY отличен от нуля, перепишем уравнения (2) в виде

$$x=kz+x_0,\quad y=lz+y_0. \tag{4}$$

Этой „простейшей“ системой уравнений прямой мы и будем нередко пользоваться, имея в виду сделанную оговорку о непараллельности прямой, ею изображаемой, плоскости XY. Геометрический смысл каждого из уравнений (4) в отдельности легко указать. Уравнение $x=kz+$ $+x_0$ выражает прямую в плоскости XZ и в то же время плоскость, проходящую через данную прямую параллельно оси Y. Уравнение $y=$ $=lz+y_0$ выражает прямую в плоскости YZ и в то же время плоскость, проходящую через данную прямую параллельно оси X. Данная прямая является линией пересечения этих двух плоскостей, а прямые $x=kz+x_0$, $y=lz+y_0$ — ее проекциями на плоскости XZ и YZ.

Прямую линию, параллельную плоскости XY, можно изобразить системой уравнений

$$z=h,\quad y=kx+n. \tag{5}$$

Всякую прямую можно изобразить посредством двух уравнений

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{6}$$

выражающих какие-нибудь две плоскости, проходящие через эту прямую. Если же прямая не параллельна плоскости XY, то, исключая из уравнений (6) сперва y, потом x, получаем уравнения (4), если же параллельна, то исключение y исключает и x, и мы получим уравнение с одним z; исключая далее из уравнений (6) z, мы получим второе из уравнений (5).

Если прямая задана уравнениями (4), то иногда нужно бывает представить ее в виде (2). Дело сводится к вычислению координат a, b, c какой-нибудь ее точки и направляющих косинусов $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Взяв произвольное значение $z=c$, находим $a=kz+x_0$ и $b=lz+y_0$, а затем $x-a=k(z-c)$ и $y-b=l(z-c)$, и пишем уравнения

$$\frac{x-a}{k}=\frac{y-b}{l}=\frac{z-c}{1}.$$

Направляющие косинусы могут отличаться от чисел k, l, 1 лишь множителем N, а потому $kN=\cos\alpha$, $lN=\cos\beta$, $N=\cos\gamma$. Возводя в квадрат и складывая, найдем $N=\pm 1:\sqrt{k^2+l^2+1}$, после чего находим и искомые направляющие косинусы. Выбор того или иного знака перед корнем соответствует выбору одного из двух направлений на прямой.

Чтобы построить прямую по данным ее уравнениям, проще всего указать две какие-нибудь точки, принадлежащие этой прямой, например точки ее пересечения с двумя координатными плоскостями. Так, если прямая задана уравнениями $x = 2z - 5$, $y = -z + 4$, то, полагая $z = 0$, найдем координаты $x = -5$ и $y = 4$ ее „следа" на плоскости XY, т. е. точки ее пересечения с плоскостью XY, а полагая $x = 0$, получим координаты $z = 2{,}5$, $y = 1{,}5$ ее „следа" на плоскости YZ. Зная же, что прямая проходит через точки $(-5;\ 4;\ 0)$ и $(0;\ 1{,}5;\ 2{,}5)$, мы легко построим эту прямую.

Упражнения.

1. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(5; 2; -1)$ и составляющей углы в $45°$, $120°$, $60°$ с осями X, Y, Z (в разных видах).

2. Та же задача для прямой, проходящей через точку $(1;\ 2; -2)$ и составляющей углы в $30°$, $60°$, $90°$ с осями координат.

3. Написать простейшие уравнения прямой, по которой пересекаются плоскости $3x - 4y + z - 8 = 0$, $x + y + z + 2 = 0$.

4. Та же задача для прямой пересечения плоскостей $3x - 4y + z - 8 = 0$ и $6x - 8y + 3z + 1 = 0$.

5. Написать параметрические уравнения прямых, заданных уравнениями $x = z - 1$, $y = 2z + 3$ и $z = 4$, $y = x + 1$.

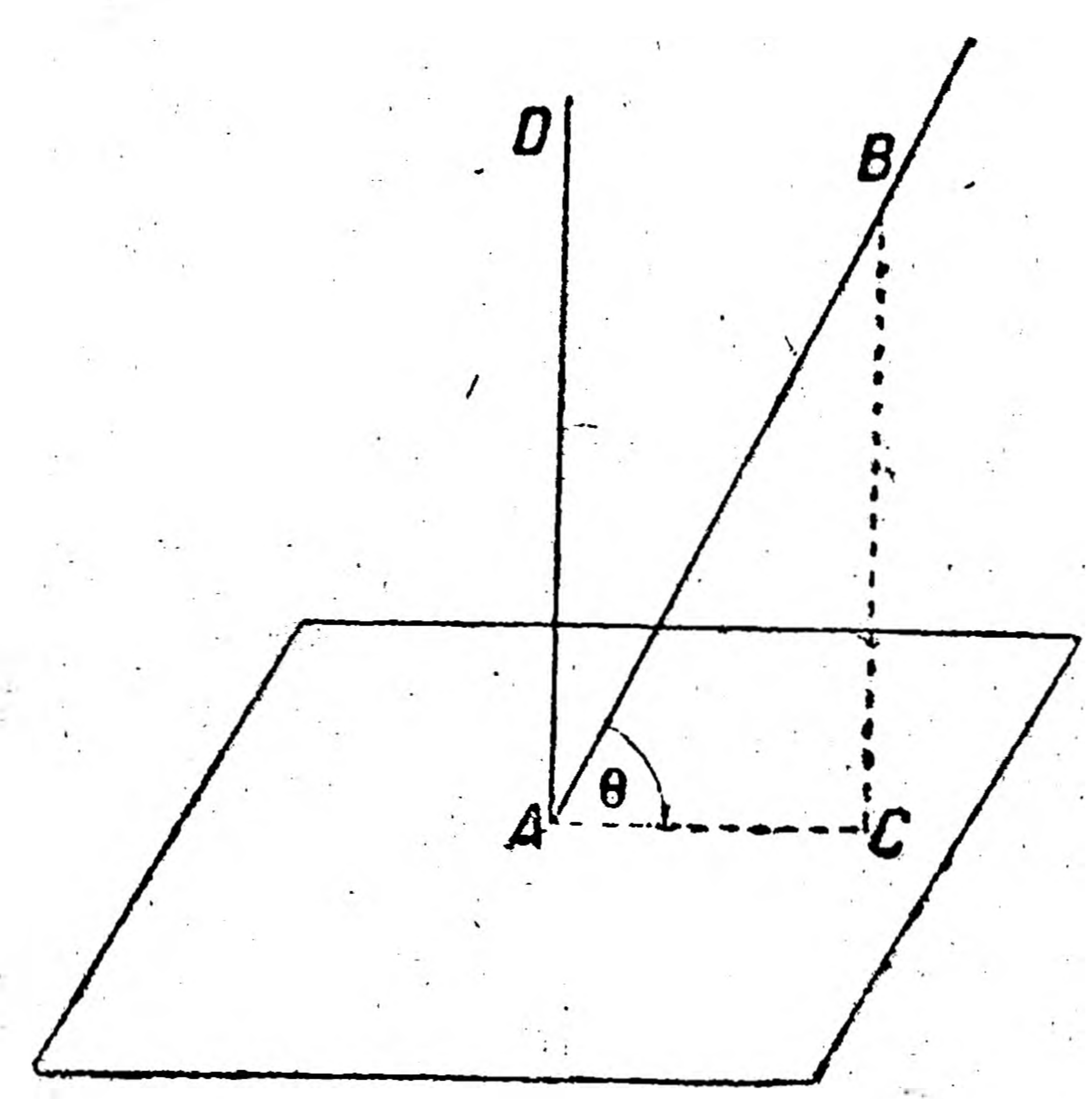
§ 83. Взаимное расположение прямой с плоскостью и двух прямых друг с другом. Найдем угол θ, образуемый плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

и прямой

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \tag{2}$$

Вспоминая, что углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость, замечаем, что угол BAD между прямой AB и перпендикуляром AD к плоскости („нормалью" к плоскости), проведенным через точку A пересечения прямой и плоскости, есть дополнительный по отношению к углу $BAC = \theta$ (черт. 141) и равен $\frac{\pi}{2} - \theta$. Применяя формулу (2) § 64, находим, что $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$, где α, β, γ — углы направления данной прямой AB, определяемые по формулам $\cos\alpha = mN$, $\cos\beta = mN$, $\cos\gamma = pN$, $N = \pm 1 : \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$, а α_1, β_1, γ_1 — углы направления перпендикуляра AD к плоскости, определяемые по формулам $\cos\alpha_1 = N_1A$, $\cos\beta_1 = N_1B$, $\cos\gamma_1 = N_1C$, $N_1 = \pm 1 : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. После подстановки имеем формулу.



Черт. 141.

$$\sin\theta = (Am + Bn + Cp)\ NN_1, \tag{3}$$

где знаки нормирующих множителей N и N_1 берутся с таким расчетом, чтобы вся правая часть была положительной, так как $0 \leq \theta \leq 90°$, $\sin\theta > 0$.

Если прямая параллельна плоскости, то $\theta = 0$, $\sin\theta = 0$, а потому

$$Am + Bn + Cp = 0. \tag{4}$$

Это условие необходимо и достаточно для параллельности прямой и плоскости: если прямая параллельна плоскости, условие (4) выполняется; обратно, если выполняется условие (4), то $\theta=0$ и прямая параллельна плоскости.

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она параллельна нормали к плоскости, а потому углы α и α_1, β и β_1, γ и γ_1 попарно равны. Следовательно, $mN=AN_1$, $nN=BN_1$, $pN=CN_1$, откуда

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}. \tag{5}$$

Таково необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Чтобы найти координаты точки пересечения прямой и плоскости, проще всего переписать систему (2) в параметрической форме $x=a+mt$, $y=b+nt$, $z=c+pt$, где t означает общее значение трех отношений системы (2), и подставить полученные выражения для x, y, z в уравнение (1). Найдя t, определяем затем искомые координаты.

Переходим к задаче об определении угла между двумя прямыми

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},\quad \frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}. \tag{6}$$

Проводя параллельно им два луча через начало координат, найдем угол θ между этими лучами, который и будет искомым углом. Выбирая различными способами положительное направление на каждой из двух данных прямых, мы получим четыре пары лучей, образующих четыре угла, равных попарно θ и $\pi-\theta$. Применяя опять формулу (2) § 64, легко придем к формуле

$$\cos\theta=(mm_1+nn_1+pp_1)NN_1, \tag{7}$$

где $N=\pm 1:\sqrt{m^2+n^2+p^2}$, $N_1=\pm 1:\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}$. Отсюда выводим необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых (6)

$$mm_1+nn_1+pp_1=0. \tag{8}$$

Для вывода условия параллельности прямых (6) достаточно заметить, что раз прямые (6) параллельны, то их углы направления одинаковы, а потому $\cos\alpha=\cos\alpha_1$, $\cos\beta=\cos\beta_1$, $\cos\gamma=\cos\gamma_1$, откуда $mN=m_1N_1$, $nN=n_1N_1$, $pN=p_1N_1$, и следовательно,

$$m:m_1=n:n_1=p:p_1. \tag{9}$$

Прямые (6) могут пересекаться. Выведем, какому условию должны в таком случае удовлетворять 12 величин a, b, c, m, n, p, a_1, b_1, c_1, m_1, n_1, p_1. Обозначая общее значение трех отношений первой из систем (6) через t, а второй через t_1, имеем для определения t и t_1 три уравнения:

$$a+mt=a_1+m_1t_1,\quad b+nt=b_1+n_1t_1,\quad c+pt=c_1+p_1t_1,$$

условия совместности которых выражаются определителем

$$\begin{vmatrix} m, & m_1, & a-a_1 \\ n, & n_1, & b-b_1 \\ p, & p_1, & p-p_1 \end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Такому условию должны удовлетворять коэфициенты уравнений (6), чтобы изображаемые ими две прямых пересекались. Обратно, если условие (9) выполнено, то прямые (6) пересекаются.

Упражнения.

1. Найти угол, образуемый прямой $x = 2z - 1$, $y = -z + 3$ с плоскостью $3x - 2y + 4z - 12 = 0$.

2. В уравнениях $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{p}$ определить p с таким расчетом, чтобы изображаемая ими прямая была параллельна плоскости $3x - 2y + 4z - 12 = 0$.

3. В уравнениях $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{n} = \frac{z-3}{p}$ определить n и p с таким расчетом, чтобы изображаемая ими прямая была перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + 4z - 12 = 0$.

4. Найти точку пересечения прямой $x = 2z - 1$, $y = -z + 3$ и плоскости $3x - 2y + 4z - 12 = 0$.

5. Найти угол между прямыми $x = 2z - 1$, $y = -z + 3$ и $x = 0{,}5z + 1$, $y = z$.

6. Через начало координат провести прямую, параллельную данной прямой $x = 2z - 1$, $y = -z + 3$.

7. Через начало координат провести прямую, перпендикулярную к данным прямым $x = 2z - 1$, $y = -z + 3$ и $x = 0{,}5z + 1$, $y = z$.

8. Пользуясь тождеством Эйлера

$$(A^2 + B^2 + C^2)(m^2 + n^2 + p^2) - (Am + Bn + Cp)^2 = \\ = (An - Bm)^2 + (Bp - Cn)^2 + (Cm - Ap)^2,$$

справедливым для любых значений A, B, C, m, n, p (см сноску на стр. 213), вывести условие (5) непосредственно из формулы (3) при $\theta = 90°$, а также условие (8) непосредственно из формулы (7) при $\theta = 0°$, основываясь на том, что сумма квадратов трех вещественных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них в отдельности равно нулю.

9. Показать, что длина L перпендикуляра, опущенного из точки $(a;\ b;\ c)$ на прямую $x = kz + x_0$, $y = lz + y_0$, равна корню квадратному из дроби

$$\frac{[l(a - x_0) - k(b - y_0)]^2 + (a - ck - x_0)^2 + (b - cl - y_0)^2}{k^2 + l^2 + 1}.$$

Указание. Сперва найти точку пересечения данной прямой с плоскостью, проведенной перпендикулярно ей через данную точку.

§ 84. Уравнения прямых, проходящих через 1, 2, 3 данных точки.

Уравнения прямой, проходящей через данную точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, можно написать в виде

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}, \qquad (1)$$

где числа m, n, p пропорциональны направляющим косинусам прямой $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Таким образом уравнение (1) есть уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$.

Если прямая, проходящая через точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, проходит также и через вторую данную точку $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то имеет место соотношение

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}. \qquad (2)$$

Делением (1) на (2) освобождаемся от неизвестных m, n, p и получаем уравнения

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \qquad (3)$$

выражающие прямую, проходящую через две данных точки $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Необходимое и достаточное условие того, что прямая (3) проходит также и через третью данную точку $(x_3;\ y_3;\ z_3)$, получается в виде:

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4}$$

Как легко видеть, прямая, проведенная через данную точку (x_1, y_1, z_1) параллельно данной прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},$$

выражается уравнением

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p},$$

а прямая, проведенная через ту же точку перпендикулярно данной плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, уравнениями

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}.$$

Прямые, проходящие через данную точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ перпендикулярно данной прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

и параллельно данной плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, выражаются соответственно уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

где

$$mm_1+nn_1+pp_1=0$$

и

$$\frac{x-x_1}{m_2}=\frac{y-y_1}{n_2}=\frac{z-z_1}{p_2},$$

где

$$m_2A+n_2B+p_2C=0.$$

Две из трех величин m_1, n_1, p_1 могут быть взяты при этом совершенно произвольно (то же относится и к величинам m_2, n_2, p_2).

Упражнения.

1. Через точку $(1;\ 2;\ -3)$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $x=2z-1$, $y=-z+2$ и параллельную плоскости XY.

2. Найти углы, которые прямая, проходящая через точки $(2;\ 3;\ 1)$ и $(1;\ -2;\ 2)$, составляет с осями координат и с плоскостями координат.

3. Из четырех точек $(0;\ -2;\ 2)$, $(-1,\ 5;\ 3)$, $(5;\ 13;\ 12)$, $(2;\ 4;\ 6)$ указать три, лежащие на одной прямой.

4. Через точку $(1;\ 2;\ 3)$ провести прямую, составляющую угол в $30°$ с осью X.

5. Найти уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x-y+z-4=0$ с прямыми $x=0$, $y=-z$ и $x=2z+1$, $y=-z$.

6. Световой луч выходит из точки A $(3;\ 4;\ 2)$ и падает в точке B $(7;\ -3;\ 0)$ на зеркало, отражающая плоскость которого отсекает от осей X, Y, Z отрезки $10, -10, -10$. Найти координаты „зайчика", получаемого на плоскости $x=0$, т. е. координаты точки пересечения отраженного луча с этой плоскостью.

Указание. Как известно из курса физики, луч падающий и луч отраженный лежат в одной плоскости с перпендикуляром к зеркалу, восставленным в точке падения, и составляют с этим перпендикуляром равные углы.

ГЛАВА X.

ПОВЕРХНОСТИ II ПОРЯДКА.

§ 85. Взаимное расположение поверхности II порядка и прямой. Исследовав в главе IX геометрический смысл уравнения 1-й степени с тремя переменными, изображающего поверхность I порядка, а именно, как мы видели, плоскость, перейдем теперь к исследованию геометрического смысла уравнения 2-й степени с тремя переменными, т. е. к изучению *поверхностей II порядка*. Уравнению 2-й степени с тремя переменными можно дать в самом общем случае такой вид:

$$\begin{gathered}Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+\\ 2Gx+2Hy+2Jz+K=0,\end{gathered} \tag{1}$$

где 10 коэфициентов A, B, C, D, E, F, G, H, J, K могут иметь какие угодно вещественные значения. Главной нашей задачей является выяснение того, какой вид имеют поверхности, изображаемые уравнением (1), при всевозможных значениях его коэфициентов.

Припомним, с какими частными случаями уравнения (1) мы уже встречались в главе VII. Мы имели там уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

при $a=b=c$ выражающего сферу; уравнения цилиндров II порядка, характерной особенностью которых было отсутствие одной из трех координат (мы рассматривали только такие цилиндры, образующие которых параллельны одной из координатных осей); уравнение эллиптического конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, имеющего вершину в начале координат; уравнения гиперболоидов однополостного $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ и двуполостного $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$; уравнения параболоидов эллиптического $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ и гиперболического $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$. Рассмотренные поверхности выражались указанными уравнениями при некотором вполне определенном расположении координатных осей. Совершенно ясно, что при другом их расположении мы имели бы для них другие уравнения. Перед нами задача — выяснить, в каких случаях уравнение (1) выражает эти уже известные нам поверхности при произвольном расположении координатных осей, а также установить, не может ли оно выражать еще какие-либо поверхности, и если может, то какие именно.

Начнем наше исследование с рассмотрения того, как располагается относительно поверхности (1) любая прямая. Изображая последнюю системой

$$x=a+mt,\quad y=b+nt,\quad z=c+pt, \tag{2}$$

где a, b, c, m, n, p — постоянные, характеризующие данную прямую числа, а t — переменный параметр, находим координаты точек пересечения поверхности и прямой, для чего исключаем из уравнений (1) и (2) координаты x, y, z и получаем для определения t уравнение

$$Lt^2 + 2Mt + N = 0, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} L &= Am^2 + Bn^2 + Cp^2 + 2Dmn + 2Emp + 2Fnp, \\ M &= Aam + Bbn + Ccp + D(an + bm) + E(ap + cm) + \\ &+ F(bp + cn) + Gm + Hn + Jp, \\ N &= Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dab + 2Eac + 2Fbc + 2Ga + 2Hb + 2Jc + K. \end{aligned} \tag{4}$$

Найдя из уравнения (3) значения t, которых будет, вообще говоря, два, определяем по уравнениям (2) координаты каждой из двух точек пересечения. Выясним все случаи, какие могут при этом представиться.

Случай 1, $L \neq 0$. Уравнение (3) имеет два конечных корня (вещественных различных или мнимых, или вещественных совпадающих). Здесь надо различать три подслучая.

Подслучай 1, $M^2 - LN > 0$. Уравнение (3) имеет два различных вещественных корня, *прямая (2) пересекает поверхность (1) в двух различных точках*: P_1 $(x_1; y_1; z_1)$ и P_2 $(x_2; y_2; z_2)$; отрезок P_1P_2 является ее *хордой*.

Подслучай 2, $M^2 - LN < 0$. Уравнение (3) имеет два мнимых корня, *прямая (2) вовсе не пересекает поверхности (1)* или, как говорят, пересекает ее в двух мнимых точках.

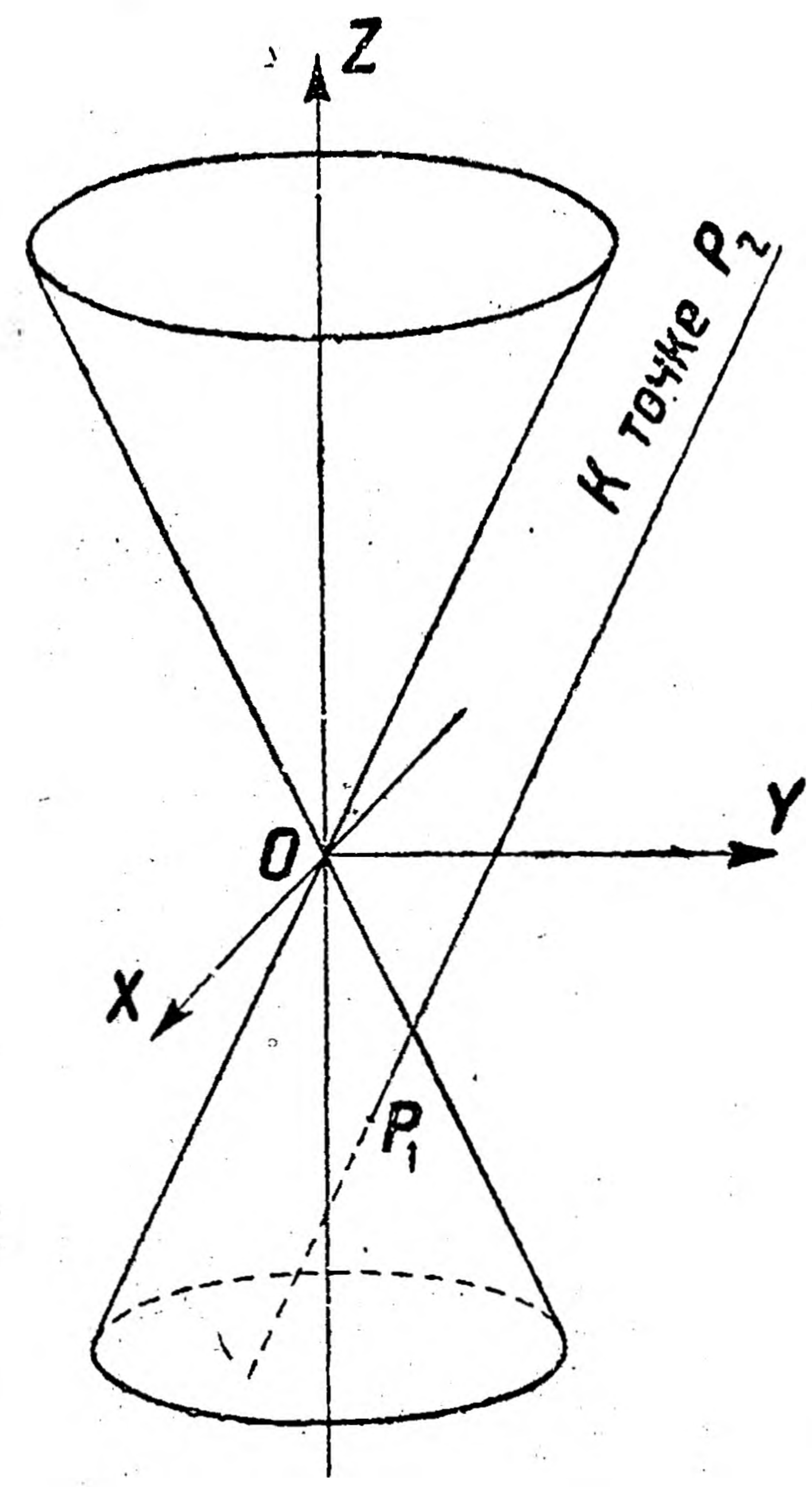
Подслучай 3, $M^2 - LN = 0$. Уравнение (3) имеет два равных вещественных корня, *прямая (2) имеет с поверхностью (3) две общих совпадающих точки*, т. е. является, по определению, *касательной* к этой поверхности.

Случай 2, $L = 0$, $M \neq 0$. Один из корней уравнения (3) бесконечно-велик, другой есть число конечное (и вещественное). *Прямая пересекает поверхность в одной конечной и одной бесконечно-удаленной точке.*

Напомним, как надо понимать последнее утверждение. Условие $L = 0$ удовлетворяется при данных значениях коэфициентов уравнения (1) при каком-то выборе чисел m, n, p, пропорциональных косинусам углов направления α, β, γ. Изменив надлежащим образом эти углы, мы можем вместо второго случая получить первый, а именно подслучай 1, когда прямая пересекает поверхность в двух различных точках. Непрерывно меняя α, β, γ с таким расчетом, чтобы притти опять к первоначально взятым их значениям, дающим $L = 0$, мы увидим, что одна из точек пересечения удаляется в бесконечность, так как, по крайней мере, одна из трех координат x, y, z, определяемых уравнениями (2), при $t = \infty$ принимает бесконечно-большое значение; другая же точка пересечения стремится к некоторой предельной точке, соответствующей значению $t = -N : 2M$, а потому в силу условия $M \neq 0$ расположенной на конечном расстоянии от начала координат.

Условие $L = 0$, как показывает первая из формул (4), если вообще выполняется, то выполняется для всех прямых, имеющих одинаковые углы направления α, β, γ, т. е. для всех прямых некоторого направления. Такое направление называется *асимптотическим* (для данной поверхности II порядка). Примером прямой асимптотического направления может служить любая прямая, параллельная какой-либо из образующих конуса (черт. 142).

Случай 3, $L=0$, $M=0$, $N\neq 0$. Оба корня уравнения (3) бесконечно-велики, прямая имеет с поверхностью две бесконечно-удаленных общих точки. Как мы видели в § 31, всякая прямая имеет лишь одну бесконечно-удаленную точку. Следовательно, в рассматриваемом случае эти две бесконечно-удаленных точки совпадают, *прямая касается поверхности в бесконечно-удаленной точке* (т. е. является предельным положением касательной при условии, что точка касания удаляется в бесконечность) и называется, как и в геометрии на плоскости, *асимптотой*. Примером асимптоты поверхности II порядка может служить прямая $y=0$, $\quad x=(a:\sqrt{a^2+c^2})\,t$, $z=(c:\sqrt{a^2+c^2})\,t$, которая касается однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ в двух совпадающих бесконечно-удаленных точках (эта прямая есть не что иное как одна из асимптот той гиперболы, по которой плоскость $y=0$ пересекает гиперболоид).



Черт. 142.

Случай 4, $L=0$, $M=0$, $N=0$. Уравнение (3) удовлетворяется при любом значении t, *все точки прямой (2) являются в то же время точками поверхности. Прямая (2) целиком лежит на поверхности (1).* Примером такого случая взаимного расположения прямой и поверхности II порядка может служить любая образующая конуса или цилиндра. Как мы увидим дальше, и на некоторых других поверхностях II порядка имеются подобные *прямолинейные образующие.*

Решим в заключение настоящего параграфа такую задачу: *как располагаются прямые, проходящие через начало координат и имеющие по отношению к поверхности (1) асимптотическое направление?* Здесь $a=b=c=0$, и система (2) дает $m=x:t$, $n=y:t$, $p=z:t$. Подставляя эти значения направляющих косинусов в условие $L=0$ и умножая все члены на t^2, получим уравнение

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=0, \tag{5}$$

изображающее, как легко видеть, конус с вершиной в начале координат. Действительно, взяв на поверхности, изображаемой уравнением (5), какую-нибудь точку $P(x_0;\, y_0;\, z_0)$ и написав уравнения прямой OP, соединяющей эту точку с началом координат, а именно уравнения

$$x=\frac{x_0}{r}\cdot t,\quad y=\frac{y_0}{r}\cdot t,\quad z=\frac{z_0}{r}\cdot t,$$

где

$$r=+\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$$

находим точки пересечения прямой OP и поверхности (5). Оказывается, что здесь имеет место случай 4: прямая OP всеми своими точками лежит на поверхности (1). При произвольности положения точки P на поверхности это возможно лишь при условии, что поверхность (5) есть конус с вершиной в начале координат. Итак, приравнивая нулю совокупность членов второго измерения уравнения (1), получаем уравнение (5), выражающее *конус асимптотических направлений* для поверхности (1).

У эллипсоида асимптотических направлений нет, так как уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ выражает не конус, а одну лишь точку (0; 0; 0). Напротив, двуполостный и однополостный гиперболоиды $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$ имеют бесчисленное множество асимптотических направлений: любая прямая, параллельная какой-либо образующей конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, является прямой асимптотического направления для обоих гиперболоидов, самые же образующие этого конуса являются их асимптотами.

Упражнения.

1. Выяснить, как расположены относительно гиперболического параболоида $x^2-y^2=2z$ прямые $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-6}{0}$, $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{0}$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-6}{0}$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{0}$.

2. Найти точки пересечения прямой $\frac{x-1}{\cos 60^\circ}=\frac{y+1}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$ и однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$. При каких значениях β, γ, c прямая эта имеет асимптотическое направление? Является асимптотой? Лежит на поверхности всеми точками?

3. Найти прямые асимптотического направления для поверхности $x^2+y^2-z^2=-1$, проходящие через начало координат и составляющие равные углы с осями X и Y.

4. Найти для той же поверхности асимптоты, проходящие через точку (5; 0; 1).

5. Показать, что нет ни одной прямой, которая лежала бы на поверхности $x^2+y^2-z^2=-1$ всеми своими точками.

6. Исследовать все случаи взаимного расположения прямой, проходящей через начало координат, и каждого из параболоидов $\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}=2z$.

§ 86. Взаимное расположение поверхности II порядка и плоскости. Чтобы выяснить, что за линия получается в пересечении поверхности II порядка произвольной плоскостью, примем эту плоскость за плоскость XY. Так как по формулам § 66 старые координаты выражаются через новые *линейно*, то и после преобразования координат уравнение поверхности будет опять-таки вида (изменятся лишь коэфициенты)

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Jz+K=0, \tag{1}$$

и нам нужно решить это уравнение совместно с уравнением плоскости $z=0$. Подставляя, имеем

$$Ax^2+By^2+2Dxy+2Gx+2Hy+K=0. \tag{2}$$

Это уравнение изображает в пространстве тот цилиндр, образующие которого параллельны оси Z, а направляющей служит линия пересечения поверхности (1) с плоскостью XY. На плоскости же XY уравнение (2) изображает именно эту линию пересечения.

Итак, *всякая поверхность II порядка пересекается любой плоскостью*, вообще говоря, *по некоторой кривой II порядка*. Здесь можно различать следующие случаи.

Случай 1, по крайней мере один из членов второго измерения в уравнении (2) отличен от нуля. Уравнение (2) есть уравнение 2-й степени и выражает некоторую кривую II порядка (эллипс, гиперболу, параболу, пару пересекающихся прямых, пару параллельных прямых, пару совпадающих прямых, точку, мнимое геометрическое место).

Случай 2, все три члена второго измерения уравнения (2) имеют коэфициентами нули, но по крайней мере один из двух линейных членов имеет коэфициент, отличный от нуля. Уравнение (2) есть уравнение 1-й степени и выражает прямую линию, по которой и происходит пересечение поверхности и плоскости. Можно сказать, что и в этом случае линия пересечения есть линия II порядка, но распавшаяся на две прямых, из которых одна — бесконечно-удаленная.

Случай 3, все пять членов второго и первого измерения имеют коэфициентами нули, свободный же член отличен от нуля, и уравнение (2) сводится к невозможному равенству $K=0$, где $K\neq 0$. Здесь поверхность и плоскость не имеют ни одной общей точки на конечном расстоянии от начала координат (можно сказать, что в этом случае плоскость касается поверхности по бесконечно-удаленной прямой).

Случай 4, все шесть коэфициентов уравнения (2) — нули, уравнение это удовлетворяется координатами любой точки плоскости, и последняя является, таким образом, частью рассматриваемой поверхности.

Рассмотрим несколько примеров.

Сечение однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ любой плоскостью $z=h$, параллельной плоскости XY, есть эллипс с полуосями $a'=a\sqrt{1+h^2:c^2}$ и $b'=b\sqrt{1+h^2:c^2}$. Плоскости $y=h$, идущие параллельно плоскости XZ, пересекают гиперболоид по гиперболам, вырождающимся при $h=\pm b$ в пару пересекающихся прямых, выражаемых уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Цилиндр $y^2+z^2=r^2$ с образующими, параллельными оси X, пересекается плоскостью $z=h$ либо по паре параллельных прямых $y^2=r^2-h^2$ (при $h^2<r^2$), либо по двум совпадающим прямым (при $h^2=r^2$; плоскость касается цилиндра). При $h^2>r^2$ пересечения нет вовсе (уравнение $y^2=r^2-h^2$ выражает мнимое геометрическое место).

Чтобы иметь пример на случай 2, возьмем гиперболический цилиндр $xy=1$ и пересечем его плоскостью $x=h$, где $h\neq 0$. В пересечении получим прямую, выражаемую уравнениями $y=1:h$, $x=h$. Рассматривая плоскость $x=h$ как предельное положение плоскости $x+ay=h$ при $a\to 0$, легко поймем, что плоскость $x=h$ пересекает цилиндр $xy=1$ по двум прямым, из которых одна бесконечно-удаленная.

Пример случая 3 мы получим, если возьмем тот же гиперболический цилиндр $xy=1$ и плоскость $x=0$. Плоскость эта не имеет с цилиндром ни одной общей точки на конечном расстоянии от начала, но касается этого цилиндра по бесконечно-удаленной прямой, в чем легко убедиться, рассматривая плоскость $x=0$ как предельное положение плоскости $x=h$ при $h\to 0$.

Рассматривая пересечение поверхности второго порядка $xz+yz-z^2=0$ и плоскости $z=0$, получим пример случая 4: все точки плоскости $z=0$ лежат и на данной поверхности, которая представляет собой не что иное как совокупность двух плоскостей $x+y-z=0$ и $z=0$.

Упражнения.

1. Выяснить, по какой линии плоскость $z=h$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ при различных значениях h.

2. Тот же вопрос относительно конуса $x^2+y^2-z^2=0$ и плоскости $y=h$.

3. Тот же вопрос относительно поверхности $x^2+y^2-2yz+z^2=1$ и плоскостей $x=h$, $y=h$, $z=h$. Что это за поверхность?

4. Тот же вопрос относительно поверхности $xz+yz-x-y+z-1=0$.

5. Найти проекции линии пересечения гиперболического параболоида $x^2-y^2=2z$ и плоскости $y=kx$ на плоскости XZ и YZ при различных значениях k.

6. Найти такое значение k, при котором плоскость $y=kx$ пересекает поверхность параболического цилиндра $x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ по двум прямым, из которых одна — бесконечно-удаленная.

7. Показать, что все параллельные друг другу плоскости пересекают поверхность II порядка по кривым одного и того же типа: либо типа эллипса (эллипс, точка, мнимость), либо типа гиперболы (гипербола, пара пересекающихся прямых), либо типа параболы (парабола, пара параллельных прямых, пара совпадающих прямых).

§ 87. Центр поверхности II порядка. *Центром симметрии* поверхности, или короче просто ее *центром*, называется такая точка, в которой делятся пополам все проходящие через нее хорды поверхности. Докажем справедливость следующей теоремы о центре поверхности II порядка: *если в уравнении поверхности II порядка линейные члены отсутствуют, то эта поверхность имеет центр, совпадающий с началом координат,* и обратно: *если поверхность II порядка имеет центр, с которым совмещено начало координат, то коэфициенты линейных членов в ее уравнении равны нулю.*

Для доказательства возьмем уравнение поверхности II порядка:

$$\begin{gathered}Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+\\+2Hy+2Jy+K=0\end{gathered} \qquad (1)$$

и уравнения прямой, проходящей через начало координат,

$$x=mt, \quad y=nt, \quad z=pt. \qquad (2)$$

Если $G=H=J=0$, то совместное решение уравнений (1) и (2) приводит к уравнению $Lt^2+K=0$, где L определяется по формуле (4) § 85. Предполагая, что прямая (2) не есть прямая асимптотического направления для поверхности (1) и пересекает поверхность, получим для точек пересечения P_1 $(x_2; y_2; z_2)$ и P_2 $(x_2; y_2; z_2)$ значения $t_1=+\sqrt{-K:L}$ и $t_2=-\sqrt{-K:L}=-t_1$, откуда $x_1=mt_1$, $y_1=nt_1$, $z_1=pt_1$, $x_2=-mt_1$, $y_2=-nt_1$, $z_2=-pt_1$. Таким образом точки пересечения P_1 и P_2 располагаются симметрично относительно начала координат O, и хорда P_1P_2 действительно делится в точке O пополам.

Чтобы доказать обратную теорему, рассуждаем так: если точка O есть центр поверхности (1), то всякая прямая (2) не асимптотического направления, пересекающая поверхность, пересекает ее в таких двух точках

$P_1(x_1; y_1; z_1)$ и $P_2(x_2; y_2; z_2)$, что середина отрезка P_1P_2 совпадает с точкой O, а потому

$$x_1+x_2=0, \quad y_1+y_2=0, \quad z_1+z_2=0. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), приходим к уравнению $Lt^2+ 2Mt+N=0$, где $L\neq 0$ и $M=Gm+Hn+Jp$ (см. § 85). Обозначая его корни через t_1 и t_2, имеем для координат точек P_1 и P_2 выражения $x_1=mt_1$, $x_2=mt_2$, $y_1=nt_1$, $y_2=nt_2$, $z_1=pt_1$, $z_2=pt_2$, откуда в силу соотношений (3) имеем уравнения $(t_1+t_2)\cdot m=0$, $(t_1+t_2)\cdot n=0$, $(t_1+t_2).p=0$, справедливые для произвольных значений m, n, p. Так как в силу соотношения $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ все три направляющих косинуса одновременно равняться нулю не могут, как не могут равняться одновременно нулю пропорциональные им числа m, n, p, то $t_1+t_2=0$, а. потому по свойству корней квадратного уравнения $M=Gm+Hn+Jp=0$. Но при произвольных значениях m, n, p это равенство существует лишь тогда, когда $G=H=J=0$. Действительно, взяв $m=n=0$, $p\neq 0$ (что возможно в силу условия $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$), получим $M=G=0$. Так же доказывается, что $H=0$ и $J=0$.

На основании доказанной теоремы без труда находим центр поверхности II порядка, если он существует. Допустим, что поверхность (1) имеет центр в точке $O'(x_c; y_c; z_c)$ и перенесем в эту точку начало координат, направляя новые оси X', Y', Z' параллельно старым. Пользуясь формулами преобразования $x=x'+x_c$, $y=y'+y_c$, $z=z'+z_c$, приводим уравнение (1) к виду

$$\begin{gathered}Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dx'y'+2Ex'z'+\\+2Fy'z'+2G'x'+2H'y'+2J'z'+K'=0,\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}G'=Ax_c+Dy_c+Ez_c+G,\\ H'=Dx_c+By_c+Fz_c+H,\\ J'=Ex_c+Fy_c+Cz_c+J,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}K'=Ax_c^2+By_c^2+Cz^2+2Dx_cy_c+2Ex_cz_c+2Fy_cz_c+2Gx_c+2Hy_c+\\ 2Jz_c+K=(G'x_c+H'y_c+J'z_c)+(Gx_c+Hy_c+Jz_c+K).\end{gathered}$$

В силу только что доказанной теоремы имеем $G'=H'=J'=0$, и координаты центра определяются из системы уравнений:

$$\begin{gathered}Ax_c+Dy_c+Ez_c+G=0, \quad Dx_c+By_c+Fy_c+H=0,\\ Ex_c+Fy_c+Cz_c+J=0,\end{gathered} \tag{6}$$

которая легко приводится к системе (см. § 12)

$$\delta x_c=\delta_1, \quad \delta y_c=\delta_2, \quad \delta z_c=\delta_3, \tag{7}$$

где

$$\delta=\begin{vmatrix}A, & D, & E\\ D, & B, & F\\ E, & F, & C\end{vmatrix}, \quad \delta_1=-\begin{vmatrix}G, & D, & E\\ H, & B, & F\\ J, & F, & C\end{vmatrix}, \quad \delta_2=-\begin{vmatrix}A, & G, & E\\ D, & H, & F\\ E, & J, & C\end{vmatrix},$$

$$\delta_3=-\begin{vmatrix}A, & D, & G\\ D, & B, & H\\ E, & F, & J\end{vmatrix}.$$

В зависимости от значений δ, δ_1, δ_2, δ_3 различаем следующие четыре случая:

Случай 1, $\delta \neq 0$. Система (7), а следовательно, и система (6) имеет одну единственную систему корней, поверхность (1) *имеет один центр* в точке $(x_c; y_c; z_c)$ и является *центральной* поверхностью II порядка (примеры таких поверхностей — эллипсоид, гиперболоиды, конусы).

Три плоскости

$$Ax + Dy + Ez + G = 0, \quad Dx + By + Fz + H = 0, \quad Ex + Fy + Cz + J = 0 \tag{8}$$

пересекаются в этом случае в одной точке.

Случай 2, $\delta = 0$, но по крайней мере один из трех остальных определителей δ_1, δ_2, δ_3 отличен от нуля. Система (7) не удовлетворяется ни при каких конечных значениях x_c, y_c, z_c, система (6) несовместна. Поверхность (1) *вовсе не имеет центра на конечном расстоянии* от начала координат (можно показать, что она имеет центр в бесконечно-удаленной точке). Примеры таких поверхностей — параболоиды.

В настоящем случае три плоскости (8) располагаются параллельно друг другу или параллельно одной и той же прямой, а потому общих точек на конечном расстоянии от начала не имеют.

Случай 3, $\delta = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3$, одно из трех уравнений (6) является следствием двух других. Система (6) удовлетворяется координатами бесчисленного множества точек, расположенных по некоторой прямой линии, а именно по той прямой линии, по которой пересекаются в настоящем случае все три плоскости (8). *Поверхность (1) имеет линию центров.* Примеры таких поверхностей — цилиндры, направляющими которых служат центральные кривые II порядка. Взяв, например, круглый цилиндр $x^2 + y^2 = r^2$ и проводя какую-нибудь прямую через любую точку P оси Z, получим каждый раз хорду поверхности, делящуюся в точке P пополам, а потому ось Z является линией центров для рассматриваемого цилиндра.

Случай 4, опять $\delta = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3$, но уже два из уравнений (6) являются следствиями третьего. Система (6) сводится к одному уравнению, три плоскости (8) совпадают в одну, каждая точка которой является центром поверхности (1). Последняя имеет таким образом *плоскость центров*. Примером такой поверхности с плоскостью центров может служить, например, поверхность, изображаемая уравнением $x^2 - 2ax = 0$, а именно совокупность двух параллельных плоскостей $x = 0$ и $x = 2a$. Всякая точка плоскости $x = a$ является центром этой поверхности.

Итак, разыскание центра поверхности II порядка привело нас к заключению, что все эти поверхности распадаются на четыре класса: 1) поверхности *центральные*; 2) поверхности *без центра*; 3) поверхности *с линией центров*; 4) поверхности *с плоскостью центров*. Уравнения всех поверхностей, кроме поверхностей 2-го класса (не имеющих центра), всегда можно освободить от линейных членов, перенося начало координат в центр поверхности 1-го класса или в одну из точек линии центров поверхности 3-го класса, или в одну из точек плоскости центров поверхности 4-го класса. Что же касается поверхностей 2-го класса, то освободить их уравнения от всех линейных членов невозможно.

После „преобразования к центру“, т. е. после переноса начала координат в центр поверхности (1) без изменения направления осей, ее уравнение переходит в уравнение (4), где надо положить

$$G' = H' = J' = 0, \quad K' = Gx_c + Hy_c + Jz_c + K.$$

Упражнения.

1. Найти координаты центра поверхности $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 32x - 28y + 4z + 46 = 0$ и преобразовать ее уравнение к центру.

2. Убедиться в отсутствии центра у поверхности $xy = pz$ и показать, что эта поверхность есть гиперболический параболоид (повернуть оси X и Y на угол 45°, сохраняя ось Z неизмененной).

3. Показать, что поверхность $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 2y + 1 = 0$ имеет линию центров; найти уравнения этой линии и упростить уравнение поверхности, перенося начало координат в точку пересечения линии центров с плоскостью XY.

4. Показать, что поверхность $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy - 4xz - 6yz + 2x + 3y - z - 2 = 0$ имеет плоскость центров, найти уравнение этой плоскости и упростить уравнение поверхности, перенося начало координат в точку пересечения плоскости центров с осью Z.

5. Пересекая поверхность упражнения 3 плоскостями, параллельными координатным плоскостям, выяснить ее характер.

6. Разложить левую часть уравнения поверхности упражнения 4 на два линейных множителя и убедиться в том, что эта поверхность есть пара параллельных плоскостей.

7. Взяв простейшие уравнения уже известных поверхностей II порядка, убедиться в том, что эллипсоид, гиперболоиды и конус имеют единственный центр, находящийся в начале координат, что параболоиды вовсе центра не имеют и что эллиптический и гиперболический цилиндры имеют линию центров.

§ 88. Диаметральные плоскости и диаметры поверхности II порядка. Возьмем поверхность II порядка, выраженную уравнением (1) § 85, и семейство ее хорд одного и того же направления, а именно хорд, параллельных прямой

$$x = mt, \quad y = nt, \quad z = pt, \tag{1}$$

и выясним, как располагаются середины всех таких хорд. Направление хорд берем произвольным, но не асимптотическим, а потому в уравнении (2) § 85 $L \neq 0$. Обозначив координаты середины одной из хорд буквами a, b, c, можем написать ее уравнение в виде

$$x = a + mt, \quad y = b + nt, \quad z = c + pt. \tag{2}$$

Выразим аналитически сделанное предположение о том, что точка $(a;\ b;\ c)$ — середина хорды. Для этого составляем уравнение $Lt^2 + 2Mt + N = 0$, где L, M, N имеют значения, указанные формулами (3) § 85, и находим абсциссу середины хорды $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(a + mt_1 + a + m t_2) = a + \frac{1}{2}m(t_1 + t_2) = a - mM:L$, где $x_1 = m_1t_1$ и $x_2 = m_2t_2$ — абсциссы точек пересечения хорды (2) с поверхностью. Так как эта абсцисса по условию равна a, то получаем уравнение $a = a - mM:L$, откуда $mM = 0$. Повторяя то же рассуждение для ординаты и аппликаты середины хорды, имеем систему трех уравнений $mM = 0$, $nM = 0$, $pM = 0$, из которых вытекает, что $M = 0$, так как при $M \neq 0$ мы имели бы $m = n = p = 0$, что невозможно. Условие $M = 0$ переписываем в виде (см. формулы 4 § 85) $(Am + Dn + Ep)a + (Dm + Bn + Fp)b + (Em + Fn + Cp)c + (Gm + Hn + Jp) = 0$.

Последнее уравнение показывает, что середина хорды лежит на плоскости

$$Px + Qy + Rz + S = 0, \tag{3}$$

где

$$P = Am + Dn + Ep, \quad Q = Dm + Bn + Fp, \quad R = Em + Fn + Cp,$$
$$S = Gm + Hn + Jp.$$

Положение плоскости (3) вполне определяется заданием направления взятого семейства хорд и вовсе не зависит от того, какая именно хорда семейства была взята. Итак, *геометрическое место середин всех хорд поверхности II порядка, параллельных одной и той же прямой (1), есть плоскость, выражаемая уравнением (3)*. Плоскость эта называется *диаметральной плоскостью* (рассматриваемой поверхности), *сопряженной с хордами направления прямой (1)*.

Переписав уравнение (3) диаметральной плоскости в виде

$$(Ax + Dy + Ez + G)\,m + (Dx + By + Fz + H)\,n + \\ + (Ex + Fy + Cz + J)\,p = 0 \tag{4}$$

и сравнив выражения в скобках с уравнениями (6) § 87, замечаем, что координаты центра поверхности II порядка удовлетворяют уравнению (4) при произвольных m, n, p, т. е. уравнению любой диаметральной плоскости. Отсюда делаем следующие выводы:

Если поверхность II порядка имеет один центр, то все диаметральные плоскости этой поверхности пересекаются в одной точке (ее центре).

Если поверхность II порядка имеет линию центров, то все диаметральные плоскости пересекаются по одной прямой (по линии центров).

Если поверхность II порядка имеет плоскость центров, то все диаметральные плоскости сливаются в одну, совпадающую с плоскостью центров.

Остается выяснить, как располагаются диаметральные плоскости поверхности II порядка без центра (т. е. с бесконечно-удаленным центром). В этом случае, как мы видели в § 87, $\delta = 0$, но по крайней мере один из трех определителей δ_1, δ_2, δ_3 отличен от нуля. Условие

$$\delta = \begin{vmatrix} A, & D, & E \\ D, & B, & F \\ E, & F, & C \end{vmatrix} = 0$$

после умножения всех элементов первого столбца на m и прибавления к ним соответствующих элементов второго столбца, умноженных на n, а также соответствующих элементов третьего столбца, умноженных на p (см. § 12), принимает вид

$$\begin{vmatrix} mA + nD + pE, & D, & E \\ mD + nB + pF, & B, & F \\ mE + nF + pC, & F, & C \end{vmatrix} = 0,$$

или $P(BC - F^2) - Q(CD - EF) + R(DF - BE) = 0$. Но это последнее условие есть не что иное как условие параллельности плоскости $Px + Qy + Rz + S = 0$ и прямой

$$x = (BC - F^2)\,t, \quad y = (EF - CD)\,t, \quad z = (DF - BE)\,t, \tag{5}$$

а потому *все диаметральные плоскости поверхности II порядка без центра параллельны одной и той же прямой.*

Последнее заключение теряет силу, если разности $BC-F^2$, $EF-CD$, $DF-BE$ одновременно равны нулю, так как не может быть прямой $x=0\cdot t$, $y=0\cdot t$, $z=0\cdot t$. Тогда опять берем определитель $\delta=0$ и приводим его либо к виду

$$\begin{vmatrix} A, & mA+nD+pE, & E \\ D, & mD+nB+pF, & F \\ E, & mE+nF+pC, & C \end{vmatrix}=0,$$

или $P(CD-EF)-Q(AC-E^2)+R(AF-DE)=0$, и обнаруживаем параллельность диаметральных плоскостей и прямой $x=(CD-EF)t$, $y=(E^2-AC)t$, $z=(AF-DE)t$, либо к виду

$$\begin{vmatrix} A, & D, & mA+nD+pE \\ D, & B, & mD+nB+pF \\ E, & F, & mE+nF+pC \end{vmatrix}=0,$$

или $P(DF-BE)-Q(AF-DE)+R(AB-D^2)=0$, и обнаруживаем параллельность диаметральных плоскостей и прямой $x=(DF-BE)t$, $y=(DE-AF)t$, $z=(AB-D^2)t$.

В случае же, когда все разности $BC-F^2$, $EF-CD$, $DF-BE$, $AC-E^2$, $AF-DE$, $AB-D^2$ равны нулю, не только $\delta=0$, но и все три определителя δ_1, δ_2, δ_3 равны нулю, и мы имеем не поверхность без центра, а поверхность с линией центров или с плоскостью центров.

Прямая, по которой пересекаются две диаметральных плоскости, называется *диаметром* поверхности. На основании установленных выше свойств диаметральных плоскостей делаем следующие заключения о диаметрах поверхностей II порядка.

Все диаметры центральной поверхности II порядка проходят через одну точку — ее центр.

Все диаметры поверхности II порядка с линией центров сливаются в одну прямую, а именно совпадают с линией центров.

У поверхности II порядка с плоскостью центров диаметром является любая прямая этой плоскости.

Все диаметры поверхности II порядка, не имеющей центра, параллельны одной и той же прямой.

Упражнения.

1. Найти уравнения диаметральных плоскостей поверхности II порядка (заданной уравнением в общем виде), сопряженных с хордами, параллельными осям X, Y, Z.

2. Найти направление тех хорд, с которыми сопряжена диаметральная плоскость $x-y-2z-1=0$ поверхности $x^2+2y^2+3z^2-2xy+2yz+2z-6=0$.

3. Найти уравнение диаметральной плоскости для поверхностей эллипсоида, гиперболоидов и параболоидов (заданных их простейшими уравнениями), сопряженной с хордами, параллельными прямой $x=mt$, $y=nt$, $z=pt$.

4. Пользуясь найденными в упражнении 3 уравнениями, проверить сделанные в тексте заключения о том, что все диаметральные плоскости центральных поверхностей (эллипсоид гиперболоиды) проходят через центр и что все диаметральные плоскости поверхностей без центра (параболоиды) параллельны одной и той же прямой.

5. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности

$$x^2 - xy + 2yz + x - z = 0,$$

которая проходит через точку (1; 1; 1) и сопряжена с прямою, параллельной плоскости $z = 0$.

§ 89. Главные диаметральные плоскости (плоскости симметрии поверхности II порядка). Различные диаметральные плоскости поверхности II порядка пересекаются хордами, с ними сопряженными, под различными углами. Особый интерес представляют те диаметральные плоскости, которые перпендикулярны к сопряженным с ними хордам. Такие диаметральные плоскости называются *главными диаметральными плоскостями* и представляют собой не что иное, как *плоскости симметрии* поверхности, так как все перпендикулярные к ним хорды поверхности (в точках пересечения с ними) делятся пополам. Направления хорд, сопряженных с главными диаметральными плоскостями (и им, следовательно, перпендикулярных), называются *главными направлениями* данной поверхности.

Выясним, какие главные диаметральные плоскости и какие главные направления имеют различные поверхности II порядка.

Возьмем семейство хорд, параллельных прямой

$$x = mt, \quad y = nt, \quad z = pt \tag{1}$$

(где буквы m, n, p означают произвольные числа, не равные одновременно нулю, так как они пропорциональны направляющим косинусам прямой) и пересекающих поверхность

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0 \tag{2}$$

в двух точках, и сопряженную с ними диаметральную плоскость

$$Px + Qy + Rz + S = 0, \tag{3}$$

где

$$P = Am + Dn + Ep, \; Q = Dm + Bn + Fp, \; R = Em + Fn + Cp,$$
$$S = Gm + Hn + Jp.$$

Чтобы плоскость (3) была главной диаметральной плоскостью, а прямая (1) была прямой главного направления, необходимо и достаточно выполнение условия

$$(Am + Dn + Ep):m = (Dm + Bn + Fp):n = (Em + Fn + Cp):p. \tag{4}$$

Условие это можно написать в виде системы двух однородных уравнений 2-й степени относительно чисел m, n, p или в виде системы двух неоднородных уравнений 2-й степени относительно чисел $m:p$, $n:p$ (или $n:m$, $p:m$ или $p:n$, $m:n$). Но оказывается более удобным ввести новое неизвестное ρ, равное общему значению трех отношений условия (4), и переписать это условие в виде

$$\begin{aligned} (A - \rho)m + Dn + Ep &= 0, \\ Dm + (B - \rho)n + Fp &= 0, \\ Em + Fn + (C - \rho)p &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь мы имеем систему трех однородных относительно m, n, p уравнений, имеющих систему корней, отличных от нуля. Как известно из теории определителей, определитель, составленный из коэфициентов этих уравнений, должен равняться нулю. Таким образом получаем уравнение с одним только неизвестным ρ, а именно:

$$\Phi(\rho)=\begin{vmatrix} A-\rho, & D, & E \\ D, & B-\rho, & F \\ E, & F, & C-\rho \end{vmatrix}=0. \tag{6}$$

Уравнение это называется *резольвентой* системы (4) и представляет собой кубическое уравнение относительно ρ. Решив резольвенту, возвращаемся к системе (5) и определяем отношения двух из трех неизвестных m, n, p к третьему (или, что сводится к тому же, три числа, пропорциональные m, n, p) посредством любых двух уравнений этой системы. Таким образом определяются главные направления поверхности. Зная главные направления, находим по формуле (3) и главные диаметральные плоскости. Кубическая резольвента (6) имеет, вообще говоря, три корня ρ_1, ρ_2, ρ_3, а потому система (5) даст три системы корней m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2; m_3, n_3, p_3. Поверхность II порядка имеет, таким образом, вообще говоря, три главных направления и три главных диаметральных плоскости. Прежде чем заняться исследованием всех могущих при этом встретиться случаев, поясним указанный способ разыскания главных направлений примером.

Выясним, какие главные направления и какие главные диаметральные плоскости имеет поверхность, выражаемая уравнением, которое получается из общего уравнения (2) при $A=36$, $B=29$, $C=180$, $D=-12$, $E=F=G=H=J=0$, $K=-180$. Резольвента (6) сводится здесь к уравнению $(180-\rho)(\rho^2-65\rho+900)=0$, корни которого $\rho_1=180$, $\rho_2=45$, $\rho_3=20$. При $\rho_1=180$ система (5) принимает вид $-144m-12n=0$, $-12m-161n=0$, $0=0$, откуда $m_1=0$, $n_1=0$, $p_1=1$ (значение p_1 берем произвольно). При $\rho_2=45$ получаем таким же образом систему $-9m-12n=0$, $-12m-16n=0$, $135p=0$, дающую $p=0$, $3m=-4n$; полагая произвольно $n_2=3$, получаем систему корней $m_2=-4$, $n_2=3$, $p_2=0$. При $\rho_3=20$ имеем систему $16m-12n=0$, $-12n+9n=0$, $160p=0$, дающую $p=0$, $4m=3n$; полагая произвольно $n=4$, приходим к системе корней $m_3=3$, $n_3=4$, $p_3=0$.

Итак, мы нашли три главных направления рассматриваемой поверхности; направляющие косинусы этих направлений таковы (вводим нормирующие множители):

у первого	$\cos\alpha_1=0$,	$\cos\beta_1=0$,	$\cos\gamma_1=1$;
у второго	$\cos\alpha_2=-0{,}8$	$\cos\beta_2=0{,}6$,	$\cos\gamma_2=0$;
у третьего	$\cos\alpha_3=0{,}6$	$\cos\beta_3=0{,}8$,	$\cos\gamma_3=0$.

По формуле (3) § 89 находим уравнения трех главных диаметральных плоскостей как плоскостей, сопряженных с этими направлениями:

$$z=0, \qquad 4x-3y=0, \qquad 3x+4y=0.$$

Если мы возьмем уравнение рассматриваемой поверхности $36x^2+29y^2+180z^2-24xy-180=0$ и повернем координатные оси, приняв за новую ось X' третье из найденных главных направлений, за новую ось Y' — второе из них, за новую ось Z' — первое из них (совпадающее со старой осью Z), то, применяя формулы (3) § 66, получим формулы преобразования координат

$$x = 0{,}6x' - 0{,}8y', \quad y = 0{,}8x' + 0{,}6y', \quad z = z',$$

и новое уравнение той же поверхности $20x'^2 + 45y'^2 + 180z'^2 - 180 = 0$ или

$$\frac{x'^2}{3^2} + \frac{y'^2}{2^2} + \frac{z'^2}{1^2} = 1,$$

показывающее, что она представляет собой эллипсоид с полуосями 3, 2, 1.

Вернемся к уравнениям (5) и (6), к решению которых сводится задача разыскания главных направлений поверхности II порядка, заданной общим уравнением (2).

Резольвента (6) представляет собой кубическое уравнение относительно ρ с коэфициентом при ρ^3, равным -1; поэтому степень его не может понизиться ни при каких частных значениях коэфициентов уравнения (2). Как известно из курса высшей алгебры, кубическое уравнение с вещественными коэфициентами всегда имеет три корня, причем по крайней мере один из них — вещественный. Обозначив этот заведомо вещественный корень уравнения (6) через ρ_1, найдем из уравнений (5) соответствующее ему главное направление. Итак, *всякая поверхность II порядка (2) всегда имеет по крайней мере одно главное направление* (теорема I). Далее повернем оси координат таким образом, чтобы одна из них, например ось X, приняла это направление. Положим, что это преобразование уже выполнено и получено уравнение (2). Направление оси X характеризуется числами $m = 1$, $n = 0$, $p = 0$, которые должны удовлетворять системе (5). Поэтому имеем, что

$$A - \rho_1 = 0, \qquad D = 0, \qquad E = 0.$$

Итак, *если ось X есть прямая главного направления поверхности* (2), *то в уравнении поверхности должны отсутствовать члены с произведениями xy и xz и один из корней резольвенты должен равняться коэфициенту при x^2* (теорема II). Понятно, что в случаях, когда ось Y (или ось Z) является прямой главного направления, то исчезают члены с xy и yz (или члены с xz и yz).

При $D = E = 0$ резольвента сводится к уравнению

$$(A - \rho)\,[(B - \rho)(C - \rho) - F^2] = 0,$$

распадающемуся на два более простых, а именно $A - \rho = 0$ и

$$\rho^2 - (B + C)\,\rho + (BC - F^2) = 0.$$

Корнем первого является уже известный нам корень $\rho_1 = A$, второе же имеет корнями числа

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\,[(B + C) + \sqrt{(B - C)^2 + 4F^2}],$$
$$\rho_3 = \frac{1}{2}\,[(B + C) - \sqrt{(B - C)^2 + 4F^2}],$$

притом оба вещественные, так как $(B - C)^2 + 4F^2 \geq 0$.

Итак, *все три корня резольвенты всегда числа вещественные* (теорема III). Мы доказали эту теорему, предполагая, что ось X есть прямая одного из главных направлений, но теорема остается в силе для любого расположения осей, так как двум мнимым корням резольвенты соответствовали бы мнимые значения m, n, p для двух главных направлений и никаким поворотом осей нельзя было бы сделать их вещественными.

Три корня резольвенты, вещественность которых доказана, или могут быть все различны, или же два из них могут совпадать и быть отличными от третьего, или все три могут совпадать. Рассмотрим каждый из этих трех случаев отдельно.

Случай 1, все три корня резольвенты ρ_1, ρ_2, ρ_3 различны. Докажем, что в этом случае *три главных направления поверхности (2) попарно перпендикулярны* (теорема IV). Действительно, возьмем любые два из корней резольвенты ρ_1 и ρ_2 и соответствующие им главные направления m_1, n_1, p_1 и m_2, n_2, p_2. Из уравнений (4) имеем:

$$\begin{aligned} Am_1 + Dn_1 + Ep_1 &= m_1\rho_1, & Am_2 + Dn_2 + Ep_2 &= m_2\rho_2, \\ Dm_1 + Bn_1 + Fp_1 &= n_1\rho_1, & Dm_2 + Bn_2 + Fp_2 &= n_2\rho_2, \\ Em_1 + Fn_1 + Cp_1 &= p_1\rho_1, & Em_2 + Fn_2 + Cp_2 &= p_2\rho_2. \end{aligned}$$

Умножив первые три уравнения соответственно на m_2, n_2, p_2 а три последних на m_1, n_1, p_1, и вычитая из суммы трех первых сумму трех последних, получим, что $(\rho_1 - \rho_2)(m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2) = 0$, откуда в силу условия $\rho_1 \neq \rho_2$ вытекает, что $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$, т. е. что два взятых главных направления взаимно-перпендикулярны (см. § 83, формула 8). То же докажем для направлений первого и третьего, а также второго и третьего.

Направляя оси координат по трем взаимно-перпендикулярным главным направлениям поверхности, мы освободим ее уравнение от членов с произведениями переменных и дадим ему следующий более простой по сравнению с уравнением (2) вид:

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2G'x' + 2H'y' + 2J'z' + K' = 0. \tag{7}$$

Случай 2, среди трех корней резольвенты есть два равных, например $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$. Как и в предыдущем случае, два главных направления, соответствующие неравным корням, взаимно-перпендикулярны. Совмещая с ними оси X' и Y', мы опять освободимся от членов с произведениями xy, xz, yz и приведем уравнение (2) к виду (7). Резольвента (6) сведется в этом случае к уравнению $(A - \rho)(B - \rho)(C - \rho) = 0$ с корнями $\rho_1 = A$, $\rho_2 = B$, $\rho_3 = C$ (значки у новых коэфициентов здесь и в последующем опущены). В силу сделанного предположения о равенстве корней ρ_1 и ρ_2 имеем $A = B$ и вместо уравнения (7) получаем уравнение

$$A(x^2 + y^2) + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0. \tag{8}$$

Особенности поверхности, выражаемой последним уравнением, выясняются в дальнейшем. Как мы увидим, это не что иное как поверхность вращения кривой II порядка около ее оси симметрии, параллельной оси Z, а для таких поверхностей любая плоскость, проходящая через ось вращения, есть плоскость симметрии. Поэтому здесь бесчисленное множество главных направлений.

Случай 3, все три корня резольвенты равны друг другу ($\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$). Вычислив по уравнениям (5) m_1, n_1, r_1 и повернув оси координат так, чтобы ось X была прямой этого главного направления, мы уничтожим в уравнении (2), как и раньше, члены с xy и xz. Резольвента, как мы уже видели, имеет в этом случае корни

$$\rho_1 = A, \quad \rho_{2,3} = \frac{1}{2}\left[B + C \pm \sqrt{(B-C)^2 + 4F^2}\right].$$

Равенство корней ρ_2 и ρ_3 возможно лишь при условии $B - C = 0$, $F = 0$, откуда $B = C$, $F = 0$, а потому $\rho_2 = \rho_3 = B = C$. Равенство $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ влечет за собой равенство $A = B = C$, а потому уравнение (2) принимает в настоящем случае вид

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0 \tag{9}$$

и есть не что иное, как уравнение сферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

где

$$a = -G:A,\ b = -H:A,\ c = -J:A,\ R^2 = (G^2 + H^2 + J^2):A^2 - K:A.$$

Для сферы всякое направление есть главное, так как всякая плоскость, проходящая через ее центр, есть ее плоскость симметрии. В частных случаях сфера может вырождаться в плоскость (при $A = 0$) и в точку (при $G^2 + H^2 + J^2 = AK$). При $G^2 + H^2 + J^2 < AK$ уравнение (9) никакого геометрического смысла не имеет.

Заканчивая рассмотрение вопроса о главных направлениях поверхности II порядка, отметим, что вся трудность заключается здесь в разыскании одного из корней резольвенты (6). Иногда этот корень удается найти простым подбором; в противном случае надо действовать по правилам высшей алгебры. Зная один корень ρ_1 уравнения $\Phi(\rho) = 0$, делим $\Phi(\rho)$ на $\rho - \rho_1$ и получаем для определения двух других корней резольвенты квадратное уравнение (применяем известную теорему Безу).

Упражнения.

1. Найти главные направления и главные диаметральные плоскости поверхности $9y^2 + 2xz - 9 = 0$. Совмещая одну из координатных осей с одним из главных направлений, преобразовать данное уравнение и показать, что оно выражает однополостный гиперболоид.

2. Та же задача относительно поверхности $xy = kz$ (гиперболический параболоид).

3. Та же задача относительно поверхности

$$2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$$

(двуполостный гиперболоид вращения).

4. Та же задача относительно поверхности

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + x + y + 2z = 0$$

(эллиптический параболоид).

5. Показать, что для поверхности, изображаемой уравнением (8), всякое направление, перпендикулярное к оси Z, является главным.

6. Показать, что для поверхности, изображаемой уравнением (9), всякое направление есть главное.

7. Показать, что у любого параболоида одна из главных диаметральных плоскостей находится в бесконечности, и объяснить это обстоятельство, показав, что всякий параболоид можно рассматривать как предельное положение эллипсоида или гипер олоида при условии, что одна из точек этих поверхностей сохраняется неподвижной, а центр удаляется в бесконечность (применить тот же метод, что и в § 50).

§ 90. Упрощение уравнений центральных поверхностей II порядка и виды последних. Поверхность II порядка $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Jz+K=0$ (1) имеет единственный центр при соблюдении условия $\delta\neq 0$ (§ 87). Если это условие выполнено, переносом начала координат в центр освобождаем уравнение поверхности от линейных членов и получаем преобразованное уравнение

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2D'xy+2E'xz+2F'yz+K'=0, \qquad (2)$$

где $K'=Gx_c+Hy_c+Jz_c+K$, а координаты центра определяются из уравнений (6) § 87.

Разыскав главные направления поверхности и повернув надлежащим образом координатные оси, освободим уравнение (2) от членов с произведениями переменных и получим новое уравнение

$$A'x''^2+B'y''^2+C'z''^2+K'=0, \qquad (3)$$

где либо все три коэфициента A', B', C' различны (случай трех различных корней у резольвенты), либо какие-нибудь два из них равны (случай равенства двух корней резольвенты), либо все три равны (случай равенства всех трех корней резольвенты).

В зависимости от знаков коэфициентов различаем следующие случаи и подслучаи:

Случай 1, коэфициенты A', B', C' имеют один и тот же знак (можно считать их положительными, так как в случае отрицательных знаков можно обе части уравнения (3) умножить на -1).

Подслучай 1, $K'>0$. Уравнение (3) не удовлетворяется ни при каких значениях переменных, уравнение (1) *не имеет никакого геометрического смысла.*

Подслучай 2, $K'=0$. Уравнение (3) удовлетворяется только при $x''=y''=z''=0$, уравнение (1) выражает *одну точку.*

Подслучай 3, $K'<0$. Уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=1,$$

где

$$a^2=-K':A', \quad b^2=-K':B', \quad c^2=-K':C',$$

и выражает *эллипсоид* (вообще трехосный, в частных случаях эллипсоид вращения и сферу).

Говорят, что уравнение (1) в рассматриваемом первом случае выражает *поверхность типа эллипсоида*, называя уравнение подслучая 1 уравнением *мнимого эллипсоида*, а уравнение подслучая 2 — уравнением *эллипсоида с нулевыми полуосями*[1].

---

[1] В силу сходства уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

с уравнением конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

его называют также уравнением *мнимого конуса.*

Случай 2, один из коэфициентов A', B', C' имеет знак, обратный знаку двух других (можно считать $A'>0$, $B'>0$, $C'<0$, так как переименованием осей и умножением обеих частей уравнения на -1 все другие случаи можно свести к этому).

Подслучай 1, $K<0$. Уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=1,$$

где

$$a^2=-K':A',\quad b^2=-K':B',\quad c^2=+K':C',$$

и выражает *однополостный гиперболоид* (вообще трехосный, в частном случае однополостный гиперболоид вращения).

Подслучай 2, $K'>0$. Уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=-1,$$

где

$$a^2=K':A',\quad b^2=K':B',\quad c^2=-K':C',$$

и выражает *двуполостный гиперболоид*.

Подслучай 3, $K=0$. Уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=0,$$

где

$$a^2=1:A',\quad b^2=1:B',\quad c^2=-1:C',$$

и выражает *конус* (см. § 70).

Говорят, что уравнение (1) в рассматриваемом 2-м случае выражает поверхность *типа гиперболоида*, считая конус выродившимся гиперболоидом, а именно таким однополостным гиперболоидом, горловой эллипс которого свелся в точке.

Этим и заканчивается исследование уравнения (3), так как ни один из трех коэфициентов A', B', C' в нуль обратиться не может: при равенстве нулю одного из них, хотя бы C', получается уравнение цилиндра, т. е. поверхности, имеющей не единственный центр, а либо линию центров, либо ни одного центра, в чем и предлагается убедиться читателю (надо искать общим методом § 87 центр поверхности $A'x''^2+B'y''^2+K'=0$). При равенстве нулю двух коэфициентов, например B' и C', получаем уравнение $A'x''^2+K'=0$, выражающее пару параллельных плоскостей (вещественных различных, или вещественных совпадающих, или мнимых), т. е. поверхность с плоскостью центров.

Упражнения.

1. Указать координаты центра и главные направления следующих поверхностей, привести уравнение каждой к простейшему виду и определить вид поверхностей:

$$x^2-2yz+4x+4=0; \qquad \text{(I)}$$
$$x^2-y^2-z^2+2xy-4xz+4x+4y-9=0; \qquad \text{(II)}$$
$$4x^2+9y^2+36z^2-8x+36y-144z+220=0; \qquad \text{(III)}$$
$$4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+32x-28y+4z+46=0; \qquad \text{(IV)}$$
$$3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz+2x-6y-2z+3=0. \qquad \text{(V)}$$

2. Показать, что после перенесения начала координат в центр поверхности свободный член K' делается равным отношению „большого дискриминанта“ Δ поверхности к „малому ее дискриминанту“ δ, где

$$\Delta \begin{vmatrix} A, & D, & E, & G \\ D, & B, & F, & H \\ E, & F, & C, & J \\ G, & H, & J, & K \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} A, & D, & E \\ D, & B, & F \\ E, & F, & C \end{vmatrix}.$$

3. Показать, что для центральной поверхности ни один из корней резольвенты не может равняться нулю.

4. Обнаружить, что коэфициенты A', B', C' уравнения, полученного после придания осям координат главных направлений, равны трем корням ρ_1, ρ_2, ρ_3 резольвенты.

5. Показать справедливость заключений, сделанных в следующей таблице:

Знаки корней резольвенты	Знак $\Delta:\delta$	Вид поверхности
$+ + +$ $- - -$	$+$ $-$	Мнимое геометрическое место („мнимый эллипсоид“)
$+ + +$ $- - -$	$-$ $+$	Эллипсоид
$+ + +$ $- - -$	0 0	Точка (эллипсоид с нулевыми полуосями)
$+ + -$ $- - +$	$-$ $+$	Однополостный гиперболоид
$+ + -$ $- - +$	$+$ $-$	Двуполостный гиперболоид
$+ + -$ $- - +$	0 0	Конус

§ 91. Упрощение уравнений поверхностей II порядка без центра и виды последних. Как мы видели, уравнение (1) § 90 выражает поверхность, не имеющую центра, в том и только в том случае, когда $\delta = 0$ и по крайней мере один из трех остальных определителей δ_1, δ_2, δ_3, полученных в § 87, отличен от нуля. Упрощение общего уравнения поверхности проведем в настоящем случае в ином порядке, нежели в случае поверхности с центром. Составив резольвенту $\Phi(\rho) = 0$ (см. § 89) и решив ее, причем один из корней всегда окажется равным 0, так как $\Phi(0) = \delta = 0$, определяем главные направления поверхности. Найдя три или два главных направления (три — если все три корня резольвенты различны, два — если среди них есть два равных), повернем оси координат так, чтобы две оси стали прямыми главных направлений, что возможно при сохранении прямого угла между ними (в силу теоремы IV § 89). Общее уравнение потеряет при этом члены с произведениями переменных и примет вид

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2G'x' + 2H'y' + 2J'z' + K' = 0. \qquad (1)$$

Условие $\delta = 0$, которое должно выполняться и для этого уравнения, примет теперь вид $A'B'C' = 0$, откуда заключаем, что один из трех коэфициентов A', B', C' должен равняться нулю. Предполагая, что $C' = 0$, имеем вместо уравнения (1) уравнение

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2G'x' + 2H'y' + 2J'z' + K' = 0 \tag{2}$$

(случаи $A' = 0$ и $B' = 0$ приводятся к этому простым переименованием осей). В уравнении (2) $A' \neq 0$, $B' \neq 0$, $J' \neq 0$, так как в случае равенства нулю хотя бы одного из этих коэфициентов мы имели бы

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.$$

Перенося начало координат в точку (a, b, c), где a, b, c — числа, значения которых выберем дальше, заменим уравнение (2) уравнением

$$A'x''^2 + B'y''^2 + 2G''x'' + 2H''y'' + 2J''z'' + K'' = 0, \tag{3}$$

где

$$G'' = A'a + G', \quad H'' = B'b + H', \quad J'' = J', \quad K'' = A'a^2 + B'b^2 + 2G'a + \\ + 2H'b + 2J'c + K' = G''a + H''b + G'a + H'b + 2J'c + K' = \\ = (G'' + G')a + (H'' + H')b + 2J'c + K'.$$

В силу сделанного выше замечания о величине коэфициентов A', B', J' уравнения (2), можно взять

$$a = -G' : A', \; b = -H' : B', \; c = -[(G'' + G')a + (H'' + H')b + K'] : 2J'.$$

Тогда будем иметь $G'' = H'' = K'' = 0$ и уравнение (3) примет вид

$$A'x''^2 + B'y''^2 + 2J'z'' = 0, \tag{4}$$

где ни один из трех коэфициентов A', B', J' не равен нулю.

Исследование уравнения (4) сводится к рассмотрению двух случаев.

Случай 1, коэфициенты A' и B' имеют одинаковые знаки. Полагая $A' > 0$, $B' > 0$ (в случае отрицательных значений этих коэфициентов можно предварительно умножить обе части уравнения (4) на -1), возьмем направление оси Z таким, чтобы J' было отрицательным. Тогда уравнение (4) легко приводится к виду

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{5}$$

где

$$p = -J' : A', \quad q = -J' : B',$$

и выражает *эллиптический параболоид*.

Случай 2, коэфициенты A' и B' имеют разные знаки. Полагая

$$A' > 0, \quad B' < 0, \quad J' < 0,$$

чего всегда можно достичь, приводим уравнение (4) к виду

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{6}$$

где

$$p = -J' : A', \quad q = J' : B'.$$

Уравнение (6) выражает, как мы уже видели в § 75, *гиперболический параболоид.*

Итак, этими двумя параболоидами и исчерпываются виды поверхностей II порядка без центра.

Упражнения.

1. Привести к простейшему виду уравнения следующих поверхностей и определить вид последних:

$$2x^2+2y^2+z^2-2xz-2yz+x+y+2z=0, \tag{I}$$
$$x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+x+y-z=0. \tag{II}$$

2. Показать что коэфициенты A' и B' уравнения (4) равны двум отличным от нуля корням ρ_2 и ρ_3 резольвенты, а для коэфициента J' имеет место формула $J'^2=-\Delta:(\rho_2\rho_3)$, где в правой части стоит число, всегда положительное; если ρ_2 и ρ_3 — числа разных знаков, то $\Delta>0$, если одного, то $\Delta<0$.

3. Точка M движется по оси X, начиная от точки O, с постоянной скоростью v, а точка N движется по прямой, параллельной оси Z и проходящей через точку $A(0, a, 0)$, начиная от точки A, с постоянной скоростью w. Составить уравнение поверхности, описываемой прямой MN, и определить вид этой поверхности, приводя уравнение к простейшему виду.

§ 92. Упрощение уравнений поверхностей II порядка с линией центров или плоскостью центров. Характерным условием наличности бесконечного множества центров у поверхности II порядка, заданной общим уравнением, является, как мы видели в § 87, обращение в нуль четырех определителей δ, δ_1, δ_2, δ_3. Один из корней резольвенты $\Phi(\rho)=0$, как и в случае параболоидов, у таких поверхностей равен всегда нулю, так как $\Phi(0)=\delta=0$.

Освобождая надлежащим поворотом осей уравнение поверхности от членов с произведениями переменных, придадим ему вид

$$A'x'^2+B'y'^2+C'z'^2+2G'x'+2H'y'+2J'z'+K'=0. \tag{1}$$

Условия $\delta=\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$ сведутся теперь к таким

$$A'B'C'=0,\quad B'C'G'=0,\quad A'H'C'=0,\quad A'B'J'=0. \tag{2}$$

Один из трех коэфициентов A', B', C' равен, следовательно, нулю. Предполагая, что $C'=0$ (случаи $A'=0$ или $B'=0$ сводятся к случаю $C'=0$ путем простого переименования осей), сделаем далее два предположения: либо ни один из коэфициентов A' и B' не равен нулю, либо один из них, например B', равен нулю, другой (A') отличен от нуля. Предположения $A'=B'=0$ делать нельзя, так как тогда уравнение (1) свелось бы к уравнению 1-й степени.

Случай 1, $A'\neq 0$, $B'\neq 0$, $C'=0$. Как показывает четвертое уравнение (2), здесь непременно $J'=0$, и уравнение (1) переписывается в виде:

$$A'x'^2+B'y'^2+2G'x'+2H'y'+K'=0.$$

Надлежащим переносом начала координат в плоскости $X'Y'$ освободимся от линейных членов, что всегда возможно в силу условия $A'\neq 0$, $B'\neq 0$, и придем к простейшему уравнению

$$A'x''^2+B'y''^2+K''=0, \tag{3}$$

выражающему на плоскости $X''Y''$ центральную кривую II порядка, а в пространстве — *цилиндрическую поверхность*, у которой эта кривая служит направляющей, а образующими — прямые, параллельные оси Z''. В зависимости от знаков коэфициентов уравнения (3) надо различать следующие 5 подслучаев:

Подслучай 1, $A'>0$, $B'>0$, $K''>0$. Уравнение (3) геометрического смысла не имеет (мнимый цилиндр).

Подслучай 2, $A'>0$, $B'>0$, $K''=0$. Уравнение (3) изображает ось Z (цилиндр, выродившийся в одну прямую).

Подслучай 3, $A'>0$, $B'>0$, $K''<0$. Эллиптический (в частности круговой) цилиндр.

Подслучай 4, $A'>0$, $B'<0$, $K''\neq 0$. Гиперболический цилиндр.

Подслучай 5, $A'>0$, $B'<0$, $K''=0$. Пара плоскостей, пересекающихся по оси Z.

Случай 2, $A'\neq 0$, $B'=C'=0$. Переписываем уравнение (1) в виде

$$A'x'^2+2G'x'+2H'y'+2J'z'+K'=0 \quad (4)$$

и различаем в дальнейшем исследовании 4 подслучая: 1) $H'\neq 0$, $J'\neq 0$, 2) $H'\neq 0$, $J'=0$, 3) $H'=0$, $J'\neq 0$, 4) $H'=J'=0$.

Подслучай 1, $H'\neq 0$, $J'\neq 0$. Преобразование координат по формулам $x'=x''+a$, $y'=b+y''\cos\varphi-z''\sin\varphi$, $z'=y''\sin\varphi+z''\cos\varphi$ переводит уравнение (4) в уравнение $A'x''^2+2G''x''+2H''y''+2J''z''+K''=0$, где $G''=A'a+G'$, $H''=H'\cos\varphi+J'\sin\varphi$, $J''=-H'\sin\varphi+J'\cos\varphi$, $K''=A'a^2+2G'a+2H'b+K'$. Полагая $a=-G':A'$, $\operatorname{tg}\varphi=J':H'$, $b=-(A'a^2+2G'a+K'):2H'$, уничтожим члены $2G''x''$, $2J''z''$, K'' и приведем уравнение (4) к простейшему виду

$$A'x''^2+2H''y'=0. \quad (5)$$

Как видим, в настоящем подслучае уравнение (5), а следовательно, и уравнение (4) выражает *параболический цилиндр*.

Подслучай 2, $H'\neq 0$, $J'=0$. После преобразования координат по формулам $x'=x''+a$, $y'=y''+b$ при $a=-G':A'$, $b=-(A'a^2+2G'a+K'):2H'$ приходим к тому же заключению, что и в подслучае 1.

Подслучай 3, $H'=0$, $J'\neq 0$. Аналогичное преобразование координат, а именно перенос начала в плоскости $X'Z'$ позволяет уничтожить члены $2G'x'$ и K'. Получаем опять уравнение параболического цилиндра

$$A'x''^2+2J'z''=0, \quad (6)$$

но с образующими, параллельными оси Y'.

Подслучай 4, $H'=J'=0$. Перенос начала по оси X' позволяет освободиться от члена с 1-й степенью x' и получить уравнение

$$A'x''^2+K''=0, \quad (7)$$

выражающее либо *пару различных параллельных плоскостей* (при $K'':A'<0$), либо *пару совпадающих плоскостей* (при $K''=0$), либо *мнимое* геометрическое место (при $K'':A'>0$).

Итак, поверхность II порядка с бесконечным множеством центров есть, если не считать случаев мнимости, либо цилиндр, который в частных случаях может вырождаться в прямую линию или в пару пересекающихся плоскостей, либо пара параллельных плоскостей. Цилиндр имеет прямую линию центров (или на конечном, или на бесконечно-большом расстоянии), пара параллельных плоскостей имеет плоскость центров.

Упражнения.

1. Привести к простейшему виду уравнения следующих поверхностей и определить вид последних:

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+2x+2y+2z+1=0; \quad \text{(I)}$$

$$x^2+xy+xz+yz=0; \quad \text{(II)}$$

$$x^2+4x-2y-6z+12=0; \quad \text{(III)}$$

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz+x-y-z=0; \quad \text{(IV)}$$

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=0; \quad \text{(V)}$$

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-x-4y-z+2=0. \quad \text{(VI)}$$

2. Показать, что поверхность II порядка с бесконечным множеством центров, у которой резольвента имеет только один корень, равный нулю, есть цилиндр, направляющая которого — кривая типа эллипса или типа гиперболы, а та поверхность, у которой резольвента имеет два корня, равных нулю, есть параболический цилиндр или пара параллельных плоскостей (действительных различных, или действительных совпадающих, или мнимых). Справедлива и обратная теорема.

§ 93. Касательные и нормали к поверхности II порядка. В § 85 мы уже имели условие касания поверхности II порядка, выраженной общим уравнением, и прямой $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$. Отметим, что, называя касательной всякую прямую, имеющую с поверхностью две совпадающих общих точки, мы получим в качестве особых видов касательных и *асимптоты*, касающиеся поверхности в бесконечно-удаленных точках, и *прямолинейные образующие*, целиком лежащие на поверхности.

Возьмем какую-нибудь точку $P(x_0, y_0, z_0)$ на поверхности

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+ \\ +2Jz+K=0 \quad (1)$$

и проведем через нее все касательные, какие только возможно. Для упрощения выкладок перенесем начало координат в точку P, причем уравнение (1) поверхности заменится таким:

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dx'y'+2Ex'z'+2Fy'z'+2G'x'+ \\ +2H'y'+2J'z'=0, \quad (2)$$

где

$$G'=Ax_0+Dy_0+Ez_0+G,\ H'=Dx_0+By_0+Fz_0+H,\ J'=Ex_0+ \\ +Fy_0+Cz_0+J,\ \ K'=(G'+G)x_0+(H'+H)y_0+(J'+J)z_0+K=0.$$

Прямая, проходящая через точку P и выражаемая, следовательно, системой $x'=mt$, $y'=nt$, $z'=pt$, пересекает поверхность (2) в точках, для которых значения параметра t определяются из уравнения

$$Lt^2+2(G'm+H'n+J'p)t=0,$$

где

$$L=A'm^2+B'n^2+C'p^2+2D'mn+2E'mp+2F'np.$$

Это уравнение имеет корень $t=0$, соответствующий точке P. Чтобы прямая касалась поверхности в точке P, надо, чтобы и другой корень равнялся 0, а для этого числа m, n, p должны удовлетворять условию $G'm+H'n+J'p=0$. Заменяя числа m, n, p через $x':t$, $y':t$, $z':t$ и умножая обе части на t, перепишем это условие в виде $G'x'+H'y'+$ $+J'z'=0$ или после возвращения к прежним координатам $G'(x-x_0)+$ $+H'(y-y_0)+J'(z-z_0)=0$. После упрощений имеем окончательно

$$(Ax_0+Dy_0+Ez_0+G)x+(Dx_0+By_0+Fz_0+H)y+ \\ (Ex_0+Fy_0+Cz_0+J)z+(Gx_0+Hy_0+Jz_0+K)=0. \tag{3}$$

Координаты всякой точки каждой прямой, проходящей через точку P и касающейся поверхности (1), удовлетворяют уравнению (3), а так как это последнее уравнение выражает плоскость, то получаем теорему: *все прямые, проходящие через точку $P(x_0;\ y_0;\ z_0)$ поверхности II порядка (1) и касающиеся последней, располагаются в одной плоскости* (3) и обратно: *всякая прямая, проходящая через точку P и лежащая на плоскости (3), касается поверхности (1) в точке P.*

Плоскость (3), представляющая собой геометрическое место прямых, касающихся поверхности (1) в точке P, называется *касательной плоскостью* к поверхности (1), а точка P — ее *точкой касания.*

Касательная плоскость вполне определена во всех случаях, кроме того, когда координаты точки P одновременно удовлетворяют четырем уравнениям:

$$Ax_0+Dy_0+Ez_0+G=0,\ Dx_0+By_0+Fz_0+H=0,\ Ex_0+ \\ +Fy_0+Cz_0+J=0,\ Gx_0+Hy_0+Jz_0+K=0 \tag{4}$$

и когда уравнение (3) удовлетворяется координатами любой точки пространства. Нетрудно показать, что в этом случае определитель Δ, значение которого указано в упражнении 2 § 90, равен нулю, и поверхность (1) выражает *конус* (действительный или мнимый) с вершиной в точке P. Ясно, что через вершину конуса нельзя провести определенной касательной плоскости к последнему. Кроме того, неопределенность касательной плоскости имеет место в том случае, когда поверхность (1) есть цилиндр, выродившийся в прямую (условие $\Delta=0$ характеризует не только конус, но и цилиндр, который можно рассматривать как конус с бесконечно-удаленной вершиной).

Найдем уравнения касательной плоскости к эллипсоиду, обоим гиперболоидам и конусу, выраженным простейшими уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Взяв произвольную точку $P(x_0;\ y_0;\ z_0)$ на каждой из этих поверхностей, напишем по формуле (3) уравнения касательных плоскостей

$$\begin{aligned} &\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1 && \text{(для эллипсоида),} \\ &\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=1 && \text{(для однополостного гиперболоида),} \\ &\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=-1 && \text{(для двуполостного гиперболоида),} \\ &\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=0 && \text{(для конуса).} \end{aligned} \tag{5}$$

Легко видеть, что сделанное выше замечание о неопределенности касательной плоскости, проведенной через вершину конуса, здесь подтверждается. Вывод уравнений касательных плоскостей к другим поверхностям II порядка предоставляется читателю.

Рассмотрим точки, общие поверхности II порядка и ее касательной плоскости. Взяв поверхность II порядка, заданную общим уравнением, и произвольную точку P на ней, проведем через эту точку касательную плоскость и преобразуем систему координат так, чтобы начало оказалось в точке P, а плоскость совпала с касательной плоскостью. Как скажется такой выбор системы координат на коэфициентах уравнения поверхности

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0?$$

Прежде всего, замечаем, что $K = 0$, так как точка $(0; 0. 0)$ находится на поверхности. Далее в силу того, что ось X касается поверхности (как и всякая прямая, расположенная в касательной плоскости и проходящая через точку касания), имеем $G = 0$ (см. § 85), а в силу того, что ось Y касается поверхности, имеем $H = 0$. Выбирая надлежащим образом направления осей X и Y в касательной плоскости, мы всегда можем уничтожить член с произведением xy. Окончательно имеем уравнение поверхности в виде

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Exz + 2Fyz + 2Jz = 0. \tag{6}$$

Чтобы найти общие точки этой поверхности и касательной плоскости, достаточно решить совместно уравнение (6) и $z = 0$. Имеем уравнение

$$Ax^2 + By^2 = 0, \tag{7}$$

которому удовлетворяют координаты всех точек пересечения касательной плоскости и поверхности. Предполагая сперва, что, по крайней мере одно из чисел A и B не 0, имеем, что уравнение (7) выражает либо одну точку (если $A > 0$, $B > 0$ или $A < 0$, $B < 0$), либо пару пересекающихся прямых (если $A > 0$, $B < 0$ или $A < 0$, $B > 0$), либо пару совпадающих прямых (если $A = 0$, $B \neq 0$ или $A \neq 0$, $B = 0$). В зависимости от того, какой из этих трех случаев имеет место, различают три типа точек поверхностей: точки *эллиптического типа*, (в каждой из которых касательная плоскость к поверхности не имеет с поверхностью никаких других общих точек), точки *гиперболического типа* (касательная плоскость пересекает поверхность по двум пересекающимся прямым), точки *параболического типа* (касательная плоскость пересекает поверхность по двум совпадающим прямым).

Остается рассмотреть случай, когда $A = B = 0$ и уравнение (7) удовлетворяется координатами любой точки плоскости $z = 0$: вся плоскость $z = 0$ является, таким образом, частью рассматриваемой поверхности. В этом случае уравнение (6) переписывается в виде $z(Cz + 2Ex + 2Fy + 2J) = 0$, и рассматриваемая поверхность есть не что иное, как пара плоскостей, одной из которых является плоскость $z = 0$.

Читателю предлагается установить, что все точки эллипсоида, двуполостного гиперболоида, эллиптического параболоида — точки эллиптического типа, все точки однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида — точки гиперболического типа, все точки цилиндров и конусов — параболического типа (исключение представляет вершина конуса и все точки цилиндра, выродившегося в прямую, где вообще определенной касательной плоскости провести нельзя: такие точки носят название „особых“ точек поверхности).

Нормалью к поверхности называют прямую, проходящую через точку касания и перпендикулярную к касательной плоскости. Нормаль к поверхности II порядка, данной общим уравнением, выражается так:

$$\frac{x-x_0}{G'}=\frac{y-y_0}{H'}=\frac{z-z_0}{J}, \tag{8}$$

где x_0, y_0, z_0 координаты точки касания, а $G'=Ax_0+Dy_0+Ez_0+G$, $H'=Dx_0+By_0+Fz_0+H$, $J'=Ex_0+Fy_0+Cz_0+J$.

Упражнения.

1. Найти уравнение прямой, параллельной плоскости YZ, проходящей через точку (1; 4; 3) и касающейся эллипсоида $x^2+4y^2+4z^2=1$.

2. Найти касательную плоскость и нормаль к гиперболоиду $x^2+y^2-z^2=1$ для точки (1; 1; 1) на нем.

3. Найти уравнения тех двух прямых, по которым эта касательная плоскость пересекает гиперболоид.

4. Показать, что касательные плоскости к параболоидам $\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}=2z$ и цилиндрам $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ выражаются уравнениями $\frac{xx_0}{p}\pm\frac{yy_0}{q}-z-z_0=0$, $\frac{xx_0}{a^2}\pm\frac{yy_0}{b^2}=1$.

5. Проверить сделанное выше указание о том, что все точки эллиптического параболоида принадлежат к эллиптическому типу, все точки гиперболического параболоида — к гиперболическому типу, а все точки цилиндров — к параболическому.

6. Показать, что лучи, вышедшие из точки $\left(0;\ 0;\ \frac{1}{2}p\right)$ и отразившиеся от поверхности $x^2+y^2=2pz$, идут далее параллельным пучком *(параболический рефлектор)*.

***§ 94. Круговые сечения поверхностей II порядка.** Как мы видели в § 86 всякое сечение поверхности II порядка плоскостью есть некоторая кривая II порядка. Выясним, не может ли эта кривая оказаться *кругом*, и если может, то в каких именно случаях. Докажем, прежде всего, следующую теорему: *если данная плоскость пересекает поверхность II порядка по кругу, то всякая другая плоскость, параллельная первой, пересекает эту поверхность тоже по кругу, если только вообще пересекает ее.* Для доказательства теоремы примем за плоскость XY данную плоскость. Данная поверхность выразится при этом уравнением

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Jz+K=0,$$

а для кривой пересечения данной плоскости и данной поверхности будем иметь уравнение

$$Ax^2+By^2+2Dxy+2Gx+2Hy+K=0, \tag{1}$$

выражающее круг, если $A=B\neq 0$ и $D=0$. Но при этих условиях уравнение кривой, получаемой в пересечении данной поверхности с любой плоскостью $z=h$, параллельной данной плоскости, имеет такой вид

$$A(x^2+y^2)+2(Eh+G)x+2(Fh+H)y+(Ch^2+2Jh+K)=0$$

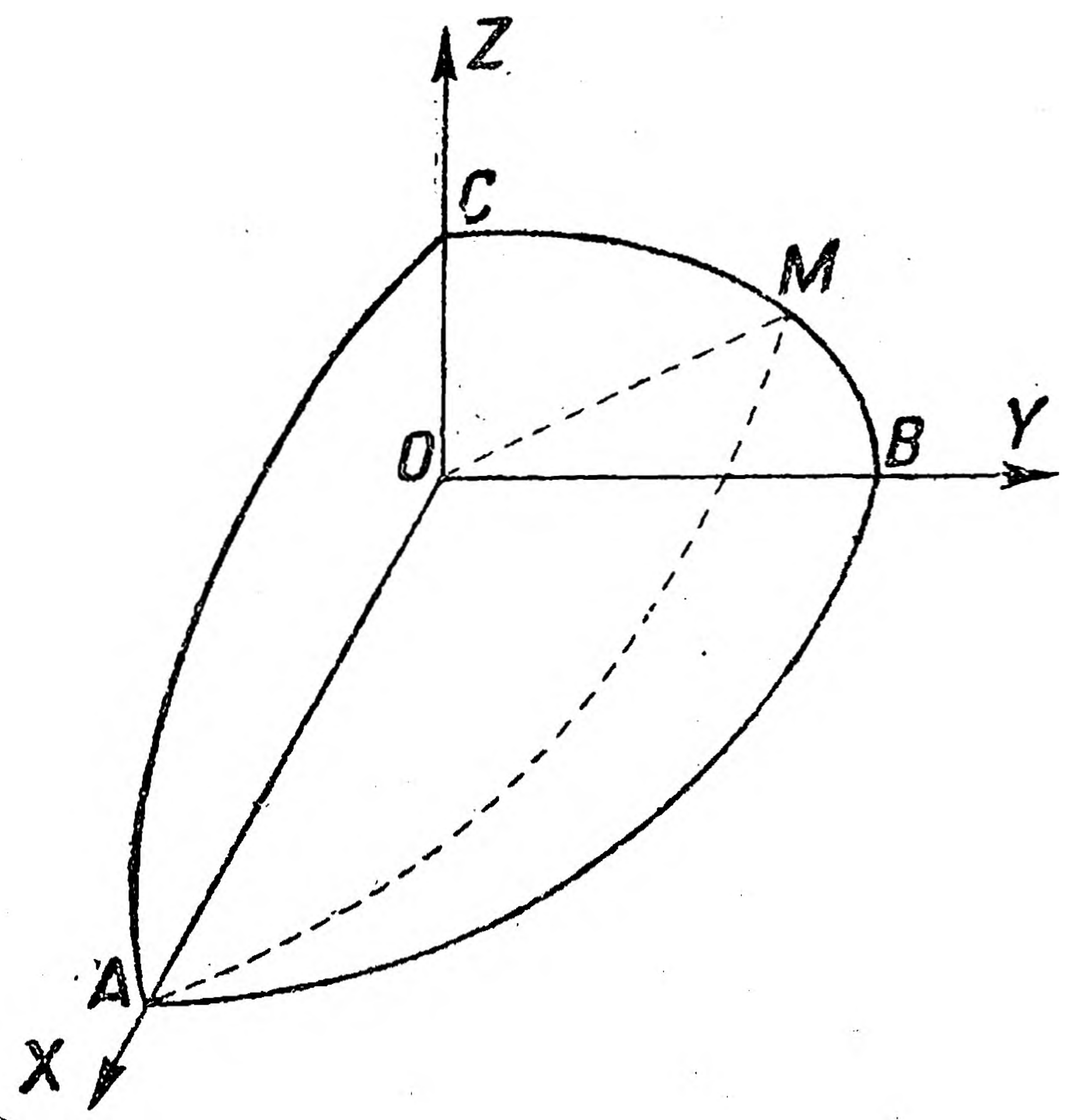
и тоже выражает круг (вырождающийся в некоторых случаях в одну точку или в мнимое геометрическое место).

Доказанная теорема позволяет заключить, что при наличности одного кругового сечения поверхность II порядка имеет целую систему их, и разыскание этой системы круговых сечений сводится к разысканию одного из них.

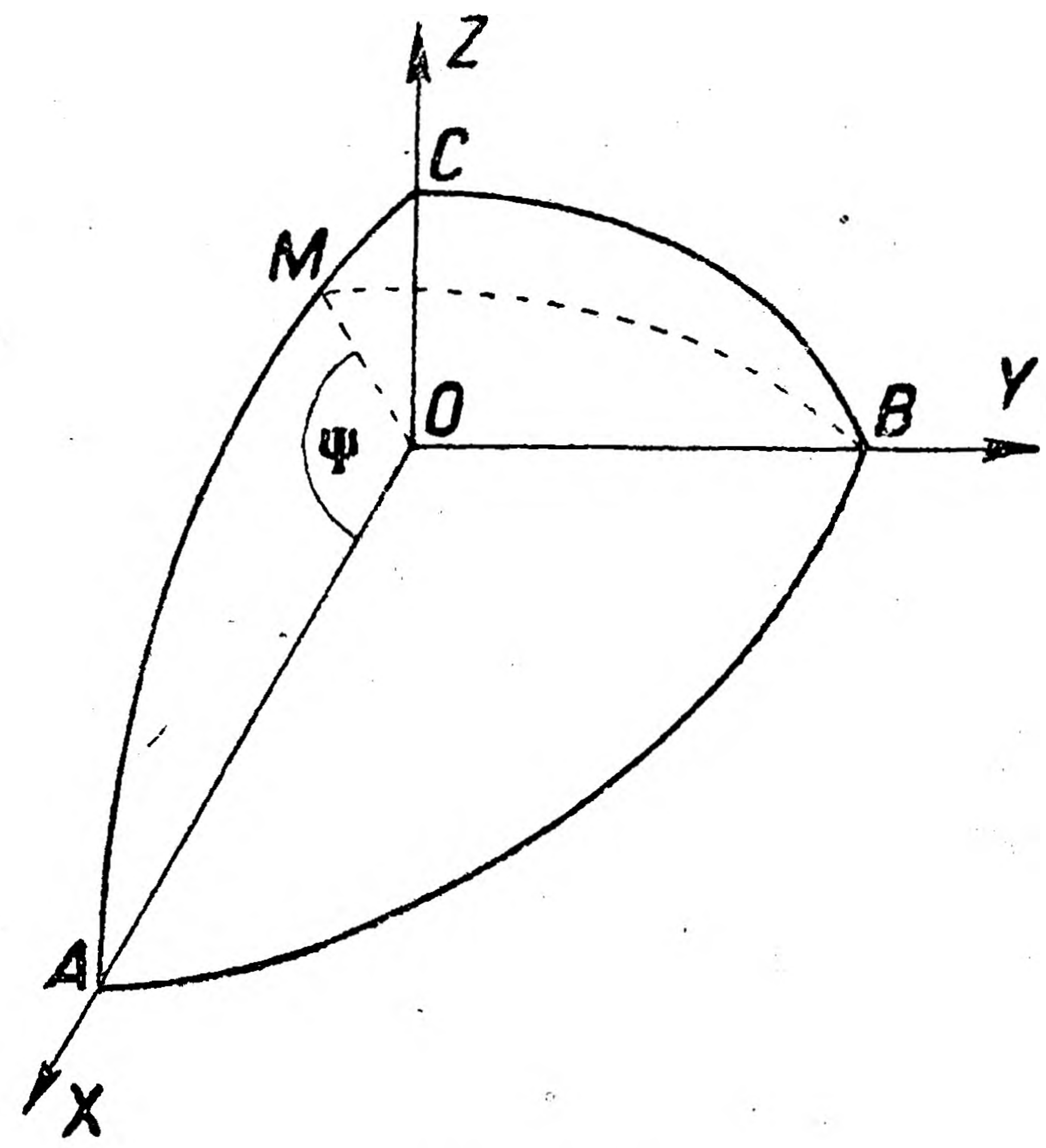
Рассмотрим трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{2}$$

где можно считать $a > b > c$ (черт. 143). Пересечем его плоскостью $z = y \operatorname{tg} \varphi$ проходящей через ось X. В пересечении получим эллипс, одна четверть которого (AMO) изображена на чертеже 143. При изменении φ от 0° до 90° этот эллипс будет изменять свое положение и длину полуоси OM, равной $OB = b$ при $\varphi = 0$ и уменьшающейся (при росте φ) до $OC = c$ при $\varphi = 90°$. Другая же полуось эллипса $OA = a$ остается все время постоянной. В силу условия $a > b > c$ ни при каком значении φ рассматриваемый эллипс в круг не обращается, и трехосный эллипсоид не имеет, следовательно, таких круговых сечений, плоскости которых проходили бы через его наибольшую ось или были бы ей параллельны. Точно так же обнаружим, что нет круговых сечений и в плоскостях, проходящих через наименьшую ось эллипсоида (совпадающую на чертеже 143 с осью Z) или ей параллельных.



Черт. 143.



Черт. 144.

Иначе обстоит дело с плоскостями, проходящими через среднюю ось эллипсоида. Взяв плоскость $z = x \operatorname{tg} \Psi$, будем менять Ψ от 0° до 90°. Эллипс, получаемый в сечении (черт. 144), имеет одну полуось $OB = b$ постоянной, другая же полуось меняется, уменьшаясь от $OA = a$ при $\Psi = 0°$ до $OC = c$ при $\Psi = 90°$. Так как $a > b$ и $c < b$, а изменение OM идет непрерывно, то существует такое значение $\Psi = \Psi_0$, при котором $OM = b$. Написав уравнение эллипса AOC в виде

$$x = a \cos t, \quad z = c \sin t,$$

легко найдем $\operatorname{tg} t$ из условия, что

$$a^2 \cos^2 t + c^2 \sin^2 t = b^2,$$

или

$$a^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 t = b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 t),$$

откуда

$$\operatorname{tg} t = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Но

$$\operatorname{tg} \Psi_0 = \frac{z}{x} = c \sin t : a \cos t = \frac{c}{a} \operatorname{tg} t,$$

а потому

$$\operatorname{tg} \Psi_0 = \pm k,$$

где

$$k = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Итак, *трехосный эллипсоид* (2) *имеет две системы круговых сечений, плоскости которых параллельны плоскостям* $z = \pm kx$, где

$$k = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Плоскость $z = -kx$ симметрична плоскости $z = +kx$ относительно плоскости YZ.

Покажем, что никаких других круговых сечений трехосный эллипсоид не имеет.

Возьмем плоскость, проходящую через начало координат и выражаемую уравнением

$$Ax + By + Cz = 0, \tag{3}$$

и допустим, что она пересекает рассматриваемый эллипсоид по кругу радиуса r. Точки этого круга имеют координаты, удовлетворяющие уравнению сферы с центром в начале координат и с радиусом r. Уравнение этой сферы запишем так:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \tag{4}$$

Координаты любой точки круга удовлетворяют как уравнению эллипсоида, так и уравнению сферы, а потому удовлетворяют и всякому уравнению, получаемому путем комбинирования этих двух уравнений, в частности уравнению

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 0, \tag{5}$$

которое получается, если от уравнения эллипсоида почленно вычесть уравнение сферы.

Выясним, что за поверхность выражается уравнением (5). Замечаем, что поверхность эта II порядка, и делаем два предположения: либо ни один из трех членов левой его части не имеет коэфициента нуль, либо один из них имеет коэфициент нуль (предположения о равенстве нулю двух коэфициентов делать нельзя, так как по условию $a > b > c$). В первом случае мы имели бы либо одну точку, либо конус с вершиной в начале координат, что невозможно, так как уравнению (5) должны удовлетворять все точки круга радиуса r, плоскость которого проходит через начало координат. Остается второй случай — один из коэфициентов уравнения (5) равен нулю. Если равен нулю первый коэфициент, то $r^2 = a^2$, а в силу неравенства $a > b > c$,

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} > 0, \quad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2} > 0.$$

Уравнение (5) выражает в этом случае цилиндр, вырождающийся в одну прямую — ось Z, и не может давать в пересечении с плоскостью (3) круга радиуса r. Точно так же отпадает и предположение о равенстве нулю третьего коэфициента. Предположение же о равенстве нулю второго (среднего) коэфициента приводит к заключению, что $r^2 = b^2$, и к уравнению

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0, \tag{6}$$

где коэфициент при x^2 отрицателен, а при z^2 положителен. Уравнение (6) выражает пару плоскостей $z = \pm kx$, где

$$k = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}},$$

уже рассмотренных выше. Только эти две плоскости из всех, проходящих через центр эллипсоида, и дают круговые сечения.

Эллипсоид вращения, как планетарный (сплющенный), у которого $a = b > c$, так и удлиненный, у которого $a > b = c$, имеет одну систему круговых сечений, перпендикулярных оси вращения.

Сфера, т. е. такой эллипсоид, у которого $a = b = c$, имеет бесчисленное множество систем круговых сечений: всякое сечение сферы плоскостью дает круг.

Гиперболоиды и конус, выражаемые уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a > b,$$

имеют две общих системы круговых сечений, а именно сечений, параллельных плоскостям $z = \pm ky$, где

$$k = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}.$$

Гиперболоиды вращения и прямой круглый конус имеют одну систему круговых сечений, перпендикулярных оси вращения.

Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ при $p > q > 0$ имеет две системы круговых сечений, параллельных плоскостям $z = \pm ky$, где

$$k = +\sqrt{\frac{p-q}{q}}.$$

При $p = q$ получаем параболоид вращения, имеющий одну систему круговых сечений, перпендикулярных к оси вращения.

Гиперболический параболоид круговых сечений вовсе не имеет.

Все приведенные результаты можно установить, применяя рассуждения, аналогичные тем, какие мы имели, рассматривая эллипсоид. Читателю рекомендуется провести их.

Упражнения.

1. Найти радиус кругового сечения эллипсоида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$, если плоскость этого сечения проходит через точку (2; 1; 1).

2. Найти геометрическое место центров всех круговых сечений поверхности II порядка (отдельно рассмотреть все виды поверхностей, имеющих круговые сечения).

3. Выяснить, где расположены точки *закругления* (или „омбилические" точки) поверхности трехосного эллипсоида, т. е. те точки, которые являются центрами круговых сечений нулевого радиуса.

4. Доказать, что однополостный гиперболоид вовсе не имеет омбилических точек, и выяснить, имеют ли такие точки двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид, и если имеют, то каковы их координаты.

*** § 95. Прямолинейные образующие поверхностей II порядка.** Рассматривая вопрос о касательных плоскостях к поверхностям II порядка, мы видели, что каждая такая плоскость пересекает поверхность однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида по паре пересекающихся прямых, а поверхность цилиндра или конуса — по паре совпадающих прямых. Таким образом, существуют прямые, целиком располагающиеся на некоторых кривых поверхностях II порядка. Займемся рассмотрением таких прямых, называемых „прямолинейными образующими", для каждой поверхности II порядка отдельно. При этом говорить о цилиндрах и конусах нет надобности: через каждую точку цилиндра и конуса проходит согласно самому определению этих поверхностей одна прямолинейная образующая, причем все прямолинейные образующие конуса проходят через одну общую точку — вершину конуса; если эта общая точка удаляется в бесконечность, все образующие делаются параллельными друг другу, и конус превращается в цилиндр.

Эллипсоид, будучи заключен в конечной части пространства, иметь прямолинейных образующих, простирающихся неопределенно далеко в обе стороны, не может. Точно так же не могут иметь прямолинейных образующих ни двуполостный гиперболоид, ни эллиптический параболоид, поверхности которых простираются неопределенно далеко лишь в одну сторону. Остаются таким образом только две поверхности — однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид, прямолинейные образующие которых мы и должны рассмотреть.

Возьмем однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

и выясним, каким условиям должны удовлетворять четыре величины k, l, x_0, y_0, определяющие положение прямой

$$x = kz + x_0, \quad y = lz + y_0, \tag{2}$$

если эта прямая целиком лежит на поверхности (1). Система (2) выражает, как известно, любую прямую пространства, не параллельную плоскости XY. Но всякая плоскость $z = h$ пересекает поверхность (1) по эллипсу, а потому прямолинейных образующих, параллельных плоскости XY, быть на поверхности (1) не может.

Чтобы найти точки, общие прямой (2) и поверхности (1), исключаем из этих двух уравнений x и y и получаем уравнение, определяющее аппликаты общих точек

$$Lz^2 + 2Mz + N = 0,$$

где

$$L = \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} - \frac{1}{c^2}, \quad M = \frac{kx_0}{a^2} + \frac{ly_0}{b^2},$$

$$N = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1.$$

Вспоминая сказанное в § 85, заключаем, что необходимые и достаточные условия того, что прямая (2) является прямолинейной образующей поверхности (1), выражаются тремя уравнениями, которым должны удовлетворять четыре величины x_0, y_0, k, l:

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0, \quad \frac{kx_0}{a^2} + \frac{ly_0}{b^2} = 0, \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{3}$$

Последнее из этих уравнений выражает не что иное, как условие нахождения точки $(x_0, y_0, 0)$, т. е. следа прямой (2) на плоскости XY, на горловом эллипсе поверхности (1), и может быть заменено, если воспользоваться параметрическими уравнениями эллипса ($x = a\cos t$, $y = b\sin t$), парой уравнений

$$x_0 = a\cos t, \; y_0 = b\sin t, \tag{4}$$

где t — произвольный угол $(0 \leq t < 2\pi)$.

Подставляя эти выражения x_0 и y_0 в зависимости от t в первые два уравнения системы (3) и решая их относительно k и l, получим

$$k = \pm (a:c)\sin t, \quad l = \mp (b:c)\cos t,$$

где одновременно берутся либо оба верхние, либо оба нижние знака. Подставляя найденные значения x_0, y_0, k, l в уравнения (2), получим уравнения

$$x = \frac{a}{c}(z\sin t + c\cos t), \quad y = \frac{b}{c}(-z\cos t + c\sin t), \tag{5}$$

$$x = \frac{a}{c}(-z\sin t + c\cos t), \quad y = \frac{b}{c}(z\cos t + c\sin t), \tag{6}$$

выражающие *две системы прямолинейных образующих* однополостного гиперболоида: каждому значению t соответствует одна образующая, выражаемая уравнением (5) и принадлежащая к первой системе, и одна образующая, выражаемая уравнением (6) и принадлежащая ко второй системе; чтобы проверить это, достаточно решить каждую из систем (5) и (6) совместно с уравнением (1).

Докажем следующие три теоремы:

I. *Каждая образующая первой системы* (выражаемая, следовательно, уравнениями 5) *пересекается с каждой образующей второй системы* (выражаемой уравнениями 6).

Действительно, два уравнения, получаемые приравниванием абсцисс и ординат точки на каждой из прямых (5) и (6) при произвольных значениях t_1 и t_2, а именно уравнения

$$a(z\sin t_1 + c\cos t_1) = a(-z\sin t_2 + c\cos t_2),$$
$$b(-z\cos t_1 + c\sin t_1) = b(z\cos t_2 + c\sin t_2)$$

удовлетворяются при одном и том же значении z, а именно при

$$z = c \operatorname{tg} \frac{1}{2}(t_1 - t_2).$$

Следовательно, две образующих

$$x = \frac{a}{c}(z \sin t_1 + c \cos t_1), \qquad y = \frac{b}{c}(-z \cos t_1 + c \sin t_1),$$

$$x = \frac{a}{c}(-z \sin t_2 + c \cos t_2), \qquad y = \frac{b}{c}(z \cos t_2 + c \sin t_2) \tag{7}$$

пересекаются всегда в точке с координатами

$$x_0 = \frac{a}{c}(z_0 \sin t_1 + c \cos t_1), \quad y_0 = \frac{b}{c}(-z \cos t_1 + c \sin t_1), \quad z_0 = c \operatorname{tg} \frac{1}{2}(t_1 - t_2). \tag{8}$$

Точка эта лежит на бесконечно-большом расстоянии от начала координат, если $t_1 - t_2 = 180°$, т. е. если следы взятых прямолинейных образующих на плоскости XY находятся в диаметрально-противоположных точках горлового эллипса. Во всех остальных случаях две образующие (разных систем) пересекаются всегда в конечной точке.

II. *Две образующие одной и той же системы* (5) *или* (6) *никогда не пересекаются.*

Действительно, решая совместно два уравнения, получаемые от приравнивания абсцисс и ординат точки на двух образующих одной и той же системы (5), получим для аппликаты z одно и то же значение лишь при соблюдении условия $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(t_1 - t_2) = -\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(t_1 - t_2)$, которое сводится к невозможному равенству $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(t_1 - t_2) = -1$.

III. *Через всякую точку поверхности (1) проходит пара образующих разных систем.*

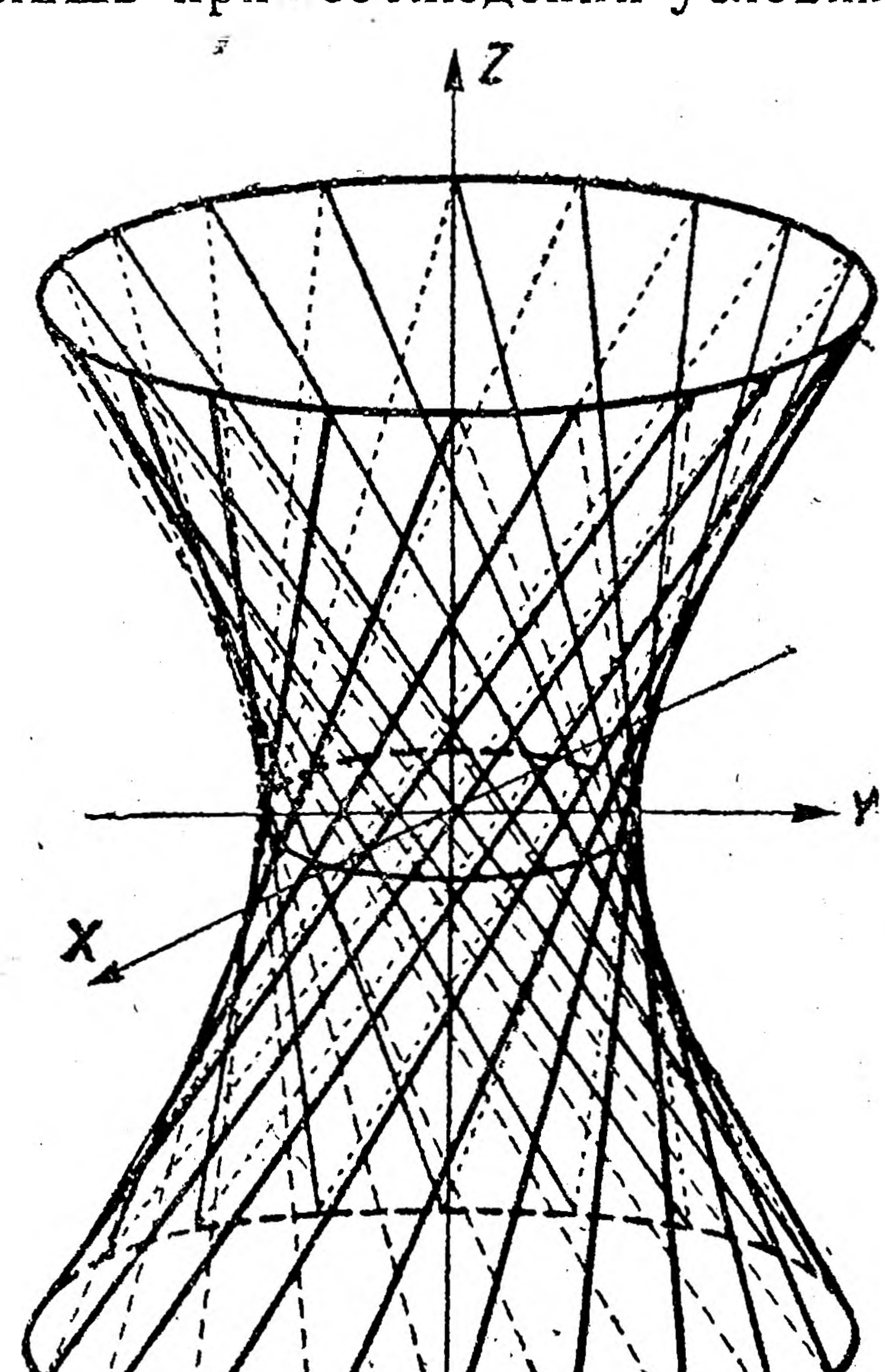
Взяв на поверхности (1) точку (x_0, y_0, z_0) и заменив в системах (5) и (6) текущие координаты x, y, z координатами этой точки, решаем каждую из систем относительно $\sin t$ и $\cos t$ и получаем для первой системы

$$\sin t = \frac{c(x_0 z_0 : a + c y_0 : b)}{c^2 + z_0^2},$$

$$\cos t = \frac{c(x_0 c : a - y_0 z_0 : b)}{c^2 + z_0^2},$$

причем полученные результаты не противоречат друг другу, так как $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, что легко получить, принимая во внимание, что точка $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ лежит на поверхности (1). Таким образом, для любой точки $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ на гиперболоиде можно найти соответствующие значения $\sin t$ и $\cos t$, а следовательно, и t. Аналогичный результат получим и для второй системы.

Чертеж 145 дает представление о том, как расположены прямолинейные образующие однополостного гиперболоида.



Черт. 145.

Существование этих образующих позволяет легко изготовить модель однополостного гиперболоида из пересекающихся нитей.

Переходим к рассмотрению прямолинейных образующих гиперболического параболоида.

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0,\ q > 0). \tag{9}$$

Всякая плоскость, параллельная плоскости XY, пересекает поверхность (9) по гиперболе, сама же плоскость XY пересекает ее по паре прямых

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \qquad \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \tag{10}$$

которые являются образующими поверхности (9).

Чтобы найти другие ее образующие, возьмем систему уравнений (2) и напишем те три уравнения, которым должны удовлетворять четыре ее коэфициента x_0, y_0, k, l, чтобы изображаемая ею прямая целиком лежала на поверхности (9):

$$\frac{k^2}{p}-\frac{l^2}{q}=0, \qquad \frac{kx_0}{p}-\frac{ly_0}{q}=1, \qquad \frac{x_0^2}{p}-\frac{y_0^2}{q}=0. \tag{11}$$

Последнее из уравнений (11) выражает не что иное, как то, что след всякой образующей поверхности (9) на плоскости XY лежит на одной из двух прямых (10). Полагая $\frac{x_0^2}{p}=\frac{y_0^2}{q}=t^2$, где t — произвольное число, имеем $x_0=t\sqrt{p}$, $y_0=\pm t\sqrt{q}$. Полагая далее $\frac{k^2}{p}=\frac{l^2}{q}=\tau^2$, что возможно ввиду первого уравнения системы (11), имеем $k=\tau\sqrt{p}$, $l=\pm\tau\sqrt{q}$. Подставляем полученные выражения для x_0, y_0, k, l во второе из уравнений (11) и получаем либо нелепость $0=1$, если у выражений для y_0 и l взять одинаковые знаки, либо уравнение $2t\tau=1$, если знаки разные. Таким образом, в этих выражениях необходимо брать разные знаки. Последнее уравнение дает $\tau=1:2t$, и мы получаем две системы уравнений:

$$x=\sqrt{p}\left(\frac{z}{2t}+t\right), \quad y=\sqrt{q}\left(\frac{z}{2t}-t\right), \tag{12}$$

$$x=\sqrt{p}\left(\frac{z}{2t}+t\right), \quad y=\sqrt{q}\left(-\frac{z}{2t}+t\right), \tag{13}$$

выражающих при произвольном значении $t\neq 0$ две прямолинейные образующие гиперболического параболоида. Как видим, и здесь образующие составляют две различных системы.

Докажем следующие теоремы об этих образующих.

I. *Каждая из образующих первой системы, выражаемая уравнением* (12), *пересекается с каждой из образующих второй системы, выражаемой уравнением* (13). Возьмем образующую первой системы, соответствующую какому-нибудь произвольному значению параметра $t=t_1$, и образующую второй системы при $t=t_2$. Допустив, что они пересекаются в одной точке, имеем уравнения

$$\frac{z}{2t_1}+t_1=\frac{z}{2t_2}+t_2, \qquad \frac{z}{2t_1}-t_1=-\frac{z}{2t_2}+t_2,$$

дающие одно и то же значение для z, а именно $z=2t_1t_2$. Поэтому две взятых образующих разных систем всегда пересекаются в точке с координатами

$$x=\sqrt{p}(t_1+t_2), \quad y=\sqrt{q}(t_2-t_1), \quad z=2t_1t_2.$$

II. *Две образующих одной и той же системы* (12) *или* (13) *никогда не пересекаются.*

Действительно, взяв две образующих системы (12), соответствующих двум различным значениям t_1 и t_2, и приравняв абсциссы и ординаты обеих, получим для аппликаты z значения $2t_1t_2$ и $\frac{(t_1-t_2)\cdot 2t_1t_2}{t_1+t_2}$, которые не могут равняться друг другу ни при каких отличных от нуля и конечных значениях t_1 и t_2.

III. *Через всякую точку поверхности гиперболического параболоида проходят две прямолинейных образующих* (разных систем).

Возьмем точку (x_0, y_0, z_0) на поверхности (9). Если существует прямолинейная образующая системы (12), проходящая через эту точку, то имеют место равенства

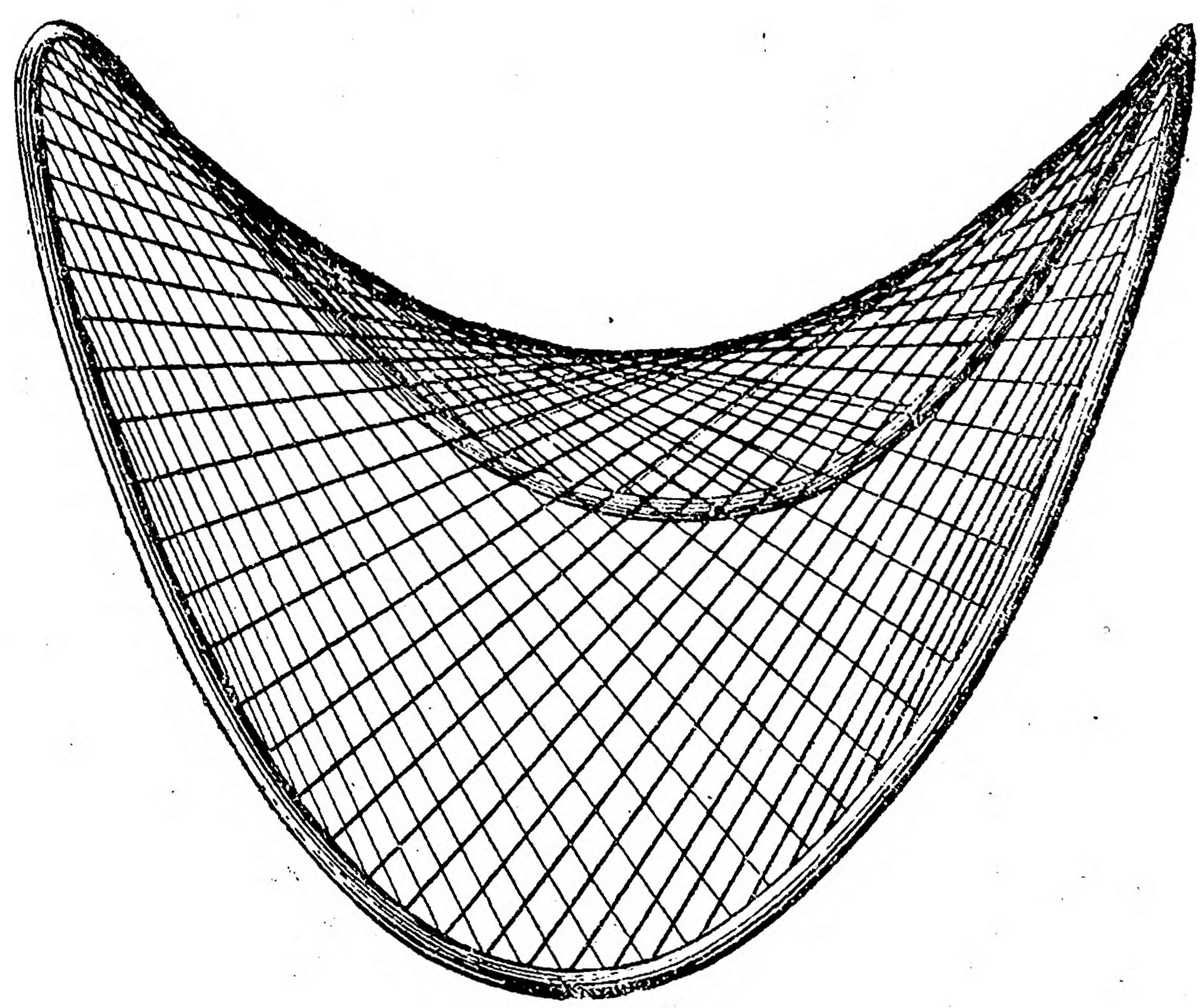
$$x_0=\sqrt{p}\left(\frac{z_0}{2t}+t\right), \quad y_0=\sqrt{q}\left(\frac{z_0}{2t}-t\right),$$

откуда сложением и вычитанием находим

$$2t = \frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}, \quad \frac{z_0}{t} = \frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}.$$

Значение t можно найти посредством каждого из этих двух уравнений, причем получим оба раза одно и то же, так как почленное умножение обоих уравнений дает $2z_0 = \frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q}$, т. е. условие расположения точки (x_0; y_0; z_0) на поверхности (9). Точно так же убеждаемся, что через эту точку проходит и образующая системы (13).

IV. *Все образующие системы* (*12*) *параллельны плоскости, проходящей через ось Z и через прямую* $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ *на плоскости XY, а все образующие системы* (*13*) *параллельны плоскости, проходящей через ось Z и через прямую* $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ *на плоскости XY.*



Черт. 146.

Написав уравнения образующих в виде

$$\frac{x - t\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{y + t\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = \frac{z}{2t}, \tag{14}$$

$$\frac{x - t\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{y - t\sqrt{q}}{-\sqrt{q}} = \frac{z}{2t}, \tag{15}$$

а уравнения указанных плоскостей в виде

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} + 0.z = 0, \tag{16}$$

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} + 0.z = 0, \tag{17}$$

легко убеждаемся, что при любом значении t выполняется условие параллельности для прямой (14) и плоскости (16), а также для прямой (15) и плоскости (17).

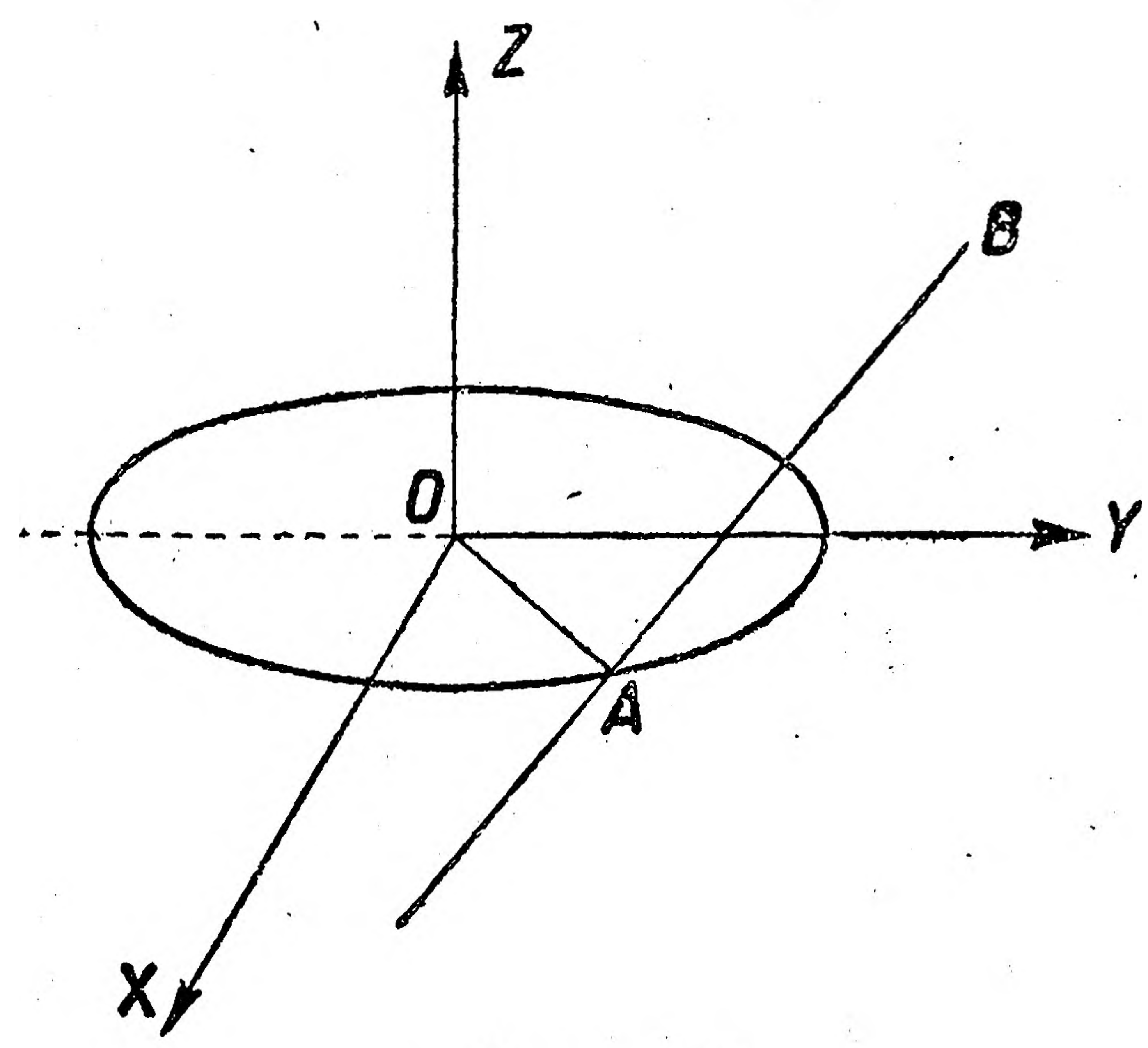
Прямые $\frac{x}{\sqrt{p}} \pm \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ на плоскости XY сами являются, как мы видели выше, образующими поверхности (9). Полагая в уравнениях (14) и (15) $t=0$, видим, что эти две прямолинейные образующие тоже принадлежат к рассмотренным системам, а именно прямая $\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0$ — к первой, выраженной уравнениями (12) и (14), а прямая $\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0$ — ко второй, выраженной уравнениями (13) и (15).

Существование прямолинейных образующих у гиперболического параболоида позволяет построить модель этой поверхности из натянутых нитей (черт. 146).

Упражнения.

1. Найти уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, проходящих через точку (1; 1; 1), а также прямолинейных образующих гиперболического параболоида $x^2-y^2=2z$, проходящих через точку (5; 3; 8).

2. Чтобы устроить модель однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{100^2}+\frac{y^2}{80^2}-\frac{z^2}{100^2}=1$ (все размеры в миллиметрах), взяли два эллипса, соответствующие сечениям $z=\pm 75$, и желают натянуть между ними 36 нитей, представляющих собой отрезки прямолинейных образующих. Найти координаты точек обоих эллипсов, в которых должны быть закреплены нити, если брать равноотстоящие значения параметра t: $t_0=0°$, $t_1=10°$, $t_2=20°\ldots$, $t_{35}=350°$.



Черт. 147.

3. Аналогичная задача для гиперболического параболоида $\frac{x^2}{50}-\frac{y^2}{40}=2z$, пересекаемого плоскостями $z=\pm 50$.

4. Отрезок OA (черт. 147) вращается около точки O, оставаясь в плоскости XY, а вместе с ним вращается прямая AB, перпендикулярная к OA и составляющая угол α с плоскостью XY. Найти уравнение поверхности, описываемой этой прямой.

5. Прямая движется параллельно данной плоскости, все время пересекая две данных прямых, не параллельных ни друг другу, ни данной плоскости. Найти уравнение получаемой при этом поверхности („косой плоскости“).

6. Показать, что две системы линейных уравнений, полученных из уравнения однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, которое можно написать в виде $\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$, где λ — любое число, а именно системы

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b},$$

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\ \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b},$$

выражают две системы прямолинейных образующих взятого гиперболоида.

7. Вывести аналогичным способом уравнения двух систем прямолинейных образующих гиперболического параболоида.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ.

Глава I.

§ 1.

3. Для построительного решения восставляем перпендикуляры к прямой AC через точку A и к хорде AB через ее середину. Их пересечение даст центр круга. Для вычислительного решения берем уравнение $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$, которое должно удовлетворяться при $x = 24$, $y = 18$, и после подстановки этих значений находим из него $r = 25$. Дальше поступаем, как в задаче о разбивке закругления.

§ 2.

1. Ось X по данной прямой, ось Y по перпендикуляру к ней, восставленному через точку касания.

2. Направляя ось X по данной прямой слева направо, имеем искомые координаты (в *см*) $x = -25$, $y = 0$ и $x = 50$, $y = 0$.

3. Придавая точкам нумера от 1 до 12 (начиная с той, которая лежит на оси X и двигаясь против часовой стрелки), имеем:

1. (400; 0).	5. (— 200; 346).	9. (— 200; — 346).
2. (346; 200).	6. (— 346; 200).	10. (0; — 400).
3. (200; 346).	7. (— 400; 0).	11. (200; — 346).
4. (0; 400).	8. (— 346; — 200).	12. (346; — 200).

Здесь $346 = 400 \cos 30°$, $200 = 400 \sin 30°$.

§ 4.

2. При $n = 4$ $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ случая,
при $n = 5$ $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ случаев.

§ 6.

1. Обозначая OA через r, имеем

$$x = r\cos(X, OA) \quad \text{и} \quad y = r\cos(Y, OA) = r\sin(X, OA).$$

2. Проекции на оси X:

$AB\cos(X, X') = AB\cos\alpha$, $O'C\cos\alpha$, $O'D\cos(X, Y') = -O'D\sin\alpha$, $-ED\sin\alpha$;

проекции на ось Y:

$AB\cos(Y, X') = AB\sin\alpha$, $O'C\sin\alpha$, $O'D\cos(Y, Y') = O'D\cos\alpha$, $ED\cos\alpha$.

3. Во всех случаях проекция ломаной на ось X равна $a\cos\alpha - b\sin\alpha$, на ось Y $a\sin\alpha + b\cos\alpha$.

§ 7.

1. $\sqrt{3825} = 61{,}8$. **3.** Если $x_2 = y_2 = 0$, то $d = +\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

4. Два решения: (19; 19) и (5; 5). **5.** Два решения (0; 0) и (24; 0).

§ 8.

1. (22; 10). **2.** $x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$; $y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

3. При возрастании λ от 0 до $+\infty$ точка M движется от точки A до точки B (слева направо). При уменьшении λ от 0 до -1 точка M движется от точки A

налево и уходит на бесконечно-большое расстояние. При изменении λ от -1 до $-\infty$ точка M движется справа налево от бесконечности до точки B.

§ 9.

1. $x' = -70$; $y' = 40$.

2. Обозначая вершины буквами A_1, A_2, A_3, а середины противолежащих сторон буквами M_1, M_2, M_3, имеем старые координаты:

$$A_1(10;\ 0),\ A_2(0;\ 10\sqrt{3}),\quad A_3(-10;\ 0),$$
$$M_1(-5;\ 5\sqrt{3}),\quad M_2(0;\ 0),\quad M_3(5;\ 5\sqrt{3}),$$

и новые координаты:

$$A_1(5;\ -5\sqrt{3}),\ A_2(15;\ 5\sqrt{3}),\ A_3(-5;\ 5\sqrt{3}),\ M_1(5;\ 5\sqrt{3}),\ M_2(0;\ 0),\ M_3\ (10;\ 0).$$

3. $A(-60;\ 20)$, $B(-80;\ 20-20\sqrt{3})$, $C(-80+15\sqrt{3};\ 5-20\sqrt{3})$, $D\ (15\sqrt{3}-60;\ 5)$.

§ 10.

1. Вершины $(0;\ 0)$, $(a;\ 0)$, $(0;\ b)$. Середины сторон $\left(\frac{1}{2}a;\ 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}a;\ \frac{1}{2}b\right)$, $\left(0;\ \frac{1}{2}b\right)$. Центр тяжести $\left(\frac{1}{3}a;\ \frac{1}{3}b\right)$.

2. Применить теорему о квадрате стороны треугольника.

3. Проводя через точку M со старыми координатами x и y и новыми координатами x' и y' отрезок MP параллельно оси Y и отрезок MQ параллельно оси Y' (точка P на оси X, точка Q на оси X'), проектируем ломаные OPM и OQM на некоторую прямую L, проходящую через начало O. Получаем

$$x\cos(X,\ L) + y\cos(Y,\ L) = x'\cos(X', L) + y'\cos(Y', L). \tag{I}$$

Взяв сперва $(Y,\ L) = \frac{1}{2}\pi$, находим из соотношения $(X,\ L) + (L,\ Y) = (X,\ Y)$, что $(X,\ L) = \omega + \frac{1}{2}\pi$. Подобным же образом получаем:

$$(X', L) = \beta + \frac{1}{2}\pi,\quad (Y', L) = \beta' + \frac{1}{2}\pi,$$

и после подстановки в формулу (I), находим

$$x\sin\omega = x'\sin\beta + y'\sin\beta'. \tag{II}$$

Полагая далее $(X,\ L) = \frac{1}{2}\pi$, имеем

$$(Y,\ L) = \frac{1}{2}\pi - \omega,\quad (X',\ L) = \frac{1}{2}\pi - \alpha,\quad (Y', L) = \frac{1}{2}\pi - \alpha',$$

что дает:

$$y\sin\omega = x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'. \tag{III}$$

При $\omega = \omega' = \frac{1}{2}\pi$ имеем

$$\alpha' = \frac{1}{2}\pi + \alpha,\quad \beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha,\quad \beta' = -\alpha,$$

и формулы (II), (III) переходят в известные формулы преобразования прямоугольных координат для случая вращения осей.

§ 11.

1. Для первой точки $\rho = 400$, $\varphi = 0°$, для второй $\rho = 400$, $\varphi = 30°$, для третьей $\rho = 400$, $\varphi = 60°$ и т. д. до двенадцатой точки, где $\rho = 400$, $\varphi = 330°$.

2. $\rho = 13$, $\varphi = 67°23'$; $\rho = 5$, $\varphi = 126°52'$; $\rho = \sqrt{17}$, $\varphi = 194°2'$.

$(25\sqrt{3},\ -25)$; $(-20\sqrt{2},\ -20\sqrt{2})$; $(-20\cos 18°,\ 20\sin 18°)$.

3. По прямой; по кругу.

4. $AB^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ площадь $ABO = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, откуда

$$AB = 69{,}1 \text{ мм},$$

площадь

$$ABO = 171 \text{ мм}^2.$$

§ 12.

1. $D_1 = -26$, $D_2 = -214$, $D_3 = 0$.
2. $x = 2$, $y = 3$; система несовместна; система неопределенна и удовлетворяется при произвольном значении x и при $y = 2{,}5x - 2$.
3. $x = -1$, $y = 5$, $z = 2$.
4. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ b+a, & c+a \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Глава II.

§ 13.

1. $x^2 - 2ax + y^2 = 0$; $x^2 + y^2 - 2by = 0$.
2. При $x = -30$ $y_1 = 50 + \sqrt{8800} = 143{,}8$, $y_2 = 50 - \sqrt{8800} = -43{,}8$;
   » $x = 0$ $y_1 = 50 + 50 = 100$, $y_2 = 50 - 50 = 0$;
   » $x = 30$ $y = 50 \pm \sqrt{-5600}$ (точки круга с такой абсциссой нет).
3. При $y = 0$ $x_1 = 0$. $x_2 = -240$;
   » $y = 50$ $x_1 = 10$, $x_2 = -250$;
   » $y = 200$ $x = -120 \pm \sqrt{-5600}$ (точки круга с такой ординатой нет).
4. При $x = 0{,}5$ $y = 0{,}949$,
   » $x = 1$ $y = 0{,}791$,
   » $x = 1{,}5$ $y = 0{,}500$,
   » $x = 2$ $y = 0$.
5. Уравнение круга $x^2 + (y + 7{,}54)^2 = 11{,}74^2$. Точка $Q\,(6;\ 2{,}53)$. Отрезок $PQ = 3{,}92$.

§ 14.

1. $y = x$, $y = -x$, $y = -x + 50\sqrt{2}$, $y = x - 50\sqrt{2}$, $y = 0$, $x = 25\sqrt{2}$.
2. Уравнение прямой $y = -x\sqrt{3} - 20$.

   При $x = 15$ $y = -15\sqrt{3} - 20 = -46{,}0$;
   » $x = -25$ $y = 25\sqrt{3} - 20 = 23{,}3$;
   » $y = 0$ $x = -\frac{20}{3}\sqrt{3} = -11{,}5$;
   » $y = 10$ $x = -10\sqrt{3} = -17{,}3$.
3. $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha + n$.

4. Обозначая буквой ω угол между осями координат, выводим уравнение прямой, непараллельной оси Y: $y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}x+n$, где α — угол между осью X и прямой, n — начальная ордината. Прямая, параллельная оси Y, выражается уравнением $x=m$, где m — начальная абсцисса.

§ 15.

1. $l=12\,500$ *м* $=12{,}5$ *км*.

При $x=0$	1	2	3	4	5	6 *км*,
» $y=0$	920	1680	2280	2720	3000	3120 *м*,
при $x=7$	8	9	10	11	12	12,5
» $y=3080$	2880	2520	2000	1320	480	0.

2.

При $x=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
» $y=0$	2,45	3,46	4,24	4,90	5,48	6,00	6,48	6,93	7,35	7,75
при $y=0$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
» $x=0{,}00$	0,04	0,17	0,37	0,67	1,04	1,50	2,04	2,67	3,37	4,17.

4. Снаряд перелетит через холм на высоте 7 *м* над его вершиной.

5. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0^2}{ag}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{g}{v_0^2}\cdot R}\right]$, $R=\frac{ga^2}{v_0^2}+2b$. В зависимости от того, находится ли точка $(a;\ b)$ на параболе $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$ или внутри ее, или вне её, задача имеет либо одно, либо два, либо нуль решений.

6. $\beta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{v}\sqrt{\frac{gh}{2}}\right)=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{8}\sqrt{3g}\right)=34°8'$ (при $g=9{,}8$).

§ 16.

1. $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}$. Двойные знаки необходимы, так как каждая из осей есть ось симметрии кривой.

2. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{300}=1$. При $x=15$ $y=\pm5\sqrt{15}=\pm19{,}4$.

При $x=5$ y имеет мнимое значение: гипербола не имеет точки с такой абсциссой. При $y=30$ $x=\pm20$, при $y=0$ $x=\pm10$.

3. Предполагая, что неприятель расположен в направлении положительной оси Y, имеем координаты пушки $x=3{,}0$; $y=7{,}0$.

§ 17.

1. $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$. Двойной знак указывает на то, что каждая из осей является осью симметрии кривой.

2. $\frac{x^2}{25^2}-\frac{y^2}{15^2}=1$. При $x=15$ $y=\pm12$; при $x=0$ $y=\pm15$; при $x=30$ y имеет мнимое значение (эллипс не имеет точки с абсциссой 30). При $y=8$ $x=\pm\frac{5}{3}\sqrt{161}=\pm21{,}2$; при $y=0$ $x=\pm25$; при $y=20$ x имеет мнимое значение эллипс не имеет точки с ординатой 20).

4. $PQ=4{,}01$ *м*.

5. Эллипс с полуосями $a=r\cos\alpha$, $b=r$.

§ 18.

1.

t	0°	30°	60°	90°	120°	50°	180°
x	0	0,24	1,81	5,71	12,28	21,18	31,42
y	0	1,34	5,00	10,00	15,00	18,66	20,00

t	210°	240°	270°	300°	330°	360°
x	41,65	50,55	57,12	61,02	62,60	62,83
y	18,66	15,00	10,00	5,00	1,34	0,00

2.

t	0°	30°	60°	90°	120°	150°
x	5,00	5,66	7,04	7,86	6,56	2,22
y	0,00	0,19	1,71	5,00	9,56	13,84

t	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
x	— 5,00	— 13,49	— 20,64	— 23,56	— 20,17	— 10,06	5,00
y	15,71	13,37	6,14	— 5,00	— 17,42	— 27,44	— 31,42

§ 19.

3. Приняв точку A за полюс, прямую AA_0 за полярную ось, имеем уравнение кривой $\rho = \rho_0 + \frac{v_0}{\omega}\,\theta$.

4.

φ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
ρ	∞	74,6	20	10	6,7	5,4	5,0

φ	210°	240°	270°	300°	330°	360°
ρ	5,4	6,7	10,0	20,0	74,6	∞

5. Направляя ось X по полярной оси и проводя ось Y через полюс, имеем $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\rho\cos\varphi=x$. Уравнение кривой $\sqrt{x^2+y^2}-x=p$ или $y^2=2px+p^2$. Перенося начало в точку $\left(-\frac{1}{2}p;\ 0\right)$, получаем уравнение $y'^2=2px'$.

§ 20.

2. Проводя ось X через данные точки и поместив начало в середине отрезка, их соединяющего, получим уравнение кривой в виде $(x^2+y^2)^2-2b^2(x^2-y^2)=c^4-b^4$, или в полярных координатах (полюс в точке (0; 0), полярная ось по оси X) в виде $\rho^4-2b^2\rho^2\cos 2\varphi=c^4-b^4$.

3. Эллипс с полуосями r и $r\operatorname{cosec}\alpha$.

4. Эллипс с полуосями a и b.

5. Эллипс.

6. Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=c^2-a^2$.

7. Парабола $y^2=2p\left(x-\frac{1}{2}p\right)$.

§ 21.

1. Кривые (I) и (III) трансцендентные, кривые (II), (IV), (V), (VI) алгебраические (I, III, II, II порядка).

2. Уравнение $y=kx$ выражает все точки прямой, уравнение $\frac{y}{x}=k$ все ее точки, кроме точки (0; 0).

3. Уравнение $y=x$ выражает биссектрису угла между осями X и Y, а уравнение $xy=x^2$ пару прямых, а именно эту биссектрису $y=x$ и ось Y.

4. Уравнение $y^2=2px$ выражает параболу, расположенную симметрично относительно оси абсцисс, а уравнение $y=+\sqrt{2px}$ лишь верхнюю ее половину.

5. Уравнение $y^2=(2x+1)^2$, которое можно переписать в виде

$$(y+2x+1)\cdot(y-2x-1)=0,$$

выражает пару прямых $y=2x+1$ и $y=-2x-1$.

6. Уравнение (I) выражает одну точку (0; 0); уравнение (II) геометрического смысла не имеет; уравнение (III) выражает пару точек (0; 0) и (—1; 1); уравнение (IV), которое можно переписать в виде $(x+2)^2+(y-3)^2=-1$, геометрического смысла не имеет.

Глава III.

§ 22.

1. Ось X. Ось Y.

2. Прямая, параллельная оси X и отстоящая от нее на расстоянии $-\frac{C}{B}$.

§ 23.

1. $3x+2y-6=0$, $3x-2y-6=0$, $3x-2y+6=0$, $3x+2y+6=0$.

2. $x\sqrt{3}+y-40=0$, $x-y\sqrt{3}+40=0$, $x\sqrt{3}+y+40=0$, $x\sqrt{3}-y-40=0$.

3. $y=-\frac{12}{5}x-\frac{26}{5}$, $\frac{x}{-\frac{26}{12}}+\frac{y}{-\frac{26}{5}}=1$, $x\cos 202^\circ 37'+y\sin 202^\circ 37'-2=0$.

4. $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$, $\frac{x}{2\frac{1}{2}}+\frac{y}{-1\frac{1}{4}}=1$;

$x\cos 296°30'+y\sin 296°30'-\frac{1}{2}\sqrt{5}=0$;

$x=-8$, $\frac{x}{-8}+\frac{y}{\infty}=1$, $x\cos 180°+y\sin 180°-8=0$;

$y=3\frac{1}{2}$, $\frac{x}{\infty}+\frac{y}{3\frac{1}{2}}=1$, $x\cos 90°+y\sin 90°-3\frac{1}{2}=0$.

5. Переписывая уравнение $y=kx+n$, где $k=\operatorname{tg}\alpha$, ввиде $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}x-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}y+\frac{n}{\sqrt{1+k^2}}=0$, где знак корня берется обратный знаку n, и обозначая буквой α_1 угол между перпендикуляром, опущенным из начала координат на данную прямую, и осью X, имеем $\cos\alpha_1=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$, $\sin\alpha_1=-\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, а потому уравнение принимает вид $x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p=0$, где $p=-\frac{n}{\sqrt{1+k^2}}\geqq 0$. В случае параллельности прямой и оси Y переписываем уравнение $x=m$ при $m>0$ в виде $x\cos 0+y\sin 0-p=0$, где $p=m$, или при $p<m$ в виде $x\cos\pi+y\cos\pi-p=0$, где $p=-m$. При $m=0$ возможна любая из этих двух форм.

§ 24.

1. Прямые (I) и (II) пересекаются в точке $\left(\frac{60}{11};\ -\frac{4}{11}\right)$. Прямые (I) и (III) параллельны. Прямые (I) и (IV) сливаются.

2. При $s=71{,}4$ стоимость одинаковая, при $s>71{,}4$ выгоднее водяной газ.

3. Все три прямые проходят через точку $(-1;\ 3)$.

§ 25.

1. Прямые (I) и (II) образуют при пересечении углы $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{22}{23}=43°44'$ и $180°-\theta=136°16'$.

2. $y=-\frac{1}{2}x$, $y=2x$.

3. Прямые $y=-1{,}25x+5$ и $y=0{,}8x-2$, $y=-1{,}25x+5$ и $4x-5y-30=0$ взаимно перпендикулярны, прямые $y=0{,}8x-2$ и $4x-5y-30=0$ параллельны.

6. Условие параллельности $k=k_1$, условие перпендикулярности $kk_1=-1$.

7. $\theta_1=\operatorname{arc\,tg}7=81°52'$, $\theta_2=\operatorname{arc\,tg}3=71°34'$, $\theta_3=\operatorname{arc\,tg}0{,}5=26°34'$, $\operatorname{tg}(\theta_1+\theta_2)=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=0$, $\theta_1+\theta_2+\theta_3=180°$.

§ 26.

1. $x-4y-13=0$, $4x+y-1=0$.

2. $y+5=0$, $x-1=0$, $8x-3y+1=0$.

3. Как первые три точки, так и последние три лежат на одной прямой.

4. $(3\pm\sqrt{12})\cdot x-(6\mp\sqrt{3})\cdot y+18\mp\sqrt{192}=0$.

5. $y-y_0=\frac{A\pm B\operatorname{tg}\theta}{\pm A\operatorname{tg}\theta-B}\cdot(x-x_0)$.

6. Надо найти координаты точки пересечения двух высот и убедиться, что они удовлетворяют уравнению третьей высоты.

§ 27.

2. Первые три прямых проходят через одну общую точку, последние три через одну общую точку не проходят.

3. $(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)=0$. При $\lambda=\frac{A_1B-AB_1}{AB_2-A_2B}$ эта прямая параллельна, при $\lambda=-\frac{AA_1+BB_1}{AA_2+BB_2}$ перпендикулярна данной прямой

$$Ax+By+C=0.$$

4. $66x+154y+25=0, \quad 154x-66y-19=0.$

§ 28.

1. $7{,}2;\ 2\frac{5}{13};\ 1{,}8\sqrt{5}$. **3.** $21{,}5$. **4.** 46. **5.** $144-9\sqrt{178}\approx 24{,}0$.

§ 29.

1. $-\frac{3\sqrt{57}}{38}x-\frac{2\sqrt{57}}{38}y-\frac{\sqrt{57}}{38}=0$, или $x\cos 233°25'+y\cos 113°25'-0{,}199=0$.

3. n — начальная ордината, k — отношение синусов углов, составленных осями X и Y с данной прямой.

4. Прямые, выражаемые относительно системы координат (с углом между осями, равным ω) уравнениями $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$, составляют углы θ и $\pi-\theta$, причем

$$\sin\theta=\frac{(AB_1-BA_1)\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\omega}},$$

$$\cos\theta=\frac{(AA_1+BB_1)-(AB_1+BA_1)\cos\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\omega}},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{(AB_1-BA_1)\sin\omega}{(AA_1+BB_1)-(AB_1+BA_1)\cos\omega}.$$

5. Для прямых, заданных уравнениями предшествующей задачи, условие параллельности есть $AB_1-BA_1=0$; условие перпендикулярности

$$(AA_1+BB_1)-(AB_1+BA_1)\cos\omega=0.$$

Для прямых $y=kx+n$, $y=k_1x+n_1$ условие параллельности есть $k=k_1$, условие перпендикулярности $(kk_1+1)+(k+k_1)\cos\omega=0$.

6. Расстояние l от данной точки $(x_0;y_0)$ до данной прямой $Ax+By+C=0$ выражается в случае косоугольной системы формулой

$$l=\left|\frac{(Ax_0+By_0+C)\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}\right|.$$

§ 30.

1. $\rho\sin(\alpha-\varphi)-m\sin\alpha=0$.

2. Надо спроектировать радиус-вектор на перпендикуляр, опущенный из полюса на прямую.

3. Прямая выражается уравнением $\rho\cos(\varphi-\gamma)=p$, где γ и p определяются формулами

$$\operatorname{tg}\gamma=(\rho_2\cos\varphi_2-\rho_1\cos\varphi_1):(\rho_1\sin\varphi_1-\rho_2\sin\varphi_2), \qquad p=\rho_1\cos(\varphi_1-\gamma)=\rho_2\cos(\varphi_2-\gamma).$$

§ 31.

1. $7x-9y+34=0$, $9x+7y-12=0$. Здесь угловые коэфициенты $k=\frac{7}{9}$ и $k_1=-\frac{9}{7}$ дают $kk_1=-1$.

2. Биссектрисы прямых $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$ выражаются уравнениями

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A_1x+B_1yC_1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. Координаты точки, лежащей на прямой AB и делящей отрезок AB в отношении $\lambda:1$, выражаются формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_2+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Исключая λ, получаем зависимость, существующую между координатами любой точки прямой AB, т. е. ее уравнение

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}.$$

6. Прямая, перпендикулярная к AB и делящая отрезок AB пополам.

7. Необходимо выяснить, где расположена точка G (выше или ниже точки пересечения прямых BC и GE).

Глава IV.

§ 33.

1. a) Точки (3; —4) и (—4,85; 1,23); b) одна точка касания (—3; 4); c) точек пересечения нет; d) точки (—2; 4,58), (—2; —4,58); e) точек пересечения нет; f) одна точка касания (—5; 0).

2. $$x=\frac{-AC\pm B\sqrt{r^2(A^2+B^2)-C^2}}{A^2+B^2},\quad y=\frac{-BC\mp A\sqrt{r^2(A^2+B^2)-C^2}}{A^2+B^2}$$

условие касания $r^2(A^2+B^2)=C^2$. Одновременно берутся либо оба верхних, либо оба нижних знака.

4. Отрезок EF равен

$$r\sqrt{1-\frac{8}{n}+\frac{48}{n^2}+\left(\frac{6}{n}-1\right)\sqrt{1-\frac{4}{n}-\frac{4}{n^2}}},$$

где r — радиус круга. Проводя вычисления по этой формуле при $n=5, 6, 7, 8, 9, 10, 20$ и параллельно вычисляя значения стороны правильного вписанного в круг n-угольника по формуле $a_n=2r\sin\frac{180^\circ}{n}$, получаем:

при $n=$	5	6	7	8	9	10	20;
$\frac{EF}{r}=$	1,120	1	0,8676	0,7646	0,6830	0,6170	0,1564;
$\frac{a_n}{r}=$	1,176	1	0,8680	0,7654	0,6840	0,6180	0,1564;
$\frac{a_n}{r}-\frac{EF}{r}=$	0,056	0	0,0004	0,0008	0,0010	0,0010	0,0000;
или	5%	0%	0,05%	0,10%	0,15%	0,16%	0,00%.

§ 34.

1. Уравнение касательной $3x-4y-25=0$.

2. Находим из формул (3) § 33 значение k в зависимости от x_1 и y_1 (почленным делением) и подставляем его в уравнение прямой, проходящей через данную точку.

3. Уравнения касательных $3x-2y\pm2\sqrt{13}=0$, или $3x-2y\pm7,21=0$.

4. Уравнения касательных

$$y = \frac{-8 \pm \sqrt{43}}{9} x - \frac{4 \mp 2\sqrt{43}}{3}$$

(одновременно берутся либо оба верхних, либо оба нижних знака).

5. Уравнения касательных $x + 3 = 0$, $7x + 24y - 75 = 0$.

6. При $x_0 \neq 0$ уравнения касательных

$$y = \pm \frac{r}{\sqrt{x_0^2 - r^2}} (x - x_0).$$

В исследовании различать случаи $|x_0| > r$, $|x_0| < r$. В особом случае, когда $x_0 = \pm r$, — только одна касательная, выражаемая уравнением $x_0 = r$ или $x_0 = -r$.

§ 35.

2. Проще всего взять выведенные выше параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ и положить в них $a = b = r$. Параметр t в системе $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ выражает угол между осью X и радиусом, проведенным в точку $(x; y)$.

3. a) Оси координат — не оси симметрии, начало координат — центр симметрии; b) ось X и Y — оси симметрии, начало — центр симметрии; c) ось X — ось симметрии, ось Y — нет, начало — не центр симметрии; d) то же самое; e) оси X и Y — не оси симметрии, начало — центр симметрии.

4. Сжатие $k \approx 0{,}00337$, эксцентриситет $e \approx 0{,}0820$.

5. $b = 6$, $k = \frac{1}{13}$, $e = \frac{5}{13}$.

6. $a = \frac{c}{e}$, $b = \frac{c}{e}\sqrt{1 - e^2}$.

7. Центр Солнца будет удален (на чертеже) от центра эллипса на 1,25 *мм*, а разница между полуосями эллипса окажется около 0,09 *мм*.

§ 36.

1. $(0{,}48; -2{,}48)$, $(-3{,}36; 1{,}36)$.

2. При $n = \pm\sqrt{10{,}25} \approx \pm 3{,}20$ прямая касается эллипса. При $|n| < \sqrt{10{,}25}$ прямая пересекает эллипс; при $|n| > \sqrt{10{,}25}$ не пересекает его.

3. a) При $k = \pm\frac{5}{8}\sqrt{3} \approx 1{,}08$ прямая касается эллипса, при $|k| > \frac{5}{8}\sqrt{3}$ его пересекает, при $|k| < \frac{5}{8}\sqrt{3}$ его не пересекает. b) Из прямых, проходящих через точку (4; 3), касаются эллипса $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2{,}5^2} = 1$ прямые $y - 3 = \frac{11}{96}(x - 4)$ и $x = 4$. Прямые с угловым коэфициентом $k > \frac{11}{96}$ пересекают эллипс, остальные его не пересекают.

4. $\sqrt{128} - 4 = 7{,}314$ и $\sqrt{80} - 4 = 4{,}944$.

§ 37.

1. $(40; 0)$, $(-40; 0)$.

2. Уравнение правой директрисы $x = 62{,}5$. Для точки с абсциссой -10 $d = 72{,}5$, $r = 58$, $r : d = 0{,}8$; для точки с абсциссой 20 $d = 42{,}5$, $r = 34$, $r : d = 0{,}8$; для точки с абсциссой 40 $d = 22{,}5$, $r = 18$, $r : d = 0{,}8$.

3. Фокусы стремятся к совпадению с центром, директрисы удаляются от начала координат неограниченно.

5. Вопрос сводится к выяснению того, при каких значениях x_0 и y_0 возможно существование тождества $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (Px + Qy + R)^2$ для всех точек $(x; y)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$; P, Q, R не зависят от x и y). Заменяя в этом

тождестве сперва x на $-x$, затем y на $-y$, получим два новых тождества; комбинируя их с первым, приходим к следующим, более простым тождествам:

$$xx_0 = -(Qy+R)Px, \quad yy_0 = -(Px+R)Qy,$$
$$P(Qy+R) = -x_0, \quad Q(Px+R) = -y_0,$$

откуда заключаем, что $PQ=0$, $PR=-x_0$, $QR=-y_0$. Далее возможны два предположения: либо $P=0$, либо $Q=0$. Первое предположение приводит к противоречию, второе приводит к заключению, что $x_0=\pm c$, $y_0=0$, $R=\pm a$, $P=\pm\frac{c}{a}=\pm e$.

§ 38.

1. $25x\pm 64y=0$. 2. $125x+384y-5858=0$.

4. Уравнения равных сопряженных диаметров $y=\pm\frac{b}{a}x$; углы с осью X $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}=\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{1}{2}\pi\right)$ и $\pi-\alpha$.

5. $a'=\dfrac{100\sqrt{8}}{\sqrt{89}}$, $b'=\dfrac{5\sqrt{4721}}{\sqrt{89}}$, $a'^2+b'^2=2225$, $a^2+b^2=2225$;

$$\sin\theta=\frac{89}{\sqrt{39^2+89^2}}=\frac{89}{\sqrt{9442}}, \qquad a'b'\sin\theta=1000, \quad ab=1000.$$

6. $a'=2{,}5(\sqrt{21}+\sqrt{13})$, $b'=25(\sqrt{21}-\sqrt{13})$.

7. Вопрос сводится к решению системы уравнений

$$a'^2+a'^2\lambda^2=a^2+b^2, \quad a'^2\lambda\sin\theta=ab, \quad e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

относительно e (λ и θ даны, a', a, b надо исключить). Находим из последнего уравнения $b=a\sqrt{1-e^2}$ и исключаем b из первых двух. Разделив их почленно, придем к уравнению

$$\frac{2-e^2}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{1+\lambda^2}{\lambda\sin\theta},$$

легко разрешимому относительно e и имеющему не более одного корня между 0 и 1.

8. Координаты x, y середины хорды, соединяющей концы двух сопряженных диаметров, легко выражаются в зависимости от углового коэфициента k одного из них. Получаем формулы:

$$x=\frac{a(ak+b)}{2\sqrt{a^2k^2+b^2}}, \qquad y=\frac{b(ak-b)}{2\sqrt{a^2k^2+b^2}}.$$

Исключение k приводит к искомому уравнению геометрического места середин хорд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}.$$

$$\left(\text{эллипс с полуосями } \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

§ 39.

1. Уравнение касательной $5x+8y\sqrt{3}-400=0$.
2. $y=x\pm 5\sqrt{89}$.
3. $7x-18y-170=0$, $3x+2y-170=0$; $x-40=0$, $21x+32y-1160=0$.
4. Тангенс этого угла равен $\dfrac{a^3b}{c^2x_0\sqrt{a^2-x_0^2}}$, где x_0 — абсцисса точки M.

6. Обозначая точки пересечения касательной в точке $M(x_0; y_0)$ с касательными в вершинах большой оси буквами T и T_1, имеем

$$k = \operatorname{tg} XF_1T = \frac{b^2}{(a+c)y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right), \quad k_1 = \operatorname{tg} XF_1T_1 = \frac{-b^2}{(a-c)y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right)$$

и убеждаемся, что $k \cdot k_1 = -1$.

7. Надо найти координаты точки пересечения перпендикуляра, опущенного из фокуса на касательную, и показать, что сумма квадратов этих координат равна a^2 при любом положении точки касания.

8. Круг $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

§ 40.

2. $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{300} = 1$.

3. До точки, абсцисса которой $x \approx 100$ *мм*, 1000 *мм*, $10\,000$ *мм*.

4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$. 6. $\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{2000} = 1$.

§ 41.

1. $(-10;0)$, $(26;36)$; $(-10;0)$, $(26;-36)$; прямая асимптотического направления, пересекает гиперболу в одной лишь конечной точке $(26; 36)$; точек пересечения нет.

2. Через точку $(20; 5)$ проходят две прямые асимптотического направления: $y = 1{,}5x - 25$ и $y = -1{,}5x + 35$. Все остальные прямые пучка пересекают гиперболу в двух точках каждая. Через точку $(5; 20)$ проходят две прямые асимптотического направления $y = 1{,}5x + 12{,}5$ и $y = -1{,}5x + 27{,}5$, две касательных

$$y - 20 = \frac{-4 \pm \sqrt{91}}{3}(x - 5).$$

Прямые с угловым коэфициентом от $-\frac{4+\sqrt{91}}{3} \approx -4{,}81$ до $\frac{\sqrt{91}-4}{3} \approx 1{,}85$ имеют с гиперболой одну или две общих точки, все остальные прямые пучка гиперболы не пересекают.

3. $n^2 \geqq a^2k^2 - b^2$, $n^2 \geqq b^2 - a^2k^2$.

§ 42.

2. Фокусы стремятся к совпадению с центром гиперболы, директрисы — к совпадению с мнимой ее осью.

5. См. решение задачи 5 § 37.

§ 43.

1. $y = \frac{1}{4}x$. 2. $3x - 2y - 80 = 0$. 4. $a'^2 - b'^2 = 300$, $a'b' \sin\theta = 200$.

5. $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{23\sqrt{3}}{39} = 45°36'$.

6. $a'^2 = \frac{1}{8}(\sqrt{33361} + 119)$, $b'^2 = \frac{1}{8}(\sqrt{33361} - 119)$.

7. Вопрос сводится к решению уравнения $\frac{2-e^2}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda \sin\theta}$ (см. задачу 7 § 38).

8. Если один из сопряженных диаметров имеет угловой коэфициент k, то координаты точки R

$$x = \frac{a(ak+b)}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}, \quad y = \frac{b(ak+b)}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}},$$

а потому $y:x = b:a$.

§ 44.

1. $3x - 2y\sqrt{5} - 40 = 0$.
2. $y = x \pm 10\sqrt{3}$.
3. $y - 5 = \frac{-3 \pm \sqrt{44}}{7}(x - 15)$.
5. Пополам.
6. Прямой.

§ 45.

4. Площадь параллелограма равна площади прямоугольника, сторонами которого служат координаты данной точки.

§ 46.

2. $y^2 = 210{,}25x$.
3. 22,5.
4. $\left(\frac{1}{2}p; p\right)$.
5. $(6p; \pm 2p\sqrt{3})$.
6. Парабола $y^2 = p(x - 2p)$.

§ 47.

1. $x = 15 \pm 5\sqrt{5}$, $y = -5 \mp 5\sqrt{5}$; пересечения нет; две совпадающих общих точки (10;10); одна конечная точка пересечения (10;10).

2. При $k = 0$ одна конечная (0; 0) и одна бесконечно удаленная точка пересечения; при

$$0 < k < +\sqrt{\frac{p}{-2a}}$$

две конечных различных точки пересечения; при

$$k = +\sqrt{\frac{p}{-2a}}$$

две совпадающих точки пересечения — прямая касается параболы; при

$$k > +\sqrt{\frac{p}{-2a}}$$

точек пересечения нет.

3. $x = \frac{1}{k^2}(p - kn)$, $y = \frac{p}{k}$.

§ 48.

1. $y = 5$; $y = -5$; $y = 10$.
2. $y = x + n$.
3. $p = 2k^2x_0$.

§ 49.

1. $x - 2y\sqrt{2} + 20 = 0$.
2. $2x - 2y + 5 = 0$.
3. $y - 5 = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \cdot (x + 10)$.
5. Нуль.

§ 50.

1. Надо взять простейшие уравнения кривых и выполнить преобразование координат. При постоянном p и переменном e имеем сперва (при $e = 0$) круг $y^2 = 2px - x^2$, затем (при $0 < e < 1$) семейство эллипсов, далее (при $e = 1$) параболу $y^2 = 2px$, наконец (при $1 < e < +\infty$), семейство гипербол.

2. При возрастании e от 0 до ∞ директриса, находящаяся при $e = 0$ на бесконечно большом расстоянии от начала, постепенно приближается к началу координат и совпадает с осью Y при $e = \infty$. Уравнение директрисы

$$x + \frac{p}{e(1 + e)} = 0.$$

3. Переписывая данные уравнения в виде $y^2 = 2\cdot 2x - 0{,}36x^2$ и $y^2 = 2\cdot 2x + 6x^2$, заключаем, что первое из них выражает эллипс с параметром $p = 2$ и эксцентриситетом $e = 0{,}8$, а второе гиперболу с параметром $p = 2$ и эксцентриситетом $e = \sqrt{7}$. Фокальные оси обеих кривых совпадают с осью X, одна из вершин находится в начале координат.

4. Эллипс уменьшается и превращается в пределе в точку (начало координат). Гипербола стремится к совпадению с парой прямых $y = \pm \frac{b}{a} x$, т. е. с ее асимптотами.

Глава V.

§ 51.

1. $A = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}$, $B = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$, $C = \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2}$,

$D = -Ax_c - By_c$, $E = -Bx_c - Cy_c$, $F = Ax_c^2 + 2Bx_c y_c + Cy_c^2 - 1$.

2. $(y - b)^2 = 2p(x - a)^2$.

3. $A = \sin^2 \alpha$, $B = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha$, $C = \cos^2 \alpha$, $D = -p \cos \alpha$, $E = -p \sin \alpha$, $F = 0$.

4. Если уравнение (1) выражает круг, то оно должно лишь постоянным множителем отличаться от уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, а потому *необходимо* выполнение следующих условий: $A = C \neq 0$, $B = 0$, $D^2 + E^2 - A^2F \geqq 0$ (если эти условия или хотя бы одно из них не выполнены, уравнение (1) выражать круг не может). Эти же условия и *достаточны*, так как при их выполнении уравнение (1) выражает круг радиуса $r = \frac{+\sqrt{D^2 + E^2 - A^2F}}{|A|}$ с центром в точке с координатами $a = -\frac{D}{A}$, $b = \frac{-E}{A}$.

5. Если уравнение (1) выражает параболу с осью симметрии, параллельной оси Y, то оно лишь постоянным множителем отличается от уравнения

$$(x - a)^2 = 2p(y - b),$$

где a и b — координаты вершины параболы, p — ее параметр. Отсюда получаем искомые необходимые и достаточные условия: $A \neq 0$, $B = C = 0$, $E \neq 0$. Параметр параболы $p = -\frac{E}{A}$, координаты вершины $a = -\frac{D}{A}$, $b = \frac{D^2 - F}{2E}$. Заметим, что уравнению рассматриваемой параболы $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ можно дать такой вид:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

где

$$a_0 = b + \frac{a^2}{2p}, \quad a_1 = -\frac{a}{p}, \quad a_2 = \frac{1}{2p}.$$

§ 52.

1. $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3}{4}\right)$, $(5;\ -1)$, $(-1;\ 2)$. Новые уравнения кривых

$$2x'^2 + 2y'^2 - \frac{45}{8} = 0, \quad x'^2 - 4x'y' + 2y'^2 - 44 = 0, \quad 4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0.$$

2. Здесь $\mu = \nu = \delta = 0$, все точки прямой $4x - 6y + 5 = 0$ являются центрами кривой. Полагая произвольно $x_c = 0$, получаем $y_c = \frac{5}{6}$. После переноса начала в эту точку получаем уравнение $16x'^2 - 48x'y' + 36y'^2 - 1 = 0$, которое можно переписать в виде:

$$(4x' - 6y')^2 - 1 = 0, \quad \text{или} \quad (4x' - 6y' + 1)(4x' - 6y' - 1) = 0,$$

и убеждаемся, что данное уравнение выражает пару параллельных прямых

$$4x' - 6y' + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 4x' - 6y' - 1 = 0.$$

3. $\mu = \frac{3}{4}$, $\nu = 0$, $\delta = -\frac{1}{4}$, $x_c = -3$, $y_c = 0$. Новое уравнение кривой

$$2x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0.$$

Его можно представить в виде $(x' - y')(2x' - y') = 0$, что показывает, что оно выражает пару пересекающихся прямых:

$$x' - y' = 0, \quad 2x' - y' = 0.$$

4. Для определения коэфициентов имеем систему:

$$3A - 4B + D = 0, \quad 3B - 4C + E = 0, \quad F = 0, \quad 36A + 12D = 0,$$
$$9A + 6B + C + 6D + 2E = 0,$$

которая дает $B = 0$, $C = A$, $D = -3A$, $E = 4A$, $F = 0$. Искомое уравнение $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$, после преобразования к центру $x'^2 + y'^2 = 25$.

5. При $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ кривая выражает равнобочную гиперболу, уравнение которой после преобразования к центру имеет вид $x'y' = k^2$, где $k^2 = \frac{ad - bc}{c^2}$. При $c \neq 0$, $ad - bc = 0$ кривая распадается на пару взаимно-перпендикулярных прямых. При $c = 0$ уравнение сводится к уравнению первой степени и выражает одну прямую (можно и в этом случае рассматривать уравнение как уравнение второй степени, выражающее пару прямых, из которых одна бесконечно удаленная).

§ 53.

1. $A = 2$, $D = 3$. Уравнения прямых $x - y + 2 = 0$, $x - y + 1 = 0$.

2. Две параллельных прямых $x = 2$ и $x = 3$. Две совпадающих прямых $y = 2$ и $y = 2$. Две параллельных прямых $x + 2y - 3 = 0$ и $x + 2y + 1 = 0$. Две совпадающих прямых $5x - 4y + 3 = 0$ и $5x - 4y + 3 = 0$. Мнимое геометрическое место.

3. Предположив $C \neq 0$, решаем общее уравнение кривой II порядка относительно y и получаем:

$$y = \frac{1}{C}\left[-(Bx + E) \pm \sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + (E^2 - CF)}\right].$$

Чтобы это последнее уравнение выражало пару параллельных прямых, необходимо обращение в 0 коэфициентов первого и второго членов подкоренного выражения, так как только тогда корень сведется к постоянному, а также выполнение условия $E^2 - CF \geqq 0$ (иначе уравнение выражало бы мнимое геометрическое место). Из условий $B^2 - AC = 0$ и $BE - CD = 0$ легко получается условие $BD - AE = 0$ (почленным сложением с предварительным умножением первого на D, второго на $-A$; отдельно рассмотреть случай $B \neq 0$ и случай $B = 0$). Итак, необходимы условия $E^2 - CF \geqq 0$ $\delta = \mu = \nu = 0$ (при $C \neq 0$). Достаточность их следует из того, что при их соблюдении общее уравнение распадается на два, а именно:

$$Cy + Bx + E + \sqrt{E^2 - CF} = 0 \quad \text{и} \quad Cy + Bx + E - \sqrt{E^2 - CF} = 0.$$

К тем же условиям приходим и в случае $C = 0$, $A \neq 0$ (надо решать общее уравнение относительно x). При $A = C = 0$ выражать пару параллельных прямых общее уравнение не может.

§ 54.

1. (I). Гипербола. Центр (0; 0). Фокальная ось наклонена к оси X под углом $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 3$, или 125° 47′. Полуоси $a = \sqrt{6(\sqrt{10} - 3)}$, $b = \sqrt{6(\sqrt{10} + 3)}$.

(II). Пара прямых, пересекающихся в начале, а именно: $y = x$ и $y = \frac{1}{2}x$.

(III). Эллипс. Центр (0; 0). Фокальная ось составляет с осью X угол $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-1)$ или $67^\circ 30'$. Полуоси

$$a=\sqrt{\frac{6}{31}(7+3\sqrt{2})} \quad \text{и} \quad b=\sqrt{\frac{6}{31}(7-3\sqrt{2})}.$$

(IV). Геометрического смысла нет.

(V). Точка (0; 0).

(VI). Круг. Центр $\left(\frac{1}{6}; -2\right)$. Радиус $\frac{1}{6}\sqrt{145}$.

(VII). Гипербола. Центр $(-4;\ 2)$. Фокальная ось составляет с осью X угол $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\infty)$ или 135°. Полуоси $a=b=\sqrt{46}$.

(VIII). Гипербола. Центр (0; 0). Фокальная ось составляет с осью X угол $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-0{,}6)$ или $74^\circ 31'$. Полуоси

$$a=\sqrt{0{,}08(\sqrt{34}+3)} \quad \text{и} \quad b=\sqrt{0{,}08(\sqrt{34}-3)}.$$

2. Воспользоваться тем обстоятельством, что квадратный корень из трехчлена $-\delta x^2+2\mu x-\lambda$ извлекается при переменном x тогда и только тогда, когда $\delta\lambda-\mu^2=0$ и, принять во внимание формулу (11) § 53.

3. Исходить из того, что при наличности оси симметрии, совпадающей с осью X, уравнение кривой, удовлетворяясь координатами точки (x, y), удовлетворяется также и координатами точки $(x, -y)$.

§ 55.

I. Парабола. Фокальная ось наклонена к оси X под углом $\pi+\operatorname{arc\,tg}(-1)$, или 315°. Вершина в точке $\left(\frac{9\sqrt{2}}{56}; -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$ относительно вспомогательной системы осей. Параметр $p=\frac{7}{4}\sqrt{2}$.

II. Парабола. Фокальная ось наклонена к оси X под углом $\operatorname{arctg} 2$, или $63^\circ 26'$. Вершина в точке $(-2{,}92\sqrt{5}; -0{,}08\sqrt{5})$ относительно вспомогательной системы осей. Параметр $p=0{,}04\sqrt{5}$.

III. Парабола с фокальной осью, параллельной оси X, и с вершиной в точке $(0{,}15; -0{,}5)$; $p=2{,}5$.

IV. Парабола с фокальной осью, направленной параллельно оси Y, но в противоположную сторону. Вершина $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Параметр $p=\frac{1}{6}$.

§ 56.

1. Здесь $\delta=q,\quad \mu=p,\quad \nu=0,\quad \Delta=-p^2$.

Случай $p>0$. Нераспадающаяся кривая с фокальной осью, совпадающей с осью X.

Подслучай $q>0$. Эллипс. Центр $\left(\frac{p}{q}\right)$, 0. Полуоси $a=\frac{p}{q}$, $b=\frac{p}{\sqrt{q}}$.

Подслучай $q<0$. Гипербола. Центр $\left(\frac{p}{q}; 0\right)$. Полуоси $a=\frac{p}{-q}$, $b=\frac{p}{\sqrt{-q}}$.

Подслучай $q=0$. Парабола. Вершина (0; 0). Параметр p.

Случай $p=0$. Уравнение $y^2+qx^2=0$.

Подслучай $q>0$. Точка (0; 0).

Подслучай $q<0$. Пара пересекающихся прямых: $y=\pm x\sqrt{-q}$.

Подслучай $q=0$. Пара совпадающих прямых: $y=0$, $y=0$.

2. Уничтожив радикалы, получаем уравнение $(x-y)^2-2a(x+y)+a^2=0$. Кривая — парабола с фокальной осью, составляющей с осью X угол в 45°.

Вершина $\left(\frac{1}{4}a;\ \ \frac{1}{4}a\right)$. Параметр $p=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Каждая из координатных осей касается кривой в точке, удаленной на расстояние a от начала.

3. Уравнение $y=m+nx+\frac{p}{x+q}$ выражает при $p\neq 0$ гиперболу с центром в точке $(-q;\ m-nq)$. Асимптоты $x=-q$ и $y=m+nx$.

4. Полагая $AE=CE=p$ и взяв на стержне AB точку M, отстоящую от E на отрезок $EM=q$ ($q>0$, если M между E и A; $q<0$, если M между E и B), принимаем точку C за начало координат, прямую CD за ось X. Обозначив $\angle ACE$ через t, имеем параметрические уравнения траектории точки M

$$x=(p+q)\cos t,\quad y=(p-q)\sin t$$

и видим, что эта траектория есть эллипс с полуосями $p+q$ и $p-q$. Рассмотреть, во что переходит эллипс при $q=p$ и $q=-p$.

Глава VI.

§ 57.

2. Задача разрешима при любых значениях a и $b\leqq a$ и имеет два решения:

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)^2,\quad \frac{1}{2}\pi<\varphi_1\leqq\frac{3}{4}\pi,\quad d_1=\frac{b^2}{a\sin\varphi_1}$$

и

$$\varphi_2=\frac{3}{2}\pi-\varphi_1,\quad d_2=\frac{b^2}{a\sin\varphi_2},$$

сливающиеся в одно при $a=b$ (круг).

3. Задача разрешима при любых значениях a и $b\leqq a$ и неразрешима при $b>a$, когда асимптоты наклонены к фокальной оси под углом, бо́льшим 45°. Два решения:

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)^2,\quad 0<\varphi_1\leqq\frac{1}{4}\pi,\quad d_1=\frac{b^2}{a\sin\varphi_1}$$

и

$$\varphi_2=\frac{1}{2}\pi-\varphi_1,\quad d_2=\frac{b^2}{a\sin\varphi_2},$$

сливающиеся в одно при $b=a$ (равнобочная гипербола).

4. Задача разрешима при любом значении $p>0$ и имеет одно решение:

$$\varphi=\frac{1}{2}\pi,\quad d=p.$$

§ 58.

1. Гипербола $3x^2-16y^2-120x+320y=0$.

2. Два решения: $(x-y)^2-25(x+y)=0$, $(9x+11y)^2-25(81x+121y)=0$

4. Поместив начало в одну из данных пяти точек и направив ось X через вторую из них, делаем два предположения: 1) остальные три точки тоже лежат на оси X и 2) хотя бы одна из них не лежит на оси X. При первом предположении получаем уравнение $2Bxy+Cy^2+2Ey=0$, кривая распадается. При втором предположении направляем ось Y через третью из данных точек (переход к косоугольным координатам!) и получаем систему из пяти уравнений:

$$\begin{gathered}F=0,\quad 2D=-2Ax_2,\quad 2E=-2Cy_3,\\ Ax_4(x_4-2x_2)+2Bx_4y_4+Cy_4(y_4-2y_3)=0,\\ Ax_5(x_5-2x_2)+2Bx_5y_5+Cy_5(y_5-2y_3)=0,\end{gathered}$$

причем все сводится к определению отношений двух из коэфициентов A, B, C к третьему из последних двух уравнений. При исследовании следует различать такие случаи: 1) эти два уравнения удовлетворяются тождественно при любых A, B, C; 2) одно из них удовлетворяется тождественно, другое нет; 3) ни одно из них не удовлетворяется тождественно, но одно из них есть следствие другого; 4) они противоречат друг другу; 5) они совместны и имеют единственную систему решений.

§ 59.

1. a) $k_1=0$, $k_2=-\frac{3}{4}$; асимптоты $y=2$ и $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$;

b) асимптотических направлений и асимптот нет;

c) $k_1=k_2=-\frac{3}{4}$; асимптот нет.

2. a) Касательных нет; b) касательных нет; c) есть одна касательная $y=\frac{23}{11}x$.

3. $k=\pm 5$.

4. a) Между коэфициентами уравнения

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

существуют соотношения $AF=D^2$, $CF=E^2$.

b) $A=0$; c) $A=D=0$;

d) $A=12$, $B=3$, $C=-2$, $D=2$, $E=-1$, $F=0$.

Для получения этих результатов надо выразить условия прохождения кривой через три данных точки (0; 0), (1; —2), (0; —1), что дает $F=0$, $C=2E$, $A=4B-4E-2D$, а затем найти уравнения касательных (по формуле 10) Сравнивая найденные уравнения с данными, получаем систему:

$$\frac{2B-4E-D}{4}=\frac{B-3E}{3}=\frac{D-2E}{2},$$

$$\frac{-\frac{3}{2}D+D}{1}=\frac{-E}{-1}=\frac{-E}{-1},$$

дающую $D=-2E$, $B=-3E$.

5. Прямая $y=kx+n$, где $k\neq-1$ и $k\neq\frac{3}{2}$, пересекает кривую в двух точках всегда вещественных, совпадающих при $n=2-k$. Прямые $y=-x+n$, где $n\neq 3$, и $y=\frac{3}{2}x+n$, где $n\neq\frac{1}{2}$, пересекают кривую каждая в одной только точке (вторая в бесконечности). Прямые $y=-x+3$ и $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ имеют с кривой бесчисленное множество общих точек каждая (кривая распадается на эти именно две прямые).

§ 60.

1. Рассмотреть отдельно эллипс, гиперболу, параболу, пользуясь простейшими их уравнениями.

2. Поляра произвольной точки $P(x_0, y_0)$ плоскости относительно круга $x^2+y^2=r^2$ имеет уравнение $x_0x+y_0y-r^2=0$ и перпендикулярна к прямой OP, уравнение которой $y_0x-x_0y=0$. Кроме того, обозначая через Q основание перпендикуляра, опущенного из центра круга на поляру, имеем

$$OQ=\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\quad OP=\sqrt{x_0^2+y_0^2},\quad OP\cdot OQ=r^2.$$

3. Пользуясь уравнением (7), показать, что уравнение кривой II порядка относительно которой берется поляра, удовлетворяется при сделанном предположении координатами данной точки.

4. Искомые точки касания находятся в пересечении данной кривой и прямой

$$(qx_0-p)x+y_0y-px_0=0.$$

5. Вопрос сводится к решению системы

$$Ax_0 + By_0 + D = 0, \quad Dx_0 + Ey_0 + F = 0.$$

Выполняя исследование, показать, что система эта неопределенна лишь в случае распадения данной кривой, несовместна лишь в случае, когда ось X проходит через центр (эллипса или гиперболы) или параллельна оси симметрии параболы.

6. Эллипс $\frac{x^2}{(a^2:r^2)^2} + \frac{y^2}{(b^2:r^2)^2} = 1$.

7. Обозначая данные касательные номерами от 1 до 5, а искомую касательную номером 6, берем точки (12) и (45) пересечения касательных 1 и 2 и касательных 4 и 5, соединяем их прямой I. Далее берем точки (23) и (56) пересечения касательных 2 и 3 и касательных 5 и 6 (последняя точка дана) и соединяем их с прямой II. По теореме Брианшона прямая III, соединяющая точки (34) и (61), проходит через точку пересечения прямых I и II, а потому, соединяя эту последнюю с точкой (34), мы и получим прямую III, пересечение которой с прямой I даст вторую точку касательной 6. Проделав все указанные построения, придем к прямой:

$$y = -0{,}6x + 16.$$

§ 61.

1. $x = \pm a\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}}$, $y = \pm b\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}}$. При исследовании, полагая $a > b$, различать случаи: $r < b$ (0 общих точек), $r = b$ (2 общих точки), $b < r < a$ (4 общих точки), $r = a$ (2 общих точки), $r > a$ (0 общих точек).

2. $x = -p \pm \sqrt{p^2 + 2px_0 + r^2}$, $y^2 = 2p\left[\pm\sqrt{p^2 + 2px_0 + r^2} - p - x_0\right]$. Возможны 0, 1, 2, 3, 4 общих точки. При исследовании различать случаи:

$$x_0 > 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0 < 0.$$

3. Начертив обе параболы в масштабе 1 ед. $=$ 1 *мм* (по точкам), находим приближенные значения координат точек пересечения (5; 6), $(-5; 7)$, $(-6; -7)$, $(+6; -7)$. Как показывает подстановка, координаты первой точки определены точно; координаты же остальных нуждаются в уточнении. Взяв, например, вторую точку, вычерчиваем прилежащие к ней части дуг обеих парабол в масштабе 1 ед. $=$ 1 *см*, и получаем по графику более точные координаты: $x = -4{,}9$ и $y = 6{,}8$. Применяя далее способ Ньютона, получаем с точностью до сотых:

$$x = -4{,}92 \quad \text{и} \quad y = 6{,}78.$$

4. Точки пересечения (4; 3) и (3; 4).
5. Точки пересечения (0; 0), (0; 2), (2; 3), $(2; -1)$.
6. Один из корней кубического уравнения, определяющего λ, равен -1. Точки пересечения (0;0), (0;2), (1;0), (2;1).

§ 62.

2. Помещая начало координат в полюсе и совмещая ось X с полярной осью, получаем уравнение данной кривой в прямоугольных координатах:

$$x^2(q^2 - 1) + q^2y^2 + 4px - 4p^2 = 0.$$

3. Полюс — в центре кривой, полярная ось направлена по фокальной оси кривой.

4. $\rho = 2p\cos\varphi\,\mathrm{cosec}^2\varphi$.

Глава VII.

§ 63.

1. $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}; 0; 0\right)$, $\left(0; \frac{1}{2}a\sqrt{2}; 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{2}; 0; 0\right)$, $\left(0; -\frac{1}{2}a\sqrt{2}; 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}; 0; a\right)$, $\left(0; \frac{1}{2}a\sqrt{2}; a\right)$, $\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{2}; 0; a\right)$, $\left(0; -\frac{1}{2}a\sqrt{2}; a\right)$

2. a) Относительно плоскости XY точка $(2; 3; -5)$, плоскости XZ точка $(2; -3; 5)$, плоскости YZ точка $(-2; 3; 5)$; b) относительно оси X точка $(2; -3; -5)$, оси Y точка $(-2; 3; -5)$; оси Z точка $(-2; -3; +5)$, относительно начала точка $(-2; -3; -5)$.

3. a) $(0; 0; 0)$, $(4; 0; 0)$, $(4; -5; 0)$, $(4; -5; -2)$; b) на плоскость XY точка $(4; -5; 0)$, на плоскость XZ точка $(4; 0; -2)$, на плоскость YZ точка $(0; -5; -2)$; c) на ось X точка $(4; 0; 0)$, на ось Y точка $(0; -5; 0)$, на ось Z точка $(0; 0; -2)$.

§ 64.

1. Два решения: $\gamma_1 = 45°$, $\gamma_2 = 135°$.

2. Два решения: $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 54°44'$, $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 125°16'$.

3. Взяв точку $M(x; y; z)$, проектируем ее координатную ломаную на радиус-вектор $OM = r$. Имеем $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 1$, или после замены x через $r\cos\alpha$, y через $r\cos\beta$, z через $r\cos\gamma$ и сокращений как раз требуемую формулу.

4. $60°$.

5. Вопрос сводится к решению системы:

$$\sqrt{2}\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 0,$$
$$-\cos\alpha - \cos\beta + \sqrt{2}\cos\gamma = 0,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

дающей две системы решений:

$$\cos\alpha_1 = +k, \quad \cos\beta_1 = -(\sqrt{2}+1)k, \quad \cos\gamma_1 = -k,$$
$$\cos\alpha_2 = -k, \quad \cos\beta_2 = +(\sqrt{2}+1)k, \quad \cos\gamma_2 = k,$$

где

$$k = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}.$$

§ 65.

1. Длина $5\sqrt{3}$, направляющие косинусы

$$-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad +\frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad +\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

2. Изменятся знаки направляющих косинусов.

3. Точки $(0; 0; 3+\sqrt{574})$ и $(0; 0; 3-\sqrt{574})$.

4. Искомая точка имеет координаты $x = 2\frac{7}{8}$, $y = 0$, $z = 1\frac{3}{5}$

и отстоит от каждой из трех данных точек на расстоянии

$$d = \sqrt{19\frac{1321}{1600}}.$$

5. $\sqrt{52}$, 2, $\sqrt{56}$; $74°30'$, $15°30'$, $90°0'$.

6. $(0{,}4; 2{,}6\ 2{,}2)$, $(-14{,}5; -22)$.

7. Середины всех трех отрезков находятся в одной точке

$$\left(\frac{a+c+d}{4}, \frac{b+e}{4}, \frac{f}{4}\right).$$

§ 66.

1. $x = \frac{1}{3}a + x'$, $y = \frac{1}{3}a + y'$, $z = -\frac{1}{3}a + z'$.

2. $x = \frac{1}{3}\sqrt{6}\cdot x' + \frac{1}{3}\sqrt{3}\ z'$, $y = -\frac{1}{6}\sqrt{6}\cdot x' - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot y' + \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot z'$,

$z = -\frac{1}{6}\sqrt{6}\cdot x' + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot y' + \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot z'$. Новые координаты точки $D(a; a; a)$: $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = a\sqrt{3}$, как и должно быть.

3. После переноса начала в точку $(a; b; c)$ данное уравнение переходит в следующее:

$$x'^2+5y'^2+z'^2+2x'y'+6x'z'+2y'z'+(2a+2b+6c-2)x'+$$
$$(2a+10b+2c+6)y'+(6a+2b+2c+2)z'+(a^2+5b^2+c^2+2ab+6ac+$$
$$+2bc-2a+6b+2c)=0.$$

Приравнивая коэфициенты при x', y', z' нулю и решая полученную систему из трех уравнений, находим

$$a=-\frac{10}{9},\quad b=\frac{4}{9},\quad c=-\frac{1}{9}.$$

Новое уравнение

$$x'^2+5y'^2+z'^2+2x'y'+6x'z'+2y'z'+\frac{59}{9}=0.$$

4. Здесь

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\alpha'=\frac{2}{\sqrt{13}},\quad \cos\beta'=-\frac{3}{\sqrt{13}},$$
$$\cos\gamma'=0,\quad \cos\alpha''=\frac{3}{\sqrt{182}},\quad \cos\beta''=\frac{2}{\sqrt{182}},\quad \cos\gamma''=-\frac{13}{\sqrt{182}}.$$

Новое уравнение $x'=\frac{5}{\sqrt{14}}$.

§ 67.

1. $(0;0;0)$, $(a;0;0)$, $(a;b;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$, $(a;0;c)$, $(a;b;c)$; $(0;b;c)$.

2. $\left(\frac{1}{2}a;0;0\right)$, $\left(\frac{1}{2}a;\frac{1}{2}a;0\right)$, $\left(0;\frac{1}{2}a;0\right)$, $\left(0;0;\frac{1}{2}a\right)$, $\left(\frac{1}{2}a;0;\frac{1}{2}a\right)$, $\left(0;\frac{1}{2}a;\frac{1}{2}a\right)$; $\left(\frac{1}{3}a;\frac{1}{3}a;0\right)$; $\left(0;\frac{1}{3}a;\frac{1}{3}a\right)$; $\left(\frac{1}{3}a;0;\frac{1}{3}a\right)$.

3. Применить тот же прием (проектирование координатной ломаной), что и в § 66.

4. Косоугольная система: плоскости, параллельные плоскостям координат. Полярная система: $\rho=\rho_0$ — поверхность прямого кругового цилиндра, осью которого служит ось Z, радиус основания ρ_0; $\varphi=\varphi_0$ — плоскость, проходящая через ось Z (точнее, полуплоскость); $z=z_0$ — плоскость, перпендикулярная к оси Z. Сферическая система: $\rho=\rho_0$ — сфера радиуса ρ_0 с центром в центре системы; $\varphi=\varphi_0$ — полуплоскость, проходящая через ось системы; $\theta=\theta_0$ — прямой круговой конус с вершиной в центре системы и с осью, совпадающей с осью системы.

Глава VIII.

§ 68.

1. $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$. Центр $(1;-2;0)$, радиус $r=2$.

2. Точка $A(2;-2;0)$ внутри сферы, точка $B(0;2;1)$ вне ее; точка $C(1;-2;2)$ на ней.

§ 69.

1. $(x-a)^2+(z-c)^2=r^2$.

2. Уравнение $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ выражает на плоскости YZ эллипс, а в пространстве эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси X. Уравнение $x^2-y^2=0$ выражает на плоскости XY пару биссектрис координатных углов, а в пространстве пару плоскостей, пересекающихся по оси Z. Уравнение $z^2=2px$ выражает на плоскости XZ параболу, а в пространстве — параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Y. Уравнение $y=\sin x$ выражает на плоскости XY синусоиду, в пространстве же — цилиндр с образующими, параллельными оси Z; направляющей служит эта синусоида. Уравнение $y=kx+n$ выражает на плоскости XY прямую, в пространстве — плоскость, проходящую через эту прямую и параллельную оси Z.

§ 70.

1. $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$

2. Левая часть уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ при замене текущих координат координатами точки, лежащей внутри конуса, принимает отрицательное значение, а координатами точки, лежащей вне конуса, — положительное.

3. Равнобочные гиперболы.

4. Гиперболы. Плоскость $y=h$ пересекает конус (2) по гиперболе с полуосями $\frac{ch}{b}$ и $\frac{ah}{b}$ (первая параллельна оси Z, вторая — оси X), вырождающейся в пару прямых при $h=0$.

§ 71.

1. $\cos\gamma=+\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x-y+z\sqrt{2}-80=0.$

2. Левая часть уравнения (1), обращаясь в нуль при замене текущих координат координатами любой точки плоскости, этим уравнением изображаемой, принимает отрицательное значение, если их заменить координатами какой-либо точки, расположенной по ту же сторону плоскости, как и начала координат, и положительное значение, если их заменить координатами какой-либо точки, расположенной по другую сторону плоскости, нежели начало координат. Чтобы применить это заключение к плоскости, проходящей через начала координат, ее надо рассматривать как предельное положение другой плоскости, ей параллельной, для которой $p \longrightarrow +0$ (т. е. p стремится к 0, принимая только положительные значения).

3. $x\cos 90^\circ+y\cos 135^\circ+z\cos 45^\circ-\sqrt{2}=0.$

§ 72.

1. Плоскость $z=h$ пересекает данный эллипсоид по кругу, проекция которого на плоскость XY имеет уравнение $x^2+y^2=r^2$, где $r=50\sqrt{1-\frac{h^2}{20^2}}$.

При $h=$	0	5	10	15	20,
$r=$	50	48,2	43,3	33,1	0.

2. $r=50\sqrt{1-\frac{h^2}{100^2}}$, а потому

при $h=$	0	20	40	60	80	100
$r=$	50	49,0	45,8	40,0	30,0	0.

3. Во всякой внутренней точке левая часть уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

принимает отрицательное, во всякой внешней — положительное значение.

4. $z_1=+8\sqrt{5}=+\sqrt{320}=17{,}9; \quad z_2=-17{,}9.$

5. $(\pm a; 0; 0), \quad (0; \pm b; 0), \quad (0; 0; \pm c).$

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2 t, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$ Обратно, если дана произвольная точка (x_0, y_0, z_0) на поверхности эллипсоида, то система уравнений

$$x_0=a\cos t\cos\tau, \quad y_0=b\cos t\sin\tau, \quad z_0=c\sin t$$

всегда имеет решение

$$t=\arcsin\left(\frac{z_0}{c}\right), \quad \tau=\arccos\left(\frac{x_0}{a\cos t}\right)=\arcsin\left(\frac{y_0}{b\cos t}\right).$$

Обращаясь к сказанному в § 67 о сферических координатах, указать геометрический смысл параметров t и τ.

§ 73.

1. $x^2+y^2=r^2, \quad r=20\sqrt{1+\frac{h^2}{10^2}}$

При $h=$	0	10	20	30	40	50,
$r=$	20	28,3	44,7	63,2	82,5	102,0

2. $x^2+y^2=r^2, \quad r=20\sqrt{\frac{h^2}{10^2}-1}.$

При $h=$	0	10	20	30	40	50,
$r=$		0	34,6	56,6	77,5	98,0.

3. Во всякой внутренней точке однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

т. е. в точке, расположенной по ту же сторону его поверхности, как и ось Z, левая часть его уравнения имеет отрицательное, во всякой внешней точке — положительное значение.

Называя внутренней точкой двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

всякую точку, расположенную по другую сторону его поверхности, нежели начало координат, имеем то же заключение, что и для однополостного гиперболоида.

§ 74.

1. $x^2+y^2=r^2, \quad r=\sqrt{20h}.$

При $h=$	0	10	20	30	40	50
$r=$	0	14,1	20,0	24,5	28,3	31,6.

2. Называя внутренней точкой эллиптического параболоида всякую точку, расположенную по другую сторону его поверхности, нежели начало координат, имеем, что во внутренних точках левая часть уравнения

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$$

принимает отрицательные значения, во внешних — положительные.

3. $4(H-h)(x^2+y^2)=d^2(H-z).$

§ 75.

1. Левая часть уравнения

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0$$

принимает отрицательные значения в точках, расположенных выше изображаемой им поверхности гиперболического параболоида (ось Z, как и всегда, считаем направленной вверх), и положительные в точках, расположенных ниже ее.

2. Всякая плоскость $z=h$, параллельная плоскости XZ, пересекает поверхность $xy=kz$ по равнобочной гиперболе $xy=kh$ с асимптотами, лежащими в плоскости XZ и YZ, причем полуоси гиперболы растут пропорционально высоте h сечения над плоскостью XY. При $h=0$ гипербола вырождается в пару прямых (оси координат), при $h<0$ гипербола располагается в двух других координатных углах, чем при $h>0$. Сечения плоскостями $x=h$ и $y=h$ дают прямые $hy=kz$ и $hx=kz$.

3. Уравнение $xy=kz$ после поворота осей X и Y на угол $\alpha=45^\circ$ переходит в уравнение

$$\frac{x'^2}{k}-\frac{y'^2}{k}=2z.$$

§ 76.

1. Прямая, проходящая через точку (0; 1; 0) параллельно оси Z. Точка (0; 0; 0). Круг радиуса 1 с центром в точке (0; 0; 1), расположенный в плоскости $z-1=0$. Совокупность плоскости $x=1$ и точки (0; 0; 0).

2. Плоскость, параллельная плоскости YZ и проходящая через точку (—2,5; 0; 0). Пара плоскостей, параллельных плоскости YZ и проходящих через точки (2; 0; 0) и (—2; 0; 0). Три плоскости: координатная плоскость YZ и две плоскости, ей параллельные и проходящие через точки (1; 0; 0) и (2; 0; 0). Совокупность плоскостей $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, ..., параллельных плоскости YZ, где x_1, x_2, x_3, ... корни уравнения $f(x)=0$.

3. Четвертого.

4. Если обозначить буквой ω скорость вращения луча и буквой v скорость движения начальной точки луча по оси Z, то уравнение поверхности будет иметь вид $y=x\operatorname{tg}\frac{\omega z}{a}$.

§ 77.

1. (I) Круг радиуса $\sqrt{11}$ с центром в точке (0; 0; 5), расположенный в плоскости, параллельной плоскости XZ. (II) Круг радиуса 6 с центром в точке (0; 0; 0), расположенный в плоскости $y=2x$. (III) Пара кругов радиуса 1 с центром в точках $(0; 0; +\sqrt{35})$ и $(0; 0; -\sqrt{35})$, расположенных в плоскостях, параллельных плоскости XY. (IV) Кривая двоякой кривизны, проектирующаяся на плоскость XY в виде параболы $y=x^2$, на плоскость XZ в виде кубической параболы $z=x^3$, на плоскость YZ в виде полукубической параболы $z=\sqrt{y^3}$. (V) Точек, координаты которых удовлетворяют обоим уравнениям системы одновременно, не существует (система выражает две концентрических сферы разных радиусов). (VI) Винтовая линия, навернутая на цилиндр $x^2+z^2=a^2$ и имеющая шаг, равный 1 (выражается через параметр t системой $x=a\sin t$, $y=\frac{t}{2\pi}$, $z=a\cos t$).

2. Координаты точки M для момента t

$$x=x_0+vt\cos\alpha,\qquad y=y_0+vt\cos\beta,\qquad z=z_0+vt\cos\gamma.$$

Исключение t приводит к системе:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma},$$

которая удовлетворяется координатами любой точки прямой AB и не удовлетворяется координатами никакой точки, лежащей не на прямой AB; система эта изображает прямую AB.

Глава IX.

§ 78.

1. $\frac{x}{-10}+\frac{y}{-7,5}+\frac{z}{2,5}=1$, $\cos\alpha=-\frac{3}{13}$, $\cos\beta=-\frac{4}{13}$, $\cos\gamma=\frac{12}{13}$, $p=\frac{30}{13}$.

2. $\frac{x}{-2,5}+\frac{y}{-1,875}+\frac{z}{\infty}=0$, $\cos\alpha=-0,6$, $\cos\beta=-0,8$, $\cos\gamma=0$, $p=1,5$.

$\frac{x}{\infty}+\frac{y}{-0,8}+\frac{z}{\infty}=1$, $\cos\alpha=\cos\gamma=0$, $\cos\beta=-1$, $p=1\frac{1}{4}$.

3. Характеризуя плоскость четырьмя величинами p, α, β, γ, возьмем точку S $(2p\cos\alpha;\ 2p\cos\beta;\ 2p\cos\gamma)$, симметричную началу O относительно этой плоскости. Любая точка M (x, y, z) последней одинаково удалена от точки S и O, никакая точка вне плоскости этим свойством не обладает. Равенство $SM=OM$ приводит к уравнению плоскости в нормальном виде.

4. $65x-75y+36z+156=0$.

5. Ребро имеет длину 5 единиц. Куб в I октанте.

6. Ребро имеет длину 5 единиц. Куб в IV октанте.

7. То же уравнение, что и в прямоугольных координатах.

§ 79.

1. Два угла по 66°4′, два — по 132°8′.

2. $a=-5$, $b=10$. 3. $a=9{,}5$. 4. $Ax+By+Cz=0$. 5. $Cy+Bz=0$.

6. Плоскости I, II, III пересекаются в одной точке. Плоскости I, II, IV пересекаются по одной прямой. Плоскости I, II, V пересекаются по параллельным прямым. Плоскости I, II, VI общих точек не имеют: плоскости I и VI параллельны, плоскость II пересекает каждую из них.

§ 80.

1. $2x-3y-z-3=0$. 2. $x-y-2=0$.

3. $x+z-3=0$. 4. $a=3$.

5. $\mu(Ax+By+Cz+D)+\nu(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$, где μ, ν, λ произвольные числа, а в скобках левые части уравнений данных плоскостей.

§ 81.

1. $5\frac{6}{13}$. 2. $7\sqrt{2}$. 3. 250.

§ 82.

1. $\dfrac{x-5}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\dfrac{y-2}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{z+1}{\frac{1}{2}}$, $\dfrac{x-5}{\sqrt{2}}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$;

$x=z\sqrt{2}+(5+\sqrt{2})$, $y=-z+1$.

2. $\dfrac{x-1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\dfrac{y-2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{z+2}{0}$, $\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}=z\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{0}$;

$x=z\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})$, $y=z+4$.

3. $x=-\frac{5}{7}z$, $y=-\frac{2}{7}z-2$.

4. Прямая расположена параллельно плоскости XY, а потому простейшие ее уравнения выражаются так: $x=\frac{4}{3}y+\frac{13}{3}$, $z=-9$ или $y=\frac{3}{4}x-\frac{13}{4}$, $z=-9$.

5. $x=\dfrac{1}{\sqrt{6}}t-1$, $y=\dfrac{2}{\sqrt{6}}t+3$, $z=\dfrac{1}{\sqrt{6}}t$,

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}t-1$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$, $z=4$.

§ 83.

1. 65°30′. 2. $r=-1{,}75$.

3. $n=-2$, $p=4$. 4. $x=2\frac{1}{2}$, $y=1\frac{1}{4}$, $z=1\frac{3}{4}$.

5. 82°11′. 6. $x=2z$, $y=-z$.

7. $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-5}$.

§ 84.

1. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{10}$.

2. С осями координат углы $\alpha=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{27}}=78°54'$, $\beta=\arccos\dfrac{5}{\sqrt{27}}=15°44'$, $\gamma=\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{27}}\right)=101°6'$. С плоскостями координат углы 11°6′, 74°16′, 11°6′.

3. Точки (0; —2; 2); (5; 13; 12); (2; 4; 6).

4. $\dfrac{x-1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\dfrac{y-2}{n}=\dfrac{z-3}{p}$, где $n^2+p^2=\dfrac{1}{4}$. 5. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

6. Уравнение плоскости зеркала $x-y-z=10$. Уравнение нормали к зеркалу в точке падения луча $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{-1}$. Уравнение падающего луча $\dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y+3}{-7}=\dfrac{z}{-2}$. Уравнение плоскости, проходящей через нормаль и падающий луч (в ней же лежит и отраженный луч), $5x+2y+3z-29=0$. Обозначая направляющие косинусы отраженного луча через m, n, p, имеем для их определения систему уравнений, первое из которых выражает параллельность плоскости (I) и отраженного луча, второе — равенство углов падения и отражения:

$$5m+2n+3p=0, \quad m-n-p=\frac{13}{\sqrt{69}}, \quad m^2+n^2+p^2=1.$$

Решая, получаем две системы корней:

$$m=\frac{14}{3\sqrt{69}}, \quad n=-\frac{5}{3\sqrt{69}}, \quad p=-\frac{20}{3\sqrt{69}} \quad \text{и} \quad m_1=\frac{4}{\sqrt{69}},$$
$$n_1=-\frac{7}{\sqrt{69}}, \quad p_1=-\frac{2}{\sqrt{69}}.$$

Последняя система корней дает не что иное как продолжение падающего луча, а потому непригодна. Вторая же система приводит к искомому уравнению отраженного луча, которое по упрощении принимает вид:

$$\frac{x-7}{14}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z}{-20}.$$

„Зайчик" на плоскости $x=0$ имеет координаты $x=0$, $y=-\dfrac{1}{2}$, $z=10$.

Глава X.

§ 85.

1. Прямая $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-6}{0}$ пересекает параболоид в точках (4; 2; 6) и $\left(9\frac{1}{3};\ -8\frac{2}{3};\ 6\right)$. Прямая $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{0}$ пересекает параболоид в точке (3; 3; 0) и в бесконечно удаленной точке (прямая асимптотического направления). Прямая $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-6}{0}$ является асимптотой параболоида. Прямая $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{0}$ является прямолинейной образующей параболоида.

2. Данная прямая лежит на гиперболоиде всеми своими точками (является прямолинейной его образующей), если $c=+1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$ или если $c=-1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=-\dfrac{1}{2}$; является асимптотой, если $c\neq\pm1$, $\cos\beta+c\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$, $\cos^2\beta-\cos^2\gamma=-\dfrac{1}{4}$; является прямой асимптотического направления, но не асимптотой, если $\cos\beta+c\cos\gamma\neq\dfrac{1}{2}$, $\cos^2\beta-\cos^2\gamma=-\dfrac{1}{4}$.

3. $\dfrac{x}{0{,}5}=\dfrac{y}{0{,}5}=\dfrac{z}{\pm0{,}5\sqrt{2}}$. 4. $\dfrac{x}{\sqrt{0{,}02}}=\dfrac{y}{\sqrt{0{,}48}}=\dfrac{z}{\pm\sqrt{0{,}50}}$.

5. Вопрос сводится к выяснению возможности решения системы уравнений $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=0$, $a\cos\alpha+b\cos\beta-c\cos\gamma=0$, $a^2+b^2-c^2+1=0$ относительно α, β, γ, a, b, c,

Почленное вычитание первых двух уравнений дает $\cos\gamma = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, а исключение $\cos\alpha$ из уравнений $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{1}{2}$, $a\cos\alpha + b\cos\beta = \pm\frac{1}{2}c\sqrt{2}$ приводит к такому выражению для $\cos\beta$:

$$\cos\beta = \frac{\mp bc \pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(a^2+b^2)\sqrt{2}} = \frac{\mp bc \pm a\sqrt{-1}}{(a^2+b^2)\sqrt{2}}.$$

Замена подкоренного сделана на основании последнего уравнения системы. Итак, при любых значениях (вещественных) величин a, b, c $\cos\beta$ имеет комплексное значение, что и доказывает отсутствие прямолинейных образующих.

6. Общие точки прямой $\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}$ и параболоидов суть (0; 0; 0) и ($2\cos\alpha\cos\gamma\cdot M$; $2\cos\beta\cos\gamma\cdot M$; $2\cos^2\gamma\cdot M$). Для эллиптического гиперболоида различаем случай I, когда $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ одновременно не нули (подслучай 1, когда $\cos\gamma \neq 0$ и прямая пересекает поверхность в двух различных точках, и подслучай 2, когда $\cos\gamma = 0$ и прямая является касательной в начале координат) и случай II, когда $\cos\alpha = \cos\beta = 0$. В этом II случае $\cos\gamma = \pm 1$, прямая имеет асимптотическое направление. Для гиперболического параболоида возможен случай I, когда $\frac{\cos^2\alpha}{p} - \frac{\cos^2\beta}{q} \neq 0$ (при $\cos\gamma = 0$ касательная в начале координат, при $\cos\gamma \neq 0$ — секущая), и случай II, когда $\frac{\cos^2\alpha}{p} - \frac{\cos^2\beta}{q} = 0$.

В последнем случае при $\cos\gamma = 0$ имеем прямолинейные образующие (их две, обе в плоскости XY), а при $\cos\gamma \neq 0$ прямую асимптотического направления.

§ 86.

1. При $|h| < c$ эллипс, при $|h| = c$ точка, при $|h| > c$ общих точек нет.

2. При $h \neq 0$ равнобочная гипербола, при $h = 0$ пара пересекающихся прямых.

3. Плоскость $x = h$ пересекает данную поверхность при $|h| < 1$ по паре прямых, параллельных плоскости YZ, при $|h| = 1$ по паре совпадающих прямых (плоскость касается поверхности по прямой); при $|h| > 1$ общих точек нет. Плоскость $y = h$ пересекает поверхность всегда по кругу с центром в точке (0; h; h) и радиусом, равным 1, причем плоскость круга параллельна плоскости XZ. Плоскость $z = h$ пересекает поверхность всегда по кругу радиуса 1, расположенному параллельно плоскости XY и имеющему центр в точке (0; h; h). Уравнение $x^2 + y^2 - 2yz + z^2 = 1$ или $x^2 + (y-z)^2 = 1$ изображает цилиндр с направляющей $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ (круг на плоскости XY) и образующими, параллельными биссектрисе координатного угла YOZ.

4. Уравнение изображает пару плоскостей $x + y + 1 = 0$ и $z - 1 = 0$.

5. Проекция на плоскость XZ есть парабола $x^2(1-k^2) = 2z$, вырождающаяся в прямую при $k = \pm 1$ (ось X) и при $k = \infty$ (ось Z). Проекция на плоскость YZ есть парабола $y^2(1-k^2) = 2k^2 z$, вырождающаяся в прямую при $k = \pm 1$ (ось Y) и при $k = 0$ (ось Z).

6. $k = 1$.

7. Поверхность (I) пересекается любой плоскостью, параллельной плоскости XY, по кривой

$$Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2(Eh + G)x + 2(Fh + H)y + (Ch^2 + 2Ih + K) = 0,$$

где h входит в уравнение секущей плоскости $z = h$. Тип этой кривой, согласно тому, что было установлено в § 56, определяется только знаком малого дискриминанта δ, равного в данном случае $AB - D^2$, и не зависящего, таким образом, от h.

§ 87.

1. Центр в точке $(-3;\ 2;\ -1)$, новое уравнеие поверхности

$$4x'^2 + 5y'^2 + 6z'^2 - 4x'y' + 4y'z' - 32 = 0.$$

2. $\delta=\delta_1=\delta_2=0, \quad \delta_3=-\frac{1}{8}p\neq 0$, новое уравнение $x'^2-y'^2=2pz'$.

3. Линия центров $x=z-1, \quad y=-2z$. После переноса начала в точку $(-1;\ 0;\ 0)$ уравнение поверхности принимает следующий вид:

$$2x'^2+y'^2+2z'^2+2x'y'+2y'z'-1=0.$$

4. Плоскость центров $4x+6y-2z+1=0$. После переноса начала в точку $\left(0;\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$ уравнение поверхности принимает вид:

$$4x'^2+9y'^2+z'^2+12x'y'-4x'z'-6y'z'-\frac{9}{4}=0.$$

5. Цилиндр, направляющей которого служит в плоскости $y'=0$ круг

$$x'^2+z'^2=\frac{1}{2},$$

а образующие параллельны линии центров.

6. Решая уравнение поверхности относительно z', находим

$$z'=2x'+3y'\pm\frac{3}{2},$$

а потому эта поверхность является совокупностью двух параллельных плоскостей:

$$2x'+3y'-z'-\frac{3}{2}=0, \qquad 2x'+3y'-z'+\frac{3}{2}=0.$$

§ 88.

1. $Ax+Dy+Ez+G=0, \quad Dx+By+Fz+H=0, \quad Ex+Fy+Cz+I=0.$
2. $x-1=y-1=z+1.$
3. Для эллипсоида $\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}+\frac{pz}{c^2}=0$, для гиперболоидов $\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}-\frac{pz}{c^2}=0$, для параболоидов $\frac{mx}{P}\pm\frac{ny}{Q}=p$ $\left(\text{простейшие уравнения параболоидов берем в виде } \frac{x^2}{P}\pm\frac{y^2}{Q}=2z\right)$.
5. $4x-y-4z+1=0.$

§ 89.

1. Резольвента имеет корни $1, -1, 9$. Первому из них соответствует направление $m_1=p_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad n_1=0$; второму $m_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad n_2=0, \quad p_2=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; третьему $m_3=p_3=0, \quad n_3=1$ (нормирующие множители уже введены). Придавая осям X', Y', Z' эти направления, имеем формулы преобразования $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'+y'), \ y=z', \ z=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'-y')$ и новое уравнение поверхности:

$$\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{9}+\frac{z'^2}{1}=1.$$

2. Корни резольвенты $1, -1, 0$; главные направления $m_1=n_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $p_1=0, \ m_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}, \ n_2=-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \ p_2=0, \ m_3=0, \ n_3=0, \ p_3=1$, формулы преобразования $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'+y'), \ y=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'-y'), \ z=z'$. Новое уравнение

$$x'^2-y'^2=2kz'.$$

3. Корни резольвенты -2, 6, 6; главное направление, соответствующее $\rho=-2$, есть $m_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $n_1=0$, $p_1=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; двойному корню резольвенты соответствует любое направление, удовлетворяющее условию $m=p$. Взяв $m_2=p_2=0$, имеем $n_2=1$. Направление третьей оси определяется из условий перпендикулярности $m_3=p_3=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $n_3=0$. Формулы преобразования $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'+z')$, $y=y'$, $z=\frac{1}{2}\sqrt{2}(z'-x')$.

Новое уравнение

$$x'^2-3(y'^2+z'^2)+x'\sqrt{2}+4y'+z'\sqrt{2}-\frac{3}{2}=0$$

(перенос начала позволяет освободиться и от линейных членов).

4. Корни резольвенты 0, 2, 3; формулы преобразования

$x=\frac{1}{6}x'\sqrt{6}+\frac{1}{2}y'\sqrt{2}+\frac{1}{3}z'\sqrt{3}$, $y=\frac{1}{6}x'\sqrt{6}-\frac{1}{2}y'\sqrt{2}+\frac{1}{3}z'\sqrt{3}$, $z=\frac{1}{3}x'\sqrt{6}-\frac{1}{3}z'\sqrt{3}$; новое уравнение $2y'^2+3z'^2+x'\sqrt{6}=0$.

5. Взяв $m=\cos\alpha$, $n=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $p=0$, имеем уравнение соответствующей диаметральной плоскости $(Ax+G)\cos\alpha+(Ay+H)\sin\alpha+(Cz+I)\cdot 0=0$, или $A\cos\alpha\cdot x+A\sin\alpha\cdot y+G\cos\alpha+H\sin\alpha=0$, и убеждаемся, что она перпендикулярна к сопряженному с нею направлению.

6. Можно употребить либо тот же прием, что в задаче 5, либо исходить из геометрических соображений, основанных на свойствах шара.

7. Возьмем эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, перенесем начало, не меняя направления осей, в точку $(0;\ 0;\ -c)$; получив уравнение $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-\frac{2z'}{c}=0$, будем неограниченно увеличивать полуоси a, b, c, но так, чтобы отношения $a^2:c$ и $b^2:c$ оставались постояннными и равными числам p и q, и придем к уравнению эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$. Взяв же однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ и перенося начало в точку $(0;\ -b;\ 0)$, получим при неограниченном увеличении полуосей a, b, c и при сохранении постоянными отношений $a^2:b=p$ и $c^2:b=q$ уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2y.$$

§ 90.

1. I) Центр $(-2;\ 0;\ 0)$; одно из главных направлений $m=0$, $n=p=\frac{1}{2}\sqrt{2}$; любое направление, перпендикулярное к нему, тоже является главным; приняв направление $m=0$, $n=p=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ за направление оси Z', преобразуем уравнение поверхности к виду $x'^2+y'^2-z'^2=0$. Круговой прямой конус с углом между осью и образующей в 45°.

II) Корни резольвенты -1, $\pm\sqrt{6}$. Новое уравнение $x'^2\sqrt{6}-y'^2\sqrt{6}+z'^2=\frac{23}{3}$ (однополостный гиперболоид).

III) После преобразования к центру имеем $4x'^2+9y'^2+36z'^2=-36$ (мнимое геометрическое место).

IV) Центр $(-3;\ 2;\ -1)$. Корни резольвенты 2, 8, 5. Новое уравнение $2x'^2+5y'^2+8z'^2-32=0$ (эллипсоид).

V) Центр $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$. Резольвента имеет корни 2, 3, 6. Новое уравнение $2x'^2+3y'^2+6z'^2=0$ (одна точка).

2. Предполагая $\delta\neq 0$ и применяя формулы (5) и (6) § 87, имеем $\delta K'=(Gx_c+Hy_c+Jz_c+K)\,\delta=G\delta_1+H\delta_2+J\delta_3+K\delta=\Delta$.

3. Если $\rho=0$, то $\Phi(0)=\begin{vmatrix} A-0 & D & E \\ D & B-0 & F \\ E & F & C-0\end{vmatrix}=\delta=0$, и уравнение выражает либо поверхность без центра, либо поверхность с линией центров или плоскостью центров.

4. Если $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3$ суть корни резольвенты $\Phi(\rho)=0$ общего уравнения II степени с тремя переменными, а $m_1,\ n_1,\ p_1,\ m_2,\ n_2,\ p_2,\ m_3,\ n_3,\ p_3$ — направляющие косинусы соответствующих главных направлений, то, согласно формулам (5) § 89, имеем $Am_1+Dn_1+Ep_1=\rho_1 m_1$, $Dm_1+Bn_1+Fp_1=\rho_1 n_1$, $Em_1+Fn_1+Cp_1=\rho_1 p_1$ и еще шесть подобных же равенств для двух других главных направлений. После поворота осей, совмещающего их с главными направлениями, находим A' по формуле $A'=Am_1^2+Bn_1^2+Cp_1^2+2Dm_1n_1+2Em_1p_1+2Fn_1p_1=(Am_1+Dn_1+Ep_1)\cdot m_1+(Dm_1+Bn_1+Fp_1)\cdot n_1+(Em_1+Fn_1+Cp_1)\cdot p_1=\rho_1 m_1^2+\rho_1 n_1^2+\rho_1 p_4^2=\rho_1$. Точно так же находим $B'=\rho_2$, $C'=\rho_3$.

5. После переноса начала в центр и поворота осей, совмещающего их с главными направлениями, получаем уравнение $\rho_1 x'^2+\rho_2 y'^2+\rho_3 z'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$, которое и позволяет сделать все указанные в таблице заключения.

§ 91.

1. I) Корни резольвенты 2, 3, 0. Направляющие косинусы главных направлений $\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$. Новое уравнение $2x''^2+3y''^2=z''\sqrt{6}$. Эллиптический параболоид.

II) Корни резольвенты 6, -6, 0. Направляющие косинусы главных направлений $\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}$. Новое уравнение $6x''^2-6y''^2=\frac{2}{\sqrt{6}}z''$. Гиперболический параболоид.

2. Уравнение параболоида, как показано в тексте, приводится к виду $A'x''^2+B'y''^2+2I'z''=0$. Поступая, как в упражнении 4 § 90, находим $A'=\rho_1$, $B'=\rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 — отличные от 0 корни резольвенты. Для коэфициента I' имеем формулу $I'=Gm_3+Hn_3+Ip_3$, где $m_3,\ n_3,\ p_3$ удовлетворяют уравнениям $Am_3+Dn_3+Ep_3=0$, $Dm_3+Bn_3+Fp_3=0$, $Em_3+Fn_3+Cp_3=0$, $m_3^2+n_3^2+p_3^2=1$. Решая их, находим $m_3=(BC-F^2)\cdot N$, $n_3=(FE-CD)\cdot N$, $p_3=(DF-BE)\cdot N$, $N=1:\sqrt{(BC-F^2)^2+(FE-CD)^2+(DF-BE)^2}$. Если все три разности подкоренного — нули, корни можно выразить через разности $(CA-E^2)$, $(DE-AF)$, $(FE-CD)$ или разности $(AB-D^2)$, $(DF-BE)$, $(ED-AF)$. Все же эти девять разностей равняться нулю не могут, так как иначе мы имели бы $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$. Предполагая, что, по крайней мере, одна из разностей $BC-F^2$, $FE-CD$, $DF-BE$, а именно, например, $BC-F^2$, не нуль, имеем:

$$I'^2=\frac{[G(BC-F^2)+H(FE-CD)+J(DF-BE)]^2}{(BC-F^2)^2+(FE-CD)^2+(DF-BE)^2}.$$

Выполнив возведение в квадрат в числителе, легко покажем, что в силу условия $\delta=0$ имеют место соотношения: $(FE-CD)^2=(BC-F^2)(AC-E^2)$,

$(DF-BE)^2=(BC-F^2)(AB-D^2)$, $(FE-CD)\cdot(DF-BE)=(BC-F^2)(DE-AF)$, а потому после сокращения дроби на $BC-F^2$ имеем:

$$J'^2=\frac{G^2(BC-F^2)+H^2(CA-E^2)+J^2(AB-D^2)+2GH(FE-CD)}{BC-F^2+AC-E^2+AB-D^2}+$$
$$+\frac{2HI(ED-AF)+2IG(DF-BE)}{BC-F^2+AC-E^2+AB-D^2}.$$

Числитель этой дроби есть не что иное как $-\Delta=-G\delta_1-H\delta_2-I\delta_3$, а знаменатель — коэфициент при ρ в уравнении резольвенты, равный $\rho_1\rho_2$, а потому $J'=\sqrt{-\frac{\Delta}{\rho_1\rho_2}}$.

3. Составляя уравнения прямой, проходящей через точки $(vt; 0; 0)$ и $(0; a; \omega t)$ и исключая параметр t (время), получаем уравнение поверхности $\omega xy-avz+$ $+vyz=0$, а затем преобразуем его к виду $A'x''^2+B'y''^2+2I'z''=0$, где

$$A'=+\sqrt{v^2+\omega^2},\quad B'=-\sqrt{v^2+\omega^2},\quad I'=\frac{av\omega}{\sqrt{v^2+\omega^2}},$$

показывающему, что эта поверхность есть гиперболический параболоид.

§ 92.

1. (I) Пара совпадающих плоскостей $x''^2=0$.

(II) Пара пересекающихся плоскостей $3x''^2-y''^2=0$.

(III) Параболический цилиндр $x''^2-2y''\sqrt{10}=0$.

(IV) Пара параллельных плоскостей $12z''^2-1=0$.

(V) Прямая линия $x''^2+y''^2=0$.

(VI) Параболический цилиндр $x''^2-\frac{1}{3}y''\sqrt{6}=0$.

§ 93.

1. $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-4}{0,8}=\dfrac{z-3}{0,6}$.

2. $x+y-z=1,\qquad \dfrac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{y-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{z-1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

3. $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\dfrac{z}{\frac{1}{2}\sqrt{2}},\qquad \dfrac{x}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$.

5. Надо исследовать линию пересечения каждой поверхности с касательной плоскостью, проектируя эту линию на координатные плоскости. В случае эллиптического параболоида линия эта сводится к одной точке, в случае гиперболического параболоида распадается на пару пересекающихся в точке касания прямых, в случае цилиндра распадается на пару прямых, совпадающих друг с другом.

§ 94.

1. Плоскости круговых сечений выражаются уравнениями $z-1=\pm\frac{1}{2}(x-2)$ или $z=\frac{1}{2}x$, $z=-\frac{1}{2}x+2$. Проектируя эти сечения на плоскость XY, получаем эллипсы, выражаемые уравнениями $\frac{x^2}{3,2}+\frac{y^2}{4}=1$, $\frac{(x-3,2)^2}{0,8^2}+\frac{y^2}{0,8}=1$. Те полуоси этих эллипсов, которые параллельны оси Y, а именно 2 у первого эллипса и $\sqrt{0,8}$ у второго, равны искомым радиусам круговых сечений. Для поверки рекомендуется найти координаты концов тех диаметров каждого кругового сечения, какие расположены в плоскости $Y=0$, а затем вычислить по ним длины диаметров.

2. Геометрическое место центров круговых сечений эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ есть пара прямых, расположенных в плоскости $y=0$ и выражаемых уравнениями:

$$\frac{x}{a\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{y}{0}=\frac{z}{\pm c\sqrt{b^2-c^2}}.$$

3. Эллипсоид имеет четыре омбилических точки:

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}};\ 0;\ \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right).$$

Здесь берутся все комбинации знаков.

§ 95.

1. $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$.

$\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-8}{2}$; $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-8}{8}$.

4. Полагая $\angle XOA=t$ и $OA=a$, имеем уравнение прямой AB

$$\frac{x-a\cos t}{-\cos\alpha\sin t}=\frac{y-a\sin t}{\cos\alpha\cos t}=\frac{z}{\sin\alpha}.$$

Исключая t, получаем уравнение поверхности

$$x^2+y^2-z^2\operatorname{ctg}^2\alpha=a^2.$$

5. Приняв данную плоскость за плоскость XY, направив ось X через точки пересечения A_1 и A_2 данных прямых с данной плоскостью и поместив начало в середину отрезка A_1A_2, напишем уравнение данных прямых в виде

$$\frac{x-a}{m_1}=\frac{y}{n_1}=\frac{z}{p_1},\quad \frac{x+a}{m_2}=\frac{y}{n_2}=\frac{z}{p_2},$$

причем по условию $p_1\neq 0$, $p_2\neq 0$ и прямые друг другу не параллельны.

Возьмем далее на данных прямых точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, находящиеся на одной и той же высоте $z_1=z_2$ над плоскостью XY. Уравнение прямой, соединяющей эти две точки, есть

$$\frac{x-(a+m_1p_2t)}{2a}=\frac{y-n_1p_2t}{(n_1p_2-n_2p_1)\cdot t}=\frac{z-p_1p_2t}{0}.$$

Здесь t — переменный параметр, вводимый уравнениями

$$\frac{A_1M_1}{p_2}=\frac{A_2M_2}{p_1}=t$$

по условию $z_1=z_2$.

Исключая t, получаем уравнение поверхности:

$$Cz^2+2Exz+2Iz+2Hy=0,$$

где

$$C=-\frac{(n_1p_2-n_2p_1)\,m_1}{p_1^2p_2},\quad E=\frac{n_1p_2-n_2p_1}{2p_1p_2},\quad J=\frac{an_1}{p_1}+C,\quad H=-a.$$

При $n_1p_2 - n_2p_1 \neq 0$ это уравнение выражает гиперболический параболоид. При $n_1p_2 - n_2p_1 = 0$, т. е. при параллельности проекций данных прямых на плоскость YZ, параболоид вырождается в плоскость $n_1z - p_1y = 0$ (данные прямые, пересекая ось X, имеют не только параллельные, но и совпадающие проекции на плоскость YZ, а потому лежат в одной плоскости).

6. Каждая система при произвольном λ выражает некоторую прямую. Координаты любой точки этой прямой, удовлетворяя обоим уравнениям системы, удовлетворяют и уравнению поверхности, получаемому почленным умножением обоих уравнений системы, а потому эта прямая лежит на поверхности всеми своими точками.

7. $\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \lambda, \qquad \lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z,$

$\lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 1, \qquad \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 2\lambda z.$

СОДЕРЖАНИЕ.

Глава III.

Прямая.

Глава IV.

Кривые II порядка, выраженные простейшими уравнениями.

Глава V.

Исследование общего уравнения 2-й степени с двумя переменными.

Глава VI.

Некоторые дополнительные сведения о кривых II порядка.

ЧАСТЬ II.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Глава VII.

Метод координат в пространстве.

Глава VIII.

Уравнения поверхностей и линий.

Глава IX.

Плоскость и прямая в пространстве.

Глава X.

Поверхности II порядка.

Ответственный радактор *В. Н. Молодший*
Технический редактор *И. И. Кутин*

Сдано в набор 11/IX 1933 г. Подписано к печати 1/XII—1933 г.
формат бумаги $62 \times 94^1/_{16}$. Тираж 20 000 экз.
Изд. листов $18^1/_2$. Бум. листов $9^1/_4$. В 1 бум. листе 109 344 печ. зн.

У-21п. Учпедгиз № 5428. Заказ № 3516.
Уполном. Главлита № Б-34251.

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига“, Москва, Валовая, 23.