УДК 512.542

Классы Фиттинга и формации с заданными свойствами холловых подгрупп

Н.Т. Воробьев, Т.Б. Василевич
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В данной работе конструируются новые семейства классов конечных π-разрешимых групп: классы Фиттинга, определяемые вложением холловых π-подгрупп в радикалы групп, и формации, определяемые вложением корадикалов групп в холловы π-подгруппы и холловых π-подгрупп в формационные нормализаторы. При этом рассматриваются только конечные группы.

Определение. *Пусть π – некоторое множество простых чисел и* F *– непустой класс Фиттинга. Обозначим через* $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ *класс всех π-разрешимых групп, который определяется следующим образом:* $G \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ *тогда и только тогда, когда* F*-радикал группы* G *содержит ее некоторую холлову π-подгруппу.*

Теорема. *Пусть* F *– непустой класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *класс групп* $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ *является классом Фиттинга;*
2) *класс Фиттинга* $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ *π-насыщен.*

Определение. *Пусть π – некоторое множество простых чисел. Обозначим через* $\mathrm{R}^\pi(\mathrm{F})$ *класс всех π-разрешимых групп, который определяется следующим образом:* $G \in \mathrm{R}^\pi(\mathrm{F})$ *тогда и только тогда, когда* F*-корадикал группы* G *содержится в некоторой холловой π-подгруппе группы* G*.*

Теорема. *Пусть* π4P *и* F *– формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *класс* $\mathrm{R}^\pi(\mathrm{F})$ *является формацией;*
2) *формация* $\mathrm{R}^\pi(\mathrm{F})$ π#*-насыщена.*

В работе изучается также класс всех π-разрешимых групп $\mathrm{H}^\pi(\mathrm{F})$*, определяемый вложением холловых π-подгрупп в формационные нормализаторы. Доказано, что класс групп* $\mathrm{H}^\pi(\mathrm{F})$ *является π-насыщенной формацией.*

Ключевые слова: *класс Фиттинга, формация, локальная формация, холловы π-подгруппы,* F*-нормализатор.*

Fitting Classes and Formations with Desired Properties of Hall Subgroups

N.T. Vorobyev, T.B. Vasilevich
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

In this paper new families of classes of finite π-solvable groups are constructed: Fitting classes, defined by the embedding of Hall π-subgroups in radicals of groups and formations defined by the embedding of coradicals of groups in Hall π-subgroups and Hall π-subgroups in formational normalizers. We consider only finite groups.

Definition. *Let π be a set of primes and* F *be a non-empty Fitting class. We denote by* $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ *the class of all π-soluble groups, which is defined as follows:* $G \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ *if and only if the* F*-radical of the group* G *contains some a Hall π-subgroup belonging to* G*.*

Theorem. *Let* F *be a non-empty Fitting class. The following assertions are hold:*

1) *a class of groups* $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ *is a Fitting class;*
2) *Fitting class* $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ *is π-saturated.*

Definition. *Let π be a set of primes. We denote by* $\mathrm{R}^\pi(\mathrm{F})$ *the class of all π-solvable groups, which is defined as follows:* $G \in \mathrm{R}^\pi(\mathrm{F})$ *if and only if the* F*-coradical of the group* G *is contained in some a Hall π-subgroup belonging to* G*.*

Theorem. *Let* $\pi \subseteq \mathbb{P}$ *and* F *is a formation.*

1) *a class* $\mathrm{R}^\pi(\mathrm{F})$ *is a formation;*
2) *formation* $\mathrm{R}^\pi(\mathrm{F})$ *is* π'*-saturated.*

In this paper, we study the class of π-soluble groups $\mathrm{H}^\pi(\mathrm{F})$ *defined by the embedding of Hall π-subgroups in formational normalizers. It is proved that class of groups* $\mathrm{H}^\pi(\mathrm{F})$ *is saturated formation.*

Key words: *Fitting class, formation, local formation, Hall π-subgroups,* F*-normalizer.*

Классическим объектом в теории конечных групп являются холловы π-подгруппы. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Холловой π-подгруппой группы G называется такая подгруппа H из G, порядок которой является π-числом, а ее индекс в G – π'-*числом*, то есть индекс такой π-подгруппы не делится на простые числа из множества π [1].

Многочисленные результаты по исследованию холловых π-подгрупп базируются на фундаментальной теореме Холла [2] о том, что в любой конечной разрешимой группе существуют холловы π-подгруппы и любые две из них сопряжены. В последующем теорема Холла получила развитие в работах Чунихина [3–5], где было обобщено понятие разрешимой группы и установлена справедливость теоремы Холла для π-разрешимых групп. Напомним, что конечная группа G называется *π-разрешимой*, если каждый ее главный фактор является либо π'-группой, либо абелевой π-группой. В частности, если π – множество всех простых чисел, то π-разрешимая группа разрешима.

Уже в 60-е годы прошлого столетия была выявлена новая роль холловых подгрупп как одного из основных инструментов для построения новых семейств классов конечных групп. Наиболее известными своими приложениями в исследованиях групп являются классы Фиттинга и формации. *Класс групп* – это множество групп, которое вместе с каждой своей группой содержит все изоморфные ей группы. *Классом Фиттинга* называется класс групп F, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных F-подгрупп. *Формация* – класс групп, замкнутый относительно факторгрупп и конечных подпрямых произведений.

В работах Локетта [6], Бризона [7], Хаука [8], Дерка [9], Н.Т. Воробьева [10] и других изучались классы Фиттинга и формации конечных разрешимых групп, определяемые вложением холловых π-подгрупп в некоторые канонические подгруппы, в частности, в F-радикалы групп для классов Фиттинга и F-проекторы групп для формаций. Известно, что если F – непустой класс Фиттинга, то в каждой группе G существует наибольшая нормальная подгруппа, принадлежащая F. Ее называют F-*радикалом* группы G и обозначают G_{F} [1]. Если F – непустая формация групп, то подгруппа G^{F} группы G называется F-*корадикалом* группы G, если она является пересечением всех тех нормальных подгрупп M из G, для которых G/M принадлежит F [1].

Так как конечная π-разрешимая группа является разрешимой в случае, когда π – множество всех простых чисел, то актуальна задача построения классов Фиттинга и формаций π-разрешимых групп, определяемых заданными свойствами холловых π-подгрупп, в частности, вложением холловых π-подгрупп в канонические подгруппы.

Основной целью настоящей статьи является реализация указанной задачи в универсуме всех конечных π-разрешимых групп. В данной работе построены новые семейства классов конечных π-разрешимых групп: классы Фиттинга, определяемые вложением холловых π-подгрупп в радикалы групп, и формации, определяемые вложением корадикалов групп в холловы π-подгруппы и холловых π-подгрупп в формационные нормализаторы. В исследовании рассматриваются только конечные группы. В терминологии мы следуем монографиям [1; 11].

1. Предварительные сведения. *Классом Фиттинга* называется класс групп F, который удовлетворяет следующим условиям:

1) если группа $G\in$F и $N \trianglelefteq G$, то $N\in$F;

2) если N_1, $N_2 \in$F – нормальные подгруппы группы G и $G = N_1N_2$, то $G\in$F.

Напомним также, что если H и M – классы групп, то их произведение HM определяется следующим образом:

HM = (G: G обладает нормальной подгруппой $N\in$H такой, что $G/N\in$M).

Произведением классов Фиттинга H и M (фиттинговым или радикальным произведением) [1], обозначаемым H+M, называется класс всех таких групп G, что $G/G_{\mathrm{H}}\in$M, то есть

$$\mathrm{H}+\mathrm{M} = (G\colon G/G_{\mathrm{H}}\in \mathrm{M}).$$

Пусть P – множество всех простых чисел и $\pi \subseteq$ P. Тогда π' – дополнение множества π во множестве P, то есть π' = P$\setminus\pi$. Наряду с множеством π будем использовать функцию $\pi(m)$ – множество всех простых чисел, делящих натуральное число m. Зафиксируем множество простых чисел π. Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то число m называется π-числом. Напомним, что подгруппа H группы G называется *π-подгруппой*, если порядок H есть π-число.

Факторгруппой группы G по нормальной подгруппе N называют множество всех смежных классов с операцией умножения смежных классов, которая определяется следующим образом:

$$(g_1N)(g_2N) = (g_1g_2)N$$

для любых элементов g_1, g_2, принадлежащих G. Факторгруппу G по нормальной подгруппе N обозначают G/N.

Класс групп F называется *формацией* [11], если выполняются следующие условия:

1) каждая факторгруппа любой группы из F также принадлежит F;

2) из того, что H/A принадлежит F и H/B принадлежит F, всегда следует, что $H/A \cap B$ принадлежит F.

Пусть H и M – некоторые формации. Если M $= \prod$, то положим H $*$ M $= \prod$. Если M $\neq \prod$, то обозначим через H $*$ M класс всех таких групп G, что G^{M}Î$\in$ H. Класс H $*$ M называется произведением формаций H и M (корадикальным произведением или гашюцевым произведением), то есть

$$\mathrm{H} * \mathrm{M} = (G\colon G/G^{\mathrm{M}} \in \mathrm{H}).$$

Приведем также в качестве лемм ряд известных утверждений, которые мы будем использовать для доказательства теорем.

Лемма 1.1 [11]. *Произведение любых двух формаций также является формацией.*

Лемма 1.2 [1]. *Пусть* X, Y и H *– формации. Тогда*

$$(\mathrm{X} * \mathrm{Y}) * \mathrm{H} = \mathrm{X} * (\mathrm{Y} * \mathrm{H}).$$

Лемма 1.3 [1]. *Пусть* F *– непустой класс Фиттинга и N – нормальная подгруппа группы G. Тогда*

$$N_{\mathrm{F}} = G_{\mathrm{F}} \cap N.$$

Лемма 1.4 [9]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* KUG и G_π *– холлова π-подгруппа группы G, то $G_\pi K/K$ – холлова π-подгруппа факторгруппы G/K;*

2) *если* KUG и G_π *– холлова π-подгруппа группы* G, то $G_\pi \cap K$ *– холлова π-подгруппа группы K.*

Лемма 1.5 [1]. *Пусть* M, N и H *– любые подгруппы группы G. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $HN \cap HM = H(M \cap N)$.
2. $H \cap MN = (H \cap M)(H \cap N)$.

Лемма 1.6 [12]. *Пусть G – π-разрешимая группа и G_π – холлова π-подгруппа группы G. Тогда для любых нормальных подгрупп M и N группы G справедливы следующие утверждения:*

1) $MN \cap G_\pi = (M \cap G_\pi)(N \cap G_\pi)$;
2) $MG_\pi \cap NG_\pi = (M \cap N)\, G_\pi$.

Лемма 1.7 [1]. *Пусть* F *– класс Фиттинга,* X *– непустой класс Фиттинга. Тогда справедливо следующее включение:*

$$\mathrm{F} \subseteq \mathrm{F}+\mathrm{X}.$$

Лемма 1.8 [1]. *Пусть* F *– формация и* X *– непустая формация. Тогда справедливо следующее включение:*

$$\mathrm{F} \subseteq \mathrm{X} * \mathrm{F}.$$

Лемма 1.9 [11]. *Пусть* F *– непустая формация, K9 G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $(G/K)^{\mathrm{F}} = G^{\mathrm{F}}K/K$;
2) *если $G = HK$, то $H^{\mathrm{F}}K = G^{\mathrm{F}}K$;*
3) *если $G = HK$ и $K \subseteq G^{\mathrm{F}}$*, то $H^{\mathrm{F}}K = G^{\mathrm{F}}$.

Мы будем использовать следующие утверждения о соответствии подгрупп групп и факторгрупп, а также теоремы об изоморфизмах групп.

Лемма 1.10 [1]. *Пусть HU G, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) каждая подгруппа факторгруппы G/H имеет вид F/H, где F – подгруппа группы G, содержащая H, то есть

$$H \leq F \leq G;$$

2) если F – подгруппа группы G, содержащая H, то факторгруппа F/H является подгруппой факторгруппы G/H;

3) если F – нормальная подгруппа группы G, содержащая H, то факторгруппа F/H является нормальной подгруппой факторгруппы G/H.

Лемма 1.11 [1]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если V и N – подгруппы группы G и V нормализует N, то имеет место изоморфизм

$$VN/N \text{ y } V/V \cap N;$$

2) если M и N – нормальные подгруппы группы G и $N \subseteq M$, то справедлив изоморфизм

$$(G/N)/(M/N) \text{ y } G/M.$$

2. Классы Фиттинга, определяемые вложением холловых подгрупп в радикалы. В данном разделе построено новое семейство классов Фиттинга π-разрешимых групп, определяемых вложением холловых подгрупп в радикалы групп.

Напомним, что символом S^{π} будем обозначать класс всех π-разрешимых групп, а символом $\mathrm{E}_{\pi'}$ – класс всех π'- групп.

Определение 2.1. Пусть π – некоторое множество простых чисел и F – непустой класс Фиттинга. Обозначим через R_π (F) класс всех групп из S^{π}, который определяется следующим образом: $G \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ тогда и только тогда, когда F-радикал группы G содержит некоторую холлову π-подгруппу G.

Напомним, что если π – некоторое множество простых чисел, то класс Фиттинга F называется π-насыщенным в случае, когда

$$\mathrm{F} + \mathrm{E}_{\pi'} = \mathrm{F}.$$

Мы будем использовать известную теорему Чунихина.

Теорема Чунихина [3]. *Пусть G – конечная π-разрешимая группа. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) группа G имеет холловы π-подгруппы и любые две из них сопряжены;

2) группа G имеет холловы π'-подгруппы, причем любые две из них сопряжены;

3) каждая π-подгруппа содержится в некоторой холловой π-подгруппе.

Теорема 2.2. *Пусть* F *– непустой класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) класс групп $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ *является классом Фиттинга;*

2) класс Фиттинга $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ *π-насыщен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть группа G принадлежит классу $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ и N – нормальная подгруппа G. Докажем, что N принадлежит $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$. По определению 2.1 F-радикал группы G содержит некоторую холлову π-подгруппу G_π из G, то есть $G_\pi \leq G_\mathrm{F}$. По лемме 1.3 F-радикал группы N определяется равенством $N_\mathrm{F} = G_\mathrm{F} \cap N$, а по лемме 1.4 ее холлова π-подгруппа – равенством $N_\pi = G_\pi \cap N$. Отсюда следует, что

$$G_\pi \cap N \leq G_\mathrm{F} \cap N$$

и поэтому $N_\pi \leq N_\mathrm{F}$. Это означает, что $N \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$.

Докажем, что произведение двух любых нормальных $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$-подгрупп также является $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$-подгруппой.

Пусть $G = MN$, где $M \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$, $N \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$, причем M и N – нормальные подгруппы группы G. Покажем, что $G \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$, то есть F-радикал группы G содержит некоторую холлову π-подгруппу G. По определению 2.1, из $M, N \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$, следует, что

$$M_\pi \leq M_\mathrm{F} \text{ и } N_\pi \leq N_\mathrm{F}.$$

Теперь, учитывая леммы 1.3 и 1.4, имеем равенства для F-радикалов

$$M_\mathrm{F} = G_\mathrm{F} \cap M \text{ и } N_\mathrm{F} = G_\mathrm{F} \cap N$$

и для холловых π-подгрупп:

$$M_\pi = G_\pi \cap M \text{ и } N_\pi = G_\pi \cap N.$$

Следовательно,

$$G_\pi \cap M \leq G_\mathrm{F} \cap M \text{ и } G_\pi \cap N \leq G_\mathrm{F} \cap N$$

и поэтому

$$(G_\pi \cap M)(G_\pi \cap N) \leq (G_\mathrm{F} \cap M)(G_\mathrm{F} \cap N).$$

Заметим, что по леммам 1.5 и 1.6 следующие равенства эквивалентны:

$$G_\pi(M \cap N) = G_\pi M \cap G_\pi N \text{ и}$$

$$G_\pi \cap MN = (G_\pi \cap M)(G_\pi \cap N) = G_\pi.$$

Следовательно,

$$(G_\pi \cap M)(G_\pi \cap N) = G_\pi \cap MN = G_\pi \leq$$
$$\leq (G_\mathrm{F} \cap M)(G_\mathrm{F} \cap N) \leq G_\mathrm{F}.$$

Итак, $G_\pi \leq G_\mathrm{F}$. Это означает, что $G \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ и $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$ – класс Фиттинга.

Докажем утверждение 2, то есть покажем, что

$$\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F}) + \mathrm{E}_{\pi'} = \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F}).$$

По лемме 1.7

$$\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F}) \subseteq \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F}) + \mathrm{E}_{\pi'}.$$

Докажем обратное включение.

Пусть G принадлежит произведению $\mathrm{R}_\pi(\mathrm{F}) + \mathrm{E}_{\pi'}$. Тогда по определению произведения классов $G/G_{R_\pi(\mathrm{F})} \in \mathrm{E}_{\pi'}$. Следовательно, по определению $\mathrm{E}_{\pi'}$-корадикала $G^{E_{\pi'}} \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$. По определению 2.1

$$(G^{E_{\pi'}})_\pi \leq (G^{E_{\pi'}})_F = G^{E_{\pi'}} \cap G_F.$$

Так как $G_\pi \in \mathrm{E}_\pi$ и $G_\pi \leq G^{E_{\pi'}}$, то по теореме Чунихина $G_\pi \leq (G^{E_{\pi'}})_\pi$.

С другой стороны, по лемме 1.4

$$(G^{E_{\pi'}})_\pi = G_\pi \cap G^{E_{\pi'}} \leq G_\pi.$$

Следовательно, $G_\pi = (G^{E_{\pi'}})_\pi$. Кроме того, $G^{E_{\pi'}} \in \mathrm{R}_\pi(\mathrm{F})$, так как

$$G^{E_{\pi'}} \leq G_{R_\pi(\mathrm{F})} \text{ и } G^{E_{\pi'}} \Cup G_{R_\pi(\mathrm{F})}.$$

Значит,

$$(G^{E_{\pi'}})_{\pi} = G_{\pi} \leq (G^{E_{\pi'}})_F = G^{E_{\pi'}} \cap G_F \leq G_F .$$

Таким образом, $G_{\pi} \leq G_{\mathrm{F}}$ и $G \in \mathrm{R}_{\pi}(\mathrm{F})$. Это доказывает обратное включение.

Теорема доказана.

3. Формации, определяемые вложением корадикалов в холловы подгруппы. Напомним, что класс X называется *наследственным классом или классом, замкнутым относительно подгрупп*, когда выполняется следующее требование: если $G \in \mathrm{X}$ и $H \leq G$, то $H \in \mathrm{X}$.

Будем обозначать через E_{π} класс всех π-групп.

Определение 3.1. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Обозначим через $\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F})$ класс всех π-разрешимых групп, который определяется следующим образом: $G \in \mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F})$ тогда и только тогда, когда F-корадикал группы G содержится в некоторой холловой π-подгруппе группы G.

Известно, что произведение двух любых формаций является формацией и операция умножения формаций ассоциативна. Напомним, что формация F называется π-насыщенной, если

$$\mathrm{E}_{\pi'} * \mathrm{F} = \mathrm{F}.$$

Теорема 3.2. *Пусть* π4P *и* F *– формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *класс* $\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F})$ *является формацией;*
2) *формация* $\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F})$ π'*-насыщена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что $\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{F}$. Пусть группа G принадлежит классу $\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F})$. Тогда по определению 3.1 F-корадикал группы G содержится в некоторой холловой π-подгруппе группы G, то есть $G^{\mathrm{F}} \leq G_{\pi}$. Так как $G_{\pi} \in \mathrm{E}_{\pi}$ и E_{π} – наследственный класс Фиттинга, $G^{\mathrm{F}} \in \mathrm{E}_{\pi}$. Следовательно, по определению произведения формаций $G \in \mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{F}$. Это показывает справедливость включения $\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F}) \subseteq \mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{F}$.

Докажем обратное включение. Пусть H принадлежит произведению $\mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{F}$. Тогда по определению произведения формаций $H^{\mathrm{F}} \in \mathrm{E}_{\pi}$. Следовательно, H^{F} является π-группой. По теореме Чунихина $H^{\mathrm{F}} \leq H_{\pi}$. Итак, $H \in \mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F})$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F}) \supseteq \mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{F}.$$

Итак,

$$\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{F}.$$

Так как по лемме 1.1 произведение двух любых формаций является формацией, то $\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F})$ – формация. Утверждение 1) доказано.

Докажем, что формация $\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F})$ π'-насыщена, то есть

$$\mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F}) = \mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F}).$$

Ввиду свойства ассоциативности умножения формаций и утверждения 1)

$$\mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}_{\pi} * (\mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{F}) = (\mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{E}_{\pi}) * \mathrm{F} = \\ = \mathrm{E}_{\pi} * \mathrm{F} = \mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F}).$$

Следовательно, формация $\mathrm{R}^{\pi}(\mathrm{F})$ π'-насыщена.

Теорема доказана.

4. Формации, определяемые вложением холловых π-подгрупп в F-нормализаторы. Напомним, что локальным спутником называется отображение $f : \mathbb{P} \rightarrow$ {формации групп} [11] множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел в некоторое множество формаций.

Носителем локального спутника называют множество простых чисел

$$\pi = \{p \in \mathbb{P}: f(p) \neq \prod\}.$$

Формацию F называют локальной, если существует такой локальный спутник f, что

$$\mathrm{F} = \mathrm{E}_{\pi} \cap (\cap_{p \in \pi} \mathrm{E}_{p'} * \mathrm{N}_p * f(p)),$$

где π – носитель локального спутника f, N_p – класс всех p-групп (p – простое число).

Пусть F – локальная формация. Подгруппа H называется F-*нормализатором* группы G, если выполняется одно из следующих равносильных условий:

1) H является критическим F-добавлением к G^{F} в G;
2) $H \in \mathrm{F}$ и существует максимальная цепь

$$G = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \ t \geq 0,$$

в которой M_i F-критична в M_{i-1} для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.

Напомним понятие F-добавления.

Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Если $K \cap G^{\mathrm{F}}$ не содержится в $\Phi(G)$, то G обладает максимальной подгруппой M_1, не содержащей $K \cap G^{\mathrm{F}}$. Если $M_1^F \cap K$ не содержится в $\Phi(M_1)$, то M_1 имеет максимальную подгруппу M_2, не содержащую $M_1^F \cap K$. Продолжая этот процесс и дальше, мы построим максимальную цепь

$$G = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H,\ t \geq 0,$$

обладающую следующими свойствами:

1) M_i не содержит $M_{i-1}^{F} \cap K$ при любом $i > 0$;

2) $H^{F} \cap K \subseteq \Phi(H)$.

Подгруппу H называют F-*добавлением к* K в G [11], а указанную цепь – F-*добавляющей цепью для подгруппы K*.

Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Максимальную подгруппу M группы G называют F-критической в G относительно K [11], если в G найдется такая F-предельная нормальная подгруппа N, что $N \subseteq K$ и $MN = G$. Таким образом, будем называть F-критической подгруппой группы G всякую ее подгруппу, являющуюся максимальной в G и F-критической относительно G.

Пусть f – локальный спутник формации F. Главный фактор группы G называют f-центральным, если $G/C_G(H/K) \in f(H/K) = f(p)$, для любого простого делителя p порядка H/K. В противном случае фактор H/K называется f-эксцентральным. Если f – приведенный локальный спутник формации F, то есть $f(p) \subseteq$ F для всех $p \in$ P, то f-центральный главный фактор группы G называют F-центральным, а в противном случае H/K называют F-эксцентральным. Через σ(F) будем обозначать множество всех простых делителей всех групп из F.

Лемма 4.1 [11]. *Пусть* F *– локальная формация и* $G \in S^{\sigma(F)}$F. *Тогда любые два* F-*нормализатора группы* G *сопряжены.*

Лемма 4.2 [11]. *Если* H *является* F-*нормализатором группы* G *и* K *– нормальная подгруппа группы* G, *то* HK/K *является* F-*нормализатором группы* G/K.

Лемма 4.3 [13]. *Пусть* F *– локальная формация,* G *– группа и* K_1, K_2 *– произвольные нормальные подгруппы группы* G. *Если* F-*корадикал группы* G σ(F)-*разрешим и* H *– нормализатор группы* G, *то справедливо равенство:*

$$HK_1 \cap HK_2 = H(K_1 \cap K_2).$$

Лемма 4.4 [3]. *Пусть* G *– группа,* $K ⊍ G$. *Если* G/K *и* K *–* π-*разрешимые группы, то* G *–* π-*разрешимая группа.*

Лемма 4.5 [11]. *Пусть* F *– локальная формация и* $G \in S^{\sigma(F)}$F. *Если* H *–* F-*нормализатор группы* G, *то* H *покрывает каждый* F-*центральный и изолирует каждый* F-*эксцентральный главный фактор группы* G.

Определение 4.6. Пусть π4P, F – локальная формация и σ(F) – множество всех различных простых делителей всех групп из F. Определим класс всех π-разрешимых групп H^{π}(F) следующим образом: $G \in H^{\pi}$(F) тогда и только тогда, когда $G \in S^{\sigma(F)}$F и F-нормализатор G содержит некоторую холлову π-подгруппу G.

Теорема 4.7. *Пусть* F *– локальная формация и* π *– некоторое множество простых чисел. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *класс групп* H^{π}(F) *является формацией;*

2) *формация* H^{π}(F) π-*насыщена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G \in H^{\pi}$(F) и N – нормальная подгруппа группы G. Покажем, что $G/N \in H^{\pi}$(F). Пусть H – F-нормализатор группы G и G_π – холлова π-подгруппа G. Тогда по определению 4.6 $H \geq G_\pi$ и поэтому

$$HN \geq G_\pi N.$$

Так как по лемме 4.2 HN/N является F-нормализатором группы G/N, а по лемме 1.4 $G_\pi N/N$ – холлова π-подгруппа группы G/N, то $HN/N \geq G_\pi N/N$. Итак, ввиду лемм 1.4 и 4.2 F-нормализатор группы G/N содержит холлову π-подгруппу группы G/N. Следовательно, по определению 4.6 $G/N \in H^{\pi}$(F).

Пусть $G \in H^{\pi}$(F), M и N – нормальные подгруппы группы G, причем

$$G/M \in H^{\pi}(F) \text{ и } G/N \in H^{\pi}(F).$$

Покажем, что $G/M \cap N \in H^{\pi}$(F). По определению класса H^{π}(F) и лемме 4.2

$$HM/M \geq (G/M)_\pi \text{ и } HN/N \geq (G/N)_\pi.$$

Отсюда по лемме 1.4

$$HM/M \geq G_\pi M/M \text{ и } HN/N \geq G_\pi N/N.$$

Значит, по лемме 1.10

$$HM \geq G_\pi M \text{ и } HN \geq G_\pi N.$$

Следовательно,

$$HM \cap HN \geq G_\pi M \cap G_\pi N.$$

Ввиду лемм 4.3 и 1.6

$$H(M \cap N) \geq G_\pi(M \cap N).$$

Учитывая леммы 4.2 и 1.4, $H(M \cap N)/M \cap N$ – F-нормализатор группы $G/M \cap N$, а $G_\pi(M \cap N)/M \cap N$ – холлова π-подгруппа группы $G/M \cap N$.

Итак,

$$H(M \cap N)/M \cap N \geq G_\pi(M \cap N)/M \cap N.$$

Это означает, что $G/M \cap N \in \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$. Следовательно, класс групп $\mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$ – формация.

Докажем утверждение 2 теоремы. Для этого покажем, что

$$\mathrm{E}_{\pi'} * \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F}) = \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F}).$$

Ввиду леммы 1.8 справедливо включение $\mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F}) \subseteq \mathrm{E}_{\pi'} * \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$. Докажем обратное включение.

Пусть G – группа наименьшего порядка из класса $\mathrm{E}_{\pi'} * \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$ и K – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $|G/K| < |G|$, то $G/K \in \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$. Если K_1 – минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от K, то по индукции $G/K_1 \in \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$. Но по утверждению 1 класс групп $\mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$ – формация. Следовательно, $G = G/K \cap K_1 \in \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$, что противоречит выбору группы G. Значит, K – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и, ввиду минимальности, $K = G^{\mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})}$. Так как $G \in \mathrm{E}_{\pi'} * \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$, то по определению произведения формаций K является π'-группой.

Пусть H – F-нормализатор группы G и G_{π} – холлова π-подгруппа группы G. Ввиду лемм 4.2 и 1.4 следует, что HK/K – F-нормализатор группы G/K и $G_{\pi}K/K$ – холлова π-подгруппа группы G/K. Так как $G/K \in \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$, то справедливо соотношение

$$HK/K \geq G_{\pi}K/K. \qquad (1)$$

Следовательно, $HK \geq G_{\pi}K$. Если K – F-центральный главный фактор группы G, то по лемме 4.5 H покрывает K, то есть $H \geq K$. Следовательно,

$$H = HK \geq G_{\pi}K \geq G_{\pi}.$$

Значит, $G \in \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$. Получаем противоречие с выбором группы G. Остается признать, что K – F-эксцентральный главный фактор группы G. Тогда по лемме 4.5 H изолирует K, то есть $H \cap K = 1$. Теперь, учитывая тот факт, что K является π'-группой, получаем $G_{\pi} \cap K = 1$. Следовательно, ввиду (1) и изоморфизмов получаем соотношения

$$H = H/H \cap K \ \text{у}\ HK/K \geq G_{\pi}K/K \ \text{у}$$
$$\text{у}\ G_{\pi}/G_{\pi} \cap K = G_{\pi}. \qquad (2)$$

Так как по теореме Чунихина в π-разрешимой группе любые две холловы π-подгруппы сопряжены, то из (2) следует, что $H \geq G^{x}$ для некоторого $x \in G$. Следовательно, $G \in \mathrm{H}^{\pi}(\mathrm{F})$. Полученное противоречие завершает доказательство второго утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – P. 891.
2. Hall, P. On the system normalizers of a soluble group / P. Hall. – Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 33, № 2. – P. 337–342.
3. Чунихин, С.А. О π-свойствах конечных групп / С.А. Чунихин. – Докл. АН СССР. – 1947. – Т. 55, № 6. – С. 481–484.
4. Чунихин, С.А. О силовских свойствах конечных групп / С.А. Чунихин. – Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 73, № 1. – С. 29–32.
5. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964.
6. Lockett, P. On the theory of Fitting classes / P. Lockett. – Math. Z. – 1973. – Vol. 131, № 3. – P. 103–115.
7. Brison, O. A criterion for the Hall-closure of Fitting classes / O. Brison. – Bull. Austral. Math. Soc. – 1981. – Vol. 3, № 3. – P. 361–365.
8. Hauck, P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse / P. Hauck. – J. Algebra. – 1978. – Vol. 53. – P. 395–401.
9. Doerk, K. Über den Rand einer Fittingklasse auflösbarer Gruppen / K. Doerk. – J. Algebra. – 1978. – Vol. 51, № 4. – P. 619–630.
10. Воробьев, Н.Т. Об одном признаке локальности формационных произведений / Н.Т. Воробьев. – Матем. заметки. – 1983. – Т. 34, № 2. – С. 165–170.
11. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – С. 272.
12. Воробьев, С.Н. Об аналоге гипотезы Шеметкова для классов Фишера конечных групп / С.Н. Воробьев, Е.Н. Залесская. – Сиб. матем. журн. – 2013. – Т. 54, № 5. – С. 989–999.
13. Воробьев, Н.Т. Максимальные экраны локальных формаций / Н.Т. Воробьев. – Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 2. – С. 137–161.

R E F E R E N C E S

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – P. 891.
2. Hall, P. On the system normalizers of a soluble group / P. Hall. – Proc. Amer. Math. Soc., 33, № 2, 1972. – P. 337–342.
3. Chunikhin S.A. Reports of the Academy of Sciences of USSR, 55, 6, 1947, pp. 481–484.
4. Chunikhin, S.A. Reports of the Academy of Sciences of USSR, 73, 1, 1950, pp. 29–32.
5. Chunikhin, S.A. *Podgruppi konechnikh grupp* [Subgroups of finite groups], Minsk, Nauka i tekhnika, 1964.
6. Lockett, P. On the theory of Fitting classes / P. Lockett. – Math. Z., 1973, Vol. 131, № 3. – P. 103–115.
7. Brison, O. A criterion for the Hall-closure of Fitting classes / O. Brison. – Bull. Austral. Math. Soc. 1981, Vol. 3, № 3. – P. 361–365.
8. Hauck, P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse / P. Hauck. – J. Algebra, 1978, Vol. 53. – P. 395–401.
9. Doerk, K. Über den Rand einer Fittingklasse auflösbarer Gruppen / K. Doerk. – J. Algebra, 1978, Vol. 51, N. 4. – P. 619–630.
10. Vorobyev N.T. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 1983, 34, 2, pp. 165–170.
11. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnikh grupp* [Formations of Finite Groups], M., Nauka, 1978, 272 p.
12. Vorobyev S.N., Zalesskaya E.N. *Sib. matem. zhur.* [Sib. Math. Journal], 2013, 54, 5, pp. 989–999.
13. Vorobyev N.T. *Algebra i logika* [Algebra and Logics], 1979, 18, 2, pp. 137–161.

Поступила в редакцию 09.06.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: gidrohoriya@mail.ru – Василевич Т.Б.