В. В. БЕРКУТ, И. И. ГОСТЕВ, М. Н. ГОФНЕР и Г. А. ПОПЛЕРЕК

51(075)
5-48

РАБОЧАЯ КНИГА ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ Г. А. ПОПЛЕРЕК

18-е ИЗДАНИЕ

ДОПУЩЕНО ГУС'ом

ТЕХНИНУМ
Сельхоз Горки

КООПЕРАТИВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА „МИР“ 1930

УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ РАБФАКОВ

РАБОЧАЯ КНИГА ПО МАТЕМАТИКЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ
ПО ЛАБОРАТОРНОМУ ПЛАНУ И ПО АККОРДНОЙ СИСТЕМЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СОСТАВИЛИ
В. В. БЕРКУТ, И. И. ГОСТЕВ, М. Н. ГОФНЕР и Г. А. ПОППЕРЕК
ПРЕПОДАВАТЕЛИ МОСКОВСКОЙ ВОЕННО-ИНЖЕНЕРНОЙ ИМЕНИ КОМИНТЕРНА ШКОЛЫ

Под РЕДАКЦИЕЙ Г. А. ПОППЕРЕКА

☆

18-е ИЗДАНИЕ

Допущено Научно-педагогической секцией ГУС'а.

Тел. 12-63 и 2-40
КООПЕРАТИВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА — 1930

Главлит № А-74181
Тираж 20.000 экз.
Гостипо-литография
им. Карла Маркса.
Тверь. Зак. № 5148--30

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕСЯТОМУ ИЗДАНИЮ.

В настоящем издании исправлены все недочеты, погрешности и невязки, которые были замечены в предыдущих изданиях как самими авторами при пользовании книгой в школах, так и многочисленными друзьями книги — педагогами-практиками, присылавшими нам свои советы, указания и замечания.

Кроме того, мы внесли в это издание много изменений и дополнений.

Наиболее серьезные изменения сводятся к следующему:

1) выпущены некоторые вопросы, затруднявшие учащихся, и несущественные на данной ступени курса по своему значению, как, например, графическое решение одного уравнения 1-й степени с одним неизвестным, корни линейной функции и т. п.;

2) значительно переработано изложение некоторых глав, как, например, главы о подобии фигур, главы о параллелограмах и трапециях;

3) изменен порядок тем ввиду выяснившейся из практики необходимости лучшей увязки и согласования материала, а именно: две темы об объемах многогранников объединены в одну; тема «уравнения» соединена с темой «законы арифметических действий», и новая объединенная тема передвинута вперед; тема «теория Пифагора» выделена из алгебраической темы, где она раньше находилась, и развита в отдельную работу; тема «параллельные прямые» помещена непосредственно перед темой «параллелограмы и трапеции». При перестановке тем соответствующим образом исправлено их содержание.

Дополнения нового издания по сравнению с предыдущим состоят в следующем:

1) введена новая тема — «осевая симметрия», где на основе более широкого развития этого понятия трактуются вопросы о пер-

пендикуляре и наклонных, о свойствах равнобедренного треугольника, о равенстве треугольников и пр.;

2) к главе «функция и ее график» добавлены задачи, решаемые графическим методом;

3) к теме «теорема Пифагора» добавлен вопрос об извлечении квадратного корня из чисел;

4) во всех почти работих увеличено число задач, иллюстрирующих и закрепляющих теоретический материал.

Обширное предисловие к первому изданию книги, знакомившее с ее особенностями и содержавшее методические указания к пользованию книгой, в настоящем издании мы выпускаем ввиду экономии места. Если в 1924 году, когда впервые появилась наша книга, составленная на совершенно новых для того времени принципах, такие объяснения и указания были необходимы, то теперь они уже излишни, так как принципы эти ныне получили достаточно широкое распространение.

Г. Попперек.

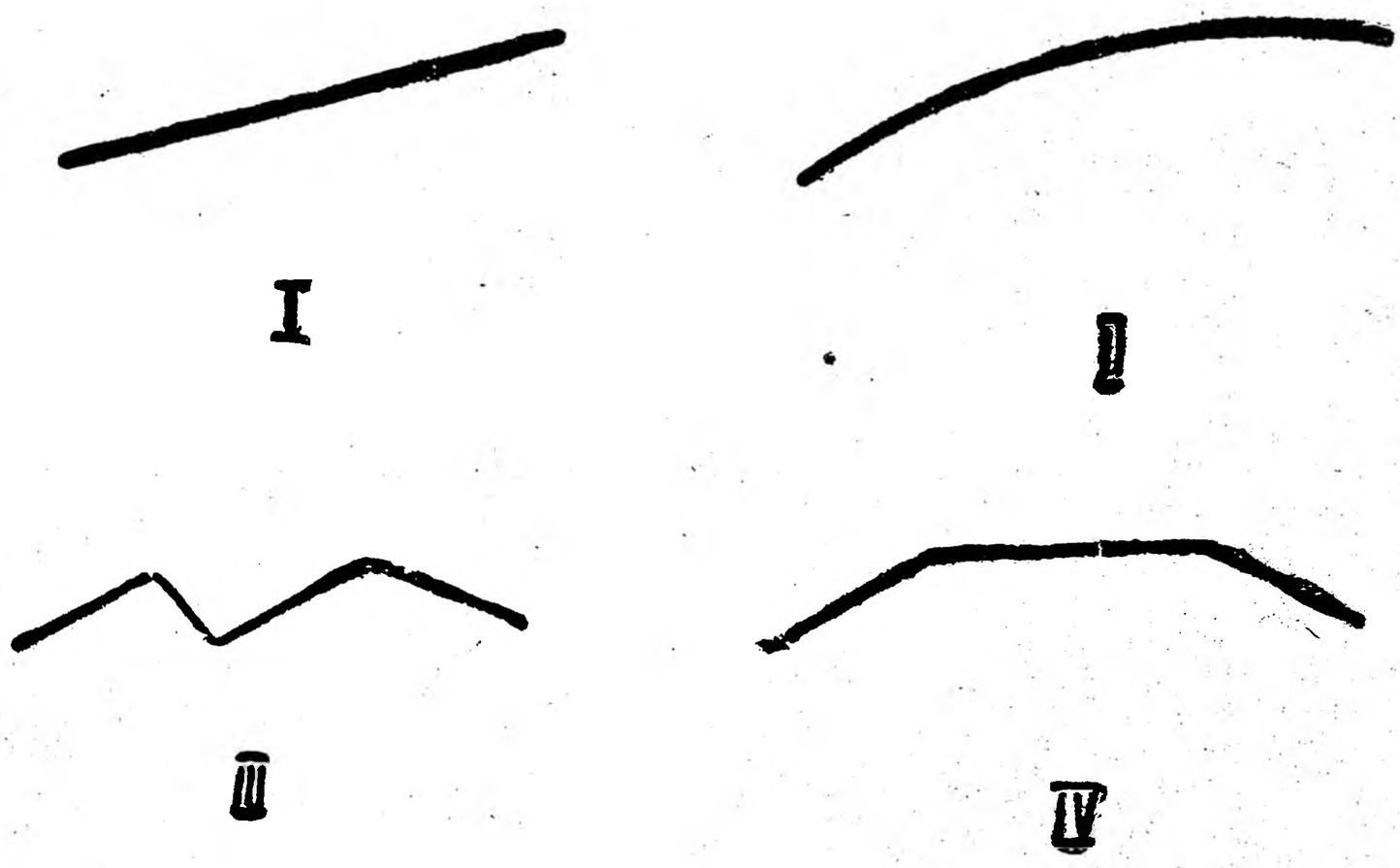
Работа № 1.

ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ.

Прямая линия. Отрезок прямой. Сумма и разность отрезков. Сложение равных отрезков. Угол. Сумма и разность углов. Смежные углы. Прямой угол. Сумма смежных углов. Вертикальные углы. Окружность. Градусное измерение дуг и углов. Измерение углов транспортиром.

§ 1. Прямая линия.

Вопрос. Какие линии нарисованы на чертеже 1?



Черт. 1.

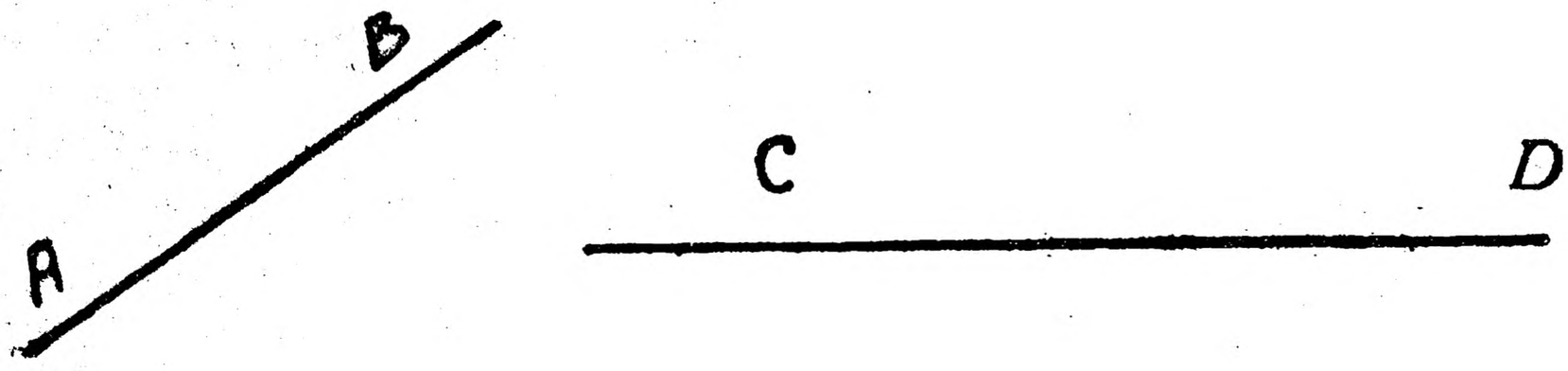
Задачи.

1. Отметьте в тетради точку и проведите через нее несколько прямых линий (сколько их можно провести?).

2. Отметьте в тетради две точки и проведите между ними а) кривую линию и б) прямую линию. Можно ли между теми же точками провести еще: а) кривую линию? б) прямую линию?

Указание 1. Линия II (черт. 1) называется *кривой*; линия III и линия IV называются *ломаными*.

Указание 2. Для отличия прямых линий друг от друга они обозначаются двумя большими буквами латинского алфавита, как указано на чертеже 2.

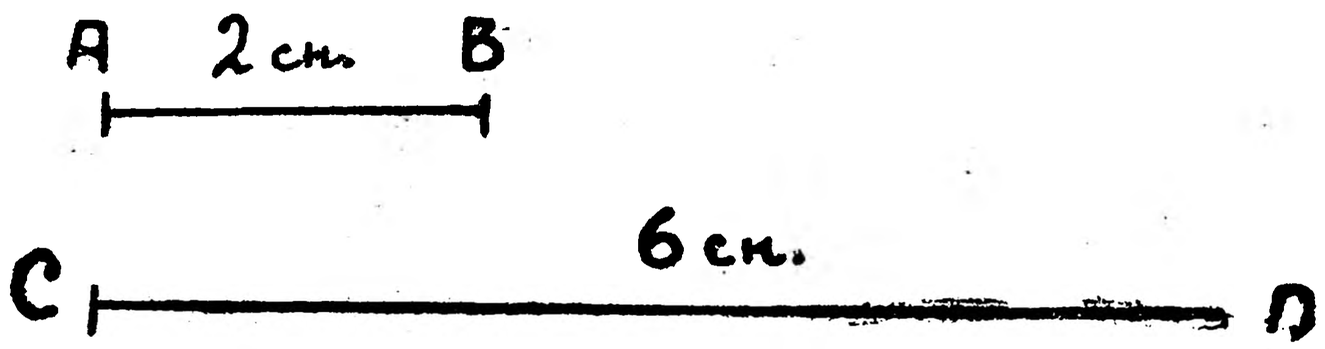


Черт. 2.

Следует читать: 1) прямая AB, 2) прямая CD.

§ 2. Отрезок прямой. Сумма и разность отрезков.

Указание. Часть прямой, ограниченная с обеих сторон (см. черт. 3), называется *отрезком прямой* и обозначается буквами,



Черт. 3.

поставленными у концов этого отрезка. На черт. 3 даны 2 отрезка, AB длиной в 2 *см* и CD — 6 *см*.

Вопрос. Из скольких отрезков составлена ломаная линия III? ломаная линия IV (см. черт. 1)?

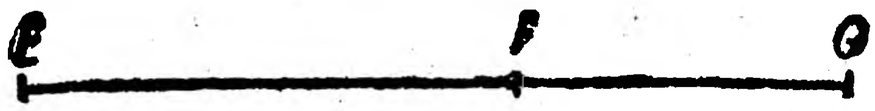
Задачи.

1. Начертить отрезок длиной в 1, 3, 5 *см* (или дюймов, вершков), поставить буквы у концов каждого и надписать сверху, сколько в каждом из них сантиметров (или дюймов, вершков).

2. Определить: 1) числовую сумму двух отрезков AB и CD (черт. 3); 2) на сколько сантиметров отрезок CD больше отрезка



Черт. 4.



Черт. 5.

AB (разность)? 3) во сколько раз один отрезок больше другого (отношение)?

В чем главное отличие вопроса 2 от вопроса 3?

3. Сложить отрезки AB и CD (черт. 4).

Р е ш е н и е. На произвольной прямой (черт. 5) берем точку E и от нее циркулем откладываем отрезок EF, равный отрезку AB, затем от точки F циркулем откладываем отрезок $FG = CD$. Отрезок EG будет искомой суммой отрезков AB и CD ($EG = AB + CD$).

4. Начертить два произвольных отрезка; а) найти третий отрезок, равный их сумме, б) найти разность тех же отрезков.

У к а з а н и е. Иногда отрезки обозначаются одной малой буквой латинского алфавита (черт. 6): «отрезок a», «отрезок b», «отрезок c».



Черт. 6.

В этом случае под буквами a, b и c разумеются какие-либо числа, выражающие длины отрезков.

5. *а)* Измерить в сантиметрах отрезки a, b и c (черт. 6) и вставить полученные числа в таблицу:

$$a = \quad , \; b = \quad , \; c = \quad .$$

б) обозначить сумму полученных чисел, не производя сложения.

Отв. $3 + 4 + 2$.

6. Обозначить, не производя сложения, суммы следующих чисел: 1) 1, 2, 3; 2) 8, 5, 9; 3) 2, 3, 7, 5, 1; 4) a и b.

7. Обозначить сумму трех отрезков: a, b и c; подставить вместо букв числа из задачи 5 и вычислить результат.

8. Начертить отрезок, равный сумме трех отрезков (черт. 6) *(геометрическое сложение)*.

9. Обозначить разность чисел 4 и 3, не производя действия.

10. Найти отрезок, равный разности отрезков b и a на чертеже 6 (*геометрическое вычитание*).

11. Написать разность чисел b и a и вычислить результат при $b = 5$; $a = 3$.

У к а з а н и е. Замена букв их числовыми значениями называется *подстановкой*.

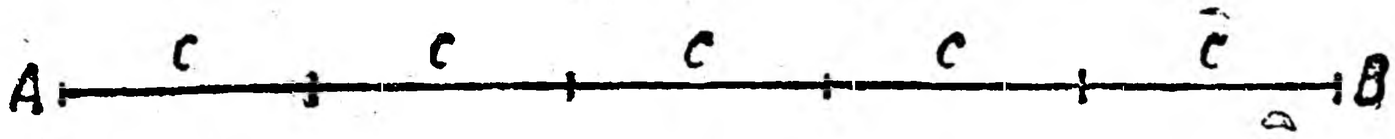
§ 3. Сложение равных отрезков.

Задачи.

1. На чертеже 7 дан отрезок AB, состоящий из суммы 5 равных отрезков, каждый величиной c.

Найти величину отрезка AB.

Решение. $AB = c + c + c + c + c$ — (короче) $= 5c$.



Черт. 7.

Указание. Число 5 в полученном выражении $5c$ называется *коэффициентом*.

2. Написать короче следующие суммы при помощи коэффициента:

$a + a + a =$ $\qquad$ $x + x =$

$b + b + b + b =$ $\qquad$ $y + y =$

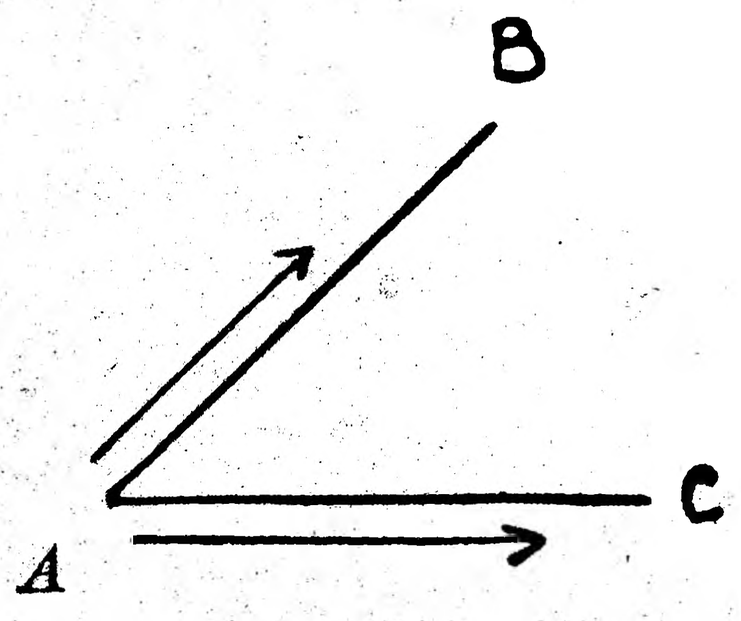
3. Вычислить величину отрезка AB (черт. 7), если каждый отрезок $c = 13$ *мм*.

4. Сделать подстановку и найти числовую величину выражений: а) $4b$, если $b = 3$, б) $8a$, если $a = 5$.

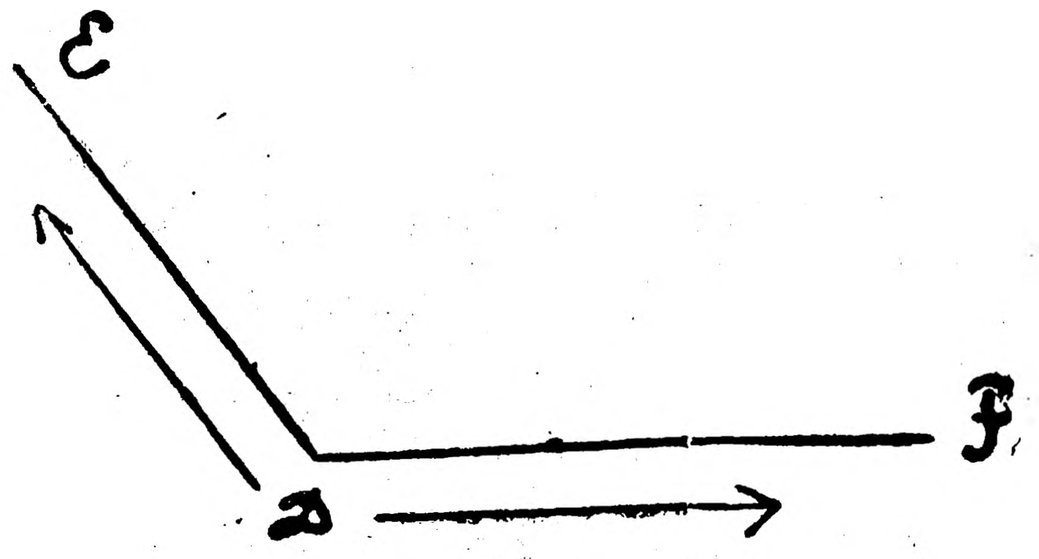
Как называются в этих примерах числа 4 и 8?

§ 4. Угол. Сумма и разность углов.

Указание. Две прямые, выходящие из одной точки, образуют *угол* (черт. 8 и 9). Точка, из которой выходят прямые, называется *вершиной* (A, D), а сами прямые называются *сторонами угла* (AB, AC, DE, DF). Для отличия одного угла от другого их называют или одной большой буквой, стоящей у вершины,



Черт. 8.



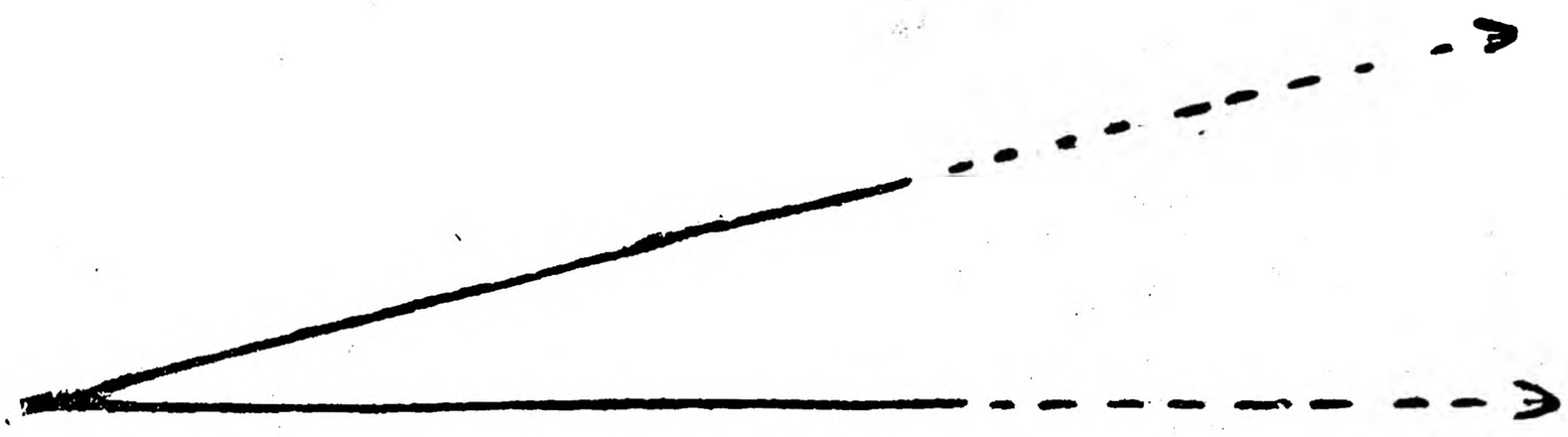
Черт. 9.

например, $\angle A$ (черт. 8), $\angle D$ (черт. 9), где знак $\angle$ заменяет слово «угол», или тремя буквами, причем эти буквы надо читать в таком порядке, чтобы буква, стоящая у вершины, читалась непременно в середине; например, угол на черт. 8 следует читать: $\angle BAC$ или $\angle CAB$.

Вопросы. 1) Прочесть угол на черт. 9. 2) Сравнить углы на черт. 8 и 9. Какой из этих углов больше и какой меньше? 3) Изме-

нится ли величина угла, если продолжить его стороны (черт. 10)? 4) Что надо сделать, чтобы увеличить этот угол? 5) Что надо сделать, чтобы его уменьшить? 6) От чего зависит величина угла?

Вывод. *Величина угла зависит только от наклона его сторон, но не от длины сторон.*

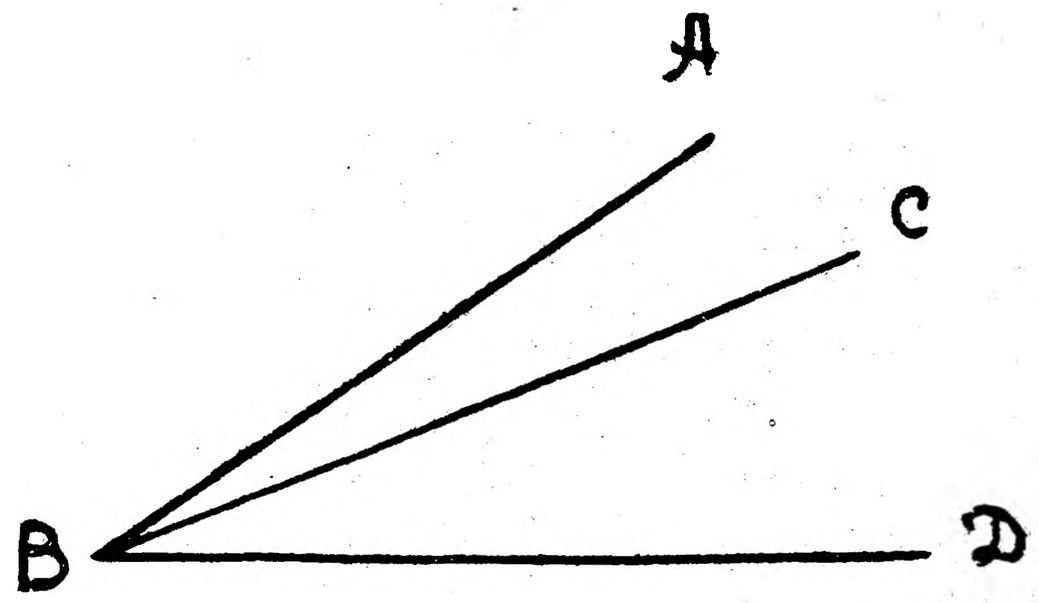


Черт. 10.

Примечание. Величина угла есть мера расхождения его сторон.

Указание. $\angle ABD$ (черт. 11) называется суммой составляющих его углов: $\angle ABC$ и $\angle CBD$, т.-е. $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD$. Наоборот, $\angle ABC$ есть разность $\angle ABD$ и $\angle CBD$, т.-е.

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD.$$



Черт. 11.

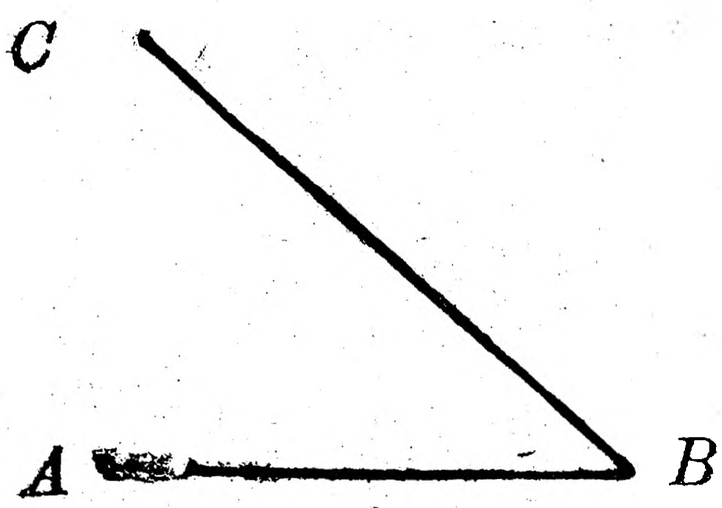
Задача. Представить $\angle CBD$ (черт. 11) в виде разности двух углов.

§ 5. Смежные углы.

Вопросы. 1) Назвать углы, изображенные на черт. 12. 2) Указать вершину $\angle ABC$, $\angle CBD$. 3) Указать стороны $\angle ABC$, $\angle CBD$. 4) Какому из этих двух углов принадлежит сто-

Черт. 12.

рона CB? 5) Как можно назвать сторону, которая принадлежит сразу двум углам? 6) Какую линию составляют стороны AB и BD этих углов?



Черт. 13.

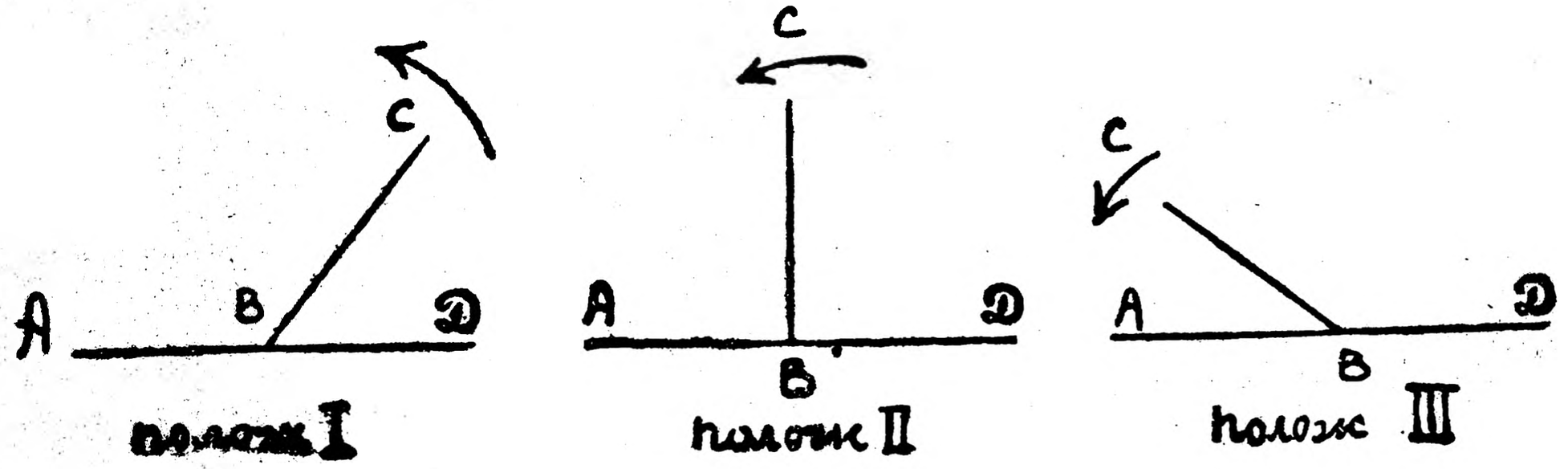
Указание. Углы, которые имеют общую вершину, общую сторону и у которых две другие стороны составляют продолжение одна другой, называются *смежными*.

Вопрос. Можно ли назвать смежными углы черт. 11?

Задача. Дан $\angle ABC$ (черт. 13). Начертить (построить) смежный с ним угол. (Решить задачу двумя способами.)

§ 6. Прямой угол. Сумма смежных углов.

Вообразим, что общая сторона BC пары смежных углов (черт. 12) вращается около вершины, как то указано стрелкой, в то время как другие две стороны остаются неподвижными.



Черт. 14.

На черт. 14 изображены три из возможных положений подвижной стороны.

I положение. BC имеет такое положение, что

$$\angle CBD < \angle ABC$$

(где знак $<$ значит „меньше“).

Вопрос. Что будет происходить с величиной каждого из этих углов, если продолжать вращение BC в направлении, указанном стрелкой (против часовой стрелки)?

II положение. Сторона BC имеет такое положение, что

$$\angle CBD = \angle ABC.$$

В этом случае углы ABC и CBD называются *прямыми* (равные, смежные).

III положение. $\angle CBD$ больше $\angle ABC$, или

$$\angle CBD > \angle ABC$$

(где знак $>$ значит „больше“).

Вопрос. Какая разница между знаками, заменяющими слова «больше» и «меньше»?

Указание. *Равные смежные углы называются прямыми. Все прямые углы равны между собою.* Когда говорят о величине прямого угла, то ее обозначают буквой d.

Запись $\angle B = d$ означает, что $\angle B$ прямой. Из черт. 14 видно, что *любая пара смежных углов равна сумме двух прямых углов*, т.-е.

$$\angle ABC + \angle CBD = 2d.$$

Указания. 1) Если две прямые, пересекаясь, образуют прямой угол, то они называются *взаимно-перпендикулярными*, а каждая из них называется *перпендикуляром* к другой прямой (черт. 14, полож. II), что обозначается $CB \perp AD$. 2) Прямые CB на черт. 14, полож. I и III, называются *наклонными*. 3) Угол меньший прямого называется *острым;* угол больший прямого называется *тупым*.

Упражнение. На всех предыдущих чертежах указать углы острые, прямые и тупые.

§ 7. Вертикальные углы.

Указания. 1) Две прямые линии, пересекаясь, образуют 4 угла (черт. 15), которые попарно называются углами противоположными, или *вертикальными*.

Первая пара: $\angle AOC$ и $\angle DOB$ или

$\angle 1$ и $\angle 2$

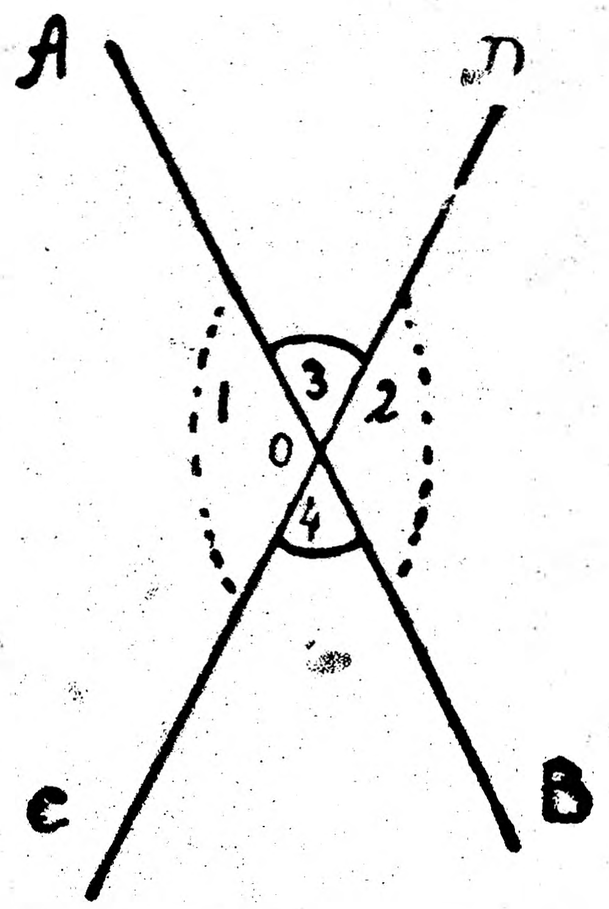
Вторая пара: $\angle AOD$ и $\angle COB$ или

$\angle 3$ и $\angle 4$.

2) Из черт. 15 видно, что стороны одного из вертикальных углов служат продолжениями сторон другого (напр., стороны $\angle 1$ и $\angle 2$).

3) Вертикальные углы равны между собою:

$$\angle 1 = \angle 2,$$
$$\angle 3 = \angle 4.$$

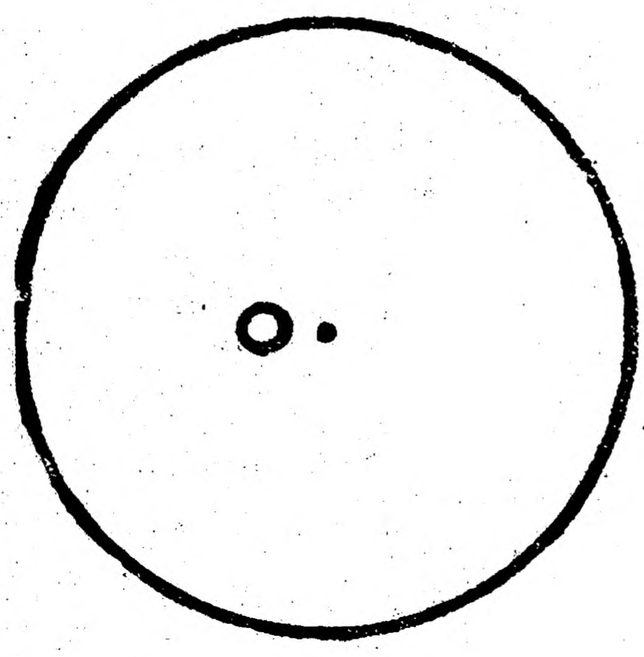


Черт. 15.

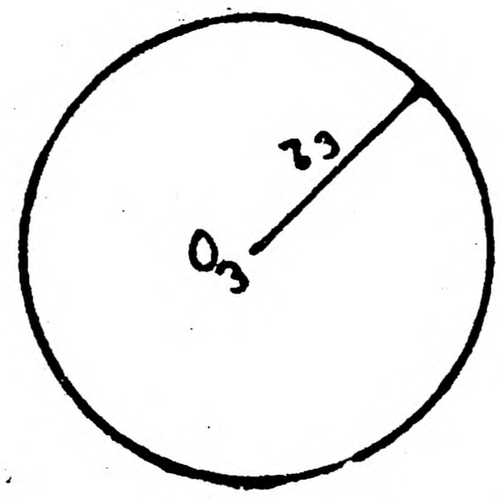
§ 8. Окружность и ее элементы.

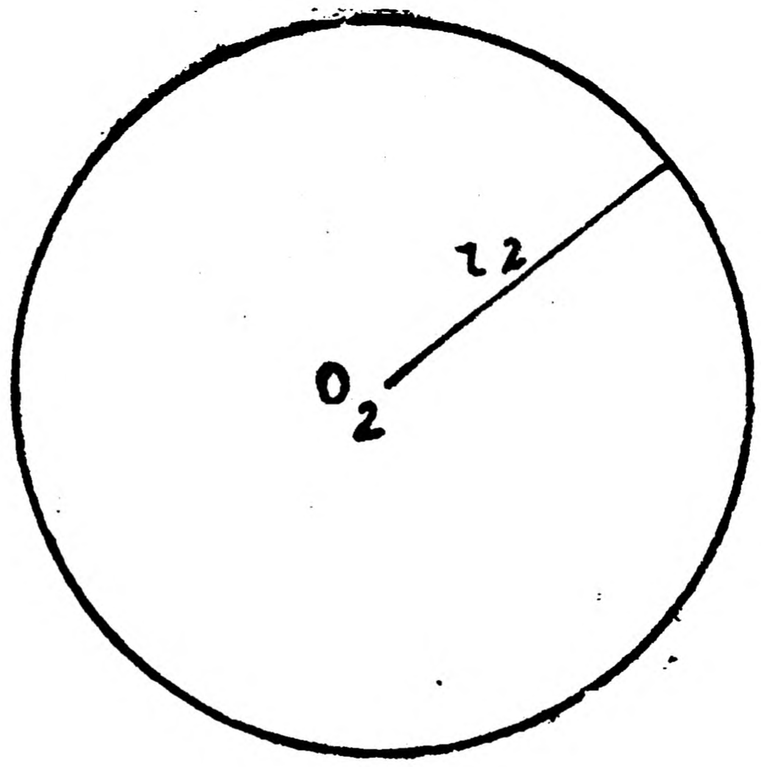
Указание. На черт. 16 изображена замкнутая кривая линия, все точки которой одинаково удалены от точки *O*. Такая линия называется *окружностью*. Точка *O* называется *центром* окружности. Отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности, называется *радиусом* окружности.

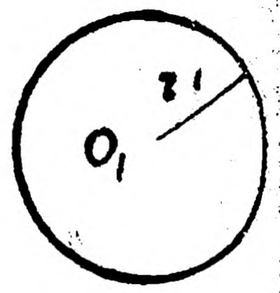
Вопросы. 1) Как начертить окружность на бумаге и как провести окружность на земле? 2) Начертить окружность и провести в ней несколько радиусов. 3) Все ли радиусы окружности равны между собою?



Черт. 16.



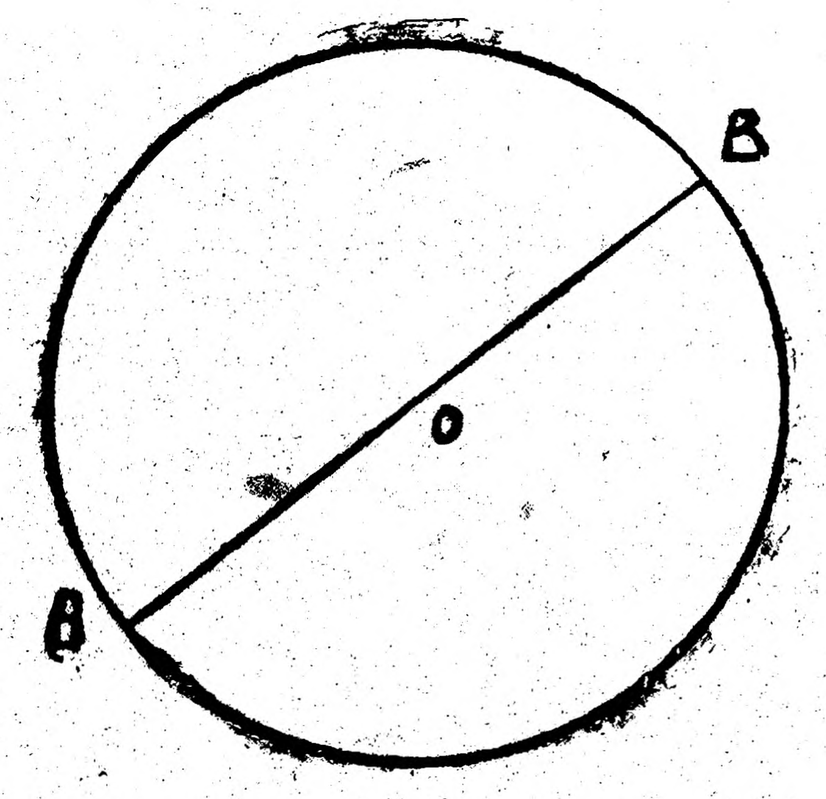




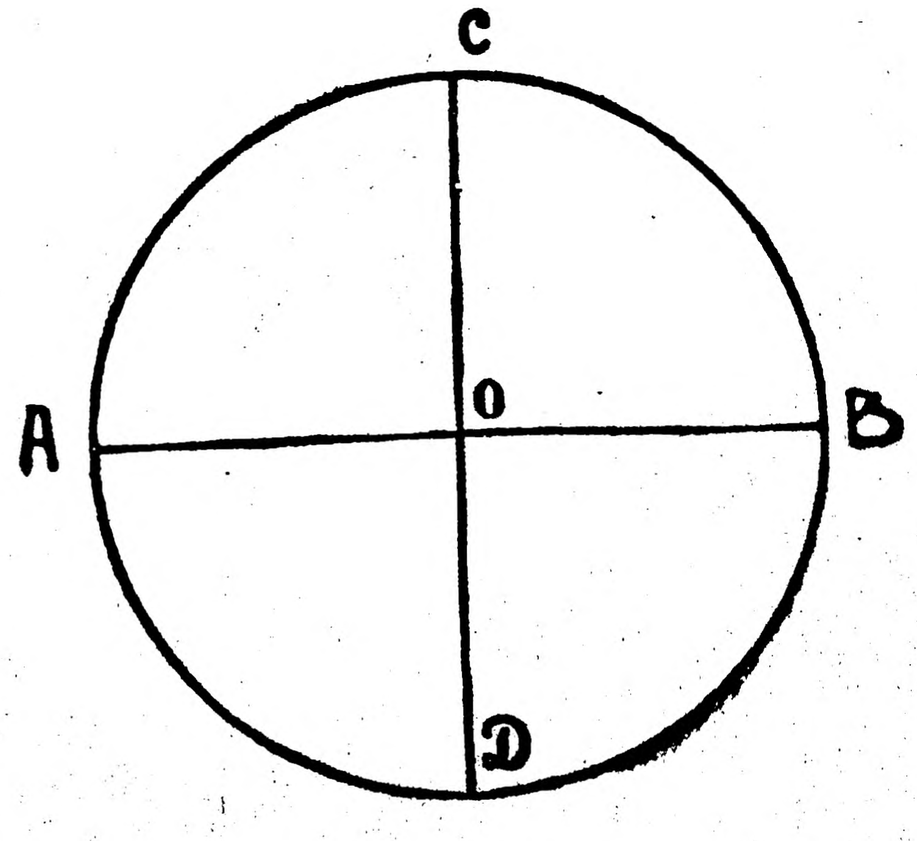
Черт. 17.

На черт. 17. изображены 3 окружности.

Вопросы. 1) Равны ли их радиусы? 2) В какой окружности радиус наибольший и в какой наименьший? 3) Указать, какая окружность наибольшая и какая наименьшая. 4) Увеличивается ли окружность с увеличением радиуса?



Черт. 18.



Черт. 19.

Указания. 1) Радиусы обыкновенно обозначаются буквами r или R.

2) Отрезок AB (черт. 18), соединяющий две точки окружности и проходящий через ее центр, называется *диаметром* и обозначается буквой d или D.

Вопросы. 1) Сколько диаметров можно провести в окружности? 2) На сколько частей делится окружность диаметром? Равны ли эти части? 3) Во сколько раз диаметр больше радиуса? ($AB = AO + OB = r + r = 2r$).

На черт. 19 в окружности проведены два диаметра:

$$AB \perp CD.$$

Вопросы. 1) Какие углы образуют между собой диаметры AB и CD (черт. 19)? 2) На сколько частей разбилась этими диаметрами окружность? 3) Равны ли между собой эти части? 4) Сколько прямых углов поместилось вокруг точки O? 5) Сколько прямых углов поместилось около центра O по одну сторону каждого диаметра?

Указание. Часть окружности (например, AC или BD, черт. 19) называется *дугой* и обозначается так же, как и отрезок прямой, т.-е. двумя буквами у ее концов. В отличие от отрезка прямой, перед буквами дуги ставят знак $\smile$, например, $\smile CB$, т.-е. дуга CB.

Вопрос. Назовите, какие еще дуги имеются на чертеже 19?

§ 9. Градусное измерение дуг и углов.

Вопрос. На сколько частей разобьется вся окружность (черт. 19), если каждую из 4 дуг (AC, CB, BD и AD) разделить еще на 90 равных частей?

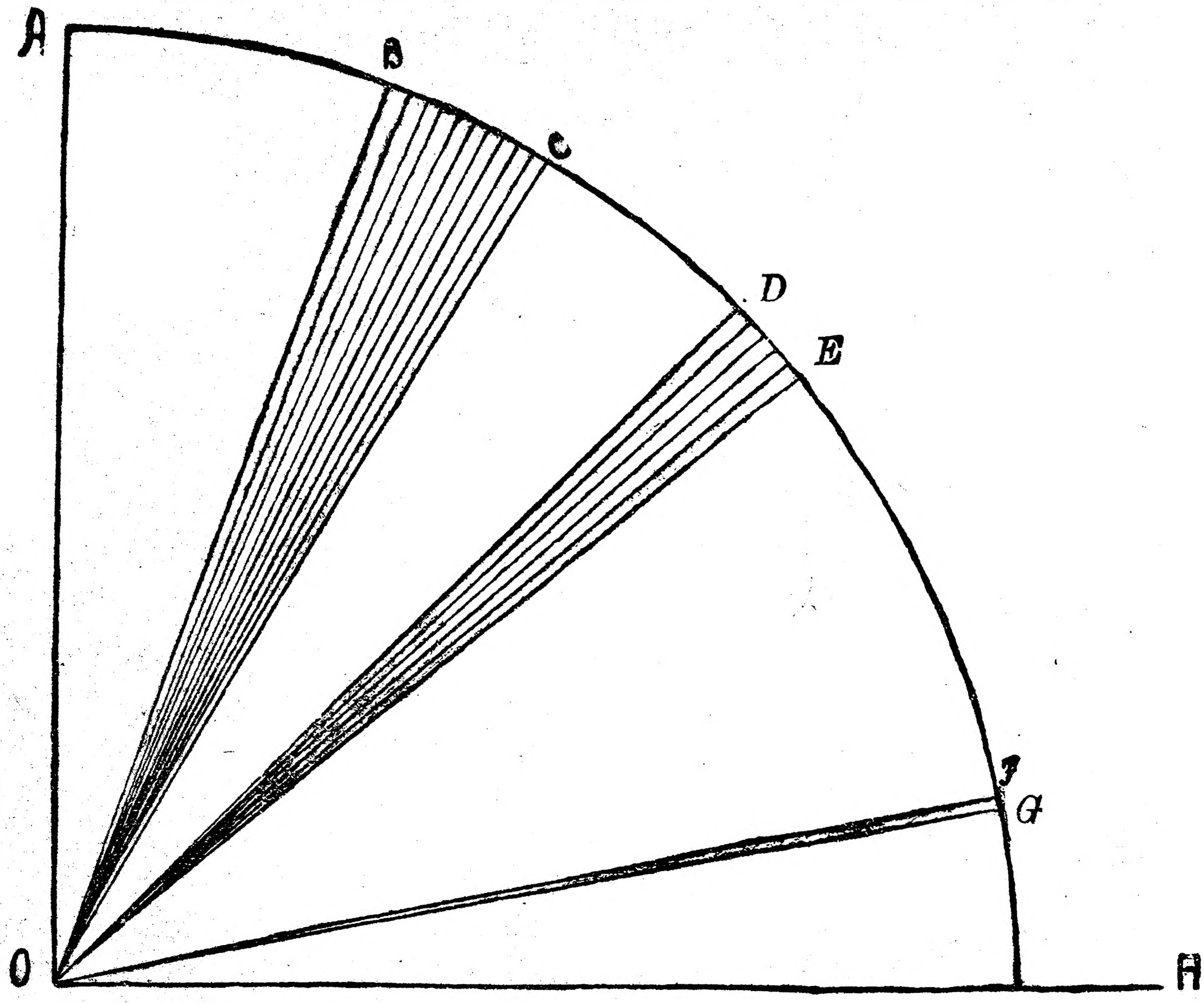
Указание. Одна трехсотшестидесятая часть окружности называется *дуговым градусом*. Говорят, что окружность содержит 360 дуговых градусов, и пишут 360^0, где знак ^{0} заменяет слово *градус*.

Вопросы. 1) Какую часть окружности составляет $\smile ACB$? ADB? (черт. 19), и сколько в каждой из них градусов?

2) Какую часть окружности составляют дуги: $\smile AC$, $\smile CB$? $\smile BD$, $\smile DA$ (черт. 19), и сколько в каждой из них градусов?

3) Какую часть окружности составляет дуга в 1^0?

Указания. 1) На чертеже 20 представлена дуга $FG = 1^0$. $\angle FOG$ называется *угловым градусом*.



Черт. 20.

2) Углы *FOG*, *DOE*, *BOC*, составленные радиусами и имеющие вершины в центре окружности, называются *центральными* углами.

Вопросы. 1) Сколько дуговых градусов в дуге *DE*?
2) „ угловых „ „ угле *DOE*?
3) „ дуговых „ „ дуге *BC*?
4) „ угловых „ „ угле *BOC*?

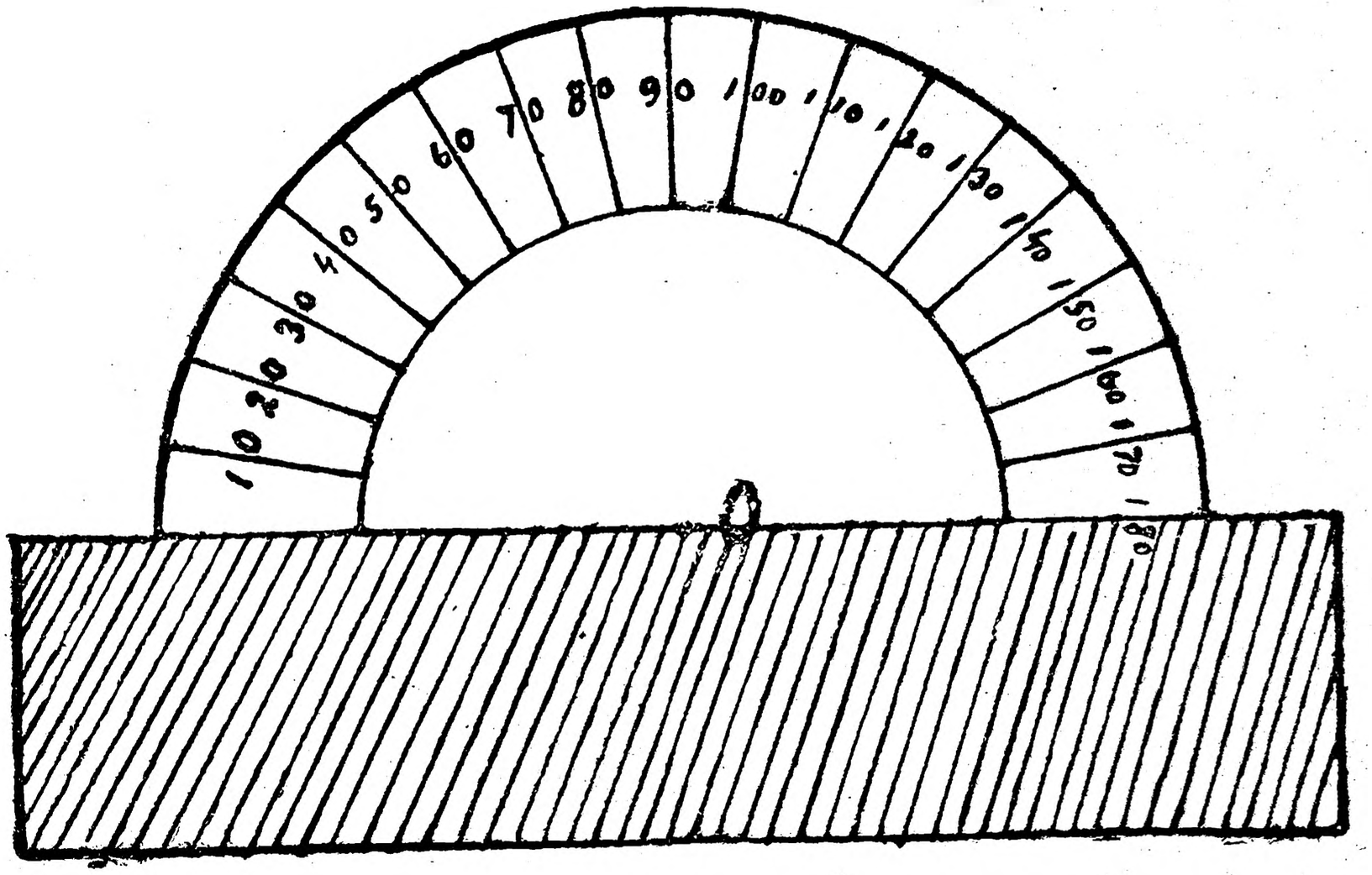
Вывод. *Сколько дуговых градусов в дуге, столько будет угловых градусов в соответствующем центральном угле.*

10. Измерение углов транспортиром.

Для измерения углов на чертеже служит особый прибор — *транспортир* (см. черт. 21).

Транспортир представляет собою полукруг с центром в *O*, разделенный на 180°, с линейкой по диаметру и прорезом (незаштрихованная часть) внутри.

При измерении угла (черт. 22) транспортир накладывается центром O в вершину угла A, линейка (диаметр) направляется по стороне AC. Тогда сторона AB укажет (см. черт. 23), что *в дуге* круга (транспортира), которая заключена между сторонами угла, содержится 40^0 (*дуговых*); следовательно, согласно предыдущему, *в угле* BAC будет тоже 40^0 (*угловых*).

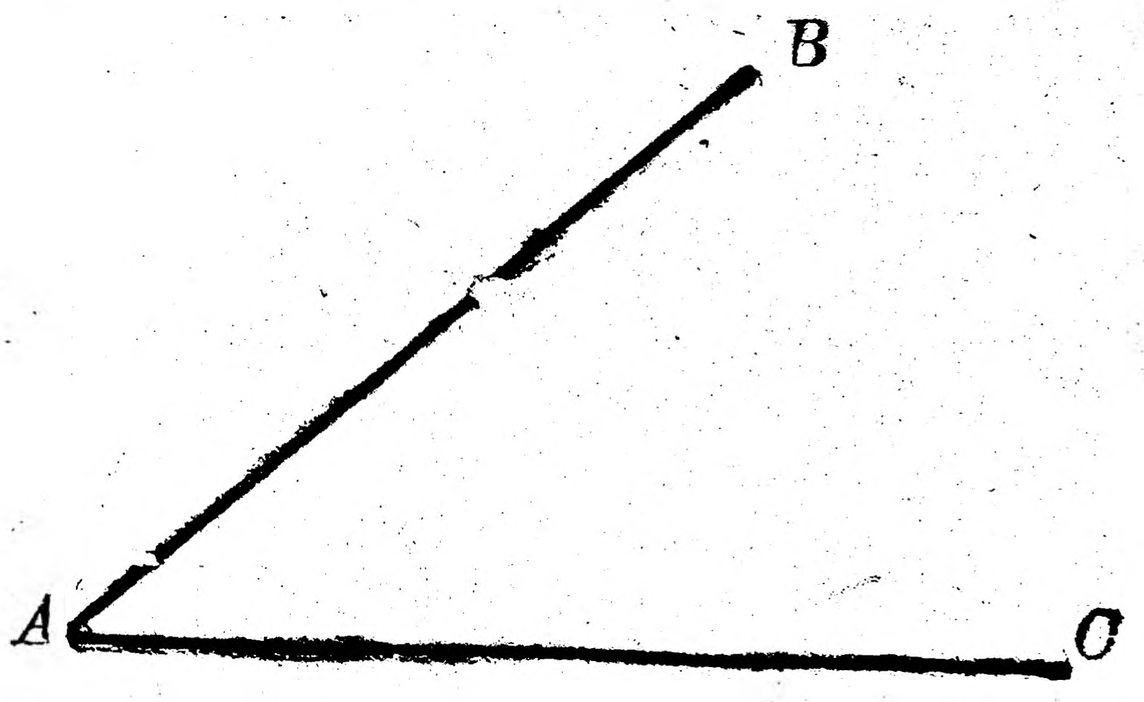


Черт. 21.

Задачи.

1. 1) Измерить транспортиром все углы, помещенные в этой работе. 2) Обратно: построить углы в 40^0, 50^0, 35^0, 86^0 и 90^0.

2. Построить угол, равный $\angle BAC$ (черт. 24).

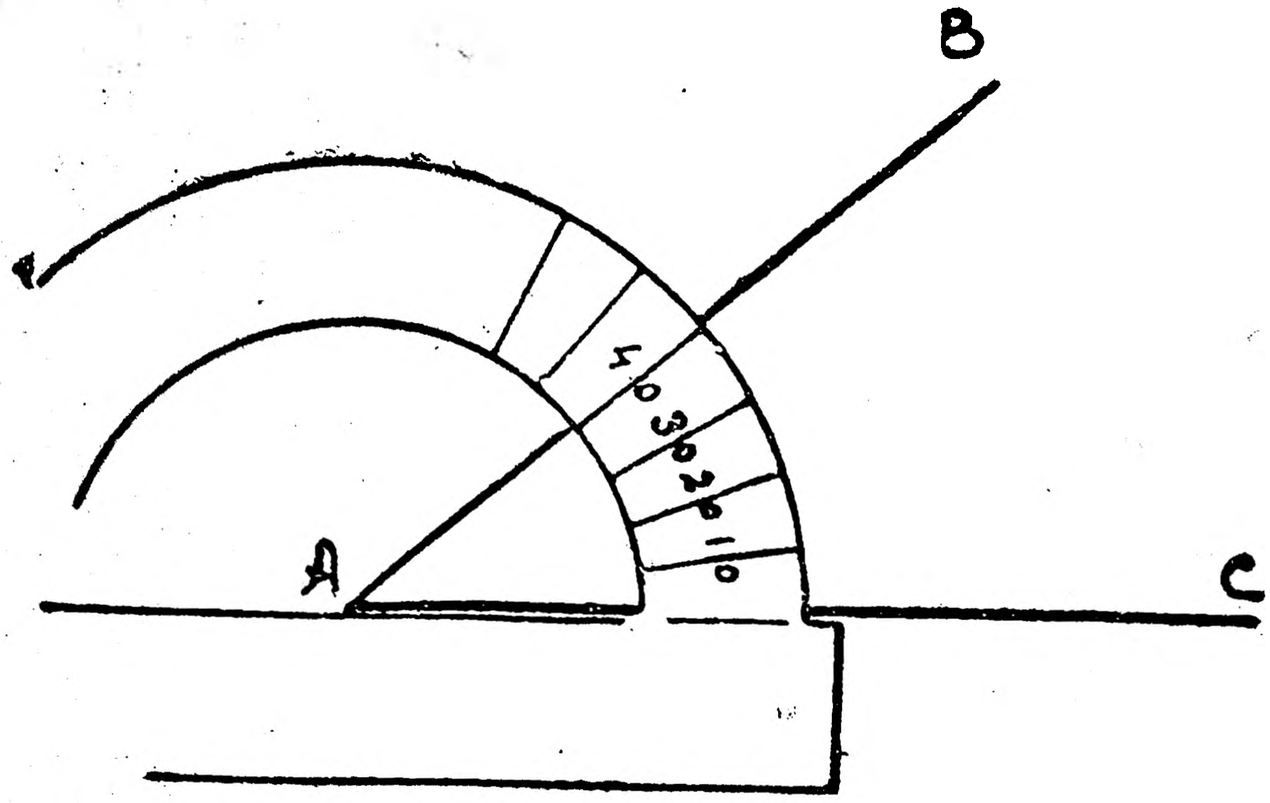


Черт. 22.

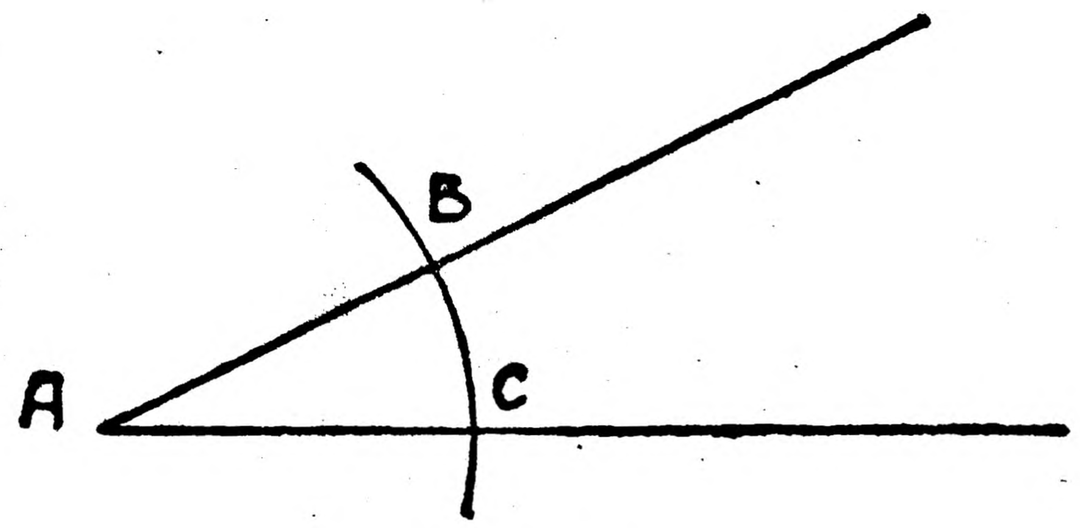
Решение. Начертим прямую (черт. 25) и возьмем на ней произвольную точку D. Произвольным радиусом засекаем стороны данного угла BAC (черт. 24). Не меняя раствора циркуля, из точки D проводим дугу, пересекающую прямую DE в точке E (черт. 25).

Берем на циркуль расстояние между точками B и C (черт. 24) и, не меняя раствора циркуля, из точки F засекаем на дуге (черт. 25) точку G. Через точки D и G проводим прямую.

Получившийся в результате такого построения $\angle GDE$ будет искомый, он равен углу BAC (почему?). (Указание. Очевидно, $\smile BC$ и $\smile FG$ равны по построению и содержат равное число градусов.)

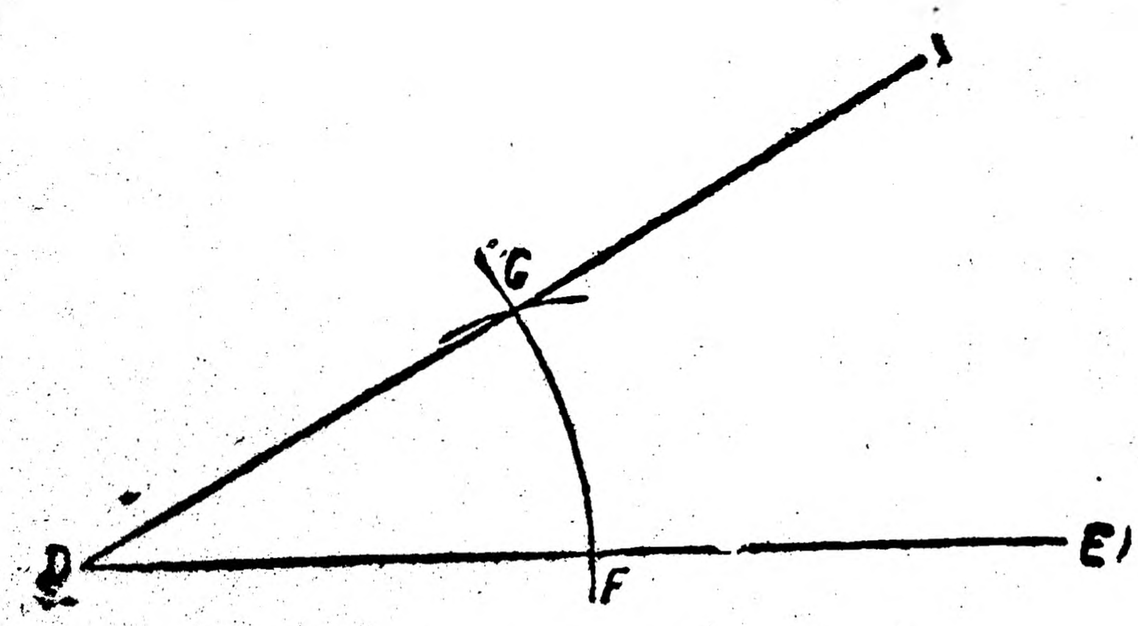


Черт. 23.



Черт. 24.

3. Начертить в тетради два неравных угла и построить: 1) их сумму, 2) их разность.



Черт. 25.

Работа № 2.

ДРОБИ.

Понятие о дроби. Метрические линейные меры. Десятичные дроби. Таблица перевода метрических мер в русские и обратно. Сложение и вычитание десятичных дробей. Сложение и вычитание простых дробей.

§ 11. Понятие о дроби.

Задача. Начертить 4 равных отрезка длиною в 1 *дм* каждый. Обозначить их цифрами: I, II, III, IV.

Разделить I отрезок на 2 равные части (на-глаз); II отрезок — на 3 равные части; III — на 4; IV — на 10 равных частей.

Вопросы. Как называется каждая часть в отрезке I (см. пред. зад.)?

(*Отв.*: половина, или одна вторая дециметра; *запись*: $\frac{1}{2}$ *дм*)

2) Как называется каждая часть в отрезке II? (*Отв.*: одна треть дециметра; *запись*: $\frac{1}{3}$ *дм*).

3) Как называется каждая часть в отрезах III и IV?

Задача. Во всех 4 отрезках (см. пред. зад.) над каждой частью надписать ее цифровое обозначение (т.-е. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{10}$).

Вопросы. Сколько в дециметре (в единице) частей: 1) вторых, 2) третьих, 3) четвертых, 4) десятых?

Указание. На чертеже 26 дан отрезок AB, на том же чертеже внизу этот отрезок разделен на 4 равных части; одна из этих частей (правая) нарисована отдельно.

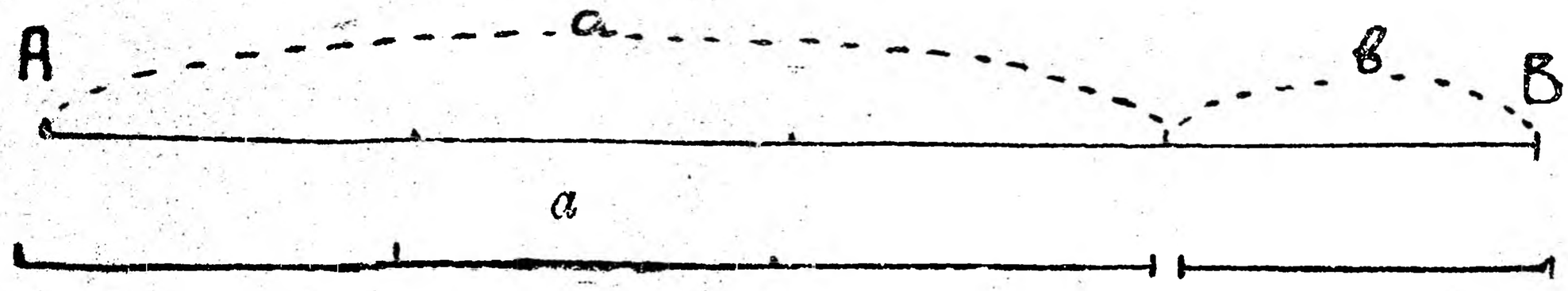
Вопросы. 1) На какие части разделился отрезок AB? 2) Сколько таких частей в отрезке AB? 3) Сколько таких частей

в отрезке a? 4) Какую часть верхнего отрезка составляет отрезок b? отрезок a? (*Отв.*: три четверти, или $\frac{3}{4}$.)

Указание. Выражение $\frac{3}{4}$ называется дробью и означает, что некоторая величина разделена на 4 равные части и таких частей взято 3 (отрезок a, черт. 26). Число 3 называется *числителем* (показывает число частей), число 4 называется *знаменателем* (показывает, какие это части). Черта, разделяющая числитель от знаменателя, называется чертою дроби.

Упражнения. 1) Прочесть дроби: $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{5}{10}$ 2) Указать в каждой из этих дробей числитель и знаменатель. 3) Представить эти дроби на отрезках. 4) Написать дроби: одна восьмая; три восьмых; пять восьмых; одна двенадцатая; три двенадцатых; одиннадцать двенадцатых.

Задача. Разделить 3 килограмма хлеба на 4 человека (3 : 4).



Черт. 26.

Решение. Из каждого килограмма каждому достанется по одной четверти $\left(\frac{1}{4}\ кг\right)$, а из 3 $кг$ — по три четверти $\left(\frac{3}{4}\ кг\right)$, т.-е. $3 : 4 = \frac{3}{4}$.

Вывод. Дробь можно рассматривать как результат деления ее числителя на ее знаменатель (т.-е. как частное от деления этих чисел, или, иначе, отношение этих чисел).

Задачи.

1. Разделить и прочесть результат деления 5 : 6.

Решение. $5 : 6 = \frac{5}{6}$ (пять шестых).

2. Разделить и прочесть результаты деления: а) 1 : 6; б) 7 : 8; в) 3 : 10; г) 6 : 10.

3. Написать отношения чисел: а) 12 и 3; б) 4 и 7; в) 5 и 6.

Указание. Целое число можно представить в виде дроби, подписав под ним знаменатель 1, так как от деления любого числа на единицу в частном получается то же число.

Пример. $2 = \frac{2}{1}$ (так как $2:1=2$), $3 = \frac{3}{1}$ (так как $3:1=3$).

Указание. Дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$ называются *обратными*. (Чем отличаются две обратные дроби друг от друга?)

Примеры. 1) Найти дроби, обратные дробям:

$\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{2}$ (решение: $\frac{2}{1}=2$); $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$.

2) Найти дроби обратные числам: 2 (решение: $2=\frac{2}{1}$ а потому обратная дробь будет $\frac{1}{2}$); 3; 5; 10; 8.

Вопросы. Как прочесть числа: $2\frac{1}{2}$ (два с половиной); $13\frac{8}{10}$ (тринадцать и восемь десятых); $7\frac{5}{8}$; $1\frac{2}{5}$?

Указание. Каждое из этих чисел называется *смешанным числом* (почему?).

Задача. Прочесть и представить на отрезках дроби: $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{15}{12}$.

Указание. 1) Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называется *правильной дробью*.

2) Дробь, у которой числитель больше знаменателя, называется *неправильной дробью*.

3) Правильная дробь меньше единицы, неправильная дробь больше единицы.

Упражнения.

1. Указать, какие из следующих дробей правильные и какие неправильные: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{12}{10}$.

2. Из дроби $\frac{3}{2}$ выделить целую единицу.

Решение. $\frac{3}{2}$ = трем половинам = $1\frac{1}{2}$.

3. В дроби $\frac{5}{2}$ выделить целые единицы (обратить неправильную дробь в смешанное число).

4. Обратить неправильную дробь $\frac{19}{4}$ в смешанное число.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 19 & 4 \\ \hline 16 & 4 \\ \hline 3 & \end{array}; \quad \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}.$$

5. Обратить в смешанные числа следующие неправильные дроби: $\frac{8}{5}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{12}{10}$; $\frac{24}{5}$; $\frac{17}{3}$; $\frac{18}{7}$.

6. Разделить: 25 на 7; 102 на 11; 207 на 8.

7. Обратить смешанное число $2\frac{3}{8}$ в неправильную дробь.

Решение. В каждой единице восьмых долей 8, а в двух единицах $2 \times 8 = 16$, да еще 3 восьмых, всего $\frac{19}{8}$. Итак,

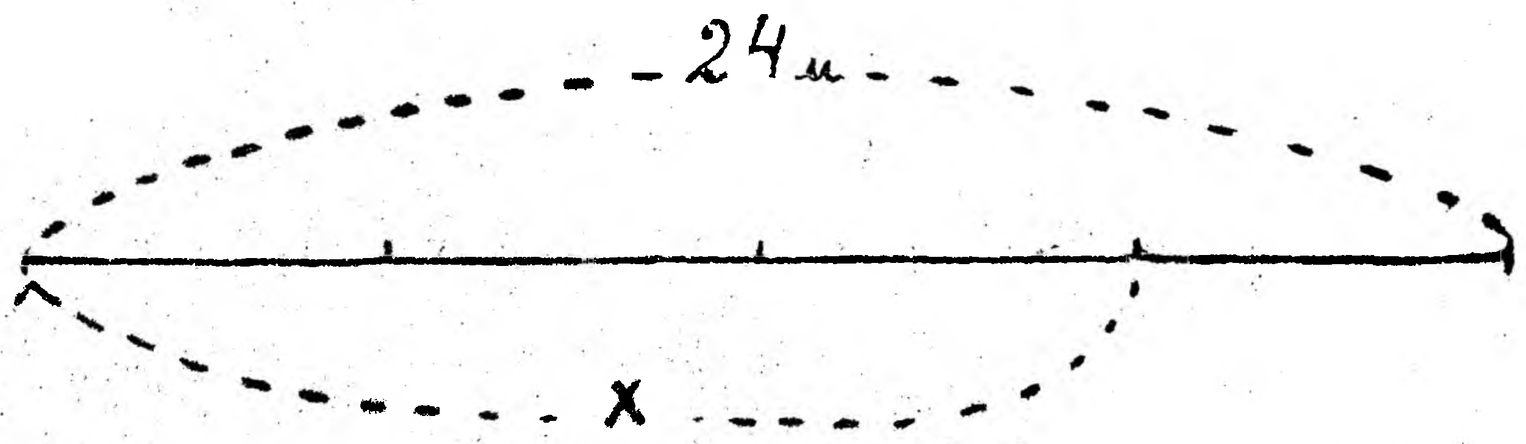
$\frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

8. Обратить в неправильные дроби: $2\frac{1}{3}$; $5\frac{2}{3}$; $7\frac{3}{8}$; $7\frac{3}{4}$; $8\frac{9}{10}$; $4\frac{25}{100}$; $1\frac{3}{100}$; $2\frac{8}{100}$.

Вопрос. Как обратить смешанное число в неправильную дробь (правило)?

Задачи.

1. Расстояние между двумя точками 24 метра. Найти $\frac{3}{4}$ этого расстояния. Решить эту задачу с помощью черт. 27, где искомая часть отрезка обозначена буквой x (икс).

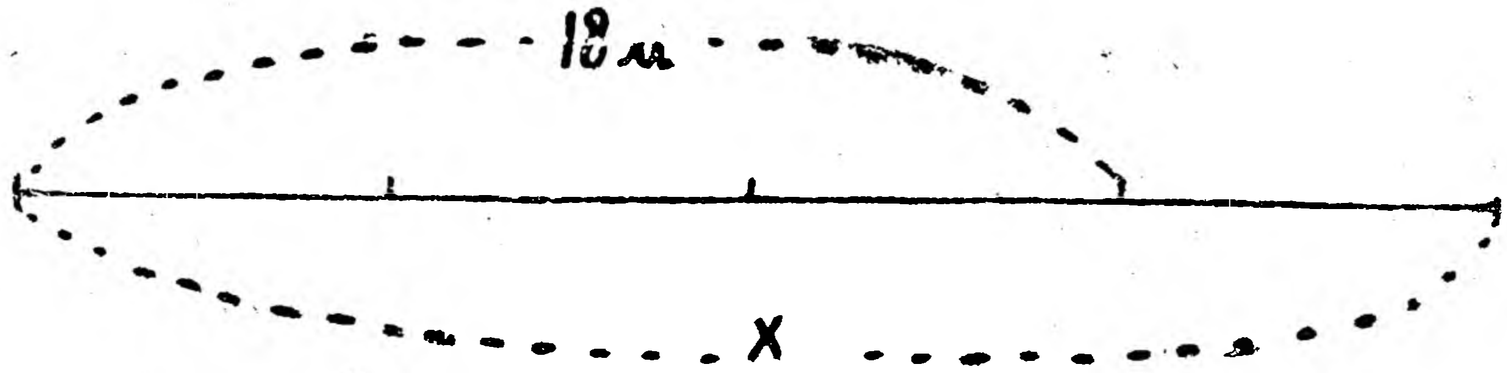


Черт. 27

2. Найти $\frac{3}{5}$ от 25.

3. Три четверти $\left(\frac{3}{4}\right)$ расстояние между двумя точками составляют 18 *м*. Найти все расстояние между этими точками. Решить эту задачу с помощью черт. 28.

Отв. 24 *м*.



Черт. 28.

4. $\frac{3}{5}$ неизвестного отрезка равны 15 *м*. Найти весь отрезок.

5. $\frac{7}{8}$ некоторого расстояния равны 56 *м*. Наити все расстояние.

6. Сколько кв. саж. содержится в $\frac{1}{4}$ десятины? в $\frac{3}{8}$ дес.? в $\frac{2}{5}$ дес.? (Десятина = 2 400 кв. саж.)

7. От Москвы до Ленинграда 612 *км*. Найти $\frac{2}{3}$ этого расстояния.

8. $\frac{3}{5}$ месячного заработка рабочего составляют 21 руб. Определить месячный заработок рабочего.

9. Ученик прочел 70 страниц книги, что составляет $\frac{5}{6}$ всей книги. Сколько страниц в книге?

§ 12. Метрические линейные меры.

Указание. Меры, которыми измеряют длины и расстояния (отрезки прямой линии), называются *линейными* и в различных странах бывают различные. Всем известны русские меры (верста, сажень, аршин, фут, вершок, дюйм).

После Великой французской революции стала распространяться международная метрическая система мер (принятая между-

народным съездом ученых). Основная единица этой системы — метр [1]) (около 1½ арш., или, точнее, 22½ вершка).

Увеличением этой меры в 10, 100, 1 000 раз получаются меры крупные, а делением на 10, 100, 1 000 равных частей получаются меры более мелкие.

Таблица метрических линейных мер.

1 *кило*метр (*км*) = 10 гектометрам (*гм*)
1 *гекто*метр = 10 декаметрам (*дкм*)
1 *дека*метр = 10 метрам (*м*)
1 *метр* = 10 дециметрам (*дм*)
1 *деци*метр = 10 сантиметрам (*см*)
1 *санти*метр = 10 миллиметрам (*мм*).

Вопросы. 1) Ск. метров в декаметре? гектометре? километре? 2) Ск. в метре дециметров? сантиметров? миллиметров? 3) Ск. в дециметре сантиметров? миллиметров?

Наиболее употребительные из этих мер:

Километр = 1 000 метрам. Метр = 100 сантиметрам.

Сантиметр = 10 миллиметрам.

Остальные меры употребляются редко.

Задачи.

1. Представить простым именованным числом в метрах:

2 *км* 8 *гм* 5 *дкм* 3 *м*.

Решение: 2 853 *м*.

2. Представить простым именованным числом в метрах: 2 *км* 8 *гм* 3 *м*.

Решение. Предварительно обозначим нулем отсутствующие декаметры:

2 *км* 8 *гм* 0 *дкм* 3 *м* = 2 803 *м*.

3. Выразить в сантиметрах 2 *м* 8 *дм* 5 *см*; 2 *м* 5 *см*.

Вопросы. 1) Какую часть метра составляют 1 *дм*? 3 *дм*? 5 *дм*? 8 *дм*?

Отв. $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{8}{10}$.

---

[1]) Метр равен $\frac{1}{10\,000\,000}$ части четверти парижского меридиана (приблизительно).

2) Какую часть метра составляют:

1 *см?* 2 *см?* 3 *см?* 8 *см?* 23 *см?* 2 *дм* 3 *см?* 5 *дм* 8 *см?*

3) Какую часть метра составляют: 1 *мм?* 2 *мм?* 18 мм?

1 *см* 8 *мм?* 125 *мм?* 1 *дм* 2 *см* 5 *мм?*

4) Выразить в метрах: 2 *м* 3 *дм*; 2 *м* 35 *см*.

Вывод. Выражая мелкие метрические меры в долях более крупных мер, мы получаем дроби, у которых знаменателями служат числа: 10, 100, 1 000 и т д., вообще единица с нулями.

§ 13. Десятичные дроби.

Указание. Дроби $321\frac{7}{10}$, $321\frac{74}{100}$, $321\frac{745}{1000}$ называются *десятичными* и обыкновенно записываются без знаменателя, а именно: 321,7; 321,74; 321,745, т.-е., отделив запятой целую часть смешанного числа от дробной, пишут только числитель последней и *подразумевают* ее знаменатель: в первой дроби — 10, во второй — 100, в третьей — 1 000.

Такая запись вполне сходна с записью целых чисел. В самом деле, когда мы пишем какое-либо целое число, напр., 321, то мы не указываем особо, что 3 — это сотни, 2 — десятки и 1 — единица, потому что мы и без того знаем, что на третьем месте (считая от единиц влево) стоят сотни, правее их десятки, еще правее единицы, которыми обычно все целые числа и заканчиваются. Если, отделив запятой целые единицы числа, мы напишем затем какую-либо цифру вправо от запятой, то согласно тому же правилу, эта цифра должна означать разряд, в 10 раз меньший целых единиц, т.-е. десятые доли единицы, таким образом:

$$321{,}7 = 321\frac{7}{10}.$$

Вопросы. Какой разряд следует за десятыми долями вправо? за сотыми?

Вывод. Если после целых единиц числа поставлена запятая и далее после запятой написаны какие-нибудь цифры, то цифра, стоящая *вправо от запятой* на *первом* месте, означает *десятые*, на *втором* месте — *сотые доли*, на *третьем* месте — *тысячные доли*, и т. д.

Пример. В дроби 321,745 — 7 означает десятые доли, 4 — сотые, 5 — тысячные.

Указание. Чтобы прочесть десятичную дробь, надо прочесть сразу все число, написанное после запятой, и указать название долей последнего разряда. В нашем примере 321,745 дробную часть следует читать: «745 тысячных», а все число: «321 целая и 745 тысячных».

Упражнение. Прочесть: 2,3 *м*, 2,38 *м*, 2,389 *м*.

Указание. Если в числе нет целых единиц (дробь правильная), то вместо целых ставят 0, отделяют его запятой и читают: «ноль целых»; напр.: 0,2 — «ноль целых и две десятых».

Так же точно, если какой-либо разряд в дроби отсутствует, его место замещают нулем; напр., 0,003; читать: «ноль целых три тысячных», или, короче: «три тысячных».

Вопросы. 1) Даны дроби: 0,3; 0,03; 0,003. Во сколько раз первая дробь больше второй? вторая дробь больше третьей?

2) Дана десятичная дробь 8,745. Перенеся запятую через один знак (т.-е. цифру) вправо, получим число 87,45. а) Чем стали единицы (8) после перенесения запятой? б) Чем стали десятые (7)? сотые (4)? тысячные (5)? в) Во сколько раз увеличилось значение каждой цифры? все число?

Вывод. *От переноса запятой через один знак вправо число увеличивается в 10 раз.*

Вопрос. Во сколько раз увеличится число, если запятую перенести через 2 знака вправо? через 3 знака вправо? Почему?

Вывод. *От переноса запятой вправо через 1, 2, 3 и т. д. знаков число увеличивается в 10, 100, 1 000 и т. д. раз.*

Вопросы. Дано дробное число: 329,7; перенеся запятую через один знак *влево*, получим число 32,97. 1) Чем стали после переноса запятой сотни? десятки? единицы? 2) Чем стали десятые доли? 3) Во сколько раз уменьшилось: а) значение каждой цифры? б) все число? 4) Во сколько раз уменьшится число от переноса запятой влево через 2, через 3 и т. д. десятичных знаков?

Вывод. *От переноса запятой влево через 1, 2, 3 и т. д. знаков число уменьшается в 10, 100, 1 000 и т. д. раз.*

Упражнения.

1. Увеличить число 2,785 в 10, 100, 1 000 раз.
2. Уменьшить число 785,2 в 10, 100, 1 000 раз.

Вопрос. Изменится ли величина десятичной дроби, если к ней справа приписывать нули, напр., 0,3; 0,30; 0,300; 0,3000?

Вывод. От приписывания к десятичной дроби нулей справа величина дроби не изменяется, и обратно — нули справа можно опускать, не изменяя величины дроби.

Упражнения.

1. Написать без знаменателя дроби:

$$\frac{7}{100};\quad \frac{35}{1\,000};\quad 2\frac{1}{100};\quad 5\frac{16}{10\,000};\quad 16\frac{11}{1\,000}.$$

2. Произвести указанные ниже действия:

0,02 . 100	152,5 : 10
3,16 . 10	263,7 : 100
0,03 . 100	0,75 : 10
26,4 . 100	0,9 : 100
1,09 . 10 000	1,65 : 1 000

3. Написать короче следующие дроби:

0,50; 2,0750; 31,0000; 6,16000.

§ 14. Таблица перевода метрических мер в русские и обратно.

1 *км* = 0,937 версты =	1 верста = 1,067 *км* = 1 067 *м*
= 468,5 саж.	1 саж. = 2,134 *м* = 213,4 *см*
1 *м* = 1,406 арш. =	1 арш. = 0,711 *м* = 71,1 *см*
= 22,5 верш. =	1 фут = 0,305 *м* = 30,5 *см*
= 3,28 фута =	1 верш. = 4,445 *см*.
= 39,37 дюйма.	
1 *см* = 0,225 вершка.	

§ 15. Сложение и вычитание десятичных дробей.

Задачи.

1. Сложить:

$$+\begin{array}{r} 11\ м\ 75\ см \\ 3\ м\ 12\ см \\ \hline ? \end{array}$$

Вычесть:

$$-\begin{array}{r} 11\ м\ 75\ см \\ 3\ м\ 12\ см \\ \hline ? \end{array}$$

2. Выразим данные задачи 1 в метрах.

Сложить:	Вычесть:
$+\begin{array}{r} 11{,}75\ м \\ 3{,}12\ м \\ \hline ? \end{array}$	$-\begin{array}{r} 11{,}75\ м \\ 3{,}12\ м \\ \hline ? \end{array}$

3. Сложить: $+\begin{array}{r} 9\ м\ 69\ см \\ 2\ м\ 85\ см \\ \hline ? \end{array}$ **или** $+\begin{array}{r} 9{,}69\ м \\ 2{,}85\ м \\ \hline ? \end{array}$

4. Вычесть: $-\begin{array}{r} 9\ м\ 69\ см \\ 2\ м\ 85\ см \\ \hline ? \end{array}$ **или** $-\begin{array}{r} 9{,}69\ м \\ 2{,}85\ м \\ \hline ? \end{array}$

Вывод. При сложении или вычитании десятичных дробей поступают как при сложении и вычитании целых чисел: подписывают одну дробь под другой так чтобы единицы были под единицами, десятые под десятыми, сотые под сотыми и т. д., затем производят сложение или вычитание, не обращая внимания на запятую, а в полученном результате ставят запятую на том же месте, где она была во всех данных числах.

Примеры.

1)	2)	3)
$+\begin{array}{r} 0{,}578 \\ 1{,}396 \\ \hline 1{,}974 \end{array}$	$+\begin{array}{r} 2{,}5 \\ 0{,}758 \\ \hline 3{,}258 \end{array}$	$+\begin{array}{r} 0{,}125 \\ 13{,}61 \\ \hline 13{,}735 \end{array}$
4)	**5)**	**6)**
$-\begin{array}{r} 1{,}974 \\ 1{,}396 \\ \hline 0{,}578 \end{array}$	$-\begin{array}{r} 3{,}258 \\ 2{,}5 \\ \hline 0{,}758 \end{array}$	$-\begin{array}{r} 25{,}6 \\ 13{,}879 \\ \hline 11{,}721 \end{array}$

Примечание. Иногда, для удобства производства действия, к дробям с малым количеством десятичных знаков приписываются справа нули так, чтобы все слагаемые, а также уменьшаемое и вычитаемое имели равное число десятичных знаков.

Примеры.

1)	2)	3)	4)
$+\begin{array}{r} 2{,}500 \\ 0{,}758 \\ \hline ? \end{array}$	$+\begin{array}{r} 0{,}125 \\ 13{,}610 \\ \hline ? \end{array}$	$-\begin{array}{r} 3{,}258 \\ 2{,}500 \\ \hline ? \end{array}$	$-\begin{array}{r} 25{,}600 \\ 13{,}879 \\ \hline ? \end{array}$

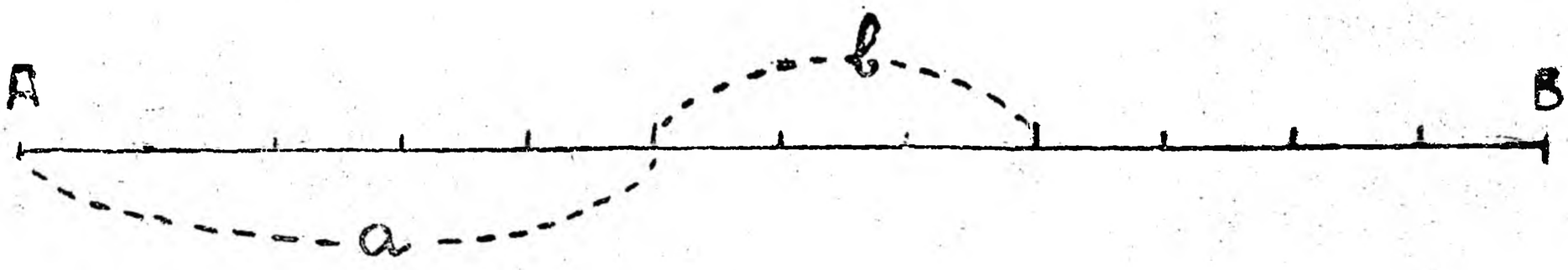
Произвести действия и результаты сверить с предыдущими.

Примеры.

1) $245{,}75 + 0{,}025 = ?$
2) $0{,}467 + 0{,}467 = ?$
3) $2{,}348 + 252 = ?$
4) $0{,}728 - 0{,}123 = ?$
5) $1{,}005 - 0{,}08 = ?$
6) $12{,}742 - 9{,}742 = ?$

§ 16. Сложение обыкновенных дробей.

Вопросы. 1) К четверти метра прибавить еще четверть метра. Ск. получится в сумме $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=?\right)$. 2) Ск. получится, если к $\frac{3}{8}$ килограмма прибавить $\frac{1}{8}$ килограмма? 3) Ск. получится, если к $\frac{3}{8}$ *кг* прибавить $\frac{5}{8}$ *кг*? 4) На черт. 29 представлен отрезок AB, разбитый на 12 равных долей. Ск. таких долей в отрезке a? в отрезке b? Ск. таких долей в сумме отрезков $a+b$?



Черт. 29.

Вывод. Чтобы сложить дроби с равными знаменателями, надо сложить их числители и подписать тот же знаменатель.

Примеры. 1) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+1}{4}=\frac{2}{4}$, 2) $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3+1}{8}=\frac{4}{8}$, 3) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{3+5}{8}=\frac{8}{8}=1$, 4) $\frac{5}{12}+\frac{10}{12}=\frac{5+10}{12}=\frac{15}{12}=1\frac{3}{12}$.

Упражнения. 1) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=?$ 2) $\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=?$ 3) $\frac{7}{16}+\frac{12}{16}=?$ 4) $\frac{13}{15}+\frac{12}{15}=?$

§ 17. Вычитание обыкновенных дробей.

Вопросы. 1) От $\frac{3}{4}$ *м* отнять одну четверть метра $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)$. 2) От пяти восьмых килограмма отнять три восьмых килограмма $\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\right)$. 3) Какую часть всего отрезка (черт. 29) составляет остаток за вычетом a и b $\left(1-\frac{5}{12}-\frac{3}{12}\right)$? 4) Какую часть всего отрезка (черт. 29) составит разность двух отрезков a и b (т.-е. $a-b$)?

Решение. $a-b=\frac{5}{12}-\frac{3}{12}=?$

Вывод. Чтобы вычесть дроби с равными знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби и под результатом подписать тот же знаменатель.

Примеры. 1) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}$, 2) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}$,

3) $\frac{5}{12}-\frac{3}{12}=\frac{5-3}{12}=\frac{2}{12}$, 4) $1-\frac{5}{12}-\frac{3}{12}=\frac{12-5-3}{12}=\frac{4}{12}$

$\left(\text{так как } 1=\frac{12}{12}\right)$.

Упражнения. 1) $\frac{7}{12}-\frac{4}{12}=?$ 2) $\frac{7}{15}-\frac{2}{15}=?$ 3) $1-\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=?$

§ 18. Изменение вида дробей без изменения их величины.

Задачи.

1. Показать при помощи черт. 30, что в $\frac{1}{2}$ содержится $\frac{2}{4}$ и в $\frac{1}{2}$ содержится $\frac{4}{8}$, т.-е. что $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$.



Черт. 30.

2. Сколько в $\frac{1}{2}$ содержится шестнадцатых долей? тридцать вторых долей? в $\frac{1}{3}$ шестых долей? в $\frac{1}{3}$ девятых долей? Записать ответы в виде равенств.

3. Показать на чертеже, что $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$; $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$; $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$.

4. Показать на чертеже, что $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$; $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

Вывод. При умножении и при делении числителя и знаменателя дроби на одно и то же число величина дроби не изменяется, изменяется лишь ее вид.

Указание. Деление числителя и знаменателя дроби на одно и то же число называется *сокращением дроби.*

Примеры. Сократить дроби:

1) $\frac{9}{12}$; 2) $\frac{8}{12}$; 3) $\frac{9}{15}$; 4) $\frac{6}{12}$; 5) $\frac{10}{15}$; 6) $\frac{5}{20}$.

§ 19. Увеличение и уменьшение дроби в целое число раз (умножение и деление дроби на целое число).

Вопросы. 1) Как изменится величина дроби, если *увеличить* в несколько раз только ее числитель?

2) Как изменится величина дроби, если *уменьшить* в несколько раз только ее числитель?

3) Как изменится величина дроби, если *увеличить* в несколько раз только ее знаменатель?

4) Как изменится величина дроби, если *уменьшить* в несколько раз только ее знаменатель?

5) Во сколько раз дробь $\frac{6}{5}$ больше дроби $\frac{2}{5}$?

дробь $\frac{8}{3}$ больше дроби $\frac{4}{3}$? дробь $\frac{8}{9}$ больше дроби $\frac{2}{9}$?

6) Во сколько раз и почему дробь $\frac{3}{4}$ больше дроби $\frac{3}{8}$?

дробь $\frac{2}{5}$ больше дроби $\frac{2}{15}$? дробь $\frac{1}{4}$ больше дроби $\frac{1}{16}$?

7) Во сколько раз дробь $\frac{2}{5}$ меньше дроби $\frac{6}{5}$?

дробь $\frac{4}{2}$ меньше дроби $\frac{8}{2}$? дробь $\frac{2}{9}$ меньше дроби $\frac{8}{9}$?

8) Во сколько раз дробь $\frac{3}{8}$ меньше дроби $\frac{3}{4}$?

дробь $\frac{2}{15}$ меньше дроби $\frac{2}{5}$? дробь $\frac{1}{16}$ меньше дроби $\frac{1}{5}$?

Выводы. 1) *От увеличения или уменьшения числителя дроби в несколько раз величина дроби увеличивается или уменьшается во столько же раз.*

2) *От увеличения знаменателя дроби в несколько раз величина дроби уменьшается во столько же раз, и наоборот.*

Упражнения. Произвести указанные ниже действия с дробями:

1) $\frac{5}{16} \cdot 3$

2) $\frac{3}{4} \cdot 2$ } двумя способами

3) $\frac{5}{6} \cdot 3$ }

4) $2\frac{1}{12} \cdot 6$ } двумя способами

5) $3\frac{4}{15} \cdot 5$ }

1) $\frac{2}{5} : 3$

2) $\frac{8}{15} : 4$ } двумя способами

3) $\frac{6}{7} : 3$ }

4) $2\frac{2}{3} : 2$ (двумя способами)

5) $3\frac{1}{2} : 7$

Упражнение. Формулировать словами и записать правила умножения и деления дробей на целое число.

Задачи.

1. Служащий истратил $\frac{2}{15}$ своего жалованья на оплату квартиры и отопления, $\frac{7}{15}$ на стол, а остальное на прочие расходы. Сколько он истратил на прочие расходы, если его жалованье равнялось 60 руб.? *Отв.* 24 руб.

2. Из роты выбыло в отпуск $\frac{2}{5}$ всего ее состава и осталось 96 человек. Сколько человек было в роте? *Отв.* 160.

3. Себестоимость книги для издательства составляет 80 коп.; накладные расходы и прибыль составляют $\frac{3}{16}$ себестоимости. Сколько стоит книга в оптовой продаже? *Отв.* 95 коп.

4. Трест продает ситец по 48 коп. за метр с надбавкой $\frac{1}{5}$ себестоимости. Определить себестоимость одного метра ситца. *Отв.* 40 коп.

5. Кооператив продает своим членам галоши по 3 руб. со скидкой $\frac{1}{16}$ продажной цены. Определить продажную цену галош. *Отв.* 3 руб. 20 коп.

Упражнения.

1) $\left(\frac{3}{8}\cdot 3+\frac{5}{8}:5\right)-\left(\frac{5}{16}\cdot 2+\frac{1}{2}:4\right)$ *Отв.* $\frac{1}{2}$.

2) $\left(1+\frac{4}{9}\cdot 3\right)\cdot 12-\left(1-\frac{4}{9}:2\right)\cdot 18$ *Отв.* 14.

3) $\left(\frac{2}{15}\cdot 3+\frac{2}{25}\cdot 5\right)\cdot\left(\frac{11}{12}+\frac{8}{12}+\frac{5}{12}\right)$ *Отв.* $1\frac{3}{5}$.

4) $\left(1\frac{1}{2}:6+2\frac{3}{4}:3\right):\left(5\frac{4}{7}-1\frac{2}{7}\cdot 2\right)$ *Отв.* $\frac{7}{18}$.

Работа № 3.

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ И ПРОЦЕНТЫ.

Умножение и деление десятичных дробей. Понятие о проценте. Обращение десятичной дроби в обыкновенную. Приближенное измерение и приближенное деление. Обращение обыкновенной дроби в десятичную. Среднее арифметическое. Средняя погрешность результата измерения. Вычисление процентов.

§ 20. Умножение десятичных дробей.

Задачи.

1. Килограмм сахара стоит 0,65 руб. Сколько рублей стоит 3 *кг*? 8 *кг*? 27 *кг*?

2. 1 метр ситца стоит 0,45 рубля. Сколько рублей стоят 3,3 метра?

Решение 1-й задачи.

1) 0,65 × 3 = 1,95

2) 0,65 × 8 = 5,20

3) 0,65 × 27 = 455 + 130 = 17,55

Решение 2-й задачи.

0,45 × 3,3 = 135 + 135 = 1,485

Указание. Отбрасывая запятые во всех примерах первой задачи и производя умножение полученных целых чисел, мы каждый раз увеличивали множимое в 100 раз, отчего произведение также получалось больше истинного в 100 раз; чтобы получить

истинное произведение, мы в полученном целом числе должны были отделить запятой два знака справа (т.-е. уменьшить его в 100 раз).

При решении второй задачи мы умножали целые числа: 45 на 33, т.-е. увеличили множимое в 100 раз и множитель в 10 раз, отчего полученное произведение 1 485 оказалось в 1 000 раз больше истинного. Поэтому в числе 1 485 надо было отделить запятой справа три знака (т-е. уменьшить его в 1 000 раз).

Вывод. Десятичные дроби умножаются точно так же, как умножаются целые числа. При умножении десятичных дробей надо множитель подписывать под множимым, не обращая внимания на запятые, и затем умножить множимое на множитель, как целые числа (т.-е. также не обращая внимания на запятые). В полученном произведении надо отсчитать справа и отделить запятой столько десятичных знаков, сколько их было во множимом и множителе вместе.

Задачи.

1. На производство 1 *кг* чугуна расходуется 1,46 *кг* железной руды и 0,02 *кг* марганцовои руды. Сколько железной и марганцовой руды потребуется на производство 76,3 *кг* чугуна?

Отв. 112,924 *кг*.

2. При производстве 1 *кг* чугуна из потребных для этого материалов теряется 0,113 *кг* рудной пыли и 0,367 *кг* угара. Как велика потеря материала при производстве 32,6 *кг* чугуна?

Отв. 15,648 *кг*.

3. При производстве катаной проволоки расходуется на каждую тонну годной проволоки: 1,148 *т* болванки; 0,0022 *т* стали обжатой; 0,001 т обрезков. Сколько тонн каждого из этих материалов было израсходовано в 1913 г. на Александровском заводе, где годовая продукция проволоки равнялась 48 393 *т*.

Отв. 1) 55 556,044 *т*; 2) 106,466 *т*; 3) 48,39 *т*.

Примеры.

1) $\begin{array}{r} 34; \\ \times\ 0{,}1 \\ \hline 3{,}4 \end{array}$ 2) $34 : 10 = 3{,}4$; 3) $\begin{array}{r} 6{,}5; \\ \times\ 0{,}1 \\ \hline ? \end{array}$ 4) $6{,}5 : 10 = ?$

Вопросы. 1) Сравнить результаты, получаемые от умножения какого-либо числа на 0,1 и от деления того же числа

на 10. 2) Какую часть числа мы узнаем, когда делим его на 10? 3) Какую часть числа мы узнаем, когда умножаем его на 0,1? 4) Как проще умножить число на 0,1? (Перенесением запятой влево через одну цифру: $34 \cdot 0{,}1 = 3{,}4$.)

Примеры.

1)	а) $75 \cdot 0{,}01 = 0{,}75$;	б) $75 : 100 = 0{,}75$;
	в) $4{,}8 \cdot 0{,}01 = ?$	г) $4{,}8 : 100 = ?$
2)	а) $1{,}5 \cdot 0{,}001 = 0{,}0015$;	б) $1{,}5 : 1000 = 0{,}0015$;
	в) $32{,}2 \cdot 0{,}001 = ?$	г) $32{,}2 : 1000 = ?$
3)	а) $5{,}6 \cdot 0{,}2 = 1{,}12$;	б) $56 \cdot 2 = 112$;
	в) $1{,}74 \cdot 0{,}03 = 0{,}0522$;	г) $174 \cdot 3 = 522$.

Вопросы. 1) Какую часть числа мы узнаем, когда умножаем его на 0,01 (пример 1-й)? на 0,001 (пример 2-й)? на 0,2? на 0,03? (пример 3-й). 2) Почему в примере 3-м множимое и множитель написаны в одной строке, а не друг под другом? (Потому что умножение соответствующих целых чисел 56 . 2 и 174 . 3 легко сделать в уме.)

§ 21. Понятие о проценте.

Указание. Умножая число на 0,01, мы находим его сотую часть. Сотая часть числа называется *процентом* этого числа. Следовательно, умножая число на 0,01, мы находим один процент (или 1%) этого числа. Умножая число на 0,02, мы находим две сотых, т.-е. 2% этого числа. Умножая число на 0,03, мы находим три сотых, т.-е. 3% этого числа, и т. д.

Вопросы. 1) Сколько процентов числа мы находим, умножая его на 0,14? на 0,35? на 0,1? на 0,4? на 0,001? на 0,015? на 0,008? на 1,12? на 4,3? 2) Найти 3% числа 8; 5% числа 3,6; 25% числа 800; 0,4% числа 400; 0,17% числа 600; 5,6% числа 5,6.

Задачи.

1. Служащий из получаемых им 75 рублей месячного жалованья тратит 60% на пищу, 24% на квартиру и отопление и остальные 16% на прочие расходы. Сколько рублей он тратит на пищу, квартиру с отоплением и прочие расходы?

Отв. 45 руб.; 18 руб.; 12 руб.

2. Из 200 человек взрослого населения дома 55% составляют рабочие; 40,5% — служащие; 2,5% — безработные; 1,5% — нетрудоспособные и 0,5% — нэпманы. Сколько жильцов разных категорий живут в доме?

Отв. 10; 81; 5; 1.

3. На всех южных доменных заводах в 1913 году было выплавлено 3 153,3 тыс. тонн чугуна, а в 1921/22 операционном году лишь 2,5% этого количества. Сколько тысяч тонн чугуна было выплавлено в 1921/22 году?

Отв. 78,8325 тыс. тонн.

§ 22. Деление десятичных дробей.

Пример 1. а) $8{,}6 : 2 = 4{,}3$; б) $9{,}3 : 3 = ?$

Пример 2. а)
$$\begin{array}{r|l} 79{,}2 & 25 \\ \hline 75 & 3{,}168 \\ \hline 42 & \\ - & \\ 25 & \\ \hline 170 & \\ - & \\ 150 & \\ \hline 200 & \\ - & \\ 200 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

1-й остаток

2-й остаток

3-й остаток

б)
$$\begin{array}{r|l} 13{,}5 & 8 \\ \hline ? & \end{array}$$

Вопросы к примеру 2а: 1) Чему равен первый остаток? 2) Сколько в этом остатке целых единиц? 3) Сколько в этом остатке десятых долей? 4) Сколько всего десятых долей получится в первом остатке, если к нему добавить (снести) две десятых из делимого? 5) Сколько десятых долей во втором остатке? 6) Сколько сотых долей во втором остатке? 7) Сколько сотых долей в третьем остатке? 8) Сколько тысячных долей в третьем остатке?

Пример 3. а)
$$\begin{array}{r|l} 0{,}17 & 4 \\ \hline 1 & 0{,}0425 \\ \hline 17 & \\ - & \\ 16 & \\ \hline 10 & \\ - & \\ 8 & \\ \hline 20 & \\ - & \\ 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

1-й остаток

2-й остаток

Вопросы. 1) Почему на месте целых в частном получился 0? 2) Почему на месте десятых в частном получился 0? 3) Откуда взялся 0 в первом остатке? 4) Откуда взялся 0 во втором остатке?

б)
$$\begin{array}{r|l} 0{,}46 & 25 \\ \hline & ? \end{array}$$

Пример 4. а) $38,4 : 2,5 = 15,36$

действие:

$$\begin{array}{r|l} 384 & 25 \\ \hline 25 & 15,36 \\ \hline 134 & \\ 125 & \\ \hline 90 & \\ 75 & \\ \hline 150 & \\ 150 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

объяснение на метрических мерах:

$38,4\ м = 384\ дм$

$2,5\ м = 25\ дм$

$38,4\ м : 2,5\ м =$

$= 384\ дм : 25\ дм =$

$= 384 : 25.$

б) $46,7 : 0,5 = ?$

Пример 5. а) $0,7 : 0,016 = 43,75.$

действие:

$$\begin{array}{r|l} 700 & 16 \\ \hline 64 & 43,75 \\ \hline 60 & \\ 48 & \\ \hline 120 & \\ 112 & \\ \hline 80 & \\ 80 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

объяснение на метрических мерах:

$0,7\ м = 700\ мм$

$0,016\ м = 16\ мм$

$0,7\ м : 0,016\ м = 700\ мм : 16\ мм =$

$= 700 : 16.$

б) $0,3 : 0,025 = ?$

Вопросы. 1) На сколько десятичных знаков перенесена *вправо* запятая в *делителе* примера 4 а? 2) На сколько десят. знаков перенесена *вправо* запятая в *делимом* прим. 4 а? 3) На сколько десят. знаков перенесена *вправо* запятая в делителе прим. 5 а? 4) На сколько десят. знаков перенесена *вправо* запятая в *делимом* прим. 5 а?

Выводы. 1) При делении десятичной дроби на целое число действие производится так же, как с целыми числами, с той разницей, что получившееся в остатке целое число раздробляют в десятые доли и сносят к ним десятые доли делимого, если они есть; получившиеся в остатке десятые доли раздробляют в сотые доли, и т. д., при чем целая часть частного отделяется запятой от дробной части.

2) При делении десятичной дроби на десятичную или целого числа на десятичную дробь предварительно обращают делитель в целое число, перенеся в нем для этого запятую вправо за последний десятичный знак; затем переносят запятую вправо в делимом через столько же десятичных знаков, через сколько она перенесена

в делителе; и, наконец, производят деление, как в предыдущем случае, на целое число.

Задачи.

1. Между городом и деревней 64,26 *км*. Крестьянин прошел это расстояние в 15,3 часа. Сколько километров в среднем он проходил в час? *Отв.* 4,2 *км*.

2. Рабочий получил 10,8 руб. за 6 дней работы по 8 часов в день. Сколько рублей он получал в час? *Отв.* 0,225 руб.

3. *Карат* — единица веса, употребляемая при взвешивании драгоценных камней; он равен 0,2052 грамма. Сколько каратов в бриллианте, весящем 0,7182 грамма? *Отв.* 3,5 карата.

4. Из одного килограмма муки получается 1,35 *кг* хлеба. Сколько надо взять муки, чтобы выпечь 275,4 *кг* хлеба? *Отв.* 204 *кг*.

§ 23. Обращение десятичной дроби в обыкновенную.

Пример 1. 1) $0{,}5 = \frac{5}{10} \overset{5}{=} \frac{1}{2}$; 2) $0{,}25 = \frac{25}{100} \overset{25}{=} \frac{1}{4}$;

$$2)\quad 1{,}14 = 1\frac{14}{100} \overset{2}{=} 1\frac{7}{10}.$$

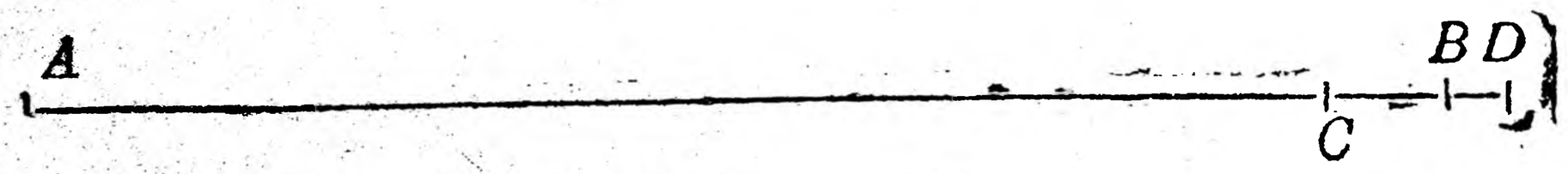
Пример 2. 1) $0{,}8 = ?$ 2) $0{,}75 = ?$ 3) $3{,}08 = ?$

Вопрос. Как производится обращение десятичной дроби в обыкновенную?

§ 24. Приближенное измерение и приближеннсе деление.

I. Приближенное измерение.

Задача 1. Измерить отрезок AB (черт. 31) целыми сантиметрами.



$AC = 8$ *см*. $AD = 9$ *см*.

Черт. 31.

Указание. В отрезке AB при измерении укладывается 8 целых сантиметров, после чего остается остаток CB, меньший 1 сантиметра. Следовательно, длина отрезка AB отличается от 8 *см* меньше, чем на 1 *см*. Поэтому, приняв $AB = 8$ *см*, мы сделаем ошибку в измерении, но эта ошибка будет меньше 1 *см*.

Очевидно, что в то же время длина отрезка AB отличается от 9 *см* на длину BD, тоже меньшую 1 *см*. Поэтому, приняв $AB = 9$ *см* мы сделаем в измерении ошибку, меньшую 1 *см*. Таким образом, измерение длины отрезка AB целыми сантиметрами дает нам два числа: 8 *см* и 9 *см*. Каждое из них называется *приближенной длиной* отрезка AB *с точностью до* 1 *см*, первая — *с недостатком* (так как 8 *см* $< AB$), вторая — *с избытком* (так как 9 *см* $> AB$).

Итак,

$AB = 9$ *см* (с избытком)
$AB = 8$ *см* (с недостатком) | с точностью до 1 *см*.

На практике из этих двух значений длины отрезка AB надо брать то значение, которое ближе к истинной длине отрезка (в нашем примере 9 *см*). Если же обе приближенные длины одинаково отличаются от истинной длины, то можно брать первую или вторую — безразлично.

При приближенных измерениях очень важно знать точность измерения или погрешность измерения. Поэтому при приближенных измерениях всегда надо указывать, с какой точностью или с какой погрешностью они сделаны.

Задача 2. Измерить тот же отрезок AB с точностью до 1 миллиметра.

II. Приближенное деление.

Пример 1.

$$
\begin{array}{r|l}
7 & 16 \\
\hline
70 & 0{,}4375 \\
64 & \\
\hline
60 & \\
48 & \\
\hline
120 & \\
112 & \\
\hline
80 & \\
80 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Указание. В этом делении частное имеет 4 десятичных знака. Во многих случаях при вычислениях бывает вполне достаточно знать лишь один первый десятичный знак частного, почему остальные или отбрасываются, или совсем не отыскиваются. Такое деление называется *приближенным делением*.

Если в нашем примере принять

$$7 : 16 = 0{,}4$$

то приближенное частное 0,4 будет меньше истинного на отброшенную часть последнего, т.-е. на 0,0375.

Если же принять

$$7 : 16 = 0{,}5$$

то приближенное частное 0,5 будет больше истинного на 0,0625 (проверить вычитанием).

Погрешность первого частного, как мы видели, равна 0,0375, т.-е. она меньше 0,1 (почему?); *погрешность второго частного* равна 0,0625, т.-е. она тоже меньше 0,1 (почему?).

Эти частные 0,4 и 0,5, из которых каждое отличается от истинного частного меньше чем на 0,1, называются *приближенными частными с точностью до 0,1*, первое — с недостатком, второе — с избытком.

Вопрос. Какое из этих частных точнее выражает результат деления и почему?

Если вычисление требует большей точности (т.-е. меньшей погрешности частного), то можно принять

$7 : 16 = 0{,}43$ с недостатком	с точностью
$7 : 16 = 0{,}44$ с избытком	до 0,01

Вопросы. 1) Какова погрешность первого частного? 2) Какова погрешность второго частного? 3) Почему точность деления здесь равна 0,01? 4) Какое из приближенных частных точнее выражает результат деления и почему? 5) Найти в том же примере приближенные частные с точностью до 0,001.

Пример 2. Найти приближенные частные от деления 3 : 16 с точностью до 0,1; с точностью до 0,01; с точностью до 0,001.

У к а з а н и я. 1) Когда деление не оканчивается, то достаточно выписать несколько цифр частного и затем поставить ряд точек, напр.:

$$7 : 17 = 0{,}41176\ldots$$

$$\begin{array}{r}
70 \\
\hline
20 \\
\hline
30 \\
\hline
130 \\
\hline
110 \\
\hline
8
\end{array}$$

2) Когда деление нужно произвести с указанной точностью, то в частном находят одним десятичным знаком больше, чем требуется;

напр., при точности 0,1 находим 2 десятичных знака частного; при точности 0,01 — три знака, и т. д. Лишний знак частного затем отбрасывается; он служит только для указания, какое из двух приближенных частных ближе подходит к истинному частному.

Пример 3. Разделить с точностью до 0,01:

а) $1{,}7 : 3 = ?$

б) $2{,}4 : 11 = ?$

Разделить с точностью до 0,001:

в) $17{,}63 : 0{,}9 = ?$

г) $0{,}5 : 0{,}06 = ?$

§ 25. Обращение обыкновенной дроби в десятичную.

Пример 1. Обратить дроби: а) $\frac{7}{8}$ и б) $\frac{11}{15}$ в десятичные.

Решение. а) $7 : 8 = 0{,}875$

70	| 8
64	0,875
60	
56	
40	
40	
0	

$\frac{7}{8} = 0{,}875$

б) $11 : 15 = 0{,}733\ldots$

110	| 15
105	0,733 . . .
50	
45	
50	
45	
5	

$\frac{11}{15} = 0{,}73$ (с точн. до 0,01)

Пример 2. Обратить в десятичные дроби:

а) $\frac{6}{25}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{4}{7}$

Вывод. Для обращения обыкновенной дроби в десятичную надо числитель данной дроби делить на ее знаменатель. Если это деление не оканчивается, то надо брать его приближенное частное с точностью до 0,1 или до 0,01, и т. д.

§ 26. Среднее арифметическое.

Задача. Рабочий в течение 1923 года получал следующую заработную плату в червонных рублях:

Январь	11 руб.	Май	15 руб.	Сентябрь	25 руб.
Февраль	12 „	Июнь	17 „	Октябрь	27 „
Март	14 „	Июль	19 „	Ноябрь	29 „
Апрель	14 „	Август	20 „	Декабрь	30 „

1) Какова была средняя месячная заработная плата рабочего за весь 1923 год?

Решение.

$$11 + 12 + 14 + 14 + 15 + 17 + 19 + 20 + 25 + 27 + 29 + 30) : 12 =$$
$$= 233 : 12 = 19{,}42 \text{ (с точностью до 0,01)}$$

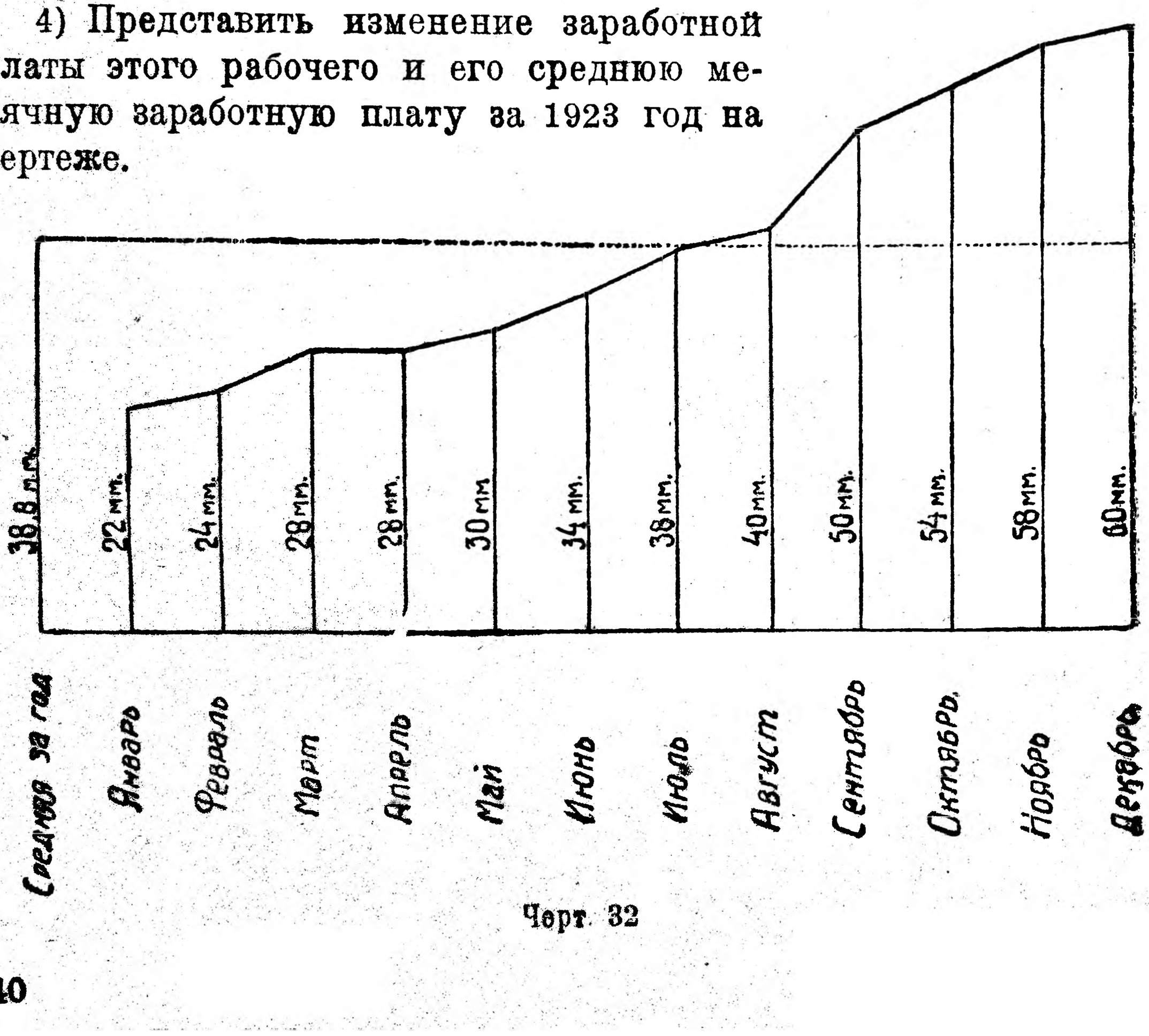
233 : 12 = 19,42
− 12
113
− 108
50
− 48
20
− 12
80
− 72
8

Отв. 19,42 руб.

2) Какова была средняя месячная заработная плата того же рабочего за первую половину 1923 года?

3) За вторую половину 1923 года?

4) Представить изменение заработной платы этого рабочего и его среднюю месячную заработную плату за 1923 год на чертеже.



Черт. 32

Указание. Каждый вертикальный отрезок на чертеже 32 представляет величину заработной платы в соответствующий месяц, при чем *условно* принято, что отрезок 2 *мм* изображает 1 рубль; расстояния между вертикальными отрезками равны между собою; концы вертикальных отрезков соединены прямыми линиями. Средняя месячная плата за год изображается крайним слева вертикальным отрезком длиной 38,8 *мм*. Штрих, проведенный от верхнего конца этого отрезка по всему чертежу слева направо везде на одинаковом расстоянии (38,8 *мм*) от нижней горизонтальной линии, наглядно указывает, в какие месяцы рабочий получал плату ниже средней годовой и в какие — выше ее.

5) Сделать такие же чертежи для первого полугодия и отдельно для второго полугодия 1923 года с той же или с другой условной величиной отрезков (напр., можно принять за 1 рубль отрезок 1 *мм*, а расстояние между вертикальными отрезками взять 5 *мм*).

Вывод. *Средним арифметическим* нескольких чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их число.

Пример. Написать выражение *(формулу)* среднего арифметического чисел, не производя самых действий:

а) 7, 8, 9, 10. Решение: $(7+8+9+10):4$, или $\frac{7+8+9+10}{4}$

б) 12, 14, 17;

в) a, b, c? Решение: $(a+b+c):3$, или $\frac{a+b+c}{3}$;

г) a, b, c, d;

д) a, b. Решение: $\frac{a+b}{2}$, т.-е. *полусумма* чисел a и b.

Задачи.

1. Среди 30 учащихся первой группы воскресных рабочих курсов имеются:

5	рабочих	в возрасте	18	лет
11	„	„	19	„
9	„	„	20	„
3	„	„	22	„
1	рабочий	„	23	„
1	„	„	26	„

Определить средний возраст учащихся. *Отв.* 19,8.

2. На отопление дома было израсходовано:

в 1909 г. . .	20 200	*кг*	каменного	угля
„ 1910 „ . . .	21 500	„	„	„
„ 1911 „ . . .	20 670	„	„	„
„ 1912 „ . . .	23 220	“	„	„
„ 1913 „ . . .	22 150	„	„	„

Каков был средний годичный расход угля за пятилетие?

3. При трех взвешиваниях мелкого предмета на точных весах были получены результаты:

1) 2,37 *г*, 2) 2,346 *г*, 3) 2,351 *г*.

Каков средний вес предмета по этим измерениям (с точностью до 0,001 *г*)? *Отв.* 2,356 г.

§ 27. Средняя погрешность результата измерения или опыта.

Задачи.

1. При постройке железной дороги надо было возможно точнее измерить расстояние между двумя станциями. Измерение было сделано 3 раза. В первый раз измерение дало 22,106 *км* во второй раз — 21,876 *км*, в третий раз — 22,234 *км*.

Определить *наиболее вероятное расстояние* между станциями (т.-е. *среднее арифметическое* результатов трех измерений) и *среднюю погрешность* всех измерений.

Решение.

а) Средний результат трех измерений равняется

$$(22{,}106 + 21{,}876 + 22{,}234) : 3 = 66{,}216 : 3 = 22{,}072 \ (км).$$

б) Погрешность 1-го измерения:

$$\begin{array}{r} 22{,}106 \\ -\ 22{,}072 \\ \hline 0{,}034 \end{array} \ (км)$$

„ 2-го „

$$\begin{array}{r} 22{,}072 \\ -\ 21{,}876 \\ \hline 0{,}196 \end{array} \ (км)$$

„ 3-го „

$$\begin{array}{r} 22{,}234 \\ -\ 22{,}072 \\ \hline 0{,}162 \end{array} \ (км)$$

в) Средняя погрешность трех измерений равняется

$$(0{,}034 + 0{,}196 + 0{,}162) : 3 = 0{,}392 : 3 = 0{,}131 \ (км)$$

с точностью до 0,001 *км*.

2. Решить предыдущую задачу при следующих данных:

1-е	измерение . . .	25,003 *км*
2-е	„ . . .	24,738 „
3-е	„ . . .	24,813 „

3. Определить среднюю погрешность измерения в задаче № 3 предыдущего параграфа.

§ 28. Вычисление процентов.

Вопросы. 1) Что называется процентом числа (см. § 21)? 2) Что значит найти 0,01 числа? 0,03 числа? 0,37 числа? 0,155 числа? 3) Как найти 0,01 числа? Как найти 27% числа?

Задачи.

1. На участке железной дороги всего 236 паровозов; из них 15% находятся в ремонте. Сколько паровозов в ремонте? [Дробная часть ответа здесь должна быть отброшена (почему?).]

Отв. 35.

2. Кружка молока в 1914 году стоила 5 коп., а в 1922 году цена кружки молока увеличилась на 60%. Сколько стоила кружка молока в 1922 году?

Отв. 8 коп.

3. Примеры.

1)	Найти	23% числа	8.
2)	„	16% „	12.
3)	„	8% „	2,6.
4)	„	1,5% „	30,4.
5)	„	0,4% „	63.
6)	„	155 % „	260.

4. 1% (или 0,01) неизвестного числа (x) равень 25. Чему равно неизвестное число?

Решение. Все неизвестное число содержит 100%. Следовательно: $x = 25 \cdot 100 = 2\,500$.

Вопрос. Сравнить результаты действий: 25 . 100 и 25 : 0,01.

5. 5% (или 0,05) неизвестного числа (x) равняются 60. Найти неизвестное число. (Указание. 1% $x = 60 : 5 = 12$; 100% $x = 12 \cdot 100 = 1\,200$.)

Вопросы.

1) Сравнить найденный результат с результатом деления

$$60 : 0{,}05 = ?$$

2) Как по 0,01 числа найти все число?
3) „ „ 0,03 „ „ „ „ ?
4) „ „ 0,25 „ „ „ „ ?
5) „ „ 1 % „ „ „ „ ?
6) „ „ 7 % „ „ „ „ ?
7) „ „ 30 % „ „ „ „ ?

Подобрать примеры на все эти вопросы и решить их.

6. В профессиональном союзе числится 6 153 безработных, что составляет 3% всего числа членов союза. Сколько всего членов в союзе?

Решение.

1-й способ. Если 3% $x = 6\,153$, то $1\%\ x = 6\,153 : 3 = 2\,051$, а следовательно,

$$x = 100\%\ x = 2\,051 \cdot 100 = 205\,100.$$

Отв. 205 100 членов.

2-й способ. $3\% = 0{,}03$, следовательно,

$$0{,}03\ x = 6\,153;$$
$$x = 6\,153 : 0{,}03 = 205\,100.$$

7. 35 служащих одного учреждения были в течение года сокращены, при чем это сокращение составило 7% всего состава служащих. Сколько служащих было в учреждении до сокращения? (Решить двумя способами.) *Отв.* 500.

8. 15 курсантов военной школы, т.-е. 3,75% всего числа курсантов этой школы, находятся в лазарете. Сколько всех курсантов в школе? (Решить двумя способами.) *Отв.* 400.

9. Придумать несколько своих задач такого же рода.

Пример 1. а) $5\%\ x = 16$; найти x.
б) $1{,}3\%\ x = 80$; найти x.
в) $0{,}16\%\ x = 0{,}4$; найти x.

Пример 2. Выразить в процентах дроби:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{2}{5}$; д) $\frac{7}{25}$; е) $\frac{1}{3}$; ж) $\frac{1}{6}$.

Указание. Надо простые дроби обращать в десятичные в примерах *е* и *ж* с точностью до 0,01.

10. Из 80 000 человек населения города выбыло за год 2 000 человек. Сколько процентов населения выбыло за год?

Р е ш е н и е.

1-ый способ. а) Узнаем, какую часть всего населения города составляют 2 000 человек:

$$2\,000 : 80\,000 = \frac{1}{40} = 0{,}025 \text{ (проверить!);}$$

б) Выразим эту дробь в процентах:

$$0{,}025 = 2{,}5\% \text{ (почему?).}$$

Отв. 2,5%.

2-й способ. а) Узнаем, сколько процентов всего населения составляет 1 человек: 80 000 человек составляют 100%;

1 человек составляет:

$$100\% : 80\,000 = 1\% : 800 = 0{,}00125\% \text{ (проверить!);}$$

б) 2 000 человек составляют:

$$0{,}00125\% \cdot 2\,000 = 2{,}5\% \text{ (проверить!).}$$

11. В трудовой школе I ступени на 650 учащихся приходится 310 мальчиков и 340 девочек.

Выразить в процентах число мальчиков и число девочек в школе. (Вычислить с точностью до 0,1%.)

Отв. 47,7%; 52,3%.

12. Определить процент погрешности каждого из трех измерений и процент средней погрешности по отношению к среднему результату измерений в задаче 1 § 27, стр. 42.

У к а з а н и е 1. Вычисление процента погрешности 1-го измерения:

Погрешность 1-го измерения равна 0,034 *км*;

Средний результат измерения равен 22,072 *км*;

Процент погрешности 1-го измерения равен:

$(0{,}034 : 22{,}072) \cdot 100 = 0{,}0015 \cdot 100 = 0{,}15\%$ (с точностью до 0,01%).

У к а з а н и е 2. Процент погрешности называется *относительной погрешностью.*

13. Проделать те же вычисления для задачи 2 § 27.

14. Метр = 1,406 аршина. Если принять для простоты метр = = 1,4 аршина, то будет допущена погрешность. Выразить ее в процентах по отношению к более точной длине метра в аршинах.

Работа № 4.

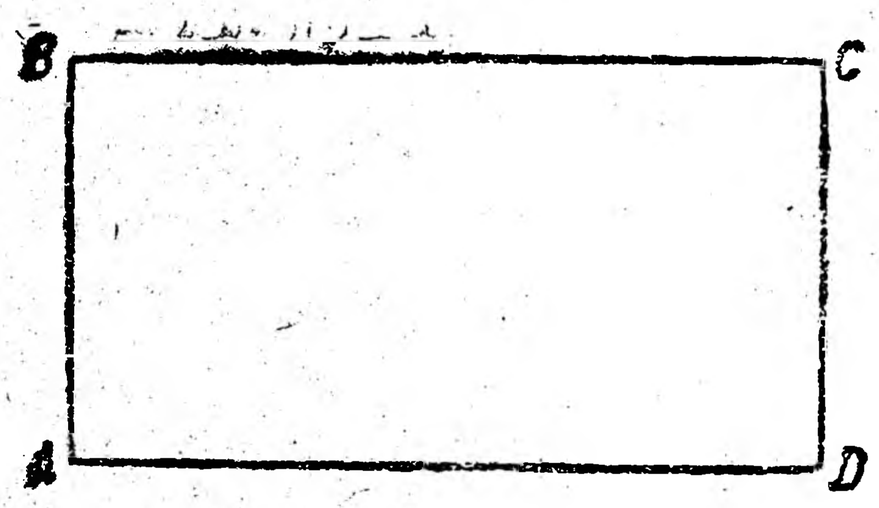
ПЛОЩАДИ ФИГУР.

Прямоугольник. Наугольник. Квадрат. Площадь квадрата. Площадь прямоугольника. Таблица квадратных мер. Параллелограм и ромб. Площадь параллелограма. Площадь ромба. Треугольник. Площадь треугольника. Равнобедренный треугольник. Симметрия.

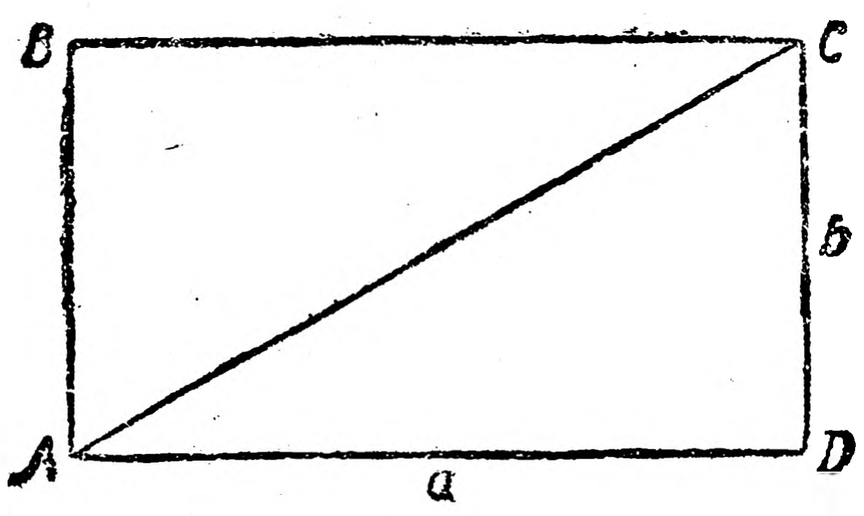
§ 29. Прямоугольник.

Указание. Четыреугольник, у которого противоположные стороны равны и все углы прямые, называется *прямоугольником.* (Черт. 33.)

Вопросы. 1) Сколько в прямоугольнике сторон? 2) Назвать равные стороны. 3) Назвать все прямые углы.



Черт. 33.



Черт. 34.

Указания. 1) Одна из сторон прямоугольника, например сторона *AD*, называется его *основанием;* расстояние между основанием *AD* и противоположной стороной *BC*, равное стороне *CD*, называется *высотой* прямоугольника (чертеж 33).

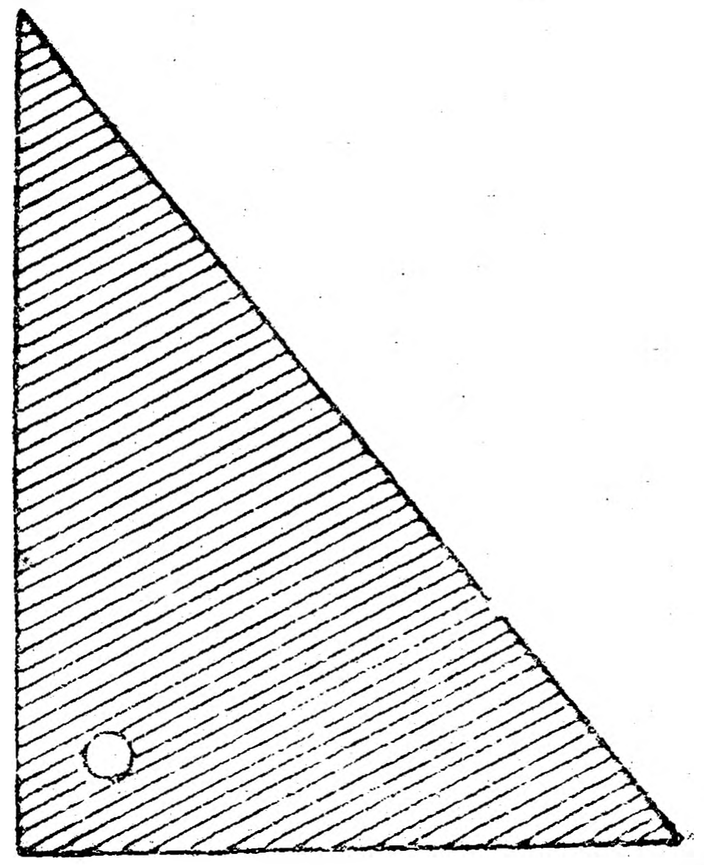
2) Прямая *AC*, соединяющая две противоположные вершины прямоугольника, называется *диагональю* (черт. 34).

Вопросы. 1) Сколько диагоналей можно провести в прямоугольнике? 2) На какие две части диагональ *AC* делит прямоугольник *ABCD*? 3) Сколько сторон имеет фигура *ABC*? фигура *ACD*? 4) Какая сторона у этих фигур общая? 5) Как узнать, равны ли между собой эти фигуры?

Указание. Две фигуры считаются равными, если при наложении они совмещаются.

§ 30. Наугольник.

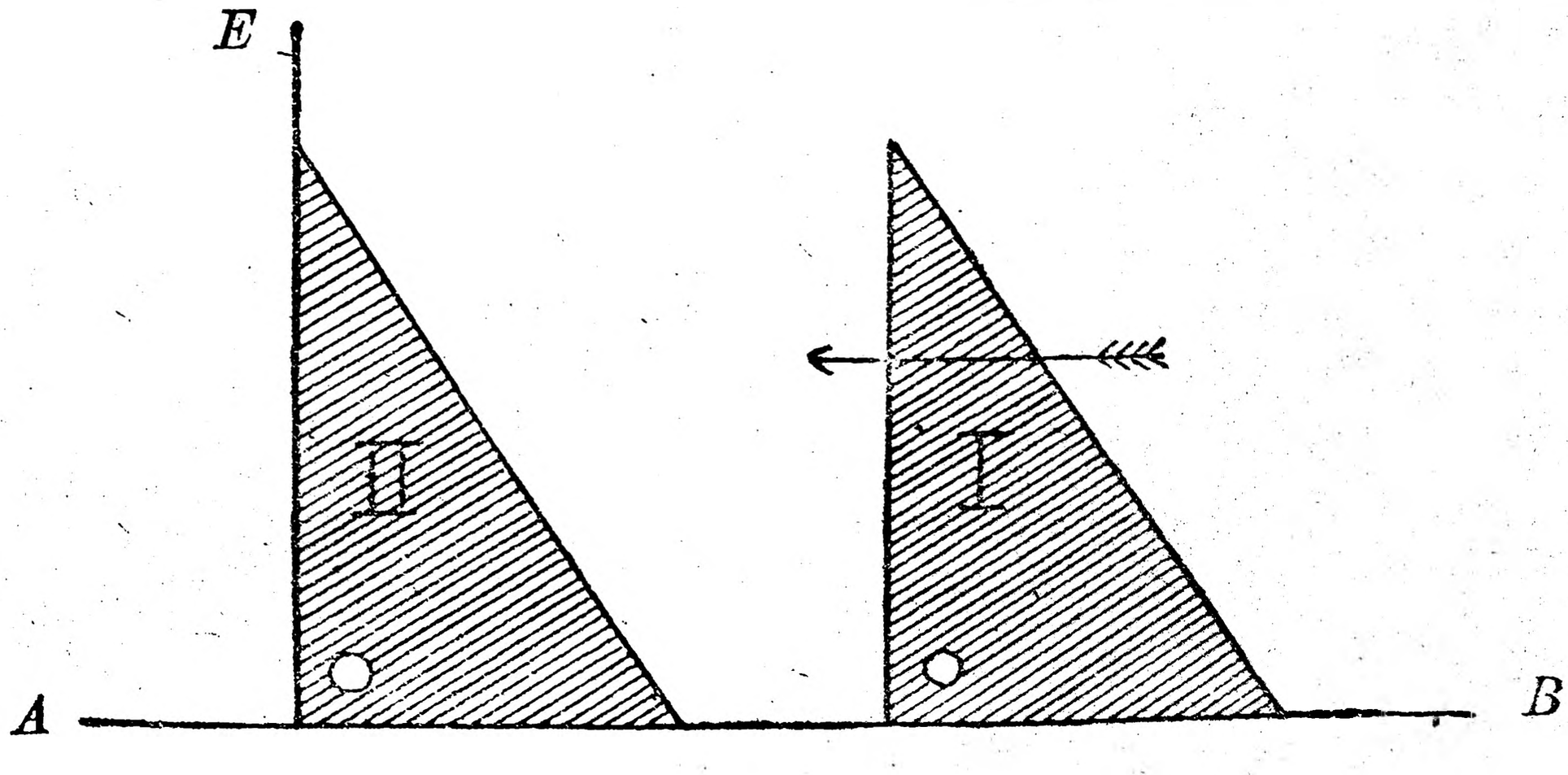
Для черчения прямого угла употребляется прибор, называемый *наугольником* (черт. 35).



Черт. 35.

Указание. Чтобы начертить прямой угол при точке C на прямой AB (черт. 36), прикладываем наугольник в положение I так, чтобы одна из сторон его, составляющих прямой угол, совпадала с прямой AB. Затем продвигаем наугольник к точке C по прямой AB до положения II, т.-е. до тех пор, пока левый край наугольника не совпадет с точкой C, и, наконец, проводим прямую по направлению CE. Тогда получим прямой угод ECB.

Упражнения. 1) При помощи наугольника начертить прямой угол на какой-нибудь прямой. 2) При помощи наугольника на данной прямой начертить два смежных прямых угла. 3) При помощи наугольника измерить расстояние между равными сторонами прямоугольника. (Меняется ли расстояние между этими сторонами при передвижении наугольника?)



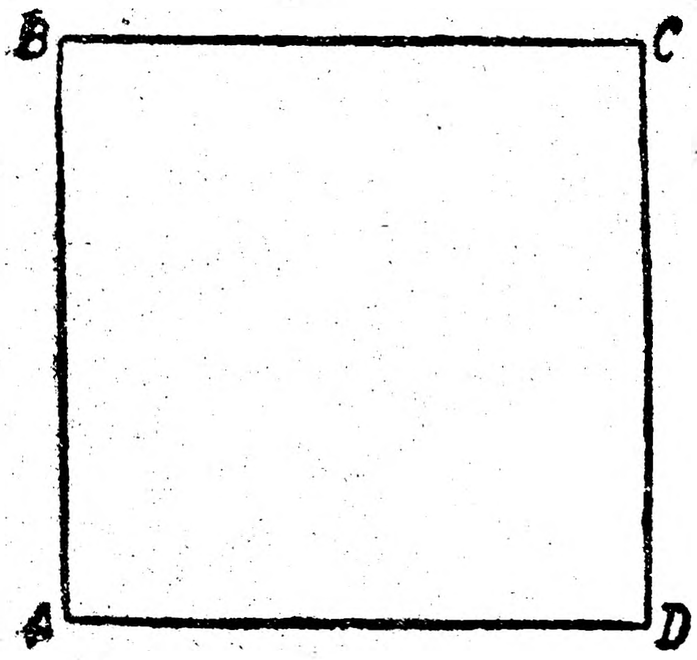
Черт. 36.

Указание 1. Расстояние точки от прямой есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Указание 2. Две прямые, которые на всем своем протяжении находятся на равных расстояниях одна от другой, называются *параллельными*.

Вопрос. Какие стороны прямоугольника (черт. 33, стр. 46) параллельны?

Упражнения. 1) При помощи наугольника начертить две параллельные прямые. 2) При помощи наугольника начертить прямоугольник. 3) При помощи наугольника опустить перпендикуляр на прямую из точки, лежащей вне этой прямой.



Черт. 37.

§ 31. Квадрат.

Указание. Прямоугольник с равными сторонами называется *квадратом* (черт. 37).

Упражнения. 1) Начертить квадрат с помощью линейки и наугольника. 2) Провести диагонали в начерченном квадрате. (Равны ли между собой основание и высота квадрата?)

§ 32. Площадь квадрата.

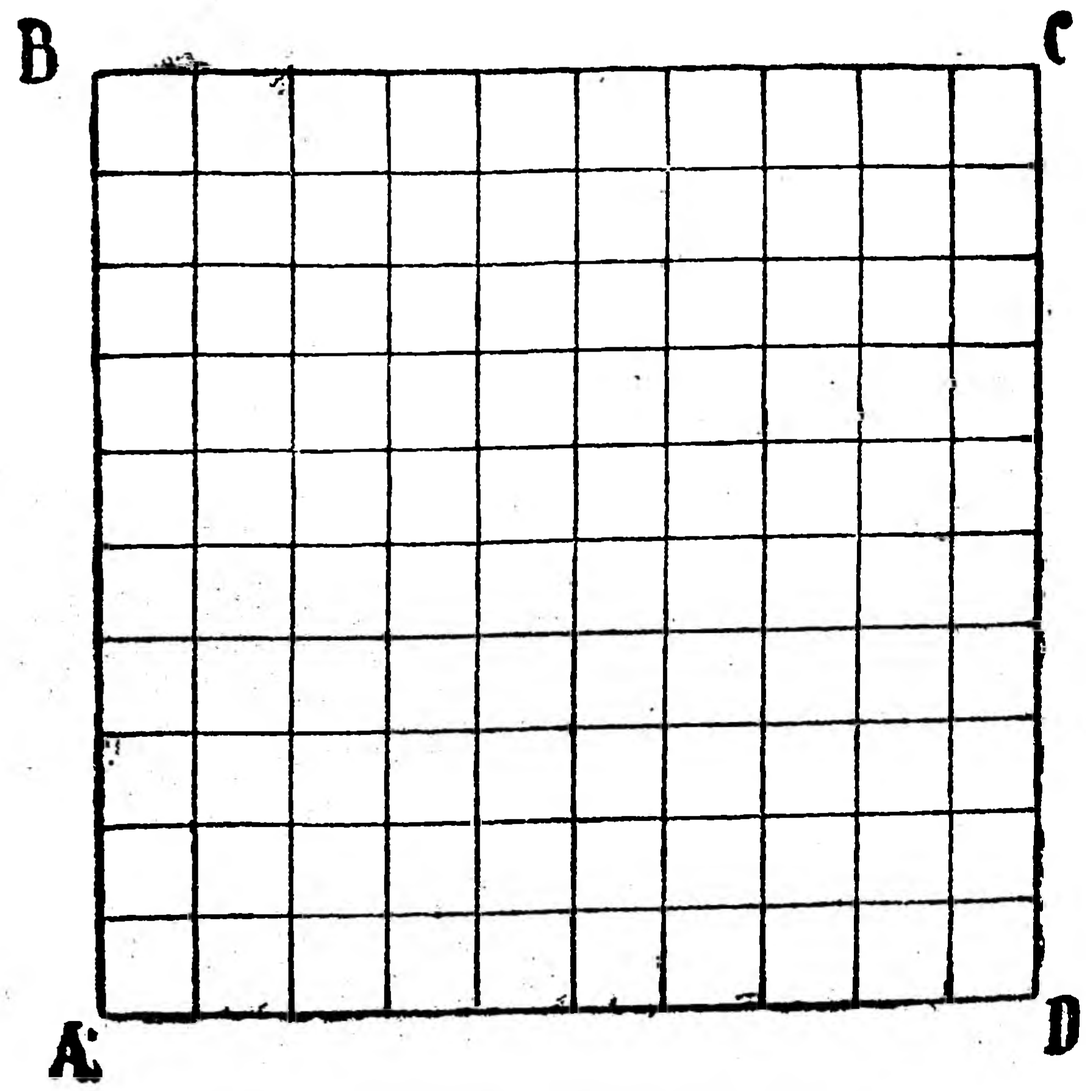
Указание. Площадь квадрата, сторона которого равна 1 метру, 1 сантиметру и т. д., называется квадратным метром, квадратным сантиметром и т. д.

Измерить площадь, ограниченную какой-нибудь фигурой, значит узнать, сколько в этой площади содержится квадратных единиц (т.-е. *кв. м*, *кв. см* и т. д.).

Если сторона квадрата *AD* равна метру, или 10 дециметрам, то площадь квадрата равна квадратному метру, или 100 квадратным дециметрам (черт. 38).

Вопрос. Определить площадь квадрата со стороною 5 сантиметр.

Решение. $5 . 5 = 5^2 = 25$ (*кв. см*).



Черт. 38.

Указание. Произведение 5 . 5 короче обозначается 5^2 и называется *квадратом числа 5* (или пять в квадрате).

Задачи.

1. Определить площадь квадрата со стороною 7; со стороною 8; со стороною *a*; со стороною *b*.

2. Во сколько раз площадь квадрата со стороною в 6 *см* больше площади квадрата со стороною в 3 *см*?

3. Сравнить площади квадратов, имеющих стороны: а) 3 *см* и 9 *см*; б) 5 *см* и 10 *см*; в) 4 *см* и 12 *см*.

4. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза? в 5 раз?

Вывод. *Площадь квадрата со стороною a равняется* a^2, *или квадрату стороны.*

Задачи.

1. Площадь квадрата равна 36 *кв. см.* Чему равна его сторона? (Указание. Так как $6 \cdot 6 = 36$, то сторона квадрата равна 6 *см.*)

2. Найти строну квадрата, имеющего площадь 49 *кв. см*; 64 *кв. см*; 100 *кв. см*; 1 *кв. см*; a^2 *кв. см*; b^2 *кв. см*; c^2 *кв. см.*

3. Найти число, квадрат которого равен 9; 25; 81; 121; 144; m^2; n^2.

Указание. Слова „*число, квадрат которого равен*“ заменяют знаком $\sqrt{\ }$. Знак $\sqrt{\ }$ называется *корень квадратный.* Запись $\sqrt{16}$ означает „*число квадрат которого равен 16*“, и читается так: корень квадратный из 16. Так как число, квадрат которого равен 16, есть 4, то можно записать: $\sqrt{16} = 4$.

4. Определить $\sqrt{9}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{a^2}$; $\sqrt{b^2}$; $\sqrt{c^2}$.

5. Составить таблицу квадратов чисел от 1 до 31.

6. Определить при помощи составленной таблицы $\sqrt{144}$; $\sqrt{256}$; $\sqrt{961}$; $\sqrt{625}$; $\sqrt{576}$; $\sqrt{729}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{676}$; $\sqrt{900}$.

7. Определить сумму площадей двух квадратов, если их стороны равны 1) 3 *см* и 2 *см*; 2) 5 *см* и 4 *см*; 3) 10 *см* и 8 *см*; 4) a и b.

8. Определить разность площадей двух квадратов по данным задачи 7.

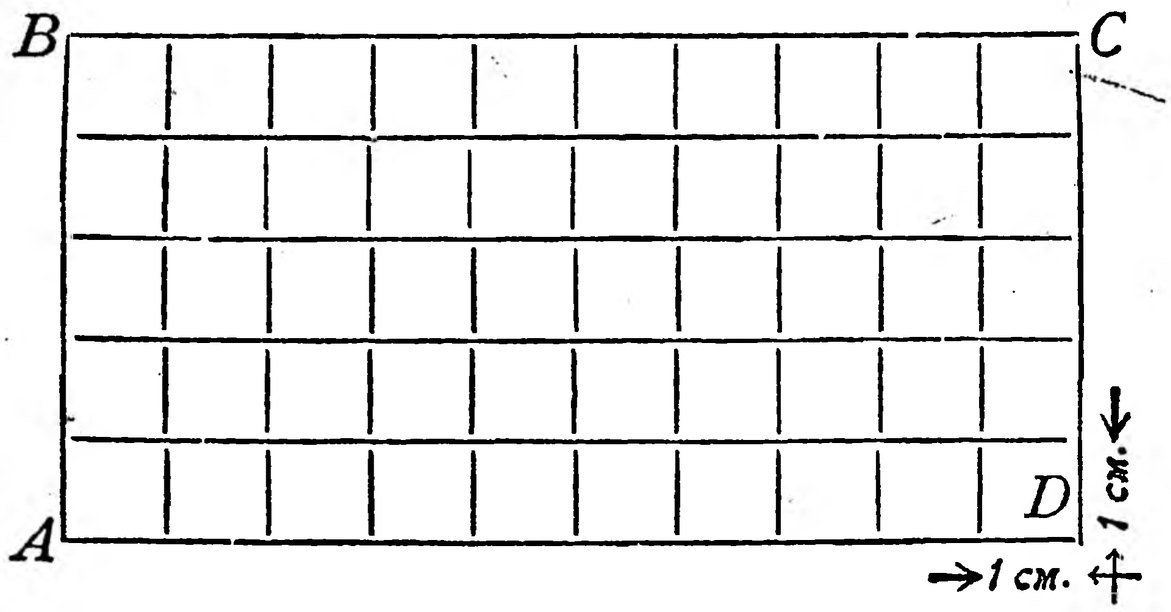
9. Какие площади выражают записи:

$3a^2$? $2b^2$? $4c^2$?

§ 33. Площадь прямоугольника.

Вопросы. 1) Сколько сантиметров в основании прямоугольника $ABCD$? (Черт. 39 [1]).) 2) Сколько сантиметров в высоте прямоугольника $ABCD$? 3) Сколько квадратных сантиметров в площади прямоугольника $ABCD$?

4) Проверить, выражается ли площадь прямоугольника числом, полученным от умножения чисел, выражающих длины основания и высоты прямоугольника.



Черт. 39.

Задачи.

1. Определить площади прямоугольников со сторонами: а) 8 *см* и 4 *см*; б) 12 *см* и 8 *см*; в) 15 *см* и 5 *см*; г) 20 *см* и 15 *см*.

2. Определить площади прямоугольников по данным таблицы:

Площадь прямоугольника	Основание прямоугольника	Высота прямоугольника
?	2,3 *м*	1,15 *м*
?	6,4 *м*	2,5 *м*
?	12,13 *м*	4,7 *м*
?	43 *м*	2,26 *м*
?	*c*	*d*
?	*b*	*h*

Вывод. Если обозначим площадь прямоугольника буквой S, его основание буквой b и его высоту буквой h, то

$$S = bh \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Вопросы. 1) Как выразить словами формулу (1)? 2) Как изменится площадь прямоугольника, если, не изменяя его высоты, увеличим основание в 2 раза? в 3 раза? уменьшим основание в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза? 3) Как изменится площадь прямоугольника, если, не изменяя его основания, увеличим высоту в 2 раза? в 3 раза? уменьшим высоту в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза?

Указание. 1) Если какая-нибудь величина может изменяться, то она называется величиной *переменной*. 2) Если какая-нибудь величина изменяется в зависимости от другой величины, то первая величина называется *зависимой переменной величиной, или функцией*, а вторая — *независимой переменной величиной, или аргументом*.

Указание. Площадь прямоугольника есть функция его основания и его высоты. Площадь квадрата есть функция его стороны.

§ 34. Таблица квадратных мер.

I. Метрические меры.

Меры линейные.

Метр = 10 *дм*
„ = 100 *см*
„ = 1000 *мм*

Декаметр = 10 *м*
Гектометр = 100 „
Километр = 1000 „

Меры квадратные.

Кв. м = 10 × 10 = 10^2 = 100 *кв. дм* (*$дм^2$*)
„ „ = 100 × 100 = 100^2 = 10 000 *кв. см* (*$см^2$*).
„ „ = 1000 × 1000 = 1000^2 = 1 000 000 *кв. мм* (*$мм^2$*).
Кв. дек. = 10 × 10 = 10^2 = 100 *кв. м* (*$м^2$*)
Кв. гект. = 100 × 100 = 100^2 = 10 000 *кв. м* (*$м^2$*).
Кв км. = 1000 × 1000 = 1000^2 = 1 000 000 *кв. м* (*$м^2$*).

II. Русские меры.

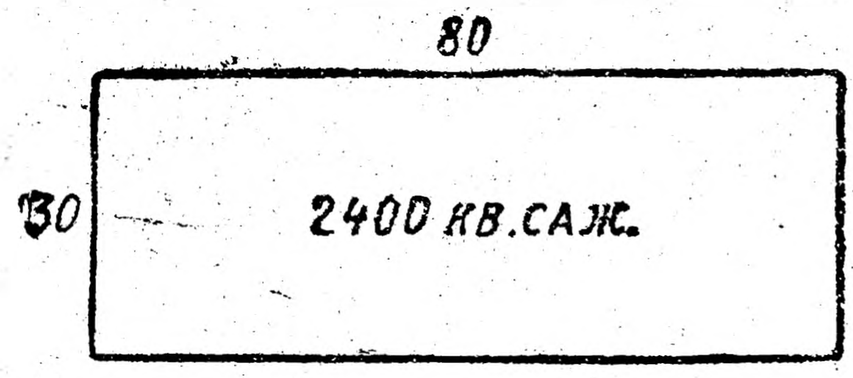
Кв. миля = 7 × 7 = 7^2 = 49 кв. верст.
„ верста = 500 × 500 = 500^2 = 250 000 кв. сажен.
„ сажень = 3 × 3 = 3^2 = 9 кв. аршинам.
„ аршин = 16 × 16 = 16^2 = 256 кв. вершкам.
„ сажень = 7 × 7 = 7^2 = 49 кв. футам.
„ фут = 12 × 12 = 12^2 = 144 кв. дюймам.
„ дюйм = 10 × 10 = 10^2 = 100 кв. линиям.

III. Метрические меры для измерения земли.

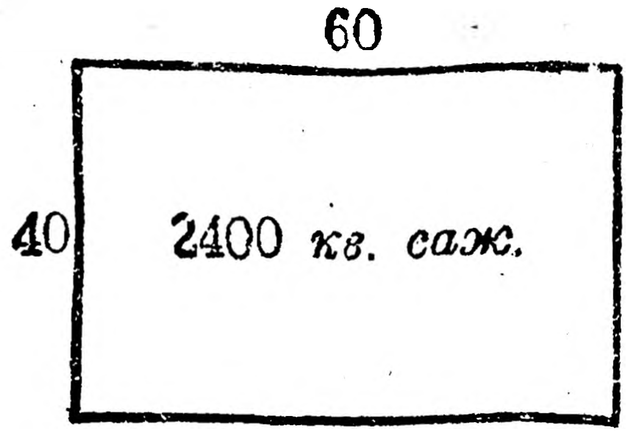
Ар (*а*) = 100 *кв. м* = кв. декаметру (*$дкм^2$*).
Гектар (*га*) = 100 арам (=0,915 десятины).

IV. Русская мера для измерения земли.

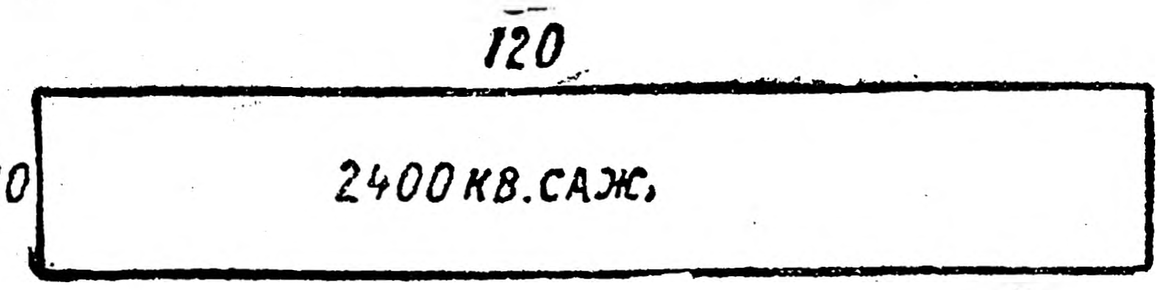
Десятина = 2400 кв. саж. = 1,093 гектара.



Черт. 40.



Черт. 41.



Черт. 42.

На чертежах 40, 41 и 42 изображены три прямоугольника, каждый площадью в одну десятину (в уменьшенном размере).

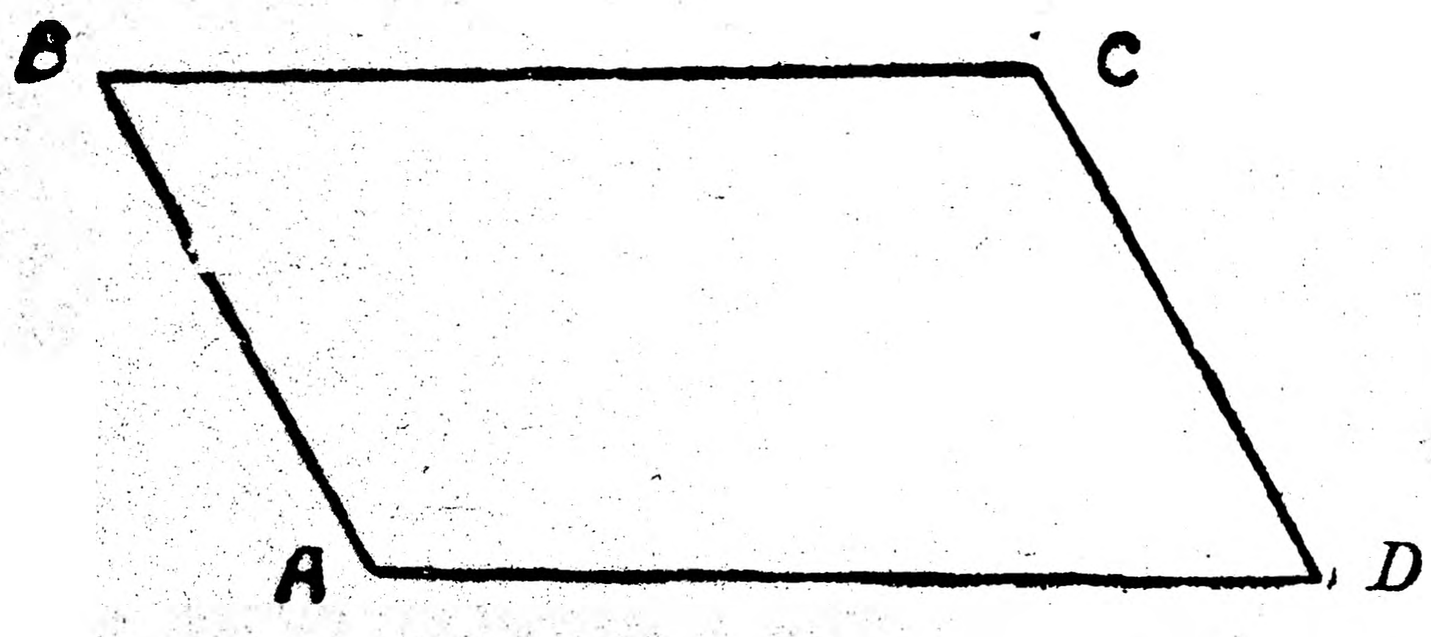
V. Сравнительная таблица метрических и русских кв. мер.

1 *кв. м* = 1,977 кв. арш.	1 кв. арш. = 0,506 *кв. м*
1 *а* = 21,967 кв. саж.	1 кв. саж. = 4,552 *кв. м*
1 *га* = 0,915 десятины.	1 кв. верста = 1,138 *кв. км*
	1 десятина = 1,093 *га.*

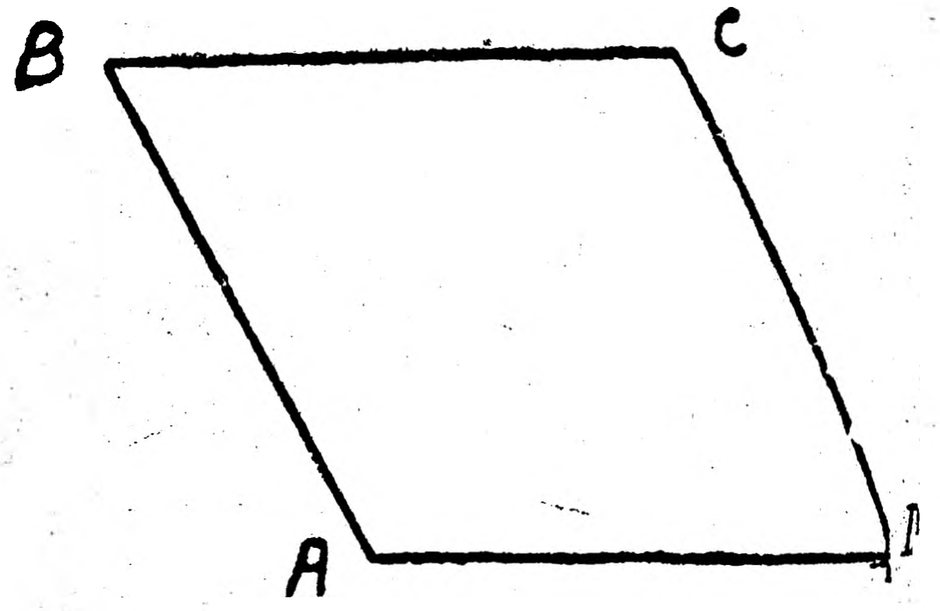
§ 35. Параллелограм и ромб.

Указание. Четыреугольник, у которого противоположные стороны параллельны, называется *параллелограмом.* (Черт. 43.)

Параллелограм, у которого все стороны равны, называется *ромбом.* (Черт. 44.)



Черт. 43.



Черт. 44.

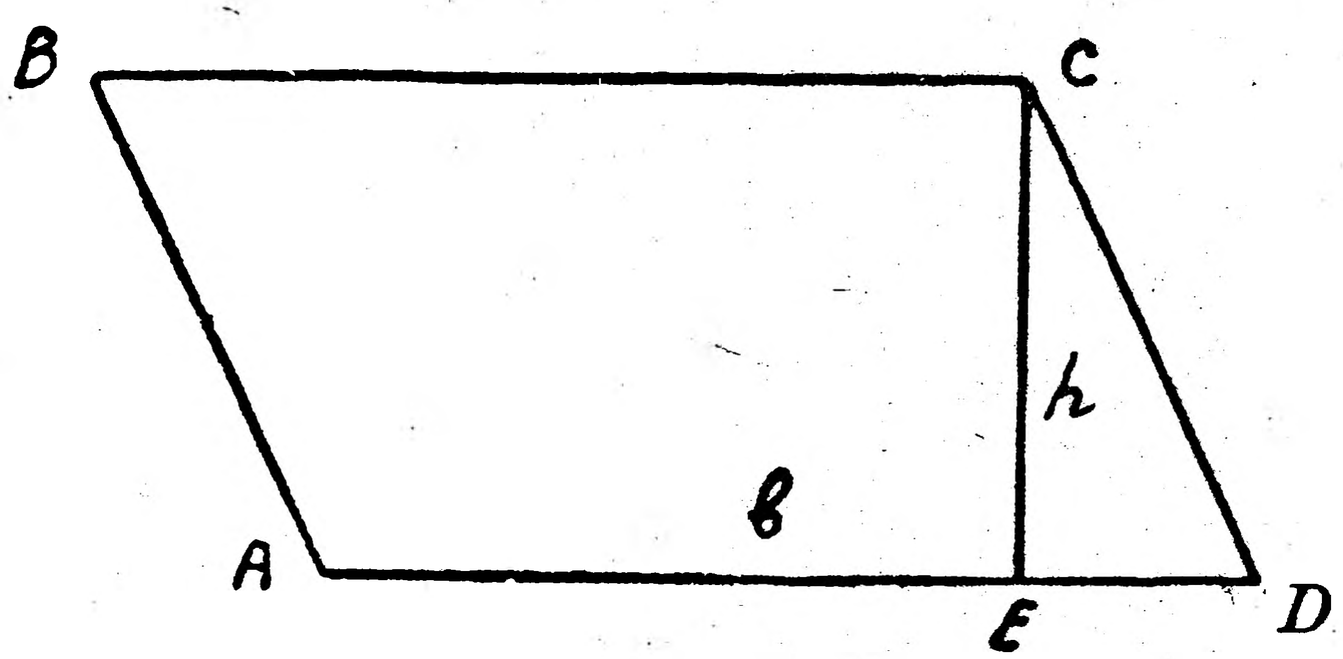
Вопросы. 1) Назвать противоположные углы в параллелограме и в ромбе. 2) Назвать углы, прилежащие к каждой стороне. 3) Чем отличается параллелограм от прямоугольника? г) Провести диагонали в параллелограме и в ромбе.

Указание. Одна из сторон параллелограма, например *AD*, называется *основанием*, а перпендикуляр *CE*, опущенный на осно-

вание из точки, лежащей на противоположной стороне, называется *высотой* (черт. 45); основание b, высота h.

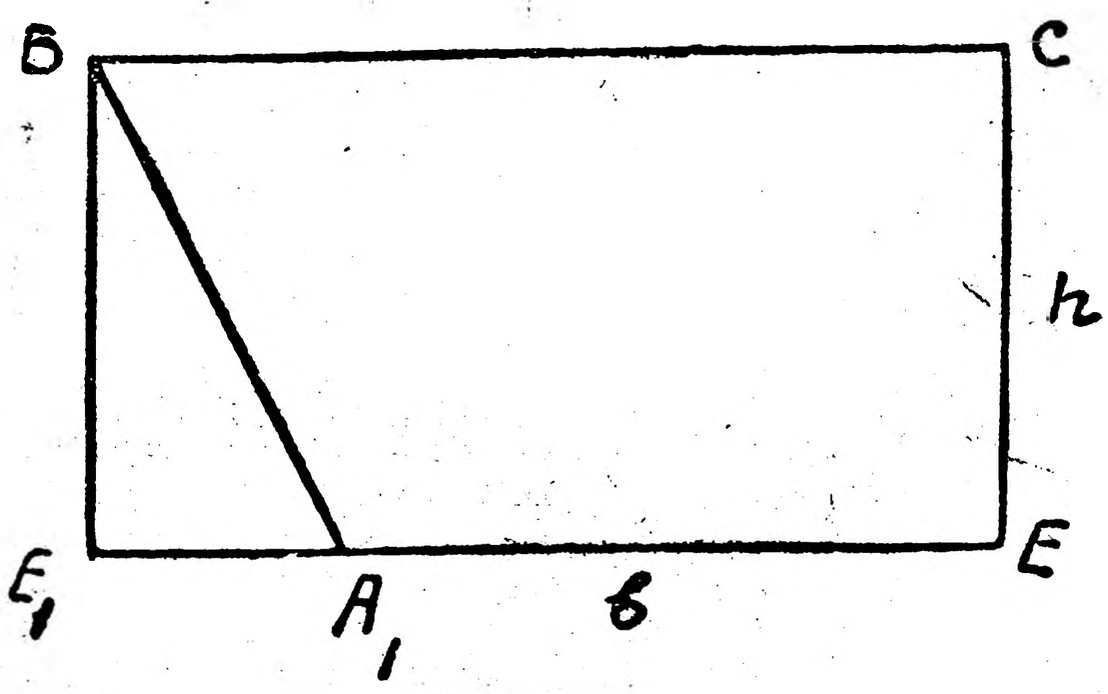
§ 36. Площадь параллелограма.

Упражнение. При помощи наугольника начертить параллелограм $ABCD$ и провести его высоту h (черт. 45).



Черт. 45.

Вопросы. 1) Назвать основание и высоту параллелограма $ABCD$ (черт. 45). 2) Отрезать от параллелограма $ABCD$ справа треугольник ECD и приложить его к оставшейся части параллелограма слева так, чтобы сторона CD совпала со стороной BA, а точка D с точкой A (черт. 46). 3) Какая фигура получилась на черт. 46? 4) Какие элементы параллелограмма (черт. 45) и прямоугольника (черт. 46) равны между собою?



Черт. 46.

Вывод. *Площадь параллелограма равна произведению основания на высоту.*

Если обозначим площадь параллелограма буквой S, его основание буквой b и его высоту буквой h, то

$$\boxed{S = bh} \quad . \quad . \quad (2)$$

Упражнение. Измерить площадь параллелограма $ABCD$ (черт. 45).

Вопросы. 1) Как изменится площадь параллелограма, если, не изменяя его высоты, увеличим основание в 2 раза? в 3 раза? уменьшим в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза?

2) Как изменится площадь параллелограма, если, не изменяя его основания увеличим высоту в 2 раза? в 3 раза? уменьшим высоту в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза?

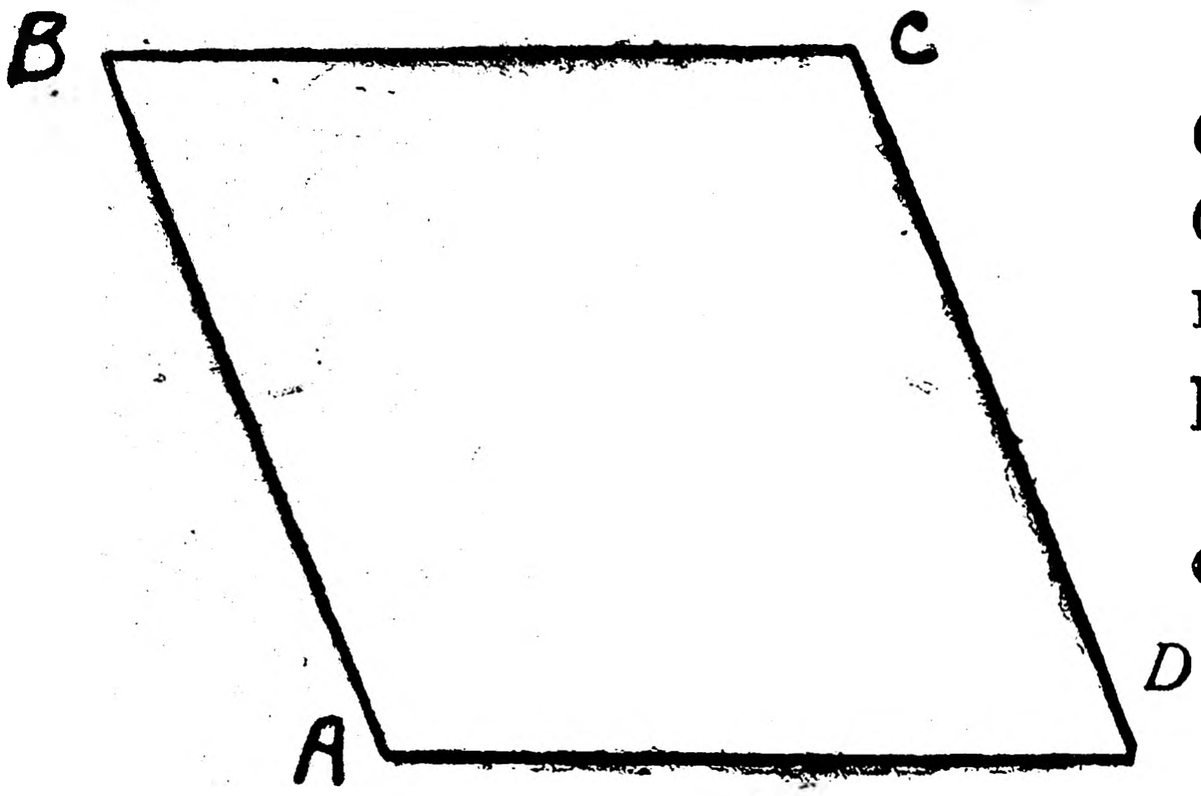
Указание. Площадь параллелограма есть функция его основания и его высоты.

Задача. Вычислить площадь параллелограмма, у которого основание равно 2 *м*, а высота равна 3 *м*.

§ 37. Площадь ромба.

Задачи.

1. При помощи наугольника провести высоту ромба (черт. 47).
2. Измерить площадь ромба (черт. 47).



Черт. 47.

3. Обозначив площадь ромба буквой S, основание его — буквой b и высоту — буквой h написать формулу площади ромба.

4. Записать ту же формулу словами.

5. Сравнить ее с формулой 2.

Вопросы. Объяснить, почему площадь ромба есть функция его основания? его высоты?

Задачи.

1. Вычислить площадь ромба, у которого основание равно 10,2 *м*, а высота равна 8,1 *м*.

2. Площадь ромба равна 21,28 *кв. м*; основание—5,6 *м*. Определить высоту ромба. *Отв.* 3,8 *м*.

§ 38. Треугольник.

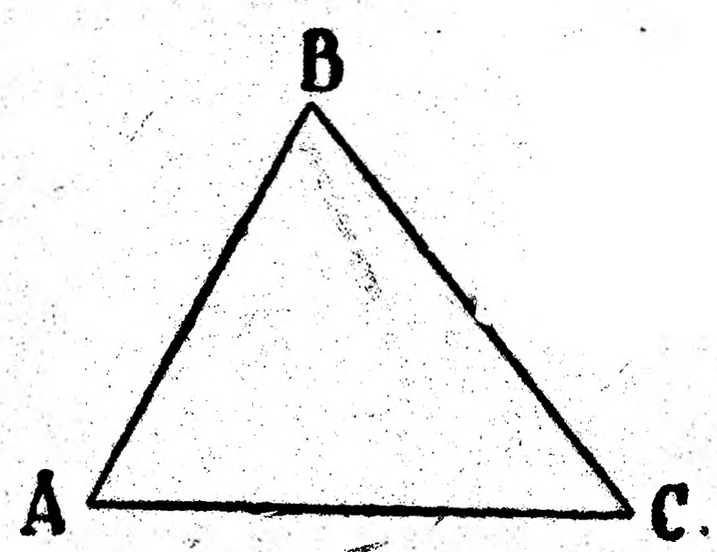
Указание. Виды треугольников:

I. Остроугольный треугольник (черт. 48).

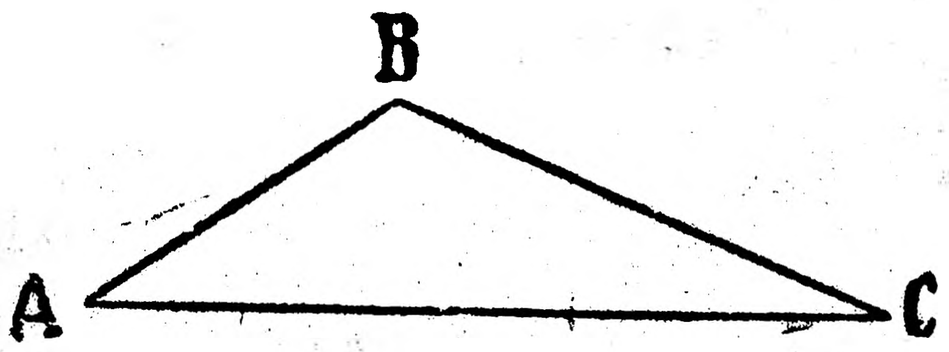
II. Тупоугольный треугольник (черт. 49).

Вопросы. 1) Сколько тупых углов в тупоугольном треугольнике?

2) Какая сторона в тупоугольном треугольнике наибольшая?



Черт. 48.



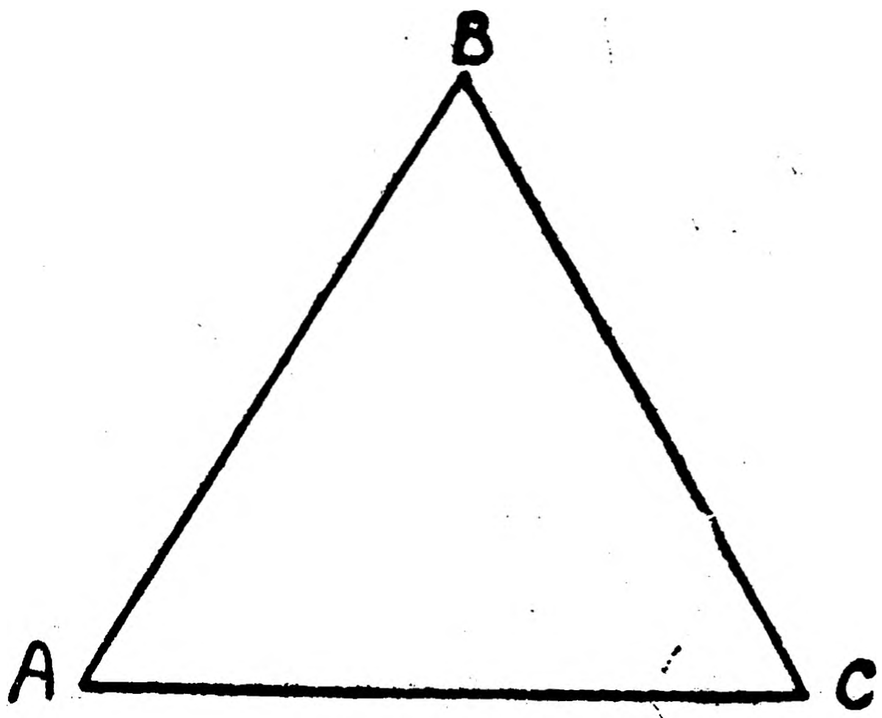
Черт. 49.

III. Равносторонний треугольник (черт. 50).

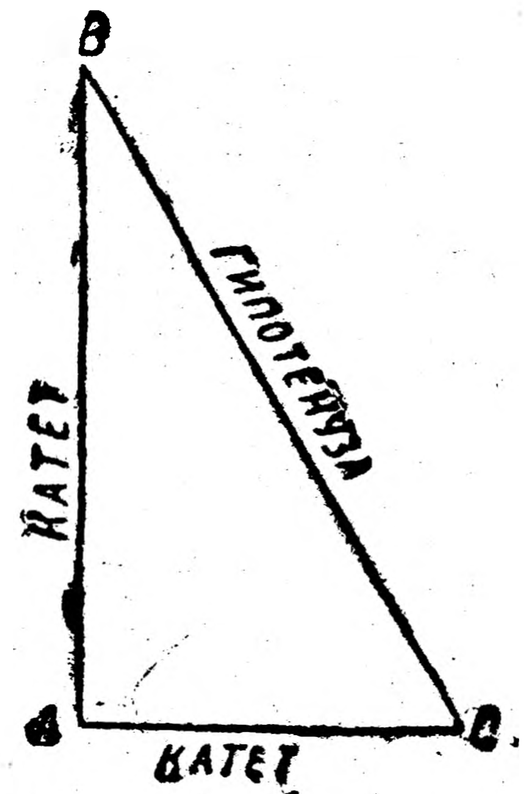
Задача. Определить с помощью транспортира углы в равностороннем треугольнике.

IV. Прямоугольный треугольник (черт. 51).

Указание. В прямоугольном треугольнике (черт. 51) сторона *BC*, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*. а стороны *AC* и *AB*, составляющие прямой угол, называются *катетами*.



Черт. 50.



Черт. 51.

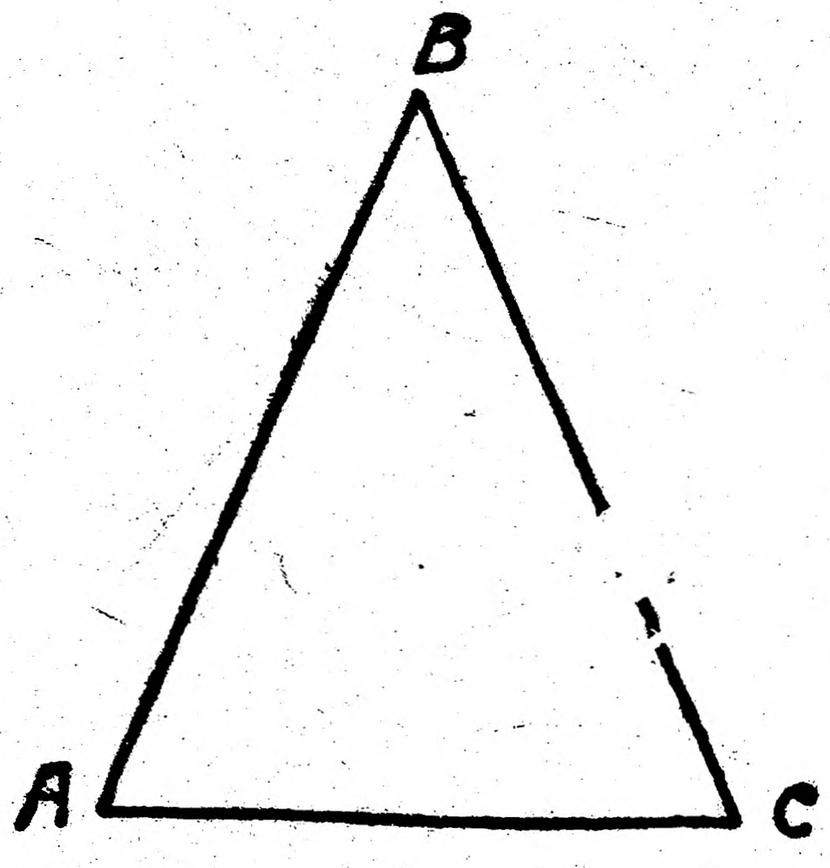
Вопросы. 1) Сколько прямых углов в прямоугольном треугольнике.

2) Какая сторона в прямоугольном треугольнике наибольшая и против какого угла она лежит?

V. Равнобедренный треугольник (черт. 52).

Вопросы.

1) Какие стороны в равнобедренном треугольнике равны? 2) Определить при помощи транспортира, какие углы в равнобедренном треугольнике равны. 3) Измерить транспортиром углы в каждом из тр-ков на черт. 48, 49, 50, 51, 52, и определить сумму углов в каждом из этих тр-ков. Записать вывод: *сумма углов треугольника равна 2d* т.-е. 180°.



Черт. 52.

§ 39. Площадь треугольника.

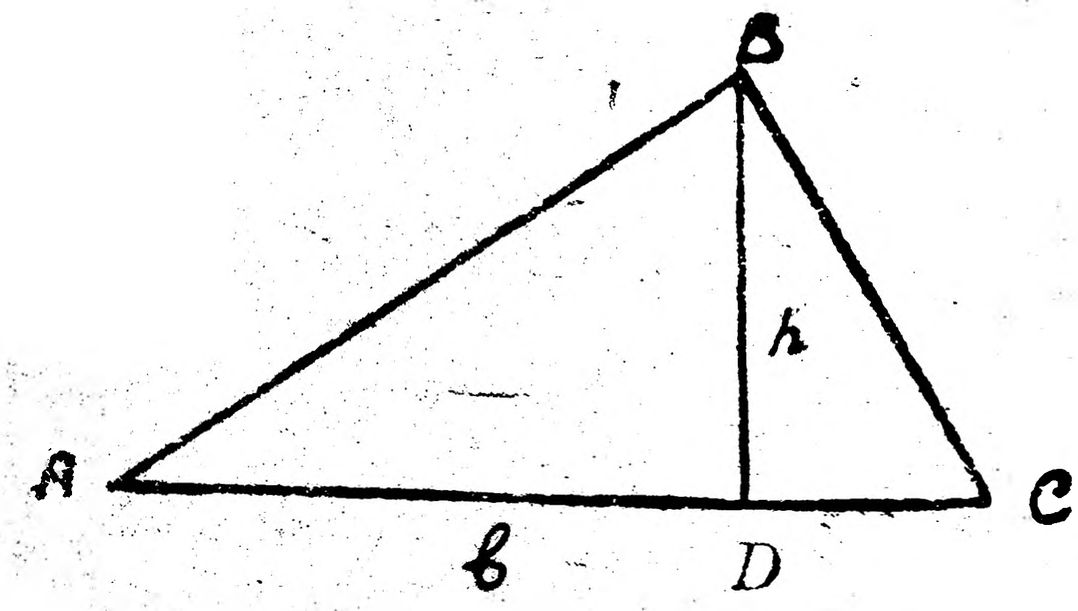
Указание. Одна из сторон треугольника, например AC (черт. 53), называется *основанием*, а перпендикуляр BD, опущенный на основание из вершины противоположного угла, называется *высотой*.

I. Задачи.

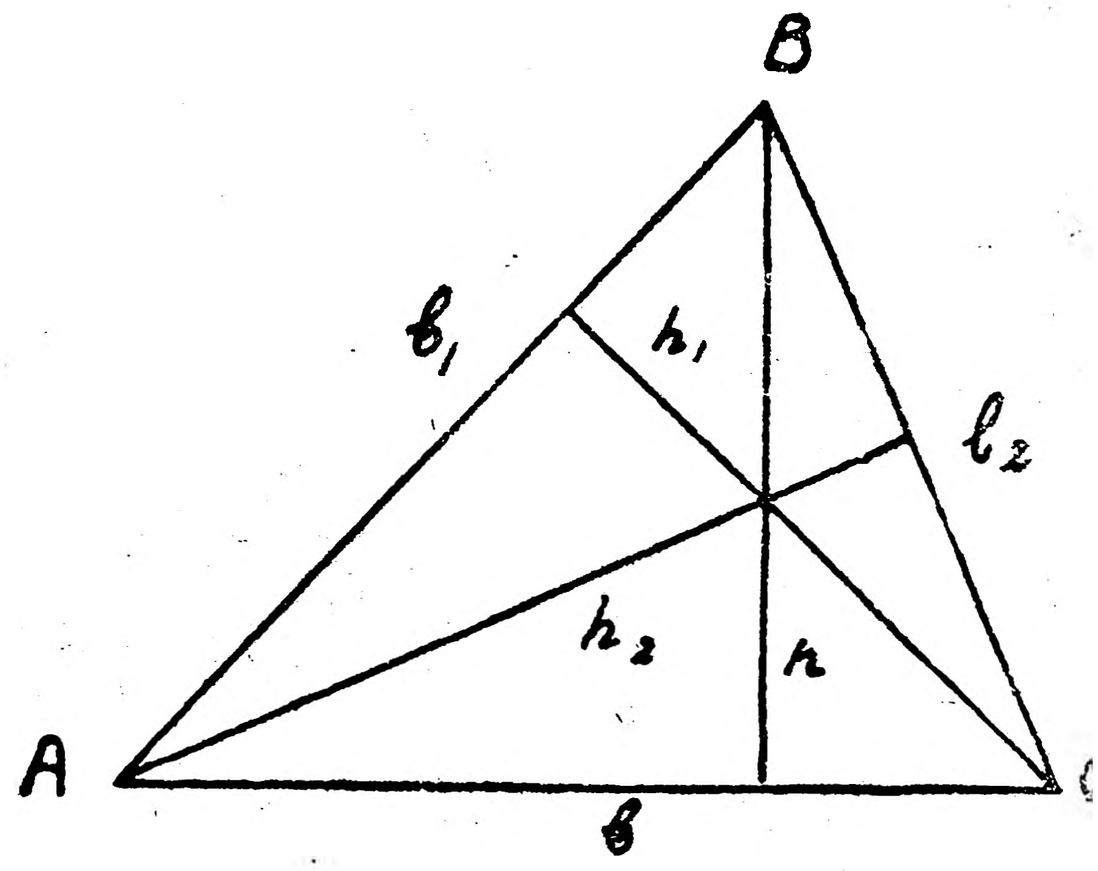
1. Начертить остроугольный и тупоугольный треугольники и при помощи наугольника провести в каждом из них высоту.

2. Показать высоту в прямоугольном треугольнике на черт. 51.

3. Начертить остроугольный треугольник и провести в нем три высоты, принимая по очереди каждую сторону за основание, как сделано на черт. 54.

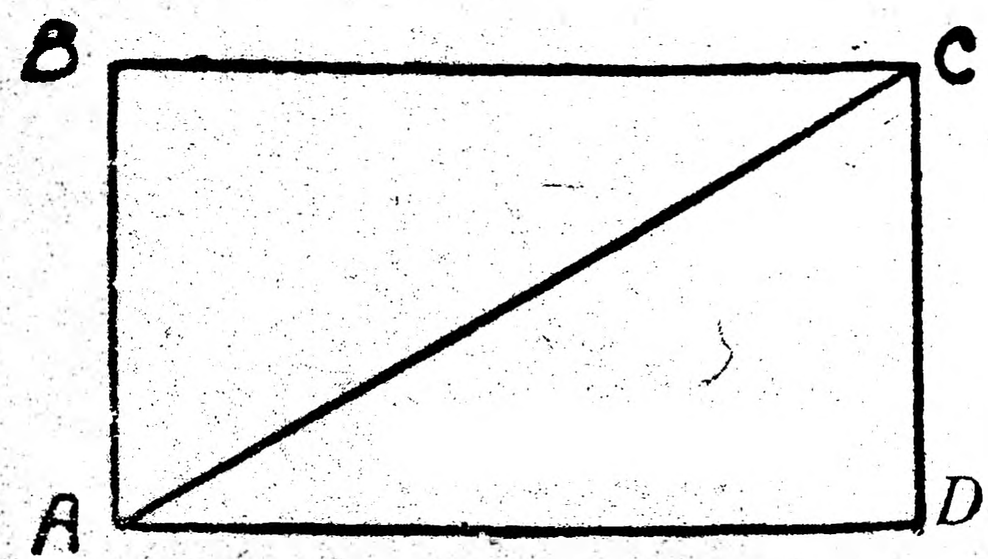


Черт 53.



Черт. 54.

4. На какие части диагональ AC делит прямоугольник $ABCD$ (черт. 55)?



Черт. 55.

5. Вырезать из бумаги прямоугольник, разрезать его по диагонали и, наложив один из полученных треугольников на другой, рассмотреть, равны ли эти треугольники.

6. Какую часть площади прямоугольника $ABCD$ составляет площадь треугольника ADC (черт. 55)?

7. Если в прямоугольнике $ABCD$ сторона $AD = a$ и сторона $CD = b$, то чему равна площадь прямоугольника $ABCD$?

Чему равна площадь S треугольника ADC?

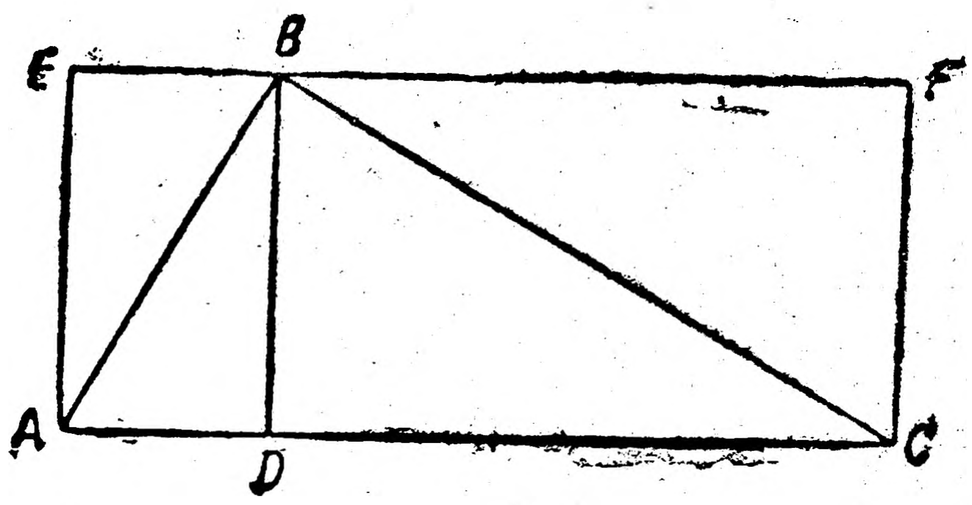
Вывод. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.*

$$S = \frac{ab}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

II. Задачи.

1. В треугольнике ABC (черт. 53) проведена высота BD. Отрезок $AD = 5$ *см*, отрезок $DC - 2$ *см*, высота $BD = 4$ *см*. Определить площадь $\triangle ABC$.

2. Дан $\triangle ABC$ (черт. 56), имеющий основание AC и высоту BD. На его основании AC построен прямоугольник $AEFC$ с той же высотой BD. Сравнив площадь $\triangle ABD$ с площадью прямоугольника $AEBD$ и площадь $\triangle BDC$ с площадью прямоугольника $DBFC$, показать, что площадь $\triangle ABC$ равна половине площади прямоугольника $AEFC$.



Черт. 56.

Если обозначим $AC = b$ и $BD = h$, то площадь прямоугольника $AEFC = bh$. Следовательно площадь $\triangle ABC = \frac{bh}{2}$. Называя площадь $\triangle ABC$ буквой S, получим

$$S = \frac{bh}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

Вывод. *Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.*

3. Произвести вычисления площадей треугольников по данным следующей таблицы:

S (площадь треугольника)	b (основание треугольника)	h (высота треугольника)
?	3,4 *м*	2,25 *м*
?	25,8 *м*	10,2 *м*
?	*c*	*b*
?	*m*	*n*

Вопросы. 1) Как изменится площадь треугольника, если, не изменяя его высоты, увеличим основание в 2 раза? в 3 раза? уменьшим в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза? 2) Как изменится площадь треугольника, если, не изменяя его основания, увеличим высоту в 2 раза? в 3 раза? уменьшим высоту в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза?

Указание. Площадь треугольника есть *функция* его основания и его высоты.

III. Задачи.

1. Какое количество железа потребуется для перекрытия двухскатной крыши, если каждый скат представляет прямоугольник с основанием 9,1 *м* и высотой 3,5 *м*? На 1 кв. сажень крыши идет 6 листов железа размером 1 арш. × 2 арш.

Отв. 84 листа.

2. Какое количество извести потребуется для побелки здания, стены которого представляют два прямоугольника с основанием 5,5 *м* и два квадрата со стороною 4,2 *м*, а площадь двери равна 4 *кв. м*. На один квадратный метр идет 0,63 *кг* извести.

Отв. 48,8 *кг*.

3. Какое количество железа потребуется для перекрытия четырехскатной крыши, площадь которой равна 4 площадям треугольников с основанием в 6,5 *м* и высотой в 4,2 *м* каждый? На 1 кв. сажень крыши идет 5,33 листа железа.

Отв. 64 листа.

4. Вычислить в метрических мерах площадь треугольника, основание которого ровно 4,36 *гм*, а расстояние его до противоположной вершины равно 213,4 *м*.

Отв. 46521,2 *кв. м*.

5. Пакгауз имеет форму прямоугольного здания длиною 150,4 *м* и шириною 15,5 *м*. Сколько нужно досок, длиною 6,4 *м* и шириною 25 *см* каждая, для настилки пола в пакгаузе?

Отв. 1 457.

6. Участок земли имеет форму равностороннего треугольника со стороной 84 *м*. Определить площадь участка, считая, что высота равностороннего треугольника составляет 0,87 его стороны

Отв. 3 069,36 *кв. м*.

Работа № 5.

ПРОСТЫЕ ДРОБИ.

Приведение дробей к общему знаменателю. Сложение и вычитание дробей. Умножение дробей. Деление дробей. Трапеция. Площадь трапеции. Площадь всякого многоугольника.

§ 40. Приведение дробей к общему знаменателю.

Задачи.

1. Умножением числителя и знаменателя на одно и то же число представить в одинаковых долях дроби:

$$\frac{1}{2} \text{ и } \frac{3}{4}\,;\ \frac{3}{8} \text{ и } \frac{3}{4}\,;\ \frac{1}{6} \text{ и } \frac{2}{3}\,;$$

$$\frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{3}\,;\ \frac{2}{3} \text{ и } \frac{3}{4}\,;\ \frac{7}{8} \text{ и } \frac{5}{6}\,.$$

Указание 1. Преобразование дробей с разными знаменателями в дроби с одинаковыми знаменателями называется *приведением дробей к общему знаменателю.*

2. Два крестьянина привезли на рынок одинаковое количество картофеля. Один из них продал $\frac{7}{12}$ всего привезенного картофеля, а другой $\frac{8}{15}$ всего привезенного им картофеля. Который из них продал картофеля больше?

3. Пароходное общество при перевозке груза взимает в одном случае по $\frac{3}{20}$ коп. с пуда-версты, а в другом $\frac{1}{8}$ коп. с пуда-версты. В каком случае фрахт дешевле?

4. Даны две дроби: $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$. Представить эти дроби в одинаковых долях единицы с знаменателем 12, с знаменателем 24,

с знаменателем 36, и т. д. Можно ли представить те же дроби в одинаковых долях единицы с знаменателем меньшим 12?

5. Даны две дроби: $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$. Представить эти дроби в одинаковых долях единицы с знаменателем 24; с знаменателем 36; с знаменателем 48; и т. д. Можно ли представить те же дроби в одинаковых долях единицы с знаменателем меньшим 24?

Указание **2.** При приведении дробей к общему знаменателю удобнее всего подыскивать *наименьший* общий знаменатель.

Указание **3.** При приведении дробей к общему знаменателю надо подыскать наименьшее число, делящееся без остатка на каждый из данных знаменателей; это число есть наименьший общий знаменатель. Разделив его на каждый из данных знаменателей, получим число, на которое надо умножить числитель и знаменатель соответствующей дроби и которое называется *дополнительным множителем этой дроби.*

Примеры

1. Привести к общему знаменателю дроби:

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{8}$$

Решение. Общий наименьший знаменатель равен 24.
Дополнительный множитель 1-й дроби равен $24 : 4 = 6$
„ „ 2-й „ „ „ $24 : 6 = 4$
„ „ 3-й „ „ „ $24 : 8 = 3$
Следовательно,

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{3}{24}$$

2. Привести к общему знаменателю дроби:

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{1}{6}$$

§ 41. Сложение и вычитание дробей.

Примеры.

1. Сложить дроби: $\frac{3}{8}$ и $\frac{2}{8}$.

2. Вычесть дробь $\frac{5}{8}$ из $\frac{7}{8}$.

Вопросы. 1) Что сделано, при сложении и вычитании данных дробей, с их числителями?

2) Формулировать и записать правило сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

3. Сложить дроби: $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{8}$.

Решение. $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$.

4. Вычесть дробь $\frac{3}{8}$ из $\frac{1}{2}$.

Решение. $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{4}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$.

Вопросы. 1) Чем отличаются примеры 3 и 4 от примеров 1 и 2? 2) Что прежде всего следует делать при сложении и вычитании дробей, имеющих разные знаменатели?

5. Сложить дроби: $5\frac{2}{3}$ и $1\frac{3}{4}$.

Решение. $5\frac{2^{\smile 4}}{3}+1\frac{3^{\smile 3}}{4}=5\frac{8}{12}+1\frac{9}{12}=6\frac{8+9}{12}=$

$=6\frac{17}{12}=7\frac{5}{12}$.

6. Вычесть $3\frac{3}{5}$ из $5\frac{2}{7}$.

Решение. $5\frac{2^{\smile 5}}{7}-3\frac{3^{\smile 7}}{5}=5\frac{10}{35}-3\frac{21}{35}=2\frac{10-21}{35}=$

$=1\frac{45-21}{35}=1\frac{24}{25}$.

Вывод. При сложении и вычитании обыкновенных дробей с разными знаменателями надо дроби приводить к общему знаменателю.

Упражнения. 1) $1\frac{5}{7}+\frac{2}{3}$; 2) $2\frac{4}{5}-2\frac{3}{4}$; 3) $1\frac{1}{4}+2\frac{1}{3}+$

$+3\frac{1}{6}$; 4) $4\frac{1}{8}-2\frac{3}{4}$; 5) $1\frac{2}{5}-\frac{9}{10}$; 6) $3\frac{3}{8}+5\frac{5}{6}-4\frac{2}{3}$.

Задачи.

1. Пешеход прошел в первый день $\frac{1}{6}$ всего пути, во второй день — $\frac{1}{8}$, в третий день — $\frac{1}{12}$ всего пути, после чего ему осталось еще пройти 60 километров. Сколько километров прошел пешеход в первые три дня? *Отв.* 36 *км.*

2. В сплаве содержится по весу: $\frac{1}{15}$ олова, $\frac{1}{3}$ цинка, а остальное—медь. Определить вес всего сплава, если вес меди равен 12 *кг.* *Отв.* 20 *кг.*

§ 42. Умножение дробей.

Примеры. 1 *м* пеньковой веревки стоит $\frac{3}{8}$ коп. Сколько стоят: 1) 2 *м* веревки? 2) 3 *м*? 3) 4 *м*? 4) $\frac{1}{2}$ *м*? 5) $\frac{1}{4}$ *м*? 6) $\frac{3}{4}$ *м*? 7) $\frac{3}{5}$ *м*?

Указание. Так как для решения 1-го, 2-го и 3-го вопросов предыдущего примера нужно $\frac{3}{8}$ коп. умножить на 2, на 3, на 4 и так как сущность вопросов 4-го, 5-го, 6-го и 7-го ни чем не отличается от сущности вопросов 1-го, 2-го и 3-го, то они также решаются умножением дроби $\frac{3}{8}$ на соответствующие дроби, т.-е. на $\frac{1}{2}$, на $\frac{1}{4}$, на $\frac{3}{4}$ и на $\frac{3}{5}$. Но вместе с тем, по смыслу вопросов 4-го, 5-го, 6-го и 7-го, при решении их приходится находить часть данного числа, а именно:

4) $\frac{1}{2}$ от $\frac{3}{8}$, 5) $\frac{1}{4}$ от $\frac{3}{8}$, 6) $\frac{3}{4}$ от $\frac{3}{8}$, 7) $\frac{3}{5}$ от $\frac{3}{8}$.

Поэтому:

умножить $\frac{3}{8}$ на $\frac{1}{2}$ значит найти $\frac{1}{2}$ от $\frac{3}{8}$,

„ $\frac{3}{8}$ „ $\frac{1}{4}$ „ „ $\frac{1}{4}$ „ $\frac{3}{8}$,

умножить $\frac{3}{8}$ на $\frac{3}{4}$ значит найти $\frac{3}{4}$ от $\frac{3}{8}$,

„ $\frac{3}{8}$ „ $\frac{3}{5}$ „ „ $\frac{3}{5}$ „ $\frac{3}{8}$.

Вообще, умножить какое-нибудь число на дробь — значит найти часть этого числа, выражаемую этой дробью. Наоборот, чтобы найти часть данного числа, надо умножить это число на дробь, выражающую искомую часть.

Пример. Умножить $\frac{2}{3}$ на $\frac{4}{5}$.

Решение. 1) $\frac{1}{5}$ от $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15}$;

2) $\frac{4}{5}$ от $\frac{2}{3} = \frac{2}{15} \cdot 4 = \frac{8}{15}$;

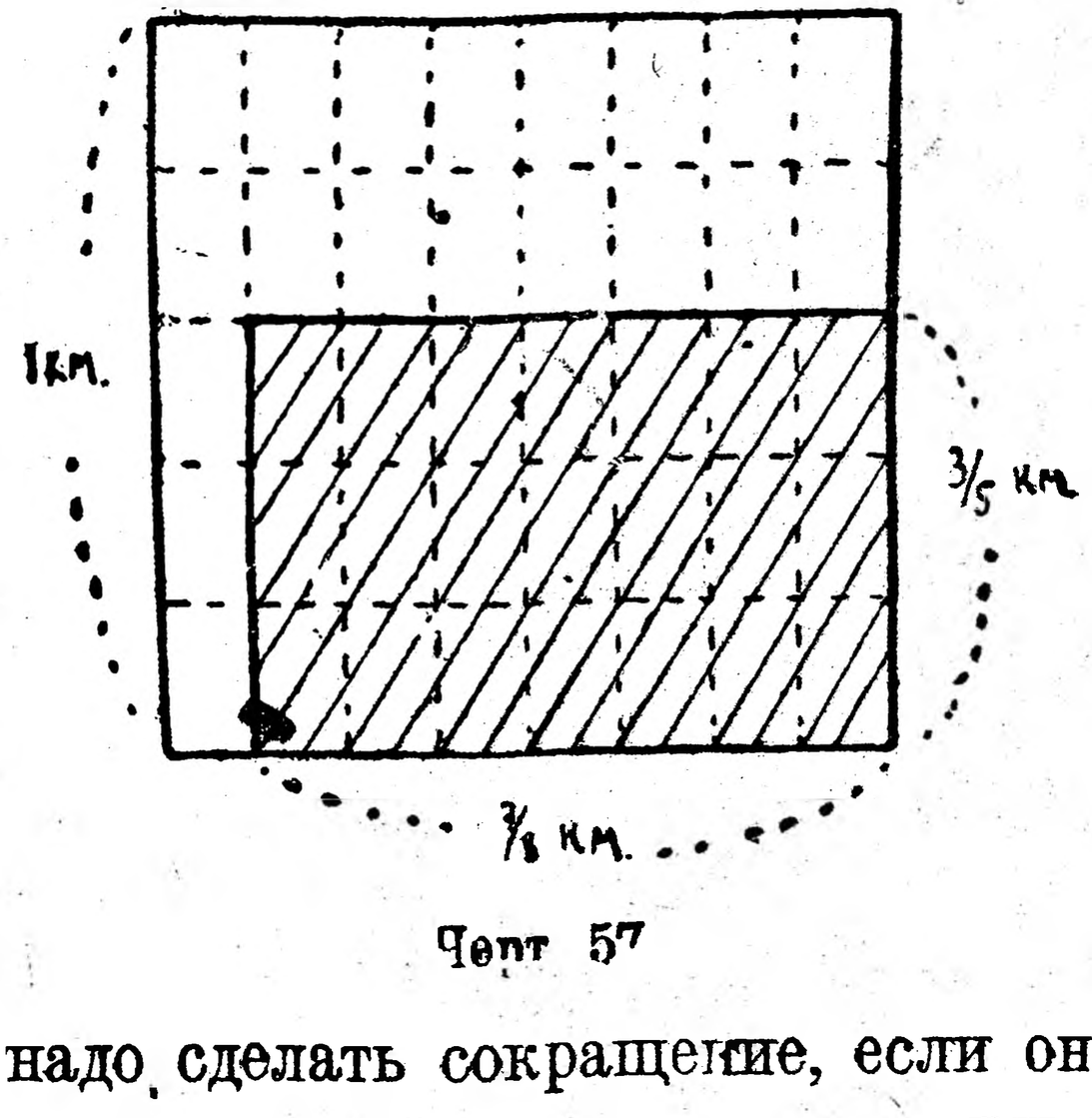
или короче:

$$\frac{4}{5} \text{ от } \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

Упражнения. 1) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = ?$ 2) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{9} = ?$ 3) $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = ?$

Задача. Длина прямоугольного поля (черт. 57) составляет $\frac{7}{8}$ *км*, а ширина — $\frac{3}{5}$ *км*. Определить площадь поля, сосчитав клетки, из которых оно составлено.

Отв. $\frac{21}{40}$ *кв. км.*



Черт 57

Вывод. При умножении обыкновенных дробей надо перемножить их числители и знаменатели; первое произведение будет числителем, а второе знаменателем результата.

Указание. Прежде чем производить умножение дробей, надо сделать сокращение, если оно возможно, при чем можно сокращать каждый числитель с каждым знаменателем.

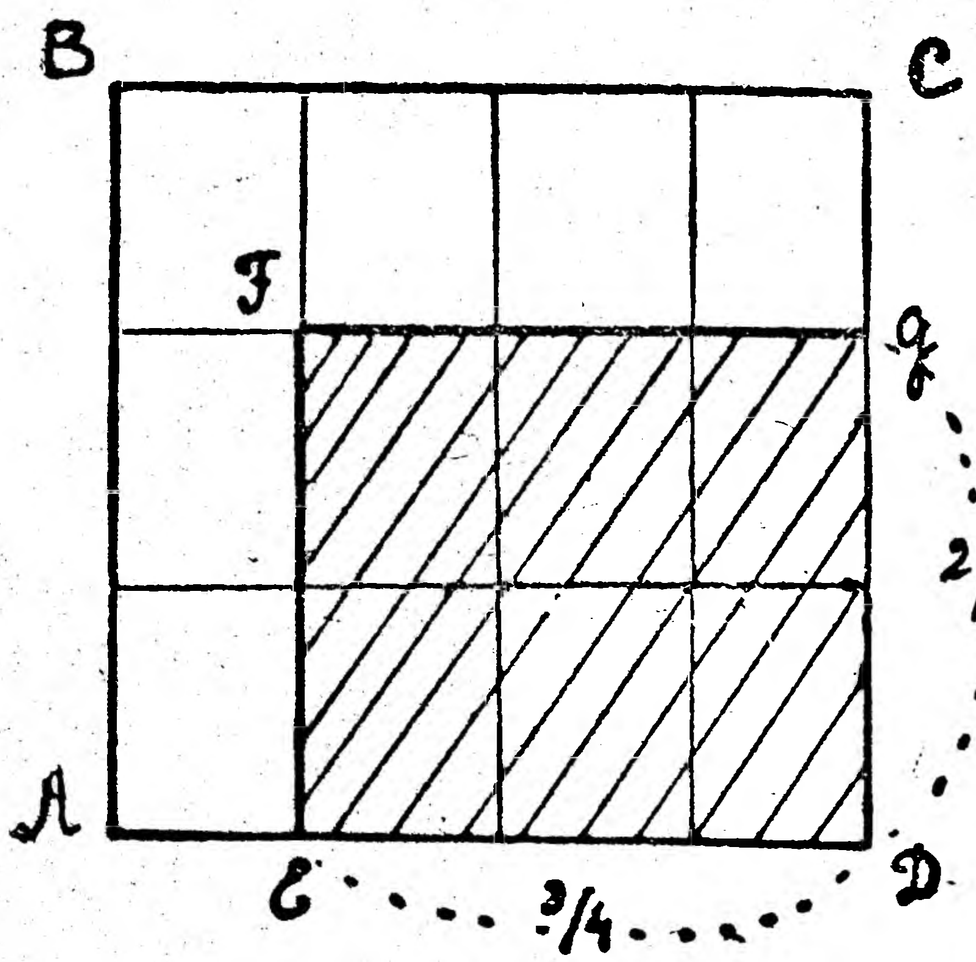
Упражнения.

1. Произвести умножение дробей:

а) $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{5} = ?$ б) $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = ?$

2. Представив целые числа в виде дробей с знаменателем 1, произвести следующие умножения:

а) $2 \cdot \frac{4}{5} = ?$ б) $7 \cdot \frac{3}{4} = ?$ в) $\frac{5}{6} \cdot 4 = ?$



Черт. 58.

3. Обратив смешанные числа в неправильные дроби, произвести следующие умножения:

а) $1\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = ?$ б) $3\frac{1}{2} \cdot 5\frac{7}{8} = ?$

в) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{4}{5} = ?$

Вопрос. Объяснить умножение дробей $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{3}$ на черт. 58.

§ 43. Деление дробей.

Пример 1. Разделить $\frac{3}{4}$ на 2.

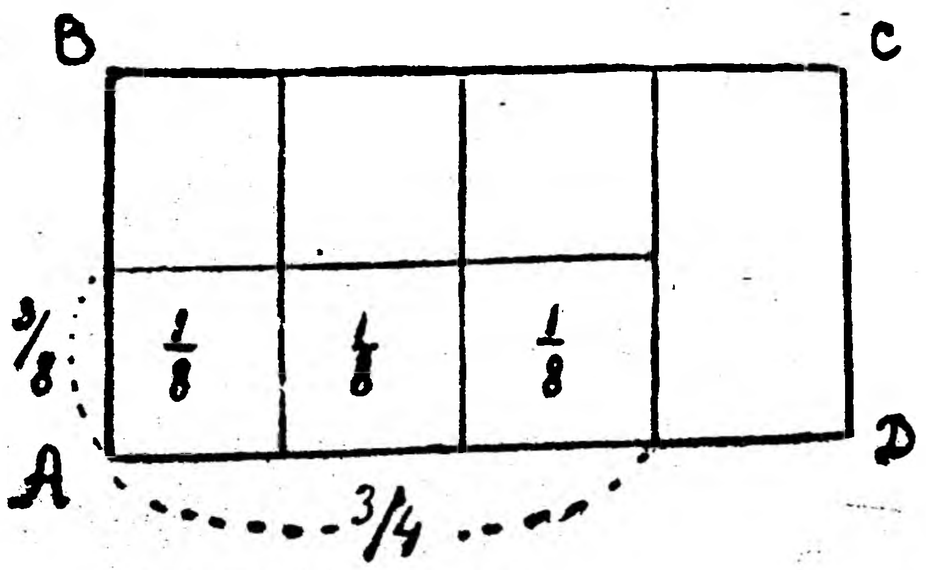
Решение. $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$.

Проверить решение на черт. 59.

Вопросы. 1) Во сколько раз уменьшилась дробь $\frac{3}{4}$ при делении ее на 2?

2) Произвести умножение

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}.$$



Черт. 59.

3) Разные или одинаковые результаты дают действия: 1) $\frac{3}{4} : 2$ и $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$? 2) $\frac{3}{4} : 3$ и $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$?

4) Как называются числа 2 и $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$? $2\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{5}$?

(Указание: обратными числами).

5) Каким действием можно заменить деление $\frac{3}{4}$ на 2?

(Указание: умножением на обратную дробь, т.-е. на $\frac{1}{2}$.)

Вывод. Деление на какое-нибудь число можно заменить умножением на обратное число.

Пример 2. Разделить 2 на $\frac{3}{4}$.

Решение. $2 : \frac{3}{4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Пример 3. Разделить $\frac{2}{3}$ на $\frac{3}{4}$.

Решение. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$.

Вывод. Чтобы разделить какое угодно число на дробь, нужно помножить это число на дробь, обратную делителю.

Упражнение. 1) $\frac{5}{7} : \frac{4}{5}$; 2) $\frac{8}{9} : \frac{3}{4}$.

Примеры.

1) 2 *м* веревки стоят $\frac{3}{4}$ коп. Ск. стоит 1 *м* веревки?

2) 3 „ „ „ $1\frac{1}{8}$ „ „ „ „ „ „ ?

3) $\frac{2}{3}$ „ „ „ $\frac{1}{4}$ „ „ „ „ „ „ ?

4) $\frac{3}{4}$ „ „ „ $\frac{9}{32}$ „ „ „ „ „ „ ?

Указание. Так как для решения 1-го примера нужно $\frac{3}{4}$ коп. разделить на 2, для решения 2-го примера нужно $1\frac{1}{8}$ коп. разделить на 3, то тем же действием решаются примеры 3-й и 4-й, т.-е. $\frac{1}{4}$ коп. нужно разделить на $\frac{2}{3}$ (3-й пример) и $\frac{9}{32}$ коп. нужно разделить на $\frac{3}{4}$ (4-й пример). Но вместе с тем, по смыслу примеров 3-го и 4-го, при решении их приходится находить неизвестное число по данной его части, а именно: в примере 3) $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}$, найти x; в примере 4) $\frac{3}{4}x = \frac{9}{32}$, найти x.

Поэтому

разделить $\frac{1}{4}$ на $\frac{2}{3}$ значит найти x, если $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}$

$\frac{9}{32}$ на $\frac{3}{4}$ » » » $\frac{3}{4}x = \frac{9}{32}$.

Вообще, разделить какое-нибудь число на дробь значит найти неизвестное число по данной его части, выражаемой этой дробью.

Наоборот, чтобы найти неизвестное число по данной его части, надо эту данную часть разделить на дробь, выражающую эту часть.

Вопрос. Почему при делении числа на правильную дробь число увеличивается?

Задача. Крестьянская усадьба занимает $\frac{3}{4}$ *га*, что составляет $\frac{5}{24}$ всей его земли. Сколько земли у крестьянина?

Отв. $3\frac{3}{5}$ *га*.

Примеры. Найти x, если 1) $\frac{5}{7}x = 2\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4}{5}x = 2\frac{2}{5}$; 3) $\frac{6}{11}x = 19$.

Упражнения.

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)$. *Отв.* $\frac{13}{32}$.

2) $\left(3-2\frac{1}{4}:1\frac{1}{2}\right):\left(4\frac{1}{12}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)$. *Отв.* $\frac{1}{3}$.

3) $(15:1{,}2)\cdot(0{,}7:1{,}4)-(0{,}1:0{,}25)\cdot(3:1{,}5)$. *Отв.* 5,45.

4) $(14:0{,}7)\cdot\left(\frac{2}{5}:5\right)+\left(2{,}1:1\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}:0{,}24\right)$. *Отв.* 4,6.

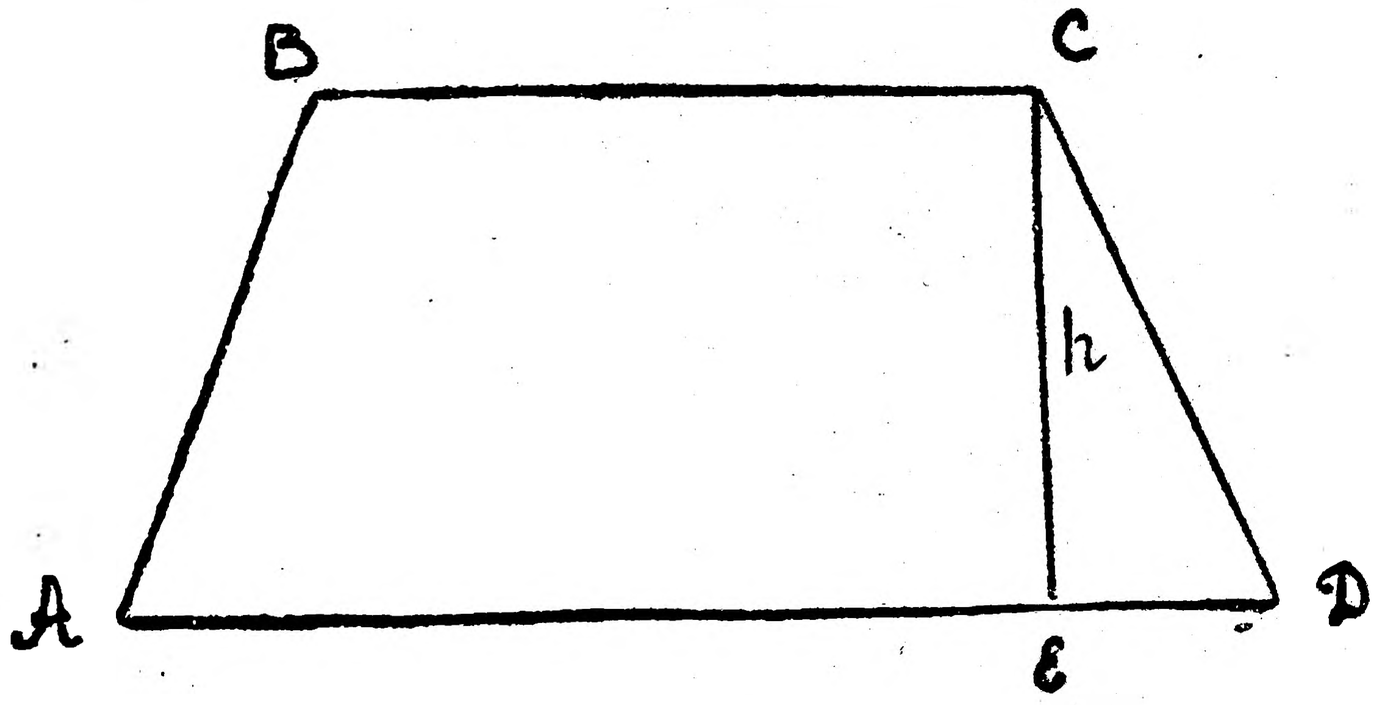
5) $\dfrac{\left(\frac{7}{40}+0{,}375\right):0{,}4}{\left(\frac{1}{4}\cdot 0{,}5-\frac{1}{5}\cdot 0{,}16\right):0{,}08}$ *Отв.* $1\frac{17}{93}$.

§ 44. Трапеция.

Указания. 1) Четыреугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны, называется *трапецией* (черт. 60).

2) Параллельные стороны трапеции AD и BC называются ее *основаниями*.

3) Перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки одного основания на другое основание, например CE, называется *высотой* трапеции.



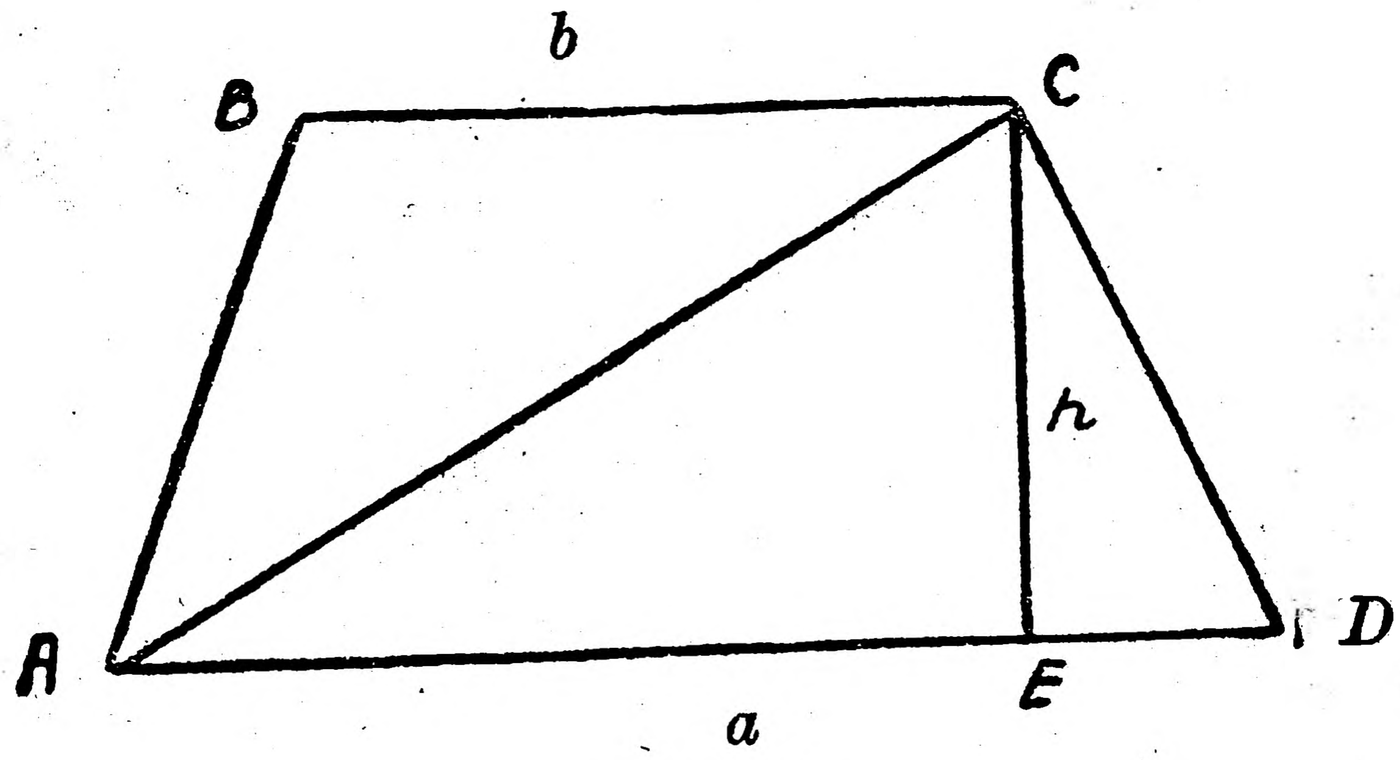
Черт. 60.

§ 45. Площадь трапеции.

Вопросы. 1) На какие две площади разбивает диагональ AC площадь трапеции $ABCD$ (черт. 61)?

2) Приняв за основание треугольника ACD прямую AD, показать высоту этого треугольника.

3) Приняв за основание $\triangle$-а ABC сторону BC, провести высоту этого $\triangle$-а и показать, что она равна высоте CE.



Черт. 61.

Указание. Площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника ABC + площадь треугольника ACD.

Задача. Вычислить площадь трапеции $ABCD$ (черт. 61), если $AD = 7$ *см*, $BC = 6$ *см* и $CE = 5$ *см*.

Решение. Площадь трапеции $ABCD = \frac{7 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{35}{2} + \frac{30}{2} = \frac{65}{2} = 32\frac{1}{2}$,

или иначе, площадь трапеции

$$ABCD = \frac{(7+6) \cdot 5}{2} = 32\frac{1}{2}.$$

Назовем основание трапеции AD буквой a, основание BC буквой b, высоту буквой h; тогда площадь треугольника $ACD = \frac{ah}{2}$, площадь треугольника $ABC = \frac{bh}{2}$. Площадь $ABCD$ равна $\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{ah + hb}{2} = \frac{(a+b)h}{2}$.

Вывод. *Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.*

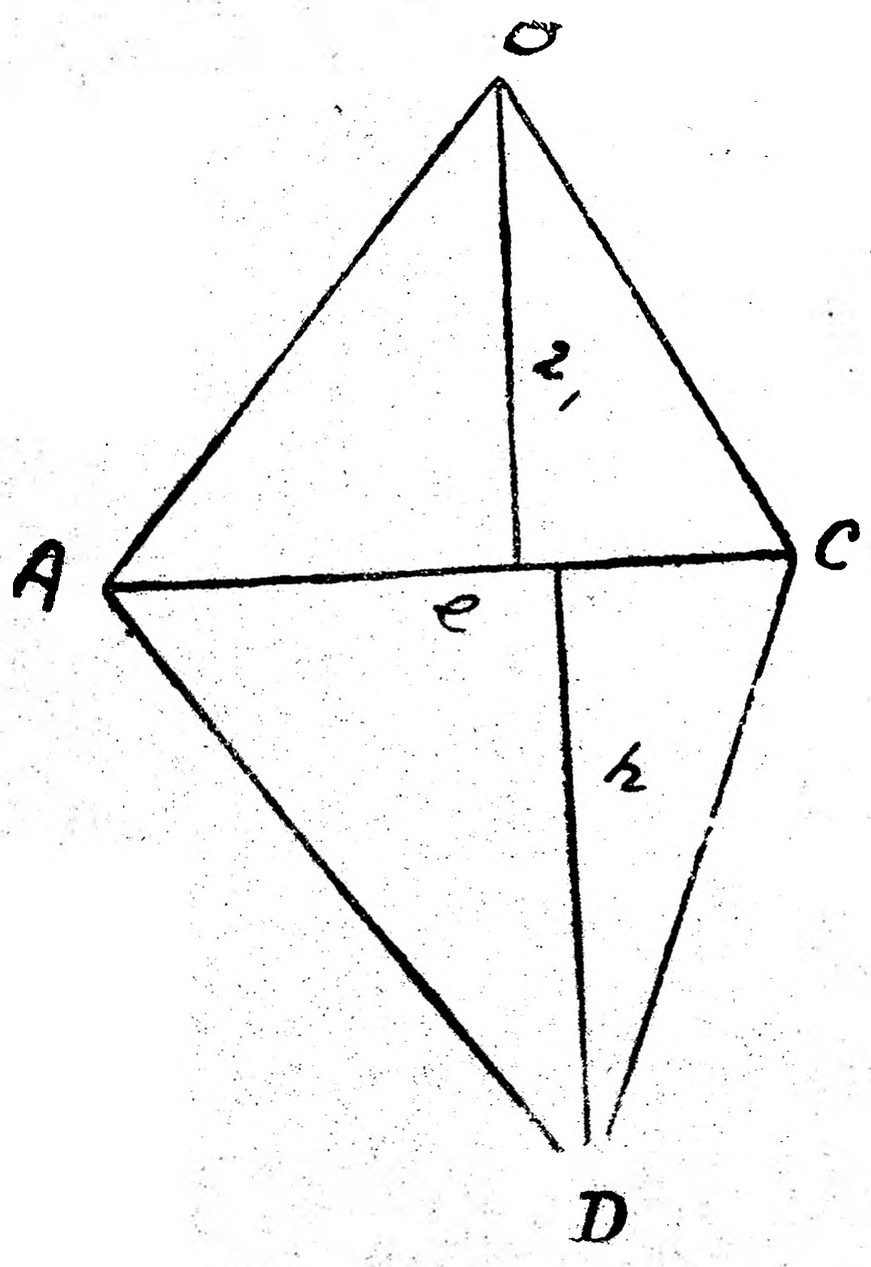
Если назовем площадь трапеции буквой S, то

$$\boxed{S = \frac{(a+b)h}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Задача. Вычислить площадь трапеции, у которой одно основание $a = 16^3/_4\ м$, другое основание $b = 10^1/_2\ м$, высота $h = 3^1/_5\ м$.

§ 46. Площадь всякого многоугольника.

Указание. Для определения площади какого-нибудь четыреугольника $ABCD$ (черт. 62), надо провести одну из его диагоналей, например AC. Тогда четыреугольник разобьется на два треугульника (указать, какие).



Черт. 62.

Вопросы. 1) Как определить площадь каждого из этих треугольников?

2) Какую линию удобнее взять за основание обоих треугольников и почему?

3) Можно ли за основания треугольников принимать какие-нибудь другие их стороны? Как тогда провести их высоты?

4) Как подобным же образом определить площадь пятиугольника? шестиугольника?

5) Формулировать (выразить словами) и записать способ определения площади многоугольника.

Задачи.

1. Какое количество дерна потребуется для укладки 4 откосов насыпи, у которых верхние стороны равны 46,2 *м* каждая,

нижние — 53,8 *м* каждая, а расстояние между ними равно 3,64 *м* (трапеция). На 1 *кв. м* требуется по весу 31 *кг* дерну. Сколько подвод понадобится для перевозки дерну, если на каждую подводу класть по 400 *кг*? *Отв.* 56 возов (с точн. до 1).

2. Площадь поля, имеющего форму неправильного четыреугольника, пересекается прямой межой по диагонали, длина которой равна 1 *км*. Расстояние от межи до других вершин равно 4 *гм* и 3 *гм*. Чему равна площадь поля? *Отв.* 35 *кв. гм.*

3. Деревня из 48 дворов и 234 едоков пользуется землей в количестве 580,2 *га*. Какой полевой надел земли приходится в этой деревне на едока, если усадебный надел равен $\frac{7}{8}$ *га*?

Отв. 2,3 *га*.

4. С конечных станций ж. д. вышли два поезда. Когда один прошел $\frac{2}{7}$ всего пути, а другой $\frac{2}{9}$ всего пути, то между ними было 319 *км*. Какое расстояние между конечными станциями?

Отв. 630 *км*.

5. Что будет стоить паркетный пол в зале, которого длина $6\frac{2}{3}$ саж., а ширина 12,804 *м*, если кв. сажень паркета с работой стоит 18 руб.? (1 саж. = 2,134 *м*). *Отв.* 720 руб.

6. Из килограмма ржаной муки получается $1\frac{4}{9}$ *кг* печеного хлеба. Сколько хлебов, весом каждый $7\frac{1}{2}$ *кг*, можно испечь из 135 *кг* муки? *Отв.* 26.

7. Поле имеет вид трапеции, которой высота равняется 240 саж., а сумма параллельных сторон равна 0,96 версты. По полю провели дорогу в 5 сажен ширины перпендикулярно параллельным сторонам, а остальную часть поля засеяли овсом. Сколько мер посеяно овса, если на посев десятины идет 18 мер? *Отв.* 423.

8. В одном из двух кусков сукна было больше на 20 *м*, чем в другом. От первого куска отрезали 0,7 бывшего в нем количества метров, а от второго $\frac{11}{30}$ бывшего в нем количества метров, после чего в обоих кусках осталось по одинаковому количеству метров. Сколько метров было в каждом куске? *Отв.* 38; 18.

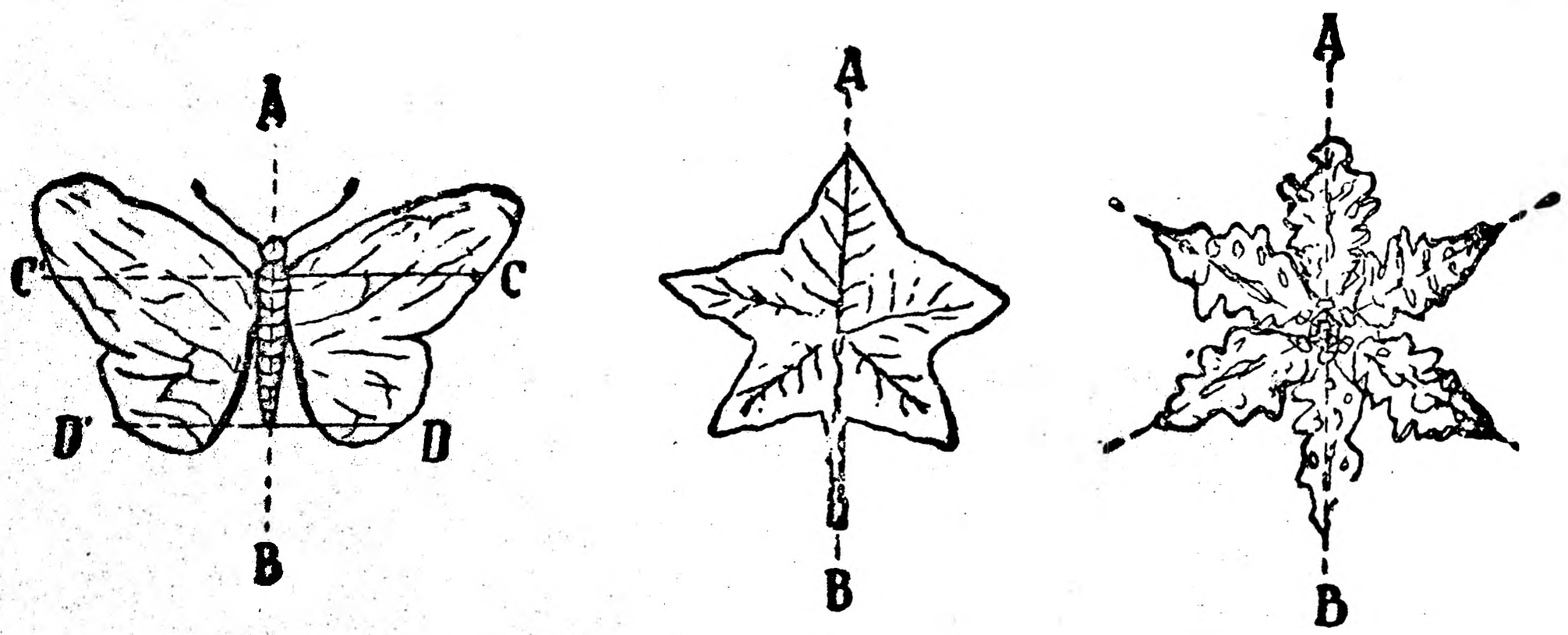
Работа № 6.

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ.

Симметрия. Свойства оси симметрии. Свойство биссектрисы угла при вершине равнообедренного треугольника. Основные задачи на построение. Равенство треугольников. Свойства сторон и углов треугольника.

§ 47. Понятие об осевой симметрии.

Указание. На черт. 63 изображены фитуры, из которых каждая *симметрично* расположена около прямой AB, называемой *осью симметрии*. Особенность этих фигур состоит в том, что при перегибании каждой из них на полоборота около оси AB



I. Крылья бабочки. II. Кленовый лист. III. Снежинка.

Черт. 63.

правая часть фигуры совмещается всеми своими точками с левой частью, и наоборот.

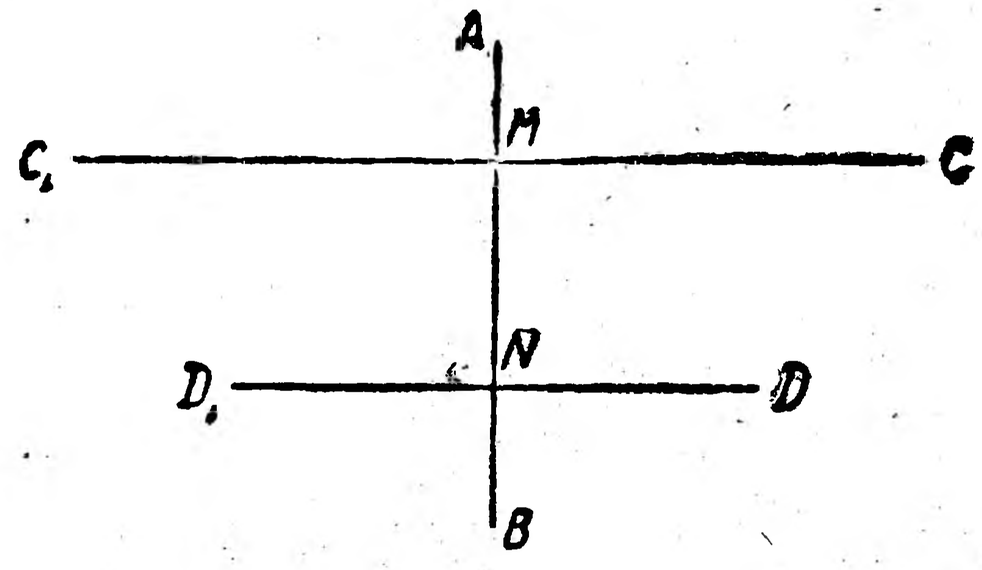
Точки, совмещающиеся при перегибании, например, точки C и C', D и D' (фиг. I), называются *симметричными* относительно той же оси AB.

§ 48. Свойства оси симметрии.

Указание 1. На черт. 64 взяты прямые линии из фиг. I, черт. 63.

Так как при перегибании этой фитуры на полоборота около оси симметрии AB точка C совмещается с C_1 и точка D совмещается с D_1, то $CM = C_1M$ и $DN = D_1N$. Следовательно, прямые, соединяющие пары симметричных точек, делятся осью симметрии пополам. Так как, кроме того, при перегибании около оси AB угол AMC совмещается с углом AMC_1, то $\angle AMC = \angle AMC_1$. Но эти углы смежные, а равные смежные углы — прямые (см. § 6), следовательно, прямая CC_1 перпендикулярна к оси симметрии AB. Точно также прямая DD_1 перпендикулярна к оси симметрии AB.

Упражнение. 1. Взяв карандаш и две спички, поместить эти спички симметрично относительно карандаша в разных положениях.



Черт. 64.

2. Взяв карандаш и четное число перьев (напр., 4, 6, 8 и т. д.), разместить половину перьев по одну сторону карандаша и другую их половину по другую сторону карандаша симметрично с первыми.

3. Нарисовать на клетчатой бумаге букву симметричную с печатной заглавной буквой Я относительно оси симметрии, параллельной вертикальной черте этой буквы.

4. Придумать еще несколько примеров фигур, симметрично расположенных около оси.

Вопросы. На черт. 65 даны две точки, симметричные относительно оси MN.

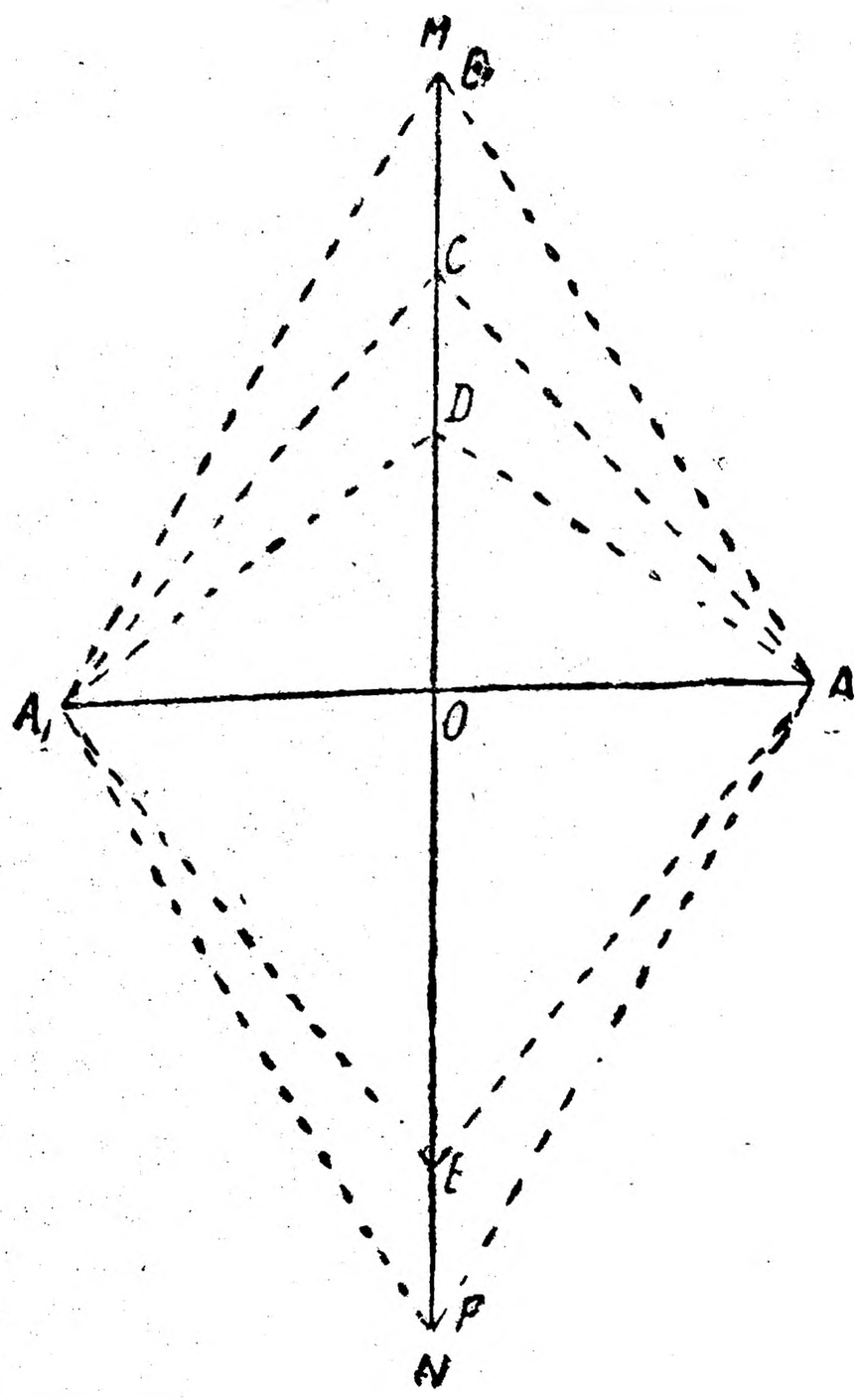
Показать перегибанием, что

1) $BA = BA_1$ $\quad DA = DA_1$ $\quad FA = FA_1$
$\quad CA = CA_1$ $\quad EA = EA_1$ $\quad GA = GA_1$

2) Любая точка оси MN находится на равных расстояниях от точек A и A_1.

Указание 2. Прямая MN (черт. 65), согласно указанию 1, перпендикулярна к прямой AA_1. Прямые BA и BA_1, CA и CA_1 и т. д. называются в таком случае *наклонными* к прямой AA_1. Отрезки OA и OA_1 называются *проекциями* наклонных BA и BA_1,

CA и CA_1 и т. д. Следовательно, равные наклонные имеют равные проекции, и, наоборот, если проекции двух наклонных равны, то и сами наклонные равны.



Черт. 65.

Выводы. 1) *Ось симметрии двух каких-нибудь точек перпендикулярна к прямой, проходящей через эти точки.*

2) *Она делит отрезок, соединяющий эти точки, пополам.*

3) *Все точки оси находятся на равных расстояниях от этих двух точек.*

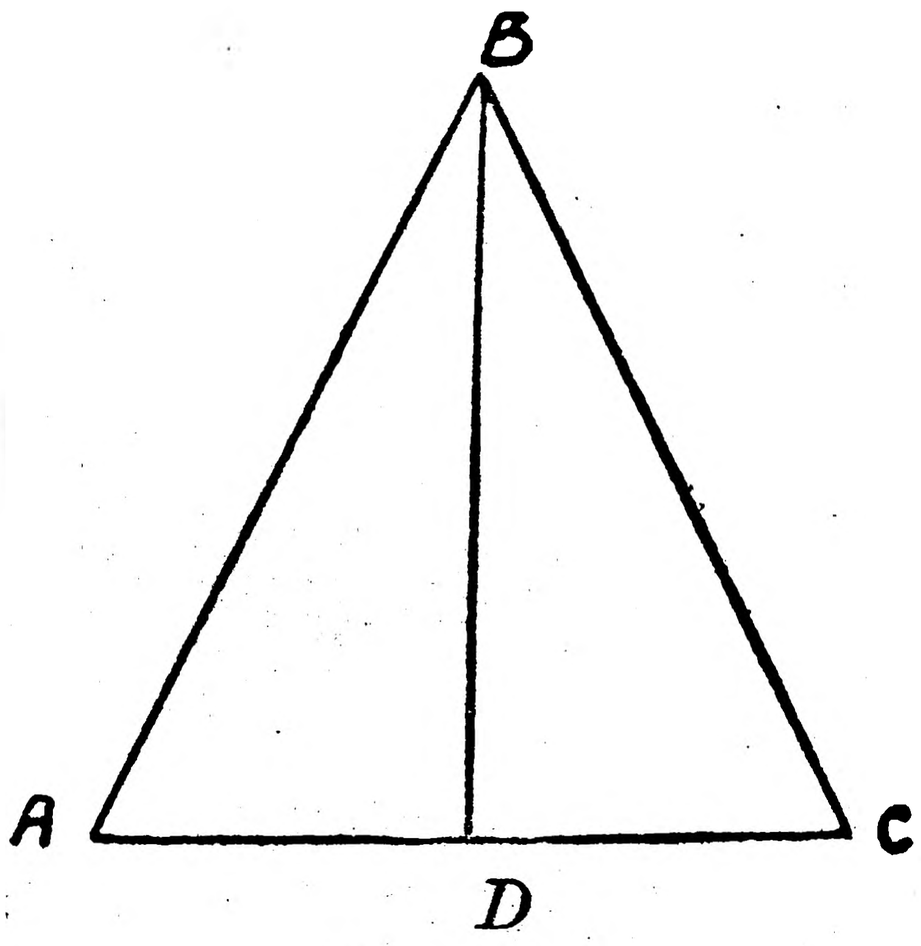
§ 49. Свойство биссектрисы угла при вершине равнебедренного треугольника.

Указание. 1) Прямая, делящая угол пополам, называется *биссектрисой угла.*

2) Прямая, соединяющая вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой.*

Вопрос. Сколько биссектрис и сколько медиан можно провести в треугольнике?

Задача. Проведя в равнобедренном треугольнике ABC (черт. 66) биссектрису BD, показать перегибанием треугольника BDC на полоборота около BD, что биссектриса BD является осью имметрии треугольника.



Черт. 66.

Выводы. 1) *Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника служит вместе с тем его медианой и высотой.*

2) *Углы A и C при основании равнобедренного треугольника равны между собой.*

§ 50. Основные задачи на построение.

Указание. Построением называется вычерчивание при помощи циркуля и линейки каких-нибудь линий, углов, фигур по заданным условиям.

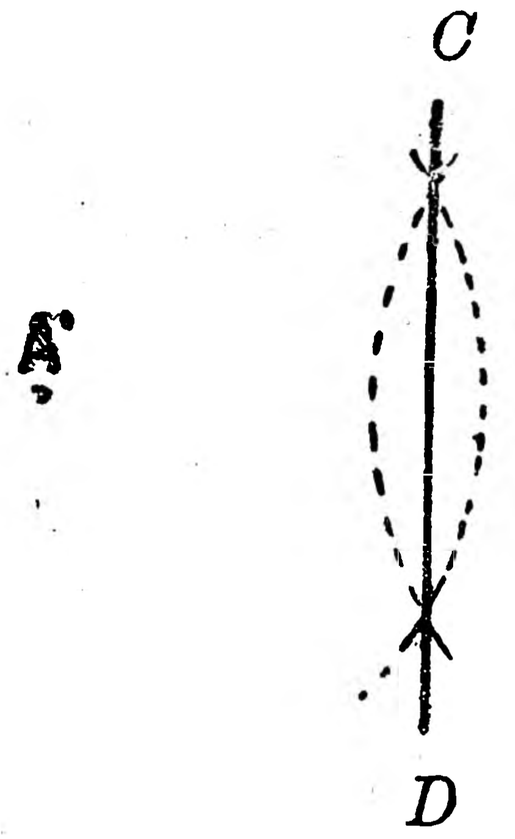
Задачи.

1. Даны две точки, A и A_1. Найти их ось симметрии.

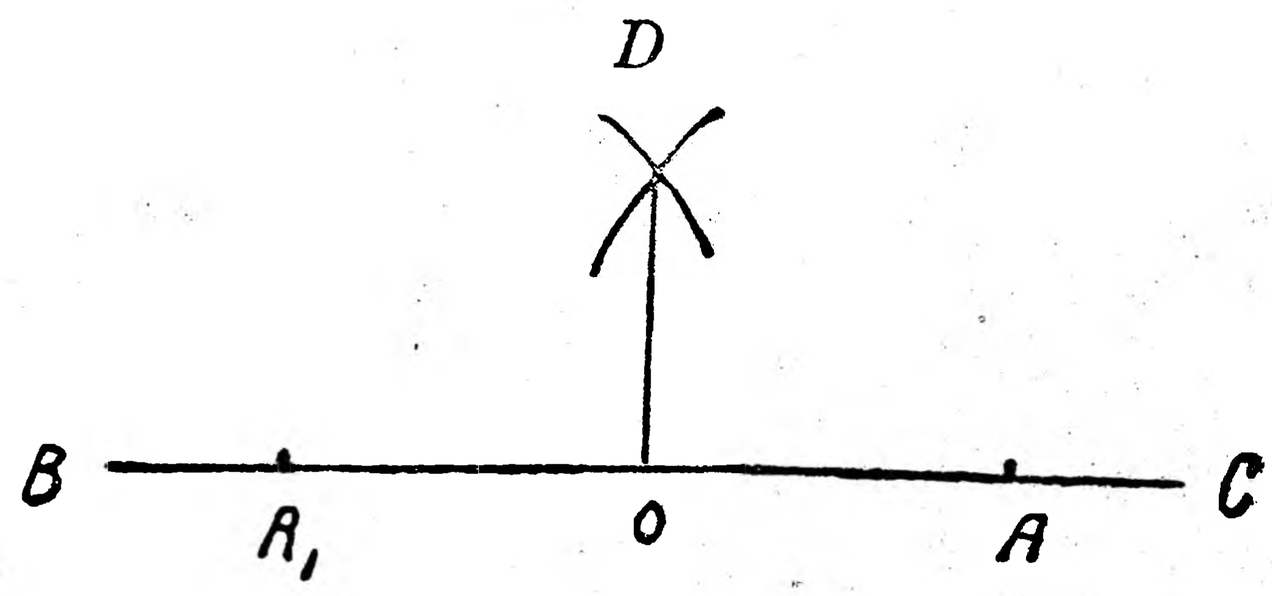
Р е ш е н и е. Из точек A и A_1 (черт. 67) растворением циркуля, большим половины AA_1, проведем дуги, которые пересекутся в точках C и D. Прямая CD, на основании вывода 3 § 48, есть ось симметрии точек A и A_1, так как точки C и D, как равноудаленные от точек A и A_1, лежат на оси симметрии этих точек.

Вопрос. Почему растворение циркуля нельзя взять равным половине AA_1? меньшим половины AA_1? Попробуйте найти этим способом точки C и D у себя в тетради.

2. Из данной точки O прямой BC восставить к ней перпендикуляр при помощи циркуля и линейки.



Черт. 67.



Черт. 68.

Р е ш е н и е. От данной точки O отложим по обе стороны равные отрезки OA и OA_1.

Из точек A и A_1 одним и тем же растворением циркуля, большим половины отрезка AA_1, проведем две дуги, которые пересекутся в точке D. Точку пересечения дуг соединим с точкой O (черт. 68). Прямая OD есть перпендикуляр к BC. Почему? (См. § 48, вывод 1.)

Упражнение. Сделать это построение у себя в тетради.

3. Из данной точки D опустить на прямую BC перпендикуляр.

Р е ш е н и е. Из точки D, как центра, опишем такую дугу, которая пересеклась бы с прямой BC в каких-нибудь точках A и A_1. Потом произвольным, но одним и тем же, растворением циркуля, большим половины отрезка AA_1, из точек A и A_1 проведем дуги, которые пересекутся в точке M. Точку D соединим

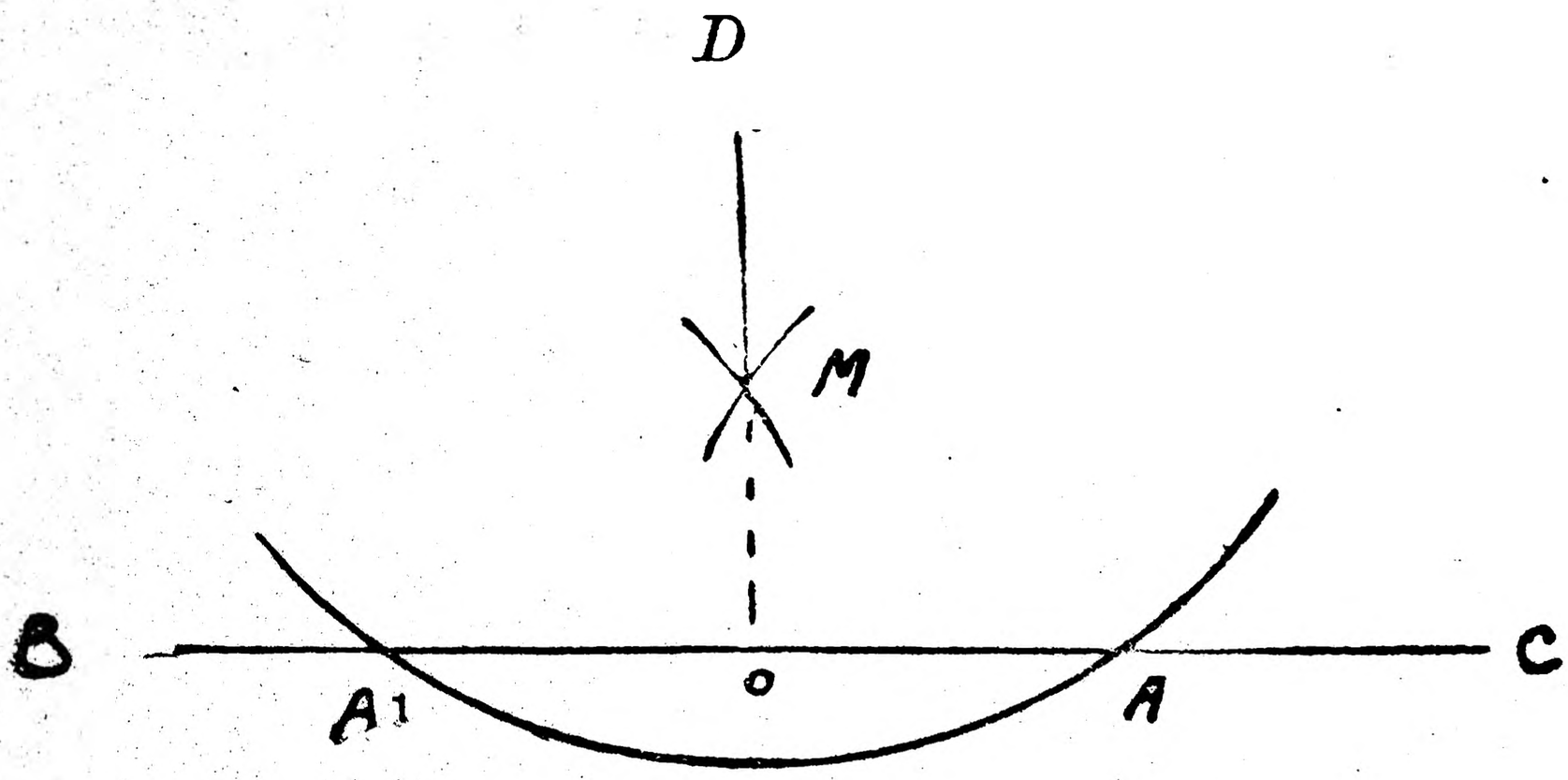
с точкой *M* пересечения дуг и прямую *DM* продолжим до пересечения с прямой *BC* (черт. 69).

Прямая *OD* есть перпендикуляр к прямой *BC*. Почему? (См. § 48, вывод 1.)

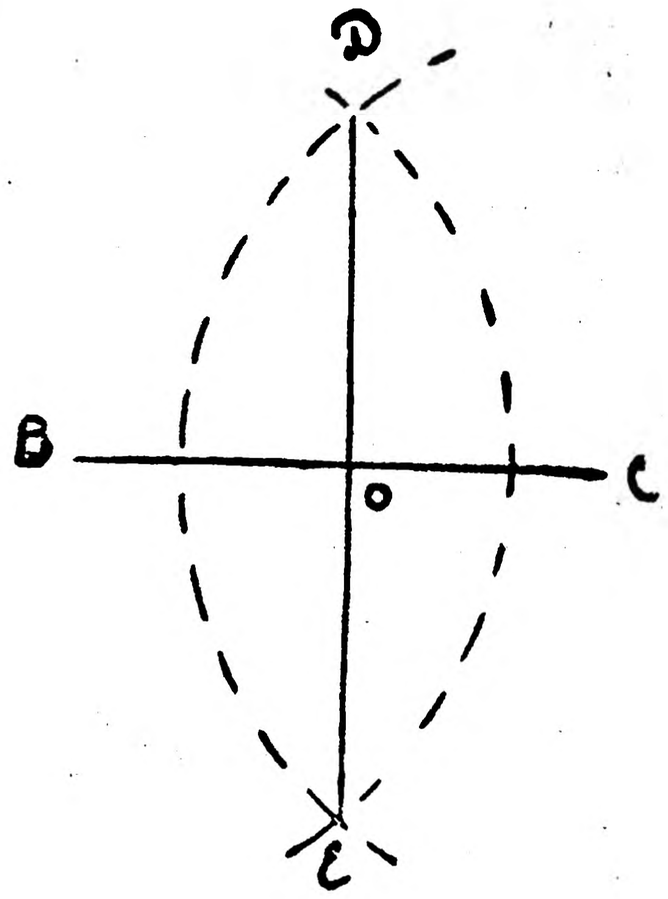
Упражнение. Сделать это построение у себя в тетради.

4. К данному отрезку *BC* провести перпендикуляр через его середину (или разделить данный отрезок *BC* пополам) (черт. 70).

Решение. Из точек *B* и *C* растворением циркуля, большим половины *BC*, опишем дуги, которые пересекутся в некоторых



Черт. 69.



Черт. 70.

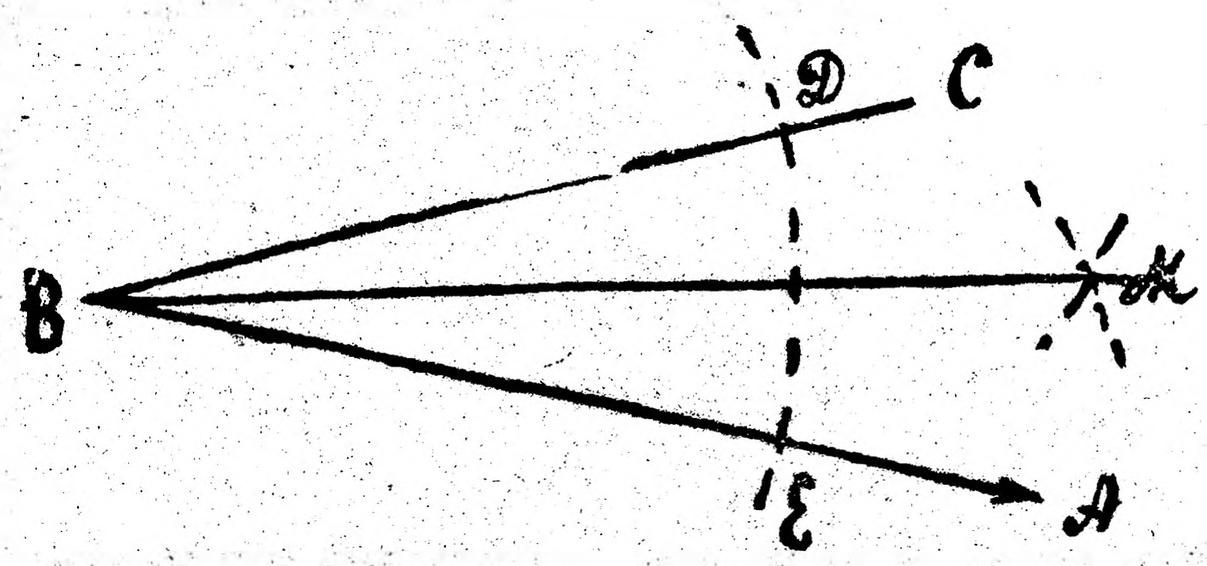
точках *D* и *E* по обе стороны от прямой *BC*. Точки пересечения дуг соединим прямой.

Прямая *DE* есть перпендикуляр к прямой *BC* и делит прямую *BC* пополам. Почему? (См. § 48, выводы 1 и 2.)

Упражнение. Сделать это построение у себя в тетради.

5. Разделить данный угол пополам (черт. 71).

Решение. Из вершины *B* угла *ABC*, как центра, произвольным радиусом опишем дугу, которая засечет стооны угла в некоторых точках *D* и *E*.



Черт. 71.

Из точек *D* и *E* одним и тем же растворением циркуля, большим половины *DE*, опишем дуги, которые пересекутся в точке *M*. Точку *M* соединим с вершиной угла *B*.

Так как $BD = BE$ и $MD = ME$, то BM есть ось симметрии для точек D и E, а потому при перегибании верхней части фигуры (т.-е. угла CBM) около оси симметрии BM симметричные точки D и E совместятся, и угол CBM совместится с углом MBA; следовательно, $\angle CBM = \angle MBA$, т.-е. прямая BM делит данный угол ABC пополам.

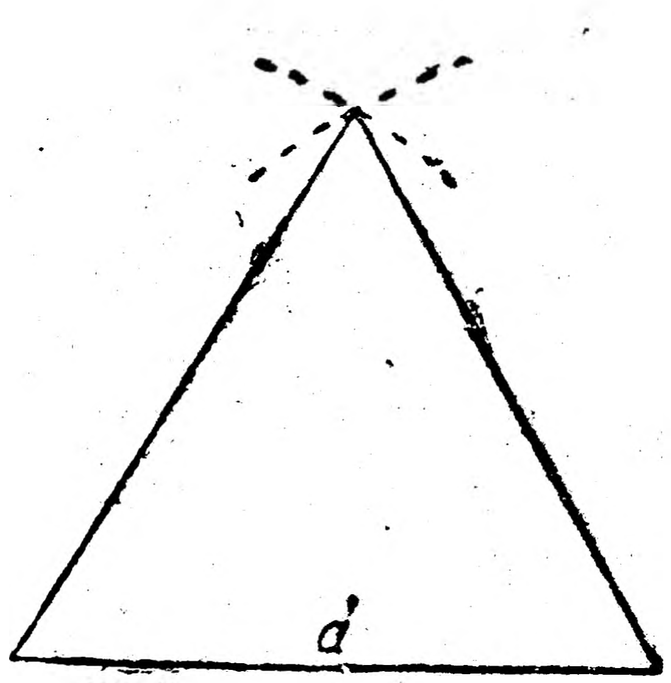
Упражнение. Начертите у себя в тетради произвольный угол и разделите его пополам.

6. В данных остроугольном и тупоугольном треугольниках провести все три высоты.

7. В данном треугольнике построить все три его медианы.

8. В данном треугольнике построить все три его биссектрисы.

9. По данной стороне a построить равносторонний треугольник.

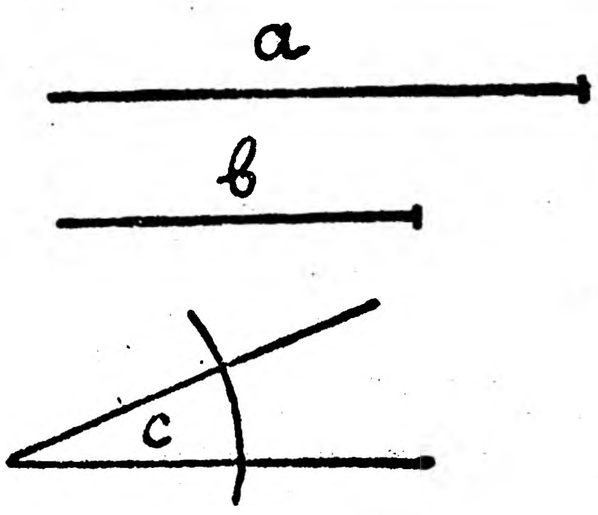


Черт. 72.

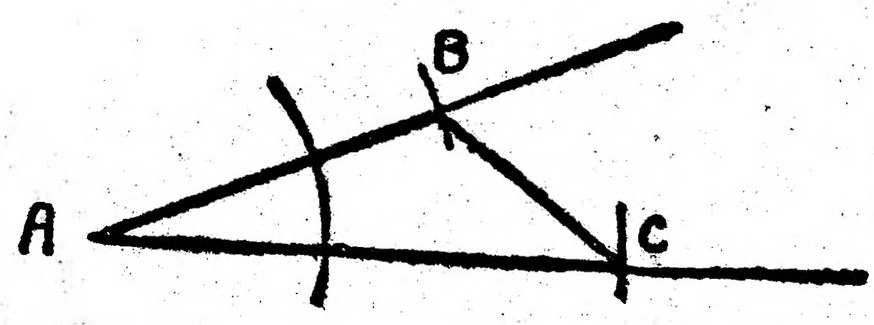
Р е ш е н и е. Из концов данного отрезка a (черт. 72) растворением циркуля, равным этому отрезку, проводим две дуги и точку их пересечения соединяем с концами данного отрезка. Полученная фигура будет равносторонний треугольник с данной стороной a.

10. Построить треугольник со сторонами, равными отрезкам a и b, и углом между ними, равным углу c (черт. 73).

Р е ш е н и е. Отложим отрезок AC, равный отрезку b (черт. 74). При точке A построим угол A, равный углу c, и отложим отрезок AB, равный отрезку a. Точки B и C соединим прямой.



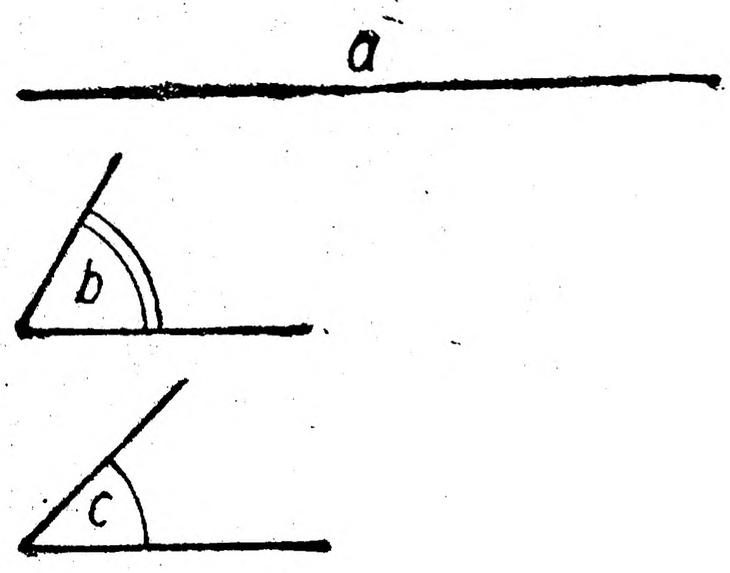
Черт. 73.



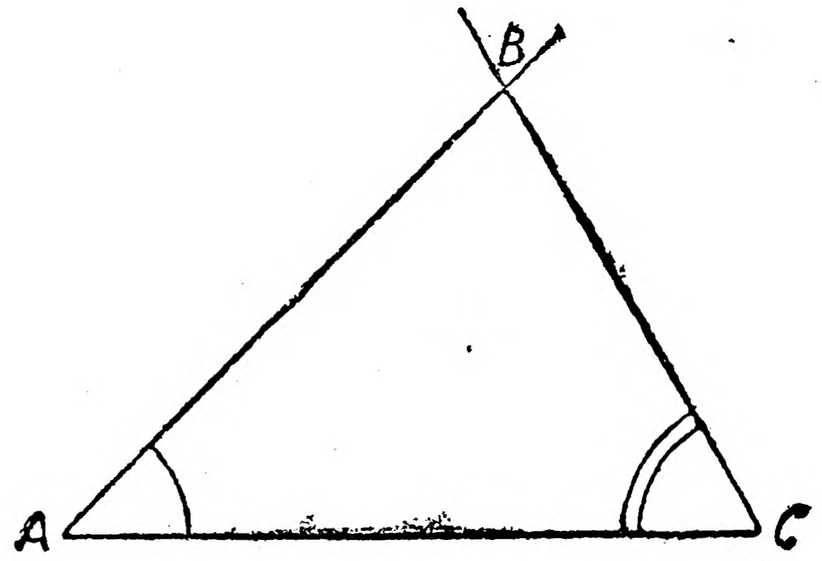
Черт. 74.

11. Построить треугольник по данной стороне и двум данным прилежащим к ней углам (черт. 75).

Р е ш е н и е. Отложим отрезок AC, равный отрезку a; при точке A построим угол A, равный углу c, и при точке C построим угол C, равный углу b. Стороны углов A и C продолжим до пересечения в точке B (черт. 76).



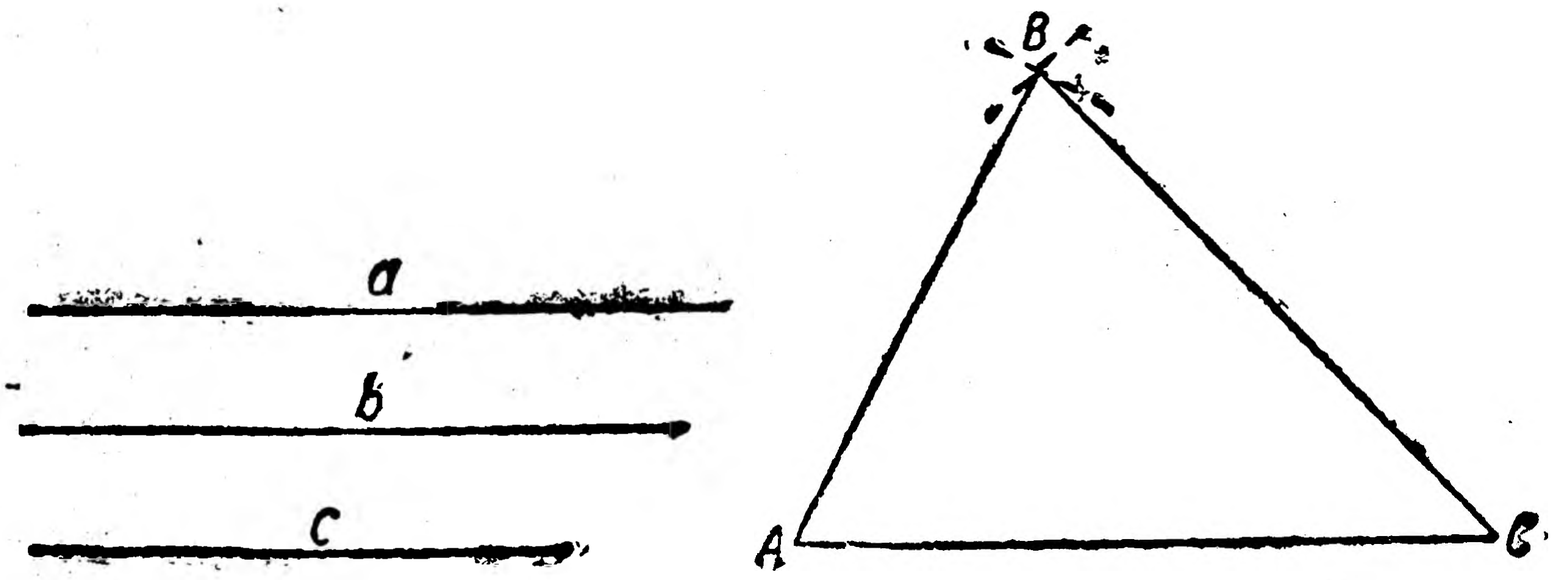
Черт. 75.



Черт. 76.

12. Построить треугольник по трем данным сторонам.

Р е ш е н и е. Отложим отрезок AC, равный отрезку a. Растворением циркуля, равным отрезку c, из точки A проведем дугу

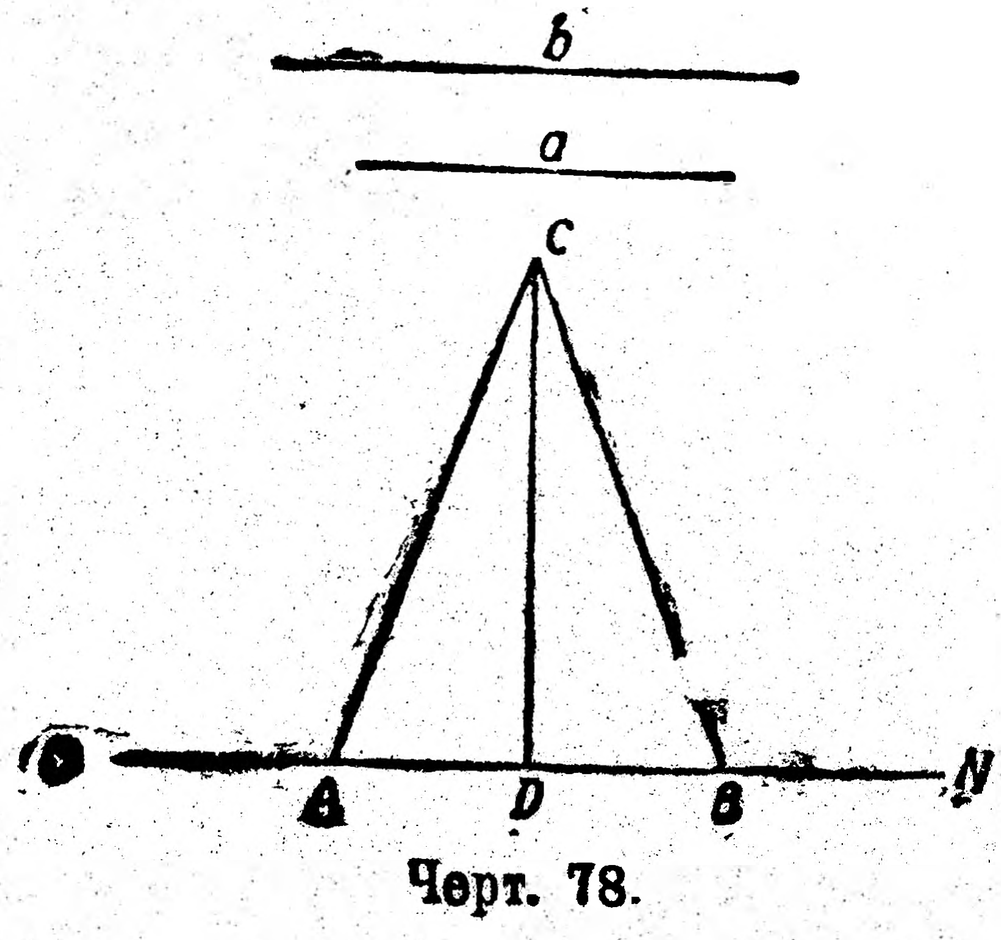


Черт. 77.

и растворением циркуля, равным отрезку b, из точки C проведем вторую дугу. Точку пересечения этих дуг соединим с точками A и C (черт. 77).

13. Построить равнобедренный треугольник по основанию и высоте.

Р е ш е н и е. Пусть данное основание равно отрезку a и данная высота отрезку b. Взяв произвольную прямую MN (черт. 78) и на ней произвольную точку A, отложим от этой точки отрезок $AB = a$ и построим ось симметрии CD для точек A и B (см. задачу 1). На этой оси отложим от точки D



Черт. 78.

отрезок $DC = b$ и его конец C соединим с точками A и B. По свойству оси симметрии $AC = CB$, и, следовательно, треугольник ACB — равнобедренный с данным основанием и данной высотой.

Упражнения. 1) Построить равнобедренный треугольник по данному основанию и данной боковой стороне.

2) Построить прямоугольный треугольник по данным катетам.

3) Построить прямоугольный треугольник по катету и острому углу.

4) Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

5) Построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

6) Построить равнобедренный треугольник: *а*) по высоте и боковой стороне; *б*) по углу при основании и боковой стороне; *в*) по углу при вершине и высоте.

7) Построить точку, симметричную данной точке относительно данной оси.

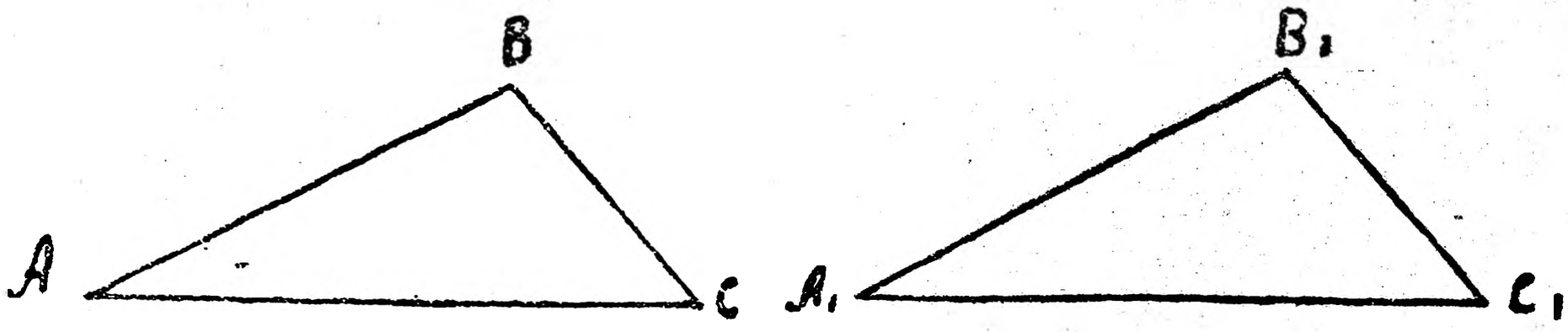
8) Построить треугольник, симметричный данному треугольнику относительно данной оси.

9) Построить параллелограм, симметричный данному параллелограму относительно данной оси.

10) Построить трапецию, симметричную данной трапеции относительно данной оси.

§ 51. Равенство треугольников.

Два треугольника называются равными, если при наложении они совмещаются. На черт. 79 даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$.



Черт. 79.

Указание. В равных треугольниках стороны, лежащие против равных углов, равны, а именно:

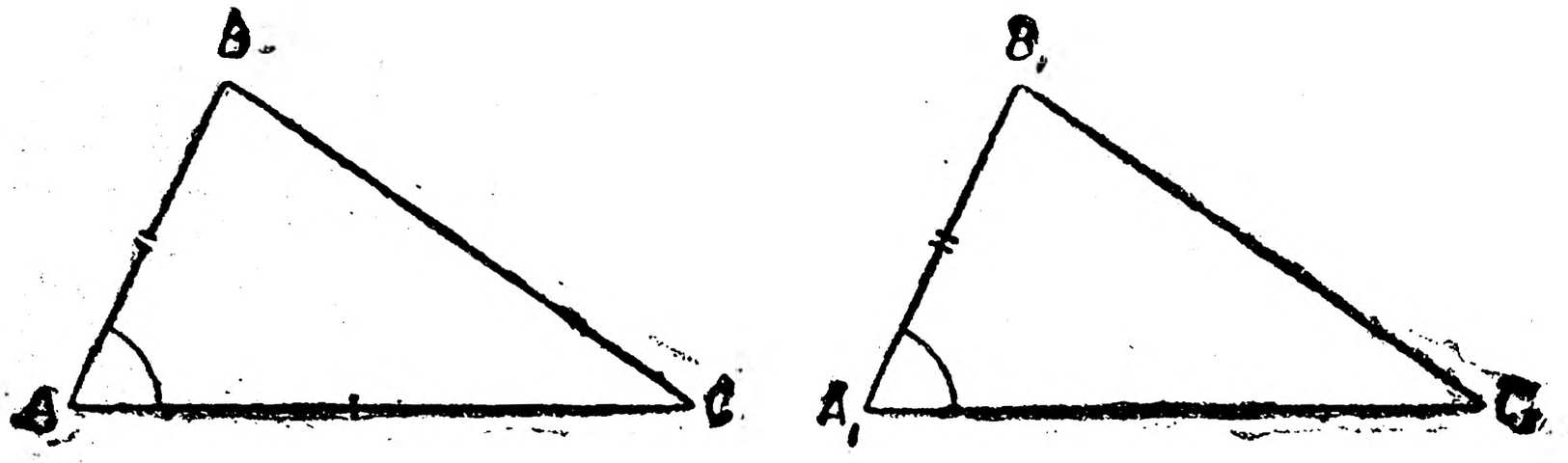
$$\angle A = \angle A_1 \text{ и } BC = B_1C_1;\ \angle B = \angle B_1 \text{ и } AC = A_1C_1;$$
$$\angle C = \angle C_1 \text{ и } AB = A_1B_1.$$

Первый признак равенства треугольников.

На черт. 80 даны два треугольника, у которых

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1 \text{ и } \angle A = \angle A_1.$$

Наложив мысленно $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы $\angle A$ совпал с $\angle A_1$ и сторона AB со стороной A_1B_1, показать, что эти треугольники должны совместиться всеми остальными своими элементами.



Черт. 80.

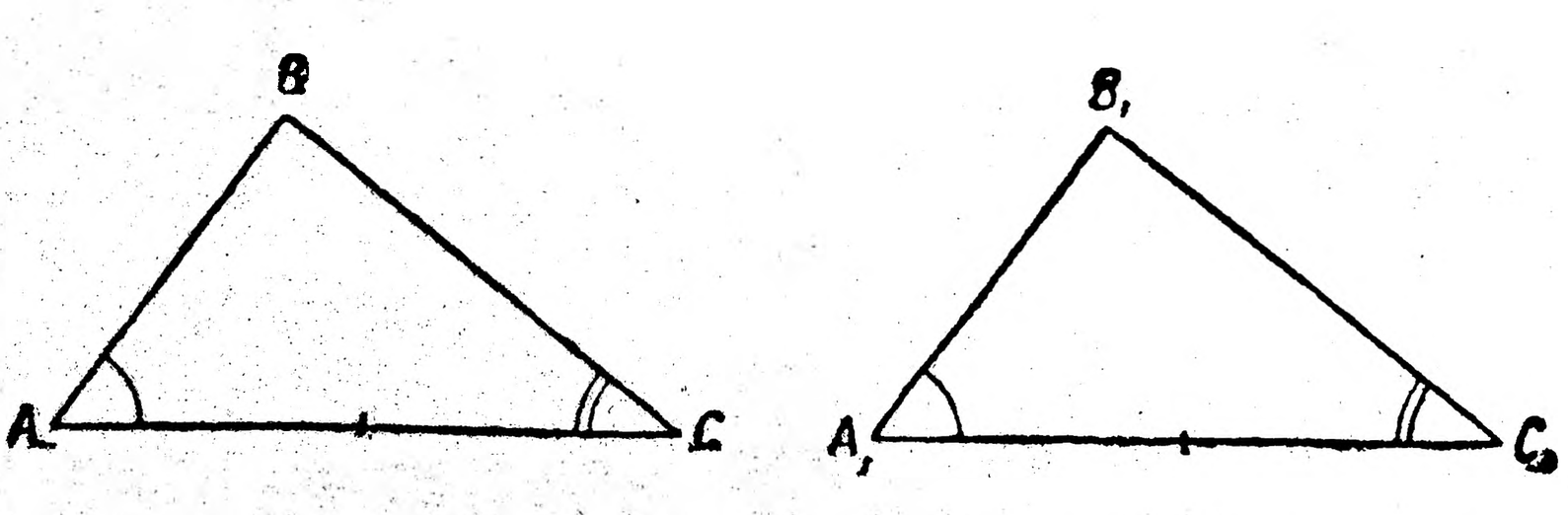
Вывод. *Два треугольника равны, если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника* (первый признак равенства треугольников).

Второй признак равенства треугольников.

На черт. 81 даны два треугольника, у которых

$$AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1 \text{ и } \angle C = \angle C_1.$$

Наложив $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совпала с точкой A_1 и сторона AC совпала со стороной A_1C_1, показать, что эти треугольники должны совместиться всеми остальными своими элементами.



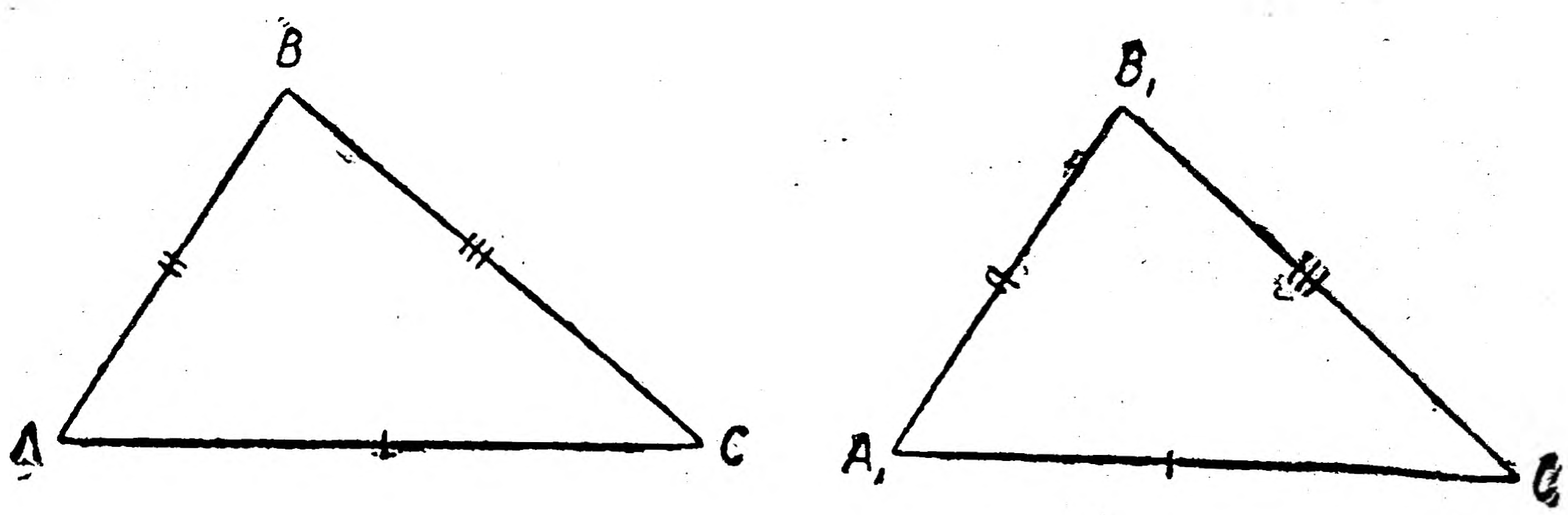
Черт. 81.

Вывод. *Два треугольника равны, если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей стороне другого треугольника* (второй признак равенства треугольников).

Третий признак равенства треугольников.

На черт. 82 даны два треугольника, у которых стороны

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1 \text{ и } BC = B_1C_1.$$



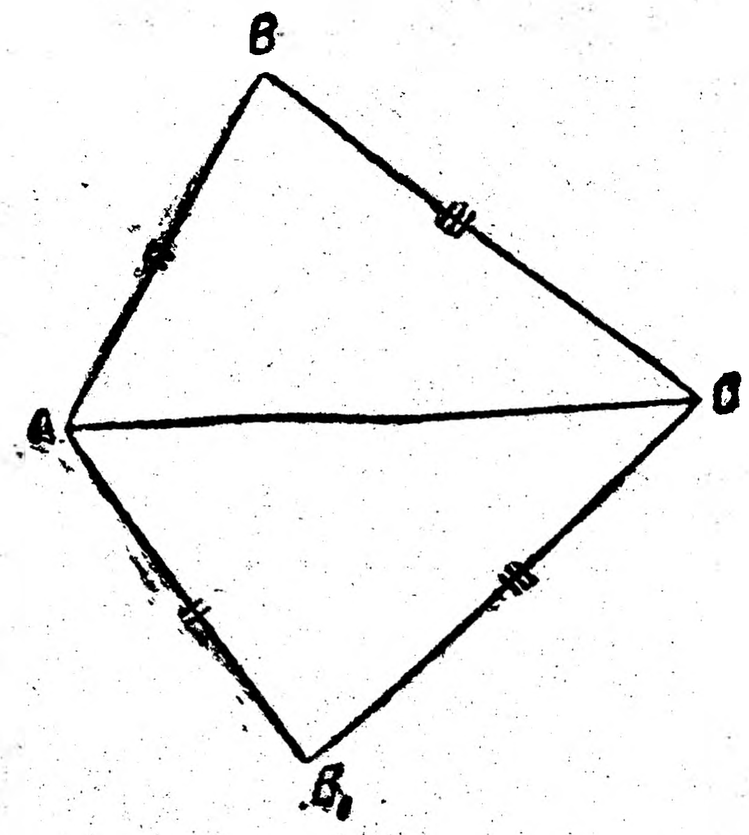
Черт. 82.

1) Приложим $\triangle A_1B_1C_1$ к $\triangle ABC$ (черт. 83) так, чтобы точка A_1 совпала с точкой A и сторона A_1C_1 со стороной AC; из чертежа видно, что точка A находится на равных расстояниях от точек B и B_1 и точка C также находится на равных расстояниях от точек B и B_1. Следовательно, прямая AC есть ось симметрии для точек B и B_1.

2) Показать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Вывод. *Два треугольника равны, если три стороны одного соответственно равны трем сторонам другого треугольника* (третий признак равенства треугольников).

Упражнение. Показать, что два прямоугольных треугольника равны, если они имеют: 1) равные гипотенузы и по одному равному острому углу, 2) равные гипотенузы и по одному равному катету.



Черт. 83.

§ 52. Свойства сторон и углов треугольника.

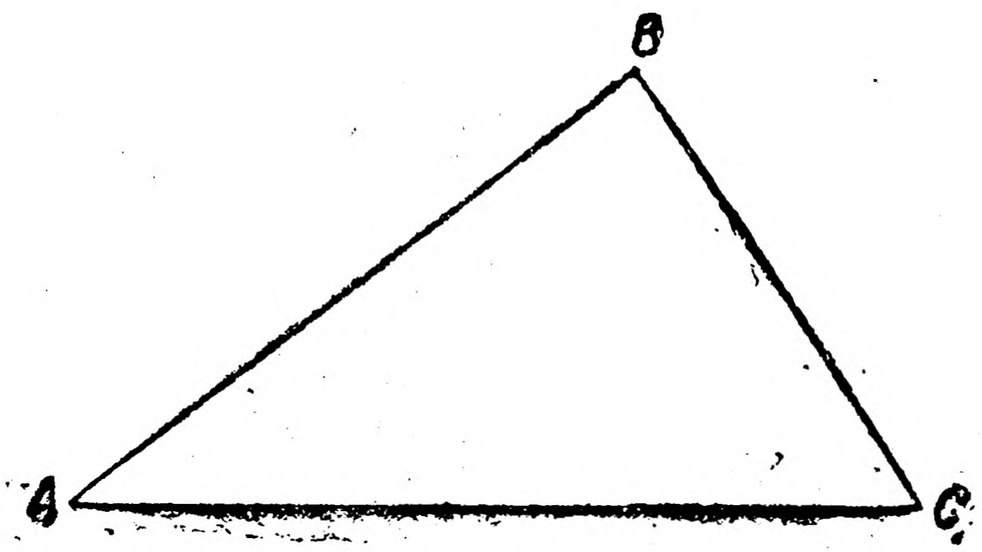
Указание 1. В разностороннем треугольнике против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона, и, обратно, против бо́льшей стороны лежит бо́льший угол.

Указание 2. Из чертежа 84 видно, что

$$AB + BC > AC, \quad (1)$$
$$AB + AC > BC, \quad (2)$$
$$AC + BC > AB, \quad (3)$$

т.-е. *сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.*

Указание 3. Записи (1), (2) и (3) называются *неравенствами.*



Черт. 84.

Отняв от левой и правой части неравенства (1) по AB, *получим.*

$$\begin{array}{r} AB + BC > AC \\ -AB \qquad\quad -AB \\ \hline BC > AC - AB \end{array}$$

т.-е. *одна сторона треугольника больше разности двух других сторон.*

Упражнение. Попробуйте построить треугольник по трем сторонам:

1) 2 *см*, 4 *см* и 8 *см*;
2) 5 *см*, 7 *см* и 12 *см*.

Работа № 7

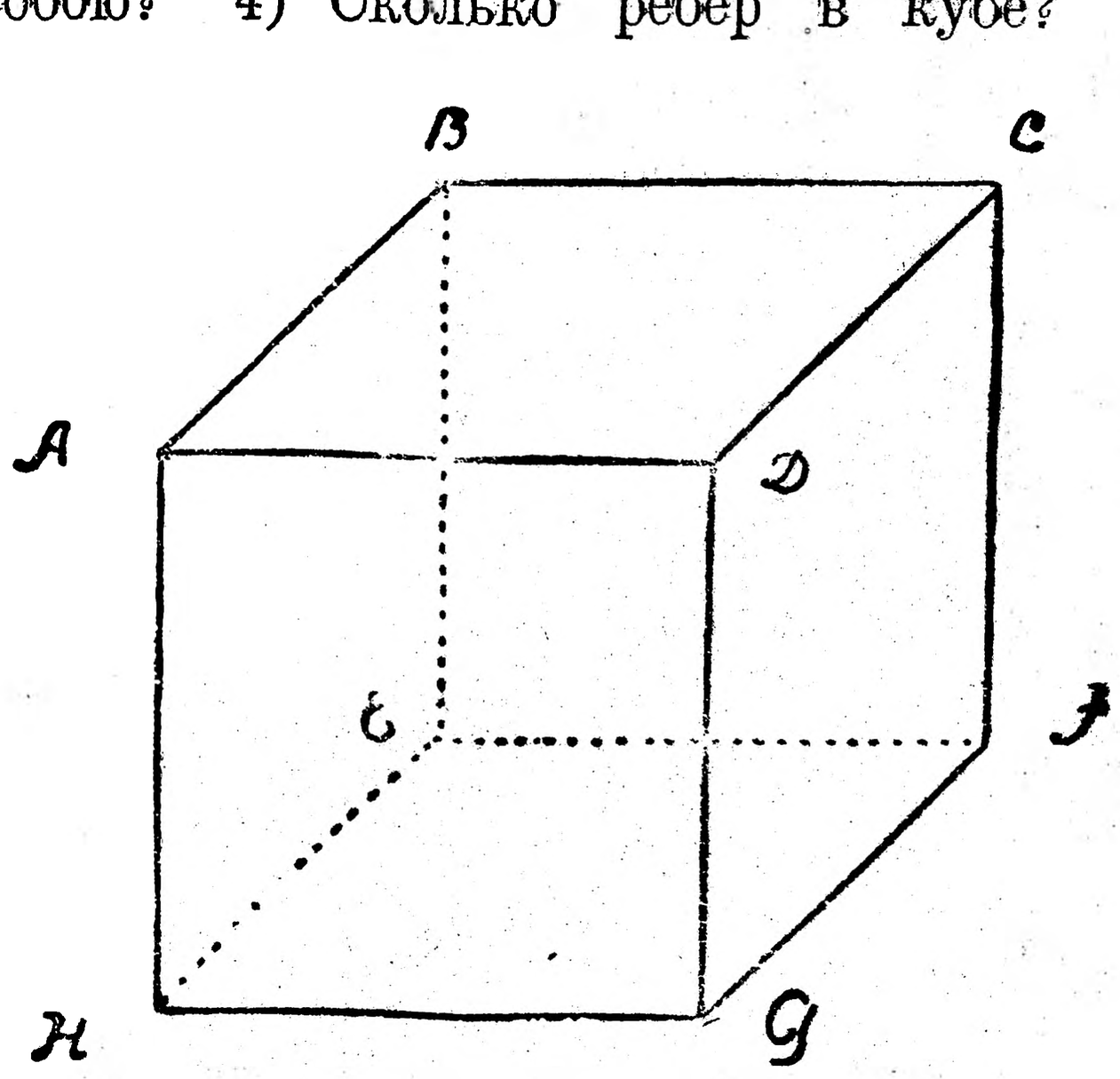
ОБЪЕМЫ.

Куб. Метрические меры объема. Прямоугольный параллелепипед и его объем. Прямой и наклонный параллелепипеды. Призмы. Пирамиды. Зависимость между объемом и весом тела.

§ 53. Куб и метрические меры объема.

На чертеже 85 изображен *куб*. Плоские стенки куба называются его *гранями*. Отрезки *AB*, *BC*, *CD*, *AD*, *AH* и т. д. называются *ребрами* куба.

Вопросы. 1) Сколько граней в кубе? 2) Какой они формы? 3) Равны ли они между собою? 4) Сколько ребер в кубе? 5) Могут ли быть в одном кубе ребра разной длины? 6) Прочесть все грани и ребра куба (черт. 85).



Черт. 85.

Указания. 1) Куб, ребро которого равно одному метру, называется *кубическим метром*. Куб, ребро которого равно одному дециметру, называется *кубическим дециметром* и т. д.

2) Определить объем данного предмета или тела значит узнать, сколько кубических метров или кубических дециметров и т. д. содержится в пространстве, занимаемом данным предметом или телом. Например, определить объем воздуха в данном помещении значит узнать, сколько кубических метров или кубических дециметров и т. д. занимает воздух.

Задача. Начертить кубический дециметр, разбить его на кубические сантиметры и сосчитать, сколько куб. сантиметров содержится в куб. дециметре.

Отв. 1 000

Вопросы.

Сколько куб. дециметров в куб. метре?
„ „ миллиметров „ „ сантиметре?
„ „ сантиметров „ „ метре?
„ „ аршин „ „ сажени?

3) Для определения числа куб. дециметров в куб. метре нужно производить действие: 10 . 10 . 10.

Выражение 10 . 10 . 10 короче обозначается 10^3, так что $10 . 10\ 10 = 10^3$. Выражение 10^3 читают «10 в третьей степени», или «10 в кубе».

Вообще $a . a . a = a^3$ (a в третьей степени, или a в кубе).

Вопрос. Почему третья степень иначе называется *кубом?*

4) Вообще единичное отношение кубических мер равно единичному отношению линейных мер тех же наименований, взятому в третьей степени, или в кубе.

Задачи.

1. Определить объем куба со стороною 2 *см*; 3 *см*; 5 *см*.

2. Составить таблицу кубов чисел от 1 до 16.

3. Определить, пользуясь этой таблицей, чему равно ребро куба, если его объем равен 27 $см^3$; 64 $см^3$; 216 $см^3$; 512 $см^3$; 1 728 $см^3$.

4. Во сколько раз объем куба с ребром 6 *см* больше объема куба с ребром 2 *см*?

5. Как увеличится объем куба, если ребро его увеличится в 2 раза? в 5 раз? в 7 раз? в a раз?

6. Определить сумму объемов двух кубов, если

ребро 1-го куба равно	ребро 2-го куба равно
3 *см*	2 *см*
5 *см*	4 *см*
10 *см*	9 *см*
a	b

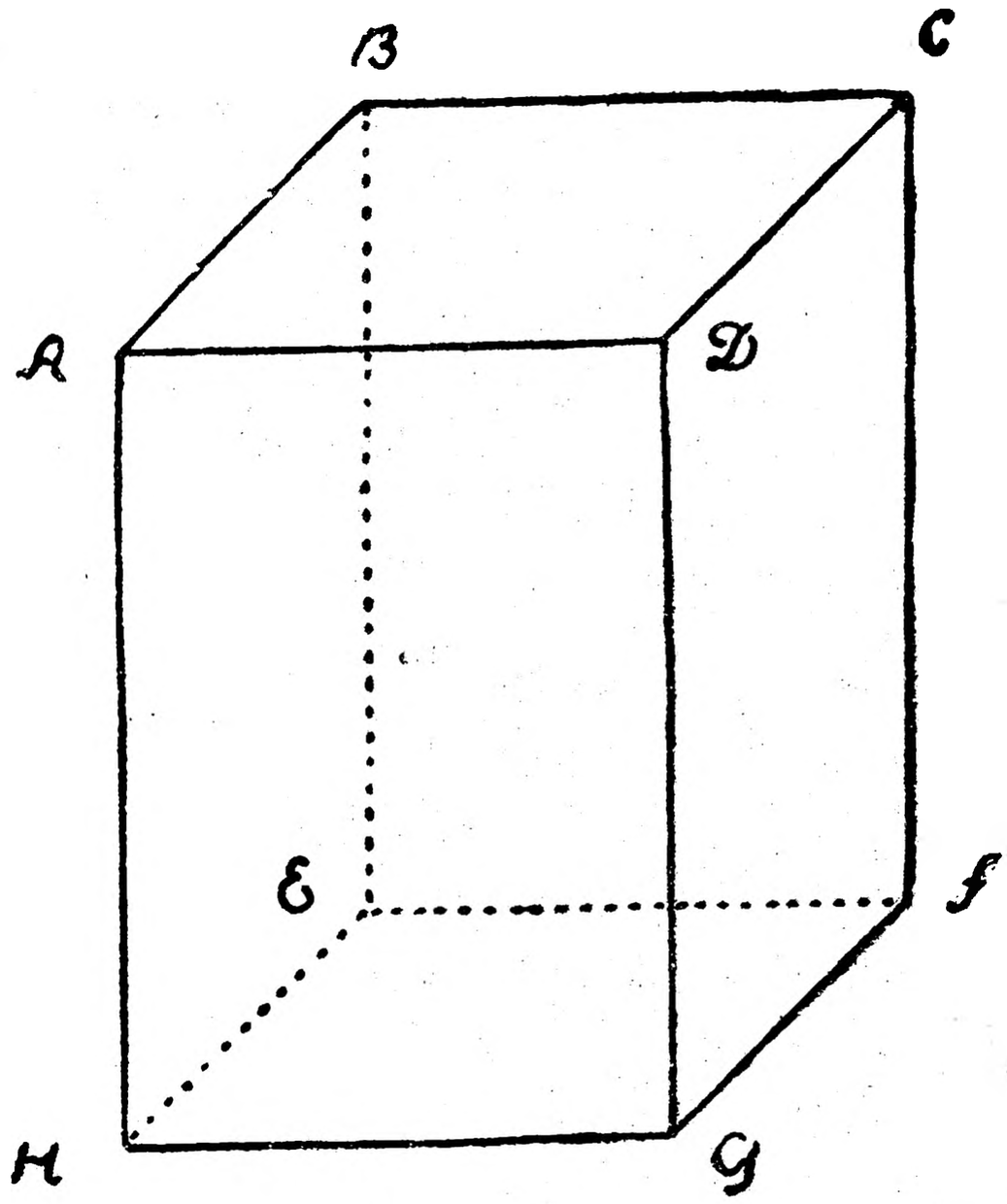
7. Определить разность объемов двух кубов по данным предыдущей таблицы.

8. Что геометрически выражают записи: $2a^3$? $3b^3$? $4c^3$?

§ 54. Прямоугольный параллелепипед.

На чертеже 86 изображена форма объема, называемая прямоугольным параллелепипедом.

Прямоугольный параллелепипед отличается тем, что все его грани прямоугольники. В частности некоторые грани могут быть квадратами.



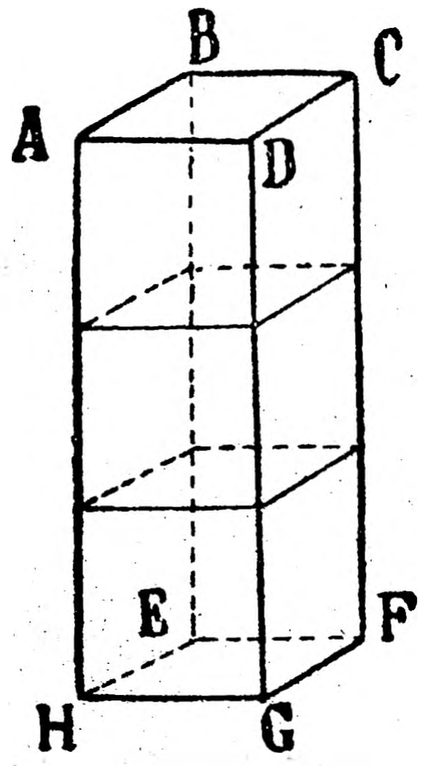
Черт. 86.

Вопросы. 1) Указать сходство и различие между параллелепипедом и кубом. 2) Какой параллелепипед называется кубом?

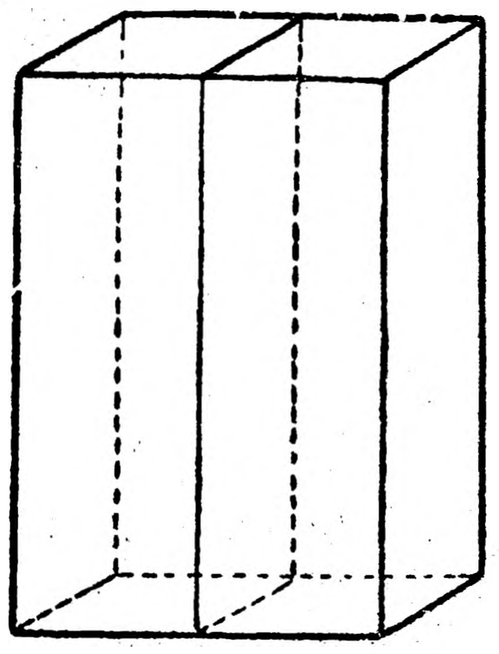
Грани *ABCD* и *EFGH* (черт. 86) обыкновенно называют верхним и нижним *основаниями* параллелепипеда, другие грани называют боковыми. Расстояние между основаниями, которое в этом случае равно длине бокового ребра, называется *высотой* параллелепипеда.

§ 55. Объем прямоугольного параллелепипеда.

Положим, что основания прямоугольного параллелепипеда — квадраты (черт. 87) со стороной, равной 1 *см*, а высота его или, что все равно, боковое ребро равно 3 *см*. Как видно из чертежа, объем этого параллелепипеда равен 3 $см^3$.



Черт. 87.



Черт. 88.

Выводы. 1) Сколько кубических сантиметров содержит прямоугольный параллелепипед с такими же квадратными основаниями, если его боковое ребро равно 5 *см*? 1 *дм*?

2) Сколько кубических сантиметров содержит прямоугольный параллелепипед с такими же квадратными основаниями, если его боковое ребро равно 20 *см*? 75 см? 8 *дм*?

3) Какое изменение произойдет с объемом такого параллелепипеда, если его высота увеличится в два раза, три раза и т. д.?

Задача. Определить объем прямоугольного параллелепипеда с прямоугольным основанием, площадь которого содержит 2 *см*² (черт. 88), а высота — такая же, как в предыдущем случае (черт. 87), — равна 3 *см*.

Вопросы. 1) Во сколько раз площадь основания этого параллелепипеда больше площади основания параллелепипеда изображенного на черт. 87?

2) Во сколько раз объем этого параллелепипеда (черт. 88) больше объема предыдущего (черт. 87)?

3) Какое изменение произойдет с объемом параллелепипеда (черт. 88), если площадь его основания увеличить в два, три и т. д. раз?

4) Во сколько раз объем прямоугольного параллелепипеда, имеющего высоту 3 *см* и стороны основания 3 *см* и 4 *см*, больше объема данного параллелепипеда (черт. 88)?

5) Вычислить объем этого нового параллелепипеда.

6) Какие числа надо перемножить, чтобы получить число, выражающее объем этого параллелепипеда? Что эти числа выражают?

7) В каких единицах выражается объем параллелепипеда?

Вывод. Объем прямоугольного параллелепипеда выражается числом, равным произведению числа, выражающего площадь его основания, на число, выражающее длину его высоты.

Для краткости этот вывод формулируется так: *объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту*. В дальнейшем будем пользоваться такой краткой формулировкой.

Обозначив площадь основания прямоугольного параллелепипеда через B, высоту через h, объем — V, получим

$$\boxed{V = B \cdot h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Указание. Объем параллелепипеда есть *функция* площади его основания и высоты.

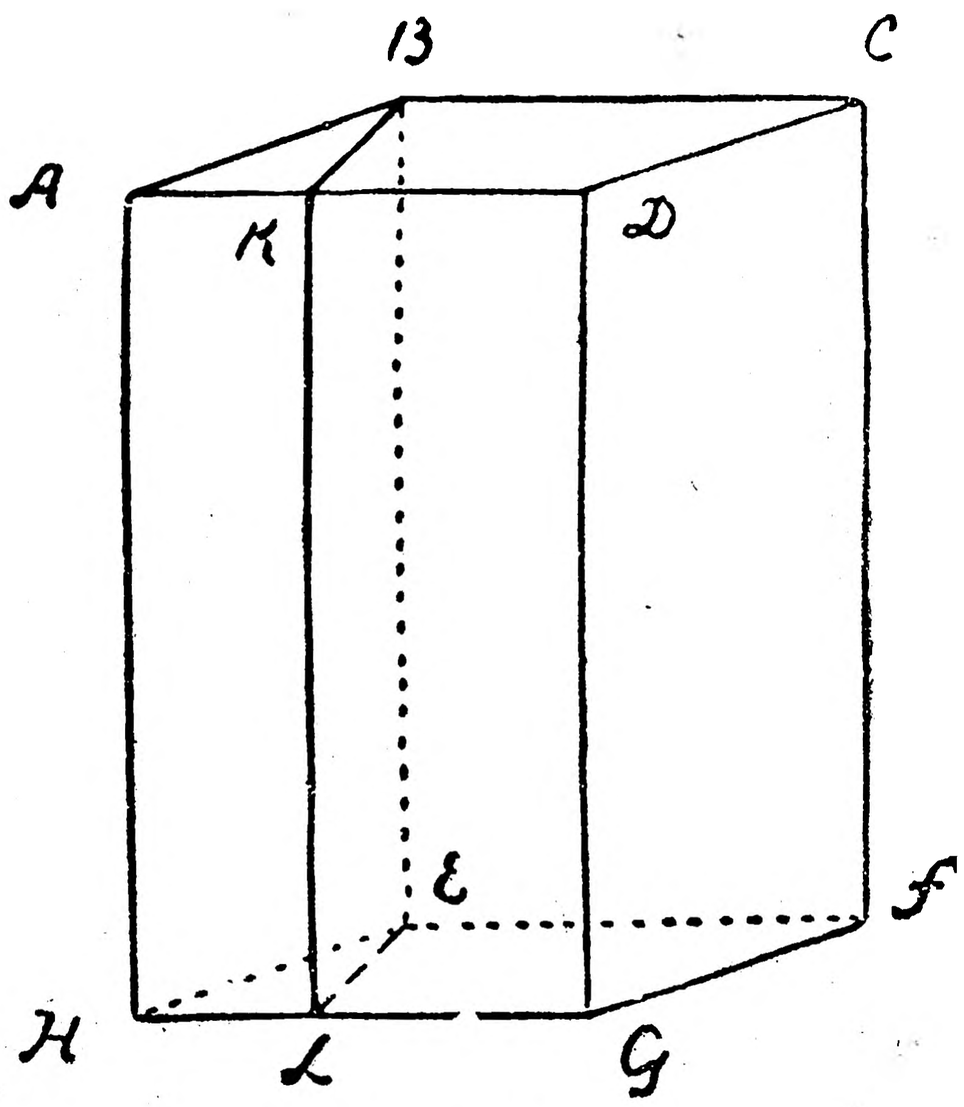
Вопрос. Во сколько раз увеличится объем параллелепипеда если увеличить одновременно площадь его основания в два раза и высоту в 3 раза?

§ 56. Прямой и наклонный параллелепипеды.

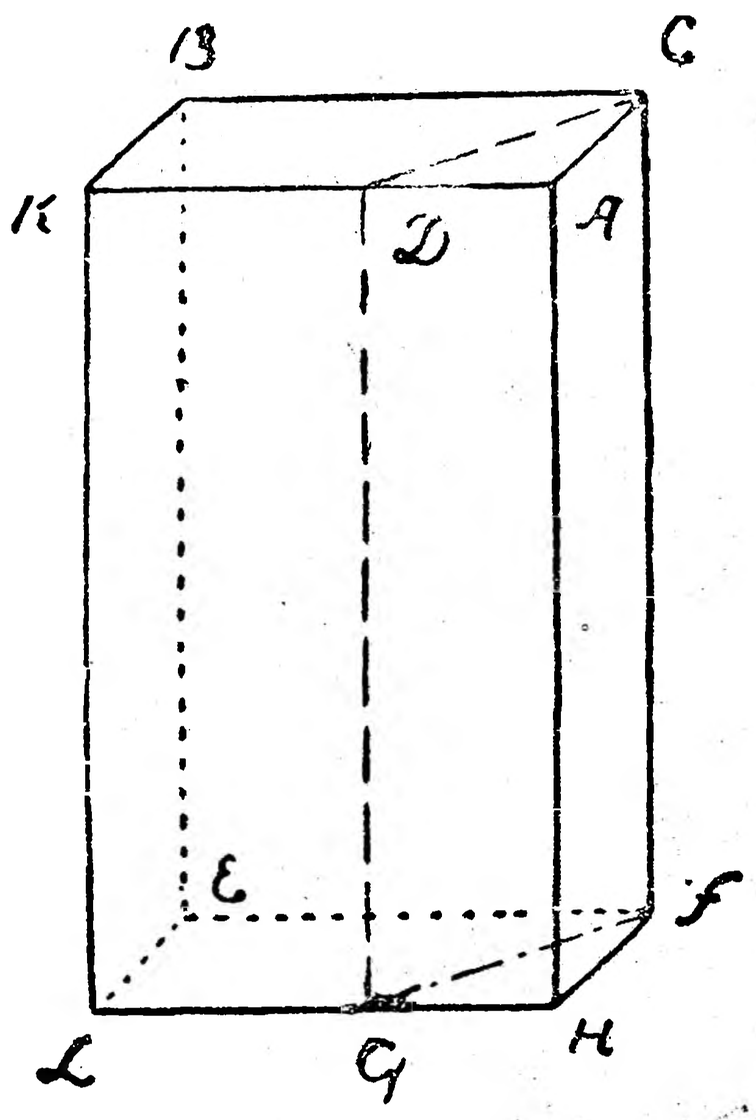
Параллелепипед, отличающийся от прямоугольного только тем, что основания его параллелограмы, называется прямым параллелепипедом.

Отрезав часть от прямого параллелепипеда (черт. 89) по высотам оснований его BK и EL и приложив ее с противоположной стороны, как указано на чертеже 90, получим прямоугольный параллелепипед, площадь основания которого равна площади основания прямого параллелепипеда; поэтому *объем прямого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.*

Параллелепипед, у которого кроме оснований и другие грани параллелограмы, называется *наклонным параллелепипедом.*



Черт. 89.



Черт. 90.

Объем такого параллелепипеда также равен произведению площади его основания на высоту.

Вообще, *объем всякого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.*

Задачи.

1. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого суть 2,5 *см* и 3,4 *см*, а высота равна 1,5 *см*.

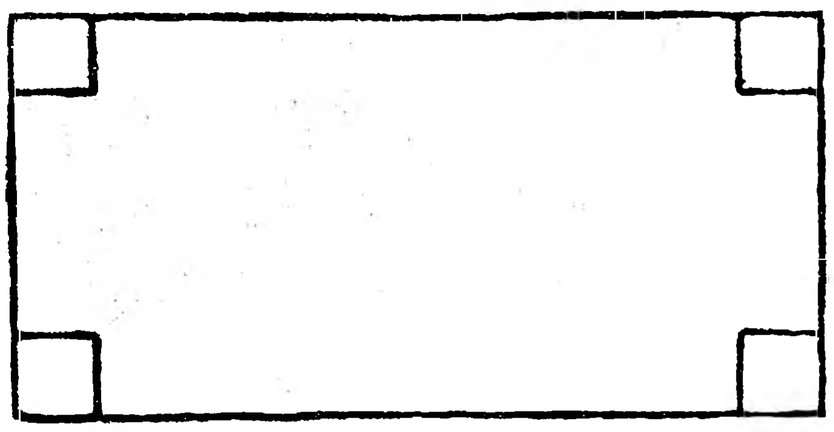
2. Сколько кубических метров земли нужно вынуть для углубления колодца на $15^3/_4$ *м*, если площадь поперечного сечения колодца равна $3^3/_4$ *кв. м*?

3. Что будет стоить вырыть пруд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, 18 *м* длины, 10 *м* ширины и 5 *м* глубины, если за выемку 1 *куб. м* платят 50 коп.? *Отв.* 450 руб.

4. Кубическое содержание воздуха в комнате, длиною в 5,2 *м* и шириною в 3,4 *м*, равняется 61,88 *куб. м*. Определить высоту комнаты. *Отв.* 3,5 *м*.

5. Основание параллелепипеда есть ромб, которого диагонали равны 5 *дм* и 8 *дм*. Его объем равен 315 *куб. дм*. Определить высоту параллелепипеда. *Отв.* 15,75 *дм*.

6. Из железного листа размером 2 *м* × 1 *м* вырезали по его углам равные квадраты с стороной 2 *дм* каждый и из оставшейся части сложили открытую коробку (черт. 91). Определить емкость этой коробки. *Отв.* 192 *куб. дм*.



Черт. 91.

Вопросы. Увеличится или уменьшится емкость коробки, если вырезать квадраты со стороной 3 *дм*? со стороной 1 *дм*? В каком из этих случаев получается коробка наибольшей емкости?

7. Комната имеет размеры 8 *м* × 6 *м* × 4 *м*. В ней три окна, размером каждое $1^1/_2$ *м* × 2 *м*, и две двери, размером каждая 2 *м* × $2^3/_4$ *м*. Сколько нужно кусков обоев для оклейки комнаты, если каждый кусок имеет размеры $^1/_2$ *м* × 6 *м*? *Отв.* $30^2/_8$ куска.

8. Сколько *кг* краски потребуется, чтобы окрасить 100 балок, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, сторона которого 1,75 *дм*; длина каждой балки 4 *м*. На один *кв. м* окрашиваемой поверхности идет 0,125 *кг* краски. *Отв.* 35 *кг*.

§ 57. Призмы.

Разрезав параллелепипед (черт. 92) по диагоналям его оснований *BD* и *EG*, получим два совершенно одинаковых тела (черт. 93). Каждое из этих тел называется *призмой*. Основания этих призм треугольники. Такие призмы называются *треугольными призмами*.

Вопросы.

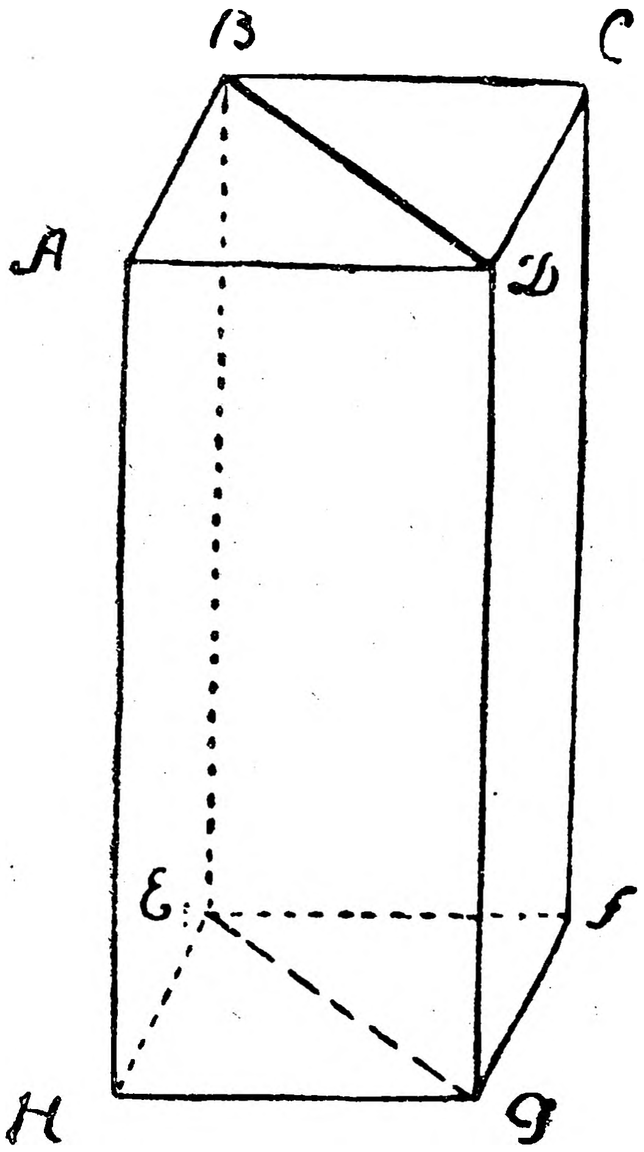
1. Пусть площадь *EFGH* основания параллелепипеда (черт. 92) равна 8 *кв. см*, а высота его равна 5 *см*. Чему равен объем данного параллелепипеда?

2. Чему равен объем треугольной призмы $ABDHEG$ (черт. 93)?

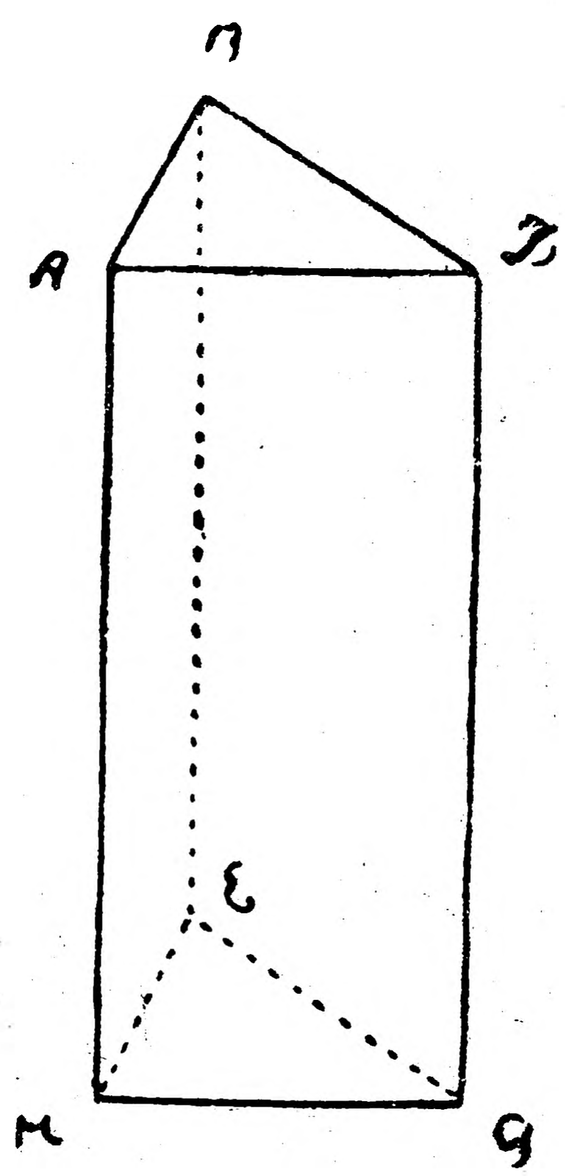
3. Чему равна площадь основания этой треугольной призмы?

4. Чему равна высота этой треугольной призмы?

Вывод. *Объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.*



Черт. 92.



Черт. 93.

Обозначив площадь основания призмы через B, высоту — h, объем — V, получим

$$\boxed{V = B \cdot h} \qquad (6)$$

Указание. Если высота призмы равна боковому ребру, то такая призма называется *прямой*.

Задачи.

1. Взять модель треугольной призмы и вычислить ее объем и ее боковую поверхность.

(Указание. *Боковой поверхностью* призмы называется сумма площадей ее боковых граней).

2. Чему равна площадь основания треугольной призмы, если объем ее $= 64$ *куб. см*, а высота 1 *дм* 6 *см*?

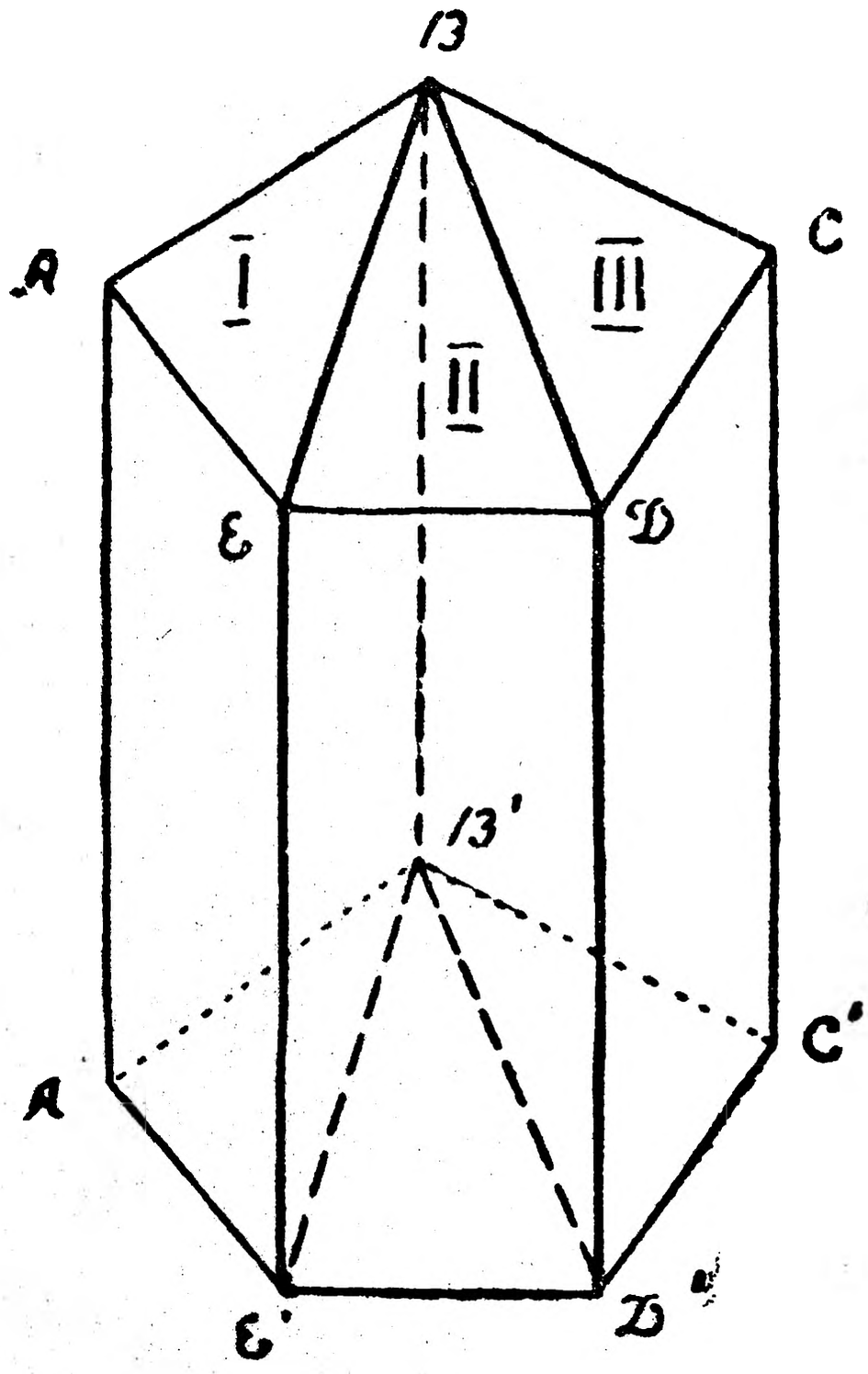
Примечание. Призмы бывают еще четыреугольные, пятиугольные и т. д., в зависимости от формы их оснований.

Вопросы. 1) Какая четыреугольная призма называется параллелепипедом?

2) На чертеже 94 изображена пятиугольная призма. Какую форму имеют ее боковые грани?

3) Назвать их.

4) Сколько всех ребер в призме (черт. 94)?



Черт. 94.

5) Какие ребра равны между собою?

6) Какие грани во всякой призме равны между собою?

7) Как эти грани называются?

8) Разрезав пятиугольную призму (черт. 94) по диагоналям оснований BE, $B'E'$ и BD, $B'D'$, получим три треугольные призмы, обозначенные на чертеже римскими цифрами I, II, III. Указать основания и боковые грани I призмы, основания и боковые грани II призмы, основания и боковые грани III призмы.

9) Пусть высота пятиугольной призмы, или, что все равно, расстояние между ее основаниями равно 5 *см*. Чему равны высоты полученных трех призм?

10) Пусть площадь основания I треугольной призмы равна 3 *кв. см*, площадь основания II треугольной призмы равна 4 *кв. см* и площадь основания III треугольной призмы равна 2 *кв. см*.

Чему равна площадь основания всей пятиугольной призмы?

11) Чему равен объем I призмы, объем II призмы, объем III призмы?

12) Чему равен объем данной пятиугольной призмы?

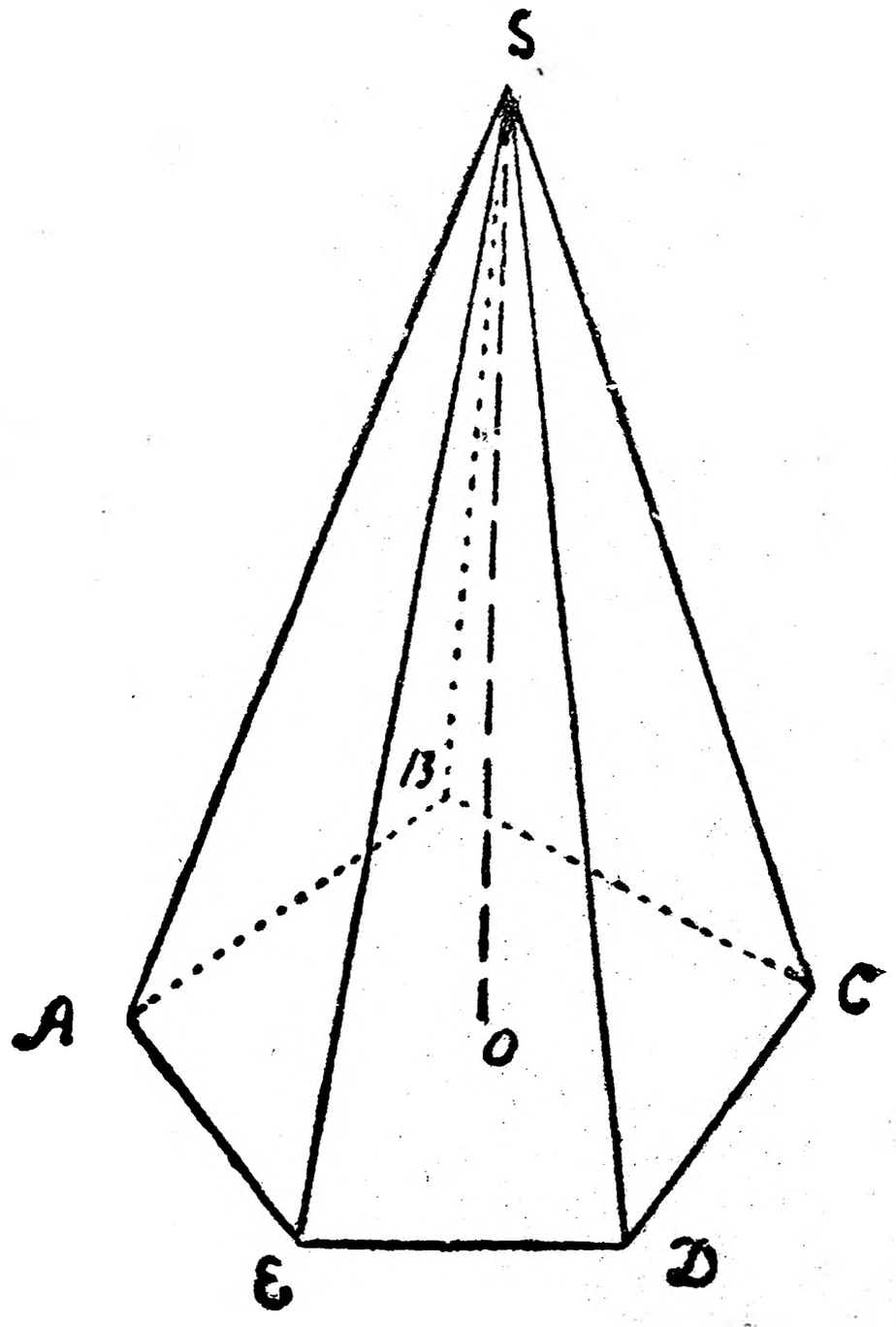
13) Сколько треугольных призм можно получить вышеуказанным способом из шестиугольной, восьмиугольной и т. д. призм?

Вывод. *Объем всякой многоугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.*

Указание. Объем призмы есть *функция* площади ее основания и высоты.

§ 58. Пирамида.

Указание 1. На чертеже 95 изображена форма объема, называемая *пирамидой*. Грань *ABCDE* называется основанием пирамиды, другие грани называются *боковыми*. (Назвать их). Основание этой пирамиды имеет форму пятиугольника, но вообще *основание* пирамиды может иметь форму треугольника, четыреугольника и т. д.; тогда пирамида называется *треугольной*, *четырехугольной* и т. д. Боковые грани пирамиды всегда имеют форму треугольников, сходящихся в одной точке, называемой *вершины пирамиды*.



Черт. 95.

Расстояние *SO* от вершины пирамиды до ее основания (черт. 95) называется *высотой пирамиды*.

Указание 2. Взяв модели призмы и пирамиды с равными основаниями и высотами, путем взвешивания, или наполняя их песком, если они полые, — можно установить, что объем такой пирамиды в три раза меньше объема призмы, имеющей то же основание и ту же высоту.

Вывод. *Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.*

Обозначив площадь основания пирамиды через B, высоту через h, объем — V, получим

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{Bh}{3} \qquad (7)$$

Задачи.

1. Взять модель пирамиды и вычислить ее объем, боковую поверхность и полную поверхность. Указание. Полная поверхность пирамиды равна боковой поверхности, сложенной с площадью ее основания.)

2. Определить высоту пирамиды, площадь основания которой равна 35,4 *кв. см*, а объем равен 53,1 *куб. см*.

Вопрос. В каких единицах выразится высота этой пирамиды?

3. Чугунную пирамиду с высотой, равной 7,5 *дм*, требуется б перелить в форму призмы с таким же основанием. Какова будет высота призмы?

Указание 3. Общее свойство всех рассмотренных выше тел состоит в том, что все они ограничены плоскими стенками, или гранями. Они относятся к разряду геометрических тел, называемых *многогранниками*.

§ 59. Зависимость между объемом и весом тел.

Метрическая система мер веса.

Вычисление объемов тел произвольной формы основано на том, что между объемом и весом тел существует прямая пропорциональная зависимость, т.-е. если имеются два тела из одного и того же вещества, и вес одного тела в два, три и т. д. раз больше веса другого тела, то объем первого тела в два, три и т. д. раз больше объема второго тела.

Задача. Кусок железа весом в один *кг* имеет объем равный приблизительно 128 *куб. см.* Определить объем куска железа весом в $7^1/_2$ *кг*.

Указание 1. Для измерения веса тел в метрической системе за единицу веса принимают вес одного кубического сантиметра чистой холодной воды, который называется *граммом*.

10 грамм	(*г*) = **1**	декаграмму	(*дг*)
100 „	„ = **1**	гектограмму	(*гг*)
1 000 „	„ = **1**	килограмму	(*кг*)
1 000 ***кг***	„ = **1**	1 тонне	(*т*)

1 *г*	=	0,234	зол.
1 *кг*	=	2,442	фунт.
1 *т*	=	61,048	пуд.
1 зол.	=	4,266	*г*
1 фунт.	=	0,409	*кг*
1 пуд.	=	16,380	*кг*

Задачи.

1. Сосуд, емкость которого составляет 8 *куб. дм*, наполнен чистой холодной водой. Определить вес воды.

Ту же задачу решить, если емкость сосуда будет $10^1/_2$ *куб. дм*; $12^3/_4$ *куб. дм*.

2. Чан наполнен водою, которая весит 18 *кг*. Определить емкость чана.

Ту же задачу решить, если вес воды будет $20^1/_2$ *кг*? 25,4 *кг*?

Указание 2. Метрическая система мер веса имеет то преимущество перед русской, что в метрической системе установлена

связь между мерами веса и мерами объема. Для каждого вещества существует число, показывающее, сколько весит единица объема данного вещества, например, один *куб. см* железа весит 7,84 *г*, один *куб. см* меди весит 8,93 *г*. Число 7,84 называется удельным весом железа; число 8,93 есть удельный вес меди. (Чему равен удельный вес воды?)

Указание 3. Для определения объема тела по его весу и удельному весу достаточно разделить число, выражающее его вес, на число, выражающее его удельный вес, при чем, если вес тела выражен в граммах, то объем его выразится в куб. сантиметрах, если же вес тела выражен в килограммах, то объем его выразится в куб. дециметрах. Например, объем куска железа весом в 2 *кг* равен $\frac{2}{7{,}84}$ *куб. дм*, где 7,84 — удельный вес железа.

Обозначив вес тела через P, удельный вес его d, объем его — V, получим

$$\boxed{V = \frac{P}{d}} \qquad (8)$$

откуда

$$\boxed{P = Vd} \qquad (8a)$$

Вопрос. Выразить словами и записать формулы 8 и 8а.

Указание. Объем тела есть *функция* его веса, а вес есть *функция* его объема.

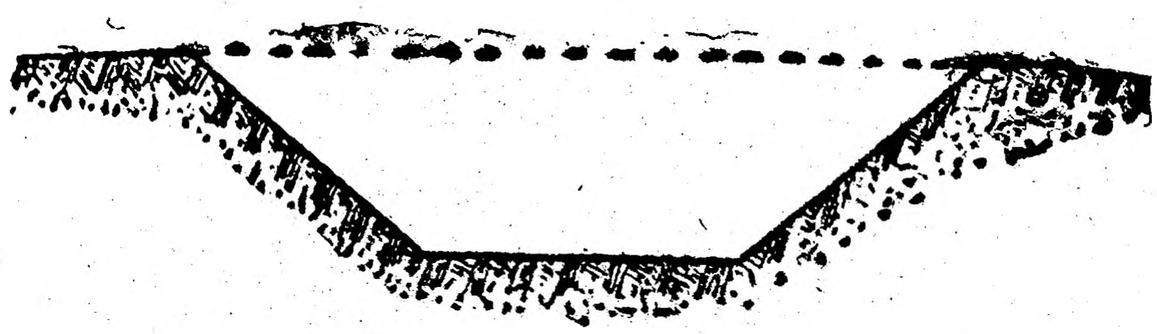
Задачи.

1. Определить объем железного столба весом в 1 *т* (удельный вес железа — 7,84). *Отв.* 0,128 *куб. м.*

Ту же задачу решить, если столб будет медный (удельный вес меди — 8,93). *Отв.* 0,112 *куб. м.*

2. Определить вес медного бруса длиною в 18 *дм* с квадратным основанием, сторона которого равна 1 *дм*. *Отв.* 160,74 *кг.*

3. Для кладки фундамента здания вырыта яма, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, размером 28,2 × 10,5 × 1,8 (метров). Выемка, уборка и перевозка грунта обошлась в среднем по 1,5 руб. с воза.



Черт. 96.

Сколько было уплачено подрядчику

за земляные работы, если 1 *куб. м* грунта в среднем весил 2 *т*, а средняя нагрузка воза составляла 0,5 *т*?

Отв. 3 197,88 руб.

4. При прокладке железнодорожного пути пришлось сделать выемку формы, показанной на чертеже 96. Сколько куб. метров земли было вынуто, если длина выемки равнялась 102,5 *м*, ширина выемки вверху — 30,4 *м*, ширина внизу — 12 *м*, средняя глубина выемки — 7,5 *м*? *Отв.* 16 297,5 *куб. м.*

5. Камень, погруженный в воду, потерял в своем весе, 1,5 *кг*. Определить объем камня. (Указание. Всякое тело при погружении в жидкость теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость. Это положение называется законом Архимеда.) *Отв.* 1,5 *куб. дм.*

6. Определить вес железной пирамиды, погруженной в воду, если пирамида имеет высоту 2,3 *дм* и площадь основания 3,6 *кв. дм*. *Отв.* 18,878 *кг* (с точностью до 0,001 *кг*).

7. Определить объем треугольной пирамиды, у которой высота равна 5,2 *дм*, а основанием служит прямоугольный треугольник, имеющий катеты 1,5 *дм* и 2 *дм*. *Отв.* 2,6 *куб. дм.*

Работа № 8.

ЗАКОНЫ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ.

Буквенные (алгебраические) выражения. Коэффициент. Степень. Основные свойства четырех арифметических действий. Равенство. Тождество. Уравнение. Задачи на составление уравнений с одним неизвестным первой степени.

§ 60. Буквенные алгебраические выражения.

Указание. Если требуется обозначить сложение двух каких-нибудь чисел, при чем сами эти числа не указаны, то это обозначение можно записать так:

«первое число» + «второе число».

Но такая запись была бы слишком длинной и неудобной. Короче, вместо слов «первое число», можно написать какую-нибудь букву, например, a; вместо слов «второе число», можно написать какую-нибудь другую букву, например, b. Тогда сложение двух каких-нибудь чисел будет иметь следующее обозначение:

$$a + b$$

Так как a означает какое-нибудь число и b означает какое-нибудь другое число, но каковы именно эти числа — неизвестно, то сложение таких чисел мы можем только обозначить записью $a + b$, но не можем его выполнить, т.-е. не можем указать, чему равно $a + b$, как в арифметике, где, написав сумму каких-нибудь чисел $5 + 8$, мы можем затем ее и высчитать: $5 + 18 = 13$.

В алгебре обозначение действия сложения и обозначение результата сложения, т.-е. суммы, одно и то же, и поэтому запись (выражение)

$$a + b$$

в алгебре означает, что числа a и b надо сложить, и вместе с тем та же запись означает, что от сложения чисел a и b получается *сумма* $a + b$.

Упражнения.

1) Обозначить разность каких-нибудь двух чисел.

2) Обозначить сумму каких-нибудь трех чисел; четырех чисел.

3) Обозначить произведение двух чисел; трех чисел; четырех чисел. (Указание. Знак умножения между буквами пропускается, напр., $a \times b = ab$).

4) Обозначить знаком деления и знаком дроби частное от деления двух чисел.

Указание. Все обозначения в предыдущих примерах называются *алгебраическими выражениями*.

§ 61. Коэффициент.

Задачи.

1. Обозначить сумму двух одинаковых слагаемых; трех; четырех.

2. Как можно обозначить эти суммы короче?

3. Написать выражения $3a$, $5x$, $4y$ в виде сумм одинаковых слагаемых.

4. Написать сокращенно суммы

а) $ab + ab + ab$, б) $abc + abc + abc + abc$.

5. Написать выражение $5ab$ в виде суммы одинаковых слагаемых.

6. Указание. Числа 3, 2, 5, 4 и т. д. в предыдущих примерах, написанные впереди букв, суть *коэффициенты* (см. § 3).

§ 62. Степень.

Задача. Обозначить произведение двух каких-нибудь одинаковых чисел; трех; четырех.

Указание. Выражение aa короче обозначается a^2. Выражение aaa короче обозначается a^3. Выражение $aaaa$ короче обозначается a^4 и т. д. Такое выражение, или такое произведение, составленное из одинаковых множителей, называется *степенью*; выражение aa, или a^2, называется *второю степенью* числа a, или а

квадратом числа a; выражение aaa, или a^3, называется *третьею степенью* числа a, или *кубом* числа a; выражение $aaaa$, или a^4, называется *четвертою степенью* числа a и т. д. Само число a при этом называется *основанием степени*, числа же 2, 3, 4 и т. д., показывающие, сколько раз основание повторяется множителем, показываются *показателями степени*.

Вопрос. Почему вторая степень числа называется иначе квадратом числа? третья степень числа — кубом этого числа? (См. § 32 и § 53.)

Упражнения.

1. Вычислить степени:

$$7^2;\ 20^2;\ \left(\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(\frac{2}{3}\right)^2;\ (0{,}2)^2;\ 3^3;\ 5^3;\ 20^3;\ \left(\frac{1}{2}\right)^3;\ (0{,}4)^3.$$

2. Вычислить:

1) сумму квадратов чисел 5 и 3;

(Решение: $5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$.)

2) разность квадратов тех же чисел;
3) сумму квадратов чисел 4 и 2;
   разность квадратов чисел 4 и 2;
4) сумму кубов чисел 5 и 3;
   разность кубов тех же чисел.

3. Вычислить:

1) квадрат суммы чисел 5 и 3;

(Решение: $(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$.)

2) квадрат разности тех же чисел;
3) куб суммы тех же чисел;
   куб разности;

4. Вычислить:

1) удвоенное произведение чисел 5 и 3;
   утроенное произведение тех же чисел;
   утроенное произведение квадрата первого числа на второе;
   утроенное произведение первого числа на квадрат второго числа.

2) произведение суммы чисел 5 и 3 на разность тех же чисел.

5. Даны два числа: a и b. Обозначить:

1) сумму квадратов этих чисел;
2) разность квадратов;
3) квадрат суммы;
4) квадрат разности;
5) сумму кубов;
6) разность кубов;
7) куб суммы;
8) куб разности;
9) произведение суммы на разность.

§ 63. Основные свойства четырех арифметических действий.

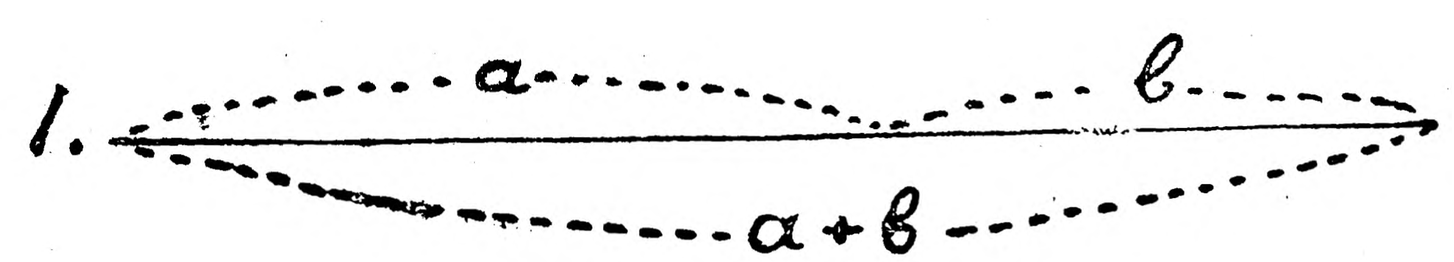
1. Переместительный закон сложения, или переместительное свойство суммы.

Задачи.

1. Проверить равенство: $4 + 3 = 3 + 4$.

2. Чем отличается вторая часть предыдущего равенства от первой части?

3. На черт. 97 произведено сложение отрезков a и b сначала в одном порядке, а затем в другом порядке слагаемых отрезков.



Черт. 97.

Равна ли сумма отрезков $a + b$ сумме тех же отрезков $b + a$? (измерить циркулем или масштабом самые отрезки a и b и их суммы $a + b$ и $b + a$).

4. Проверить равенство: $4 + 3 + 2 = 2 + 4 + 3$.

5. Чем отличается вторая часть равенства от первой части?

6. Проверить на черт. 98 аналогичное равенство

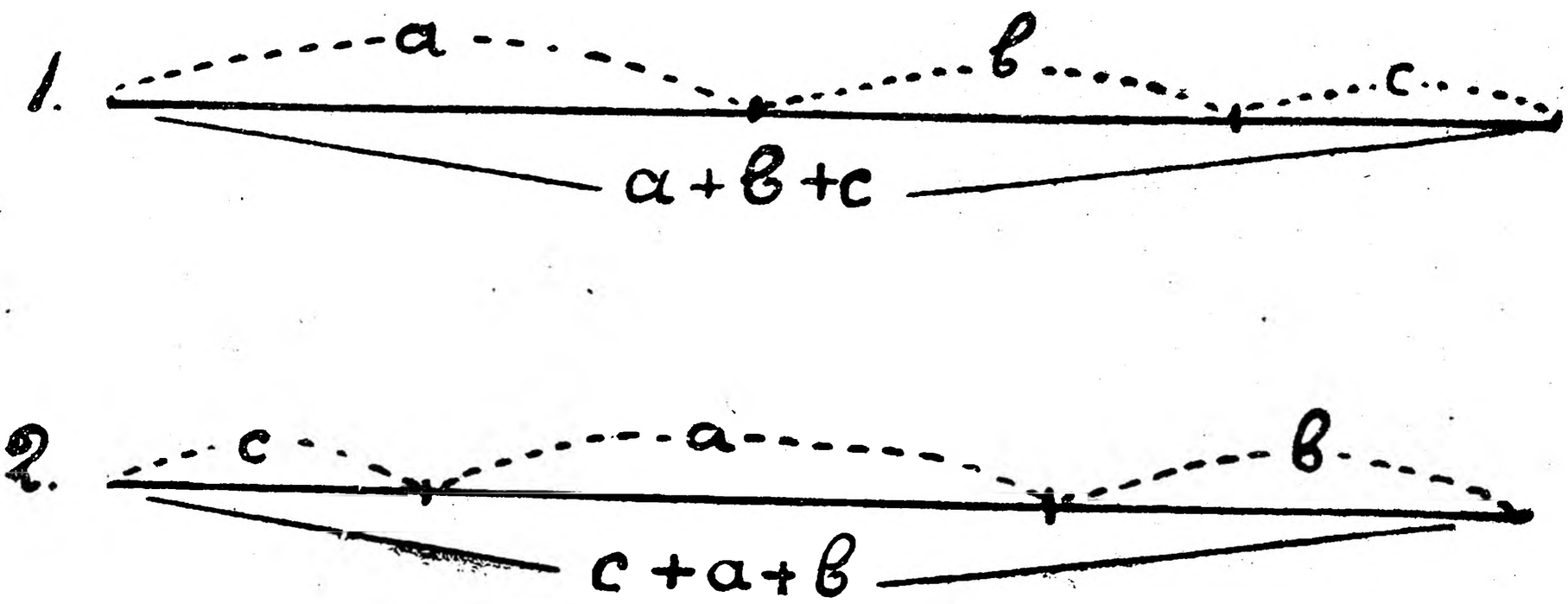
$$a + b + c = c + a + b$$

7. Как еще можно переставить слагаемые в равенствах задач 4 и 6?

8. Выразить словесно (*формулировать*) ***переместительный закон сложения*** или, что то же, *переместительное свойство суммы.*

9. Применить этот закон к упрощению устного вычисления суммы на нескольких примерах.

Пример. $75 + 239 + 125 = 75 + 125 + 239 = 200 + 239 = 439.$



Черт. 98.

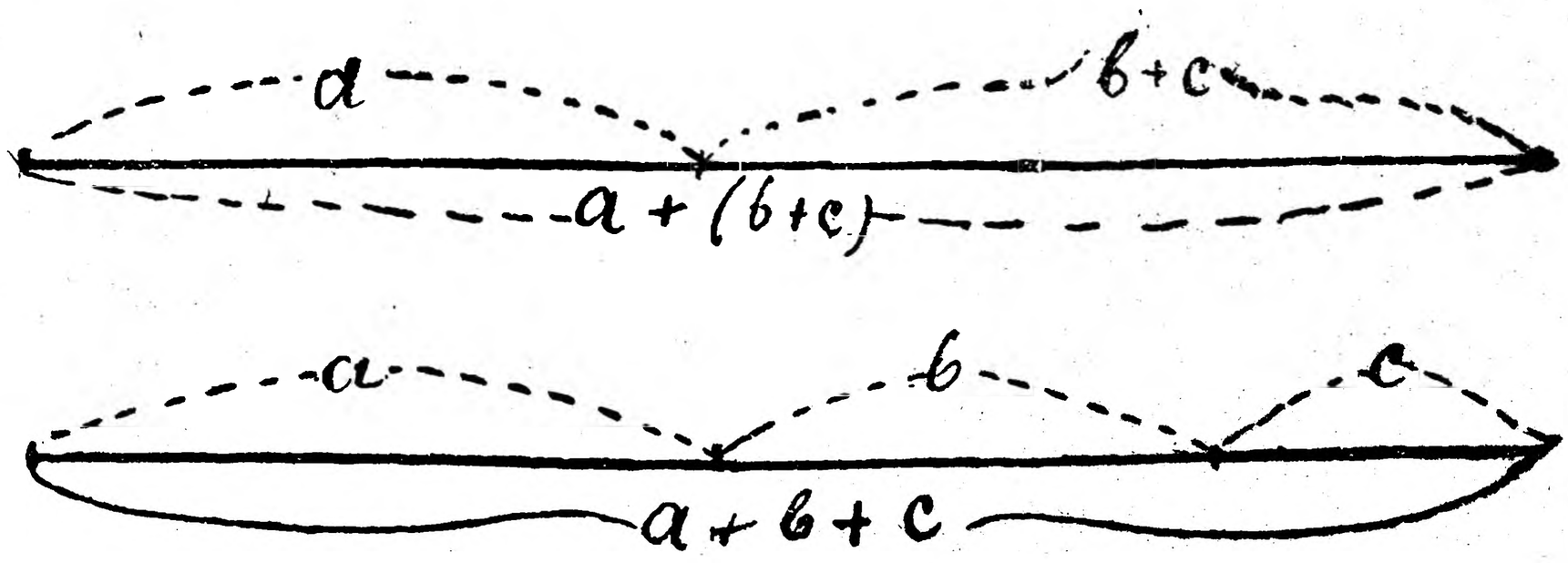
II. Сочетательный закон сложения, или сочетальное свойство суммы.

Задачи.

1. Проверить равенство: $4 + (3 + 2) = 4 + 3 + 2.$

2. Чем отличается порядок действий в первой части равенства от порядка действий во второй части равенства?

3. На черт. 99 произведено сначала сложение отрезка a с суммой отрезков $b + c$, а затем сложение отрезков a, b и c.



Черт. 99.

Проверить измерением, равны ли результаты сложения в обоих случаях.

4. Произвести различные группировки («сочетания») слагаемых в сумме

$$a + b + c + d.$$

Вывод. *Сумма нескольких слагаемых не изменится, если слагаемые разбить на группы и произвести сложение в каждой группе отдельно, а затем полученные результаты сложить.*

III. Зависимость между данными и искомыми в сложении и вычитании.

Примеры.

1) $5 + 3 = 8$, откуда $5 = 8 - 3$, $3 = 8 - 5$.

2) $a + b = s$, откуда $a = s - b$; $b = s - a$,

Задача. Формулировать словесно и записать зависимость между данными и искомыми сложения (т.-е. между слагаемыми и суммой).

Примеры.

1) $9 - 6 = 3$, откуда $9 = 6 + 3$; $6 = 9 - 3$.

2) $15 - 8 = 7$, откуда $15 = 8 + 7$; $8 = 15 - 7$.

3) $a - b = d$, откуда $a = b + d$; $b = a - d$.

4) $x - 13 = 25$, откуда $x = ?$

5) $34 - x = 16$, откуда $x = ?$

Задача. Формулировать словесно зависимость между данными и искомыми вычитания (т.-е. между уменьшаемым, вычитаемым и разностью).

Упражнения. Применить эти зависимости к определению неизвестного числа x в примерах:

1) $x + 8 = 15$; 2) $9 + x = 12$; 3) $x - 6 = 5$; 4) $13 - x = 5$,

5) $x + 1\frac{3}{7} = 3\frac{1}{3}$; 6) $3{,}1 + x = 6{,}08$; 7) $9{,}2 - x = 7{,}25$;

8) $x - 0{,}84 = 1{,}3$.

IV. Изменения суммы и разности при изменении чисел, данных для сложения и вычитания.

Задачи.

1. Взяв два слагаемых и определив их сумму (например, $8 + 6 = 14$), увеличьте на 3 единицы первое слагаемое и укажите, как при этом изменится сумма; уменьшите на 4 единицы второе слагаемое и укажите, как при этом изменится сумма.

2. Взяв разность двух чисел (напр., $12 - 8 = 4$), измените уменьшаемое на несколько единиц и укажите, как при этом изменится разность; измените вычитаемое и укажите, как изменится разность.

Примеры. В представленных ниже табличках знак + означает *увеличение на* число, стоящее рядом с ним, знак — *уменьшение на* число, стоящее рядом с ним. В графах суммы и разности надо проставить числа и перед ними те же знаки + и —, указывающие, как должны измениться суммы и разности:

1-е слагаемое	2-е слагаемое	Сумма
+ 13	+ 6	
— 12	— 8	
+ 16	— 9	

Уменьшаемое	Вычитаемое	Разность
+ 15	+ 10	
— 11	+ 8	
— 12	— 20	

Вывод. *1)* С изменением каждого из слагаемых сумма изменяется. Сумма есть *функция* каждого из слагаемых.

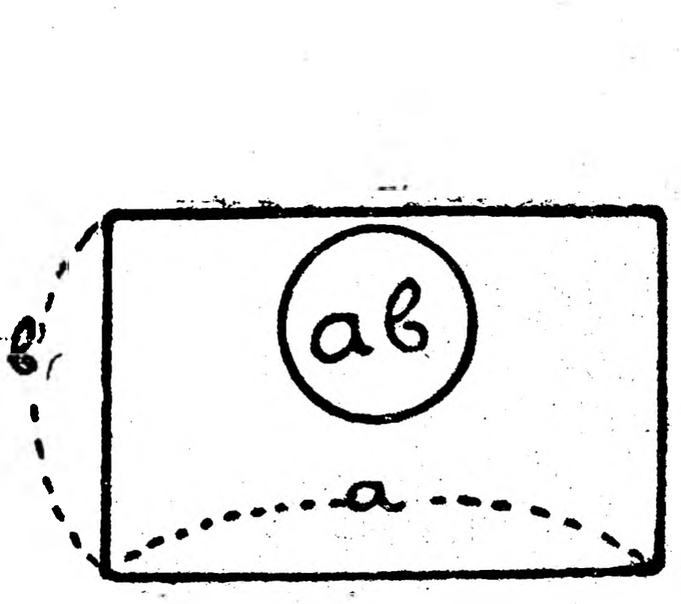
2) С изменением уменьшаемого или вычитаемого разность изменяется. Разность есть *функция* уменьшаемого и вычитаемого.

V. Переместительный закон умножения, или переместительное свойство произведения.

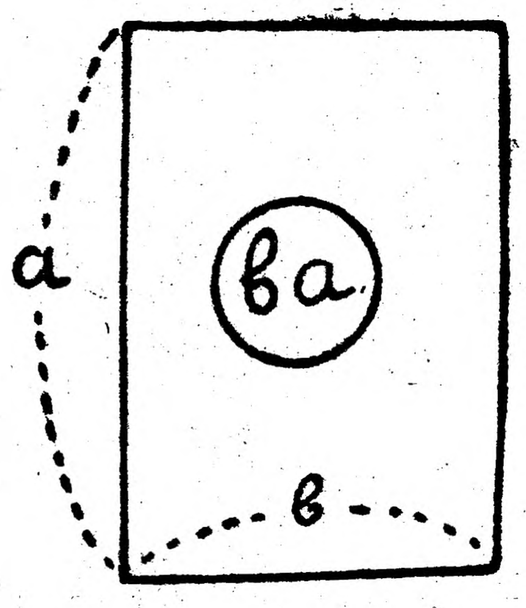
Задачи.

1. Проверить равенства: 1) $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$; 2) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 4$.

2. На черт. 100 нарисован прямоугольник с основанием a и высотою b. На черт. 101 нарисован прямоугольник с основанием b и высотою a. Равны ли их площади?



Черт. 100.



Черт. 101.

3. На чертеже 102 нарисован прямоугольный параллелепипед с ребрами a (длина), b (ширина), c (высота). На черт. 103 нарисован прямоугольный параллелепипед с ребрами b (длина), c (ширина), a (высота). Равны ли их объемы?

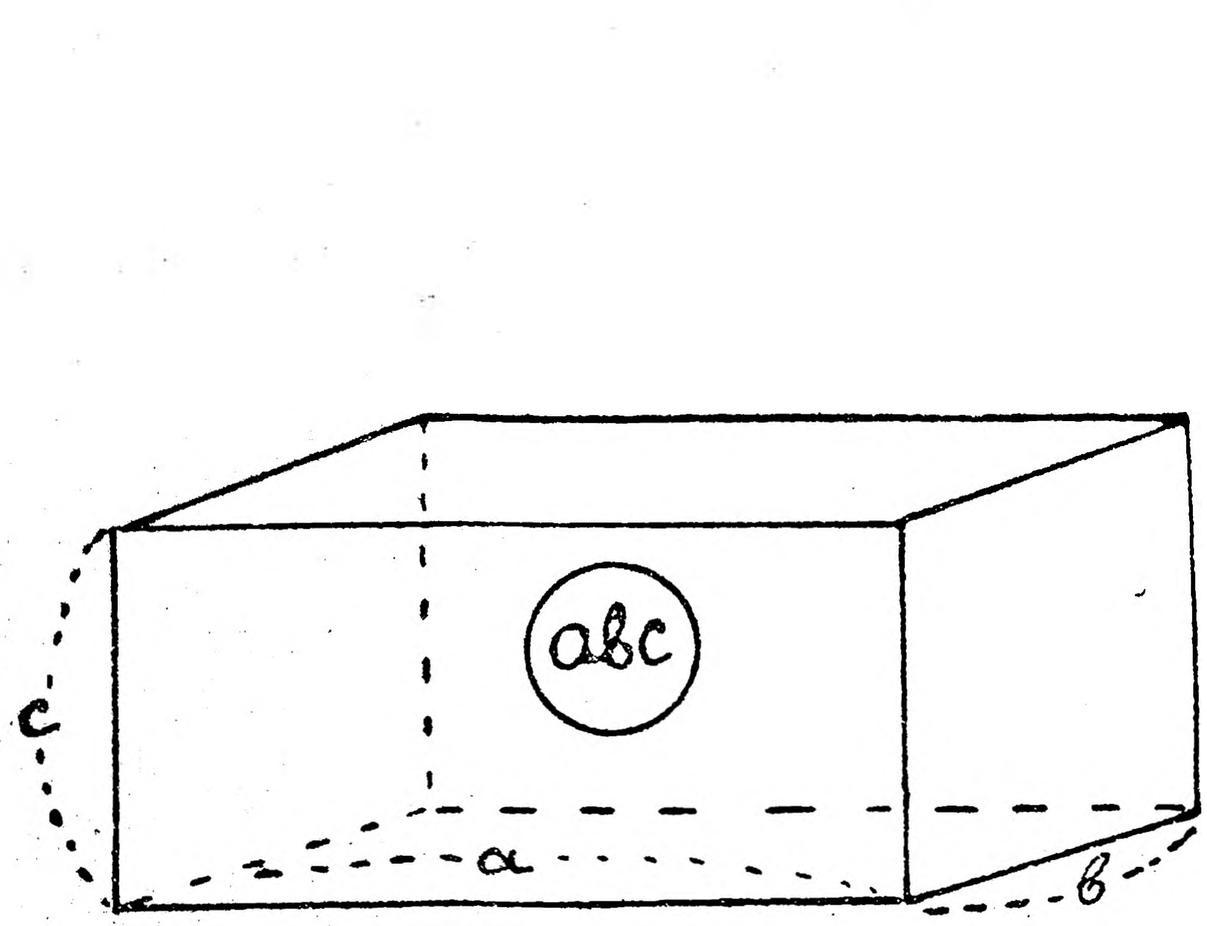
4. Формулировать словесно *переместительный закон умножения* или, что то же, *переместительное свойство произведения.*

5. Применить переместительный закон умножения к упрощению устных вычислений в следующих примерах.

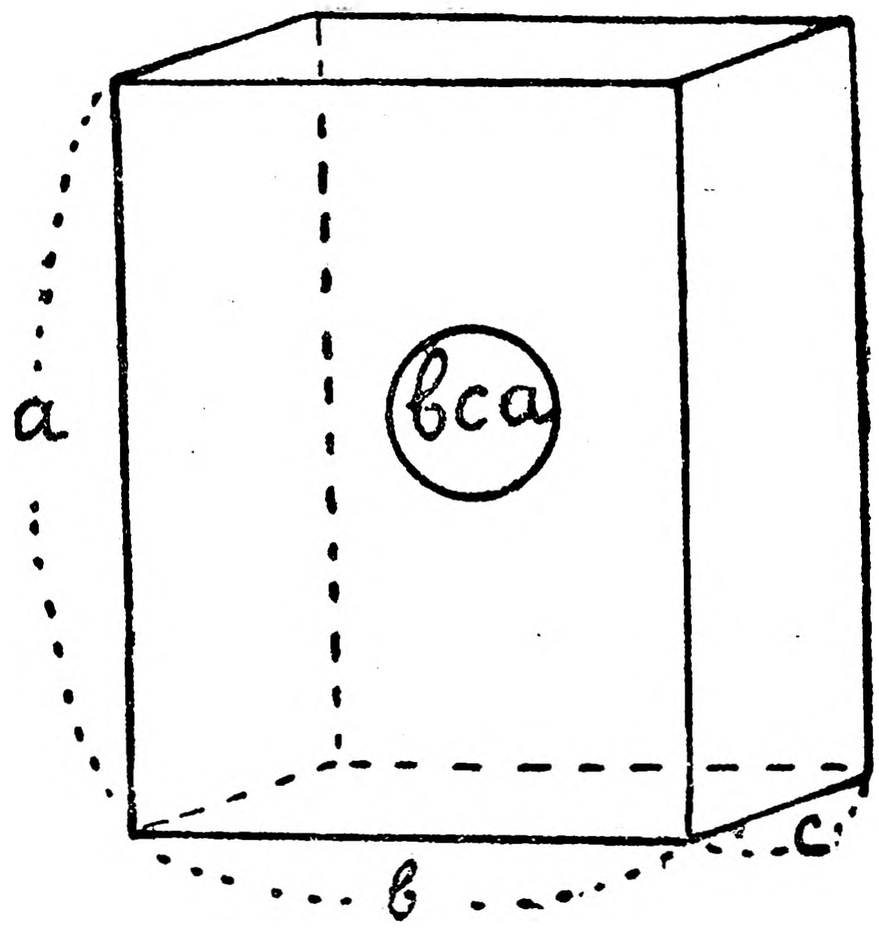
Примеры.

1) $4 \cdot 39 \cdot 25 = 4 \cdot 25 \cdot 39 = 100 \cdot 39 = 3\,900$; **2)** $4 \cdot 87 \cdot 25 = ?$

3) $8 \cdot 35 \cdot 125 = ?$ 4) $8 \cdot 127 \cdot 125 = ?$ 5) $4 \cdot 296 \cdot 250 = ?$



Черт. 102.



Черт. 103.

VI. Сочетательный закон умножения, или сочетательное свойство произведения.

Задачи.

1. Проверить равенства: $4 \cdot (3 \cdot 2) = (4 \cdot 3) \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2$.

2. Чем отличается порядок действий в первом выражении произведения от действий во втором и в третьем выражениях?

3. Если представим объем параллелепипеда в виде произведений $(ab) \cdot c$ (черт. 102) и $a \cdot (bc)$ (черт. 103), то что будет выражать в первом произведении множитель (ab)? множитель c? во втором произведении множитель a? множитель (bc)? Изменится ли от таких группировок («сочетаний») множителей произведение abc, а, следовательно, и объем параллелепипеда?

Вывод. Произведение нескольких сомножителей не изменяется при различных сочетаниях этих сомножителей.

VII. Зависимость между данными и искомыми в умножении и делении.

Примеры. 1) $5 \cdot 3 = 15$, откуда $5 = 15 : 3$; $3 = 15 : 5$. | 2) $ab = p$, откуда $a = p : b$; $b = p : a$.

Задача. Формулировать словами и записать зависимость между данными и искомыми умножения (т.-е. между сомножителями и произведением).

Примеры. 1) $18 : 6 = 3$, откуда $18 = 6 \cdot 3$; $6 = 18 : 3$. | 2) $\frac{c}{d} = q$, откуда $c = dq$; $d = \frac{c}{q}$.

Задачи.

1. Формулировать словесно зависимость между данными и искомым деления (т.-е. между делимым, делителем и частным).

2. Указать, как выражается зависимость между делимым, делителем, частным и остатком.

Упражнения. Применить эти зависимости к определению неизвестного числа x в примерах:

1) $8x = 24$; 2) $9x = 45$; 3) $5x = 17$; 4) $4x = 2{,}5$;

5) $\frac{3}{4}x = 1\frac{1}{2}$; 6) $2{,}7\,x = 0{,}81$; 7) $x : 15 = 12$; 8) $60 : x = 10$;

9) $x : \frac{4}{9} = 8$; 10) $6\frac{1}{2} : x = 1{,}3$; 11) $46 = 7 \cdot x + 4$; 12) $93 = 6 \cdot x + 3$.

VIII. Изменения произведения и частного при изменении чисел, данных для умножения и деления.

Вопросы. 1) $18 \cdot 12 = 216$. Как изменится произведение, если множимое увеличить в 2 раза? множитель увеличить в 5 раз? множимое уменьшить в 3 раза? множитель уменьшить в 4 раза? множимое увеличить в 3 раза и одновременно множитель уменьшить в 6 раз?

2) $72 : 12 = 6$. Как изменится частное, если делимое увеличить в 2 раза? уменьшить в 3 раза? если делитель увеличить в 3 раза? уменьшить в 4 раза? если одновременно делимое увеличить в 2 раза, а делитель уменьшить в 3 раза?

Примеры.

Обозначая слова *„увеличить“* и *„уменьшить“ во сколько-нибудь раз* знаками × и :, заполнить графы произведения и частного в табличках.

Множимое	Множитель	Произведение
× 8	× 6	
: 10	: 2	
× 6	: 3	

Делимое	Делитель	Частное
× 10	× 5	
: 6	: 3	
× 12	: 2	

Выводы. 1) С изменением каждого из сомножителей произведение изменяется. Произведение есть *функция* каждого из сомножителей. Произведение увеличивается (или уменьшается) во столько раз, во сколько раз увеличивается (или уменьшается) один из сомножителей. Такое изменение функции в зависимости

от изменения ее аргумента называется *прямо-пропорциональным* изменением.

2) С изменением делимого или делителя частное изменяется. Частное есть *функция* делимого и делителя. Частное увеличивается или уменьшается во столько же раз, во сколько раз увеличивается или уменьшается делимое, т.-е. *частное изменяется прямо-пропорционально делимому.*

Частное *увеличивается* во столько же раз, во сколько раз *уменьшается* делитель и частное *уменьшается* во столько же раз, во сколько раз *увеличивается* делитель. Такое изменение частного в зависимости от изменения делителя называется *обратно-пропорциональным изменением.*

Задача. В 1924 году в Москве числилось 78 660 000 *кв. м.* жилой площади и около 1 500 000 человек населения. Сколько кв. метров жилой площади приходилось в среднем на 1 человека?

Отв. 52,4 *кв. м.*

Вопросы. 1) Как можно было бы увеличить эту жилую норму на 1 человека?

2) Какое из чисел предыдущей задачи является делимым, какое делителем и какое частным?

3) Как изменилась бы жилая норма на 1 человека, если бы удалось, при том же количестве населения, удвоить общий фонд жилой площади в Москве? утроить?

4) Как изменилась бы жилая норма на 1 человека в Москве, если бы, при том же фонде жилой площади, население увеличилось в 2 раза?

5) Как изменяется — прямо-пропорционально или обратно-пропорционально — жилая норма на 1 человека в зависимости от изменения всей площади жилищного фонда? в зависимости от изменения количества населения?

IX. Распределительный закон умножения или распределительное свойство произведения.

Задачи.

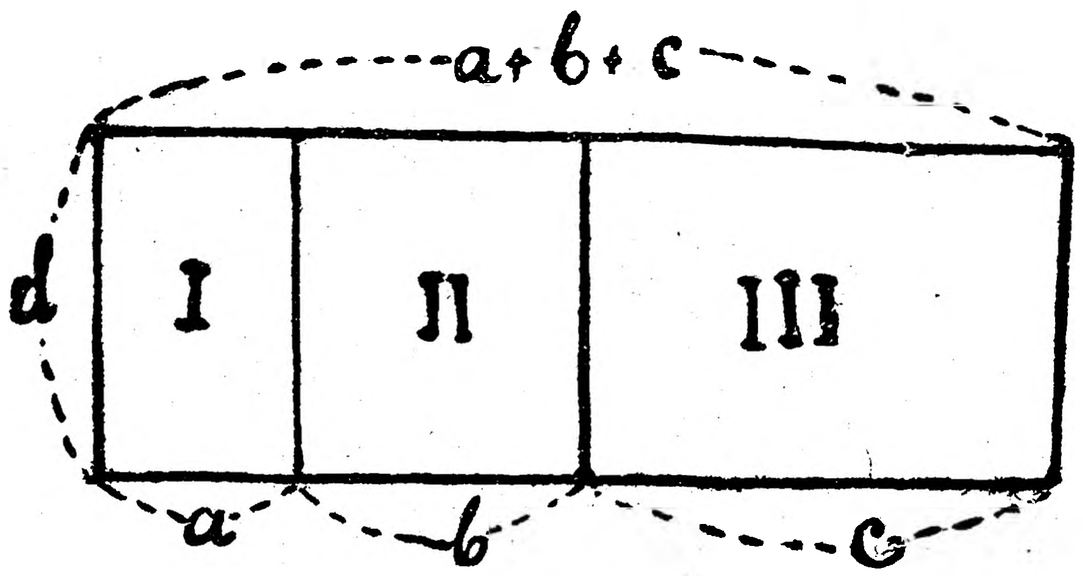
1. Проверить равенства

$$\text{а)}\quad (8+5+7)\cdot 3 = 8\cdot 3+5\cdot 3+7\cdot 3$$
$$\text{б)}\quad 4\cdot(6+9+2) = 4\cdot 6+4\cdot 9+4\cdot 2.$$

2. Определить площадь всего прямоугольника, изображенного на черт. 104, и определить затем площади его частей I, II, III. Как

вытекает из сопоставления полученных результатов распределительный закон умножения?

3. Формулировать словесно *распределительный закон умножения* или, что то же, *распределительное свойство произведения* (Ответ: Для умножения суммы нескольких слагаемых на какой-нибудь множитель достаточно умножить каждое слагаемое на этот множитель и результаты сложить.)



Черт. 104.

4. Объяснить при помощи распределительного закона умножения действие умножения многозначного числа на однозначное, например, $256 \times 7 = ?$

§ 64. Равенство.

Указание. Запись $25 + 60 = 85$ называется *равенством*. $25 + 60$ называется *левой частью* равенства, а 85 — *правой частью*. Числа 25, 60 и 85 называются *членами равенства*.

Вопрос. Можно ли соединить знаком равенства:

1) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ и $\frac{1}{2}$, 2) $2{,}5 + 7$ и $3 + 5$?

Разность двух *одинаковых* чисел или алгебраических выражений принимают равной нулю. На этом основании справедливы следующие равенства:

1) $8 - 8 = 0$; 2) $\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$; 3) $(a + b) - (a + b) = 0$.

Вопросы. Нарушится ли равенство: $28 + 7 = 18 + 17$,

1) если левую часть сделать правой, а правую сделать левой?

2) если к обеим частям равенства прибавить по 8 или от них отнять по 10?

Вывод. *Если к обеим частям равенства прибавить или от них отнять по равной величине, то равенство не нарушается*, т.-е. если $a + b = c$,

то $a + b + d = c + d$ и $a + b - d = c - d$.

Задача. Проверить справедливость следующих четырех равенств:

I. $30 + 8 = 38$	III. $20 - 9 = 11$
II. $30 = 38 - 8$	IV. $20 = 11 + 9$.

Вопросы. 1) В каких частях рав. I и II находится число 8?

2) Какой знак стоит перед числом 8 в рав. I и II?

3) В каких частях рав. III и IV находится число 9?

4) Какой знак стоит перед числом 9 в рав. III и IV?

Вывод. *Каждый член равенства можно перенести из одной части в другую, переменив знак перед ним на обратный, т.-е.* + *меняется на* —, — *меняется на* +.

Пример. Перенести в равенстве

$$20 + 5 - 6 = 19$$

все члены левой части, кроме 20, в правую часть и проверить справедливость полученного равенства.

§ 65. Тождество.

Задача. Подставить в следующем равенстве

$$3 \cdot (a + 5) = 3a + 15.$$

вместо буквы a числа 1, 2, 3, 4, 5 ... и т. д. (вообще какое-нибудь произвольное число) и проверить справедливость полученных равенств.

Указание. Буквенные равенства, справедливые при произвольных значениях букв, называются *тождествами*. Все численные равенства суть тождества.

Упражнение. Проверить, является ли тождеством следующее равенство

$$5\ (a + b + 5) = 5\,a + 5\,b + 25.$$

§ 66. Уравнение.

Задачи.

1. Указать, при каком числовом значении x справедливо равенство

$$x + 5 = 8.$$

2. Во что это равенство обращается при подстановке вместо x найденного числового значения?

3. Справедливо ли это равенство при произвольном значении x? (Подставить вместо x числа 2, 5, 7 и т. д.)

Указание. Буквенные равенства, справедливые только при определенных значениях букв, называются *уравнениями*, а сами эти буквы называются *неизвестными*. Неизвестные обыкновенно обозначаются последними буквами латинского алфавита x, y, z.

Задача. Определить, при каком значении неизвестного справедливо уравнение

$$3x + 5 = 11 \qquad \textbf{(I)}.$$

Р е ш е н и е. Перенеся 5 из левой части уравнения в правую, получим

$$3x = 11 - 5, \text{ или } 3x = 6;$$

$$\text{откуда } x = \frac{6}{3} = 2.$$

Вопросы. 1) Обращается ли уравнение (1) в тождество при найденном значении x?

2) Обращается ли оно в тождество при произвольном значении x (например 1, 3, 5 и т. д.)?

У к а з а н и е. Решить уравнение значит отыскать то значение неизвестного, при котором уравнение обращается в тождество или, иначе говоря, удовлетворяется. Найденное значение неизвестного называется *корнем уравнения.*

Примеры. Решить следующие уравнения:

1) $5x + 6 = 21$; 2) $2{,}5x + 8 = 18$; 3) $7x - 6 = 22$;

4) $5x + 3 = 2x + 15$.

У к а з а н и е. Члены уравнения, перед которыми нет никакого знака, считаются со знаком +; поэтому в примере 4-м:

$$5x - 2x = 15 - 3, \text{ откуда } x = 4.$$

Упражнения. Решить уравнения:

1) $9x + 4 = 5x + 24$; 2) $12x - 6 = 7x + 29$;

3) $3x + 7 = 27 - x$; 4) $3(x + 5) = 21$;

5) $4(x + 8) + 5x = 3x + 86$; 6) $2(2x - 5) - 1 = 3(x + 8) + 4$;

7) $(4x + 5)\ 3 - 2x = (7 - 3x)\ 4$;

8) $6(2x - 3) + 2\ (4x + 5) = 2\ (8 - 3x)$;

9) $\frac{2}{3}x + 1 = \frac{1}{3}x + 5$; 10) $0{,}5x - 8{,}3 = 5{,}7 - 1{,}75x$.

§ 67. Задачи на составление уравнений первой степени с одним неизвестным.

Задачи.

1. Разделить участок земли на две части так, чтобы одна часть была больше другой на 8 десятин. Весь участок содержит 28 десятин.

Р е ш е н и е.

I. Обозначение неизвестных. Обозначим число десятин меньшей части через x.

Число десятин другой части согласно условию задачи выразится через $x + 8$. (Почему?) Сумма чисел десятин обеих частей выразится через $x + (x + 8)$ или $x + x + 8$.

II. Составление уравнения. Согласно условию задачи $x + x + 8$ равняется 28, следовательно

$$x + x + 8 = 28.$$

III. Решение уравнения. Предлагается решить это уравнение самим учащимся и указать число десятин в обеих частях участка земли.

2. Скорость равномерно движущегося тела равна 5 метрам в секунду. Во сколько времени тело пройдет путь длиною в 72,5 метра?

Р е ш е н и е. Если обозначить через x число секунд, в течение которого тело пройдет указанный в задаче путь, то по условию задачи путь, пройденный телом в x секунд, будет равен $5x$.

Следовательно, $5x = 72{,}5$, откуда $x = \frac{72{,}5}{5} = 14{,}5$.

3. Рабочий из своего недельного заработка истратил 10½ руб., и у него осталось 4½ руб. Определить при помощи уравнения дневной заработок рабочего. *Отв.* 2,5 руб.

4. Длина всей границы участка земли, имеющего форму прямоугольника, равна 25,4 *км*. Определить при помощи уравнения длину участка земли, если ширина его равна 3,5 *км*.

Отв. 9,2 *км*.

5. 4 *куб. дм* олова, уд. вес которого = 7,3, сплавлены с 5 *куб. дм* другого металла, и получился сплав весом 73,7 *кг*. Определить уд. вес второго металла. *Отв.* 8,9.

6. Площадь прямоугольника численно на 0,56 больше его периметра. Определить высоту прямоутольника, если его основание равно 3,14 *м*. *Отв.* 6 *м*.

7. Нижнее основание трапеции, имеющей площадь 30 *кв. м* и высоту 4 *м*, равно 8,2 *м*. Определить верхнее основание.

Отв. 6,8 *м*.

8. Полная поверхность конуса, имеющего радиус основания 10 *м*, равна 785 *кв. м*. Определить образующую конуса.

Отв. 15 *м*.

9. Два работника получили жалованье, при чем 1-й работник получил на 6 руб. больше второго и, кроме того, получил со 2-го рабочего 14 руб. долгу, после чего 1-й работник понес домой вдвое больше денег, чем второй. Сколько жалованья получил каждый работник? *Отв.* 54 руб. и 48 руб.

10. Пекарня смешивает для выпечки хлеба два сорта муки ценой 31 руб. 20 к. и 27 руб. 60 к. за центнер так, чтобы иметь 12 центнеров смеси по 30 руб. центнер. Сколько взято килограммов муки того и другого сорта? (Центнер равен 100 *кг.*)

Отв. 800 *кг* и 400 *кг.*

Работа № 9.

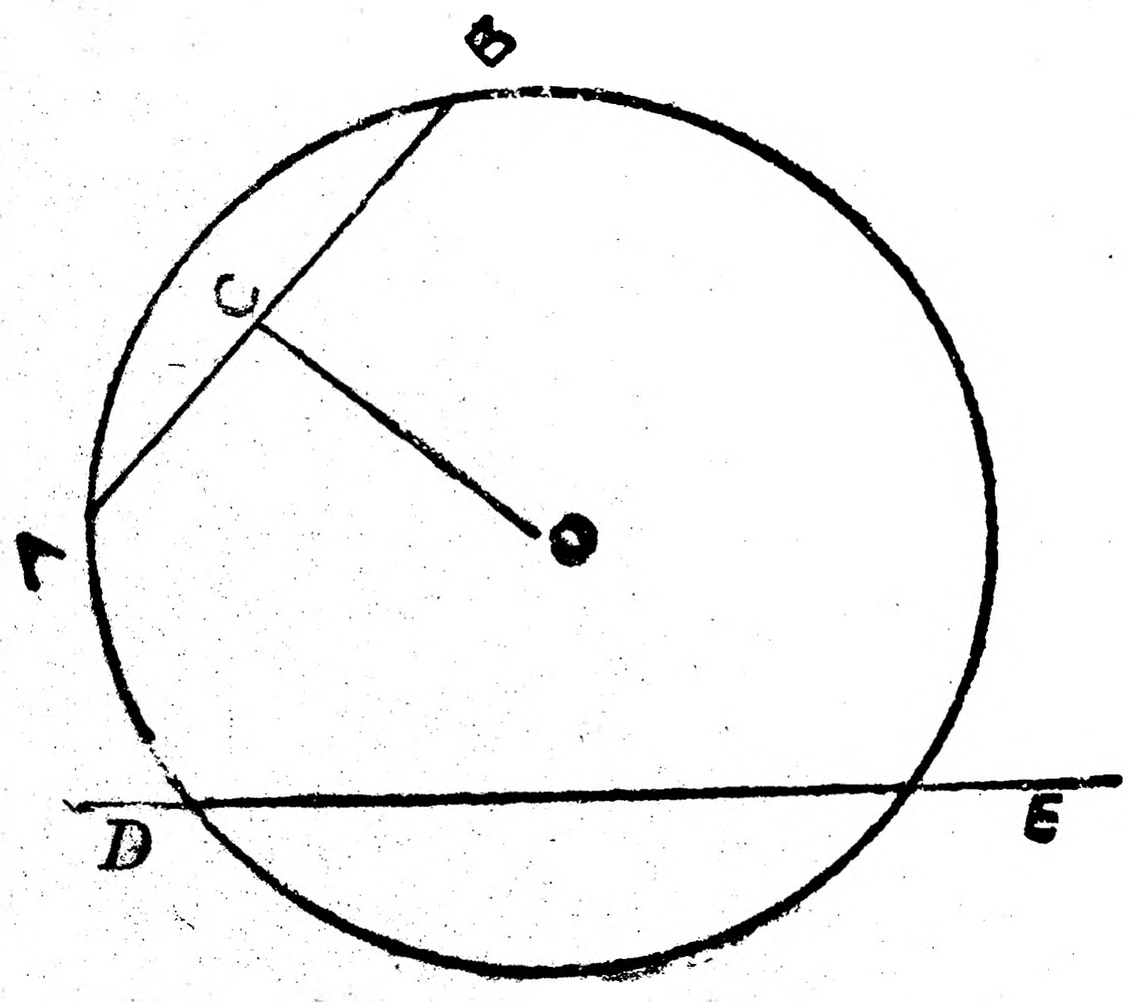
ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ.

Окружность и ее элементы. Отношение окружности к диаметру. Длина окружности. Длина дуги. Площадь сектора и площадь круга. Прямоугольные диаграммы. Круговые диаграммы. Правильные многоугольники. Площадь правильного многоугольника.

§ 68. Окружность и ее элементы.

Указание. Отрезок AB, соединяющий концы дуги AB, называется *хордой* (черт. 105).

Говорят, что хорда AB *стягивает* дугу AB.



Черт. 105.

Вопросы. 1) Сколько дуг стягивает хорда AB? 2) Как отметить эти дуги на чертеже, чтобы их можно было различать? 3) Какая из этих дуг большая и какая меньшая? 4) Какая из этих дуг больше полуокружности, и какая меньше? Как называется хорда, проходящая через центр? 6) Какие две дуги она стягивает?

Указание. Перпендикуляр OC, опущенный из центра O на хорду AB, называется *расстоянием хорды AB от центра* (черт. 105).

Вопросы. 1) Как изменяется длина хорды с изменением расстояния ее от центра круга?

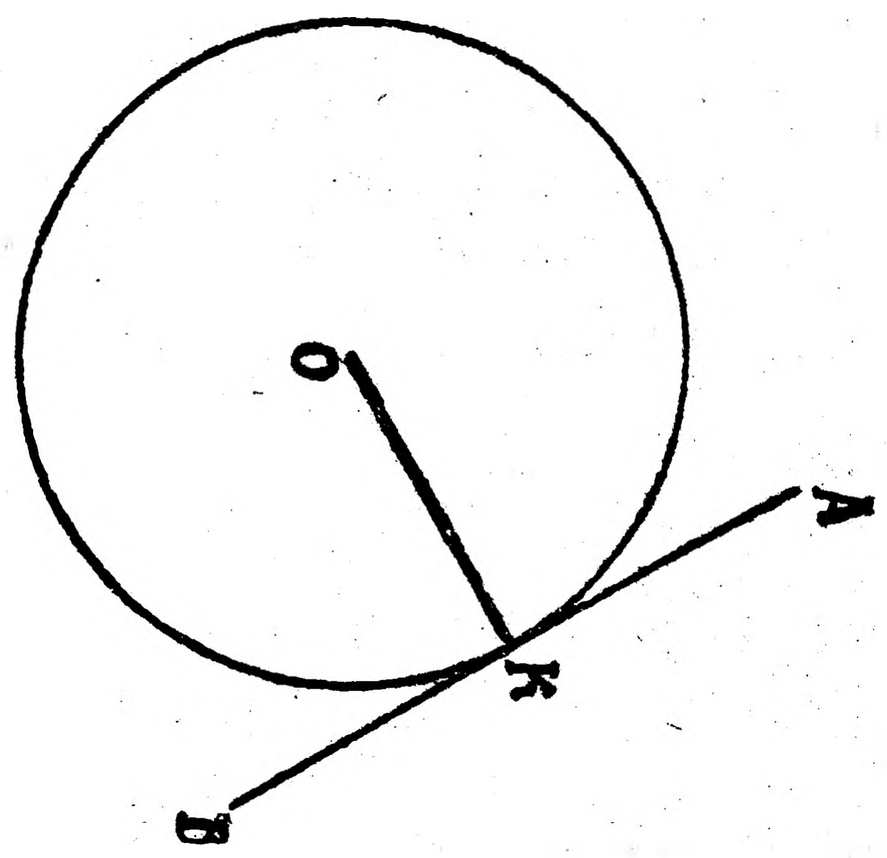
2) Какова длина хорды, проходящей через центр окружности?

Указания. 1) Длина хорды есть функция ее расстояния от центра.

2) Прямая *DE* (черт. 105), пересекающая окружность в двух точках, называется *секущей.*

Вопросы. 1) Какая разница между хордой и секущей? 2) Какая часть секущей называется хордой? 3) Может ли секущая пересекать окружность в одной точке? 4) В трех точках? 5) Какую длину имеет секущая?

Указание. Прямая *AB* (чертеж 106), имеющая с окружностью одну общую точку *K*, называется *касательной;* точка *K*, называется *точкой касания.*

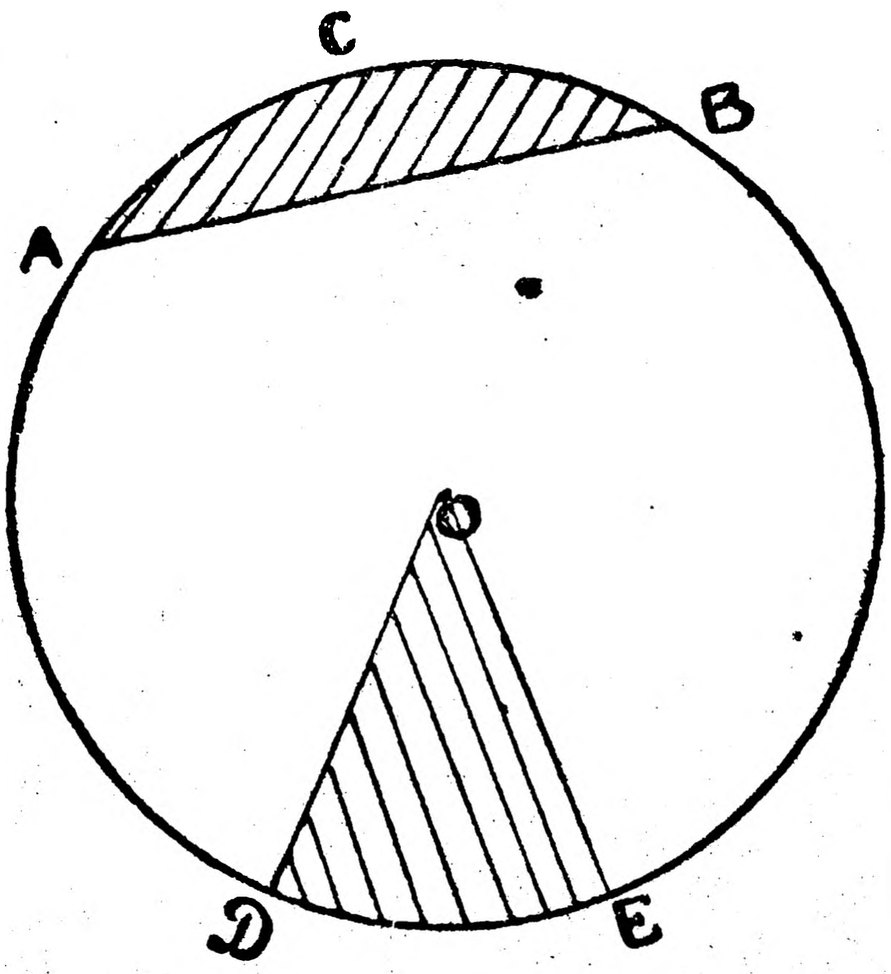


Черт. 106.

Вопросы. 1) Измерить транспортиром $\angle OKA$, составленный радиусом *OK* и касательной *AB*, — какой это угол? 2) Как можно назвать радиус *OK*, проведенный в точку касания *K*, по отношению к касательной *AB*?

Вывод. *Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*

Указание. Часть круга *ACB* (черт. 107), заключенная между дугой и хордой, называется *сегментом.*



Черт. 107.

Часть круга *DOE*, заключенная между двумя радиусами и дугой, называется *сектором.*

Вопросы. 1) На сколько сегментов разделяет круг хорда *AB*? 2) Какой из них больше, и какой меньше? 3) Какой сегмент получится, если хорда пройдет через центр? Какую часть круга составляет сектор, у которого крайние радиусы перпендикулярны друг к другу? 5) При каком положении радиусов сектор обращается в сегмент?

§ 69. Отношение длины окружности к диаметру (число π).

Задачи.

1. Диаметр колеса велосипеда равен 80 *см*, длина окружности колеса равна 2 *м* 512 *мм*. Во сколько раз длина окружности колеса больше диаметра колеса (т.-е. каково их отношение)?

2. Измерив веревку, охватывающую кругом колесо телеги, кузнец получил длину 195 *см*, а измерив диаметр колеса, он получил 62 *см*. Каково было отношение окружности колеса к его диаметру? *Отв.* 3,14 (с точн. до 0,01).

3. Измерить (ниткой) окружность и диаметр двух или трех круглых предметов (стакана, чашки) и определить отношение каждой окружности к ее диаметру. Найти средний результат ряда произведенных вычислений.

Вывод. *Отношение всякой окружности к ее диаметру приблизительно равно* $\frac{22}{7}$ *или 3,14 (с точностью до 0,01). Это число обозначается буквой* π *(читать „пи“).*

§ 70. Длина окружности.

Указание. Зная, во сколько раз окружность длиннее своего диаметра (в π раз; $\pi = 3{,}14$), для определения ее длины достаточно измерить диаметр окружности и помножить длину диаметра на число π, т.-е. на 3,14.

Задачи.

1. Найти длину окружности, диаметр которой равен 5 *см*?

Решение. $5 \cdot 3{,}14 = 15{,}7$ (*см*), или $5 \cdot \pi = 5\pi$ (*см*).

2. Найти длину окружности с *диаметром 7 дм.*

3. „ „ „ „ „ 2 *м.*

4. „ „ „ „ „ 0,16 *м.*

5. „ „ „ „ „ *d.*

6. „ „ „ „ *радиусом* 6 *см.*

7. „ „ „ „ „ 4 *м.*

8. „ „ „ „ “ *r.*

Вывод. *Длина окружности равна ее диаметру, умноженному на число* π, *или равна удвоенному радиусу, умноженному на число* π.

Если обозначим для краткости длину окружности буквой C, длину диаметра буквой d, длину радиуса буквой r, то

$$\boxed{C = \pi d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

или

$$\boxed{C = 2\pi r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Вопросы. 1) Во сколько раз увеличится длина окружности, если ее радиус увеличим в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза? и т. д. 2) Что сделается с длиной окружности, если радиус ее уменьшим в 2, 3, 4 раза и т. д.?

Указание. Длина окружности есть *функция* ее радиуса.

§ 71. Длина дуги.

Задачи.

1. Длина окружности равна 16 *дм*. Чему равна длина дуги этой окружности в 90^0? дуги в 45^0? дуги в 60^0? дуги в 30^0? дуги в 1^0? в 7^0?

2. Диаметр окружности равен 2 *м*. Чему равна длина ее дуги в 90^0? дуги в 45^0? дуги в 20^0? дуги в 1^0? дуги в 11^0? в n^0?

3. Радиус окружности равен 5 *см*. Чему равна длина ее дуги в 90^0? дуги в 12^0? дуги в 1^0? дуги в 17^0? дуги в n^0?

4. Диаметр окружности равен d. Чему равна длина ее дуги в 1^0? дуги в n^0?

5. Радиус окружности равен r. Чему равна длина ее дуги в 1^0? дуги в n^0?

Если длину дуги в n^0 обозначить буквой l, диаметр буквой d, радиус буквой r, то

$$\boxed{l = \frac{\pi d}{360}\, n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

или

$$\boxed{l = \frac{2\pi r}{360}\, n = \frac{\pi r n}{180}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

§ 72. Площадь сектора и площадь круга.

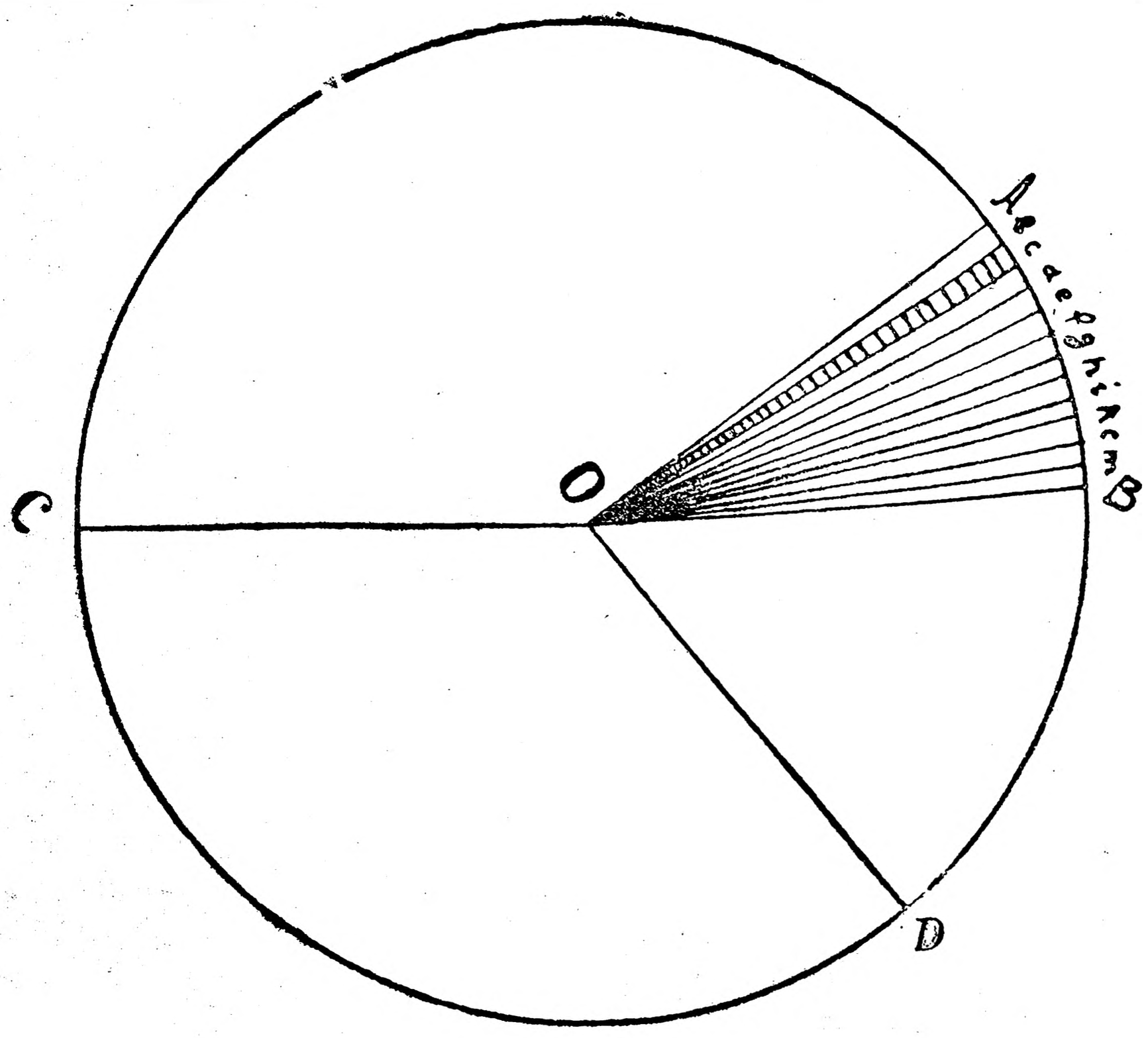
Задачи.

1. Считая сектор bOc (черт. 108) с очень малой дугой bc (пусть, напр., дуга $bc = 1^0$) за равнобедренный треугольник с основанием равным $\smile bc$ и высотой равной радиусу круга r, определить площадь сектора bOc?

2. Возьмем сектор AOB (черт. 108), составленный из малых секторов AOb, bOc, cOd, dOe и т. д. Определить площадь сектора AOB.

Указание. Так как по предыдущему площадь каждого из малых секторов равна длине его дуги, помноженной на половину радиуса, и так как, сложив все малые дуги Ad, cd, de, . . . mB, получим в сумме его дугу AB, то площадь большого сектора AOB равна дуге AB, помноженной на половину радиуса.

Вывод. *Площадь сектора равна длине его дуги, умноженной на половину радиуса.*



Черт. 108.

Если обозначим площадь сектора буквой S, длину его дуги буквой l и радиус буквой r, то

$$\boxed{S = l \cdot \frac{r}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Исходя из формулы 13, показать, что

$$l \cdot \frac{r}{2} = \frac{\pi r^2 n}{260}$$

и, следовательно,

$$\boxed{S = \frac{\pi r^2 n}{360}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Задача. Разбив круг (черт. 108) на 4 сектора: *AOB*, *BOD*, *DOC*, *COA*, определить площадь круга.

Указание. Так как площадь каждого из названных секторов равна длине его дуги, умноженной на половину радиуса, и так как сумма четырех дуг: $\smile AB + \smile BD + \smile DC + \smile CA$, равна всей окружности, то площадь круга равна длине его окружности, умноженной на половину радиуса.

Вывод. *Площадь круга равна длине его окружности, умноженной на половину радиуса.*

Если назовем площадь круга буквой S, длину его окружности буквой C и радиус буквой r, то

$$\boxed{S = C \cdot \frac{r}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

А так как $C = \pi d$ или $C = 2\pi r$ (формулы 9 и 10, стр. 114), то

$$S = \pi d \cdot \frac{r}{2} = \pi d \cdot \frac{d}{4} = \frac{\pi dd}{4} = \frac{\pi d^2}{4},$$

или

$$S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r \cdot r = \pi r^2.$$

Следовательно

$$\boxed{S = \frac{\pi d^2}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

или

$$\boxed{S = \pi r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Задачи.

1. Чему равна площадь круга с диаметром 2 *м*?

Отв. 3,14 *кв. м.*

2. Чему равна площадь круга с диаметром 4 *м*?
3. „ „ „ „ „ 8 *м*?
4. „ „ „ „ „ $^1/_2$ *м*?

5. Во сколько раз увеличивается или уменьшается площадь круга, когда его диаметр увеличивается или уменьшается в 2 раза? в 4 раза? в 3 раза?

6. Чему равна площадь круга с радиусом 5 *м*?

Отв. 78,5 *кв. м.*

7. Чему равна площадь круга с радиусом 10 *м*?

8. „ „ „ „ „ 20 *м*?

9. „ „ „ „ „ 30 *м*?

10. „ „ „ „ „ $2\frac{1}{2}$ *м*?

11. Во сколько раз увеличивается или уменьшается площадь круга, когда его радиус увеличивается или уменьшается в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза?

Указание. Площадь круга есть *функция* его радиуса.

Задачи.

1. Стекольщик вставил в круглую оконную раму с диаметром 6 *дм* стекло и потребовал плату по 40 коп. за каждый *кв. дм* стекла. Сколько надо было заплатить стекольщику?

Отв. 11 руб. 30 коп. (с точн. до 1 коп.).

2. Круглую арену цирка, с диаметром 40 *м*, надо было засыпать свежим песком. На каждые 25 *кв. м* арены расходовался 1 воз песку. Сколько возов пришлось привезти для засыпки арены?

Отв. 50 возов (с точностью до 1).

3. В цветнике, имеющем вид прямоугольника, размером 30×15 *м*, садовник сделал пять круглых цветочных клумб — одну, с радиусом 2 *м*, в середине цветника и четыре равных круглых клумбы, каждая с радиусом 0,5 *м*, по углам цветника. Сколько свободной площади цветника осталось помимо всех этих клумб?

Отв. 434,3 *кв. м.*

4. Окружность бревна равна 11 *дм*. Найти толщину бревна $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

Отв. 3,5 *дм.*

5. Градус земного экватора имеет длину 112,5 *км*. Найти радиус земли.

Отв. 6442,5 *км.*

6. Колесо телеги на расстоянии 3,74 *км*. делает 1 120 оборотов.

Найти диаметр колеса $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

Отв. 1,06 *м* (с точн. до 0,01).

7. Наружная окружность круглой башни 22 *м*, а внутренняя 14 *м*. Определить толщину стен башни.

Отв. 1,3 *дм*. (с точн. до 0,1).

8. Определить в предыдущей задаче площадь земли, находящуюся под стенами башни. *Отв.* 22,9 *кв. м*.

9. Определить площадь круга, длина окружности которого равна 6,28 *дм*. *Отв.* 3,14 *кв. дм*.

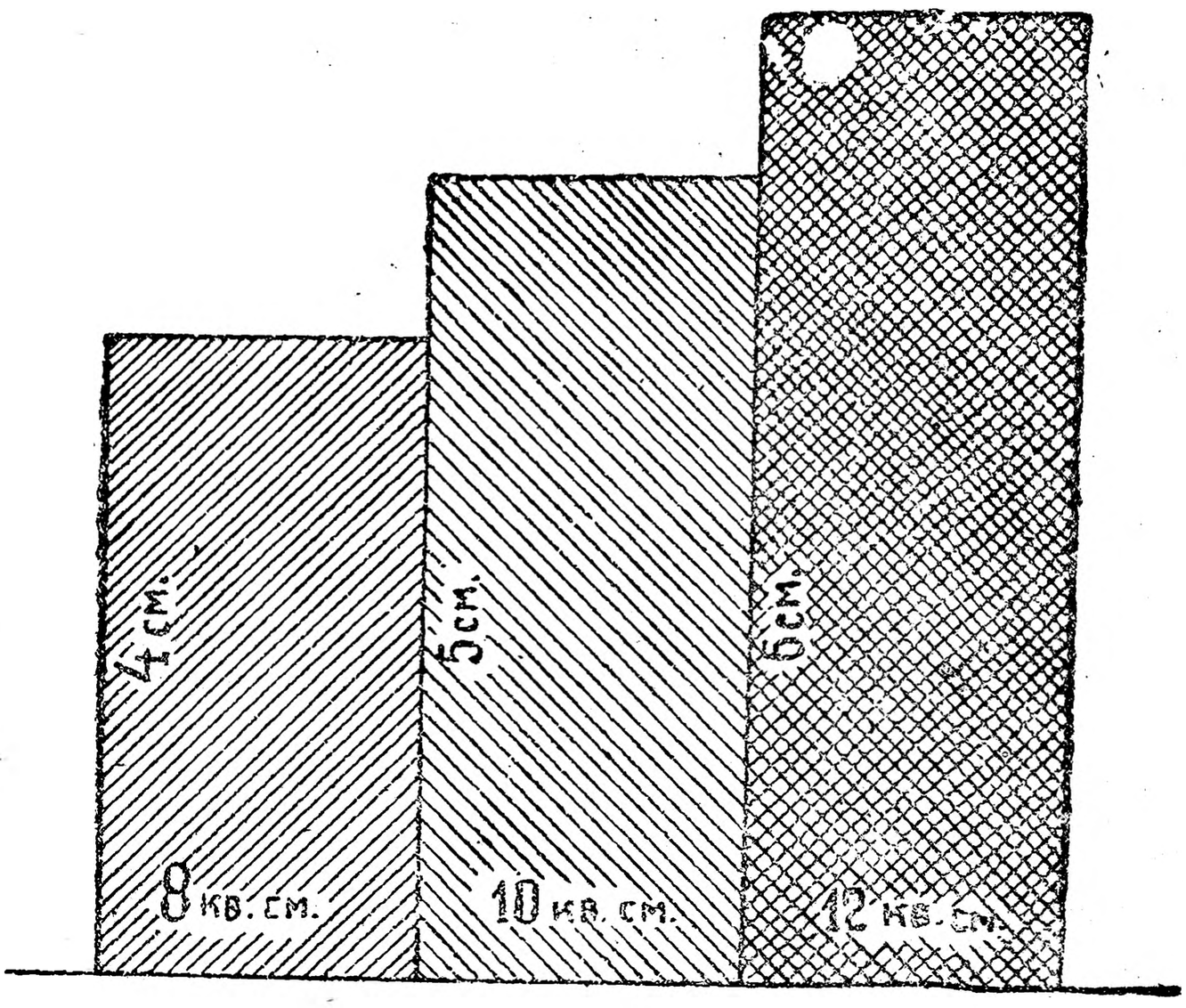
10. Определить давление воздуха на крышку цилиндрической банки с диаметром 2,5 *дм*. (Давление воздуха на 1 *кв. см*. равняется 1 *кг*). *Отв.* 490,6 *кг*. (с точн. до 0,1).

§ 73. Прямоугольные диаграммы.

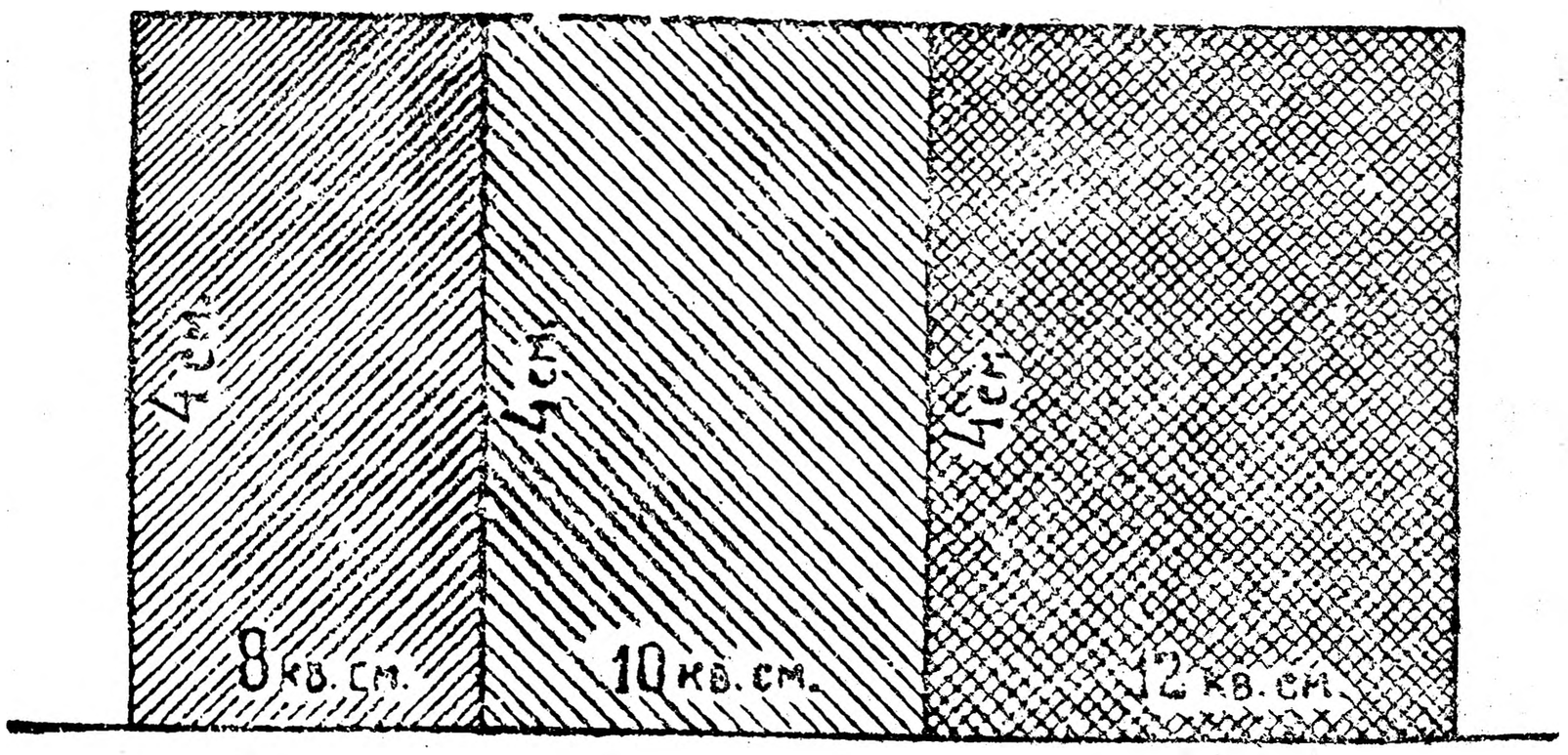
Задачи.

1. Представить площади: 8 *кв. см*, 10 *кв. см*. и 12 *кв. см*: 1) в виде прямоугольников с одинаковыми основаниями в 2 *см*; 2) в виде прямоугольников с одинаковыми высотами в 4 *см*. 3) в виде прямоугольников с разными основаниями и высотами.

Решение. См. черт. 109, 110, 111.



Черт. 109.



Черт. 110.

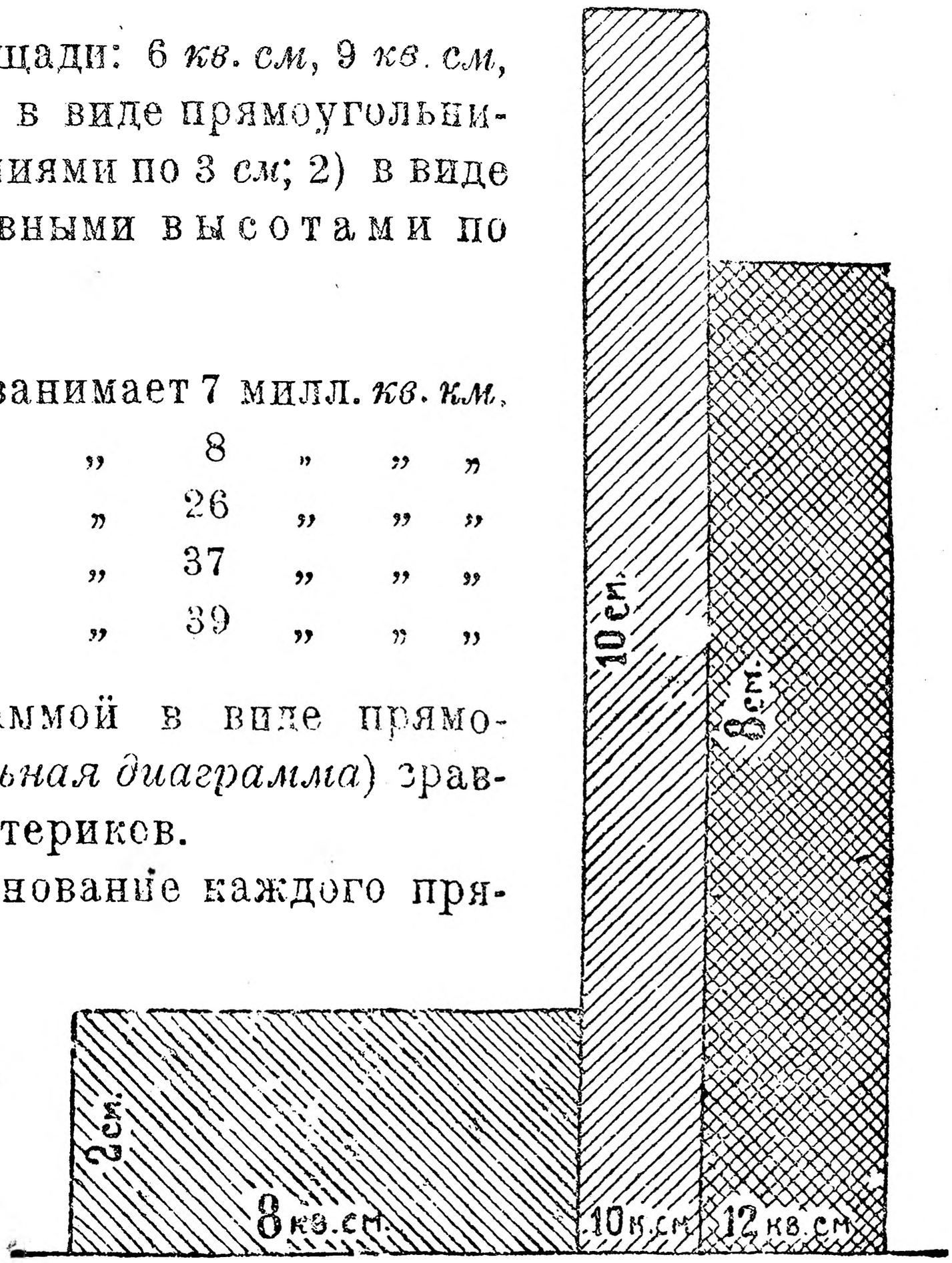
2. Представить площади: 6 *кв. см*, 9 *кв. см*, 12 *кв. см*, 15 *кв. см* 1) в виде прямоугольников с равными основаниями по 3 *см*; 2) в виде прямоугольников с равными высотами по 3 *см*.

3. Материк Австралии занимает 7 милл. *кв. км*,

„	Европы	„	8	„	„	„
„	Африки	„	26	„	„	„
„	Америки	„	37	„	„	„
„	Азии	„	39	„	„	„

Представить диаграммой в виде прямоугольников (*прямоугольная диаграмма*) сравнительные размеры материков.

Указание. За основание каждого прямоугольника принять 2 *см*, за высоту 1 го прямоугольника—7 *мм*, 2-го—8 *мм*, 3-го—26 *мм*, и т. д.



Черт. 171.

4. Из всего населения земного шара, составляющего около 1.550 милл. человек, живут:

в Европе	384	милл. чел.	или	24% всего нас. земн. шара (проверить %!)
„ Африке	158	„ „	„	10% (проверить %),
„ Азии	862	„ „	„	56% (проверить %),
„ Америке	140	„ „	„	9% (проверить %),
„ Австралии	8	„ „	„ ок.	1% (проверить %).
Итого	1550	„	„ Итого	100%

Представить диаграммой распределение населения земного шара по материкам.

Указание. *1-й способ.* Взять за основание каждого прямоугольника 2 *см*, а за высоту самого меньшего 1 *мм*, следующего по величине 9 *мм*, следующего — 10 *мм* и т. д.

2-й способ. Взяв клетчатую бумагу, начертить на ней квадрат со стороной, равной длине 10 клеток; такой квадрат будет содержать всего 100 клеток (почему?); выделив в одном из углов этого квадрата 1 клетку, 9 клеток подряд, 10 клеток, 24 клетки подряд и, наконец, 56 клеток, обвести полученные фигуры толстыми чертами и заштриховать каждую из них внутри различной штриховкой или закрасить красками разных цветов.

5. В 1922 г. на девяти южных металлургических заводах, по данным УСНХ, было выработано сортового железа:

Петровский	завод	1 226 670 пуд.
Макеевский	„	455 897 „
Юзовский	„	258 093 „
Донецко-Юрьевский	„	717 881 „
Екатеринославский	„	711 520 „
Мариупольский	„	477 079 „
Таганрогский	„	66 193 „
Сулинский	„	179 752 „
Луганский	„	432 760 „
	Итого	4 525 785 пуд.

Выразить в целых процентах производительность каждого завода по отношению к общей производительности всех заводов и начертить прямоугольную диаграмму производительности заводов.

У к а з а н и е. При вычислении процента производительности, во избежание действий с очень большими числами, можно брать выработку каждого завода и общую выработку в целых тысячах пудов, т.-е. округлять тысячи, что, при точности вычисления до 1%, совершенно не отразится на результате; так, напр., производительность Петровского завода можно считать 1227 целых тысяч пудов; Макеевского — 456 тыс., Юзовского — 258 тыс. и т. д.; общую производительность — 4 526 тыс. пудов.

Тогда для вычисления процента производительности, напр., Петровского завода придется 1 227 делить на 4 526 и результат умножать на 100, или, наоборот, сначала 1 227 умножить на 100 и полученное произведение делить на 4 526, а именно: 122700 : 4526 $\equiv$ 27.

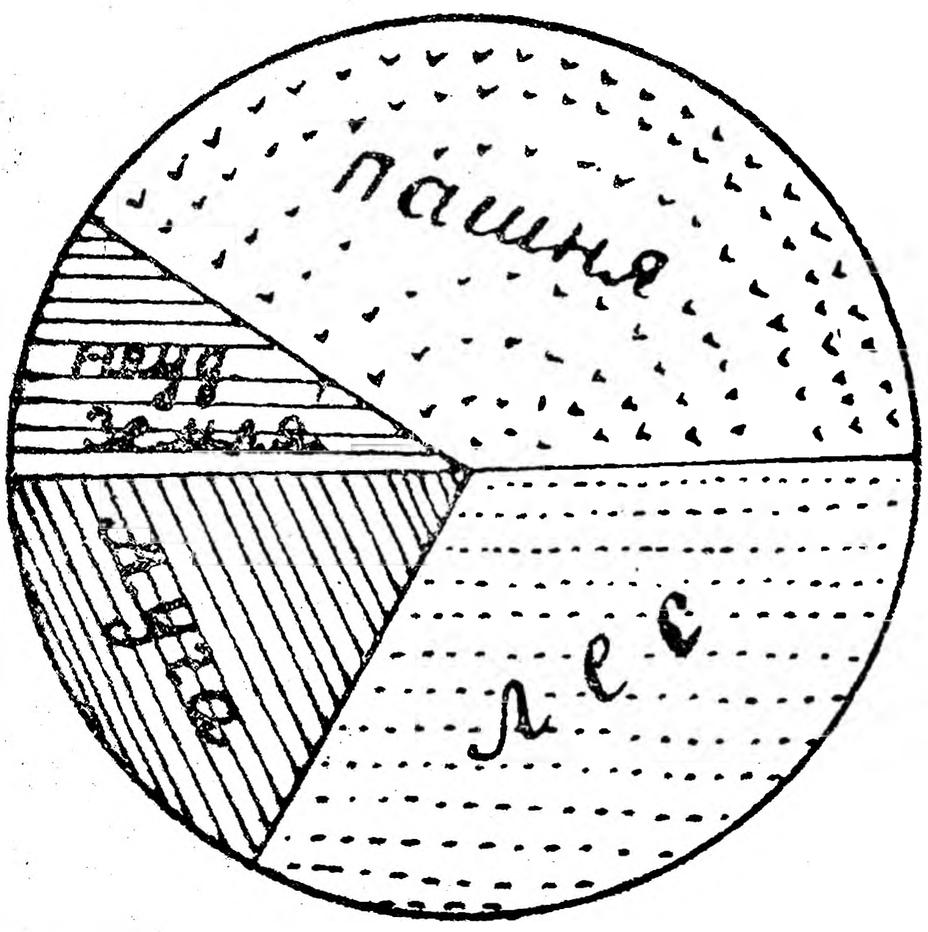
Итак, производительность Петровского завода составляла 27% общей производительности всех 9 заводов.

6. По статистическим данным 1903 года каждый житель нижепоименованных стран *в среднем* съедал за год *мяса*:

в С.-А. С. Штатах	. . . . .	62 *кг*
„ Англии	. . . . .	50 „
„ Франции	. . . . .	34 „
„ Германии	. . . . .	26 „
„ России	. . . . .	20 „

Представить *прямоугольной диаграммой* сравнительное потребление мяса населением поименованных стран.

§ 74. Круговые диаграммы.



Черт. 112.

Задачи.

1. Черт. 112 представляет распределение угодий в коммунальном сельхозе. Вся площадь земли сельхоза равна 2 340 *га*. Определить, измерив дуги диаграммы *транспортиром*, сколько десятин земли находится под пашней, лесом, лугами и неудобными землями. *Отв.* 942,5; 780; 390; 227,5.

2. Разделить с помощью транспортира круг на 5 секторов, площади которых составляют 10%, 15%, 20%, 25% и 30% площади всего круга.

3. В 1910 году всей русской металлургической промышленностью было выработано:

Сортового железа — около	. . . . .	48 милл. пудов
Листового „	„	11 „ „
Балок	. . . . .	12 „ „
Бандажей	. . . . .	2 „ „
Чугунных труб	. . . . .	2 „ „

Представить *круговой диаграммой* сравнительные размеры выработки каждого из поименованных продуктов.

Указание. Деля 360° на сумму чисел:

$$48 + 11 + 12 + 2 + 2 = 75,$$

получим 4,8°. При дальнейшем вычислении (т.-е. при умножении 4,8° на 48, на 11 и т. д.), мы будем получать целые числа

градусов с дробями. Так как при помощи транспортира невозможно откладывать на окружности дуги, содержащие части одного градуса, то дробные части всех полученных чисел надо отбросить, при чем, если отбрасываемая дробь равна или меньше $^1/_2°$, то целое число градусов не меняется; если же отбрасываемая часть больше $^1/_2°$, то целое число надо увеличивать на 1°. После такого *округления* всех полученных чисел, которое весьма мало повлияет на достоинство диаграммы как наглядного изображения сравнительных размеров чисел, надо проверить, составляет ли сумма всех полученных чисел 360°, и в случае надобности вновь округлить числа, прибавляя или убавляя по 1° в зависимости от величины отброшенных дробей, пока сумма всех чисел не составит ровно 360°.

§ 75. Правильные многоугольники.

Указания. 1) Разделим окружность (черт. 113) на произвольное число равных дуг: *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* и *AF* и соединим точки делений хордами *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* и *AF*. Полученный таким образом многоугольник *ABCDEF* отличается тем, что в нем все стороны и все углы равны. Такой многоугольник называется *правильным*.

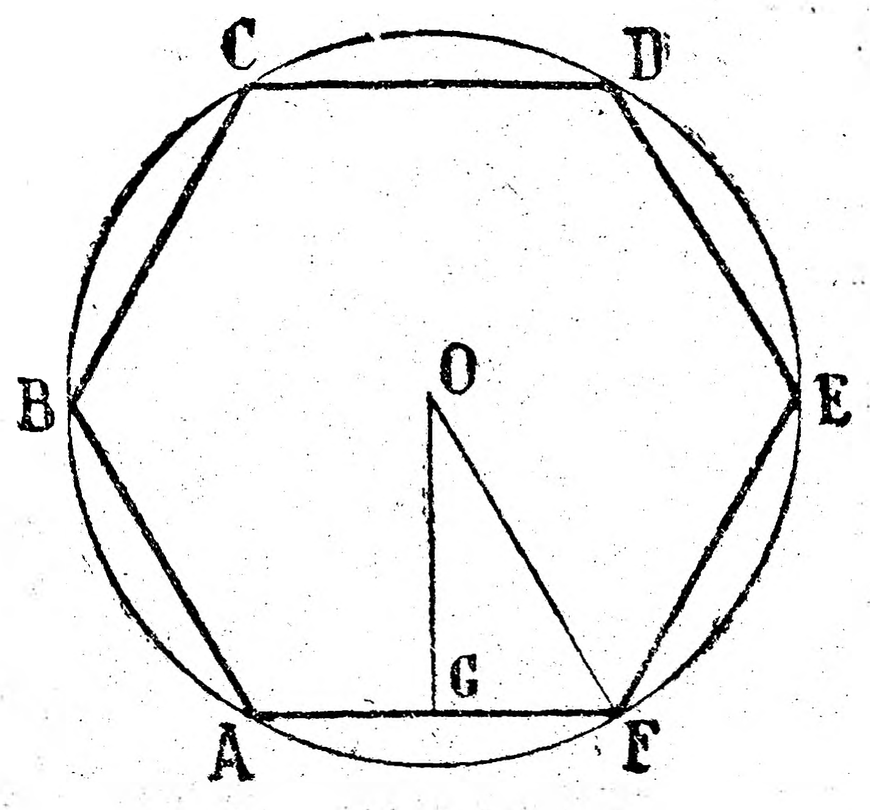
2) Окружность, на которой лежат вершины правильного многоугольника, называется *описанной окружностью*. Центр этой окружности называется *центром правильного многоугольника*.

3) Перпендикуляр *OG*, опущенный из центра правильного многоугольника на его сторону, называется *апофемой*.

Задачи.

1. Начертить на-глаз правильный шестиугольник и провести в нем все оси симметрии. То же в правильном пятиугольнике.

2. В каких правильных многоугольниках оси симметрии совпадают с диагоналями? в каких не совпадают?

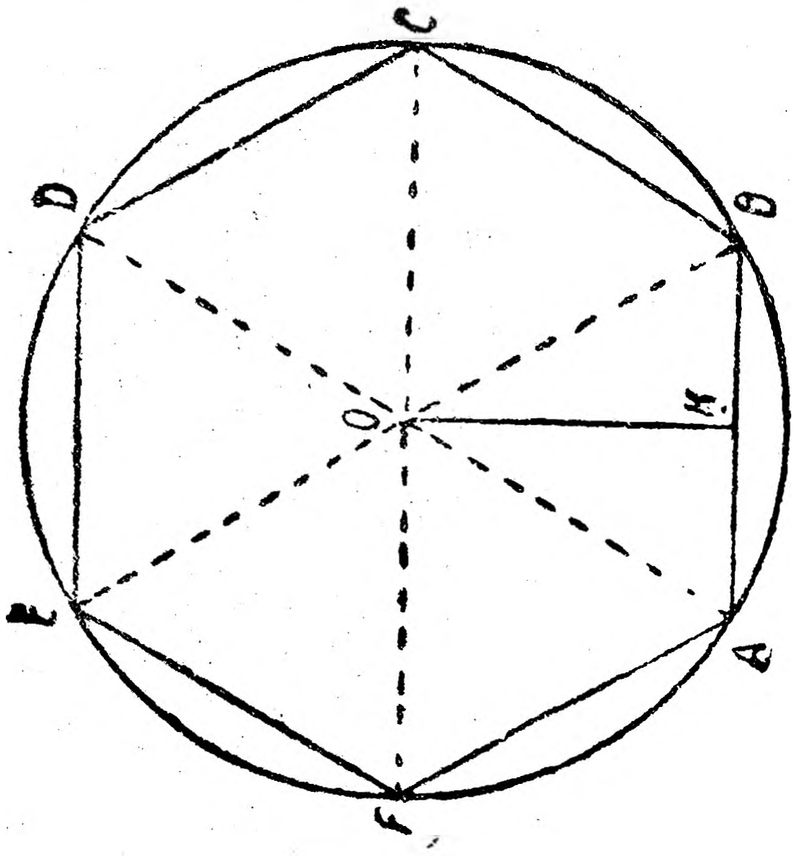


Черт. 113.

§ 76. Площадь правильного многоугольника.

Указание. Сумма всех сторон многоугольника называется его *периметром*.

Вопросы. 1) На какие фигуры разбивается правильный многоугольник, если его центр соединить прямыми линиями с его вершинами (черт. 114)?



Четр. 114.

2) Как выразится площадь одного из этих треугольников, напр., треугольника AOB?

3) Сколько таких треугольников получится в правильном шестиугольнике? в правильном пятиугольнике? в правильном десятиугольнике? в правильном n-угольнике?

Указание. Так как площадь каждого из этих треугольников равна $\frac{ah}{2}$, т.-е. половине произведения его основания a на его высоту h, то сумма площадей всех n треугольников будет равна $\frac{nah}{2}$, т.-е. половине произведения апофемы (h) на сумму (an) всех сторон правильного многоугольника.

Вывод. *Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на апофему.*

Если обозначим периметр правильного многоугольника чере P, его апофему через h и его площадь через S, то

$$\boxed{S = \frac{Ph}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Упражнения. 1) Определить площадь правильного шестиугольника по его стороне, равной 8 *см* и по его апофеме, равной 6,9 *см*.

2) Определить площадь правильного 12-угольника, сторона которого равна 5 *см* и апофема равна 9,3 *см*.

Указание. Рассматривая последовательно правильный 6-угольник, правильный 12-угольник, правильный 24-угольник

и т. д., вписанные в одну и ту же окружность, легко видеть, что их периметры все больше приближаются к длине окружности. Поэтому окружность можно рассматривать как периметр правильного многоугольника с очень большим числом сторон. В таком случае площадь круга можно выразить, согласно форм. 18, как половину произведения длины окружности на радиус, т.-е.

$$S = \frac{CR}{2} = \frac{2\pi RR}{2}$$

или

$$\boxed{S = \pi R^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19),$$

что уже было нами выведено иным способом (см. стр. 113).

Работа № 10.

КРУГЛЫЕ ТЕЛА.

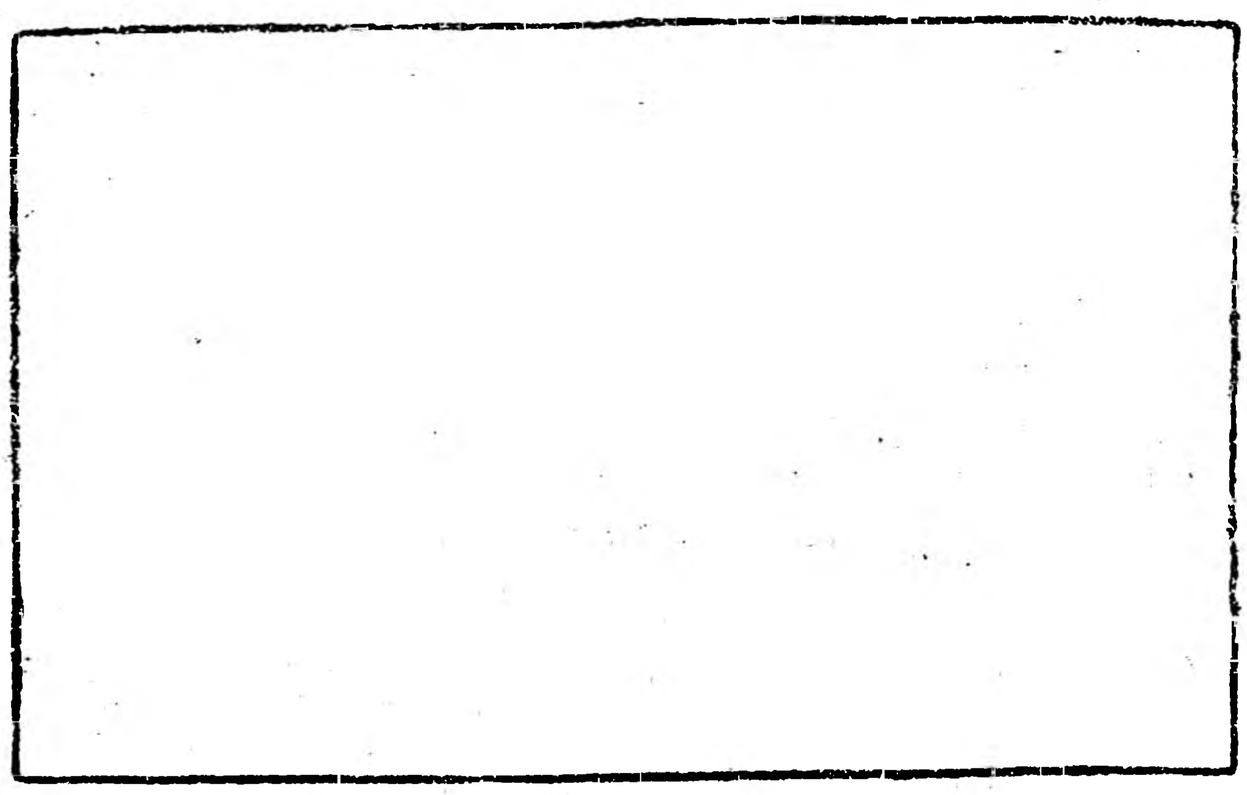
Поверхности и объемы цилиндра, конуса и шара.

§ 77. Поверхность цилиндра.

Указания. Форма тела, изображенная на черт. 115, называется прямым круглым *цилиндром*.



Черт. 115.



Черт. 116.

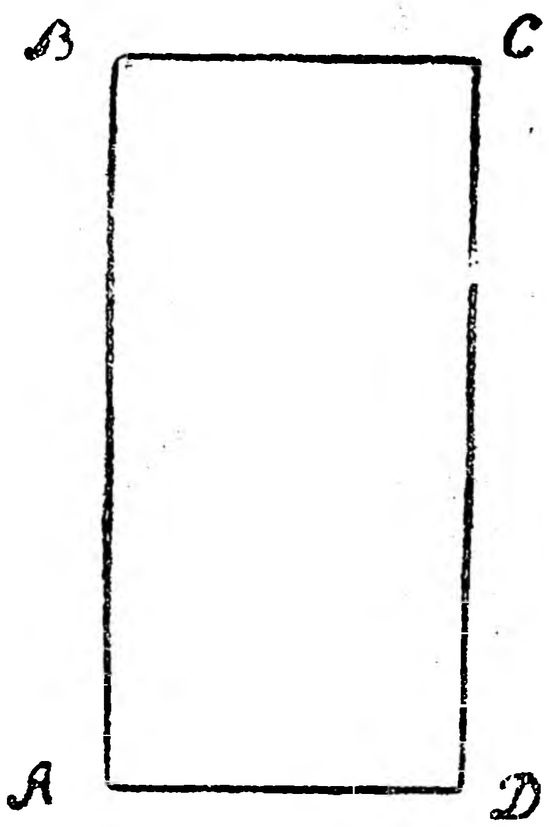
Прямой круглый цилиндр состоит из двух кругов, называемых нижним и верхним *основаниями* цилиндра, и боковой кривой поверхности, которая в развернутом виде (черт. 116) имеет форму прямоугольника.

При вращении прямоугольника $ABCD$ (черт. 117) вокруг неподвижной стороны AB до полного оборота, получается прямой круглый цилиндр (черт. 118).

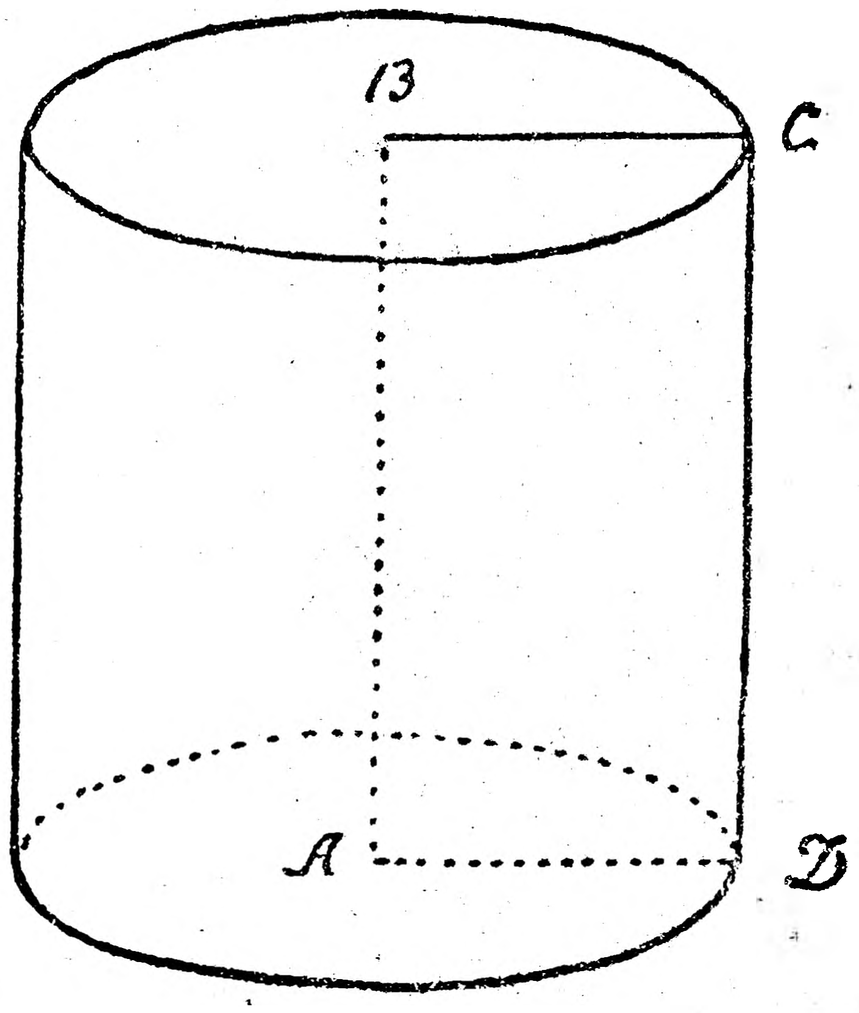
Неподвижная сторона AB называется *осью* цилиндра, противоположная ей вращающаяся сторона CD называется *образующей*, стороны AD и BC, которые при движении образуют круги,

называются *радиусами оснований* цилиндра. Отрезок AB (черт. 118) называется *высотой* цилиндра.

Упражнения. 1. Показать на своем чертеже тот прямоугольник, вращением которого получился цилиндр, изображенный на черт. 115



Черт. 117.



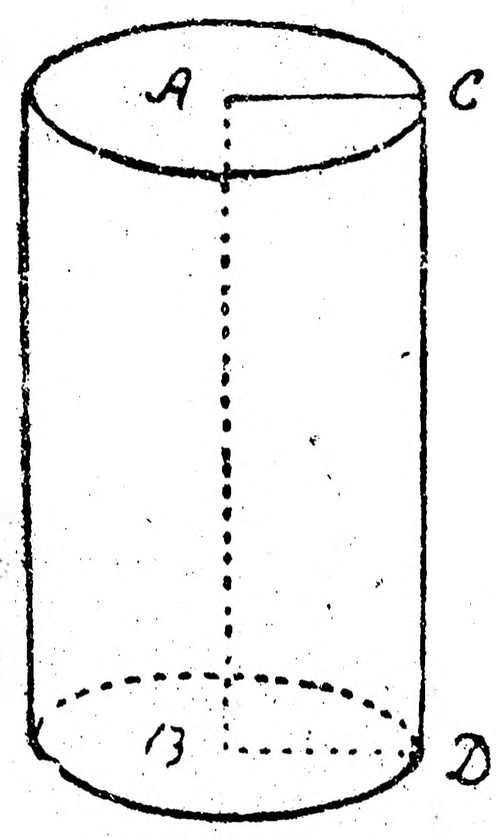
Черт. 118.

2. Указать ось и высоту этого цилиндра, его образующую и радиусы его основений.

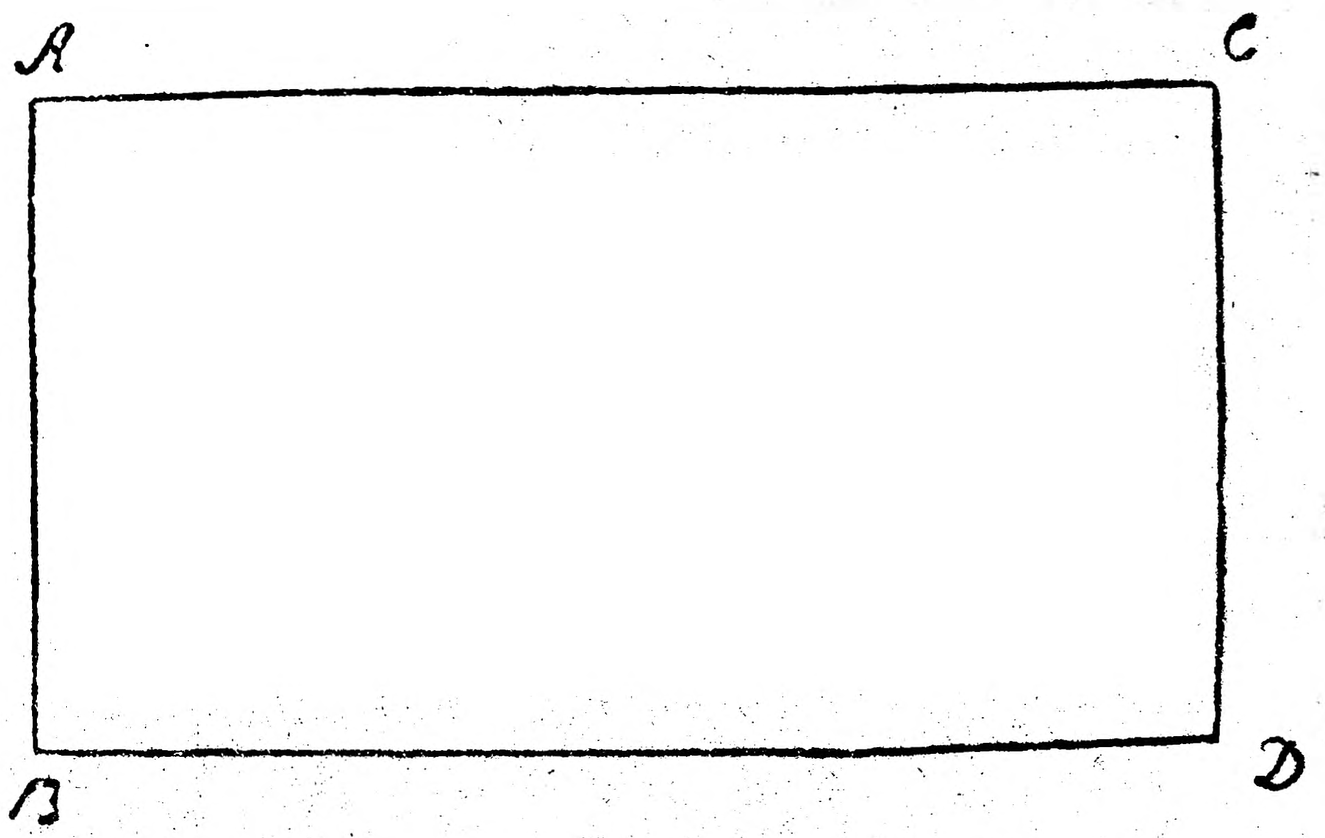
3. Назвать цилиндрические тела, встреющиеся в повседневной жизни.

Задачи.

1. На черт. 119 изображен в уменьшенном виде цилиндр с радиусом основания $BD = 4$ *м* и образующей $CD = 8$ *м*; на черт. 120 изображена его боковая поверхность в развернутом



Черт. 119.



Черт. 120.

виде. Вычислить: 1) длину окружности основания цилиндра; 2) площадь прямоугольника, изображенного на черт. 120.

Вопрос. Длине какой линии в цилиндре (черт. 119) равно основание прямоугольника (черт. 120)? высота прямоугольника?

2. Вычислить боковую поверхность цилиндра, имеющего радиус основания $r = 3$ *см* и образующую $l = 5$ *см* ($\pi = 3{,}14$).

Отв. 94,2 *кв. см.*

3. Определить боковую поверхность цилиндра, имеющего радиус основания r и образующую l.

Вывод. *Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности его основания на образующую.*

Обозначив радиус основания цилиндра через r, диаметр основания через d, образующую l, боковую поверхность S, получим

$$\boxed{S = 2\pi rl} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

или

$$\boxed{S = \pi dl} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Вопросы. 1) Что выражает $2\pi r$ в формуле 20?

2) Если радиус основания цилиндра увеличить или уменьшить в два, три и т. д. раз, как изменится боковая поверхность цилиндра?

3) Как изменяется боковая поверхность цилиндра с изменением его образующей?

4) Во сколько раз увеличится боковая поверхность цилиндра, если одновременно увеличить радиус его основания в 2 раза и образующую в 3 раза? *Отв.* В 6 раз.

Указание. Боковая поверхность цилиндра есть *функция* радиуса его основания и образующей.

5) В каких единицах выражается боковая поверхность цилиндра?

6) Из каких поверхностей состоит *полная* поверхность цилиндра?

7) Определить по данным задач 1 и 2 *полную* поверхность цилиндра.

4. Определить боковую и полную поверхность цилиндра, радиус основания которого равен 2,5 *см*, а образующая равна $5\frac{2}{4}$ *см*. *Отв.* 90,275; 129,525.

5. Сколько понадобится рабочих дней для покраски снаружи железной цилиндрической трубы, если диаметр ее поперечного сечения равен 2 *м*, а длина = 100 *м*. (На покраску площади в 25 *кв. м* требуется приблизительно один рабочий день).

Отв. 25 (с точн. до 1).

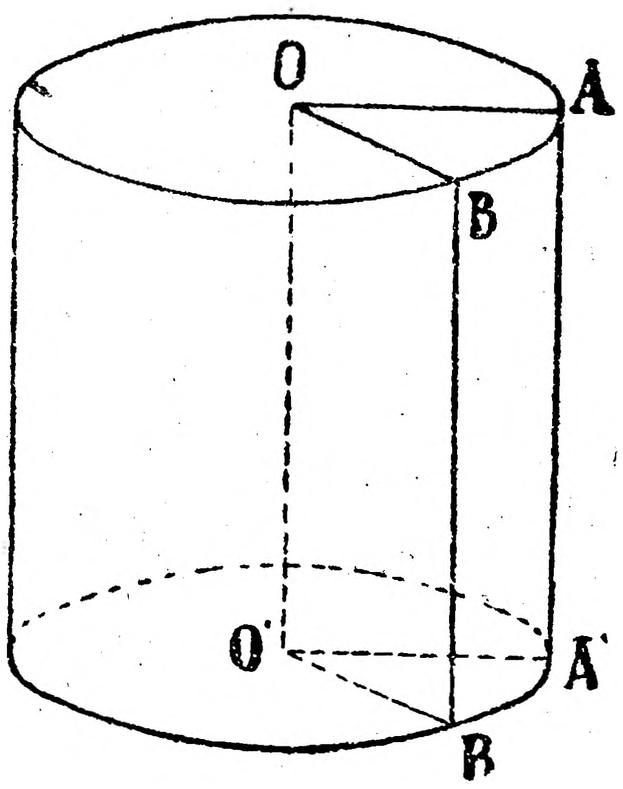
§ 78. Объем цилиндра.

Указание. Вырежем часть цилиндра по направлениям радиусов верхнего и нижнего его оснований OB и $O'B'$, OA и $O'A'$ (черт. 121).

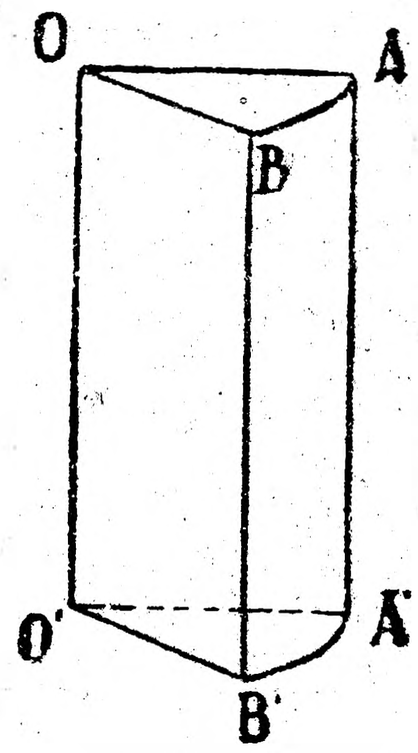
Вопрос. Чем отличается полученная вырезыванием часть цилиндра (черт. 122) от прямой треугольной призмы?

Указание. Если взять вырезку с малой дугой, например, в 1°, то сектор, служащий основанием вырезки, мало отличается от треугольника, и сама вырезка будет мало отличаться от прямой треугольной призмы, поэтому объем такой вырезки можно принять равным произведению площади сектора ее основания на ее высоту, равную высоте цилиндра.

Вопросы. 1) Вычислить площадь основания вырезки с дугой в 1°, если радиус основания цилиндра равен 5. 2) Вычислить объем этой вырезки при указанном условии, если высота цилиндра равна 8. 3) Во сколько раз площадь основания цилиндра больше площади основания этой вырезки? 4) Во сколько раз объем цилиндра больше объема этой вырезки? 5) Вычислить при этих же условиях объем цилиндра. 6) В каких единицах выражается объем цилиндра?



Черт. 121.



Черт. 122.

Указание. Тот же результат получится, если число, выражающее площадь основания цилиндра, помножить на число, выражающее его высоту.

Вывод. *Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.*

Обозначив радиус основания цилиндра через r, диаметр его основания через d, высоту — h, объем — V, получим

$$\boxed{V = \pi r^2 h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

или

$$\boxed{V = \frac{\pi d^2 h}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Вопросы. 1) Что выражает πr^2 в формуле 22? 2) Как изменяется объем цилиндра с изменением радиуса его основания в два, три и т. д. раз? с изменением его высоты в два, три и т. д. раз?

Указание. Объем цилиндра есть *функция* радиуса его основания и высоты.

Задачи.

1. Определить объем цилиндра, радиус основания которого равен 1,2 *см*, а высота = 3,5 *см*.

2. Определить площадь основания цилиндра, если объем его равен 35,4 *куб. см*, а высота = 11,3 *см*.

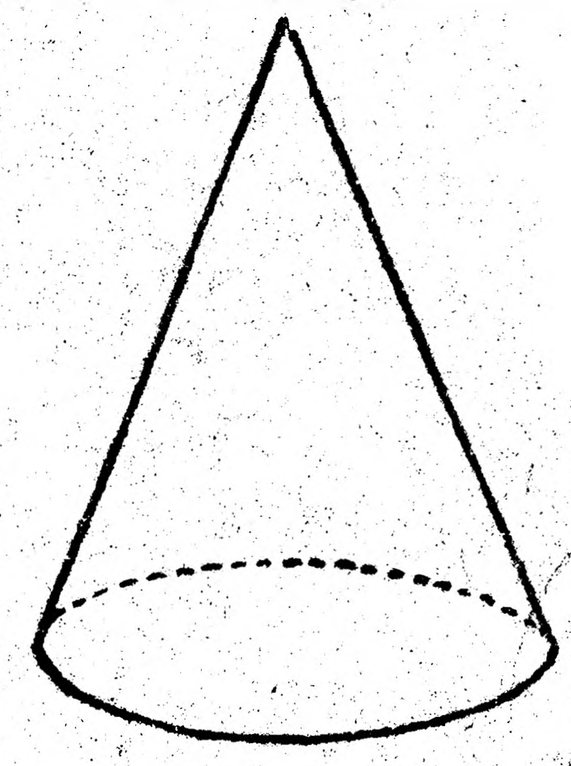
Отв. 3,1 кв. см. (с точн. до 0,1).

3. Какой длины проволоку с поперечным сечением в один *кв. см.* можно получить из медного цилиндра, у которого диаметр поперечного сечения равен 1,6 *дм*, а высота равна 1 *м*.

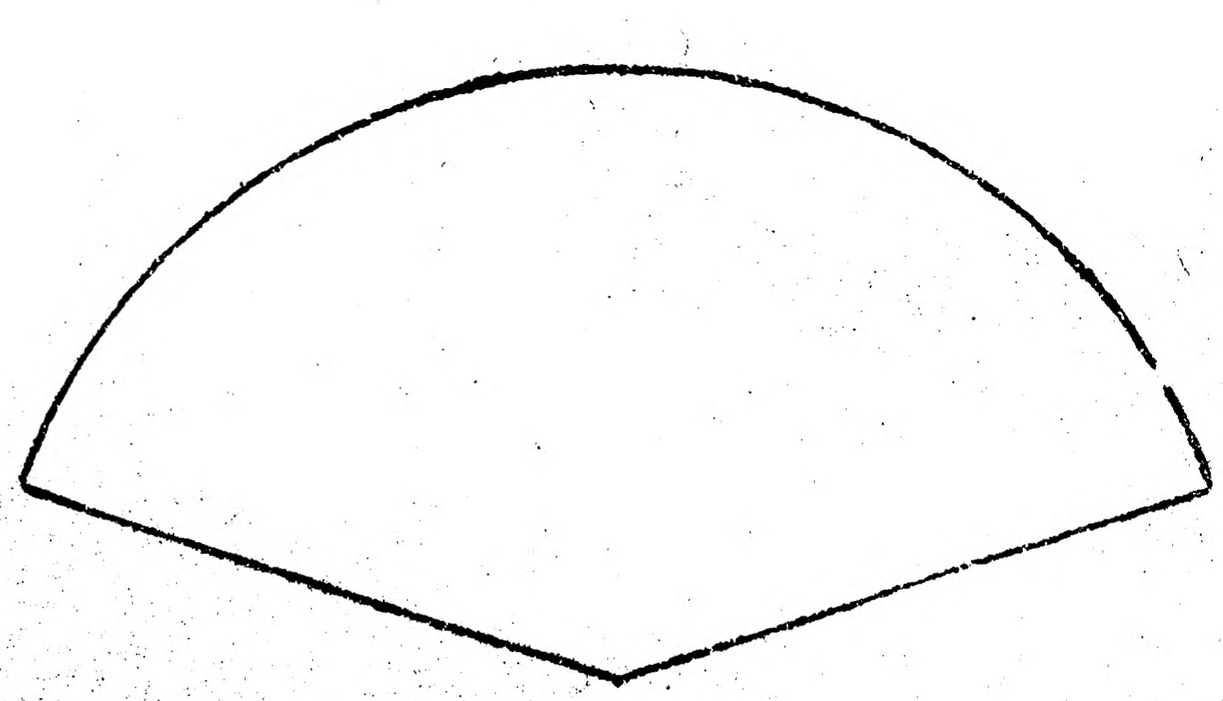
Отв. 200,96 *м*.

§ 79. Поверхность конуса.

Указание. Форма тела, изображенная на чертеже 123, называется *прямым круглым конусом*.

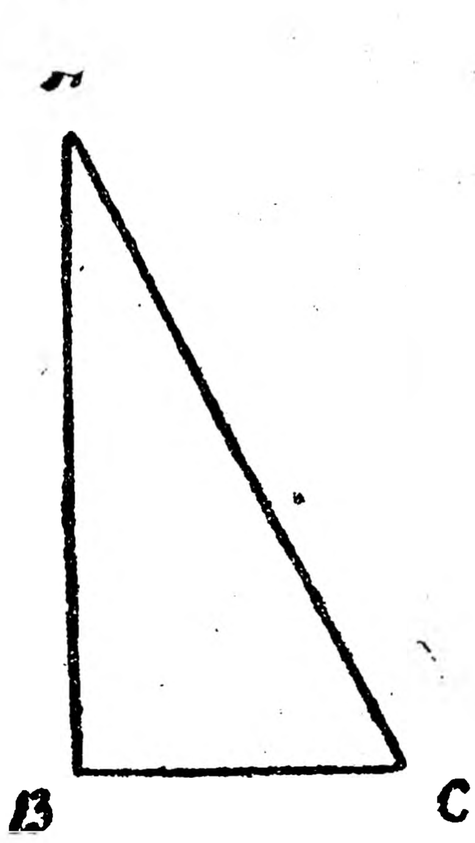


Черт. 123.

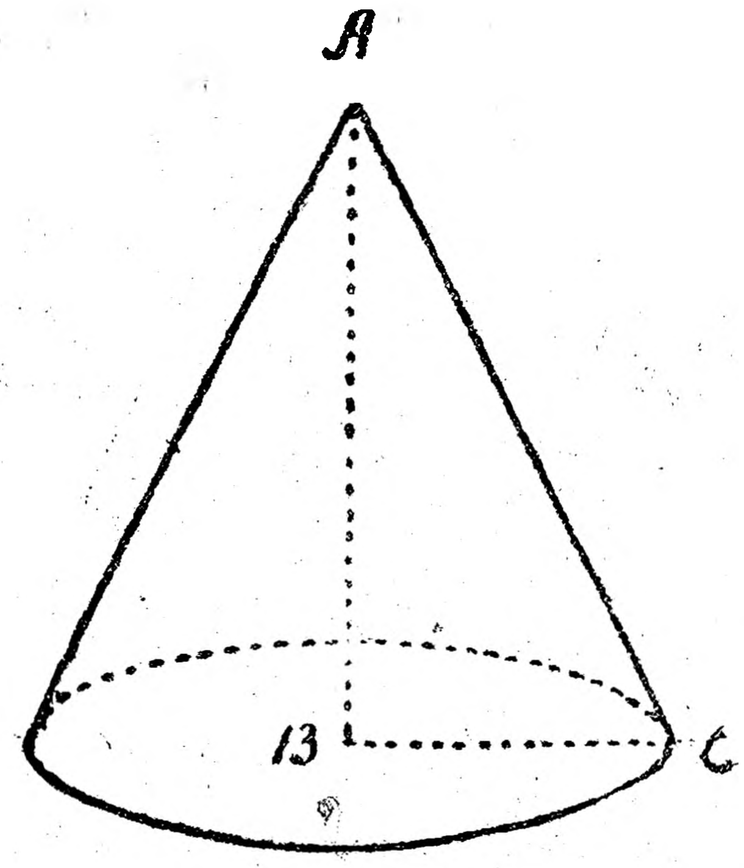


Черт. 124.

Прямой круглый конус состоит из круга, который называется *основанием* конуса, и боковой кривой поверхности, которая в развернутом виде имеет форму сектора (черт. 124).



Черт. 125.



Черт. 126.

Вращением прямоугольного треугольника (ABC черт. 125) вокруг неподвижного катета AB до полного оборота получается прямой круглый конус (черт. 126). Неподвижный катет AB называется *осью* конуса, вращающаяся гипотенуза AC называется *образующей*, а катет BC, который при вращении образует круг, называется *радиусом основания* конуса. Ось AB (черт. 126) называется также *высотой* конуса.

Вопросы. 1) Показать на своем чертеже такой прямоугольный треугольник, вращением которого образовался конус на черт. 123.

2) Указать ось, образующую, высоту и радиус основания этого конуса.

3) Указать конические тела, встречающиеся в повседневной жизни.

Задачи.

1. На черт. 127 изображен конус с радиусом основания $OB = 3$ *м* и образующей $SB = 8$ *м*; на черт. 128 изображена развертка его боковой поверхности, имеющая форму сектора. Вычислить: 1) длину окружности основания конуса, 2) длину дуги сектора (черт. 128), 3) площадь этого сектора.

2. Вычислить боковую поверхность конуса, имеющего радиус основания $r = 4$ *см* и образующую $l = 5$ *см* ($\pi = 3{,}14$).

Отв. 62,8 *кв. см.*

3. Определить боковую поверхность конуса, имеющего радиус основания r и образующую l.

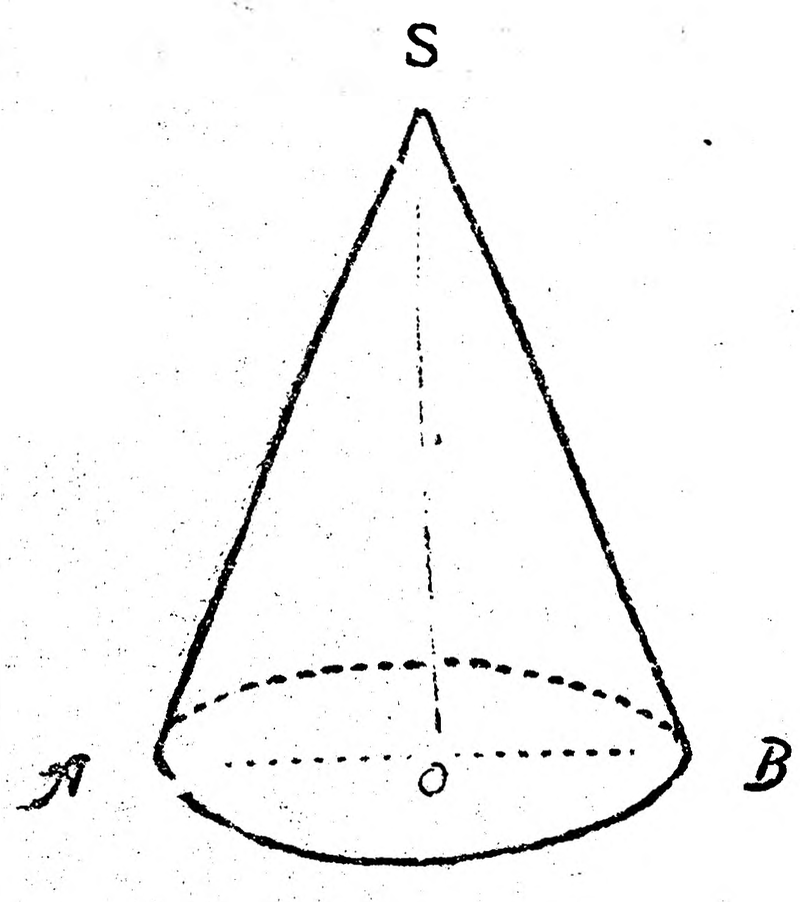
Вывод. *Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности его основания на половину его образующей.*

Обозначив радиус основания конуса через r, диаметр через d, образующую—l, боковую поверхность—S, получим

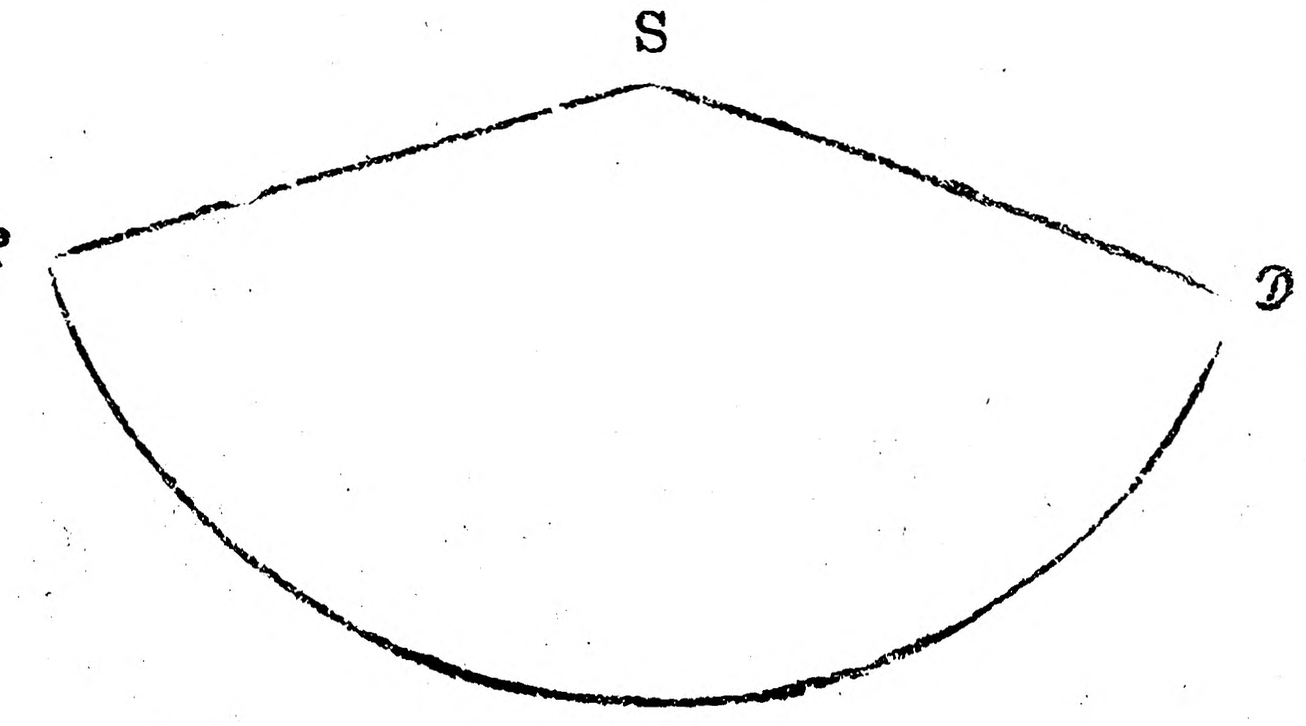
$$S = 2\pi r \frac{l}{2} = \frac{2\pi r l}{2} = \pi r l.$$

$$\boxed{S = \pi r l = \frac{\pi d l}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Вопросы. 1) Как изменится боковая поверхность конуса, если радиус его основания увеличить или уменьшить в два, три и т. д. раз?



Черт. 127.



Черт. 128.

2) Как изменится боковая поверхность конуса, если его образующую увеличить или уменьшить в два, три и т. д. раз?

3) Как изменится боковая поверхность конуса, если одновременно увеличить радиус его основания в 6 раз и уменьшить его образующую в 2 раза? *Отв.* Увеличится в 3 раза.

Указание. Боковая поверхность конуса есть *функция* радиуса его основания и образующей.

4) Из каких поверхностей состоит *полная* поверхность конуса?

5) По данным задач 1 и 2 вычислить *полную* поверхность конуса.

4. Вычислить боковую и полную поверхность конуса, диаметр основания которого равен 2,4 *см*, образующая = 4,5 *см*.

5. Определить радиус основания конуса, если его боковая поверхность равна 25,5 *кв. дм*, а образующая равна 15 *дм*.

Отв. 0,5 *дм* (с точн. до 0,1).

§ 80. Объем конуса.

У к а з а н и е. Измерением емкости цилиндра и конуса, имеющих одинаковые основания и высоты, можно установить по способу, указанному в § 58, что емкость конуса составляет одну треть емкости цилиндра, поэтому *объем конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту.*

Обозначив радиус основания конуса через r, диаметр через d, высоту — h, объем — V, получим

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi d^2 h}{12}} \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

Вопросы. 1) Что выражает в этой формуле πr^2? 2) В каких единицах выражается объем конуса? 3) Как изменяется объем конуса с изменением радиуса его основания в два, три и т. д. раз? его высоты в два, три и т. д. раз? при одновременном увеличении радиуса основания в 5 раз и высоты в 2 раза?

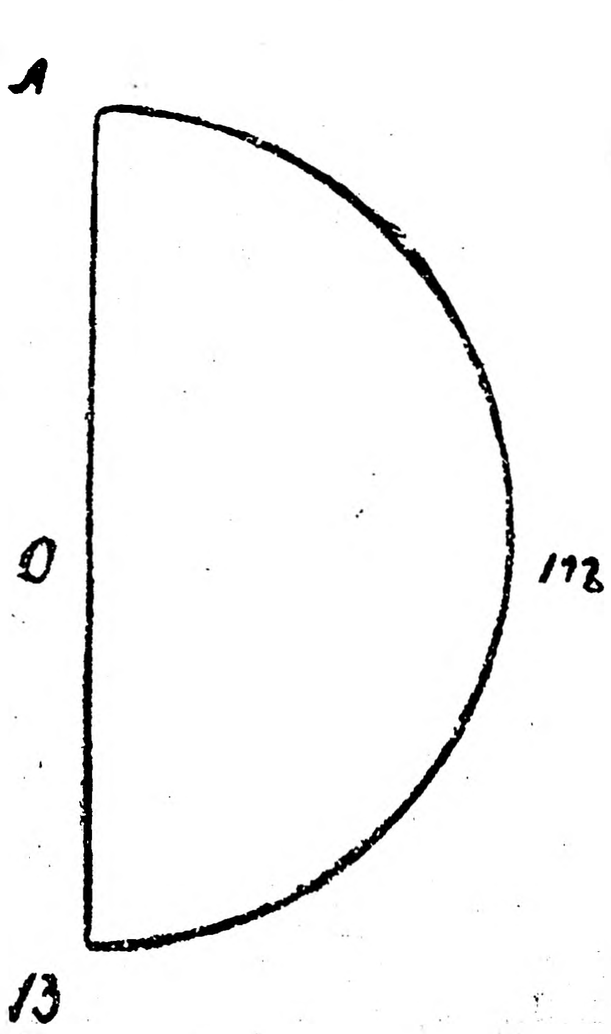
Отв. В 50 раз.

У к а з а н и е. Объем конуса есть *функция* радиуса его основания и высоты.

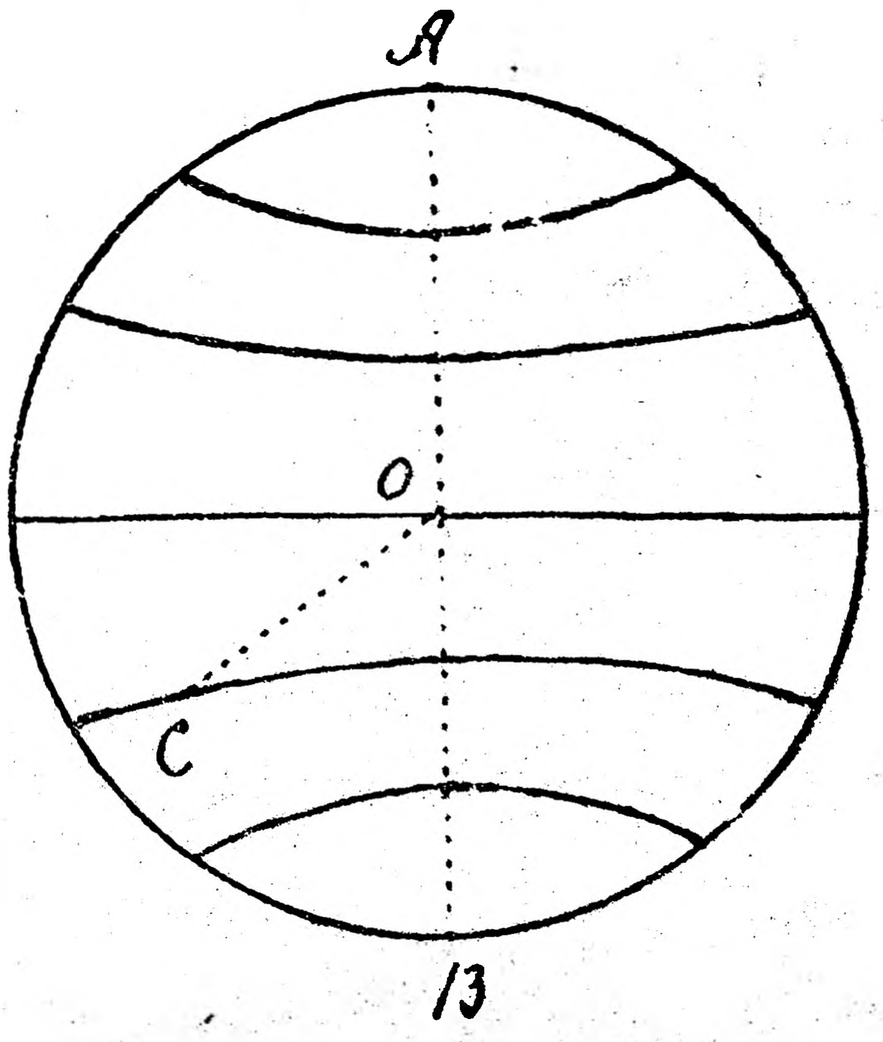
Задача. Вычислить объем конуса, радиус основания которого = 2,1 *см*, высота = 20 *см*.

§ 81. Поверхность шара.

У к а з а н и е. При вращении полукруга AmB (черт. 129) вокруг неподвижного диаметра AB до полного оборота получается форма



Черт. 129.



Черт. 130.

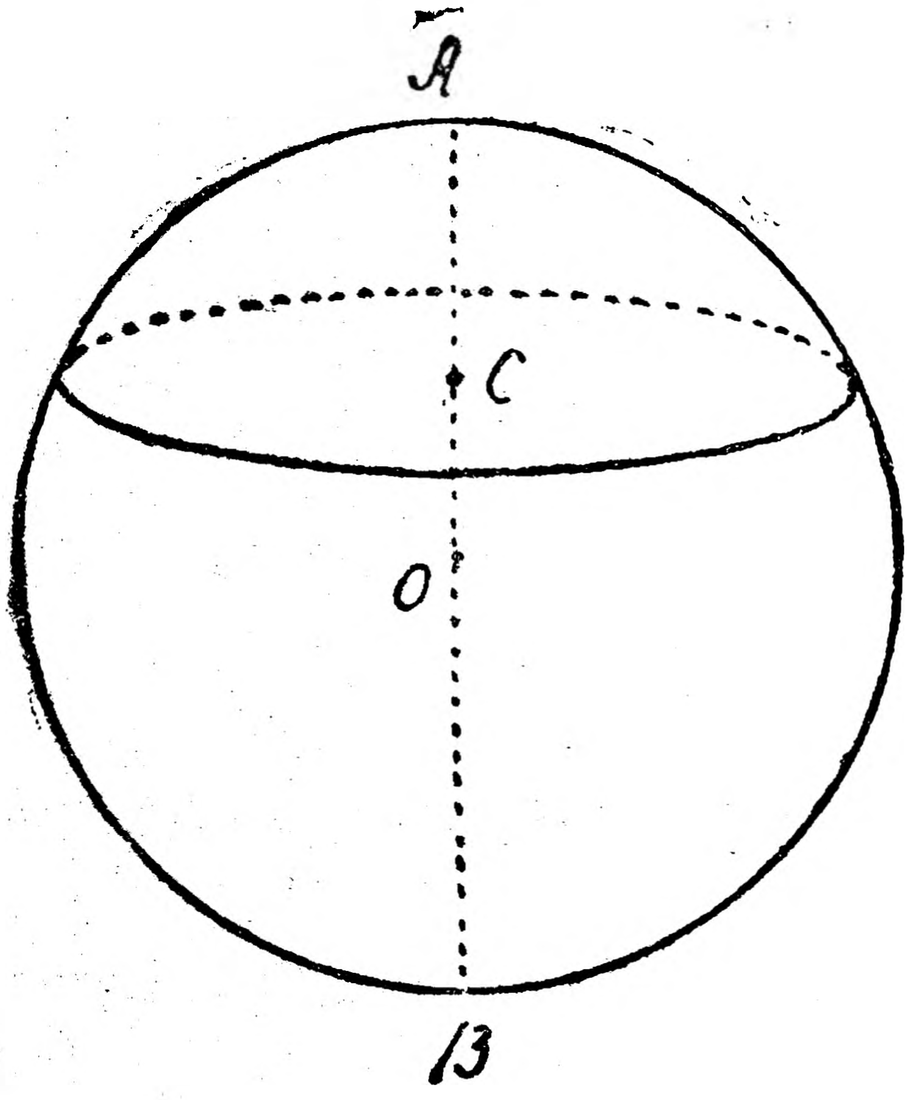
объема, называемая *шаром* (черт. 130). Центр *O* вращающегося полукруга называется *центром* шара.

Отрезок *OC* (черт. 130), соединяющий центр шара *O* с точкой *C* его поверхности, называется *радиусом* шара.

Вопросы. 1) Сколько радиусов можно провести в шаре?

2) Равны ли они между собою?

Указание. При отсечении какой-нибудь части шара плоскостью, место сечения имеет форму круга (черт. 131).



Черт. 131.

Вопросы. 1) Как изменяется размер сечения при изменении расстояния его от центра шара? В каком случае он увеличивается? Когда он уменьшается? Когда он наибольший?

2) Чему равно расстояние наибольшего круга сечения от центра шара?

3) Сколько таких наибольших кругов сечений можно провести в шаре?

4) Где помещаются центры всех наибольших кругов шара?

Указание. Наибольший круг сечения называется *большим кругом шара.*

Вопрос. Чему равен радиус большого круга?

Указание. Все большие круги в одном шаре равны. Большой круг делит шар на две равные части, которые называются *полушариями.*

Вопросы. 1) Какой большой круг делит земной шар на северное и южное полушария? 2) Какой большой круг делит земной шар на восточное и западное полушария?

Указание. Опыт показал, что если покрыть равномерным слоем сусального золота поверхность шара и боковую поверхность цилиндра с диаметром основания и высотой, равными диаметру шара, то на позолоту шара и цилиндра пойдут равные количества золота, откуда ясно, что поверхность шара равна *боковой* поверхности указанного цилиндра.

Задачи.

1. Определить поверхность шара, имеющего радиус 12 *см.*

2. Определить поверхность шара, с радиусом *r.*

Вывод. Обозначив радиус шара через R, диаметр через D, поверхность его — S, получим:

$$\boxed{S = 4\pi R^2 = \pi D^2} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

Вопросы. 1) Во сколько раз поверхность шара больше площади его большого круга?

2) Как изменяется поверхность шара при изменении его радиуса в 2, 3 и т. д. раз?

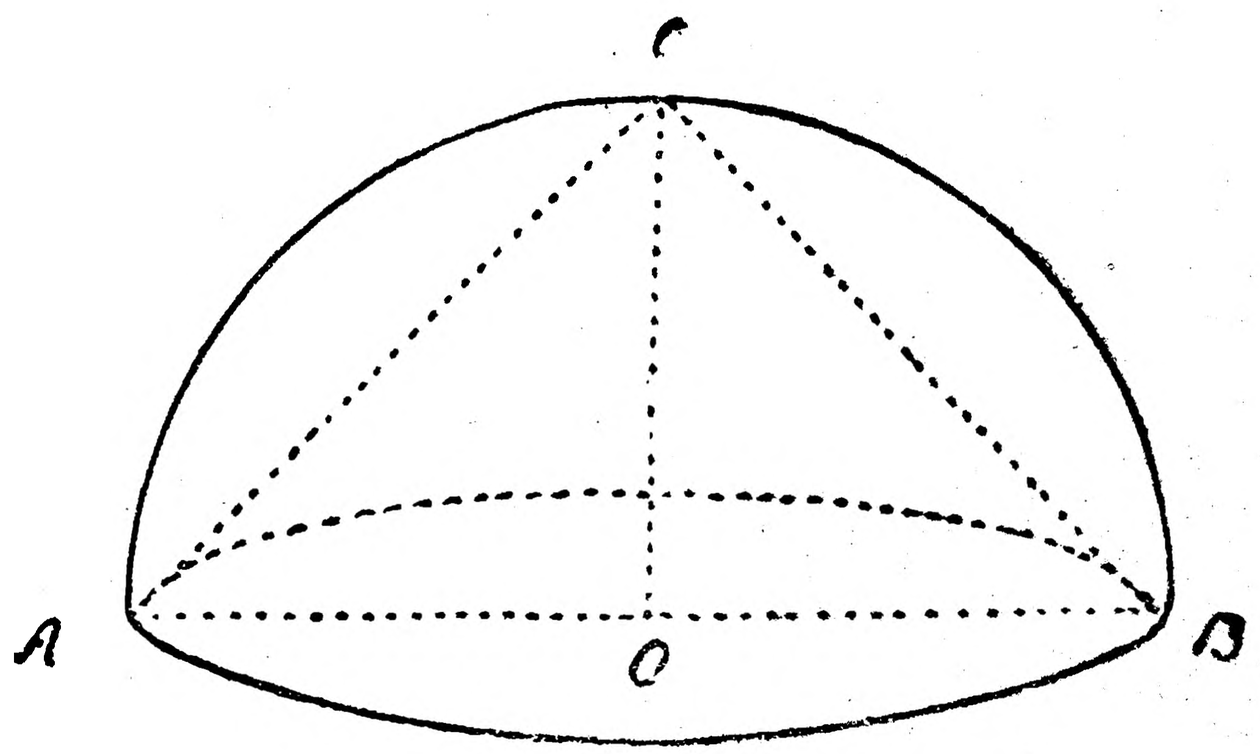
Указание. Поверхность шара есть *функция* его радиуса.

Задача. Определить поверхность шара, диаметр которого равен 2,5 *см* ($\pi = 3{,}14$).

§ 82. Объем шара.

На чертеже 132 изображены полушарие и конус.

Вопрос. Показать, что радиус основания и высота данного конуса равны радиусу полушария.



Черт. 132.

Указание. Измерением емкости конуса и полушария, построенных, как указано на черт. 132, можно установить, что объем полушария в два раза больше объема конуса, имеющего основанием большой круг полушария и высотой радиус полушария.

Вопросы. 1) Чему равны радиус основания и высота конуса (черт. 132), если радиус полушария равен 5 *см*?

2) Вычислить объем этого конуса.

3) Вычислить объем шара этого же радиуса.

4) Вычислить объем шара этого же радиуса.

5) Обозначив радиус полушария (черт. 132) через R, определить:

а) Объем конуса (черт. 132). *Отв.* $\frac{1}{3}\pi R^3$.

б) Объем полушария.

в) Объем шара.

Обозначив объем шара через V, радиус через R и диаметр через D, получим

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6}} \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

Вопрос. Как изменяется объем шара с изменением его радиуса в 2, 3 и т. д. раз?

Указание. Объем шара есть *функция* его радиуса или диаметра.

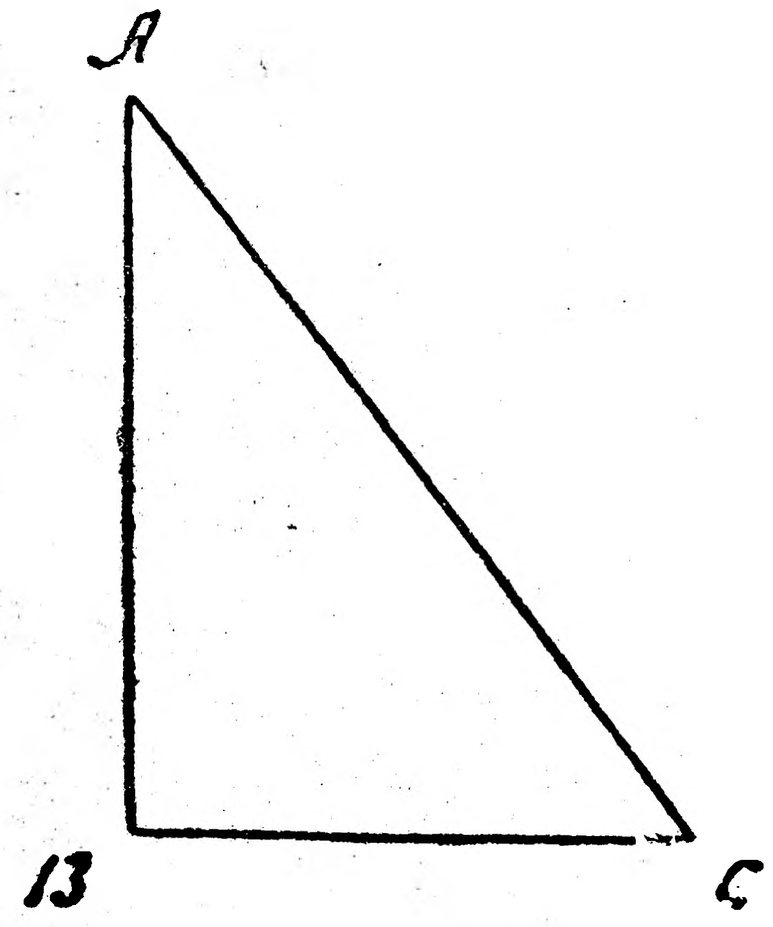
Задача. Определить объем шара, диаметр которого равен 15 *см* ($\pi = 3{,}14$).

Указание. Цилиндр, конус и шар относятся к геометрическим телам, называемым *телами вращения.*

Задачи.

1. Определить объем цилиндра, если его боковая поверхность равна 251,2 *кв. м*, а радиус его основания равен 5 м.

Отв. 628 *куб. м.*



Черт. 133.

2. В цилиндре помещен шар, который касается боковой поверхности и обоих оснований цилиндра. Определить полную поверхность и объем цилиндра, если радиус шара равен 6 *см.*

Отв. 678,24 *кв. см* и 1356,48 *куб. см.*

3. Определить полную поверхность и объем конуса, полученного от вращения прямоугольного треугольника ABC (черт. 133) вокруг катета AB, если $AB = 8$ *м*, $BC = 6$ *м*, $AC = 10$ *м.*

4. Решить предыдущую задачу, если прямоугольный треугольник будет вращаться вокруг катета BC. Сравнить полученные результаты с ответами предыдущей задачи.

5. В ящике, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда, по его длине помещены рядом 5 равных шаров так, что они касаются друг друга, а крайние касаются противоположных стенок ящика. Определить поверхность и объем одного из этих шаров, если расстояние между указанными противоположными стенками равно 35 *дм.*

6. Куча гравия, сложенного на шоссе, имеет форму конуса с окружностью основания 12,56 *м* и высотой 1,02 *м*. Сколько весит этот гравий, если известно, что 1 *куб. м* гравия весит 1 090 *кг*? *Отв.* 4 655 *кг* (с точн. до 1 *кг*).

7. Что будет стоить позолота внутренней поверхности чаши, имеющей вид полушара с радиусом 10 *см*, если на 1 *кв. см* идет 0,6 *г* золота, а грамм золота с работой стоит 50 к?

Отв. 188,4 руб.

8. Образующая конической поверхности лагерной палатки на 1½ *м* длиннее диаметра основания палатки, а вместе они составляют 9½ *м*. Сколько *кв. м* холста пошло на палатку?

Отв. 34,5 *кв. м*.

9. Литой стальной конус весит 120 *кг*. Определить высоту этого конуса, если $r = 2$ *дм* (уд. вес стали $= 7{,}5$).

Отв. 3,8 *дм* (с точн. до 0,1).

10. Стальное ядро морского орудия имеет вид цилиндра с конической верхушкой. Диаметр основания цилиндра равен 3 *дм*, его высота равна 0,9 *м*, а длина всего ядра равна 1,4 *м*. Определить вес ядра (уд. вес стали $= 7{,}5$). *Отв.* 565,2 *кг*.

11. Конус, полушар и цилиндр имеют равные основания с радиусом r. Высота цилиндра и конуса равны радиусу полушара. Определить: а) отношение объемов этих тел? б) отношение кривых поверхностей полушара и цилиндра. *Отв.* 1 : 2 : 3; 1 : 1.

12. Бревно цилиндрической формы плавает в воде в горизонтальном положении так, что половина бревна погружена в воду. Длина бревна 15 *м*. Диаметр его поперечного разреза равен 0,5 *м*. Сколько тонн воды вытесняет бревно? Чему равен его удельный вес? *Отв.* 1) 1,5 *т* (с точн. до 0,1); 2) 0,5.

13. На железную трубу с диаметром 4 *дм* пошло 376,8 *кв. дм* железа. Определить длину трубы. *Отв.* 60 *дм*.

14. Определить вес медного полого шара, толщина стенок которого равна 2 *см*, а внутренний радиус равен 1 *дм* (уд. вес меди 8,94; $\pi = \frac{22}{7}$). *Отв.* 27,3 *кг* (с точн. до 0,1).

15. Сколько весу потеряет в воде стальной шар с радиусом 2 *дм*?

Работа № 11.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ И ПОДОБИЕ.

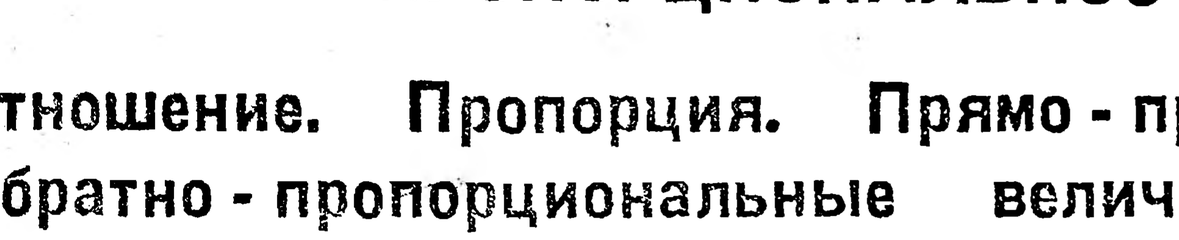
Отношение. Пропорция. Прямо - пропорциональные величины. Обратно - пропорциональные величины. Пропорциональное и обратно - пропорциональное деление. Перемещение членов пропорции. Подобные фигуры. Масштаб.

§ 83. Отношение.

Задачи.

1. Даны отрезки a и b (черт. 134).

Определить, во сколько раз отрезок a больше отрезка b (т.-е. *отношение* отрезка a к отрезку b). Определить *отношение* отрезка b к отрезку a.



Черт. 134.

2. Найти отношения.

а) метра к дециметру;

б) дециметра к метру;

в) метра к аршину; сантиметра к вершку;

г) грамма к килограмму; килограмма к фунту; золотника к грамму; литра к куб. сантиметру.

Вывод. *Отношением двух чисел* называется частное от деления одного числа на другое.

Указание. 1. Числа a и b, составляющие отношение $\frac{a}{b}$, называются *членами отношения*: a — *предыдущий член*, b — *последующий член*.

Указание 2. Два отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ называются *взаимно-обратными*.

Примеры. Написать отношения следующих пар чисел:

1) 5 и 10; 2) 20 и 40; 3) 15 и 10; 4) 30 и 20; 5) $3\frac{1}{2}$ и $2\frac{1}{4}$;

6) $1\frac{2}{3}$ и $2\frac{1}{8}$. Указать, какие из этих отношений равны.

§ 84. Пропорция.

Указание. Равенство двух отношений называется *пропорцией.*

Пример. $2 : 4 = 5 : 10$ . . . (1) или $\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$ . . . (2)

I. Задачи.

1. Сколько чисел (членов) в этой пропорции?

2. По порядку расположения членов пропорции (1) назвать крайние члены и средние члены; тоже — в пропорции (2).

3. Перемножить между собою крайние члены (т.-е. найти произведение крайних членов).

4. Перемножить между собою средние члены (т.-е. найти произведение средних членов).

5. Написать несколько пропорций и проверить для каждой пропорции, равно ли произведение ее крайних членов произведению ее средних членов.

Вывод. *Во всякой пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов (основное свойство пропорции).*

Например, в пропорции (1) имеем: $2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$.

II. Задачи.

1. Числа a, b, c и d составляют пропорцию. Написать эту пропорцию.

2. Выразить равенством основное свойство этой пропорции?

3. Выразить равенством основное свойство пропорции

$x : 8 = 6 : 12$?

4. Определить неизвестный член x этой пропорции.

5. Что пришлось сделать для определения x с средними членами пропорции? с их произведением?

6. Найти неизвестный член пропорции $40 : x = 20 : 5$.

Отв. $x = \frac{40 \cdot 5}{20} = 10$.

7. Какое действие пришлось проделать для определения x из этой пропорции с крайними ее членами? с их произведением?

Вывод. *Неизвестный крайний член пропорции равен произведению средних членов, деленному на известный крайний член.*

Неизвестный средний член пропорции равен произведению крайних членов, деленному на известный средний член.

III. Задачи.

Определить x из пропорций:

1) $x : 8 = 5 : 6$.

2) $4 : x = 2{,}5 : 3\frac{1}{3}$.

3) $6{,}5 : 1{,}3 = x : 2\frac{1}{2}$.

4) $3\frac{1}{4} : 3{,}9 = 11 : x$.

Упражнения. Составить пропорции из равенств:

1) $2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$.

2) $12 \cdot 9 = 4 \cdot 27$.

§ 85. Прямо-пропорциональные величины.

Задача. Рабочий получает в 3 дня 9 рублей; сколько он получит в 6 дней?

Вопросы. 1) Во сколько раз увеличивается заработок рабочего с увеличением времени работы вдвое? втрое? вчетверо?

2) Во сколько раз меньше времени нужно работать рабочему, чтобы получить заработок вдвое меньший? втрое меньший? вчетверо меньший?

3) В какой зависимости находится заработная плата рабочего от времени работы (т.-е. как увеличивается или уменьшается заработная плата при увеличении или уменьшении времени работы в 2, 3, 4 и т. д. раз)?

Указание. Заработная плата есть функция, а время работы — аргумент.

Задача. Решить предыдущую задачу при помощи пропорции.

	Время работы.	Плата.
Решение. 1) Запись условия:	3 дня	— 9 руб.
	6 дней	— x руб.

2) Составление пропорции: $3 : 6 = 9 : x$

3) Решение пропорции: $x = \frac{6 \cdot 9}{3} = 18$.

4) Проверить пропорцию, подставив вместо x найденную числовую величину. Проверка. $3 : 6 = 9 : 18$. *Отв.* 18 руб.

Вывод. Две величины называются *прямо-пропорциональными*, если, с увеличением или уменьшением одной из них в определенном отношении, другая величина увеличивается или уменьшается в том же отношении.

Задача. 5 ведер воды весят 60 *кг*. Сколько весят 10 ведер воды? (Решить задачу по указанной выше схеме).

Упражнение. Указать несколько примеров прямо-пропорциональных величин.

Задачи.

1. За 13 *м* сатина заплатили 7 руб. 80 коп. Сколько метров сатина можно купить на 6 руб. 30 коп? *Отв.* 10,5 *м*.

2. Из двух цилиндров с одинаковым основанием, первый цилиндр имеет объем 23,5 *куб. дм* и высоту 6 *дм*. Какова высота второго цилиндра, если его объем равен 4,7 *куб. дм*?

Отв. 1,5 *дм*.

3. Медный шар при объеме 6 *куб. дм* весит 53 *кг*. Сколько весит медный шар, объем которого равен $4\frac{1}{2}$ *куб. дм*.

Отв. 39,75 *кг*.

4. 28 землекопов произвели 60 килограммометров работы. Сколько килограммометров работы произведут 42 землекопа? (Указание. Килограммометр есть работа при поднятии 1 *кг* на высоту 1 *м*.)

5. 350 вагонов совершили работу 10 000 тонн-километров. Какую работу совершили 280 вагонов? (Указание. Тонн-километр есть работа вагона при перевозке 1 тонны груза на расстоянии 1 километра.)

6. 36 землекопов, копая канаву, выкинули 720 *кг* земли на расстояние по глубине в среднем 3 *м*. Сколько нужно землекопов, чтобы выкинуть 540 *кг* земли на расстояние по глубине в среднем 5 *м*? (Указание. Выразить предварительно работу землекопов в килограммометрах.)

§ 86. Обратно-пропорциональные величины.

Задача. 12 рабочих выполняют работу в 6 дней; во сколько дней выполнят ту же работу 4 рабочих?

Вопросы. 1) Во сколько раз *уменьшится* время работы, если число рабочих *увеличится* вдвое? втрое? вчетверо?

2) Во сколько раз *увеличится* время работы, если число рабочих *уменьшится* вдвое? втрое? вчетверо?

3) Почему можно назвать время работы функцией, а число рабочих — аргументом? Или, наоборот: число рабочих функцией, а время работы аргументом?

4) В какой зависимости находится время работы от числа рабочих?

Задача. Решить предыдущую задачу при помощи пропорции.

	Число рабочих.	Время работы.
Решение. 1) Запись условия:	12	— 6 дней
	4	— x дней

2) Составление пропорции: $12 : 4 = x : 6$.

3) Решение пропорции: $x = \frac{12 \cdot 6}{4} = 18$.

Отв. 18 дней.

Сравнить способ составления пропорции в этой задаче и в задачах § 85.

Вывод. Две величины называются *обратно-пропорциональными*, если, с увеличением (или уменьшением) одной из них в определенном отношении, другая величина уменьшается (или увеличивается) в том же отношении.

Задача. Если лампа будет гореть три часа в день, то керосину хватит на 30 дней; на сколько дней хватит керосину, если лампа будет гореть два часа в день? (Решить эту задачу по указанной выше схеме.)

Упражнение. Указать несколько примеров обратно-пропорциональных величин.

Задачи.

1. Два шкива с диаметром 8 *см* и 12 *см* соединены бесконечным ремнем. Первый шкив делает в минуту 24 оборота. Сколько оборотов делает в минуту второй шкив? *Отв.* 16.

2. Книга содержит 240 страниц по 1 800 букв на каждой странице. Во втором издании книга имела на странице 1 600 букв. Сколько страниц во втором издании книги? *Отв.* 270.

3. Для замощения двора требуется 500 каменных плит размером $0{,}3 \times 0{,}4$ *кв. м.* Сколько потребуется для того же двора плит размером $0{,}5 \times 0{,}5$ *кв. м?* *Отв.* 240.

4. Из двух тел одинакового веса первое имеет объем 16 *куб. дм.* и удельный вес 1,2. Определить удельный вес второго тела, если его объем равен 24 *куб. дм.* *Отв.* 0,8.

5. При населении города 1 200 000 человек, средняя жилая норма на каждого жителя равна 8 *кв. м.* Как изменится средняя жилая норма при увеличении населения на 400 000 человек при том же жилищном фонде? *Отв.* Уменьшится на 2 *кв. м.*

§ 87. Перемещение членов пропорции.

Даны пропорции, составленные из одних и тех же членов

$$2:6=3:9 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$9:6=3:2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$2:3=6:9 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
$$6:2=9:3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Вопросы. 1. Проверить написанные пропорции.

2. Указать, каким перемещением членов пропорции (1) получены пропорции (2), (3) и (4)?

Вывод. *Пропорция не нарушается, если переменить места: 1) крайних членов, 2) средних членов, 3) места членов в каждом отношении пропорции.*

Упражнение. Проверить предыдущий вывод на нескольких пропорциях.

§ 88. Пропорциональное деление.

Задача 1. Химически чистая вода состоит из водорода и кислорода, при чем вес водорода относится к весу кислорода, как 1 : 8. Какое количество водорода и кислорода содержится в 36 *кг* чистой воды?

Решение. Согласно условию число 36 нужно разделить на две части так, чтобы они относились друг к другу, как 1 : 8; другими словами, число 36 нужно разделить на две части так, чтобы в одной части содержалась одна доля, а в другой — восемь таких же долей; для чего достаточно число 36 разделить на $8+1$, т.-е. на 9 равных долей, и для водорода взять одну долю, а для кислорода — восемь таких долей.

Схема решения:

1) $1+8=9$; 2) $36:9=4$; 3) $4\times1=4$; 4) $4\times8=32$.

Указание. Деление числа на части, пропорциональные данным числам, называется *пропорциональным делением* (или *делением в данном отношении*).

Упражнения. Разделить:

Число	45	42	56	72	108	144	136	162	186
в отношении	4:5	1:5	3:5	2:7	17:19	5:7	2:15	7:11	7:5

Задача 2. Периметр треугольника равен 64 *см.* Стороны треугольника относятся, как 4 : 5 : 7. Определить стороны треугольника.

Решение. Согласно условию, число 64 нужно разделить на три части, пропорциональные числам 4, 5 и 7; для этого достаточно число 64 разделить на $4+5+7$, т.-е. на 16 равных долей; для первой стороны треугольника взять 4 таких доли, для второй стороны — 5 долей, для третьей — 7 долей.

Схема решения:

1) $4+5+7=16$; 2) $64:16=4$; 3) $4\times 4=16$; 4) $4\times 5=20$;

5) $4\times 7=28$;

или короче: I сторона $=\frac{64}{16}\cdot 4=16$; II сторона $=\frac{64}{16}\cdot 5=20$;

$$\text{III сторона}=\frac{64}{16}\cdot 7=28.$$

Упражнения. Разделить:

Число	180	225	625	780	891
Пропорционально числам	5:7:6	3:5:7	7:8:10	2:3:5	2:3:4

Задача 3. Заменить отношение дробных чисел $\frac{2}{3}:\frac{5}{8}$ отношением целых чисел.

Решение. Приведя эти дроби к одному знаменателю и отбросив его, получим:

$$\frac{\overset{8}{\smile}}{2}:\frac{\overset{3}{\smile}}{5}=\frac{16}{24}:\frac{15}{24}=16:15.$$

Упражнения. Заменить: 1) отношение $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ отношением целых чисел; 2) отношение $\frac{5}{7} : \frac{8}{9}$ отношением целых чисел; 3) отношение $3\frac{2}{3} : 5\frac{1}{7}$ отношением целых чисел; 4) отношение $3{,}5 : 2\frac{3}{8}$ отношением целых чисел; 5) отношение $3\frac{5}{6} : 5$ отношением целых чисел.

Указание. Если все члены отношения делятся на одно и то же число, то отношение можно сократить на это число.

Пример. $56 : 42 : 21 = 8 : 6 : 3$.

Задача 4. Разделить число 39 на три части, пропорциональные дробным числам $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$.

Решение. $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{6}{12} : \frac{4}{12} : \frac{3}{12} = 6 : 4 : 3$;

$$\text{I число} = \frac{39}{6+4+3} \cdot 6 = 3 \cdot 6 = 18;$$

$$\text{II „} = \frac{39}{13} \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12;$$

$$\text{III „} = \frac{39}{13} \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9.$$

Упражнения. Разделить:

Число	85	145	205	315	582
Пропорционально дробным числам	$\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$	$\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$	$1\frac{2}{3} : 1\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3} : \frac{5}{8} : \frac{1}{6}$	$\frac{2}{7} : \frac{3}{5} : \frac{1}{2}$

Задача 5. Неравноплечий рычаг, длиною 40 *см*, находится в равновесии, когда к длинному плечу привешен груз 3 *кг*, а к короткому плечу — груз 5 *кг*. Найти длины плеч рычага.

Решение. Известно, что для равновесия рычага необходимо, чтобы длины плеч его были обратно-пропорциональны привешенным к ним грузам; поэтому длину рычага, т.-е. число 40, нужно разделить на две части, обратно-пропорциональные числам 3 и 5, другими словами, число 40 нужно разделить на части, пропорциональные *обратным* числам 3 и 5, т.-е. в отношении $\frac{1}{3} : \frac{1}{5}$.

Схема решения: 1) $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} = 5 : 3$;

2) Длина длинного плеча $= \frac{40}{8} \cdot 5 = 25$ *см*;

2) „ короткого „ $= \frac{40}{8} \cdot 3 = 15$ *см*.

Задача 6. Разделить число 168 на части, обратно-пропорциональные числам 3, 5 и 6.

Решение. $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = 10 : 6 : 5$;

I число $= \frac{168}{21} \cdot 10 = 80$. II число $= \frac{168}{21} \cdot 6 = 48$;

III число $= \frac{168}{21} \cdot 5 = 40$.

Задача 7. Разделить число 225 на части, обратно-пропорциональные числам $\frac{2}{3}$, $1\frac{4}{5}$ и $2\frac{1}{4}$.

Решение. $\frac{1}{2/3} : \frac{1}{1\,4/5} : \frac{1}{2\,1/4} = 27 : 10 : 8$;

I число $= \frac{225}{45} \cdot 27 = 135$; II число $= \frac{225}{45} \cdot 10 = 50$;

III число $= \frac{225}{45} \cdot 8 = 40$.

Упражнения. Разделить:

Число	249	170	216	453	354
Обратно-пропорционально числам	4, 5, 7	3, 4, 8	3, 7, 6	$\frac{2}{5}$, $1\,1/2$, $2\,1/3$	3, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$

Задачи.

1. Три артели рабочих получили за некоторую работу 825 руб. В первой артели было 21 чел., во второй артели 16 чел. и в третьей — 18 чел. Сколько должна получить каждая из этих артелей? *Отв.* 315 руб.; 240 руб.; 270 руб.

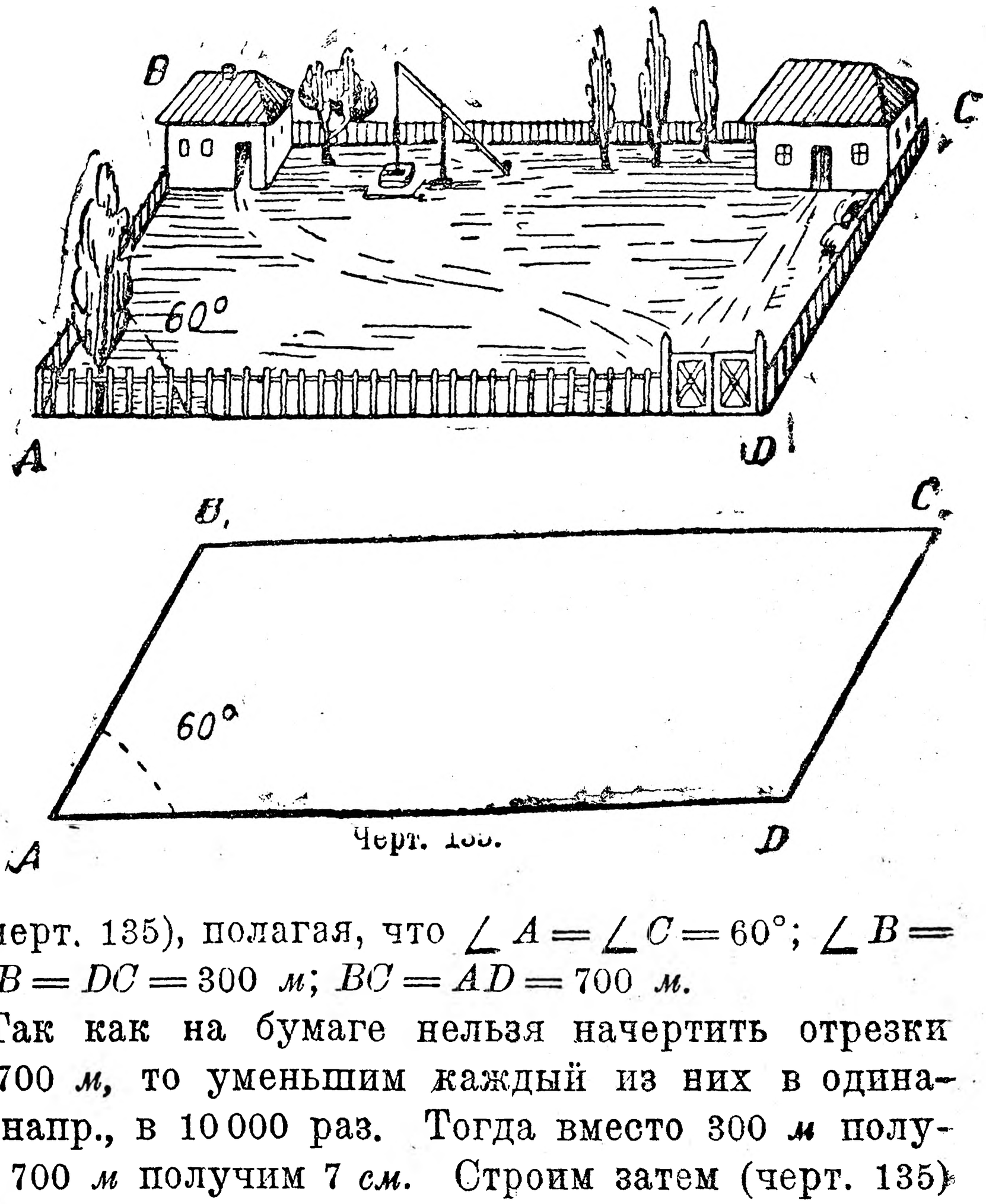
2. За печатание трех книг, — одна в 120 страниц по 50 строк в каждой странице, другая — 150 страниц по 45 строк, третья — 200 страниц по 40 строк, — заплачено 1 660 руб. Сколько стоило печатание каждой книги? *Отв.* 48 руб.; 54 руб.; 64 руб.

3. Три машины разной мощности могут выполнить одну и ту же работу — первая в 3 дня, вторая в 4 дня, третья в 5 дней. Все три машины имеют вместе мощность в 94 лошадиные силы. Сколько лошадиных сил составляет мощность каждой машины?

Отв. 40 сил; 30 сил; 24 силы.

§ 89. План и числовой масштаб.

Указание 1. Планом (или картой) называется уменьшенное изображение на чертеже предметов, расположенных на поверхности земли, напр.: участка земли с его границей и строениями; дома с расположением его внутренних помещений; комнаты с расположением дверей, окон, печей и пр.



Черт. 135.

Задача 1. Начертить план участка $ABCD$ (черт. 135), полагая, что $\angle A = \angle C = 60°$; $\angle B = \angle D = 120°$; $AB = DC = 300$ *м*; $BC = AD = 700$ *м*.

Решение. Так как на бумаге нельзя начертить отрезки длиною 300 *м* и 700 *м*, то уменьшим каждый из них в одинаковое число раз, напр., в 10 000 раз. Тогда вместо 300 *м* получим 3 *см*, вместо 700 *м* получим 7 *см*. Строим затем (черт. 135) угол $A_1 = \angle A = 60°$ и на его сторонах откладываем отрезки $A_1B_1 = 3$ *см* и $A_1D_1 = 7$ *см*. Затем при точке B_1 строим $\angle B_1 = \angle B = 120°$ и откладываем $B_1C_1 = 7$ *см* и, наконец, замыкаем чертеж отрезком C_1D_1, измерив который, получим $C_1D_1 = 3$ *см* (это покажет, что построение сделано правильно).

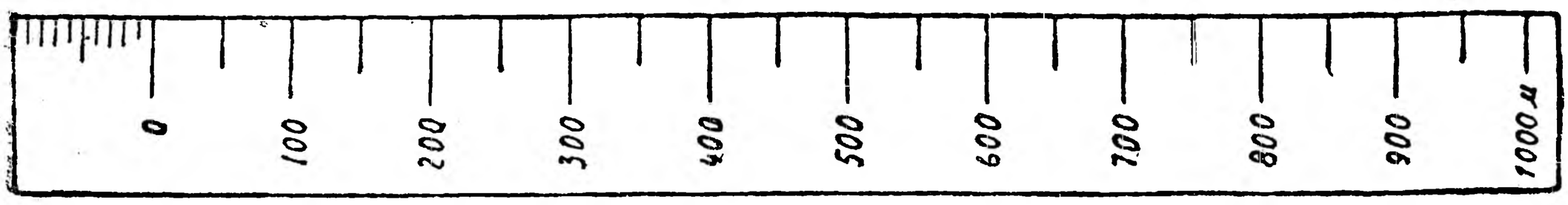
Полученный таким образом чертеж $A_1B_1C_1D_1$ есть *план* участка $ABCD$.

Указание 2. Отношение каждой стороны плана (или карты) к сходственной стороне самой фигуры называется *числовым масштабом* плана.

Числовой масштаб плана в задаче 1 равен

$$3\ см : 300\ м = \frac{3}{30\,000} = \frac{1}{10\,000}.$$

Указание 3. На черт. 136 изображен линейный масштаб плана к задаче № 1.



Черт. 136.

Каждый сантиметр этого масштаба условно изображает длину $100\ м \left(\frac{1}{10\,000} \cdot 100\ м = 1\ см\right)$.

Измерив делениями линейного масштаба какой-нибудь отрезок на плане, мы получим в метрах действительную длину соответствующего отрезка снятой на плане фигуры.

Упражнение. Построить линейный масштаб для плана с числовым масштабом $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1\,000}$; $\frac{1}{100\,000}$.

Задачи.

1. Сравнить по величине углы фигуры $ABCD$ на местности с углами той же фигуры на плане $A_1B_1C_1D_1$ в задаче 1.

2. Найти отношение стороны A_1B_1 плана к стороне AB на местности в той же задаче 1; стороны B_1C_1 к BC; C_1D_1 к CD.

3. Сравнить между собой найденные отношения сторон:

$$\frac{A_1B_1}{AB}, \quad \frac{B_1C_1}{BC}, \quad \frac{C_1D_1}{CD}.$$

§ 90. Подобие фигур.

Указание. 1) Две фигуры (черт. 137 и 138), в которых $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$; $\angle D = \angle D_1$ и $\angle E = \angle E_1$.

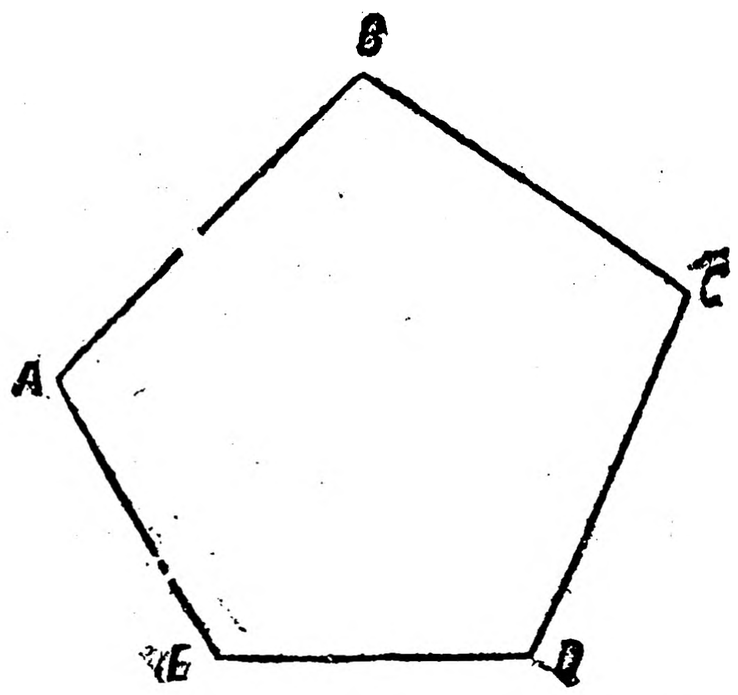
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1},$$

называются *подобными*.

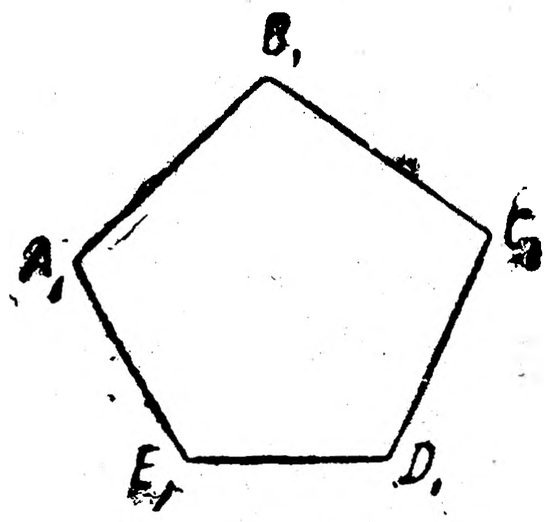
2) Равные углы в подобных фигурах называются *соответственными* углами. Соответственные углы обыкновенно обозначаются одинаковыми буквами со значками (напр., A *и* A_1, B и B_1 и т. д.).

3) Пропорциональные стороны, образующие равные углы, в подобных фигурах называются *сходственными* сторонами (напр., AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1 и т. д.).

4) В подобных треугольниках сходственные стороны лежат против равных углов.



Черт. 137.



Черт. 138.

5) Итак, две фигуры *подобны*, если их соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны (т.-е. отношения сходственных сторон равны).

Упражнения. 1) Начертить на-глаз два подобных тр-ка ABC и $A_1B_1C_1$; 2) назвать их соответственные углы; 3) назвать их сходственные стороны; 4) записать пропорциональность сторон в этих тр-ках; 5) начертить на-глаз два подобных четыреугольника, $ABCD$ *и* $A_1B_1C_1D_1$; 6) назвать соответственные углы в этих ы фигурах; 7) назвать сходственные стороны в этих фигурах; 8) записать пропорциональность их сходственных сторон.

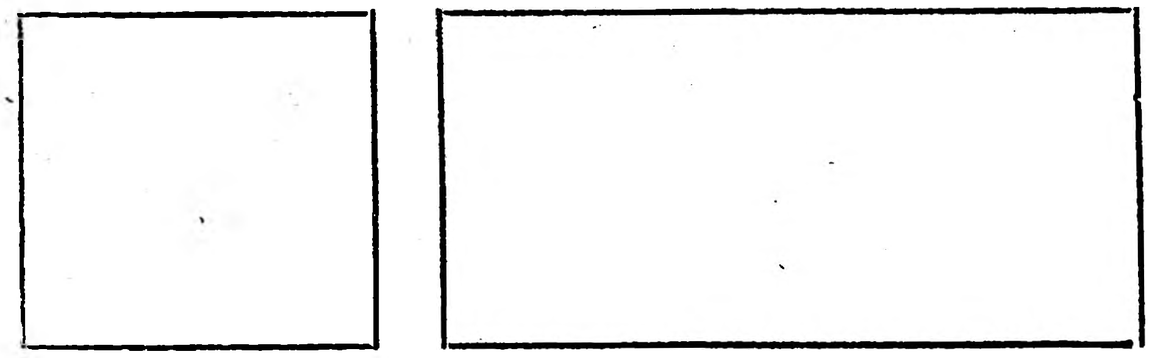
Задачи.

1. Построить три треугольника с пропорциональными сторонами (напр., один со сторонами 2 *см*, 3 *см*, 4 *см*, другой со сторонами 4 *см*, 6 *см*, 8 *см*, третий — 6 *см*, 9 *см*, 12 *см*) и измерением убедиться, что соответственные углы в этих тр-ках равны, а следовательно, эти тр-ки подобны.

2. Построить три тр-ка с соответственно равными углами и убедиться, что стороны их пропорциональны, а следовательно, тр-ки подобны.

Вывод. *Для подобия треугольников достаточно установить только одно из условий подобия: или пропорциональность сходственных сторон, или равенство соответственных углов, так как каждое из этих условий необходимо влечет за собой и второе условие подобия.*

Указание. Так как сумма углов в каждом тр-ке равна 180° (см. § 38), то для подобия двух тр-ков достаточно, чтобы два угла одного тр-ка были соответственно равны двум углам другого тр-ка.



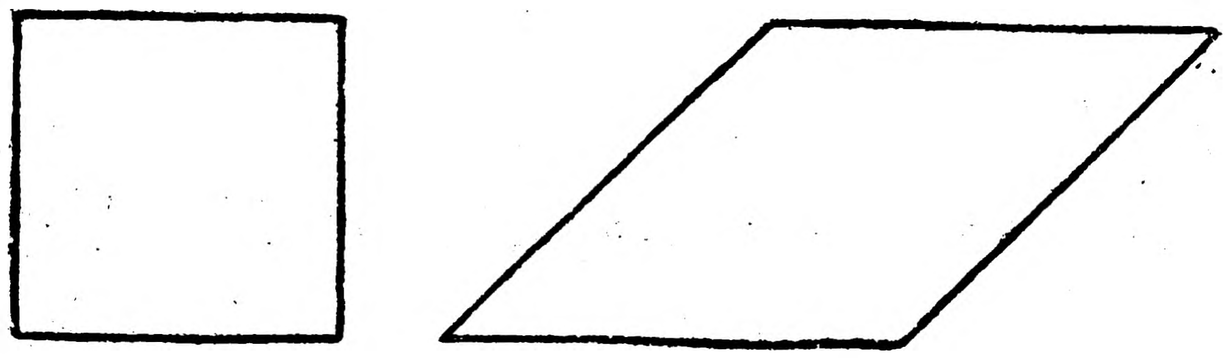
Черт. 139.

Вопросы. 1) Подобны ли два прямоугольника на черт. 139? Какое условие подобия в них имеется, и какого условия подобия нехватает?

2) Подобны ли квадрат и ромб (черт. 140)? Какое условие подобия в них имеется, и какого условия подобия нехватает?

Вывод. Для подобия двух многоугольников необходимо установить оба условия подобия: 1) равенство соответственных углов;

2) пропорциональность сходственных сторон.



Черт. 140.

Указание. Подобие двух фигур обозначается знаком $\sim$ (напр., $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$).

Вопросы. 1) Все ли квадраты подобны?
2) » » ромбы подобны?
3) » » прямоугольники подобны?
4) » » равносторонние тр-ки подобны?

Задачи.

1. $\triangle ABC \sim A_1B_1C_1$; $AB = 3$; $BC = 5$; $CD = 6$; $A_1B_1 = 4$. Найти B_1C_1 и C_1D_1 (черт. 141).

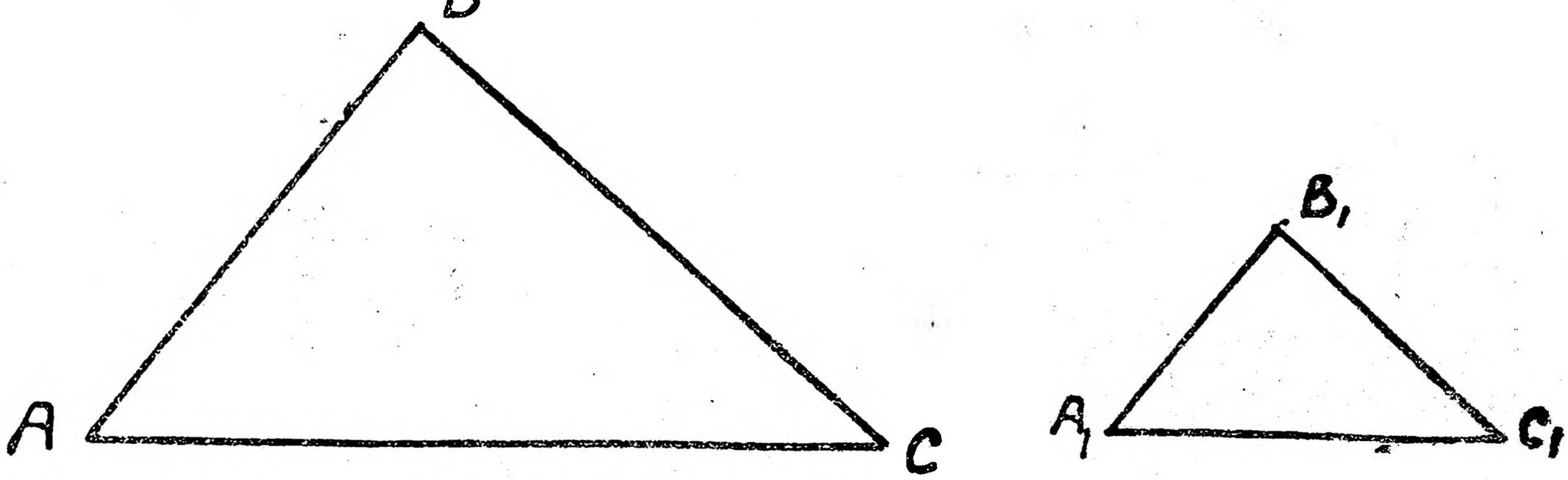
Решение. 1) $\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$, откуда $x = \frac{5 \cdot 4}{3} = ?$

2) $\frac{3}{4} = \frac{6}{y}$, откуда $x = \frac{4 \cdot 6}{3} = ?$

2. В тр-ке ABC (черт. 142) проведена прямая DE так, что $\angle BDE = \angle ACB$. Определить DE, если $AC = 7$ *см*, $AB = 6$ *см*, $BE = 2$ *см*. *Отв.* $2^1/_3$ *см*.

3. Из вершины C прямого угла тр-ка ABC опущен перпендикуляр CD на гипотенузу AB. Показать, что все три полученных таких образом тр-ка подобны; указать сходственные стороны в этих тр-ках и записать пропорциональность сторон в двух малых тр-ках.

4. Представить на плане в масштабе 1 *км* в 1 *мм* прямоугольник с основанием 30 *км* и высотой 15 *км*.

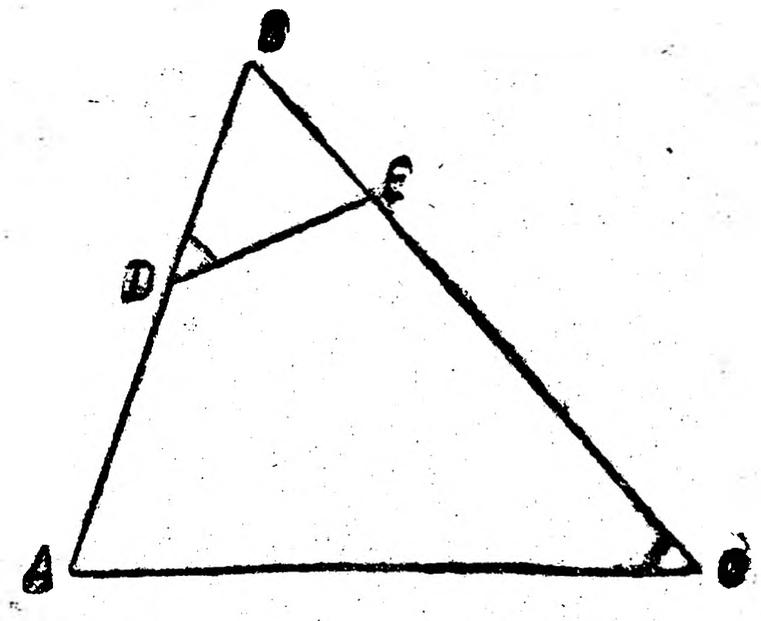


Черт. 141.

5. Снять план комнаты, в которой вы живете, в масштабе 1 *м* в 1 *см*.

6. Определить действительное расстояние между Москвой и Киевом по карте СССР, пользуясь указанным в ней масштабом и циркулем.

7. Дан $\triangle ABC$ (черт. 143). Построить треугольник подобный $\triangle ABC$ так, чтобы его стороны относились к сходственным сторонам данного треугольника, как 3 : 2. ($AC = 6$ *см*, $AB = 5$ *см*, $BC = 4$ *см*) [1]).



Черт. 142.

8. Даны два подобных треугольника, один со сторонами 5 *см*, 6 *см* и 8 *см*, а наибольшая сторона другого равна 6 *см*. Определить две другие стороны второго треугольника. *Отв.* $3^3/_4$ *см*; $4^1/_2$ *см*.

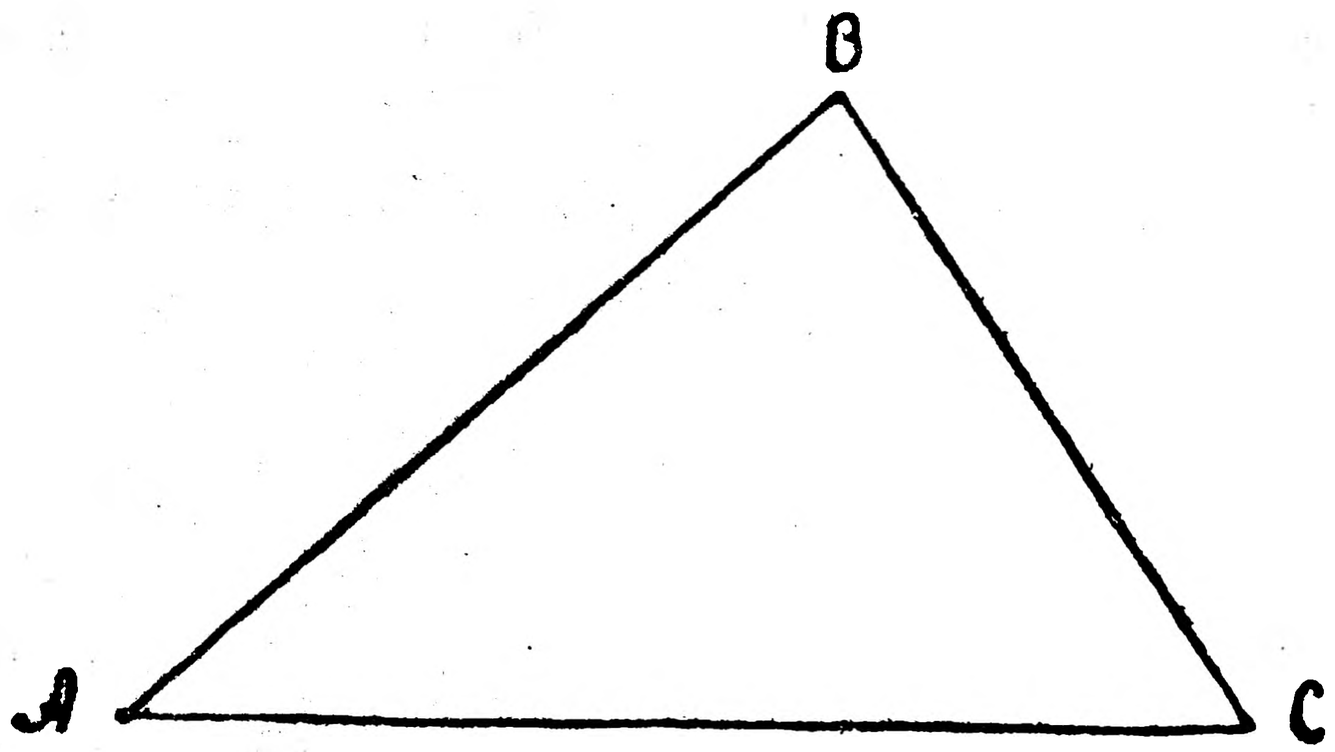
9. Башня отбрасывает тень длиной 16 *м*. В это же время вертикальный шест длиною 2,3 *м* отбрасывает тень длиною 0,6 *м*. Определить высоту башни.

Отв. 61,33 *м*.

---

[1]) На чертеже тр-к дан в уменьшенном размере.

10. Даны два подобных треугольника, один со сторонами 9 *см*, 12 *см* и 15 *см*, другой со сторонами 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*. Показать, что отношение их периметров (см. § 76) равно отношению их сходственных сторон.



Черт. 143.

11. Определить отношение периметров двух подобных треугольников, если сторона одного треугольника 6 *м*, а сходственная ей сторона другого 9 *м*.

12. Стороны треугольника равны 5 *дм*, 7 *дм* и 8 *дм*. Периметр подобного ему треугольника равен 50 *дм*. Определить стороны второго треугольника.

Отв. 12,5 *дм*; 17,5 *дм*; 20 *дм*.

13. Построить два подобных треугольника и измерением установить, что их сходственные высоты пропорциональны сходственным сторонам.

14. Периметр одного из двух подобных треугольников равен 126 *см*, а стороны другого треугольника равны 5 *см*, 7 *см* и 9 *см*. Определить стороны первого треугольника.

Отв. 30 *см*; 42 *см*; 54 *см*.

Работа № 12.

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТРИГОНОМЕТРИИ.

Понятие о тангенсе и котангенсе острого угла. Пользование таблицами тригонометрических величин. Практические вычисления с применением tg. Понятие о синусе. Понятие о косинусе. Интерполирование. Решение прямоугольных треугольников.

§ 91. Понятие о тангенсе и котангенсе острого угла.

Задачи.

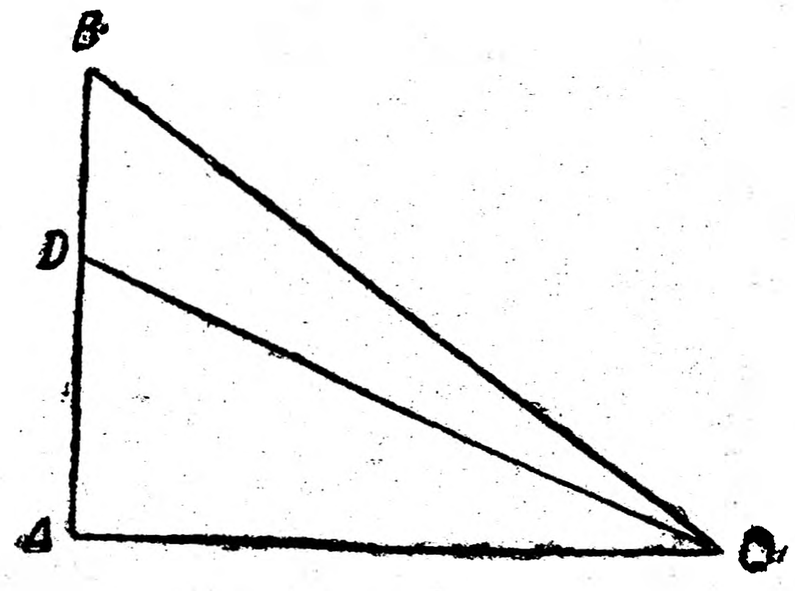
1. Вырезать из картона какой-нибудь прямоугольный треугольник, например, ABC (черт. 144), и, измерив его катеты AB и AC, определить их отношение $\frac{AB}{BC}$.

2. Измерить транспортиром острые углы B и C указанного треугольника.

3. Проведя на этом треугольнике прямую CD (черт. 144), вычислить отношение катетов $\frac{AD}{AC}$ прямоугольного треугольника DAC и измерить его острые углы.

4. Сравнить отношения катетов прямоугольных треугольников ABC и ADC.

5. Сравнить острые углы указанных двух прямоугольных треугольников.



Черт. 144.

Вывод. Отношение катетов прямоугольного треугольника изменяется с изменением его острых углов.

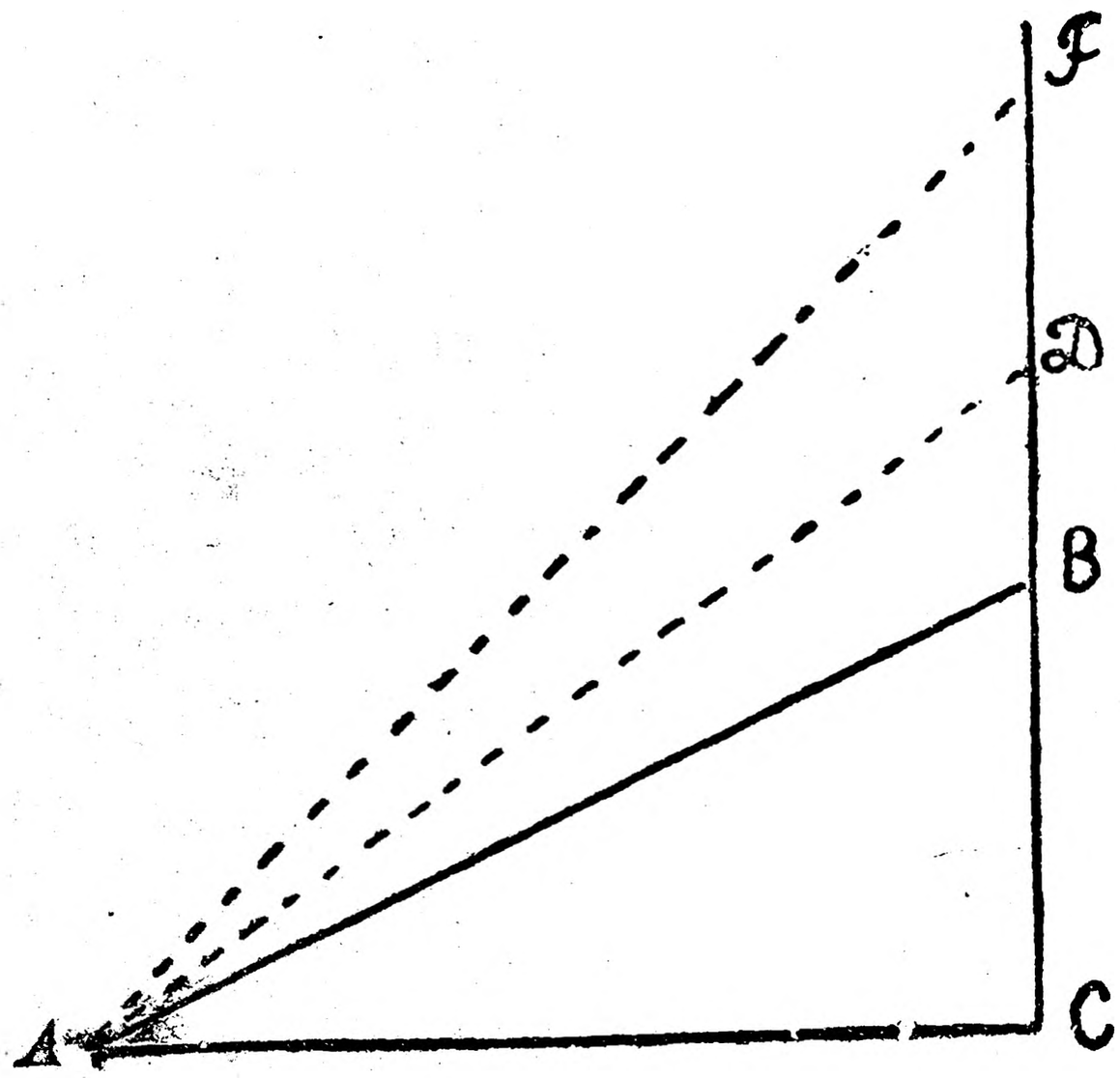
На черт. 145 дан прямоугольный $\triangle ABC$.

Указание. Отношение катетов $\frac{BC}{AC}$ (т.-е. катета, противолежащего углу A, к катету, прилежащему к тому же углу)

вывается *тангенсом* угла A и обозначается *tangens* A, или, короче, $\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A$ (черт. 145).

Задачи.

1. Написать отношение катетов, выражающих $\operatorname{tg} B$ (черт. 144).



Черт. 145.

2. Вычислить величину $\operatorname{tg} A$ (черт. 145), измерив катеты BC и AC.

Решение. $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{2{,}5}{5{,}2} = 0{,}481.$

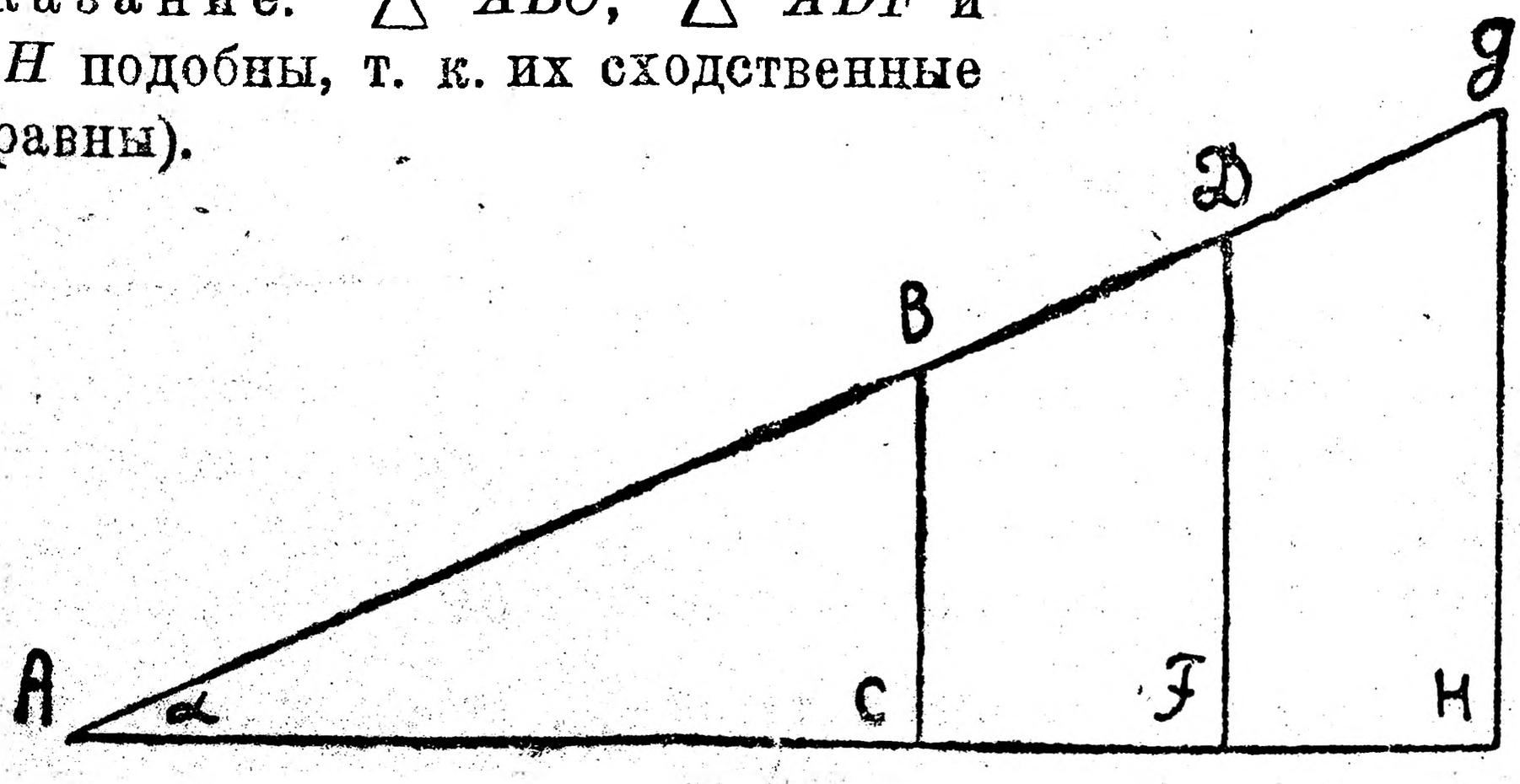
3. Вычислить величину $\operatorname{tg} \angle DAC$; $\operatorname{tg} \angle FAC$ (черт. 145), измерив катеты DC и AC, FC и AC.

Вопросы. 1) Как изменяется $\operatorname{tg} A$ при увеличении $\angle A$ (черт. 145)? (Сравнить результаты зад. 2 и 3).

2) Как назвать отношения: $\frac{BC}{AC}$, $\frac{DF}{AF}$; $\frac{GH}{AH}$ (черт. 146)?

3) Измерив отрезки BC и AC; DF и AF; GH и AH, и вычислив отношения вопроса 2, указать, изменяется ли величина $\operatorname{tg} A$ от изменения длины сторон треугольника, или нет? $\left(\text{Точность } \frac{1}{10}\right)$.

(Указание. $\triangle ABC$, $\triangle ADF$ и $\triangle AGH$ подобны, т. к. их сходственные углы равны).



Черт. 146.

4) Может ли быть величина tg меньше единицы? равна единице? больше единицы?

Выводы. 1) Данному острому углу соответствует определенная величина tg.

2) С изменением угла величина tg изменяется.

3) Равные углы имеют равные tg.

4) Данному значению tg соответствует определенный острый угол.

5) Величина tg может быть меньше, равна и больше единицы.

Вопрос. Можно ли назвать tg A *функцией* угла A, и почему?

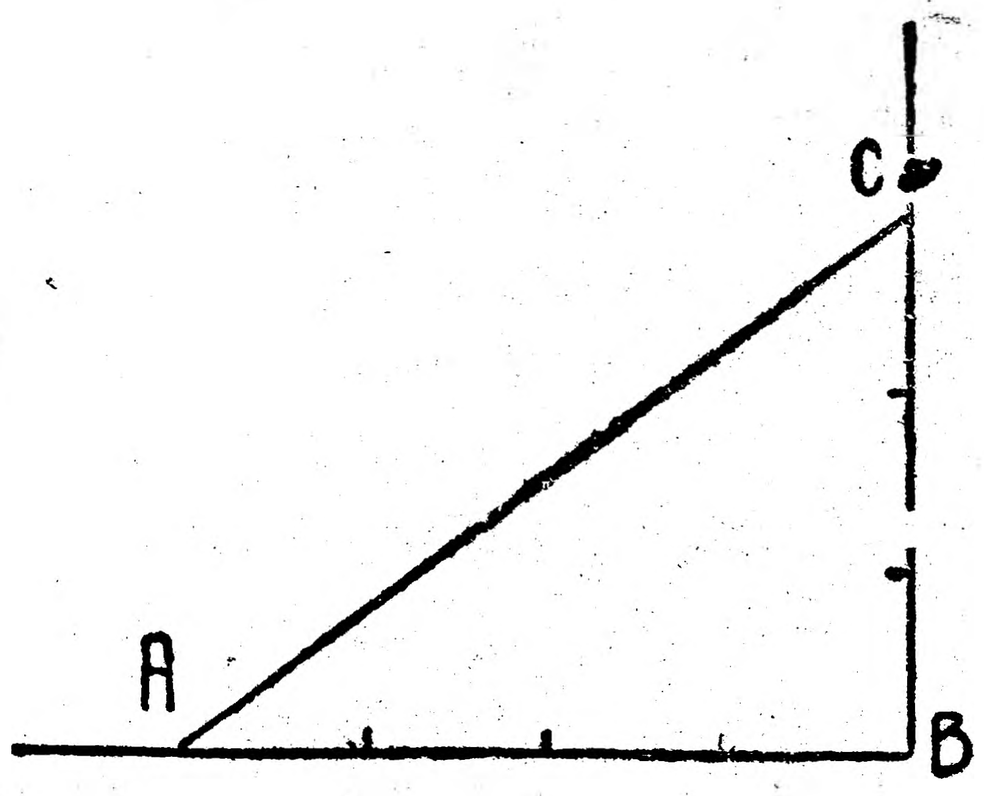
Указание. Величина, обратная тангесу, т.-е. отношение катета, прилежащего к углу, к катету противолежащему, напр., $\frac{AC}{BC}$, $\frac{AF}{FD}$, $\frac{AH}{HG}$ (черт. 146), называется *котангенсом* этого угла; обозначается: *cotangens* A, или короче, ctg A;

$$\frac{AC}{BC} = \text{ctg}\, A.$$

Указание. tg A и ctg A называются *тригонометрическими функциями угла* A (т.-е. зависят от угла A).

4. Построить угол A, если $\text{tg}\, A = \frac{3}{4}$.

Решение. Строим прямой угол ABC (черт. 147) и откладываем на одной стороне его 3, а на другой 4 произвольных равных отрезка, начиная от вершины угла. Конечные точки соединяем гипотенузой. Угол A — искомый угол.



Черт. 147.

5. Построить угол A, если $\text{tg}\, A =$ $=$ 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$.

Указание. В приложении 1 приведена таблица величин тригонометрических функций, в том числе tg и ctg, для всех углов от 0 до 90° на каждый градус, вычисленных с точностью до третьего десятичного знака.

§ 92. Пользование таблицей тригонометрических величин.

Таблица, помещенная в приложении № 1, имеет 6 столбцов. Первый и последний имеют вверху и внизу значок °, обозначающий градусы.

В первом столбце числа градусов идут, увеличиваясь *сверху вниз*; 0°, 1°, 2° . . . 5°, 6° . . . 11°, 12° . . . 36° . . . 42° . . . 45°

В шестом, т.-е. последнем столбце, числа градусов идут, увеличиваясь *снизу вверх*: 45°, 46° . . . 56°, 57° . . . 80° . . . 88°, 89°, 90°.

Остальные 4 столбца таблицы (2-й, 3-й, 4-й, 5-й) имеют различные заголовки, а именно сверху: *sinus, tangens, cotangens, cosinus*, и, наоборот, снизу *cosinus, cotangens, tangens, sinus.*

Пока мы познакомились только с тригонометрическими функциями tg и ctg. До остальных мы дойдем своевременно и о них сейчас говорить не будем. Итак, в данной таблице будем интересоваться двумя средними столбцами (3-м и 4-м).

Третий столбец имеет вверху заголовок *tangens*, а внизу — *cotangens*; четвертый столбец имеет вверху заголовок *cotangens*, а внизу — *tangens*. В этих столбцах помещены числовые величины тангенсов и котангенсов всех углов, начиная от 0° до 90°.

Если мы желаем найти tg угла, меньшего 45°, напр., tg 28°, то прежде всего находим в 1-м столбце число 28° и, идя направо по той строке, где находится это число 28°, находим в третьем столбце (т.-е. *под* заголовком *tangens*), самый тангенс = 0,532.

Если мы желаем найти tg угла, большего чем 45°, например, tg 63°, то прежде всего находим в 6 столбце, читая снизу вверх число 63° и, идя налево по той строке, где находится это число 63°, находим в 4-м столбце (т.-е. *над* заголовком *tangens*) самый гантенс, равный 1,963.

Для отыскания ctg следует поступать подобным же образом: числовую величину котантенса находим в 4-м столбце (т.-е. *под* заголовком *cotangens*), если угол меньше 45°, и в 3-м столбце (т.-е. *над* заголовком *cotangens*), если угол больше 45°.

Примеры (проверить по таблице):

1) tg 17° = 0,306	ctg 17° = 3,271
2) tg 40° = 0;839	ctg 40° = 1,192
3) tg 59° = 1,664	ctg 59° = 0,601
4) tg 82° = 7,115	ctg 82° = 0,141

Задачи.

1. Найти величину тангенса и котангенса углов: 13°, 87°, 46°, 74°.

Указание. При помощи таблиц можно решить обратную задачу: по величине tg найти соответствующий ему угол.

В столбцах 3-м и 4-м ищут заданную величину тангенса (или величину к ней наиболее близкую) и, найдя ее, выписы-

вают число градусов из той же строки слева, если заголовок *tangens* стоит над найденной величиной тангенса (вверху), и справа, если заголовок *tangens* находится под найденной величиной тангенса (внизу).

Тем же правилом руководствуются для отыскания угла по котангенсу.

Примеры (проверить по таблице):

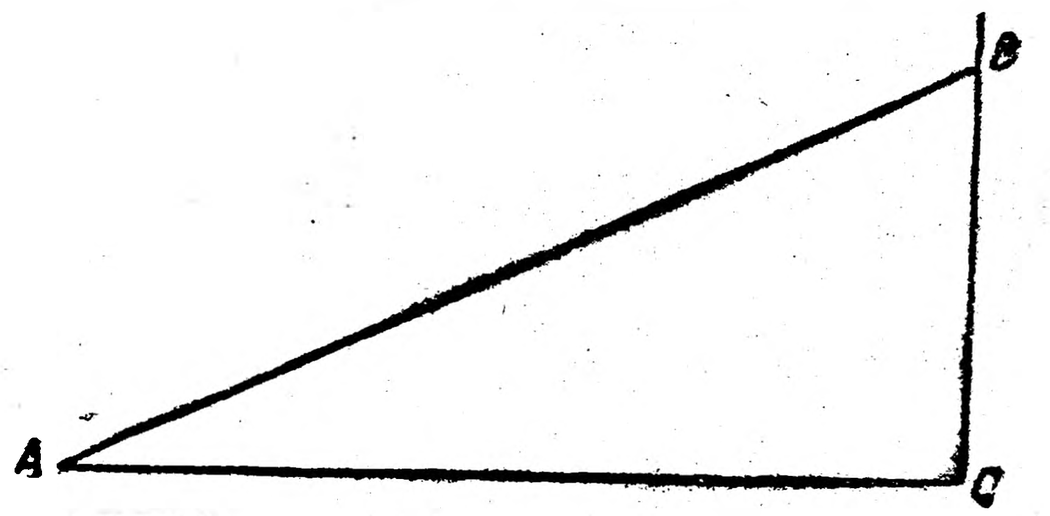
1) $\operatorname{tg} x = 0{,}577$; $x = 30°$
2) $\operatorname{tg} x = 2{,}475$; $x = 68°$
3) $\operatorname{ctg} x = 3{,}271$; $x = 17°$
4) $\operatorname{ctg} x = 0{,}194$; $x = 79°$.

2. Найти из таблицы величину углов на черт. 145 в целых градусах, вычислив предварительно их тангенсы с точностью до 0,001.

3. Найти величину угла A на черт. 146 в целых градусах, вычислив предварительно его котангенс с точностью до 0,001.

4. Построить угол в 25° по его tg.

Р е ш е н и е. Из таблицы имеем $\operatorname{tg} 25° = 0{,}466$ (проверить). Откладываем отрезок $AC = 1$ *дм* [1]) (черт. 148). Восставим из его конца C перпендикуляр и отложим на нем отрезок $CB = 0{,}466$ *дм*, т.-е. 46,6 *мм*. Концы A и B полученных отрезков соединяем; угол A искомый.



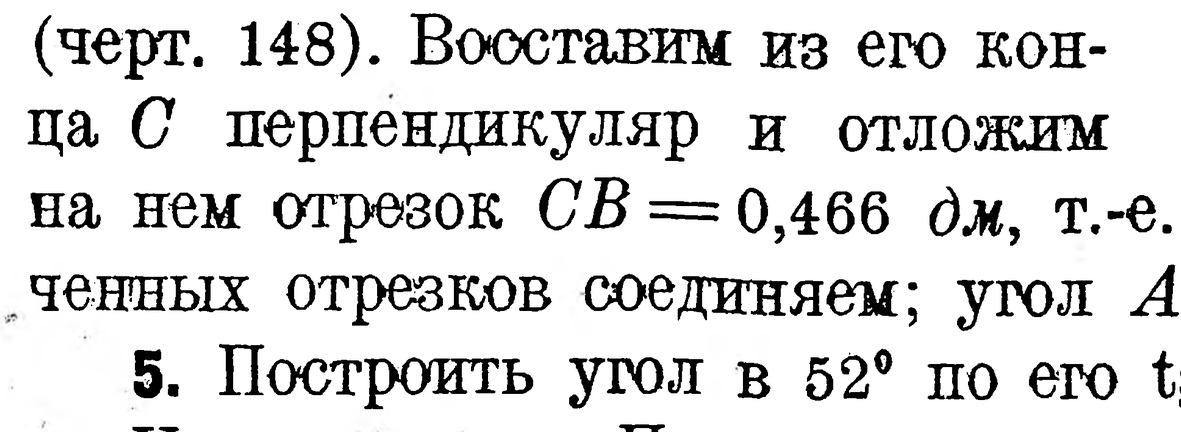
Черт. 148.

5. Построить угол в 52° по его tg.

У к а з а н и е. Построение угла по tg точнее построения его транспортиром.

§ 93. Практические вычисления с применением tg.

1. Определить длину моста, крайние устои которого должны быть в т о ч к а х B и C (черт. 149).



Черт. 149.

Р е ш е н и е. Строим $AC \perp CB$. Предположим, что измерением найдено:

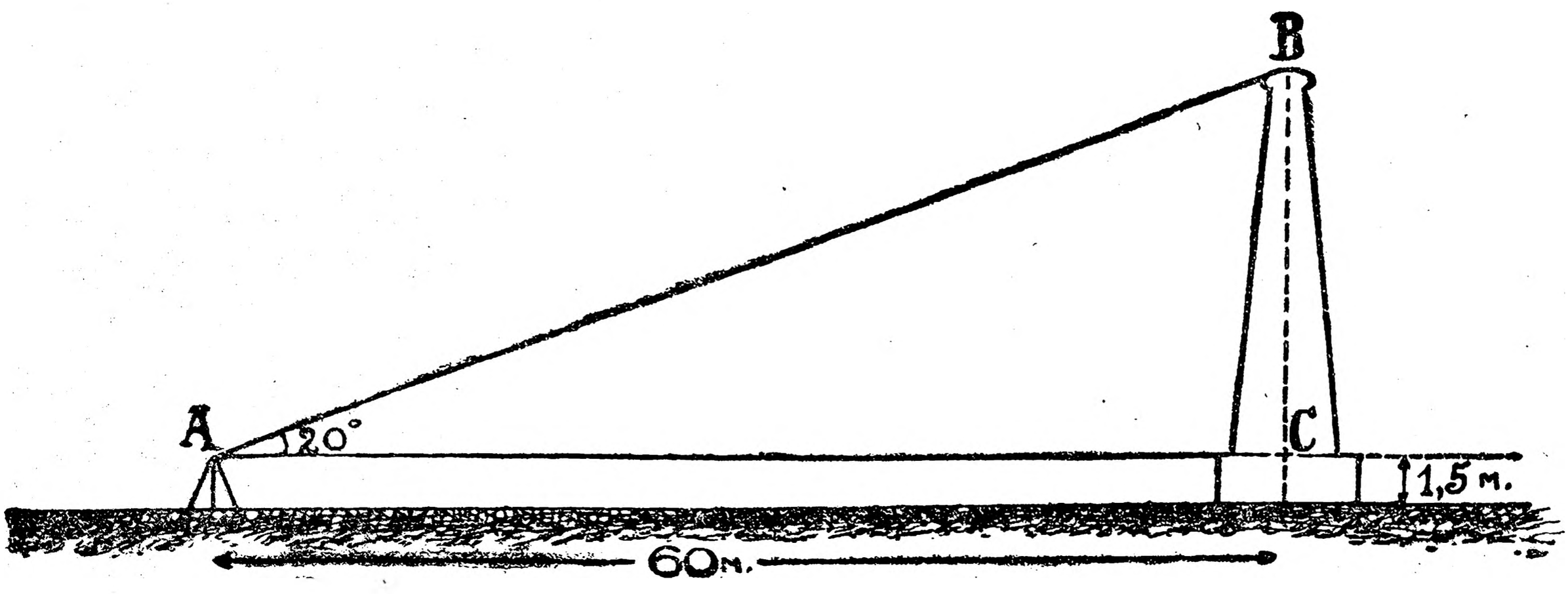
$AC = 120$ *м*; $A = 37°$.

[1]) Чертеж дан в уменьшенном размере.

Тогда $\frac{BC}{AC} = \text{tg } A$, откуда $BC = AC \cdot \text{tg } A = 120 \cdot \text{tg } 37°$.

Из таблицы имеем: $\text{tg } 37° = 0{,}754$ (проверьте!), а потому $BC = 120 \cdot 0{,}754 = 90{,}48$ *м* (проверьте!).

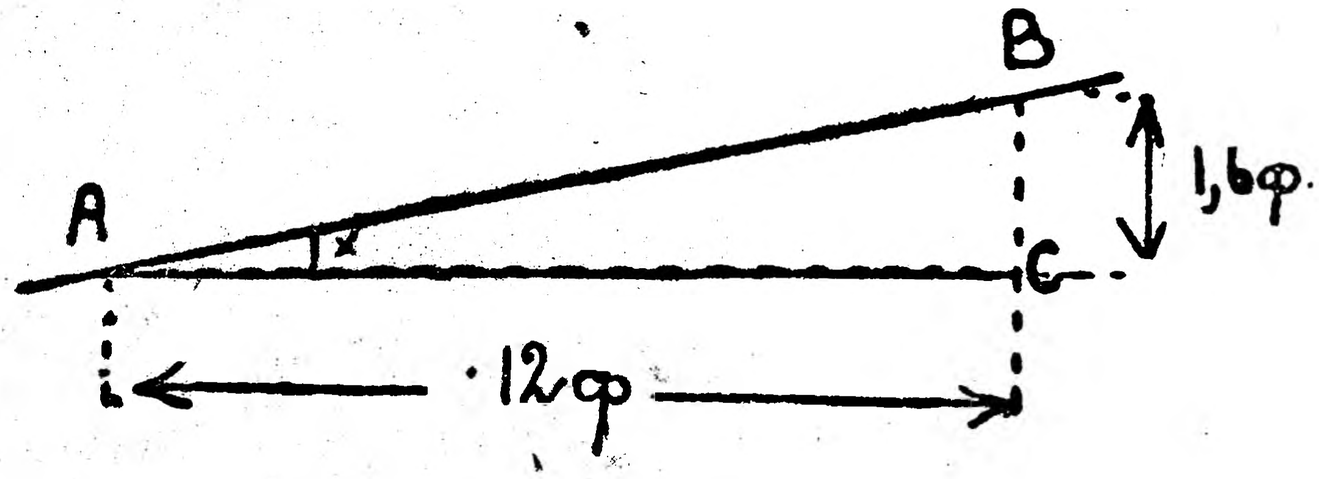
2. Определить высоту фабричной трубы (черт. 150), если измерением найдено: $AC = 50$ *м*, $\angle A = 20°$, высота измерительного прибора 1,5 *м*.



Черт. 150.

3. Дорога поднимается в гору на 1,6 *м* на каждые 12 *м*, измеренных по горизонтали. Определить угол, который дорога образует с горизонтом (черт. 151).

Решение. $\text{tg } A = \frac{BC}{AC} = \frac{1{,}6}{12} = 0{,}133$. Чтобы найти $\angle A$, надо найти числовую величину тангенса, т.-е. 0,133, в таблицах.



Черт. 151.

В таблицах ни в 3-ем, ни в 4-м столбце такой величины нет. Тогда берем в столбце 3-м ближайшую величину 0,141 и находим: $\angle A = 8°$ (приблизительно).

4. Найти угол BAC (черт. 145), если $BC = 22$ *м*, $AC = 60$ *м*.

Упражнение. Проследить по таблицам натуральных тригонометрических величин (см. приложение), как изменяются тригонометрические функции tg и ctg с изменением угла от 0 до 90°.

§ 94. Понятие о синусе острого угла.

В § 91 мы рассмотрели отношения катетов (tg и ctg). Рассмотрим другие отношения сторон прямоугольного треугольника. (Перечертите чертежи 145 и 146).

Указание. Отношение катета противолежащего углу к гипотенузе $\left(\frac{BC}{AB}\text{, черт. 145}\right)$ называется *синусом* этого угла (A); обозначается *sinus* A, или, короче:

$$\frac{BC}{AB} = \sin A.$$

Задачи.

1. Написать отношение, выражающее sin B (см. черт. 145).

2. Вычислить величины sin $\angle BAC$; sin $\angle DAC$; sin $\angle FAC$, (черт. 145).

Вопросы. 1) Изменяется ли величина sin от изменения угла, и как? (Сравнить результаты вычислений в предыдущей задаче).

2) Как назвать отношения

$$\frac{BC}{AB};\ \frac{DF}{AD};\ \frac{GH}{AG} \text{ (черт. 146)?}$$

3) Изменяется ли величина sin угла от увеличения длины его сторон? (Вычислить на черт. 146 величины отношений $\frac{BC}{AB}$; $\frac{DF}{AD}$; $\frac{GH}{AG}$ с точностью до $\frac{1}{10}$ и сравнить между собой).

4) Может ли катет быть больше гипотенузы?

5) Может ли величина sin быть более единицы?

Вывод. 1) Данному острому углу соответствует определенная величина sin.

2) С изменением угла величина sin изменяется.

3) Равные углы имеют равные синусы.

4) Данному значению синуса соответствует определенный острый угол.

5) Величина sin не может быть больше единицы ($\sin A \leqslant 1$).

Вопрос. Можно ли назвать sin A *функцией* угла A, и почему?

Указание. В приложении 1 приведена таблица синусов для углов от 0 до 90°, на каждый градус.

Правила пользования таблицей те же, что и для tg. Разница лишь в том, что для sin берут столбцы второй (читая сверху) и пятый (читая снизу).

Задачи.

1. Найти по таблицам sin 25°. *Отв.* 0,423.

2. Найти по таблицам sin 78°.

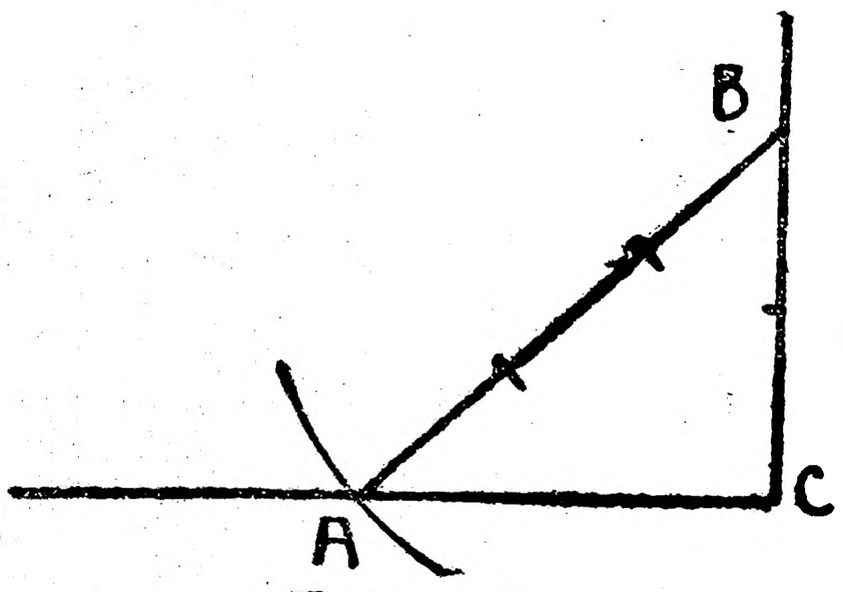
Отв. 0,978.

3. Найти sin 18°; sin 45°; sin 85°; sin 69 .

4. Найти вычислением синусов углы: *BAC*; *DAC*; *FAC* (черт. 145)).

5. Построить угол A, если $\sin A = \frac{2}{3}$.

Решение. Строим прямой угол (черт. 152) и на одной стороне его откладываем от вершины прямого угла два равных отрезка произвольной величины. Из конца B полученного отрезка CB радиусом, равным трем отрезкам той же величины, как и раньше, засекаем другую сторону прямого угла в точке A.



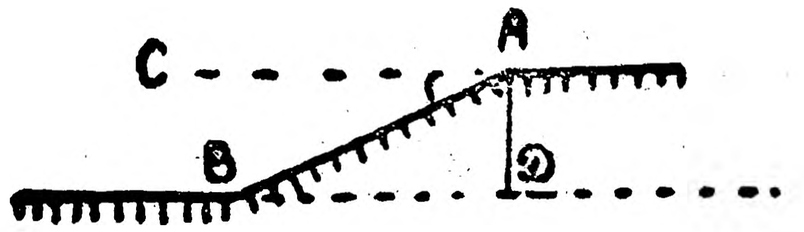
Черт. 152.

Точки B и A соединяем прямой. Угол A будет искомый.

6. Построить острый угол A, если $\sin A = \frac{3}{5}$.

7. Построить острый угол x, если $\sin x = 0{,}669$.

8. Наблюдатель, находясь на вершине холма в точке A (черт. 153), измерением нашел угол $CAB = 25°$ (угол линии откоса холма AB с горизонтом CA) и длину откоса холма $AB = 20{,}6$ *м*. Определить высоту холма AD.



Черт. 153.

Решение. $\angle ABD = \angle CAB$.

$$\frac{AD}{AB} = \sin 25°;\ AD = AB \sin 25°.$$

$$AD = 20{,}6 \cdot 0{,}423 = 8{,}7\ м \left(\text{с точностью до } \frac{1}{10}\right) \text{(проверьте)}.$$

9. Вычислить AD (черт. 153), если измерением найдено: $\angle CAB = 18°$, $AB = 26$ *м*.

10. Проследить по таблицам натуральных тригонометрических величин, как изменяется величина синуса с изменением угла от 0° до 90°.

§ 95. Понятие о косинусе острого угла.

Указание. Отношение катета, прилежащего углу, к гипотенузе $\left(\frac{AC}{AB}\right.$, черт. 145$\left.\right)$ называется *косинусом* этого угла (A), обозначается *cosinus* A, или короче, $\frac{AC}{AB} = \cos A$.

Вопросы. 1) Известными уже приемами выяснить: а) зависит ли величина cos угла от длины сторон угла? б) от величины угла? в) может ли косинус быть больше единицы? Вывод?

2) Как называются отношения $\frac{AC}{AB}$? $\frac{AC}{AD}$? $\frac{AC}{AF}$? (черт. 145).

Задачи.

1. Вычислить величины отношений предыдущего вопроса и по найденным числам, пользуясь таблицами, найти величины углов в градусах.

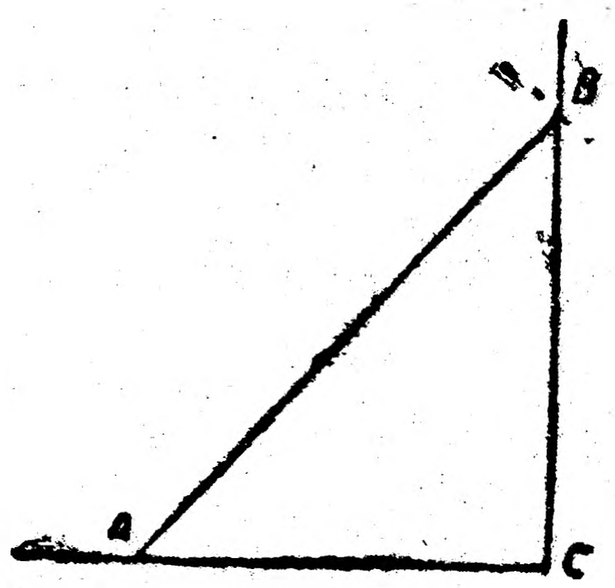
Примечание. Правила пользования таблицами те же, что для tg и sin.

2. Найти cos 25°, cos 18°, cos 73°, cos 48°.

3. Проследить по таблицам, как изменяется величина косинуса с изменением угла от 0° до 90°.

4. Построить угол x, если $\cos x = \frac{2}{3}$.

Решение. Строим прямой угол ACB (черт. 154). На одной стороне угла откладываем 2 произвольных равных отрезка и радиусом, равным трем таким отрезкам, из точки A засекаем сторону BC. Точки A и B соединяем. Угол A — искомый.



Черт. 154.

5. Построить угол x, если $\cos x = \frac{3}{5}$.

6. Построить угол x, если $\cos x = 0{,}940$.

Указание. Тангенс, котангес, синус и косинус называются *тригонометрическими функциями.*

§ 96. Нахождение промежуточных значений, или интерполирование.

Часто приходится находить тригонометрические функции угла, величина которого выражена в *градусах и минутах* (ми-

кута $= \frac{1}{60}$ градуса, обозначаются знаком′), или же искать угол по тригонометрической функции, величина которой в таблицах не находится.

Задачи.

1. Найти sin 36°43′.

Решение. Из таблиц имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\ 36^\circ = 0{,}588\\ \sin\ 37^\circ = 0{,}602\end{array}\right\} d = 14.$$

Отсюда имеем: разность в угле $1^\circ = 60'$,

„ „ синусе $d = 0{,}602 - 0{,}588 = 0{,}014$;

для краткости разность синусов записывается $d = 14$, при чем надо помнить, что здесь разумеются тысячные доли.

Предполагая, с достаточной для наших вычислений точностью, что в пределах одного градуса sin изменяется равномерно, запишем:

на 60′ разность в sin . . . 14

„ 43′ „ „ „ . . . x

откуда, считая, что в пределах одного градуса изменения синуса пропорциональны изменениям угла, составляем пропорцию:

$$60 : 43 = 14 : x,$$

и решаем ее:

$$x = \frac{43 \cdot 14}{60} = 10 \text{ (с точн. до 1)}.$$

Так как с увеличением угла величина синуса возрастает (это видно из таблиц), то

$$\left.\begin{array}{l}\sin\ 36^\circ\ \ \ \ = 0{,}588\\ \quad + 43' \ldots +10\\ \hline \sin\ 36^\circ 43' = 0{,}598\end{array}\right\} \textit{(поправка на } 43' \textit{ прибавляется)}.$$

2. Найти cos 36° 43′.

Решение.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\ 36^\circ = 0{,}809\\ \cos\ 37^\circ = 0{,}799\end{array}\right\} d = 10 \text{ (тысячных)}.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{array}{l} 60' - 10 \\ 43' - x \end{array}\right| \; 60 : 43 = 10 : x.$$

$$x = \frac{43 \cdot 10}{60} \cong 7.$$

Так как с увеличевием угла величина cos убывает (уменьшается), то

$$\left.\begin{array}{r} \cos 36^\circ \quad = 0{,}809 \\ + 43' \ldots - 7 \\ \hline \cos 36^\circ 43' = 0{,}802 \end{array}\right\} \textit{(поправка на } 43' \textit{ вычитается)}.$$

3. Найти tg $36^\circ 43'$.

4. Найти ctg $36^\circ 43'$.

Обратная задача.

5. tg $y = 0{,}133$; найти угол y.

Решение. Из таблиц имеем

tg $7^\circ = 0{,}123$ tg $8^\circ = 0{,}141$	$d = 18$ (тысячных).
tg $7^\circ = 0{,}123$ tg $y = 0{,}133$	$a = 10$ (тысячных).

а потому на $60'$ разность в tg . . . 18

„ x' „ „ tg . . . 10

$$60' : x' = 18 : 10; \; x' = \frac{60' \cdot 10}{18} = 33' \text{ (точн. до 1 мин)}.$$

Так как с возрастанием tg величина угла увеличивается, то

$$\left.\begin{array}{r} \text{tg } 7^\circ \quad = 0{,}123 \\ + 33' \ldots + 10 \\ \hline \text{tg } y = \text{tg } 7^\circ 33' = 0{,}133 \end{array}\right\} \textit{поправка } 33' \textit{ прибавляется).}$$

$$y = 7^\circ 33'.$$

6. Дано: ctg $y = 0{,}133$. Найти угол y.

Решение. Из таблиц имеем:

1) ctg $82^\circ = 0{,}141$ ctg $83^\circ = 0{,}123$	$d = 18$
2) ctg $83^\circ = 0{,}123$ ctg $y = 0{,}133$	$d = 10$

3) $\left.\begin{array}{l} 60' - 18 \\ x' - 10 \end{array}\right| \; \begin{array}{l} 60 : x' = 18 : 10; \\ x' = \dfrac{60 \cdot 10}{18} \cong 33'. \end{array}$

Имея в виду, что с увеличением ctg величина угла уменьшается, получим

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{ctg} 83^\circ \quad = 0{,}123 \\ -33' \ldots + 10 \\ \hline \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} 82^\circ 27' = 0{,}133 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\textit{поправка } 33' \textit{ вычитается}). \\ \boldsymbol{y = 82^\circ 27'}. \end{array}$$

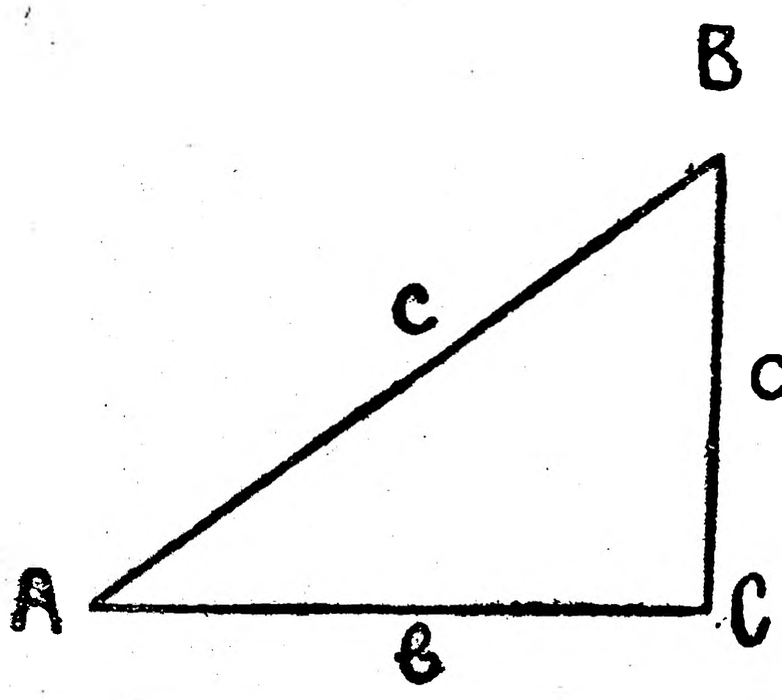
7. Найти угол, если $\sin y = 0{,}823$,

„ $\cos y = 0{,}790$.

Указание. Вычисление поправок к табличным значениям называется *интерполяцией* или *интерполированием*.

§ 97. Решение прямоугольных треугольников.

В прямоугольном треугольнике ABC (черт. 155) обозначим стороны через a, b и c, как указано на чертеже.



Черт. 155.

Вопросы. 1) Какую тригонометрическую функцию по отношению к $\angle A$ выражает отношение $\frac{a}{c}$? к $\angle B$? 2) Какую тригонометрическую функцию по отношению к углу A выражает отношение $\frac{b}{c}$? к углу B? 3) Отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ для тех же углов?

Вывод. Для данного на черт. 155 треугольника имеем ряд отношений:

$$\frac{a}{c} = \sin A = \cos B \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

$$\frac{b}{c} = \cos A = \sin B \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B \ldots\ldots \quad \text{(IV)}.$$

Из равенств (I) и (II) имеем:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = c \sin A = c \cos B \\ b = c \cos A = c \sin B \end{array}} \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

т.-е. *катет равен гипотенузе, помноженной на* sin *угла противолежащего катету* (*или на* cos *угла прилежащего катету*).

Из равенств (III) и (IV).

$$\boxed{\begin{array}{l} a = b\ tg\ A = b\ ctg\ B \\ b = a\ ctg\ A = a\ tg\ B \end{array}} \quad \ldots\ldots (29)$$

т.-е. *катет равен другому катету, помноженному на* tg *угла противолежащего искомому катету* (*или* ctg *угла прилежащего катету*)

Из равенств (I) и (II) имеем

$$\boxed{o = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B'}} \quad \ldots\ldots (29a)$$

т.-е. *гипотенуза равна катету, деленному на* sin *угла противолежащего катету* (*или на* cos *угла прилежащего катету*).

Вопросы. 1) Сколько надо иметь данных величин (элементов) из 6 элементов (3 стороны и 3 угла), чтобы решить прямоугольный треугольник (т.-е найти остальные величины)? Можно ли решить прямоугольный треугольник, если даны только углы?

Упражнения. Решить прямоугольные треугольники, если:

1. Даны оба катета:

1) $a = 261$; $b = 380$. *Отв.* $\angle A = 34°\ 29'$; $c = 461$.
2) $a = 156$; $b = 133$. *Отв.* $\angle B = 40°\ 28'$; $c = 205$.

2. Даны гипотенуза и острый угол.

3) $c = 9{,}35$; $A = 65°\ 14'$. *Отв.* $a = 8{,}5$; $b = 3{,}9$.
4) $c = 627$; $A = 23°\ 30'$. *Отв.* $a = 250$; $b = 575$.

3. Даны катет и острый угол.

5) $a = 18$; $B = 43°$. *Отв.* $c = 24{,}6$; $b = 16{,}8$.
6) $a = 785{,}5$; $A = 59°\ 45'$. *Отв.* $b = 458$; $c = 909{,}4$.

4. Даны гипотенуза и катет.

7) $c = 65$; $a = 16$. *Отв.* $b = 63$; $A = 14°\ 15'$.
8) $c = 697$; $a = 518$. *Отв.* $b = 455$; $A = 49°\ 16'$.

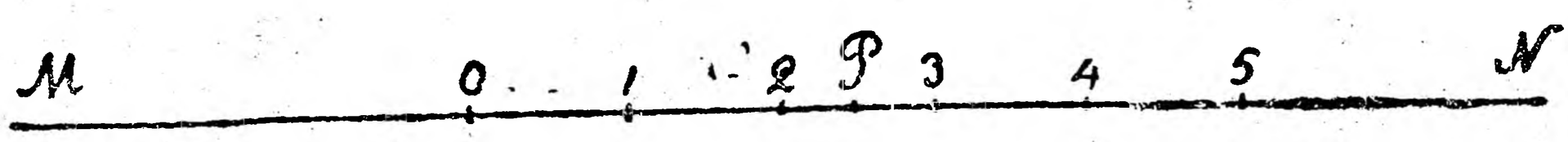
Работа № 13.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

Числовая ось. Относительные числа (количества). Сложение, вычитание, умножение и деление относительных чисел (количеств).

§ 98. Числовая ось.

На прямой *MN* (черт. 156) от точки 0 вправо возьмем ряд точек, равноотстоящих друг от друга, положим, на один сантиметр. (Можно брать расстояние в один дюйм, в один вершок и так далее, это безразлично.)



Черт. 156.

Примем за начало счета этих делений точку 0, которую назовем просто началом. Каждая точка этого ряда находится на определенном расстоянии от начала. Каждой точке соответствует число, выражающее расстояние ее (в нашем случае — в сантиметрах) от начала.

Если продолжить этот ряд точек без конца, то этим точкам будут соответствовать все целые числа: *1, 2, 3, 4, 5, 6* . . .

Построенные указанным способом отрезки *0-1, 0-2, 0-3, 0-4* . . . (черт. 156) называются *геометрическими изображениями чисел*, а прямая *MN* называется *числовой прямой*, или *числовой осью*.

Таким образом, между точками этой прямой и целыми числами установлено полное соответствие, т.-е. каждой точке соответствует вполне определенное целое число, и каждому целому числу соответствует вполне определенная точка.

Вопросы. 1) Найти на числовой оси точки, соответствующие числам *8*, *10*, *12*.

2) Если взять на числовой оси какую-нибудь точку, находящуюся между двумя рядом стоящими точками этого ряда, например, точку P (черт. 156), то выразится ли расстояние ее от начала целым числом сантиметров?

3) Каким числом выразится это расстояние?

4) Вообще, каким числам соответствуют точки числовой оси, промежуточные между точками *0* и *1*, *1* и *2*, *2* и *3* и т. д.?

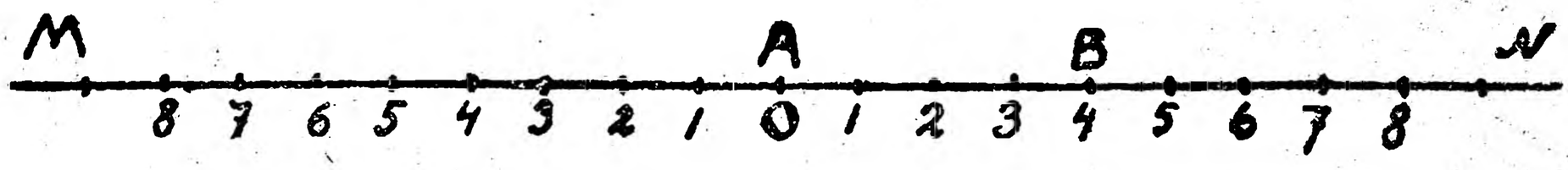
5) Найти на числовой оси точки, соответствующие числам $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{3}$.

Указание. Если включить в указанный ряд точек промежуточные между ними точки, то на числовой прямой получим геометрические изображения не только всех целых, но и всех дробных чисел.

Пример. Начертить числовую ось, принимая за единицу расстояния 12 *мм*, и отметить на ней точки, соответствующие числам 3, 5, 8, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$, $6\frac{2}{3}$

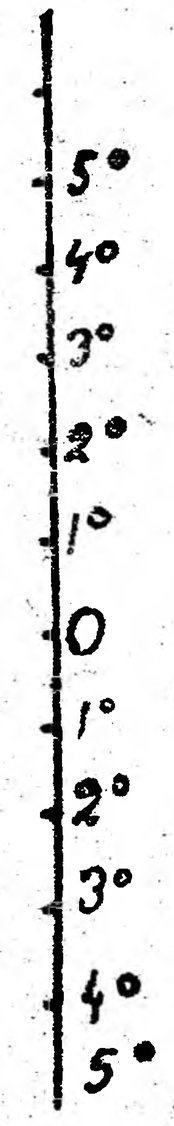
§ 99. Относительные числа (количества).

Указание. На черт. 157 изображена прямая линия *MN* *(числовая прямая)*, и на ней отмечена цифрой *0* какая-нибудь



Черт. 157.

точка, от которой вправо и влево отложены какие-нибудь единицы длины (напр., сантиметры). На черт. 158 изображена вертикальная шкала термометра (линейка или бумажная лента), на которой от произвольной точки, отмеченной цифрой *0*, отложены вверх и вниз равные отрезки, каждый из которых обозначает 1^0 температуры.



Черт. 158.

Задачи.

1. Если известно, что какая-нибудь точка A (черт. 157), начав двигаться по прямой *MN* от точки *0*, переместилась на 5 *см*, то можно ли на основании этого указать,

где находится точка A после перемещения? Что еще должно быть известно, чтобы указать, где находится точка A после перемещения на 5 *см*?

2. Ртуть термометра стояла 3 ноября на 0° термометрической шкалы (черт. 158), 4 ноября температура изменилась на 2° сравнительно с температурой предыдущего дня. Сколько градусов показывал термометр 4 ноября? Почему нельзя ответить на этот вопрос? Что еще должно быть указано, чтобы ответ был возможен?

Указание. *Когда расстояние или какая-нибудь другая величина* (напр., температура, время, отсчитываемое от данного момента, капитал какого-нибудь лица или предприятия и т. п.) *может изменяться в двух противоположных направлениях* (вправо или влево, вверх или вниз, в сторону увеличения или в сторону уменьшения), то, чтобы судить об изменении величины, необходимо знать, 1) насколько она изменилась (число) и 2) в какую сторону она изменилась (направление).

3. Точка B (черт. 157) находится на 4 *см* вправо от точки *0*. Показать, где будет находиться точка B, если она последовательно переместится вправо на 3 *см*? влево на 6 *см*? вправо на 2 *см*? и, наконец, влево на 10 *см*?

4. Ртуть стояла 5 ноября на 4 деления выше 0° (черт. 158); 6 ноября температура понизилась на 6°; 7 ноября — понизилась еще на 2°; 8 ноября — повысилась на 1°; 9 ноября — понизилась на 3°. Сколько градусов показывал термометр 6, 7, 8 и 9 ноября?

5. Заработная плата рабочего на одной фабрике составляла в феврале месяце 35 червонных рублей. В марте месяце она уменьшилась на 3 рубля, а в апреле — увеличилась на 7 руб. сравнительно с мартом. Какова была заработная плата рабочего в марте и апреле месяцах?

Указание. Вместо того, чтобы обозначать *направление*, по которому изменяется величина, словами «вправо» или «влево», «вверх» или «вниз», «увеличилась» или «уменьшилась», условились заменять эти слова для краткости знаками + и —. При таком обозначении последовательные перемещения точки B (см. задачу 3) могут быть указаны гораздо короче, а именно: + 3 *см*, — 6 *см*, + 2 *см*, — 10 *см*.

Упражнения. 1) Указать знаками и числами последовательные изменения температуры в задаче 4.

2) Указать знаками и числами последовательные изменения заработной платы в задаче 5.

Определение 1. Число со знаком называется ***относительным числом или количеством***, напр

$$+2, -7, +4, -1^1/_2, +\frac{2}{7}.$$

Число без знака называется *числовой величиной количества или абсолютным числом*, напр.

$$2,\ 7,\ 4,\ 1^1/_2, \frac{2}{7}.$$

Определение 2. Число со знаком $+$, напр. $+5$, *называется положительным количеством или положительным числом*, число со знаком $-$, напр. -5, называется *отрицательным количеством или отрицательным числом.*

Количество $+1$ называется *положительной единицей*, количество -1 называется *отрицательной единицей.*

Указание. Если на числовой прямой MN (черт. 157) будем считать вправо от 0, т.-е. будем считать *положительные единицы* или будем производить так называемый *прямой счет*, то получим последовательные числа $+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7$, из которых каждое последующее больше предыдущего. Если на той же прямой, дойдя вправо до цифры 7, начнем отсчитывать отрицательные единицы, т.-е. будем производить *обратный счет*, то последовательно будут получаться числа $+6, +5, +4, +3, +2, +1$, из которых каждое следующее меньше предыдущего.

Таким образом, присчитывание к данному числу положительных единиц увеличивает это число, а присчитывание отрицательных единиц уменьшает данное число. Потому-то положительные единицы, а также и положительные числа, состоящие из положительных единиц, обозначаются знаком увеличения (сложения), т.-е. знаком $+$, а отрицательные единицы и отрицательные числа знаком уменьшения (вычитания), т.-е. знаком $-$.

Если точка A (черт. 157) переместится от 0 сначала на $+1$ *см*, а потом на -1 *см*, то она возвратится в 0, т.-е. в первоначальное положение. Если присчитаем к какому-нибудь количеству, напр., к $+7$, последовательно $+1$ и затем -1, то получится прежнее количество $+7$.

Отсюда следует, что последовательное присчитывание или последовательное прибавление чисел $+1$ и -1 к какому-нибудь числу не изменяют этого числа, т.-е. $+1$ и -1 при прибавлении уничтожают друг друга или взаимно уничтожаются.

Обозначая действие прибавления знаком $+$, получим

$$(+1)+(-1)=0.$$

Примечание. В этой записи знак $+$, стоящий между скобками, означает действие присчитывания или сложения (знак действия), знаки же $+$ и $-$, стоящие внутри скобок, означают знаки количеств. Не следует смешивать знак действия и знак количества.

Вопросы.

1) Точка A (черт. 157) последовательно переместилась от 0: а) на $+6$ *см* и на -6 *см*, б) на -5 *см* и на $+5$ *см*. Где находится точка A?

2) Что получится в результате действий

$$1)\ (+6)+(-6)=?\quad 2)\ (-5)+(+5)=?$$

3) Какая разница между знаками $+$, стоящими между скобками и внутри скобок в предыдущем примере?

4) Точка B (черт. 157) последовательно переместилась от своего первоначального положения $+4$ *см* сначал на $+2$ *см*, а затем на -2 *см*, где находится точка B?

5) Как изобразить соответствующие действия над числами $+4$, $+2$ и -2 скобками и знаками?

Определение 3. Количества, имеющие одинаковые числовые величины и разные знаки, напр. $+5$ и -5, называются *противоположными*.

При сложении таких количеств в результате получается 0, т.-е. при сложении такие количества взаимно уничтожаются.

§ 100. Сложение количеств.

Примеры. На каком расстоянии от первоначального положения будет находиться точка A (черт. 157), если она переместится:

1) от 0 на $+3$ *см* и затем на $+4$ *см*?
2) от 0 на -3 *см* и затем на -4 *см*?
3) от 0 на $+7$ *см* и затем на -3 *см*?
4) от 0 на -7 *см* и затем на $+3$ *см*?

Решение.

$$1)\ (+3)+(+4)=+7$$
$$2)\ (-3)+(-4)=-7$$
$$3)\ (+7)+(-3)=+4$$
$$4)\ (-7)+(+3)=-4$$

Вывод. При сложении количеств с одинаковыми знаками (примеры 1 и 2) надо их числовые величины сложить и в полученном результате поставить их общий знак. При сложении количеств с разными знаками (примеры 3 и 4), надо из большей числовой величины вычесть меньшую и в полученном результате поставить знак большего количества.

Упражнения.

1) Указать знак *алгебраического действия* (т.-е. действия над количествами) в четырех предыдущих примерах; какое алгебраическое действие этим знаком обозначается?

2) Указать знаки количеств в тех же примерах.

3) Какое *арифметическое действие* произведено над числовыми величинами в двух первых примерах? в двух последних примерах?

4) К каким *арифметическим действиям* приводит *алгебраическое сложение* количеств?

5) Объяснить предыдущие примеры на основании § 99 (см. определение 3).

6) Найти сумму количеств:

$$(+28)+(-10)+(+3)+(-6)+(-4)=?$$

7) Найти результат действий:

$$28-10+3-6-4=?$$

8) Какое заключение можно вывести из равенства результатов в упражнениях 6 и 7?

Вывод. Знак сложения + и скобки, при сложении количеств, можно не писать, а только подразумевать. Поэтому, если имеем ряд чисил, соединенных знаками + и —, напр. $8-10+3-6-4$, то эти знаки считаются знаками количеств, при которых они стоят, а между этими количествами *подразумеваются* знаки *сложения* +, т.-е.

$$8-10+3-6-4=(+8)+(-10)+(+3)+(-6)+(-4).$$

И поэтому ряд чисел $8-10+3-6-4$ называется *алгебраической суммой.*

Примечание. Знак +, стоящий перед первым членом алгебраической суммы, обычно не пишется, а подразумевается. Так, напр.

$$(+9)+(-7)=+9-7=9-7$$

Вопросы.

1) Можно ли назвать выражение $a+b-c+d$ алгебраической суммой?

2) Что означают знаки, поставленные в этом выражении?

3) Написать это выражение со знаками действия и со скобками.

§ 101. Вычитание количеств.

Указание. Вычесть из одного количества другое, значит к уменьшаемому прибавить количество, равнопротивоположное вычитаемому.

Примеры.

	алгебраическое вычитание		*алгебраическое сложение.*
1)	$+7-(+3)$	$=$	$(+7)+(-3)=+4$
2)	$+7-(-3)$	$=$	$(+7)+(+3)=+10$
3)	$-7-(+3)$	$=$	$(-7)+(-3)=-10$
4)	$-7-(-3)$	$=$	$(-7)+(+3)=-4$

Вопросы.

1) Какой знак *действия* поставлен между *количествами* столбце „алгебраическое вычитание“?

2) Каким знаком действия он заменен в столбце „алгебраическое сложение“?

3) Изменился ли знак первого количества во всех четырех примерах при замене алгебраического вычитания алгебраическим сложением?

4) Как изменился знак второго количества?

Вывод. Вычитание заменяется алгебраическим сложением, при чем уменьшаемое остается без изменения, а в вычитаемом знак меняется на обратный.

Вопросы.

1) Считая, что действие вычитания означает нахождение неизвестного слагаемого по данной сумме и данному другому слагаемому, объяснить предыдущий вывод, пользуясь примерами 1, 2, 3 и 4.

2) Что значит *отнять* $+9$? *Отв.*: значит *прибавить* -9. т.-е. $-(+9)=+(-9)$].

3) Что значит *отнять* — 9? [*Отв.*: значит *прибавить* + 9, т.-е. — (— 9) = + (+ 9)].

4) Что значит *отнять* + 7? — 6? + 8 *см*? — 5 *см*? + *a*? — *b*?

5) Записать действия вопроса 4-го знаками и скобками, как показано в решении вопросов 2 и 3.

Упражнения. Произвести действия в следующих примерах:

1) (+7) + (—6) + (—4) + (—11) + (+2) = ?

2) (+25) — (—17) = ? (—36) — (—15) = ?

3) $(+3^3/_4) + (+2^3/_4) = ?$ $(-5^1/_5) + (-6^3/_5) = ?$

4) $(+2^5/_8) - (-1^3/_8) = ?$ $(-4^5/_9) - (+3^7/_9) = ?$

5) (+1,15) + (—6,25) = ? (—4,3) + (—3,7 = ?

6) (—5,43) — (—6,56) = ? (—0,27) — (+0,53) = ?

7) (+8) — (—9) + (—6) — (+3) = ?

Решение. (+8) — (—9) + (—6) — (+3) =

= (+8) + (+9) + (—6) + (—3) =

= +8 + 9 — 6 — 3 = +17 — 9 = +8

8) (+13) — (+12) — (—11) — (—10) + (—4) = ?

9) (—7,3) — (—8,6) + (— 0,9) — (— 0,4) + (—2,4) = ?

10) (8 — 9) — (6 — 11) = ?

11) (0,3 — 0,26) — (— 0,4) — (— 0,56) = ?

Задача. Аэроплан поднялся на высоту 1 543 *м*, а затем опустился на 226 *м*, вновь поднялся на 0,32 *км*, потом опустился на 0,1 *км* и, наконец, еще раз поднялся на 425 *м*. На какой высоте находился аэроплан в конце последнего подъема? Представить решение задачи в виде сложения нескольких, данных в задаче количеств.

Отв. 1 962 *м*.

§ 102. Умножение количеств.

Указание. При умножении двух количеств надо перемножить их абсолютные (числовые) величины и произведение взять со знаком +, если знаки этих количеств одинаковые, и со знаком —, если знаки их разные.

Примеры. 1) (+7) · (+3) = +21

2) (—7) · (—3) = +21

3) (+7) · (—3) = —21

4) (—7) · (+3) = —21

Правило знаков. *При умножении двух количеств одинаковые знаки дают +, а разные знаки дают —.*

Упражнения. Произвести умножения:

1) $(+13)\cdot(-8)=?\ (-9)\cdot(-6)=?\ (+4)\cdot(+3)=?$
$(-5)\cdot(-8)=?$

2) $(+2{,}5)\cdot(-0{,}3)=?\ (-0{,}16)\cdot(-1{,}4)=?\ (+2{,}1)\cdot(+1{,}1)=?$
$(-0{,}1)\cdot(-0{,}2)=?$

3) $(+6)\cdot(-3)\cdot(-2)=?$

4) $(-8)\cdot(-4)\cdot(-10)=?$

5) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=?$

6) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=?$

7) $(+4)^2=?\ (-8)^2=?\ (+5)^2=?\ (-7)^2=?$

8) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=?\ \left(+\frac{3}{4}\right)^2=?\ \left(-\frac{5}{6}\right)^2=?\ \left(+1\frac{2}{3}\right)^2=?$

9) $(+3)^3=?\ (-4)^3=?\ (+0{,}2)^3=?\ (-0{,}3)^3=?$

10) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2=?\ \left(-1{,}2\right)^3=?\ \left(+2{,}1\right)^2=?\ \left(+0{,}5\right)^3=?$

11) $(+a)\cdot(-b)=?\ (-a)\cdot(+b)=?\ (+a)\cdot(+b)=?$
$(-a)\cdot(-b)=?$

12) $(+a)\cdot(+b)\cdot(-c)=?\ (-a)\cdot(+b)\cdot(-c)=?$
$(-a)\cdot(-b)\cdot(-c)=?$

13) $(+a)^2=?\ (-a)^2=?\ (+a)^3=?\ (-a)^3=?$

14) $[(2-4)^2+(3-5)^2]-[(4-7)^3+(1-5)^3]=?$

15) $[(2{,}1-3{,}2)^2-(4{,}9-6{,}2)^2]+\left[\left(1\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}\right)^3-\left(-1\frac{1}{2}\right)^3\right]$

Вычислить выражения:

16) $-3a^2b^3+\frac{1}{2}a^3b^2$, при $a=-\frac{1}{2}$, $b=0{,}4$

17) $(a^2-ab+b^2)\cdot(a+b)$, при $a=-\frac{3}{4}$, $b=-\frac{5}{6}$.

18) $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$, при $a=-\frac{1}{3}$, $b=-2\frac{1}{4}$.

Вопросы.

1) Какой знак имеет произведение нескольких множителей, если число отрицательных множителей четное (примеры 3; 5)?

2) Если число отрицательных множителей нечетное (примеры 4; 6)?

3) Какой знак всегда имеет четная степень (примеры 7; 8)?

4) Какой знак имеет нечетная степень (пример 9)?

Вывод. Произведение нескольких множителей положительно, если число отрицательных множителей в этом произведении четное; оно отрицательно, если в нем число отрицательных множителей нечетное.

Четная степень всякого количества положительна. Нечетная степень количества имеет знак, одинаковый со знаком ее основания.

§ 103. Деление количеств.

Указание. При делении двух количеств *одинаковые знаки дают* $+$, *разные знаки дают* $-$; числовая величина делимого делится на числовую величину делителя.

Примеры. 1) $(+12):(+3)=+4$
2) $(-12):(-3)=+4$
3) $(+12):(-3)=-4$
4) $(-12):(+3)=-4$

Упражнения. 1. Произвести действия в примерах:

1) $(3-5):(3+5)=?$ $(-8+9):(-6+10)=?$
2) $[(-3)\cdot(-5)\cdot(-4)]:[(-2)\cdot(-15)\cdot(-10)]=?$
3) $(-3)^2:(+2)^3=?$ $(-4)^3:(-5)^3=?$
4) $[(-0{,}2)^2+(-0{,}3)^3]:[(-0{,}6)^2-(-0{,}5)^3]=?$
5) $(+a):(+b)=?$ $(+a):(-b)=?$ $(-a):(-b)=?$ $(-a):(+b)=$

2. Вычислить выражения:

6) $(a^2-b^2):(a+b)$, при $a=-1\frac{1}{2}$, $b=-1\frac{1}{3}$.
7) $(a^3-b^3):(a^2+ab+b^2)$, при $a=0{,}5$, $b=-0{,}3$.
8) $(2a^2b-3ab^2):(2a-3b)$, при $a=-3$, $b=-\frac{1}{3}$.

Работа № 14.

ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК.

График функции. Прямоугольная система координат. Аналитические и эмпирические функции. Линейная функция и ее график. Задачи.

§ 104. График функции.

Указание. Рыночная цена какого-нибудь промышленного изделия или фабриката, напр., ситца, изменяется в зависимости от изменения многих других величин, влияющих на стоимость производства, как, напр., стоимости сырья, дороговизны топлива, величины заработной платы рабочих и т. п., а также в зависимости от величин, влияющих на рыночные цены, как, напр., торговой прибыли, размера налогов на торговые предприятия, стоимости торговых помещений и пр. Поэтому цена фабриката есть *функция* многих аргументов, которые меняются во времени.

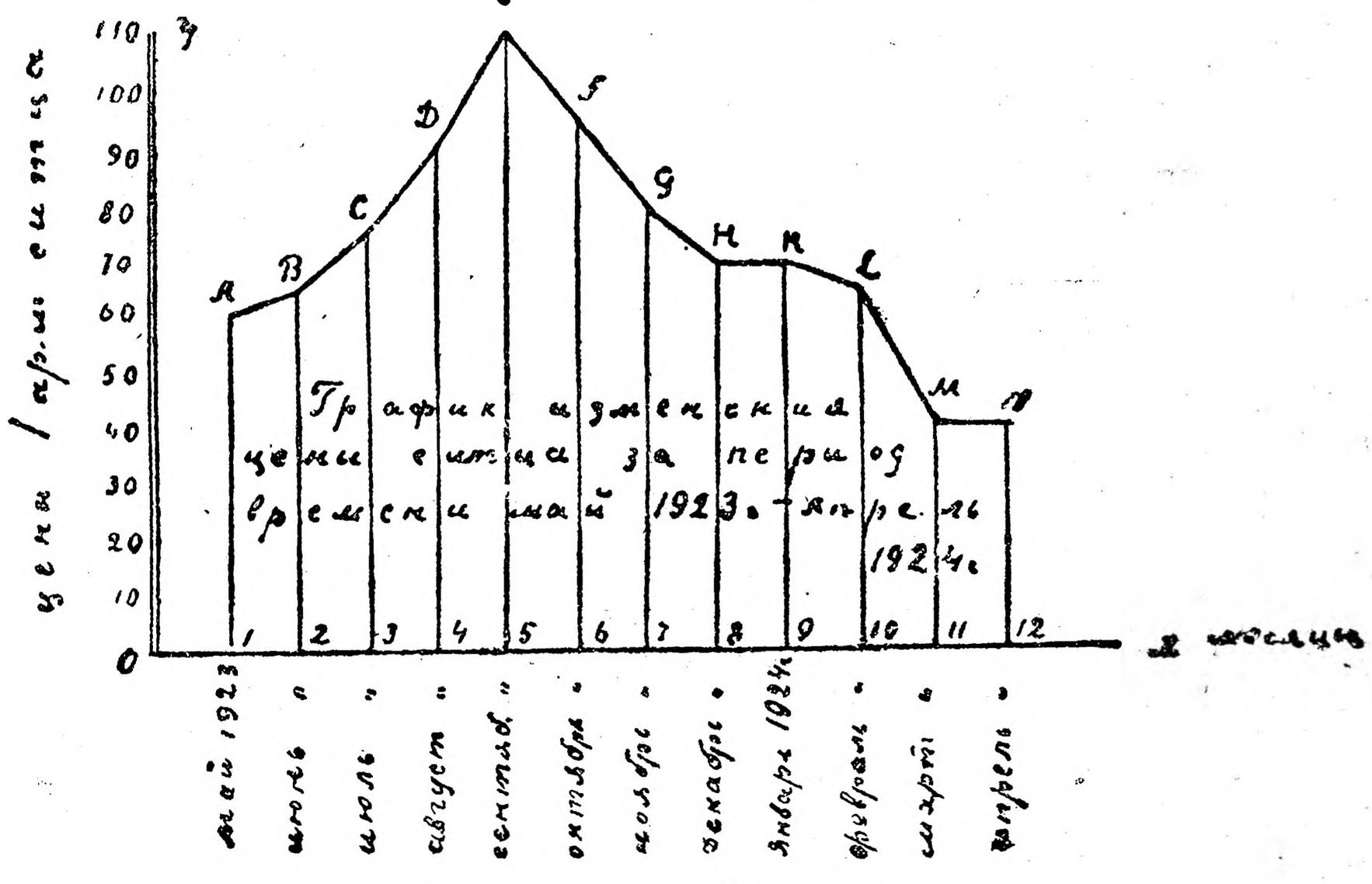
Так как с течением, т.-е. с изменением времени, меняется и цена фабриката, то, считая цену фабриката в общем за *функцию* времени, решим *графически* (при помощи чертежа) следующую задачу.

Задача 1. С мая 1923 года по май 1924 года средняя цена ситца в СССР, благодаря разным условиям, следующим образом изменялась по месяцам:

	Месяцы	Цена 1 *м* ситца		Месяцы	Цена 1 *м* ситца
1923 г.	Май	— р. 84 к.	1923 г.	Ноябрь	1 р. 12 к.
„	Июнь	— р. 91 к.	„	Декабрь	— р. 98 к.
„	Июль	1 р. 05 к.	1924 г.	Январь	— р. 98 к.
„	Август.	1 р. 26 к.	„	Февраль	— р. 91 к.
„	Сентябрь. . . .	1 р. 54 к	„	Март.	— р. 56 к.
„	Октябрь	1 р. 33 к.	„	Апрель	— р. 56 к

Нарисовать *график* изменения цены ситца.

Р е ш е н и е. На черт. 159 по горизонтальной линии OX отложены от точки O равные отрезки (отрезки эти могут быть произвольной длины). Длина каждого из этих отрезков *условно* изображает продолжительность месяца, при чем все месяцы здесь считаются равными между собою. По направлению вертикальной линии OY (на черт. 159 $OY \perp OX$) из конца каждого горизонтального отрезка проведены вертикальные отрезки, условно изображающие цену ситца в каждом месяце, при чем какая-нибудь



Черт. 159.

произвольно выбранная длина (напр., 1 *мм*, 2 *мм* и т. п.) считается равной определенному числу коп. (напр., 2 коп., 5 коп. и т. п.), — выбор такого *масштаба* зависит от размеров чертежа, от соотношений между данными числами и пр. Таким образом на черт. 159 первый вертикальный отрезок 1-A изображает цену ситца в мае 1923 г., второй отрезок 2-B изображает цену ситца в июне того же года, и так далее.

Концы A, B, C, D и т. д. всех вертикальных отрезков соединены прямыми. Получившаяся ломаная линия $ABCDEFGHKLMN$ называется *графиком функции*. Она *наглядно* представляет изменение функции (в данном случае — цены ситца) при изменении аргумента (в данном случае — времени).

График легко *читать*. Действительно, по подъему ломаной линии от A до E можно видеть, что цена ситца *возрастала* с мая по сентябрь 1923 года, при чем наибольший рост цены имел место за июль и особенно за август месяцы (*DE — самый крутой*

подъем графика). Достигнув к сентябрю месяцу наибольшей величины (*E — наивысшая точка* графика), цена ситца затем начинает падать (*спуск* графика), держится в течение декабря 1923 г. и января 1924 г. на одном уровне ($HK \parallel OX$)[1]), затем вновь начинает падать (*LM — наиболее крутой спуск* графика) и достигает наименьшей величины (*самая низшая точка* графика *M*), оставаясь далее в течение марта месяца на том же уровне ($MN \parallel OX$).

Задача 2. Начертить график изменения заработной платы рабочего за период времени май 1923 г. — апрель 1924 г. по следующим данным:

	Месяцы	Заработная плата
1923 г.	Май	15 руб.
„	Июнь	17 „
„	Июль	20 „
„	Август	21 „
„	Сентябрь	23 „
„	Октябрь	26 „
„	Ноябрь	26 „
„	Декабрь	29 „
1924 г.	Январь	30 „
„	Февраль	32 „
„	Март	32 „
„	Апрель	32 „

Прочесть (т.-е. разъяснить) начерченный график.

Задача 3. 1) Начертить график изменения температуры по дням недели при следующих данных:

Дни недели	Температура
Воскресение	$+8^0$
Понедельник	$+4^0$
Вторник	$+1^0$
Среда	0^0
Четверг	-2^0
Пятница	-5^0
Суббота	$+3^0$

Решение. См. черт. 160.

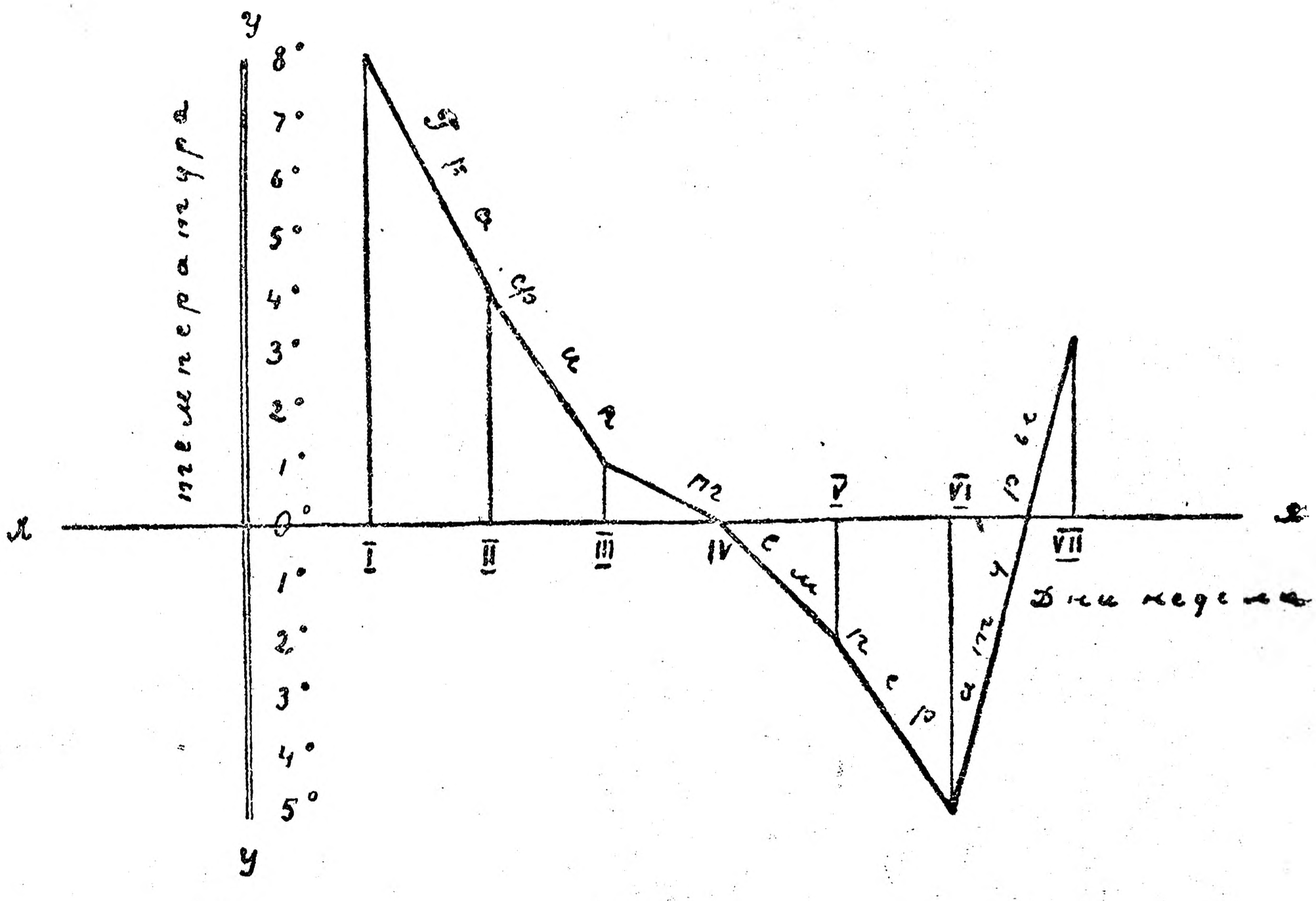
2) Указать масштабы на этом чертеже, измерив отрезки 0-I, I-II, II-III и т. д. и отрезки 0^0-1^0, 1^0-2^0, 2^0-3^0 и т. д.

3) Чем особенным отличается этот график от графика черт. 159? (обратить внимание на расположение обоих графиков относительно оси *x*).

---

[1]) Знак $\parallel$ заменяет слово „параллельно“.

Задача 4. Представить на чертеже график изменения средней месячной температуры в одном из городов России за 1907 год по следующим данным:



Черт. 160.

Месяцы	Средняя t°	Месяцы	Средняя t°
Январь	— 16°	Июль	+ 25°
Февраль	— 10°	Август	+ 20°
Март	— 5°	Сентябрь	+ 15°
Апрель	+ 5°	Октябрь	+ 5°
Май	+ 20°	Ноябрь	— 5°
Июнь	+ 25°	Декабрь	— 10°

§ 105. Прямоугольная система координат.

Для вычерчивания графиков, наглядно показывающих изменение какой-либо величины в зависимости от изменения другой величины, или, короче говоря, *изменение функции в зависимости от изменения аргумента*, проводятся две взаимно-перпендикулярные прямые XX и YY (см. черт. 160), пересекающиеся в точке O и образующие 4 прямые угла.

Эти две прямые называются *осями координат*. Прямая XX называется *осью абсцисс* или *осью X*. Прямая YY называется осью *ординат* или *осью Y*. Точка O называется *началом координат*. Обе оси и начало составляют *систему прямоугольных координат*.

Разные числовые значения двух величин, одновременно изменяющихся (т.-е. функции и аргумента), откладываются по осям координат в виде отрезков, — числовые значения 1-й величины (аргумента) откладываются по оси X, числовые значения 2-й величины (функции) по направлению оси Y (параллельно оси Y). Отрезок, откладываемый по оси X, называется *абсциссой*, а отрезок, откладываемый параллельно оси Y, *ординатой* той точки, которая находится на ее конце.

При изображении числовых значений величины этим способом, принимают за единицу произвольный отрезок (напр., 1 *см*, 1 *мм*, ½ *см* и т. д.), при чем избранные масштабы могут быть для обоих направлений одинаковыми, но могут быть и разные, что зависит от размеров и характера чертежа. Соединив затем концы всех начерченных ординат прямыми линиями, получают *график функции*.

§ 106. Аналитические и эмпирические функции

Вопросы.

1) Чему равняется объем параллелепипеда?

Отв. $V = BH$ (см. § 55, форм. 5).

2) Изменяется ли объем параллелепипеда, если высота его изменяется, а площадь основания остается та же?

Как можно назвать в этом случае объем параллелепипеда? высоту его?

4) Во сколько раз увеличивается (или уменьшается) объем параллелепипеда, если при неизменном основании его высота увеличивается (или уменьшается) в 2, 3, 4, 5 и т. д. раз?

5) Точная ли зависимость существует между объемом параллелепипеда (функцией) и его высотой (аргументом)? Как эта зависимость называется?

5) Можно ли эту зависимость выразить математической формулой?

7) Выразить математической формулой зависимость между делителем y и частным x, если делимое равно k; между весом тела y и его объемом x, если удельный вес тела равен d.

8) Какие еще точные зависимости между двумя величинами известны вам из предыдущего курса? Приведите формулы этих зависимостей.

Вывод. Если зависимость между функцией и аргументом можно выразить точной математической формулой или равен-

ством, то такая зависимость называется *аналитической*, и такая функция называется *аналитической функцией*

Вопросы.

1) Существует ли зависимость между количеством посеянного зерна и количеством урожая?

2) Можно ли эту зависимость выразить точными числовыми или математическими соотношениями, т.-е. можно ли, например, сказать что при увеличении посева на данной площади земли в два, три, четыре и т. д. раз и урожай получится больший в два, три, четыре и т. д. раз?

3) Можно ли все-таки считать количество урожая на данной площади земли функцией количества посеянного зерна в известных пределах?

4) Можно ли начертить график этой функции по соответствующим числовым данным? Например, начертите график, если указано, что на пяти смежных десятинах одинаковой земли, при одинаковом удобрении, одинаковой пахоте, и, вообще, при всех одинаковых условиях, посев и урожай были следующие:

	Посеяно ржи	Собрано ржи
1-я десятина	8 мер	25 мер
2-я „	9 „	30 „
3-я „	10 „	40 „
4-я „	11 „	45 „
5-я „	12 „	50 „

5) Привести еще несколько примеров зависимости двух величин, которую нельзя выразить математической формулой, но которую можно представить графически.

Вывод. Если между двумя изменяющимися величинами существует зависимость, которую можно установить из опыта, составив таблицу значений одной величины для различных значений другой величины, и которую можно представить графически, но нельзя выразить точной математической формулой, то такая зависимость называется *эмпирической*, и одна из изменяющихся величин называется *эмпирической функцией* другой величины.

Вопросы.

1) Какие функции были изображены на графике в задачах 1, 2, 3, 4 § 104?

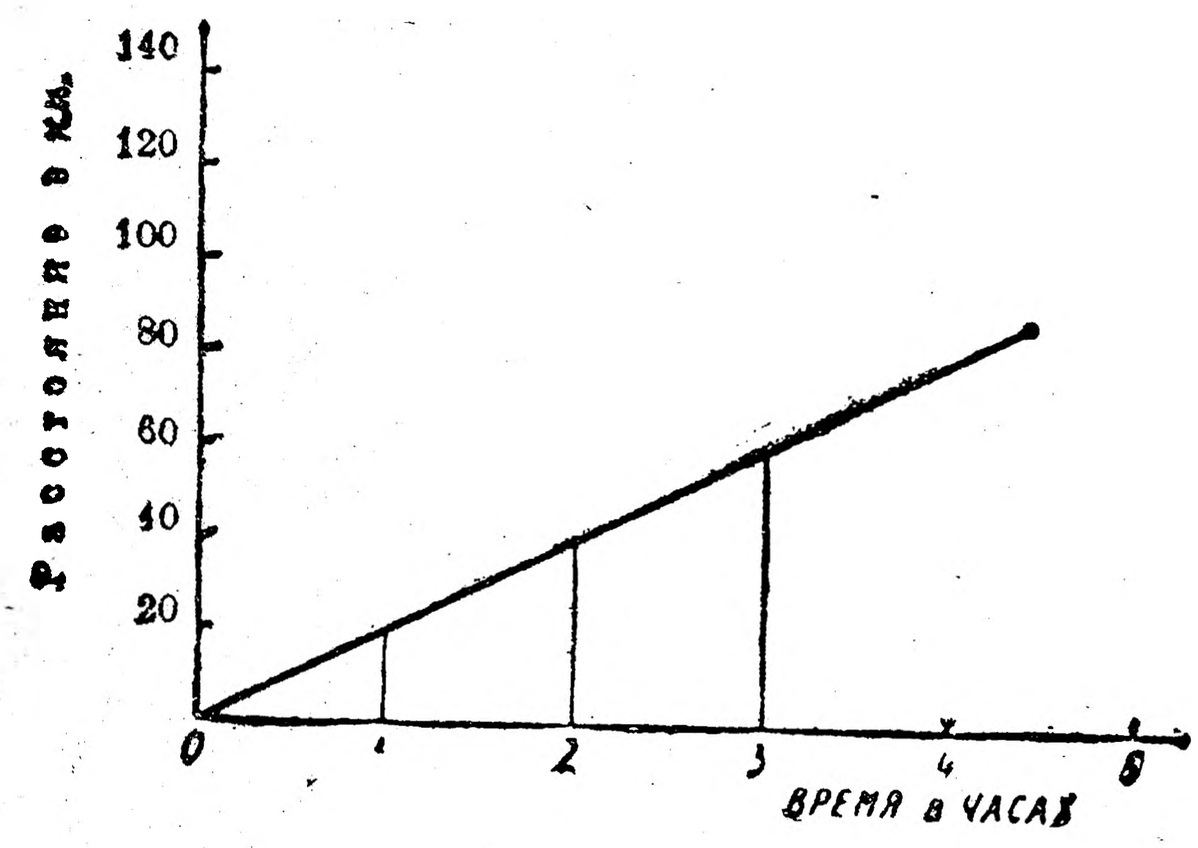
2) Производительность предприятия зависит от числа занятых в предприятии рабочих; размер платы за электрическое

освещение квартиры зависит от числа израсходованных гектоуаттов электрической энергии; расход фуража в воинской части зависит от числа лошадей, имеющихся в части; расход воды из городского водопровода зависит от количества населения в городе. Какие из перечисленных здесь функций аналитические и какие эмпирические? почему?

§ 107. Линейная функция и ее график.

Задача. Поезд проходит в час 20 *км*. Начертить график расстояний, проходимых поездом в 2, 3, 4 часа и т. д.

Р е ш е н и е. См. черт. 161



Черт. 161.

Вопросы. 1) Представить формулой зависимость между расстоянием, проходимым поездом, и временем, в течение которого поезд движется, обозначая буквой s расстояние и буквой t время (число часов движения).

2) Можно ли назвать функцию s аналитической? почему?

3) Какую линию представляет на черт. 161 график функцию s?

4) Представить формулой ту же зависимость, если поезд проходит в час 30 *км*; 40 *км*; k *км*.

5) Начертить графики движения поезда со скоростью 30 *км* в час; 40 *км* в час.

Вывод. Прямо-пропорциональная зависимость между двумя величинами всегда выражается формулой $y = kx$, где k есть положительное число.

График этой зависимости есть прямая линия, проходящая через начало координат [1]).

Если график функции есть прямая линия, то такая функция называется *линейной функцией.*

---

[1]) Так как тангенсы углов, выражаемые отношениями каждой ординаты к соответствующей ей абсциссе на черт. 161, — равны, то и сами углы равны, — следовательно, угол при точке O общий у всех имеющихся на чертеже треугольников.

Задача. Цена 1 метра сукна равна 8 руб. Какова стоимость 2 *м*, 3 *м*, 4 *м*, *x м* сукна? Обозначив стоимость *x* метров сукна через *y*, выразить зависимость между *y* и *x* формулой.

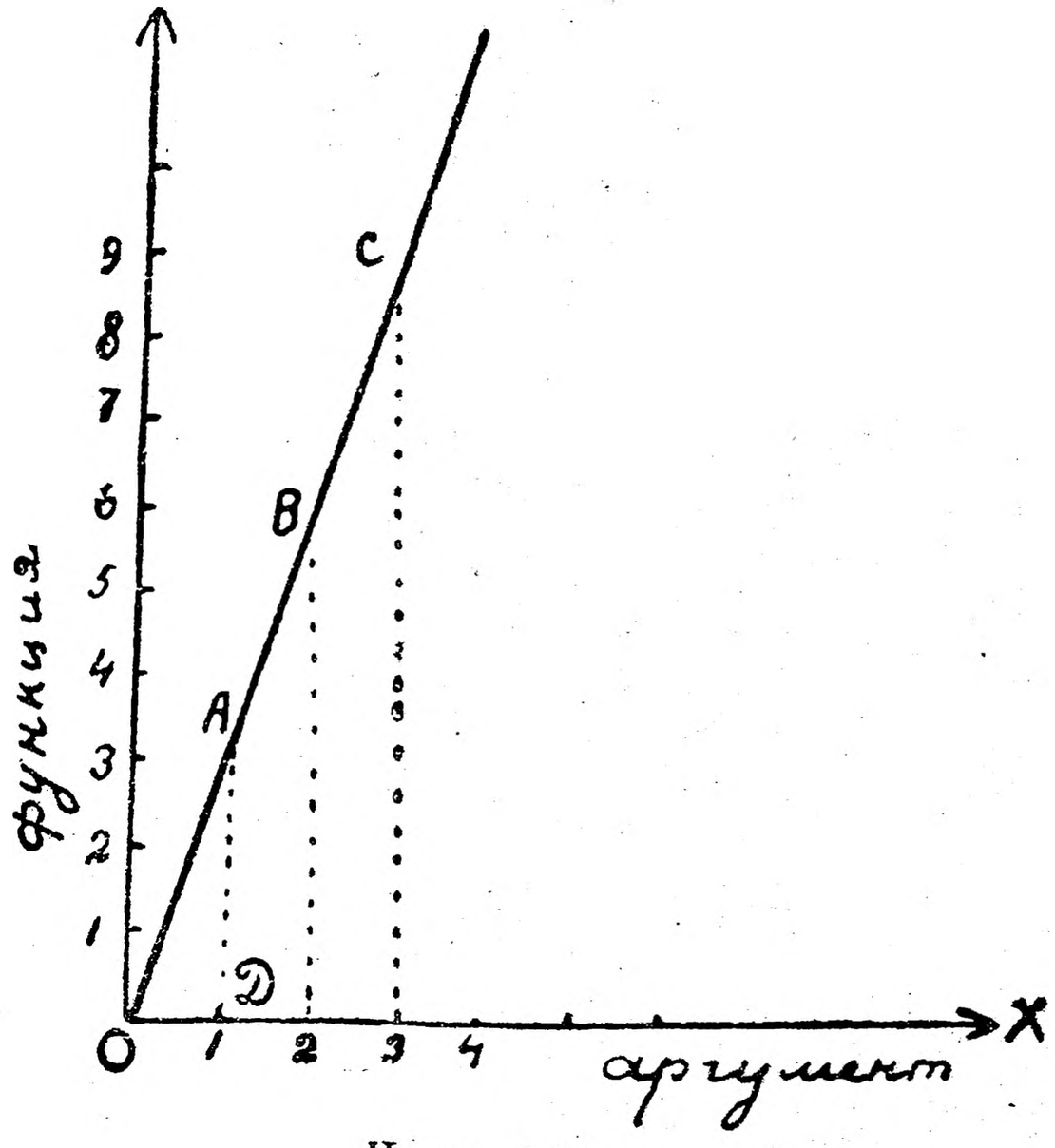
Представить графиком изменение стоимости любого количества сукна, как функцию цены.

Примеры. Построить график функции: $y = 3x$.

Решение.

Числовые значения аргумента x	Числовые значения функции y
1	3
2	6
3	9

OABC — график функции (черт. 162).



Черт. 162.

Задача. Построить графики функций 1) $y = 4x$; 2) $y = 2x$; 3) $y = {}^1/_2 x$; 4) $y = {}^1/_3 x$,—на одном чертеже и в одном масштабе, давая аргументу числовые значения $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и определяя соответствующие значиния функции *y* из ее формулы (т.-е. из уравнения).

Указание. При вычерчивании графиков отвлеченных функций масштаб единиц по оси *X* и по оси *Y* следует брать одинаковый.

Вопросы

1) Сколько точек прямой нужно знать, чтобы провести эту прямую?

2) Сколько числовых значений достаточно дать аргументу *x* и сколько числовых значений функции *y* надо определить, чтобы получить график линейной функции (т.-е. прямую линию)?

3) Через какую одну точку проходят все начерченные в предыдущей задаче графики?

4) Сколько точек поэтому достаточно определить на каждом графике для его построения?

Задача. Построить график функции $y = 2x + 1$.

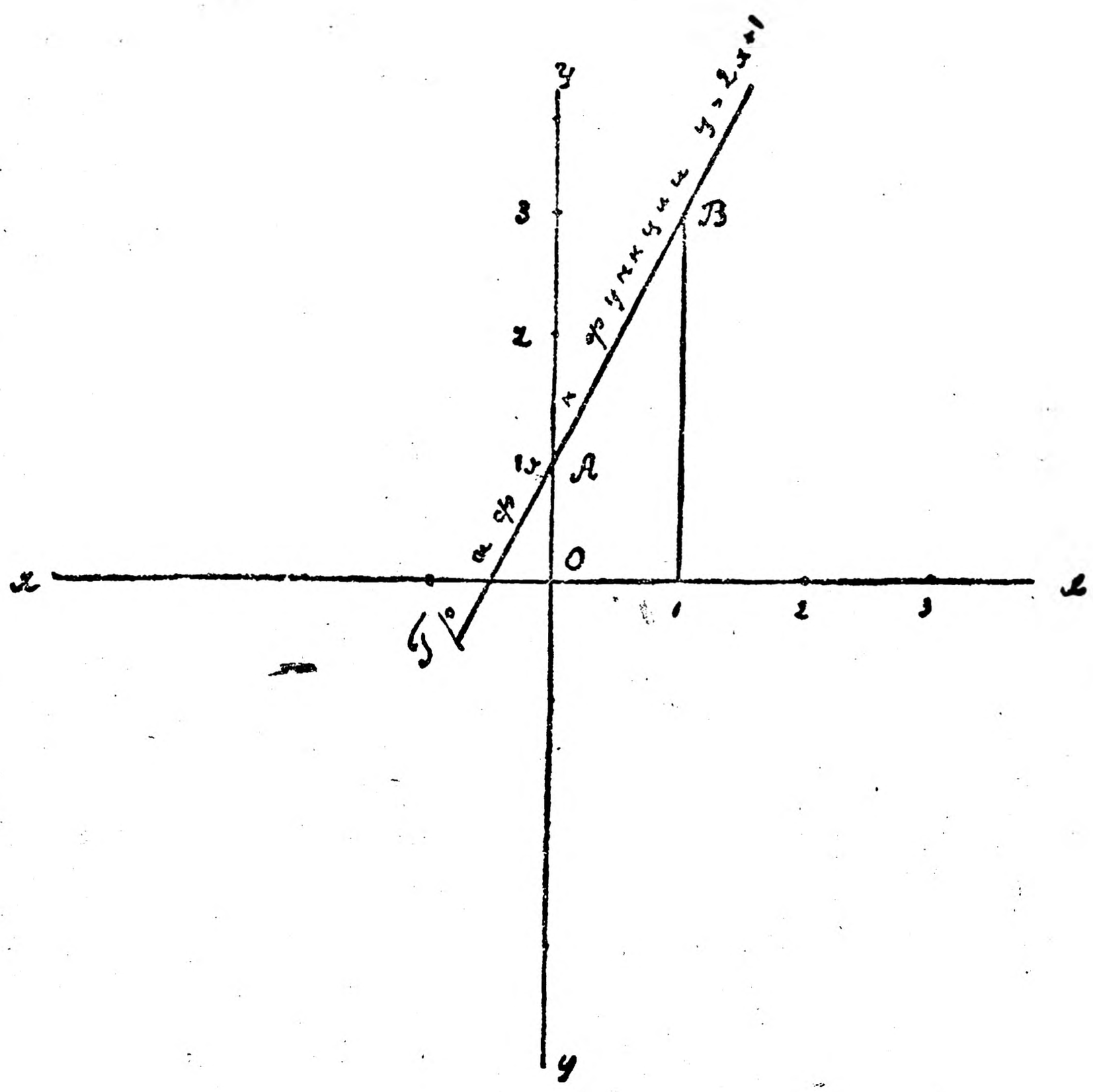
Решение. Если примем $x = 0$, то $y = 1$.

„ „ $x = 1$, „ $y = 3$.

Примечание. Короче эту запись делают в виде таблички

x	y
0	1
1	3

Принимая за единицу как по оси X, так и по оси Y отрезок в 1 *см*, найдем на чертеже две точки, A и B (черт. 163). Действительно, если $x = 0$, то по оси X от начала *нечего* откладывать и, следовательно, надо взять вертикаль (или перпендикуляр) OY, т.-е.,



Черт. 163.

иначе говоря, надо взять ось Y и на ней отложить ординату $y = 1$. При $x = 1$, откладываем ординату $y = 3$. На концах полученных ординат отмечаем точки A и B. Соединив эти точки прямой AB и продолжив ее в обе стороны, получим график функции $y = 2x + 1$.

Задачи.

Построить таким же способом графики функций:

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = \frac{1}{2}x + 2$; 3) $y = \frac{1}{3}x - 2$;

4) $y = -3x + 1$; 5) $y = -2x - 3$.

Указание. При составлении двух пар числовых значений аргумента x и функции y, можно для x выбирать какие угодно два числа и по ним определять соответствующие числа для y; но удобнее и проще первое значение x выбрать 0, так как тогда очень легко определяется y; второе же значение x для большей легкости чертежа удобнее выбирать таким, чтобы значение y получалось *целое*, хотя это и необязательно. Напр. в задаче 2-й ($y = \frac{1}{2}x + 2$) удобнее всего составить такую табличку значений x и y

x	y
0	2
2	3

Задача. Построить графики функции y, данной уравнением $-2x + 3y = 4$.

Решение. Считая $2x$ за известное, перенесем этот член в правую часть уравнения с обратным знаком, тогда

$$3y = 4 + 2x,$$

откуда

$$y = \frac{4 + 2x}{3}.$$

Табличка значений x и y

x	y
0	$1^1/_3$
-1	$^2/_3$

На черт. 164 за единицу меры по оси X и по оси Y выбран отрезок в 12 *мм*, тогда ордината $1\frac{1}{3}$ выразится отрезком 16 *мм* ордината $\frac{2}{3}$ — отрезком 8 *мм*. (Какие числовые значения надо взять для x, чтобы числовые значения y получились целые?)

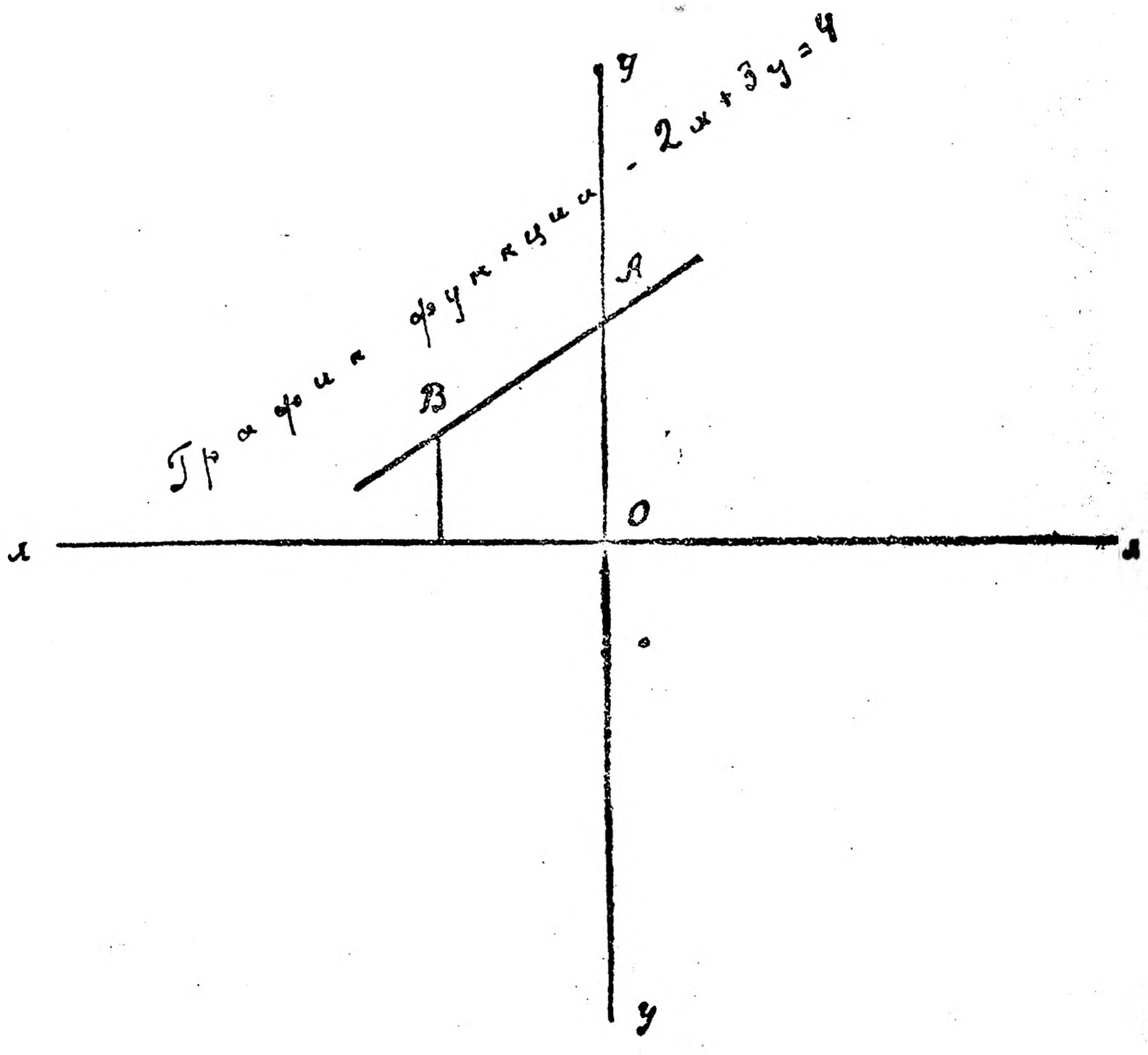
Указание. Если член, содержащий аргумент x, входит в ту же часть уравнения, в какой находится функция y, то надо предварительно член, содержащий x, перенести в правую часть уравнения с обратным знаком и затем, разделив правую часть на коэффициент при y, привести выражение функции в виду

$$y = kx + b,$$

где числа k и b могут быть безразлично числами целыми или

дробными, положительными или отрицательными. После того надо строить график функции y обычным способом.

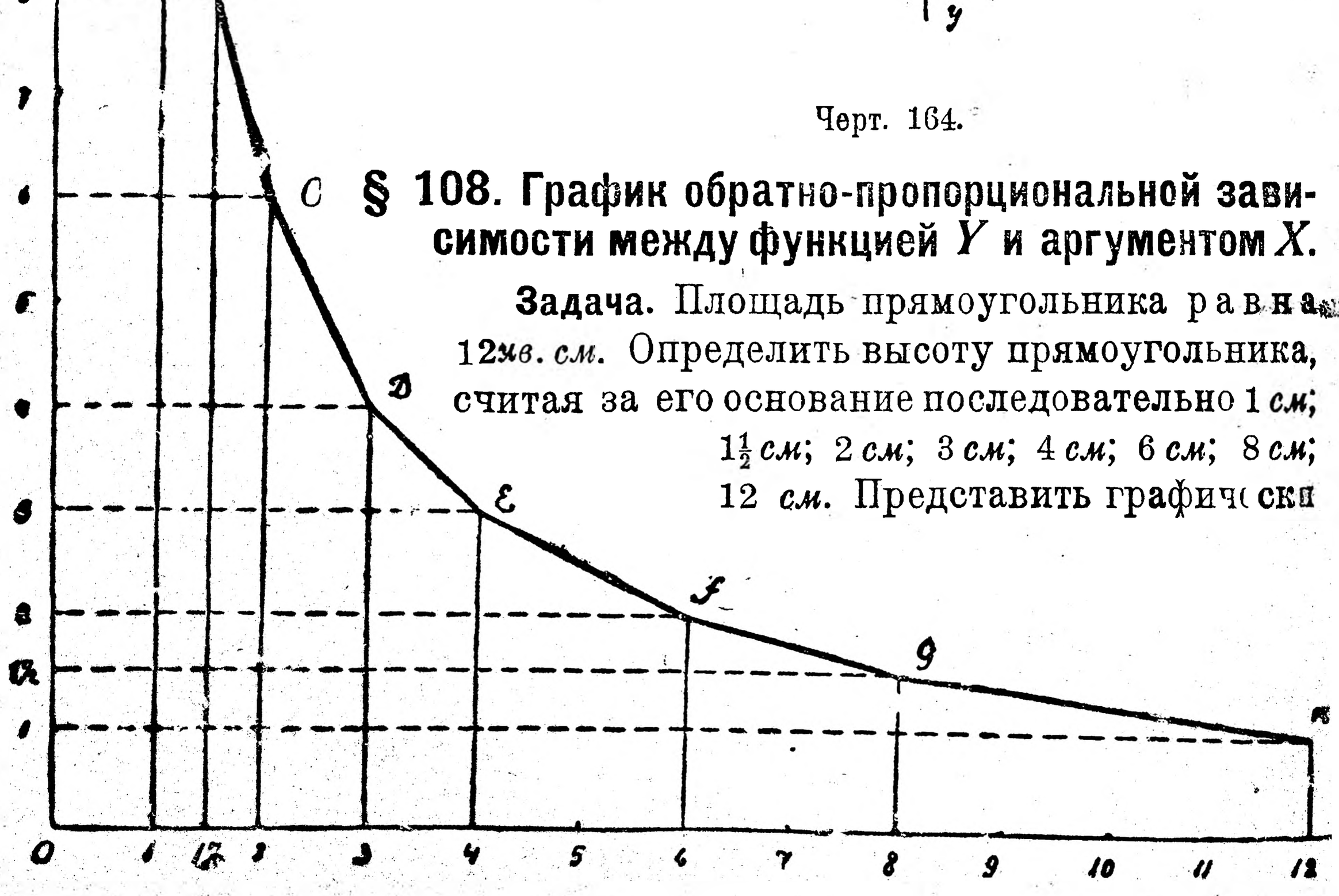
Задача. Построить график функции $3x - 2y = 6$.



Черт. 164.

§ 108. График обратно-пропорциональной зависимости между функцией Y и аргументом X.

Задача. Площадь прямоугольника равна 12 *кв. см*. Определить высоту прямоугольника, считая за его основание последовательно 1 *см*; $1\frac{1}{2}$ *см*; 2 *см*; 3 *см*; 4 *см*; 6 *см*; 8 *см*; 12 *см*. Представить графически



Черт. 165.

изменение высоты прямоугольника при указанном изменении его основания, предполагая, что площадь прямоугольника 12 *кв. см* остается неизменной (постоянной).

Р е ш е н и е. См. черт. 165. Числовые значения основания 1, $1\frac{1}{2}$, 2 т. д. отложены по оси *X*. Соответствующие числовые значения высоты 12, 8, 6 и т. д. отложены на перпендикулярах к оси *X*. *ABCDEFGH* — график функции [1]).

(Начертите такой график у себя в тетради.)

Вопросы.

1) Что происходит с высотой прямоугольника, имеющего данную площадь 12 *кв. см*, при увеличении его основания в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза? и т. д.?

2) Как в таком случае можно назвать зависимость между переменной высотой и переменным основанием прямоугольника, имеющего постоянную площадь?

3) Укажите на чертеже все прямоугольники с площадью 12 *кв. см* и с различными основаниями и высотами.

4) Какую линию представляет график обратно-пропорциональной зависимости между двумя переменными величинами?

У к а з а н и е. На черт. 165 график представляет ломаную линию, составленную из отрезков *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GH*. Если бы мы построили возможно большее число точек этой линии, принимая для этого основание прямоутольника равным не только целым, а и промежуточным дробным числам, например: $1\frac{1}{4}$ *см* $1\frac{3}{4}$ *см*, $2\frac{1}{4}$ *см*, $2\frac{3}{4}$ *см* и т. д., или еще мельче: $1\frac{1}{8}$ *см*, $1\frac{2}{8}$ *см* $1\frac{3}{8}$ *см* и т. д., то ломаная линия графика составлялась бы все из большего и большего числа более мелких звеньев, и в конце концов эта ломаная линия приблизилась бы к виду кривой линии, постепенно понижающейся от точки *A* до точки *H*, сначала очень быстро, а потом медленно, и отходящей при этом вправо.

Принимая за основание прямоугольника отрезки $\frac{1}{2}$ *см*, $\frac{1}{4}$ *см* $\frac{1}{8}$ *см*, а затем отрезки 24 *см*, 48 *см* и т. д., мы могли бы получить на чертеже продолжение нашей линии вверх и вправо. Такая линия называется *гиперболой*.

Следовательно, график обратно-пропорциональной зависимости двух переменных величин есть гипербола.

Задача. Начертить в том же масштабе график обратно-пропорциональной зависимости, приняв площадь прямоугольника равной 18 *кв. см*; 8 *кв. см*.

---

[1]) Чертеж дан в уменьшенном размере.

Вопрос. От чего зависит, при одном и том же масштабе чертежа, вид гиперболы?

Указание. Обратно-пропорциональная зависимость двух переменных величин y и x (функции и аргумента), выражается формулой $y = \frac{k}{x}$ (формула обратно-пропорциональной зависимости), где k есть постоянное число.

Задачи. Начертить графики эмпирических функций по следующим данным:

1) В России по статистическим сведениям 1915 г. из 100 человек родившихся доживало до возраста:

До возраста лет	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90
Доживало человек	53	49	47,5	46	44	42	37,5	32	23	12	3,5	0,6

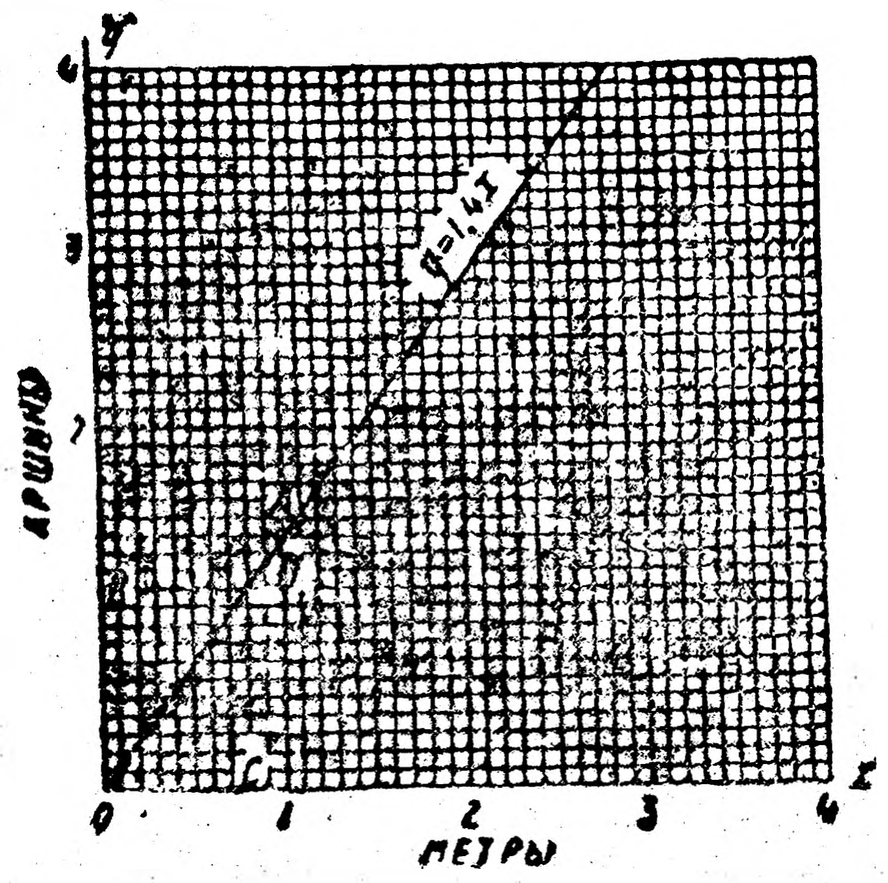
Начертить график вымирания населения России по возрастам.

2) На небольшой электрической осветительной станции нагрузка динамо-машины между 4 часами пополудни и 12 часами ночи изменялась следующим образом:

Часы пополудни	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Нагрузка в киловаттах.	20	29	50	55	56	47	28	21	19

Начертить график изменения нагрузки динамо-машины по часам указанного времени.

§ 109. Решение задач графическим методом.



Черт. 166.

Указание. При решении задач графическим методом следует пользоваться миллиметровой бумагой или, за неимением ее, клетчатой бумагой.

Пример. Определить графически, сколько метров содержится в 1,2 арш.

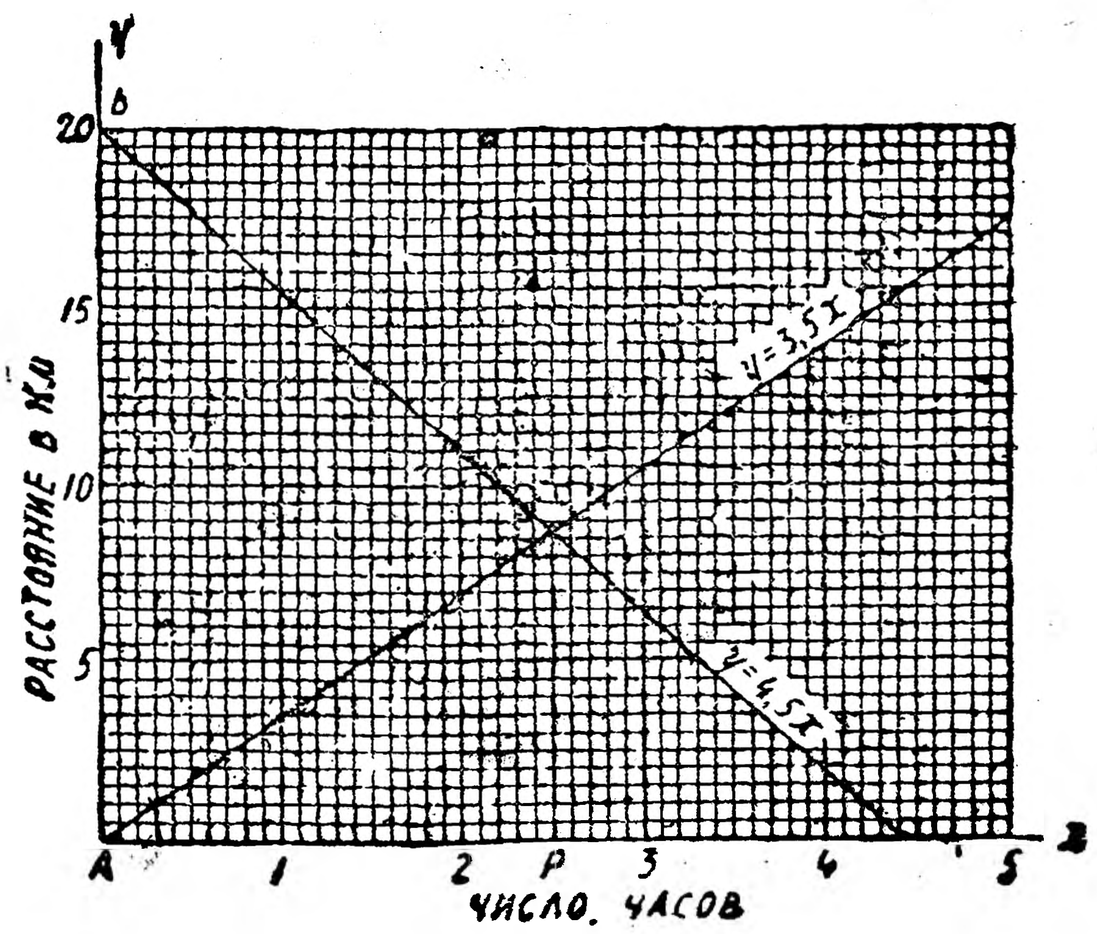
Решение. Считая, что в 1 $м$ содержится 1,4 арш., обозначим какое-нибудь число метров буквой x и соответствующее число аршин буквой y.

Тогда зависимость между y и x выразится равенством

$$y = 1{,}4x,$$

т.-е. мы имеем прямо-пропорциональную зависимость, графиком которой служит прямая линия (см. § 107, вывод). Отложим на оси X (черт. 166) несколько равных отрезков и примем величину каждого из них за 1 *м*; по оси Y отложим равные отрезки такой же или иной величины и примем величину каждого из этих отрезков за 1 аршин. Построив в принятом масштабе абсциссу $= 1$ и ординату $= 1{,}4$, найдем точку A (1; 1,4) и соединим ее с точкой O. Продолжая отрезок OA, получим график нашей функции, при помощи которого легко переводить метры в аршины и обратно. Для решения вопроса, предложенного в нашем примере, возьмем по оси Y отрезок $OB = 1{,}2$ арш., проведем $BD \parallel OX$ и опустим перпендикуляр DC на ось X. Измерив отрезок OC единицами, отложенными по оси X, найдем $OC = 0{,}9$ *м* (с точн. до 0,1 *м*). Следовательно, 1,2 арш. $= 0{,}9$ *м*, с точн. до 0,1 *м*.

Упражнения. Определить таким же способом, сколько метров содержится в 2 арш? в 3 арш? в $3\frac{1}{2}$ арш? Сколько аршин содержится в 0,4 *м*? в 1,3 *м*? в 2,7 *м*? Проверить найденные ответы вычислением.



Черт. 167.

Задачи.

1. Принимая 1 дюйм $= 2{,}5$ *см*, начертить график перевода дюймов в сантиметры и определить, сколько сантиметров содержится в 1,3″? в 5,5″? Сколько дюймов содержится в 2 *см*? в 3,5 *см*? в 1,6 *см*?

2. Принимая 1 *кг* $= 2{,}4$ ф., построить график перевода килограммов в фунты и обратно и определить графически, сколько килограммов содержится в 2 ф.? в 3 ф.?

3. Принимая 1 кв. арш. $= 0{,}5$ *кв. м*, определить графически, сколько кв. метров содержится в 1 кв. саж.? в $2\frac{1}{2}$ кв. саж.?

4. Принимая 1 куб. саж. $= 9{,}7$ *куб. м*, определить графически, сколько куб. метров содержится в $\frac{1}{4}$ куб. саж.? в 2 куб. саж.?

5. Построить график перевода показаний шкалы Реомюра в показания шкалы Цельсия, принимая $4°\ R = 5°\ C$. Определить, сколько градусов R содержится в 15° C? в 20° C? в 70° C?

6. Два пешехода идут друг другу навстречу из деревень A и B, находящихся на расстоянии 20 *км*. Первый пешеход делает в час 3,5 *км*, второй — 4,5 *км*. Через сколько часов и на каком расстоянии от деревни A пешеходы встретятся?

Р е ш е н и е. Построив, как указано на черт. 167, графики движения первого и второго пешеходов, измерим затем координаты точки пересечения M этих графиков. Абсцисса $AP = 2\frac{1}{2}$ и ордината $MP = 8\frac{3}{4}$ дают ответы на оба вопроса задачи.

7. Со станции A вышел товарный поезд; через 2 часа после его отхода с той же станции и по тому же направлению вышел пассажирский поезд. Через сколько часов после своего выхода пассажирский поезд нагонит товарный, если средняя скорость движения первого 45 *км*, а второго 25 *км* в час?

(У к а з а н и е. График движения пассажирского поезда надо вычерчивать, исходя из точки 2 оси X).

8. С двух станций, A и B, находящихся на расстоянии $21\frac{3}{4}$ *км* друг от друга, вышли навстречу друг другу (по двухколейному пути) два поезда. Первый идет со средней скоростью 36 *км* в час, второй, вышедший со станции B на 5 мин. раньше первого, идет со среднею скоростью 30 *км* в час. Через сколько минут после выхода первого поезда и на каком расстоянии от станции A поезда встретятся?

У к а з а н и е. Задача решается графиком типа черт. 167. По оси X следует откладывать минуты, по оси Y — километры; расстояние $AB = 21\frac{3}{4}$ *км*. График движения второго поезда вычерчивается сверху из точки B, а первого поезда — от 5 деления оси X.

9. Артель землекопов должна была вырыть колодезь емкостью 750 *куб. м* в условленный срок. Вынимая в день 50 *куб. м* земли, артель через 3 дня рассчитала, что ей нужны добавочные рабочие, почему была приглашена 2-я артель, вынимающая в день 70 *куб. м* земли, и таким образом работа была выполнена в срок. Во сколько дней требовалось вырыть колодезь?

У к а з а н и е. По оси X считать 0,5 *см* за 1 день работы, по оси Y считать 1 *мм* за 10 *куб. м* земли.

Работа № 15.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ.

Одночлен и многочлен. Приведение подобных членов. Сложение одночленов и многочленов; вычитание одночленов и многочленов. Раскрытие скобок, перед которыми стоят знаки + или —. Умножение одночленов, возведение одночленов в степень. Умножение многочлена на одночлен; умножение многочлена на многочлен. Формулы сокращенного умножения.

§ 110. Одночлен и многочлен.

Указание. Алгебраические выражения вида:

$$a^2;\ 2a;\ 2a^3;\ 3ab^2;\ {}^3/_4ab;\ \frac{3a}{2b}$$

называются *одночленами.*

Вопросы. 1) В каком порядке следует производить действия в каждом из этих выражений при подстановке чисел вместо букв?

2) Какое действие в каждом из этих выражений будет *последним* в порядке их выполнения?

Указание. Алгебраическое выражение вида:

$$a + a^2 - 2a^3 - 3ab^2 - {}^3/_4ab + \frac{3a}{2b}$$

называется *многочленом.*

Вопросы. 1) Какой порядок действий в этом выражении при подстановке чисел вместо букв?

2) Какое действие в этом выражении будет последним в порядке их выполнения?

3) Какое последнее действие в одночлене и многочлене?

4) Какое различие между одночленом и многочленом?

Указание. 1) *Одночленом* называется алгебраическое выражение, в котором последнее из действий в порядке их выполнения есть умножение или деление или возведение в степень, но не сложение и не вычитание.

2) *Многочленом* называется алгебраическое выражение, в котором последнее действие в порядке их выполнения есть сложение или вычитание.

Упражнения. Указать в ряду выражений:

$$a+b;\ \frac{a+b}{2};\ a+a^2b+3c;\ \ 2\ (a+b)-3a;\ \ 3a^2b;\ \ \frac{5a}{a+b};\ \ \frac{a+b}{c};$$

$$(a+b)c;\ \frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

одночлены и многочлены.

2) Указать, какие одночлены входят в состав данных многочленов.

§ 111. Приведение подобных членов.

Вопросы. 1) В чем сходство и различие следующих одночленов: a; $2a$; $^3/_4a$; $8a$?

2) В чем сходство и различие одночленов: $2a^2b$; a^2b; $^3/_4a^2b$?

Указание. Одночлены, отличающиеся друг от друга только коэффициентами, называются *подобными.*

Вопрос. Почему $3ab^2$ не подобно $3a^2b$?

Упражнения.

1) Подчеркнуть подобные члены в многочленах

1) $a+2a-3b-a+c$; 2) $a^2b-3ab^2+2a^2b+4ab$.

2) Подчеркнуть одинаковыми значками (напр. —, ═, ≡, ~ и т. п.) подобные члены в многочлене:

$$a+3ab-2a-5ac^2-ab+ac^2.$$

3) Записать короче:

$$a+a+a;\ a+2a;\ 2a+3a;\ 2a+3a-a;\ 2ab^2-ab^2+3ab.$$

Указание. Действие соединения подобных одночленов в один одночлен путем алгебраического сложения их коэффициентов называется *приведением подобных членов.*

Примеры. Проверить:

1) $a + a + a = 3a$;

2) $2ab^2 - ab^2 + 5ab^2 = 6ab^2$;

3) $a + 2a = 3a$;

4) $2a + 3a - a = 4a$;

5) $a + 2a + 3b - b = 3a + 2b$;

6) $\underline{a} + \underline{\underline{3ab}} + \underline{2a} - \underline{\underline{\underline{ac^2}}} + \underline{\underline{ab}} + \underline{\underline{\underline{5ac^2}}} - \underline{\underline{2ab}} =$

$= \underline{a + 2a} + \underline{3ab + ab - 2ab} - \underline{ac^2 + 5ac^2} = 3a + 2ab + 4ac^2.$

Задача. Сделать приведение подобных членов в выражениях:

1) $13ab^4 - ab^4 - 13ab^4$;

2) $9a^2b^3 - 4a^2b^3 - 5a^2b^3$;

3) $5ax - 6bx + 8ax - 10ax - 15bx + 6ax + 20bx - ax$.

§ 112. Сложение одночленов.

В следующих задачах произвести сложение количеств:

1) $(+3) + (-5) + (-6) = ?$

2) $(+a) + (-b) + (-c) = ?$

3) $(+2a) + (-5b) + (+2c) = ?$

Вывод. Чтобы сложить несколько одночленов, достаточно написать их один за другим с их знаками без скобок и сделать приведение подобных членов, если таковые окажутся.

Примеры.

1) $10x^2 + (-5x^2) + (-x^2) = 10x^2 - 5x^2 - x^2 = 4x^2$.

2) $-7ab + (+6ab) + (-2ab) = ?$

3) $-x + (+8x^2) + (-3x^2) = ?$

4) $m + (-n) = ?$

5) $7ab + (-6ab) + (-ab) = ?$

§ 113. Сложение многочленов.

Пример.

$(a - b + c) + (k - l - m + n) = a - b + c + k - l - m + n$

(см. § 63, п. II).

Вывод. Чтобы сложить два или несколько многочленов, достаточно, опустив скобки, написать все члены многочленов один за другим с их знаками и сделать приведение подобных членов, если таковые окажутся.

Примеры.

1) $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2) + (-2a^2b - 5ab^2 + b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 2a^2b - 5ab^2 + b^3 = a^3 - 5a^2b - 2ab^2 + b^3$.

2) $a + (b - c) = ?$

3) $-a^2 + (2ab - b^3) = ?$

4) $(6ab^2 + 3a^2) + (3a^2 + 3ab^2) = ?$

5) $(14a - 6b + 3c - 5b) + (9a - 7b - 4c) = ?$

§ 114. Вычитание одночленов.

В следующих задачах произвести вычитание количеств:

1) $+5-(+3)=?$
2) $a-(+m)=?$
3) $5-(-3)=?$
4) $a-(-m)=?$
5) $2ab-(+3ab)=?$
6) $2ab-(-3ab)=?$

Вывод. Чтобы из какого-либо выражения вычесть одночлен, достаточно к уменьшаемому приписать вычитаемое с противоположным (обратным) знаком и сделать приведение подобных членов, если таковые окажутся.

Примеры.

1) $-5a^2-(-7a^2)=-5a^2+7a^2=+2a^2.$
2) $10m-(+6m)=?$
3) $a-(+b)=?$
4) $a-(-b)=?$
5) $3x-(+2x)=?$
6) $3x-(-2x)=?$
7) $-12m^2-(-8m^3)=?$

§ 115. Вычитание многочленов.

Примеры.

1) $20-(2+3-5-4)=20-(-4)=24$

или

$20-(2+3-5-4)=20-2-3+5+4=24.$

2) $(a-b+c)-(k-l-m+n)=a-b+c-k+l+m-n.$

Вывод. Чтобы из какого-нибудь выражения вычесть многочлен, достаточно к уменьшаемому приписать все члены вычитаемого с обратными знаками и сделать приведение подобных членов, если таковые окажутся.

Примеры.

1) $10-(x+3)=10-x-3=7-x.$
2) $10-(-x+3)=?$
3) $8n^2-(3n^2-5m^3)=?$
4) $10-(-x-2)=?$
5) $x-(-2x+5)=?$
6) $-m-(n-m)=?$
7) $(4x^2-2xy+3y^2)-(-x^2-xy+2y^2)=?$

§ 116. Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак плюс или минус.

Примеры.

1) $+(a-b-c)=a-b-c$ (см. § 113).
2) $-(a-b-c)=-a+b+c$ (см. § 115).

Указание. 1) Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак $+$, достаточно опустить скобки и переписать все члены, стоящие в скобках, с их знаками.

2) Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак $-$, достаточно опустить скобки и переписать все члены, стоящие в скобках, с обратными знаками.

3) При раскрытии сложных скобок следует держаться определенного порядка: раскрыть сначала все круглые скобки, затем все квадратные и, наконец, фигурные.

Упражнения. Раскрыть скобки в следующих выражениях:

1) $a-(2a-3c+2b)=?$

2) $(2ab^2-3cd)+(-4a^2b+5cd-2b)=?$

3) $a+\{4b-[a-(3c-3b)+2c+(a-2b-c)]\}=$
$=a+\{4b-[a-3c+3b+2c+a-2b-c]\}=$
$=a+\{4b-a+3c-3b-2c-a+2b+c\}=$
$=\underline{a}+\underline{\underline{4b}}-\underline{a}+\underline{\underline{3c}}-\underline{\underline{3b}}-\underline{\underline{2c}}-\underline{a}+\underline{\underline{2b}}+\underline{\underline{c}}=-a+3b+2c.$

4) $a-\{4b-[a-(3c-3b)+2c-(a-2b-c)]\}=?$

5) $(3x^2-4y^2)+\{(x^2+2xy-y^2)+[2x^2+2xy-(-4xy+3y^2)]\}=?$

6) $(3x-4y^2)+\{(x^2-2xy^2+y^2)-[2x^2+2xy+(-4xy+3y^2)]\}=?$

§ 117. Умножение одночленов.

I. Умножение степеней одного основания.

Пример. $a^5 \cdot a^3$.

Вопросы.

1) Как можно записать иначе a^5 и a^3 в виде произведений?

2) В выражении $a^5 \cdot a^3$ заменить a^5 и a^3 полученными произведениями.

3) Сколько множителей a будет в произведении $a^5 \cdot a^3$?

4) Какая это степень a?

5) Какое действие надо произвести над показателями 5 и 3, чтобы получить эту степень, равную произведению $a^5 \cdot a^3$?

Указание. $a^5 \cdot a^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a} = a^{5+3} = a^3$?

Примеры. 1) $x^2 \cdot x^3 = ?$ 2) $x^3 \cdot x^4 = ?$

Вывод. Чтобы перемножить степени одного и того же основания, достаточно сложить показатели степеней, не изменяя их основания.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \quad 30)$$

Примеры.

1) $a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot = a^{1+2+\cdot}$.
2) $a^3 \cdot a^2 \cdot a^5 = ?$
3) $a^5 \cdot a^7 = ?$
4) $x^4 \cdot x^7 \cdot x^9 = ?$
5) $z^5 \cdot z^3 = ?$

II. Умножение одночленов.

Примеры.

1) $5a^5b^2c \cdot \frac{2}{3}\ a^2b = 5 \cdot \frac{2}{3} a^3 \cdot a^2b^2 \cdot b \cdot c = \frac{10}{3}\ a^5b^3c.$

2) $-7x^2yz^3 \cdot 3xy^2z^4 = -7 \cdot 3x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^2 \cdot z^3 \cdot z^4 = -21x^3y^3z^7.$

Вывод. Чтобы перемножить два одночлена, достаточно, соблюдая правило знаков (см. § 102), перемножить их коэффициенты и сложить показатели степеней одинаковых букв; если же какая-нибудь буква встречается лишь в одном одночлене, то переписать ее в произведение без изменения.

Упражнения.

1) $2a^2b \cdot 3 = ?$
2) $3ab^3 \cdot 2ab \cdot a^3 \cdot b = ?$
3) $\frac{2}{3}\ ab^3 \cdot \frac{3}{4} b^2c^3 = ?$
4) $8a^2b^3c^4 \cdot \frac{3}{4} ac^2d^4 = ?$

§ 118. Возведение одночлена в степень.

1. Возведение степени в новую степень.

Примеры.

1) $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6.$
2) $(a^5)^4 = a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 = a^{5+5+5+5} = a^{5 \cdot 4} = a^{20}.$

Вывод. Чтобы степень возвести в новую степень, надо перемножить показатели степеней, не изменяя их основания.

Примеры. 1) $(a^3)^4 = a^{12}$; 2) $(a^5)^3 = a^{15}$.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}} \qquad (31)$$

Правило знаков. Если показатель степени есть число нечетное, то знак степени одинаков со знаком основания. Четная степень всякого количества всегда положительна (см. § 102, вывод)

Примеры. 1) $(-a^3)^2 = ?$ 2) $(-a^3)^3 = ?$ 3) $(-a^3)^4 = ?$

II. Возведение одночлена в степень.

Примеры.

1) $(2ab^2)^3 = 2ab^2 \cdot 2ab^2 \cdot 2ab^2 = 8a^3b^6$. 2) $(3a^2b^3)^2 = 3a^2b^3 \cdot 3a^2b^3 = 9a^4b^6$.

Вывод. Чтобы возвести одночлен в степень, достаточно возвысить в эту степень коэффициент, а показатели всех букв умножить на показатель новой степени.

Примеры.

1) $(2a^2b^3)^3 = ?$ 2) $(3a^3b^4)^2 = ?$ 3) $(4a^5b^3)^2 = ?$ 4) $(5a^4b^8)^2 = ?$
5) $(2a^3b)^4 = ?$

§ 119. Умножение многочлена на одночлен.

Примеры.

1) $(a + b + c) \cdot 3 = 3a + 3b + 3c$; 3) $(a + b + c)\, m = am + bm + cm$;
2) $(a - b + c) \cdot 3 = 3a - 3b + 3c$; 4) $(a - b + c)\, m = am - bm + cm$.

Показать справедливость равенств 3 и 4 1) подстановкой чисел вместо букв, 2) исходя из § 63, IX.

Вывод. Чтобы умножить многочлен на одночлен, достаточно каждый член многочлена умножить на одночлен, соблюдая правило знаков.

Упражнения.

1) $(2a - 4b + c) \cdot 3 = 6a - 12b + 3c$.
2) $(-5x + 3y - 8z) \cdot (-2) = 10x - 6y + 16z$.
3) $(3a^2b - 2ab^2 + b^3) \cdot 2a^2b = 6a^4b^2 - 4a^3b^3 + 2a^2b^4$.

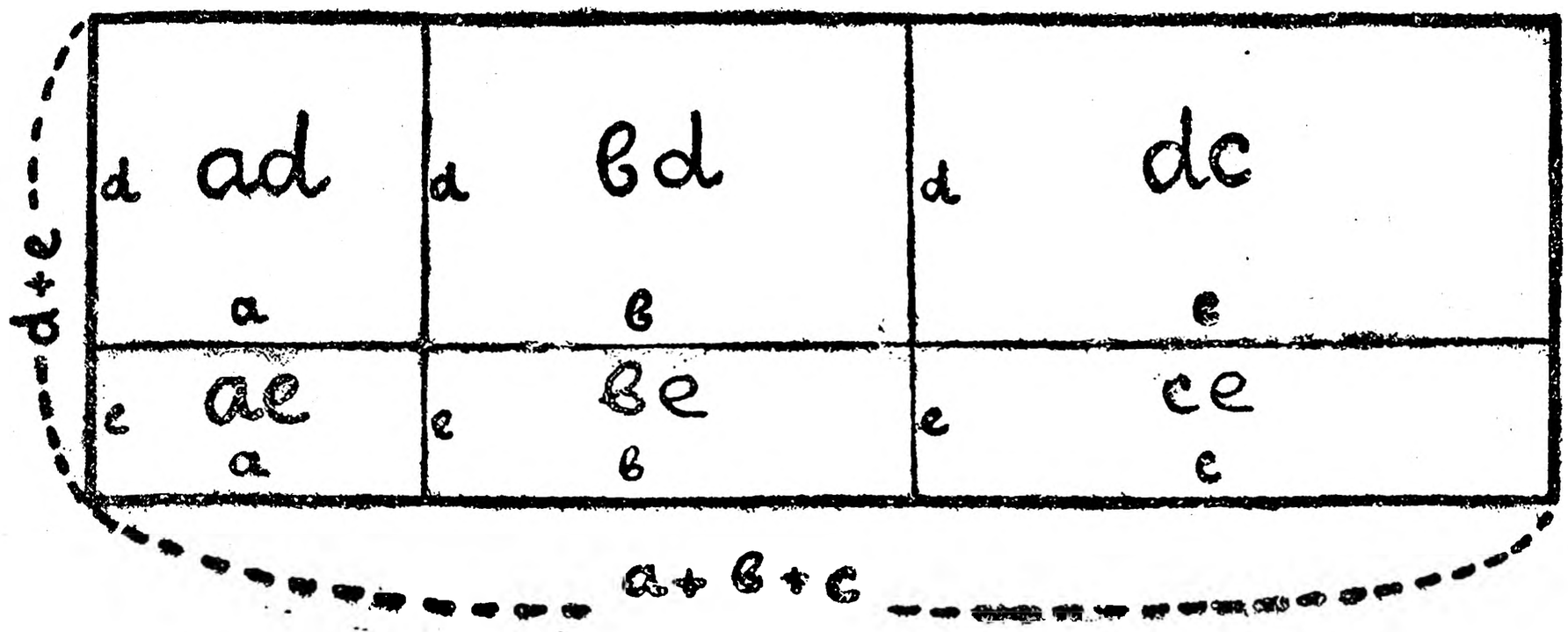
} проверить!

4) $(a - b + c) \cdot 2 = ?$
5) $(a - b + c) \cdot (-2) = ?$
6) $(3a + b - 4c) \cdot 2 = ?$
7) $(-6x - 9y + 2z) \cdot -3 = ?$
8) $(5ap + 7a^2d^2 - ap^3) \cdot 3a^3p^2 = ?$
9) $-2a^3x^3(-4q^2x + 5a^3x^3 - 3ax^2) = ?$
10) $-3a^2p^2c(5apc^2 - 6a^2p^3 - 4ap) = ?$

§ 120. Умножение многочлена на многочлен.

Задача 1. Представить произведение $(a + b + c)\ (d + e)$ в виде площади прямоугольника.

Решение.



Черт. 168.

Вопросы.

1) Чему равна площадь всего прямоугольника на черт. 168?

2) Как выражается площадь каждой составной части?

Вывод. $(a+b+c)\ (d+e)=ad+bd+cd+ae+be+ce.$

Задача 2. Помножить $(a-b+c)\ (d-e)$.

Решение. $(a-b+c)\ (d-e)=(d-e)\ (a-b+c)$. (Почему?)

По распределительному свойству умножения (см. § 63, IX) $(d-e)\ (a-b+c)=d\,(a-b+c)-e\,(a-b+c)$. По правилу умножения многочлена на одночлен (см. § 116): 1) $d\,(a-b+c)=$ $=ad-bd+cd$; 2) $-e\,(a-b+c)=-ae+be-ce$. Следовательно, $(a-b+c)\ (d-e)=ad-bd+cd-ae+be-ce$.

Вывод. Чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно, соблюдая правило знаков, умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого и сделать приведение подобных членов.

Примеры.

1) $(3a+4b+2c)\ \ (a-b)=3a^2+\underline{4ab}+2ac-\underline{3ab}-4b^2-2bc=$ $=3a^2+ab+2ac-2bc-4b^2$.

2) $(3a^2b-5ab^2+b^3)\ (2a^3-3a^2b)=6a^5b-\underline{10a^4b^2}+\underline{2a^3b^3}-\underline{9a^4b^2}+$ $+\underline{15a^3b^3}-3\,a^2b^4=6a^5b-19a^4b^2+17a^3b^3-3a^2b^4$.

Упражнения.

1) $(x^4-3x^3+5x^2-x+1)\ (x^2-3x-1)=?$

2) $(a^2+ab+b^2)\ (a-b)=?$

3) $(a^2-ab+b^2)\ (a+b)=?$

4) $(3a^2-5ab+2b^2)\ (5a^2-7ab)=?$

5) $(-3x^3y-2xy+x^2)\ (-2xy^2+5x^3y^3-7x^3)=?$

§ 121. Формулы сокращенного умножения.

I. Проверить умножением тождество

$$(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2$$

Вывод. *Произведение суммы двух количеств на их разность равно разности квадратов тех же количеств.*

Примеры.

1) $(2a+3b)\,(2a-3b)=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$.

2) $(2+3b)\,(2-3b)=?$

3) $(4x+5y)\,(4x-5y)=?$

4) $(x^2-4)\,(x^2+4)=?$

5) $(3xy-2xy^2)(2xy^2+3xy)=?$

6) $(30+1)\,(30-1)=?$

7) $(60+2)\,(60-2)=?$

8) $53\cdot 47=?$ [Указание $50+3)\,(50-3)$].

9) $44\cdot 36=?$

10) $81\cdot 79=?$

11) $\left(\frac{5}{6}x-\frac{3}{8}y\right)\left(\frac{5}{6}x+\frac{3}{8}y\right)$

12) $(0{,}5x^2+1{,}1)\,(0{,}5x^2-1{,}1)$.

II. Проверить умножением тождество:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (33)$$

Вывод. *Квадрат суммы двух количеств равен квадрату первого количества плюс удвоенное произведение первого количества на второе плюс квадрат второго количества.*

Примеры.

1) $(2a+3b)^2=(2a)^2+2\cdot(2a)\cdot(3b)+(3b)^2=4a^2+12ab+9b^2$.

2) $(4x+5y)^2=?$ 3) $(x^2+4)^2=?$ 4) $(2xy^2+3xy^2)=?$

5) $(2+3a)^2=?$ 6) $23^2=(20+3)^2=?$ 7) $33^2=?$

8) $52^2=?$ 9) $\left(\frac{3}{4}xy+\frac{3}{2}x^2\right)^2=?$ 10) $(0{,}1a^3b+2{,}5a^2b^3)^2=?$

III. Проверить умножением тождество:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad (34)$$

Вывод. *Квадрат разности двух количеств равен квадрату первого количества минус удвоенное произведение первого количества на второе плюс квадрат второго количества.*

Вопрос. Указать сходство и различие формул 33-й и 34-й.

Примеры.

1) $(2a-3b)^2=(2a)^2-2\cdot(2a)\cdot(3b)+(3b)^2=4a^2-12ab+9b^2$.

2) $(4x^1-5y)^2=?$ 3) $(x^2-4)^2=?$ 4) $(2xy^2-3xy)^2=?$

5) $(2-3a)^2=?$ 6) $28^2=(30-2)^2=?$ 7) $27^2=?$

8) $59^2=?$ 9) $47^2=?$ 10) $65^2=?$

11) $\left(\frac{2}{5}a^5-0{,}5a\right)^2=?$ 12) $(0{,}4xy-0{,}25)^2=?$

IV. Проверить умножением тождество:

$$\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} \qquad (35)$$

Вывод. *Куб суммы деух количеств равен кубу первого количества* (a^3), *плюс утроенное произведение квадрата первого количества на второе* $(3a^2b)$, *плюс утроенное произведение первого количества на квадрат второго* $(3ab^2)$, *плюс куб второго количества* (b^3).

Примеры.

1) $(2a+3b)^3=(2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot(3b)+3\cdot(2a)\cdot(3b)^2+(3b)^3=8a^3+$
$+3\cdot4a^2\cdot3b+3\cdot2a\cdot9b^2+27b^3=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$.

2) $(4x+5y)^3=?$ 4) $(2xy^2+3xy)^3=?$

3) $(y+4)^3=?$ 5) $(x^2+1)^3=?$

V. Проверить умножением тождество:

$$\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3} \qquad (36)$$

Вывод. *Куб разности двух количеств равен кубу первого количества* (a^3), *минус утроенное произведение квадрата первого количества на второе* $(3a^2b)$, *плюс утроенное произведение первого количества на квадрат второго* $(3ab^2)$, *минус куб второго количества* (b^3).

Вопрос. Указать сходство и различие формул 35-й и 36-й.

Примеры.

1) $(2a-3b)^3=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot(3b)+3\cdot(2a)\cdot(3b)^2-(3b)^3=8a^3-$
$-3\cdot4a^2\cdot3b+3\cdot2a\cdot9b^2-27b^3=8a^3-36\,a^2b+54ab^2-27b^3$.

2) $(4x-5y)^3=?$ 4) $(2xy^2-3xy)^3=?$

3) $(x^2-4)^3=?$ 5) $(a^3-1)^3=?$

Указание. Формулы 32, 33, 34, 35, 36 называются *формулами сокращенного умножения.*

Работа № 16.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА.

Геометрическая [1]) интерпретация [2]) некоторых формул сокращенного умножения. Теорема Пифагора. Извлечение квадратных корней из чисел.

§ 122. Геометрическая интерпретация некоторых формул сокращенного умножения.

I. Геометрическое представление формулы:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Указание. На черт. 169 представлен квадрат со стороной $(a+b)$. Квадрат разбит на части, как указано на чертеже.

Вопросы.

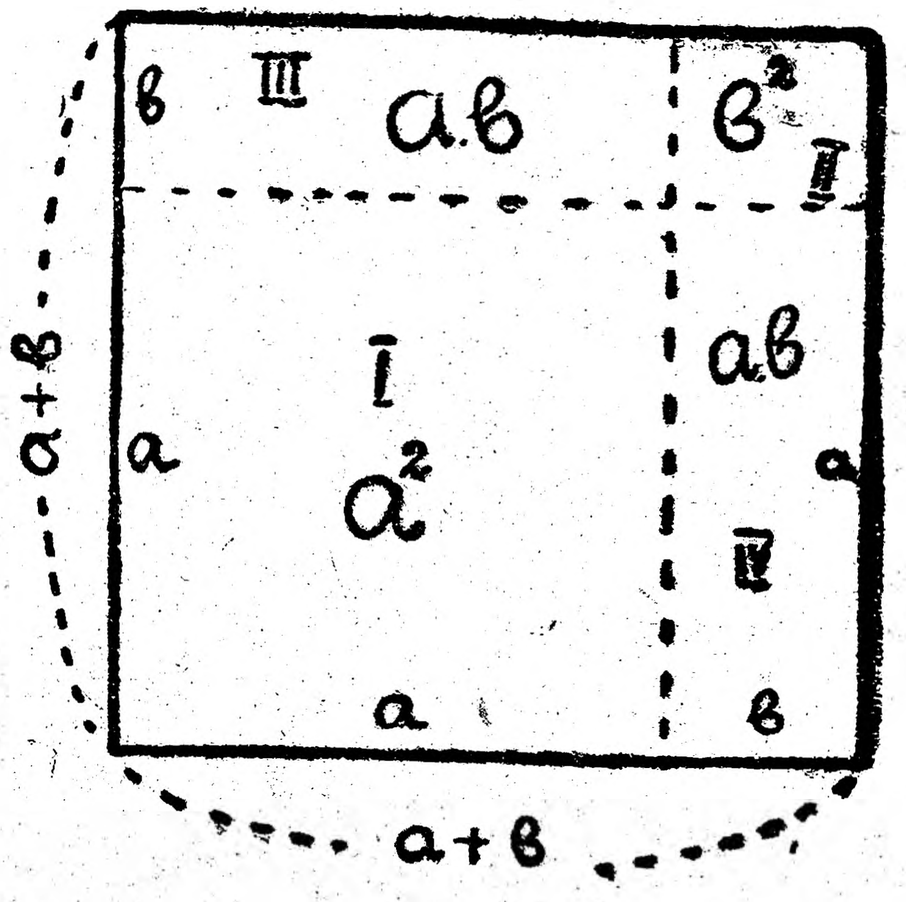
1) Что представляет геометрически $(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b)$?

2) На сколько частей разбит квадрат со стороной $(a+b)$?

3) Как выражается площадь каждой части: I, II, III, IV?

4) Что выражает сумма площадей всех частей квадрата?

5) Записать эту сумму.



Черт. 169.

Вывод. Из черт. 169 видно, что площадь квадрата со стороной $(a+b)$ равна площади квадрата со стороной a (т.-е. a^2), плюс площади двух прямоугольников со сторонами a и b (т.-е. $2ab$), плюс площадь квадрата со стороной b (т.-е. b^2).

---

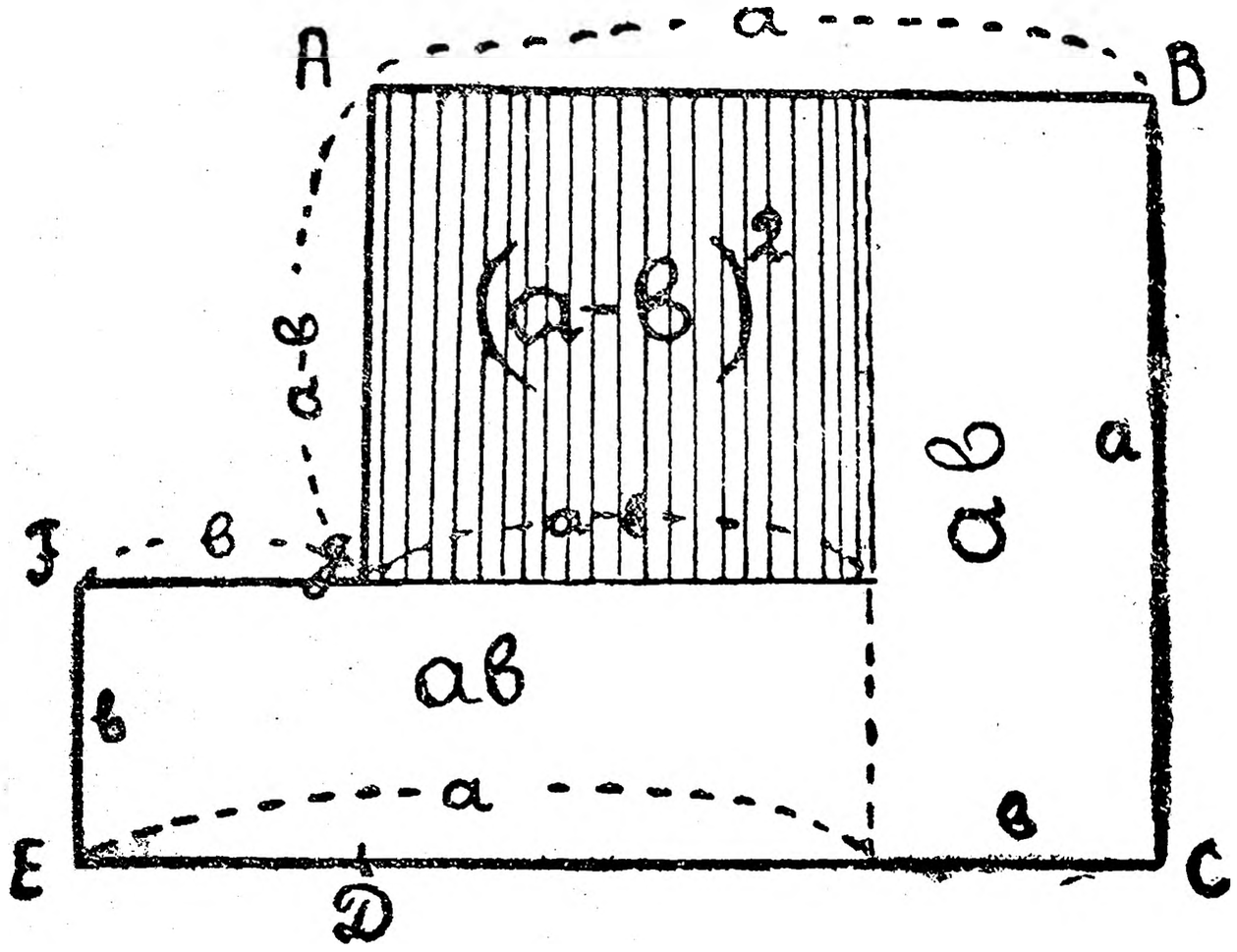
[1]) Т.-е. с помощью чертежа.

[2]) Т.-е. толкование, представление

II. Геометрическое представление формулы:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Указание. На черт. 170 построен квадрат $ABCD$ со стороной a и при нем другой квадрат $DEFG$ со стороной b.



Черт. 170.

Вопросы.

1) Как выражается площадь квадрата $ABCD$?

2) Как выражается площадь квадрата $DEFG$?

3) Как выражается площадь всей фигуры $ABCEFGA$ (черт. 170)?

4) Какие прямоугольники надо отнять от площади всей фигуры черт. 170 (т.-е. от $a^2 + b^2$), чтобы получить площадь квадрата, затушеванного на чертеже (т.-е. $(a-b)^2$)?

5) Как выражаются площади этих прямоугольников?

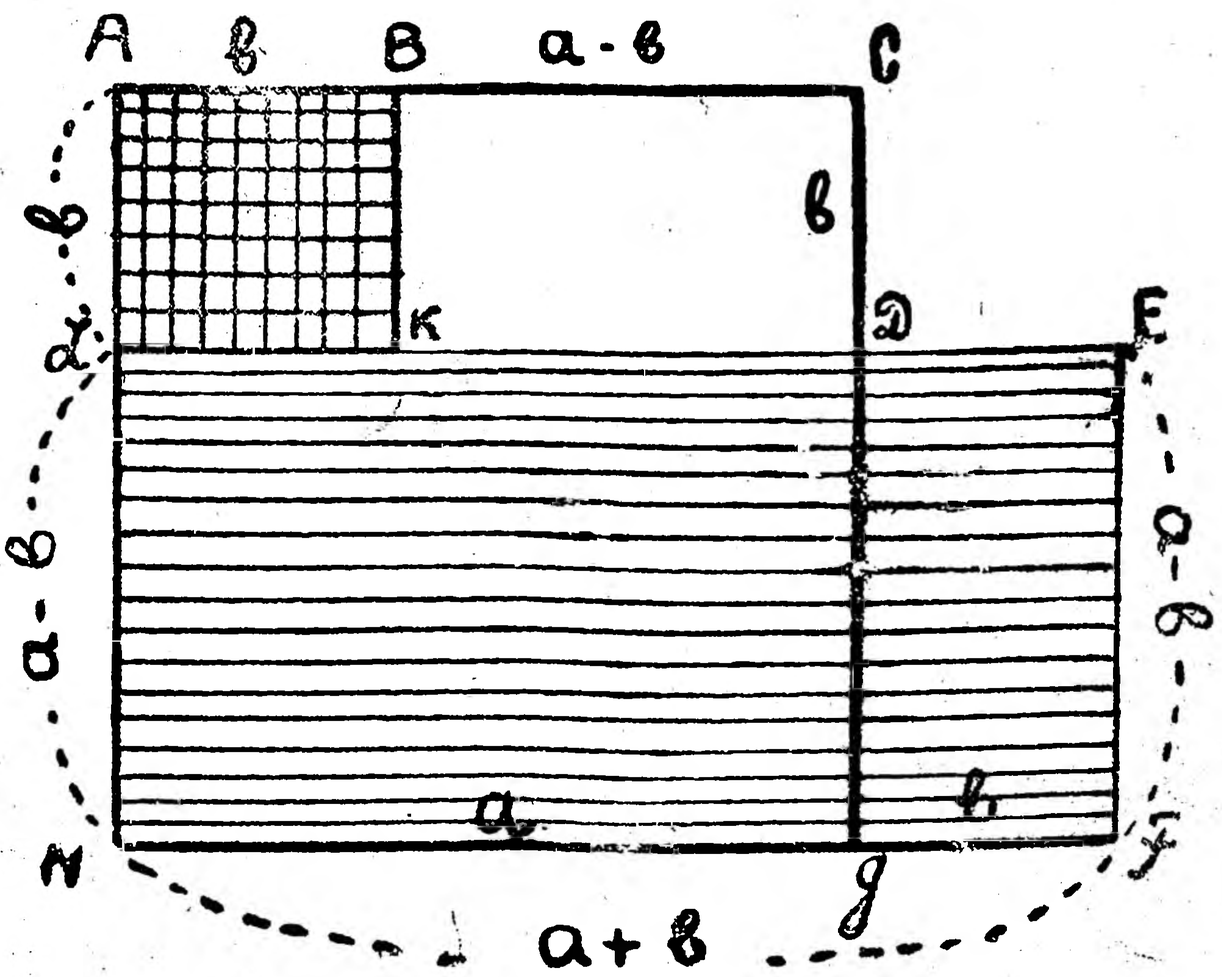
Вывод. Чтобы получить площадь квадрата со стороной $(a-b)$, т.-е. $(a-b)^2$, надо из суммы площадей двух квадратов со сторонами a и b (т.-е. из a^2+b^2) отнять площади двух прямоугольников со сторонами a и b (т.-е. $2ab$).

Итак, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2$.

III. Геометрическое представление формулы

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Указание. На черт. 171 построены: 1) прямоугольник $LEFH$ со сторонами $HF = a+b$ и $EF = a-b$; 2) квадрат $ACGH$ со стороной $HG = a$; 3) квадрат $ABKL$ со стороной $AL = b$.



Черт. 171.

Вопросы.

1) Как выразить площади прямоугольников $BCDK$ и $DEFG$ через их стороны?

2) Равны ли между собой площади этих прямоугольников?

3) Равны ли площади: прямоугольника $LEFH$ и фигуры $BCDGHLKB$?

4) Чем отличается фигура $BCDGHLKB$ от квадрата $ACGH$?

5) Как из площади квадрата $ACGH$ (т.-е. a^2) получить площадь, равную площади $BCDGHLKB$?

6) Как выражается площадь квадрата $ABKL$?

7) Что выражает разность $a^2 - b^2$?

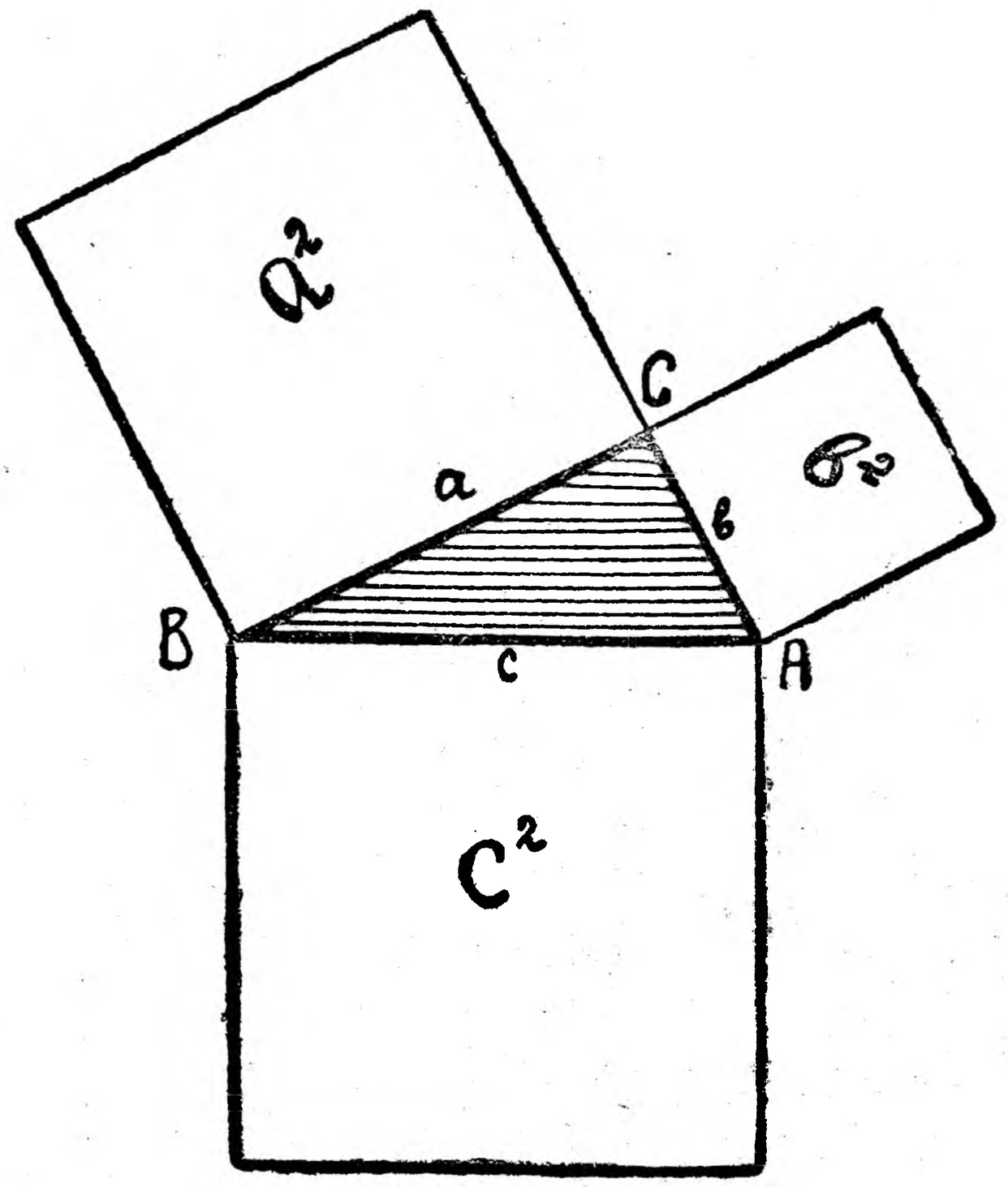
Вывод. Площадь прямоугольника со сторонами $(a+b)$ и $(a-b)$ может быть представлена равной ей разностью площадей квадратов со сторонами a и b (т.-е. $a^2 - b^2$).

§ 123. Теорема Пифагора.

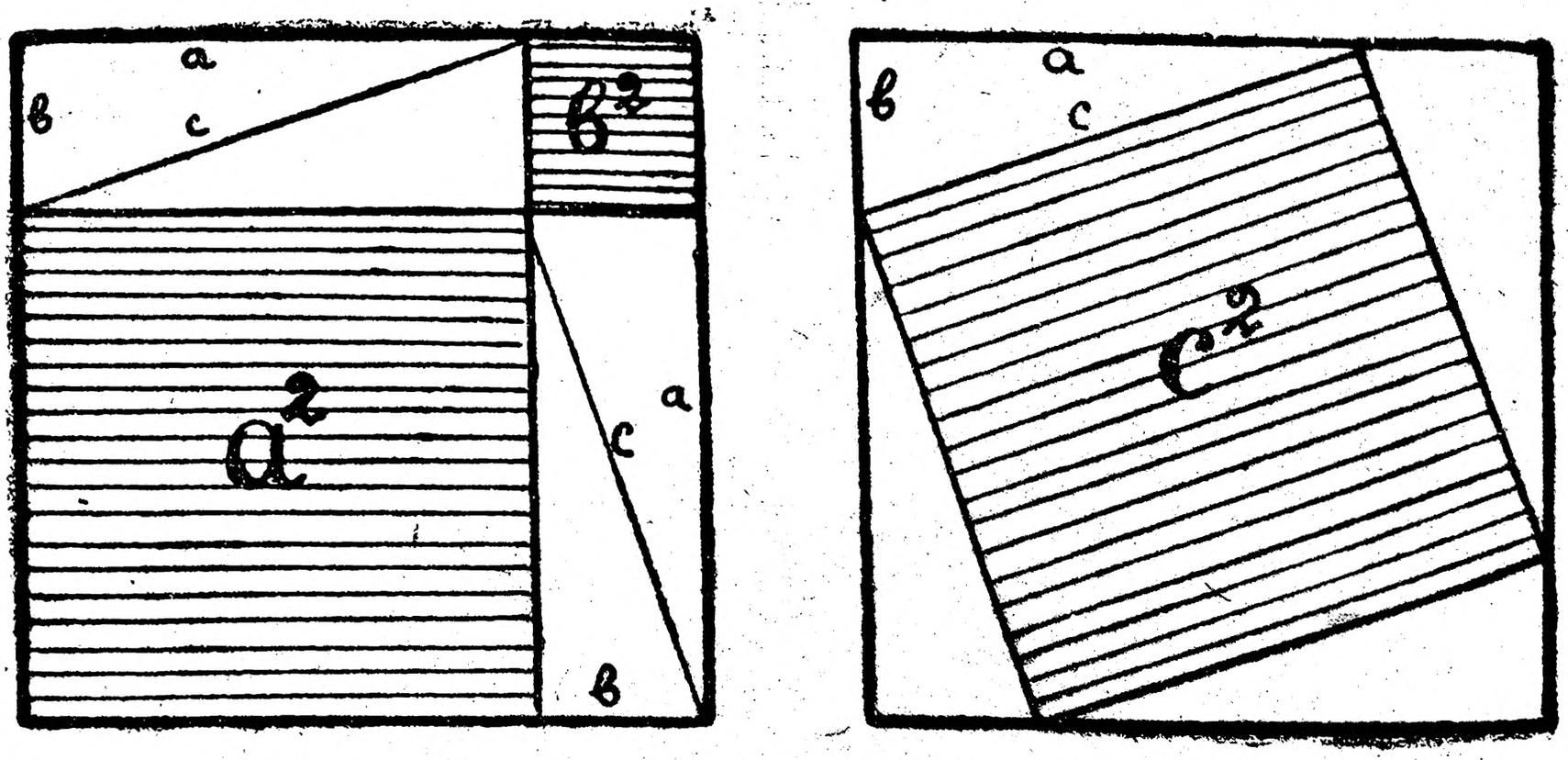
Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника ABC (черт. 172), равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах, т.-е. $c^2 = a^2 + b^2$.

Указание. На черт. 173 построены два равных квадрата со стороной $a+b$ каждый.

В каждом квадрате произведены построения, очевидные из чертежа.



Черт. 172.



Черт. 173.

Вопросы.

1) На какие составные части разбит I квадрат?

2) Сколько в их числе прямоугольных треугольников, и равны ли они между собой? Почему?

3) На какие составные части разбит II квадрат?

4) Сколько в их числе прямоугольных треугольников, и равны ли они между собой?

5) Равны ли треугольники квадрата I треугольникам квадрата II? Почему?

6) Что надо отнять от I квадрата, чтобы в нем осталась затушеванная его часть? Как выразить ее площадь?

7) Что надо отнять от II квадрата, чтобы в нем осталась затушеванная его часть? Как выразить ее площадь?

Вывод.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2} \qquad (37)$$

Этот вывод обычно формулируют короче, чем указано выше (в начале параграфа), а именно: *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

Задача. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 *м* и 8 *м*. Вычислить его гипотенузу.

Решение. Обозначив гипотенузу буквой x, получим по теореме Пифагора.

$$x^2 = 6^2 + 8^2,$$
$$x^2 = 36 + 64,$$
$$x^2 = 100.$$

Число, квадрат которого равен 100, равно 10 (т. к. $10^2 = 100$) Следовательно, $x = 10$. *Отв.* 10 *м.*

Указание. Слова „число, квадрат которого равен 100“ заменяют в алгебре знаком $\sqrt{100}$. Знак $\sqrt{}$ называется *корень квадратный*; он заменяет слова „число, квадрат которого равен“ и читается: найти корень из какого-нибудь числа или *извлечь корень из этого числа.*

Упражнения. 1) Прочесть словами обозначения:

$$\sqrt{16};\ \sqrt{25};\ \sqrt{36};\ \sqrt{49};\ \sqrt{\frac{1}{4}};\ \sqrt{\frac{4}{9}};\ \sqrt{81};\ \sqrt{64};\ \sqrt{0{,}01}.$$

2) Извлечь все указанные в упражнении 1 корни.

Указание. Проверкой действия извлечения квадратного корня служит возведение в квадрат, например:

$$1)\ \sqrt{36} = 6;\ \text{проверка: } 6^2 = 36;$$

$$2)\ \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2};\ \text{проверка } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Задачи.

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5 *см*, и один из катетов равен 4 *см*. Найти другой катет. *Отв.* 3 *см*.

Указание. Прямоугольный треугольник со сторонами 5, 4 и 3 называется *египетским* (т. к. был известен еще древним египтянам, которые пользовались им для построения прямых углов).

2. Участок земли имеет вид прямоугольного треугольника с гипотенузой 500 *м* и катетом 300 *м*. Найти площадь этого участка. *Отв.* 60 000 *кв. м*.

3. В лесной усадьбе, имеющей форму прямоугольника со сторонами 800 *м* и 600 *м*, проложена по диагонали этого прямоугольника дорога. Найти длину этой дороги. *Отв.* 1 *км*.

§ 124. Извлечение квадратных корней из чисел.

I. Для извлечения кв. корня из трехзначных, четырехзначных, пятизначных и т. д. чисел существует способ, который будет выведен и обоснован во II части нашей книги и который здесь мы даем без доказательства, поясняя его на нескольких примерах.

1. $\sqrt{7'29} = 27$

-4

47 | $32'9$

$\times 7$ | $32\,9$

0

Объяснение: Положим, что требуется извлечь кв. корень из числа 729. Отделяем значком „′“ справа налево, через 2 цифры, грани этого числа (как показано у нас в самом действии).

Ищем затем наибольшее число, квадрат которого не превышает 7 (т.-е. извлекаем корень из первой грани); получится 2 (так как $2^2 = 4$, а $3^2 = 9$). Выпишем найденное число 2 направо после знака равенства и затем, возведя его в квадрат, вычтем полученное число 4 из сотен подкоренного числа, т.-е. из 7. К получившемуся остатку 3 снесем следующую грань 29, т.-е. десятки и единицы подкоренного количества; в получившемся после этого числе 329 отделим значком «′» последнюю цифру 9 а оставшееся число 32 будем делить на удвоенную найденную цифру [1]) ответа, т.-е. на 2 2, или на 4, при чем это число 4

[1]) Говорим так для краткости; точнее следовало бы сказать: „на удвоенное число, выражаемое этой цифрой“.

напишем налево от числа 32 за вертикальной черточкой. Число 4 содержится в числе 32 восемь раз, но восемь раз задаваться, как увидим дальше, много, а потому задаемся 7 раз. Приписав число 7 налево от вертикальной черточки к имеющемуся там числу 4, получим 47; умножим 47 на 7 и полученное произведение 329 подпишем под остатком 329 и вычтем. В остатке получится 0. Полученое таким образом число 7 приписываем к ранее найденному числу 2; получится 27. Крень квадратный из числа 729 таким образом точно равен 27.

Поверка. $27 \times 27 = 729$.

Если бы при делении 32 на 4 мы задались частным 8, то получили бы $48 \cdot 8 = 384$, т.-е. больше 329.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{12'96} = 36 & \\
\underline{9} & \\
66 \mid 39'6 & \\
\times 6 \mid \underline{39'6} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Объяснение. Делим число 1296 на грани 96 и 12 и извлекаем корень квадратный из 12, т.-е. из первой грани. Так как $3^2 = 9$ и $4^2 = 16$, то корень из 12 равен 3.

Возводим число 3 в квадрат и вычитаем из 12. К полученному остатку сносим следующую грань 96. Удваиваем первую найденную цифру 3 [1]); полученное число 6 пишем налево от 396 и делим 39 на 6. Приписываем частное этого деления 6 к написанному раньше числу 6 и полученное число умножаем на 6; получится ровно 396. Найденное число 6 приписываем к ранее найденному числу 3; получится 36. Следовательно, корень квадратный из числа 1296 равен 36.

Поверка. $36 \times 36 = 1296$.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{8'06'56} = 284 & \\
\underline{4} & \\
48 \mid 40'6 & \\
\times 8 \mid \underline{38\,4} & \\
\hline
564 \mid 225'6 & \\
\times 4 \mid \underline{225\,6} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Объяснение. Делим подкоренное число на грани, считая по две цифры в каждой, с правой руки; в последней грани, считая справа у нас оказалась одна цифра, но в других случаях может быть и две цифры.

Если считать грани слева направо, то первая грань у нас будет 8, вторая грань — 06, третья грань — 56. Извлекаем квадратный корень из 8; получится 2. Квадрат этого числа, т.-е. 4 вычитаем из первой грани и к полученному остатку 4 сносим следующую грань 06; получится число 406. Десятки этого

---

[1]) Точнее надо было бы сказать „число, выражаемое этой цифрой“.

числа, т.-е. 40, делим на удвоенную найденную первую цифру корня, т.-е. на 4, и, приписав наибольшее возможное частное 8 к делителю 4, множим 48 на 8. Цифру 8 пишем за цифрой 2 в ответе. Произведение 384 вычитаем из 406; получается 2-й остаток 22, к которому сносим следующую грань 56. В полученном числе 2256 берем его десятки, т.-е. 225, и делим их на удвоенное найденное выше число, т.-е. на 2 . 28, или на 56. Наибольшее возможное частное 4 этого деления будет третья цифра ответа; приписываем ее к 56 и множим 564 на 4, получается как раз 2256. Следовательно, наш корень в точности равняется 284.

Поверка. $284 \times 284 = 80656$.

Упражнения. Извлечь кв. корни из чисел:

1) 361; 2) 529; 3) 961; 4) 1024; 5) 1225; 6) 1849; 7) 3025; 8) 4096; 9) 5625; 10) 9409; 11) 12321; 12) 120409; 13) 50625; 14) 443556; 15) 544644.

II. Корень квадратный из дроби может извлечься точно только тогда, когда он точно извлекается в отдельности из числителя и знаменателя дроби.

Напр., $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$; $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$ и т. д.

Поэтому из десятичной дроби корень может точно извлечься только тогда, когда ее знаменателем служат числа 100, 10 000, 1 000 000 и т. д., — вообще единица с четным числом нулей. В таком случае надо извлекать корень из числителя дроби или, что то же, из всего данного десятичного числа, не обращая внимания на запятую, а затем в полученном результате следует отделить запятой справа вдвое меньшее число десятичных знаков, чем то, какое имеется в подкоренном количестве.

Например:

1) $\sqrt{0,64} = 0,8$;

2) $\sqrt{4,41} = 2,1$;

	—4
41	4′1
×1	—4 1
	0

3) $\sqrt{0,1936} = 0,44$

	—16
84	33′6
×4	—33 6
	0

4) $\sqrt{42,25} = 6,5$

	—36
125	62′5
×5	62 5
	0

5) $\sqrt{4,9284} = 2,22$

	—4
42	9′2
×2	8 4
442	88′4
×2	88 4
	0

Упражнения. Извлечь корни из чисел:

1) $\sqrt{\frac{9}{49}}$; 2) $\sqrt{\frac{81}{100}}$; 3) $\sqrt{0{,}36}$; 4) $\sqrt{1{,}21}$;

5) $\sqrt{2{,}56}$; 6) $\sqrt{0{,}1225}$; 7) $\sqrt{16{,}81}$; 8) $\sqrt{0{,}005776}$;

9) $\sqrt{9{,}9225}$; 10) $\sqrt{0{,}614656}$.

Указание. Если из десятичного числа, имеющего четное число десятичных знаков, корень не извлекается, то полученный остаток отбрасываем и говорим, что корень извлечен с точностью до долей последнего десятичного знака ответа.

Например:

1) $\sqrt{3{,}26} = 1{,}8$ (с точн. до 0,1).

	—1
28	22′6
×8	22 4
	2

2) $\sqrt{54{,}3} = \sqrt{54{,}30} = 7{,}3$ (с точн. до 0,1).

	—49
143	53′0
×3	42 9
	101

Указание. Если подкоренное десятичное число имеет нечетное число десятичных знаков (как в прим. 2), то, приписывая к нему справа нули, даем ему четное число десятичных знаков.

Упражнения. Извлечь с точностью до 0,1 квадратный корень из чисел:

1) $\sqrt{5{,}36}$; 2) $\sqrt{62{,}05}$; 3) $\sqrt{12{,}12}$; 4) $\sqrt{36{,}4}$; 5) $\sqrt{58{,}8}$;

6) $\sqrt{71{,}5}$; 7) $\sqrt{62{,}05}$; 8) $\sqrt{674{,}84}$; 9) $\sqrt{756{,}6}$; 10) $\sqrt{834{,}0}$.

Задачи.

1. Найти стороны квадратов, имеющих площади: 45; 72; 193; 564; 75,6; 0,2; 1,3; 0,56; 0,007; 0,0009.

2. Вычислить гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого выражаются следующими числами: 1) 2 и 3; 2) 5 и 8; 3) 11 и 12; 4) 0,2 и 1,5; 5) 2,3 и 5,6.

3. Вычислить катеты прямоугольного треугольника, имеющего следующие гипотенузу и катет:

1) 5 и 2; 2) 12 и 8; 3) 4,5 и 2; 4) 0,5 и 0,2; 5) 12,3 и 7,5.

4. Вычислить площадь правильного (равностороннего) треугольника, со стороной a, равной: 1) 3; 2) 5; 3) 3,4; 4) 14,6; 5) 0,6.

5. Вычислить диагональ квадрата, со стороной a, равной:

1) 8; 2) 6; 3) 1,5; 4) 12,8.

6. Вычислить площадь правильного шестиугольника, со стороной a, равной: 1) 2; 2) 3; 3) 0,56; 4) 1,3.

Работа № 17.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ И БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Простые и составные числа. Разложение чисел на простые множители. Разложение алгебраических выражений на множители. Разложение на множители посредством группировки членов. Разложение на множители по формулам. Сумма кубов и разность кубов двух чисел. Алгебраические дроби. Приведение дробей к одному знаменателю. Сокращение дробей. Умножение дробей. Деление дробей. Перемена знаков у членов дроби. Пропорции. Производная пропорция. Решение более сложных уравнений. Освобождение уравнения от знаменателей. Составление уравнений с одним неизвестным.

§ 125. Простые и составные числа.

Напишем по порядку несколько чисел, начиная с единицы: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 и т. д.

Вопросы. 1) Какие из этих чисел делятся только на единицу и на самих себя?

2) Какие из этих чисел делятся без остатка еще на другие числа?

3) На какие числа делится без остатка число 75? число 80? число 100?

Указание. 1) Числа, которые делятся только на единицу и на самих себя, называются *простыми* числами.

2) Числа, которые, кроме единицы и самих себя, делятся без остатка и на другие числа, называются *составными* числами.

Вопросы. 1) Назвать простые числа от 1 до 100.

2) Сколько простых чисел от 1 до 100?

3) Как можно узнать, простое или составное число 84?

§ 126. Разложение чисел на простые множители.

Задача. Представить число 84 в виде произведения простых чисел.

Решение. $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

Число 84 равно произведению простых чисел: 2 . 2 . 3 . 7.

Указание. Такое преобразование числа называется *разложением числа на простые множители.*

Пример. Разложить на простые множители число 720.

Решение.

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

(Данное число 720 делим на 2, полученное частное 360 делим опять на 2 и т. д.

$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Указание. Чтобы разложить число на простые множители, нужно разделить его на 2, если оно делится на 2; полученное частное опять делить на 2, и т. д., пока не получим число, которое уже не делится а 2. Это число нужно делить на 3, если можно; потом на 5, на 7 и т. д., пока в частном не получится единица.

Примеры. 1) Разложить на простые множители числа 630, 825, 482, 999, 1000.

2) Сложить дроби:

$$\frac{1}{48} + \frac{11}{360} + \frac{7}{540}.$$

Решение. Разложим знаменатели 48, 360 и 540 на множители:

48	2	360	2	540	2
24	2	180	2	270	2
12	2	90	2	135	3
6	2	45	3	45	3
3	3	15	3	15	3
		5	5	5	5

$48 = 2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad = 2^4 \cdot 3$

$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

Общий наименьший знаменатель данных дробей должен делиться без остатка на каждый из знаменателей, а для этого он должен содержать все простые множители, которые встречаются в данных знаменателях, и притом в наивысших степенях, в каких они встречаются. Поэтому общий наименьший знаменатель (который иначе называется *наименьшим кратным* всех знаменателей) равен

$$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 = 2160 \text{ (проверить!)}.$$

Сравнивая разложение $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$ общего наименьшего знаменателя с разложением знаменателя $48 = 2^4 \cdot 3$, мы видим, что последний должен быть умножен на $3^2 \cdot 5 = 45$ для того, чтобы из него получился общий знаменатель; действительно, $48 \cdot 45 = 2160$ (проверить!) Это число 45 называется *дополнительным множителем* дроби $\frac{1}{48}$. Точно так же дополнительный множитель дроби $\frac{11}{360}$ равен $2 \cdot 3 = 6$, и дроби $\frac{7}{540}$ равен $2^2 = 4$.

Поэтому, производя сложение данных дробей, получим:

$$\overset{45}{\frac{1}{48}} + \overset{6}{\frac{11}{360}} + \overset{4}{\frac{7}{540}} = \frac{45 + 66 + 28}{2160} = \frac{139}{2160}.$$

3) Произвести действия с дробями:

1) $\frac{7}{90} + \frac{5}{144} - \frac{1}{216}$; 2) $\frac{13}{192} + \frac{17}{240} - \frac{5}{288}$; 3) $\frac{23}{56} + \frac{11}{252} - \frac{3}{140}$.

§ 127. Деление одночлена и многочлена на одночлен.

Примеры.

1) $a^5 : a^2 = a^3$ (проверить умножением). 2) $x^6 : x^2 = ?$

3) $a^3 : a = ?$ 4) $x^4 : x^2 = ?$

5) $6a^3x^4 : -2ax^2 = -3a^2x^2$ (проверить умножением).

6) $-12a^5b^4c : -4a^3b^4 = +3a^2c$. 7) $8x^2y^3 : -4xy^2 = ?$

8) $-15xy^2z^3 : 5yz = ?$ 9) $20(a+b)^3 : -10(a+b)^2 = ?$

10) $4(a-b)^2 c : 6(a-b)^2 = ?$

Вопросы.

1) Как формулировать правило деления степеней одного основания по примерам 1, 2, 3, 4?

2) Как формулировать правило деления одночленов по примерам 5 — 10?

Примеры.

1) $(ax + bx - cx) : x = a + b - c$. 3) $(4abc - 8ab^2 + 6a^2b^2) : -2ab = ?$
2) $(3a^2b - 6ab^2c^2) : 6ab = {}^1/_2a - b^2c$. 4) $(-5a^2 + 10a^2b - 15a^3) : -5a^2 = ?$
5) $(8x^3y + 12x^2y^2 - 10x^2y^2z) : 2x^2y = ?$

Вопросы.

1) Как проверить полученные частные в примерах 1 и 2?

2) Как формулировать правило деления многочлена на одночлен на основании примеров 1, 2, 3, 4, 5?

§ 128. Разложение алгебраических выражений на множители.

Пример 1. Дан многочлен $4a + 4b$, оба члена которого содержат общий множитель 4.

Разделив многочлен на этот множитель, получим:

$$(4a + 4b) : 4 = a + b.$$

Так как делимое равно делителю, помноженному на частное, то $4a + 4b = 4\ (a + b)$.

Пример 2. $(ab + ac) : a = b + c$, следовательно,

$$ab + ac = a\ (b + c).$$

Вопросы. 1) Какой общий множитель содержит оба члена выражения $ab + ac$ в примере 2?

2) Чем отличаются по форме выражения $ab + ac$ и $a(b + c)$?

Пример 3. Преобразовать таким же способом выражение: $ax + bx - cx$.

Решение. $ax + bx - cx = x(a + b - c)$.

Указание. Преобразование, указанное в примерах, 1, 2, 3, называется *разложением выражения на множители. Вообще преобразование алгебраического выражения в произведение нескольких множителей называется разложением на множители.*

Упражнения. Разложить на множители выражения:

1) $ac + bc$;
2) $3a + 6b$;
3) $a^2 + ab$;
4) $abc + dca$;
5) $5ab - 5bc$;
6) $3 + 6a$;
7) $10ab - 5bc$;
8) $2a - 2$;
9) $10ab^2 + 5b$;
10) $24a^2b - 12ab^2 + 6ab$.

Отв. 6) $3\ (1 + 2a)$; 10) $6ab\ (4a - 2b + 1)$.

Указание. Способ разложения на множители, примененный в предыдущих примерах, называется *способом вынесения общего множителя за скобку.* При вынесении за скобку буквенных множителей, буква берется с наименьшим показателем степени.

Задача. Разложить на множители многочлен: $-ab+ac$.

Решение. *1-й способ*: $-ab+ac=a\,(-b+c)$;
2-й способ: $-ab+ac=-a\,(b-c)$.

Вопросы. 1) Чем отличается первый способ разложения от второго?

2) Почему переменились знаки в скобках во 2-м решении?

Указание. При вынесении за скобку общего множителя со знаком минус, знаки всех членов данного выражения меняются на обратные.

Упражнения.

1. Вынести за скобки общий множитель со знаком минус в выражениях:

1) $2a-ab$;
2) $-ab+ac-ad$;
3) $16a^3b^2-8a^2c+4ab$;
4) $35ax-14bx+21cx$.

2. Разложить на множители выражения:

1) $-a^4b^2+3a^2b^2c-a^3b^3$;
2) $9x^3y^5-6x^5y^3-3x^2y^2$;
3) $6ab-12a^2b^2+18a^3b^2$;
4) $24a^2xy^5-16a^2x^5-40a^{10}x^2$;
5) $48a^4b^6-54a^3b^2-30b^5c^3$;
6) $a\,(x+y)+b\,(x+y)$;
7) $x^2\,(a-b)-y\,(a-b)$;
8) $5a^2\,(b+c)+10a\,(b+c)$;
9) $3x\,(a-b)+(a-b)$;
10) $6a\,(x-y)+x-y$.

§ 129. Разложение на множители посредством группировки членов.

Разложить на множители многочлен $ab+ac+bd+cd$

Решение:

$$\underbrace{ab+ac}_{\text{I}}+\underbrace{bd+cd}_{\text{II}}=a\,(b+c)+d\,(b+c)=(b+c)\,(a+d).$$

Вопросы. 1) Какие группы членов данного многочлена имеют общий множитель?

2) На сколько групп, имеющих общий множитель, разбился многочлен?

3) Какой общий множитель членов I группы? II группы?

4) Сколько членов имеет преобразованный многочлен

$$a\,(b+c)+d\,(b+c)?$$

5) Какой общий множитель имеется в обоих членах этого двучлена?

Упражнения. Разложить на множители способом группировки выражения:

1) $a^2+ab+ae+be$;
2) x^2+x^3-c-cx;
3) $a^3b^3-a^3b^3d+a^2b^2-a^2b^2d$;
4) $2a^2x-3bx-2a^2y+3by$;
5) $4a^2bc-8a^2bd-6ab^2c+12bb^2d$;
6) $ax+bx+ay+by+a+b$;
7) $a^2dx^3-a^2cx^3+bdx^3-bcx^3$;
8) $ax^2+bx^2-ax+cx^2-bx-cx$;
9) $a^2x-b^3x+cx+a^2y-b^3y+cy$;
10) $ax^2-bx^2-ax+cx^2+bx-c$.

§ 130. Разложение на множители по формулам.

Упражнения.

1. Разложить на множители по формуле

$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$ (§ 121): выражения:

1) $9-a^2$;
2) $49-b^2$;
3) $81-16a^2$;
4) x^2-1;
5) $1-x^2$;
6) $4b^2-1$;
7) $36a^2-25b^2$;
8) $81a^2-16c^2$;
9) $a^2x^2-c^2y^2$.

2. Разложить на множители по формуле

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ (§ 121) выражения:

1) $16a^2+24ab+9b^2$

Отв. $(4a+3b)^2$.

2) $25+10a+a^2$;
3) a^2+6a+9;
4) $36+12b+b^2$;
5) $4c^2+4c+1$;
6) $x^2+14x+49$;
7) $25x^2+30x+9$;
8) $81a^2+126ab+49b^2$;
9) $100a^2+100ab+25b^2$;
10) $\frac{49}{25}x^2+\frac{14}{5}x+1$.

Отв. $\left(\frac{7}{5}x+1\right)^2$.

Разложить на множители по формуле

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ (§ 121) выражения:

1) $81a^2-54ac+9c^2$;
2) $a^2b^2-2abc+c^2$;
3) $36a^2-48ab+16b^2$;
4) $a^2b^2-2abc+c^2$.

§ 131. Сумма кубов и разность кубов двух чисел.

Проверить умножением тождества:

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)} \qquad (38)$$

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)} \qquad (39)$$

Указание. Выражение $a^2 - ab + b^2$ называется неполным квадратом разности чисел a и b; выражение $a^2 + ab + b^2$ называется неполным квадратом суммы тех же чисел.

Выводы. *1. Сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат разности тех же чисел.*

2. Разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат суммы тех же чисел.

Примеры. Разложить на множители по формулам 38 и 39 двучлены:

1) $a^3 + 8$; 2) $27 - b^3$; 3) $27x^3 + 8$;
4) $a^3 + 1$; 5) $x^3 - 1$; 6) $125 - b^3$.

§ 132. Сокращение алгебраических дробей.

Указание. Выражения: $\frac{a}{b}$, $\frac{x+b}{c-d}$, $\frac{2a^2-b}{3c+d}$ называются алгебраическими дробями.

Пример 1. Сократить дроби: $\frac{2a}{2b}$; $\frac{ab}{ac}$.

Решение. $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$; $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$.

Вопросы. Что сделано для сокращения данных дробей?

2) Какой общий множитель имеют числитель и знаменатель первой дроби? второй дроби?

3) Изменились ли дроби, и как?

Пример 2. Сократить дробь $\frac{ab+ac}{ad}$.

Решение. $\frac{ab+ac}{ad} = \frac{a(b+c)}{ad} = \frac{b+c}{d}$.

Пример 3. Сократить дробь $\frac{16a^2-9b^2}{16a^2+12ab+9b^2}$.

Решение. $\frac{16a^2-9b^2}{16a^2+12ab+9b^2}=\frac{(4a+3b)(4a-3b)}{(4a+3b)^2}=\frac{4a-3b}{4a+3b}$.

Упражнения.

Сократить дроби:

1) $\frac{8a}{4b}$; $\frac{ac^2}{ab}$; $\frac{a^2b}{a^2c}$;

2) $\frac{a^2b}{ab^2}$; $\frac{9ab}{15b^2}$; $\frac{6ab^2}{9a^2b}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$;

4) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$;

5) $\frac{a+b}{a^3+b^3}$

6) $\frac{a-b}{a^3-b^3}$

7) $\frac{(a+b)^2}{(a+b)^3}$;

8) $\frac{2a-1}{4a^2-1}$;

9) $\frac{3a-1}{9a^2-1}$.

§ 133. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

Упражнения. Произвести действия сложения и вычитания со следующими дробями:

1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=?$ 2) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-\frac{d}{b}=?$ 3) $\frac{a+b}{d}+\frac{a-b}{d}=?$

4) $\frac{a+b}{d}-\frac{a-b}{d}=?$ 5) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{2a+3b}{a-b}=?$

6) $\frac{2a-b}{a+b}-\frac{3a-4b}{a+b}=?$ 7) $\frac{3x}{2x-1}-\frac{3x-5y+2}{2x-1}=?$

8) $\frac{5}{(a+b)^2}-\frac{-a}{(a+b)^2}$; 9) $\frac{3c}{(a-b)^2}-\frac{1-8c}{(a-b)^2}$;

10) $\frac{4x+1}{a^2-b^2}+\frac{5-9x}{a^2-b^2}$.

Вопрос. Формулировать и записать правила сложения и вычитания алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями.

Указание. При сложении и вычитании дробей с одинаковыми знаменателями, надо складывать и вычитать их числители и подписывать общий знаменатель. Если числитель вычитаемой дроби многочлен, то при вычитании надо знаки *всех* его членов менять на обратные.

§ 134. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями.

Примеры.

1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$.

2) $\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{(a-b)x}{a^2-b^2}-\frac{(a+b)y}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)x-(a+b)y}{a^2-b^2}$

3) $\frac{a}{y^2-2xy+x^2}+\frac{b}{x-y}=\frac{a+b\ (x-y)}{(x-y)^2}$.

4) $a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$.

5) $a-1+\frac{b}{a+1}=\frac{a-1}{1}+\frac{b}{a+1}=\frac{(a+1)\ (a-1)+b}{a+1}=$

$=\frac{a^2-1+b}{a+1}$.

Вопрос. Формулировать и записать правила сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями.

Упражнения.

1) $\frac{a}{b}+\frac{1}{c}$; 2) $\frac{a}{b^2}+c$; 3) $\frac{a}{2b}-\frac{c}{3b}$; 4) $\frac{x}{c}-\frac{y}{2c}$; 5) $a-1+\frac{1}{a+1}$;

6) $\frac{x}{a+b}-\frac{y}{(a+b)^2}$; 7) $\frac{x+y}{a+b}+\frac{x-y}{a-b}$; 8) $\frac{x}{ab-ac}+\frac{y}{b-c}$;

9) $\frac{3a+2b}{2x-2y}-\frac{2a-3b}{3x-3y}$; 10) $\frac{1-3x^2}{x-y}-\frac{x^2+x-1}{x^2-y^2}$.

§ 135. Умножение дробей.

Примеры.

1) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; 2) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}=\frac{acx}{bdy}$;

3) $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}$, или $c\cdot\frac{a}{b}=\frac{c}{1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{ac}{b}$.

Вопрос. Как формулировать и записать правило умножения дроби на дробь?

Упражнения. Перемножить дроби и, где можно, до умножения сократить.

1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c}$; 2) $\frac{b}{ac} \cdot \frac{c}{ab}$; 3) $\frac{2}{a} \cdot \frac{b}{3}$; 4) $\frac{2ab}{3cd} \cdot \frac{3c}{3b}$;

5) $\frac{5ad^2}{3cb^2} \cdot \frac{3c^2d}{2a^2b}$; 6) $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a+b}{a-b}$; 7) $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a-b}{a+b}$;

8) $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a-b}{a^2-b^2}$; 9) $\frac{2}{b^2} \cdot \frac{b}{4} \cdot \frac{a}{c}$; 10) $(a^3-b^3) \cdot \frac{a}{a-b}$.

§ 136. Деление дробей.

Примеры.

1) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$; 2) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$;

3) $c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{bc}{a}$.

Вопрос. Как формулировать и записать правило деления дроби на дробь? дроби на целое число? целого числа на дробь?

Упражнения. Произвести деление дробей:

1) $\frac{a}{c} : \frac{b}{2}$; 2) $\frac{a^2}{b} : \frac{a}{b^2}$; 3) $\frac{a+b}{a-b} : \frac{a-b}{a+b}$; 4) $\frac{1+x}{(1-x)^2} : \frac{1-x}{1+x}$.

§ 137. Перемена знаков у членов дроби.

1. Проверить равенства:

1) $\frac{4}{2} = \frac{-4}{-2} = -\frac{4}{-2} = -\frac{-4}{2}$;

2) $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b}$;

3) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{-a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

2. Формулировать правило, указывающее, как можно изменять знаки членов дроби и самой дроби, не изменяя ее величины.

3. Формулировать правило, указывающее, как следует изменить знаки членов дроби, чтобы знак дроби изменился на обратный.

Указание. Если знак минус поставлен только перед числителем или только перед знаменателем дроби, то его можно поставить впереди дроби, например:

$$\frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}; \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

§ 138. Пропорции.

Дана пропорция

$$c : d, \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

1) Указать первое и второе отношение пропорции.
2) Указать крайние и средние члены пропорции.
3) Указать предыдущие и последующие члены пропорции.

Основное свойство пропорции:

Из равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следует: $\frac{ad}{bd} = \frac{cd}{bd}$ или $ad = bc$, т. е. произведение крайних членов прорции равно произведению ее средних членов (*главное свойство пропорции*, см. § 84).

Примеры. Решить пропорции (см. § 84):

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$; 2) $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$; 3) $\frac{2a}{3b} = \frac{2c}{x}$;

4) $\frac{a+b}{x} = \frac{v+b}{a-b}$; 5) $\frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{a-b}$.

Составить пропорции из равных произведений:

6) $4 \cdot 5 = 2 \cdot 10$; 7) $15 \cdot 2 = 10 \cdot 3$; 10) $(a+b)(a-b) = (a+c)\ x$
8) $ab = cd$; 9) $a^2b = c^2d$;

§ 139. Производные пропорции.

Указание. Из каждой пропорции можно составить несколько других пропорций, которые называются *производными пропорциями*.

I. Дана пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . . . . (1)

Прибавим к обеим частям равенства или отнимем от них по 1, отчего равенство не нарушится:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1.$$

Приведем каждую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{b}{b} = \frac{c}{d} \pm \frac{d}{d},$$

откуда $$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \quad \ldots \quad (2)$$

Вывод. *Сумма или разность членов первого отношения относится к последующему члену того же отношения, как сумма или разность членов второго отношения относится к последующему члену этого отношения.*

Упражнения. 1) Проверить этот вывод на числовой пропорции

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

2) Перемещая члены пропорций (1) и (2), составить и формулировать еще несколько производных пропорций.

Пример. Найти x из пропорции

$$\frac{5 - x}{x} = \frac{20}{4}.$$

Решение. Составим производную пропорцию $\frac{5 - x + x}{x} = \frac{20 + 4}{4}$, или $\frac{5}{x} = \frac{24}{4}$, откуда $x = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$.

Упражнения. Решить таким же способом пропорции:

1) $\frac{a}{b} = \frac{c - x}{x}$; 2) $\frac{a}{b} = \frac{x + c}{x}$; 3) $\frac{a}{b} = \frac{x}{c - x}$.

II. Дан ряд равных отношений: $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Обозначим величину каждого отношения буквой q:

$$\frac{a}{b} = q, \frac{a_1}{b_1} = q, \frac{a_2}{b_2} = q.$$

Так как делимое равно делителю, помноженному на частное, то

$$a = bq, \; a_1 = b_1 q, \; a_2 = b_2 q.$$

Сложим почленно, (т.-е. левые части между собою и правые части между собою), эти равенства:

$$a + a_1 + a_2 = bq + b_1 q + b_2 q \text{ или } a + a_1 + a_2 = q(b + b_1 + b_2),$$

откуда

$$q = \frac{a + a_1 + a_2}{b + b_1 + b_2},$$

но

$$q = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

следовательно

$$\frac{a + a_1 + a_2}{b + b_1 + b_2} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Вывод. *Сумма предыдущих членов нескольких равных отношений так относится к сумме их последующих, как какой-нибудь из предыдущих относится к своему последующему.*

Упражнение. Проверить этот вывод на числовых отношениях:

$$\frac{3}{6} = \frac{6}{10} = \frac{7}{14}.$$

§ 140. Решение более сложных уравнений.

1. Дано уравнение.

$$1{,}01 - 1{,}7\ (x - 3) = 0{,}3\ (1{,}7 - x).$$

Раскроем скобки:

$$1{,}01 - 1{,}7\,x + 5{,}1 = 0{,}51 - 0{,}3\,x.$$

Перенесем члены, содержащие x, в левую часть, а члены, не содержащие x, — в правую часть (см. § 66):

$$-1{,}7\,x + 0{,}3\,x = 0{,}51 - 1{,}01 - 5{,}1,$$

или

$$-1{,}4\,x = -5{,}6.$$

Умножив обе части на -1, получим:

$$1{,}4\,x = 5{,}6,$$

откуда

$$x = 1.$$

Указание. Знаки *всех* членов уравнения можно изменить на обратные, что равносильно умножению всех членов уравнения на -1.

П. $(7-x)\ 12=(37-6\ x)\ 8+4$.

Прежде чем раскрыть скобки, разделим обе части уравнения на 4 (т.-е. *сократим* уравнение на 4).

$$(7-x)\ 3=(37-6x)\ 2+1,$$

или

$$21-3x=74-12x+1.$$

или

$$-3x+12x=74-21+1,$$

или

$$9x=54,$$

откуда

$$x=6.$$

Указание. Если все члены уравнения делятся на какое-нибудь число, то уравнение следует сократить на это число.

Упражнения.

1) $8(10-x)=5\ (x+3)$;
2) $8(9-2x)=5\ (3x+2)$;
3) $6(x+1)+3\ (8-x)=11\ (x+2)$;
4) $4(x-3)-2\ (x-1)=0$;
5) $15(2x-3)=5+20\ (x+2)$;
6) $4(5x+2)-7(1-2x)+5\ (8-x)=128$;
7) $(4x-6)\ 3-6=9+3\ (x-1)$;
8) $5(16x-2)-7\ (8x+2)+8\ (14-6x)-58=0$.

§ 141. Освобождение уравнений от знаменателей.

Пример 1. Решить уравнение

$$x+1=\frac{2x+1}{3}.$$

Решение. Умножим обе части на 3

$$(x+1)\ 3=\frac{2x+1}{3}\cdot 3,$$

или

$$3x+3=2x+1;$$

или

$$3x-2x=1-3,$$

откуда

$$x=-2.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{5-x}{8}=\frac{18-5x}{12}.$$

Решение. По свойству пропорции имеем:

$$(5-x)\,12=(18-5x)\,8,$$

или

$$(5-x)\,3=(18-5x)\,2,$$

откуда

$$x=3.$$

Упражнения. Решить уравнения:

1) $\frac{3x-1}{5}=\frac{7x-6}{10}$; *Отв.* **4.**

1) $\frac{3x-2}{6}=\frac{5(7-x)}{9}$; *Отв.* **4.**

3) $3x-2=\frac{5x+2}{7}$; *Отв.* **1.**

4) $1+x=\frac{3x-1}{2}$. *Отв.* **3.**

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=\frac{7-x}{3}.$$

Решение. Приведем все члены уравнения к общему знаменателю 6:

$$\frac{{}^{2}/x}{3}+\frac{{}^{3}/x}{2}=\frac{{}^{2}/7-x}{3},$$

или

$$\frac{2x}{6}+\frac{3x}{6}=\frac{2(7-x)}{6}.$$

Умножим все члены полученного уравнения на 6:

$$2x+3x=2(7-x),$$

или

$$2x+3x=14-2x,$$

или

$$2x+3x+2x=14.$$

или

$$7x = 14,$$

откуда

$$x = 2.$$

Указание. Если уравнение содержит дробные члены, то следует все члены уравнения привести к общему знаменателю и затем знаменатель этот отбросить.

Упражнения. Решить уравнения.

1) $\frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3} = \frac{x-5}{2} + \frac{x+1}{8}$; *Отв.*: 7.

2) $\frac{8-x}{6} - \frac{5-4x}{3} = \frac{x+6}{2}$; *Отв.*: 5.

3) $2x + \frac{12-x}{2} = 26 - x$; *Отв.*: 8.

4) $2 - \frac{10x-14}{3} = -\frac{3x+12}{2}$; *Отв.*: $6\frac{10}{11}$.

5) $\frac{x-4}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-2}{5} - \frac{x-8}{6}$; *Отв.*: $30\frac{1}{3}$.

6) $\frac{7+9x}{4} - \left(1 - \frac{2-x}{9}\right) = 7x$. *Отв.*: $\frac{1}{5}$.

§ 142. Составление уравнений с одним неизвестным.

Задача 1. В двух кусках содержится 48 *м* материи. В первом куске на 12 *м* больше, чем во втором. Сколько метров материи в каждом куске?

Ход решения задачи:

I. Обозначение неизвестных задачи.

1) Сколько метров во втором куске? x.
2) Сколько метров в первом куске? $x + 12$.
3) Сколько метров в обоих кусках? $x + x + 12$.

II. Составление уравнения.

$$x + x + 12 = 48.$$

III. Решение уравнения.

$$2x = 48 - 12,$$

или

$$2x = 36;$$
$$x = 18.$$
$$x + 12 = 18 + 12 = 30.$$

Отв. 30 *м*; 18 *м*.

Задача 2. В двух корзинах 440 яблок. В первой втрое больше, чем во второй. Сколько яблок в каждой корзине?

Ход решения задачи:

I. Обозначение неизвестных.

1) Сколько яблок во второй корзине? x.
2) Сколько яблок в первой корзине? $3x$.
3) Сколько яблок в обеих корзинах? $x + 3x$.

II. Составление уравнения.

$$x + 3x = 440.$$

III. Решение уравнения.

$$4x = 440;$$
$$x = 110.$$

Отв. 330; 110.

Задача 3. В сплаве, весом 72 *кг*, содержится медь, олово и цинк в отношении 4 : 3 : 2. Сколько *кг* каждого металла содержится в сплаве? (Указание. Разделить число в отношении 4 : 3 : 2 значит разделить его на такие 3 части, чтобы в одной содержалось 4 доли, в другой 3 таких же доли, в третьей 2 таких же доли).

Ход решения задачи:

I. Обозначение неизвестных.

1) Сколько *кг* в одной из равных долей? x.
2) Сколько *кг* меди в сплаве? $4x$.
3) Сколько *кг* олова в сплаве? $3x$.
4) Сколько *кг* цинка в сплаве? $2x$.

II. Составление уравнения.

$$4x + 3x + 2x = 72,$$

откуда

$$x = 8.$$

Отв. 32 *кг*; 24 *кг*; 16 *кг*.

Задачи.

1. Луг, лес и пашня вместе занимают 390 десятин. Число десятин луга вдвое меньше, чем леса, а леса в 5 раз меньше, чем пашни. Сколько десятин луга, леса и пашни?

Отв. 30, 60 и 300.

2. Со станции вышел поезд, проходящий 30 *км* в час. Через 2 часа с той же станции вышел поезд, проходящий 45 *км* в час. Через сколько времени второй поезд догонит первый?

Отв. Через 4 часа (после выхода 2-го поезда).

3. В одном доме живут 48 человек, а в другом — в четыре раза меньше. Сколько человек должны перейти из первого дома во второй, чтобы в обоих домах оказалось живущих поровну?

Отв. 18.

4. В одном доме живут 75 человек, в другом — в пять раз меньше. Сколько человек должны перейти из первого дома во второй, чтобы в первом доме оказалось живущих вдвое больше?

Отв. 15.

5. Знаменатель неизвестной дроби на 2 больше ее числителя. Если к числителю этой дроби прибавить 1, а к знаменателю 3, то по сокращению получится дробь $\frac{2}{3}$. Найти неизвестную дробь.

Отв. $\frac{7}{9}$.

6. В сплаве находится медь и олово в отношении по весу 5 : 3. Меди содержится в этом сплаве на 50 *кг* больше $\frac{5}{9}$ веса всего сплава. Сколько меди и олова содержится в сплаве?

Отв. 450 *кг*; 270 *кг*.

7. В сельсовет избраны коммунисты и беспартийные, причем число коммунистов составляет 75% числа беспартийных. При перевыборах число коммунистов уменьшилось на 5, а число беспартийных на столько же увеличилось, и отношение этих чисел стало 2 : 5. Сколько коммунистов и сколько беспартийных было в совете до перевыборов?

Отв. 15 и 20.

8. Периметр треугольника равен 37 *см*; вторая его сторона в 3 раза больше первой, а третья на 2 *см* больше второй. Определить стороны треугольника.

Отв. 5 *см*; 15 *см* и 17 *см*.

9. Площадь трапеции, основания которой находятся в отношении 4 : 5 и высота которой составляет 6 *дм*, равна 81 *кв. дм*. Определить основания трапеции.

Отв. 12 *дм* и 15 *дм*.

10. Радиус основания конуса равен 8 см и образующая 10 *см*. Определить число градусов в дуге развертки конуса.

Отв. 228°.

Работа № 18.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ.

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными первой степени. Способ сложения и вычитания. Способ подстановки. Графический способ. Задачи на составление системы двух уравнений с двумя неизвестными.

§ 143. Способ сложения и вычитания.

Указание. Уравнение $2x + 3y = 18$ называется *уравнением* на *с двумя неизвестными.*

Вопросы. 1) Подставить в это уравнение вместо x какие-нибудь произвольные числа, например 1, 2, 3,... и вычислить y.

2) Изменяется ли значение y с изменением значения x?

Указание. В уравнении с двумя неизвестными одно неизвестное есть *функция* другого неизвестного. Такое уравнение имеет бесчисленное множество решений и потому называется неопределенным.

I случай.

Задача. Определить, при какой паре числовых значений неизвестных удовлетворяются одновременно следующие два уравнения с двумя неизвестными:

$$x + 2y = 8 \quad . \quad . \quad . (1)$$
$$5x - 2y = 4 \quad . \quad . \quad . (2)$$

Решение. 1) Какое неизвестное имеет одинаковые коэффициенты в этих двух уравнениях?

2) Какие знаки стоят перед этими коэффициентами?

3) Найти сумму левых частей этих уравнений.

4) Найти сумму правых частей этих уравнений.

Обе суммы можно соединить знаком равенства, так как они равны; тогда получим уравнение с одним неизвестным:

$$6x = 12,$$

откуда

$$x = 2.$$

Подставив в одно из данных уравнений, например в первое, вместо x найденное его значение, получим

$$2 + 2y = 8.$$

Решив это уравнение, получим

$$y = 3.$$

Проверить подстановкой, удовлетворяются ли оба указанные уравнения найденными значениями x и y.

Указание. Два уравнения с двумя неизвестными, удовлетворяющихся одной и той же парой числовых значений неизвестных, составляют *систему двух уравнений с двумя неизвестными*. Нахождение этой пары числовых значений неизвестных называется *решением системы*.

Упражнения. Решить следующие системы уравнений

1) $\begin{cases} x + y = 25; \\ x - y = 7. \end{cases}$ *Отв.*: 16; 9.

2) $\begin{cases} 8x + 5y = 57; \\ 4x - 5y = -9. \end{cases}$ *Отв.*: 4; 5.

Схема, т.-е. порядок решения системы уравнений (I случай)

Дана система:

$$2x + 3y = 12 \quad . \quad . \quad . (1)$$
$$5x - 3y = 9 \quad . \quad . \quad . (2)$$

1) $\begin{array}{r} 2x + 3y = 12 \\ 5x - 3y = 9 \\ \hline 7x \qquad = 21 \end{array} \Big| +$

3) $2 \cdot 3 + 3y = 12$ или $6 + 3y = 12$;

4) $3y = 12 - 6 = 6$;

2) $x = \frac{21}{7} = 3$; $x = 3$.

5) $y = \frac{6}{3} = 2$; $y = 2$.

II случай.

Решить систему уравнений

$$12x + 5y = 56 \quad . \quad . \quad . (1)$$
$$2x + 5y = 26 \quad . \quad . \quad . (2)$$

Вопросы. 1) Какие знаки стоят перед равными коэффициентами при y в этих уравнениях?

2) Получится ли уравнение с одним неизвестным в результате сложения этих уравнений указанным выше способом, т.-е. посредством сложения этих уравнений почленно? (левой части с левой частью и правой части с правой).

Указание. Переменив знаки в одном из уравнений, напр. в уравнении (2), на обратные, складываем оба уравнения почленно, как в случае I.

Схема решения (II случай):

$$\begin{array}{r} 12x + 5y = 56 \\ \mp\ 2x \mp 5y = \mp 26 \end{array} \Big| + \qquad \begin{array}{l} \\ \end{array}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$10x \qquad\quad = 30$$

Откуда

$$x = 3.$$

Подстановкой вместо x его найденного значения в одно из этих уравнений сами определите y:

$$y = 4.$$

Вопрос. В каком случае при решении системы не надо менять знаки на обратные в данных уравнениях, и в каком случае надо в одном из уравнений переменить знаки всех его членов на обратные?

Указание. Указанный выше способ решения системы уравнений называется *способом сложения или вычитания.*

Упражнения. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x + 8y = 25; \\ 3x + 5y = 19. \end{cases}$ *Отв.*: 3; 2.

2) $\begin{cases} 9x + 4y = 61; \\ 6x + 4y = 46. \end{cases}$ *Отв.*: 5; 4.

3) $\begin{cases} 5x + 8y = 21; \\ -5x + 2y = 1. \end{cases}$ *Отв.*: 0,68; 2,2.

III случай.

Дана система уравнений

$$7x + 4y = 10 \quad . \ . \ . \ (1)$$
$$3x - 2y = 6 \quad . \ . \ . \ (2)$$

Для решения этой системы:

1) Умножьте все члены уравнения (2) на 2, чтобы уравнять коэффициенты при неизвестном y.

2) Перепишите уравнение (1) и под ним преобразованное уравнение (2).

3) Решите полученную систему указанным выше способом и проверьте решение подстановкой.

Схема решения:

$$\begin{array}{l|c|l} 7x+4y=40 & & 7x+4y=40 \\ {}^{2}x-2y=6 & 2 & 6x-4y=12 \\ \hline & & 13x=52 \end{array} \quad +$$

$$x=4;\ y=3.$$

Упражнения. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 4x+3y=32; \\ 3x-y=11. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+2y=7; \\ 4x+3y=18. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x+2y=19; \\ 2x-6y=-6. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-15y=3; \\ 3x-5y=22. \end{cases}$

Ответы: 1) 5; 4; 2) 3; 2; 3) 3; 2; 4) 9; 1;

Вопрос. Чем отличается III случай от случаев I и II?

IV случай.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x+3y=11 \ldots (1) \\ 3x+2y=7 \ldots (2) \end{cases}$$

Указания. 1) Умножением всех членов уравнения (1) на 2 и всех членов уравнения (2) на 3 уравнять коэффициенты при y.

2) Преобразованные уравнения подписать одно под другим, решить и проверить решение подстановкой.

Вопрос. Решить эту же систему, уравняв коэффициенты при x, и сравнить оба результата.

Схема решения.

$$\begin{array}{l|c|l} 5x+3y=11 & & 10x+6y=22 \\ {}^{3}x+2y=7 & 3 & \mp 9x\mp 6y=\mp 21 \\ \hline & & x=1; \\ & & y=2. \end{array} \quad +$$

Упражнения. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 7x+4y=47; \\ 5x+3y=37; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8x+5y=37; \\ 3x+2y=14. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+10y=12; \\ 12x-5y=3. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 15x+4y=24; \\ 19x-21y=4\frac{1}{3}. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+4y=34; \\ 5x+7y=57. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{9x-y}{8}=1; \\ 7(x-1)=\frac{1-y}{9}. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{3x+7}{10y+3}=1; \\ \frac{12x+5}{7y+1}=2. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x-\frac{y+5}{3}=7+\frac{x-3y}{4}; \\ 3y=10(x-y)-4(1-x). \end{cases}$

Отв.:

1) —7; 24.

2) 4; 1.

3) $\frac{2}{3}$; 1.

4) $1\frac{1}{3}$; 1.

5) 10; 1.

6) 1; 1.

7) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$.

8) 4; 4.

§ 144. Способ подстановки.

Все выше указанные системы уравнения можно решить другим способом.

Возьмем одну из прежних систем уравнений, например

$$5x+3y=11 \quad \ldots(1)$$
$$3x+2y=7 \quad \ldots(2)$$

Перенося член $2y$ из левой части уравнения (2) в правую его часть, получим

$$3x=7-2y,$$

$$x=\frac{7-2y}{3} \quad \ldots(3)$$

Подставив в уравнение (1) вместо x найденное его выражение, получим

$$5\left(\frac{7-2y}{3}\right)+3y=11,$$

или

$$\frac{35-10y}{3}+3y=11.$$

Освободив последнее уравнение от знаменателя, получим: $35 - 10y + 9y = 33$; или $35 - y = 33$; или $-y = 33 - 35$; или $-y = -2$, откуда

$$y = 2.$$

Подстановкой в уравнение (3) найдем

$$x = \frac{7 - 2 \cdot 2}{3} = \frac{7 - 4}{3} = \frac{3}{3} = 1;$$

$$x = 1.$$

Указание. Такой способ решения системы называется *способом подстановки.*

Схема решения системы способом подстановки:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 11; \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$$

1) $3x = 7 - 2y$; 2) $x = \frac{7 - 2y}{2}$; 3) $5 \cdot \left(\frac{7 - 2y}{3}\right) + 3y = 11$;

4) $\frac{35 - 10y}{3} + 3y = 11$; 5) $35 - 10y + 9y = 33$; 6) $35 - y = 33$;

7) $-y = 33 - 35$; 8) $-y = -2$; 9) $y = 2$;

10) $x = \frac{7 - 2 \cdot 2}{3} = 1$; $x = 1$.

Упражнения. Решить способом подстановки или способом сложения и вычитания системы:

1 $\begin{cases} 7x - 2y = 16; \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$

Отв. $x = 2$; $y = -1$.

2 $\begin{cases} 3x + 4y = 7; \\ 3x - 7y = 29. \end{cases}$

Отв. $x = 5$; $y = -2$.

3 $\begin{cases} 11x + 6y = 7; \\ 7x + 3y = 2. \end{cases}$

Отв. $x = -1$; $y = 3$.

4 $\begin{cases} 8x - 15y = 19; \\ 7x + 9y = 83. \end{cases}$

Отв. $x = 8$; $y = 3$.

5 $\begin{cases} 12x + 7y = 112; \\ 4x - 5y = 8. \end{cases}$

Отв. $x = 7$; $y = 4$.

6 $\begin{cases} 17x + 5y = 24; \\ 9x + 8y = 93. \end{cases}$

Отв. $x = -3$; $y = 15$.

7 $\begin{cases} 6x - 19y = 4; \\ 11x + 3y = 83. \end{cases}$

Отв. $x = 7$; $y = 2$.

8 $\begin{cases} 10x - 7y = 2\frac{2}{3}; \\ 7x + 6y = 5{,}5. \end{cases}$

Отв. $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$.

9 $\begin{cases} 25x + 18y = 11; \\ 15x - 4y = 1\frac{2}{3}. \end{cases}$

Отв. $x = \frac{1}{5}$; $y = \frac{1}{3}$.

10 $\begin{cases} 9x + 7y = 0; \\ 24x + 63y = 95. \end{cases}$

Отв. $x = -1\frac{2}{3}$; $y = 2\frac{1}{7}$.

11 $\begin{cases} 14x - 23y = -142; \\ 9x + y = 35. \end{cases}$

Отв. $x = 3$; $y = 8$.

12 $\begin{cases} 15x + 8y = -47; \\ 21x - 2y = -13. \end{cases}$

Отв. $x = -1$; $y = -4$.

13 $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5; \\ \frac{5x}{4} + \frac{7y}{3} = 26. \end{cases}$

Отв. $x = 4$; $y = 9$.

14 $\begin{cases} \frac{5}{8}x - \frac{3}{5}y = -1\frac{3}{4}; \\ 3x + \frac{7}{15}y = 8\frac{1}{3}. \end{cases}$

Отв. $x = 2$; $y = 5$.

15 $\begin{cases} \frac{7}{6}x + \frac{9}{5}y = 16; \\ \frac{16}{3}x - \frac{7}{15}y = 29\frac{2}{3}. \end{cases}$

Отв. $x = 6$; $y = 5$.

16 $\begin{cases} 2{,}5x - 3{,}5y = 3; \\ 7{,}2x + 2{,}1y = 33. \end{cases}$

Отв. $x = 4$; $y = -2$.

17 $\begin{cases} \frac{x+y}{5} - 5x = -26; \\ \frac{x-y}{4} + 2y = 26. \end{cases}$

Отв. $x = 6$; $y = 14$.

18 $\begin{cases} \frac{2x+y}{3} + y = 8; \\ 7x - \frac{x+2y}{4} = 11. \end{cases}$

Отв. $x = 2$; $y = 5$.

19 $\begin{cases} \frac{7x-2y}{6} - 5x = -16; \\ 3y - \frac{5x+2y}{4} = 0. \end{cases}$

Отв. $x = 4$; $y = 2$.

20 $\begin{cases} 7y + \frac{8x-3y}{3} = 38; \\ 15x - \frac{11x-5y}{4} = 43. \end{cases}$

Отв. $x = 3$; $y = 5$.

21 $\begin{cases} \frac{2x+3y}{4} + \frac{5x-y}{3} = 3; \\ \frac{8x-3y}{2} - \frac{x+4y}{3} = -2. \end{cases}$

Отв. $x = 1$; $y = 2$.

22 $\begin{cases} \frac{5x+7y}{5} + \frac{4x-3y}{3} \\ \frac{8x-3y}{9} - \frac{11x-5y}{4} \end{cases}$

Отв. $x = 3$; $y = 5$.

23 $\begin{cases} \frac{14x+11y}{5} + \frac{3x-7y}{2} = 3; \\ \frac{2x-9y}{7} - \frac{4x+5y}{3} = -4. \end{cases}$

Отв. $x = 1$; $y = 1$.

24 $\begin{cases} \frac{7x-2y}{4} - \left(3x - \frac{2x-y}{3}\right) = -2; \\ \frac{5x+2y}{3} + \frac{3x-y}{5} = 5. \end{cases}$

Отв. $x = 2$; $y = 1$.

25 $\begin{cases} 5x - \left(\frac{3x-2y}{5} + 4x\right) = 2; \\ 3y + \left(\frac{8x+3y}{3} - y\right) = 14. \end{cases}$

Отв. $x = 3$; $y = 2$.

26 $\begin{cases} \frac{8}{x+5} = \frac{5}{y-2}; \\ \frac{7}{x+4} = \frac{12}{y+5}. \end{cases}$

Отв. $x = 3$; $y = 7$.

27 $\begin{cases} \dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{3}{4y-1}; \\ \dfrac{6}{5y+4} = \dfrac{7}{20x+8}. \end{cases}$

Отв. $x = 1$; $y = 4$.

29 $\begin{cases} \dfrac{7}{2y+1} = \dfrac{8}{5x-1}; \\ \dfrac{15}{7x-5} = \dfrac{14}{3y-2}. \end{cases}$

Отв. $x = 5$; $y = 10$.

28 $\begin{cases} \dfrac{2}{5x-2} = \dfrac{11}{7y-5}; \\ \dfrac{12}{5y+1} = \dfrac{1}{2x-1}. \end{cases}$

Отв. $x = 2$; $y = 7$.

30 $\begin{cases} \dfrac{18}{11y-8} = \dfrac{17}{9x+7}; \\ \dfrac{5}{3x-8} = \dfrac{11}{3y+10}. \end{cases}$

Отв. $x = 3$; $y = 4$.

§ 145. Графический способ решения системы двух уравнений с двумя неизвестными первой степени.

Дана система уравнений

$$3x + 2y = 18 \quad . \ . \ . \quad (1)$$
$$-2x + y = 2 \quad . \ . \ . \quad (2)$$

Перенеся $3x$ из левой части уравнения (1) в правую его часть, получим

$$2y = 18 - 3x,$$

или

$$2y = -3x + 18,$$

откуда

$$y = \frac{-3x + 18}{2},$$

или

$$y = -\frac{3x}{2} + 9 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Точно так же из уравнения (2) получим

$$y = 2x + 2 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Наша система после этого преобразования принимает вид

$$y = -\frac{3}{2}x + 9 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (а)$$
$$y = 2x + 2 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (б)$$

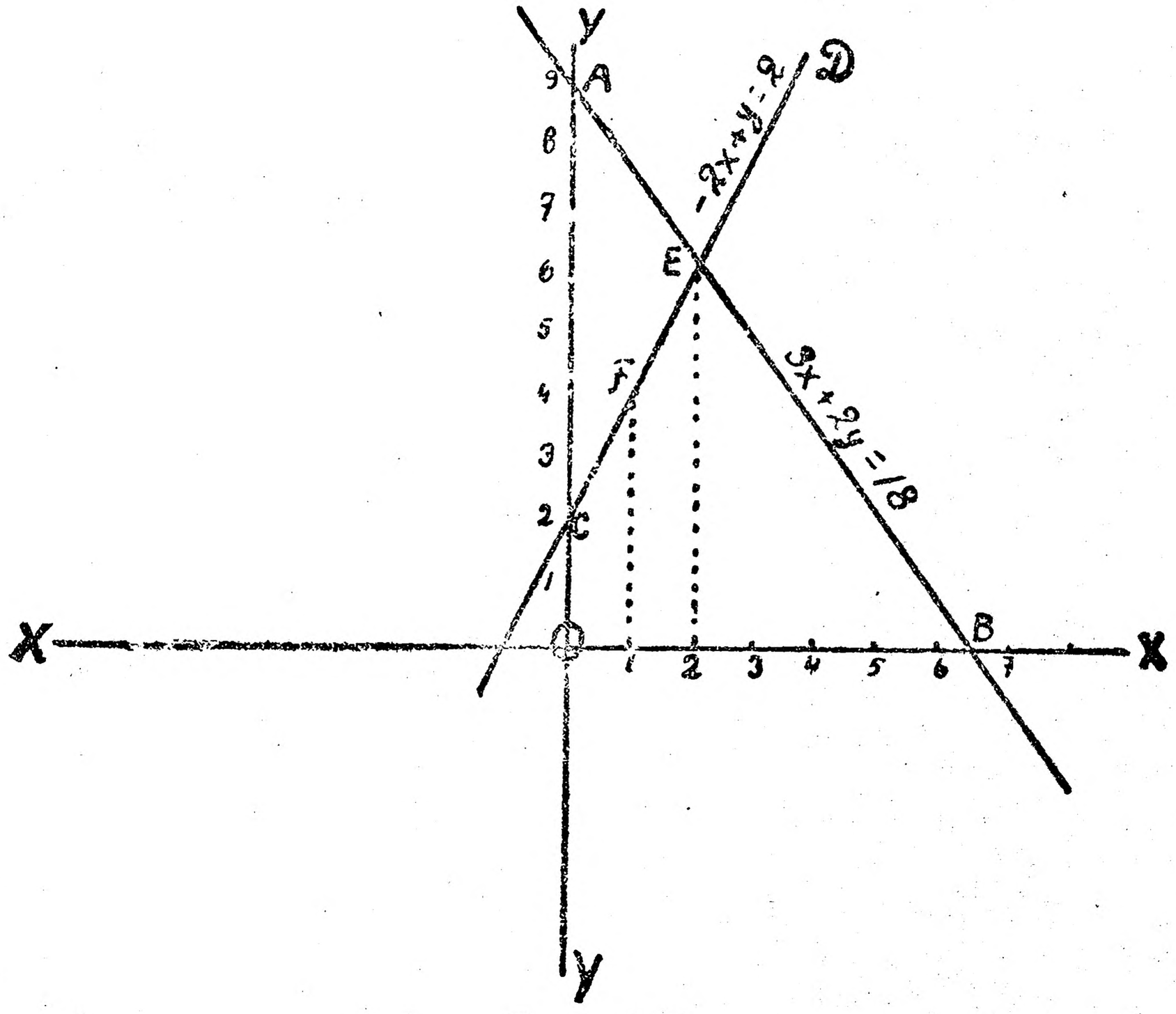
График каждой из этих функций, как известно (см. § 107), есть прямая линия.

Для построения графиков возьмем прямоугольную систему координат.

Составим таблицу численных значений x и y по уравнению (а) (см. § 107).

x	y
0	9
6	0

При $x = 0$ и $y = 9$, получим на чертеже точку A (черт. 174).
При $x = 6$ и $y = 0$, получим на чертеже точку B.



Черт. 174.

Соединив точки A и B, получим график функции (а).
Точно так же из уравнения (б) имеем

x	y
0	2
1	4

откуда получаются точки C (0, 2) и F (1, 4) (черт. 174).

Соединив их, получим график функции (б).

Точка E (2, 6), в которой эти два графика пересекаются, принадлежит обеим прямым, AB и CF. Следовательно, ее координаты $x = 2$ и $y = 6$ должны удовлетворить обоим уравнениям (а) и (б), т.-е. числа 2 и 6 представляют решения (*корни*) данной системы.

Вопрос. Проверить полученные корни подстановкой.

Упражнения. Решить графически и аналитически системы:

$$1)\ \begin{cases} 3x - 2y = 5; \\ 2x + y = 8. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2x - y = 5; \\ 3x + 2y = 18. \end{cases}$$

§ 146. Задачи на составление системы двух уравнений с двумя неизвестными.

1. На одном заводе средняя заработная плата неквалифицированного рабочего составляла 50 руб. в месяц, средняя заработная плата квалифицированного рабочего — 80 руб. в месяц, а ежемесячная выплата всем рабочим составляла 6 600 р. Через некоторое время заработная плата повысилась, при чем средняя заработная плата рабочего без квалификации стала 70 р. в месяц, средняя заработная плата квалифицированного рабочего — 90 р. в месяц, а ежемесячная выплата стала 8 800 р. Определить число рабочих той и другой категории.

Р е ш е н и е.

I. Обозначение неизвестных. Обозначим число рабочих 1-й категории через x; число рабочих 2-й категории через y. Выплата всем рабочим 1-й категории по старому тарифу 50 x; по новому тарифу 70 x; выплата всем рабочим 2 й категории по старому тарифу 80 y; по новому тарифу 90 y.

II. Составление уравнений. Согласно условию задачи

$$50x + 80y = 6\,600 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$
$$70x + 90y = 8\,800 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

III. Решение системы уравнений (1) *и* (2). Предлагается решить систему самим учащимся, причем следует для упрощения решения все члены уравнения (1) и все члены уравнения (2) разделить на 10.

Отв. 100 и 20.

2. Расстояние между осями двух параллельных валов равно 12 *см*. На эти валы нужно надеть пару шестерен, сцепленных друг с другом. Определить радиусы этих шестерен, если отношение между скоростями вращения валов должно быть равно 2 : 3.

Отв. 7,2 *см*; 4,8 *см*.

3. На станции железной дороги общее количество пассажирских и товарных вагонов составляло 115. Через некоторое время 15 пассажирских и 20 товарных вагонов были отправлены в ремонтные мастерские, причем число оставшихся пассажирских вагонов

составляло одну треть числа оставшихся товарных вагонов. Сколько было тех и других вагонов первоначально?

Отв. 35; 80.

4. Рычаг, длиной 1,2 *м*, имеет на своих концах грузы 2 *кг* и 6 *кг* и находится в равновесии. Найти расстояния точки опоры от концов рычага. *Отв.* 0,9 *м*; 0,3 *м*.

5. Для ремонта нескольких домов рабочая артель выслала в первый день 20 маляров и 35 штукатуров, во второй день — 25 маляров и 30 штукатуров. За первый день работ по ремонту артель получила 120 рублей, за второй день — 122,5 руб. Определить дневной заработок маляра и штукатура.

Отв. 2 руб. 50 коп.; 2 руб.

6. Образующая конуса на 3 *см* меньше образующей цилиндра, радиус основания конуса на 3 *см* больше радиуса основания цилиндра. Сумма образующей цилиндра и радиуса основания конуса равна 16 *см*. Зная, что боковая поверхность цилиндра вдвое больше боковой поверхности конуса, определить их образующие и радиусы их оснований. *Отв.* 8 *см*; 5 *см*.

7. В пекарне было 1,5 *т* пшеничной и ржаной муки, из которой выпекли белый и черный хлеб. Белый хлеб дал 12½% припека, а черный — 24%, так что получилось всего 1745 *кг* хлеба. Сколько было в пекарне пшеничной и ржаной муки?

Отв. 1 *т*, 0,5 *т*.

8. Боковое ребро прямоугольного параллелепипеда равно 8 *дм*; площадь одной из боковых граней больше площади соседней боковой грани на 16 *кв. дм*, периметр основания параллелепипеда втрое больше бокового ребра. Определить объем параллелепипеда.

Отв. 280 *куб. дм*.

9. Пароход по течению реки идет со скоростью 20 *км* в час, а против течения 16 *км* в час. Определить скорость течения реки и скорость парохода в стоячей воде.

Отв. 2 *км*; 18 *км*.

Работа № 19.

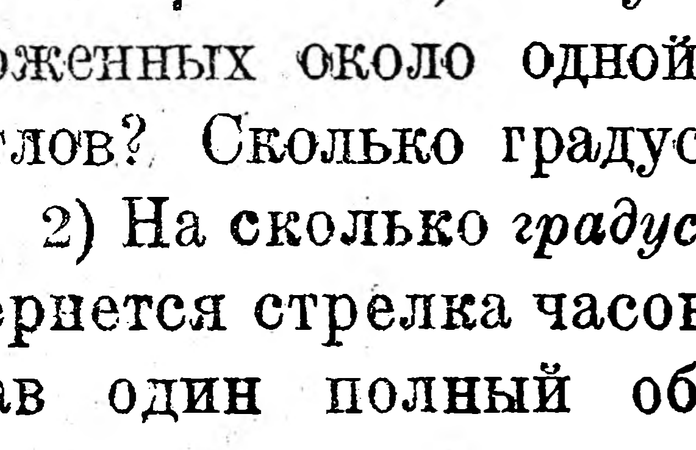
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ.

Сумма внешних углов многоугольника. Сумма внутренних углов треугольника и многоугольника. Параллельные линии. Углы при параллельных линиях и секущей. Две прямые перпендикулярные к третьей. Признаки параллельности прямых. Расстояние между параллельными линиями. Деление отрезка на равные части. Построение параллельной линии, проходящей через данную точку параллельно данной прямой. Углы с параллельными и перпендикулярными сторонами.

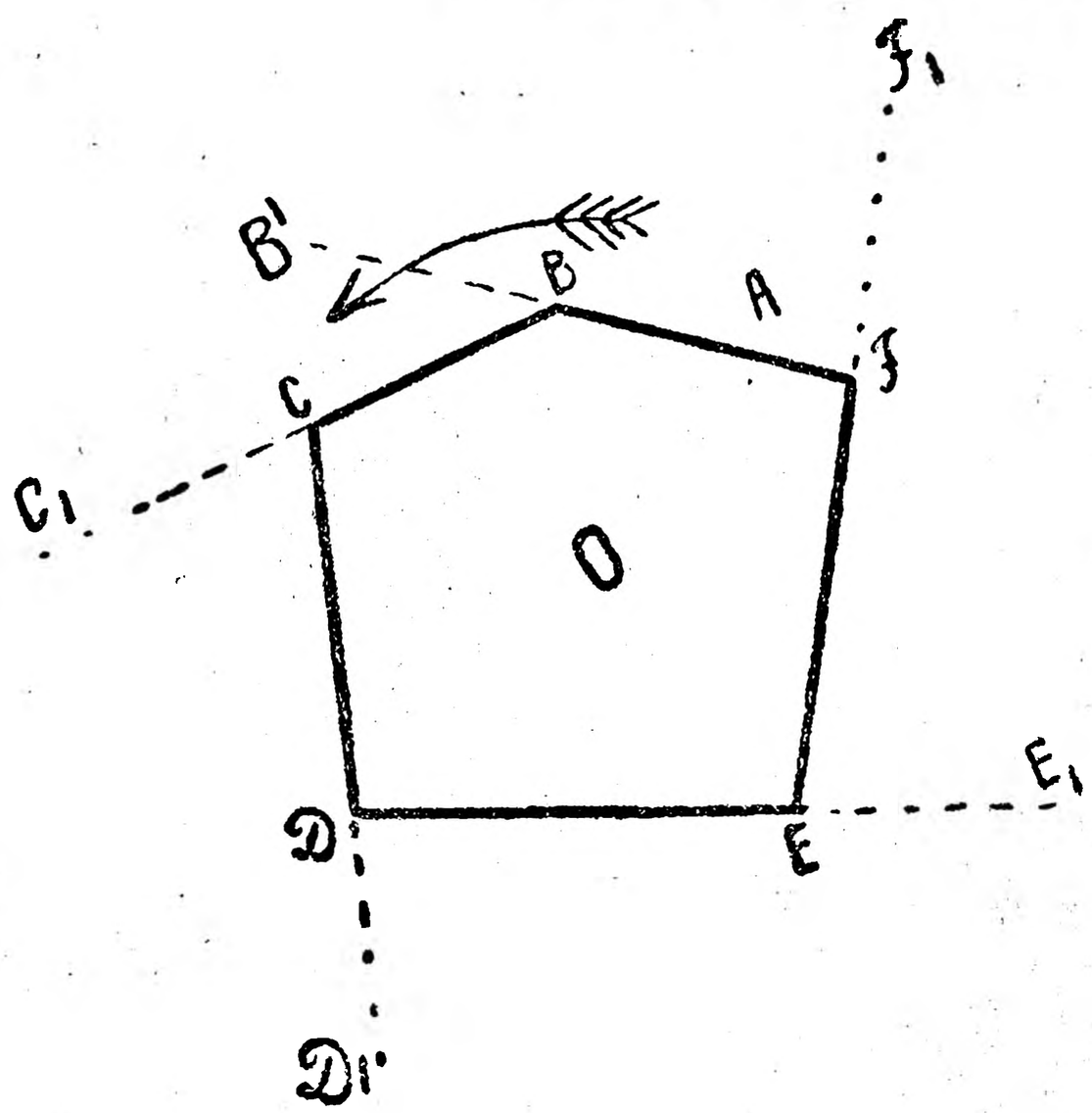
§ 147. Сумма внешних углов многоугольника.

Вопросы. 1) Чему равна сумма всех углов (черт. 175), расположенных около одной точки *O*? Сколько в этой сумме прямых углов? Сколько градусов?

2) На сколько *градусов* повернется стрелка часов, сделав один полный оборот? На сколько *прямых углов* повернется стрелка при полном обороте?



Черт. 175.



Черт. 176.

3) Человек находится в точке *A* (черт. 176) и движется, как указано стрелкой на чертеже, по замкнутой ломаной линии

BCDEF, называемой *периметром многоугольника*. В каких пунктах он будет поворачиваться, и на какие углы, чтобы сделать полный оборот вокруг точки *O*?

Указание. Углы поворотов: $\angle B'BC$, $\angle C'CD$, $\angle D'DE$, $\angle E'EF$ и $\angle F'FB$ называются *внешними углами* многоугольника *BCDEF* (каждый из них составлен стороной многоугольника и продолжением соседней стороны).

4) На сколько прямых углов (или на сколько градусов) повернется человек, сделав полный оборот по периметру вокруг точки *O* (черт. 176)?

5) Из каких углов чертежа составится его полный поворот?

6) Чему равна сумма всех внешних углов многоугольника (см. вопр. 3 и 4)?

7) Проверить, изменится ли эта величина, если взять другой многоугольник (с другим числом сторон, напр. треугольник, четыреугольник)?

Вывод. *Сумма внешних углов всякого многоугольника равна 4d.*

Задача. В произвольно взятом многоугольнике измерить все внешние углы транспортиром и найти их сумму.

§ 148. Сумма внутренних углов треугольника.

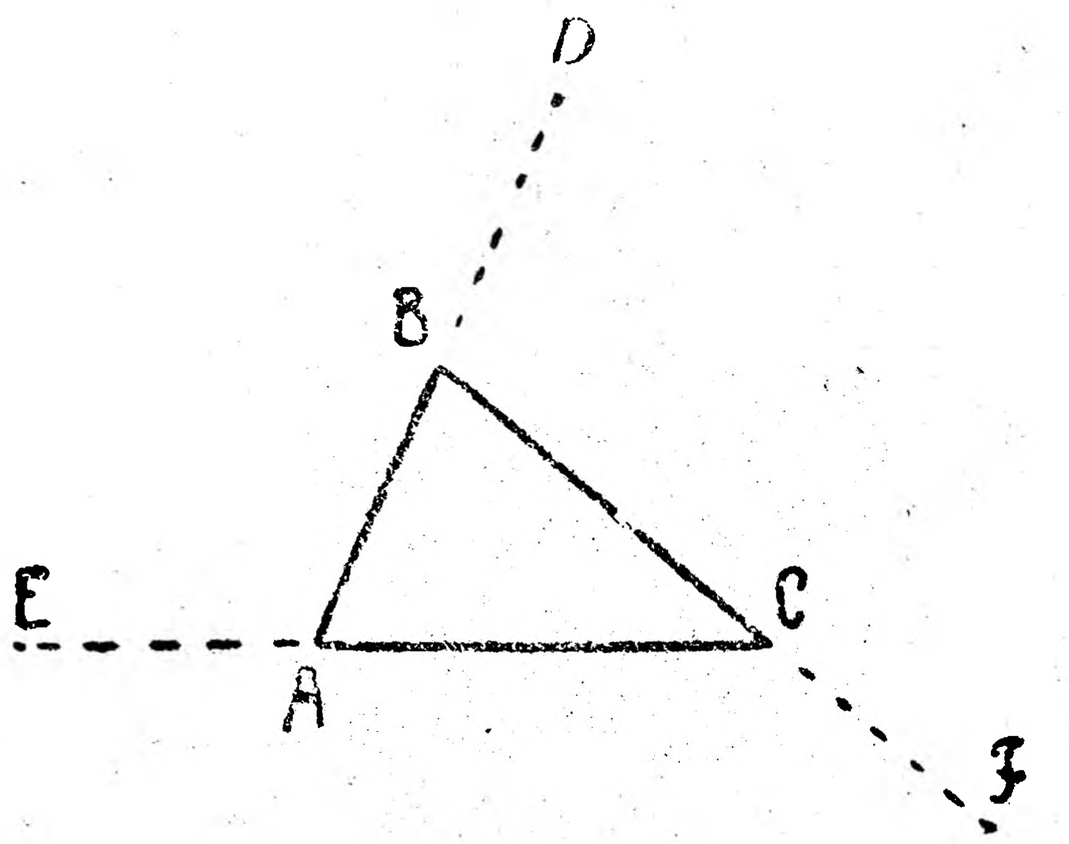
Вопросы. 1) Как называются углы *EAB*, *DBC* и *FCA* в треутольнике *ABC* (черт. 177)?

2) Чему равна их сумма (см. предыд. параграф)?

3) Назвать углы, смежные с названными внешними углами △-ка *ABC*.

Указание. Углы *BAC*, *ABC* и *BCA* называются *внутренними* углами △-ка *ABC*.

4) Сколько пар смежных углов образуют внешние углы треугольника вместе с внутренними?



Черт. 177

5) Сколько прямых углов в каждой паре?

6) Сколько прямых углов во всех парах?

7) Сколько прямых углов останется на долю *внутренних* углов, если из этой суммы исключить $4d$, приходящиеся на долю внешних углов?

Вывод 1. *Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым* ($2d = 180^0$).

Следствие. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних с ним несмежных* (показать справедливость этого положения, основываясь на предыдущем выводе и свойстве смежных углов).

Вывод 2. *В треугольнике не может быть больше одного прямого или тупого угла* (почему?)

Вывод 3. *Из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр* (почему?)

Вопросы. 1) Сколько градусов в каждом угле равностороннего треугольника?

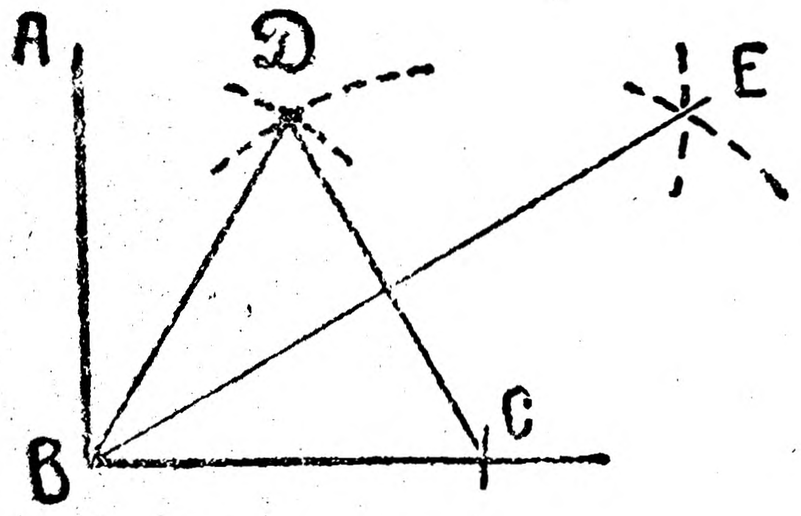
2) Сколько градусов в каждом остром угле равнобедренного прямоугольного треугольника?

3) Найти величину $tg\ 45^0$. (Указание. Прямоугольный треугольник с углом в 45^0 — равнобедренный, следовательно катеты его равны.)

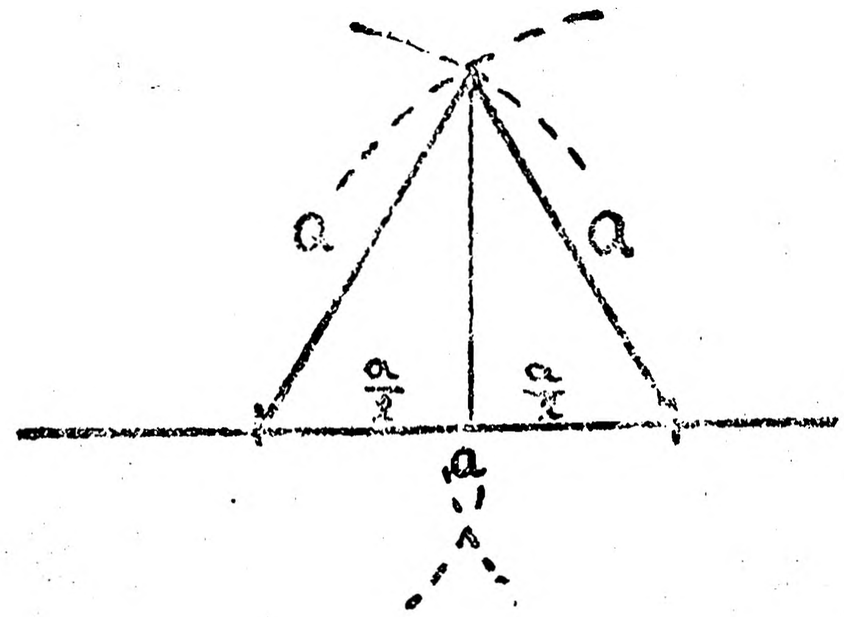
4) Один острый угол прямоугольного треугольника равен 30^0. Определить остальные углы.

Задачи.

1. Разделить прямой угол (черт. 178) на три равные части.



Черт. 178.



Черт. 179.

Решение. На стороне прямого угла отложим произвольный отрезок BC и на нем, как на стороне, построим равносторонний $\triangle BDC$.

Угол $DBC = 60°$ (см. выше вопрос 1), а потому $\angle ABD = 90° - 60° = 30°$. Разделим затем угол DBC пополам: $\angle ABD = \angle EBD = \angle EBC = 30°$. Таким образом прямой угол разделен на три равные части.

2. Построить угол в 60°; в 30°.

3. Определить катет прямоугольного $\triangle$ лежащий против угла в 30°, если гипотенуза $\triangle$-ка равна a.

Решение. Построим равносторонний $\triangle$ со стороной a (черт. 179) и проведем в нем высоту. Получатся два равных прямоугольных треугольника (почему?), каждый с углом в 30° при вершине (почему?) и катетом против него $= \frac{a}{2}$ (почему?)

Вывод. *Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.*

4. Пользуясь предыдущим выводом вычислить sin 30°.

Отв. $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

§ 149. Сумма внутренних углов многоугольника.

Задача. Начертить в тетради пятиугольник и построить все его внешние углы.

Вопросы. 1) Сколько сторон в начерченном пятиугольнике?

2) Сколько пар смежных углов образовалось после указанного построения?

3) Сколько прямых углов составляют все эти пары смежных углов?

4) Сколько прямых углов останется на долю внутренних углов многоугольника, если из этой суммы исключить все внешние углы (т.-е. $4d$)?

Задачи.

1. Определить сумму внутренних углов четыреугольника: шестиугольника; семиугольника; восьмиугольника. *Отв.* $4d$; $8d$; $10d$; $12d$.

2. Определить сумму внутренних углов n-угольника.

Решение. $S_n = 2dn - 4d = 2d(n-2)$.

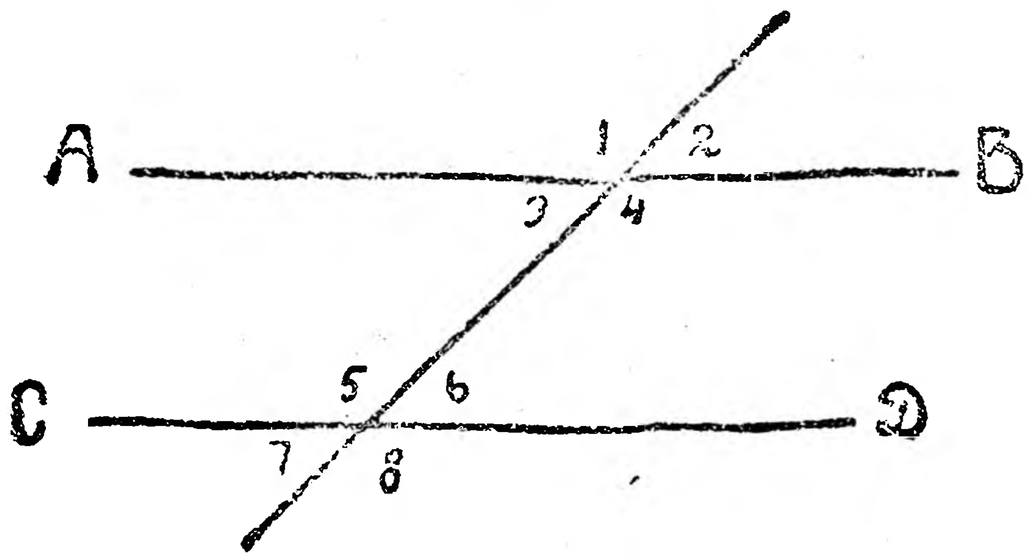
Вывод. *Сумма внутренних углов многоугольника равна двум прямым, повторенным столько раз, сколько в многоугольнике сторон, без двух*, т.-е.

$$\boxed{S_n = 2d\,(n-2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

§ 150. Параллельные линии и углы при параллельных прямых и секущей.

Указания. 1) Две прямые линии называются *параллельными*, если, находясь в одной плоскости, они не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали.

2) Прямая, пересекающая параллельные линии, называется *секущей* (черт. 180).



Черт. 180.

Вопросы. 1) Сколько углов образуется при пересечении двух параллельных прямых третьей?

2) Какие из этих углов равны между собой и почему?

Указания. 1) Углы: ∠ 2 и ∠ 6, или ∠ 4 и ∠ 8, или ∠ 1 и ∠ 5, или ∠ 3 и ∠ 7 называются *соответственными углами.*

2) Углы: ∠ 3 и ∠ 6 или ∠ 4 и ∠ 5 называются *внутренними накрестлежащими.*

3) Углы: ∠ 1 и ∠ 8 или ∠ 2 и ∠ 7 называются *внешними накрестлежащими*

4) Углы: ∠ 4 и ∠ 6 или ∠ 3 и ∠ 5 называются *внутренними односторонними.*

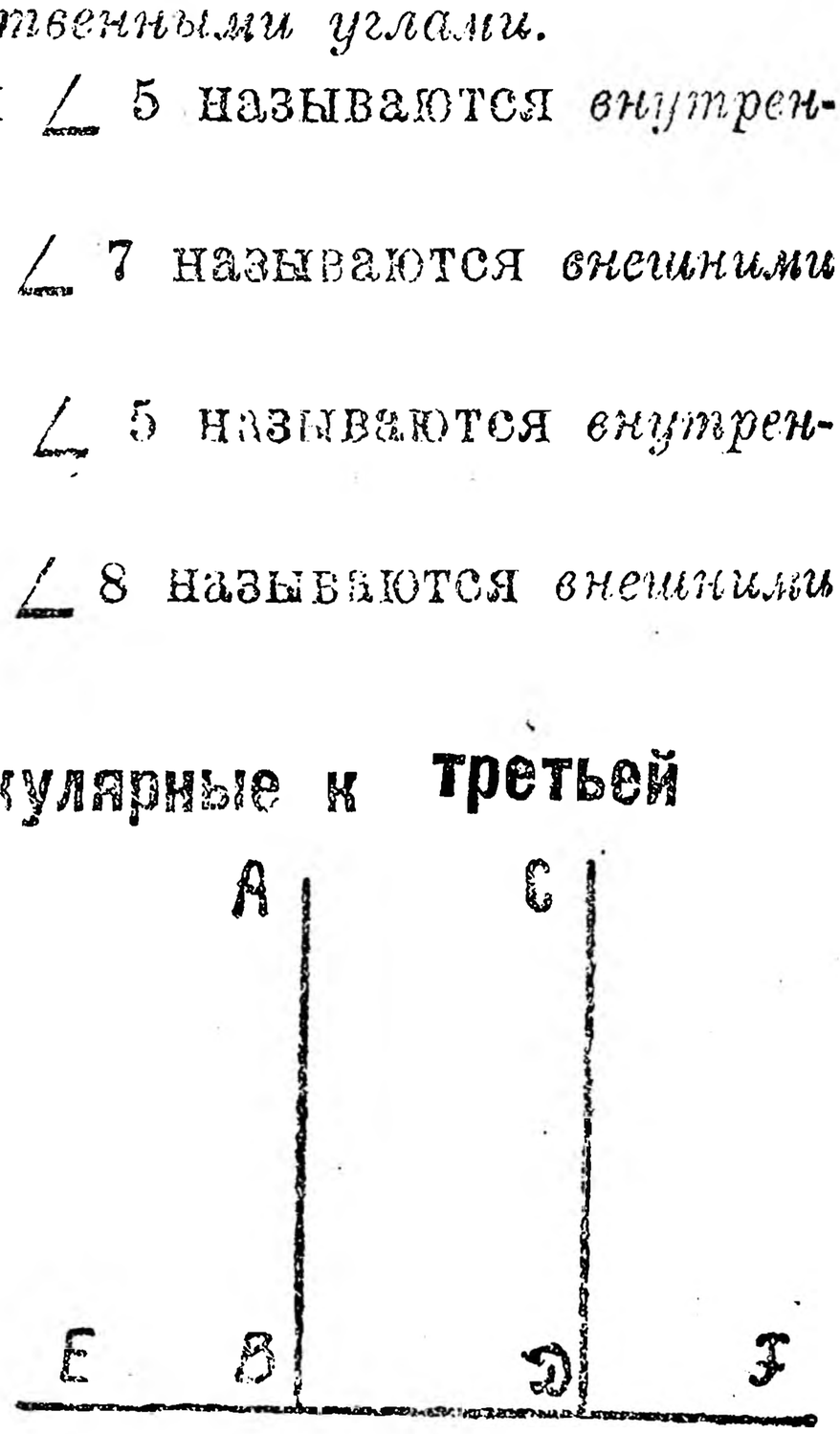
5) Углы: ∠ 1 и ∠ 7 или ∠ 2 и ∠ 8 называются *внешними односторонними.*

§ 151. Две прямые, перпендикулярные к третьей

Дано: $AB \perp EF$ и $CD \perp EF$ (черт. 181).

Вопросы. Могут ли прямые AB и CD пересечься (см. § 148)?

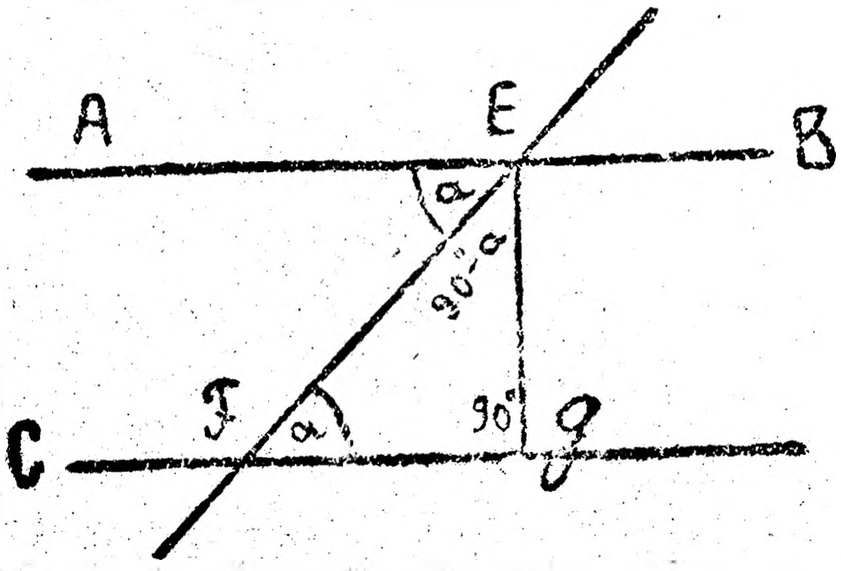
Вывод. *Две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны между собой.*



Черт. 181.

§ 152. Если внутренние накрест лежащие углы равны, то линии параллельны.

Дано: ∠ AEF = ∠ EFG = a (черт. 182); треб. доказ.: $AB \parallel CD$.



Черт. 182.

Указание 1. Из точки E опустим на прямую CD перпендикуляр EG:

$$EG \perp CD.$$

Вопросы. 1) Определить углы △ EFG.

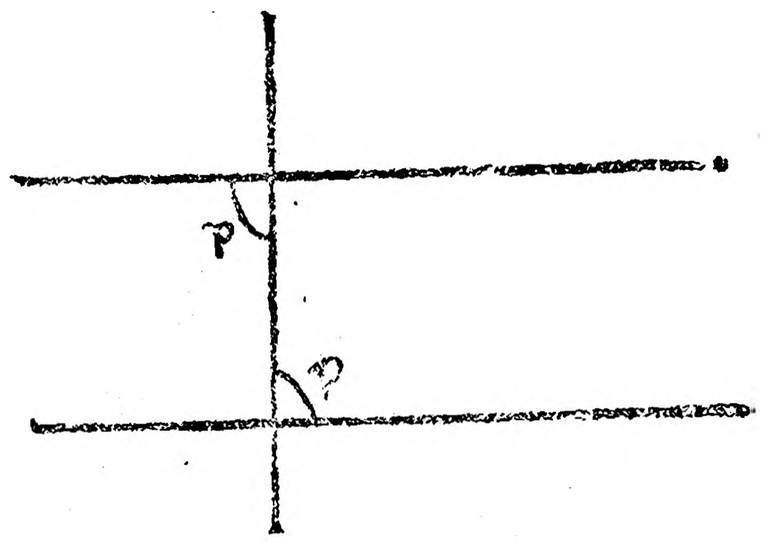
2) Найти сумму углов: ∠ AEF + + ∠ FEG.

3) Если углы AEG и EGC прямые, то что из этого следует (см. предыд. параграф)?

4) Доказано ли наше положение, изложенное в начале параграфа?

Указание 2. Положение, обратное доказанному, тоже будет справедливо, т.-е. *если линии параллельны, то внутренние накрестлежащие углы равны.*

Следствие. *Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных линий, то она перпендикулярна и к другой* (почему? см. черт. 183).



183.

§ 153. Соотношение между углами, образованными параллельными линиями и секущей.

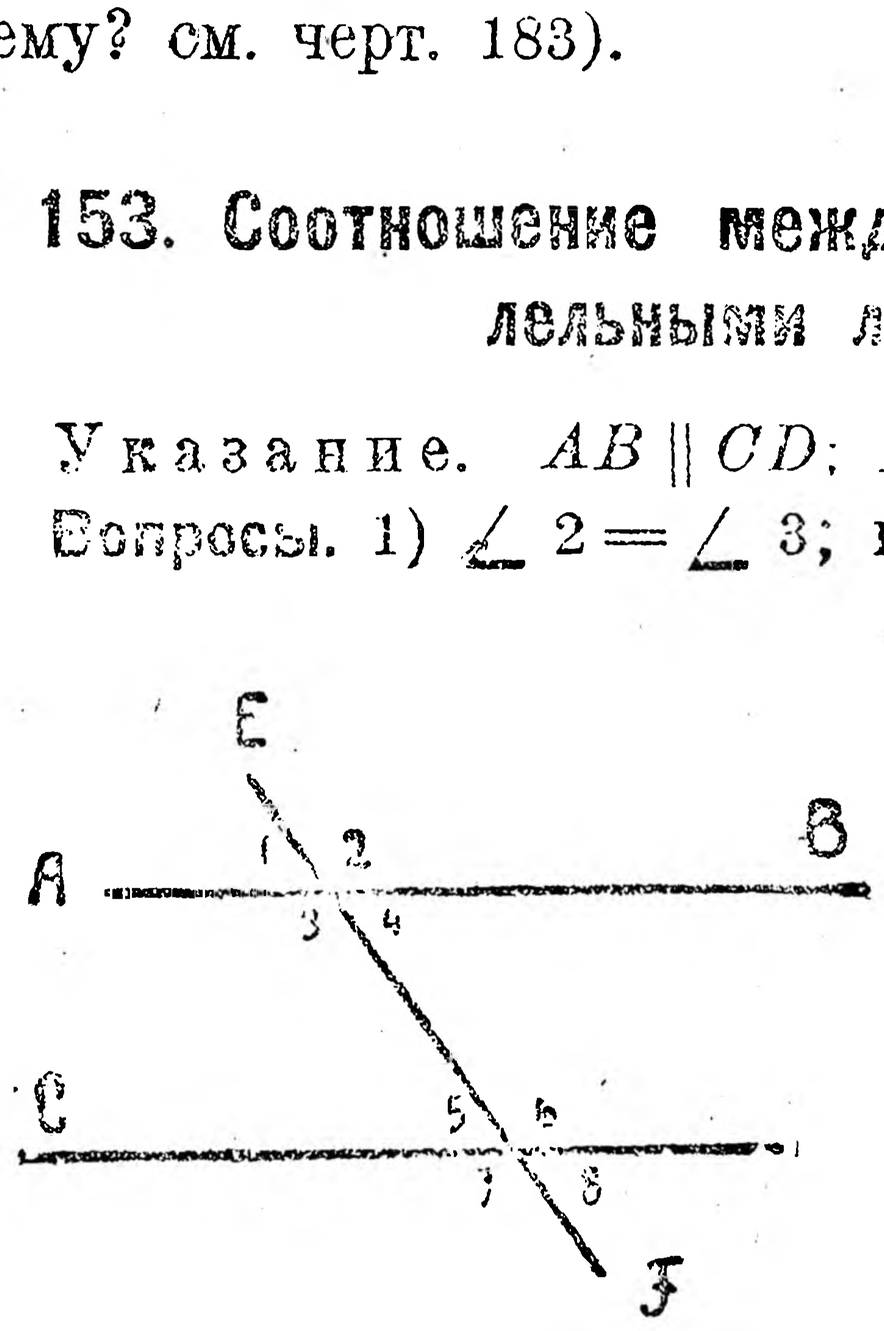
Указание. $AB \parallel CD$; EF секущая (черт. 184).

Вопросы. 1) $\angle 2 = \angle 3$; почему?

2) $\angle 6 = \angle 3$; почему?

3) $\angle 2 = \angle 6$; почему?

4) Как называются углы: $\angle 2$ и $\angle 6$?



Черт. 184.

Вывод. *Если линии параллельны, то соответственные углы равны.*

Задачи. Показать таким же способом, что:

1) внешние накрестлежащие углы при параллельных линиях равны между собой;

2) внутренние односторонние углы при параллельных линиях в сумме составляют два прямых ($2d$);

(Указание. $\angle 4 + \angle 2 = 2d$; $\angle 4 + \angle 6 = 2d$).

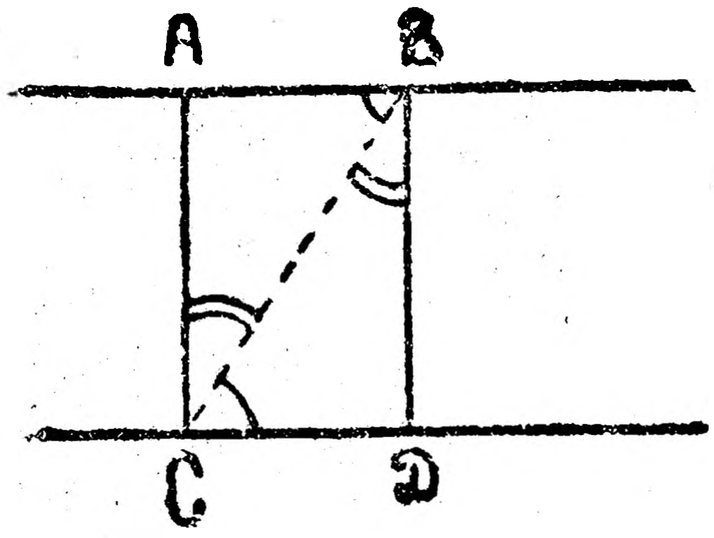
3) внешние односторонние углы при параллельных линиях в сумме составляют два прямых ($2d$).

§ 154. О расстоянии между параллельными линиями.

Указание 1. Длину перпендикуляра, опущенного из любой точки одной из параллельных линий на другую, принимают за расстояние между параллельными линиями.

Указание 2. $AB \parallel CD$
$AC \perp CD$
$BD \perp CD$ (черт. 185).

Вопросы. 1) Параллельны ли прямые AC и BD и почему? (См. § 151.)



Черт. 185.

2) Если соединить точки B и C диагональю, то на какие треугольники разобьется четыреугольник $ABDC$?

3) Какие углы в этих треугольниках равны, и почему?

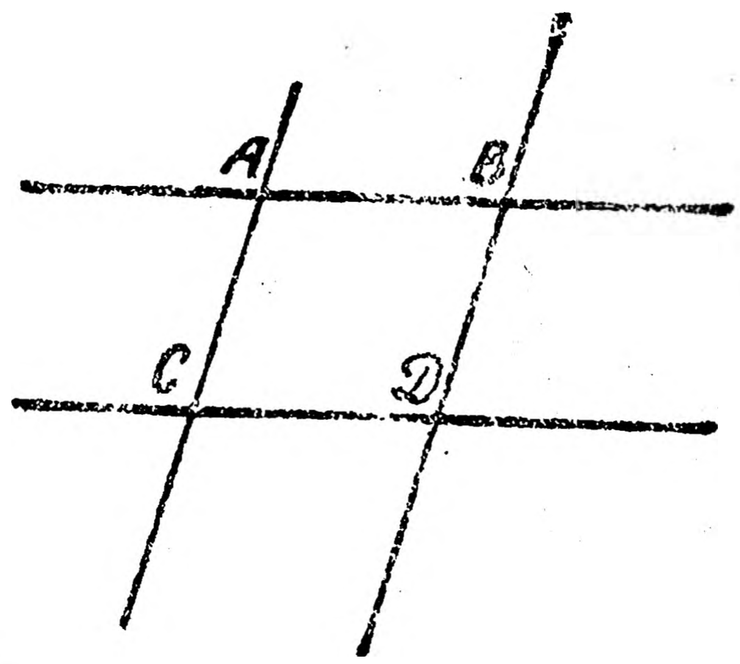
4) Какие стороны в этих треугольниках равны?

5) Равны ли треугольники ABC и BCD, и почему?

6) $BD = AC$; почему?

Вывод. *Параллельные прямые везде одинаково удалены друг от друга.*

Задача. Подобным же образом показать, что отрезки параллельных линий (AC и BD), заключенные между параллельными линиями, равны (черт. 186).



Черт. 186.

§ 155. Разделить отрезок на три равные части.

Решение. 1) Из точки B данного отрезка BC (черт. 187) проведем произвольную прямую BA. 2) Отложим по BA три произвольных равных отрезка ($BF = FG = GA$). 3) Точки A и C соединим прямой. 4) Через точки F и G проведем прямые FD и GE параллельные AC.

Указание. Проведем $FH \parallel BC$ и $GK \parallel BC$.



Черт. 187.

Вопросы. 1) Назвать треугольники, образовавшиеся при построении.

2) $\angle DBF = \angle HFG = \angle KGA$; почему?

3) $\angle DFB = \angle HGF = \angle KAG$; почему;

4) $BF = FG = GA$; почему?

5) $\triangle BDF = \triangle FHG = \triangle KGA$; почему?

6) $BD = FH = GK$; почему?

7) $FH = DE$ и $GK = EC$; почему? (См. предыд. §).

8) $BD = DE = EC$.

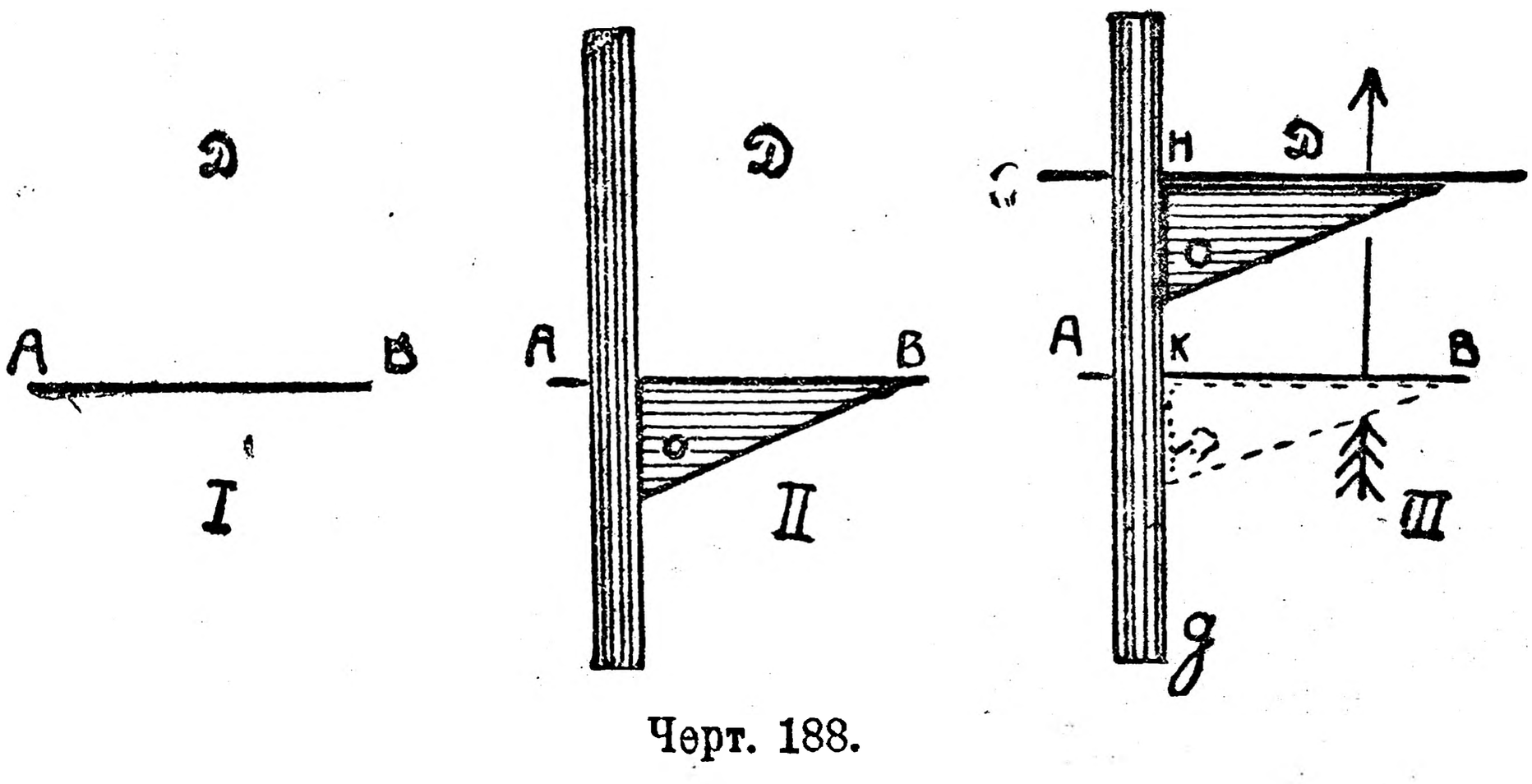
9) На сколько частей разбился отрезок BC?

10) Равны ли эти части между собою?

11) Формулировать правило деления отрезка на n равных частей.

§ 156. Помощью наугольника и линейки через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

Решение. Очевидно из чертежа 188.



Черт. 188.

Вопросы. 1) Как называются углы DHK и BKG при прямых AB и CD (черт. 188, III)?

2) Равны ли эти углы, и почему?

3) Параллельны ли линии AB и CD?

Задача. При помощи наугольника, циркуля и линейки разделить данный отрезок на 5 равных частей.

I способ. — Воспользоватся указаниями настоящего и предыдущего параграфов и сделать построение самостоятельно.

II способ.—Дан отрезок AB (черт. 189). Разделить его на 5 равных частей.

При помощи наугольника строим острые углы: $\angle CBA = \angle DAB$ тогда получим $CB \parallel AD$.

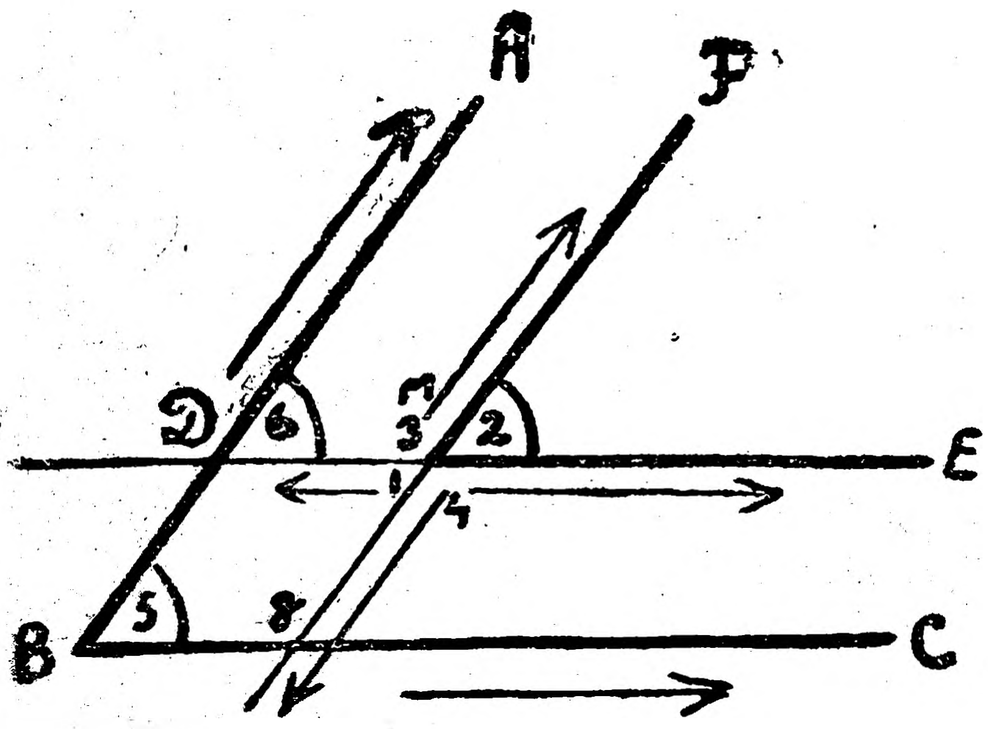
Черт. 189.

На прямой BC от точки B отложим 4 произвольных равных отрезка (т.-е. на один меньше, чем требуется) и такие же отрезки отложим по AD от точки A. Точки деления прямой BC соединим прямыми с противолежащими точками прямой AD, как указано на чертеже 189. Этими прямыми отрезок AB разобьется на 5 равных частей.

§ 157. Углы с соответственно параллельными сторонами.

Указания. На черт. 190 дан произвольный угол ABC и произвольная точка M.

Через точку M проведены $FG \parallel AB$ и $DE \parallel BC$.



Черт. 190.

Вопросы. 1) Сколько углов образовалось при точке M?

2) Какие из этих углов равны между собой?

3) Какому углу при точке B равен $\angle 6$; почему?

4) Какому углу при точке M равен $\angle 6$; почему?

5) $\angle 5 = \angle 2 = \angle 1$; почему?

6) $\angle 1 + \angle 3 = 2d$; почему?

7) $\angle 5 + \angle 3 = 2d$; почему?

Вывод 1. *Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны (вопр. 5) или в сумме составляют два прямых угла (вопр. 7).*

Вопросы. 1) Как взаимно направлены параллельные стороны углов, равных между собой (напр. $\angle 1$ и $\angle 5$ или $\angle 2$ и $\angle 5$)?

2) Как взаимно направлены параллельные стороны углов, составляющих в сумме $2d$ (напр. $\angle 5$ и $\angle 3$ или $\angle 5$ и $\angle 4$)?

Вывод 2. *Углы с параллельными сторонами равны, когда их параллельные стороны имеют попарно одинаковое направление или попарно противоположное направление от вершины.*

В противном случае сумма таких углов равна $2d$.

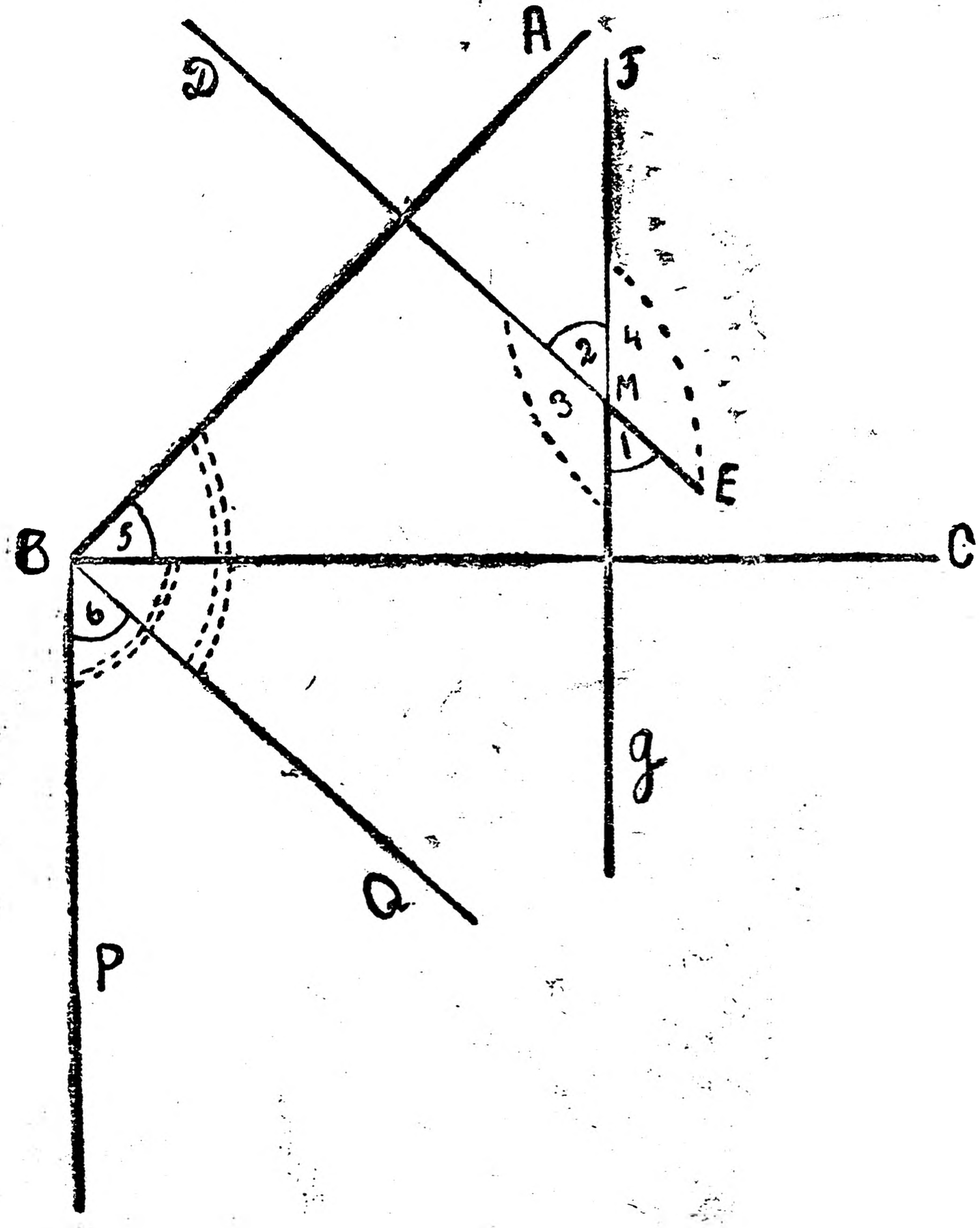
Примечание. Углы с параллельными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.

§ 158. Углы с взаимно-перпендикулярными сторонами.

Указание 1. На черт. 191 дан произвольный угол ABC и дана произвольная точка M; проведем:

$$DE \perp AB \ldots \text{I};$$
$$FG \perp BC \ldots \text{II}.$$

Вопросы. 1) Сколько углов образовалось при точке M?
2) Какие из этих углов равны между собой?



Черт. 191.

Указание 2. Построим

$$BP \parallel FG \ldots \text{III};$$
$$BQ \parallel DE \ldots \text{IV}.$$

Вопросы. 1) $\angle 1 = \angle 6$; почему? (См. запись III и IV и § 157).
2) $BP \perp BC$, т.-е. $\angle PBC = d$; почему? (См. запись III и II).
3) $BQ \perp AB$, т.-е. $\angle ABQ = d$; почему? (См. запись IV и I).
4) $\angle 5 = d - \angle CBQ$; почему? (См. чертеж).

$\angle 6 = d - \angle CBQ$; почему? (См. чертеж).

6) $\angle 5 = \angle 6$; почему? (См. вопр. 4 и 5).

7) $\angle 5 = \angle 1$; почему? (См. вопр. 1).

8) $\angle 1 + \angle 3 = 2d$; почему?

9) $\angle 5 + \angle 3 = 2d$; почему?

Вывод. *Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны к сторонам другого, то такие углы или равны* ($\angle 5 = \angle 1$) *или в сумме составляют два прямых угла* ($\angle 5 + \angle 3 = 2d$).

Задачи.

1. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36°. Найти углы при основании.

2. Определить величину каждого внутреннего угла в правильном 5-угольнике; 6-угольнике; 7-угольнике; 8-угольнике.

3. В каком многоугольнике сумма внутренних углов: 1) равна сумме внешних углов? 2) Вдвое больше суммы внешних углов? 3) Втрое больше суммы внешних углов?

4. Внешний угол треугольника равен 126°; отношение внутренних, с ним не смежных, углов равно $\frac{2}{5}$. Найти углы треугольника.

5. Углы треугольника относятся как 3 : 5 : 7 Найти углы треугольника.

Работа № 20.

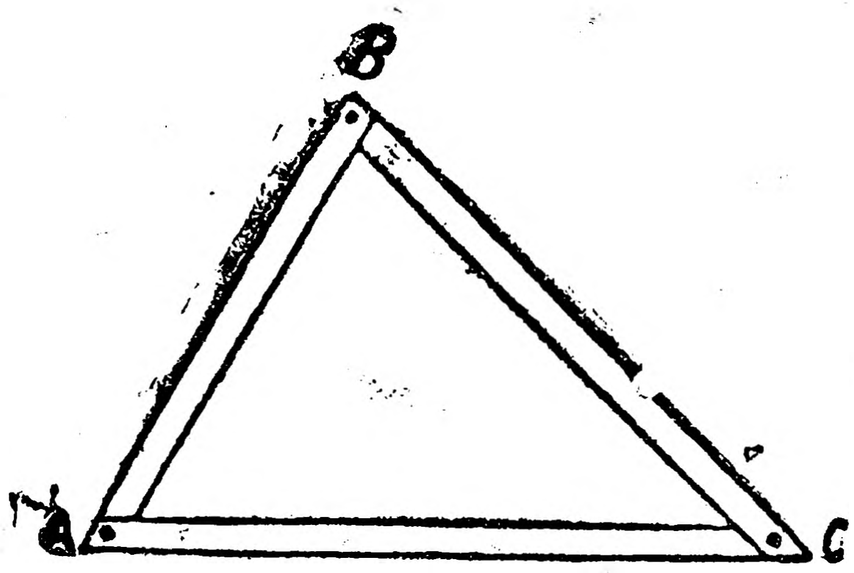
ПАРАЛЛЕЛОГРАМЫ И ТРАПЕЦИИ.

Треугольник и четыреугольник. Параллелограм. Прямоугольник. Ромб. Свойства прямой линии, соединяющей середины двух сторон треугольника. Трапеция.

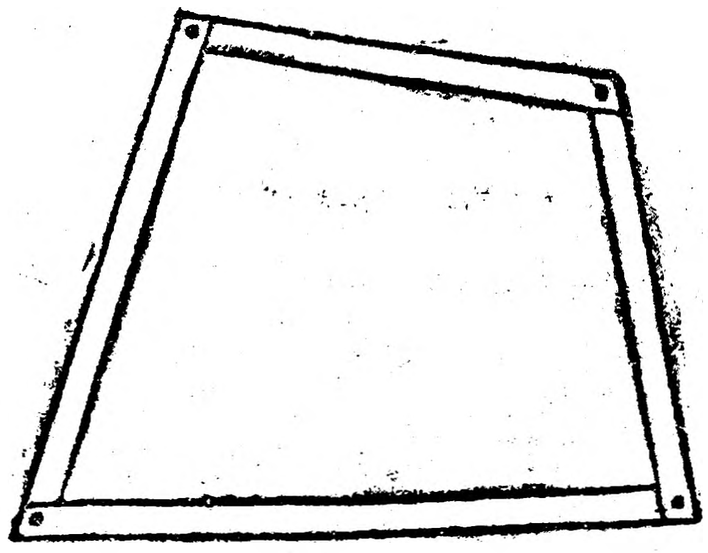
§ 159. Треугольник и четыреугольник.

1. Три пластинки, соединенные шарнирами, образуют треугольник ABC (черт. 192).

Вопросы. 1) Можно ли изменить форму этого треугольника?



Черт. 192.



Черт. 193.

2) Сколько различных треугольников можно построить по данным трем сторонам?

2. Четыре пластинки, соединенные шарнирами, образуют четыреугольник (черт. 193).

Вопросы. 1) Можно ли, вращая пластинки около шарниров, изменить форму этого четыреугольника?

2) Сколько различных четыреугольников можно построить по данным четырем сторонам?

3) Сколько различных четыреугольников можно построить по данным четырем сторонам и одной диагонали?

4) По данным четырем сторонам и одному углу?

5) Как закрепить шарнирный четыреугольник (черт. 193), чтобы его форма стала устойчивой?

6) Сколько различных четыреугольников можно построить по данным двум диагоналям?

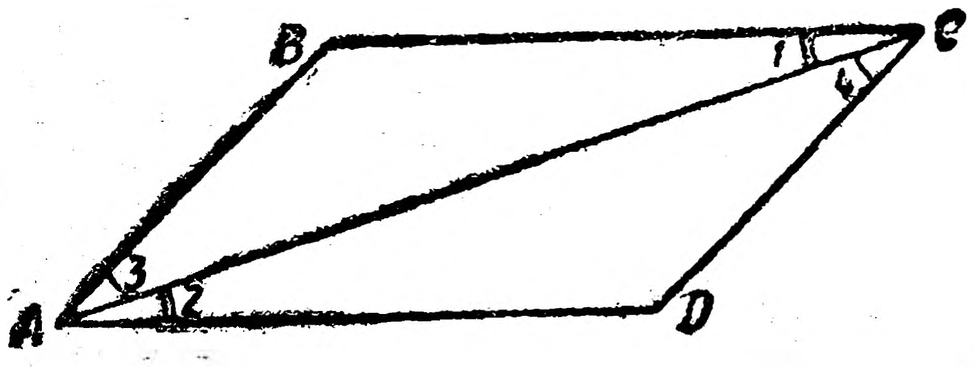
7) По данным двум диагоналям и трем сторонам?

8) По каким элементам данного четыреугольника можно построить четыреугольник, равный данному?

Вывод. *Форма треугольника есть форма жесткая, так как при данных размерах его сторон треугольник не поддается деформации*[1]*; форма же четыреугольника при данных размерах его сторон поддается деформации.*

§ 160. Свойства параллелограма.

1. В четыреугольнике $ABCD$ (черт. 194), в котором $AB = CD$ и $AD = BC$, проведена диагональ AC. Треугольники ABC и ADC с соответственно равными сторонами равны между собою (третий признак равенства треугольников), а в равных треугольниках все сходственные элементы равны; следовательно,



Черт. 194.

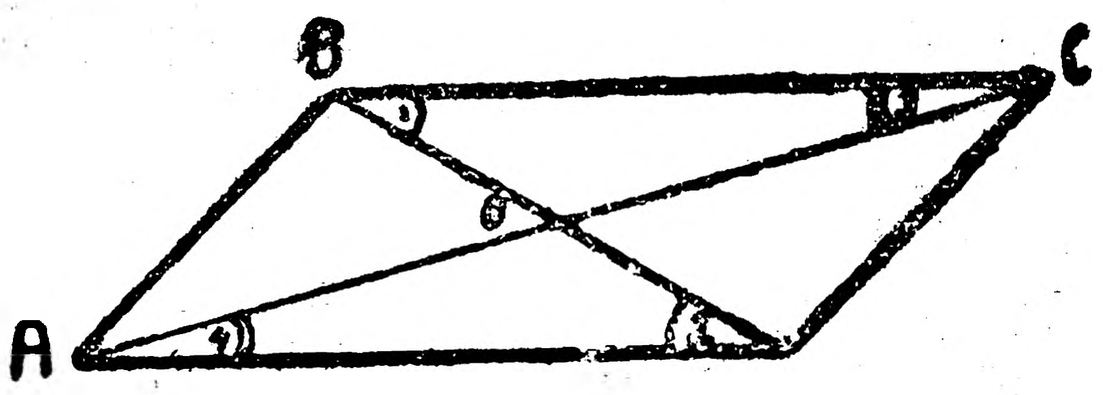
$$\angle 1 = \angle 2 \text{ и } \angle 3 = \angle 4.$$ (См. черт. 194).

Но если внутренние накрестлежащие углы равны, то прямые параллельны (§ 152), следовательно,

$$AB \parallel CD \text{ и } AD \parallel BC,$$

т.-е. четыреугольник $ABCD$ — параллелограм.

Вывод. *Всякий четыреугольник, в котором противоположные стороны равны, есть параллелограм, и наоборот: во всяком параллелограме противоположные стороны равны.*



Черт. 195.

Вопрос. Почему шарнирный параллелограм при всяком повороте его сторон вокруг шарниров сохраняет форму параллелограма?

2. В параллелограме $ABCD$ (черт. 195) проведены диагонали AC и BD.

---

[1]) Т.-е. изменению взаимного расположения всех его элементов.

Так как $BC = AD$ (см. предыдущий вывод), кроме того, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (как внутренние накрестлежащие углы при параллельных BC и AD), то $\triangle BOC = \triangle AOD$ (второй признак равенства треугольников). В равных треугольниках против равных углов лежат соответственно равные стороны, поэтому

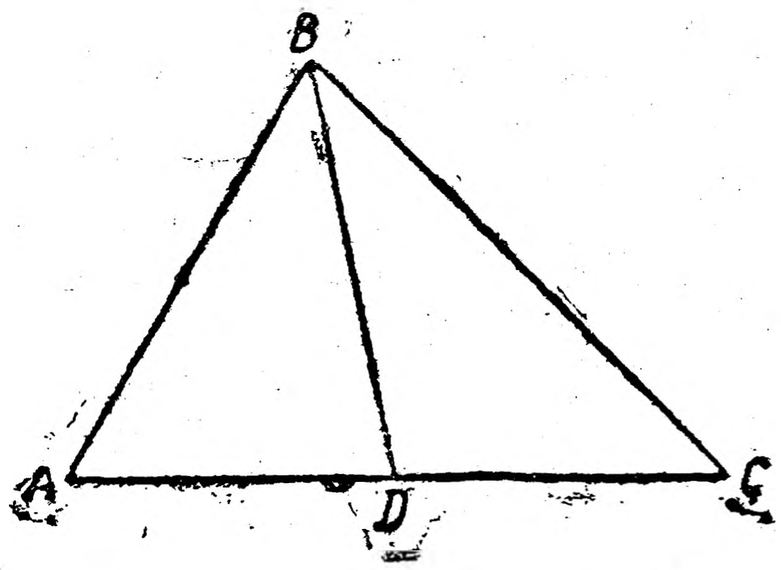
$$AO = OC \text{ и } BO = OD.$$

Вывод. *Диагонали параллелограма в точке их пересечения взаимно делятся пополам.*

3. В треугольнике ABC (черт. 196) проведена медиана BD.

Вопрос. Показать, что площадь $\triangle ABD$ = площади $\triangle BDC$.

У к а з а н и е. Два различных треугольника, содержащие одинаковую площадь, называются *равновеликими*. Вообще, две различных фигуры, имеющие одинаковую площадь, называются *равновеликими*.



Черт. 196.

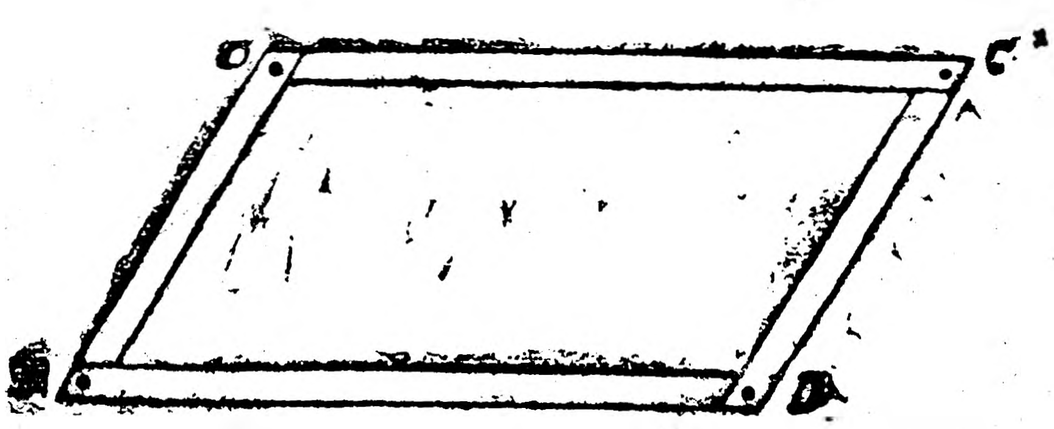
Вопросы. 1) Чем служит отрезок BO в треугольнике ABC (черт. 195)? Отрезок DO в треугольнике ADC?

2) Как можно назвать треугольники ABO и BOC? Треугольники AOD и COD? (См. предыдущее указание).

Вывод. *Диагонали параллелограма делят его площадь на четыре равные части.*

Задача. Показать, что всякий отрезок, проведенный внутри параллелограма через точку пересечения его диагоналей, делится в этой точке пополам.

§ 161. Свойства прямоугольника.


Черт. 197.

Предположим, что четыре стержня, соединенные шарнирами, образуют параллелограм (черт. 197).

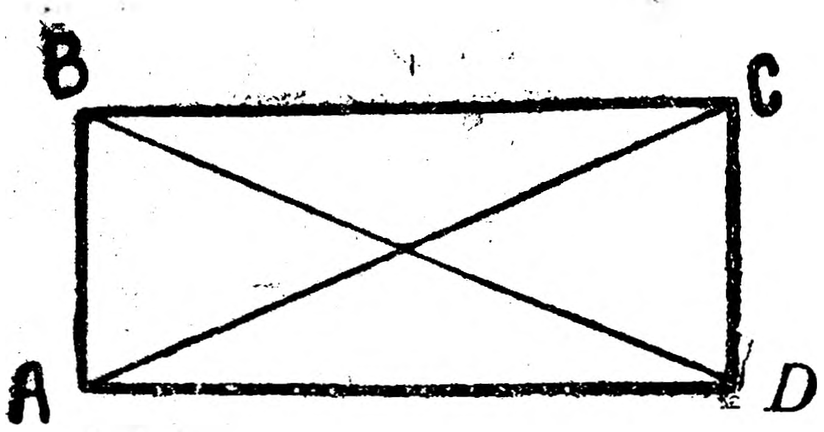
Вопрос. Как изменить форму этого параллелограма, чтобы площадь его была наибольшей?

Задачи.

В прямоугонильке $ABCD$ (черт. 198) проведены диагонали AC и BD.

1. Указать на чертеже равные треугольники и равновеликие треугольники.

2. Установив равенство треугольников ABD и ACD (черт. 198), вывести, что диагонали прямоугольника равны между собою.



Черт. 198.

Вопросы. 1) Может ли диагональ прямоугольника равняться его стороне?

2) Какая точка внутри прямоугольника равноудалена от всех его вершин?

3) Можно ли найти внутри прямоугольника точку, равноудаленную от всех его сторон?

4) Можно ли найти внутри параллелограма точку, равноудаленную от всех его вершин? от всех его сторон?

5) Всякий ли четыреугольник с равными диагоналями есть прямоугольник?

6) Как должны пересечь друг друга равные диагонали четыреугольника, чтобы он был прямоугольником?

7) Сколько различных прямоугольников можно построить по данной диагонали? по диагонали и одной стороне?

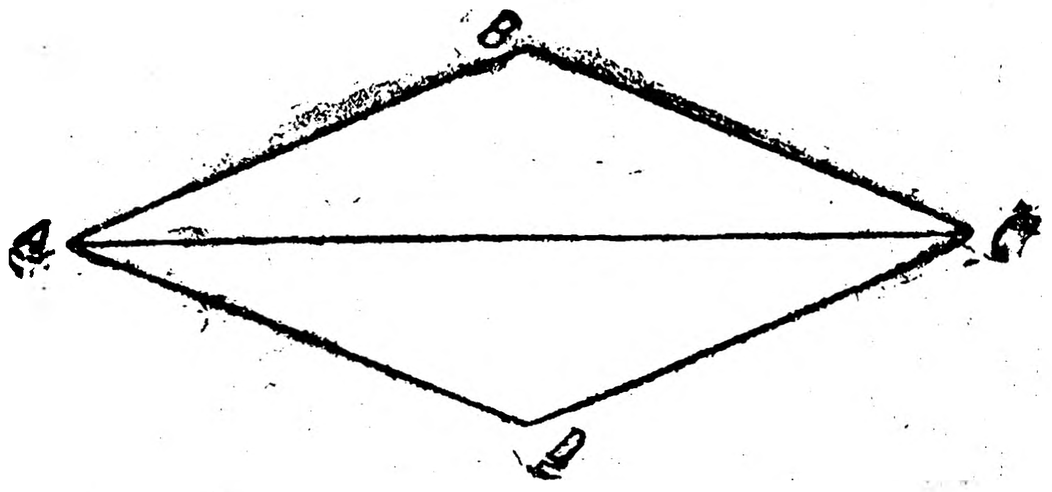
8) По каким элементам данного прямоугольника можно построить прямоугольник, равный данному?

§ 162. Свойства ромба.

Вопросы. 1) Какой параллелограм называется ромбом?

2) Какая фигура получается при поворачивании равнобедренного треугольника вокруг его основания на 180°?

Проведя в ромбе $ABCD$ (черт. 199) диагональ AC, указать, какой формы треугольники при этом образовались, и установить симметричное расположение этих треугольников относительно диагонали.



Черт. 199.

Указание. Так как вершины B и D ромба (черт. 199) симметрично расположены относительно диагонали AC, то они лежат на прямой, перпендикулярной к AC, — следовательно, диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Задача. Показать, что диагонали ромба делят его углы пополам.

Вопросы. 1) Всякий ли четыреугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями есть ромб?

2) Как должны пересечь друг друга взаимно перпендикулярные диагонали четыреугольника, чтобы он был ромбом?

3) Сколько различных ромбов можно построить по данной стороне? по стороне и одной диагонали? по двум диагоналям?

4) Какая точка внутри ромба равно удалена от всех его сторон?

5) Можно ли внутри ромба найти точку, равноудаленную от всех его вершин?

6) Может ли диагональ ромба быть вдвое более его стороны?

7) Изменяется ли высота ромба в зависимости от того, к какой стороне мы ее проводим?

8) Как следует изменить форму шарнирного ромба, чтобы его площадь стала наибольшей?

9) Какой ромб называется квадратом?

10) Сколько различных квадратов можно построить по данной стороне? по данной диагонали?

11) Может ли диагональ квадрата равняться его стороне?

12) Какая точка внутри квадрата равноудалена от всех его вершин? от всех его сторон?

У к а з а н и е. Окружность, проходящая через все вершины данного треугольника или многоугольника, называется *описанной* около данного треугольника или многоугольника. Окружность, проведенная внутри и касающаяся всех сторон данного треугольника или многоугольника, называется *вписанной* в данный треугольник или многоугольник.

Вопросы. 1) Можно ли провести окружность, описанную около параллелограма? около прямоугольника? около ромба? около квадрата?

2) Можно ли провести окружность, вписанную в параллелограм? в прямоугольник? в ромб? в квадрат?

§ 163. Свойство прямой линии, соединяющей середины двух сторон треугольника.

В треугольнике ABC (черт. 200) через точку D, середину стороны AB, проведена прямая DE параллельно стороне AC, и через точку C проведена прямая CE параллельно стороне AB.

Вопросы. Показать, что

1. $DB = CE$.

2. $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$

и, следовательно,

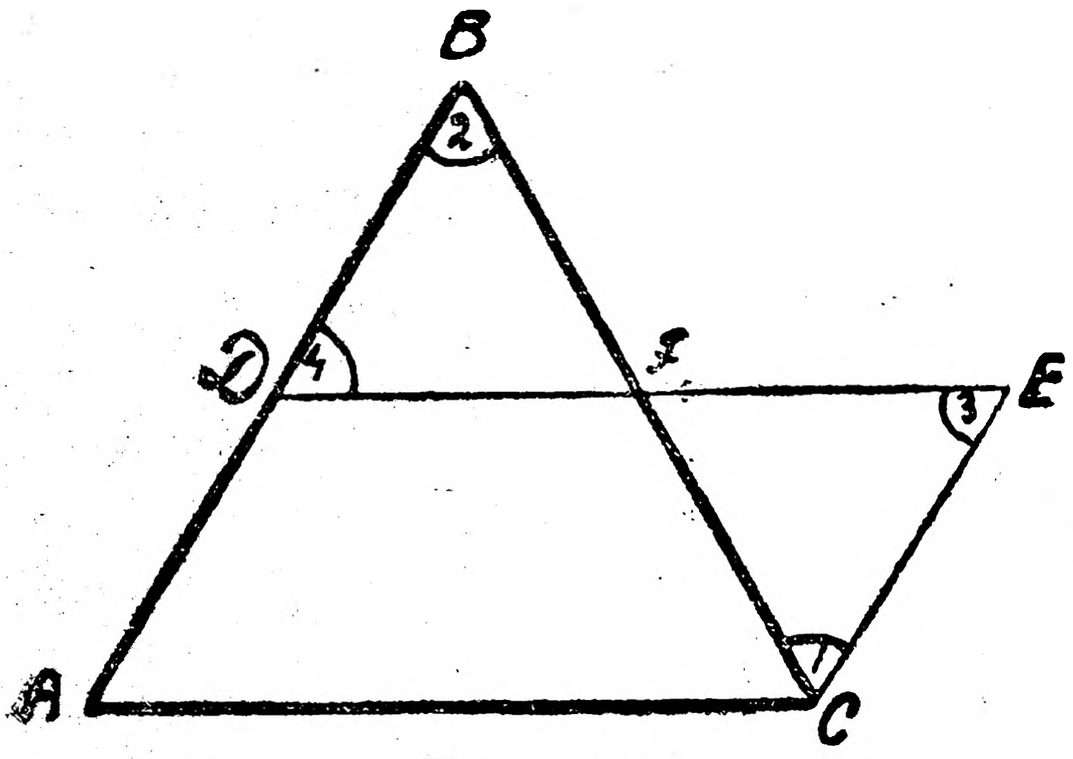
$$\triangle DFB = \triangle CFE,$$

(2-й признак равенства треугольников), откуда

$$BF = FC \text{ и } DF = FE,$$

а потому

$$DF = \frac{DE}{2} = \frac{AC}{2}.$$



Чер 200.

Вывод. *Отрезок DF прямой, проведенной через середину стороны AB треугольника ABC параллельно стороне AC, равен половине этой стороны AC и пересекает сторону BC в ее середине. Обратно: отрезок прямой, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне и равен ее половине.*

§ 164. Свойство средней линии трапеции.

Указание. Отрезок EF, соединяющий середины непараллельных сторон AB и CD трапеции $ABCD$, называется *средней линией трапеции* (черт. 201).

1. Показать, что

а) $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 1 = = \angle 2$;

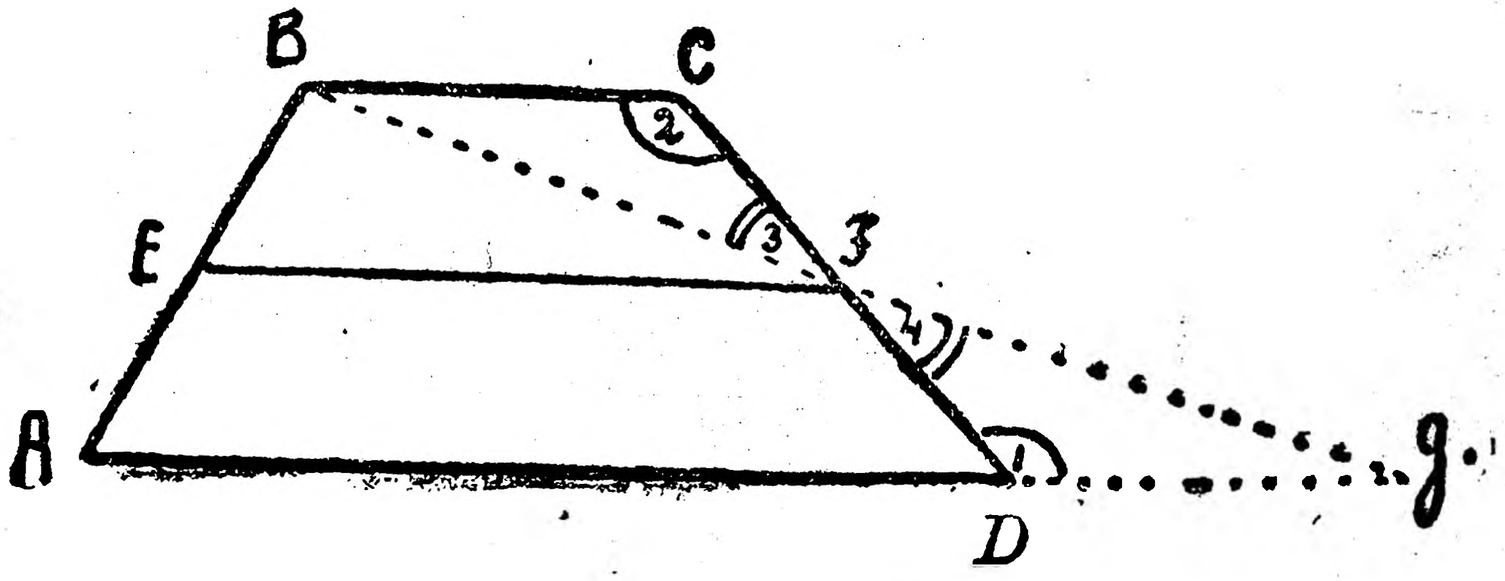
б) $\triangle BCF = = \triangle FDG$?

2. Какие стороны $\triangle BCF$ соответственно равны сторонам $\triangle FDG$?

3. Назвать отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника ABG.

4. $AG = AD + DG = = AD + BC$. Почему?

5. $EF = \frac{AG}{2} = = \frac{AD + BC}{2}$. Почему?



Черт. 201.

6. Показать, что прямая EF параллельна основаниям трапеции AD и BC.

Вывод. *Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.*

Задачи и вопросы.

1. Один из острых углов параллелограма равен 53°. Определить остальные углы.

2. Тупой угол параллелотрама больше острого на 48°30′. Определить углы параллелотрама.

3. Разность двух углов параллелограма равна 38°. Определить углы параллелограма.

Отв. 71°; 109°.

4. В прямоугольнике угол между диагоналями равен 140°. Определить углы, образованные диагональю со сторонами прямоугольника.

Отв. 20°; 70°.

5. Угол между диагональю и большей стороной прямоугольника меньше угла между диагоналями, обращенного к меньшей стороне, на 15°30′. Определить угол между диагоналями.

Отв. 31°.

6. Диагональ ромба образует со стороною угол 18°20′. Определить углы ромба.

7. Диагональ ромба образует со стороною угол 21°30′. Какой угол образует со стороною другая диагональ?

8. Острый угол ромба равен 60°. Расстояние точки пересечения диагоналей от стороны равно 48 *см*. Найти длину большей диагонали.

Отв. 192 *см*.

9. Периметр параллелограма равен 250 *см*. Одна из сторон его больше соседней стороны на 75 *см*. Определить стороны параллелограма.

Отв. 25 *см*; 100 *см*.

10. Площадь параллелограма равна 72 *кв. см*. Одна из сторон его равна 12 *см*. Определить расстояние точки пересечения диагоналей от этой стороны.

Отв. 3 *см*.

11. В параллелограме одна сторона составляет $^2/_7$ его периметра и равна 15 *см*. Определить другую сторону параллелограма.

Отв. 11,25 *см*.

12. Периметр параллелограма составляет 125 *см*. Разность соседних сторон его равна $17^1/_2$ *см*. Определить стороны параллелограма.

Отв. 40 *см*; $22^1/_2$ *см*.

13. Периметр параллелограмма составляет 180 *см*. Одна сторона составляет $^1/_5$ другой стороны. Определить стороны параллелограма.

Отв. 40 *см*; 50 *см*.

14. Площадь параллелограма равна 216 *кв. см*. Расстояние точки пересечения диагоналей от одной из его сторон равно 4 *см*. Определить эту сторону и расстояние точки пересечения диагоналей от другой стороны, равной 12 *см*.

Отв. 27 *см*; 9 *см*.

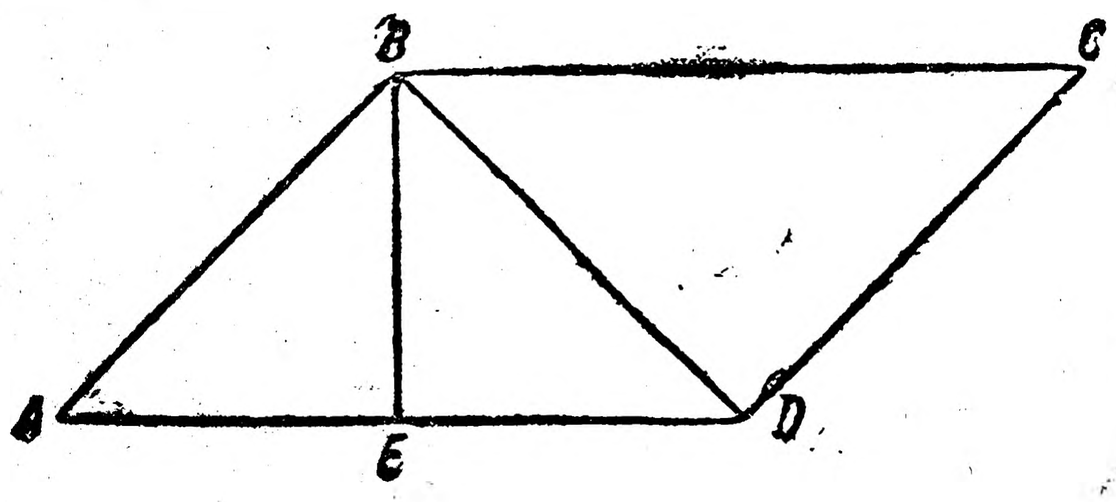
15. Площадь параллелограма равна 36 *кв. см*. Расстояние от одной из вершин параллелограма до соответствующей диагонали равно 2 *см*. Определить эту диагональ.

Отв. 18 *см*.

16. В параллелограме проведены диагонали. Периметр одного из образовавшихся треугольников больше периметра смежного с ним треугольника на 5 *см*. Периметр параллелограма равен 50 *см*. Определить стороны параллелограма.

Отв. 10 *см*; 15 *см*.

17. Периметр парллелограма *ABCD* (черт. 202) равен 86 *см*. Высота, проведенная из вершины *B*, делит сторону *AD* пополам. Диагональ *BD* равна 18 *см*. Определить стороны параллелограма.



Черт. 202.

Отв. 18 *см*; 25 *см*.

18. В прямоугольнике одна сторона больше соседней стороны на 24,6 *см*. Периметр прямоугольника равен 192,4 *см*. Определить расстояния точки пересечения диагоналей от сторон прямоугольника.

Отв. 30,2 *см*; 17,9 *см*.

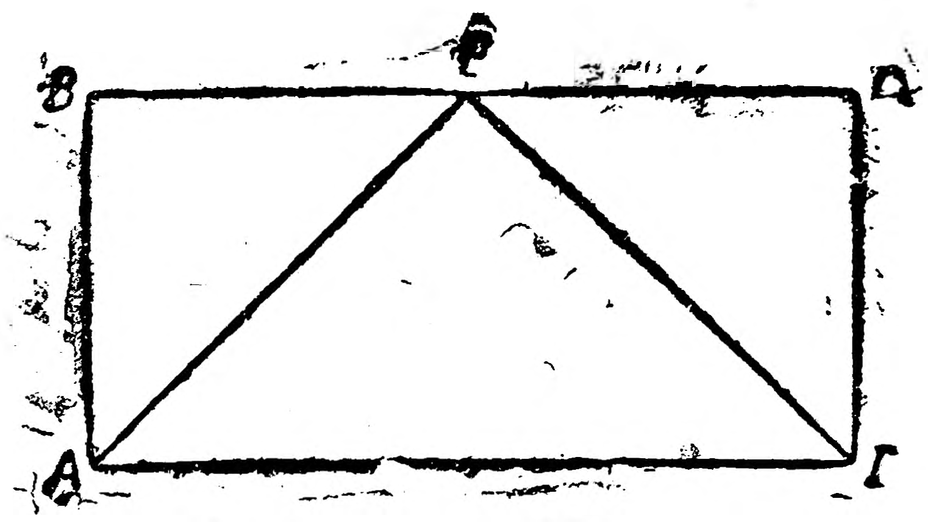
19. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от одной стороны на 48 *см*, от другой стороны — на 27 *см*. Определить периметр прямоугольника.

Отв. 300 *см*.

20. В прямоугольнике меньшая сторона равна 25,7 *см*. Угол между диагоналями, обращенный к большей стороне, равен 120°. Определить длину диагонали.

Отв. 51,4 *см*.

21. В прямоугольнике $ABCD$ (черт. 203) одна сторона вдвое больше другой стороны. Середина E большей стороны соединена с вершинами A и D отрезками EA и ED. Определить угол AED. *Отв.* 90°.

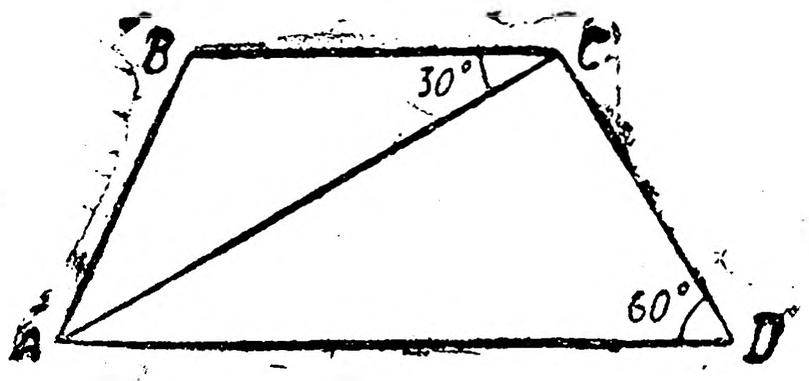


Черт. 203.

22. Высота, опущенная из вершины тупого угла ромба делит сторону ромба пополам. Определить углы ромба. *Отв.* 60°; 120°.

23. Высота, опущенная из вершины тупого угла ромба на сторону, равна ее половине. Определить углы ромба. *Отв.* 30°; 150°.

24. Нижнее основание трапеции равно 78 *см*. Средняя линия трапеции равна 58 *см*. Определить верхнее основание трапеции. *Отв.* 38 *см*.



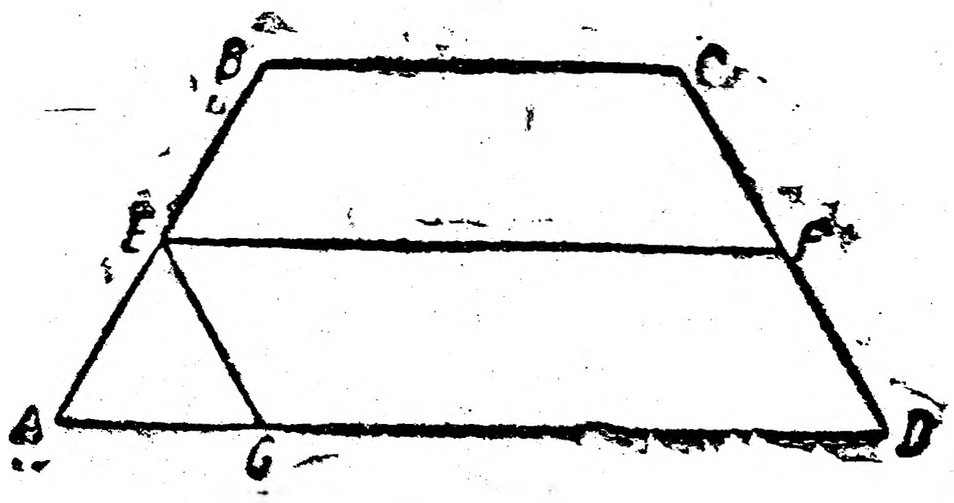
Черт. 204.

25. В трапеции $ABCD$ (черт. 204) диагональ AC образует с верхним основанием BC угол 30°. Угол $CDA = 60°$. Боковая сторона $CD = 18{,}5$ *см*. Определить нижнее основание трапеции. *Отв.* 37 *см*.

26. Нижнее основание трапеции на 25 *см* больше верхнего основания. Средняя линия трапеции равна 47,5 *см*. Определить основания трапеции.

Отв. 60 *см*; 35 *см*.

27. В трапеции $ABCD$ (черт. 205) проведена средняя линия EF. Из точки E проведен отрезок EG параллельно боковой стороне CD, который отсекает от нижнего основания отрезок AG, равный 15 *см*. Нижнее основание трапеции равно 60 *см*. Определить верхнее основание трапеции. *Отв.* 30 *см*.



Черт. 205.

28. Диагональ AC ромба $ABCD$ равна 8 *см*, диагональ $BD = 6$ *см*. Определить сторону ромба. (Указание. Применить к $\triangle AOB$ теорему Пифагора.) *Отв.* 5 *см*.

29. Диагональ BD прямоугольника $ABCD$ равна 13 *см*, сторона $AD = 12$ *см*. Определить сторону AB. *Отв.* 5 *см*.

30. Основания равнобедренной трапеции 30 *м* и 18 *м*, высота трапеции равна 8 *м*. Определить боковую сторону трапеции.

31. По условиям задачи 30 определить среднюю линию трапеции и ее площадь и проверить, выражается ли площадь этой трапеции произведением ее средней линии на высоту.

32. Средняя линия трапеции равна 24,2 *см*, одно из ее оснований равно 35,6 *см*. Определить другое основание.

33. Разность оснований трапеции равна 12,75 *см*, средняя линия ее равна 28,5 *см*. Определить основания трапеции.

Отв. 34,875 *см*.

34. Перечислить все свойства параллелограма.

35. Какими еще свойствами обладает, сверх того, прямоугольник? ромб?

36. Показать, что квадрат обладает всеми свойствами параллелограма, прямоугольника и ромба.

37. Какие особые свойства имеет равнобедренная трапеция (т.-е. трапеция с равными боковыми сторонами)?

38. Построить оси симметрии в прямоугольнике, в квадрате и в равнобедренной трапеции.

39. Построить параллелограм: 1) по диагонали и двум данным сторонам; 2) по данной стороне и двум данным диагоналям; 3) по стороне и по двум углам этой стороны с диагоналями.

40. Построить прямоугольный треугольник: 1) по двум катетам, 2) по гипотенузе и острому углу, 3) по гипотенузе и катету.

41. Построить прямоугольник: 1) по стороне и диагонали, 2) по диагонали и углу между диагоналями.

42. Построить ромб: 1) по данным диагоналям, 2) по острому углу и диагонали.

43. Построить квадрат по данной его диагонали.

44. Построить равнобедренную трапецию с взаимно перпендикулярными диагоналями и показать, что ее высота равна средней линии.

45. Построить равнобедренную трапецию по двум основаниям и высоте.

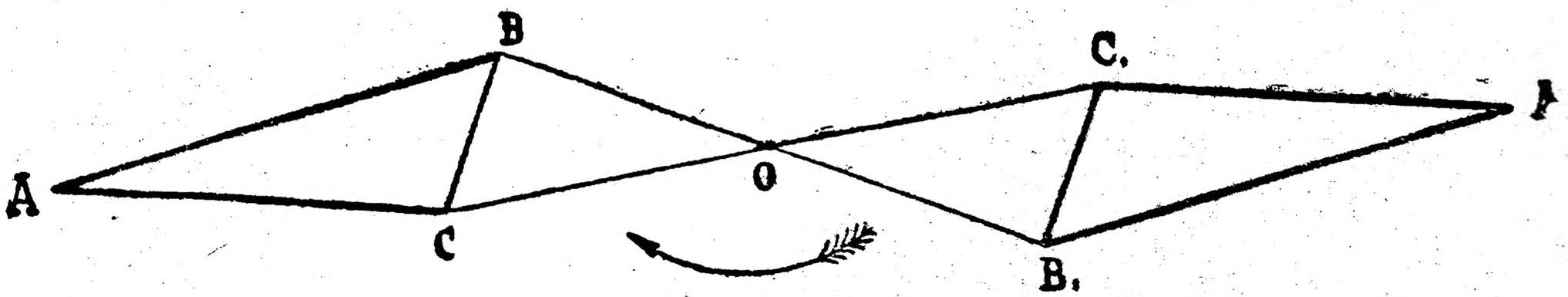
Работа № 21.

УГЛЫ В КРУГЕ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ.

Центр симметрии. Симметрия в четыреугольниках и в круге. Свойства касательной и секущей. Окружность описанная около треугольника и вписанная в треугольник. Центральные углы в круге. Вписанные углы. Измерение угла, составленного двумя секущими. Измерение угла, имеющего вершину внутри круга. Измерение угла, составленного хордой и касательной. Измерение описанного угла. Относительное положение двух окружностей. Свойства общей хорды двух пересекающихся окружностей. Построение общей касательной к двум окружностям. Геометрические места.

§ 165. Центр симметрии.

Указание 1. Две фигуры ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 206) называются *симметричными* относительно точки O, если одна из них,



Черт. 206.

вращаясь около этой точки и сделав оборот на 180°, совпадет с другой фигурой. Эта точка называется *центром симметрии*.

Вопросы.

1) Какие дуги описывают точки A_1, B_1, C_1 до совмещения с точками A, B, C при повороте $\triangle A_1B_1C_1$ на 180° до совмещения с $\triangle ABC$?

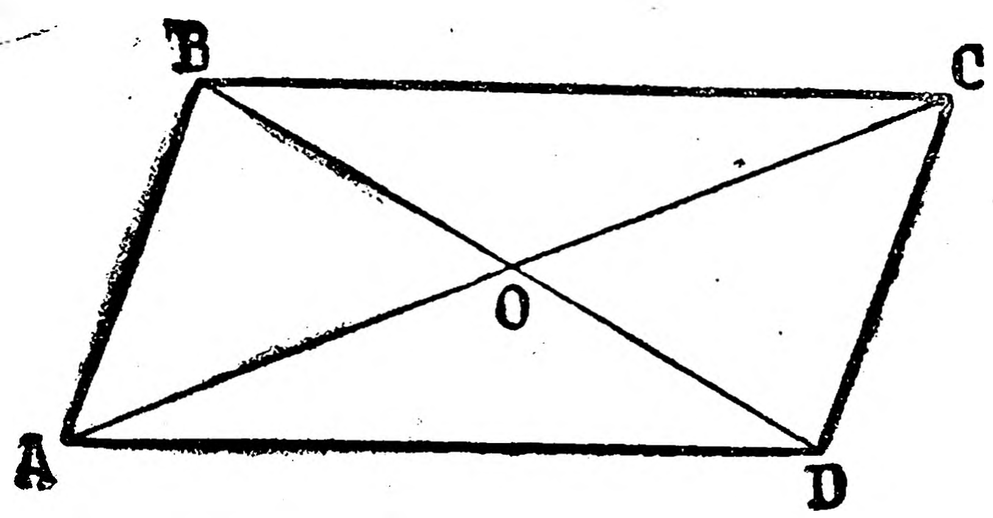
2) Как показать, что расстояния сходственных точек фигур ABC и $A_1B_1C_1$ (например точек A и A_1, B и B_1, C и C_1 и т. д.) от центра вращения O равны между собою?

Вывод. *Две фигуры, симметричные относительно точки, равны, а их сходственные стороны параллельны* (почему?).

Задача. Взяв какую-нибудь произвольную фигуру, напр., трапецию. параллелограм, полукруг, и вне фигуры произвольную точку, построить фигуру, симметричную данной относительно взятой точки.

Указание 2. Фигура называется симметричной относительно точки *(центра симметрии)*, если при вращении фигуры вокруг этой точки каждая часть фигуры, повернувшись на некоторый угол, займет место, прежде занимаемое другой частью.

Пример. Параллелограм $ABCD$ (черт. 207) центрально симметричен относительно точки O (пересечения диагоналей), так как,



Черт. 207.

при повороте тр-ка ACD около точки O на 180°, он совмещается с тр-ком ABC.

Указание 3. Угол, на который надо повернуть фигуру вокруг центра симметрии для совмещения частей фигуры, называется *углом совмещения*. Если угол совмещения равен полобороту (180°), то мы имеем центральную симметрию 2-го порядка. При угле совмещения, равном $^1/_3$ полного оборота (120°), симметрия будет 3-го порядка; при угле 90° (¼ оборота) — симметрия 4-го порядка и т. д.

Вопросы.

1. Какого порядка симметрию имеет параллелограм $ABCD$ (черт. 207) относительно точки O?

2. Взяв равносторонний треугольник и опустив из его центра перпендикуляры на его стороны, определить, какого порядка симметрию имеет этот треугольник относительно центра. Чему равен его угол совмещения?

3. Какого порядка симметрию имеет 6-угольная гайка?

4. Какого порядка симметрию имеет 5-угольная гайка?

§ 166. Симметрия в четыреугольниках.

Вопросы.

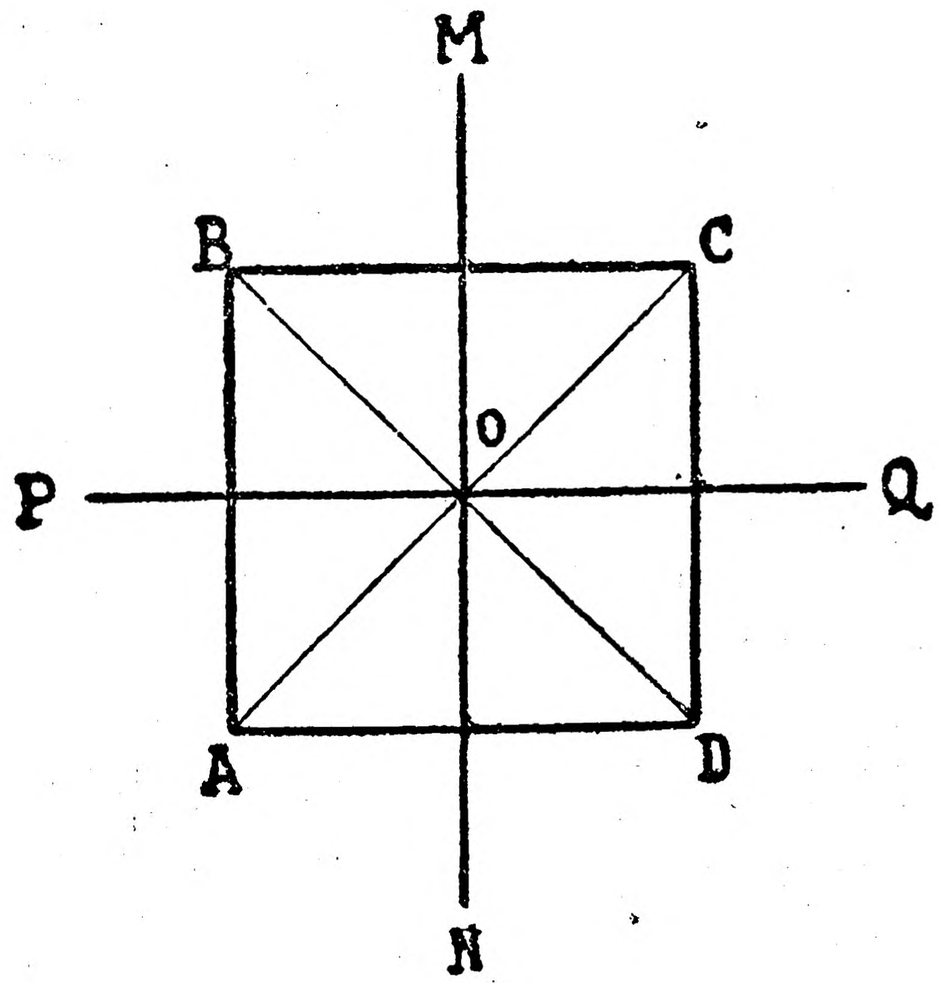
1) Провести ось симметрии в квадрате, ромбе, прямоугольнике.

2) Сколько осей симметрии можно провести в квадрате, ромбе, прямоугольнике?

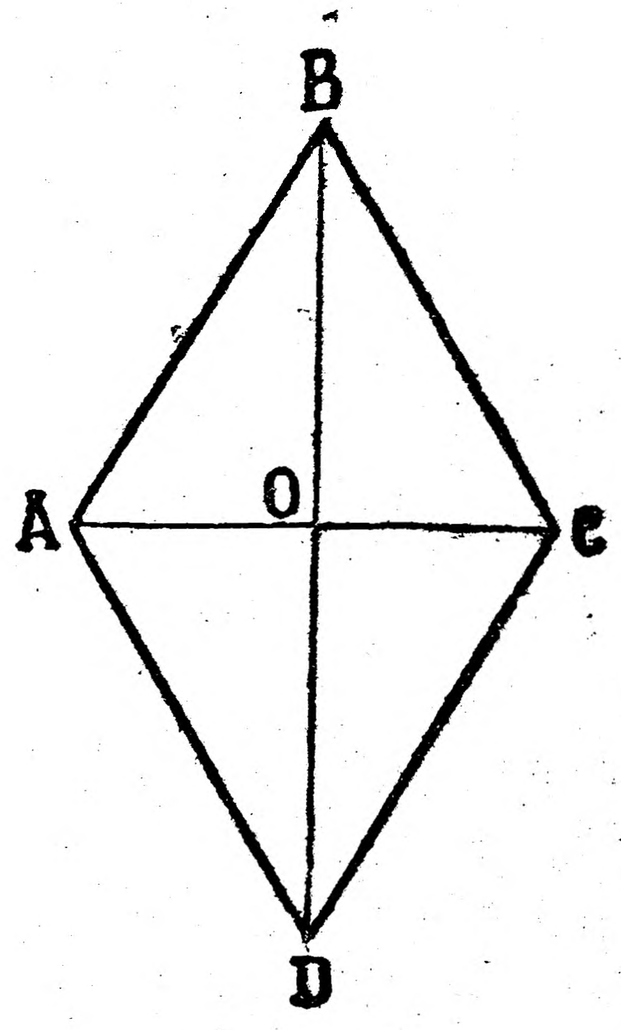
3) Чем служат точки пересечения осей симметрии в квадрате, ромбе, прямоугольнике?

Выводы.

1) Квадрат есть фигура центрально-симметричная и имеющая четыре оси симметрии (MN, PQ, BD, AC) (черт. 208).

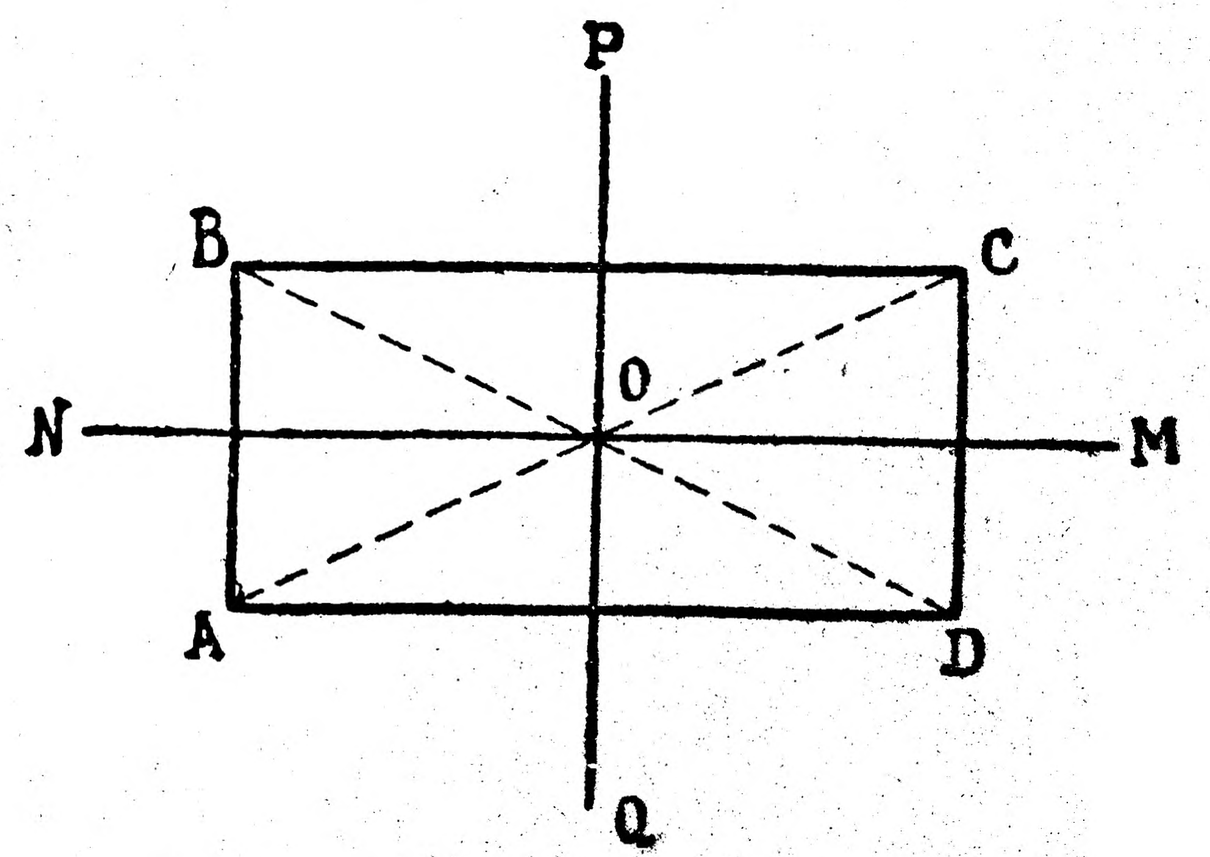


Черт. 208.



Черт. 209.

2) Ромб есть фигура центрально-симметричная, как и все параллелограмы, и имеющая две оси симметрии (диагонали) (черт. 209).



Черт. 210.

3) *Прямоугольник есть фигура центрально-симметричная относительно точки пересечения диагоналей и имеющая две оси симметрии (черт. 210).*

§ 167. Симметрия в круге.

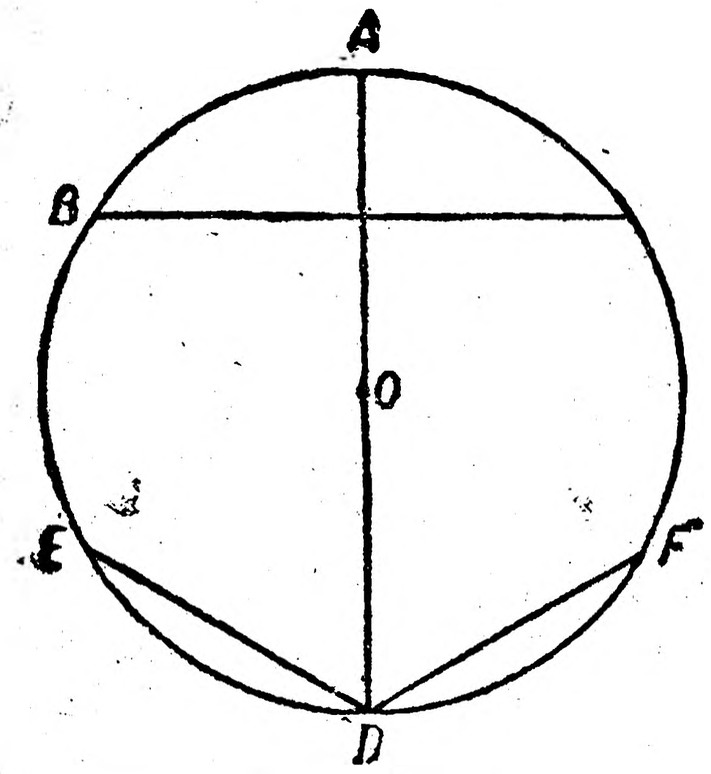
Задачи.

1. Провести ось симметрии в круге.

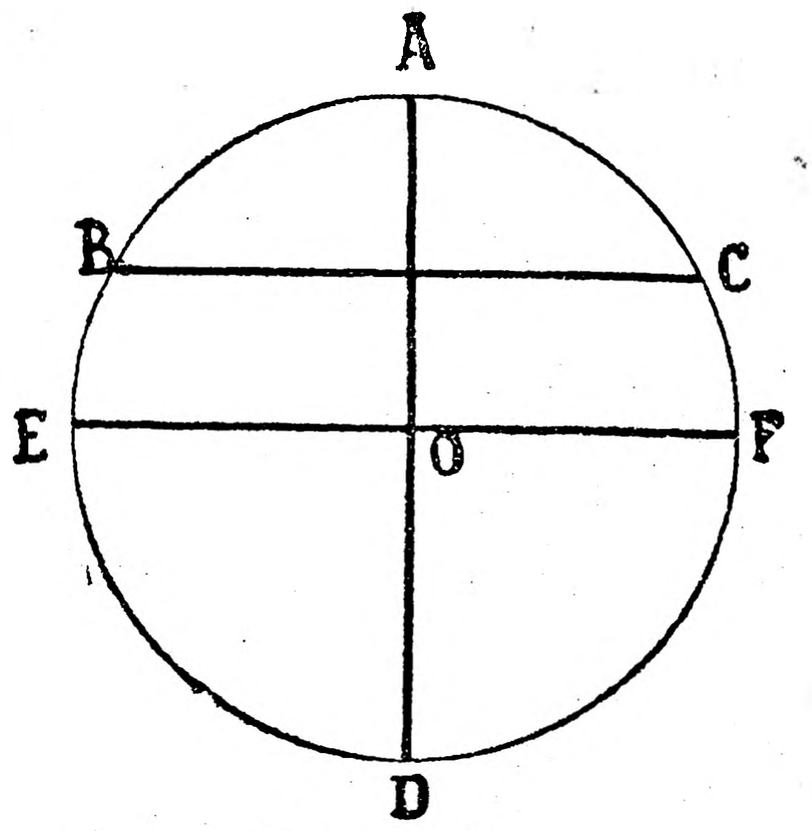
2. Показать, что точки B и C, концы хорды BC, перпендикулярной к диаметру AD (черт. 211), симметричны относительно диаметра.

3. Доказать симметрию дуг AB и AC относительно диаметра AD, симметрию дуг BD и CD относительно диаметра AD (черт. 211).

Вывод. *Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам.*



Черт. 211.



Черт. 212.

4. Доказать симметрию относительно диаметра AD двух равных хорд ED и DF, общая точка которых совпадает с концом диаметра AD (черт. 211).

Вывод. *Равные хорды стягивают равные дуги.*

5. Доказать такое же свойство дуг BE и CF, лежащих между двумя хордами BC и EF, перпендикулярными к диаметру AD (черт. 212).

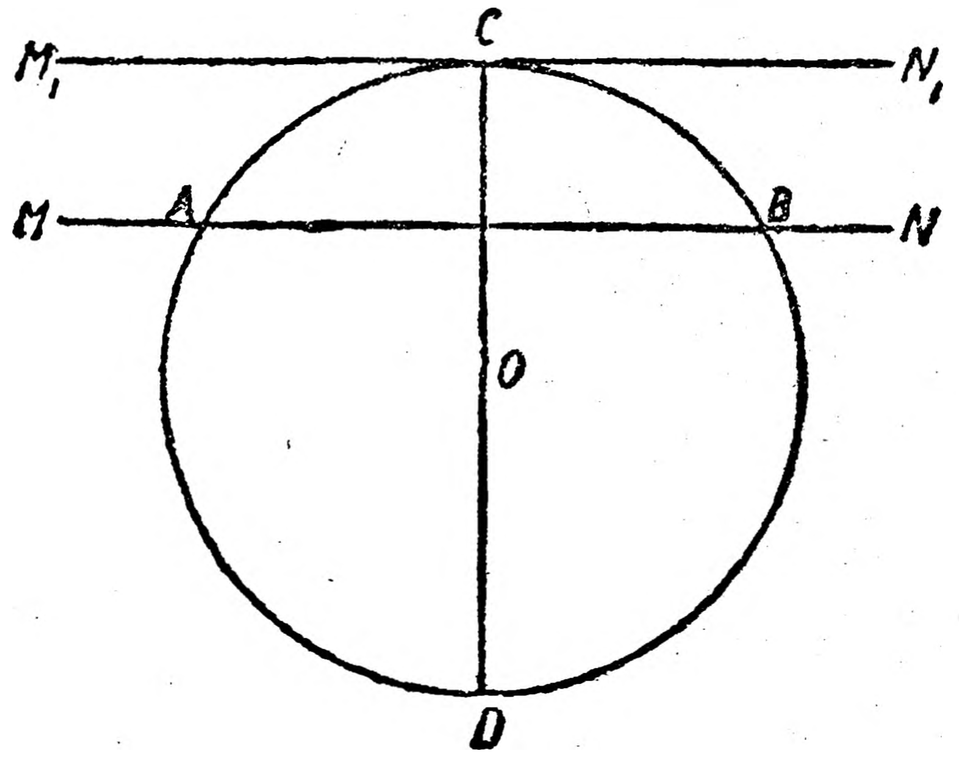
Вывод. *Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.*

§ 168. Свойства касательной и секущей.

На черт. 213 дан круг, диаметр CD и перпендикулярная к нему секущая MN, которая пересекает окружность в точках A и B. При перемещении секущей параллельно самой себе, точки A и B, оставаясь симметричными относительно диаметра

CD, приближаются к концу диаметра C и, наконец, сливаются с точкой C, при чем секущая MN займет положение касательной M_1N_1.

Выводы. *1) Касательная перпендикулярна к диаметру или радиусу, проведенному в точку касания, и, наоборот, всякая прямая, перпендикулярная к диаметру или радиусу в его конце, лежащем на окружности, есть касательная.*



Черт. 213.

2) Касательная, параллельная хорде, делит дугу, стягиваемую этой хордой, пополам.

Задачи.

1. Дана окружность, центр которой не указан. Найти этот центр (см. вывод 1 § 167).

2. Через точку, лежащую на окружности, провести касательную к этой окружности (см. вывод 1 § 168).

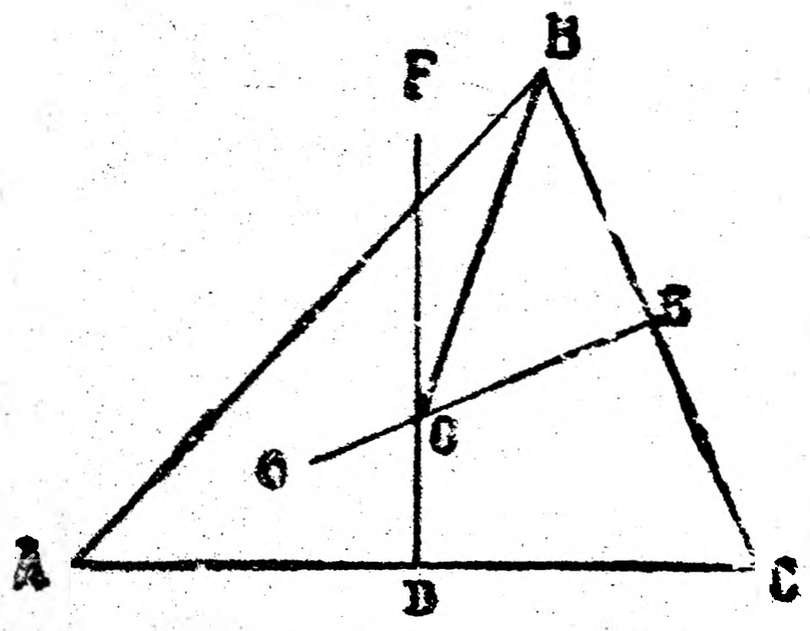
3. Провести касательную к данной окружности параллельно данной прямой.

§ 169. Окружность, описанная около данного треугольника.

Задачи. Три крестьянских двора расположены в местах A, B и C (черт. 214). Требуется вырыть колодезь так, чтобы он находился на одинаковых расстояниях от всех трех крестьянских дворов.

Р е ш е н и е. Соединив точки A, B и C прямыми линиями, получим треугольник ABC.

Проведем ось симметрии DF относительно точек A и C; эта ось, как известно, перпендикулярна к отрезку AC



Черт. 214.

и проходит через его середину; проведем точно так же ось симметрии EO относительно точек B и C.

1) Показать, что точка O, пересечения этих осей симметрии находится на одинаковом расстоянии от всех трех вершин треугольника ABC.

2) Показать, что окружность, проведенная радиусом, равным отрезку OB (черт. 214), соединяющему точку пересечения осей симметрии с вершиной B этого треугольника, пройдет через все его вершины.

Таким образом, точка O есть то место, где нужно рыть колодезь.

Вопрос. Сколько решений имеет эта задача?

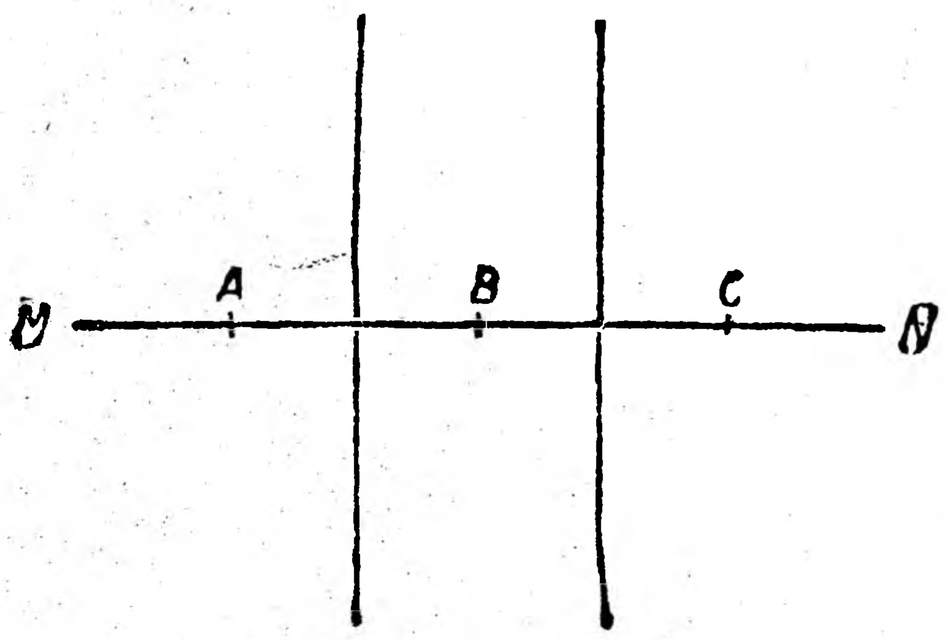
Указание. Окружность, проходящая через все вершины треугольника или многоугольника, называется *описанной*, треугольник же или многоугольник называется *вписанным*.

Вывод. *Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну.* Для построения этой окружности нужно через середины двух сторон этого треугольника провести перпендикуляры к этим сторонам; приняв затем точку пересечения этих перпендикуляров за центр, а ее расстояние от какой-нибудь вершины данного треугольника — за радиус, нужно провести окружность.

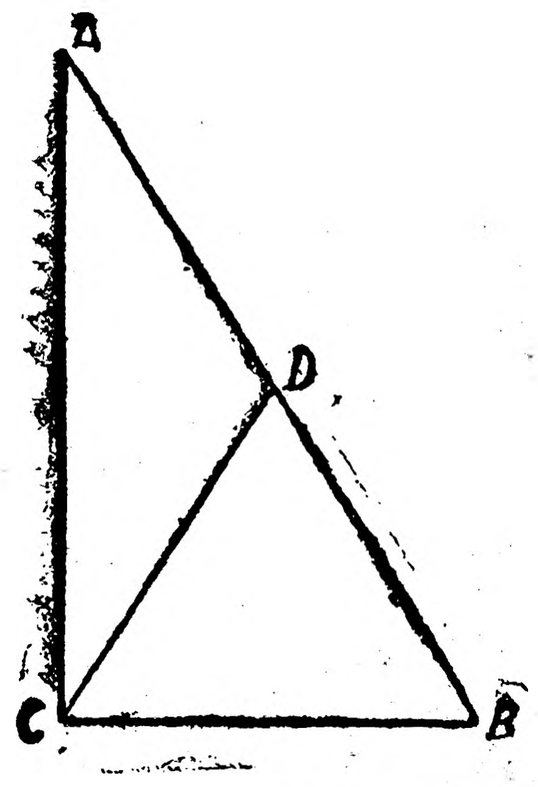
Вопросы.

1) Как показать на чертеже 215, что ось симметрии относительно точек A и B прямой MN не пересекается с осью симметрии относительно точек B и C той же прямой?

2) Можно ли через эти три точки провести окружность?



Черт. 215.



Черт. 216.

3) Как должны быть расположены три точки, чтобы можно было через них провести окружность?

4) В скольких точках прямая может пересечься с окружностью

Задача. Построить остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники и описать около них окружности.

1) Обратить внимание на положения центров окружностей в каждом из этих треугольников.

2) Чем служит гипотенуза прямоугольного треугольника в описанной около него окружности? (*Отв.*: диаметром).

3) Определить медиану CD [1]) (черт. 216) прямоугольного треугольника ABC, в котором гипотенуза AB равна 15 *см*.

§ 170. Окружность, вписанная в данный треугольник.

Задача. Из куска жести, имеющего форму треугольника (черт. 217), требуется вырезать наибольший круг.

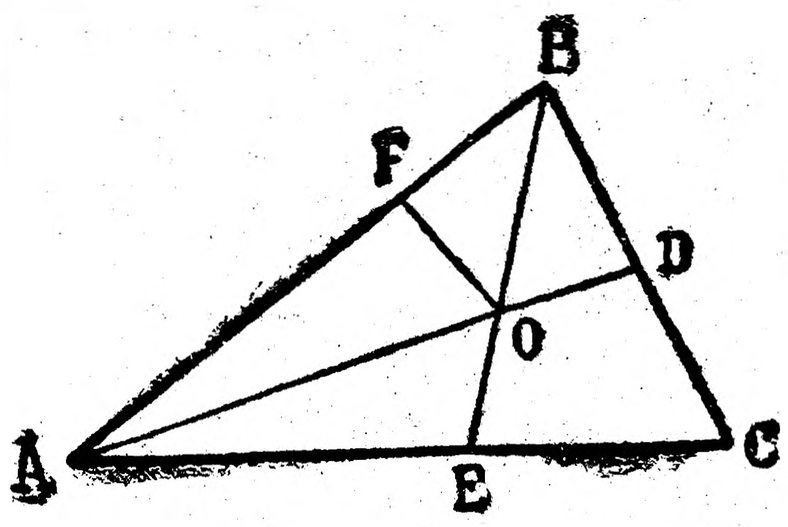
Решение. В треугольнике ABC (черт. 217) проведем биссектрису AD угла A.

1) Показать, что любая точка этой биссектрисы находится на одинаковых расстояниях от сторон AB и AC этого угла.

2) Проведя биссектрису BE угла B, показать то же самое относительно этой биссектрисы по отношению к сторонам AB и BC.

Указание. Биссектрисы BE и AD суть *оси симметрии* по отношению к сторонам углов A и B, так как по отношению к каждой биссектрисе одна сторона угла является отражением другой его стороны.

3) Показать, что точка O пересечения указанных осей симметрии (черт. 217) находится на одинаковом расстоянии от всех трех сторон треугольника ABC.



Черт. 217.

4) Показать, что окружность, проведенная радиусом, равным перпендикуляру OF, опущенному из точки пересечения осей симметрии на сторону AB, будет касаться всех трех сторон треугольника ABC.

5) Будет ли касаться всех сторон этого треугольника окружность, проведенная радиусом, не равным OF?

Указание. Окружность, касающаяся всех сторон треугольника или многоугольника, называется *вписанной*, данный же треугольник или многоугольник называется *описанным*.

---

[1]) Медианой треугольника называется прямая, соединяющая одну из его вершин с серединой противоположной стороны.

Вывод. *Во всякий треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.*

Чтобы эту окружность построить, нужно в данном треугольнике провести биссектрисы двух углов, затем из точки их пересечения опустить перпендикуляр на какую-нибудь сторону этого треугольника, и радиусом, равным длине этого перпендикуляра, провести окружность из точки пересечения биссектрис, как из центра.

Этим способом решается предложенная выше задача.

Упражнение. Построить косоугольный и прямоугольный треугольники и вписать в них окружности.

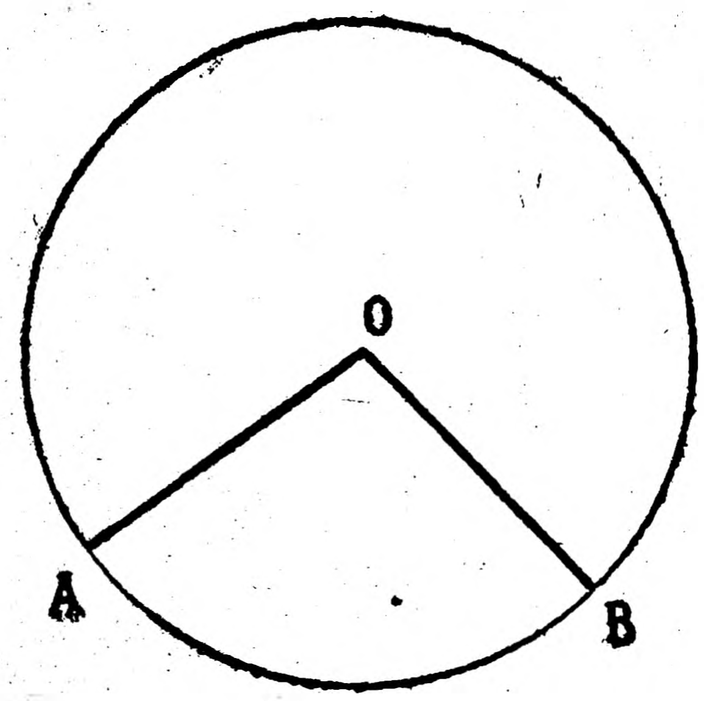
§ 171. Центральные углы в круге.

Указание. Угол *AOB*, составленный двумя радиусами, называется *центральным углом* (черт. 218).

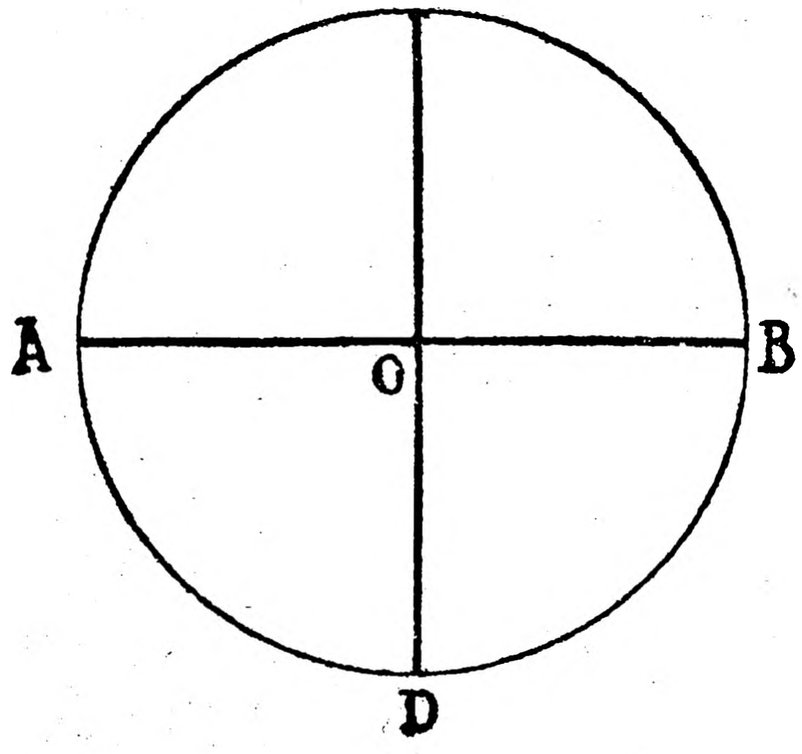
Вопросы. 1) Какие углы образуют два взаимно-перпендикулярные диаметра (черт. 219)?

2) Указать дуги, соответствующие этим углам.

3) Сколько градусов содержит дуга *BD*? угол *BOD*?



Черт. 218.



Черт. 219.

4) Сколько градусов содержит центральный угол, соответствующий дуге в 45°? дуге в 30°? дуге в 15°? дуге в 1°?

5) Во сколько раз увеличится дуга, если соответствующий ей центральный угол увеличится в 2, 3, 4, и т. д. раза?

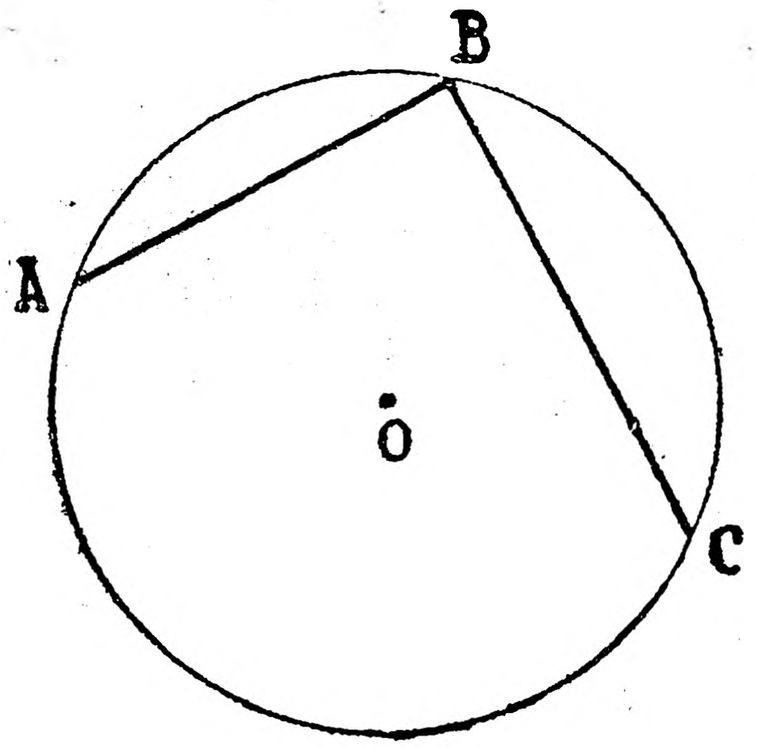
Выводы: 1) *Центральные углы пропорциональны соответствующим им дугам.*

2) *Центральный угол измеряется соответствующей ему дугой*, т.-е. центральный угол содержит столько же угловых градусов, сколько соответствующая ему дуга содержит дуговых градусов.

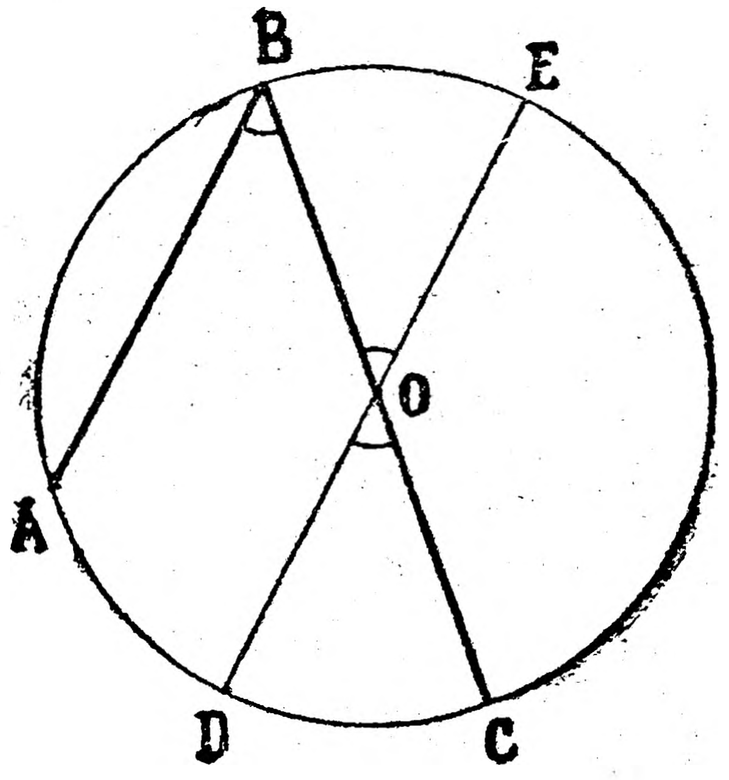
§ 172. Вписанные углы.

У к а з а н и е. Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, называется *вписанным углом* (черт. 220).

I. Дан вписанный угол ABC (черт. 221), одна из сторон которого совпадает с диаметром. Проведем диаметр DE параллельно хорде AB.



Черт. 220.



Черт. 221.

Вопросы. 1) Симметричны ли дуги AD и BE?

2) Рассмотреть углы BOE и DOC; углы DOC и ABC.

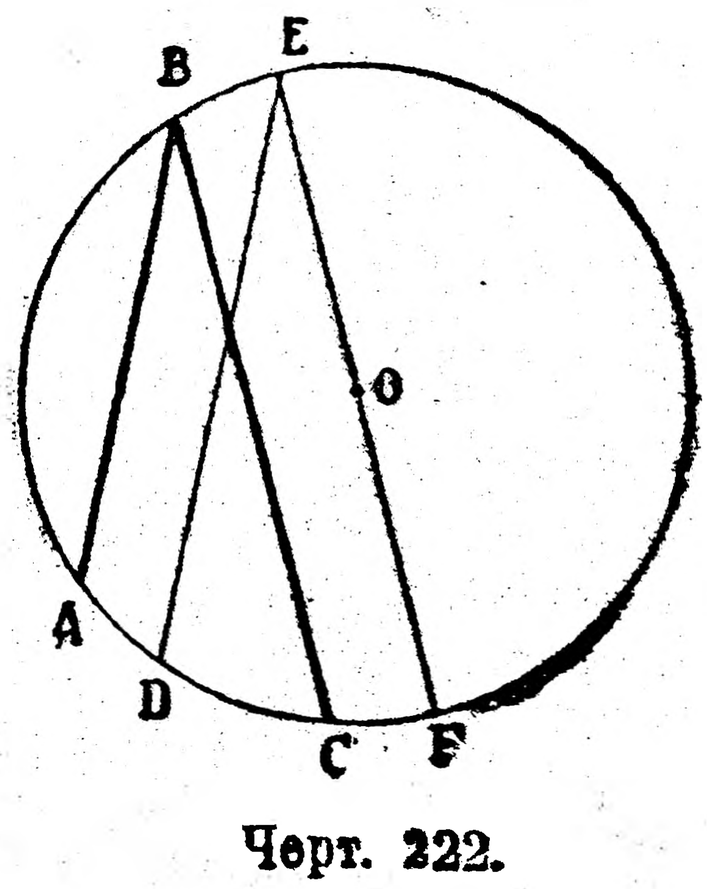
3) Исследовать, исходя из предыдущего, дуги AD, BE и DC по их сравнительной величине.

4) Вывести заключение о сравнительной величине дуг AC и DC.

5) Какой дугой измеряется центральный угол DOC?

6) Какой частью дуги AC измеряется равный ему вписанный угол ABC?

II. Дан вписанный угол ABC, ни одна из сторон которого не совпадает с диаметром (черт. 222).



Черт. 222.

Проведем диаметр EF параллельно стороне BC, и из точки E хорду ED, параллельную хорде AB.

Вопросы. 1) Равны ли дуги BE и CF? дуги BE и AD? дуги AC и DF?

2) Равны ли углы ABC и DEF?

3) Чем измеряется вписанный угол DEF? ABC?

Вывод. *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Вопросы. 1) Определить вписанный угол, опирающийся на дуги в 120^0? 60^0? 30^0? 45^0?

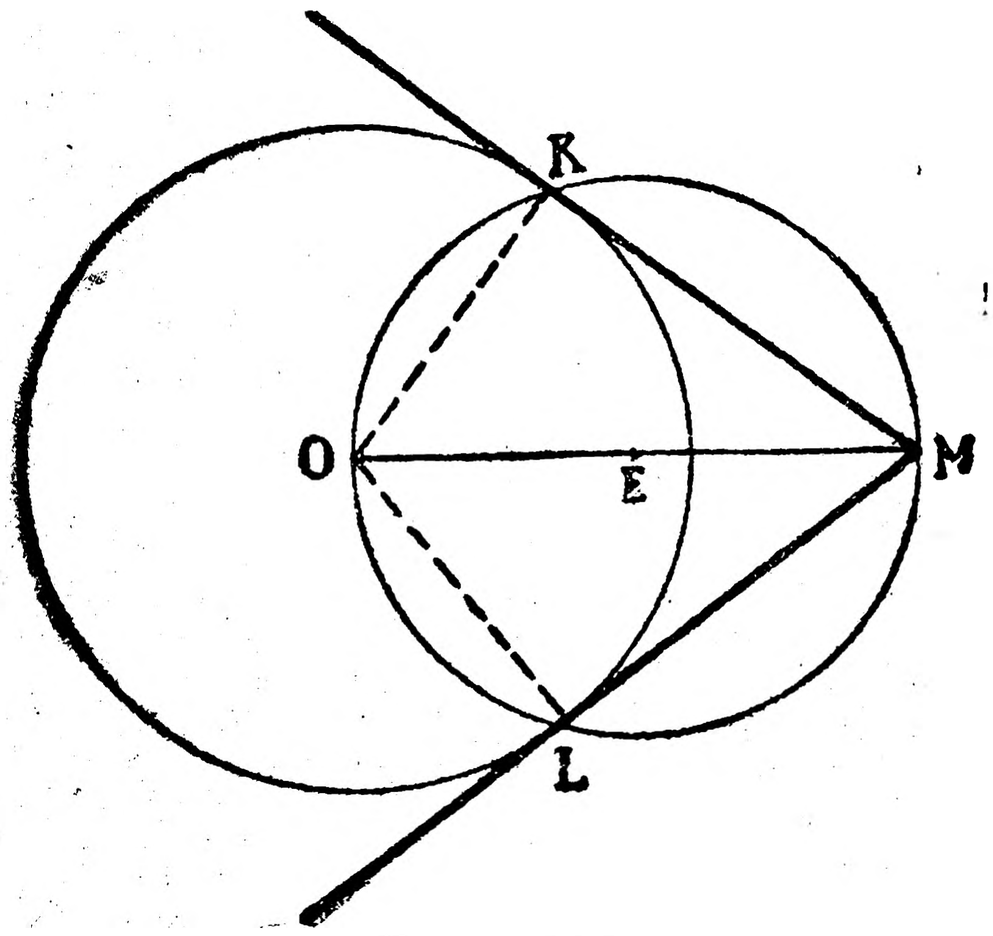
2) Сколько градусов содержит вписанный угол, опирающийся на диаметр?

Следствие. *Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, — прямые.*

Задачи.

1. Через точку, лежащую вне окружности, провести касательную к этой окружности.

Р е ш е н и е. Данную точку M (черт. 223) соединим с точкой O и на прямой OM, как на диаметре, опишем окружность.



Черт. 223.

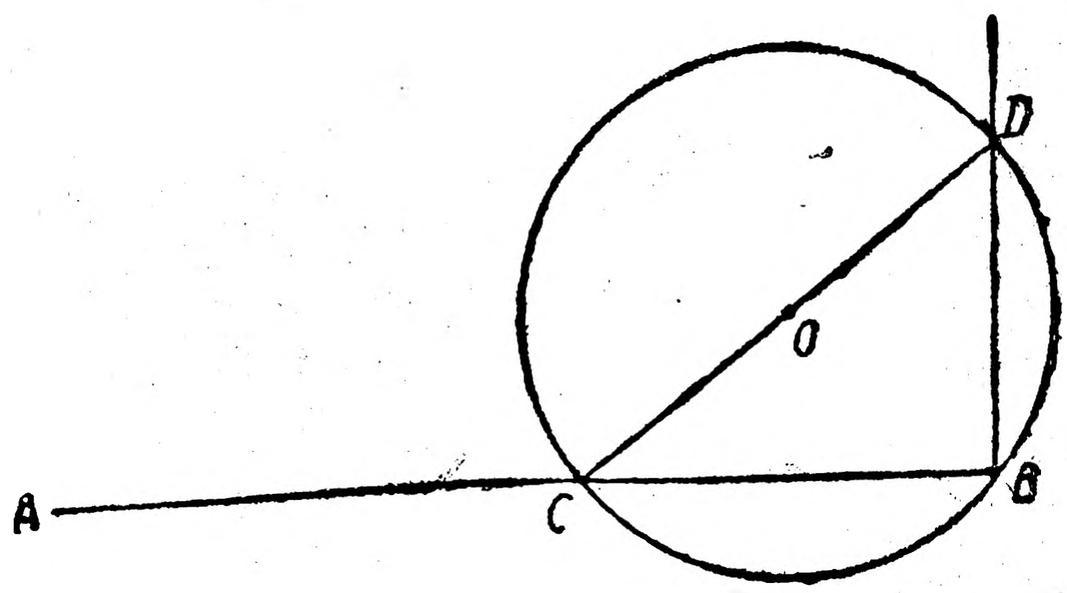
Точки пересечения K и L этой окружности с данной окружностью соединим с точкой M.

Показать, что MK и ML будут касательные, проведенные из внешней точки M к данной окружности. (У к а з а н и е. Соединить точки K и L с центром O и рассмотреть вписанные углы MKO и MLO.)

2. Показать, что отрезки MK и ML касательных, проведенных к данной окружности из внешней точки, равны между собой.

3. Показать, что разность между суммой катетов и гипотенузой прямоугольного треугольника равна диаметру вписанной в него окружности.

4. Восставить перпендикуляр к прямой, не продолжая ее.



Черт. 224.

Р е ш е н и е. Взяв вне прямой AB точку O (черт. 224), опишем радиусом, равным OB, окружность и через точку C пересечения окружности с прямой AB проведем диаметр CD. Точку D соединим с точкой B.

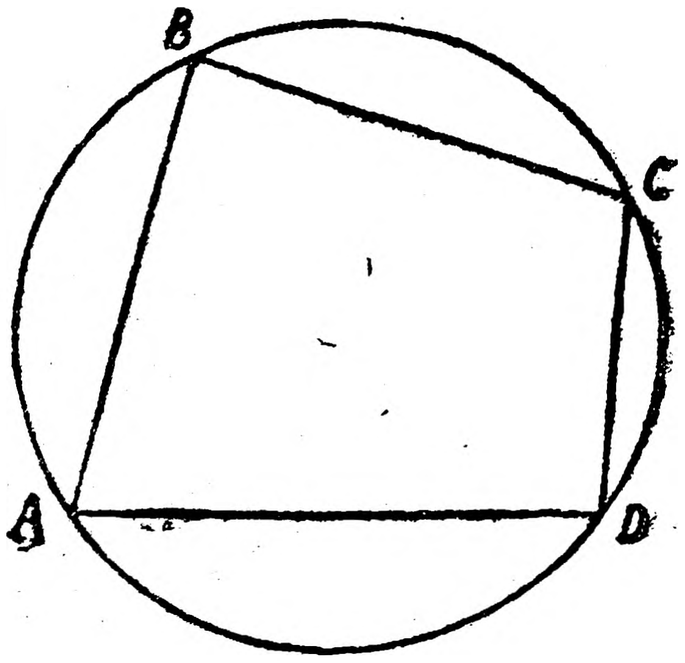
Показать, что прямая BD перпендикулярна к прямой AB.

5. Показать, что во всяком вписанном четыреугольнике $ABCD$ (черт. 225) сумма каждой пары противоположных углов равна $2d$, т.-е.

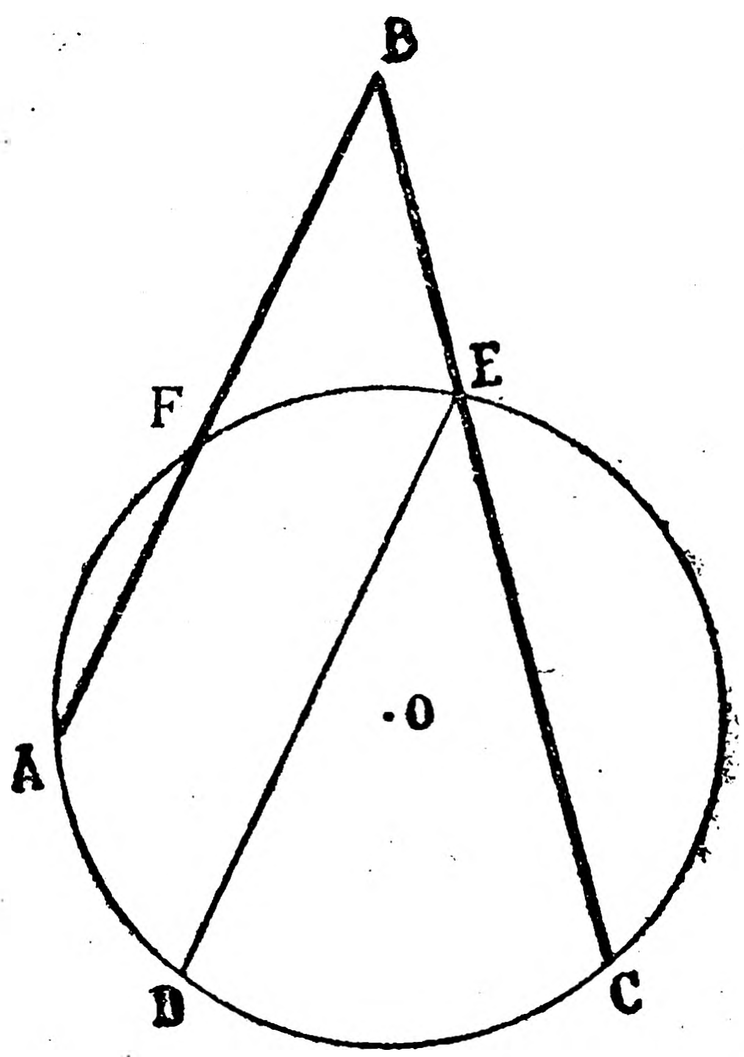
$$\angle A + \angle C = 2d \text{ и } \angle B + \angle D = 2d.$$

Вывод (обратное предположение). *Около четыреугольника можно описать окружность лишь при условии, если сумма каждой пары его противоположных углов равна 2d.*

Вопросы. 1) Можно ли описать окружность около параллелограма? 2) около прямоугольника? 3) около ромба? 4) около равнобедренной трапеции? 5) около неравнобедренной трапеции?



Черт. 225.



Черт. 226.

§ 173. Измерение угла, составленного двумя секущими и имеющего вершину вне круга.

Задача. Дан угол ABC, составленный секущими AB и BC (черт. 226).

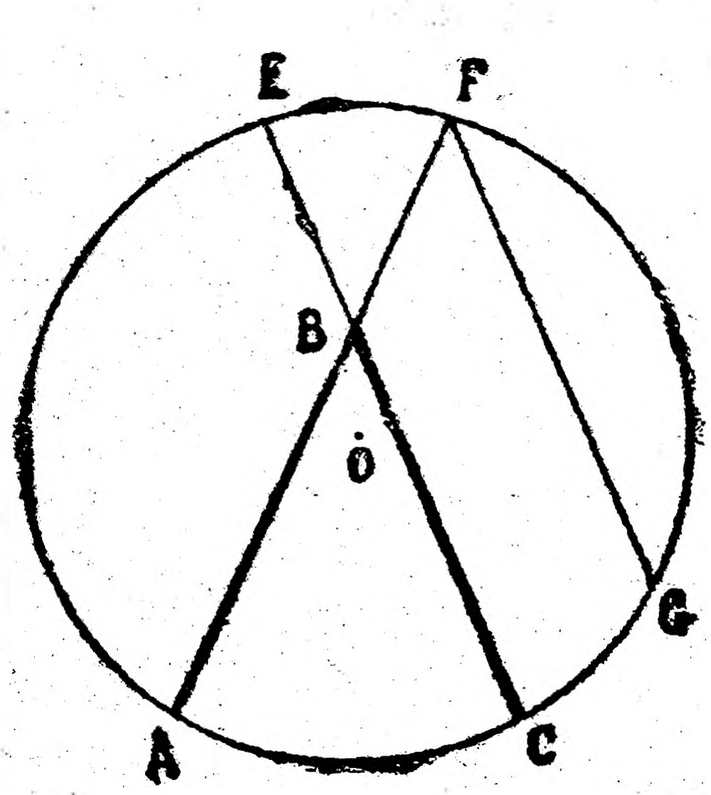
Проведя хорду ED параллельно стороне AB и сравнив угол ABC с вписанным углом DEC, показать, что угол ABC измеряется половиной дуги DC, т.-е. полуразностью дуг AC и FE.

Вывод. *Угол, составленный двумя секущими и имеющий вершину вне круга, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.*

§ 174. Измерение угла, имеющего вершину внутри круга.

Задача. Дан угол ABC, вершина которого B лежит внутри круга (черт. 227).

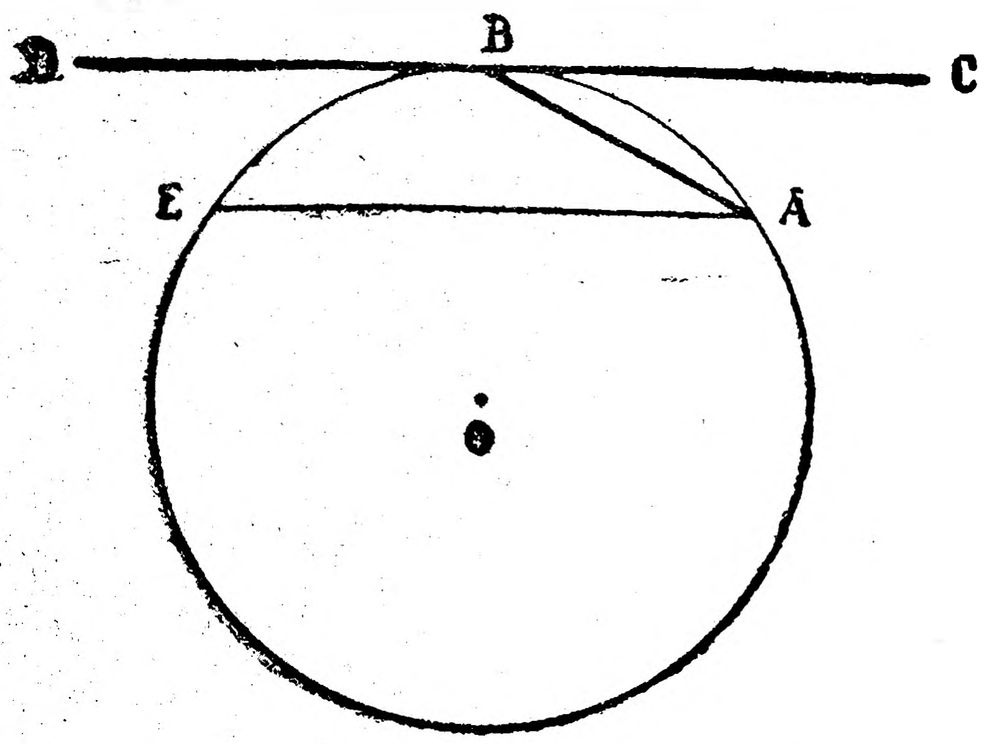
Продолжив его стороны до пересечения с окружностью в точках E и F и проведя из точки F хорду FG параллельно стороне BC данного угла ABC, показать, что $\angle ABC = \angle AFG$ и что, следовательно, $\angle ABC$ измеряется половиной дуги AG, которая равна сумме дуг AC и EF.



Черт. 227.

Вывод. *Угол, вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммою дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями.*

§ 175. Измерение угла, составленного хордой и касательной.



Черт. 228.

Задача. Дан угол ABC, составленный касательной DC и хордой AB (черт. 228).

Проведя хорду AE параллельно касательной DC, показать, что $\angle ABC$ измеряется половиной дуги BE или, что то же, половиной дуги BA.

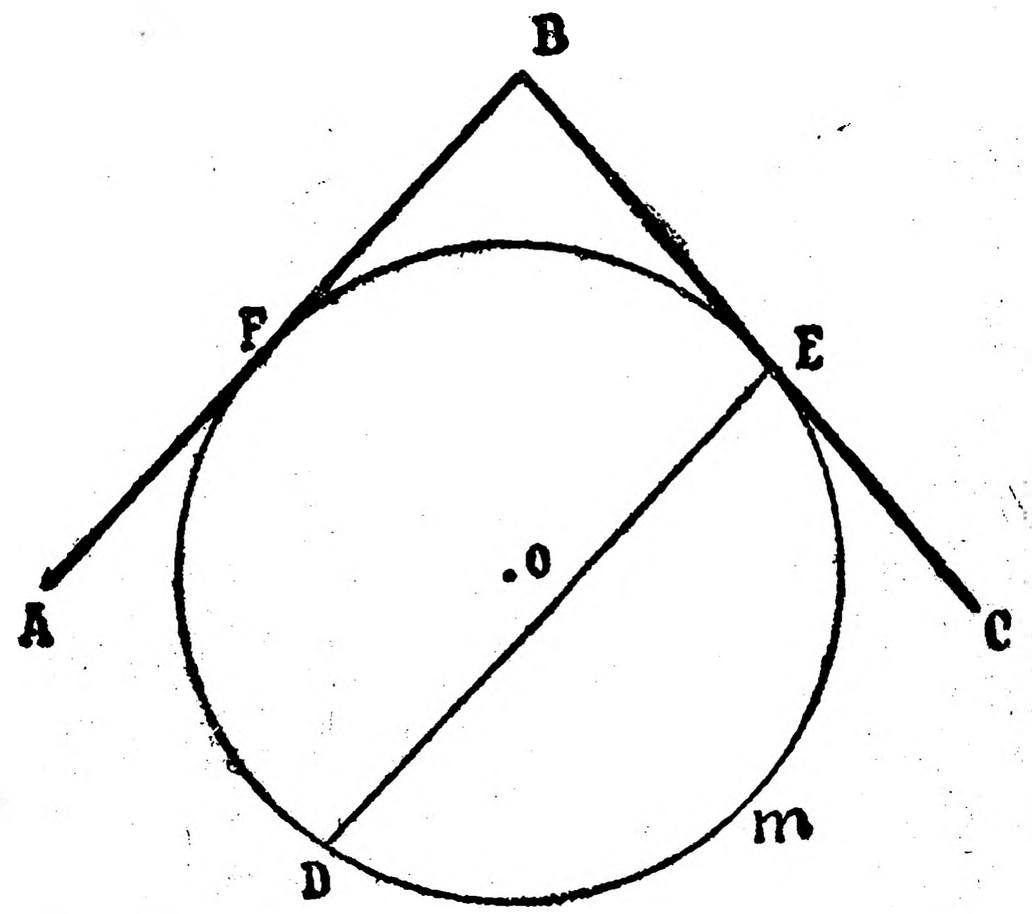
Вывод. *Угол, составленный хордой и касательной, измеряется половиной дуги, заключенной внутри его.*

§ 176. Измерение описанного угла.

Задача. Дан угол ABC, составленный двумя касательными, AB и BC (черт. 229).

Такой угол называется *описанным.*

Проведя из точки касания E хорду ED параллельно касательной AB, показать, что $\angle ABC$ измеряется половиной дуги DmE или, что то же, полуразностью дуг FDE и FE.



Черт. 229.

Вывод. *Угол, составленный двумя касательными, измеряется полуразностью дуг, заключенных между точками касания.*

Задачи.

1. При помощи наугольника найти центр данной окружности.

2. Как при помощи картонного или металлического кругового кольца, разделенного на градусы, измерить данный угол, накладывая круг на угол в разных положениях?

3. При помощи двух транспортиров измерить угол, составленный направлениями двух дорог на карте, не помещая вершину угла в центр транспортиров.

4. При помощи транспортира разделить угол пополам, не измеряя угла в градусах.

5. К окружности проведены четыре касательные, точки касания которых совпадают с концами двух взаимно-перпендикулярных диаметров. Назвать фигуру, получившуюся от пересечения касательных.

6. Вычислить в градусах внутренние и внешние углы красноармейской звезды.

7. Два квадрата наложены один на другой, образуя правильную восьмиугольную звезду. Вычислить в градусах ее углы.

Проделать то же самое с шестиугольной звездой, образованной из двух равносторонних треугольников.

8. Минированный участок в море охватывается окружностью, проходящею через два маяка. Под каким углом зрения пароход должен иметь оба маяка, чтобы не попасть в минированный участок, если дуга указанной окружности между двумя маяками равна 60^0?

9. Три деревни A, B и C расположены по окружности так, что вся окружность делится ими в отношении 10 : 9 : 26. Под каким углом зрения видна из деревни A прямая дорога, соединяющая деревни B и C? *Отв.* 36^0.

10. Хорда делит окружность в отношении 2 : 13. Определить: 1) угол, составленный хордой и касательной, проведенной через конец хорды; 2) угол, составленный двумя касательными, проведенными через концы той же хорды. *Отв.* 1) 24^0; 2) 132^0.

11. Дана дуга круга AB. Начертить целую окружность.

12. Тупой угол имеет вершину на окружности; одна из его сторон делит окружность в отношении 3 : 13, а другая — в отношении 4 : 21. Определить этот угол.

Отв. $117^0 27'$.

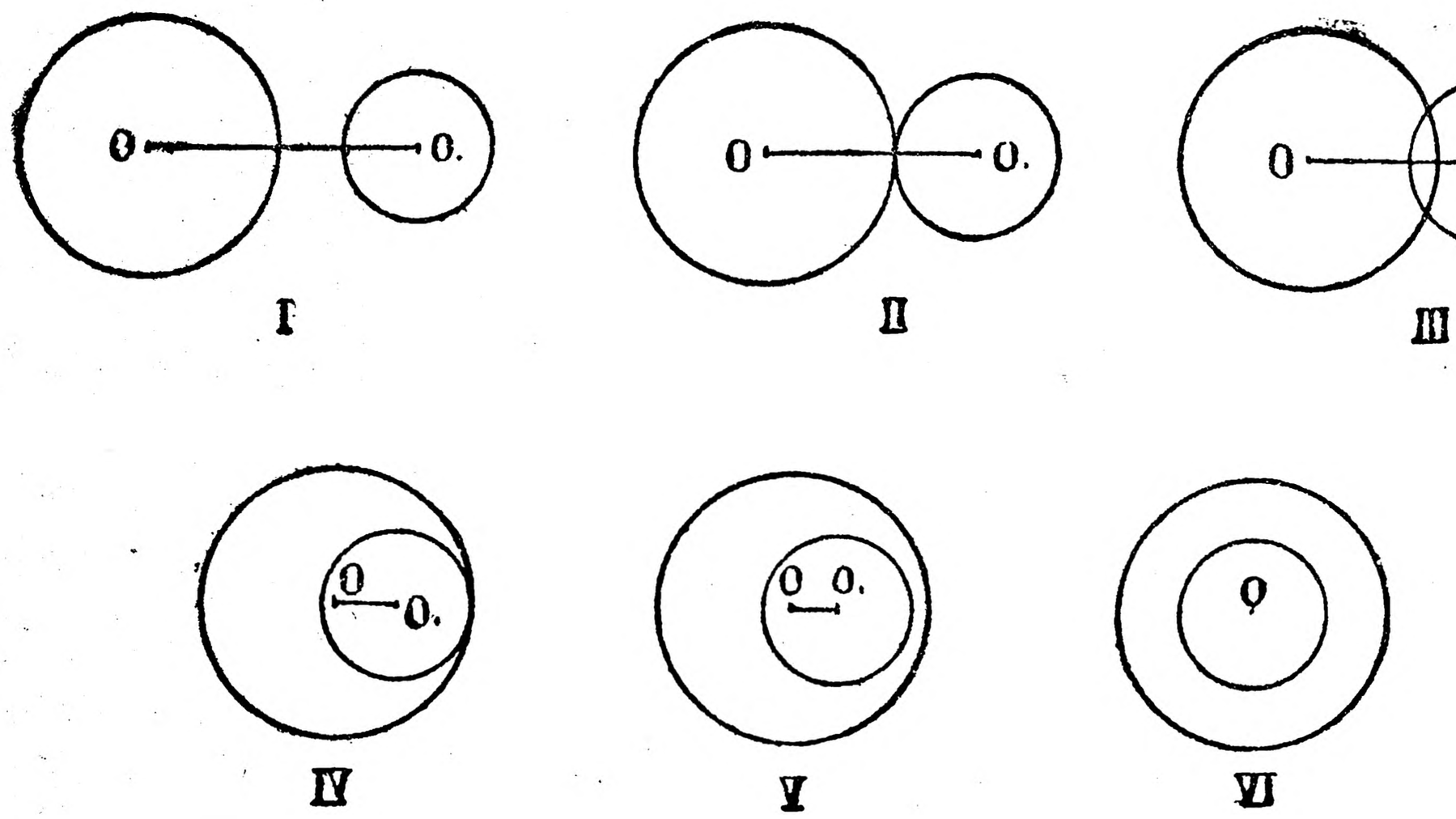
13. Середины концов прямоугольника последовательно соединены прямыми линиями. Показать, что получившаяся фигура есть ромб.

14. Хорда находится на расстоянии $\frac{r}{2}$ радиуса от центра. Определить величину центрального угла, на нее опирающегося.

Отв. 120^0.

§ 177. Относительное положение двух окружностей.

Указания. 1) Две окружности могут быть расположены в следующих взаимных положениях (черт. 230):



Черт. 230.

2) Прямая OO_1, соединяющая центры двух окружностей, называется *линией центров.*

3) Передвигая левую окружность по направлению к правой, можно из положения I получить все последующие взаимные положения двух окружностей.

Задача. Называя линию центров OO_1 буквой d и радиусы окружностей соответственно буквами R и r, показать взаимное расположение окружностей при условии:

1) $d > R + r$.
2) $d = R + r$.
3) $d < R + r$; $d > R - r$.
4) $d = R - r$.
5) $d < R - r$.
6) $d = 0$.

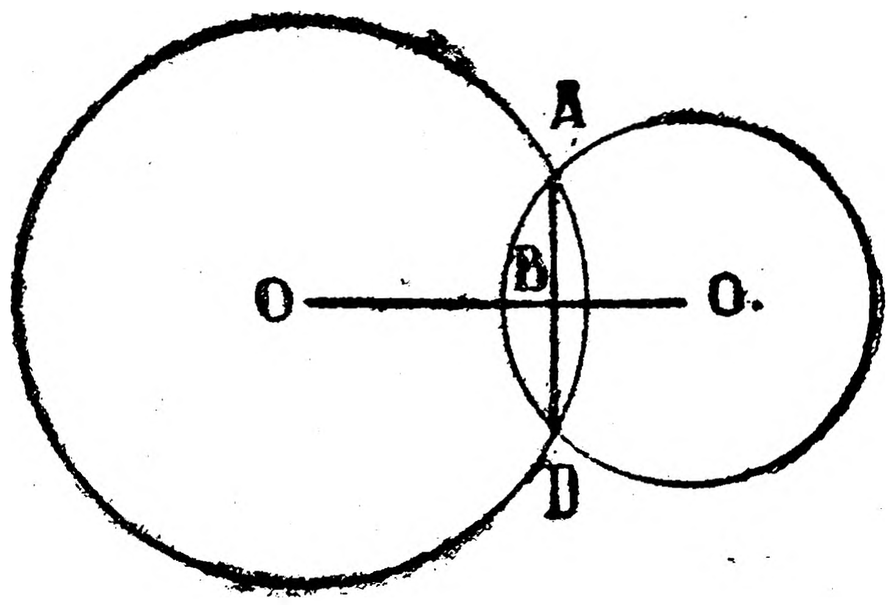
§ 178. Свойство общей хорды двух пересекающихся окружностей.

Задачи. Две окружности, O и O_1, пересекаются в двух точках, A и D (черт. 231).

Соединим точки пересечения прямой AD и проведем линию центров OO_1.

1) Показать из рассмотрения чертежа 231, что точки A и D симметричны относительно прямой OO_1 и что, следовательно, *общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна к линии центров и делится ею пополам.*

2) Показать, что касательная к одной из касающихся окружностей, проведенная через точку их касания, будет служить касательной и к другой окружности (см. полож. II и IV черт. 230).



Черт. 231.

Вывод. *Если две окружности имеют общую точку на линии их центров или на ее продолжении, то они касаются и имеют общую касательную в этой точке.*

Задача. Провести общую касательную к двум окружностям.

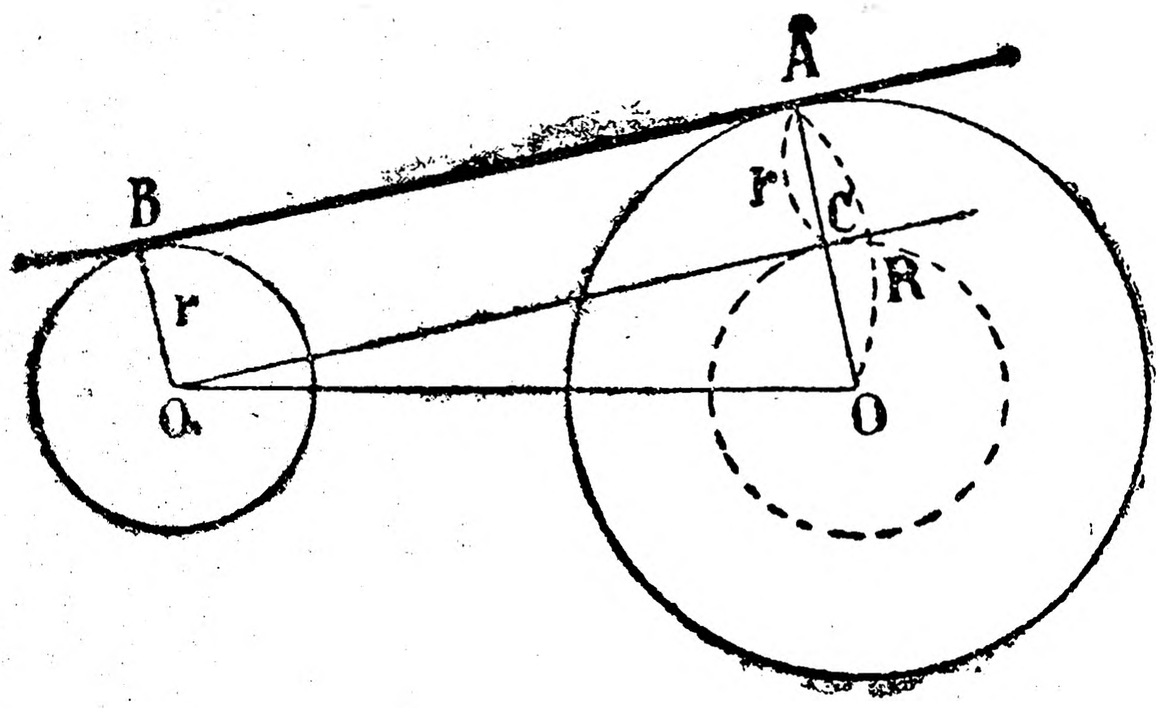
Указание. Сразу сообразить или придумать решение задачи на построение обычно бывает очень трудно. Поэтому при решении этих задач в большинстве случаев предварительно производится их *анализ* (т.-е. разбор). Анализ состоит в следующем. Предполагая задачу решенной, делают соответствующий примерный чертеж. В данной задаче, например, проводим две окружности и на-глаз проводим их общую касательную. Затем, исходя из того, что нам уже известно о касательной, начнем рассматривать на сделанном чертеже, какие соотношения отрезков, какое взаимное положение линий, какие величины углов и пр. вытекают из допущения, что начерченная примерная линия есть касательная. Иногда для отыскания таких следствий нашего допущения приходится проводить вспомогательные линии и вообще делать какие-нибудь дополнительные построения. Так, например, в нашей задаче мы сначала проводим радиусы AO и O_1B из точек касания (черт. 232). Это однако не дает нам еще никаких выводов. Тогда мы проводим прямую $O_1C \parallel AB$, а отсюда получается уже целый ряд следствий, указанных ниже в анализе задачи, и следствия эти, в конце концов, дают нам исходную нить и способ полного решения задачи, называемый, в отличие от анализа, *синтезом*.

Таким образом, анализ есть путь рассуждения, исходящий из допущения неизвестного известным и строящий на этом цепь следствий, которые приводят в конце концов к какому-нибудь

положению или способу, ранее выясненному (в данной задаче к способу проведения касательной к окружности из внешней точки).

I. Построение внешней касательной.

Анализ. Сделав от руки примерный чертеж (черт. 232) двух окружностей O и O_1 с радиусами R и r, имеющих общую касательную AB, проведем радиусы AO и BO_1 и прямую $O_1C \parallel AB$. В таком случае:



Черт. 232.

1) $AC = BO_1$;

2) $\angle OCO_1 = d$;

3) $OC = AO - BO_1 = R - r$;

4) O_1C есть касательная к окружности с центром O и радиусом равным $R - r$, проведенная из точки O_1 (почему?).

Синтез (построение). Из центра O описываем окружность радиусом, равным $R - r$, и из точки O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C (см. § 172, зад. 1). Продолжим радиус OC до пересечения с данной окружностью в точке A.

Через точку A проведем прямую AB параллельно CO_1.

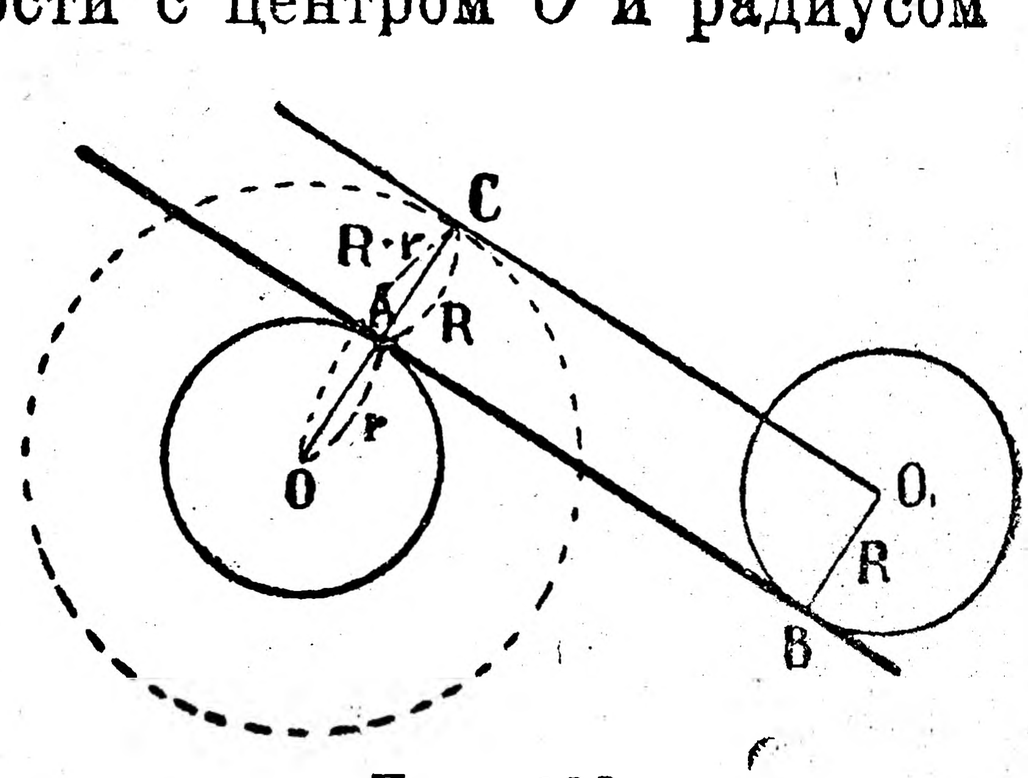
AB есть искомая внешняя общая касательная к данным окружностям (почему?).

Предлагается самим учащимся построить таким же способом вторую внешнюю касательную к данным окружностям.

II. Построение внутренней касательной.

Анализ. Если AB (черт. 233) общая касательная и $CO_1 \parallel AB$, то: 1) $AC = BO_1$ (почему?); 2) $\angle OCO_1 = d$; 3) $OC = R + r$; 4) O_1C есть касательная к окружности с центром O и радиусом $R + r$ (почему?).

Синтез (построение). Из центра O описываем окружность радиусом, равным $R + r$, и из точки O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C. Точку касания C соединяем с точкой O и через точку пересечения A радиуса CO с данной окружно-



Черт. 233

ностью проводим прямую AB, параллельную O_1C. Прямая AB есть внутренняя общая касательная к данным окружностям. Почему?

Предлагается самим учащимся построить таким же способом вторую внутреннюю касательную к данным окружностям.

Вопросы. 1) Сколько всех общих касательных можно провести к двум пересекающимся окружностям? к двум окружностям, имеющим внешнее касание? внутреннее касание?

2) Указать примеры из техники, где встречаются внутренние общие касательные к двум окружностям (напр. ременная передача).

§ 179. Геометрические места.

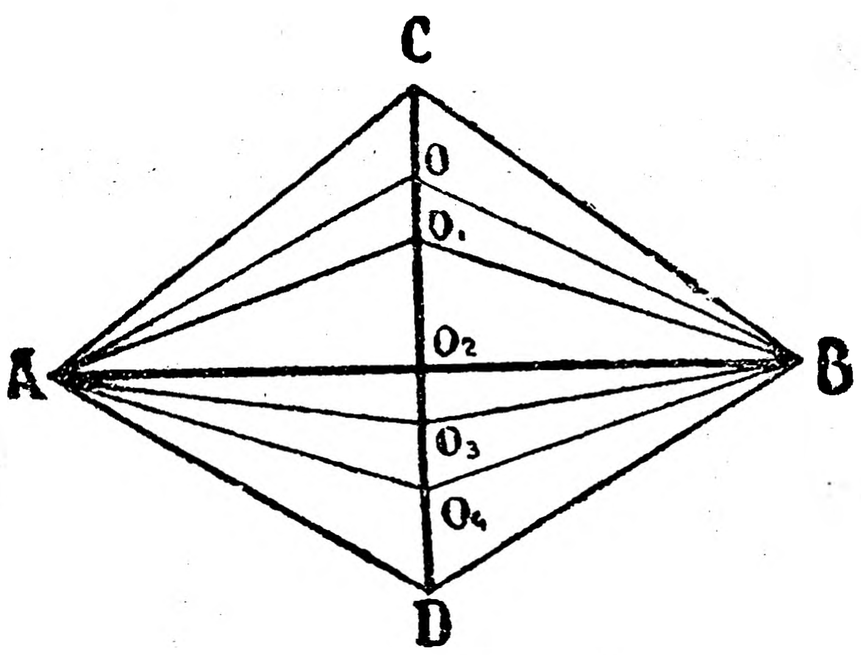
Указание. Геометрическим местом называется линия или поверхность, все точки которой удовлетворяют известному условию.

Задачи.

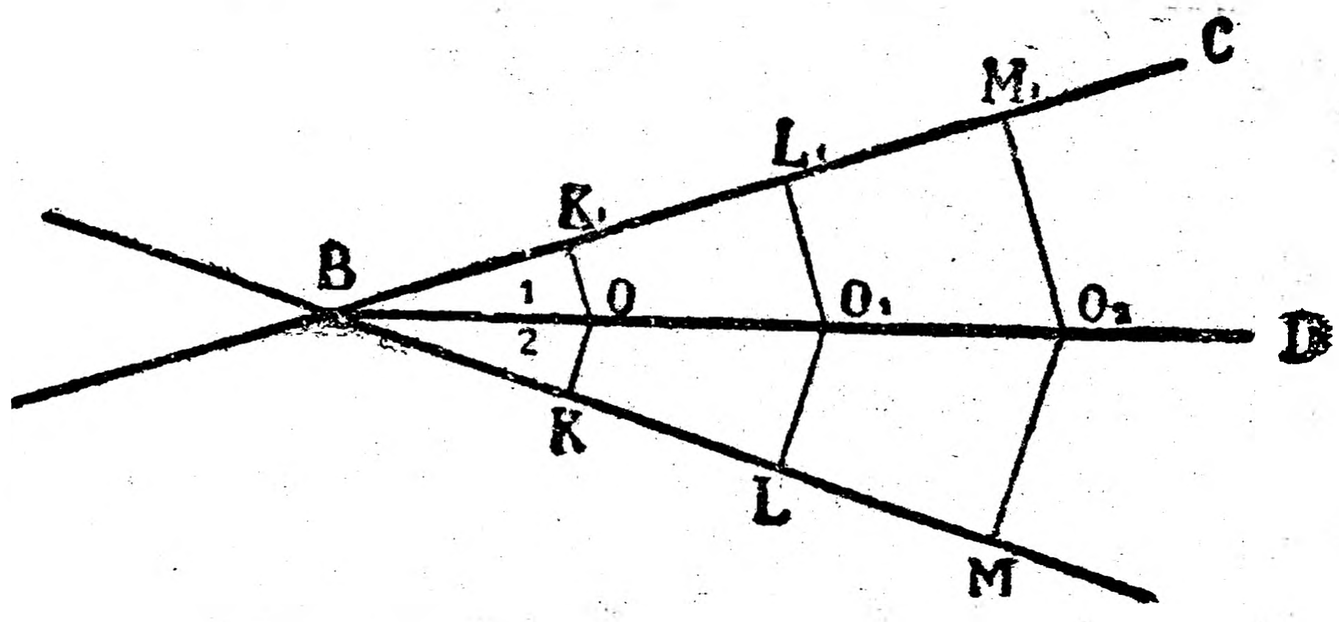
1. Показать, что окружность, биссектриса угла, ось симметрии являются геометрическими местами.

2. Найти геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек (черт. 234).

(Решение см. § 48).



Черт. 234.



Черт. 235.

3. Найти геометрическое место точек, равноотстоящих от двух пересекающихся прямых (черт. 235).

Решение. Если $OK = OK_1$,

$O_1L = O_1L_1$,

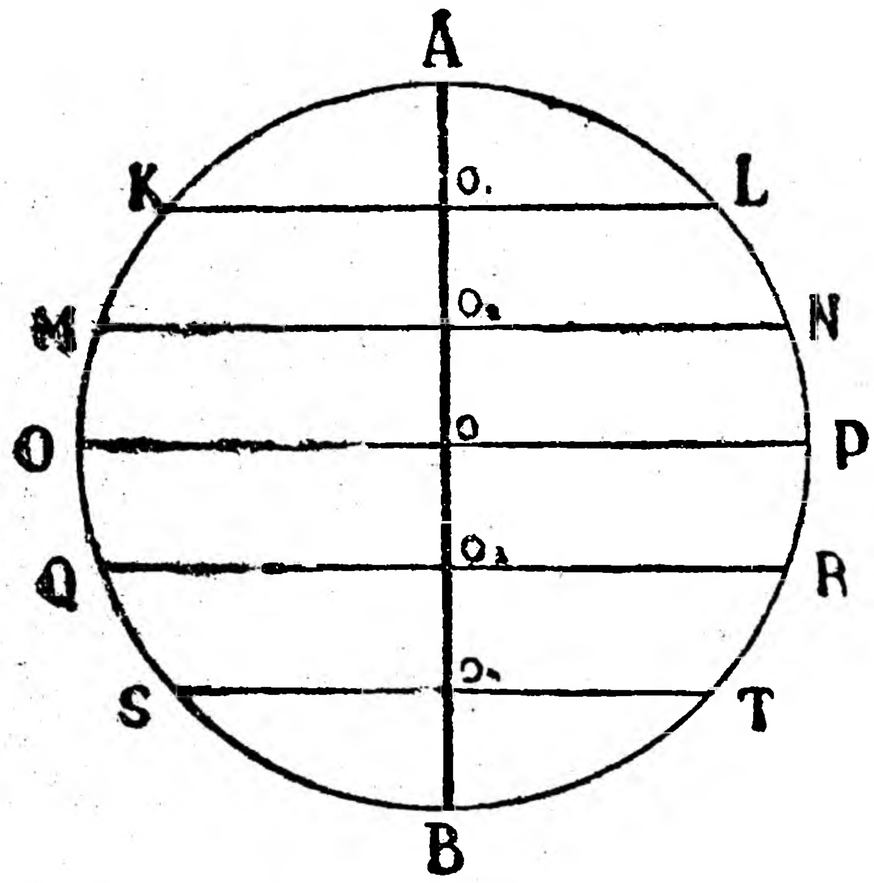
$O_2M = O_2M_1$,

то $\angle MBD = \angle CBD$,

и, следовательно, искомое геометрическое место есть биссектриса угла, образуемого данными пересекающимися прямыми.

4. Найти второе геометрическое место, удовлетворяющее условию задачи № 3.

5. Найти геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой.



Черт. 236.

6. Показать, что в окружности геометрическое место середин хорд, параллельных данной прямой, есть диаметр окружности, перпендикулярный к этим хордам (черт. 236).

7. Найти геометрическое место центров всех окружностей данного радиуса, которые касаются данной прямой.

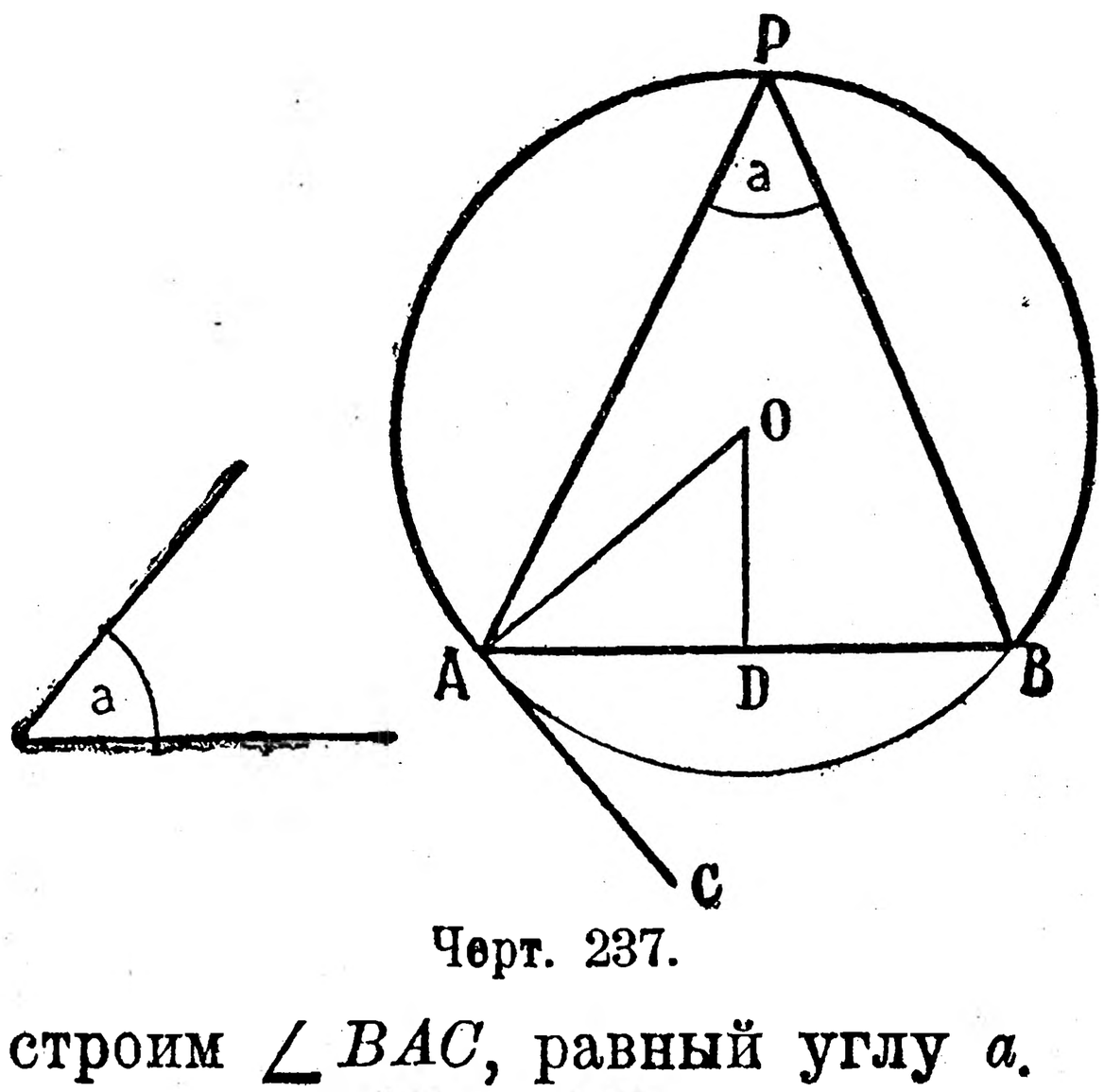
8. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

(Указание. См. задачу 2.)

9. На данной прямой AB построить сегмент, вмещающий данный угол a.

Указание. Говорят, что сегмент вмещает угол a, если на дуге сегмента находятся вершины всех вписанных углов, равных углу a.

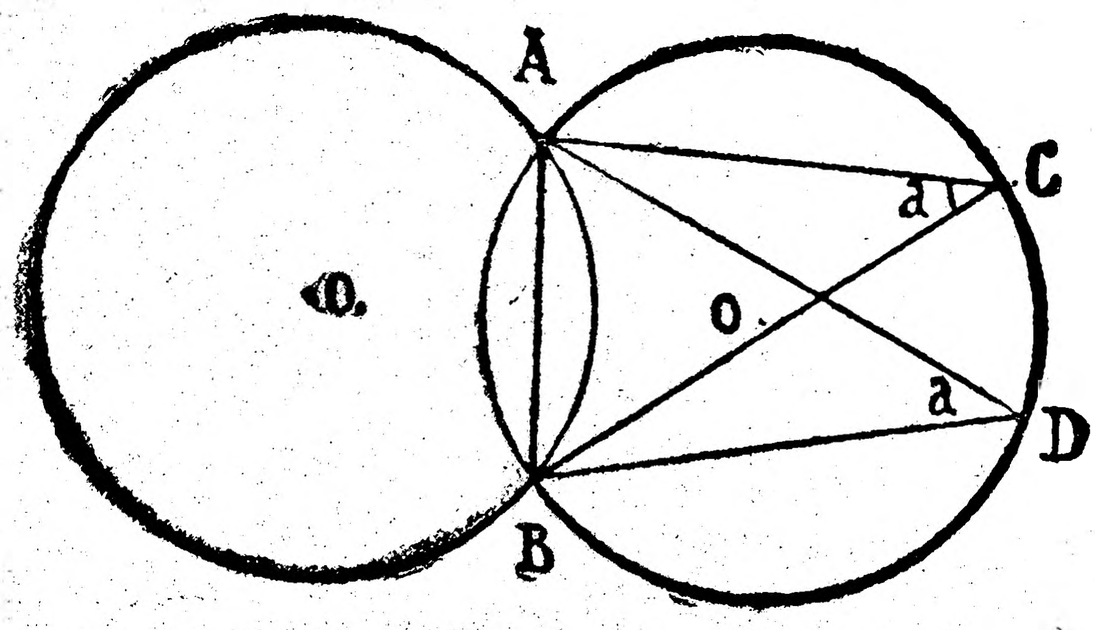
Анализ. Допустим, что сегмент APB (черт. 237) вмещает данный угол a. Проведя касательную AC, получим.



Черт. 237.

$$\angle CAB = a \text{ (см. § 175)};$$
$$AO \perp AC \text{ и } OD \perp BA.$$

Построение. При точке A строим $\angle BAC$, равный углу a. Проводим $AO \perp AC$. Из точки D, середины AB, восставляем перпендикуляр DO. Затем из точки O пересечения этих двух перпендикуляров описываем дугу APB радиусом, равным AO. Это и есть дуга искомого сегмента.



Черт. 238.

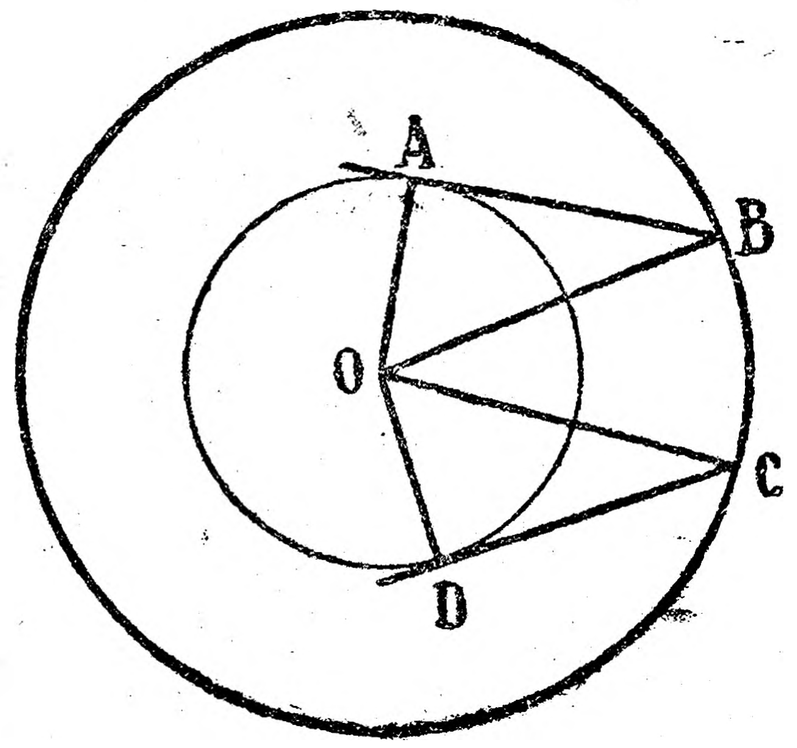
10. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Анализ. 1) Если отрезок AB (черт. 238) виден из точки C под углом α, то под каким углом виден этот отрезок из точки D, лежащей на той же окружности?

2) Где лежат все точки, из которых отрезок AB виден под одним и тем же углом?

3) Показать что тем же свойством обладают точки сегмента окружности O_1, имеющей радиус $O_1A = OA$.

4) Формулировать построение, вытекающее из анализа задачи.



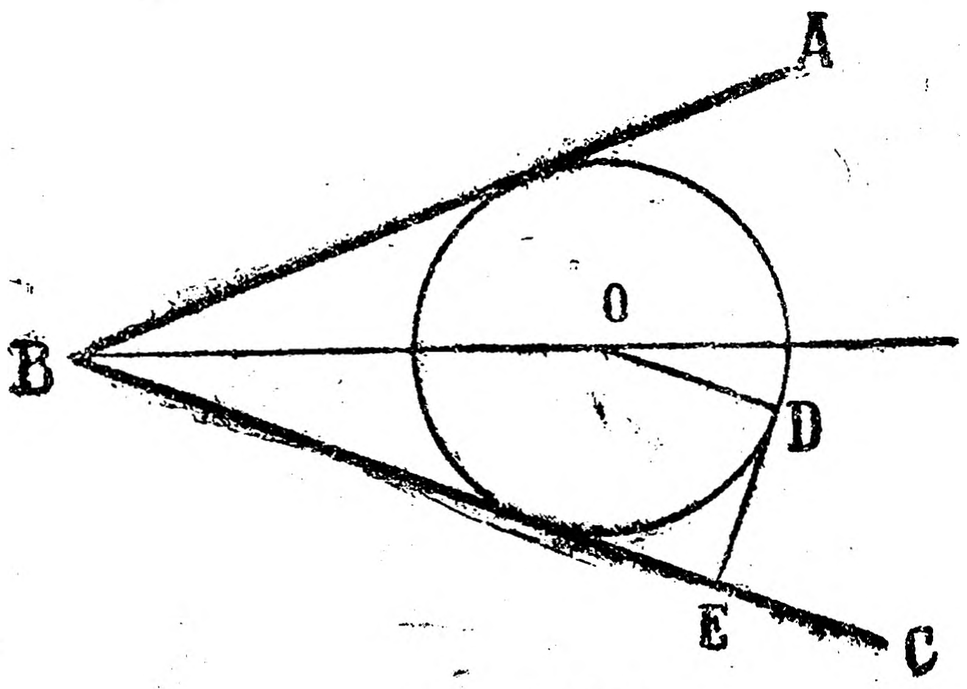
Черт. 239.

11. Построить геометрическое место точек, чтобы все касательные, проведенные из этих точек к данной окружности радиуса r, имели данную длину a.

Анализ. Пусть BA и CD (черт. 239)— касательные к данной окружности, имеющие данную длину a. Построим треугольники AOB и COD.

Исследовать построенные треугольники и вывести отсюда способ решения задачи.

12. Найти геометрическое место точек, из которых данная окружность видна под данным углом (т.-е. две касательные, проведенные из любой точки этого геометрического места к данной окружности, образуют данный угол).



Черт. 240.

13. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной точке.

14. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной окружности (два случая: касание внешнее и касание внутреннее).

15. Данным радиусом r провести окружность, касающуюся сторон данного угла.

(Указание. $DE = OD = r$, черт. 240).

16. Данным радиусом описать окружность, касательную к данной прямой в данной на ней точке.

ТАБЛИЦА

натуральных тригонометрических величин.

°	Sinus	Tangens	Cotangens	Cosinus	°
0	0,000	0,000	∞	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	Cosinus	Cotangens	Tangens	Sinus	

Приложение 2

ЛАТИНСКИЕ БУКВЫ

Латинские буквы			Русские буквы	Латинские буквы			Русские буквы
печатные		рукописные		печатные		рукописные	
1)	A a		а	14)	O o		о
2)	B b		б	15)	P p		п
3)	C c		ц	16)	Q q		читать ку
4)	D d		д	17)	R r		р
5)	E e		е	18)	S s		с
6)	F f		ф	19)	T t		т
7)	G g		ж	20)	U u		у
8)	H h		читать аш	21)	V v		в
9)	I i		и	22)	W w		в (дубль в)
10)	K k		к	23)	X x		читать икс
11)	L l		л	24)	Y y		читать игрек
12)	M m		м	25)	Z z		читать зет
13)	N n		н				

Чит. чов. 7

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.

Предисловие 3

Работа № 1. Измерение отрезков и углов.

Прямая линия. Отрезок прямой. Сумма и разность отрезков. Сложение равных отрезков. Угол. Сумма и разность углов. Смежные углы. Прямой угол. Сумма смежных углов. Вертикальные углы. Окружность. Градусное измерение дуг и углов. Измерение углов транспортиром. 5—16

Работа № 2. Дроби.

Понятие о дроби. Метрические линейные меры. Десятичные дроби. Таблица перевода метрических мер в русские и обратно. Сложение и вычитание десятичных дробей. Сложение и вычитание простых дробей . . . . . 17—30

Работа № 3. Десятичные дроби и проценты.

Умножение и деление десятичных дробей. Понятие о проценте. Обращение десятичной дроби в обыкновенную. Приближенное измерение и приближенное деление. Обращение обыкновенной дроби в десятичную. Среднее арифметическое. Средняя погрешность результата измерения. Вычисление процентов . . . . . 31—45

Работа № 4. Площади фигур.

Прямоугольник. Наугольник. Квадрат. Площадь квадрата. Площадь прямоугольника. Таблица квадратных мер. Параллелограм и ромб. Площадь параллелограма. Площадь ромба. Треугольник. Площадь треугольника. Равнобедренный треугольник. Симметрия . . . . 46—58

Работа № 5. Простые дроби.

Приведение дробей к общему знаменателю. Сложение и вычитание дробей. Умножение дробей. Деление дробей. Трапеция. Площадь трапеции. Площадь всякого многоугольника . . . . . 59—69

Работа № 6. Осевая симметрия.

Симметрия. Свойство оси симметрии. Свойство биссектрисы угла при вершине равнобедренного треугольника. Основные задачи на построение. Равенство треугольников. Свойства сторон и углов треугольника . . . . . 70—80

Работа № 7. Объемы.

Куб. Метрические меры объема. Прямоугольный параллелепипед и его объем. Прямой и наклонный параллелепипеды. Призмы. Пирамиды. Зависимость между объемом и весом тела . . . . . 81—92

Работа № 8. Законы арифметических действий.

Буквенные (алгебраические) выражения. Коэффициент. Степень. Основные свойства четырех арифметических действий. Равенство. Тождество. Уравнение. Задачи на составление уравнений с одним неизвестным первой степени . . . . . 93—107

Работа № 9. Окружность и круг.

Окружность и ее элементы. Отношение окружности к диаметру. Длина окружности. Длина дуги. Площадь сектора и площадь круга. Прямоугольные диаграммы. Круговые диаграммы. Правильные многоугольники. Площадь правильного многоугольника . . . . . 108—121

Работа № 10. Круглые тела.

Поверхности и объемы цилиндра, конуса и шара . . . . . 122—133

Работа № 11. Пропорциональность и подобие.

Отношение. Пропорция. Прямо-пропорциональные величины. Обратно-пропорциональные величины. Пропорциональное и обратно-пропорциональное деление. Перемещение членов пропорции. Подобные фигуры. Масштаб . . . . . 134—148

Работа № 12. Начальные сведения из тригонометрии.

Понятие о тангенсе и котангенсе острого угла. Пользование таблицами тригонометрических величин. Практические вычисления с применением tg. Понятие о синусе. Понятие о косинусе. Интерполирование. Решение прямоугольных треугольников . . . . . 149—161

Работа № 13. Относительные числа.

Числовая ось. Относительные числа (количества). Сложение, вычитание, умножение и деление относительных чисел (количеств) . . . 162—171

Работа № 14. Функция и ее график.

График функции. Прямоугольная система координат. Аналитические и эмпирические функции. Линейная функция и ее график. Задачи . . . . . 172—186

Работа № 15. Преобразование алгебраических выражений.

Одночлен и многочлен. Приведение подобных членов. Сложение одночленов и многочленов, вычитание одночленов и многочленов. Раскрытие скобок, перед которыми стоят знаки + или —. Умножение одночленов, возведение одночленов в степень. Умножение многочлена на одночлен; умножение многочлена на многочлен. Формулы сокращенного умножения . . . . . 187—196

Работа № 16. Теорема Пифагора.

Геометрическая интерпретация некоторых формул сокращенного умножения. Теорема Пифагора. Извлечение квадратных корней из чисел . . . . . 197—204

Работа № 17. Алгебраические дроби и более сложные уравнения.

Простые и составные числа. Разложение чисел на простые множители. Разложение алгебраических выражений на множители. Сумма кубов и разность кубов. Сокращение алгебраических дробей. Сложение и вычитание дробей. Умножение и деление дробей. Перемена знаков у членов дроби. Пропорции. Производная пропорция. Решение более сложных уравнений. Составление уравнений с одним неизвестным . . . . . 205—222

Работа № 18. Система уравнений.

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными первой степени. Способ сложения и вычитания. Способ подстановки. Графический способ. Задачи на составление системы двух уравнений с двумя неизвестными . . . . . 223—233

Работа № 19. Параллельные прямые.

Сумма внешних углов многоугольника. Сумма внутренних углов треугольника и многоугольника. Параллельные линии. Углы при параллельных линиях и секущей. Две прямые, перпендикулярные к третьей. Признаки параллельности прямых. Расстояние между параллельными линиями. Деление отрезка на равные части. Построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой. Углы с параллельными и перпендикулярными сторонами . . . . . 234—244

Работа № 20. Параллелограмы и трапеции.

Треугольник и четыреугольник. Параллелограм. Прямоугольник. Ромб. Свойства прямой линии, соединяющей средины двух сторон треугольника. Трапеция. . . . . 245—254

Работа № 21. Углы в круге и их измерение.

Центр симметрии. Симметрии в четыреугольниках и в круге. Свойства касательной и секущей. Окружность, описанная около треугольника и вписанная в треугольник. Центральные углы в круге. Вписанные углы. Измерение угла, составленного двумя секущими. Измерение угла, имеющего вершину внутри круга. Измерение угла, составленного хордой и касательной. Измерение описанного угла Относительное положение двух окружностей. Свойства общей хорды двух пересекающихся окружностей. Построение общей касательной к двум окружностям. Геометрические места . 255—273

ПРИЛОЖЕНИЕ.

1. Таблица натуральных тригонометрических величин 274
2. Таблица латинских букв 275

ПСИХОЛОГИЯ И ПЕДАГОГИКА.

Н. А. Альмединген-Тумим. Дошкольные учреждения и внешний мир (работа с семьей и населением) . . . . . — р. 60 к.
Бойд. Система Монтессори. Перев. под ред. проф. Н. Д. Виноградова 1 „ 30 „
Н. Д. Виноградов. Педагогика. Основные проблемы и принципы . . 1 „ — „
У. Джемс. Беседы с учителями о психологии . . . . . — „ 70 „
Киркпатрик. Основы педологии. 4-е изд., дополн. по нов. амер. изд. Перев. под ред. проф. Н. Д. Виноградова . . . . . 2 „ — „
С. И. Пфейфер. Детский клуб, его цель, значение и организация. 2-е изд. . . . . — „ 70
Т. Жонкер. Эксперим. педагогика в детском саду. Пер. под ред. и с пред. проф. А. Готалова-Готлиб . . . . . 1 „ — „
Н. В. Чехов. Типы русской школы в их историческом развитии . . — „ 70 „
Ст. Ф. Шацкий. Годы исканий. 2-е изд. . . . . 1 „ 25 „
Экскурсии в культуру. Сборник под ред. проф. Гревса . . . . . 1 „ 60 „
М. В. Муратов. Изучение местного края . . . . . 1 „ — „
А. А. Фортунатов. Теория трудовой школы . . . . . 2 „ 80 „
М. Рубинштейн и В. Игнатьев. Психология, педагогика и гигиена юности . . . . . 2 „ 40 „
М. М. Рубинштейн. Педагогическая психология . . . . . 3 „ — „

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ИСКАНИЯ

Под ред. проф. **М. М. Рубинштейн.**

1 сборник. Первые шаги обучения . . . . . 1 „ 50 „
2 „ Методы индивидуализирующего труда . . . . . 1 „ — „
3 „ Методы коллективного труда . . . . . — „ 70 „
4 „ Основные методы дошкольного воспитания . . . . . — „ 45 „
5 „ Методы работы в школах крестьян. молод. и в фабзавучах — „ 70 „
6 „ Исследовательский метод . . . . . 1 „ — „
Н. Горбунов. К методике комплексного преподавания. 2-е изд. . . . — „ 85 „

ПРАКТИКА ДОЛТОН-ПЛАНА.

М. Штейнгауз. Из практики лаборат. плана в Англии. Школа для малышей. Элемент. школа. Средняя школа (личные впечатлен.). 1 „ 60 „
И. А. Желобовский, С. С. Розанов, В. Д. Сперанский. Год занятий по литературе (группы—VI, VII, VIII и IX)—задания . . . . . — „ 90 „
В. Д. Сперанский. Историко-критические материалы к заданиям по литературе. **Горький**—„На дне“ . . . . . — „ 45 „
Его же. То же. **Демьян Бедный** . . . . . — „ 40 „
„ То же. **Маяковский — Футуризм** . . . . . — „ 60 „
„ То же. **Маркс. метод исслед. худож. произв.** . . . . . — „ 50 „
В. Н. Домбровский и Е. Г. Эрдзли. Опыт лаборат. занятий по страноведению. Часть I.—Задания по СССР . . . . . — „ 80 „
То же. Часть II. Задания по европ. и внеевроп. государствам . . . . — „ 70 „
Рабочая книга по математике. Часть I. Составили: **Беркут, Гостев, Гофнер и Попперек.** Книга написана по аккордной системе и применительно к Долтон-плану. Материал отвечает курсу перв. года рабфаков, курсу 5, 6 и 7 групп семилеток, 1 году нормальных военно-учебн. зав., 14-е изд. Книга допущена ГУС'ом, в пер. 1 „ 20 „
То же. Часть II. Для 2-го и 3-го г.г. рабфаков, военно-уч. заведений повыш. типа, техникумов и пр. 6-е изд. Допущена ГУС'ом . . 1 „ 50 „
То же. Часть III. Издание 2-е. Допущена ГУС'ом . . . . . 2 „ — „
Г. А. Попперек. Рычаг знания.—Математика . . . . . — „ 45 „
В. Я. Гебель. Прямолинейная тригонометрия. 5-е изд. . . . . — „ 80 „
Долтон-план и новейшие течения русской педагогической мысли. Под редакц. **Б. В Игнатьева** (статьи А. Г. Бедова, Н. А. Горбунова, Б. Н. Жаворонкова, М. Закожурниковой и Б. В. Игнатьева) . . . . . 1 „ 20 „

На путях к педагогич. самообразованию. Под ред. проф. **М. М. Рубинштейна** (Опыт применения долтонского принципа) . . . 2 р. 20 к.
То же. Вып. II. На путях математики . . . . . 1 „ 20 „
То же. Вып. III. На путях краеведения . . . . . 1 „ 40 „
Лабораторная (студ.) система и комплекс в обществовед. Сборник статей под редакцией **Б. Жаворонкова** . . . . . 2 „ — „
С. Н. Дзюбинский. Практика обществоведа № 1. — Планирование. — „ 25 „
Его же. То же № 2—Рынок. . . . . — „ 25 „
Его же. То же № 3 и 4. — „От ремесла к фабрике“ . . . . . — „ 40 „
Его же. То же № 5. — Деревня . . . . . — „ 45 „
Его же. Завод, как объект школьного изучения . . . . . — „ 90 „
И. Р. Палей. От станка к книге —Год лабор. работы по родному языку. — „ 75 „
Его же. Родной язык в занятиях со взрослыми. 2-ое изд. . . . . — „ 60 „
В. Павлов-Шишкин. Практич. руководство к расстановке знаков препинания. 13-е изд., в пер. . . . . — „ 47 „
Р. Хубларова и П. Шендяпин. Крестьянское хозяйство и быт деревни в школьн. изучении . . . . . — „ 60 „
О. Лейтнеккер и Д. Розенталь. История классовой борьбы. — Материалы для заданий по Долтон-плану . . . . . 1 „ — „
Борьба за обществоведение и школьная практика последних лет. Сборн. под ред. **С. Дзюбинского и Б. Жаворонкова** . . . . 1 „ 20 „
Практика работы по программе ГУС'а. Рабочая книга для учителей I ступени. Сборник статей и материалов под ред. М. Закожурниковой, Е. Литвиненко и А. Янковской-Байдиной. Часть I. Первый и второй годы обучения . . . . . 1 „ 25 „
То же. Часть II. Третий и четвертый годы обучения . . . . . 1 „ 60 „
П. О. Афанасьев, Н. Л. Бродский, Н. П. Сидоров. Родной язык во II ступени. V гр. Раб. хрестом. 9-е изд., в пер. . . . . 1 „ 20 „
Кабинет обществоведения. М. Шалгина. Под ред. Б. Жаворонкова . . . . . — „ 80 „

РАБОЧИЙ И КРЕСТЬЯНИН.

В социально-экономических очерках, художественных произведениях, мемуарах диаграммах и картах.
Составили **Н. Л. Бродский, С. Н. Дзюбинский, Л. С. Мирский, В. П. Цветаев.**
Текстильщик. Текстильная промышленность в прошлом и настоящем. Условия труда и быт рабочих. Борьба за освобождение труда. 2 р. 50 к.
„Металлист“ (История, быт, борьба) . . . . . 2 „ 50 „
„Горняк“ (История, быт, борьба) . . . . . 2 „ 40 „
Книги для чтения дома и в школе.

ИСТОРИЯ И ОБЩЕСТВОВЕДЕНИЕ.

Проф. И. М. Кулишер. История русск. народн. хозяйства. Т. I . . . 1 „ 70 „
Его же. То же, т. II . . . . . 3 „ 60 „
В. Львов-Рогачевский. Новейшая русская литература. 7-ое изд. . . . 3 „ — „
Проф. П. Н. Сакулин. Социологический метод в литературоведении. 2 „ 60 „
Его же. Синтетическое построение истории литературы . . . . . 1 „ 30 „

ФИЛОСОФИЯ, ИСКУССТВО И ЛИТЕРАТУРА В МАРКСИСТСКОМ ОСВЕЩЕНИИ.

Статьи и отрывки из произведений Маркса, Энгельса, Плеханова, Каутского, Ленина, Лафарга, Деборина, Аксельрод, Меринга, Луначарского, Троцкого, Бухарина, Гаузенштейна, Воронского. Кунова и др. Составили **Б. Г. Столпнер и П. С. Юшкевич.**
История философии в марксистском освещении. Ч. I . . . . . 2 р. 70 к.
То же. Ч. II . . . . . 3 „ — „
Искусство и литература в марксистском освещении. Ч. I. Общ. проблемы. 4 „ — „
То же. Ч. II . . . . . 3 „ 80 „
То же. Ч. III . . . . . 4 „ — „
История материализма. Т. I (до XVIII в.). Ч. I . . . . . 2 „ 70 „
То же. Ч. II . . . . . 3 „ 20 „