

Конструктивный алгоритм нахождения экстремальных полиномов в чебышевской норме

Ю.В. Трубников, Сунь Байюй

Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Проблема нахождения экстремальных полиномов в чебышевской метрике связана с большой трудоемкостью процесса, например, при использовании алгоритма, предложенного Е.Я. Ремезом.

Цель статьи – разработать конструктивный алгоритм нахождения экстремальных полиномов в чебышевской норме.

Материал и методы. Объекты исследования: экстремальные полиномы в чебышевской метрике. Предмет исследования: конструктивный алгоритм нахождения экстремальных полиномов в чебышевской метрике. Использованы: аналитические и численные методы исследования, пакет символьной математики Maple 14.

Результаты и их обсуждение. Алгоритм нахождения экстремального полинома сформулирован на базе теоремы П.Л. Чебышева об альтернансе и состоит из двух систем уравнений. Первая система уравнений содержит часть информации о точках альтернанса, связанную с чередованием максимумов и минимумов разности между функцией и экстремальным полиномом, а вторая использует тот факт, что во внутренних точках альтернанса производная разности между функцией и экстремальным полиномом равна нулю. Обе системы являются линейными по отношению к коэффициентам полинома. Выразив коэффициенты искомого полинома через внутренние точки альтернанса из второй системы и подставляя в первую, получаем нелинейную систему уравнений относительно точек альтернанса. Решая ее аналитически или численно, находим точки альтернанса и, следовательно, коэффициенты экстремального полинома.

Заключение. В статье предложен численно-аналитический алгоритм нахождения полиномов наилучшего приближения (экстремальных) в чебышевской (равномерной) метрике для произвольной дифференцируемой функции, определенной на отрезке $[a, b]$.

Ключевые слова: полином наилучшего приближения, равномерная метрика, чебышевский альтернанс.

Constructive Algorithm of Finding Extreme Polynomials in Chebyshev Norm

Yu.V. Trubnikov, Baiyu Sun

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masharov»

The issue of finding extreme polynomials in Chebyshev metrics is connected with a great work consuming process, e.g. while using the algorithm suggested by E.Ya. Remez.

The aim of the work is to develop a constructive algorithm for finding extreme polynomials in Chebyshev norm.

Material and methods. The object of the study is extreme polynomials in Chebyshev metrics. The subject of the study is the constructive algorithm for finding extreme polynomials in Chebyshev metrics. Analytical and numerical methods were used in the study; a package of symbol Maple 14 mathematics.

Findings and their discussion. The algorithm for finding extreme polynomials was formulated on the basis of P.L. Chebyshev theorem of alternance and consists of two equation systems. The first equation system contains part of information on alternance points, which is connected with alternation of maximums and minimums of the difference between the function and the extreme polynomial, while the second one uses the fact that within inner points of alternance the optional of the difference between the function and the extreme polynomial is nil. Both the systems are linear referring to coefficients of the polynomial. Expressing coefficients of the polynomial under search through inner points of alternance from the second system and, placing in the first one, we obtain a non linear system of equations concerning alternance points. By solving it analytically or numerically we find alternance points and, thus, coefficient of extreme polynomial.

Conclusion. A numerical and analytical algorithm of finding polynomials of best approximation (extreme) in Chebyshev (even) metrics for optional differentiated function which is identified on the portion $[a, b]$ is suggested in the article.

Key words: polynomial of best approximation, even metrics, Chebyshev alternance.

Проблеме нахождения экстремальных полиномов в чебышевской метрике посвящена обширная литература [1–9]. Например, фундаментальная монография Е.Я. Ремеза [7] содержит

библиографический список из 211 наименований. Впервые вопрос об эффективном построении экстремального полинома фиксированной степени n встречается, по-видимому, в моногра-

фии Валле-Пуссена [10]. В том случае, когда множество M конечно и состоит из N точек

$$x_1 < x_2 < \dots < x_N, \quad N \geq n+2,$$

Валле-Пуссен предложил рассмотреть всевозможные подсистемы множества M , содержащие в точности $n+2$ точки, и на каждой из этих подсистем найти экстремальный полином для данной функции $f(x)$. В настоящее время это можно сделать при помощи теоремы 5.4 из монографии В.К. Дзядыка [3]. Далее, так как характеристическое множество $E_0(n)$ [3, с. 52] состоит из $n+2$ точек, следовало заключение, что среди C_N^{n+2} подмножеств множества M характеристическим будет то подмножество M_0 , на котором величина отклонения будет максимальной. Сам же полином $P_n^*(M_0; x)$ будет искомым экстремальным полиномом для функции $f(x)$ на множестве M . Явные формулы для коэффициентов экстремального полинома степени n на множестве M , содержащем $n+2$ точки [3, с. 73], позволяют с любой точностью найти экстремальный полином для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Однако это очень трудоемкий процесс.

Е.Я. Ремез [3; 6–7] предложил способ перехода от одного подмножества из $n+2$ точек к следующему подмножеству и, таким образом, построил алгоритм получения экстремального полинома. Кроме того, он доказал, что так построенный алгоритм сходится со скоростью геометрической прогрессии [3, с. 76].

В [11] решается задача нахождения нечетного полинома, наименее уклоняющегося от единицы на отрезке $[1/2, 1]$. В [7] говорится, что эта задача имеет непосредственное значение для ряда технических вопросов, относящихся к синтезу электрических цепей. В [12] после трех шагов алгоритма Ремеза получено равенство (39) настоящей статьи. В качестве первого приближения точек альтернанса В.Л. Кушко и А.А. Ланнэ взяли множество $\{0,5; 0,65; 0,85; 1\}$. Об этом выборе первого приближения точек альтернанса Е.Я. Ремез [7, с. 134] пишет следующее: «Такой выбор (по существу, в достаточной мере произвольный) был сделан вычислителями с некоторым лишь качественным учетом характеристических черт классического...» альтернанса. Алгоритм, предложенный авторами настоящей статьи, допускает произвольную систему первого приближения точек альтернанса лишь в случае, когда си-

стема (2) решается каким-либо численным методом, например, методом Ньютона–Канторовича.

Цель статьи – разработать конструктивный алгоритм нахождения экстремальных полиномов в чебышевской норме.

Материал и методы. Объектами исследования являются: экстремальные полиномы в чебышевской метрике. В работе использовались аналитические, численные методы исследования и некоторые общие теоремы функционального анализа. Вычисления проводились при помощи пакета символьной математики *Maple 14*.

Результаты и их обсуждение. В тех случаях, когда известно, что точки a и b являются точками альтернанса, точные выражения для коэффициентов экстремального полинома могут быть найдены в результате совместного анализа и решения двух систем уравнений, отражающих различные свойства чебышевского альтернанса. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Наличие альтернанса означает существование, по крайней мере, $n+2$ точек $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$, в которых происходит чередование абсолютных максимумов и минимумов разности

$$f(x) - \sum_{k=0}^n c_k x^k \quad (1)$$

между функцией и экстремальным полиномом. Этот факт можно отразить в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} f(a) - \sum_{k=0}^n c_k a^k &= d, \\ f(x_2) - \sum_{k=0}^n c_k x_2^k &= -d, \\ &\dots \dots \dots (2) \\ f(x_{n+1}) - \sum_{k=0}^n c_k x_{n+1}^k &= (-1)^n d, \\ f(b) - \sum_{k=0}^n c_k b^k &= (-1)^{n+1} d, \end{aligned}$$

содержащей $2n+2$ неизвестных $c_0, c_1, \dots, c_n; d; x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$. Однако во внутренних точках альтернанса имеет место равенство нулю производных разности (1), и этот факт можно отразить в виде еще одной системы

$$\begin{aligned} f'(x_2) - \sum_{k=1}^n k c_k x_2^{k-1} &= 0, \\ &\dots \dots \dots (3) \\ f'(x_{n+1}) - \sum_{k=1}^n k c_k x_{n+1}^{k-1} &= 0, \end{aligned}$$

состоящей из n уравнений. Таким образом, общее число уравнений в системах (2–3) равно $2n + 2$. Система уравнений (3) является линейной относительно неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$. Их можно выразить через точки альтернанса $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ и подставить в систему (2). Решая полученную нелинейную систему относительно точек альтернанса, находим $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$, а так как коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$ к этому моменту выражены явным образом через точки альтернанса, то они становятся известными. После этого из любых двух уравнений системы (2) найдется величина уклонения $d = E_n(f)$ и коэффициент c_0 .

Следующие примеры иллюстрируют эффективность разработанного метода.

Пример 1. Аналитическое нахождение коэффициентов экстремального полинома.

Рассмотрим процесс построения на отрезке $[a, b]$ экстремального полинома второй степени для функции $f(x) = x^3$. Тогда система (2) примет вид

$$a^3 = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 - d, \quad (4)$$

$$x_2^3 = c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + d, \quad (5)$$

$$x_3^3 = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 - d, \quad (6)$$

$$b^3 = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + d, \quad (7)$$

$$3x_2^2 = c_1 + 2c_2 x_2, \quad (8)$$

$$3x_3^2 = c_1 + 2c_2 x_3. \quad (9)$$

Вычитая из уравнения (9) уравнение (8), получим уравнение

$$3(x_3 - x_2)(x_3 + x_2) = 2c_2(x_3 - x_2),$$

и т.к. $x_3 - x_2 \neq 0$, то $3(x_3 + x_2) = 2c_2$, откуда $c_2 = (3/2)(x_2 + x_3)$. Подставим это выражение вместо c_2 в уравнения (4)–(7) и вычтем из уравнения (6) уравнение (4), тогда

$$x_3^3 - a^3 = c_1(x_3 - a) + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)(x_3^2 - a^2),$$

т.е.

$$x_3^2 + ax_3 + a^2 = c_1 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)(a + x_3) \quad (10)$$

и, аналогично,

$$b^2 + bx_2 + x_2^2 = c_1 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)(b + x_2). \quad (11)$$

Подставляя в уравнения (10) и (11) значение c_1 , выраженное из уравнения (8), получаем

$$x_3^2 + ax_3 + a^2 = -3x_2x_3 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)(a + x_3),$$

$$b^2 + bx_2 + x_2^2 = -3x_2x_3 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)(b + x_2).$$

Можно убедиться подстановкой, что решением полученной подсистемы являются значения

$$x_2 = \frac{1}{4}(3a + b), \quad x_3 = \frac{1}{4}(a + 3b).$$

Таким образом,

$$c_2 = \frac{3}{2}(x_2 + x_3) = \frac{3}{2}(a + b),$$

$$c_1 = 3x_3^2 - 2c_2x_3 = -\frac{3}{16}(a + 3b)(3a + b).$$

Далее из уравнений (4) и (7) находим

$$c_0 = \frac{1}{32}(a + b)(a^2 + 14ab + b^2); \quad d = \frac{1}{32}(b - a)^3.$$

Следовательно,

$$P_2^*(x) = \frac{1}{32}(a + b)(a^2 + 14ab + b^2) - \frac{3}{16}(a + 3b)(3a + b)x + \frac{3}{2}(a + b)x^2,$$

а величина отклонения при этом

$$d = E_2(f) = \frac{1}{32}(b - a)^3.$$

Пример 2. Точное аналитическое нахождение коэффициентов экстремального полинома.

Проведем соответствующие построения для функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Система уравнений (2) в этом случае будет иметь вид

$$\frac{1}{a} = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + d, \quad (12)$$

$$\frac{1}{x_2} = c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 - d, \quad (13)$$

$$\frac{1}{x_3} = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + d, \quad (14)$$

$$\frac{1}{b} = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 - d, \quad (15)$$

а система уравнений (3) примет вид

$$-\frac{1}{x_2^2} = c_1 + 2c_2 x_2, \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x_3^2} = c_1 + 2c_2 x_3. \quad (17)$$

Вычитая из уравнения (17) уравнение (16), получаем

$$\frac{1}{x_3^2} - \frac{1}{x_2^2} + 2c_2(x_3 - x_2) = 0,$$

откуда

$$c_2 = \frac{x_2 + x_3}{2(x_2 x_3)^2}.$$

Далее

$$c_1 = -\frac{1}{x_2^2} - \frac{(x_2 + x_3)x_2}{(x_2 x_3)^2} = -\frac{x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2}{(x_2 x_3)^2}.$$

После подстановки найденных значений в уравнения (12)–(15) получаем два уравнения, содержащие неизвестные x_2 и x_3 :

$$-\frac{1}{ax_3} + \frac{x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2}{(x_2 x_3)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2 + x_3)(a + x_3)}{(x_2 x_3)^2} = 0,$$

$$-\frac{1}{bx_2} + \frac{x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2}{(x_2 x_3)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2 + x_3)(b + x_2)}{(x_2 x_3)^2} = 0.$$

Решением полученной подсистемы являются значения

$$x_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{ab}), \quad x_3 = \frac{1}{2}(b + \sqrt{ab}).$$

Подставим найденные значения в систему (12)–(15), тогда

$$d = \frac{a^2 + 6ab + b^2 - 4\sqrt{ab}(a + b)}{2ab(b - a)} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^4}{2ab(b - a)},$$

$$c_0 = \frac{a + 4\sqrt{ab} + b}{2ab},$$

$$c_1 = -\frac{4[a^2 + 4ab + b^2 + 3\sqrt{ab}(a + b)]}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^4},$$

$$c_2 = \frac{4(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{ab(b - a)^2}.$$

Пример 3. Численно-аналитическое решение систем (2)–(3).

Далее приведем пример численного решения систем (2)–(3) для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Запишем систему (2):

$$\frac{1}{a^2} - c_0 - c_1 a - c_2 a^2 - d = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{x_2^2} - c_0 - c_1 x_2 - c_2 x_2^2 + d = 0, \quad (19)$$

$$\frac{1}{x_3^2} - c_0 - c_1 x_3 - c_2 x_3^2 - d = 0, \quad (20)$$

$$\frac{1}{b^2} - c_0 - c_1 b - c_2 b^2 + d = 0. \quad (21)$$

Система (3) в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$-\frac{2}{x_2^3} = c_1 + 2c_2 x_2, \quad -\frac{2}{x_3^3} = c_1 + 2c_2 x_3.$$

Из уравнений, в которых участвуют производные, получаем выражения для коэффициентов c_1 и c_2 :

$$c_2 = \frac{x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2}{x_2^3 x_3^3},$$

$$c_1 = -\frac{2(x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^3)}{x_2^3 x_3^3}.$$

Подставим эти выражения в первые четыре уравнения системы (18)–(21) и вычтем из третьего уравнения первое:

$$\frac{1}{a^2 x_2^3 x_3^3} (a - x_3)^2 \times (a^2 x_2^2 + a^2 x_2 x_3 + a^2 x_3^2 - 2ax_2^3 - x_2^3 x_3) = 0$$

Далее, вычитая из четвертого уравнения второе, получаем

$$-\frac{1}{b^2 x_2^3 x_3^3} (b - x_2)^2 \times (b^2 x_2^2 + b^2 x_2 x_3 + b^2 x_3^2 - 2bx_3^3 - x_2^3 x_3) = 0.$$

Так как интересующие нас решения удовлетворяют неравенству

$$a < x_2 < x_3 < b,$$

то приходим к следующей системе уравнений относительно x_2 и x_3 :

$$a^2 x_2^2 + a^2 x_2 x_3 + a^2 x_3^2 - 2ax_2^3 - x_2^3 x_3 = 0, \quad (22)$$

$$b^2 x_2^2 + b^2 x_2 x_3 + b^2 x_3^2 - 2bx_3^3 - x_2^3 x_3 = 0. \quad (23)$$

Исключим x_3 из полученной системы уравнений при помощи результата по переменной x_3 . Обозначая результат по переменной x_3 через r , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{r}{x_2^6} &= 4a^4 b^2 (a - b)^2 + \\ &+ 2a^3 b (a - b) (2a^2 - 12ab + b^2) x_2 + \\ &+ a^2 (61a^2 b^2 + b^4 - 24a^3 b - 12ab^3 + a^4) x_2^2 - \\ &- 2a^2 (a - b) (3a^2 - 21ab - 2b^2) x_2^3 + \\ &+ 2a (6a^3 - ab^2 + 2b^3 - 16a^2 b) x_2^4 + \\ &+ 2(a^2 b - 4a^3 - b^3) x_2^5 - b^2 x_2^6 = 0. \end{aligned}$$

Далее необходимо перейти к численному решению последнего уравнения. Например, при $a=1$, $b=4$, получим уравнение

$$576 + 720x_2 + 369x_2^2 - 678x_2^3 + 108x_2^4 - 104x_2^5 - 16x_2^6 = 0$$

и, таким образом, $x_2 = 1,44778$. Подставляя найденное значение x_2 в одно из уравнений (22) или (23), получаем $x_3 = 2,93882$. Зная точки альтернанса, находим

$$c_0 = 1,933508, \quad c_1 = -1,222484, \\ c_2 = 0,194583, \quad d = 0,094394.$$

Пример 4. Также численно-аналитический метод.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда система (2) примет вид

$$\sqrt{a} = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 - d, \quad (24)$$

$$\sqrt{x_2} = c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + d, \quad (25)$$

$$\sqrt{x_3} = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 - d, \quad (26)$$

$$\sqrt{b} = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + d, \quad (27)$$

а система (3) выразится следующим образом:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_2}} = c_1 + 2c_2 x_2, \quad (28)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x_3}} = c_1 + 2c_2 x_3. \quad (29)$$

Вычтем из уравнения (29) уравнение (28):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_3}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} \right) = 2c_2 (x_3 - x_2),$$

откуда

$$c_2 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_2 x_3} (\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})}. \quad (30)$$

Подставляя найденное значение c_2 в одно из уравнений (28) или (29), получаем, что

$$c_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2 + \sqrt{x_2 x_3} + x_3}{\sqrt{x_2 x_3} (\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})}. \quad (31)$$

Вычтем из уравнения (26) уравнение (24), а из уравнения (27) уравнение (25):

$$\sqrt{x_3} - \sqrt{a} = c_1 (x_3 - a) + c_2 (x_3 - a)(x_3 + a),$$

$$\sqrt{b} - \sqrt{x_2} = c_1 (b - x_2) + c_2 (b - x_2)(b + x_2).$$

После некоторых преобразований получаем следующую систему уравнений:

$$1 = c_1 (\sqrt{x_3} + \sqrt{a}) + c_2 (\sqrt{x_3} + \sqrt{a})(\sqrt{x_3} - \sqrt{a}),$$

$$1 = c_1 (\sqrt{x_3} + \sqrt{a}) + c_2 (\sqrt{x_3} + \sqrt{a})(\sqrt{x_3} - \sqrt{a}),$$

которая, после подстановки вместо c_1 и c_2 выражений (30) и (31) и замены $\sqrt{x_2} = y_2$, $\sqrt{x_3} = y_3$, принимает следующий вид:

$$4y_2^2 y_3 + 4y_2 y_3^2 = 2(y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2)(y_3 + \sqrt{a}) - (y_3 + \sqrt{a})(y_3^2 + a), \quad (32)$$

$$4y_2^2 y_3 + 4y_2 y_3^2 = 2(y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2)(y_2 + \sqrt{b}) - (y_2 + \sqrt{b})(y_2^2 + b). \quad (33)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых система (32)–(33) приводится к виду

$$2y_2^2 + 2y_2 y_3 = y_3^2 + 2\sqrt{a} y_3 + a, \quad (34)$$

$$2y_3^2 + 2y_2 y_3 = y_2^2 + 2\sqrt{b} y_2 + b. \quad (35)$$

Обозначив $\sqrt{a} = u$, $\sqrt{b} = v$, исключим переменную y_3 при помощи результата. Результатом многочленов (34) и (35) по переменной y_3 является выражение

$$(2u^2 - v^2)^2 + 4(v^3 - 2u^2 v + 5uv^2 - 8u^3)y_2 + 2(20uv - 4u^2 - 7v^2)y_2^2 + 36(u - v)y_2^3 - 27y_2^4. \quad (36)$$

На этом аналитические преобразования заканчиваются, т.е. можно переходить к численному решению полученных уравнений. Приравняв результат (36) к нулю, например, при $u=1$, $v=2$, получаем уравнение

$$4 + 88z + 16z^2 - 36z^3 - 27z^4 = 0.$$

На отрезке $[1, 2]$ это уравнение имеет единственный корень $z = y_2 = 1,260829$. Подставляя это значение в одно из уравнений (34) или (35), получаем $y_3 = 1,759968$.

Далее из равенств (31) и (30) находим:

$$c_1 = 0,515141, \quad c_2 = -0,037296.$$

Подставляя значения $x_2 = y_2^2 = 1,589691$, $x_3 = y_3^2 = 3,097486$, c_1 и c_2 в уравнения (24)–(27), находим, что $c_0 = 0,529159$, $d = 0,007005$. Таким образом, экстремальный полином имеет вид

$$P^*(x) = 0,529159 + 0,515141x - 0,037296x^2.$$

Пример 5. В настоящем примере предлагается альтернативный, «быстрый» способ нахождения экстремального полинома по сравнению с алгоритмом Ремеза, использованного в [12].

Рассмотрим нахождение экстремального полинома вида $P(x) = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5$ для функции

$f(x) \equiv 1$ на отрезке $[a, b]$. В соответствии с общей схемой получаем систему уравнений

$$3a^3 + 6a^2x_3 - 5ax_2^2 + 4ax_3^2 - 10x_2^2x_3 + 2x_3^3 = 0, \quad (37)$$

$$3b^3 + 6b^2x_2 + 4bx_2^2 - 5bx_3^2 - 10x_2x_3^2 + 2x_2^3 = 0. \quad (38)$$

Исключим из уравнений (37)–(38) переменную x_3 при помощи результата:

$$\begin{aligned} & 9b^3(100a^4b^2 - 125a^6 + 40a^2b^4 + 12b^6) - \\ & - 54b^2(125a^6 - 100a^4b^2 - 40a^2b^4 - 12b^6)x_2 - \\ & - 18b(10a^2 - b^2)(75a^4 - 80a^2b^2 - 4b^4)x_2^2 + \\ & + \left(28800a^2b^4 + 35100a^4b^2 - \right. \\ & \left. - 7992b^6 - 9000a^6 \right) x_2^3 + \\ & + 9b(5800a^4 - 8525a^2b^2 - 1748b^4)x_2^4 + \\ & + (32400a^4 - 98910a^2b^2 + 11592b^4)x_2^5 - \\ & - 36b(2335a^2 - 1932b^2)x_2^6 + \\ & + (86472b^2 - 40680a^2)x_2^7 + \\ & + 52992bx_2^8 + 18432x_2^9. \end{aligned}$$

Далее переходим к численной реализации метода. Например, при $a = 0,5$; $b = 1$, приравняв результат к нулю, получаем уравнение:

$$\begin{aligned} & 236,671875 + 1420,031250x_2 + 521,437500x_2^2 + \\ & + 13138,87500x_2^3 - 31650,7500x_2^4 - \\ & - 11110,5000x_2^5 + 48537x_2^6 + 76302x_2^7 + \\ & + 52992x_2^8 + 18432x_2^9 = 0. \end{aligned}$$

Интересующим нас корнем является значение $x_2 = 0,64207806$. Подставляя найденное значение x_2 в одно из уравнений (37) или (38), получаем, что $x_3 = 0,889239$. В рассматриваемом случае первые два уравнения системы (2) примут следующий вид:

$$1 - 5c_5x_2^2x_3^2a + \frac{5}{3}c_5(x_2^2 + x_3^2)a^3 - c_5a^5 - d = 0,$$

$$1 - 5c_5x_2^3x_3^2 + \frac{5}{3}c_5(x_2^2 + x_3^2)x_2^3 - c_5x_2^5 + d = 0.$$

Подставляя в эти уравнения найденные значения $x_2 = 0,64207806$ и $x_3 = 0,889239$, находим

$$c_5 = 1,638568, \quad d = 0,024047.$$

Далее из системы (3) получаем, что

$$c_1 = 2,670835, \quad c_3 = -3,285357.$$

Таким образом,

$$P^*(x) = 2,670835x - 3,285357x^3 + 1,638568x^5. \quad (39)$$

Еще один случай, когда экстремальный полином любой степени находится при помощи точных формул, рассмотрен в [8, с. 87], где для функции $f(x) = \frac{1}{x-a}$ приводится формула

$$P_n(x) = \frac{1}{x-a} - \frac{\cos[n \arccos x + \varphi(x)]}{(a^2 - 1)\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)^n}, \quad (40)$$

в которой

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= n(a-b) \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \arccos \frac{ax-1}{x-a}, \\ b &= a \pm \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{n}. \end{aligned} \quad (41)$$

В форме равенства (40) эта формула конструктивной не является. Авторы настоящей статьи приводят равенство (40) к удобному виду. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема. Экстремальным полиномом произвольной степени n для функции

$$f(x) = \frac{1}{x-a}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad a > 1$$

является полином

$$P_n^*(x) = \frac{1}{x-a} - \frac{T_n(x) \frac{ax-1}{x-a} - \frac{1-x^2}{n} T_n'(x) \frac{\sqrt{a^2-1}}{x-a}}{(a^2-1)\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)^n}, \quad (42)$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\cos \left[n \arccos x - \arccos \left(\frac{ax-1}{x-a} \right) \right].$$

При $x = -1$ аргумент косинуса принимает значение $n\pi$, а при $x = 1$ значение $-\pi$. Косинус, определенный на отрезке $[-\pi, n\pi]$, имеет $n+2$ точки альтернанса и, следовательно, может рассматриваться как разность между некоторой функцией и ее экстремальным полиномом. Докажем, что

$$\begin{aligned} & \cos \left[n \arccos x - \arccos \left(\frac{ax-1}{x-a} \right) \right] = \\ & = T_n(x) \frac{ax-1}{x-a} - \frac{1-x^2}{n} T_n'(x) \frac{\sqrt{a^2-1}}{x-a}. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \cos \left[n \arccos x - \arccos \left(\frac{ax-1}{x-a} \right) \right] = \\ & = \cos(n \arccos x) \cos \left(\arccos \frac{ax-1}{x-a} \right) + \\ & + \sin(n \arccos x) \sin \left(\arccos \frac{ax-1}{x-a} \right) = \\ & = T_n(x) \frac{ax-1}{x-a} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} T_n'(x) \sqrt{1 - \left(\frac{ax-1}{x-a} \right)^2}. \end{aligned}$$

Здесь был учтен тот факт, что

$$\sin(n \arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} T'_n(x).$$

Далее, применяя равенство (40), получаем формулу (42). Теорема доказана.

Для случая, когда $a < -1$, доказательство проводится аналогично. Приведем примеры экстремальных полиномов, найденных по формуле (42):

$$\begin{aligned} P_1^*(x) &= -\frac{4h^2}{(1-h^2)^2} \cdot x - \frac{2h}{1-h^2}; \\ P_2^*(x) &= -\frac{8h^3}{(1-h^2)^2} \cdot x^2 - \frac{4h^2}{1-h^2} \cdot x + \frac{2h(3h^2-1)}{(1-h^2)^2}; \\ P_3^*(x) &= -\frac{16h^4}{(1-h^2)^2} \cdot x^3 - \frac{8h^3}{1-h^2} \cdot x^2 + \\ &\quad + \frac{4h^2(4h^2-1)}{(1-h^2)^2} \cdot x + \frac{2h(2h^2-1)}{1-h^2}; \\ P_4^*(x) &= -\frac{2h(4h^4-3h^2+1)}{(1-h^2)^2} + \frac{4h^2(3h^2-1)}{1-h^2} \cdot x + \\ &\quad + \frac{8h^3(5h^2-1)}{(1-h^2)^2} \cdot x^2 - \frac{16h^4}{1-h^2} \cdot x^3 - \frac{32h^5}{(1-h^2)^2} x^4, \end{aligned}$$

где $h = a - \sqrt{a^2 - 1}$.

Заключение. Таким образом, в статье предложен численно-аналитический алгоритм нахождения полиномов наилучшего приближения (экстремальных) в чебышевской (равномерной) метрике для произвольной дифференцируемой функции, определенной на отрезке $[a, b]$. Алгоритм сформулирован на базе теоремы П.Л. Чебышева об альтернансе и состоит из двух систем уравнений. Первая система уравнений содержит часть информации о точках альтернанса, связанную с чередованием максимумов и минимумов разности между функцией и экстремальным полиномом, а вторая использует тот факт, что во внутренних точках альтернанса производная разности между функцией и экстремальным полиномом равна нулю. Обе системы являются линейными по отношению к коэффициентам полинома. Выражая коэффициенты искомого полинома через внутренние точки альтернанса из второй системы и подставляя в первую, получаем нелинейную систему уравнений относительно точек альтернанса. Решая ее аналитически или численно, нахо-

дим точки альтернанса и, следовательно, коэффициенты экстремального полинома.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер, Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
2. Богатырев, А.Б. Экстремальные многочлены и римановы поверхности / А.Б. Богатырев. – М.: МЦНМО, 2005. – 172 с.
3. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
4. Коллатц, Л. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения / Л. Коллатц, В. Крабс. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
5. Лебедев, В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика / В.И. Лебедев. – М.: Физматлит, 2000. – 296 с.
6. Лоран, П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
7. Ремез, Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Е.Я. Ремез. – Киев: Наукова думка, 1969. – 624 с.
8. Тиман, А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
9. Трубников, Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М.: Астропресс-XXI, 2002. – 256 с.
10. Трубников, Ю.В. Экстремальные полиномы на системе отрезков / Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2011. – № 1(61). – С. 18–23.
11. Кушко, В.Л. Об одной задаче теории наилучших приближений / В.Л. Кушко, А.А. Ланнэ // Тр. академии связи. – 1963. – № 100. – С. 187–202.
12. Valle-Poussin, Ch.-J. Lecons sur l approximation des fonctions d une variable reelle / Ch.-J. Valle-Poussin. – Paris: Gauthier-Villars, 1919.

REFERENCES

1. Akhnezer N.I. *Leksii po teorii approksimatsii* [Lectures on the Theory of Approximation], Moscow, Nauka, 1965, 407 p.
2. Bogatirev A.B. *Ekstremalniye mnogochleni i rimanovi poverkhnosti* [Extreme Multimers and Rimanov Surfaces], Moscow, MTsNMO, 2005, 172 p.
3. Dziadyk V.K. *Vvedeniye v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsii polinomami* [Introduction into the Theory of Even Approximation of Functions by Polynomials], Moscow, Nauka, 1977, 512 p.
4. Kollats L., Krabs V. *Teoriya priblizhenii. Chebishevskiy priblizheniya i ikh prilozheniya* [Theory of Approximations. Chebyshev Approximations and their Appendices], Moscow, Nauka, 1978, 272 p.
5. Lebedev V.I. *Funktsionalniy analiz i vychislitel'naya matematika* [Functional Analysis and Calculation Mathematics], Moscow, Fizmatlit, 2000, 296 p.
6. Loran P.-Zh. *Approksimatsiya i optimizatsiya* [Approximation and Optimization], Moscow, Mir, 1975, 496 p.
7. Remez E.Ya. *Osnovi chislennikh metodov chebishevskogo priblizheniya* [Bases of Numerical Methods of Chebyshev Approximation], Kyiv, Naukovaya dumka, 1969, 624 p.
8. Tyman A.F. *Teoriya priblizheniya funktsii deistvitelnogo peremennogo* [Theory of Approximation of Real Variable Functions], Moscow, Fizmatgiz, 1960, 624 p.
9. Trubnikov Yu.V. *Ekstremalniye konstruksii v negladkom analize i operatorniye uravneniya s akkretivnymi nelineinostiyami* [Extreme Constructions in Non Smooth Analysis and Operation Equations with Accretive Non Linearity], Moscow, Astropress-XXI, 2002, 256 p.
10. Trubnikov Yu.V., Pyshnenko O.V. *Vesnik VDU*, [Newsletter of VSU], 2011, 1(61), pp. 18–23.
11. Kushko V.L., Lanne A.A. *Tr. akademii svyazi* [Works of the Academy of Communications], 1963, 100, L., pp. 187–202.
12. Valle-Poussin, Ch.-J. *Lecons sur l approximation des fonctions d une variable reelle* / Ch.-J. Valle-Poussin // Paris: Gauthier-Villars, 1919.

Поступила в редакцию 02.02.2015
Адрес для корреспонденции: Yuriy_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.